



HAL
open science

Développements numériques de la méthode SPH couplée aux Eléments Finis appliqués au phénomène de l'hydroplanage.

Julien Michel

► **To cite this version:**

Julien Michel. Développements numériques de la méthode SPH couplée aux Eléments Finis appliqués au phénomène de l'hydroplanage.. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. École centrale de Nantes, 2020. Français. NNT : 2020ECDN0013 . tel-03284276

HAL Id: tel-03284276

<https://theses.hal.science/tel-03284276v1>

Submitted on 12 Jul 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE

L'ÉCOLE CENTRALE DE NANTES

ÉCOLE DOCTORALE N° 602

Sciences pour l'Ingénieur

Spécialité : Mécanique des milieux fluides

Par

Julien MICHEL

**Développements numériques de la méthode SPH couplée aux
Éléments Finis appliqués au phénomène de l'hydroplanage.**

Thèse présentée et soutenue à l'École Centrale de Nantes le 6 juillet 2020

Unité de recherche : UMR 6598, Laboratoire de recherche en Hydrodynamique, Énergétique et
Environnement Atmosphérique (LHEEA)

Rapporteurs avant soutenance :

Stéphane AUBERT, Professeur des universités, École Centrale de Lyon
Sofiane KHELLADI, Professeur des universités, ENSAM, Paris

Composition du Jury :

Président : Christophe BERTHON, Professeur des universités, Université de Nantes

Examineurs : Antonio SOUTO-IGLESIAS, Professeur, Université Polytechnique de Madrid (Espagne)
Violaine TODOROV, Docteur, Manufacture Française des Pneumatiques Michelin, Clermont-Ferrand
Corentin HERMANGE, Docteur, Manufacture Française des Pneumatiques Michelin, Clermont-Ferrand
Laurent GORNET, Maître de conférences HDR, Ecole Centrale de Nantes

Dir. de thèse : LE TOUZÉ David, Professeur des universités, Ecole Centrale de Nantes

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Liste des tableaux	xi
Introduction	1
1 Méthode SPH	5
1.1 Formalisme ALE des équations de Navier-Stokes	5
1.1.1 Formalisme ALE des équations de Navier-Stokes au continu	5
1.1.1.1 Théorème de transport appliqué à un volume de contrôle arbitraire	5
1.1.1.2 Vitesse locale	6
1.1.1.3 Equation d'évolution du volume	6
1.1.1.4 Conservation de la masse	7
1.1.1.5 Conservation de la quantité de mouvement	7
1.1.1.6 Equation d'état	8
1.1.2 Formalisme ALE des équations de Navier-Stokes au niveau semi-discret	8
1.2 Définition des différents opérateurs SPH	9
1.2.1 Interpolation SPH au niveau continu	9
1.2.1.1 Définition du noyau	9
1.2.1.2 Interpolation d'une fonction au continu	10
1.2.1.3 Interpolation des opérateurs différentiels au continu	10
1.2.2 Interpolation SPH au niveau discret	10
1.2.2.1 Interpolation d'une fonction au niveau discret	10
1.2.2.2 Approximation des opérateurs différentiels au niveau discret	11
1.2.3 Ré-arrangement et correction des opérateurs	11
1.2.3.1 Correction Shepard	11
1.2.3.2 Opérateur moins	12
1.2.3.3 Méthode de renormalisation	12
1.2.3.4 Opérateur plus	12
1.2.4 Opérateur Laplacien en SPH	13
1.2.4.1 Opérateur Laplacien de Watkins <i>et al.</i>	13
1.2.4.2 Opérateur Laplacien de Morris <i>et al.</i>	13
1.2.4.3 Opérateur Laplacien de Monaghan & Gingold	13
1.3 Formulation SPH au niveau discret	14
1.3.1 Formulation ALE	14
1.3.2 Formulation Lagrangienne	15
1.3.3 Techniques de stabilisation	15
1.3.3.1 Viscosité artificielle	15

1.3.3.2	δ -SPH	16
1.3.3.3	Riemann-SPH en formalisme lagrangien	17
1.3.3.4	Cas particulier du schéma de Vila	19
1.4	Conditions aux limites	20
1.4.1	Conditions aux limites sur un corps au niveau continu	20
1.4.2	Conditions aux limites pour un corps au niveau discret	21
1.4.2.1	Méthode volumique : particules fantômes	21
1.4.2.2	Méthode surfacique : Boundary Integral Method (BIM) avec l'approche Cut-Face (CFA)	22
1.4.3	Conditions de surface libre au niveau continu	23
1.4.4	Conditions de surface libre au niveau discret	23
1.5	Désordre particulaire : Particle Shifting Technique (PST)	24
1.5.1	PST dans la littérature	25
1.5.1.1	Loi de Monaghan [64]	25
1.5.1.2	Loi de Lind <i>et al.</i> [51]	25
1.5.1.3	Loi de Oger <i>et al.</i> [73]	26
1.5.1.4	Loi de Sun <i>et al.</i> [88]	26
1.5.2	PST et surface libre	26
1.5.2.1	Algorithme de détection de surface libre	27
1.5.2.2	PST tangentielle à la surface libre	28
1.5.3	PST et parois solides	28
1.6	Intégration temporelle	29
1.6.1	Approche faiblement compressible	29
1.6.2	Condition de stabilité	29
1.7	Raffinement particulaire	29
2	Etude de différents schémas SPH utilisant une PST	31
2.1	Mise en évidence de problèmes	31
2.2	Cas des schémas dérivés du formalisme ALE	36
2.3	Formulation hybride à flux de masse nul : Colagrossi <i>et al.</i> [18]	39
2.4	Formulations hybrides à flux de masse nul avec stabilisation par solveur de Riemann	40
2.4.1	Formulation hybride de Colagrossi <i>et al.</i> [18] stabilisée par solveur de Riemann	40
2.4.2	Formulation hybride sans variation de volume pour un champ δu constant	41
2.4.3	Validation des formulations hybrides à flux de masse nul : <i>hybride II et III</i>	42
2.4.3.1	Cas d'un patch circulaire de fluide soumis uniquement à une vitesse de PST	42
2.4.3.2	Vérification de la non-dérive des formulations hybrides à flux de masse nul	43
2.5	Discussion	44
3	Etude et amélioration de la PST	47
3.1	Résumé via une forme générique des vitesses de PST introduites dans la section 1.5	48
3.2	Conditions que doit remplir une PST et méthodologie pour les satisfaire	49
3.2.1	Condition 1 : consistance de la vitesse de PST	49
3.2.1.1	Etude théorique de ∇C_i	49
3.2.1.2	Extension de cette étude en présence d'une surface libre	50
3.2.1.3	Comment satisfaire la condition de consistance	51
3.2.2	Condition 2 : invariance par translation rectiligne uniforme et rotation locale	51
3.2.3	Condition 3 : indépendance entre PST locale et comportement global du fluide	52
3.3	Proposition et validation d'une nouvelle PST	52
3.3.1	Au sein du fluide	52
3.3.1.1	Proposition d'une nouvelle loi de PST	52
3.3.1.2	Validation	54

3.3.2	En présence d'une surface libre	58
3.3.2.1	Adaptation de la nouvelle loi de PST	58
3.3.2.2	Validation	59
3.3.3	En présence d'une paroi prise en compte par méthode volumique	63
3.3.3.1	Adaptation de la PST	63
3.3.3.2	Validation	63
3.3.4	En présence d'une paroi prise en compte par méthode surfacique (BIM-CFA)	68
3.3.4.1	Adaptation de la PST à une méthode surfacique de traitement des frontières	68
3.3.4.2	PST tangentielle vs complète à la paroi	68
3.3.4.3	Validation en 2D	69
3.3.4.4	Validation en 3D	71
3.4	Discussion	71
4	Modèle de décollement de jet compatible avec les effets de succion	75
4.1	De l'importance d'un traitement de décollement de jets compatible avec la prise en compte des effets de succion	75
4.1.1	Traitement existant au sein du laboratoire	75
4.1.2	Mise en évidence des problèmes rencontrés avec la méthodologie existante	76
4.1.2.1	Cas d'impact d'un cylindre dans une cuve de fluide initialement au repos en 2D : Greenhow & Lin [34]	76
4.1.2.2	Cas d'entrée et sortie d'un prisme à la surface libre à cinématique imposée en 2D : Piro & Maki [78]	76
4.1.2.3	Etude comparée du traitement sur ces deux cas	77
4.2	Proposition d'un traitement pour le décollement de jet compatible avec les effets de succion	79
4.2.1	Discussion sur le traitement proposé par Sun <i>et al.</i>	79
4.2.2	Compatibilité du traitement avec la prise en compte des effets de succion	79
4.2.2.1	Critère relatif à la région d'autorisation de décollement	80
4.2.2.2	Critère sur la pression	81
4.2.2.3	Critère sur la vitesse relative	81
4.3	Validation du traitement proposé	81
4.3.1	Impact d'un cylindre	82
4.3.2	Entrée et sortie à la surface libre d'un prisme à cinématique imposée en 2D	85
4.4	Cas d'application à l'amerrissage d'urgence d'hélicoptère	88
4.4.1	Présentation du cas	88
4.4.2	Résultats	89
4.5	Discussion	91
5	Validation du couplage fluide/structure	93
5.1	Généralités à propos du couplage fluide/structure	94
5.2	Couplage SPH/FE au sein du laboratoire	94
5.2.1	Efforts transmis au corps déformable	94
5.2.2	Schémas de couplage	95
5.2.2.1	Schéma CSS/ <i>p</i> -CSS	96
5.2.2.2	Schéma CPS/ <i>p</i> -CPS	98
5.2.3	Critère pour augmenter/diminuer le <i>p</i> -ratio de manière adaptative dans une simulation	99
5.3	Validation du couplage SPH-Flow/DELI	100
5.3.1	Hydrostatique sur une barre déformable en 2D	100
5.3.1.1	Présentation du cas	100
5.3.1.2	Validation	100
5.3.2	Impact d'un demi-dièdre déformable dans une cuve de fluide en 2D	102
5.3.2.1	Présentation du cas	102

5.3.2.2	Validation	102
5.3.3	Dam-break à travers une porte déformable	105
5.3.3.1	Présentation du cas	105
5.3.3.2	Validation du couplage : loi tabulée (Aster)	106
5.3.3.3	Validation du couplage avec DELI	107
5.3.4	Dam-break impactant une plaque déformable	108
5.3.4.1	Présentation du cas	109
5.3.4.2	Influence du décollement de jets	110
5.3.4.3	Etude préliminaire de convergence (SPH-Flow / Aster avec le schéma CSS)	110
5.3.4.4	Validation du couplage avec DELI	113
5.4	Synthèse	117
6	Tentative d'amélioration du compromis entre temps de restitution et précision, et application à l'hydroplanage	119
6.1	Influence des améliorations discutées précédemment sur le temps de restitution de calculs couplés : augmentation du p -ratio	120
6.1.1	Etude comparative du temps de restitution des schémas p -CPS et p -CSS	120
6.1.2	Influence des développements de la thèse sur le p -ratio garantissant le maintien de la stabilité.	121
6.2	Tentatives d'amélioration du compromis entre temps de restitution et précision	124
6.2.1	Schéma p -CPS avec projection des efforts	126
6.2.1.1	Extrapolation basée sur les pas de temps SPH	126
6.2.1.2	Extrapolation basée sur les pas de temps FE	128
6.2.2	Résultats	129
6.3	Cas d'application à l'hydroplanage	131
6.3.1	Présentation du cas	132
6.3.2	Résultats pour le pneumatique 1.	133
6.3.3	Résultats pour le pneumatique 2.	137
6.3.4	Résultats pour le pneumatique 3.	141
6.3.5	Discussion	143
6.4	Conclusion	144
	Conclusions et perspectives	145
	Bibliographie	147

Table des figures

1	Champs de vitesse obtenus avec route lisse (gauche) et rugueuse (droite) issus de Hermange <i>et al.</i> [38].	2
1.1	Volumes de contrôle arbitraire D_0 et matériel D ayant respectivement une vitesse locale arbitraire u_0 et matérielle u	5
1.2	Comparaison du champ de pression obtenu sans (à gauche) et avec PST (à droite) sur un cas d'impact de cylindre, en lien avec leurs distributions particulières respectives.	24
1.3	Définition de la région de surface libre (constituée des particules bleues et vertes) et des vecteurs normaux à la surface libre, ici avec un ratio $\frac{R}{\Delta x} = 4$	28
2.1	Tourbillons de Taylor-Green non-visqueux en 2D. Initialisation de la pression (gauche), de la vitesse selon x (centre) et selon y (droite).	32
2.2	Tourbillons de Taylor-Green non-visqueux en 2D. Haut : évolution temporelle de la pression au centre du domaine pour trois discrétisations spatiales avec comparaison à la solution analytique. Bas : champ de pression pour le schéma de Parshikov & Medin à $tU/L = 1$ avec $L/\Delta x = 100$	32
2.3	Cuve en ballotement pour un fluide non-visqueux en 2D. Haut : géométrie de la cuve et champ de pression associé à l'instant initial ($\theta_0 = 0$). Bas : vitesse angulaire autour du point O en fonction du temps.	33
2.4	Cuve en ballotement pour un fluide non-visqueux en 2D : mise en évidence de la dérive du volume global occupé par le fluide. Champ de pression à $t/T = 7.72$ pour une discrétisation spatiale de $L/\Delta x = 448$. La ligne noire en pointillés représente la hauteur d'eau initiale.	35
2.5	Cuve en ballotement pour un fluide non-visqueux en 2D. Schémas de Parshikov & Medin ($\delta u = \delta u^{OEA}$) avec $R/\Delta x = 3$ et $L/\Delta x = 448$. Haut : valeur du facteur de renormalisation de Shepard à $t/T = 7.72$. Bas : distribution de particules aux instants $t/T = 0.796$ (gauche) et $t/T = 7.72$ (droite).	36
2.6	Schéma stabilisé par Riemann (2.9)-(2.12) avec $\delta u = \delta u^{OEA}$. Haut : champ de pression obtenu pour Taylor-Green à $tU/L = 1$ avec $L/\Delta x = 100$ et $R/\Delta x = 4$. Bas : volume des particules sur le cas de la cuve en ballotement à $t/T = 7.72$ avec $L/\Delta x = 448$ et $R/\Delta x = 3$	36
2.7	Patch circulaire soumis uniquement à une loi de PST à divergence nulle en 2D. Présentation du cas. Gauche : vecteurs issus de la PST. Droite : norme de ces vecteurs.	38
2.8	Patch circulaire soumis uniquement à une loi de PST à divergence nulle en 2D. Résultats obtenus avec le schéma <i>hybride I</i> (2.9)-(2.12) à $t\delta u_{max}/R_c = 5$ avec une discrétisation spatiale de $R_c/\Delta x = 50$. Gauche : volume. Centre : masse définie par $m = \rho V$. Droite : densité.	39
2.9	Patch circulaire soumis uniquement à une loi de PST à divergence nulle en 2D. Evolution temporelle de ρ_{max}/ρ_0 pour trois discrétisations spatiales. Gauche : <i>hybride I</i> (2.9)-(2.12) (la croix bleue indiquant que la simulation a planté). Centre : <i>hybride II</i> (2.22)-(2.25). Droite : <i>hybride III</i> (2.30)-(2.33).	42

2.10	Tourbillons de Taylor-Green non-visqueux en 2D avec $\delta\mathbf{u} = \delta\mathbf{u}^{OEA}$. Haut : évolution temporelle de la pression au centre du domaine pour trois discrétisations spatiales avec comparaison à la solution analytique (ligne noire en pointillé). Bas : champ de pression à $tU/L = 1$ avec $L/\Delta x = 400$ et une distribution initiale Cartésienne. De gauche à droite : <i>hybride I</i> (2.9)-(2.12), <i>hybride II</i> (2.22)-(2.25), <i>hybride III</i> (2.30)-(2.33).	43
2.11	Cuve en ballotement pour un fluide non-visqueux en 2D avec $\delta\mathbf{u} = \delta\mathbf{u}^{OEA}$. Champ de pression à $t/T = 7.72$ pour une discrétisation spatiale de $L/\Delta x = 448$ avec $R/\Delta x = 4$. La ligne noire en pointillée représente la hauteur d'eau initiale. Haut : <i>hybride I</i> (2.9)-(2.12). Centre : <i>hybride II</i> (2.22)-(2.25). Bas : <i>hybride III</i> (2.30)-(2.33).	44
3.1	Tourbillons de Taylor-Green non-visqueux en 2D. Champ de pression obtenu avec le schéma <i>hybride II</i> (2.22)-(2.25) et la PST proposée, avec $L/\Delta x = 100$ et à quatre instants de la simulation.	54
3.2	Tourbillons de Taylor-Green non-visqueux en 2D. Quadrants hauts : évolution de la valeur maximale de la vitesse de PST $\ \delta\mathbf{u}\ _{max}$ pour les quatre schémas testés et pour trois discrétisations spatiales. Bas : Taux de convergence de cette quantité. En noir : Parshikov & Medin (1.106)-(1.109), en rouge : <i>hybride I</i> (2.9)-(2.12), en vert : <i>hybride II</i> (2.22)-(2.25), en bleu : <i>hybride III</i> (2.30)-(2.33).	56
3.3	Tourbillons de Taylor-Green non-visqueux en 2D. Décroissance de l'énergie cinétique pour trois discrétisations spatiales. Trait plein : <i>hybride III</i> (2.30)-(2.33). Trait interrompu : <i>hybride II</i> (2.22)-(2.25). Pointillé : <i>hybride I</i> (2.9)-(2.12). Trait mixte : Parshikov & Medin. Droite : zoom sur la discrétisation spatiale la plus fine.	57
3.4	Tourbillons de Taylor-Green non-visqueux en 2D. Evolution temporelle de la pression au centre du domaine pour $L/\Delta x = 400$. Noir : Parshikov & Medin. Rouge : <i>hybride I</i> . Vert : <i>hybride II</i> . Bleu : <i>hybride III</i>	58
3.5	Rotation d'un patch de fluide initialement carré en 2D. Quadrants hauts : évolution de la valeur maximale de la vitesse de PST $\ \delta\mathbf{u}\ _{max}$ pour les quatre schémas testés et pour trois discrétisations spatiales. Bas : Taux de convergence de cette quantité avec en noir : Parshikov & Medin (1.106)-(1.109), en rouge : <i>hybride I</i> (2.9)-(2.12), en vert : <i>hybride II</i> (2.22)-(2.25), en bleu : <i>hybride III</i> (2.30)-(2.33).	60
3.6	Rotation d'un patch de fluide initialement carré en 2D. Champ de pression pour la discrétisation spatiale $L/\Delta x = 400$ aux instants $t\omega = 1.2, 2.4, 3.6$ pour les quatre schémas.	61
3.7	Rotation d'un patch de fluide initialement carré en 2D. Décroissance de l'énergie cinétique pour trois discrétisations spatiales. Pointillé : <i>hybride I</i> (2.9)-(2.12). Trait interrompu : <i>hybride II</i> (2.22)-(2.25). Trait plein : <i>hybride III</i> (2.30)-(2.33). Trait mixte : Parshikov & Medin. Droite : zoom sur la discrétisation spatiale la plus fine.	62
3.8	Rotation d'un patch de fluide initialement carré en 2D. Evolution temporelle de la pression au centre du domaine pour $L/\Delta x = 400$. Noir : Parshikov & Medin. Rouge : <i>hybride I</i> (2.9)-(2.12). Vert : <i>hybride II</i> (2.22)-(2.25). Bleu : <i>hybride III</i> (2.30)-(2.33). Droite : zoom autour de $t\omega = 6$	62
3.9	Jet fluide impactant une plaque plane. Description du cas.	63
3.10	Jet fluide impactant une plaque plane en 2D (avec particules fantômes). Quadrants hauts : évolution de la valeur maximale de la vitesse de PST $\ \delta\mathbf{u}\ _{max}$ pour les quatre schémas testés et pour quatre discrétisations spatiales. Bas : Taux de convergence de cette quantité avec en noir : Parshikov & Medin (1.106)-(1.109), en rouge : <i>hybride I</i> (2.9)-(2.12), en vert : <i>hybride II</i> (2.22)-(2.25), en bleu : <i>hybride III</i> (2.30)-(2.33).	65
3.11	Jet fluide impactant une plaque plane en 2D (avec particules fantômes). Evolution de la pression au point d'arrêt pour les quatre schémas testés et pour quatre discrétisations spatiales.	66

3.12	Jet fluide impactant une plaque plane en 2D (avec particules fantômes). Gauche : champ de pression obtenu avec $H/\Delta x = 100$ à $tU/H = 20$ et comparaison avec la surface libre analytique. Centre : profil de pression le long de la paroi à $tU/H = 20$ pour trois discrétisations spatiales avec comparaison à la solution analytique. Droite : profil de vitesse horizontale le long de la paroi à $tU/H = 20$ pour trois discrétisations spatiales avec comparaison à la solution analytique. De haut en bas : les quatre schémas testés.	67
3.13	Exemple de distribution de particules obtenues sans (gauche) ou avec (droite) limitation de la PST à sa composante tangentielle (avec méthode surfacique). Cas d'un dam-break après l'impact de la langue d'eau sur la paroi opposée.	69
3.14	Jet fluide impactant une plaque plane en 2D (avec méthode surfacique). Pression le long de la paroi à $tU/H = 0.2$ avec $H/\Delta x = 100$	69
3.15	Jet fluide impactant une plaque plane en 2D (avec méthode surfacique). Gauche : évolution temporelle de la valeur maximale de la vitesse de PST pour quatre résolutions spatiales. Droite : courbe de convergence avec en noir la méthode volumique et en rouge la méthode surfacique.	70
3.16	Jet fluide impactant une plaque plane en 2D (avec méthode surfacique). Gauche : évolution temporelle du pic de pression. Droite : profil de pression le long de la paroi pour trois discrétisations spatiales et comparaison à la solution analytique une fois l'état stationnaire atteint (à $tU/H = 20$).	70
3.17	Jet fluide impactant une plaque plane en 2D (avec méthode surfacique). Gauche : champ de pression obtenu avec $H/\Delta x = 100$ à $tU/H = 20$ (la surface libre analytique est aussi tracée). Droite : profil de la vitesse horizontale le long de la paroi pour trois discrétisations spatiales en comparaison avec la solution analytique.	71
3.18	Jet fluide impactant une plaque plane en 3D (avec méthode surfacique). Gauche : valeur maximale de la vitesse de PST. Droite : courbe de convergence.	72
3.19	Jet fluide impactant une plaque plane en 3D (avec méthode surfacique). Evolution temporelle de la pression au point d'arrêt pour trois discrétisations spatiales.	72
3.20	Jet fluide impactant une plaque plane en 3D (avec méthode surfacique). Profil de pression le long de la paroi à $tU/H = 50$ à différents endroits avec $H/\Delta x = 40$	72
3.21	Jet fluide impactant une plaque plane en 3D (avec méthode surfacique). Gauche : champ de pression à $tU/H = 50$ avec $H/\Delta x = 40$. Droite : coupe de l'écoulement et comparaison avec la surface libre expérimentale.	73
4.1	Entrée et sortie d'un prisme à la surface libre initialement au repos en 2D. Présentation du cas.	77
4.2	Etude comparée sans le traitement (à gauche) et avec le traitement existant (à droite). Haut : impact d'un cylindre de densité 0.5 à la surface libre en 2D. Bas : entrée et sortie d'un prisme à la surface libre initialement au repos en 2D, à l'instant d'inversion du mouvement imposé.	78
4.3	Entrée et sortie d'un prisme à la surface libre initialement au repos en 2D. Champ de pression obtenu sans utiliser de PST. Illustration de la création d'une "surface libre artificielle".	79
4.4	Valeurs de λ_i (gauche) et λ_i^* (droite) sur le cas d'impact d'un cylindre.	80
4.5	Définition de la zone dans laquelle les particules sont autorisées à ne pas interagir avec la paroi. Cette zone est formée des particules bleues et vertes. Le ratio $R/\Delta x = 4$ est utilisé ici.	81
4.6	Impact d'un cylindre de densité 0.5 à la surface libre en 2D aux instants $t\sqrt{g/D} = 0.038$, $t\sqrt{g/D} = 0.179$, $t\sqrt{g/D} = 0.274$, $t\sqrt{g/D} = 0.793$. Gauche : champ de pression obtenu avec $D/\Delta x = 300$, avec comparaison de la surface libre avec la BEM [87] (trait mixte noir) et δ -SPH [91](trait interrompu rouge). Droite : résultats expérimentaux avec en vert la surface libre obtenue en BEM [87].	83
4.7	Impact d'un cylindre de densité 1 à la surface libre en 2D aux instants $t\sqrt{g/D} = 0.132$, $t\sqrt{g/D} = 0.840$, $t\sqrt{g/D} = 1.028$, $t\sqrt{g/D} = 1.878$. Gauche : champ de pression obtenu avec $D/\Delta x = 300$, avec comparaison de la surface libre avec la BEM [87] (trait mixte noir) et δ -SPH [91] (trait interrompu rouge). Droite : résultats expérimentaux avec en vert la surface libre obtenue en BEM [87].	85

4.8	Impact d'un cylindre à la surface libre en 2D. Comparaison de l'évolution temporelle du déplacement du centre du cylindre. Les résultats obtenus ici sont comparés à δ -SPH [91], la solution BEM [87] et les données expérimentales. Gauche : densité 0.5. Droite : densité 1.	85
4.9	Entrée et sortie d'un prisme à la surface libre initialement au repos en 2D. Champ de pression à $t/t_0 = 1$ (instant d'inversion du mouvement imposé) avec $D/\Delta x = 800$. Gauche : sans le critère sur la vitesse relative. Droite : avec les trois critères.	86
4.10	Entrée et sortie d'un prisme à la surface libre initialement au repos en 2D. Comparaison des résultats obtenus avec ceux de Piro & Maki à $t/t_0 = 0.5$ (entrée), $t/t_0 = 1.0$ (inversion du mouvement) and $t/t_0 = 1.5$ (sortie). Gauche : Piro & Maki. Droite : présente méthode avec la discrétisation spatiale $D/\Delta x = 1600$	87
4.11	Entrée et sortie d'un prisme à la surface libre initialement au repos en 2D. Evolution temporelle des efforts fluides sur le prisme. Comparaison des résultats obtenus avec ceux de Piro & Maki.	88
4.12	Amerrissage d'urgence d'hélicoptère. Description du système expérimental de guidage.	89
4.13	Amerrissage d'urgence d'hélicoptère. Référentiel lié à la maquette.	89
4.14	Amerrissage d'urgence d'hélicoptère. Influence des traitements pour le décollement de jets. Haut : sans traitement. Milieu : traitement initialement utilisé au laboratoire. Bas : nouveau traitement.	90
4.15	Amerrissage d'urgence d'hélicoptère. Influence des traitements pour le décollement de jets. Evolution temporelle de l'angle d'assiette.	90
4.16	Amerrissage d'urgence d'hélicoptère. Comparaison numérique/expérimental à $t = 0.1s, t = 0.2s, t = 0.3s, t = 0.4s$	91
5.1	Définition de la zone de taille R (particules rouges) servant au calcul des efforts dans [30], et particules dont le support intersecte le panneau c (particules rouges et bleues) servant au calcul des efforts dans [37, 39].	95
5.2	Schéma de couplage Conventional Sequential Staggered (CSS).	96
5.3	Schéma p -CSS. Haut : pas de temps du point de vue du fluide et de la structure. Bas : fonctionnement du schéma p -CSS.	97
5.4	Schéma CPS (gauche) et p -CPS (droite).	98
5.5	Hydrostatique sur une barre déformable en 2D. Présentation du cas.	100
5.6	Hydrostatique sur une barre déformable en 2D. Comparaison des résultats obtenus pour les couplages avec Aster et DELI, avec comparaison à la solution analytique. Gauche : efforts transmis par le fluide à la barre. Droite : déplacement du centre de la barre (flèche). $y^* - y_0^*$ réfère ici à la flèche analytique.	101
5.7	Hydrostatique sur une barre déformable en 2D. Comparaison des champs de pression absolus $\frac{P}{\rho_f g H}$ et acoustiques P^* obtenus avec Aster (à gauche) et DELI (à droite), avec le schéma 1-CPS à $tc_0/H = 6.25$	102
5.8	Impact d'un demi-dièdre déformable dans une cuve de fluide en 2D. Présentation du cas.	102
5.9	Impact d'un demi-dièdre déformable dans une cuve remplie d'eau en 2D. Résultats obtenus avec DELI et Aster, et comparaison à la solution semi-analytique. En haut à gauche : évolution temporelle des efforts fluides verticaux. En haut à droite : évolution temporelle de la flèche. Bas : évolution temporelle de la pression en (a), (b) et (c).	104
5.10	Impact d'un demi-dièdre déformable dans une cuve remplie d'eau en 2D. Comparaison du champ de pression obtenu avec Aster (à gauche) et DELI (à droite) en utilisant le schéma 1-CPS, à $t = 2.5ms$	105
5.11	Dam-break à travers une porte déformable. Présentation du cas. Gauche : géométrie du cas. Droite : courbe contrainte-déformation caractérisant le matériau constituant la porte déformable.	105
5.12	Dam-break à travers une porte déformable en 2D. Résultats obtenus avec Aster (CPS et CSS) et la loi tabulée pour la caractérisation du matériau, avec comparaison aux résultats expérimentaux.	107
5.13	Dam-break à travers une porte déformable en 2D. Comparaison DELI/Aster avec un module de Young constant $E = 6MPa$	108

5.14	Dam-break à travers une porte déformable en 2D. Comparaison du champ de pression obtenu avec Aster (à gauche) et DELI (à droite), en utilisant le schéma 1-CPS, avec $E = 6MPa$ à $t = 0.13s$.	108
5.15	Dam-break impactant une plaque déformable. Présentation du cas.	109
5.16	Dam-break impactant une plaque déformable en 2D avec $H_0 = 0.2m$. Champ de pression obtenu à $t = 0.32s$, et comparaison à l'expérience. Gauche : avec le nouveau traitement pour le décollement de jets. Centre : avec l'ancien traitement pour le décollement de jets. Droite : expérience.	110
5.17	Dam-break impactant une plaque déformable en 2D. Solution obtenue avec Aster et le schéma CSS pour quatre discrétisations spatiales, et trois hauteurs d'eau (de gauche à droite). Haut : évolution temporelle des efforts fluides horizontaux. Bas : évolution temporelle du déplacement horizontal de la plaque pour le capteur rouge (à $0.0875m$ de la base), avec comparaison aux résultats expérimentaux.	111
5.18	Dam-break impactant une plaque déformable en 2D avec $H_0 = 0.2m$. Comparaison qualitative des résultats obtenus entre expérience et simulation (Aster avec schéma CSS et $L/\Delta x = 180$).	112
5.19	Dam-break impactant une plaque déformable en 2D avec $H_0 = 0.3m$. Comparaison qualitative des résultats obtenus entre expérience et simulation (Aster avec schéma CSS et $L/\Delta x = 180$).	112
5.20	Dam-break impactant une plaque déformable en 2D avec $H_0 = 0.4m$. Comparaison qualitative des résultats obtenus entre expérience et simulation (Aster avec schéma CSS et $L/\Delta x = 180$), lorsque l'on fait correspondre les déplacements (horizontaux) respectifs du haut de la plaque.	113
5.21	Dam-break impactant une plaque déformable en 2D. Résultats obtenus avec Aster et DELI pour les schémas CPS et CSS, avec $L/\Delta x = 180$, avec comparaison aux résultats expérimentaux.	115
5.22	Dam-break impactant une plaque déformable en 2D. Comparaison du champ de pression obtenu avec Aster (à gauche) et DELI (à droite) en utilisant le schéma 1-CPS, avec $L/\Delta x = 180$.	116
6.1	Evolution temporelle des efforts verticaux pour le cas du dam-break à travers une porte déformable en 2D avec $L/\Delta x = 316$. Influence des nouveaux développements sur la PST et le décollement de jets sur le p -ratio. Gauche : p -CSS. Droite : p -CPS.	122
6.2	Dam-break à travers une porte déformable en 2D avec $L/\Delta x = 316$. Influence des nouveaux développements (PST et décollement de jets) sur le p -ratio. Champ de pression obtenus avec le schéma p -CPS aux instants $t = 0.1s$, $t = 0.2s$, $t = 0.3s$, $t = 0.4s$ (de haut en bas), pour 3 valeurs de p_{CPS} : $p_{CPS} = 4$ avec l'ancien modèle (à gauche), $p_{CPS} = 6$ avec le nouveau modèle (au centre), $p_{CPS} = 8$ avec le nouveau modèle (à droite).	123
6.3	Dam-break impactant une plaque déformable en 2D avec $H_0 = 0.4m$ et $L/\Delta x = 180$. Influence des nouveaux développements sur le p -ratio. Gauche : p -CSS. Droite : p -CPS.	124
6.4	Schéma de couplage p -CPS avec projection des efforts. Gauche : description du schéma. Droite : méthode générale de la projection utilisée.	126
6.5	Calcul de l'extrapolation des efforts avec le schéma p -CPS- Π_{3PTS}^{SPH} .	127
6.6	Calcul de l'extrapolation des efforts utilisant les pas de temps FE.	128
6.7	Dam-break à travers une porte déformable en 2D. Evolution temporelle des efforts fluides verticaux avec $L/\Delta x = 316$. Résultats obtenus avec les schémas utilisant la projection des efforts pour différentes valeurs du coefficient α_π avec un ratio fixe $p_{CPS} = 8$.	130
6.8	Dam-break à travers une porte déformable en 2D. Haut : évolution temporelle des efforts fluides verticaux avec $L/\Delta x = 316$. Bas : champs de pression obtenus avec le schéma p -CPS- Π_{3PTS}^{SPH} à $t = 0.1s$ et $t = 0.3s$.	131
6.9	Pneumatiques ne présentant que des entailles transverses, en vue de dessus. Gauche : pneumatique 1. Centre : pneumatique 2. Droite : pneumatique 3. Le véhicule se déplace vers la droite sur la figure.	132
6.10	Evolution temporelle des efforts de portance exercés par le fluide sur le pneumatique 1 pour trois ratios $R/\Delta x$. Gauche : efforts de portance totaux. Centre : efforts de portance dans les entailles situées dans l'aire de contact. Droite : efforts de portance exceptés dans cette zone.	134

6.11	Evolution temporelle de la surface de contact entre le pneumatique 1 et la route, pour trois ratios $R/\Delta x$.	135
6.12	Champs solutions obtenus pour le pneumatique 1 à $t = 17.5ms$ en vue de dessus pour $R/\Delta x = 2.11$ (à gauche) et $R/\Delta x = 3.0$ (à droite). Haut : champ de pression. Bas : champ de vitesse transversale.	136
6.13	Evolution temporelle des efforts de portance exercés par le fluide sur le pneumatique 2 pour deux ratios $R/\Delta x$. Gauche : efforts de portance totaux. Centre : efforts de portance dans les entailles de l'aire de contact. Droite : efforts de portance exceptés dans cette zone.	137
6.14	Champs solutions obtenus pour le pneumatique 2 à $t = 24.75ms$ en vue de dessus pour $R/\Delta x = 2.11$ (à gauche) et $R/\Delta x = 3.0$ (à droite). Haut : champ de pression. Bas : champ de vitesse transversale.	137
6.15	Champs solutions obtenus pour le pneumatique 2 à $t = 24.75ms$ en vue de dessus pour $R/\Delta x = 2.11$ (à gauche) et $R/\Delta x = 3.0$ (à droite). Zoom sur une entaille courte dans l'aire de contact. Haut : champ de pression. Bas : champ de vitesse transversale.	138
6.16	Zoom sur l'évolution temporelle de la surface de contact entre le pneumatique 2 et la route, pour deux ratios $R/\Delta x$.	139
6.17	Evolution temporelle des efforts de portance pour le pneumatique 2, pour trois ratios $R/\Delta x$ à partir d'une reprise de calcul. Gauche : efforts de portance totaux. Centre : efforts de portance dans les entailles de l'aire de contact. Droite : efforts de portance exceptés dans cette zone.	140
6.18	Haut : évolution temporelle des efforts de portance pour le pneumatique 2, pour deux valeurs de p_{max} . Gauche : efforts de portance totaux. Centre : efforts de portance dans les entailles de l'aire de contact. Droite : efforts de portance exceptés dans cette zone. Bas : évolution temporelle du p -ratio effectivement atteint dans la simulation.	140
6.19	Champs solutions obtenus pour le pneumatique 3 à $t = 18.75ms$ avec $R/\Delta x = 2.4$ en vue de dessus. Gauche : champ de pression. Droite : champ de vitesse transversale.	141
6.20	Evolution temporelle des efforts de portance exercés par le fluide sur le pneumatique 3 pour deux ratios $R/\Delta x$. Gauche : efforts de portance totaux. Centre : efforts de portance dans les entailles de l'aire de contact. Droite : efforts de portance exceptés dans cette zone.	142
6.21	Zoom sur l'évolution temporelle de la surface de contact entre le pneumatique 3 et la route, pour deux ratios $R/\Delta x$.	142
6.22	Evolution temporelle des efforts de portance exercés par le fluide sur le pneumatique 3 pour deux valeurs de c_0 avec $R/\Delta x = 3$. Gauche : efforts de portance totaux. Centre : efforts de portance dans les entailles de l'aire de contact. Droite : efforts de portance exceptés dans cette zone.	143
6.23	Zoom sur l'évolution temporelle de la surface de contact entre le pneumatique 3 et la route, pour deux valeurs de c_0 avec $R/\Delta x = 3$.	143
6.24	Evolution temporelle des efforts de portance desquels sont soustraits ceux de la zone correspondant aux entailles situées dans l'aire de contact, obtenus avec $R/\Delta x = 3$ pour les trois pneumatiques.	144

Liste des tableaux

2.1	Résumé de différentes caractéristiques des schémas avec PST étudiés dans ce chapitre.	45
3.1	Résumé des différentes vitesses de PST basées sur la loi de Fick.	48
3.2	Résumé des propriétés théoriques de différentes lois de PST basées sur la loi de Fick.	53
3.3	Résumé des propriétés théoriques des lois de PST basées sur la loi de Fick en présence d'une surface libre.	59
4.1	Amerrissage d'urgence d'hélicoptère. Propriétés inertielles de la maquette et localisation du centre de gravité G dans (O_h, X_h, Y_h, Z_h)	89
5.1	Hydrostatique sur une barre déformable en 2D. Paramètres numériques utilisés.	101
5.2	Impact d'un demi-dièdre déformable dans une cuve de fluide en 2D. Paramètres numériques utilisés dans les simulations.	103
5.3	Dam-break à travers une porte déformable. Paramètres numériques.	106
5.4	Dam-break impactant une plaque déformable en 2D. Paramètres numériques utilisés dans les simulations.	110
6.1	Temps de restitution du schéma p -CPS, et condition à partir de laquelle le temps de restitution est inférieur avec le schéma p -CSS, selon que SPH-Flow ou DELI soit bloquant.	120
6.2	Ratio équivalent p_{CSS} à partir duquel le temps de restitution du schéma p -CSS devient plus favorable que pour le schéma p -CPS, en fonction du ratio maximal p_{CPS} permettant de garantir la stabilité du couplage avec le schéma p -CPS et du rapport des temps CPU nécessaires à une itération de chaque solveur, lorsque le coefficient de protection pour le schéma p -CPS est fixé à $\alpha = 0.8$	121

Introduction

Contexte et motivations

Cette thèse s'inscrit dans le projet Fond Unique Interministériel (FUI) HydroSafeTire, dédié à l'étude du phénomène de l'hydroplanage, et dans lequel sont impliqués les partenaires suivants : (i) le Laboratoire de recherche en Hydrodynamique, Energétique et Environnement Atmosphérique (LHEEA) de l'Ecole Centrale de Nantes, (ii) le Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique (LMFA) de l'Ecole Centrale de Lyon, (iii) la Manufacture Française des Pneumatiques Michelin, (iv) Nextflow Software. D'un point de vue industriel, la conception d'un pneumatique doit respecter un certain nombre de critères tels que la performance, le bruit, l'endurance et la sécurité des utilisateurs. En condition normale d'utilisation, la sécurité des utilisateurs est assurée par l'adhérence du pneumatique à la route. Malheureusement, quand la route est mouillée et que la vitesse critique du véhicule (dépendante des sculptures et de l'usure du pneumatique ainsi que de la hauteur d'eau) est atteinte, le fluide fournit un effort vertical trop élevé sur le pneumatique, et le contact entre ce dernier et la route est perdu, en partie ou totalement : c'est le phénomène d'hydroplanage. Un des objectifs du projet est une meilleure compréhension de ce phénomène afin d'aider à terme au design des pneumatiques. Pour ce faire, plusieurs aspects sont étudiés dans ce projet dont l'amélioration des outils de mesures expérimentales et l'amélioration des outils numériques permettant la simulation de ce phénomène.

L'étude par simulations numériques du phénomène d'hydroplanage fait l'objet d'une forte collaboration entre l'Ecole Centrale de Nantes et Michelin depuis 2012. Au cours de cette collaboration, il a été identifié que l'utilisation d'un couplage entre la méthode fluide Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) et la méthode des Eléments Finis (FE) côté structure permettait de tirer profit des avantages de chacune d'entre elles pour résoudre la physique en jeu [37, 38]. En effet, le caractère Lagrangien de la méthode SPH permet intrinsèquement la capture de la surface libre, qui est de topologie particulièrement complexe dans cette application. De plus, l'aspect particulaire de la méthode permet d'éviter les problèmes liés à la compatibilité des maillages à l'interface entre le fluide et la structure, conférant à cette dernière un avantage certain en comparaison des méthodes maillées. Ces deux aspects de la méthode SPH font qu'elle possède la qualité d'être aisément couplée à la méthode FE [29, 30].

Ainsi, une précédente thèse CIFRE ECN/Michelin a été effectuée par Hermange [37], dans le but de montrer la faisabilité du couplage SPH/FE à reproduire numériquement le phénomène de l'hydroplanage. Son travail a permis d'améliorer d'une part le compromis stabilité/précision du couplage par l'étude de la conservation de l'énergie à l'interface, et d'autre part le compromis temps de restitution des simulations/précision par l'emploi de schémas de couplage utilisant des pas de temps adaptés à chacun des solveurs. Fort de ces développements, l'étude du phénomène d'hydroplanage a été effectuée en utilisant le solveur FE Abaqus développé par Simulia. Des effets tels que la hauteur d'eau, la vitesse du véhicule, ou encore l'usure du pneumatique ont été étudiés aussi bien sur route lisse que sur route rugueuse (cf. figure 1), montrant la faisabilité du couplage à reproduire des tendances observées expérimentalement. Néanmoins, des imprécisions relatives au modèle structure utilisé avec Abaqus ont été décelées.

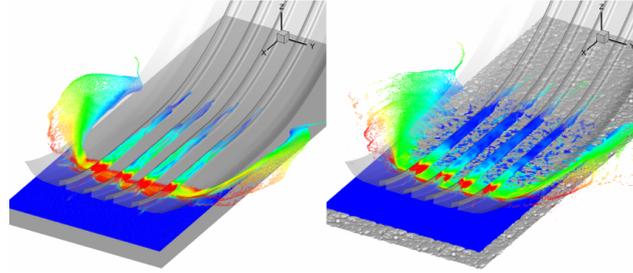


FIGURE 1 – Champs de vitesse obtenus avec route lisse (gauche) et rugueuse (droite) issus de Hermange *et al.* [38].

Il a par conséquent été décidé d'utiliser ici le solveur FE spécifiquement développé pour ses applications par Michelin, en collaboration avec le Groupe Interdisciplinaire de Recherche en Eléments Finis (GIREF). L'objectif d'utiliser ce solveur est double. D'une part tirer profit des avantages relatifs aux modèles structures de ce solveur spécifiquement développé pour le pneumatique, permettant ainsi une modélisation plus précise des différents matériaux composant un pneumatique. D'autre part, après l'étude de faisabilité effectuée par Hermange, de pouvoir à terme utiliser le couplage SPH/FE dans un contexte applicatif côté Michelin pour aider au design des pneumatiques par l'utilisation de simulations numériques, renforçant de fait la collaboration entre L'École Centrale de Nantes et Michelin. La validation du couplage avec ce code spécifique sur des cas tests académiques constitue donc une étape préalable à l'application à l'hydroplanage visée dans cette présente thèse.

A l'issue des travaux de Hermange [37], des questions concernant le modèle utilisé côté fluide restaient en suspens, notamment l'influence de la phase gazeuse et la présence ou non de cavitation. La prise en compte de la phase gazeuse nécessite l'emploi de schémas SPH multi-phases. Concernant la cavitation, un modèle doit être mis en place au sein du schéma SPH. Ces deux aspects ont été traités par Imadeddine Hammani, autre doctorant au sein du laboratoire travaillant spécifiquement sur ces sujets dans un but d'application à l'amerrissage d'urgence d'avion [35]. Les résultats obtenus sont très encourageants, malheureusement, de par la temporalité des différents développements, d'autres aspects étaient en cours d'étude de notre côté, et il paraissait difficilement envisageable d'étudier les écoulements multi-phases pour l'hydroplanage dans le temps imparti. Par conséquent cet aspect n'a pu être traité, et les écoulements considérés dans cette thèse sont mono-phase.

Un autre point soulevé par Hermange [37] est l'amélioration du compromis stabilité du couplage/précision des résultats, notamment par l'amélioration des champs solutions côté fluide, en particulier le champ de pression (l'emploi d'un solveur structure spécifiquement développé pour l'étude de pneumatiques permettant lui, des améliorations côté structure). En effet, la pression du fluide joue un rôle central dans le couplage, puisque les efforts fluides en sont directement dérivés. Ainsi toute amélioration des résultats sur le champ de pression permet d'une part une précision accrue des résultats, et d'autre part un renforcement de la stabilité du couplage. Or, de par son caractère Lagrangien, la méthode SPH engendre des distributions particulières anisotropes, détériorant à terme les champs solutions. Pour pallier ce problème, une technique couramment employée dans la littérature SPH consiste à décaler légèrement les particules de leur trajectoire afin d'obtenir une distribution régulière de particules, permettant ainsi d'améliorer la précision des interpolations SPH et par conséquent les champs solutions. L'utilisation de cette technique menant à différents schémas SPH selon la manière dont elle est prise en compte dans les équations, nous avons été amenés à étudier ces différents schémas [61], permettant ainsi d'accroître notre compréhension de ces derniers. En plus de ce travail sur les schémas, nous nous sommes attelés à améliorer la technique en elle-même. Ainsi, ces deux aspects seront largement traités dans ce manuscrit.

Un autre aspect qui n'était pas soulevé par Hermange mais qui a été identifié durant ce travail concerne le détachement des jets de surface libre. Dans la zone en amont de l'aire de contact entre le pneumatique et la route, de nombreux jets de surface libre se forment permettant ainsi l'évacuation du fluide. Dans un tel cas, en utilisant la méthode SPH sans traitement spécifique, les particules ont tendance à adhérer à la paroi,

empêchant ainsi les jets fluides de se former [87]. D'un autre côté, un traitement pour pallier ce problème doit permettre la prise en compte des effets de succion, et un travail en ce sens a été réalisé durant cette thèse.

Un autre point concernant les simulations numériques en général, et d'autant plus important dans un contexte industriel est la recherche d'un bon compromis précision/temps de restitution. Un travail a été mené en ce sens par Hermange, travail poursuivi ici.

Enfin, durant sa thèse, Hermange a étudié le phénomène d'hydroplanage pour des pneumatiques présentant uniquement des sillons longitudinaux. Ainsi, un autre point soulevé concerne l'application à des géométries impliquant des sillons transverses, point qui sera traité dans cette thèse.

