



HAL
open science

Capteurs inertiels vibrants : architecture numérique et étalonnage

Léopold Delahaye

► **To cite this version:**

Léopold Delahaye. Capteurs inertiels vibrants : architecture numérique et étalonnage. Micro et nanotechnologies/Microélectronique. Université Paris-Saclay, 2021. Français. NNT : 2021UPAST015 . tel-03276309

HAL Id: tel-03276309

<https://theses.hal.science/tel-03276309>

Submitted on 2 Jul 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Capteurs inertiels vibrants : architecture
numérique et étalonnage
*Vibrating inertial sensors : digital architecture
and calibration*

Thèse de doctorat de l'université Paris-Saclay

École doctorale n° 575 EOBE | Physique et ingénierie : électrons,
photons, sciences du vivant
Spécialité de doctorat : électronique et optoélectronique, nano- et
microtechnologies
Unité de recherche : Université Paris-Saclay, CNRS, Centre de Nanosciences et de
Nanotechnologies, 91120, Palaiseau, France
Réfèrent : Faculté des sciences d'Orsay

**Thèse présentée et soutenue à Châtillon,
le 28/01/2021, par**

Léopold DELAHAYE

Composition du Jury

Jérôme JUILLARD Professeur à l'École CentraleSupélec	Président
Khalil HACHICHA Professeur de l'Université de Paris VI	Rapporteur et examinateur
Laurent LATORRE Professeur de l'Université de Montpellier	Rapporteur et examinateur
Tarik BOUROUINA Professeur à l'ESIEE	Examineur

Direction de la thèse

Fabien PARRAIN Maître de Conférences HDR, Université Paris-Sud	Directeur de thèse
Jean GUÉRARD Ingénieur, ONERA	Co-Encadrant

Remerciements

Je remercie Michel Lefebvre, ancien directeur du Département Mesures Physiques (DMPH), Olivier Le Traon, précédent chef de l'unité Capteurs et Micro-Technologies (CMT), et Jean-François Roussel, directeur du Département Physique Instrumentation Environnement Espace (DPHY), de m'avoir accueilli dans les laboratoires de recherche de l'ONERA.

Je remercie Fabien Parrain (C2N), mon directeur de thèse, pour son soutien sans faille, sa bonne humeur et l'attention portée à mon travail tout au long de la thèse. Je remercie Jean Guérard, mon encadrant à l'ONERA, pour ces belles années de sciences, de recherche et de développement, pour cette coopération des idées, pour ces échanges, ces désaccords, ces aboutissements. Je remercie Laurent Latorre et Khalil Hachicha d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Je remercie Jérôme Juillard et Tarik Bourouina d'avoir accepté d'examiner mes travaux.

Je remercie chaleureusement tous les membres de l'unité Capteurs et Micro-Technologies, avec qui j'ai passé quatre années exceptionnellement agréables et enrichissantes. Merci à Raphaël Levy, chef de l'unité, pour sa bienveillance, et son soutien constant, merci à Marc Larroque pour m'avoir encadré les premiers mois, et appris les secrets du langage FPGA, à Thomas Perrier et Amina Saadani, mes compagnons de bureau, à Paul Chapellier, Lucas Bonnin, Vincent Malesys pour tous ces débats et réflexions scientifiques passionnantes. Je remercie Andrea Théault, pour son calme, son attention et son écoute, Vincent Gaudineau pour toutes ces découvertes musicales, Amandine Andrieux pour sa bonne humeur, et Pierre Lavenus pour sa curiosité scientifique. Merci aussi à Maxime Duquesnoy, Claude Chartier, Marc Pernice, Beatrice Bourgeteau Verlhac, Charles Mauc, Patrick Kayser, Martine Ducornet, Thomas Saint-Paul, Adrien Piot, Marie-Line Pacou, Claude Gageant et Hélène Meller.

Un grand merci à Héloïse pour sa relecture et tous ses conseils.

Table des matières

Table des symboles.....	1
1. Caractères simples.....	1
2. Symboles composés.....	6
3. Relations symboliques.....	7
Introduction générale.....	9
Chapitre 1 Théorie et modélisation.....	11
1.1 Outils mathématiques pour l'analyse des performances d'un capteur physique.....	13
1.1.1 Domaine temporel : variance d'Allan.....	14
1.1.2 Domaine fréquentiel : densité spectrale de puissance du bruit.....	16
1.1.3 Lien entre variance d'Allan et densité spectrale de puissance.....	18
1.2 Généralités sur les résonateurs à grand facteur de qualité.....	19
1.2.1 Amplitudes stationnaires d'un oscillateur unidimensionnel.....	19
1.2.2 Amplitudes transitoires d'un oscillateur unidimensionnel.....	26
1.2.3 Oscillateur plan.....	30
1.2.4 Oscillateur de Duffing.....	41
1.2.5 Analyse électronique.....	45
1.3 Capteurs inertiels.....	51
1.3.1 Critères de performance.....	51
1.3.2 Pertinence du modèle de l'oscillateur résonnant pour les cellules en quartz.....	57
1.3.3 VIA et DIVA : Accéléromètres à lame vibrante (VBA).....	58
1.3.4 VIG : Gyromètre vibrant.....	63
1.4 Conclusion : développement parallèle de l'algorithmique de traitement du signal et de l'intégration de capteurs.....	71
Chapitre 2 Développement de méthodes d'étalonnage.....	73
2.1 Principes généraux.....	75
2.2 Cas de l'accéléromètre et des régimes stationnaires.....	76
2.2.1 Contexte.....	76
2.2.2 Développement théorique dans le cas linéaire.....	78
2.2.3 Développement théorique dans le cas non linéaire.....	83
2.2.4 Détermination de l'amplitude hors résonance.....	86
2.2.5 Cas particulier de l'hystérésis.....	90
2.2.6 Domaine et vitesse de convergence.....	92
2.2.7 Stabilité en présence de sources de bruits.....	97
2.2.8 Perspectives : généralisation à un nombre quelconque de points de mesure.....	101

2.3	Cas du gyromètre et des régimes transitoires.....	103
2.3.1	Contexte.....	103
2.3.2	Extraction de paramètres à partir d'un unique régime transitoire.....	104
2.3.3	Perspectives : extraction de paramètres sous modulation d'excitation.....	113
2.4	Conclusion : implémentation des algorithmiques d'étalonnage.....	118
Chapitre 3 Briques technologiques.....		119
3.1	Introduction à l'électronique intégrée.....	120
3.2	Partition des ressources numériques.....	122
3.2.1	Calcul logique séquentiel sur FPGA.....	123
3.2.2	Calcul logiciel d'acquisition sur FPGA.....	125
3.2.3	Calcul logiciel sur OBC.....	127
3.2.4	Conclusion sur la répartition des fonctions.....	128
3.3	Développement des fonctions principales.....	130
3.3.1	Synthèse de fréquence.....	130
3.3.2	Constitution de la forme d'onde numérique.....	134
3.3.3	Modulation de signal $\Sigma\Delta$	135
3.3.4	Démodulation numérique.....	139
3.3.5	Boucles d'asservissement.....	143
3.4	Architecture du capteur inertiel.....	147
3.4.1	Architecture numérique.....	147
3.4.2	Architecture complète.....	148
3.5	Conclusion : capteur opérationnel et performances.....	150
Chapitre 4 Étude des performances.....		151
4.1	Introduction.....	152
4.2	Caractérisations analogiques.....	153
4.2.1	Caractérisation de l'amplificateur de charges (électronique de proximité).....	153
4.2.2	Caractérisation des filtres de démodulation.....	155
4.2.3	Caractérisation des comparateurs d'acquisition.....	157
4.3	Caractérisations numériques.....	159
4.3.1	Résolution de l'horloge du FPGA.....	159
4.3.2	Paramétrage de l'algorithme $\Sigma\Delta$	162
4.3.3	Résolutions des étages numériques.....	163
4.3.4	Caractérisations de l'utilisation des sous-horloges.....	165
4.3.5	Caractérisation de la démodulation numérique et dépendance à l'amplitude et à la phase du signal mesuré.....	167
4.4	Caractérisations inertielles.....	172
4.4.1	Caractérisation de l'asservissement du gyromètre VIG.....	173
4.4.2	Caractérisation de l'asservissement de l'accéléromètre DIVA.....	177
4.4.3	Perspective d'amélioration de l'architecture électronique.....	181
Conclusion.....		185
Annexe A Représentation de l'oscillateur de Lynch.....		187
Annexe B Développement théorique pour l'étalonnage des résonateurs.....		195
B.1	Résolution pour un résonateur linéaire.....	195
B.2	Résolution pour un résonateur avec raideur non linéaire.....	199

B.3 Convergence exacte de l'algorithme itératif.....	200
B.4 Résolution dans le cas de l'hystérésis.....	205
Annexe C Génération de bruits pour les simulations.....	207
Publications.....	209
Bibliographie.....	211
Glossaire.....	217
1. Glossaire lexical.....	217
2. Glossaire des sigles.....	221
Index des figures.....	223
Index des tableaux.....	229

Table des symboles

1. Caractères simples

Exceptés quelques cas particuliers explicités dans le texte, un caractère représente toujours une grandeur donnée selon la convention du tableau suivant. Lorsque plusieurs variables du même type sont utilisées dans un même contexte, leurs symboles se différencient les uns des autres par leurs indices.

A	Notation par défaut pour une matrice
B	Notation par défaut pour le second membre d'une équation matricielle
C	Capacité électrique (en F)
\mathbb{C}	Ensemble des nombres complexes
D	Pavé de \mathbb{R}^2 ou de \mathbb{R}^3
E	Espérance statistique
F	Force (en N)
\mathcal{F}	Ensemble de fonctions
G	Rapport de similitude (sans dimension)
H	Variable locale pour le calcul
I	Simple : Intervalle ensembliste - Gras : Matrice identité
\Im	Fonction partie imaginaire ($\Im \in \mathcal{F}(\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R})$)

J	Jacobien
K	Gain, sauf l'exception $K_b \simeq 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$, constante de Boltzmann
L	Inductance électrique (en H)
\mathcal{L}	Opérateur de la transformée de Laplace
M	Point du plan ou de l'espace
N	Nombre entier de tirages ou de points de mesure
\mathbb{N}	Ensemble des entiers naturels
P	Nombre de périodes par cycle de mesure d'un signal périodique
Q	Facteur de qualité (sans dimension)
R	Résistance électrique (en Ω)
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
\Re	Fonction partie réelle ($\Re \in \mathcal{F}(\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R})$)
S	Densité spectrale de puissance (en $\text{unit}^2 \cdot \text{s}$, avec unit la dimension du signal considéré)
T	Période d'un signal périodique, ou étendue de temps d'une acquisition (en s)
\mathcal{T}	Température (en $^{\circ}\text{C}$)
U	Tirage d'éléments sous la forme d'une suite
V	Variance statistique
\mathcal{V}	Volume (en m^3)
W	Mot binaire stocké dans les registres d'une électronique numérique
X	Demi-amplitude à la résonance d'un résonateur (correspondant au rayon du cercle de résonance dans le plan de Nyquist)
Z	Ensemble ou système mécanique

\mathbb{Z}	Ensemble des entiers relatifs
a	Accélération d'excitation d'un résonateur en régime d'oscillation forcé (en m.s^{-2})
b	Source d'instabilité
c	Coefficient de Taylor d'une fonction de transfert (c_0 : biais, c_1 facteur d'échelle)
d	Amortissement mécanique (en kg.s^{-1} , ou en $\text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ dans le cas non linéaire)
d	Différentielle
∂	Différentielle partielle
e	Mesurande du capteur, ou nombre exponentiel ($e \simeq 2.72$) selon le contexte
f	Fréquence (en Hz) (principale déclinaison : f_0 fréquence de résonance)
g	Fonction de transfert inverse ($g=h^{-1}$)
h	Fonction de transfert
i	Intensité du courant électrique (en A), nombre imaginaire (sauf en électronique), ou indice entier, selon le contexte
j	Nombre imaginaire en électronique, ou indice entier, selon le contexte
k	Raideur mécanique (en kg.s^{-2} , ou en $\text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-2}$ dans le cas non linéaire), ou indice entier, selon le contexte
l	Longueur (en m)
m	Masse (en kg), ou indice entier, selon le contexte
n	Indice entier
p	Variable du domaine de Laplace (en rad.s^{-1}), ou indice entier, selon le contexte

q	Charge électrique (en C)
r	Rayon polaire dans le plan
s	Grandeur mesurée par le capteur
t	Variable de temps continue (en s)
u	Tension électrique (en V)
v	Notation par défaut pour un vecteur du plan ou de l'espace
x	Coordonnée du plan ou de l'espace, ou variable locale réelle, selon le contexte
y	Coordonnée du plan ou de l'espace
z	Coordonnée du plan ou de l'espace
Γ (gamma)	Accélération inertielle (en m.s^{-2})
Δ (delta)	Différentielle
Θ (thêta)	Angle de similitude (en rad)
Λ (lambda)	Fonction de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2)$ ou de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3)$
Π (pi)	Opérateur produit
Σ (sigma)	Opérateur somme
\int (sigma)	Opérateur intégral
\mathcal{Y} (upsilon)	Variable intermédiaire pour l'algorithme d'estimation paramétrique ($\mathcal{Y} = 1 / (1 + \Psi^2)$)
Ω (oméga)	Rotation inertielle (en rad.s^{-1})
Φ (phi)	Matrice de rotation (sans dimension)
Ψ (psi)	Variable intermédiaire pour l'algorithme d'estimation paramétrique ($\Psi = \tan(\psi/2)$)

α (alpha)	Demi-largeur de bande passante à -3 dB du résonateur (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) ($\alpha = \omega_0 \xi$)
\propto (alpha)	Relation de proportionnalité
β (bêta)	Paramètre lié à la raideur non linéaire du résonateur de Duffing (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) ($\beta = \omega_0 \zeta$)
γ (gamma)	Constante d'Euler-Mascheroni ($\gamma \simeq 0.577$)
δ (delta)	Paramètre lié à l'amortissement non linéaire du résonateur de Duffing (en unit^{-2} , avec unit la dimension de la réponse)
ϵ (epsilon)	Fonction représentant une erreur de modélisation
ε (epsilon)	Erreur ou résidu
ζ (zêta)	Paramètre lié à la raideur non linéaire du résonateur de Duffing (sans dimension) ($\zeta = 4 \kappa X^2$)
η (êta)	Paramètre lié à la pulsation hors résonance du résonateur (sans dimension) ($\eta = 2\alpha / \Delta\omega_{hr}$)
θ (thêta)	Angle (en rad)
ϑ (thêta)	Coefficient du développement limité de la variation de la fréquence de résonance d'une poutre vibrante encastree-encastree en fonction de sa variation de longueur (en $\text{Hz} \cdot \text{m}^{-1}$)
κ (kappa)	Paramètre lié à la raideur non linéaire du résonateur de Duffing (en unit^{-2} , avec unit la dimension de la réponse)
λ (lambda)	Facteur de Lipschitz (sans dimension)
μ (mu)	Résolution d'une mesure ou d'une estimation
ν (nu)	Coefficient réel pour la gestion de l'hystérésis du résonateur de Duffing dans les algorithmes d'estimation paramétrique (sans dimension)
π (pi)	Demi-périmètre d'un cercle de rayon unitaire ($\pi \simeq 3.14$)
ξ (xi)	Facteur d'amortissement (sans dimension) ($\xi = 1 / (2Q)$)

ρ (rhô)	Forme d'onde périodique
ϱ (rhô)	Variable de calcul intermédiaire
σ (sigma)	Déviations d'Allan (dimension identique à celle du signal considéré), ou paramètre caractéristique d'une déviation d'Allan
ς (sigma)	Coefficient correspondant aux différentes pentes d'une densité spectrale de puissance
τ (tau)	Temps d'intégration, ou étendue de temps particulière (en s)
v (upsilon)	Vecteur unitaire du plan ou de l'espace
ω (oméga)	Pulsation (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) ($\omega = 2\pi f$) (principale déclinaison : ω_0 pulsation de résonance)
χ (khi)	Fonction d'autocorrélation (en unit^2 , avec unit la dimension du signal considéré)
ϕ (phi)	Phase des croisements de l'algorithme de démodulation numérique (en rad)
φ (phi)	Phase ou déphasage d'un signal périodique (en rad)
ψ (psi)	Angle pris au centre du cercle de résonance dans le plan de Nyquist, relativement à l'amplitude de la résonance (en rad)

2. Symboles composés

On compte quelques symboles composés de plusieurs caractères.

ln, det, Arg, sg, Diverses fonctions classiques (dans l'ordre, logarithme népérien, déterminant, argument complexe, signe et maximum)

sin, cos, tan, Fonctions trigonométriques
arccos, arctan

SF	Facteur d'échelle du capteur
BW	Bande passante du capteur
$\omega\Delta\omega_{xy}$	Demi-écart entre les carrés des pulsations de résonance des modes pilote et détecteur d'un résonateur plan (en $\text{rad}^2.\text{s}^{-2}$)
$\Sigma\Delta$	Modulation $\Sigma\Delta$, dite « modulation sigma delta »

3. Relations symboliques

À partir des symboles basiques décrits précédemment, on en construit d'autres selon les conventions du tableau suivant. Soient y une grandeur ou un signal, \mathbf{v} un vecteur, \mathbf{A} un opérateur, t , T et τ des temps, et N et k des entiers quelconques.

$y(t)$	Fonction de la variable continue t associée à la grandeur y
$y[k]$	Fonction de la variable discrète k associée à la grandeur y
\mathbf{y}	Matrice ou vecteur dont les composantes ont la même nature que y
\underline{y}	Notation complexe : $\underline{y}(t) = \Re(\underline{y}(t))$ si $\underline{y}(t)$ est un signal sinusoïdal - $\underline{y} = y $ si y est une constante
$ y $	Valeur absolue ou module complexe : $ y = \sqrt{\Re(y)^2 + \Im(y)^2}$
$\ \mathbf{v}\ _\infty$	Norme, dite norme infinie, du vecteur \mathbf{v} sur l'espace normé $(\mathbb{R}^N, \ \cdot\ _\infty)$: $\ \mathbf{v}\ _\infty = \max_{i \in [1, N]} v_i $, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$
$\ \mathbf{A}\ $	Norme de l'opérateur \mathbf{A} sur l'espace normé $(\mathbb{R}^N, \ \cdot\ _\infty)$: $\ \mathbf{A}\ = \sup_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N, \ \mathbf{v}\ _\infty \leq 1} \ \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}\ _\infty$, $N \in \mathbb{N}$
$\mathcal{L}y$	Transformée de Laplace : $\mathcal{L}y(p) = \mathcal{L}(y(t))(p)$
TFy	Transformée de Fourier : $TFy(f) = TF(y(t))(f)$
\hat{y}	Estimateur de la grandeur y

\tilde{y}	Estimation initiale de la grandeur y
$\overset{\circ}{y}$	Mesure effective de la grandeur y
$\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}(t)$	Dérivée première du signal $y(t)$ par rapport à la variable t
$\ddot{y}(t) = \frac{d^2y}{dt^2}(t)$	Dérivée seconde du signal $y(t)$ par rapport à la variable t
$\frac{\partial y}{\partial t}(t)$	Dérivée partielle du signal $y(t)$ par rapport à la variable t
Δy	Grandeur différentielle de la même nature que y
dy	Grandeur différentielle, ou grandeur différentielle infinitésimale, de la même nature que y
\check{y}	Échantillonnage du signal $y(t)$ avec une période T , tel que $\forall k \in \mathbb{N}, \check{y}[k] = y(kT)$
\bar{y}_τ	Moyennage du signal $y(t)$ sur un temps τ , tel que $\forall k \in \mathbb{N}, \bar{y}_\tau[k] = \frac{1}{\tau} \int_{t=k\tau}^{(k+1)\tau} y(t) dt$
\underline{y}_M	Amplitude complexe d'un signal sinusoïdal $y(t)$, telle que $\underline{y}(t) = \underline{y}_M e^{i\omega t}$
y_M	Amplitude réelle d'un signal sinusoïdal $y(t)$, telle que $y_M = \underline{y}_M $
φ_y	Phase d'un signal sinusoïdal $y(t)$, telle que $\varphi_y = \text{Arg}(\underline{y}_M)$
y_{Mp}	Amplitude en phase d'un signal sinusoïdal $y(t)$, telle que $y_{Mp} = \Re(\underline{y}_M)$
y_{Mq}	Amplitude en quadrature de phase d'un signal sinusoïdal $y(t)$, telle que $y_{Mq} = \Im(\underline{y}_M)$

Introduction générale

Ce travail porte d'une part sur la théorie des résonateurs mécaniques à grand facteur de qualité et leur application aux mesures des accélérations et des rotations, et d'autre part sur la conception et sur la caractérisation de capteurs inertiels complets. L'architecture de ces capteurs est majoritairement numérique, sur une carte FPGA, et s'agence autour de cellules vibrantes piézoélectriques en quartz réalisées à l'ONERA. Une grande partie des thématiques abordées dans ce texte est commune avec celles de [Marechal 2016], thèse précédente effectuée dans le laboratoire, et dont celle-ci prend la suite. En complément, la démarche suivie dans [Wisher 2017] peut également être mise en relation avec le travail réalisé ici.

Deux types de cellules sont considérés. Le premier est un accéléromètre à lame vibrante constitué d'une masse d'épreuve qui, soumise à une accélération, induit une variation de contrainte dans la lame vibrante, et donc une variation de sa fréquence de résonance. Le second est un gyromètre vibrant de type diapason, avec deux modes de résonance orthogonaux, et dont les amplitudes sont modulées par l'accélération de Coriolis.

L'étude théorique porte sur l'établissement de développements analytiques approchés des déplacements réponses des résonateurs mécaniques lorsqu'ils sont soumis à une accélération d'excitation sinusoïdale. L'hypothèse des grands facteurs de qualité permet de considérer que le temps caractéristique de variation des amplitudes des oscillations est très grand devant leur période, et ainsi de simplifier les expressions analytiques des régimes stationnaires et transitoires en séparant les enveloppes des signaux de leur porteuse sinusoïdale. On exploite plusieurs régimes de fonctionnement de ces oscillateurs, obtenus en appliquant divers asservissements de fréquence, de phase et d'amplitude. L'une des perspectives de cette étude est la possibilité de réaliser de l'auto-étalonnage de capteurs.

La chaîne complète du capteur est composée de la cellule piézoélectrique encapsulée sous vide, connectée à une électronique analogique de proximité, puis à une électronique numérique synthétisée sur FPGA, qui échange finalement, de façon totalement numérique, avec un ordinateur de bord. Les fonctions d'acquisition, de traitement, et de communication sont implémentées dans le matériel (VHDL) ou le logiciel embarqué (C). On utilise l'environnement de développement Vivado de Xilinx pour développer les opérations de

synthèse de fréquence et de modulation $\Sigma\Delta$ pour la génération du signal d'excitation, sans convertisseur DAC, et de démodulation numérique de la réponse sinusoïdale, sans convertisseur ADC. Ce choix permet de construire une architecture générique, portable, et non dépendante de composants analogiques spécifiques, dans la perspective d'applications spatiales.

La carte FPGA est connectée à l'ordinateur de bord par l'intermédiaire d'une communication série. Une plateforme logicielle développée spécialement permet de commander des scénarios d'excitation et d'acquérir les données de la réponse mesurée du résonateur. On en déduit diverses caractérisations des performances : déviation d'Allan et densité spectrale du bruit, étude du facteur d'échelle et du biais du capteur en fonction des conditions thermiques, étendue de mesure et bande passante.

Ce texte adopte un ordre de présentation partant des développements théoriques les plus fondamentaux, aussi bien mathématiques que physiques, pour progressivement aboutir à l'intégration physique du capteur et à l'exposé de ses performances.

Le Chapitre 1 pose l'ensemble des éléments de base nécessaires à la compréhension du fonctionnement des capteurs électro-mécaniques, notamment le comportement des résonateurs mécaniques en régime forcé, et les différents critères de performance considérés. Ensuite le Chapitre 2, très mathématique, pousse la théorie un peu plus loin en anticipant les besoins pratiques d'étalonnage des capteurs, pour établir des modes de fonctionnement nouveaux et efficaces. Le Chapitre 3 est le cœur de la thèse. Il présente l'ensemble des fonctionnalités de l'architecture numérique sur FPGA, et leurs interactions avec le domaine analogique, sans utiliser de convertisseurs DAC ou ADC. Finalement, le Chapitre 4 caractérise l'ensemble des maillons de la chaîne de traitement du signal ainsi intégrée, détaille les performances finales des capteurs obtenus, et propose des pistes d'améliorations et autres perspectives en adéquation avec la philosophie de développement numérique sur FPGA.

Chapitre 1

Théorie et modélisation

Chapitre 1 Théorie et modélisation.....	11
1.1 Outils mathématiques pour l'analyse des performances d'un capteur physique.....	13
1.1.1 Domaine temporel : variance d'Allan.....	14
1.1.2 Domaine fréquentiel : densité spectrale de puissance du bruit.....	16
1.1.3 Lien entre variance d'Allan et densité spectrale de puissance.....	18
1.2 Généralités sur les résonateurs à grand facteur de qualité.....	19
1.2.1 Amplitudes stationnaires d'un oscillateur unidimensionnel.....	19
1.2.1.1 Résolution harmonique.....	19
1.2.1.2 Représentation des amplitudes dans le plan de Nyquist.....	23
1.2.2 Amplitudes transitoires d'un oscillateur unidimensionnel.....	26
1.2.2.1 Méthode des variations lentes.....	26
1.2.2.2 Résolution dans le domaine de Laplace.....	27
1.2.2.3 Représentation des amplitudes dans le plan de Nyquist.....	29
1.2.3 Oscillateur plan.....	30
1.2.3.1 Modèle de Lynch.....	30
1.2.3.2 Mise en équation matricielle.....	34
1.2.3.3 Résolution analytique.....	37
1.2.3.4 Représentation des amplitudes dans le plan de Nyquist.....	39
1.2.4 Oscillateur de Duffing.....	41
1.2.4.1 Raideur et amortissement non linéaires.....	41
1.2.4.2 Cas de l'amortissement non linéaire nul et hystérésis.....	43
1.2.5 Analyse électronique.....	45
1.2.5.1 Modèle de Butterworth Van Dyke.....	45
1.2.5.2 Amplificateur de charges.....	48
1.3 Capteurs inertiels.....	51
1.3.1 Critères de performance.....	51
1.3.1.1 Étendue de mesure, facteur d'échelle et biais.....	52
1.3.1.2 Résolution de mesure et bande passante.....	53
1.3.1.3 Effets thermiques : sensibilité, hystérésis et stabilité.....	54
1.3.2 Pertinence du modèle de l'oscillateur résonnant pour les cellules en quartz.....	57
1.3.3 VIA et DIVA : Accéléromètres à lame vibrante (VBA).....	58

1.3.3.1 Principe de la mesure inertielle.....	58
1.3.3.2 Caractéristiques de la cellule vibrante.....	60
1.3.4 VIG : Gyromètre vibrant.....	63
1.3.4.1 Principe de la mesure inertielle et régime « open-loop ».....	63
1.3.4.2 Régimes « force-rebalance » et « whole-angle ».....	66
1.3.4.3 Caractéristiques de la cellule vibrante.....	68
1.4 Conclusion : développement parallèle de l’algorithmique de traitement du signal et de l’intégration de capteurs.....	71

1.1 Outils mathématiques pour l'analyse des performances d'un capteur physique

L'instrument développé est un capteur inertiel, gyromètre ou accéléromètre, composé d'une partie sensitive mécanique en quartz, d'une interface piézoélectrique, et d'une carte électronique analogique-numérique. Étant donnée la diversité des physiques exploitées (mécanique, électronique analogique, électronique numérique) et des méthodes de calcul adoptées dans les fonctions de cette chaîne de traitement du signal, la caractérisation de chaque maillon requiert l'utilisation d'outils mathématiques adaptés.

D'une manière générale, l'objectif est d'évaluer la stabilité d'un signal temporel, soumis notamment aux bruits et aux dérives. Dans le cas particulier d'un capteur physique, on étudie la stabilité de la grandeur de mesure $s(t)$, image par une fonction $\{h:(e,b)\mapsto s\}$ de la grandeur à mesurer $e(t)$, supposée constante dans les conditions de l'expérience, et des diverses sources d'instabilités $b(t)$. On en déduit la performance globale de la mesure du capteur réalisé. La figure 1.1 montre le schéma fonctionnel global du capteur.

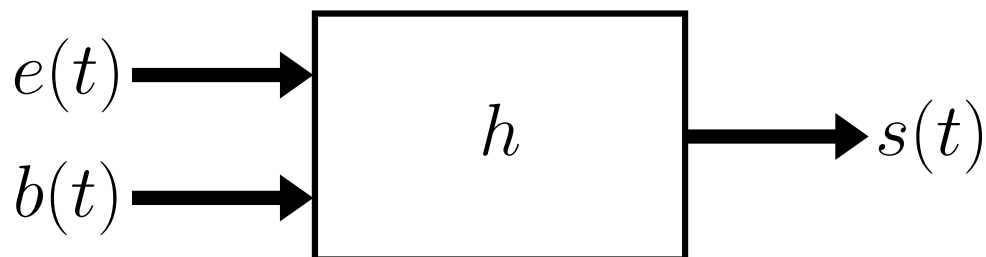


Figure 1.1 - Schéma fonctionnel du capteur

Les deux outils les plus répandus sont la variance d'Allan (AVAR) et la densité spectrale de puissance de bruit (PSD). Ils représentent tous deux une information sur le bruit d'un signal donné, dans le domaine temporel pour la variance d'Allan, et dans le domaine fréquentiel pour la densité spectrale de puissance de bruit. Dans ce texte on présentera les performances en utilisant des grandeurs équivalentes, respectivement la déviation d'Allan (ADEV) et la densité spectrale de bruit (NSD), qui en sont les racines carrées.

1.1.1 Domaine temporel : variance d'Allan

La variance d'Allan d'un signal temporel $\{s:t \mapsto s(t)\}$ est notée $\sigma_s^2(\tau)$, et est une fonction de la variable τ , qui correspond à un temps de moyennage du signal s , aussi appelé temps d'intégration. Elle est donnée par la formule suivante :

$$\sigma_s^2(\tau) = \frac{1}{2}E[(\bar{s}_\tau[2] - \bar{s}_\tau[1])^2] \quad (1.1)$$

Où E est l'espérance mathématique, et où $\bar{s}_\tau[1]$ et $\bar{s}_\tau[2]$ sont deux échantillons du signal s moyenné pendant un temps τ , sur deux plages temporelles consécutives.

Ainsi, la variance d'Allan est d'autant plus grande que l'écart statistique entre deux mesures successives est grand. La relation avec la variable τ permet de discriminer les causes des instabilités en fonction de leur impact sur la mesure à court, moyen ou long terme. Dans le cas des bruits, on parle aussi de leur couleur [Kasdin 1995].

L'étude expérimentale de la variance d'Allan repose principalement sur une hypothèse d'ergodicité des phénomènes aléatoires considérés. L'espérance mathématique est ainsi approximée par un moyennage de tirages obtenus à partir d'une unique réalisation du signal. Avec une acquisition d'une durée $T_a = N_m \tau$, on construit N_m échantillons consécutifs $(\bar{s}_\tau[k])_{k \in \llbracket 1, N_m \rrbracket}$. Par ailleurs, en pratique, le signal $\{s:t \mapsto s(t)\}$ n'est accessible que sous la forme d'un signal discret $\{\check{s}:n \in \mathbb{N} \mapsto \check{s}[n] = s(nT_e)\}$, où T_e est la période d'échantillonnage. Il s'agit d'un sur-échantillonnage du signal précédent, de telle sorte que $\tau = N_\tau T_e$, et donc $T_a = N_m N_\tau T_e = N_a T_e$, avec N_a le nombre total de points d'acquisition. On se restreint donc à une gamme discrète de valeurs pour τ , composée des multiples entiers de T_e . On a donc $\hat{\check{s}}_\tau$, estimateur pratique de \bar{s}_τ , qui est donné par :

$$\begin{aligned} \hat{\check{s}}_\tau[k] &= \frac{1}{N_\tau} \sum_{n=0}^{N_\tau-1} \check{s}[(k-1)N_\tau + n] \\ &= \frac{1}{N_\tau} \sum_{n=0}^{N_\tau-1} s(((k-1)N_\tau + n)T_e), \begin{cases} \tau = N_\tau T_e, N_\tau \in \mathbb{N}^* \\ k \in \llbracket 1, N_m \rrbracket \end{cases} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Et on en déduit l'échantillonnage $\check{\hat{\sigma}}_s^2[N_\tau]$ de l'estimateur $\hat{\sigma}_s^2(\tau)$ de la variance d'Allan $\sigma_s^2(\tau)$:

$$\begin{aligned}
 \check{\hat{\sigma}}_s^2[N_\tau] &= \hat{\sigma}_s^2(\tau = N_\tau T_e) \\
 &= \frac{1}{2(N_m - 1)} \sum_{k=1}^{N_m-1} (\hat{s}_\tau[k + 1] - \hat{s}_\tau[k])^2 \\
 &= \frac{1}{2(N_m - 1)N_\tau^2} \sum_{k=1}^{N_m-1} \left(\sum_{n=0}^{N_\tau-1} (\check{s}[kN_\tau + n] - \check{s}[(k-1)N_\tau + n]) \right)^2
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

On trace habituellement la variance d'Allan dans un repère log-log. La figure 1.2 en montre un gabarit classique, faisant apparaître les principales catégories d'instabilités, chacune d'entre elles correspondant à une pente caractéristique :

- $\sigma_s^2(\tau) \propto \tau^{-2}$: bruit violet (dérivée d'un bruit blanc) et bruit bleu (dérivée d'un bruit rose)
- $\sigma_s^2(\tau) \propto \tau^{-1}$: bruit blanc
- $\sigma_s^2(\tau) \propto \tau^0$: bruit rose (plancher d'instabilité)
- $\sigma_s^2(\tau) \propto \tau^{+1}$: bruit rouge (marche aléatoire, intégrale d'un bruit blanc)
- $\sigma_s^2(\tau) \propto \tau^{+2}$: dérives à long terme

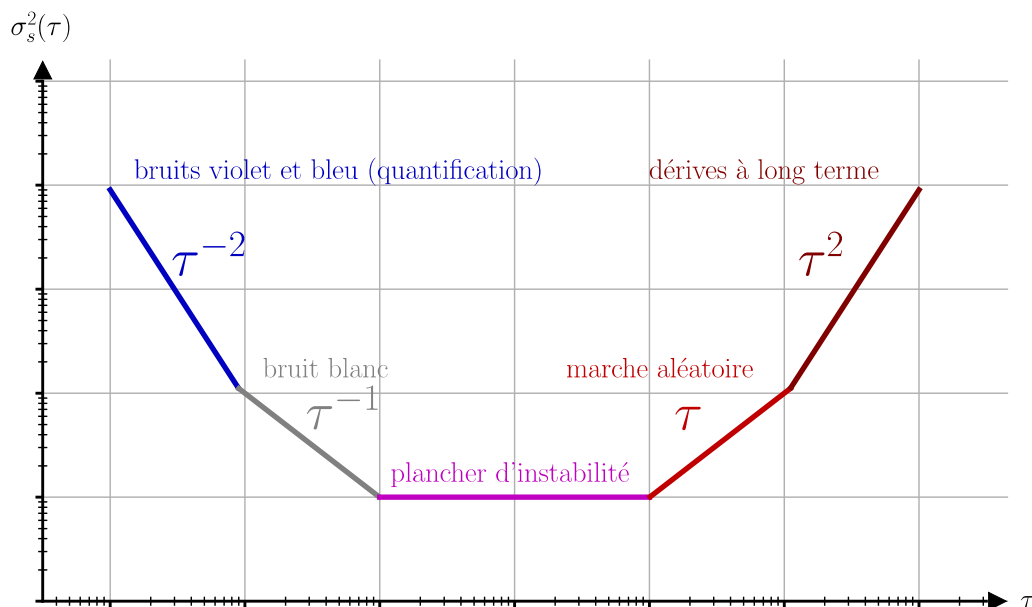


Figure 1.2 - Courbe type d'une variance d'Allan

L'une des causes possibles des instabilités en τ^{-2} (bruits bleu et violet) est la quantification du signal $s(t)$ en un nombre fini de valeurs possibles, notamment dans le cas d'un traitement numérique des données. Elles restent, dans la très grande majorité des cas, négligeables devant le bruit blanc dans les gammes de temps d'intégration τ considérées.

Le bruit blanc est le bruit que l'on observe le plus souvent. Il s'agit d'un signal pour lequel la valeur courante est décorrélée de toutes les précédentes, et par conséquent de toutes les suivantes. Comme pour les bruits bleu et violet, sa moyenne temporelle tend vers zéro lorsque le temps d'intégration tend vers l'infini.

Le plancher d'instabilité est un minorant de la variance d'Allan. Il correspond à un optimum de performance qui est atteint pour un temps d'intégration suffisamment long pour éliminer le bruit blanc. Le bruit qui en est la cause, dit bruit rose, possède donc la propriété de ne pas être moyennable. C'est une valeur de référence dans la caractérisation des capteurs inertiels, qui permet de définir leur résolution de mesure.

La marche aléatoire est le premier facteur de remontée de la variance d'Allan pour les temps d'intégration τ élevés. Ce type de bruit est obtenu en intégrant un bruit blanc.

Contrairement aux autres instabilités, les dérives à long terme ne sont pas des phénomènes aléatoires. Elles correspondent à des variations déterministes des facteurs environnementaux agissant sur le signal mesuré. Le plus souvent, leur origine physique est thermique.

On utilise régulièrement aussi la déviation d'Allan (ADEV), qui est la racine carrée de la variance d'Allan. Les pentes caractéristiques et les puissances associées des différentes catégories d'instabilités sont alors divisées par 2.

1.1.2 Domaine fréquentiel : densité spectrale de puissance du bruit

La densité spectrale de puissance d'un signal temporel $\{s:t \mapsto s(t)\}$, notée $S_s(f)$, représente la puissance des composantes fréquentielles du signal. On définit sa version bilatérale $S_s^{TS}(f)$ comme étant la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation $\chi_s(\tau)$ du signal $s(t)$ [Rutman 1978] :

$$\chi_s(\tau) = E[s(t)s(t - \tau)] \quad (1.4)$$

$$S_s^{TS}(f) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} \chi_s(\tau) e^{-2i\pi f\tau} d\tau \quad (1.5)$$

Le processus $s(t)$ est supposé stationnaire, sa fonction d'autocorrélation est donc bien fonction de la seule variable τ . La densité spectrale de puissance, aussi dite unilatérale, est liée à la densité spectrale de puissance bilatérale par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} S_s(f) &= S_s^{OS}(f) = 2S_s^{TS}(f) \quad , \text{ pour } f \geq 0 \\ S_s(f) &= S_s^{OS}(f) = 0 \quad , \text{ pour } f < 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Comme pour la variance d'Allan, l'hypothèse d'ergodicité permet d'obtenir une version échantillonnée $\check{\chi}_s[N_\tau]$ de l'estimateur $\hat{\chi}_s(\tau)$ de la fonction d'autocorrélation $\chi_s(\tau)$. On reprend le signal $\{\check{s}:n \in \mathbb{N} \mapsto \check{s}[n] = s(nT_e)\}$ échantillonné à T_e , acquis sur une durée $T_a = N_a T_e$, avec $\tau = N_\tau T_e$, $N_l \geq N_\tau \geq 0$, et $N_a \gg N_l$:

$$\begin{aligned} \check{\chi}_s[N_\tau] &= \hat{\chi}_s(\tau = N_\tau T_e) = \frac{1}{N_a - N_\tau} \sum_{n=N_\tau}^{N_a-1} \check{s}[n] \check{s}[n - N_\tau] \\ &= \frac{1}{N_a - N_\tau} \sum_{n=N_\tau}^{N_a-1} s(nT_e) s(nT_e - \tau) \end{aligned} \quad (1.7)$$

En exploitant la parité de la fonction d'autocorrélation, on utilise la transformée de Fourier discrète pour construire une version échantillonnée $\check{\hat{S}}_s[N_f]$ de l'estimateur $\hat{S}_s(f)$ de la PSD $S_s(f)$. Pour $N_l \geq N_f \geq 0$:

$$\begin{aligned} \check{\hat{S}}_s[N_f] &= \hat{S}_s(f = \frac{N_f}{N_l T_e}) \\ &= 2T_e \left(\check{\chi}_s[0] + 2 \sum_{N_\tau=1}^{N_l-1} \check{\chi}_s[N_\tau] \cos\left(\frac{2\pi}{N_l} N_f N_\tau\right) \right) \\ &= 2T_e \left(\sum_{n=0}^{N_a-1} \frac{\check{s}[n]^2}{N_a} + 2 \sum_{N_\tau=1}^{N_l-1} \sum_{n=N_\tau}^{N_a-1} \frac{\check{s}[n] \check{s}[n - N_\tau]}{N_a - N_\tau} \cos\left(\frac{2\pi}{N_l} N_f N_\tau\right) \right) \end{aligned} \quad (1.8)$$

En pratique, on utilisera plutôt l'estimateur construit à l'aide du périodogramme, plus classique dans le contexte d'une acquisition ergodique, et obtenu avec un calcul moins coûteux. Cette densité spectrale de puissance est également à tracer dans un repère log-log.

Les catégories d'instabilités observées sur la figure 1.2 se retrouvent pour la plupart sur la figure 1.3, avec des pentes différentes :

- $S_s(f) \propto f^{-2}$: bruit rouge (marche aléatoire, intégrale d'un bruit blanc)
- $S_s(f) \propto f^{-1}$: bruit rose (plancher d'instabilité)
- $S_s(f) \propto f^0$: bruit blanc
- $S_s(f) \propto f^{+1}$: bruit bleu (dérivée d'un bruit rose)
- $S_s(f) \propto f^{+2}$: bruit violet (dérivée d'un bruit blanc)

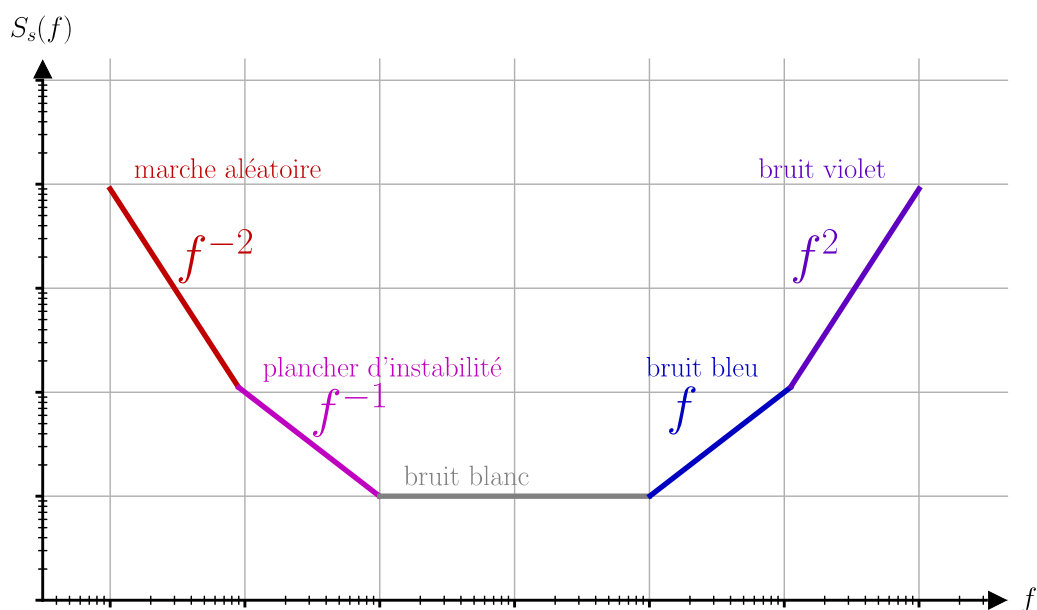


Figure 1.3 - Courbe type d'une densité spectrale de puissance

On rencontre aussi la notion de densité spectrale de bruit (NSD), qui est la racine carrée de la densité spectrale de puissance du bruit. Comme pour la déviation d'Allan par rapport à la variance, les pentes caractéristiques et les puissances associées des différentes catégories d'instabilités sont alors divisées par 2.

1.1.3 Lien entre variance d'Allan et densité spectrale de puissance

La variance d'Allan peut être calculée à partir de la densité spectrale de puissance. Les pentes observées sur les deux représentations s'expliquent par les relations suivantes [El Sheimy 2008][Rutman 1978] :

$$\sigma_s^2(\tau) = \int_{f=0}^{+\infty} S_s(f) |h_\tau(f)|^2 df \quad (1.9)$$

$$|h_\tau(f)|^2 = \frac{2 \sin^4(\pi \tau f)}{(\pi \tau f)^2} \quad (1.10)$$

$$S_s(f) = \varsigma_{-2} f^{-2} + \varsigma_{-1} f^{-1} + \varsigma_0 + \varsigma_1 f + \varsigma_2 f^2 \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_s^2(\tau) = & \frac{2\pi^2}{3} \varsigma_{-2} \tau + 2 \ln(2) \varsigma_{-1} + \frac{1}{2} \varsigma_0 \tau^{-1} \\ & + \frac{3\gamma - \ln(2) + 3 \ln(2\pi f_c \tau)}{4\pi^2} \varsigma_1 \tau^{-2} + \frac{3f_c}{4\pi^2} \varsigma_2 \tau^{-2} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Avec f_c la fréquence de coupure haute du système physique étudié, qui rend l'intégrale convergente à l'infini dans le cas des bruits bleu et violet, γ la constante d'Euler-Mascheroni ($\gamma \simeq 0,577$), et $\tau \gg 1/(2\pi f_c)$.

1.2 Généralités sur les résonateurs à grand facteur de qualité

Les structures sensibles des capteurs sont des résonateurs en quartz, à grand facteur de qualité ($Q > 1\,000$), excités à leur fréquence de résonance, et dont les caractéristiques (amplitudes de vibration, fréquence de résonance) sont dépendantes de l'accélération ou de la rotation du dispositif. La physique fondamentale sur laquelle reposent les instruments inertiels développés est donc celle des oscillateurs mécaniques.

1.2.1 Amplitudes stationnaires d'un oscillateur unidimensionnel

1.2.1.1 Résolution harmonique

Le quartz est un matériau viscoélastique : il possède des caractéristiques élastiques, modélisées par des ressorts, et des caractéristiques visqueuses, modélisées par des amortisseurs (voir partie 1.3.2). Parmi les modèles de résonateur habituels référencés dans

[Schiessel 1995], on choisit celui de Kelvin-Voigt, représenté sur la figure 1.4, qui est suffisant pour notre étude dans le cas unidimensionnel [Le Traon 2010].

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, un corps ponctuel localisé en M , et de masse m , est soumis à une raideur k , un amortissement d , et à une force d'excitation $F(t) = m a(t)$. Son déplacement $x(t)$ et ses dérivées temporelles $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t)$ et $\ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t)$ sont soumis à l'équation de mouvement suivante :

$$m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad (1.13)$$

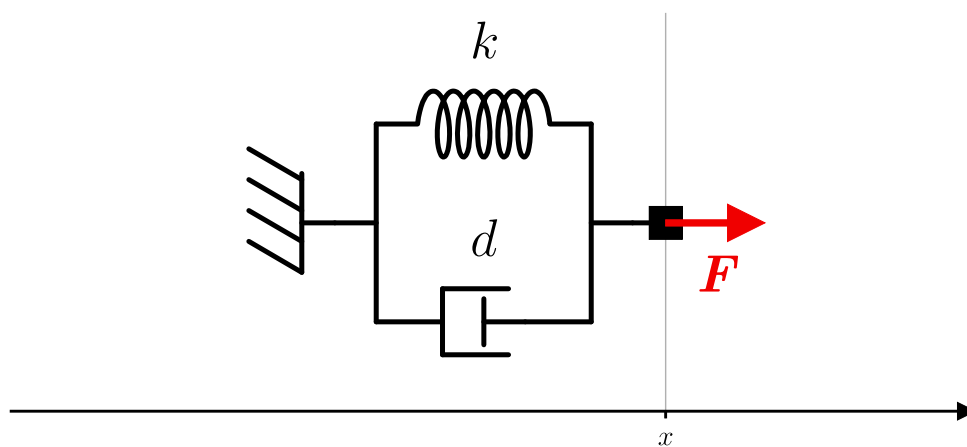


Figure 1.4 - Modèle de Kelvin-Voigt

On considère que l'accélération $a(t)$ est sinusoïdale d'amplitude a_M , de pulsation $\omega_a = \omega$, et de phase de référence nulle $\varphi_a = 0$. On fait l'hypothèse que la réponse $x(t)$ est aussi de forme sinusoïdale d'amplitude x_M , de même pulsation $\omega_x = \omega$, et de phase $\varphi_x = \varphi$. En considérant la représentation complexe des signaux, on obtient les relations suivantes :

$$\underline{a}(t) = \underline{a}_M e^{i\omega t} = a_M e^{i\omega t}, \quad \underline{a}_M = a_M \quad (1.14)$$

$$a(t) = \Re(\underline{a}(t)) \quad (1.15)$$

$$\begin{cases} \underline{x}(t) = x_M e^{i\omega t} = x_M e^{i(\omega t + \varphi)} \\ \underline{\dot{x}}(t) = i\omega \underline{x}_M e^{i\omega t} \\ \underline{\ddot{x}}(t) = -\omega^2 \underline{x}_M e^{i\omega t} \end{cases}, \quad \underline{x}_M = x_M e^{i\varphi} \quad (1.16)$$

$$\begin{cases} x(t) = \Re(\underline{x}(t)) \\ \dot{x}(t) = \Re(\dot{\underline{x}}(t)) \\ \ddot{x}(t) = \Re(\ddot{\underline{x}}(t)) \end{cases} \quad (1.17)$$

Avec $\Re(\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R})$ la fonction partie réelle.

On considère la nouvelle équation de la dynamique :

$$\ddot{\underline{x}}(t) + \frac{d}{m}\dot{\underline{x}}(t) + \frac{k}{m}\underline{x}(t) = \underline{a}(t) \quad (1.18)$$

L'équation (1.13), qui correspond à la composante réelle de l'équation complexe (1.18), est a fortiori vérifiée si (1.18) l'est. On substitue (1.14) et (1.16) dans (1.18) :

$$-\omega^2 \underline{x}_M e^{i\omega t} + \frac{d}{m} i\omega \underline{x}_M e^{i\omega t} + \frac{k}{m} \underline{x}_M e^{i\omega t} = a_M e^{i\omega t} \quad (1.19)$$

On obtient finalement la fonction de transfert mécanique $\underline{h}_m(\omega)$:

$$\underline{h}_m(\omega) = \frac{\underline{x}_M(\omega)}{a_M} = \frac{\frac{m}{k}}{1 + i\frac{d}{k}\omega - \frac{m}{k}\omega^2} \quad (1.20)$$

Il s'agit de l'expression d'un passe-bas du second ordre résonnant, dont la formulation générale est la suivante :

$$\underline{h}_m(\omega) = \frac{\underline{x}_M(\omega)}{a_M} = \frac{\underline{K}_m}{1 + i\frac{1}{Q}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (1.21)$$

Avec ω_0 la pulsation de résonance, Q le facteur de qualité, et \underline{K}_m le gain. Ces paramètres mathématiques sont ainsi liés aux paramètres mécaniques par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ Q = \frac{\sqrt{mk}}{d} \\ \underline{K}_m = \frac{m}{k} = \frac{1}{\omega_0^2} = |\underline{K}_m| = K_m \end{array} \right. \quad (1.22)$$

La réponse du résonateur est donc un déplacement $x(t)$ sinusoïdal caractérisé par une amplitude $x_M(\omega)$ et un déphasage $\varphi(\omega)$ par rapport au signal d'accélération d'excitation $a(t)$:

$$x_M(\omega) = a_M |\underline{h}_m(\omega)| = \frac{a_M K_m}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{1}{Q} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right)^2}} \quad (1.23)$$

$$\varphi(\omega) = \text{Arg}(\underline{h}_m(\omega)) = \arctan\left(\frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\frac{1}{Q} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}\right) - \frac{\pi}{2}, \quad \omega > 0 \quad (1.24)$$

On trace souvent ces deux fonctions dans le diagramme de Bode, dans un repère log-log pour l'amplitude, et dans un repère semi-log pour la phase. La figure 1.5 en donne la représentation pour $Q=1\ 000$.

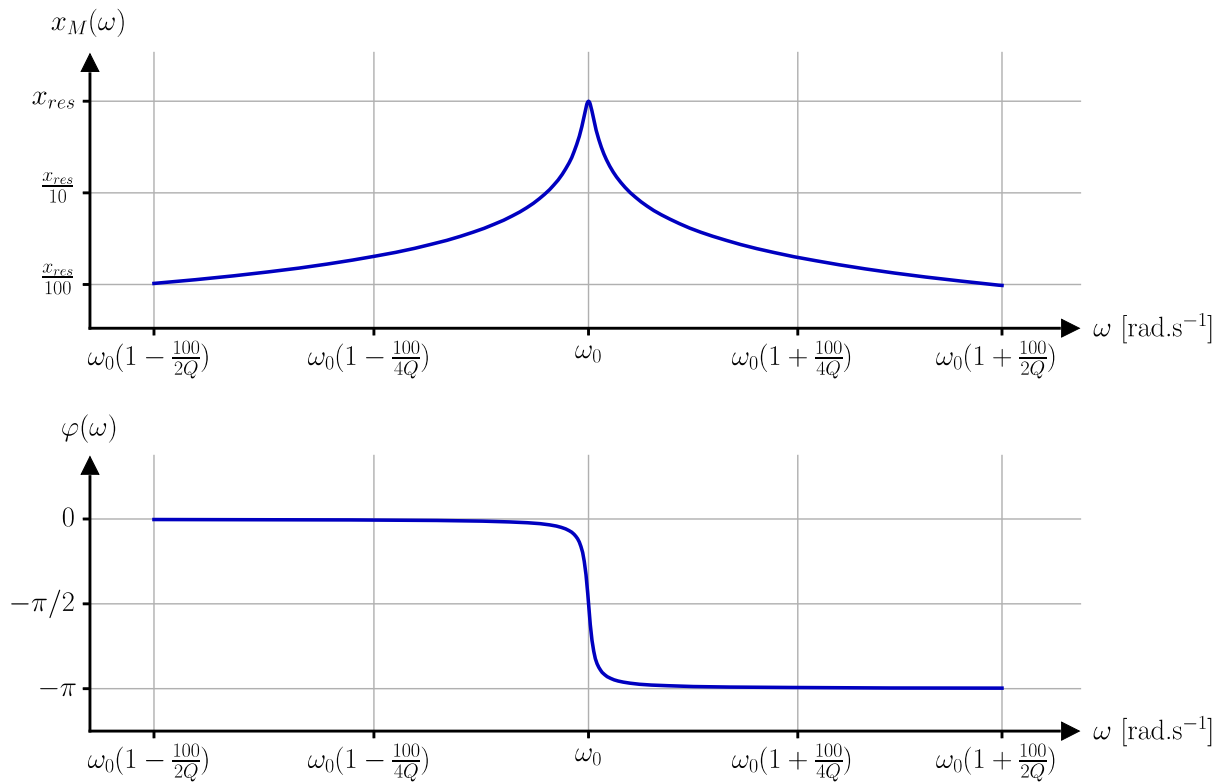


Figure 1.5 - Diagramme de Bode de la réponse fréquentielle d'un passe-bas résonnant du second ordre à haut facteur de qualité

À la résonance, la vibration $x(t)$ est en quadrature de phase avec l'accélération d'excitation $a(t)$, et présente une amplitude $x_M(\omega_0) = x_{res} = a_M K_m Q = a_M Q / \omega_0^2$. On définit aussi la demi-amplitude à la résonance $X = x_{res} / 2$, que l'on utilisera comme grandeur de référence dans le contexte de la représentation des amplitudes dans le plan de Nyquist.

1.2.1.2 Représentation des amplitudes dans le plan de Nyquist

Pour l'étude des fonctions de mesure inertielle des capteurs développés, on privilégiera une autre représentation graphique de la réponse du résonateur : le diagramme de Nyquist. Cette dernière, au détriment de l'information de fréquence, permet de combiner un affichage de l'amplitude et de la phase dans le même plan, données par les coordonnées polaires du repère utilisé. D'une manière équivalente, on observe les composantes en phase x_{Mp} et en quadrature de phase x_{Mq} , données par les coordonnées cartésiennes de ce même repère. Les formules (1.25) et (1.26) permettent d'obtenir les expressions analytiques de ces composantes. La figure 1.6 représente cette courbe paramétrée par la fréquence, que l'on appellera caractéristique fréquentielle stationnaire du résonateur.

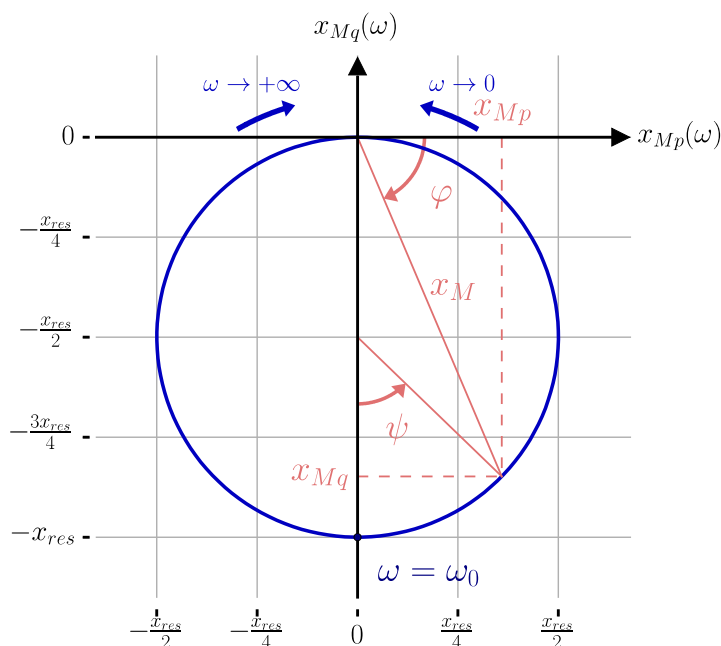


Figure 1.6 - Diagramme de Nyquist de la réponse fréquentielle d'un passe-bas résonnant du second ordre à haut facteur de qualité

$$\begin{aligned}
 \underline{x}_M(\omega) &= x_M(\omega)e^{i\varphi(\omega)} = x_{Mp}(\omega) + ix_{Mq}(\omega) \\
 &= x_M(\omega)\cos(\varphi(\omega)) + ix_M(\omega)\sin(\varphi(\omega))
 \end{aligned}
 \tag{1.25}$$

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \Re(\underline{x}(t)) = \Re(\underline{x}_M(\omega)e^{i\omega t}) \\
 &= \Re(x_M(\omega)e^{i(\omega t + \varphi(\omega))}) = \Re((x_{Mp}(\omega) + ix_{Mq}(\omega))e^{i\omega t}) \\
 &= x_{Mp}(\omega)\cos(\omega t) - x_{Mq}(\omega)\sin(\omega t) \\
 &= x_M(\omega)\cos(\varphi(\omega))\cos(\omega t) - x_M(\omega)\sin(\varphi(\omega))\sin(\omega t) \\
 &= x_M(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega))
 \end{aligned}
 \tag{1.26}$$

Le choix de cette représentation graphique repose sur des considérations pratiques : l'architecture électro-mécanique des résonateurs utilisés donne un accès direct à des signaux électriques proportionnels à x_{Mp} et x_{Mq} , que l'on peut donc lire directement sur les axes du diagramme de Nyquist.

Cette caractéristique fréquentielle stationnaire asymptotique pour $Q \gg 1$ est un cercle passant par l'origine, zone des amplitudes hors résonance, de rayon X et avec une résonance diamétralement opposée à l'origine, à une phase $\varphi = -\pi/2$. On la retrouve dans [Cady 1921]

(à la phase de la résonance près, car les grandeurs d'entrées et de sorties sont différentes, mais le comportement est semblable). On peut profiter de cette propriété géométrique appréciable pour récupérer l'information de fréquence manquante du diagramme de Nyquist. En effet, à partir de la formule (1.24), on exprime la pulsation d'excitation ω en fonction de l'angle polaire $\psi = 2\varphi + \pi$ pris au centre de ce cercle, relativement à l'amplitude de la résonance.

$$\begin{aligned}
\varphi + \frac{\pi}{2} &= \frac{\psi}{2} = \arctan\left(\frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\frac{1}{Q}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}\right) \\
\Leftrightarrow \tan\left(\frac{\psi}{2}\right) &= \frac{Q(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)}{\omega_0\omega} \\
\Leftrightarrow \frac{\omega_0}{2Q}\tan\left(\frac{\psi}{2}\right) &= (\omega_0 - \omega)\frac{\omega_0 + \omega}{2\omega_0} \\
\Leftrightarrow \frac{\omega_0}{2Q}\tan\left(\frac{\psi}{2}\right) &= (\omega_0 - \omega)\left(1 + \frac{\Delta\omega}{2\omega_0}\right) \\
\Leftrightarrow \omega &= \omega_0 \left(1 - \frac{\tan\left(\frac{\psi}{2}\right)}{2Q\left(1 + \frac{\Delta\omega}{2\omega_0}\right)}\right)
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Avec $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ l'écart entre la pulsation d'excitation et la pulsation de résonance. Étant donné que $Q \gg 1$, les fréquences d'excitation permettant d'obtenir des réponses de l'ordre de l'amplitude de résonance sont dans un voisinage étroit de la fréquence de résonance. On a donc :

$$|\Delta\omega| = |\omega - \omega_0| \ll \omega_0 \tag{1.28}$$

On obtient finalement la pulsation ω en fonction de l'angle polaire ψ :

$$\omega(\psi) = \omega_0 \left(1 - \frac{\tan\left(\frac{\psi}{2}\right)}{2Q}\right), \quad \psi \in \left[-\pi + \frac{1}{Q}, \pi - \frac{1}{Q}\right] \tag{1.29}$$

1.2.2 Amplitudes transitoires d'un oscillateur unidimensionnel

1.2.2.1 Méthode des variations lentes

L'atout majeur du diagramme de Nyquist est la possibilité de représenter les caractéristiques fréquentielles stationnaires et les amplitudes transitoires sur un même graphique. Ces variations de l'amplitude x_M et de la phase φ de la réponse $x(t)$ sont la conséquence des variations des paramètres d'entrée, en particulier de l'amplitude d'excitation a_M , de la pulsation d'excitation ω , ou des variables extérieures comme les accélérations et rotations de l'instrument et la température.

Pour établir les expressions de ces réponses transitoires, on se place dans le cadre de l'approximation dite des variations lentes, qui impose que le temps caractéristique des variations relatives des amplitudes x_{Mp} et x_{Mq} ou de l'amplitude x_M et de la phase $\varphi_x = \varphi$ soit grand devant la période $T_a = 1/f_a = 2\pi/\omega_a = 2\pi/\omega$ du signal d'excitation (aussi pseudo-période de la réponse $x(t)$, qui n'est plus rigoureusement périodique dans le domaine transitoire). La validité de cette approximation découle directement et uniquement de l'utilisation de résonateurs à grand facteur de qualité, et à fréquence de résonance élevée. Comme le montre la figure 1.7, on suppose alors qu'à chaque instant, et à une échelle de temps intermédiaire, la réponse à une excitation sinusoïdale de pulsation $\omega_a = \omega$ est également une sinusoïde de même pulsation $\omega_x = \omega$.

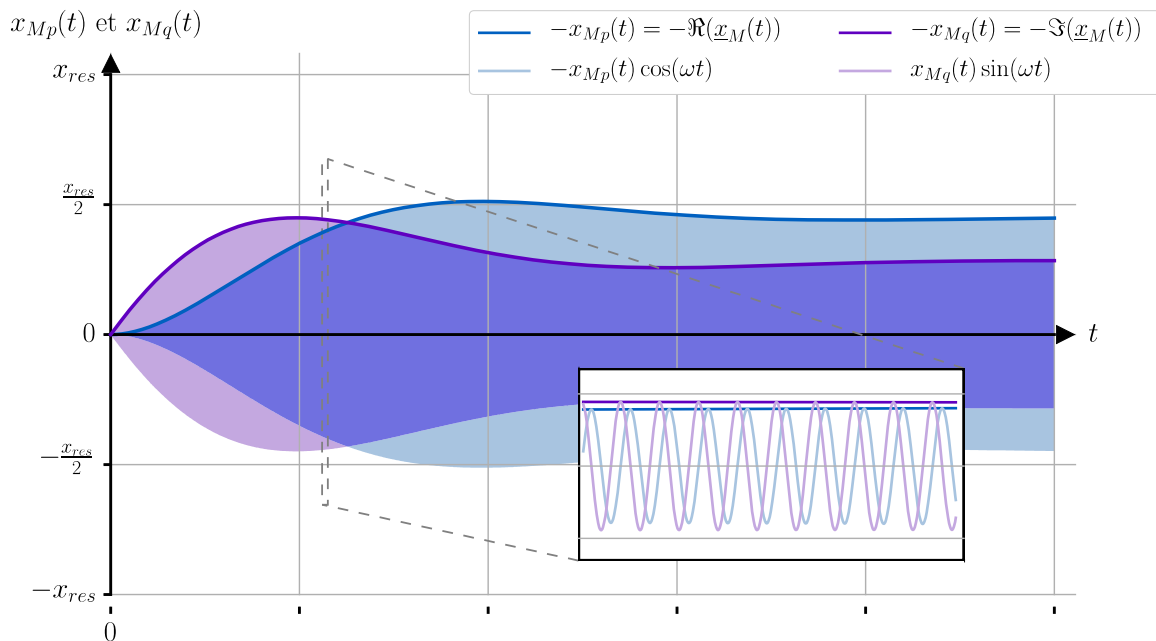


Figure 1.7 - Validité de l'approximation des variations lentes : signaux effectifs et enveloppes

Les relations (1.14) et (1.16) sont modifiées en (1.30) et (1.32) respectivement, avec des amplitudes variables, bien que lentes :

$$\underline{a}(t) = \underline{a}_M(t)e^{i\omega t} = a_M(t)e^{i\varphi_a(t)}e^{i\omega t} \quad (1.30)$$

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_M(t)e^{i\omega t} = x_M(t)e^{i\varphi_x(t)}e^{i\omega t} \quad (1.31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{x}(t) = \underline{x}_M(t)e^{i\omega t} = x_M(t)e^{i(\omega t + \varphi_x(t))} \\ \dot{\underline{x}}(t) = \left(i\omega \underline{x}_M(t) + \frac{d\underline{x}_M}{dt}(t) \right) e^{i\omega t} \\ \ddot{\underline{x}}(t) = \left(-\omega^2 \underline{x}_M(t) + 2i\omega \frac{d\underline{x}_M}{dt}(t) + \frac{d^2\underline{x}_M}{dt^2}(t) \right) e^{i\omega t} \end{array} \right. \quad (1.32)$$

On remplace dans (1.18) en utilisant (1.22) pour obtenir une nouvelle version (1.33) de l'équation (1.19) :

$$\frac{d^2 \underline{x}_M}{dt^2}(t) + \left(2i\omega + \frac{\omega_0}{Q} \right) \frac{d\underline{x}_M}{dt}(t) + \left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{i\omega\omega_0}{Q} \right) \underline{x}_M(t) = a_M(t) \quad (1.33)$$

1.2.2.2 Résolution dans le domaine de Laplace

On passe du domaine temporel au domaine de Laplace pour déterminer le régime transitoire de l'amplitude complexe $\underline{x}_M(t)$. Pour cela, on admet que la fonction $\underline{a}_M(t)$ est constante. En effet, de manière plus générale, on connaît l'amplitude de l'accélération d'excitation, et on pourra toujours résoudre le problème en l'approchant par une fonction constante par morceaux. L'opérateur de la transformée de Laplace étant notée \mathcal{L} , on a ainsi les correspondances suivantes :

$$\underline{a}_M(t) = \underline{a}_M = a_M e^{i\varphi_a} \quad (1.34)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(\underline{a}_M(t))(p) = \frac{a_M}{p} \\ \mathcal{L}(\underline{x}_M(t))(p) = \mathcal{L}\underline{x}_M(p) \\ \mathcal{L}\left(\frac{d\underline{x}_M}{dt}(t)\right)(p) = p\mathcal{L}\underline{x}_M(p) - \underline{x}_M(t=0) \\ \mathcal{L}\left(\frac{d^2\underline{x}_M}{dt^2}(t)\right)(p) = p^2\mathcal{L}\underline{x}_M(p) - p\underline{x}_M(t=0) - \frac{d\underline{x}_M}{dt}(t=0) \end{array} \right. \quad (1.35)$$

La transformée de Laplace étant linéaire, avec l'équation (1.33), on obtient :

$$\mathcal{L}\underline{x}_M(p) = \frac{a_M + p\left(\frac{d\underline{x}_M}{dt}(t=0) + \left(2i\frac{\omega}{\omega_0} + \frac{1}{Q}\right)\omega_0\underline{x}_M(t=0)\right) + p^2\underline{x}_M(t=0)}{p\left(p^2 + p\omega_0\left(2i\frac{\omega}{\omega_0} + \frac{1}{Q}\right) + \omega_0^2\left(1 + \frac{i\omega}{Q\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)\right)} \quad (1.36)$$

La transformée de Laplace inverse de cette expression peut être calculée directement avec la formule générale (1.37) (exceptionnellement, les symboles a , b , c , d et f ne suivent pas les conventions de la table des symboles, et représentent des paramètres locaux à cette seule équation (1.37)).

$$\mathcal{L}^{-1}\left(p \mapsto \frac{fp^2 + cp + d}{p(p+a)(p+b)}\right)(t) = \frac{d}{ab} + \frac{a^2f - ac + d}{a(a-b)}e^{-at} + \frac{b^2f - bc + d}{b(b-a)}e^{-bt} \quad (1.37)$$

Par ailleurs, l'hypothèse des variations lentes permet d'écrire :

$$\left|\frac{d\underline{x}_M}{dt}(t=0)\right| \ll \omega_0|\underline{x}_{res}|, \quad |\underline{x}_{res}| = x_{res} = \frac{a_M Q}{\omega_0^2} \quad (1.38)$$

En utilisant (1.28), (1.36), (1.37) et (1.38), on obtient finalement l'expression temporelle approchée de l'amplitude lente de la réponse transitoire, en fonction de la pulsation d'excitation $\omega_a = \omega$, au premier ordre non nul pour $Q \gg 1$:

$$\underline{x}_M(t, \omega) = \underline{x}_M(\omega) + (\underline{x}_M(t=0) - \underline{x}_M(\omega))e^{-\alpha t} e^{-i\Delta\omega t} \quad (1.39)$$

Avec α la demi-largeur de bande passante à -3 dB du résonateur, vérifiant :

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q} \quad (1.40)$$

Et :

$$\underline{x}_M(t, \omega) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \underline{x}_M(\omega) \quad (1.41)$$

$\underline{x}_M(\omega)$ étant la solution stationnaire établie en (1.21) pour une pulsation d'excitation $\omega_a = \omega$.

Pour les résonateurs à grand facteur de qualité, les amplitudes transitoires réponses à une excitation sinusoïdale sont donc des décroissances exponentielles vers la réponse stationnaire correspondante. Ces décroissances sont d'autant plus lentes que le facteur de qualité est grand. La vitesse à laquelle l'amplitude tourne autour de la réponse stationnaire correspond à la différence entre la pulsation d'excitation et la pulsation de résonance. On pourra toujours considérer que l'influence de la grandeur $d\underline{x}_M/dt(t=0)$ est négligeable.

1.2.2.3 Représentation des amplitudes dans le plan de Nyquist

On peut finalement superposer ces courbes temporelles à la caractéristique fréquentielle stationnaire du résonateur sur le diagramme de Nyquist. En particulier, on a l'habitude d'observer les établissements des oscillations à partir d'une cellule au repos. La figure 1.8 montre plusieurs établissements pour quelques fréquences d'excitation autour de la résonance, et pour un même échelon de l'amplitude d'excitation.

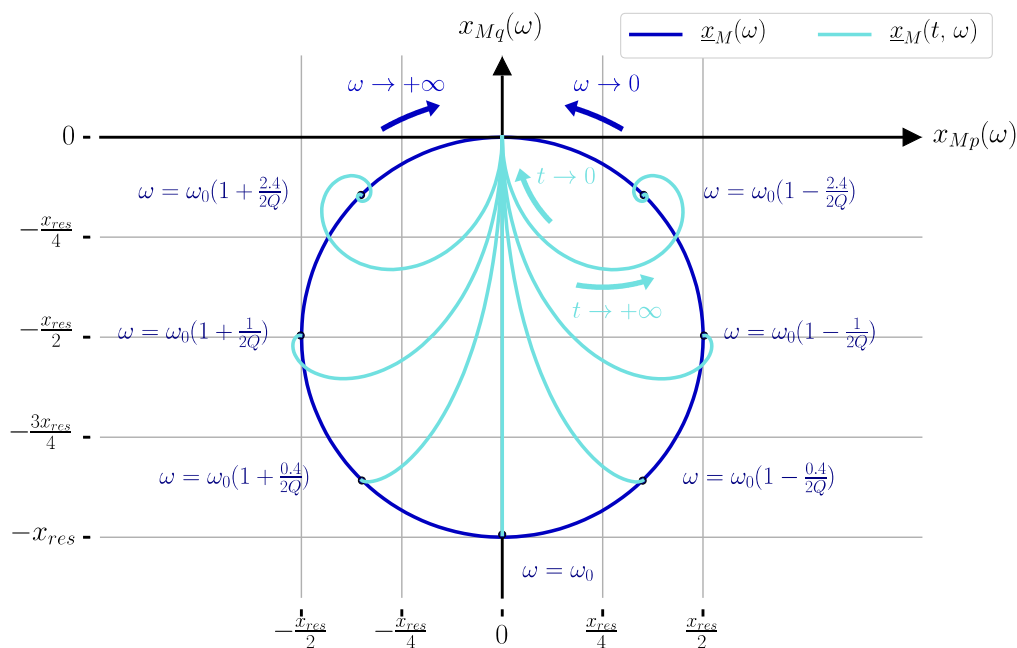


Figure 1.8 - Réponses stationnaires et transitoires sur le diagramme de Nyquist d'un résonateur à haut facteur de qualité

1.2.3 Oscillateur plan

1.2.3.1 Modèle de Lynch

La structure mécanique du gyromètre vibrant, décrite dans la partie 1.3.4, nécessite l'étude des oscillateurs dans le plan. La première étape est de déterminer une généralisation adaptée en deux dimensions d'espace du modèle de Kelvin-Voigt de la figure 1.4. Le modèle le plus intuitif est celui de la figure 1.9, dans lequel sont disposées deux liaisons unidimensionnelles dans des directions perpendiculaires.

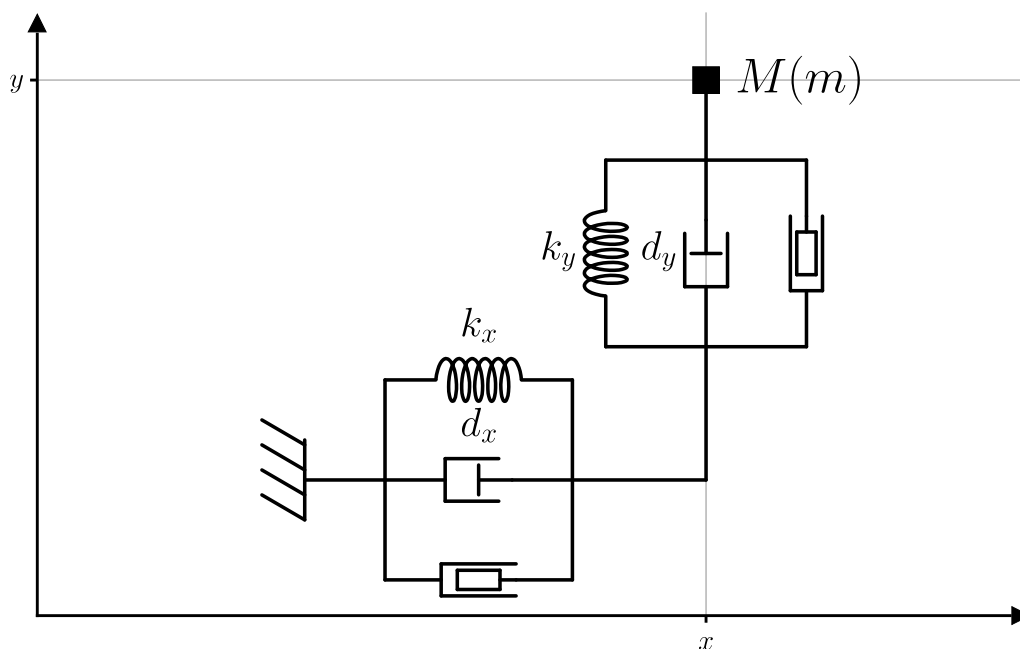


Figure 1.9 - Première généralisation du modèle de Kelvin-Voigt à deux dimensions d'espace

Ce montage peut s'avérer suffisant pour certaines applications, mais ne rend pas compte de tous les comportements observables sur les structures en quartz réalisées. On utilisera ainsi un modèle légèrement plus élaboré, qui possède l'atout d'être rigoureusement équivalent à une grande variété de structures mécaniques complexes.

On admet que les oscillateurs du plan considérés peuvent se ramener à la mise en parallèle de deux chaînes quelconques de raideurs et d'amortissements linéaires et orientés. Cette configuration est représentée sur la figure 1.10. Chaque ressort est caractérisé par une raideur k_i et une orientation θ_{ki} , et chaque amortisseur l'est par une viscosité d_i et une orientation θ_{di} .

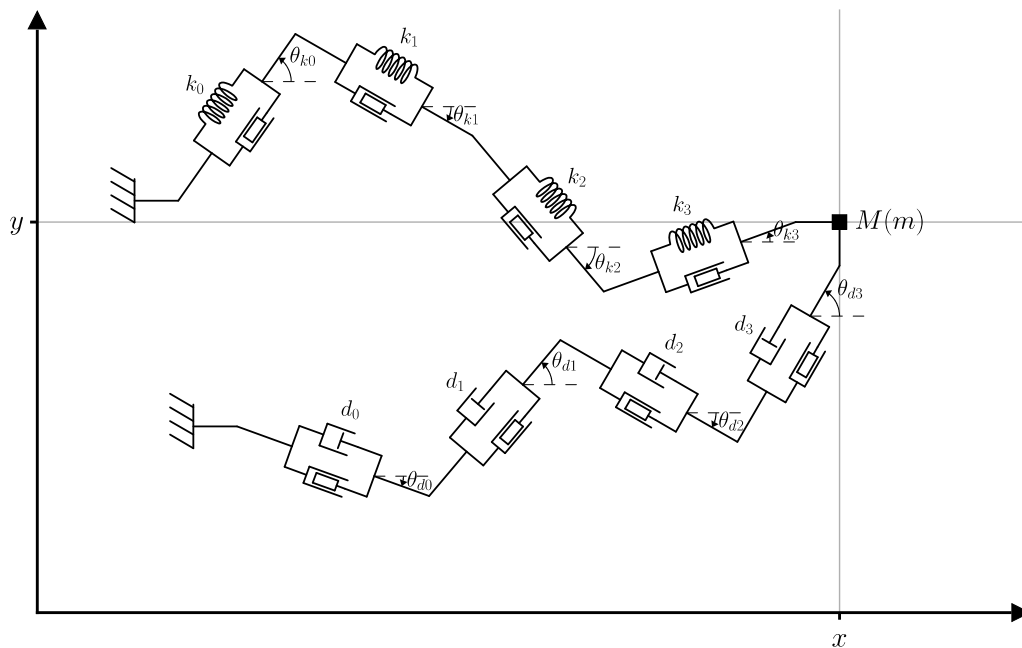


Figure 1.10 - Configuration générale des oscillateurs plans

Chacune de ces chaînes complexes peut être remplacée par la mise en série de deux éléments (ressorts ou amortisseurs) possédant des directions perpendiculaires. La structure de la figure 1.10 est donc équivalente au modèle final de la figure 1.11, proposé par Lynch [Lynch 1995]. La démonstration de cette équivalence est donnée en Annexe A. On met ainsi en évidence l'existence de directions perpendiculaires privilégiées, appelées axes des modes élastiques et axes des modes visqueux. On appellera oscillateur plan une structure dont l'étude se ramène à celle du modèle de Lynch. La figure 1.12 donne une représentation plus intuitive du comportement attendu de cet oscillateur plan.

