



HAL
open science

Développement et analyse de schémas Volumes Finis en mécanique des fluides complexes

Stella Krell

► **To cite this version:**

Stella Krell. Développement et analyse de schémas Volumes Finis en mécanique des fluides complexes. Analyse numérique [math.NA]. Université Côte D'Azur, 2021. tel-03265697

HAL Id: tel-03265697

<https://theses.hal.science/tel-03265697v1>

Submitted on 21 Jun 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES
UNIVERSITE COTE D'AZUR**

Spécialité :
Mathématiques

Présentée par
Stella Krell

Sujet de l'HABILITATION

**Développement et analyse de schémas Volumes Finis
en mécanique des fluides complexes.**

Après avis des rapporteurs :

Mr Erik	BURMAN	Senior researcher	University College London
Mr Jérôme	DRONIOU	Professeur	Monash University
Mr Martin	VOHRALIK	Directeur de recherche	Inria Paris

Soutenue publiquement le 17 juin devant le jury composé de

Mr Franck	BOYER	Professeur	Université Toulouse 3 - Paul Sabatier
Mr Erik	BURMAN	Senior researcher	University College London
Mr Daniele	DI PIETRO	Professeur	Université de Montpellier
Mr Jérôme	DRONIOU	Professeur	Monash University
Mr Thierry	GOUDON	Directeur de recherche	INRIA Sophia Antipolis
Mme Florence	HUBERT	Professeur	Aix-Marseille Université
Mme Pauline	LAFITTE	Professeur	CentraleSupélec
Mr Martin	VOHRALIK	Directeur de recherche	Inria Paris

Remerciements

Pour commencer, je tiens à remercier tout particulièrement Franck Boyer et Florence Hubert pour avoir accompagné mes premiers pas en recherche. Depuis le début de ma thèse et jusqu'à aujourd'hui vous m'avez toujours fait bénéficier de vos conseils avisés. Sans vous, ce travail n'aurait certainement jamais vu le jour. Merci également pour tous les moments partagés en dehors du travail. J'espère que cela va continuer encore très longtemps.

Je remercie très sincèrement Erik Burman, Jérôme Droniou et Martin Vohralik qui ont accepté la lourde tâche d'être rapporteurs de ce travail. Leurs avis sur mes résultats sont très précieux à mes yeux.

J'exprime toute ma reconnaissance à Daniele Di Pietro, Thierry Goudon et Pauline Lafitte qui me font l'honneur de faire partie de ce jury. Je remercie Daniele pour l'intérêt qu'il porte à mon travail, son temps et son soutien. Un grand merci à Thierry pour tous les nombreux échanges mathématiques et amicaux, pour le coencadrement de ma première thèse et pour ses remarques toujours pertinentes. J'ai beaucoup appris à ses côtés. Je remercie Pauline pour les conservations amicales et mathématiques que nous avons eues.

Un grand merci à toutes les personnes avec qui j'ai pu collaborer et discuter. Je remercie en particulier Boris Andreianov, Clément Cancès, Claire Chainais-Hillairet, Martin Gander et Laurence Halpern. J'espère que nos échanges seront aussi nombreux pendant encore de longues années. Merci Claire pour ta confiance, ton soutien et ta gentillesse, et surtout pour ton accueil durant tous mes séjours lillois. Merci Martin, Laurence et Florence pour tous les séjours au CIRM, qui sont toujours des moments très agréables et productifs.

Cette liste ne serait pas complète si je n'adressais pas mes plus vifs remerciements aux membres du LJAD et de l'équipe COFFEE, avec une mention spéciale à l'étage de Fizeau qui rendent mon quotidien plus agréable, aux membres qui ont quitté le laboratoire : Claire Chavaudret, Mathieu Lerasle, Marjolaine Puel, Magali Ribot, ainsi qu'à Giulia Lissoni, Victor Max, Laurence Beaudé, Maxime Pelletier pour les séances de mots croisés. Je remercie aussi toute l'équipe administrative et technique du laboratoire et d'INRIA pour leur aide. Merci à Jean-Marc et à Roland de m'avoir aidée à plusieurs reprises pour divers problèmes informatiques. Merci à Manu pour son aide précieuse.

Merci à tous ceux avec qui, à Nice ou ailleurs, j'ai eu l'occasion de discuter Mathématiques.

Mes derniers mots vont à mes amis et à ma famille, qui ont su me supporter et me soutenir tout au long de ces années. Un grand merci à Seb, à Olivia et Alicia qui sont une source de bonheur et de joie. Merci à vous.

Table des matières

Introduction	7
Travaux de l'auteur	17
Chapitre I Algorithme de Schwarz pour des problèmes elliptiques	21
I.1 Algorithme de Schwarz avec des conditions de Fourier	22
I.2 Algorithme de Schwarz modifié avec des conditions de Fourier	24
I.3 Prise en compte des conditions de transmission de type Ventcell	25
I.4 Etude des paramètres optimisés dans le cas continu	26
I.5 Illustrations numériques	29
I.6 Etude des paramètres optimisés dans le cas discret	32
I.7 Considération d'un point de croisement	33
I.8 Application : reconstruction d'images	35
Chapitre II Discrétisation des problèmes de diffusion-convection-réaction	39
II.1 Etude pour le problème de Peaceman	39
II.1.1 Présentation du problème de Peaceman	39
II.1.2 Le schéma DDFV pour le modèle de Peaceman	41
II.1.3 Convergence du schéma	41
II.1.4 Estimations des solutions discrètes	42
II.1.5 Tests numériques	43
II.2 Etude pour le problème de Fokker-Planck	44
II.2.1 Présentation du problème continu	45
II.2.2 Le schéma DDFV non-linéaire	46
II.2.3 Propriétés du schéma	47
II.2.4 Les simulations numériques	49
II.2.5 Comportement en temps long	50
II.2.6 Extension aux conditions au bord mixtes	52
Chapitre III Problème de Stokes et Navier-Stokes	55
III.1 La condition Inf-Sup	55
III.1.1 Le problème de Stokes	55
III.1.2 La constante Inf-Sup discrète	56
III.1.3 Familles de maillages Inf-Sup inconditionnellement stable	57
III.1.4 Stabilité Inf-Sup de codimension 1	58
III.1.5 Autres résultats numériques	59

III.2	Condition aux bords ouverte.....	62
III.2.1	Le schéma DDFV.....	62
III.2.2	Définition des flux convectifs $\mathbf{F}_{\mathfrak{D}}(\mathbf{u}_r^n)$	64
III.2.3	Propriétés du schéma.....	65
III.2.4	Simulations d'écoulement dans un canal.....	66
III.3	Le problème de Navier-Stokes à densité variable.....	69
III.3.1	Discrétisation DDFV.....	70
III.3.2	Définition des flux convectifs $\mathbf{F}_{\mathfrak{D}}$	71
III.3.3	Instabilités de Rayleigh–Taylor.....	72
Chapitre IV	Algorithme de Schwarz pour le problème de Navier-Stokes	75
IV.1	Un B -schéma DDFV pour le problème de Navier-Stokes.....	76
IV.2	L'algorithme de Schwarz DDFV.....	78
IV.3	Le schéma limite ($\tilde{\mathcal{P}}$).....	80
IV.4	Un algorithme de Schwarz DDFV modifié.....	82
IV.5	Résultats numériques.....	83
Chapitre V	Discrétisation HHO du problème de Navier-Stokes stationnaire	89
V.1	Description de la méthode HHO.....	90
V.1.1	Terme visqueux.....	90
V.1.2	Terme convectif.....	91
V.1.3	Le couplage pression-vitesse.....	92
V.2	Problème de Navier-Stokes stationnaire.....	92
V.2.1	Le schéma HHO.....	92
V.2.2	Convergence vers les solutions avec une régularité minimale.....	93
V.2.3	Ordre de convergence pour des données petites.....	93
V.2.4	Tests numériques.....	94
	Perspectives	99
	Annexe	103
	Bibliographie générale	122

Introduction

Mes travaux portent essentiellement sur le développement, l'analyse et l'implémentation de schémas numériques de type volumes finis adaptés à la simulation de différents types d'équations aux dérivées partielles (EDP) elliptique ou parabolique. De mon point de vue, il est primordial d'allier l'analyse et l'implémentation des méthodes numériques, les deux aspects se nourrissant l'un de l'autre pour aboutir à une meilleure compréhension des méthodes.

Les méthodes volumes finis avancées possèdent les caractéristiques principales des méthodes numériques modernes : elles permettent l'utilisation de maillages non-structurés et fonctionnent ainsi pour des géométries complexes, elles donnent des schémas robustes et précis. Elles sont particulièrement attractives lorsque les flux jouent un rôle important dans la modélisation des problèmes, comme en mécanique des fluides puisqu'une de leur particularité est la conservation locale des flux numériques, c'est-à-dire que le flux numérique sortant d'une maille est exactement égal à celui rentrant dans la maille voisine.

Le point commun de tous les problèmes auxquels je m'intéresse, du point de vue de la résolution par volumes finis, réside dans la nécessité d'approcher toutes les composantes du gradient de la solution. Dans les modèles elliptiques ou paraboliques, ceci est dû à la présence de termes de diffusion anisotrope et dans les équations de Navier-Stokes à la présence de la partie symétrique du tenseur des contraintes lorsque la viscosité est variable. C'est la raison pour laquelle j'ai choisi d'étudier et de développer une classe de méthode de reconstruction de gradient dite Discrete Duality Finite Volume (DDFV), afin d'obtenir des méthodes de résolution efficaces et facilement parallélisables (méthode de décomposition de domaine) associées à ces schémas sur des maillages généraux.

Les méthodes DDFV ont été développées avec succès depuis plusieurs années en 2D et en 3D. En particulier, les travaux suivants peuvent être cités : pour les problèmes de diffusion scalaire anisotrope [DO05, Her00, CPT08, ABK08, Her07] et [5] ; pour les équations elliptiques non linéaires [ABH07, BH08, CH11] ; pour le problème de Stokes et de Navier-Stokes [Del07],[2],[3],[4],[8],[10],[13],[21],[24],[28].

J'ai fait le choix de ne présenter dans ce manuscrit que mes travaux qui concernent les problèmes 2D. Je ne présenterai pas les travaux qui concernent les problèmes 3D (*cf* [4] sur le problème de Stokes ou [5] sur le problème de diffusion anisotrope). L'approche de la méthode DDFV double essentiellement le nombre d'inconnues en 2D par rapport à la méthode Volume Fini d'approximation de flux à 2 points mais a des avantages multiples, les plus significatifs étant : le peu de contraintes imposées sur les maillages et la conservation de la structure du problème continu, notamment la symétrie, qui permet une adaptation efficace aux problèmes non linéaires. En effet, un maillage DDFV peut être constitué de polygones quelconques, un exemple est donné dans la Figure 1. Les mailles non conformes sont traités naturellement et indifféremment des autres mailles en considérant le noeud non conforme comme un sommet supplémentaire. La conservation de la structure du problème continu est un second atout. Beaucoup de démonstrations de propriétés discrètes peuvent alors s'inspirer des démonstrations réalisées au niveau continu. Un exemple important dans ce mémoire est la démonstration

de l'inégalité de Korn. Au niveau continu, cette inégalité, qui permet de contrôler la norme L^2 du gradient d'une fonction par la norme L^2 de la partie symétrique de ce gradient, se démontre de manières différentes lorsque la fonction s'annule ou non sur le bord du domaine. En effet, si la fonction s'annule sur tout le bord, les propriétés différentielles des opérateurs mises en jeu suffissent, alors que dans l'autre cas, la démonstration repose sur un argument par l'absurde. Au niveau discret, nous avons procédé en utilisant la même stratégie. La méthode DDFV est très bien adaptée à cet exercice grâce à la définition des opérateurs discrets et de produits scalaires qui conservent les bonnes propriétés utilisées au niveau continu. Plusieurs comparaisons des méthodes numériques ont été réalisés lors de benchmark de la conférence internationale Finite Volume for Complex Applications (FVCA). Le benchmark [HH08], pour la résolution de problèmes de diffusion, fait ressortir que la méthode DDFV est une méthode d'ordre 1 compétitive en ce qui concerne la précision des gradients. Le benchmark [BO17], pour la résolution du problème de Navier-Stokes, a montré également le bon comportement des méthodes DDFV.

La description précise des schémas DDFV nécessite l'introduction de notations permettant de définir les maillages, les espaces et les opérateurs discrets. Afin de ne pas alourdir le manuscrit, toutes les notations et définitions sont données dans l'Annexe. Nous revenons ici sur le principe général des méthodes DDFV.

Elles ont été initialement introduites dans [Her00] et étudiées dans [DO05] pour approcher l'équation de Laplace sur des maillages 2D très généraux, ne vérifiant en particulier pas la condition d'orthogonalité classique des maillages volumes finis. La solution de l'équation est approchée simultanément aux centres et aux sommets des mailles du maillage initial, dit maillage primal et noté $\mathcal{M} \cup \partial\mathcal{M}$. Ces sommets sont vus comme des centres de volumes de contrôle d'un maillage appelé maillage dual et noté $\mathcal{M}^* \cup \partial\mathcal{M}^*$. Ce double jeu d'inconnues est alors symbolisé par la notation $\mathcal{T} = (\mathcal{M} \cup \partial\mathcal{M}, \mathcal{M}^* \cup \partial\mathcal{M}^*)$ (voir Figure 1).

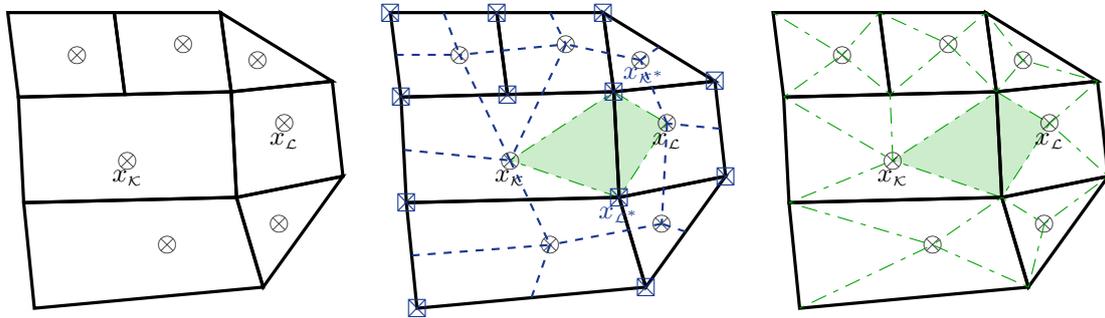


FIGURE 1 – A gauche : Le maillage primal $\mathcal{M} \cup \partial\mathcal{M}$. Au milieu : Le maillage dual $\mathcal{M}^* \cup \partial\mathcal{M}^*$ en bleu. A droite : Le maillage diamant \mathcal{D} en vert.

Il permet de définir naturellement un gradient discret $\nabla^{\mathcal{D}} : \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \rightarrow (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{D}}$ sur une partition \mathcal{D} de Ω , appelée le maillage diamant, et une divergence discrète $\text{div}^{\mathcal{T}} : (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ en dualité discrète avec ce gradient. Ceci se traduit dans le cas de conditions aux limites de Dirichlet homogène ($v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$) par la validité d'une formule de Green discrète :

$$-\llbracket \text{div}^{\mathcal{T}} \xi_{\mathcal{D}}, v_{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}} = (\xi_{\mathcal{D}}, \nabla^{\mathcal{D}} v_{\mathcal{T}})_{\mathcal{D}}, \quad \forall v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0, \quad \forall \xi_{\mathcal{D}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{D}}.$$

Lors du développement de méthodes DDFV, mes travaux accordent une importance particulière aux aspects suivants :

- la discrétisation doit vérifier un certain nombre de propriétés de base (coercivité, inégalité de Poincaré discrète, consistante, propriétés de compacité, existence d'opérateurs de traces)

afin de permettre une analyse numérique convaincante y compris dans le cas de problèmes non linéaires.

- la discrétisation doit fonctionner sur des maillages polyédriques et polygonaux (même non conformes) généraux sans limite d'utilisation des grilles tétraédriques ou hexaédriques. Ces dernières années, on a en effet vu grandir l'intérêt de l'utilisation de tels maillages en pratique (raffinement local, maillages indépendants de domaines adjacents mais présentant des propriétés physiques différentes...).
- la discrétisation doit préserver au niveau discret des propriétés vérifiées par le modèle continu, les propriétés de conservation mais aussi des propriétés comme la positivité de la densité et de l'énergie, ou par exemple le fait qu'un fluide initialement homogène (*i.e.* un fluide dont la densité ne dépend pas de la variable d'espace) le reste tout au long de l'évolution en temps. Ce type de propriétés est très important du point de vue applicatif puisqu'elles contribuent à donner un sens physique à l'approximation numérique et on observe qu'elles contribuent souvent à la robustesse du schéma.
- la discrétisation doit avoir le bon comportement vis-à-vis des paramètres du système. Ceux-ci déterminent le régime de l'écoulement (turbulent ou laminaire, compressible ou incompressible,...) qui peut être caractérisé par la valeur de certains nombres adimensionnels (comme le nombre de Reynolds ou le nombre de Mach pour ne citer que les deux plus célèbres). De manière générale, l'efficacité et la stabilité du schéma peuvent fortement dépendre de la gamme de paramètres dans laquelle on se place. Un schéma numérique peut être précis pour certains régimes mais il peut aussi donner des résultats peu précis voire être instable pour d'autres régimes.
- la discrétisation doit permettre la résolution du problème discret par des méthodes efficaces et facilement parallélisables.

Ce manuscrit se décompose en plusieurs chapitres qui résument chacun les résultats des travaux présentés dans un ou plusieurs articles cités en référence. Ces chapitres ont été écrits de manière unifiée, en particulier, les notations scalaires et vectorielles ont été uniformisées afin de faciliter la lecture de ce manuscrit. Les deux premiers chapitres illustrent mes travaux sur les équations de diffusion anisotrope et des problèmes paraboliques, les suivants sur les équations de Stokes et de Navier-Stokes. Plus précisément dans le premier chapitre, je présente une collaboration avec Martin Gander, Laurence Halpern et Florence Hubert sur les méthodes de décomposition de domaine de type algorithme de Schwarz d'ordre élevé. Ensuite, dans le deuxième chapitre, je présente une collaboration avec Claire Chainais-Hillairet et Alexandre Mouton sur le modèle de Peaceman et une collaboration avec Claire Chainais-Hillairet, Clément Cancès et Maxime Herda sur le problème de Fokker-Planck. Dans le troisième chapitre, je détaille mes travaux sur les équations de Stokes et Navier-Stokes. Dans un premier temps, l'étude de la condition Inf-Sup a fait l'objet d'une collaboration avec Franck Boyer et Flore Nabet. Puis, lors de l'encadrement de la thèse de Giulia Lissoni, co-encadré avec Thierry Goudon, nous avons généralisé la discrétisation des équations de Navier-Stokes aux conditions aux bords ouvertes. La généralisation à des fluides à densité variable a donné lieu à une collaboration avec Thierry Goudon. Le quatrième chapitre fait un lien entre les travaux sur la décomposition de domaine et ceux sur les équations de Navier-Stokes, ces travaux ont également été réalisés pendant de la thèse de Giulia Lissoni. Et enfin, pour finir dans le dernier chapitre, je présente une collaboration avec Daniele Di Pietro sur une méthode d'ordre élevée appelée Hybrid High-Order (HHO).

Dans tout ce manuscrit, tous les résultats sont illustrés par des simulations numériques

réalisées à l'aide d'un code fortran, les aspects implémentation et analyse des méthodes occupant une importance égale dans mes travaux.

Chapitre I : Algorithme de Schwarz pour des problèmes elliptiques

Afin d'étudier des EDP posées sur des domaines complexes, en 1870, H.A. Schwarz a proposé des méthodes consistant à découper le domaine complexe sur lequel est posé l'EDP en sous-domaines simples et à résoudre itérativement le problème considéré sur les différents sous-domaines. A chaque itération, pour définir les conditions aux bords sur les interfaces entre deux sous-domaines, sont utilisées les solutions ou leurs dérivées normales venant des sous-domaines voisins. Cette méthode de Schwarz converge uniquement quand les sous-domaines se recouvrent. De plus, cette convergence est d'autant plus lente que le recouvrement est de petite taille. P.L. Lions montre dans [Lio90] qu'avec des conditions de transmission de type Fourier l'algorithme de Schwarz pour l'opérateur de Laplace converge même en l'absence de recouvrement. Nous avons proposé dans [30] une version discrète de l'algorithme de Schwarz avec recouvrement utilisant les méthodes DDFV. Nous nous sommes également intéressés aux versions sans recouvrement moins coûteuses.

Conditions de transmission de type Fourier

Dans [1], nous avons développé la version DDFV de l'algorithme sans recouvrement pour des problèmes de diffusion anisotrope avec des conditions de transmission de Fourier. L'intérêt d'utiliser les méthodes DDFV vient du fait que chaque sous domaine peut être maillé indépendamment. Nous avons proposé une méthode qui permet de montrer la convergence vers la solution du schéma DDFV sur le domaine entier. Les conditions de transmission de type Fourier font intervenir, dans leur définition, un paramètre dont la valeur a une influence importante sur la vitesse de convergence de l'algorithme. Lorsque nous examinons le comportement du paramètre optimal (*ie* celui permettant d'obtenir la vitesse de convergence optimale) en fonction de la taille du maillage, nous observons numériquement un comportement en $\frac{1}{h}$ qui n'est pas celui classiquement observé dans [Gan06]. Cette propriété avait étonné Martin Gander car c'était la première fois qu'il y était confronté. Notre collaboration a débuté ainsi en montrant qu'il n'y avait pas de problème d'implémentation mais que le schéma proposé n'avait effectivement pas le bon comportement. Nous l'avons démontré dans [23]. Ce mauvais comportement était dû au couplage des inconnues primales et duales sur l'interface. Plus généralement, si il y a plusieurs jeux d'inconnues il faut éviter de les faire communiquer sur l'interface. Ainsi dans [15] et [25], nous avons proposé une nouvelle méthode de prise en compte des conditions aux bords de type Fourier permettant d'accélérer la convergence de l'algorithme de Schwarz et d'obtenir le comportement classique du paramètre optimal en $\frac{1}{\sqrt{h}}$.

Conditions de transmission de type Ventcell

Les méthodes optimisées de Schwarz prennent en compte les propriétés physiques sous-jacentes du problème rencontré dans les conditions de transmission et sont donc parfaitement adaptées à la résolution de problèmes de diffusion anisotrope. Dans [15], nous avons discrétisé des conditions de transmission d'ordre deux dites conditions de Ventcell par les méthodes DDFV pour le problème de réaction-diffusion anisotrope. Nous prouvons la convergence de la méthode de Schwarz optimisée discrète à l'aide d'estimations d'énergie. Ces conditions de transmission d'ordre deux dépendent de paramètres qui influencent aussi la convergence de l'algorithme. Il est alors intéressant de chercher à optimiser ces paramètres afin d'accélérer au mieux la

convergence de l'algorithme, c'est ce que nous avons fait dans [15] et [18]. Une extension de l'algorithme au cas de décomposition de domaines avec point de croisement (un point peut appartenir à plusieurs sous-domaines) est aussi donnée avec une étude de la convergence de l'algorithme. Cette extension, indispensable lorsqu'on considère plus que deux sous-domaines, nécessite une modification de l'algorithme de Schwarz au point de croisement. La convergence de l'algorithme de Schwarz dans ce cas de figure, peut être obtenue par deux méthodes (voir [GSR16]) : une communication plus complète, qui fait intervenir des variables discrètes de tous les sous-domaines qui partagent le point de croisement, ou l'utilisation des variables auxillaires, représentant des valeurs à l'interface venant uniquement des sous-domaines voisins. La méthode des variables auxillaires est naturelle avec notre algorithme de Schwarz car nous avons déjà introduit de nouvelles inconnues de flux qui ont pu jouer ce rôle de variables auxillaires. Ces inconnues de flux ne convergent pas au point de croisement mais cela n'influence pas la convergence des autres inconnues. Nous avons appliqué ces algorithmes efficaces à des problèmes de diffusion anisotrope pour la reconstruction d'images.

Etude des paramètres optimisés

Dans [15], nous avons d'abord étudié les méthodes de Schwarz optimisées au niveau continu, prouvé leur convergence à l'aide d'estimations d'énergie et déduit des facteurs de convergence permettant de déterminer le choix optimal des paramètres intervenant dans les conditions de transmission. Pour de fortes anisotropies, nous observons des différences importantes entre les paramètres optimaux théoriques au niveau continu et ceux obtenus par une étude numérique de la convergence de l'algorithme DDFV. Ces différences peuvent être expliquées par une analyse des paramètres optimisés dans le cadre discret.

Nous présentons dans [18] pour la première fois une optimisation discrète du paramètre de Fourier (des conditions de transmission) de l'algorithme Schwarz DDFV dans le cas d'une diffusion diagonale afin de comprendre pourquoi les paramètres optimisés de l'analyse continue donnent parfois des performances sous-optimales pour les anisotropies élevées. Il y a une différence substantielle entre l'analyse continue et discrète, et les paramètres continus fonctionnent moins bien lorsque la diffusion le long de la direction d'interface est forte, Λ_{yy} élevée. Notons également qu'il a été nécessaire de réaliser l'analyse des paramètres optimaux discrets et continus sur un domaine borné. En effet, notre première étude théorique sur un domaine infini a conduit à des paramètres optimaux notablement différents de ceux calculés numériquement, surtout dans le cas d'une forte diffusion à travers l'interface, Λ_{xx} élevée. Dans ce dernier cas, la différence entre l'analyse discrète sur un domaine borné et celle sur un domaine infini devient importante. Il est donc important d'avoir des paramètres optimisés discrets qui tiennent compte des tailles de sous-domaines, surtout lorsque l'anisotropie est importante.

Chapitre II : Discrétisation des problèmes de diffusion-convection-réaction

Etude pour le problème de Peaceman

Le modèle de Peaceman décrit le déplacement de fluides miscibles dans un milieu poreux, dans le cas où les fluides sont supposés incompressibles et la gravité est négligée ; il a été introduit dans [Bea72, Dou84]. Dans [6], nous avons proposé une discrétisation du problème de Peaceman à l'aide des méthodes DDFV. Ce système est non linéaire et composé de deux équations couplées : une équation de diffusion anisotrope sur la pression et une équation parabolique de convection-diffusion-dispersion sur la concentration. Nous avons établi d'abord des estimations a priori satisfaites par les solutions approchées. Ce qui permet d'obtenir l'existence et l'unicité

des solutions et la compacité de ces solutions. Dans [9], grâce à la compacité des solutions, nous avons établi la convergence de notre schéma. En passant à la limite dans le schéma numérique, nous obtenons enfin que la limite de la suite de solutions approchées est une solution faible au problème étudié. Comme dans [ABK10], on a du rajouter un terme de pénalisation afin de prouver que les inconnues sur les maillages primal et dual convergent vers la même limite. Nous avons également comparé numériquement nos résultats aux résultats obtenus à l'aide des méthodes volumes finis mixtes proposé dans [CHD07].

Etude pour le problème de Fokker-Planck

La connaissance du comportement en temps long des solutions d'équations d'évolution, l'existence de certaines entropies dissipées en temps long sont des caractéristiques structurelles, telles que la positivité des densités ou la conservation de la masse, qui doivent être préservées au niveau discret par les schémas numériques. Les travaux réalisés sur la question du comportement en temps long des schémas numériques [Fil08, CHJS16, JS17, Gli08, Gli08, Cha11, BCCH16] montrent que les flux numériques de Scharfetter-Gummel préservent les états stationnaires. Ils ont été introduits pour la première fois dans [SG69] pour l'approximation des flux de convection-diffusion et ont été largement utilisés par la suite pour la simulation des semi-conducteurs. Malheureusement, de tels flux numériques ne peuvent être appliqués que dans les schémas d'approximation de flux à deux points et donc sur des maillages restreints. De plus, ils ne s'étendent pas aux équations anisotropes de convection-diffusion.

Dans [11], nous cherchons à préserver les états d'équilibre pour les problèmes de Fokker-Planck avec les méthodes DDFV. L'idée est de coupler la discrétisation des deux termes de diffusion et convection, fournissant une discrétisation précise des équations de diffusion-convection (ordre 2 et préservation des états d'équilibre), en particulier pour les modèles à convection dominante. La difficulté est que nous obtenons un schéma non linéaire (alors que le problème est linéaire), ce qui complique son analyse. Le schéma est conçu pour préserver au niveau discret, même sur des maillages déformés, les états d'équilibre et la relation d'énergie/dissipation. Cette relation est d'une importance primordiale pour rendre compte de façon précise du comportement en temps long du problème. Pour le respecter, l'équation de diffusion-convection linéaire est réécrite sous une forme non linéaire avant d'être discrétisée. La discrétisation DDFV a l'avantage d'avoir une matrice masse diagonale ce qui permet de démontrer la version discrète de la relation d'énergie/dissipation. Nous établissons l'existence de solutions positives au schéma. Grâce à des arguments de compacité, la convergence de la solution approchée vers une solution faible est démontré. Enfin, nous fournissons des illustrations numériques du bon comportement du schéma lorsque les paramètres de discrétisation tendent vers 0 et lorsque le temps tend vers l'infini.

Dans [14], nous prouvons la décroissance exponentielle vers 0 de l'entropie relative discrète en utilisant une inégalité de log-Sobolev discrète. Dans [29], nous avons étendu les résultats au cadre des conditions au bord mixtes Dirichlet/Neumann : la relation d'énergie/dissipation, le caractère bien posé du schéma et la décroissance exponentielle vers 0 de l'entropie relative discrète cette fois en utilisant une inégalité de Poincaré.

Chapitre III : Problème de Stokes et Navier-Stokes

La condition Inf-Sup

Dans [2], la discrétisation du problème de Stokes à l'aide des méthodes DDFV place les inconnues sur des maillages différents : la vitesse \mathbf{u} sur le maillage \mathcal{T} et la pression p sur le

maillage diamant \mathfrak{D} , c'est une méthode décalée. Malheureusement, nous savons montrer que le schéma est bien posé uniquement pour des maillages particuliers (voir la thèse [Del07]). Pour y remédier, un terme de stabilisation a été ajouté dans le bilan de masse. L'ajout du terme de stabilisation était nécessaire d'un point de vue théorique à cause de l'absence d'une preuve de la stabilité Inf-Sup du schéma. Cependant, les résultats numériques semblent montrer que cette stabilisation n'est pas utile en pratique. Dans [8], nous répondons en partie aux questions ouvertes dans ce contexte. Nous avons tout d'abord mis en place une méthode numérique permettant de calculer la constante Inf-Sup associée à ce schéma et à un maillage donné. Nous avons ainsi observé le comportement stable (pour des maillages triangulaires) ou instable (pour des maillages cartésiens conformes ou non conformes) du schéma en fonction de la géométrie des maillages. Nous avons ensuite établi une analyse complète dans certains cas :

- Stabilité Inf-Sup (modulo un mode en damier) pour des maillages cartésiens uniformes.
- Stabilité Inf-Sup pour des maillages triangles conformes réguliers.
- Instabilité Inf-Sup pour des maillages cartésiens non-conformes. Cette instabilité est néanmoins portée par un unique mode instable que nous avons décrit. Nous montrons que le schéma est stable pour des pressions orthogonales à ce mode, ce qui explique certainement les bonnes performances du schéma sans avoir recours à la stabilisation.

Condition aux bords ouverte

Dans [13], nous nous sommes également intéressés au problème de Navier-Stokes avec des conditions aux bords plus générales, qui interviennent parce que l'on tronque le domaine physique, soit parce que l'on veut économiser le cout du calcul, soit parce que le domaine physique est non borné. Des conditions artificielles sur la partie non physique du bord doivent alors être introduites. Nous avons considéré les conditions au bord proposées dans [BF94] et étudiées dans [BF96].

Le problème s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u}, p)) = 0; & \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ \mathbf{u} = \mathbf{g}_1 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \\ \sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{\bar{n}} + \frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{\bar{n}})^- (\mathbf{u} - \mathbf{u}^{ref}) = \sigma^{ref} \mathbf{\bar{n}} & \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_{init} & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

avec le tenseur des contraintes $\sigma(\mathbf{u}, p) = \frac{2}{\operatorname{Re}} \mathbf{D}\mathbf{u} - p\operatorname{Id}$, $\mathbf{D}\mathbf{u} = \frac{1}{2}({}^t\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u})$, $\operatorname{Re} > 0$ et $\mathbf{\bar{n}}$ la normale unitaire sortante à Ω . Nous utilisons la notation $(a)^- = -\min(a, 0)$.

Sur la partie physique de la frontière Γ_1 , nous imposons des conditions aux limites de Dirichlet. Sur la partie "non physique", Γ_2 , nous imposons la condition aux limites artificielles. Pour la définir, nous devons choisir une vitesse de référence \mathbf{u}^{ref} , qui soit une approximation raisonnable de la vitesse attendue au voisinage de Γ_2 . Cette condition non linéaire est physiquement significative : si l'écoulement est sortant, nous imposons la contrainte provenant du flux de référence sélectionné ; s'il est entrant, nous devons contrôler l'augmentation de l'énergie, nous ajoutons donc un terme quadratique par rapport à la vitesse. Pour cela, cette condition a été dérivée d'une formulation variationnelle particulière de l'équation de Navier-Stokes qui assure une estimation d'énergie : nous aimerions reproduire la même propriété au niveau discret avec le formalisme DDFV. La prise en compte de ces nouvelles conditions a nécessité de

démontrer plusieurs résultats discrets comme par exemple une inégalité de Korn et un théorème de trace. Ces résultats ont une portée plus générale car ce sont des propriétés sur les opérateurs discrets DDFV et non sur le problème de Navier-Stokes. Nous avons obtenu un schéma bien posé vérifiant une estimation d'énergie et nous l'avons validé sur des simulations numériques. Une difficulté qui est apparue dans l'étude numérique concerne le choix du fluide de référence, qui par hypothèse est stationnaire. Quand le nombre de Reynolds augmente, le flux n'est plus laminaire, il faut donc adapter le fluide de référence au cours du temps.

Le problème de Navier-Stokes à densité variable

Nous nous intéressons à la simulation numérique d'écoulements visqueux hétérogènes. Les inconnues sont la densité ρ , le champ de vitesse \mathbf{u} et la pression p , elles vérifient l'équation de conservation de masse

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1)$$

et l'équation de quantité de mouvement

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \operatorname{div}(-2\eta D\mathbf{u} + p\operatorname{Id}) = \mathbf{f}. \quad (2)$$

Le problème (1)–(2) est complété par une donnée initiale, des conditions aux bords de Dirichlet homogène et la contrainte d'incompressibilité

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0. \quad (3)$$

On remarque que si initialement le fluide est homogène, il reste homogène pour tout temps.

Dans [24], nous avons proposé une discrétisation DDFV des équations de Navier-Stokes avec une densité variable (1)–(3), le but étant par la suite de simuler des écoulements de mélanges avec une contrainte liant la divergence de la vitesse à la densité et la pression. La stratégie que nous avons développée repose sur une approche semi-implicite en temps afin que l'équation (1) soit traitée séparément des équations (2) et (3). Il est nécessaire de discrétiser le terme non linéaire dans l'équation de quantité de mouvement et l'équation de conservation de la masse de manière cohérente pour obtenir un système bien posé qui vérifie les estimations d'énergie. Ceci s'obtient par la construction d'une équation de conservation pour une densité moyennée sur les maillages primal et dual. Nous avons d'ailleurs étudié cette problématique de transfert d'une équation conservative d'un maillage à un autre maillage (ainsi que des relations de dualité entre opérateurs) dans un cadre très général dans [17]. Les premiers résultats numériques ont montré le bon comportement du schéma proposé. Une comparaison a été réalisée dans [10] avec la méthode élément fini/volume fini hybride de [CCG08], sur le cas test de Rayleigh-Taylor.

Chapitre IV : Algorithme de Schwarz pour le problème de Navier-Stokes

Dans [16], nous faisons le lien entre les Chapitres I et III, c'est-à-dire entre la décomposition de domaine et le problème de Navier-Stokes incompressible. Notre objectif est donc de décomposer le domaine Ω en sous-domaines plus petits, de résoudre le problème de Navier-Stokes incompressible complet sur ces sous-domaines en imposant certaines conditions de transmission sur les interfaces, et de récupérer par un algorithme de Schwarz itératif la solution du problème discret posé sur Ω . Comme nous travaillons avec un problème instationnaire, nous décidons d'appliquer cet algorithme itératif à chaque itération en temps. De plus, nous voulons que les conditions d'interface soient locales et nous ne faisons aucune hypothèse sur le nombre de Reynolds.

Le cas des équations de Navier-Stokes est exigeant, car il combine les difficultés suivantes : la nature vectorielle des inconnues, les termes de convection non linéaire et la contrainte d'incompressibilité. Il n'y a pas de conditions d'interface explicites, et il faut construire des conditions de transmission appropriées entre les sous-domaines. Elles ont la forme de conditions de Fourier sur la vitesse et tiennent compte de la contrainte en impliquant la pression et la divergence de la vitesse. Divisons le domaine de calcul Ω en deux sous-domaines plus petits $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. On note Γ l'interface $\Omega_1 \cap \Omega_2$. L'algorithme Schwarz définit une suite de solutions $(\mathbf{u}_j^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ du problème de Navier-Stokes dans Ω_j , avec $j \in \{1, 2\}$, doté des conditions de transmission suivantes sur Γ :

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{u}_j^\ell, p_j^\ell) \cdot \bar{\mathbf{n}}_j - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_j^\ell \cdot \bar{\mathbf{n}}_j)(\mathbf{u}_j^\ell) + \lambda \mathbf{u}_j^\ell &= \sigma(\mathbf{u}_i^{\ell-1}, p_i^{\ell-1}) \cdot \bar{\mathbf{n}}_i - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_i^{\ell-1} \cdot \bar{\mathbf{n}}_i)(\mathbf{u}_i^{\ell-1}) + \lambda \mathbf{u}_i^{\ell-1}, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}_j^\ell) + \alpha p_j^\ell &= -\operatorname{div}(\mathbf{u}_i^{\ell-1}) + \alpha p_i^{\ell-1}, \end{aligned}$$

avec $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, $i \neq j$ et $\bar{\mathbf{n}}_j$ est la normale unitaire sortante de Ω_j . La première condition est inspirée de la condition de Fourier classique ; elle combine linéairement les valeurs de l'inconnue et les valeurs de sa dérivée ; ici, la convection est également prise en compte. La deuxième condition, qui ne dépend que de α , combine la divergence de la vitesse avec la pression ; elle est indispensable pour vérifier la contrainte d'incompressibilité à la convergence de l'algorithme.

Dans ce cadre, nous avons construit deux algorithmes de Schwarz distincts. Le premier algorithme est obtenu en discrétisant de manière naturelle les équations par sous-domaines. Il est bien posé et il converge vers une solution d'une version discrète des équations de Navier-Stokes sur tout le domaine Ω . Il s'agit d'une discrétisation DDFV des équations hormis le long des interfaces entre les sous-domaines sur lesquelles les flux ont une définition non standard. Pour converger vers la solution DDFV des équations de Navier-Stokes sur tout le domaine Ω , nous avons proposé un second algorithme obtenu en modifiant les flux de l'algorithme de Schwarz le long de l'interface entre les sous-domaines. Comme dans le cas elliptique, nous montrons numériquement comment les paramètres λ et α influencent la convergence de l'algorithme.

Chapitre V : Discrétisation HHO du problème de Navier-Stokes stationnaire

Je me suis également intéressée à des méthodes d'ordre élevé. Dans [12], nous présentons et analysons une nouvelle méthode hybride d'ordre élevé : la méthode HHO pour les équations de Navier-Stokes incompressibles stationnaire.

Les méthodes HHO introduites à l'origine dans [DPE15] dans le contexte de l'élasticité linéaire quasi-incompressible ont été récemment explorées dans [CDPE16] pour un problème de diffusion pure, pour plus de détails voir le livre [DPD20]. La méthode HHO a ses degrés de liberté situés aux mailles et aux faces et ils sont des polynômes discontinus de degré $k \geq 0$. La méthode présente plusieurs caractéristiques avantageuses :

- elle prend en charge des maillages généraux comprenant éventuellement des mailles polyédriques et des interfaces non conformes (résultant, par exemple, d'un raffinement de maillage non conforme) ;
- elle permet d'augmenter l'ordre d'approximation spatial pour accélérer la convergence en présence de solutions régulières (localement) ;
- elle est (relativement) peu coûteuse grâce à la possibilité de condenser statiquement tous les degrés de liberté en vitesse localisés à l'intérieur des mailles et tous les degrés de liberté en pression sauf un par maille à chaque itération non linéaire.

La discrétisation du terme visqueux provient de la forme bilinéaire diffusive introduite à l'origine dans [DPEL14]; pour le terme convectif, nous utilisons une formulation antisymétrique conçue pour ne pas contribuer au bilan énergie; le couplage vitesse-pression est en revanche analogue à celui de [ABDP15, DPELS16]. De plus, grâce aux espaces polynomiaux sous-jacents qui sont entièrement discontinus, la méthode proposée permet de s'adapter à des variations en espace brusques des inconnues. Dans ce travail, nous proposons un schéma non linéaire résolu par une méthode de Newton. La méthode proposée est Inf-Sup stable sur les maillages polyédraux généraux, prend en charge les ordres d'approximation arbitraires. Nous montrons sous des hypothèses générales l'existence d'une solution discrète. En utilisant un argument de compacité, nous prouvons la convergence de la solution discrète vers la solution exacte de régularité minimale pour des données générales. Pour des solutions plus régulières, nous donnons des taux de convergence optimaux pour la norme d'énergie de la vitesse et pour la pression sous une hypothèse standard de petitesse des données. Plus précisément, lorsque des polynômes de degré $k \geq 0$ sont utilisés pour les mailles et les faces du maillage, il est prouvé que les deux quantités convergent comme h^{k+1} (avec h désignant le pas du maillage).

Le chapitre de conclusion contient des perspectives de recherche pour mes travaux futurs. En effet tous les travaux décrits dans ce mémoire ouvrent encore de nombreux sujets et études tant du point de vue de l'implémentation que celui de l'analyse des méthodes, sans oublier l'implémentation effective de la parallélisation indispensable pour gagner en temps de calcul.

Travaux de l'auteur

Les articles indiqués par le sigle \star sont les articles issus de mes travaux de thèse.

Articles dans des revues internationales

- [1] (Avec **F. Boyer** et **F. Hubert** \star), *Nonoverlapping Schwarz algorithm for solving two-dimensional m -DDFV schemes*, IMA J. N. A. **30** (2010), no. 4, 1062–1100.
- [2] \star *Stabilized DDFV schemes for Stokes problem with variable viscosity on general 2D meshes*, Num. Meth. for PDEs **27** (2011), no. 6, 1666–1706.
- [3] \star *Finite volume method for general multifluid flows governed by the interface Stokes problem*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences **22** (2012), no. 2, 1150025.
- [4] (Avec **G. Manzini** \star), *The Discrete Duality Finite Volume method for the Stokes equation on 3D polyhedral meshes*, SIAM Journal on Numerical Analysis **50** (2012), no. 2, 808–837.
- [5] (Avec **B. Andreianov**, **F. Hubert** et **M. Bendahmane**) *On 3D DDFV discretization of gradient and divergence operators. I. Meshing, operators and discrete duality.*, IMA J. N. A. **32** (2012), no. 4, 1574–1603.
- [6] (Avec **C. Chainais-Hillairet** et **A. Mouton**), *Study of Discrete Duality Finite Volume Schemes for the Peaceman Model*, SIAM J. Sci. Comput. **35** (2013), no. 6, A2928–A2952.
- [7] (Avec **A. Gloria**, **T. Goudon**), *Numerical homogenization of a nonlinearly coupled elliptic-parabolic system, reduced basis method, and application to nuclear waste storage*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences **23** (2013), no. 13, 2523–2560.
- [8] (Avec **F. Boyer** et **F. Nabet**), *Inf-Sup stability of the Discrete Duality Finite Volume method for the 2D Stokes problem*, Math. Comp. **84** (2015), no. 296, 2705–2742.
- [9] (Avec **C. Chainais-Hillairet** et **A. Mouton**), *Convergence analysis of a DDFV scheme for a system describing miscible fluid flows in porous media*, Num. Meth. for PDEs **31** (2015), no. 3, 723–760.
- [10] (Avec **C. Calgareo**, **E. Creusé** et **T. Goudon**), *Simulations of non homogeneous viscous flows with incompressibility constraints*, Math. and Computers in Simulation **137** (2017), 201–225.
- [11] (Avec **C. Cancès** et **C. Chainais-Hillairet**), *Numerical Analysis of a Nonlinear Free-Energy Diminishing Discrete Duality Finite Volume Scheme for Convection Diffusion Equations*, Computational Methods in Applied Mathematics **18** (2018), no. 3, 407–432.
- [12] (Avec **D. A. Di Pietro**), *A Hybrid High-Order Method for the Steady Incompressible Navier–Stokes Problem*, Journal of Scientific Computing **74** (2018), no. 3, 1677–1705.

- [13] (Avec **T. Goudon** et **G. Lissoni**), *DDFV method for Navier-Stokes problem with out-flow boundary conditions*, Numer. Math. **142** (2019), no. 1, 55–102.
- [14] (Avec **C. Cancès**, **C. Chainais-Hillairet** et **M. Herda**), *Large time behavior of non-linear Finite Volume schemes for convection-diffusion equations*, SIAM Journal on Numerical Analysis, **58** (2020), no. 5, 2544–2571.
- [15] (Avec **M. J. Gander**, **L. Halpern** et **F. Hubert**), *Optimized Schwarz Methods with General Ventcell Transmission Conditions for Fully Anisotropic Diffusion with Discrete Duality Finite Volume Discretizations*, Moroccan Journal of Pure and Applied Analysis, **7** (2021), no. 2, 82–213.
- [16] (Avec **T. Goudon** et **G. Lissoni**), *Non-overlapping Schwarz algorithms for the incompressible Navier-Stokes equations with DDFV discretizations*, accepté à M2AN (2021).
- [17] (Avec **T. Goudon**, **J. Llobell** et **S. Minjeaud**), *Transfer of conservative discrete differential operators between staggered grids : construction and duality relations*, accepté à IMAJNA (2021).

Articles soumis

- [18] (Avec **M. J. Gander**, **L. Halpern** et **F. Hubert**), *Discrete optimization of Robin transmission conditions for anisotropic diffusion with Discrete Duality Finite Volume methods*, soumis (2020).

Actes de Congrès

- [19] (Avec **F. Boyer** et **F. Hubert** ★), *Non-overlapping Schwarz algorithm for DDFV schemes on general 2D meshes*, Finite Volumes for Complex Applications V (R. Eymard and J. M. Herard, eds.), Wiley, ISTE, London 2008.
- [20] ★ *Stabilized DDFV schemes for Stokes problem*, Proceedings of 18th ALGORITMY conference, Vysoke Tatry, Podbanske, 2009.
- [21] ★ *Stabilized DDFV schemes for the incompressible Navier-Stokes equations*, Finite Volumes for Complex Applications VI Problems and Perspectives (J. Fort, J. Furst, J. Halama, R. Herbin, and F. Hubert, eds.), Springer Proceedings in Mathematics, vol. 4, Springer Berlin Heidelberg, 2011, pp. 605–612.
- [22] (Avec **B. Andreianov** et **F. Hubert**), *Benchmark 3D : a version of the DDFV scheme with cell/vertex unknowns on general meshes*, Finite Volumes for Complex Applications VI Problems and Perspectives (J. Fort, J. Furst, J. Halama, R. Herbin, and F. Hubert, eds.), Springer Proceedings in Mathematics, vol. 4, Springer Berlin Heidelberg, 2011, pp. 937–948.
- [23] (Avec **M. J. Gander** et **F. Hubert**), *Optimized Schwarz algorithms in the framework of DDFV schemes*, Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XXI, Springer, 2014, pp. 457–466.
- [24] (Avec **T. Goudon**), *A DDFV scheme for incompressible Navier-Stokes equations with variable density*, Finite volumes for complex applications. VII. Elliptic, parabolic and hyperbolic problems, Springer Proc. Math. Stat., vol. 78, Springer, Cham, 2014, pp. 627–635.

-
- [25] (Avec **M. J. Gander**, **L. Halpern** et **F. Hubert**), *DDFV Ventcell Schwarz algorithms*, Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XXII (Thomas Dickopf, Martin J. Gander, Laurence Halpern, Rolf Krause, and Luca F. Pavarino, eds.), Springer International Publishing, 2016, pp. 481–489.
- [26] (Avec **C. Cancès** et **C. Chainais-Hillairet**), *A nonlinear Discrete Duality Finite Volume scheme for convection-diffusion equations*, Finite Volumes for Complex Applications VIII - Methods and Theoretical Aspects (Clément Cancès and Pascal Omnes, eds.), Springer International Publishing, 2017, pp. 439–447.
- [27] (Avec **D. A. Di Pietro**), *Benchmark session : The 2D Hybrid High-Order method*, Finite Volumes for Complex Applications VIII - Methods and Theoretical Aspects (Clément Cancès and Pascal Omnes, eds.), Springer International Publishing, 2017, pp. 91–106.
- [28] (Avec **F. Boyer** et **F. Nabet**), *Benchmark Session : The 2D Discrete Duality Finite Volume Method*, Finite Volumes for Complex Applications VIII - Methods and Theoretical Aspects (Clément Cancès and Pascal Omnes, eds.), Springer International Publishing, 2017, pp. 163–180.
- [29] (Avec **C. Chainais-Hillairet**), *Exponential decay to equilibrium of nonlinear DDFV schemes for convection-diffusion equations*, Finite Volumes for Complex Applications IX - Methods and Theoretical Aspects, Springer International Publishing, 2020.
- [30] (Avec **M. J. Gander**, **L. Halpern** et **F. Hubert**), *Optimized overlapping DDFV Schwarz algorithms*, Finite Volumes for Complex Applications IX - Methods and Theoretical Aspects, Springer International Publishing, 2020.
- [31] (Avec **T. Goudon** et **G. Lissoni**), *Convergence study of a DDFV scheme for the Navier-Stokes equations arising in the domain decomposition setting*, Finite Volumes for Complex Applications IX - Methods and Theoretical Aspects, Springer International Publishing, 2020.

Thèse

- [32] *Schémas Volumes Finis en mécanique des fluides complexes*, thèse soutenue le 8 septembre 2010, à l’université de Provence de Marseille sous la direction de **Franck Boyer** et **Florence Hubert** .

Chapitre I

Algorithme de Schwarz pour des problèmes elliptiques

Ce chapitre s'intéresse aux méthodes de décomposition de domaine de type Schwarz sans recouvrement. Dans [1], une première version de l'algorithme de Schwarz est donnée mais elle n'a pas le bon comportement de paramètre optimal; dans [23], nous modifions l'algorithme pour avoir le bon comportement; dans [25] et [15], nous étudions cet algorithme pour des conditions de transmission d'ordre 2 et faisons une étude des paramètres optimaux dans le cadre continu; dans [18], nous faisons l'étude des paramètres optimaux dans le cadre discret et généralisons l'algorithme avec des conditions de Fourier aux sous-domaines possédant des points de croisement. Toutes les notations et les opérateurs sont définis dans l'Annexe.

Nous nous intéressons à résoudre le problème de diffusion anisotrope avec réaction de la forme

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\mathbf{\Lambda}\nabla u) + \eta u &= f \quad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{I.1}$$

où $\mathbf{\Lambda}$ est une matrice symétrique définie positive avec des coefficients $W^{1,\infty}$,

$$(x, y) \in \Omega \mapsto \mathbf{\Lambda}(x, y) = \begin{pmatrix} \Lambda_{xx}(x, y) & \Lambda_{xy}(x, y) \\ \Lambda_{xy}(x, y) & \Lambda_{yy}(x, y) \end{pmatrix},$$

et $(x, y) \in \Omega \mapsto \eta(x, y) \geq 0$ est une fonction positive dans $L^\infty(\Omega)$ et $(x, y) \in \Omega \mapsto f(x, y) \geq 0$ est une fonction dans $L^2(\Omega)$.

Pour simplifier, nous considérons une décomposition du domaine Ω en deux sous-domaines Ω_j , $j = 1, 2$ sans recouvrement et une interface Γ . Dans ce manuscrit, l'interface Γ est supposée parallèle à la direction y . Un algorithme de Schwarz parallèle et optimisé pour le problème de diffusion anisotrope (I.1) est pour $\ell = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\mathbf{\Lambda}\nabla u_j^\ell) + \eta u_j^\ell &= f && \text{dans } \Omega_j, \\ u_j^\ell &= 0 && \text{sur } \partial\Omega_j \cap \partial\Omega, \\ \mathbf{\Lambda}\nabla u_j^\ell \cdot \mathbf{n}_j + \mathbb{V}u_j^\ell &= -\mathbf{\Lambda}\nabla u_i^{\ell-1} \cdot \mathbf{n}_i + \mathbb{V}u_i^{\ell-1} && \text{sur } \Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2, \end{aligned} \tag{I.2}$$

où $j = 1, 2$, $i = 2, 1$, et \mathbf{n}_j désigne la normale unitaire sortante de Ω_j . L'opérateur de transmission \mathbb{V} dépend de deux coefficients p et q , et est donné par

$$\mathbb{V}u := pu - q\partial_y(\Lambda_{yy}\partial_y u), \tag{I.3}$$

qui représente la condition de transmission appelée Ventcell ou d'ordre deux. Dans le cas $q = 0$, on obtient la condition de transmission de Fourier.

L'approximation DDFV $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ de (I.1) est la solution du système linéaire suivant

$$-\operatorname{div}^{\kappa} (\Lambda_{\mathcal{D}} \nabla^{\mathcal{D}} u_{\mathcal{T}}) + \eta_{\kappa} u_{\kappa} = f_{\kappa}, \quad \forall \kappa \in \mathfrak{M}, \quad (\text{I.4a})$$

$$-\operatorname{div}^{\kappa^*} (\Lambda_{\mathcal{D}} \nabla^{\mathcal{D}} u_{\mathcal{T}}) + \eta_{\kappa^*} u_{\kappa^*} = f_{\kappa^*}, \quad \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}^*, \quad (\text{I.4b})$$

$$u_{\kappa} = 0, \quad \forall \kappa \in \partial\mathfrak{M}, \quad u_{\kappa^*} = 0, \quad \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*. \quad (\text{I.4c})$$

où

$$\Lambda_{\mathcal{D}} = \mathbb{P}_c^{\mathcal{D}} \Lambda, \quad f_{\mathcal{T}} = \mathbb{P}_m^{\mathcal{T}} f, \quad \eta_{\mathcal{T}} = \mathbb{P}_c^{\mathcal{T}} \eta$$

dans le cas de fonctions régulières Λ , f et η .

Un maillage DDFV de Ω_j est composé $\mathcal{T}_j = (\mathfrak{M}_j \cup \partial\mathfrak{M}_j, \mathfrak{M}_j^* \cup \partial\mathfrak{M}_j^*)$, et du maillage diamant associé \mathcal{D}_j . On note

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{j,\Gamma} &:= \{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_j, \mathcal{D} \cap \Gamma \neq \emptyset\} \text{ les diamants intersectant } \Gamma, \\ \partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma} &:= \{\kappa \in \partial\mathfrak{M}_j, \kappa \cap \Gamma \neq \emptyset\} \text{ les mailles primales du bord intersectant } \Gamma, \\ \partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}^* &:= \{\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}_j^*, \kappa^* \cap \Gamma \neq \emptyset\} \text{ les mailles duales du bord intersectant } \Gamma, \\ \partial\mathfrak{M}_{j,D} &:= \{\kappa \in \partial\mathfrak{M}_j, \kappa \cap \partial\Omega \neq \emptyset\} \text{ les mailles primales du bord intersectant } \partial\Omega, \\ \partial\mathfrak{M}_{j,D}^* &:= \{\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}_j^*, \kappa^* \cap \partial\Omega \neq \emptyset\} \text{ les mailles duales du bord intersectant } \partial\Omega, \\ \partial\mathcal{A}_{j,\Gamma} &:= \{[x_{\kappa^*} x_{\mathcal{L}}], \mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma} \text{ et } x_{\kappa^*} \in \mathcal{L}\} \text{ les demi-arêtes de l'interface } \Gamma. \end{aligned}$$

Pour simplifier, nous supposons que les deux maillages sont compatible au sens que les deux maillages ont les mêmes sommets et les mêmes mailles primales du bord sur l'interface Γ . Si les maillages ne sont pas compatibles, on rajoute des sommets sur le bord pour les rendre compatibles.

I.1 Algorithme de Schwarz avec des conditions de Fourier

Dans cette section, nous travaillons avec des conditions de Fourier, *i.e.* $q = 0$. Pendant ma thèse, nous avons développé dans [1] un premier algorithme DDFV de la méthode de Schwarz sans recouvrement pour des problèmes de diffusion anisotrope qui converge vers la solution sur tout le domaine. Pour cela, nous avons rajouté des inconnues de flux sur chaque demi-arête du bord Γ notées $\varphi_{\kappa^*,\mathcal{L}}$ et $\varphi_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}$, pour $\mathcal{L} = [x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}^*}] \in \partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}$. Ces inconnues vont approcher les flux normaux sur chaque demi-arête $\Lambda_{\mathcal{D}} \nabla^{\mathcal{D}} u_{\mathcal{T}_j} \cdot \vec{n}_{\sigma\mathcal{L}}$ (voir Figure I.1).

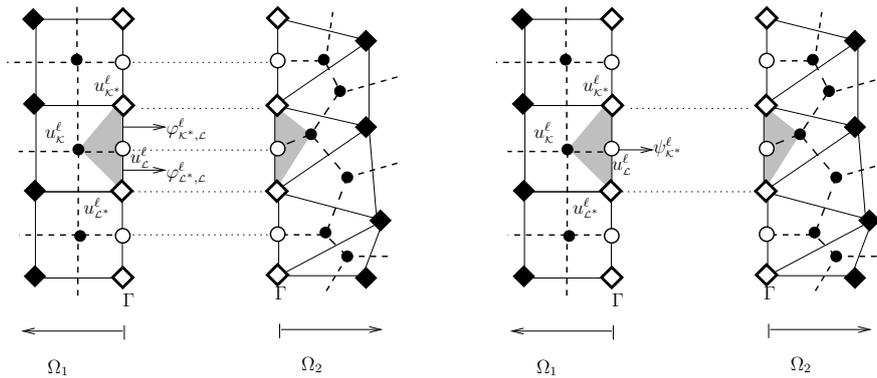


FIGURE I.1 – Localisation des inconnues et plus particulièrement des inconnues de flux. À gauche pour la première version. À droite pour la version modifiée.

Nous obtenons donc un nouvel espace d'approximation $U_{\mathcal{T}_j} \in (\mathbb{R}^{\mathcal{T}_j} \cup \mathbb{R}^{2\partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}})$ où

$$U_{\mathcal{T}_j} = (u_{\mathcal{T}_j}, \varphi_{\mathcal{T}_j}) = \left((u_{\kappa})_{\kappa \in (\mathfrak{M}_j \cup \partial\mathfrak{M}_j)}, (u_{\kappa^*})_{\kappa^* \in (\mathfrak{M}_j^* \cup \partial\mathfrak{M}_j^*)}, (\varphi_{\kappa^*,\mathcal{L}}, \varphi_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}})_{\mathcal{L} = [x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}^*}] \in \partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}} \right).$$

La démarche pour obtenir notre schéma DDFV pour le problème (I.2) est la suivante. On intègre l'équation sur les mailles primales intérieures \mathfrak{M}_j (cf (I.5b)) et sur les mailles duales intérieures \mathfrak{M}_j^* (cf (I.5c)). On intègre également l'équation sur les mailles duales du bord Fourier $\partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}^*$ en utilisant les inconnues $\varphi_{\kappa^*,\mathcal{L}}$ au lieu de $\Lambda_{\mathcal{D}}\nabla^{\mathcal{D}}u_{\mathcal{T}_j} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{L}}$ là où c'est nécessaire (cf (I.5d)). Ensuite pour l'équation sur $\partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}$, on écrit que les $\varphi_{\kappa^*,\mathcal{L}}$ approchent $\Lambda_{\mathcal{D}}\nabla^{\mathcal{D}}u_{\mathcal{T}_j} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{L}}$ (cf (I.5e)). Enfin, on impose la condition de Fourier sur chaque demi-arête de $\partial\mathfrak{A}_{j,\Gamma}$ en utilisant $\varphi_{\kappa^*,\mathcal{L}}$ (cf (I.5f)) et la condition de Dirichlet sur les mailles duales du bord $\partial\mathfrak{M}_{j,D}^*$ et sur les mailles primales du bord $\partial\mathfrak{M}_{j,D}$ (cf (I.5a)).

Plus précisément, nous proposons l'algorithme suivant :

- Pour $j \in \{1, 2\}$, on choisit $h_{\mathcal{T}_j}^0 \in \Phi_{\Gamma}^{\mathcal{T}_j}$.