Organisation de la thèse

Dans cette thèse, nous avons donc commencé par effectuer la validation du couplage entre le code structure développé par Michelin (DELI) et le code fluide SPH-Flow, propriété de Nextflow Software et de l'Ecole Centrale de Nantes, co-développé avec le support du Consiglio Nazionale delle Ricerche-Istituto di Ingegneria del Mare (CNR-INM).

Durant cette validation, nous avons observé un comportement non-physique sur un cas test fluide/structure en 3D, concernant le volume occupé par le fluide [61]. Nous avons ensuite simplifié ce cas pour finalement obtenir un cas 2D sans interaction fluide/structure dans lequel le même problème sur le volume est observé. Afin de comprendre ce phénomène, nous avons été amenés à travailler sur différents schémas SPH utilisant du désordre particulaire, faisant l'objet du Chapitre 2. Le Chapitre 1 est quant à lui dédié à la présentation de la méthode SPH, en insistant uniquement sur les points utilisés par la suite.

Lors de cette étude de différents schémas SPH utilisant du désordre particulaire, de possibles améliorations concernant la loi permettant l'introduction de ce désordre en elle-même nous sont apparues. Notamment, les critères devant être respectés par une telle loi ne sont pas clairement discutés dans la littérature. Ainsi, dans le Chapitre 3, après une étude théorique de différentes lois de la littérature, une liste de critères est donnée avec la méthodologie pour les remplir; une nouvelle loi est alors proposée. Une attention particulière est ensuite portée sur les régions de surface libre, de proche paroi, et de point triple fluide/surface libre/paroi solide. La validation de ces différents points est réalisée pour différents schémas SPH. Finalement, une seconde étape de validation est effectuée en utilisant une méthode surfacique de traitement des frontières, méthode indispensable pour l'application à l'hydroplanage visée dans cette thèse.

Toujours lors de l'étape de validation du couplage, en se plaçant dans les mêmes conditions que les simulations d'hydroplanage, un cas est apparu problématique. Une solution permettant de régler ce problème est proposée dans le Chapitre 4. Cette solution consiste en l'utilisation d'un traitement permettant le décollement de jets fluides de parois solides, et compatible avec la prise en compte des effets de succion.

Afin d'éviter les allers-retours dans le manuscrit entre la méthode SPH et le couplage fluide/structure, et ainsi en simplifier la lecture, la validation du couplage entre SPH-Flow et DELI – bien qu'étant le premier sujet traité dans cette thèse – n'est présentée qu'au Chapitre 5, une fois tous les développements introduits.

Dans le Chapitre 6, les tentatives d'amélioration du compromis temps de restitution/précision par l'utilisation de schémas de couplage à pas de temps différés sont présentées. Finalement, un cas d'application à l'hydroplanage impliquant des sillons transverses est étudié.

Chapitre 1

Méthode SPH

Le but de ce chapitre est d'introduire la méthode Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH). Cette méthode a été développée pour la première fois en 1977 par Lucy [54] et Gingold & Monaghan [32] pour l'astrophysique. En 1994, elle a été adaptée pour la première fois aux écoulements à surface libre par Monaghan [66]. Depuis, de nombreuses avancées ont été apportées, tant au niveau de la stabilité numérique (adaptation des solveurs de Riemann à la méthode SPH [75, 101], δ -SPH [3, 57]), qu'au niveau du champ d'application de la méthode (prise en compte de parois complexes [28, 44, 55], écoulements multiphasiques [21, 41], couplage avec d'autres méthodes fluide par exemple les Volumes Finis [15, 59], couplage avec la méthode des Eléments Finis pour les problèmes d'interactions fluide/structure [30, 70, 106], etc.), avancées permettant à la méthode d'être dorénavant utilisée pour des applications industrielles [84]. Les écoulements visés dans cette thèse étant des écoulements incompressibles à surface libre, deux choix peuvent être faits : (i) résoudre les équations de Navier-Stokes sous leur forme incompressible, (ii) résoudre la formulation compressible de ces équations et adopter une approche faiblement compressible. Au sein du laboratoire, la deuxième approche a fait l'objet de plusieurs thèses menant à une fine compréhension de la méthode, et au développement d'outils nécessaires aux applications visées au cours de cette thèse. Dans ce chapitre, une attention particulière est portée à la résolution des équations de Navier-Stokes (compressibles), ainsi qu'aux différents outils tels que le raffinement particulier et le traitement des conditions aux limites.

1.1 Formalisme ALE des équations de Navier-Stokes

Dans cette section, les équations de Navier-Stokes en formalisme Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) sont introduites en premier lieu sous leur forme continue. Ensuite, en discrétisant le domaine en un nombre fini de volumes de contrôle, on obtient la forme semi-discrète des équations, i.e. sans discrétisation des opérateurs différentiels.

1.1.1 Formalisme ALE des équations de Navier-Stokes au continu

1.1.1.1 Théorème de transport appliqué à un volume de contrôle arbitraire

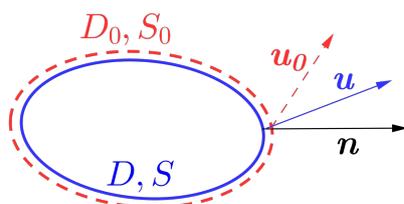


FIGURE 1.1 – Volumes de contrôle arbitraire D_0 et matériel D ayant respectivement une vitesse locale arbitraire u_0 et matérielle u .

Soit un volume de contrôle arbitraire $D_0(t)$ (de surface $S_0(t)$) coïncidant à un instant t avec un volume matériel $D(t)$ (de surface $S(t)$). \mathbf{u}_0 désigne la vitesse (arbitraire) locale de la surface de contrôle $S_0(t)$, tandis que \mathbf{u} correspond à la vitesse locale matérielle. Soit une fonction $\phi \in \mathcal{C}^1$ qui peut être à valeur scalaire ou vectorielle (notée $\boldsymbol{\phi}$ dans ce cas). En utilisant le théorème de transport, il vient d'une part pour $D_0(t)$:

$$\frac{d}{dt} \int_{D_0} \phi dV = \int_{D_0} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{S_0} \phi \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} dS, \quad (1.1)$$

et d'autre part pour $D(t)$:

$$\frac{d}{dt} \int_D \phi dV = \int_D \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_S \phi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (1.2)$$

où \mathbf{n} est le vecteur unitaire pointant vers l'extérieur du volume de contrôle (voir figure 1.1). Par conséquent, en soustrayant (1.2) à (1.1), puis en appliquant le théorème de la divergence au terme surfacique apparaissant dans chacune des équations, il vient puisque D et D_0 sont confondus à l'instant t :

— si ϕ est une fonction scalaire :

$$\frac{d}{dt} \int_{D_0} \phi dV = \frac{d}{dt} \int_D \phi dV + \int_{D_0} \nabla \cdot [\phi (\mathbf{u}_0 - \mathbf{u})] dV, \quad (1.3)$$

— si $\boldsymbol{\phi}$ est une fonction vectorielle :

$$\frac{d}{dt} \int_{D_0} \boldsymbol{\phi} dV = \frac{d}{dt} \int_D \boldsymbol{\phi} dV + \int_{D_0} \nabla \cdot [\boldsymbol{\phi} \otimes (\mathbf{u}_0 - \mathbf{u})] dV. \quad (1.4)$$

1.1.1.2 Vitesse locale

En tout point x de l'enveloppe S_0 du domaine D_0 nous avons :

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{u}_0. \quad (1.5)$$

1.1.1.3 Equation d'évolution du volume

En utilisant l'Eq. (1.1) avec $\phi \equiv 1$, il vient :

$$\frac{d}{dt} \int_{D_0} 1 dV = \underbrace{\int_{D_0} \frac{\partial 1}{\partial t} dV}_{=0} + \underbrace{\int_{S_0} 1 (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}) dS}_{= \int_{D_0} \nabla \cdot \mathbf{u}_0 dV}, \quad (1.6)$$

et finalement on obtient l'équation d'évolution du volume suivante :

$$\frac{d}{dt} \int_{D_0} dV = \int_{D_0} \nabla \cdot \mathbf{u}_0 dV. \quad (1.7)$$

1.1.1.4 Conservation de la masse

La masse m contenue dans un volume D peut s'exprimer de la manière suivante, où ρ est la masse volumique :

$$m = \int_D \rho dV ,$$

Or, un volume de contrôle matériel conserve sa masse et on obtient ainsi :

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho dV = 0 . \quad (1.8)$$

Par conséquent, en substituant $\phi \equiv \rho$ dans l'équation (1.3) et en utilisant l'équation (1.8), on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_{D_0} \rho dV = \frac{d}{dt} \int_D \rho dV + \int_{D_0} \nabla \cdot [\rho (\mathbf{u}_0 - \mathbf{u})] dV . \quad (1.9)$$

1.1.1.5 Conservation de la quantité de mouvement

L'équation de quantité de mouvement est obtenue en utilisant le principe fondamental de la dynamique. En supposant que la seule force volumique est la gravité \mathbf{g} , ce dernier peut se traduire comme suit pour le cas d'un volume matériel :

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho \mathbf{u} dV = \int_D \rho \mathbf{g} dV + \int_S \bar{\bar{\Sigma}} \cdot \mathbf{n} dS , \quad (1.10)$$

où $\bar{\bar{\Sigma}}$ représente le tenseur des contraintes. En substituant ϕ par $\rho \mathbf{u}$ dans l'Eq. (1.4) et en utilisant l'Eq. (1.10), il vient puisque D_0 et D sont confondus à l'instant t :

$$\frac{d}{dt} \int_{D_0} \rho \mathbf{u} dV = \int_{D_0} \rho \mathbf{g} dV + \int_{S_0} \bar{\bar{\Sigma}} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{D_0} \nabla \cdot [\rho \mathbf{u} \otimes (\mathbf{u}_0 - \mathbf{u})] dV . \quad (1.11)$$

Le tenseur des contraintes $\bar{\bar{\Sigma}}$ est défini comme $\bar{\bar{\Sigma}} = (-P\bar{\bar{\mathbb{I}}} + \bar{\bar{\tau}})$, P étant la pression et $\bar{\bar{\tau}}$ le tenseur des contraintes visqueuses. En utilisant le théorème de la divergence sur le terme surfacique de l'Eq (1.11), on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_{D_0} \rho \mathbf{u} dV = \int_{D_0} \rho \mathbf{g} dV + \int_{D_0} [\nabla \cdot (-P\bar{\bar{\mathbb{I}}}) + \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}] dV + \int_{D_0} \nabla \cdot [\rho \mathbf{u} \otimes (\mathbf{u}_0 - \mathbf{u})] dV , \quad (1.12)$$

où pour un fluide Newtonien :

$$\bar{\bar{\tau}} = -\frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{u} \bar{\bar{\mathbb{I}}} + 2\mu \bar{\bar{\mathbb{D}}} , \quad (1.13)$$

avec μ la viscosité dynamique et $\bar{\bar{\mathbb{D}}}$ le tenseur des taux de déformation. Sous les hypothèses de viscosité constante et de quasi-incompressibilité du fluide ($\nabla \cdot \mathbf{u} \approx 0$), le terme visqueux s'exprime sous la forme $\nabla \cdot \bar{\bar{\tau}} = \mu \Delta \mathbf{u}$, et ainsi l'équation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{D_0} \rho \mathbf{u} dV = \int_{D_0} \rho \mathbf{g} dV + \int_{D_0} [\nabla \cdot (-P\bar{\bar{\mathbb{I}}}) + \mu \Delta \mathbf{u}] dV + \int_{D_0} \nabla \cdot [\rho \mathbf{u} \otimes (\mathbf{u}_0 - \mathbf{u})] dV . \quad (1.14)$$

1.1.1.6 Equation d'état

Afin de clore thermodynamiquement le système d'équations, l'équation d'état de Cole suivante est utilisée :

$$P - P_0 = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right], \quad (1.15)$$

où ρ_0 , c_0 , P_0 et γ sont respectivement la masse volumique nominale, la vitesse du son nominale, la pression de référence et la constante polytropique du fluide. Cette équation d'état relie uniquement la pression et la masse volumique, c'est-à-dire sans prendre en compte l'énergie interne. En faisant cela, l'équation d'énergie est découplée des autres équations de Navier-Stokes et il n'est ainsi pas nécessaire de la résoudre en pratique.

Les écoulements étudiés dans ce travail sont considérés isentropiques et la vitesse du son s'écrit :

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{S=cste}} = c_0 \sqrt{\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1}}, \text{ où } S \text{ est l'entropie.} \quad (1.16)$$

1.1.2 Formalisme ALE des équations de Navier-Stokes au niveau semi-discret

Les équations de Navier-Stokes ont été présentées dans le paragraphe précédent au continu et en considérant un volume de contrôle arbitraire. Supposons maintenant le domaine fluide Ω discrétisé en éléments de volume $V_i : i = 1, \dots, N$ appelés par la suite particules. Une quantité f_i dans le volume V_i est alors définie comme la moyenne de cette quantité dans le volume, soit :

$$f_i = \frac{1}{V_i} \int f(\mathbf{x}) dV. \quad (1.17)$$

Ainsi, en supposant à l'instar de ce qui a été fait précédemment au continu, que les volumes de contrôle matériel et arbitraire sont confondus à l'instant t , les équations (1.5), (1.7) (1.9), et (1.14) semi-discrétisées s'écrivent :

$$\frac{dx_i}{dt} = \mathbf{u}_{0i}, \quad (1.18)$$

$$\frac{dV_i}{dt} = V_i \nabla \cdot (\mathbf{u}_{0i}), \quad (1.19)$$

$$\frac{d(V_i \rho_i)}{dt} = -V_i \nabla \cdot [\rho_i (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{0i})], \quad (1.20)$$

$$\frac{d(V_i \rho_i \mathbf{u}_i)}{dt} = V_i \rho_i \mathbf{g} - V_i \nabla \cdot (P_i \bar{\mathbb{I}}) + V_i \mu \Delta(\mathbf{u}_i) - V_i \nabla \cdot [\rho_i \mathbf{u}_i \otimes (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{0i})]. \quad (1.21)$$

Le système est ensuite fermé en utilisant la loi d'état définie par l'équation (1.15), et l'indice i réfère à la particule i . Ce système d'équations peut être écrit de manière équivalente avec un autre jeu de variables. En effet, en utilisant l'égalité :

$$\frac{d(\rho_i)}{dt} = \frac{1}{V_i} \left[\frac{d(V_i \rho_i)}{dt} - \rho_i \frac{d(V_i)}{dt} \right], \quad (1.22)$$

on obtient la forme semi-discrétisée suivante :

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{u}_{0i} , \quad (1.23)$$

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\nabla \cdot [\rho_i(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{0i})] - \rho_i \nabla \cdot (\mathbf{u}_{0i}) , \quad (1.24)$$

$$\frac{d(V_i \rho_i)}{dt} = -V_i \nabla \cdot [\rho_i(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{0i})] , \quad (1.25)$$

$$\frac{d(V_i \rho_i \mathbf{u}_i)}{dt} = V_i \rho_i \mathbf{g} - V_i \nabla \cdot (P_i \bar{\mathbb{I}}) + V_i \mu \Delta(\mathbf{u}_i) - V_i \nabla \cdot [\rho_i \mathbf{u}_i \otimes (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{0i})] . \quad (1.26)$$

Ces deux formes étant équivalentes, à ce stade une seule aurait été suffisante. Néanmoins, dans le Chapitre 2 nous aurons besoin de ces deux formes pour construire des formulations SPH hybrides, raison pour laquelle nous avons préféré les introduire toutes deux ici.

1.2 Définition des différents opérateurs SPH

Les équations de Navier-Stokes ont été introduites au niveau semi-discret dans le paragraphe précédent. L'objet de cette nouvelle section est de définir les opérateurs SPH et en particulier les opérateurs différentiels gradient et divergence au niveau discret, permettant la construction de schémas SPH. Pour ce faire, les interpolations sont présentées d'abord au niveau continu, puis leur forme discrète est dérivée.

1.2.1 Interpolation SPH au niveau continu

1.2.1.1 Définition du noyau

Dans une interpolation SPH, l'estimation d'une quantité ϕ en un point \mathbf{x} est effectuée à partir des valeurs de ϕ dans le voisinage \mathcal{D} de \mathbf{x} . Une manière exacte de procéder est d'utiliser le produit de convolution avec la fonction δ de Dirac. Cela se traduit mathématiquement par :

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{D}} \phi(\mathbf{y}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} . \quad (1.27)$$

L'idée première de la méthode SPH telle qu'introduite par Gingold & Monaghan [32] et Lucy [54] fut d'utiliser une fonction W régulière (au moins C^1) à support compact, convergeant vers la fonction δ de Dirac lorsque son support tend vers 0. Cette fonction, appelée noyau, doit respecter la condition :

$$\int_{\mathcal{D}} W(\mathbf{x} - \mathbf{y}, R) d\mathbf{y} = 1 , \quad (1.28)$$

où R est le rayon du support du noyau. Un large panel de fonctions respectant ces conditions peut alors être utilisé et Dehnen *et al.* [24] ont conduit une analyse de Fourier des différents noyaux utilisés couramment dans la communauté SPH. A la lumière de ces travaux, le noyau C^2 de Wendland [104] semble un bon compromis coût / précision / stabilité. Il possède la propriété d'être symétrique et s'écrit :

$$W(\mathbf{r}, R) = \beta \begin{cases} \frac{1}{2}(1-q)^4(1+4q) & \text{si } 0 \leq q \leq 1 , \\ 0 & \text{si } q > 1 \end{cases} , \quad (1.29)$$

où $q = \frac{\|\mathbf{r}\|}{R}$ avec $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, β étant la constante de renormalisation permettant de satisfaire la condition (1.28)

au niveau continu. Explicitement $\beta = \frac{14}{\pi R^2}$ en 2D et $\beta = \frac{21}{\pi R^3}$ en 3D. Ce noyau sera utilisé invariablement tout au long de cette thèse, la longueur de lissage h ("smoothing length") et le rayon R seront donc liés par la relation : $R \approx 1.897h$ en 2D et $R \approx 1.936h$ en 3D [24].

1.2.1.2 Interpolation d'une fonction au continu

L'interpolation SPH d'une quantité scalaire ϕ au point x s'effectue alors au niveau continu de la manière suivante :

$$\langle \phi(x) \rangle = \int_{\mathcal{D}} \phi(\mathbf{y}) W(x - \mathbf{y}, R) d\mathbf{y}, \quad (1.30)$$

ce qui correspond à l'équation (1.27) dans laquelle la fonction de Dirac est remplacée par le noyau W . Cette approximation est alors en $\mathcal{O}(R^2)$.

1.2.1.3 Interpolation des opérateurs différentiels au continu

De manière équivalente à l'équation (1.30), le gradient d'une quantité $\nabla\phi$ s'exprime de la manière suivante :

$$\langle \nabla\phi(x) \rangle = \int_{\mathcal{D}} \nabla_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{y}) W(x - \mathbf{y}, R) d\mathbf{y}, \quad (1.31)$$

et en utilisant une intégration par partie il vient :

$$\langle \nabla\phi(x) \rangle = \int_{\partial\mathcal{D}} \phi(s) W(x - s, R) \mathbf{n}_s ds - \int_{\mathcal{D}} \phi(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} W(x - \mathbf{y}, R) d\mathbf{y}. \quad (1.32)$$

La propriété de compacité du support du noyau implique, lorsque celui-ci n'est pas tronqué :

$W(x - s, R) = 0 \quad \forall s \in \partial\mathcal{D}$ et par conséquent le terme surfacique de l'équation (1.32) s'annule. De plus la symétrie du noyau nous donne $\nabla_{\mathbf{y}} W(x - \mathbf{y}, R) = -\nabla_{\mathbf{x}} W(x - \mathbf{y}, R)$ et par conséquent l'équation (1.32) devient :

$$\langle \nabla\phi(x) \rangle = \int_{\mathcal{D}} \phi(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} W(x - \mathbf{y}, R) d\mathbf{y}. \quad (1.33)$$

Cette approximation est également $\mathcal{O}(R^2)$.

1.2.2 Interpolation SPH au niveau discret

Supposons, à l'instar de la section 1.1.2, le domaine discrétisé en particules de volume V_i . On peut alors définir les opérateurs SPH au niveau discret, formant l'objet de cette section.

1.2.2.1 Interpolation d'une fonction au niveau discret

En utilisant une formule de quadrature appliquée à l'équation (1.30), l'interpolation SPH d'une quantité ϕ au point x_i s'écrit :

$$\langle \phi_i \rangle = \sum_{j \in \mathcal{D}_i} \phi_j W_{ij} V_j, \quad (1.34)$$

où \mathcal{D}_i représente le support du noyau associée à la particule i et où les notations $\langle \phi_i \rangle = \langle \phi(x_i) \rangle$, $\phi_j = \phi(x_j)$ et $W_{ij} = W(x_i - x_j, R)$ ont été utilisées pour plus de lisibilité. Alors que l'approximation est exacte à l'ordre 2 au continu, au niveau discret cette propriété n'est plus vérifiée en général, en particulier lorsque les particules ne sont pas distribuées de façon cartésienne [79]. A l'inverse des méthodes "classiques" pour lesquelles la convergence est obtenue à l'aide d'un seul paramètre spatial (Δx), deux conditions sont nécessaires en SPH [81]. La première condition :

$$\Delta x \rightarrow 0, \quad (1.35)$$

correspond à la condition de convergence des méthodes "classiques", tandis que la seconde :

$$\frac{\Delta x}{R} \rightarrow 0, \quad (1.36)$$

réfère au nombre de voisins dans le support du noyau. Cette dernière impliquant un nombre infini de voisins, il est impossible de la respecter en pratique, et les simulations sont effectuées avec un ratio $R/\Delta x$ constant.

1.2.2.2 Approximation des opérateurs différentiels au niveau discret

L'approximation des opérateurs différentiels s'effectue quant à elle en se basant sur l'équation (1.33). Lorsque ϕ est une quantité scalaire, l'opérateur gradient s'exprime au niveau discret à l'aide de l'équation suivante :

$$\langle \nabla \phi_i \rangle = \sum_{j \in \mathcal{D}_i} \phi_j \nabla_i W_{ij} V_j, \quad (1.37)$$

où la notation $\nabla_i W_{ij} = \nabla_{x_i} W(x_i - x_j)$ est utilisée par souci de lisibilité. Lorsque ϕ est une quantité vectorielle, on peut définir sa divergence en utilisant :

$$\langle \nabla \cdot \phi_i \rangle = \sum_{j \in \mathcal{D}_i} \phi_j \cdot \nabla_i W_{ij} V_j, \quad (1.38)$$

tandis que pour une matrice $\bar{\bar{\phi}}$ l'opérateur divergence devient :

$$\langle \nabla \cdot \bar{\bar{\phi}}_i \rangle = \sum_{j \in \mathcal{D}_i} \bar{\bar{\phi}}_j \nabla_i W_{ij} V_j. \quad (1.39)$$

1.2.3 Ré-arrangement et correction des opérateurs

Dans la section 1.2.2, les interpolations SPH ont été introduites. Utiliser ces opérateurs tels quels dans les équations de Navier-Stokes entraîne inévitablement des problèmes de consistance et de conservation [17]. Le but de cette section est donc d'introduire des modifications des opérateurs SPH permettant de pallier ces problèmes. Au passage, des corrections classiques appliquées aux opérateurs sont rappelées, à savoir la correction Shepard [85] et la méthode de renormalisation de Randles & Libersky [80].

1.2.3.1 Correction Shepard

Afin d'approcher de manière exacte une quantité constante, Shepard [85] propose de corriger l'approximation (1.34) en introduisant un facteur de renormalisation γ_i :

$$\langle \phi_i \rangle = \frac{1}{\gamma_i} \sum_{j \in \mathcal{D}_i} \phi_j W_{ij} V_j, \quad (1.40)$$

avec γ_i défini par :

$$\gamma_i = \sum_{j \in \mathcal{D}_i} W_{ij} V_j. \quad (1.41)$$

Dans cette thèse, cette correction est par exemple utilisée pour augmenter la précision des "capteurs numériques" de pression et de vitesse utilisés dans les simulations. Cette correction s'avère aussi nécessaire dès lors que le support du noyau est tronqué, notamment au voisinage d'une paroi comme détaillé plus loin dans ce manuscrit.

1.2.3.2 Opérateur moins

Excepté pour une distribution cartésienne des particules, les opérateurs (1.37)-(1.39) ne sont pas consistants à l'ordre 0, i.e. ils ne permettent pas l'approximation du gradient/divergence d'une fonction constante de manière exacte. Or, au niveau continu, l'égalité $\nabla\phi = \nabla\phi - \phi\nabla 1$ est vérifiée, où l'opérateur ∇ représente ici indifféremment un gradient ou une divergence. Cette égalité conduit en particulier à la définition de l'opérateur divergence consistant à l'ordre 0 suivant :

$$\langle \nabla \cdot \phi_i \rangle^- = \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\phi_j - \phi_i) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j, \quad (1.42)$$

que l'on appliquera par la suite à l'équation d'évolution du volume (1.19).

1.2.3.3 Méthode de renormalisation

Comme évoqué ci-dessus l'opérateur (1.42) est consistant à l'ordre 0 et Randles & Libersky [80] proposent d'augmenter l'ordre de consistance en construisant les opérateurs :

$$\langle \nabla \cdot \phi_i \rangle_{RL}^- = \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\phi_j - \phi_i) \cdot \overline{\overline{\mathbb{L}}}_i \nabla_i W_{ij} V_j, \quad (1.43)$$

$$\langle \nabla \phi_i \rangle_{RL}^- = \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\phi_j - \phi_i) \overline{\overline{\mathbb{L}}}_i \nabla_i W_{ij} V_j, \quad (1.44)$$

$$\langle \overline{\overline{\nabla}} \phi_i \rangle_{RL}^- = \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\phi_j - \phi_i) \otimes \overline{\overline{\mathbb{L}}}_i \nabla_i W_{ij} V_j, \quad (1.45)$$

où la matrice de renormalisation est définie de la manière suivante :

$$\overline{\overline{\mathbb{L}}}_i := \left[\sum_{j \in \mathcal{D}_i} (x_j - x_i) \otimes \nabla_i W_{ij} V_j \right]^{-1}. \quad (1.46)$$

Les opérateurs renormalisés (1.43)-(1.45) sont utilisés dans le calcul des termes diffusifs des schémas SPH (cf. section 1.3.3). La matrice de renormalisation (1.46) est quant à elle l'un des points clés des développements introduits dans les chapitres 3 et 4. En effet, sa valeur propre minimale permet de déterminer si une particule est de manière certaine dans le fluide ou à la surface libre, tandis que la matrice permet de corriger les vecteurs normaux à la surface libre.

1.2.3.4 Opérateur plus

Les équations (1.20) et (1.21) traduisent respectivement la conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Une manière triviale de respecter cette conservation dans un formalisme SPH est d'assurer la réciprocité des échanges pour chaque interaction $i - j$. Cela se fait via l'introduction des opérateurs (1.47) et (1.48) qui seront appliqués respectivement aux équations (1.20) et (1.21).

$$\langle \nabla \cdot \phi_i \rangle^+ = \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\phi_j + \phi_i) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j, \quad (1.47)$$

$$\langle \nabla \cdot \overline{\overline{\phi}}_i \rangle^+ = \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\overline{\overline{\phi}}_i + \overline{\overline{\phi}}_j) \nabla_i W_{ij} V_j. \quad (1.48)$$

Ces opérateurs ne sont pas consistants à l'ordre 0 mais possèdent la propriété d'être conservatifs et, comme évoqué dans la section 1.3.2, cette propriété est primordiale afin d'assurer la consistance d'un schéma SPH.

1.2.4 Opérateur Laplacien en SPH

Bien que l'étude de la viscosité ne soit pas un sujet central de cette thèse, elle sera évoquée pour un des cas tests de validation du couplage fluide / structure (voir chapitre 5), et il est ainsi nécessaire d'introduire les opérateurs permettant le calcul des termes visqueux. Or ces derniers sont exprimés sous forme d'un Laplacien dans les équations de Navier-Stokes. Aussi, les opérateurs Laplacien les plus communément utilisés en SPH sont rappelés ici.

1.2.4.1 Opérateur Laplacien de Watkins *et al.*

Dans le formalisme SPH, l'opérateur Laplacien d'une quantité vectorielle $\boldsymbol{\phi}$ est définie par :

$$\Delta(\boldsymbol{\phi}) = \nabla \cdot \left[\overline{\nabla}(\boldsymbol{\phi}) \right]. \quad (1.49)$$

Watkins *et al.* [103] proposent d'utiliser la formule (1.49) pour déterminer un opérateur Laplacien. Pour ce faire, les opérateurs divergence $\nabla \cdot$ et gradient $\overline{\nabla}$ sont exprimés respectivement sous la forme :

$$\langle \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{\phi}}_i \rangle^- = \sum_{j \in \mathcal{D}_i} \left(\overline{\boldsymbol{\phi}}_j - \overline{\boldsymbol{\phi}}_i \right) \nabla_i W_{ij} V_j, \quad (1.50)$$

$$\langle \overline{\nabla} \boldsymbol{\phi}_i \rangle^- = \sum_{j \in \mathcal{D}_i} \left(\boldsymbol{\phi}_j - \boldsymbol{\phi}_i \right) \otimes \nabla_i W_{ij} V_j. \quad (1.51)$$

Finalement, l'opérateur Laplacien de Watkins *et al.* s'écrit :

$$\langle \Delta \boldsymbol{\phi}_i \rangle_{WEA} = \sum_{j \in \mathcal{D}_i} V_j \left[\sum_{k \in \mathcal{D}_j} V_k (\boldsymbol{\phi}_k - \boldsymbol{\phi}_j) \otimes \nabla_j W_{jk} - \sum_{k \in \mathcal{D}_i} V_k (\boldsymbol{\phi}_k - \boldsymbol{\phi}_i) \otimes \nabla_i W_{ik} \right] \nabla_i W_{ij}. \quad (1.52)$$

Ainsi, deux boucles d'interactions imbriquées sont nécessaires au calcul de ce Laplacien ce qui est coûteux en matière d'implémentation et de temps de calcul tout en doublant la taille du domaine d'interpolation [7]. Pour ces raisons, les formulations de Morris *et al.* [69] et de Monaghan & Gingold [68] sont souvent préférées en SPH.

1.2.4.2 Opérateur Laplacien de Morris *et al.*

Morris *et al.* [69] proposent la formule suivante :

$$\langle \Delta \boldsymbol{\phi}_i \rangle_{MEA} = 2 \sum_{j \in \mathcal{D}_i} V_j (\boldsymbol{\phi}_j - \boldsymbol{\phi}_i) \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|^2} \cdot \nabla_i W_{ij}. \quad (1.53)$$

Cet opérateur est très utilisé en SPH pour les écoulements visqueux sans surface libre. Par ailleurs, une adaptation de cet opérateur est proposée dans [14] dans le cadre d'écoulements impliquant des parois discrétisées suivant la méthode surfacique détaillée dans la section 1.4.2.2. En revanche, il a été démontré que cet opérateur est inconsistant en présence d'une surface libre [19].

1.2.4.3 Opérateur Laplacien de Monaghan & Gingold

Monaghan & Gingold [68] proposent une autre formulation de l'opérateur Laplacien qui conserve la quantité de mouvement et le moment angulaire :

$$\langle \Delta \boldsymbol{\phi}_i \rangle_{M\&G} := 2(D+2) \sum_{j \in \mathcal{D}_i} V_j \frac{(\boldsymbol{\phi}_j - \boldsymbol{\phi}_i) \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|^2} \nabla_i W_{ij}, \quad (1.54)$$

où D est la dimension spatiale du problème considéré. Cet opérateur présente l'avantage d'être consistant en présence d'une surface libre. Cependant, à notre connaissance, cet opérateur n'a pas encore été adapté à la présence de parois discrétisées suivant la méthode surfacique détaillée dans la section 1.4.2.2. Ainsi, dans ce manuscrit, les écoulements visqueux en présence d'une surface libre seront simulés en utilisant l'opérateur de Monaghan & Gingold, et la méthode volumique dite des "particules fantômes" sera utilisée pour les parois (voir section 1.4.2.1).

1.3 Formulation SPH au niveau discret

Les équations de Navier-Stokes et les opérateurs SPH ayant été introduits, nous possédons les outils nécessaires pour la construction des différents schémas SPH. Cette section est dédiée à la présentation de ces schémas, pour lesquels la partie relative à la viscosité est volontairement omise pour plus de lisibilité.

1.3.1 Formulation ALE

En utilisant les opérateurs (1.42), (1.47) et (1.48) pour discrétiser les opérateurs différentiels intervenant respectivement dans les équations (1.19), (1.20) et (1.21), on obtient la forme générique d'un schéma ALE des équations d'Euler. Ce schéma, introduit par Vila [101] et ensuite étudié notamment par Oger et al. [73] s'écrit :

$$\frac{dx_i}{dt} = \mathbf{u}_{0i} , \quad (1.55)$$

$$\frac{dV_i}{dt} = V_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\mathbf{u}_{0j} - \mathbf{u}_{0i}) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j , \quad (1.56)$$

$$\frac{d(V_i \rho_i)}{dt} = -V_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} [\rho_i (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{0i}) + \rho_j (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_{0j})] \cdot \nabla_i W_{ij} V_j , \quad (1.57)$$

$$\frac{d(V_i \rho_i \mathbf{u}_i)}{dt} = -V_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} \left[P_i \bar{\mathbb{I}} + P_j \bar{\mathbb{I}} + \rho_i \mathbf{u}_i \otimes (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{0i}) + \rho_j \mathbf{u}_j \otimes (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_{0j}) \right] \nabla_i W_{ij} V_j + V_i \rho_i \mathbf{g} . \quad (1.58)$$

Ce schéma, écrit en utilisant les variables $(V_i, V_i \rho_i, V_i \rho_i \mathbf{u}_i)$ peut être réécrit de manière équivalente en utilisant les variables $(\rho_i, V_i \rho_i, V_i \rho_i \mathbf{u}_i)$ comme proposé par Colagrossi *et al.* [18] de la manière suivante :

$$\frac{dx_i}{dt} = \mathbf{u}_{0i} , \quad (1.59)$$

$$\frac{d\rho_i}{dt} = - \sum_{j \in \mathcal{D}_i} [\rho_i (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{0i}) + \rho_j (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_{0j})] \cdot \nabla_i W_{ij} V_j - \rho_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\mathbf{u}_{0j} - \mathbf{u}_{0i}) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j , \quad (1.60)$$

$$\frac{d(V_i \rho_i)}{dt} = -V_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} [\rho_i (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{0i}) + \rho_j (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_{0j})] \cdot \nabla_i W_{ij} V_j , \quad (1.61)$$

$$\frac{d(V_i \rho_i \mathbf{u}_i)}{dt} = -V_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} \left[P_i \bar{\mathbb{I}} + P_j \bar{\mathbb{I}} + \rho_i \mathbf{u}_i \otimes (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{0i}) + \rho_j \mathbf{u}_j \otimes (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_{0j}) \right] \nabla_i W_{ij} V_j + V_i \rho_i \mathbf{g} . \quad (1.62)$$

1.3.2 Formulation Lagrangienne

Le schéma SPH Lagrangien standard, obtenu en considérant $\mathbf{u}_{0i} = \mathbf{u}_i$ et $\mathbf{u}_{0j} = \mathbf{u}_j$ s'écrit alors :

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{u}_i, \quad (1.63)$$

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\rho_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j, \quad (1.64)$$

$$\frac{d(V_i \rho_i)}{dt} = 0, \quad (1.65)$$

$$\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = -\frac{1}{\rho_i} \sum_{j \in \mathcal{D}_i} [P_i + P_j] \nabla_i W_{ij} V_j + \mathbf{g}, \quad (1.66)$$

dans lequel l'équation de quantité de mouvement (1.66) est obtenue en considérant l'égalité suivante :

$$\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = \frac{1}{V_i \rho_i} \left[\frac{d(V_i \rho_i \mathbf{u}_i)}{dt} - \mathbf{u}_i \frac{d(V_i \rho_i)}{dt} \right]. \quad (1.67)$$

Dans ce schéma, on reconnaît l'opérateur consistant à l'ordre 0 (1.42) pour la discrétisation de l'équation de continuité (1.64) et l'opérateur conservatif (1.48) pour la discrétisation de l'équation de quantité de mouvement (1.66). La justification du choix de tels opérateurs est liée à la cohérence des opérateurs entre eux (au sens de la conservation énergétique du système) et à la consistance du schéma SPH. Cet aspect est étudié notamment par Bonet & Lok [10] et Vila [101] qui ont utilisé des approches différentes pour l'étude de ce sujet, et rejoint la dérivation originale du schéma par Gingold & Monaghan [32] à partir d'un Lagrangien. A notre connaissance, la démonstration relative à la cohérence des opérateurs n'a pas été généralisée au schéma ALE. Par ailleurs, le théorème de Lax affirmant que pour un schéma numérique consistant, la stabilité du schéma est une condition nécessaire et suffisante pour garantir sa convergence, il ne reste plus qu'à traiter le problème de la stabilité, faisant l'objet de la section suivante.

1.3.3 Techniques de stabilisation

Comme précisé dans la section 1.6, l'intégration temporelle est explicite en temps. Or les schémas introduits jusqu'à présent sont centrés en espace et sont par conséquent inconditionnellement instables [101]. Aussi, il est nécessaire de stabiliser les schémas, et cette nouvelle section est dédiée à la présentation des techniques les plus couramment utilisées dans la communauté SPH.

1.3.3.1 Viscosité artificielle

Dans [65], Monaghan propose de stabiliser le schéma (1.63)-(1.66) en ajoutant un terme diffusif Π_{ij} dans l'équation de quantité de mouvement (1.66). Ce terme, basé sur la viscosité artificielle introduite par Von Neumann & Richtmyer [102] s'écrit :

$$\pi_{ij}^{Mon} = -\alpha_{AV} \rho_i \rho_j \frac{R_{ij} c_{ij}}{\rho_{ij}} \mu_{ij} \quad \text{avec} \quad \mu_{ij} = \begin{cases} \frac{(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|^2 + \epsilon R_{ij}^2} & \text{si } (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) < 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (1.68)$$

où :

— α_{AV} est un coefficient dépendant de l'écoulement considéré, typiquement $\alpha_{AV} \in [0.01, 1]$,

— $R_{ij} = \frac{R_i + R_j}{2}$, $c_{ij} = \frac{c_i + c_j}{2}$, $\rho_{ij} = \frac{\rho_i + \rho_j}{2}$,

— ϵ est un paramètre introduit pour éviter la division par zéro.

Le schéma s'écrit alors :

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{u}_i \quad , \quad (1.69)$$

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\rho_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j \quad , \quad (1.70)$$

$$\frac{d(V_i \rho_i)}{dt} = 0 \quad , \quad (1.71)$$

$$\rho_i \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = \underbrace{-\sum_{j \in \mathcal{D}_i} (P_i + P_j) \nabla_i W_{ij} V_j + \rho_i \mathbf{g}}_{\text{partie Lagrangienne}} + \underbrace{\Pi_{i,Mon}^{(u)}}_{\text{stabilisation}} \quad , \quad (1.72)$$

où

$$\Pi_{i,Mon}^{(u)} = \sum_{j \in \mathcal{D}_i} \pi_{ij}^{Mon} \nabla_i W_{ij} V_j \quad (1.73)$$

1.3.3.2 δ -SPH

δ -SPH en formalisme lagrangien

Dans [3] et [57], Antuono *et al.* et Marrone *et al.* introduisent un terme diffusif non plus uniquement dans l'équation de quantité de mouvement, mais aussi dans l'équation de continuité. Le schéma obtenu, appelé δ -SPH s'écrit :

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{u}_i \quad , \quad (1.74)$$

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\rho_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j + \Pi_{i,\delta}^{(\rho)} \quad , \quad (1.75)$$

$$\frac{d(V_i \rho_i)}{dt} = 0 \quad , \quad (1.76)$$

$$\rho_i \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = \underbrace{-\sum_{j \in \mathcal{D}_i} (P_i + P_j) \nabla_i W_{ij} V_j + \rho_i \mathbf{g}}_{\text{partie Lagrangienne}} + \underbrace{\Pi_{i,\delta}^{(u)}}_{\text{stabilisation}} \quad , \quad (1.77)$$

où le terme diffusif relatif à l'équation de continuité (1.75) s'écrit :

$$\begin{aligned} \Pi_{i,\delta}^{(\rho)} &= \delta h c_0 \sum_{j \in \mathcal{D}_i} \boldsymbol{\psi}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij} V_j \quad , \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\psi}_{ij} = 2(\rho_j - \rho_i) \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|^2} - [\langle \nabla \rho_i \rangle_{RL}^- + \langle \nabla \rho_j \rangle_{RL}^-] \quad , \\ &= \underbrace{2\delta h c_0 \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\rho_j - \rho_i) \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|^2} \cdot \nabla_i W_{ij} V_j}_{\text{Molteni \& Colagrossi [63]}} - \underbrace{\delta h c_0 \sum_{j \in \mathcal{D}_i} [\langle \nabla \rho_i \rangle_{RL}^- + \langle \nabla \rho_j \rangle_{RL}^-] \cdot \nabla_i W_{ij} V_j}_{\text{Antuono et al. [3]}} \quad (1.78) \end{aligned}$$

Le terme diffusif est écrit ici en faisant intervenir la partie introduite par Molteni & Colagrossi [63] et celle ajoutée par Antuono *et al.* [3] pour le rendre consistant à la surface libre. Le terme relatif à l'équation de quantité de mouvement (1.77) s'écrit quant à lui :

$$\Pi_{i,\delta}^{(u)} = \alpha h c_0 \rho_0 \sum_{j \in \mathcal{D}_i} \pi_{ij}^\delta \nabla_i W_{ij} V_j \quad , \quad \text{avec} \quad \pi_{ij}^\delta = \frac{(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|^2} \quad (1.79)$$

Dans les termes diffusifs (1.78) et (1.79) $\langle \nabla \phi_i \rangle_{RL}^-$ est l'opérateur défini par l'équation (1.44), α et δ sont des coefficients, fixés à $\alpha = 0.01$ et $\delta = 0.1$ dans cette thèse.

δ -SPH en formalisme ALE

Dans [18], Colagrossi *et al.* proposent de stabiliser le schéma ALE (1.59)-(1.62) en utilisant les termes diffusifs δ dans l'équation de continuité (1.60) et dans l'équation de quantité de mouvement (1.62), et en ajoutant un terme diffusif dans l'équation de la masse (1.61) :

$$\frac{dx_i}{dt} = \mathbf{u}_{0i} \quad , \quad (1.80)$$

$$\frac{d\rho_i}{dt} = - \sum_{j \in \mathcal{D}_i} [\rho_i (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{0i}) + \rho_j (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_{0j})] \cdot \nabla_i W_{ij} V_j - \rho_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\mathbf{u}_{0j} - \mathbf{u}_{0i}) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j + \Pi_{i,\delta}^{(\rho)} \quad , \quad (1.81)$$

$$\frac{d(V_i \rho_i)}{dt} = -V_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} [\rho_i (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{0i}) + \rho_j (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_{0j})] \cdot \nabla_i W_{ij} V_j + \Pi_{i,\delta}^{(V\rho)} \quad , \quad (1.82)$$

$$\frac{d(V_i \rho_i \mathbf{u}_i)}{dt} = \underbrace{-V_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} [P_i \bar{\mathbb{I}} + P_j \bar{\mathbb{I}} + \rho_i \mathbf{u}_i \otimes (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{0i}) + \rho_j \mathbf{u}_j \otimes (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_{0j})] \nabla_i W_{ij} V_j + V_i \rho_i \mathbf{g}}_{\text{schéma ALE non-stabilisé}} + \underbrace{\Pi_{i,\delta}^{(V\rho u)}}_{\text{stabilisation}} \quad , \quad (1.83)$$

où le terme diffusif relatif à l'équation de quantité de mouvement $\Pi_{i,\delta}^{(V\rho u)}$ s'écrit :

$$\Pi_{i,\delta}^{(V\rho u)} = V_i \Pi_{i,\delta}^{(u)} \quad \text{où } \Pi_{i,\delta}^{(u)} \text{ est défini par (1.79).} \quad (1.84)$$

Le terme diffusif relatif à l'équation de la masse s'écrit quant à lui :

$$\Pi_{i,\delta}^{(V\rho)} = 2\delta h c_0 \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (V_j \rho_j - V_i \rho_i) \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|^2} \cdot \nabla_i W_{ij} \sqrt{V_i V_j} \quad , \quad (1.85)$$

et on voit ainsi apparaître une forte similarité entre ce terme et celui introduit par Molteni & Colagrossi dans l'équation de continuité (1.78). Ce schéma possède la qualité intrinsèque de dériver vers le schéma δ -SPH Lagrangien (1.74)-(1.77) quand $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}$, à condition que la masse $V_i \rho_i$ soit la même dans tout l'écoulement à l'état initial afin de pouvoir annuler le terme diffusif de l'équation de la masse (1.85).

1.3.3.3 Riemann-SPH en formalisme lagrangien

Une autre technique pour stabiliser le schéma standard (1.63)-(1.66) est d'utiliser la résolution d'un problème de Riemann pour chaque interaction, comme proposé pour la première fois par Parshikov & Medin [75]. L'idée centrale repose sur les approximations suivantes :

$$\frac{1}{2} (\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_j) \approx \mathbf{u}_E \quad , \quad (1.86)$$

$$\frac{1}{2} (P_i + P_j) \approx P_E \quad , \quad (1.87)$$

où \mathbf{u}_E et P_E sont les solutions du problème de Riemann à l'interface \mathbf{x}_{ij} se déplaçant à la vitesse $\mathbf{u}_{ij} = \frac{\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_j}{2}$. Un large panel de solveurs de Riemann existe dans la littérature [96] et Parshikov & Medin [75] proposent

d'utiliser le solveur approché suivant :

$$\mathbf{u}_E = \frac{\rho_{RCR}\mathbf{u}_R \cdot \mathbf{n}_{ij} + \rho_{LCL}\mathbf{u}_L \cdot \mathbf{n}_{ij} - P_R + P_L}{\rho_{RCR} + \rho_{LCL}} \mathbf{n}_{ij}, \quad (1.88)$$

$$P_E = \frac{P_R\rho_{LCL} + P_L\rho_{RCR} - \rho_{RCR}\rho_{LCL}(\mathbf{u}_R \cdot \mathbf{n}_{ij} - \mathbf{u}_L \cdot \mathbf{n}_{ij})}{\rho_{RCR} + \rho_{LCL}}, \quad (1.89)$$

où les variables indicées par L et R sont les valeurs reconstruites à l'interface \mathbf{x}_{ij} respectivement à gauche et à droite, et $\mathbf{n}_{ij} = \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|}$.