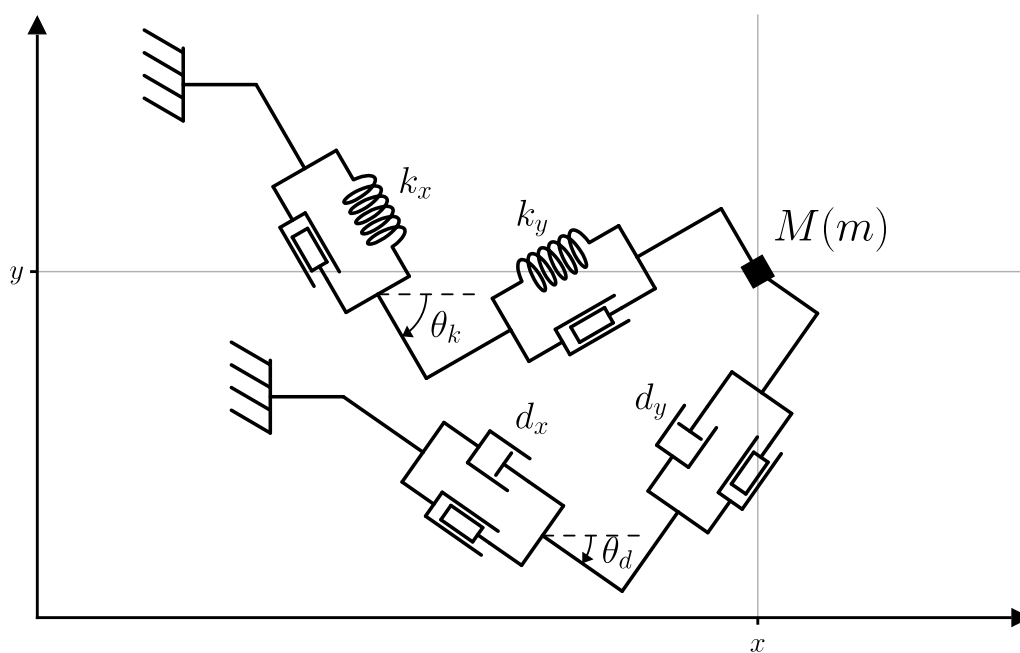


Figure 1.11 - Modèle de Lynch

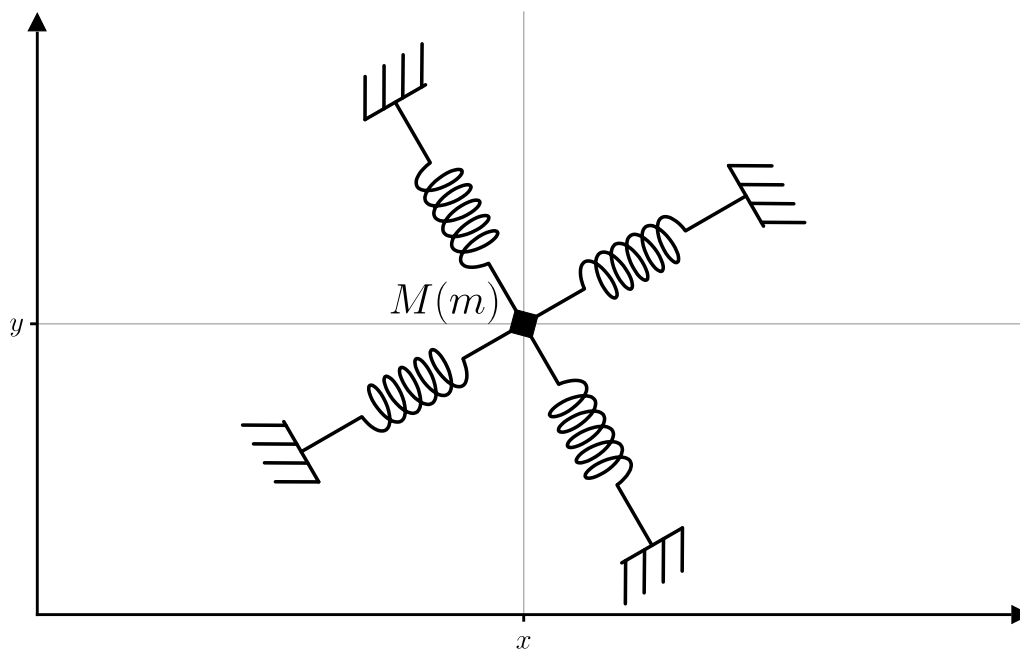


Figure 1.12 - Comportement intuitif équivalent

L'apport de ce modèle par rapport au premier donné à la figure 1.9 est la prise en considération du non alignement éventuel des axes des modes élastiques et des modes visqueux.

1.2.3.2 Mise en équation matricielle

On établit une équation de cette structure plane, semblable à la version (1.13), pour en déterminer les caractéristiques fréquentielles stationnaires et les amplitudes transitoires, sur le diagramme de Nyquist notamment.

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, et conformément au schéma retenu de la figure (1.11), un corps ponctuel localisé en M , et de masse m , est soumis à des raideurs k_x et k_y , avec une orientation θ_k , à des amortissements d_x et d_y , avec une orientation θ_d , à une force d'excitation $\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t)$, à une force d'inertie de Coriolis $\mathbf{F}_{cor}(t)$, due à une rotation $\mathbf{\Omega}(t) = \Omega(t)\mathbf{v}_z$ normale au plan et orientée par le vecteur $\mathbf{v}_z = \mathbf{v}_x \wedge \mathbf{v}_y$, et à une force d'inertie d'entraînement $\mathbf{F}_{ent}(t)$. Son déplacement $\mathbf{r}(t)$ et ses dérivées temporelles $\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)$ et $\ddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}(t)$ sont soumis à l'équation de mouvement suivante :

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{d}.\dot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{k}.\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t) + \mathbf{F}_{cor}(t) + \mathbf{F}_{ent}(t) \quad (1.42)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{v}_x + y(t)\mathbf{v}_y \\ \mathbf{F}(t) = F_x(t)\mathbf{v}_x + F_y(t)\mathbf{v}_y = ma_x(t)\mathbf{v}_x + ma_y(t)\mathbf{v}_y \\ \mathbf{F}_{cor}(t) = -2m\mathbf{\Omega}(t) \wedge \dot{\mathbf{r}}(t) = -m\mathbf{A}_{cor}(t).\dot{\mathbf{r}}(t) \\ \mathbf{F}_{ent}(t) = -m\dot{\mathbf{\Omega}}(t) \wedge \mathbf{r}(t) + m\Omega^2(t)\mathbf{r}(t) = -m\mathbf{A}_{ent}(t).\mathbf{r}(t) \end{array} \right. \quad (1.43)$$

Et :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\mathbf{k} = \mathbf{\Phi}(\theta_k) \cdot \mathbf{k}_D \cdot (\mathbf{\Phi}(\theta_k))^{-1} \\
= \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) & \sin(\theta_k) \\ -\sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) \end{pmatrix} \\
\mathbf{d} = \mathbf{\Phi}(\theta_d) \cdot \mathbf{d}_D \cdot (\mathbf{\Phi}(\theta_d))^{-1} \\
= \begin{pmatrix} \cos(\theta_d) & \sin(\theta_d) \\ -\sin(\theta_d) & \cos(\theta_d) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_x & 0 \\ 0 & d_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta_d) & -\sin(\theta_d) \\ \sin(\theta_d) & \cos(\theta_d) \end{pmatrix} \\
\mathbf{A}_{cor}(t) = 2\Omega(t) \mathbf{\Phi}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega(t) \\ \Omega(t) & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{A}_{ent}(t) = 2\frac{d\Omega}{dt}(t) \mathbf{\Phi}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \Omega^2(t) \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \Omega^2(t) & -\frac{d\Omega}{dt}(t) \\ \frac{d\Omega}{dt}(t) & \Omega^2(t) \end{pmatrix}
\end{array} \right. \quad (1.44)$$

Pour avoir une équation homogène en accélération, on pose finalement aussi :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\omega_{0D}^2 = \frac{\mathbf{k}_D}{m} \Leftrightarrow \omega_0^2 = \frac{\mathbf{k}}{m} = \mathbf{\Phi}(\theta_\omega) \cdot \omega_{0D}^2 \cdot (\mathbf{\Phi}(\theta_\omega))^{-1}, \quad \theta_\omega = \theta_k \\
\alpha_D = \frac{\mathbf{d}_D}{2m} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\mathbf{d}}{2m} = \mathbf{\Phi}(\theta_\alpha) \cdot \alpha_D \cdot (\mathbf{\Phi}(\theta_\alpha))^{-1}, \quad \theta_\alpha = \theta_d
\end{array} \right. \quad (1.45)$$

On définit ainsi en (1.46) les paramètres réels du résonateur plan ω_x, ω_y (pulsations de résonance), α_x et α_y (demi-largeurs de bande passante à -3 dB) :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\omega_{0D} = \begin{pmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & \omega_y \end{pmatrix}, \text{ avec } \begin{cases} \omega_x = \sqrt{\frac{k_x}{m}}, & \omega_y = \sqrt{\frac{k_y}{m}} \\ \alpha_x = \frac{d_x}{2m} = \frac{\omega_x}{2Q_x}, & \alpha_y = \frac{d_y}{2m} = \frac{\omega_y}{2Q_y} \end{cases} \\
\alpha_D = \begin{pmatrix} \alpha_x & 0 \\ 0 & \alpha_y \end{pmatrix}
\end{array} \right. \quad (1.46)$$

L'équation (1.42) devient alors :

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) + (2\alpha + \mathbf{A}_{cor}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) + (\omega_0^2 + \mathbf{A}_{ent}(t)) \cdot \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}(t) \quad (1.47)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{v}_x + y(t)\mathbf{v}_y = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\ \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{x}(t)\mathbf{v}_x + \dot{y}(t)\mathbf{v}_y = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \\ \ddot{\mathbf{r}}(t) = \ddot{x}(t)\mathbf{v}_x + \ddot{y}(t)\mathbf{v}_y = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix} \\ \mathbf{a}(t) = a_x(t)\mathbf{v}_x + a_y(t)\mathbf{v}_y = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (1.48)$$

Comme dans la partie précédente et dans l'étude du cas unidimensionnel, on utilise la notation complexe et l'approximation des variations lentes sur l'excitation $\mathbf{a}(t)$ et sur la réponse $\mathbf{r}(t)$. On continue de considérer que l'amplitude complexe correspondante de l'excitation $\mathbf{a}_M(t)$ est constante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}(t) = \Re(\mathbf{r}(t)), \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_M(t)e^{i\omega t} \\ \dot{\mathbf{r}}(t) = \Re(\dot{\mathbf{r}}(t)), \quad \dot{\mathbf{r}}(t) = (i\omega\mathbf{r}_M(t) + \dot{\mathbf{r}}_M(t))e^{i\omega t} \\ \ddot{\mathbf{r}}(t) = \Re(\ddot{\mathbf{r}}(t)), \quad \ddot{\mathbf{r}}(t) = (-\omega^2\mathbf{r}_M(t) + 2i\omega\dot{\mathbf{r}}_M(t) + \ddot{\mathbf{r}}_M(t))e^{i\omega t} \\ \mathbf{a}(t) = \Re(\mathbf{a}(t)), \quad \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_M(t)e^{i\omega t} = \mathbf{a}_M e^{i\omega t} \end{array} \right. \quad (1.49)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}_M(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_M(t) \\ \mathbf{y}_M(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{Mp}(t) + ix_{Mq}(t) \\ y_{Mp}(t) + iy_{Mq}(t) \end{pmatrix} \\ \mathbf{a}_M = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{xM} \\ \mathbf{a}_{yM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{xMp} + ia_{xMq} \\ a_{yMp} + ia_{yMq} \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (1.50)$$

On a alors un système de quatre équations différentielles réelles couplées, ayant pour inconnues $x_{Mp}(t)$, $x_{Mq}(t)$, $y_{Mp}(t)$ et $y_{Mq}(t)$. En reprenant (1.47), ce système se met sous la forme d'une équation différentielle matricielle complexe en $\mathbf{r}_M(t)$:

$$\ddot{\mathbf{r}}_M(t) + (2i\omega\mathbf{I} + 2\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{A}_{cor}(t))\dot{\mathbf{r}}_M(t) + (-\omega^2\mathbf{I} + i\omega(2\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{A}_{cor}(t)) + \omega_0^2 + \mathbf{A}_{ent}(t))\mathbf{r}_M(t) = \mathbf{a}_M \quad (1.51)$$

Pour poursuivre la résolution, on ajoute certaines conditions sur la forme de la rotation $\Omega(t)$. Cette rotation est notamment petite devant les pulsations de résonance ω_x et ω_y de

l'oscillateur plan, et devant la pulsation d'excitation $\omega_a = \omega$, et ses variations relatives sont également petites devant ω :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega^2(t) \ll \omega_x^2 \\ \Omega^2(t) \ll \omega_y^2 \\ \Omega^2(t) \ll \omega^2 \\ \left| \frac{d\Omega}{dt}(t) \right| \ll \omega |\Omega(t)| \end{array} \right. \quad (1.52)$$

Finalement, on néglige la matrice $\mathbf{A}_{ent}(t)$, correspondant à l'effet d'inertie d'entraînement, devant les autres termes de l'équation (1.51). Par ailleurs, comme pour l'excitation $\mathbf{a}_M(t)$, on considère que la rotation $\Omega(t)$ est constante, notée Ω , à une échelle de temps intermédiaire, grande devant $2\pi/\omega$ et petite devant $1/\alpha_x$ et $1/\alpha_y$, et que l'on pourra résoudre le problème en approchant $\Omega(t)$ par une fonction constante par morceaux. Ainsi, $\mathbf{A}_{cor}(t) = \mathbf{A}_{cor}$, et on réécrit l'équation (1.51) avec des coefficients constants :

$$\ddot{\mathbf{r}}_M(t) + (2i\omega \mathbf{I} + 2\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{A}_{cor}) \cdot \dot{\mathbf{r}}_M(t) + (-\omega^2 \mathbf{I} + i\omega(2\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{A}_{cor}) + \boldsymbol{\omega}_0^2) \cdot \mathbf{r}_M(t) = \mathbf{a}_M \quad (1.53)$$

On peut alors utiliser la transformée de Laplace sur l'équation (1.53), de la même façon qu'en (1.35), et avec $\mathcal{L}(\mathbf{r}_M(t))(p) = \mathcal{L} \mathbf{r}_M(p)$. L'amplitude $\mathcal{L} \mathbf{r}_M(p)$ est donc solution de l'équation linéaire suivante :

$$\underline{\mathbf{A}}(p) \cdot \mathcal{L} \mathbf{r}_M(p) = \underline{\mathbf{B}}(p) \quad (1.54)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathbf{A}}(p) = p^2 \mathbf{I} + p(2i\omega \mathbf{I} + 2\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{A}_{cor}) + (-\omega^2 \mathbf{I} + \omega(2\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{A}_{cor}) + \boldsymbol{\omega}_0^2) \\ \underline{\mathbf{B}}(p) = \frac{\mathbf{a}_M}{p} + \dot{\mathbf{r}}_M(t=0) + (2i\omega \mathbf{I} + 2\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{A}_{cor}) \cdot \mathbf{r}_M(t=0) + p \mathbf{r}_M(t=0) \end{array} \right. \quad (1.55)$$

1.2.3.3 Résolution analytique

La poursuite du calcul analytique par résolution du système linéaire (1.54) et passage des solutions dans le domaine temporel amène à des expressions littérales illisibles car trop générales. On peut néanmoins implémenter la matrice $\underline{\mathbf{A}}(p)$ et le vecteur $\underline{\mathbf{B}}(p)$ de l'équation (1.55) dans un logiciel de calcul analytique. Sous réserve de certaines

approximations, on génère alors diverses caractéristiques fréquentielles stationnaires et courbes temporelles transitoires pour des jeux de valeurs donnés pour l'ensemble des paramètres de l'oscillateur plan $(\omega_x, \omega_y, \alpha_x, \alpha_y, \theta_\omega, \theta_\alpha)$ et des conditions d'excitations (\underline{a}_M, ω et $\Omega(t)$). Le jeu de paramètres $(\omega_x, \omega_y, \alpha_x, \alpha_y, \theta_\omega, \theta_\alpha)$ est équivalent à l'ensemble $(\omega_{xy}, \omega\Delta\omega_{xy}, \alpha_{xy}, \Delta\alpha_{xy}, \theta_\omega, \theta_\alpha)$, défini par (1.56), utilisé dans [Lynch 1995], et plus adapté aux résonateurs à grand facteur de qualité.

$$\begin{cases} \omega_{xy} = \sqrt{\frac{\omega_x^2 + \omega_y^2}{2}}, & \omega\Delta\omega_{xy} = \frac{\omega_x^2 - \omega_y^2}{2} \\ \alpha_{xy} = \frac{\alpha_x + \alpha_y}{2}, & \Delta\alpha_{xy} = \alpha_x - \alpha_y \end{cases} \quad (1.56)$$

Pour obtenir des expressions raisonnables, on utilise des hypothèses simplificatrices. On admet que les pulsations de résonance ω_x et ω_y sont du même ordre, et que la pulsation d'excitation $\omega_a = \omega$ est choisie autour de ω_x :

$$\begin{cases} |\omega - \omega_x| \simeq \alpha_x \text{ ou } |\omega - \omega_x| \leq \alpha_x \\ \omega\Delta\omega_{xy} \simeq \omega_{xy}(\omega_x - \omega_y) \\ |\omega\Delta\omega_{xy}| \ll \omega_{xy}^2, |\omega\Delta\omega_{xy}| \ll \omega^2, |\omega\Delta\omega_{xy}| \ll \omega_x^2, |\omega\Delta\omega_{xy}| \ll \omega_y^2 \end{cases} \quad (1.57)$$

Par ailleurs, pour les facteurs de qualité, on considère des hypothèses plus fortes que $Q_x \gg 1$ et $Q_y \gg 1$. En effet, on admet aussi que les deux résonances sont bien séparées, et que donc l'écart entre les pulsations de résonance est grand devant les demi-largeurs de bande α_x et α_y , leur moyenne α_{xy} et leur différence $\Delta\alpha_{xy}$:

$$\alpha_x \ll \frac{|\omega\Delta\omega_{xy}|}{\omega_{xy}}, \quad \alpha_y \ll \frac{|\omega\Delta\omega_{xy}|}{\omega_{xy}}, \quad \alpha_{xy} \ll \frac{|\omega\Delta\omega_{xy}|}{\omega_{xy}}, \quad |\Delta\alpha_{xy}| \ll \frac{|\omega\Delta\omega_{xy}|}{\omega_{xy}} \quad (1.58)$$

Pour finir, on admet que la rotation de l'instrument Ω est faible devant l'écart entre les pulsations de résonance :

$$|\Omega| \ll \frac{|\omega\Delta\omega_{xy}|}{\omega_{xy}} \quad (1.59)$$

Avec toutes ces considérations, on applique des développements limités dans la résolution de (1.54), pour finalement obtenir les réponses stationnaires des deux composantes

$\underline{x}_M(\omega)$ et $\underline{y}_M(\omega)$, sur lesquelles on voit aussi l'influence de la rotation Ω , avec $\underline{a}_{xM} = a_{xMp} = a_{xMp} \in \mathbb{R}$, $\underline{a}_{yM} = 0$ et $\Delta\omega = \omega - \omega_x$:

$$\begin{aligned} \underline{x}_M(\omega) &= \underline{x}_M(\omega_x + \Delta\omega) = x_{Mp}(\omega) + i x_{Mq}(\omega) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \underline{x}_M(t, \omega) = \\ &a_{xM} \frac{-i\omega\Delta\omega_{xy}(1 + \cos(2\theta_\omega)) - \omega_x(2\alpha_{xy} - \Delta\alpha_{xy}\cos(2\theta_\alpha)) - 2i\omega_x\Delta\omega}{2\omega_x\omega\Delta\omega_{xy}(2\alpha_{xy} + \Delta\alpha_{xy}\cos(2(\theta_\omega - \theta_\alpha))) + 4i\omega_x\omega\Delta\omega_{xy}\Delta\omega} \end{aligned} \quad (1.60)$$

$$\begin{aligned} \underline{y}_M(\omega) &= \underline{y}_M(\omega_x + \Delta\omega) = y_{Mp}(\omega) + i y_{Mq}(\omega) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \underline{y}_M(t, \omega) = \\ &a_{xM} \frac{-i\omega\Delta\omega_{xy}\sin(2\theta_\omega) + \omega_x\Delta\alpha_{xy}\sin(2\theta_\alpha) + 2\omega_x\Omega}{2\omega_x\omega\Delta\omega_{xy}(2\alpha_{xy} + \Delta\alpha_{xy}\cos(2(\theta_\omega - \theta_\alpha))) + 4i\omega_x\omega\Delta\omega_{xy}\Delta\omega} \end{aligned} \quad (1.61)$$

1.2.3.4 Représentation des amplitudes dans le plan de Nyquist

On trace sur la figure 1.13 les caractéristiques fréquentielles stationnaires correspondantes dans le diagramme de Nyquist, pour $|\Delta\omega| \ll |\omega\Delta\omega_{xy}/\omega_{xy}|$ et pour 5 valeurs de Ω (générées analytiquement, avec des développements limités plus poussés que pour les formules (1.60) et (1.61)). On remarque que lorsque seule la composante selon le vecteur \mathbf{v}_x est excitée, l'effet dû à la rotation Ω est principalement visible sur la composante selon le vecteur \mathbf{v}_y de la réponse de l'oscillateur. C'est ce phénomène d'accélération de Coriolis qui est exploité pour réaliser la mesure gyrométrique. À la résonance ($\Delta\omega=0$), on note la présence d'une amplitude non nulle $y_{Mq}(\omega)$, même en l'absence de rotation. Elle est due aux caractéristiques mécaniques de l'oscillateur, et on l'appelle couplage mécanique en quadrature de phase. Au premier ordre, l'amplitude $y_{Mp}(\omega)$ est proportionnelle à Ω et est appelée couplage Coriolis en phase.

Une autre façon de voir l'effet de la rotation Ω sur le plan de Nyquist consiste à remarquer que la différence entre deux caractéristiques stationnaires du mode détecteur (en vert), une sans inertie (en trait plein) et l'autre soumise à une rotation constante (en pointillés) est également un cercle (en pointillés rouges), pivoté de -90° par rapport au mode détecteur, et dont le diamètre est proportionnel à Ω . Il s'agit de la caractéristique qu'aurait le mode détecteur dans le cas idéal où le couplage mécanique en quadrature de phase serait nul.

Il n'y a pas d'intérêt à expliciter les formules analytiques des amplitudes transitoires. On retiendra essentiellement que l'on peut démontrer que dans les conditions (1.57), (1.58) et (1.59), ces expressions sont très proches de la formule (1.39), obtenue dans le cas de l'oscillateur unidimensionnel. On représente une version analytique approchée de ces amplitudes transitoires sur la figure 1.14.

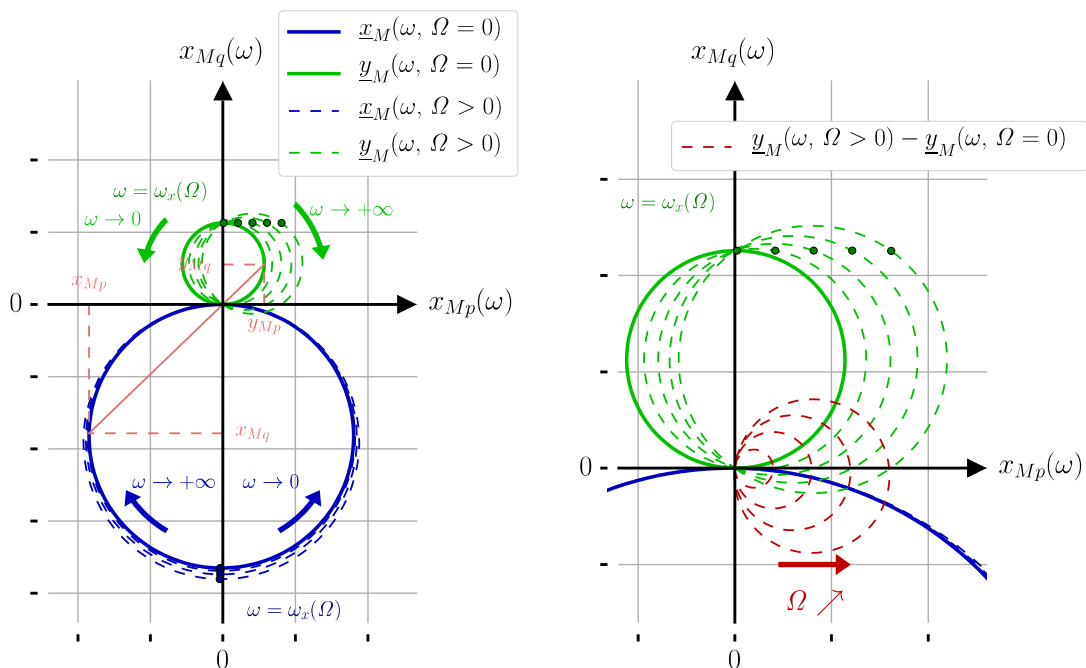


Figure 1.13 - Caractéristiques fréquentielles stationnaires de l'oscillateur plan subissant une rotation

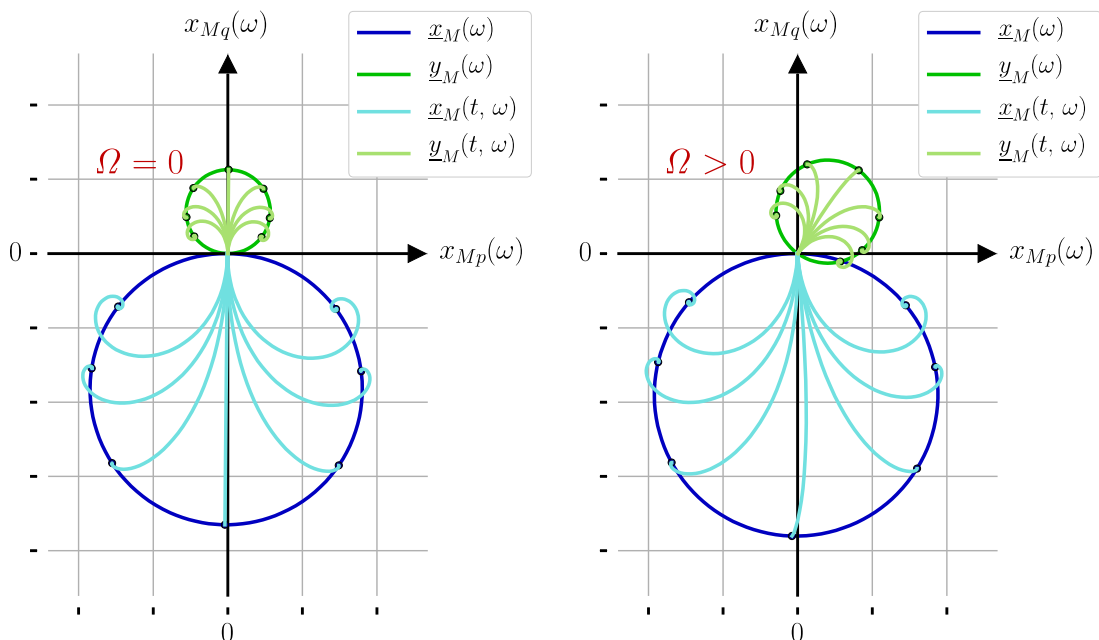


Figure 1.14 - Réponses stationnaires et transitoires d'un oscillateur plan sur le diagramme de Nyquist

1.2.4 Oscillateur de Duffing

1.2.4.1 Raideur et amortissement non linéaires

On poursuit la résolution analytique par l'étude des effets non linéaires des oscillateurs. Ces effets sont généralement dus aux contraintes géométriques résultant des encastremements de la structure vibrante, et correspondent à l'ajout de termes non linéaires dans l'équation de la dynamique (1.13). Les termes les plus communément considérés pour ces structures sont une force de raideur proportionnelle au cube du déplacement $x^3(t)$ et une force d'amortissement proportionnelle à $x^2(t)\dot{x}(t)$. Le nouveau résonateur obtenu est appelé résonateur de Duffing, ou oscillateur de Duffing.

On se limite à l'étude de l'oscillateur de Duffing unidimensionnel. L'équation de la dynamique (1.13) devient alors :

$$m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + kx(t) + k_3x^3(t) + d_3x^2\dot{x}(t) = F(t) \quad (1.62)$$

Avec une force d'excitation sinusoïdale $F(t) = ma(t) = ma_M \cos(\omega t)$. On considère la résolution présentée dans [Lifshitz 2008], et utilisant la méthode des perturbations. Une résolution semblable dans le contexte de résonateurs en quartz est également proposée dans [Kaaajakari 2004]. Le développement limité réalisé donne les équations approchées (1.63) et (1.64) qui ont pour inconnues l'amplitude x_M et la phase $\varphi_x = \varphi$ de la réponse $x(t) = x_M \cos(\omega t + \varphi)$:

$$x_M^2(\omega) = \frac{\left(\frac{a_M}{2\omega_0^2}\right)^2}{\left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} - \kappa x_M^2(\omega)\right)^2 + \left(\xi(1 + \delta x_M^2(\omega))\right)^2} \quad (1.63)$$

$$\tan(\varphi(\omega)) = \frac{\xi(1 + \delta x_M^2(\omega))}{\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} - \kappa x_M^2(\omega)} \quad (1.64)$$

Où $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ est la pulsation de résonance de l'oscillateur, et ξ en est le facteur d'amortissement, lié à son facteur de qualité $Q = \sqrt{mk}/d_1$ par $\xi = 1/(2Q)$. Les coefficients κ et δ sont liés aux paramètres non linéaires k_3 et d_3 par :

$$\begin{cases} \kappa = \frac{3}{8} \frac{k_3}{m \omega_0^2} \\ \delta = \frac{1}{8} \frac{d_3}{m \omega_0 \xi} \end{cases} \quad (1.65)$$

On remarque que, pour $\kappa=0$ et $\delta=0$, les équations (1.63) et (1.64) sont bien équivalentes aux expressions (1.23) et (1.24) correspondant à l'équation différentielle linéaire (1.13).

On peut ainsi considérer que, en comparaison avec le modèle linéaire, les raideur et amortissement non linéaires ont principalement pour effet de rendre respectivement la pulsation de résonance et le facteur d'amortissement dépendants de l'amplitude de la réponse. On peut alors écrire :

$$x_M^2(\omega) = \frac{\left(\frac{a_M}{2\omega_0^2}\right)^2}{\left(\frac{\omega - \omega_{0nl}(x_M(\omega))}{\omega_0}\right)^2 + \xi_{nl}(x_M(\omega))^2} \quad (1.66)$$

$$\tan(\varphi(\omega)) = \frac{\xi_{nl}(x_M(\omega))}{\left(\frac{\omega - \omega_{0nl}(x_M(\omega))}{\omega_0}\right)} \quad (1.67)$$

Avec :

$$\begin{cases} \omega_{0nl}(x_M(\omega)) = \omega_0(1 + \kappa x_M^2(\omega)) \\ \xi_{nl}(x_M(\omega)) = \xi(1 + \delta x_M^2(\omega)) \end{cases} \quad (1.68)$$

En utilisant (1.66) et (1.67), on exprime l'équation d'une caractéristique fréquentielle stationnaire pour une amplitude d'excitation a_M donnée :

$$x_M(\omega) = -\frac{\left(\frac{a_M}{2\omega_0^2}\right)}{\xi(1 + \delta x_M^2(\omega))} \sin(\varphi(\omega)) \quad (1.69)$$

Cette expression montre que la raideur non linéaire représentée par le paramètre κ n'a pas d'effet sur la représentation des états stationnaires dans le plan de Nyquist. En revanche,

les amplitudes de réponse élevées sont diminuées par l'amortissement non linéaire, et donc notamment autour de la résonance. Le cercle obtenu dans le cas linéaire sur la figure 1.6 se voit déformé, et on observe les caractéristiques de la figure 1.15.

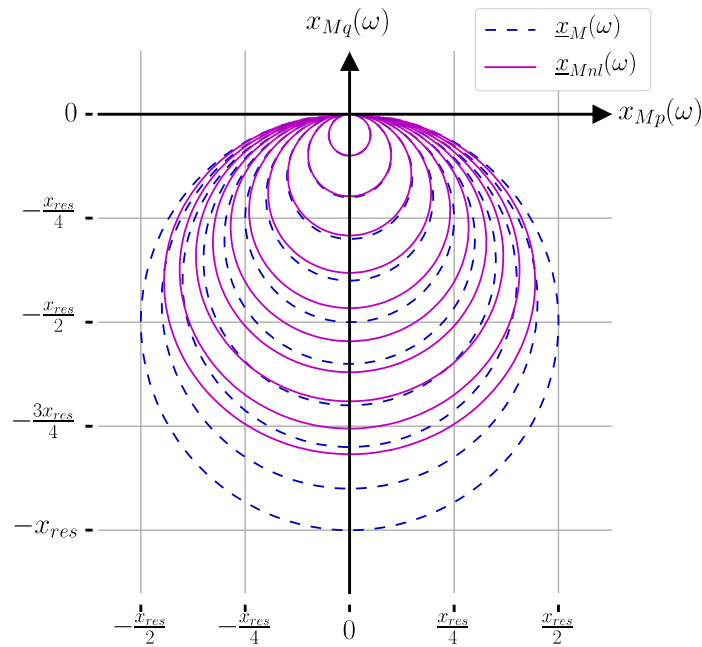


Figure 1.15 - Effet de l'amortissement non linéaire sur la caractéristique fréquentielle stationnaire d'un résonateur

Finalement, à partir de l'équation (1.67), on obtient la généralisation de la formule (1.29), dans le cas non linéaire, qui définit la pulsation d'excitation correspondant à l'angle polaire $\psi = \pi + 2\varphi$, toujours repéré par rapport au cercle linéaire de référence (c'est-à-dire la caractéristique lorsque $\delta = 0$) :

$$\omega(\psi) = \omega_0 \left(1 - \xi (1 + \delta x_M^2(\psi)) \tan\left(\frac{\psi}{2}\right) + \kappa x_M^2(\psi) \right) \quad (1.70)$$

La persistance du terme $x_M(\psi)$, solution de (1.69), ne permet pas d'avoir une expression explicite de la pulsation $\omega(\psi)$.

1.2.4.2 Cas de l'amortissement non linéaire nul et hystérésis

En revanche, en se plaçant dans le cas particulier où $\delta = 0$, la caractéristique fréquentielle stationnaire est le même cercle que dans le cas linéaire, et la formule (1.70) devient :

$$\omega(\psi) = \omega_0 \left(1 - \xi \tan\left(\frac{\psi}{2}\right) + \frac{\zeta}{1 + \tan^2\left(\frac{\psi}{2}\right)} \right), \quad \zeta = \kappa \left(\frac{a_M}{2\xi\omega_0^2} \right)^2 \quad (1.71)$$

On retiendra donc principalement que dans le cas où l'effet d'amortissement non linéaire δ est négligeable devant l'effet de raideur non linéaire κ , les caractéristiques fréquentielles stationnaires sont identiques au cas linéaire, et que seule son abscisse curviligne $\omega(\psi)$ se voit transformée depuis l'expression (1.29) vers l'expression (1.71). On peut en déduire quelques réseaux graphiques classiques, notamment en figure 1.16 un nouveau diagramme par rapport à celui de la figure 1.5, à la différence près que l'amplitude est cette fois représentée avec une échelle linéaire.

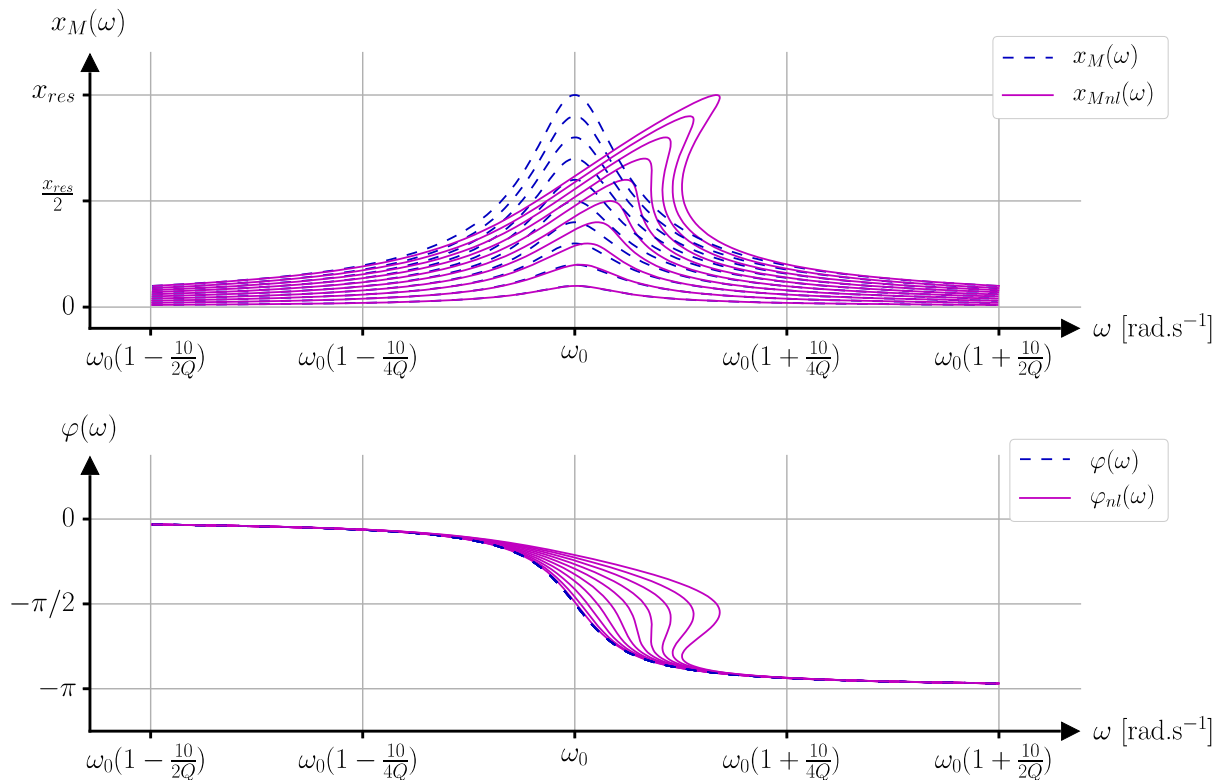


Figure 1.16 - Diagramme en amplitude et en phase d'un passe-bas résonnant avec raideur non linéaire et sans amortissement non linéaire pour plusieurs amplitudes d'excitation

À partir d'une certaine amplitude d'excitation, on note l'apparition de tangentes verticales, coïncidant avec l'apparition d'une zone d'hystérésis qu'on ne peut atteindre par balayage de la fréquence d'excitation. La mise en action de régimes à proximité de cette zone conduit à de brusques sauts de l'amplitude et de la phase de la réponse. Cet effet peut aussi

s'observer dans le plan de Nyquist de la figure 1.17. La zone d'hystérésis (grisée) est cette fois délimitée par une courbe (en pointillés, verts pour les balayages fréquentiels décroissants, et bleus pour les balayages fréquentiels croissants) reliant l'ensemble des points tangentiels des caractéristiques fréquentielles stationnaires (en rouge) et des courbes isofréquentielles (en jaune). Cette courbe représente ainsi des points instables lorsque la commande est fréquentielle. Le cercle noir correspond donc à la plus grande amplitude d'excitation permettant d'éviter tout phénomène d'hystérésis.

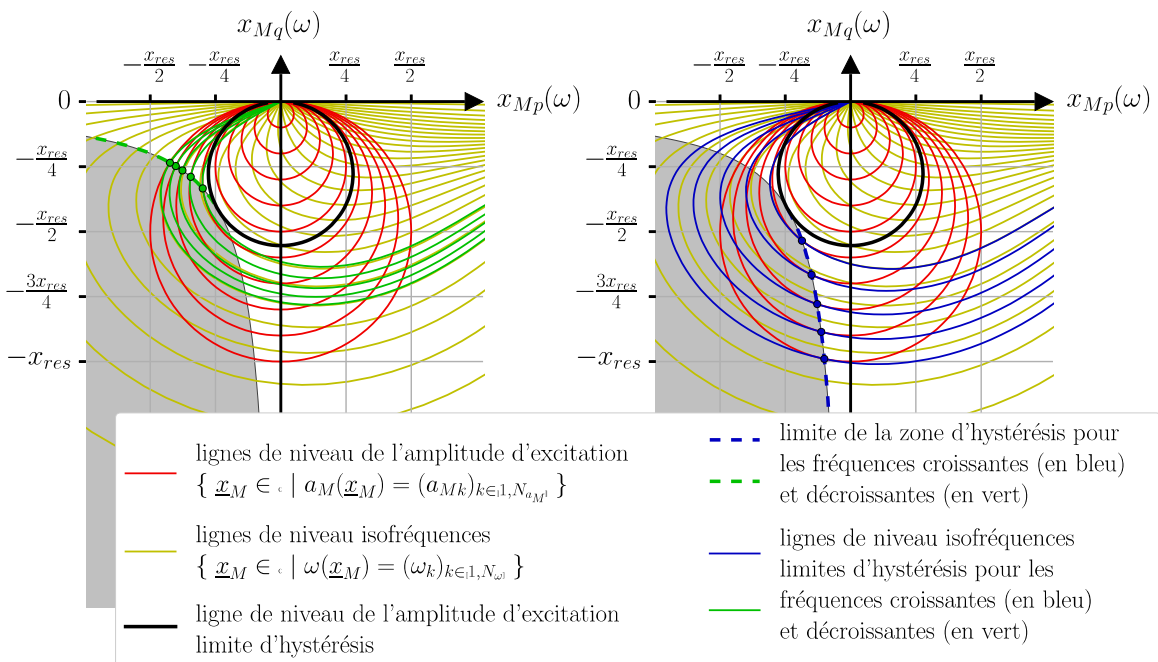


Figure 1.17 - Diagramme de Nyquist et raideur non linéaire

1.2.5 Analyse électronique

1.2.5.1 Modèle de Butterworth Van Dyke

On a étudié la théorie des éléments mécaniques des résonateurs, qu'il faut compléter par une analyse électronique. Pour unifier le problème, il est pertinent de considérer l'analogie électronique des oscillateurs mécaniques [Nosek 1999][Van Dyke 1928][Cady 1921][Butterworth 1914].

On considère le circuit de la figure 1.18, constitué d'une résistance R , d'une capacité C et d'une inductance L en série. On étudie la fonction de transfert ayant pour entrée la tension $u(t)$ aux bornes du dipôle complet équivalent, et pour sortie la charge $q(t)$ de la capacité.

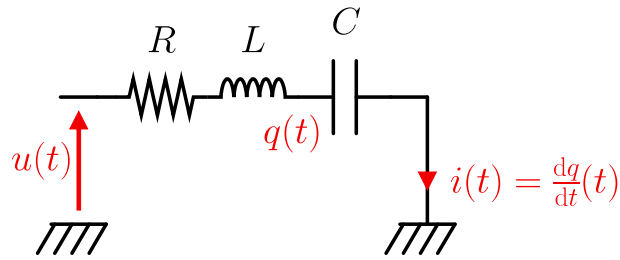


Figure 1.18 - Résonateur RLC série.

L'équation différentielle découlant immédiatement est semblable à l'équation (1.13) :

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t) \quad (1.72)$$

On retrouve même le résonateur de Duffing de la partie précédente dans le domaine électronique en considérant que les résistance et capacité sont fonctions du courant les traversant, comme développé dans [Nosek 1999], dans lequel sont également étudiées des structures résonnantes en quartz. On n'obtient pas une équation exactement équivalente à l'équation (1.62), mais [Lifshitz 2008] montre que la forme des solutions reste la même avec d'autres termes non linéaires.

Le principal élément purement électronique à ajouter au modèle du résonateur est le couplage capacitif. Il s'agit d'un biais parasite impactant généralement les résonateurs piézo-électriques, et dû à l'utilisation d'électrodes nécessaires à l'acquisition des signaux électroniques. C'est l'intérêt du modèle de Butterworth Van Dyke (modèle BVD) [Van Dyke 1928][Cady 1921][Butterworth 1914], dont le schéma est représenté sur la figure 1.19, qui présente une branche résonnante RLC (dite branche motionnelle), et une capacité parallèle C_0 .

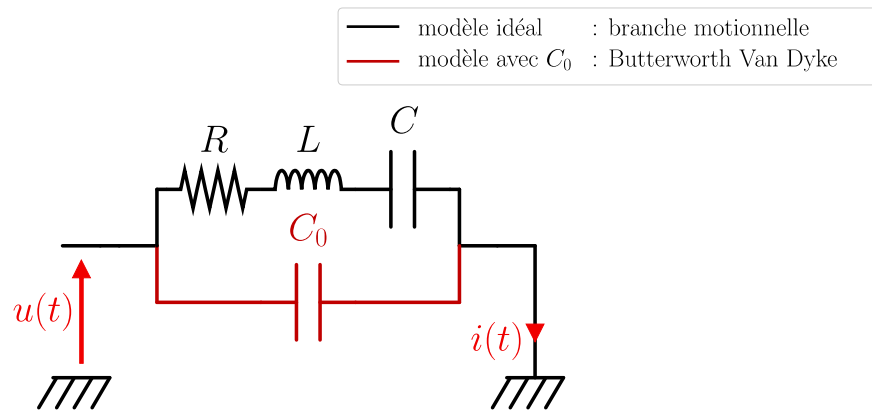


Figure 1.19 - Modèle du résonateur de Butterworth Van Dyke

On passe en régime harmonique avec la notation complexe. En pratique, on n'a pas accès à la charge $q(t)$ de la capacité, mais seulement au courant de sortie du modèle $i(t)$. La fonction de transfert (1.73) du modèle est alors une transadmittance. Il s'agit toujours d'un résonateur, mais dont l'expression est différente de celle de la formule (1.21) :

$$h_1(\omega) = \frac{i_M(\omega)}{u_M(\omega)} = j\omega(C + C_0) \frac{1 + j\omega RC_{eq} - \omega^2 LC_{eq}}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC}, \quad C_{eq} = \frac{CC_0}{C + C_0} \quad (1.73)$$

Avec i_M et u_M les amplitudes complexes de $i(t)$ et de $u(t)$. La représentation de Nyquist d'une telle fonction est donnée en figure 1.20. Ce couplage capacitif induit des amplitudes de réponse hors résonance non nulles.

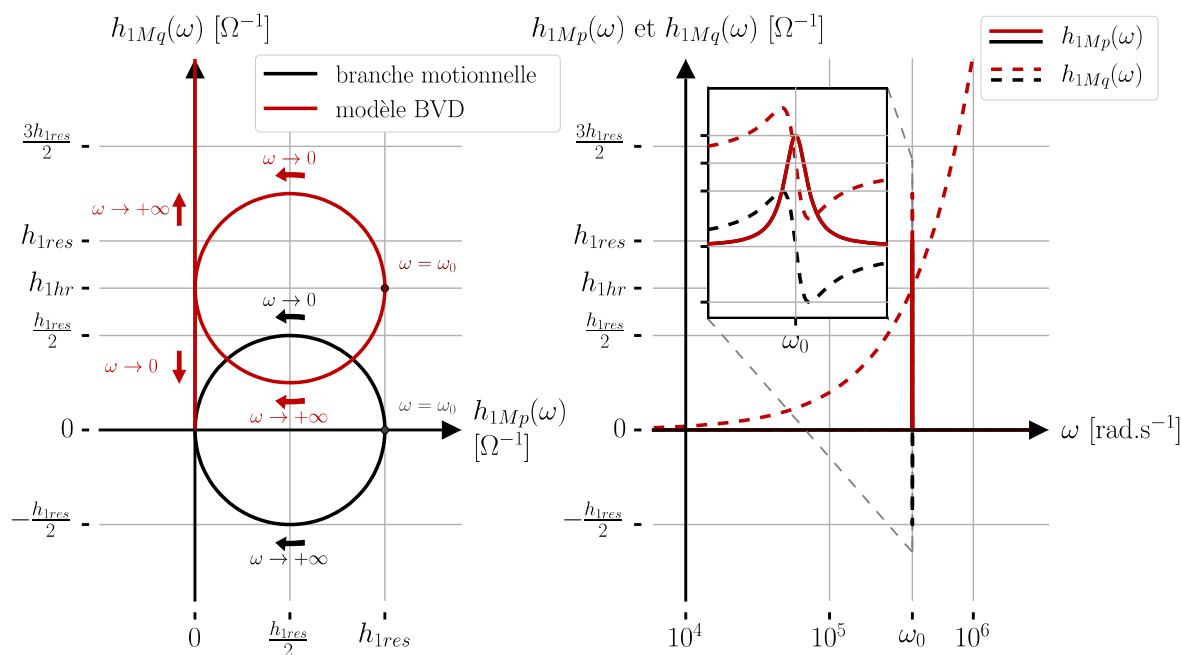


Figure 1.20 - Représentation de Nyquist du modèle de Butterworth Van Dyke

1.2.5.2 Amplificateur de charges

Pour avoir une sortie homogène à la tension d'entrée, on utilise un amplificateur de charges, avec une fréquence de coupure inférieure à la fréquence de résonance, pour intégrer le courant.

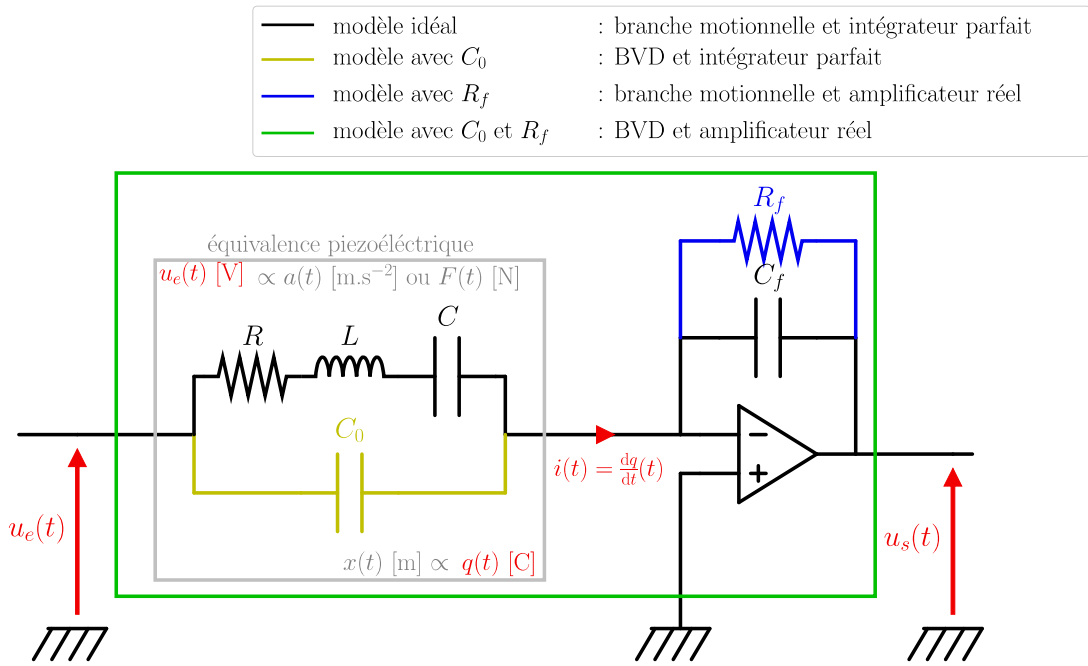


Figure 1.21 - Modèle de Butterworth Van Dyke avec amplificateur de charges

On fait donc apparaître l'équivalence électromécanique dans le cadre gris. En pratique, la force F de l'équation (1.13) est proportionnelle à la tension u_e et la charge q est proportionnelle au déplacement x par le biais des coefficients piézoélectriques de la structure en quartz. La fonction de transfert en tension correspondante devient :

$$h_2(\omega) = -\frac{\underline{u}_{sM}(\omega)}{\underline{u}_{eM}(\omega)} = \frac{j\omega R_f(C + C_0)}{1 + j\omega R_f C_f} \frac{1 + j\omega R C_{eq} - \omega^2 L C_{eq}}{1 + j\omega R C - \omega^2 L C} \quad (1.74)$$

Avec \underline{u}_{sM} et \underline{u}_{eM} les amplitudes complexes de $u_s(t)$ et de $u_e(t)$. Le diagramme de Nyquist final est celui de la figure 1.22. En vert, la fonction de transfert réaliste h_2 , avec l'effet de l'amplificateur de charges. En jaune la réponse obtenue avec un amplificateur de charges idéal (intégrateur parfait, avec $R_f = +\infty$), correspondant à la fonction h_3 , avec une sortie proportionnelle à la charge q :

$$h_3(\omega) = -\frac{1}{C_f} \frac{\underline{q}_M(\omega)}{\underline{u}_{eM}(\omega)} = \frac{C + C_0}{C_f} \frac{1 + j\omega R C_{eq} - \omega^2 L C_{eq}}{1 + j\omega R C - \omega^2 L C} \quad (1.75)$$

Avec \underline{q}_M l'amplitude complexe de $q(t)$. Il s'agit, à une constante multiplicative près, du modèle de Butterworth Van Dyke exact. On représente aussi en noir et en bleu les réponses équivalentes respectivement aux courbes jaune et verte, avec en plus la considération $C_0=0$.

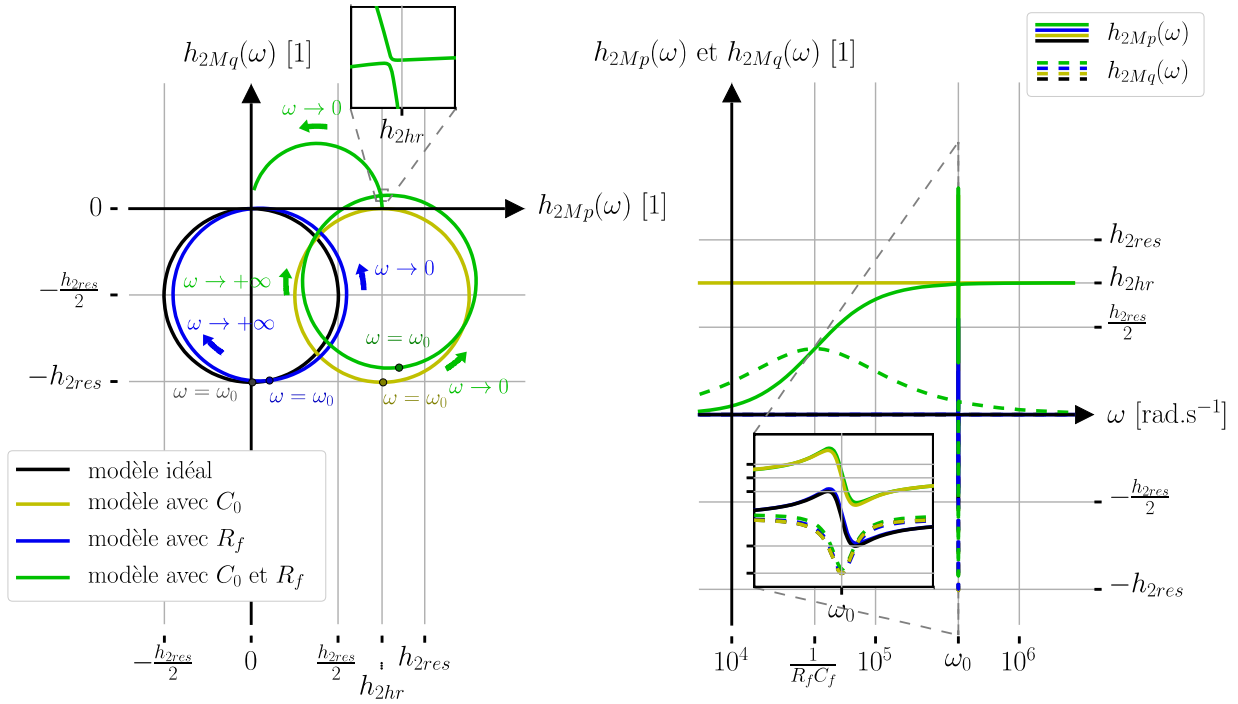


Figure 1.22 - Représentation de Nyquist du résonateur électromécanique

On note ainsi les principales contributions par rapport au modèle idéal en noir : le couplage capacitif C_0 ajoute une amplitude en phase avec l'excitation, et indépendante de la pulsation ω (on appelle cette amplitude « amplitude hors résonance »). L'amplificateur $R_f C_f$ ajoute un gain et une phase supplémentaire à l'ensemble du tracé dans la bande passante de la résonance.

On choisit un fonctionnement de l'amplificateur de charges en mode intégrateur, ce qui permet de minimiser le bruit thermique dans la résistance R_f [Parent 2008]. Dans la pratique, on règle C_f pour avoir une résonance à la pleine échelle électronique ($|u_{sM}(\omega_0)| \simeq u_{eM}$), puis on augmente R_f autant que possible, tant que les effets capacitifs parasites restent négligeables devant le bruit thermique de l'amplificateur. Dans une moindre mesure, ce mode de fonctionnement présente aussi l'avantage d'avoir une fonction de transfert équivalente à celle des équations (1.13) et (1.72), étudiées précédemment, à C_0 près. D'autre part, la figure 1.22 montre que maximiser l'écart entre la fréquence de résonance du résonateur et la fréquence de coupure du filtre implique une minimisation de la sensibilité en fréquence des amplitudes hors résonance. On verra dans le Chapitre 2 que cet aspect pourra avoir son importance dans les procédés d'étalonnage nécessitant une mesure précise de ces amplitudes. Le couplage capacitif C_0 a pour conséquence l'apparition d'un minimum d'amplitude, appelé anti-résonance. On observe ce phénomène sur le diagramme de Bode correspondant de la figure 1.23, équivalent aux données représentées sur la figure 1.22.

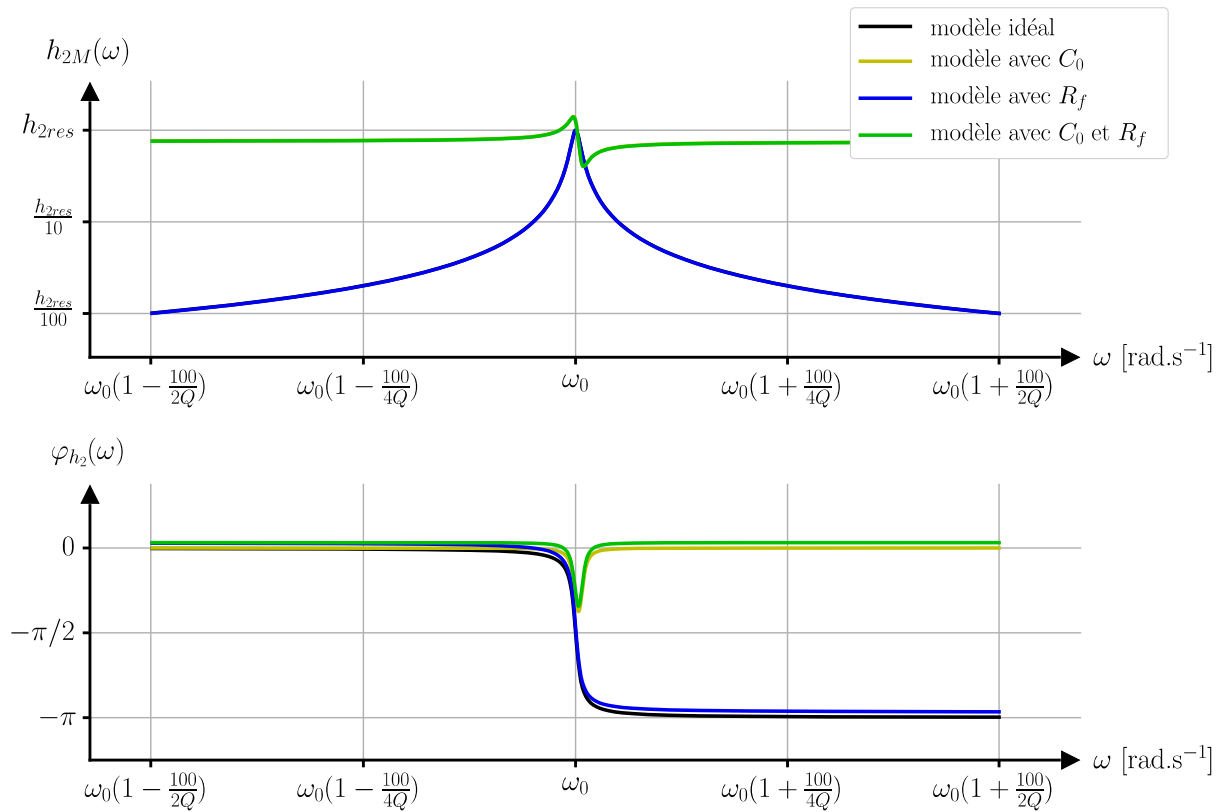


Figure 1.23 - Diagramme de Bode du résonateur électronique

1.3 Capteurs inertiels

Les outils physiques théoriques posés, on peut décrire les principes de fonctionnement des capteurs inertiels développés à l'ONERA. On étudie principalement le VIA (Vibrating Inertial Accelerometer), accéléromètre de la catégorie dite des accéléromètres à lame vibrante (ou VBA, pour Vibrating Beam Accelerometer), sa déclinaison double DIVA, et le gyromètre VIG (Vibrating Inertial Gyrometer). Dans les trois cas, il s'agit de structures électromécaniques en quartz, dont on exploite les propriétés vibratoires et piézoélectriques.

1.3.1 Critères de performance

On commence par décrire les caractéristiques principales d'un capteur, qui permettent d'évaluer ses performances et ses potentiels domaines d'application. On reprend les notations de la figure 1.1, pour un capteur effectuant le mesurage \hat{e} d'une grandeur environnementale que l'on souhaite le plus fidèle possible à la valeur vraie e . En pratique, on réalise un

mesurage \hat{s} d'une grandeur physique intermédiaire s image de la grandeur utile e . Le capteur est alors assimilé à une fonction de transfert h_b vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_b(e, b) = \hat{s} \\ h_b(e, b = 0) = h(e) = s \\ e = h^{-1}(s) = g(s) \\ \hat{e} = \hat{h}^{-1}(\hat{s}) = \hat{g}(\hat{s}) \end{array} \right. \quad (1.76)$$

Où b représente diverses sources d'erreur, et avec h la fonction de transfert théorique du capteur lorsqu'il n'y a pas de source d'erreur et \hat{h} un estimateur de h . En pratique, on détermine la fonction de transfert inverse $\hat{g} = \hat{h}^{-1}$ que l'on applique à la valeur \hat{s} pour obtenir la mesure finale \hat{e} .

1.3.1.1 Étendue de mesure, facteur d'échelle et biais

Pour décrire cette fonction h , on définit 3 premières caractéristiques mathématiques : l'étendue de mesure, le facteur d'échelle et le biais.

L'étendue de mesure est l'intervalle réel $I_e = [e_{min}, e_{max}]$ des valeurs de la grandeur e que le capteur peut mesurer. Les bornes de cette gamme de fonctionnement sont en général données relativement à un critère de précision : l'étendue de mesure à la précision ε est alors le domaine I_e tel que $\forall e \in I_e, |h(e) - \hat{h}(e)| \leq \varepsilon$. La définition de l'étendue de mesure prend aussi en compte les contraintes physiques et d'intégrité, les valeurs extrêmes de la grandeur e pouvant amener à une saturation de la mesure \hat{s} , voire à un endommagement irréversible du capteur.

Le biais c_0 et le facteur d'échelle c_1 sont les deux premiers termes du développement limité de la fonction h autour d'une valeur nominale $e = e_0$ (en général, $e_0 = 0$). On peut donc écrire :

$$h(e) = c_0 + c_1(e - e_0) + \epsilon(e), \quad \frac{\epsilon(e)}{(e - e_0)} \xrightarrow{e \rightarrow e_0} 0 \quad (1.77)$$

Où ϵ est une fonction de e . On considère des capteurs pour lesquels l'estimateur \hat{h} se limite à ce développement au premier ordre. On en déduit l'expression de la fonction inverse \hat{g} :

$$\begin{cases} \hat{h}(e) = c_0 + c_1(e - e_0) \\ \hat{g}(s) = e_0 - \frac{c_0}{c_1} + \frac{1}{c_1}s \end{cases} \quad (1.78)$$

La figure 1.24 rassemble les informations d'étendue de mesure à la précision ε , de biais et de facteur d'échelle. Ces trois éléments sont déterminés par régression affine en imposant expérimentalement des valeurs échelonnées de la mesurande e . Ces points de mesure sont en rouge, et sont autour de la courbe réelle de la fonction h , en pointillés rouges. L'estimateur \hat{h} est représenté par la droite en bleu.

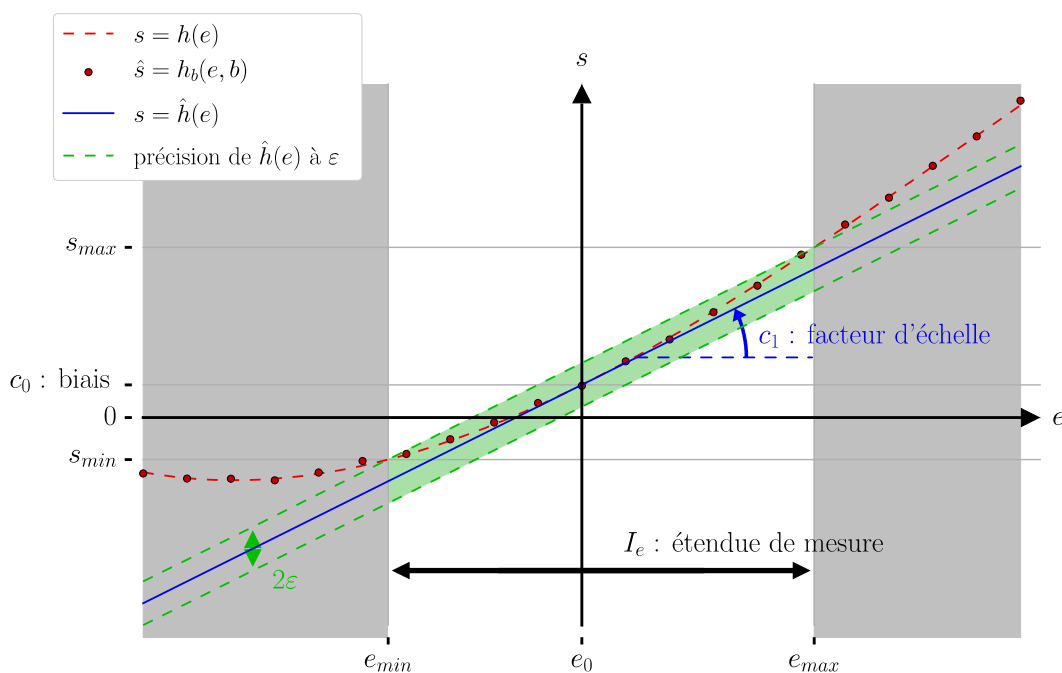


Figure 1.24 - Fonction de transfert du capteur

1.3.1.2 Résolution de mesure et bande passante

Les deux principaux critères de performance sont la résolution de mesure et la bande passante.

La résolution de mesure μ_e est la plus petite variation de la grandeur e que l'on peut mesurer. Elle s'obtient expérimentalement par le calcul du minimum de la déviation d'Allan. La résolution de mesure s'identifie donc à l'instabilité du biais, que l'on appelle aussi parfois la résolution du biais.

La résolution μ_e se déduit de la résolution μ_s sur la mesure \hat{s} de la grandeur s à l'aide du facteur d'échelle $SF = c_1$:

$$\mu_e = \frac{1}{c_1} \mu_s \quad (1.79)$$

Les capteurs se comportent généralement comme des filtres passe-bas par rapport à l'entrée e . La bande passante BW du capteur représente la fréquence maximale perceptible en mesure. Quantitativement, on l'identifie à la bande passante à -3 dB du diagramme de Bode en amplitude de la fonction de transfert h , représenté sur la figure 1.25.

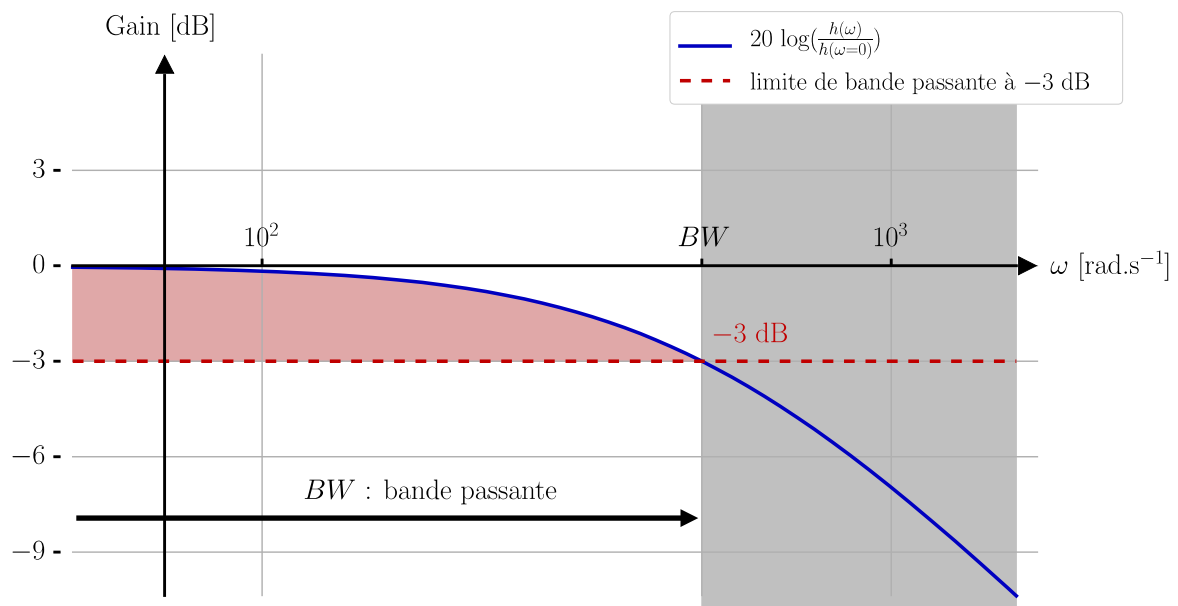


Figure 1.25 - Bande passante du capteur

1.3.1.3 Effets thermiques : sensibilité, hystérésis et stabilité

Finalement, les derniers critères considérés dans cette partie sont les dépendances du biais c_0 et du facteur d'échelle $SF=c_1$ aux effets thermiques. On compte notamment la sensibilité, l'hystérésis, et le résidu (ou stabilité).

La sensibilité est un effet statique et se matérialise par une dépendance thermique de la grandeur considérée (biais ou facteur d'échelle), sur une gamme de température donnée. La figure 1.26 montre, à gauche, la dépendance du biais c_0 et du facteur d'échelle c_1 à la température, et à droite, la fonction de transfert $h(e, \mathcal{T})$, alors aussi fonction de la température \mathcal{T} en plus d'être fonction de la mesurande e du capteur. La section droite de cette surface à $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0$ correspond à la figure 1.24, et celle à $e = e_0$ correspond au graphique en haut à gauche de cette figure 1.26. Dans les caractérisations technologiques, on ne retient

finaleme nt pour la valeur de la sensibilité qu'une valeur maximale (ou moyenne, selon les applications) de la pente $|dc_0/d\mathcal{T}|$ pour le biais et de $|\frac{1}{c_1} \frac{dc_1}{d\mathcal{T}}|$ pour le facteur d'échelle.

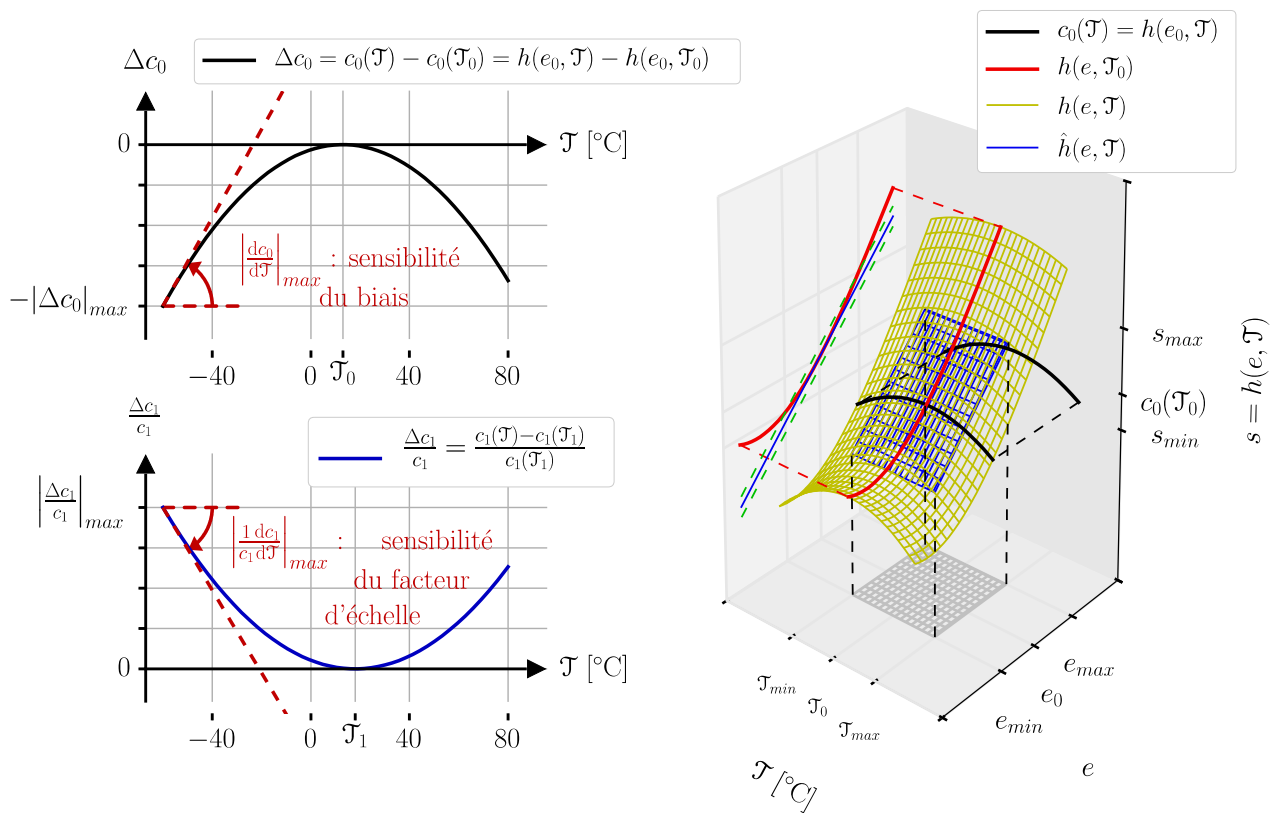


Figure 1.26 - Sensibilité thermique du biais et du facteur d'échelle

L'hystérésis thermique et le résidu thermique sont des phénomènes séquentiels. On considère ainsi que les fonctions représentées sur la figure 1.26 dépendent toujours de la température courante, mais maintenant aussi des températures aux instants précédents. Cette dépendance se manifeste habituellement à un ordre de grandeur bien plus faible que celui de la figure 1.26 qui reste donc raisonnablement valable à cette échelle de représentation. Cette hystérésis et ce résidu sont donnés relativement à une gamme de température.

En théorie, si on néglige les effets dynamiques, il faut parcourir la gamme selon les températures croissantes, puis décroissantes. On trace ensuite la grandeur mesurée en fonction de la température. L'hystérésis est l'ouverture de la courbe obtenue. Le résidu, lui, est l'écart de cette même courbe à un modèle donné, généralement polynomial. Le résidu a donc généralement une valeur plus élevée que celle de l'hystérésis lorsque le modèle choisi n'est pas suffisamment précis. La figure 1.27 illustre ce procédé d'un point de vue théorique, avec une hystérésis volontairement accentuée, et un modèle imparfait (en bleu). À gauche, on observe les variations temporelles de la température imposée et de la grandeur mesurée (ici le

biais, mais équivalent dans le cas du facteur d'échelle), et à droite, les courbes faisant apparaître les valeurs d'hystérésis et de résidu.

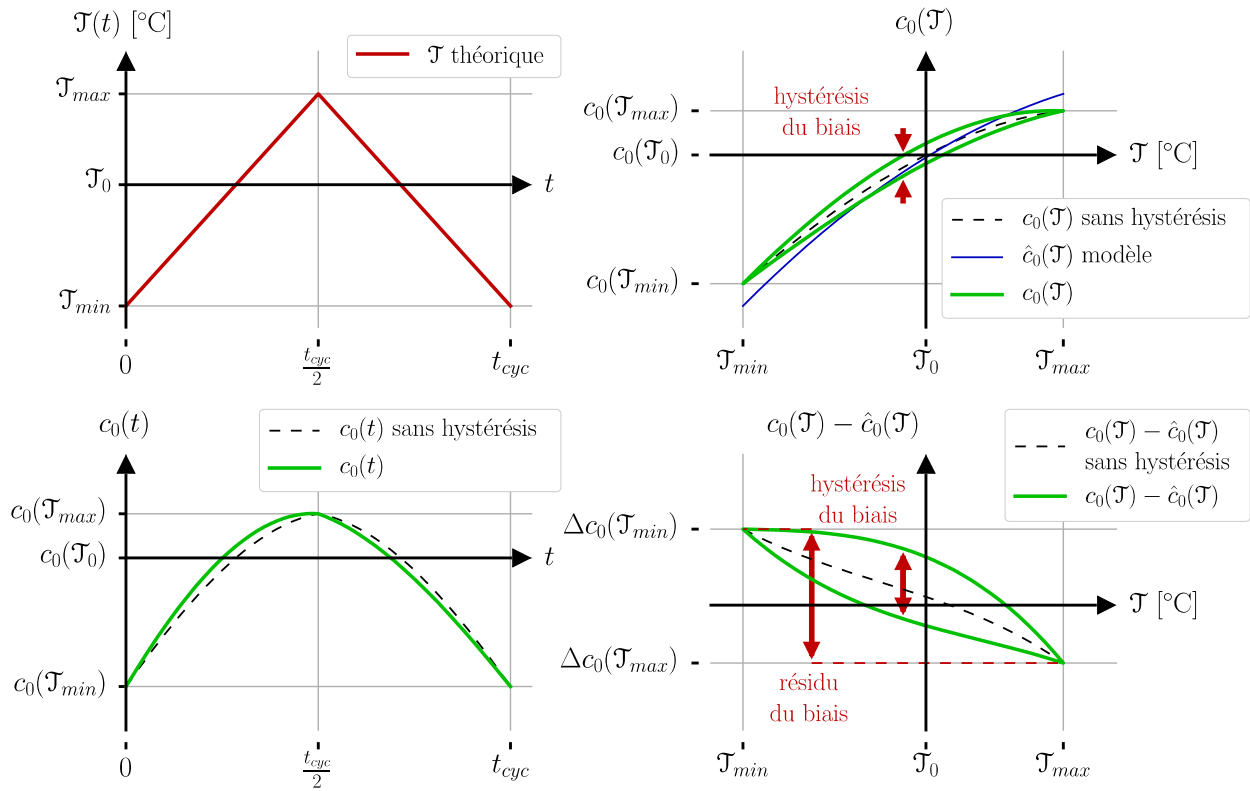


Figure 1.27 - Détermination théorique de l'hystérésis et du résidu

En pratique, pour s'affranchir des effets dynamiques dus aux variations thermiques, on n'utilise qu'un nombre fini de valeurs de la gamme de température, et on attend la stabilisation après chaque échelon de la commande. Aussi, on effectue plusieurs cycles thermiques pour valider la répétabilité du procédé. La figure 1.28 montre l'équivalent pratique du procédé théorique de la figure 1.27. On notera que l'on pourra négliger le résidu de biais lorsqu'il est de l'ordre de sa résolution (instabilité du biais).

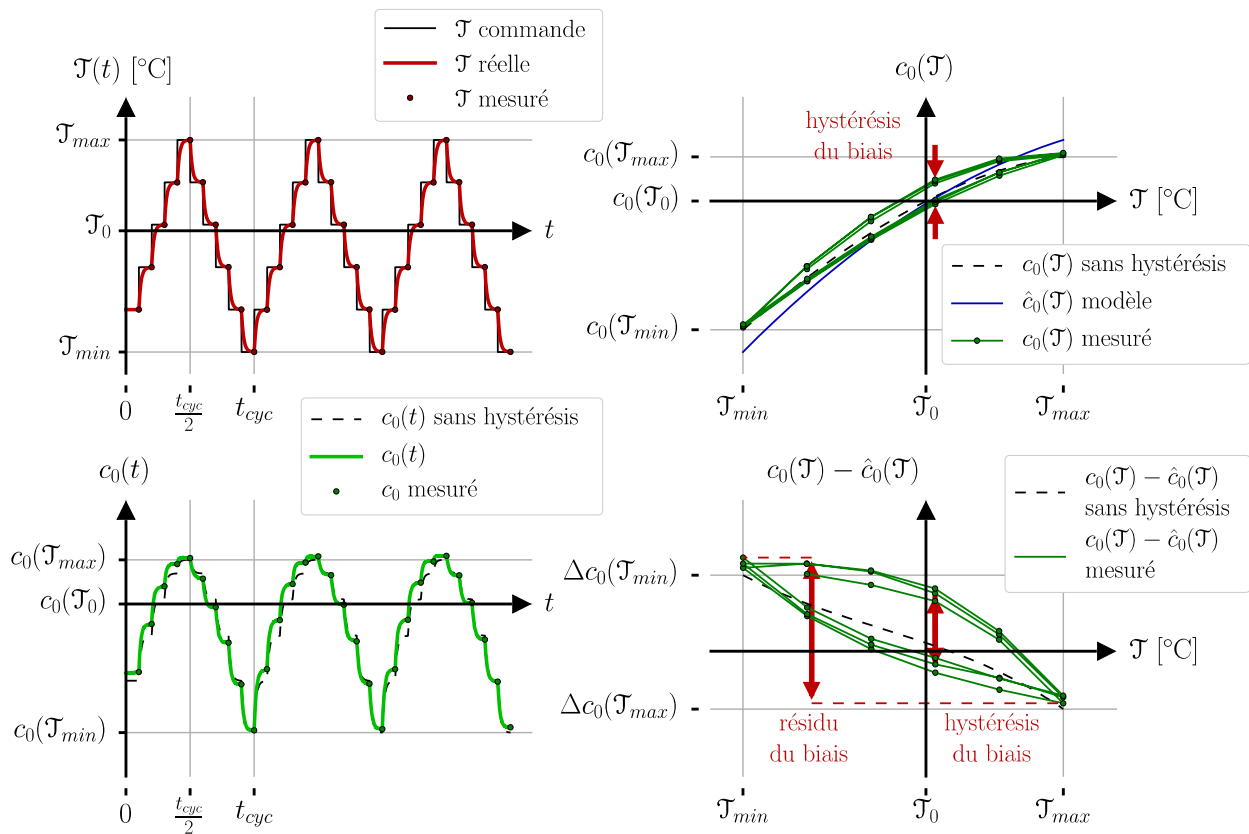


Figure 1.28 - Détermination pratique de l'hystérésis et du résidu

Pour définir la performance d'un capteur, on peut donc réaliser l'ensemble de ces processus de caractérisation, et en déduire l'étendue de mesure, le biais, le facteur d'échelle, la résolution du biais, la bande passante et les effets thermiques sur le biais et le facteur d'échelle. C'est le domaine d'application du capteur considéré qui détermine les exigences sur chacun de ces critères.

1.3.2 Pertinence du modèle de l'oscillateur résonnant pour les cellules en quartz

Les éléments résonnants des cellules en quartz sont des poutres vibrantes. Elles oscillent dans des configurations différentes en fonction du capteur, représentées sur la figure 1.29 : on parle de poutre encastree-encastree pour l'accéléromètre VIA, en haut à gauche, et de poutre encastree-libre pour le gyromètre VIG, en bas à droite [Kaaajakari 2004].

