



SUR L'INSTANT DE PREMIER PASSAGE DANS LES RISQUES DYNAMIQUES ACTUARIELS

Mohamed Amine Kacef

► To cite this version:

Mohamed Amine Kacef. SUR L'INSTANT DE PREMIER PASSAGE DANS LES RISQUES DYNAMIQUES ACTUARIELS. Pricing [q-fin.PR]. Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène (Algérie), 2021. Français. NNT: . tel-03279247

HAL Id: tel-03279247

<https://theses.hal.science/tel-03279247v1>

Submitted on 6 Jul 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

N° d'ordre : 33/2021-C/MT

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
Université des Sciences et de la Technologie HOUARI BOUMEDIENE

Faculté de Mathématiques



THÈSE DE DOCTORAT

Présentée pour l'obtention du grade de Docteur

En : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Mathématiques Financières et Actuariat

Par : KACEF Mohamed Amine

Sujet

SUR L'INSTANT DE PREMIER PASSAGE DANS LES RISQUES DYNAMIQUES ACTUARIELS

Soutenue publiquement, le lundi 05 avril 2021, devant le jury composé de :

M.	TATACHAK Abdelkader	Professeur	à l'USTHB	Président
M.	BOUKHETALA Kamal	Professeur	à l'USTHB	Directeur de thèse
M.	REMITA Mohamed Riad	Professeur	à l'UBMA	Examinateur
M.	KHALDI Khaled	Professeur	à l'UMBB	Examinateur
Mme.	SADKI Ourida	Professeur	à l'USTHB	Examinatrice
Mme.	GUESSOUM Zohra	Professeur	à l'USTHB	Examinatrice

À ma mère qui m'a soutenu depuis le début de ma formation universitaire
À ma femme qui m'a motivé et aidé durant mes travaux de recherche
À mon père qui m'a inculqué mes premières notions de finance

Remerciements

Je tiens à remercier ma famille qui m'a apporté tout le soutien moral et physique durant la période d'élaboration de cette thèse, je commence par ma mère qui m'a suivi depuis mon jeune âge, qui m'a soutenu dans mon parcours universitaire et qui m'a donné toute la volonté d'avancer dans le domaine de la recherche scientifique. A mon père également, qui était là pour écouter mes problèmes et m'a toujours donné des conseils pour avancer dans la vie. A ma femme qui m'a aidé pendant mes travaux de recherche et m'a apporté un énorme soutien moral. A toute ma famille, mes sœurs, mes beaux-parents qui m'ont soutenu et encouragé à entamer une carrière de chercheur universitaire.

J'adresse également mes sincères remerciements à mon directeur de thèse, le professeur BOUKHETALA.

Je remercie également les membres du jury, à commencer par le Prof. TATACHAK qui a accepté de présider le jury, le Prof. REMITA et le Prof. KHALDI qui nous ont aidé à améliorer la qualité du manuscrit et nous ont fourni plusieurs détails financiers concernant le contenu de cette thèse. Je remercie aussi Prof. SADKI et Prof. GUESSOUM pour leur contribution scientifique et leurs remarques pertinentes qui nous ont permis d'améliorer encore une fois la qualité du manuscrit.

RÉSUMÉ

Dans cette thèse, nous avons étudié le problème de l'instant de premier passage dans la tarification des options qui sont des produits financiers permettant le transfert des risques liés à la dynamique stochastique des marchés financiers. Dans ce cadre, nous avons développé un nouveau produit dérivé appelé **option géométrique d'Istanbul**. Cette option est une extension des options asiatiques puisque son prix dépend du prix moyen de l'actif sous-jacent sur une période de temps aléatoire. De plus, comme dans le cas des options à barrière, le gain d'une option géométrique d'Istanbul dépend de l'instant de premier passage d'un mouvement Brownien géométrique puisque nous supposons que le modèle économique choisi pour l'étude est celui de Black-Scholes (1973). Une formule d'approximation est donnée sous forme fermée pour une option géométrique d'Istanbul dans le cas d'une option d'achat (Call) et également pour une option de vente (Put). Dans nos approches numériques, nous adoptons la technique de Monte-Carlo avec réduction de la variance de l'estimateur obtenu par la méthode des variables de contrôle. Cette approche numérique nous a permis de valider l'efficacité de nos formules d'approximation analytiques puisque le prix de l'option obtenu numériquement est très proche de celui que nous proposons pour divers paramètres d'entrée tels que le taux d'intérêt, la volatilité, le prix initial, le prix d'exercice et la date d'échéance. Par ailleurs, nous avons montré, numériquement, que le prix de notre option est relativement moins cher que celui d'une option arithmétique d'Istanbul qui a été proposée pour la première fois par Michel Jacques en 1979.

Mots-clés : Instant de premier passage, premier temps d'atteinte, processus stochastique, tarification des options, options géométriques d'Istanbul, approximation de forme fermée, simulation de Monte-Carlo, méthode des variantes de contrôle.

ABSTRACT

In this thesis, we studied the problem of the first passage time in options pricing which are financial products allowing the transfer of risks related to the stochastic dynamics of financial markets. In this framework, we developed a new derivative called **Geometric Istanbul Option**. This option is an extension of Asian options since its price depends on the average price of the underlying asset over a random period of time. Moreover, as in the case of barrier options, the payoff of a geometric Istanbul option depends on the first passage time of a geometric Brownian motion since we assume that the economic model chosen for the study is the Black-Scholes (1973) model. An approximation formula is given in closed-form for a geometric Istanbul option in both cases of call and put options. In our numerical approaches, we adopt the Monte-Carlo technique with reduction of the variance of the estimator obtained by the control variates method. This numerical approach has allowed us to validate the efficiency of our analytical approximation formulas since the option price obtained numerically is very close to the one we propose for various input parameters such as interest rate, volatility, initial price, strike price and maturity date. Furthermore, we have shown, numerically, that our option price is relatively cheaper than that of an arithmetic Istanbul option that was first proposed by Michel Jacques in 1979. **Keywords** : First passage time, first hitting time, stochastic process, options pricing, geometric Istanbul options, closed-form approximation, Monte-Carlo simulation, Control variates method.

Lexique

Abréviations

v.a. variable(s) aléatoire(s).

i.i.d. indépendantes et identiquement distribuées.

p.s. presque sûrement.

Notations

Soient X et Y deux variables aléatoires. Soit $A \in \Omega$ un évènement. Nous considérons les notations suivantes :

$\mathbf{1}_A$	Fonction indicatrice sur A .
$\mathbb{P}(X \in A)$	La probabilité que X appartient à l'ensemble A .
$\mathbb{E}^m(X)$	Espérance de X sous la mesure de probabilité m .
$\text{Cov}(X, Y)$	Covariance entre X et Y .
ρ_{XY}	Le coefficient de corrélation entre X et Y .
$\text{Var}(X)$	Variance de X .
σ_X	L'écart-type de X .
$X \stackrel{d}{=} Y$	Les v.a. X et Y ont la même distribution de probabilité.
dx	Une quantité infinitésimale.
$\Phi(x)$	Fonction de répartition en x d'une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
$\phi(x)$	Fonction de densité en x d'une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
$\mathcal{L}^{-1}[F]$	Inverse de la transformé de Laplace de la fonction F .
$ x $	La valeur absolue de la variable x .
$\max(x)$	Le maximum de la variable x .
$\max(x, y)$	Le maximum entre x et y .
$\min(x)$	Le minimum de la variable x .
$\min(x, y)$	Le minimum entre x et y .
$\inf\{A\}$	La borne inférieure de l'ensemble A .
$\square$	Fin de la démonstration.
$x_+ = \max(0, x)$.	

Table des matières

Résumé

Introduction Générale	1
1 Le problème de l’instant de premier passage pour les processus stochas- tiques	6
1.1 Processus stochastiques : définitions et notations	7
1.2 Instant de premier passage pour un processus stochastique	8
1.3 Distribution des instants de premier passage pour un mouvement Brownien standard	17
1.4 Distribution des instants de premier passage pour un mouvement Brownien arithmétique	29
1.5 Distribution des instants de premier passage pour un mouvement Brownien géométrique	36
2 Gestion des risques financiers par des options	50
2.1 La notion de risque en finance	51
2.2 Les options	52
2.3 Tarification des options dans le modèle Black-Scholes	53
2.4 Options dont le payoff dépend de l’instant de premier passage	63
3 Une approximation de forme fermée du prix d’une option d’Istanbul à moyenne géométrique	68
3.1 Options d’Istanbul	69
3.2 Tarification des options d’Istanbul à moyenne géométrique	70
3.3 Approximation Log-normale pour le prix d’une option d’Istanbul à moyenne arithmétique	77
3.4 Analyse numérique	78
Conclusion	84
Perspectives de recherche	85
Annexe A	86
Annexe B	88
Bibliographie	91

Liste des figures

1.1	Cours du Pétrole Brent (Brent Crude Oil) du 06/11/2020 de 02 :20 à 13 :58. Notes : les prix sont donnés en dollars américain (USD) avec des cotations chaque minute. Source : boursorama.com	8
1.2	Trajectoire d'un mouvement Brownien standard B_t issu de zéro qui atteint pour la première fois la courbe de la fonction $D(t) = \exp(2t - 1.5)$ à l'instant 0.221 sur l'intervalle de temps $[0, 1]$. Notes : Le nombre de réalisations du mouvement Brownien par méthode Monte-Carlo est de $n = 1000$	9
1.3	Trajectoire d'un mouvement Brownien standard B_t issu de zéro qui atteint pour la première fois la courbe de la fonction $D(t) = t - 0.5$ à l'instant 0.628 sur l'intervalle de temps $[0, 1]$. Notes : Le nombre de réalisations de B_t est de $n = 50$. Le graphique montre que, l'instant de premier passage t_D^B est compris entre les deux instants de discrétisation 0.62 et 0.64.	11
1.4	Simulation de l'instant de premier passage avec un pont Brownien. Notes : Dans la Figure (a), une trajectoire d'un mouvement Brownien standard B_t est simulé avec $N = 100$. Le premier instant d'intersection avec la courbe de la fonction $D(t) = \sin(t^2 - 0.25)$ est localisé entre les deux instants de discrétisation 0.70 et 0.72. La Figure (b) montre une simulation d'un pont Brownien sur l'intervalle $[0.71, 0.72]$. L'instant de premier passage à $D(t)$ par le pont Brownien est estimé à 0.718 contrairement à l'interpolation linéaire qui donne un instant d'intersection proche de 0.7126.	12
1.5	Convergence de l'estimateur de Monte-Carlo. Notes : Nous simulons un échantillon des réalisations de la v.a. $T_{0.56}^B = \inf\{t \in [0, T] : B_t \geq 0.56\}$ où B_t est un mouvement Brownien standard issu de zéro. Le nombre de points simulés par trajectoire est de $n = 1000$. Le nombre de trajectoires N de B_t varie de 50 à 3000. La distribution $\mathbb{P}(T_{0.56}^B \leq t)$ est approximée à l'instant $t = 0.354$ pour chaque simulation. La valeur théorique est $\mathbb{P}(T_{0.56}^B \leq 0.354) = 0.3466$	13
1.6	Comparaison entre l'estimateur de Monte-Carlo standard et celui obtenu avec les techniques de réduction de la variance dans Exemple 1.	17
1.7	Trajectoire d'un mouvement Brownien standard sur l'intervalle $[0, 1]$ simulé à partir de $n = 100$ points.	20
1.8	Flux de $N = 100$ trajectoires Browniennes sur l'intervalle $[0, 1]$ avec $n = 100$ points simulés par trajectoire.	20
1.9	Mouvement Brownien standard réfléchi à partir de l'instant de premier passage au seuil a	25

1.10	Simulation d'un échantillon des instants de premier passage au seuil $a = 0.127$ par un mouvement Brownien standard.	28
1.11	Comparaison entre la courbe de la densité et l'histogramme des instants de premier passage pour un mouvement Brownien standard	29
1.12	Impact du changement du signe de la dérive sur l'instant de premier passage pour un mouvement Brownien arithmétique.	33
1.13	Comparaison entre la courbe de la densité $f_{T_a^X}$ et l'histogramme de l'échantillon des T_a^X	35
1.14	Instant de première surface d'un mouvement Brownien arithmétique	42
1.15	Flux de 10 trajectoires d'un pont Brownien X_t avec $X_0 = -1$ et $X_1 = 1$. Notes : Le nombre de réalisations par trajectoires est $n = 100$	45
1.16	Flux de trajectoires d'un mouvement Brownien géométrique sur l'intervalle $[0, 1]$	48
1.17	Comparaison entre la courbe de la densité $f_{T_a^S}$ et l'histogramme de l'échantillon des T_a^S	49
2.1	Évolution de la valeur intrinsèque et de la valeur temps d'une option d'achat européenne par rapport au prix de l'actif sous-jacent pour différentes échéances. Notes : Le prix du Call est calculé avec la formule de tarification (2.37).	59
3.1	Valeurs de $\mu^2/8$ pour r compris de 1% à 8% et σ compris de 10% à 50%. .	72
3.2	Comparaison des prix d'options d'achat d'Istanbul pour les deux types de moyennes (Arithmétique et Géométrique). Notes : Les prix des options d'achat d'Istanbul sont notés GIC_B et AIC_B pour les cas de moyenne géométrique et arithmétique, respectivement. Nous prenons comme paramètres d'entrée pour le graphique de gauche : S_0 de 70 à 100, $\sigma = 0,3$, $r = 0,05$, $T = 1$, $B = 105$ et $K = 90$. Dans le graphique de droite, nous considérons les paramètres d'entrée : K de 70 à 100, $\sigma = 0.3$, $r = 0.05$, $T = 1$, $B = 85$ et $S_0 = 79$	82
3.3	Le Delta d'une option d'achat géométrique d'Istanbul. Notes : Les tracés de gauche sont construits avec les paramètres d'entrée suivants : $r = 0,05$, $T = 1$, $B = 85$ et $K = 80$. Dans les tracés de droite, nous prenons : $r = 0,05$, $\sigma = 0,3$, $B = 85$ et $S_0 = 80$. La valeur de Delta est approximée numériquement par une différence finie de premier ordre.	83

Liste des tableaux

3.1	Comparaison entre le prix d'une option d'achat géométrique d'Istanbul obtenu avec notre formule d'approximation analytique (3.11) et celui obtenu avec les simulations de Monte-Carlo.	79
3.2	Comparaison entre le prix d'une option d'achat géométrique d'Istanbul obtenu avec notre formule d'approximation analytique (3.17) et celui obtenu avec les simulations de Monte-Carlo.	80
3.3	Erreurs relatives lorsque la maturité est plus longue	81
3.4	Erreurs relatives pour différentes volatilités	81

Introduction Générale

Depuis les travaux de [Bachelier \[1900\]](#) sur la modélisation des cours de la bourse de Paris, la théorie des processus stochastiques est devenue plus que nécessaire dans le monde de la finance moderne. En effet, les processus stochastiques sont largement impliqués dans la modélisation financière dans les secteurs de l'assurance et des marchés financiers. Cette modélisation permet d'avoir une idée sur le comportement futur du marché afin de mieux gérer les risques de perte d'argent ou de contrats à moyen et à court terme. En particulier, pour les matières premières négociées en bourse comme le pétrole brut et le gaz, il est naturel de dire que l'évolution du prix de ces produits dépend de plusieurs facteurs, à savoir l'état du marché (offre et demande), la nature du produit négocié, les intempéries, les pandémies, les crises politiques, le terrorisme, les guerres, etc. Il est donc très difficile, en pratique, de modéliser l'évolution future d'une matière première quelle que soit sa nature. Cependant, les négociants sur les marchés financiers ne s'intéressent qu'à la manière dont les prix des actifs financiers sont influencés par les facteurs que nous venons de mentionner. En pratique, seule la tendance actuelle du marché sera prise en compte pour toute projection dans l'avenir. D'une manière générale, les observateurs des prix des actifs financiers s'intéressent à trois indicateurs, à savoir :

- La direction du prix (dérive), qui peut être soit à la hausse, à la baisse ou stagnante.
- La volatilité du marché.
- L'intensité des sauts.¹

Ces indicateurs dépendent à leur tour de l'état du marché pendant la durée de la négociation. Pour les contrats à court terme, l'effet du temps n'est généralement pas pris en compte dans la modélisation et par conséquent les indicateurs énumérés ci-dessus seront considérés comme des quantités prédéterminées par la dynamique du marché et non pas par la durée de vie des contrats. Par ailleurs, pour les contrats à moyen et long terme, l'effet du temps est important, d'où l'intérêt d'introduire des modèles économiques avec des indicateurs dépendant du temps.

La théorie des processus stochastiques notamment celle des équations différentielles stochastiques a connu une évolution considérable après les travaux de [Kiyosi Itô \(1915-2008\)](#) qui s'est inspiré, quand à lui, des travaux d'éminents scientifiques tels que [Paul Pierre Lévy \(1886-1974\)](#) et [Andreï Nikolaevitch Kolmogorov \(1903-1987\)](#). Le calcul d'Itô

1. Les prix des actifs financiers cotés en bourse peuvent chuter (ou augmenter) fortement, par exemple, cela peut se produire suite à la mise en liquidation d'une société actionnaire, cette possibilité doit être prise en compte dans toute modélisation financière. En littérature, la plupart des modèles économiques comportant des sauts sont construits avec le processus de poisson (pour plus de détails sur le processus de poisson, voir [\[Last et Penrose, 2017\]](#)).

a révolutionné le monde de la finance notamment après l'arrivée de nouveaux produits de couverture capables de transférer le risque de perte en capital en échange d'une commission généralement payée au début du contrat, ces produits sont connus sur les marchés financiers sous le nom de *options*. En 1973, un marché mondial des options a été créé aux États-Unis d'Amérique, il s'agit du Chicago Board Options Exchange (CBOE). Peu après, [Fischer Sheffey Black \(1938-1995\)](#) et [Myron Samuel Scholes \(1941-\)](#) ont inventé l'un des plus importants modèles économiques dans le monde. Nommé à leur nom, le modèle de Black-Scholes est largement utilisé pour l'évaluation des prix des options. Il permet de calculer la valeur théorique d'une option en utilisant les paramètres du marché, à savoir le prix actuel de l'action, les dividendes, le prix d'exercice, le taux d'intérêt, la période d'expiration et la volatilité du marché. Si le modèle de Black-Scholes donne des formules analytiques pour le prix des options, c'est principalement parce que le prix d'un actif financier est modélisé par un mouvement Brownien géométrique.

Dans cette thèse, nous nous concentrons sur un problème très présent dans la finance notamment dans la tarification (calcul du prix) des produits dérivés. Pour illustrer cette problématique, supposons qu'un investisseur observe l'évolution aléatoire du prix d'un actif financier coté en bourse au cours d'une période donnée, et supposons également que le prix de cet actif soit modélisé par un processus stochastique. Pour cet investisseur, il est important d'avoir une idée sur le premier moment où le processus stochastique atteint un certain seuil appelé *barrière* qui peut ou non être profitable à un investissement pendant la période de négociation. Ce moment est connu dans la littérature par **instant de premier passage** ou **instant de première frappe**.² Il s'agit d'une v.a. dont la distribution n'est connue que pour une classe réduite de processus stochastiques tels que le mouvement Brownien et ces principales transformations. La distribution de probabilité de l'instant de premier passage permet, si elle est analytiquement connue, d'avoir en moyenne, la localisation du premier instant où la barrière est atteinte, cette information est cruciale pour l'élaboration de bonnes stratégies d'investissement sur les marchés financiers.

Le problème de l'instant de premier passage a été étudié pour la première fois par [Bachelier \[1900\]](#) dans le contexte d'un mouvement Brownien³ standard et par [Schrodinger \[1915\]](#) et [Smoluchowski \[1915\]](#) dans le cas d'un mouvement Brownien arithmétique. Plusieurs travaux scientifiques sur le sujet ont été développés pour d'autres classes de processus stochastiques, par exemples, nous citons les travaux de [Ricciardi et Sato \[1988\]](#), [Alili et al. \[2005\]](#) et [Linetsky \[2004\]](#) et [Yi \[2010\]](#) dans le cas d'un processus de [Uhlenbeck et Ornstein \[1930\]](#). Pour un processus stochastique impliquant des sauts tel que le processus de Lévy⁴, la distribution de l'instant de premier passage est étudié dans [Pakes \[1996\]](#), [Kou et Wang \[2003\]](#) et [Hurd et Kuznetsov \[2009\]](#). En général, il existe deux approches pour déterminer la distribution de l'instant de premier passage. La première technique est probabiliste, elle consiste à réécrire le problème sous la forme d'une équation de Fokker-Planck (voir [Ding et Rangarajan, 1996](#)). La solution de cette équation est une transformée de Laplace dont l'inversion donnera la densité de l'instant de premier passage comme dans

2. En anglais, on dit *first passage time* ou *first hitting time*

3. Dans sa thèse de doctorat intitulée *La théorie de la spéculation*, soutenue en 1900, Louis Bachelier a montré que les accroissements du prix d'un actif coté en bourse sont de distribution gaussienne. Ce résultat est principalement dû au fait que Bachelier a supposé que la distribution de transition du prix de cet actif du point x à $x + dx$ et cela de l'instant t à $t + dt$ est une solution d'une équation de la chaleur, cette idée a été mise en lumière en 1905 par Albert Einstein.

4. Pour plus de détails sur le modèle de Lévy, le lecteur peut consulter le livre de [Applebaum \[2009\]](#).

l'approche proposée par [Ding et Rangarajan \[2004\]](#) pour le cas d'un mouvement Brownien standard. La deuxième technique consiste à utiliser des méthodes numériques telles que les simulations de Monte-Carlo. La méthode de Monte-Carlo est largement utilisée en finance puisqu'elle est très efficace et peut être envisagée pour plusieurs classes de processus stochastiques y compris les processus de diffusion comme dans [\[Boukhetala, 1998a\]](#), [\[Boukhetala, 1998b\]](#), [\[Giraud et al., 2001\]](#), [\[Opplestrup et al., 2006\]](#), [\[Ichiba et Kardaras, 2011\]](#), [\[Drugowitsch, 2016\]](#) et [\[Herrmann et Zucca, 2019\]](#). En littérature, on considère parfois le problème de l'instant de premier passage à une barrière mobile (dépendant du temps) comme dans [Tuckwell et Wan \[1984\]](#). D'autre part, le problème de l'instant de premier passage n'est pas seulement traité pour une seule barrière. Par exemple, un investisseur dans un produit financier devra surveiller à la fois les hausses de prix qui sont préjudiciables à l'investissement mais aussi les fortes baisses qui sont souvent la cause de la perte du capital investi. Ainsi, il est important d'étudier la distribution de l'instant de premier passage dans le cas de deux barrières comme dans [Lin \[1998\]](#), [Pelsser \[2000\]](#), [Luo \[2001\]](#) et [Fernández et al. \[2013\]](#).

La théorie de l'instant de premier passage peut être appliquée en finance à la tarification des options à barrière, qui sont parmi les produits dérivés les plus répandus sur les marchés financiers. Les premières théories sur les options à barrière sont apparues dans les travaux de [Merton \[1973\]](#), [M. et Reiner \[1991\]](#) et [Rich \[1994\]](#), il s'agit d'une catégorie d'options dont la tarification nécessite la connaissance de la distribution de l'instant de premier passage pour le modèle de tarification choisi.

Dans cette thèse, nous avons développé une nouvelle classe d'options appelée **options d'Istanbul géométrique**. Ces produits financiers sont des contrats hybrides ayant les caractéristiques des options à barrière, puisque leur prix dépend de l'instant de premier passage, mais aussi, cette nouvelle classe d'options peut être considérée comme une extension des options asiatiques à moyenne géométrique étudiées par [Kemna et Vorst \[1990\]](#).

Les options asiatiques sont des produits dérivés qui dépendent du prix moyen de l'actif sous-jacent sur une période donnée. L'une des raisons de l'introduction des options asiatiques sur les marchés financiers est que leur prix est inférieur à celui des options européennes car la moyenne réduit les fluctuations de la valeur intrinsèque à l'échéance (voir [Ye \[2008\]](#)). En pratique, pour la tarification d'une option asiatique, deux types de moyennes peuvent être considérés, la moyenne arithmétique ou la moyenne géométrique. D'autre part, la période de calcul de la moyenne est généralement connue à l'avance, puisqu'elle est calculée à partir de la date d'acquisition du contrat jusqu'à son échéance.

Notre contribution aux options d'Istanbul consiste à considérer une moyenne géométrique du prix de l'actif sous-jacent sur une période aléatoire. La principale raison d'envisager une période aléatoire est qu'intuitivement, dans ce type de contrat, il n'est pas nécessaire de calculer la moyenne des fluctuations si elles sont très faibles. Ce n'est que si les fluctuations deviennent importantes pour un éventuel investissement qu'il faut calculer la moyenne. Par ailleurs, afin que les fluctuations du cours deviennent importantes, le prix de l'actif sous-jacent doit également devenir grand. Cela dépend évidemment de la dynamique du marché ainsi que des facteurs externes que nous avons mentionnés dans le premier paragraphe de cette introduction. Une deuxième motivation pour l'introduction des options d'Istanbul est que ces produits peuvent être considérés comme une partie de remboursement ajoutée au contrat d'une option à barrière. En effet, il serait utile pour un investisseur de disposer d'un contrat dans lequel une partie du montant investi pour l'achat

d'une option à barrière peut être remboursée si les événements attendus ne se réalisent pas à l'échéance. Nous proposons donc d'activer le calcul de la moyenne dès que le prix de l'actif sous-jacent atteint pour la première fois une barrière préalablement fixée dans les closes du contrat. Si le prix de l'actif sous-jacent n'atteint pas la barrière avant l'expiration de l'option, alors l'option a la même valeur qu'une option européenne standard. Par contre, si ce prix atteint la barrière, l'option se transforme en une option asiatique dont la valeur finale dépendant de la moyenne calculée de l'instant de premier passage à la barrière jusqu'à la date d'échéance du contrat, cela est le principe fondamentale d'un contrat d'option d'Istanbul.

Historiquement, les options d'Istanbul ont été introduites pour la première fois par [Michel Jacques \(1997\)](#). Le prix de ces produits financiers dépend de l'instant de premier passage, tout comme les options Parisiennes développées par [Chesney et al. \[1997\]](#), et dont le gain dépend du fait que la barrière a été atteinte ou non pendant une période prédéterminée. Dans le cas des options Parisiennes, le franchissement de la barrière affecte l'exercice de l'option et non sa valeur intrinsèque, il en va de même pour les options à barrière. Or, pour les options d'Istanbul, la valeur intrinsèque à l'échéance est elle-même influencée par l'instant de premier passage à la barrière. Par ailleurs, il existe des formules analytiques de tarification pour les options asiatiques avec une moyenne géométrique dans le cadre du modèle de Black-Scholes (voir [Kemna et Vorst, 1990](#)). En revanche, aucune formule de tarification n'est connue pour une option asiatique à moyenne arithmétique, cela peut s'expliquer par le fait que la distribution d'une moyenne arithmétique de variables aléatoires corrélées et distribuées selon une loi de probabilité log-normale n'est pas connue analytiquement. Il existe cependant plusieurs techniques d'approximation numérique pour ces options, comme le proposent [Han et Lai \[2010\]](#), [Sun et al. \[2013\]](#) et [Willems \[2019\]](#). De même pour le cas d'une option d'Istanbul à moyenne arithmétique, il n'y a pas de formule fermée pour le prix, seules des techniques d'approximation similaires à celles des options asiatiques sont utilisées (voir [Jacques, 1997](#)).

Dans cette thèse, nous abordons le problème de la tarification des options d'achat et de vente d'Istanbul à moyenne géométrique continue, nous montrons que le prix d'une telle option peut être approché avec une formule analytique obtenue grâce à un développement de Taylor au voisinage de zéro.

Cette thèse est organisée de la façon suivante : Dans le Chapitre 1, nous donnons une définition mathématique de l'instant de premier passage ainsi que ces propriétés théoriques. Nous aborderons également le mouvement Brownien avec ces propriétés théoriques notamment martingale et probabiliste, comme le principe de réflexion qui est essentiel pour déterminer la distribution de probabilité de l'instant du premier passage. Dans le cas d'un mouvement Brownien arithmétique (avec dérive), nous montrons comment le théorème de Girsanov permet de construire un nouveau mouvement Brownien standard défini sur une probabilité équivalente à la probabilité historique. Nous calculons la distribution de l'instant de premier passage d'un mouvement Brownien arithmétique et montrons ensuite qu'une simple transformation est suffisante pour obtenir la distribution de probabilité dans le cas d'un mouvement Brownien géométrique. Afin d'étayer nos résultats théoriques, nous effectuons des simulations de Monte-Carlo de la distribution de probabilité de l'instant de premier passage pour un mouvement Brownien standard, arithmétique et géométrique.

Le Chapitre 2 est consacré aux concepts financiers, en particulier la gestion du risque financier à travers des instruments très puissants tels que les options, qui sont des produits dérivés permettant un transfert du risque par le paiement d'une commission appelée *prime de couverture*. Cette gestion du risque est abordée dans un environnement limitant la possibilité de gain sans investissement initial, cette hypothèse appelée **absence d'opportunité d'arbitrage** est discutée de manière théorique. Nous considérons le modèle standard de Black-Scholes pour la tarification des options européennes. Nous fournissons quelques formules de tarification pour les options à barrière que nous avons utilisé dans nos calculs du Chapitre 3. La formule de prix approximative proposée par [Jacques \[1997\]](#) pour le cas d'une option arithmétique d'Istanbul (AIO) est également donnée dans ce chapitre. Finalement, nous clôturons le Chapitre 2 par le concept d'options asiatique à barrière.

Dans le Chapitre 3, nous proposons une formule d'approximation analytique pour une option d'achat géométrique d'Istanbul (GIC) ainsi que celle d'une option de vente géométrique d'Istanbul (GIP) sous le modèle de Black-Scholes. Nos formules de tarification approximative sont obtenues sous forme fermée en utilisant une expansion de Taylor de second ordre. Dans le cas d'un Call, nous comparons nos résultats théoriques avec ceux des simulations de Monte-Carlo en utilisant la méthode des variables de contrôle. Dans le même chapitre, nous réalisons également une étude comparative des prix avec une option d'achat arithmétique d'Istanbul (AIC). Enfin, nous étudions les effets des variations du prix de l'actif sous-jacent sur la valeur de l'option GIC.

Les résultats théoriques obtenus dans le Chapitre 3 ont été publiés dans International Journal of Revenue Management (IJRM). La référence de l'article est la suivante : [Kacef et Boukhetala \[2020\]](#).

Chapitre 1

Le problème de l'instant de premier passage pour les processus stochastiques

Sommaire

1.1	Processus stochastiques : définitions et notations	7
1.2	Instant de premier passage pour un processus stochastique .	8
1.3	Distribution des instants de premier passage pour un mouvement Brownien standard	17
1.4	Distribution des instants de premier passage pour un mouvement Brownien arithmétique	29
1.5	Distribution des instants de premier passage pour un mouvement Brownien géométrique	36

1.1 Processus stochastiques : définitions et notations

De nos jours, les données sont collectées de manière séquentielle dans le temps. Ces informations sont nécessaires pour un très grand nombre de domaines, tels que la météorologie, les activités sismiques, la démographie, les indices boursiers, etc. En pratique, les observations successives dans les domaines que nous venons de mentionner ne sont généralement pas indépendantes. Nous appelons ces observations par processus stochastique.

Définition 1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathcal{T}$ un ensemble arbitraire (**espace d'indexation**). Une famille de variables aléatoires notée $X = (X_t, t \in \mathcal{T})$ ou $X = (X_t)_{t \in \mathcal{T}}$, définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et ayant des valeurs dans un ensemble $\mathcal{S}$ (**espace d'états**) est appelée processus stochastique.

Ainsi, selon la Définition 1, un processus stochastique X est une fonction de deux variables qui fait correspondre à $(t, \omega) \in \mathcal{T} \times \Omega$, l'image $X_t(\omega) = X(t, \omega) \in \mathbb{R}$. De plus, à chaque indice t fixé dans $\mathcal{T}$, la fonction $\omega \mapsto X_t(\omega)$ est une variable aléatoire. La notion de processus stochastique généralise donc celle de la variable aléatoire.

Remarque 1. Pour l'ensemble $\mathcal{T}$, on peut soit considérer une indexation sur les nombres naturels, c'est-à-dire, $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ou sur les nombres réels non négatifs à savoir, $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+$, alors on dira que le processus stochastique est en temps discret ou en temps continu, respectivement.

Les processus stochastiques sont aussi appelés *processus aléatoires*, *fonctions aléatoires* ou simplement *processus*. Le paramètre $t \in \mathcal{T}$ est parfois interprété comme le *temps*. Par exemple, X_t peut être le prix d'un actif financier à l'instant t . Parfois, l'indice t est considéré comme un *espace*. Par exemple, X_t peut être la température de l'air mesurée à un endroit dont les coordonnées sont $t = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. De la même manière que t peut être considéré comme un *espace-temps*. Par exemple, X_t peut être la vitesse du vent à l'instant $s \in \mathbb{R}_+$ en un lieu de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, de sorte que l'espace d'indexation est tridimensionnel, $t = (x, y, s) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$, il s'agit dans ce cas d'un processus stochastique dit *spatio-temporels*.

Définition 2. La fonction $t \mapsto X_t(\omega)$ définie sur l'ensemble des indices $\mathcal{T}$ et prenant des valeurs dans $\mathbb{R}$ est appelée une **trajectoire**¹ du processus stochastique X associé à l'événement $\omega \in \Omega$. On dit qu'un processus X a des trajectoires continues si pour tout $\omega \in \Omega$, on a que, $t \mapsto X_t(\omega)$ est une fonction continue par rapport au temps t .

A titre d'exemple, la Figure 1.1 montre l'évolution aléatoire des prix du pétrole brut qui est généralement considérée comme un processus stochastique défini sur une période de temps préalablement connue appelée *durée de cotation*.

Définition 3. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Une famille $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ de σ -algèbres sur Ω est appelée **filtration** si pour tout $t \geq s$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, cela veut dire qu'une filtration est une suite croissante (au sens de l'inclusion) de sous-tribus de $\mathcal{F}$. Le quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ est appelé un espace de probabilité filtré.

Définition 4. Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit **adapté** à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ si pour tout $t \geq 0$ fixé, la v.a. X_t est $\mathcal{F}_t$ -mesurable. La **filtration naturelle** d'un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est définie par, $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$, c'est la plus petite tribu qui adapte le processus X .

1. En anglais, on dit *sample path*.



FIGURE 1.1 – Cours du Pétrole Brent (Brent Crude Oil) du 06/11/2020 de 02 :20 à 13 :58. Notes : les prix sont donnés en dollars américain (USD) avec des cotations chaque minute. Source : [boursorama.com](https://www.boursorama.com)

1.2 Instant de premier passage pour un processus stochastique

Définition 5. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit D une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Le premier instant où la trajectoire du processus X_t atteint la courbe de la fonction D est défini par

$$\tau_D^{X, x_0} \equiv \begin{cases} \inf\{\tau \geq 0 : X_\tau \geq D(\tau) | X_0 = x_0\}, & \text{si } x_0 < D(0), \\ \inf\{\tau \geq 0 : X_\tau \leq D(\tau) | X_0 = x_0\}, & \text{si } x_0 > D(0). \end{cases}$$

La v.a. τ_D^{X, x_0} est appelée **instant de premier passage** ou **premier temps d'atteinte** de la barrière D par le processus stochastique X_t .

Dans la Définition 5, les valeurs de la v.a. τ_D^{X, x_0} dépendent tous des trajectoires continues du processus X_t . Il est donc nécessaire de mettre par convention que $\tau_D^{X, x_0} = +\infty$ p.s., si la courbe de la fonction D n'est pas atteinte durant la période d'observation.² La distribution de probabilité de la v.a. τ_D^{X, x_0} est définie pour tout $t > 0$ par

$$\mathbb{P}(\tau_D^{X, x_0} \leq t) = \mathbb{P}(X_\tau \geq D(\tau), \text{ pour un certain } \tau \in [0, t]) \quad (1.1)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(X_\tau < D(\tau), \forall \tau \in [0, t]). \quad (1.2)$$

La densité de probabilité de τ_D^{X, x_0} est définie pour tout $t > 0$ par

$$f_{\tau_D^{X, x_0}}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{P}(\tau_D^{X, x_0} \leq t). \quad (1.3)$$

2. Nous considérons des périodes d'observation de la forme $[0, T]$, où $T < \infty$.

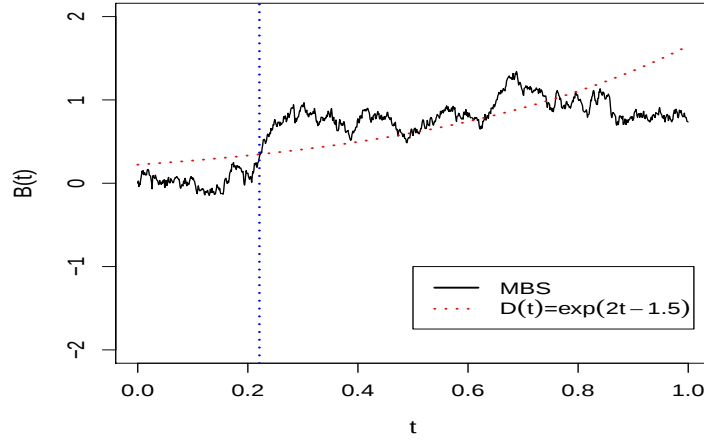


FIGURE 1.2 – Trajectoire d'un mouvement Brownien standard B_t issu de zéro qui atteint pour la première fois la courbe de la fonction $D(t) = \exp(2t - 1.5)$ à l'instant 0.221 sur l'intervalle de temps $[0, 1]$. Notes : Le nombre de réalisations du mouvement Brownien par méthode Monte-Carlo est de $n = 1000$.