L'équation de continuité (1.64) devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_i}{dt} &= -\rho_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j \\ &= -\rho_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} 2 \underbrace{\left(\frac{\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_j}{2} - \mathbf{u}_i \right)}_{\text{Eq. (1.86)}} \cdot \nabla_i W_{ij} V_j, \\ &\approx -\rho_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} 2 (\mathbf{u}_E - \mathbf{u}_i) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j \end{aligned} \quad (1.90)$$

tandis que l'équation de quantité de mouvement devient :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} &= -\frac{1}{\rho_i} \sum_{j \in \mathcal{D}_i} \underbrace{(P_i + P_j)}_{\text{Eq. (1.87)}} \nabla_i W_{ij} V_j \\ &\approx -\frac{1}{\rho_i} \sum_{j \in \mathcal{D}_i} 2P_E \nabla_i W_{ij} V_j \end{aligned} \quad (1.91)$$

Le schéma standard stabilisé par l'utilisation de problèmes de Riemann peut alors s'écrire, à l'instar du schéma δ -SPH (1.74)-(1.77), comme la somme du schéma standard et de termes de stabilisation :

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{u}_i \quad (1.92)$$

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\rho_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j + \Pi_{i,Rie}^{(\rho)} \quad (1.93)$$

$$\frac{d(V_i\rho_i)}{dt} = 0 \quad (1.94)$$

$$\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = \underbrace{-\frac{1}{\rho_i} \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (P_i + P_j) \nabla_i W_{ij} V_j + \mathbf{g}}_{\text{partie Lagrangienne}} + \underbrace{\Pi_{i,Rie}^{(u)}}_{\text{stabilisation}} \quad (1.95)$$

où les termes de stabilisation s'écrivent :

$$\Pi_{i,Rie}^{(\rho)} = \rho_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} \left[\frac{\rho_{RCR}(\mathbf{u}_j + \mathbf{u}_i - 2\mathbf{u}_R) + \rho_{LCL}(\mathbf{u}_j + \mathbf{u}_i - 2\mathbf{u}_L)}{\rho_{RCR} + \rho_{LCL}} \cdot \mathbf{n}_{ij} + 2 \frac{P_R - P_L}{\rho_{RCR} + \rho_{LCL}} \right] \nabla_i W_{ij} V_j, \quad (1.96)$$

$$\Pi_{i,Rie}^{(u)} = \frac{1}{\rho_i} \sum_{j \in \mathcal{D}_i} \left[\frac{\rho_{RCR}(P_i + P_j - 2P_L) + \rho_{LCL}(P_i + P_j - 2P_R)}{\rho_{RCR} + \rho_{LCL}} + 2 \frac{\rho_{RCR}\rho_{LCL}(\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L) \cdot \mathbf{n}_{ij}}{\rho_{RCR} + \rho_{LCL}} \right] \nabla_i W_{ij} V_j. \quad (1.97)$$

Ainsi, le schéma δ -SPH (1.74)-(1.77) et le schéma de Parshikov & Medin (1.92)-(1.95) ont des similarités : en effet seuls les termes diffusifs intervenant dans ces deux schémas diffèrent. Dans Green *et al.* [33], cet aspect est d'ailleurs soulevé concernant les termes diffusifs intervenant dans l'équation de continuité.

Reconstruction constante

La stabilisation par l'utilisation de problèmes de Riemann nécessite la reconstruction des variables à l'interface x_{ij} . Une première approche est de considérer une reconstruction constante, à savoir $(\rho_L, \rho_L \mathbf{u}_L) = (\rho_i, \rho_i \mathbf{u}_i)$ et $(\rho_R, \rho_R \mathbf{u}_R) = (\rho_j, \rho_j \mathbf{u}_j)$, les pressions P_L, P_R et vitesses du son c_L, c_R étant déduites via l'équation d'état (équations (1.15) et (1.16)). Cette reconstruction constante ne nécessite pas de boucle supplémentaire d'interactions. En revanche, le niveau de dissipation est élevé et il est préférable d'utiliser une reconstruction d'ordre supérieur.

Reconstruction linéaire : stratégie MUSCL

Dans [98], Van Leer propose une reconstruction linéaire des états gauche et droit du problème de Riemann. Cette méthode appelée Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservative Laws (MUSCL) fonctionne de la façon suivante en SPH :

1. Calcul du gradient des variables ρ and $\rho \mathbf{u}$ pour les particules i et j (plus précisément $\langle \nabla \rho_i \rangle_{RL}^-$, $\langle \bar{\nabla} (\rho_i \mathbf{u}_i) \rangle_{RL}^-$, $\langle \nabla \rho_j \rangle_{RL}^-$, $\langle \bar{\nabla} (\rho_j \mathbf{u}_j) \rangle_{RL}^-$ où les opérateurs renormalisés (1.44) et (1.45) sont utilisés.
2. Utilisation d'un limiteur de pentes (minmod dans cette thèse) afin d'éviter notamment l'inversion du problème de Riemann [36, 93], l'objectif étant de s'approcher d'un schéma à variation totale décroissante (TVD).
3. Déduction des états gauche et droit pour le problème de Riemann (l'exposant * marquant la limitation de pente) :

$$\rho_L = \rho_i + (\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_i) \cdot \langle \nabla^* \rho_i \rangle_{RL}^- \quad (1.98)$$

$$\rho_L \mathbf{u}_L = \rho_i \mathbf{u}_i + (\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_i)^T \langle \bar{\nabla}^* (\rho_i \mathbf{u}_i) \rangle_{RL}^- \quad (1.99)$$

$$\rho_R = \rho_j + (\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_j) \cdot \langle \nabla^* \rho_j \rangle_{RL}^- \quad (1.100)$$

$$\rho_R \mathbf{u}_R = \rho_j \mathbf{u}_j + (\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_j)^T \langle \bar{\nabla}^* (\rho_j \mathbf{u}_j) \rangle_{RL}^- \quad (1.101)$$

4. Calcul des pressions P_L, P_R et vitesses du son c_L, c_R en utilisant l'équation d'état (équations (1.15) et (1.16)).

On a présenté ici la stratégie MUSCL, mais des reconstructions d'ordre plus élevé sont utilisées au sein de la communauté SPH, telle que la reconstruction Moving Least Square (MLS) [82] ou encore en utilisant un schéma Weighted Essentially Non-Oscillatory (WENO) [5], ce dernier faisant actuellement l'objet d'une thèse effectuée par Alban Vergnaud au sein du laboratoire [99, 100].

1.3.3.4 Cas particulier du schéma de Vila

Dans [101], un schéma SPH utilisant la résolution de problèmes de Riemann à des fins de stabilité est développé par Vila. Ce schéma, ensuite étudié notamment dans [56, 73, 82] s'écrit :

$$\frac{dx_i}{dt} = \mathbf{u}_{0i} , \quad (1.102)$$

$$\frac{dV_i}{dt} = V_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\mathbf{u}_{0j} - \mathbf{u}_{0i}) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j , \quad (1.103)$$

$$\frac{d(V_i \rho_i)}{dt} = -V_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} 2\rho_E (\mathbf{u}_E - \mathbf{u}_{0ij}) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j , \quad (1.104)$$

$$\frac{d(V_i \rho_i \mathbf{u}_i)}{dt} = -V_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} 2 \left[\rho_E \mathbf{u}_E \otimes (\mathbf{u}_E - \mathbf{u}_{0ij}) + P_E \bar{\mathbb{I}} \right] \nabla_i W_{ij} V_j + \rho_i V_i \mathbf{g} . \quad (1.105)$$

Ce schéma, pourtant issu de la formulation ALE (1.55)-(1.58), présente la particularité de ne pas dériver vers un schéma purement Lagrangien quand $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}$. En effet, en général $\mathbf{u}_E \neq \mathbf{u}_{ij}$ et ainsi les particules échangent de la masse même en se déplaçant de manière Lagrangienne. C'est d'ailleurs ce point que soulèvent Leduc *et al.* [47] avant de proposer un schéma à flux de masse nul en posant $\mathbf{u}_{ij} = \mathbf{u}_E$. Faisant cela, ils retombent sur un schéma dont l'équation de continuité est écrite en matière de volume, strictement équivalent à celui de Parshikov & Medin :

$$\frac{dx_i}{dt} = \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i , \quad (1.106)$$

$$\frac{dV_i}{dt} = V_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} 2(\mathbf{u}_E - \mathbf{u}_i) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j = V_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j + \Pi_{i,Rie}^{(V)} , \quad (1.107)$$

$$\frac{d(V_i \rho_i)}{dt} = 0 = 0 , \quad (1.108)$$

$$\frac{d(V_i \rho_i \mathbf{u}_i)}{dt} = -V_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} 2P_E \nabla_i W_{ij} V_j + \rho_i V_i \mathbf{g} = \underbrace{-V_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (P_i + P_j) \nabla_i W_{ij} V_j + \rho_i V_i \mathbf{g}}_{\text{partie Lagrangienne}} + \underbrace{\Pi_{i,Rie}^{(\rho V \mathbf{u})}}_{\text{stabilisation}} , \quad (1.109)$$

où les termes diffusifs peuvent être écrits comme suit :

$$\Pi_{i,Rie}^{(V)} = -\frac{V_i}{\rho_i} \Pi_{i,Rie}^{(\rho)} , \quad \text{avec } \Pi_{i,Rie}^{(\rho)} \text{ défini dans l'équation (1.96)} , \quad (1.110)$$

$$\Pi_{i,Rie}^{(\rho V \mathbf{u})} = V_i \rho_i \Pi_{i,Rie}^{(\mathbf{u})} , \quad \text{avec } \Pi_{i,Rie}^{(\mathbf{u})} \text{ défini dans l'équation (1.97)} . \quad (1.111)$$

1.4 Conditions aux limites

Nous avons précédemment discuté des équations de Navier-Stokes dans le fluide. Lorsqu'une interface intervient dans un écoulement, que ce soit une surface libre ou une paroi solide, des traitements particuliers sont nécessaires, faisant l'objet de cette section.

1.4.1 Conditions aux limites sur un corps au niveau continu

A une interface fluide/solide, la vitesse du fluide \mathbf{u} est égale à la vitesse du solide \mathbf{u}_s . Mathématiquement, cela se traduit par la condition d'adhérence à la paroi suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_s \\ \Leftrightarrow (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n}) \text{ et } (\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{t}) \end{aligned} , \quad (1.112)$$

où \mathbf{n} et \mathbf{t} sont respectivement le vecteur normal et tangentiel local au solide. Lorsque les effets visqueux peuvent être négligés, la condition concernant la partie tangentielle est relaxée, et seule la condition de non-pénétration est maintenue :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n} . \quad (1.113)$$

1.4.2 Conditions aux limites pour un corps au niveau discret

Lorsqu'une particule est proche d'un corps, le support de son noyau est tronqué et une méthode spécifique de traitement des frontières est nécessaire. Dans la littérature SPH, deux approches sont couramment utilisées : les méthodes volumiques et les méthodes surfaciques.

L'idée de l'approche volumique est de compléter par un domaine fictif le support du noyau des particules en proche parois. Les opérateurs différentiels introduits dans la section 1.2 restent alors inchangés, et seules les quantités physiques dans un tel domaine sont à définir.

Dans la seconde approche, les termes surfaciques sont pris en compte et cela nécessite une adaptation des opérateurs différentiels définis dans la section 1.2.

1.4.2.1 Méthode volumique : particules fantômes

L'idée principale d'une méthode volumique est de compléter le support du noyau par des particules dites fantômes [21, 50]. Précisément, pour chaque particule i dont le support est tronqué par une paroi solide s , une particule fantôme $\mathcal{G}_{i,s}$ associée à ce couple particule/paroi est créée. La position de cette particule fantôme est obtenue par symétrisation de la particule i par rapport à la paroi s , sa vitesse est définie afin d'assurer le respect des conditions aux limites sur la paroi (pour le couple i - $\mathcal{G}_{i,s}$), et son volume est celui de la particule i . La masse volumique est quant à elle obtenue via la quantité de mouvement et l'équation d'état, le lecteur étant invité à se référer à [71] pour de plus amples détails. Mathématiquement, ces quantités s'écrivent :

$$\mathbf{x}_{\mathcal{G}_{i,s}} = \mathbf{x}_i + 2(\mathbf{x}_s \cdot \mathbf{n}_s - \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{n}_s) \mathbf{n}_s \quad (1.114)$$

$$\mathbf{u}_{\mathcal{G}_{i,s}} = \begin{cases} \mathbf{u}_i + 2(\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n}_s - \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_s) \mathbf{n}_s & \text{glissement} \\ -\mathbf{u}_i + 2\mathbf{u}_s & \text{adhérence} \end{cases} \quad (1.115)$$

$$V_{\mathcal{G}_{i,s}} = V_i \quad (1.116)$$

$$\rho_{\mathcal{G}_{i,s}} = \begin{cases} \left[\rho_i^{\gamma-1} + \frac{\rho_0^{\gamma-1}(\gamma-1)}{c_0^2} \left((\mathbf{u}_{f,x_s} - \mathbf{u}_s) \cdot \frac{d\mathbf{n}_s}{dt} - \frac{d\mathbf{u}_s}{dt} \cdot \mathbf{n}_s + \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_s \right) (\mathbf{x}_{\mathcal{G}_{i,s}} - \mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{n}_s \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} & \text{Euler} \\ \left[\rho_i^{\gamma-1} + \frac{\rho_0^{\gamma-1}(\gamma-1)}{c_0^2} \left(-\frac{d\mathbf{u}_s}{dt} \cdot \mathbf{n}_s + \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_s + \nu \frac{\partial^2 (\mathbf{u}_{f,x_s} \cdot \mathbf{n}_s)}{\partial n_s^2} \right) (\mathbf{x}_{\mathcal{G}_{i,s}} - \mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{n}_s \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} & \text{Navier-Stokes} \end{cases} \quad (1.117)$$

où \mathbf{x}_s est le point résultant de la projection de i sur la paroi, \mathbf{n}_s le vecteur normal à la paroi en ce point, \mathbf{u}_s la vitesse de la paroi en ce point, et \mathbf{u}_{f,x_s} la vitesse du fluide en ce point. Concernant la vitesse des particules fantômes, il est important de noter que la condition d'adhérence n'est appliquée que pour la partie visqueuse, la condition de glissement étant toujours adoptée pour la partie hyperbolique [22]. En pratique dans cette thèse, seule l'accélération due à la gravité est prise en compte dans l'équation (1.117). La méthode des particules fantômes a été largement étudiée au sein du laboratoire ; en particulier les parois courbes sont détaillées dans [71] et le traitement des coins dans [22].

Lorsqu'un formalisme ALE est adopté, une vitesse arbitraire $\mathbf{u}_{0\mathcal{G}_{i,s}}$ doit être affectée aux particules fantômes afin de satisfaire la condition de glissement (1.113). La vitesse arbitraire n'intervenant pas dans le calcul des termes visqueux, seule la partie normale de la vitesse arbitraire est symétrisée [73] et on obtient pour une particule fantôme :

$$\mathbf{u}_{0\mathcal{G}_{i,s}} = \mathbf{u}_{0i} + 2(\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n}_s - \mathbf{u}_{0i} \cdot \mathbf{n}_s) \mathbf{n}_s . \quad (1.118)$$

Une fois les quantités physiques associées aux particules fantômes, une particule fluide interagit avec les particules fluides et les particules fantômes indifféremment. Les particules fantômes quant à elles ne sont pas intégrées en temps et sont recrées à chaque sous étape du schéma d'intégration temporelle. Cette méthode est adaptée pour des applications impliquant des géométries simples. Elle devient peu adaptée et coûteuse pour des applications industrielles faisant intervenir des parois complexes, et les méthodes surfaciques lui sont finalement préférées.

Il est à noter qu'une autre méthode volumique de traitement des parois est utilisée dans la communauté SPH : la méthode dite des particules fantômes fixes introduite par Marrone *et al.* [57]. Bien qu'elle ne soit pas utilisée au cours de cette thèse, les développements du chapitre 4 sont adaptés de développements utilisant cette méthode de traitement des frontières et il est donc intéressant de la présenter brièvement. La principale différence avec la méthode présentée précédemment est que les particules fantômes fixes sont créées une seule fois au début de la simulation, en étant distribuées de manière homogène dans la zone proche paroi à l'intérieur du solide. Un point d'interpolation situé dans le domaine fluide est ensuite associé à chaque particule fantôme, la vitesse de ce point étant déterminée en utilisant une interpolation MLS. La vitesse de la particule fantôme associée en est alors déduite tandis que sa masse volumique est calculée en utilisant l'expression (1.117).

1.4.2.2 Méthode surfacique : Boundary Integral Method (BIM) avec l'approche CutFace (CFA)

Tandis que les méthodes volumiques consistent à remplir le support du noyau par des particules fantômes, les méthodes surfaciques sont basées sur la discrétisation des parois. Une fois les parois discrétisées, les termes surfaciques sont pris en compte dans le calcul des opérateurs gradient et divergence. De plus, comme initialement proposé par Kulasegaram *et al.* [44], un terme de renormalisation γ est introduit. Les méthodes surfaciques ont été largement étudiées au sein de la communauté SPH, notamment en ce qui concerne la pression extrapolée à la paroi (Marongiu *et al.* [56], De Lefte *et al.* [23]) ou encore le calcul du terme de renormalisation γ , qui peut être calculé de manière numérique (Ferrand *et al.* [28]) ou analytique (Mayrhofer *et al.* [60]).

Plus récemment au sein du laboratoire, Chiron *et al.* [14] ont développé une méthode surfacique faisant partie de cette famille des "Boundary Integral Method (BIM)" et utilisant une approche dite "CutFace Approach" (CFA). Cette technique est utilisée dans cette thèse (nommée par la suite BIM-CFA) et les principes de base sont rappelés ici.

Au continu, l'équation (1.30) n'est valable que lorsque le support du noyau est complet. Proche d'une paroi, cela n'est plus vrai et la correction Shepard :

$$\gamma(x) = \int_{\mathcal{D}} W(x - \mathbf{y}, R) d\mathbf{y}, \quad (1.119)$$

doit être utilisée pour l'interpolation SPH d'une quantité ϕ :

$$\langle \phi(x) \rangle = \frac{1}{\gamma(x)} \int_{\mathcal{D}} \phi(\mathbf{y}) W(x - \mathbf{y}, R) d\mathbf{y}. \quad (1.120)$$

En utilisant (1.120) pour l'approximation d'un opérateur différentiel (ici un gradient), on obtient via une intégration par partie :

$$\langle \nabla \phi(x) \rangle = \underbrace{\frac{1}{\gamma(x)} \int_{\mathcal{D}} \phi(\mathbf{y}) \nabla_x W(x - \mathbf{y}, R) d\mathbf{y}}_{\text{terme volumique}} + \underbrace{\frac{1}{\gamma(x)} \int_{\partial \mathcal{D}} \phi(s) W(x - s, R) \mathbf{n}_s ds}_{\text{terme surfacique}}, \quad (1.121)$$

où $\partial \mathcal{D}$ est la surface d'intersection entre le support du noyau et la paroi et \mathbf{n}_s est le vecteur normal à la paroi. On voit donc apparaître, au continu, un terme surfacique qu'il faut prendre en compte dans la discrétisation des

opérateurs différentiels. Ainsi, à l'inverse des méthodes volumiques pour lesquelles les opérateurs différentiels sont les mêmes que l'on soit dans le fluide ou proche paroi, la méthode BIM-CFA nécessite l'adaptation des opérateurs en proche paroi. Ces derniers sont alors construits en suivant le même procédé que dans la section 1.2. En notant $\partial\mathcal{D}_i = \{\sigma_s \mid s = 1, \dots, S\}$ la discrétisation de l'intersection entre la paroi et le support du noyau en S éléments de surface, les opérateurs deviennent :

$$\langle \nabla \cdot \bar{\phi}_i \rangle_{BIM-CFA}^+ = \frac{1}{\gamma_i} \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\bar{\phi}_j + \bar{\phi}_i) \nabla_i W_{ij} V_j + \frac{1}{\gamma_i} \sum_{s \in \partial\mathcal{D}_i} (\bar{\phi}_s + \bar{\phi}_i) \mathbf{n}_s W_{is} S_s, \quad (1.122)$$

$$\langle \nabla \cdot \phi_i \rangle_{BIM-CFA}^- = \frac{1}{\gamma_i} \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\phi_j - \phi_i) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j + \frac{1}{\gamma_i} \sum_{s \in \partial\mathcal{D}_i} (\phi_s - \phi_i) \cdot \mathbf{n}_s W_{is} S_s, \quad (1.123)$$

où S_s est l'aire de l'élément σ_s . La méthode BIM-CFA a été développée dans un premier temps pour le schéma (1.106)-(1.109). En présence d'une paroi, ce dernier devient :

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{u}_i, \quad (1.124)$$

$$\frac{dV_i}{dt} = \frac{V_i}{\gamma_i} \sum_{j \in \mathcal{D}_i} 2(\mathbf{u}_E - \mathbf{u}_i) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j + \frac{V_i}{\gamma_i} \sum_{s \in \partial\mathcal{D}_i} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{n}_s W_{is} S_s, \quad (1.125)$$

$$\frac{d(V_i \rho_i)}{dt} = 0, \quad (1.126)$$

$$\frac{d(V_i \rho_i \mathbf{u}_i)}{dt} = -\frac{V_i}{\gamma_i} \sum_{j \in \mathcal{D}_i} 2P_E \nabla_i W_{ij} V_j + V_i \rho \mathbf{g} - \frac{V_i}{\gamma_i} \sum_{s \in \partial\mathcal{D}_i} (P_s + P_i) \mathbf{n}_s W_{is} S_s, \quad (1.127)$$

où \mathbf{u}_s est la vitesse de la paroi et P_s et la pression extrapolée à la paroi définie par :

$$P_s = P_i + \rho_i c_i (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{n}_s. \quad (1.128)$$

Ainsi, loin d'une paroi, on retrouve bien le schéma de Parshikov & Medin. Concernant le calcul de la correction Shepard, nous invitons le lecteur à se référer à Chiron *et al.* [14].

1.4.3 Conditions de surface libre au niveau continu

À la surface libre SL , deux conditions doivent être respectées : la condition cinématique et la condition dynamique. La condition cinématique stipule que le fluide initialement sur la surface libre y reste $\forall t$, soit :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{SL} = \mathbf{u}_{SL} \cdot \mathbf{n}_{SL}, \quad (1.129)$$

où \mathbf{n}_{SL} et \mathbf{u}_{SL} sont respectivement le vecteur normal et la vitesse localement à la surface libre.

La condition dynamique affirme quant à elle que, sans tension de surface et en négligeant les effets visqueux, la pression est continue à travers la surface libre :

$$P = P_e, \quad (1.130)$$

où P_e est la pression extérieure (typiquement la pression atmosphérique) et P la pression du fluide situé sur la surface libre. En supposant P_e constante, par un changement de pression de référence on prendra $P = 0$ sur la surface libre.

1.4.4 Conditions de surface libre au niveau discret

La condition cinématique est intrinsèquement vérifiée de par la nature Lagrangienne de la méthode SPH [17]. En formalisme ALE, la vitesse arbitraire \mathbf{u}_0 doit impérativement être égale à la vitesse Lagrangienne \mathbf{u} dans la direction normale à la surface libre. La condition dynamique est quant à elle vérifiée au sens intégral

à condition qu'on prenne $P = 0$ sur la surface libre et qu'on utilise des opérateurs cohérents (au sens de la section 1.3.2) y compris avec les termes surfaciques, cf. [17].

1.5 Désordre particulaire : Particle Shifting Technique (PST)

La description purement Lagrangienne utilisée classiquement dans la méthode SPH engendre inévitablement des amoncellements de particules le long des lignes de courant comme illustré par exemple sur la figure 1.2. Ce phénomène, bien connu en SPH [51, 64, 73, 105], est d'autant plus présent que la précision du schéma est élevée, et ces distributions irrégulières de particules dans le support du noyau tendent à dégrader la précision des interpolations SPH. Pour pallier ce problème, une méthode couramment employée est de légèrement décaler les particules de leur trajectoire Lagrangienne afin d'obtenir finalement une distribution spatiale plus régulière, et isotrope. Cette méthode, usuellement nommée PST (Particle Shifting Technique) est de plus en plus utilisée au sein de la communauté SPH [42, 51, 64, 73, 86, 88, 89, 101, 105]. Une PST consiste à ajouter une petite perturbation δu dans le champ de vitesse [64, 73, 88], ou à introduire une modification dans le déplacement des particules δr [42, 51, 89, 105], ces deux techniques étant équivalentes (on passe de l'une à l'autre par une simple dérivation / intégration en temps). L'ajout d'une perturbation δu à la vitesse Lagrangienne u revient à considérer une vitesse arbitraire u_0 telle que :

$$u_0 = u + \delta u . \quad (1.131)$$

Cette vitesse arbitraire peut être utilisée au sein d'un schéma SPH (i) uniquement dans l'équation de trajectoire comme proposé initialement par Monaghan [64], (ii) dans toute les équations pour un schéma dérivé du formalisme ALE comme proposé par Vila [101], Oger *et al.* [73], Colagrossi *et al.* [18], (iii) à travers une formulation hybride [18, 88]. L'introduction de δu ne peut se faire sans précaution, notamment en ce qui concerne le respect des conditions aux limites discutées précédemment dans la section 1.4.

Dans cette présente section, les principales PST existant dans la littérature SPH, ainsi que les différents traitements appliqués pour le respect des conditions aux limites sont présentés. Dans le Chapitre 3, une étude théorique de ces PST sera effectuée, débouchant sur la proposition d'une nouvelle loi.

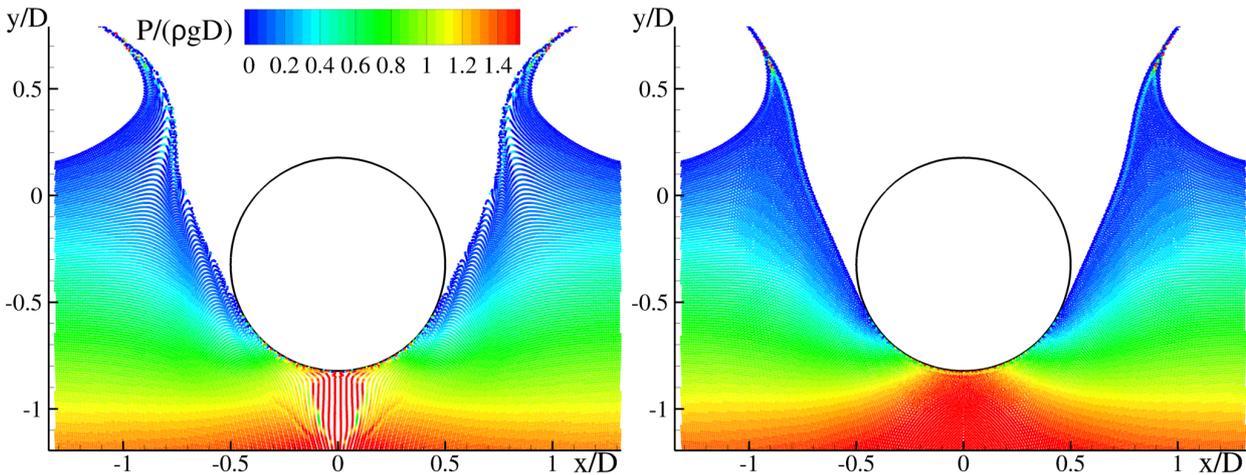


FIGURE 1.2 – Comparaison du champ de pression obtenu sans (à gauche) et avec PST (à droite) sur un cas d'impact de cylindre, en lien avec leurs distributions particulaires respectives.

1.5.1 PST dans la littérature

1.5.1.1 Loi de Monaghan [64]

La première loi de PST a été proposée par Monaghan [64] pour éviter l'entrechoquement des particules :

$$\delta \mathbf{u}_i^{MON} = 2\epsilon \sum_{j \in \mathcal{D}_i} V_j \rho_j \left(\frac{\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i}{\rho_i + \rho_j} \right) W_{ij}, \quad (1.132)$$

où ϵ est un paramètre, typiquement fixé à $\epsilon = 0.5$. Cette vitesse de PST possède l'avantage d'être invariante par translation rectiligne uniforme. Cependant, puisque la concentration des particules n'est pas prise en compte, il n'y a pas de raison claire qu'elle permette le déplacement des particules depuis les zones de forte concentration vers les zones de faible concentration.

1.5.1.2 Loi de Lind *et al.* [51]

Dans [51], Lind *et al.* introduisent une PST basée sur la loi de Fick, au sein d'un schéma SPH incompressible. Ceci est effectué à travers le gradient de la concentration ∇C_i , calculé via l'approximation SPH de $\nabla 1$ (i.e. en supposant $C = 1$) qui est un vecteur pointant vers les zones de forte concentration de particules [20] :

$$\nabla C_i = \sum_{j \in \mathcal{D}_i} \nabla_i W_{ij} V_j. \quad (1.133)$$

Ainsi, $-\nabla C_i$ est un vecteur pointant vers les zones de faible concentration et constitue donc une base solide pour la détermination d'une vitesse de PST. Néanmoins, l'expression modifiée suivante, introduite par Monaghan [67] pour éviter les instabilités de tension inhérentes à la méthode SPH, est préférée par Lind *et al.* :

$$\hat{\nabla} C_i = \sum_{j \in \mathcal{D}_i} \left[1 + 0.2 \left(\frac{W_{ij}}{W(\Delta x_i)} \right)^4 \right] \nabla_i W_{ij} V_j, \quad (1.134)$$

où Δx_i est la distance caractéristique entre deux particules. Pour obtenir un déplacement, ils multiplient le gradient de la concentration $\hat{\nabla} C_i$ par $0.5h^2$. La norme du vecteur $\delta \mathbf{r}_i = -0.5h^2 \hat{\nabla} C_i$ pouvant être supérieure à h , $\delta \mathbf{r}_i$ est limité en norme à $0.2h$, ce qui donne :

$$\delta \mathbf{r}_i^{LEA} = \begin{cases} -0.5h^2 \hat{\nabla} C_i & \text{si } \left\| 0.5h^2 \hat{\nabla} C_i \right\| < 0.2h, \\ -0.2h \frac{\hat{\nabla} C_i}{\left\| \hat{\nabla} C_i \right\|} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.135)$$

Cette PST est aussi utilisée par Khayyer *et al.* [42], à la différence près que ∇C_i est utilisé en lieu et place de $\hat{\nabla} C_i$. Bien que la PST soit présentée en matière de déplacement dans [51], elle peut être réécrite en matière de vitesse en utilisant une dérivation temporelle pour finalement obtenir :

$$\delta \mathbf{u}_i^{LEA} = \begin{cases} -0.5h \frac{h}{\Delta t} \hat{\nabla} C_i & \text{si } \left\| 0.5h \frac{h}{\Delta t} \hat{\nabla} C_i \right\| < 0.2 \frac{h}{\Delta t}, \\ -0.2 \frac{h}{\Delta t} \frac{\hat{\nabla} C_i}{\left\| \hat{\nabla} C_i \right\|} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (1.136)$$

où Δt est le pas de temps.

Il est à noter que dans [51], l'avance en temps en présence d'une PST s'effectue en trois étapes. Tout d'abord, l'intégration temporelle est effectuée pour la partie Lagrangienne, donnant un état (\mathbf{x}_i, ϕ_i) , où \mathbf{x}_i

représente la position obtenue après cette intégration temporelle et ϕ_i les quantités physiques en ces positions. Dans un second temps, le déplacement relatif à la PST est effectué, l'état du système est alors (x_i^*, ϕ_i) , où $x_i^* = x_i + \delta r_i^{LEA}$. Enfin, comme initialement proposé par Xu *et al.* [105], les quantités physiques sont projetées en x_i^* en utilisant un développement en série de Taylor à l'ordre 1 :

$$\phi_i^* \approx \phi_i + (\nabla \phi)_i \cdot \delta r_i^{LEA}. \quad (1.137)$$

1.5.1.3 Loi de Oger *et al.* [73]

Afin d'étudier les propriétés de consistance de schémas dérivés du formalisme ALE, une PST est introduite par Oger *et al.* [73]. Cette PST, écrite en matière de vitesse (et adaptée de celle de Lind *et al.*), se base sur le gradient de la concentration défini dans l'équation (1.133). ∇C_i ayant la dimension de l'inverse d'une longueur, ce dernier est multiplié par une distance caractéristique d^{char} afin d'obtenir un vecteur sans dimension. Ce vecteur est ensuite multiplié par une vitesse caractéristique scalaire U^{char} pour l'obtention d'une vitesse. Pour ce faire, les auteurs choisissent $d^{char} = R$ d'une part, et $U^{char} = Ma c_0$ d'autre part, où Ma est le nombre de Mach estimé a priori. d^{char} et U^{char} sont donc fixés au début de la simulation, et restent donc constants dans l'espace et dans le temps durant toute la simulation. A l'instar de Lind *et al.*, une limitation est employée, basée cette fois-ci sur un pourcentage de la vitesse Lagrangienne de la particule considérée (typiquement 25%). Contrairement à U^{char} , cette limitation est donc dépendante de l'espace et du temps. Cette vitesse de PST s'écrit finalement :

$$\delta u_i^{OEA} = \begin{cases} -Ma c_0 R \nabla C_i & \text{si } \|Ma c_0 R \nabla C_i\| < 0.25 \|u_i\|, \\ -0.25 \|u_i\| \frac{\nabla C_i}{\|\nabla C_i\|} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.138)$$

1.5.1.4 Loi de Sun *et al.* [88]

Utilisant les termes de stabilisation δ introduits dans la section 1.3.3.2, Sun *et al.* [88] proposent une autre PST, écrite en matière de vitesse. La distance caractéristique $d^{char} = 2h$ est choisie, ce qui dans notre cas où le noyau \mathcal{C}^2 de Wendland est utilisé, est équivalent à prendre $d^{char} = R$ (cf. section 1.2.1.1). A l'instar de Oger *et al.* [73], la vitesse caractéristique $U^{char} = Ma c_0$ (estimée a priori) est utilisée. Les différences par rapport à Oger *et al.* [73] résident donc dans l'utilisation de $\widehat{\nabla} C_i$ à la place de ∇C_i , et dans la limitation. En effet, cette fois-ci la limitation est basée sur la vitesse Lagrangienne maximale U_{max} dans tout l'écoulement, également estimée a priori. Ainsi, contrairement à Oger *et al.*, la vitesse servant à la limitation est constante dans l'espace et dans le temps. Finalement la vitesse de PST s'écrit :

$$\delta u_i^{SEA} = \begin{cases} -Ma c_0 (2h) \widehat{\nabla} C_i & \text{si } \left\| Ma c_0 (2h) \widehat{\nabla} C_i \right\| < 0.5 U_{max}, \\ -0.5 U_{max} \frac{\widehat{\nabla} C_i}{\|\widehat{\nabla} C_i\|} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (1.139)$$

1.5.2 PST et surface libre

Une PST se doit de respecter les conditions de surface libre. La condition dynamique n'est a priori pas dépendante de la PST. En revanche, des précautions doivent être prises concernant la condition cinématique. En effet, la condition $u_0 \cdot n = u \cdot n$ impose :

$$\delta u \cdot n = 0, \quad (1.140)$$

restreignant la vitesse de PST uniquement à sa composante tangentielle à la surface libre. Par conséquent, lorsque l'on souhaite utiliser une PST au sein d'un schéma SPH, deux étapes sont nécessaires : (i) déterminer la position de la surface libre et sa normale associée, (ii) supprimer la composante normale de la PST.

1.5.2.1 Algorithme de détection de surface libre

L'algorithme de détection de surface libre de Marrone *et al.* [58] est couramment utilisé dans la communauté SPH [42,51,88,89]. La première étape de cet algorithme consiste à calculer la plus petite valeur propre λ_i de la matrice de renormalisation $\overline{\overline{\mathbb{L}}}_i$ (1.46). Ensuite, les particules pour lesquelles $\lambda_i < 0.2$ sont considérées à la surface libre tandis que celles affichant $\lambda_i > 0.75$ sont pleinement dans le fluide. Lorsque $0.2 < \lambda_i < 0.75$, une seconde étape est nécessaire afin de distinguer les particules à la surface libre des particules dans le fluide : l'algorithme dit du "cornet de glace" [58] est utilisé, nécessitant la détermination des vecteurs normaux à la surface libre dans cette zone. Dans [58], un tel vecteur est déterminé par :

$$\mathbf{n}_i = - \frac{\overline{\overline{\mathbb{L}}}_i \nabla C_i}{\left\| \overline{\overline{\mathbb{L}}}_i \nabla C_i \right\|}, \quad (1.141)$$

tandis que Sun *et al.* [88,89] préfèrent utiliser :

$$\mathbf{n}_i^\lambda = - \frac{\langle \nabla \lambda_i \rangle}{\| \langle \nabla \lambda_i \rangle \|}, \text{ avec } \langle \nabla \lambda_i \rangle = \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\lambda_j - \lambda_i) \overline{\overline{\mathbb{L}}}_i \nabla_i W_{ij} V_j, \quad (1.142)$$

afin d'augmenter la précision du calcul de ce vecteur pour des particules situées loin de la surface libre.

Lorsque la méthode volumique des particules fantômes est utilisée (section 1.4.2.1), le support du noyau est complété par des particules fantômes. Ainsi $\lambda_i \approx 1$ et donc les particules sont bien détectées comme étant dans le fluide.

En utilisant une méthode surfacique pour imposer les conditions aux limites (section 1.4.2.2), ceci n'est plus vrai et les particules situées proche d'une paroi et loin de la surface libre sont erronément détectées comme proche d'une surface libre. Pour pallier ce problème, Chiron [13] propose de prendre en compte les termes surfaciques dans le calcul des différents termes impliqués dans la détection de surface libre. Ainsi, la matrice de renormalisation devient :

$$\overline{\overline{\mathbb{L}}}_i^{BIM-CFA} = \left(\frac{1}{\gamma_i} \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \otimes \nabla W_{ij} V_j + \frac{1}{\gamma_i} \sum_{s \in \partial \mathcal{D}_i} (\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_i) \otimes \mathbf{n}_s W_{is} S_s \right)^{-1}, \quad (1.143)$$

le vecteur normal à la surface libre (1.141) est alors modifié en conséquence :

$$\mathbf{n}_i^{BIM-CFA} = - \frac{\overline{\overline{\mathbb{L}}}_i^{BIM-CFA} \nabla C_i}{\left\| \overline{\overline{\mathbb{L}}}_i^{BIM-CFA} \nabla C_i \right\|}, \quad (1.144)$$

et le gradient de la concentration :

$$\nabla C_i = \sum_{j \in \mathcal{D}_i} \nabla_i W_{ij} V_j + \sum_{s \in \partial \mathcal{D}_i} \mathbf{n}_s W_{is} S_s. \quad (1.145)$$

La surface libre étant détectée, la région de surface libre \mathcal{F} est définie comme l'union des particules à la surface libre avec celles situées dans leur support, comme illustré sur la figure 1.3.

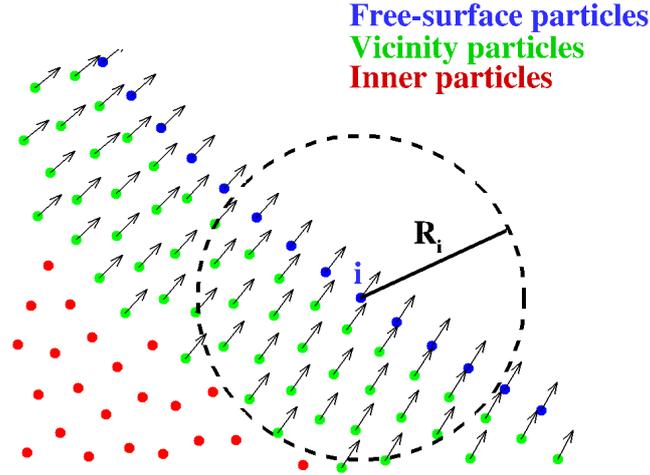


FIGURE 1.3 – Définition de la région de surface libre (constituée des particules bleues et vertes) et des vecteurs normaux à la surface libre, ici avec un ratio $\frac{R_i}{\Delta x} = 4$.

1.5.2.2 PST tangentielle à la surface libre

La région de surface libre \mathcal{F} ainsi que les vecteurs normaux étant connus, il est aisé de supprimer la composante normale de la PST. Ceci est de plus en plus étudié au sein de la communauté SPH [42, 51, 88, 89]. Dans le Chapitre 3 une PST tangentielle sera présentée, largement inspirée de la littérature. Les différentes méthodes existantes possédant des similarités fortes, nous nous limiterons à ne présenter que l'une d'entre elles : celle de Sun *et al.* [88] qui fonctionne comme suit :

1. Calcul de la vitesse de PST $\delta \mathbf{u}_i^{SEA}$ (1.146) pour toutes les particules.
2. Calcul de la valeur propre minimale λ_i de la matrice de renormalisation $\overline{\overline{\mathbb{I}}}_i$ (1.46) et du vecteur normal à la surface libre \mathbf{n}_i^λ (1.142).
3. Détermination de la vitesse de PST selon la proximité ou non de la surface libre :

$$\delta \mathbf{u}_{i,SL}^{SEA} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } \lambda_i < 0.55 \text{ et } i \in \mathcal{F}, \\ \kappa_i \left(\overline{\overline{\mathbb{I}}} - \mathbf{n}_i^\lambda \otimes \mathbf{n}_i^\lambda \right) \delta \mathbf{u}_i^{SEA} & \text{si } \lambda_i \geq 0.55, \mathbf{n}_i^\lambda \cdot \delta \mathbf{u}_i^{SEA} \geq 0 \text{ et } i \in \mathcal{F}, \\ \delta \mathbf{u}_i^{SEA} & \text{si } \lambda_i \geq 0.55, \mathbf{n}_i^\lambda \cdot \delta \mathbf{u}_i^{SEA} < 0 \text{ et } i \in \mathcal{F}, \\ \delta \mathbf{u}_i^{SEA} & \text{si } i \notin \mathcal{F}, \end{cases} \quad (1.146)$$

où κ_i est un coefficient défini par :

$$\kappa_i = \begin{cases} 0 & \text{si } \max_{j \in \mathcal{D}_i} \left[\arccos \left(\mathbf{n}_i^\lambda \cdot \mathbf{n}_j^\lambda \right) \right] \geq 15^\circ, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.147)$$

1.5.3 PST et parois solides

A l'instar de la surface libre, une condition cinématique à la paroi se doit d'être respectée : la condition de non-pénétration (1.140). Lorsque l'on travaille avec des particules fantômes pour le traitement des parois, elle est vérifiée par l'affectation de la vitesse arbitraire (1.118) aux particules fantômes comme préconisé dans [73], et a priori il n'y a pas de besoins théoriques à limiter la direction de la PST dans un tel cas. Néanmoins, Sun *et al.* [91] proposent que la PST soit limitée à sa composante tangentielle à la paroi. Dans ce cas, la suppression de la composante normale à la paroi est directement inspirée de son pendant à la surface libre. On note cependant que lorsqu'on travaille avec une méthode surfacique de traitement des parois (BIM-CFA), l'imposition de la condition de non-pénétration (1.140) n'est plus triviale. Cet aspect sera exploré dans le Chapitre 3.

1.6 Intégration temporelle

Une fois les seconds membres d'un schéma SPH calculés, les variables physiques telles que la masse volumique (ou le volume), la masse, et la vitesse sont avancées en temps en utilisant un schéma d'intégration temporelle. Dans cette thèse le schéma explicite Runge-Kutta d'ordre 4 est utilisé.

1.6.1 Approche faiblement compressible

Les écoulements visés dans cette thèse sont tels que le fluide pourrait être considéré comme incompressible. Le choix a été fait de résoudre les équations explicitement en temps, afin d'éviter la résolution d'un système linéaire. L'approche utilisée pour résoudre les équations de Navier-Stokes compressibles afin de simuler un fluide incompressible est basée sur l'hypothèse de faible compressibilité. Cette dernière consiste à choisir une vitesse du son nominale c_0 suffisamment élevée pour que les effets de compressibilité puissent être négligés, et en même temps suffisamment faible pour éviter des pas de temps trop petits et par conséquent des simulations trop coûteuses. En pratique, c_0 est choisie telle que $Ma < 0.1$ and $\frac{|\rho - \rho_0|}{\rho_0} < 0.01$ où Ma est le nombre de Mach défini comme U_{max}/c_0 , avec U_{max} la vitesse maximum dans le fluide, estimée a priori. De plus, les termes diffusifs introduits dans la section 1.3.3 sont dépendants du choix de c_0 . Ainsi, utiliser des valeurs de c_0 trop grandes conduit à une diffusion numérique généralement trop élevée.

1.6.2 Condition de stabilité

La condition de Courant-Friedrich-Levy (CFL) est celle régissant la valeur du pas de temps. Cette condition pour les équations d'Euler est le rapport entre une distance caractéristique liée aux particules, sur la vitesse du son. Dans cette thèse, cette condition s'écrit :

$$\Delta t < \alpha_{CFL} \min_{i \in \Omega} \left(\frac{R_i}{c_i} \right), \quad (1.148)$$

où Ω est l'ensemble des particules de la simulation et α_{CFL} est le nombre de Courant, typiquement fixé à $\alpha_{CFL} = 0.375$ sauf mention contraire. On peut noter qu'avec ce choix de condition CFL, le pas de temps augmente avec le ratio $\frac{R}{\Delta x}$ (à Δx fixé).

Une condition CFL est ensuite ajoutée dès qu'un phénomène physique est considéré dans la simulation (tension de surface, viscosité etc). Ainsi, la condition CFL visqueuse s'écrit dans cette thèse :

$$\Delta t < \beta_{CFL} \min_{i \in \Omega} \left(\frac{R_i^2 \rho_i}{\mu} \right), \quad (1.149)$$

avec le nombre de diffusion pris comme $\beta_{CFL} = 0.125$.

1.7 Raffinement particulaire

Afin de limiter le nombre d'éléments (les particules en SPH) dans une simulation en conservant le même niveau de précision, une technique couramment utilisée dans les méthodes numériques est de considérer des éléments de taille différente selon des zones ciblées de la simulation. En particulier, les zones d'intérêt de l'écoulement sont maillées finement, tandis qu'un maillage grossier est utilisé dans les zones de moindre intérêt. Ce besoin est évidemment présent en SPH, et une première approche consiste à utiliser une technique faisant varier progressivement la taille des particules, et par conséquent leur longueur de lissage h [12, 40]. Afin que cette technique soit valable, le taux d'augmentation de la longueur de lissage doit être faible et une variation de 3% est préconisé par Oger *et al.* [72]. Par ailleurs, cette technique n'est pas adaptée aux cas où des particules fines et grossières sont mixées dans la simulation.

Pour pallier ce problème, un autre type de raffinement particulaire est utilisé au sein de la communauté SPH : l'APR (Adaptive Particle Refinement). Il consiste en le raffinement d'une particule *mère* en plusieurs

particules *filles* de taille plus petite. Contrairement à l'AMR (Adaptive Mesh Refinement) utilisée couramment avec les méthodes maillées – pour laquelle de nombreux critères basés sur la physique de l'écoulement (gradient de pression, vorticité, etc) sont développés afin de raffiner localement – en SPH le raffinement est effectué à ce jour en fonction de critères géométriques fixés à l'avance (boîtes de raffinement). Initialement proposée par Feldman & Bonnet [27], cette méthode a ensuite été améliorée par Reyes López *et al.* [53] concernant la procédure de raffinement, et Vacondio *et al.* [97] ont proposé pour la première fois une procédure de déraffinement. Au sein du laboratoire, Barcarolo *et al.* [6] ont ensuite amélioré la procédure de déraffinement, permettant ainsi aux particules *mères* d'être intégrées en temps de manière passive, et par conséquent d'être utilisées à la sortie d'une boîte de raffinement. Par la suite, en se basant sur les travaux de Berger *et al.* [8,9] relatifs à l'AMR, Chiron *et al.* [16] ont proposé des méthodes de restriction et de prolongation (respectivement pour le raffinement et le déraffinement) ainsi qu'une adaptation des "guardcells" au formalisme SPH. La disposition anisotrope des particules due au caractère Lagrangien de la méthode SPH tend à conduire à des instabilités lors des procédures de raffinement et de déraffinement, ainsi l'utilisation d'une PST est préconisée [16]. L'APR est utilisée dans cette thèse comme un outil et aucun travail spécifique à ce sujet n'est proposé ici. Ainsi nous invitons le lecteur à se référer à [16] pour de plus amples détails.

Chapitre 2

Etude de différents schémas SPH utilisant une PST

Utiliser une PST au sein d'un schéma SPH s'avère nécessaire afin de régulariser la distribution des particules pour augmenter la précision des interpolations et par conséquent régulariser les champs solutions, et en particulier le champ de pression. Cette nécessité est d'autant plus prégnante lorsque l'on considère un problème d'interaction fluide/structure, puisque la pression joue un rôle fondamental dans la transmission des efforts fluide à la structure. La PST est généralement prise en compte dans la littérature SPH (i) uniquement dans l'équation de trajectoire [64, 89], (ii) dans toutes les équations via un schéma dérivé du formalisme ALE [18, 73, 101], (iii) dans les équations de continuité et de quantité de mouvement avec un schéma hybride [18, 88] (cf. section 2.3). L'objet de ce chapitre est l'étude de ces différentes façons de prendre en compte la PST, notamment l'influence de ces choix sur la solution et sur la stabilité du schéma.