La structure présente une raideur k relativement à sa géométrie et à l'élasticité du matériau. En revanche, l'origine d'un amortissement fluide d dans l'équation du mouvement (1.13) est moins intuitive. Les cellules sont mises sous vide, si bien que l'amortissement fluide dû au gaz environnant la poutre vibrante n'est pas le contributeur prépondérant. Dans notre

contexte, on compte deux principaux phénomènes : les pertes thermo-élastiques, et les pertes visco-élastiques.

Les pertes visco-élastiques s'expliquent par la présence d'électrodes métalliques, généralement en or, le long des poutres en vibration, nécessaires à l'excitation et à la mesure piézoélectriques. Ces électrodes viennent perturber les propriétés résonnantes du quartz. La théorie de ce phénomène est développée dans [Le Traon 2010].

Les pertes thermo-élastiques sont dues à la déformation du matériau en vibration. Certaines zones du volume se voient comprimées, et donc échauffées (en rouge), pendant que d'autres sont étendues et refroidies (en bleu). Il en résulte des gradients de température, occasionnant des flux thermiques irréversibles, et une dissipation d'énergie équivalente à un amortissement fluide. Ce phénomène, bien connu dans le cadre des systèmes micromécaniques, est décrit dans [Zener 1937] et [Lifshitz 2000]. La figure 1.29 montre la formation des gradients thermiques lors d'une déformation.

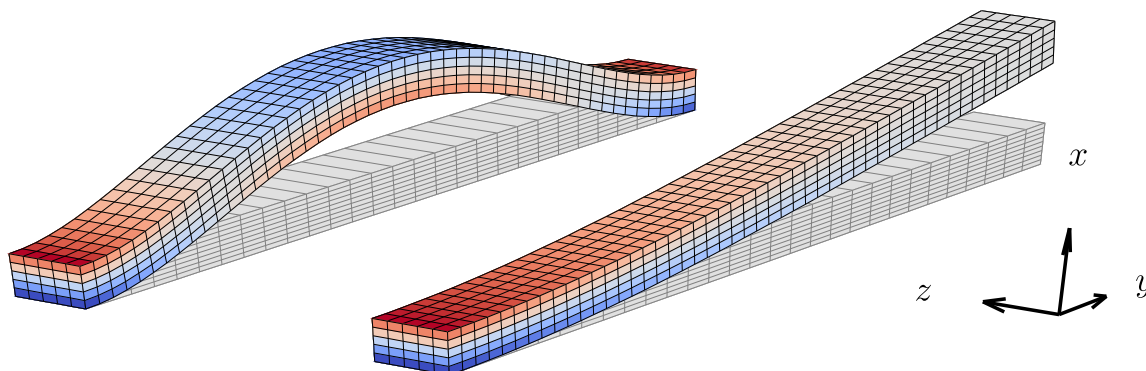


Figure 1.29 - Pertes thermo-élastiques dans les poutres vibrantes

1.3.3 VIA et DIVA : Accéléromètres à lame vibrante (VBA)

1.3.3.1 Principe de la mesure inertielle

Les accéléromètres mesurent l'accélération subie par l'instrument sur lequel ils sont embarqués ($e = \Gamma$). Pour les VBA, la grandeur intermédiaire effectivement mesurée, et permettant d'en déduire l'accélération correspondante, est une variation de fréquence ($s = \Delta f_0$).

L'accéléromètre à lame vibrante est constitué de deux éléments principaux : une masse d'épreuve et une lame vibrante. La masse d'épreuve m_0 est liée au cadre fixe par une raideur k unidimensionnelle. Son seul degré de déplacement par rapport à ce cadre est une

translation rectiligne $\mathbf{z} = z \mathbf{v}_z$ selon la direction sensible à l'accélération d'inertie d'entraînement $\mathbf{\Gamma} = \Gamma \mathbf{v}_z$. Cette accélération est subie par la masse d'épreuve dans le référentiel non galiléen du cadre fixe du capteur. Les deux extrémités de la lame vibrante sont solidaires de la masse d'épreuve d'une part et du cadre fixe d'autre part (poutre encastrée-encastrée [Kaajakari 2004]). La longueur $l(z) = l_0 + z$ de la lame est donc variable, et sa fréquence de résonance f_0 est fonction de cette longueur $f_0(l) \simeq \vartheta_1 l + \vartheta_0$ pour l proche de l_0 . Ces éléments sont représentés sur la figure 1.30. En pratique, la variation de la longueur l est imperceptible, et on évoque plutôt la relation affine entre la fréquence de résonance f_0 et la contrainte axiale subie par la poutre (homogène à une pression), entraînant une telle déformation.

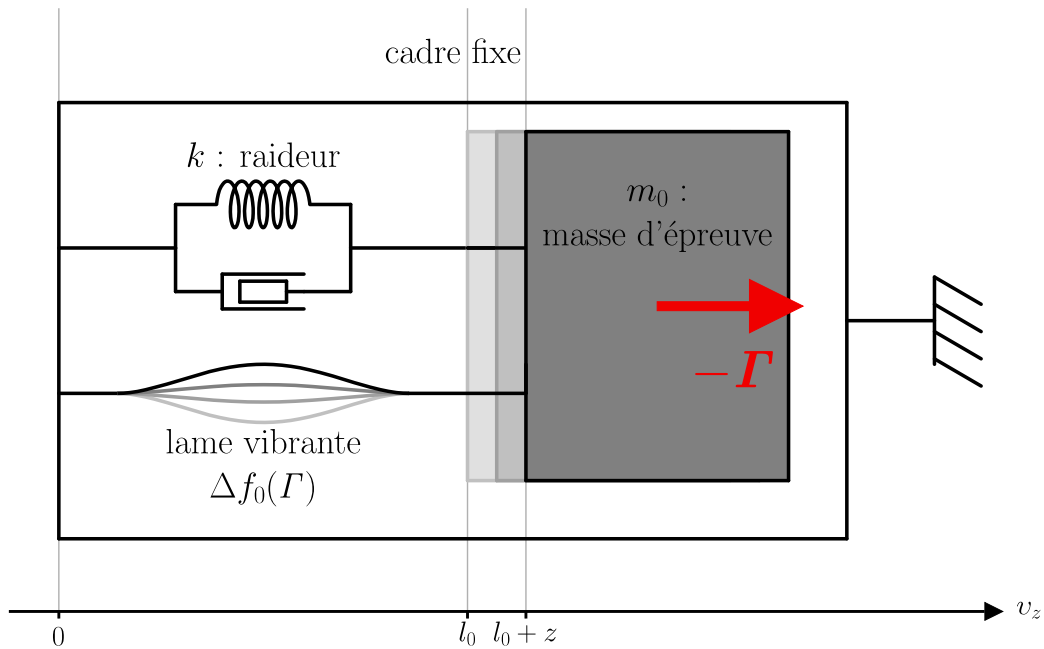


Figure 1.30 - Principe de fonctionnement de l'accéléromètre à lame vibrante

À chaque instant, on considère que la masse d'épreuve est à l'équilibre. On en déduit en (1.80) la relation au premier ordre entre la variation Δf_0 et l'accélération Γ . Il s'agit donc de l'estimateur \hat{h} de la fonction de transfert h du capteur, suivant le modèle (1.78), et faisant apparaître le facteur d'échelle c_1 . On remarque que le biais théorique c_0 est rigoureusement nul, la grandeur intermédiaire $s = \Delta f_0$ étant la variation d'une grandeur (ici la fréquence de résonance f_0 de la lame vibrante) par rapport sa valeur sous la condition $e_0 = \Gamma_0 = 0$. Cette affirmation n'est valable que pour cette modélisation, qui ne prend pas en compte les effets thermiques.

$$\hat{h}(\Gamma) = \Delta f_0(\Gamma) = -\frac{\vartheta_1 m_0}{k} \Gamma = c_1 \Gamma \quad (1.80)$$

La variation de fréquence de résonance s'observe sur le diagramme de Bode de la figure 1.31, représentant la réponse en amplitude de la lame vibrante en fonction de la fréquence d'excitation f , en pointillés lorsque $\Gamma=0$, et en traits pleins avec une accélération non nulle.

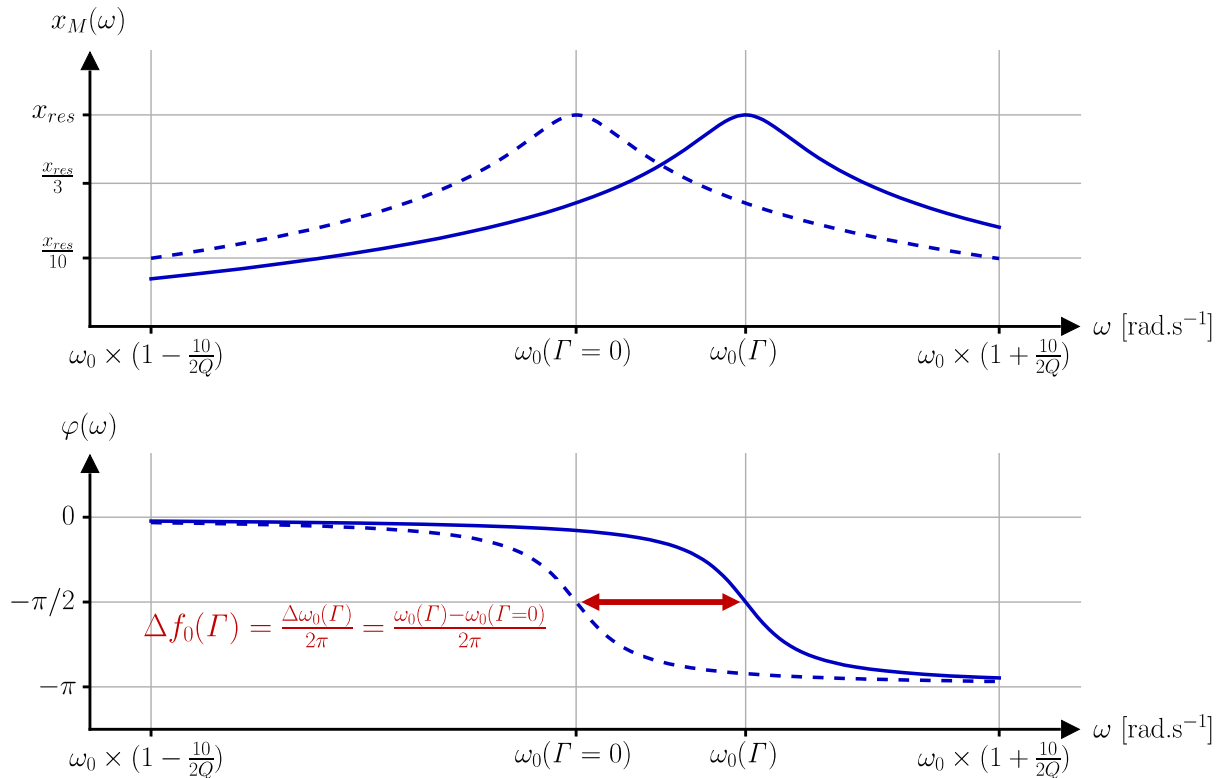


Figure 1.31 - Variation de la fréquence de résonance et asservissement de phase

En fonctionnement, on asservit la réponse mécanique à sa résonance à l'aide d'une boucle à verrouillage de phase, par rapport à l'excitation. En effet, autour de la résonance, la phase de la réponse est très sensible à la fréquence d'excitation, en raison du facteur de qualité élevé du résonateur. La mesure de la grandeur intermédiaire $s = \Delta f_0$ est ensuite effectuée en relevant directement la valeur de la commande de fréquence d'excitation exercée sur la lame vibrante. La performance de cet asservissement est un aspect crucial du développement logiciel, qui est développé dans la partie 3.3.5.

1.3.3.2 Caractéristiques de la cellule vibrante

Le résonateur VIA de l'ONERA est représenté sur la figure 1.32. L'excitation mécanique est effectuée par effet piézoélectrique indirect, et la mesure de l'amplitude réponse

est effectuée par effet piézoélectrique direct [Lippmann 1881][Curie 1880], par l'intermédiaire d'électrodes en or déposées le long de la lame vibrante.

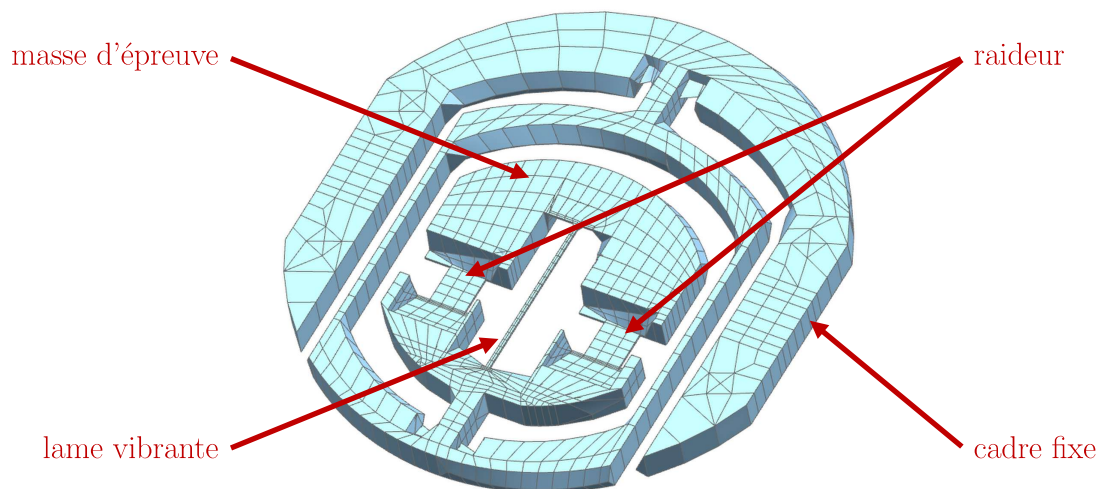


Figure 1.32 - Cellule en quartz du VIA

La principale difficulté rencontrée dans l'utilisation de ce résonateur est la très forte sensibilité thermique du biais et du facteur d'échelle. Dans la pratique, pour séparer les mesures des effets inertiels et des effets thermiques, on utilise deux cellules VIA disposées tête-bêche, de telle sorte que leurs vecteurs sensibles à l'accélération aient la même direction et des sens opposés. En combinant les mesures fréquentielles des deux lames vibrantes, au premier ordre, la mesure inertielle est observée sur le mode différentiel, et la mesure de température sur le mode commun.

Pour optimiser l'utilisation de ce fonctionnement différentiel, on utilise le DIVA, première déclinaison du VIA, et représenté sur la figure 1.33. Sur cette cellule, les deux résonateurs sont gravés dans la même pièce de quartz, améliorant l'appariement des comportements thermiques.

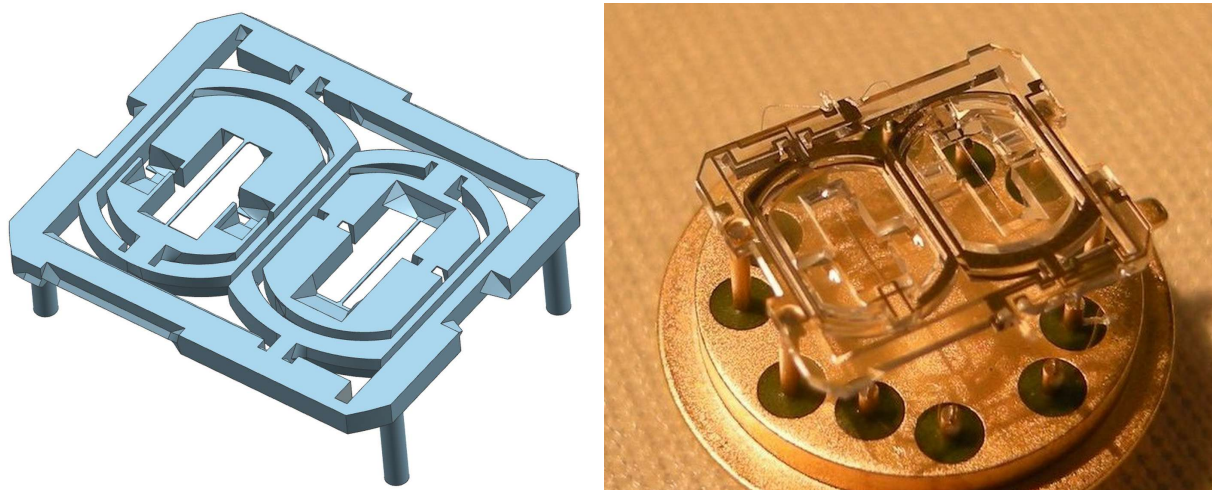


Figure 1.33 - Cellule en quartz du DIVA

Le tableau 1.1 rassemble les caractéristiques géométriques et de résonance de la cellule DIVA [Le Traon 2018][Le Traon 2012][Le Traon 2006][Le Traon 1998].

Caractéristique	Valeur
Dimension de la cellule [mm]	$8.6 \times 7.2 \times 0.5$
Dimension de la lame [μm]	$68 \times 30 \times 2\,260$
Fréquence de résonance [Hz]	$\simeq 60\,000$
Facteur de qualité [1]	$\simeq 15\,000$

Tableau 1.1 - Caractéristiques géométriques et de résonance de la cellule DIVA

Le tableau 1.2 rassemble les performances du capteur réalisé à partir de la cellule DIVA. Il ne s'agit pas de performances finales effectivement atteintes par le capteur, mais de limites physiques imposées par la cellule seule, de telle sorte qu'on ne puisse espérer mieux après intégration complète avec l'électronique et le logiciel. Notamment, la contribution mécanique à la limitation de la bande passante correspond à la fréquence de résonance de la raideur k (combinée à un amortissement d non représenté sur la figure 1.30), qui est de l'ordre de 2 kHz. Les effets thermiques sont exprimés relativement à la gamme de température $[-40\text{ °C}, 80\text{ °C}]$. Les sensibilités et hystérésis thermiques sont données en valeurs maximales, et les résidus en valeurs efficaces (rms) [Le Traon 2018][Le Traon 2012][Le Traon 2006][Le Traon 1998].

Caractéristique	Valeur
Étendue de mesure [g]	$\simeq [-50, 50]$
Facteur d'échelle [Hz/g]	$\simeq 20$
Résolution du biais [μg]	$\simeq 1$
Bande passante [Hz]	$> 1\,000$
Sensibilité thermique du biais [$\mu\text{g}/^\circ\text{C}$]	$\simeq 100$
Sensibilité thermique du facteur d'échelle [Hz/g/ $^\circ\text{C}$]	$\simeq 3 \times 10^{-5}$
Hystérésis thermique du biais [μg]	$\simeq 80$
Hystérésis thermique du facteur d'échelle [Hz/g]	$\simeq 300$
Résidu thermique du biais [$\mu\text{g rms}$]	$\simeq 25$
Résidu thermique du facteur d'échelle [$\mu\text{Hz/g rms}$]	$\simeq 300$

Tableau 1.2 - Performances inertielles de la cellule DIVA

1.3.4 VIG : Gyromètre vibrant

1.3.4.1 Principe de la mesure inertielle et régime « open-loop »

Les gyromètres mesurent la vitesse de rotation de l'instrument dans lequel ils sont embarqués ($e = \Omega$). Le principe des gyromètres mécaniques repose sur l'exploitation de l'accélération de Coriolis. On utilise le résonateur plan de Lynch avec modes perpendiculaires et grands facteurs de qualité, étudié dans la partie 1.2.3, décrit sur la figure 1.12, et repris sur la figure 1.34. L'accélération de Coriolis \mathbf{a}_c est liée à la vitesse de la masse de l'oscillateur $d\mathbf{r}/dt$ et à la rotation de l'instrument Ω selon la formule (1.81).

$$\mathbf{a}_c = 2 \, \Omega \wedge \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (1.81)$$

La composante de la rotation que l'on peut mesurer est la composante Ω normale au plan de l'oscillateur.

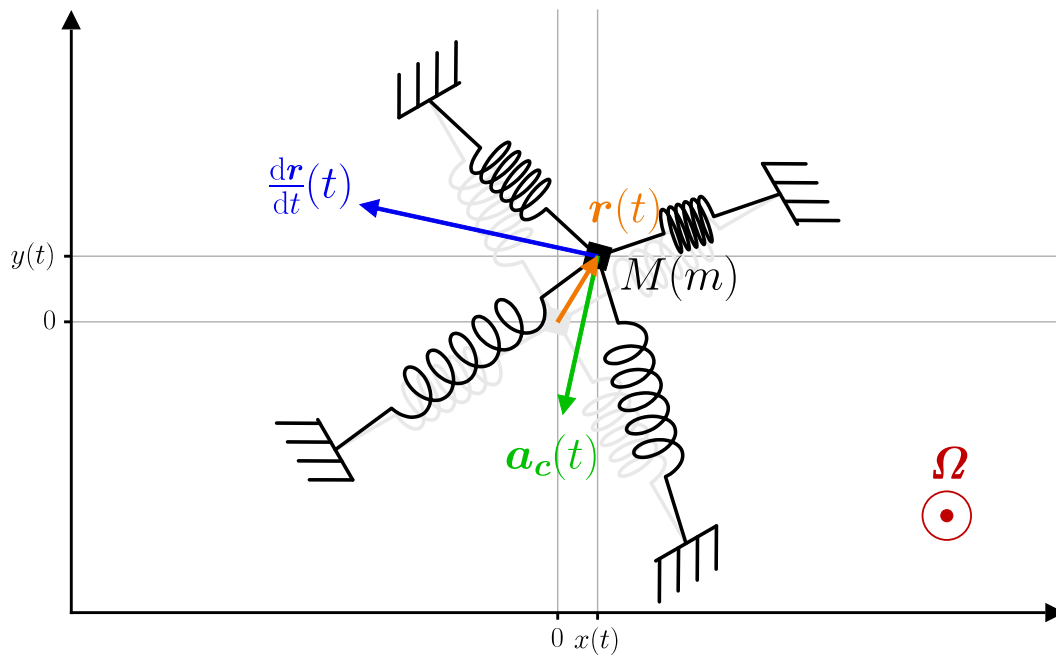


Figure 1.34 - Résonateur plan et rotation normale

Selon les caractéristiques de résonance de la cellule (notamment ω_x , ω_y , α_x et α_y), on peut considérer plusieurs régimes de fonctionnement du gyromètre vibrant, qui exploitent différemment l'effet de l'accélération de Coriolis pour déterminer la rotation de l'instrument. On compte les régimes « open-loop », « force-rebalance » et « whole-angle » [Lynch 1998] [Lynch 1995].

Le régime « open-loop » est utilisé notamment lorsque les fréquences de résonance des deux modes sont bien séparées. Un des deux modes est appelé le mode pilote (x), dont l'oscillation mécanique est maintenue à sa résonance ω_x par une excitation commandée en fréquence, phase et amplitude. L'accélération de Coriolis est reportée sur le second mode, dit mode détecteur (y).

Pour réaliser la mesure gyrométrique, on fait la division des amplitudes complexes de ces deux modes de vibration, dont les expressions ont été établies en (1.60) et (1.61). La grandeur intermédiaire effectivement mesurée par le capteur est alors un rapport d'amplitudes complexes ($s = y_M / x_M$). En admettant donc que le mode pilote est excité à sa résonance ($\Delta\omega = 0$), on obtient :

$$\hat{h}(\Omega) = \frac{y_M}{x_M}(\Omega) = c_1 \times \Omega + c_0 \quad (1.82)$$

Le facteur d'échelle $SF = c_1$ et le biais c_0 étant donnés par :

$$\begin{cases} c_1 = -\frac{2\omega_x}{i\omega\Delta\omega_{xy}(1 + \cos(2\theta_\omega)) + \omega_x(2\alpha_{xy} - \Delta\alpha_{xy}\cos(2\theta_\alpha))} \\ c_0 = \frac{i\omega\Delta\omega_{xy}\sin(2\theta_\omega) - \omega_x\Delta\alpha_{xy}\sin(2\theta_\alpha)}{i\omega\Delta\omega_{xy}(1 + \cos(2\theta_\omega)) + \omega_x(2\alpha_{xy} - \Delta\alpha_{xy}\cos(2\theta_\alpha))} \end{cases} \quad (1.83)$$

On simplifie ces expressions en considérant les hypothèses des modes de résonance séparés et des grands facteurs de qualité étudiées dans la partie précédente, et matérialisées par les équations (1.57), (1.58) et (1.59). Dans la configuration la plus simple, c'est-à-dire avec tous les systèmes d'axes alignés ($\theta_\omega = \theta_\alpha = 0$), et les facteurs de qualité égaux pour les deux modes ($\Delta\alpha_{xy} = 0$), on obtient :

$$\left. \begin{array}{l} c_1 \simeq \frac{i\omega_x}{\omega\Delta\omega_{xy}} \\ c_0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{y_M}{x_M}(\Omega) = \frac{i\omega_x}{\omega\Delta\omega_{xy}} \times \Omega \quad (1.84)$$

Dans ces conditions, les oscillations des deux modes sont en quadrature de phase, ce qui correspond à une ouverture de l'ellipse de vibration proportionnelle à la rotation Ω , comme représentée sur la figure 1.35.

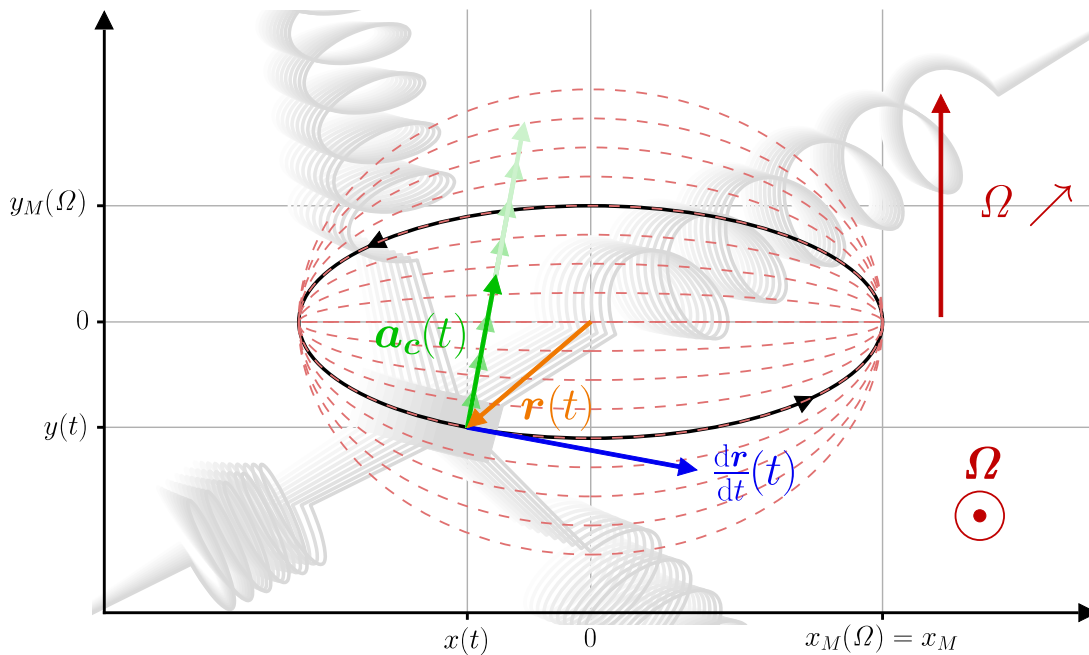


Figure 1.35 - Forme des oscillations dans le mode « open-loop »

C'est ce régime « open-loop » qui est utilisé pour les cellules VIG de l'ONERA, car il est le plus adapté. On présente tout de même rapidement les deux régimes suivants dans la perspective éventuelle d'un élargissement du développement des gyromètres à l'ONERA.

1.3.4.2 Régimes « force-rebalance » et « whole-angle »

Le régime « force-rebalance » est proche du régime « open-loop », dans le sens où il est aussi utilisé lorsque les fréquences de résonance des deux modes sont séparées. En revanche, dans ce régime, il est nécessaire de pouvoir exercer une excitation mécanique sur les deux modes de vibration. En plus de maintenir le mode pilote à sa résonance, on asservit le mode détecteur à une amplitude nulle. L'excitation appliquée sur le mode détecteur a donc pour effet de compenser l'accélération de Coriolis. La grandeur intermédiaire du capteur est alors le rapport des deux accélérations appliquées aux deux modes de vibration ($s = |a_{yM} / a_{xM}|$), dont la mesure est effectuée en relevant directement les valeurs des commandes des asservissements. On obtient la fonction de transfert suivante :

$$\hat{h}(\Omega) = \frac{a_{yM}}{a_{xM}}(\Omega) = c_1 \times \Omega = \frac{2Q_x}{\omega_x} \times \Omega = \frac{1}{\alpha_x} \times \Omega \quad (1.85)$$

Avec a_{xM} et a_{yM} les accélérations d'excitation appliquées respectivement sur le mode pilote et sur le mode détecteur, et c_1 le facteur d'échelle du capteur. En pratique, sur les cellules de l'ONERA, on fait le rapport des tensions appliquées sur chacun des modes, en pondérant avec les coefficients piézoélectriques de la structure vibrante.

De cette façon, la forme des oscillations représentée sur la figure 1.36 est invariante par rapport à Ω , et est maintenue à une trajectoire quasi-rectiligne.

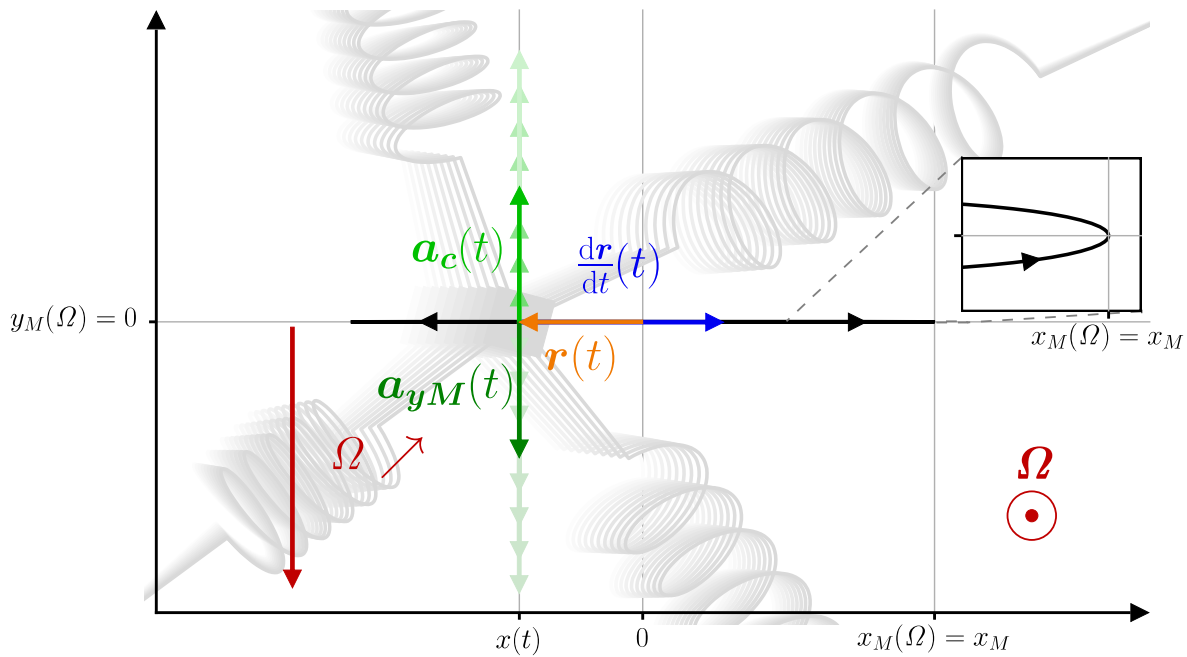


Figure 1.36 - Forme des oscillations dans le mode « force-rebalance »

Finalement, le régime « whole-angle » est généralement utilisé lorsque les fréquences de résonance des deux modes sont appariées. Les deux modes sont excités à leur résonance à la même pulsation $\omega_x = \omega_y$, et avec la même phase. Les deux amplitudes réponses sont donc en phase, et la trajectoire des oscillations dans le plan est alors rectiligne. L'asservissement est réalisé de telle sorte que l'amplitude soit entretenue tout en laissant libre l'angle θ de la trajectoire dans le référentiel de l'instrument, représenté sur la figure 1.37. La vibration est dite inertielle, la direction de la trajectoire étant fixe dans le référentiel galiléen. Dans ce régime, le capteur n'est pas un gyromètre, car on ne mesure pas la vitesse de rotation, mais la grandeur intégrale correspondante θ , et devient un gyroscope, avec :

$$\theta(t) - \theta(t_0) = \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \Omega(\tau) d\tau \quad (1.86)$$

Le régime « whole-angle » est notamment celui du bien connu pendule de Foucault, utilisé pour mesurer la révolution de la Terre [Foucault 1852].

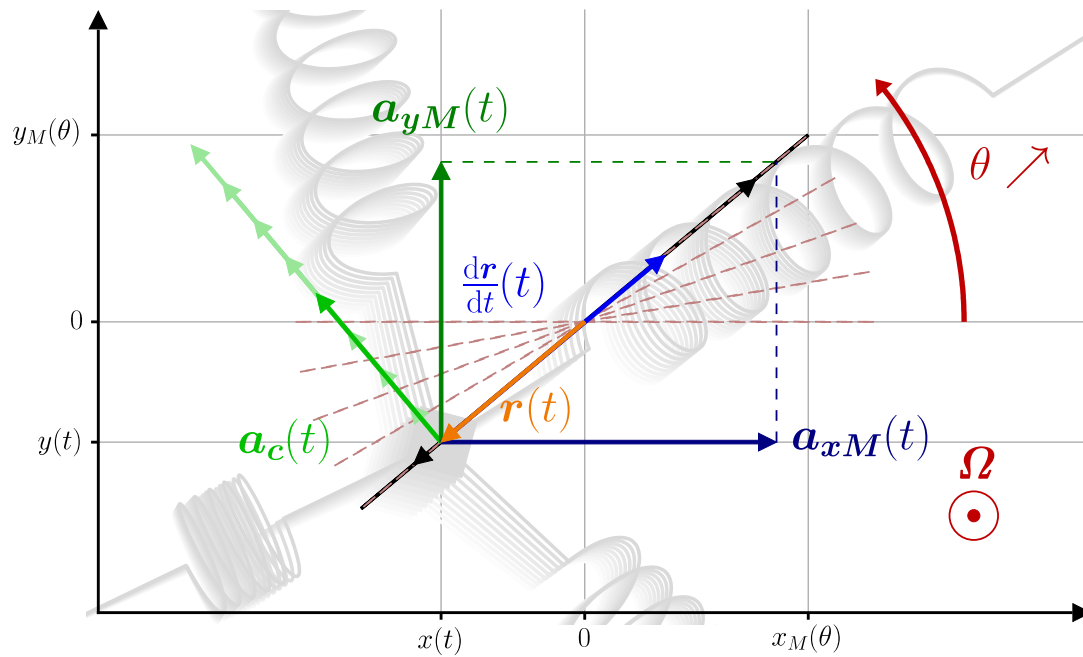


Figure 1.37 - Forme des oscillations dans le mode « whole-angle »

1.3.4.3 Caractéristiques de la cellule vibrante

Le résonateur VIG de l'ONERA est représenté sur la figure 1.38. La géométrie est celle d'un diapason (poutres encastrées-libres [Kaajakari 2004]) dont le plan des branches est celui du wafer. Les deux modes des oscillations sont aussi représentés sur la figure 1.38 : le mode pilote est dans le plan des branches, et le mode détecteur est perpendiculaire au mode pilote.

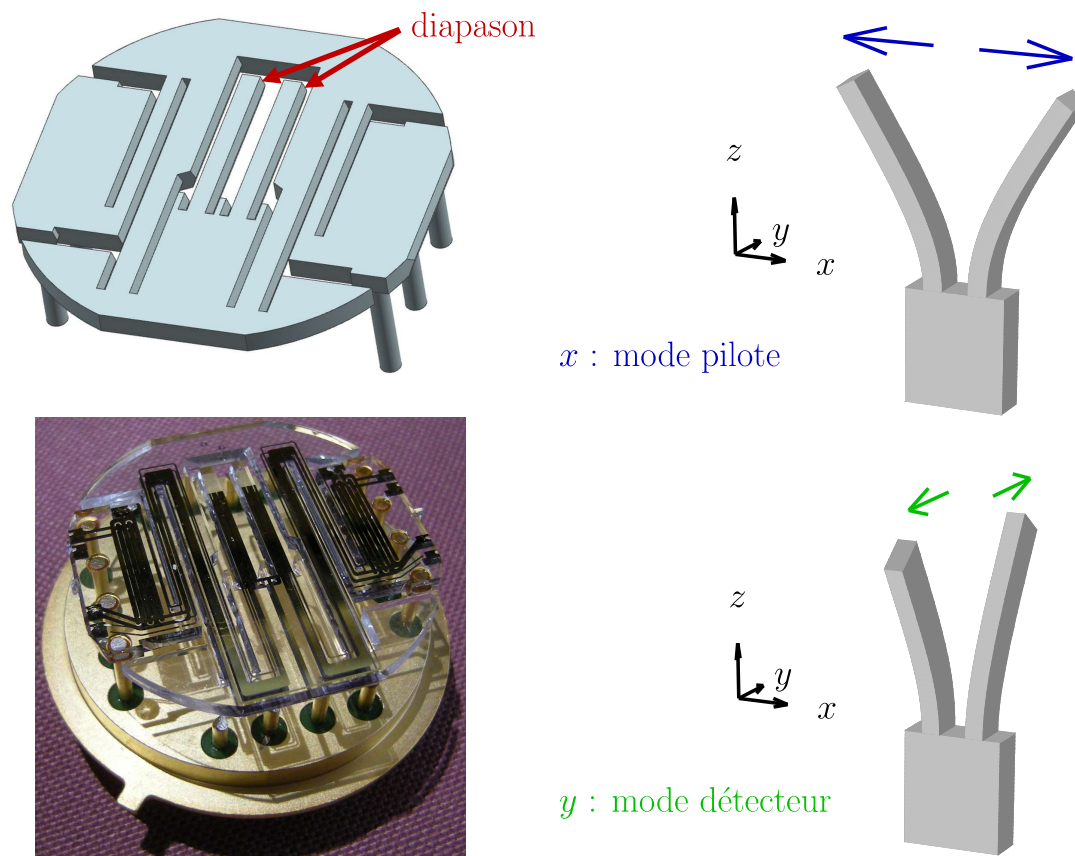


Figure 1.38 - Cellule en quartz du VIG et modes de vibration

L'excitation mécanique et la mesure des amplitudes réponses sont effectuées par effet piézoélectrique par l'intermédiaire d'électrodes en or déposées le long des branches. L'architecture actuelle de la structure en quartz et de ses électrodes ne permet pas d'exercer une excitation mécanique du mode détecteur. Par ailleurs, les procédés technologiques, en particulier les procédés de gravure, ne permettent pas de maîtriser l'appariement des fréquences de résonance des deux modes. On travaille donc exclusivement en régime « open-loop ».

Le tableau 1.3 rassemble les caractéristiques géométriques et de résonance de la cellule VIG [Guerard 2014][Le Traon 2012][Descharles 2011][Parent 2008][Parent 2007].

Caractéristique	Valeur
Dimension de la cellule [mm]	$9 \times 9 \times 0.5$
Dimension de la lame [μm]	$500 \times 450 \times 4\,500$
Fréquences de résonance (pilote et détecteur) [Hz]	$\simeq 30\,000$
Facteurs de qualité (pilote et détecteur) [1]	$\simeq 150\,000$
Écart entre les fréquences de résonance [Hz]	$\simeq 500$

Tableau 1.3 - Caractéristiques géométriques et de résonance de la cellule VIG

Le tableau 1.4 rassemble les performances du capteur réalisé à partir de la cellule VIG. Il ne s'agit pas de performances finales effectivement atteintes par le capteur, mais de limites physiques imposées par la cellule seule, de telle sorte qu'on ne puisse espérer mieux après intégration complète avec l'électronique et le logiciel. Notamment, la contribution mécanique à la limitation de la bande passante correspond à l'écart entre les fréquences de résonance des deux modes pilote et détecteur. Les effets thermiques sont exprimés relativement à la gamme de température $[-40\text{ °C}, 80\text{ °C}]$. Les sensibilités et hystérésis thermiques sont données en valeurs maximales, et les résidus en valeurs efficaces (rms) [Guerard 2014][Le Traon 2012][Descharles 2011][Parent 2008][Parent 2007].

Caractéristique	Valeur
Étendue de mesure [$^{\circ}/\text{s}$]	$\simeq [-500, 500]$
Facteur d'échelle [$(^{\circ}/\text{s})^{-1}$]	$\simeq 5 \times 10^{-6}$
Résolution du biais [$^{\circ}/\text{h}$]	$\simeq 0.5$
Bande passante [Hz]	$\simeq 100$
Sensibilité thermique du biais [$(^{\circ}/\text{h})/^{\circ}\text{C}$]	$\simeq 20$
Hystérésis thermique du biais [$^{\circ}/\text{h}$]	$\simeq 25$
Résidu thermique du biais [$^{\circ}/\text{h}$ rms]	$\simeq 9$

Tableau 1.4 - Performances inertielles de la cellule VIG

1.4 Conclusion : développement parallèle de l'algorithmique de traitement du signal et de l'intégration de capteurs

Ce Chapitre 1 a eu pour objectif principal d'établir les expressions analytiques nécessaires dans la suite du texte. Ces expressions sont exploitées selon deux axes d'étude distincts, mais interdépendants : le développement et la caractérisation d'algorithmes d'étalonnage de capteurs dans le Chapitre 2, et l'intégration électronique et logicielle des capteurs inertiels dans le Chapitre 3.

Ces deux thèmes peuvent donc être considérés séparément, l'un après l'autre, dans l'ordre préférentiel du lecteur, ou bien en parallèle. Les dépendances se matérialiseront par des renvois entre ces chapitres qui justifieront les orientations de recherche et de développement retenues.

La principale de ces dépendances concerne les atouts et les limitations de l'architecture numérique du capteur qui contraignent les choix des algorithmes d'étalonnage. En effet, cette architecture, détaillée dans le Chapitre 3, permet une commande précise et synchrone de la fréquence et de la phase d'excitation de la cellule vibrante, à une cadence, égale à celle de mesure, de quelques dizaines périodes d'oscillations (de l'ordre de 100Hz pour le gyromètre, et de l'ordre de 1 000Hz pour l'accéléromètre). Ces ordres de grandeur, entre autres, seront des critères essentiels et systématiquement rappelés tout au long du Chapitre 2.

L'objectif de la suite du texte est de concevoir des capteurs inertiels sur une architecture numérique sur FPGA, en approchant au mieux les résolutions de mesure obtenues avec les architectures antérieures. Cette composante numérique doit permettre une grande flexibilité de pilotage des capteurs, à travers les opérations d'excitation, de mesure, d'asservissement et d'étalonnage, donnant ainsi accès à une classe de capteurs plus fiables et plus performants.

Chapitre 2

Développement de méthodes d'étalonnage

Chapitre 2 Développement de méthodes d'étalonnage.....	73
2.1 Principes généraux.....	75
2.2 Cas de l'accéléromètre et des régimes stationnaires.....	76
2.2.1 Contexte.....	76
2.2.2 Développement théorique dans le cas linéaire.....	78
2.2.2.1 Séquence de pilotage du résonateur.....	78
2.2.2.2 Établissement des estimateurs.....	81
2.2.3 Développement théorique dans le cas non linéaire.....	83
2.2.4 Détermination de l'amplitude hors résonance.....	86
2.2.5 Cas particulier de l'hystérésis.....	90
2.2.6 Domaine et vitesse de convergence.....	92
2.2.6.1 Notations et détermination d'un critère.....	92
2.2.6.2 Théorème du point fixe.....	94
2.2.6.3 Cas de l'estimateur grossier de l'amplitude hors résonance.....	95
2.2.7 Stabilité en présence de sources de bruits.....	97
2.2.7.1 Développement analytique.....	97
2.2.7.2 Résultats de simulations numériques.....	99
2.2.8 Perspectives : généralisation à un nombre quelconque de points de mesure.....	101
2.3 Cas du gyromètre et des régimes transitoires.....	103
2.3.1 Contexte.....	103
2.3.2 Extraction de paramètres à partir d'un unique régime transitoire.....	104
2.3.2.1 Introduction aux spirales logarithmiques.....	104
2.3.2.2 Mesures à intervalles de temps réguliers.....	105
2.3.2.3 Stabilité des spirales logarithmiques par moyennage.....	107
2.3.2.4 Optimisation des estimateurs en présence de sources de bruits.....	108
2.3.2.5 Performances théoriques et simulées de l'étalonnage dans le cas du VIG....	111
2.3.3 Perspectives : extraction de paramètres sous modulation d'excitation.....	113
2.3.3.1 Configuration par défaut et notations.....	113
2.3.3.2 Développements asymptotiques et estimateurs.....	115

2.4 Conclusion : implémentation des algorithmiques d'étalonnage.....118

2.1 Principes généraux

Les principes physiques fondamentaux étant posés, il convient de considérer un aspect essentiel du développement des capteurs inertiels : l'étalonnage. On parle aussi de calibration.

Le capteur électromécanique est caractérisé par la donnée de plusieurs paramètres, qui ont été pour certains définis dans la partie 1.3 (étendue de mesure, biais, facteur d'échelle), ou qui sont spécifiques à l'architecture utilisée pour d'autres (couplages capacitifs, mécaniques, gains et déphasages électroniques, et divers effets non linéaires). Ces paramètres sont sensibles à l'environnement du capteur, notamment aux effets thermiques, comme cela a déjà pu être évoqué dans la partie 1.3 (sensibilités, hystérésis et résidus du biais et du facteur d'échelle).

L'intérêt de l'étalonnage est d'évaluer l'évolution de ces paramètres, dont la connaissance est indispensable pour assurer une mesure inertielle fiable. Dans notre cas, les procédés considérés consistent à faire subir des scénarios très particuliers de pilotage de l'excitation électronique de la cellule, en jouant judicieusement sur sa fréquence, son amplitude et sa phase. La mesure de la réponse électronique résultante fournit alors l'information nécessaire pour mettre à jour les valeurs de ces paramètres.

On peut distinguer plusieurs types d'étalonnage :

- Les étalonnages sur table, ou calibrations sur table (en anglais : « calibration procedures with calibration-table » [Dorveaux 2009] ou « instruction-based calibration » [Martin 2016]) sont les plus classiques. Il s'agit d'étudier le capteur dans un environnement contrôlé, en imposant la valeur de grandeurs parmi, par exemple, la température, l'humidité, le champ magnétique et l'inertie. La connaissance de ces données permet un étalonnage fiable à partir de calculs les plus simples possible sur la mesure de la réponse. Ce procédé est adapté aux paramètres qui doivent être mesurés très précisément, et qui sont stables et robustes au vieillissement. Ces calibrations ne sont en général réalisées qu'une seule fois dans la vie du capteur, au moment de sa fabrication. Ainsi, la durée du processus d'étalonnage n'est pas un critère critique.
- Les auto-étalonnages statiques, ou auto-calibrations statiques (en anglais : « static self-test » [Schalk 2003] ou « static self-calibration ») ne nécessitent pas la connaissance des variables d'environnement. Les scénarios d'excitation et les calculs effectués sur la mesure sont alors souvent plus élaborés que dans le cas des étalonnages sur table. En contre-partie, le procédé peut être effectué régulièrement

dans le temps, et de manière autonome par l'instrument. On peut ainsi mettre à jour la valeur des paramètres qui varient au cours de l'utilisation de l'instrument. En revanche, pendant le temps de l'étalonnage, la mesure inertielle n'est plus possible et doit être interrompue [Bauer 2001]. Cet aspect est la caractéristique principale de la dernière catégorie.

- Les auto-étalonnages permanents, ou auto-calibrations permanentes (en anglais : « permanent/on-going/time-continuous self-test or self-calibration » [Schalk 2003] [Bauer 2001][Aikele 2000]) sont une extension idéale de la catégorie précédente, où la mesure inertielle peut être effectuée en parallèle de l'étalonnage, sans être interrompue. Dans la pratique, ils sont délicats à mettre en œuvre, mais sont très recherchés lorsque l'exigence de résolution temporelle de mesure de l'instrument est élevée. Les principes exploités sont en général l'utilisation d'une composante fréquentielle supplémentaire du signal de réponse [Prihodko 2013][Link 2005][Schalk 2003][Bauer 2001][Aikele 2000], ou la redondance de capteurs à auto-étalonnage statique : chacun passe à tour de rôle dans un mode d'étalonnage pendant que les autres assurent la mesure inertielle [Rozelle 2011].

Les séquences de calibrations sur table sont les plus simples, mais elles ne suffisent pas pour assurer une mesure inertielle fiable. Il faut inclure des auto-calibrations dans le fonctionnement normal de l'instrument, qui nécessitent un développement algorithmique plus poussé. Ce chapitre présente quelques exemples et pistes permettant d'atteindre cet objectif pour les capteurs de l'ONERA.

Étant donné que les caractéristiques des accéléromètres et des gyromètres diffèrent fortement, notamment en termes de facteur de qualité des résonateurs, l'évaluation d'un même paramètre s'effectuera différemment d'un cas à l'autre.

2.2 Cas de l'accéléromètre et des régimes stationnaires

2.2.1 Contexte

L'accéléromètre VIA possède un facteur de qualité de quelques milliers et une fréquence de résonance de l'ordre de quelques dizaines de kHz (voir partie 1.3.3). Le temps de réponse de la cellule vibrante est alors de l'ordre de quelques centièmes de seconde (formules (1.39) et (1.40) de l'analyse des régimes transitoires des résonateurs). En mode de mesure ininterrompu, l'architecture électronique utilisée et développée dans le Chapitre 3 permet une

transmission des données avec une cadence de l'ordre d'une cinquantaine de points de mesure d'amplitude par seconde. On a donc très peu de points de mesure, quelques unités seulement, pour décrire l'évolution des amplitudes sur un régime transitoire. En revanche, ce temps de réponse très faible permet d'exploiter la mesure de plusieurs états stationnaires distincts sur une durée de l'ordre de quelques secondes.

Le facteur de qualité de l'accéléromètre est plus faible que celui du gyromètre, mais il reste largement assez grand pour se placer dans l'approximation de la partie 1.2.1 où la représentation des états stationnaires dans le plan de Nyquist est un cercle (figure 1.6), et dont on reprend ici la théorie et les notations sur la figure 2.1.

Pour alléger les calculs, on fait une exception pour les noms des coordonnées du plan de Nyquist, qui passent dans cette partie 2.2 de (x_{Mp}, x_{Mq}) à (x, y) , et avec $x_M = \sqrt{x_{Mp}^2 + x_{Mq}^2}$ et $x_{res} = x_M(\omega_0)$ qui deviennent respectivement $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $z_{res} = z(\omega_0)$ (changements de notation spécifique à l'ensemble du Chapitre 2). À ne pas confondre avec les notations de la partie 1.2.3 : on ne considère ici bien qu'un unique mode de résonance.

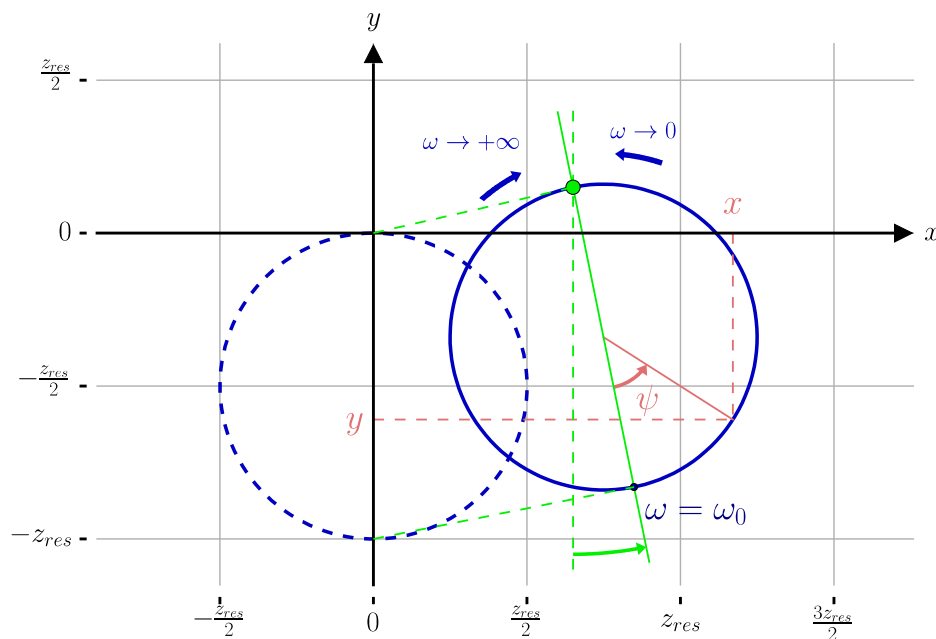


Figure 2.1 - Amplitudes des états stationnaires dans le plan de Nyquist

On représente également en vert le point hors résonance, dit pied du cercle, et l'axe du diamètre qui passe par ce point, que l'on appellera axe du cercle. L'angle de cet axe et la position de ce pied correspondent aux effets décrits dans la partie 1.2.5. Calibrer l'instrument, c'est donc d'abord déterminer précisément d'une part les paramètres géométriques de ce cercle et de son axe, pour le déplacer vers sa position de référence de la

figure 1.6 et en pointillés sur la figure 2.1, et d'autre part les caractéristiques du parcours en fréquence correspondant (1.29), que l'on rappelle ici en (2.1) :

$$\omega(\psi) = \omega_0 \left(1 - \frac{\tan\left(\frac{\psi}{2}\right)}{2Q} \right), \quad \psi \in \left[-\pi + \frac{1}{Q}, \pi - \frac{1}{Q} \right] \quad (2.1)$$

Avec ω_0 la pulsation de résonance, Q le facteur de qualité, et ψ l'angle polaire pris au centre du cercle de la figure 2.1. Pour les commodités du calcul, on utilise la demi-largeur de bande passante à -3 dB, $\alpha = \omega_0/(2Q)$, à la place du facteur de qualité. On obtient alors :

$$\omega(\psi) = \omega_0 - \alpha \tan\left(\frac{\psi}{2}\right), \quad \psi \in \left[-\pi + \frac{2\alpha}{\omega_0}, \pi - \frac{2\alpha}{\omega_0} \right] \quad (2.2)$$

Chaque point de ce cercle est donc atteignable et mesurable en réalisant des sauts de fréquence d'excitation, avec la contrainte du temps de réponse du résonateur. Dans le cas de l'accéléromètre, ce temps est suffisamment faible pour permettre des calibrations de l'ordre de la seconde.

2.2.2 Développement théorique dans le cas linéaire

2.2.2.1 Séquence de pilotage du résonateur

On commence avec l'étude de propriétés géométriques simples : il suffit de 3 points d'un cercle pour en déterminer sa position et sa taille. Il s'agit du cercle circonscrit au triangle formé par les 3 points, représenté sur la figure 2.2. En supposant que l'un de ces 3 points est le point hors résonance, on en déduit également le pied et l'axe.

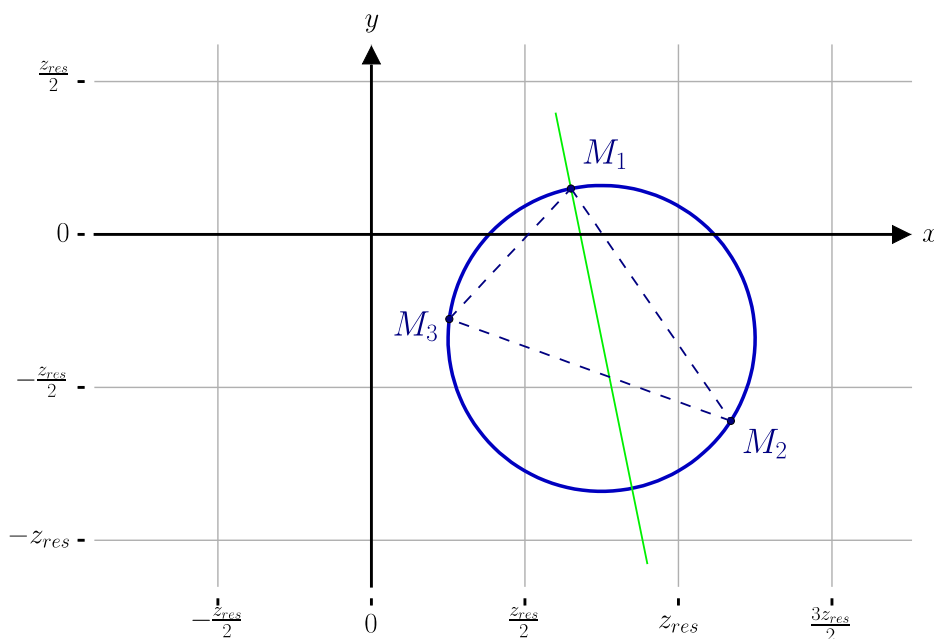


Figure 2.2 - Unique cercle passant par 3 points

Cette première étape ne présente pas de difficulté théorique particulière. Le sujet principal de cette partie est donc la détermination des paramètres restants, à savoir la pulsation de résonance ω_0 et le facteur de qualité Q (ou de manière équivalente la demi-largeur α) à partir de mesures d'amplitudes réponses stationnaires.

La première hypothèse est la suivante : on suppose que la pulsation de résonance est déjà connue approximativement, comme étant $\tilde{\omega}_0 \simeq \omega_0$, à minima de telle sorte que l'amplitude de la réponse mesurée pour $\omega_a = \omega = \tilde{\omega}_0$ soit non négligeable. Cette condition est naturelle, car on ne peut espérer commencer une étude quelconque des propriétés d'un résonateur si toutes les mesures d'amplitude sont nulles. Malgré les effets de l'environnement et de vieillissement, dans la pratique, la valeur déterminée lors de la caractérisation à la fabrication de la cellule permet de valider aisément cette hypothèse.

La première approche choisie est celle d'un nombre de mesures minimal, dans la perspective d'une calibration la plus rapide possible. La méthode retenue consiste à choisir 5 amplitudes stationnaires, et donc 5 pulsations d'excitation :

- $\tilde{\omega}_{res} = \tilde{\omega}_0$ proche de la résonance
- $\tilde{\omega}_{hrm} < \tilde{\omega}_{res}$ et $\tilde{\omega}_{hrp} > \tilde{\omega}_{res}$ deux pulsations hors résonance
- $\tilde{\omega}_{cpm} < \tilde{\omega}_{res}$ et $\tilde{\omega}_{cpp} > \tilde{\omega}_{res}$ deux pulsations $\tilde{\omega}$ correspondant à des amplitudes proches de -3 dB de la résonance

On utilise la formule (2.2) et les approximations connues $\tilde{\omega}_0$ de la pulsation de résonance et $\tilde{\alpha}$ de la demi-largeur pour déterminer les valeurs de ces 5 pulsations :

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_{hrm} = \tilde{\omega}_0 - \Delta\omega_{hr} \simeq \omega_0 - \Delta\omega_{hr} = \omega_{hrm} \\ \tilde{\omega}_{cpm} = \tilde{\omega}_0 - \tilde{\alpha} \simeq \omega_0 - \alpha = \omega_{cpm} \\ \tilde{\omega}_{res} = \tilde{\omega}_0 \simeq \omega_0 = \omega_{res} \\ \tilde{\omega}_{cpp} = \tilde{\omega}_0 + \tilde{\alpha} \simeq \omega_0 + \alpha = \omega_{cpp} \\ \tilde{\omega}_{hrp} = \tilde{\omega}_0 + \Delta\omega_{hr} \simeq \omega_0 + \Delta\omega_{hr} = \omega_{hrp} \end{cases} \quad (2.3)$$

Avec $\Delta\omega_{hr}$ un écart de pulsation grand devant $\tilde{\alpha}$ pour être hors de la résonance. La figure 2.3 montre les réponses correspondantes dans les diagrammes en amplitude et en phase, et la figure 2.4 dans le plan de Nyquist.

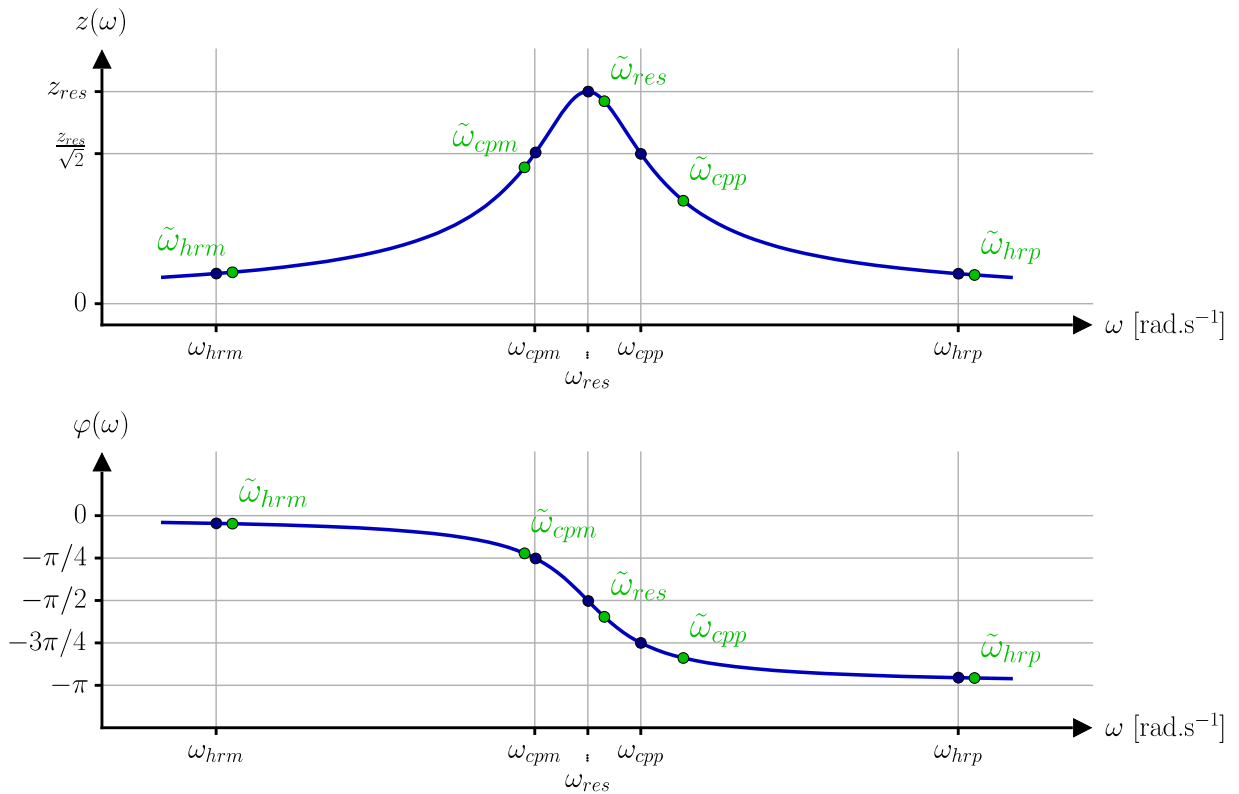


Figure 2.3 - Calibration de la résonance et du facteur de qualité avec 5 points stationnaires : diagrammes en amplitude et en phase

Les amplitudes en phase et en quadrature de phase de la réponse du résonateur à la pulsation d'excitation $\tilde{\omega}_{hrm}$ sont respectivement notées x_{hrm} et y_{hrm} . On utilise la même convention pour les amplitudes relatives aux pulsations $\tilde{\omega}_{cpm}$, $\tilde{\omega}_{res}$, $\tilde{\omega}_{cpp}$ et $\tilde{\omega}_{hrp}$.

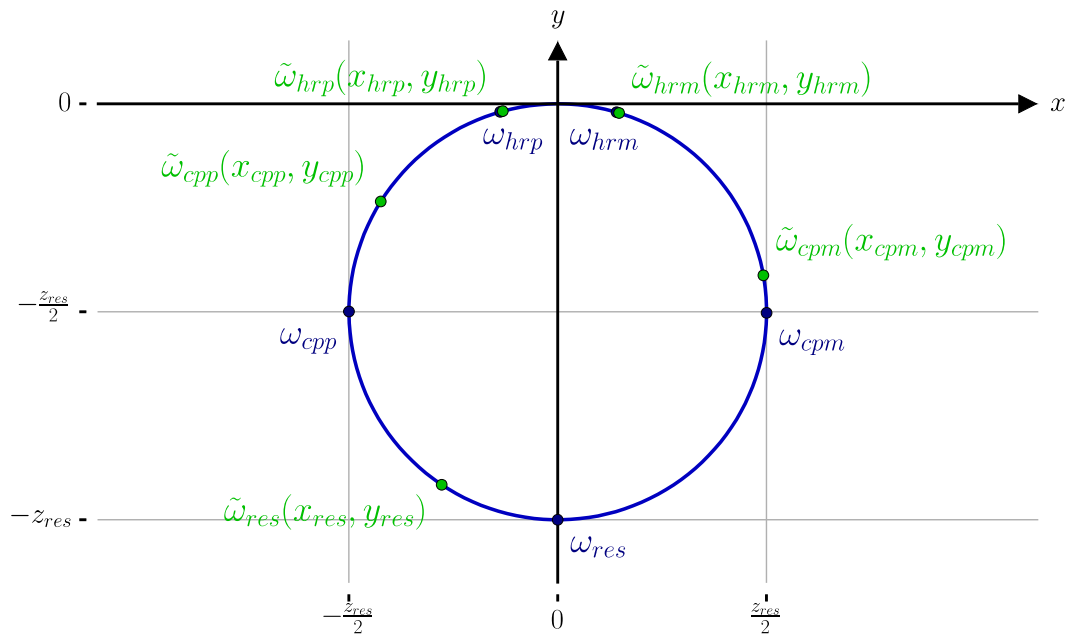


Figure 2.4 - Calibration de la résonance et du facteur de qualité avec 5 points stationnaires : plan de Nyquist

On montre ici qu'avec l'aide de la relation (2.2), la connaissance des pulsations d'excitation et des amplitudes réponses correspondantes est suffisante pour déterminer des estimateurs $\hat{\omega}_0$ et $\hat{\alpha}$ de ω_0 et α .

2.2.2.2 Établissement des estimateurs

Avec l'architecture électronique et logicielle utilisée, les grandeurs auxquelles on a directement accès sont les amplitudes en phase et en quadrature de phase de la réponse du résonateur, soit les deux coordonnées cartésiennes du plan de Nyquist de la figure 2.4. Pour optimiser l'efficacité de l'étalonnage, il faut prendre cet aspect en compte dans la manière de mener les calculs.

Par ailleurs, l'équation (2.2) ne dépend pas de la position, de l'orientation ou de la taille du cercle. Les résultats des calculs seront donc invariants par application de similitudes directes sur les points mesurés dans le plan de Nyquist (translations, rotations et homothéties). Ainsi, dans le but de construire une résolution indépendante des divers effets électroniques décrits dans la partie 1.2.5, les calculs ne feront intervenir que les rapports des distances entre les points mesurés, et les cosinus et sinus des angles formés par les segments les liant.

Les deux mesures extrêmes sont suffisamment proches pour être moyennées en un unique point (x_{hr}, y_{hr}) dit hors résonance, et pour n'utiliser finalement que 4 points du plan

dans les calculs. On paramètre alors le problème comme le montre la figure 2.5, en définissant les angles ψ_{res} , ψ_{cpm} et ψ_{cpp} , correspondant respectivement aux pulsations d'excitation $\tilde{\omega}_{res}$, $\tilde{\omega}_{cpm}$ et $\tilde{\omega}_{cpp}$.

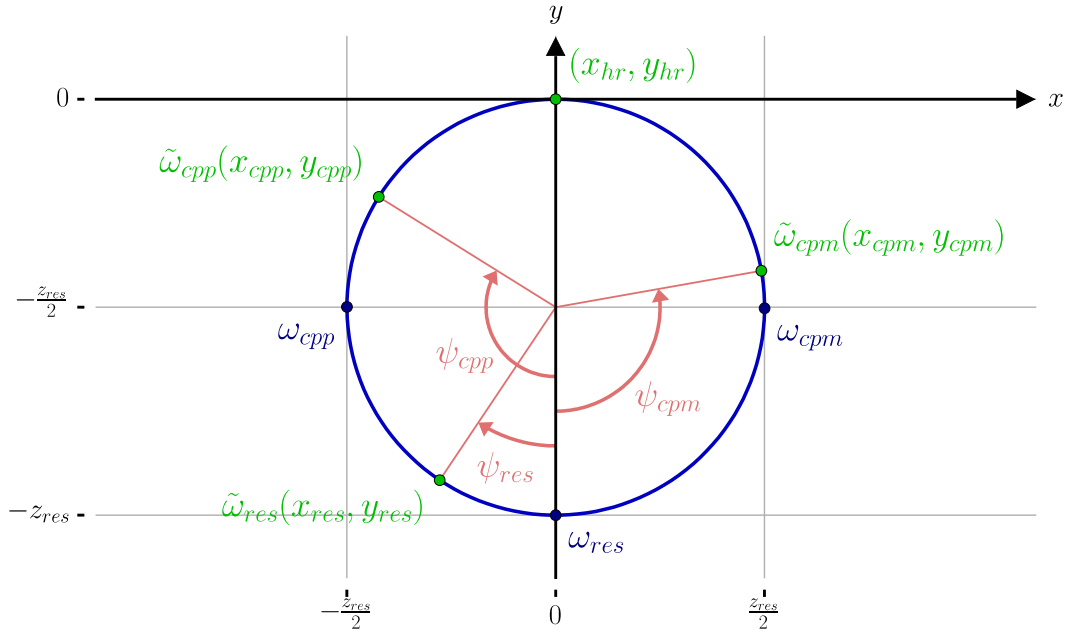


Figure 2.5 - Angles polaires à déterminer

L'objet de la partie B.1 de l'Annexe B est de démontrer d'une part que les grandeurs Ψ_{res} , Ψ_{cpm} et Ψ_{cpp} définies en (2.4) s'expriment simplement et uniquement en fonction des coordonnées cartésiennes des 4 mesures d'amplitudes, et d'autre part que les estimateurs (2.5) et (2.6) sont exacts.

$$\begin{aligned}\Psi_{res} &= \tan\left(\frac{\psi_{res}}{2}\right) \\ \Psi_{cpm} &= \tan\left(\frac{\psi_{cpm}}{2}\right) \\ \Psi_{cpp} &= \tan\left(\frac{\psi_{cpp}}{2}\right)\end{aligned}\tag{2.4}$$

$$\hat{\omega}_0 = \tilde{\omega}_0 + \frac{2\tilde{\alpha}\Psi_{res}}{\Psi_{cpm} - \Psi_{cpp}}\tag{2.5}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{2\tilde{\alpha}}{\Psi_{cpm} - \Psi_{cpp}}\tag{2.6}$$

On a bien obtenu des formules qui ne font apparaître aucun des autres paramètres à calibrer. Seules les amplitudes mesurées, par l'intermédiaire de Ψ_{res} , Ψ_{cpm} et Ψ_{cpp} , et les approximations initiales $\tilde{\omega}_0$ et $\tilde{\alpha}$ sont nécessaires. On peut donc réaliser l'étalonnage de ω_0 et α sans avoir besoin de connaître les déphasages, gains et couplages électroniques.

À l'exception de l'approximation faite dans la formule (2.2), qui est largement justifiée avec des résonateurs à haut facteur de qualité, le choix de $\tilde{\omega}_0$ et $\tilde{\alpha}$ n'a pas d'influence sur le résultat final dans le calcul théorique. En revanche, quand on se place dans le contexte expérimental, en considérant donc les sources de bruit et autres erreurs, la sensibilité du procédé aux approximations initiales $\tilde{\omega}_0$ et $\tilde{\alpha}$ augmente. Dans ces circonstances, on peut voir les expressions (2.5) et (2.6) comme des formules élémentaires d'un procédé de calibration itératif.

Dans le cas de la calibration itérative, il n'est plus nécessaire d'utiliser des estimateurs exacts, on peut se satisfaire d'un développement au premier ordre en $d\Psi_{res}$, $d\Psi_{cpm}$ et $d\Psi_{cpp}$, définis comme suit :

$$\begin{aligned} d\Psi_{res} &= \Psi_{res} \\ d\Psi_{cpm} &= \Psi_{cpm} - 1 \\ d\Psi_{cpp} &= \Psi_{cpp} + 1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$d\Psi_{res}$, $d\Psi_{cpm}$ et $d\Psi_{cpp}$ sont d'autant plus petits que $\tilde{\omega}_0$ et $\tilde{\alpha}$ sont proches respectivement de ω_0 et α , et on obtient finalement les estimateurs suivants :

$$\hat{\omega}_{0iter} = \tilde{\omega}_0 + \tilde{\alpha} d\Psi_{res} = \tilde{\omega}_0 + \tilde{\alpha} \Psi_{res} \quad (2.8)$$

$$\hat{\alpha}_{iter} = \tilde{\alpha} - \frac{\tilde{\alpha}}{2}(d\Psi_{cpm} - d\Psi_{cpp}) = 2\tilde{\alpha} - \frac{\tilde{\alpha}}{2}(\Psi_{cpm} - \Psi_{cpp}) \quad (2.9)$$

2.2.3 Développement théorique dans le cas non linéaire

L'équation (2.2) est valable dans les conditions d'un fonctionnement linéaire de la cellule vibrante. Dans le cas d'un oscillateur de Duffing, la résolution présentée dans la partie 1.2.4 nous amène à l'expression (1.70), rappelée ici en (2.10), en remplaçant $x_M(\psi)$ la norme de l'amplitude mécanique de la cellule vibrante par $z(\psi)$ (changement de notation spécifique au Chapitre 2), et avec $\delta=0$. En effet, on se place dans la configuration où l'effet de l'amortissement non linéaire δ est négligeable devant celui de la raideur non linéaire κ . Cette

hypothèse est également effectuée dans [Kaaajakari 2004], où les structures étudiées sont semblables aux cellules vibrantes de l'ONERA.

$$\omega(\psi) = \omega_0 - \alpha \tan\left(\frac{\psi}{2}\right) + \omega_0 \kappa z(\psi)^2, \quad \psi \in \left[-\pi + \frac{2\alpha}{\omega_0}, \pi - \frac{2\alpha}{\omega_0}\right] \quad (2.10)$$

Si on note $X = z_{res}/2$ la demi-amplitude mécanique à la résonance, on a la relation géométrique :

$$z(\psi) = 2X \cos\left(\frac{\psi}{2}\right), \quad \psi \in \left[-\pi + \frac{2\alpha}{\omega_0}, \pi - \frac{2\alpha}{\omega_0}\right] \quad (2.11)$$

Il s'agit de la distance entre deux points d'un même cercle de rayon X séparés d'un arc d'angle $\psi - \pi$. La figure 2.6 illustre l'expression de z en fonction de ψ .

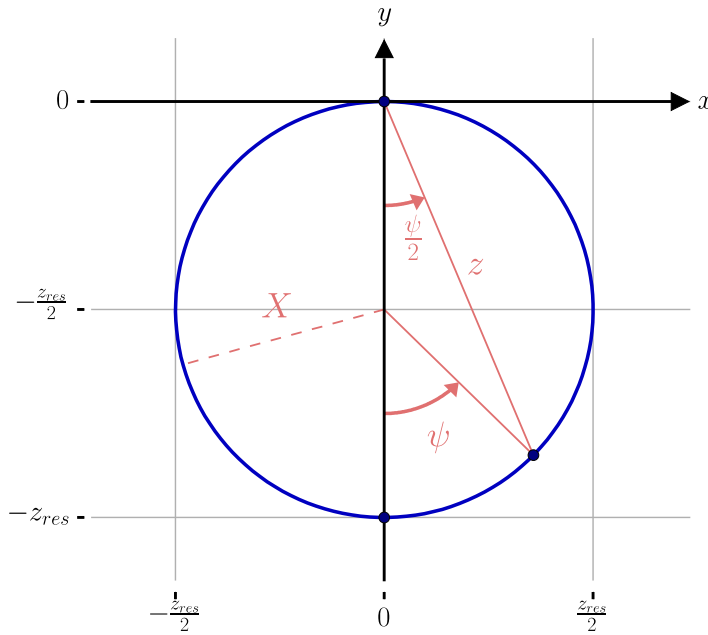


Figure 2.6 - Amplitude de la réponse d'un oscillateur résonnant

En posant :

$$\beta = \omega_0 \zeta = 4 \omega_0 \kappa X^2 \quad (2.12)$$

L'équation (2.10) devient :

$$\omega(\psi) = \omega_0 - \alpha \tan\left(\frac{\psi}{2}\right) + \frac{\beta}{1 + \tan\left(\frac{\psi}{2}\right)^2},$$

$$\psi \in \left[-\pi + \frac{2\alpha}{\omega_0}, \pi - \frac{2\alpha}{\omega_0}\right] \quad (2.13)$$

Le paramètre à calibrer est κ . Le changement de variable effectué permet de travailler avec une grandeur homogène à ω_0 et α . β , tout comme X , et contrairement à κ , est fonction de l'amplitude d'excitation aM . Cette dépendance est linéaire pour X , et donc quadratique pour β . En déterminant β à une amplitude d'excitation constante et connue, on peut déduire sa valeur pour une amplitude d'excitation quelconque.

Dans le cas linéaire, on cherchait des estimateurs de l'ensemble (ω_0, α) . En non linéaire, cet ensemble devient maintenant $(\omega_0, \alpha, \beta)$.

La démarche suivie pour obtenir les estimateurs est analogue au cas linéaire. La généralisation de (2.2) à (2.13) amène à une modification de (2.3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\omega}_{hrm} = \tilde{\omega}_0 - \Delta\omega_{hr} + \tilde{\Delta}\tilde{\beta}_{hr} \simeq \omega_0 - \Delta\omega_{hr} + \Delta\beta_{hr} = \omega_{hrm} \\ \tilde{\omega}_{cpm} = \tilde{\omega}_0 - \tilde{\alpha} + \frac{\tilde{\beta}}{2} \simeq \omega_0 - \alpha + \frac{\beta}{2} = \omega_{cpm} \\ \tilde{\omega}_{res} = \tilde{\omega}_0 + \tilde{\beta} \simeq \omega_0 + \beta = \omega_{res} \\ \tilde{\omega}_{cpp} = \tilde{\omega}_0 + \tilde{\alpha} + \frac{\tilde{\beta}}{2} \simeq \omega_0 + \alpha + \frac{\beta}{2} = \omega_{cpp} \\ \tilde{\omega}_{hrp} = \tilde{\omega}_0 + \Delta\omega_{hr} + \tilde{\Delta}\tilde{\beta}_{hr} \simeq \omega_0 + \Delta\omega_{hr} + \Delta\beta_{hr} = \omega_{hrp} \end{array} \right. \quad (2.14)$$

$$\tilde{\Delta}\tilde{\beta}_{hr} = \frac{\tilde{\beta}}{1 + \left(\frac{\Delta\omega_{hr}}{\tilde{\alpha}}\right)^2} \simeq \frac{\beta}{1 + \left(\frac{\Delta\omega_{hr}}{\alpha}\right)^2} = \Delta\beta_{hr}$$

Avec $\tilde{\beta}$ l'approximation initiale du coefficient non linéaire exact β . $\Delta\beta_{hr}$ est le décalage de fréquence supplémentaire nécessaire pour que, dans le modèle (2.13), les amplitudes correspondant à ω_{hrm} et ω_{hrp} restent rigoureusement symétriques par rapport à l'axe du cercle dans le plan de Nyquist, dans le cas asymptotique où les grandeurs $(\tilde{\omega}_0, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ sont proches de $(\omega_0, \alpha, \beta)$. On notera malgré tout que dans la pratique, $\Delta\beta_{hr}$ sera toujours très largement négligeable devant $\Delta\omega_{hr}$.

En conservant l'ensemble des conventions apparaissant sur la figure 2.5, ainsi que dans les formules (2.4) et (2.7), et en suivant un raisonnement analogue à celui du cas linéaire précédent, on détermine en (2.15), (2.16) et (2.17) les estimateurs approchés $(\hat{\omega}_{0iter}, \hat{\alpha}_{iter}, \hat{\beta}_{iter})$ pour le calcul itératif.

$$\hat{\omega}_{0iter} = \tilde{\omega}_0 + \tilde{\alpha}(\mathrm{d}\Psi_{cpm} + \mathrm{d}\Psi_{cpp} - \mathrm{d}\Psi_{res}) + \frac{\tilde{\beta}}{2}(\mathrm{d}\Psi_{cpm} - \mathrm{d}\Psi_{cpp}) \quad (2.15)$$

$$\hat{\alpha}_{iter} = \tilde{\alpha} - \frac{\tilde{\alpha}}{2}(\mathrm{d}\Psi_{cpm} - \mathrm{d}\Psi_{cpp}) - \frac{\tilde{\beta}}{4}(\mathrm{d}\Psi_{cpm} + \mathrm{d}\Psi_{cpp}) \quad (2.16)$$

$$\hat{\beta}_{iter} = \tilde{\beta} + \tilde{\alpha}(2\mathrm{d}\Psi_{res} - \mathrm{d}\Psi_{cpm} - \mathrm{d}\Psi_{cpp}) - \frac{\tilde{\beta}}{2}(\mathrm{d}\Psi_{cpm} - \mathrm{d}\Psi_{cpp}) \quad (2.17)$$

Les expressions des estimateurs exacts sont données dans la partie B.2 de l'Annexe B.

2.2.4 Détermination de l'amplitude hors résonance

L'utilisation de l'amplitude dite hors résonance de l'oscillateur est un aspect essentiel de l'algorithme décrit dans cette partie 2.2. Pourtant, sa détermination précise à partir de mesures expérimentales peut s'avérer délicate.

Bien que le point hors résonance apparaisse sur la caractéristique fréquentielle stationnaire du résonateur, il ne s'agit que d'un état asymptotique lorsque $\omega \rightarrow 0$ ou lorsque $\omega \rightarrow \infty$, que l'on ne peut donc pas atteindre exactement avec un seul état stationnaire. Pour en déterminer une bonne approximation, le procédé le plus naturel est de réaliser deux mesures d'amplitude (x_{hrm}, y_{hrm}) et (x_{hrp}, y_{hrp}) , respectivement à des pulsations d'excitation $\tilde{\omega}_{hrm} \ll \omega_0$ et $\tilde{\omega}_{hrp} \gg \omega_0$. Pour une estimation grossière de l'amplitude hors résonance, une simple moyenne $(\hat{x}_{hr}, \hat{y}_{hr}) = ((x_{hrm} + x_{hrp})/2, (y_{hrm} + y_{hrp})/2)$ peut être satisfaisante. La figure 2.7 montre le résultat obtenu dans le plan de Nyquist.