La distribution de probabilité de l'instant de premier passage est connue analytiquement que pour une classe réduite de processus stochastiques tel que le mouvement Brownien et ces transformations arithmétique et géométrique. Souvent on réduit la difficulté du problème en considérant un obstacle fixe [Bachelier, 1900] ou linéaire [Abundo, 2002] voir même exponentielle [Kunitomo et Ikeda, 1992], autrement dit, en prend $D(t) = a$ ou $D(t) = at + b$ et aussi $D(t) = \exp(at + b)$ avec a et b deux nombres réels connus.

Remarque 2. Dans cette thèse, nous allons nous intéresser uniquement au problème de détermination de la distribution de l'instant de premier passage à un obstacle fixe ($D(t) = a \in \mathbb{R}$) par le mouvement Brownien et ces principales transformations.

1.2.1 Distribution des instants de premier de passage via la méthode de Monte-Carlo

Que ça soit dans la finance ou la physique, le problème de l'instant de premier passage est souvent résolu par des approches numériques. Dans la plus part des cas, on fait appel à des techniques de simulation Monte-Carlo simples et rapides à réaliser. Dans ce qui va suivre nous allons discuter les avantages et les inconvénients de la méthode Monte-Carlo tout en décrivant le principe de base de cette dernière.

Considérons le problème de l'estimation de l'espérance d'une fonction d'une certaine v.a. X :

$$\mu = \mathbb{E}(\mathcal{H}(X)), \quad (1.4)$$

où $\mathcal{H}$ est une fonction arbitraire qui vérifie la condition $\mathbb{E}(|\mathcal{H}(X)|) < \infty$.

La méthode de simulation de Monte-Carlo pour estimer μ est réalisée en deux étapes :

1. Générer n variables aléatoires i.i.d., $X_1, X_2, \dots, X_n$, qui ont la même distribution que X .

2. L'estimateur de μ est défini comme étant la moyenne empirique de l'échantillon des $X_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathcal{H}(X_i). \quad (1.5)$$

Par la loi forte des grand nombres de [Kolmogorov \[1933\]](#), la moyenne empirique $\hat{\mu}_N$ converge p.s. pour n assez grand vers μ , c'est-à-dire que nous avons

$$\mathbb{P} \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{\mu}_n = \mu \right] = 1. \quad (1.6)$$

De plus, $\hat{\mu}_n$ est un estimateur sans biais de μ puisque

$$\mathbb{E}(\hat{\mu}_n) = \mu. \quad (1.7)$$

Pour $t > 0$ fixé, nous pouvons avoir une approximation de $\mathbb{P}(\tau_{D,x_0}^X \leq t)$ en utilisant la méthode Monte-Carlo. En effet, le problème de la distribution de l'instant de premier passage est similaire à (1.4) puisque nous pouvons écrire que

$$\mathbb{P}(\tau_{D,x_0}^X \leq t) = \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{\tau_{D,x_0}^X \leq t\}} \right]. \quad (1.8)$$

L'algorithme suivant est utilisé pour approximer (1.8), cet algorithme est incorporé dans le logiciel **Sim.DiffProc** qui est un package sous langage R développé par [Guidoum et Boukhetala \[2020\]](#).

Algorithm 1 Approximation de la distribution des instants de premier passage

- 1: Fixer une constante $T > 0$ puis créer une subdivision de l'intervalle $[0, T]$ en n points, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, avec un pas de discrétisation $\Delta t = T/n$.
 - 2: Simuler une trajectoire du processus X_t aux instants t_i en prenant comme état initiale $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$.
 - 3: Créer $\mathcal{Y}(t; t_i, X_{t_i})$, une fonction d'interpolation des points (t_i, X_{t_i}) , $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.
 - 4: Si $x_0 < D(0)$ alors
 $m \leftarrow \min\{i, i \in \{1, 2, \dots, n\} | X_{t_i} \geq D(t_i)\}$
Sinon
 $m \leftarrow \min\{i, i \in \{1, 2, \dots, n\} | X_{t_i} \leq D(t_i)\}.$
 - 5: Trouver t_D^{X,x_0} , l'unique solution continue de l'équation $D(t) - \mathcal{Y}(t) = 0$ sur l'intervalle $[t_{m-1}; t_m]$.
 - 6: Répéter N fois les étapes de 2 à 5 pour obtenir N réalisations de τ_D^{X,x_0} .
 - 7: Pour un t fixé dans $[0, T]$, on a que : $\mathbb{P}(\tau_D^{X,x_0} \leq t) \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\{t_D^{X,x_0}(j) \leq t\}}.$
-

D'après l'Algorithme 1, le calcul d'un estimateur de Monte-Carlo pour la distribution de probabilité de la v.a. τ_D^{X,x_0} se fait en deux étapes principales. La première consiste à simuler N trajectoires du processus stochastique X_t . Une fonction d'interpolation linéaire $\mathcal{Y}(t)$ du nuage de points $(t_i; X_{t_i})$ obtenu est créer pour toutes les N trajectoires.³ Dans la seconde étape, nous déterminons pour chaque trajectoire de X_t , le premier instant

3. Nous complétons la trajectoire entre deux instants successifs t_i et t_{i+1} par un segment de droite.

de discrétisation t_m où la trajectoire passe au dessus (pour $x_0 < D(0)$) ou en dessous (pour $x_0 > D(0)$) de $D(t)$. Par la suite, il suffit de résoudre numériquement l'équation $D(t) - \mathcal{Y}(t) = 0$ sur l'intervalle $[t_{m-1}; t_m]$ pour avoir une solution approchée de τ_D^{X, x_0} .⁴ Il faut noter que cette démarche génère une erreur de discrétisation à ne pas négliger. En effet, dans la première étape nous avons remplacé l'information manquante entre les instants t_{m-1} et t_m par un segment de droite. Comme le montre la Figure 1.3, l'instant de premier passage n'appartient pas aux instants de discrétisation $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, il est approché sur la base d'un ensemble de points qui ne sont pas générés par le processus X_t . Afin de résoudre cette problématique, nous disposons de deux techniques. La première consiste à prendre t_m comme solution tout en augmentant considérablement la taille de l'échantillon N , cela à pour objectif de réduire l'erreur de discrétisation. D'autre part, nous pouvons adopter une solution plus probabiliste en simulant une trajectoire d'un pont Brownien [Kacef et Hanifi, 2014, pp. 15-21] entre les instant t_{m-1} et t_m comme le montre la Figure 1.4. Cette dernière méthode permet d'avoir une solution t_D^{X, x_0} plus approchée sur l'intervalle $[t_{m-1}; t_m]$ de l'équation précédente, le seul inconvénient est le temps d'exécution qui est considérable contrairement à la première technique. Finalement, une fois que l'échantillon des instants de premier passage est déterminé, nous considérons la moyenne empirique des indicatrices sur l'événement $\{\tau_D^{X, x_0} \leq t\}$ afin d'approcher la probabilité $\mathbb{P}(\tau_D^{X, x_0} \leq t)$ à tout instant $t \in [0; T]$. La Figure 1.5 montre qu'il est important de considérer une taille d'échantillon N suffisamment grande pour avoir un estimateur proche de la vraie valeur.

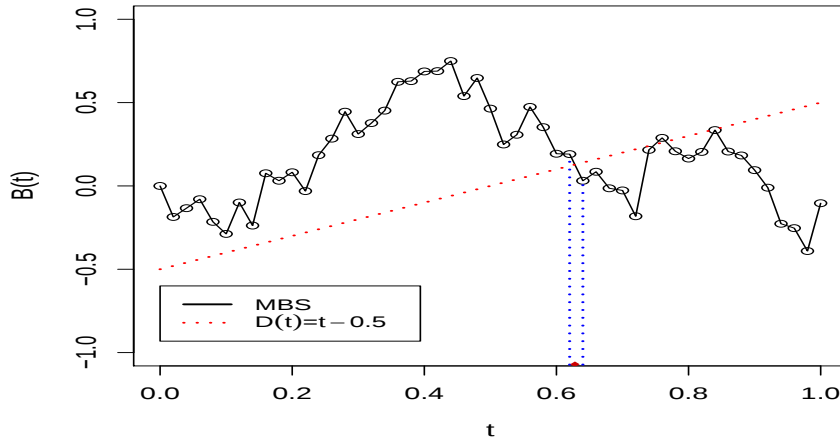


FIGURE 1.3 – Trajectoire d'un mouvement Brownien standard B_t issu de zéro qui atteint pour la première fois la courbe de la fonction $D(t) = t - 0.5$ à l'instant 0.628 sur l'intervalle de temps $[0, 1]$. Notes : Le nombre de réalisations de B_t est de $n = 50$. Le graphique montre que, l'instant de premier passage t_D^B est compris entre les deux instants de discrétisation 0.62 et 0.64.

4. Afin de résoudre numériquement l'équation $D(t) - \mathcal{Y}(t) = 0$, nous pouvons appliquer les méthodes connues telles que la dichotomie, Newton, le point fixe et Lagrange.

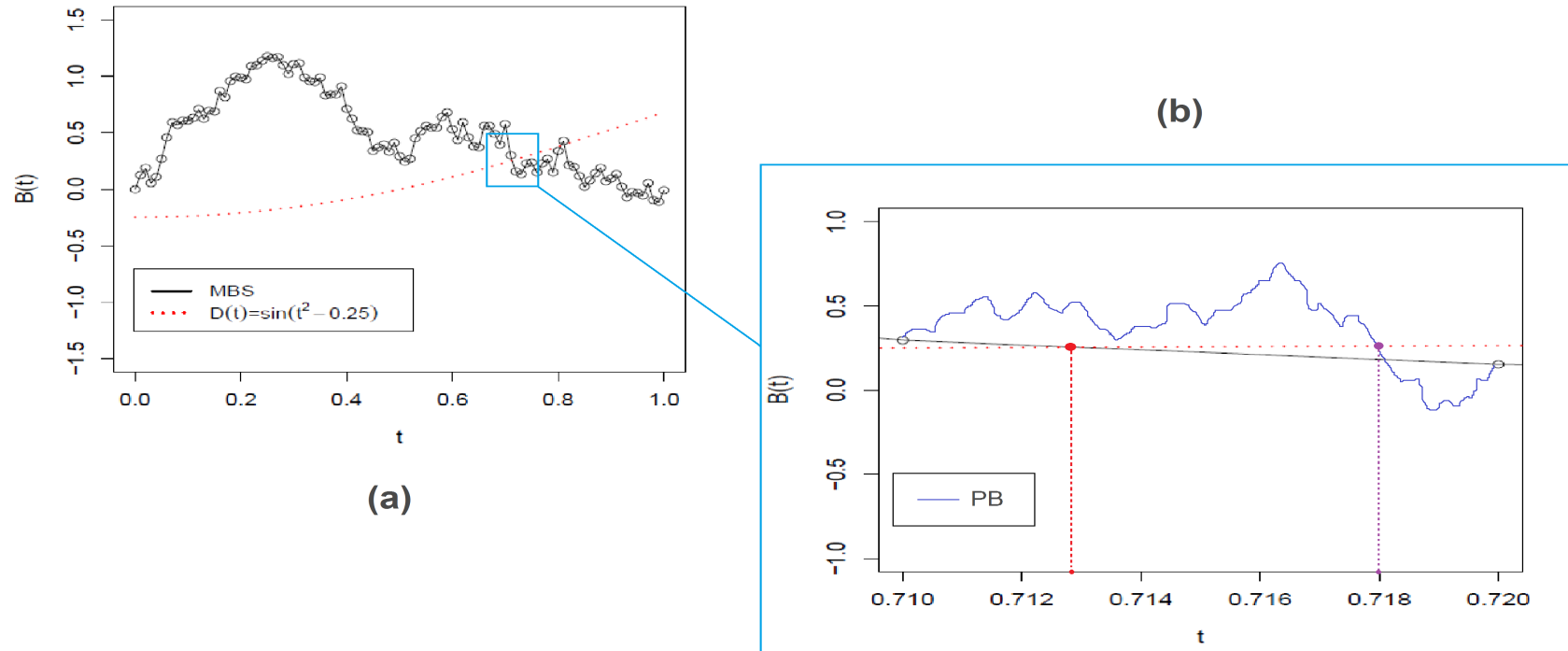


FIGURE 1.4 – Simulation de l’instant de premier passage avec un pont Brownien. Notes : Dans la Figure (a), une trajectoire d’un mouvement Brownien standard B_t est simulée avec $N = 100$. Le premier instant d’intersection avec la courbe de la fonction $D(t) = \sin(t^2 - 0.25)$ est localisé entre les deux instants de discrétisation 0.70 et 0.72. La Figure (b) montre une simulation d’un pont Brownien sur l’intervalle $[0.71, 0.72]$. L’instant de premier passage à $D(t)$ par le pont Brownien est estimé à 0.718 contrairement à l’interpolation linéaire qui donne un instant d’intersection proche de 0.7126.

1.2.2 Techniques de réduction de la variance

La méthode de Monte-Carlo donne un estimateur sans biais et asymptotiquement convergent pour une taille d'échantillon N assez grande. Cependant, comme le montre la Figure 1.5, cet estimateur admet une forte volatilité autour de la vraie valeur. De plus, nous pouvons voir que, la convergence de cette méthode est lente.⁵

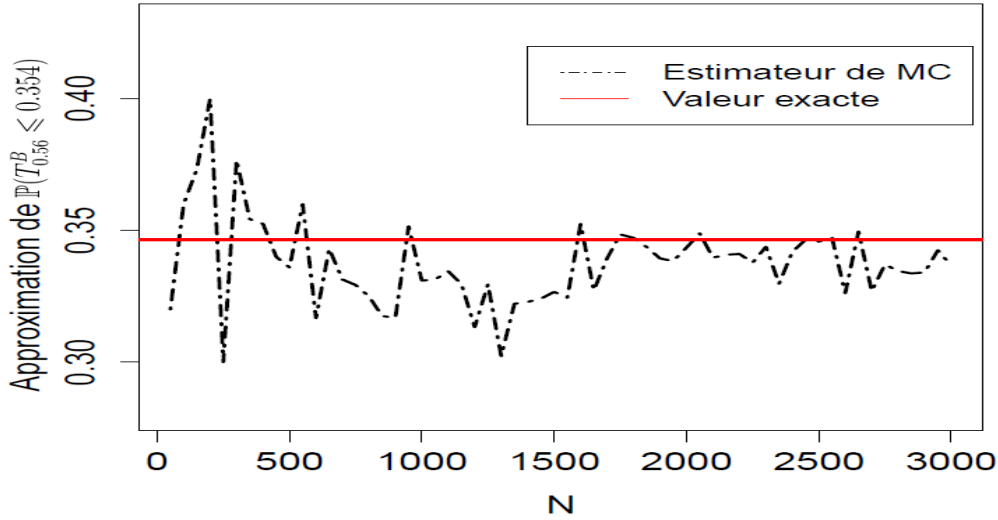


FIGURE 1.5 – Convergence de l'estimateur de Monte-Carlo. Notes : Nous simulons un échantillon des réalisations de la v.a. $T_{0.56}^B = \inf\{t \in [0, T] : B_t \geq 0.56\}$ où B_t est un mouvement Brownien standard issu de zéro. Le nombre de points simulés par trajectoire est de $n = 1000$. Le nombre de trajectoires N de B_t varie de 50 à 3000. La distribution $\mathbb{P}(T_{0.56}^B \leq t)$ est approximée à l'instant $t = 0.354$ pour chaque simulation. La valeur théorique est $\mathbb{P}(T_{0.56}^B \leq 0.354) = 0.3466$.

Afin d'augmenter la précision de l'estimateur de Monte-Carlo ainsi que la vitesse de convergence, il est possible d'agir sur la variance de ce dernier avec des approches appelées *les techniques de réduction de la variance*. Dans ce qui va suivre, nous allons présenter deux techniques pour diminuer la variance d'un estimateur de Monte-Carlo.

Soit $(Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$ un échantillon i.i.d. de même loi que la v.a. Y . Le problème principal consiste à trouver un estimateur sans biais pour $\mu = \mathbb{E}(Y)$ dont la variance est la plus petite possible.

Dans la méthode de Monte-Carlo standard, on a que

$$\text{Var}(\hat{\mu}_{MC}) = \frac{\text{Var}(Y)}{N}, \quad (1.9)$$

où $\hat{\mu}_{MC}$ est l'estimateur de Monte-Carlo standard. Dans l'équation (1.9), la variance de X n'est pas connue théoriquement, elle est remplacée en pratique par la variance empirique⁶,

$$\hat{\sigma}_{MC}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{\mu}_{MC})^2. \quad (1.10)$$

5. La vitesse de convergence de la méthode de Monte-Carlo est d'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

6. L'estimateur $\hat{\sigma}_{MC}^2$ est un estimateur sans biais de $\sigma^2 = \text{Var}(Y)$.

La technique des variables antithétiques

Nous reprenons le problème d'estimation de la quantité $\mu = \mathbb{E}(Y)$ où Y est une v.a. intégrable. Soit Z une autre v.a. de même loi que Y avec $Cov(Y, Z) < 0$. Un nouveau estimateur sans biais de μ est défini par

$$\hat{\mu}_{AV} = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (Y_i + Z_i), \quad (1.11)$$

où $(Z_1, Z_2, \dots, Z_N)$ est un échantillon i.i.d. de même loi que la v.a. Z . En effet, nous avons que $\mathbb{E}(\hat{\mu}_{AV}) = \mu$ car Y et Z ont la même distribution. La variance de $\hat{\mu}_{AV}$ est calculée comme suit :

$$\begin{aligned} Var(\hat{\mu}_{AV}) &= \frac{1}{4N^2} Var \left[\sum_{i=1}^N (Y_i + Z_i) \right] \\ &= \frac{1}{4N} Var(Y + Z) \\ &= \frac{1}{4N} [Var(Y) + Var(Z) + 2Cov(Y, Z)] \\ &= \frac{1}{2N} [\sigma^2 + Cov(Y, Z)] \\ &= \frac{1}{2} \left[Var(\hat{\mu}_{MC}) + \frac{Cov(Y, Z)}{N} \right]. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Comme $Cov(Y, Z) < 0$ dans la formule (1.12), on a

$$Var(\hat{\mu}_{AV}) < Var(\hat{\mu}_{MC}). \quad (1.13)$$

Dans le cas d'une distribution normale centré et réduite, l'estimation de la moyenne avec la technique des variables antithétiques est effectuée sur la base d'un seul échantillon seulement. Supposons que $\mu = \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathcal{H}(X))$ où $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $\mathcal{H}$ une fonction monotone. Un estimateur pour μ avec la méthode de Monte-Carlo standard serait

$$\hat{\mu}_{MC} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{H}(X_i), \quad (1.14)$$

où $(X_1, X_2, \dots, X_N)$ est un échantillon i.i.d. de loi $N(0, 1)$. Les variables aléatoires X et $-X$ sont négativement corrélées. On a que

$$\hat{\mu}_{AV} = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (\mathcal{H}(X_i) + \mathcal{H}(-X_i)),$$

est un estimateur de μ avec la technique des variables antithétiques. Il est important de noter que la variance de cette estimateur est réduite uniquement si on a,

$$Cov(\mathcal{H}(X), \mathcal{H}(-X)) < 0. \quad (1.15)$$

Dans notre cas, la condition de réduction (1.15) est vérifiée puisque la fonction $\mathcal{H}$ est monotone.⁷

7. Pour plus de détails, voir [Rubinstein et Kroese, 2017, pp. 134-135].

La technique de la variable de contrôle

Supposons que nous voulons estimer $\mu = \mathbb{E}(Y)$ où Y est une v.a. intégrable. Soit Z une variable aléatoire dont l'espérance $\mathbb{E}(Z)$ est connue. Si on a $(Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$ et $(Z_1, Z_2, \dots, Z_N)$ deux échantillons i.i.d. de même loi que Y et Z respectivement. Alors, pour toute constante $\alpha \in \mathbb{R}$, nous avons que

$$\hat{\mu}_{CV} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i - \alpha \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z_i - \mathbb{E}(Z) \right], \quad (1.16)$$

est un estimateur sans biais et convergent pour μ . La v.a. Z est appelée *variable de contrôle*. L'estimateur (1.16) coïncide avec l'estimateur de Monte-Carlo standard pour la valeur $\alpha = 0$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$Var(\hat{\mu}_{CV}) = \frac{1}{N} [Var(Y) + \alpha^2 Var(Z) - 2\alpha Cov(Y, Z)]. \quad (1.17)$$

La réduction de la variance de $\hat{\mu}_{CV}$ dépend de la valeur du coefficient α , elle est réduite uniquement si $\alpha^2 Var(Z) < 2\alpha Cov(Y, Z)$. Le coefficient de contrôle qui minimise la variance (1.17) est donné par

$$\alpha^\star = \frac{Cov(Y, Z)}{Var(Z)}. \quad (1.18)$$

En remplaçant la valeur $\alpha^\star$ dans la formule (1.17), on obtient

$$Var(\hat{\mu}_{CV}) = (1 - \rho_{YZ}^2) Var(\hat{\mu}_{MC}). \quad (1.19)$$

À partir de la formule (1.19), nous pouvons remarquer que :

- (i) L'efficacité de la technique de la variable de contrôle dépend de l'intensité de la corrélation ρ_{YZ} entre la variable d'intérêt Y et la variable de contrôle Z .⁸ Le signe de la corrélation n'est pas important car il est absorbé par le puissance carré. Afin d'avoir une forte corrélation entre Y et Z , et donc réduire $Var(\hat{\mu}_{CV})$, il convient de choisir la variable de contrôle Z de même structure que Y .
- (ii) Le coefficient de contrôle $\alpha^\star$ n'est généralement pas connu. En pratique, la quantité $\alpha^\star$ est approximée à partir de la variance et la covariance empirique des échantillons $(Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$ et $(Z_1, Z_2, \dots, Z_N)$. Un estimateur de $\alpha^\star$ est donc

$$\hat{\alpha}^\star = \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y}_N) (Z_i - \bar{Z}_N)}{\sum_{i=1}^N (Z_i - \bar{Z}_N)^2}, \quad (1.20)$$

où $\bar{Y}_N$ et $\bar{Z}_N$ des moyennes empiriques. La substitution de $\hat{\alpha}^\star$ dans la formule (1.16) génère un biais, ce dernier est généralement très petit par rapport à l'erreur standard d'estimation. Cependant, il existe des techniques statistiques [Glasserman, 2003, pp. 200-202] pour atténuer l'erreur d'approximation de $\alpha^\star$ par $\hat{\alpha}^\star$.

8. Dans le cas d'une forte corrélation positive (ou négative), le coefficient ρ_{YZ} est compris entre +0.5 et +1 (ou entre -1 et -0.5).

Exemple 1. Soit α , β et k trois constantes strictement positives. Soit X une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Un simple calcul intégral permet d'avoir :

$$\mu = \mathbb{E} \left[(\alpha \exp(\beta X) - k)_+ \right] = \alpha \exp(0.5\beta^2) \Phi(\beta - d) - k\Phi(-d), \quad (1.21)$$

où $d = \frac{1}{\beta} \log \left(\frac{k}{\alpha} \right)$.

Nous allons tester la formule (1.21) à l'aide des deux techniques de réduction de la variance que nous venons de voir. Pour le faire, nous fixons les paramètres $\alpha = 1.25$, $\beta = 1.36$ et $k = 0.78$ dans (1.21). La valeur théorique obtenue est $\mu = 2.517461$, cette quantité peut être approchée par l'estimateur de Monte-Carlo standard suivant :

$$\hat{\mu}_{MC} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (1.25 \exp(1.36X_i) - 0.78)_+, \quad (1.22)$$

où $(X_1, X_2, \dots, X_N)$ est un échantillon i.i.d. de loi $N(0, 1)$. On peut construire un nouveau estimateur de μ via la technique des variables antithétiques, cet estimateur est donné par :

$$\hat{\mu}_{AV} = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \left[(1.25 \exp(1.36X_i) - 0.78)_+ + (1.25 \exp(-1.36X_i) - 0.78)_+ \right]. \quad (1.23)$$

Nous considérons maintenant la v.a. $Z = \exp(0.25 + 0.3X)$ comme variable de contrôle dans la seconde technique.⁹ La valeur théorique de $\mathbb{E}(Z)$ est connue puisque Z suit une loi log-normale, cette valeur vaut à 1.343126. L'estimateur de μ avec la technique de la variable de contrôle est donné par :

$$\hat{\mu}_{CV} = \hat{\mu}_{MC} - \hat{\alpha}^* \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z_i - 1.343126 \right], \quad (1.24)$$

où l'échantillon $(Z_1, Z_2, \dots, Z_N)$ est obtenu à partir des $X_i, i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Le coefficient de contrôle $\hat{\alpha}^*$ est calculé par la formule suivante :

$$\alpha^* = \frac{\text{Cov}((1.25 \exp(1.36X) - 0.78)_+, Z)}{\text{Var}(Z)}. \quad (1.25)$$

La valeur (1.25) est approximée comme dans (1.20). Nous illustrons dans la Figure 1.6 les résultats numériques obtenus avec les estimateurs (1.22), (1.23) et (1.24). Nous remarquons que l'estimateur de la technique des variables de contrôle (CV) est stable et converge rapidement vers la vraie valeur contrairement aux deux autres estimateurs, à savoir, l'estimateur de Monte-Carlo standard (MC) et l'estimateur de la technique des variables antithétiques (AV).

9. Les deux variables aléatoires Z et $(1.25 \exp(1.36X) - 0.78)_+$ sont fortement corrélées puisque elles ont des structures similaires (forme exponentielle) et dépendent de la même variable aléatoire X qui suit une distribution $\mathcal{N}(0, 1)$.

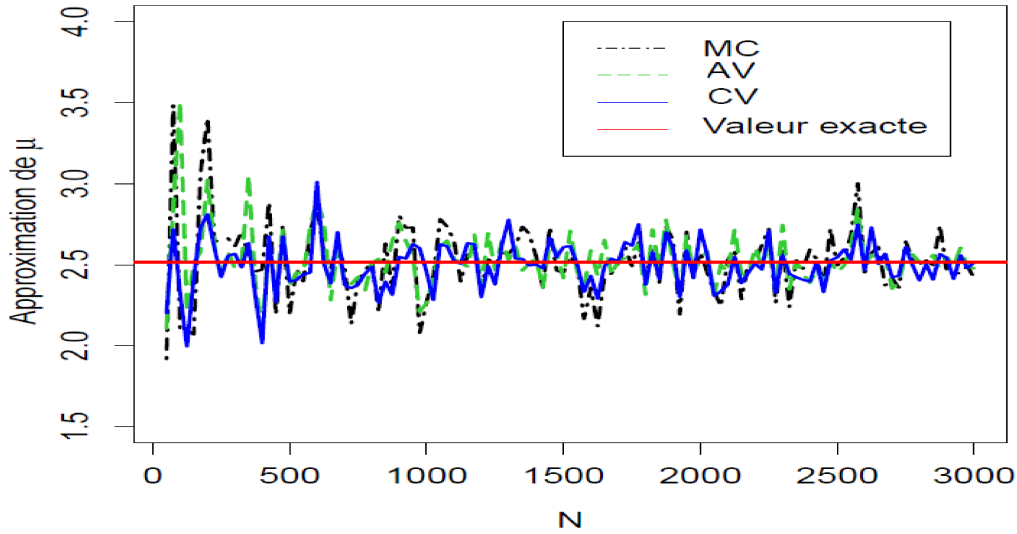


FIGURE 1.6 – Comparaison entre l’estimateur de Monte-Carlo standard et celui obtenu avec les techniques de réduction de la variance dans Exemple 1.

1.3 Distribution des instants de premier passage pour un mouvement Brownien standard

1.3.1 Mouvement Brownien

Définition 6. Un *mouvement Brownien* ou *processus de Wiener* issu de $x \in \mathbb{R}$, est un processus stochastique $(B_t)_{t \geq 0}$ indexé dans $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et vérifiant les conditions suivantes :

- i) $B_0 = x$ p.s.
- ii) Les v.a. $B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendantes pour toute discrétisation du temps, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < +\infty$.
- iii) Pour tout $t \geq 0$ et $h > 0$, la v.a. $B_{t+h} - B_t$ suit une distribution normale de moyenne nulle et de variance h .
- iv) Pour presque tout $\omega \in \Omega$, la fonction $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue sur l’intervalle $[0, +\infty[$.

Le processus $(B_t)_{t \geq 0}$ est dit **mouvement Brownien standard** quand $x = 0$.

D’après la Définition 6, un mouvement Brownien standard est donc un processus stochastique issu de zéro (propriété i)) à trajectoires continues (propriété iv)) et à accroissements indépendants (propriété ii)) et stationnaires (propriété iii)). De façon équivalente, on peut dire que la propriété ii) signifie que pour tout $0 \leq s \leq t$, la v.a. $B_t - B_s$ est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_s^B = \sigma\{B_u, u \leq s\}$.¹⁰ Pour la propriété de la stationnarité iii), elle signifie que la distribution de la v.a. $B_t - B_s$ ne dépend que de la durée $t - s$: pour tout $0 \leq s \leq t$, nous avons que, $B_t - B_s \stackrel{d}{=} B_{t-s}$.

10. La tribu $\mathcal{F}_s^B$ contient toute l’information générée par le mouvement Brownien B jusqu’à la date s .

Proposition 1. Si $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien standard, alors on a

$$\text{Cov}(B_s, B_t) = \min\{s, t\}. \quad (1.26)$$

Démonstration. Commençons à écrire la covariance comme,

$$\text{Cov}(B_s, B_t) = \mathbb{E}(B_s B_t) - \mathbb{E}(B_s)\mathbb{E}(B_t) = \mathbb{E}(B_s B_t), \quad (1.27)$$

car B_t suit une loi $N(0, t)$. Pour $s < t$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_s B_t) &= \mathbb{E}(B_s(B_t - B_s + B_s)) \\ &= \mathbb{E}(B_s(B_t - B_s)) + \mathbb{E}(B_s^2) \\ &= \mathbb{E}(B_s)\mathbb{E}(B_t - B_s) + \mathbb{E}(B_s^2) \\ &= 0 + \text{Var}(B_s) \\ &= s. \end{aligned}$$

Pour $s > t$, par symétrie, on obtient

$$\mathbb{E}(B_s B_t) = t$$

.

□

Proposition 2. Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien standard. Alors, chacune des transformations suivantes est un mouvement Brownien standard.

- 1) (Symétrie). $(-B_t)_{t \geq 0}$.
- 2) (Invariance par changement d'échelle). $(a^{-1/2} B_{at})_{t \geq 0}$, pour tout $a > 0$.
- 3) (Translation du temps). $(B_{t+T} - B_T)_{t \geq 0}$, pour tout $T \geq 0$.
- 4) (Inversion du temps). Le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ défini par $X_0 = 0$ et $X_t = tB_{1/t}$ pour $t > 0$.

Démonstration.

1) Le processus stochastique $(-B_t)_{t \geq 0}$ est à accroissements indépendants et stationnaires.

Pour tout $t \geq 0$, nous avons que $-B_t \stackrel{d}{=} B_t$ car la loi normale centrée est symétrique. Donc, le processus $(-B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien standard, il s'agit d'un mouvement Brownien réfléchi par rapport à l'axe du temps.

2) Les propriétés de continuité et d'indépendance des accroissements restent clairement vérifiées pour le processus gaussien $(a^{-1/2} B_{at})_{t \geq 0}$. Ce processus est issu de zéro car $B_0 = 0$. Sa moyenne est

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} B_{at}\right) = \frac{1}{\sqrt{a}} \mathbb{E}(B_{at}) = 0. \quad (1.28)$$

La fonction de covariance est

$$\begin{aligned} \text{Cov}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} B_{as}, \frac{1}{\sqrt{a}} B_{at}\right) &= \frac{1}{a} \text{Cov}(B_{as}, B_{at}) \\ &= \frac{1}{a} \min\{as, at\} \\ &= \min\{s, t\}. \end{aligned}$$

De plus, le processus $(a^{-1/2}B_{at})_{t \geq 0}$ admet des trajectoires continues car la fonction $t \mapsto B(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ (avec une probabilité égale à 1). Le changement d'échelle préserve donc les propriétés théoriques du mouvement Brownien.

3) Pour tout $T \geq 0$ fixé, le processus $(B_{t+T} - B_T)_{t \geq 0}$ est Gaussien centré à accroissements indépendants et stationnaires. La fonction de covariance de ce processus est donnée par

$$\begin{aligned} \text{Cov}(B_{t+T} - B_T, B_{s+T} - B_T) &= \text{Cov}(B_{t+T}, B_{s+T}) - \text{Cov}(B_{t+T}, B_T) - \text{Cov}(B_T, B_{s+T}) \\ &\quad + \text{Cov}(B_T, B_T) \\ &= \min\{t+T, s+T\} - \min\{t+T, T\} - \min\{T, s+T\} \\ &\quad + \min\{T, T\} \\ &= \min\{t+T, s+T\} - T \\ &= \min\{s, t\}. \end{aligned}$$

Les trajectoires de $(B_{t+T} - B_T)_{t \geq 0}$ sont continues, il est donc un mouvement Brownien standard.

4) Soit $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Pour les constantes réelles $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, on a

$$\lambda_1 X_{t_1} + \dots + \lambda_n X_{t_n} = \lambda_1 t_1 B_{\frac{1}{t_1}} + \dots + \lambda_n t_n B_{\frac{1}{t_n}},$$

est une variable normale et donc le processus X_t est un processus Gaussien. Il est centré car nous avons, $\mathbb{E}(X_t) = t\mathbb{E}(B_{\frac{1}{t}}) = 0$, pour tout $t > 0$. Sa fonction de covariance est donnée par

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_s, X_t) &= \mathbb{E}(X_s X_t) \\ &= st\mathbb{E}\left[B_{\frac{1}{s}} B_{\frac{1}{t}}\right] \\ &= st \min\left\{\frac{1}{s}, \frac{1}{t}\right\} \\ &= \min\{t, s\}. \end{aligned}$$

Il reste à montrer la continuité des trajectoires de X_t . Pour le faire, il suffit de montrer que les trajectoires sont continues en $t = 0$ puisque le mouvement Brownien standard B_t garantit une continuité des trajectoires pour $t > 0$.¹¹ $\square$

Construction du mouvement Brownien par un processus gaussien

Soit B_t un mouvement Brownien standard. Comme nous venons de le voir, le processus B_t suit une loi gaussienne de moyenne nulle et de variance t . On peut donc facilement simuler une trajectoire d'un mouvement Brownien à partir de la loi gaussienne puisque les accroissements sont indépendants et gaussiens par construction.¹² Afin de simuler une trajectoire de B_t , nous commençons par créer une subdivision de l'intervalle du temps $[0, T]$ en $n + 1$ instants, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, où $t_i = i\Delta t$ avec un pas de discrétisation $\Delta t = T/n$. L'Algorithme 2 génère une trajectoire d'un mouvement Brownien standard construite à partir de n réalisations.¹³

11. Le problème est équivalent à montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1}B_t = 0$ (voir [Mörters et Peres, 2010]).

12. Pour un certain nombre $\Delta t > 0$ assez petit, nous avons que $B_{t+\Delta t} - B_t \sim \mathcal{N}(0, \Delta t) \sim \sqrt{\Delta t}\mathcal{N}(0, 1)$.