2.1 Mise en évidence de problèmes

L'objet de cette section est la mise en évidence des problèmes apparaissant sur la solution lorsque l'on considère un schéma SPH pour lequel la PST est uniquement prise en compte dans l'équation de la trajectoire. Ainsi, les schémas de Parshikov & Medin (1.106)-(1.109), δ -SPH (1.74)-(1.77), et avec viscosité artificielle de Monaghan (1.69)-(1.72) sont considérés ici, schémas pour lesquels l'équation de trajectoire (respectivement (1.106), (1.74) et (1.69)) est modifiée en écrivant :

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i + \delta u_i^{OEA}, \quad (2.1)$$

où δu_i^{OEA} est la vitesse de PST définie par (1.138).

Le premier cas test considéré pour l'étude de ces schémas est le cas des tourbillons de Taylor-Green pour un fluide non-visqueux en 2D [94], la PST étant indispensable pour ce cas (voir par exemple [2, 73]). Sans viscosité il s'agit d'un cas stationnaire dont les vitesses et la pression sont initialisées par :

$$u_x^* = \sin(2\pi x^*) \cos(2\pi y^*), \quad (2.2)$$

$$u_y^* = -\cos(2\pi x^*) \sin(2\pi y^*), \quad (2.3)$$

$$p^* = \frac{1}{2} [\cos(4\pi x^*) + \cos(4\pi y^*)], \quad (2.4)$$

dans le domaine fluide de taille $[0, L] \times [0, L]$ dans lequel les particules sont disposées de façon Cartésienne (voir figure 2.1). Ainsi, les dimensions de référence sont la longueur L , la vitesse maximale U , le temps L/U et la pression $\frac{\rho U^2}{2}$, l'exposant * indiquant l'adimensionnement. La vitesse du son nominale $c_0 = 10 \times U$ est

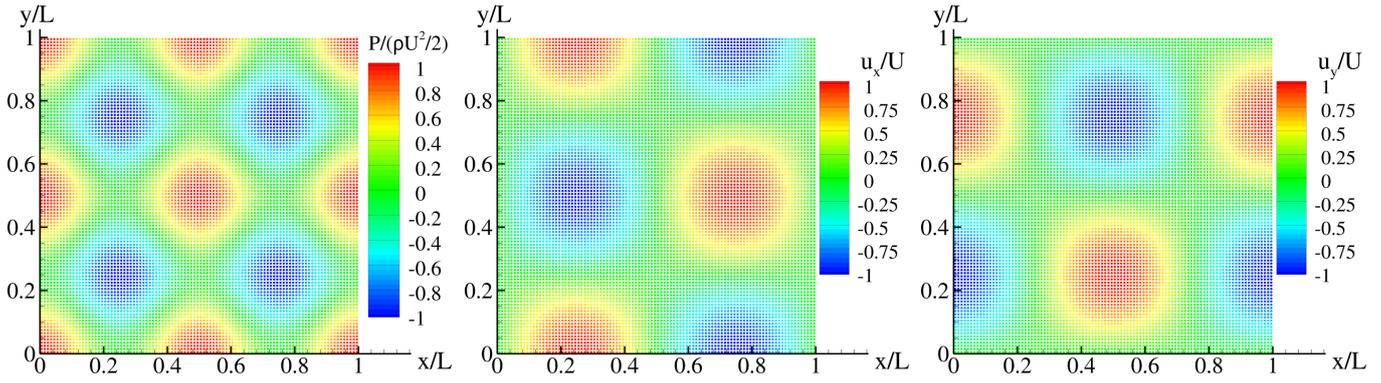


FIGURE 2.1 – Tourbillons de Taylor-Green non-visqueux en 2D. Initialisation de la pression (gauche), de la vitesse selon x (centre) et selon y (droite).

choisie comme le meilleur compromis entre le respect de la condition de faible compressibilité du fluide et l'introduction d'une diffusion numérique la plus faible possible.

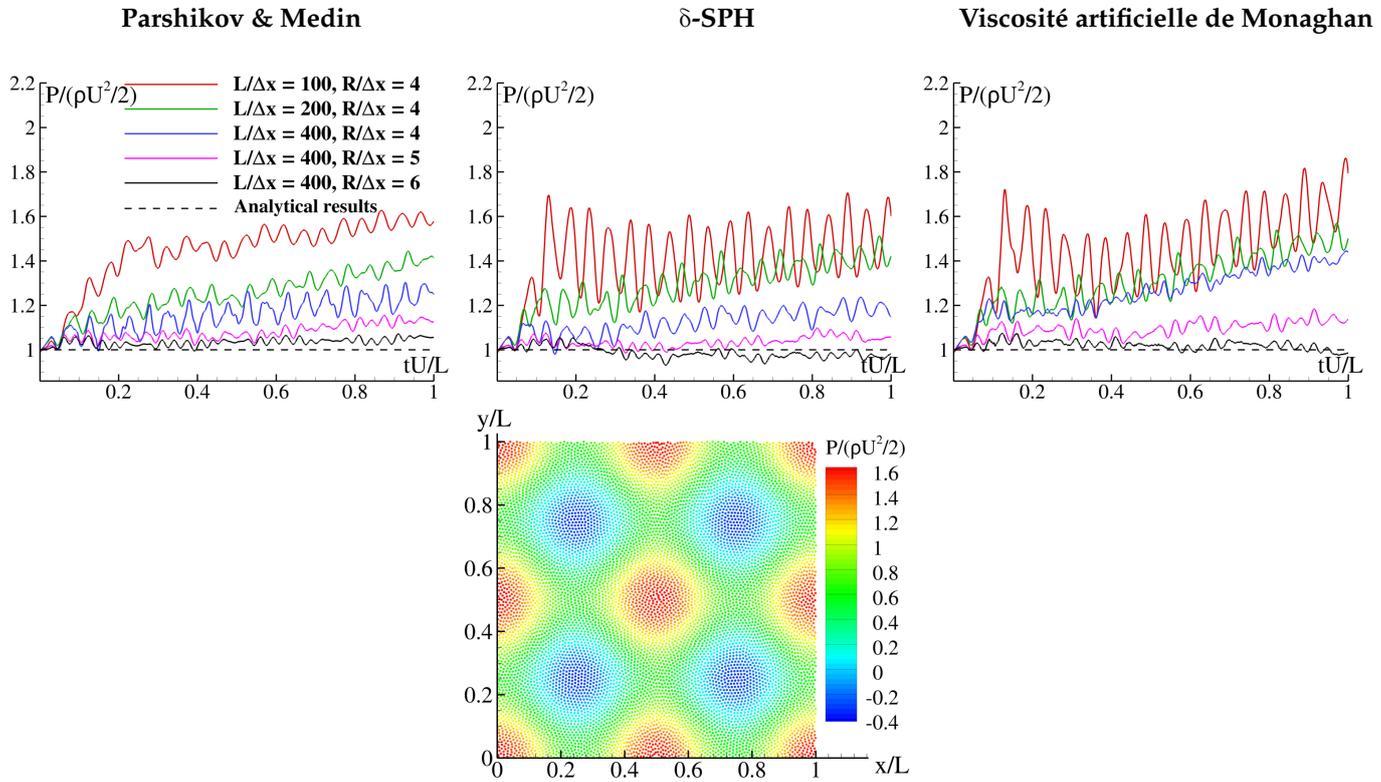


FIGURE 2.2 – Tourbillons de Taylor-Green non-visqueux en 2D. Haut : évolution temporelle de la pression au centre du domaine pour trois discrétisations spatiales avec comparaison à la solution analytique. Bas : champ de pression pour le schéma de Parshikov & Medin à $tU/L = 1$ avec $L/\Delta x = 100$.

Sur la partie haute de la Figure 2.2, la pression au centre du domaine est représentée en fonction du temps pour trois discrétisations spatiales et pour les trois schémas. On peut y observer une dérive de la pression par rapport à la solution analytique, et comme on peut le voir sur la partie basse (sur laquelle l'échelle de pression est modifiée par rapport à l'état initial), cette dérive n'est pas localisée mais concerne tout le domaine fluide. Ce phénomène de dérive de la pression est d'ailleurs souligné dans [88] avec le schéma δ -SPH pour le cas des tourbillons de Taylor-Green à Reynolds $Re = 100$ et $Re = 1000$. Ainsi, on peut conclure que la dérive en pression n'est pas propre au schéma δ -SPH. Le schéma avec viscosité artificielle de Monaghan –

pour lequel aucun terme diffusif n'est présent dans l'équation de continuité contrairement aux schémas δ -SPH et de Parshikov & Medin – entraînant également une dérive en pression, on peut aussi en déduire que cette dérive n'est pas due en particulier au terme diffusif introduit dans l'équation de continuité. Finalement, cette dérive semble due à la non-prise en compte de la PST dans les équations de continuité et de quantité de mouvement.

A ratio constant $R/\Delta x = 4$, cette dérive s'atténue pour les discrétisations les plus fines mais reste tout de même présente. Enfin, cette dernière s'atténue en augmentant le ratio $R/\Delta x$, i.e. avec le second critère de convergence SPH.

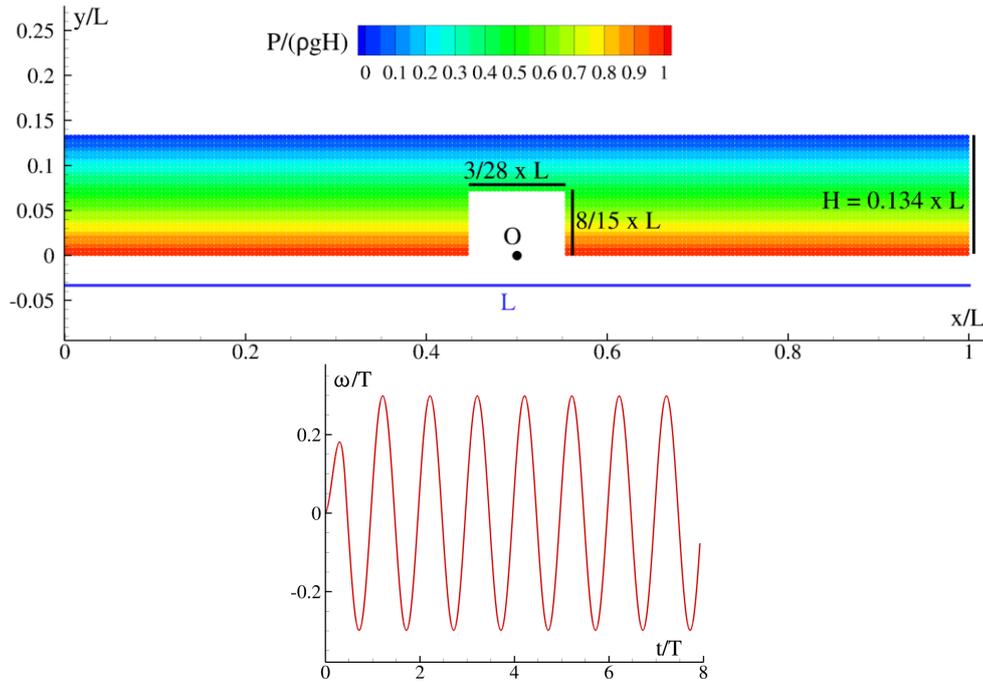


FIGURE 2.3 – Cuve en ballotement pour un fluide non-visqueux en 2D. Haut : géométrie de la cuve et champ de pression associé à l'instant initial ($\theta_0 = 0$). Bas : vitesse angulaire autour du point O en fonction du temps.

Le deuxième cas test est un cas de cuve en ballotement en 2D pour un fluide non visqueux. Une cuve de longueur L partiellement remplie de fluide est mise en mouvement de rotation dont l'angle est θ et la période T autour du point O (voir figure 2.3 sur laquelle nous avons tracé $\omega = d\theta/dt$). Ainsi les dimensions de référence dans ce cas sont la longueur L , le temps T , la vitesse L/T et la pression $\rho g H$ où $H = 0.134L$ est la hauteur initiale du fluide. On s'intéresse ici à l'évolution globale du volume occupé par le fluide au cours du temps.

Concernant les paramètres numériques des simulations, la vitesse du son nominale est fixée à $c_0 T/L = 135$ afin de respecter les conditions de faible compressibilité, et la méthode des particules fantômes (1.114)-(1.116) est utilisée pour le traitement des frontières, puisque cette dernière est développée pour tous les schémas étudiés ici. Pour ce cas, il n'y a pas de solution de référence analytique ou expérimentale, mais le volume occupé par le fluide est suffisamment distinct pour comparer qualitativement les différentes simulations.

Comme on peut l'observer sur la figure 2.4, avec un schéma purement Lagrangien (i.e. avec $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$) le volume occupé par le fluide à la fin de la simulation reste cohérent avec le volume initial de fluide. Le fait d'introduire une PST sans la prendre en compte dans les équations de continuité et de quantité de mouvement a pour effet d'engendrer une erreur très significative sur ce volume global, et ce quelle que soit la technique de stabilisation du schéma utilisée (Riemann, δ , viscosité artificielle). Comme pour la dérive en pression soulignée précédemment, ce phénomène tend à s'atténuer lorsque l'on augmente le ratio $\frac{R}{\Delta x}$.

Dans [61], nous avons adapté la technique de projection initialement proposée par Xu *et al.* [105] et reprise par Lind *et al.* [51] (cf. section 1.5.1.2) au formalisme faiblement compressible et avec le schéma de Parshikov

& Medin; nous avons alors montré que les problèmes de dérives (en pression d'une part, et sur le volume d'autre part) apparaissent également avec cette projection.

Ce phénomène d'augmentation du volume occupé par le fluide est aussi mis en lumière dans [88] avec le schéma δ -SPH où les frontières sont prises en compte par la méthode des particules fantômes fixes. Nous avons également observé cet effet en utilisant un traitement surfacique des frontières [61], laissant ainsi penser que l'augmentation du volume occupé par le fluide est uniquement due à la non-prise en compte de la PST dans les équations de continuité et de quantité de mouvement, et non au terme de stabilisation ou à la méthode de traitement des frontières utilisée.

Dans la partie haute de la figure 2.5, les valeurs du facteur de renormalisation de Shepard γ_i issues de (1.41) sont représentées à la fin de la simulation pour le schéma de Parshikov & Medin (avec $\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}^{OEA}$) pour une discrétisation de $L/\Delta x = 448$ avec un ratio $R/\Delta x = 3$. Or ces valeurs peuvent être vues comme une mesure du taux de remplissage du support du noyau ($\gamma_i = 1$ signifiant que le support du noyau est entièrement rempli). Par conséquent, on peut conclure qu'à la fin de la simulation, il ne semble pas y avoir de zones préférentielles dans lesquelles le support du noyau ne serait pas complet puisque $\gamma_i \approx 0.85$ presque partout dans le fluide. Comme on peut le voir sur la partie basse de la figure, où sont affichées les particules d'une zone de l'écoulement au début et à la fin de la simulation, le phénomène de dérive du volume occupé par le fluide correspond en fait à un accroissement de la distance inter-particulaire partout dans le domaine.

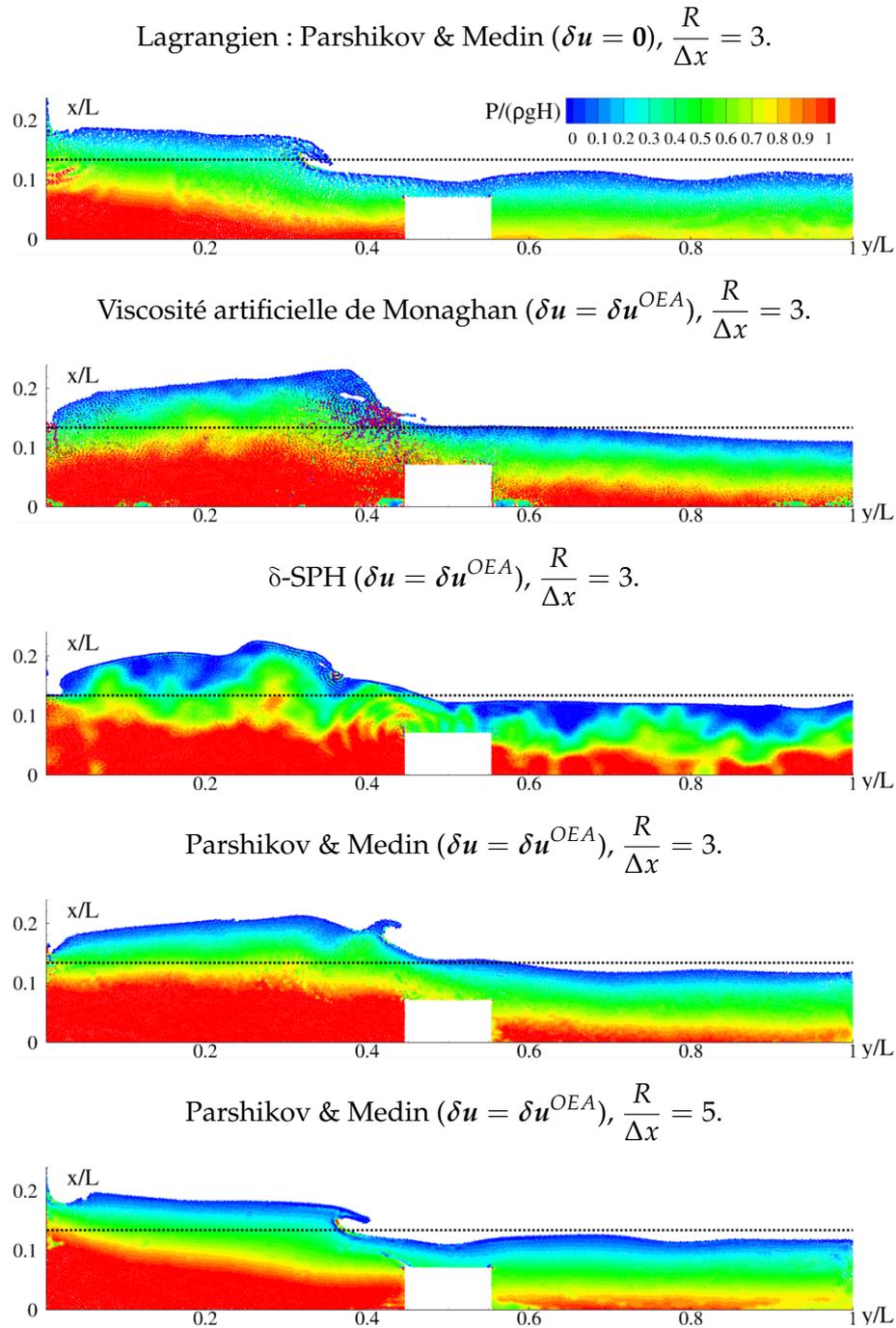


FIGURE 2.4 – Cuve en ballotement pour un fluide non-visqueux en 2D : mise en évidence de la dérive du volume global occupé par le fluide. Champ de pression à $t/T = 7.72$ pour une discrétisation spatiale de $L/\Delta x = 448$. La ligne noire en pointillés représente la hauteur d'eau initiale.

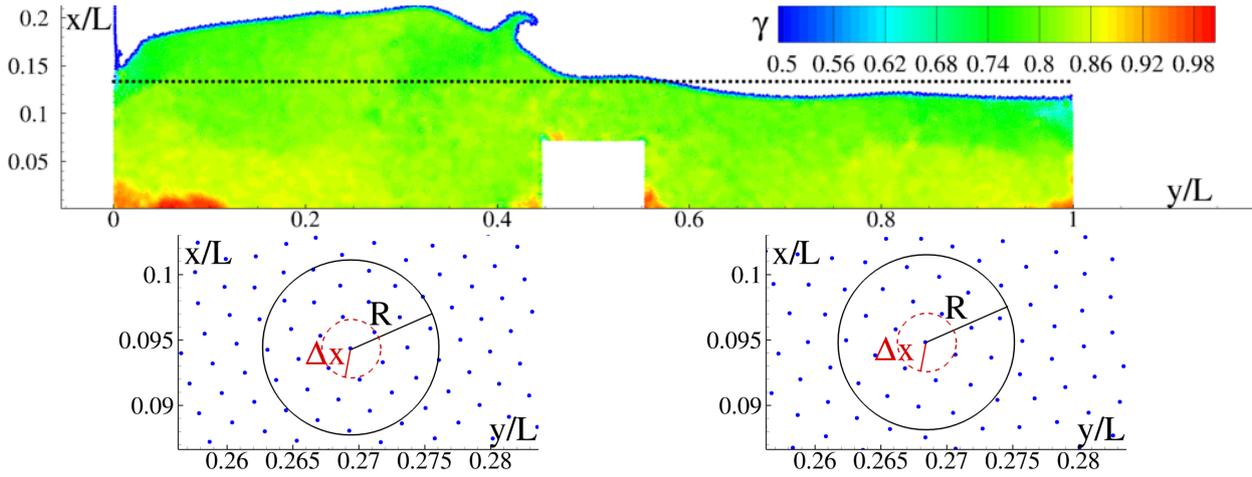


FIGURE 2.5 – Cuve en ballotement pour un fluide non-visqueux en 2D. Schémas de Parshikov & Medin ($\delta u = \delta u^{OE A}$) avec $R/\Delta x = 3$ et $L/\Delta x = 448$. Haut : valeur du facteur de renormalisation de Shepard à $t/T = 7.72$. Bas : distribution de particules aux instants $t/T = 0.796$ (gauche) et $t/T = 7.72$ (droite).

Trouver une explication théorique à ces deux phénomènes de dérive (en pression d’une part, et du volume d’autre part) n’est pas chose aisée. Il semble malgré tout qu’ils soient liés. D’ailleurs, comme on le verra tout au long de ce chapitre, les schémas avec lesquels le problème de dérive en pression n’apparaît pas correspondent à ceux dont le volume occupé par le fluide reste constant. On peut expliquer ce lien par le fait que la simulation du domaine infini, dans le cas des tourbillons de Taylor-Green, est faite via des frontières périodiques. Ainsi, l’expansion de l’espace inter-particulaire se produisant en présence d’une surface libre ne peut avoir lieu dans ce cas, résultant en une augmentation de la pression.

2.2 Cas des schémas dérivés du formalisme ALE

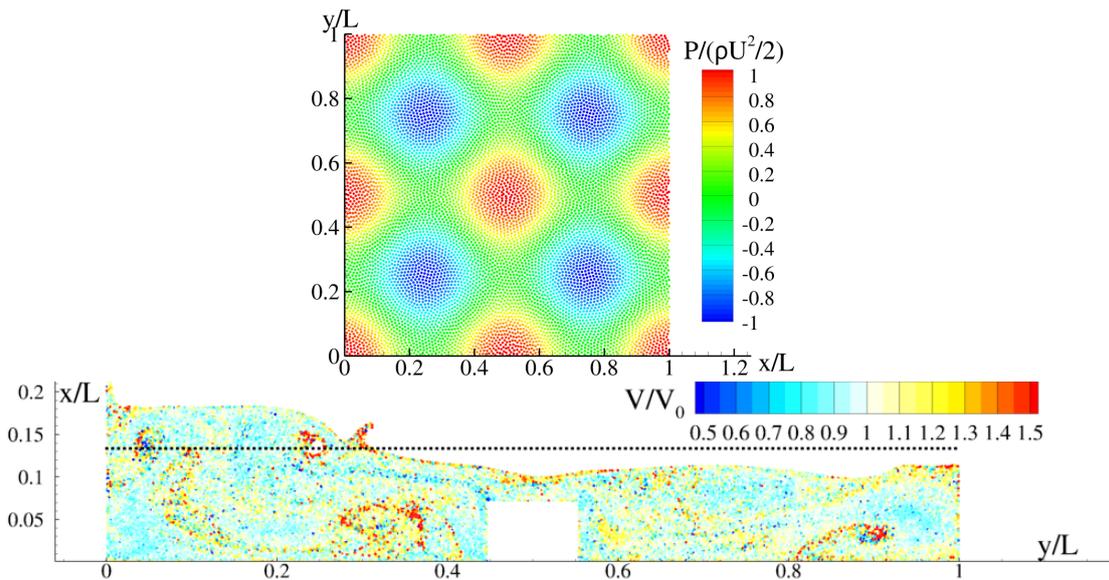


FIGURE 2.6 – Schéma stabilisé par Riemann (2.9)-(2.12) avec $\delta u = \delta u^{OE A}$. Haut : champ de pression obtenu pour Taylor-Green à $tU/L = 1$ avec $L/\Delta x = 100$ et $R/\Delta x = 4$. Bas : volume des particules sur le cas de la cuve en ballotement à $t/T = 7.72$ avec $L/\Delta x = 448$ et $R/\Delta x = 3$.

Un schéma ALE possède intrinsèquement la qualité de prendre en compte la PST dans toutes ses équations, lui conférant naturellement une consistance avec les équations d'Euler/Navier-Stokes, et ce a priori pour toute loi de PST [73]. L'inconvénient du schéma de Vila (1.102)-(1.105), pourtant dérivé du formalisme ALE, est qu'il ne débouche pas sur un schéma Lagrangien quand $\delta \mathbf{u} \rightarrow 0$ (voir section 1.3.3.4). Ici, on propose donc un schéma hybride stabilisé par Riemann et rétablissant cette propriété. Pour ce faire, considérons le schéma purement ALE semi-discrétisé (1.18)-(1.21). En écrivant $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u} + \delta \mathbf{u}$, et en omettant les termes relatifs à la viscosité pour plus de lisibilité, nous obtenons :

$$\frac{dx_i}{dt} = \mathbf{u}_i + \delta \mathbf{u}_i, \quad (2.5)$$

$$\frac{dV_i}{dt} = V_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i + V_i \nabla \cdot \delta \mathbf{u}_i, \quad (2.6)$$

$$\frac{d(V_i \rho_i)}{dt} = 0 + V_i \nabla \cdot (\rho_i \delta \mathbf{u}_i), \quad (2.7)$$

$$\frac{d(V_i \rho_i \mathbf{u}_i)}{dt} = \underbrace{-V_i \nabla P_i + V_i \rho_i \mathbf{g}}_{\text{partie Lagrangienne}} + \underbrace{V_i \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{u}_i \otimes \delta \mathbf{u}_i)}_{\text{partie relative à la PST}}. \quad (2.8)$$

Ensuite, en discrétisant les opérateurs différentiels avec (i) $\langle \nabla \cdot \mathbf{u}_i \rangle^-$ et $\langle \nabla \cdot \delta \mathbf{u}_i \rangle^-$, (ii) $\langle \nabla \cdot (\rho_i \delta \mathbf{u}_i) \rangle^+$, (iii) $\langle \nabla P_i \rangle^+$ et $\langle \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{u}_i \otimes \delta \mathbf{u}_i) \rangle^+$ – à ce stade nous obtenons le schéma purement ALE non-stabilisé (1.55)-(1.58), écrit en tant que somme d'une partie Lagrangienne et d'une partie relative à la PST – puis en stabilisant le schéma par les termes diffusifs issus de la résolution de problèmes de Riemann (1.110) et (1.111), on obtient le schéma suivant, nommé dans la suite du manuscrit *hybride I* :

$$\frac{dx_i}{dt} = \mathbf{u}_i + \delta \mathbf{u}_i, \quad (2.9)$$

$$\frac{dV_i}{dt} = V_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j + \Pi_{i,Rie}^{(V)} + V_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\delta \mathbf{u}_j - \delta \mathbf{u}_i) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j, \quad (2.10)$$

$$\frac{d(V_i \rho_i)}{dt} = 0 + V_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\rho_i \delta \mathbf{u}_i + \rho_j \delta \mathbf{u}_j) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j, \quad (2.11)$$

$$\frac{d(V_i \rho_i \mathbf{u}_i)}{dt} = \underbrace{-V_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (P_i + P_j) \nabla_i W_{ij} V_j + V_i \rho_i \mathbf{g}}_{\text{partie Lagrangienne}} + \underbrace{\Pi_{i,Rie}^{(V\rho \mathbf{u})}}_{\text{Stabilisation}} + \underbrace{V_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\rho_i \mathbf{u}_i \otimes \delta \mathbf{u}_i + \rho_j \mathbf{u}_j \otimes \delta \mathbf{u}_j) \nabla_i W_{ij} V_j}_{\text{partie relative à la PST}}. \quad (2.12)$$

On note que ce nouveau schéma n'est pas exactement ALE, dans le sens que le volume V_i n'est pas constant en Eulérien, i.e. quand $\delta \mathbf{u} = -\mathbf{u}$. En effet, le terme de stabilisation $\Pi_{i,Rie}^{(V)}$ intervenant dans l'équation d'évolution du volume (2.10) n'est en général pas nul. Ceci souligne bien la difficulté de construire un schéma purement ALE, lorsqu'un terme de stabilisation issu de la résolution de problèmes de Riemann est introduit dans l'équation d'évolution de la masse ou du volume/masse volumique. En effet, avec le schéma de Vila (1.102)-(1.105), on a bien $\frac{dV_i}{dt} = 0$ en Eulérien mais $\frac{d(V_i \rho_i)}{dt} \neq 0$ en Lagrangien. A l'inverse, avec le schéma *hybride I* (2.9)-(2.12) introduit ici, on a bien $\frac{d(V_i \rho_i)}{dt} = 0$ en Lagrangien mais $\frac{dV_i}{dt} \neq 0$ en Eulérien. Malgré ces différences sur le papier, nous n'avons pas observé de différences significatives en pratique entre ces deux schémas. Le schéma de Vila (1.102)-(1.105) étant par ailleurs amplement validé dans la littérature (voir par exemple [61] dans lequel nous avons déjà montré que les dérivées n'apparaissent pas avec ce schéma), nous nous contentons de vérifier ici que l'utilisation du schéma *hybride I* permet la résolution des problèmes de dérive en pression et de volume occupé par le fluide. Comme nous pouvons le voir sur la figure 2.6, les problèmes disparaissent avec ce schéma et la solution obtenue est celle escomptée.

En revanche, l'inconvénient d'un tel schéma est la forte variation de masse et de volume que peuvent avoir certaines particules, problème que nous avons également soulevé dans [61] avec le schéma de Vila (1.102)-(1.105). Ainsi on observe (figure 2.6) pour la cuve en ballotement des variations de volume de plus de 100% entre deux particules voisines, ce qui tend à déstabiliser le schéma.

Avec le schéma dérivé du formalisme ALE stabilisé avec δ (1.80)-(1.83), Sun *et al.* [92] ont montré que les problèmes de dérive n'apparaissent pas, et Colagrossi *et al.* [18] ont étudié le problème de variation de la masse et de volume dans le cas d'un écoulement autour d'un profil elliptique à $Re = 500$. De fortes variations de ces quantités y sont observées avec ce schéma, lorsqu'aucun terme diffusif n'est présent dans l'équation de la masse (i.e. $\Pi_{i,\delta}^{(\rho V)} = 0$ dans l'équation (1.82)). Ces fortes variations entraînent une erreur sur la solution, et elles disparaissent avec l'introduction du terme diffusif (1.85), terme présentant des similarités fortes avec celui introduit dans l'équation d'évolution de la masse volumique (voir section 1.3.3.2).

Dans le cas d'un schéma stabilisé par un solveur de Riemann, expliciter un terme de stabilisation pour l'équation de la masse dérivé de celui issu de l'équation de continuité n'est pas trivial et nous n'avons pour l'instant pas trouvé de solution satisfaisante.

Afin d'étudier plus en détail l'évolution des masses et volumes des particules, un nouveau cas test est introduit ici. Il s'agit d'un cas en 2D sans gravité pour lequel un patch circulaire de fluide de rayon R_c est initialisé avec $\rho = \rho_0$ (i.e. $P = 0$) et $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ partout dans le domaine. La vitesse de PST spécifique à ce cas test (voir figure 2.7) est orthoradiale et choisie de telle sorte que $\nabla \cdot \delta \mathbf{u} = 0$:

$$\delta \mathbf{u}_i = \alpha_i \begin{pmatrix} -y_{i^*}/r_{i^*} \\ x_{i^*}/r_{i^*} \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

où $x_{i^*} = x_i/R_c$, $y_{i^*} = y_i/R_c$, $r_{i^*} = \sqrt{x_{i^*}^2 + y_{i^*}^2}$ et α_i est défini par :

$$\alpha_i = \begin{cases} 0 & \text{si } r_{i^*} < 0.1, \\ 0.5 [\sin(2\pi(r_{i^*} - 0.35)) + 1] & \text{sinon,} \end{cases}$$

où 0.35 est la solution particulière de l'équation $0.5 [\sin(2\pi(0.1 - x)) + 1] = 0$, permettant d'assurer la continuité de $\delta \mathbf{u}$ en $r_{i^*} = 0.1$.

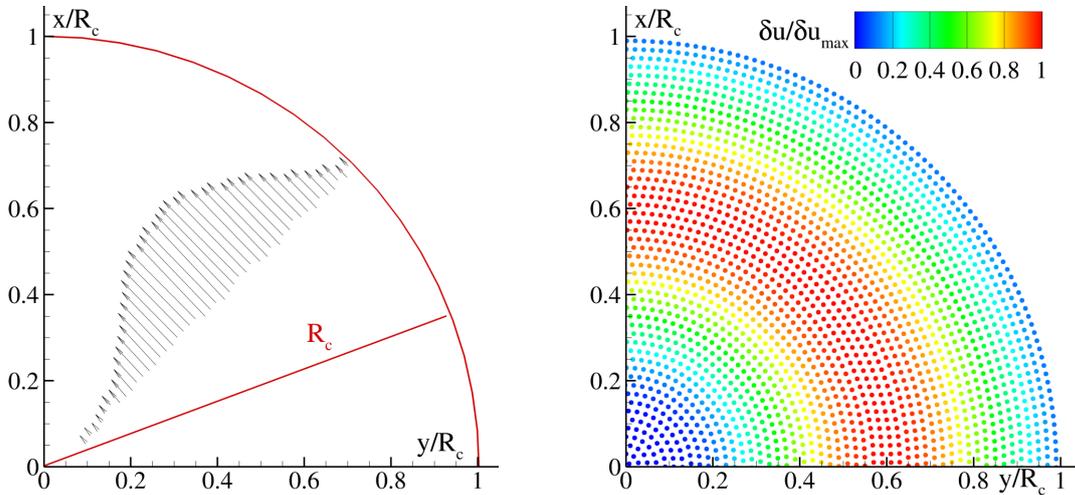


FIGURE 2.7 – Patch circulaire soumis uniquement à une loi de PST à divergence nulle en 2D. Présentation du cas. Gauche : vecteurs issus de la PST. Droite : norme de ces vecteurs.

Ainsi les dimensions de référence sont le rayon R_c , la vitesse maximum de PST δu_{max} , le temps $R_c/\delta u_{max}$ et la masse volumique ρ_0 . La vitesse du son nominale doit respecter la condition $c_0 \geq 10u_{max}$. Classiquement la vitesse de PST est limitée à un certain pourcentage τ de la vitesse Lagrangienne [73, 88]. Dans un tel cas, on a $c_0 \geq 10u_{max} \geq 10 \times \frac{1}{\tau} \delta u_{max}$. Or ici $u_{max} = 0$ et par conséquent c_0 ne peut être fixée par rapport à la vitesse u_{max} mais uniquement par rapport à la vitesse δu_{max} ; on fixe donc $c_0 \geq 10 \times \frac{1}{\tau} \delta u_{max}$. Arbitrairement, on choisit $\tau = 0.20$ et finalement la vitesse du son est prise comme $c_0 = 50\delta u_{max}$.

Ce cas étant uniquement piloté par δu , il est intéressant pour étudier la partie relative à la PST des différents schémas. De plus, le choix d'une vitesse de PST orthoradiale à divergence nulle nous assure que les particules doivent théoriquement conserver leurs quantités physiques (volume, masse volumique, vitesse) en se déplaçant sur leur orbite de départ. Ainsi, la robustesse des différents schémas est évaluée comme leur capacité à respecter ces conditions, et l'indicateur de robustesse choisi ici est la variation de densité ρ/ρ_0 .

Comme nous pouvons l'observer sur la figure 2.8, la masse et le volume varient fortement avec le schéma *hybride I* (plus de 40% à $t\delta u_{max}/R_c = 5$), ces deux quantités variant simultanément. La densité quant à elle reste presque constante au début de la simulation (moins de 0.05% de variation à $t\delta u_{max}/R_c = 5$). Ensuite, une légère différence apparaît entre la variation de la masse et celle du volume, ce qui produit des variations sur la densité, de sorte que la simulation finit par diverger.

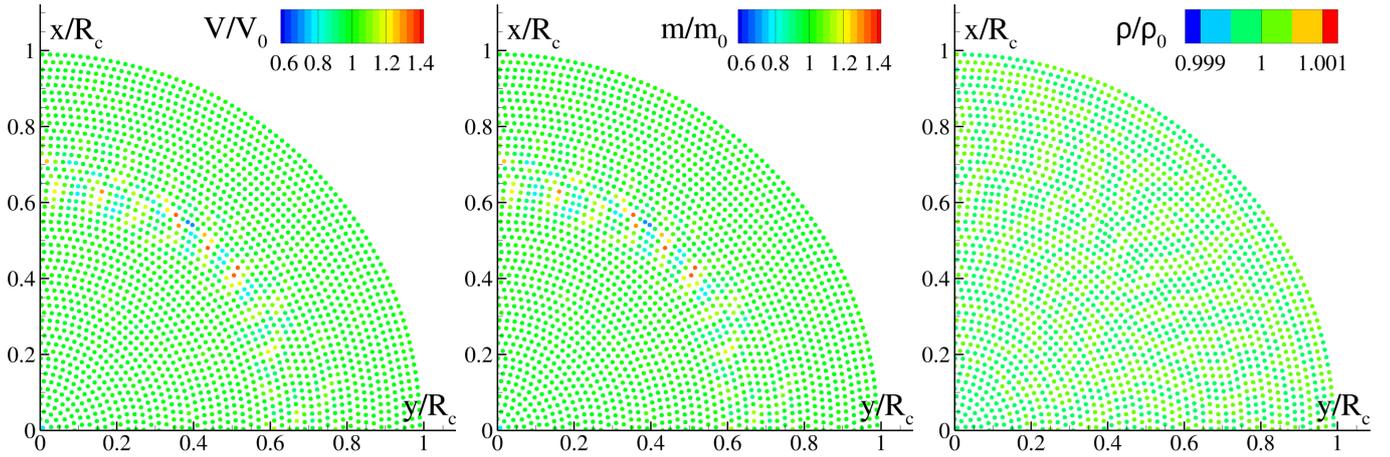


FIGURE 2.8 – Patch circulaire soumis uniquement à une loi de PST à divergence nulle en 2D. Résultats obtenus avec le schéma *hybride I* (2.9)-(2.12) à $t\delta u_{max}/R_c = 5$ avec une discrétisation spatiale de $R_c/\Delta x = 50$. Gauche : volume. Centre : masse définie par $m = \rho V$. Droite : densité.

2.3 Formulation hybride à flux de masse nul : Colagrossi *et al.* [18]

A l'instar de ce qui a été fait dans la section précédente, en partant du schéma ALE semi-discrétisé (1.23)-(1.26) écrit en utilisant les variables $(\rho, \rho V, \rho V u)$, et en posant $u_{0i} = u_i + \delta u_i$, on obtient en omettant les termes relatifs à la viscosité :

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i + \delta u_i, \quad (2.14)$$

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\rho_i \nabla \cdot u_i + \nabla \cdot (\rho_i \delta u_i) - \rho_i \nabla \cdot \delta u_i, \quad (2.15)$$

$$\frac{d(V_i \rho_i)}{dt} = 0 + V_i \nabla \cdot (\rho_i \delta u_i), \quad (2.16)$$

$$\frac{d(V_i \rho_i u_i)}{dt} = \underbrace{-V_i \nabla P_i + V_i \rho_i g}_{\text{partie Lagrangienne}} + \underbrace{V_i \nabla \cdot (\rho_i u_i \otimes \delta u_i)}_{\text{partie relative à la PST}}. \quad (2.17)$$

Afin de pallier le problème de variation de masse et de volume observé avec des schémas dérivés de ce formalisme ALE, des formulations alternatives à l'introduction d'un terme diffusif dans l'équation de la masse, ont été proposées par Colagrossi *et al.* [18]. L'une de ces alternatives consiste à supprimer les échanges de masse entre particules. Pour ce faire, les auteurs proposent de substituer l'équation (2.16) par $\frac{d(V_i \rho_i)}{dt} = 0$. Les opérateurs différentiels apparaissant dans l'équation d'évolution de la masse volumique et de quantité de mouvement sont quant à eux discrétisés de la même manière que dans la section précédente, i.e. en utilisant

(i) $\langle \nabla \cdot \mathbf{u}_i \rangle^-$ et $\langle \nabla \cdot \delta \mathbf{u}_i \rangle^-$, (ii) $\langle \nabla \cdot (\rho_i \delta \mathbf{u}_i) \rangle^+$, (iii) $\langle \nabla P_i \rangle^+$ et $\langle \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{u}_i \otimes \delta \mathbf{u}_i) \rangle^+$. Enfin, le schéma est stabilisé en utilisant les termes diffusifs δ (1.78) et (1.84). Ce schéma s'écrit finalement comme la somme d'une partie Lagrangienne, d'une partie relative à la PST et de termes de stabilisation de la manière suivante :

$$\frac{dx_i}{dt} = \mathbf{u}_i + \delta \mathbf{u}_i, \quad (2.18)$$

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\rho_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j + \Pi_{i,\delta}^{(\rho)} + \sum_{j \in \mathcal{D}_i} [\rho_i (\delta \mathbf{u}_i - \delta \mathbf{u}_j) + \rho_i \delta \mathbf{u}_i + \rho_j \delta \mathbf{u}_j] \cdot \nabla_i W_{ij} V_j, \quad (2.19)$$

$$\frac{d(V_i \rho_i)}{dt} = 0, \quad (2.20)$$

$$\frac{d(V_i \rho_i \mathbf{u}_i)}{dt} = \underbrace{-V_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (P_i + P_j) \nabla_i W_{ij} V_j + V_i \rho_i \mathbf{g}}_{\text{partie Lagrangienne}} + \underbrace{\Pi_{i,\delta}^{(V\rho u)}}_{\text{Stabilisation}} + \underbrace{V_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\rho_i \mathbf{u}_i \otimes \delta \mathbf{u}_i + \rho_j \mathbf{u}_j \otimes \delta \mathbf{u}_j) \nabla_i W_{ij} V_j}_{\text{partie relative à la PST}}. \quad (2.21)$$

Dans ce schéma, la masse des particules n'évolue pas au cours du temps, ainsi il ne s'agit pas d'un schéma ALE. Dans le même temps, la vitesse de PST est prise en compte dans les équations de continuité et de quantité de mouvement, d'où l'appellation hybride à flux de masse nul de ce schéma. Ce dernier permet de s'affranchir des problèmes de dérive, tout en supprimant les flux de masse [92]. Il est à noter que récemment Sun *et al.* [88] ont proposé une autre formulation hybride à flux de masse nul. Le schéma obtenu étant similaire à (2.18)-(2.21) à la différence près qu'un terme supplémentaire apparaît dans l'équation de quantité de mouvement. Ce terme s'écrit :

$$-\rho_i V_i \mathbf{u}_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\delta \mathbf{u}_i - \delta \mathbf{u}_j) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j,$$

et a le désavantage de ne pas être conservatif. Néanmoins, pour les cas tests étudiés dans [88], il joue un rôle négligeable et le fait d'introduire ou non ce terme n'influence pas de manière conséquente les résultats [88].

2.4 Formulations hybrides à flux de masse nul avec stabilisation par solveur de Riemann

2.4.1 Formulation hybride de Colagrossi *et al.* [18] stabilisée par solveur de Riemann

Comme expliqué précédemment, expliciter un terme de stabilisation dans l'équation de la masse issu de la résolution de problèmes de Riemann n'est pas chose aisée. En revanche, adapter la formulation hybride à flux de masse nul (2.18)-(2.21) de Colagrossi *et al.* [18] au solveur de Riemann est direct. En effet, il suffit de substituer les termes diffusifs $\Pi_{i,\delta}^{(\rho)}$ et $\Pi_{i,\delta}^{(V\rho u)}$ apparaissant respectivement dans (2.19) et (2.21) par les termes issus des solutions aux problèmes de Riemann $\Pi_{i,Rie}^{(V)}$ (1.110) et $\Pi_{i,Rie}^{(V\rho u)}$ (1.111). Ce schéma (nommé dans la suite du manuscrit *hybride II*), dont l'équation de continuité est ici écrite en matière d'évolution du volume devient

alors :

$$\frac{dx_i}{dt} = \mathbf{u}_i + \delta \mathbf{u}_i, \quad (2.22)$$

$$\frac{dV_i}{dt} = V_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j + \Pi_{i,Rie}^{(V)} + V_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} \left[(\delta \mathbf{u}_j - \delta \mathbf{u}_i) - \frac{\rho_i \delta \mathbf{u}_i + \rho_j \delta \mathbf{u}_j}{\rho_i} \right] \cdot \nabla_i W_{ij} V_j, \quad (2.23)$$

$$\frac{d(V_i \rho_i)}{dt} = 0, \quad (2.24)$$

$$\frac{d(V_i \rho_i \mathbf{u}_i)}{dt} = \underbrace{-V_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (P_i + P_j) \nabla_i W_{ij} V_j + V_i \rho_i \mathbf{g}}_{\text{partie Lagrangienne}} + \underbrace{\Pi_{i,Rie}^{(V\rho\mathbf{u})}}_{\text{Stabilisation}} + \underbrace{V_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\rho_i \mathbf{u}_i \otimes \delta \mathbf{u}_i + \rho_j \mathbf{u}_j \otimes \delta \mathbf{u}_j) \nabla_i W_{ij} V_j}_{\text{partie relative à la PST}}. \quad (2.25)$$

Si l'on s'intéresse à l'équation d'évolution du volume (2.23) et en particulier à la partie relative à la PST, on remarque que même en considérant un champ $\delta \mathbf{u}$ constant, rien n'empêche le volume des particules d'évoluer, du fait de la non-consistance à l'ordre 0 du terme $\sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\rho_i \delta \mathbf{u}_i + \rho_j \delta \mathbf{u}_j) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j$, correspondant à l'approximation $\langle \nabla \cdot (\rho_i \delta \mathbf{u}_i) \rangle$ par l'opérateur "plus" (1.47). Pour pallier ce problème, une seconde formulation hybride à flux de masse nul est proposée dans la suite.