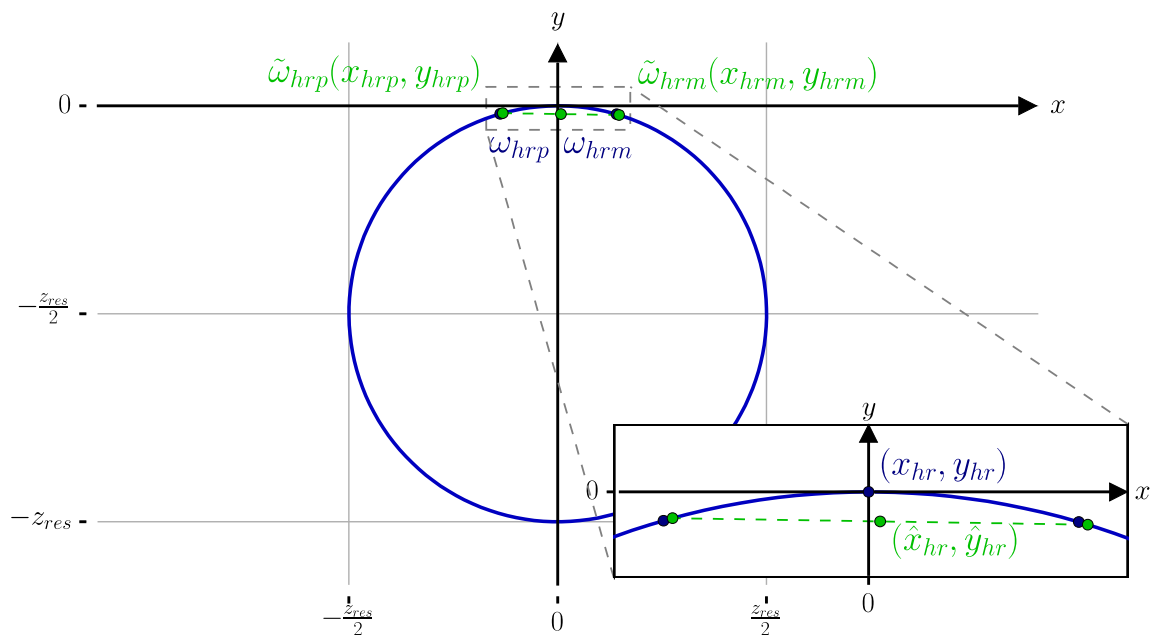


Figure 2.7 - Estimation grossière de l'amplitude hors résonance dans le plan de Nyquist

Le principal défaut de cette estimation est qu'elle fait apparaître une erreur systématique, indépendamment des erreurs de mesure, comme le montre la figure 2.7 ($((\hat{x}_{hr}, \hat{y}_{hr}) \text{ différent } (x_{hr}, y_{hr}))$), et ce même si les pulsations $\tilde{\omega}_{hrm}$ et $\tilde{\omega}_{hrp}$ induisent des amplitudes symétriques par rapport à l'axe du cercle.

Par ailleurs, deux phénomènes font obstacle à l'option d'éloigner autant que nécessaire les pulsations $\tilde{\omega}_{hrm}$ et $\tilde{\omega}_{hrp}$ de la pulsation de résonance ω_0 . Premièrement, les modèles définis en (2.2) et (2.13) ne sont valables que sur un voisinage de ω_0 . Deuxièmement, les effets électroniques détaillés dans la partie 1.2.5 deviennent prépondérants devant le caractère résonnant de l'oscillateur lorsque l'on s'éloigne significativement de ω_0 , comme le montre la figure 1.22, reprise en partie sur la figure 2.8. De manière générale, pour le choix de $\Delta\omega_{hr}$, il y a donc un optimum à déterminer qui rend l'erreur sur l'estimation minimale.

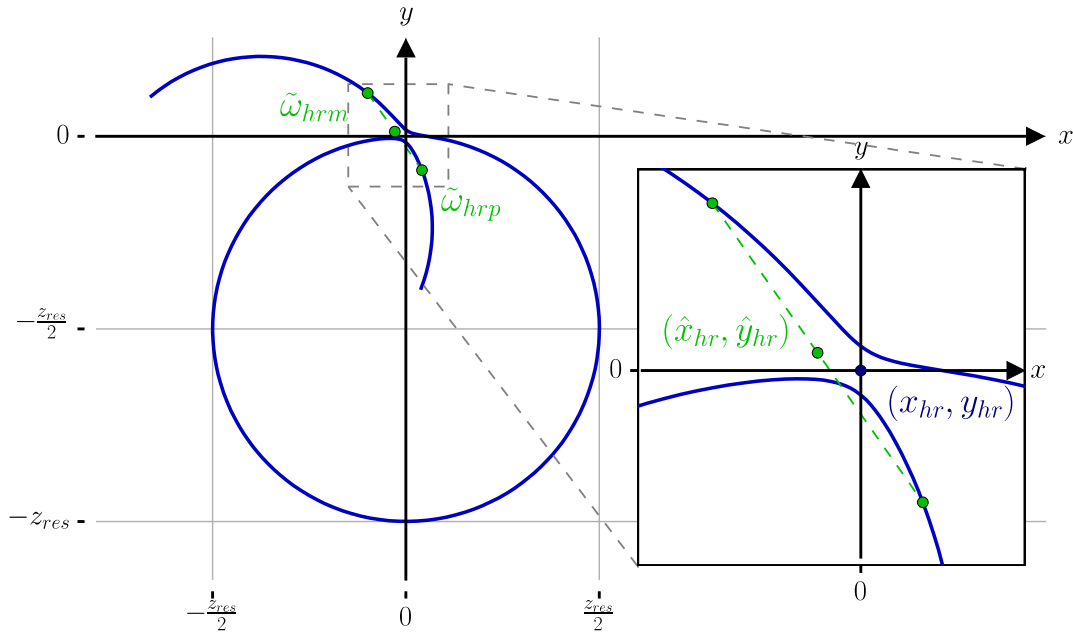


Figure 2.8 - Effets électroniques hors résonance

Dans le cas de l'estimateur grossier, il subsiste donc une erreur systématique incompressible. La conséquence directe de cette imprécision est que l'emploi de cette méthode de détermination de l'amplitude hors résonance rend les estimateurs $\hat{\omega}_0$ ((2.5) et (B.15)), $\hat{\alpha}$ ((2.6) et (B.16)) et $\hat{\beta}$ ((B.17)) inexacts, et les procédés itératifs correspondants non convergents vers les valeurs exactes ω_0 , α et β ((2.8), (2.9), (2.15), (2.16) et (2.17)).

Pour rendre le procédé exact, on définit un autre estimateur du point hors résonance. On ne prend pas le milieu du segment $[(x_{hrm}, y_{hrm}), (x_{hrp}, y_{hrp})]$, mais le point du cercle qui coupe l'arc de cette corde en deux arcs de même longueur. On utilise un troisième point de mesure qui permet de déterminer le cercle. La figure 2.9 montre la configuration géométrique correspondante, avec les trois points mesurés (x_1, y_1) , (x_2, y_2) et (x_3, y_3) , ainsi que la nouvelle estimation $(\hat{x}_{hr}, \hat{y}_{hr})$. Les calculs sont présentés dans la partie B.3 de l'Annexe B.

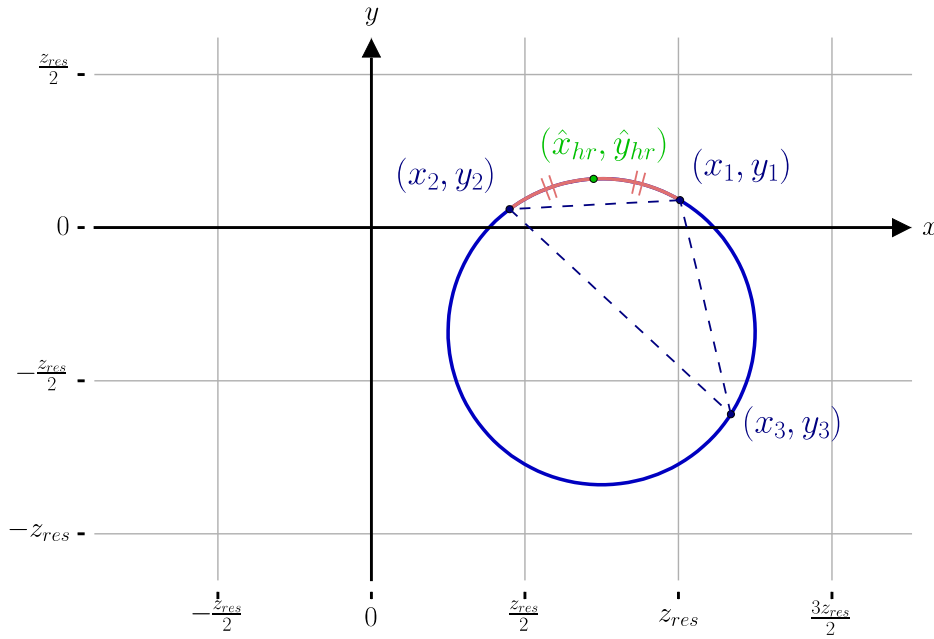


Figure 2.9 - Détermination du milieu d'un arc avec 3 points

Le choix naturel pour le troisième point est l'amplitude à la résonance supposée. L'expression de l'estimateur exact correspondant à cette méthode pour les coordonnées de l'amplitude hors résonance est complexe. Il est judicieux d'en considérer un développement limité, adapté à une calibration itérative. On obtient finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_{hr\ iter} = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \quad + \frac{(y_2 - y_1)((y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2)}{4((x_1 - x_3)(y_2 - y_1) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_1))} \\ \hat{y}_{hr\ iter} = \frac{y_1 + y_2}{2} \\ \quad + \frac{(x_1 - x_2)((y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2)}{4((x_1 - x_3)(y_2 - y_1) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_1))} \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Avec $(x_1, y_1) = (x_{hrm}, y_{hrm})$, $(x_2, y_2) = (x_{hrp}, y_{hrp})$ et $(x_3, y_3) = (x_{res}, y_{res})$.

Le calcul de la partie B.3 de l'Annexe B démontre que ce nouvel estimateur du point hors résonance de la formule (2.18) mène à un algorithme itératif rigoureusement convergent vers la solution exacte.

On notera que la détermination du point hors résonance conclut les calibrations de l'instrument. En effet, en utilisant la mesure de l'amplitude à la résonance, on peut déterminer les déphasages, gains et couplages électroniques.

2.2.5 Cas particulier de l'hystérésis

Il reste à considérer un cas de figure qui n'est pas couvert entièrement par l'étude précédente. Il s'agit du domaine de l'oscillateur de Duffing qui crée une hystérésis et qui est décrit dans la partie 1.2.4, notamment sur la figure 1.16. La figure 2.10 montre le diagramme d'amplitude pour une non linéarité sans hystérésis (en pointillés) et avec hystérésis (trait plein).

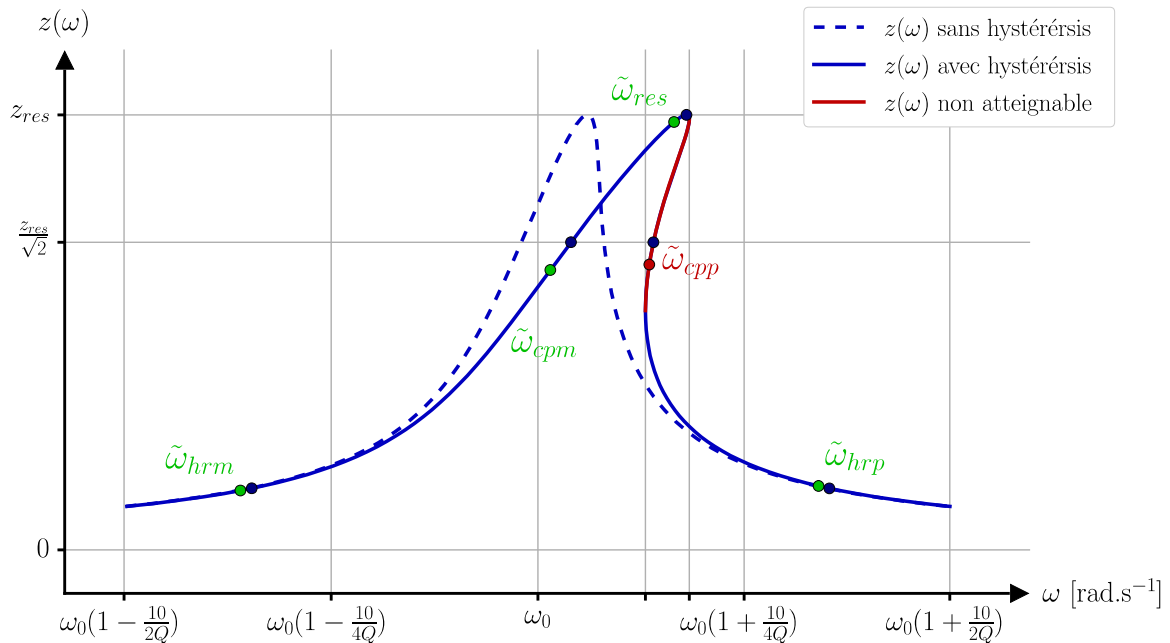


Figure 2.10 - Oscillateur de Duffing avec et sans hystérésis

On a supposé dans l'étude précédente que l'on pouvait atteindre n'importe quel point du cercle des états stationnaires, et en particulier les deux réponses présentant une amplitude en rapport $1/\sqrt{2}$ (-3 dB) avec l'amplitude de résonance, aux pulsations $\tilde{\omega}_{cpm}$ et $\tilde{\omega}_{cpp}$. Dans le cas de l'effet non linéaire de type « hard spring » de la figure 2.10, et au-delà d'une certaine valeur du coefficient κ défini à la formule (1.65) (ou, de manière équivalente, d'une certaine amplitude d'excitation), cette amplitude réponse n'est plus atteignable en $\tilde{\omega}_{cpp}$. Ce phénomène rend l'étalonnage inopérant.

Avec le changement de variable (2.12), l'étude à une seule amplitude d'excitation est suffisante. On pourrait donc étalonner le résonateur dans son domaine sans hystérésis. En pratique, la mesure est d'autant plus précise que l'amplitude de la réponse est élevée, il y a donc un intérêt à généraliser la procédure dans les conditions de l'hystérésis.

Une méthode est proposée dans [Davis 2011], qui consiste à choisir une amplitude de réponse dans un rapport plus faible que $1/\sqrt{2}$ avec l'amplitude de résonance, suffisamment

pour sortir de l'hystérésis, et donc pour laquelle il existe bien deux pulsations d'excitation $\tilde{\omega}_{cpm}$ et $\tilde{\omega}_{cpp}$. La figure 2.11 montre les pulsations $\tilde{\omega}_{cpmlin}$ et $\tilde{\omega}_{cpplin}$ en rapport $1/\sqrt{2}$, et les pulsations $\tilde{\omega}_{cpmhys}$ et $\tilde{\omega}_{cpphys}$ en rapport plus faible pour sortir de l'hystérésis, dans le plan de Nyquist. Contrairement à $\tilde{\omega}_{cpmlin}$, $\tilde{\omega}_{cpphys}$ permet d'atteindre l'amplitude voulue.

Concrètement, cette méthode consiste à remplacer $\tilde{\alpha}$ par $\nu\tilde{\alpha}$, avec $\nu > 1$, dans les expressions de $\tilde{\omega}_{cpm}$ et $\tilde{\omega}_{cpp}$ de la formule (2.14). Le développement des calculs est analogue à celui de la partie 2.2.3, est présenté dans la partie B.4 de l'Annexe B, et permet de définir en (2.19), (2.20) et (2.21) les estimateurs approchés généralisés ($\hat{\omega}_{0iter}$, $\hat{\alpha}_{iter}$, $\hat{\beta}_{iter}$) pour le calcul itératif.

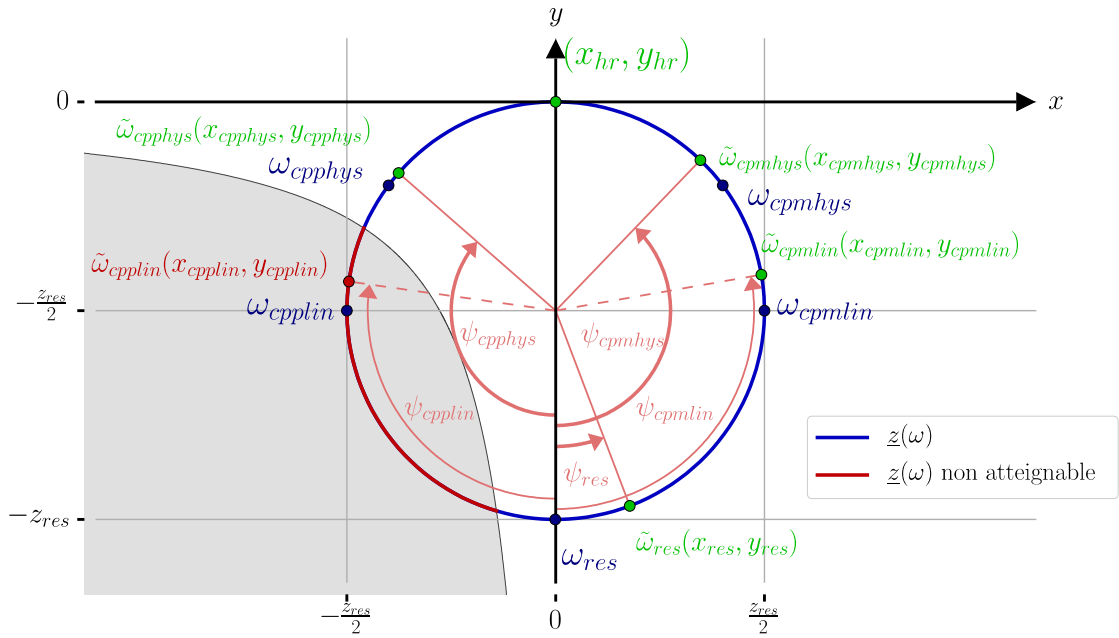


Figure 2.11 - Hystérésis et mesures dans le plan de Nyquist

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{0iter} &= \tilde{\omega}_0 - \frac{\tilde{\alpha}}{\nu^2} d\Psi_{res} + \frac{\tilde{\alpha}(1 + \nu^2)}{2\nu^2} (d\Psi_{cpm} + d\Psi_{cpp}) \\ &+ \frac{\tilde{\beta}}{\nu(1 + \nu^2)} (d\Psi_{cpm} - d\Psi_{cpp}) \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\hat{\alpha}_{iter} = \tilde{\alpha} - \frac{\tilde{\alpha}}{2\nu} (d\Psi_{cpm} - d\Psi_{cpp}) - \frac{\tilde{\beta}}{(1 + \nu^2)^2} (d\Psi_{cpm} + d\Psi_{cpp}) \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{iter} &= \tilde{\beta} + \frac{\tilde{\alpha}(1 + \nu^2)}{2\nu^2}(2d\Psi_{res} - d\Psi_{cpm} - d\Psi_{cpp}) \\ &\quad - \frac{\tilde{\beta}}{\nu(1 + \nu^2)}(d\Psi_{cpm} - d\Psi_{cpp})\end{aligned}\tag{2.21}$$

Avec (2.7) qui devient :

$$\begin{aligned}d\Psi_{res} &= \Psi_{res} \\ d\Psi_{cpm} &= \Psi_{cpm} - \nu \\ d\Psi_{cpp} &= \Psi_{cpp} + \nu\end{aligned}\tag{2.22}$$

On remarque qu'en prenant $\nu=1$, on retrouve bien les formules (2.15), (2.16) et (2.17).

2.2.6 Domaine et vitesse de convergence

2.2.6.1 Notations et détermination d'un critère

L'objectif principal de cette partie 2.2 est atteint, à savoir construire un algorithme permettant d'estimer les valeurs des paramètres ω_0 , α et β par un procédé itératif, convergent vers les valeurs exactes, et indépendant des paramètres électroniques. Dans cette partie, on s'intéresse à l'évaluation quantitative des propriétés de convergence, c'est-à-dire le domaine de convergence et la vitesse de convergence.

Pour cela, il faut étudier la fonction Λ définie en (B.20), rappelée ici en (2.23) :

$$\Lambda \in \mathcal{F} \left(\begin{array}{c} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{v} \mapsto \Lambda(\mathbf{v}) \end{array} \right), \quad (\hat{\omega}_0, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \Lambda(\tilde{\omega}_0, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})\tag{2.23}$$

Pour simplifier les calculs, on considère les changements de variables suivants, ainsi que la fonction équivalente Λ_r telle que :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\hat{\omega}_0 - \omega_0}{\alpha}, \frac{\hat{\alpha} - \alpha}{\alpha}, \frac{\hat{\beta} - \beta}{\alpha} \right) &= \left(\frac{d\hat{\omega}_0}{\alpha}, \frac{d\hat{\alpha}}{\alpha}, \frac{d\hat{\beta}}{\alpha} \right) \\ &= (d\hat{\omega}_{0r}, d\hat{\alpha}_r, d\hat{\beta}_r) = \Lambda_r(d\tilde{\omega}_{0r}, d\tilde{\alpha}_r, d\tilde{\beta}_r) \\ &= \Lambda_r\left(\frac{d\tilde{\omega}_0}{\alpha}, \frac{d\tilde{\alpha}}{\alpha}, \frac{d\tilde{\beta}}{\alpha} \right) = \Lambda_r\left(\frac{\tilde{\omega}_0 - \omega_0}{\alpha}, \frac{\tilde{\alpha} - \alpha}{\alpha}, \frac{\tilde{\beta} - \beta}{\alpha} \right)\end{aligned}\tag{2.24}$$

On a $\Lambda_r(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$, nouveau point de convergence de l'algorithme. On étudie donc le comportement de l'erreur résiduelle relative ($d\hat{\omega}_{0r}$, $d\hat{\alpha}_r$, $d\hat{\beta}_r$) lorsque l'on itère le procédé.

En utilisant un logiciel de calcul analytique (ici, Maxima), on peut établir un développement limité $\hat{\Lambda}_r$ de la fonction Λ_r au voisinage du point de convergence. Pour y parvenir on considère les hypothèses naturelles et nécessaires suivantes :

$$\eta = \frac{2\alpha}{\Delta\omega_{hr}} \ll 1, \quad \alpha \ll \eta\omega_0, \quad |\beta| \ll \alpha, \quad |d\tilde{\omega}_0| \ll \alpha, \quad |d\tilde{\alpha}| \ll \alpha, \quad |d\tilde{\beta}| \ll \alpha \quad (2.25)$$

η est une grandeur sans dimension caractérisant le choix de la pulsation hors résonance, fixée par l'utilisateur en fonction des différents compromis présentés dans la partie 2.2.4, et vérifiant $\eta \simeq \theta$ quand $\eta \ll 1$, où θ est l'angle défini dans la partie B.3 de l'Annexe B.

On ne peut pas représenter graphiquement les fonctions $\hat{\Lambda}_r$ et Λ_r , car l'espace de départ est de dimension 3. En revanche, la figure 2.12 montre les deux composantes de ces fonctions lorsque l'on se place de la configuration linéaire de la partie 2.2.2.

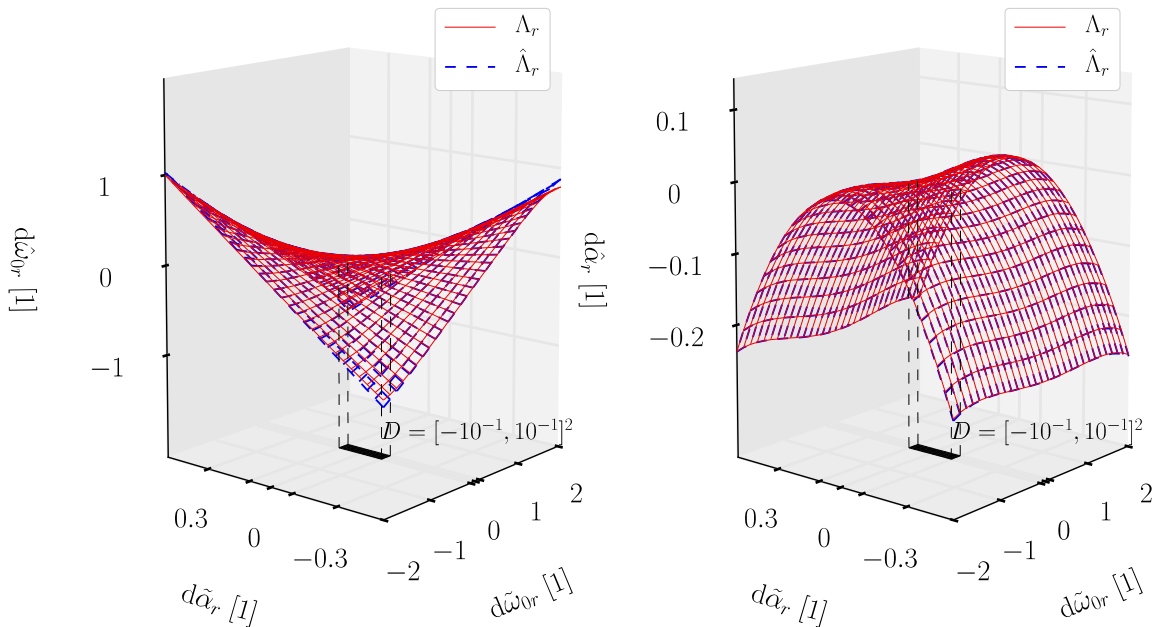


Figure 2.12 - Représentation graphique de l'algorithme itératif dans le cas linéaire

On peut alors pressentir le comportement de l'algorithme, moins sensible au paramètre β qu'aux deux autres, dans le cas non linéaire. Le développement limité $\hat{\Lambda}_r$ et l'algorithme exact Λ_r sont indiscernables à cette échelle. Pour caractériser cette fidélité, on peut utiliser la

méthode de Monte-Carlo, en effectuant N tirages $(U_n)_{n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$ dans un pavé $D \subset \mathbb{R}^3$ donné de l'espace de départ, et en considérant le résidu relatif suivant comme critère :

$$\varepsilon_D = \frac{\max_{n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket} \left(\left\| \hat{\Lambda}_r(U_n) - \Lambda_r(U_n) \right\|_\infty \right)}{\max_{n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket} \left(\left\| \Lambda_r(U_n) \right\|_\infty \right)}, \quad \text{avec } \|\mathbf{v}\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket} |v_i|, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.26)$$

La fonction Λ_r ne dépend que du choix de η et du rapport β/α . La modélisation par le développement limité $\hat{\Lambda}_r$ est d'autant plus fidèle à Λ_r que $\beta/\alpha \ll 8\sqrt{3}/9 \simeq 1.54$, valeur correspondant à l'apparition de l'hystérésis (quand $\delta=0$). Ainsi, en choisissant un ordre de développement permettant un temps de calcul raisonnable, pour $N=10\,000$, $D = [-10^{-1}, 10^{-1}]^3 \subset \mathbb{R}^3$, $\eta < 0.1$ et $|\beta/\alpha| < 0.154$, on obtient $\varepsilon_D = 0.6\%$, avec un optimum à $\varepsilon_D = 0.05\%$ pour des non linéarités quasi nulles. Avec le modèle du résonateur linéaire, on descend encore jusqu'à $\varepsilon_D = 0.007\%$ (on adapte naturellement toutes les notations en dimension 2 ou 3 selon les cas). On admet ici que cette précision pour le développement limité $\hat{\Lambda}_r$ de Λ_r est suffisante, notamment pour assimiler la différentielle $d\hat{\Lambda}_r$ de $\hat{\Lambda}_r$ à celle de Λ_r , $d\Lambda_r$. Ce résultat est faux de manière générale, même avec un résidu ε_D infiniment petit. C'est plutôt la régularité visible de la fonction Λ_r , et la concordance avec les résultats de simulation présentés dans la suite qui nous encouragent à faire cette approximation.

2.2.6.2 Théorème du point fixe

L'expression analytique de la différentielle $d\hat{\Lambda}_r$ nous permet de déterminer un majorant de sa norme sur D , en vue d'utiliser le théorème du point fixe, et ainsi déduire un sous-ensemble du domaine de convergence, et la vitesse de la convergence associée. Il faut pour cela considérer la norme subordonnée de l'endomorphisme $d\hat{\Lambda}_r$ sur l'espace normé $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty)$, qui est égale au maximum de la somme des valeurs absolues des dérivées partielles de chacune des composantes :

$$\begin{aligned} \left\| d\hat{\Lambda}_r \big|_{(U=(d\tilde{\omega}_r, d\tilde{\alpha}_r, d\tilde{\beta}_r))} \right\| &= \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \\ \|\mathbf{v}\|_\infty \leq 1}} \left\| d\hat{\Lambda}_r(U)(\mathbf{v}) \right\|_\infty \\ &= \max_{i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket} \sum_{x \in \{d\tilde{\omega}_r, d\tilde{\alpha}_r, d\tilde{\beta}_r\}} \left| \frac{\partial \hat{\Lambda}_{r,i}}{\partial x}(U) \right| \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\text{avec } \hat{\Lambda}_r(U) = (\hat{\Lambda}_{r,1}(U), \hat{\Lambda}_{r,2}(U), \hat{\Lambda}_{r,3}(U)), \quad \hat{\Lambda}_{r,i}(U) \in \mathbb{R}$$

En majorant cette norme $\|d\hat{\Lambda}_r(U \in D)\| \leq \lambda < 1$ sur D , on obtient alors que $\hat{\Lambda}_r$ est une fonction λ -contractante sur D , avec λ la constante de Lipschitz, ce qui assure la convergence de l'algorithme sur D par application du théorème du point fixe.

En ce qui concerne la vitesse de convergence, on peut aller un peu plus loin que le résultat général du théorème. En effet, le majorant analytique obtenu λ diminue lorsque l'on réduit les dimensions de D , et donc également à chaque itération.

En reprenant $D = [-10^{-1}, 10^{-1}]^3 \subset \mathbb{R}^3$, et avec $\beta/\alpha = 0.154$ et $\eta = 0.1$, on obtient numériquement la suite de constantes de Lipschitz suivante : $(4.7 \times 10^{-1}, 2.1 \times 10^{-1}, 4.8 \times 10^{-2}, 9.5 \times 10^{-3})$, ce qui permet de garantir une amélioration de l'estimation initiale de plus de 4 ordres de grandeur en 4 itérations de l'algorithme, en l'absence de bruit de mesure. La figure 2.13 montre cette enveloppe de convergence ainsi qu'un procédé de Monte-Carlo à 1 000 tirages dans $D = [-10^{-1}, 10^{-1}]^3$, sur lesquels on effectue 5 itérations.

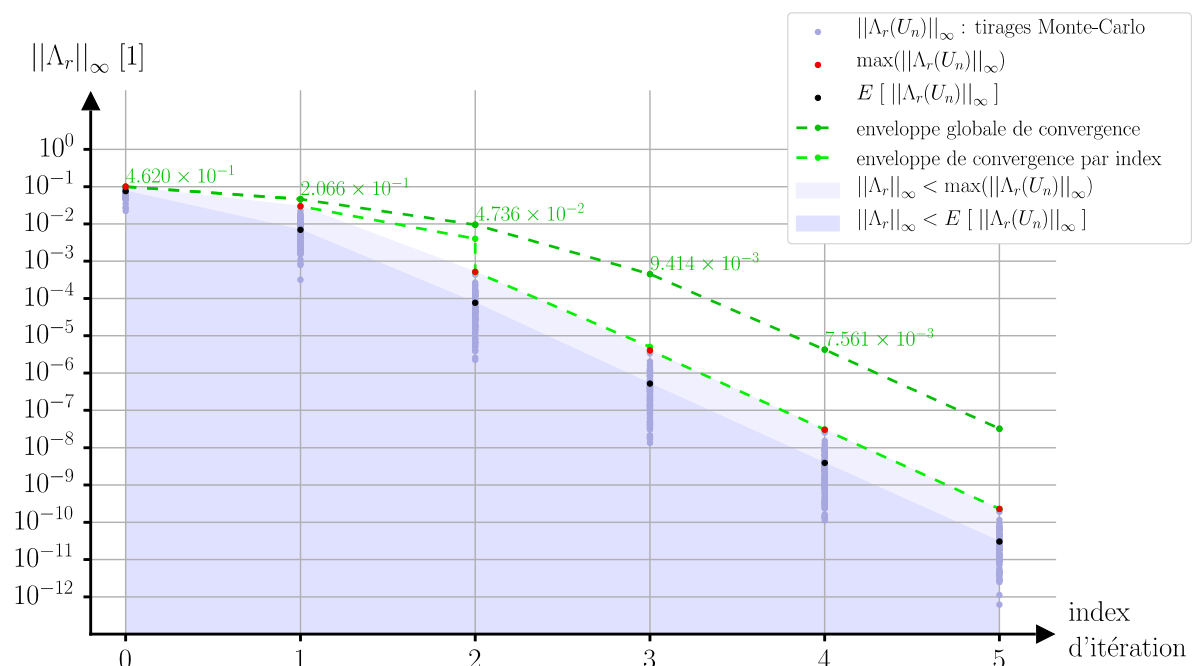


Figure 2.13 - Procédé de Monte-Carlo et enveloppe de convergence

Quantitativement, pour une fréquence de résonance $f_0 = 60$ kHz et un facteur de qualité $Q = 15\,000$, à partir d'estimations respectives à 0.2 Hz et à 1 500 près, et en 5 itérations de cette version théorique de l'algorithme, on atteint des précisions de 70 nHz sur la fréquence de résonance et de 5×10^{-4} sur le facteur de qualité.

2.2.6.3 Cas de l'estimateur grossier de l'amplitude hors résonance

Avant d'ajouter les effets de bruit de mesure dans la partie suivante, il reste à étudier l'erreur systématique en fonction de η quand on choisit l'estimateur grossier du point hors résonance plutôt que l'estimateur exact décrit dans la partie 2.2.4. En effet, le calcul de l'estimateur exact étant plus complexe, une exigence de précision moins fine que cette erreur

systématique peut amener à faire pencher le compromis vers le choix de l'estimateur grossier. Mathématiquement, dans ce cas de figure, $\Lambda_r(0, 0, 0) \neq (0, 0, 0)$, qui n'est donc plus un point de convergence de l'algorithme. Les développements limités obtenus donnent dans le cas non linéaire :

$$\Lambda_r(0, 0, 0) \simeq \left(-\frac{\eta^2}{4} + \frac{\beta\eta^2}{2\alpha}, -\frac{\eta^2}{2}, -\frac{\beta\eta^2}{2\alpha} + \frac{\eta^2}{2} \right) \quad (2.28)$$

Et dans le cas linéaire :

$$\Lambda_r(0, 0) \simeq \left(\frac{\eta^2}{4}, -\frac{\eta^2}{2} \right) \quad (2.29)$$

En simulation, on constate que l'algorithme reste malgré tout convergent et que ces dernières expressions sont de bonnes estimations de la limite de convergence. La figure 2.14 montre en bleu les développements limités de la formule (2.28), sur lesquels on superpose en rouge les résultats de simulation en effectuant 10 itérations à partir des valeurs réelles $(d\tilde{\omega}_{0r}, d\tilde{\alpha}_r, d\tilde{\beta}_r) = (0, 0, 0)$, pour plusieurs valeurs de η , et toujours avec $\beta/\alpha = 0.154$.

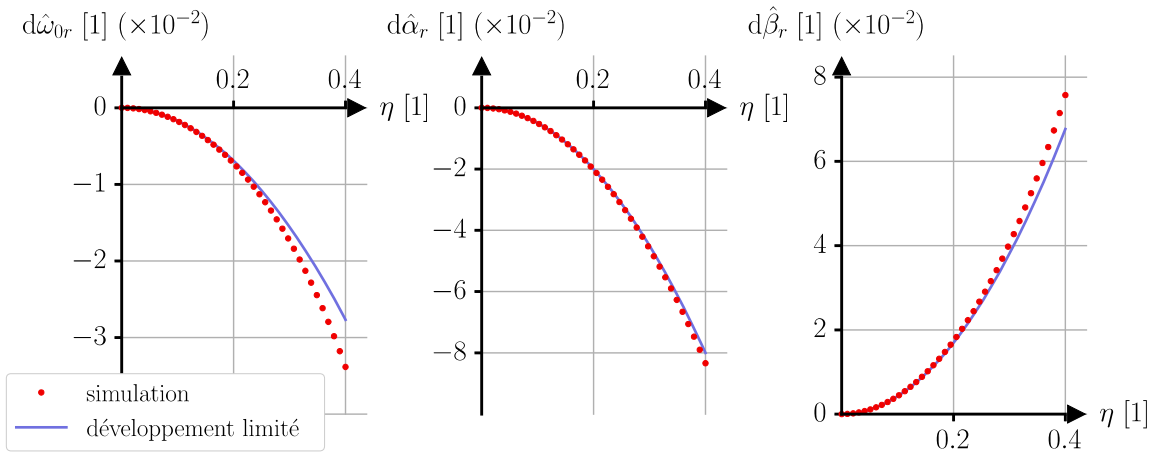


Figure 2.14 - Erreur systématique sur la limite de convergence en fonction du choix de la fréquence hors résonance dans le cas de l'estimateur grossier.

Quantitativement, pour une fréquence de résonance $f_0 = 60$ kHz, un facteur de qualité $Q = 15\,000$, et un coefficient hors résonance $\eta = 0.1$, on a une erreur systématique de 6 mHz sur la fréquence de résonance et de 100 sur le facteur de qualité.

2.2.7 Stabilité en présence de sources de bruits

2.2.7.1 Développement analytique

La précision de l'estimation des paramètres par l'algorithme est impactée, en plus de tous les effets détaillés jusqu'ici, par les sources d'instabilité dans la mesure des amplitudes.

On considère ici la théorie développée dans la partie 1.1. On suppose que les mesures des amplitudes en phase x et en quadrature de phase y sont perturbées par des bruits blancs dx_b et dy_b et des bruits roses dx_r et dy_r (que l'on exprimera relativement au rayon du cercle dans le plan de Nyquist, pour travailler avec des grandeurs sans dimension). On se limite à ces deux couleurs de bruits car elles sont les plus influentes aux échelles de temps considérées. Les amplitudes de ces bruits se représentent sur la variance d'Allan de la figure 2.15, que l'on considère identique en x et en y : σ_r (sans dimension) pour le plancher du bruit rose, et σ_b (en $s^{\frac{1}{2}}$) pour le bruit blanc à 1 s.

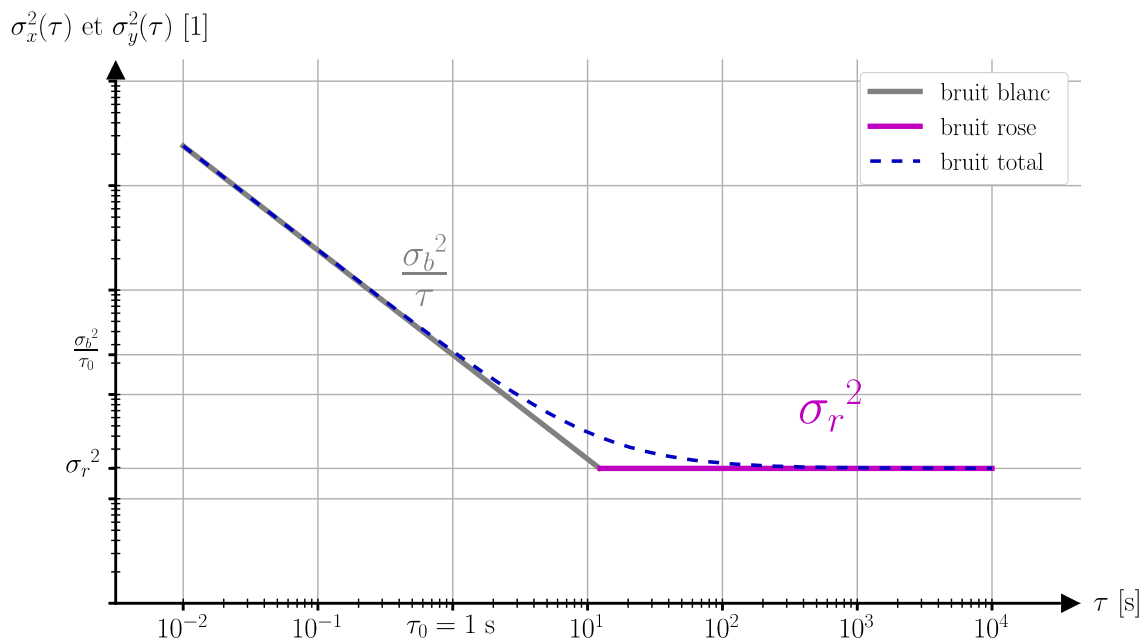


Figure 2.15 - Variance d'Allan de la mesure des amplitudes réponses

L'utilisation de variance d'Allan est adaptée, car on réalise 5 mesures successives, que l'on moyenne chacune sur un temps τ . La variance d'une mesure d'amplitude vaut donc :

$$V(dx) = V(dx_r + dx_b) = V(dy) = V(dy_r + dy_b) = \sigma_r^2 + \frac{\sigma_b^2}{\tau} \quad (2.30)$$

Le calcul analytique présenté précédemment permet d'exprimer les développements limités aux premiers ordres non nuls en σ_r et σ_b des variances des estimateurs de l'algorithme. On obtient ainsi les formules suivantes dans le cas non linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} V(\hat{\omega}_0) = \frac{\alpha^2}{4\ln(2)} \left((25\ln(5) - 21\ln(2))\sigma_r^2 + 19\ln(2)\frac{\sigma_b^2}{\tau} \right) \\ V(\hat{\alpha}) = \frac{\alpha^2}{8\ln(2)} \left((25\ln(5) - 9\ln(3) - 24\ln(2))\sigma_r^2 + 12\ln(2)\frac{\sigma_b^2}{\tau} \right) \\ V(\hat{\beta}) = \frac{\alpha^2}{2\ln(2)} \left((9\ln(3) + 10\ln(2))\sigma_r^2 + 14\ln(2)\frac{\sigma_b^2}{\tau} \right) \end{array} \right. \quad (2.31)$$

Et dans le cas linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} V(\hat{\omega}_0) = \frac{\alpha^2}{4} \left(7\sigma_r^2 + 7\frac{\sigma_b^2}{\tau} \right) \\ V(\hat{\alpha}) = \frac{\alpha^2}{8\ln(2)} \left((25\ln(5) - 9\ln(3) - 24\ln(2))\sigma_r^2 + 12\ln(2)\frac{\sigma_b^2}{\tau} \right) \end{array} \right. \quad (2.32)$$

Pour quantifier la performance de ces estimateurs, on exprime finalement ces résolutions relativement aux grandeurs $\mu_{\omega r}$ ou $\mu_{\omega b}$, caractérisant la résolution fréquentielle du résonateur, et dont les expressions sont données par la formule (2.33).

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{\omega r} = \frac{\alpha\sigma_r}{2} \\ \mu_{\omega b} = \frac{\alpha\sigma_b}{2\sqrt{\tau}} \end{array} \right. \quad (2.33)$$

Ces relations rendent compte de l'erreur que l'on fait sur la mesure de la pulsation des oscillations du résonateur lorsqu'il est proche de sa résonance, en fonction de l'erreur faite sur la mesure des amplitudes x et y (caractérisée par σ_r et σ_b). On en déduit donc en (2.34) (cas non linéaire) et en (2.35) (cas linéaire) la résolution des estimateurs $\hat{\omega}_0$, $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$, en distinguant les influences des bruits rose et blanc.

$$\left\{ \begin{array}{l}
\mu_{\hat{\omega}_0 r} = \sqrt{V(\hat{\omega}_0)_{\sigma_b=0}} = \sqrt{\frac{25 \ln(5) - 21 \ln(2)}{\ln(2)}} \mu_{\omega r} \simeq 6.09 \mu_{\omega r} \\
\mu_{\hat{\omega}_0 b} = \sqrt{V(\hat{\omega}_0)_{\sigma_r=0}} = \sqrt{19} \mu_{\omega b} \simeq 4.36 \mu_{\omega b} \\
\mu_{\hat{\alpha} r} = \sqrt{V(\hat{\alpha})_{\sigma_b=0}} = \sqrt{\frac{25 \ln(5) - 9 \ln(3) - 24 \ln(2)}{2 \ln(2)}} \mu_{\omega r} \simeq 3.15 \mu_{\omega r} \\
\mu_{\hat{\alpha} b} = \sqrt{V(\hat{\alpha})_{\sigma_r=0}} = \sqrt{6} \mu_{\omega b} \simeq 2.45 \mu_{\omega b} \\
\mu_{\hat{\beta} r} = \sqrt{V(\hat{\beta})_{\sigma_b=0}} = \sqrt{\frac{18 \ln(3) + 20 \ln(2)}{\ln(2)}} \mu_{\omega r} \simeq 6.97 \mu_{\omega r} \\
\mu_{\hat{\beta} b} = \sqrt{V(\hat{\beta})_{\sigma_r=0}} = \sqrt{28} \mu_{\omega b} \simeq 5.29 \mu_{\omega b}
\end{array} \right. \quad (2.34)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
\mu_{\hat{\omega}_0 r} = \sqrt{V(\hat{\omega}_0)_{\sigma_b=0}} = \sqrt{7} \mu_{\omega r} \simeq 2.65 \mu_{\omega r} \\
\mu_{\hat{\omega}_0 b} = \sqrt{V(\hat{\omega}_0)_{\sigma_r=0}} = \sqrt{7} \mu_{\omega b} \simeq 2.65 \mu_{\omega b} \\
\mu_{\hat{\alpha} r} = \sqrt{V(\hat{\alpha})_{\sigma_b=0}} = \sqrt{\frac{25 \ln(5) - 9 \ln(3) - 24 \ln(2)}{2 \ln(2)}} \mu_{\omega r} \simeq 3.15 \mu_{\omega r} \\
\mu_{\hat{\alpha} b} = \sqrt{V(\hat{\alpha})_{\sigma_r=0}} = \sqrt{6} \mu_{\omega b} \simeq 2.45 \mu_{\omega b}
\end{array} \right. \quad (2.35)$$

On constate que la résolution de l'algorithme ne dépend que de la résolution fréquentielle du résonateur. La différence numérique pour $\hat{\omega}_0$ entre le cas linéaire et le cas non linéaire s'explique par le fait que l'on est plus précis si on admet que β est rigoureusement nul plutôt qu'en considérant une incertitude comme celle exprimée en (2.31).

2.2.7.2 Résultats de simulations numériques

On simule l'influence de ces bruits de mesure pour vérifier la validité des expressions analytiques. Le code qui génère les bruits blanc et rose pour les simulations est donné en Annexe C. À partir des valeurs du tableau 1.2, on obtient une résolution fréquentielle $\mu_{\omega r} = 125 \mu\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, correspondant à $\sigma_r = 2 \times 10^{-5}$. Les performances inertielles donnent $\sigma_b = 6 \times 10^{-5} \text{s}^{\frac{1}{2}}$, et on choisit aussi $\tau = 2 \text{s}$. Sur la figure 2.16, on représente par des points bleus les résultats d'une simulation semblable à celle de la figure 2.13, procédé de Monte-Carlo à 1 000 tirages dans $D = [-10^{-1}, 10^{-1}]^3$, sur lesquels on effectue 5 itérations, toujours avec $\eta = 0.1$ et $\beta / \alpha = 0.154$, en ajoutant les effets d'instabilités. On superpose en pointillés la résolution théorique correspondante déduite des formules (2.34). Quantitativement, pour une fréquence de résonance $f_0 = 60 \text{kHz}$ et un facteur de qualité $Q = 15\,000$, on atteint ainsi une

limite de la résolution d'estimation de 0.27 mHz sur la fréquence de résonance et de 2 sur le facteur de qualité, en 2 itérations, soit un procédé d'étalonnage d'environ 30 s pour $\tau = 2$ s.

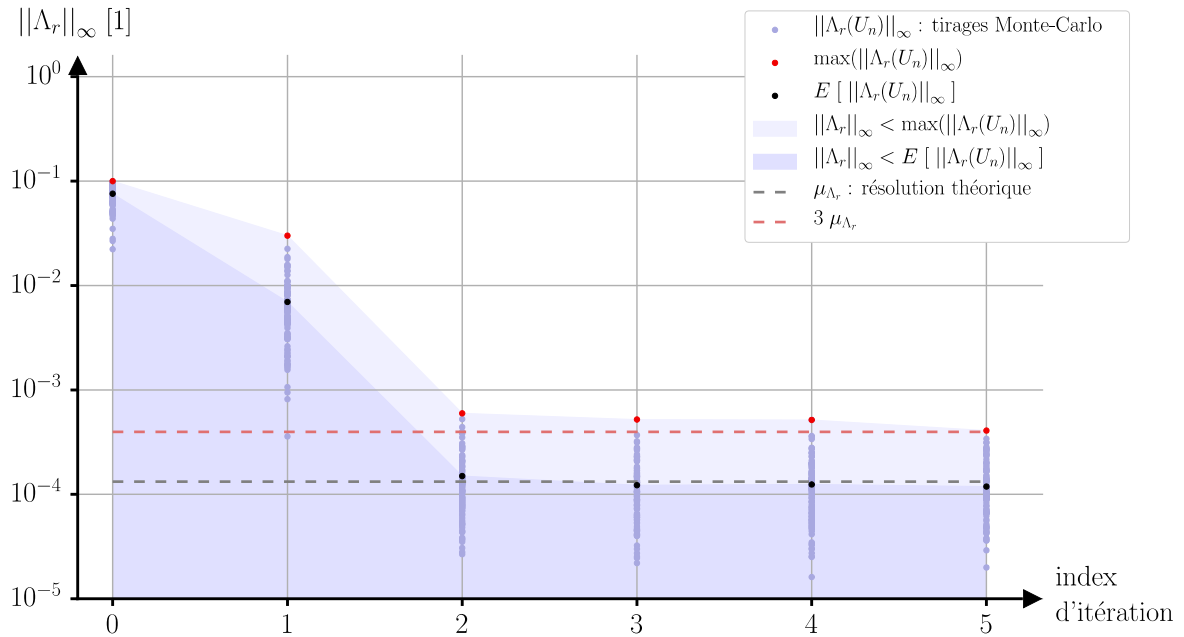


Figure 2.16 - Procédé de Monte-Carlo et stabilité de la convergence

Pour terminer, la figure 2.17 montre la dépendance de l'algorithme au temps d'intégration τ , en conservant uniquement la dernière itération de la figure 2.16 pour différentes valeurs de τ . Les expressions des formules (2.31) sont représentées en pointillés, images de la variance d'Allan de la figure 2.15. On peut ainsi atteindre la résolution optimale de 0.14 mHz sur la fréquence de résonance et de 1 sur le facteur de qualité.

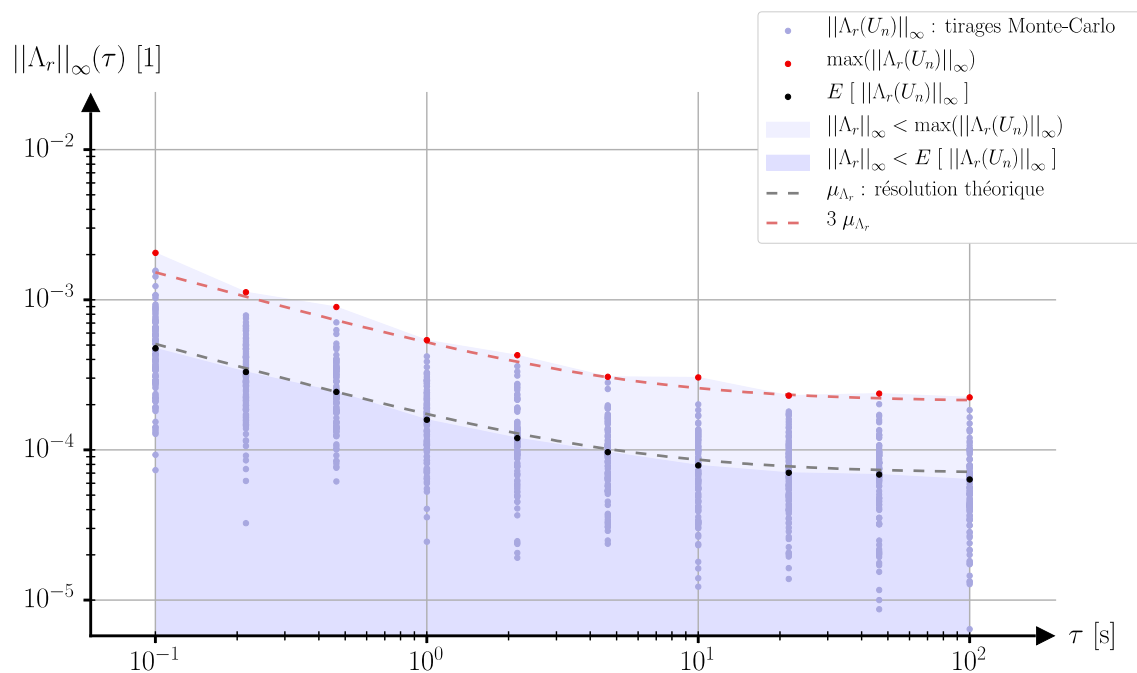


Figure 2.17 - Procédé de Monte-Carlo et temps d'intégration

2.2.8 Perspectives : généralisation à un nombre quelconque de points de mesure

Le nombre de 5 points de mesure semble être le minimum pour effectuer un étalonnage des paramètres du résonateur, alors réalisé dans un temps optimal. Cependant, les contraintes de calcul imposent l'utilisation d'estimateurs approchés, et les bruits et autres erreurs de mesure ont des influences significatives. Ainsi, une généralisation de cette méthode à un nombre quelconque de points de mesure serait pertinente dans l'optique d'améliorer son efficacité et sa précision. En particulier, faire passer la précision de l'estimateur de pulsation sous la résolution fréquentielle du résonateur doit être possible dans ces conditions.

Le calcul s'effectue en deux étapes. Premièrement, on étend l'utilisation du facteur ν , introduit en partie 2.2.5, pour obtenir des points le plus régulièrement répartis sur le cercle de Nyquist, en considérant les approximations $(\tilde{\omega}_0, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$. Ceci étant fait, [Coope 1992] montre que la méthode des moindres carrés s'adapte parfaitement à l'étude de la géométrie d'un cercle avec une complexité de calcul optimisée. On s'attend donc à une précision accrue sur l'estimation du point hors résonance et des variables Ψ par rapport aux formules (B.7). Le résultat de la figure 1.15 peut même laisser espérer une détermination de l'amortissement non linéaire de l'oscillateur de Duffing, négligé jusque-là.

Deuxièmement, on a autant d'équations issues de la combinaison des formules (B.13) et (B.14) ((B.1) et (B.9) dans le cas linéaire) que de points mesurés, qui ont maintenant la forme de l'équation (2.36).

$$\tilde{\omega}_\nu = \tilde{\omega}_0 + \nu \tilde{\alpha} + \frac{\tilde{\beta}}{1 + \nu^2} = \omega_0 - \alpha \Psi_\nu + \beta \Upsilon_\nu \quad (2.36)$$

Le travail principal à effectuer est de trouver une combinaison et une pondération optimale de ces équations pour avoir les meilleurs estimateurs $(\hat{\omega}_{0iter}, \hat{\alpha}_{iter}, \hat{\beta}_{iter})$. Dans le cas linéaire, pour lequel la résolution est plus simple, on peut proposer une première combinaison de ces équations comme exemple de départ de cette étude. On obtient alors immédiatement les estimateurs de la formule (2.37).

$$\left(\begin{array}{l} \hat{\omega}_{0iter} = \tilde{\omega}_0 + \tilde{\alpha} \frac{\sum_i n_i d\Psi_{\nu_i}}{\sum_i n_i}, \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \sum_i n_i \neq 0 \\ \sum_i n_i \nu_i = 0 \end{array} \right. \\ \hat{\alpha}_{iter} = \tilde{\alpha} + \tilde{\alpha} \frac{\sum_i k_i d\Psi_{\nu_i}}{\sum_i k_i \nu_i}, \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \sum_i k_i = 0 \\ \sum_i k_i \nu_i \neq 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.37)$$

On pose :

$$\left(\begin{array}{l} \nu_i = \tan\left(\frac{i}{N+1} \frac{\pi}{2}\right) \\ n_i = \cos\left(\frac{i}{N+1} \frac{\pi}{2}\right) \\ k_i = \sin\left(\frac{i}{N+1} \pi\right) \end{array} \right), \quad i \in \llbracket -N, N \rrbracket \quad (2.38)$$

Les estimateurs (2.37) deviennent alors :

$$\left(\begin{array}{l} \hat{\omega}_{0iter} = \tilde{\omega}_0 + \tilde{\alpha} \frac{\sum_{i=-N}^N \cos\left(\frac{i}{N+1} \frac{\pi}{2}\right) d\Psi_{\nu_i}}{\sum_{i=-N}^N \cos\left(\frac{i}{N+1} \frac{\pi}{2}\right)} \simeq \tilde{\omega}_0 + \tilde{\alpha} \pi \frac{\sum_{i=-N}^N \cos\left(\frac{i}{N+1} \frac{\pi}{2}\right) d\Psi_{\nu_i}}{4(N+1)} \\ \hat{\alpha}_{iter} = \tilde{\alpha} + \tilde{\alpha} \frac{\sum_{i=-N}^N \sin\left(\frac{i}{N+1} \pi\right) d\Psi_{\nu_i}}{\sum_{i=-N}^N \left(1 - \cos\left(\frac{i}{N+1} \pi\right)\right)} \simeq \tilde{\alpha} + \tilde{\alpha} \frac{\sum_{i=-N}^N \sin\left(\frac{i}{N+1} \pi\right) d\Psi_{\nu_i}}{2N+1} \end{array} \right. \quad (2.39)$$

2.3 Cas du gyromètre et des régimes transitoires

2.3.1 Contexte

Le gyromètre VIG possède un facteur de qualité de plusieurs dizaines de milliers et une fréquence de résonance de l'ordre de quelques dizaines de kHz (voir partie 1.3.4). Le temps de réponse de la cellule vibrante est alors de l'ordre de quelques secondes (formules (1.39) et (1.40) de la partie 1.2.2). La méthode d'étalonnage utilisant les états stationnaires développée dans la partie 2.2 n'est donc pas idéale, car elle peut présenter un temps d'exécution dépassant l'ordre de la minute. En mode de mesure ininterrompu, l'architecture électronique utilisée et développée dans le Chapitre 3 permet une transmission des données avec une cadence de l'ordre d'une cinquantaine de points de mesure d'amplitude par seconde. On a donc quelques centaines de points de mesure pour décrire l'évolution des amplitudes sur un régime transitoire, qu'il est intéressant d'exploiter pour étalonner le résonateur.

On se place toujours dans l'approximation de la partie 1.2.1 où la représentation des états stationnaires dans le plan de Nyquist est un cercle (figure 1.6). Pour étudier le domaine transitoire des amplitudes réponses (figures 1.8 et 1.14), on s'intéressera essentiellement à la formule (1.39), que l'on rappelle ici en (2.40), en reprenant toutes les notations de la partie 1.2, excepté le remplacement $\underline{x}_M = x_{Mp} + i x_{Mq}$ par $\underline{z} = x + i y$:

$$\underline{z}(t, \omega) = \underline{z}(\omega) + (\underline{z}(t=0) - \underline{z}(\omega)) e^{-\alpha t} e^{-i\Delta\omega t} \quad (2.40)$$

Dans la pratique, la pulsation d'excitation ω est imposée par l'utilisateur, elle est donc connue. La géométrie de cette courbe paramétrée par le temps t est ainsi dépendante d'un ensemble de 4 paramètres (6 paramètres réels) :

- $\underline{z}(t=0)$: l'amplitude réponse complexe initiale

- $\underline{z}(\omega)$: l'amplitude réponse complexe asymptotique (réponse stationnaire à la pulsation ω)
- $\alpha = \omega_0 / (2Q)$: demi largeur de bande passante à -3 dB du résonateur
- $\Delta\omega = \omega - \omega_0$: écart entre la pulsation d'excitation ω et la pulsation de résonance ω_0

L'ensemble des étalonnages présentés dans cette partie 2.3 repose essentiellement sur l'expression de la caractéristique fréquentielle stationnaire (2.2) (ou (2.13) avec une raideur non linéaire) du résonateur, et sur cette expression (2.40) des régimes transitoires.

2.3.2 Extraction de paramètres à partir d'un unique régime transitoire

2.3.2.1 Introduction aux spirales logarithmiques

Dans cette partie, et pour alléger les expressions du calcul analytique, on étudie la courbe paramétrée (2.40) avec d'autres notations, qui devient alors :

$$\underline{M}(t) = \underline{M}_\infty + (\underline{M}_0 - \underline{M}_\infty)e^{-\alpha t}e^{-i\Delta\omega t} \quad (2.41)$$

Avec $\underline{M}(t) = x(t) + iy(t)$, $\underline{M}_0 = x_0 + iy_0$, $\underline{M}_\infty = x_\infty + iy_\infty$ les points du plan complexe représentant les amplitudes, respectivement courante à l'instant t , initiale et asymptotique. Les 6 paramètres réels énoncés précédemment deviennent donc $(x_0, y_0, x_\infty, y_\infty, \alpha, \Delta\omega)$.

Graphiquement, faire varier \underline{M}_0 et \underline{M}_∞ est équivalent à faire subir une similitude directe (translation, rotation, homothétie) à l'ensemble de la courbe paramétrée, ce qui n'influe pas sur sa nature intrinsèque : il s'agit d'une spirale logarithmique, ou spirale de Bernoulli [Mukhopadhyay 2004]. Ainsi, l'allure graphique de cette courbe ne dépend finalement que d'un unique paramètre réel sans dimension, qui est le rapport $\Delta\omega/\alpha$, et dont on représente l'influence sur la figure 2.18.

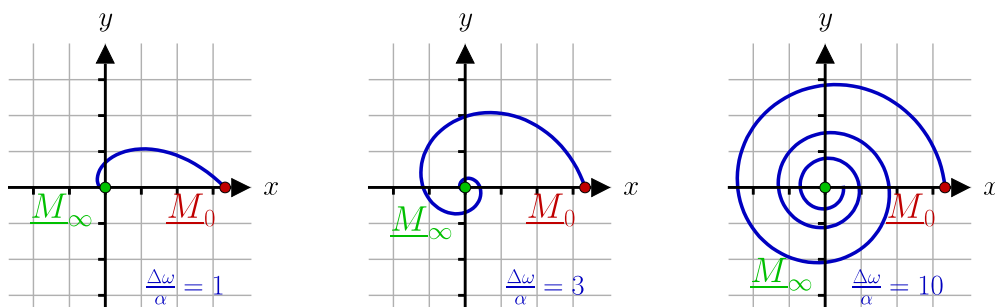


Figure 2.18 - Allure générale d'une spirale de Bernoulli

L'objectif de cette partie est d'établir un procédé d'estimation de ces paramètres à partir des points mesurés. On note qu'en pratique, le point initial $\underline{M}_0 = x_0 + iy_0$ est connu, car on peut choisir n'importe quel point mesuré comme représentant l'origine du temps $t=0$. En plus de définir entièrement la géométrie de la courbe, les 4 paramètres réels restants $(x_\infty, y_\infty, \alpha, \Delta\omega)$ correspondent aux grandeurs caractéristiques du capteur que l'on souhaite étalonner. Alors que dans l'étude précédente (partie 2.2), on cherchait (ω_0, α) , on s'intéresse maintenant à l'ensemble $(\Delta\omega, \alpha)$. Étant donné que $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, et que la pulsation d'excitation ω est fixée par l'utilisateur, donc connue, les deux études sont équivalentes. Par ailleurs, l'estimation des amplitudes asymptotiques (x_∞, y_∞) peut permettre de généraliser l'application de l'ensemble du procédé de la partie 2.2 pour les résonateurs à très grand facteur de qualité, en éliminant donc la contrainte du temps d'établissement. On pourra donc compléter l'étalonnage avec l'estimation des différents couplages électroniques et des effets non linéaires.

Les spirales logarithmiques sont observées dans de nombreux domaines de la physique, parmi lesquels on peut citer la biologie, la météorologie et l'astrophysique. On trouve ainsi de nombreuses études de leurs propriétés dans la littérature. En particulier, [Mishra 2006] propose un algorithme d'estimation des paramètres géométriques de la formule (2.41) à partir d'une acquisition d'un jeu de points de mesure d'une telle spirale dans le plan. L'intérêt principal de cette méthode est qu'elle ne suppose pas que le centre de la spirale $\underline{M}_\infty = x_\infty + iy_\infty$ soit connu, ce qui est en adéquation avec notre étude. En revanche, la précision de l'estimation est très sensible aux erreurs faites sur les mesures des points de la spirale. Ce dernier aspect est critique, et impose une adaptation de la méthode pour notre application.

2.3.2.2 Mesures à intervalles de temps réguliers

Fort heureusement, notre situation est plus avantageuse que la configuration générale de [Mishra 2006]. En effet, l'architecture électronique utilisée et développée dans le Chapitre 3 permet de garantir que les mesures d'amplitude sont effectuées à intervalles de temps rigoureusement réguliers. Cette caractéristique est extrêmement simplificatrice dans le contexte de la formule (2.41), et permet de construire un procédé estimateur optimal dédié à notre architecture.

L'idée de base vient du fait que, dans l'expression en coordonnées polaires d'une spirale logarithmique centrée sur l'origine du plan, le rayon r est en progression géométrique par rapport à l'angle polaire θ [Mukhopadhyay 2004]. Étant donné que $\theta = \Delta\omega t$, cette progression peut aussi être vue par rapport au temps t . Ainsi, deux points de la courbe, pour lesquels la différence des abscisses temporelles vaut Δt , sont l'argument et l'image associée par une similitude directe du plan, de centre $\underline{M}_\infty = x_\infty + iy_\infty$, de rapport $G = e^{-\alpha\Delta t}$ et d'angle

$\Theta = \Delta\omega \Delta t$. Une similitude étant entièrement caractérisée par l'image de deux points distincts du plan, la connaissance de 3 points mesurés à intervalles de temps réguliers Δt (supposé fixé et connu) suffit à déterminer les paramètres $(x_\infty, y_\infty, \alpha, \Delta\omega)$ recherchés. La figure 2.19 montre les liens entre spirale et similitude.

Les formules donnant les expressions des 4 paramètres $(x_\infty, y_\infty, \alpha, \Delta\omega)$ en fonction des coordonnées cartésiennes des 3 points de mesure (x_1, y_1) , (x_2, y_2) et (x_3, y_3) sont les suivantes :

$$x_\infty = x_2 + \frac{x_{23}(x_{12}^2 + y_{12}^2) - x_{12}(x_{23}^2 + y_{23}^2)}{(x_{12} - x_{23})^2 + (y_{12} - y_{23})^2} \quad (2.42)$$

$$y_\infty = y_2 + \frac{y_{23}(x_{12}^2 + y_{12}^2) - y_{12}(x_{23}^2 + y_{23}^2)}{(x_{12} - x_{23})^2 + (y_{12} - y_{23})^2} \quad (2.43)$$

$$\Delta\omega = \frac{1}{\Delta t} \arctan\left(\frac{y_{12}y_{23} + x_{12}x_{23}}{x_{12}^2 + y_{12}^2}\right) \quad (2.44)$$

$$\alpha = -\frac{1}{2\Delta t} \ln\left(\frac{x_{23}^2 + y_{23}^2}{x_{12}^2 + y_{12}^2}\right) \quad (2.45)$$

Avec :

$$\begin{cases} x_{12} = x_2 - x_1 \\ y_{12} = y_2 - y_1 \\ x_{23} = x_3 - x_2 \\ y_{23} = y_3 - y_2 \end{cases} \quad (2.46)$$

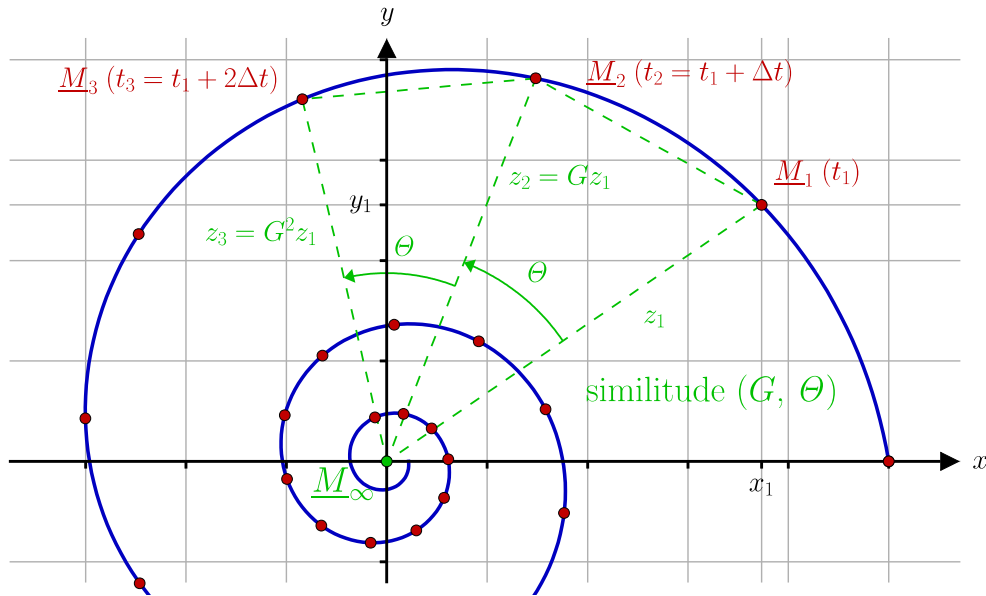


Figure 2.19 - Spirale logarithmique et similitude directe pour des points mesurés à intervalles de temps réguliers

2.3.2.3 Stabilité des spirales logarithmiques par moyennage

La stabilité par moyennage est une autre propriété géométrique des spirales logarithmiques qui nous concerne au premier plan. Soient p un entier strictement positif, et $(\underline{M}_k)_{k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$ un ensemble de N points du plan appartenant à une spirale logarithmique donnée, caractérisée par les paramètres $(x_\infty, y_\infty, \alpha, \Delta\omega)$, et dont les relevés sont effectués à intervalles de temps réguliers Δt . Soit maintenant $(\underline{M}_{pk})_{k \in \llbracket 0, N_p-1 \rrbracket}$ l'ensemble des isobarycentres obtenus en regroupant les points $(\underline{M}_k)_{k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$ par paquets de p points consécutifs, avec $N_p = \lfloor \frac{N}{p} \rfloor$. On peut démontrer aisément que les points $(\underline{M}_{pk})_{k \in \llbracket 0, N_p-1 \rrbracket}$ appartiennent à une unique spirale logarithmique caractérisée par les mêmes paramètres $(x_\infty, y_\infty, \alpha, \Delta\omega)$. Les représentations graphiques dans le plan de ces deux spirales sur la figure 2.20 ne sont pas confondues, car elles diffèrent par leur point initial $\underline{M}_0 = x_0 + iy_0$. Ce paramètre n'ayant pas d'influence dans notre étude, nous considérerons qu'il s'agit de la même spirale (de la même façon que l'on peut représenter un même vecteur à deux positions différentes dans le plan).

Cette propriété est essentielle, car en pratique, les points mesurés sont obtenus par moyennage des amplitudes réelles pendant l'intervalle de temps Δt (voir partie 3.3.4). Ainsi, dans des conditions idéales, les points effectivement mesurés par l'architecture numérique du capteur appartiennent bien à la spirale logarithmique $(x_\infty, y_\infty, \alpha, \Delta\omega)$.

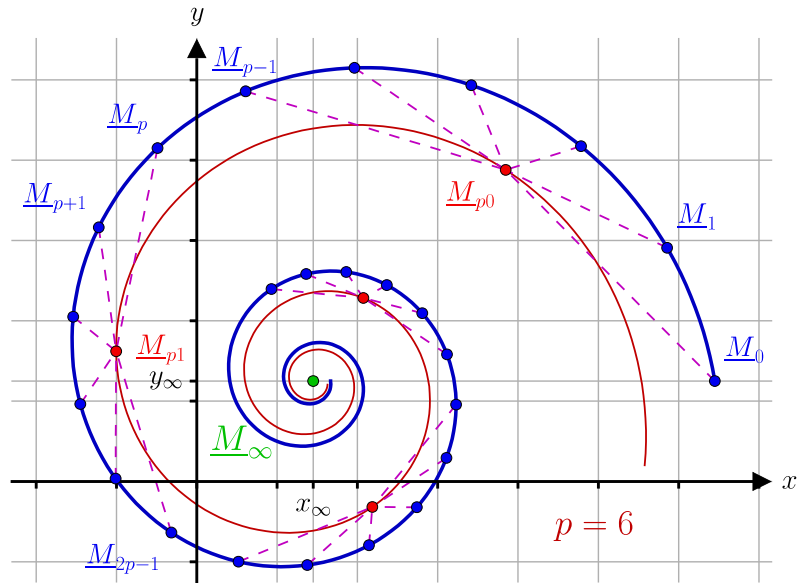


Figure 2.20 - Stabilité d'une spirale logarithmique par moyennage

2.3.2.4 Optimisation des estimateurs en présence de sources de bruits

Pour étudier l'influence des bruits de mesure, on se place dans un cadre identique à celui de la partie 2.2.7, dont on conserve les notations (à l'exception de τ qui devient Δt). On suppose ainsi que les mesures des amplitudes sont essentiellement perturbées par des bruits blancs dx_b et dy_b et des bruits roses dx_r et dy_r , sans dimension, toujours exprimés relativement au rayon du cercle X dans le plan de Nyquist. On reprend la variance d'Allan correspondante de la figure 2.15 sur la figure 2.21. On rappelle que σ_r (sans dimension) est le plancher du bruit rose, et que σ_b (en $s^{\frac{1}{2}}$) est le niveau de bruit blanc à 1 s.

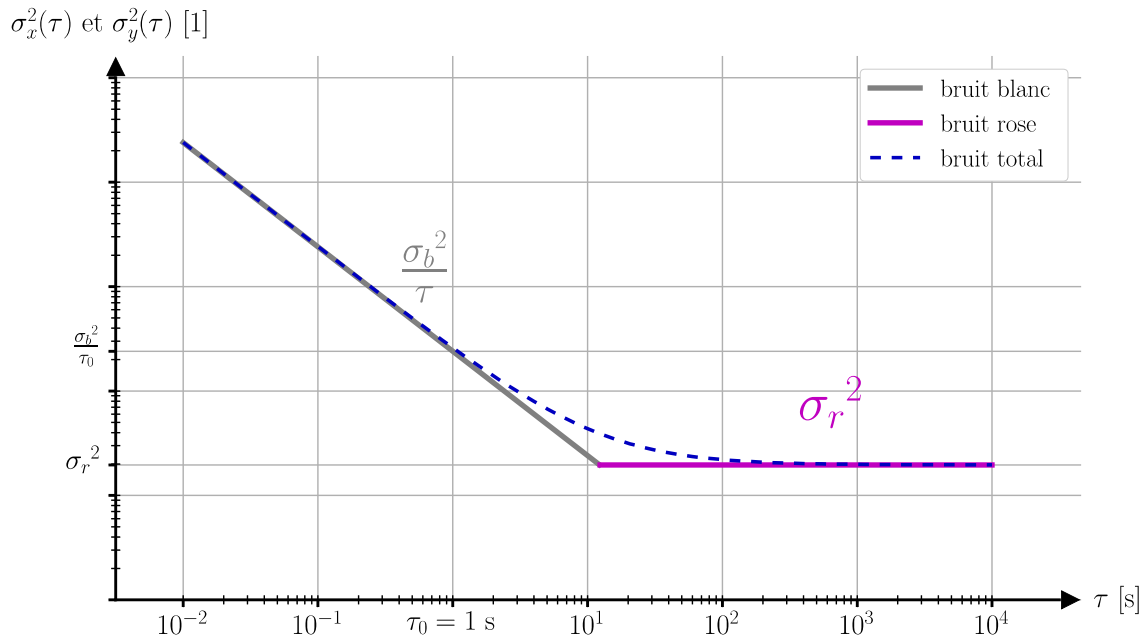


Figure 2.21 - Variance d'Allan de la mesure des amplitudes réponses

De la même façon que dans la partie 2.2.7, on présente les développements limités aux premiers ordres non nuls en σ_r et σ_b des variances des estimateurs correspondant aux formules (2.42), (2.43), (2.44) et (2.45).

$$\begin{aligned}
 V(\hat{x}_\infty) = V(\hat{y}_\infty) &= \frac{\varrho_e^4 + 4\varrho_e^2 + 1}{(1 + \varrho_e^2 - 2\varrho_e\varrho_c)^2} \frac{(X\sigma_b)^2}{\Delta t} \\
 &+ \frac{9\ln(3)(1 - 2\varrho_e\varrho_c) + 8\ln(2)(2\varrho_e^2 - 1 + 2\varrho_e\varrho_c)}{2\ln(2)(1 + \varrho_e^2 - 2\varrho_e\varrho_c)^2} (X\sigma_r)^2
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned}
 V(\hat{\Delta\omega}) = V(\hat{\alpha}) &= \frac{2(1 + \varrho_e^2 + \varrho_e\varrho_a)}{(1 + \varrho_e^2 - 2\varrho_e\varrho_a)\Delta t^2} \frac{(X\sigma_b)^2}{r^2\Delta t} \\
 &+ \frac{9\ln(3)(-\varrho_e\varrho_a) + 4\ln(2)(1 + \varrho_e^2 + 4\varrho_e\varrho_a)}{2\ln(2)(1 + \varrho_e^2 - 2\varrho_e\varrho_a)^2\Delta t^2} \frac{(X\sigma_r)^2}{r^2}
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Où X est le rayon du cercle dans le plan de Nyquist, r le rayon polaire de la spirale pour le point (x_2, y_2) , Δt l'intervalle de temps entre les 3 mesures d'amplitudes, et où ϱ_e et ϱ_c sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{cases} \varrho_e &= e^{-\alpha \Delta t} \\ \varrho_c &= \cos(\Delta \omega \Delta t) \end{cases} \quad (2.49)$$

Il est à noter que la formule (2.47) ne correspond pas rigoureusement à la variance des estimateurs \hat{x}_∞ et \hat{y}_∞ , qui ne peut pas être définie dans le cas de la présence d'un bruit rose [Rutman 1978]. L'expression proposée correspond en fait à la variance de ces estimateurs en supposant que l'on connaît une référence de bruit rose, c'est-à-dire en supposant par exemple que le point (x_2, y_2) présente une composante nulle de bruit rose. Néanmoins, l'erreur commise en utilisant cette expression n'a pas d'influence en pratique, car le point (x_∞, y_∞) est repéré relativement aux mesures précédentes du capteur.

La première intuition pour réduire la valeur de cette variance, notamment la composante en bruit blanc, est d'utiliser la propriété de stabilité par moyennage de la spirale décrite précédemment, dans le but d'augmenter la valeur de Δt . Mais une démarche plus aboutie est la généralisation des expressions (2.42), (2.43), (2.44) et (2.45) à plus de 3 points, pour exploiter au mieux l'ensemble $(\underline{M}_k)_{k \in [0, N-1]}$ de N points du plan correspondant à des amplitudes relevées à intervalles de temps réguliers Δt .

Pour y parvenir, il suffit d'effectuer une moyenne pondérée sur un ensemble d'estimations à 3 points. En représentant quelques exemples, la figure 2.22 montre la diversité des triplets de points que l'on peut considérer à partir d'une acquisition de N points consécutifs.

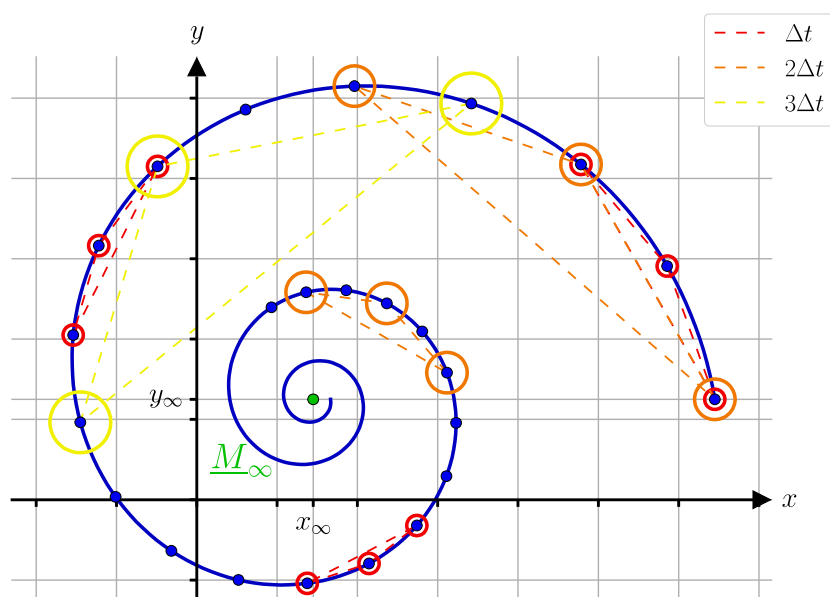


Figure 2.22 - Généralisation des estimateurs à plus de 3 points.

Le choix des coefficients de pondération qui permet de minimiser la variance de l'estimateur obtenu, due aux bruits présents sur la mesure des amplitudes, n'est pas trivial. En revanche, il est possible d'exprimer analytiquement cette variance en fonction des coefficients de pondération et des niveaux de bruit de mesure, ce qui permet d'obtenir ces coefficients par optimisation numérique, sans faire de simulation.

Les expressions analytiques devenant naturellement trop complexes pour la lecture, et l'optimisation étant numérique, il faut à partir d'ici se placer dans une configuration précise pour présenter les performances de l'étalonnage.

2.3.2.5 Performances théoriques et simulées de l'étalonnage dans le cas du VIG

On retient donc les caractéristiques du gyromètre VIG présentés dans la partie 1.3.4 : un résonateur possédant une fréquence de résonance $f_0=30$ kHz et un facteur de qualité $Q=150\,000$.