13. Afin d'obtenir N trajectoires de B_t , il suffit de dérouler N fois l'Algorithme 2.

Algorithm 2 Simulation du mouvement Brownien standard

- 1: Générer un échantillon $(Z_{t_0}, Z_{t_1}, \dots, Z_{t_n})$ de n variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
 - 2: Poser $\Delta t := T/n$ et $B(t_0) := 0$.
 - 3: Pour i de 1 à n faire $B(t_i) := B(t_{i-1}) + \sqrt{\Delta t}Z(t_{i-1})$.
 - 4: Retourner les valeurs $B_{t_0}, B_{t_1}, \dots, B_{t_n}$.
-

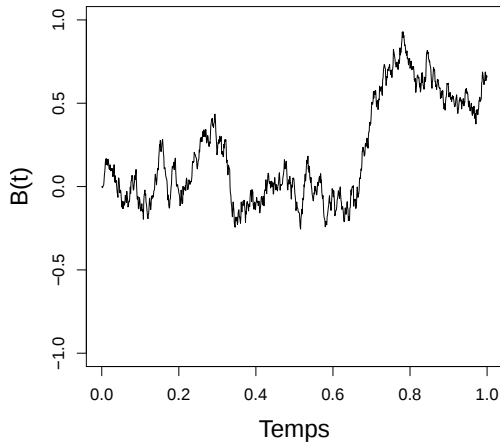


FIGURE 1.7 – Trajectoire d'un mouvement Brownien standard sur l'intervalle $[0, 1]$ simulé à partir de $n = 100$ points.

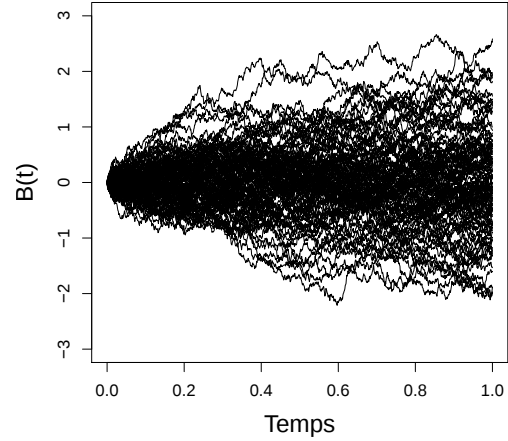


FIGURE 1.8 – Flux de $N = 100$ trajectoires Browniennes sur l'intervalle $[0, 1]$ avec $n = 100$ points simulés par trajectoire.

Temps d'arrêts

Définition 7. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré. Une v.a. T qui est $\mathcal{F}$ -mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est appelée **temps d'arrêt** de la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ si pour tout $t \geq 0$, on a

$$\{T \leq t\} = \{\omega \in \Omega, T(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Les tribus sont stables par passage au complémentaire, par ce fait on a que $\{T > t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t \geq 0$. Or en temps continu l'événement $\{T = t\}$ est de mesure de probabilité nulle, donc on étend la définition du temps d'arrêt en utilisant les événements $\{T \leq t\}$. Un exemple de temps d'arrêt est le temps d'atteinte. Remarquons que si $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus à trajectoires continues adapté à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, alors pour tout borélien $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^d$, la v.a. $T_{\mathcal{A}} = \inf\{t \geq 0 : X_t \in \mathcal{A}\}$ est un $\mathcal{F}_t$ -temps d'arrêt.

Mouvement Brownien et martingales

Définition 8. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré. Un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ est appelé **une martingale** par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t$ si

- a) $(X_t)_{t \geq 0}$ est adapté à la filtration $\mathcal{F}_t$.

b) Pour tout $t \geq 0$, X_t est intégrable.

c) Pour tout $0 \leq s < t$, $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$.

De plus, le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$ -**sous-martingale** si

$$\forall 0 \leq s < t, \quad \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s,$$

et une $\mathcal{F}_t$ -**sur-martingale** si

$$\forall 0 \leq s < t, \quad \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \leq X_s.$$

Proposition 3. Si $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien standard. Alors, les processus ci-dessous sont des $\mathcal{F}_t$ -martingales continues, où $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est la filtration naturelle de B_t .

$$X_t = B_t \tag{1.29}$$

$$Y_t = B_t^2 - t \tag{1.30}$$

$$Z_t = \exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1.31}$$

Démonstration. Le processus (1.29) est adapté à $\mathcal{F}_t$. Il est aussi intégrable puisque pour tout $t \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}(B_t^2) = t < \infty.$$

Il suffit donc de vérifier la condition c). Pour tout $0 \leq s < t$, on a

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s + B_s | \mathcal{F}_s) \tag{1.32}$$

$$= \mathbb{E}(B_t - B_s | \mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(B_s | \mathcal{F}_s) \tag{1.33}$$

$$= \mathbb{E}(B_t - B_s) + B_s \tag{1.34}$$

$$= B_s. \tag{1.35}$$

L'égalité (1.33) provient de la linéarité de l'espérance conditionnelle, quand à (1.34) elle vient du fait que la v.a. $B_t - B_s$ est gaussienne indépendante de $\mathcal{F}_t$ et que B_s soit $\mathcal{F}_s$ -mesurable.

De même pour le processus (1.30). Pour tout $0 \leq s < t$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_t^2 - t | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}((B_t - B_s + B_s)^2 - t | \mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}((B_t - B_s)^2 | \mathcal{F}_s) + 2\mathbb{E}(B_s(B_t - B_s) | \mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(B_s^2 - t | \mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}((B_t - B_s)^2) + 2B_s\mathbb{E}(B_t - B_s) + B_s^2 - t \\ &= t - s + B_s^2 - t \\ &= B_s^2 - s. \end{aligned}$$

Le processus Y_t est donc une $\mathcal{F}_t$ -martingale.

Pour le processus (1.31), on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_t | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}\left(e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t + \lambda B_s - \lambda B_s} | \mathcal{F}_s\right) \\ &= e^{-\frac{\lambda^2}{2}t} \mathbb{E}\left(e^{\lambda(B_t - B_s) + \lambda B_s} | \mathcal{F}_s\right) \\ &= e^{-\frac{\lambda^2}{2}t} e^{\lambda B_s} \mathbb{E}\left(e^{\lambda(B_t - B_s)} | \mathcal{F}_s\right) \\ &= e^{-\frac{\lambda^2}{2}t} e^{\lambda B_s} \mathbb{E}\left(e^{\lambda B_{t-s}}\right). \end{aligned}$$

On a que $B_{t-s} \stackrel{d}{=} \sqrt{t-s}Y$ où Y est une v.a. de loi $N(0, 1)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_t|\mathcal{F}_s) &= e^{-\frac{\lambda^2}{2}t} e^{\lambda B_s} \mathbb{E}\left(e^{\lambda\sqrt{t-s}Y}\right) \\ &= e^{-\frac{\lambda^2}{2}t} e^{\lambda B_s} e^{\frac{\lambda^2}{2}(t-s)} \\ &= Z_s.\end{aligned}$$

□

Le processus martingale (1.31) est très important en finance, nous l'utiliserons par la suite dans le théorème de Girsanov.

Processus de Markov

Définition 9. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique à temps continu et adapté à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. On dit que X est un **processus de Markov** s'il vérifie la propriété de Markov, à savoir, pour toute fonction $\mathcal{H}$ bornée et pour tout $s \leq t$, on a

$$\mathbb{E}[\mathcal{H}(X_t)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\mathcal{H}(X_t)|X_s]. \quad (1.36)$$

En d'autres termes, un processus de Markov est un processus dont le comportement dans le futur dépend uniquement de l'état actuel du processus. Le résultat suivant est fondamental pour la théorie du mouvement Brownien.

Théorème 1. Le mouvement Brownien standard est un processus de Markov.

Démonstration. Soit $\mathcal{H}$ une fonction bornée. Pour tout $s \leq t$, la v.a. $B_t - B_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$, et par conséquent aussi de B_s . Cette propriété du mouvement Brownien permet d'écrire :

$$\mathbb{E}[\mathcal{H}(B_t)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\mathcal{H}(B_s + B_t - B_s)|\mathcal{F}_s] \quad (1.37)$$

$$= f(t-s, B_s), \quad (1.38)$$

avec $f(t-s, x) = \mathbb{E}[\mathcal{H}(x + B_t - B_s)] = \mathbb{E}[\mathcal{H}(x + Z)]$, où Z est une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, t-s)$. De même, on a $\mathbb{E}[\mathcal{H}(B_t)|B_s] = f(t-s, B_s)$. Après calcul de l'espérance, on obtient

$$f(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}(y) \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right) dy, \quad t \geq 0. \quad (1.39)$$

□

Définition 10 (Diffusion). Un processus stochastique à trajectoires continues et vérifiant la propriété de Markov (1.36) est appelé **processus de diffusion**.

À partir de la Définition 10, il est claire que le mouvement Brownien est un processus de diffusion. En finance, les processus de diffusion sont très importants pour la modélisation des actifs financiers. Nous allons voir par la suite un des principaux processus de diffusion qui est le mouvement Brownien géométrique.

Théorème d'arrêt

Le théorème d'arrêt permet dans certain cas d'avoir la distribution de l'instant de premier passage associé à un mouvement Brownien. Il est fondamentale dans la théorie des processus stochastiques et notamment celle des martingales. Ce théorème permet également d'avoir la distribution des instants de premier passage pour d'autres classes du processus de Wiener, comme dans [Srivastava *et al.*, 2017]. Nous allons présenter une version simple du théorème d'arrêt.

Théorème 2. *Si M_t est une martingale et τ un temps d'arrêt. Alors, le processus arrêté $M_{\min(\tau, t)}$ est aussi une martingale. De plus, si M_t est uniformément intégrable. Alors,*

$$\mathbb{E}(M_{\min(\tau, t)}) = \mathbb{E}(M_0) \quad (1.40)$$

Démonstration. Voir [Gall, 2012, pp. 50-51]. $\square$

Exemple 2 (Premier instant de sortie d'un intervalle par un mouvement Brownien).

Soit B_t un mouvement Brownien issu de x , $a < x < b$ où a et b deux nombres réels. Soit $\tau_{(a,b)}$ le premier instant où le processus B_t quitte l'intervalle $]a, b[$, cette v.a. est un temps d'arrêt définie par

$$\tau_{(a,b)} = \inf\{t \geq 0 : B_t \notin]a, b[\}. \quad (1.41)$$

D'après la définition de $\tau_{(a,b)}$, le processus B_t est arrêté juste avant d'atteindre les barrières a et b . Ainsi, on a

$$|B_{\min(\tau_{(a,b)}, t)}| \leq \max(|a|, |b|). \quad (1.42)$$

Avec le résultat (1.40), on obtient

$$\mathbb{E}(B_{\min(\tau_{(a,b)}, t)}) = \mathbb{E}(B_0) = x. \quad (1.43)$$

La limite de (1.43) lorsque t tend vers $+\infty$ donne

$$\mathbb{E}(B_{\tau_{(a,b)}}) = x. \quad (1.44)$$

On note p la probabilité que le mouvement Brownien B_t atteigne b avant d'atteindre a . Autrement dit,

$$p = \mathbb{P}(T_b < T_a),$$

où $T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$ et $T_b = \inf\{t \geq 0 : B_t = b\}$. Avec ces nouvelles notations, on écrit que

$$\mathbb{E}(B_{\tau_{(a,b)}}) = bp + a(1 - p). \quad (1.45)$$

Grâce aux deux formules (1.43) et (1.45), on obtient

$$\mathbb{P}(T_b < T_a) = \frac{x - a}{b - a} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(T_a < T_b) = \frac{b - x}{b - a}. \quad (1.46)$$

Exemple 3 (Transformée de Laplace des instants de premier passage pour un mouvement Brownien).

Soit B_t un mouvement Brownien standard. Soit $T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$ avec $a > 0$. Nous considérons la martingale (1.31) avec $\lambda > 0$, arrêté à T_a . Comme $B_{T_a} = a$ p.s. et $\lambda > 0$. Alors,

$$0 < e^{\lambda B_{\min(T_a, t)} - \frac{\lambda^2}{2} \min(T_a, t)} \leq e^{\lambda a}.$$

La formule (1.40) donne

$$\mathbb{E} \left(e^{\lambda B_{\min(T_a, t)} - \frac{\lambda^2}{2} \min(T_a, t)} \right) = 1. \quad (1.47)$$

Comme le temps d'arrêt T_a est fini, $\mathbb{E}(T_a < \infty) = 1$ (voir la formule (1.80)). Alors, la limite de (1.47) lorsque t tend vers $+\infty$ donne

$$\mathbb{E} \left(e^{\lambda a - \frac{\lambda^2}{2} T_a} \right) = 1. \quad (1.48)$$

En remplaçant λ par $\sqrt{2s}$, on aura, pour tout $s > 0$,

$$\mathbb{E} \left(e^{-s T_a} \right) = e^{-a\sqrt{2s}}. \quad (1.49)$$

Il suffit donc d'inverser la transformée de Laplace (1.49) pour avoir la densité de probabilité de la v.a. T_a . La fonction de densité de T_a est donnée pour tout $t > 0$ par

$$f_{T_a}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[e^{-a\sqrt{2s}} \right] = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2t}}. \quad (1.50)$$

Propriété de Markov forte

Théorème 3. Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien standard par rapport à sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Alors, pour tout $\mathcal{F}_t$ -temps d'arrêt τ fini p.s., le processus $(B_t^\tau)_{t \geq 0}$ défini par

$$B_t^\tau = (B_{\tau+t} - B_\tau),$$

est un mouvement Brownien standard indépendant de $\mathcal{F}_\tau$.

Démonstration. Voir [Mörters et Peres, 2010, pp. 43-44]. □

Principe de réflexion du mouvement Brownien

Le principe de réflexion du mouvement Brownien est une conséquence importante du Théorème 3. Il affirme qu'un mouvement Brownien réfléchi à partir d'un temps d'arrêt reste un mouvement Brownien. Grâce à ce principe, nous allons pouvoir déterminer la distribution des instants de premier passage d'un mouvement Brownien, ainsi que la distribution de son maximum.

Théorème 4. [Principe de réflexion]

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien standard. Soit τ un temps d'arrêt. Alors, le processus $(B_t^\tau)_{t \geq 0}$ défini par

$$B_t^\tau = \begin{cases} B_t & t \leq \tau \\ 2B_\tau - B_t & t \geq \tau, \end{cases}$$

est aussi un mouvement Brownien standard sur le même espace de probabilité de B_t .

Démonstration. Voir [Freedman, 1983, pp. 23-24]. □

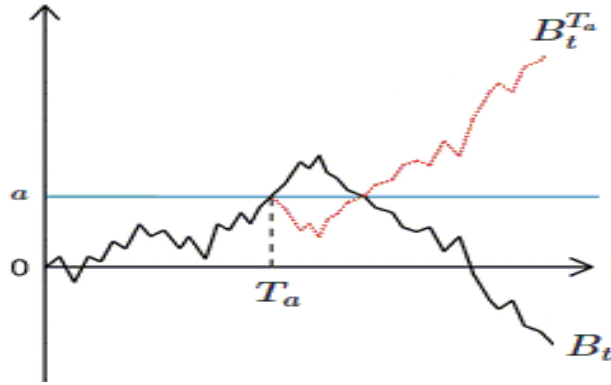


FIGURE 1.9 – Mouvement Brownien standard réfléchi à partir de l'instant de premier passage au seuil a .

Distribution jointe d'un mouvement Brownien standard et son maximum

Soit le processus maximum $(M_t)_{t \geq 0}$ défini par

$$M_t = \max_{0 \leq s \leq t} B_s,$$

où B est un mouvement Brownien standard.

Remarque 3. Si T_x est l'instant de premier passage au seuil $x > 0$ par le mouvement Brownien standard B_t . Alors,

$$\{M_t \geq x\} = \{T_x \leq t\}. \quad (1.51)$$

Théorème 5. Pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+^2$ et pour tout $y \leq x$, on a

$$\mathbb{P}[M_t \geq x, B_t \leq y] = \mathbb{P}(B_t \geq 2x - y). \quad (1.52)$$

Démonstration. Soit le processus $B_t^{T_x} = B_{T_x+t} - B_{T_x}$ où $T_x = \inf\{t \geq 0 : B_t = x\}$. D'après le Théorème 3, le processus $B_t^{T_x}$ est un mouvement Brownien standard indépendant de la filtration $\mathcal{F}_{T_x}$, et donc indépendant aussi de la v.a. T_x . Comme $B_{T_x} = x$ p.s., on a

$$\mathbb{P}[M_t \geq x, B_t \leq y] = \mathbb{P}[T_x \leq t, B_t - x \leq y - x] \quad (1.53)$$

$$= \mathbb{P}[T_x \leq t, B_t - B_{T_x} \leq y - x] \quad (1.54)$$

$$= \mathbb{P}[T_x \leq t, B_{t-T_x}^{T_x} \leq y - x] \quad (1.55)$$

$$= \mathbb{P}[T_x \leq t, B_{t-T_x}^{T_x} \geq x - y] \quad (1.56)$$

$$= \mathbb{P}[T_x \leq t, B_t \geq 2x - y] \quad (1.57)$$

$$= \mathbb{P}(B_t \geq 2x - y). \quad (1.58)$$

L'égalité (1.56) vient de la symétrie du processus gaussien B^{T_x} sachant T_x , quant à l'égalité (1.58) elle provient du fait que l'événement $\{B_t \geq 2x - y\}$ soit inclus dans l'événement $\{T_x \leq t\}$ car $2x - y \geq x$. $\square$

À partir de (1.58), on peut écrire

$$\mathbb{P}[M_t \geq x, B_t \leq y] = \Phi\left(\frac{y - 2x}{\sqrt{t}}\right), \quad (1.59)$$

pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+^2$ et pour tout $y \leq x$. La densité jointe du couple aléatoire (M_t, B_t) est obtenu par différentiabilité puisque nous avons

$$f_{(M,B)}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \mathbb{P}[M_t \geq x, B_t \leq y]. \quad (1.60)$$

Après calcul, on trouve

$$f_{(M,B)}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(2x - y)}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{(2x - y)^2}{2t}\right), \quad (1.61)$$

pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+^2$ et pour tout $y \leq x$.

Distribution du maximum d'un mouvement Brownien standard

Corollaire 1. Pour tout $t \geq 0$, on a que $M_t \stackrel{d}{=} |B_t|$.

Démonstration. Pour tout $x \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}(M_t \geq x) = \mathbb{P}(M_t \geq x, B_t \geq x) + \mathbb{P}(M_t \geq x, B_t \leq x) \quad (1.62)$$

$$= \mathbb{P}(B_t \geq x) + \mathbb{P}(B_t \geq 2x - x) \quad (1.63)$$

$$= \mathbb{P}(-B_t \geq x) + \mathbb{P}(B_t \geq x) \quad (1.64)$$

$$= 2\mathbb{P}(B_t \geq x) \quad (1.65)$$

$$= \mathbb{P}(|B_t| \geq x). \quad (1.66)$$

L'égalité (1.63) est dû au résultat (1.52) et l'égalité (1.65) vient de la symétrie du mouvement Brownien B_t . $\square$

Distribution des instants de premier passage à une barrière fixe par un mouvement Brownien standard

Corollaire 2. Pour tout $a > 0$, nous avons que $T_a \stackrel{d}{=} \frac{a^2}{B_1^2}$.

Démonstration. Pour tout $a > 0$ et $t \geq 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_a \leq t) &= \mathbb{P}(M_t \geq a) \\ &= \mathbb{P}(|B_t| \geq a) \\ &= \mathbb{P}(B_t^2 \geq a^2) \\ &= \mathbb{P}(tB_1^2 \geq a^2) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{a^2}{B_1^2} \leq t\right). \end{aligned}$$

$\square$

Afin de calculer la fonction densité f_{T_a} de la v.a. T_a , il suffit de remarquer que pour tout $t \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}(T_a \leq t) = P(|B_t| \geq a) = 2 \left(1 - \Phi \left(\frac{a}{\sqrt{t}} \right) \right). \quad (1.67)$$

En dérivant la formule (1.67) par rapport à t , on obtient

$$f_{T_a}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{P}(T_a \leq t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp \left(-\frac{a^2}{2t} \right). \quad (1.68)$$

Remarque 4. Pour le cas où $a < 0$, la symétrie du mouvement Brownien standard B_t donne

$$\begin{aligned} T_a &= \inf\{t \geq 0 : B_t = a\} \\ &= \inf\{t \geq 0 : -B_t = -a\} \\ &\stackrel{d}{=} T_{-a}. \end{aligned}$$

Ainsi, la densité de la v.a. T_a est donnée pour tout $a \neq 0$ et $t \geq 0$, par

$$f_{T_a}(t) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp \left(-\frac{a^2}{2t} \right). \quad (1.69)$$

Proposition 4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{A}$ un borélien de $\mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{P}(B_t^x \in \mathcal{A}) = \mathbb{P}((B_t + x) \in \mathcal{A}), \quad (1.70)$$

où B_t^x est un mouvement Brownien issu de x .

La formule (1.70) permet d'avoir la distribution de T_a pour un mouvement Brownien qui n'est pas issu de l'origine. Pour avoir cette distribution, nous commençons par introduire la notation $\mathbb{P}_x$ qui est la mesure de Wiener associée au mouvement Brownien issus de $x \in \mathbb{R}^*$. Nous avons que,

$$\mathbb{P}_x(B_t^x \in [y, y + dy]) = \frac{e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} dy, \quad (1.71)$$

où dy est une quantité infinitésimale.

Proposition 5. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, et sous la mesure $\mathbb{P}_x$, la v.a. T_a admet pour densité la fonction suivante

$$f_{T_a}(t) = \frac{|a-x|}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp \left(-\frac{(a-x)^2}{2t} \right), \quad x \neq a, \quad t \geq 0. \quad (1.72)$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $a \neq x$ et $t > 0$, on a

$$\mathbb{P}_x(T_a \leq t) = \mathbb{P}_x \left(\max_{0 \leq s \leq t} (B_s^x) \geq a \right) \quad (1.73)$$

$$= \mathbb{P}_0 \left(\max_{0 \leq s \leq t} (B_s + x) \geq a \right) \quad (1.74)$$

$$= \mathbb{P}_0(M_t + x \geq a) \quad (1.75)$$

$$= \mathbb{P}_0(M_t \geq a - x) \quad (1.76)$$

$$= \mathbb{P}_0(T_{a-x} \leq t) \quad (1.77)$$

$$= 2 \left(1 - \Phi \left(\frac{|a-x|}{\sqrt{t}} \right) \right). \quad (1.78)$$

L'égalité (1.74) est dû à la propriété (1.70), quant à l'égalité (1.78), elle découle directement de la formule (1.69). Il reste à calculer la dérivée (1.78) par rapport à t pour obtenir le résultat souhaité. $\square$

Remarque 5. La fonction densité (1.72) de la v.a. T_a correspond à une loi de Lévy [voir **Annexe A** en page 86] avec un paramètre de position nul et un paramètre d'échelle égale à $(a - x)^2$. Ainsi, un simple calcul intégrale permet de voir que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}_x}(T_a) = +\infty, \quad (1.79)$$

De plus, pour tout $a \neq x$, la v.a. T_a est p.s. finie. En effet, on a que

$$\mathbb{P}_x(T_a < +\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 2 \left(1 - \Phi \left(\frac{|a - x|}{\sqrt{t}} \right) \right) = 1, \quad (1.80)$$

car $\Phi(0) = 0.5$.

1.3.2 Simulation Monte-Carlo des instants de premier passage pour un mouvement Brownien standard

La Figure 1.10 montre une simulation d'un flux de $N = 1000$ trajectoires du processus B_t simulé avec l'Algorithme 1, où le nombre de points simulés dans chaque trajectoire est égale à $n = 1000$. Une fois que l'échantillon des T_a est obtenu, nous traçons son histogramme et nous le comparons à la densité théorique (1.68). Il est important de noter que, l'échantillon des instants de premier passage comporte des valeurs infinies car le seuil $a = 0.127$ peut ne pas être atteint durant la durée de l'observation $[0, 1]$. Ces valeurs infinies ne sont pas considérées lors de la construction de l'histogramme dans la Figure 1.11. De plus, nous rappelons que, la fonction de densité de T_a est celle d'une loi de Lévy avec un paramètre de position nul et un paramètre d'échelle égale à a^2 .¹⁴

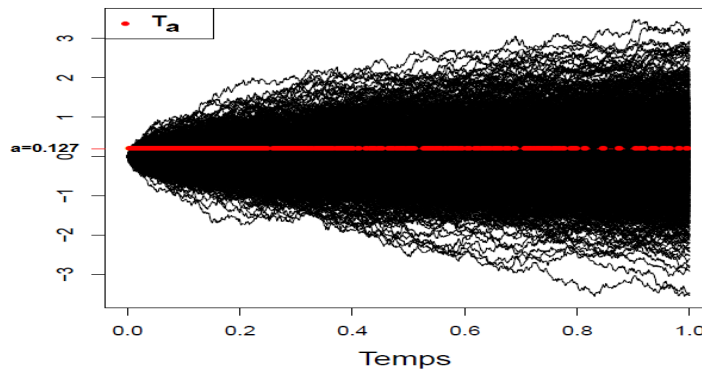


FIGURE 1.10 – Simulation d'un échantillon des instants de premier passage au seuil $a = 0.127$ par un mouvement Brownien standard.

14. Nos simulations numériques sont tous effectuées sur logiciel R, ce dernier considère les valeurs infinies comme étant des valeurs manquantes lors de la construction de l'histogramme avec la fonction **hist**. Dans l'environnement R, les valeurs manquantes sont représentées par le symbole **NA** (Not Available).

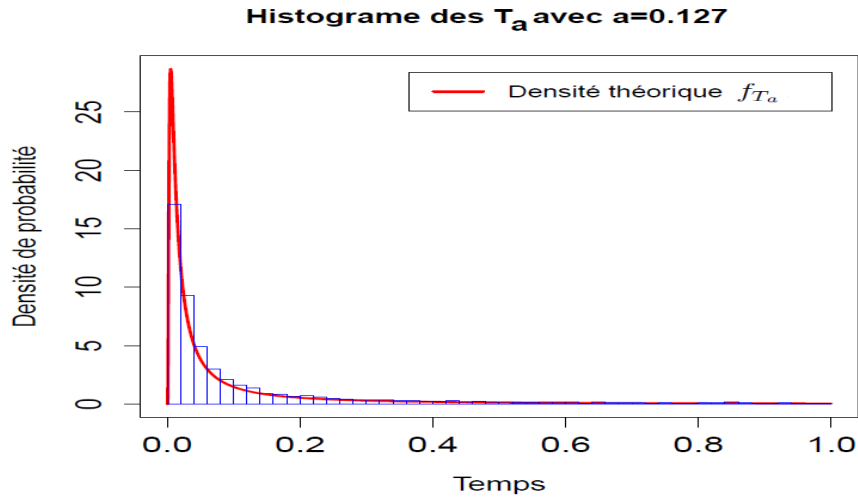


FIGURE 1.11 – Comparaison entre la courbe de la densité et l’histogramme des instants de premier passage pour un mouvement Brownien standard

1.4 Distribution des instants de premier passage pour un mouvement Brownien arithmétique

1.4.1 Mouvement Brownien arithmétique

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien standard défini sur l’espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique défini par $X_t = \mu t + B_t$, où $\mu \in \mathbb{R}$.¹⁵ Le processus X_t est appelé **mouvement Brownien arithmétique** ou même parfois **mouvement Brownien avec dérive**.

Soit $(M_t^\mu)_{t \geq 0}$, le processus maximum de X_t défini par

$$M_t^\mu = \max_{0 \leq s \leq t} X_s, \quad (1.81)$$

et $(m_t^\mu)_{t \geq 0}$, le processus minimum de X_t défini par

$$m_t^\mu = \min_{0 \leq s \leq t} X_s. \quad (1.82)$$

Nous notons aussi par T_a^X l’instant de premier passage au seuil $a \in \mathbb{R}^*$ par le mouvement Brownien arithmétique X_t :

$$T_a^X = \inf\{t \geq 0 : X_t = a\}. \quad (1.83)$$

Le processus X_t est issu de zéro par construction puisque $B_0 = 0$. Or, ce processus n’est pas un mouvement Brownien standard sous $\mathbb{P}$. En effet, la présence du coefficient de la dérive μ rend la moyenne dépendante du temps ($\mathbb{E}(\mu t + B_t) = \mu t$). Le théorème de Girsanov que nous allons voir permet d’éliminer le coefficient μ en construisant une nouvelle mesure de probabilité équivalente sous laquelle X_t devient un mouvement Brownien standard.

15. Nous notons parfois dans nos calculs par X_t^μ , un mouvement Brownien arithmétique avec dérive μ .

1.4.2 Théorème de Girsanov

Définition 11 (Probabilités équivalentes). *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable. Deux mesures de probabilités $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ sont dites équivalentes si elles ont le même ensemble d'événements impossibles, c'est-à-dire que*

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}) = 0 \iff \mathbb{Q}(\mathcal{A}) = 0, \quad (1.84)$$

pour tout ensemble $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$.

Théorème 6. [Radon-Nikodym]

Soit deux mesures de probabilité équivalentes $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$. Alors, il existe une v.a. positive Z telle que $\mathbb{E}(Z) = 1$ et

$$\mathbb{Q}(\mathcal{A}) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z \mathbf{1}_{\mathcal{A}}], \quad (1.85)$$

pour tout ensemble $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$.

La v.a. Z est appelée **la dérivée de Radon-Nikodym** de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$, elle est notée par

$$Z \equiv \left. \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \right|_{\mathcal{F}}. \quad (1.86)$$

Démonstration. Une démonstration rigoureuse de ce théorème est disponible dans le livre de [Bauer et Burckel, 2001]. $\square$

Théorème 7. [Girsanov]

Soit $(\Theta_t)_{0 \leq t \leq T}$, où $T > 0$, un processus stochastique $\mathcal{F}_t$ -adapté vérifiant la condition suivante

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \Theta_s^2 ds \right) \right] < \infty. \quad (1.87)$$

Alors, il existe une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à la mesure $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T$ définie par

$$\left. \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \right|_{\mathcal{F}_T} = \exp \left[- \int_0^T \Theta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^T \Theta_s^2 ds \right]. \quad (1.88)$$

De plus, le processus stochastique $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ défini par

$$X_t = \int_0^t \Theta_s ds + B_t, \quad (1.89)$$

est un mouvement Brownien standard sous la mesure $\mathbb{Q}$.

Démonstration. Voir [Revuz et Yor, 2013]. $\square$

La condition (1.87) est appelée **condition de Novikov**, elle est suffisante mais pas nécessaire. Il est clair que cette condition est vérifiée pour toute fonction bornée voir même constante sur $[0, T]$.

Corollaire 3. *Soit les constantes $\mu \in \mathbb{R}$ et $T > 0$. Soit $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ un mouvement Brownien standard sous la mesure $\mathbb{P}$. Alors, le processus $X_t = \mu t + B_t$, $t \in [0, T]$, est un mouvement Brownien standard sous la mesure $\mathbb{Q}$ définie par*

$$\left. \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \right|_{\mathcal{F}_T} = \exp \left[-\frac{\mu^2}{2} T - \mu B_T \right] = \exp \left[\frac{\mu^2}{2} T - \mu X_T \right]. \quad (1.90)$$

Démonstration. Ce résultat est une conséquence directe du Théorème 7. $\square$

1.4.3 Distribution jointe du mouvement Brownien arithmétique et son maximum

Proposition 6. Pour $x \geq 0$, $y \leq x$ et $t > 0$, on a

$$\mathbb{P}(M_t^\mu \leq x, X_t \leq y) = \Phi\left(\frac{y - \mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu x} \Phi\left(\frac{y - 2x - \mu t}{\sqrt{t}}\right). \quad (1.91)$$

Démonstration. Soit $x \geq 0$, $y \leq x$ et $t > 0$. Grâce au résultat obtenu dans le Corollaire 3, on peut écrire que

$$\mathbb{P}(M_t^\mu \geq x, X_t \leq y) = \mathbb{E}^\mathbb{P} \left[\mathbf{1}_{\{M_t^\mu \geq x, X_t \leq y\}} \right] \quad (1.92)$$

$$= \mathbb{E}^\mathbb{Q} \left[\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}_t} \mathbf{1}_{\{T_x^X \leq t, X_t \leq y\}} \right] \quad (1.93)$$

$$= \mathbb{E}^\mathbb{Q} \left[\exp\left(\mu X_t - \frac{\mu^2}{2}t\right) \mathbf{1}_{\{T_x^X \leq t, X_t \leq y\}} \right], \quad (1.94)$$

où X_t est un mouvement Brownien standard sous $\mathbb{Q}$.

Soit $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique défini par

$$\tilde{X}_t = \begin{cases} X_t & t \leq T_x^X \\ 2x - X_t & t \geq T_x^X. \end{cases}$$

En vertu du principe de réflexion [Théorème 4], le processus $\tilde{X}_t$ est un mouvement Brownien standard sous la mesure $\mathbb{Q}$. Donc,

$$\mathbb{E}^\mathbb{Q} \left[\exp\left(\mu X_t - \frac{\mu^2}{2}t\right) \mathbf{1}_{\{T_x^X \leq t, X_t \leq y\}} \right] = \mathbb{E}^\mathbb{Q} \left[e^{\mu(2x - \tilde{X}_t) - \frac{\mu^2}{2}t} \mathbf{1}_{\{T_x^{\tilde{X}} \leq t, \tilde{X}_t \geq 2x - y\}} \right] \quad (1.95)$$

$$= e^{2x\mu} \mathbb{E}^\mathbb{Q} \left[e^{-\frac{\mu^2}{2}t - \mu \tilde{X}_t} \mathbf{1}_{\{\tilde{X}_t \geq 2x - y\}} \right]. \quad (1.96)$$

L'égalité (1.96) est justifiée par le fait que l'événement $\{\tilde{X}_t \geq 2x - y\}$ est inclus dans l'événement $\{T_x^{\tilde{X}} \leq t\}$ puisque $2x - y \geq x$. Soit $\hat{\mathbb{Q}}$ une nouvelle mesure de probabilité équivalente à $\mathbb{Q}$ définie par

$$\frac{d\hat{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left[-\frac{\mu^2}{2}t - \mu \tilde{X}_t \right]. \quad (1.97)$$

D'après le Corollaire 3, le processus $\hat{X}_t = \mu t + \tilde{X}_t$, $t \geq 0$, est aussi un mouvement Brownien standard sous la mesure $\hat{\mathbb{Q}}$. Ainsi, l'espérance dans (1.96) peut s'écrire comme

$$\mathbb{E}^\mathbb{Q} \left[e^{-\frac{\mu^2}{2}t - \mu \tilde{X}_t} \mathbf{1}_{\{\tilde{X}_t \geq 2x - y\}} \right] = \mathbb{E}^\mathbb{Q} \left[\frac{d\hat{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}_t} \mathbf{1}_{\{\hat{X}_t - \mu t \geq 2x - y\}} \right] \quad (1.98)$$

$$= \hat{\mathbb{Q}}(\hat{X}_t \geq 2x - y + \mu t) \quad (1.99)$$

$$= \Phi\left(\frac{y - 2x - \mu t}{\sqrt{t}}\right). \quad (1.100)$$

En remplaçant (1.100) dans (1.96), on obtient

$$\mathbb{P}(M_t^\mu \geq x, X_t \leq y) = e^{2x\mu} \Phi\left(\frac{y - 2x - \mu t}{\sqrt{t}}\right) \quad (1.101)$$

Pour avoir le résultat attendu, il suffit de voir que

$$\mathbb{P}(M_t^\mu \leq x, X_t \leq y) = \mathbb{P}(X_t \leq y) - \mathbb{P}(M_t^\mu \geq x, X_t \leq y). \quad (1.102)$$

De plus, le processus X_t suit une distribution normale sous $\mathbb{P}$, on a donc

$$\mathbb{P}(X_t \leq y) = \Phi\left(\frac{y - \mu t}{\sqrt{t}}\right). \quad (1.103)$$

Finalement, la formule (1.91) est obtenue en substituant (1.103) et (1.101) dans (1.102). $\square$

1.4.4 Distribution du maximum d'un mouvement Brownien arithmétique

Proposition 7. *Pour tout $x \geq 0$, on a*

$$\mathbb{P}(M_t^\mu \geq x) = e^{2\mu x} \Phi\left(\frac{-\mu t - x}{\sqrt{t}}\right) + \Phi\left(\frac{\mu t - x}{\sqrt{t}}\right). \quad (1.104)$$

Démonstration. Soit $x \geq 0$. Nous commençons par décomposer la distribution de M_t^μ comme

$$\mathbb{P}(M_t^\mu \geq x) = \mathbb{P}(M_t^\mu \geq x, X_t \leq x) + \mathbb{P}(M_t^\mu \geq x, X_t \geq x). \quad (1.105)$$

Le premier terme dans (1.105) est obtenu en remplaçant y par x dans (1.101), quand à celui de droite, il suffit de voir que

$$\mathbb{P}(M_t^\mu \geq x, X_t \geq x) = \mathbb{P}(X_t \geq x) = \Phi\left(\frac{\mu t - x}{\sqrt{t}}\right). \quad (1.106)$$

La première égalité dans (1.106) est dû au fait que, pour tout $x \geq 0$, l'événement $\{X_t \geq x\}$ est inclus dans $\{M_t^\mu \geq x\}$. Pour la dernière, elle vient de la formule (1.103). $\square$

Proposition 8. *Pour tout $x \leq 0$ et $y \geq x$, on a*

$$\mathbb{P}(m_t^\mu \geq x, X_t \geq y) = e^{2\mu x} \Phi\left(\frac{2x - y + \mu t}{\sqrt{t}}\right). \quad (1.107)$$

Démonstration. Soit $x \leq 0$ et $y \geq x$. La symétrie du mouvement Brownien standard B_t donne

$$\mathbb{P}(m_t^\mu \leq x, X_t \geq y) = \mathbb{P}\left(\min_{0 \leq s \leq t} (\mu s + B_s) \leq x, \mu t + B_t \geq y\right) \quad (1.108)$$

$$= \mathbb{P}\left(\max_{0 \leq s \leq t} (-\mu s - B_s) \geq -x, -\mu t - B_t \leq -y\right) \quad (1.109)$$

$$= \mathbb{P}\left(\max_{0 \leq s \leq t} (-\mu s + B_s) \geq -x, -\mu t + B_t \leq -y\right) \quad (1.110)$$

$$= \mathbb{P}\left(M_t^{-\mu} \geq -x, X_t^{-\mu} \leq -y\right) \quad (1.111)$$

$$= e^{2x\mu} \Phi\left(\frac{2x - y + \mu t}{\sqrt{t}}\right), \quad (1.112)$$

où la dernière égalité vient de la formule (1.101). $\square$

Proposition 9. Pour tout $x \leq 0$, on a

$$\mathbb{P}(m_t^\mu \leq x) = \Phi\left(\frac{-\mu t + x}{\sqrt{t}}\right) + e^{2\mu x} \Phi\left(\frac{\mu t + x}{\sqrt{t}}\right). \quad (1.113)$$

Démonstration. La formule (1.113) résulte directement de la Proposition 8. $\square$

La distribution de probabilité de la v.a. T_a^X pour $a < 0$ est déduite à partir de la formule (1.113) puisque pour tout $t > 0$ et $a < 0$, on a

$$\{T_a^X \leq t\} = \{m_t^\mu \leq a\}. \quad (1.114)$$

Proposition 10. Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $a > 0$. Soit X_t un mouvement Brownien arithmétique issu de zéro de coefficient de dérive μ . Alors, la densité de probabilité de l'instant de premier passage $T_a^X = \inf\{t \geq 0 : X_t = a\}$ est donnée par

$$f_{T_a^X}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(a - \mu t)^2}{2t}\right) \mathbf{1}_{\{t > 0\}}. \quad (1.115)$$

Démonstration. Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $a > 0$, on a

$$\mathbb{P}(T_a^X \leq t) = \mathbb{P}(M_t^\mu \geq a) \quad (1.116)$$

$$= e^{2\mu a} \Phi\left(\frac{-\mu t - a}{\sqrt{t}}\right) + \Phi\left(\frac{\mu t - a}{\sqrt{t}}\right). \quad (1.117)$$

Pour obtenir la formule (1.115), il suffit de calculer la dérivée de (1.117) par rapport à t . $\square$

Remarque 6. Pour $\mu > 0$ et $a > 0$, la v.a. T_a^X suit une distribution inverse-gaussienne [voir **Annexe A** en page 87] d'espérance a/μ et de paramètre de forme a^2 .