2.4.2 Formulation hybride sans variation de volume pour un champ $\delta \mathbf{u}$ constant

Considérons le schéma ALE semi-discrétisé (2.14)-(2.17) et posons $\nabla \cdot (\rho_i \delta \mathbf{u}_i) = 0$ dans (2.16) afin de supprimer les échanges de masse entre particules. Puis – contrairement à Colagrossi *et al.* [18] – utilisons $\nabla \cdot (\rho_i \delta \mathbf{u}_i) = 0$ dans les autres équations. Le schéma s'écrit alors sous la forme semi-discrétisée suivante :

$$\frac{dx_i}{dt} = \mathbf{u}_i + \delta \mathbf{u}_i, \quad (2.26)$$

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\rho_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i + -\rho_i \nabla \cdot \delta \mathbf{u}_i, \quad (2.27)$$

$$\frac{d(V_i \rho_i)}{dt} = 0 + 0, \quad (2.28)$$

$$\frac{d(V_i \rho_i \mathbf{u}_i)}{dt} = \underbrace{-V_i \nabla P_i + V_i \rho_i \mathbf{g}}_{\text{partie Lagrangienne}} + \underbrace{V_i \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{u}_i \otimes \delta \mathbf{u}_i)}_{\text{partie relative à la PST}}. \quad (2.29)$$

Une remarque importante concernant cette forme semi-discrète est que le fait d'utiliser l'égalité $\nabla \cdot (\rho_i \delta \mathbf{u}_i) = 0$ dans toutes les équations conduit à cette forme, que le schéma semi-discrétisé soit écrit initialement avec $(V, \rho V, \rho V \mathbf{u})$ ou avec $(\rho, \rho V, \rho V \mathbf{u})$. En effet, que l'on parte de (2.5)-(2.8) ou de (2.14)-(2.17), le fait de considérer $\nabla \cdot (\rho_i \delta \mathbf{u}_i) = 0$ dans toutes les équations implique que la forme obtenue est dans les deux cas strictement équivalente à (2.26)-(2.29). Ceci n'est plus vrai si l'on considère $\nabla \cdot (\rho_i \delta \mathbf{u}_i) = 0$ uniquement dans l'équation de la masse. Dans ce cas, le terme supplémentaire $\nabla \cdot (\rho_i \delta \mathbf{u}_i)$ apparaît lorsque l'on considère initialement le schéma écrit sous la forme (2.14)-(2.17).

La forme discrète du schéma est finalement obtenue en utilisant les opérateurs différentiels $\langle \nabla \cdot \mathbf{u}_i \rangle^-$ et $\langle \nabla \cdot \delta \mathbf{u}_i \rangle^-$, (ii) $\langle \nabla P_i \rangle^+$ et $\langle \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{u}_i \otimes \delta \mathbf{u}_i) \rangle^+$, et les termes de stabilisation issus de la résolution de problèmes de Riemann (1.110) et (1.111) :

$$\frac{dx_i}{dt} = \mathbf{u}_i + \delta \mathbf{u}_i, \quad (2.30)$$

$$\frac{dV_i}{dt} = V_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j + \Pi_{i,Rie}^{(V)} + V_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\delta \mathbf{u}_j - \delta \mathbf{u}_i) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j, \quad (2.31)$$

$$\frac{d(V_i \rho_i)}{dt} = 0, \quad (2.32)$$

$$\frac{d(V_i \rho_i \mathbf{u}_i)}{dt} = \underbrace{-V_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (P_i + P_j) \nabla_i W_{ij} V_j + V_i \rho_i \mathbf{g}}_{\text{partie Lagrangienne}} + \underbrace{\Pi_{i,Rie}^{(V\rho u)}}_{\text{Stabilisation}} + \underbrace{V_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (\rho_i \mathbf{u}_i \otimes \delta \mathbf{u}_i + \rho_j \mathbf{u}_j \otimes \delta \mathbf{u}_j) \nabla_i W_{ij} V_j}_{\text{partie relative à la PST}}. \quad (2.33)$$

Ici, le schéma (nommé *hybride III*) est stabilisé par l'utilisation d'un solveur de Riemann (termes diffusifs définis par (1.110) et (1.111)) mais il n'y a, a priori pas de contre-indication à utiliser une autre technique de stabilisation. Par ailleurs, les formulations hybrides étudiées dans cette thèse possèdent toutes – à l'instar du schéma de Colagrossi *et al.* – la qualité de dériver vers le schéma Lagrangien (1.92)-(1.95) quand $\delta \mathbf{u} \rightarrow 0$.

2.4.3 Validation des formulations hybrides à flux de masse nul : *hybride II* et *III*

2.4.3.1 Cas d'un patch circulaire de fluide soumis uniquement à une vitesse de PST

Sur la figure 2.9, l'évolution temporelle de ρ_{max}/ρ_0 sur le cas du patch circulaire proposé dans la section 2.2 est représentée pour les formulations *hybrides I*, *II* et *III*, où $\rho_{max} = \max_i \rho_i$. Comme nous pouvons le voir, avec les formulations *hybrides I* et *II*, la solution finit par diverger pour toutes les discrétisations spatiales testées. En ce qui concerne la formulation *hybride III* (2.30)-(2.33) introduite dans cette thèse, la solution reste quasi-constante pour les deux discrétisations les plus grossières. Néanmoins avec $R_c/\Delta x = 200$, le schéma devient instable à partir de $t\delta u_{max}/R_c = 2.5$. Par conséquent, le fait d'utiliser une formulation hybride à flux de masse nul ne semble pas détériorer les solutions par rapport à un schéma hybride dérivé du formalisme ALE. De plus la formulation *hybride III* introduite dans cette thèse améliore les résultats sur ce cas.

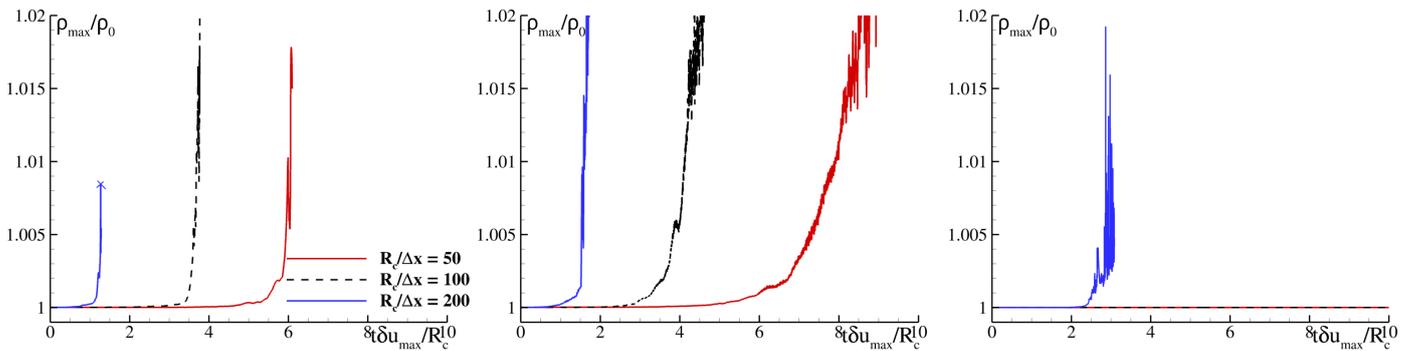


FIGURE 2.9 – Patch circulaire soumis uniquement à une loi de PST à divergence nulle en 2D. Evolution temporelle de ρ_{max}/ρ_0 pour trois discrétisations spatiales. Gauche : *hybride I* (2.9)-(2.12) (la croix bleue indiquant que la simulation a planté). Centre : *hybride II* (2.22)-(2.25). Droite : *hybride III* (2.30)-(2.33).

Une remarque importante est que la déstabilisation des schémas se produit d'autant plus tôt que la discrétisation spatiale est fine. Or dans ce cas test, $\delta \mathbf{u}$ est indépendante de la discrétisation spatiale dans le sens où $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \delta \mathbf{u} = cste \neq 0$. Par ailleurs $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \delta \mathbf{r} = 0$ du fait de la condition régissant le pas de temps (1.148), où $\delta \mathbf{r}$ est, pour rappel, le déplacement induit par la vitesse de PST. Ainsi, il semble que ne pas respecter la condition $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \delta \mathbf{u} = 0$ soit un problème en soi, y compris avec un schéma dérivé d'un formalisme ALE, et

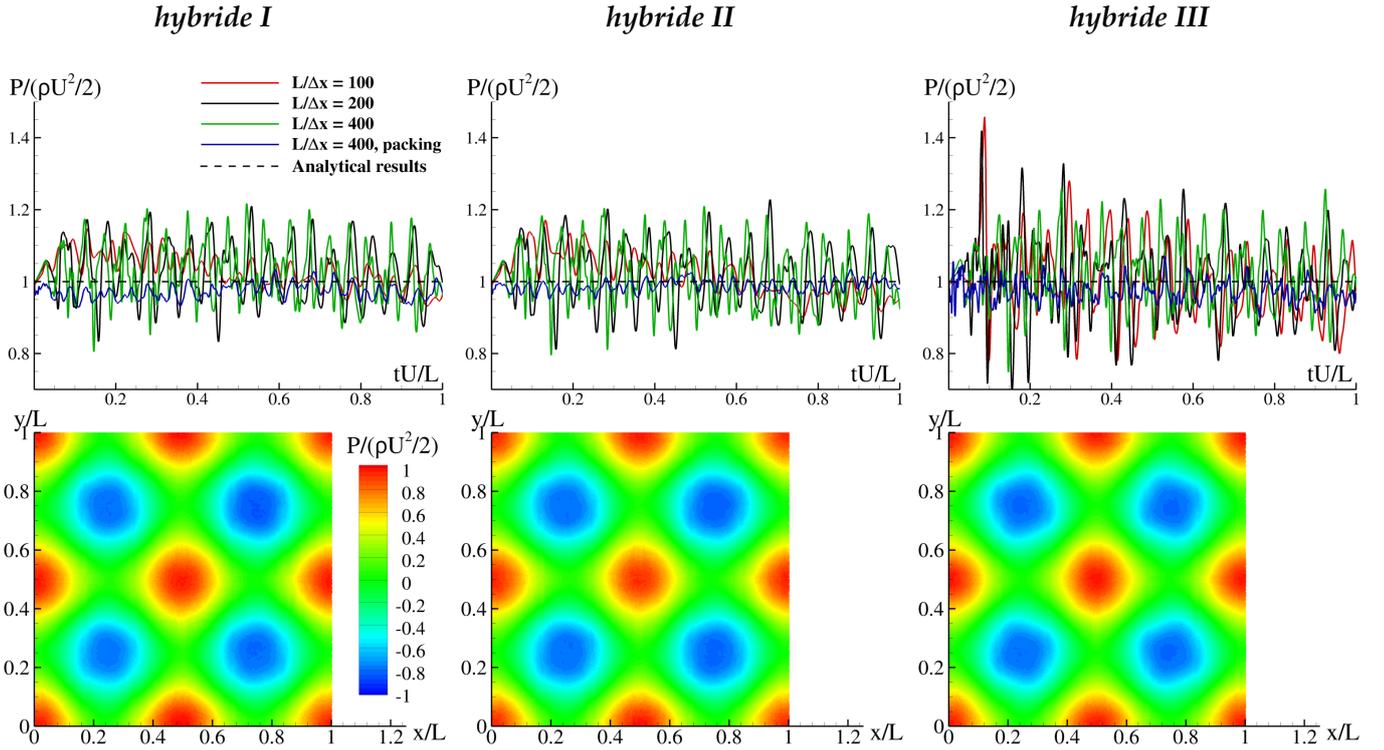


FIGURE 2.10 – Tourbillons de Taylor-Green non-visqueux en 2D avec $\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}^{\text{OEA}}$. Haut : évolution temporelle de la pression au centre du domaine pour trois discrétisations spatiales avec comparaison à la solution analytique (ligne noire en pointillé). Bas : champ de pression à $tU/L = 1$ avec $L/\Delta x = 400$ et une distribution initiale Cartésienne. De gauche à droite : *hybride I* (2.9)-(2.12), *hybride II* (2.22)-(2.25), *hybride III* (2.30)-(2.33).

que la condition équivalente sur le déplacement $\delta \mathbf{r}$ ne suffise pas. Cette observation fait partie des raisons qui nous ont amenés à travailler sur la loi de PST elle-même (voir Chapitre 3).

2.4.3.2 Vérification de la non-dérive des formulations hybrides à flux de masse nul

Concernant le cas des tourbillons de Taylor-Green, nous pouvons observer sur la figure 2.10 qu'il n'y pas de dérive en pression avec les schémas à flux de masse nul *hybride II* et *III* (le schéma *hybride I* est représenté ici à titre de comparaison). Ceci rejoint les conclusions de Sun *et al.* [88, 92] concernant la dérive en pression, absente avec des schémas à flux de masse nul stabilisés par δ , dans lesquels la PST est également prise en compte dans les équations de quantité de mouvement et de masse volumique. Ainsi, que l'on travaille en δ -SPH ou en Riemann, les observations concernant l'utilisation de schémas hybrides à flux de masse nul sont similaires.

Les schémas *hybride I* et *II* donnent des résultats similaires tandis qu'avec le schéma *hybride III* le signal de pression au centre du domaine est plus bruité, les oscillations apparaissant notamment lorsque le champ $\delta \mathbf{u}$ est irrégulier comme par exemple au début de la simulation. Pour les trois schémas, il est possible d'améliorer le champ de pression en partant non plus d'une distribution Cartésienne de particules mais en utilisant l'algorithme de packing de Colagrossi *et al.* [20] pour initialiser le cas. Afin d'éviter les doublons, la validation / comparaison de ces schémas sur ce cas sera poursuivie dans le chapitre suivant, une fois les améliorations sur la loi de PST effectuées.

Pour le cas de la cuve en ballotement présenté en figure 2.11, le volume occupé par le fluide n'augmente pas avec les formulations hybrides. Là-encore, cela rejoint les conclusions de Sun *et al.* [88, 92] en δ -SPH concernant la non-dérive du volume lorsque des formulations hybrides à flux de masse nul sont utilisées.

Les résultats obtenus ici au niveau du champ de pression sont similaires entre les schémas *hybride I* et *II*. Avec le schéma *hybride III* le champ de pression est par contre plus bruité. Comme pour le cas des tourbillons de Taylor-Green, ceci est dû à la non-régularité de δu .

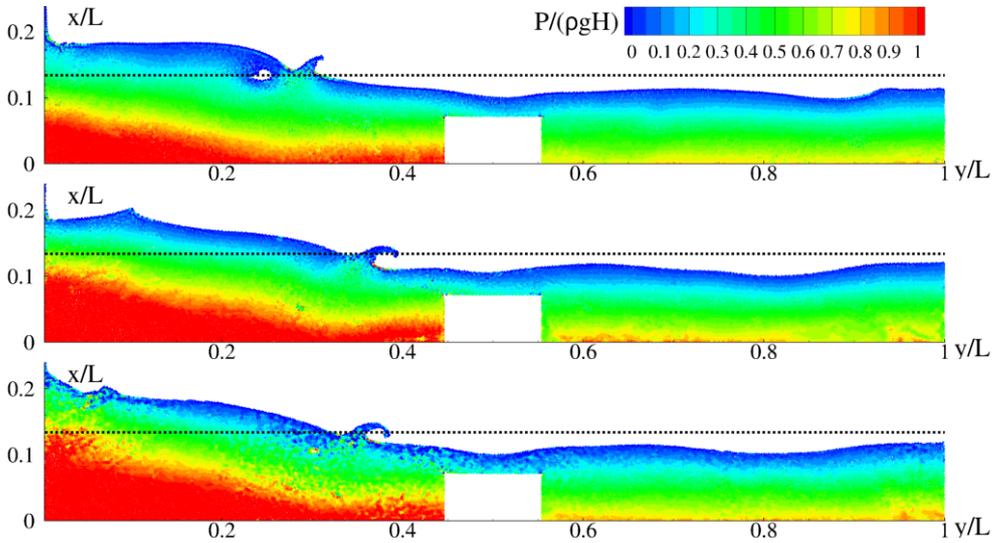


FIGURE 2.11 – Cuve en ballotement pour un fluide non-visqueux en 2D avec $\delta u = \delta u^{OEA}$. Champ de pression à $t/T = 7.72$ pour une discrétisation spatiale de $L/\Delta x = 448$ avec $R/\Delta x = 4$. La ligne noire en pointillée représente la hauteur d'eau initiale. Haut : *hybride I* (2.9)-(2.12). Centre : *hybride II* (2.22)-(2.25). Bas : *hybride III* (2.30)-(2.33).

2.5 Discussion

Dans ce chapitre, différents schémas SPH faisant intervenir une vitesse de PST ont été étudiés. Nous avons dans un premier temps montré que le fait de considérer la vitesse de PST uniquement dans l'équation de la trajectoire engendrait des solutions non-physiques dans certains cas, et ce peu importe le terme de stabilisation du schéma utilisé. Nous avons aussi observé que les problèmes s'atténuent avec le deuxième critère de convergence $\Delta x/R \rightarrow 0$, qu'il est malheureusement impossible de satisfaire en pratique comme souligné en section 1.2.2.

Ensuite, nous avons observé qu'en utilisant un schéma dérivé d'un formalisme ALE (*hybride I*) ces problèmes de dérive n'apparaissent pas, mais en contrepartie de fortes variations de masse et de volume de particules isolées surviennent, tendant à perturber la simulation.

Du fait de la difficulté d'exhiber un terme de stabilisation dans l'équation d'évolution de la masse (2.11) avec stabilisation de Riemann – comme proposé par Colagrossi *et al.* [18] avec stabilisation δ -SPH –, nous nous sommes focalisés sur les formulations hybrides pour lesquelles les échanges de masse sont prohibés, la vitesse de PST étant malgré tout prise en compte dans les équations de continuité et de quantité de mouvement. La première formulation hybride à flux de masse nul (*hybride II*) est directement dérivée de celle introduite dans [18], et son adaptation à un solveur de Riemann est proposée ici. Une seconde formulation hybride à flux de masse nul (*hybride III*) est enfin introduite afin de respecter la non-variation de volume pour un champ δu constant. L'utilisation de ces formulations hybrides à flux de masse nul permet à la fois (i) d'éviter les problèmes observés sur la solution, (ii) de s'affranchir de la variation de la masse des particules. De plus, ces deux formulations hybrides possèdent la caractéristique de dériver vers le schéma Lagrangien (1.92)-(1.95) quand $\delta u \rightarrow 0$. Comme nous avons pu le voir, la formulation hybride dérivée de Colagrossi *et al.* (*hybride II*) donne des résultats très satisfaisants en ce qui concerne le champ de pression sur les cas des tourbillons de Taylor-Green et de la cuve en ballotement. La seconde formulation (*hybride III*) est quant à elle plus stable sur le cas test piloté par δu à divergence nulle, mais le champ de pression est plus bruité sur les autres cas. Ainsi, il semble que cette formulation soit la plus sensible aux irrégularités de δu .

Ces formulations hybrides à flux de masse nul sont par conséquent très prometteuses. Malheureusement, la méthode BIM-CFA de traitement surfacique des frontières n'est à ce jour pas développée pour de telles formulations (voir tableau 2.1). De notre point de vue, ceci constitue un axe de recherche intéressant pour la suite afin de pouvoir simuler des écoulements avec des parois complexes, comme par exemple l'application à l'hydroplanage visée dans cette thèse.

	Solution physique (pas de dérive)	Masse des particules constante	Méthode BIM-CFA développée
δu uniquement dans $\frac{dx}{dt}$	Non (sauf éventuellement à convergence)	Oui	Oui (Parshikov & Medin)
Schémas dérivés du formalisme ALE (dont <i>hybride I</i>)	Oui	Non (mais variation faible pour δ -SPH avec $\Pi_{i,\delta}^{(\rho V)}$ (1.82))	Non
Schémas hybrides à flux de masse nul (dont <i>hybride II</i> et <i>III</i>)	Oui	Oui	Non

TABLE 2.1 – Résumé de différentes caractéristiques des schémas avec PST étudiés dans ce chapitre.

Au cours de ce travail sur différents schémas SPH, nous avons été amenés à analyser en détail la PST de Oger *et al.* [73]. Sont alors apparues des pistes d'amélioration, notamment concernant la convergence de la vitesse de PST, i.e. $\delta u \rightarrow 0$ quand $\Delta x \rightarrow 0$. Ceci fait l'objet du prochain chapitre.

Chapitre 3

Etude et amélioration de la PST

Le fait d'introduire du désordre particulaire afin de casser les lignes Lagrangiennes inhérentes à la méthode SPH est de plus en plus étudié dans la littérature (cf. section 1.5). Depuis la première PST introduite par Monaghan [64], de nombreuses améliorations ont été apportées au sein de la communauté SPH, notamment en se basant sur la loi de Fick. Néanmoins, les conditions que doivent respecter une PST ne sont pas clairement discutées dans la littérature. L'objet de ce chapitre est donc de pallier ce manque en définissant une liste de conditions, puis en proposant une méthodologie pour les satisfaire. Pour ce faire, une étude théorique des lois proposées dans la littérature est effectuée, en se basant notamment sur les travaux de Quinlan et al. [79] sur l'erreur de troncature. De cette étude théorique, nous déduisons directement une nouvelle PST qui, à la différence des lois existantes, est basée sur la vitesse relative des particules. Ce simple changement permet de satisfaire des conditions telles que la consistance, l'invariance par translation rectiligne uniforme, et l'indépendance de la PST par rapport au comportement global de l'écoulement. De plus, la PST introduite ici présente l'avantage de ne pas faire intervenir c_0 , et devrait donc a priori être utilisable avec des schémas SPH incompressibles.

Dans l'application visée, la surface libre subit de grandes déformations. Par ailleurs, dans de nombreuses zones de l'écoulement, le fluide est en contact direct avec le pneumatique, engendrant la présence de nombreux points/lignes triples surface libre/paroi solide. Par conséquent dans ce travail, après avoir validé la PST à l'intérieur du fluide, une attention particulière est portée sur la PST dans ces trois zones spécifiques (uniquement surface libre, uniquement paroi, point/ligne triple). En présence de parois solides, la PST est dans un premier temps étudiée avec la méthode des particules fantômes, cette dernière étant développée pour tous les schémas SPH utilisés ici. Ensuite, la méthode surfacique de traitement des frontières BIM-CFA étant particulièrement appropriée pour l'application visée [14, 38], une adaptation de la PST en présence de parois discrétisées de manière surfacique est proposée, puis validée en 2D et 3D avec le schéma de Parshikov & Medin et BIM-CFA.

L'étude et l'amélioration de la PST font l'objet d'une publication [62] dans un journal. Dans cette publication, cette loi est validée pour les schémas de Vila (1.102)-(1.105), de Parshikov & Medin (1.106)-(1.109) et δ -SPH (1.74)-(1.77), afin de montrer son applicabilité à des schémas utilisant (i) différents termes de stabilisation (δ -SPH vs Riemann), (ii) différentes façons de prendre en compte la PST dans leurs équations (uniquement dans l'équation de la trajectoire vs schéma dérivé d'un formalisme ALE). Il n'est en revanche pas question de comparaison entre les schémas eux-mêmes, notamment car la valeur du coefficient de diffusion α choisie pour δ -SPH joue un rôle prépondérant quant à la diffusion numérique.

En revanche, dans ce chapitre, nous profitons de la validation de la nouvelle PST proposée pour comparer différents schémas stabilisés par Riemann. Ainsi, les schémas utilisés ici pour la validation sont différents de ceux utilisés dans la publication (excepté Parshikov & Medin qui est commun aux deux). Malgré tout, les conclusions concernant les améliorations apportées par la nouvelle PST sont similaires, et nous invitons le lecteur à se référer à la publication en ce qui concerne les résultats obtenus avec les schémas de Vila et δ -SPH.

3.1 Résumé via une forme générique des vitesses de PST introduites dans la section 1.5

Les vitesses de PST introduites dans la section 1.5 basées sur la loi de Fick peuvent être construites en suivant le procédé suivant : (i) utiliser un vecteur pointant vers les zones de faible concentration en particules $\tilde{\nabla}C_i$, (ii) choisir une distance caractéristique d^{char} liée au noyau, (iii) choisir une vitesse caractéristique U^{char} , (iv) limiter l'amplitude de la PST via une vitesse limite U^{lim} . Ainsi, une manière générique d'écrire ces vitesses de PST est la suivante :

$$\delta \mathbf{u}_i^{gen} = \begin{cases} U^{char} d^{char} \tilde{\nabla}C_i & \text{si } \|U^{char} d^{char} \tilde{\nabla}C_i\| < U^{lim}, \\ U^{lim} \frac{\tilde{\nabla}C_i}{\|\tilde{\nabla}C_i\|} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.1)$$

et les paramètres permettant de construire les vitesses de PST présentées dans la section 1.5 sont répertoriés dans le tableau 3.1.

	Distance caractéristique d^{char}	Vitesse caractéristique U^{char}	Vecteur pointant vers le vide $\tilde{\nabla}C_i$	Limitation U^{lim}
Lind <i>et al.</i> [51]	h	$\frac{h}{\Delta t}$	$-\hat{\nabla}C_i$	$0.2 \frac{h}{\Delta t}$
Oger <i>et al.</i> [73]	R	$Ma c_0$	$-\nabla C_i$	$0.25 \ \mathbf{u}_i\ $
Sun <i>et al.</i> [88]	$2h$	$Ma c_0$	$-\hat{\nabla}C_i$	$0.5 U_{max}$

TABLE 3.1 – Résumé des différentes vitesses de PST basées sur la loi de Fick.

Ainsi, pour toutes les vitesses de PST du tableau 3.1, d^{char} est fixe durant toute la simulation et est identique pour toutes les particules (sans méthode de raffinement particulière). Autrement dit, il est constant dans l'espace et dans le temps. Du fait de la relation liant h et R une fois le noyau fixé (cf. section 1.2.1.1), nous utiliserons dans la suite R en lieu et place de d^{char} , les résultats théoriques énoncés par la suite dans ce chapitre étant valable aussi bien avec $d^{char} = h$ qu'avec $d^{char} = R$.

Concernant U^{char} , les valeurs de Ma et de c_0 étant estimées a priori dans Oger *et al.* [73] et Sun *et al.* [88], il est constant dans l'espace et dans le temps. Avec la vitesse de PST dérivée de Lind *et al.* [51], c'est également le cas avec l'hypothèse faiblement compressible, du fait du calcul du pas de temps (cf. équation (1.148)). En revanche, avec l'hypothèse incompressible, cette vitesse est variable en temps de par l'utilisation d'une condition CFL basée sur la vitesse Lagrangienne maximale dans l'écoulement. Elle reste en revanche constante dans l'espace.

La vitesse de limitation U^{lim} est également constante dans l'espace et dans le temps dans [88], tandis qu'elle est variable dans l'espace et dans le temps dans [73]. Pour la vitesse de PST dérivée de [51], les observations sont similaires entre U^{lim} et U^{char} .

Par ailleurs, nous pouvons observer que les vitesses de PST de Oger *et al.* et de Sun *et al.* ne sont pas compatibles avec l'hypothèse incompressible (du fait de l'utilisation de c_0), et que celle de Lind *et al.* se traduit différemment que l'on utilise l'hypothèse faiblement compressible ou incompressible, comme expliqué ci-dessus.

3.2 Conditions que doit remplir une PST et méthodologie pour les satisfaire

Cette section traite des conditions qui, de notre point de vue, doivent être remplies par une PST. La première condition concerne la convergence vers $\mathbf{0}$ de la vitesse de PST $\delta \mathbf{u}$ quand $\Delta x \rightarrow 0$. La deuxième condition est l'invariance par translation rectiligne uniforme de $\delta \mathbf{u}$, comme proposé initialement par Monaghan [64] à laquelle on se propose d'ajouter l'invariance par rotation locale. La dernière condition est quant à elle l'invariance entre la PST (locale) et le comportement global du fluide.

3.2.1 Condition 1 : consistance de la vitesse de PST

Lorsqu'on travaille avec un schéma dans lequel la vitesse de PST n'est prise en compte que dans l'équation de la trajectoire, la condition

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \delta \mathbf{u}_i = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

est nécessaire pour obtenir la convergence vers le schéma Lagrangien. Ceci est aussi vrai avec un schéma hybride. Pour un schéma dérivé d'un formalisme ALE, le besoin de convergence vers un schéma Lagrangien n'est a priori pas nécessaire théoriquement, mais comme nous avons pu le voir dans la section 2.4.3.1, ne pas respecter la condition (3.2) peut engendrer en pratique une déstabilisation du schéma. Ainsi, respecter cette condition semble préférable quel que soit le schéma adopté. De plus, le second critère de convergence de la méthode SPH ($\Delta x/R \rightarrow 0$) ne pouvant pas être satisfait en pratique, la condition suivante semble plus appropriée :

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \frac{R}{\Delta x} = cst}} \delta \mathbf{u}_i = \mathbf{0} . \quad (3.3)$$

3.2.1.1 Etude théorique de ∇C_i

Afin d'étudier les propriétés de convergence de ∇C_i , nous nous basons sur les travaux effectués par Quinlan et al. [79] concernant l'erreur de troncature de cet opérateur. D'après [79], l'erreur de troncature avec une fonction $A(x)$ peut être estimée en 1D par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{D}_i} A_j \nabla W_{ij} V_j - A'_i &= \frac{A_i}{R} \left[\xi O \left(\left(\frac{\Delta x}{R} \right)^3 \right) + \frac{1}{2} \left(\xi^2 + \frac{1}{12} \right) O \left(\left(\frac{\Delta x}{R} \right)^4 \right) \right] \\ &+ A'_i \left[\xi O \left(\left(\frac{\Delta x}{R} \right)^3 \right) + O \left(\left(\frac{\Delta x}{R} \right)^4 \right) \right] \\ &+ A''_i R \left[\xi O \left(\frac{\Delta x}{R} \right) + O \left(\left(\frac{\Delta x}{R} \right)^4 \right) \right] + \dots , \end{aligned} \quad (3.4)$$

dans laquelle ξ (δ dans la publication originale) est une mesure du désordre dans la distribution des particules. Ici, on s'intéresse à ∇C_i calculé via l'approximation de $\nabla 1$, i.e. au cas où $A \equiv 1$ dans la formule précédente. On obtient ainsi :

$$\nabla C_i := \sum_{j \in \mathcal{D}_i} \nabla W_{ij} V_j = \frac{1}{R} \left[\xi O \left(\left(\frac{\Delta x}{R} \right)^3 \right) + \frac{1}{2} \left(\xi^2 + \frac{1}{12} \right) O \left(\left(\frac{\Delta x}{R} \right)^4 \right) \right] . \quad (3.5)$$

En multipliant cette équation par R , nous obtenons qu'à ratio $R/\Delta x$ constant :

$$R \nabla C_i = O(1) . \quad (3.6)$$

Or, pour toutes les vitesses de PST du tableau 3.1, la vitesse caractéristique U^{char} est également $O(1)$, et ainsi $U^{char} R \nabla C_i = O(1)$. La vitesse de limitation U^{lim} étant également $O(1)$, on peut en déduire que, pour toutes ces PST :

1. En matière de vitesse δu_i est $O(1)$ et donc :

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \frac{R}{\Delta x} = cst}} \delta u_i \neq 0. \quad (3.7)$$

2. En matière de déplacement δr_i est $O(\Delta x)$ et donc :

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \frac{R}{\Delta x} = cst}} \delta r_i = 0. \quad (3.8)$$

Cette propriété est d'ailleurs vérifiée numériquement dans [88].

3.2.1.2 Extension de cette étude en présence d'une surface libre

Les propriétés de convergence de δu_i ont été étudiées ci-dessus pour une particule située dans le fluide. La formule (3.4) n'est en revanche pas valide lorsqu'une particule est située à la surface libre, où son noyau est tronqué. Afin de déterminer les propriétés de convergence à la surface libre, Alban Vergnaud, autre doctorant au sein du laboratoire, a montré (cf. [62]) en étendant les travaux de Quinlan *et al.* que l'erreur de troncature pour une fonction $A(x)$ sur un demi-noyau (en 1D) s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{D}_i/2} A_j \nabla W_{ij} V_j - A'_i &= \frac{A_i}{R} \left[O(1) + \xi O\left(\frac{\Delta x}{R}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} + \xi^2\right) O\left(\left(\frac{\Delta x}{R}\right)^2\right) \right] \\ &+ A'_i \left[O(1) + \xi O\left(\frac{\Delta x}{R}\right) + O\left(\left(\frac{\Delta x}{R}\right)^2\right) \right] \\ &+ A''_i R \left[\xi O\left(\frac{\Delta x}{R}\right) + O\left(\left(\frac{\Delta x}{R}\right)^2\right) \right] + \dots, \end{aligned} \quad (3.9)$$

où $\mathcal{D}_i/2$ représente le demi noyau. Ainsi, l'approximation de ∇C_i (i.e. $A \equiv 1$ dans (3.9)) pour une particule située à la surface libre devient :

$$\nabla C_i = \sum_{j \in \mathcal{D}_i/2} \nabla W_{ij} V_j = \frac{1}{R} \left[O(1) + \xi O\left(\frac{\Delta x}{R}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} + \xi^2\right) O\left(\left(\frac{\Delta x}{R}\right)^2\right) \right]. \quad (3.10)$$

Il en résulte que dans ce cas $R \nabla C_i$ est $O(1)$ même si le second critère de convergence $\Delta x/R \rightarrow 0$ est satisfait, et ainsi à la surface libre on a :

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \frac{\Delta x}{R} \rightarrow 0}} \delta u_i \neq 0, \quad (3.11)$$

pour toutes les lois listées dans le tableau 3.1.

3.2.1.3 Comment satisfaire la condition de consistance

Ainsi, pour qu'une vitesse de PST écrite sous la forme (3.1) respecte la condition de consistance (3.3), il suffit que :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} U^{char} = 0, \quad (3.12)$$

U^{char} pouvant à ce stade être locale ou globale. Par ailleurs, la condition de consistance ne nécessite pas théoriquement de critère sur la vitesse U^{lim} si la condition (3.12) est respectée. Dans le cas où (3.12) n'est pas respectée, utiliser une condition similaire sur U^{lim} est également suffisant.

Il est important de noter qu'utiliser $\widehat{\nabla} C_i$ (1.134) à la place de ∇C_i mène aux mêmes conclusions. En effet, les dérivées de la fonction A dans ce cas sont telles que $A^{(2k+1)} \equiv 0$ du fait de la symétrie du noyau, et $|A^{(2k)}| \leq \frac{C_k}{R^{2k}}$ où C_k est une constante qui dépend du ratio $\frac{R}{\Delta x}$ et du choix du noyau.

3.2.2 Condition 2 : invariance par translation rectiligne uniforme et rotation locale

Comme mentionné dans la section 1.5.1.1, la vitesse de PST introduite par Monaghan (1.132) possède la caractéristique d'être invariante par translation rectiligne uniforme. Cette condition nous paraît importante et on se propose d'y ajouter l'invariance par rotation locale. Or, la quantité $R \nabla C_i$ (ou $R \widehat{\nabla} C_i$) respecte ces conditions d'invariance. Ainsi, choisir une vitesse caractéristique U^{char} et une vitesse de limitation U^{lim} respectant les conditions d'invariance sont des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une vitesse de PST écrite sous la forme (3.1) les respecte. Utiliser la vitesse Lagrangienne des particules, qu'elle soit locale ou globale, ne permet pas de respecter les conditions d'invariance. Ainsi, les vitesses de PST du tableau 3.1 ne respectent pas les conditions d'invariance.

À l'inverse, utiliser par exemple la vitesse relative $\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i$ pour définir U_i^{char} et U_i^{lim} est suffisant, i.e. $U_i^{char} = f(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i)$ (et de même pour U_i^{lim}). Les vitesses U_i^{char} et U_i^{lim} sont ici (à l'inverse de celles du tableau 3.1) indicées par i signifiant qu'elles sont variables en espace. Elles sont également variables en temps, mais pour une question d'allègement des notations, la référence au temps t n'est pas explicitée dans la notation.

De plus, en utilisant un développement en série de Taylor à l'ordre 1 au point \mathbf{x}_i , nous obtenons théoriquement :

$$\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i \approx \overline{\nabla} \mathbf{u}_i (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i), \quad (3.13)$$

où $\overline{\nabla} \mathbf{u}_i$ est le gradient du vecteur vitesse en \mathbf{x}_i . Par conséquent, là où $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^1$ on a :

$$\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i = O(\Delta x). \quad (3.14)$$

Ainsi, définir U_i^{char} et U_i^{lim} avec $\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i$ permet à la vitesse de PST de respecter à la fois l'invariance par translation rectiligne uniforme, et la condition de consistance (3.3), là où $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^1$, avec un ordre de convergence théorique valant 1. Par ailleurs, une projection du type $(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|}$ permet d'assurer la condition d'invariance par rotation locale.

À titre d'exemples, l'emploi des vitesses caractéristiques (et de limitation) proposées dans les équations (3.15)-(3.17) permet à la vitesse de PST $\delta \mathbf{u}$ de satisfaire (i) la condition de consistance (3.3), (ii) les conditions d'invariance.

$$U_i^{char} = \min_{j \in \mathcal{D}_i} \left(\left| \omega_i(j) (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} \right| \right), \quad (3.15)$$

$$U_i^{char} = \left| \omega_i(j) (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} \right|_i, \quad (3.16)$$

$$U_i^{char} = \max_{j \in \mathcal{D}_i} \left(\left| \omega_i(j) (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} \right| \right), \quad (3.17)$$

où $\omega_i(j)$ est une fonction poids et $\bar{\cdot}_i$ représente la moyenne sur le support du noyau. Cette fonction poids pourrait être utile lors de reconnexion d'interface fluide/fluide, où $u_j - u_i$ peut être grand. Le poids pourrait alors être une fonction décroissante lorsque la particule j s'éloigne de i . Nous n'avons pas ressenti le besoin de l'utiliser pour l'instant en pratique, et dans la suite du manuscrit une telle fonction est prise comme $\omega_i \equiv 1$.

3.2.3 Condition 3 : indépendance entre PST locale et comportement global du fluide

La PST doit agir localement et non par rapport à la dynamique globale de l'écoulement. Dans un cas de dam-break par exemple, la vitesse Lagrangienne maximale est atteinte dans la langue d'eau juste avant son impact sur la paroi du réservoir, tandis que la dynamique est relativement faible partout ailleurs. Dans un tel cas, baser la PST sur une vitesse globale de l'écoulement (qu'elle soit constante ou variable dans le temps) implique que des zones de différentes dynamiques influent l'une sur l'autre au niveau de la PST. La dernière condition introduite dans cette thèse a ainsi pour objectif d'éviter cette propriété indésirable. Or $R\nabla C_i$ (ou $R\widehat{\nabla}C_i$) est une quantité qui agit localement et par conséquent elle ne dépend pas du comportement global du fluide. Les vitesses caractéristiques (3.15)-(3.17) étant par construction indépendantes de toute vitesse globale de l'écoulement, elles permettent de satisfaire la condition de localité souhaitée.

3.3 Proposition et validation d'une nouvelle PST

Dans cette section, on introduit une nouvelle vitesse de PST permettant le respect des conditions listées dans la section précédente. En plus du respect de ces conditions, nous verrons qu'elle possède la qualité d'être indépendante de c_0 , ce qui représente un gros avantage par rapport aux lois répertoriées dans le tableau 3.1. En effet, cela lui confère a priori une compatibilité avec l'hypothèse incompressible. Elle est en premier lieu introduite puis validée dans le fluide, puis dans un second temps en présence d'une surface libre, et enfin en présence d'une surface libre et d'une paroi. La validation est effectuée ici pour quatre schémas SPH présentant des différences dans la manière dont est prise en compte la PST, à savoir (i) pour le schéma de Parshikov & Medin pour lequel la PST est prise en compte uniquement dans l'équation de la trajectoire, (ii) pour un schéma dérivé du formalisme ALE pour lequel les échanges de masse sont autorisés (*hybride I*), (iii) pour les formulations hybrides à flux de masse nul pour lesquelles la PST est prise en compte dans les équations de continuité et de quantité de mouvement (*hybride II et III*).

3.3.1 Au sein du fluide

3.3.1.1 Proposition d'une nouvelle loi de PST

De l'analyse faite dans la section 3.2, on introduit ici une nouvelle vitesse de PST. Pour les particules situées dans le fluide (i.e. loin d'une surface libre et d'une paroi solide) nous proposons la forme :

$$\delta \mathbf{u}_i = \alpha \begin{cases} -U_i^{char} \beta_i R \widehat{\nabla} C_i & \text{si } \|\beta_i R \widehat{\nabla} C_i\| < \frac{1}{2} \frac{R}{\Delta x}, \\ -U_i^{char} \frac{1}{2} \frac{R}{\Delta x} \frac{\widehat{\nabla} C_i}{\|\widehat{\nabla} C_i\|} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.18)$$

où U_i^{char} est la vitesse caractéristique relative définie dans l'équation (3.17) (avec la fonction poids $\omega_i(j) \equiv 1$). $\widehat{\nabla} C_i$ est le vecteur défini dans (1.134), et β_i est un coefficient introduit pour contrebalancer le terme de plus bas degré apparaissant dans l'équation (3.5), typiquement $\beta_i = \left(\frac{R}{\Delta x}\right)^3$. A ce stade, β_i est constant dans l'espace et dans le temps (l'indice i est donc superflu), mais en présence d'une surface libre il deviendra variable

dans l'espace et dans le temps; nous avons donc indicé ce coefficient dès à présent. Enfin, α est le coefficient modulant l'amplitude de la vitesse de PST, fixé dans cette thèse à $\alpha = 0.5$. Théoriquement, $R \widehat{\nabla} C_i$ est $O(1)$ mais il est impossible de prédire sa valeur exacte a priori. Afin d'éviter que $\delta \mathbf{u}_i$ ne prenne des valeurs excessives en norme, une limitation est à l'instar des autres PST de la littérature prescrite avec la nouvelle PST. Afin de respecter les conditions d'invariance et d'indépendance, la vitesse de limitation est prise comme $U_i^{lim} = U_i^{char}$.

Avec ces choix pour α , β_i , et U_i^{char} l'expression de la PST validée par la suite est :

$$\delta \mathbf{u}_i = 0.5 \begin{cases} - \max_{j \in \mathcal{D}_i} \left(\left| (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} \right| \right) \left(\frac{R}{\Delta x} \right)^3 R \widehat{\nabla} C_i & \text{si } \left\| \left(\frac{R}{\Delta x} \right)^3 R \widehat{\nabla} C_i \right\| < \frac{1}{2} \frac{R}{\Delta x}, \\ - \max_{j \in \mathcal{D}_i} \left(\left| (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} \right| \right) \frac{1}{2} \frac{R}{\Delta x} \frac{\widehat{\nabla} C_i}{\|\widehat{\nabla} C_i\|} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.19)$$

En résumé, on peut construire le tableau suivant dans lequel sont présentées les propriétés théoriques de la PST introduite dans ce travail, en comparaison avec certaines lois de la littérature basées sur la loi de Fick.

	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \delta \mathbf{r} = \mathbf{0}$	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$	Invariances	Indépendance $\delta \mathbf{u}$ écoulement global	Compatibilité à l'incompressible
Lind et al. [51]	Oui	si $\frac{\Delta x}{R} \rightarrow 0$	Non	Non	Dérivée de l'incompressible
Oger et al. [73]	Oui	si $\frac{\Delta x}{R} \rightarrow 0$	Non	Non	Non
Sun et al. [88]	Oui	si $\frac{\Delta x}{R} \rightarrow 0$	Non	Non	Non
PST proposée	Oui	$\sqrt{\frac{\Delta x}{R}}$	Oui	Oui	Oui

TABLE 3.2 – Résumé des propriétés théoriques de différentes lois de PST basées sur la loi de Fick.

3.3.1.2 Validation

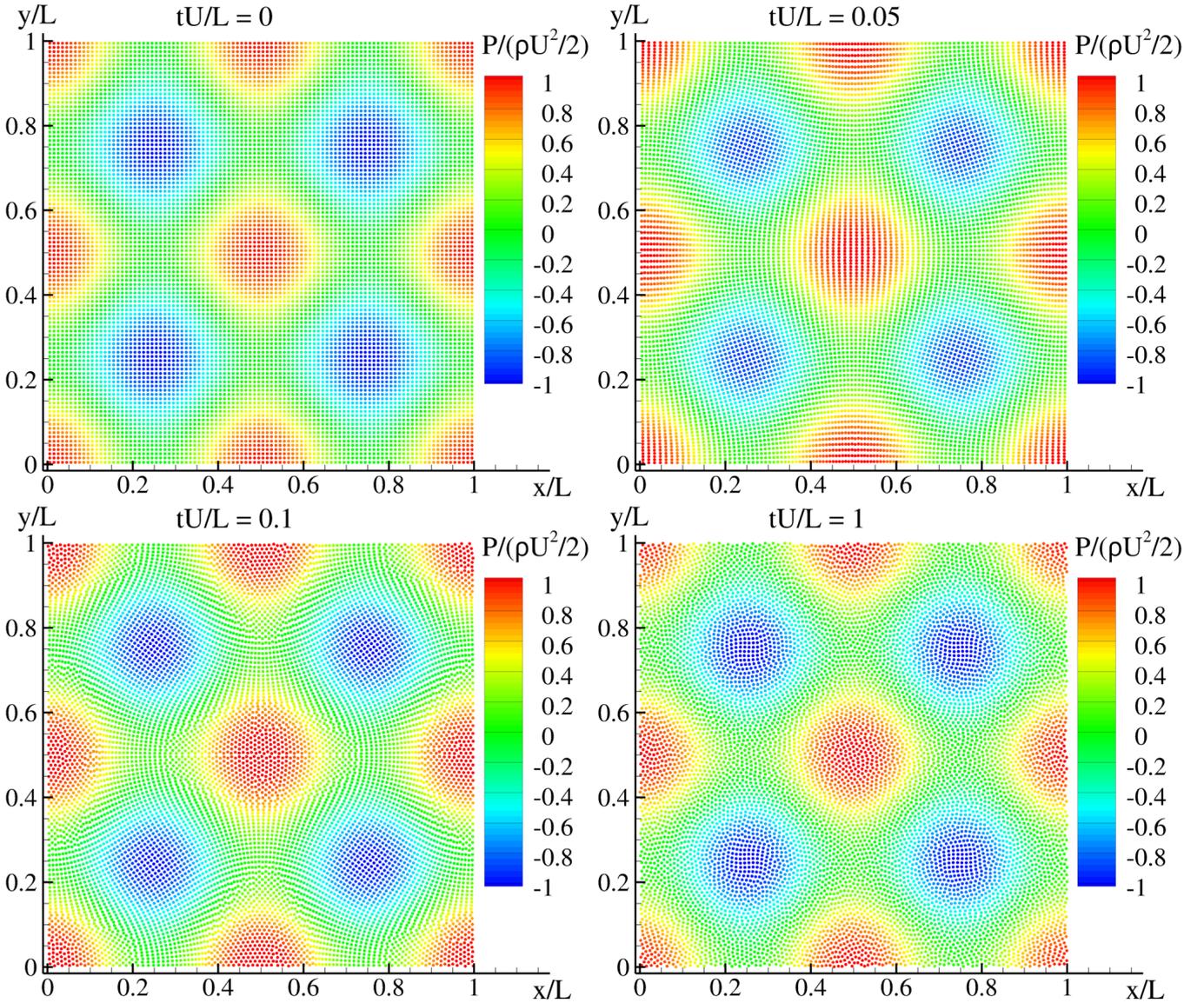


FIGURE 3.1 – Tourbillons de Taylor-Green non-visqueux en 2D. Champ de pression obtenu avec le schéma *hybride II* (2.22)-(2.25) et la PST proposée, avec $L/\Delta x = 100$ et à quatre instants de la simulation.

Afin de valider la PST proposée en l'absence de surface libre et de parois, le cas test des tourbillons de Taylor-Green en 2D pour un fluide non-visqueux est considéré (voir section 2.1). Dans ce chapitre, ce cas est étudié avec un ratio fixe $R/\Delta x = 4$. Comme on peut le voir sur la figure 3.1, la PST introduite ici a pour effet de casser les lignes Lagrangiennes au tout début de la simulation, du fait de la non-limitation par la vitesse Lagrangienne des particules.