Pour que les calculs d'optimisation et de simulation s'effectuent dans un temps raisonnable, on restreint l'étude en admettant que les meilleures performances sont généralement atteintes lorsque Δt est petit. On retiendra la valeur $\Delta t=20$ ms, qui est proche de la cadence la plus rapide atteignable avec l'architecture actuelle. On choisit également de prendre $r=X$, qui correspond à l'ordre de grandeur typique du rayon polaire de la spirale lorsque l'on effectue des sauts dans la commande de fréquence d'excitation.

On cherche donc les meilleures combinaisons des paramètres restants, à savoir l'écart à la pulsation de résonance $\Delta\omega$ et le nombre de points d'acquisition N .

La figure 2.23 rassemble les résultats d'optimisation et de simulation des estimateurs $\hat{\Delta\omega}$ et $\hat{\alpha}$, exprimés relativement à $\mu_{\omega r}$ ou $\mu_{\omega b}$ définis par la formule (2.33), avec $\tau=(N-1)\Delta t$ le temps de l'acquisition, en choisissant pour chaque valeur de N la valeur de $\Delta\omega$ donnant la meilleure résolution. Le code qui génère les bruits blanc et rose pour les simulations est donné en Annexe C.

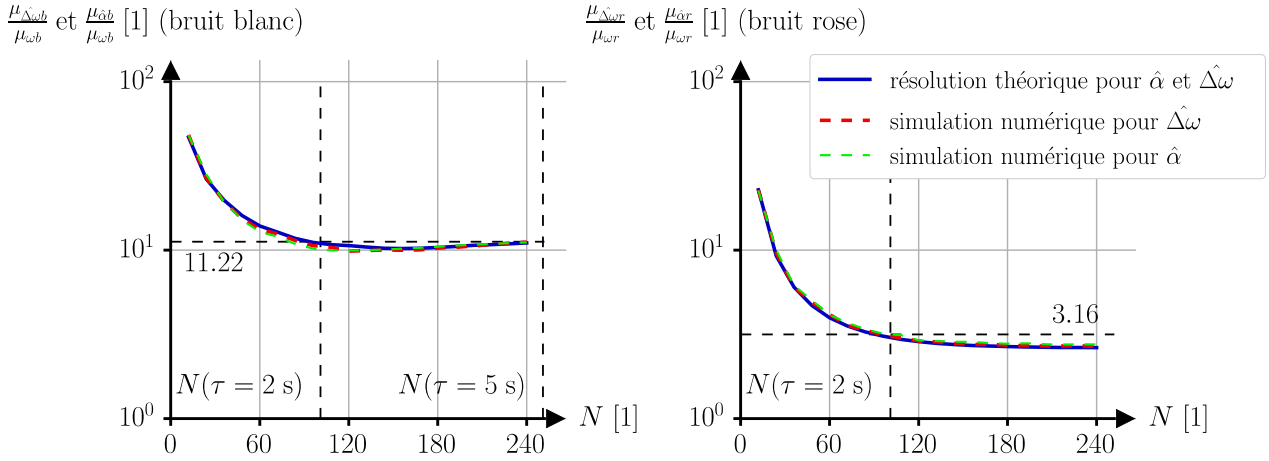


Figure 2.23 - Résolutions relatives théoriques et simulées des estimateurs fréquentiels

On en déduit les encadrements suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{\hat{\Delta\omega r}} = \mu_{\hat{\alpha r}} = \sqrt{V(\hat{\Delta\omega})_{\sigma_b=0}} = \sqrt{V(\hat{\alpha})_{\sigma_b=0}} \leq 3.16 \mu_{\omega r} \\ \hspace{15em} \text{pour } \tau \geq 2\text{ s} \\ \mu_{\hat{\Delta\omega b}} = \mu_{\hat{\alpha b}} = \sqrt{V(\hat{\Delta\omega})_{\sigma_r=0}} = \sqrt{V(\hat{\alpha})_{\sigma_r=0}} \leq 11.22 \mu_{\omega b} \\ \hspace{15em} \text{pour } 2\text{ s} \leq \tau \leq 5\text{ s} \end{array} \right. \quad (2.50)$$

La figure 2.24 rassemble les résultats d'optimisation et de simulation des estimateurs \hat{x}_∞ et \hat{y}_∞ , en affichant, pour quelques valeurs de $\Delta\omega$, l'évolution de la résolution en fonction de N , exprimée cette fois-ci relativement à σ_r ou σ_b , avec $\tau = (N-1)\Delta t$. Les séries de 9 courbes correspondent à la liste (1, 1.67, 2.78, 4.64, 7.74, 12.91, 21.54, 35.94, 59.95), qui sont les différentes valeurs du rapport $\Delta\omega/\alpha$.

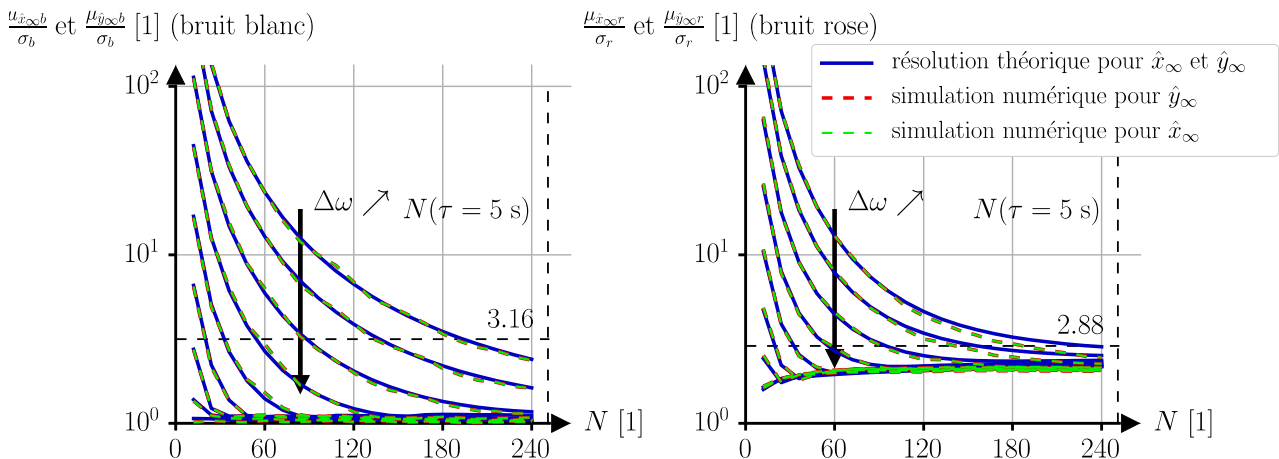


Figure 2.24 - Résolutions relatives théoriques et simulées des estimateurs d'amplitudes finales

Comme on pouvait s'y attendre, la résolution de ces estimateurs est minorée par σ_r et σ_b suivant la couleur de bruit considérée. Pour le bruit blanc, on atteint même σ_b pour τ suffisamment grand, avec une correspondance d'autant plus rapide que $\Delta\omega$ est grand. Notamment :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{\hat{x}_{\infty r}} = \mu_{\hat{y}_{\infty r}} = \sqrt{V(\hat{x}_{\infty})_{\sigma_b=0}} = \sqrt{V(\hat{y}_{\infty})_{\sigma_b=0}} \leq 2.88 \sigma_r \\ \text{pour } \Delta\omega \geq \alpha \text{ et } \tau \geq 5 \text{ s} \\ \mu_{\hat{x}_{\infty b}} = \mu_{\hat{y}_{\infty b}} = \sqrt{V(\hat{x}_{\infty})_{\sigma_r=0}} = \sqrt{V(\hat{y}_{\infty})_{\sigma_r=0}} \leq 3.16 \sigma_b \\ \text{pour } \Delta\omega \geq \alpha \text{ et } \tau \geq 5 \text{ s} \end{array} \right. \quad (2.51)$$

Le principal enseignement de cette dernière remarque est que l'estimation du point (x_{∞}, y_{∞}) est délicate pour les régimes proches de la résonance ($\Delta\omega \leq \alpha$), et au contraire très efficace pour les régimes hors résonance ($\Delta\omega \geq \alpha$). Il paraît donc difficile d'adapter l'algorithme de la partie 2.2 pour les résonateurs à temps de réponse élevé. Mais on peut noter que la piste envisagée en partie 2.2.8 pourrait permettre de contourner cet obstacle en construisant un nouvel algorithme exploitant exclusivement des régimes de fréquence vérifiant $\Delta\omega \geq \alpha$. D'autre part, l'évaluation des paramètres électroniques décrits dans la partie 1.2.5 ne nécessite que l'étude d'amplitudes hors résonance, et est donc aussi précise avec des régimes transitoires qu'avec des régimes stationnaires.

Contrairement aux formules (2.34) et (2.35) pour lesquelles les valeurs numériques ne dépendent pas de la configuration, les formules (2.50) et (2.51) ne sont valables que lorsque $f_0=30$ kHz, $Q=150\,000$, $\Delta t=20$ ms et $r=X$. En observant rapidement les tendances sur d'autres configurations, on peut noter que les estimateurs $\hat{\Delta\omega}$ et $\hat{\alpha}$ sont légèrement plus précis lorsque α est petit, et qu'en opposition, les estimateurs \hat{x}_{∞} et \hat{y}_{∞} sont d'autant plus précis que α est grand. Ce résultat vient valider l'intuition que l'utilisation des états stationnaires est plus adaptée aux résonateurs à temps de réponse faible, pendant que l'utilisation des états transitoires est plus adaptée aux résonateurs à temps de réponse élevé.

2.3.3 Perspectives : extraction de paramètres sous modulation d'excitation

2.3.3.1 Configuration par défaut et notations

L'inconvénient principal de l'étude des régimes transitoires simples est qu'elle est difficilement compatible avec un mode de fonctionnement d'auto-étalonnage permanent ou même statique (voir partie 2.1). En effet, la mesure inertielle nécessite le plus souvent un

asservissement de la réponse du résonateur autour de son amplitude de résonance. Étudier des tracés complets de courbes d'amplitudes transitoires d'un résonateur à temps de réponse élevé implique une baisse de la norme de cette amplitude réponse au cours de l'étalonnage. Le mode de mesure inertielle reprend donc avec une résolution détériorée pendant un temps significatif.

On a pu voir précédemment (partie 2.3.2) qu'une grande partie de l'information peut s'obtenir sur les premiers instants d'un régime transitoire. En étudiant des régimes transitoires pendant des temps plus courts, on perd l'accès à une grande variété de données, mais, en contrepartie, on conserve en permanence une amplitude proche de la résonance. De cette constatation émane naturellement l'idée de travailler en modulation de l'excitation autour de la résonance.

L'architecture électronique présentée dans le Chapitre 3 permet un contrôle rapide, précis et synchrone de l'amplitude, la phase et la fréquence d'excitation du résonateur. Elle est donc parfaitement adaptée à ce mode de fonctionnement.

On reprend le contexte de la figure 2.1, reportée en figure 2.25, en ajoutant X la demi-amplitude à la résonance (ou aussi le rayon du cercle), φ_a la phase d'excitation, et $\underline{M}_{hr}=(x_{hr}, y_{hr})$ l'amplitude hors résonance. Cette amplitude \underline{M}_{hr} est fonction de l'amplitude de l'accélération d'excitation a_M et de φ_a selon la formule suivante :

$$\underline{M}_{hr} = x_{hr} + i y_{hr} = \frac{x_{hr0} + i y_{hr0}}{a_{M0}} a_M e^{i\varphi_a} = \underline{M}_{hr0} \frac{a_M}{a_{M0}} e^{i\varphi_a} \quad (2.52)$$

Avec $\underline{M}_{hr0}=(x_{hr0}, y_{hr0})$ l'amplitude hors résonance pour une excitation nominale arbitraire ($a_M=a_{M0}$, $\varphi_a=0$). Le rayon X est fonction de a_M , et vérifie :

$$X = \frac{a_M Q}{2\omega_0^2} = \frac{a_M}{4\omega_0^2 \xi} = \frac{a_M}{4\omega_0 \alpha} \quad (2.53)$$

Avec ω_0 la pulsation de résonance, Q le facteur de qualité du résonateur, $\xi=1/(2Q)$ le facteur d'amortissement, et $\alpha=\xi\omega_0$ la demi-largeur de bande passante à -3 dB du résonateur.

On réécrit (2.2) sous la forme (2.54) pour exprimer l'écart à la pulsation de résonance $\Delta\omega=\omega-\omega_0$ en fonction de l'angle ψ .

$$\Delta\omega = -\alpha \tan\left(\frac{\psi}{2}\right) \Leftrightarrow \psi(\Delta\omega) = -2\arctan\left(\frac{\Delta\omega}{\alpha}\right) \quad (2.54)$$

Pour un résonateur donné $(\omega_0, \alpha, \underline{M}_{hr0}, a_{M0})$, il existe naturellement une unique amplitude réponse stationnaire caractérisée par l'excitation $(a_M, \varphi_a, \Delta\omega)$, et représentée par un point \underline{M} dans le plan de Nyquist. En utilisant (2.11), (2.52), (2.53) et (2.54), on démontre que les coordonnées complexes de \underline{M} vérifient :

$$\underline{M}(a_M, \varphi_a, \Delta\omega) = \left(\frac{-i}{2\omega_0(\alpha + i\Delta\omega)} + \frac{\underline{M}_{hr0}}{a_{M0}} \right) a_M e^{i\varphi_a} \quad (2.55)$$

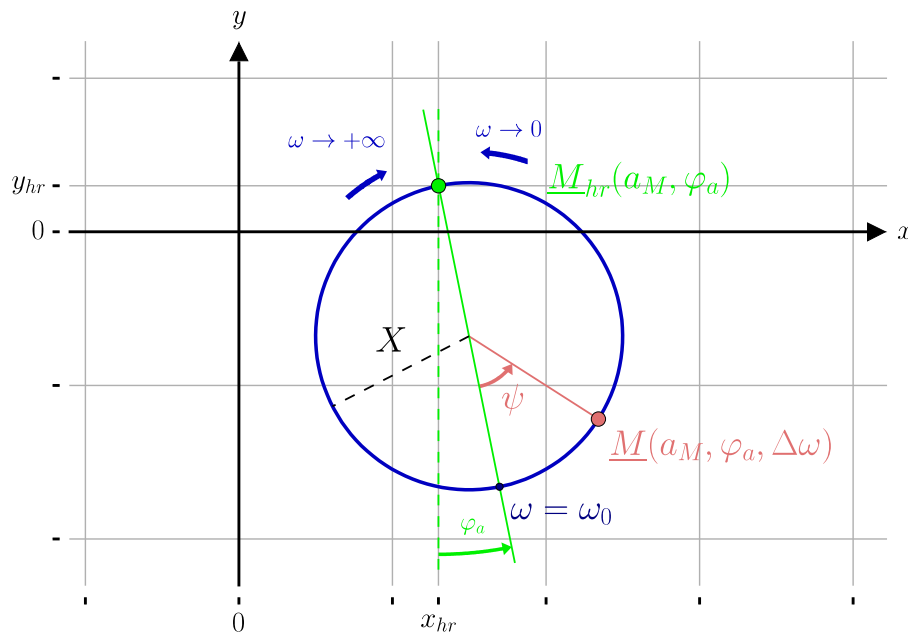


Figure 2.25 - Amplitudes des états stationnaires dans le plan de Nyquist

2.3.3.2 Développements asymptotiques et estimateurs

Pour modéliser l'effet d'une modulation de l'excitation, d'amplitude a_M , de phase φ_a , ou de fréquence $\Delta\omega$, on reprend en (2.56) la formule (2.41), que l'on dérive par rapport au temps, en ne retenant que la valeur en $t=0$ en (2.57) :

$$\underline{M}(t) = \underline{M}_\infty + (\underline{M}_0 - \underline{M}_\infty) e^{-\alpha t} e^{-i\Delta\omega t} \quad (2.56)$$

$$\underline{J} = \left(\frac{d\underline{M}(t)}{dt} \right)_{t=0} = (\underline{M}_\infty - \underline{M}_0)(\alpha + i\Delta\omega) \quad (2.57)$$

Ces formules (2.56) et (2.57) ne sont valables que si l'on peut négliger la variation de \underline{M}_{hr} par rapport aux variations de a_M et de φ_a . En effet, ce biais \underline{M}_{hr} est un effet

électronique, et ne suit pas la dynamique (2.56) des systèmes résonnants qui ne concerne que les phénomènes mécaniques pour notre instrument. On propose donc ici une version simplifiée du calcul dans laquelle on fait cette hypothèse, et donc dans laquelle on peut remplacer la formule (2.55) par la formule (2.58).

$$\underline{M}(a_M, \varphi_a, \Delta\omega) = \frac{-i a_M e^{i\varphi_a}}{2\omega_0(\alpha + i\Delta\omega)} \quad (2.58)$$

L'information extraite d'une modulation d'excitation est le nombre complexe \underline{J} de la formule (2.57) pour laquelle \underline{M}_0 et \underline{M}_∞ vérifient :

$$\begin{cases} \underline{M}_0 &= \underline{M}(a_M, \varphi_a, \Delta\omega) \\ \underline{M}_\infty &= \underline{M}(a_M + da_M, \varphi_a, \Delta\omega) & \text{(modulation d'amplitude)} \\ \underline{M}_\infty &= \underline{M}(a_M, \varphi_a + d\varphi_a, \Delta\omega) & \text{(modulation de phase)} \\ \underline{M}_\infty &= \underline{M}(a_M, \varphi_a, \Delta\omega + d(\Delta\omega)) & \text{(modulation de fréquence)} \end{cases} \quad (2.59)$$

En effectuant un développement limité au premier ordre en da_M , $d\varphi_a$ et $d(\Delta\omega)$, on obtient :

$$\begin{cases} \underline{J}_a &= \left(\frac{e^{i\varphi_a}}{2\omega_0} \right) (-i) da_M \\ \underline{J}_p &= \left(\frac{e^{i\varphi_a}}{2\omega_0} \right) (a_M) d\varphi_a \\ \underline{J}_f &= \left(\frac{e^{i\varphi_a}}{2\omega_0} \right) \left(\frac{-a_M}{\alpha + i\Delta\omega} \right) d(\Delta\omega) \end{cases} \quad (2.60)$$

Graphiquement, il s'agit de l'orientation et de la vitesse de parcours de la trajectoire rectiligne de l'amplitude réponse soumise à la modulation d'excitation (correspondant respectivement à l'argument et au module du nombre complexe \underline{J}). On trace ces 3 comportements pour différentes valeurs de $\Delta\omega$ sur la figure 2.26.

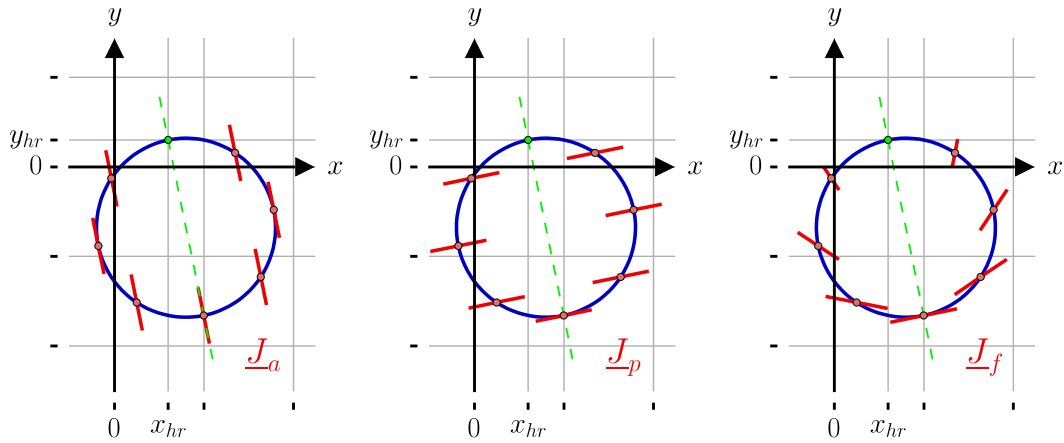


Figure 2.26 - Modulations d'excitation dans le plan de Nyquist

Le principal enseignement de ce résultat est l'indépendance de \underline{J}_a et de \underline{J}_p par rapport à $\Delta\omega$. En alternant les types de modulation, on peut extraire un premier paramètre :

$$\frac{\Delta\omega}{\alpha} = -\tan\left(\text{Arg}\left(\frac{\underline{J}_f}{\underline{J}_p}\right)\right) \quad (2.61)$$

En utilisant ce dernier résultat pour réaliser par exemple un asservissement à la résonance ($\Delta\omega=0$), on obtient la pulsation de résonance ω_0 et on peut aussi déterminer α :

$$\alpha = -\frac{d(\Delta\omega)}{d\varphi_a} \frac{\underline{J}_p}{\underline{J}_f(\Delta\omega=0)} \quad (2.62)$$

Avec les régimes de modulation d'excitation, on a donc potentiellement un procédé d'auto-étalonnage permanent (voir partie 2.1) pour déterminer en continu la fréquence de résonance et le facteur de qualité du résonateur. Il reste à étudier quantitativement la précision de ces étalonnages, ainsi que leur robustesse en présence de sources de bruit. Il faut également étudier la dynamique du biais \underline{M}_{hr} en fonction des variations de a_M et de φ_a , pour la décorrélérer de la dynamique de résonance (2.56). On peut faire la première remarque que le temps caractéristique des variations du biais est généralement très faible devant celui des effets résonants.

On peut aussi envisager d'étudier les dérivées temporelles de $\underline{M}(t)$ d'ordres supérieurs et de pousser les développements limités en da_M , $d\varphi_a$ et $d(\Delta\omega)$, pour extraire plus d'information de ces trajectoires. Par ailleurs, une piste d'amélioration peut être une optimisation des formes d'onde des modulations d'excitation.

2.4 Conclusion : implémentation des algorithmiques d'étalonnage

À ce jour, ces méthodes d'étalonnage n'ont pu être mises en œuvre que très partiellement sur les instruments de l'ONERA, et dans des versions peu optimisées. Il s'agit de l'étape suivante de ce projet de recherche, qui doit consister à implémenter effectivement ces algorithmes sur les dispositifs, et à affiner expérimentalement le choix des différents paramètres introduits, dans l'optique d'obtenir les performances d'étalonnage les plus intéressantes. Dans ce Chapitre 2, les jalons ont été posés, avec une étude théorique détaillée, et des caractérisations de calculs et de simulations. Les précautions ont été prises pour que l'ensemble des contraintes techniques, matérielles, et logicielles spécifiques à l'architecture des capteurs soit cohérent avec les méthodes qui ont été explorées ici. Le Chapitre 3 va maintenant présenter en détails les briques technologiques de l'instrument inertiel développé sur l'architecture FPGA, destinée donc entre autres à assurer ces fonctions d'étalonnage.

Chapitre 3

Briques technologiques

Chapitre 3	Briques technologiques.....	119
3.1	Introduction à l'électronique intégrée.....	120
3.2	Partition des ressources numériques.....	122
3.2.1	Calcul logique séquentiel sur FPGA.....	123
3.2.2	Calcul logiciel d'acquisition sur FPGA.....	125
3.2.3	Calcul logiciel sur OBC.....	127
3.2.4	Conclusion sur la répartition des fonctions.....	128
3.3	Développement des fonctions principales.....	130
3.3.1	Synthèse de fréquence.....	130
3.3.1.1	Contexte.....	130
3.3.1.2	Principe et résolution théorique.....	131
3.3.1.3	Implémentation.....	133
3.3.2	Constitution de la forme d'onde numérique.....	134
3.3.3	Modulation de signal $\Sigma\Delta$	135
3.3.3.1	Conversion numérique-analogique.....	135
3.3.3.2	Principe algorithmique.....	136
3.3.3.3	Implémentation.....	138
3.3.4	Démodulation numérique.....	139
3.3.4.1	Conversion analogique-numérique.....	139
3.3.4.2	Principe algorithmique.....	139
3.3.4.3	Amélioration : datation et système de sous-horloges.....	142
3.3.5	Boucles d'asservissement.....	143
3.3.5.1	Commande de fréquence.....	144
3.3.5.2	Commande couplée fréquence-phase.....	145
3.4	Architecture du capteur inertiel.....	147
3.4.1	Architecture numérique.....	147
3.4.2	Architecture complète.....	148
3.5	Conclusion : capteur opérationnel et performances.....	150

3.1 Introduction à l'électronique intégrée

L'intégration de l'instrument est faite sur une architecture électronique mixte, analogique et numérique. Le capteur inertiel complet est composé d'un résonateur vibrant en quartz, sous vide dans un boîtier en cuivre, d'une carte électronique analogique, d'une carte FPGA (Field Programmable Gate Array) pour l'électronique numérique, et d'un ordinateur de bord, dit OBC (On Board Computer), pour l'interface graphique utilisateur. La figure 3.1 synthétise les interactions entre ces différentes entités.



Figure 3.1 - Schéma matériel de l'instrument

Les propriétés piézoélectriques du quartz permettent de transmettre les caractéristiques de la vibration de la cellule résonnante sous la forme d'informations électriques. Tout le traitement du signal peut ainsi être effectué sur un module électronique. Les deux principales fonctions de cette interface électronique sont la génération du signal d'excitation de la cellule vibrante, et la mesure de sa réponse dans le but d'en déduire la mesure inertielle.

La figure 3.2 représente à gauche la cellule en quartz du gyromètre VIG de type diapason, et à droite celle de l'accéléromètre DIVA, avec leurs électrodes.

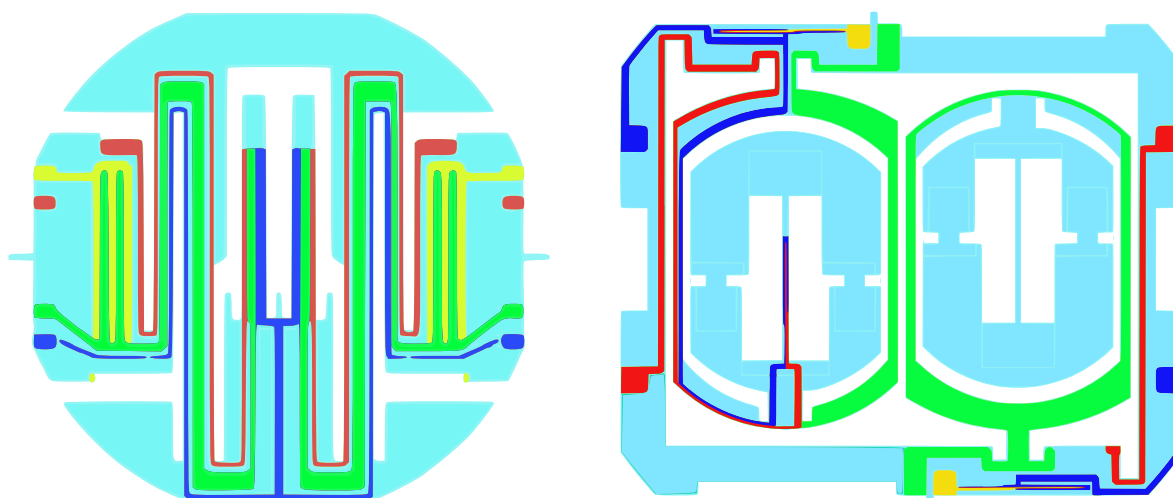


Figure 3.2 - Cellules vibrantes du gyromètre VIG (à gauche) et de l'accéléromètre DIVA (à droite)

La communication entre ces résonateurs et le module électronique de traitement du signal est illustrée sur le schéma de la figure 3.3. On note la présence d'une électronique supplémentaire à l'interface du résonateur, dite de proximité, permettant de mettre en forme le signal de réponse avant de le traiter sur la carte électronique (partie 1.2.5).

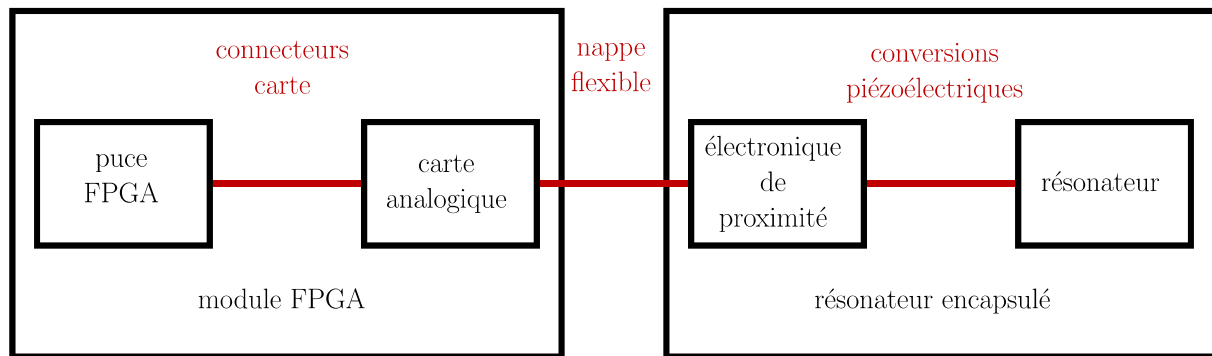


Figure 3.3 - Conversion électro-mécanique de l'instrument (résonateur et interfaçage électronique)

Les ressources nécessaires en électronique sont identifiées en considérant les régimes du résonateur que l'on souhaite atteindre. En particulier, les modes d'asservissement (partie 1.3.3) et de modulation de fréquence, de phase et d'amplitude (partie 2.3.3), présentés dans les chapitres précédents, exigent un synchronisme rigoureusement précis entre l'excitation et la mesure. Aucun microcontrôleur ne permet de respecter cette condition. Utiliser une carte FPGA se révèle indispensable.

Pour la réalisation des fonctions nécessaires au calcul de la mesure inertielle, on privilégie au maximum l'exploitation des ressources numériques devant celle des ressources analogiques. De cette façon, on construit une architecture portable, générique et indépendante de composants analogiques spécifiques, tout en conservant un encombrement faible. En particulier, les algorithmes développés sur la carte FPGA permettent de se passer de convertisseurs analogique-numérique (ADC) et numérique-analogique (DAC). En effet, le choix du calcul numérique est aussi motivé par l'opportunité de mesurer des sinusoides sans conversion analogique-numérique, selon une méthode qui fait l'objet d'un brevet ONERA [Guerard 2017], et dont la théorie et les performances sont détaillées dans ce chapitre (partie 3.3.4).

La figure 3.4 montre le module FPGA utilisé. Il s'agit d'un modèle Trenz TE0725. Le choix de ce module s'explique notamment par sa compacité et son nombre élevé de

connecteurs, principale exigence dans la perspective d'interfacer plusieurs résonateurs sur une même carte.

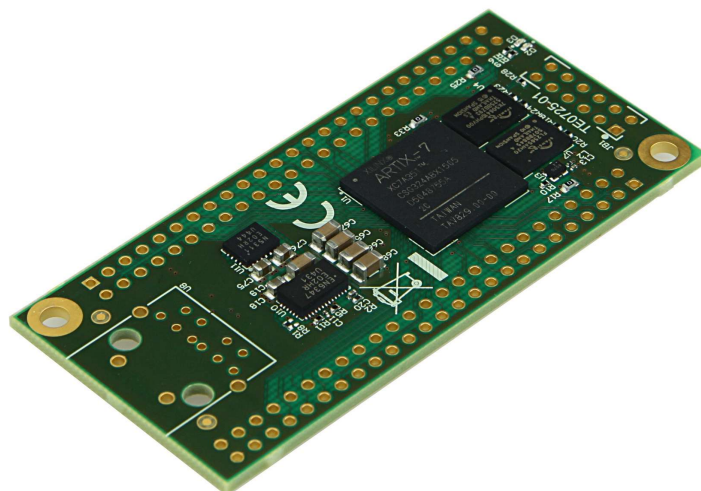


Figure 3.4 - Module FPGA Trenz TE0725

Pour profiter des propriétés avantageuses du calcul numérique pour le traitement du signal, il est impératif d'intégrer tout de même un minimum d'électronique analogique au sein du montage pour faire la transition entre les électrodes des cellules vibrantes piézoélectriques et les entrées du module FPGA. Concrètement, l'élément piézoélectrique est dans le domaine sinusoïdal, et les entrées et sorties du module FPGA sont binaires. On ne peut donc pas espérer consacrer moins de composants analogiques que des filtres dans le sens carte vers résonateur, et des comparateurs dans le sens résonateur vers carte. Ce niveau de simplicité est compatible avec l'algorithmique numérique développée.

L'OBC joue le rôle d'interface graphique utilisateur sur laquelle est effectué la commande des paramètres d'excitation et du régime de fonctionnement de l'instrument, et la mesure inertielle. Une communication série est établie entre la carte FPGA et l'ordinateur, illustrée sur la figure 3.1 et visible sur la figure 3.4.

Ce chapitre présente la théorie et l'implémentation du traitement du signal, pour la génération de sinusoides d'une part, et la mesure de la réponse d'autre part.

3.2 Partition des ressources numériques

L'architecture de l'instrument met à disposition divers moyens de calcul, présentant chacun ses atouts et ses contraintes. Afin d'optimiser la performance du système et l'occupation en mémoire, il convient de répartir et d'affecter les traitements à effectuer aux ressources adéquates. On compte trois moyens : le calcul logique séquentiel (en VHDL), le

calcul logiciel compilé embarqué (en C), et le calcul logiciel interprété sur l'ordinateur de bord (en Python).

3.2.1 Calcul logique séquentiel sur FPGA

Le calcul logique séquentiel est la ressource fondamentale de l'architecture adoptée. Le matériel constituant le module FPGA est essentiellement dédié à ce type de calcul, avec notamment des blocs logiques élémentaires CLB (Configurable Logic Bloc), constitués de tables de correspondance LUT (Lock Up Table) et de bascules. On compte également des éléments plus développés, comme des automates de calcul DSP (Digital Signal Processing), des tables mémoires, et des boucles à verrouillage de phase PLL (Phase Lock Loop), utilisées pour la génération de signaux d'horloge.

Le circuit FPGA est une électronique configurable et reconfigurable à volonté. L'utilisation des ressources matérielles du circuit est déterminée par un code écrit en VHDL, langage dédié à la programmation séquentielle. Le logiciel fourni par le fabricant de la carte électronique interprète ce code, en déduit les composants à connecter et les routages à tracer, puis configure effectivement la puce grâce à la connexion USB avec l'ordinateur. Par exemple, la figure 3.5 montre à gauche la syntaxe du code VHDL pour exprimer une bascule, entité fondamentale de la logique séquentielle, et à droite la représentation théorique de la logique définie, sous forme de schéma bloc. La figure 3.6 donne une représentation réaliste du routage correspondant sur la puce, donnée par le logiciel.

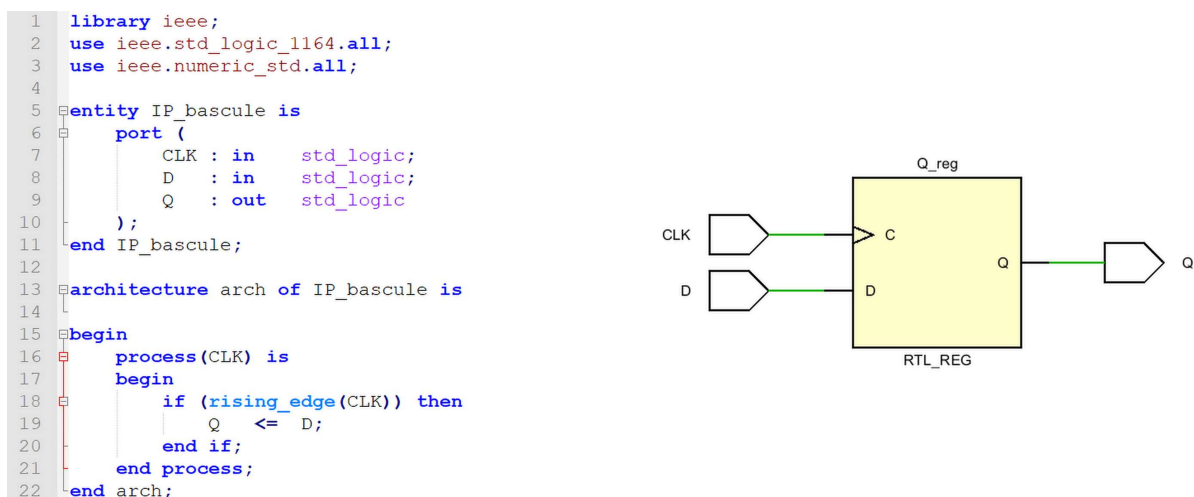


Figure 3.5 - Code VHDL d'une bascule (à gauche) et logique interprétée associée (à droite)

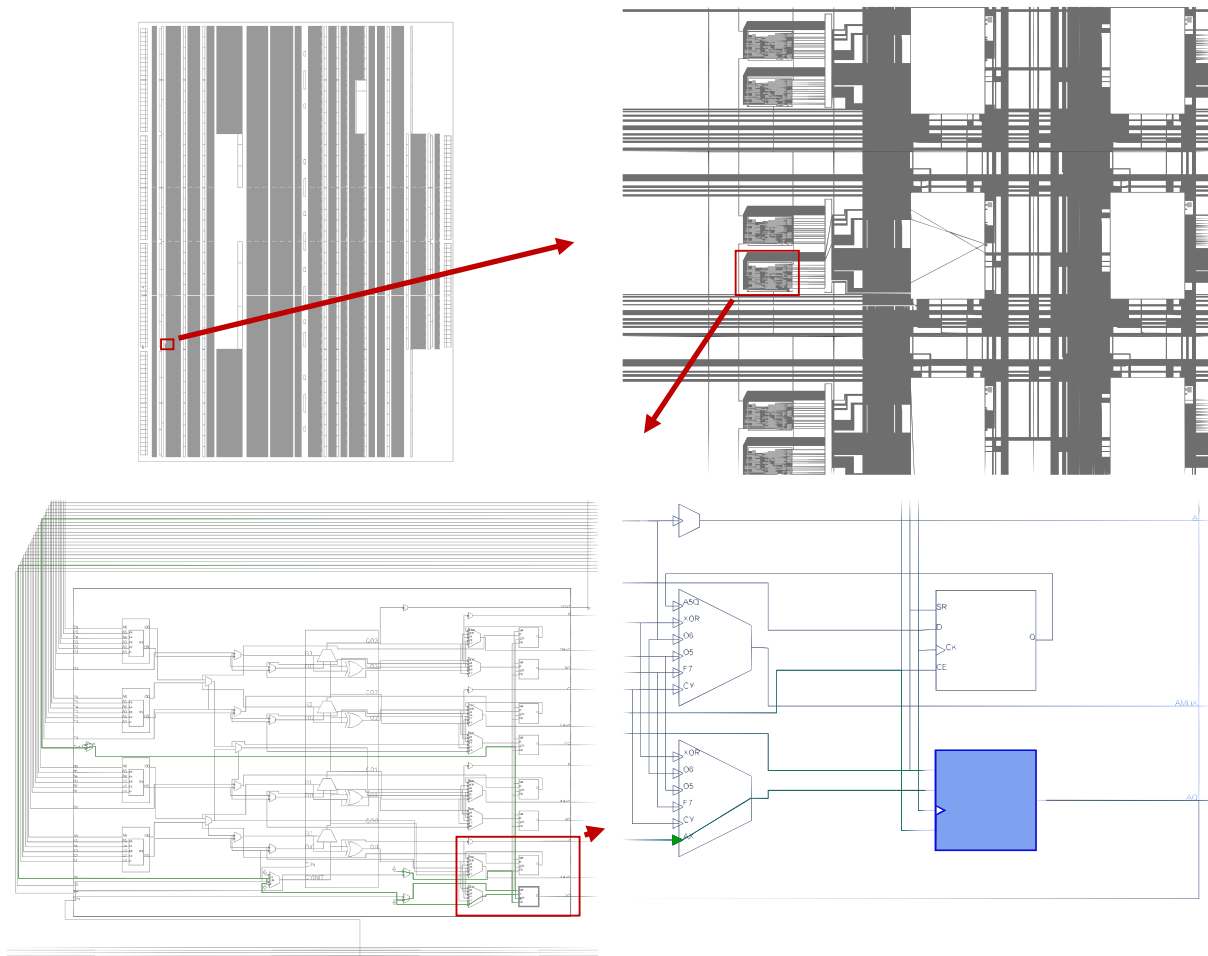


Figure 3.6 - Routage de la bascule sur le module FPGA

Au niveau fonctionnel, ce type de calcul est localisé au contact de l'électronique analogique, et traite directement les signaux binaires traversant les broches de la puce FPGA. Ses atouts principaux sont la rapidité et le synchronisme : on génère aisément des signaux d'horloge d'une fréquence supérieure à la centaine de MHz, et on construit des signaux périodiques (partie 3.3.1) avec une précision quasi-illimitée sur la fréquence avec très peu de ressources matérielles. Les inconvénients sont les limites en termes de complexité de calcul et de disponibilité en espace mémoire. Les opérations plus élaborées que l'addition ou la soustraction sont fortement déconseillées si elles ne sont pas indispensables. Des composants pour le stockage mémoire existent, mais leur capacité est relativement restreinte.

Le logiciel Vivado est utilisé pour réaliser les différentes étapes de développement des fonctions logiques : interprétation du code, allocation des ressources et programmation du module FPGA. Ce logiciel est la propriété de l'entreprise Xilinx, constructeur de la carte électronique utilisée.

Une fois le code VHDL compilé, Vivado permet à l'utilisateur de bénéficier, en plus des rapports détaillés et quantitatifs, d'une représentation schématique réaliste de l'utilisation des ressources disponibles. Un exemple est donné sur la figure 3.7.

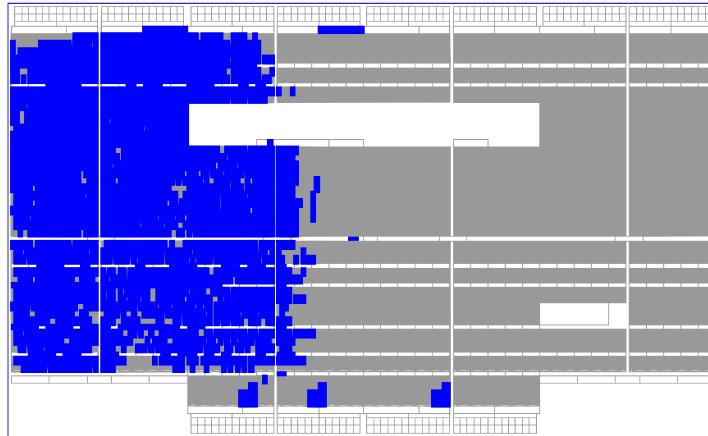


Figure 3.7 - Occupation des ressources logiques allouées par le code VHDL

3.2.2 Calcul logiciel d'acquisition sur FPGA

Le développement de code VHDL permet donc la réalisation d'une logique entièrement personnalisée par l'utilisateur. En outre, le logiciel Vivado met à sa disposition une très large banque d'entités organisées, optimisées, et prêtes à l'emploi. On y trouve des composants de complexité moyenne, comme des horloges reconfigurables ou des blocs de calcul optimisé. Ces blocs sont appelés IP, pour Intellectual Property. Mais il existe aussi des assemblages bien plus élaborés. En particulier, le matériel électronique présent sur le circuit FPGA est suffisant pour synthétiser un microprocesseur complet.

Le capteur inertiel ne peut se passer d'une capacité de calcul logiciel. Il existe dans le commerce des cartes électroniques mixtes, présentant à la fois un module FPGA et un microprocesseur en dur. Ces processeurs sont généralement conçus et optimisés pour une application en particulier. Dans la logique de recherche et de développement suivie dans le laboratoire, la structure MicroBlaze, qui est un processeur synthétisable sur le module FPGA utilisé, constitue un compromis avantageux entre la consommation de ressources électroniques et la polyvalence. Cette ressource logicielle complète ainsi l'outil numérique pour les opérations peu adaptées au calcul logique.

L'avantage principal de l'utilisation d'un tel composant est la possibilité de développer des fonctions de calcul en C, un langage bien plus intuitif et algorithmique que le VHDL. On peut alors effectuer des opérations plus généralistes qu'en logique séquentielle. Notamment, les multiplications et les divisions sont optimisées. En contrepartie, on perd en rapidité par

rapport au calcul logique. Le synchronisme rigoureux à très haute fréquence (autour de la centaine de MHz) n'est plus fiable pour les opérations les plus exigeantes de l'application. Tout comme le traitement du signal séquentiel, le calcul logiciel embarqué utilise le matériel électronique du FPGA, et est donc soumis à la même limitation délicate en espace mémoire.

Même si la majorité des entrées-sorties du module FPGA est traitée par la logique séquentielle, certaines connexions peuvent être réalisées directement avec le processeur MicroBlaze, notamment pour des signaux de contrôle et d'interruption. Excepté ce cas particulier, l'essentiel des interconnexions du processeur embarqué se fait d'une part avec la logique séquentielle, et d'autre part avec l'OBC, comme le présente la figure 3.1. Étant donné les domaines de synchronisation différents, les échanges entre la logique VHDL et le logiciel C s'effectuent exclusivement par l'intermédiaire de registres logiques, qui jouent le rôle de sas de communication.

La synthèse et l'implémentation de cette composante logicielle du module FPGA sont elles aussi subordonnées au logiciel Vivado. Xilinx propose une interface de développement en C pour joindre l'ensemble du calcul logiciel au calcul logique lors de la reprogrammation du composant FPGA. De cette façon, la représentation graphique de l'utilisation des ressources de la puce, présentée sur la figure 3.7, inclut de manière équivalente ces deux composantes. La figure 3.8 montre un exemple d'une telle cohabitation, avec la logique séquentielle en jaune, et le microprocesseur synthétisé en vert. Il est ainsi possible de contrôler les influences concrètes des choix de programmation, et d'évaluer les compromis de répartition.

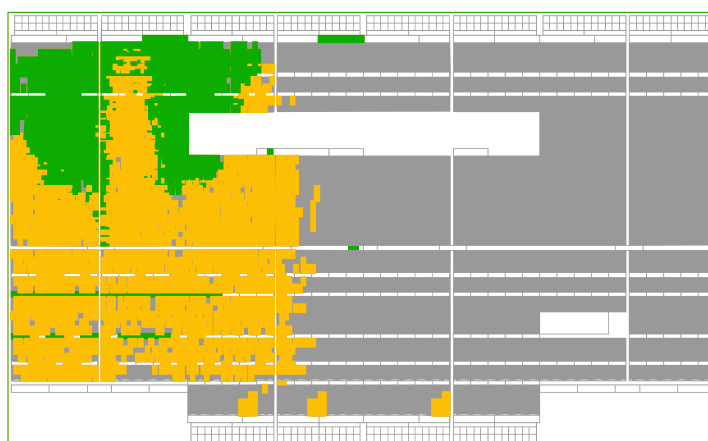


Figure 3.8 - Occupation des ressources FPGA pour la logique VHDL et le logiciel C

3.2.3 Calcul logiciel sur OBC

Le module FPGA communique avec l'OBC par l'intermédiaire d'une connexion série USB. Cet ordinateur fait le lien entre l'utilisateur et l'instrument inertiel. Il propose une interface graphique donnant accès à l'ensemble des fonctionnalités de l'application de mesure inertielle. Essentiellement, il s'agit de commander l'instrument d'une part, et de contrôler et mesurer son état d'autre part.

Premièrement, pour la commande de la cellule vibrante, au plus bas niveau, on choisit les paramètres principaux du signal sinusoïdal d'excitation, à savoir sa fréquence, sa phase et son amplitude. Au niveau juste au-dessus, on peut choisir un régime de fonctionnement particulier, avec divers asservissements possibles de la réponse du résonateur. Le plus classique est un asservissement en fréquence et en phase pour maintenir la cellule vibrante à sa résonance malgré les fluctuations des influences de l'environnement (partie 3.3.5). Finalement, au niveau le plus haut, on peut exécuter des scénarios complets, présentant le plus couramment une succession de calibrations de la cellule (Chapitre 2).

Ensuite, pour le contrôle de l'état de l'instrument, les données reçues depuis la carte électronique sont par exemple organisées en un ensemble de graphiques représentant l'évolution des grandeurs utiles au cours du temps. Les principales grandeurs sont les amplitudes en phase et en quadrature de phase de la réponse du résonateur, la fréquence d'excitation courante, et la mesure inertielle proprement dite. Les scénarios évoqués précédemment ont aussi le rôle d'enregistrer ces données en vue d'un post-traitement pour évaluer les performances de l'architecture complète.

Par ailleurs, même si les résonateurs actuellement utilisés ne permettent pas de se placer en régime de boucle fermée, l'interface de l'OBC serait tout à fait adaptée pour choisir l'un de ces régimes en temps réel (« force-rebalance » ou « whole-angle » [Lynch 1998]). Il faudrait pour cela disposer d'une cellule apte à recevoir des excitations selon les deux modes de vibration du gyromètre (partie 1.3.4.2).

La figure 3.9 montre le rendu visuel de l'interface graphique de l'OBC. On distingue notamment un panneau avec divers champs éditables et boutons pour commander la cellule vibrante, et plusieurs graphiques permettant de contrôler l'état courant de l'instrument.

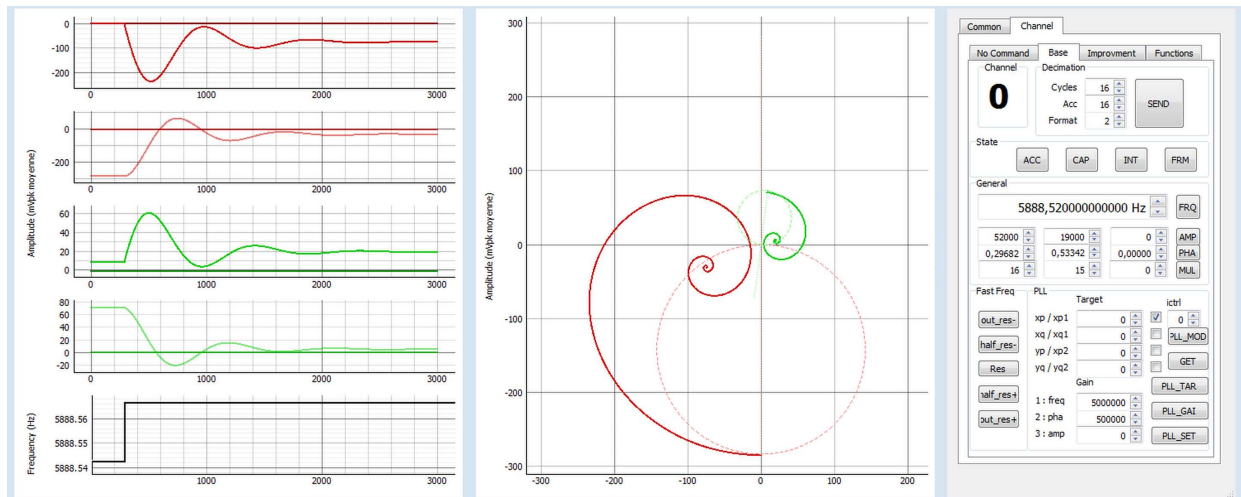


Figure 3.9 - Interface graphique de l'OBC

Ces deux fonctions de commande et de contrôle sont nécessaires pour avoir un outil intuitif et efficace. L'utilisation d'un OBC est alors indispensable, et on en dispose également pour effectuer les opérations qui ne peuvent être confiées au FPGA.

L'atout majeur de l'OBC par rapport au FPGA est la puissance de calcul bien plus élevée et la mémoire disponible bien plus abondante. En revanche, toutes les interfaces rendent impossible le synchronisme de ces opérations avec l'état instantané et connu du résonateur. En effet, comme le montre la figure 3.1, l'ordinateur n'est pas à proximité immédiate du résonateur : la communication série étant gérée par le logiciel du FPGA, le résonateur et l'ordinateur sont séparés successivement par la conversion analogique vers numérique à l'entrée du FPGA, par les registres de communication entre la logique séquentielle et le logiciel synthétisé sur la puce, et finalement par la liaison série.

3.2.4 Conclusion sur la répartition des fonctions

On peut compléter la figure 3.1 avec les différentes entités du calcul numérique et leurs interconnexions. On obtient le schéma bloc de la figure 3.10.

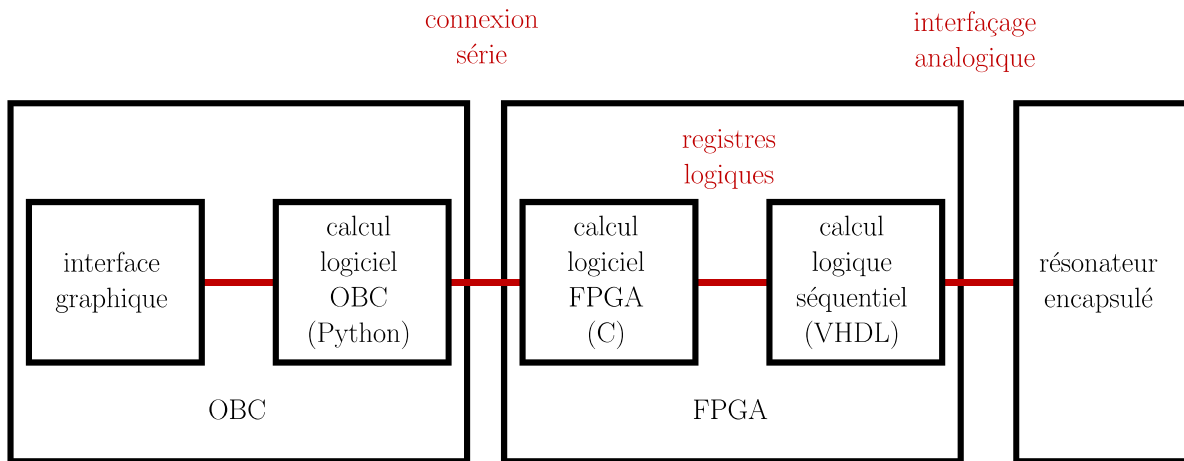


Figure 3.10 - Ressources de calcul numérique du capteur inertiel

L'enseignement de cette partition est que les calculs devant être parfaitement synchronisés avec la vibration du résonateur doivent être réalisés en logique séquentielle sur FPGA, notamment la génération du signal d'excitation (parties 3.3.1, 3.3.2 et 3.3.3), et l'acquisition instantanée de l'amplitude de la réponse du résonateur (partie 3.3.4). Les opérations coûteuses en puissance de calcul et en occupation de mémoire, comme les scénarios de calibrations des instruments inertiels, ou le calcul de la mesure inertielle finale du capteur, doivent être exécutées par l'OBC. Le processeur synthétisé sur le FPGA permet d'avoir un outil intermédiaire pour les tâches demandant conjointement un synchronisme et une complexité de calcul sensiblement élevés. Dans cette dernière catégorie, on compte par exemple l'asservissement de la cellule à sa fréquence de résonance (partie 3.3.5) et la démodulation de la réponse du résonateur (partie 3.3.4).

On en déduit sur la figure 3.11 le schéma fonctionnel final du capteur inertiel développé.

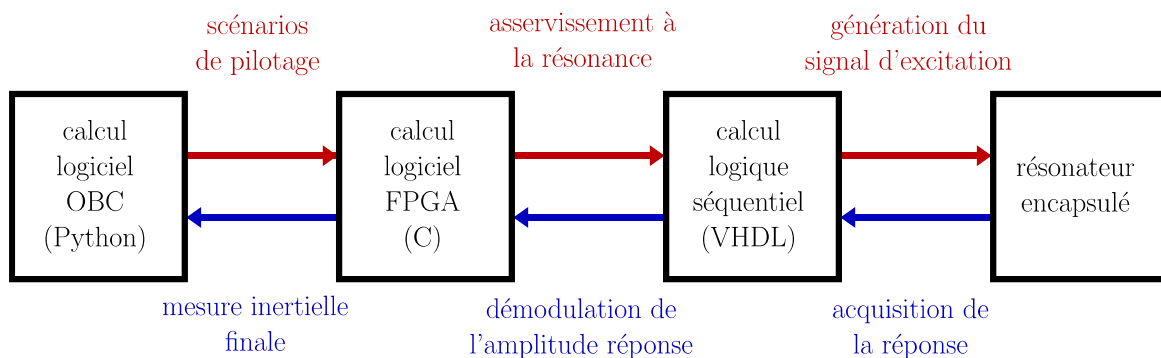


Figure 3.11 - Schéma fonctionnel du capteur inertiel

3.3 Développement des fonctions principales

Le traitement du signal se décompose en de multiples entités, dont les affectations sont réparties dans les différentes ressources de calcul énumérées dans la partie précédente. La fiabilité et la précision de la mesure du capteur dépendent directement des algorithmes choisis et de leur implémentation. On détaille dans cette partie les plus fondamentaux de notre architecture : la synthèse de fréquence, la mise en forme de l'onde et la modulation $\Sigma\Delta$ en VHDL, et la démodulation numérique de la réponse et l'asservissement à la résonance en C.

3.3.1 Synthèse de fréquence

3.3.1.1 Contexte

La motivation originelle d'adopter l'option FPGA pour piloter le résonateur vient principalement d'un besoin de synchronisme rigoureux entre la génération et la mesure de la vibration. Pour la génération de la vibration, cet aspect réside dans une synthèse de fréquence maîtrisée.

Le calcul numérique possède naturellement la propriété « modulo » de la phase des signaux périodiques, ce qui le rend particulièrement adapté à la synthèse de fréquence. En effet, en accumulant un entier W_P , dit mot de phase, dans un registre de taille N bits du FPGA, la sortie \check{W}_{PA} de l'accumulateur ne peut dépasser $2^N - 1$. L'accumulation qui devait faire dépasser cette limite a pour effet de faire prendre à la sortie \check{W}_{PA} une valeur inférieure à W_P , en ignorant le $N+1^{\text{ème}}$ bit, qui, ici, a un sens mathématiquement, mais pas physiquement. Ce phénomène est illustré sur la figure 3.12.

$$\begin{array}{l}
 W_P = \boxed{0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1} = 53 \qquad N = 8 \rightarrow 2^N = 256 \\
 \\
 \begin{array}{l}
 + W_P \curvearrowright \check{W}_{PA}[k-1] = \boxed{1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1} = 199 \\
 + W_P \curvearrowright \check{W}_{PA}[k] = \boxed{1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0} = 252 \\
 + W_P \curvearrowright \check{W}_{PA}[k+1] = 1 \boxed{0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1} = 305 \rightarrow 49
 \end{array}
 \end{array}$$

Figure 3.12 - Propriété périodique des registres du FPGA

La carte numérique possède son propre oscillateur dans un composant séparé du FPGA, à une fréquence $f_{osc}=100\text{ MHz}$. L'une des principales IP développées par Xilinx est le gestionnaire d'horloges (« Clocking Wizard »), qui permet de définir de nouvelles horloges à partir d'une première de base. Une sortie à $f_H=250\text{ MHz}$ constitue ainsi la référence sur laquelle s'organise toute la logique séquentielle.

L'objectif est de composer un signal périodique dont on maîtrise la fréquence, de l'ordre de la fréquence de résonance de la cellule vibrante. Étant donné que tous les signaux logiques sont échantillonnés par l'horloge de référence, tout signal périodique possède nécessairement une fréquence dont $f_H=250\text{ MHz}$ est un multiple entier. Cette contrainte pourrait être rédhibitoire, mais le signal à construire n'a pas besoin d'être rigoureusement périodique au niveau numérique. L'essentiel est que le signal obtenu soit l'échantillonnage d'un signal à temps continu qui, lui, est mathématiquement périodique. L'idée est alors de créer un signal avec une fréquence en rapport rationnel, et non plus entier, avec la fréquence d'horloge.

3.3.1.2 Principe et résolution théorique

Le concept théorique de base est celui de la roue de phase, dont le principe est illustré sur la figure 3.13.

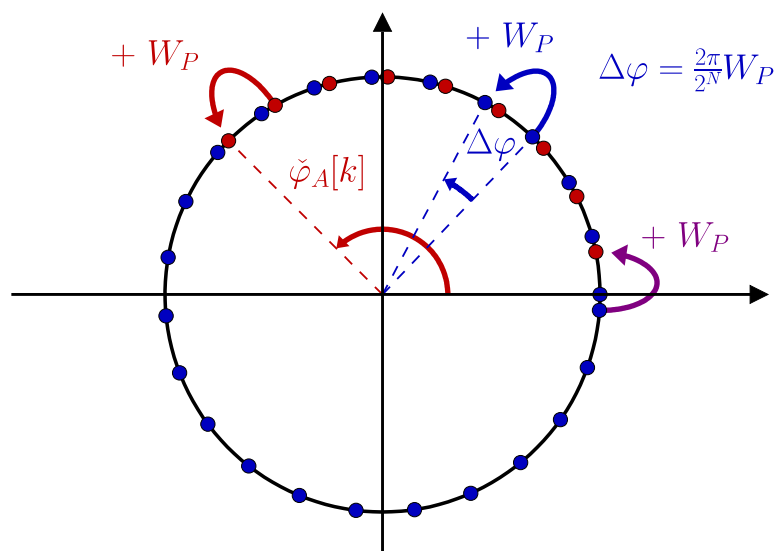


Figure 3.13 - Roue de phase

On accumule un mot de phase W_P dans un registre de taille N bits, avec une sortie $\check{W}_{PA}[k]$, où k représente le nombre de périodes d'horloge écoulées depuis l'initialisation. On

comprend avec la description précédente que cette sortie $\check{W}_{PA}[k]$ est proportionnelle à l'échantillonnage $\check{\varphi}_A[k] = \varphi_A(kT_H)$ d'une phase $\varphi_A(t)$ d'un signal périodique, où $T_H = 1/f_H$ est la période de l'horloge, selon la formule $\check{\varphi}_A[k] = (2\pi/2^N)\check{W}_{PA}[k]$. Si ce mot W_P n'est pas une puissance de 2, alors le signal généré n'est pas rigoureusement périodique, comme le montre la figure 3.13. Cependant, la figure 3.14 illustre le fait que ce signal est bien l'échantillonnage d'un signal à temps continu périodique $W_{PA}(t)$.

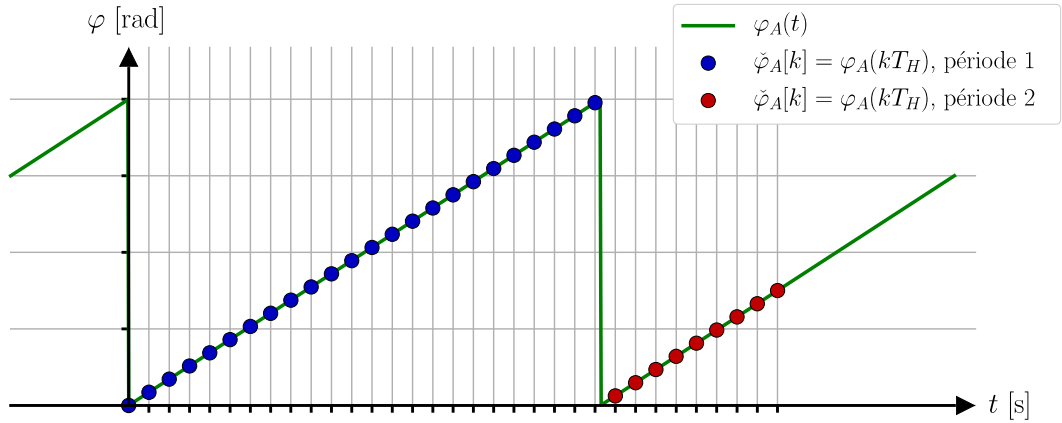


Figure 3.14 - Rampe de phase temporelle

Toutes les grandeurs considérées dans ce procédé sont liées les unes aux autres par l'ensemble des relations suivantes.

$$\check{\varphi}_A[k] = \varphi_A(kT_H) \quad (3.1)$$

$$\check{W}_{PA}[k] = W_{PA}(kT_H) \quad (3.2)$$

$$\varphi_A(t) = \frac{2\pi}{2^N} W_{PA}(t) \quad (3.3)$$

$$\check{\varphi}_A[k] = \frac{2\pi}{2^N} \check{W}_{PA}[k] \quad (3.4)$$

$$\check{W}_{PA}[k] = \sum_{i=1}^k W_P = \check{W}_{PA}[k-1] + W_P = kW_P \quad [2^N] \quad (3.5)$$

$$W_{PA}(t) = \frac{1}{T_H} \int_{\tau=0}^t W_P d\tau = \frac{W_P t}{T_H} \quad [2^N] \quad (3.6)$$

La fréquence f du signal obtenu, elle, est proportionnelle au mot de phase W_P . En effet :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi_A(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \left(\frac{2\pi}{2^N} W_{PA}(t) \right) = \frac{1}{2^N} \frac{dW_{PA}(t)}{dt} \\ &= \frac{1}{2^N} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{T_H} \int_{\tau=0}^t W_P d\tau \right) = \frac{1}{2^N T_H} \frac{d}{dt} (W_P t) = \frac{1}{T_H} \frac{W_P}{2^N} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Comme attendu, elle est bien indépendante de t , ce qui valide l'obtention d'un signal périodique de fréquence $f = (W_P / 2^N) f_H$, où f_H est la fréquence de l'horloge. On peut donc synthétiser une gamme de fréquences en rapport rationnel avec la fréquence de l'horloge, qui est d'autant plus fine que le nombre de bits N du registre d'accumulation est grand. Cette finesse vaut :

$$\mu_f = \frac{f_H}{2^N} \quad (3.8)$$

Pour $f_H = 250$ MHz et $N = 64$, on obtient une précision $\mu_f = 1.4 \times 10^{-2}$ nHz, qui est très largement suffisante pour nos applications inertielles. Par exemple, dans le cas de l'accéléromètre, qui possède un facteur d'échelle de l'ordre de $SF \simeq 20$ Hz.g⁻¹, l'erreur sur la mesure inertielle due à la synthèse de fréquence est de l'ordre de $\mu\Gamma = \mu_f / SF \simeq 7 \times 10^{-13}$ g. Le procédé de synthèse de fréquence n'est donc pas critique en comparaison des autres fonctions numériques, et les ressources matérielles occupées sur le FPGA en prenant $N = 64$ sont largement raisonnables.

3.3.1.3 Implémentation

En termes d'implémentation, il existe une IP Vivado qui optimise la fonction d'accumulation. On notera par ailleurs que construire cette opération en VHDL est élémentaire, en utilisant un additionneur et une bascule N bits. La représentation schématique et le routage associé sur FPGA d'un exemple de synthèse de fréquence avec $N = 4$ sont visibles sur la figure 3.15.

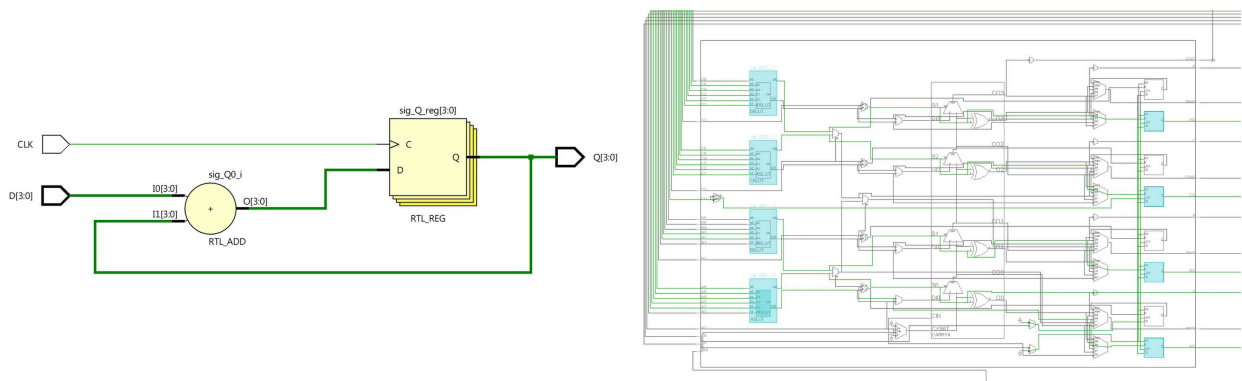


Figure 3.15 - Représentation schématique de la synthèse de fréquence (à gauche) et routage associé (à droite)

3.3.2 Constitution de la forme d'onde numérique

L'objectif suivant est l'obtention d'un signal sinusoïdal échantillonné $\check{\rho}[k]$. On compose donc la phase $\check{\varphi}_A[k]$ précédemment constituée avec la fonction périodique ρ correspondante :

$$\rho : \varphi \mapsto \rho(\varphi) = \rho_M \sin(\varphi) \quad (3.9)$$

Le calcul FPGA convient à cette tâche en raison de la périodicité de la fonction. Les ressources en espace mémoire sont suffisantes pour allouer une table de correspondance entre des valeurs de phase sur une période $\varphi \in [0, 2\pi]$ et les images de la forme d'onde ρ .

En pratique, l'adressage de cette table mémoire s'opère par extraction des bits de poids fort de la sortie de l'accumulateur de phase $\check{W}_{PA}[k]$. Les résolutions d'amplitude et temporelle dépendent directement et respectivement de la largeur et de la profondeur de la table mémoire, dont le produit est proportionnel à l'espace occupé. On utilise une autre IP Vivado qui gère l'affectation de blocs de RAM (Random Access Memory) du FPGA pour cette fonctionnalité. La figure 3.16 montre l'évolution temporelle des signaux en amont (en bleu) et en aval (en rouge) de la table mémoire, avec un échantillonnage et une quantification volontairement grossiers pour l'illustration.

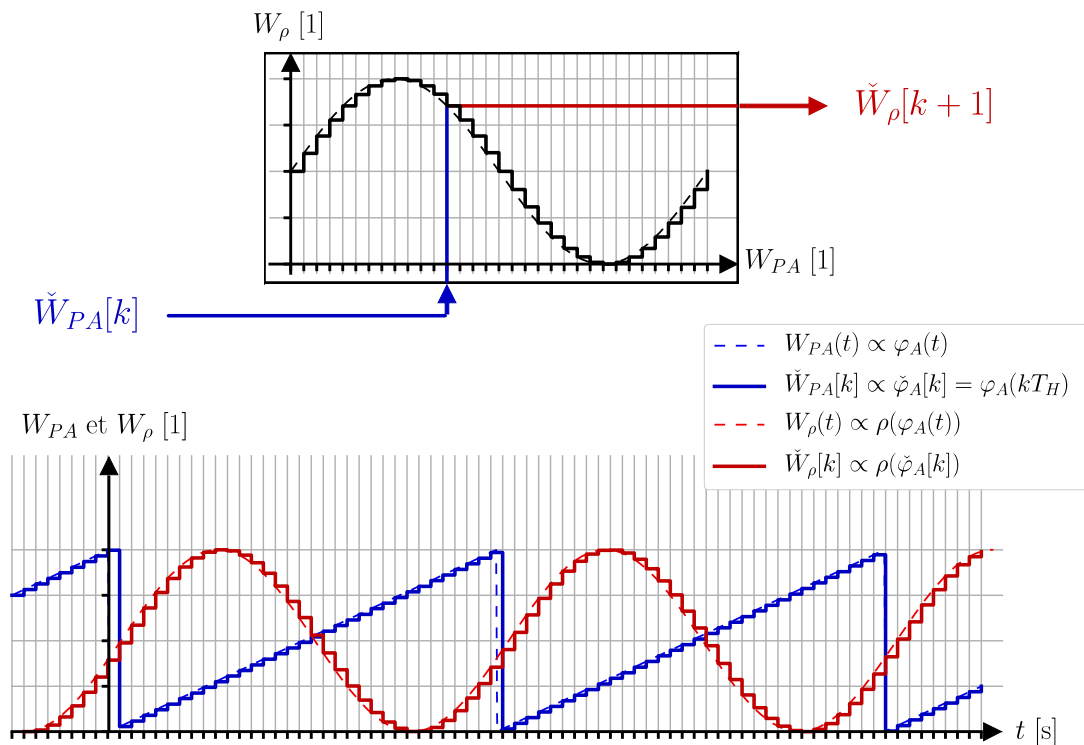


Figure 3.16 - Application de la forme d'onde au signal de phase

3.3.3 Modulation de signal $\Sigma\Delta$

3.3.3.1 Conversion numérique-analogique

L'opération de modulation du signal d'excitation est délicate, car elle concerne l'aspect critique de l'architecture numérique, à savoir le passage du domaine numérique au domaine analogique. Le FPGA accorde une liberté de développement algorithmique appréciable, mais la contrepartie est la nécessité de travailler avec des signaux binaires en entrée et en sortie du module.

Dans le cas de l'excitation du résonateur, on cherche à créer un signal électrique sinusoïdal avec un FPGA et des composants analogiques basiques, notamment des filtres. L'option choisie est la modulation $\Sigma\Delta$ [Tierney 1971], suivie par une démodulation analogique. Pour la modulation, on génère dans le FPGA un signal binaire à partir d'un signal numérique donné, qui dans notre cas est le signal sinusoïdal $\check{\rho}[k]$ construit à l'étape précédente (partie 3.3.2). La démodulation est ensuite réalisée en filtrant ce train binaire en sortie du FPGA, pour obtenir un signal analogique semblable à la forme d'onde d'entrée.

Le signal modulé opère des transitions à haute fréquence entre le niveau bas et le niveau haut, et la valeur du signal démodulé à un instant donné correspond à la proportion de temps passé localement entre ces deux niveaux. Au cours du traitement, les données d'amplitude sont converties en données temporelles, pour finalement conserver l'information générale du signal d'origine.

La principale opération algorithmique à réaliser est donc celle de la modulation, pour construire cette suite binaire à partir d'un signal numérique.

3.3.3.2 Principe algorithmique

Le principe de l'algorithme $\Sigma\Delta$ est le suivant : le signal d'entrée à temps discret est accumulé dans un signal intermédiaire. À chaque instant, si le signal accumulé a dépassé une valeur seuil donnée, le signal binaire de sortie est défini au niveau haut, et l'accumulateur est partiellement réinitialisé par retranchement à sa sortie de cette valeur seuil. Sinon, le signal binaire de sortie est défini au niveau bas.

La figure 3.17 présente une analogie concrète qui permet de comprendre les propriétés de cet algorithme. Le signal d'entrée est représenté par une suite de contenants (en haut à gauche), de volume maximal \mathcal{V}_{max} , chacun rempli d'un volume d'eau équivalent à la valeur courante du signal. À chaque instant, le volume du contenant de droite est versé dans une cuve. Si la graduation seuil de cette cuve (en pointillés bleus) est dépassée, on la vide d'un volume \mathcal{V}_{max} dans un nouveau contenant. Sinon, on le laisse vide. On place ce contenant à gauche d'une deuxième suite (en bas à droite) qui représente le signal binaire de sortie.

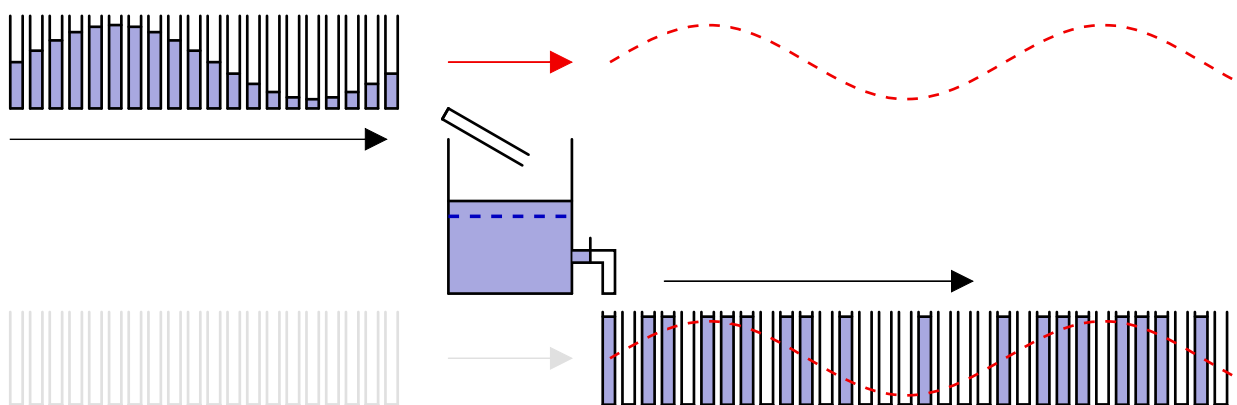


Figure 3.17 - Analogie fluidique de l'algorithme $\Sigma\Delta$

On déduit de cette illustration qu'il n'y a pas de perte de volume à long terme, et que les signaux d'entrée et de sortie véhiculent des informations équivalentes, sous réserve que l'échantillonnage soit réalisé à une cadence suffisamment élevée devant la fréquence du signal

d'entrée. La modulation $\Sigma\Delta$ est donc bien complémentaire avec une opération de filtrage passe-bas pour la démodulation, dont l'effet est proche d'un moyennage local glissant.

La figure 3.18 montre le schéma opérationnel de l'algorithme. On compte des opérations d'accumulation, de comparaison à une valeur seuil, et de boucle de rétroaction avec soustraction.

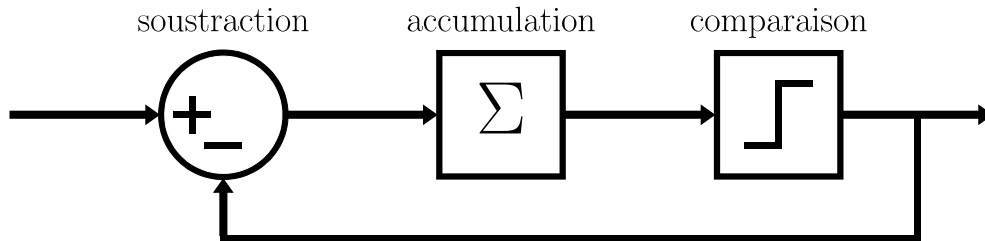


Figure 3.18 - Schéma opérationnel de l'algorithme $\Sigma\Delta$

La figure 3.19 représente un exemple sur un signal sinusoïdal, avec, de haut en bas, le signal d'entrée numérique W_ρ , le signal accumulé intermédiaire W_Σ , le signal modulé binaire u_{mod} , et un estimateur numérique \hat{u}_{demod} du signal démodulé analogique.

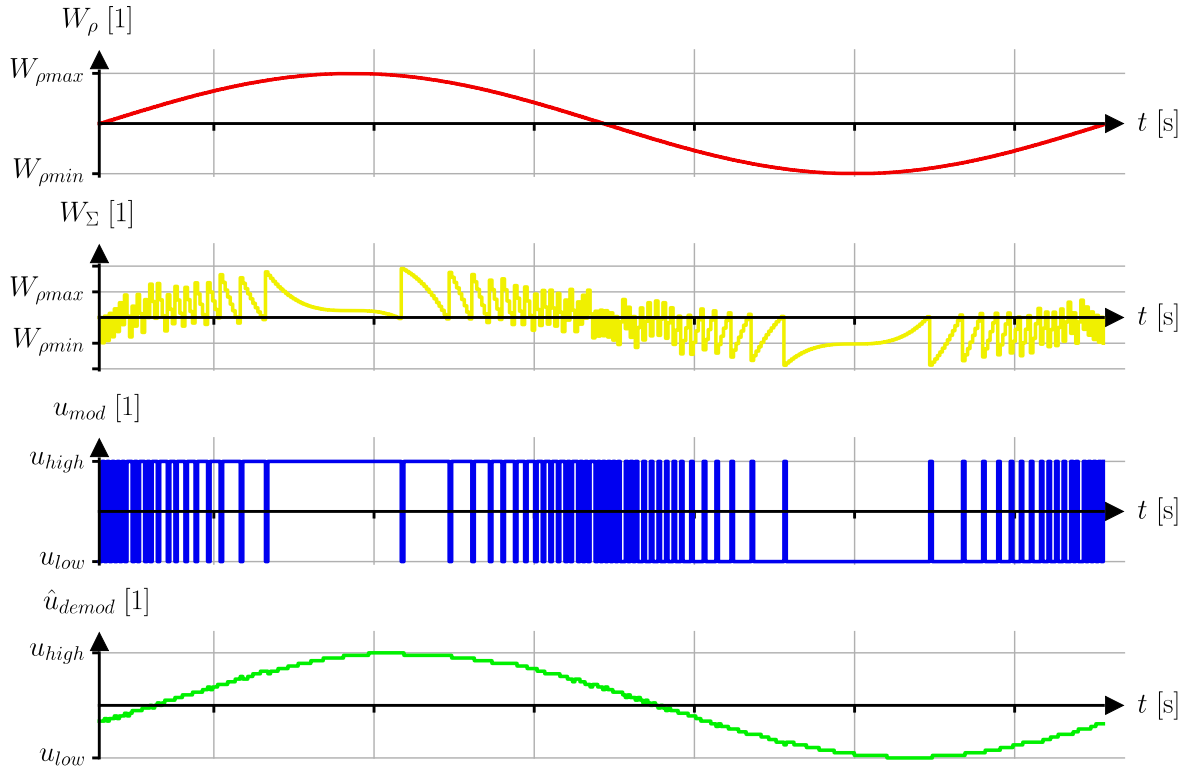


Figure 3.19 - Évolutions temporelles des signaux de modulation et de démodulation

Pour caractériser la performance de l'algorithme, il convient de représenter également les contenus spectraux de ces signaux. Les signaux W_ρ , u_{mod} et \hat{u}_{demod} ont respectivement pour transformées de Fourier TFW_ρ , TFu_{mod} et $TF\hat{u}_{demod}$. La figure 3.20 montre ces grandeurs relativement à la valeur de TFW_ρ en $f=f_0$, fréquence fondamentale du signal d'entrée. On observe que la modulation (passage de la courbe rouge à la courbe bleue) a pour effet d'ajouter des composantes fréquentielles autour de la fréquence d'horloge, grande devant f_0 : c'est une autre manière de mettre en évidence la pertinence du filtrage passe-bas (en pointillés noirs) pour la démodulation (passage de la courbe bleue à la courbe verte).