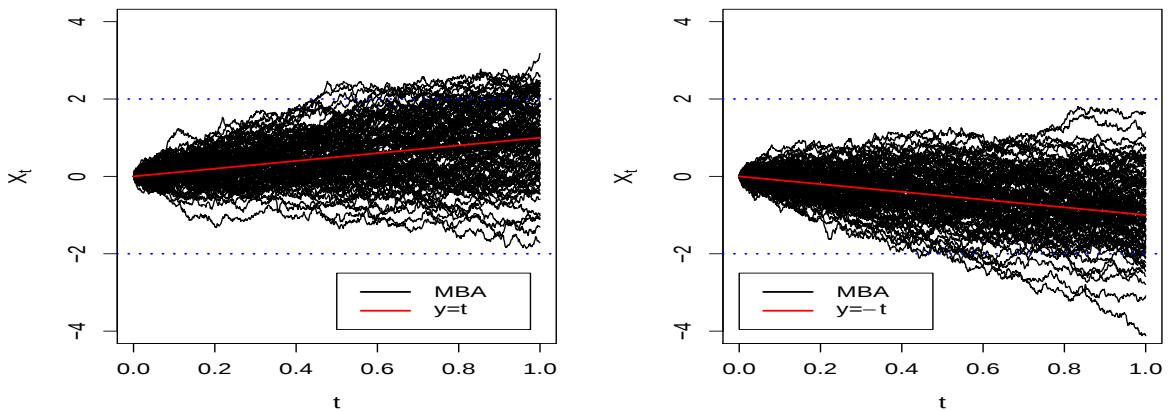


FIGURE 1.12 – Impact du changement du signe de la dérive sur l'instant de premier passage pour un mouvement Brownien arithmétique.

À partir de (1.117) nous pouvons voir que, si $\mu < 0$, on a $\mathbb{P}(T_a^X < \infty) = e^{2\mu a} < 1$. Autrement dit, si la dérive du processus X_t est strictement négative on aura des trajectoires descendantes et donc la probabilité d'atteindre un seuil positive n'est pas égale à 1. Pour $\mu > 0$, on obtient $\mathbb{P}(T_a^X < \infty) = 1$. En effet, pour une dérive strictement positive les trajectoires seront ascendantes ce qui rend la v.a. T_a^X presque sûrement finie. La Figure 1.12 illustre comment le signe du coefficient de dérive agit sur l'orientation des trajectoires du mouvement Brownien arithmétique et par conséquent sur les instants de premier passage au seuil a . Dans la Figure 1.12, nous simulons avec l'Algorithme 3, un flux de $N = 100$ trajectoires d'un mouvement Brownien arithmétique (MBA) avec $n = 1000$ points de réalisations par trajectoire. Sur le panel de gauche le coefficient de dérive est égale à $\mu = 1$, sur celui de droite il vaut à -1 . Nous remarquons que les trajectoires du MBA ont plus de chance d'atteindre un certain niveau (en particulier $a = +2$ et $a = -2$) si ce dernier a le même signe que μ .

Une façon analogue pour obtenir la distribution de la v.a. T_a^X consiste à utiliser la martingale (1.31). Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, on écrit

$$\mathbb{P}(T_a^X \leq t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{\mu X_t - \frac{\mu^2}{2}t} \mathbf{1}_{\{T_a \leq t\}} \right] \quad (1.118)$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{\mu X_t - \frac{\mu^2}{2}t} \mathbf{1}_{\{T_a \leq t\}} \mid \mathcal{F}_{T_a} \right] \right] \quad (1.119)$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\mathbf{1}_{\{T_a \leq t\}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{\mu X_t - \frac{\mu^2}{2}t} \mid \mathcal{F}_{T_a} \right] \right] \quad (1.120)$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\mathbf{1}_{\{T_a \leq t\}} e^{\mu X_{T_a} - \frac{\mu^2}{2}T_a} \right] \quad (1.121)$$

$$= e^{\mu a} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\mathbf{1}_{\{T_a \leq t\}} e^{-\frac{\mu^2}{2}T_a} \right] \quad (1.122)$$

$$= e^{\mu a} \int_0^t e^{-\frac{\mu^2}{2}s} \left(\frac{|a|}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp \left(-\frac{a^2}{2s} \right) \right) ds \quad (1.123)$$

$$= \int_0^t \frac{|a|}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp \left(-\frac{(a - \mu s)^2}{2t} \right) ds. \quad (1.124)$$

L'égalité (1.118) est dû au Corollaire 3, où X_t est un mouvement Brownien standard sous la mesure $\mathbb{Q}$. Pour l'égalité (1.119), elle vient de la propriété de l'espérance conditionnelle.¹⁶ D'autre part, l'égalité (1.120) est dû au fait que $\mathbf{1}_{\{T_a \leq t\}}$ est une v.a. $\mathcal{F}_{T_a}$ -mesurable, quand à l'égalité (1.121), elle est vraie sur $\{T_a \leq t\}$ car le processus (1.31) est une $\mathcal{F}_t$ -martingale. Il reste à calculer l'espérance en faisant usage de la densité de v.a. T_a définie par la formule (1.69). Finalement, on obtient la densité de T_a^X pour tout $a \neq 0$ en dérivant (1.124) par rapport à t . Cette fonction de densité est donnée par

$$f_{T_a^X}(t) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp \left(-\frac{(a - \mu t)^2}{2t} \right) \mathbf{1}_{\{t > 0\}}, \quad a \neq 0. \quad (1.125)$$

16. Pour X et Y deux variables aléatoires, on peut écrire que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))$.

1.4.5 Simulation Monte-Carlo des instants de premier passage pour un mouvement Brownien arithmétique

La simulation d'une trajectoire du processus $X_t = \mu t + B_t$ sur un intervalle $[0, T]$ se fait à l'aide de l'algorithme suivant :

Algorithm 3 Simulation du mouvement Brownien arithmétique

- 1: Générer un échantillon $(Z_{t_0}, Z_{t_1}, \dots, Z_{t_n})$ de n variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
 - 2: Poser $\Delta t := T/n$, $X(t_0) := 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$.
 - 3: Pour i de 1 à n faire $X(t_i) := X(t_{i-1}) + \mu \Delta t + \sqrt{\Delta t} Z(t_{i-1})$.
 - 4: Retourner les valeurs $X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$.
-

Nous simulons avec l'Algorithme 3, un flux de $N = 1000$ trajectoires d'un mouvement Brownien arithmétique sur l'intervalle de temps $[0, 1]$ avec $n = 1000$ points de réalisations par trajectoire. Nous obtenons par la suite un échantillon de taille N des réalisations de la v.a. T_a^X sur l'intervalle de temps $[0, 1]$. L'histogramme de cet échantillon est tracé dans la Figure 1.13 ainsi que la courbe de la densité de T_a^X qui est de loi inverse gaussienne.

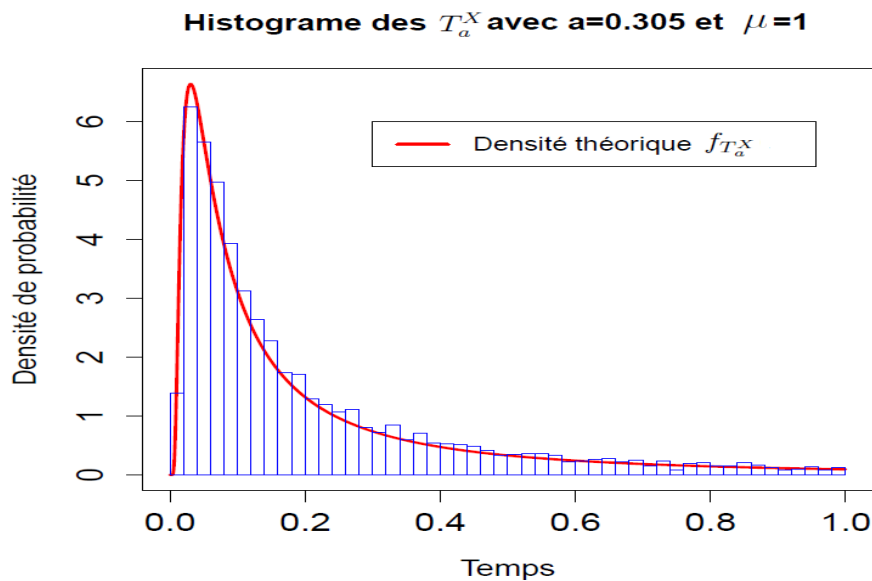


FIGURE 1.13 – Comparaison entre la courbe de la densité $f_{T_a^X}$ et l'histogramme de l'échantillon des T_a^X

1.5 Distribution des instants de premier passage pour un mouvement Brownien géométrique

1.5.1 Intégrale stochastique

Intégrale d'Itô

Avant de définir l'intégrale d'Itô nous commençons par rappeler l'intégration classique dite de **Riemann**. Soit g une fonction intégrable sur l'intervalle $[a, b]$, $a < b$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors, on a

$$\int_a^b g(t)dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g\left(a + i \frac{b-a}{n}\right). \quad (1.126)$$

Comme nous allons le voir, l'intégrale d'Itô sera définie d'une manière différente de l'intégrale de Riemann (1.126). La différence fondamentale est que, l'intégrale d'Itô est prise par rapport aux incréments infinitésimaux dB_t du mouvement Brownien standard B_t , qui sont des variables aléatoires normale, tandis que dans Riemann on considère l'intégration par rapport aux changements déterministes infinitésimaux dt . Nous pouvons donc déjà dire que, dans le cas d'une intégrale d'Itô, le résultat est une v.a. contrairement à l'intégrale de Riemann qui est une constante réelle. Cependant, nous verrons qu'il existe plusieurs propriétés communes entre ces deux classes d'intégrales.

On considère un mouvement Brownien standard B_t défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, ou $\mathcal{F}_t$ est sa filtration naturelle. Soit $X_t = f(t, B_t)$ un processus stochastique de carré intégrable,

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b X_t^2 dt \right] < \infty. \quad (1.127)$$

On appelle **une intégrale d'Itô** du processus X_t par rapport au mouvement Brownien B_t , la v.a. suivante

$$\int_a^b X_t dB_t. \quad (1.128)$$

Afin de donner un sens à (1.128), nous commençons par construire une subdivision de l'intervalle de temps $[a, b]$ en n points temporels,

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Soit S_n la somme partielle définie par

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}). \quad (1.129)$$

Il est important de noter que le choix de la partition n'influence pas la valeur de l'intégrale d'Itô. C'est la raison pour laquelle, en pratique, il suffit de supposer que les intervalles sont équidistants, c'est-à-dire que le pas de subdivision est constant et vaut à

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i = \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Comme le processus X_t est $\mathcal{F}_t$ -adapté, les v.a.s X_{t_i} et $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ sont toujours indépendantes. L'intégrale (1.128) est défini comme étant la limite des somme partielles S_n lorsque n tend vers l'infinie,

$$\int_a^b X_t dB_t = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n. \quad (1.130)$$

La limite (1.130) existe si le processus X_t satisfait les conditions suivantes :

(C1) Le processus X_t est $\mathcal{F}_t$ -adapté pour tout $t \in [a, b]$.

(C2) $\mathbb{E} \left[\int_a^b X_t^2 dt \right] < \infty$.

(C3) Les trajectoires $t \mapsto X_t(\omega)$ sont continues sur $[a, b]$ pour tout ensemble $\omega \in \Omega$.

Exemple 4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a

$$\int_a^b \alpha dB_t = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n, \quad (1.131)$$

où

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \quad (1.132)$$

$$= \alpha \{ (B_{t_1} - B_{t_0}) + (B_{t_2} - B_{t_1}) + \cdots + (B_{t_{n-1}} - B_{t_{n-2}}) + (B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) \} \quad (1.133)$$

$$= \alpha (B_{t_n} - B_{t_0}) \quad (1.134)$$

$$= \alpha (B_b - B_a). \quad (1.135)$$

Donc,

$$\int_a^b \alpha dB_t = \alpha (B_b - B_a). \quad (1.136)$$

En particulier, pour $\alpha = 1$, $a = 0$, $b = T$, nous avons

$$\int_0^T dB_t = B_T, \quad T < \infty. \quad (1.137)$$

Il est facile de voir que la v.a. $\int_0^T \alpha dB_t$ est gaussienne de moyenne nulle et de variance égale à T .

Exemple 5. Soit l'intégrale d'Itô suivante :

$$\int_0^T B_t dB_t. \quad (1.138)$$

Afin de calculer (1.138), nous commençons par construire une subdivision de l'intervalle $[0, T]$ en n points temporels, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T$, $t_i = i\Delta t$ avec $\Delta = T/n$. Les sommes partielles sont données par

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}). \quad (1.139)$$

D'une part, on peut écrire que

$$B_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = \frac{1}{2} (B_{t_{i+1}}^2 - B_{t_i}^2 - (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2).$$

Au passage à la somme, on aura

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_{i+1}}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \quad (1.140)$$

$$= \frac{1}{2} B_{t_n}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \quad (1.141)$$

$$= \frac{1}{2} B_T^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2. \quad (1.142)$$

Pour calculer le terme de droite dans (1.142), nous procédons comme suit :
Soit X_n une v.a. définie par

$$X_n = \sum_{i=0}^{n-1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2. \quad (1.143)$$

Comme les accroissements du mouvement Brownien standard B_t sont indépendants [Propriété *ii*)], on a

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] \quad (1.144)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \quad (1.145)$$

$$= t_n - t_0 \quad (1.146)$$

$$= T, \quad (1.147)$$

et

$$\text{Var}(X_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \text{Var}[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] \quad (1.148)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} 2(t_{i+1} - t_i)^2 \quad (1.149)$$

$$= 2n \Delta t^2 \quad (1.150)$$

$$= 2n \left(\frac{T}{n}\right)^2 \quad (1.151)$$

$$= \frac{2T^2}{n}. \quad (1.152)$$

Puisque on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Var}(X_n) = 0,$$

et

$$\mathbb{E}(X_n) = T.$$

Donc, T est un estimateur sans biais et convergent de X_n . Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = T.$$

Ainsi, on a

$$\int_0^T B_t dB_t = \frac{1}{2}(B_T^2 - T), \quad T < \infty. \quad (1.153)$$

De façon générale, le formule d'intégration est donnée par

$$\int_a^b B_t dB_t = \frac{1}{2}(B_b^2 - B_a^2) - \frac{1}{2}(b - a). \quad (1.154)$$

Proposition 11. Soit $X_t = f(t, B_t)$ et $Y_t = g(t, B_t)$ deux processus stochastiques vérifiant les conditions (C1), (C2) et (C3). Alors, on a

- 1) (Linéarité) $\int_0^t X_s + \alpha Y_s dB_s = \int_0^t X_s dB_s + \alpha \int_0^t Y_s dB_s, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$
- 2) (Additivité) $\int_0^t X_s dB_s = \int_0^u X_s dB_s + \int_u^t X_s dB_s, \text{ pour tout } 0 < u < t.$
- 3) (Processus centré) $\mathbb{E} \left(\int_0^t X_s dB_s \right) = 0.$
- 4) (Isométrie d'Itô) $\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t X_s dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t X_s^2 ds \right].$
- 5) (Covariance) $\mathbb{E} \left[\int_0^t X_s dB_s \int_0^t Y_s dB_s \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t X_s Y_s ds \right].$

Démonstration. Voir [Calin, 2015] □

Proposition 12. Soit X_t un processus vérifiant les conditions (C1), (C2) et (C3). Alors, le processus stochastique

$$I_t = \int_0^t X_s dB_s, \quad t \geq 0, \quad (1.155)$$

est une $\mathcal{F}_t$ -martingale.

Démonstration. Le processus I_t est $\mathcal{F}_t$ -mesurable, il est aussi de carré intégrable puisque,

$$\mathbb{E}[I_t^2] = \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t X_s dB_s \right)^2 \right] \quad (1.156)$$

$$= \mathbb{E} \left[\int_0^t X_s^2 ds \right] \quad (1.157)$$

$$< \infty. \quad (1.158)$$

L'isométrie d'Itô 4) permet de justifier l'égalité (1.157), quant à l'inégalité (1.158), elle est dû à la condition (C2). Il reste donc à vérifier la propriété c) de l'espérance conditionnelle. Pour tout $s < t$, on a

$$\mathbb{E}[I_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E} \left[\int_0^t X_u dB_u | \mathcal{F}_s \right] \quad (1.159)$$

$$= \mathbb{E} \left[\int_0^s X_u dB_u + \int_s^t X_u dB_u | \mathcal{F}_s \right] \quad (1.160)$$

$$= \mathbb{E} \left[\int_0^s X_u dB_u | \mathcal{F}_s \right] + \mathbb{E} \left[\int_s^t X_u dB_u | \mathcal{F}_s \right] \quad (1.161)$$

$$= \int_0^s X_u dB_u + \mathbb{E} \left[\int_s^t X_u dB_u \right] \quad (1.162)$$

$$= \int_0^s X_u dB_u \quad (1.163)$$

$$= I_s. \quad (1.164)$$

L'égalité (1.160) provient de la propriété d'additivité 2), quant à (1.161), elle est dû à la linéarité de l'intégrale stochastique. Par ailleurs, l'égalité (1.162) est justifiée par le fait que, d'une part, la v.a. $\int_0^s X_u dB_u$ est $\mathcal{F}_s$ -mesurable, et d'autre part, la v.a. $\int_s^t X_u dB_u$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$.¹⁷ Finalement, avec la propriété 3), on a $\mathbb{E} \left[\int_s^t X_u dB_u \right] = 0$. $\square$

Intégrale de Wiener

Nous allons voir maintenant un cas particulier des intégrales stochastiques qui est l'intégrale de Wiener. Cette classe d'intégrale s'écrit comme

$$\int_0^t f(s) dB_s, \quad t \geq 0, \quad (1.165)$$

où f est une fonction déterministe sur $L^2([0, t])$ et B_t est un mouvement Brownien standard.¹⁸ Comme dans le cas des intégrales d'Itô, l'intégrale de Wiener (1.166) peut être représenté comme limite des sommes partielles,

$$\int_0^t f(s) dB_s = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}). \quad (1.166)$$

Les propriétés des intégrales stochastiques que nous venons de voir sont tous valable pour l'intégrale de Wiener à condition que la fonction f soit dans L^2 . En particulier, la formule d'intégration par parties suivante qui est très pratique,

$$\int_0^t f(s) dB_s = f(t) B_t - \int_0^t B_s df(s). \quad (1.167)$$

Proposition 13. Soit le processus $(I_t)_{t \geq 0}$ défini par

$$I_t = \int_0^t f(s) dB_s, \quad (1.168)$$

où $f \in L^2([0, t])$. Alors, on a

$$I_t \sim \mathcal{N} \left(0, \int_0^t f(s)^2 ds \right) \quad (1.169)$$

Démonstration. Les accroissements du mouvement Brownien B_t sont i.i.d. de loi gaussienne. Donc, pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, on a

$$f(t_i) (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \sim \mathcal{N} \left(0, f(t_i)^2 (t_{i+1} - t_i) \right). \quad (1.170)$$

De plus, la somme de variables aléatoires indépendantes et normalement distribuée est une variable normale. Ainsi,

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \sim \mathcal{N} \left(0, \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)^2 (t_{i+1} - t_i) \right). \quad (1.171)$$

Il reste à faire tendre n vers $+\infty$ pour obtenir le résultat attendu. $\square$

17. La filtration $\mathcal{F}_s$ contient toute l'information généré par le mouvement Brownien B_t de 0 jusqu'à s , quand à l'intégrale $\int_s^t X_u dB_u$, elle dépend uniquement de l'information disponible de s à t et non pas de celle généré avant la date s .

18. Nous notons par $L^2([a, b])$ l'espace des fonctions f qui sont définie sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant la condition $\sqrt{\int_a^b |f(s)|^2 ds} < \infty$. Cette ensemble est appelé **ensemble des fonctions de carré intégrable**.

Exemple 6 (Aire sous la courbe Brownienne). Soit le processus $(A_t)_{t \geq 0}$ défini par

$$A_t = \int_0^t B_s ds. \quad (1.172)$$

Le processus gaussien A_t mesure l'aire sous la courbe d'un mouvement Brownien standard B_t pendant l'intervalle de temps $[0, t]$. Pour t fixé, la v.a. A_t est continue car elle dépend des trajectoires continues de B_t . Par ailleurs, si l'intégration se fait uniquement sur la partie positive du mouvement Brownien, c'est-à-dire, sur le processus $|B_t|$. Alors, les trajectoires $t \mapsto A_t(\omega)$, $\omega \in \Omega$, seront des fonctions croissantes par rapport au temps. Le processus (1.172) admet une moyenne nulle, $\mathbb{E}(A_t) = 0$ par linéarité de l'espérance. Pour calculer sa variance, il suffit de voir que A_t est une intégrale de Wiener. En effet, avec la formule d'intégration (1.167), on obtient

$$A_t = tB_t - \int_0^t s dB_s \quad (1.173)$$

$$= t \int_0^t dB_s - \int_0^t s dB_s \quad (1.174)$$

$$= \int_0^t (t-s) dB_s, \quad (1.175)$$

où l'égalité (1.174) est dû à la formule (1.136). Il s'agit donc d'une intégrale de Wiener dont la variance est calculée par la propriété de l'isométrie d'Itô 4),

$$\text{Var}(A_t^2) = \mathbb{E}(A_t^2) \quad (1.176)$$

$$= \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t (t-s) dB_s \right)^2 \right] \quad (1.177)$$

$$= \mathbb{E} \left[\int_0^t (t-s)^2 ds \right] \quad (1.178)$$

$$= \int_0^t (t-s)^2 ds \quad (1.179)$$

$$= \frac{t^3}{3}. \quad (1.180)$$

En littérature, le processus (1.172) est souvent considéré dans le cas général où l'intégration se fait par rapport à un mouvement Brownien arithmétique X_t issu d'un point $x > 0$ avec une dérive $\mu > 0$, c'est-à-dire, $X_t = x + \mu t + B_t$, $t \geq 0$. Nous appelons par **instant de première surface** pour le processus X_t , la v.a. définie par

$$A_{T_a^X} = \int_0^{T_a^X} X_s ds, \quad (1.181)$$

où $a \in \mathbb{R}$ et T_a^X est l'instant de premier passage au niveau a par le processus X_t . La Figure 1.14 illustre une réalisation de la variable $A_{T_a^X}$ à partir d'une trajectoire du processus X_t avec $x = 1$, $\mu = 0.5$ et $a = 1.65$. La distribution de probabilité de (1.181) est étudiée dans [Kearney et Majumdar, 2005], quant à la distribution jointe du couple $(A_{T_a^X}, T_a^X)$, elle est calculée par Abundo et Vescovo [2017] dans le cas où $\mu < 0$.

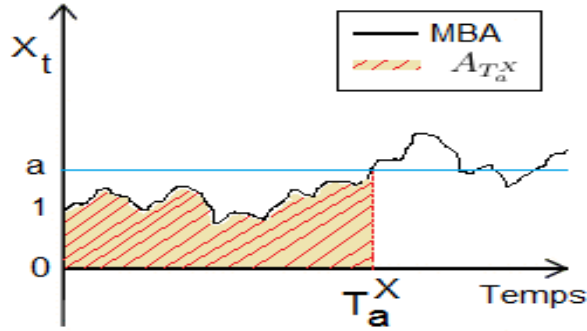


FIGURE 1.14 – Instant de première surface d'un mouvement Brownien arithmétique

Processus d'Itô

Définition 12. Un processus d'Itô est un processus stochastique X_t défini sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ à valeur dans $\mathbb{R}$ dont la structure peut être décomposée ainsi

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s, \quad t \geq 0, \quad (1.182)$$

ou sous forme différentielle

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t, \quad (1.183)$$

où X_0 est $\mathcal{F}_0$ -mesurable, μ_t et σ_t sont deux processus $\mathcal{F}_t$ -adaptés vérifiant les conditions de régularité suivantes

$$\mathbb{P} \left[\int_0^t |\mu_s| ds < \infty \right] = 1, \quad (1.184)$$

et

$$\mathbb{P} \left[\int_0^t \sigma_s^2 ds < \infty \right] = 1. \quad (1.185)$$

Le processus μ_t est appelé **la dérive** ou le **drift**, quand à σ_t , il est connu sous le nom de **coefficient de diffusion** ou **coefficient de volatilité**. Un processus d'Itô est donc caractérisé par ces deux coefficients μ_t et σ_t . Il est important de noter que, les processus μ_t et σ_t sont des fonctions du temps t et de l'état du processus X_t . Formellement, pour $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, on a

$$\mu_t \equiv \mu(t, x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(X_{t+h} - X_t | X_t = x)}{h}, \quad (1.186)$$

et

$$\sigma_t \equiv \sigma(t, x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}((X_{t+h} - X_t)^2 | X_t = x)}{h}. \quad (1.187)$$

Dans (1.182), si μ_t et σ_t ne dépendent pas du temps t , alors le processus X_t est dit **homogène**. De plus, si une solution de l'équation (1.183) existe. Alors, il s'agit d'un processus de diffusion, d'où l'appellation **équation de diffusion**.

Exemple 7. Le mouvement Brownien arithmétique de dérive μ est un processus d'Itô dont l'équation différentielle stochastique est donnée par

$$dX_t = \mu dt + dB_t, \quad (1.188)$$

où le coefficient dérive de ce processus est égale à μ et celui de la diffusion vaut à 1.

Formule d'Itô

Lemme 1.1 (Itô [1944]). Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus d'Itô vérifiant (1.182). Alors, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, le processus stochastique $f(t, X_t)$ est aussi un processus d'Itô dont la dynamique est donnée par

$$df(t, X_t) = \left(\frac{\partial f(t, X_t)}{\partial t} + \mu_t \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 f(t, X_t)}{\partial x^2} \right) dt + \sigma_t \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial x} dB_t. \quad (1.189)$$

Démonstration. Voir le livre de Steele [2012]. $\square$

Exemple 8 (Processus de Uhlenbeck et Ornstein [1930]). Soit l'équation différentielle stochastique suivante

$$dX_t = -\theta X_t dt + \sigma dB_t, \quad (1.190)$$

où $\theta > 0$ et $\sigma > 0$ deux paramètres déterministes. Afin de résoudre l'équation (1.190), nous appliquons la formule d'Itô (1.189) à la fonction f qui est définie par

$$f(t, x) = xe^{\theta t}, \quad (1.191)$$

cette fonction admet des dérivées partielles. Pour tout $(t, x) \in (\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \theta x e^{\theta t}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = e^{\theta t}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) = 0.$$

Avec la formule d'Itô, la différentielle de $f(t, X_t)$ s'écrit comme

$$df(t, X_t) = \sigma e^{\theta t} dB_t. \quad (1.192)$$

En intégrant (1.192) de 0 à t , on obtient

$$X_t e^{\theta t} = X_0 + \sigma \int_0^t e^{\theta s} dB_s, \quad (1.193)$$

et donc,

$$X_t = X_0 e^{-\theta t} + \sigma \int_0^t e^{\theta(s-t)} dB_s. \quad (1.194)$$

Le processus (1.194) est connu sous le nom de **processus de Ornstein-Uhlenbeck**, ce dernier est très appliqué en finance notamment pour ces propriétés théoriques. Le processus (1.194) est un processus gaussien avec,

$$\mathbb{E}(X_t) = X_0 e^{-\theta t}, \quad (1.195)$$

et

$$\text{Var}(X_t) = \sigma^2 \text{Var} \left[\int_0^t e^{\theta(s-t)} dB_s \right] \quad (1.196)$$

$$= \sigma^2 \mathbb{E} \left[\int_0^t e^{2\theta(s-t)} ds \right] \quad (1.197)$$

$$= \sigma^2 \int_0^t e^{2\theta(s-t)} ds \quad (1.198)$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\theta} (1 - e^{-2\theta t}), \quad (1.199)$$

où l'égalité (1.197) provient de la propriété d'isométrie d'Itô 4).

On peut observer que lorsque t devient grand (long-terme), la moyenne (1.195) converge vers zéro. Cette caractéristique classe le processus de Ornstein-Uhlenbeck parmi la catégorie de processus avec **retour à la moyenne** ou **mean-reverting process**. D'autre part, la distribution des instants de premier passage pour le processus de Ornstein-Uhlenbeck n'est pas connue en générale. En particulier, pour le cas de l'instant de premier passage au niveau zéro T_0^{OU} associé au processus (1.193) avec $X_0 > 0$, $\theta > 0$ et $\sigma = 1$, il existe une formule sous forme fermée de la densité de T_0^{OU} (voir, Alili et al. [2005]).

Exemple 9 (Pont de diffusion). Soit X_t un processus stochastique solution de l'EDS suivante

$$dX_t = \frac{b - X_t}{T - t} dt + dB_t \quad \text{avec} \quad X_0 = a, \quad 0 \leq t < T, \quad (1.200)$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Afin de trouver une solution de (1.200), nous considérons une fonction f définie par

$$f(t, x) = \frac{b - x}{T - t}, \quad (1.201)$$

et dont les dérivées partielles sont données par

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \frac{b - x}{(T - t)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \frac{-1}{T - t}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) = 0.$$

En appliquant la formule d'Itô (1.189) à la fonction $f(t, X_t)$, on obtient

$$df(t, X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) + \left(\frac{b - X_t}{T - t} \right) \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) \right) dt - \frac{dB_t}{T - t} \quad (1.202)$$

$$= \left(\frac{b - X_t}{(T - t)^2} + \left(\frac{b - X_t}{T - t} \right) \left(\frac{-1}{T - t} \right) + 0 \right) dt - \frac{dB_t}{T - t} \quad (1.203)$$

$$= -\frac{dB_t}{T - t}. \quad (1.204)$$

Après intégration, on aura

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) - \int_0^t \frac{dB_s}{T - s},$$

et donc

$$\frac{b - X_t}{T - t} = \frac{b - a}{T} - \int_0^t \frac{dB_s}{T - s},$$

d'où

$$X_t = b - \frac{T - t}{T}(b - a) + (T - t) \int_0^t \frac{dB_s}{T - s}. \quad (1.205)$$

Le processus (1.205) est appelé **pont Brownien** ou **pont de diffusion** associé à l'équation différentielle stochastique (1.200). Il s'agit d'un mouvement Brownien qui est conditionné par $X_0 = a$ et $X_T = b$ (voir Figure 1.15). La distribution des instants de premier passage pour cette classe de processus est étudié dans [Kacef et Hanifi, 2014].

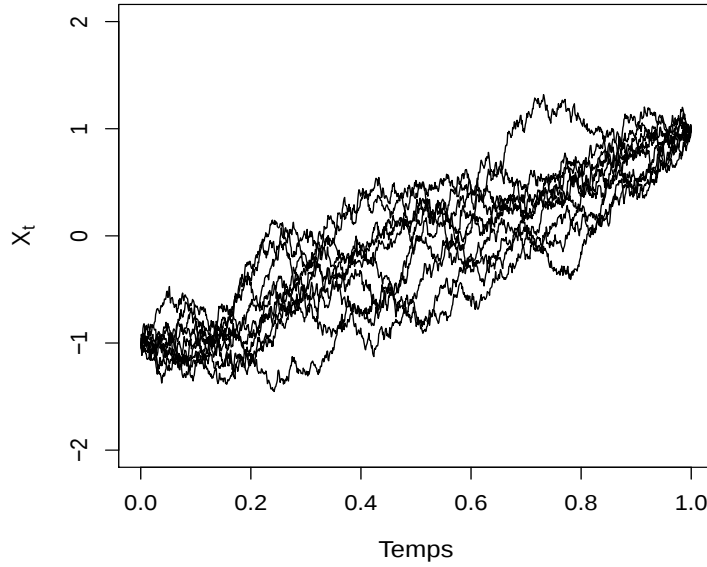


FIGURE 1.15 – Flux de 10 trajectoires d'un pont Brownien X_t avec $X_0 = -1$ et $X_1 = 1$. Notes : Le nombre de réalisations par trajectoires est $n = 100$.

Proposition 14 (Formule d'intégration par parties). *Soient X_t et Y_t deux processus d'Itô dont les formes intégrales sont données par*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s, \quad (1.206)$$

et

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \bar{\mu}_s ds + \int_0^t \bar{\sigma}_s dB_s. \quad (1.207)$$

Alors,

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t, \quad (1.208)$$

où la **variation quadratique** entre les processus X et Y est définie par

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t \sigma_s \bar{\sigma}_s ds. \quad (1.209)$$

Démonstration. Nous avons l'identité suivante

$$X_t Y_t = \frac{1}{2} (X_t + Y_t)^2 - \frac{1}{2} (X_t^2 + Y_t^2). \quad (1.210)$$

La formule d'Itô (1.189) est appliquée aux processus $(X_t + Y_t)^2$, X_t^2 et Y_t^2 pour avoir

$$(X_t + Y_t)^2 = (X_0 + Y_0)^2 + 2 \int_0^t (X_s + Y_s) d(X_s + Y_s) + \int_0^t (\sigma_s + \bar{\sigma}_s)^2 ds, \quad (1.211)$$

$$X_t^2 = X_0^2 + 2 \int_0^t X_s dX_s + \int_0^t \sigma_s^2 ds, \quad (1.212)$$

et

$$Y_t^2 = Y_0^2 + 2 \int_0^t Y_s dY_s + \int_0^t \bar{\sigma}_s^2 ds. \quad (1.213)$$

Il reste à substituer les formules (1.211), (1.212) et (1.213) dans (1.210) pour obtenir le résultat attendu. $\square$

Théorème de Représentation des Martingales

Théorème 8. Soit $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t$ du mouvement Brownien B_t . Il existe un processus $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ adapté à $\mathcal{F}_t$ tel que $\mathbb{E} \left(\int_0^T X_s^2 ds \right) < +\infty$ et

$$M_t = M_0 + \int_0^t X_s dB_s, \quad (1.214)$$

pour tout $t \in [0, T]$.