Sur la partie haute de la figure 3.2, l'évolution temporelle de $\|\delta \mathbf{u}\|_{max}$ pour trois discrétisations spatiales est représentée pour les quatre schémas SPH étudiés ici, où $\|\delta \mathbf{u}\|_{max} = \max_i \|\delta \mathbf{u}_i\|$ avec $\|\cdot\|$ la norme euclidienne. Nous observons tout d'abord une évolution globalement similaire de $\|\delta \mathbf{u}\|_{max}$ pour les quatre schémas testés. Pour le schéma de Parshikov & Medin, la PST s'enclenche plus tôt que pour les autres schémas pour la discrétisation la plus grossière (ceci est aussi observé avec le schéma stabilisé par δ -SPH dans lequel la PST est aussi prise en compte uniquement dans l'équation de trajectoire, cf. publication [62]). Ensuite, pour les quatre schémas, une certaine stabilité est à noter une fois disparues les lignes Lagrangiennes issues de l'initialisation

Cartésienne (i.e. à partir de $tU/L \approx 0.15$). Enfin, l'amplitude $\|\delta \mathbf{u}\|_{max}$ est du même ordre de grandeur pour les quatre schémas. Sur la partie basse, on remarque une propriété importante : l'ordre théorique de convergence de la vitesse de PST est retrouvée, et ce pour les quatre schémas.

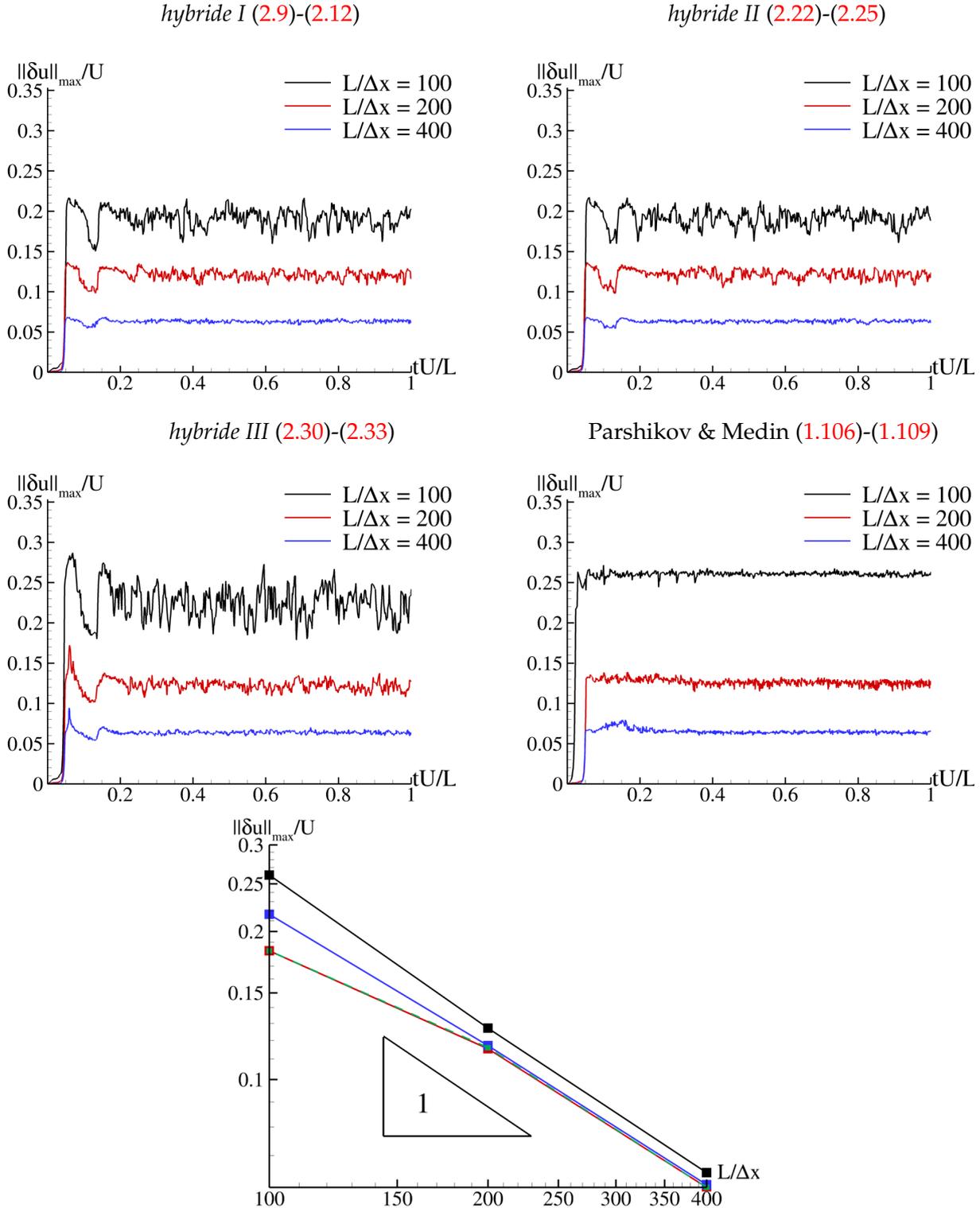


FIGURE 3.2 – Tourbillons de Taylor-Green non-visqueux en 2D. Quadrants hauts : évolution de la valeur maximale de la vitesse de PST $\|\delta u\|_{\max}$ pour les quatre schémas testés et pour trois discrétisations spatiales. Bas : Taux de convergence de cette quantité. En noir : Parshikov & Medin (1.106)-(1.109), en rouge : *hybride I* (2.9)-(2.12), en vert : *hybride II* (2.22)-(2.25), en bleu : *hybride III* (2.30)-(2.33).

Ce cas est intéressant car stationnaire. Ainsi, l'énergie cinétique contenue dans le domaine est théoriquement constante, et la dissipation de cette énergie cinétique peut être vue comme un effet de la diffusion numérique introduite pour stabiliser le schéma [73]. Comme représenté sur la figure 3.3, une convergence de cette

dissipation vers la solution théorique est observée pour les quatre schémas. En s'intéressant à la résolution spatiale la plus fine (zoom à droite de la figure 3.3), on constate que pour le schéma pour lequel la vitesse de PST est prise en compte uniquement dans l'équation de la trajectoire (i.e. Parshikov & Medin), la décroissance d'énergie cinétique est linéaire. En revanche, pour les trois autres schémas, la mise en place du désordre dû à la PST en début de simulation a pour effet une diminution soudaine de l'énergie cinétique, diminution retrouvant un caractère linéaire une fois les lignes Lagrangiennes cassées. Le schéma *hybride III* (2.30)-(2.33) est le plus dissipatif pour les discrétisations grossières, mais pour la discrétisation la plus fine le même ordre de grandeur est retrouvé en comparaison avec les deux autres formulations hybrides.

Une question légitime que l'on peut se poser est de savoir si le fait que la vitesse de PST diminue avec la discrétisation spatiale engendre suffisamment de désordre pour les discrétisations les plus fines. Comme on peut le noter sur la figure 3.4, la pression au centre du domaine est cohérente avec la valeur théorique attendue (sauf pour Parshikov & Medin pour les raisons évoquées à la section 2.1), et fait remarquable : on obtient des résultats similaires avec les autres schémas dans toute la simulation, montrant d'une part que la PST introduit suffisamment de désordre pour casser les lignes Lagrangiennes sans perturber le champ de pression, et d'autre part une relative indépendance de la PST vis-à-vis du schéma utilisé sur ce cas.

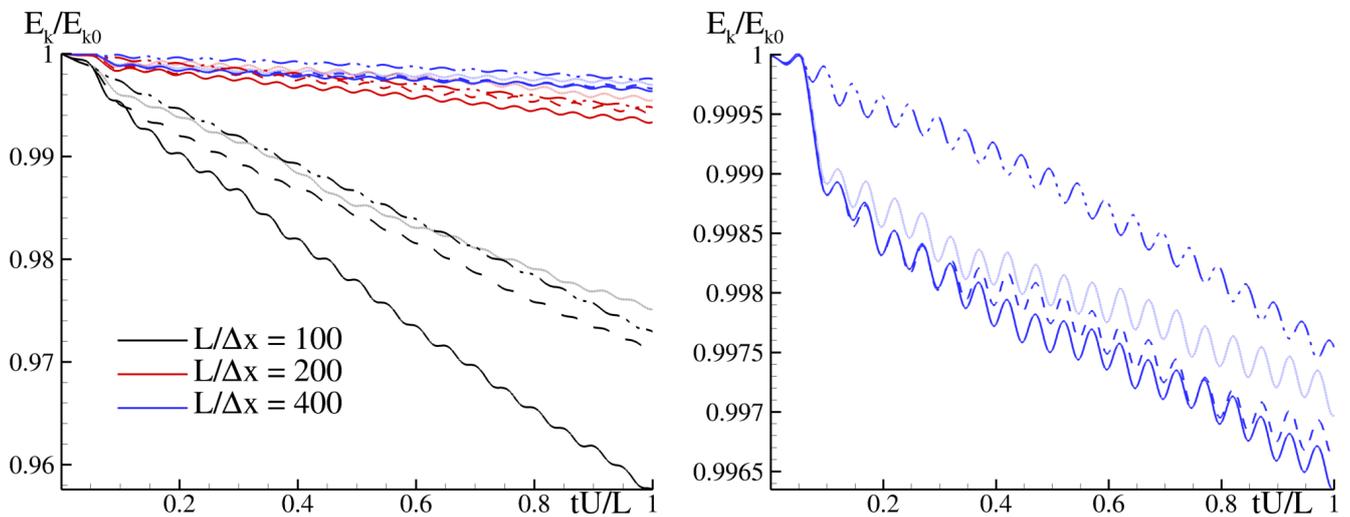


FIGURE 3.3 – Tourbillons de Taylor-Green non-visqueux en 2D. Décroissance de l'énergie cinétique pour trois discrétisations spatiales. Trait plein : *hybride III* (2.30)-(2.33). Trait interrompu : *hybride II* (2.22)-(2.25). Pointillé : *hybride I* (2.9)-(2.12). Trait mixte : Parshikov & Medin. Droite : zoom sur la discrétisation spatiale la plus fine.

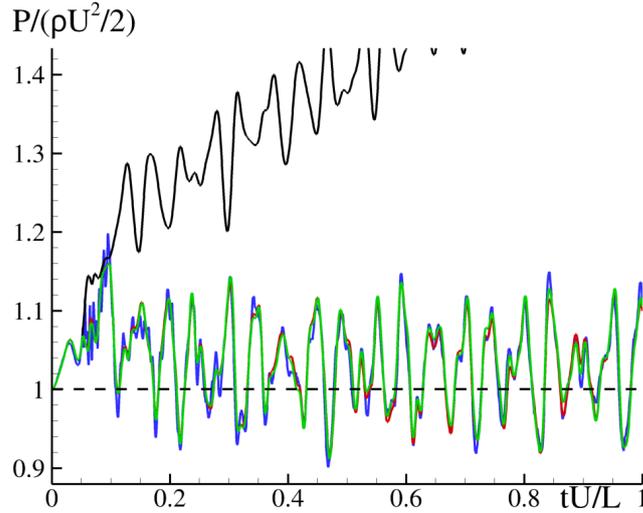


FIGURE 3.4 – Tourbillons de Taylor-Green non-visqueux en 2D. Evolution temporelle de la pression au centre du domaine pour $L/\Delta x = 400$. Noir : Parshikov & Medin. Rouge : *hybride I*. Vert : *hybride II*. Bleu : *hybride III*.

3.3.2 En présence d'une surface libre

Comme expliqué dans la section 1.5.2, une attention particulière a été portée récemment concernant l'utilisation de PST à la surface libre, que ce soit en incompressible [42, 51] ou dans le contexte faiblement compressible [88, 89]. Ici, nous proposons une méthodologie inspirée de la littérature et permettant d'adapter la nouvelle PST proposée à la prise en compte d'une telle région, tout en respectant les conditions listées dans la section 3.2.

3.3.2.1 Adaptation de la nouvelle loi de PST

A l'instar de Sun et al. [88, 89] et Khayyer et al. [42], dans ce travail la composante normale de $\delta \mathbf{u}$ est progressivement supprimée dans la région de surface-libre. A l'inverse de [88, 89] dans lesquels le vecteur normal \mathbf{n}_i^λ est déterminé en utilisant (1.142) afin de maintenir la précision même loin de la surface libre (nécessitant le calcul de $\nabla \lambda$), ici le compromis coût / précision suivant est préféré : (i) pour les particules de surface libre le vecteur normal \mathbf{n}_i est déterminé en utilisant (1.141), (ii) le vecteur normal des particules dans la région de surface libre est défini comme celui de la particule de surface libre la plus proche. Pour résumé, ce vecteur noté $\tilde{\mathbf{n}}_i$ est défini comme suit :

$$\tilde{\mathbf{n}}_i = \begin{cases} \mathbf{n}_i & \text{si } i \text{ est à la surface libre ,} \\ \mathbf{n}_j & \text{avec } d_i^j = d_i^{FS} \text{ sinon, si } i \text{ est dans la région de surface libre ,} \end{cases} \quad (3.20)$$

où d_i^j est la distance entre les particules i et j , et d_i^{FS} est la distance entre la particule i et sa voisine de surface libre la plus proche. Dans la région de surface libre, on procède alors comme suit :

- Pour contrebalancer le terme de plus bas degré apparaissant dans les formules théoriques (3.5) et (3.10), le coefficient β_i de l'équation (3.19) est modifié de telle sorte que $\beta_i = (R/\Delta x)^3$ dans le fluide avec une décroissance linéaire dans la région de surface libre pour atteindre $\beta_i = 1$ à la surface libre.
- Pour toute particule i à la surface libre, si $\lambda_i < 0.4$ (ce qui correspond aux zones de faible nombre de voisins) la PST est supprimée : $\delta \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$.
- Pour une particule i dans la région de surface libre telle que $\lambda_i \geq 0.4$ et $d_i^{FS} \leq R/2$, la composante normale de $\delta \mathbf{u}_i$ est totalement supprimée.
- Pour une particule i dans la région de surface libre mais pas à la surface libre telle que $\lambda_i \geq 0.4$ et $d_i^{FS} > R/2$, la composante normale de $\delta \mathbf{u}_i$ est graduellement autorisée.

— Il n'y a pas de restriction particulière concernant la direction de la PST pour les particules dans le fluide. Finalement, le coefficient λ_i^2 est appliqué pour limiter l'amplitude de la PST à la surface libre. De manière explicite, la vitesse de PST dans une telle région s'écrit :

$$\delta \mathbf{u}_i^{FS} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } \lambda_i < 0.4, \\ \lambda_i^2 (\delta \mathbf{u}_i - \sigma_i \langle \delta \mathbf{u}_i, \tilde{\mathbf{n}}_i \rangle \tilde{\mathbf{n}}_i) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.21)$$

où $\sigma_i = \min \left[1, \max \left(0, \frac{d_i^{FS} - R}{R/2 - R} \right) \right]$ et avec $\delta \mathbf{u}_i$ définie dans (3.19) avec les modifications apportées concernant le coefficient β_i .

Soulignons que les modifications apportées à la PST dans la région de surface libre n'affectent en rien les conditions d'invariances, de consistance et d'indépendance par rapport à l'écoulement global. De plus, une propriété supplémentaire est assurée par cette loi, comme souligné dans le tableau 3.3.

	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \delta \mathbf{u}^{FS} = \mathbf{0}$
Lind et al. [51]	Non
Oger et al. [73]	Non
Sun et al. [88]	Non
PST proposée	Oui

TABLE 3.3 – Résumé des propriétés théoriques des lois de PST basées sur la loi de Fick en présence d'une surface libre.

3.3.2.2 Validation

Afin de valider les modifications apportées à la PST en présence d'une surface libre, la rotation d'un patch de fluide initialement carré en 2D est considérée [46]. La vitesse dans le patch de dimension L est initialisée par $\mathbf{u}^0(x, y) = (\omega y, -\omega x)$ où ω est une vitesse angulaire constante. La pression initiale est quant à elle obtenue en résolvant une équation de Poisson avec l'hypothèse d'un fluide incompressible. Lors des premières simulations avec $c_0 = 10U_{max}$ (U_{max} étant la vitesse maximale), nous avons remarqué un transfert d'énergie compressible vers l'énergie cinétique au tout début des simulations, que nous supposons dû à la différence entre initialisation incompressible et hypothèse faiblement compressible. Pour les discrétisations fines pour lesquelles la diffusion numérique est très faible, des perturbations au niveau de la surface libre étaient alors observées. En utilisant $c_0 = 40U_{max}$, le transfert d'énergie est moindre et ces perturbations n'apparaissent plus. Ainsi, les simulations sont effectuées avec $c_0 = 40U_{max}$ pour limiter ces différences. Le ratio est fixé à $R/\Delta x = 4$. Les dimensions de référence sont pour ce cas la longueur L , la vitesse ωL , le temps $1/\omega$ et la pression $\rho(\omega L)^2$.

L'évolution temporelle de la vitesse maximum de PST $\|\delta \mathbf{u}\|_{max}$ est représentée sur la figure 3.5 pour trois discrétisations spatiales. Contrairement au cas stationnaire de Taylor-Green dans la section 3.3.1, $\|\delta \mathbf{u}\|_{max}$ tend plus ou moins à diminuer à la fin de la simulation, et ce phénomène est amplifié pour les discrétisations grossières. Ceci est dû à la présence de jets fins apparaissant dans ce cas (voir figure 3.6), et dans lesquels la vitesse de PST est limitée par les faibles valeurs de λ . Peu de différences apparaissent pour $\|\delta \mathbf{u}\|_{max}$ entre les quatre schémas, et on peut observer que l'ordre 1 de convergence théorique – obtenu en moyennant $\|\delta \mathbf{u}\|_{max}$ sur l'intervalle $t\omega \in [2; 4]$ – est retrouvé. Pour la discrétisation la plus fine $L/\Delta x = 400$, la vitesse maximale de PST est seulement de l'ordre de 1% de la vitesse Lagrangienne maximale dans le fluide ($U^{max} = \omega L/\sqrt{2}$), valeur suffisante pour casser les structures anisotropiques sans perturber le champ de pression (figure 3.6).

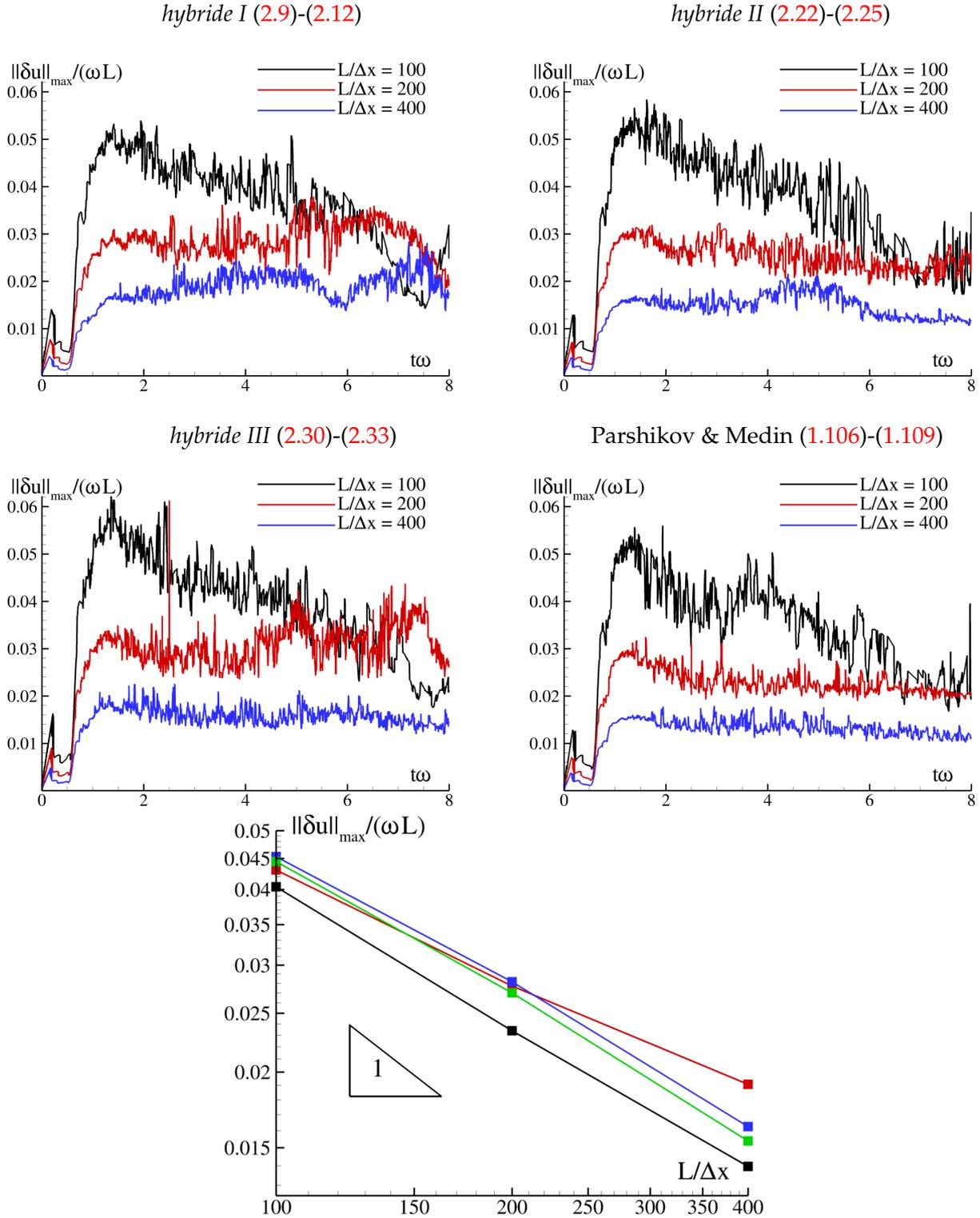


FIGURE 3.5 – Rotation d’un patch de fluide initialement carré en 2D. Quadrants hauts : évolution de la valeur maximale de la vitesse de PST $\|\delta u\|_{\max}$ pour les quatre schémas testés et pour trois discrétisations spatiales. Bas : Taux de convergence de cette quantité avec en noir : Parshikov & Medin (1.106)-(1.109), en rouge : *hybride I* (2.9)-(2.12), en vert : *hybride II* (2.22)-(2.25), en bleu : *hybride III* (2.30)-(2.33).

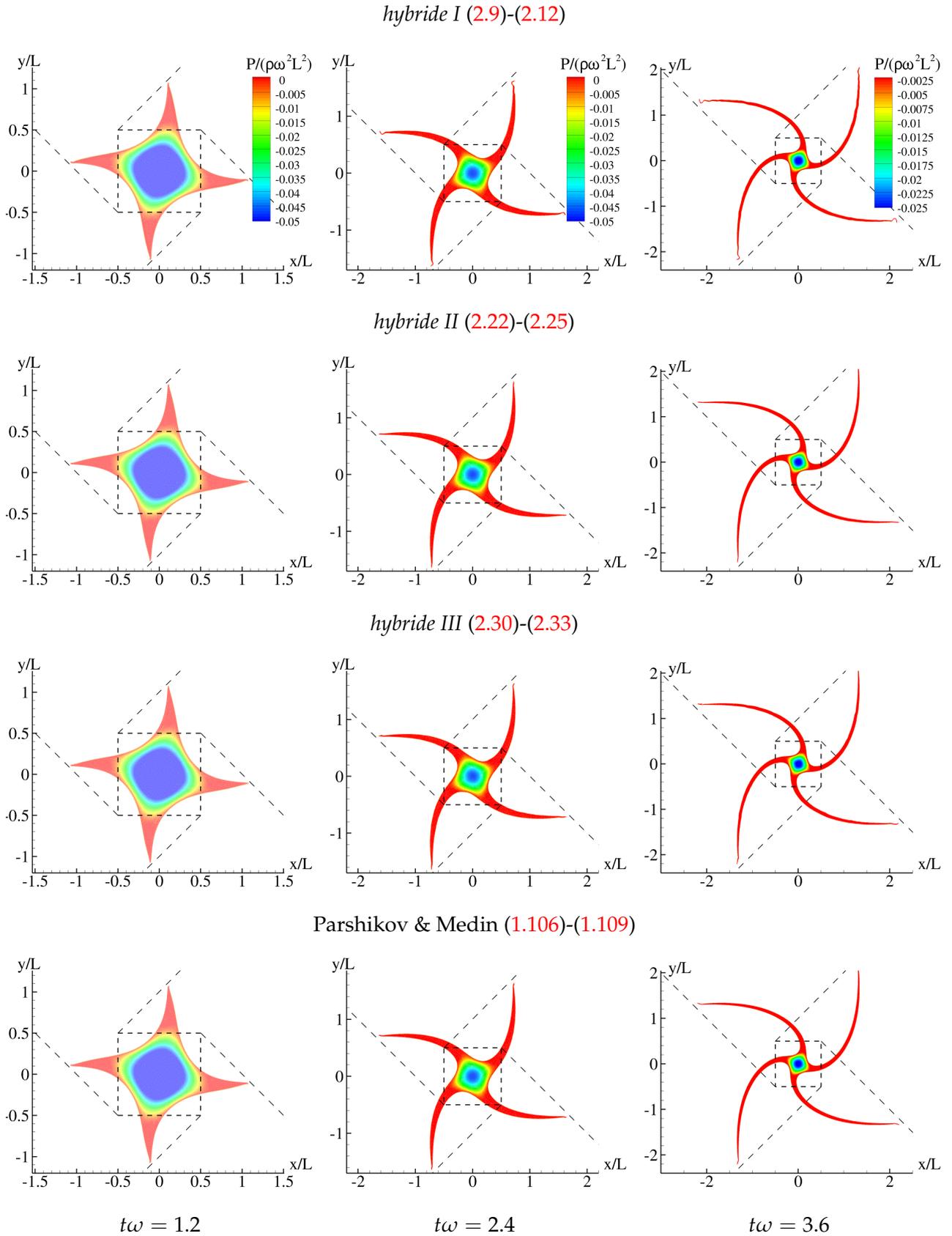


FIGURE 3.6 – Rotation d'un patch de fluide initialement carré en 2D. Champ de pression pour la discrétisation spatiale $L/\Delta x = 400$ aux instants $t\omega = 1.2, 2.4, 3.6$ pour les quatre schémas.

La décroissance de l'énergie cinétique est tracée quant à elle sur la figure 3.7 montrant qu'il y a convergence vers la solution théorique $E_k/E_{k0} \equiv 1$ pour les quatre schémas. A l'instar des tourbillons de Taylor-Green, cette décroissance peut être vue comme un indicateur de la diffusion numérique introduite dans un schéma. Ainsi, on peut conclure sur ce cas que le schéma le plus diffusif est le schéma dérivé du formalisme ALE (*hybride I*). La formulation *hybride II* (2.22)-(2.25) adaptée de Colagrossi *et al.* est, quant à elle, la moins diffusivité et les résultats obtenus avec cette dernière sont très proches de ceux obtenus avec le schéma de Parshikov & Medin. De plus, ce schéma hybride fournit le champ de pression le moins bruité (voir partie droite de la figure 3.8). Par conséquent, il possède (i) l'avantage de ne pas engendrer de solutions non physiques (voir Chapitre 2), (ii) de ne pas être sujet aux fortes variations de volume et de masse de particules isolées, (iii) d'être sur ce cas le schéma le moins diffusif tout en donnant le champ de pression le plus régulier.

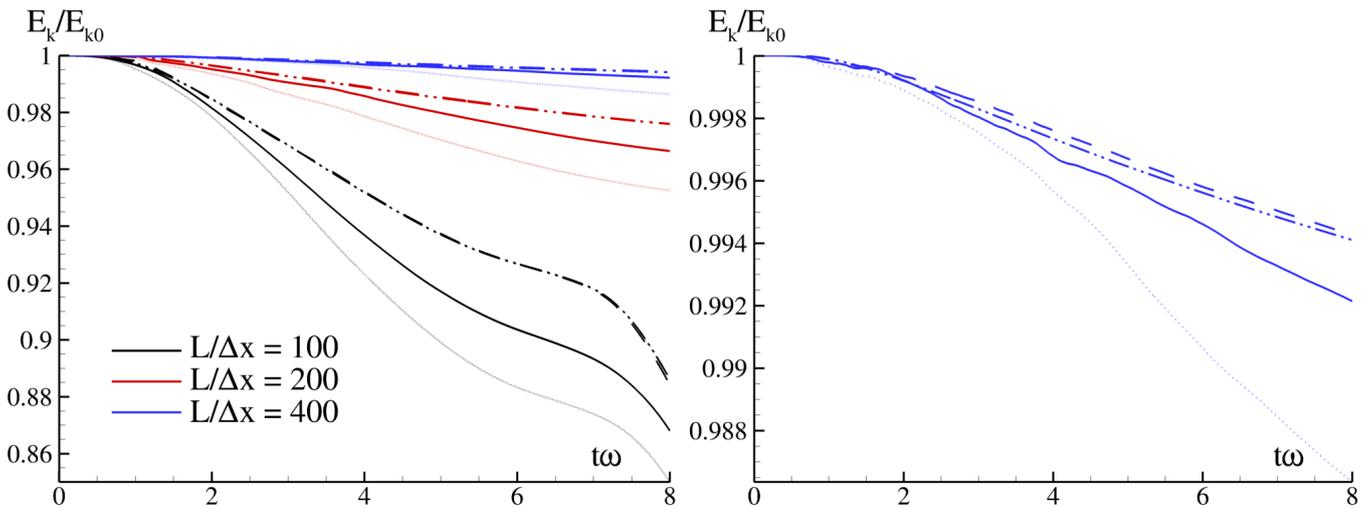


FIGURE 3.7 – Rotation d'un patch de fluide initialement carré en 2D. Décroissance de l'énergie cinétique pour trois discrétisations spatiales. Pointillé : *hybride I* (2.9)-(2.12). Trait interrompu : *hybride II* (2.22)-(2.25). Trait plein : *hybride III* (2.30)-(2.33). Trait mixte : Parshikov & Medin. Droite : zoom sur la discrétisation spatiale la plus fine.

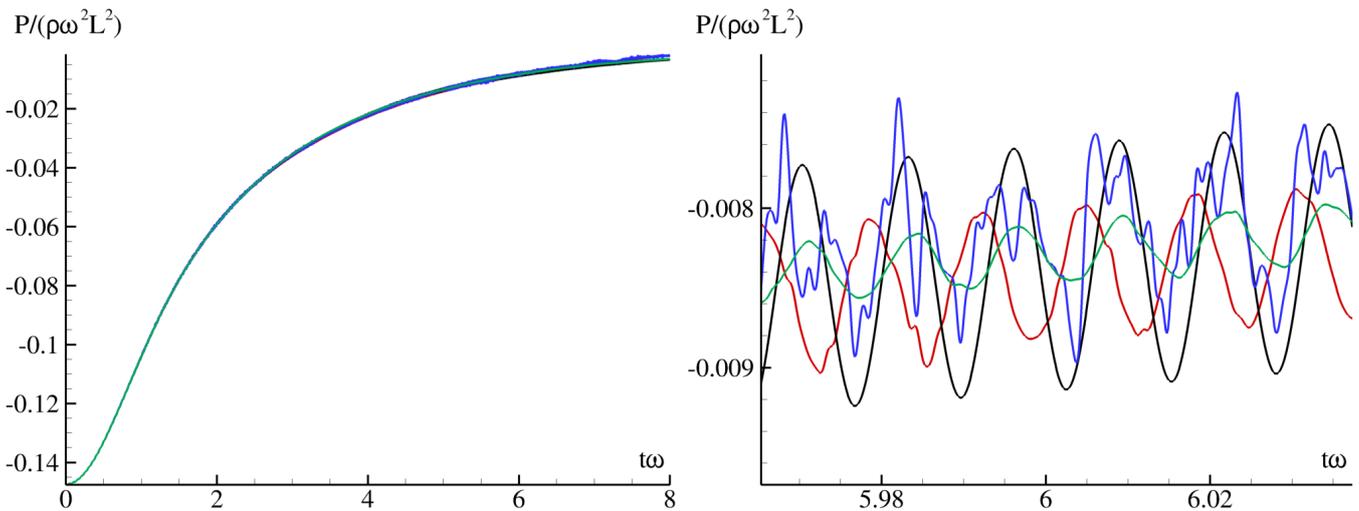


FIGURE 3.8 – Rotation d'un patch de fluide initialement carré en 2D. Evolution temporelle de la pression au centre du domaine pour $L/\Delta x = 400$. Noir : Parshikov & Medin. Rouge : *hybride I* (2.9)-(2.12). Vert : *hybride II* (2.22)-(2.25). Bleu : *hybride III* (2.30)-(2.33). Droite : zoom autour de $t\omega = 6$.

3.3.3 En présence d'une paroi prise en compte par méthode volumique

Les cas de validation précédents ne présentaient pas de parois. Afin de poursuivre la validation de la PST, nous considérons maintenant un cas avec paroi. La méthode de traitement des frontières utilisée ici est la méthode volumique dite des particules fantômes (voir section 1.4.2.1) afin de pouvoir effectuer la validation sur tous les schémas étudiés dans ce chapitre.

3.3.3.1 Adaptation de la PST

Lorsque la méthode des particules fantômes est utilisée, les particules fantômes et fluides sont traitées de manière équivalente dans la vitesse de PST pour (i) le calcul du gradient de la concentration $\widehat{\nabla} C_i$, (ii) la détection de surface libre, (iii) les vecteurs normaux à la surface libre permettant la suppression de la composante normale de la PST à la surface libre.

La vitesse caractéristique U_i^{char} est quant à elle adaptée afin de pouvoir satisfaire la condition de consistance (3.3). En effet, par construction, et afin de s'assurer du respect de la condition de non-pénétration à la paroi, on a pour l'exemple le plus simple où la vitesse de la paroi est nulle :

$$\left| (\mathbf{u}_{\mathcal{G}_{i,s}} - \mathbf{u}_i) \cdot \frac{\mathbf{x}_{\mathcal{G}_{i,s}} - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_{\mathcal{G}_{i,s}} - \mathbf{x}_i\|} \right| = 2 \left| \mathbf{u}_i \cdot \frac{\mathbf{x}_{\mathcal{G}_{i,s}} - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_{\mathcal{G}_{i,s}} - \mathbf{x}_i\|} \right| \xrightarrow[\Delta x \rightarrow 0]{} 0, \quad (3.22)$$

où pour rappel $\mathbf{x}_{\mathcal{G}_{i,s}}$ et $\mathbf{u}_{\mathcal{G}_{i,s}}$ sont respectivement la position et la vitesse associées à la particule fantôme issue de i par rapport à la paroi s . Ainsi, les particules fantômes doivent être exclues du calcul de la vitesse caractéristique dans les équations (3.15)-(3.17) pour que la condition de consistance de la vitesse de PST (3.3) soit retrouvée théoriquement.

3.3.3.2 Validation

La validation est effectuée ici sur le cas test d'un jet impactant une plaque plane. L'intérêt de ce cas réside en la présence d'une surface libre et d'une paroi solide. Par ailleurs, une solution analytique existe pour ce cas en 2D (voir par exemple [4]). Ce cas test – souvent étudié en SPH [33, 43, 55, 82] – consiste en l'impact sur une plaque plane d'un jet fluide de largeur H et de vitesse U . Les dimensions de référence sont donc H (longueur), U (vitesse), H/U (temps) et $\frac{\rho U^2}{2}$ (pression). Dans cette thèse, et pour le cas 2D, le fluide impacte la plaque avec un angle $\alpha = 30^\circ$ (voir figure 3.9). Afin de limiter le nombre de particules dans la simulation, une condition d'entrée (inlet) est utilisée pour imposer la vitesse du jet, et des conditions de sortie (outlet) sont imposées suffisamment loin de l'impact pour ne pas perturber l'écoulement.

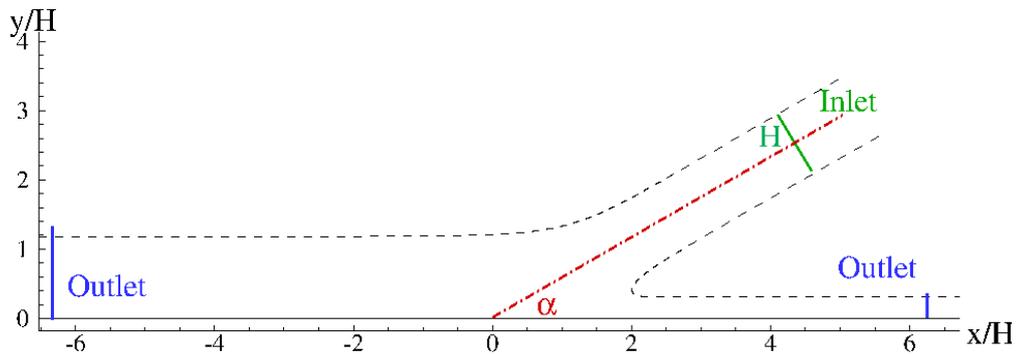


FIGURE 3.9 – Jet fluide impactant une plaque plane. Description du cas.

La vitesse du son nominale c_0 est choisie telle que $c_0 = 11 \times U$, formant un bon compromis entre le respect de l'hypothèse de faible compressibilité et une diffusion numérique faible. Les quatre schémas sont étudiés dans cette partie pour plusieurs discrétisations spatiales. Comme nous pouvons le voir sur la figure 3.10, où l'évolution temporelle de $\|\delta \mathbf{u}\|_{max}$ est tracée, on observe sur ce cas des comportements différents

selon les schémas. Les schémas de Parshikov & Medin et *hybride II* (2.22)-(2.25) donnent des résultats très similaires. Concernant le schéma *hybride I* dérivé du formalisme ALE, durant la phase transitoire $\|\delta\mathbf{u}\|_{max}$ semble se caler sur des valeurs proches de celles obtenues avec les schémas cités précédemment. Ensuite pour les trois discrétisations les plus fines, le maximum de vitesse de PST dans l'écoulement décroît brusquement en moyenne et n'atteint que rarement la valeur maximale qui semblait se dessiner. Avec le schéma *hybride III* (2.30)-(2.33), aucun changement brusque n'est à noter, et les résultats en matière de $\|\delta\mathbf{u}\|_{max}$ sont proches du schéma *hybride I* une fois la phase stationnaire atteinte. Malgré ces différences, on observe une convergence de la vitesse de PST pour les quatre schémas dont l'ordre semble être compris entre 0.5 et 1 (figure 3.10), et pour la discrétisation la plus fine $\|\delta\mathbf{u}\|_{max}$ est inférieure à 30% de la vitesse de référence dans l'écoulement.

En ce qui concerne la pression au point d'arrêt (voir figure 3.11), nous pouvons commencer par remarquer que la formulation *hybride III* (2.30)-(2.33) – qui donnait les meilleurs résultats avec un champ $\delta\mathbf{u}$ régulier (voir Chapitre 2) – présente dans ce cas le signal de pression le plus bruité (l'échelle est différente pour ce schéma), bien que l'amplitude des oscillations diminue pour les discrétisations spatiales les plus fines. Avec le schéma *hybride I*, la pression théorique est retrouvée avec la discrétisation spatiale $H/\Delta x = 100$. Avec les schémas *hybride II* (2.22)-(2.25) et de Parshikov & Medin, la convergence vers la solution analytique se dessine et l'on voit que pour $H/\Delta x = 120$ l'erreur n'est plus que de 2%. De plus on voit sur la figure 3.12 que la pression est évaluée correctement le long de la paroi, et les oscillations observées avec le schéma *hybride III* (2.30)-(2.33) ne sont pas localisées au point d'arrêt mais se retrouvent tout le long du profil. En ce qui concerne la vitesse, on peut observer sur cette même figure que le profil horizontal le long de la paroi est très proche de la solution analytique pour les quatre schémas, et les mêmes conclusions peuvent être tirées en ce qui concerne la position de la surface libre.

Les différences entre le schéma *hybride III* et les schémas *hybride I* et *II* s'expliquent par la manière dont la vitesse de PST intervient dans l'équation de la masse volumique. En effet, pour les schémas *hybride I* et *II*, la partie relative à $\delta\mathbf{u}$ dans l'équation de la masse volumique s'écrit :

$$\sum_{j \in \mathcal{D}_i} [\rho_i (\delta\mathbf{u}_i - \delta\mathbf{u}_j) + \rho_i \delta\mathbf{u}_i + \rho_j \delta\mathbf{u}_j] \cdot \nabla_i W_{ij} V_j \quad (3.23)$$

$$= \sum_{j \in \mathcal{D}_i} \rho_i \left[2\delta\mathbf{u}_i + \left(\frac{\rho_j - \rho_i}{\rho_i} \right) \delta\mathbf{u}_j \right] \cdot \nabla_i W_{ij} V_j. \quad (3.24)$$

Or, le terme $\frac{\rho_j - \rho_i}{\rho_i}$ est proche de 0 en hypothèse faiblement compressible. Ainsi la partie relative à la PST dans l'équation de la masse volumique est principalement pilotée par $\delta\mathbf{u}_i$ (et non par $\delta\mathbf{u}_i - \delta\mathbf{u}_j$) et les irrégularités présentes dans le champ $\delta\mathbf{u}$ affectent peu le calcul de la masse volumique et donc la pression. A l'inverse, avec le schéma *hybride III* cette quantité s'exprime :

$$\sum_{j \in \mathcal{D}_i} \rho_i (\delta\mathbf{u}_i - \delta\mathbf{u}_j) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j, \quad (3.25)$$

et par conséquent les irrégularités dans le champ $\delta\mathbf{u}$ se traduisent directement sur la masse volumique. Or, par construction, le champ $\delta\mathbf{u}$ est irrégulier en particulier près d'une frontière à cause de la symétrisation de la vitesse de PST pour les particules fantômes, ce qui explique que sur ce cas les différences avec les autres schémas soient plus marquées que sur les cas sans parois.

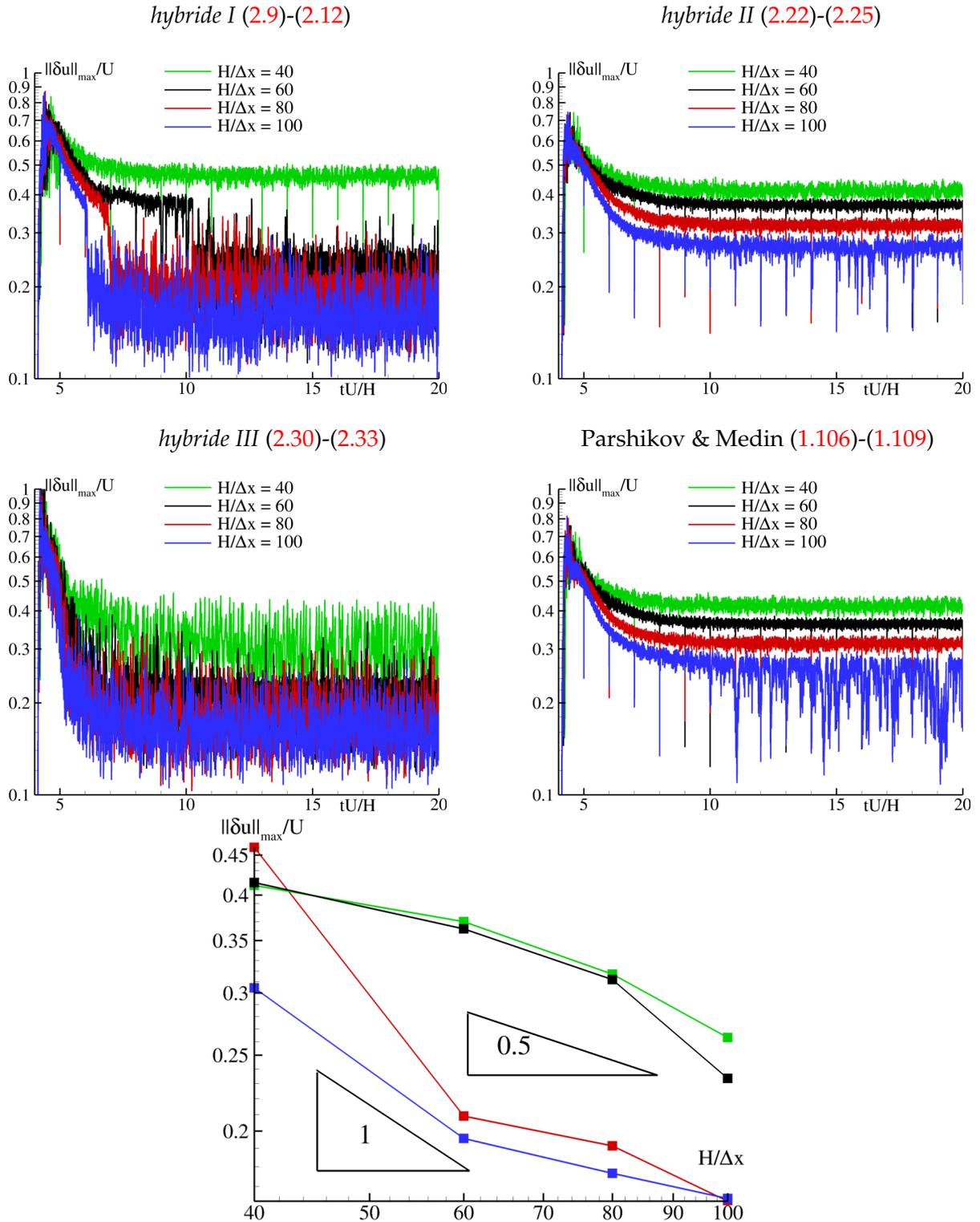


FIGURE 3.10 – Jet fluide impactant une plaque plane en 2D (avec particules fantômes). Quadrants hauts : évolution de la valeur maximale de la vitesse de PST $\|\delta u\|_{\max}$ pour les quatre schémas testés et pour quatre discrétisations spatiales. Bas : Taux de convergence de cette quantité avec en noir : Parshikov & Medin (1.106)-(1.109), en rouge : *hybride I* (2.9)-(2.12), en vert : *hybride II* (2.22)-(2.25), en bleu : *hybride III* (2.30)-(2.33).

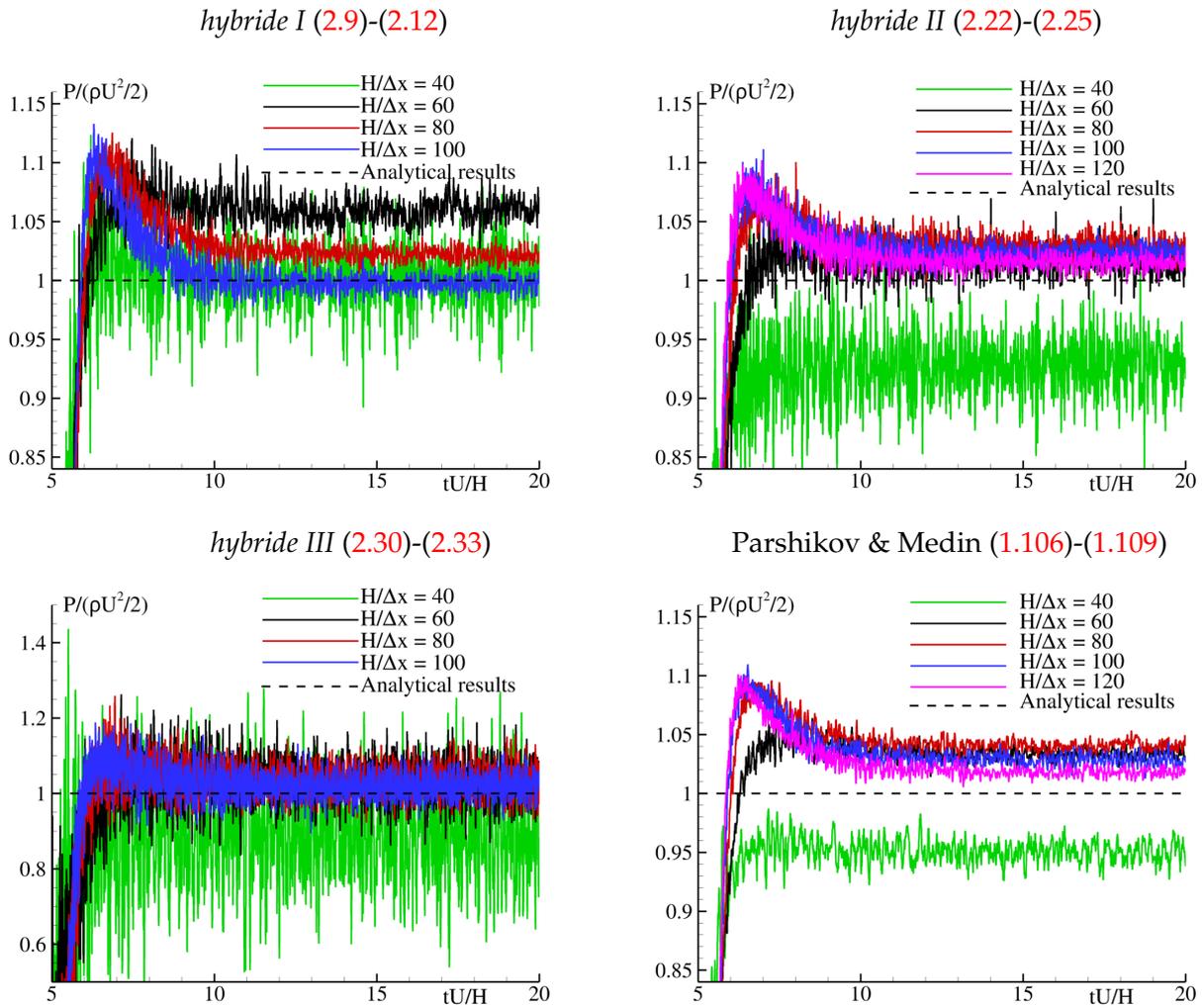


FIGURE 3.11 – Jet fluide impactant une plaque plane en 2D (avec particules fantômes). Evolution de la pression au point d'arrêt pour les quatre schémas testés et pour quatre discrétisations spatiales.