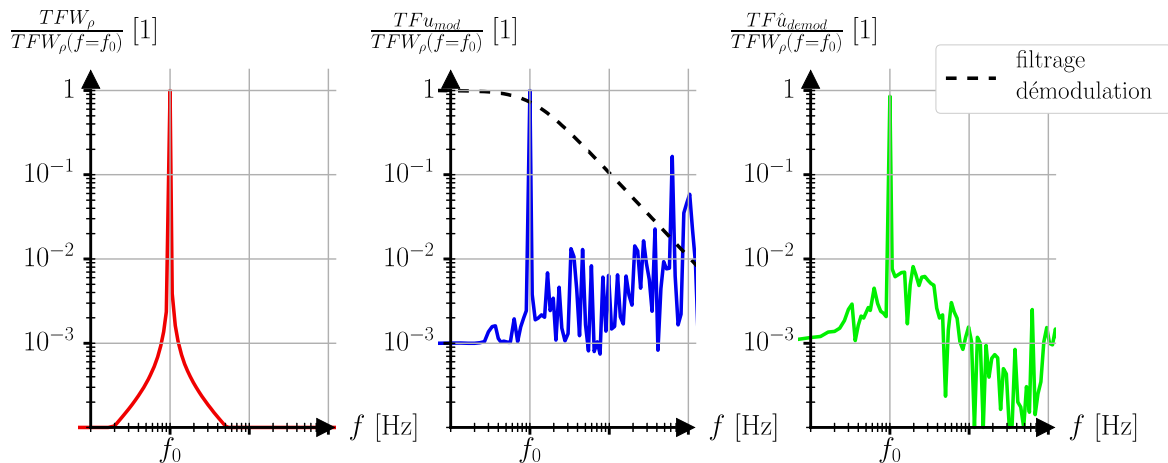


Figure 3.20 - Représentations spectrales des signaux de modulation et de démodulation

3.3.3.3 Implémentation

Pour des raisons pratiques, l'algorithme utilisé est légèrement différent de sa version classique. La consommation d'une carte FPGA est principalement due aux transitions binaires des sorties de la puce, et il n'est pas envisageable de fonctionner avec de telles transitions à $f_H=250$ MHz. Plutôt que de réduire cette fréquence d'horloge, qui détériorerait le signal de sortie, on choisit d'ajouter une entité de code logique qui limite la densité temporelle des transitions, en forçant un nombre minimal donné de périodes d'horloge entre deux transitions successives (partie 4.3.2). On notera que cette modification introduit tout de même une déformation du signal, mais qui reste acceptable.

Cette opération de modulation $\Sigma\Delta$ est implémentée en calcul logique séquentiel. On utilise notamment l'accumulateur optimisé de Vivado, comme pour la synthèse de fréquence (partie 3.3.1).

3.3.4 Démodulation numérique

3.3.4.1 Conversion analogique-numérique

Avec la génération du signal d'excitation par modulation $\Sigma\Delta$ et démodulation analogique, on a traité la délicate conversion numérique vers analogique. La conversion réciproque de l'analogique vers le numérique qui concerne la mesure de la réponse du résonateur constitue l'autre défi majeur de l'architecture. Cette fonction est appelée démodulation numérique.

L'utilisation de résonateurs à haut facteur de qualité permet de faire l'hypothèse d'une réponse à mesurer purement sinusoïdale à la fréquence du signal d'excitation. On cherche donc à déterminer les caractéristiques de cette réponse, à savoir l'amplitude et la phase, sans utiliser de convertisseurs analogique-numérique (ADC). Cette étude fait l'objet d'un brevet ONERA [Guerard 2017], dans lequel est développé un algorithme de calcul de cette amplitude et de cette phase à partir des dates des croisements entre le signal de réponse du résonateur et un autre signal de référence. L'interface analogique entre le résonateur et le circuit FPGA peut donc se réduire à de simples comparateurs.

3.3.4.2 Principe algorithmique

La configuration mathématique est la suivante : en utilisant l'algorithme $\Sigma\Delta$, l'électronique génère un signal sinusoïdal d'excitation, mais aussi un signal sinusoïdal de référence dans un rapport de fréquence strict, et avec le synchronisme rigoureux qu'offre le calcul logique séquentiel d'un FPGA. On définit ainsi une étendue temporelle que l'on appelle cycle, et qui représente exactement P_R périodes du signal de référence, et P_S périodes du signal d'excitation (ou du signal réponse, qui est à la même fréquence). La figure 3.21 décrit ce cycle, avec $P_R=4$, $P_S=3$, le signal de référence en vert, le signal d'excitation en bleu, et le signal réponse en rouge. On trace en dessous les différents signaux binaires correspondants, et effectivement à la disposition du calcul FPGA : le cycle, la période du signal de référence, et la sortie du comparateur connecté à la référence et à la réponse du résonateur.

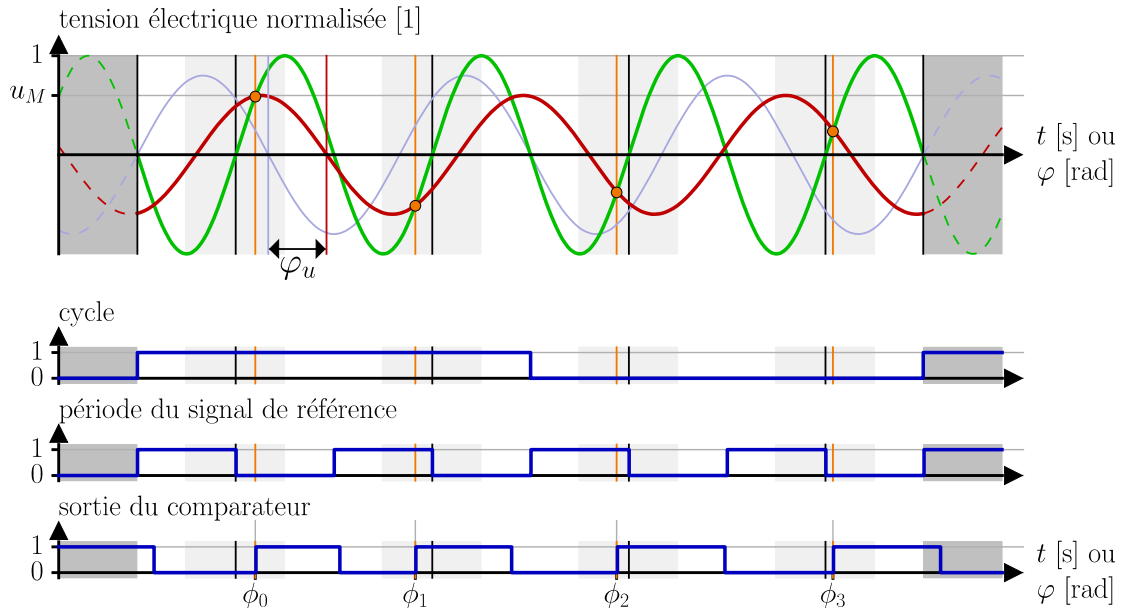


Figure 3.21 - Cycle de mesure de la réponse du résonateur

L'étude menée par le brevet apporte le résultat essentiel suivant : l'accès au chronogramme de comparaison, combiné à la connaissance des deux autres chronogrammes générés en interne, est suffisant pour déterminer l'amplitude u_M et la phase φ_u de la tension sinusoïdale u image de la réponse mécanique du résonateur (les amplitudes sont sans dimension, et données relativement à l'amplitude du signal de référence). Les équations liant ces deux paramètres aux déphasages ϕ_k sont données en (3.10).

$$\forall k \in \llbracket 0, P_R - 1 \rrbracket, \quad u_M \sin\left(\frac{P_S}{P_R}((2k + 1)\pi + \phi_k) + \varphi_u\right) = \sin(\phi_k) \quad (3.10)$$

Ces équations ne sont pas résolubles simplement, mais il est possible d'effectuer un développement limité lorsque u_M est petit, ce qui implique également ϕ_k petit :

$$\forall k \in \llbracket 0, P_R - 1 \rrbracket, \quad \phi_k \simeq u_M \sin\left((P_R - P_S) \frac{2\pi\left(k + \frac{1}{2}\right)}{P_R} - \varphi_u\right) \quad (3.11)$$

Ainsi, la courbe dessinée par les ϕ_k décrit une sinusoïde portant les informations d'amplitude et de phase de la réponse du résonateur. La figure 3.22 représente cette courbe pour $P_R=16$, $P_S=15$, $\varphi_u=0$ et $u_M \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$. On constate la validité de l'approximation sinusoïdale pour les petites amplitudes.

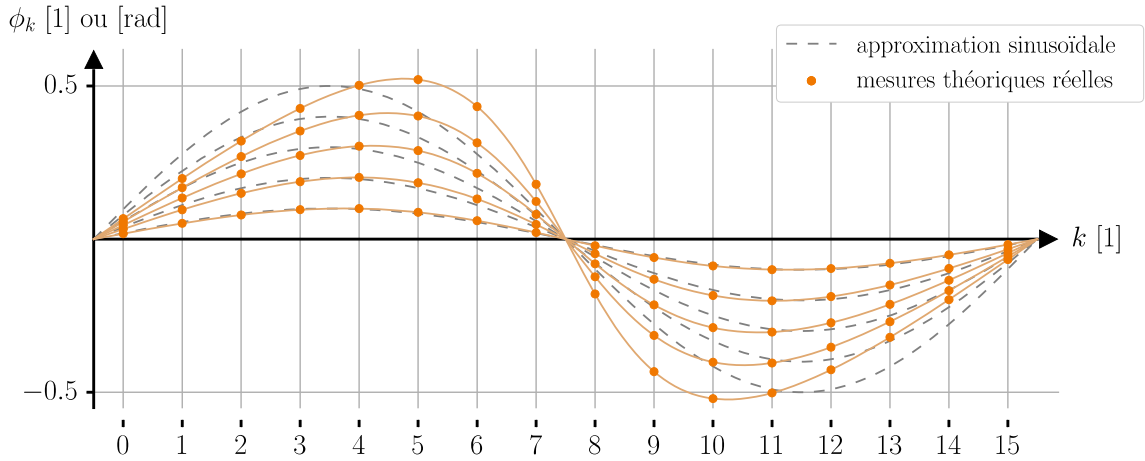


Figure 3.22 - Courbe des déphasages de comparaison pour plusieurs valeurs d'amplitude

La démodulation numérique de la réponse du résonateur peut être effectuée par extraction des coefficients de Fourier de la séquence des ϕ_k . C'est donc à partir d'ici qu'est fait le choix de travailler avec les amplitudes en phase $u_{Mp} = u_M \cos(\varphi_u)$ et en quadrature de phase $u_{Mq} = u_M \sin(\varphi_u)$, utilisées dans tout le Chapitre 1, et dans le Chapitre 2 (en changeant les notations vers x et y dans le Chapitre 2), plutôt qu'avec l'amplitude u_M et la phase φ_u . En posant $P_S = P_R - 1$, configuration par défaut, ces deux amplitudes sont alors données par les formules (3.12).

$$\begin{cases} u_{Mp} \simeq \frac{2}{P_R} \sum_{k=0}^{P_R-1} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{P_R}\right) \phi_k \\ u_{Mq} \simeq -\frac{2}{P_R} \sum_{k=0}^{P_R-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{P_R}\right) \phi_k \end{cases} \quad (3.12)$$

En termes d'implémentation, ce calcul est trop élaboré pour être effectué en logique séquentielle. Cela n'est pas particulièrement contraignant, car la cadence de ces opérations est celle du cycle, qui est de l'ordre du kHz, donc bien plus faible que la fréquence d'horloge, de l'ordre de la centaine de MHz. Le meilleur compromis est l'option du calcul logiciel sur FPGA, en C. Cependant, ces opérations restent encore trop complexes pour être implémentées telles quelles. On utilise les formules simplifiées (3.13), qui représentent ce que l'on appellera la transformation carrée.

$$\begin{cases} u_{Mp} \simeq \frac{\pi}{2P_R} \sum_{k=0}^{P_R-1} \text{sg} \left(\sin \left(\frac{(2k+1)\pi}{P_R} \right) \right) \phi_k \\ u_{Mq} \simeq -\frac{\pi}{2P_R} \sum_{k=0}^{P_R-1} \text{sg} \left(\cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{P_R} \right) \right) \phi_k \end{cases}, \quad (3.13)$$

avec $\begin{cases} P_R \equiv 0 [4] \\ \text{et } \begin{cases} \text{sg}(x) = +1 & \text{si } x \geq 0 \\ \text{sg}(x) = -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{cases}$,

Bien entendu, ces diverses simplifications introduisent des biais dans la démodulation, mais leurs effets sur la mesure inertielle ne sont pas rédhibitoires. La figure 3.23 représente un réseau d'amplitudes du signal à mesurer dans le plan de Nyquist, en bleu, avec les mesures théoriques correspondantes, en utilisant la formule (3.12), en rouge, et en utilisant la formule (3.13), en vert. Les valeurs des paramètres utilisées sont $P_R=16$, $P_S=15$, $\varphi_u \in [0, 2\pi]$ et $u_M \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$.

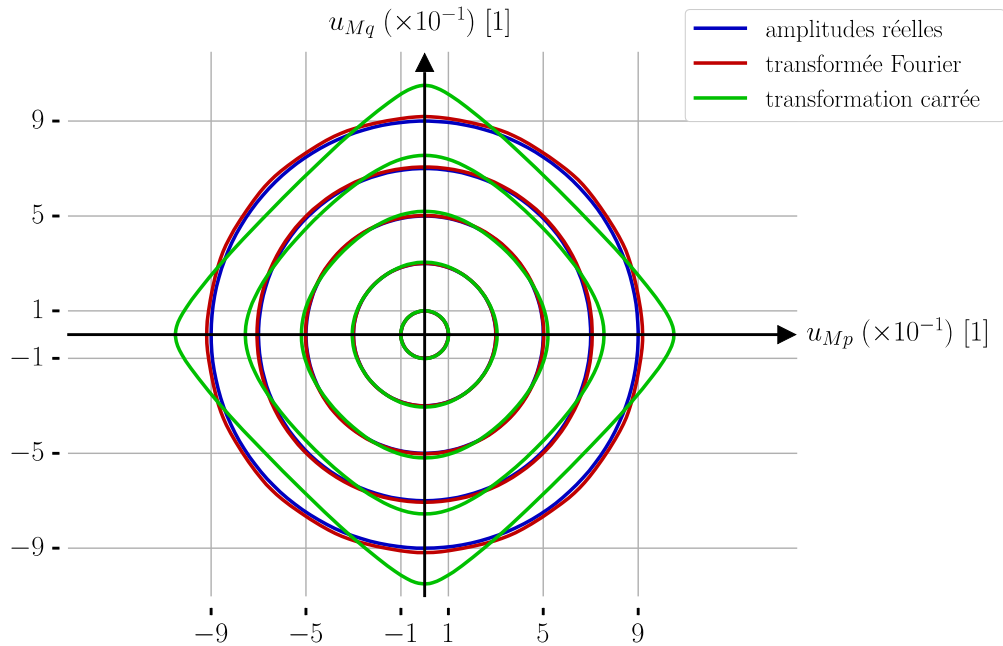


Figure 3.23 - Démodulation numérique théorique dans le plan de Nyquist

3.3.4.3

Amélioration : datation et système de sous-horloges

L'aspect technique principal impactant la performance de cette démodulation numérique est la précision de la datation des phases ϕ_k , conformément à la configuration de

la figure 3.21. La meilleure résolution qu'offre l'électronique numérique du FPGA est celle de son horloge, car on ne peut dater un événement extérieur que sur l'un de ses fronts. Avec une fréquence d'horloge $f_H = 250 \text{ MHz}$, la résolution temporelle vaut $\mu T_1 = T_H = 4 \text{ ns}$, et on atteint un niveau de biais du même ordre de grandeur que les différents bruits électroniques de la chaîne d'acquisition analogique-numérique. Il est donc souhaitable de réduire cette erreur de datation. Les capacités du FPGA, la complexité du code logique implémenté et les exigences de consommation nous empêchent d'augmenter d'avantage la fréquence d'horloge. Les propriétés du générateur d'horloge du FPGA permettent néanmoins une astuce d'amélioration : on peut générer 4 signaux d'horloge parfaitement synchrones, et déphasés un à un d'une quadrature de phase, comme le montrent les chronogrammes de la figure 3.24. On atteint ainsi une résolution de datation $\mu T_2 = T_H / 8 = 0.5 \text{ ns}$. On retiendra qu'un soin particulier doit être accordé à l'implémentation de la logique avec le matériel utilisé, car le temps de propagation des signaux électroniques dans le FPGA n'est plus négligeable à cette échelle (partie 4.3.4).

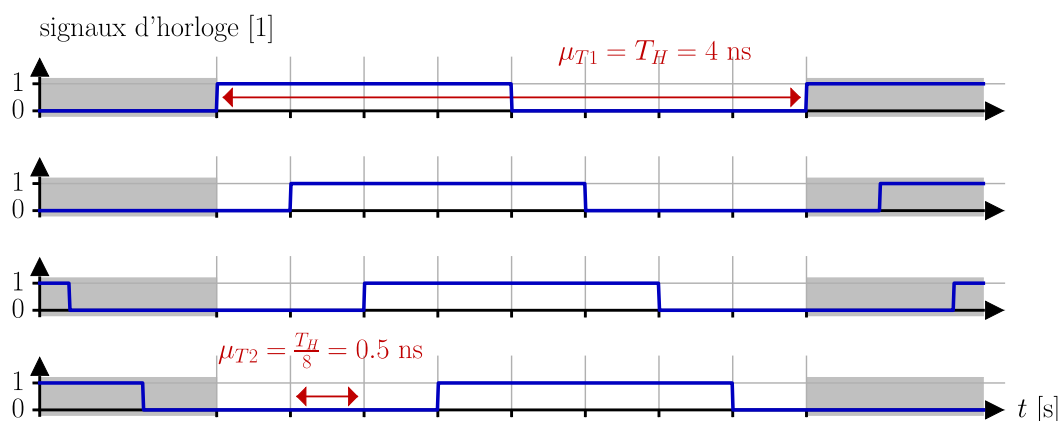


Figure 3.24 - Génération de sous-horloges synchrones sur FPGA

3.3.5 Boucles d'asservissement

La dernière fonction essentielle dans le développement d'applications inertielles est l'asservissement à la résonance, évoquée notamment dans la partie 1.3.3. Il s'agit de mettre l'ensemble de l'instrument inertiel (carte électronique et résonateur) dans un régime de fonctionnement autonome, dans lequel les paramètres de commande, à savoir la fréquence, la phase et l'amplitude du signal d'excitation, sont actualisés au cours du temps par exploitation des caractéristiques du signal réponse mesuré.

Le schéma général de l'asservissement d'un système physique est celui de la figure 3.25. L'utilisateur choisit une valeur cible, à laquelle on souhaite asservir la mesure. À partir de

cette mesure et de cette cible, la loi de correction calcule la nouvelle commande à envoyer au système.

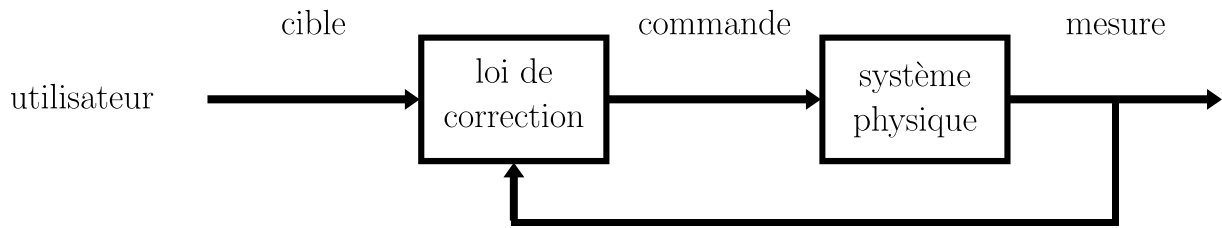


Figure 3.25 - Configuration générale de l'asservissement d'un système physique

3.3.5.1 Commande de fréquence

En considérant l'ensemble de l'étude menée sur les résonateurs mécaniques dans le Chapitre 1, et notamment la formule (1.29), la seule commande à ajuster pour amener les oscillations à leur résonance est la fréquence d'excitation. En observant la configuration correspondante de la figure 1.6 dans le plan de Nyquist reprise sur la figure 3.26, et sous réserve de s'assurer d'être initialement dans un voisinage raisonnable de la résonance, on constate que l'on peut utiliser la mesure de l'amplitude en phase u_{Mp} , avec une valeur cible nulle.

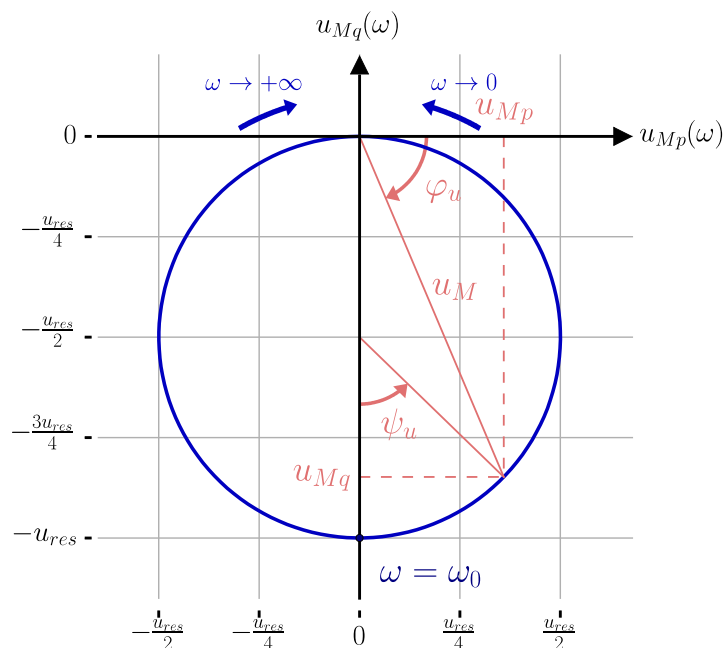


Figure 3.26 - Diagramme de Nyquist de la réponse fréquentielle d'un passe-bas résonnant du second ordre à haut facteur de qualité

On propose donc la loi de correction correspondante de la formule (3.14), avec K_p le coefficient de correction proportionnel entre l'amplitude en phase mesurée u_{Mp} et la correction Δf_{corr} à apporter à la fréquence d'excitation.

$$\Delta f_{corr} = K_p u_{Mp}, \quad K_p > 0 \quad (3.14)$$

Cet asservissement élémentaire est théoriquement convenable, mais en pratique il n'est pas très performant, soit très lent, soit instable, en fonction du choix de la valeur de K_p . Ce comportement s'explique par le temps de réponse élevé que présente un résonateur à grand facteur de qualité lorsqu'on lui impose un saut de fréquence d'excitation (voir partie 1.2.2, en particulier la formule (1.39)). Si on veut un asservissement plus stable et plus rapide, une simple commande en fréquence est insuffisante.

On construit donc un asservissement plus complet, en combinant une commande en fréquence, et une commande en phase.

3.3.5.2 Commande couplée fréquence-phase

Lorsqu'elle est à sa résonance, la réponse du résonateur est en quadrature de phase avec le signal d'excitation. L'idée qui motive cette option d'une commande de phase est la suivante : plutôt que d'attendre que la réponse s'ajuste lentement par rapport à l'excitation avec un simple asservissement de fréquence, on peut décaler instantanément la phase de l'excitation par rapport à celle de la réponse. On obtient un comportement de correction de phase à court terme, et de correction de fréquence à long terme. Avec un tel nouveau correcteur, la stabilité est accrue : en fermant la boucle d'asservissement, même dans une configuration initiale avec une amplitude réponse très faible, on converge vers la résonance.

On décide de travailler avec deux correcteurs proportionnels K_{fp} et $K_{\varphi p}$ définissant la loi (3.15).

$$\begin{cases} \Delta f_{corr} = K_{fp} u_{Mp}, \\ \Delta \varphi_{corr} = K_{\varphi p} u_{Mp} \end{cases}, \quad K_{fp} > 0, \quad K_{\varphi p} > 0 \quad (3.15)$$

Avec Δf_{corr} la correction de la fréquence d'excitation, et $\Delta \varphi_{corr}$ la correction de la phase d'excitation.

En utilisant la formule (1.39) qui établit la relation entre phase et fréquence des états stationnaire du résonateurs, et en effectuant un développement limité autour de la résonance, on conclut que la meilleure relation entre ces deux gains est :

$$K_{fp} = \frac{\alpha}{2\pi} K_{\varphi p} = \frac{f_0}{2Q} K_{\varphi p} \quad (3.16)$$

Où f_0 est la fréquence de résonance, Q le facteur de qualité, et α la demi-largeur de bande passante à -3 dB du résonateur.

Dans l'hypothèse où le système est proche de sa résonance, et dans un état stationnaire, les gains optimaux sont :

$$\begin{cases} K_{fp} = \frac{\alpha}{4\pi X} \\ K_{\varphi p} = \frac{1}{2X} \end{cases} \quad (3.17)$$

Avec X la demi-amplitude à la résonance. En effet, dans ces conditions, la résonance est atteinte dès la première correction. Cependant, cette hypothèse n'est pas réaliste. De manière générale, il ne s'agit que de majorants des gains optimaux. De plus, l'algorithmique de la démodulation numérique développée dans la partie 3.3.4 impose une contrainte beaucoup plus forte : la correction de phase sur un cycle doit respecter l'inéquation (3.18) pour que la mesure soit valide.

$$\Delta\varphi_{corr} \leq \frac{P_S}{P_R} \arccos(u_M) \quad (3.18)$$

Avec P_R et P_S les nombres de périodes par cycle de mesure, respectivement du signal de référence et du signal mesuré, et u_M l'amplitude du signal mesuré relativement au signal de référence. En pratique, on ajuste les gains en respectant (3.16), et en prenant une marge suffisante sur l'inéquation (3.18).

Graphiquement, sur le plan de Nyquist, sur lequel on représente la réponse relativement à l'excitation, et avec ce nouveau correcteur, les déplacements radiaux restent lent, mais les déplacements orthoradiaux deviennent quasiment instantanés en comparaison. Ce phénomène est visible sur la figure 3.27, sur lequel on a représenté l'évolution des amplitudes à partir d'une même configuration initiale, avec le correcteur (3.14) en rouge, et le correcteur (3.15) en vert (les points représentent des mesures d'amplitudes relevées à intervalles de temps réguliers).

Les déplacements radiaux ne peuvent être accélérés par un asservissement à amplitude d'excitation fixée, car ils correspondent à un transfert d'énergie depuis l'excitation vers le résonateur, et dont la vitesse maximale est imposée par les caractéristiques de ce dernier (principalement le facteur de qualité). Par ailleurs, les contrôles en amplitudes sont limités

par les contraintes électroniques d'alimentation. Les déplacements orthoradiaux étant prépondérants autour de la résonance, l'asservissement en fréquence et en phase s'avère être le meilleur compromis entre performance et complexité du calcul de correction.

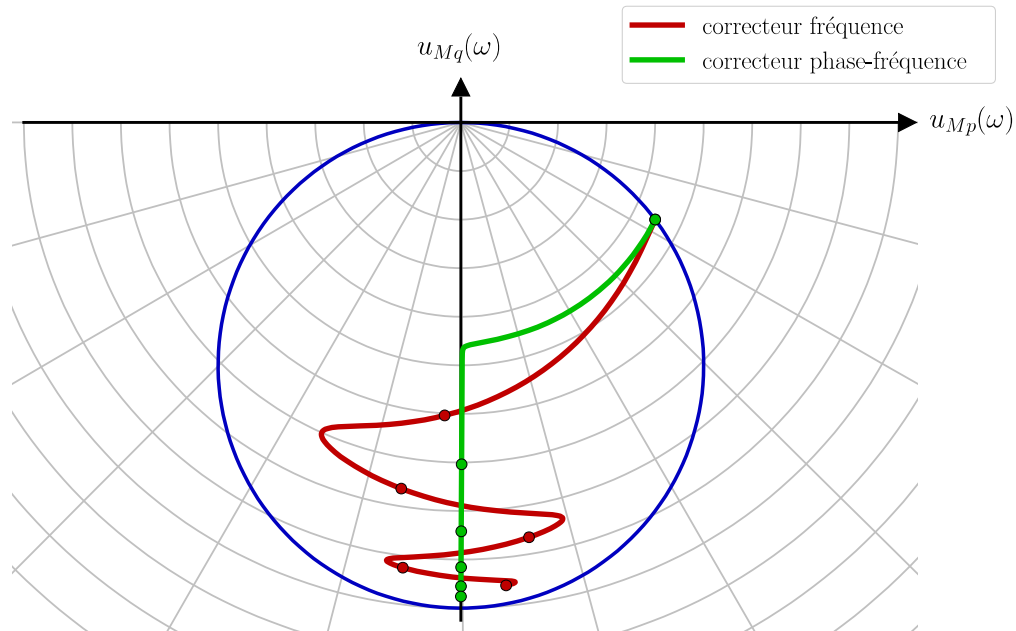


Figure 3.27 - Comportement des asservissements dans le plan de Nyquist

3.4 Architecture du capteur inertiel

3.4.1 Architecture numérique

L'ensemble des fonctions détaillées dans la partie précédente 3.3 sont donc des opérations principalement numériques effectuées au sein de la puce FPGA. Avec la figure 3.28, on peut finalement les rassembler sur un même schéma représentant leurs interactions, entre elles d'une part, mais aussi avec les interfaces du FPGA d'autre part : la carte électronique analogique vers le résonateur, et la liaison USB série vers l'ordinateur de bord OBC. La synthèse de fréquence (partie 3.3.1), la constitution de la forme d'onde numérique (partie 3.3.2), et la modulation $\Sigma\Delta$ (partie 3.3.3) sont implémentées dans la logique séquentielle, en VHDL, pour la fonction d'excitation, vers le résonateur. Les captures de dates sont également traitées en VHDL, puis utilisées dans la démodulation numérique (partie 3.3.4), codée en logiciel, en langage C, pour la fonction de mesure, vers l'OBC. L'interaction entre ces deux branches, due à l'utilisation de boucles d'asservissement (partie

3.3.5), et implémentée en calcul logiciel, permet de placer l'instrument inertiel dans des régimes autonomes ne nécessitant plus l'intervention de l'utilisateur par l'intermédiaire de l'OBC et de la communication série.

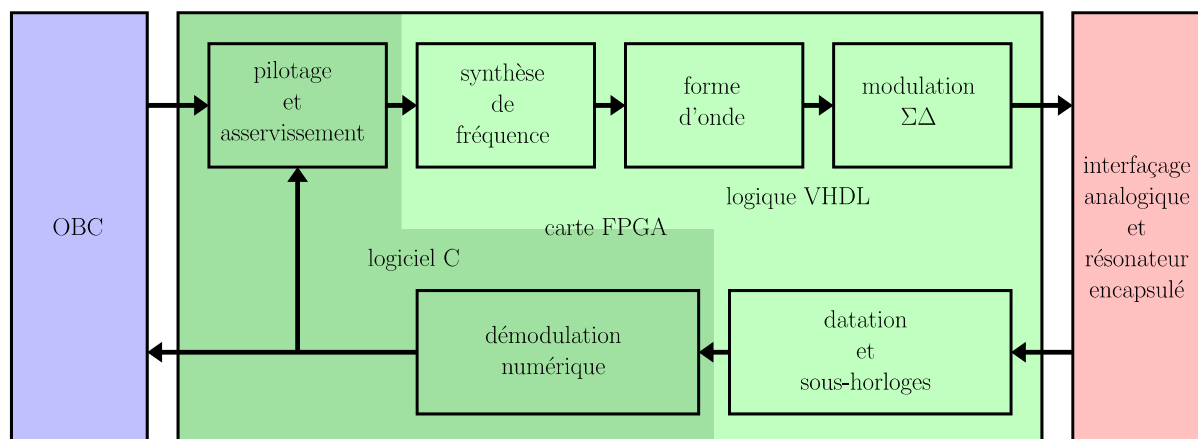


Figure 3.28 - Schéma fonctionnel des opérations numériques sur FPGA

3.4.2 Architecture complète

La composante FPGA décrite précédemment est finalement un maillon d'une plus longue chaîne de traitement du signal permettant un contrôle complet de l'instrument par l'utilisateur, et l'obtention de la mesure inertielle.

Tout d'abord, la structure mécanique du résonateur répond à une accélération d'excitation par un déplacement (parties 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3 et 1.2.4). Les propriétés piézoélectriques du quartz, associées aux électrodes métalliques déposées sur la structure vibrante (parties 1.3.3 et 1.3.4) permettent de générer l'accélération à partir d'une tension, et de convertir le déplacement en charges électriques, le tout de manière proportionnelle. Ce passage du domaine mécanique au domaine électrique rend ainsi possibles toutes les étapes de traitement du signal suivantes.

L'ensemble obtenu est mis sous vide dans un boîtier en cuivre (figure 3.30) sur lequel on interface un premier étage d'électronique analogique, dite de proximité, permettant notamment la conversion des charges électriques mesurées en tension (partie 1.2.5). Le résonateur dans son boîtier avec son électronique de proximité est séparé du reste de l'électronique sur module FPGA (carte FPGA + carte analogique) par une nappe amovible (figure 3.31). En effet, on a construit un composant avec une entrée en tension, et une sortie en tension, et un même module FPGA est interfaçable avec n'importe quel autre composant semblable.

Les tensions véhiculées par la connexion amovible sont d'abord traitées sur le module FPGA par un second étage d'électronique analogique, ayant pour rôle d'adapter les signaux de manière à être exploités par le FPGA (parties 3.3.3 et 3.3.4). Les filtres (partie 4.2.2) permettent de passer du binaire à l'analogique pour l'excitation, et les comparateurs (partie 4.2.3) réalisent l'opération réciproque, pour la mesure des amplitudes réponses. L'instrument inertielle constitué est un dispositif présentant une consommation énergétique d'environ 0.3 W pour un axe de mesure, et inférieure à 1 W pour une centrale inertielle complète.

Le module FPGA est relié à l'OBC par une connexion USB série, permettant la transmission des paramètres de l'excitation (fréquence, phase, amplitude) au FPGA, et en retour l'obtention des amplitudes mesurées. Finalement, l'OBC réalise les opérations restantes : mesure inertielle, scénarios d'étalonnage (Chapitre 2), interfaçage graphique utilisateur pour les contrôles et commandes manuels (partie 3.2.3).

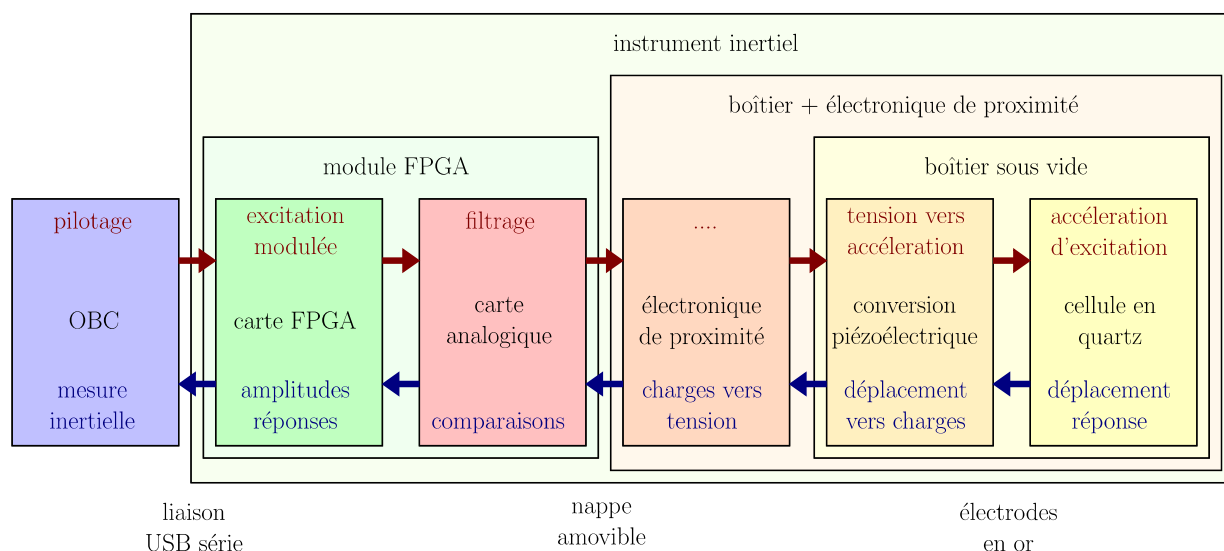


Figure 3.29 - Architecture complète du capteur inertielle

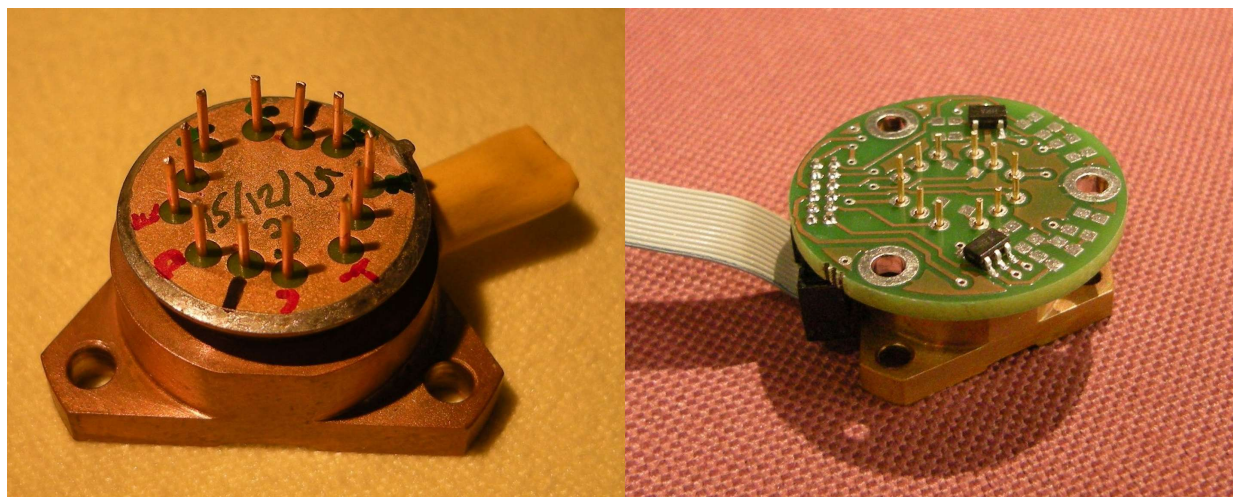


Figure 3.30 - Résonateur dans son boîtier en cuivre, avec l'électronique de proximité

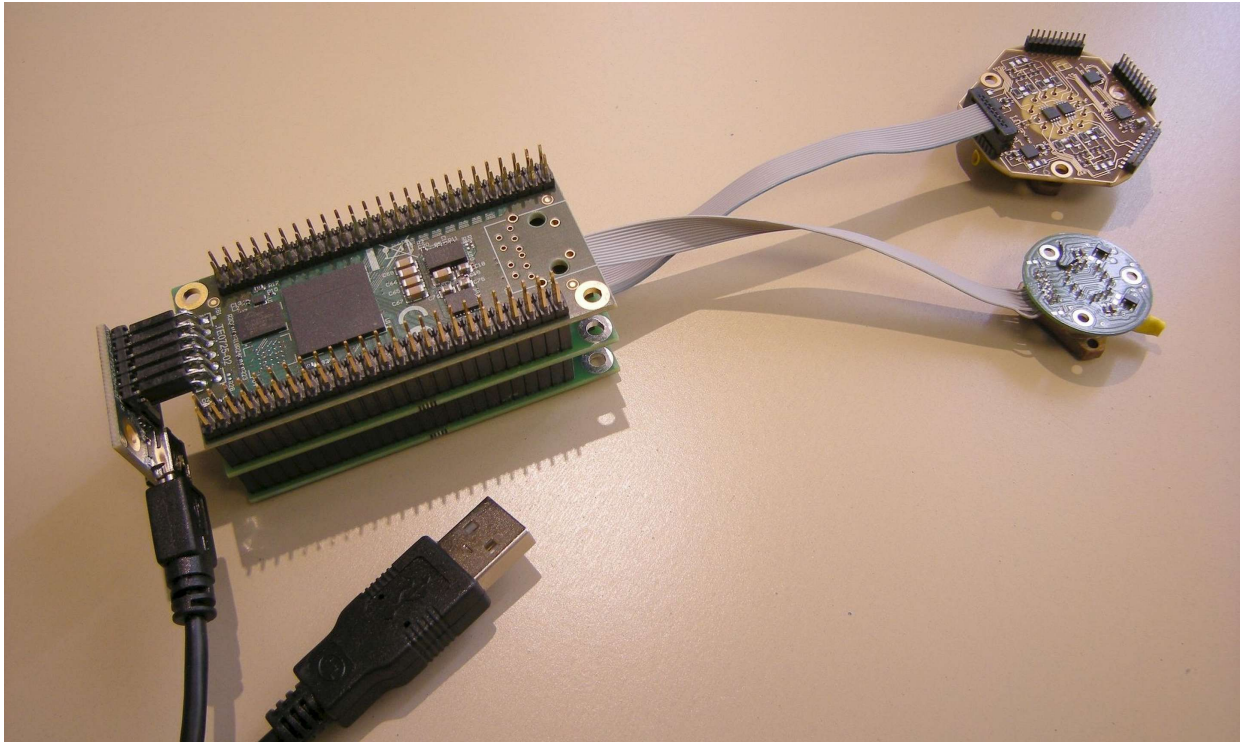


Figure 3.31 - Instrument inertiel

3.5 Conclusion : capteur opérationnel et performances

Le paragraphe 3.4 conclut la conception du capteur, qui est ainsi prêt à fonctionner dans son régime principal de mesure. L'ensemble des fonctions analogiques, matérielles et logicielles ont été intégrées et implémentées. Le Chapitre 4 a donc pour objet la caractérisation des performances de cet instrument. D'une part, conformément à la démarche de projet recherche, il faut étudier chaque élément séparément pour identifier clairement les pistes d'amélioration les plus pertinentes. Et d'autre part, il faut mettre en évidence sur banc d'expérimentation les valeurs effectives des principales grandeurs présentées dans la partie 1.3.1, qui sont les indicateurs de la performance finale du capteur.

Chapitre 4

Étude des performances

Chapitre 4 Étude des performances.....	151
4.1 Introduction.....	152
4.2 Caractérisations analogiques.....	153
4.2.1 Caractérisation de l'amplificateur de charges (électronique de proximité).....	153
4.2.2 Caractérisation des filtres de démodulation.....	155
4.2.3 Caractérisation des comparateurs d'acquisition.....	157
4.3 Caractérisations numériques.....	159
4.3.1 Résolution de l'horloge du FPGA.....	159
4.3.2 Paramétrage de l'algorithme $\Sigma\Delta$	162
4.3.3 Résolutions des étages numériques.....	163
4.3.4 Caractérisations de l'utilisation des sous-horloges.....	165
4.3.5 Caractérisation de la démodulation numérique et dépendance à l'amplitude et à la phase du signal mesuré.....	167
4.3.5.1 Biais de démodulation numérique.....	167
4.3.5.2 Résolution de démodulation numérique.....	168
4.3.5.3 Résultats analytiques et expérimentaux.....	171
4.4 Caractérisations inertielles.....	172
4.4.1 Caractérisation de l'asservissement du gyromètre VIG.....	173
4.4.1.1 Résolution du biais.....	173
4.4.1.2 Caractérisations thermiques.....	175
4.4.2 Caractérisation de l'asservissement de l'accéléromètre DIVA.....	177
4.4.2.1 Résolution du biais.....	177
4.4.2.2 Caractérisations thermiques.....	179
4.4.3 Perspective d'amélioration de l'architecture électronique.....	181

4.1 Introduction

Le Chapitre 1 a décrit le comportement des résonateurs piézoélectriques utilisés pour les applications inertielles, le Chapitre 2 a montré comment on pouvait améliorer les performances de mesure en poussant cette théorie, et le Chapitre 3 a présenté l'ensemble de l'implémentation et de l'intégration du capteur. La dernière étape consiste donc à rassembler les différentes caractérisations expérimentales correspondantes.

Plusieurs prototypes de cellules vibrantes sont considérés. Pour les accéléromètres, seul le modèle DIVA classique présenté en partie 1.3.3.2 est intégré, avec une fréquence de résonance d'environ 60 000 Hz et un facteur de qualité de l'ordre de 15 000. En revanche, pour le gyromètre VIG, l'étude expérimentale est ici réalisée sur un agrandissement de rapport 4, appelé VIG4, avec une fréquence de résonance de 5 900 Hz. Il existe aussi le rapport 4/3, dit VIG4/3, avec une fréquence de résonance de 17 000 Hz, et la version à l'échelle, dite VIG1, présentée en partie 1.3.4.3, avec une fréquence de résonance de 23 000 Hz et un facteur de qualité de l'ordre de 150 000.

Dans ce chapitre, on utilise plusieurs appareils pour effectuer les caractérisations. Le compteur KEYSIGHT 53230A (bande passante de 350 MHz, résolution de mesure temporelle de 20 ps) et l'oscilloscope TEKTRONIX MSO2014B (bande passante de 100 MHz, résolution de mesure temporelle de 1 ns) de la figure 4.1 permettent d'évaluer les résolutions temporelles des différents étages de l'architecture.



Figure 4.1 - Compteur KEYSIGHT 53230A (à gauche) et oscilloscope TEKTRONIX MSO2014B (à droite)

4.2 Caractérisations analogiques

Les montages analogiques à caractériser sont l'amplificateur de charges de l'électronique de proximité, et les filtres et comparateurs de la carte analogique. L'ensemble des résistances, condensateurs et amplificateurs opérationnels sont des composants CMS.

4.2.1 Caractérisation de l'amplificateur de charges (électronique de proximité)

Pour évaluer la contribution en bruit de l'amplificateur de charges de l'électronique de proximité, on s'appuie essentiellement sur la théorie développée en détail dans [Parent 2008], que l'on présente dans cette partie.

On reprend sur la figure 4.2 le schéma de la figure 1.21, en y ajoutant les capacités parasites C_p du circuit de connexion des électrodes à l'amplificateur de charges, et les bruits d'entrée de l'amplificateur opérationnel, i_b (bruit en courant) et u_b (bruit en tension), qui proviennent du fonctionnement interne de l'amplificateur, et de densités spectrales de puissance respectives S_{i_b} et S_{u_b} (données constructeurs).

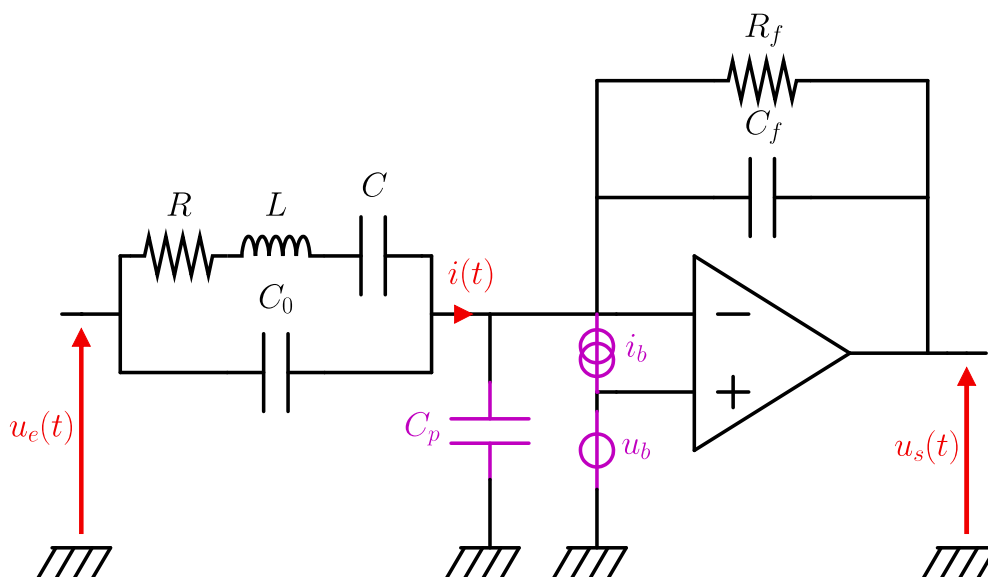


Figure 4.2 - Amplificateur de charges réel

En sortie de l'amplificateur de charges, les densités spectrales de puissance de bruit dues aux effets électroniques sont données par les expressions de la formule (4.1). u_{sb1} est le

bruit thermique dans la résistance de contre-réaction R_f (ou bruit de Johnson-Nyquist), et u_{sb2} et u_{sb3} sont les bruits en tension et en intensité de l'amplificateur opérationnel.

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{usb1}(f, \mathcal{T}) = \left(\frac{R_f}{1 + 2j\pi f R_f C_f} \right)^2 \frac{4K_b \mathcal{T}}{R_f} \\ S_{usb2}(f, u_b) = \left(1 + \frac{2j\pi f (C_0 + C_p) R_f}{1 + 2j\pi f R_f C_f} \right)^2 S_{ub}(f) \\ S_{usb3}(f, i_b) = \left(\frac{R_f}{1 + 2j\pi f R_f C_f} \right)^2 S_{ib}(f) \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Avec f la fréquence, K_b la constante de Boltzmann ($K_b \simeq 1.38 \times 10^{-23}$ J.K⁻¹) et \mathcal{T} la température (en K).

On en déduit avec la formule (4.2) la densité spectrale de puissance du bruit électronique total en sortie de l'amplificateur de charges.

$$S_{usb}(f, \mathcal{T}, u_b, i_b) = S_{usb1}(f, \mathcal{T}) + S_{usb2}(f, u_b) + S_{usb3}(f, i_b) \quad (4.2)$$

On utilise un amplificateur opérationnel AD8065 d'Analog Devices pour l'accéléromètre DIVA, et AD8625 pour les gyromètres VIG. Les valeurs des composants du circuit et les densités spectrales de bruit, données autour des fréquences de résonance et de la température ambiante, sont rassemblées dans le tableau 4.1. On en déduit à la dernière ligne le niveau de bruit en tension, en sortie de l'amplificateur.

Composant	DIVA		VIG4		VIG4/3		VIG1	
Mode	pilote		pilote	détecteur	pilote	détecteur	pilote	détecteur
AO	AD8065		AD8625	AD8625	AD8625	AD8625	AD8625	AD8625
$\sqrt{S_{ub}}$ [nV / $\sqrt{\text{Hz}}$]	7.5		17.5	17.5	17.5	17.5	17.5	17.5
$\sqrt{S_{ib}}$ [fA / $\sqrt{\text{Hz}}$]	1		0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
C_f [pF]	0.47		330	10	110	3	80	2
R_f [M Ω]	56		0.68	22	0.68	22	0.68	22
$C_0 + C_p$ [pF]	0.4		2	2	2	2	2	2
$\sqrt{S_{usb}}$ [nV / $\sqrt{\text{Hz}}$]	95		13	68	13	79	13	86

Tableau 4.1 - Caractéristiques des amplificateurs de charges

4.2.2 Caractérisation des filtres de démodulation

La carte électronique analogique est de la même taille que la carte FPGA. Elle rassemble les fonctions de filtrage et de comparaison. Le prototype de carte utilisé est visible sur la figure 4.3.

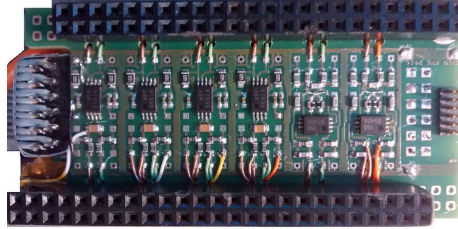


Figure 4.3 - Carte analogique

Il y a deux filtres à droite, avec les entrées en haut, et les sorties en bas, et quatre comparateurs à gauche, avec les entrées en bas, et les sorties en haut. Le schéma électronique des filtres de démodulation des trains binaires est donné en figure 4.4.

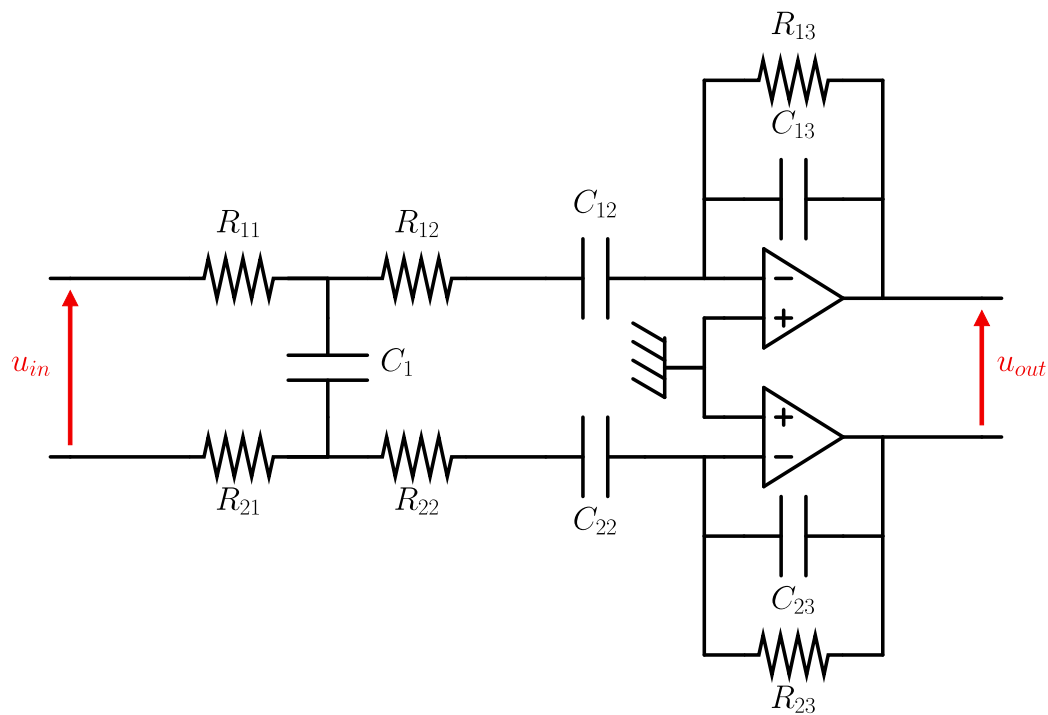


Figure 4.4 - Schéma électronique d'un filtre

Il s'agit d'un filtre passe-bande actif différentiel RC d'ordre 3, avec un comportement passe-bas d'ordre 2. Le signal de sortie est utilisé directement pour la démodulation numérique dans le cas du signal de référence. Pour cette mesure de signaux, l'un des critères essentiels est de conserver leur monotonie dans les zones de croisement potentiel. C'est cet aspect qui justifie l'utilisation d'un filtre d'ordre 2 dans le domaine intégral, car il n'est pas

possible de transformer un signal binaire en un signal monotone avec un filtre passe-bas d'ordre 1.

On choisit les valeurs des éléments du filtre de telle sorte que l'on conserve la composante harmonique du signal, qui est de l'ordre de la fréquence de résonance de la cellule, et que l'on atténue au maximum les composantes harmoniques de l'ordre de la fréquence de l'horloge du FPGA (conformément à la configuration de la figure 3.20). Le tableau 4.2 rassemble les valeurs des composants électroniques de la figure 4.4 en fonction de la cellule vibrante utilisée. Les valeurs des résistances restent inchangées, et on adapte les capacités pour avoir des fréquences de coupure de l'ordre de $10 \times f_0$ pour les deux filtres passe-bas, et $f_0/10$ pour le filtre passe-haut. L'amplificateur opérationnel utilisé est le AD8625, déjà évoqué précédemment.

Composant	DIVA	VIG4	VIG4/3	VIG1
$R_{11} = R_{21}$	1 k Ω	1 k Ω	1 k Ω	1 k Ω
C_1	120 pF	1.2 nF	3.6 nF	4.8 nF
$R_{12} = R_{22}$	33 k Ω	33 k Ω	33 k Ω	33 k Ω
$C_{12} = C_{22}$	820 pF	8.2 nF	24 nF	32 nF
$R_{13} = R_{23}$	33 k Ω	33 k Ω	33 k Ω	33 k Ω
$C_{13} = C_{23}$	8.2 pF	82 pF	240 pF	320 pF

Tableau 4.2 - Composants électroniques des filtres

La figure 4.5 présente le diagramme de Bode théorique en bleu, et la caractérisation expérimentale correspondante en rouge dans le cas du VIG4.

On présente dans la partie 4.3.1 la contribution en bruit de cet étage analogique en étudiant, avec le compteur KEYSIGHT 53230A, l'évolution de la résolution temporelle d'un signal généré par l'horloge du FPGA en entrée du filtre.

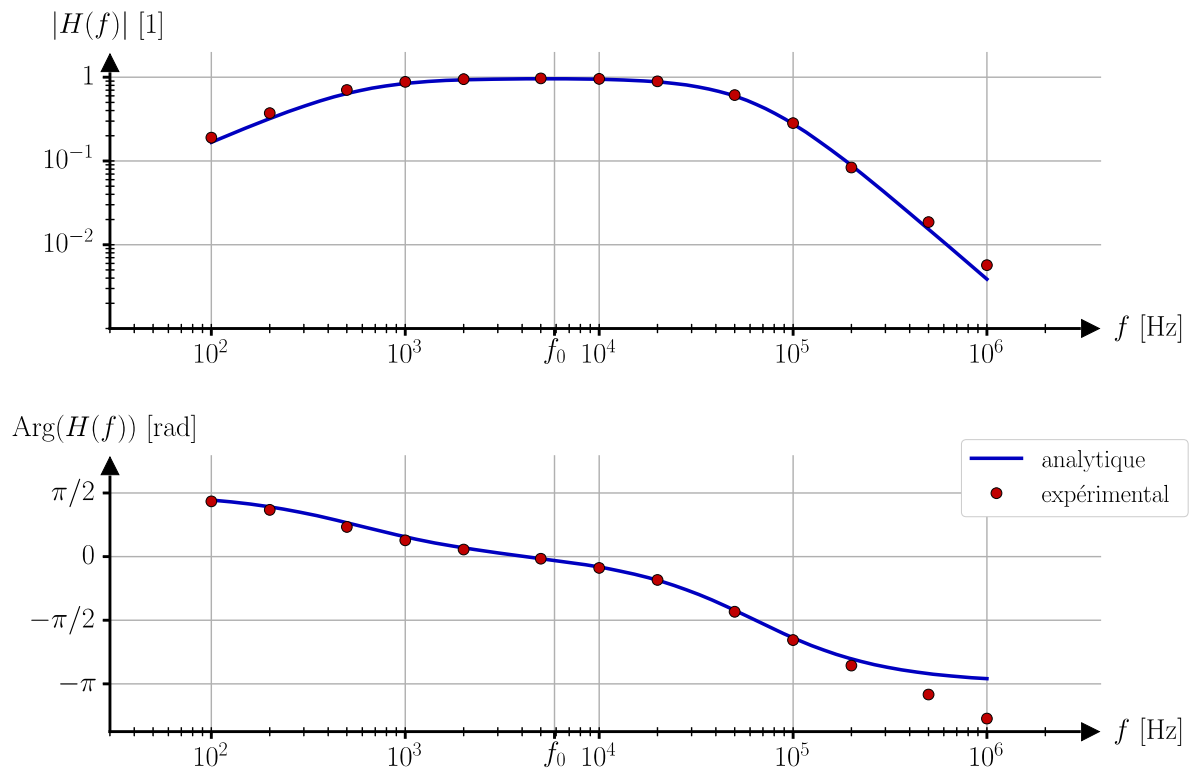


Figure 4.5 - Diagramme de Bode des filtres analogiques

4.2.3 Caractérisation des comparateurs d'acquisition

Sur la même carte, juste à côté des filtres, sont intégrés les modules de comparaison utilisés pour la démodulation numérique. Ils sont visibles sur la figure 4.3. Le schéma électronique de l'un de ces comparateurs est donné en figure 4.6.

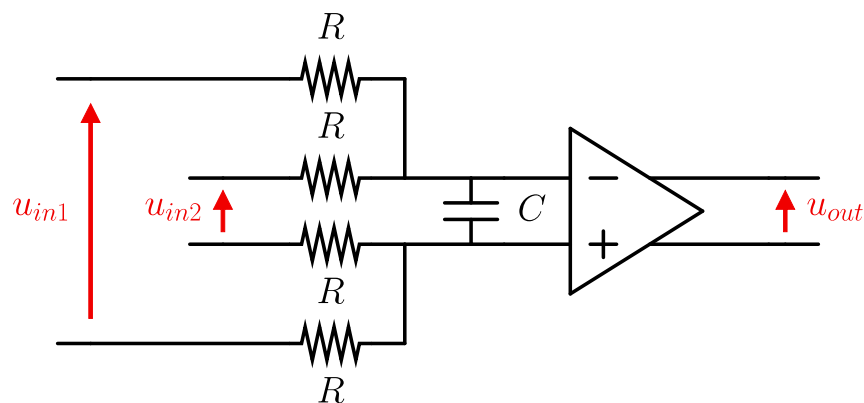


Figure 4.6 - Schéma électronique d'un comparateur

Il s'agit d'un comparateur différentiel. On utilise le comparateur AD8561 d'Analog Devices, des résistances $R=1\text{ k}\Omega$, et on ajuste la valeur de la capacité en fonction de la fréquence de résonance de la cellule utilisée pour obtenir une fréquence de coupure de l'ordre de $10 \times f_0$.

Quatre critères de performance sont considérés : le temps de montée, le retard, le biais d'entrée, et la dispersion. Le retard et le temps de montée n'ont pas d'influence sur la performance finale, tant que leurs valeurs sont fixes et connues avec la précision nécessaire. En revanche, le biais d'entrée et la dispersion ont eux un impact sur la démodulation numérique, et doivent être minimisés pour éviter de détériorer la précision de la mesure des amplitudes par le FPGA.

Pour une tension d'alimentation de 3 V, les données constructeurs du comparateur AD8561 indiquent un biais d'entrée de 7 mV et un retard entre 8 ns et 10 ns. Par ailleurs, dans des conditions différentes, on trouve un temps de montée de 3.8 ns (de 20 % à 80 %), un temps de descente de 1.5 ns (de 80 % à 20 %), et une dispersion de 1 ns.

On peut valider expérimentalement les valeurs de stabilité et de temps de montée et de descente avec l'oscilloscope TEKTRONIX MSO2014B. La figure 4.7 montre la superposition d'oscillogrammes de deux comparaisons successives devant théoriquement intervenir à deux instants fixes par rapport au déclenchement de l'oscilloscope, en utilisant des signaux générés par le FPGA. On obtient ainsi un temps de montée de 4.1 ns, un temps de descente de 4.2 ns, et une dispersion de 0.7 ns, qui est la résolution de l'oscilloscope.

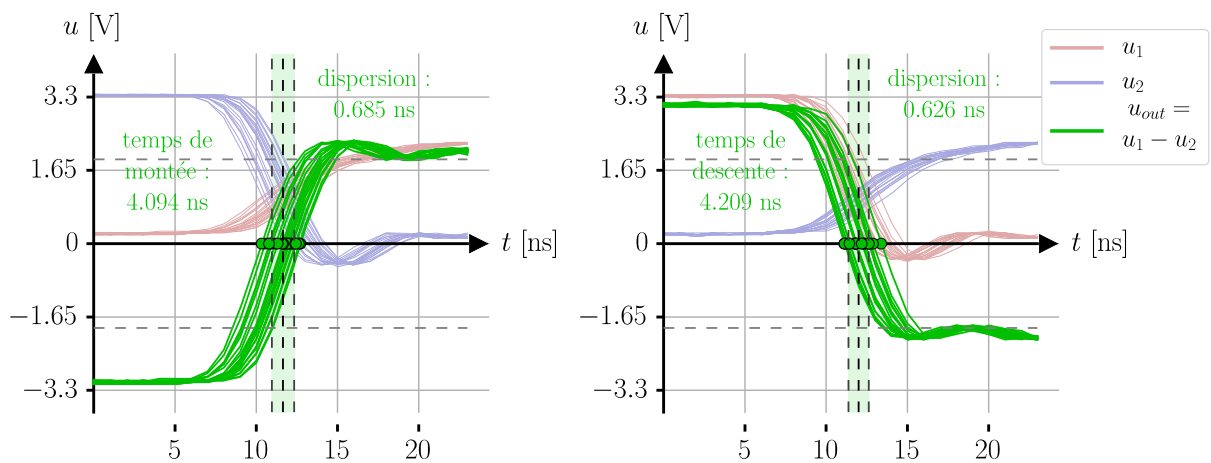


Figure 4.7 - Oscillogrammes d'événements de comparaison

Une détermination expérimentale plus rigoureuse de la dispersion de ce circuit comparateur est présentée dans la partie 4.3.1, avec l'utilisation du compteur KEYSIGHT 53230A.

4.3 Caractérisations numériques

Les impacts des différents étages numériques peuvent être, dans une certaine mesure, étudiés séparément en les isolant les uns des autres : la stabilité de la fréquence de l'horloge du FPGA avec son évolution en sortie des étages analogiques décrits précédemment, la stabilité de la synthèse de fréquence suivant si elle est en rapport entier ou non avec la fréquence de l'horloge, la modulation $\Sigma\Delta$, l'influence de l'utilisation des sous-horloges, et la performance de la démodulation numérique.

4.3.1 Résolution de l'horloge du FPGA

L'horloge de base est un composant séparé de la puce FPGA sur la carte électronique, qui peut donc être remplacée en fonction des exigences de résolution et d'encombrement. Le modèle par défaut SiT8008AI-73-XXS-100.000000E de Si Time a ainsi été remplacé par le 540AAA100M00BAG de Silicon Labs pour améliorer la stabilité fréquentielle du signal de sortie.

En utilisant le compteur KEYSIGHT 53230A, et en configurant le FPGA avec une logique minimaliste (simple division de la fréquence de l'horloge dans l'IP de gestion des signaux d'horloges pour se placer dans la bande passante des connecteurs de la carte électronique), on peut étudier expérimentalement les caractéristiques de cette horloge, et leurs évolutions après passage des signaux électroniques à travers les étages analogiques de filtrage et de comparaison. On fait l'hypothèse que cette opération de division de fréquence apporte une contribution négligeable sur les résolutions mesurées. Le signal d'horloge généré présente une fréquence $f_{sig} = 250 \text{ MHz} / 2^{15} \simeq 7\,629 \text{ Hz}$.

On considère sur la figure 4.8 les trois configurations des branchements des chaînes de mesure du compteur sur le module FPGA.

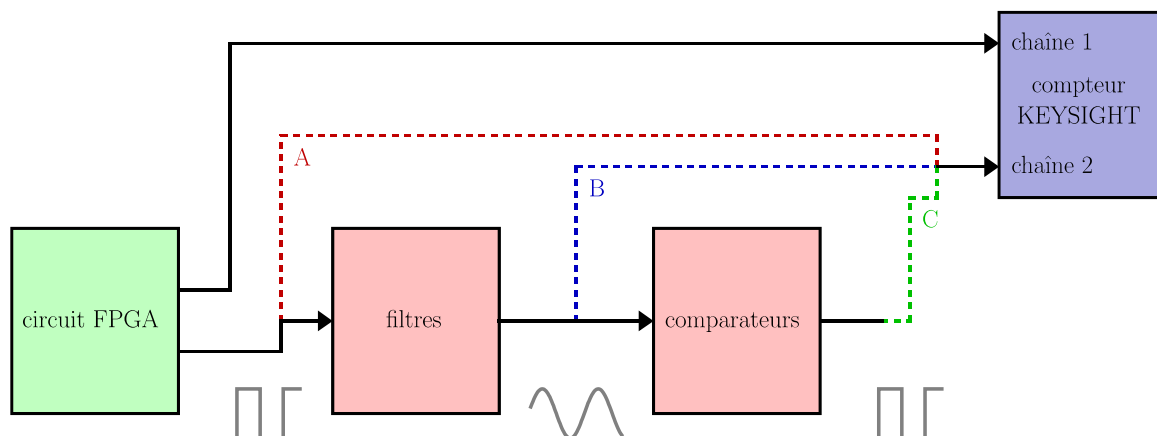


Figure 4.8 - Configurations des branchements du compteur KEYSIGHT 53230A sur le module FPGA

On a donc en série la puce FPGA, un étage de filtres, et un étage de comparaison du signal filtré avec son complémentaire différentiel (ce routage dessiné sur la carte analogique n'est prévu que pour cette caractérisation, et n'apparaît donc pas sur le schéma architectural complet de la figure 3.29). La chaîne 1 du comparateur est connectée en sortie de la puce FPGA, pour constituer une référence, et la chaîne 2 est placée soit en sortie du FPGA (A), soit en sortie des filtres (B), soit en sortie du comparateur (C). On précise que dans la configuration B, la chaîne 2 est connectée en amont du comparateur AD8561, mais en aval du filtre de la figure 4.6.

On peut ainsi tracer sur la figure 4.9 un ensemble de courbes pour chacune de ces configurations de branchement. Chaque ensemble est composé de quatre graphiques : deux pour la stabilité de la fréquence du signal f_{sig} mesurée sur la chaîne 2, et deux pour la stabilité de l'intervalle de temps Δt entre les événements intervenant sur les chaînes 1 et 2. Dans chaque cas, on représente la déviation d'Allan et la densité spectrale de bruit (NSD) (voir partie 1.1).

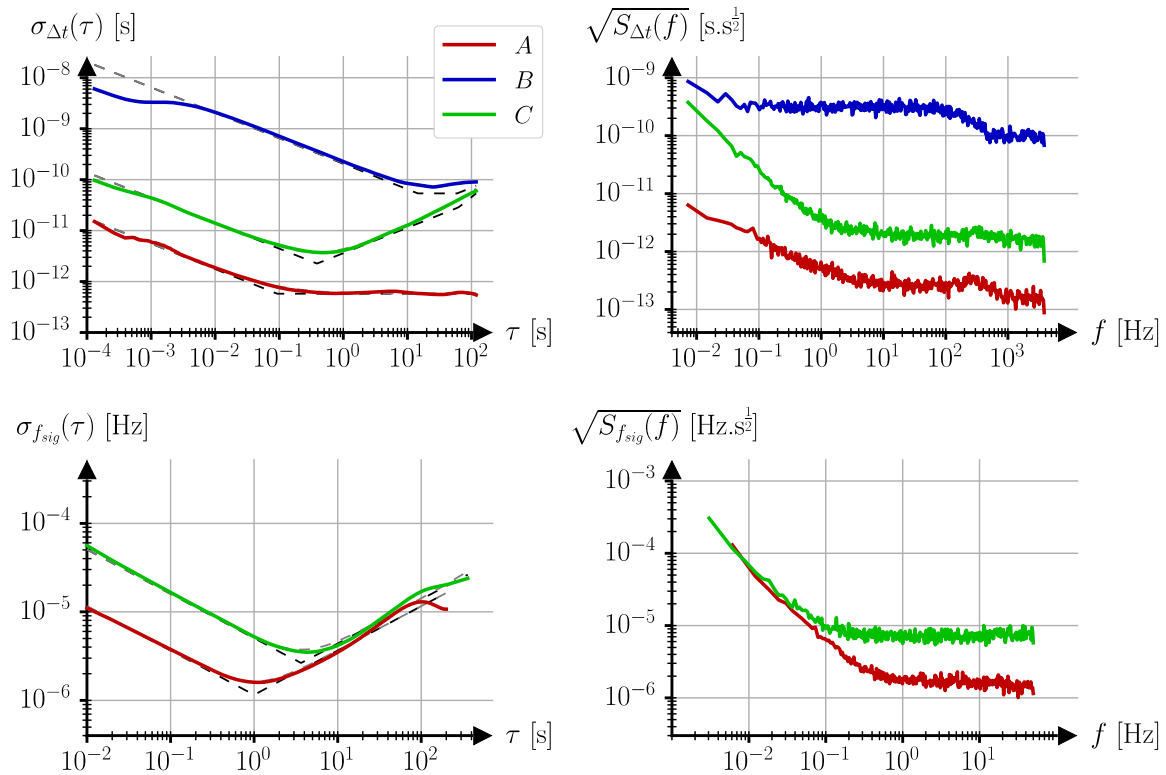


Figure 4.9 - Déviation d'Allan (à gauche) et NSD (à droite) des résolutions fréquentielle (en bas) et temporelle (en haut) du signal d'horloge du FPGA avec filtrage et comparateurs analogiques

Les courbes rouges concernent la configuration A de la figure 4.8, en branchant les bornes du compteur directement sur les connecteurs du FPGA. La résolution fréquentielle, autour du μHz (en bas), est donc considérée comme étant celle de l'horloge du FPGA. Le signal considéré étant à $f_{sig}=7\,629\text{ Hz}$, on atteint une résolution fréquentielle relative de l'ordre du ppb (10^{-9}). Les signaux des chaînes 1 et 2 sont théoriquement identiques, et routés dans le FPGA sur des matériels parallèles mais distincts. La résolution temporelle (en haut) donne donc la stabilité de l'électronique numérique du FPGA, qui est inférieure à la résolution du compteur (20 ps). On s'approche même de l'ordre de grandeur de la dispersion de l'horloge du FPGA (540AAA100M00BAG de Silicon Labs, données constructeurs entre 125 fs et 300 fs), avec un plancher de la déviation d'Allan à environ 500 fs.

Les courbes bleues et vertes concernent respectivement les configurations B et C de la figure 4.8. On rappelle qu'ici, la modulation $\Sigma\Delta$ est désactivée. On observe ainsi les effets du filtrage et de l'étage de comparaison sur les résolutions d'un signal d'horloge du FPGA dont la fréquence est dans la bande passante du filtre (partie 4.2.2).

La mesure de la résolution fréquentielle en configuration B n'a pas été possible, l'estimation de la fréquence par le compteur étant perturbée par les impédances du montage de la figure 4.8. On constate malgré tout que la résolution temporelle est fortement impactée par le filtrage, avec un plateau de la déviation d'Allan à 100 ps.

La résolution temporelle de la configuration C est la grandeur la plus importante, car elle représente la précision optimale de la datation d'événements par l'électronique analogique, à laquelle est directement liée la performance de la mesure d'amplitude par démodulation numérique (parties 3.3.4 et 4.3.5), et donc la performance de la mesure inertielle du capteur. Malgré une remontée de la déviation d'Allan pour les temps d'intégration τ élevés, due aux conditions de l'expérimentation, on peut conclure à une détérioration seulement d'un facteur 10 de la résolution optimale de la configuration A. La dispersion en sortie du comparateur (ici, la première valeur de la déviation d'Allan) est de l'ordre de 0.1 ns, ce qui nous amène à conclure que la valeur de 0.7 ns obtenue en partie 4.2.3 était principalement limitée par la résolution de mesure de l'oscilloscope. Il serait aussi possible d'obtenir une estimation expérimentale du retard du comparateur à partir des mesures temporelles dans les configurations B et C. Avec les données à disposition, on constate une différence de 220 ns, ce qui est largement au dessus des 10 ns annoncées par le constructeur (partie 4.2.3), écart qui s'explique par les différences des conditions expérimentales, notamment thermiques, des deux acquisitions réalisées à plusieurs jours d'intervalle. Une démarche expérimentale entièrement dédiée à la détermination de ce retard permettrait une mesure plus fiable avec le KEYSIGHT 53230A.

4.3.2 Paramétrage de l'algorithme $\Sigma\Delta$

L'ensemble de l'architecture comporte 3 paramètres concernant l'algorithme $\Sigma\Delta$: deux entiers N_{DR} et N_{DE} , qui correspondent aux nombres minimaux de périodes d'horloge entre deux transitions successives du signal modulé (partie 3.3.3), respectivement pour le signal de référence et pour le signal d'excitation, ainsi que f_H la fréquence de l'horloge.

L'évolution du signal modulé binaire au cours du temps est difficilement prédictible dans le cas général, ce qui rend l'étude théorique de l'influence de ces 3 paramètres sur la résolution finale inenvisageable. On peut néanmoins deviner les tendances asymptotiques. Plus on augmente la fréquence de l'horloge, plus on augmente la résolution des échantillonnages d'une part, mais plus on augmente aussi les non linéarités dues aux temps de montée et de descente non négligeables du train binaire sur les connecteurs du FPGA. On peut aussi compter l'augmentation de la consommation du module FPGA qui en résulte, car liée à la densité des transitions. L'augmentation des paramètres N_{DR} et N_{DE} a un effet

inverse à celui de l'augmentation de la fréquence de l'horloge, mais pas tout à fait équivalent. Ainsi, un équilibre judicieux peut amener à des performances optimales.

En raison du temps élevé de l'optimisation expérimentale de ces paramètres, on se limite à une étude partielle : on compare simplement les résolutions des datations de comparaison pour un ensemble de configurations possibles de ces 3 paramètres.

On retient alors finalement les valeurs $f_H=250$ MHz, $N_{DR}=7$ et $N_{DE}=5$, qui permettent d'atteindre une stabilité de datation $\mu_d \simeq 2.5$ ns.

Cette démarche a permis d'adopter une configuration plutôt favorable de l'algorithme de génération de signal électronique analogique périodique à partir d'un FPGA, mais une optimisation plus rigoureuse serait souhaitable.

4.3.3 Résolutions des étages numériques

En suivant la même démarche que pour le signal d'horloge dans la partie 4.3.1, et en complétant avec les fonctions de calcul logique correspondantes, on détermine la performance de la synthèse de fréquence et de la modulation $\Sigma\Delta$.

On représente ainsi sur les figures 4.10 et 4.11 (sur le même modèle de présentation que la figure 4.9) les déviations d'Allan et les densités spectrales de bruit du signal mesuré sur le module FPGA dans les configurations de branchement B et C, et dans les 4 configurations numériques suivantes : en noir, une synthèse de fréquence en rapport entier puissance de 2 avec la fréquence d'horloge ($f_{sig}=7\ 629$ Hz), en rouge, la synthèse de fréquence en rapport quelconque avec la fréquence d'horloge ($f_{sig}=5\ 888$ Hz), et respectivement en bleu et en vert les mêmes configurations, en passant d'une sortie binaire à une sortie $\Sigma\Delta$.

La figure 4.10 correspond au branchement B de la figure 4.8, en sortie de l'étage de filtrage, et la figure 4.11 correspond au branchement C de la figure 4.8, en sortie de l'étage de comparaison. Les courbes en noir ont déjà été tracées sur la figure 4.9.

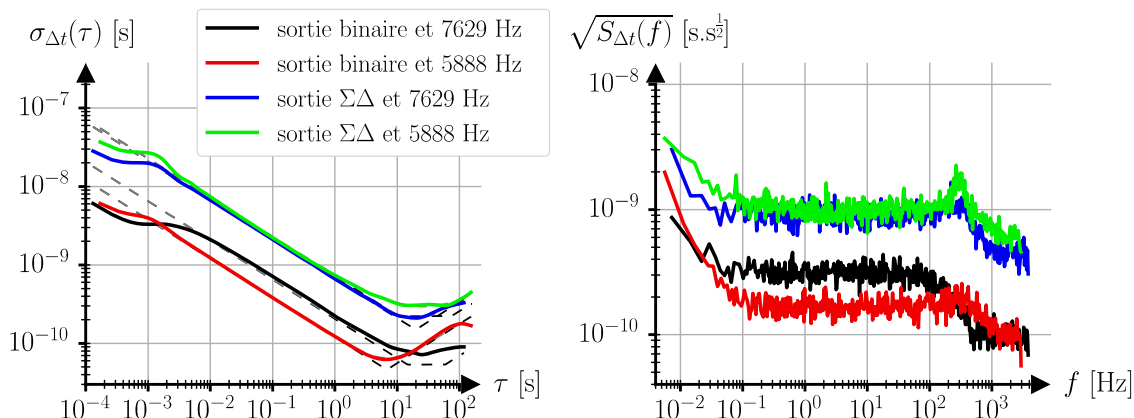


Figure 4.10 - Déviation d'Allan (à gauche) et NSD (à droite) de la résolution temporelle de la synthèse de fréquence et de l'algorithme $\Sigma\Delta$ après filtrage analogique

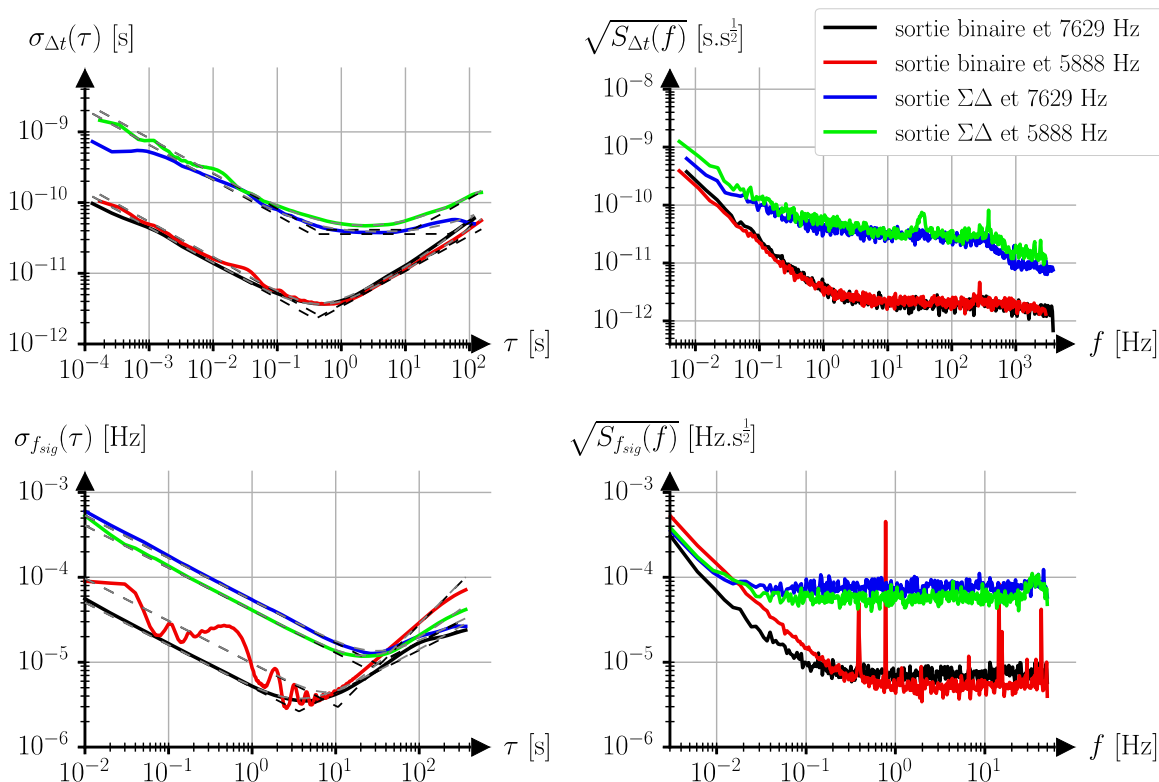


Figure 4.11 - Déviation d'Allan (à gauche) et NSD (à droite) des résolutions fréquentielle (en bas) et temporelle (en haut) de la synthèse de fréquence et de l'algorithme $\Sigma\Delta$ après filtrage et comparateurs analogiques

De manière générale, le choix de la fréquence du signal a peu d'influence sur les différentes résolutions, ce qui valide l'implémentation de la synthèse de fréquence sur FPGA (partie 3.3.1). La modulation $\Sigma\Delta$ ajoute un facteur de l'ordre de 10 sur les résolutions. La

dispersion de datation en sortie du comparateur (ici, la première valeur de la déviation d'Allan) passe donc de 0.1 ns à 1 ns avec la modulation $\Sigma\Delta$ (partie 3.3.3).