Démonstration. Voir [Karatzas et Shreve, 2014]. $\square$

Nous allons utiliser le Théorème 8 dans le Chapitre 2 lors de la tarification d'une option européenne.

1.5.2 Mouvement Brownien géométrique

Définition 13. On appelle **mouvement Brownien géométrique**, le processus stochastique $(S_t)_{t \geq 0}$ dont l'évolution est décrite par l'équation suivante

$$dS_t = S_t(\lambda dt + \sigma dB_t), \quad S_0 = x_0, \quad (1.215)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et B_t est un mouvement Brownien standard.

Proposition 15. L'unique solution de (1.215) est un processus d'Itô défini par

$$S_t = S_0 \exp(\mu t + \sigma B_t), \quad t \geq 0, \quad (1.216)$$

où $\mu = \lambda - \sigma^2/2$.

Démonstration. Afin de vérifier que le processus (1.216) est bien une solution de l'équation différentielle stochastique (1.215), nous appliquons la formule d'Itô à la fonction $f(t, x) = \log(x)$. Par ailleurs, pour monter l'unicité de cette solution, nous supposons qu'il existe une autre solution X_t de (1.215) et montrons qu'elle coïncide avec la première. Tout d'abord, on va exprimer la différentielle de $X_t S_t^{-1}$ à l'aide de la formule d'Itô. On a

$$Z_t = \frac{S_0}{S_t} = \exp\left((\sigma^2/2 - \lambda)t - \sigma B_t\right), \quad (1.217)$$

on peut écrire aussi que

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s[(\sigma^2 - \lambda)ds - \sigma dB_s]. \quad (1.218)$$

Avec la Proposition 14, nous calculons la différentielle de $X_t Z_t$,

$$d(X_t Z_t) = X_t dZ_t + Z_t dX_t + d\langle X, Z \rangle_t, \quad (1.219)$$

où

$$\langle X, Y \rangle_t = \left\langle \int_0^t X_s \sigma dB_s, - \int_0^t Z_s \sigma dB_s \right\rangle_t = - \int_0^t X_s Z_s \sigma^2 ds. \quad (1.220)$$

En remplaçant (1.220) dans (1.219), on obtient

$$d(X_t Z_t) = X_t Z_t [(\sigma^2 - \lambda)dt - \sigma dB_t] + Z_t X_t (\lambda dt + \sigma dB_t) - X_t Z_t \sigma^2 dt \quad (1.221)$$

$$= 0. \quad (1.222)$$

Donc, $X_t Z_t = S_0 Z_0$, ce qui donne, $X_t = S_0 Z_t^{-1} = S_t$. Par conséquent, l'unique solution de l'équation (1.215) est le mouvement Brownien géométrique (1.216). $\square$

Comme nous allons le voir dans le chapitre suivant, le processus S_t est très important en finance car il est souvent adopté pour la modélisation du prix de différents actifs financiers. Nous pouvons observer aussi qu'il s'agit d'une simple transformation du mouvement Brownien arithmétique puisque on a

$$S_t = x_0 \exp(\sigma X_t), \quad t \geq 0, \quad (1.223)$$

où $X_t = \frac{\mu}{\sigma}t + B_t$.

Il est important de noter que, le mouvement Brownien géométrique S_t admet une distribution Log-normale [voir **Annexe A** en page 86]. Pour tout $t > 0$, on a

$$S_t \sim \text{Log-normale} \left(\log(x_0) + \mu t, \sigma^2 t \right). \quad (1.224)$$

La moyenne du processus S_t illustrée dans la Figure 1.16 est donc une fonction du temps t définie par

$$\mathbb{E}(S_t) = x_0 e^{(\mu + 0.5\sigma^2)t}, \quad t \geq 0. \quad (1.225)$$

Soit T_a^S l'instant de premier passage au seuil $a > 0$ par le processus S_t et T_α^X l'instant de premier passage au seuil $\alpha \in \mathbb{R}^*$ par le processus X_t . Nous avons

$$T_a^S = \inf\{t \geq 0 : S_t = a\} = \inf\left\{t \geq 0 : X_t = \frac{1}{\sigma} \log\left(\frac{a}{x_0}\right)\right\}. \quad (1.226)$$

Donc, les deux instants de passage coïncidents pour des seuils différents, c'est-à-dire,

$$T_a^S = T_\alpha^X, \quad (1.227)$$

avec $\alpha = \log(a/x_0)/\sigma$. Pour déterminer la distribution de probabilité de T_a^S , il suffit donc d'appliquer les résultats obtenues dans le cas d'un mouvement Brownien arithmétique.

1.5.3 Distribution de l'instant de premier passage à un seuil fixe par d'un mouvement Brownien géométrique

Proposition 16. *Pour $a > x_0$, on a*

$$\mathbb{P}(T_a^S \leq t) = e^{2\nu\alpha} \Phi\left(\frac{-\nu t - \alpha}{\sqrt{t}}\right) + \Phi\left(\frac{\nu t - \alpha}{\sqrt{t}}\right), \quad (1.228)$$

et, pour $a < x_0$,

$$\mathbb{P}(T_a^S \leq t) = e^{2\nu\alpha} \Phi\left(\frac{\nu t + \alpha}{\sqrt{t}}\right) + \Phi\left(\frac{-\nu t + \alpha}{\sqrt{t}}\right), \quad (1.229)$$

où $\nu = \mu/\sigma$ et $\alpha = \log(a/x_0)/\sigma$.

Démonstration. Les formules (1.228) et (1.229) résultent des Propositions 7 et 9 avec l'usage de l'égalité (1.227). $\square$

Il reste à calculer la dérivée par rapport à t pour trouver la fonction de densité de la v.a. T_a^S , ou directement, l'avoir à partir de la Proposition 10 et l'égalité (1.227). Ainsi,

$$f_{T_a^S}(t) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(\alpha - \nu t)^2}{2t}\right) \mathbf{1}_{\{t>0\}}. \quad (1.230)$$

1.5.4 Simulation Monte-Carlo des instants de premier passage pour un mouvement Brownien géométrique

La simulation d'une trajectoire du processus (1.216) sur un intervalle $[0, T]$ se fait à l'aide de l'algorithme suivant :

Algorithm 4 Simulation du mouvement Brownien géométrique

- 1: Générer un échantillon $(Z_{t_0}, Z_{t_1}, \dots, Z_{t_n})$ de n variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
 - 2: Poser $\Delta t := T/n$, $X(t_0) := 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et $\nu := \mu/\sigma$.
 - 3: Pour i de 1 à n faire $X(t_i) := X(t_{i-1}) + \nu\Delta t + \sqrt{\Delta t}Z(t_{i-1})$.
 - 4: Soit $S_0 \in \mathbb{R}$. Pour i de 1 à n faire $S(t_i) = S_0 \exp(\sigma X(t_i))$.
 - 5: Retourner les valeurs $S_{t_0}, S_{t_1}, \dots, S_{t_n}$.
-

Avec l'Algorithme 4, nous simulons un flux de $N = 1000$ trajectoires d'un mouvement Brownien géométrique issu de $S_0 = 1$ et cela sur l'intervalle de temps $[0, 1]$ avec $n = 1000$ points de réalisations par trajectoire. Nous obtenons par la suite un échantillon de taille N des réalisations de la v.a. T_a^S sur l'intervalle de temps $[0, 1]$. L'histogramme de cet échantillon est tracé dans la Figure 1.17 ainsi que la courbe de la densité de T_a^S .

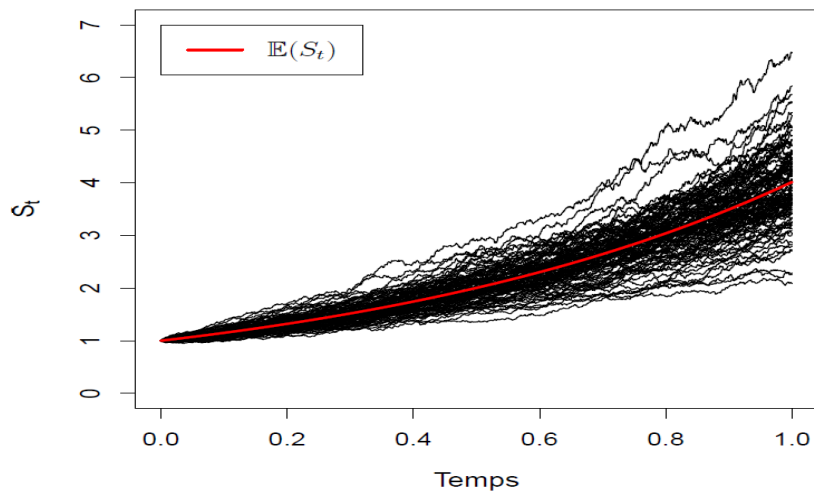


FIGURE 1.16 – Flux de trajectoires d'un mouvement Brownien géométrique sur l'intervalle $[0, 1]$

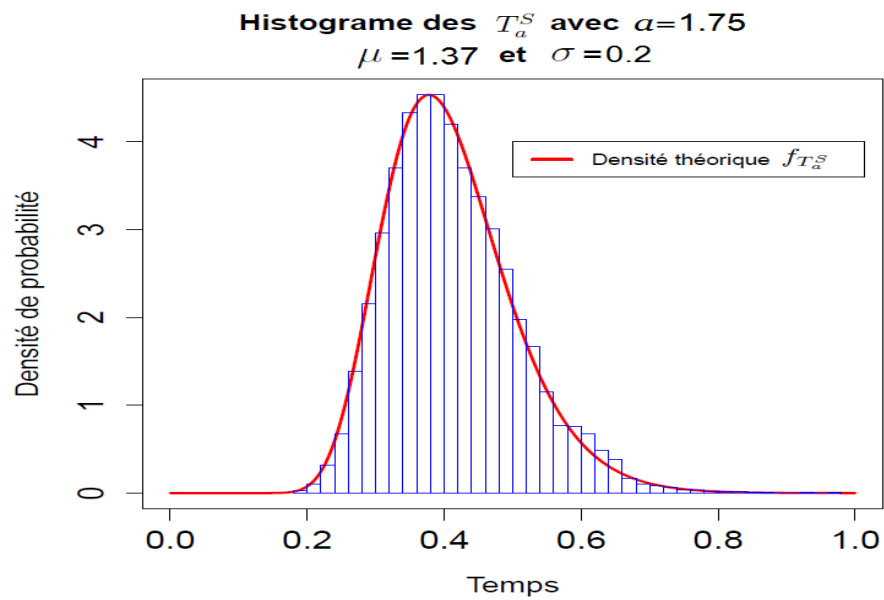


FIGURE 1.17 – Comparaison entre la courbe de la densité $f_{T_a^S}$ et l'histogramme de l'échantillon des T_a^S

Chapitre 2

Gestion des risques financiers par des options

Sommaire

2.1	La notion de risque en finance	51
2.2	Les options	52
2.3	Tarification des options dans le modèle Black-Scholes	53
2.4	Options dont le payoff dépend de l'instant de premier passage	63

2.1 La notion de risque en finance

Définition 14. *Un risque financier est un risque de perte d'argent suite à une opération financière (par exemple, un placement de capitaux en vue d'un gain monétaire ou un emprunt bancaire) ou à une opération économique ayant une incidence financière (par exemple, une vente à crédit ou en devises étrangères).*

2.1.1 Types de risques financiers

Le risque financier est souvent lié à des événements aléatoires d'où l'intérêt d'identifier, en premier lieu, la nature du risque que peut comporter une quelconque opération financière. Les principaux types¹ de risques financiers sont les suivants :

- Le **risque de contrepartie**, c'est le risque que la partie avec laquelle un contrat financier a été conclu ne tienne pas ses engagements (livraison, paiement, remboursement, etc.). Pour une banque, par exemple, c'est le risque que ses clients soient dans l'incapacité de rembourser leurs emprunts, on parle dans ce cas, d'état d'insolvabilité.
- Le **risque de taux d'intérêt**, c'est le risque lié à l'évolution non appréciée des taux de crédit durant la durée du contrat. Ainsi un emprunteur à taux variable, subit un risque de taux quand les taux augmentent car il doit payer plus cher à l'échéance. À l'inverse, un prêteur subit un risque quand les taux baissent car il perd des revenus.
- Le **risque de change**, c'est le risque lié aux fluctuations des taux de change des monnaies (Euro, Dollars, etc.). En effet, pour de nombreuses activités, le cours de change d'une monnaie intervient, par exemple, dans le calcul d'un prix de revient (coût de la matière première), d'un prix de vente (exportation), du remboursement d'intérêts (emprunt en devise), etc. Ainsi, toute variation défavorable du cours de change peut avoir une incidence significative sur différents contrats financiers.
- Le **risque de liquidité** : Pour un investisseur, c'est le risque de ne pas pouvoir vendre ses actifs ou l'obligation pour s'en débarrasser de les vendre à un prix très inférieurs à leur valeur intrinsèque. Cette baisse des prix afin de conclure une vente sur un marché peu liquide est appelée *décote d'illiquidité*. Pour une banque, le risque de liquidité survient quand un grand nombre d'épargnants souhaite retirer des espèces sur leur compte, alors qu'elle a placé leurs dépôts à moyen et long terme.
- Le **risque opérationnel**, est le risque de pertes potentielles d'argent à cause de lacunes ou de défauts attribuables aux ressources humaines et matérielles : procédures des systèmes internes défectueux (pannes informatiques), événements déclencheurs externes, fraudes, grève du personnel, risques de catastrophes (pandémies), etc.
- Le **risque de crédit**, est le risque pour un créancier que l'un ou plusieurs de ses débiteurs soient dans l'incapacité de rembourser tout (ou une partie) de la dette qu'ils ont contractée.
- Le **risque climatique**, est un risque lié à la vulnérabilité accrue des entreprises par rapport aux variations des indices climatiques (température, précipitations, vent, neige, etc.).

1. Une discussion plus approfondie sur les différents risques en finance peut être trouvée dans le livre de Allen [2012].

2.1.2 Gestion des risques financiers avec des options

La gestion d'un risques financier consiste à identifier ce dernier puis à adopter des stratégies afin d'atténuer la probabilité de pertes associée à des scénarios défavorables se produisant sur les marchés financiers. Certains instruments financiers, tels les produits dérivés, sont des outils de gestion essentiels pour faire face aux multiples risques financiers auxquels sont confrontés les entreprises et institutions. En particulier, parmi les principaux produits dérivés, on a les options. Ces dernières permettent de protéger les entreprises contre plusieurs risques financiers, en particulier, le risque de change. Dans la mesure où les options sont des actifs asymétrique, il permettent à ceux qui les utilisent d'être protégés contre le risque de change sans les priver pour autant d'une évolution qui leur serait favorable et qu'il auraient mal anticipée. En générale, il existe plusieurs façons d'utiliser les options pour couvrir un risque financier, les trois principales catégories étant de couvrir d'autres investissements, de couvrir les intérêts commerciaux et de couvrir d'autres positions sur options. Dans tous les cas, on cherche soit à acheter ou à vendre une option pour protéger une autre position, où l'intention de la stratégie de couverture avec des options est de ne pas prendre plus de risque mais de réduire le risque financier déjà présent. Les options utilisées de cette manière consistent une police d'assurance, où si un résultat inattendu venait à se produire, une perte dans un portefeuille d'actions par exemple, les pertes encourues seront compensées dans une certaine mesure par les bénéfices réalisés grâce à la négociation (achat ou vente) d'options.

Dans la section suivante, nous allons détailler le concept des options ainsi que les approches probabiliste utilisées dans la tarification des options négociée sur marchés financiers.

2.2 Les options

Définition 15 (Derivative). *Un produit dérivé est un instrument financier dont le prix dépend d'un ou plusieurs actifs sous-jacents.² Il existe différents types de contrats dérivés, à savoir, les futures, les forwards, les options, les warrants et les swaps.³*

Définition 16 (Option). *Une option est un contrat qui donne à son titulaire le droit et non l'obligation d'acheter ou de vendre un actif sous-jacent à un prix appelé **prix d'exercice**⁴ et à une date déterminée à l'avance appelée **échéance**. Il existe deux types d'options :*

- Le **Call** ou option d'achat.
- Le **Put** ou option de vente.

L'octroi d'options Call ou Put n'est pas gratuit. En effet, toute option a un prix appelé **prime**. Lorsque l'option est cotée sur le marché, la valeur numérique de sa prime est donnée par ce dernier. En l'absence de cotation, le problème du calcul de la prime se

2. Un actif sous-jacent est un actif servant de référence à un produit dérivé. Il peut s'agir d'un instrument financier (action, indice, obligation, devise, option, etc.) ou physique (matière première).

3. Afin de comprendre le fonctionnement des différents types de produits dérivés, voir [Eales et Choudhry, 2003].

4. Parfois appelé aussi **prix de levée** ou **strike**.

pose. Et, même dans le cas d'une option cotée, il peut être intéressant dans certain cas de disposer d'une formule (théorique) ou d'un modèle permettant de détecter d'éventuelles anomalies liés aux fluctuations de cours de l'actif sous-jacent sur lequel est négocié l'option. D'autre part, si le droit que donne une option peut être exercée à n'importe quel instant durant la durée de vie de l'option, on parle alors d'**option américaine**. Or, si l'option ne peut être exercée qu'à l'échéance du contrat, on parle d'**option européenne**.

2.3 Tarification des options dans le modèle Black-Scholes

Le modèle proposé par [Black et Scholes \[1973\]](#) pour décrire la dynamique des cours d'un actif sous-jacent est un modèle à temps continu avec un actif risqué dont la valeur à l'instant t est noté S_t et un autre actif sans risque noté S_t^0 à l'instant t . On suppose que l'évolution de S^0 est régie par l'équation différentielle ordinaire suivante

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt, \quad (2.1)$$

où $r > 0$ est le taux d'intérêt sur le marché. Si on suppose que $S_0^0 = 1$, alors l'unique solution de l'équation (2.1) est donnée par

$$S_t^0 = e^{rt}. \quad (2.2)$$

Dans le modèle Black-Scholes, les hypothèses sur le marché sont :

- Absence d'opportunité d'arbitrage (**A.O.A.**).⁵
- Le taux d'intérêt à court terme r est connu et est constant dans le temps.
- L'actif risqué S_t est un mouvement brownien géométrique.
- L'action ne verse pas de **dividendes**.⁶
- L'option est de type européenne.
- L'achat ou la vente de l'action ou de l'option est sans frais de transaction.
- Il est possible d'emprunter n'importe quelle fraction du prix d'un titre pour l'acheter ou le détenir, au taux r .
- Il est possible de vendre à découvert.⁷

Dans le modèle Black-Scholes, l'évolution du cours de l'actif risqué S_t est donc décrite par l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = S_t(\lambda dt + \sigma dB_t), \quad S_0 > 0, \quad t \in [0, T], \quad (2.3)$$

5. Cette hypothèse est cruciale dans les marchés financiers, elle affirme qu'il n'existe aucune stratégie financière permettant avec zéro investissement, d'acquérir une richesse certaine dans une date future.

6. Les dividendes sont les sommes versées à titre de revenus par une entreprise à ses actionnaires. Or, sous certaines conditions, il est possible aussi de payer les dividendes en actions.

7. Une vente à découvert est une pratique qui consiste à vendre des titres que l'on ne possède pas encore, dans l'espoir de les racheter ultérieurement à un prix inférieur. Cette opération reste très surveillée par l'Autorité des marchés financiers (**AMF**).

où $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ est la volatilité, S_0 est le cours initiale, T est la date d'échéance de l'option et B_t est un mouvement brownien standard sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.⁸ Comme dans le Chapitre 1, Section 1.5.2, l'unique solution de l'équation (2.3) est donnée par

$$S_t = S_0 \exp(\mu t + \sigma B_t), \quad (2.4)$$

où $\mu = \lambda - \sigma^2/2$ et S_0 est observé directement sur le marché.

Définition 17. Une **stratégie de gestion** est un processus stochastique $\vartheta = (\vartheta_t^0, \vartheta_t)_{0 \leq t \leq T}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, où ϑ est adapté à la filtration naturelle $\mathcal{F}_t$ du mouvement brownien standard B_t . Les processus ϑ_t^0 et ϑ_t représentent les quantités respectives d'actif sans risque et d'actif risqué détenues en portefeuille à l'instant t . Ainsi, la valeur d'un portefeuille à l'instant t associé à une stratégie ϑ est donnée par

$$V_t(\vartheta) = \vartheta_t^0 S_t^0 + \vartheta_t S_t. \quad (2.5)$$

2.3.1 Le principe de l'autofinancement en finance

Définition 18. Une stratégie ϑ est dite **autofinancée** si, une fois adoptée, elle ne change pas la valeur du portefeuille. Ainsi, un portefeuille autofinancé est un portefeuille auquel les fonds ne sont ni injectés ni retirés. Théoriquement, une stratégie ϑ est autofinancée si, pour tout $t \geq 0$ et $\epsilon > 0$, on a

$$\vartheta_t^0 S_t^0 + \vartheta_t S_t = \vartheta_{t+\epsilon}^0 S_{t+\epsilon}^0 + \vartheta_{t+\epsilon} S_{t+\epsilon}. \quad (2.6)$$

La formule (2.6) est interprétée comme suit : un investisseur possède un portefeuille dont la valeur à l'instant t est $V_t(\vartheta) = \vartheta_t^0 S_t^0 + \vartheta_t S_t$. Le marché, quant à lui, permet d'observer les cours des actifs S_t^0 et S_t à la date t . Sur la base de cette information, l'investisseur réajuste son portefeuille en adoptant une nouvelle stratégie $\vartheta_{t+\epsilon}$ pour la date future $t + \epsilon$ et cela en réinvestissant la valeur totale du portefeuille et rien de plus. Il n'y a donc ni apports, ni retraits de fonds.

L'évolution des cours des actifs sur les marchés financiers (bourse) se fait dans des laps de temps relativement courts, voir même en microseconde. Soit $\epsilon > 0$, une quantité assez petite.⁹ Il est intéressant de voir que la formule (2.6) s'écrit aussi comme

$$V_{t+\epsilon}(\vartheta) - V_t(\vartheta) = \vartheta_{t+\epsilon}^0 (S_{t+\epsilon}^0 - S_t^0) + \vartheta_{t+\epsilon} (S_{t+\epsilon} - S_t). \quad (2.7)$$

Donc, avec une stratégie autofinancée, l'évolution du portefeuille dépend uniquement des variations des cours des actifs. De plus, puisque ϵ est très petit, nous pouvons écrire que

$$dV_t(\vartheta) = \vartheta_t^0 dS_t^0 + \vartheta_t dS_t. \quad (2.8)$$

Pour que la formule différentielle (2.8) ait un sens sur l'intervalle $[0, T]$, il faut que

$$\int_0^T |\vartheta_t^0| dt < +\infty, \text{ p.s.} \quad \text{et} \quad \int_0^T \vartheta_t^2 dt < +\infty, \text{ p.s.}$$

Nous notons par $\tilde{S}_t = S_t/S_t^0 = e^{-rt} S_t$ et par $\tilde{V}_t(\vartheta) = V_t(\vartheta)/S_t^0 = e^{-rt} V_t(\vartheta)$, le cours de l'actif risqué actualisé et la valeur du portefeuille actualisé à l'instant t , respectivement.

8. La mesure $\mathbb{P}$ est appelée **mesure de probabilité historique**.

9. Par exemple, on prend que $\epsilon = 10^{-6}$.

Proposition 17. Soit $\vartheta = (\vartheta_t^0, \vartheta_t)_{0 \leq t \leq T}$ une stratégie vérifiant $\int_0^T |\vartheta_t^0| + \vartheta_t^2 dt < +\infty$ p.s.. Alors, ϑ est une stratégie autofinancée si, et seulement si,

$$\tilde{V}_t(\vartheta) = \tilde{V}_0(\vartheta) + \int_0^t \vartheta_u d\tilde{S}_u, \quad (2.9)$$

pour tout $t \in [0, T]$.

Démonstration. Soit ϑ une stratégie autofinancée. Nous commençons par calculer la différentielle de $\tilde{V}_t(\vartheta)$ grâce à la formule (2.8)

$$d\tilde{V}_t(\vartheta) = d(e^{-rt}V_t(\vartheta)) \quad (2.10)$$

$$= V_t(\vartheta)d(e^{-rt}) + e^{-rt}dV_t(\vartheta) + \langle e^{-rt}, V_t(\vartheta) \rangle_t \quad (2.11)$$

$$= -re^{-rt}V_t(\vartheta)dt + e^{-rt}(\vartheta_t^0 dS_t^0 + \vartheta_t dS_t) + 0 \quad (2.12)$$

$$= -re^{-rt}(\vartheta_t^0 e^{rt} + \vartheta_t S_t)dt + e^{-rt}\vartheta_t^0 d(e^{rt}) + e^{-rt}\vartheta_t dS_t \quad (2.13)$$

$$= \vartheta_t(-re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t) \quad (2.14)$$

$$= \vartheta_t d\tilde{S}_t. \quad (2.15)$$

L'intégration de la formule (2.15) sur l'intervalle $[0, t]$ donne le résultat attendu. Nous notons que, l'égalité (2.11) est dû à la Proposition 14, où la variation quadratique est nulle car le processus e^{-rt} est déterministe, quand à l'égalité (2.12), elle provient du fait que ϑ est autofinancé, et donc, elle vérifie la formule (2.8). La démonstration inverse, c'est-à-dire, en supposant que la formule (2.9) est vérifiée, repose sur un raisonnement similaire. $\square$

Définition 19. Une **opportunité d'arbitrage** sur une période $[0, T]$, est une stratégie autofinancée ϑ dont la valeur du portefeuille associée vérifie :

1. $V_0(\vartheta) = 0$.
2. $V_T(\vartheta) \geq 0$ et $\mathbb{E}(V_T(\vartheta)) > 0$.

Définition 20. Un marché est dit **viable** s'il n'existe pas de stratégie d'arbitrage.

2.3.2 Mesure de risque-neutre

Théorème 9 (The Fundamental Theorem of Asset Pricing). *Un marché est viable si, et seulement si, il existe une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à la mesure de probabilité historique $\mathbb{P}$ sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales.*

Démonstration. Voir [Harrison et Pliska, 1981]. $\square$

La dynamique du prix actualisé est donnée par

$$d\tilde{S}_t = d(e^{-rt}S_t) \quad (2.16)$$

$$= S_t(\vartheta)d(e^{-rt}) + e^{-rt}dS_t + \langle e^{-rt}, S_t \rangle_t \quad (2.17)$$

$$= -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}S_t(\lambda dt + \sigma dB_t) + 0 \quad (2.18)$$

$$= \tilde{S}_t((\lambda - r)dt + \sigma dB_t). \quad (2.19)$$

Soit $\mathbb{Q}$ une mesure de probabilité équivalente à $\mathbb{P}$, définie par

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_T} = \exp \left[-\frac{\bar{\lambda}^2}{2}T - \bar{\lambda}B_T \right], \quad (2.20)$$

où $\bar{\lambda} = (\lambda - r)/\sigma$. D'après le théorème de Girsanov, le processus $W_t = \bar{\lambda}t + B_t$, $t \in [0, T]$, est un mouvement brownien standard sous la mesure $\mathbb{Q}$. Ainsi, la différentielle de $\tilde{S}_t$ s'écrit comme

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma dW_t. \quad (2.21)$$

La solution de l'équation différentielle stochastique (2.21) est donnée par

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 \exp \left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t \right), \quad (2.22)$$

où $\tilde{S}_0 = S_0$.

Le processus $\tilde{S}_t$ suit une loi log-normale, et donc, on a $\mathbb{E}(\int_0^T \tilde{S}_t^2 ds) < +\infty$. À partir de la formule (2.21) et d'après le théorème de représentation des martingales, le processus $\tilde{S}_t$ est une martingale sous la mesure de probabilité $\mathbb{Q}$. En finance, la mesure $\mathbb{Q}$ est appelée **mesure de risque-neutre** ou **mesure martingale équivalente**.

Définition 21. Une stratégie ϑ est dite **admissible** si

1. ϑ est autofinancée.
2. Pour tout t , on a $\tilde{V}_t(\vartheta) \geq 0$.
3. La v.a. $\max_{t \in [0, T]} \tilde{V}_t(\vartheta)$ est de carré intégrable sous $\mathbb{Q}$.

Définition 22. Une option européennes est caractérisée par sa fonction de paiement à l'échéance appelée **payoff** ou **fonction de paiement** notée h_T , qui dépend de la date d'échéance T , du prix d'exercice K et de la valeur du cours de l'actif sous-jacent à l'échéance S_T . La v.a. h_T est positive et $\mathcal{F}_T$ -mesurable. Formellement, le payoff vaut à

$$h_T = (S_T - K)_+, \quad (2.23)$$

pour un Call, et

$$h_T = (K - S_T)_+, \quad (2.24)$$

pour un Put.

Une option définie par les payoffs (2.23) et (2.24) est dite **option européenne standard** ou **option vanilla**.

Définition 23. Une option est dite **simulable** (ou **répliquable**) si sa valeur à l'échéance est égale à la valeur finale d'une stratégie admissible ϑ . Autrement dit, $h_T = V_T(\vartheta)$.

Remarque 7. À partir des Définitions 22 et 23, nous pouvons dire que, pour qu'une option européenne soit simulable, il est nécessaire que h_T soit de carré intégrable sous $\mathbb{Q}$. Dans la cas d'une option de type Call, cette condition est bien vérifiée puisque la formule (3.33) donne que, $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(S_T^2) = S_0^2 e^{(2r + \sigma^2)T} < +\infty$.¹⁰ De plus, dans le cas d'une option Put, nous pouvons remarquer que h_T est bornée, et donc, de carré intégrable.

10. Sous la mesure de risque-neutre $\mathbb{Q}$, pour une échéance T fixée, la v.a. S_T suit une distribution $\log \mathcal{N}(\log S_0 + (r - \sigma^2/2)T; \sigma\sqrt{T})$.

Définition 24. On dit que le marché financier est **complet** si toute option européenne d'échéance T est simulable.

Théorème 10. Un marché viable est complet si, et seulement si, il existe une **unique** probabilité martingale équivalente.

Démonstration. Voir [Lamberton et Lapeyre, 2012, pp. 24-25]. $\square$

Il est possible de montrer que le modèle de Black-Scholes décrit un marché complet.¹¹ Dans la section suivante, nous allons voir un résultat fondamentale en théorie de la tarification des options puisque ce dernier permet, en particulier, d'obtenir une formule théorique de la prime de couverture pour l'option européenne standard.

2.3.3 Formule de tarification sous la mesure de risque-neutre

Théorème 11 (Risk-Neutral Pricing Formula). Dans le modèle de Black-Sholes, toute option dont le payoff h_T est une v.a. positive, $\mathcal{F}_T$ -mesurable et de carré intégrable sous la mesure de risque-neutre $\mathbb{Q}$, est simulable et dont la valeur à l'instant t du portefeuille simulant cette option est donnée par

$$V_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-r(T-t)} h_T | \mathcal{F}_t \right). \quad (2.25)$$

Ainsi, le prix à l'instant zéro (à l'établissement du contrat) d'une option dans le modèle de Black-Sholes est donné par

$$\text{Prime} = V_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-rT} h_T \right). \quad (2.26)$$

Démonstration. Soit $\vartheta = (\vartheta_t^0, \vartheta_t)_{0 \leq t \leq T}$ une stratégie admissible simulant l'option. La valeur à l'instant t du portefeuille simulant est donnée par

$$V_t = \vartheta_t^0 S_t^0 + \vartheta_t S_t, \quad (2.27)$$

où $V_T(\vartheta) = h_T$ puisque, par hypothèse, l'option est simulable. De plus, comme ϑ est autofinancée, la Proposition 17 donne

$$\tilde{V}_t = \tilde{V}_0(\vartheta) + \int_0^t \vartheta_u d\tilde{S}_u. \quad (2.28)$$

Sous la mesure de risque-neutre $\mathbb{Q}$, et grâce à la formule (2.21), l'égalité (2.28) s'écrit encore comme

$$\tilde{V}_t = \tilde{V}_0(\vartheta) + \int_0^t \vartheta_u \tilde{S}_u \sigma dW_u, \quad t \in [0, T]. \quad (2.29)$$

Vu que ϑ est admissible, par définition, $\max_{t \in [0, T]} \tilde{V}_t(\vartheta)$ est de carré intégrable sous $\mathbb{Q}$. Ainsi, avec la formule (2.29) et d'après le Théorème de Représentation des Martingales, le processus $\tilde{V}_t$ est une martingale sous $\mathbb{Q}$. En particulier, pour tout $t \leq T$, on a

$$\tilde{V}_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\tilde{V}_T | \mathcal{F}_t \right), \quad (2.30)$$

11. Une discussion approfondie sur la complétude du modèle Black-Scholes est disponible dans [Harrison et Pliska, 1981].

et donc,

$$V_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-r(T-t)} h_T | \mathcal{F}_t \right). \quad (2.31)$$

Nous avons donc montré que la formule (2.31) donne la valeur à l'instant t d'un portefeuille répliquant une option de payoff h_T . D'autre part, il reste à vérifier qu'il existe bien une stratégie admissible qui simule l'option. Autrement dit, on cherche deux processus ϑ_t^0 et ϑ_t qui soient $\mathcal{F}_t$ -adaptés, et vérifiant

$$\vartheta_t^0 S_t^0 + \vartheta_t S_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-r(T-t)} h_T | \mathcal{F}_t \right). \quad (2.32)$$

Soit M_t un processus défini par

$$M_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-rT} h_T | \mathcal{F}_t \right), \quad t \in [0, T], \quad (2.33)$$

est une martingale sous $\mathbb{Q}$.¹² D'après le Théorème de Représentation des Martingales, il existe un processus $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ vérifiant que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\int_0^T X_s^2 ds \right) < +\infty$ et

$$M_t = M_0 + \int_0^t X_s dW_s, \quad (2.34)$$

pour tout $t \in [0, T]$. Soit $\vartheta = (\vartheta_t^0, \vartheta_t)$ une stratégie définie par

$$\vartheta_t = X_t / (\sigma \tilde{S}_t) \quad \text{et} \quad \vartheta_t^0 = M_t - \vartheta_t \tilde{S}_t.$$

Cette stratégie est autofinancée, pour le voir, il suffit de prendre $M_t = \tilde{V}_t$ dans la formule (2.29), et donc, on obtient

$$V_t = e^{rt} M_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-r(T-t)} h_T | \mathcal{F}_t \right). \quad (2.35)$$

Puisque M_t est une martingale positive (car h_T est positive) sous $\mathbb{Q}$, alors, la v.a. V_t est positive, de carré intégrable sous $\mathbb{Q}$ et vérifiant que $V_T = h_T$. Donc, ϑ est bien une stratégie admissible simulant l'option de payoff h_T . $\square$

2.3.4 Prix d'une option d'achat européenne

Comme nous l'avons vu dans la Définition 22, une option européenne de type Call d'échéance T et de prix d'exercice K , est un contrat entre deux parties (acheteur et vendeur) dont les termes sont les suivants : à la date de l'établissement du contrat, l'acheteur d'un Call doit verser une somme d'argent (prime) au vendeur pour s'octroyer l'option. Ce dernier s'engage à vendre un actif sous-jacent au prix fixe K à la date T si le prix du sous-jacent est au-dessus de K à l'échéance, $S_T > K$. Sinon, dans le cas où, $S_T \leq K$, le contrat est perdu et l'acheteur perdra la somme investie au début pour l'achat de l'option. Toutefois, même si $S_T > K$, le détenteur de l'option peut ne pas exercer le contrat car il s'agit d'un droit et non d'une obligation. Par ailleurs, pour une option de type Put de prix d'exercice K et d'échéance T , une fois que la prime est versée par l'acheteur. Le vendeur s'engage à acheter un actif sous-jacent au prix K à la date T si le prix de l'actif sous-jacent est en-dessous de K à l'échéance, $S_T < K$. Sinon, le contrat est perdu et l'acheteur perdra

12. Le processus M_t existe car la v.a. h_T est de carré intégrable sous $\mathbb{Q}$ (Remarque 7).

la prime. Ainsi, la valeur d'une option dépend directement de son payoff, en particulier, pour un Call, il s'agit du maximum entre 0 et $S_T - K$, cette valeur est appelée **la valeur intrinsèque** de l'option. La prime d'une option dépend aussi de **la valeur temps** qui est définie comme étant la probabilité que l'option aura une valeur intrinsèque non nulle à l'échéance. De façon générale, le prix d'une option est donné par la formule suivante

$$\boxed{\text{Prime} = \text{Valeur Intrinsèque} + \text{Valeur Temps}} \quad (2.36)$$

Dans le jargon de la Bourse, pour une option d'achat Call, lorsque $S_t < K$, on dit que l'option est **Out-Of-The-Money (OTM)**. Clairement, les options d'achats OTM n'ont pas de valeur intrinsèque. Dans le cas où, $S_t = K$, on dit que l'option est **At-The-Money (ATM)**. Une option d'achat ATM n'a pas de valeur intrinsèque, mais elle peut toujours avoir une valeur temporelle avant l'expiration du contrat. La dernière situation est quand $S_t > K$, on dit dans ce cas que l'option est **In-The-Money (ITM)**. Dans cette dernière situation l'option aura à la fois une valeur intrinsèque et temporelle, c'est aussi le seul scénario où l'option d'achat peut être exercée par son détenteur. Comme le montre la Figure 2.1, la valeur temps est absorbée à mesure que le prix de l'actif sous-jacent s'éloigne du prix d'exercice, elle est maximale, lorsque l'option est ATM. Nous pouvons dire que la valeur temps dépend principalement de deux facteurs, à savoir, l'échéance T et la volatilité σ de l'actif sous-jacent. En effet, si l'échéance de l'option est éloignée, il y a une plus forte probabilité que l'option termine en ITM. Donc, plus la durée de vie du contrat est grande, plus la valeur temps est grande et par conséquent, plus la prime de l'option est importante. De même pour la volatilité, plus le marché est volatil, plus la probabilité d'un accroissement de la valeur intrinsèque est forte, et donc, plus la valeur temps est grande ce qui augmente la prime.