- Pour tout $\ell \geq 0$, et pour $i, j \in \{1, 2\}$, $j \neq i$:

- ♦ Nous obtenons $U_{\mathcal{T}_j}^{\ell+1} = (u_{\mathcal{T}_j}^{\ell+1}, \varphi_{\mathcal{T}_j}^{\ell+1}) \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}_j} \times \Phi_{\Gamma}^{\mathcal{T}_j}$ solution de

$$u_{\kappa}^{\ell+1} = 0, \quad \forall \kappa \in \partial\mathfrak{M}_{j,D}, \quad u_{\kappa^*}^{\ell+1} = 0, \quad \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}_{j,D}^*, \quad (\text{I.5a})$$

$$-\operatorname{div}^{\kappa} \left(\Lambda_{\mathcal{D}} \nabla^{\mathcal{D}} u_{\mathcal{T}_j}^{\ell+1} \right) + \eta_{\kappa} u_{\kappa}^{\ell+1} = f_{\kappa}, \quad \forall \kappa \in \mathfrak{M}_j, \quad (\text{I.5b})$$

$$-\operatorname{div}^{\kappa^*} \left(\Lambda_{\mathcal{D}} \nabla^{\mathcal{D}} u_{\mathcal{T}_j}^{\ell+1} \right) + \eta_{\kappa^*} u_{\kappa^*}^{\ell+1} = f_{\kappa^*}, \quad \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}_j^*, \quad (\text{I.5c})$$

$$-\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa^*}} \frac{m_{\sigma^*}}{m_{\kappa^*}} \Lambda_{\mathcal{D}} \nabla^{\mathcal{D}} u_{\mathcal{T}_j}^{\ell+1} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^* \kappa^*} - \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa^*} \cap \mathcal{D}_{\Gamma}} \frac{d_{\kappa^*,\mathcal{L}}}{m_{\kappa^*}} \varphi_{\kappa^*,\mathcal{L}}^{\ell+1} + \eta_{\kappa^*} u_{\kappa^*}^{\ell+1} = f_{\kappa^*}, \quad \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}^*, \quad (\text{I.5d})$$

$$\frac{d_{\kappa^*,\mathcal{L}}}{m_{\sigma}} \varphi_{\kappa^*,\mathcal{L}}^{\ell+1} + \frac{d_{\mathcal{L},\mathcal{L}}}{m_{\sigma}} \varphi_{\mathcal{L},\mathcal{L}}^{\ell+1} = \Lambda_{\mathcal{D}} \nabla^{\mathcal{D}} u_{\mathcal{T}_j}^{\ell+1} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{L}}, \quad \forall \mathcal{L} = [x_{\kappa^*} x_{\mathcal{L}}] \in \partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}, \quad (\text{I.5e})$$

$$\varphi_{\kappa^*,\mathcal{L}}^{\ell+1} + p \frac{u_{\kappa^*}^{\ell+1} + u_{\mathcal{L}}^{\ell+1}}{2} = h_{\kappa^*,\mathcal{L}}^{\ell}, \quad \forall [x_{\kappa^*} x_{\mathcal{L}}] \in \partial\mathfrak{A}_{j,\Gamma}. \quad (\text{I.5f})$$

- ♦ Nous évaluons $h_{\mathcal{T}_j}^{\ell+1}$ grâce aux valeurs sur le sous-domaine i

$$\forall [x_{\kappa^*} x_{\mathcal{L}}] \in \partial\mathfrak{A}_{j,\Gamma}, \quad h_{\kappa^*,\mathcal{L}}^{\ell+1} = -\varphi_{\kappa^*,\mathcal{L}}^{\ell+1} + p \frac{u_{\kappa^*}^{\ell+1} + u_{\mathcal{L}}^{\ell+1}}{2}. \quad (\text{I.6})$$

Les conditions de transmission de type Fourier font intervenir, dans leur définition, un paramètre p dont la valeur a une influence importante sur la vitesse de convergence de l'algorithme. Lorsque nous examinons le comportement du paramètre optimal (ie celui permettant d'obtenir la vitesse de convergence optimale) en fonction de la taille du maillage, nous observons numériquement un comportement en $\frac{1}{h}$ qui n'est pas celui classiquement observé dans [Gan06]. Nous l'avons démontré dans [23].

Proposition I.1 (Proposition 1 [23])

Ici nous supposons que $q = 0$ et $\eta = 0$, alors le paramètre optimisé dans l'algorithme de Schwarz DDFV (I.5)-(I.6) vérifie $p_0^{\text{opt}} = \operatorname{Argmin}_p \max_k(\rho(B)) = \frac{4}{h}$, et le taux de convergence associé est $1 - \frac{1}{2}k_{\min}h + O(h^2)$ avec $k_{\min} = \pi$ et B est la matrice d'itération.

I.2 Algorithme de Schwarz modifié avec des conditions de Fourier

Ainsi nous avons proposé une nouvelle méthode de prise en compte des conditions aux bords de type Fourier permettant d'accélérer la convergence de l'algorithme de Schwarz et d'obtenir le comportement classique du paramètre optimal en $\frac{1}{\sqrt{h}}$. La différence est dans l'ajout des inconnues de flux, elles sont maintenant placées à chaque sommet de l'interface ψ_{κ^*} pour $j = 1, 2$, et $\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}^*$. Nous notons $\psi_{\mathcal{T}_j} \in \mathbb{R}^{\partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}^*}$ l'ensemble des inconnues de flux ψ_{κ^*} (voir Figure I.1). La démarche pour obtenir notre nouvel algorithme DDFV pour le problème (I.2) est la suivante. On intègre l'équation sur les mailles primales intérieures \mathfrak{M}_j (cf (I.7b)) et sur les mailles duales intérieures \mathfrak{M}_j^* (cf (I.7c)). On intègre également l'équation sur les mailles duales du bord Fourier $\partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}^*$ en utilisant les inconnues ψ_{κ^*} au lieu de $\Lambda_{\mathcal{D}} \nabla^{\mathcal{D}} u_{\mathcal{T}_j} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{L}}$ là où c'est nécessaire (cf (I.7d)). Ensuite pour l'équation sur $\partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}$, on impose la condition de Fourier sur chaque arête (cf (I.7e)). Enfin, on impose la condition de Fourier sur chaque sommet $\partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}^*$ en utilisant ψ_{κ^*} (cf (I.7f)) et la condition de Dirichlet sur les mailles duales du bord $\partial\mathfrak{M}_{j,D}^*$ et sur les mailles primales du bord $\partial\mathfrak{M}_{j,D}$ (cf (I.7a)).

Plus précisément, Nous proposons l'algorithme suivant :

- Pour $j \in \{1, 2\}$, on choisit $h_{\mathcal{T}_j}^0 \in \mathbb{R}^{\partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma} \cup \partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}^*}$.
- Pour tout $\ell \geq 0$, et pour $i, j \in \{1, 2\}$, $j \neq i$:

♦ Nous obtenons $U_{\mathcal{T}_j}^{\ell+1} = (u_{\mathcal{T}_j}^{\ell+1}, \psi_{\mathcal{T}_j}^{\ell+1}) \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}_j} \times \mathbb{R}^{\partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}^*}$ solution de

$$u_{\kappa}^{\ell+1} = 0, \quad \forall \kappa \in \partial\mathfrak{M}_{j,D}, \quad u_{\kappa^*}^{\ell+1} = 0, \quad \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}_{j,D}^*, \quad (\text{I.7a})$$

$$-\operatorname{div}^{\kappa} \left(\Lambda_{\mathcal{D}} \nabla^{\mathcal{D}} u_{\mathcal{T}_j}^{\ell+1} \right) + \eta_{\kappa} u_{\kappa}^{\ell+1} = f_{\kappa}, \quad \forall \kappa \in \mathfrak{M}_j, \quad (\text{I.7b})$$

$$-\operatorname{div}^{\kappa^*} \left(\Lambda_{\mathcal{D}} \nabla^{\mathcal{D}} u_{\mathcal{T}_j}^{\ell+1} \right) + \eta_{\kappa^*} u_{\kappa^*}^{\ell+1} = f_{\kappa^*}, \quad \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}_j^*, \quad (\text{I.7c})$$

$$-\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa^*}} \frac{m_{\sigma^*}}{m_{\kappa^*}} \Lambda_{\mathcal{D}} \nabla^{\mathcal{D}} u_{\mathcal{T}_j}^{\ell+1} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^* \kappa^*} - \frac{m_{\sigma_{\kappa^*}}}{m_{\kappa^*}} \psi_{\kappa^*}^{\ell+1} + \eta_{\kappa^*} u_{\kappa^*}^{\ell+1} = f_{\kappa^*}, \quad \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}^*, \quad (\text{I.7d})$$

$$\Lambda_{\mathcal{D}} \nabla^{\mathcal{D}} u_{\mathcal{T}_j}^{\ell+1} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{L}} + p u_{\mathcal{L}}^{\ell+1} = h_{\mathcal{L}}^{\ell}, \quad \forall \mathcal{L} = [x_{\kappa^*} x_{\mathcal{L}^*}] \in \partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}, \quad (\text{I.7e})$$

$$\psi_{\kappa^*}^{\ell+1} + p u_{\kappa^*}^{\ell+1} = h_{\kappa^*}^{\ell}, \quad \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}^*. \quad (\text{I.7f})$$

♦ Nous évaluons $h_{\mathcal{T}_j}^{\ell+1}$ grâce aux valeurs sur le sous-domaine i

$$h_{\mathcal{L}}^{\ell+1} = -\Lambda_{\mathcal{D}} \nabla^{\mathcal{D}} u_{\mathcal{T}_i}^{\ell+1} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{L}} + p u_{\mathcal{L}}^{\ell+1}, \quad \forall \mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}, \quad (\text{I.8a})$$

$$h_{\kappa^*}^{\ell+1} = -\psi_{\mathcal{L}^*}^{\ell+1} + p u_{\mathcal{L}^*}^{\ell+1}, \quad \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}^*, \quad \forall \mathcal{L}^* \in \partial\mathfrak{M}_{i,\Gamma}^* \text{ tels que } x_{\kappa^*} = x_{\mathcal{L}^*}. \quad (\text{I.8b})$$

Proposition I.2 (Proposition 2 [23])

Nous supposons ici que $q = 0$ et $\eta = 0$, alors le paramètre optimisé dans l'algorithme de Schwarz DDFV (I.7)-(I.8) vérifie $p_0^{\text{opt}} = \operatorname{Argmin}_p \max_k (\rho(B^{\text{new}})) \sim \frac{2^{3/4} \sqrt{k_{\min}}}{\sqrt{h}}$, et le taux de convergence associé est $1 - 2^{1/4} \sqrt{k_{\min}} \sqrt{h} + O(h)$ avec $k_{\min} = \pi$ et B^{new} est la matrice d'itération du nouvel algorithme.

I.3 Prise en compte des conditions de transmission de type Ventcell

Dans [25], nous avons discrétisé des conditions de transmission d'ordre deux dites conditions de Ventcell par les méthodes DDFV pour le problème de réaction-diffusion anisotrope. Pour cela, on trie et numérote les arêtes σ , les mailles primales du bord \mathcal{L} , les mailles duales du bord κ^* et les sommets x_{κ^*} de l'interface Γ , de telle sorte que $\sigma_s = \mathcal{L}_s = [\mathbf{x}_{\kappa_s^*}, \mathbf{x}_{\kappa_{s+1}^*}]$, pour $s = 1, \dots, N$, où N est le nombre d'arêtes de Γ .

Nous procédons de la même manière que pour l'algorithme (I.7) en modifiant uniquement les équations (I.7e) et (I.7f) par

- Pour $j \in \{1, 2\}$, on choisit $h_{\mathcal{T}_j}^0 \in \mathbb{R}^{\partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma} \cup \partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}^*}$.

- Pour tout $\ell \geq 0$, et pour $i, j \in \{1, 2\}$, $j \neq i$:

- ♦ Nous obtenons $U_{\mathcal{T}_j}^{\ell+1} = (u_{\mathcal{T}_j}^{\ell+1}, \psi_{\mathcal{T}_j}^{\ell+1}) \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}_j} \times \mathbb{R}^{\partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}^*}$ solution de

$$u_{\kappa}^{\ell+1} = 0, \quad \forall \kappa \in \partial\mathfrak{M}_{j,D}, \quad u_{\kappa^*}^{\ell+1} = 0, \quad \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}_{j,D}^*, \quad (\text{I.9a})$$

$$-\operatorname{div}^{\kappa} \left(\Lambda_{\mathfrak{D}} \nabla^{\mathfrak{D}} u_{\mathcal{T}_j}^{\ell+1} \right) + \eta_{\kappa} u_{\kappa}^{\ell+1} = \mathbf{f}_{\kappa}, \quad \forall \kappa \in \mathfrak{M}_j, \quad (\text{I.9b})$$

$$-\operatorname{div}^{\kappa^*} \left(\Lambda_{\mathfrak{D}} \nabla^{\mathfrak{D}} u_{\mathcal{T}_j}^{\ell+1} \right) + \eta_{\kappa^*} u_{\kappa^*}^{\ell+1} = \mathbf{f}_{\kappa^*}, \quad \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}_j^*, \quad (\text{I.9c})$$

$$- \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} \frac{m_{\sigma^*}}{m_{\kappa^*}} \Lambda_{\mathfrak{D}} \nabla^{\mathfrak{D}} u_{\mathcal{T}_j}^{\ell+1} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^* \kappa^*} - \frac{m_{\sigma_{\kappa^*}}}{m_{\kappa^*}} \psi_{\kappa^*}^{\ell+1} + \eta_{\kappa^*} u_{\kappa^*}^{\ell+1} = \mathbf{f}_{\kappa^*}, \quad \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}^*, \quad (\text{I.9d})$$

$$\Lambda_{\mathfrak{D}} \nabla^{\mathfrak{D}} u_{\mathcal{T}_j}^{\ell+1} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{L}} + \mathbb{V}_{\mathcal{L}}^{\partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}}(u_{\partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}}^{\ell+1}) = h_{\mathcal{L}}^{\ell}, \quad \forall \mathcal{L} = [x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}^*}] \in \partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}, \quad (\text{I.9e})$$

$$\psi_{\kappa^*}^{\ell+1} + \mathbb{V}_{\kappa^*}^{\partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}^*}(u_{\partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}^*}^{\ell+1}) = h_{\kappa^*}^{\ell}, \quad \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}^*, \quad (\text{I.9f})$$

avec pour $s = 1, \dots, N$,

$$\mathbb{V}_{\mathcal{L}_s}^{\partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}}(u_{\partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}}^{\ell+1}) = pu_{\mathcal{L}_s}^{\ell+1} - \frac{q}{m_{\sigma_s}} \left(\Lambda_{yy}^{s^*+1} \frac{u_{\mathcal{L}_{s+1}}^{\ell+1} - u_{\mathcal{L}_s}^{\ell+1}}{m_{\sigma_{\kappa_{s+1}^*}}} - \Lambda_{yy}^{s^*} \frac{u_{\mathcal{L}_s}^{\ell+1} - u_{\mathcal{L}_{s-1}}^{\ell+1}}{m_{\sigma_{\kappa_s^*}}} \right),$$

et pour $s = 2, \dots, N$

$$\mathbb{V}_{\kappa_s^*}^{\partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}^*}(u_{\partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}^*}^{\ell+1}) = p^* u_{\kappa_s^*}^{\ell+1} - \frac{q^*}{m_{\sigma_{\kappa_s^*}}} \left(\Lambda_{yy}^s \frac{u_{\kappa_{s+1}^*}^{\ell+1} - u_{\kappa_s^*}^{\ell+1}}{m_{\sigma_s}} - \Lambda_{yy}^{s-1} \frac{u_{\kappa_s^*}^{\ell+1} - u_{\kappa_{s-1}^*}^{\ell+1}}{m_{\sigma_{s-1}}} \right).$$

où Λ_{yy}^s et $\Lambda_{yy}^{s^*}$ sont les valeurs de Λ_{yy} aux points $x_{\mathcal{L}_s}$ et $x_{\kappa_s^*}$. On remarque qu'on a $u_{\mathcal{L}_0}^{\ell+1} = u_{\mathcal{L}_{N+1}}^{\ell+1} = 0$ et $u_{\kappa_1^*}^{\ell+1} = u_{\kappa_{N+1}^*}^{\ell+1} = 0$ grâce aux conditions aux bords sur $\partial\Omega$.

- ♦ Nous évaluons $h_{\mathcal{T}_j}^{\ell+1}$ grâce à

$$h_{j,\mathcal{L}}^{\ell+1} = -\Lambda_{\mathfrak{D}} \nabla^{\mathfrak{D}} u_{\mathcal{T}_j}^{\ell+1} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{L}} + \mathbb{V}_{\mathcal{L}}^{\partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}}(u_{\partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}}^{\ell+1}), \quad \forall \mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}, \quad (\text{I.10a})$$

$$h_{j,\kappa^*}^{\ell+1} = -\psi_{\kappa^*}^{\ell+1} + \mathbb{V}_{\kappa^*}^{\partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}^*}(u_{\partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}^*}^{\ell+1}), \quad \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}^*, \quad \forall \mathcal{L}^* \in \partial\mathfrak{M}_{i,\Gamma}^* \text{ tels que } x_{\kappa^*} = x_{\mathcal{L}^*}. \quad (\text{I.10b})$$

Théorème I.3 (Théorème 3.1 [15])

La solution $(u_{\tau_j}^\ell)_{j=1,2}$ de l'algorithme DDFV optimisé de Schwarz définie par (I.9) existe et est unique.

Théorème I.4 (Théorème 3.2 [15])

La solution $(u_{\tau_j}^\ell)_{j=1,2}$ de l'algorithme DDFV optimisé de Schwarz définie par (I.9)-(I.10) converge quand ℓ tend vers l'infini vers la solution u_τ du schéma DDFV (I.4) sur Ω .

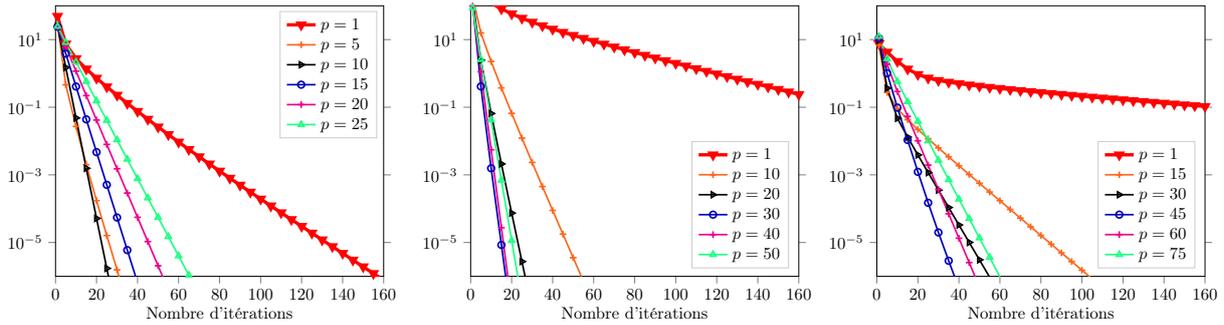


FIGURE I.2 – Convergence de l'algorithme DDFV optimisé de Schwarz pour différentes valeurs du paramètre p ($q=0$) avec $h = 2^{-3}$ et une initialisation aléatoire. A gauche : $\Lambda_{xx} = \Lambda_{yy} = 1$, $\Lambda_{xy} = 0$. Au milieu : $\Lambda_{xx} = 16$, $\Lambda_{yy} = 1$, $\Lambda_{xy} = 0$. A droite : $\Lambda_{xx} = 1$, $\Lambda_{yy} = 16$, $\Lambda_{xy} = 0$.

Ces conditions de transmission dépendent de paramètres p et q qui influencent aussi la convergence de l'algorithme. Dans la Figure I.2, nous calculons pour différentes valeurs de p et d'anisotropie Λ , pour $q = 0$ et $\eta = 1$, l'erreur $E_1 = \|u_{\tau_j}^\ell - u_\tau\|_2$ sur un maillage cartésien avec $h = 2^{-3}$ et la solution DDFV $u_\tau = 0$. Il est alors intéressant de chercher à optimiser ces paramètres afin d'accélérer au mieux la convergence de l'algorithme.

I.4 Etude des paramètres optimisés dans le cas continu

Dans cette section, la matrice d'anisotropie Λ est supposée constante sur Ω .

Afin d'obtenir des informations sur le choix des paramètres p et q qui accélèrent la convergence, une technique des méthodes de Schwarz optimisées consiste à étudier l'algorithme sur des domaines spécifiques plus simples avec des coefficients constants en utilisant les techniques de transformée de Fourier [Gan06].

Dans [15], nous avons d'abord étudié les méthodes de Schwarz optimisées au niveau continu, prouvé leur convergence à l'aide d'estimations d'énergie et déduit des facteurs de convergence permettant de déterminer le choix optimal des paramètres dans les conditions de transmission. On note $D(k) =: \sqrt{\eta\Lambda_{xx} + k^2 \det \Lambda}$, $k_{min} = \pi$ et $k_{max} = \frac{\pi}{h}$.

Théorème I.5 (Theorem 2.7 [15])

Le coefficient menant à la meilleure convergence de l'algorithme de Schwarz continu (I.2) avec $q = 0$ dans le cas Fourier sur un domaine non-borné Ω est

$$p_{0,\infty}^{opt} = \sqrt{D(k_{max})D(k_{min})},$$

avec le facteur de convergence optimisé associé

$$\rho_{0,\infty}^{opt} = \left| \frac{\sqrt{D(k_{max})} - \sqrt{D(k_{min})}}{\sqrt{D(k_{max})} + \sqrt{D(k_{min})}} \right|.$$

Les coefficients menant à la meilleure convergence de l'algorithme de Schwarz continu (I.2) dans le cas Ventcell sont

$$p_{1,\infty}^{opt} = \sqrt{\det \mathbf{\Lambda}} \frac{k_{max}^2 D(k_{min}) - k_{min}^2 D(k_{max})}{\sqrt{2(k_{max}^2 - k_{min}^2)} (D(k_{max}) - D(k_{min})) (D(k_{min})D(k_{max}))^{\frac{1}{4}}},$$

$$q_{1,\infty}^{opt} = \frac{\sqrt{\det \mathbf{\Lambda}}}{\mathbf{\Lambda}_{yy}} \frac{\sqrt{D(k_{max})} - \sqrt{D(k_{min})}}{\sqrt{2(k_{max}^2 - k_{min}^2)} (D(k_{min})D(k_{max}))^{\frac{1}{4}}},$$

avec le facteur de convergence optimisé encore plus petit

$$\rho_{1,\infty}^{opt} = \left| \frac{p_{1,\infty}^{opt} + q_{1,\infty}^{opt} \mathbf{\Lambda}_{yy} k_{min}^2 - D(k_{min})}{p_{1,\infty}^{opt} + q_{1,\infty}^{opt} \mathbf{\Lambda}_{yy} k_{min}^2 + D(k_{min})} \right|.$$

Nous avons également fait une étude dans le cas d'un domaine borné. On remarque que dans le cas des conditions de transmission de Ventcell, nous avons obtenu qu'une approximation asymptotique des paramètres optimisés.

Théorème I.6 (Theorem 2.9 [15])

On note $f_L(k) := D(k) \coth\left(\frac{L}{\mathbf{\Lambda}_{xx}} D(k)\right)$. Le meilleur paramètre de Fourier (I.2) avec $q = 0$ et le taux de convergence associé dans un domaine bornée de taille $2L$ ($\Omega := (-L, L) \times \mathbb{R}$) sont

$$p_{0,L}^{opt} = \sqrt{f_L(k_{min})f_L(k_{max})}, \quad \rho_{0,L}^{opt} = \left| \frac{\sqrt{f_L(k_{max})} - \sqrt{f_L(k_{min})}}{\sqrt{f_L(k_{max})} + \sqrt{f_L(k_{min})}} \right|.$$

Dans le cas Ventcell (I.2), on obtient

$$p_{1,L}^{opt} = \frac{\sqrt{\det \mathbf{\Lambda}} (k_{max}^2 f_L(k_{min}) - k_{min}^2 D(k_{max}))}{\sqrt{2(k_{max}^2 - k_{min}^2)} \sqrt{D(k_{max})} (D(k_{max}) f_L(k_{min}) - D^2(k_{min})) (D(k_{max}) - f_L(k_{min}))} + \mathcal{O}(e^{-k_{max}^2}),$$

$$q_{1,L}^{opt} = \frac{1}{\mathbf{\Lambda}_{yy}} \frac{\sqrt{\det \mathbf{\Lambda}} (D(k_{max}) - f_L(k_{min}))^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{2(k_{max}^2 - k_{min}^2)} \sqrt{D(k_{max})} (D(k_{max}) f_L(k_{min}) - D^2(k_{min}))} + \mathcal{O}(e^{-k_{max}^2}),$$

avec le taux de convergence associé

$$\rho_{1,L}^{opt} = \left| \frac{p_{1,L}^{opt} + q_{1,L}^{opt} \mathbf{\Lambda}_{yy} k_{min}^2 - f_L(k_{min})}{p_{1,L}^{opt} + q_{1,L}^{opt} \mathbf{\Lambda}_{yy} k_{min}^2 + f_L(k_{min})} \right|.$$

Nous illustrons dans le tableau I.1 une comparaison entre les paramètres optimisés $p_{0,\infty}^{opt}$ sur un domaine non-borné, $p_{0,L}^{opt}$ sur un domaine borné, et $p_{0,ddf v,num}^{opt}$ celui qui est numériquement le meilleur. Nous déterminons les paramètres optimisés numériquement $p_{0,ddf v,num}^{opt}$ (ou $p_{1,ddf v,num}^{opt}$

et $q_{1,ddf v,num}^{opt}$) en exécutant notre algorithme pour trouver le paramètre qui donne les meilleures performances au sens où le facteur de convergence approché, calculé en divisant l'erreur après 100 itérations par l'erreur initiale et en prenant la racine 1/99-ième, doit être le plus petit. Nous simulons directement les équations d'erreur et commençons par une estimation initiale aléatoire pour nous assurer que toutes les composantes d'erreur sont présentes.

	$p_{0,\infty}^{opt}$	iter	$p_{0,L}^{opt}$	iter	$p_{0,ddf v,num}^{opt}$	iter
Mesh	$\Lambda = \text{Id}$					
2^{-3}	9.11	43	9.12	43	8.34	39
2^{-4}	12.87	60	12.89	60	11.81	55
2^{-5}	18.21	85	18.23	85	16.43	76
2^{-6}	25.75	120	25.78	120	22.42	105
	$\Lambda_{xx} = 16, \Lambda_{yy} = 1$					
2^{-3}	36.43	28	44.26	35	35.17	27
2^{-4}	51.50	40	62.57	49	49.62	39
2^{-5}	72.82	59	88.48	72	69.46	56
2^{-6}	102.99	82	125.13	100	96.33	77
	$\Lambda_{xx} = 1, \Lambda_{yy} = 16$					
2^{-3}	35.60	95	35.60	95	49.09	73
2^{-4}	50.34	136	50.34	136	74.44	95
2^{-5}	71.20	186	71.20	186	104.99	129
2^{-6}	100.69	254	100.69	254	140.51	185

TABLE I.1 – Paramètres continus optimisés $p_{0,\infty}^{opt}$ et $p_{0,L}^{opt}$ avec $k_{min} = \pi$ et $k_{max} = \frac{\pi}{h}$, et $p_{0,ddf v,num}^{opt}$ celui qui est numériquement le meilleur, avec le nombre d'itérations nécessaires pour avoir une erreur de 10^{-12} . Avec $\eta = 1$ et un maillage cartésien de $\Omega =]-1, 1[\times]0, 1[$.

Il y a deux observations intéressantes :

- Premièrement, dans le cas du laplacien, l'analyse sur le domaine non borné donne un paramètre de Fourier $p_{0,\infty}^{opt}$ très proche du paramètre de Fourier $p_{0,L}^{opt}$ obtenu sur un domaine borné. Il en est de même dans le cas anisotrope lorsque la diffusion dans la direction x reste modérée (par exemple pour $\Lambda_{xx} = 1$ et $\Lambda_{yy} = 16$). Toutefois, ce n'est plus le cas lorsque la diffusion est forte dans la direction x (par exemple pour $\Lambda_{xx} = 16$ et $\Lambda_{yy} = 1$). Les conditions aux bords $x = -1$ et $x = 1$ de Dirichlet homogènes influencent substantiellement la solution, et le fait que le domaine soit borné doit être pris en compte pour déterminer le paramètre optimal $p_{0,L}^{opt}$, (qui est alors différent de $p_{0,\infty}^{opt}$).
- Deuxièmement, dans le cas du laplacien, l'analyse (sur domaine borné et sur domaine non borné) prédit de manière efficace le paramètre optimal trouvé numériquement $p_{0,ddf v,num}^{opt}$. Par contre, dans le cas anisotrope, les valeurs fournies par l'analyse (sur domaine borné ou non borné) restent éloignées des valeurs optimales obtenues numériquement. Dans le cas $\Lambda_{xx} = 16$ et $\Lambda_{yy} = 1$ la prédiction de l'analyse est trop élevée, et elle est trop faible dans le cas $\Lambda_{xx} = 1$ et $\Lambda_{yy} = 16$. L'analyse continue sur domaine borné qui devrait être plus précise ne l'est pas. Lorsque la taille du maillage tend vers 0, le comportement asymptotique des paramètres optimaux obtenus par l'analyse continue est bien capturé. Cependant, pour obtenir une bonne prédiction à maillage fixé, il est alors nécessaire de réaliser une analyse des paramètres optimaux dans le cadre discret.

Le tableau I.2 donne les valeurs des différents paramètres Ventcell optimisés.

Problème	$p = 1, q = 0$	$p = 300, q = 0$	$p = p_{0,\infty}^{opt}, q = 0$	$p = p_{1,\infty}^{opt}, q = q_{1,\infty}^{opt}$
gauche	33	35	8	3
droite	37	34	7	3

TABLE I.3 – Nombre d’itérations obtenus en résolvant le problème de gauche et de droite de la Figure I.3 en utilisant l’algorithme de Schwarz DDFV.

	$p_{1,\infty}^{opt}$	$q_{1,\infty}^{opt}$	iter	$p_{1,L}^{opt}$	$q_{1,L}^{opt}$	iter	$p_{1,ddf, num}^{opt}$	$q_{1,ddf, num}^{opt}$	iter
Mesh	$\Lambda = \text{Id}$								
2^{-3}	3.6870	0.0439	19	3.6959	0.0439	19	4.0220	0.04699	18
2^{-4}	4.4898	0.0269	20	4.4998	0.0269	20	4.5815	0.02878	20
2^{-5}	5.4069	0.0163	24	5.4185	0.0163	24	5.3173	0.01745	24
2^{-6}	6.4718	0.0097	29	6.4853	0.0097	29	6.1922	0.01063	27
	$\Lambda_{xx} = 16, \Lambda_{yy} = 1$								
2^{-3}	14.7479	0.1757	16	20.7545	0.1693	14	19.1678	0.18871	11
2^{-4}	17.9591	0.1077	20	24.6158	0.1059	17	22.1708	0.1249	15
2^{-5}	21.6275	0.0651	24	29.2925	0.0645	22	26.2975	0.07849	19
2^{-6}	25.8870	0.0390	30	34.8627	0.0388	27	30.8763	0.04811	24
	$\Lambda_{xx} = 1, \Lambda_{yy} = 16$								
2^{-3}	14.1316	0.0111	59	14.1316	0.0111	59	35.9474	0.00699	55
2^{-4}	17.2871	0.0068	56	17.2871	0.0068	56	42.0509	0.00542	55
2^{-5}	20.8638	0.0041	56	20.8638	0.0041	56	44.7826	0.00330	55
2^{-6}	24.9996	0.0025	66	24.9996	0.0025	66	44.8830	0.00184	54

TABLE I.2 – Paramètres continus optimisés $p_{1,\infty}^{opt}$, $q_{1,\infty}^{opt}$, $p_{1,L}^{opt}$ et $q_{1,L}^{opt}$ pour $k_{min} = \pi$ et $k_{max} = \frac{\pi}{h}$, et $p_{1,ddf, num}^{opt}$, $q_{1,ddf, num}^{opt}$ celui qui est numériquement le meilleur, avec le nombre d’itérations nécessaires pour avoir une erreur de 10^{-12} . Avec $\eta = 1$ et un maillage cartésien de $\Omega =]-1, 1[\times]0, 1[$.

Nous observons de nouveau comme dans le cas Fourier qu’asymptotiquement les meilleurs paramètres sont bien prédits. Pour de fortes anisotropies, il y a des différences dans les paramètres qui peuvent peut-être être expliquées avec une analyse discrète.

I.5 Illustrations numériques

Nous montrons maintenant comment se comporte notre algorithme sur des maillages non-conformes et des maillages non cartésiens voir la Figure I.3. On initialise avec zéro. Pour le problème à gauche, on utilise une matrice de diffusion diagonale avec $\Lambda_{xx} = 16$ et $\Lambda_{yy} = 1$ et une terme source qui vaut $f(x, y) = e^{-(x+0.5)^2 - (y-0.5)^2}$. Nous indiquons dans le Tableau I.3 le nombre d’itérations pour obtenir une erreur de convergence de 1% avec la solution sur tout le domaine avec différents paramètres optimaux : avec $p = 1, q = 0, p = 300, q = 0$, comparé avec le paramètre de Fourier optimal continu $p_{0,\infty}^{opt} = 63.07$ et ceux de Ventcell optimaux continus $p_{1,\infty}^{opt} = 20.04$ et $q_{1,\infty}^{opt} = 0.0803$. On voit bien que l’utilisation des paramètres prédits par l’analyse continue conduit à de grandes économies sur le nombre d’itérations nécessaires, et ceci sans modifier le cout de calcul par itération. Nous avons obtenu des résultats similaires pour l’exemple de droite dans la Figure I.3, où nous avons maintenant utilisé une matrice de diffusion entièrement anisotrope $\Lambda = \begin{bmatrix} 16 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$ et le même terme source, voir le Tableau I.3. Les paramètres optimisés par l’analyse continue sont $p_{0,\infty}^{opt} = 51.5$ dans le cas Fourier, et $p_{1,\infty}^{opt} = 17.96$ et $q_{1,\infty}^{opt} = 0.1077$ dans le cas Ventcell. Là encore, les paramètres prédits conduisent à des économies importantes.

Pour ce cas test, nous avons choisi une diffusion anisotrope variable en espace. La solution du

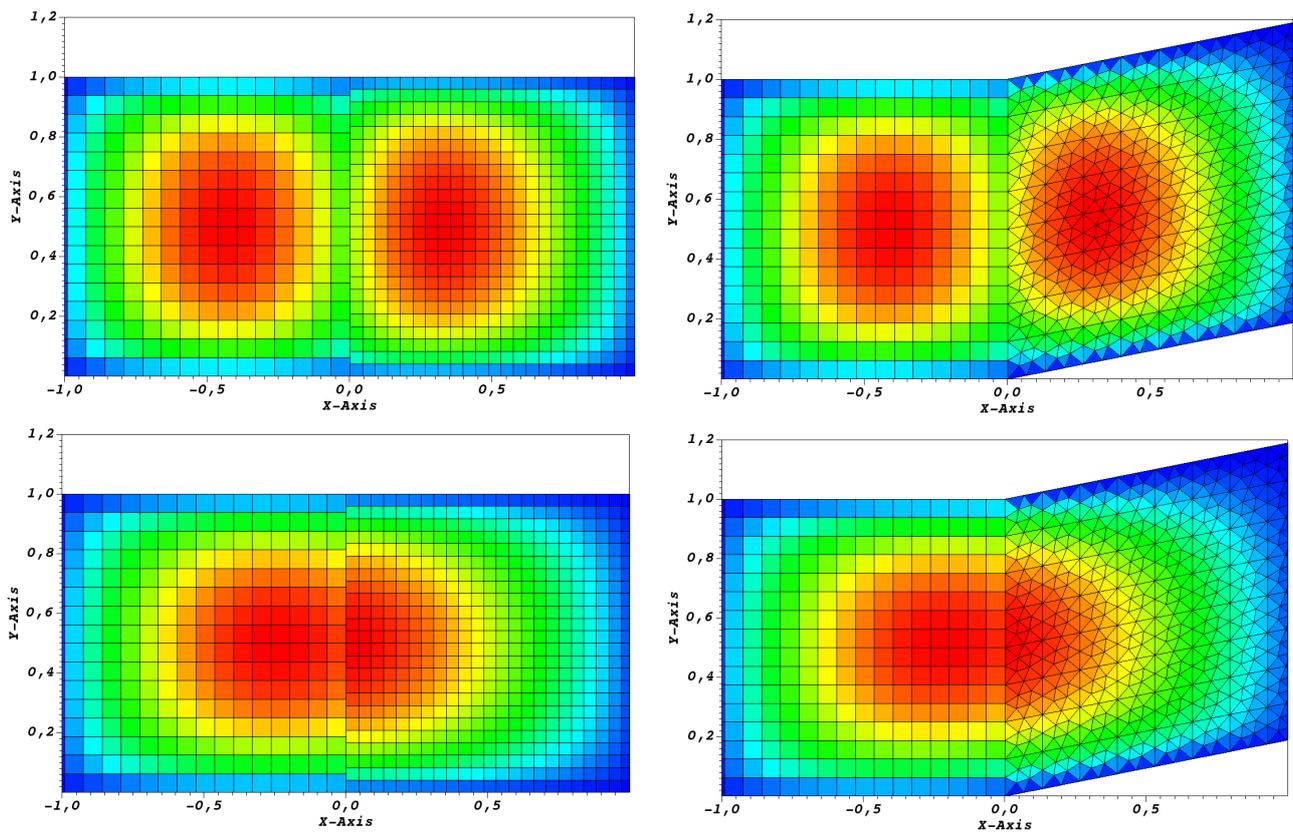


FIGURE I.3 – Première et troisième itération de l'algorithme de Schwarz DDFV. Gauche : Maillage non-conforme avec une matrice Λ diagonale. Droite : Maillage général sur un domaine irrégulier et une matrice Λ pleine.

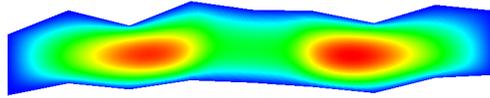
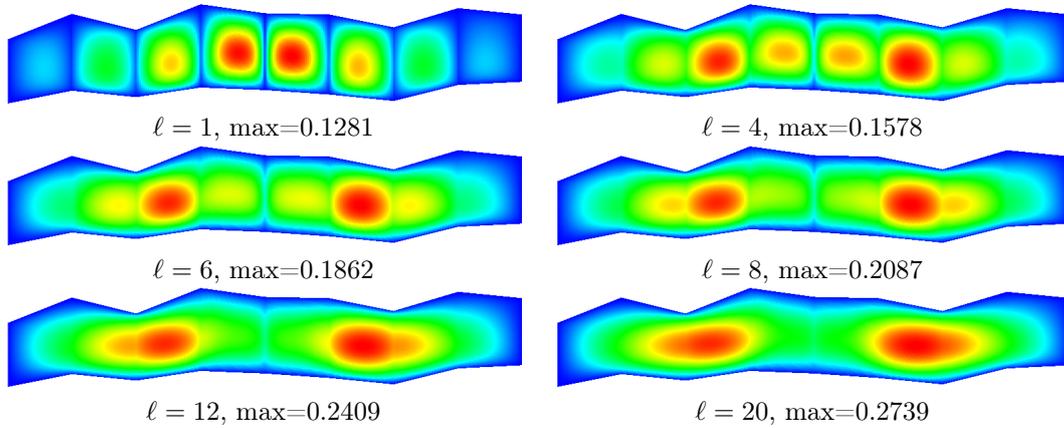
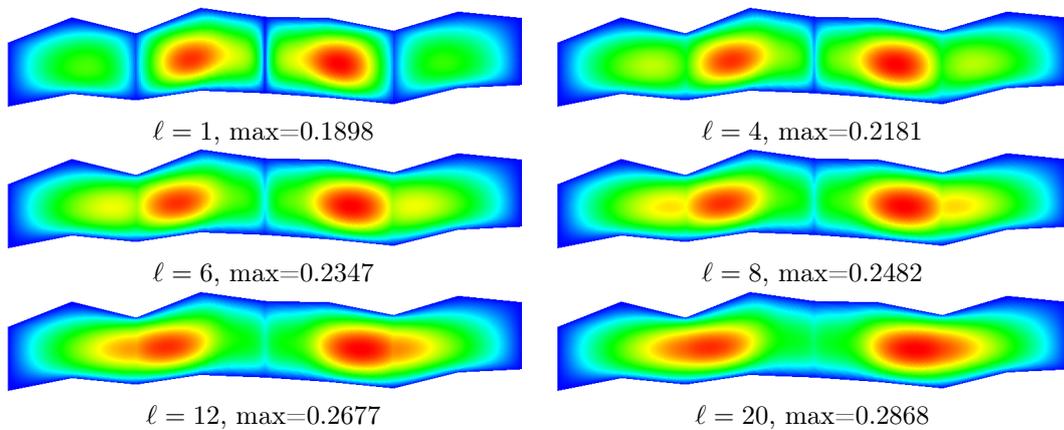


FIGURE I.4 – La solution DDFV sur le domaine complet : la valeur maximale de la solution est 0.2958

FIGURE I.5 – Les itérations $\ell = 1, 4, 6, 8, 12, 20$ pour le cas de 8 sous-domaines, avec la valeur maximale atteinte par l'itéré.

problème est illustrée dans la Figure I.4, où l'on peut clairement voir que la diffusion anisotrope génère deux maxima, même si la source n'en avait qu'un. La solution a été obtenue en utilisant notre algorithme (I.9)-(I.10) et 8 sous-domaines, avec comme paramètres optimisés $p = 17.96$ et $q = 0.1077$ obtenus de l'analyse sur deux sous-domaines, partant avec une initialisation nulle. Nous montrons dans la Figure I.5 les itérations $\ell = 1, 4, 6, 8, 12, 20$ pour illustrer la convergence de l'algorithme. Nous pouvons voir comment la méthode génère d'abord des maxima dans chaque sous-domaine, mais identifie très rapidement la véritable position des maxima de la solution, et converge rapidement. Ensuite, nous exécutons également notre algorithme en utilisant seulement quatre sous-domaines, voir la Figure I.6, et finalement seulement sur 2 sous-domaines, voir la Figure I.7. Comme prévu, la convergence est plus rapide en utilisant moins de sous-domaines car nous n'utilisons qu'une méthode à un niveau, mais nous observons également que les deux maxima dans la solution sous-jacente sont identifiés très rapidement.

FIGURE I.6 – Les itérations $\ell = 1, 4, 6, 8, 12, 20$ pour le cas de 4 sous-domaines, avec la valeur maximale atteinte par l'itéré.

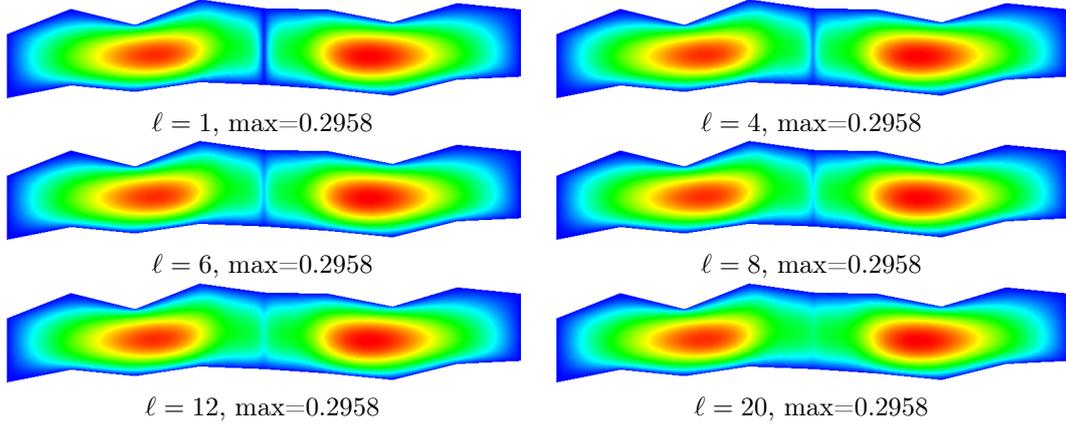


FIGURE I.7 – Les itérations $\ell = 1, 4, 6, 8, 12, 20$ pour le cas de 2 sous-domaines, avec la valeur maximale atteinte par l'itéré.

I.6 Etude des paramètres optimisés dans le cas discret

Dans cette section, la matrice d'anisotropie $\mathbf{\Lambda}$ est supposée constante sur Ω .

Nous présentons pour la première fois une optimisation discrète du paramètre de Fourier dans les conditions de transmission de l'algorithme Schwarz DDFV (I.7)-(I.8) afin de comprendre pourquoi les paramètres optimisés de l'analyse continue dans la section précédente donnent parfois des performances sous-optimales pour les anisotropies élevées. Comme dans le cas continu, nous nous concentrons sur une décomposition en deux sous-domaines. Pour obtenir un facteur de convergence discret, nous utilisons l'approche typique dans les méthodes Schwarz optimisées : nous considérons un domaine $\Omega := (-a, a) \times (0, b)$ décomposé en deux sous-domaines disjoints $\Omega_1 := (-a, 0) \times (0, b)$ et $\Omega_2 := (0, a) \times (0, b)$, avec l'interface $\Gamma := \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. Nous utilisons une grille rectangulaire, de sorte que la discrétisation DDFV loin de l'interface Γ conduit à deux schémas de différence finie en cinq points entrelacés. Le pas du maillage est indiquée par (h_x, h_y) avec $a = Mh_x < \infty$. Nous supposons également ici que $\mathbf{\Lambda}_{xy} = 0$, ainsi les deux relations de récurrence se découplent.

Théorème I.7 (Theorem 3.2 [18])

Le coefficient menant à la meilleure convergence de l'algorithme de Schwarz DDFV Fourier (I.7)-(I.8) est donné par

$$p_{0,ddfV,\alpha}^{opt} = \sqrt{f_{cc,\alpha}(\nu_{\min})f_{vc,\alpha}(\nu_{\max})}, \quad (\text{I.11})$$

où $\alpha \in \{M, \infty\}$ en fonction des cas bornés ou non-bornés, et le facteur de convergence associé est

$$\frac{\sqrt{f_{vc,\alpha}(\nu_{\max})} - \sqrt{f_{cc,\alpha}(\nu_{\min})}}{\sqrt{f_{vc,\alpha}(\nu_{\max})} + \sqrt{f_{cc,\alpha}(\nu_{\min})}},$$

où $\nu_{\min} = \nu(k_{\min})$, $\nu_{\max} = \nu(k_{\max})$ avec $k_{\min} = 1$ et $k_{\max} = \frac{b}{h_y} - 1$. Les fonctions sont définies par

$$\begin{aligned} f_{cc,\infty}(\nu) &= \frac{\mathbf{\Lambda}_{xx}}{h_x} \sinh \nu, & f_{vc,\infty}(\nu) &= 2 \frac{\mathbf{\Lambda}_{xx}}{h_x} \tanh \frac{\nu}{2} \\ f_{cc,M}(\nu) &= \frac{\mathbf{\Lambda}_{xx}}{h_x} \sinh \nu \coth(M\nu), & f_{vc,M}(\nu) &= 2 \frac{\mathbf{\Lambda}_{xx}}{h_x} \tanh \frac{\nu}{2} \coth(M\nu) \end{aligned}$$

Mesh	Analyse discrète		Le meilleur numériquement
	$p_{0,ddf v,\infty}^{opt}$	$p_{0,ddf v,M}^{opt}$	$p_{0,ddf v,num}^{opt}$
	$\Lambda_{xx} = 1, \Lambda_{yy} = 1, \eta = 1$		
2^{-3}	8.54	8.55	8.27
2^{-4}	12.18	12.20	11.79
2^{-5}	17.26	17.29	16.26
2^{-6}	24.42	24.46	22.13
	$\Lambda_{xx} = 16, \Lambda_{yy} = 1, \eta = 1$		
2^{-3}	29.42	35.83	35.01
2^{-4}	41.69	50.68	49.59
2^{-5}	58.98	71.67	68.66
2^{-6}	83.42	101.36	96.45
	$\Lambda_{xx} = 1$ et $\Lambda_{yy} = 16, \eta = 1$		
2^{-3}	51.02	51.02	48.41
2^{-4}	78.62	78.62	74.03
2^{-5}	114.24	114.24	103.04
2^{-6}	162.73	162.73	135.74

TABLE I.4 – Paramètres optimisés discrets $p_{0,ddf v,\infty}^{opt}$ et $p_{0,ddf v,M}^{opt}$, et $p_{0,ddf v,num}^{opt}$ celui qui est numériquement le meilleur.

$$\left\| \text{avec } \nu = -\log \left(1 + \frac{\mu(k)}{2} - \sqrt{\mu(k) + \frac{\mu(k)^2}{4}} \right), \text{ et } \mu(k) = \frac{h_x^2}{\Lambda_{xx}} \left(\frac{4\Lambda_{yy}}{h_y^2} \sin^2 \left(\frac{k\pi h_y}{2b} \right) + \eta \right) \right\|.$$

Nous donnons dans le tableau I.4 les résultats correspondants aux paramètres optimisés discrets donnés par le Théorème I.7. Il y a plusieurs observations intéressantes : premièrement, nous voyons que l'analyse discrète sur domaine borné prédit relativement bien le comportement du paramètre optimal obtenu numériquement (en particulier pour le laplacien et pour une faible diffusion selon y). Deuxièmement, dans le cas anisotrope, il y a une différence substantielle entre l'analyse continue et discrète, et les paramètres continus fonctionnent moins bien avec une forte diffusion le long de la direction d'interface, $\Lambda_{yy} = 16$. Troisièmement, nous voyons que pour le cas du laplacien, les analyses bornées et non bornées donnent des résultats similaires. Avec une forte diffusion à travers l'interface, $\Lambda_{xx} = 16$, la différence entre l'analyse discrète sur domaine borné et celle sur domaine non borné devient importante et c'est celle bien sûr sur le domaine borné qui est marche le mieux.

I.7 Considération d'un point de croisement

Nous généralisons ici notre algorithme de Schwarz avec des conditions de transmission de type Fourier $q = 0$ à la prise en compte des points de croisement. Nous notons pour Ω_j l'ensemble des indices voisins par $I_j := \{i \text{ tel que } \Gamma_{ji} \neq \emptyset\}$ où Γ_{ji} est l'interface entre Ω_j et Ω_i et

$$\begin{aligned} \partial\mathcal{M}_{j,\Gamma_i} &:= \{\kappa \in \partial\mathcal{M}_j, \kappa \cap \Gamma_{ji} \neq \emptyset\} \text{ les mailles primales du bord intersectant } \Gamma_{ji}, \\ \partial\mathcal{M}_{j,\Gamma_i,int}^* &:= \{\kappa^* \in \partial\mathcal{M}_j^*, \kappa^* \cap \Gamma_{ji} \neq \emptyset\} \text{ les mailles duales du bord intersectant } \Gamma_{ji}, \end{aligned}$$

L'ensemble des mailles primales du bord qui ne sont pas situées sur le bord Dirichlet est noté

$$\partial\mathcal{M}_{j,\Gamma} := \cup_{i \in I_j} \partial\mathcal{M}_{j,\Gamma_i}.$$

L'ensemble des mailles duales du bord qui ne sont pas situées sur le bord Dirichlet est noté

$$\partial\mathcal{M}_{j,\Gamma,int}^* := \cup_{i \in I_j} \partial\mathcal{M}_{j,\Gamma_i,int}^*.$$

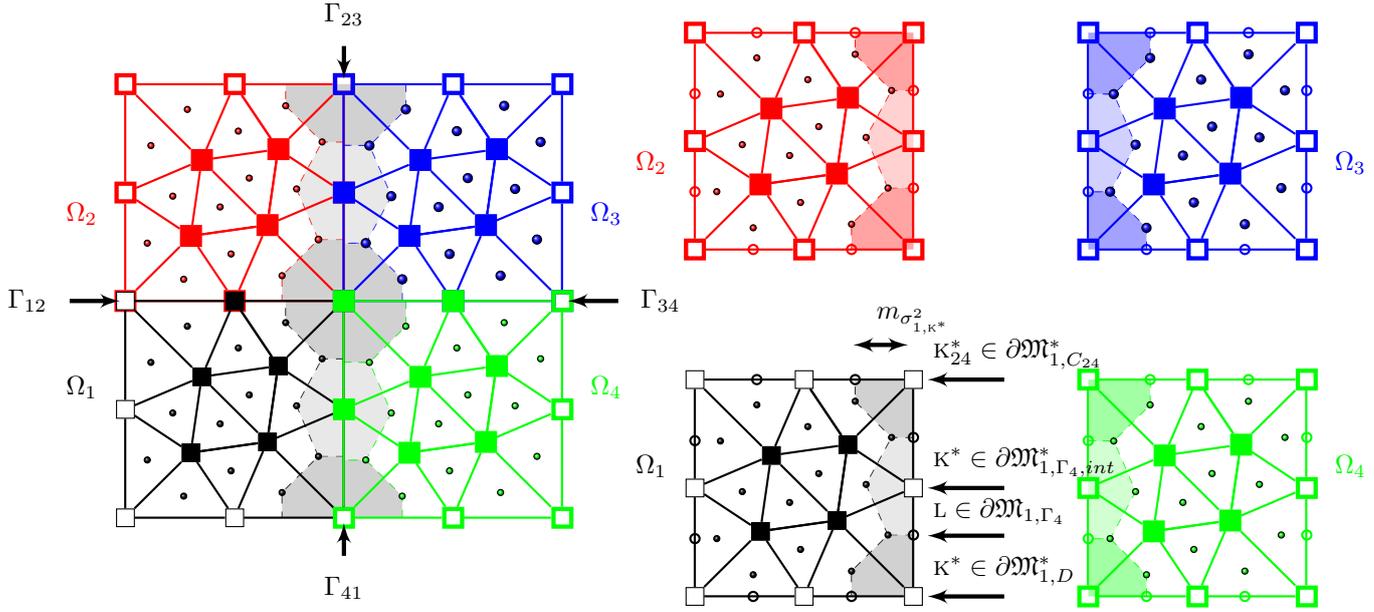


FIGURE I.8 – Gauche : exemple d'un maillage du domaine Ω , avec des mailles duales coupées par Γ_{23} et Γ_{41} . Droite : exemple de maillage composite associé à la décomposition de domaine $\Omega = \cup_{i=1}^4 \Omega_i$, avec les notations pour l'interface Γ_{41} pour les mailles primales et duales du bord.

Pour le point de croisement C_{ik} , pour $i, k \in I_j$ tels que $\Gamma_{ji} \cap \Gamma_{jk} = \{C_{ik}\}$, voir la Figure I.8, nous notons

$$\partial\mathcal{M}_{j,C_{ik}}^* := \{\kappa^* \in \partial\mathcal{M}_j^*, x_{\kappa^*} = C_{ik}\}$$

les mailles duales du point de croisement, et nous définissons les ensembles suivants

$$\partial\mathcal{M}_{j,C}^* := \cup_{i,k \in I_j} \partial\mathcal{M}_{j,C_{ik}}^*, \quad \partial\mathcal{M}_{j,\Gamma}^* = \partial\mathcal{M}_{j,\Gamma}^{*,int} \cup \partial\mathcal{M}_{j,C}^*.$$

Nous remarquons que maintenant $\psi_{\mathcal{T}_j} \in \mathbb{R}^{\partial\mathcal{M}_{j,\Gamma}^*}$ contient les inconnues ψ_{κ^*} pour $\kappa^* \in \partial\mathcal{M}_{j,\Gamma}^{*,int}$ et aussi celles reliées au point de croisement ψ_{j,κ^*} et ψ_{j,κ^*} pour $\kappa^* \in \partial\mathcal{M}_{j,C_{ik}}^*$ (voir la Figure I.9).

Nous procédons de la même manière que pour l'algorithme (I.7)-(I.8) en traitant à part le point de croisement :

- Pour $j \in \{1, 2\}$, on choisit $h_{\mathcal{T}_j}^0 \in \mathbb{R}^{\partial\mathcal{M}_{j,\Gamma} \cup \partial\mathcal{M}_{j,\Gamma}^*}$.
- Pour tout $\ell \geq 0$, et pour $i, j \in \{1, 2\}$, $j \neq i$:
 - ♦ Nous obtenons $U_{\mathcal{T}_j}^{\ell+1} = (u_{\mathcal{T}_j}^{\ell+1}, \psi_{\mathcal{T}_j}^{\ell+1}) \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}_j} \times \mathbb{R}^{\partial\mathcal{M}_{j,\Gamma}^*}$ solution de (I.7a)-(I.7d) et prenant uniquement les équations (I.7e) pour tout $\kappa^* \in \partial\mathcal{M}_{j,\Gamma}^{*,int}$ et (I.7f) pour tout $\kappa^* \in \partial\mathcal{M}_{j,\Gamma}^{*,int}$ et en ajoutant

$$-\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa^*}} \frac{m_{\sigma^*}}{m_{\kappa^*}} \Lambda_{\mathcal{D}} \nabla^{\mathcal{D}} u_{\mathcal{T}_j}^{\ell+1} \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa^*} - m_{\sigma_{j,\kappa^*}^i} \psi_{j,\kappa^*}^{i,\ell+1} - m_{\sigma_{j,\kappa^*}^k} \psi_{j,\kappa^*}^{k,\ell+1} + \eta_{\kappa^*} u_{\kappa^*}^{\ell+1} = f_{\kappa^*}, \quad \forall \kappa^* \in \partial\mathcal{M}_{j,C_{ik}}^*, \quad (\text{I.12a})$$

$$\psi_{j,\kappa^*}^{k,\ell+1} + pu_{\kappa^*}^{\ell+1} = h_{j,\kappa^*}^{k,\ell} \text{ et } \psi_{j,\kappa^*}^{i,\ell+1} + pu_{\kappa^*}^{\ell+1} = h_{j,\kappa^*}^{i,\ell}, \quad \forall \kappa^* \in \partial\mathcal{M}_{j,C_{ik}}^*, \quad (\text{I.12b})$$

où on a ajouté l'indice j dans les données d'interface h_j pour rappeler qu'elles sont pour le sous-domaine Ω_j .

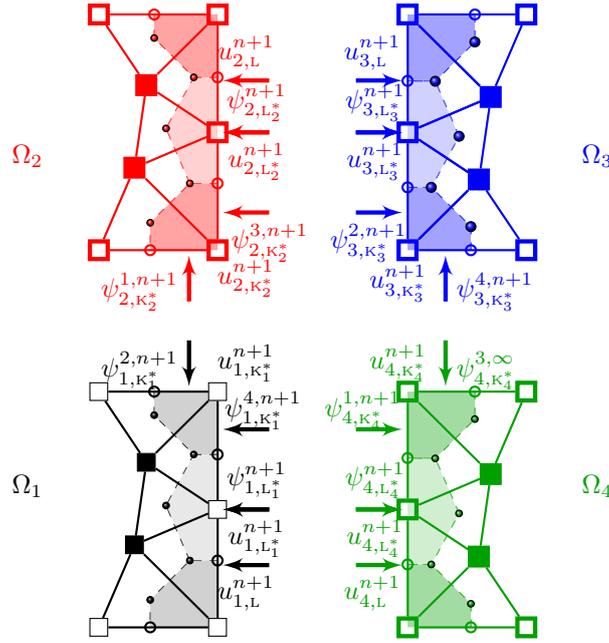


FIGURE I.9 – Localisation des inconnues des interfaces.

◆ Nous évaluons $h_{\mathcal{T}_j}^{\ell+1}$ grâce à

$$h_{j,\mathcal{L}}^{\ell+1} = -\Lambda_D \nabla^D u_{\mathcal{T}_i}^{\ell+1} \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa} + pu_{i,\mathcal{L}}^{\ell+1}, \forall \mathcal{L} \in \partial\mathcal{M}_{j,\Gamma_i}, \forall i \in I_j, \quad (\text{I.13a})$$

$$h_{j,\kappa^*}^{\ell+1} = -\psi_{i,\mathcal{L}^*}^{\ell+1} + pu_{i,\mathcal{L}^*}^{\ell+1}, \forall \kappa^* \in \partial\mathcal{M}_{j,\Gamma_i, \text{int}}^*, \forall \mathcal{L}^* \in \partial\mathcal{M}_{i,\Gamma_j, \text{int}}^*, x_{\kappa^*} = x_{\mathcal{L}^*}, \forall i \in I_j, \quad (\text{I.13b})$$

$$h_{j,\kappa^*}^{i,\ell+1} = -\psi_{i,\mathcal{L}^*}^{j,\ell+1} + pu_{i,\mathcal{L}^*}^{\ell+1}, \forall \kappa^* \in \partial\mathcal{M}_{j,C}^*, \forall \mathcal{L}^* \in \partial\mathcal{M}_{i,C}^*, x_{\kappa^*} = x_{\mathcal{L}^*}, \forall i \in I_j. \quad (\text{I.13c})$$

Théorème I.8 (Theorem 2.1 [18])

La solution $(u_{\mathcal{T}_j}^{\ell})_j$ de l'algorithme DDFV optimisé de Schwarz définie par (I.12) existe et est unique.

Théorème I.9 (Theorem 2.2 [18])

La solution $(u_{\mathcal{T}_j}^{\ell})_j$ de l'algorithme DDFV optimisé de Schwarz définie par (I.12)-(I.13) converge quand ℓ tend vers l'infini vers la solution $u_{\mathcal{T}}$ du schéma DDFV (I.4) sur Ω .

I.8 Application : reconstruction d'images

Nous montrons enfin une application de la diffusion anisotrope pour la reconstruction d'images. Notre domaine contenu dans le rectangle $(-2, 2) \times (-1, 1)$ est montré dans la Figure I.10. Il représente une section 2D d'un modèle souterrain, où, dans la région de maillage raffiné au fond, il y a un dôme de sel d'intérêt pour la récupération du pétrole. Au sommet, nous avons la surface de la terre, avec une partie plate et une partie inclinée vers le bas. Nous décomposons le domaine en quatre sous-domaines, trois rectangulaires et le coin supérieur droit est triangulaire, et les maillons en utilisant différentes techniques de maillage. Il y a un point de croisement. Nous générons une image artificielle $\tilde{u}_0(x, y)$ dans ce domaine avec plusieurs couches, illustrée à la Figure I.11 en haut à gauche. Nous ajoutons ensuite du bruit aléatoire à cette image pour obtenir $u_0(x, y)$, ce qui conduit à l'image en haut à droite de la figure I.11. Pour supprimer le

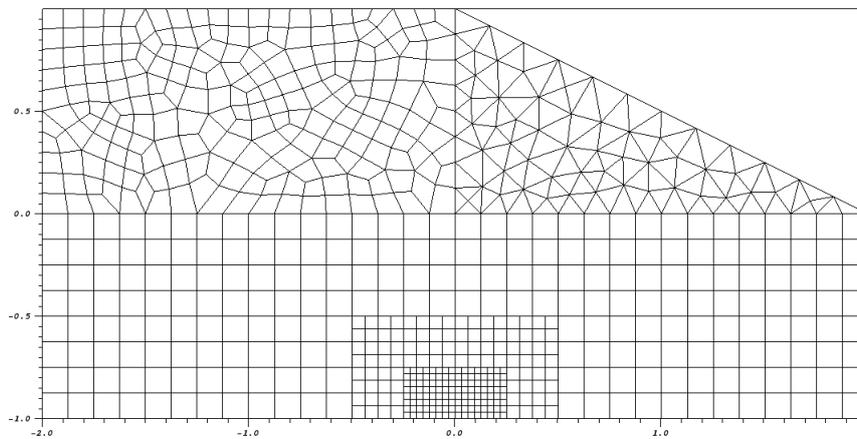


FIGURE I.10 – Domaine pour la reconstruction d’images pour un dôme de sel. Les simulations sont faites sur un maillage 3 fois plus raffiné.