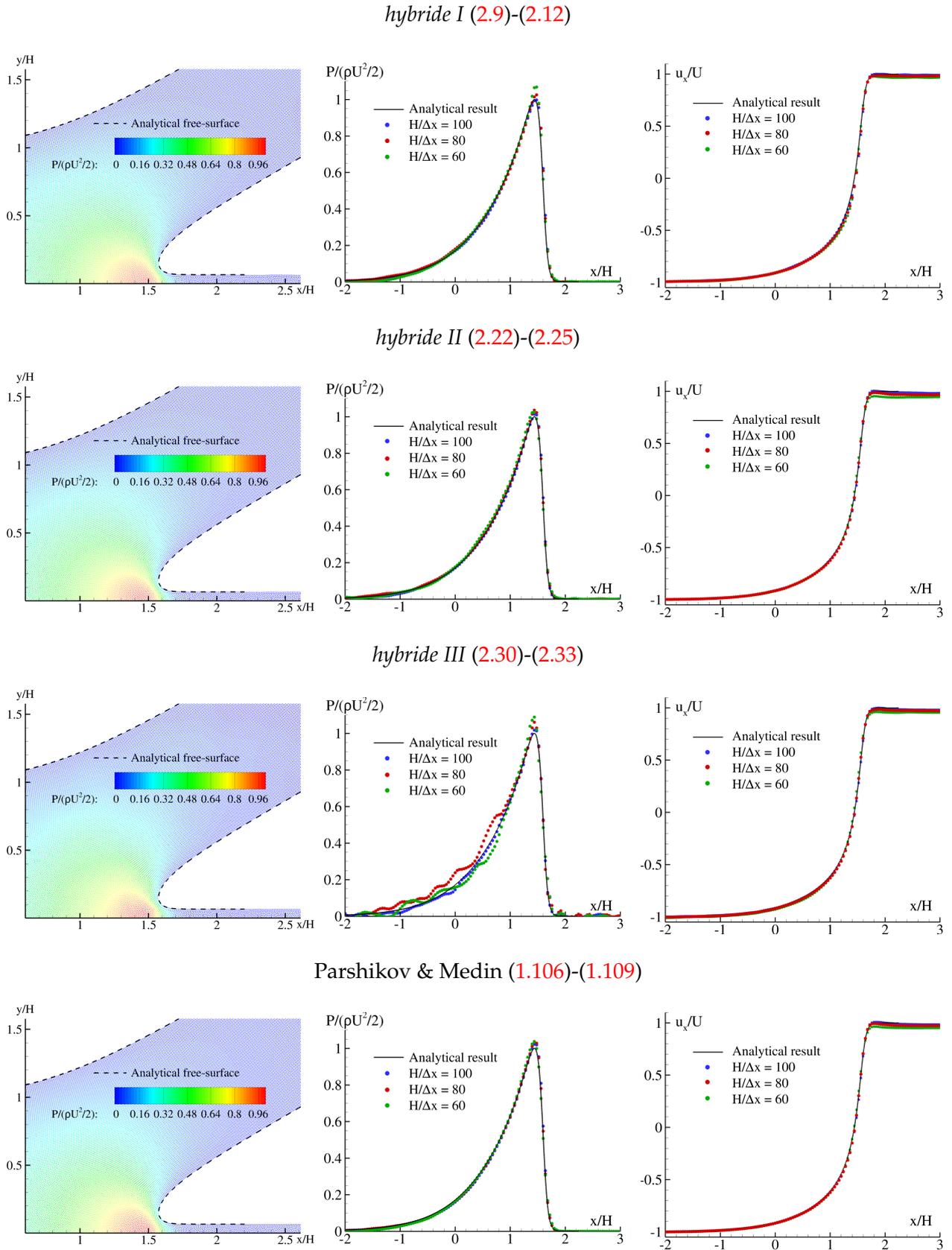


FIGURE 3.12 – Jet fluide impactant une plaque plane en 2D (avec particules fantômes). Gauche : champ de pression obtenu avec $H/\Delta x = 100$ à $tU/H = 20$ et comparaison avec la surface libre analytique. Centre : profil de pression le long de la paroi à $tU/H = 20$ pour trois discrétisations spatiales avec comparaison à la solution analytique. Droite : profil de vitesse horizontale le long de la paroi à $tU/H = 20$ pour trois discrétisations spatiales avec comparaison à la solution analytique. De haut en bas : les quatre schémas testés.

3.3.4 En présence d'une paroi prise en compte par méthode surfacique (BIM-CFA)

Dans cette section, nous vérifions que la PST introduite dans cette thèse est aussi valide lorsqu'un traitement surfacique des parois solides est utilisé. La méthode en question est celle développée par Chiron *et al.* [14], brièvement rappelée dans la section 1.4.2.2. Cette méthode a été développée dans un premier temps pour le schéma de Parshikov & Medin uniquement, et donc la validation de la PST est faite exclusivement sur ce schéma. En présence d'une paroi discrétisée de manière surfacique, nous n'avons pas réussi à exprimer de façon théorique la condition de consistance de la vitesse de PST. Il semble donc d'autant plus important de vérifier numériquement la validité de cette condition. De plus, comme expliqué dans la section 1.5.3, l'imposition de la condition de non-pénétration n'est pas triviale lorsqu'une PST est utilisée avec une méthode surfacique de traitement des parois. Ainsi, nous nous proposons de comparer le fait d'utiliser uniquement une vitesse de PST tangentielle à la paroi par rapport à une vitesse complète. Finalement, puisque cette méthode surfacique est indispensable pour l'application visée dans cette thèse, il est important de valider la PST également en 3D, ce qui est effectué ici.

3.3.4.1 Adaptation de la PST à une méthode surfacique de traitement des frontières

En présence de parois discrétisées de manière surfacique, les termes intervenant dans la PST doivent être adaptés. L'algorithme de détection de surface libre est effectué avec la prise en compte des termes surfaciques (voir section 1.5.2.1). Le gradient de la concentration $\widehat{\nabla} C_i$ est quant à lui modifié comme suit :

$$\widehat{\nabla} C_i = \sum_{j \in \Omega_i} \left[1 + 0.2 \left(\frac{W_{ij}}{W(\Delta x_i)} \right)^4 \right] \nabla_i W_{ij} V_j + \sum_{s \in \partial \Omega_i} \left[1 + 0.2 \left(\frac{W_{is}}{W(\Delta x_i)} \right)^4 \right] \mathbf{n}_s W_{is} S_s. \quad (3.26)$$

A l'instar de la méthode des particules fantômes, les termes issus des parois $\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_s$ (\mathbf{u}_s étant la vitesse de la paroi) sont exclus du calcul de la vitesse caractéristique U_i^{char} . En effet, lors d'un impact de jet fluide sur une paroi fixe par exemple, à l'instant précédent l'impact on a :

$$\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_s = \mathbf{u}_i \xrightarrow[\Delta x \rightarrow 0]{} \mathbf{0}, \quad (3.27)$$

et la prise en compte de ces termes impliquerait : $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} U_i^{char} \neq 0$.

3.3.4.2 PST tangentielle vs complète à la paroi

L'objectif de cette section est de comparer deux approches concernant la vitesse de PST proche d'une paroi. La première approche consiste à se rapprocher de la condition théorique de non pénétration, ce qui implique d'annuler la composante normale de $\delta \mathbf{u}$ à la paroi, à l'instar de ce qui est fait à la surface libre. Dans un tel cas, au voisinage d'un point triple (surface libre/paroi), la PST est annulée si la paroi et la surface libre ne sont pas parallèles, le critère étant $|\mathbf{n}_i^{BIM-CFA} \cdot \mathbf{n}_i| \geq 0.9659$ (correspondant à un angle de 15°) où $\mathbf{n}_i^{BIM-CFA}$ et \mathbf{n}_i sont respectivement définis par (1.144) et (1.141). A l'inverse, lorsque $|\mathbf{n}_i^{BIM-CFA} \cdot \mathbf{n}_i| < 0.9659$, une PST tangentielle est autorisée et la surface libre prévaut par rapport à la paroi, i.e. le vecteur tangentiel à la surface libre est retenu dans ce cas. Une seconde approche consiste à ne pas contraindre la direction de la PST proche d'une paroi. Dans ce cas, en présence d'un point triple, la méthode appliquée à la surface libre prévaut. Dans ces deux cas, en présence d'un point triple, la valeur de λ_i dans l'équation (3.21) correspond à la plus petite valeur propre de la matrice (1.143).

En pratique, la première approche peut engendrer un amoncellement de particules le long de la paroi (partie droite de la figure 3.13). De plus, cela peut mener à des rapprochements et éloignements excessifs entre les particules et la paroi, impliquant une mauvaise estimation de la pression en proche paroi. La figure 3.14 illustre cet effet où le fait d'utiliser une PST purement tangentielle produit une surestimation de la pression le long de la paroi, tandis que les résultats analytiques sont retrouvés avec la seconde approche.

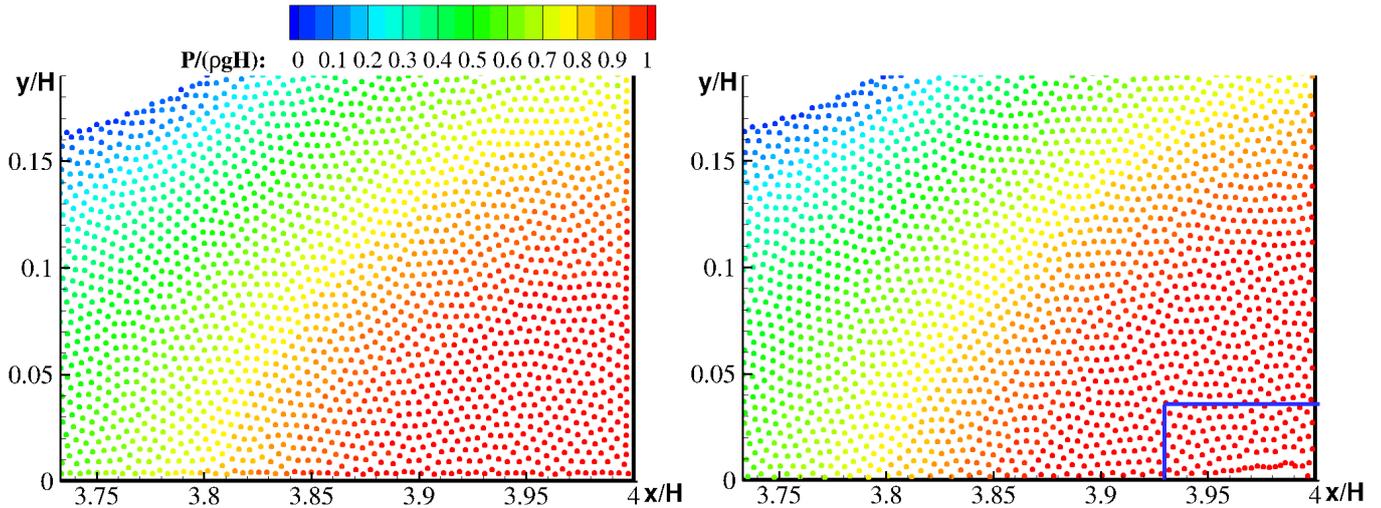


FIGURE 3.13 – Exemple de distribution de particules obtenues sans (gauche) ou avec (droite) limitation de la PST à sa composante tangentielle (avec méthode surfacique). Cas d'un dam-break après l'impact de la langue d'eau sur la paroi opposée.

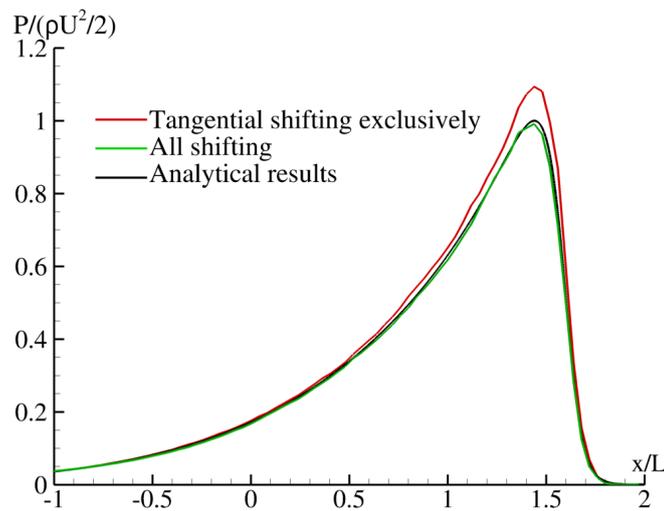


FIGURE 3.14 – Jet fluide impactant une plaque plane en 2D (avec méthode surfacique). Pression le long de la paroi à $tU/H = 0.2$ avec $H/\Delta x = 100$.

3.3.4.3 Validation en 2D

Tout d'abord, nous vérifions sur la figure 3.15 que la condition de consistance de la vitesse de PST (3.3) est toujours valide. Nous observons qu'avec les méthodes volumique et surfacique de traitement des parois solides, les résultats sont très proches, excepté pour la discrétisation spatiale la plus fine. Ceci s'explique par le fait que le taux de convergence est calculé en moyennant temporellement les valeurs de $\|\delta \mathbf{u}_{max}\|$. En utilisant une norme infinie ($\max_t \|\delta \mathbf{u}_{max}\|$) les résultats sont similaires pour les deux méthodes.

La partie gauche de la figure 3.16 montre l'évolution temporelle de la pression au point d'arrêt. On observe une très bonne capture du pic de pression et les résultats analytiques sont retrouvés à partir de $H/\Delta x = 80$, ce qui correspond à une discrétisation spatiale plus grossière que pour la méthode volumique de traitement des frontières avec le même schéma. De plus, sur la partie droite, on peut voir que le profil de pression le long de la paroi est en très bon accord avec les résultats analytiques attendus. Les conclusions sont identiques pour la position de la surface libre et le profil de de vitesse, comme le montre la figure 3.17.

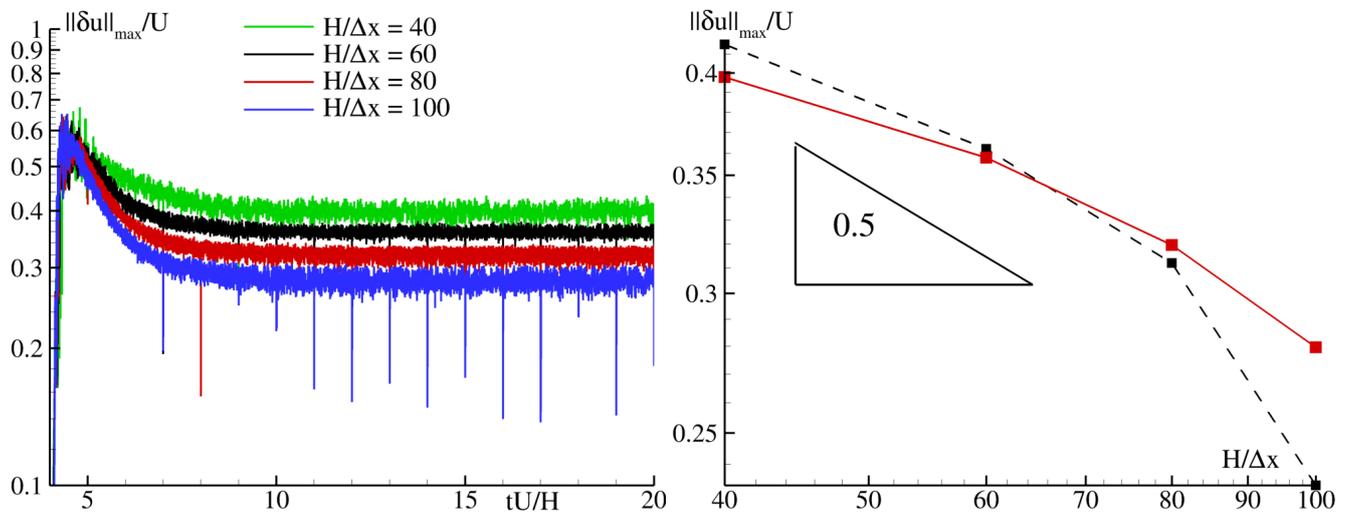


FIGURE 3.15 – Jet fluide impactant une plaque plane en 2D (avec méthode surfacique). Gauche : évolution temporelle de la valeur maximale de la vitesse de PST pour quatre résolutions spatiales. Droite : courbe de convergence avec en noir la méthode volumique et en rouge la méthode surfacique.

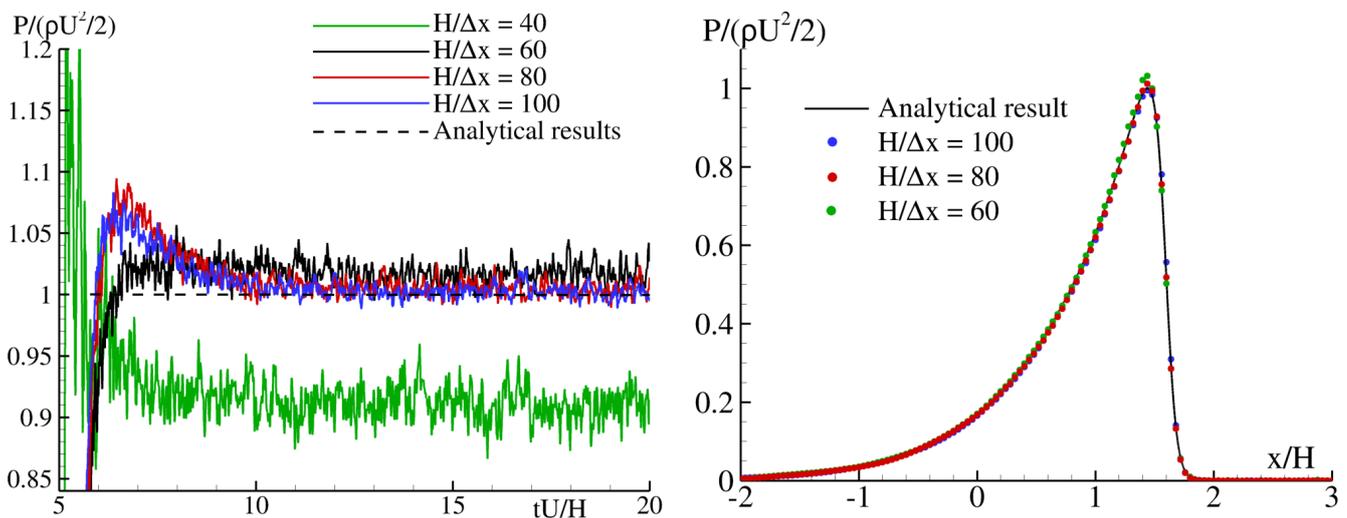


FIGURE 3.16 – Jet fluide impactant une plaque plane en 2D (avec méthode surfacique). Gauche : évolution temporelle du pic de pression. Droite : profil de pression le long de la paroi pour trois discrétisations spatiales et comparaison à la solution analytique une fois l'état stationnaire atteint (à $tU/H = 20$).

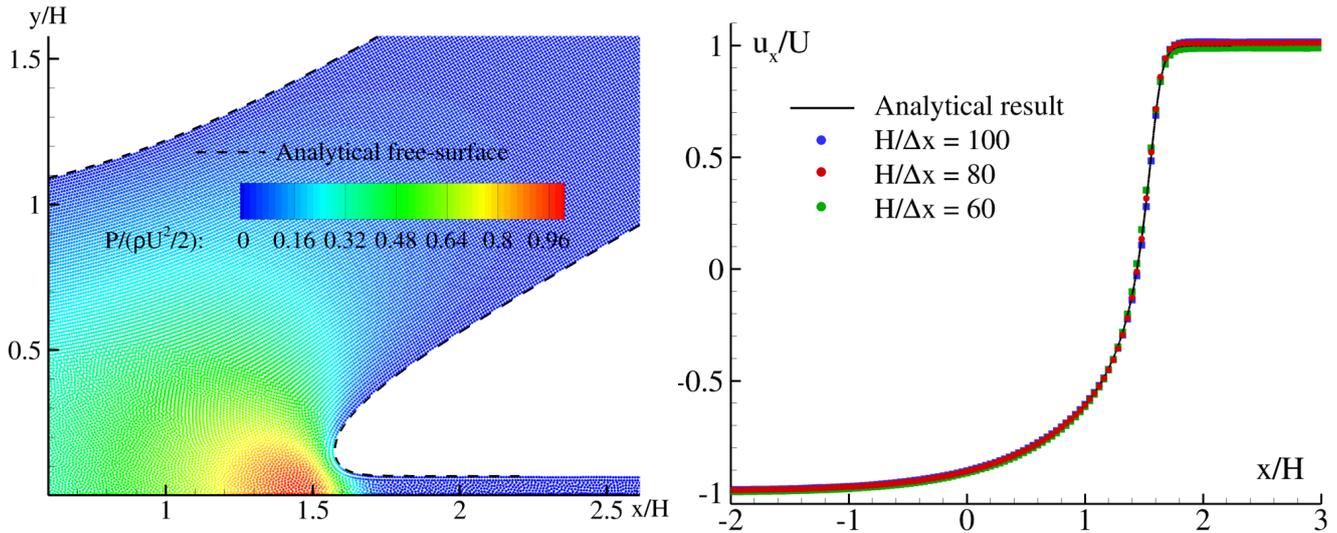


FIGURE 3.17 – Jet fluide impactant une plaque plane en 2D (avec méthode surfacique). Gauche : champ de pression obtenu avec $H/\Delta x = 100$ à $tU/H = 20$ (la surface libre analytique est aussi tracée). Droite : profil de la vitesse horizontale le long de la paroi pour trois discrétisations spatiales en comparaison avec la solution analytique.

3.3.4.4 Validation en 3D

Pour l'écoulement 3D d'un jet fluide sur une plaque plane (ici étudié pour un angle $\alpha = 90^\circ$ correspondant à un impact vertical), les résultats expérimentaux obtenus dans [45] font office de solution de référence, les profils de pression le long de la paroi à différents endroits et la position de la surface libre étant fournis. Dans cette expérience, le nombre de Froude ($Fr \approx 36$) est tel que l'on peut considérer que la gravité peut être négligée dans l'écoulement. Concernant la viscosité, $Re \approx 6.10^5$ et les effets visqueux peuvent aussi être négligés. Ainsi, en appliquant la relation de Bernoulli le long de la ligne de courant centrale, on obtient la pression au point d'arrêt.

La figure 3.18 montre que la propriété de consistance (3.3) est vérifiée dans ce cas 3D, avec un ordre de convergence proche de 1. De plus, comme observé sur la figure 3.19, la pression au point d'arrêt converge vers la solution analytique lorsqu'on raffine la discrétisation spatiale, bien qu'avec $H/\Delta x = 40$, la solution ne soit pas encore tout à fait convergée. En ce qui concerne les profils de pression le long de la paroi (figure 3.20), les résultats numériques obtenus avec la discrétisation $H/\Delta x = 40$ sont proches de ceux obtenus expérimentalement, malgré le fait que la pression soit sous-estimée par rapport à l'expérience, en particulier en $y/H = 0.53$. Ceci est aussi observé par Kvicinsky [45] avec le logiciel FIDAP (basé sur la méthode des Éléments Finis utilisant la méthode de Galerkin, et dans lequel la surface libre est suivie par une représentation de type Volume Of Fluid). Dans notre cas, avec $H/\Delta x = 40$, la convergence n'est pas obtenue pour la pression au point d'arrêt et il n'est donc pas étonnant que la pression soit sous-estimée en $y/H = 0.53$. Nous pouvons aussi noter la bonne répartition spatiale des particules grâce à la PST (considérant bien qu'il s'agit là d'une coupe d'un calcul 3D) et la grande régularité du champ de pression résultant, malgré la résolution spatiale assez grossière. Finalement, la figure 3.21 compare la solution numérique avec la surface libre obtenue expérimentalement, montrant un très bon accord.

3.4 Discussion

Dans ce chapitre, après une étude théorique de lois de PST présentes dans la littérature, nous avons proposé une nouvelle PST satisfaisant les conditions de consistance, d'invariance par translation rectiligne uniforme et rotation instantanée, et d'indépendance par rapport à l'écoulement global. Cette loi a ensuite été validée pour des schémas SPH présentant chacun une manière différente de prendre en compte la vitesse

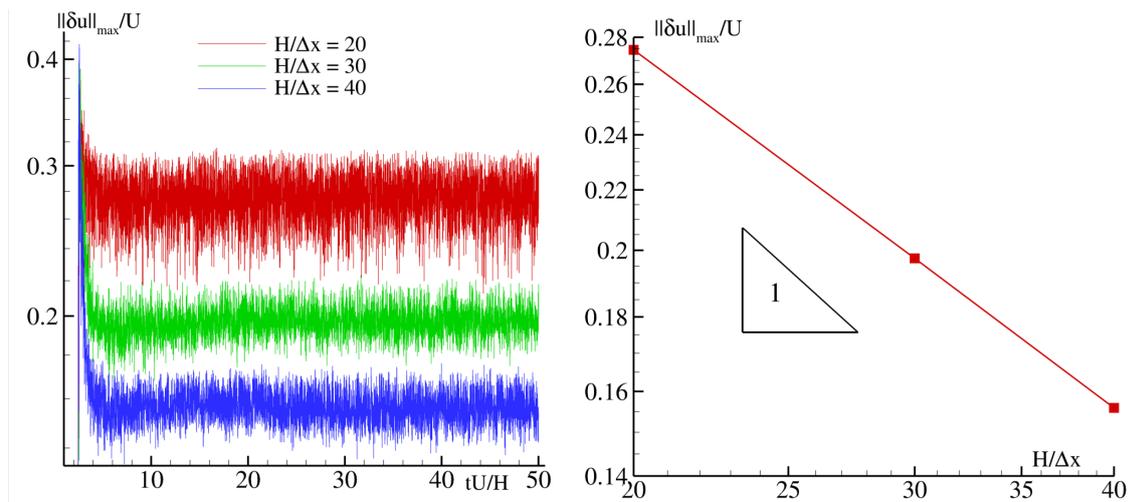


FIGURE 3.18 – Jet fluide impactant une plaque plane en 3D (avec méthode surfacique). Gauche : valeur maximale de la vitesse de PST. Droite : courbe de convergence.

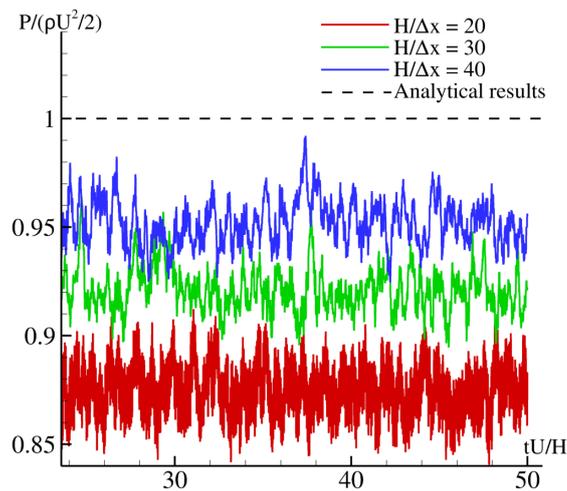


FIGURE 3.19 – Jet fluide impactant une plaque plane en 3D (avec méthode surfacique). Evolution temporelle de la pression au point d'arrêt pour trois discrétisations spatiales.

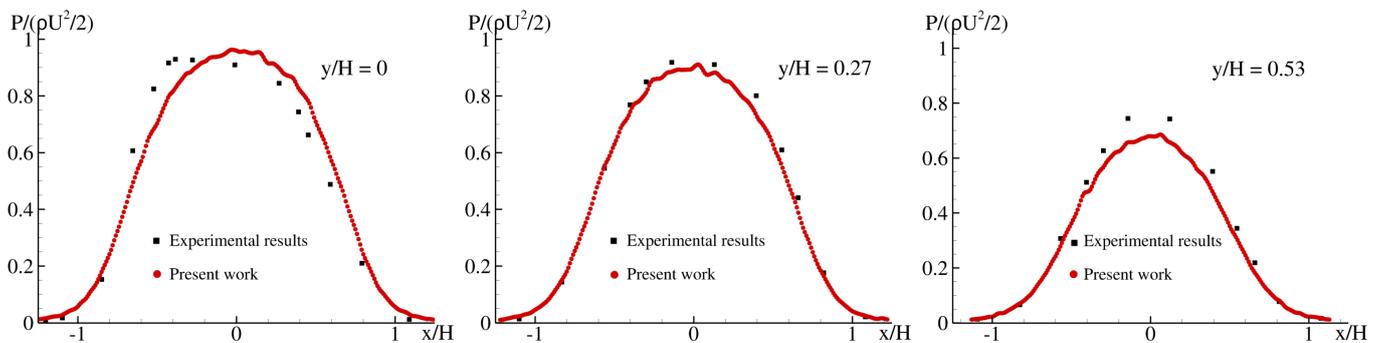


FIGURE 3.20 – Jet fluide impactant une plaque plane en 3D (avec méthode surfacique). Profil de pression le long de la paroi à $tU/H = 50$ à différents endroits avec $H/\Delta x = 40$.

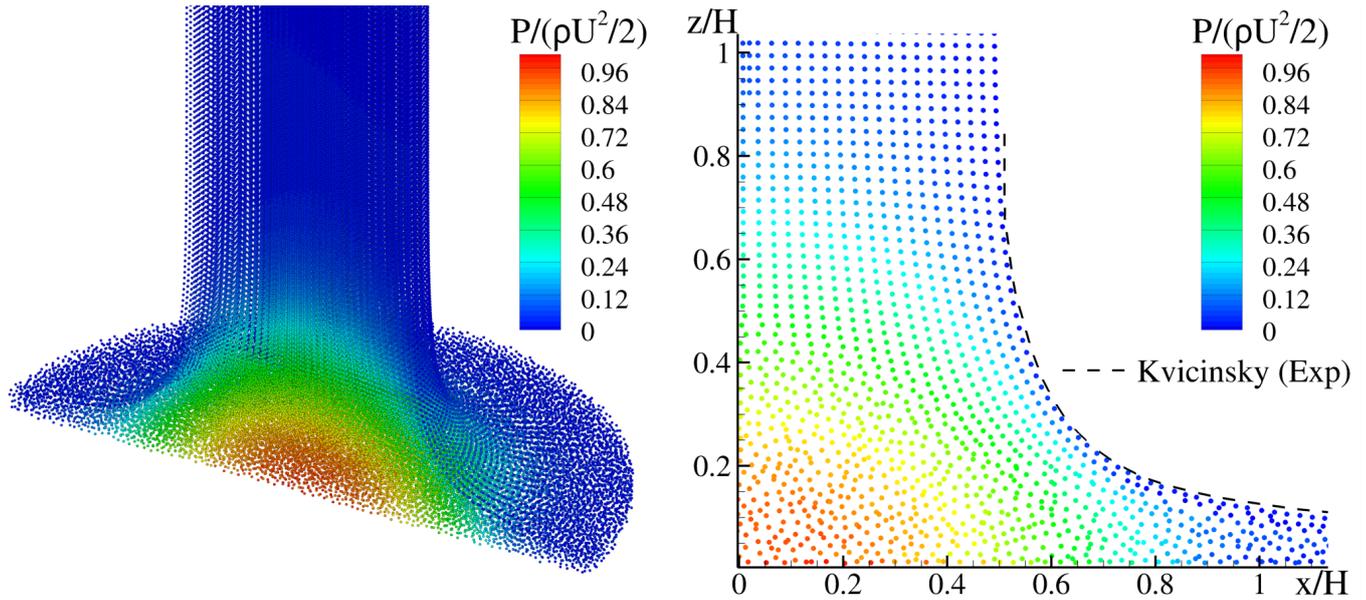


FIGURE 3.21 – Jet fluide impactant une plaque plane en 3D (avec méthode surfacique). Gauche : champ de pression à $tU/H = 50$ avec $H/\Delta x = 40$. Droite : coupe de l'écoulement et comparaison avec la surface libre expérimentale.

de PST dans les équations. En parallèle de cette validation, nous avons aussi comparé les différents schémas étudiés et montré que l'utilisation de la formulation hybride issue de Colagrossi *et al.* [18] adaptée ici à une stabilisation de Riemann permet de retrouver des résultats proches de ceux obtenus avec le schéma de Parshikov & Medin en matière de précision et de diffusion, tout en s'affranchissant des problèmes de dérives évoqués au Chapitre 2. Malheureusement, faute de temps nous n'avons pas pu développer une méthode surfacique de prise en compte des parois – nécessaire pour les simulations du phénomène de l'hydroplanage – adaptée à ce schéma. Par conséquent, dans la suite de cette thèse, nous utiliserons le schéma de Parshikov & Medin, les problèmes de dérives observés avec ce schéma apparaissant uniquement (i) avec un domaine confiné, (ii) en présence d'une surface libre lors de mouvements de ballotement en temps long.

Sans mention contraire la loi de PST introduite ici sera utilisée. Ainsi, en plus de la validation sur des cas académiques effectuée dans ce chapitre, l'applicabilité de cette loi sera démontrée sur des cas industriels tels que l'amerrissage d'urgence d'hélicoptère ou le phénomène d'hydroplanage.

Chapitre 4

Modèle de décollement de jet compatible avec les effets de succion

Dans beaucoup d'applications industrielles pour lesquelles des écoulements complexes sont considérés, il est nécessaire de traiter avec précision le détachement des jets fluides de parois solides, en particulier dans le cas de parois convexes. De plus, lorsque les effets de succion sont prédominants, il est nécessaire de bien capturer ces derniers. En ce qui concerne l'application à l'hydroplanage visée dans cette thèse, un traitement de décollement de jet de surface libre est bien évidemment nécessaire. Ainsi, une méthode permettant le détachement de jet compatible avec la prise en compte des effets de succion est développée dans ce chapitre.

4.1 De l'importance d'un traitement de décollement de jets compatible avec la prise en compte des effets de succion

Le décollement de jets de surface libre d'une paroi solide convexe est un problème difficile à traiter pour toute méthode numérique. En effet, sans traitement spécifique, les basses pressions présentes en amont du point triple (surface libre/paroi) tendent à maintenir le jet de surface libre le long des géométries convexes [87], au lieu de le voir se séparer de la paroi, comme observé expérimentalement. La méthode SPH ne déroge pas à la règle comme souligné par Sun *et al.* [91]. Pour pallier ce problème de non décollement, un modèle doit être mis en place, comme proposé par Sun & Faltinsen [87] dans le cadre de la Boundary Element Method (BEM) et Sun *et al.* [91] en SPH.

Dans [87], il est proposé de détecter quand $P - P_{atm} < 0$ sur une grande surface S_{sep} de la paroi solide, où P_{atm} est la pression atmosphérique. Un point de séparation entre le fluide et la paroi en est déduit et un traitement spécifique est adopté pour permettre au fluide de se détacher de la portion de paroi S_{sep} .

En SPH, Sun *et al.* [91] ont proposé une technique lorsque les parois sont traitées avec des particules fantômes fixes. Elle consiste à attribuer une pression nulle aux particules fantômes quand (i) cette dernière est dans le support du noyau d'une particule dans la région de surface libre et (ii) quand la pression de la particule fantôme est négative. L'introduction d'une PST est nécessaire dans ce cas, la PST devant être uniquement réduite à sa partie tangentielle. En effet lorsque la PST est autorisée dans toutes les directions, les auteurs ont remarqué que le détachement ne se produisait plus.

4.1.1 Traitement existant au sein du laboratoire

Au sein du laboratoire, le besoin d'un traitement pour le décollement de jets de surface libre autour de géométries convexes n'est pas nouveau. La physique impliquée étant très complexe (couche limite, mouillabilité, etc), il y a nécessité d'utiliser un modèle pour étudier ce phénomène. Le traitement existant était le suivant (donné ici pour Parshikov & Medin et BIM-CFA). Pour toute particule i , l'équation de quantité de

mouvement :

$$\frac{d(V_i \rho_i \mathbf{u}_i)}{dt} = -\frac{V_i}{\gamma_i} \sum_{j \in \mathcal{D}_i} 2P_E \nabla_i W_{ij} V_j + V_i \rho \mathbf{g} - \frac{V_i}{\gamma_i} \sum_{s \in \partial \mathcal{D}_i} (P_s + P_i) \mathbf{n}_s W_{is} S_s, \quad (4.1)$$

devenait :

$$\frac{d(V_i \rho_i \mathbf{u}_i)}{dt} = -\frac{V_i}{\gamma_i} \sum_{j \in \mathcal{D}_i} 2P_E \nabla_i W_{ij} V_j + V_i \rho \mathbf{g}, \quad (4.2)$$

dans le cas où $P_s + P_i < 0$. Ainsi le terme de paroi était annulé dans cette équation lorsque les pressions en proche paroi étaient négatives. Le traitement est ici expliqué pour un traitement surfacique des parois mais un traitement analogue existait pour les particules fantômes. Ensuite, le choix d'activer ou non ce traitement dans une simulation était dépendant de l'écoulement considéré. Il était notamment retenu dans les cas d'impact de géométries complexes à la surface libre.

4.1.2 Mise en évidence des problèmes rencontrés avec la méthodologie existante

Afin de mettre en évidence les problèmes apparaissant avec cette méthodologie, deux cas tests sont ici considérés. Ces cas tests seront ensuite utilisés dans toute la suite du chapitre à des fins de validation. Par ailleurs, la PST introduite au chapitre précédent est utilisée.

4.1.2.1 Cas d'impact d'un cylindre dans une cuve de fluide initialement au repos en 2D : Greenhow & Lin [34]

Le premier cas est un impact à la surface libre d'un cylindre de diamètre $D = 0.11 \text{ m}$ pour lequel des expériences ont été conduites par Greenhow & Lin [34]. Le cylindre est lâché librement à partir d'une certaine hauteur et impacte ainsi l'eau avec une vitesse théorique $U = 2.955 \text{ m.s}^{-1}$. Deux cylindres différents sont considérés, l'un étant de densité 1, l'autre de densité 0.5. Les dimensions de référence sont la longueur D , la vitesse U , le temps $\sqrt{D/g}$ et la pression $\rho g D$ (cette pression de référence étant utilisée en suivant le choix de Sun *et al.* [91]). Pour ce cas, le déplacement du centre du cylindre est comparé aux données expérimentales [34] et numériques [87,91], et la forme de la surface libre est comparée aux résultats de Sun *et al.* [91] obtenus avec le schéma δ -SPH, et de Sun & Faltinsen [87] en BEM (Boundary Element Method). Ces références numériques complémentaires s'avèrent en effet très utiles, tant il n'est pas toujours aisé de déterminer avec précision les déformations de la surface libre à partir des photos fournies dans [34], en particulier dans les zones de forte dynamique.

Dans toutes les simulations, la vitesse du son est choisie comme $c_0 = 50U$, et des boîtes de raffinement sont utilisées pour limiter le nombre de particules dans l'écoulement [16].

4.1.2.2 Cas d'entrée et sortie d'un prisme à la surface libre à cinématique imposée en 2D : Piro & Maki [78]

Le second cas test est un cas d'impact puis de sortie d'un prisme de longueur $D = 1 \text{ m}$ (voir figure 4.1) à cinématique imposée dans une cuve de fluide de masse volumique $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ initialement au repos [77,78]. L'angle du prisme est $\beta = 10^\circ$ et le déplacement vertical du corps est donné par :

$$y(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + U_0 t, \quad (4.3)$$

où plusieurs variantes de U_0 et de y_{min} sont proposées dans [78], et où y_{min} est la position la plus basse du corps, i.e. quand $y'(t) = 0$ à $t = t_0 = -U_0/a_0$. Une fois U_0 et y_{min} fixés, l'accélération a_0 est déduite de l'équation (4.3). Dans notre cas, nous souhaitons étudier en particulier la sortie d'un corps dont tout un pan est immergé, occasionnant de la succion, et pour lequel des jets de surface libre se sont déjà développés. Ainsi, le cas où $\frac{y_{min}}{\tan \beta D/2} = 1$ nous intéresse particulièrement et nous prenons comme vitesse $U_0 = 4 \text{ m/s}$, ce qui correspond au cas numéro 3 de [78]. Ainsi, les dimensions de référence choisies ici sont la longueur D ,

la vitesse U_0 , le temps $t_0 = -U_0/a_0$, la pression $\frac{\rho U_0^2}{2}$ et la force $\frac{\rho U_0^2 D}{2}$ (la dimension du prisme dans la 3^{ème} dimension étant considérée unitaire).

Au vu de la vitesse élevée des jets fluides apparaissant en début de simulation, la vitesse du son est choisie comme $c_0 = 112.5U_0$ dans toutes les simulations afin de respecter la condition de faible compressibilité. La cuve est quant à elle dimensionnée de telle façon que les réflexions des ondes acoustiques ne viennent pas perturber l'écoulement. Afin de limiter le nombre de particules dans la simulation, des boîtes de raffinement sont utilisées et la discrétisation spatiale est donnée en référence à la discrétisation la plus fine.

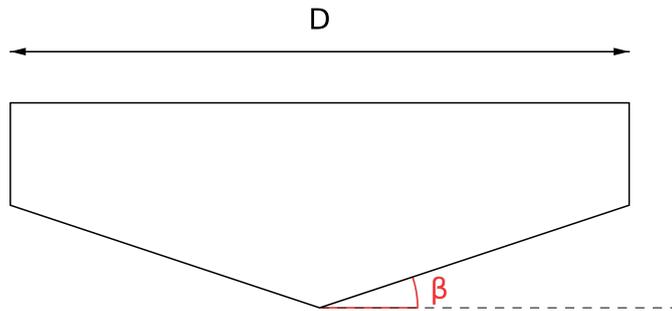


FIGURE 4.1 – Entrée et sortie d'un prisme à la surface libre initialement au repos en 2D. Présentation du cas.

4.1.2.3 Etude comparée du traitement sur ces deux cas

Les résultats obtenus pour les deux cas tests avec et sans le traitement de décollement de jet existant sont représentés sur la figure 4.2. Pour le cas d'impact du cylindre, il est nécessaire d'utiliser un tel traitement puisque dans le cas contraire le fluide contourne le cylindre jusqu'à engloutissement total de ce dernier. A l'inverse sur le cas de Piro & Maki où les effets de suction sont prédominants, le fait d'utiliser le traitement existant entraîne la création d'une "surface libre artificielle".

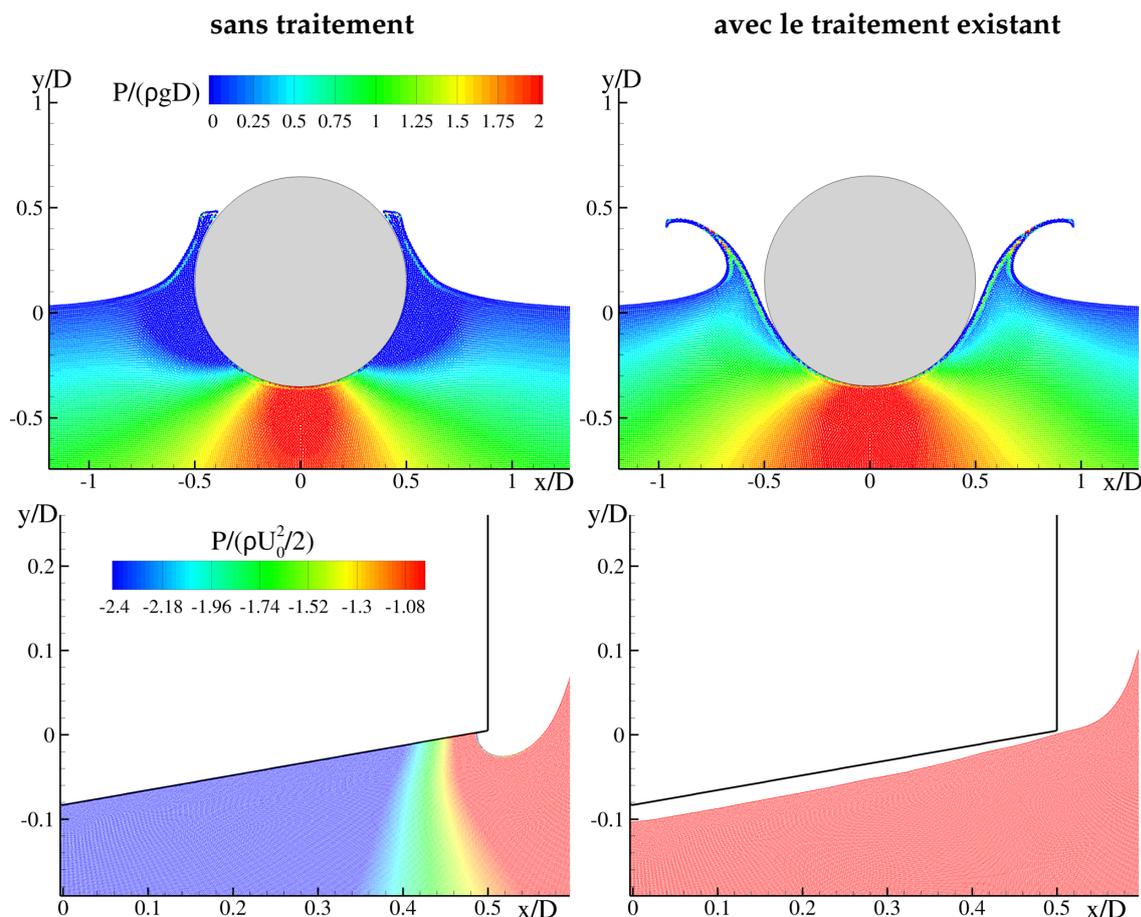


FIGURE 4.2 – Etude comparée sans le traitement (à gauche) et avec le traitement existant (à droite). Haut : impact d’un cylindre de densité 0.5 à la surface libre en 2D. Bas : entrée et sortie d’un prisme à la surface libre initialement au repos en 2D, à l’instant d’inversion du mouvement imposé.