4.3.4 Caractérisations de l'utilisation des sous-horloges

On a défini la fréquence de l'horloge du FPGA à $f_H=250\text{MHz}$, ce qui implique une résolution de datation des événements de comparaison de $\mu T_1=T_H=4\text{ns}$. La stabilité des comparateurs a été établie à 0.1 ns dans les parties 4.2.3 et 4.3.1, mais surtout à 1 ns dans la configuration de fonctionnement du capteur, avec modulation $\Sigma\Delta$, dans la partie 4.3.3. C'est donc l'horloge qui limite la performance. L'amélioration de datation numérique utilisant les sous-horloges (partie 3.3.4) est donc pertinente, et permettrait d'atteindre une résolution de datation numérique $\mu T_2=T_H/8=0.5\text{ns}$, inférieure à la résolution de datation analogique de 1 ns.

Cependant, l'implémentation d'un tel système d'horloges est délicate, car à cette échelle, le temps de propagation des signaux dans le FPGA n'est plus négligeable devant la résolution de datation. Pour évaluer si les sous-horloges sont bien déphasées d'une quadrature de phase comme le présente la figure 3.24, on étudie la répartition statistique des occurrences de datation parmi les 8 subdivisions de la période de l'horloge principale en ajoutant une phase aléatoire uniforme sur l'un des deux signaux comparés. En laissant le logiciel Vivado gérer entièrement l'implémentation avec les options par défaut, on obtient ainsi les histogrammes de la figure 4.12.

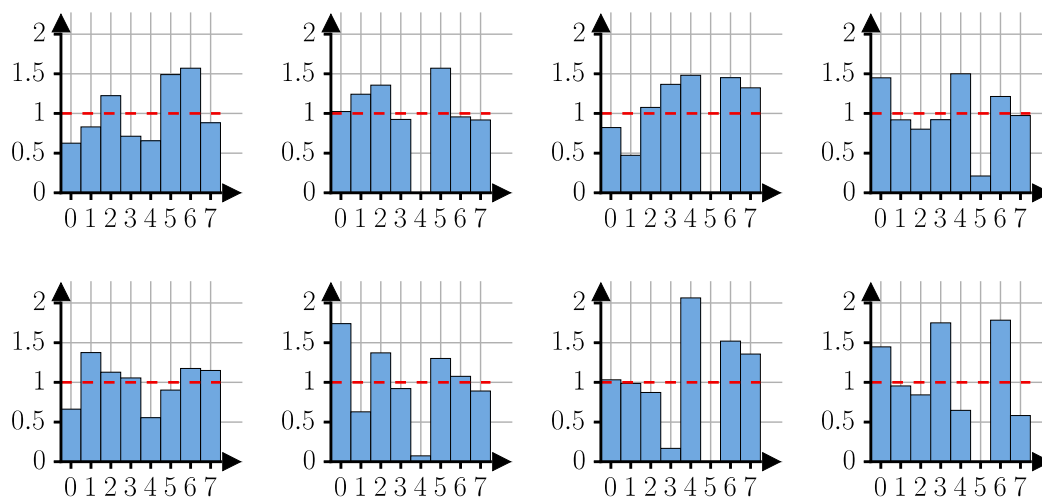


Figure 4.12 - Histogrammes de répartition statistique des datations par sous-horloges avec implémentation par défaut

On construit 8 histogrammes : 2 pour chacun des 4 comparateurs de la carte analogique, pour les fronts montants (en haut) et descendants (en bas). Les disparités observées s'expliquent par un défaut de synchronisme des 4 signaux d'horloges au niveau des bascules qu'elles déclenchent pour la datation d'événements. Ici, certaines subdivisions de la période d'horloge n'ont même aucune occurrence de datation. On décide donc de contraindre manuellement l'implémentation, notamment en forçant le placement des bascules de datation à proximité les unes des autres, et au bord des entrées correspondantes du FPGA. De cette façon, les routages des signaux complémentaires sont semblables. La figure 4.13 montre la représentation sur Vivado de l'implémentation obtenue. Les ressources en bleu sont affectées par les algorithmes du logiciel, pendant que les ressources en orange sont affectées manuellement.

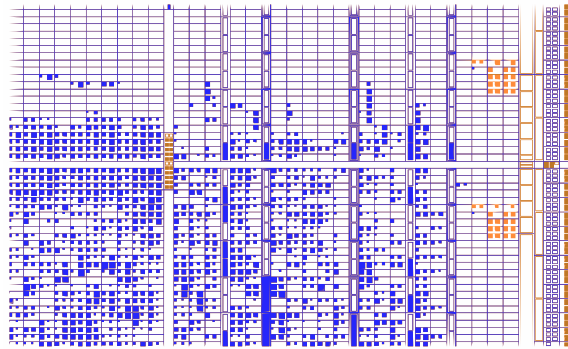


Figure 4.13 - Implémentation contrainte du système des sous-horloges

Avec cette nouvelle implémentation, on reproduit l'étude statistique précédente, et on obtient la nouvelle répartition de la figure 4.14.

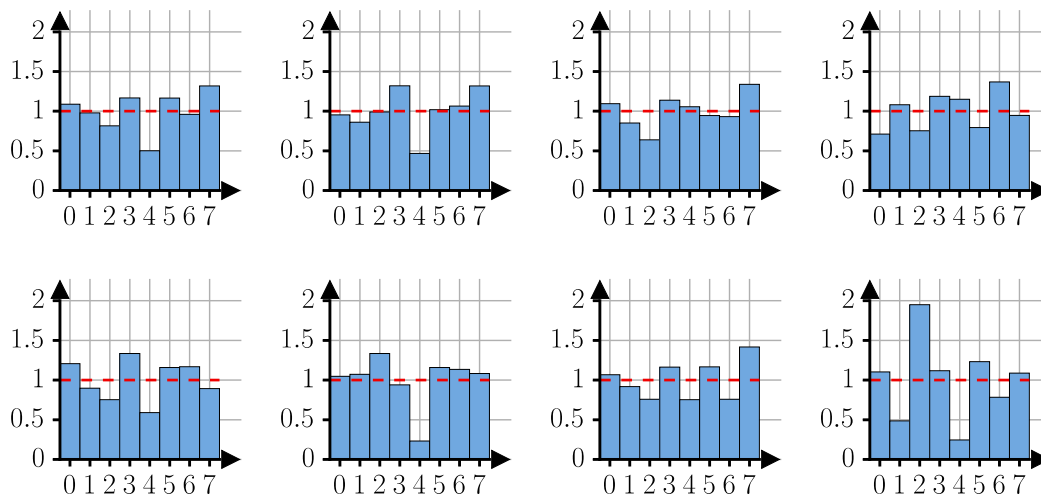


Figure 4.14 - Histogrammes de répartition statistique des datations par sous-horloges avec implémentation contrainte

On constate une légère amélioration, ce qui confirme l'influence du routage du FPGA sur la performance de datation. Une perspective d'amélioration des performances serait donc un approfondissement de l'étude des relations entre les options d'implémentation et les temps de propagation des signaux logiques. Avec l'implémentation actuelle, on peut ainsi valider une résolution de datation numérique $\mu T_2 = 0.7$ ns. La résolution de datation globale correspond donc à la résolution analogique : $\mu T = 1$ ns.

4.3.5 Caractérisation de la démodulation numérique et dépendance à l'amplitude et à la phase du signal mesuré

4.3.5.1 Biais de démodulation numérique

Il a déjà été souligné (partie 3.3.4) que l'algorithme de démodulation numérique utilisé (formule (3.13), reportée ici en (4.3)) introduisait un biais sur la mesure théorique, dépendant de l'amplitude et de la phase du signal à mesurer. Cet effet doit être pris en compte pour assurer le bon fonctionnement du capteur. Néanmoins, ce dernier n'est pas critique, car il est entièrement déterministe et bijectif : à chaque amplitude mesurée sur le réseau vert de la figure 3.23, reprise en figure 4.15 (avec d'autres amplitudes, et avec les mesures expérimentales), correspond une unique amplitude réelle sur le réseau bleu. Ainsi, pour les opérations pouvant être réalisées sur l'OBC (notamment la mesure inertielle, mais aussi les étalonnages), on peut implémenter la transformation inverse et s'affranchir de ce biais. En revanche, ce biais subsiste pour les opérations nécessitant un synchronisme précis, et devant donc être effectuées sur la carte FPGA. C'est le cas des asservissements, mais l'impact sur la performance du capteur dans ce cas est bien moindre.

$$\begin{cases} u_{Mp} \simeq \frac{\pi}{2P_R} \sum_{k=0}^{P_R-1} \text{sg} \left(\sin \left(\frac{(2k+1)\pi}{P_R} \right) \right) \phi_k \\ u_{Mq} \simeq -\frac{\pi}{2P_R} \sum_{k=0}^{P_R-1} \text{sg} \left(\cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{P_R} \right) \right) \phi_k \end{cases}, \quad (4.3)$$

$$\text{avec} \begin{cases} P_R \equiv 0 [4] \\ \text{et} \begin{cases} \text{sg}(x) = +1 & \text{si } x \geq 0 \\ \text{sg}(x) = -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{cases},$$

On rappelle que $P_S = P_R - 1$, avec P_S le nombre de périodes du signal mesuré par cycle, et P_R le nombre de périodes du signal de référence par cycle.

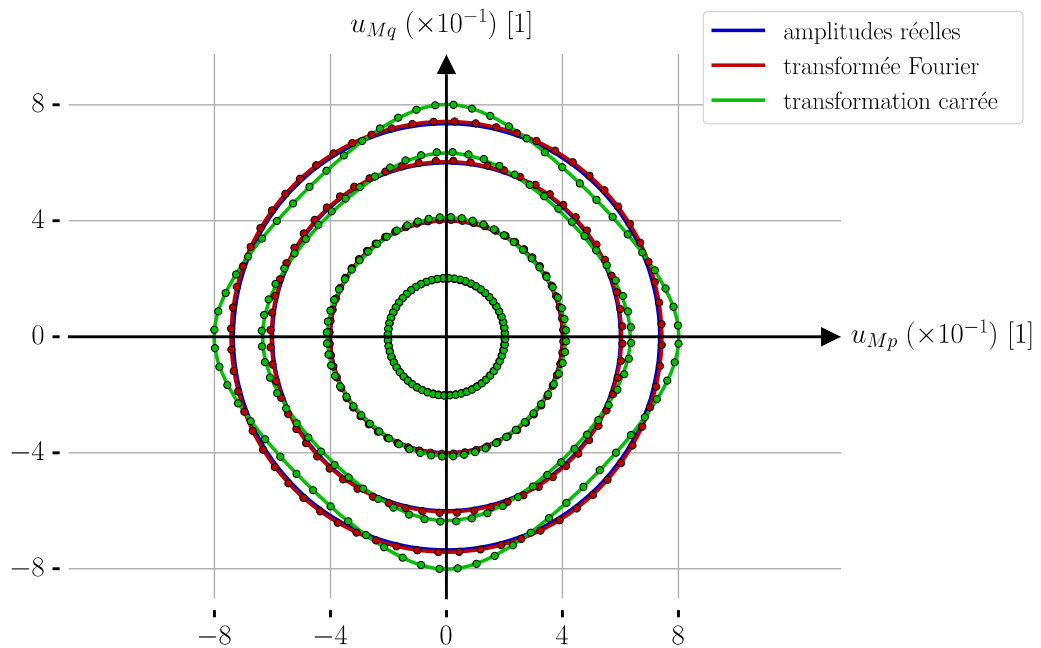


Figure 4.15 - Démodulation numérique théorique et expérimentale dans le plan de Nyquist

Sur la figure 4.15, on a $P_R=16$, $\varphi_u \in [0, 2\pi]$ et $u_M \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.735\}$. On représente en bleu les amplitudes réelles, en rouge la démodulation de Fourier, et en vert la démodulation utilisant la transformée carrée. Les traits pleins correspondent aux résultats analytiques tels que ceux déjà présentés sur la figure 3.23, et les points correspondent aux mesures expérimentales.

Plutôt que d'étudier ce biais, l'objet de cette partie est de déterminer comment le bruit de l'horloge (partie 4.3.1) se transmet sur la sortie de la démodulation numérique, notamment en fonction de la phase et de l'amplitude du signal à mesurer, mais aussi en fonction de la couleur du bruit.

4.3.5.2 Résolution de démodulation numérique

Avec l'algorithme de démodulation numérique, pour obtenir une mesure des amplitudes réponses, on utilise P_R mesure de dates, avec P_R le nombre de périodes du signal de référence dans un cycle de mesure. En effectuant un développement limité au premier ordre en dt_{Rk} , dt_{Sk} et ϕ_k , les bruits sur les mesures du_{Mp} et du_{Mq} peuvent donc s'exprimer avec une combinaison linéaire des bruits temporels $(dt_{Rk})_{k \in \llbracket 0, P_R-1 \rrbracket}$ et $(dt_{Sk})_{k \in \llbracket 0, P_R-1 \rrbracket}$, respectivement sur les signaux de référence et réponse, aux instants des P_R mesures de datation successives. Ces bruits temporels résultent d'une chaîne de contributeurs décrits précédemment, principalement le bruit d'horloge et la stabilité des comparateurs. On déduit

de (4.3) la formule (4.4), qui explicite cette relation, avec $(d\phi_k)_{k \in \llbracket 0, P_R-1 \rrbracket}$ les bruits sur les phases $(\phi_k)_{k \in \llbracket 0, P_R-1 \rrbracket}$.

$$\begin{cases} du_{Mp} \simeq \frac{\pi}{2P_R} \sum_{k=0}^{P_R-1} \text{sg} \left(\sin \left(\frac{(2k+1)\pi}{P_R} \right) \right) d\phi_k \\ du_{Mq} \simeq -\frac{\pi}{2P_R} \sum_{k=0}^{P_R-1} \text{sg} \left(\cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{P_R} \right) \right) d\phi_k \end{cases}, \text{ avec} \quad (4.4)$$

$$d\phi_k = \omega_{ref} \frac{P_R}{P_R - 1} \frac{dt_{Rk} + \frac{P_R - 1}{P_R} u_M \cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{P_R} - \varphi_u \right) dt_{Sk}}{1 + \frac{P_R - 1}{P_R} u_M \cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{P_R} - \varphi_u \right)}$$

Avec ω_{ref} la pulsation du signal de référence. On peut voir cette relation comme étant une fenêtre de conversion temporelle des bruits. Ainsi, effectuer le calcul de la variance d'Allan (partie 1.1.1) sur les mesures d'amplitude est équivalent à réaliser une opération analogue sur un signal de bruit de datation P_R fois moins échantillonné, mais avec une fenêtre temporelle sensiblement différente de celle utilisée pour la variance d'Allan.

La figure 4.16 montre ces différentes fenêtres dans une configuration arbitraire ($P_R=64$, $u_M=0.7$ et $\varphi_u=-0.7$ rad), avec des échelles réduites et sans dimension pour les étudier qualitativement. Ainsi, en haut à gauche, on représente en jaune l'expression analytique de la formule (4.4) du bruit de phase $d\phi_k$ sur quelques cycles, et en bleu celle de l'amplitude en phase correspondante du_{Mp} . En haut à droite, on superpose en vert la fenêtre classique de la variance d'Allan sur le signal d'amplitude pour un temps d'intégration τ de 8 cycles. En bas, on obtient finalement en rouge la fenêtre équivalente à appliquer sur le bruit de datation pour calculer la variance d'Allan de l'amplitude démodulée, pour le temps τ . Malgré le fait que l'allure de cette fenêtre dépende du temps d'intégration τ , on peut relier cette étude à la théorie développée par [Rutman 1978].

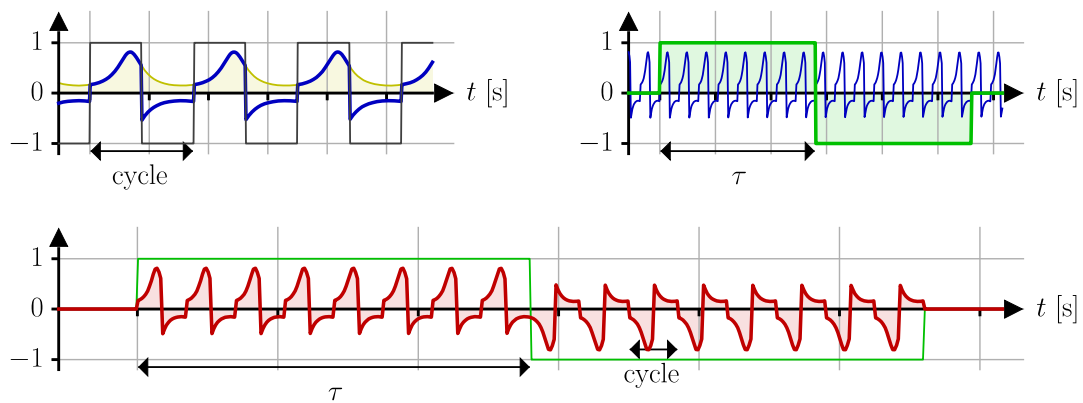


Figure 4.16 - Relations temporelles entre bruit de datation et bruit de démodulation numérique de l'amplitude réponse

La conséquence principale de ce résultat est la conversion des couleurs de bruit (partie 1.1). Un bruit blanc de datation induit un bruit blanc sur la démodulation. En revanche, une partie du bruit rose sur le signal de datation est convertie en bruit blanc, et l'autre en bruit rose. Étant donnée la formule (4.4), les proportions correspondantes dépendent de l'amplitude u_M et de la phase φ_u du signal à mesurer.

Pour comprendre ce phénomène, on peut décomposer la fenêtre rouge de la figure 4.16 par la somme des deux fenêtres de la figure 4.17. Une composante commune en bleu, équivalente à une fenêtre de variance d'Allan, transmet les bruits sans conversion de couleur. Une composante différentielle en vert transforme les bruits, rose ou blanc, en bruit blanc, car la pseudo-période visible de ce motif temporel est fixe, quelque soit le temps d'intégration τ , et correspond au temps d'un cycle.

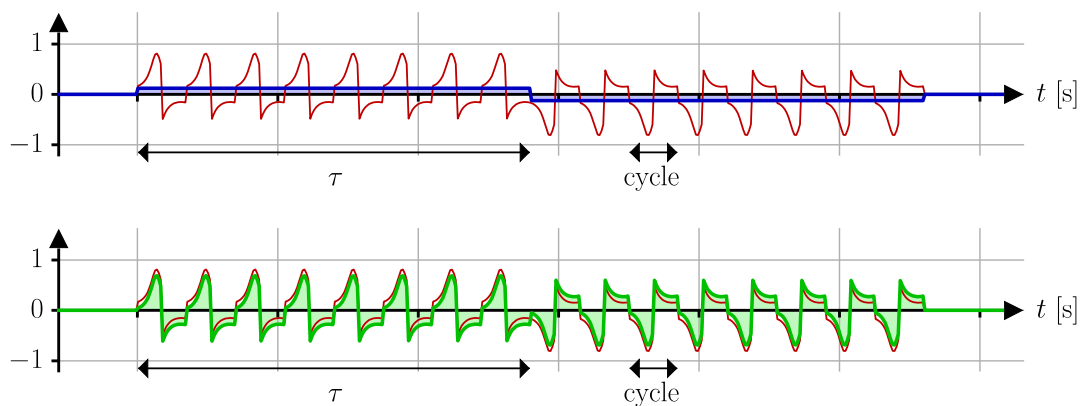


Figure 4.17 - Conversion de couleur de bruit par démodulation numérique

En toute rigueur, il faudrait ajouter au calcul des termes correspondant à la corrélation des bruits entre eux, mais on admettra qu'ils sont négligeables pour l'estimation des bruits sur l'amplitude démodulée. On admet également que seul le plancher de bruit rose de la déviation d'Allan est significativement impacté par les variations de l'amplitude u_M et de la phase φ_u du signal à mesurer, tandis que le niveau de bruit blanc reste stable.

4.3.5.3 Résultats analytiques et expérimentaux

On trace sur la figure 4.18 le plancher de bruit rose $\sigma_r(u_{Mp})$ de la déviation d'Allan de l'amplitude démodulée u_{Mp} (le comportement est analogue pour u_{Mq}) en fonction de la phase de la réponse φ_u pour plusieurs amplitudes de la réponse u_M ($P_R=16$, $\varphi_u \in [-\pi, \pi]$ et $u_M \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.735\}$). Le développement limité de la formule (4.4) n'est pas suffisant pour les amplitudes u_M élevées, les tracés théoriques en pointillés bleus sont donc évalués par résolution numérique. On superpose les résultats expérimentaux en points rouges.

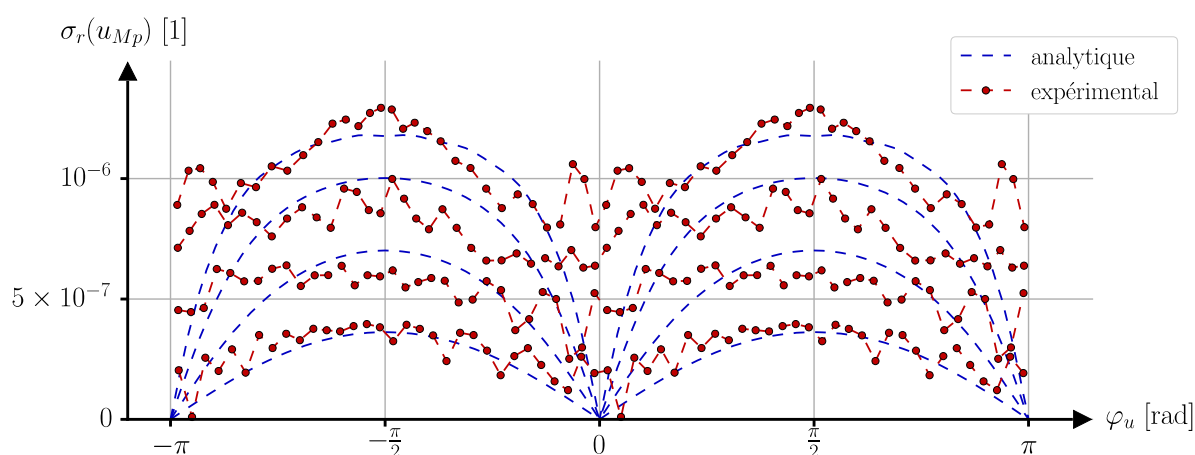


Figure 4.18 - Dépendance du plancher de la déviation d'Allan en fonction de l'amplitude et de la phase du signal mesuré

Il est à noter que sur cette figure 4.18, les valeurs théoriques ont été multipliées par une constante (ici 0.75) pour coïncider avec les données expérimentales. Cette opération se justifie selon le raisonnement suivant : les calculs ont d'abord été faits sous l'hypothèse que les bruits dt_{Rk} et dt_{Sk} n'étaient pas corrélés, ce qui peut être remis en question étant donné que les signaux comparés dans cette expérience sont générés par la même horloge. On peut montrer qu'une corrélation de ces bruits correspond à un facteur multiplicatif inférieur à 1.

Les différences entre les tracés théoriques et expérimentaux restent significatives, notamment autour de $\varphi_u = 0[\pi]$. On se limitera donc à une validation de la formule (4.4) en termes d'ordres de grandeur. La dépendance du plancher de bruit rose de la déviation d'Allan par rapport à la phase φ_u et à l'amplitude u_M de la réponse a tout de même été mise

en évidence. Le modèle (4.4) doit être affiné, notamment en prenant en compte la corrélation des signaux, et éventuellement d'autres facteurs de bruits électroniques qui ont pu être omis.

Par ailleurs, réaliser une acquisition sur un temps plus long permettrait d'identifier plus précisément les planchers des déviations d'Allan de la figure 4.19, repris pour la figure 4.18, et ainsi affiner et lisser la courbe expérimentale. Sur la figure 4.19, à gauche, on rappelle la résolution de datation donnée sur la figure 4.11, et à droite, on trace celles de la démodulation numérique pour $u_M = 0.735$, et pour les phases $\varphi_u \in \{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\}$.

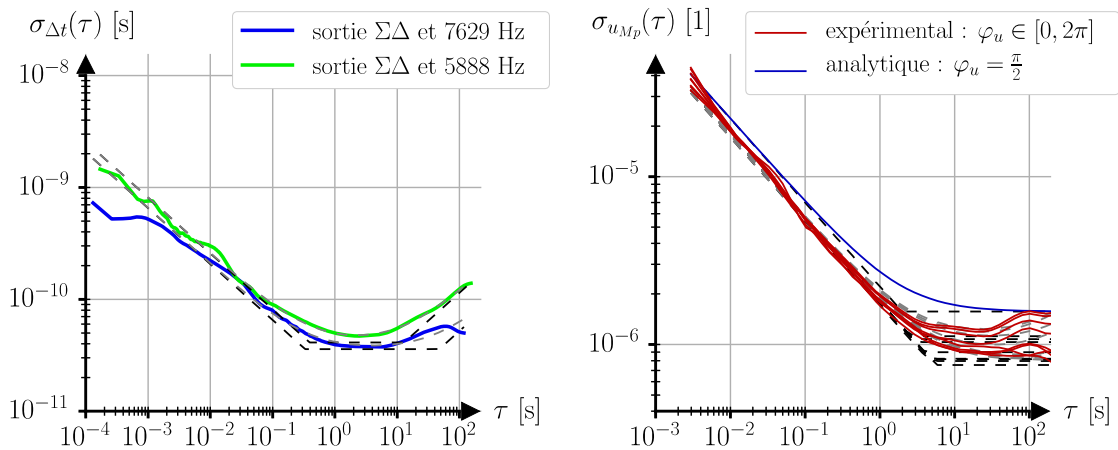


Figure 4.19 - Déviations d'Allan expérimentales, de datation (à gauche), et d'amplitude en fonction de la phase du signal mesuré (à droite)

4.4 Caractérisations inertielles

Les relations présentées en partie 1.3 montrent comment obtenir les mesures inertielles à partir des amplitudes réponses mesurées. Elles permettent donc d'établir analytiquement les performances inertielles des capteurs, connaissant les résolutions des amplitudes réponses du résonateur mesurées par le FPGA. Ces expressions dépendent de nombreux paramètres physiques, qui à ce jour ne sont pas tous évalués numériquement avec la précision nécessaire, et il en découle de forts écarts avec les résultats expérimentaux. On les présente tout de même ensemble, d'une part pour valider une correspondance au moins en termes d'ordres de grandeur, et d'autre part pour conclure l'établissement d'une première modélisation complète de cette chaîne de traitement multi-physiques, dans la continuité des parties précédentes de ce chapitre. On traite séparément le cas du gyromètre et le cas de l'accéléromètre, et on étudie la résolution du capteur et les différentes dépendances thermiques.

4.4.1 Caractérisation de l'asservissement du gyromètre VIG

4.4.1.1 Résolution du biais

On commence par déterminer la relation entre la résolution inertielle et la résolution sur la mesure des amplitudes réponses du résonateur. Pour cela, on repart des équations établies dans la partie 1.3.4. On rappelle ainsi en (4.5) et (4.6) les formules (1.82) et (1.83).

$$\hat{h}(\Omega) = \frac{\underline{y}_M}{\underline{x}_M}(\Omega) = c_1 \times \Omega + c_0 \quad (4.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = -\frac{2\omega_x}{i\omega\Delta\omega_{xy}(1 + \cos(2\theta_\omega)) + \omega_x(2\alpha_{xy} - \Delta\alpha_{xy}\cos(2\theta_\alpha))} \\ c_0 = \frac{i\omega\Delta\omega_{xy}\sin(2\theta_\omega) - \omega_x\Delta\alpha_{xy}\sin(2\theta_\alpha)}{i\omega\Delta\omega_{xy}(1 + \cos(2\theta_\omega)) + \omega_x(2\alpha_{xy} - \Delta\alpha_{xy}\cos(2\theta_\alpha))} \end{array} \right. \quad (4.6)$$

En se plaçant dans un cas plus réaliste que celui de la partie 1.3.4, c'est-à-dire en supposant seulement les hypothèses simplificatrices (1.58) de la partie 1.2.3 rappelées ici en (4.7), la formule idéale (1.84) devient plutôt celle donnée en (4.8).

$$\alpha_x \ll \frac{|\omega\Delta\omega_{xy}|}{\omega_{xy}}, \quad \alpha_y \ll \frac{|\omega\Delta\omega_{xy}|}{\omega_{xy}}, \quad \alpha_{xy} \ll \frac{|\omega\Delta\omega_{xy}|}{\omega_{xy}}, \quad |\Delta\alpha_{xy}| \ll \frac{|\omega\Delta\omega_{xy}|}{\omega_{xy}} \quad (4.7)$$

$$\left. \begin{array}{l} c_1 \simeq \frac{2i\omega_x}{\omega\Delta\omega_{xy}(1 + \cos(2\theta_\omega))} \\ c_0 \simeq \frac{\sin(2\theta_\omega)}{1 + \cos(2\theta_\omega)} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\underline{y}_M}{\underline{x}_M}(\Omega) = \frac{2i\omega_x\Omega + \omega\Delta\omega_{xy}\sin(2\theta_\omega)}{\omega\Delta\omega_{xy}(1 + \cos(2\theta_\omega))} \quad (4.8)$$

On obtient finalement l'expression (4.9) de la mesure inertielle $\hat{\Omega}$ en fonction des amplitudes réponses x_{Mp} , x_{Mq} , y_{Mp} et y_{Mq} .

$$\begin{aligned} \hat{\Omega} &= \frac{\omega\Delta\omega_{xy}(1 + \cos(2\theta_\omega))}{2\omega_x} \mathfrak{J}\left(\frac{\underline{y}_M}{\underline{x}_M}\right) \\ &= \frac{\omega\Delta\omega_{xy}(1 + \cos(2\theta_\omega))}{2\omega_x} \frac{y_{Mq}x_{Mp} - y_{Mp}x_{Mq}}{x_{Mp}^2 + x_{Mq}^2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Avec un asservissement à la résonance du mode pilote, on a $x_{Mp} \simeq 0$. On admet également $y_{Mp} \ll x_{Mq}$. Ainsi, avec un développement limité au premier ordre des bruits, la

résolution inertielle μ_Ω s'exprime en fonction de la résolution de l'amplitude en phase du mode détecteur $\mu(y_{Mp})$ suivant la relation (4.10).

$$\mu_\Omega = \left| \frac{\omega \Delta \omega_{xy} (1 + \cos(2\theta_\omega))}{2\omega_x} \right| \frac{\mu(y_{Mp})}{|x_{Mq}|} \quad (4.10)$$

On en déduit les déviations d'Allan théorique et expérimentale de la mesure inertielle sur le gyromètre VIG4, sur la figure 4.20. On trace en bleu une version théorique, à partir des résolutions de datation de la partie 4.3.3, de celles de démodulation numérique de la partie 4.3.5, et en complétant avec les coefficients piézoélectriques donnés dans [Descharles 2011] (légèrement ajustés), et les valeurs des composants des amplificateurs de charges du tableau 4.1. On trace en rouge la déviation d'Allan expérimentale, obtenue avec l'instrument complet.

On obtient une bonne correspondance des résultats avec la formule (4.10) et les valeurs des coefficients piézoélectriques et des gains des amplificateurs. L'écart entre les deux courbes s'explique essentiellement par une différence de configuration dans les conditions de l'expérience par rapport celles de la partie 4.3.5, dans laquelle la démodulation numérique s'effectuait sur un signal généré par l'algorithme $\Sigma\Delta$ et filtré par la carte analogique. Ici, le signal démodulé est l'une des composantes de la réponse du résonateur (amplitude en phase du mode détecteur) pour lequel le mode pilote est en régime asservi. Par ailleurs, pour la courbe bleu, la datation s'effectue avec le compteur KEYSIGHT 53230A, et pour la courbe rouge, elle est réalisée par le FPGA. Ainsi, les déviations d'Allan obtenues pour ces amplitudes ne correspondent pas au graphique de droite de la figure 4.19, avec un écart semblable à celui de la figure 4.20.

Les performances expérimentales ne sont pas satisfaisantes, et très éloignées de l'état de l'art. Les performances analytiques sont plus conformes à un bon capteur. Les principales pistes à explorer pour améliorer ces résultats et atteindre les performances données par la courbe bleue sont l'implémentation des modules de datation par le FPGA (partie 4.3.4), qui semble être le maillon faible de la chaîne de traitement en termes de transmission des bruits, et les régimes d'asservissement du résonateur.

Par ailleurs, la composante d'amplitude à mesurer est dans la pire configuration de phase par rapport à l'étude réalisée en partie 4.3.5 et à la figure 4.19. Une autre perspective d'amélioration de l'architecture électronique du capteur est présentée dans la partie 4.4.3 : l'objectif est de contourner cet obstacle et de gagner un facteur significatif sur le plancher de la déviation d'Allan. Dans notre étude théorique, il manque l'information de corrélation entre les bruits pour calculer analytiquement ce facteur, mais certaines données expérimentales acquises nous permettent de l'estimer approximativement entre 2 et 3.

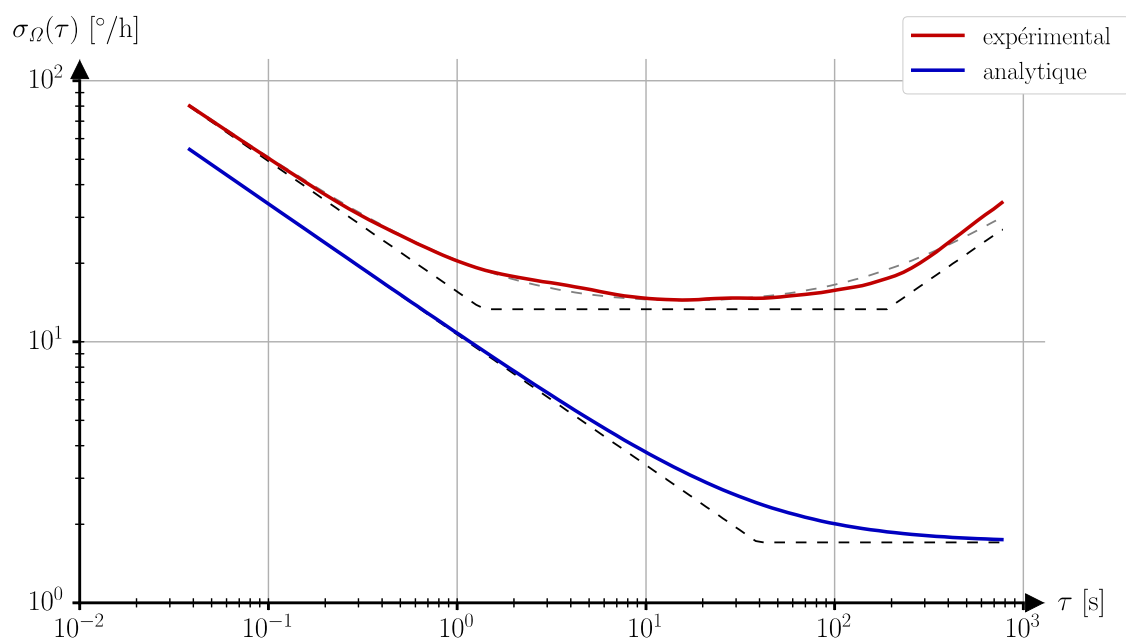


Figure 4.20 - Déviations d'Allan théorique et expérimentale de la mesure inertielle du gyromètre VIG

4.4.1.2 Caractérisations thermiques

On présente ici les caractérisations thermiques du capteur réalisé, conformément à la théorie de la partie 1.3.1.3. L'instrument inertiel est placé sous cloche à vide, et au contact d'un module Peltier permettant de faire varier la température entre 0 °C et 60 °C. Les cycles thermiques réalisés permettent de déterminer l'hystérésis et le résidu du biais c_0 , pour compléter la résolution exprimée par la figure 4.20.

Les mesures présentées sur cette figure 4.21 donnent une hystérésis du biais de 600 °/h et un résidu du biais de 2 800 °/h. Ces valeurs sont très largement au-delà des ordres de grandeur attendus, de quelques dizaines de °/h. Plusieurs raisons peuvent expliquer cette différence : il s'agit d'un premier dispositif expérimental avec cet instrument numérique, qui est encore perfectible, la modélisation \hat{c}_0 du biais est manifestement insuffisante, et l'électronique de l'instrument est sensible aux effets thermiques. On valide donc ici seulement le principe de la démarche expérimentale.

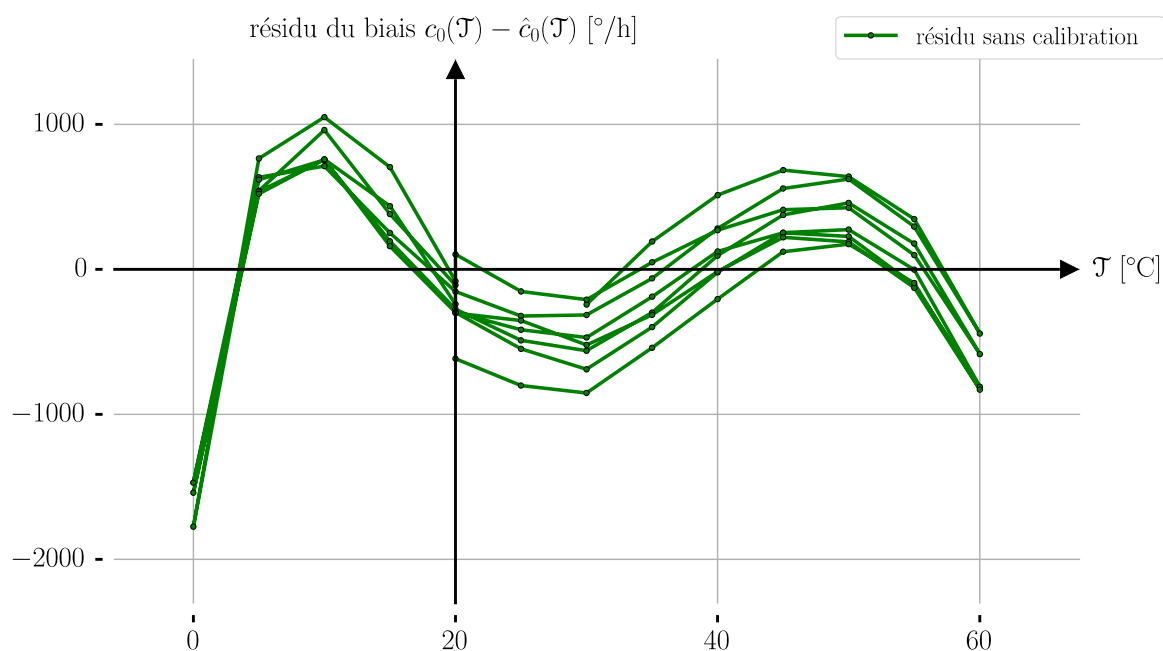


Figure 4.21 - Cycles thermiques, hystérésis et résidu du biais du gyromètre VIG

La principale piste envisagée pour améliorer ces performances est la calibration de l'instrument : les sensibilités thermiques des composants électroniques, en particulier les gains et phases des amplificateurs opérationnels, peuvent être compensées par un ajustement des paramètres numériques du FPGA, notamment les phases des signaux numériques générés. On peut alors allouer de la mémoire du circuit FPGA à une table de correspondance de ces paramètres avec la variable de température.

La figure 4.22 montre les premières améliorations. La courbe de la figure 4.21 est reproduite en pointillés verts. Une première calibration élémentaire permet d'obtenir le tracé rouge, et une deuxième calibration couplée avec la mesure thermique donne le tracé bleu. On obtient un résidu et une hystérésis de l'ordre de 500 °/h.

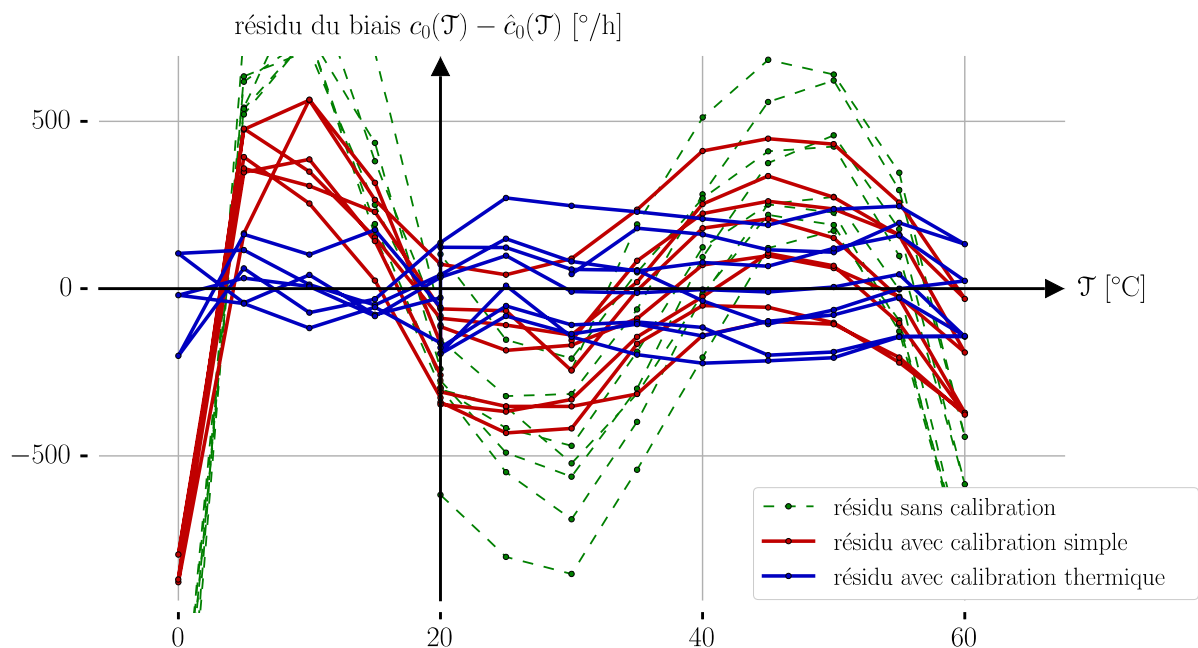


Figure 4.22 - Cycles thermiques, hystérésis et résidu du biais du gyromètre VIG avec calibration thermique

Les algorithmes implémentés sont pour le moment assez rudimentaires. La perspective d'inclure les étalonnages du Chapitre 2 dans le code de l'instrument numérique devrait permettre de gagner le facteur 10 espéré.

Pour poursuivre la caractérisation du capteur, il faudrait réaliser une étude semblable sur le facteur d'échelle, en déplaçant le dispositif expérimental sur une table tournante.

4.4.2 Caractérisation de l'asservissement de l'accéléromètre DIVA

4.4.2.1 Résolution du biais

De la même façon que pour le gyromètre VIG, on commence par déterminer la relation entre la résolution inertielle et la résolution sur la mesure des amplitudes réponses du résonateur. On repart donc de l'équation (1.80) de la partie 1.3.3, rappelée ici en (4.11).

$$\hat{h}(\Gamma) = \Delta f_0(\Gamma) = -\frac{\vartheta_1 m_0}{k} \Gamma = c_1 \Gamma \quad (4.11)$$

La relation entre la variation de la fréquence de résonance et la variation des amplitudes mesurées, sous forme de développement limité au premier ordre lorsque le

résonateur est en boucle ouverte autour de sa résonance, est donnée en (4.12), et permet de conclure avec la relation de la formule (4.13).

$$\Delta f_0 = \frac{\alpha}{2\pi x_{Mq}} \Delta x_{Mp} = \frac{\alpha}{2\pi x_{Mq}} x_{Mp} \quad (4.12)$$

$$\hat{\Gamma} = -\frac{k\alpha}{2\pi \vartheta_1 m_0 x_{Mq}} x_{Mp} = \frac{\alpha}{2\pi c_1 x_{Mq}} x_{Mp} \quad (4.13)$$

La résolution inertielle μ_Γ s'exprime finalement en fonction de la résolution de l'amplitude en phase du résonateur $\mu(x_{Mp})$ suivant la relation (4.14). On montre que cette relation reste valable dans un régime d'asservissement à la résonance (partie 3.3.5), et y est même plus pertinente qu'en boucle ouverte, dans le sens où son domaine de validité s'élargit à toute l'étendue de mesure, et non plus seulement autour de $\Gamma=0$.

$$\mu_\Gamma = \left| \frac{k\alpha}{2\pi \vartheta_1 m_0} \right| \frac{\mu(x_{Mp})}{|x_{Mq}|} = \frac{\alpha}{2\pi |c_1|} \frac{\mu(x_{Mp})}{|x_{Mq}|} \quad (4.14)$$

On en déduit les déviations d'Allan théorique (en bleu) et expérimentale (en rouge) de la mesure inertielle sur la figure 4.23. Les derniers résultats expérimentaux à notre disposition sur l'accéléromètre DIVA sont ceux présentés dans [Guerard 2018]. Ici, contrairement au gyromètre, la valeur des coefficients piézoélectriques n'intervient pas dans le calcul de la résolution inertielle. En revanche, les résultats expérimentaux datent d'une ancienne version de l'architecture électronique de l'instrument, pour laquelle certains paramètres utilisés pour le calcul de la courbe analytique n'ont pas été conservés, notamment les amplitudes des bruits de datation, et l'amplitude u_M du signal à mesurer. La courbe bleue est alors tracée en utilisant des valeurs vraisemblables pour ces paramètres, dont on ne peut valider que l'ordre de grandeur. On retient donc ici essentiellement les performances expérimentales données par la courbe rouge.

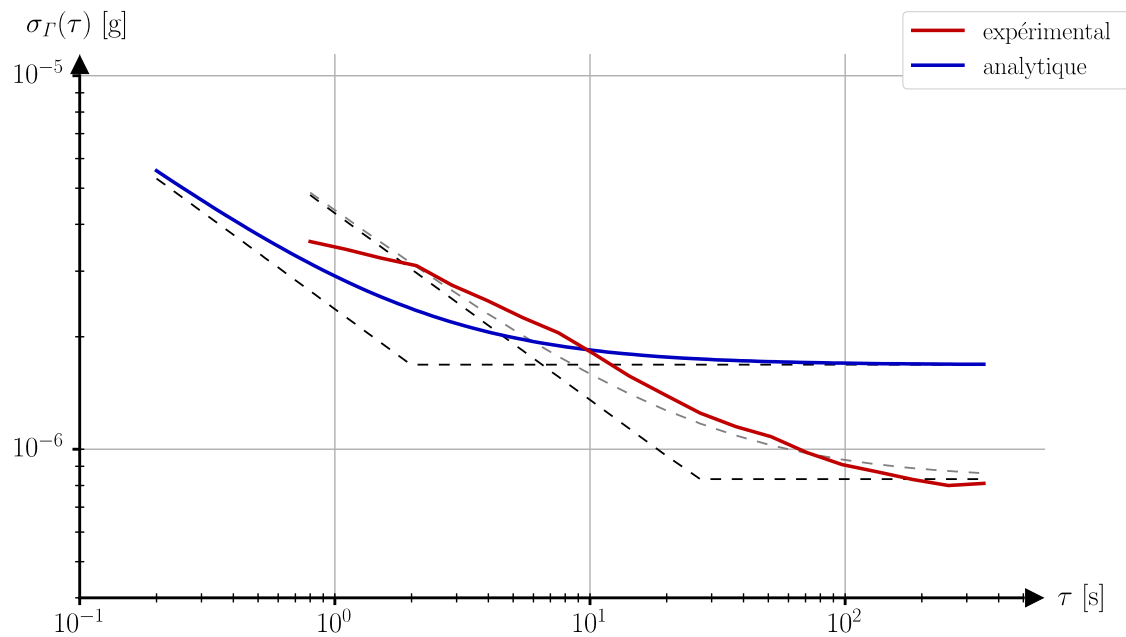


Figure 4.23 - Déviations d'Allan théorique et expérimentale de la mesure inertielle de l'accéléromètre DIVA

Les performances mesurées ici sont satisfaisantes, notamment avec un plancher de la déviation d'Allan de l'ordre du μg .

Comme dans le cas du gyromètre, la composante d'amplitude à mesurer est dans la pire configuration de phase par rapport à l'étude réalisée en partie 4.3.5 et à la figure 4.19. La perspective d'amélioration de la partie 4.4.3 concerne donc tout autant l'accéléromètre que le gyromètre.

4.4.2.2 Caractérisations thermiques

On présente ici les caractérisations thermiques du capteur réalisé, conformément à la théorie de la partie 1.3.1.3. Les résultats présentés dans [Guerard 2018] montrent les hystérésis et résidus du biais, sur la figure 4.24, et du facteur d'échelle, sur la figure 4.25. Comme pour la résolution du biais, ce sont des résultats satisfaisants par rapport à l'état de l'art.

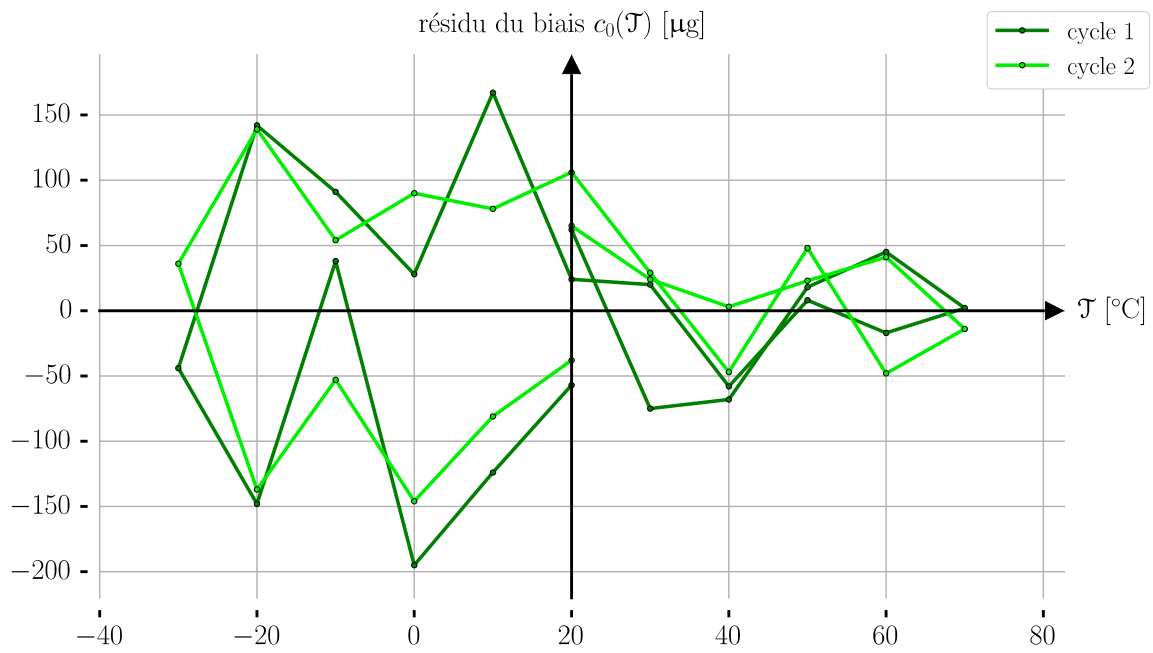


Figure 4.24 - Cycles thermiques, hystérésis et résidu du biais de l'accéléromètre DIVA

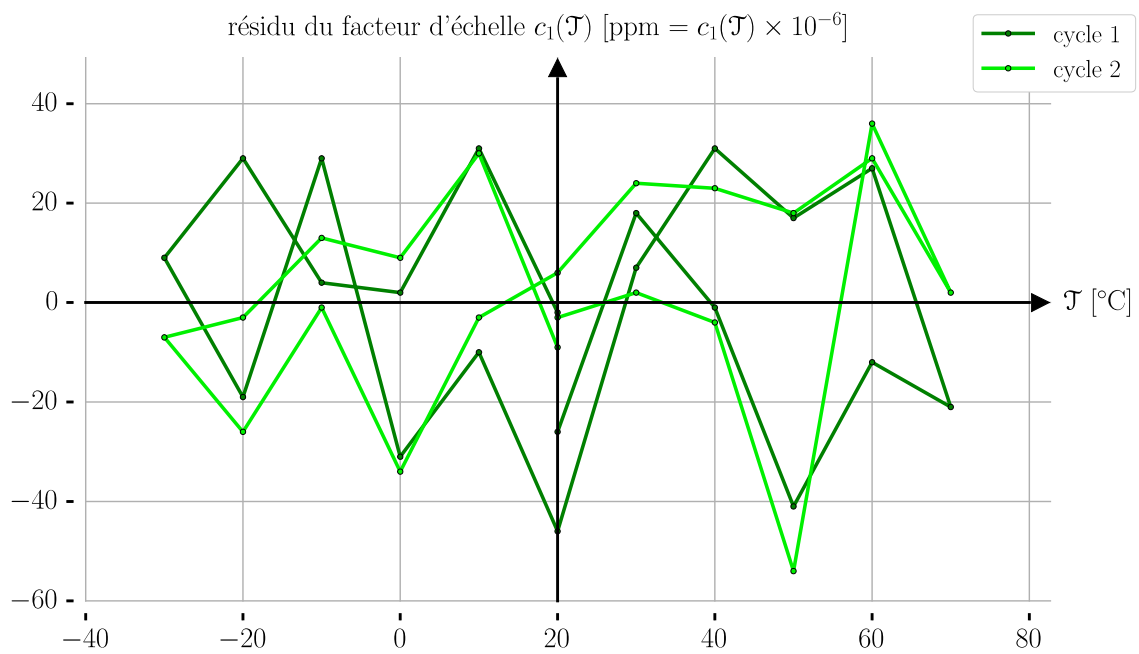


Figure 4.25 - Cycles thermiques, hystérésis et résidu du facteur d'échelle de l'accéléromètre DIVA

4.4.3 Perspective d'amélioration de l'architecture électronique

La dépendance de la résolution de mesure de l'amplitude réponse du résonateur, relativement à son amplitude et à sa phase, établie dans la partie 4.3.5, et les configurations désavantageuses de la mesure inertielle du gyromètre VIG (partie 4.4.1) et de l'accéléromètre DIVA (partie 4.4.2) laissent penser qu'une amélioration de la résolution ultime des capteurs (plancher de la déviation d'Allan) est envisageable.

La circonstance défavorable actuelle se résume ainsi : la composante de l'amplitude de la réponse mesurée du résonateur qui reflète l'information inertielle est proche de la quadrature de phase de cette même réponse.

Cet effet ne concerne que la démodulation numérique (parties 3.3.4 et 4.3.2), et aucunement le comportement du résonateur : c'est un phénomène électronique et algorithmique. On peut adapter l'architecture du module FPGA (carte FPGA + carte analogique) pour se placer dans une configuration plus favorable.

L'idée serait de soustraire un signal sinusoïdal fixe et connu à la réponse du résonateur avant de réaliser les comparaisons avec le signal de référence. De cette façon, on peut effectuer la démodulation numérique sur un signal proche d'une amplitude nulle, ce qui, en plus d'améliorer la résolution conformément à la théorie développée en partie 4.3.5, permet aussi de réduire significativement les biais dus aux différentes simplifications calculatoires présentées en partie 3.3.4 (notamment la formule (3.13) et la figure 3.23).

Une telle manœuvre en électronique analogique ne serait pas raisonnable. Mais l'opération étant différentielle, il est équivalent d'ajouter ce signal fixe à la référence et de le soustraire au signal à mesurer. Ajouter une composante sinusoïdale au signal de référence ne pose aucune difficulté technique, car l'algorithme de modulation $\Sigma\Delta$ (partie 3.3.3) qui le génère est transparent vis-à-vis de la forme d'onde choisie (partie 3.3.2), tant qu'elle reste dans la bande passante des filtres de démodulation analogique.

Les trois aspects techniques suivants doivent être pris en compte. Premièrement, pour le gyromètre, cette modification implique dorénavant la génération de deux signaux de référence : un spécifique à la mesure du mode pilote, et un autre spécifique à la mesure du mode détecteur. Il est donc nécessaire d'augmenter les ressources de la carte analogique, avec un espace requis pour intégrer un étage de filtrage supplémentaire. Deuxièmement, effectuer une addition sur le signal de référence exige une attention particulière à l'éventualité d'un dépassement de l'amplitude maximale autorisée par la modulation $\Sigma\Delta$ et par le niveau d'alimentation du module FPGA. Troisièmement, le signal de référence comporte maintenant deux composantes de fréquences proches, mais différentes. Il convient donc d'anticiper les

légères distinctions de gains et de déphasages opérés par les filtres de démodulation analogique.

On reprend les déviations d'Allan expérimentales des figures 4.20 et 4.23, reproduites respectivement en 4.26 et 4.27, et sur lesquelles on ajoute la nouvelle performance espérée, dans une zone en vert, correspondant à une amélioration d'un facteur compris entre 2 et 3.

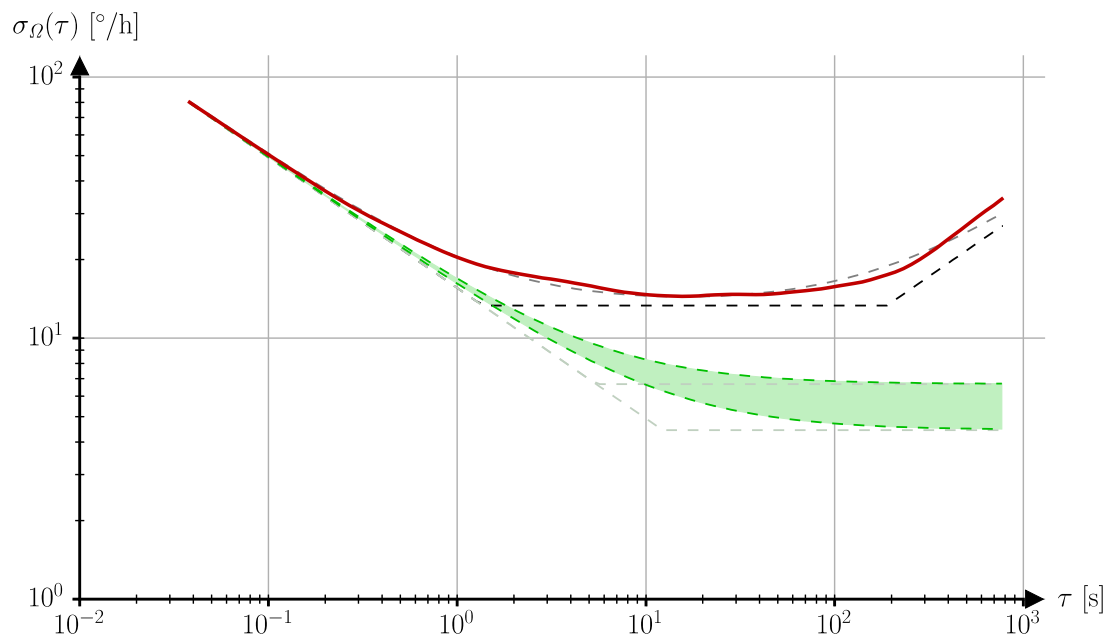


Figure 4.26 - Amélioration potentielle de la performance du gyromètre VIG

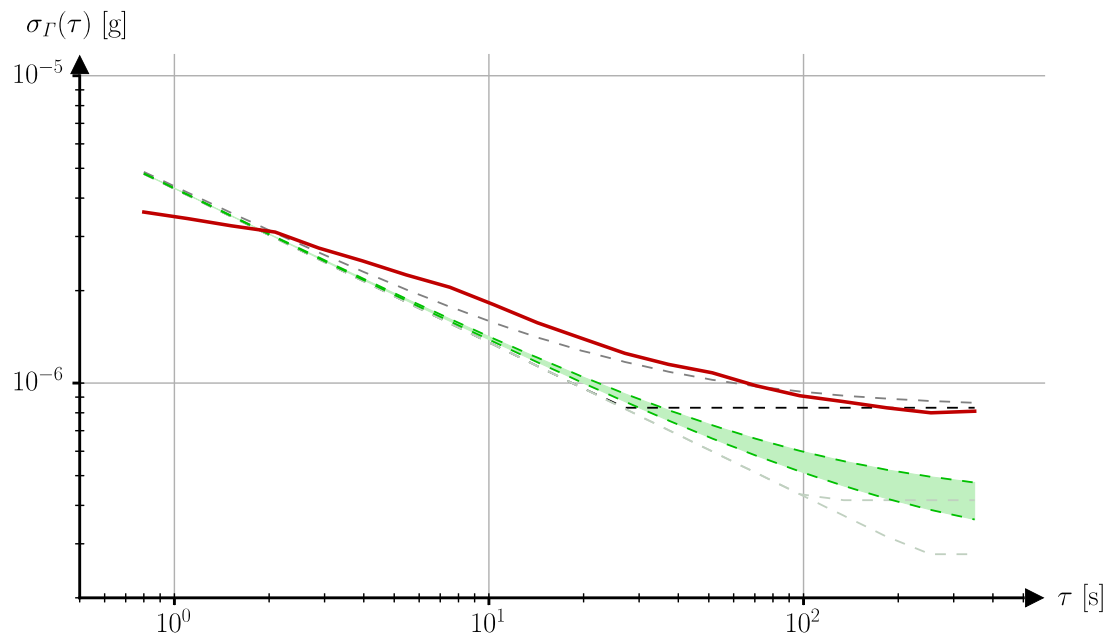


Figure 4.27 - Amélioration potentielle de la performance de l'accéléromètre DIVA

Conclusion

Les capteurs VIG et DIVA de l'ONERA ont été intégrés pour la première fois dans une chaîne de traitement électronique à dominante numérique, avec en particulier les opérations de modulation $\Sigma\Delta$ et de démodulation numérique de sinusoides en lieu et place des convertisseurs DAC et ADC. Cette nouvelle architecture numérique a permis de retrouver en partie les performances obtenues avec les anciennes électroniques d'interfaçage analogiques, notamment dans le cas de l'accéléromètre DIVA, les résultats concernant le gyromètre VIG n'étant pas encore du niveau attendu. Mais elle offre aussi à l'utilisateur une grande flexibilité dans le pilotage de l'instrument inertiel, par l'intermédiaire de l'excitation, la mesure, et les opérations d'asservissement et d'étalonnage. L'ensemble des fonctions électroniques a été implémenté : la génération de signaux périodiques rigoureusement synchrones relativement à une horloge de référence, en exploitant les registres du FPGA selon le principe de la roue de phase et les espaces mémoires du circuit pour paramétrer une forme d'onde sinusoidale, les algorithmiques de modulation $\Sigma\Delta$, de démodulation numérique directe de signaux sinusoidaux, et d'asservissements divers. Les propriétés expérimentales de ces fonctions ont été établies. Les opérations analogiques de filtrage, d'amplification et de comparaison ont été dimensionnées, intégrées et caractérisées. L'ensemble des architectures des capteurs a été assemblé, et a été mis sur banc expérimental de caractérisation en termes de résolution de biais, de facteur d'échelle, ainsi que de stabilité thermique.

L'algorithmique développée sur circuit FPGA est portable, générique, reconfigurable et indépendante de composants analogiques spécifiques, caractéristiques appréciables dans la perspective d'applications spatiales. Il est aussi à souligner que ce module électronique est parfaitement adapté à l'interfaçage de plusieurs capteurs et donc à la constitution de centrales inertielles complètes. En plus des potentielles méthodes de calcul encore inexplorées, le capteur ainsi constitué peut maintenant profiter des perspectives d'évolution constante des capacités de l'électronique numérique du marché, notamment en termes de taille de la puce et de la carte FPGA, de consommation, de fréquence maximale admissible de l'horloge, de quantité de ressources matérielles, et de résolution d'horloge. Par ailleurs, le niveau de synchronisme élevé atteint entre le comportement du résonateur et les opérations numériques effectuées ouvre la possibilité d'inclure au fonctionnement du système de

nombreuses déclinaisons d'asservissements des oscillations et autres auto-étalonnages en temps réel. Plusieurs perspectives sont déjà envisagées et compatibles avec les ressources disponibles actuellement. Premièrement, l'exploration des asservissements possibles de la réponse des résonateurs en modulation de fréquence, de phase et d'amplitude amènerait à l'établissement de nouveaux régimes d'auto-étalonnage permanent. Deuxièmement, la soustraction, en amont de la démodulation numérique, d'une amplitude approchée de celle du signal mesuré impliquerait une réduction des biais et une augmentation de la résolution de cette mesure. Troisièmement, l'exploitation des propriétés de l'oscillateur de Duffing, notamment en se rapprochant des phénomènes d'hystérésis, pourrait définir des régimes de sensibilité fréquentielle accrue. Il reste également à affiner l'implémentation algorithmique pour intégrer des centrales inertielles complètes, en combinant les interfaçages de résonateurs avec le module FPGA.

Ainsi, on est parvenu pour la première fois à construire des capteurs exploitant les propriétés des résonateurs en quartz développés à l'ONERA, en leur apportant un outil numérique qui leur est spécifiquement dédié dans le but, à l'avenir, et en profitant des nombreuses perspectives encourageantes dans ce domaine, d'atteindre une classe de capteurs inertiels plus fiables et plus performants.

Annexe A

Représentation de l'oscillateur de Lynch

Cette annexe est relative à la partie 1.2.3 (Oscillateur plan). On démontre ici l'équivalence entre les modèles d'oscillateur amorti du plan des figures 1.10 et 1.11, rassemblés sur la figure A.1.

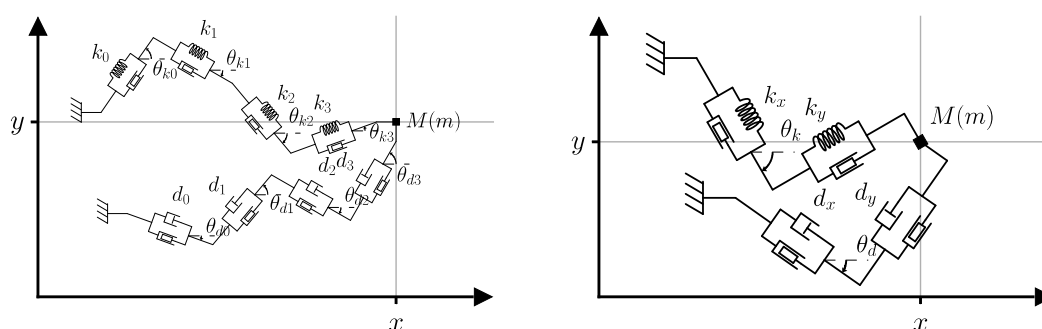


Figure A.1- Équivalence des modèles de résonateurs

On commence par considérer le montage mécanique dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, représenté sur la figure A.2. Soit un corps ponctuel M , de masse m , et solidaire d'une chaîne de N ressorts en série présentant des raideurs $(k_i)_{i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$ et des directions dans le plan imposées par des glissières cinématiques d'orientations $(\theta_i)_{i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$. Pour chaque $i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, on note \mathbf{dl}_i (en rouge) le vecteur représentant le déplacement de l'extrémité droite du ressort i par rapport à sa position lorsque ce ressort n'est pas étiré ou comprimé, $\mathbf{v}_i = \cos(\theta_i)\mathbf{v}_x + \sin(\theta_i)\mathbf{v}_y$ (en bleu) le vecteur unitaire directeur du ressort, \mathbf{F}_i (en vert) la force exercée par le ressort i sur l'élément solidaire de son extrémité droite, et Z_i (en orange) l'ensemble mécanique constitué du corps M de masse m , ainsi que des ressorts indicés dans l'ensemble $\llbracket 0, i-1 \rrbracket$ pour $i \geq 1$. L'ensemble des forces appliquées au corps M , autres que celles dues à la liaison avec la chaîne de ressorts, est notée \mathbf{F}_{ext} (en vert). L'accélération courante du corps M est notée $\ddot{\mathbf{dl}}$. Les forces sont représentées arbitrairement

dans le but de poser les notations, et sans prendre en compte les différentes dépendances établies dans la résolution ci-après.

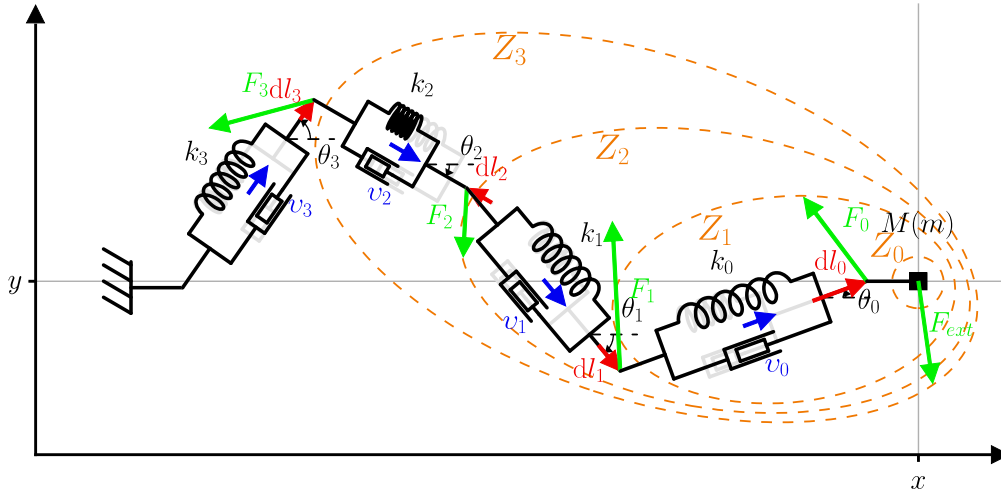


Figure A.2 - Chaîne de raideurs en série

Le corps M est le seul élément massique du montage, donc pour chaque $i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, l'ensemble Z_i est de masse m et centre de masse M . On peut alors appliquer la relation fondamentale de la dynamique sur chaque système Z_i pour obtenir les dépendances suivantes :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{ext} &= m \ddot{\mathbf{d}}\mathbf{l} \\ \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \mathbf{F}_i &= m \ddot{\mathbf{d}}\mathbf{l} - \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{F} = F_x \mathbf{v}_x + F_y \mathbf{v}_y \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

En utilisant la loi de Hooke modélisant le comportement des ressorts, on a aussi :

$$\forall i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i = -k_i \mathbf{d}\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{v}_i = F_x \cos(\theta_i) + F_y \sin(\theta_i) \quad (\text{A.2})$$

Par ailleurs, la contrainte cinématique des glissières impose :

$$\forall i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \mathbf{d}\mathbf{l}_i = (\mathbf{d}\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{v}_i) \mathbf{v}_i \quad (\text{A.3})$$

On peut donc calculer l'expression du vecteur déplacement $\mathbf{d}\mathbf{l}$ du corps M par rapport à la position d'équilibre de la chaîne :

$$\begin{aligned}
\mathbf{dl} &= dl_x \mathbf{v}_x + dl_y \mathbf{v}_y \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{dl}_i = \sum_{i=0}^{N-1} (\mathbf{dl}_i \cdot \mathbf{v}_i) \mathbf{v}_i \\
&= - \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{F_x \cos(\theta_i) + F_y \sin(\theta_i)}{k_i} \mathbf{v}_i \right) \\
&= - \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{F_x \cos(\theta_i) + F_y \sin(\theta_i)}{k_i} (\mathbf{v}_x \cos(\theta_i) + \mathbf{v}_y \sin(\theta_i)) \right) \quad (\text{A.4}) \\
&= - \left(F_x \left(\sum_{i=0}^{N-1} \frac{\cos^2(\theta_i)}{k_i} \right) + F_y \left(\sum_{i=0}^{N-1} \frac{\cos(\theta_i) \sin(\theta_i)}{k_i} \right) \right) \mathbf{v}_x \\
&\quad - \left(F_x \left(\sum_{i=0}^{N-1} \frac{\cos(\theta_i) \sin(\theta_i)}{k_i} \right) + F_y \left(\sum_{i=0}^{N-1} \frac{\sin^2(\theta_i)}{k_i} \right) \right) \mathbf{v}_y
\end{aligned}$$

On a donc la relation linéaire suivante entre \mathbf{dl} et \mathbf{F} :

$$\mathbf{dl} = \begin{pmatrix} dl_x \\ dl_y \end{pmatrix} = -\mathbf{A}_S \cdot \mathbf{F} = - \begin{pmatrix} A_{Sxx} & A_{Syx} \\ A_{Sxy} & A_{Syy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Avec la matrice de souplesse \mathbf{A}_S vérifiant :

$$\mathbf{A}_S = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\cos^2(\theta_i)}{k_i} & \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\cos(\theta_i) \sin(\theta_i)}{k_i} \\ \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\cos(\theta_i) \sin(\theta_i)}{k_i} & \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\sin^2(\theta_i)}{k_i} \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

La matrice \mathbf{A}_S est symétrique. Par ailleurs :

$$\forall \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad {}^t \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_S \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(v_x \cos(\theta_i) + v_y \sin(\theta_i))^2}{k_i} \geq 0 \quad (\text{A.7})$$

La matrice \mathbf{A}_S est donc symétrique positive. On poursuit en établissant les conditions d'inversibilité de la matrice \mathbf{A}_S :

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}_g) &= A_{Sxx}A_{Syy} - A_{Syx}A_{Sxy} \\
&= \left(\sum_{i=0}^{N-1} \frac{\cos^2(\theta_i)}{k_i} \right) \left(\sum_{i=0}^{N-1} \frac{\sin^2(\theta_i)}{k_i} \right) - \left(\sum_{i=0}^{N-1} \frac{\cos(\theta_i)\sin(\theta_i)}{k_i} \right)^2 \\
&= \sum_{(i,j) \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket^2} \frac{\cos^2(\theta_i)\sin^2(\theta_j)}{k_i k_j} \\
&\quad - \sum_{(i,j) \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket^2} \frac{\cos(\theta_i)\sin(\theta_i)\cos(\theta_j)\sin(\theta_j)}{k_i k_j} \\
&= \sum_{(i,j) \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket^2} \frac{\sin(\theta_j)\cos(\theta_i)(\sin(\theta_j)\cos(\theta_i) - \sin(\theta_i)\cos(\theta_j))}{k_i k_j} \\
&= \sum_{(i,j) \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket^2} \frac{\sin(\theta_j)\cos(\theta_i)\sin(\theta_j - \theta_i)}{k_i k_j} \\
&= \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket^2 \\ j < i}} \frac{\sin(\theta_j)\cos(\theta_i)\sin(\theta_j - \theta_i)}{k_i k_j} \\
&\quad + \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket^2 \\ j < i}} \frac{\sin(\theta_i)\cos(\theta_j)\sin(\theta_i - \theta_j)}{k_i k_j} \\
&= \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket^2 \\ j < i}} \frac{\sin(\theta_j - \theta_i)(\sin(\theta_j)\cos(\theta_i) - \sin(\theta_i)\cos(\theta_j))}{k_i k_j} \\
&= \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket^2 \\ j < i}} \frac{\sin(\theta_j - \theta_i)^2}{k_i k_j}
\end{aligned} \tag{A.8}$$

On en déduit donc :

$$\det(\mathbf{A}_g) \neq 0 \Leftrightarrow \exists (i_0, j_0) \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket^2 / \theta_{i_0} - \theta_{j_0} \neq 0 \text{ } [\pi] \tag{A.9}$$

La matrice est donc inversible si et seulement si au moins deux raideurs ne sont pas alignées. On remarque que dans le cas où toutes les raideurs sont alignées, l'équation (A.4) montre que la chaîne est équivalente à une unique raideur dans cette même direction :

$$\mathbf{dl} = dl_x \mathbf{v}_x = - \left(\sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{k_i} \right) F_x \mathbf{v}_x = - \frac{1}{k_{eq}} F_x \mathbf{v}_x \Leftrightarrow F_x = -k_{eq} dl_x \tag{A.10}$$

Dans tous les autres cas, on définit $\mathbf{A}_K = \mathbf{A}_S^{-1}$ la matrice de raideur inverse de la matrice de souplesse définie en (A.6). L'inverse d'une matrice symétrique définie positive est aussi symétrique définie positive. Toute matrice symétrique est diagonalisable dans une base orthogonale. Il existe donc un angle θ_{eq} et deux raideurs strictement positives équivalentes k_{eqx} et k_{eqy} tels que :

$$\mathbf{A}_K = (\Phi(\theta_{eq}))^{-1} \cdot \mathbf{A}_{KD} \cdot \Phi(\theta_{eq}), \quad \begin{cases} \Phi(\theta_{eq}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_{eq}) & -\sin(\theta_{eq}) \\ \sin(\theta_{eq}) & \cos(\theta_{eq}) \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}_{KD} = \begin{pmatrix} k_{eqx} & 0 \\ 0 & k_{eqy} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

La relation matricielle (A.5) devient :

$$\mathbf{F} = -\mathbf{A}_K \cdot d\mathbf{l} \Leftrightarrow \mathbf{F}_{eq} = \Phi(\theta_{eq}) \cdot \mathbf{F} = -\mathbf{A}_{KD} \cdot (\Phi(\theta_{eq}) \cdot d\mathbf{l}) = -\mathbf{A}_{KD} \cdot d\mathbf{l}_{eq} \quad (\text{A.12})$$

On obtient alors la relation comportementale vectorielle de la chaîne de raideurs dans une nouvelle base $(\mathbf{v}_{2x}, \mathbf{v}_{2y})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= F_{eqx} \mathbf{v}_{2x} + F_{eqy} \mathbf{v}_{2y} = -k_{eqx} (d\mathbf{l} \cdot \mathbf{v}_{2x}) \mathbf{v}_{2x} - k_{eqy} (d\mathbf{l} \cdot \mathbf{v}_{2y}) \mathbf{v}_{2y} \\ &= -k_{eqx} dl_{eqx} \mathbf{v}_{2x} - k_{eqy} dl_{eqy} \mathbf{v}_{2y} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Avec :

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{2x} = \cos(\theta_{eq}) \mathbf{v}_x + \sin(\theta_{eq}) \mathbf{v}_y \\ \mathbf{v}_{2y} = -\sin(\theta_{eq}) \mathbf{v}_x + \cos(\theta_{eq}) \mathbf{v}_y \\ F_{eqx} = \cos(\theta_{eq}) F_x + \sin(\theta_{eq}) F_y \\ F_{eqy} = -\sin(\theta_{eq}) F_x + \cos(\theta_{eq}) F_y \\ dl_{eqx} = \cos(\theta_{eq}) dl_x + \sin(\theta_{eq}) dl_y \\ dl_{eqy} = -\sin(\theta_{eq}) dl_x + \cos(\theta_{eq}) dl_y \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

On en déduit sur la figure A.3 la représentation équivalente au montage de la figure A.2.

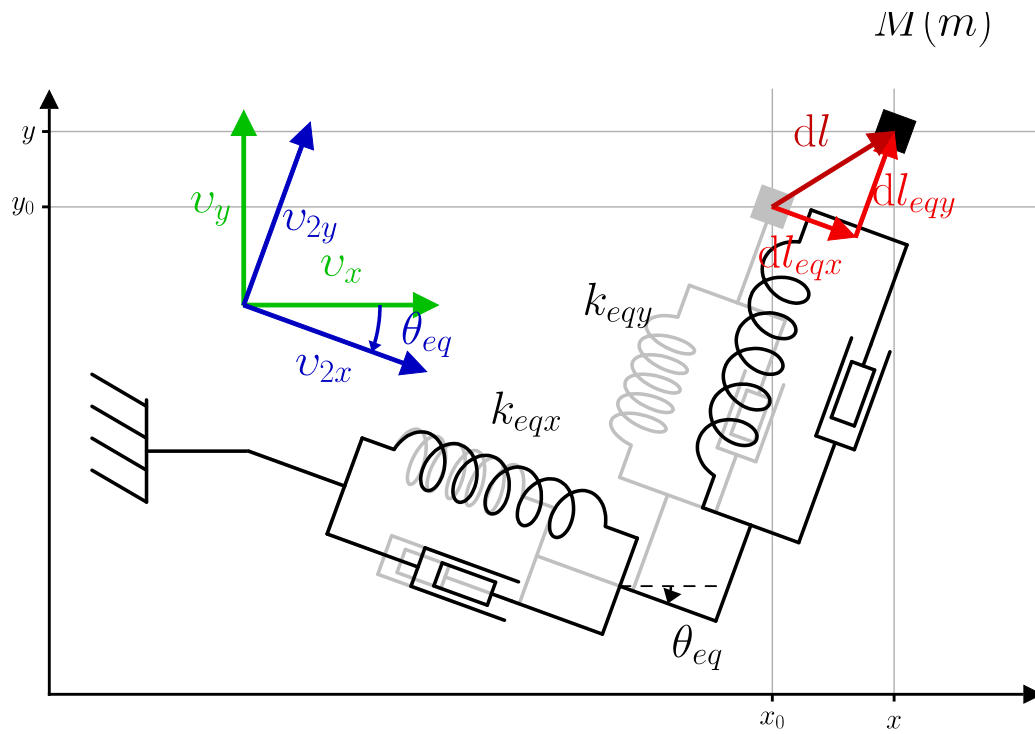


Figure A.3 - Double raideur équivalente à la chaîne

Observons maintenant de quelle façon ce dernier résultat permet de simplifier des assemblages plus complexes de raideurs. Supposons maintenant un montage comportant deux chaînes semblables à celle étudiée précédemment, exerçant une action sur le corps M en parallèle. Le schéma correspondant est représenté sur la figure A.4.