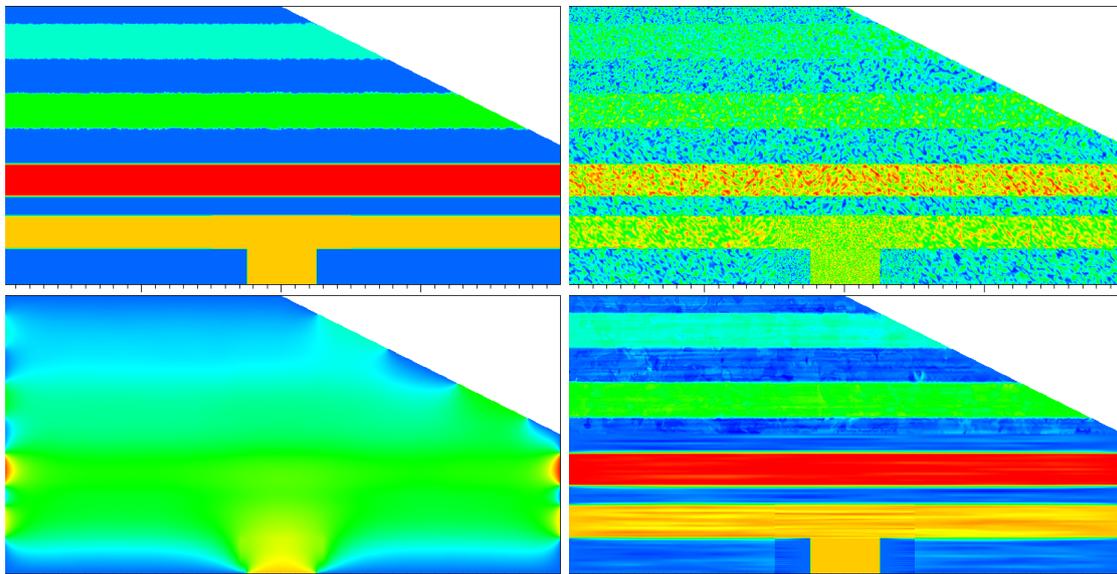


FIGURE I.11 – En haut à gauche : image originale sans bruit. En haut à droite : image avec un bruit aléatoire. En bas à gauche : image obtenue à l’aide de notre algorithme avec une diffusion isotrope. En bas à droite : image obtenue à l’aide de notre algorithme avec une diffusion anisotrope.

bruit, on peut utiliser une équation de diffusion dépendante du temps de la forme

$$\partial_t u(x, y, t) = \operatorname{div}(\mathbf{\Lambda}(x, y) \nabla u(x, y, t)), \quad u(x, y, 0) = u_0(x, y),$$

et prendre un ou plusieurs pas de temps d'une méthode d'Euler retrograde pour lisser le bruit haute fréquence. Si l'on fait un pas avec le pas de temps $\Delta t = 0.1$ sur le maillage de la Figure I.10, et utilise la diffusion isotrope, $\mathbf{\Lambda} = 1$, on obtient le résultat affiché en bas à gauche de la Figure I.11. Nous voyons que toutes les frontières nettes ont également été diffusées, ainsi que le bruit. Pour éviter cela, nous choisissons maintenant la diffusion anisotrope, avec

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1e - 5 \end{pmatrix}$$

sauf dans la zone $-1 < y < -0.75$ et $-0.3 < x < 0.3$ où l'on choisit

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1e - 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce choix est bien adapté à notre image, car dans la zone spéciale, les lignes sont verticales, où dans le reste elles sont horizontales, et nous ne voulons pas diffuser à travers les interfaces nettes, seulement le long d'elles. Dans une situation plus réaliste, il faudrait utiliser dans le tenseur de diffusion anisotrope le gradient de la solution u pour déterminer les directions de diffusion à éviter.

La reconstruction calculée avec notre algorithme est montrée en bas à droite dans la Figure I.11. Nous voyons clairement que la diffusion anisotrope est très bien capable de préserver les lignes dans le processus d'élimination du bruit. Dans une situation plus réaliste, il faudrait utiliser dans le tenseur de diffusion anisotrope le gradient de u pour déterminer les directions de diffusion à éviter. En utilisant le paramètre de Fourier $p = 0,05$, notre algorithme a eu besoin de 14 itérations pour converger vers une tolérance de $1e - 3$, alors qu'avec $p = 0,01$ il a fallu 45 itérations, et avec $p = 1,5$ il a fallu 213 itérations. Cela illustre bien l'importance d'un bon choix du paramètre p .

Chapitre II

Discrétisation des problèmes de diffusion-convection-réaction

Dans ce chapitre, je présente les travaux que nous avons réalisés sur des schémas DDFV pour les équations de diffusion-convection-réaction. Ce chapitre se partage en deux parties. La première partie traite du modèle de Peaceman étudié dans [6] et [9]. La deuxième partie s'intéresse à la discrétisation DDFV du modèle de Fokker-Planck préservant les états stationnaires voir [11], [14] et [29]. Toutes les notations et les opérateurs sont définis dans l'Annexe.

II.1 Etude pour le problème de Peaceman

II.1.1 Présentation du problème de Peaceman

Nous supposons que Ω est un connexe polygonal domaine de \mathbb{R}^2 et $T > 0$. Les inconnus du modèle de Peaceman sont la pression dans le mélange fluide p , sa vitesse de Darcy \mathbf{U} et la concentration d'un fluide polluant c . Le modèle s'écrit comme dans [CHD07]

$$\operatorname{div}(\mathbf{U}) = q^+ - q^- \quad \text{dans }]0, T[\times \Omega, \quad (\text{II.1a})$$

$$\mathbf{U} = -\mathbf{\Lambda}(\cdot, c)\nabla p \quad \text{dans }]0, T[\times \Omega, \quad (\text{II.1b})$$

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{\bar{n}} = 0 \quad \text{sur }]0, T[\times \partial\Omega, \quad (\text{II.1c})$$

$$\int_{\Omega} p(\cdot, x) dx = 0 \quad \text{sur }]0, T[, \quad (\text{II.1d})$$

$$\Phi \partial_t c - \operatorname{div}(\mathbb{D}(\cdot, \mathbf{U})\nabla c) + \operatorname{div}(c\mathbf{U}) + q^- c = q^+ \hat{c} \quad \text{dans }]0, T[\times \Omega, \quad (\text{II.2a})$$

$$\mathbb{D}(\cdot, \mathbf{U})\nabla c \cdot \mathbf{\bar{n}} = 0 \quad \text{sur }]0, T[\times \partial\Omega, \quad (\text{II.2b})$$

$$c(0, \cdot) = c_0 \quad \text{sur } \Omega. \quad (\text{II.2c})$$

Dans ce système, q^+ et q^- sont des termes d'injection et de production, \hat{c} la concentration injectée, Φ la porosité du milieu poreux. Le tenseur $\mathbf{\Lambda}$ contient l'effet de la perméabilité du milieu poreux et la viscosité du mélange. Le tenseur \mathbb{D} est le tenseur de diffusion-dispersion ; il contient la diffusion moléculaire et la dispersion mécanique. Nous supposons les hypothèses suivantes :

$$(q^+, q^-) \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ sont des fonctions positives telles que} \quad (\text{II.3})$$

$$\int_{\Omega} q^+(\cdot, x) dx = \int_{\Omega} q^-(\cdot, x) dx \text{ presque partout dans }]0, T[,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda} : \Omega \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ est une matrice de Carathéodory vérifiant :} \\ \exists \alpha_A > 0 \text{ t.q. } \mathbf{\Lambda}(x, s)\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} &\geq \alpha_A |\boldsymbol{\xi}|^2 \text{ pour presque tout } x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R} \text{ et } \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2, \\ \exists \lambda_{\mathbf{\Lambda}} > 0 \text{ t.q. } |\mathbf{\Lambda}(x, s)| &\leq \lambda_{\mathbf{\Lambda}} \text{ pour presque tout } x \in \Omega \text{ et } \forall s \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{D} : \Omega \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ est une matrice de Carathéodory vérifiant :} \\ \exists \alpha_D > 0 \text{ t.q. } \mathbb{D}(x, \mathbf{W})\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} &\geq \alpha_D (1 + |\mathbf{W}|) |\boldsymbol{\xi}|^2 \text{ pour presque tout } x \in \Omega, \forall \mathbf{W}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2, \\ \exists \mathbf{\Lambda}_D > 0 \text{ t.q. } |\mathbb{D}(x, \mathbf{W})| &\leq \mathbf{\Lambda}_D (1 + |\mathbf{W}|) \text{ pour presque tout } x \in \Omega \text{ et } \forall \mathbf{W} \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

$$\Phi \in L^\infty(\Omega) \text{ et il existe } \Phi_* > 0 \text{ t.q. } \Phi_* \leq \Phi \leq \Phi_*^{-1} \text{ presque partout dans } \Omega, \quad (\text{II.6})$$

$$\widehat{c} \in L^\infty(]0, T[\times \Omega) \text{ vérifiant : } 0 \leq \widehat{c} \leq 1 \text{ presque partout dans }]0, T[\times \Omega, \quad (\text{II.7})$$

$$c_0 \in L^\infty(\Omega) \text{ vérifiant : } 0 \leq c_0 \leq 1 \text{ presque partout dans } \Omega. \quad (\text{II.8})$$

La définition suivante (similaire à celle dans [Fen95]) donne le sens d'une solution faible à (II.1)—(II.2).

Définition II.1

Sous les hypothèses (II.3)—(II.8), une solution faible à (II.1)—(II.2) est un triplet (p, \mathbf{U}, c) vérifiant

$$\begin{aligned} p &\in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \quad \mathbf{U} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))^2, \quad c \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)), \\ \int_{\Omega} p(t, \cdot) &= 0 \text{ pour presque tout } t \in]0, T[, \quad \mathbf{U} = -\mathbf{\Lambda}(\cdot, c)\nabla p \text{ presque partout dans }]0, T[\times \Omega, \\ \forall \varphi \in C^\infty([0, T] \times \bar{\Omega}), \quad &-\int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{U} \cdot \nabla \varphi = \int_0^T \int_{\Omega} (q^+ - q^-)\varphi, \\ \forall \varphi \in C_c^\infty([0, T[\times \bar{\Omega}), \quad &-\int_0^T \int_{\Omega} \Phi c \partial_t \varphi + \int_0^T \int_{\Omega} \mathbb{D}(\cdot, \mathbf{U}) \nabla c \cdot \nabla \varphi - \int_0^T \int_{\Omega} c \mathbf{U} \cdot \nabla \varphi \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} q^- c \varphi - \int_{\Omega} \Phi c_0 \varphi(0, \cdot) = \int_0^T \int_{\Omega} q^+ \widehat{c} \varphi. \end{aligned}$$

Dans [6], nous avons proposé un schéma DDFV pour le problème de Peaceman (II.1)-(II.2).

Pour prouver la convergence du schéma, nous avons besoin d'ajouter un opérateur de pénalisation dans la discrétisation de l'équation de convection-diffusion-dispersion. Un tel opérateur de pénalisation a déjà été introduit par Andreianov, Bendahmane et Karlsen dans la discrétisation d'une équation hyperbolique-parabolique dégénéré [ABK10]. Il assure que les deux reconstructions de la concentration, celle sur le maillage primal et celle sur le maillage dual, convergent vers la même limite. C'est crucial quand nous passons à la limite dans l'équation de concentration. Pourtant, les expériences numériques montrent que l'opérateur de pénalisation n'est pas nécessaire en pratique.

Afin de montrer ce théorème, nous appliquons une stratégie similaire à [Fen95] sur nos approximations discrètes au lieu de régulariser le modèle de Peaceman. Nous établissons des estimations *a priori* vérifiées par la solution discrète du schéma. Les premières estimations conduisent au caractère bien posé du schéma et fournissent les premiers résultats de compacités en espace. Afin d'avoir la compacité en espace et en temps de la suite des solutions discrètes, nous appliquons la version discrète du Théorème d'Aubin-Simon, démontré par Gallouët et Latché dans [GL12]. Pour cela nous établissons une estimation sur la dérivée en temps discrète. Enfin, nous illustrons le comportement numérique du schéma DDFV. Dans cette dernière section, nous montrons l'effet du terme de pénalisation introduit pour la convergence mais qui en pratique peut être mis à 0.

II.1.2 Le schéma DDFV pour le modèle de Peaceman

Soit $(\mathcal{T}, \mathfrak{D})$ un maillage DDFV de Ω et $dt > 0$ le pas de temps. On pose $N_T = T/dt$ (nous choisissons toujours les pas de temps de sorte que N_T soit un entier) et nous définissons $t_n = ndt$ pour $n \in \{0, \dots, N_T\}$.

Premièrement, nous discrétisons toutes les données du problème. Nous définissons $c_{\mathcal{T}}^0 = \mathbb{P}_m^{\mathcal{T}} c_0 \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$. et $\Phi_{\mathcal{T}} = \mathbb{P}_m^{\mathcal{T}} \Phi \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$. Pour tout $n \geq 1$, pour $w = q^+, q^-, \hat{c}$, nous écrivons :

$$w_{\mathcal{T}}^n = \frac{1}{dt} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbb{P}_m^{\mathcal{T}} w(\cdot, t) dt.$$

A chaque itération en temps n , la solution discrète est donnée par $(p_{\mathcal{T}}^n, \mathbf{U}_{\mathfrak{D}}^n, c_{\mathcal{T}}^n) \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \times (\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ et les calculs de la pression et de la vitesse $(p_{\mathcal{T}}^n, \mathbf{U}_{\mathfrak{D}}^n)$ vont être découplés du calcul de la concentration $(c_{\mathcal{T}}^n)$. Le couplage dans la loi de Darcy (II.1b) impose de reconstruire une approximation sur les diamants $c_{\mathfrak{D}}^{n-1} = (c_{\mathcal{D}}^{n-1})_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}}$ à partir $c_{\mathcal{T}}^{n-1}$ dans la formule (V.17). Nous introduisons également l'approximation des tenseurs

$$\Lambda_{\mathcal{D}}(s) = \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} \Lambda(x, s) dx \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{D}_{\mathcal{D}}(\mathbf{W}) = \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} \mathbb{D}(x, \mathbf{W}) dx, \quad \forall \mathbf{W} \in \mathbb{R}^2.$$

Ce qui permet de définir $\Lambda_{\mathfrak{D}}(c_{\mathfrak{D}}^{n-1}) = (\Lambda_{\mathcal{D}}(c_{\mathcal{D}}^{n-1}))_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}}$ et $\mathbb{D}_{\mathfrak{D}}(\mathbf{U}_{\mathfrak{D}}^n) = (\mathbb{D}_{\mathcal{D}}(\mathbf{U}_{\mathcal{D}}^n))_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}}$.

Le schéma DDFV pour (II.1) s'écrit : $\forall 1 \leq n \leq N_T$

$$\operatorname{div}^{\mathcal{T}}(\mathbf{U}_{\mathfrak{D}}^n) = q_{\mathcal{T}}^{+,n} - q_{\mathcal{T}}^{-,n}, \quad (\text{II.9a})$$

$$\mathbf{U}_{\mathfrak{D}}^n = -\Lambda_{\mathfrak{D}}(c_{\mathfrak{D}}^{n-1}) \nabla^{\mathfrak{D}} p_{\mathcal{T}}^n, \quad (\text{II.9b})$$

$$\mathbf{U}_{\mathcal{D}}^n \cdot \mathbf{\bar{n}}_{\sigma\kappa} = 0, \quad \forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext}, \quad (\text{II.9c})$$

$$\sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} p_{\kappa}^n = \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} p_{\kappa^*}^n = 0, \quad (\text{II.9d})$$

et celui pour (II.2) s'écrit : $\forall 1 \leq n \leq N_T$

$$\Phi_{\mathcal{T}} \frac{c_{\mathcal{T}}^n - c_{\mathcal{T}}^{n-1}}{dt} - \operatorname{div}^{\mathcal{T}}(\mathbb{D}_{\mathfrak{D}}(\mathbf{U}_{\mathfrak{D}}^n) \nabla^{\mathfrak{D}} c_{\mathcal{T}}^n) + \operatorname{divc}^{\mathcal{T}}(\mathbf{U}_{\mathfrak{D}}^n, c_{\mathcal{T}}^n) + q_{\mathcal{T}}^{-,n} c_{\mathcal{T}}^n + \kappa \mathcal{P}^{\mathcal{T}} c_{\mathcal{T}}^n = q_{\mathcal{T}}^{+,n} \hat{c}_{\mathcal{T}}^n, \quad (\text{II.10a})$$

$$\mathbb{D}_{\mathcal{D}}(\mathbf{U}_{\mathcal{D}}^n) \nabla^{\mathcal{D}} c_{\mathcal{T}}^n \cdot \mathbf{\bar{n}}_{\sigma\kappa} = 0, \quad \forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext}, \quad (\text{II.10b})$$

avec $\kappa > 0$ un réel et $\mathcal{P}^{\mathcal{T}}$ est un opérateur de pénalisation.

Le schéma (II.9)–(II.10) se résume à la résolution de deux systèmes linéaires : partant de $c_{\mathcal{T}}^{n-1}$, $(p_{\mathcal{T}}^n, \mathbf{U}_{\mathfrak{D}}^n)$ est obtenu en résolvant le système linéaire (II.9a)–(II.9d) et puis $c_{\mathcal{T}}^n$ est calculé en résolvant le système linéaire (II.10a)–(II.10b). L'existence et l'unicité des solutions à chaque système linéaire reposent sur des estimations *a priori*.

II.1.3 Convergence du schéma

Nous pouvons maintenant indiquer le résultat principal.

Théorème II.2 (Theorem 2.6 [9])

Nous supposons que (II.3)–(II.8) sont vérifiées, $\kappa > 0$ et $\beta \in]0, 2[$. Soit $(\mathcal{T}_m)_{m \geq 1}$ une suite de maillages DDFV tels que $h_m = \operatorname{size}(\mathcal{T}_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ tandis que les paramètres de régularité ζ_m et α_m vérifient :

$$\exists \alpha_{\mathcal{T}} > 0, \zeta > 0 \text{ tels que } \forall m, \quad \alpha_m \geq \alpha_{\mathcal{T}} \text{ et } \zeta_m \leq \zeta, \quad (\text{II.11})$$

avec ζ vérifiant (V.6). Soit $(dt_m)_{m \geq 1}$ une suite de pas de temps t.q. T/dt_m est un entier et $dt_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$. Alors, le schéma DDFV (II.9)–(II.10) définit une suite de solutions discrètes $(p_m = p_{h_m, dt_m}, \mathbf{U}_m = \mathbf{U}_{h_m, dt_m}, c_m = c_{h_m, dt_m}) \in H_{\mathcal{T}_m, dt_m} \times H_{\mathcal{D}_m, dt_m} \times H_{\mathcal{T}_m, dt_m}$, il existe $p \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \mathbf{U} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))^2$ et $c \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$, et, à sous-suite près, nous avons le résultat de convergence suivant quand $m \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} p_m &\rightarrow p && \text{faible-* dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ et fort dans } L^p(0, T; L^q(\Omega)), \forall p < \infty, q < 2; \\ \nabla^{h_m} p_m &\rightarrow \nabla p && \text{faible-* dans } (L^\infty(0, T; L^2(\Omega)))^2 \text{ et fort dans } (L^2((0, T) \times \Omega))^2; \\ \mathbf{U}_m &\rightarrow \mathbf{U} && \text{faible-* dans } (L^\infty(0, T; L^2(\Omega)))^2 \text{ et fort dans } (L^2((0, T) \times \Omega))^2; \\ c_m &\rightarrow c && \text{faible-* dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ et fort dans } L^p(0, T; L^q(\Omega)), \forall p < \infty, q < 2; \\ \nabla^{h_m} c_m &\rightarrow \nabla c && \text{faible dans } (L^2((0, T) \times \Omega))^2. \end{aligned}$$

De plus, (p, \mathbf{U}, c) est une solution faible de (II.1)–(II.2).

II.1.4 Estimations des solutions discrètes

Le Lemme II.3 donne des estimations *a priori* sur la pression, le gradient de pression et sur la vitesse de Darcy au niveau discret, tandis que le Lemme II.4 donne des estimations *a priori* sur la concentration discrète et son gradient discret. Ces estimations *a priori* impliquent que les deux systèmes linéaires (II.9)–(II.10) ont une solution unique. Elles fournissent aussi de la compacité en espace pour les suites de solutions discrètes. Puis, le Lemme II.5 montre que les reconstructions de la concentration sur les maillages primal et dual vont nécessairement converger vers la même limite (quand la convergence a lieu). Dans le Lemme II.6, nous donnons une estimation sur les dérivées en temps discrètes de la concentration discrète, qui est essentiel pour appliquer le résultat de compacité de Gallouët-Latché [GL12].

Lemme II.3 (Lemma 3.1 [9])

Sous les hypothèses du Théorème II.2. S'il existe une solution, notée par $(p_{h, dt}, \mathbf{U}_{h, dt}, c_{h, dt}) \in H_{\mathcal{T}, dt} \times H_{\mathcal{D}, dt} \times H_{\mathcal{T}, dt}$, au schéma (II.9)–(II.10), alors cette solution vérifie

$$\begin{aligned} \|p_{h, dt}\|_{\infty; 0, 2, \mathcal{T}} + \|\nabla^h p_{h, dt}\|_{(L^\infty(0, T; L^2(\Omega)))^2} + \|\mathbf{U}_{h, dt}\|_{(L^\infty(0, T; L^2(\Omega)))^2} \\ \leq C \|q^+ - q^-\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}. \end{aligned}$$

avec $C > 0$ dépendant uniquement de $\Omega, \zeta, \theta, \alpha_A$ et λ_Λ .

Lemme II.4 (Lemma 3.2 [9])

Sous les hypothèses du Théorème II.2. S'il existe une solution, notée par $(p_{h, dt}, \mathbf{U}_{h, dt}, c_{h, dt}) \in H_{\mathcal{T}, dt} \times H_{\mathcal{D}, dt} \times H_{\mathcal{T}, dt}$, au schéma (II.9)–(II.10), alors cette solution vérifie

$$\begin{aligned} \|c_{h, dt}\|_{\infty; 0, 2, \mathcal{T}}^2 + \|\nabla^h c_{h, dt}\|_{(L^2((0, T) \times \Omega))^2}^2 + \left\| |\mathbf{U}_{h, dt}|^{\frac{1}{2}} \nabla^h c_{h, dt} \right\|_{(L^2((0, T) \times \Omega))^2}^2 \\ \leq C \left(\|c_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|q^+\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 \right). \end{aligned}$$

$$\kappa \sum_{n=1}^{N_T} dt \llbracket \mathcal{P}^\tau(c_\tau^n), c_\tau^n \rrbracket_\tau \leq C \left(\|c_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|q^+\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 \right).$$

où $C > 0$ dépendant uniquement de $\Omega, T, \zeta, \theta, \Phi_*$ et α_D .

Grâce aux Lemmes II.3 et II.4, nous avons l'existence et l'unicité de la solution $(p_{h, dt}, \mathbf{U}_{h, dt}, c_{h, dt}) \in$

$H_{\mathcal{T},dt} \times H_{\mathfrak{D},dt} \times H_{\mathcal{T},dt}$ au schéma linéaire (II.9)–(II.10).

Lemme II.5 (Lemma 3.3 [9])

Sous les hypothèses du Théorème II.2, il existe $C > 0$ dépendant uniquement de Ω , T , ζ , θ , Φ_ et α_D t.q. la solution $(p_{h,dt}, \mathbf{U}_{h,dt}, c_{h,dt}) \in H_{\mathcal{T},dt} \times H_{\mathfrak{D},dt} \times H_{\mathcal{T},dt}$ au schéma (II.9)–(II.10) vérifie*

$$\|c_{h,dt,\mathfrak{M}} - c_{h,dt,\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{C}{\kappa} h^\beta \left(\|c_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|q^+\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right).$$

De plus,

$$\sum_{n=1}^{N_T} dt \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathfrak{D}} |c_{\mathfrak{D}}^n - c_{\kappa}^n|^2 \rightarrow 0, \quad \sum_{n=1}^{N_T} dt \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathfrak{D}} |c_{\mathfrak{D}}^n - c_{\kappa^*}^n|^2 \rightarrow 0, \quad \text{quand } h, \delta t \rightarrow 0.$$

Lemme II.6 (Lemma 3.4 [9])

Sous les hypothèses du Théorème II.2, il existe $C > 0$ dépendant uniquement de T , Ω , ζ , θ , q^+ , q^- , c_0 , α_A , $\lambda_{\mathbf{A}}$, $\mathbf{\Lambda}_D$, Φ_ et α_D t.q. la solution discrète $(p_{h,dt}, \mathbf{U}_{h,dt}, c_{h,dt}) \in H_{\mathcal{T},dt} \times H_{\mathfrak{D},dt} \times H_{\mathcal{T},dt}$ au schéma (II.9)–(II.10) vérifie :*

$$\sum_{n=1}^{N_T} dt \|\Phi_{\mathcal{T}} \partial_{t,\mathcal{T}} c_{h,dt}^n\|_{1,-1,\mathcal{T}} \leq C.$$

II.1.5 Tests numériques

Nous définissons le tenseur $\mathbf{\Lambda}$, qui contient les effets de la perméabilité \mathbb{K} du milieu poreux et la viscosité μ du mélange :

$$\mathbf{\Lambda}(\cdot, c) = \frac{\mathbb{K}(\cdot)}{\mu(c)}.$$

La viscosité μ est généralement déterminé par la règle de mélange suivante :

$$\mu(c) = \mu(0) \left(1 + \left(M^{1/4} - 1 \right) c \right)^{-4} \text{ sur } [0, 1],$$

où $M = \frac{\mu(0)}{\mu(1)}$ est le rapport de mobilité (nous étendons μ à \mathbb{R} en posant $\mu = \mu(0)$ sur $] -\infty, 0[$ et $\mu = \mu(1)$ sur $]1, \infty[$). Le tenseur \mathbb{D} est le tenseur de diffusion-dispersion ; il contient la diffusion moléculaire d_m et la dispersion mécanique :

$$\mathbb{D}(x, \mathbf{U}) = \Phi(x) \left(d_m \mathbb{I} + |\mathbf{U}| \left(d_l \mathbb{E}(\mathbf{U}) + d_t (\mathbb{I} - \mathbb{E}(\mathbf{U})) \right) \right),$$

où \mathbb{I} est la matrice identité, d_l et d_t sont les coefficients de dispersion longitudinal et transverse et $\mathbb{E}(\mathbf{U}) = \left(\frac{\mathbf{U}_i \mathbf{U}_j}{|\mathbf{U}|^2} \right)_{1 \leq i, j \leq d}$.

Le domaine en espace est $\Omega = (0, 1000) \times (0, 1000)$ ft² et la période en temps est $[0, 3600]$ jours. Le puit d'injection est localisé dans le coin supérieur droit (1000, 1000) avec un taux d'injection $q^+ = 30$ ft²/jour et la concentration d'injection $\hat{c} = 1.0$. Le puit de production est localisé dans le coin inférieur gauche (0, 0) avec un taux de production $q^- = 30$ ft²/jour. La porosité du milieu est spécifiée comme $\Phi(x) = 0.1$ et la concentration initiale est $c_0(x) = 0$. La viscosité de l'huile est $\mu(0) = 1.0$ cp et $M = 41$. Nous choisissons $\Phi d_l = 5$ ft et $\Phi d_t = 0.5$ ft et il n'y a pas de

diffusion moléculaire $\Phi d_m = 0 \text{ ft}^2/\text{jour}$. Dans ce cas test, l'hypothèse sur d_m n'est pas vérifiée, et donc on n'a pas montré la convergence de notre schéma.

Nous choisissons une perméabilité discontinue $\mathbb{K} = 80\mathbb{I}$ sur le sous-domaine $(0, 1000) \times (0, 500)$ et $\mathbb{K} = 20\mathbb{I}$ sur le sous-domaine $(0, 1000) \times (500, 1000)$. Nous introduisons une suite de maillage quadrangle/triangle (voir Figure II.1 le maillage est celui de l'indice $i = 1$). Nous avons choisi que x_κ est le centre de gravité de la maille $\kappa \in \mathfrak{M}$. Le pas de temps est $dt = 36$ jours.

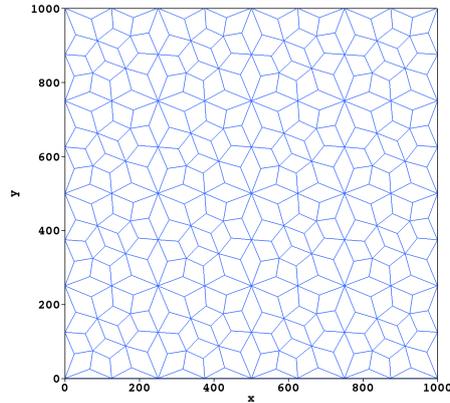


FIGURE II.1 – Maillage quadrangle/triangle de niveau de raffinement $i = 1$.

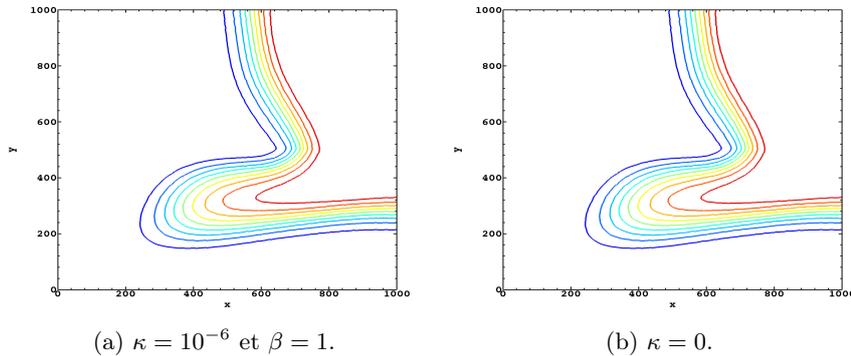


FIGURE II.2 – Comparaison de la concentration obtenue avec le schéma DDFV, avec ou sans le terme de pénalisation, sur le maillage quadrangle/triangle de niveau $i = 5$: lignes de niveaux de la concentration après 3 ans.

Les Figures II.2 et II.3 présentent les lignes de niveaux de la concentration obtenue avec le schéma DDFV, avec ou sans le terme de pénalisation, sur le maillage quadrangle/triangle de niveau $i = 5$, à deux temps différents (3 et 10 ans). Le même comportement qualitatif est observé.

II.2 Etude pour le problème de Fokker-Planck

Il semble crucial de proposer de nouveaux schémas volumes finis préservant le comportement en temps long pour les équations de convection-diffusion anisotropes et s'appliquant sur des maillages presque généraux.

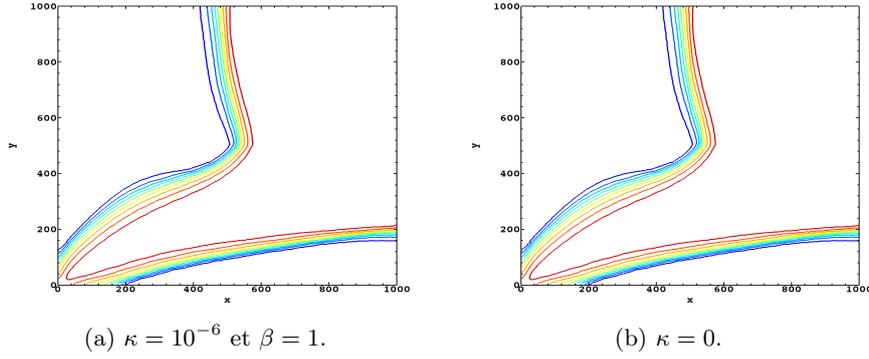


FIGURE II.3 – Comparaison de la concentration obtenue avec le schéma DDFV, avec ou sans le terme de pénalisation, sur le maillage quadrangle/triangle de niveau $i = 5$: lignes de niveaux de la concentration après 10 ans.

II.2.1 Présentation du problème continu

Nous nous concentrons sur une équation de base de dérive-diffusion avec une convection potentielle et une anisotropie. Soit Ω un domaine ouvert borné polygonal connexe de \mathbb{R}^2 et $T > 0$ un temps fini. Le problème s'écrit :

$$\partial_t u + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0, \quad \text{dans } Q_T = \Omega \times (0, T), \quad (\text{II.12a})$$

$$\mathbf{J} = -\mathbf{\Lambda} \nabla u - u \mathbf{\Lambda} \nabla V, \quad \text{dans } Q_T, \quad (\text{II.12b})$$

$$\mathbf{J} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \quad (\text{II.12c})$$

$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad \text{dans } \Omega, \quad (\text{II.12d})$$

avec $\vec{\mathbf{n}}$ la normale unité sortante à $\partial\Omega$ et les hypothèses suivantes sur les données :

(A1) La donnée initiale u_0 est mesurable, positive et vérifiant

$$\int_{\Omega} u_0 d\mathbf{x} > 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \Phi_1(u_0) d\mathbf{x} < \infty, \quad (\text{II.13})$$

où l'entropie de Gibbs $\Phi_1(s) = s \log s - s + 1$ pour tout $s \geq 0$.

(A2) Le potentiel extérieur V appartient à $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$. Sans perdre de généralité, nous supposons que $V \geq 0$ dans $\overline{\Omega}$.

(A3) Le tenseur d'anisotropie $\mathbf{\Lambda}$ est supposé borné (i.e., $\mathbf{\Lambda} \in L^\infty(\Omega)^{2 \times 2}$), symétrique (i.e., $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^T$ presque partout dans Ω), et uniformément elliptique : il existe $\lambda_m > 0$ et $\lambda^M > 0$ tels que

$$\lambda_m |\mathbf{v}|^2 \leq \mathbf{\Lambda}(\mathbf{x}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \leq \lambda^M |\mathbf{v}|^2, \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \text{ et presque tout } \mathbf{x} \in \Omega. \quad (\text{II.14})$$

Le flux \mathbf{J} peut se reformuler dans la forme non-linéaire suivante

$$\mathbf{J} = -u \mathbf{\Lambda} \nabla (\log u + V).$$

En multipliant l'équation (II.12a) par $\log(u) + V$ cela conduit à la relation appelée *énergie/dissipation*

$$\frac{dE}{dt} + I = 0, \quad (\text{II.15})$$

où l'énergie libre E et la dissipation I pour (II.12) sont respectivement définies par

$$E(t) = \int_{\Omega} (\Phi_1(u) + Vu)(\mathbf{x}, t) dx, \quad (\text{II.16})$$

$$I(t) = \int_{\Omega} u \mathbf{\Lambda} \nabla(\log u + V) \cdot \nabla(\log u + V) dx. \quad (\text{II.17})$$

Comme souligné par exemple dans [AMTU01] et [BGG12], la solution u de (II.12) converge vers l'état stationnaire

$$u_{\infty} = \left(\int_{\Omega} u_0 dx / \int_{\Omega} e^{-V} dx \right) e^{-V}$$

quand le temps tend vers l'infini. Dans le cas où $\mathbf{\Lambda}$ ne dépend pas de \mathbf{x} et où Ω et V sont convexes, la convergence est exponentiellement rapide.

La relation d'énergie/dissipation (II.15) conduit à un contrôle sur l'information de Fisher

$$\iint_{Q_T} u |\nabla \log(u)|^2 d\mathbf{x} dt = 4 \iint_{Q_T} |\nabla \sqrt{u}|^2 d\mathbf{x} dt \leq C.$$

Définition II.7

La fonction $u : Q_T \rightarrow \mathbb{R}_+$ est dite solution faible du problème (II.12) si $\Phi_1(u) \in L^\infty(0, T, L^1(\Omega))$, $\sqrt{u} \in L^2(0, T, H^1(\Omega))$, et (II.12) est vérifié au sens des distributions, i.e., pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\bar{\Omega} \times [0, T])$, on a

$$\iint_{Q_T} u \partial_t \varphi d\mathbf{x} dt + \int_{\Omega} u_0 \varphi(\cdot, 0) d\mathbf{x} - \iint_{Q_T} (u \nabla V + \nabla u) \cdot \mathbf{\Lambda} \nabla \varphi d\mathbf{x} dt = 0.$$

II.2.2 Le schéma DDFV non-linéaire

Soit N_T un entier strictement positif, nous considérons pour simplifier un pas de temps constant donné par $\Delta t = T/N_T$. Pour $n \in \{0, \dots, N_T\}$, nous notons $t^n = n\Delta t$. Premièrement, nous discrétisons la condition initiale en prenant la moyenne de u_0 , $u_{\mathcal{T}}^0 = \mathbb{P}_m^{\mathcal{T}} u_0$, et le potentiel extérieur V en prenant la valeur aux centres des mailles primales et duales, $V_{\mathcal{T}} = \mathbb{P}_c^{\mathcal{T}} V$.

Le schéma a besoin d'un paramètre de pénalisation dénoté par $\kappa > 0$. C'est un paramètre fixé. Puis, pour tout $n \geq 0$, nous cherchons $u_{\mathcal{T}}^{n+1} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathcal{T}}$ solution de la formulation variationnelle suivante :

$$\left[\left[\frac{u_{\mathcal{T}}^{n+1} - u_{\mathcal{T}}^n}{\Delta t}, \psi_{\mathcal{T}} \right]_{\mathcal{T}} + T_{\mathfrak{D}}(u_{\mathcal{T}}^{n+1}; g_{\mathcal{T}}^{n+1}, \psi_{\mathcal{T}}) + \kappa \left[\mathcal{P}^{\mathcal{T}} g_{\mathcal{T}}^{n+1}, \psi_{\mathcal{T}} \right]_{\mathcal{T}} \right] = 0, \quad \forall \psi_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}, \quad (\text{II.18a})$$

$$T_{\mathfrak{D}}(u_{\mathcal{T}}^{n+1}; g_{\mathcal{T}}^{n+1}, \psi_{\mathcal{T}}) = \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} r^{\mathfrak{D}}(u_{\mathcal{T}}^{n+1}) \delta^{\mathfrak{D}} g_{\mathcal{T}}^{n+1} \cdot \mathbb{A}^{\mathfrak{D}} \delta^{\mathfrak{D}} \psi_{\mathcal{T}}, \quad (\text{II.18b})$$

$$g_{\mathcal{T}}^{n+1} = \log(u_{\mathcal{T}}^{n+1}) + V_{\mathcal{T}}, \quad (\text{II.18c})$$

où les opérateurs $\mathbb{A}^{\mathfrak{D}}$ et $r^{\mathfrak{D}}$ sont définis par (V.18) et (V.19). On remarque que $e^{-V_{\mathcal{T}}}$ est une solution stationnaire de (II.18c), car $\log(e^{-V_{\mathcal{T}}}) + V_{\mathcal{T}} = 0$ implique $g_{\mathcal{T}}^{n+1} = 0$. Signalons que, pour sa mise en oeuvre, on peut passer de la formulation variationnelle à une équation sur chaque maillage. En effet, on peut appliquer la formule de Green discrète au terme $T_{\mathfrak{D}}$ donnée par (II.18b) et obtenir le produit scalaire de la divergence discrète $\text{div}^{\mathcal{T}}(\mathbf{J}_{\mathfrak{D}}^{n+1})$ et de la fonction test $\psi_{\mathcal{T}}$, avec la définition de $\mathbf{J}_{\mathfrak{D}}^{n+1}$ donnée par (II.19d). Ainsi si on prend $\psi_{\mathcal{T}} = 0$ sauf sur une maille primale $\kappa \in \mathfrak{M}$, on obtient l'équation (II.19a), si on prend $\psi_{\mathcal{T}} = 0$ sauf sur une maille duale $\kappa^* \in \mathfrak{M}^*$, on obtient l'équation (II.19b) et (II.19c) et enfin si on prend $\psi_{\mathcal{T}} = 0$ sauf sur une

maille primale du bord $\kappa \in \partial\mathfrak{M}$, on obtient l'équation (II.19e). On peut donc écrire le schéma sur chaque maillage comme suit :

$$\frac{u_{\mathfrak{M}}^{n+1} - u_{\mathfrak{M}}^n}{dt} + \operatorname{div}^{\mathfrak{M}}(\mathbf{J}_{\mathfrak{D}}^{n+1}) + \kappa \mathcal{P}^{\mathfrak{M}} g_{\mathcal{T}}^{n+1} = 0, \quad (\text{II.19a})$$

$$\frac{u_{\partial\mathfrak{M}^*}^{n+1} - u_{\partial\mathfrak{M}^*}^n}{dt} + \operatorname{div}^{\mathfrak{M}^*}(\mathbf{J}_{\mathfrak{D}}^{n+1}) + \kappa \mathcal{P}^{\mathfrak{M}^*} g_{\mathcal{T}}^{n+1} = 0, \quad (\text{II.19b})$$

$$\frac{u_{\partial\mathfrak{M}^*}^{n+1} - u_{\partial\mathfrak{M}^*}^n}{dt} + \operatorname{div}^{\partial\mathfrak{M}^*}(\mathbf{J}_{\mathfrak{D}}^{n+1}) + \kappa \mathcal{P}^{\partial\mathfrak{M}^*} g_{\mathcal{T}}^{n+1} = 0, \quad (\text{II.19c})$$

$$\mathbf{J}_{\mathfrak{D}}^{n+1} = -r^{\mathfrak{D}}(u_{\mathcal{T}}^{n+1}) \Lambda_{\mathfrak{D}} \nabla^{\mathfrak{D}} g_{\mathcal{T}}^{n+1}, \quad (\text{II.19d})$$

$$m_{\sigma} \mathbf{J}_{\mathfrak{D}}^{n+1} \cdot \mathbf{\bar{n}}_{\sigma\kappa} = 0, \quad \forall \mathfrak{D} = \mathfrak{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}. \quad (\text{II.19e})$$

La pénalisation dans le schéma a été introduite pour des raisons mathématiques plutôt que pour des raisons numériques. Comme souligné dans les simulations numériques de la section précédente, le choix $\kappa = 0$ conduit à des résultats satisfaisants, même si nous ne sommes pas en mesure d'établir la convergence du schéma dans ce cas.

II.2.3 Propriétés du schéma

L'analyse du schéma est fortement reliée à la version discrète de la relation d'énergie/ dissipation (II.15). Afin de le rendre explicite, introduisons la version discrète $(\mathbf{E}_{\mathcal{T}}^n)_{n \geq 0}$ de l'énergie libre \mathbf{E} définie par (II.16) :

$$\mathbf{E}_{\mathcal{T}}^n = \llbracket H(u_{\mathcal{T}}^n), 1_{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}} + \llbracket V_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}}^n \rrbracket_{\mathcal{T}}, \quad \forall n \geq 0,$$

et la version discrète $(\mathbf{l}_{\mathcal{T}}^n)_{n \geq 1}$ de la dissipation \mathbf{l} définie par (II.17) :

$$\mathbf{l}_{\mathcal{T}}^n = T_{\mathfrak{D}}(u_{\mathcal{T}}^n; g_{\mathcal{T}}^n, g_{\mathcal{T}}^n), \quad \forall n \geq 1.$$

Le premier résultat est l'existence d'une solution positive au schéma non linéaire (II.18) ; Le fait que ce système admette une solution n'est pas évident et est assuré par le Théorème II.8. La preuve repose fortement sur le fait que le schéma remplit une relation d'entropie/dissipation discrète.

Cette relation a été démontré grâce à un argument de convexité et grâce au fait que la discrétisation DDFV a l'avantage d'avoir une matrice masse diagonale.

Théorème II.8 (Theorem 2.2 [11])

Pour tout $n \geq 0$, il existe une solution $u_{\mathcal{T}}^{n+1} \in (\mathbb{R}_+^)^{\mathcal{T}}$ au système non-linéaire (II.18) qui vérifie l'estimation discrète d'entropie/entropie dissipation*

$$\frac{\mathbf{E}_{\mathcal{T}}^{n+1} - \mathbf{E}_{\mathcal{T}}^n}{dt} + \mathbf{l}_{\mathcal{T}}^{n+1} \leq 0, \quad \forall n \geq 0.$$

Nous disposons des outils nécessaires pour traiter la positivité uniforme des solutions. Le lemme suivant indique que les solutions discrètes restent loin de 0 en étant bornées inférieurement par une petite quantité $\epsilon > 0$ qui dépend des données du problème continu et des paramètres de discrétisation. Cette information est d'une grande importance car, du fait de la singularité de \log , la fonction non linéaire correspondant au schéma n'est pas continue sur la frontière de $(\mathbb{R}_+^*)^{\mathcal{T}}$. La démonstration est inspirée de celles de [CG16, Lemma 3.10] et de [CG17, Lemma 3.7].

Lemme II.9 (Lemma 3.5 [11])

Il existe $\epsilon > 0$ dépendant des données u_0 et V , du maillage \mathcal{T} , du pas de temps dt , et du paramètre de pénalisation κ , telle que

$$u_{\kappa}^{n+1} \geq \epsilon \quad \text{et} \quad u_{\kappa^*}^n \geq \epsilon, \quad \forall \kappa \in \mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}, \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*, \forall n \geq 0.$$

Une fois l'existence de $u_{\mathcal{T}}^{n+1}$ pour tout $n \geq 0$, nous pouvons reconstruire la solution discrète $u_{h,dt}$, $u_{h,dt,\mathfrak{M}}$, et $u_{h,dt,\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*}$. La convergence des ces quantités discrètes vers la solution faible quand le pas du maillage et le pas de temps tendent vers 0 est une question très naturelle.

Dans la suite, $(\mathcal{T}_m)_{m \geq 1} = (\mathfrak{M}_m \cup \partial\mathfrak{M}_m, \mathfrak{M}_m^* \cup \partial\mathfrak{M}_m^*)_{m \geq 1}$ représentent une suite de maillage DDFV de Ω et $(\mathcal{D}_m)_{m \geq 1}$ le maillage diamant correspondant. Nous supposons que

$$\text{size}(\mathcal{T}_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \quad \text{tandis que} \quad \limsup_{m \rightarrow \infty} \max_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_m} \max(\theta_{\mathcal{D}}, \tilde{\theta}_{\mathcal{D}}) \leq \theta^*, \quad (\text{II.20})$$

les facteurs de régularité $\theta_{\mathcal{D}}$ et $\tilde{\theta}_{\mathcal{D}}$ sont définis

$$\theta_{\mathcal{D}} = \frac{1}{2 \sin(\alpha_{\mathcal{D}})} \left(\frac{m_{\sigma}}{m_{\sigma^*}} + \frac{m_{\sigma^*}}{m_{\sigma}} \right), \quad \tilde{\theta}_{\mathcal{D}} = \max \left(\max_{\substack{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}, \\ m_{\mathcal{D} \cap \mathcal{K}} > 0}} \frac{m_{\mathcal{D}}}{m_{\mathcal{D} \cap \mathcal{K}}}; \max_{\substack{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*, \\ m_{\mathcal{D} \cap \mathcal{K}^*} > 0}} \frac{m_{\mathcal{D}}}{m_{\mathcal{D} \cap \mathcal{K}^*}} \right)$$

Concernant la discrétisation en temps, nous considérons une suite $(N_{T,m})_{m \geq 1}$ d'entiers strictement positifs tendant vers $+\infty$, et nous notons $(dt_m)_{m \geq 1} = \left(\frac{T}{N_{T,m}} \right)_{m \geq 1}$ la suite de pas de temps correspondants. Pour des raisons techniques, et même si cette condition ne semble pas obligatoire du point de vue pratique, nous devons supposer qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$dt_m \geq C_1 \text{size}(\mathcal{T}_m), \quad \forall m \geq 1. \quad (\text{II.21})$$

En effet, cette condition (II.21) assure une estimation de l'intégrale de la reconstruction de la solution discrète sur le maillage diamant, ce qui permet de majorer le terme de la forme $T_{\mathcal{D}}(u_{\mathcal{T}}^n; \psi_{\mathcal{T}}, \psi_{\mathcal{T}})$ et ainsi prouver la convergence des solutions discrètes.

L'existence d'une solution discrète $u_{\mathcal{T}_m}^{n+1}$ au schéma (II.18) pour tout $n \in \{0, \dots, N_{T,m} - 1\}$ et tout $m \geq 1$ indiqué dans le Théorème II.8 nous permet de définir les solutions discrètes u_{h_m, dt_m} , $u_{h_m, dt_m, \mathfrak{M}_m}$, $u_{h_m, dt_m, \mathfrak{M}_m^* \cup \partial\mathfrak{M}_m^*}$ et $u_{h_m, dt_m, \mathcal{D}_m}$ pour tout $m \geq 1$. Le théorème suivant assure que, à une sous-suite près, les suites de solution discrète convergent vers la solution faible du problème (II.12).

Théorème II.10 (Theorem 2.3 [11])

Nous supposons que (II.20) et (II.21) sont vérifiés. Alors il existe une solution faible u définie par la Définition II.7 telle que, à une sous-suite près,

$$u_{h_m, dt_m, \mathfrak{M}_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} u, \quad u_{h_m, dt_m, \mathfrak{M}_m^* \cup \partial\mathfrak{M}_m^*} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} u, \quad \text{et} \quad u_{h_m, dt_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} u \quad \text{dans} \quad L^p(0, T; L^1(\Omega))$$

pour tout $p \in [1, \infty)$, et

$$u_{h_m, dt_m, \mathcal{D}_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} u \quad \text{dans} \quad L^1(Q_T).$$

La démonstration des Théorèmes II.8 et II.10 est décomposée en plusieurs étapes : il faut commencer par établir des estimations sur la solution discrète. Ces estimations *a priori* permettent de montrer que le système non-linéaire issu de (II.18) admet (au moins) une solution, comme le prétend le Théorème II.8. Ensuite il faut établir des estimations pour fournir assez de compacité sur les solutions discrètes pour passer à la limite $m \rightarrow \infty$.

II.2.4 Les simulations numériques

Nous testons notre méthode sur un cas test inspiré de celui de [CG17]. Nous posons $\Omega = (0, 1)^2$, et $V(x_1, x_2) = -x_2$. La solution exacte u_{ex} est définie par

$$u_{\text{ex}}((x_1, x_2), t) = e^{-\alpha t + \frac{x_2^2}{2}} \left(\pi \cos(\pi x_2) + \frac{1}{2} \sin(\pi x_2) \right) + \pi e^{(x_2 - \frac{1}{2})}$$

avec $\alpha = \pi^2 + \frac{1}{4}$. Nous choisissons $u_0 = u_{\text{ex}}(\cdot, 0)$. Notez que u_0 disparaît sur $\{x_2 = 1\}$.

Afin d'illustrer la convergence et la robustesse de notre méthode, nous étudions sa convergence sur deux familles de maillages. La première famille de maillage primal est composée de mailles de Kershaw raffinées de manière successive. La deuxième famille de maillage primal est appelée maillage quadrangulaire `mesh_quad_i` du benchmark FVCA8 sur les écoulements incompressibles. Un maillage de chaque famille est représenté dans la Figure II.4. Dans la procédure de raffinement, le pas de temps est divisé par 4 lorsque le pas du maillage est divisé par 2.

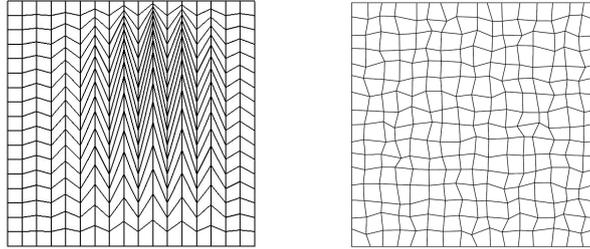


FIGURE II.4 – A gauche : premier maillage de Kershaw. A droite : troisième maillage quadrangulaire.

Nous avons introduit un opérateur de pénalisation afin de prouver que la reconstruction sur le maillage primal $u_{h,dt,\mathfrak{M}}$ et la reconstruction sur le maillage dual $u_{h,dt,\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*}$ convergent vers la même limite. Dans le Tableau II.1, nous calculons `normU` la norme $L^2(\Omega \times (0, T))^2$ de la différence entre les deux reconstructions et `ordU` l'ordre de convergence correspondant pour différentes valeurs de κ le paramètre de pénalisation. Nous observons numériquement le même résultat : les deux reconstructions convergent vers la même limite même si κ est nul.

M	dt	$\kappa = 0$		$\kappa = 10^{-1}$	
		normU	ordU	normU	ordU
1	4.032E-03	1.798E-01	—	1.796E-01	—
2	1.008E-03	9.316E-02	0.95	9.313E-02	0.94
3	2.520E-04	4.717E-02	1.03	4.716E-02	1.03
4	6.300E-05	2.361E-02	1.05	2.361E-02	1.05
5	1.575E-05	1.135E-02	0.87	1.135E-02	0.87

TABLE II.1 – Résultats numériques sur la famille de maillages quadrangulaire, temps final T=0.25.

Par la suite, le paramètre de pénalisation κ mis à zéro. Dans les Tableaux II.2 et II.3, les quantités `erru` et `errgu` dénotent respectivement l'erreur $L^\infty((0, T); L^2(\Omega))$ sur la solution et l'erreur $L^2(\Omega \times (0, T))^2$ sur son gradient, tandis que `ordu` et `ordgu` sont les ordres de convergence correspondants. Il semble que la méthode utilisée soit d'ordre 2 en espace.

Le maximum (resp. la moyenne) du nombre d'itérations de l'algorithme de Newton par pas de temps est noté par N_{max} (resp. N_{moy}). Nous observons que le nombre d'itérations nécessaire de l'algorithme de Newton commence à partir d'une valeur raisonnablement petite et tombe

à 1 après un petit nombre de pas de temps. Par conséquent, notre méthode n'implique pas un coût de calcul supplémentaire important par rapport aux méthodes linéaires. Finalement, nous pouvons vérifier que la valeur minimale $\min u_T^n$ reste strictement supérieure à 0, comme le prouve le Lemme II.9.

M	dt	errgu	ordgu	erru	ordu	N_{\max}	N_{moy}	Min u^n
1	2.0E-03	6.693E-02	—	7.254E-03	—	9	2.15	1.010E-01
2	5.0E-04	2.353E-02	1.54	1.751E-03	2.09	8	2.02	2.582E-02
3	1.25E-04	1.235E-02	1.61	7.237E-04	2.20	7	1.49	6.488E-03
4	3.125E-05	7.819E-03	1.60	3.962E-04	2.11	7	1.07	1.628E-03
5	3.125E-05	5.507E-03	1.58	2.556E-04	1.98	7	1.04	1.628E-03

TABLE II.2 – Résultats numériques sur la famille de maillages Kershaw, temps final T=0.25.

M	dt	errgu	ordgu	erru	ordu	N_{\max}	N_{mean}	Min u^n
1	4.032E-03	1.754E-01	—	2.149E-02	—	9	2.26	1.803E-01
2	1.008E-03	5.933E-02	1.56	5.055E-03	2.08	9	2.04	5.079E-02
3	2.520E-04	2.294E-02	1.44	1.299E-03	2.06	8	1.96	1.352E-02
4	6.300E-05	8.631E-03	1.48	3.256E-04	2.09	8	1.22	3.349E-03
5	1.250E-05	2.715E-03	1.37	7.702E-05	1.70	7	1.01	8.695E-04

TABLE II.3 – Résultats numériques sur la famille de maillages quadrangulaire, temps final T=0.25.

II.2.5 Comportement en temps long

Ici, le paramètre de pénalisation κ est mis à zéro. Nous considérons la généralisation du cas test précédent. Le domaine est toujours donné par $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ et le potentiel est aussi défini par $V(x_1, x_2) = -x_2$. Nous choisissons la famille de solutions à (II.12) donnée par

$$u_\varepsilon(x_1, x_2, t) = \pi e^{(x_2 - \frac{1}{2})} + e^{-(\pi^2 + \frac{1}{4})t + \frac{x_2}{2}} \left(\pi \cos(\pi x_2) + \frac{1}{2} \sin(\pi x_2) \right) + \varepsilon e^{-\pi^2 \mathbf{\Lambda}_{11} t} \cos(\pi x_1),$$

avec $\varepsilon \geq 0$ et la matrice d'anisotropie

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donnons deux commentaires sur ce cas de test. Observons d'abord que si $\pi^2 \mathbf{\Lambda}_{11} \ll \pi^2 + \frac{1}{4}$ et $|\varepsilon| \ll 1$, il existe deux régimes de décroissance à l'équilibre qui sont dus à l'anisotropie. En effet, dans l'expression de u_ε , le second terme dépendant de x_2 , en $e^{-(\pi^2 + \frac{1}{4})t}$, est dominant pendant de petits temps parce que ε est petit. Ensuite, pour des temps plus longs, le dernier terme dépendant de x_1 , en $e^{-\mathbf{\Lambda}_{11} \pi^2 t}$, est plus grand.

Deuxièmement, notons que dans le cas limite $\varepsilon = 0$, le cas de test est "dégénéré". Avec le même raisonnement que précédemment, on voit que le taux de décroissance minimal est $\pi^2 + \frac{1}{4}$ lorsque $\varepsilon = 0$ et passe à $\min(\pi^2 + \frac{1}{4}, \mathbf{\Lambda}_{11} \pi^2)$ lorsque $\varepsilon \neq 0$ quelle que soit la taille de la perturbation. Lorsque $\varepsilon = 0$ et $\mathbf{\Lambda}_{11}$ est petit, toute perturbation dans la direction x_1 (dont le premier mode dans la décomposition de Fourier est précisément de la forme $e^{-\pi^2 \mathbf{\Lambda}_{11} t} \cos(\pi x_1)$) interfère avec la décroissance attendue de taux $\pi^2 + \frac{1}{4}$. Par conséquent, à moins que les symétries de ce cas de test particulier ne soient conservées par la méthode numérique, on devrait assister à la décroissance numérique du mode parasite de taux $\pi^2 \mathbf{\Lambda}_{11}$.

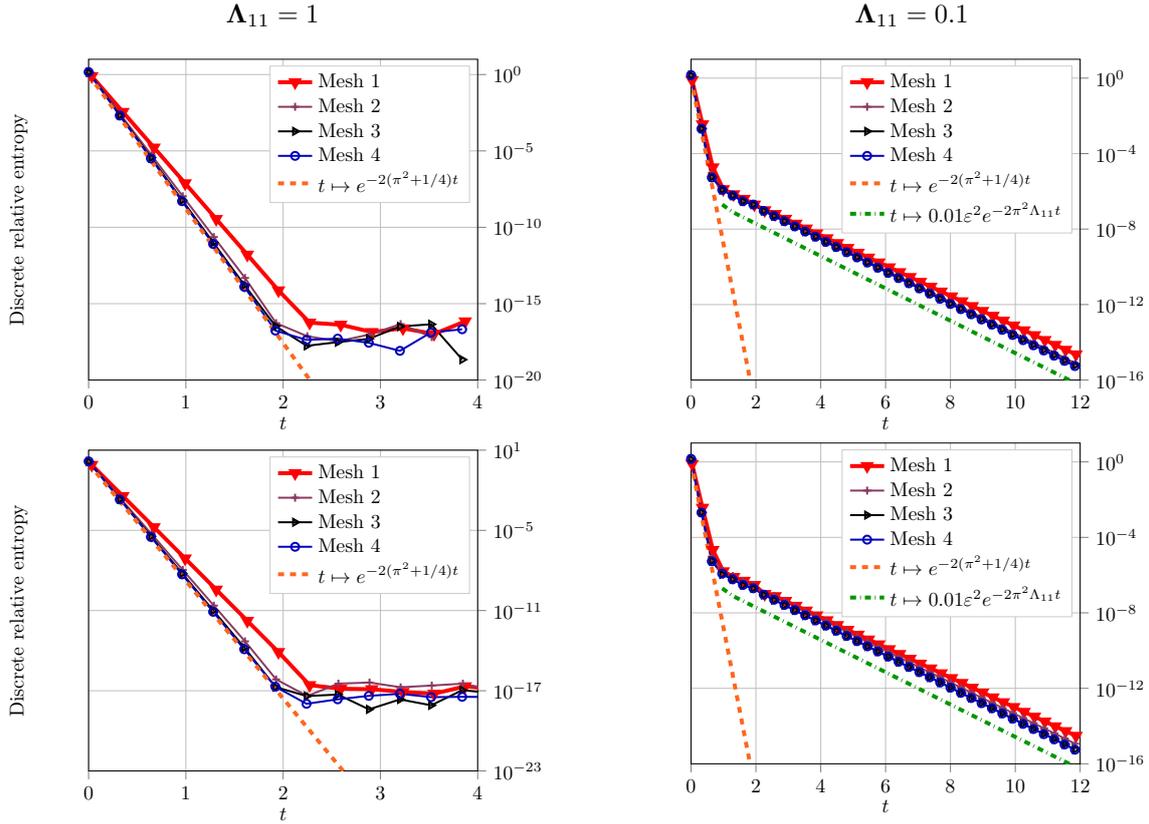


FIGURE II.5 – **DDFV**. Décroissance exponentielle de l'entropie relative $E_{1,\mathcal{T}}^n$ sur une famille de maillages cartésiens (en haut) et quadrangulaire (en bas) avec $\varepsilon = 10^{-2}$ et $\Lambda_{11} = 1$ (à gauche) ou $\Lambda_{11} = 0.1$ (à droite).

Afin de pouvoir observer le comportement en temps long, on définit la solution stationnaire discrète $u_{\mathcal{T}}^{\infty}$ par $u_{\mathcal{K}}^{\infty} = \rho e^{-V(x_{\mathcal{K}})}$ et $u_{\mathcal{K}^*}^{\infty} = \rho^* e^{-V(x_{\mathcal{K}^*})}$ pour $\mathcal{K} \in \mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}$ et $\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$, les quantités ρ et ρ^* sont fixées telles que $\sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}} u_{\mathcal{K}}^{\infty} = \sum_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*} m_{\mathcal{K}^*} u_{\mathcal{K}^*}^{\infty} = \int_{\Omega} u_0(x) dx$. Nous avons également besoin de l'évolution de l'entropie relative discrète

$$E_{1,\mathcal{T}}^n = E_{\mathcal{T}}^n - E_{\mathcal{T}}^{\infty} = \left[\left[u_{\mathcal{T}}^n \log \left(\frac{u_{\mathcal{T}}^n}{u_{\mathcal{T}}^{\infty}} \right) - u_{\mathcal{T}}^n + u_{\mathcal{T}}^{\infty}, 1_{\mathcal{T}} \right] \right]_{\mathcal{T}}, \quad n \geq 0$$

calculée sur les maillages cartésiens, les maillages Kershaw et sur les maillages quadrangulaires (voir la Figure II.4).

Nous choisissons $\varepsilon = 10^{-2}$. La Figure II.5 montre la décroissance exponentielle de l'entropie relative $E_{1,\mathcal{T}}^n$ par rapport au temps pour les différentes familles de maillages cartésiens et quadrangulaires. Les simulations numériques sont effectuées à la fois dans le cas isotrope $\Lambda_{11} = 1$ et dans le cas anisotrope $\Lambda_{11} = 0.1$. Dans les deux cas, les taux de décroissance sont bien capturés par les schémas avec une meilleure précision sur les maillages plus fins (maillage 4). Dans le cas anisotrope, les deux régimes de décroissance sont capturés par le schéma.