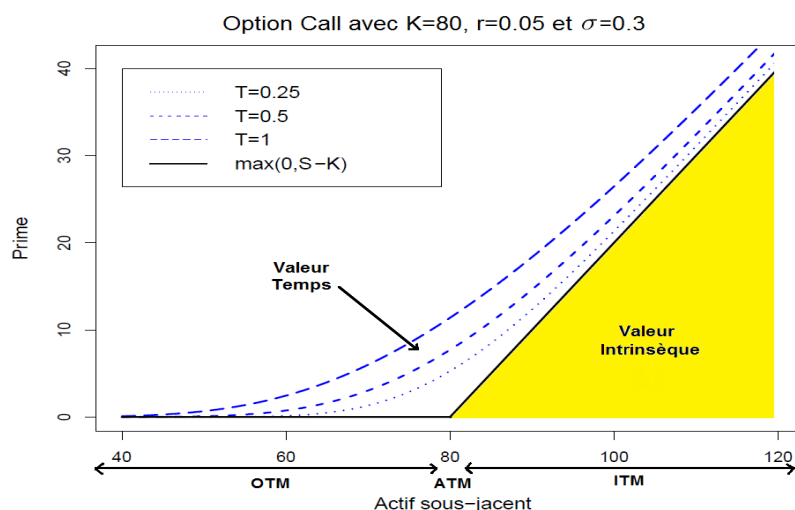


FIGURE 2.1 – Évolution de la valeur intrinsèque et de la valeur temps d'une option d'achat européenne par rapport au prix de l'actif sous-jacent pour différentes échéances. Notes : Le prix du Call est calculé avec la formule de tarification (2.37).

Le résultat suivant est appliqué dans les marchés financiers, il est connu sous l'appellation de **Black-Scholes formula**.

Proposition 18. *Dans le modèle de Black-Scholes, le prix à l'instant zéro d'un Call européen de prix d'exercice K et d'échéance T est donné par*

$$C_0^{BS} = S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2), \quad (2.37)$$

où

$$d_1 = \frac{\log(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Démonstration. À partir de la formule (2.22), le prix de l'actif sous-jacent sous la mesure de risque-neutre $\mathbb{Q}$ est donné par

$$S_t = S_0 \exp(\bar{\mu}t + \sigma W_t), \quad t \in [0, T], \quad (2.38)$$

où $\bar{\mu} = r - \sigma^2/2$. D'après le Théorème 11, le prix à l'instant zéro d'un Call européen de prix d'exercice K et d'échéance T est donné par

$$C_0^{BS} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} (S_T - K)_+ \right]. \quad (2.39)$$

Soit $X_t = \frac{\bar{\mu}}{\sigma}t + W_t$, $t \in [0, T]$. D'après le théorème de Girsanov, le processus X_t est un mouvement brownien standard sous la mesure de probabilité $\tilde{\mathbb{Q}}$ équivalente à $\mathbb{Q}$ qui est définie par

$$\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}_T} = \exp \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\mu}}{\sigma} \right)^2 T - \left(\frac{\bar{\mu}}{\sigma} \right) X_T \right]. \quad (2.40)$$

Afin de simplifier le calcul de la formule de tarification (2.39), nous écrivons

$$C_0^{BS} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} (S_T - K) \mathbf{1}_{\{S_T > K\}} \right] \quad (2.41)$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} S_T \mathbf{1}_{\{S_T > K\}} \right] - K e^{-rT} \mathbb{Q}(S_T > K) \quad (2.42)$$

$$= S_0 e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{\sigma X_T} \mathbf{1}_{\{X_T > k\}} \right] - K e^{-rT} \mathbb{Q}(X_T > k), \quad (2.43)$$

où $k = \log(K/S_0)/\sigma$. Le processus X_t n'est pas un mouvement brownien sous $\mathbb{Q}$, il faut donc écrire la formule (2.43) sous la mesure $\tilde{\mathbb{Q}}$. On a

$$\mathbb{Q}(X_T > k) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\mathbf{1}_{\{X_T > k\}} \right] \quad (2.44)$$

$$= \mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{Q}}} \left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\tilde{\mathbb{Q}}} \Big|_{\mathcal{F}_T} \mathbf{1}_{\{X_T > k\}} \right] \quad (2.45)$$

$$= \mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{Q}}} \left[e^{\frac{\bar{\mu}}{\sigma} X_T - \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\mu}}{\sigma} \right)^2 T} \mathbf{1}_{\{X_T > k\}} \right] \quad (2.46)$$

$$= e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\mu}}{\sigma} \right)^2 T} \mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{Q}}} \left[e^{\frac{\bar{\mu}}{\sigma} \sqrt{T} Z} \mathbf{1}_{\left\{ Z > \frac{k}{\sqrt{T}} \right\}} \right], \quad (2.47)$$

où Z est une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Avec la formule (3.27), on obtient

$$\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{Q}}} \left[e^{\frac{\bar{\mu}}{\sigma} \sqrt{T} Z} \mathbf{1}_{\left\{ Z > \frac{k}{\sqrt{T}} \right\}} \right] = e^{\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\mu}}{\sigma} \right)^2 T} \Phi \left(\frac{\bar{\mu}}{\sigma} \sqrt{T} - \frac{k}{\sqrt{T}} \right). \quad (2.48)$$

D'où,

$$\mathbb{Q}(X_T > k) = \Phi\left(\frac{\bar{\mu}}{\sigma}\sqrt{T} - \frac{k}{\sqrt{T}}\right). \quad (2.49)$$

De façon analogue, on a

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\sigma X_T} \mathbf{1}_{\{X_T > k\}}\right] = \mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{Q}}}\left[e^{(\sigma + \frac{\bar{\mu}}{\sigma})X_T - \frac{1}{2}(\frac{\bar{\mu}}{\sigma})^2 T} \mathbf{1}_{\{X_T > k\}}\right] = e^{rT} \Phi\left(\frac{\tilde{\mu}}{\sigma}\sqrt{T} - \frac{k}{\sqrt{T}}\right), \quad (2.50)$$

où $\tilde{\mu} = r + \sigma^2/2$.

Finalement, il suffit de remplacer les formules (2.49) et (2.50) dans (2.43) pour obtenir le résultat attendu. $\square$

2.3.5 Formule de parité Call-Put

La tarification d'une option de vente européenne dans le modèle de Black-Scholes est aussi possible grâce à l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage sur le marché. Le prix à l'instant zéro d'un Put de prix d'exercice K et d'échéance T est donné avec la formule suivante

$$P_0^{BS} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT}(K - S_T)_+\right]. \quad (2.51)$$

Le calcul de la formule (2.51) est analogue au calcul que nous avons effectué dans la section précédente pour le cas d'une option de type Call. Cependant, il existe une relation analytique entre les options Call et Put appelée **formule de parité Call-Put**. Cette formule a été introduite pour la première fois par [Stoll \[1969\]](#), elle est donnée ainsi

$$C_0^{BS} - P_0^{BS} = S_0 - Ke^{-rT}. \quad (2.52)$$

2.3.6 Exemples de tarification d'autres types d'options : Les Options Asiatiques

Dans cette section, nous allons voir une autre classe d'options appelée **options asiatiques**. Ces dernières ont une valeur qui dépend de la moyenne du cours de l'actif sous-jacent sur la durée de vie du contrat. Cette caractéristique des options asiatiques permet de capter toutes les fluctuations du cours (basse, hausse ou stabilisation) contrairement aux options européennes dont la valeur dépend uniquement de l'état du marché à l'échéance.

Option asiatique à moyenne géométrique

Définition 25. Une option asiatique à moyenne géométrique¹³ de prix d'exercice K fixe¹⁴ et d'échéance T est une option dont le payoff h_T s'écrit comme

$$h_T = \left(\exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T \log S_u du\right) - K\right)_+, \quad (2.53)$$

13. Aussi appelée **option géométrique asiatique**.

14. Il existe des options asiatiques à prix d'exercice aléatoire. Dans ce type d'options, on considère que le prix d'exercice est égale au prix de l'actif sous-jacent à l'échéance.

pour un Call, et

$$h_T = \left(K - \exp \left(\frac{1}{T} \int_0^T \log S_u du \right) \right)_+, \quad (2.54)$$

pour un Put.

Proposition 19. Dans le modèle de Black-Scholes, le prix à l'instant zéro d'une option d'achat asiatique à moyenne géométrique de prix d'exercice K et d'échéance T est donné par

$$GAC = S_0 e^{-\frac{r+\sigma^2/6}{2}T} \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2), \quad (2.55)$$

où

$$d_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sigma\sqrt{T}} \left(\log \left(\frac{S_0}{K} \right) + \frac{r + \sigma^2/6}{2} T \right) \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{3}}.$$

Démonstration. Voir [Angus, 1999]. □

Option asiatique à moyenne arithmétique

Définition 26. Une option asiatique à moyenne arithmétique de prix d'exercice K fixe et d'échéance T est une option dont le payoff h_T s'écrit comme

$$h_T = \left(\frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)_+, \quad (2.56)$$

pour un Call, et

$$h_T = \left(K - \frac{1}{T} \int_0^T S_u du \right)_+, \quad (2.57)$$

pour un Put.

Les options asiatique à moyenne arithmétique ou **options arithmétiques asiatiques** n'ont pas de formule de tarification sous forme-fermée¹⁵ comme dans le cas géométrique la raison est que la distribution de somme de v.a. de loi log-normale n'est pas connue analytiquement.¹⁶ En pratique, le prix des options asiatiques à moyenne arithmétique est approximé par des méthodes numériques.

Approximation Log-normale du prix des options arithmétiques asiatiques

Nous rappelons que dans le modèle de Black-Scholes et sous la mesure de risque-neutre $\mathbb{Q}$, le prix S_t à l'instant t de l'actif sous-jacent suit une distribution log-normale. On a

$$S_t \sim \log \mathcal{N} \left(\log S_0 + (r - \sigma^2/2)t; \sigma\sqrt{t} \right). \quad (2.58)$$

Soit A_t un processus défini par

$$A_t = \frac{1}{t} \int_0^t S_u du, \quad t \in [0, T]. \quad (2.59)$$

15. Une expression est dite de forme-fermée si elle s'exprime à l'aide d'un nombre fini d'opérations mathématiques standard.

16. La distribution de somme log-normale est approchée analytiquement par une distribution log-normale avec les deux premier moment identique, cette technique est connue en littérature sous l'appellation de **Moment-Matching Approximation** (pour plus de détails, voir [Lo et al., 2014]).

La distribution de la v.a. A_T n'est pas connue analytiquement. Cependant, il est possible de calculer, sous la mesure $\mathbb{Q}$, les deux premiers moments de A_T comme dans [Milevsky et Posner, 1998]. On a

$$m_1(T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[A_T] = S_0 \frac{e^{rT} - 1}{rT} \quad (2.60)$$

et

$$m_2(T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[A_T^2] = \frac{2S_0^2}{T^2} \left[\frac{e^{(2r+\sigma^2)T}}{(r+\sigma^2)(2r+\sigma^2)} + \frac{1}{r(2r+\sigma^2)} - \frac{e^{rT}}{r(r+\sigma^2)} \right]. \quad (2.61)$$

Grâce aux relations (3.34) et (3.35), on obtient

$$A_T \stackrel{d}{\approx} \log \mathcal{N}(\mu_T; \sigma_T), \quad (2.62)$$

où

$$\mu_T = \log \left(\frac{m_1(T)^2}{\sqrt{m_2(T)}} \right), \quad (2.63)$$

$$\sigma_T = \sqrt{\log \left(\frac{m_2(T)}{m_1(T)^2} \right)}. \quad (2.64)$$

Proposition 20. *Soit X une v.a. de distribution $\log \mathcal{N}(\mu; \sigma)$ et K une constante positive. Alors, on a*

$$\Upsilon(\mu, \sigma; K) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(X - K)_+] = e^{\mu+\sigma^2/2} \Phi \left(\frac{\sigma^2 + \mu - \log K}{\sigma} \right) - K \Phi \left(\frac{\mu - \log K}{\sigma} \right). \quad (2.65)$$

Avec l'approximation (2.62), le prix à l'instant zéro d'une options d'achat arithmétique asiatique peut être approximé comme suit

$$AAC = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} \left(\frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)_+ \right] \approx \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} (\log \mathcal{N}(\mu_T; \sigma_T) - K)_+ \right]. \quad (2.66)$$

De plus, avec la fonction Υ de la Proposition 20, on a

$$AAC \approx e^{-rT} \Upsilon(\mu_T, \sigma_T; K). \quad (2.67)$$

Remarque 8. *Il existe d'autres approches pour approximer le prix AAC, nous citons à titre d'exemple la technique de conditionnement par une moyenne géométrique proposée pour la première fois par Curran [1994].*

2.4 Options dont le payoff dépend de l'instant de premier passage

2.4.1 Option à barrière

Une option à barrière est une option dont la gain, à l'échéance, dépend du fait que le cours de l'actif sous-jacent a atteint ou non un certain seuil prédéterminé appelé **barrière**.

Une option à barrière appartient à la catégorie d'options appelées **path-dependent option**, il s'agit d'options dont le prix dépend de la trajectoire que va prendre le cours de l'actif sous-jacent pendant la durée de vie du contrat. D'autres types d'options dépendantes de la trajectoire sont négociés sur les marchés financiers, à savoir, les options asiatiques, les options Binaires, etc. Il existe deux classes d'options à barrières, la première est dite **knock-in option**, cette option s'active si la barrière est atteinte avant l'échéance. Le deuxième type d'option à barrière est appelé **knock-out option**, cette option, quand à elle, se désactive si la barrière est atteinte avant l'échéance. Dans les options à barrières, nous distinguons aussi deux positions pour la barrière, soit que la barrière est supérieur au prix initiale du marché, on dira que c'est une barrière haute (ou **Up-barrier**) ou que la barrière est inférieur au prix initiale du marché, on dira que c'est une barrière basse (ou **Down-barrier**).

Dans le tableau ci-dessous, nous regroupons les différentes classes d'options à barrières selon que l'option est d'achat (Call) ou de vente (Put). Nous considérons un prix d'exercice K , une échéance T et une barrière B .

Type d'option	Classes	Payoff	Notations
Call	Down-and-Out	$(S_T - K) + \mathbf{1}_{\{\min_{t \in [0;T]} S_t > B\}}$	DOC_B
	Down-and-In	$(S_T - K) + \mathbf{1}_{\{\min_{t \in [0;T]} S_t < B\}}$	DIC_B
	Up-and-Out	$(S_T - K) + \mathbf{1}_{\{\max_{t \in [0;T]} S_t < B\}}$	UOC_B
	Up-and-In	$(S_T - K) + \mathbf{1}_{\{\max_{t \in [0;T]} S_t > B\}}$	UIC_B
Put	Down-and-Out	$(K - S_T) + \mathbf{1}_{\{\min_{t \in [0;T]} S_t > B\}}$	DOP_B
	Down-and-In	$(K - S_T) + \mathbf{1}_{\{\min_{t \in [0;T]} S_t < B\}}$	DIP_B
	Up-and-Out	$(K - S_T) + \mathbf{1}_{\{\max_{t \in [0;T]} S_t < B\}}$	UOP_B
	Up-and-In	$(K - S_T) + \mathbf{1}_{\{\max_{t \in [0;T]} S_t > B\}}$	UIP_B

Remarque 9. *Le payoff des options à barrières dépend donc du maximum du prix de l'actif sous-jacent pendant la dure de vie du contrat, comme nous l'avons vu dans le Chapitre 1, ce maximum est en relation direct avec l'instant de premier passage à barrière B par le processus de prix S_t puisque on a*

$$\{T_B^S < T\} = \left\{ \max_{t \in [0;T]} S_t > B \right\}, \quad S_0 < B \quad (2.68)$$

et

$$\{T_B^S < T\} = \left\{ \min_{t \in [0;T]} S_t < B \right\}, \quad S_0 > B \quad (2.69)$$

où $T_B^S = \inf\{t \geq 0 : S_t = B\}$.

L'une des raisons d'introduire les options à barrières dans les marchés financiers est que leur prix est beaucoup plus attractif que celui des options européennes standard. Cette différence de prix est principalement due à l'ajout de la condition que la barrière soit atteinte ou non. De plus, la formule de tarification sous le modèle de Black-Scholes est connue pour les huit options à barrières [Zhang, 1998, pp. 220-238]. Cependant, il n'existe

pas de formule sous forme-fermée pour le cas d'un modèle de Black-Scholes avec volatilité stochastique [Chiarella *et al.*, 2012]. De même, pour le modèle avec taux d'intérêt stochastique étudié par Bernard *et al.* [2008]. Par ailleurs, pour une option à barrière mobile, il existe en littérature plusieurs approches, nous citons en exemple, les travaux de Rogers et Zane [1997]. Il est possible de considérer des options à double barrières, autrement dit, une situation dans laquelle une option à barrières s'active à partir du moment où le cours atteint une autre barrière, cette idée est développée dans [Kunitomo et Ikeda, 1992] et [Geman et Yor, 1996]. Comme dans [Carr, 1995], un montant de remboursement fixe est parfois ajouté à une options à barrière, ce montant représente une portion de la prime versé.

Formule de tarification d'une option Up-and-Out Call

Proposition 21. *Dans le modèle de Black-Scholes, le prix à l'instant zéro d'une option d'achat de type Up-and-Out de prix d'exercice K , d'échéance T et de barrière $B > K$ est donné par*

$$\begin{aligned} UOC_B = S_0 & \left[\Phi \left(\delta_+ \left(T, \frac{S_0}{K} \right) \right) - \Phi \left(\delta_+ \left(T, \frac{S_0}{B} \right) \right) \right] \\ & - e^{-rT} K \left[\Phi \left(\delta_- \left(T, \frac{S_0}{K} \right) \right) - \Phi \left(\delta_- \left(T, \frac{S_0}{B} \right) \right) \right] \\ & - B \left(\frac{S_0}{B} \right)^{-2r/\sigma^2} \left[\Phi \left(\delta_+ \left(T, \frac{B^2}{KS_0} \right) \right) - \Phi \left(\delta_+ \left(T, \frac{B}{S_0} \right) \right) \right] \\ & + e^{-rT} K \left(\frac{S_0}{B} \right)^{1-2r/\sigma^2} \left[\Phi \left(\delta_- \left(T, \frac{B^2}{KS_0} \right) \right) - \Phi \left(\delta_- \left(T, \frac{B}{S_0} \right) \right) \right], \end{aligned} \quad (2.70)$$

où $S_0 \leq B$ et $\delta_{\pm}(\tau, s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} [\log s + (r \pm \sigma^2/2)\tau]$.

Démonstration. Voir [Shreve, 2008, pp. 300-307]. □

Remarque 10. *Les options à barrières de type Knock-Out sont automatiquement éliminées lorsque $\max_{t \in [0;T]} S_t > B$ ou $\min_{t \in [0;T]} S_t < B$. De même, pour les options UOC_B et DIP_B qui sont sans valeur dans les cas $B \leq K$ et $B \geq K$, respectivement.*

Formule de parité Call-Put pour les options à barrières

Par construction nous avons les relations suivante entre les options à barrières et les options européenne standard :

$$UIC_B + UOC_B = DIC_B + DOC_B = C_0^{BS} \quad (2.71)$$

et

$$UIP_B + UOP_B = DIP_B + DOP_B = P_0^{BS}. \quad (2.72)$$

Il suffit d'appliquer les relations (2.71) et (2.72) avec les formules (2.37) et (2.52) pour déduire les formules de tarification des options de type Knock-In à partir des Knock-Out options.

Proposition 22. Dans le modèle de Black-Scholes, le prix à l'instant zéro d'une option de vente de type Up-and-Out de prix d'exercice K , d'échéance T et de barrière B est donné par

$$\begin{aligned}
 UOP_B = S_0 & \left[\left(\frac{B}{S_0} \right)^{2r/\sigma^2+1} \Phi \left(\psi_+ \left(T, \frac{KS_0}{B^2} \right) \right) - \Phi \left(\psi_+ \left(T, \frac{K}{S_0} \right) \right) \right] \\
 & - e^{-rT} K \left[\left(\frac{S_0}{B} \right)^{1-2r/\sigma^2} \Phi \left(\psi_- \left(T, \frac{KS_0}{B^2} \right) \right) - \Phi \left(\psi_- \left(T, \frac{K}{S_0} \right) \right) \right]
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

pour $K \leq B$, et

$$\begin{aligned}
 UOP_B = S_0 & \left[\left(\frac{B}{S_0} \right)^{2r/\sigma^2+1} \Phi \left(\psi_+ \left(T, \frac{S_0}{B} \right) \right) - \Phi \left(\psi_+ \left(T, \frac{B}{S_0} \right) \right) \right] \\
 & - e^{-rT} K \left[\left(\frac{S_0}{B} \right)^{1-2r/\sigma^2} \Phi \left(\psi_- \left(T, \frac{S_0}{B} \right) \right) - \Phi \left(\psi_- \left(T, \frac{B}{S_0} \right) \right) \right]
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

pour $K \geq B$, où $\psi_{\pm}(\tau, s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} [\log s - (r \pm \sigma^2/2)\tau]$.

2.4.2 Option Asiatique à barrière

Comme nous l'avons vu dans la Section 2.3.6, les options asiatiques sont des options dont la valeur dépend de la moyenne du cours de l'actif sous-jacent pendant la durée de vie du contrat. Une barrière peut être ajoutée à un contrat asiatique afin de réduire son coût. L'idée est, si le cours de l'actif sous-jacent n'atteint pas un seuil favorable pour un investisseur, alors il n'est pas intéressant d'acheter une option asiatique, et donc, la barrière fixée au début du contrat asiatique servira à activer ou non le calcul de la moyenne. Les options asiatiques à barrières sont donc considérées comme étant des produits financiers hybride entre option à barrière standard et option asiatique. En littérature, il n'existe pas de formules analytiques pour les options asiatiques à barrières. Parmi les travaux scientifiques traitant le problème de tarification de ces options, nous citons, [Kazantzaki \[2009\]](#), [Hsu et al. \[2012\]](#), [Aimi et al. \[2019\]](#) et [Yang et al. \[2019\]](#).

Pour le cas d'un prix d'exercice K fixe, il existe seize classes d'options asiatiques à barrières selon le type de moyenne (géométrique / arithmétique) :

Type d'option	Classes	Payoff	Notations
Call	Down-and-Out	$(G_T^{Asian} - K) + \mathbf{1}_{\{\min_{t \in [0;T]} S_t > B\}}$	$DOGAC_B$
	Down-and-In	$(G_T^{Asian} - K) + \mathbf{1}_{\{\min_{t \in [0;T]} S_t < B\}}$	$DIGAC_B$
	Up-and-Out	$(G_T^{Asian} - K) + \mathbf{1}_{\{\max_{t \in [0;T]} S_t < B\}}$	$UOGAC_B$
	Up-and-In	$(G_T^{Asian} - K) + \mathbf{1}_{\{\max_{t \in [0;T]} S_t > B\}}$	$UIGAC_B$
Put	Down-and-Out	$(K - G_T^{Asian}) + \mathbf{1}_{\{\min_{t \in [0;T]} S_t > B\}}$	$DOGAP_B$
	Down-and-In	$(K - G_T^{Asian}) + \mathbf{1}_{\{\min_{t \in [0;T]} S_t < B\}}$	$DIGAP_B$
	Up-and-Out	$(K - G_T^{Asian}) + \mathbf{1}_{\{\max_{t \in [0;T]} S_t < B\}}$	$UOGAP_B$
	Up-and-In	$(K - G_T^{Asian}) + \mathbf{1}_{\{\max_{t \in [0;T]} S_t > B\}}$	$UIGAP_B$

Type d'option	Classes	Payoff	Notations
Call	Down-and-Out	$(A_T^{Asian} - K)_+ \mathbf{1}_{\{\min_{t \in [0;T]} S_t > B\}}$	$DOAAC_B$
	Down-and-In	$(A_T^{Asian} - K)_+ \mathbf{1}_{\{\min_{t \in [0;T]} S_t < B\}}$	$DIAAC_B$
	Up-and-Out	$(A_T^{Asian} - K)_+ \mathbf{1}_{\{\max_{t \in [0;T]} S_t < B\}}$	$UOAAC_B$
	Up-and-In	$(A_T^{Asian} - K)_+ \mathbf{1}_{\{\max_{t \in [0;T]} S_t > B\}}$	$UIAAC_B$
Put	Down-and-Out	$(K - A_T^{Asian})_+ \mathbf{1}_{\{\min_{t \in [0;T]} S_t > B\}}$	$DOAAP_B$
	Down-and-In	$(K - A_T^{Asian})_+ \mathbf{1}_{\{\min_{t \in [0;T]} S_t < B\}}$	$DIAAP_B$
	Up-and-Out	$(K - A_T^{Asian})_+ \mathbf{1}_{\{\max_{t \in [0;T]} S_t < B\}}$	$UOAAP_B$
	Up-and-In	$(K - A_T^{Asian})_+ \mathbf{1}_{\{\max_{t \in [0;T]} S_t > B\}}$	$UIAAP_B$

Avec

$$G_T^{Asian} = \exp \left(\frac{1}{T} \int_0^T \log S_u du \right)$$

et

$$A_T^{Asian} = \frac{1}{T} \int_0^T S_u du.$$

Chapitre 3

Une approximation de forme fermée du prix d'une option d'Istanbul à moyenne géométrique

Sommaire

3.1	Options d'Istanbul	69
3.2	Tarification des options d'Istanbul à moyenne géométrique .	70
3.3	Approximation Log-normale pour le prix d'une option d'Istanbul à moyenne arithmétique	77
3.4	Analyse numérique	78

3.1 Options d'Istanbul

Le concept des options d'Istanbul a été introduit pour la première fois par Michel Jacques en 1997. Ces produits dérivés sont considérés comme une extension des options asiatiques. Une option d'Istanbul est une option exotique¹ dont le gain dépend du fait que le prix de l'actif sous-jacent a atteint ou non une certaine barrière préalablement fixé. Si cette barrière est atteinte avant l'échéance, une option asiatique est activée et la moyenne est calculée à partir du premier moment où le prix de l'actif sous-jacent atteint la barrière jusqu'à l'échéance. Toutefois, si la barrière n'est pas atteinte, une option européenne standard est activée à l'échéance. Une option d'Istanbul peut donc être considérée comme une option hybride qui présente les caractéristiques d'une option asiatique et d'une option européenne standard.² Cette option est similaire aux options asiatiques avec barrière étudiée par Zvan *et al.* [1999] et Hsu *et al.* [2012], la principale différence étant que dans les cas d'option d'Istanbul, le calcul de la moyenne est activé à partir du premier moment où la barrière est atteinte et non à partir de la date d'acquisition du contrat.

Si on considère le modèle de Black et Scholes [1973], l'évaluation de produits tels que les options arithmétiques asiatiques devient très difficile car l'hypothèse de prendre le prix de l'actif sous-jacent comme un mouvement géométrique Brownien ne permet pas d'obtenir une formule d'évaluation de forme fermée car la distribution de la somme des variables aléatoires log-normales n'est pas connue en théorie. Cependant, le prix d'une option arithmétique asiatique peut être approximé en pratique par des simulations de Monte-Carlo (MC) avec des techniques de réduction de la variance de l'estimateur obtenu (voir, [Zhang, 2009], [Mehrdoost, 2015] et [Lu *et al.*, 2019]). Il est également possible d'approcher le prix de ces options avec une expansion de Taylor comme dans [Ju, 2002] ou en résolvant numériquement l'équation différentielle partielle qui caractérise le prix de l'option comme dans [Vacer, 2001]. Les méthodes basées sur la transformation rapide de Fourier (FFT) sont également très efficaces, comme le montrent les résultats obtenus dans [Kirkby, 2016]. Le problème de la tarification des options arithmétiques asiatiques est également largement étudié dans le cadre de modèles économiques plus complexes tels que le modèle Lévy [Fusai et Meucci, 2008] et le modèle de volatilité stochastique étudié dans [Kirkby et Nguyen, 2020].

Pour le cas d'une option géométrique asiatique (GAO)³, la formule de tarification est connue sous forme fermée [Section 2.3.6, formule (2.55)]. Le prix d'une option de vente asiatique géométrique est obtenu avec la formule de parité Call-Put comme dans une option européenne standard. Récemment, les options géométriques asiatiques avec barrière ont été étudiées par Aimi et Guardasoni [2017] et Aimi *et al.* [2018], la formule de tarification de ce type d'options n'a pas de forme fermée. Les options impliquant une moyenne géométrique sont également étudiées dans le contexte d'une volatilité stochastique comme dans [Wong et Cheung, 2004] et [Hubalek et Sgarra, 2011].

Dans [Jacques, 1997], l'option d'achat arithmétique d'Istanbul (AIC) est étudiée en

1. Une option exotique est une option dont le payoff est plus complexe que celui d'une option européenne standard.

2. L'appellation par options d'Istanbul vient du fait que Istanbul est une importante ville commerciale en Turquie, à cheval sur l'Europe et l'Asie par le détroit du Bosphore.

3. Historiquement, les options GAOs ont été introduites pour la première fois par Kemna et Vorst [1990] comme variable de contrôle afin de réduire la variance de l'estimateur de Monte-Carlo du prix d'une option arithmétique asiatique.

temps continu et discret. Le prix de cette option est obtenu par une approximation log-normale (plus de détails sur cette approche pouvant être trouvé dans [Lévy, 1992]).

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur le problème du prix de l'option géométrique d'Istanbul (GIO) dans les transactions en temps continu. Nous ne considérons que le cas d'une option d'achat avec une barrière haute et un prix d'exercice fixe. Nous supposons également que les termes du contrat ne garantissent aucun paiement de dividende ou de rabais à l'échéance.

Actuellement, les options d'Istanbul ne font pas partie des produits proposés sur les marchés d'options. Toutefois, il est possible d'intégrer ces produits dérivés comme alternative aux options asiatiques et aussi aux options parisiennes [Chesney *et al.*, 1997]. Une autre idée pour l'application des options d'Istanbul serait de les injecter comme partie de remboursement dans des produits déjà connus et négociés tels que les options à barrière européenne. Le rabais pour les options à barrière est généralement fixé au début du contrat. Ce montant, qui représente une partie de la prime investie, ne dépend pas des fluctuations du prix de l'actif sous-jacent pendant la durée de vie de l'option. Le prix d'une option d'Istanbul peut être ajouté pour garantir le remboursement d'une somme d'argent si les scénarios attendus par le détenteur de l'option ne se réalisent pas à l'échéance.

3.2 Tarification des options d'Istanbul à moyenne géométrique

Nous considérons le modèle standard Black-Scholes [Section 2.3] de marché sans friction où il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage, le taux d'intérêt sans risque $r > 0$ et la volatilité $\sigma > 0$ sont constants. Le cours à l'instant t de l'actif sous-jacent S_t suit un mouvement géométrique Brownien

$$S_t = S_0 \exp(\bar{\mu}t + \sigma W_t), \quad t \in [0, T], \quad (3.1)$$

où $[0, T]$ est la période de négociation, $S_0 > 0$ est le prix initial du marché, $\bar{\mu} = r - \sigma^2/2$ est le taux de dérive et W_t un mouvement Brownien standard unidimensionnel sous la probabilité de risque-neutre notée $\mathbb{P}$.

Dans tout ce qui va suivre, la constante $B (> S_0)$ est une barrière haute préalablement fixée dans les termes du contrat. Le premier instant de passage de la barrière B par le processus S_t est une v.a. notée τ_B^S et définie comme

$$\tau_B^S \equiv \inf \{t \in [0, T] : S_t \geq B\}. \quad (3.2)$$

Remarque 11. Si le processus de prix S_t n'atteint pas la barrière B pendant la période $[0, T]$, nous prenons par convention que $\tau_B^S = +\infty$.

Nous adoptons également les notations suivantes :

- $\mu = \bar{\mu}/\sigma$
- $b = \log(B/S_0)/\sigma$.

Le payoff d'une option d'achat géométrique d'Istanbul (GIC) à l'échéance T et de prix d'exercice K peut s'écrire comme $(G_T - K)_+$, où K est le prix d'exercice et G_T est une

v.a. définie par

$$G_T \equiv \exp \left(\frac{1}{T - \tau_B^S} \int_{\tau_B^S}^T \log S_u du \right) \mathbf{1}_{\{\tau_B^S < T\}} + S_T \mathbf{1}_{\{\tau_B^S \geq T\}}. \quad (3.3)$$

À partir des définitions (3.2) et (3.3), on peut voir que le prix des options d'achat géométriques d'Istanbul et des options d'achat géométriques asiatiques coïncident lorsque $S_0 \geq B$. Comme nous le verrons dans la Section 3.2.1, notre méthode d'approximation analytique peut être appliquée dans le cas d'une option de type Put.

Avec la formule de tarification sous risque-neutre [Théorème 11], le prix à l'instant zéro d'une option géométrique d'Istanbul correspond à la valeur attendue de son gain actualisé à l'échéance, ce prix sera désigné pour une option d'achat par GIC_B . Ainsi, nous avons

$$GIC_B = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[e^{-rT} (G_T - K)_+ \right], \quad (3.4)$$

La distribution de probabilité de G_T est essentielle pour obtenir une formule analytique de GIC_B . On remarque que cette distribution est connue lorsque B n'est pas atteint avant T , elle correspond à la distribution conjointe du mouvement Brownien géométrique et de son instant de premier passage à B . Ainsi, seule la distribution lorsque B est atteinte avant T est inconnue et doit être calculée.

Pour $x > 0$, nous avons

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{P}}(G_T \leq x, \tau_B^S < T) &= \int_0^T \bar{\mathbb{P}}(G_T \leq x, \tau_B^S = t) dt \\ &= \int_0^T \bar{\mathbb{P}} \left(\exp \left(\frac{1}{T - \tau_B^S} \int_{\tau_B^S}^T \log S_u du \right) \leq x, \tau_B^S = t \right) dt. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Soit un processus Z_t , $t \geq 0$, défini par $Z_t = W_{\tau_B^S + t} - W_{\tau_B^S}$. En vertu de la propriété forte de Markov [Théorème 3], et conditionnellement à $\{\tau_B^S < T\}$, le processus Z_t est un $\bar{\mathbb{P}}$ -mouvement Brownien standard issu de zéro. Ce processus est aussi indépendant du temps d'arrêt τ_B^S puisque il est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_{\tau_B^S}$.

Par ailleurs, pour $t \in [\tau_B^S, T]$, nous avons

$$\log S_t = \log B + \bar{\mu}(t - \tau_B^S) + \sigma Z_{t - \tau_B^S}. \quad (3.6)$$

Avec la formule (3.6), on peut écrire

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{P}} \left(\exp \left(\frac{1}{T - \tau_B^S} \int_{\tau_B^S}^T \log S_u du \right) \leq x, \tau_B^S = t \right) &= \bar{\mathbb{P}} \left(\frac{\bar{\mu}}{2\sigma} (T - \tau_B^S) + \frac{1}{T - \tau_B^S} \int_0^{T - \tau_B^S} Z_u du \leq \frac{1}{\sigma} \log \left(\frac{x}{B} \right), \tau_B^S = t \right) \\ &= \bar{\mathbb{P}} \left(\frac{1}{T - t} \int_0^{T - t} Z_u du \leq \frac{1}{\sigma} \log \left(\frac{x}{B} \right) - \frac{\bar{\mu}}{2\sigma} (T - t) \right) h(t) \\ &= \Phi \left(\frac{\sqrt{3} \left(\log(x/B) - \frac{\bar{\mu}}{2}(T - t) \right)}{\sigma \sqrt{T - t}} \right) h(t), \end{aligned} \quad (3.7)$$

où

$$h(t) = \frac{b}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(b - \mu t)^2}{2t}\right), \quad (3.8)$$

est la densité de probabilité de l'instant de premier passage à B par le processus S_t [Section 1.5.3, formule (1.230)]. Notons que l'égalité (3.7) découle du fait que la v.a. $\int_0^{T-t} Z_u du$ est gaussienne pour $0 \leq t < T$ avec une moyenne nulle et une variance égale à $(T-t)^3/3$ [Section 1.5.1, Exemple 6].