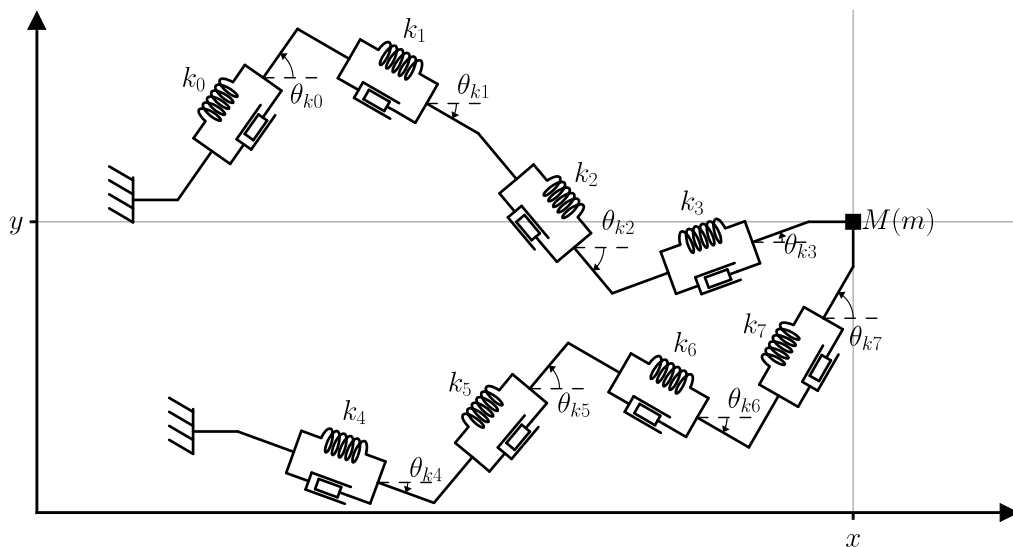


Figure A.4 - Chaînes de raideurs en parallèle

Si au moins l'une des deux matrices de souplesse est non inversible ($\det(\mathbf{A}s) = 0$), il est immédiat que le modèle équivalent est soit une raideur unidimensionnelle, soit une liaison d'encastrement. Dans le cas général, on a deux relations du type de l'équation (A.12) :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_1 = -\mathbf{A}_{K1} \cdot \mathbf{dl} \\ \mathbf{F}_2 = -\mathbf{A}_{K2} \cdot \mathbf{dl} \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

$$\Rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -(\mathbf{A}_{K1} + \mathbf{A}_{K2}) \cdot \mathbf{dl} = -\mathbf{A}_K \cdot \mathbf{dl}$$

La matrice \mathbf{A}_K est symétrique définie positive, car somme de deux matrices symétriques définies positives. On vient donc de montrer que le montage de la figure A.4 est également équivalent au modèle de la figure A.3. Finalement, le modèle à deux oscillateurs orthogonaux permet de représenter tout assemblage de raideurs comportant des chaînes en série et en parallèle.

En suivant un raisonnement absolument identique, et en remplaçant les raideurs k_i par les viscosités d_i et les déplacements \mathbf{dl}_i par les vecteurs vitesses $d(\mathbf{dl}_i)/dt$, on montre que tout assemblage de viscosités comportant des chaînes en série et en parallèle, comme sur la figure A.5, est équivalent au montage de la figure A.6, avec deux viscosités perpendiculaires.

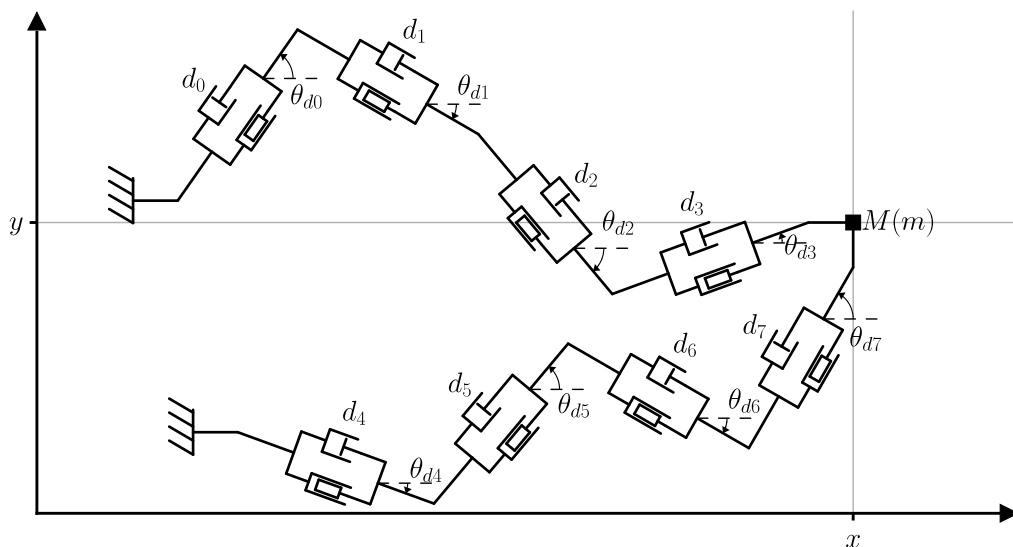


Figure A.5 - Assemblage parallèle et série de viscosités

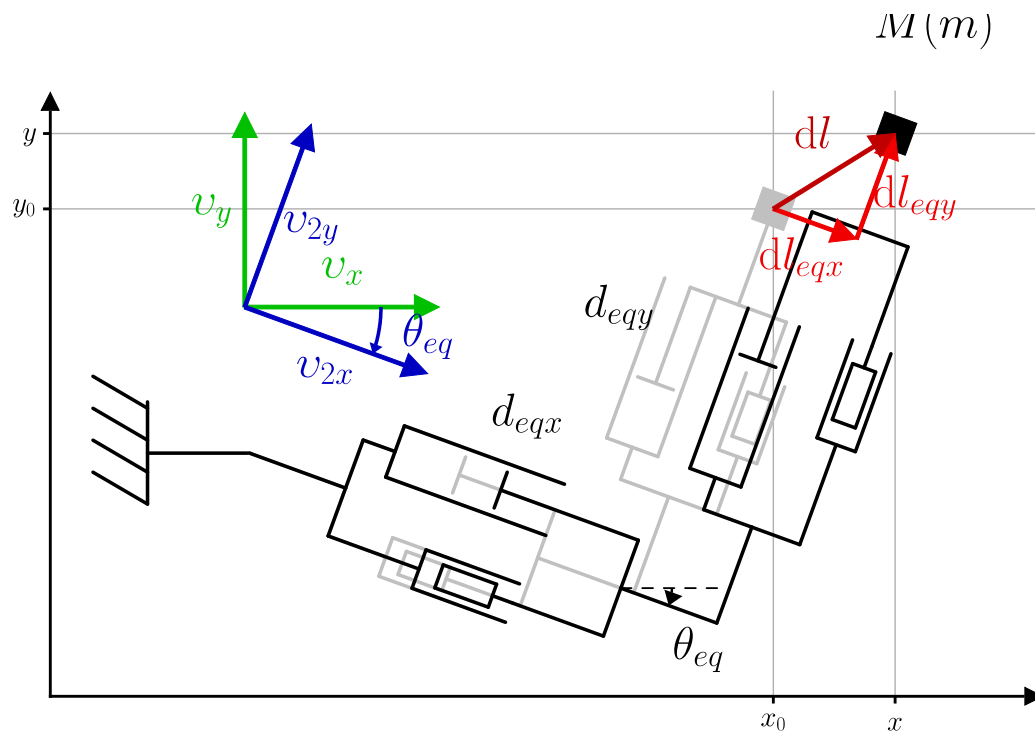


Figure A.6 - Modèle équivalent avec deux amortisseurs perpendiculaires

Annexe B

Développement théorique pour l'étalonnage des résonateurs

Cette annexe est relative à la partie 2.2 (Cas de l'accéléromètre et des régimes stationnaires)

B.1 Résolution pour un résonateur linéaire

Ce paragraphe d'annexe est relatif à la partie 2.2.2 (Développement théorique dans le cas linéaire). Soit le problème de la figure 2.5, reproduite en figure B.1, et représentant dans le plan de Nyquist les amplitudes réponses stationnaires d'un résonateur linéaire que l'on cherche à étalonner. Soient également les angles ψ_{res} , ψ_{cpm} et ψ_{cpp} , correspondant respectivement aux pulsations d'excitation $\tilde{\omega}_{res}$, $\tilde{\omega}_{cpm}$ et $\tilde{\omega}_{cpp}$ définies en (2.3) et rappelées ici en (B.1) :

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_{res} & = & \tilde{\omega}_0 & \simeq & \omega_0 & = & \omega_{res} \\ \tilde{\omega}_{cpm} & = & \tilde{\omega}_0 - \tilde{\alpha} & \simeq & \omega_0 - \alpha & = & \omega_{cpm} \\ \tilde{\omega}_{cpp} & = & \tilde{\omega}_0 + \tilde{\alpha} & \simeq & \omega_0 + \alpha & = & \omega_{cpp} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Où $\alpha = \omega_0 / (2Q)$ est la demi-largeur de bande à -3dB correspondant au facteur de qualité Q du résonateur, et ω_0 sa pulsation de résonance. $\tilde{\omega}_0$ et $\tilde{\alpha}$ sont des approximations initiales de ω_0 et α .

On rappelle que les amplitudes en phase et en quadrature de phase de la réponse du résonateur à la pulsation d'excitation $\tilde{\omega}_{cpm}$ sont respectivement notées x_{cpm} et y_{cpm} . On utilise la même convention pour les amplitudes relatives aux pulsations $\tilde{\omega}_{res}$ et $\tilde{\omega}_{cpp}$. Les coordonnées de l'amplitude hors résonance sont notées x_{hr} et y_{hr} (dont la détermination fait l'objet de la partie B.3 de cette Annexe B).

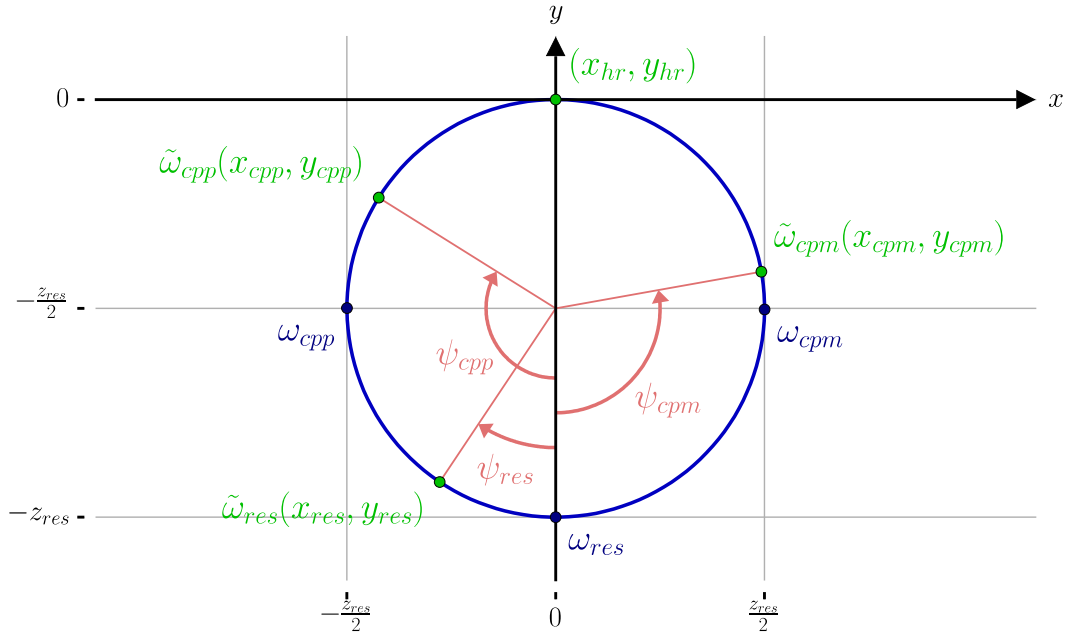


Figure B.1 - Angles polaires à déterminer

On démontre ici que les grandeurs Ψ_{res} , Ψ_{cpm} et Ψ_{cpp} définies en (B.2) s'expriment simplement et uniquement en fonction des coordonnées cartésiennes des 4 mesures d'amplitudes.

$$\begin{aligned}
 \Psi_{res} &= \tan\left(\frac{\psi_{res}}{2}\right) \\
 \Psi_{cpm} &= \tan\left(\frac{\psi_{cpm}}{2}\right) \\
 \Psi_{cpp} &= \tan\left(\frac{\psi_{cpp}}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

Pour y parvenir, il faut trouver des relations entre ces trois angles ψ_{res} , ψ_{cpm} et ψ_{cpp} , et les angles donnés par la mesure. On définit donc les 5 vecteurs \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 , \mathbf{v}_4 et \mathbf{v}_5 représentés en rouge sur la figure B.2, et les différents angles orientés θ_1 , θ_2 , θ_3 et θ_4 entre ces vecteurs, en orange.

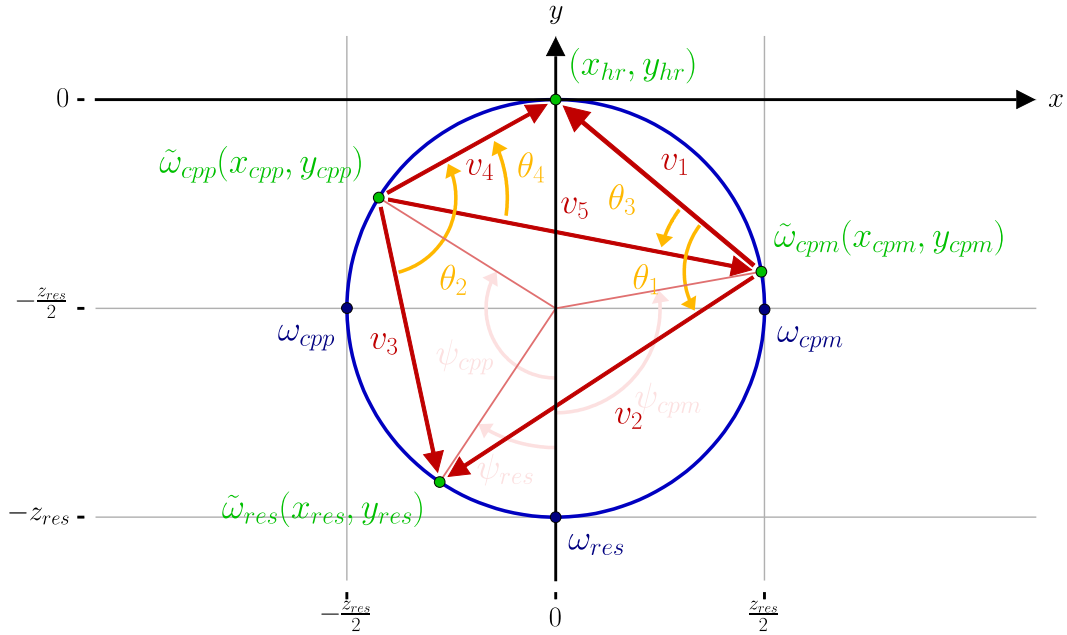


Figure B.2 - Conventions d'orientation des vecteurs et des angles

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x_{hr} - x_{cpm} \\ y_{hr} - y_{cpm} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x_{res} - x_{cpm} \\ y_{res} - y_{cpm} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} x_{res} - x_{cpp} \\ y_{res} - y_{cpp} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} x_{hr} - x_{cpp} \\ y_{hr} - y_{cpp} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} x_{cpm} - x_{cpp} \\ y_{cpm} - y_{cpp} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \theta_1 &= (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \\ \theta_2 &= (\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) \\ \theta_3 &= (\mathbf{v}_1, -\mathbf{v}_5) \\ \theta_4 &= (\mathbf{v}_5, \mathbf{v}_4) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

On utilise la propriété des angles au centre d'un cercle avec les angles θ_1 , θ_2 , θ_3 et θ_4 pour en déduire les relations suivantes :

$$\begin{cases} \psi_{res} &= \pi - 2\theta_2 \\ \psi_{res} &= 2\theta_1 - \pi \\ \psi_{cpm} &= \pi - 2\theta_4 \\ \psi_{cpp} &= 2\theta_3 - \pi \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

De cette façon, on remarque que les grandeurs Ψ_{res} , Ψ_{cpm} et Ψ_{cpp} s'expriment simplement en fonctions des amplitudes mesurées :

$$\begin{aligned}
\Psi_{res} &= \tan\left(\frac{\psi_{res}}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) = \frac{\cos(\theta_2)}{\sin(\theta_2)} = \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_4}{\det(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)} \\
&= \frac{(x_{res} - x_{cpp})(x_{hr} - x_{cpp}) + (y_{res} - y_{cpp})(y_{hr} - y_{cpp})}{(x_{res} - x_{cpp})(y_{hr} - y_{cpp}) - (y_{res} - y_{cpp})(x_{hr} - x_{cpp})}
\end{aligned} \tag{B.6}$$

En suivant la même démarche pour Ψ_{cpm} et Ψ_{cpp} , on a finalement :

$$\begin{aligned}
\Psi_{res} &= \frac{(x_{res} - x_{cpp})(x_{hr} - x_{cpp}) + (y_{res} - y_{cpp})(y_{hr} - y_{cpp})}{(x_{res} - x_{cpp})(y_{hr} - y_{cpp}) - (y_{res} - y_{cpp})(x_{hr} - x_{cpp})} \\
\Psi_{cpm} &= \frac{(x_{cpm} - x_{cpp})(x_{hr} - x_{cpp}) + (y_{cpm} - y_{cpp})(y_{hr} - y_{cpp})}{(x_{cpm} - x_{cpp})(y_{hr} - y_{cpp}) - (y_{cpm} - y_{cpp})(x_{hr} - x_{cpp})} \\
\Psi_{cpp} &= \frac{(x_{hr} - x_{cpm})(x_{cpp} - x_{cpm}) + (y_{hr} - y_{cpm})(y_{cpp} - y_{cpm})}{(x_{hr} - x_{cpm})(y_{cpp} - y_{cpm}) - (y_{hr} - y_{cpm})(x_{cpp} - x_{cpm})}
\end{aligned} \tag{B.7}$$

On démontre maintenant l'exactitude des estimateurs (2.5) et (2.6). On opère le changement de variable (B.2) sur ψ , dans l'équation (2.2), rappelée en (B.8), avec les angles polaires ψ_{res} , ψ_{cpm} et ψ_{cpp} , et pour obtenir les équations (B.9), avec les pulsations d'excitation correspondantes $\tilde{\omega}_{res}$, $\tilde{\omega}_{cpm}$ et $\tilde{\omega}_{cpp}$.

$$\omega(\psi) = \omega_0 - \alpha \tan\left(\frac{\psi}{2}\right), \quad \psi \in \left[-\pi + \frac{2\alpha}{\omega_0}, \pi - \frac{2\alpha}{\omega_0}\right] \tag{B.8}$$

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_{res} = \omega_0 - \alpha \Psi_{res} \\ \tilde{\omega}_{cpm} = \omega_0 - \alpha \Psi_{cpm} \\ \tilde{\omega}_{cpp} = \omega_0 - \alpha \Psi_{cpp} \end{cases} \tag{B.9}$$

En combinant (B.1) et (B.9), on obtient :

$$\tilde{\omega}_{cpp} - \tilde{\omega}_{cpm} = 2\tilde{\alpha} = \alpha(\Psi_{cpm} - \Psi_{cpp}) \tag{B.10}$$

On obtient l'estimateur $\hat{\alpha}$ de la formule (2.6) :

$$\hat{\alpha} = \frac{2\tilde{\alpha}}{\Psi_{cpm} - \Psi_{cpp}} \tag{B.11}$$

En injectant (B.11) dans (B.9), on obtient ensuite l'estimateur $\hat{\omega}_0$ de la formule (2.5) :

$$\hat{\omega}_0 = \tilde{\omega}_0 + \frac{2\tilde{\alpha}\Psi_{res}}{\Psi_{cpm} - \Psi_{cpp}} \quad (\text{B.12})$$

B.2 Résolution pour un résonateur avec raideur non linéaire

Ce paragraphe d'annexe est relatif à la partie 2.2.3 (Développement théorique dans le cas non linéaire). Dans le cas non linéaire, on remplace les expressions de $\tilde{\omega}_{res}$, $\tilde{\omega}_{cpm}$ et $\tilde{\omega}_{cpp}$ de la formule (B.1) par celles de la formule (2.14), ici rappelées en (B.13) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\omega}_{res} = \tilde{\omega}_0 + \tilde{\beta} \simeq \omega_0 + \beta = \omega_{res} \\ \tilde{\omega}_{cpm} = \tilde{\omega}_0 - \tilde{\alpha} + \frac{\tilde{\beta}}{2} \simeq \omega_0 - \alpha + \frac{\beta}{2} = \omega_{cpm} \\ \tilde{\omega}_{cpp} = \tilde{\omega}_0 + \tilde{\alpha} + \frac{\tilde{\beta}}{2} \simeq \omega_0 + \alpha + \frac{\beta}{2} = \omega_{cpp} \end{array} \right. \quad (\text{B.13})$$

On conserve l'ensemble des conventions apparaissant sur la figure B.1, ainsi que dans la formule (B.2). Le système (B.9) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\omega}_{res} = \omega_0 - \alpha\Psi_{res} + \frac{\beta}{1 + \Psi_{res}^2} \\ \tilde{\omega}_{cpm} = \omega_0 - \alpha\Psi_{cpm} + \frac{\beta}{1 + \Psi_{cpm}^2} \\ \tilde{\omega}_{cpp} = \omega_0 - \alpha\Psi_{cpp} + \frac{\beta}{1 + \Psi_{cpp}^2} \end{array} \right. \quad (\text{B.14})$$

La combinaison des systèmes (B.13) et (B.14) permet d'établir en (B.15), (B.16) et (B.17) les expressions des estimateurs $(\hat{\omega}_0, \hat{\alpha}, \hat{\beta})$ de $(\omega_0, \alpha, \beta)$ en fonction des approximations initiales $(\tilde{\omega}_0, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ et des résultats des mesures $(\Psi_{res}, \Psi_{cpm}, \Psi_{cpp})$, qui vérifient toujours (B.7).

$$\hat{\omega}_0 = \tilde{\omega}_0 + \tilde{\beta} + \hat{\alpha}\Psi_{res} - \hat{\beta}\Psi_{res} \quad (\text{B.15})$$

Avec :

$$\hat{\alpha} = \frac{\tilde{\alpha}(2\Upsilon_{res} - \Upsilon_{cpm} - \Upsilon_{cpp}) + \frac{\tilde{\beta}}{2}(\Upsilon_{cpm} - \Upsilon_{cpp})}{(\Psi_{res} - \Psi_{cpm})(\Upsilon_{cpp} - \Upsilon_{res}) - (\Psi_{res} - \Psi_{cpp})(\Upsilon_{cpm} - \Upsilon_{res})} \quad (\text{B.16})$$

$$\hat{\beta} = \frac{\tilde{\alpha}(2\Psi_{res} - \Psi_{cpm} - \Psi_{cpp}) + \frac{\tilde{\beta}}{2}(\Psi_{cpm} - \Psi_{cpp})}{(\Psi_{res} - \Psi_{cpm})(\Upsilon_{cpp} - \Upsilon_{res}) - (\Psi_{res} - \Psi_{cpp})(\Upsilon_{cpm} - \Upsilon_{res})} \quad (\text{B.17})$$

Où $(\Upsilon_{res}, \Upsilon_{cpm}, \Upsilon_{cpp})$ sont liés à $(\Psi_{res}, \Psi_{cpm}, \Psi_{cpp})$ comme suit :

$$\begin{cases} \Upsilon_{res} &= \frac{1}{1 + \Psi_{res}^2} \\ \Upsilon_{cpm} &= \frac{1}{1 + \Psi_{cpm}^2} \\ \Upsilon_{cpp} &= \frac{1}{1 + \Psi_{cpp}^2} \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

En effectuant un développement limité par rapport aux variables de (2.7), (B.15), (B.16) et (B.17) deviennent respectivement les estimateurs approchés (2.15), (2.16) et (2.17) pour le calcul itératif.

B.3 Convergence exacte de l'algorithme itératif

Ce paragraphe d'annexe est relatif à la partie 2.2.4 (Détermination de l'amplitude hors résonance). Un algorithme itératif, représenté par une fonction Λ et une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, est convergent vers une solution U_{lim} seulement si il vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \Lambda(U_n) \quad \text{et} \quad \Lambda(U_{\text{lim}}) = U_{\text{lim}} \quad (\text{B.19})$$

La condition suffisante manquante pour avoir l'équivalence est que le domaine de convergence de U_{lim} doit être plus grand que $\{U_{\text{lim}}\}$, et de choisir U_0 dans ce domaine (on ne prend pas en compte cet aspect dans cette partie).

Dans notre cas, la fonction Λ est définie de la manière suivante :

$$\Lambda \in \mathcal{F} \left(\begin{array}{c} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{v} \mapsto \Lambda(\mathbf{v}) \end{array} \right), \quad (\hat{\omega}_0, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \Lambda(\tilde{\omega}_0, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \quad (\text{B.20})$$

Avec $(\hat{\omega}_0, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = (\hat{\omega}_{0iter}, \hat{\alpha}_{iter}, \hat{\beta}_{iter})$ définis en (2.15), (2.16) et (2.17). Ainsi, tout naturellement, l'estimateur à l'itération courante devient l'approximation initiale de l'itération suivante :

$$\begin{aligned} U_{n_0+1} &= (\tilde{\omega}_{0n_0+1}, \tilde{\alpha}_{n_0+1}, \tilde{\beta}_{n_0+1}) \\ &= (\hat{\omega}_{0n_0}, \hat{\alpha}_{n_0}, \hat{\beta}_{n_0}) \quad , \quad n_0 \in \mathbb{N} \\ &= \Lambda(\tilde{\omega}_{0n_0}, \tilde{\alpha}_{n_0}, \tilde{\beta}_{n_0}) \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Dans le cas de l'estimateur grossier de l'amplitude hors résonance, défini dans la partie 2.2.4 comme étant l'isobarycentre $((x_{hrm} + x_{hrp})/2, (y_{hrm} + y_{hrp})/2)$ de deux amplitudes à des pulsations d'excitation $\tilde{\omega}_{hrm} \ll \omega_0$ et $\tilde{\omega}_{hrp} \gg \omega_0$, l'algorithme itératif ne converge pas vers les vraies valeurs $(\omega_0, \alpha, \beta)$, car $\Lambda(\omega_0, \alpha, \beta) \neq (\omega_0, \alpha, \beta)$. La figure B.3 met en évidence cette erreur systématique : on reprend les notations de la figure B.2 en se plaçant dans la configuration sans incertitude $(\tilde{\omega}_0, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = (\omega_0, \alpha, \beta)$. En rouge, en traits pleins, les mesures obtenues avec l'estimateur grossier, et en pointillés le schéma de l'algorithme idéal et convergent. Les angles $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ et θ_4 de la formule (B.4) sont ainsi biaisés.

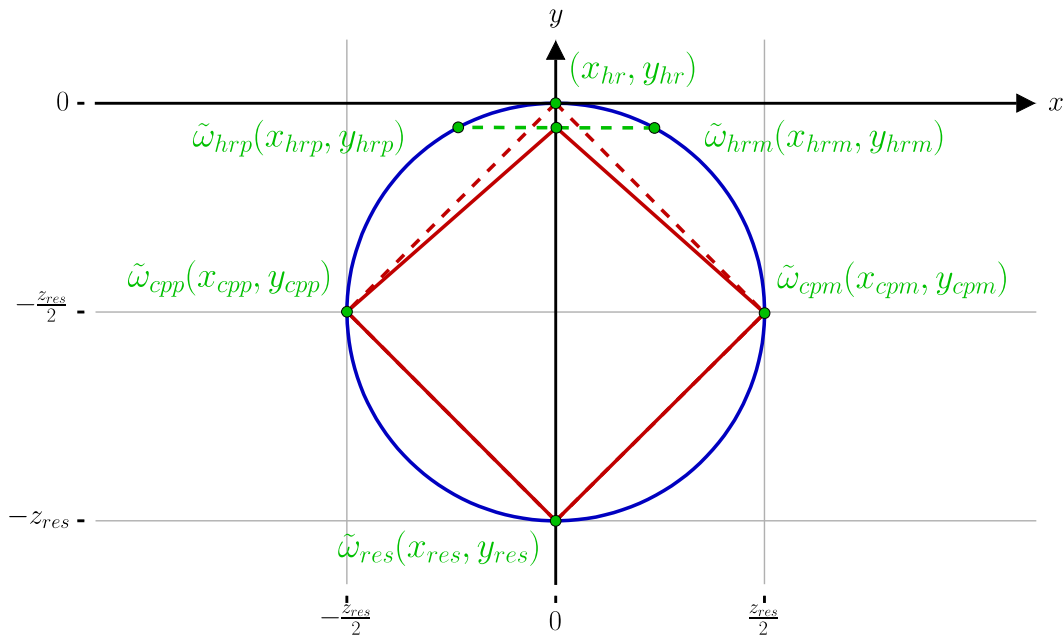


Figure B.3 - Erreur systématique de l'algorithme d'étalonnage dans le cas de l'estimation grossière de l'amplitude hors résonance

On choisit donc d'estimer différemment l'amplitude hors résonance, en suivant le schéma de la figure 2.9 reproduite sur la figure B.4.

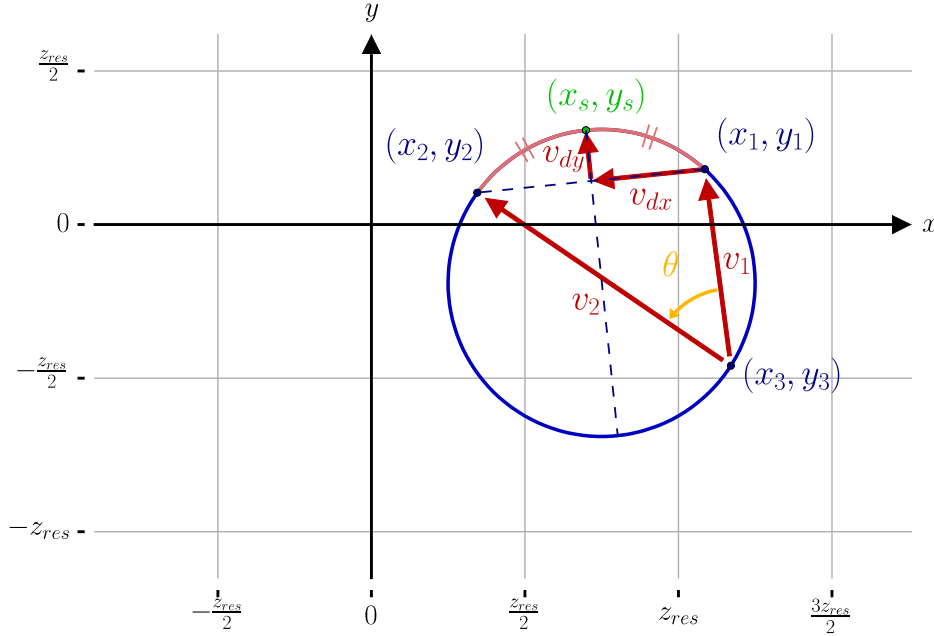


Figure B.4 - Détermination du milieu d'un arc avec 3 points

On cherche donc les coordonnées du point (x_s, y_s) en fonction de x_1, y_1, x_2, y_2, x_3 et y_3 . On utilise aussi la variable intermédiaire θ qui est le demi-angle de l'arc $((x_1, y_1), (x_2, y_2))$. On déduit de la figure B.4 les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \mathbf{v}_{dx} + \mathbf{v}_{dy} \\ \mathbf{v}_{dx} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{v}_{dy} = -\frac{1}{2} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{pmatrix} -(y_2 - y_1) \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{B.22})$$

Par ailleurs, en suivant la même démarche que dans le développement (B.6), on a :

$$\begin{aligned}
\tan(\theta) &= \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2} \\
&= \frac{(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3)}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) + (y_1 - y_3)(y_2 - y_3)}
\end{aligned} \tag{B.23}$$

On termine en utilisant la relation trigonométrique suivante :

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(\theta)} + \sqrt{1 + \frac{1}{\tan(\theta)^2}} \tag{B.24}$$

En combinant (B.22), (B.23) et (B.24), on obtient des formules exactes et explicites de x_s et y_s en fonction de x_1, y_1, x_2, y_2, x_3 et y_3 . Elles sont complexes, et font intervenir des racines carrées, qui sont des opérations fortement déconseillées pour l'architecture logicielle utilisée et décrite dans le Chapitre 3.

Il est plus intéressant d'en considérer des approximations sous forme de développements limités pour $(\tilde{\omega}_0, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ au voisinage de $(\omega_0, \alpha, \beta)$. Le point (x_3, y_3) est choisi comme étant l'amplitude à la résonance supposée (x_{res}, y_{res}) . Comme le montre la figure B.5, au voisinage de la convergence espérée, le point (x_3, y_3) se déplace au premier ordre perpendiculairement à la médiatrice du segment $[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]$. Cette considération permet d'obtenir des expressions de x_3 et y_3 faisant intervenir une constante intermédiaire $H > 0$ (dont l'expression n'a pas d'importance, n'apparaissant pas dans le résultat final) et un infiniment petit ε sur lequel on applique le développement de Taylor :

$$\begin{cases} x_3 = x_1 + (1 + \varepsilon) \frac{(x_2 - x_1)}{2} - H(y_2 - y_1) \\ y_3 = y_1 + (1 + \varepsilon) \frac{(y_2 - y_1)}{2} + H(x_2 - x_1) \end{cases} \tag{B.25}$$

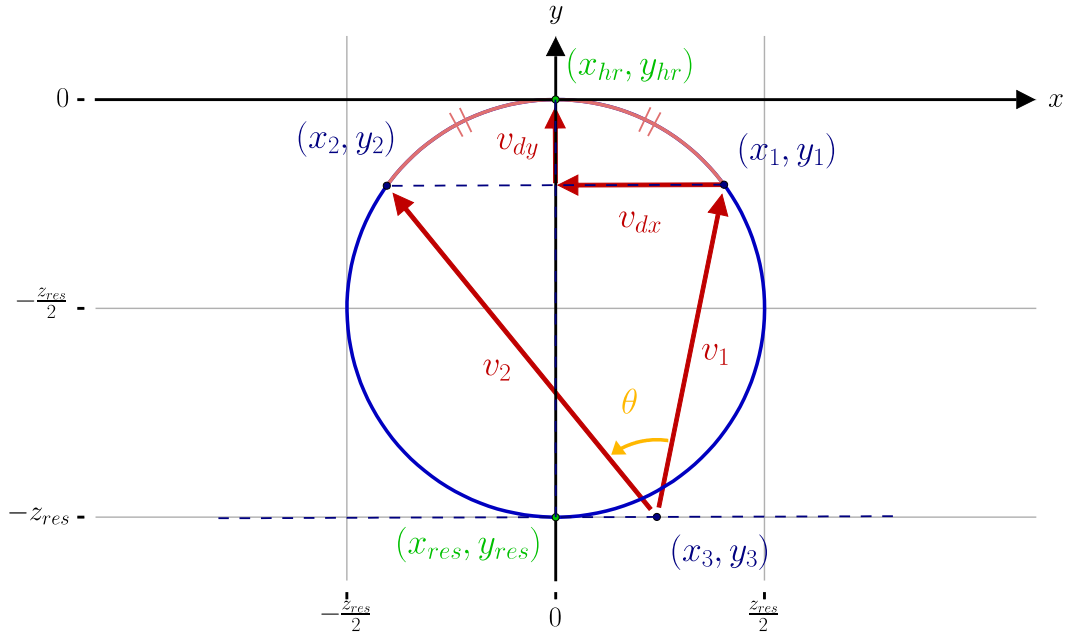


Figure B.5 - Configuration asymptotique de la détermination du point hors résonance

On en déduit les estimateurs (B.26) approchés des coordonnées du point hors résonance, annoncés en (2.18) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_{hr iter} = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \quad + \frac{(y_2 - y_1)((y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2)}{4((x_1 - x_3)(y_2 - y_1) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_1))} \\ \hat{y}_{hr iter} = \frac{y_1 + y_2}{2} \\ \quad + \frac{(x_1 - x_2)((y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2)}{4((x_1 - x_3)(y_2 - y_1) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_1))} \end{array} \right. \quad (\text{B.26})$$

Avec cette nouvelle estimation de l'amplitude hors résonance, et en prenant $(x_1, y_1) = (x_{hrm}, y_{hrm})$, $(x_2, y_2) = (x_{hrp}, y_{hrp})$ et $(x_3, y_3) = (x_{res}, y_{res})$, la fonction Λ définie en (B.20) vérifie $\Lambda(\omega_0, \alpha, \beta) = (\omega_0, \alpha, \beta)$. L'algorithme itératif associé est alors bien convergent vers $(\omega_0, \alpha, \beta)$. Il reste à déterminer le voisinage de $(\omega_0, \alpha, \beta)$ dans lequel on peut choisir les premières approximations $(\tilde{\omega}_0, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ pour rester dans le domaine de convergence.

B.4 Résolution dans le cas de l'hystérésis

Ce paragraphe d'annexe est relatif à la partie 2.2.5 (Cas particulier de l'hystérésis). Pour s'adapter au phénomène d'hystérésis, on ajoute le paramètre ν dans (B.13), avec $\nu > 1$, dans les expressions de $\tilde{\omega}_{cpm}$ et $\tilde{\omega}_{cpp}$ qui deviennent $\tilde{\omega}_{cpmhys}$ et $\tilde{\omega}_{cpphys}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\omega}_{res} = \tilde{\omega}_0 + \tilde{\beta} \simeq \omega_0 + \beta = \omega_{res} \\ \tilde{\omega}_{cpmhys} = \tilde{\omega}_0 - \nu\tilde{\alpha} + \frac{\tilde{\beta}}{1 + \nu^2} \simeq \omega_0 - \nu\alpha + \frac{\beta}{1 + \nu^2} = \omega_{cpmhys} \\ \tilde{\omega}_{cpphys} = \tilde{\omega}_0 + \nu\tilde{\alpha} + \frac{\tilde{\beta}}{1 + \nu^2} \simeq \omega_0 + \nu\alpha + \frac{\beta}{1 + \nu^2} = \omega_{cpphys} \end{array} \right. \quad (\text{B.27})$$

Les estimateurs $(\hat{\omega}_0, \hat{\alpha}, \hat{\beta})$ de (B.15), (B.16) et (B.17) sont généralisés par la formule (B.28).

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\omega}_0 = \tilde{\omega}_0 + \tilde{\beta} + \hat{\alpha}\Psi_{res} - \hat{\beta}\Upsilon_{res} \\ \hat{\alpha} = \frac{\nu\tilde{\alpha}(2\Upsilon_{res} - \Upsilon_{cpm} - \Upsilon_{cpp}) + \frac{\nu^2\tilde{\beta}}{1 + \nu^2}(\Upsilon_{cpm} - \Upsilon_{cpp})}{(\Psi_{res} - \Psi_{cpm})(\Upsilon_{cpp} - \Upsilon_{res}) - (\Psi_{res} - \Psi_{cpp})(\Upsilon_{cpm} - \Upsilon_{res})} \\ \hat{\beta} = \frac{\nu\tilde{\alpha}(2\Psi_{res} - \Psi_{cpm} - \Psi_{cpp}) + \frac{\nu^2\tilde{\beta}}{1 + \nu^2}(\Psi_{cpm} - \Psi_{cpp})}{(\Psi_{res} - \Psi_{cpm})(\Upsilon_{cpp} - \Upsilon_{res}) - (\Psi_{res} - \Psi_{cpp})(\Upsilon_{cpm} - \Upsilon_{res})} \end{array} \right. \quad (\text{B.28})$$

Pour le calcul itératif, la détermination du point hors résonance ne prend pas en compte les mesures aux pulsations $\tilde{\omega}_{cpm}$ et $\tilde{\omega}_{cpp}$, les estimateurs de \hat{x}_{hriter} et de \hat{y}_{hriter} en (B.26) restent donc inchangés. On en déduit en (B.29), (B.30) et (B.31) les estimateurs approchés $(\hat{\omega}_{0iter}, \hat{\alpha}_{iter}, \hat{\beta}_{iter})$ des formules (2.19), (2.20) et (2.21) :

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{0iter} &= \tilde{\omega}_0 - \frac{\tilde{\alpha}}{\nu^2} d\Psi_{res} + \frac{\tilde{\alpha}(1 + \nu^2)}{2\nu^2} (d\Psi_{cpm} + d\Psi_{cpp}) \\ &\quad + \frac{\tilde{\beta}}{\nu(1 + \nu^2)} (d\Psi_{cpm} - d\Psi_{cpp}) \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

$$\hat{\alpha}_{iter} = \tilde{\alpha} - \frac{\tilde{\alpha}}{2\nu} (d\Psi_{cpm} - d\Psi_{cpp}) - \frac{\tilde{\beta}}{(1 + \nu^2)^2} (d\Psi_{cpm} + d\Psi_{cpp}) \quad (\text{B.30})$$

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_{iter} &= \tilde{\beta} + \frac{\tilde{\alpha}(1 + \nu^2)}{2\nu^2} (2d\Psi_{res} - d\Psi_{cpm} - d\Psi_{cpp}) \\
&\quad - \frac{\tilde{\beta}}{\nu(1 + \nu^2)} (d\Psi_{cpm} - d\Psi_{cpp})
\end{aligned} \tag{B.31}$$

Avec (2.7) qui devient :

$$\begin{aligned}
d\Psi_{res} &= \Psi_{res} \\
d\Psi_{cpm} &= \Psi_{cpm} - \nu \\
d\Psi_{cpp} &= \Psi_{cpp} + \nu
\end{aligned} \tag{B.32}$$

On remarque qu'en prenant $\nu=1$, on retrouve bien les formules (2.15), (2.16) et (2.17). Dans la pratique, le choix du coefficient ν sera à mettre en balance avec celui de l'amplitude d'excitation pour optimiser la précision du calcul.

Annexe C

Génération de bruits pour les simulations

Cette annexe est relative aux parties 2.2.7 (Stabilité en présence de sources de bruits) et 2.3.2.5 (Performances théoriques et simulées de l'étalonnage dans le cas du VIG). On propose ici un code en langage Python permettant de générer des signaux de bruits blanc et rose pour simuler le comportement des algorithmes d'étalonnage. La bibliothèque « numpy » contient les fonctions permettant de générer un bruit blanc. On peut ensuite construire un bruit rose par filtrage d'un bruit blanc. « Kpn » et « fcpn » sont respectivement le gain et la fréquence de coupure du filtre considéré. Leur valeur n'a que très peu d'importance, il faut juste que la fréquence de coupure soit plus petite que la fréquence d'échantillonnage du signal à générer. Les arguments « sigma_r » et « sigma_b » correspondent respectivement aux variables σ_r (sans dimension), pour le plancher du bruit rose, et σ_b (en $s^{\frac{1}{2}}$), pour le bruit blanc à 1 s, introduites dans les parties 2.2.7 et 2.3.2.4.

```

=====
# Libraries
=====

import numpy as np

=====
# Constantes
=====

i                = complex(0,1)

Kpn              = 10                # gain du filtre
fcpn            = 0.0001            # fréquence de coupure du filtre

=====
# Classe
=====

class Classe_bruits():

    def __init__(self, N, Te):

        self.N                = N                # nombre d'échantillons
        self.Te              = Te                # période d'échantillonnage

        self.filtre          = filtre(self.N, self.Te)

```



```

def bruit_blanc_Allan(self, sigma_b):

    # génération d'un bruit blanc
    spn = sigma_b / np.sqrt(self.Te)
    vecteur_bruit_blanc = spn * np.random.randn(self.N)

    return vecteur_bruit_blanc

def bruit_rose_Allan(self, sigma_r):

    # génération d'un bruit blanc
    spn = sigma_r / (2 * Kpn * np.sqrt(np.log(2) * self.Te * fcpn))
    bruit_blanc_entree = spn * np.random.randn(self.N)
    bruit_blanc_FFT_entree = self.Te * np.fft.fft(bruit_blanc_entree)

    # filtrage pour obtenir un bruit rose
    bruit_rose_FFT_sortie = self.filtre * bruit_blanc_FFT_entree
    bruit_rose_complexe_sortie = (1/self.Te) * np.fft.ifft(bruit_rose_FFT_sortie)
    vecteur_bruit_rose = np.real(bruit_rose_complexe_sortie)

    return vecteur_bruit_rose

def filtre(N, Te):

    fe = 1 / (Te * N) # incrément de fréquence
    freq = fe * np.arange(N) # vecteur fréquence échantillonné

    # filtre passe-bas : -10dB/dec (H = Kpn / (1 + i * np.sqrt(freq / fcpn)))

    freq_inv = np.empty(N) # vecteur fréquence retourné
    freq_inv[0] = freq[0]
    freq_inv[1:] = freq[:0:-1]

    H = np.empty(N, dtype = complex)
    if N%2 == 0:
        H[0: int(N/2)] = Kpn / (1 + i * np.sqrt(freq[0:int(N/2)] / fcpn))
        H[int(N/2)] = np.real(Kpn / (1 + i * np.sqrt(freq[int(N/2)] / fcpn)))
        H[int(N/2) + 1: N] = Kpn / (1 - i * np.sqrt(freq_inv[int(N/2) + 1 :N] / fcpn))
    else:
        H[0:int((N + 1)/2)] = Kpn / (1 + i * np.sqrt(freq[0:int((N + 1)/2)] / fcpn))
        H[int((N + 1)/2): N] = Kpn / (1 - i * np.sqrt(freq_inv[int((N + 1)/2) :N] / fcpn))

    # passage au domaine temporel
    h = (1/Te) * np.fft.ifft(H)
    h_reel = np.real(h)

    # retour au domaine fréquentiel
    filtre_sortie = Te * np.fft.fft(h_reel)

    return filtre_sortie

```

Publications

[Delahaye 2017]

[Delahaye 2018]

Bibliographie

- [Aikele 2000] M. Aikele, K. Bauer, W. Ficker, F. Neubauer, U. Prechtel, J. Schalk & H. Seidel. *Resonant Accelerometer with Aelf-Test*. Sensors and Actuators A 92, pages 161-167, 2001.
- [Bauer 2001] K. Bauer, M. Aikele, W. Ficker, K. Koppenhagen, F. Neubauer, E. Stenzel & J. Schalk. *Self-Test for Resonant Structure Sensors Applied to a Tuning Fork Gyro and a Resonant Accelerometer*. The 11th International Conference on Solid-State Sensors and Actuators, Munich, Germany, pages 468-471, 2001.
- [Butterworth 1914] S. Butterworth. *On Electrically-maintained Vibrations*. Proc. Phys. Soc. London 27 410, pages 410-424, 1914.
- [Cady 1921] W. G. Cady. *The Piezo-Electric Resonator*. Institute of Radio Engineers, pages 83-114, 1921.
- [Coope 1992] L. D. Coope. *Circle Fitting by Linear and Nonlinear Least Squares*. Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 76, pages 381-388, May 1993.
- [Curie 1880] J. Curie & P. Curie. *Développement par compression de l'électricité polaire dans les cristaux hémihédres à faces inclinées*. Bulletin de la Société minéralogique de France, pages 90-93, 1880.
- [Davis 2011] W. O. Davis. *Measuring Quality Factor From a Nonlinear Frequency Response With Jump Discontinuities*. Journal of Microelectromechanical Systems, vol. 20, pages 968-975, August 2011.
- [Delahaye 2017] L. Delahaye, J. Guérard & F. Parrain. *Coriolis vibrating gyroscope modelling for parametric identification and optimal design*. 2017 Symposium on Design, Test, Integration and Packaging on MEMS/MOEMS (DTIP), 2017.

- [Delahaye 2018] L. Delahaye, J. Guérard & F. Parrain. *Digital architecture for vibrating inertial sensors: modularity performances self-calibrations*. DGON Inertial Sensors and Systems (ISS) 2018, 2018.
- [Descharles 2011] M. Descharles. *Microcapteurs résonants et électroniques associées : modélisation conjointe et optimisation*. Physique Générale [physics.gen-ph]. Université Pierre et Marie Curie – Paris VI, 2011. Français. tel-00682582
- [Dorveaux 2009] E. Dorveaux, D. Vissière, A-P. Martin & N. Petit. *Iterative Calibration Method for Inertial and Magnetic Sensors*. Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference Shangai, P.R. China, pages 8296-8303, 2009.
- [El Sheimy 2008] N. El-Sheimy, H. Hou & X.Niu. *Analysis and Modeling of Inertial Sensors Using Allan Variance*. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, vol. 57, pages 140-149, January 2008.
- [Foucault 1852] L. Foucault. *Sur une nouvelle démonstration expérimentale du mouvement de la terre fondée sur la fixité du plan de rotation*. Comptes Rendus De L'Académie Des Sciences 35, 1852.
- [Guerard 2014] J. Guérard, R. Levy, D. Janiaud & O. Le Traon. *Advances in Quartz Coriolis Vibrating Gyroscope for space applications*. GNC, 2014.
- [Guerard 2017] J. Guérard, B. Verlhac, P. Lavenus & R. Levy. *Système et procédé pour fournir l'amplitude et le retard de phase d'un signal sinusoïdal*, December 2017. US Patent 16 55330.
- [Guerard 2018] J. Guérard, L. Delahaye, & R. Levy. *Digital electronics for inertial MEMS and space applications*. Proc. Symposium on Design Test Integration & Packaging of MEMS and MOEMS (DTIP), 2018.
- [Kaaajakari 2004] V. Kaaajakari, T. Mattila, A. Oja & H. Seppä. *Nonlinear limits for single-crystal silicon microresonators*. IEEE Journal of Microelectromechanical Systems, pages 715-724, 2004.
- [Kasdin 1995] N. J. Kasdin. *Discrete Simulation of Colored Noise and Stochastic Processes*. Proceedings of the IEEE, vol. 83, pages 802-827, May 1995.
- [Le Traon 1998] O. Le Traon, D. Janiaud, S. Muller & P. Bouniol. *Performance evaluation of the VIA accelerometer*. Proceedings of ION National Technical Meeting, 1998.

- [Le Traon 2006] O. Le Traon, D. Janiaud, M. Pernice, S. Masson, S. Muller & J-Y. Tridera. *A New Quartz Monolithic Differential Vibrating Beam Accelerometer*. Proceedings of the 2006 IEEE/Ion Position, Location and Navigation Symposium, Coronado, CA, USA, pages 6-15, 2006.
- [Le Traon 2010] O. Le Traon, S. Masson, C. Chartier & D. Janiaud. *LGS and GaPO₄ piezoelectric crystals: New results*. Solid State Sciences 12, pages 318-324, 2010.
- [Le Traon 2012] O. Le Traon, D. Janiaud, J. Guérard, R. Levy, S. Masson, O. Ducloux, M. Pernice & R. Taïbi. *The fairy world of quartz vibrating MEMS*. European Frequency and Time Forum (EFTF), pages 214-220, 2012.
- [Le Traon 2018] O. Le Traon, J. Guérard, M. Pernice, C. Chartier, P. Lavenus, A. Andrieux & R. Levy. *The NG DIVA: a Navigation Grade Differential Inertial Vibrating Beam Accelerometer*. PLANS 2018, 2018.
- [Lifshitz 2000] R. Lifshitz & M. L. Roukes. *Thermoelastic damping in micro and nanomechanical systems*. Phys. Rev. B, pages 5600-5609, 2000.
- [Lifshitz 2008] R. Lifshitz & M. C. Cross. *Nonlinear Dynamics of Nanomechanical and Micromechanical Resonators*. 2008. Chap. 1. Heinz Georg Schuster.
- [Link 2005] T. Link, L. Simon, M. Trächtler, A. Gaisser, M. Braxmaier, Y. Manoli & H. Sandmaier. *A New Self-Test and Self-Calibration Concept for Micro-Machined Gyroscopes*. The 13th International Conference on Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems, Seoul, Korea, pages 401-404, 2005.
- [Lippmann 1881] G. Lippmann. *Principe de la conservation de l'électricité, ou second principe de la théorie des phénomènes électriques*. J. Phys. Thero. Appl., pages 381-394, 1881.
- [Lynch 1995] D. D. Lynch. *Vibratory Gyro Analysis by the Method of Averaging*. The 2nd Saint Petersburg International Conference on Gyroscopic Technology and Navigation, pages 26-34, 1995.
- [Lynch 1998] D. D. Lynch. *Coriolis Vibratory Gyros*. Proceedings Symposium Gyro Technology, pages 56-66, 1998.
- [Marechal 2016] B. Maréchal. *Microsystèmes inertiels vibrants pour applications spatiales : apport des fonctions numériques*. Micro et nanotechnologies/

- Microélectronique. Université Montpellier, 2016. Français. Tel-01809008
- [Martin 2016] H. Martin, P. Groves & M. Newman. *The Limits of In-Run Calibration of MEMS Inertial Sensors and Sensor Arrays*. Journal of The Institute of Navigation, vol. 63, pages 127-143, February 2016.
- [Mishra 2006] S. K. Mishra. *Fitting a Logarithmic Spiral to Empirical Data with Displaced Origin*. Social Science Research Network, 2006.
- [Mukhopadhyay 2004] U. Mukhopadhyay. *Logarithmic Spiral – A Splendid Curve*. Resonance, pages 39-45, 2004.
- [Nosek 1999] J. Nosek. *Drive level dependence of the resonant frequency in BAW quartz resonators and his modeling*. IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Freq. Contr., vol. 46, pages 823-829, July 1999.
- [Parent 2007] A. Parent, O. Le Traon, S. Masson, B. Le Foulgoc. *A Coriolis Vibrating Gyro Made of a Strong Piezoelectric Material*. Sensors, 2007 IEEE, pages 876-879, 2007.
- [Parent 2008] A. Parent. *Apport des Nouveaux Matériaux Piézoélectriques dans le domaine des Micro-Gyromètres Vibrants*. Physique [physics]. Université Paris Sud – Paris XI, 2008. Français. tel-00334781
- [Prikhodko 2013] I. P. Prikhodko, A. A. Trusov & A. M. Shkel. *Compensation of Drifts in High-Q MEMS Gyroscopes using Temperature*. Sensors and Actuators A 201, pages 517-524, 2013.
- [Rozelle 2011] D. M. Rozelle. *Self Calibrating Gyroscope System*, March 2011. US Patent 7,912,664.
- [Rutman 1978] J. Rutman. *Characterization of Phase and Frequency Instabilities in Precision Frequency Sources: Fifteen Years of Progress*. Proceedings of the IEEE, vol. 66, pages 1048-1075, September 1978.
- [Schalk 2003] J. Schalk, E. Stenzel, K. Bauer, R. Freitag, R. Hilser, R. Voss, M. Aikele, H. Seidel & U. Prechtel. *Sensor having a Resonance Structure, especially an Acceleration or Rotation Rate Sensor, and a Device for Carrying out a Self-Test*, May 2003. US Patent 6,564,637.
- [Schiessel 1995] H. Schiessel, R. Metzler, A. Blumen & T. F. Nonnenmacher. *Generalized viscoelastic models: their fractional equations with solutions*. J. Phys. A: Math. Gen. 28, pages 6567-6584, 1995.

-
- [Tierney 1971] J. Tierney, C. Rader & B. Gold. *A digital frequency synthesizer*. Audio and Electroacoustics, IEEE Transactions, vol. 19, pages 48-57, March 1971.
- [Van Dyke 1928] K. S. Van Dyke. *The Piezo-Electric Resonator and its Equivalent Network*. New York Institute Meeting, pages 742-764, 1928.
- [Wisher 2017] S. Wisner. *An FPGA-based architecture for the in-run self-calibration of MEMS gyroscopes*. School of Electrical and Computer Engineering, 2017.
- [Zener 1937] C. Zener. *Internal Friction in Solids. 1. Theory of Internal Friction in Reeds*. Phys. Rev. 53, pages 230-235, 1937.

Glossaire

1. Glossaire lexical

accéléromètre : Capteur mesurant l'accélération inertielle Γ en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

amplitude : Différence entre la valeur maximale et la valeur moyenne d'un signal sinusoïdal réel. L'amplitude d'un signal $y(t)$ est notée y_M . L'amplitude complexe \underline{y}_M combine les informations d'amplitude y_M et de phase φ_y du signal $y(t)$.

arc de cercle : Partie d'un cercle entre deux de ses points. L'angle de l'arc est l'angle formé par les segments liants ces deux points au centre du cercle.

architecture du capteur : Ensemble des choix de conception mécanique, électronique et informatique, ainsi que des méthodes d'interfaçage, caractérisant le fonctionnement d'un capteur.

asservissement : Entretien des oscillations d'une cellule vibrante dans un régime forcé donné en corrigeant l'excitation par exploitation de la mesure de la réponse de la cellule et de la donnée d'une valeur cible.

bande passante d'un capteur : Fréquence maximale que peut porter la mesurande d'un capteur pour que sa mesure soit fiable.

capteur inertiel : Capteur mesurant les effets d'inertie (accéléromètre, gyromètre et gyroscope), ou ensemble de tous les éléments mécaniques, électroniques et informatiques le constituant.

carte analogique : Circuit imprimé constitué de composants d'électronique analogique CMS, et réalisant l'interfaçage entre la carte FPGA et la carte de proximité.

carte FPGA : Circuit imprimé fourni par le fabricant (Xilinx), constitué notamment d'une puce FPGA, d'une horloge, d'une puce de mémoire Flash, ainsi que d'une connexion JTAG et de connecteurs métalliques pour les interfaçages avec l'OBC et la carte analogique, respectivement.

- carte de proximité** : Circuit imprimé constitué de composants d'électronique analogique CMS pour la mise en forme de la réponse électronique du résonateur, et solidaire du boîtier en cuivre contenant la cellule vibrante en quartz.
- cellule vibrante** : Élément de quartz monocristallin, réalisé par gravure chimique en salle blanche, dont la géométrie permet la mise en vibration électro-mécanique par effet piézoélectrique, et dont les propriétés vibratoires sont exploitées en vue de réaliser une mesure inertielle.
- chaîne de traitement** : Ensemble des fonctions de traitement du signal représentées par chacun des éléments de l'architecture du capteur.
- communication série** : Communication numérique par câble USB, utilisée notamment pour l'interfaçage entre le module FPGA et l'OBC.
- contrainte** : Grandeur physique homogène à une pression, et apparaissant dans les relations comportementales des éléments mécaniques vibrants.
- démodulation analogique** : Opération, effectuée sur la carte analogique, de transformation d'un signal modulé binaire, envoyé par la carte FPGA, en un signal électronique périodique sinusoïdal par effet de filtrage.
- démodulation numérique** : Opérations, effectuées sur le module FPGA, de comparaison de deux signaux électroniques sinusoïdaux sur la carte analogique, suivie d'une algorithmique numérique dans la puce FPGA permettant d'extraire les caractéristiques d'amplitude et de phase du signal mesuré.
- densité spectrale de puissance de bruit** : Fonction en fréquence, caractéristique d'un signal de bruit, et permettant d'en déterminer ses composantes fréquentielles, ou autrement dit, ses couleurs.
- développement limité** : Opération mathématique de simplification ou d'estimation d'une expression analytique par une formulation polynomiale, généralement en utilisant le théorème de Taylor-Young.
- diapason** : Géométrie mécanique constituée de deux branches parallèles solidaires sur l'une de leurs extrémités (dites encastées-libres), et dont l'exploitation des modes de vibration permet la mesure gyrométrique.
- effet Coriolis** : Action mécanique intervenant dans les études de systèmes non-galiléen, et s'appliquant aux corps massiques présentant une vitesse non nulle dans un référentiel en mouvement de rotation.

- enveloppe d'un signal** : Évolution de l'amplitude d'un signal pseudo-périodique au cours du temps.
- électronique analogique** : Domaine de l'électronique considérant les modélisations classiques des comportements des composants basiques (résistances, inductances, capacités, et amplificateurs opérationnels).
- électronique numérique** : Domaine de l'électronique basé sur les modélisations des transistors à deux états, permettant la réalisation d'opérations logiques, séquentielles et logicielles.
- étalonnage** : Évaluation de paramètres caractéristiques d'un système dont la connaissance est indispensable au bon fonctionnement.
- étendue de mesure** : Gamme de valeurs dans laquelle doit être la mesurande d'un capteur pour que sa mesure soit fiable.
- facteur d'échelle** : Coefficient, noté SF ou c_1 , représentant la relation affine asymptotique entre la mesurande e et la grandeur mesurée s du capteur.
- facteur de qualité** : Paramètre caractéristique d'un résonateur qualifiant l'amplitude et la sélectivité harmonique de sa résonance.
- fréquence de résonance** : Paramètre caractéristique d'un résonateur étant la fréquence pour laquelle la réponse en régime d'oscillation forcé est maximale en amplitude.
- grandeur mesurée** : Grandeur intermédiaire mesurée physiquement par le capteur, notée s et dont la valeur permet d'en déduire la mesurande e , notamment par l'intermédiaire du facteur d'échelle c_1 et du biais c_0 du capteur.
- gyromètre** : Capteur mesurant la vitesse de rotation (ou la rotation, par abus de langage) inertielle Ω en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.
- gyroscope** : Capteur mesurant la position angulaire inertielle θ en rad.
- instrument inertielle** : Ensemble constitué du module FPGA et du boîtier en cuivre, contenant la cellule vibrante piézoélectrique, avec sa carte de proximité.
- intégration du capteur** : Réalisation matérielle et implémentation logicielle du capteur inertielle selon son architecture.
- lame vibrante** : Géométrie mécanique constituée d'une fine poutre à section rectangulaire, solidaire d'éléments massiques à ses deux extrémités (dite encastrée-encastrée), et dont l'exploitation des modes de vibration permet la mesure de l'accélération.

- logiciel embarqué** : Calcul programmé et compilé sur microprocesseur synthétisé sur la puce FPGA (MicroBlaze), par opposition au matériel embarqué.
- masse d'épreuve** : Élément mécanique subissant l'accélération inertielle à mesurer dans le fonctionnement d'un accéléromètre à lame vibrante.
- matériel embarqué** : Routage d'éléments de logique combinatoire et séquentielle sur l'électronique de la puce FPGA, par opposition au logiciel embarqué.
- mesurande du capteur** : Grandeur, notée e , dont la mesure est la fonction du capteur.
- mode de résonance** : Configuration de vibration d'une structure mécanique, caractérisée par une déformation, une fréquence de résonance, et un facteur de qualité.
- modulation numérique** : Opération, effectuée dans la puce FPGA, de transformation d'un signal quantifié numérique en un signal binaire, notamment par utilisation de l'algorithme $\Sigma\Delta$.
- module FPGA** : Ensemble constitué de la carte FPGA et de la carte analogique.
- ordinateur de bord** : Ordinateur interfaçant l'instrument inertiel par une communication série, et permettant le pilotage et l'exploitation de la mesure inertielle du capteur.
- oscillateur** : Système mécanique pouvant osciller, en régime forcé ou libre.
- piézoélectricité** : Phénomène physique de conversion entre l'électrique et la mécanique, et constituant l'une des principales propriétés du quartz.
- phase ou déphasage** : Repère en rad d'une forme d'onde par rapport à une référence sur son motif périodique. La phase d'un signal sinusoïdal $y(t)$ est notée φ_y . L'amplitude complexe y_M combine les informations d'amplitude y_M et de phase φ_y du signal $y(t)$. On appelle aussi phase l'argument variable d'un signal périodique, toujours en rad.
- porteuse d'un signal** : Signal périodique dont la fréquence et la phase sont celles d'un signal pseudo-périodique.
- pulsation** : Paramètre proportionnel à la fréquence f , noté ω , en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, et vérifiant $\omega = 2\pi f$.
- quartz** : Matériau de base constituant les cellules vibrantes utilisées.
- régime boucle ouverte/fermée** : Pour le gyromètre à deux modes de résonance orthogonaux, on parle de régime d'asservissement en boucle fermée si on peut fournir une excitation du mode détecteur, et de régime en boucle ouverte sinon.
- régime forcé** : Oscillations entretenues par application d'une excitation périodique.

- régime libre** : Oscillations non-entretenues et amorties par dissipation énergétique.
- régime stationnaire** : Régime d'oscillations pour lequel l'enveloppe est une constante, c'est-à-dire présentant une amplitude, une fréquence et une phase constantes, par opposition au régime transitoire.
- régime transitoire** : Régime d'oscillations pour lequel l'enveloppe du signal réponse varie, c'est-à-dire présentant une amplitude, une fréquence et une phase variantes au cours du temps, par opposition au régime stationnaire.
- régime de verrouillage de phase** : Oscillations entretenues à leur résonance par asservissement de la phase de la réponse.
- résonateur** : Oscillateur présentant un extremum d'amplitude réponse pour une fréquence donnée, appelée fréquence de résonance, et notée f_0 par défaut. Il est aussi caractérisé par son facteur de qualité Q .
- scénario** : Séquence de pilotage de l'instrument inertiel par l'OBC, notamment par asservissements successifs.
- synthèse de fréquence** : Génération numérique sur FPGA de la phase d'un signal périodique à une fréquence donnée, relativement à une horloge.
- variance d'Allan** : Fonction d'un temps d'intégration, caractéristique d'un signal de bruit, et permettant d'en déterminer ses caractéristiques, ou autrement dit, ses couleurs.
- variations lentes** : Hypothèse simplificatrice consistant à considérer que le temps caractéristique de variation de l'enveloppe d'un signal pseudo-périodique est grand devant la période de sa porteuse.
- wafer** : couche de géométrie standard d'un matériau (ici quartz monocristallin), sur laquelle sont opérés les différents procédés technologiques de gravure chimique, en vue d'obtenir des structures résonnantes.

2. Glossaire des sigles

ADC : Analog to Digital Converter (convertisseur analogique numérique)

AVAR : Allan VARiance (variance d'Allan)

ADEV : Allan DEVIation (déviation d'Allan)

BW : BandWidth (bande passante)

CLB : Configurable Logic Bloc (bloc logique configurable)

-
- CMS** : Composant Monté en Surface (SMD : Surface Mounted Device)
- DAC** : Digital to Analog Converter (convertisseur numérique analogique)
- DIVA** : Differential Inertial Vibrating Accelerometer
- DSP** : Digital Signal Processing (processeur de signal numérique)
- FPGA** : Field Programmable Gate Array (circuit logique programmable)
- IP** : Intellectual Property (propriété intellectuelle)
- JTAG** : Joint Test Action Group
- LUT** : Lock Up Table (table de correspondance)
- NSD** : Noise Spectral Density (densité spectrale de bruit)
- OBC** : On Board Computer (ordinateur de bord)
- ONERA** : Office National d'Étude et de Recherche en Aéronautique et en Aérospatial
- PLL** : Phase Lock Loop (boucle à verrouillage de phase)
- PSD** : Power Spectral Density (densité spectrale de puissance)
- RAM** : Random Access Memory (mémoire à accès non séquentiel, mémoire vive)
- SF** : Scale Factor (facteur d'échelle)
- USB** : Universal Serial Bus (bus universel en série)
- VHDL** : Very High Speed Integrated Circuit Hardware Description Language (VHSIC-HDL) (langage de description matériel)
- VBA** : Vibrating Beam Accelerometer (accéléromètre à lame vibrante)
- VIA** : Vibrating Inertial Accelerometer (accéléromètre vibrant)
- VIG** : Vibrating Inertial Gyrometer (gyromètre vibrant)

Index des figures

Figure 1.1 - Schéma fonctionnel du capteur.....	13
Figure 1.2 - Courbe type d'une variance d'Allan.....	15
Figure 1.3 - Courbe type d'une densité spectrale de puissance.....	18
Figure 1.4 - Modèle de Kelvin-Voigt.....	20
Figure 1.5 - Diagramme de Bode de la réponse fréquentielle d'un passe-bas résonnant du second ordre à haut facteur de qualité.....	23
Figure 1.6 - Diagramme de Nyquist de la réponse fréquentielle d'un passe-bas résonnant du second ordre à haut facteur de qualité.....	24
Figure 1.7 - Validité de l'approximation des variations lentes : signaux effectifs et enveloppes	26
Figure 1.8 - Réponses stationnaires et transitoires sur le diagramme de Nyquist d'un résonateur à haut facteur de qualité.....	30
Figure 1.9 - Première généralisation du modèle de Kelvin-Voigt à deux dimensions d'espace	31
Figure 1.10 - Configuration générale des oscillateurs plans.....	32
Figure 1.11 - Modèle de Lynch.....	33
Figure 1.12 - Comportement intuitif équivalent.....	33
Figure 1.13 - Caractéristiques fréquentielles stationnaires de l'oscillateur plan subissant une rotation.....	40
Figure 1.14 - Réponses stationnaires et transitoires d'un oscillateur plan sur le diagramme de Nyquist.....	40
Figure 1.15 - Effet de l'amortissement non linéaire sur la caractéristique fréquentielle stationnaire d'un résonateur.....	43
Figure 1.16 - Diagramme en amplitude et en phase d'un passe-bas résonnant avec raideur non linéaire et sans amortissement non linéaire pour plusieurs amplitudes d'excitation.....	44
Figure 1.17 - Diagramme de Nyquist et raideur non linéaire.....	45
Figure 1.18 - Résonateur RLC série.....	46
Figure 1.19 - Modèle du résonateur de Butterworth Van Dyke.....	47
Figure 1.20 - Représentation de Nyquist du modèle de Butterworth Van Dyke.....	48
Figure 1.21 - Modèle de Butterworth Van Dyke avec amplificateur de charges.....	49
Figure 1.22 - Représentation de Nyquist du résonateur électromécanique.....	50
Figure 1.23 - Diagramme de Bode du résonateur électronique.....	51
Figure 1.24 - Fonction de transfert du capteur.....	53
Figure 1.25 - Bande passante du capteur.....	54

Figure 1.26 - Sensibilité thermique du biais et du facteur d'échelle.....	55
Figure 1.27 - Détermination théorique de l'hystérésis et du résidu.....	56
Figure 1.28 - Détermination pratique de l'hystérésis et du résidu.....	57
Figure 1.29 - Pertes thermo-élastiques dans les poutres vibrantes.....	58
Figure 1.30 - Principe de fonctionnement de l'accéléromètre à lame vibrante.....	59
Figure 1.31 - Variation de la fréquence de résonance et asservissement de phase.....	60
Figure 1.32 - Cellule en quartz du VIA.....	61
Figure 1.33 - Cellule en quartz du DIVA.....	61
Figure 1.34 - Résonateur plan et rotation normale.....	64
Figure 1.35 - Forme des oscillations dans le mode « open-loop ».....	65
Figure 1.36 - Forme des oscillations dans le mode « force-rebalance ».....	67
Figure 1.37 - Forme des oscillations dans le mode « whole-angle ».....	68
Figure 1.38 - Cellule en quartz du VIG et modes de vibration.....	69
Figure 2.1 - Amplitudes des états stationnaires dans le plan de Nyquist.....	77
Figure 2.2 - Unique cercle passant par 3 points.....	79
Figure 2.3 - Calibration de la résonance et du facteur de qualité avec 5 points stationnaires : diagrammes en amplitude et en phase.....	80
Figure 2.4 - Calibration de la résonance et du facteur de qualité avec 5 points stationnaires : plan de Nyquist.....	81
Figure 2.5 - Angles polaires à déterminer.....	82
Figure 2.6 - Amplitude de la réponse d'un oscillateur résonnant.....	84
Figure 2.7 - Estimation grossière de l'amplitude hors résonance dans le plan de Nyquist....	87
Figure 2.8 - Effets électroniques hors résonance.....	88
Figure 2.9 - Détermination du milieu d'un arc avec 3 points.....	89
Figure 2.10 - Oscillateur de Duffing avec et sans hystérésis.....	90
Figure 2.11 - Hystérésis et mesures dans le plan de Nyquist.....	91
Figure 2.12 - Représentation graphique de l'algorithme itératif dans le cas linéaire.....	93
Figure 2.13 - Procédé de Monte-Carlo et enveloppe de convergence.....	95
Figure 2.14 - Erreur systématique sur la limite de convergence en fonction du choix de la fréquence hors résonance dans le cas de l'estimateur grossier.....	96
Figure 2.15 - Variance d'Allan de la mesure des amplitudes réponses.....	97
Figure 2.16 - Procédé de Monte-Carlo et stabilité de la convergence.....	100
Figure 2.17 - Procédé de Monte-Carlo et temps d'intégration.....	101
Figure 2.18 - Allure générale d'une spirale de Bernoulli.....	104
Figure 2.19 - Spirale logarithmique et similitude directe pour des points mesurés à intervalles de temps réguliers.....	107
Figure 2.20 - Stabilité d'une spirale logarithmique par moyennage.....	108
Figure 2.21 - Variance d'Allan de la mesure des amplitudes réponses.....	109
Figure 2.22 - Généralisation des estimateurs à plus de 3 points.....	110
Figure 2.23 - Résolutions relatives théoriques et simulées des estimateurs fréquentiels.....	112
Figure 2.24 - Résolutions relatives théoriques et simulées des estimateurs d'amplitudes finales	112
Figure 2.25 - Amplitudes des états stationnaires dans le plan de Nyquist.....	115

Figure 2.26 - Modulations d'excitation dans le plan de Nyquist.....	117
Figure 3.1 - Schéma matériel de l'instrument.....	120
Figure 3.2 - Cellules vibrantes du gyromètre VIG (à gauche) et de l'accéléromètre DIVA (à droite).....	120
Figure 3.3 - Conversion électro-mécanique de l'instrument (résonateur et interfaçage électronique).....	121
Figure 3.4 - Module FPGA Trenz TE0725.....	122
Figure 3.5 - Code VHDL d'une bascule (à gauche) et logique interprétée associée (à droite).....	123
Figure 3.6 - Routage de la bascule sur le module FPGA.....	124
Figure 3.7 - Occupation des ressources logiques allouées par le code VHDL.....	125
Figure 3.8 - Occupation des ressources FPGA pour la logique VHDL et le logiciel C.....	126
Figure 3.9 - Interface graphique de l'OBC.....	128
Figure 3.10 - Ressources de calcul numérique du capteur inertiel.....	129
Figure 3.11 - Schéma fonctionnel du capteur inertiel.....	129
Figure 3.12 - Propriété périodique des registres du FPGA.....	130
Figure 3.13 - Roue de phase.....	131
Figure 3.14 - Rampe de phase temporelle.....	132
Figure 3.15 - Représentation schématique de la synthèse de fréquence (à gauche) et routage associé (à droite).....	134
Figure 3.16 - Application de la forme d'onde au signal de phase.....	135
Figure 3.17 - Analogie fluidique de l'algorithme $\Sigma\Delta$	136
Figure 3.18 - Schéma opérationnel de l'algorithme $\Sigma\Delta$	137
Figure 3.19 - Évolutions temporelles des signaux de modulation et de démodulation.....	137
Figure 3.20 - Représentations spectrales des signaux de modulation et de démodulation....	138
Figure 3.21 - Cycle de mesure de la réponse du résonateur.....	140
Figure 3.22 - Courbe des déphasages de comparaison pour plusieurs valeurs d'amplitude...141	141
Figure 3.23 - Démodulation numérique théorique dans le plan de Nyquist.....	142
Figure 3.24 - Génération de sous-horloges synchrones sur FPGA.....	143
Figure 3.25 - Configuration générale de l'asservissement d'un système physique.....	144
Figure 3.26 - Diagramme de Nyquist de la réponse fréquentielle d'un passe-bas résonnant du second ordre à haut facteur de qualité.....	144
Figure 3.27 - Comportement des asservissements dans le plan de Nyquist.....	147
Figure 3.28 - Schéma fonctionnel des opérations numériques sur FPGA.....	148
Figure 3.29 - Architecture complète du capteur inertiel.....	149
Figure 3.30 - Résonateur dans son boîtier en cuivre, avec l'électronique de proximité.....	149
Figure 3.31 - Instrument inertiel.....	150
Figure 4.1 - Compteur KEYSIGHT 53230A (à gauche) et oscilloscope TEKTRONIX MSO2014B (à droite).....	152
Figure 4.2 - Amplificateur de charges réel.....	153
Figure 4.3 - Carte analogique.....	155
Figure 4.4 - Schéma électronique d'un filtre.....	155
Figure 4.5 - Diagramme de Bode des filtres analogiques.....	157

Figure 4.6 - Schéma électronique d'un comparateur.....	157
Figure 4.7 - Oscillogrammes d'événements de comparaison.....	158
Figure 4.8 - Configurations des branchements du compteur KEYSIGHT 53230A sur le module FPGA.....	160
Figure 4.9 - Déviation d'Allan (à gauche) et NSD (à droite) des résolutions fréquentielle (en bas) et temporelle (en haut) du signal d'horloge du FPGA avec filtrage et comparateurs analogiques.....	161
Figure 4.10 - Déviation d'Allan (à gauche) et NSD (à droite) de la résolution temporelle de la synthèse de fréquence et de l'algorithme $\Sigma\Delta$ après filtrage analogique.....	164
Figure 4.11 - Déviation d'Allan (à gauche) et NSD (à droite) des résolutions fréquentielle (en bas) et temporelle (en haut) de la synthèse de fréquence et de l'algorithme $\Sigma\Delta$ après filtrage et comparateurs analogiques.....	164
Figure 4.12 - Histogrammes de répartition statistique des datations par sous-horloges avec implémentation par défaut.....	165
Figure 4.13 - Implémentation contrainte du système des sous-horloges.....	166
Figure 4.14 - Histogrammes de répartition statistique des datations par sous-horloges avec implémentation contrainte.....	166
Figure 4.15 - Démodulation numérique théorique et expérimentale dans le plan de Nyquist.....	168
Figure 4.16 - Relations temporelles entre bruit de datation et bruit de démodulation numérique de l'amplitude réponse.....	170
Figure 4.17 - Conversion de couleur de bruit par démodulation numérique.....	170
Figure 4.18 - Dépendance du plancher de la déviation d'Allan en fonction de l'amplitude et de la phase du signal mesuré.....	171
Figure 4.19 - Déviations d'Allan expérimentales, de datation (à gauche), et d'amplitude en fonction de la phase du signal mesuré (à droite).....	172
Figure 4.20 - Déviations d'Allan théorique et expérimentale de la mesure inertielle du gyromètre VIG.....	175
Figure 4.21 - Cycles thermiques, hystérésis et résidu du biais du gyromètre VIG.....	176
Figure 4.22 - Cycles thermiques, hystérésis et résidu du biais du gyromètre VIG avec calibration thermique.....	177
Figure 4.23 - Déviations d'Allan théorique et expérimentale de la mesure inertielle de l'accéléromètre DIVA.....	179
Figure 4.24 - Cycles thermiques, hystérésis et résidu du biais de l'accéléromètre DIVA.....	180
Figure 4.25 - Cycles thermiques, hystérésis et résidu du facteur d'échelle de l'accéléromètre DIVA.....	180
Figure 4.26 - Amélioration potentielle de la performance du gyromètre VIG.....	182
Figure 4.27 - Amélioration potentielle de la performance de l'accéléromètre DIVA.....	183
Figure A.1- Équivalence des modèles de résonateurs.....	187
Figure A.2 - Chaîne de raideurs en série.....	188
Figure A.3 - Double raideur équivalente à la chaîne.....	192
Figure A.4 - Chaînes de raideurs en parallèle.....	192
Figure A.5 - Assemblage parallèle et série de viscosités.....	193

Figure A.6 - Modèle équivalent avec deux amortisseurs perpendiculaires.....	194
Figure B.1 - Angles polaires à déterminer.....	196
Figure B.2 - Conventions d'orientation des vecteurs et des angles.....	197
Figure B.3 - Erreur systématique de l'algorithme d'étalonnage dans le cas de l'estimation grossière de l'amplitude hors résonance.....	201
Figure B.4 - Détermination du milieu d'un arc avec 3 points.....	202
Figure B.5 - Configuration asymptotique de la détermination du point hors résonance.....	204

Index des tableaux

Tableau 1.1 - Caractéristiques géométriques et de résonance de la cellule DIVA.....	62
Tableau 1.2 - Performances inertielles de la cellule DIVA.....	63
Tableau 1.3 - Caractéristiques géométriques et de résonance de la cellule VIG.....	70
Tableau 1.4 - Performances inertielles de la cellule VIG.....	70
Tableau 4.1 - Caractéristiques des amplificateurs de charges.....	154
Tableau 4.2 - Composants électroniques des filtres.....	156

Titre : Capteurs inertiels vibrants : architecture numérique et étalonnage

Mots clés : gyromètre, accéléromètre, FPGA, quartz, étalonnage

Résumé : Des résonateurs mécaniques piézoélectriques en quartz et à grand facteur de qualité sont conçus à l'ONERA, et sont utilisés pour intégrer des capteurs inertiels.

L'accéléromètre à lame vibrante est constitué d'une masse d'épreuve qui, soumise à une accélération, induit une variation de la fréquence de résonance de la lame. Le gyromètre vibrant de type diapason présente deux modes de résonance orthogonaux, et dont les amplitudes sont modulées par l'accélération de Coriolis.

Des développements analytiques approchés en considérant l'hypothèse des grands facteurs de qualité permettent de modéliser la réponse des résonateurs à une accélération d'excitation sinusoïdale. Les asservissements de fréquence, phase et amplitude révèlent l'évolution des caractéristiques physiques de la cellule vibrante exploitable pour l'étalonnage du capteur.

Le capteur est composé de la cellule piézoélectrique encapsulée sous vide, d'une interface analogique, d'une électronique numérique synthétisée sur FPGA, et d'un ordinateur de bord. Les opérations numériques, telles que la génération du signal d'excitation et la démodulation numérique de la réponse, sans convertisseurs DAC ou ADC, sont implémentées en VHDL et en C. L'architecture de l'instrument inertiel est générique, portable, et non dépendante de composants analogiques spécifiques, dans la perspective d'applications spatiales.

La carte FPGA est connectée à l'ordinateur de bord qui pilote et traite les données provenant du résonateur. Les performances sont évaluées par étude du bruit, du facteur d'échelle et du biais du capteur en fonction des conditions thermiques, de l'étendue de mesure et de la bande passante.

Title : Vibrating inertial sensors : digital architecture and calibration

Keywords : gyroscope, accelerometer, FPGA, quartz, calibration

Abstract : High Q-factor quartz piezoelectric resonators are designed at ONERA, and used to build inertial sensors.

The vibrating beam accelerometer is made by a proof mass which induces a resonant frequency variation of the beam when an acceleration occurs. The tuning-fork vibrating gyroscope involves two perpendicular resonant modes which exchange energy each other by Coriolis effect.

Analytic calculations and approximations made from high Q-factor hypothesis bring to resonators response modeling to sinusoidal excitation. Control-loops on frequency, phase and amplitude give access to information about the evolution of the vibrating cell physical characteristics, from which sensor calibration is possible.

The sensor is composed by the piezoelectric cell under vacuum, an analog interface, digital electronics on FPGA and an on-board computer. Digital operations, as the excitation signal generation and response measurement by demodulation, without ADC or DAC converters, are implemented in VHDL and in C. The inertial instrument architecture is a generic design non dependent on specific components.

The FPGA chip is connected to the onboard computer which drives and computes data provided by the resonator. Performances are obtained by analyzing noise levels, sensor scale factor and bias according to thermal conditions, measuring scale and bandwidth.