Ensuite, sur la Figure II.6, nous traitons le cas de test dégénéré $\varepsilon = 0$ et $\Lambda_{11} = 0.1$. Une fois de plus, nous traçons l'évolution de l'entropie relative $E_{1,\mathcal{T}}^n$ en fonction du temps pour les différentes familles de maillages cartésiens et quadrangulaires. Cette fois, le comportement est différent. Alors que le maillage cartésien est aussi précis que dans le cas de test précédent, le maillage quadrangulaire capture une décroissance parasite commençant à environ $t = 1$. On observe que cet effet est atténué lorsque le maillage est raffiné. Ceci est conforme à la discussion ci-dessus sur la "dégénérescence" du cas $\varepsilon = 0$. En effet, le maillage cartésien conserve les symétries du problème et donc la discrétisation n'introduit aucune perturbation dans la direction x_1 .

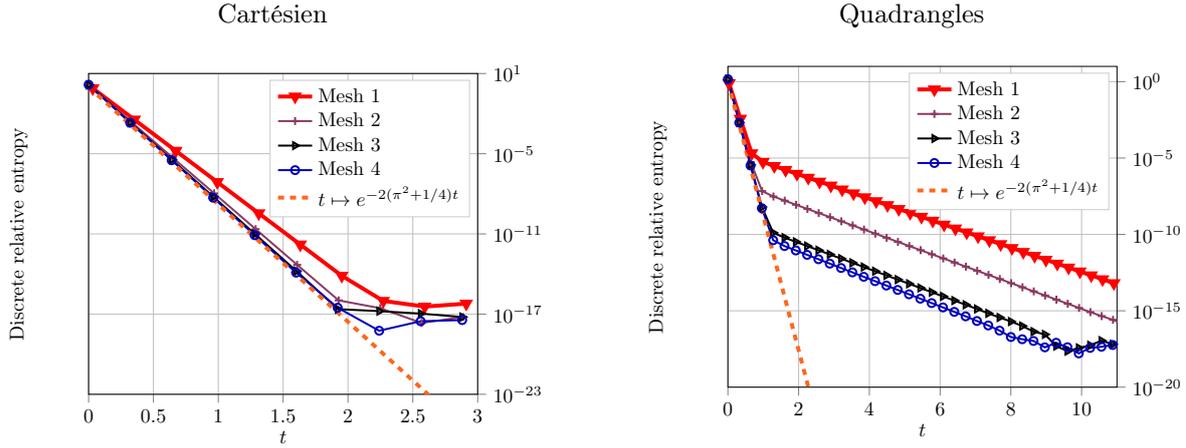


FIGURE II.6 – **DDFV**. Décroissance exponentielle de l'entropie relative $E_{1,\mathcal{T}}^n$ sur un maillage de maillage cartésien (à gauche) et quadrangulaire (à droite) dans le cas dégénéré $\varepsilon = 0$ et $\Lambda_{11} = 0.1$.

Au contraire le maillage quadrangulaire ne conserve pas la symétrie et une perturbation est inévitablement introduite dans la direction x_1 . Bien sûr, cela a tendance à disparaître lorsque le pas du maillage tend vers 0. Afin de confirmer davantage cette analyse, on peut estimer numériquement le rapport entre les deux taux expérimentaux de décroissance (les pentes pour les petits et les grands temps) pour les images de droite de Figure II.6. Nous trouvons un rapport de 9.49 pour le maillage quadrangulaire, et un rapport de 10.32 pour la même simulation sur un maillage de Kershaw. Le rapport exact est $(\pi^2 + \frac{1}{4})/(\Lambda_{11}\pi^2) \approx 10.25$.

Il reste à établir la décroissance exponentielle vers 0 de l'entropie relative discrète $(E_{1,\mathcal{T}}^n)_{n \geq 0}$. Elle est basée sur une relation entre l'entropie discrète et la relation d'énergie/dissipation discrète de la forme suivante

$$I_{\mathcal{T}}^{n+1} \geq \nu E_{1,\mathcal{T}}^{n+1}, \quad \forall n \geq 0. \quad (\text{II.22})$$

Et cette inégalité est une conséquence d'une inégalité de log-Sobolev discrète.

Théorème II.11 (Theorem 4.2 [14])

Il existe ν dépendant uniquement du domaine Ω , de la régularité du maillage θ , de la condition initiale u_0 , du potentiel V et du tenseur anisotrope Λ via λ_m et λ^M , tel que, pour tout $k > 0$, si $\Delta t \leq k$,

$$E_{1,\mathcal{T}}^n \leq e^{-\tilde{\nu}t^n} E_{1,\mathcal{T}}^0, \quad \forall n \geq 0, \quad \text{avec } \tilde{\nu} = \frac{1}{k} \log(1 + \nu k).$$

II.2.6 Extension aux conditions au bord mixtes

Dans cette dernière section, nous généralisons les résultats précédents aux conditions au bord mixtes, le bord $\Gamma = \partial\Omega$ est partagé en deux parties $\Gamma = \Gamma^D \cup \Gamma^N$ avec $m(\Gamma^D) > 0$. Le problème s'écrit alors en modifiant (II.12c) :

$$\partial_t u + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (\text{II.23a})$$

$$\mathbf{J} = -\Lambda(\nabla u + u \nabla V) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (\text{II.23b})$$

$$\mathbf{J} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma^N \times (0, T), \quad \text{et } u = u^D \quad \text{sur } \Gamma^D \times (0, T), \quad (\text{II.23c})$$

$$u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (\text{II.23d})$$

Nous supposons enfin que les données limites u^D correspondent à un équilibre thermique de Gibbs, ce qui signifie l'existence de $\rho > 0$ tel que $u^D = \rho e^{-V}$ sur Γ^D . Cela implique que

$u^\infty = \rho e^{-V}$ est un état stationnaire de (II.23). De plus, la décroissance exponentielle de la solution u de (II.23) vers u^∞ est bien connue, voir par exemple [BLMV14] (pour des résultats encore plus généraux) et les références qui s'y trouvent.

Nous discrétisons d'abord la condition initiale $u_\tau^0 = \mathbb{P}_m^\tau u_0$ et le potentiel extérieur $V_\tau = \mathbb{P}_c^\tau V$. Ensuite, pour tout $n \geq 0$, nous recherchons la solution $u_\tau^{n+1} \in \mathbb{E}_{c,u^D}^D$ de :

$$\left[\left[\frac{u_\tau^{n+1} - u_\tau^n}{\Delta t}, \psi_\tau \right]_\tau + T_{\mathfrak{D}}(u_\tau^{n+1}, g_\tau^{n+1}, \psi_\tau) = 0, \quad \forall \psi_\tau \in E_0^{\Gamma^D}, \quad (\text{II.24a})$$

$$T_{\mathfrak{D}}(u_\tau^{n+1}, g_\tau^{n+1}, \psi_\tau) = \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} r^{\mathcal{D}}(u_\tau^{n+1}) \delta^{\mathcal{D}} g_\tau^{n+1} \cdot \mathbb{A}^{\mathcal{D}} \delta^{\mathcal{D}} \psi_\tau, \quad (\text{II.24b})$$

$$g_\tau^{n+1} = \log(u_\tau^{n+1}) + V_\tau. \quad (\text{II.24c})$$

Etats stationnaires. Les conditions aux bords étant à l'équilibre thermique, $u^D = \rho e^{-V}$ sur Γ^D avec $\rho > 0$. Puis, $u_\tau^\infty = \rho e^{-V_\tau}$ appartient à \mathbb{E}_{c,u^D}^D et vérifie $\delta^{\mathcal{D}}(\log u_\tau^\infty + V_\tau) = 0$ pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$, ainsi c'est un état stationnaire du schéma (II.24). Remarquons que, du fait de la définition de l'état stationnaire, il est clairement borné : il existe $m^\infty > 0$ et $M^\infty > 0$, telles que $m^\infty \leq u_\tau^\infty \leq M^\infty$.

Estimations d'entropie-dissipation. Nous définissons l'entropie relative discrète $(E_{1,\mathcal{T}}^n)_{n \geq 0}$ et la dissipation associée $(I_{\mathcal{T}}^{n+1})_{n \geq 0}$ par :

$$E_{1,\mathcal{T}}^n = \left[\left[u_\tau^\infty \Phi_1 \left(\frac{u_\tau^n}{u_\tau^\infty} \right), 1_\tau \right] \right], \quad \forall n \geq 0$$

$$I_{\mathcal{T}}^{n+1} = T_{\mathfrak{D}}(u_\tau^{n+1}, g_\tau^{n+1}, g_\tau^{n+1}), \quad \forall n \geq 0$$

La définition des états stationnaires implique que $\delta^{\mathfrak{D}} g_\tau^{n+1} = \delta^{\mathfrak{D}} \log(u_\tau^{n+1}/u_\tau^\infty)$, et ainsi

$$I_{\mathcal{T}}^{n+1} = \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} r^{\mathcal{D}}(u_\tau^{n+1}) \delta^{\mathcal{D}} \log \left(\frac{u_\tau^{n+1}}{u_\tau^\infty} \right) \cdot \mathbb{A}^{\mathcal{D}} \delta^{\mathcal{D}} \log \left(\frac{u_\tau^{n+1}}{u_\tau^\infty} \right), \quad \forall n \geq 0.$$

Proposition II.12 (Proposition 1 [29])

Nous supposons que le schéma (II.24) a une solution $u_\tau^{n+1} \in \mathbb{E}_{c,u^D}^D \cap (0, +\infty)^\mathcal{T}$ pour tout $n \geq 0$. Alors, l'estimation d'entropie-dissipation suivante est vérifiée :

$$\frac{E_{1,\mathcal{T}}^{n+1} - E_{1,\mathcal{T}}^n}{\Delta t} + I_{\mathcal{T}}^{n+1} \leq 0, \quad \text{pour tout } n \geq 0. \quad (\text{II.25})$$

En conséquence de l'estimation de l'entropie-dissipation, nous pouvons obtenir l'existence d'une solution au schéma (II.24). Le résultat est une conséquence du contrôle de la dissipation impliqué par (II.25) et d'un argument de degré topologique. Pour l'étude de la décroissance exponentielle, nous supposons en outre que la solution du schéma satisfait des bornes uniformes.

La décroissance exponentielle.

Théorème II.13 (Theorem 1 [29])

Nous supposons que la solution du schéma (II.24) est uniformément bornée :

$$\exists m_* \in (0, m^\infty] \text{ et } M^* \in [M^\infty, +\infty) \text{ tel que } m_* \leq u_\tau^n \leq M^* \quad \forall n \geq 0.$$

Alors, il existe ν dépendant uniquement de Ω , Θ , m_ , M^* et $\mathbf{\Lambda}$, telle que, pour tout $k > 0$,*

$$\left\| \begin{array}{l} si \ \Delta t \leq k, \\ \mathbf{E}_{1,\mathcal{T}}^n \leq e^{-\tilde{\nu}t^n} \mathbf{E}_{1,\mathcal{T}}^0, \ \forall n \geq 0, \text{ avec } \tilde{\nu} = \frac{1}{k} \log(1 + \nu k). \end{array} \right.$$

Ce résultat repose sur l'estimation d'entropie-dissipation (II.25), la démonstration consiste à établir l'existence d'un $\nu > 0$ tel que

$$|\mathcal{T}|^{n+1} \geq \nu \mathbf{E}_{1,\mathcal{T}}^{n+1}, \quad \forall n \geq 0. \quad (\text{II.26})$$

La principale différence pour la preuve de (II.26) lorsque l'on traite des conditions aux limites de Dirichlet au lieu des conditions aux limites de Neumann (II.22) est que nous ne pouvons pas utiliser une inégalité de log-Sobolev discrète. L'inégalité (II.26) est basée sur quelques reformulations de l'entropie discrète et de la dissipation entropique, sur les bornes de la solution discrète et sur une inégalité de Poincaré discrète.

Nous considérons le même cas test que dans la Section II.2.4 sur les mêmes maillages et nous prenons $\Gamma_D = \{x_1 = 0\} \cup \{x_1 = 1\}$.

M	dt	errgu	ordgu	erru	ordu	N_{\max}	N_{mean}	Min u^n	Max u^n
1	1.613E-03	3.447E-02	—	5.208E-03	—	2	2	1.0	3.148
2	4.032E-04	1.578E-02	1.12	1.389E-03	1.90	2	2	1.0	3.161
3	1.008E-04	8.629E-03	0.92	4.467E-04	1.72	2	2	1.0	3.161
4	2.520E-05	3.934E-03	1.19	1.157E-04	2.04	2	1	1.0	3.162
5	6.300E-06	9.668E-04	1.66	2.402E-05	1.86	1	1	1.0	3.162

TABLE II.4 – Résultats numériques sur la famille de maillages quadrangulaire, temps final T=0.1.

Dans le Tableau II.4, les notations sont les mêmes que dans la Section II.2.4 et nous obtenons que la méthode est d'ordre 2 en espace.

Dans la Figure II.7, l'évolution de l'entropie relative discrète $\mathbf{E}_{1,\mathcal{T}}^n$ calculée sur les maillages Kershaw et quadrangles. Nous observons là encore la décroissance exponentielle de l'entropie relative.

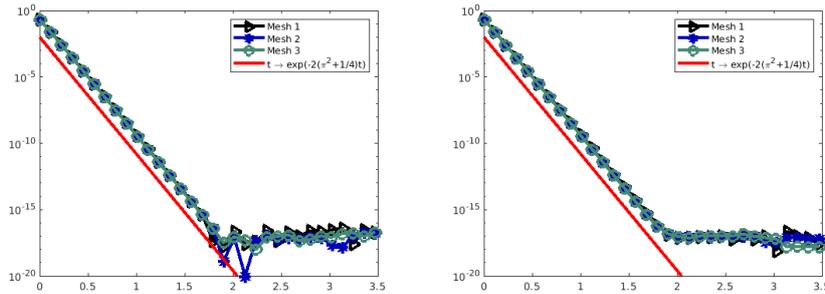


FIGURE II.7 – Entropie relative discrète $\mathbf{E}_{1,\mathcal{T}}^n$ en fonction de $n\Delta t$. Gauche : calculée sur les 3 premiers niveaux de raffinement des maillages quadrangles. Droite : calculée sur les 3 premiers niveaux de raffinement des maillages Kershaw.

Chapitre III

Problème de Stokes et Navier-Stokes

Dans ce chapitre, je présente les travaux réalisés avec les méthodes DDFV pour le problème de Navier-Stokes incompressible. Dans la Section III.1, nous nous sommes intéressée à la condition Inf-Sup indispensable pour obtenir une relation entre la vitesse et la pression dans le cadre DDFV voir [8]. Dans la Section III.2, je présente des conditions aux bords mixtes pour le problème de Navier-Stokes incompressible discrétisé par les méthodes DDFV voir [13]. Dans la Section III.3, j'étude le problème de Navier-Stokes incompressible à densité variable à l'aide des méthodes DDFV voir [24] et [10].

Toutes les notations et les opérateurs sont définis dans l'Annexe.

III.1 La condition Inf-Sup

III.1.1 Le problème de Stokes

Dans cette section, nous nous intéressons à une approximation DDFV du problème de Stokes incompressible en 2D : Trouver un champ de vitesse $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ et un champ de pression $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad m(p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m_\Omega} \int_\Omega p = 0. \quad (\text{III.1})$$

Nous supposons que Ω est un ouvert polygonal borné connexe de \mathbb{R}^2 , m_Ω est sa mesure de Lebesgue, et \mathbf{f} est une fonction de $(L^2(\Omega))^2$.

Nous rappelons que le caractère bien posé de ce problème est liée à la validité de l'inégalité appelée Inf-Sup

$$\inf_{p \in L_0^2(\Omega)} \left(\sup_{\mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^2} \frac{b(\mathbf{v}, p)}{\|\mathbf{v}\|_{H^1} \|p\|_{L^2}} \right) > 0,$$

où $b(\mathbf{v}, p) = \int_\Omega p (\operatorname{div} \mathbf{v})$ et $L_0^2(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega) : m(p) = 0\}$. On sait en soi que cette inégalité équivaut à l'existence d'un inverse à droite de l'opérateur de divergence indiqué dans le résultat suivant (voir [BF13, GR86]).

Proposition III.1

Il existe un opérateur linéaire continu $\Pi : L_0^2(\Omega) \rightarrow (H_0^1(\Omega))^2$ tel que

$$\operatorname{div}(\Pi(p)) = p, \quad \forall p \in L_0^2(\Omega).$$

Dans ma thèse [32] et dans [2], je n'ai pas étudié la stabilité Inf-Sup du schéma DDFV. Pour obtenir un schéma bien posé, j'ai ajouté un terme de stabilisation dans l'équation d'incompressibilité à la Brezzi-Pitkäranta [BP84]. Notre principale motivation ici est d'aller plus loin dans l'analyse de la stabilité Inf-Sup du schéma original du DDFV (non stabilisé).

Le schéma DDFV (non stabilisé) pour le problème (III.1) se lit comme suit : Trouver $\mathbf{u}_\mathcal{T} \in \mathbb{E}_0$ et $p_\mathcal{D} \in \mathbb{R}^\mathcal{D}$ tel que

$$\begin{cases} \operatorname{div}^{\mathfrak{m}}(-\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}_\mathcal{T} + p_\mathcal{D} \operatorname{Id}) = \mathbf{f}_\mathfrak{m}, \\ \operatorname{div}^{\mathfrak{m}^*}(-\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}_\mathcal{T} + p_\mathcal{D} \operatorname{Id}) = \mathbf{f}_{\mathfrak{m}^*}, \\ \operatorname{div}^\mathcal{D} \mathbf{u}_\mathcal{T} = 0, \\ m(p_\mathcal{D}) = \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} m_\mathcal{D} p_\mathcal{D} = 0, \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

avec $\mathbf{f}_\mathfrak{m} = \mathbb{P}_m^{\mathfrak{m}} \mathbf{f}$ et $\mathbf{f}_{\mathfrak{m}^*} = \mathbb{P}_m^{\mathfrak{m}^*} \mathbf{f}$.

III.1.2 La constante Inf-Sup discrète

Soit un maillage DDFV \mathcal{T} , nous définissons la constante Inf-Sup discrète $\beta_\mathcal{T}$ associée avec le schéma (III.2) comme suit

$$\beta_\mathcal{T} = \inf_{p_\mathcal{D} \in \mathbb{R}^\mathcal{D}} \left(\sup_{\mathbf{v}_\mathcal{T} \in \mathbb{E}_0} \frac{b_\mathcal{T}(\mathbf{v}_\mathcal{T}, p_\mathcal{D})}{\|\nabla^\mathcal{D} \mathbf{v}_\mathcal{T}\|_{2,\mathcal{D}} \|p_\mathcal{D} - m(p_\mathcal{D})\|_{2,\mathcal{D}}} \right), \quad (\text{III.3})$$

où :

$$b_\mathcal{T}(\mathbf{v}_\mathcal{T}, p_\mathcal{D}) = (\operatorname{div}^\mathcal{D} \mathbf{v}_\mathcal{T}, p_\mathcal{D})_\mathcal{D} = -\llbracket \mathbf{v}_\mathcal{T}, \nabla^\mathcal{T} p_\mathcal{D} \rrbracket_\mathcal{T}, \quad \forall \mathbf{v}_\mathcal{T} \in \mathbb{E}_0, \forall p_\mathcal{D} \in \mathbb{R}^\mathcal{D},$$

avec $\nabla^\mathcal{T} p_\mathcal{D} = \operatorname{div}^\mathcal{T}(p_\mathcal{D} \operatorname{Id})$.

Pour un maillage donné \mathcal{T} , nous savons classiquement que le schéma (III.2) est bien posé si et seulement si nous avons $\beta_\mathcal{T} > 0$, voir par exemple [EG04]. En fait, comme le problème est de dimension finie, on voit facilement que $\beta_\mathcal{T} = 0$ si et seulement si il existe un mode de pression non-nul $p_\mathcal{D}$, tel que $m(p_\mathcal{D}) = 0$ et $\nabla^\mathcal{T} p_\mathcal{D} = 0$. Dans ce cas, le couple $(\mathbf{v}_\mathcal{T} = 0, p_\mathcal{D})$ est une solution non triviale à (III.2) avec un second membre nul, qui prouve que le schéma n'est pas bien posé.

Pour une famille de maillages donnée, telle que $\operatorname{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0$, nous savons que le schéma est stable si et seulement si

$$\liminf_{\operatorname{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} \beta_\mathcal{T} > 0. \quad (\text{III.4})$$

En supposant cette propriété, il est très facile d'adapter la preuve des estimations d'erreur donnée dans [2] pour obtenir un résultat de convergence pour notre schéma sans terme de stabilisation.

Le but de cette section est donc d'étudier d'un point de vue théorique et numérique si la condition de stabilité (III.4) est valable ou non pour différents types de familles de maillages. Nous verrons que les résultats dépendent de la géométrie particulière des maillages, en particulier des mailles non conformes, ce qui présente un intérêt particulier pour l'application de la méthode DDFV.

Dans cette section, nous décrivons une méthode pratique pour calculer, sur un maillage donné, la constante discrète Inf-Sup (III.3) pour le schéma Stokes DDFV. Le point clé est de relier la valeur de β_τ aux valeurs propres d'une matrice appropriée.

La formulation matricielle du schéma (III.2) est : Trouver $\mathbf{u}_\tau \in (\mathbb{R}^2)^\tau$ et $p_\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ tels que

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} R_\tau & {}^t B_\tau \\ B_\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_\tau \\ p_\mathfrak{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}_m^\tau \mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \langle M_\tau p_\mathfrak{D}, \mathbf{1} \rangle = 0. \end{cases}$$

En utilisant les matrices définies ci-dessus, nous pouvons maintenant écrire (III.3) comme suit

$$\beta_\tau = \inf_{\substack{p_\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D} \\ \langle M_\tau p_\mathfrak{D}, \mathbf{1} \rangle = 0}} \left(\sup_{\mathbf{v}_\tau \in \mathbb{E}_0} \frac{\langle B_\tau \mathbf{v}_\tau, p_\mathfrak{D} \rangle}{\langle R_\tau \mathbf{v}_\tau, \mathbf{v}_\tau \rangle^{\frac{1}{2}} \langle M_\tau p_\mathfrak{D}, p_\mathfrak{D} \rangle^{\frac{1}{2}}} \right).$$

A partir de maintenant, pour toute matrice carrée réelle M avec de vraies valeurs propres, nous définissons $\lambda_i(M)$ comme étant la i -ème plus petite valeur propre de M .

Lemme III.2 (Lemma 2.7 [8])

La constante Inf-Sup discrète β_τ vérifie $\beta_\tau^2 = \lambda_2(S_\tau)$, où S_τ est la matrice définie par

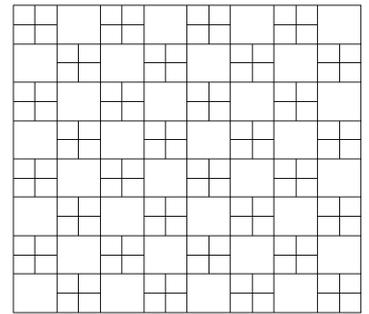
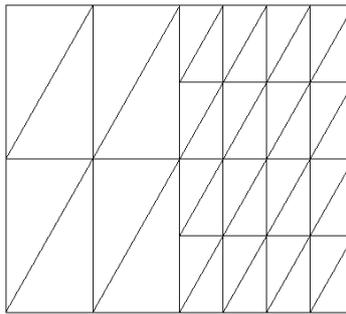
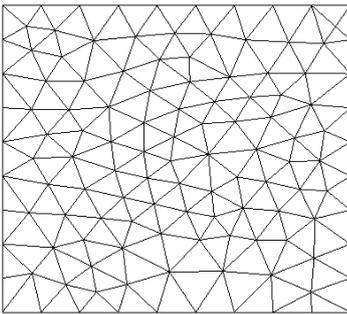
$$S_\tau = M_\tau^{-\frac{1}{2}} B_\tau R_\tau^{-1} {}^t B_\tau M_\tau^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{M}_{N_\mathfrak{D}}(\mathbb{R}).$$

Remarque III.3

Si nous posons $p_\mathfrak{D} = M_\tau^{-\frac{1}{2}} \mathbf{1}$, nous avons $S_\tau p_\mathfrak{D} = 0$, ainsi la plus petite valeur propre de la matrice S_τ est toujours $\lambda_1(S_\tau) = 0$.

III.1.3 Familles de maillages Inf-Sup inconditionnellement stable

Nous présentons trois familles de maillages du domaine carré $\Omega =]0, 1]^2$ pour lesquelles nous pouvons prouver la stabilité Inf-Sup inconditionnelle du schéma Stokes-DDFV.



(a) Maillage triangulaire conforme.

(b) Maillage triangulaire non-conforme.

(c) Maillage en damier.

FIGURE III.1 – Première série de maillages avec une stabilité Inf-Sup inconditionnelle

Théorème III.4 (Propositions 3.3, 3.5 and 3.6 [8])

Pour le maillage triangulaire conforme (voir Figure III.1-(a)) le maillage triangulaire non-conforme (voir Figure III.1-(b)) et le maillage en damier (voir Figure III.1-(c)), le schéma DDFV est Inf-Sup stable.

III.1.4 Stabilité Inf-Sup de codimension 1

Nous étudions les propriétés de stabilité du schéma DDFV pour deux familles de maillages cartésiens du domaine du carré unité : les maillages conformes uniformes usuels et les maillages cartésiens non conformes à deux sous-domaines (voir Figure III.2). Dans les deux cas, nous prou-

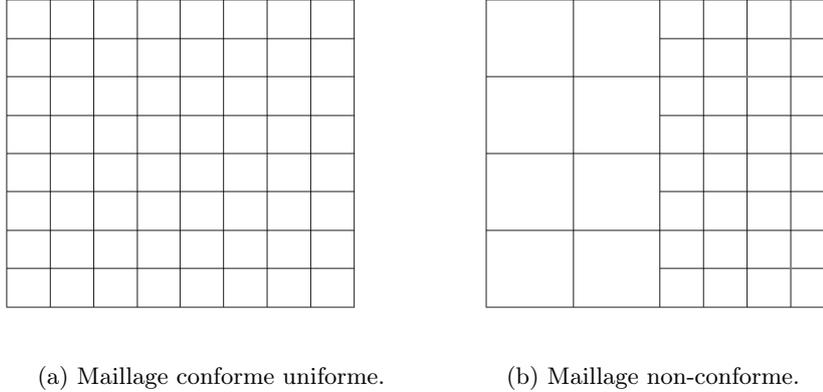


FIGURE III.2 – Les maillages cartésiens à l'étude

vons que la stabilité Inf-Sup ne tient pas. Plus précisément, nous prouvons que $\beta_{\mathcal{T}} = 0$ dans le cas conforme à l'uniforme, et que $\beta_{\mathcal{T}} > 0$ avec

$$\beta_{\mathcal{T}} \xrightarrow{\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} 0,$$

dans le cas non conforme.

Ce comportement de $\beta_{\mathcal{T}}$ prouve l'existence d'au moins un mode de pression instable. Plus précisément, nous prouvons qu'il n'existe en fait qu'un seul mode instable. Cela signifie que la propriété de stabilité Inf-Sup est valable si nous imposons que les champs de pression soient orthogonaux au mode instable, ou si nous ajoutons un terme de stabilisation de rang 1 approprié dans l'équation de divergence. Nous appelons cette propriété la stabilité Inf-Sup de la codimension 1.

Nous proposons une interprétation de ce comportement étonnamment bon en prouvant qu'il existe essentiellement un seul mode instable et que, dans l'orthogonal de ce mode, l'inégalité Inf-Sup uniforme est vérifiée. De plus, ce mode instable est proche (mais pas toujours égal) à un mode en damier.

Nous illustrons d'abord numériquement ce phénomène dans Figure III.3, en traçant en fonction de $\text{size}(\mathcal{T})$

- la valeur de $\beta_{\mathcal{T}}$,
- la valeur de $\sqrt{\lambda_3(S_{\mathcal{T}})}$ qui la prochaine valeur propre du complément de Schur du système,
- la valeur de la constante Inf-Sup de co-dimension 1 suivante

$$\tilde{\beta}_{\mathcal{T}} = \inf_{\substack{p_{\mathfrak{D}} \in \{\psi_{\mathfrak{D}}\}^{\perp} \\ m(p_{\mathfrak{D}}) = 0}} \left(\sup_{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0} \frac{b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, p_{\mathfrak{D}})}{\|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{2, \mathfrak{D}} \|p_{\mathfrak{D}}\|_{\mathfrak{D}, 2}} \right)$$

où $\{\psi_{\mathfrak{D}}\}^{\perp} = \{p_{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}} : \langle M_{\mathcal{T}} p_{\mathfrak{D}}, \psi_{\mathfrak{D}} \rangle = 0\}$ et $\psi_{\mathfrak{D}}$ est le mode en damier. Notez que $\tilde{\beta}_{\mathcal{T}}$ peut également être calculé en résolvant un problème de valeur propre modifié approprié pour lequel nous ne donnons pas les détails ici.

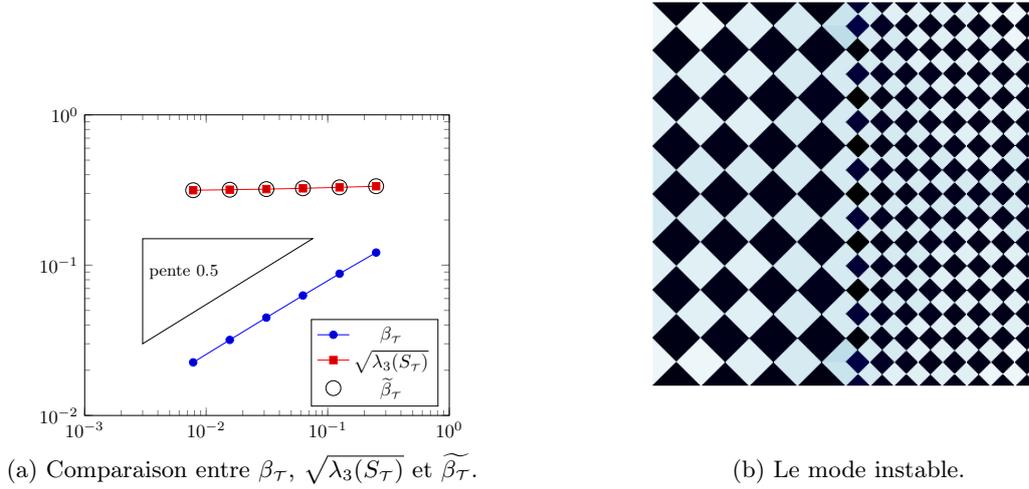


FIGURE III.3 – Instabilité Inf-Sup pour le maillage cartésien non-conforme, voir Fig. III.2-(b)

Nous observons sur Figure III.3-(a) que nous avons $\beta_{\mathcal{T}} \rightarrow 0$ lorsque $\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0$. Nous observons également que $\sqrt{\lambda_3(S_{\mathcal{T}})}$ est borné par le bas, ce qui confirme la présence d’un seul mode instable. De plus, $\widetilde{\beta}_{\mathcal{T}}$ semble également être délimité par le bas et semble presque coïncider avec $\sqrt{\lambda_3(S_{\mathcal{T}})}$. Cela suggère que le mode instable (c’est-à-dire le mode de pression pour lequel l’inégalité Inf-Sup est une égalité est liée au vecteur propre de $S_{\mathcal{T}}$ associé à $\lambda_2(S_{\mathcal{T}})$) ne devrait pas être trop éloigné du mode damier. Ceci est confirmé dans la Figure III.3- (b) où nous traçons le mode instable calculé en utilisant une méthode d’itération de sous-espaces avec projection de Rayleigh-Ritz (voir [Saa03]) qui calcule les plus petites valeurs propres ainsi que les vecteurs propres associés.

Même si nous n’avons pas de formule explicite pour ce mode, nous sommes en mesure de montrer théoriquement que, asymptotiquement, le mode instable est essentiellement égal au mode en damier, et qu’il converge faiblement (mais pas fortement) vers 0 dans $L^2(\Omega)$.

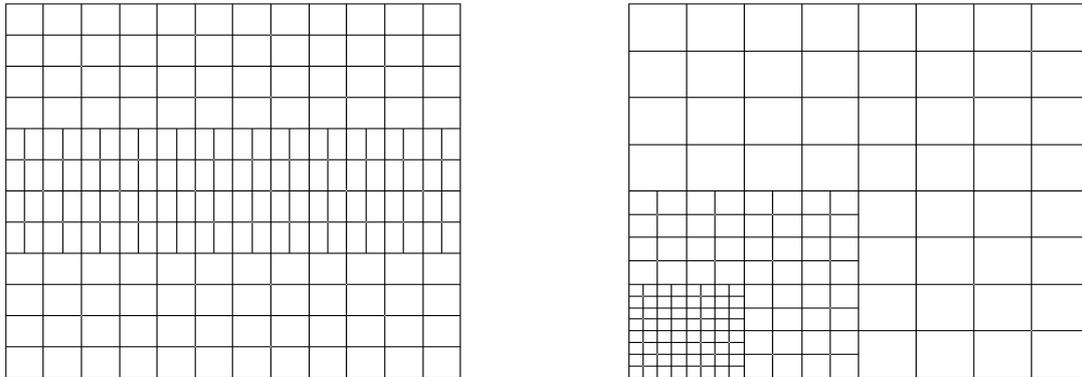
III.1.5 Autres résultats numériques

1. Nous considérons d’abord d’autres types de maillages cartésiens non conformes du carré unité $\Omega =]0, 1[^2$, comme illustré à la Figure III.4. Notez que ces maillages présentent plusieurs interfaces de non-conformité.

Dans la Figure III.5, nous observons les mêmes résultats que dans le cas précédent, à savoir que la constante Inf-Sup $\beta_{\mathcal{T}}$ tend vers 0 et que $\sqrt{\lambda_3(S_{\mathcal{T}})}$ est borné par en-dessous lorsque $\text{size}(\mathcal{T})$ tend vers 0. Dans les deux cas, on en déduit que la propriété de stabilité de codimension 1 est également valable. Nous observons également que le mode instable est à chaque fois encore de la forme d’un mode damier. En fait, on peut vérifier que les résultats théoriques prouvés précédemment peuvent être adaptés à ces géométries.

2. Nous étudions maintenant la propriété de stabilité Inf-Sup pour deux familles de maillages conformes, correspondant à différents sous-domaines, avec un maillage cartésien uniforme ou un maillage de triangle (voir Figures III.6-(a) et III.6-(b)).

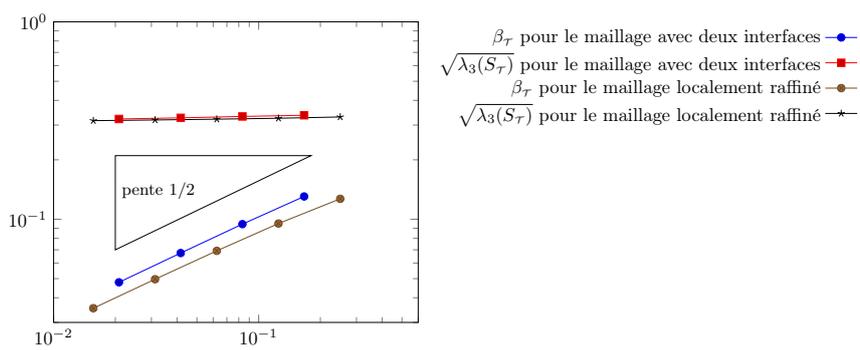
Nos résultats, donnés par la Figure III.7, montrent que $\beta_{\mathcal{T}}$ reste éloigné de 0 lorsque $\text{size}(\mathcal{T})$ tend vers 0, et donc que le schéma DDFV est Inf-Sup stable pour ces familles de maillages. Cependant, il semble que l’adaptation des preuves précédentes à ces cas n’est pas simple et fera donc l’objet d’un travail à venir.



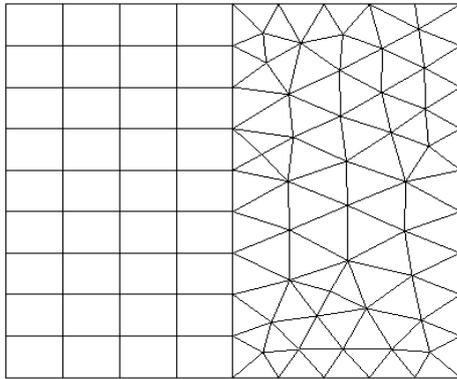
(a) Maillage avec deux interfaces.

(b) Maillage localement raffiné.

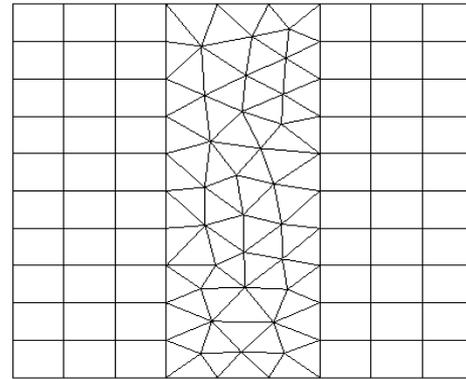
FIGURE III.4 – Autres maillages cartésiens non-conformes

FIGURE III.5 – La constante Inf-Sup discrète $\beta_{\mathcal{T}} = \sqrt{\lambda_2(S_{\mathcal{T}})}$ et $\sqrt{\lambda_3(S_{\mathcal{T}})}$ en fonction de $\text{size}(\mathcal{T})$ pour les autres maillages cartésiens non-conformes Fig. III.4.

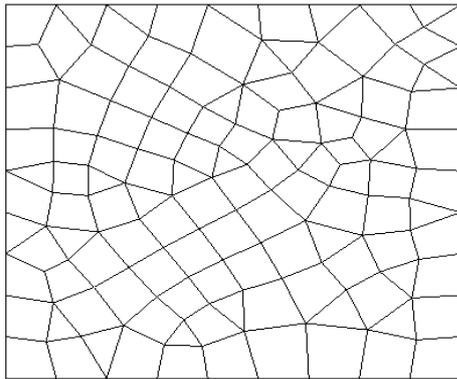
3. Nous observons également dans la Figure III.7 que la méthode DDFV semble être Inf-Sup stable pour les maillages mixtes triangle / quadrilatère (Figure III.6-(c)) mais également pour les maillages polygonaux plus généraux constitués par des hexagones par exemple (Figure III.6-(d)).



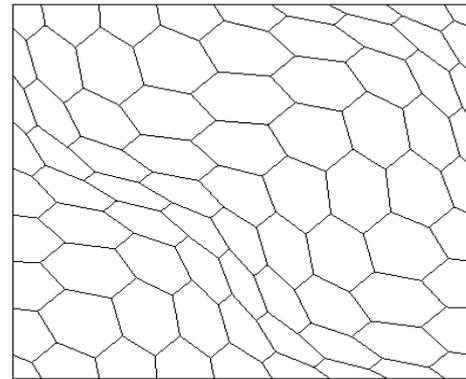
(a) Maillage cartésien/triangle.



(b) Maillage cartésien/triangle avec deux interfaces.



(c) Maillage quadrangle.



(d) Maillage hexagonal.

FIGURE III.6 – Différents types de maillages

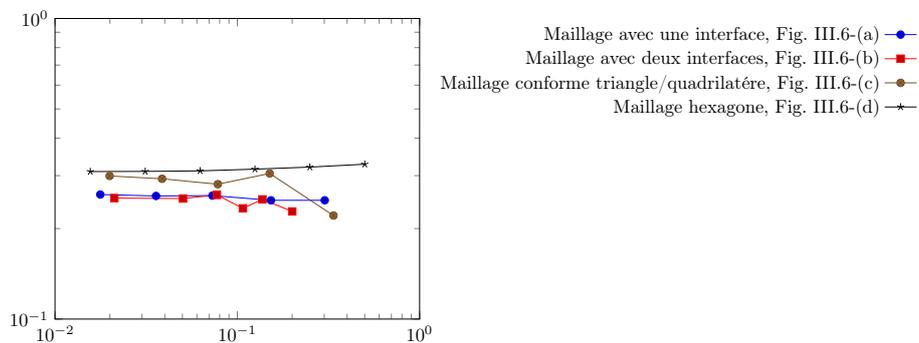


FIGURE III.7 – La constante Inf-Sup discrète $\beta_{\mathcal{T}} = \sqrt{\lambda_2(S_{\mathcal{T}})}$ en fonction de $\text{size}(\mathcal{T})$ pour les maillages de la Figure III.6.

III.2 Condition aux bords ouverte

Le problème qui nous intéresse dans cette section est le calcul d'un écoulement dont la vitesse est prescrite sur une partie de la frontière et qui coule librement sur l'autre. Dans ce cadre, il nous est souvent demandé de tronquer le domaine physique pour obtenir un domaine de calcul réduit, soit parce que nous voulons économiser des ressources de calcul, soit parce que le domaine physique est sans limite. L'objectif est de concevoir et d'analyser une approximation en DDFV du problème de Navier-Stokes 2D incompressible instationnaire avec des conditions mixtes où les inconnues sont la vitesse $\mathbf{u} : \Omega_T = \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et la pression $p : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u}, p)) = 0; & \text{dans } \Omega_T \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 & \text{dans } \Omega_T, \\ \mathbf{u} = \mathbf{g}_1 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \\ \sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{\bar{n}} + \frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{\bar{n}})^-(\mathbf{u} - \mathbf{u}^{ref}) = \sigma^{ref} \mathbf{\bar{n}} & \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_{init} & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (\text{III.5})$$

avec $0 < T < \infty$, Ω un domaine polygonal borné ouvert de \mathbb{R}^2 , dont le bord est $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et sa normal extérieure est $\mathbf{\bar{n}}$, $\mathbf{u}_{init} \in (L^\infty(\Omega))^2$, $\mathbf{g}_1 \in (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{1,T}))^2$ et $\sigma(\mathbf{u}, p) = \frac{2}{\operatorname{Re}} \mathbf{D}\mathbf{u} - p\operatorname{Id}$ est le tenseur des contraintes avec $\operatorname{Re} > 0$. En particulier, le tenseur du taux de déformation est défini par la partie symétrique du gradient de vitesse $\mathbf{D}\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + {}^t\nabla\mathbf{u})$. Nous utilisons la notation $(a)^- = -\min(a, 0)$.

Sur la partie physique de la frontière Γ_1 , nous imposons des conditions aux limites de Dirichlet. Sur la partie "non physique", Γ_2 , nous imposons la condition de limite artificielle

$$\sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{\bar{n}} + \frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{\bar{n}})^-(\mathbf{u} - \mathbf{u}^{ref}) = \sigma^{ref} \mathbf{\bar{n}} \quad (\text{III.6})$$

qui a été introduit pour la première fois dans [BF94] et ensuite étudié plus en détail dans [BF96] et [BF13]. Pour la définir, il faut choisir un fluide référence \mathbf{u}^{ref} , qui est $\mathbf{u}^{ref} \in (H^1(\Omega))^2$ tel que $\mathbf{u}^{ref} = \mathbf{g}_1$ sur Γ_1 , choisi de manière à constituer une approximation raisonnable de l'écoulement près de Γ_2 , et un tenseur des contraintes de référence σ^{ref} tel que $\sigma^{ref} \mathbf{\bar{n}} \in (H^{-\frac{1}{2}}(\Omega))^2$. Cette condition non linéaire est physiquement significative : si le fluide est sortant, nous imposons la contrainte provenant du fluide de référence sélectionné ; s'il est entrant, nous devons contrôler l'augmentation de l'énergie, nous ajoutons donc un terme qui est quadratique par rapport à la vitesse.

III.2.1 Le schéma DDFV

Le problème de Navier-Stokes rajoute des difficultés par rapport au problème de Stokes l'évolution en temps, le terme non linéaire de convection et ici nous rajoutons la condition au bord artificiel. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Nous notons $\delta t = \frac{T}{N}$ et $t_n = n\delta t$ pour $n \in \{0, \dots, N\}$. Pour obtenir notre schéma DDFV, nous avons choisi une discrétisation en temps d'Euler implicite, à l'exception du terme non linéaire, linéarisé à l'aide d'une approximation semi-implicite.

Nous cherchons $\mathbf{u}^{\mathcal{T}, [0, T]} = (\mathbf{u}_\tau^n)_{n \in \{0, \dots, N\}} \in (\mathbb{E}_{\mathbf{g}_1}^D)^{N+1}$ et $p^{\mathcal{D}, [0, T]} = (p_\mathcal{D}^n)_{n \in \{0, \dots, N\}} \in (\mathbb{R}^{\mathcal{D}})^{N+1}$, que nous initialisons par :

$$\mathbf{u}_\tau^0 = \mathbb{P}_c^\mathcal{T} \mathbf{u}_0 \in \mathbb{E}_{\mathbf{g}_1}^D \quad (\text{III.7})$$

Nous ne discrétisons pas directement le problème (III.5) avec les opérateurs discrets car nous souhaitons avoir une estimation d'énergie. Pour ce qui concerne l'équation de quantité de mou-

vement, nous commençons par trouver l'équivalent discret de la formulation variationnelle du problème. Pour le problème continu, tel que présenté dans [BF13], la vitesse \mathbf{u} vérifie :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u} \cdot \Psi + \frac{2}{\text{Re}} \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\Psi) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \Psi - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \Psi \cdot \mathbf{u} \\ = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}})^+ (\mathbf{u} \cdot \Psi) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}})^- (\mathbf{u}^{ref} \cdot \Psi) + \int_{\Gamma_2} \sigma^{ref} \cdot \vec{\mathbf{n}} \cdot \Psi \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

où Ψ est une fonction test de l'ensemble

$$V = \{\Psi \in (H^1(\Omega))^2, \Psi|_{\Gamma_1} = 0, \text{div}(\Psi) = 0\}.$$

On remarque qu'une intégration par parties a été faite sur le terme non-linéaire afin qu'il ne contribue pas à l'énergie. La formulation faible (III.8) peut s'écrire comme suit avec les opérateurs DDFV où nous remplaçons $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ par $\mathbf{div}^{\mathcal{T}}(\mathbf{F}_{\mathcal{D}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n), \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1})$, et $\mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}}$ par $F_{\kappa, \sigma}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n)$ et γ^{σ} représente la trace :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n}{\delta t}, \Psi_{\mathcal{T}} \right\|_{\mathcal{T}} + \frac{2}{\text{Re}} (\mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1} : \mathbf{D}^{\mathcal{D}} \Psi_{\mathcal{T}})_{\mathcal{D}} \\ + \frac{1}{2} [\mathbf{div}^{\mathcal{T}}(\mathbf{F}_{\mathcal{D}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n), \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1}), \Psi_{\mathcal{T}}]_{\mathcal{T}} - \frac{1}{2} [\mathbf{div}^{\mathcal{T}}(\mathbf{F}_{\mathcal{D}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n), \Psi_{\mathcal{T}}), \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1}]_{\mathcal{T}} \\ = -\frac{1}{2} \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{ext} \cap \Gamma_2} (F_{\kappa, \sigma}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n))^+ \gamma^{\sigma}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1}) \cdot \gamma^{\sigma}(\Psi_{\mathcal{T}}) \\ + \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{ext} \cap \Gamma_2} (F_{\kappa, \sigma}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n))^- \gamma^{\sigma}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{ref}) \cdot \gamma^{\sigma}(\Psi_{\mathcal{T}}) \\ + \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{ext} \cap \Gamma_2} m_{\sigma} \sigma_{\mathcal{D}}^{ref} \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \kappa} \cdot \gamma^{\sigma}(\Psi_{\mathcal{T}}), \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

où $\Psi_{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$ est une fonction test dans l'ensemble discret qui vérifie des propriétés similaires par rapport à la fonction test continue Ψ :

$$\Psi_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0^D \text{ et } \text{div}^{\mathcal{D}}(\Psi_{\mathcal{T}}) = 0. \quad (\text{III.10})$$

Pour simplifier les calculs, comme dans le cas continu (voir [BF13]), l'écoulement de référence $(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{ref}, p_{\mathcal{D}}^{ref}) \in \mathbb{E}_{\mathbf{g}_1}^D \times \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ est supposé être solution du problème de Stokes stationnaire sous-déterminé :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{ref} \in \mathbb{E}_{\mathbf{g}_1}^D \\ -\mathbf{div}^{\mathcal{T}} \left(\frac{2}{\text{Re}} \mathbf{D}^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{ref}) - p_{\mathcal{D}}^{ref} \text{Id} \right) = 0, \\ \text{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{ref}) = 0. \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

à partir de cette formulation, nous construisons notre schéma DDFV comme suit :

- Pour tout $\kappa \in \mathfrak{M}$:

$$\begin{aligned} m_{\kappa} \frac{\mathbf{u}_{\kappa}^{n+1} - \mathbf{u}_{\kappa}^n}{\delta t} - m_{\kappa} \mathbf{div}^{\kappa}(\sigma^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1}, p_{\mathcal{D}}^{n+1})) + \frac{1}{2} m_{\kappa} \mathbf{div}^{\kappa}(\mathbf{F}_{\mathcal{D}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n), \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1}) \\ - \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa}^{int}} \left((F_{\kappa, \sigma}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n))^+ \mathbf{u}_{\kappa}^{n+1} - (F_{\kappa, \sigma}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n))^- \mathbf{u}_{\mathcal{L}}^{n+1} \right) = 0; \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

Nous remarquons que si nous avons directement discrétisé (III.5) avec les opérateurs discrets nous n'aurions pas eu ni le dernier terme et ni le coefficient 1/2 devant le terme non linéaire.

- Pour tout $\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}_2^*$:

$$m_{\kappa^*} \frac{\mathbf{u}_{\kappa^*}^{n+1} - \mathbf{u}_{\kappa^*}^n}{\delta t} - m_{\kappa^*} \mathbf{div}^{\kappa^*}(\sigma^{\mathfrak{D}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1}, p_{\mathfrak{D}}^{n+1})) + \frac{1}{2} m_{\kappa^*} \mathbf{div}^{\kappa^*}(\mathbf{F}_{\mathfrak{D}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1})) - \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} \left((F_{\kappa^*, \sigma^*}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n))^+ \mathbf{u}_{\kappa^*}^{n+1} - (F_{\mathcal{L}^*, \sigma^*}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n))^- \mathbf{u}_{\mathcal{L}^*}^{n+1} \right) = 0; \quad (\text{III.13})$$

- Pour tout $\sigma \in \partial\mathfrak{M}_2$:

$$m_{\sigma} \sigma^{\mathfrak{D}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1}, p_{\mathfrak{D}}^{n+1}) \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} - \frac{1}{4} F_{\mathcal{L}, \sigma}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n) (\mathbf{u}_{\kappa}^{n+1} - \mathbf{u}_{\mathcal{L}}^{n+1}) = -\frac{1}{2} (F_{\mathcal{L}, \sigma}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n))^- (\gamma^{\sigma}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1}) - \gamma^{\sigma}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{ref})) + m_{\sigma} \sigma_{\mathfrak{D}}^{ref} \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}; \quad (\text{III.14})$$

Nous remarquons que ici aussi une discrétisation particulière du terme quadratique en vitesse.

- Pour tout $\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}$:

$$\mathbf{div}^{\mathfrak{D}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1}) = 0. \quad (\text{III.15})$$

III.2.2 Définition des flux convectifs $\mathbf{F}_{\mathfrak{D}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n)$

La définition de $\mathbf{F}_{\mathfrak{D}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n) = (F_{\kappa, \sigma}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n), F_{\kappa^*, \sigma^*}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n))_{\mathfrak{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}}$ vient de [21], à l'exception des termes de bord. Ils sont des approximations des flux : $\int_{\sigma} (\mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}) \rightsquigarrow F_{\kappa, \sigma}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n)$ et $\int_{\sigma^*} (\mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*}) \rightsquigarrow F_{\kappa^*, \sigma^*}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n)$.

Par conséquent, leur expression provient de la contrainte d'incompressibilité intégrée sur un diamant, (voir Fig. III.8)

$$m_{\mathfrak{D}} \mathbf{div}^{\mathfrak{D}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n) = \sum_{\mathfrak{s} = \mathfrak{D} | \mathfrak{D}' \in \mathcal{E}_{\mathfrak{D}}} G_{\mathfrak{s}, \mathfrak{D}}^n,$$

ainsi $\int_{\mathfrak{s}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{D}} ds$ est approché par

$$G_{\mathfrak{s}, \mathfrak{D}}^n = m_{\mathfrak{s}} \frac{\mathbf{u}_{\kappa}^n + \mathbf{u}_{\kappa^*}^n}{2} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{D}},$$

pour $\mathfrak{s} = [x_{\kappa}, x_{\kappa^*}] = \mathfrak{D} | \mathfrak{D}'$, $\mathfrak{s} \in \mathcal{E}_{\mathfrak{D}}$. Pour $\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{ext}$, (voir Fig. III.8), un raisonnement similaire conduit à

$$m_{\mathfrak{D}} \mathbf{div}^{\mathfrak{D}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n) = \sum_{\mathfrak{s} = \mathfrak{D} | \mathfrak{D}' \in \mathcal{E}_{\mathfrak{D}}} G_{\mathfrak{s}, \mathfrak{D}}^n + m_{\sigma} \gamma^{\sigma}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}.$$

Sur la base de ces considérations, nous imposons :

- Pour les arêtes primales :

$$F_{\kappa, \sigma}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n) = - \sum_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}_{\kappa} \cap \mathcal{E}_{\mathfrak{D}}} G_{\mathfrak{s}, \mathfrak{D}}^n.$$

- Pour les arêtes duales :

$$F_{\kappa^*, \sigma^*}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n) = - \sum_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}_{\kappa^*} \cap \mathcal{E}_{\mathfrak{D}}} G_{\mathfrak{s}, \mathfrak{D}}^n \quad \text{si } \kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}_2^*.$$

Nous remarquons que comme $\mathbf{div}^{\mathfrak{D}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n) = 0$, alors les flux $F_{\kappa, \sigma}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n)$ et $F_{\kappa^*, \sigma^*}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n)$ sont conservatifs :

$$F_{\kappa, \sigma}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n) = -F_{\mathcal{L}, \sigma}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n), \quad \forall \sigma = \kappa | \mathcal{L} \quad \text{et} \quad F_{\kappa^*, \sigma^*}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n) = -F_{\mathcal{L}^*, \sigma^*}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n), \quad \forall \sigma^* = \kappa^* | \mathcal{L}^*.$$

$$\left\| \begin{array}{l} \text{reg}(\mathcal{T}), \text{ telle que :} \\ \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{2,\mathfrak{D}} \leq C \|\mathbf{D}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{2,\mathfrak{D}} \quad \forall \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0^D \end{array} \right.$$

La condition aux limites ouverte (III.6) que nous étudions est dérivée d'une formulation faible (III.8) de l'équation de Navier-Stokes qui assure une estimation de l'énergie, présentée dans [BF96]. Pour prouver une version discrète de l'estimation de l'énergie, nous devons utiliser la formulation variationnelle (III.9) et sélectionner la solution en tant que fonction de test. Puisque la solution $\mathbf{u}^{\mathcal{T},[0,T]}$ n'est pas nulle sur le bord Dirichlet Γ_1 , elle ne vérifie pas l'hypothèse (III.10). Nous le décomposons en $\mathbf{u}^{\mathcal{T},[0,T]} = \mathbf{v}^{\mathcal{T},[0,T]} + \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{ref}$ et, grâce à la définition de $\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{ref}$ (voir (III.11)), $\mathbf{v}^{\mathcal{T},[0,T]}$ sera un bon candidat pour être notre fonction de test.

Théorème III.8 (Theorem 7 [13])

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV Inf-Sup stable. Soit $(\mathbf{u}^{\mathcal{T},[0,T]}, p^{\mathfrak{D},[0,T]}) \in (\mathbb{E}_{g_1}^D)^{N+1} \times (\mathbb{R}^{\mathfrak{D}})^{N+1}$ la solution du schéma DDFV (III.7), (III.12)-(III.15), où $\mathbf{u}^{\mathcal{T},[0,T]} = \mathbf{v}^{\mathcal{T},[0,T]} + \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{ref}$.

Pour $N > 1$, il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\Omega, \text{reg}(\mathcal{T}), \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{ref}, \mathbf{u}_0, Re$ et T telle que :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} \|\mathbf{v}^{j+1} - \mathbf{v}^j\|_{2,\mathcal{T}}^2 &\leq C, \quad \|\mathbf{v}^N\|_{2,\mathcal{T}}^2 \leq C, \\ \sum_{j=0}^{N-1} \delta t \frac{1}{Re} \|\mathbf{D}^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}^{j+1}\|_{2,\mathfrak{D}}^2 &\leq C, \\ \sum_{j=0}^{N-1} \delta t \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext}} (F_{\kappa,\sigma}(\mathbf{v}^j + \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{ref}))^+ (\gamma^{\sigma}(\mathbf{v}^{j+1}))^2 &\leq C. \end{aligned}$$

Pour obtenir cette estimation d'énergie, nous choisissons comme fonction test $\mathbf{v}^{\mathcal{T},[0,T]}$ dans (III.9). Nous majorons ainsi le terme temporel, la diffusion et le terme quadratique en vitesse par la convection et le terme de bord qui dépend de $\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{ref}$. Ensuite, pour contrôler ces termes, nous utilisons la Proposition III.6, ainsi que des inégalités d'Hölder, de Sobolev, de Poincaré, de Korn et de Young, et nous concluons grâce à un lemme de Gronwall.

III.2.4 Simulations d'écoulement dans un canal

La Figure III.9 décrit la situation que nous considérons. Il y a un obstacle cylindrique à l'intérieur du domaine Ω . Le bord Dirichlet est composé de Γ_0 et Γ_1 : sur le bord physique Γ_0 nous imposons une condition de non glissement et sur le bord physique Γ_1 la vitesse est imposée. Sur le bord artificiel Γ_2 , que nous souhaitons placer le plus près possible de l'obstacle, nous imposons la condition de limite non linéaire (III.6). Nous reproduisons un cas de test proposé dans [BF94]. Les simulations sont effectuées sur un maillage triangulaire, généré par GMSH, raffiné localement autour du cylindre.

Nous montrons qu'en ajoutant un bord artificiel, grâce à la condition (III.6), nous n'introduisons aucune perturbation dans le fluide. Nous considérons un domaine original que nous avons découpé en deux domaines plus petits et nous dessinons les lignes de niveau des solutions respectives.

Nous considérons le domaine symétrique $\Omega = [0, 5] \times [0, 1]$ avec un obstacle circulaire de diamètre $L = 0.4$. Les plus petits domaines sont obtenus en coupant l'axe horizontal en $x = 3$, puis en $x = 1.5$. Le maillage de Ω est composé par 12118 mailles, et celui de $\Omega' = [0, 3] \times [0, 1]$

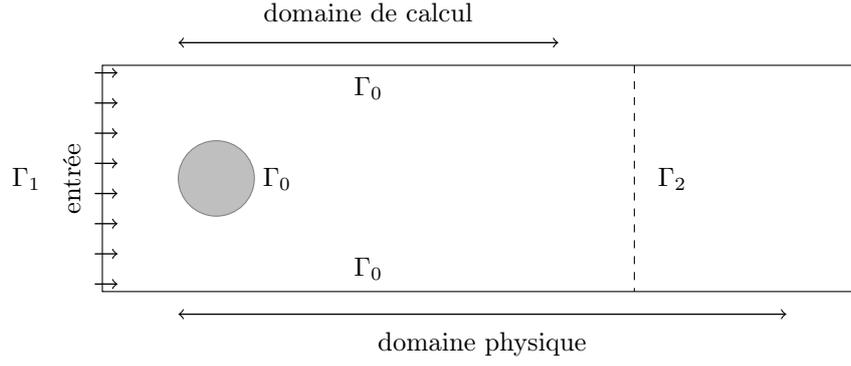
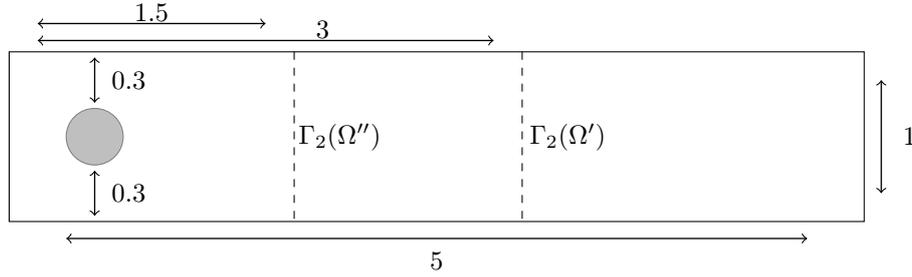


FIGURE III.9 – Domaine et notations.

FIGURE III.10 – Domaines $\Omega = [0, 5] \times [0, 1]$, $\Omega' = [0, 3] \times [0, 1]$ et $\Omega'' = [0, 1.5] \times [0, 1]$.

de 8636 mailles et celui de $\Omega'' = [0, 1.5] \times [0, 1]$ de 6534 mailles. Le pas de temps est $\delta t = 0.035$. Le fluide d'entrée en Γ_1 vaut :

$$\mathbf{g}_1 = (6y(1 - y), 0).$$

Comme nos premières simulations sont effectuées avec $\text{Re} = 250$, il est logique de définir comme fluide de référence un fluide de Poiseuille. Donc nous choisissons $\mathbf{u}^{ref} = \mathbf{g}_1$ et $\sigma^{ref}(\mathbf{u}, p) \vec{\mathbf{n}} = (0, \frac{6}{\text{Re}}(1 - 2y))$. Comme condition initiale, nous imposons $\mathbf{u}_{init} = \mathbf{g}_1$ et le temps final est $T = 3.5$.

Nous observons les lignes de niveau dans la Figure III.11 (au temps $T = 1, 5$) et la Figure III.12 (au temps $T = 3, 5$), pour lequel nous soulignons que l'échelle est la même dans toutes les sous-figures, nous pouvons couper près de l'obstacle sans ajouter aucune perturbation à l'ensemble de l'écoulement. Les recirculations sont bien situées et il n'y a pas de tourbillons parasites. Il est clair que plus nous coupons, plus nous perdons de précision dans les mailles juste avant la limite artificielle. Ceci est dû au choix du flux de référence. Le choix du fluide de référence est crucial. Dans [BF94], il est proposé d'utiliser un fluide de Poiseuille tel que nous le reproduisons dans nos tests numériques de Figure III.11 et de Figure III.12. Dans [Bru00], puisque pour écrire la formulation variationnelle (III.8), le flux de référence est supposé être la solution d'un problème constant de Stokes avec $\mathbf{u} = \mathbf{g}_1$ sur Γ_1 , l'auteur choisit le fluide à l'infini : $\mathbf{u}^{ref} = \mathbf{u}_\infty$, $\sigma^{ref} = \sigma_\infty$. Néanmoins, lorsque le flux est chaotique ou turbulent, un tel fluide de référence ne donne pas un bon équivalent sur le bord artificiel Γ_2 . Ainsi pour des nombres de Reynolds supérieurs, tels que $\text{Re} = 1000$ comme dans la Figure III.13 ($T = 1, 5$) et la Figure III.14 ($T = 3, 5$), d'autres techniques peuvent être envisagées pour le choix du fluide de référence; Par exemple, il semble raisonnable de choisir un fluide de référence qui change avec le temps.