Donc, la distribution de G_T lorsque B est atteint avant T , est donnée par

$$\mathbb{P}\left(G_T \leq x, \tau_B^S < T\right) = \int_0^T \Phi\left(\frac{\sqrt{3}\left(\log(x/B) - \frac{\mu}{2}(T-t)\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) h(t) dt. \quad (3.9)$$

Le dérivé de la formule (3.9) par rapport à x donne

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(G_T \in (x, x+dx), \tau_B^S < T\right) &= \frac{\sqrt{3}b}{2\pi\sigma x} \exp\left(\frac{3\mu \log(x/B)}{2\sigma} - \frac{3\mu^2 T}{8} + b\mu\right) \\ &\times \int_0^T \frac{1}{\sqrt{(T-t)t^3}} \exp\left(-\frac{3\log^2(x/B)}{2(T-t)\sigma^2} - \frac{\mu^2}{8}t - \frac{b^2}{2t}\right) dt dx. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Remarque 12. L'intégrale dans (3.10) n'admet pas une expression de forme fermée; cependant, il est possible de l'approcher numériquement avec les méthodes de quadrature gaussiennes (voir Brass et Petras [2011]). Comme l'illustre la Figure 3.1, la quantité $\mu^2/8$ est très faible pour un large éventail de paramètres r et σ . Cette observation nous permettra d'obtenir une approximation analytique de (3.10) en utilisant une expansion de la série de Taylor au voisinage de zéro.

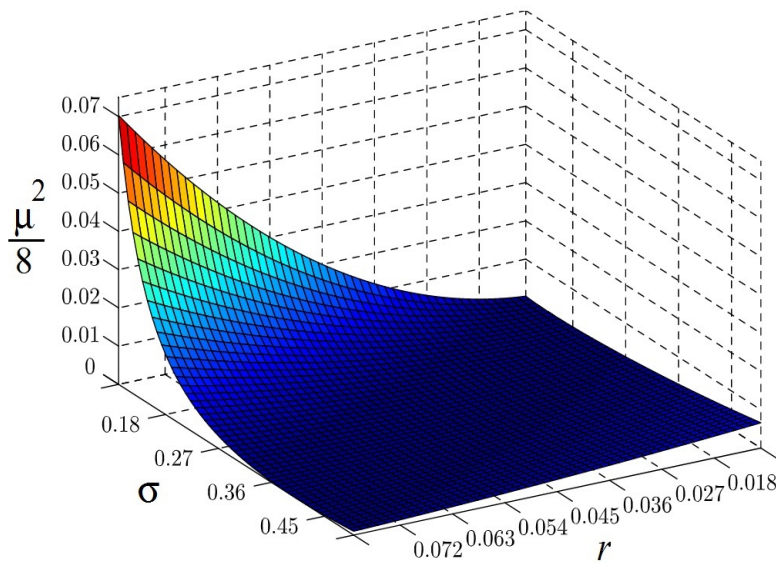


FIGURE 3.1 – Valeurs de $\mu^2/8$ pour r compris de 1% à 8% et σ compris de 10% à 50%.

Le résultat suivant donne une approximation analytique efficace de la formule (3.10). Il peut également être appliqué afin de résoudre d'autres problèmes d'intégration.

Lemme 3.1. *Pour $\alpha \geq 0$, γ et $T > 0$. Si β est au voisinage de zéro, alors on a*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{1}{\sqrt{(T-t)t^3}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2(T-t)} - \beta t - \frac{\gamma}{t}\right) dt &= \left(\frac{\alpha^2 - 2\gamma + T}{2} \beta^2 - 2\beta\right) (1 - \Phi(d)) \\ &+ \left(\frac{\sqrt{T}(\sqrt{2\gamma} - \alpha)}{2} \beta^2 + \sqrt{\frac{2}{T\gamma}}\right) \phi(d) \\ &+ O(\beta^3), \end{aligned}$$

où $d = (\alpha + \sqrt{2\gamma})/\sqrt{T}$.

Démonstration. Voir **Annexe B** en page 89. □

Théorème 12. *Supposons que $K \geq B$. Nous avons*

$$\begin{aligned} GIC_B &\approx \frac{\sqrt{3}b}{2\sigma} \exp\left(-\frac{3\mu^2 T}{8} + b\mu - rT\right) \\ &\times \left\{ B \left\{ \exp(z_3) \left\{ z_4(1 - \Phi(z_2)) + z_6\phi(z_2) + z_7(1 - \Phi(z_2)) \right\} + z_5(1 - \Phi(z_1)) \right\} \right. \\ &\left. - K \left\{ \exp(z_9) \left\{ z_{10}(1 - \Phi(z_8)) + (z_{12} + w/a^2) \phi(z_8) + z_{13}(1 - \Phi(z_8)) \right\} + z_{11}(1 - \Phi(z_1)) \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

où

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sqrt{3}}{\sigma\sqrt{T}}, & c &= \frac{3\mu}{2\sigma} + 1, & d &= \frac{3\mu^4}{128\sigma^2}, \\ h &= \frac{|b|}{\sqrt{T}}, & k &= \frac{(T-b^2)\mu^4}{128} - \frac{\mu^2}{4}, & l &= \frac{2}{Th} + \frac{T\mu^4 h}{128}, \\ e &= c - 1, & w &= -\frac{\mu^4 \sqrt{3T}}{128\sigma}, & z_1 &= a \log\left(\frac{K}{B}\right) + h, \\ z_2 &= z_1 - \frac{c}{a}, & z_3 &= \frac{c^2}{2a^2} - \frac{hc}{a}, \\ z_4 &= -\frac{2dh}{a^3} - \frac{d(1-h^2)}{ca^2} + \frac{2d}{c^3} + \frac{2dh}{ac^2} + \frac{dc}{a^4} + \frac{k}{c}, & z_5 &= \left(\frac{K}{B}\right)^c \left(-\frac{d \log^2(K/B)}{c} + \frac{2d \log(K/B)}{c^2} - \frac{2d}{c^3} - \frac{k}{c}\right), \\ z_6 &= \frac{d \log(K/B)}{ac} - \frac{2d}{ac^2} - \frac{dh}{ca^2} + \frac{d}{a^3} + \frac{w}{a^2}, & z_7 &= \frac{wc}{a^3} - \frac{wh}{a^2} + \frac{l}{a}, \\ z_8 &= z_1 - \frac{e}{a}, & z_9 &= \frac{e^2}{2a^2} - \frac{he}{a}, \\ z_{10} &= -\frac{2dh}{a^3} - \frac{d(1-h^2)}{ea^2} + \frac{2d}{e^3} + \frac{2dh}{ae^2} + \frac{de}{a^4} + \frac{k}{e}, & z_{11} &= \left(\frac{K}{B}\right)^e \left(-\frac{d \log^2(K/B)}{e} + \frac{2d \log(K/B)}{e^2} - \frac{2d}{e^3} - \frac{k}{e}\right), \\ z_{12} &= \frac{d \log(K/B)}{ae} - \frac{2d}{ae^2} - \frac{dh}{ea^2} + \frac{d}{a^3}, & z_{13} &= \frac{we}{a^3} - \frac{wh}{a^2} + \frac{l}{a}. \end{aligned}$$

Démonstration. Nous commençons par réécrire la formule (3.4) comme

$$GIC_B = \mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}} \left[e^{-rT} (G_T - K)_+ \mathbf{1}_{\{\tau_B^S < T\}} \right] + UOC_B. \quad (3.12)$$

Le premier terme dans (3.12) s'écrit comme suit

$$\mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}} \left[e^{-rT} (G_T - K)_+ \mathbf{1}_{\{\tau_B^S < T\}} \right] = \int_K^{+\infty} e^{-rT} (x - K) \bar{\mathbb{P}} (G_T \in (x, x + dx), \tau_B^S < T). \quad (3.13)$$

En utilisant le Lemme 3.1, on obtient l'approximation suivante

$$\mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}} \left[e^{-rT} (G_T - K)_+ \mathbf{1}_{\{\tau_B^S < T\}} \right] \approx e^{-rT} (\mathcal{A} - K\mathcal{B}),$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & \frac{Bb\sqrt{3}}{2\sigma} \exp \left(-\frac{3\mu^2 T}{8} + b\mu \right) \\ & \times \left\{ \int_{\log(\frac{K}{B})}^{+\infty} e^{(\frac{3\mu}{2\sigma}+1)z} \left(\left(\frac{3}{\sigma^2} z^2 + T - b^2 \right) \frac{\mu^4}{128} - \frac{\mu^2}{4} \right) \left(1 - \Phi \left(\frac{\sqrt{3}}{\sigma\sqrt{T}} |z| + \frac{|b|}{\sqrt{T}} \right) \right) dz \right. \\ & \left. + \int_{\log(\frac{K}{B})}^{+\infty} e^{(\frac{3\mu}{2\sigma}+1)z} \left(\left(|b| - \frac{\sqrt{3}}{\sigma} |z| \right) \frac{\mu^4 \sqrt{T}}{128} + \frac{2}{|b|\sqrt{T}} \right) \phi \left(\frac{\sqrt{3}}{\sigma\sqrt{T}} |z| + \frac{|b|}{\sqrt{T}} \right) dz \right\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = & \frac{b\sqrt{3}}{2\sigma} \exp \left(-\frac{3\mu^2 T}{8} + b\mu \right) \\ & \times \left\{ \int_{\log(\frac{K}{B})}^{+\infty} e^{\frac{3\mu}{2\sigma}z} \left(\left(\frac{3}{\sigma^2} z^2 + T - b^2 \right) \frac{\mu^4}{128} - \frac{\mu^2}{4} \right) \left(1 - \Phi \left(\frac{\sqrt{3}}{\sigma\sqrt{T}} |z| + \frac{|b|}{\sqrt{T}} \right) \right) dz \right. \\ & \left. + \int_{\log(\frac{K}{B})}^{+\infty} e^{\frac{3\mu}{2\sigma}z} \left(\left(|b| - \frac{\sqrt{3}}{\sigma} |z| \right) \frac{\mu^4 \sqrt{T}}{128} + \frac{2}{|b|\sqrt{T}} \right) \phi \left(\frac{\sqrt{3}}{\sigma\sqrt{T}} |z| + \frac{|b|}{\sqrt{T}} \right) dz \right\}. \end{aligned}$$

Puisque $K \geq B$, alors UOC_B a une valeur nulle. Il suffit de calculer les quantités $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ avec les formules (3.41) et (3.42) pour obtenir le résultat souhaité. $\square$

Théorème 13. *Supposons que $K < B$. Nous avons*

$$\begin{aligned} GIC_B \approx & \frac{\sqrt{3}b}{2\sigma} \exp \left(-\frac{3\mu^2 T}{8} + b\mu - rT \right) \\ & \times \left\{ B \left\{ \exp(z_3) \left\{ z_4(\Phi(z_2) - \Phi(z_1)) - z_5\phi(z_2) + (d \log(B/K)/(ca) + z_5) \phi(z_1) + \exp(-2hc/a) \right. \right. \right. \\ & \times \left. \left\{ z_6(\Phi(z_2 - 2c/a) - 1) - (z_5 + 2dh/(ca^2))\phi(z_2 - 2c/a) \right\} \right\} + z_7(1 - \Phi(z_1 - c/a))(K/B)^c \right\} \\ & - K \left\{ \exp(z_{10}) \left\{ z_{11}(\Phi(z_9) - \Phi(z_8)) - z_{12}\phi(z_9) + (d \log(B/K)/(ea) + z_{12}) \phi(z_8) + \exp(-2he/a) \right. \right. \\ & \times \left. \left\{ z_{13}(\Phi(z_9 - 2e/a) - 1) - (z_{12} + 2dh/(ea^2))\phi(z_9 - 2e/a) \right\} \right\} + z_{14}(1 - \Phi(z_8 - e/a))(K/B)^e \right\} \Big\} \\ & + UOC_B, \end{aligned} \quad (3.14)$$

où

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sqrt{3}}{\sigma\sqrt{T}}, & c &= \frac{3\mu}{2\sigma} + 1, & d &= \frac{3\mu^4}{128\sigma^2}, \\ h &= \frac{|b|}{\sqrt{T}}, & k &= \frac{(T-b^2)\mu^4}{128} - \frac{\mu^2}{4}, & l &= \frac{2}{Th} + \frac{T\mu^4 h}{128}, \\ e &= c - 1, & & & w &= -\frac{\mu^4 \sqrt{3T}}{128\sigma}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z_1 &= a \log \left(\frac{B}{K} \right) + h + \frac{c}{a}, & z_2 &= z_1 - a \log \left(\frac{B}{K} \right), \\
 z_3 &= \frac{c^2}{2a^2} + \frac{hc}{a}, & z_4 &= \frac{2dh}{a^3} - \frac{d(1-h^2)}{ca^2} + \frac{2d}{c^3} - \frac{2dh}{ac^2} + \frac{dc}{a^4} + \frac{k}{c} \\
 & & & + \frac{wc}{a^3} + \frac{wh}{a^2} - \frac{l}{a}, \\
 z_5 &= \frac{2d}{ac^2} - \frac{dh}{ca^2} - \frac{d}{a^3} - \frac{w}{a^2}, & z_6 &= 2 \left(\frac{2hd}{a^3} - \frac{2hd}{c^2a} + \frac{wh}{a^2} - \frac{l}{a} \right) - z_4, \\
 z_7 &= -\frac{d}{c} \log^2 \left(\frac{K}{B} \right) + \frac{2d}{c^2} \log \left(\frac{K}{B} \right) - \frac{2d}{c^3} - \frac{k}{c}, & z_8 &= a \log \left(\frac{B}{K} \right) + h + \frac{e}{a}, \\
 z_9 &= z_8 - a \log \left(\frac{B}{K} \right), & z_{10} &= \frac{e^2}{2a^2} + \frac{he}{a}, \\
 z_{11} &= \frac{2dh}{a^3} - \frac{d(1-h^2)}{ea^2} + \frac{2d}{e^3} - \frac{2dh}{ae^2} + \frac{de}{a^4} \\
 & + \frac{k}{e} + \frac{we}{a^3} + \frac{wh}{a^2} - \frac{l}{a}, & z_{12} &= \frac{2d}{ac^2} - \frac{dh}{ca^2} - \frac{d}{a^3} - \frac{w}{a^2}, \\
 z_{13} &= 2 \left(\frac{2hd}{a^3} - \frac{2hd}{e^2a} + \frac{wh}{a^2} - \frac{l}{a} \right) - z_{11}, & z_{14} &= -\frac{d}{e} \log^2 \left(\frac{K}{B} \right) + \frac{2d}{e^2} \log \left(\frac{K}{B} \right) - \frac{2d}{e^3} - \frac{k}{e}
 \end{aligned}$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle du Théorème 12, il faut juste noter que le prix UOC_B est non nul quand $K < B$. Sa valeur pour $S_0 \leq B$ est connue sous la forme fermée [Section 2.4.1, formule (2.70)]. $\square$

Remarque 13. Le prix UOC_B coïncide, pour un prix d'exercice nul, avec le prix d'une option à barrière binaire de type Up-and-Out asset-or-nothing [Rubinstein et Reiner, 1991].

3.2.1 Formule de tarification pour le cas d'une option de vente

Dans le modèle de Black-Scholes, le prix à l'instant zéro d'une option de vente d'Istanbul à moyenne géométrique de prix d'exercice K et d'échéance T est donné sous la mesure de risque-neutre $\mathbb{P}$ par

$$GIP_B = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[e^{-rT} (K - G_T)_+ \right], \quad (3.15)$$

où G_T est définie comme dans (3.3). Afin d'avoir une formule d'approximation analytique du prix GIP_B , nous adoptons la même technique utilisée dans les Théorèmes 12 et 13.

Théorème 14. Supposons que $K \geq B$. Nous avons

$$\begin{aligned}
 GIP_B &\approx \frac{\sqrt{3}b}{2\sigma} \exp \left(-\frac{3\mu^2 T}{8} + b\mu - rT \right) \\
 &\times \left[K \left[e^{z_{11}} (z_{12}(\Phi(z_{10}) - 1) - z_{13}\phi(z_{10})) - z_{15} \left(\frac{K}{B} \right)^e (1 - \Phi(z_9 + e/a)) \right. \right. \\
 &- \exp \left(z_{11} - \frac{2he}{a} \right) [z_{14}(\Phi(z_9) - \Phi(z_{10} - 2e/a)) + z_{16}\phi(z_9) \\
 &+ \left(z_{13} + \frac{2hd}{ea^2} \right) \phi(z_{10} - 2e/a)] - B \left[e^{z_3} (z_4(\Phi(z_2) - 1) \right. \\
 &- z_5\phi(z_2)) - z_7 \left(\frac{K}{B} \right)^c (1 - \Phi(z_1 + c/a)) - \exp \left(z_3 - \frac{2hc}{a} \right) [\\
 &z_6(\Phi(z_1) - \Phi(z_2 - 2c/a)) + z_8\phi(z_1) + \left(z_5 + \frac{2hd}{ca^2} \right) \phi(z_2 - 2c/a)] \left. \right] \left. \right] \\
 &+ UOP_B, \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{\sqrt{3}}{\sigma\sqrt{T}}, & c &= \frac{3\mu}{2\sigma} + 1, & d &= \frac{3\mu^4}{128\sigma^2}, \\
 h &= \frac{|b|}{\sqrt{T}}, & k &= \frac{(T-b^2)\mu^4}{128} - \frac{\mu^2}{4}, & l &= \frac{2}{Th} + \frac{T\mu^4 h}{128}, \\
 e &= c - 1, & w &= -\frac{\mu^4\sqrt{3T}}{128\sigma}, \\
 z_2 &= h + \frac{c}{a}, \\
 z_1 &= a \log\left(\frac{K}{B}\right) + h - \frac{c}{a}, & z_4 &= \frac{2dh}{a^3} - \frac{d(1-h^2)}{ca^2} + \frac{2d}{c^3} - \frac{2dh}{ac^2} + \frac{dc}{a^4} + \\
 & & & \frac{k}{c} + \frac{wc}{a^3} + \frac{wh}{a^2} - \frac{l}{a}, \\
 z_3 &= \frac{c^2}{2a^2} + \frac{hc}{a}, & z_6 &= \frac{2dh}{a^3} + \frac{d(1-h^2)}{ca^2} - \frac{2d}{c^3} - \frac{2dh}{ac^2} - \frac{dc}{a^4} - \\
 & & & \frac{k}{c} - \frac{wc}{a^3} + \frac{wh}{a^2} - \frac{l}{a}, \\
 z_5 &= \frac{2d}{ac^2} - \frac{hd}{ca^2} - \frac{d}{a^3} - \frac{w}{a^2}, & z_8 &= \frac{d \log(K/B)}{ca} - \frac{2d}{ac^2} - \frac{hd}{ca^2} + \frac{d}{a^3} + \frac{w}{a^2}, \\
 z_7 &= -\frac{d}{c} \log^2\left(\frac{K}{B}\right) + \frac{2d}{c^2} \log\left(\frac{K}{B}\right) - \frac{2d}{c^3} - \frac{k}{c}, & z_{10} &= h + \frac{c}{a}, \\
 z_9 &= a \log\left(\frac{K}{B}\right) + h - \frac{c}{a}, & z_{12} &= \frac{2dh}{a^3} - \frac{d(1-h^2)}{ea^2} + \frac{2d}{e^3} - \frac{2dh}{ae^2} + \frac{de}{a^4} + \\
 & & & \frac{k}{e} + \frac{we}{a^3} + \frac{wh}{a^2} - \frac{l}{a}, \\
 z_{11} &= \frac{e^2}{2a^2} + \frac{he}{a}, & z_{14} &= \frac{2dh}{a^3} + \frac{d(1-h^2)}{ea^2} - \frac{2d}{e^3} - \frac{2dh}{ae^2} - \frac{de}{a^4} - \\
 & & & \frac{k}{e} - \frac{we}{a^3} + \frac{wh}{a^2} - \frac{l}{a}, \\
 z_{13} &= \frac{2d}{ae^2} - \frac{hd}{ea^2} - \frac{d}{a^3} - \frac{w}{a^2}, & z_{16} &= \frac{d \log(K/B)}{ea} - \frac{2d}{ae^2} - \frac{hd}{ea^2} + \frac{d}{a^3} + \frac{w}{a^2}. \\
 z_{15} &= -\frac{d}{e} \log^2\left(\frac{K}{B}\right) + \frac{2d}{e^2} \log\left(\frac{K}{B}\right) - \frac{2d}{e^3} - \frac{k}{e},
 \end{aligned}$$

Théorème 15. *Supposons que $K < B$. Nous avons*

$$\begin{aligned}
 GIP_B &\approx \frac{\sqrt{3}b}{2\sigma} \exp\left(-\frac{3\mu^2 T}{8} + b\mu - rT\right) \\
 &\times \left[K \left[z_7(1 - \Phi(z_1)) \left(\frac{K}{B}\right)^e + \exp(z_6) [z_9(\Phi(z_1 + e/a) - 1) - z_8\phi(z_1 + e/a)] \right] \right. \\
 &\left. - B \left[z_3(1 - \Phi(z_1)) \left(\frac{K}{B}\right)^c + \exp(z_2) [z_5(\Phi(z_1 + c/a) - 1) - z_4\phi(z_1 + c/a)] \right] \right] \\
 &+ UOP_B,
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

où

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{\sqrt{3}}{\sigma\sqrt{T}}, & c &= \frac{3\mu}{2\sigma} + 1, & d &= \frac{3\mu^4}{128\sigma^2}, \\
 h &= \frac{|b|}{\sqrt{T}}, & k &= \frac{(T-b^2)\mu^4}{128} - \frac{\mu^2}{4}, & l &= \frac{2}{Th} + \frac{T\mu^4 h}{128}, \\
 e &= c - 1, & w &= -\frac{\mu^4\sqrt{3T}}{128\sigma},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_1 &= a \log \left(\frac{B}{K} \right) + h, \\
z_3 &= \frac{d}{c} \log^2 \left(\frac{B}{K} \right) + \frac{2d}{c^2} \log \left(\frac{B}{K} \right) + \frac{2d}{c^3} + \frac{k}{c}, & z_2 &= \frac{c^2}{2a^2} + \frac{hc}{a}, \\
z_5 &= \frac{2hd}{a^3} - \frac{d(1-h^2)}{ca^2} + \frac{2d}{c^3} - \frac{2hd}{ac^2} + \frac{dc}{a^4} + \frac{k}{c} + \frac{wc}{a^3} + \frac{wh}{a^2} - \frac{l}{a}, & z_4 &= \frac{d}{ac} \log \left(\frac{B}{K} \right) + \frac{2d}{ac^2} - \frac{hd}{ca^2} - \frac{d}{a^3} - \frac{w}{a^2}, \\
z_7 &= \frac{d}{e} \log^2 \left(\frac{B}{K} \right) + \frac{2d}{e^2} \log \left(\frac{B}{K} \right) + \frac{2d}{e^3} + \frac{k}{e}, & z_6 &= \frac{e^2}{2a^2} + \frac{he}{a}, \\
z_9 &= \frac{2hd}{a^3} - \frac{d(1-h^2)}{ea^2} + \frac{2d}{e^3} - \frac{2hd}{ae^2} + \frac{de}{a^4} + \frac{k}{e} + \frac{we}{a^3} + \frac{wh}{a^2} - \frac{l}{a}, & z_8 &= \frac{d}{ae} \log \left(\frac{B}{K} \right) + \frac{2d}{ae^2} - \frac{hd}{ea^2} - \frac{d}{a^3} - \frac{w}{a^2},
\end{aligned}$$

Démonstration. La preuve des Théorèmes 14 et 15 est similaire à celle des Théorèmes 12 et 13, il convient juste de noter que le prix UOP_B est donné par la Proposition 22. $\square$

3.3 Approximation Log-normale pour le prix d'une option d'Istanbul à moyenne arithmétique

Dans le modèle de Black-Scholes, le prix à l'instant zéro d'une option d'achat d'Istanbul à moyenne arithmétique de prix d'exercice K et d'échéance T est donné par

$$AIC_B = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[e^{-rT} (A_T - K)_+ \right], \quad (3.18)$$

où A_T est une v.a. définie par

$$A_T \equiv \left(\frac{1}{T - \tau_B^S} \int_{\tau_B^S}^T S_u du \right) \mathbf{1}_{\{\tau_B^S < T\}} + S_T \mathbf{1}_{\{\tau_B^S \geq T\}}. \quad (3.19)$$

Comme dans le cas des options arithmétiques asiatiques [Section 2.3.6, formule (2.67)], nous pouvons appliquer la technique d'approximation log-normale pour le prix (3.18) :

Proposition 23 (Jacques [1997]). *Pour $K > B$, on a*

$$AIC_B \approx e^{-rT} \int_0^T \Upsilon(\mu_t + \log B, \sigma_t; K) h(t) dt. \quad (3.20)$$

Pour $K \leq B$, on a

$$AIC_B \approx e^{-rT} \int_0^T \Upsilon(\mu_t + \log B, \sigma_t; K) h(t) dt + UOC_B. \quad (3.21)$$

Avec

- h est la fonction définie par l'expression (3.8).
- Υ est la fonction définie dans la Proposition 20.
- $\mu_t = \log \left(\frac{m_1(t)^2}{\sqrt{m_2(t)}} \right)$.
- $\sigma_t = \sqrt{\log \left(\frac{m_2(t)}{m_1(t)^2} \right)}$.
- $m_1(t) = \frac{e^{r(T-t)} - 1}{r(T-t)}$.
- $m_2(t) = \frac{2}{(T-t)^2} \left[\frac{e^{(2r+\sigma^2)(T-t)}}{(r+\sigma^2)(2r+\sigma^2)} + \frac{1}{r(2r+\sigma^2)} - \frac{e^{r(T-t)}}{r(r+\sigma^2)} \right]$.

3.4 Analyse numérique

Dans cette section, nous comparons nos formules d'approximation analytique (3.11) et (3.17) avec les simulations de Monte-Carlo (MC). Dans notre procédure de simulation, nous utilisons la technique CV de réduction de la variance de l'estimateur obtenu par la méthode MC standard. Nous analysons deux types d'erreurs de simulation, à savoir l'erreur standard et l'erreur relative notées par S.E. et R.E., respectivement. Notons que R.E. est l'erreur relative entre la valeur de l'option par notre formule analytique approximative et par MC. Nos algorithmes de calcul sont implémentés avec le logiciel R version 3.5.1 sur un PC, Dell, Intel(R) core(TM) i3, 1.70GHZ et fonctionnant sous Windows 8. Pour simuler le prix (3.4), on commence par discrétiser l'intervalle $[0, T]$ en points $n = 2500$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, avec l'étape de discrétisation $\Delta t = T/n$, $t_i = i\Delta t$, $i = 0, 1, \dots, n$. La simulation du modèle (3.1) est donnée par la formule récursive suivante

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} \exp \left(\bar{\mu} \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Y_{i+1} \right), \quad i \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \quad (3.22)$$

où $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ est n i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Afin d'obtenir une réalisation de la v.a. G_T , l'intégrale dans (3.3) est approximée avec la règle des trapèzes comme suit

$$\int_{\tau_B^S}^T \log S_u du \approx \Delta t \left[\frac{1}{2} \log (S_{t_B^S} S_{t_n}) + \sum_{i=t_B^S/\Delta t}^{n-1} \log (S_{t_i}) \right], \quad (3.23)$$

où $t_B^S = \min \{t_i, i \in \{1, \dots, n\} | S_{t_i} \geq B\}$ est une version en temps discret de l'instant de premier passage τ_B^S . Le nombre de trajectoires utilisées dans nos simulations MC est de 10000. Notre variable de contrôle est le payoff d'une option d'achat géométrique asiatique (GAC) puisque ce dernier dépend de $S_{t_0}, S_{t_1}, \dots, S_{t_n}$, ce qui donne une corrélation élevée avec le payoff de notre option. Notre estimateur contrôlé pour GIC_B est donné par

$$G\hat{I}C_B^{CV} = G\hat{I}C_B^{MC} - \theta^* (G\hat{A}C^{MC} - GAC), \quad (3.24)$$

où $G\hat{I}C_B^{MC}$ et $G\hat{A}C^{MC}$ sont des estimateurs MC standards pour GIC_B et GAC respectivement et θ^* est un paramètre qui minimise la variance de $G\hat{I}C_B^{CV}$.

Remarque 14. Nous prenons $\theta^* = \text{Cov}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) / \text{Var}(\mathcal{H}_2)$, où $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont les payoffs des options GIC et GAC , respectivement. Notez que la valeur exacte de θ^* est généralement inconnue en pratique ; nous l'approximons en utilisant la variance et la covariance empirique.

Dans le TABLEAU 3.1, nous fournissons une comparaison entre le prix approximatif (3.11) et celui obtenu avec la technique CV pour différents paramètres d'entrée. Les résultats obtenus montrent que notre approximation est efficace et pourrait être appliquée dans la finance puisque les erreurs relatives ne dépassent pas 1,33%. Les résultats du TABLEAU 3.1 montrent également que le prix de l'option augmente à mesure que les K s'approchent des B .

TABLEAU 3.1 – Comparaison entre le prix d’une option d’achat géométrique d’Istanbul obtenu avec notre formule d’approximation analytique (3.11) et celui obtenu avec les simulations de Monte-Carlo.

S_0	K	B	$T = 0.5$			$T = 1$			$T = 1.5$		
			Approx.	MCV (S.E.)	R.E. (%)	Approx.	MCV (S.E.)	R.E. (%)	Approx.	MCV (S.E.)	R.E. (%)
57	63	60	1.2886	1.2828 (0.0087)	0.4521	2.4889	2.5103 (0.0127)	0.8489	3.4720	3.5082 (0.0158)	1.0317
58	63	60	1.4739	1.4864 (0.0081)	0.8415	2.7201	2.7566 (0.0112)	1.3225	3.7257	3.7531 (0.0132)	0.7307
59	63	60	1.6747	1.6863 (0.0194)	0.6860	2.9622	2.9982 (0.0088)	1.1991	3.9878	4.0251 (0.0100)	0.9256
60	63	63	2.4187	2.4414 (0.0122)	0.9283	3.8050	3.8491 (0.0160)	1.1477	4.8783	4.9095 (0.0178)	0.6362
60	64	63	2.0400	2.0585 (0.0113)	0.9015	3.4023	3.4367 (0.0149)	1.0024	4.4704	4.4746 (0.0162)	0.0945
60	65	63	1.7079	1.7226 (0.0105)	0.8529	3.0328	3.0610 (0.0141)	0.9210	4.0893	4.1146 (0.0161)	0.6148
70	75	72	2.0299	2.0501 (0.0095)	0.9853	3.5694	3.5975 (0.0126)	0.7810	4.7936	4.8402 (0.0145)	0.9626
70	75	73	2.1844	2.1984 (0.0116)	0.6390	3.7503	3.7965 (0.0158)	1.2176	4.9874	5.0418 (0.0187)	1.0803
70	75	75	2.5116	2.5353 (0.0166)	0.9347	4.1237	4.1585 (0.0210)	0.8350	5.3831	5.4315 (0.0243)	0.8903

Notes : Les paramètres d’entrée sont pris comme suit : $r = 0,05$ et $\sigma = 0,3$. On note par Approx. le prix de l’option d’achat géométrique d’Istanbul obtenu avec la formule (3.11) et par MCV l’estimateur (3.24) de Monte-Carlo du prix de la même option en utilisant la méthode des variables de contrôle. On note également par S.E. l’erreur standard de MCV et par R.E. l’erreur relative qui est donnée en pourcentage avec la formule suivante : $R.E. = \frac{|Approx. - MCV|}{MCV} \times 100\%$.

TABLEAU 3.2 – Comparaison entre le prix d’une option d’achat géométrique d’Istanbul obtenu avec notre formule d’approximation analytique (3.17) et celui obtenu avec les simulations de Monte-Carlo.

S_0	K	B	$T = 0.5$			$T = 1$			$T = 1.5$		
			Approx.	MCV (S.E.)	R.E. (%)	Approx.	MCV (S.E.)	R.E. (%)	Approx.	MCV (S.E.)	R.E. (%)
55	56	58	3.0603	3.0859 (0.0136)	0.8327	4.3377	4.3858 (0.0167)	1.0980	5.3139	5.3606 (0.0184)	0.8696
56	56	58	3.3988	3.4029 (0.0113)	0.1205	4.6770	4.7357 (0.0143)	1.2408	5.6544	5.7237 (0.0161)	1.2112
57	56	58	3.7535	3.7905 (0.0091)	0.9762	5.0266	5.0444 (0.0096)	0.3531	6.0025	6.0535 (0.0118)	0.8421
60	61	64	3.5470	3.5650 (0.0165)	0.5039	4.9452	4,9782 (0.0201)	0,6634	6.0113	6.0866 (0.0233)	1.2374
60	62	64	3.0547	3.0800 (0.0156)	0.8214	4.4610	4.4886 (0.0190)	0.6155	5.5376	5.5609 (0.0210)	0.4190
60	63	64	2.6087	2.6245 (0.0146)	0.6041	4.0103	4.0650 (0.0188)	1.3445	5.0911	5.1519 (0.0211)	1.1792
79	81	82	3.8378	3.8695 (0.0155)	0.8190	5.6662	5.7112 (0.0188)	0.7886	7.0688	7.1464 (0.0224)	1.0859
79	81	85	4.4841	4.4995 (0.0227)	0.3419	6.3405	6.4147 (0.0282)	1.1562	7.7554	7.8190 (0.0308)	0.8137
79	81	87	4.9003	4.9394 (0.0275)	0.7914	6.7895	6.8440 (0.0327)	0.7962	8.2147	8.2225 (0.0358)	0.0944

Notes : Les paramètres d’entrée sont pris comme suit : $r = 0,05$ et $\sigma = 0,3$. On note par Approx. le prix de l’option d’achat géométrique d’Istanbul obtenu avec la formule (3.17) et par MCV l’estimateur (3.24) de Monte-Carlo du prix de la même option en utilisant la méthode des variables de contrôle. On note également par S.E. l’erreur standard de MCV et par R.E. l’erreur relative qui est donnée en pourcentage avec la formule suivante : $R.E. = \frac{|Approx. - MCV|}{MCV} \times 100\%$.

De même, pour le TABLEAU 3.2, les erreurs relatives obtenues avec la formule (3.17) sont toutes strictement inférieures à 1,35%. Cela confirme une fois de plus que le prix que nous fournissons pour l'option GIC est stable aux changements des paramètres d'entrée. Nous observons également à partir des résultats du TABLEAU 3.2 que le prix de l'option diminue à mesure que K s'approche de B . Il reste à noter que dans les deux TABLEAUX 3.1 et 3.2, le prix de l'option augmente lorsque la date d'expiration est plus longue, ce qui est normal car le prix de tout type d'option dépend directement de sa valeur temps [voir Section 2.3.4].

Dans le TABLEAU 3.3, nous analysons la robustesse des formules d'approximation (3.11) et (3.17) lorsque la date d'échéance est longue. Notre analyse consiste à adopter la même stratégie de simulations de MC en augmentant chaque fois la maturité tout en fixant tous les paramètres restants. Les résultats ainsi obtenus montrent que les erreurs relatives ne dépassent pas 1.5%, ce qui signifie que nos approximations analytiques restent à la fois stables et efficaces pour les contrats à long terme.

Dans le TABLEAU 3.4, nous analysons la stabilité de nos formules de tarification face à l'évolution de la volatilité. Les résultats numériques obtenus ont montré que nos formules d'approximation analytique (3.11) et (3.17) restent stables face aux changements de volatilité puisque les erreurs relatives obtenues ne dépassent pas 1,54%.

TABLEAU 3.3 – Erreurs relatives lorsque la maturité est plus longue

Maturity T	2	3	4	5	6
R.E. avec la formule (3.11)	0.8260%	1.2073%	1.4955%	0.4393%	1.0083%
R.E. avec la formule (3.17)	0.4017%	0.9485%	1.2925%	0.7768%	1.2080%

Notes : Les échéances sont prises en années (première ligne), nous considérons les contrats dont la durée de vie varie de 2 à 6 ans. Pour la formule (3.11) (deuxième ligne), les paramètres d'entrée sont : $r = 0,05$, $\sigma = 0,3$, $S_0 = 75$, $B = 79$ et $K = 80$. Pour la formule (3.17) (troisième ligne), les paramètres d'entrée sont : $r = 0,05$, $\sigma = 0,3$, $S_0 = 55$, $B = 58$ et $K = 56$.