On pourrait penser qu'une bonne approximation de la solution sur le bord artificiel Γ_2 est la solution calculée au pas de temps précédent (ou même juste avant le bord au même pas de

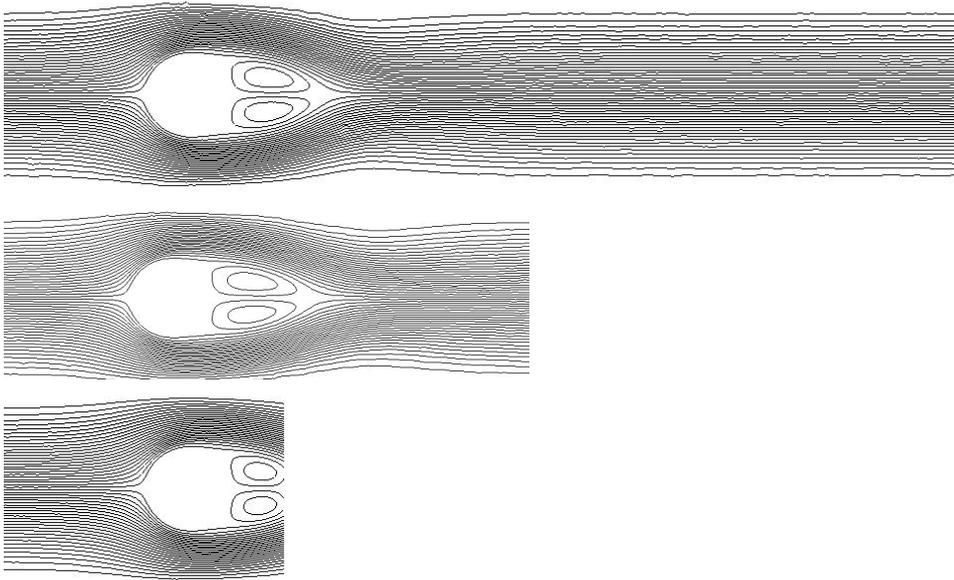


FIGURE III.11 – Lignes de niveau au temps $T = 1.5$, $Re = 250$. En haut : $\Omega = [0, 5] \times [0, 1]$, NbCell= 12118. Au milieu : $\Omega' = [0, 3] \times [0, 1]$, NbCell=8636. En bas : $\Omega'' = [0, 1.5] \times [0, 1]$, NbCell=6534.

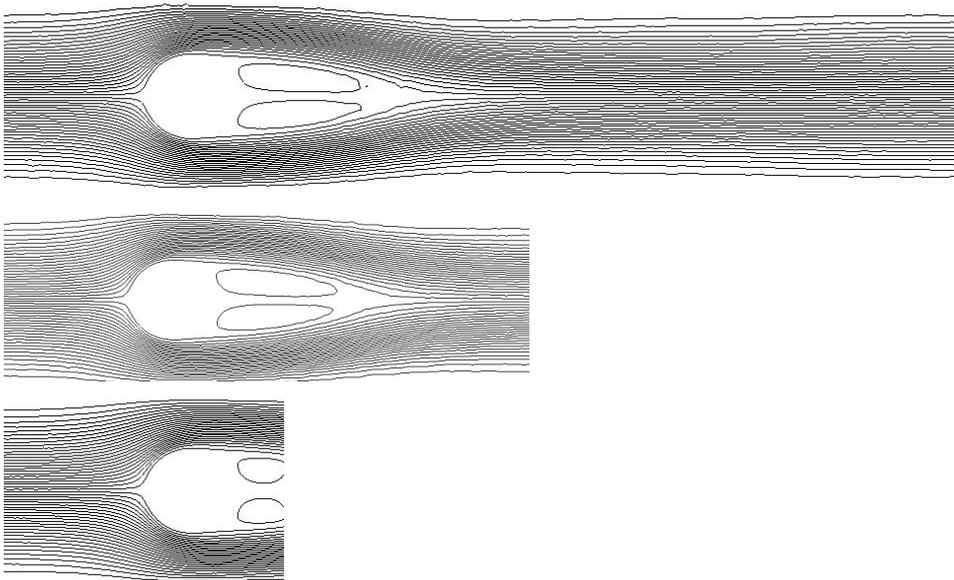


FIGURE III.12 – Lignes de niveau au temps $T = 3.5$, $Re = 250$. En haut : $\Omega = [0, 5] \times [0, 1]$, NbCell= 12118. Au milieu : $\Omega' = [0, 3] \times [0, 1]$, NbCell=8636. En bas : $\Omega'' = [0, 1.5] \times [0, 1]$, NbCell=6534.

temps), mais nous avons en fait observé numériquement que ces techniques conduisent à de fortes instabilités.

Notez qu'en remplaçant \mathbf{u}_T^{ref} par \mathbf{u}_T^n , la stabilité énergétique n'est plus garantie. Par conséquent, afin d'éviter les instabilités numériques, pour les simulations de Figure III.13, Figure III.14, nous ne mettons pas à jour la valeur de \mathbf{u}_T^{ref} à chaque pas de temps, mais à chaque 400 itérations. Ce choix est arbitraire et nous ne pouvons fournir de généralisation à toutes les valeurs du nombre de Reynolds. Un moyen de surmonter cette difficulté pourrait être de calculer le fluide sur un domaine strictement plus grand (par rapport au plus petit) avec un maillage moins

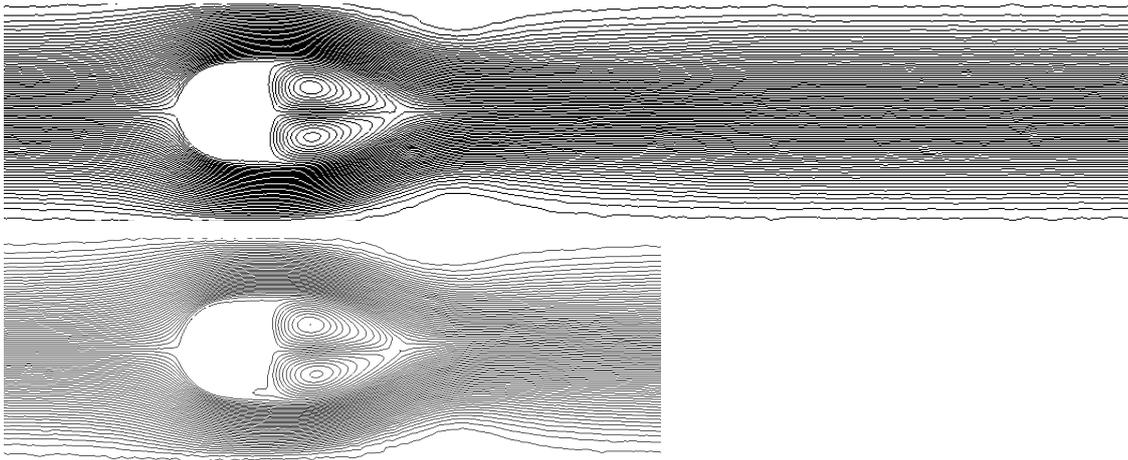


FIGURE III.13 – Lignes de niveau au temps $T = 1.5$, $Re = 1000$. En haut : $\Omega = [0, 5] \times [0, 1]$, NbCell= 12118. En bas : $\Omega' = [0, 3] \times [0, 1]$, NbCell=8636.

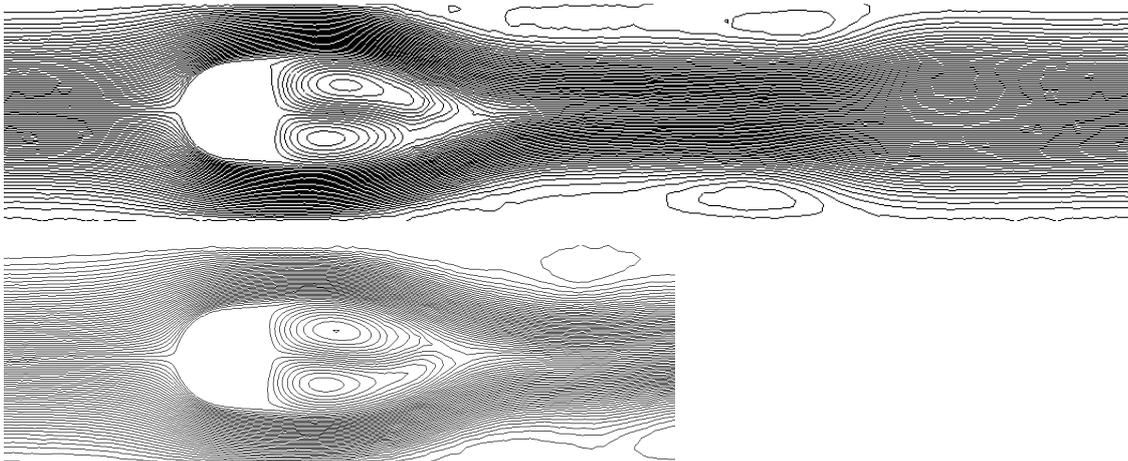


FIGURE III.14 – Lignes de niveau au temps $T = 3.5$, $Re = 1000$. En haut : $\Omega = [0, 5] \times [0, 1]$, NbCell= 12118. En bas : $\Omega' = [0, 3] \times [0, 1]$, NbCell=8636.

raffiné, puis de prendre comme fluide de référence la trace de la solution sur le bord artificiel Γ_2 . Quoi qu'il en soit, ces résultats nous amènent à constater que même pour un nombre plus élevé de Reynolds et avec un choix cohérent de \mathbf{u}_T^{ref} , les conditions se comportent bien : les recirculations sont toujours bien situées et il n'y a pas de faux tourbillons.

III.3 Le problème de Navier-Stokes à densité variable

Nous nous intéressons à la simulation numérique d'écoulements visqueux hétérogènes. Les inconnues sont la densité ρ , le champ de vitesse \mathbf{u} et la pression p , qui sont toutes des fonctions des variables temps et espace t, \mathbf{x} , respectivement. L'évolution de ces quantités dépend de l'équation de conservation de masse

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (\text{III.16})$$

et de l'équation de quantité de mouvement

$$\partial_t(\rho\mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \operatorname{div}(-2\eta\mathbf{D}\mathbf{u} + p\operatorname{Id}) = \mathbf{f}. \quad (\text{III.17})$$

Dans (III.17), nous notons $\mathbf{D}\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^\top)$, avec $\nabla\mathbf{u}$ le gradient de vitesse \mathbf{u} , et le second membre \mathbf{f} est la somme des forces appliquées. (Par exemple, en ayant à l'esprit les forces de gravité, nous aurions $\mathbf{f} = \rho\boldsymbol{\gamma}$, avec $\boldsymbol{\gamma}$ l'accélération de la gravité.) On note $\eta > 0$ la viscosité dynamique du fluide, qui peut être fonction de ρ ou de la variable d'espace \mathbf{x} . Le problème (III.16)–(III.17) est complété par une donnée initiale

$$\rho|_{t=0} = \rho_{\text{Init}} \geq 0, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_{\text{Init}}.$$

Nous travaillerons sur les domaines bidimensionnels bornés $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, et nous supposerons des conditions aux bords de Dirichlet homogène

$$\mathbf{u}|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} = 0.$$

Le système (III.16)–(III.17) n'est pas fermé : nous avons besoin d'une autre équation pour définir la pression. Le modèle de base suppose une incompressibilité :

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0. \quad (\text{III.18})$$

Nous supposons que $\rho_{\text{Init}} \in L^\infty(\Omega)$, $\mathbf{u}_{\text{Init}} \in (L^\infty(\Omega))^2$, $\mathbf{f} \in (L^2(]0, T[\times \Omega))^2$. La pression est soumise à la condition $\int_\Omega p(t, x) dx = 0$, pour tout $t \in]0, T[$. Comme dans [Boy02, CCG08, GQ00, JL04, PS07], le système (III.16)–(III.18) est traité avec une stratégie de splitting en temps. Ce qui est crucial dans la construction du schéma est de vérifier la compatibilité entre la discrétisation des termes de convection dans les équations de masse et de quantité de mouvement.

III.3.1 Discrétisation DDFV

Nous mettons à jour la densité en utilisant une version discrète de (III.16), où la vitesse discrète est connue. A cette fin, la conception du schéma repose sur les principes de décentrement. Nous gardons à l'esprit que la vitesse est stockée sur le maillage \mathcal{T} , tandis que la densité est stockée sur le maillage diamant \mathfrak{D} . Ayant à portée de main les inconnues discrètes $\rho_{\mathfrak{D}}^n$ et un champ de vitesse $\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n$ à l'instant t^n , nous mettons d'abord à jour la densité par

$$\frac{\rho_{\mathfrak{D}}^{n+1} - \rho_{\mathfrak{D}}^n}{\delta t} + \operatorname{div}^{\mathfrak{D}}(\rho_{\mathfrak{D}}^n, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n) = 0, \quad (\text{III.19})$$

avec $t^{n+1} = t^n + \delta t$. Cela définit $\rho_{\mathfrak{D}}^{n+1} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$. Nous pouvons identifier une condition de stabilité comme suit.

Lemme III.9

Nous supposons que $\rho_{\mathfrak{D}}^n$ est strictement positive. Alors la densité $\rho_{\mathfrak{D}}^{n+1}$ donnée par (III.19) reste strictement positive à condition que

$$\delta t \leq \left(\|\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n\|_{\infty, \mathcal{T}} \frac{1}{m_{\mathfrak{D}}} \sum_{\mathfrak{s} \in \mathcal{E}_{\mathfrak{D}}} m_{\mathfrak{s}} \right)^{-1}.$$

Finalement, nous définissons une densité $\rho_{\mathcal{T}}^{n+1} \in \mathbb{E}_0$ sur le maillage \mathcal{T} par

$$\rho_{\mathcal{K}}^{n+1} = \frac{1}{m_{\mathcal{K}}} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{K}}} \operatorname{mes}(\mathfrak{D} \cap \mathcal{K}) \rho_{\mathfrak{D}}^{n+1}, \quad \rho_{\mathcal{K}^*}^{n+1} = \frac{1}{m_{\mathcal{K}^*}} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}} \operatorname{mes}(\mathfrak{D} \cap \mathcal{K}^*) \rho_{\mathfrak{D}}^{n+1} \quad \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M}, \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*.$$

Ayant obtenu $\rho_{\mathfrak{D}}^{n+1} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$ et $\rho_{\mathcal{T}}^{n+1} \in \mathbb{E}_0$ de $(\rho_{\mathfrak{D}}^n, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n, p_{\mathfrak{D}}^n)$, nous mettons maintenant à jour la vitesse, défini par $\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1} \in \mathbb{E}_0$ en résolvant l'équation de quantité de mouvement. Pour obtenir un schéma linéaire, nous explicitons le produit de la densité et de la vitesse dans le terme de convection $\rho^n \mathbf{u}^n \otimes \mathbf{u}^{n+1}$. Nous rappelons que \mathbf{u}^{n+1} est défini sur le maillage \mathcal{T} ; ainsi la divergence de $\rho^n \mathbf{u}^n \otimes \mathbf{u}^{n+1}$ serait naturellement défini sur \mathfrak{D} . Cela n'est pas compatible avec la discrétisation de l'équation de quantité de mouvement qui doit être considérée sur le maillage \mathcal{T} . Il faut définir les flux $F_{\kappa,\sigma}^n$ à l'aide des flux $F_{s,D}^n$ qui interviennent dans $m_{\mathfrak{D}} \operatorname{div}^{\mathfrak{D}}(\rho_{\mathfrak{D}}^n, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n) := \sum_{s \in \mathcal{E}_{\mathfrak{D}}} F_{s,D}^n$ afin d'avoir directement l'équation de la conservation de la masse sur le maillage primal :

$$m_{\kappa} \frac{\rho_{\kappa}^{n+1} - \rho_{\kappa}^n}{\delta t} + \sum_{\sigma \in \partial \kappa} F_{\kappa,\sigma}^n = 0.$$

Une construction similaire peut être faite pour F_{κ^*,σ^*}^n , pour $\sigma^* = \kappa^*|_{\mathcal{L}^*}$.

Nous avons d'ailleurs étudié cette problématique de transfert d'une équation conservative d'un maillage à un autre maillage (ainsi que des relations de dualité entre opérateurs) dans un cadre très général dans [17]. Nous sommes maintenant prêts à définir la mise à jour du couple vitesse-pression en résolvant la version discrète suivante de (III.17) et (III.18) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1} \in \mathbb{E}_0 \text{ et } p_{\mathfrak{D}}^{n+1} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}} \text{ tels que} \\ \frac{\rho_{\mathfrak{M}}^{n+1}}{\delta t} \mathbf{u}_{\mathfrak{M}}^{n+1} + \operatorname{div}^{\mathfrak{M}}(-2\eta^{\mathfrak{D}} D^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1} + p_{\mathfrak{D}}^{n+1} \operatorname{Id}) + \operatorname{divc}^{\mathfrak{M}}(\mathbf{F}_{\mathfrak{D}}^n, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1}) = \frac{\rho_{\mathfrak{M}}^n}{\delta t} \mathbf{u}_{\mathfrak{M}}^n + \mathbf{f}_{\mathfrak{M}}^{n+1}, \\ \frac{\rho_{\mathfrak{M}^*}^{n+1}}{\delta t} \mathbf{u}_{\mathfrak{M}^*}^{n+1} + \operatorname{div}^{\mathfrak{M}^*}(-2\eta^{\mathfrak{D}} D^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1} + p_{\mathfrak{D}}^{n+1} \operatorname{Id}) + \operatorname{divc}^{\mathfrak{M}^*}(\mathbf{F}_{\mathfrak{D}}^n, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1}) = \frac{\rho_{\mathfrak{M}^*}^n}{\delta t} \mathbf{u}_{\mathfrak{M}^*}^n + \mathbf{f}_{\mathfrak{M}^*}^{n+1}, \\ \operatorname{div}^{\mathfrak{D}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1}) - \beta d_{\mathfrak{D}}^2 \Delta^{\mathfrak{D}} p_{\mathfrak{D}}^{n+1} = 0, \\ \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathfrak{D}} p_{\mathfrak{D}}^{n+1} = 0, \end{array} \right. \quad (\text{III.20})$$

avec $\beta \geq 0$ donné.

III.3.2 Définition des flux convectifs $\mathbf{F}_{\mathfrak{D}}$

La définition de $\mathbf{F}_{\mathfrak{D}} = (F_{\kappa,\sigma}, F_{\kappa^*,\sigma^*})_{\mathfrak{D},\sigma,\sigma^* \in \mathfrak{D}}$ n'est pas la même que dans la Section III.2, car ici ces flux dépendent aussi de la densité ρ , plus précisément ils dépendent de $F_{s,D}^n$. La définition de $F_{\kappa,\sigma}$ est

$$F_{\kappa,\sigma}^n = -\frac{m(\mathcal{D} \cap \mathcal{L})}{m_{\mathfrak{D}}} \sum_{s \in \mathcal{E}_{\mathfrak{D}}, s \subset \mathcal{K}} F_{s,D}^n + \frac{m(\mathcal{D} \cap \mathcal{K})}{m_{\mathfrak{D}}} \sum_{s \in \mathcal{E}_{\mathfrak{D}}, s \subset \mathcal{L}} F_{s,D}^n \quad (\text{III.21})$$

Sur le bord $\sigma \subset \partial \Omega$, nous posons

$$F_{\kappa,\sigma}^n = \sum_{s \in \mathcal{E}_{\mathfrak{D}}, s \subset \partial \Omega} F_{s,D}^n.$$

les flux sont conservatifs puisque $F_{\kappa,\sigma}^n = -F_{\mathcal{L},\sigma}^n$ pour $\sigma = \kappa|_{\mathcal{L}}$. Et la définition de $F_{\kappa,\sigma}$ conduit à

$$m_{\kappa} \frac{\rho_{\kappa}^{n+1} - \rho_{\kappa}^n}{\delta t} + \sum_{\sigma \in \partial \kappa} F_{\kappa,\sigma}^n = 0.$$

Une construction similaire peut être faite pour F_{κ^*,σ^*}^n , pour $\sigma^* = \kappa^*|_{\mathcal{L}^*}$

$$F_{\kappa^*,\sigma^*}^n = -\frac{m(\mathcal{D} \cap \mathcal{L}^*)}{m_{\mathfrak{D}}} \sum_{s \in \mathcal{E}_{\mathfrak{D}}, s \subset \mathcal{K}^*} F_{s,D}^n + \frac{m(\mathcal{D} \cap \mathcal{K}^*)}{m_{\mathfrak{D}}} \sum_{s \in \mathcal{E}_{\mathfrak{D}}, s \subset \mathcal{L}^*} F_{s,D}^n. \quad (\text{III.22})$$

Et nous avons aussi

$$m_{\mathcal{K}^*} \frac{\rho_{\mathcal{K}^*}^{n+1} - \rho_{\mathcal{K}^*}^n}{\delta t} + \sum_{\sigma^* \in \partial \mathcal{K}^*} F_{\mathcal{K}^*, \sigma^*}^n = 0.$$

Théorème III.10 (Proposition 1 [24])

Pour tout maillage DDFV \mathcal{T} , le schéma (III.20) avec $\beta > 0$ admet une unique solution $(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1}, p_{\mathcal{D}}^{n+1}) \in \mathbb{E}_0 \times \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$.

La proposition suivante établit l'analogie discret de l'estimation d'énergie qui est valable pour le problème continu.

Proposition III.11

La solution $(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1}, p_{\mathcal{D}}^{n+1}) \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ obtenue dans le Théorème III.10 vérifie

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\delta t} \|\sqrt{\rho_{\mathcal{T}}^{n+1}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1}\|_{2,\mathcal{T}}^2 - \frac{1}{2\delta t} \|\sqrt{\rho_{\mathcal{T}}^n} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n\|_{2,\mathcal{T}}^2 + \frac{1}{2\delta t} \|\sqrt{\rho_{\mathcal{T}}^n} (\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n)\|_{2,\mathcal{T}}^2 \\ & + \underline{C}_\eta \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1}\|_{2,\mathcal{D}}^2 + \beta |p_{\mathcal{D}}^{n+1}|_h^2 \leq \|[\mathbf{f}_{\mathcal{T}}^{n+1}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1}]\|_{\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

Nous observons enfin que les fluides homogènes sont conservés par le schéma.

Proposition III.12 (Proposition 1 [24])

Si $\rho_{\mathcal{D}}^n = 1$, alors $\rho_{\mathcal{D}}^{n+1} = 1$

III.3.3 Instabilités de Rayleigh–Taylor

Dans cette section, nous abordons un problème physiquement plus intéressant, à savoir une enquête sur la formation d'instabilités de Rayleigh-Taylor. Le problème a été considéré dans [Boy02, CCG08, GQ00], inspiré de l'étude de [Try88] pour les écoulements. Le fluide occupe le domaine $\Omega = (-1/2, 1/2) \times (-2, 2)$. Initialement au repos ($\mathbf{u}_{\text{init}} \equiv 0$), il se divise en deux régions : un fluide lourd — avec une densité ρ_M — en haut, un fluide léger — avec une densité $\rho_m < \rho_M$ en bas. L'interface présente de légères oscillations :

$$\rho(0, x, y) = \frac{\rho_M + \rho_m}{2} + \frac{\rho_M - \rho_m}{2} \tanh\left(\frac{y - \zeta \cos(2\pi x)}{0.01}\right)$$

pour un certain $\zeta > 0$ (dans les résultats présentés ci-dessous, $\zeta = 10^{-2}$). Le problème est complété par les conditions aux limites suivantes, avec $\mathbf{u} = (u, v)$,

$$\begin{aligned} u(t, x, y) = 0 = v(t, x, y) & \quad \text{sur } y = -2, y = 2, \\ u(t, x, y) = 0 = \partial_x v(t, x, y) & \quad \text{sur } x = -1/2, x = 1/2. \end{aligned} \tag{III.23}$$

En raison de la gravité, le fluide lourd tombe, entraînant la formation de motifs typiques de champignons. La difficulté du problème dépend d'une part du nombre de Reynolds Re , qui évalue la force des effets visqueux, et d'autre part par le nombre d'Atwood $At = \frac{\rho_M - \rho_m}{\rho_M + \rho_m}$ qui évalue la différence entre les densités extrêmes du fluide. Plus ces nombres sans dimension sont élevés, plus la simulation est difficile. Pour des raisons de symétrie, nous notons que nous pouvons réduire le domaine de calcul à $\Omega = (0, 1/2) \times (-2, 2)$, toujours en utilisant les conditions (III.23) en $x = 0$. Nous trouvons pratique de travailler avec les équations sous forme sans dimension. Cela signifie que, étant donné l'échelle de longueur L (définie par la taille du domaine), l'unité de temps T est choisie pour que l'accélération de la gravité satisfasse $\gamma \frac{T^2}{L} = (0, -1)$.

Le nombre de Reynolds est défini par $Re = \frac{\rho_m L^2}{\eta T}$. Cependant, afin de faciliter la comparaison avec d'autres articles, les résultats des Figures III.15 – III.17 sont donnés avec le temps redimensionné $T_{chiffres} = \sqrt{At}T$, qui implique le nombre d'Atwood $At = \frac{\rho_M - \rho_m}{\rho_M + \rho_m}$ défini à partir du densités extrêmes de l'écoulement.

Les simulations sont très sensibles aux effets d'orientation du maillage qui peuvent induire des instabilités parasites. Cela a été rapporté dans [CCG08]; Bien que le schéma DDFV soit complètement différent, nous avons également rencontré de telles difficultés. Pour ces simulations, nous avons utilisé le maillage dual barycentrique, c'est-à-dire le maillage dual est obtenu en joignant les centres x_κ au milieu des arêtes. La forme des cellules duales est plus compliquée, mais le maillage a plus de symétries et il n'introduit pas d'instabilités artificielles, voir Figures III.15 - III.17, qui présente les résultats avec plusieurs nombres d'Atwood et de Reynolds. Nous observons que le schéma capture les caractéristiques principales des instabilités, avec la formation du profil du champignon, et que le mouvement du fluide est en accord avec [CCG08, GQ00]. Une comparaison a été faite dans [10]. La méthode est capable de gérer un rapport de densité élevé, ici jusqu'à $\rho_M/\rho_m = 19$, et un nombre de Reynolds aussi élevé que $Re = 20000$.

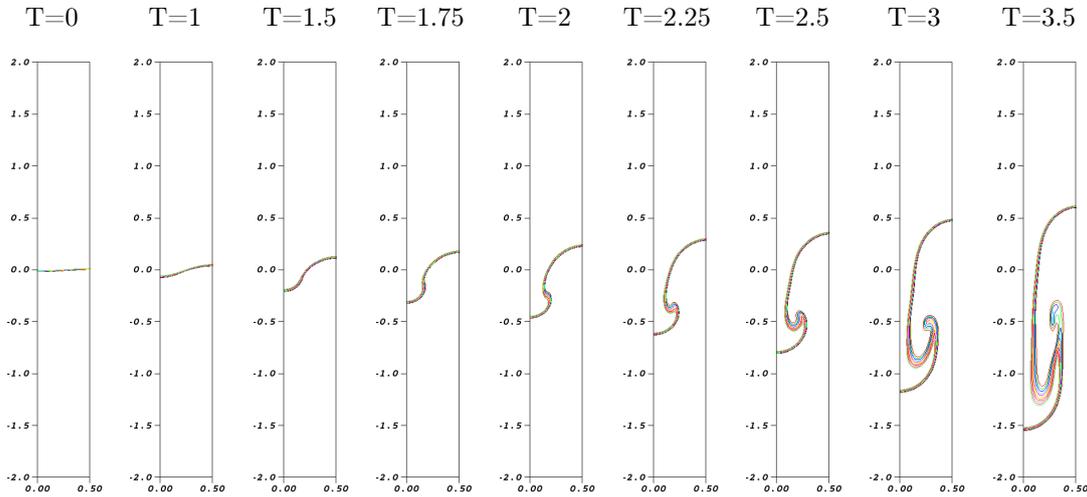


FIGURE III.15 – Instabilité de Rayleigh-Taylor : évolution de l'interface ; $Re = 1000$, $\rho_M/\rho_m = 7$, amplitude initiale $\zeta = 0.01$. Maillage uniforme barycentrique 40×320 , ligne de niveau de la densité $2 \leq \rho \leq 4$.

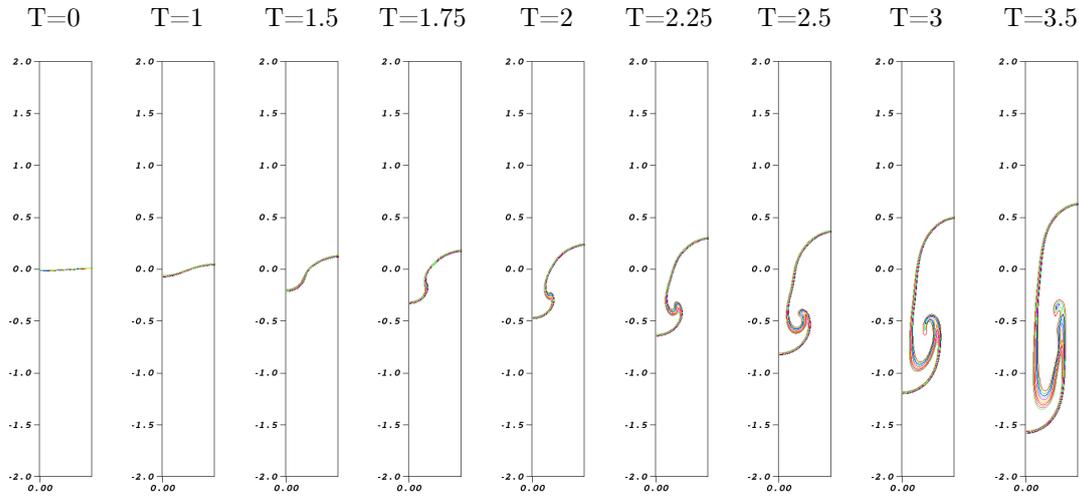


FIGURE III.16 – Instabilité de Rayleigh-Taylor : l'évolution de l'interface ; $Re = 5000$, $\rho_M/\rho_m = 7$, amplitude initiale $\zeta = 0.01$. Maillage uniforme barycentrique 50×400 , Ligne de niveau de la densité $2 \leq \rho \leq 4$.

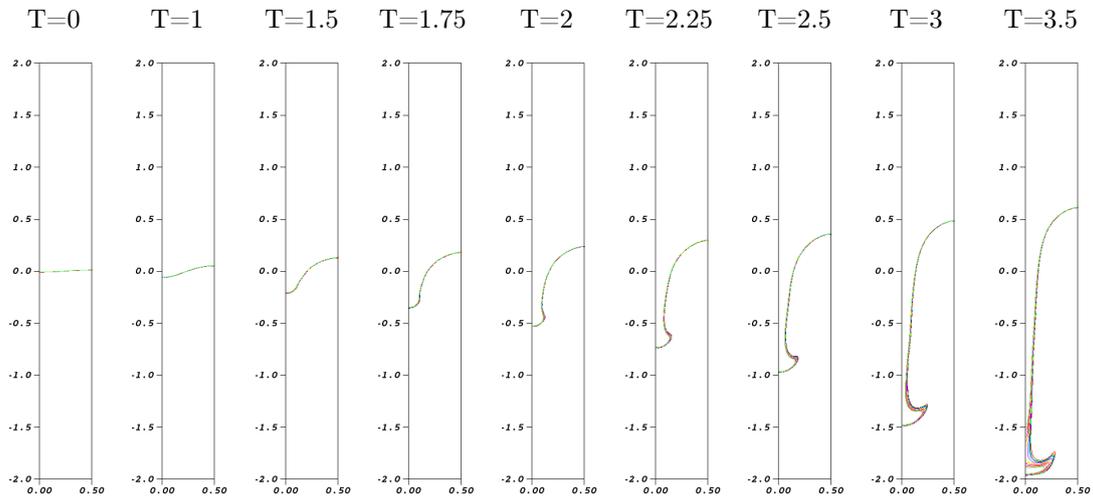


FIGURE III.17 – Instabilité de Rayleigh-Taylor : l'évolution de l'interface ; $Re = 1000$, $\rho_M/\rho_m = 19$, amplitude initiale $\zeta = 0.01$. Maillage uniforme barycentrique 40×320 , Ligne de niveau de la densité $9 \leq \rho \leq 11$.

Chapitre IV

Algorithme de Schwarz pour le problème de Navier-Stokes

Dans ce chapitre, je fais le lien entre les Chapitres I et III, nous nous intéressons aux méthodes de décomposition de domaine de type Schwarz sans recouvrement pour le problème de Navier-Stokes avec des conditions de Dirichlet étudié dans [16]

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u}, p)) = \mathbf{f}; & \text{dans } \Omega_T = \Omega \times [0, T] \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 & \text{dans } \Omega_T, \\ \mathbf{u} = \mathbf{g}_i & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_{init} & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (\text{IV.1})$$

avec $0 < T < \infty$, Ω un domaine polygonal borné ouvert de \mathbb{R}^2 , où $\mathbf{u} : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}^2$ est la vitesse, $p : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$ est la pression et $\sigma(\mathbf{u}, p) = \frac{2}{\operatorname{Re}} \mathbf{D}\mathbf{u} - p\operatorname{Id}$ est le tenseur des contraintes avec $\operatorname{Re} > 0$. En particulier, le tenseur du taux de déformation est défini par la partie symétrique du gradient de vitesse $\mathbf{D}\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + {}^t\nabla\mathbf{u})$.

Notre objectif est de décomposer le domaine Ω en sous-domaines plus petits, de résoudre le problème incompressible de Navier-Stokes sur ces sous-domaines en imposant certaines conditions de transmission aux interfaces, et de récupérer, au moyen d'un algorithme de Schwarz itératif, la solution discrète de (IV.1) sur Ω . Puisque nous travaillons avec un problème instationnaire, nous décidons d'appliquer cet algorithme itératif à chaque itération. De plus, nous voulons que les conditions d'interface soient locales et nous ne faisons aucune condition sur le nombre de Reynolds.

Séparons le domaine de calcul Ω en deux sous-domaines $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. On note Γ l'interface $\Omega_1 \cap \Omega_2$. L'algorithme de Schwarz définit une suite de solutions $(\mathbf{u}_j^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ du problème de Navier-Stokes dans Ω_j , avec $j \in \{1, 2\}$, en imposant la condition de transmission suivante

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{u}_j^\ell, p_j^\ell) \cdot \bar{\mathbf{n}}_j - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_j^\ell \cdot \bar{\mathbf{n}}_j)(\mathbf{u}_j^\ell) + \lambda \mathbf{u}_j^\ell &= \sigma(\mathbf{u}_i^{\ell-1}, p_i^{\ell-1}) \cdot \bar{\mathbf{n}}_i - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_i^{\ell-1} \cdot \bar{\mathbf{n}}_i)(\mathbf{u}_i^{\ell-1}) + \lambda \mathbf{u}_i^{\ell-1}, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}_j^\ell) + \alpha p_j^\ell &= -\operatorname{div}(\mathbf{u}_i^{\ell-1}) + \alpha p_i^{\ell-1}, \end{aligned} \quad (\text{IV.2})$$

où $i \neq j$ et $\bar{\mathbf{n}}_j$ est la normale unitaire sortante de Ω_j . La condition de transmission, qui implique les paramètres $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, s'inspire de la condition classique de Fourier. La première condition combine linéairement les valeurs de l'inconnue et celles de sa dérivée; ici, la convection est également incluse. La deuxième condition, qui ne dépend que de α , combine la divergence de la vitesse avec la pression; car nous souhaitons que la contrainte d'incompressibilité soit vérifiée à la convergence de l'algorithme.

Dans ce chapitre, nous proposons une discrétisation DDFV pour le problème de Navier-Stokes avec des conditions aux limites de Dirichlet sur l'ensemble du domaine Ω . Contrairement à la Section III.2, ici nous ne discrétisons pas une formulation variationnelle, contrairement à la Section III.3, ici nous généralisons le choix de la discrétisation décentrée pour le terme de convection en utilisant les B -schémas. Dans ces B -schémas, le terme de convection est approché par une discrétisation centrée plus une perturbation diffusive, qui dépend d'une fonction générale B . Ceci est inspiré du travail de [HH14], qui traite l'équation scalaire d'advection-diffusion-réaction avec une discrétisation classique des volumes finis.

Toutes les notations et les opérateurs sont définis dans l'Annexe.

IV.1 Un B -schéma DDFV pour le problème de Navier-Stokes

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Nous notons $\delta t = \frac{T}{N}$ et $t_n = n\delta t$ pour $n \in \{0, \dots, N\}$. Nous utilisons une discrétisation Euler implicite en temps sauf pour le terme de convection non-linéaire, qui est linéarisé de manière semi-implicite. A chaque pas de temps, nous imposons l'égalité suivante

$$\operatorname{div}^{\mathfrak{D}}(\mathbf{u}_\tau^n) - \beta d_{\mathfrak{D}}^2 \Delta^{\mathfrak{D}} p_{\mathfrak{D}}^n = 0 \quad (\text{IV.3})$$

qui prend en compte la stabilisation à la Brezzi-Pitkäranta, avec le paramètre $\beta > 0$.

Nous cherchons $\mathbf{u}^{\mathcal{T}, [0, T]} = (\mathbf{u}_\tau^n)_{n \in \{0, \dots, N\}} \in (\mathbb{E}_0)^{N+1}$ et $p^{\mathfrak{D}, [0, T]} = (p_{\mathfrak{D}}^n)_{n \in \{0, \dots, N\}} \in (\mathbb{R}^{\mathfrak{D}})^{N+1}$, qui sont initialisés par :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^0 &= \mathbb{P}_c^{\mathcal{T}} \mathbf{u}_0 \in \mathbb{E}_0, \\ p^0 &\in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}} \text{ tel que } \Delta^{\mathfrak{D}} p^0 = \frac{1}{\beta d_{\mathfrak{D}}^2} \operatorname{div}^{\mathfrak{D}}(\mathbf{u}^0) \text{ avec } \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} p_{\mathcal{D}}^0 = 0. \end{aligned}$$

La pression p^0 est bien définie puisqu'elle est solution d'un système carré inversible. Avec ce choix de (\mathbf{u}^0, p^0) nous garantissons la propriété (IV.3) à chaque pas de temps. Le terme de force est discrétisé à l'aide de la projection moyenne sur \mathcal{T} , avec $\mathbb{P}_m^{\mathfrak{M}} \mathbf{f}$ et $\mathbb{P}_m^{\mathfrak{M}^*} \mathbf{f}$. A partir de maintenant, pour simplifier les notations nous noterons $(\mathbf{u}_\tau^{n+1}, p_{\mathfrak{D}}^{n+1})$ par $(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathfrak{D}})$ et $(\mathbf{u}_\tau^n, p_{\mathfrak{D}}^n)$ par $(\bar{\mathbf{u}}_{\mathcal{T}}, \bar{p}_{\mathfrak{D}})$.

Soit $(\bar{\mathbf{u}}_{\mathcal{T}}, \bar{p}_{\mathfrak{D}})$ vérifiant (IV.3) nous cherchons $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$ et $p_{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{\kappa} \frac{\mathbf{u}_{\kappa}}{\delta t} + \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa}} m_{\sigma} \mathcal{F}_{\sigma\kappa} = m_{\kappa} \mathbf{f}_{\kappa} + m_{\kappa} \frac{\bar{\mathbf{u}}_{\kappa}}{\delta t} \quad \forall \kappa \in \mathfrak{M} \\ m_{\kappa^*} \frac{\mathbf{u}_{\kappa^*}}{\delta t} + \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} m_{\sigma^*} \mathcal{F}_{\sigma^*\kappa^*} = m_{\kappa^*} \mathbf{f}_{\kappa^*} + m_{\kappa^*} \frac{\bar{\mathbf{u}}_{\kappa^*}}{\delta t} \quad \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}^* \\ \operatorname{div}^{\mathfrak{D}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) - \beta d_{\mathfrak{D}}^2 \Delta^{\mathfrak{D}} p_{\mathfrak{D}} = 0 \\ \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} p_{\mathcal{D}} = 0. \end{array} \right. \quad (\mathcal{P})$$

Les flux sont définis comme une somme d'un terme de "diffusion" et d'un terme de "convection" :

$$m_{\sigma} \mathcal{F}_{\sigma\kappa} = m_{\sigma} (\mathcal{F}_{\sigma\kappa}^d + \mathcal{F}_{\sigma\kappa}^c), \quad m_{\sigma^*} \mathcal{F}_{\sigma^*\kappa^*} = m_{\sigma^*} (\mathcal{F}_{\sigma^*\kappa^*}^d + \mathcal{F}_{\sigma^*\kappa^*}^c).$$

Les flux de diffusion sont définis par :

$$\begin{aligned} m_{\sigma} \mathcal{F}_{\sigma\kappa}^d &= -m_{\sigma} \sigma^{\mathfrak{D}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathfrak{D}}) \bar{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} = -m_{\sigma} \left(\frac{2}{\operatorname{Re}} \mathbb{D}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - p_{\mathfrak{D}} \operatorname{Id} \right) \bar{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}, \\ m_{\sigma^*} \mathcal{F}_{\sigma^*\kappa^*}^d &= -m_{\sigma^*} \sigma^{\mathfrak{D}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathfrak{D}}) \bar{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*} = -m_{\sigma^*} \left(\frac{2}{\operatorname{Re}} \mathbb{D}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - p_{\mathfrak{D}} \operatorname{Id} \right) \bar{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*}, \end{aligned}$$

Les flux de convection sont une somme d'une discrétisation centrée et d'une perturbation diffusive

$$\begin{aligned} m_\sigma \mathcal{F}_{\sigma\kappa}^c &= m_\sigma F_{\kappa,\sigma} \left(\frac{\mathbf{u}_\kappa + \mathbf{u}_\mathcal{L}}{2} \right) + \frac{m_\sigma^2}{2\text{Rem}_\mathcal{D}} B \left(\frac{2m_\mathcal{D}\text{Re}}{m_\sigma} F_{\kappa,\sigma} \right) (\mathbf{u}_\kappa - \mathbf{u}_\mathcal{L}), \\ m_{\sigma^*} \mathcal{F}_{\sigma^*\kappa^*}^c &= m_{\sigma^*} F_{\kappa^*,\sigma^*} \left(\frac{\mathbf{u}_{\kappa^*} + \mathbf{u}_{\mathcal{L}^*}}{2} \right) + \frac{m_{\sigma^*}^2}{2\text{Rem}_\mathcal{D}} B \left(\frac{2m_\mathcal{D}\text{Re}}{m_{\sigma^*}} F_{\kappa^*,\sigma^*} \right) (\mathbf{u}_{\kappa^*} - \mathbf{u}_{\mathcal{L}^*}). \end{aligned}$$

La définition de $F_{\kappa,\sigma}$, F_{κ^*,σ^*} est la même que dans la Section III.2 à l'exception des termes de bord :

$$m_{\sigma^*} F_{\kappa^*,\sigma^*} = \begin{cases} - \sum_{s \in \mathfrak{S}_{\kappa^*} \cap \mathcal{E}_\mathcal{D}} m_s G_{s,\mathcal{D}} & \text{si } \kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*, \sigma^* \cap \partial\Omega = \emptyset \\ -m_s G_{s,\mathcal{D}} - \frac{1}{2} m_{\sigma_{\kappa^*}} H_{\kappa^*} & \text{si } \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*, \sigma^* \cap \partial\Omega \neq \emptyset, \text{i.e. } \mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}^{\text{ext}} \end{cases}$$

où $m_{\sigma_{\kappa^*}}$ représente la mesure de l'intersection entre $\partial\kappa^* \cap \partial\Omega$ et

$$m_{\sigma_{\kappa^*}} H_{\kappa^*} = \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}^{\text{ext}}} m_{\sigma \cap \partial\kappa^*} \bar{\mathbf{u}}_{\kappa^*} \cdot \bar{\mathbf{n}}_{\sigma_{\kappa^*}}, \quad \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*.$$

Nous remarquons que si (IV.3) est vérifiée, alors les flux $F_{\kappa,\sigma}$ et F_{κ^*,σ^*} sont conservatifs :

$$F_{\kappa,\sigma} = -F_{\mathcal{L},\sigma}, \quad \forall \sigma = \kappa | \mathcal{L} \quad \text{et} \quad F_{\kappa^*,\sigma^*} = -F_{\mathcal{L}^*,\sigma^*}, \quad \forall \sigma^* = \kappa^* | \mathcal{L}^*.$$

Proposition IV.1 (Proposition 3.1 [16])

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV. Pour tout $(\mathbf{u}_\mathcal{T}, p_\mathcal{D}) \in \mathbb{E}_0 \times \mathbb{R}^\mathcal{D}$, $\beta \in \mathbb{R}^*$ nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_\kappa} m_\sigma F_{\kappa,\sigma} &= 0 & \forall \kappa \in \mathfrak{M}, \\ \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} m_{\sigma^*} F_{\kappa^*,\sigma^*} &= 0 & \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}^*, \\ \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} m_{\sigma^*} F_{\kappa^*,\sigma^*} &= -m_{\sigma_{\kappa^*}} H_{\kappa^*} & \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*. \end{aligned}$$

La partie diffusive dépend de la fonction B , qui décrit les différents schémas avec lesquels nous pouvons travailler. Le schéma centré correspond à $B(s) = 0$ et le schéma upwind correspond à $B(s) = \frac{1}{2}|s|$. Cependant, pour des besoins ultérieurs et l'analyse de la méthode de décomposition de domaine, il est pertinent de considérer un cadre assez général dans lequel B peut être une matrice. Dans ce qui suit, nous notons $B \left(\frac{2m_\mathcal{D}\text{Re}}{m_\sigma} F_{\kappa,\sigma} \right)$ avec $B_{\sigma\kappa}$ et $B \left(\frac{2m_\mathcal{D}\text{Re}}{m_{\sigma^*}} F_{\kappa^*,\sigma^*} \right)$ avec $B_{\sigma^*\kappa^*}$. Les flux totaux deviennent alors :

$$\begin{aligned} m_\sigma \mathcal{F}_{\sigma\kappa} &= -m_\sigma \sigma^\mathcal{D}(\mathbf{u}_\mathcal{T}, p_\mathcal{D}) \bar{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} + m_\sigma F_{\kappa,\sigma} \left(\frac{\mathbf{u}_\kappa + \mathbf{u}_\mathcal{L}}{2} \right) + \frac{m_\sigma^2}{2\text{Rem}_\mathcal{D}} B_{\sigma\kappa} (\mathbf{u}_\kappa - \mathbf{u}_\mathcal{L}) \\ m_{\sigma^*} \mathcal{F}_{\sigma^*\kappa^*} &= -m_{\sigma^*} \sigma^\mathcal{D}(\mathbf{u}_\mathcal{T}, p_\mathcal{D}) \bar{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*} + m_{\sigma^*} F_{\kappa^*,\sigma^*} \left(\frac{\mathbf{u}_{\kappa^*} + \mathbf{u}_{\mathcal{L}^*}}{2} \right) + \frac{m_{\sigma^*}^2}{2\text{Rem}_\mathcal{D}} B_{\sigma^*\kappa^*} (\mathbf{u}_{\kappa^*} - \mathbf{u}_{\mathcal{L}^*}) \end{aligned} \quad (\text{IV.4})$$

Le caractère bien posé du schéma (\mathcal{P}), connu lorsque la discrétisation centrée ou upwind est utilisée, se généralise à une large classe de fonctions B . Dans ce qui suit, pour une matrice A

$N \times N$, nous écrivons $A \geq 0$ lorsque la partie symétrique de A est semi-définie positive, ce qui signifie que $Az \cdot z \geq 0$ est valable pour n'importe quel vecteur $z \in \mathbb{R}^N$.

Théorème IV.2 (Theorem 3.2 [16])

Supposons que

$$\begin{aligned} B_{\sigma\kappa} &= B_{\sigma\mathcal{L}}, & B_{\sigma\kappa} &\geq 0 \\ B_{\sigma^*\kappa^*} &= B_{\sigma^*\mathcal{L}^*}, & B_{\sigma^*\kappa^*} &\geq 0. \end{aligned} \quad (\mathcal{H}p)$$

Alors le schéma (\mathcal{P}) est bien posé.

IV.2 L'algorithme de Schwarz DDFV

Comme chaque maille duale du maillage d'origine est divisée en deux par l'interface Γ , il est nécessaire d'introduire des inconnues de flux supplémentaires $\Psi_{\kappa_j^*}$, pour tous les $\kappa_j^* \in \partial\mathcal{M}_{j,\Gamma}^*$, comme dans le Chapitre I. Ces inconnues sont destinées à approcher les flux duaux $\mathcal{F}_{\sigma^*\kappa^*}$ sur l'interface. Pour un diamant $\mathcal{D} \in \mathcal{D}_j^\Gamma$, les inconnues sont illustrées à la Fig. IV.1.

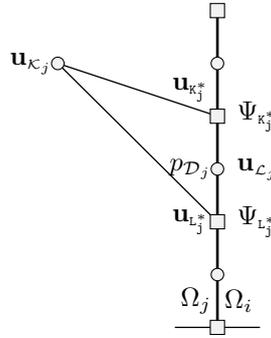


FIGURE IV.1 – Les inconnues sur un diamant à l'interface du sous-domaine Ω_j .

Sur chaque sous-domaine Ω_j de Ω , nous voulons résoudre un système Navier-Stokes avec des conditions limites mixtes. Sur la partie de la frontière qui intersecte $\partial\Omega$, nous imposons des conditions aux limites de Dirichlet. Sur l'interface Γ entre les deux sous-domaines, nous imposons la version discrétisée des conditions de transmission (IV.2). Ces conditions de transmission vont intervenir trois paramètres strictement positifs :

- λ qui se présente comme dans la condition de transmission de Fourier pour la vitesse,
- α qui se présente comme dans la condition de transmission de Fourier pour la pression,
- β qui repose sur la stabilisation à la Brezzi-Pitkäranta.

Précisément, la contrainte d'incompressibilité est approchée sur le maillage diamant \mathcal{D}_j et pour les diamants dans \mathcal{D}_j^Γ , un terme de transmission est ajouté, contrôlé par le paramètre α . Nous donnons maintenant, de manière formelle, une explication de la nécessité d'ajouter cette condition aux diamants de l'interface \mathcal{D}_j^Γ : notre objectif est de récupérer, à la convergence de l'algorithme de Schwarz, la contrainte d'incompressibilité $\text{div}^\mathcal{D}(\mathbf{u}_\mathcal{T}) = 0$ pour tous les \mathcal{D} qui intersectent Γ dans Ω (que nous écrivons ici pour des raisons de simplicité sans le terme de stabilisation). Un diamant \mathcal{D} dans Ω intersectant Γ peut être écrit comme l'union des diamants $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ dans Ω_1, Ω_2 . Par définition de la divergence discrète, nous pouvons décomposer $m_\mathcal{D} \text{div}^\mathcal{D} \mathbf{u}_\mathcal{T} = m_{\mathcal{D}_1} \text{div}^{\mathcal{D}_1} \mathbf{u}_\mathcal{T} + m_{\mathcal{D}_2} \text{div}^{\mathcal{D}_2} \mathbf{u}_\mathcal{T}$. Cela implique notamment que sur Γ nous aimerions :

$$m_{\mathcal{D}_1} \text{div}^{\mathcal{D}_1} \mathbf{u}_\mathcal{T} = -m_{\mathcal{D}_2} \text{div}^{\mathcal{D}_2} \mathbf{u}_\mathcal{T}. \quad (\text{IV.5})$$

Imposer une telle condition à toutes les itérations de l'algorithme de Schwarz n'est toutefois pas suffisant pour prouver la convergence de cet algorithme, comme nous le montrerons plus loin dans le Théorème IV.4 ; pour appliquer les outils analytiques de la preuve, il est nécessaire d'ajouter à (IV.5) un terme de type Fourier pour la pression, contrôlé par α .

Nous introduisons maintenant le processus itératif qui définit l'algorithme de Schwarz. A chaque pas de temps t_n nous appliquons l'algorithme de Schwarz DDFV : pour une initialisation arbitraire $\mathbf{h}_{\mathcal{T}_j}^0 \in \mathbb{R}^{\partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma} \cup \partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}^*}$ et $g_{\mathcal{D}_j}^0 \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}_j}$, à chaque itération $\ell = 1, 2, \dots$ et $i, j \in \{1, 2\}$, $j \neq i$ nous procédons aux deux étapes suivantes :

1. Calculer $(\mathbf{u}_{\mathcal{T}_j}^\ell, p_{\mathcal{D}_j}^\ell, \Psi_{\mathcal{T}_j}^\ell) \in \mathbb{E}_0^{\Gamma_D} \times \mathbb{R}^{\mathcal{D}_j} \times \mathbb{R}^{\partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}^*}$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} m_\kappa \frac{\mathbf{u}_\kappa^\ell}{\delta t} + \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_\kappa} m_\sigma \mathcal{F}_{\sigma\kappa}^\ell = m_\kappa \mathbf{f}_\kappa + m_\kappa \frac{\bar{\mathbf{u}}_\kappa}{\delta t} & \forall \kappa \in \mathfrak{M}_j \\ m_{\kappa^*} \frac{\mathbf{u}_{\kappa^*}^\ell}{\delta t} + \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa^*}} m_{\sigma^*} \mathcal{F}_{\sigma^*\kappa^*}^\ell = m_{\kappa^*} \mathbf{f}_{\kappa^*} + m_{\kappa^*} \frac{\bar{\mathbf{u}}_{\kappa^*}}{\delta t} & \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}_j^* \\ m_{\kappa^*} \frac{\mathbf{u}_{\kappa^*}^\ell}{\delta t} + \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa^*}} m_{\sigma^*} \mathcal{F}_{\sigma^*\kappa^*}^\ell + m_{\sigma_{\kappa^*}} \Psi_{\kappa^*}^\ell = m_{\kappa^*} \mathbf{f}_{\kappa^*} + m_{\kappa^*} \frac{\bar{\mathbf{u}}_{\kappa^*}}{\delta t} & \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}^* \\ -\mathcal{F}_{\sigma\kappa}^\ell + \frac{1}{2} F_{\kappa,\sigma} \mathbf{u}_\kappa^\ell + \lambda \mathbf{u}_\kappa^\ell = \mathbf{h}_\kappa^{\ell-1} & \forall \sigma \in \partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma} \\ -\Psi_{\kappa^*}^\ell + \frac{1}{2} H_{\kappa^*} \mathbf{u}_{\kappa^*}^\ell + \lambda \mathbf{u}_{\kappa^*}^\ell = \mathbf{h}_{\kappa^*}^{\ell-1} & \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}^* \\ m_{\mathcal{D}} \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}_j}^\ell) - \beta m_{\mathcal{D}} d_{\mathcal{D}}^2 \Delta^{\mathcal{D}} p_{\mathcal{D}_j}^\ell = 0 & \forall \mathcal{D} \in \mathcal{D}_j \setminus \mathcal{D}_j^\Gamma \\ m_{\mathcal{D}} \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}_j}^\ell) - \beta m_{\mathcal{D}} d_{\mathcal{D}}^2 \Delta^{\mathcal{D}} p_{\mathcal{D}_j}^\ell + \alpha m_{\mathcal{D}} p_{\mathcal{D}}^\ell = g_{\mathcal{D}}^{\ell-1} & \forall \mathcal{D} \in \mathcal{D}_j^\Gamma, \end{array} \right. \quad (\mathcal{S}_1)$$

où $\lambda, \beta, \alpha > 0$ et $\bar{\mathbf{u}}_{\mathcal{T}_j}$ est la solution calculée à l'instant précédent $t_{n-1} = (n-1)\delta t$ pour $n \in \{1, \dots, N-1\}$. Nous ferons référence au système (\mathcal{S}_1) sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}_{\Omega_j, \Gamma}^{\mathcal{T}_j}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}_j}^\ell, p_{\mathcal{D}_j}^\ell, \Psi_{\mathcal{T}_j}^\ell, \mathbf{f}_{\mathcal{T}_j}, \bar{\mathbf{u}}_{\mathcal{T}_j}, \mathbf{h}_{\mathcal{T}_j}^{\ell-1}, g_{\mathcal{D}_j^\Gamma}^{\ell-1}) = 0. \quad (\text{IV.6})$$

2. Calculer les nouvelles valeurs de $\mathbf{h}_{\mathcal{T}_j}^\ell$ et de $g_{\mathcal{D}_j^\Gamma}^\ell$ avec :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{h}_{\mathcal{L}_j}^\ell = \mathcal{F}_{\sigma\kappa_i}^\ell - \frac{1}{2} F_{\sigma\kappa_i} \mathbf{u}_{\mathcal{L}_i}^\ell + \lambda \mathbf{u}_{\mathcal{L}_i}^\ell, & \forall \mathcal{L}_j = \mathcal{L}_i \in \partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma} \\ \mathbf{h}_{\kappa_j^*}^\ell = \Psi_{\kappa_j^*}^\ell - \frac{1}{2} H_{\kappa_j^*} \mathbf{u}_{\kappa_j^*}^\ell + \lambda \mathbf{u}_{\kappa_j^*}^\ell, & \forall \kappa_j^* \in \partial\mathfrak{M}_{j,\Gamma}^* \text{ tel que } x_{\kappa_j^*} = x_{\kappa_i^*} \\ g_{\mathcal{D}_j}^\ell = - (m_{\mathcal{D}_i} \operatorname{div}^{\mathcal{D}_i}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}_i}^\ell) - \beta m_{\mathcal{D}_i} d_{\mathcal{D}_i}^2 \Delta^{\mathcal{D}_i} p_{\mathcal{D}_i}^\ell) + \alpha m_{\mathcal{D}_i} p_{\mathcal{D}_i}^\ell, & \forall \mathcal{D}_j \in \mathcal{D}_j^\Gamma \text{ tel que } x_{\mathcal{D}_j} = x_{\mathcal{D}_i}. \end{array} \right. \quad (\mathcal{S}_2)$$

Théorème IV.3 (Theorem 4.3 [16])

Sous les hypothèses $(\mathcal{H}p)$ et $\lambda, \beta, \alpha > 0$, le schéma DDFV (\mathcal{S}_1) est bien posé.

Lorsqu'on étudie la limite de l'algorithme de Schwarz DDFV (\mathcal{S}_1) - (\mathcal{S}_2) , nous trouvons qu'il ne converge pas vers la solution de (\mathcal{P}) mais la solution de $(\tilde{\mathcal{P}})$ défini dans la section suivante.

Théorème IV.4 (Theorem 5.8 [16])

Sous l'hypothèse que $m_{\sigma^} = 2m_{\sigma_i^*} = 2m_{\sigma_j^*}$ pour $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, les itérés de l'algorithme de Schwarz DDFV (\mathcal{S}_1) - (\mathcal{S}_2) converge quand l tend vers l'infini vers la solution du schéma DDFV $(\tilde{\mathcal{P}})$ (à une constante près pour la pression).*

IV.3 Le schéma limite ($\tilde{\mathcal{P}}$)

Nous considérons le schéma DDFV suivant pour (IV.1), dans le domaine Ω : soit $(\bar{\mathbf{u}}_{\mathcal{T}}, \bar{p}_{\mathcal{D}})$, vérifiant (IV.3), nous cherchons $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$ et $p_{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{\kappa} \frac{\mathbf{u}_{\kappa}}{\delta t} + \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa} \setminus \mathcal{D}_{\kappa}^{\Gamma}} m_{\sigma} \mathcal{F}_{\sigma\kappa} + \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa}^{\Gamma}} m_{\sigma} \tilde{\mathcal{F}}_{\sigma\kappa} = m_{\kappa} \mathbf{f}_{\kappa} + m_{\kappa} \frac{\bar{\mathbf{u}}_{\kappa}}{\delta t} \quad \forall \kappa \in \mathfrak{M} \\ m_{\kappa^*} \frac{\mathbf{u}_{\kappa^*}}{\delta t} + \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa^*} \setminus \mathcal{D}_{\kappa^*}^{\Gamma}} m_{\sigma^*} \mathcal{F}_{\sigma^*\kappa^*} + \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa^*}^{\Gamma}} m_{\sigma^*} \tilde{\mathcal{F}}_{\sigma^*\kappa^*} = m_{\kappa^*} \mathbf{f}_{\kappa^*} + m_{\kappa^*} \frac{\bar{\mathbf{u}}_{\kappa^*}}{\delta t} \quad \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}^* \\ m_{\mathcal{D}} \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) - \beta m_{\mathcal{D}} d_{\mathcal{D}}^2 \Delta^{\mathcal{D}} p_{\mathcal{D}} = 0 \quad \forall \mathcal{D} \in \mathcal{D} \\ \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} p_{\mathcal{D}} = 0. \end{array} \right. \quad (\tilde{\mathcal{P}})$$

A l'intérieur du domaine, les flux coïncident avec les flux de (\mathcal{P}), voir (IV.4), et sur l'interface, ils sont modifiés et définis par :

$$\begin{aligned} m_{\sigma} \tilde{\mathcal{F}}_{\sigma\kappa} &= -m_{\sigma} \sigma^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{D}}) \bar{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} + m_{\sigma} F_{\kappa,\sigma} \left(\frac{\mathbf{u}_{\kappa} + \mathbf{u}_{\mathcal{L}}}{2} \right) + \frac{m_{\sigma}^2}{2 \operatorname{Rem}_{\mathcal{D}}} \tilde{B}_{\sigma\kappa}(\mathbf{u}_{\kappa} - \mathbf{u}_{\mathcal{L}}), \\ m_{\sigma^*} \tilde{\mathcal{F}}_{\sigma^*\kappa^*} &= -m_{\sigma^*} \sigma^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{D}}) \bar{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*} + m_{\sigma^*} F_{\kappa^*,\sigma^*} \left(\frac{\mathbf{u}_{\kappa^*} + \mathbf{u}_{\mathcal{L}^*}}{2} \right) + \frac{m_{\sigma^*}^2}{2 \operatorname{Rem}_{\mathcal{D}}} \tilde{B}_{\sigma^*\kappa^*}(\mathbf{u}_{\kappa^*} - \mathbf{u}_{\mathcal{L}^*}), \end{aligned}$$

où $\tilde{B}_{\sigma\kappa}$ et $\tilde{B}_{\sigma^*\kappa^*}$ sont des matrices qui viennent de la condition de transmission de l'algorithme itératif. Leurs expressions sont données dans les Proposition IV.7 et IV.8. Une estimation d'erreur numérique de ce schéma est illustrée dans [31], le schéma est d'ordre 1 pour la vitesse, le gradient de vitesse et la pression.

Commençons par une définition préliminaire, en gardant à l'esprit que $B_{\sigma\kappa}, B_{\sigma^*\kappa^*}$ sont supposés être des scalaires.

Définition IV.5

Pour $i = 1, 2$, et $\sigma \in \partial \mathfrak{M}_{i,\Gamma}$, nous posons $P = \operatorname{Id} + \bar{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} \otimes \bar{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}$ et

$$A_i = \frac{m_{\sigma}^2}{2 \operatorname{Rem}_{\mathcal{D}_i}} (P + B_{\sigma\kappa_i} \operatorname{Id}),$$

où nous rappelons que $B_{\sigma\kappa_i} = B \left(\frac{2m_{\mathcal{D}_i} \operatorname{Re}}{m_{\sigma}} F_{\sigma\kappa_i} \right)$. Ensuite, nous posons $A = A_1 + A_2$, qui est symétrique définie positive, et donc inversible. Pour $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, comme A_i et A_j sont des polynômes en P , la propriété suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} A_i A_j &= A_j A_i, \\ A_j A^{-1} &= A^{-1} A_j, \end{aligned}$$

car d'après l'Hypothèses (\mathcal{H}_p) nous avons $B_{\sigma\kappa_i} = B_{\sigma\kappa_j}$ pour $\sigma \in \partial \mathfrak{M}_{i,\Gamma}$.

Le schéma ($\tilde{\mathcal{P}}$) est défini sur le maillage \mathcal{T} de Ω ; en particulier, cela signifie qu'il n'y a pas d'inconnues primales $\mathbf{u}_{\mathcal{L}}$ sur l'interface Γ , voir Fig. IV.1. Le résultat suivant définit une inconnue \mathbf{u}_{σ} sur l'arête primale pour vérifier la conservativité des flux.

Proposition IV.6 (Proposition 5.3 [16])

Soit $\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\Gamma}$ un diamant et $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ les demi-diamants tels que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, voir Fig. IV.2. Nous notons par $(x_{\kappa}, x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}^*}, x_{\mathcal{L}})$ les sommets du diamant \mathcal{D} et $(x_{\kappa_1}, x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}^*}, x_{\sigma})$,

$(x_{\kappa_2}, x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}^*}, x_{\sigma})$ les sommets de \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 . Soit $\sigma = \kappa_1 | \kappa_2$, et A, A_1, A_2 définis dans la Définition IV.5. Alors, il existe un unique \mathbf{u}_{σ} , donné par

$$\mathbf{u}_{\sigma} = A^{-1} \left[A_1 \mathbf{u}_{\kappa_1} + A_2 \mathbf{u}_{\kappa_2} + \frac{1}{2} m_{\sigma} F_{\sigma \kappa_1} (\mathbf{u}_{\kappa_1} - \mathbf{u}_{\kappa_2}) \right], \quad (\text{IV.7})$$

qui vérifie

$$\mathcal{F}_{\sigma \kappa_1} = -\mathcal{F}_{\sigma \kappa_2}. \quad (\text{IV.8})$$

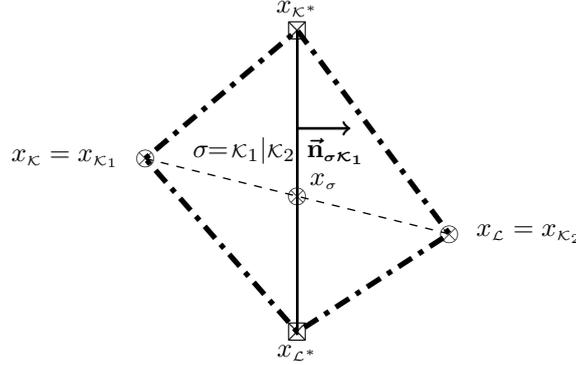


FIGURE IV.2 – Un diamant \mathcal{D} , de sommets $x_{\kappa}, x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}^*}, x_{\mathcal{L}}$ union de deux demi-diamants : \mathcal{D}_1 de sommets $x_{\kappa_1}, x_{\kappa^*}, x_{\sigma}, x_{\mathcal{L}^*}$ et \mathcal{D}_2 de sommets $x_{\kappa_2}, x_{\kappa^*}, x_{\sigma}, x_{\mathcal{L}^*}$. En particulier, $\sigma_1^* = [x_{\kappa_1}, x_{\mathcal{L}}]$ et $\sigma_2^* = [x_{\mathcal{L}}, x_{\kappa_2}]$.

Proposition IV.7 (Proposition 5.4 [16])

Soit \mathcal{D} un diamant et $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ les deux demi-diamants tels que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, voir Fig. IV.2 . Alors il existe un unique flux $\tilde{\mathcal{F}}_{\sigma \kappa}$ sur $\sigma = \kappa_1 | \kappa_2$ tel que

$$m_{\sigma} \tilde{\mathcal{F}}_{\sigma \kappa} = m_{\sigma} \mathcal{F}_{\sigma \kappa_1} = -m_{\sigma} \mathcal{F}_{\sigma \kappa_2}, \quad (\text{IV.9})$$

donné par

$$m_{\sigma} \tilde{\mathcal{F}}_{\sigma \kappa} = -m_{\sigma} \sigma^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{D}}) \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \kappa} + m_{\sigma} F_{\kappa, \sigma} \left(\frac{\mathbf{u}_{\kappa_1} + \mathbf{u}_{\kappa_2}}{2} \right) + \frac{m_{\sigma}^2}{2 \text{Rem}_{\mathcal{D}}} \tilde{B}_{\sigma \kappa} (\mathbf{u}_{\kappa_1} - \mathbf{u}_{\kappa_2}), \quad (\text{IV.10})$$

$$\tilde{B}_{\sigma \kappa} = \frac{2 \text{Rem}_{\mathcal{D}}}{m_{\sigma}^2} \left(A_1 A_2 + \left(\frac{1}{2} m_{\sigma} F_{\kappa, \sigma} \right)^2 \text{Id} \right) A^{-1} - P. \quad (\text{IV.11})$$

Proposition IV.8 (Proposition 5.5 [16])

Soit \mathcal{D} un diamant et $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ les deux demi-diamants tels que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, voir Fig. IV.2 . Alors , pour $\kappa^* \in \partial \mathfrak{M}_{\Gamma}^*$, il existe un unique flux $\tilde{\mathcal{F}}_{\sigma^* \kappa^*}$ sur $\sigma^* = \sigma_1^* \cup \sigma_2^* = [x_{\kappa_1}, x_{\mathcal{L}}] \cup [x_{\mathcal{L}}, x_{\kappa_2}]$ tel que

$$m_{\sigma^*} \tilde{\mathcal{F}}_{\sigma^* \kappa^*} = m_{\sigma_1^*} \mathcal{F}_{\sigma_1^* \kappa^*} + m_{\sigma_2^*} \mathcal{F}_{\sigma_2^* \kappa^*}, \quad (\text{IV.12})$$

donné par

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\sigma^* \kappa^*} = -m_{\sigma^*} \sigma^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{D}}) \tilde{\mathbf{n}}_{\kappa^*} + m_{\sigma^*} F_{\kappa^*, \sigma^*} \left(\frac{\mathbf{u}_{\kappa^*} + \mathbf{u}_{\mathcal{L}^*}}{2} \right) + \frac{m_{\sigma^*}^2}{2 \text{Rem}_{\mathcal{D}}} \tilde{B}_{\sigma^* \kappa^*} (\mathbf{u}_{\kappa^*} - \mathbf{u}_{\mathcal{L}^*}), \quad (\text{IV.13})$$

$$\tilde{B}_{\sigma^* \kappa^*} = \frac{m_{\sigma_1^*}}{m_{\sigma^*}} B_{\sigma_1^* \kappa^*} + \frac{m_{\sigma_2^*}}{m_{\sigma^*}} B_{\sigma_2^* \kappa^*}. \quad (\text{IV.14})$$

Théorème IV.9 (Theorem 5.6 [16])

Sous l'Hypothèses (Hp) pour $B_{\sigma \kappa}, B_{\sigma^* \kappa^*}$, le schéma $(\tilde{\mathcal{P}})$ est bien posé.

Pour prouver la convergence de l'algorithme de Schwarz vers la solution de $(\tilde{\mathcal{P}})$, il est nécessaire de projeter cette solution, définie sur Ω , sur les sous-domaines $\Omega_j, j = 1, 2$.

Théorème IV.10 (Theorem 5.7 [16])

Soit \mathcal{T} un maillage composite $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ et $(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{D}})$ solution du schéma DDFV $(\tilde{\mathcal{P}})$ sur le domaine Ω . Pour $j \in \{1, 2\}$, il existe une projection $(\mathbf{u}_{\mathcal{T}_j}^{\infty}, p_{\mathcal{D}_j}^{\infty}, \Psi_{\mathcal{T}_j}^{\infty}, h_{\mathcal{T}_j}^{\infty}, g_{\mathcal{D}_j}^{\infty}) \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}_j} \times \mathbb{R}^{\mathcal{D}_j} \times \mathbb{R}^{\partial \mathcal{M}_{j,\Gamma}^*} \times \mathbb{R}^{\mathcal{T}_j} \times \mathbb{R}^{\mathcal{D}_j}$ de $(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{D}})$, telle que :

$$\mathcal{L}_{\Omega_j, \Gamma}^{\mathcal{T}_j}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}_j}^{\infty}, p_{\mathcal{D}_j}^{\infty}, \Psi_{\mathcal{T}_j}^{\infty}, \mathbf{f}_{\mathcal{T}_j}, \bar{\mathbf{u}}_{\mathcal{T}_j}, \mathbf{h}_{\mathcal{T}_j}^{\infty}, g_{\mathcal{D}_j}^{\infty}) = 0. \quad (\tilde{\mathcal{P}}^{\infty})$$

IV.4 Un algorithme de Schwarz DDFV modifié

Nous examinons maintenant s'il est possible de construire un algorithme de Schwarz discret avec des flux modifiés convergeant vers la solution de (\mathcal{P}) . Nous montrons que cela est possible si nous supposons une discrétisation asymétrique de (IV.1), en ce sens qu'il faut envisager une discrétisation upwind du terme de convection sur le maillage primal et une discrétisation centrée sur le maillage dual qui correspond au choix

$$B_{\sigma \kappa}(s) = \frac{1}{2}|s| \quad \text{et} \quad B_{\sigma^* \kappa^*}(s) = 0$$

dans (\mathcal{P}) . Nous rappelons que la convergence vers $(\tilde{\mathcal{P}})$ est valable si et seulement si elle peut être vue comme une définition de $\tilde{B}_{\sigma \kappa}$ (resp. $\tilde{B}_{\sigma^* \kappa^*}$) en fonction de $B_{\sigma \kappa_1}, B_{\sigma \kappa_2}$ (resp. $B_{\sigma_1^* \kappa^*}, B_{\sigma_2^* \kappa^*}$). L'idée est de modifier l'algorithme de Schwarz afin qu'il converge vers la solution de (\mathcal{P}) ; cela repose sur la capacité d'inverser ces relations. En conséquence, les flux de l'équation limite ne dépendent que de $B_{\sigma \kappa}, B_{\sigma^* \kappa^*}$ et une définition différente des flux n'est pas requise sur l'interface Γ .

Théorème IV.11 (Theorem 6.1 [16])

Soit $(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{D}})$ une solution de (\mathcal{P}) pour des flux convectifs définis par le flux upwind $B_{\sigma \kappa}(s) = \frac{1}{2}|s|$ pour tout $\sigma \in \mathcal{E}$, et des flux centrés $B_{\sigma^* \kappa^*}(s) = 0$ pour tout $\sigma^* \in \mathcal{E}^*$. Définissons (\tilde{S}) l'algorithme de Schwarz où

- Sur le maillage primal, les flux convectifs sont définis par :

$$B_{\sigma \kappa}(s) \text{Id si } \sigma \notin \mathcal{E}_{\Gamma}, \quad \bar{B}_{\sigma \kappa}(s) \text{ si } \sigma \in \mathcal{E}_{\Gamma},$$

avec :

$$\bar{B}_{\sigma \kappa}(s) = \frac{1}{2} Q \begin{pmatrix} |s| - 2 + 2\sqrt{1 + |s|} & 0 \\ 0 & |s| - 1 + \sqrt{1 + 2|s|} \end{pmatrix} Q^{-1},$$

et $Q = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}$, où $\vec{\mathbf{n}}_{\sigma \kappa} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est la normale unitaire sortante de l'interface Γ .

- Sur le maillage dual, $B_{\sigma^* \kappa^*}(s) = 0$.

Supposons $m_{\sigma^*} = 2m_{\sigma_j^*} = 2m_{\sigma_i^*}$, pour $j, i = 1, 2, j \neq i$, (\mathcal{P}) est la limite de l'algorithme de Schwarz $(\bar{\mathcal{S}})$.

IV.5 Résultats numériques

Notre but est de regarder la qualité numérique de la solution de l'algorithme de Schwarz. Le cas test est défini avec les équations dimensionnées, ainsi nous adaptons ici le même cadre, voir Fig. IV.3. Les références [STD⁺96] et [Joh04] considèrent un canal $\Omega = [0, 2.2\text{m}] \times [0, 0.41\text{m}]$ avec un obstacle circulaire S dont le centre est situé à $(0.2\text{m}, 0.2\text{m})$; nous décomposons le domaine Ω en deux sous-domaines Ω_1, Ω_2 et nous plaçons l'interface Γ en $x = 0.56\text{m}$. Le

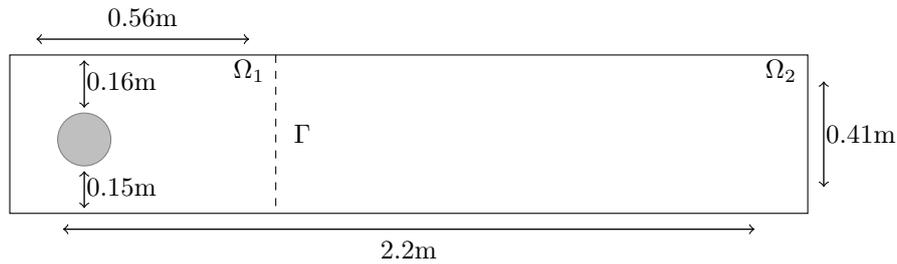


FIGURE IV.3 – Domaine $\Omega = [0, 2.2] \times [0, 0.41]$, décomposé en $\Omega_1 = [0, 0.56] \times [0, 0.41]$ et $\Omega_2 = [0.56, 2.2] \times [0, 0.41]$.

maillage considéré pour Ω est représenté dans la Fig. IV.4; il est obtenu avec GMSH, il a 8560 mailles et il est localement raffiné autour de l'obstacle. Remarque que le domaine de gauche Ω_1 (celui avec les triangles) possède 4464 mailles et celui de droite Ω_2 (celui avec les carrés) possède 4096 mailles.

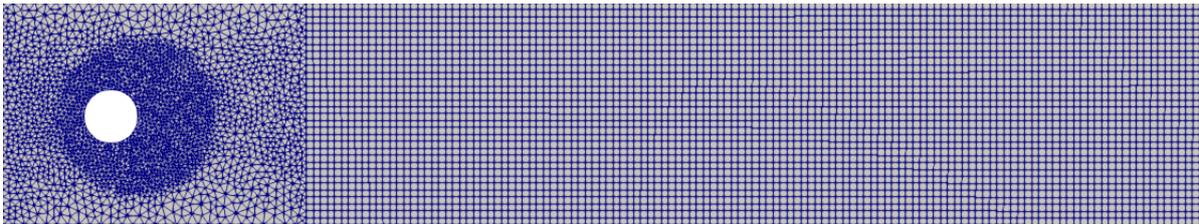


FIGURE IV.4 – Maillage sur le domaine Ω de Fig. IV.3. Le nombre de mailles primales est 8560; 4464 pour le domaine de gauche, 4096 pour celui de droite.

La viscosité du fluide vaut $\eta = 10^{-3} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ et le temps final est $T = 8\text{s}$. Le flux entrant en $x = 0$ et sortant en $x = 2.2$ est :

$$\mathbf{g}_1(x, y, t) = 0.41^{-2} \sin(\pi t/8) (6y(0.41 - y), 0).$$

La condition initiale est $\mathbf{u}_{init}(x, y) = (0, 0)$. La vitesse de référence est $\bar{U} = 1 \text{ms}^{-1}$ (notons que la vitesse maximale est $\frac{3}{2}\bar{U}$). Le diamètre de l'obstacle est $L = 0.1\text{m}$, ainsi le nombre de Reynold est $0 \leq \text{Re}(t) \leq 100$. Le pas de temps est $\delta t = 0.00166\text{s}$.

Nous utilisons le schéma limite $(\tilde{\mathcal{P}})$, mais à quelques temps fixés, nous utilisons l'algorithme de Schwarz itératif (\mathcal{S}_1) - (\mathcal{S}_2) , avec comme données initiales $\mathbf{h}_{\mathcal{T}_j}^0$ et $g_{\mathcal{D}_j}^0$, pour $j = 1, 2$, donnés

par $(\tilde{\mathcal{P}})$ au temps précédent. Le critère d'arrêt est

$$\max \left(\|\mathbf{e}_{\mathcal{T}_j}^\ell\|_{2,\mathcal{T}}, \|\Pi_{\mathcal{D}_j}^\ell\|_{2,\mathcal{D}} \right) < 10^{-3} \quad (\text{IV.15})$$

et les paramètres sont $\lambda = 200$, $\alpha = 1$ et $\beta = 0.01$. Pour discrétiser le terme de convection, nous choisissons $B = 0$ qui donne une méthode plus précise.

Pour commencer, considérons le profil de la première composante de la vitesse. L'algorithme itératif est appliqué à l'instant $T = 2s$ et $T = 6s$; nous comparons la solution du problème limite $(\tilde{\mathcal{P}})$ (Fig. IV.5, IV.7) à la solution obtenue par l'algorithme itératif (\mathcal{S}_1) - (\mathcal{S}_2) (Fig. IV.6, IV.8). Comme nous pouvons le constater, le profil est le même et la décomposition de domaine n'introduit aucun mode parasite dans la solution; le critère d'arrêt (IV.15) est suffisant pour obtenir une approximation juste de la solution attendue. La convergence de l'algorithme est obtenue en 559 itérations à $T = 2s$ et en 689 itérations à $T = 6s$; le nombre d'itérations peut être optimisé par le choix des paramètres λ, α, β (les paramètres sont fixés une fois pour toutes et n'évoluent pas dans le temps). Par exemple, avec le choix $\lambda = 50$ et $\alpha = 0.5$, la convergence de l'algorithme est accéléré, elle est obtenue en 102 itérations à $T = 2s$ et en 178 itérations à $T = 6s$.

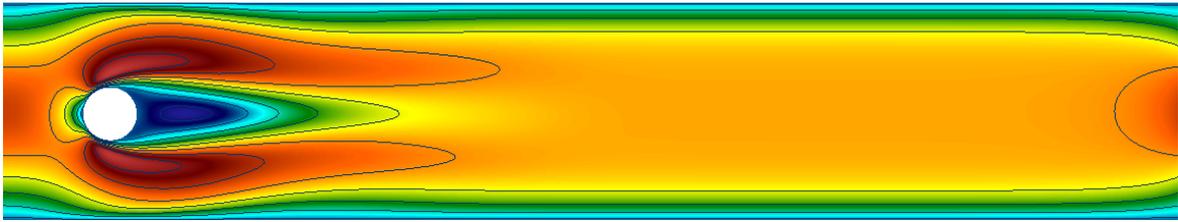


FIGURE IV.5 – Première composante de la vitesse pour la solution du schéma de Navier-Stokes sur Ω à $T = 2s$.

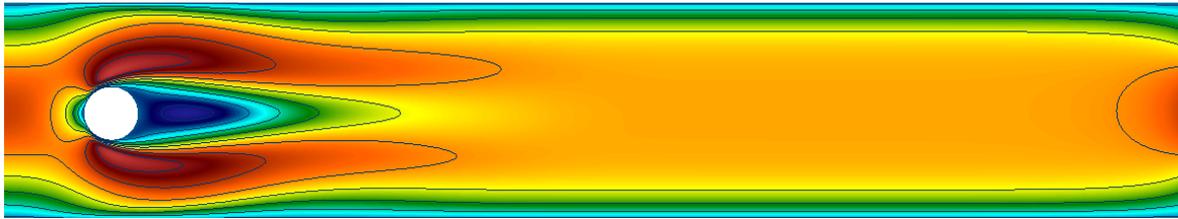


FIGURE IV.6 – Première composante de la vitesse pour la solution de l'algorithme de Schwarz à l'itération 559 à $T = 2s$.

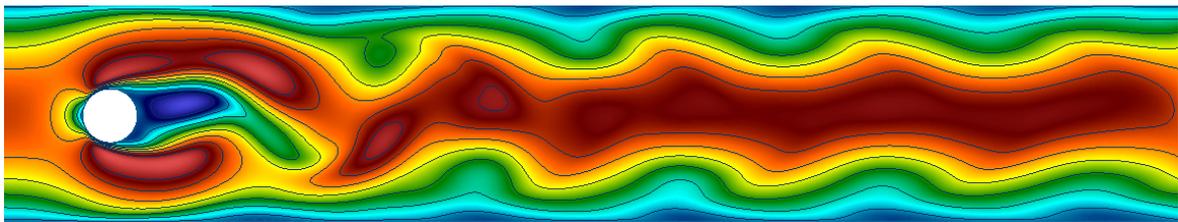


FIGURE IV.7 – Première composante de la vitesse pour la solution du schéma de Navier-Stokes sur Ω à $T = 6s$.

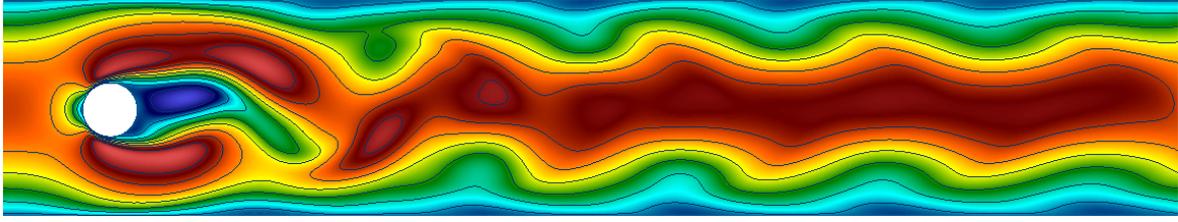


FIGURE IV.8 – Première composante de la vitesse pour la solution de l'algorithme de Schwarz à l'itération 689 à $T = 6s$.

Afin de mesurer la qualité des résultats obtenus, nous nous concentrons maintenant sur le calcul des coefficients de trainée et portance pour le problème limite ($\tilde{\mathcal{P}}$) et pour la solution de (\mathcal{S}_1) - (\mathcal{S}_2). Nous définissons le coefficient de trainée $c_d(t)$ et le coefficient de portance $c_l(t)$ comme

$$c_d(t) = \frac{2}{\rho L \bar{U}^2} \int_S \left(\rho \eta \frac{\partial \mathbf{u}_{t_S}(t)}{\partial n} n_y - p(t) n_x \right),$$

$$c_l(t) = -\frac{2}{\rho L \bar{U}^2} \int_S \left(\rho \eta \frac{\partial \mathbf{u}_{t_S}(t)}{\partial n} n_x + p(t) n_y \right),$$

où S représente le bord de l'obstacle, $\tilde{\mathbf{n}}_S = (n_x, n_y)$ est le vecteur normal à S pointant vers Ω , $\mathbf{t}_S = (n_y, -n_x)$ le vecteur tangentiel et \mathbf{u}_{t_S} la vitesse tangentielle. Au niveau discret, on pose donc

$$c_d^n = \frac{2}{\rho L \bar{U}^2} \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{ext} \cap S} m_\sigma (\rho \eta \nabla^{\mathcal{D}} (\mathbf{u}_T^n \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\kappa^* \mathcal{L}^*}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \kappa} n_y - p_{\mathcal{D}}^n n_x),$$

$$c_l^n = -\frac{2}{\rho L \bar{U}^2} \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{ext} \cap S} m_\sigma (\rho \eta \nabla^{\mathcal{D}} (\mathbf{u}_T^n \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\kappa^* \mathcal{L}^*}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \kappa} n_x + p_{\mathcal{D}}^n n_y).$$

Nous étudions l'évolution des coefficients dans la Figure IV.9 et leur valeur maximale est indiquée dans le Tableau IV.1, défini par :

$$c_{d,max} = \max_{n \in \{0 \dots N\}} c_d^n, \quad c_{l,max} = \max_{n \in \{0 \dots N\}} c_l^n.$$

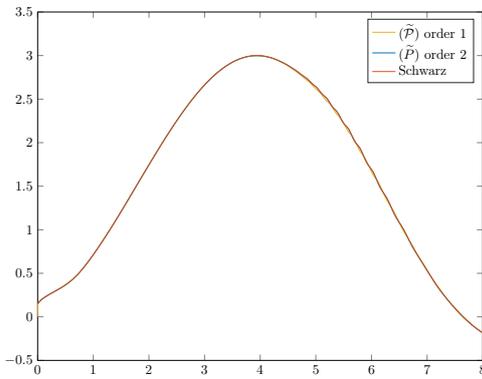
Les résultats donnés dans le Tableau IV.1 et la Figure IV.9 montrent que les solutions données par le problème limite ($\tilde{\mathcal{P}}$) et celles de l'algorithme de Schwarz (\mathcal{S}_1)-(\mathcal{S}_2) sont robuste et qualitativement correct. Le comportement des coefficients de trainée et de portance de ($\tilde{\mathcal{P}}$) est cohérent avec les valeurs de référence de [Joh04], et les valeurs maximales des deux coefficients sont similaires, (voir le Tableau IV.1). Le léger écart dans la valeur maximale des coefficients est du au niveau de raffinement du maillage et à l'ordre en temps du schéma : nous travaillons avec environ 90 000 inconnues, pour toutes les composantes de vitesse et de pression, contre environ 500 000 inconnues utilisées dans [Joh04]. La Figure IV.9 montre que le coefficient de portance est sensible au choix de la discrétisation temporelle : le pas de temps dans [Joh04] est $\delta t = 0.00125s$ avec un schéma d'ordre deux en temps. Notre schéma est d'ordre un en temps, et nous travaillons avec $\delta t = 0.00166s$.

Nous avons implémenté un schéma d'ordre deux en temps, comme dans [13] : la première itération reste inchangée, alors que pour $n \in \{1, \dots, N\}$ le terme $\partial_t \mathbf{u}$ est approché par $\frac{1}{\delta t} (\frac{3}{2} \mathbf{u}_T^{n+1} - 2 \mathbf{u}_T^n + \frac{1}{2} \mathbf{u}_T^{n-1})$ au lieu de $\frac{1}{\delta t} (\mathbf{u}_T^{n+1} - \mathbf{u}_T^n)$ et le flux de convection $F_{\kappa, \sigma}$ dépend de $(2 \mathbf{u}_T^n - \mathbf{u}_T^{n-1})$ au lieu de \mathbf{u}_T^n . En effet, cette approche améliore l'approximation du coefficient de portance, voir la Figure IV.9. Les coefficients de trainée et de portance correspondant à l'algorithme de Schwarz (\mathcal{S}_1)-(\mathcal{S}_2) sont calculées avec un schéma d'ordre deux en temps. L'algorithme de

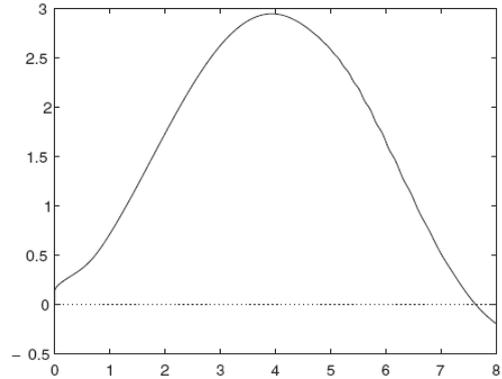
Schwarz est appliqué à chaque pas de temps; nous calculons alors les coefficients associés à partir de la solution de l'algorithme. Les résultats sont illustrés dans la Figure IV.9, où nous pouvons observer que les valeurs de ces coefficients coïncident avec les autres courbes données par la solution de $(\tilde{\mathcal{P}})$, on peut en conclure que l'algorithme produit une bonne approximation de la solution du problème de Navier-Stokes sur l'ensemble du domaine.

	Schwarz	$(\tilde{\mathcal{P}})$ ordre 1	$(\tilde{\mathcal{P}})$ ordre 2	Référence
$c_{d,\max}$	2.9999	2.9985	2.9987	2.9509
$c_{l,\max}$	0.5100	0.5183	0.53246	0.4779

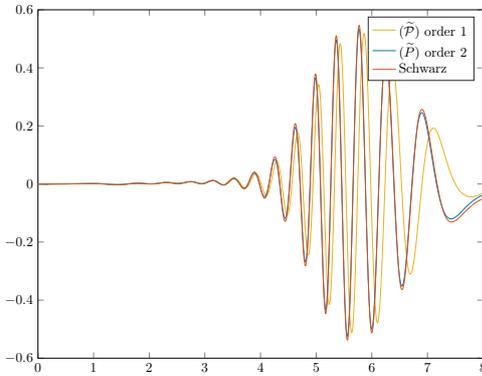
TABLE IV.1 – Comparaison entre les valeurs de $c_{d,\max}, c_{l,\max}$ obtenus avec les schémas DDFV $(\tilde{\mathcal{P}})$ d'ordre 1 et 2 en temps, avec l'algorithme de Schwarz algorithm et avec les valeurs de référence [Joh04].



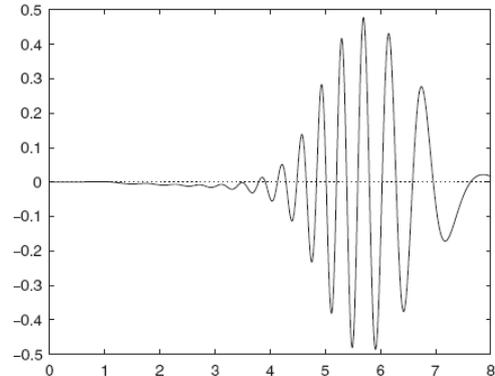
Evolution en temps du coefficient de trainé DDFV.



Evolution en temps du coefficient de trainé de référence.



Evolution en temps du coefficient de portance DDFV.



Evolution en temps du coefficient de portance de référence.

FIGURE IV.9 – Comparaison entre l'évolution de c_d^n, c_l^n sur l'intervalle $[0, 8]$ obtenu avec le schéma DDFV $(\tilde{\mathcal{P}})$, d'ordre 1 et 2 en temps, avec l'algorithme de Schwarz algorithm (\mathcal{S}_1) - (\mathcal{S}_2) d'ordre 2 (*Gauche*) et la valeur de référence de [Joh04] (*Droite*).

Nous allons maintenant considérer plus que deux sous-domaines. Nous décomposons le domaine Ω en 4 et 5 sous-domaines. Pour les 4 sous-domaines $\Omega = \bigcup_{i=1}^4 \Omega_i$, les interfaces sont situées Γ_1 à $x = 0.56\text{m}$, Γ_2 à $x = 1.11\text{m}$ et Γ_3 à $x = 1.66\text{m}$. Le sous-domaine Ω_1 possède 18250 mailles, et $\Omega_i, i = 2, 3, 4$, possèdent 5440 mailles. Pour les 5 sous-domaines $\Omega = \bigcup_{i=1}^5 \Omega_i$, les interfaces sont situées Γ_1 à $x = 0.56\text{m}$, Γ_2 à $x = 0.97\text{m}$, Γ_3 à $x = 1.38\text{m}$ et Γ_4 à $x = 1.79\text{m}$. Le sous-domaine Ω_1 possède toujours 18250 mailles, et $\Omega_i, i = 2, 3, 4, 5$, possèdent 4096 mailles. Le

critère d'arrêt vaut maintenant :

$$\max \left(\|\mathbf{e}_{\mathcal{T}_j}^\ell\|_2, \|\Pi_{\mathcal{D}_j}^\ell\|_2 \right) < 5 \times 10^{-3}$$

et les valeurs des paramètres valent, comme dans le cas de deux sous-domaines, $\lambda = 200$, $\alpha = 1$, $\beta = 0.01$, $B = 0$.

‡ sous-domaines	2	4	5
‡ itérations	388	484	663

TABLE IV.2 – A $T = 6s$, Comparaison du nombre d'itérations pour arriver à convergence pour les différentes décomposition.

Nous comparons les résultats au temps $T = 6s$, quand le fluide est plus turbulent et avec des variations dans tous les sous-domaines ; Nous prenons comme référence la solution obtenue dans la Figure IV.7. Comme on peut voir dans les Figures IV.10, IV.11, IV.12, les profils sont similaires et le nombre de sous-domaines n'influencent pas la solution. Comme le résume le Tableau IV.2, le fait d'augmenter le nombre de sous-domaines augmente le nombre d'itérations nécessaire pour arriver à convergence. Cela vient du fait que l'information met plus de temps à circuler à travers toutes les interfaces. Néanmoins, le temps de calcul pour résoudre le système linéaire sur un sous-domaine est plus faible.

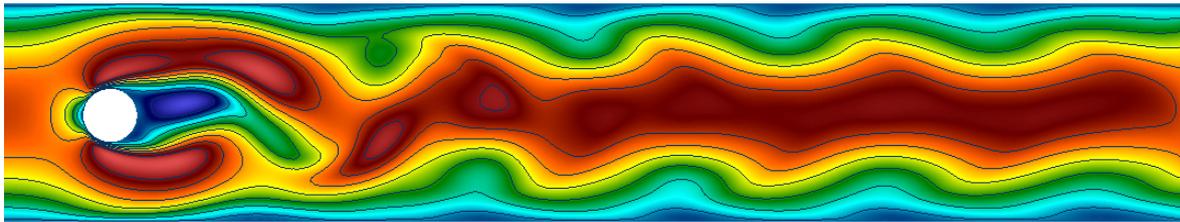


FIGURE IV.10 – Première composante de la vitesse obtenue à l'itération 388th de l'algorithme de Schwarz, au temps $T = 6s$, pour 2 sous-domaines.

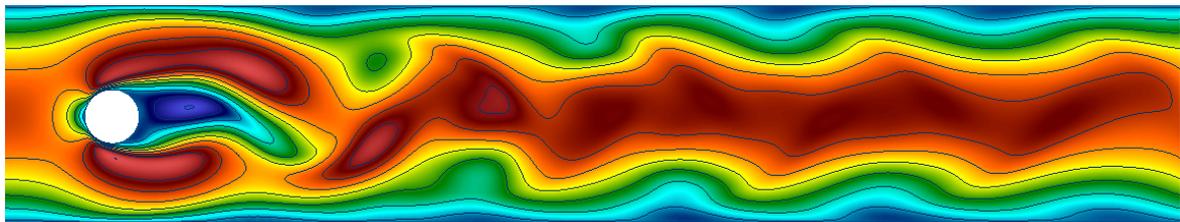


FIGURE IV.11 – Première composante de la vitesse obtenue à l'itération 484th de l'algorithme de Schwarz, au temps $T = 6s$, pour 4 sous-domaines.

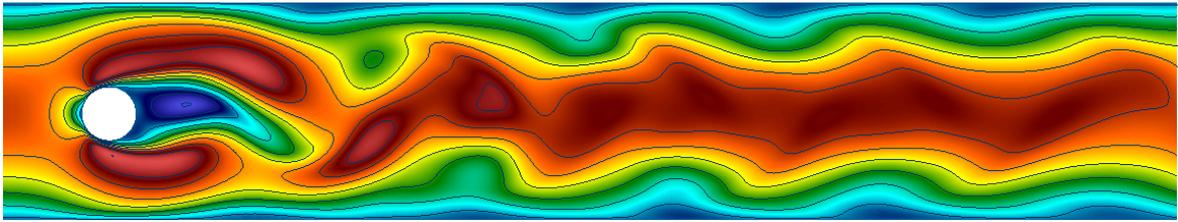


FIGURE IV.12 – Première composante de la vitesse obtenue à l'itération 663th de l'algorithme de Schwarz, au temps $T = 6s$, pour 5 sous-domaines.

Chapitre V

Discrétisation HHO du problème de Navier-Stokes stationnaire

Dans ce chapitre, nous analysons la méthode Hybrid High-Order (HHO) pour les équations de Navier-Stokes incompressible stationnaire étudié dans [12]. La méthode proposée marche aussi bien en 2D qu'en 3D avec le même formalisme, elle est Inf-Sup stable sur les maillages généraux, y compris les éléments polyédriques et les interfaces non conforme, elle prend en charge l'ordre d'approximation arbitraire et a un coût de calcul réduit grâce à la possibilité de condenser statiquement un sous-ensemble des degrés de liberté de vitesse et de pression à chaque itération non linéaire.

Toutes les notations et les opérateurs sont définis dans l'Annexe.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2, 3\}$, désigne un domaine polyédrique ouvert borné connecté. Le problème de Navier-Stokes incompressible stationnaire consiste à trouver une vitesse $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ et une pression $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega, \quad (\text{V.1a})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (\text{V.1b})$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (\text{V.1c})$$

$$\int_{\Omega} p = 0, \quad (\text{V.1d})$$

où $\nu > 0$ est la viscosité et $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^d$. Pour le terme convectif, ici et dans ce qui suit, nous utiliserons la notation produit matrice-vecteur avec des quantités vectorielles traitées comme des vecteurs colonnes, de sorte que, $\nabla \mathbf{u} \mathbf{u} = (\sum_{j=1}^d (\partial_j u_i) u_j)_{1 \leq i \leq d}$ avec u_i représentant la i ème composante de \mathbf{u} et ∂_j la dérivée le long de j ème direction. Soient $\mathbf{U} := H_0^1(\Omega)^d$ et $P := L_0^2(\Omega)$ avec $L_0^2(\Omega) := \{q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q = 0\}$. Une formulation faible classique du problème (V.1) est : Trouver $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{U} \times P$ tels que

$$\nu a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + t(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U}, \quad (\text{V.2a})$$

$$-b(\mathbf{u}, q) = 0 \quad \forall q \in P, \quad (\text{V.2b})$$

avec les formes bilinéaires $a : \mathbf{U} \times \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : \mathbf{U} \times P \rightarrow \mathbb{R}$ et la forme trilinéaire $t : \mathbf{U} \times \mathbf{U} \times \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}, & b(\mathbf{v}, q) &:= - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v}) q, \\ t(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{v}^t \nabla \mathbf{u} \mathbf{w} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{u}^t \nabla \mathbf{v} \mathbf{w}, \end{aligned} \quad (\text{V.3})$$

où t représente l'opérateur de transposition.

V.1 Description de la méthode HHO

V.1.1 Terme visqueux

Le terme visqueux est discrétisé au moyen de la forme bilinéaire a_h sur $\underline{\mathbf{U}}_h^k \times \underline{\mathbf{U}}_h^k$ telle que, pour tout $\underline{\mathbf{u}}_h, \underline{\mathbf{v}}_h \in \underline{\mathbf{U}}_h^k$,

$$a_h(\underline{\mathbf{u}}_h, \underline{\mathbf{v}}_h) := \int_{\Omega} \mathbf{G}_h^k \underline{\mathbf{u}}_h : \mathbf{G}_h^k \underline{\mathbf{v}}_h + s_h(\underline{\mathbf{u}}_h, \underline{\mathbf{v}}_h),$$

avec une stabilisation qui est une forme bilinéaire s_h définie par :

$$s_h(\underline{\mathbf{u}}_h, \underline{\mathbf{v}}_h) := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} h_F^{-1} \int_F \delta_{TF}^k \underline{\mathbf{u}}_T \cdot \delta_{TF}^k \underline{\mathbf{v}}_T,$$

où, pour tout $T \in \mathcal{T}_h$ et tout $F \in \mathcal{F}_T$, nous avons introduit l'opérateur résiduel basé sur les faces $\delta_{TF}^k : \underline{\mathbf{U}}_T^k \rightarrow \mathbb{P}^k(F)^d$ tel que

$$\delta_{TF}^k \underline{\mathbf{v}}_T := \pi_F^k (\mathbf{v}_F - \mathbf{r}_T^{k+1} \underline{\mathbf{v}}_T - \pi_T^k (\mathbf{v}_T - \mathbf{r}_T^{k+1} \underline{\mathbf{v}}_T)).$$

Cette forme spécifique du résidu pénalisé assure la propriété de consistance suivante : Pour tout $\mathbf{v} \in H^{k+2}(\Omega)^d$,

$$s_h(\mathbf{I}_h^k \mathbf{v}, \mathbf{I}_h^k \mathbf{v})^{\frac{1}{2}} \leq Ch^{k+1} \|\mathbf{v}\|_{H^{k+2}(\Omega)},$$

avec $C > 0$ une constante ne dépendant pas de h .

Proposition V.1 (Proposition 2 [12])

La forme bilinéaire a_h a les propriétés suivantes :

1. Nous avons, pour tout $\underline{\mathbf{v}}_h \in \underline{\mathbf{U}}_h^k$,

$$C_a^{-1} \|\underline{\mathbf{v}}_h\|_{1,h}^2 \leq \|\underline{\mathbf{v}}_h\|_{a,h}^2 := a_h(\underline{\mathbf{v}}_h, \underline{\mathbf{v}}_h) \leq C_a \|\underline{\mathbf{v}}_h\|_{1,h}^2,$$

avec $C_a > 0$ une constante indépendante de h . Par conséquence, $\|\cdot\|_{a,h}$ définit une norme sur $\underline{\mathbf{U}}_{h,0}^k$ uniformément équivalente à $\|\cdot\|_{1,h}$ définie par (V.45).

2. Pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{U} \cap H^{k+2}(\Omega)^d$, nous avons

$$\sup_{\underline{\mathbf{w}}_h \in \underline{\mathbf{U}}_{h,0}^k, \|\underline{\mathbf{w}}_h\|_{1,h}=1} \left| \int_{\Omega} \Delta \mathbf{v} \cdot \underline{\mathbf{w}}_h + a_h(\mathbf{I}_h^k \mathbf{v}, \underline{\mathbf{w}}_h) \right| \leq Ch^{k+1} \|\mathbf{v}\|_{H^{k+2}(\Omega)^d},$$

avec $C > 0$ une constante ne dépendant pas de h .

3. Soit $(\underline{\mathbf{v}}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ une suite dans $(\underline{\mathbf{U}}_{h,0}^k)_{h \in \mathcal{H}}$ bornée dans la norme $\|\cdot\|_{1,h}$ avec pour limite $\mathbf{v} \in \mathbf{U}$ au sens du point 3) de Proposition 23. Alors, nous avons pour tout $\Phi \in C_c^\infty(\Omega)^d$, quand $h \rightarrow 0$, à une sous-suite près,

$$a_h(\underline{\mathbf{v}}_h, \mathbf{I}_h^k \Phi) \rightarrow a(\mathbf{v}, \Phi).$$

V.1.2 Terme convectif

Pour la discrétisation du terme convectif, nous considérons la forme trilineaire suivante sur $\underline{\mathbf{U}}_h^k \times \underline{\mathbf{U}}_h^k \times \underline{\mathbf{U}}_h^k$ exprimée à l'aide de l'opérateur gradient discret \mathbf{G}_h^{2k} :

$$t_h(\underline{\mathbf{w}}_h, \underline{\mathbf{u}}_h, \underline{\mathbf{v}}_h) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{v}_h^t \mathbf{G}_h^{2k} \underline{\mathbf{u}}_h \mathbf{w}_h - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{u}_h^t \mathbf{G}_h^{2k} \underline{\mathbf{v}}_h \mathbf{w}_h.$$

Cette expression imite celle continue donnée dans (V.3) avec \mathbf{G}_h^{2k} remplaçant l'opérateur de gradient continu. Comme on a l'égalité $(G : \mathbf{v}_h \otimes \mathbf{w}_h) = \mathbf{v}_h^t G \mathbf{w}_h$ avec $\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h$ dans $\mathbb{P}^k(\mathcal{T}_h)^d$, le gradient est testé contre des fonctions dans $\mathbb{P}^{2k}(\mathcal{T}_h)^{d \times d}$. Ainsi, on a fait le choix de \mathbf{G}_h^{2k} au lieu de \mathbf{G}_h^k . Notez que, dans l'implémentation pratique, il n'est pas nécessaire de calculer réellement \mathbf{G}_h^{2k} pour évaluer t_h . Au lieu de cela, l'expression suivante peut être utilisée, obtenue en appliquant deux fois la définition du gradient discret pour développer les termes impliquant \mathbf{G}_h^{2k} :

$$t_h(\underline{\mathbf{w}}_h, \underline{\mathbf{u}}_h, \underline{\mathbf{v}}_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} t_T(\underline{\mathbf{w}}_T, \underline{\mathbf{u}}_T, \underline{\mathbf{v}}_T),$$

où, pour tout $T \in \mathcal{T}_h$,

$$\begin{aligned} t_T(\underline{\mathbf{w}}_T, \underline{\mathbf{u}}_T, \underline{\mathbf{v}}_T) := & -\frac{1}{2} \int_T \mathbf{u}_T^t \nabla \mathbf{v}_T \mathbf{w}_T + \frac{1}{2} \int_T \mathbf{v}_T^t \nabla \mathbf{u}_T \mathbf{w}_T \\ & + \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F (\mathbf{u}_F \cdot \mathbf{v}_T) (\mathbf{w}_T \cdot \vec{\mathbf{n}}_{TF}) - \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F (\mathbf{v}_F \cdot \mathbf{u}_T) (\mathbf{w}_T \cdot \vec{\mathbf{n}}_{TF}). \end{aligned}$$

Proposition V.2 (Proposition 3 [12])

La forme trilineaire t_h a les propriétés suivantes :

1. Pour tout $\underline{\mathbf{v}}_h, \underline{\mathbf{w}}_h \in \underline{\mathbf{U}}_{h,0}^k$, nous avons

$$t_h(\underline{\mathbf{w}}_h, \underline{\mathbf{v}}_h, \underline{\mathbf{v}}_h) = 0.$$

2. Pour tout $\underline{\mathbf{u}}_h, \underline{\mathbf{v}}_h, \underline{\mathbf{w}}_h \in \underline{\mathbf{U}}_{h,0}^k$, nous avons

$$|t_h(\underline{\mathbf{w}}_h, \underline{\mathbf{u}}_h, \underline{\mathbf{v}}_h)| \leq C_t \|\underline{\mathbf{w}}_h\|_{1,h} \|\underline{\mathbf{u}}_h\|_{1,h} \|\underline{\mathbf{v}}_h\|_{1,h},$$

avec $C_t > 0$ une constante indépendante de h .

3. Pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{U} \cap H^{k+2}(\Omega)^d$ tel que $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, nous avons

$$\sup_{\underline{\mathbf{w}}_h \in \underline{\mathbf{U}}_{h,0}^k, \|\underline{\mathbf{w}}_h\|_{1,h} = 1} \left| \int_{\Omega} \mathbf{w}_h^t \nabla \mathbf{v} \mathbf{v} - t_h(\underline{\mathbf{I}}_h^k \mathbf{v}, \underline{\mathbf{I}}_h^k \mathbf{v}, \underline{\mathbf{w}}_h) \right| \leq C h^{k+1} \|\mathbf{v}\|_{H^2(\Omega)^d} \|\mathbf{v}\|_{H^{k+2}(\Omega)^d},$$

avec $C > 0$ une constante ne dépendant pas de h .

4. Soit $(\underline{\mathbf{v}}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ une suite dans $(\underline{\mathbf{U}}_{h,0}^k)_{h \in \mathcal{H}}$ bornée dans la norme $\|\cdot\|_{1,h}$ avec pour limite $\mathbf{v} \in \mathbf{U}$ au sens du point 3) de Proposition 23. Alors, pour tout $\Phi \in C_c^\infty(\Omega)^d$ nous avons, quand $h \rightarrow 0$, à une sous-suite près,

$$t_h(\underline{\mathbf{v}}_h, \underline{\mathbf{v}}_h, \underline{\mathbf{I}}_h^k \Phi) \rightarrow t(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \Phi).$$

V.1.3 Le couplage pression-vitesse

Le couplage pression-vitesse est réalisé à l'aide de la forme bilinéaire b_h sur $\underline{\mathbf{U}}_h^k \times P_h^k$ tel que, pour tout $(\underline{\mathbf{v}}_h, q_h) \in \underline{\mathbf{U}}_h^k \times P_h^k$,

$$b_h(\underline{\mathbf{v}}_h, q_h) := - \int_{\Omega} D_h^k \underline{\mathbf{v}}_h q_h.$$

Proposition V.3 (Proposition 4 [12])

La forme bilinéaire b_h a les propriétés suivantes :

1. Pour tout $q_h \in P_h^k$, nous avons

$$\|q_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C \sup_{\underline{\mathbf{v}}_h \in \underline{\mathbf{U}}_{h,0}^k, \|\underline{\mathbf{v}}_h\|_{1,h}=1} b_h(\underline{\mathbf{v}}_h, q_h),$$

avec $C > 0$ une constante ne dépendant pas de h .

2. Pour tout $q \in H^{k+1}(\Omega)$ nous avons

$$\sup_{\underline{\mathbf{v}}_h \in \underline{\mathbf{U}}_{h,0}^k, \|\underline{\mathbf{v}}_h\|_{1,h}=1} \left| \int_{\Omega} \nabla q \cdot \underline{\mathbf{v}}_h - b_h(\underline{\mathbf{v}}_h, \pi_h^k q) \right| \leq Ch^{k+1} \|q\|_{H^{k+1}(\Omega)},$$

avec $C > 0$ une constante ne dépendant pas de h .

3. Soit $(q_h)_{h \in \mathcal{H}}$ une suite dans $(P_h^k)_{h \in \mathcal{H}}$ bornée dans la norme $L^2(\Omega)$ et convergeant faiblement vers $q \in P$ quand $h \rightarrow 0$, à une sous-suite près. Alors, pour tout $\Phi \in C_c^\infty(\Omega)^d$ nous avons

$$b_h(\mathbf{I}_h^k \Phi, q_h) \rightarrow b(\Phi, q).$$

4. Soit $(\underline{\mathbf{v}}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ une suite dans $(\underline{\mathbf{U}}_{h,0}^k)_{h \in \mathcal{H}}$ bornée dans la $\|\cdot\|_{1,h}$ avec pour limite $\mathbf{v} \in \mathbf{U}$ au sens du point 3) de Proposition 23. Alors, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ nous avons

$$b_h(\underline{\mathbf{v}}_h, \pi_h^k \varphi) \rightarrow b(\mathbf{v}, \varphi).$$

V.2 Problème de Navier-Stokes stationnaire

V.2.1 Le schéma HHO

Le schéma HHO est le suivant : Trouver $(\underline{\mathbf{u}}_h, p_h) \in \underline{\mathbf{U}}_{h,0}^k \times P_h^k$ tels que

$$\nu a_h(\underline{\mathbf{u}}_h, \underline{\mathbf{v}}_h) + t_h(\underline{\mathbf{u}}_h, \underline{\mathbf{u}}_h, \underline{\mathbf{v}}_h) + b_h(\underline{\mathbf{v}}_h, p_h) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \underline{\mathbf{v}}_h \quad \forall \underline{\mathbf{v}}_h \in \underline{\mathbf{U}}_{h,0}^k, \quad (\text{V.4a})$$

$$-b_h(\underline{\mathbf{u}}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in P_h^k. \quad (\text{V.4b})$$

L'existence d'une solution discrète est prouvée dans le Théorème V.4 ci-dessous pour des données générales en utilisant des arguments classiques en analyse non linéaire [Dei85].

Théorème V.4 (Theorem 12 [12])

Il existe une solution $(\underline{\mathbf{u}}_h, p_h) \in \underline{\mathbf{U}}_{h,0}^k \times P_h^k$ à (V.4), qui vérifie les estimations a priori

suivantes

$$\|\underline{\mathbf{u}}_h\|_{1,h} \leq C\nu^{-1}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^d}, \quad \|p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^d} + \nu^{-2}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right),$$

avec $C > 0$ une constante indépendante de h et ν .

L'unicité, d'autre part, est montrée dans le Théorème V.5 ci-dessous sous une hypothèse de petitesse standard sur le second membre.

Théorème V.5 (Theorem 13 [12])

Nous supposons que le second membre vérifie

$$\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \frac{\nu^2}{C}$$

avec C une constante indépendante de h et ν . Alors, la solution $(\underline{\mathbf{u}}_h, p_h) \in \underline{\mathbf{U}}_{h,0}^k \times P_h^k$ de (V.4) est unique.

V.2.2 Convergence vers les solutions avec une régularité minimale

Une analyse de convergence complète de la méthode est réalisée. Premièrement, en utilisant un argument de compacité inspiré de la littérature récente sur les méthodes de volumes finis (voir, par exemple, [EGH00, EHL07, EGH10] et [9]), nous montrons dans le Théorème V.6 ci-dessous que la suite de solutions discrètes sur une famille de maillages raffinée converge (jusqu'à une sous-suite près) vers la solution continue pour les données générales et sans supposer plus de régularité pour la solution exacte que celle requise par la formulation faible. La convergence s'étend à toute la suite lorsque la solution continue est unique. L'utilisation de techniques de compacité dans le cadre de méthodes d'ordre élevé est assez originale ; voir par exemple [LW07, DPE10, DPE12] concernant le problème Navier-Stokes incompressible. Les résultats techniques clés requis pour prouver la convergence par compacité sont les noyaux discrets de Sobolev et les résultats de compacité Rellich-Kondrachov récemment prouvés dans [DPD17] dans le contexte de problèmes de Leray-Lions non linéaires.

Théorème V.6 (Theorem 14 [12])

Soient $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ une suite de maillage régulier tel que pour tout $h \in \mathcal{H}$, et $(\underline{\mathbf{u}}_h, p_h) \in \underline{\mathbf{U}}_{h,0}^k \times P_h^k$ résout (V.4). Alors, nous avons à une sous-suite près avec $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{U} \times P$ solution du problème continu (V.2),

1. $\underline{\mathbf{u}}_h \rightarrow \mathbf{u}$ fortement dans $L^p(\Omega)^d$ pour tout $p \in [1, +\infty)$ si $d = 2$, $p \in [1, 6)$ si $d = 3$;
2. $\mathbf{G}_h^k \underline{\mathbf{u}}_h \rightarrow \nabla \mathbf{u}$ fortement dans $L^2(\Omega)^{d \times d}$;
3. $s_h(\underline{\mathbf{u}}_h, \underline{\mathbf{u}}_h) \rightarrow 0$;
4. $p_h \rightarrow p$ fortement dans $L^2(\Omega)$.

Si, en outre, la solution de (V.2) est unique (ce qui est le cas si la condition de petitesse détaillée dans [GR86, Eq. (2.12), Chapitre IV] est valable pour \mathbf{f}), la convergence s'étend à toute la suite.

V.2.3 Ordre de convergence pour des données petites

Ensuite, dans le Théorème V.7, nous prouvons les estimations d'erreur pour des solutions exactes régulières sous une hypothèse de petitesse des données appropriées. Lorsque des po-

lynômes de degré $k \geq 0$ sont utilisés, nous montrons que la norme d'énergie de la vitesse et la norme L^2 de la pression convergent vers h^{k+1} (h désigne ici le pas du maillage). Ces taux de convergence sont similaires à ceux récemment dérivés dans [QS16] pour une méthode HDG avec des espaces de pression et de vitesse choisis comme dans [EW13, WY16]. Une différence par rapport à [QS16] est que nous les obtenons ici en utilisant des polynômes k au lieu de $(k+1)$ à l'intérieur des mailles du maillage (c'est précisément l'un des principaux résultats de la technologie HHO identifiée dans [CDPE16]).

Théorème V.7 (Theorem 15 [12])

Soit $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{U} \times P$ et $(\underline{\mathbf{u}}_h, p_h) \in \underline{\mathbf{U}}_{h,0}^k \times P_h^k$ solutions des problèmes (V.2) et (V.4), respectivement, et nous supposons l'unicité et la régularité suivante $(\mathbf{u}, p) \in H^{k+2}(\Omega)^d \times H^{k+1}(\Omega)$, aussi bien que

$$\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \frac{\nu^2}{C},$$

avec C une constante ne dépendant pas de h et ν . Soit

$$\hat{\underline{\mathbf{u}}}_h := \underline{\mathbf{I}}_h^k \mathbf{u}, \quad \hat{p}_h := \pi_h^k p.$$

Alors, il existe $C > 0$ une constante ne dépendant pas de h et ν telle que

$$\begin{aligned} \|\underline{\mathbf{u}}_h - \hat{\underline{\mathbf{u}}}_h\|_{1,h} + \nu^{-1} \|p_h - \hat{p}_h\|_{L^2(\Omega)} \\ \leq Ch^{k+1} \left((1 + \nu^{-1} \|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)^d}) \|\mathbf{u}\|_{H^{k+2}(\Omega)^d} + \nu^{-1} \|p\|_{H^{k+1}(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Corollaire V.8 (Corollary 16 [12])

Sous les hypothèses du théorème précédent, nous avons qu'il existe $C > 0$ une constante ne dépendant pas de h et ν telle que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{G}_h^k \underline{\mathbf{u}}_h - \nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} + s_h(\underline{\mathbf{u}}_h, \underline{\mathbf{u}}_h)^{\frac{1}{2}} + \nu^{-1} \|p_h - p\|_{L^2(\Omega)} \leq C \\ h^{k+1} \left((1 + \nu^{-1} \|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)^d}) \|\mathbf{u}\|_{H^{k+2}(\Omega)^d} + \nu^{-1} \|p\|_{H^{k+1}(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

V.2.4 Tests numériques

Nous résolvons sur le domaine carré à deux dimensions $\Omega := (-0.5, 1.5) \times (0, 2)$ avec les solutions exactes suivantes (\mathbf{u}, p) telles que $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ où le nombre de Reynolds $\text{Re} := (2\nu)^{-1}$ et soit $\lambda := \text{Re} - (\text{Re}^2 + 4\pi^2)^{\frac{1}{2}}$,

$$u_1(\mathbf{x}) := 1 - \exp(\lambda x_1) \cos(2\pi x_2), \quad u_2(\mathbf{x}) := \frac{\lambda}{2\pi} \exp(\lambda x_1) \sin(2\pi x_2),$$

la pression donnée par

$$p(\mathbf{x}) := -\frac{1}{2} \exp(2\lambda x_1) + \frac{\lambda}{2} (\exp(4\lambda) - 1).$$

Nous prenons $\nu = 0.1$ et considérons deux familles de maillages raffinés : un maillage cartésien et un maillage hexagonal. Les résultats de convergence pour $k \in \{0, \dots, 3\}$ ainsi que les taux de convergence observés correspondants sont rapportés dans les tableaux V.1 et V.2, respectivement. En utilisant la notation du théorème V.7, nous listons l'erreur H^1 sur la vitesse $\|\underline{\mathbf{u}}_h - \hat{\underline{\mathbf{u}}}_h\|_{1,h}$, l'erreur L^2 sur la vitesse $\|\underline{\mathbf{u}}_h - \hat{\underline{\mathbf{u}}}_h\|_{L^2(\Omega)^d}$, et l'erreur L^2 sur la pression

TABLE V.1 – Erreurs relatives, $\nu = 0.1$, maillage cartésien.

h	$\ \underline{\mathbf{u}}_h - \hat{\underline{\mathbf{u}}}_h\ _{1,h}$	Ordre	$\ \mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h\ _{L^2(\Omega)^d}$	Ordre	$\ p_h - \hat{p}_h\ _{L^2(\Omega)}$	Ordre
$k = 0$						
0.13	1.02	—	0.33	—	1.84	—
$6.25 \cdot 10^{-2}$	0.55	0.89	0.17	0.99	0.21	3.14
$3.12 \cdot 10^{-2}$	0.34	0.68	$4.31 \cdot 10^{-2}$	1.94	$4.36 \cdot 10^{-2}$	2.26
$1.56 \cdot 10^{-2}$	0.19	0.86	$1.09 \cdot 10^{-2}$	1.98	$1.37 \cdot 10^{-2}$	1.67
$7.81 \cdot 10^{-3}$	$9.72 \cdot 10^{-2}$	0.96	$2.7 \cdot 10^{-3}$	2.02	$3.78 \cdot 10^{-3}$	1.86
$k = 1$						
0.13	0.45	—	0.15	—	0.44	—
$6.25 \cdot 10^{-2}$	0.24	0.94	$3.39 \cdot 10^{-2}$	2.11	$3.45 \cdot 10^{-2}$	3.68
$3.12 \cdot 10^{-2}$	$6.46 \cdot 10^{-2}$	1.86	$4.26 \cdot 10^{-3}$	2.99	$8.58 \cdot 10^{-3}$	2
$1.56 \cdot 10^{-2}$	$1.78 \cdot 10^{-2}$	1.86	$5.58 \cdot 10^{-4}$	2.93	$1.23 \cdot 10^{-3}$	2.8
$7.81 \cdot 10^{-3}$	$4.65 \cdot 10^{-3}$	1.94	$7.11 \cdot 10^{-5}$	2.98	$1.87 \cdot 10^{-4}$	2.72
$k = 2$						
0.13	0.25	—	$6.41 \cdot 10^{-2}$	—	$9.8 \cdot 10^{-2}$	—
$6.25 \cdot 10^{-2}$	$4.83 \cdot 10^{-2}$	2.34	$5.81 \cdot 10^{-3}$	3.46	$7.55 \cdot 10^{-3}$	3.7
$3.12 \cdot 10^{-2}$	$7.11 \cdot 10^{-3}$	2.76	$3.45 \cdot 10^{-4}$	4.06	$7.71 \cdot 10^{-4}$	3.28
$1.56 \cdot 10^{-2}$	$1.01 \cdot 10^{-3}$	2.82	$2.07 \cdot 10^{-5}$	4.06	$7 \cdot 10^{-5}$	3.46
$7.81 \cdot 10^{-3}$	$1.34 \cdot 10^{-4}$	2.92	$1.25 \cdot 10^{-6}$	4.06	$6.54 \cdot 10^{-6}$	3.43
$k = 3$						
0.13	$7.84 \cdot 10^{-2}$	—	$2.1 \cdot 10^{-2}$	—	$3.46 \cdot 10^{-2}$	—
$6.25 \cdot 10^{-2}$	$7.5 \cdot 10^{-3}$	3.39	$8.03 \cdot 10^{-4}$	4.71	$1.39 \cdot 10^{-3}$	4.64
$3.12 \cdot 10^{-2}$	$5.11 \cdot 10^{-4}$	3.87	$2.52 \cdot 10^{-5}$	4.98	$7.31 \cdot 10^{-5}$	4.24
$1.56 \cdot 10^{-2}$	$3.43 \cdot 10^{-5}$	3.9	$8.15 \cdot 10^{-7}$	4.95	$3.87 \cdot 10^{-6}$	4.24
$7.81 \cdot 10^{-3}$	$2.22 \cdot 10^{-6}$	3.96	$2.59 \cdot 10^{-8}$	4.98	$2.17 \cdot 10^{-7}$	4.16

TABLE V.2 – Erreurs relatives, $\nu = 0.1$, maillage hexagonal.

h	$\ \underline{\mathbf{u}}_h - \hat{\underline{\mathbf{u}}}_h\ _{1,h}$	Ordre	$\ \mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h\ _{L^2(\Omega)^d}$	Ordre	$\ p_h - \hat{p}_h\ _{L^2(\Omega)}$	Ordre
$k = 0$						
0.14	1.64	—	0.62	—	2.1	—
$7.33 \cdot 10^{-2}$	0.64	1.44	0.19	1.81	0.24	3.31
$3.69 \cdot 10^{-2}$	0.44	0.56	$7.12 \cdot 10^{-2}$	1.42	$9.99 \cdot 10^{-2}$	1.28
$1.85 \cdot 10^{-2}$	0.25	0.79	$2.32 \cdot 10^{-2}$	1.62	$3.94 \cdot 10^{-2}$	1.35
$9.27 \cdot 10^{-3}$	0.13	0.91	$6.7 \cdot 10^{-3}$	1.8	$1.32 \cdot 10^{-2}$	1.58
$k = 1$						
0.14	0.53	—	0.22	—	0.28	—
$7.33 \cdot 10^{-2}$	0.22	1.32	$3.95 \cdot 10^{-2}$	2.64	$5.25 \cdot 10^{-2}$	2.58
$3.69 \cdot 10^{-2}$	$7.26 \cdot 10^{-2}$	1.63	$4.81 \cdot 10^{-3}$	3.07	$1.26 \cdot 10^{-2}$	2.08
$1.85 \cdot 10^{-2}$	$1.96 \cdot 10^{-2}$	1.9	$5.81 \cdot 10^{-4}$	3.06	$2.37 \cdot 10^{-3}$	2.42
$9.27 \cdot 10^{-3}$	$5.07 \cdot 10^{-3}$	1.96	$6.75 \cdot 10^{-5}$	3.12	$4.07 \cdot 10^{-4}$	2.55
$k = 2$						
0.14	0.28	—	$7.84 \cdot 10^{-2}$	—	0.11	—
$7.33 \cdot 10^{-2}$	$5.23 \cdot 10^{-2}$	2.56	$6.37 \cdot 10^{-3}$	3.84	$1.19 \cdot 10^{-2}$	3.39
$3.69 \cdot 10^{-2}$	$8.32 \cdot 10^{-3}$	2.68	$5.32 \cdot 10^{-4}$	3.62	$1.7 \cdot 10^{-3}$	2.84
$1.85 \cdot 10^{-2}$	$1.16 \cdot 10^{-3}$	2.85	$3.74 \cdot 10^{-5}$	3.85	$2.04 \cdot 10^{-4}$	3.07
$9.27 \cdot 10^{-3}$	$1.52 \cdot 10^{-4}$	2.94	$2.44 \cdot 10^{-6}$	3.95	$2.61 \cdot 10^{-5}$	2.98
$k = 3$						
0.14	$7.1 \cdot 10^{-2}$	—	$1.56 \cdot 10^{-2}$	—	$2.23 \cdot 10^{-2}$	—
$7.33 \cdot 10^{-2}$	$9.66 \cdot 10^{-3}$	3.05	$1.1 \cdot 10^{-3}$	4.05	$2.31 \cdot 10^{-3}$	3.47
$3.69 \cdot 10^{-2}$	$8.97 \cdot 10^{-4}$	3.46	$5.36 \cdot 10^{-5}$	4.4	$1.7 \cdot 10^{-4}$	3.8
$1.85 \cdot 10^{-2}$	$6.8 \cdot 10^{-5}$	3.74	$2.13 \cdot 10^{-6}$	4.67	$1.08 \cdot 10^{-5}$	3.99
$9.27 \cdot 10^{-3}$	$4.68 \cdot 10^{-6}$	3.87	$7.6 \cdot 10^{-8}$	4.82	$6.69 \cdot 10^{-7}$	4.03

$\|p_h - \widehat{p}_h\|_{L^2(\Omega)}$, ainsi que le taux de convergence observé correspondant. Toutes les erreurs sont normalisées par rapport à la norme correspondante de la solution interpolée $\widehat{\mathbf{u}}_h$. Les ordres de convergence estimés sont confirmés par les résultats numériques, avec l'erreur H^1 sur la vitesse ainsi que l'erreur L^2 sur la pression convergeant vers h^{k+1} comme prévu. L'erreur L^2 sur la vitesse converge vers h^{k+2} .