TABLEAU 3.4 – Erreurs relatives pour différentes volatilités

Volatility σ	0.1	0.2	0.4	0.5	0.6
R.E. avec la formule (3.11)	0.6712%	1.1025%	1.2834%	1.5361%	1.3102%
R.E. avec la formule (3.17)	0.8711%	1.4431%	1.1250%	0.6727%	1.1702%

Notes : Nous considérons des contrats sur des actifs sous-jacents avec des volatilités allant de 0,1 à 0,6 (première ligne). Pour la formule (3.11) (deuxième ligne), les paramètres d'entrée sont : $r = 0,05$, $T = 1$, $S_0 = 75$, $B = 79$ et $K = 80$. Pour la formule (3.17) (troisième ligne), les paramètres d'entrée sont : $r = 0,05$, $T = 1$, $S_0 = 55$, $B = 58$ et $K = 56$.

Dans la FIGURE 3.2, nous comparons le prix de l'option GIC à celui de l'option AIC. Comme dans Jacques [1997], nous utilisons la méthode d'approximation log-normale pour estimer le prix dans le cas arithmétique (Proposition 23). Pour le cas géométrique, nous utilisons nos formules d'approximation analytique (3.11) et (3.17). Les résultats numériques montrent qu'une option GIC est relativement moins cher qu'une option AIC. Nous observons également, sur le côté gauche de la FIGURE 3.2, que le prix de l'option d'achat d'Istanbul augmente lorsque la barrière est proche du prix actuel pour les deux types de moyennes. Cette observation s'explique par le fait que plus la barrière est proche du prix actuel, plus la probabilité qu'elle soit atteinte est élevée, ce qui augmente la valeur théorique de l'option. En outre, sur le côté droit de la FIGURE 3.2, on peut voir que le prix de l'option d'achat d'Istanbul diminue à mesure que le

prix d'exercice s'éloigne du prix actuel, ceci est dû au fait que la probabilité que l'option expire en ITM devient progressivement plus faible à mesure que le prix d'exercice devient plus élevé que le prix actuel.

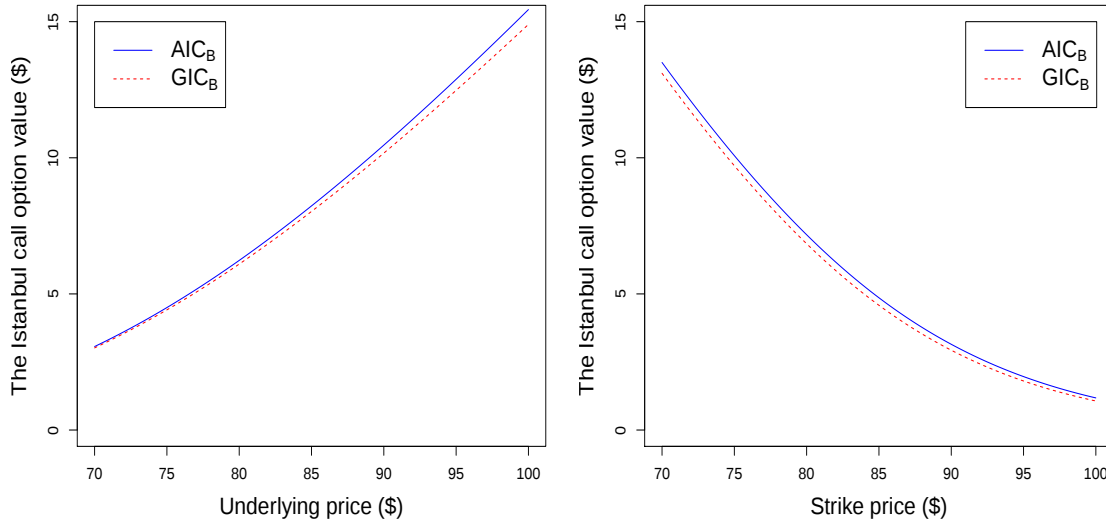


FIGURE 3.2 – Comparaison des prix d'options d'achat d'Istanbul pour les deux types de moyennes (Arithmétique et Géométrique). Notes : Les prix des options d'achat d'Istanbul sont notés GIC_B et AIC_B pour les cas de moyenne géométrique et arithmétique, respectivement. Nous prenons comme paramètres d'entrée pour le graphique de gauche : S_0 de 70 à 100, $\sigma = 0,3$, $r = 0,05$, $T = 1$, $B = 105$ et $K = 90$. Dans le graphique de droite, nous considérons les paramètres d'entrée : K de 70 à 100, $\sigma = 0.3$, $r = 0.05$, $T = 1$, $B = 85$ et $S_0 = 79$.

Dans la FIGURE 3.3, nous réalisons une étude sur la sensibilité du prix d'une option GIC face aux variations du prix de l'actif sous-jacent. Pour cela, nous analysons une mesure de risque importante qui est le Delta (Δ). Cette quantité théorique est utilisée par les négociants en options afin de développer de bonnes stratégies d'investissement. Dans notre cas, le Δ d'une option d'achat géométrique d'Istanbul correspond à la dérivée partielle de (3.4) par rapport à S_0 . Sur le côté gauche de la FIGURE 3.3, nous calculons les valeurs de Δ par rapport au prix de l'actif sous-jacent tout en augmentant la volatilité à chaque parcelle. Sur le côté droit, nous fixons l'actif sous-jacent et calculons les valeurs Δ par rapport au prix d'exercice tout en augmentant la maturité à chaque parcelle. Comme le montrent les résultats obtenus, la valeur de Δ dépend de trois facteurs principaux : la position du cours de l'actif sous-jacent par rapport au prix d'exercice (OTM, ATM ou ITM), la volatilité et l'échéance.⁴

4. Il convient de noter que Δ change constamment pendant la période de négociation et ne permet donc pas de prédire la valeur à l'échéance du prix de l'actif sous-jacent.

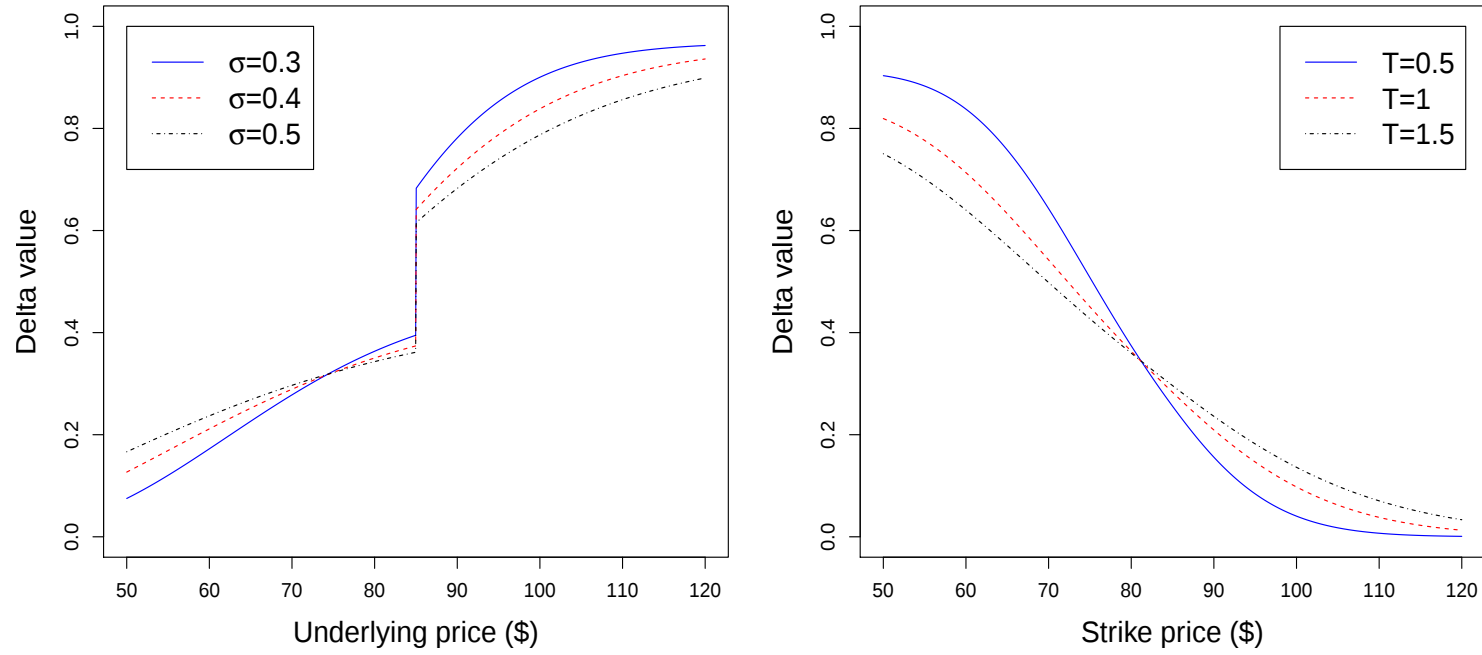


FIGURE 3.3 – Le Delta d’une option d’achat géométrique d’Istanbul. Notes : Les tracés de gauche sont construits avec les paramètres d’entrée suivants : $r = 0,05$, $T = 1$, $B = 85$ et $K = 80$. Dans les tracés de droite, nous prenons : $r = 0,05$, $\sigma = 0,3$, $B = 85$ et $S_0 = 80$. La valeur de Delta est approximée numériquement par une différence finie de premier ordre.

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons abordé le problème du prix des options géométriques d'Istanbul dans le cadre du modèle standard de Black-Scholes. Une formule d'approximation analytique de forme fermée a été proposée pour le prix des options d'achat et de vente avec un prix d'exercice fixe. Les résultats numériques obtenus par les simulations de Monte-Carlo en utilisant la méthode des variables de contrôle ont montré que notre approximation analytique est très efficace pour un large éventail de paramètres d'entrée et peut donc être utilisée en finance.

En outre, nous avons montré par une étude comparative que les options d'achat géométriques d'Istanbul ont un prix plus attractif que celles avec une moyenne arithmétique traitées par Michel Jacques en 1997. Enfin, nous avons illustré, graphiquement, la sensibilité du prix d'une option d'achat géométrique d'Istanbul aux variations du prix de l'actif sous-jacent.

Perspectives de recherche

Les futures recherches sur les options d'Istanbul pourraient suivre deux directions. La première consisterait à apporter des modifications aux paramètres d'entrée, par exemple en étudiant le cas d'un prix d'exercice flottant, l'adoption d'une barrière descendante ou l'étude du cas d'une moyenne harmonique. La seconde approche intéressante consisterait à étendre le concept d'options d'Istanbul à des modèles économiques plus complexes tels que le modèle de Lévy, le modèle CEV, le modèle Heston, etc.

Annexe A

Distribution Gaussienne

Soit X une v.a. qui suit une distribution de **Gauss** ou **Normale** noté $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, où $\mu \in \mathbb{R}$ est son espérance et $\sigma > 0$ son écart-type. La fonction de densité de X est donnée par

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.25)$$

La fonction de répartition de X ne possède pas d'expression sous forme fermée, elle reste donc définie par

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.26)$$

En particulier, la formule suivante est très pratique

$$\mathbb{E} \left[e^{\alpha X} \mathbf{1}_{\{X > \beta\}} \right] = e^{\frac{\alpha^2}{2}} \Phi(\alpha - \beta), \quad (3.27)$$

où X est une v.a de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, α et β sont deux constantes réelles.

Distribution de Lévy

Une v.a. X suit une loi de Lévy de paramètres μ et c si sa fonction de densité s'écrit comme

$$f(x) = \sqrt{\frac{c}{2\pi(x-\mu)^3}} \exp\left(-\frac{c}{2(x-\mu)}\right) \mathbf{1}_{\{x > \mu\}}, \quad (3.28)$$

où $\mu \in \mathbb{R}$ est le paramètre de position et $c > 0$ est le paramètre d'échelle. La fonction de répartition de X s'écrit en fonction de celle d'une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ comme

$$F(x) = 2 \left(1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{c}{x-\mu}}\right) \right) \mathbf{1}_{\{x > \mu\}}. \quad (3.29)$$

La distribution de Lévy admet une espérance et variance infinie.

Distribution Log-normale

Soit Z une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, et soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Une v.a. X suit une loi Log-normale de paramètres μ et σ noté $\log \mathcal{N}(\mu; \sigma)$, si elle s'écrit comme

$$X = e^{\mu + \sigma Z}. \quad (3.30)$$

La densité de X est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0. \quad (3.31)$$

La fonction de répartition de X s'écrit en fonction de celle d'une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ comme

$$F(x) = \Phi\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right). \quad (3.32)$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{E}(X^n) = e^{n\mu + \frac{(n\sigma)^2}{2}}. \quad (3.33)$$

Grâce à la formule (3.33), nous pouvons voir que les paramètres μ et σ dépendent uniquement des moments d'ordre un et deux, et donc, de l'espérance et de la variance de X puisque on a

$$\mu = \log\left(\frac{\mathbb{E}(X)^2}{\sqrt{\mathbb{E}(X^2)}}\right) = \log\left(\frac{\mathbb{E}(X)^2}{\sqrt{\text{Var}(X) + \mathbb{E}(X)^2}}\right), \quad (3.34)$$

et

$$\sigma^2 = \log\left(\frac{\mathbb{E}(X^2)}{\mathbb{E}(X)^2}\right) = \log\left(1 + \frac{\text{Var}(X)}{\mathbb{E}(X)^2}\right). \quad (3.35)$$

Distribution Inverse-gaussienne

Une v.a. X de distribution inverse-gaussienne de paramètres $\mu > 0$ et $\lambda > 0$ noté **IG**(μ, λ) admet pour fonction de densité,

$$f(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} \exp\left(-\frac{\lambda(x - \mu)^2}{2\mu^2 x}\right) \mathbf{1}_{\{x>0\}}, \quad (3.36)$$

où μ est l'espérance et λ est un paramètre de forme. Sa fonction de répartition s'écrit en fonction de celle d'une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ comme

$$F(x) = \Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{x}}\left(\frac{x}{\mu} - 1\right)\right) + \exp\left(\frac{2\lambda}{\mu}\right) \Phi\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{x}}\left(\frac{x}{\mu} + 1\right)\right), \quad x > 0. \quad (3.37)$$

De plus, la variance de X est donnée par

$$\text{Var}(X) = \frac{\mu^3}{\lambda}. \quad (3.38)$$

Annexe B

Quelques formules d'intégrales indéfinies de fonctions gaussiennes

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^3}} \exp\left(-ax - \frac{h}{2x}\right) dx &= \sqrt{\frac{2\pi}{h}} \exp\left(-\sqrt{2ah}\right) \Phi\left(\sqrt{2ax} - \sqrt{\frac{h}{x}}\right) \\ &+ \sqrt{\frac{2\pi}{h}} \exp\left(\sqrt{2ah}\right) \Phi\left(-\sqrt{2ax} - \sqrt{\frac{h}{x}}\right), \end{aligned} \quad (3.39)$$

où $a \geq 0$ et $h > 0$.

$$\int \Phi(ax + h) dx = \left(x + \frac{h}{a}\right) \Phi(ax + h) + \frac{1}{a} \phi(ax + h), \quad (3.40)$$

où $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} \int e^{cx} \left(dx^2 + k\right) (1 - \Phi(ax + h)) dx &= \left(\frac{d}{c}x^2 - \frac{2d}{c^2}x + \frac{2d}{c^3} + \frac{k}{c}\right) (1 - \Phi(ax + h)) e^{cx} \\ &- \left(\frac{2hd}{a^3} + \frac{d(1-h^2)}{ca^2} - \frac{2d}{c^3} - \frac{2hd}{c^2a} - \frac{dc}{a^4} - \frac{k}{c}\right) \\ &\times \exp\left(\frac{c^2}{2a^2} - \frac{hc}{a}\right) \Phi\left(ax + h - \frac{c}{a}\right) \\ &- \left(\frac{d}{ca}x - \frac{2d}{c^2a} - \frac{hd}{ca^2} + \frac{d}{a^3}\right) \\ &\times \exp\left(\frac{c^2}{2a^2} - \frac{hc}{a}\right) \phi\left(ax + h - \frac{c}{a}\right), \end{aligned} \quad (3.41)$$

où $a, c \neq 0$.

$$\begin{aligned} \int e^{cx} (wx + l) \phi(ax + h) dx &= \left(\left(\frac{wc}{a^3} - \frac{wh}{a^2} + \frac{l}{a}\right) \Phi\left(ax + h - \frac{c}{a}\right) - \frac{w}{a^2} \phi\left(ax + h - \frac{c}{a}\right)\right) \\ &\times \exp\left(\frac{c^2}{2a^2} - \frac{hc}{a}\right), \end{aligned} \quad (3.42)$$

où $a \neq 0$.

Démonstration. Les formules (3.39), (3.40), (3.41) et (3.42) peuvent être prouvées par différenciation par rapport à x . $\square$

Expressions de forme fermée de deux intégrales utilisées dans le Chapitre 3

$$\int_0^T \frac{1}{\sqrt{(T-t)t}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2(T-t)}\right) dt = 2\pi \left(1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{T}}\right)\right), \quad (3.43)$$

où $\alpha \geq 0$ et $T > 0$.

$$\int_0^T \frac{t}{\sqrt{(T-t)t}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2t(T-t)}\right) dt = T\pi \left(1 - \Phi\left(\frac{2\alpha}{\sqrt{T}}\right)\right), \quad (3.44)$$

où $\alpha \geq 0$ et $T > 0$.

Démonstration. Les formules (3.43) et (3.44) peuvent être facilement trouvées en utilisant le théorème de convolution et en appliquant la table des transformations de Laplace disponible dans le livre de [Poularikas \[1999\]](#). $\square$

Preuve du Lemma 3.1

Par une expansion de deuxième ordre de la série de Taylor au voisinage de zéro, nous avons

$$e^{-\beta t} = 1 - t\beta + \frac{t^2}{2}\beta^2 + O(\beta^3). \quad (3.45)$$

À partir de l'équation (3.45), nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{1}{\sqrt{(T-t)t^3}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2(T-t)} - \beta t - \frac{\gamma}{t}\right) dt &= A(\alpha, \gamma, T) - B(\alpha, \gamma, T)\beta \\ &\quad + C(\alpha, \gamma, T)\frac{\beta^2}{2} + O(\beta^3), \end{aligned} \quad (3.46)$$

où

$$A(\alpha, \gamma, T) = \int_0^T \frac{1}{\sqrt{(T-t)t^3}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2(T-t)} - \frac{\gamma}{t}\right) dt, \quad (3.47)$$

$$B(\alpha, \gamma, T) = \int_0^T \frac{1}{\sqrt{(T-t)t}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2(T-t)} - \frac{\gamma}{t}\right) dt, \quad (3.48)$$

$$C(\alpha, \gamma, T) = \int_0^T \frac{t}{\sqrt{(T-t)t}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2(T-t)} - \frac{\gamma}{t}\right) dt. \quad (3.49)$$

Nous commençons par l'évaluation de la formule (3.47), qui peut aussi s'écrire comme

$$A(\alpha, \gamma, T) = \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{\alpha^2 + 2\gamma}{2T}\right) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2T}x - \frac{\gamma}{Tx}\right) dx, \quad (3.50)$$

grâce à la formule (3.39), on obtient

$$A(\alpha, \gamma, T) = \pi \sqrt{\frac{2}{T\gamma}} \phi\left(\frac{\alpha + \sqrt{2\gamma}}{\sqrt{T}}\right).$$

Pour la formule (3.48), on part de la relation suivante

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} B(\alpha, \gamma, T) = -A(\alpha, \gamma, T), \quad (3.51)$$

par un intégration par rapport à γ , on obtient

$$B(\alpha, \gamma, T) = -2\pi \Phi \left(\frac{\alpha + \sqrt{2\gamma}}{\sqrt{T}} \right) + \varepsilon_1(\alpha, T), \quad (3.52)$$

où $\varepsilon_1(\alpha, T)$ est une fonction indépendante de γ . La limite de (3.52) lorsque γ tend vers zéro donne

$$\int_0^T \frac{1}{\sqrt{(T-t)t}} \exp \left(-\frac{\alpha^2}{2(T-t)} \right) dt = -2\pi \Phi \left(\frac{\alpha}{\sqrt{T}} \right) + \varepsilon_1(\alpha, T), \quad (3.53)$$

en utilisant la formule (3.43), on obtient $\varepsilon_1(\alpha, T) = 2\pi$ et donc

$$B(\alpha, \gamma, T) = 2\pi \left(1 - \Phi \left(\frac{\alpha + \sqrt{2\gamma}}{\sqrt{T}} \right) \right).$$

De même, pour obtenir une expression de forme fermée de (3.49), on note que

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} C(\alpha, \gamma, T) = -B(\alpha, \gamma, T). \quad (3.54)$$

L'intégration par rapport à γ en prenant $x = \sqrt{\gamma}$ et en utilisant la formule (3.40) donne

$$\begin{aligned} C(\alpha, \gamma, T) = \pi & \left((2\gamma - \alpha^2 - T) \Phi \left(\frac{\alpha + \sqrt{2\gamma}}{\sqrt{T}} \right) + \sqrt{T} (\sqrt{2\gamma} - \alpha) \phi \left(\frac{\alpha + \sqrt{2\gamma}}{\sqrt{T}} \right) \right) \\ & - 2\pi\gamma + \varepsilon_2(\alpha, T), \end{aligned} \quad (3.55)$$

où $\varepsilon_2(\alpha, T)$ est une fonction qui ne dépend que de α et T . La limite de (3.55) lorsque γ tend vers $\alpha^2/2$ donne

$$\int_0^T \frac{t}{\sqrt{(T-t)t}} \exp \left(-\frac{\alpha^2 T}{2t(T-t)} \right) dt = -T\pi \Phi \left(\frac{2\alpha}{\sqrt{T}} \right) - \alpha^2 \pi + \varepsilon_2(\alpha, T). \quad (3.56)$$

En utilisant la formule (3.44), on obtient $\varepsilon_2(\alpha, T) = \pi (T + \alpha^2)$ et donc

$$C(\alpha, \gamma, T) = \pi \left((2\gamma - \alpha^2 - T) \Phi \left(\frac{\alpha + \sqrt{2\gamma}}{\sqrt{T}} \right) + \sqrt{T} (\sqrt{2\gamma} - \alpha) \phi \left(\frac{\alpha + \sqrt{2\gamma}}{\sqrt{T}} \right) - 2\gamma + T + \alpha^2 \right).$$

Finalement, il suffit de remplacer les formules (3.47), (3.48) et (3.49) dans (3.46) pour obtenir le résultat souhaité.

Bibliographie

- ABUNDO, M. (2002). Some conditional crossing results of brownian motion over a piecewise-linear boundary. *Statistics & Probability Letters*, 58(2):131–145. 9
- ABUNDO, M. et VESCOVO, D. (2017). On the joint distribution of first-passage time and first-passage area of drifted brownian motion. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 19(3):985–996. 41
- AIMI, A., DIAZZI, L. et GUARDASONI, C. (2018). Efficient bem-based algorithm for pricing floating strike asian barrier options (with matlab® code). *Axioms*, 7(2). 69
- AIMI, A., DIAZZI, L. et GUARDASONI, C. (2019). Integral approach to asian barrier option pricing. *AIP Conference Proceedings*, 2116(1):450019. 66
- AIMI, A. et GUARDASONI, C. (2017). Collocation boundary element method for the pricing of geometric asian options. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 92:90–100. 69
- ALILI, L., PATIE, P. et PEDERSEN, J. (2005). Representations of the first hitting time density of an ornstein-uhlenbeck process. *Stochastic Models*, 21(4):967–980. 2, 44
- ALLEN, S. (2012). *Financial Risk Management : A Practitioner’s Guide to Managing Market and Credit Risk*. Wiley Finance. Wiley. 51
- ANGUS, J. E. (1999). A note on pricing asian derivatives with continuous geometric averaging. *Journal of Futures Markets*, 19(7):845–858. 62
- APPLEBAUM, D. (2009). *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2 édition. 2
- BACHELIER, L. (1900). Théorie de la spéculation. *Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure*, 3e série, 17:21–86. 1, 2, 9
- BAUER, H. et BURCKEL, R. (2001). *Measure and Integration Theory*. De Gruyter studies in mathematics. W. de Gruyter. 30
- BERNARD, C., COURTOIS, O. et QUITTARD-PINON, F. (2008). Pricing derivatives with barriers in a stochastic interest rate environment. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 32(9): 2903–2938. 65
- BLACK, F. et SCHOLES, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654. 53, 69
- BOUKHETALA, K. (1998a). Estimation of the first passage time distribution for a simulated diffusion process. *Maghreb Math.Rev*, 7(1):1–25. 3
- BOUKHETALA, K. (1998b). Kernel density of the exit time in a simulated diffusion. *Les Annales Maghrebines De L’ingenieur*, 12(Hors Serie):587–589. 3
- BRASS, H. et PETRAS, K. (2011). *Quadrature Theory : The Theory of Numerical Integration on a Compact Interval*, volume 178 de *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, R.I. 72

- CALIN, O. (2015). *An Informal Introduction To Stochastic Calculus With Applications*. World Scientific Publishing Company. 39
- CARR, P. (1995). Two extensions to barrier option valuation. *Applied Mathematical Finance*, 2(3):173–209. 65
- CHESNEY, M., JEANBLANC-PICQUÉ, M. et YOR, M. (1997). Brownian excursions and parisian barrier options. *Advances in Applied Probability*, 29(1):165–184. 4, 70
- CHIARELLA, C., KANG, B. et MEYER, G. (2012). The evaluation of barrier option prices under stochastic volatility. *Computers & Mathematics with Applications*, 64(6):2034 – 2048. 65
- CURRAN, M. (1994). Valuing asian and portfolio options by conditioning on the geometric mean price. *Management Science*, 40(12):1705–1711. 63
- DING, M. et RANGARAJAN, G. (1996). *Fokker-Planck Equation*, volume 18 de *Springer Series in Synergetics*. Springer. 2
- DING, M. et RANGARAJAN, G. (2004). *First passage time problem : A fokkerplanck approach*. New Directions in Statistical Physics. Springer. 3
- DRUGOWITSCH, J. (2016). Fast and accurate monte carlo sampling of first-passage times from wiener diffusion models. *Sci Rep*, 6:20490. 3
- EALLES, B. et CHOUDHRY, M. (2003). *Derivative Instruments : A Guide to Theory and Practice*. Butterworth-Heinemann finance. Elsevier Science. 52
- FERNÁNDEZ, L., HIEBER, P. et SCHERER, M. (2013). Double-barrier first-passage times of jump-diffusion processes. *Monte Carlo Methods and Applications*, 19(2):107–141. 3
- FREEDMAN, D. (1983). *Brownian Motion and Diffusion*. Springer-Verlag New York, 1 édition. 24
- FUSAI, G. et MEUCCI, A. (2008). Pricing discretely monitored asian options under lévy processes. *Journal of Banking & Finance*, 32(10):2076–2088. 69
- GALL, J. (2012). *Mouvement Brownien, Martingales Et Calcul Stochastique*. Mathématiques et Applications. Springer Berlin Heidelberg. 23
- GEMAN, H. et YOR, M. (1996). Pricing and hedging double-barrier options : A probabilistic approach. *Mathematical Finance*, 6(4):365–378. 65
- GIRAUDO, M., SACERDOTE, L. et ZUCCA, C. (2001). A monte carlo method for the simulation of first passage times of diffusion processes. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 3:215–231. 3
- GLASSERMAN, P. (2003). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Stochastic Modelling and Applied Probability v. 53. Springer, 1 édition. 15
- GUIDOUM, A. C. et BOUKHETALA, K. (2020). Performing parallel monte carlo and moment equations methods for itô and stratonovich stochastic differential systems : R package Sim.DiffProc. *Journal of Statistical Software*, 96(2):1–82. 10
- HAN, C. et LAI, Y. (2010). Generalized control variate methods for pricing asian options. *Journal of Computational Finance*, 14:87–118. 4

- HARRISON, J. et PLISKA, S. (1981). Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and their Applications*, 11(3):215 – 260. 55, 57
- HERRMANN, S. et ZUCCA, C. (2019). Exact simulation of the first-passage time of diffusions. *J Sci Comput*, 79:1477–1504. 3
- HSU, W., LU, C., KAO, M., LYUU, Y. et HO, J. (2012). Pricing discrete asian barrier options on lattices. In *2012 IEEE Conference on Computational Intelligence for Financial Engineering & Economics (CIFER)*, pages 1–8. 66, 69
- HUBALEK, F. et SGARRA, C. (2011). On the explicit evaluation of the geometric asian options in stochastic volatility models with jumps. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235(11):3355–3365. 69
- HURD, T. R. et KUZNETSOV, A. (2009). On the first passage time for brownian motion subordinated by a lévy process. *Journal of Applied Probability*, 46(1):181–198. 2
- ICHIBA, T. et KARDARAS, C. (2011). Efficient estimation of one-dimensional diffusion first passage time densities via monte carlo simulation. *Journal of Applied Probability*, 48(3):699–712. 3
- ITÔ, K. (1944). Stochastic integral. *Proc. Imp. Acad.*, 20(8):519–524. 43
- JACQUES, M. (1997). The istanbul option : where the standard european option becomes asian. *Insurance : Mathematics and Economics*, 21(2):139–152. 4, 5, 69, 77, 81
- JU, N. (2002). Pricing asian and basket options via taylor expansion. *Journal of Computational Finance*, 5(3):79–103. 69
- KACEF, M. et BOUKHETALA, K. (2020). A closed-form approximation for pricing geometric istanbul options. *Int. J. Revenue Management*, 11(4):297–315. 5
- KACEF, M. et HANIFI, J. (2014). *Les temps de passage dans les processus de type pont de diffusion : Processus stochastiques appliqués à la finance*. Omniscryptum Gmbh & Company Kg. 11, 44
- KARATZAS, I. et SHREVE, S. (2014). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York. 46
- KAZANTZAKI, S. (2009). Double knock-out asian barrier options which widen or contract as they approach maturity. *Quantitative Finance*, 9(3):329–340. 66
- KEARNEY, M. et MAJUMDAR, S. (2005). On the area under a continuous time brownian motion till its first-passage time. *Journal of Physics : A Mathematical and General*, 38(19):4097–4104. 41
- KEMNA, A. et VORST, A. (1990). A pricing method for options based on average asset values. *Journal of Banking & Finance*, 14(1):113–129. 3, 4, 69
- KIRKBY, J. (2016). An efficient transform method for asian option pricing. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 7(1):845–892. 69
- KIRKBY, J. et NGUYEN, D. (2020). Efficient asian option pricing under regime switching jump diffusions and stochastic volatility models. *Annals of Finance*. 69

- KOLMOGOROV, A. (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer, Berlin. 10
- KOU, S. et WANG, H. (2003). First passage times of a jump diffusion process. *Advances in Applied Probability*, 35(2):504–531. 2
- KUNITOMO, N. et IKEDA, M. (1992). Pricing options with curved boundaries. *Mathematical Finance*, 2(4):275–298. 9, 65
- LAMBERTON, D. et LAPEYRE, B. (2012). *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. Ellipses. 57
- LAST, G. et PENROSE, M. (2017). *Lectures on the Poisson Process*. Institute of Mathematical Stat. Cambridge University Press. 1
- LÉVY, E. (1992). Pricing european average rate currency options. *Journal of International Money and Finance*, 11(5):474–491. 70
- LIN, S. (1998). Double barrier hitting time distributions with applications to exotic options. *Insurance : Mathematics and Economics*, 23(1):45–58. 3
- LINETSKY, V. (2004). Computing hitting time densities for cir and ou diffusions : Applications to mean-reverting models. *Journal of Computational Finance*, 7:1–22. 2
- LO, C.-L., PALMER, K. et YU, M.-T. (2014). Moment-matching approximations for asian options. *The Journal of Derivatives*, 21(4):103–122. 62
- LU, K., LIANG, C., HSIEH, M. et LEE, Y. (2019). An effective hybrid variance reduction method for pricing the asian options and its variants. *The North American Journal of Economics and Finance*, 51. 69
- LUO, L. S. J. (2001). Various types of double-barrier options. *Journal of Computational Finance*, 4(3):125–138. 3
- M., R. et REINER, E. S. (1991). Breaking down the barriers. *Risk Magazine*, 4(8):28–35. 3
- MEHRDOUST, F. (2015). A new hybrid monte carlo simulation for asian options pricing. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 85(3):507–516. 69
- MERTON, R. (1973). Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1):141–183. 3
- MILEVSKY, M. et POSNER, S. (1998). Asian options, the sum of lognormals, and the reciprocal gamma distribution. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 33(3):409–422. 63
- MÖRTERS, P. et PERES, Y. (2010). *Brownian Motion*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press. 19, 24
- OPPLESTRUP, T., BULATOV, V., GILMER, G., KALOS, M. et SADIGH, B. (2006). First-passage monte carlo algorithm : Diffusion without all the hops. *Phys. Rev. Lett.*, 97:230602. 3
- PAKES, A. (1996). A hitting time for lévy processes, with application to dams and branching processes. *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques*, Ser. 6, 5(3):521–544. 2

- PELSER, A. (2000). Pricing double barrier options using laplace transforms. *Finance Stochastic*, 4:95–104. [3](#)
- POULARIKAS, A. (1999). *The handbook of formulas and tables for signal processing*. The electrical engineering handbook series. Springer, 1 édition. [89](#)
- REVUZ, D. et YOR, M. (2013). *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg. [30](#)
- RICCIARDI, L. et SATO, S. (1988). First-passage-time density and moments of the ornstein-uhlenbeck process. *Journal of Applied Probability*, 25(1):43–57. [2](#)
- RICH, D. (1994). The mathematical foundations of barrier option-pricing theory. *Advances in futures and options research*, 7:267–311. [3](#)
- ROGERS, L. et ZANE, O. (1997). Valuing moving barrier options. *Journal of Computational Finance*, 1. [65](#)
- RUBINSTEIN, M. et REINER, E. (1991). Unscrambling the binary code. *Risk Magazine*, 4(9):75–83. [75](#)
- RUBINSTEIN, R. et KROESE, D. (2017). *Simulation and the Monte Carlo Method*. Wiley, 3rd édition. [14](#)
- SCHRODINGER, E. (1915). Zur theorie der fall-und steigversuche an teilchen mit brownischer bewegung. *Physikalische Zeitschrift*, 16:289–295. [2](#)
- SHREVE, S. (2008). *Stochastic Calculus for Finance II : Continuous-Time Models*. Springer Finance. Springer, 1 édition. [65](#)
- SMOLUCHOWSKI, M. (1915). Notiz über die berechnung der brownischen molekularbewegung bei des ehrenhaft-millikanchen versuchsanordnung. *Physikalische Zeitschrift*, 16:318–321. [2](#)
- SRIVASTAVA, V., FENG, S. F., COHEN, D., J., LEONARD, N. E. et SHENHAV, A. (2017). A martingale analysis of first passage times of time-dependent wiener diffusion models. *Journal of Mathematical Psychology*, 77:94–110. [23](#)
- STEELE, J. (2012). *Stochastic Calculus and Financial Applications*. Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer New York. [43](#)
- STOLL, H. (1969). The relationship between put and call option prices. *The Journal of Finance*, 24(5):801–824. [61](#)
- SUN, J., CHEN, L. et LI, S. (2013). A quasi-analytical pricing model for arithmetic asian options. *Journal of Futures Markets*, 33(12):1143–1166. [4](#)
- TUCKWELL, H. et WAN, F. (1984). First-passage time of markov processes to moving barriers. *Journal of Applied Probability*, 21(4):695–709. [3](#)
- UHLENBECK, G. E. et ORNSTEIN, L. S. (1930). On the theory of the brownian motion. *Phys. Rev.*, 36:823–841. [2](#), [43](#)
- VACER, J. (2001). A new pde approach for pricing arithmetic average asian options. *Journal of Computational Finance*, 4(4):105–113. [69](#)

- WILLEMS, S. (2019). Asian option pricing with orthogonal polynomials. *Quantitative Finance*, 19(4):605–618. [4](#)
- WONG, H. et CHEUNG, Y. (2004). Geometric asian options : valuation and calibration with stochastic volatility. *Quantitative Finance*, 4(3):301–314. [69](#)
- YANG, X., ZHANG, Z. et GAO, X. (2019). Asian-barrier option pricing formulas of uncertain financial market. *Chaos, Solitons & Fractals*, 123:79 – 86. [66](#)
- YE, G. (2008). Asian options versus vanilla options : a boundary analysis. *Journal of Risk Finance*, 9(2). [3](#)
- YI, C. (2010). On the first passage time distribution of an ornstein-uhlenbeck process. *Quantitative Finance*, 10(9):957–960. [2](#)
- ZHANG, H. (2009). Pricing asian options using monte carlo methods. Rapport technique, Uppsala Universit, Department of Mathematics. U.U.D.M. Project Report. [69](#)
- ZHANG, P. (1998). *Exotic Options : A Guide To Second Generation Options (2nd Edition)*. World Scientific Publishing Company. [64](#)
- ZVAN, R., FORSYTH, P. et VETZAL, K. (1999). Discrete asian barrier options. *Journal of Computational Finance*, 3(1):41–67. [69](#)