Perspectives

En conclusion, j'ai développé, analysé et implémenté dans ce mémoire des méthodes DDFV pour approcher différents problèmes : des problèmes de diffusion réaction, paraboliques, de Stokes, de Navier-Stokes ; ainsi qu'une méthode d'ordre élevée HHO pour le problème de Navier-Stokes stationnaire. Ces études ouvrent de larges perspectives tant dans le développement des schémas pour des écoulements plus complexes que dans le développement de méthodes de décomposition de domaines efficaces. Donnons quelques exemples précis :

Écoulements plus complexes

Le travail sur la discrétisation du problème de Navier-Stokes incompressible avec une densité variable est un premier pas vers la discrétisation de modèles d'écoulements de mélanges pour lesquels la contrainte d'incompressibilité est remplacée par une contrainte liant la divergence du fluide à la pression et à la densité $\left(\operatorname{div}(\mathbf{u}) - \operatorname{div}\left(\frac{\bar{\phi}}{\mu}(1 - \rho)\nabla p\right) = -\operatorname{div}\left(\frac{\nabla\rho}{\mu}\right)\right)$. L'une des difficultés est d'obtenir un schéma stable. Pour cela, une idée est de rajouter un terme de diffusion dans l'équation de conservation de la masse. Des contraintes du même type peuvent aussi être rencontrées dans la modélisation d'écoulements à faible nombre de Mach. La discrétisation de tels modèles est un challenge notamment quand le nombre de Mach devient très proche de zéro (*i.e.* lorsque l'on est proche du régime incompressible).

De plus, une autre propriété importante des équations de Navier-Stokes incompressible est la suivante : les forces irrotationnelles (arbitrairement importantes) dans l'équation de quantité de mouvement n'influencent pas le champ de vitesse. Cependant on constate (dans les estimations théoriques et en pratique) qu'avec les discrétisations classiques inf-sup stables du modèle de Stokes, l'erreur en vitesse dépend non seulement de la qualité de l'approximation de la vitesse mais également de celle de la pression. Le concept de méthodes robustes à la pression, qui garantissent une erreur en vitesse indépendante de la qualité d'approximation de la pression, a été introduit récemment (voir par exemple dans [ALM18]). Ce type de méthode n'a pas encore été investigué dans le cadre des discrétisations DDFV.

Un autre aspect est aussi celui de la résolution des systèmes discrets obtenus. J'ai dans un premier temps utilisé une méthode directe pour résoudre le système linéarisé (par la discrétisation en temps). Nous avons aussi développé une méthode de décomposition de domaine pour résoudre ce système (*cf* Chapitre IV). Mais il est également envisageable d'utiliser des méthodes de type projection incrémentale afin de découpler la résolution du bilan de quantité de mouvement (problème de convection-diffusion non linéaire) de la prise en compte de la contrainte d'incompressibilité (et de la remplacer par un problème de diffusion), en utilisant une stratégie à pas fractionnaires. A chaque étape l'utilisation de méthodes de résolutions itératives efficaces devrait alors être possible sur la base des travaux déjà réalisés concernant les méthodes de décomposition de domaine pour les problèmes de diffusion-réaction. Ceci pourrait permettre de poursuivre les applications numériques vers les régimes turbulents (à fort nombre de Reynolds) plus coûteux, en temps de calculs et en mémoire, et de comparer l'efficacité des

différentes approches.

Finalement, les aspects plus théoriques de convergence du schéma obtenu vers la solution faible du problème continu sont également intéressants. Basés sur des résultats de compacité de type Aubin-Simon dans un cadre discret, ce type de résultats doit pouvoir être obtenu à partir des estimations d'énergie cinétique discrète que nous savons déjà démontrer.

La question du comportement en temps long des schémas numériques DDFV que nous avons étudiée pour le problème de Fokker-Planck est à poursuivre. Une perspective intéressante serait de généraliser cette étude au problème de dérive diffusion. Ce problème est constitué de deux équations paraboliques de diffusion-convection couplées à une équation de Poisson. L'existence et l'unicité d'une solution faible de ce problème de dérive diffusion est montré dans [GG86], on y trouve aussi une illustration de la positivité des densités et une majoration en temps uniforme.

Une autre perspective est d'appliquer l'étude du comportement en temps long faite sur le problème de Fokker-Planck au problème de Navier-Stokes.

Algorithmes de Schwarz

La complexité des modèles rend les problèmes discrets de plus en plus grands et leur résolution coûteuse. Une façon de réduire le coût de calcul est d'utiliser des solveurs linéaires itératifs et des préconditionneurs efficaces (comme les algorithmes de Schwarz) pour accélérer la convergence. Une seconde idée qui permettrait de réduire les temps de calcul serait de coupler différentes méthodes volumes finis pour tirer parti des meilleures caractéristiques de chacune dans différentes parties du domaine (par exemple une méthode à deux points dans les parties du domaine où le maillage peut être structuré et une méthode DDFV dans les autres parties du domaine). Là encore les méthodes de décomposition de domaine peuvent être très utiles mais il faut trouver des conditions de transmission adaptées.

Concernant les travaux déjà réalisés, les perspectives les plus évidentes à propos des algorithmes de Schwarz pour les équations de diffusion sont d'analyser au niveau discret les paramètres optimaux avec des conditions de transmission de Ventcell et une matrice de diffusion pleine, de généraliser l'algorithme de Schwarz avec des conditions de transmission de Ventcell au cas des points de croisement, et pour finir de poursuivre l'étude des algorithmes dans le cadre de la présence d'un recouvrement.

Les algorithmes de Schwarz pour les équations de Navier-Stokes sont à généraliser aux points de croisement. En effet, la prise en compte des points de croisement modifie la méthode en ajoutant deux inconnues de flux au lieu d'une seule au point de croisement. Il reste également à optimiser les paramètres de transmission.

Il faut aussi aborder parallèlement le développement de schémas numériques et des algorithmes de solutions efficaces spécifiques aux simulations tridimensionnelles. La plupart des méthodes de volumes finis ont été étendues au 3D sur les problèmes de Laplace ou Stokes, mais il reste à les étendre et à les analyser pour des problèmes plus complexes. Pour réaliser des simulations plus fines et plus précises, une généralisation des méthodes de décomposition du domaine en 3D doit être établie.

Applications aux neurosciences

Pour finir, j'ai également commencé à encadrer la thèse de Paul Paragot avec Claire Guerrier. Le sujet porte sur l'étude de la propagation du signal transitoire dans les neurones à l'aide des méthodes DDFV. L'objectif est de construire un modèle pour comprendre comment l'arbre dendritique intègre et somme l'information provenant de centaines de synapses, dans le but

d'étudier ensuite avec des données expérimentales la façon dont les synapses sont modifiées en fonction de l'expérience. Nous proposons donc de développer un modèle multi-échelle pour la propagation du signal dans les neurones. Tout d'abord nous allons étudier la propagation du signal à l'échelle des fins prolongements appelés filopodia, en simulant le système de Poisson Nernst-Planck (voir [HY15, MFP08, PSB13, SMPR17]), grâce à un solveur DDFV non-linéaire. Nous pensons que les propriétés de conservation de la positivité des solutions du problème de Fokker-Planck se généraliseront au système non-linéaire de Poisson Nernst-Planck et dans ce cas, avec un faible surcoût puisque le système est déjà non linéaire. De plus, les méthodes DDFV permettent d'utiliser des maillages localement raffinés autour de la membrane, zone de forts gradients. Ensuite, nous allons séparer les échelles, afin de développer un modèle simplifié de la propagation dans les filopodia. Puis nous allons confronter et calibrer le modèle avec les données expérimentales fournies par l'équipe du Pr. Haas à Vancouver. L'objectif final serait de développer un algorithme pour localiser les synapses actives à partir des données expérimentales. Ce travail permettra de faire des prédictions concernant les règles sous-jacentes à l'apparition, au renforcement ou à la disparition des synapses, un phénomène à la base physiologique de l'apprentissage.

Annexe

Dans cette annexe, on commence par introduire la description de la méthode DDFV avec les maillages, les opérateurs discrets, les espaces d'approximation et les notations associées que nous utilisons tout au long de ce manuscrit dans le cadre 2D, suivi de la description de la méthode HHO.

Construction des maillages DDFV

Rappelons le cadre géométrique 2D de la méthode *Discrete Duality Finite Volume*. On se donne un maillage primal \mathfrak{M} constitué de polygones disjoints κ appelés mailles primales dont leur réunion recouvre $\bar{\Omega}$. On note $\partial\mathfrak{M}$ l'ensemble des arêtes des mailles primales de \mathfrak{M} incluses dans $\partial\Omega$ qui sont considérées comme des mailles primales dégénérées. On associe à chacune des mailles primales un point x_κ , appelé centre de la maille, voir la Figure V.1. On précise que le point x_κ est situé au milieu des mailles primales dégénérées du bord. On note $P = \{x_\kappa, \kappa \in \mathfrak{M}\}$.

Hypothèse 1

On suppose que toute maille primaire $\kappa \in \mathfrak{M}$ est étoilée par rapport à x_κ .

Cette hypothèse simplifie un peu l'analyse (voir la Remarque 6) et n'est pas très restrictive. En particulier si les mailles primales sont toutes convexes, c'est hypothèse est triviale.

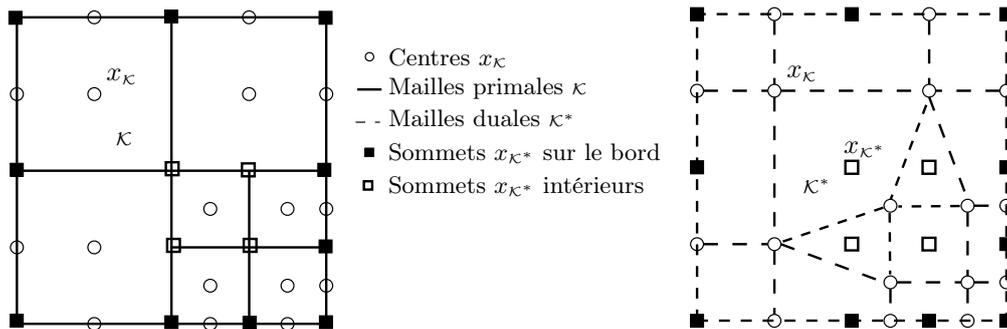


FIGURE V.1 – Un maillage primal $\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}$ (à gauche). Le maillage dual $\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$ correspondant (à droite).

On construit deux autres maillages : le maillage dual $\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$ et le maillage diamant \mathfrak{D} associé. Le maillage dual $\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$ est constitué de mailles duales κ^* et le maillage diamant \mathfrak{D} est constitué de diamant \mathcal{D} . On note X^* l'ensemble des sommets du maillage primal \mathfrak{M} et x_{κ^*} un élément de cet ensemble X^* . Un sommet x_{κ^*} est alors vu comme le centre de la maille duale κ^* . Pour toutes les mailles primales voisines κ et \mathcal{L} , c'est-à-dire telles que la mesure de $\partial\kappa \cap \partial\mathcal{L}$ soit non nulle, on définit un diamant \mathcal{D} comme le quadrilatère (voir la Figure V.2) de sommets $x_\kappa, x_{\mathcal{L}}, x_{\kappa^*}$ et $x_{\mathcal{L}^*}$ où x_{κ^*} et $x_{\mathcal{L}^*}$ sont des sommets communs à κ et \mathcal{L} et tels que

$[x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}^*}] \subset \partial\kappa \cap \partial\mathcal{L}$. A chaque diamant, on définit ses diagonales comme une arête primale $\sigma = \kappa|\mathcal{L} = [x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}^*}]$ et une arête duale $\sigma^* = \kappa^*|\mathcal{L}^* = [x_{\kappa}, x_{\mathcal{L}}]$. On note un diamant soit \mathcal{D} soit $\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*}$. On note \mathcal{E} l'ensemble des arêtes primales et \mathcal{E}^* l'ensemble des arêtes duales. On ne considère pas ici d'hypothèse de type *admissibilité du maillage*. Autrement dit, il n'est pas nécessaire que soit vérifiée une condition d'orthogonalité entre les arêtes et les droites joignant les centres des mailles.

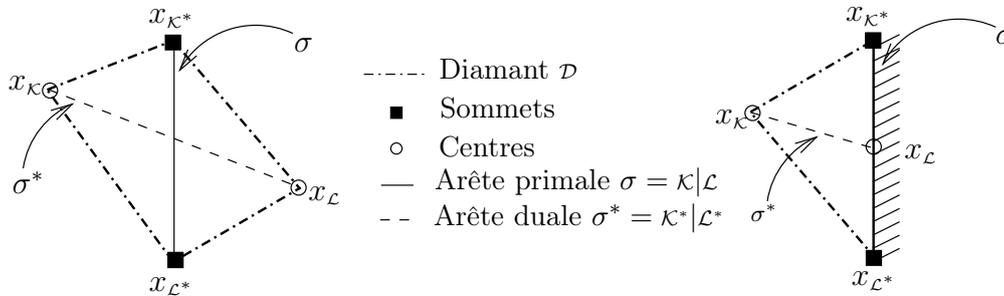


FIGURE V.2 – Un diamant $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*}$.

On remarque que les diamants sont une réunion de deux triangles disjoints $(x_{\kappa}, x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}^*})$ et $(x_{\mathcal{L}}, x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}^*})$ et que les diamants ne sont pas forcément convexes. En outre, si $\sigma \in \mathcal{E} \cap \partial\Omega$, le quadrilatère $\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*}$ est dégénéré, c'est un triangle. L'ensemble des diamants est noté \mathcal{D} et on a $\bar{\Omega} = \bigcup_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} \mathcal{D}$. On distingue les diamants intérieurs et diamants sur le bord :

- $\mathcal{D}_{ext} = \{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}, \text{ tel que } \sigma \subset \partial\Omega\}$,
- $\mathcal{D}_{int} = \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{ext}$.

Remarque 2

On a ainsi une bijection entre les diamants $\mathcal{D} \in \mathcal{D}$ et les arêtes \mathcal{E} du maillage primal, de même entre les diamants $\mathcal{D} \in \mathcal{D}$ et les arêtes \mathcal{E}^* du maillage dual.

On construit maintenant le maillage dual associé. Une maille duale κ^* est associée à un sommet x_{κ^*} du maillage primal. On distingue les mailles duales intérieures, celles dont le sommet associé x_{κ^*} n'appartient pas à $\partial\Omega$, ensemble noté \mathcal{M}^* et les mailles duales du bord, celles dont le sommet associé x_{κ^*} appartient à $\partial\Omega$, ensemble noté $\partial\mathcal{M}^*$. Les mailles duales dites directes sont obtenues en joignant (dans le sens trigonométrique par exemple) les centres des mailles primales qui ont pour sommets x_{κ^*} . Si $x_{\kappa^*} \notin \partial\Omega$, alors $\kappa^* \in \mathcal{M}^*$ est le polygone dont les sommets sont $\{x_{\kappa} \in P, \text{ t.q. } x_{\kappa^*} \in \bar{\kappa}, \kappa \in \mathcal{M}\}$. Si $x_{\kappa^*} \in \partial\Omega$, alors $\kappa^* \in \partial\mathcal{M}^*$ est le polygone dont les sommets sont $\{x_{\kappa^*}\} \cup \{x_{\kappa} \in P, \text{ t.q. } x_{\kappa^*} \in \bar{\kappa}, \kappa \in \mathcal{M} \cup \partial\mathcal{M}\}$. Les mailles duales directes sont donc des polygones qui ne sont pas forcément d'intérieurs disjoints. Dans certains cas, les mailles duales directes peuvent se recouvrir. Pour éliminer ces cas, on peut supposer que tous les diamants sont convexes ou alors on peut prendre comme définition des mailles duales barycentriques.

Hypothèse 3

On suppose que toute maille duale $\kappa^* \in \mathcal{M}^* \cup \partial\mathcal{M}^*$ est étoilée par rapport à x_{κ^*} .

Cette hypothèse permet encore de simplifier un peu l'analyse (voir la Remarque 6).

Les mailles duales barycentriques (voir la Figure V.3) sont obtenues en joignant (dans le sens trigonométrique par exemple) les centres des mailles primales qui ont pour sommets x_{κ^*} et x_{σ} les milieux des arêtes qui ont pour sommet x_{κ^*} . Avec ce choix barycentrique, les mailles duales sont d'intérieurs disjoints grâce à l'Hypothèse 1.

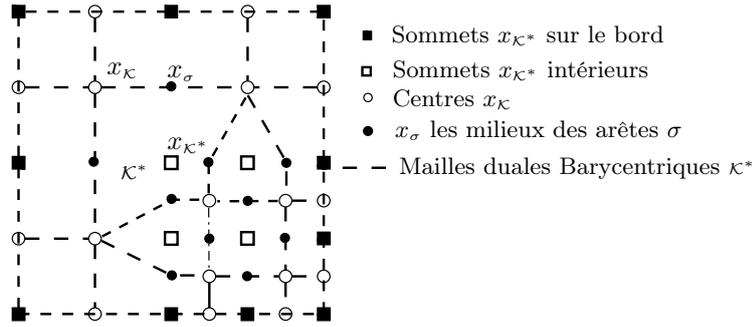


FIGURE V.3 – Un maillage dual barycentrique $\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$ correspondant au maillage primal de la Figure V.1.

Remarque 4

Dans le cas d'un maillage dual barycentrique la notation σ^* désignera le segment $[x_\kappa, x_\mathcal{L}]$ (droite joignant deux centres voisins) et non pas une arête. En effet, les arêtes des mailles duales barycentriques sont les segments $[x_\kappa, x_\sigma]$ qui seront notés σ_κ .

Un maillage DDFV est un couple constitué d'un maillage primal $\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}$ (voir la Figure V.1 à gauche) et d'un maillage dual $\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$ direct (voir la Figure V.1 à droite) ou barycentrique (voir la Figure V.3), il sera désigné par \mathcal{T} . Dans tous les chapitres suivants, la plupart des résultats fonctionnent avec les maillages dual direct ou dual barycentrique, ainsi on parlera souvent de maillage dual, on ajoutera la précision direct ou barycentrique que lorsqu'elle est nécessaire.

Notations : On introduit maintenant quelques notations. Pour une maille primale $\kappa \in \mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}$, on définit :

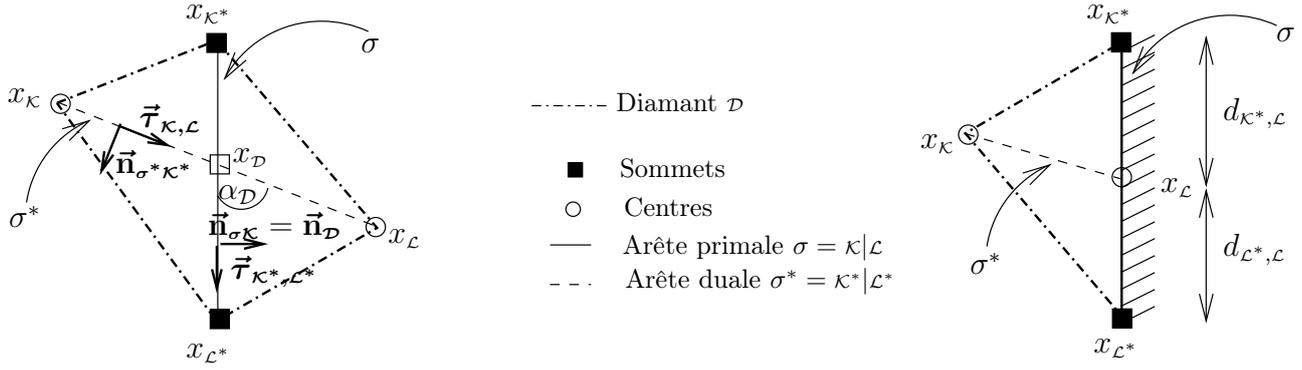
- m_κ la mesure de la maille κ ,
- \mathcal{E}_κ l'ensemble des arêtes de $\kappa \in \mathfrak{M}$ et l'arête $\sigma = \kappa$ pour $\kappa \in \partial\mathfrak{M}$,
- $\mathfrak{D}_\kappa = \{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}, \sigma \in \mathcal{E}_\kappa\}$,
- $\vec{\mathbf{n}}_\kappa$ la normale extérieure à κ ,
- d_κ le diamètre de κ ,

De même pour une maille duale $\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$, on définit :

- m_{κ^*} la mesure de la maille κ^* ,
- \mathcal{E}_{κ^*} l'ensemble des droites σ^* de $\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$,
- $\mathfrak{D}_{\kappa^*} = \{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}, \sigma^* \in \mathcal{E}_{\kappa^*}\}$,
- $\vec{\mathbf{n}}_{\kappa^*}$ la normale extérieure à κ^* ,
- d_{κ^*} le diamètre de κ^* ,

Pour un diamant $\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*}$ dont les sommets sont $(x_\kappa, x_{\kappa^*}, x_\mathcal{L}, x_{\mathcal{L}^*})$ (voir la Figure V.4), on note :

- x_σ le milieu de l'arête σ ,
- $x_\mathcal{D}$ le centre du diamant $\mathcal{D} : x_\mathcal{D} = \sigma \cap \sigma^*$,
- m_σ la longueur de l'arête σ ,

FIGURE V.4 – Les notations d'un diamant $\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}$.

- m_{σ^*} la longueur de σ^* ,
- $m_{\mathcal{D}}$ la mesure du diamant $\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}$,
- $d_{\mathcal{D}}$ le diamètre du diamant $\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}$,
- $\alpha_{\mathcal{D}}$ l'angle entre σ et σ^* ,
- $d_{\kappa^*,\mathcal{L}}$ la distance entre x_{κ^*} et $x_{\mathcal{L}}$,
- $d_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}$ la distance entre $x_{\mathcal{L}^*}$ et $x_{\mathcal{L}}$.

Pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext}$, on a $x_{\mathcal{D}} = x_{\mathcal{L}}$, d'où $m_{\sigma_{\kappa^*}} = d_{\kappa^*,\mathcal{L}}$ et $m_{\sigma_{\mathcal{L}^*}} = d_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}$.

On introduit pour chaque diamant dans la Figure V.4 les deux bases orthonormées directes $(\vec{\tau}_{\kappa^*,\mathcal{L}^*}, \vec{n}_{\sigma\kappa})$ et $(\vec{n}_{\sigma^*\kappa^*}, \vec{\tau}_{\kappa,\mathcal{L}})$, où

- $\vec{n}_{\sigma\kappa}$ la normale unitaire à σ sortante de κ ,
- $\vec{\tau}_{\kappa^*,\mathcal{L}^*}$ le vecteur tangent unitaire à σ orienté de κ^* à \mathcal{L}^* ,
- $\vec{n}_{\sigma^*\kappa^*}$ la normale unitaire à σ^* sortante de κ^* ,
- $\vec{\tau}_{\kappa,\mathcal{L}}$ le vecteur tangent unitaire à σ^* orienté de κ à \mathcal{L} .

On a les relations suivantes : $\vec{\tau}_{\kappa,\mathcal{L}} \cdot \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*} = \vec{\tau}_{\kappa^*,\mathcal{L}^*} \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa} = 0$, $\vec{\tau}_{\kappa^*,\mathcal{L}^*} \cdot \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*} = \vec{\tau}_{\kappa,\mathcal{L}} \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa} = \sin(\alpha_{\mathcal{D}})$.

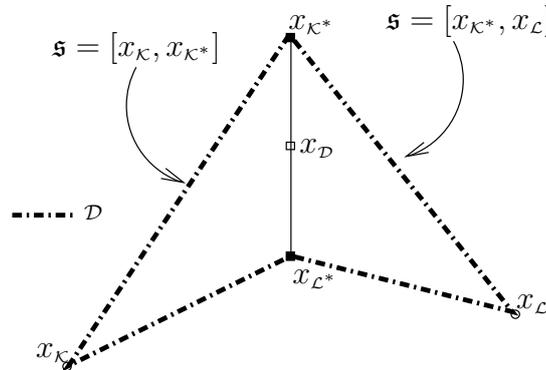


FIGURE V.5 – Un diamant et ses côtés.

On note, pour chaque diamant \mathcal{D} ,

- ses côtés \mathfrak{s} (par exemple $\mathfrak{s} = [x_{\kappa}, x_{\kappa^*}]$ voir la Figure V.5),

- $\mathcal{E}_{\mathcal{D}} = \{\mathfrak{s}, \mathfrak{s} \subset \partial\mathcal{D} \text{ et } \mathfrak{s} \not\subset \partial\Omega\}$ l'ensemble des côtés intérieurs du diamant \mathcal{D} ,
- $m_{\mathfrak{s}}$ la longueur d'un côté du diamant \mathfrak{s} ,
- $\vec{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}\mathcal{D}}$ la normale unitaire à \mathfrak{s} sortante de \mathcal{D} ,
- \mathcal{S} l'ensemble des côtés intérieurs de tous les diamants.

Remarque 5

On a que toute maille diamant \mathcal{D} est étoilée par rapport à $x_{\mathcal{D}}$.

A chaque diamant $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$, on associe des demi-diamants de la manière suivante $\tilde{\mathcal{D}}_p = \mathcal{D} \cap p$ tel que $p \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$ pour $p \in \{\kappa, \ell\}$. Si $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{int}$, on a $\mathcal{D} = \tilde{\mathcal{D}}_{\kappa} \cup \tilde{\mathcal{D}}_{\ell}$ et si $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext}$, on a $\mathcal{D} = \tilde{\mathcal{D}}_{\kappa}$. L'ensemble des demi-diamants est noté par $\tilde{\mathfrak{D}}$. Pour un demi-diamant $\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}$, on note $m_{\tilde{\mathcal{D}}}$ sa mesure. Pour chaque diamant $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$, on définit un sous-ensemble de demi-diamant de \mathcal{D} : $\tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{D}} = \{\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}, \tilde{\mathcal{D}} \subset \mathcal{D}\}$.

Régularité du maillage : Soit $\text{size}(\mathcal{T})$ le maximum des diamètres des diamants. Pour mesurer l'applatissage des diamants, on note $\alpha_{\mathcal{T}}$ l'unique réel dans $]0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin(\alpha_{\mathcal{T}}) := \min_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} |\sin(\alpha_{\mathcal{D}})|$ si le maillage dual est direct et $\sin(\alpha_{\mathcal{T}}) := \min_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} (|\sin(\alpha_{\kappa})|, |\sin(\alpha_{\ell})|)$ si le maillage dual est barycentrique. On introduit un nombre positif $\text{reg}(\mathcal{T})$ qui mesure la régularité d'un maillage donné et qui est utilisé pour réaliser la convergence des schémas :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\mathcal{T}} &= \sup_{x \in \Omega} \text{Card} \left(\mathcal{D} / x \in \widehat{\mathcal{D} \cup \kappa}, \mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa}, \kappa \in \mathfrak{M} \right) \\ &\quad + \sup_{x \in \Omega} \text{Card} \left(\mathcal{D} / x \in \widehat{\mathcal{D} \cup \kappa^*}, \mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}, \kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^* \right), \\ \text{reg}(\mathcal{T}) &= \max \left(\frac{1}{\sin(\alpha_{\mathcal{T}})}, \mathcal{N}, \mathcal{N}^*, \mathcal{N}_{\mathcal{T}}, \max_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \max_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} \frac{d_{\mathcal{D}}}{\min_{\sigma \in \partial\mathcal{Q}} m_{\sigma}}, \max_{\kappa \in \mathfrak{M}} \left(\frac{d_{\kappa}}{\sqrt{m_{\kappa}}} \right), \right. \\ &\quad \left. \max_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^*} \left(\frac{d_{\kappa^*}}{\sqrt{m_{\kappa^*}}} \right), \max_{\kappa \in \mathfrak{M}} \max_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa}} \left(\frac{d_{\kappa}}{d_{\mathcal{D}}} \right), \max_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^*} \max_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} \left(\frac{d_{\kappa^*}}{d_{\mathcal{D}}} \right) \right), \end{aligned} \quad (\text{V.5})$$

où \widehat{P} désigne l'enveloppe convexe d'un ensemble P , \mathcal{N} et \mathcal{N}^* sont le nombre maximum d'arêtes d'une maille primale et le nombre maximum d'arêtes incidentes d'un sommet du maillage primal. On suppose qu'il existe $\zeta > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa}} m_{\sigma} m_{\sigma^*} &\leq \frac{m_{\kappa}}{\zeta}, \forall \kappa \in \mathfrak{M}, \quad \text{et} \quad \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} m_{\sigma} m_{\sigma^*} \leq \frac{m_{\kappa^*}}{\zeta}, \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*, \\ m_{\mathcal{D}} &\leq \frac{m_{\kappa \cap \kappa^*}}{\zeta}, \forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D}, \kappa \in \mathfrak{M}, \kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^* \text{ tel que } m(\mathcal{D} \cap \kappa) \neq 0 \text{ et } m(\mathcal{D} \cap \kappa^*) \neq 0. \end{aligned} \quad (\text{V.6})$$

Ce nombre $\text{reg}(\mathcal{T})$ mesure essentiellement l'applatissage des diamants et le rapport entre la taille des mailles primales (resp. duales) et la taille des diamants et il doit être uniformément borné quand $\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0$ pour avoir la convergence. Par exemple, ce nombre $\text{reg}(\mathcal{T})$ implique les résultats géométriques suivants : il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$ telle que

$$\frac{d_{\mathcal{D}}}{\sqrt{m_{\mathcal{D}}}} \leq C, \forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D}, \quad \frac{d_{\mathcal{Q}}}{\sqrt{m_{\mathcal{Q}}}} \leq C, \forall \mathcal{Q} \in \mathfrak{Q} \quad \text{et} \quad d_{\mathcal{D}} \leq C \min(m_{\sigma}, m_{\sigma^*}), \forall \mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}.$$

Remarque 6

Grâce aux Hypothèses 1 et 3, on a également :

$$\text{diam}(\widehat{\kappa}) \leq 2d_{\kappa}, \quad \forall \kappa \in \mathfrak{M} \quad \text{et} \quad \text{diam}(\widehat{\kappa}^*) \leq 2d_{\kappa^*}, \quad \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*,$$

de plus la Remarque 5 implique :

$$\text{diam}(\widehat{\mathcal{D}}) \leq 2d_{\mathcal{D}}, \quad \forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D}.$$

Constructions des opérateurs et des inconnues dans le cadre scalaire

Espaces d'approximation sur les maillages DDFV

La méthode DDFV associe, à chaque maille primale $\kappa \in \mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}$, une inconnue scalaire u_{κ} et, à chaque maille duale $\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$, une inconnue scalaire u_{κ^*} . Ainsi l'ensemble des inconnues associé au maillage DDFV \mathcal{T} est défini de la manière suivante :

$$u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \iff u_{\mathcal{T}} = \left((u_{\kappa})_{\kappa \in (\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M})}, (u_{\kappa^*})_{\kappa^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*)} \right). \quad (\text{V.7})$$

On a environ deux fois plus d'inconnues que dans la méthode VF4 mais cela permet de définir une approximation complète du gradient et pas uniquement dans la direction normale, ceci rend la méthode beaucoup plus robuste.

On définit des projections moyennes discrètes, pour toute fonction dans $H^1(\Omega)$: une sur le bord comme suit

$$\mathbb{P}_m^{\partial\Omega} v = \left(\left(\frac{1}{m_{\kappa}} \int_{\kappa} v(x) dx \right)_{\kappa \in \partial\mathfrak{M}}, \left(\frac{1}{m_{\kappa^*}} \int_{\kappa^*} v(x) dx \right)_{\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*} \right), \quad (\text{V.8})$$

et à l'intérieur :

$$\mathbb{P}_m^{\mathfrak{M}} v = \left(\left(\frac{1}{m_{\kappa}} \int_{\kappa} v(x) dx \right)_{\kappa \in \mathfrak{M}} \right), \quad \mathbb{P}_m^{\mathfrak{M}^*} v = \left(\left(\frac{1}{m_{\kappa^*}} \int_{\kappa^*} v(x) dx \right)_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^*} \right). \quad (\text{V.9})$$

Finalement, on les regroupe de la manière suivante :

$$\mathbb{P}_m^{\mathcal{T}} v = (\mathbb{P}_m^{\mathfrak{M}} v, \mathbb{P}_m^{\mathfrak{M}^*} v, \mathbb{P}_m^{\partial\Omega} v), \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (\text{V.10})$$

On introduit également une projection centrée (qui n'est définie que pour les fonctions continues) :

$$\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}} v = ((v(x_{\kappa}))_{\kappa \in (\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M})}, (v(x_{\kappa^*}))_{\kappa^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*)}), \quad \forall v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}). \quad (\text{V.11})$$

On spécifie deux sous espaces discrets de $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ utilisés pour prendre en compte les conditions aux bords de Dirichlet

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0 &= \{v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \text{ tel que } v_{\kappa} = 0, \quad \forall \kappa \in \partial\mathfrak{M} \text{ et } v_{\kappa^*} = 0, \quad \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*\}, \\ \mathbb{E}_{m,g} &= \{v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \text{ tel que } v_{\kappa} = (\mathbb{P}_m^{\partial\Omega} g)_{\kappa}, \quad \forall \kappa \in \partial\mathfrak{M} \text{ et } v_{\kappa^*} = (\mathbb{P}_m^{\partial\Omega} g)_{\kappa^*}, \quad \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*\}. \end{aligned} \quad (\text{V.12})$$

On caractérise le bord Dirichlet de la manière suivante :

$$\partial\mathfrak{M}_D = \{\kappa \in \partial\mathfrak{M} : \kappa \subset \Gamma_D\}, \quad \partial\mathfrak{M}_D^* = \{\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^* : x_{\kappa^*} \in \overline{\Gamma}_D\},$$

et ainsi la projection moyenne associée :

$$\mathbb{E}_{m,g}^D = \{v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \text{ tel que } v_{\kappa} = (\mathbb{P}_m^{\partial\Omega} g)_{\kappa}, \quad \forall \kappa \in \partial\mathfrak{M}_D \text{ et } v_{\kappa^*} = (\mathbb{P}_m^{\partial\Omega} g)_{\kappa^*}, \quad \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}_D^*\}, \quad (\text{V.13})$$

et la projection centrée associée :

$$\mathbb{E}_{c,g}^D = \{v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \text{ tel que } v_{\kappa} = g(x_{\kappa}), \forall \kappa \in \partial\mathfrak{M}_D \text{ et } v_{\kappa^*} = g(x_{\kappa^*}), \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}_D^*\}. \quad (\text{V.14})$$

A un vecteur donné $u_{\mathcal{T}} = ((u_{\kappa})_{\kappa \in \mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}}, (u_{\kappa^*})_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*}) \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ défini sur le maillage DDFV \mathcal{T} de taille h , nous associons la solution discrète :

$$u_h = \frac{1}{2} \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} u_{\kappa} \mathbf{1}_{\kappa} + \frac{1}{2} \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*} u_{\kappa^*} \mathbf{1}_{\kappa^*}. \quad (\text{V.15})$$

Avec cette définition, nous utilisons simultanément les valeurs sur le maillage primal et les valeurs sur le maillage dual. En effet, nous avons $u_h = \frac{1}{2}(u_{h,\mathfrak{M}} + u_{h,\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*})$, où $u_{h,\mathfrak{M}}$ et $u_{h,\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*}$ sont deux reconstructions différentes basées soit sur les valeurs primales soit sur les valeurs duales :

$$u_{h,\mathfrak{M}} = \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} u_{\kappa} \mathbf{1}_{\kappa} \quad \text{et} \quad u_{h,\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*} = \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*} u_{\kappa^*} \mathbf{1}_{\kappa^*}.$$

L'espace des solutions approchées est dénoté par $H_{\mathcal{T}}$:

$$H_{\mathcal{T}} = \left\{ u_h \in L^1(\Omega) / \exists u_{\mathcal{T}} = ((u_{\kappa})_{\kappa \in \mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}}, (u_{\kappa^*})_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*}) \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \right. \\ \left. \text{tels que } u_h = \frac{1}{2} \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} u_{\kappa} \mathbf{1}_{\kappa} + \frac{1}{2} \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*} u_{\kappa^*} \mathbf{1}_{\kappa^*} \right\}. \quad (\text{V.16})$$

Dans la suite, nous aurons également besoin d'une reconstruction des solutions approchées sur les diamants. Par conséquent, nous associons à un $u_h \in H_{\mathcal{T}}$ donné la fonction constante par morceaux sur les diamants $u_{h,\mathfrak{D}}$, définie par :

$$u_{h,\mathfrak{D}}(x) = \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} u_{\mathcal{D}} \mathbf{1}_{\mathcal{D}} \quad \text{avec} \quad u_{\mathcal{D}} = \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} u_h(y) dy \quad \forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D}. \quad (\text{V.17})$$

On définit également $\xi_{\mathfrak{D}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}}$ par $\xi_{\mathfrak{D}} = (\xi_{\mathcal{D}})_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}}$, avec $\xi_{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^2$.

Définitions des opérateurs discrets

On définit les opérateurs discrets dans le cadre scalaire.

Définition 7 (Gradient discret)

Le gradient discret est défini de la manière suivante : $\nabla^{\mathfrak{D}} : \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \rightarrow (\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}}$. Soit $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, on pose $\nabla^{\mathfrak{D}} u_{\mathcal{T}} = (\nabla^{\mathcal{D}} u_{\mathcal{T}})_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}}$, où pour $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$:

$$\nabla^{\mathcal{D}} u_{\mathcal{T}} = \frac{1}{\sin(\alpha_{\mathcal{D}})} \left(\frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{m_{\sigma^*}} \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}} + \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}}{m_{\sigma}} \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\mathcal{K}^*} \right) \iff \begin{cases} \nabla^{\mathcal{D}} u_{\mathcal{T}} \cdot \vec{\mathbf{r}}_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}^*} = \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}}{m_{\sigma}}, \\ \nabla^{\mathcal{D}} u_{\mathcal{T}} \cdot \vec{\mathbf{r}}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} = \frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{m_{\sigma^*}}. \end{cases}$$

L'aire $m_{\mathcal{D}}$ d'un diamant \mathcal{D} est la suivante : $m_{\mathcal{D}} = \frac{1}{2} m_{\sigma} m_{\sigma^*} \sin(\alpha_{\mathcal{D}})$, on peut alors réécrire le gradient discret :

$$\nabla^{\mathcal{D}} u_{\mathcal{T}} = \frac{1}{2m_{\mathcal{D}}} [(u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}) m_{\sigma} \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}} + (u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}) m_{\sigma^*} \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}].$$

Pour $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ et $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$, nous définissons $\delta^{\mathcal{D}}u_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} u_{\kappa} - u_{\mathcal{L}} \\ u_{\kappa^*} - u_{\mathcal{L}^*} \end{pmatrix}$. Puis, pour tout $u_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, nous pouvons écrire

$$(\nabla^{\mathcal{D}}u_{\mathcal{T}}, \nabla^{\mathcal{D}}v_{\mathcal{T}})_{\mathfrak{D}} = \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \delta^{\mathcal{D}}u_{\mathcal{T}} \cdot \mathbb{A}^{\mathcal{D}}\delta^{\mathcal{D}}v_{\mathcal{T}},$$

où

$$\mathbb{A}^{\mathcal{D}} = \frac{1}{4m_{\mathcal{D}}} \begin{pmatrix} m_{\sigma}^2 \Lambda^{\mathcal{D}} \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} & m_{\sigma} m_{\sigma^*} \Lambda^{\mathcal{D}} \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*} \\ m_{\sigma} m_{\sigma^*} \Lambda^{\mathcal{D}} \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*} & m_{\sigma^*}^2 \Lambda^{\mathcal{D}} \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*} \end{pmatrix} \quad \forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D}. \quad (\text{V.18})$$

Nous introduisons un opérateur de reconstruction sur les diamants $r^{\mathcal{D}}$. Il est défini de $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ vers $\mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$ pour tout $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ par $r^{\mathcal{D}}u_{\mathcal{T}} = (r^{\mathcal{D}}u_{\mathcal{T}})_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}}$, où pour $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$, dont les sommets sont x_{κ} , $x_{\mathcal{L}}$, x_{κ^*} , $x_{\mathcal{L}^*}$,

$$r^{\mathcal{D}}u_{\mathcal{T}} = \frac{1}{4}(u_{\kappa} + u_{\mathcal{L}} + u_{\kappa^*} + u_{\mathcal{L}^*}). \quad (\text{V.19})$$

On remarque que pour une fonction vectorielle régulière ξ , on a en appliquant la formule de Green :

$$\int_{\kappa} \text{div}(\xi(x))dx = \sum_{\sigma \in \partial\kappa} \int_{\sigma} \xi(s) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} ds, \quad \forall \kappa \in \mathfrak{M}. \quad (\text{V.20})$$

Par conséquent, la divergence discrète $\text{div}^{\mathcal{T}}$ est définie à l'aide de la version discrète de (V.20).

Définition 8 (Divergence discrète)

L'opérateur de divergence discrète est défini de la manière suivante : $\text{div}^{\mathcal{T}} : (\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$. Soit $\xi_{\mathfrak{D}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}}$, on pose

$$\text{div}^{\mathcal{T}}\xi_{\mathfrak{D}} = (\text{div}^{\mathfrak{M}}\xi_{\mathfrak{D}}, \text{div}^{\partial\mathfrak{M}}\xi_{\mathfrak{D}}, \text{div}^{\mathfrak{M}^*}\xi_{\mathfrak{D}}, \text{div}^{\partial\mathfrak{M}^*}\xi_{\mathfrak{D}}),$$

avec $\text{div}^{\mathfrak{M}}\xi_{\mathfrak{D}} = (\text{div}^{\kappa}\xi_{\mathfrak{D}})_{\kappa \in \mathfrak{M}}$, $\text{div}^{\partial\mathfrak{M}}\xi_{\mathfrak{D}} = 0$, $\text{div}^{\mathfrak{M}^*}\xi_{\mathfrak{D}} = (\text{div}^{\kappa^*}\xi_{\mathfrak{D}})_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^*}$ et $\text{div}^{\partial\mathfrak{M}^*}\xi_{\mathfrak{D}} = (\text{div}^{\kappa^*}\xi_{\mathfrak{D}})_{\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*}$:

$$\begin{aligned} \forall \kappa \in \mathfrak{M}, \quad \text{div}^{\kappa}\xi_{\mathfrak{D}} &= \frac{1}{m_{\kappa}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa}} m_{\sigma} \xi_{\mathcal{D}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}, \\ \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}^*, \quad \text{div}^{\kappa^*}\xi_{\mathfrak{D}} &= \frac{1}{m_{\kappa^*}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} m_{\sigma^*} \xi_{\mathcal{D}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*}, \\ \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*, \quad \text{div}^{\kappa^*}\xi_{\mathfrak{D}} &= \frac{1}{m_{\kappa^*}} \left(\sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} m_{\sigma^*} \xi_{\mathcal{D}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*} + \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*} \cap \mathfrak{D}_{\text{ext}}} d_{\kappa^*, \mathcal{L}} \xi_{\mathcal{D}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} \right). \end{aligned}$$

L'opérateur de convection discret a été introduit dans [6]. Il est le même que dans les précédentes définitions données par Andreianov, Bendahmane et Karlsen dans [ABK10] et par Coudière et Manzini dans [CM10].

Définition 9

L'opérateur de convection discrète $\text{divc}^{\mathcal{T}}$ de $(\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ vers $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ défini pour tout $\xi_{\mathfrak{D}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}}$ et $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ par

$$\text{divc}^{\mathcal{T}}(\xi_{\mathfrak{D}}, v_{\mathcal{T}}) = (\text{divc}^{\mathfrak{M}}(\xi_{\mathfrak{D}}, v_{\mathcal{T}}), \text{divc}^{\partial\mathfrak{M}}(\xi_{\mathfrak{D}}, v_{\mathcal{T}}), \text{divc}^{\mathfrak{M}^*}(\xi_{\mathfrak{D}}, v_{\mathcal{T}}), \text{divc}^{\partial\mathfrak{M}^*}(\xi_{\mathfrak{D}}, v_{\mathcal{T}})),$$

avec $\text{divc}^{\mathfrak{M}}(\xi_{\mathfrak{D}}, v_{\mathcal{T}}) = (\text{divc}_{\kappa}(\xi_{\mathfrak{D}}, v_{\mathcal{T}}))_{\kappa \in \mathfrak{M}}$, $\text{divc}^{\partial\mathfrak{M}}(\xi_{\mathfrak{D}}, v_{\mathcal{T}}) = 0$, $\text{divc}^{\mathfrak{M}^*}(\xi_{\mathfrak{D}}, v_{\mathcal{T}}) = (\text{divc}_{\kappa^*}(\xi_{\mathfrak{D}}, v_{\mathcal{T}}))_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^*}$ et

$\operatorname{div}^{\partial\mathfrak{M}^*}(\boldsymbol{\xi}_{\mathfrak{D}}, v_{\mathcal{T}}) = (\operatorname{div}_{\mathcal{K}^*}(\boldsymbol{\xi}_{\mathfrak{D}}, v_{\mathcal{T}}))_{\mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}^*}$ tels que :

$$\forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M}, \operatorname{div}_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{\xi}_{\mathfrak{D}}, v_{\mathcal{T}}) = \frac{1}{m_{\mathcal{K}}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{K}}} m_{\sigma} \left((\boldsymbol{\xi}_{\mathfrak{D}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}})^+ v_{\mathcal{K}} - (\boldsymbol{\xi}_{\mathfrak{D}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}})^- v_{\mathcal{L}} \right),$$

où $x^+ = \max(x, 0)$ et $x^- = -\min(x, 0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et

$$\forall \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*, \operatorname{div}_{\mathcal{K}^*}(\boldsymbol{\xi}_{\mathfrak{D}}, v_{\mathcal{T}}) = \frac{1}{m_{\mathcal{K}^*}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}} m_{\sigma^*} \left((\boldsymbol{\xi}_{\mathfrak{D}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\mathcal{K}^*})^+ v_{\mathcal{K}^*} - (\boldsymbol{\xi}_{\mathfrak{D}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\mathcal{K}^*})^- v_{\mathcal{L}^*} \right).$$

Introduisons maintenant un opérateur de pénalisation comme dans [ABK10]. Nous verrons qu'il est essentiel pour passer à la limite dans le terme de convection. En effet, l'opérateur de pénalisation veillera à ce que les reconstructions sur le maillage primal et sur le maillage dual convergent vers la même limite.

Définition 10

Soit $\beta \in]0, 2[$. L'opérateur de pénalisation $\mathcal{P}^{\mathcal{T}} : \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ est défini pour tout $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, par :

$$\mathcal{P}^{\mathcal{T}} u_{\mathcal{T}} = (\mathcal{P}^{\mathfrak{M}} u_{\mathcal{T}}, \mathcal{P}^{\partial\mathfrak{M}} u_{\mathcal{T}}, \mathcal{P}^{\mathfrak{M}^*} u_{\mathcal{T}}, \mathcal{P}^{\partial\mathfrak{M}^*} u_{\mathcal{T}}),$$

avec $\mathcal{P}^{\mathfrak{M}} u_{\mathcal{T}} = (\mathcal{P}_{\mathcal{K}} u_{\mathcal{T}})_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}}$, $\mathcal{P}^{\partial\mathfrak{M}} u_{\mathcal{T}} = 0$, $\mathcal{P}^{\mathfrak{M}^*} u_{\mathcal{T}} = (\mathcal{P}_{\mathcal{K}^*} u_{\mathcal{T}})_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*}$ et $\mathcal{P}^{\partial\mathfrak{M}^*} u_{\mathcal{T}} = (\mathcal{P}_{\mathcal{K}^*} u_{\mathcal{T}})_{\mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}^*}$ tels que

$$\forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M}, \mathcal{P}_{\mathcal{K}} u_{\mathcal{T}} = \frac{1}{m_{\mathcal{K}}} \frac{1}{\operatorname{size}(\mathcal{T})^{\beta}} \sum_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*} m_{\mathcal{K} \cap \mathcal{K}^*} (u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{K}^*}),$$

$$\forall \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*, \mathcal{P}_{\mathcal{K}^*} u_{\mathcal{T}} = \frac{1}{m_{\mathcal{K}^*}} \frac{1}{\operatorname{size}(\mathcal{T})^{\beta}} \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} m_{\mathcal{K} \cap \mathcal{K}^*} (u_{\mathcal{K}^*} - u_{\mathcal{K}}).$$

L'opérateur de pénalisation vérifie la propriété suivante :

$$\llbracket \mathcal{P}^{\mathcal{T}} u_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\operatorname{size}(\mathcal{T})^{\beta}} \sum_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*} \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} m_{\mathcal{K} \cap \mathcal{K}^*} (u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{K}^*})^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\operatorname{size}(\mathcal{T})^{\beta}} \|u_{h, \mathfrak{M}} - u_{h, \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*}\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (\text{V.21})$$

Relation de dualité : Formule de Green

Afin d'écrire la dualité discrète entre les deux opérateurs discrets introduits dans la section précédente, on introduit des opérateurs de traces et des produits scalaires. On définit des opérateurs traces sur $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ et sur $(\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}}$. Soit $\gamma^{\mathcal{T}} : u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \mapsto \gamma^{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}) = (\gamma_{\sigma}(u_{\mathcal{T}}))_{\sigma \in \partial\mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\partial\mathfrak{M}}$, tel que :

$$\gamma_{\sigma}(u_{\mathcal{T}}) = \frac{d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}}(u_{\mathcal{K}^*} + u_{\mathcal{L}}) + d_{\mathcal{L}^*, \mathcal{K}}(u_{\mathcal{L}^*} + u_{\mathcal{K}})}{2m_{\sigma}}, \quad \forall \sigma = [x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}^*}] \in \partial\mathfrak{M}. \quad (\text{V.22})$$

Cet opérateur nous permet d'imposer les conditions de Dirichlet au sens faible. Le second opérateur est noté $\gamma^{\mathfrak{D}} : \phi^{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}} \mapsto (\phi^{\mathfrak{D}})_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}_{ext}}$, c'est uniquement la restriction sur le sous-ensemble \mathfrak{D}_{ext} de \mathfrak{D} .

On introduit les produits scalaires sur les espaces d'approximation :

$$\begin{aligned} \llbracket v_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} u_{\kappa} v_{\kappa} + \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} u_{\kappa^*} v_{\kappa^*} \right), \quad \forall u_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}, \\ (\phi^{\mathfrak{D}}, v_{\mathcal{T}})_{\partial \Omega} &= \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_{\sigma} \phi^{\mathcal{D}} v_{\sigma}, \quad \forall \phi^{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}_{ext}}, v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\partial \mathfrak{M}}, \\ (\xi_{\mathfrak{D}}, \phi^{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}} &= \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} \xi^{\mathcal{D}} \cdot \phi^{\mathcal{D}}, \quad \forall \xi_{\mathfrak{D}}, \phi^{\mathfrak{D}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}}, \end{aligned} \quad (\text{V.23})$$

et les deux normes correspondantes sont notées par $\|\cdot\|_{2, \mathcal{T}}$ et $\|\cdot\|_{2, \mathfrak{D}}$. Plus généralement, nous posons pour tout $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, $\xi_{\mathfrak{D}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}}$ et $1 \leq p < +\infty$:

$$\begin{aligned} \|u_{\mathcal{T}}\|_{p, \mathcal{T}} &= \left(\frac{1}{2} \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} |u_{\kappa}|^p + \frac{1}{2} \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} |u_{\kappa^*}|^p \right)^{1/p}, \quad \|\xi_{\mathfrak{D}}\|_{p, \mathfrak{D}} = \left(\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} |\xi_{\mathcal{D}}|^p \right)^{1/p}, \\ \|u_{\mathcal{T}}\|_{\infty, \mathcal{T}} &= \max \left(\max_{\kappa \in \mathfrak{M}} |u_{\kappa}|, \max_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} |u_{\kappa^*}| \right), \quad \|\xi_{\mathfrak{D}}\|_{\infty, \mathfrak{D}} = \max_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} |\xi_{\mathcal{D}}|. \end{aligned} \quad (\text{V.24})$$

Les deux opérateurs discrets introduits sont en dualité. En effet, grâce aux produits scalaires ci-dessus, on peut écrire une formule de Green. C'est cette propriété de dualité qui a donné le nom à la méthode. La démonstration de cette formule de Green n'est pas donnée ici, on réfère à [DO05, ABH07].

Théorème 11 (Formule de Green)

Pour tout $\xi_{\mathfrak{D}}, u_{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, on a

$$\llbracket \text{div}^{\mathcal{T}} \xi_{\mathfrak{D}}, u_{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}} = -(\xi_{\mathfrak{D}}, \nabla^{\mathfrak{D}} u_{\mathcal{T}})_{\mathfrak{D}} + (\gamma^{\mathfrak{D}}(\xi_{\mathfrak{D}}) \cdot \vec{\mathbf{n}}, \gamma^{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}))_{\partial \Omega},$$

où $\vec{\mathbf{n}}$ est la normale unitaire sortante du domaine.

Définition d'espace fonctionnel pour les solutions discrètes

Nous avons défini dans (V.16) l'espace des solutions approchées $H_{\mathcal{T}}$. Pour une fonction $u_h \in H_{\mathcal{T}}$, nous définissons son gradient discret $\nabla^h u_h$ par

$$\nabla^h u_h = \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \nabla^{\mathcal{D}} u_{\mathcal{T}} \mathbf{1}_{\mathcal{D}}.$$

Ce gradient discret est une fonction constante par morceaux sur chaque diamant. L'espace de telles fonctions est dénoté par $H_{\mathfrak{D}}$:

$$H_{\mathfrak{D}} = \left\{ \mathbf{U}_h \in (L^1(\Omega))^2 / \exists \mathbf{U}_{\mathfrak{D}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}} \text{ tel que } \mathbf{U}_h = \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \mathbf{U}_{\mathcal{D}} \mathbf{1}_{\mathcal{D}} \right\}.$$

Puis, nous définissons les espaces d'approximation espace-temps $H_{\mathcal{T}, dt}$ et $H_{\mathfrak{D}, dt}$ reposant respectivement sur $H_{\mathcal{T}}$ et $H_{\mathfrak{D}}$:

$$\begin{aligned} H_{\mathcal{T}, dt} &= \left\{ u_{h, dt} \in L^1([0, T] \times \Omega) \text{ tel que } u_{h, dt}(t, x) = u_h^n(x) \forall t \in [t_{n-1}, t_n), \right. \\ &\quad \left. \text{avec } u_h^n \in H_{\mathcal{T}}, \forall 1 \leq n \leq N_T \right\}, \\ H_{\mathfrak{D}, dt} &= \left\{ \mathbf{U}_{h, dt} \in (L^1([0, T] \times \Omega))^2 \text{ tel que } \mathbf{U}_{h, dt}(t, x) = \mathbf{U}_h^n(x) \forall t \in [t_{n-1}, t_n), \right. \\ &\quad \left. \text{avec } \mathbf{U}_h^n \in H_{\mathfrak{D}}, \forall 1 \leq n \leq N_T \right\}. \end{aligned}$$

Nous utilisons encore la notation ∇^h pour définir le gradient discret de $u_{h, dt} \in H_{\mathcal{T}, dt}$:

$$\nabla^h u_{h, dt}(x, t) = \nabla^h u_h^n(x) \forall t \in [t_{n-1}, t_n).$$

Par conséquent, pour tout $u_{h,dt} \in H_{\mathcal{T},dt}$, nous avons $\nabla^h u_{h,dt} \in H_{\mathcal{D},dt}$. En outre, nous introduisons les reconstructions suivantes

$$u_{h,dt,\mathfrak{M}}(t, x) = u_{h,\mathfrak{M}}^n(x) = \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} u_{\kappa}^n \mathbf{1}_{\kappa}(x), \quad \forall t \in [t_{n-1}, t_n], \quad (\text{V.25a})$$

$$u_{h,dt,\mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*}(t, x) = u_{h,\mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*}^n(x) = \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} u_{\kappa^*}^n \mathbf{1}_{\kappa^*}(x), \quad \forall t \in [t_{n-1}, t_n], \quad (\text{V.25b})$$

$$u_{h,dt,\mathcal{D}}(t, x) = u_{h,\mathcal{D}}^n(x) = \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} u_{\mathcal{D}}^n \mathbf{1}_{\mathcal{D}}(x), \quad \forall t \in [t_{n-1}, t_n]. \quad (\text{V.25c})$$

Nous pouvons maintenant définir des normes sur $H_{\mathcal{T}}$, $H_{\mathcal{T},dt}$. Premièrement, nous définissons des normes $W^{1,p}$ discrètes ($1 \leq p \leq +\infty$) et une norme $W^{1,-1}$ discrète sur $H_{\mathcal{T}}$. Pour tout $u_h \in H_{\mathcal{T}}$, nous posons

$$\begin{aligned} \|u_h\|_{1,p,\mathcal{T}} &= \left(\|u_{\mathcal{T}}\|_{p,\mathcal{T}}^p + \|\nabla^{\mathcal{D}} u_{\mathcal{T}}\|_{p,\mathcal{D}}^p \right)^{1/p}, \quad \forall 1 \leq p < +\infty, \\ \|u_h\|_{1,\infty,\mathcal{T}} &= \|u_{\mathcal{T}}\|_{\infty,\mathcal{T}} + \|\nabla^{\mathcal{D}} u_{\mathcal{T}}\|_{\infty,\mathcal{D}}, \\ \|u_h\|_{1,\infty^*,\mathcal{T}} &= \|u_h\|_{1,\infty,\mathcal{T}} + \llbracket \mathcal{P}^{\mathcal{T}} u_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}}^{\frac{1}{2}}, \\ \|u_h\|_{1,-1,\mathcal{T}} &= \max \left\{ \llbracket v_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}}, \forall v_h \in H_{\mathcal{T}} \text{ vérifiant } \|v_h\|_{1,\infty^*,\mathcal{T}} \leq 1 \right\}, \end{aligned}$$

Puis, nous définissons des normes discrètes $L^1(0, T; W^{1,p}(\Omega))$ ($1 \leq p < +\infty$), $L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\Omega))$ et $L^\infty(0, T; L^p(\Omega))$ sur $H_{\mathcal{T},dt}$. Pour tout $u_{h,dt} \in H_{\mathcal{T},dt}$, nous posons :

$$\begin{aligned} \|u_{h,dt}\|_{1;1,p,\mathcal{T}} &= \sum_{n=1}^{N_T} dt \|u_h^n\|_{1,p,\mathcal{T}}, \quad \forall 1 \leq p < +\infty, \\ \|u_{h,dt}\|_{\infty;1,\infty,\mathcal{T}} &= \max_{n \in \{1, \dots, N_T\}} \|u_h^n\|_{1,\infty,\mathcal{T}}, \\ \|u_{h,dt}\|_{\infty;0,p,\mathcal{T}} &= \max_{n \in \{1, \dots, N_T\}} \left(\frac{1}{2} \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} |u_{\kappa}^n|^p + \frac{1}{2} \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} |u_{\kappa^*}^n|^p \right)^{1/p}, \quad \forall 1 \leq p < +\infty. \end{aligned}$$

Remarquons que pour tout $\mathbf{U}_{h,dt} \in H_{\mathcal{D},dt}$ et pour $1 \leq p < +\infty$, nous avons

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}_{h,dt}\|_{(L^\infty(0,T;L^p(\Omega)))^2} &= \max_{n \in \{1, \dots, N_T\}} \left(\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{U}_h^n|^p \right)^{1/p}, \\ \|\mathbf{U}_{h,dt}\|_{(L^p((0,T) \times \Omega))^2} &= \left(\sum_{n=1}^{N_T} dt \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{U}_h^n|^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Pour une fonction donnée $u_{h,dt} \in H_{\mathcal{T},dt}$, nous rappelons que nous avons $u_{h,dt}(\cdot, t) = u_h^n(\cdot) \in H_{\mathcal{T}}$ pour tout $t \in [t_{n-1}, t_n)$. Nous définissons la dérivée en temps discrète $\partial_{t,\mathcal{T}} u_{h,dt} \in H_{\mathcal{T},dt}$ par

$$\partial_{t,\mathcal{T}} u_{h,dt}(\cdot, t) = \frac{u_h^n(\cdot) - u_h^{n-1}(\cdot)}{dt}, \quad \forall t \in [t_{n-1}, t_n).$$

Puis, nous notons $\partial_{t,\mathcal{T}} u_{h,dt}^n = \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{dt} \in H_{\mathcal{T}}$, associé aux vecteurs

$$\partial_{t,\mathcal{T}} u_{\mathcal{T}}^n = \left(\left(\frac{u_{\kappa}^n - u_{\kappa}^{n-1}}{dt} \right)_{\kappa \in \mathfrak{M} \cup \partial \mathfrak{M}}, \left(\frac{u_{\kappa^*}^n - u_{\kappa^*}^{n-1}}{dt} \right)_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} \right).$$

Construction des opérateurs et des inconnues dans le cadre vectoriel

Espaces d'approximation sur les maillages DDFV

La méthode DDFV pour le problème de Stokes va mettre en jeu des inconnues décalées. On associe à chaque maille primale $\kappa \in \mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}$ une inconnue $\mathbf{u}_\kappa \in \mathbb{R}^2$ en vitesse, à chaque maille duale $\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$ une inconnue $\mathbf{u}_{\kappa^*} \in \mathbb{R}^2$ en vitesse et à chaque diamant $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$ une inconnue $p_{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}$ en pression. Ces inconnues sont rassemblées dans les familles :

$$\mathbf{u}_{\mathcal{T}} = \left((\mathbf{u}_\kappa)_{\kappa \in (\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M})}, (\mathbf{u}_{\kappa^*})_{\kappa^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*)} \right) \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \quad \text{et} \quad p_{\mathfrak{D}} = ((p_{\mathcal{D}})_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}}) \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}. \quad (\text{V.26})$$

On définit maintenant les projections moyennes discrètes, pour toute fonction \mathbf{v} dans $(H^1(\Omega))^2$, une sur le bord comme suit

$$\mathbb{P}_m^{\partial\Omega} \mathbf{v} = \left(\left(\frac{1}{m_\kappa} \int_\kappa \mathbf{v}(x) dx \right)_{\kappa \in \partial\mathfrak{M}}, \left(\frac{1}{m_{\kappa^*}} \int_{\kappa^*} \mathbf{v}(x) dx \right)_{\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*} \right), \quad (\text{V.27})$$

et une autre à l'intérieur :

$$\mathbb{P}_m^{\mathfrak{M}} \mathbf{v} = \left(\left(\frac{1}{m_\kappa} \int_\kappa \mathbf{v}(x) dx \right)_{\kappa \in \mathfrak{M}} \right), \quad \mathbb{P}_m^{\mathfrak{M}^*} \mathbf{v} = \left(\left(\frac{1}{m_{\kappa^*}} \int_{\kappa^*} \mathbf{v}(x) dx \right)_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^*} \right). \quad (\text{V.28})$$

Finalement, on les regroupe de la manière suivante :

$$\mathbb{P}_m^{\mathcal{T}} \mathbf{v} = (\mathbb{P}_m^{\mathfrak{M}} \mathbf{v}, \mathbb{P}_m^{\mathfrak{M}^*} \mathbf{v}, \mathbb{P}_m^{\partial\Omega} \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^2. \quad (\text{V.29})$$

On introduit également une projection centrée sur le maillage \mathcal{T} :

$$\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}} \mathbf{v} = ((\mathbf{v}(x_\kappa))_{\kappa \in (\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M})}, (\mathbf{v}(x_{\kappa^*}))_{\kappa^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*)}), \quad \forall \mathbf{v} \in (H^2(\Omega))^2, \quad (\text{V.30})$$

une projection moyenne sur le maillage diamant \mathfrak{D}

$$\mathbb{P}_m^{\mathfrak{D}} q = \left(\left(\frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} q(x) dx \right)_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \right), \quad \forall q \in H^1(\Omega). \quad (\text{V.31})$$

On spécifie deux sous espaces discrets de $(\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$ utilisés pour prendre en compte les conditions aux bords de Dirichlet

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0 &= \left\{ \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \text{ tel que } \mathbf{v}_\kappa = 0, \forall \kappa \in \partial\mathfrak{M} \text{ et } \mathbf{v}_{\kappa^*} = 0, \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^* \right\}, \\ \mathbb{E}_{\mathbf{g}} &= \left\{ \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \text{ tel que } \mathbf{v}_\kappa = (\mathbb{P}_m^{\partial\Omega} \mathbf{g})_\kappa, \forall \kappa \in \partial\mathfrak{M} \text{ et } \mathbf{v}_{\kappa^*} = (\mathbb{P}_m^{\partial\Omega} \mathbf{g})_{\kappa^*}, \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^* \right\}. \end{aligned} \quad (\text{V.32})$$

Dans le cas des conditions mixtes, on notera un indice D pour le bord Dirichlet

$$\mathbb{E}_{\mathbf{g}}^D = \left\{ \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \text{ tel que } \mathbf{v}_\kappa = (\mathbb{P}_m^{\partial\Omega} \mathbf{g})_\kappa, \forall \kappa \in \partial\mathfrak{M}_D \text{ et } \mathbf{v}_{\kappa^*} = (\mathbb{P}_m^{\partial\Omega} \mathbf{g})_{\kappa^*}, \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}_D^* \right\}. \quad (\text{V.33})$$

Définitions des opérateurs discrets

On définit les opérateurs discrets qui sont nécessaires pour écrire et analyser le schéma DDFV dans le cadre vectoriel. On commence par le gradient discret d'un champ de vecteurs.

Définition 12 (Gradient discret)

Le gradient discret d'un champ de vecteurs de $(\mathbb{R}^2)^T$ est défini de la manière suivante : $\nabla^{\mathcal{D}} : \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^T \mapsto (\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}})_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathcal{D}}$, avec pour $\mathcal{D} \in \mathcal{D}$:

$$\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} = \frac{1}{\sin(\alpha_{\mathcal{D}})} \left[\frac{\mathbf{u}_{\mathcal{L}} - \mathbf{u}_{\mathcal{K}}}{m_{\sigma^*}} \otimes \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}} + \frac{\mathbf{u}_{\mathcal{L}^*} - \mathbf{u}_{\mathcal{K}^*}}{m_{\sigma}} \otimes \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\mathcal{K}^*} \right],$$

où \otimes représente le produit tensoriel. Il peut aussi s'écrire de la manière suivante :

$$\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} = \frac{1}{2m_{\mathcal{D}}} [m_{\sigma}(\mathbf{u}_{\mathcal{L}} - \mathbf{u}_{\mathcal{K}}) \otimes \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}} + m_{\sigma^*}(\mathbf{u}_{\mathcal{L}^*} - \mathbf{u}_{\mathcal{K}^*}) \otimes \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}].$$

Remarque 13

Il peut être également vu comme le gradient discret de ses composantes en utilisant le gradient discret d'un champ scalaire de \mathbb{R}^T (Définition 7) :

$$\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} = \nabla^{\mathcal{D}} \begin{pmatrix} u_1^T \\ u_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t \nabla^{\mathcal{D}} u_1^T \\ {}^t \nabla^{\mathcal{D}} u_2^T \end{pmatrix}, \quad \forall \mathcal{D} \in \mathcal{D}.$$

Définition 14 (Divergence discrète)

L'opérateur de divergence discrète d'un champ de tenseurs discrets de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathcal{D}}$ est défini de la manière suivante : $\mathbf{div}^{\mathcal{T}} : \xi_{\mathcal{D}} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathcal{D}} \mapsto \mathbf{div}^{\mathcal{T}} \xi_{\mathcal{D}} \in (\mathbb{R}^2)^T$. Soit $\xi_{\mathcal{D}} = (\xi^{\mathcal{D}})_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathcal{D}}$, on pose

$$\mathbf{div}^{\mathcal{T}} \xi_{\mathcal{D}} = (\mathbf{div}^{\mathfrak{M}} \xi_{\mathcal{D}}, \mathbf{div}^{\partial \mathfrak{M}} \xi_{\mathcal{D}}, \mathbf{div}^{\mathfrak{M}^*} \xi_{\mathcal{D}}, \mathbf{div}^{\partial \mathfrak{M}^*} \xi_{\mathcal{D}}),$$

où $\mathbf{div}^{\mathfrak{M}} \xi_{\mathcal{D}} = (\mathbf{div}^{\mathcal{K}} \xi_{\mathcal{D}})_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}}$, $\mathbf{div}^{\partial \mathfrak{M}} \xi_{\mathcal{D}} = 0$, $\mathbf{div}^{\mathfrak{M}^*} = (\mathbf{div}^{\mathcal{K}^*} \xi_{\mathcal{D}})_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*}$ et $\mathbf{div}^{\partial \mathfrak{M}^*} = (\mathbf{div}^{\mathcal{K}^*} \xi_{\mathcal{D}})_{\mathcal{K}^* \in \partial \mathfrak{M}^*}$ avec :

$$\mathbf{div}^{\mathcal{K}} \xi_{\mathcal{D}} = \frac{1}{m_{\mathcal{K}}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}}} m_{\sigma} \xi_{\mathcal{D}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}}, \quad \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M},$$

$$\mathbf{div}^{\mathcal{K}^*} \xi_{\mathcal{D}} = \frac{1}{m_{\mathcal{K}^*}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}^*}} m_{\sigma^*} \xi_{\mathcal{D}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}, \quad \forall \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*,$$

$$\mathbf{div}^{\mathcal{K}^*} \xi_{\mathcal{D}} = \frac{1}{m_{\mathcal{K}^*}} \left(\sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}^*}} m_{\sigma^*} \xi_{\mathcal{D}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\mathcal{K}^*} + \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}^*} \cap \mathcal{D}_{ext}} d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}} \xi_{\mathcal{D}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}} \right), \quad \forall \mathcal{K}^* \in \partial \mathfrak{M}^*.$$

Grâce au gradient discret on peut définir un tenseur des taux de déformation et une divergence discrète d'un champ de vecteurs de $(\mathbb{R}^2)^T$.

Définition 15

Le tenseur des taux de déformation d'un champ de vecteurs de $(\mathbb{R}^2)^T$ est défini de la manière suivante : $\mathcal{D}^{\mathcal{D}} : \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^T \mapsto (\mathcal{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}})_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathcal{D}}$, avec

$$\mathcal{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} = \frac{\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} + {}^t(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}})}{2}, \quad \forall \mathcal{D} \in \mathcal{D}.$$

Définition 16

La divergence discrète d'un champ de vecteurs de $(\mathbb{R}^2)^T$ est définie de la manière suivante : $\text{div}^{\mathfrak{D}} : \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^T \mapsto (\text{div}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}})_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$, avec

$$\text{div}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} = \text{Tr}(\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}), \quad \forall \mathfrak{D} \in \mathfrak{D}.$$

Remarque 17

On remarque que pour tout $\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}$, $\text{div}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}$ peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\text{div}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} = \frac{1}{2m_{\mathfrak{D}}} [m_{\sigma}(\mathbf{u}_{\mathcal{L}} - \mathbf{u}_{\mathcal{K}}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}} + m_{\sigma^*}(\mathbf{u}_{\mathcal{L}^*} - \mathbf{u}_{\mathcal{K}^*}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}], \quad \forall \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^T,$$

et

$$\text{div}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} = \frac{1}{m_{\mathfrak{D}}} \sum_{\mathfrak{s}=[x_{\mathcal{K}}, x_{\mathcal{K}^*}] \in \mathcal{E}_{\mathfrak{D}}} m_{\mathfrak{s}} \frac{\mathbf{u}_{\mathcal{K}^*} + \mathbf{u}_{\mathcal{K}}}{2} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{D}}, \quad \forall \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0. \quad (\text{V.34})$$

La relation V.34 est la version discrète de $\int_{\mathfrak{D}} \text{div}(\mathbf{u})(z) dz = \int_{\partial \mathfrak{D}} \mathbf{u}(s) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\mathfrak{D}} ds$, pour toute fonction \mathbf{u} régulière.

Finalement, un opérateur du second ordre discret est nécessaire pour définir le terme de stabilisation dans le problème de Stokes. Cet opérateur pénalise les oscillations de la pression.

Définition 18

On définit un opérateur du second ordre discret, noté $\Delta^{\mathfrak{D}} : p_{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}} \mapsto \Delta^{\mathfrak{D}} p_{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$, comme suit :

$$\Delta^{\mathfrak{D}} p_{\mathfrak{D}} = \frac{1}{m_{\mathfrak{D}}} \sum_{\mathfrak{s}=\mathfrak{D}|\mathfrak{D}' \in \mathcal{E}_{\mathfrak{D}}} \frac{d_{\mathfrak{D}}^2 + d_{\mathfrak{D}'}^2}{d_{\mathfrak{D}}^2} (p_{\mathfrak{D}'} - p_{\mathfrak{D}}), \quad \forall \mathfrak{D} \in \mathfrak{D}.$$

Remarque 19

On rappelle que $\mathcal{E}_{\mathfrak{D}}$ ne contient que les côtés intérieurs des diamants. En effet, on ne considère jamais $\mathfrak{s} \subset \partial \Omega$. Ceci revient à dire que l'on a imposé une condition de Neumann homogène sur le bord $\partial \Omega$ directement dans l'opérateur $\Delta^{\mathfrak{D}}$.

De plus, il faut remarquer que cet opérateur n'est pas une approximation consistante de l'opérateur de Laplace. Ceci n'est pas nécessaire. En fait, une approximation consistante est basée sur une formule de flux à deux points qui nécessite un maillage diamant vérifiant la condition d'orthogonalité comme c'est le cas pour des maillages *admissibles* [EGH00], ceci n'a pas de raison d'être vérifié pour le maillage diamant \mathfrak{D} obtenu à partir de \mathfrak{M} .

Relativement à cet opérateur, on définit une semi-norme dépendant du maillage $|\cdot|_h$ sur $\mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$ par :

$$|p_{\mathfrak{D}}|_h^2 = \sum_{\mathfrak{s}=\mathfrak{D}|\mathfrak{D}' \in \mathcal{G}} (d_{\mathfrak{D}}^2 + d_{\mathfrak{D}'}^2) (p_{\mathfrak{D}'} - p_{\mathfrak{D}})^2, \quad \forall p_{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}. \quad (\text{V.35})$$

On peut voir cette semi-norme $|p|_h$ comme la version discrète de $\text{size}(\mathcal{T})|\nabla p|_2$.

Remarque 20

En réorganisant la somme sur les côtés $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$ des diamants, on a pour tout $p_{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$

$$\begin{aligned} -(d_{\mathfrak{D}}^2 \Delta^{\mathfrak{D}} p_{\mathfrak{D}}, p_{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}} &= \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} p_{\mathfrak{D}} \sum_{\mathfrak{s}=\mathfrak{D} | \mathfrak{D}' \in \mathcal{E}_{\mathfrak{D}}} (d_{\mathfrak{D}}^2 + d_{\mathfrak{D}'}^2)(p_{\mathfrak{D}} - p_{\mathfrak{D}'}) \\ &= \sum_{\mathfrak{s}=\mathfrak{D} | \mathfrak{D}' \in \mathfrak{S}} (d_{\mathfrak{D}}^2 + d_{\mathfrak{D}'}^2)(p_{\mathfrak{D}'} - p_{\mathfrak{D}})^2 \\ &= |p_{\mathfrak{D}}|_h^2. \end{aligned}$$

Définition V.9

Nous définissons $\mathbf{divc}^{\mathcal{T}} : (\mathbf{F}_{\mathfrak{D}}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}) \in (\mathbb{R}^{\mathfrak{D}})^2 \times (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \mapsto \mathbf{divc}^{\mathcal{T}}(\mathbf{F}_{\mathfrak{D}}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}) \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$, avec $\mathbf{F}_{\mathfrak{D}} = (F_{\kappa, \sigma}, F_{\kappa^*, \sigma^*})_{\mathfrak{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}}$, par : pour tout $\kappa \in \mathfrak{M}$, $\kappa^* \in \mathfrak{M}^*$,

$$\begin{aligned} \mathbf{divc}_{\kappa}(\mathbf{F}_{\mathfrak{D}}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}) &= \frac{1}{m_{\kappa}} \sum_{\mathfrak{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa}^{int}} (F_{\kappa, \sigma})^+ \mathbf{u}_{\kappa} - (F_{\kappa, \sigma})^- \mathbf{u}_{\mathcal{L}} + \sum_{\mathfrak{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa}^{ext}} F_{\kappa, \sigma} \gamma^{\sigma}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) \\ \mathbf{divc}_{\kappa^*}(\mathbf{F}_{\mathfrak{D}}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}) &= \frac{1}{m_{\kappa^*}} \sum_{\mathfrak{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} (F_{\kappa^*, \sigma^*})^+ \mathbf{u}_{\kappa^*} - (F_{\kappa^*, \sigma^*})^- \mathbf{u}_{\mathcal{L}^*}. \end{aligned}$$

Cela définit les vecteurs $\mathbf{divc}^{\mathfrak{M}}$ et $\mathbf{divc}^{\mathfrak{M}^*}$, respectivement. Nous posons

$$\begin{aligned} \mathbf{divc}_{\kappa}(\mathbf{F}_{\mathfrak{D}}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}) &= 0, \\ \mathbf{divc}_{\kappa^*}(\mathbf{F}_{\mathfrak{D}}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}) &= \frac{1}{m_{\kappa^*}} \sum_{\mathfrak{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} (F_{\kappa^*, \sigma^*})^+ \mathbf{u}_{\kappa^*} - (F_{\kappa^*, \sigma^*})^- \mathbf{u}_{\mathcal{L}^*} + \frac{1}{2m_{\kappa^*}} \sum_{\mathfrak{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}^{ext}} F_{\kappa, \sigma} \gamma^{\sigma}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) \end{aligned}$$

pour tout $\kappa \in \partial \mathfrak{M}$ et $\kappa^* \in \partial \mathfrak{M}^*$. Cela définit les vecteurs $\mathbf{divc}^{\partial \mathfrak{M}}$ et $\mathbf{divc}^{\partial \mathfrak{M}^*}$, respectivement. Finalement, $\mathbf{divc}^{\mathcal{T}}(\mathbf{F}_{\mathfrak{D}}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}})$ est obtenu en concaténant

$$(\mathbf{divc}^{\mathfrak{M}}(\mathbf{F}_{\mathfrak{D}}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}), \mathbf{divc}^{\partial \mathfrak{M}}(\mathbf{F}_{\mathfrak{D}}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}), \mathbf{divc}^{\mathfrak{M}^*}(\mathbf{F}_{\mathfrak{D}}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}), \mathbf{divc}^{\partial \mathfrak{M}^*}(\mathbf{F}_{\mathfrak{D}}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}})).$$

Définition V.10

L'opérateur de divergence discrète $\mathbf{divc}^{\mathfrak{D}}$ d'un champ de $\mathbb{R}^{\mathfrak{D}} \times (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$ vers $\mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$ est défini pour tout $\rho_{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$ et $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$ par

$$\mathbf{divc}^{\mathfrak{D}}(\rho_{\mathfrak{D}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = (\mathbf{divc}^{\mathfrak{D}}(\rho_{\mathfrak{D}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}))_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}},$$

avec

$$\mathbf{divc}^{\mathfrak{D}}(\rho_{\mathfrak{D}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = \frac{1}{m_{\mathfrak{D}}} \sum_{\mathfrak{s} \in \mathcal{E}_{\mathfrak{D}}} m_{\mathfrak{s}} ((v_{\mathfrak{s}, \mathfrak{D}})^+ \rho_{\mathfrak{D}} - (v_{\mathfrak{s}, \mathfrak{D}})^- \rho_{\mathfrak{D}'}), \quad \forall \mathfrak{D} \in \mathfrak{D}$$

où $v_{\mathfrak{s}, \mathfrak{D}} = \frac{\mathbf{v}_{\kappa} + \mathbf{v}_{\kappa^*}}{2} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}, \mathfrak{D}}$ pour $\mathfrak{s} = [x_{\kappa}, x_{\kappa^*}] \in \mathcal{E}_{\mathfrak{D}}$, $\vec{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}, \mathfrak{D}}$ la normale unitaire à \mathfrak{s} sortante de \mathfrak{D} , et $x^+ = \max(x, 0)$ et $x^- = -\min(x, 0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Définitions des produits scalaires et normes associées

Dans la suite, $\|\cdot\|_2$ représente la norme L^2 classique quand on considère une fonction scalaire ou vectorielle et la norme de Frobenius quand on considère une fonction matricielle :

$$\begin{aligned}\|\xi\|_{\mathcal{F}}^2 &= (\xi : \xi), \quad \forall \xi \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \\ \|\xi\|_{2,\mathfrak{D}}^2 &= \int_{\Omega} \|\xi(x)\|_{\mathcal{F}}^2 dx, \quad \forall \xi \in L^2(\Omega, \mathcal{M}_2(\mathbb{R})),\end{aligned}$$

où $(\xi : \tilde{\xi}) = \sum_{1 \leq i,j \leq 2} \xi_{i,j} \tilde{\xi}_{i,j} = \text{Tr}({}^t \xi \tilde{\xi}), \quad \forall \xi, \tilde{\xi} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$

Remarque 21

La norme matricielle $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ vérifie la propriété suivante

$$\left\| \frac{A + {}^t A}{2} \right\|_{\mathcal{F}} \leq \|A\|_{\mathcal{F}}, \quad \forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

On définit ensuite les opérateurs de trace sur $(\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$ et $(\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}}$. Soit $\gamma^{\mathcal{T}} : \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \mapsto \gamma^{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) = (\gamma_{\sigma}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}))_{\sigma \in \partial \mathfrak{M}} \in (\mathbb{R}^2)^{\partial \mathfrak{M}}$, tel que :

$$\gamma_{\sigma}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) = \frac{d_{\kappa^*, \mathcal{L}}(\mathbf{u}_{\kappa^*} + \mathbf{u}_{\mathcal{L}}) + d_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}}(\mathbf{u}_{\mathcal{L}^*} + \mathbf{u}_{\mathcal{L}})}{2m_{\sigma}}, \quad \forall \sigma = [x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}^*}] \in \partial \mathfrak{M}. \quad (\text{V.36})$$

Cet opérateur nous permettra d'imposer les conditions de Dirichlet au sens faible. Nous définissons aussi une autre trace $\tilde{\gamma}^{\mathcal{T}} : \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \mapsto \tilde{\gamma}^{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) = (\tilde{\gamma}_{\sigma}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}))_{\sigma \in \partial \mathfrak{M}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$, telle que :

$$\tilde{\gamma}_{\sigma}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) = \frac{\mathbf{u}_{\kappa^*} + 2\mathbf{u}_{\mathcal{L}} + \mathbf{u}_{\mathcal{L}^*}}{4} \quad \forall \sigma = [x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}^*}] \in \partial \mathfrak{M},$$

cela apparait dans les équations du schéma et dans la preuve de la propriété du terme de convection non linéaire. Un autre opérateur est noté $\gamma^{\mathfrak{D}} : \phi^{\mathfrak{D}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}} \mapsto (\phi^{\mathfrak{D}})_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}_{ext}}$, c'est uniquement l'opérateur de restriction sur \mathfrak{D}_{ext} . On définit maintenant les produits scalaires sur les espaces d'approximation :

$$\begin{aligned}[\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}]_{\mathcal{T}} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} \mathbf{u}_{\kappa} \cdot \mathbf{v}_{\kappa} + \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} \mathbf{u}_{\kappa^*} \cdot \mathbf{v}_{\kappa^*} \right), \quad \forall \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}, \\ (\phi_{\mathfrak{D}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}})_{\partial \Omega} &= \sum_{\mathcal{D}, \sigma^* \in \mathfrak{D}_{ext}} m_{\sigma} \phi_{\mathcal{D}} \cdot \mathbf{v}_{\sigma}, \quad \forall \phi_{\mathfrak{D}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}_{ext}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\partial \mathfrak{M}}, \\ (\xi_{\mathfrak{D}} : \phi_{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}} &= \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} (\xi_{\mathcal{D}} : \phi_{\mathcal{D}}), \quad \forall \xi_{\mathfrak{D}}, \phi_{\mathfrak{D}} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}}, \\ (p_{\mathfrak{D}}, q_{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}} &= \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} p_{\mathcal{D}} q_{\mathcal{D}}, \quad \forall p_{\mathfrak{D}}, q_{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}},\end{aligned} \quad (\text{V.37})$$

et les normes correspondantes :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{2,\mathcal{T}} &= [\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}]_{\mathcal{T}}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}, \\ \|\xi_{\mathfrak{D}}\|_{2,\mathfrak{D}} &= (\xi_{\mathfrak{D}} : \xi_{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \xi_{\mathfrak{D}} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}}, \\ \|p_{\mathfrak{D}}\|_{2,\mathfrak{D}} &= (p_{\mathfrak{D}}, p_{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall p_{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}.\end{aligned} \quad (\text{V.38})$$

Nous pouvons généraliser $\forall p \geq 1$ et définir pour tout $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$ et $\xi_{\mathcal{D}} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathcal{D}}$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{p,\mathcal{T}} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}} |\mathbf{u}_{\mathcal{K}}|^p + \sum_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} m_{\mathcal{K}^*} |\mathbf{u}_{\mathcal{K}^*}|^p \right)^{1/p}, \\ \|\xi_{\mathcal{D}}\|_{p,\mathcal{D}} &= \left(\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} |\xi_{\mathcal{D}}|^p \right)^{1/p}, \\ \|\mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{1,p,\mathcal{T}} &= \|\mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{p,\mathcal{T}} + \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{p,\mathcal{T}}, \\ \|\gamma^{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}})\|_{p,\mathcal{D}_{ext}} &= \left(\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathcal{D}_{ext}} m_{\sigma} |\gamma_{\sigma}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}})|^p \right)^{1/p}, \\ \|\tilde{\gamma}^{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}})\|_{p,\mathcal{D}_{ext}} &= \left(\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathcal{D}_{ext}} m_{\sigma} |\tilde{\gamma}_{\sigma}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}})|^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Relation de dualité : Formule de Green

On a vu dans le Théorème 11 que les opérateurs gradient discret d'un champ scalaire de $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ et divergence discrète d'un champ vectoriel de $(\mathbb{R}^2)^{\mathcal{D}}$ sont en dualité. On souhaite généraliser cette formule de Green discrète pour les champs de $(\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$ et de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathcal{D}}$. Cette nouvelle formule de Green discrète est déduite du Théorème 11 en travaillant composante par composante.

Théorème 22 (Formule de Green discrète)

Pour tout $\xi_{\mathcal{D}} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathcal{D}}$, $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$, on a

$$\llbracket \operatorname{div}^{\mathcal{T}} \xi_{\mathcal{D}}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}} = -(\xi_{\mathcal{D}} : \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}})_{\mathcal{D}} + (\gamma^{\mathcal{D}}(\xi_{\mathcal{D}}) \cdot \vec{\mathbf{n}}, \gamma^{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}))_{\partial \Omega},$$

où $\vec{\mathbf{n}}$ est la normale unitaire sortante du domaine.

Description de la méthode HHO

Maillage et résultats classiques

Soit $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}_*^+$ désigne un ensemble dénombrable de maillages ayant 0 comme point d'accumulation unique. Nous considérons une suite de maillage raffiné $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ où, pour tout $h \in \mathcal{H}$, $\mathcal{T}_h = \{T\}$ est une collection finie d'éléments polyédriques ouverts non vides et disjoints tels que $\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} \bar{T}$ et $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$ (h_T représente le diamètre de T). Pour tout $h \in \mathcal{H}$, l'ensemble des faces du maillage \mathcal{F}_h est une collection finie de sous-ensembles disjoints F de $\bar{\Omega}$ tels que, pour tout $F \in \mathcal{F}_h$, F est un sous-ensemble ouvert d'un hyperplan de \mathbb{R}^d tel que $|F|_{d-1} > 0$ et $|\bar{F} \setminus F|_{d-1} = 0$ avec $|\cdot|_{d-1}$ représentant la mesure de Hausdorff de dimension $(d-1)$. En outre, on a que $\bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} \partial T = \bigcup_{F \in \mathcal{F}_h} \bar{F}$ et, pour tout $F \in \mathcal{F}_h$,

- soit il existe $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h$ tel que $F = \partial T_1 \cap \partial T_2$ (et F est une interface)
- soit il existe $T \in \mathcal{T}_h$ tel que $F = \partial T \cap \partial \Omega$ (et F est une face du bord).

L'ensemble des interfaces est noté par \mathcal{F}_h^i , l'ensemble des faces du bord par \mathcal{F}_h^b , et on a que $\mathcal{F}_h = \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^b$. Pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, l'ensemble $\mathcal{F}_T := \{F \in \mathcal{F}_h \mid F \subset \partial T\}$ contient les faces se trouvant au bord T et, pour tout $F \in \mathcal{F}_T$, nous notons par $\vec{\mathbf{n}}_{TF}$ la normale à F sortante de T . La normale $\vec{\mathbf{n}}_F$ est associée à chaque face interne en fixant une orientation arbitraire, tandis que pour les faces du bord $\vec{\mathbf{n}}_F$ sont sortants de Ω .

Nous supposons que $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ est régulier au sens de [DPT17, Definition 3], i.e., pour tout $h \in \mathcal{H}$, \mathcal{T}_h admet un sous-maillage en simplexe \mathfrak{T}_h et il existe un nombre réel $\varrho > 0$ (le paramètre de régularité du maillage) indépendant de h tel que les conditions suivantes sont vérifiées :

- pour tout $h \in \mathcal{H}$ et pour tout simplexe $S \in \mathfrak{T}_h$ de diamètre h_S et de rayon r_S , $\varrho h_S \mathcal{L}^* r_S$;
- pour tout $h \in \mathcal{H}$, tout $T \in \mathcal{T}_h$, et tout $S \in \mathfrak{T}_h$ tel que $S \subset T$, $\varrho h_T \mathcal{L}^* h_S$.

Soit X un sous ensemble de \mathbb{R}^d et, pour tout entier $l \geq 0$, nous notons $\mathbb{P}^l(X)$ l'espace engendré par les restrictions à X de polynômes dans les variables spatiales de degré total l . Dans ce qui suit, l'ensemble X va représenter un élément du maillage soit une maille soit une face. Nous notons par $\pi_X^l : L^1(X) \rightarrow \mathbb{P}^l(X)$ la projection L^2 -orthogonale telle que, pour tout $v \in L^1(X)$,

$$\int_X (v - \pi_X^l v) w = 0 \quad \forall w \in \mathbb{P}^l(X). \quad (\text{V.39})$$

Les projections L^2 -orthogonales vectorielles et matricielles, toutes les deux notées π_X^l , sont obtenus en appliquant π_X^l composante par composante. Les propriétés d'approximation optimales $W^{s,p}$ suivantes sont prouvées dans [DPD17, Appendix A.2] en utilisant la théorie classique de [DS80] (cf. aussi [BS08, Chapter 4]) : Soit $s \in \{0, \dots, l+1\}$, pour tout $p \in [1, +\infty]$, alors, il existe une constante $C > 0$ dépendant uniquement de d , ϱ , l , s , et p tel que, pour tout $h \in \mathcal{H}$, tout $T \in \mathcal{T}_h$, tout $v \in W^{s,p}(T)$, et tout $m \in \{0, \dots, s-1\}$,

$$|v - \pi_T^l v|_{W^{m,p}(T) \mathcal{L}^* C h_T^{s-m}} |v|_{W^{s,p}(T)}, \quad (\text{V.40a})$$

et, si $s \geq 1$,

$$h_T^{\frac{1}{p}} |v - \pi_T^l v|_{W^{m,p}(\mathcal{F}_T) \mathcal{L}^* C h_T^{s-m}} |v|_{W^{s,p}(T)}, \quad (\text{V.40b})$$

où $W^{m,p}(\mathcal{F}_T)$ est engendrée par des fonctions qui sont dans $W^{m,p}(F)$ pour tout $F \in \mathcal{F}_T$. Au niveau global, l'espace des fonctions polynomiales par morceaux sur \mathcal{T}_h de degré l est désigné par $\mathbb{P}^l(\mathcal{T}_h)$, et π_h^l est la projection L^2 -orthogonale correspondante. L'opérateur de gradient par morceaux sur \mathcal{T}_h est noté ∇_h .

Soit $p \in [1, +\infty]$. Nous rappelons l'inégalité de trace continue suivante : Il existe une constante $C > 0$ indépendante de h tel que, pour tout $T \in \mathcal{T}_h$ on a pour tout $v \in W^{1,p}(T)$,

$$h_T^{\frac{1}{p}} \|v\|_{L^p(\partial T) \mathcal{L}^* C} (\|v\|_{L^p(T)} + h_T \|\nabla v\|_{L^p(T)^d}). \quad (\text{V.41})$$

Soit un entier $l \geq 0$ fixé. En utilisant (V.41) et l'inégalité inverse discrète

$$\|\nabla v\|_{L^p(T)^d} \leq C h_T^{-1} \|v\|_{L^p(T)}, \quad (\text{V.42})$$

valide pour tout $T \in \mathcal{T}_h$ et $v \in \mathbb{P}^l(T)$ avec une constante $C > 0$ indépendante de h et de T , nous obtenons l'inégalité de trace discrète suivante : Il existe une constante $C > 0$ indépendante de h tel que, pour tout $T \in \mathcal{T}_h$ on a pour tout $v \in \mathbb{P}^l(T)$,

$$h_T^{\frac{1}{p}} \|v\|_{L^p(\partial T)} \leq C \|v\|_{L^p(T)}. \quad (\text{V.43})$$

Espaces discrets

Soit un degré des polynômes $k \geq 0$ fixé. Nous définissons l'espace hybride suivant contenant les degrés de liberté en vitesse basés sur les mailles et les faces :

$$\underline{\mathbf{U}}_h^k := \left(\prod_{T \in \mathcal{T}_h} \mathbb{P}^k(T)^d \right) \times \left(\prod_{F \in \mathcal{F}_h} \mathbb{P}^k(F)^d \right). \quad (\text{V.44})$$

Pour tout élément de $\underline{\mathbf{U}}_h^k$ nous utilisons la notation soulignée $\underline{\mathbf{v}}_h = ((\mathbf{v}_T)_{T \in \mathcal{T}_h}, (\mathbf{v}_F)_{F \in \mathcal{F}_h})$. Nous définissons l'interpolateur global $\underline{\mathbf{I}}_h^k : H^1(\Omega)^d \rightarrow \underline{\mathbf{U}}_h^k$ tel que, pour tout $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d$,

$$\underline{\mathbf{I}}_h^k \mathbf{v} := ((\pi_T^k \mathbf{v})_{T \in \mathcal{T}_h}, (\pi_F^k \mathbf{v})_{F \in \mathcal{F}_h}).$$

Pour toute maille $T \in \mathcal{T}_h$, nous notons $\underline{\mathbf{U}}_T^k$ et $\underline{\mathbf{I}}_T^k$ les restrictions à T de $\underline{\mathbf{U}}_h^k$ et $\underline{\mathbf{I}}_h^k$, respectivement. De même, $\underline{\mathbf{v}}_T = (\mathbf{v}_T, (\mathbf{v}_F)_{F \in \mathcal{F}_T})$ représente la restriction à T d'un vecteur générique $\underline{\mathbf{v}}_h \in \underline{\mathbf{U}}_h^k$. Aussi, pour un élément $\underline{\mathbf{v}}_h \in \underline{\mathbf{U}}_h^k$, nous notons \mathbf{v}_h (pas souligné) la fonction polynomiale par morceau dans $\mathbb{P}^k(\mathcal{T}_h)^d$ tel que $\mathbf{v}_h|_T = \mathbf{v}_T$ pour tout $T \in \mathcal{T}_h$. Finalement, nous définissons sur $\underline{\mathbf{U}}_h^k$ la semi-norme suivante :

$$\|\underline{\mathbf{v}}_h\|_{1,h}^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\underline{\mathbf{v}}_T\|_{1,T}^2, \quad (\text{V.45})$$

où, pour tout $T \in \mathcal{T}_h$,

$$\|\underline{\mathbf{v}}_T\|_{1,T}^2 := \|\nabla \mathbf{v}_T\|_T^2 + |\underline{\mathbf{v}}_T|_{1,\partial T}^2, \quad |\underline{\mathbf{v}}_T|_{1,\partial T}^2 := \sum_{F \in \mathcal{F}_T} h_F^{-1} \|\mathbf{v}_F - \mathbf{v}_T\|_F^2. \quad (\text{V.46})$$

La propriété de majoration suivante est valable pour l'interpolateur global $\underline{\mathbf{I}}_h^k$: Pour tout $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d$,

$$\|\underline{\mathbf{I}}_h^k \mathbf{v}\|_{1,h} \leq C_I \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^d}, \quad (\text{V.47})$$

avec une constante $C_I > 0$ indépendante de h . Sa preuve repose sur les propriétés de stabilité des projections L^2 sur des mailles et des faces prouvées dans [DPD17].

Les espaces de vitesse et de pression suivants intègrent respectivement les conditions aux limites homogènes pour la vitesse et la contrainte de moyenne nulle pour la pression :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{U}}_{h,0}^k &:= \{ \underline{\mathbf{v}}_h \in \underline{\mathbf{U}}_h^k \mid \mathbf{v}_F = \mathbf{0} \quad \forall F \in \mathcal{F}_h^b \}, \\ P_h^k &:= \left\{ q_h \in \mathbb{P}^k(\mathcal{T}_h) \mid \int_{\Omega} q_h = 0 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{V.48})$$

Il est simple de vérifier que $\|\cdot\|_{1,h}$ définit une norme sur $\underline{\mathbf{U}}_{h,0}^k$. Nous notons également les injections de Sobolev discrètes suivantes, conséquence de [DPD17, Proposition 5.4] : Pour tout $p \in [1, +\infty)$ si $d = 2$, $p \in [1, 6]$ si $d = 3$, on a pour tout $\underline{\mathbf{v}}_h \in \underline{\mathbf{U}}_{h,0}^k$,

$$\|\mathbf{v}_h\|_{L^p(\Omega)^d} \leq C_s \|\underline{\mathbf{v}}_h\|_{1,h}, \quad (\text{V.49})$$

avec une constante $C_s > 0$ indépendante de h .

Reconstructions des opérateurs différentiels

Soit une maille $T \in \mathcal{T}_h$ fixée. Pour tout degré de polynôme $l \geq 0$, nous définissons un opérateur local de reconstruction du $\mathbf{G}_T^l : \underline{\mathbf{U}}_T^k \rightarrow \mathbb{P}^l(T)^{d \times d}$ tel que, pour tout $\underline{\mathbf{v}}_T \in \underline{\mathbf{U}}_T^k$ et tout $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{P}^l(T)^{d \times d}$,

$$\int_T \mathbf{G}_T^l \underline{\mathbf{v}}_T : \boldsymbol{\tau} = - \int_T \mathbf{v}_T \cdot (\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}) + \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F \mathbf{v}_F \cdot (\boldsymbol{\tau} \vec{n}_{TF}) \quad (\text{V.50a})$$

$$= \int_T \nabla \mathbf{v}_T : \boldsymbol{\tau} + \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F (\mathbf{v}_F - \mathbf{v}_T) \cdot (\boldsymbol{\tau} \vec{n}_{TF}), \quad (\text{V.50b})$$

où on a fait une intégration par parties pour passer à la seconde ligne.

Pour la discrétisation du terme visqueux, nous utilisons un opérateur de reconstruction local de la vitesse $\mathbf{r}_T^{k+1} : \underline{\mathbf{U}}_T^k \rightarrow \mathbb{P}^{k+1}(T)^d$ obtenu dans le même esprit que \mathbf{G}_T^k et tel que, pour tout $\underline{\mathbf{v}}_T \in \underline{\mathbf{U}}_T^k$,

$$\int_T \nabla \mathbf{r}_T^{k+1} \underline{\mathbf{v}}_T : \nabla \mathbf{w} = - \int_T \underline{\mathbf{v}}_T \cdot \Delta \mathbf{w} + \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F \underline{\mathbf{v}}_F \cdot (\nabla \mathbf{w} \vec{n}_{TF}) \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{P}^{k+1}(T)^d, \quad (\text{V.51})$$

avec la condition de fermeture $\int_T (\mathbf{r}_T^{k+1} \underline{\mathbf{v}}_T - \underline{\mathbf{v}}_T) = \mathbf{0}$.

Finalement, nous définissons l'opérateur de divergence discrète $D_T^k : \underline{\mathbf{U}}_T^k \rightarrow \mathbb{P}^k(T)$ tel que, pour tout $\underline{\mathbf{v}}_T \in \underline{\mathbf{U}}_T^k$ et tout $q \in \mathbb{P}^k(T)$,

$$\int_T D_T^k \underline{\mathbf{v}}_T q = - \int_T \underline{\mathbf{v}}_T \cdot \nabla q + \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F (\underline{\mathbf{v}}_F \cdot \vec{n}_{TF}) q \quad (\text{V.52a})$$

$$= \int_T (\text{div } \underline{\mathbf{v}}_T) q + \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F (\underline{\mathbf{v}}_F - \underline{\mathbf{v}}_T) \cdot \vec{n}_{TF} q, \quad (\text{V.52b})$$

où on a fait une intégration par parties pour passer à la seconde ligne. Par définition, on a

$$D_T^k = \text{tr}(\mathbf{G}_T^k). \quad (\text{V.53})$$

Nous définissons également des versions globales du gradient, de la reconstruction de la vitesse et des opérateurs de divergence $\mathbf{G}_h^l : \underline{\mathbf{U}}_h^k \rightarrow \mathbb{P}^l(\mathcal{T}_h)^{d \times d}$, $\mathbf{r}_h^{k+1} : \underline{\mathbf{U}}_h^k \rightarrow \mathbb{P}^{k+1}(\mathcal{T}_h)^d$, et $D_h^k : \underline{\mathbf{U}}_h^k \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathcal{T}_h)$ tel que, pour tout $\underline{\mathbf{v}}_h \in \underline{\mathbf{U}}_h^k$ et tout $T \in \mathcal{T}_h$,

$$(\mathbf{G}_h^l \underline{\mathbf{v}}_h)|_T := \mathbf{G}_T^l \underline{\mathbf{v}}_T, \quad (\mathbf{r}_h^{k+1} \underline{\mathbf{v}}_h)|_T := \mathbf{r}_T^{k+1} \underline{\mathbf{v}}_T, \quad (D_h^k \underline{\mathbf{v}}_h)|_T := D_T^k \underline{\mathbf{v}}_T.$$

Proposition 23

L'opérateur global du gradient discret \mathbf{G}_h^l vérifient les propriétés suivantes :

1. Pour tout $l \geq 0$ et tout $\underline{\mathbf{v}}_h \in \underline{\mathbf{U}}_h^k$, on a

$$\|\mathbf{G}_h^l \underline{\mathbf{v}}_h\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \lesssim \|\underline{\mathbf{v}}_h\|_{1,h}. \quad (\text{V.54})$$

2. Pour tout $l \geq 0$ et tout $\mathbf{v} \in H^m(\Omega)^d$ avec $m = l + 2$ si $l \leq k$, $m = k + 1$ sinon,

$$\|\mathbf{G}_h^l \mathbf{I}_h^k \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} + \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|\mathbf{G}_T^l \mathbf{I}_T^k \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\partial T)^{d \times d}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim h^{m-1} \|\mathbf{v}\|_{H^m(\Omega)^d}. \quad (\text{V.55})$$

Par conséquent, pour tout $\Phi \in C_c^\infty(\Omega)^d$ et tout l, k tel que $m > 1$ (i.e., à condition que $l = 0$ si $k = 0$), $\mathbf{G}_h^l \mathbf{I}_h^k \Phi \rightarrow \nabla \Phi$ fortement dans $L^2(\Omega)^{d \times d}$.

3. Soit $(\underline{\mathbf{v}}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ une suite de $(\underline{\mathbf{U}}_{h,0}^k)_{h \in \mathcal{H}}$ bornée dans la norme $\|\cdot\|_{1,h}$. Alors, on a $\mathbf{v} \in \mathbf{U}$ tel que, quand $h \rightarrow 0$, à sous-suite près,

- $\mathbf{v}_h \rightarrow \mathbf{v}$ fortement dans $L^p(\Omega)^d$ pour tout $p \in [1, +\infty)$ si $d = 2$, $p \in [1, 6)$ si $d = 3$;
- $\mathbf{G}_h^l \underline{\mathbf{v}}_h \rightharpoonup \nabla \mathbf{v}$ faiblement dans $L^2(\Omega)^{d \times d}$ pour tout $l \geq 0$.

Bibliographie générale

- [ABDP15] J. Aghili, S. Boyaval, and D. A. Di Pietro, *Hybridization of mixed high-order methods on general meshes and application to the Stokes equations*, *Comput. Meth. Appl. Math.* **15** (2015), no. 2, 111–134.
- [ABH07] B. Andreianov, F. Boyer, and F. Hubert, *Discrete Duality Finite Volume schemes for Leray-Lions type elliptic problems on general 2D-meshes*, *Num. Meth. for PDEs* **23** (2007), no. 1, 145–195.
- [ABK08] B. Andreianov, M. Bendahmane, and K. Karlsen, *A gradient reconstruction formula for Finite-Volume schemes and discrete duality*, *Proceedings of Finite Volumes for Complex Applications V (Aussois, France)* (R. Eymard and J. M. Herard, eds.), Wiley, 2008.
- [ABK10] B. Andreianov, M. Bendahmane, and K. H. Karlsen, *Discrete Duality Finite Volume schemes for doubly nonlinear degenerate hyperbolic-parabolic equations*, *J. Hyperbolic Differ. Equ.* **7** (2010), no. 1, 1–67. MR 2646796 (2011d :65241)
- [ALM18] N. Ahmed, A. Linke, and C. Merdon, *Towards pressure-robust mixed methods for the incompressible Navier-Stokes equations*, *Computational Methods in Applied Mathematics* **18** (2018), 353–372.
- [AMTU01] A. Arnold, P. Markowich, G. Toscani, and A. Unterreiter, *On convex Sobolev inequalities and the rate of convergence to equilibrium for Fokker-Planck type equations*, *Comm. Partial Differential Equations* **26** (2001), no. 1-2, 43–100.
- [BCCH16] M. Bessemoulin-Chatard and C. Chainais-Hillairet, *Exponential decay of a Finite Volume scheme to the thermal equilibrium for drift-diffusion systems*, *Journal of Numerical Mathematics* (2016).
- [Bea72] J. Bear, *Dynamics of fluids in porous media*, American Elsevier, 1972.
- [BF94] Ch.-H. Bruneau and P. Fabrie, *Effective downstream boundary conditions for incompressible Navier-Stokes equations*, *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **19** (1994), no. 8, 693–705.
- [BF96] C.-H. Bruneau and P. Fabrie, *New efficient boundary conditions for incompressible Navier-Stokes equations : a well-posedness result*, *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique* **30** (1996), no. 7, 815–840.
- [BF13] F. Boyer and P. Fabrie, *Mathematical tools for the study of the Navier-Stokes equations and related models*, *Applied Mathematical Sciences*, vol. 183, Springer New York, 2013.

- [BGG12] F. Bolley, I. Gentil, and A. Guillin, *Convergence to equilibrium in Wasserstein distance for Fokker-Planck equations*, J. Funct. Anal. **263** (2012), no. 8, 2430–2457.
- [BH08] F. Boyer and F. Hubert, *Finite Volume method for 2D linear and nonlinear elliptic problems with discontinuities*, SIAM J. Numer. Anal. **46** (2008), no. 6, 3032–3070.
- [BLMV14] T. Bodineau, J. Lebowitz, C. Mouhot, and C. Villani, *Lyapunov functionals for boundary-driven nonlinear drift-diffusion equations*, Nonlinearity **27** (2014), 2111–2132.
- [BO17] F. Boyer and P. Omnes, *Benchmark proposal for the FVCA8 conference :Finite Volume methods for the Stokes and Navier–Stokes equations*, Finite Volumes for Complex Applications VIII - Methods and Theoretical Aspects (Clément Cancès and Pascal Omnes, eds.), Springer International Publishing, 2017, pp. 59–71.
- [Boy02] F. Boyer, *A theoretical and numerical model for the study of incompressible mixture flows*, Computers and Fluids **31** (2002), no. 1, 41–68.
- [BP84] F. Brezzi and J. Pitkäranta, *On the stabilization of Finite Element approximations of the Stokes equations*, Efficient solutions of elliptic systems (Kiel, 1984), Notes Numer. Fluid Mech., vol. 10, Vieweg, Braunschweig, 1984, pp. 11–19. MR MR804083 (86j :65147)
- [Bru00] C.-H. Bruneau, *Boundary conditions on artificial frontiers for incompressible and compressible Navier-Stokes equations*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. **34** (2000), 303–314.
- [BS08] S. C. Brenner and L. R. Scott, *The mathematical theory of Finite Element methods*, third ed., Texts in Applied Mathematics, vol. 15, Springer, New York, 2008.
- [CCG08] C. Calgari, E. Creusé, and T. Goudon, *An hybrid Finite Volume-Finite Element method for variable density incompressible flows*, J. Comput. Phys. **227** (2008), no. 9, 4671–4696, Completed with an OpenSource code and a series of benchmarks available at the URL <http://math.univ-lille1.fr/~simpaf/SITE-NS2DDV/home.html>.
- [CDPE16] B. Cockburn, D. A. Di Pietro, and A. Ern, *Bridging the Hybrid High-Order and Hybridizable Discontinuous Galerkin methods*, ESAIM : Math. Model. Numer. Anal. (M2AN) **50** (2016), no. 3, 635–650.
- [CG16] C. Cancès and C. Guichard, *Convergence of a nonlinear entropy diminishing Control Volume Finite Element scheme for solving anisotropic degenerate parabolic equations*, Math. Comp. **85** (2016), no. 298, 549–580.
- [CG17] C. Cancès and C. Guichard, *Numerical analysis of a robust free energy diminishing Finite Volume scheme for parabolic equations with gradient structure*, Found Comput Math **17** (2017), 1525–1584.
- [CH11] Y. Coudière and F. Hubert, *A 3D Discrete Duality Finite Volume method for nonlinear elliptic equations*, SIAM Journal on Scientific Computing **33** (2011), no. 4, 1739–1764.
- [Cha11] M. Chatard, *Asymptotic behavior of the Scharfetter–Gummel Scheme for the Drift-Diffusion model*, FVCA VI, Springer Berlin Heidelberg, 2011.

- [CHD07] C. Chainais-Hillairet and J. Droniou, *Convergence analysis of a Mixed Finite Volume scheme for an elliptic-parabolic system modeling miscible fluid flows in porous media*, SIAM J. Numer. Anal. **45** (2007), no. 5, 2228–2258 (electronic). MR 2346377 (2008i :76129)
- [CHJS16] C. Chainais-Hillairet, A. Jüngel, and S. Schuchnigg, *Entropy-dissipative discretization of nonlinear diffusion equations and discrete Beckner inequalities*, ESAIM Math. Model. Numer. Anal. **50** (2016), no. 1, 135–162. MR 3460104
- [CM10] Y. Coudière and G. Manzini, *The Discrete Duality Finite Volume method for convection-diffusion problems*, SIAM Journal on Numerical Analysis **47** (2010), no. 6, 4163–4192, Available online at <http://dx.doi.org/10.1137/080731219>.
- [CPT08] Y. Coudière, C. Pierre, and R. Turpault, *A DDFV scheme for anisotropic and heterogeneous elliptic equations, application to a bio-mathematics problem : Electrocardiogram simulation*, Proceedings of Finite Volumes for Complex Applications V (R. Eymard and J. M. Herard, eds.), Wiley, 2008.
- [Dei85] K. Deimling, *Nonlinear functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [Del07] S. Delcourte, *Développement de méthodes de Volumes Finis pour la mécanique des fluides*, Ph.D. thesis, <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00200833/fr/>, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 2007.
- [DO05] K. Domelevo and P. Omnes, *A Finite Volume method for the Laplace equation on almost arbitrary two-dimensional grids*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. **39** (2005), no. 6, 1203–1249.
- [Dou84] J. Douglas, *Numerical methods for the flow of miscible fluids in porous media*, John Wiley, 1984.
- [DPD17] D. A. Di Pietro and J. Droniou, *A Hybrid High-Order method for Leray–Lions elliptic equations on general meshes*, Math. Comp. **86** (2017), no. 307, 2159–2191.
- [DPD20] ———, *The Hybrid High-Order method for polytopal meshes*, Modeling, Simulation and Application, vol. 19, Springer International Publishing, 2020.
- [DPE10] D. A. Di Pietro and A. Ern, *Discrete functional analysis tools for Discontinuous Galerkin methods with application to the incompressible Navier–Stokes equations*, Math. Comp. **79** (2010), 1303–1330.
- [DPE12] D. A. Di Pietro and A. Ern, *Mathematical aspects of Discontinuous Galerkin methods*, Mathématiques & Applications, vol. 69, Springer-Verlag, Berlin, 2012.
- [DPE15] D. A. Di Pietro and A. Ern, *A Hybrid High Order locking-free method for linear elasticity on general meshes*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg. **283** (2015), 1–21.
- [DPEL14] D. A. Di Pietro, A. Ern, and S. Lemaire, *An arbitrary-order and compact-stencil discretization of diffusion on general meshes based on local reconstruction operators*, Comput. Meth. Appl. Math. **14** (2014), no. 4, 461–472.
- [DPELS16] D. A. Di Pietro, A. Ern, A. Linke, and F. Schieweck, *A discontinuous skeletal method for the viscosity-dependent Stokes problem*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg. **306** (2016), 175–195.

- [DPT17] D. A. Di Pietro and R. Tittarelli, *Numerical methods for PDEs. lectures from the fall 2016 thematic quarter at Institut Henri Poincaré*, SEMA SIMAI series, ch. An introduction to Hybrid High-Order methods, Springer, 2017, Accepted for publication.
- [DS80] T. Dupont and R. Scott, *Polynomial approximation of functions in Sobolev spaces*, Math. Comp. **34** (1980), no. 150, 441–463.
- [EG04] A. Ern and J.-L. Guermond, *Theory and practice of Finite Elements*, Applied Mathematical Sciences, vol. 159, Springer-Verlag, New York, 2004. MR 2050138 (2005d :65002)
- [EGH00] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin, *Finite Volume methods*, Handbook of numerical analysis, Vol. VII (Ph Ciarlet and J.L. Lions, eds.), Handb. Numer. Anal., VII, North-Holland, Amsterdam, 2000, pp. 715–1022. MR MR1804748 (2002e :65138)
- [EGH10] ———, *Discretization of heterogeneous and anisotropic diffusion problems on general nonconforming meshes. SUSHI : a scheme using stabilization and hybrid interfaces*, IMA J. Numer. Anal. **30** (2010), no. 4, 1009–1043.
- [EHL07] R. Eymard, R. Herbin, and J.-C. Latché, *Convergence analysis of a collocated Finite Volume scheme for the incompressible Navier–Stokes equations on general 2D or 3D meshes*, SIAM J. Numer. Anal. **45** (2007), no. 1, 1–36.
- [EW13] H. Egger and C. Waluga, *hp analysis of a hybrid DG method for Stokes flow*, IMA J. Numer. Anal. **33** (2013), no. 2, 687–721. MR 3047948
- [Fen95] X. Feng, *On existence and uniqueness results for a coupled system modeling miscible displacement in porous media*, J. Math. Anal. Appl. **194** (1995), no. 3, 883–910. MR 1350201 (96h :35162)
- [Fil08] F. Filbet, *An asymptotically stable scheme for diffusive coagulation-fragmentation models*, Commun. Math. Sci. **6** (2008), no. 2, 257–280. MR 2433696
- [Gan06] M. J. Gander, *Optimized Schwarz method*, SIAM Journal on Numerical Analysis **44** (2006), no. 2, 699–731.
- [GG86] H. Gajewski and K. Gröger, *On the basic equations for carrier transport in semiconductors*, J. Math. Anal. Appl. **113** (1986), no. 1, 12–35. MR 826656
- [GL12] T. Gallouët and J.-C. Latché, *Compactness of discrete approximate solutions to parabolic PDEs - Application to a turbulence model*, Comm. on Pure and Applied Analysis **11** (2012), no. 6, 2371–2391.
- [Gli08] A. Glitzky, *Exponential decay of the free energy for discretized electro-reaction-diffusion systems*, Nonlinearity **21** (2008), no. 9, 1989–2009. MR 2430655
- [GQ00] J.-L. Guermond and L. Quartapelle, *A projection FEM for variable density incompressible flows*, J. Comput. Phys. **165** (2000), no. 1, 167–188.
- [GR86] V. Girault and P.-A. Raviart, *Finite Element methods for Navier-Stokes equations*, Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1986, Theory and algorithms. MR MR851383 (88b :65129)

- [GSR16] M. J. Gander and K. Santugini-Repiquet, *Cross-points in domain decomposition methods with a Finite Element discretization*, ETNA **45** (2016), 219–240.
- [Her00] F. Hermeline, *A Finite Volume method for the approximation of diffusion operators on distorted meshes*, J. Comput. Phys. **160** (2000), no. 2, 481–499. MR MR1763823 (2001a :76101)
- [Her07] ———, *Approximation of 2-D and 3-D diffusion operators with variable full tensor coefficients on arbitrary meshes*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **196** (2007), no. 21-24, 2497–2526. MR MR2319051 (2008d :65123)
- [HH08] R. Herbin and F. Hubert, *Benchmark on discretization schemes for anisotropic diffusion problems on general grids*, Proceedings of Finite Volumes for Complex Applications V (Aussois, France) (R. Eymard and J. M. Herard, eds.), Wiley, 2008.
- [HH14] L. Halpern and F. Hubert, *A Finite Volume Ventcell-Schwarz algorithm for advection-diffusion equations*, SIAM J. Numer. Anal. **52** (2014), no. 3, 1269–1291.
- [HY15] D. Holcman and R. Yuste, *The new nanophysiology : regulation of ionic flow in neuronal subcompartments*, Nature Reviews Neuroscience **16** (2015), 685–692.
- [JL04] H. Johnston and J.-G. Liu, *Accurate, stable and efficient Navier-Stokes solvers based on explicit treatment of the pressure term*, J. Comput. Phys. **199** (2004), no. 1, 221–259.
- [Joh04] V. John, *Reference values for drag and lift of a two-dimensional time-dependent flow around a cylinder*, Int. J. Numer. Meth. Fluids **44** (2004), no. 7, 777–788.
- [JS17] A. Jüngel and S. Schuchnigg, *Entropy-dissipating semi-discrete Runge-Kutta schemes for nonlinear diffusion equations*, Commun. Math. Sci. **15** (2017), no. 1, 27–53. MR 3605547
- [Lio90] P. L. Lions, *On the Schwarz alternating method. III. A variant for nonoverlapping subdomains*, Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations (Houston, TX, 1989), SIAM, Philadelphia, PA, 1990, pp. 202–223. MR MR1064345 (91g :65226)
- [LW07] C. Liu and N. J. Walkington, *Convergence of numerical approximations of the incompressible Navier–Stokes equations with variable density and viscosity*, SIAM J. Numer. Anal. **45** (2007), no. 3, 1287–1304.
- [MFP08] Y. Mori, G.I. Fishman, and C.S. Peskin, *Ephaptic conduction in a cardiac strand model with 3D electrodiffusion*, Proc Natl Acad Sci USA **105** (2008), 6463–6468.
- [PS07] J. Pyo and J. Shen, *Gauge-Uzawa methods for incompressible flows with variable density*, J. Comput. Phys. **221** (2007), no. 1, 181–197.
- [PSB13] J. Pods, J. Schonke, and P. Bastian, *Electrodiffusion models of neurons and extracellular space using the Poisson-Nernst-Planck equations numerical simulation of the intra- and extracellular potential for an axon model*, Biophysical Journal **105** (2013), 242–254.
- [QS16] W. Qiu and K. Shi, *A superconvergent HDG method for the incompressible Navier–Stokes equations on general polyhedral meshes*, IMA J. Numer. Anal. **36** (2016), no. 4, 1943–1967.

- [Saa03] Y. Saad, *Iterative methods for sparse linear systems*, second ed., Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 2003. MR MR1990645 (2004h :65002)
- [SG69] D.L. Scharfetter and H.K. Gummel, *Large signal analysis of a silicon Read diode*, IEEE Trans. Elec. Dev. **16** (1969), 64–77.
- [SMPR17] LP. Savtchenko, M. Ming Poo, and DA. Rusakov, *Electrodiffusion phenomena in neuroscience : a neglected companion*, Nature Reviews Neuroscience **18** (2017), 598–612.
- [STD⁺96] M. Schäfer, S. Turek, F. Durst, E. Krause, and R. Rannacher, *Benchmark computations of laminar flow around a cylinder*, Flow Simulation with High-Performance Computers (E.H. Hirschel, ed.), Notes on Num. Fluid Mech. (NNFM), vol. 48, Vieweg+Teubner Verlag, 1996, pp. 547–566.
- [Try88] G. Tryggvason, *Numerical simulations of the Rayleigh-Taylor instability*, J. Comput. Phys. **75** (1988), 253–282.
- [WY16] J. Wang and X. Ye, *A weak Galerkin Finite Element method for the Stokes equations*, Adv. Comput. Math. **42** (2016), 155–174.