Récemment, au sein du projet européen SARAH (Increased Safety & Robust Certification for ditching of Aircrafts & Helicopters), une campagne d’essais expérimentaux d’amerrissage d’urgence d’hélicoptères a été menée au laboratoire, en parallèle de simulations numériques en SPH. Dans un tel cas, activer le traitement existant sur la paroi de l’hélicoptère permet de capturer correctement les jets au début de la simulation, mais lorsque les effets de succion deviennent important lors de la remontée de l’hélicoptère, une surface libre artificielle se crée sous la carlingue, entraînant un décollement non-physique du fluide, et non-observé dans les expériences. A l’inverse, lorsque le traitement n’est pas activé, les jets ne se forment pas autour des surfaces convexes de la carlingue, tandis que les effets de succion observés expérimentalement à l’arrière de la carlingue entraînent une mauvaise estimation des efforts, et par conséquent une mauvaise estimation de la cinématique (les mouvements du corps à 6 degrés de liberté étant calculés par intégration des forces de pression du fluide sur l’engin).

En prolongement de ce cas complexe d’interaction couplé entre un corps rigide (considéré indéformable) et un fluide, la prise en compte ou non de ce traitement a une forte influence sur un des cas de validation du couplage fluide structure (voir Chapitre 5). Ainsi, le besoin de développer un traitement permettant le détachement de jets compatible avec les effets de succion a été identifié. Un travail en ce sens a donc été réalisé en étroite collaboration avec Alban Vergnaud, également doctorant au sein du laboratoire et travaillant plus directement sur le projet SARAH.

4.2 Proposition d'un traitement pour le décollement de jet compatible avec les effets de suction

4.2.1 Discussion sur le traitement proposé par Sun *et al.*

Dans Sun *et al.* [91], un traitement pour le décollement de jets a été proposé. Il présente de fortes similarités avec le traitement qui existait au sein du laboratoire, avec tout de même une différence majeure : le traitement n'est appliqué que dans la région de surface libre. Le fait d'autoriser le décollement dans une telle région paraît plus satisfaisant théoriquement, et cette idée est reprise dans cette thèse. Ainsi, l'algorithme de détection de surface libre joue un rôle central et se doit d'être sans faille lorsque les effets de suction deviennent important. En effet, si une particule est erronément détectée à la surface libre, le traitement s'active et une réaction en chaîne se produit avec pour effet l'apparition d'une "surface libre artificielle" (voir figure 4.3).

Afin d'éviter ce problème, le fait d'utiliser du désordre particulaire est très important, puisque la première étape de l'algorithme de détection de surface libre (voir section 1.5.2.1) est basée sur la valeur propre minimale λ de la matrice de renormalisation, et que les valeurs de λ sont uniquement influencées par la répartition des particules dans le support du noyau. Typiquement, dans les zones à faible dynamique, utiliser une PST limitée par la vitesse Lagrangienne des particules conduit à une répartition particulaire pour laquelle des valeurs faibles de λ apparaissent, pouvant conduire aussi à une détection erronée des particules de surface libre. Ainsi, la PST introduite au chapitre précédent est ici mise à profit puisqu'elle permet de casser les lignes Lagrangiennes dans de telles zones.

Dans Sun *et al.* [91], afin de permettre le décollement des jets sur le cas d'impact du cylindre, il est préconisé de limiter la PST en proche paroi à sa composante tangentielle. Or, cette limitation entraîne sur le cas de Piro & Maki des faibles valeurs de λ dans la couche de particules la plus proche de la paroi. Ainsi, dans ce chapitre la PST introduite au chapitre précédent est utilisée sans aucune modification, c'est-à-dire qu'aucune limitation n'est appliquée quant à sa direction en proche paroi. Nous verrons que, contrairement à Sun *et al.* [91], ce choix n'affecte pas la qualité des résultats pour le décollement de jets sur le cas d'impact du cylindre.

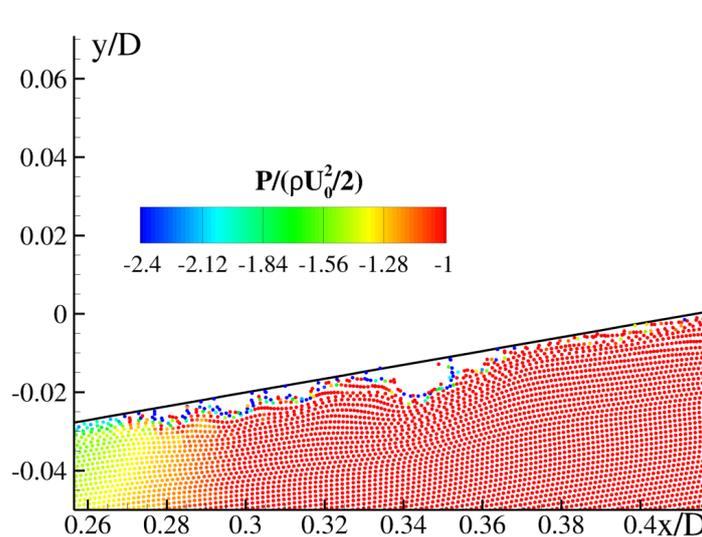


FIGURE 4.3 – Entrée et sortie d'un prisme à la surface libre initialement au repos en 2D. Champ de pression obtenu sans utiliser de PST. Illustration de la création d'une "surface libre artificielle".

4.2.2 Compatibilité du traitement avec la prise en compte des effets de suction

Afin de rendre compatible le détachement de jets avec la prise en compte des effets de suction, trois critères sont mis en place ici. (i) le fait d'être dans une région de proche surface libre, (ii) le critère qui existait déjà au sein du laboratoire à propos des pressions négatives (cf. équations (4.1)/(4.2)), (iii) la vitesse relative du corps par rapport au fluide. De plus, une différence majeure par rapport à ce qui existait au laboratoire et à Sun *et*

al. (pour lesquels seule l'équation de quantité de mouvement est affectée), est qu'une fois qu'une particule est autorisée à se détacher, son interaction avec la paroi est coupée dans l'équation de quantité de mouvement mais aussi dans l'équation de continuité.

4.2.2.1 Critère relatif à la région d'autorisation de décollement

Pour qu'une particule n'interagisse plus avec une paroi, il faut tout d'abord qu'elle soit dans une zone spécifique. Cette zone est définie par rapport aux valeurs de λ_i^* :

$$\lambda_i^* = \frac{\sum_j \lambda_j W_{ij} V_j}{\sum_j W_{ij} V_j} . \quad (4.4)$$

Comme on peut le voir sur la figure 4.4, le fait d'utiliser une correction Shepard permet de lisser le champ des valeurs de λ pour les particules situées proche d'un corps. Ainsi, les particules autorisées à se détacher sont tout d'abord celles étant en contact avec la paroi (i.e. à une distance inférieure à R de cette dernière), et étant à la surface libre telles que $\lambda_i^* < \lambda^{th}$ où λ^{th} est une valeur seuil, typiquement $\lambda^{th} = 0.90$ pour les cas 2D étudiés ici. Lorsque des parois complexes en 3D (typiquement les rainures d'un pneumatique) sont considérées dans le calcul, on préfère $\lambda^{th} \in [0.75; 0.90]$ pour s'assurer de la non création d'une surface libre artificielle. Ensuite, à l'instar de ce qui est fait en BEM par Sun & Faltisen [87] qui introduisent une zone de décollement, on définit une zone qui est l'addition de ces particules et de leurs voisines présentes dans leur support du noyau, comme le montre la figure 4.5. Il est à noter que comparé à [87] la zone n'est dans notre cas pas fixée par rapport à la taille du cylindre mais rapport au rayon R du support du noyau. Elle est donc consistante.

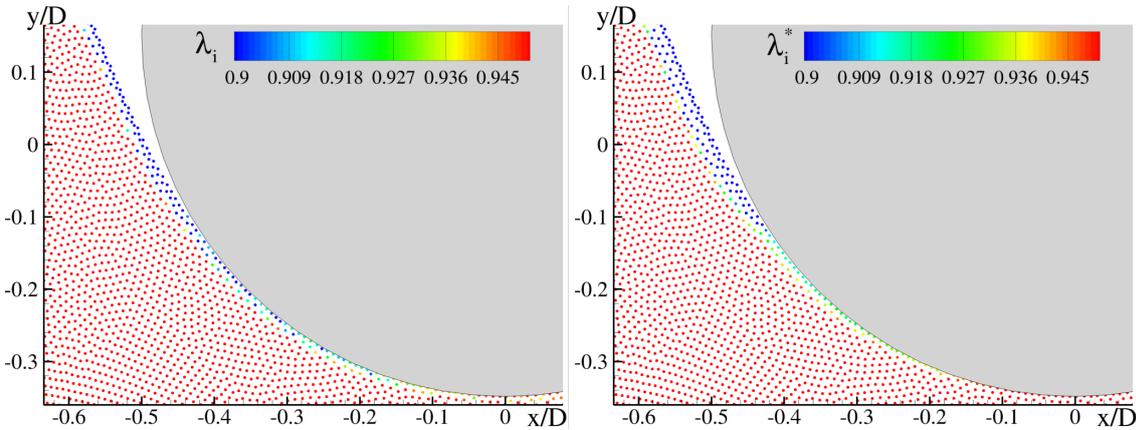


FIGURE 4.4 – Valeurs de λ_i (gauche) et λ_i^* (droite) sur le cas d'impact d'un cylindre.

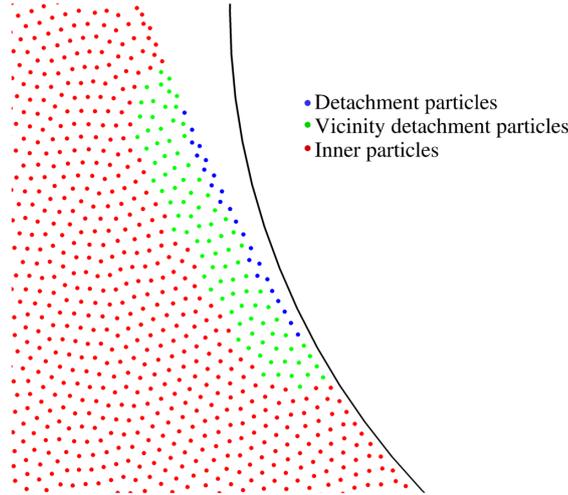


FIGURE 4.5 – Définition de la zone dans laquelle les particules sont autorisées à ne pas interagir avec la paroi. Cette zone est formée des particules bleues et vertes. Le ratio $R/\Delta x = 4$ est utilisé ici.

4.2.2.2 Critère sur la pression

Pour les particules localisées dans la zone de décollement, un premier critère physique est à respecter :

$$P_s + P_i \leq 0. \quad (4.5)$$

En effet, si $P_s + P_i > 0$ la paroi et la particule se repoussent l'une l'autre et aucun problème n'est observé. En revanche, quand ce terme devient négatif, la paroi et la particule s'attirent l'une l'autre, pouvant empêcher un décollement de jet éventuel.

4.2.2.3 Critère sur la vitesse relative

L'idée du second critère physique consiste à n'autoriser le détachement que si une particule tend à se détacher de la paroi en matière de vitesse. Mathématiquement, cela revient à écrire :

$$(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{n}_s \geq 0, \quad (4.6)$$

où \mathbf{n}_s est le vecteur normal à la paroi pointant vers l'extérieur du fluide. Nous avons remarqué que cette condition est adéquate pour les particules vertes (figure 4.5), mais pas systématiquement pour les particules bleues pour lesquelles on ajoute la condition d'avoir une opposition du sens des vecteurs vitesse de la particule et de la paroi, ce qui s'écrit :

$$\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_i \leq 0. \quad (4.7)$$

Lorsque ces trois critères sont respectés, on coupe alors l'interaction particule i – paroi s , et cette interaction est coupée du point de vue du fluide comme du point de vue du solide. Ainsi, en plus du fait que la paroi s n'intervienne plus dans le schéma SPH pour la particule i , les efforts fluides dus à la particule i sur la paroi s sont eux aussi annulés.

4.3 Validation du traitement proposé

La validation du traitement est effectuée sur les deux cas tests introduits précédemment, et une illustration sur un cas industriel est donnée.

4.3.1 Impact d'un cylindre

Comme nous pouvons l'observer sur les figures 4.6 et 4.7, les résultats obtenus sont très proches de ceux de Sun *et al.* [91] en ce qui concerne la déformée de surface libre. Des différences sont en revanche remarquées par rapport à la solution BEM. Une partie des différences vient de la manière dont a été effectuée la superposition de la solution obtenue en BEM et des résultats expérimentaux. En effet, comme visible sur la partie droite des figures 4.6 et 4.7, cette dernière a été réalisée en prenant comme référence la position du contour du cylindre. Aussi, les différences observées concernant le déplacement du centre de gravité du cylindre entre les solutions BEM et expérimentales (cf. figure 4.8) se traduisent inévitablement par un décalage vertical de la position de la surface libre. L'image la plus représentative de cet effet est celle pour le cylindre de densité 1 à $t\sqrt{g/D} = 0.132$ pour laquelle la position de la surface libre au repos (i.e. suffisamment loin du cylindre) est clairement différente en BEM par rapport à l'expérience. Malgré ces artéfacts rendant difficile la comparaison entre les solutions SPH et BEM, il apparaît clairement, que contrairement à la BEM pour laquelle la dynamique en bout de jet n'est pas correctement capturée, la méthode présentée ici permet une bonne capture du jet dans son ensemble.

Concernant le déplacement du centre de gravité du cylindre (voir figure 4.8), la convergence de la solution est obtenue ici à partir de la résolution spatiale $D/\Delta x = 200$. De plus, la solution obtenue ici est semblable à celle obtenue en BEM ou en δ -SPH. Au regard de la ressemblance des résultats obtenus avec ceux de Sun *et al.* en matière de déplacement, les efforts transmis par le fluide semblent être similaires, et le fait que les surfaces libres soient globalement confondues conforte cette idée. Des différences entre les méthodes numériques et la solution expérimentale apparaissent. Pour le cylindre de densité 0.5, on obtient une bonne estimation au début de la simulation, mais la solution numérique semble ensuite surestimer la plongée du cylindre (à partir de $t\sqrt{g/D} = 0.8$), indiquant que les efforts fluides sont sous-estimés. Cette différence peut être imputée aux effets 3D possiblement présents dans les expériences. En effet, les efforts sur les bases du cylindre ne sont bien sûr pas modélisés en 2D d'une part, et des incertitudes relatives au parallélisme initial de l'axe du cylindre par rapport à la surface libre existent d'autre part (notion aussi inexistante dans nos simplifications 2D). Nous rappelons aussi que les effets visqueux et de frottement avec l'air sont négligés dans nos simulations. Pour le cas du cylindre de densité 1, on observe une différence dès le début de la simulation, et qui perdure ensuite. Dans [34], Greenhow & Lin ont marqué le troisième point de mesure par un point d'interrogation, ainsi les différences observées sur ce cas peuvent être dues à des incertitudes au niveau expérimental.

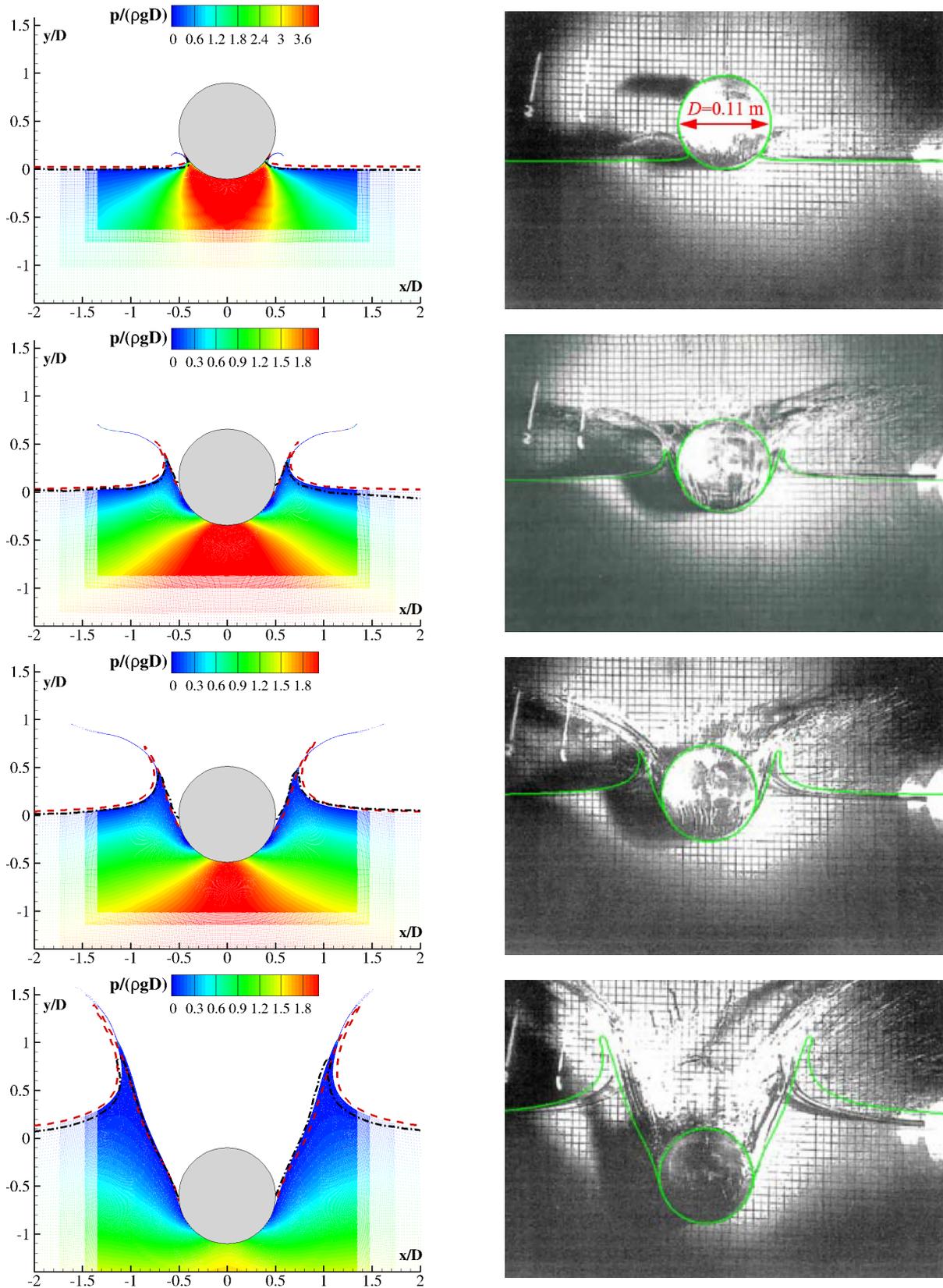
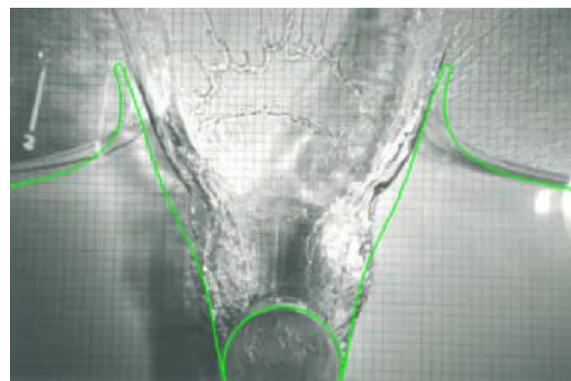
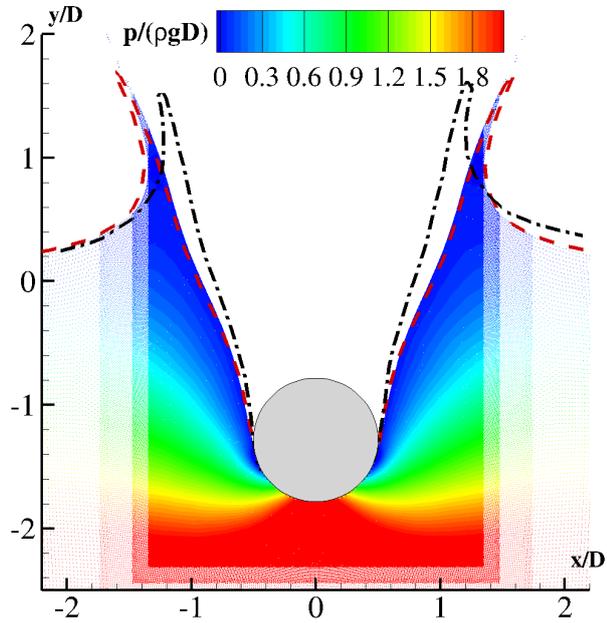
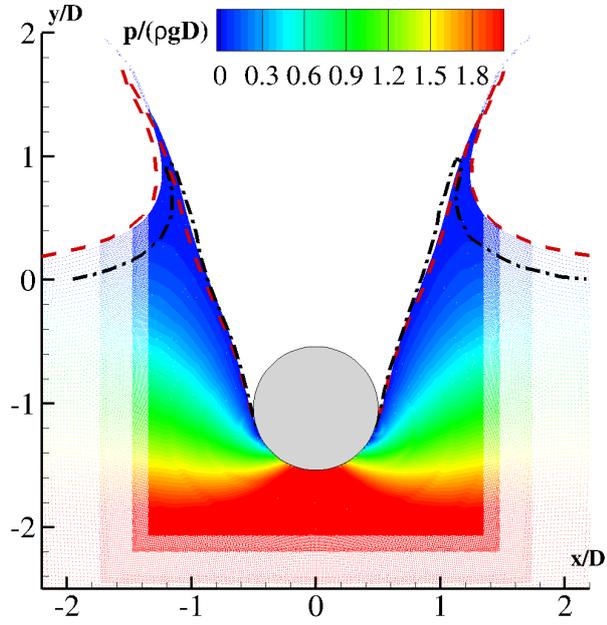
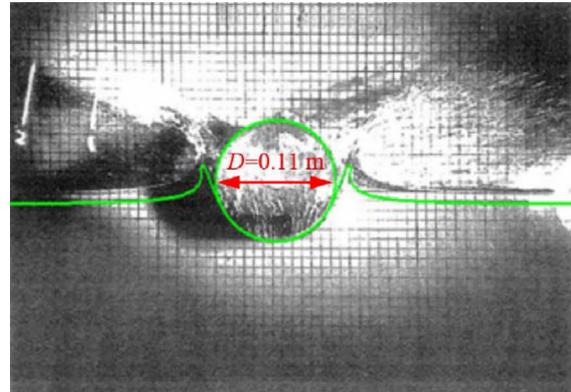
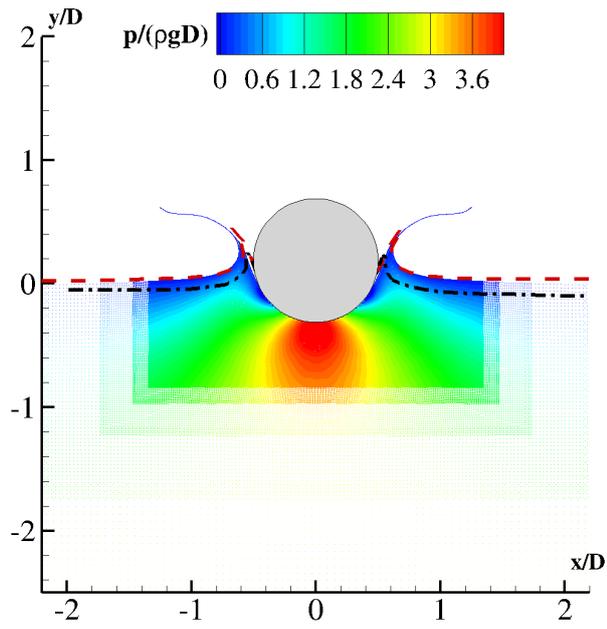


FIGURE 4.6 – Impact d’un cylindre de densité 0.5 à la surface libre en 2D aux instants $t\sqrt{g/D} = 0.038$, $t\sqrt{g/D} = 0.179$, $t\sqrt{g/D} = 0.274$, $t\sqrt{g/D} = 0.793$. Gauche : champ de pression obtenu avec $D/\Delta x = 300$, avec comparaison de la surface libre avec la BEM [87] (trait mixte noir) et δ -SPH [91](trait interrompu rouge). Droite : résultats expérimentaux avec en vert la surface libre obtenue en BEM [87].



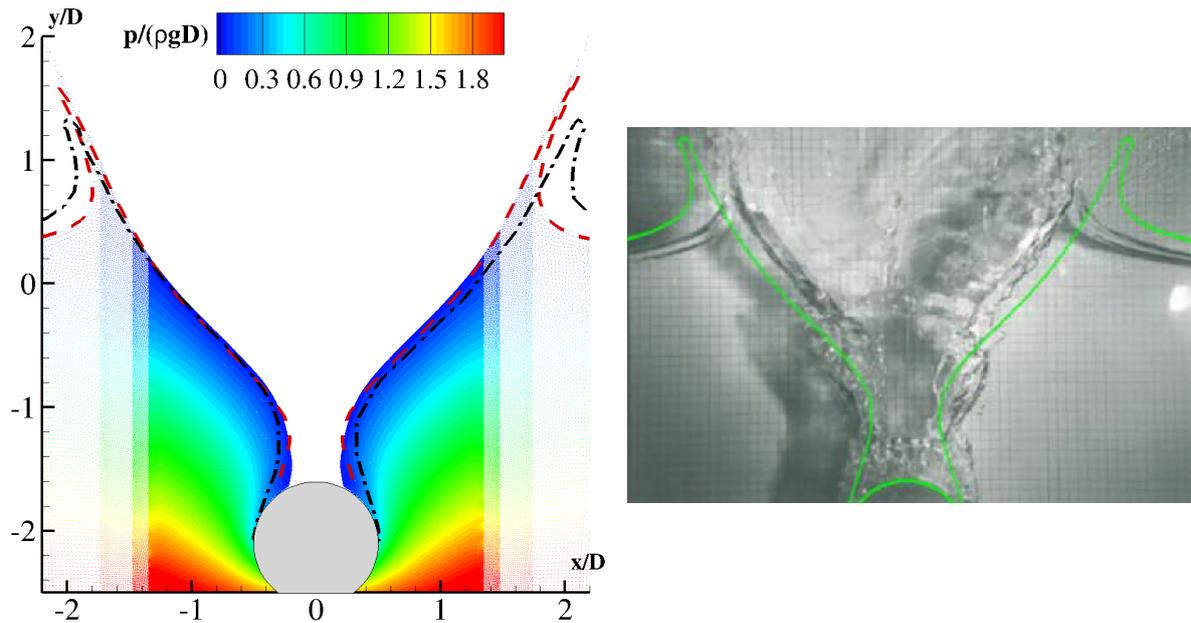


FIGURE 4.7 – Impact d’un cylindre de densité 1 à la surface libre en 2D aux instants $t\sqrt{g/D} = 0.132, t\sqrt{g/D} = 0.840, t\sqrt{g/D} = 1.028, t\sqrt{g/D} = 1.878$. Gauche : champ de pression obtenu avec $D/\Delta x = 300$, avec comparaison de la surface libre avec la BEM [87] (trait mixte noir) et δ -SPH [91] (trait interrompu rouge). Droite : résultats expérimentaux avec en vert la surface libre obtenue en BEM [87].

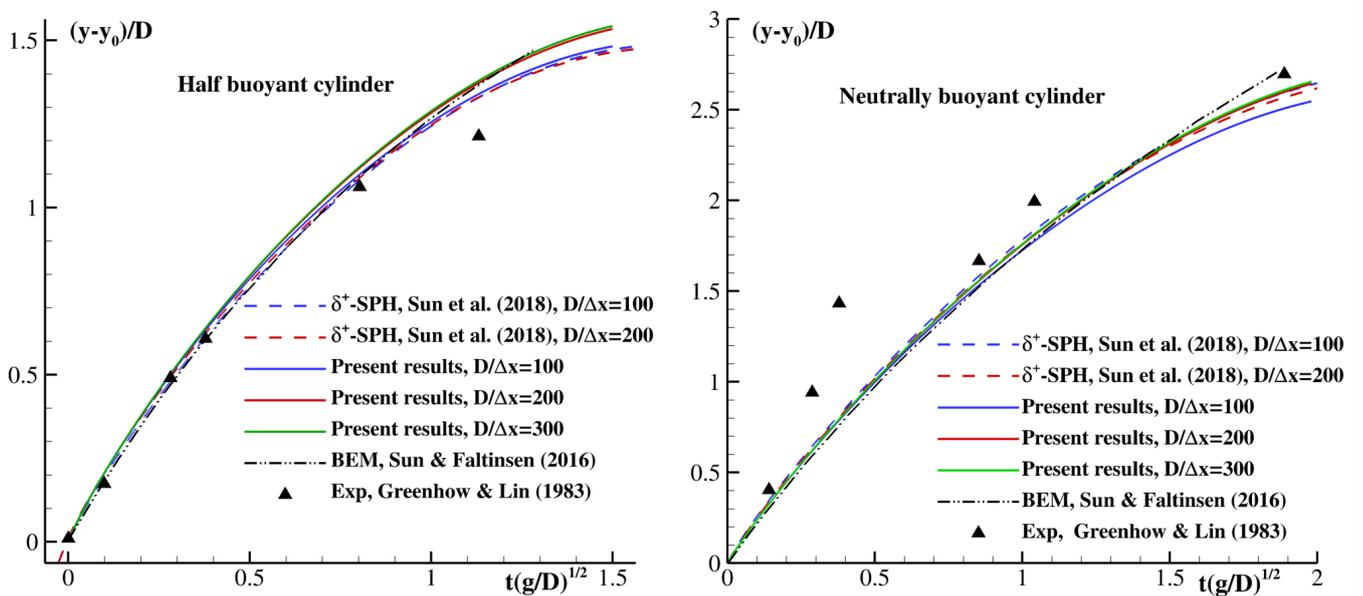


FIGURE 4.8 – Impact d’un cylindre à la surface libre en 2D. Comparaison de l’évolution temporelle du déplacement du centre du cylindre. Les résultats obtenus ici sont comparés à δ -SPH [91], la solution BEM [87] et les données expérimentales. Gauche : densité 0.5. Droite : densité 1.

4.3.2 Entrée et sortie à la surface libre d’un prisme à cinématique imposée en 2D

Pour ce second cas test, le critère sur la vitesse relative de la particule par rapport à la paroi est crucial. En effet, comme nous pouvons l’observer sur la figure 4.9, un assèchement de la paroi se produit quand il n’est pas pris en compte, tandis que le comportement attendu est retrouvé sinon. Sur la figure 4.10, les résultats obtenus sont comparés à ceux de Piro & Maki [77] et un très bon accord entre les deux méthodes est observé.

Concernant les efforts exercés par le fluide sur la paroi (voir figure 4.11), des différences apparaissent sur la première partie de la simulation, i.e. pendant la phase d'entrée du prisme. En revanche, durant la phase de sortie du prisme, les résultats de Piro & Maki et ceux obtenus ici sont confondus. De plus, des résultats très similaires sont obtenus avec et sans le traitement – chose attendue sur cette géométrie plate, c'est-à-dire non-convexe – montrant ainsi que les critères choisis permettent d'agir dans les zones souhaitées uniquement, et que cette méthode de décollement de jet est générique (indépendance au cas traité).

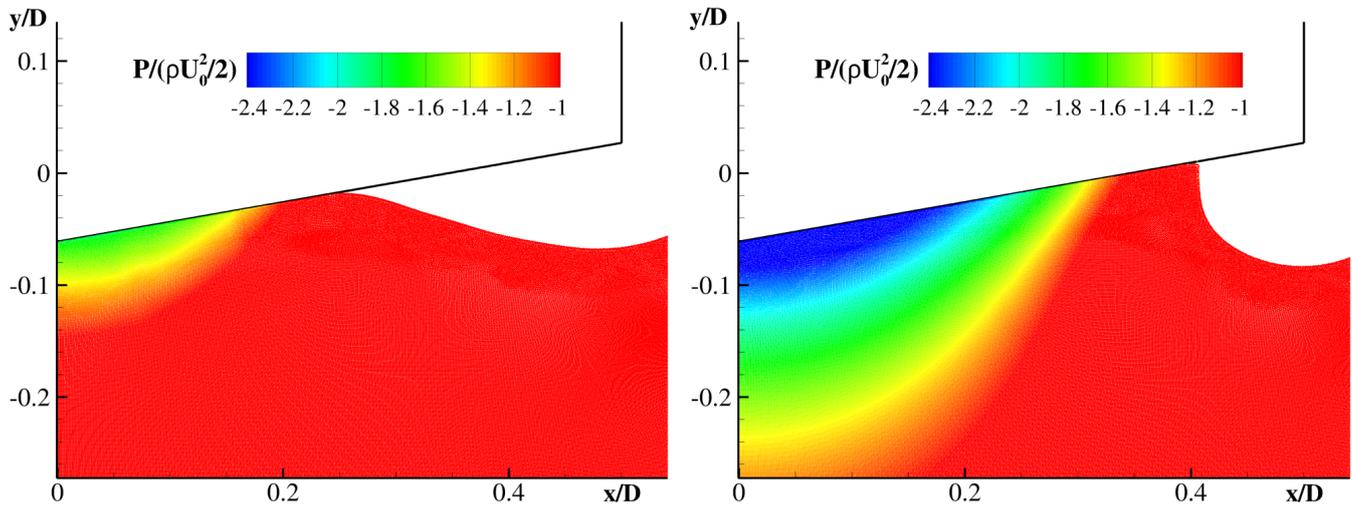


FIGURE 4.9 – Entrée et sortie d'un prisme à la surface libre initialement au repos en 2D. Champ de pression à $t/t_0 = 1$ (instant d'inversion du mouvement imposé) avec $D/\Delta x = 800$. Gauche : sans le critère sur la vitesse relative. Droite : avec les trois critères.

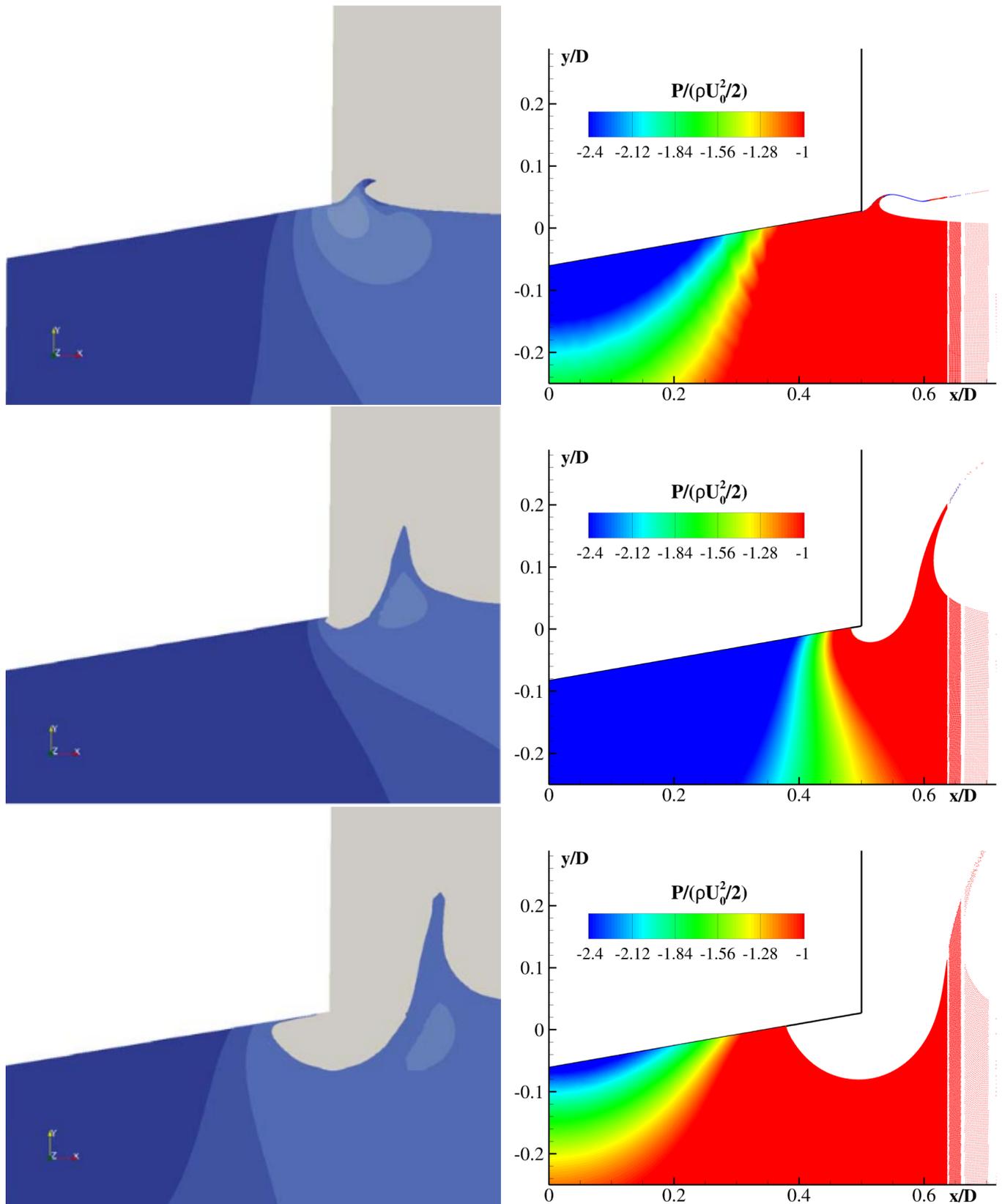


FIGURE 4.10 – Entrée et sortie d'un prisme à la surface libre initialement au repos en 2D. Comparaison des résultats obtenus avec ceux de Piro & Maki à $t/t_0 = 0.5$ (entrée), $t/t_0 = 1.0$ (inversion du mouvement) and $t/t_0 = 1.5$ (sortie). Gauche : Piro & Maki. Droite : présente méthode avec la discrétisation spatiale $D/\Delta x = 1600$.

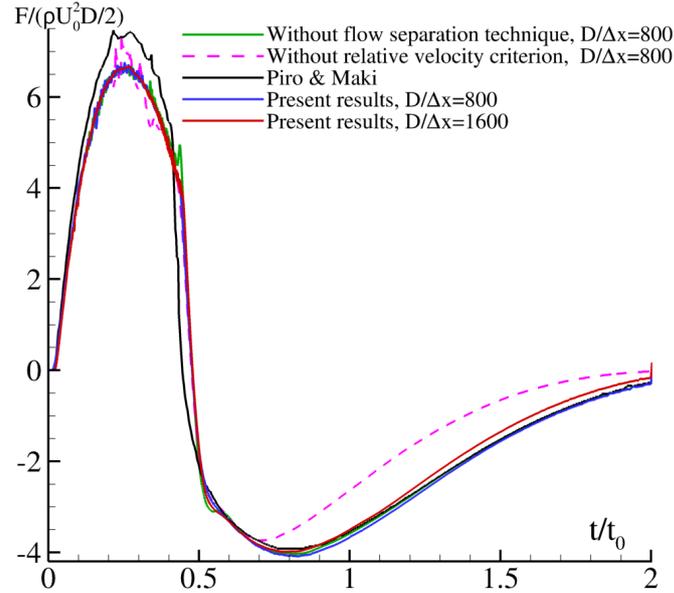


FIGURE 4.11 – Entrée et sortie d'un prisme à la surface libre initialement au repos en 2D. Evolution temporelle des efforts fluides sur le prisme. Comparaison des résultats obtenus avec ceux de Piro & Maki.

4.4 Cas d'application à l'amerrissage d'urgence d'hélicoptère

Fort des résultats encourageants obtenus avec cette amélioration du traitement relatif au décollement de jet sur les cas académiques précédents, nous nous proposons ici de l'appliquer à un cas plus "industriel" : nous montrons ici l'influence du traitement proposé sur les résultats d'un cas d'amerrissage d'urgence d'hélicoptère. La campagne d'essais réalisée au bassin de l'École Centrale de Nantes fournit une base de données expérimentales permettant entre autre la validation des schémas numériques. Les simulations présentées dans cette section ont été effectuées par Alban Vergnaud (travaux de recherche dédiés à l'amerrissage d'urgence d'hélicoptère) et l'objectif ici n'est pas de présenter en détail tous les résultats mais bien de souligner l'intérêt et l'efficacité des améliorations apportées.

4.4.1 Présentation du cas

L'étude de l'amerrissage d'urgence d'hélicoptère a pour but de mesurer l'évolution de sa trajectoire ainsi que les forces exercées sur ses parois. Pour ce faire, un système de guidage a été mis en place dans le bassin (voir figure 4.12) afin de contrôler la cinématique de la maquette de l'hélicoptère avant l'impact. La maquette est équipée de différents capteurs (forces, moments ...) et sa trajectoire est déterminée à l'aide d'un système optique. De plus, les propriétés inertielles de la maquette au point G ainsi que la localisation du point G dans le référentiel de l'hélicoptère (Oh, Xh, Yh, Zh) sont répertoriées dans le tableau 4.1 (voir figure 4.13). Les conditions initiales (mesurées à l'impact) du cas étudié ici et exprimées dans le référentiel (O, X, Y, Z) sont $(V_x, V_y, V_z) = (-7.92, 0, -0.81) m.s^{-1}$ et $\theta = 5.4^\circ$.



FIGURE 4.12 – Amerrissage d'urgence d'hélicoptère. Description du système expérimental de guidage.

$XG(m)$	$YG(m)$	$ZG(m)$	Masse (kg)	$Jxx(kg.m^2)$
1.49	-0.013	0.238	348.1	84.3
$Jyy(kg.m^2)$	$Jzz(kg.m^2)$	$Jxy(kg.m^2)$	$Jxz(kg.m^2)$	$Jyz(kg.m^2)$
190.7	205.8	-0.5	4.4	-0.5

TABLE 4.1 – Amerrissage d'urgence d'hélicoptère. Propriétés inertielles de la maquette et localisation du centre de gravité G dans (Oh, Xh, Yh, Zh) .

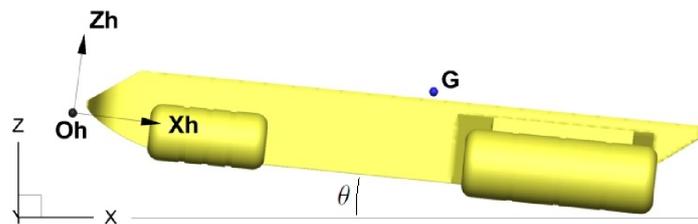


FIGURE 4.13 – Amerrissage d'urgence d'hélicoptère. Référentiel lié à la maquette.

Concernant les simulations numériques, la vitesse du son est fixée à $c_0 = 300m.s^{-1}$ et cinq boîtes de raffinement sont utilisées par soucis de compromis coût/précision. Ainsi, la discrétisation spatiale est $L/\Delta x = 400$ pour la discrétisation la plus fine, où L est la longueur de l'hélicoptère. Le ratio utilisé est $R/\Delta x = 3$.

4.4.2 Résultats

Le champ de vitesse est représenté sur la figure 4.14 avec : en haut aucun traitement pour le décollement, au milieu l'ancien traitement du laboratoire et en bas le nouveau traitement. Sans traitement, le fluide reste collé à l'avant et à l'arrière de la maquette. Avec l'ancien traitement, les jets se détachent mais on voit que les effets de succion à l'arrière sont totalement ignorés, tandis que le nouveau traitement permet de prendre en compte ces deux phénomènes. Cela se traduit notamment sur l'évolution temporelle de l'angle d'assiette de la maquette, comme on peut l'observer sur la figure 4.15 où l'on remarque que le nouveau traitement permet une meilleure estimation de son comportement. De plus, comme on peut le voir sur la figure 4.16 où une comparaison qualitative entre expérience et simulation numérique est effectuée, une ressemblance est observée en particulier sur la position des jets à l'arrière de la maquette.

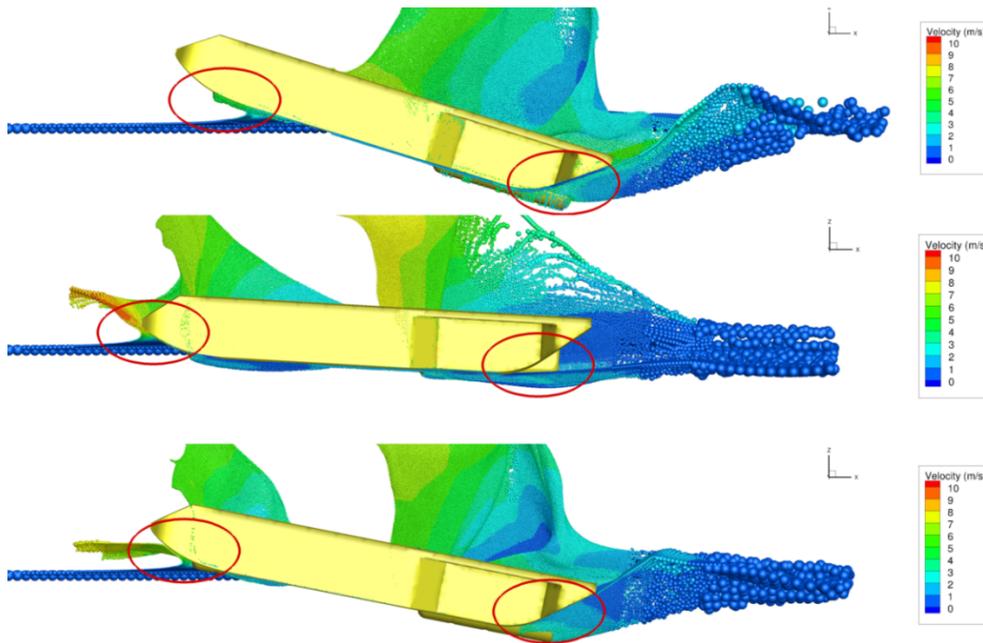


FIGURE 4.14 – Amerrissage d’urgence d’hélicoptère. Influence des traitements pour le décollement de jets. Haut : sans traitement. Milieu : traitement initialement utilisé au laboratoire. Bas : nouveau traitement.

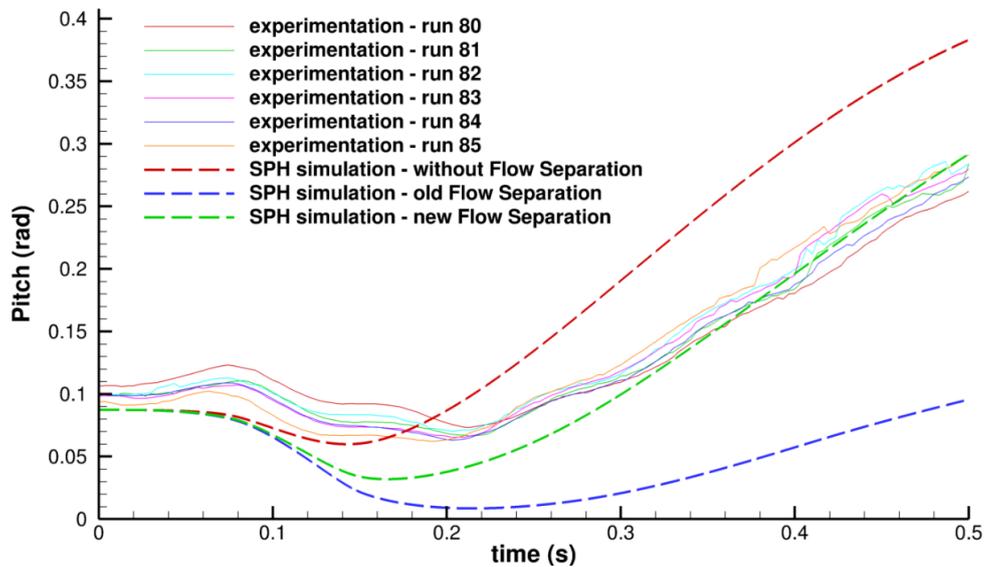


FIGURE 4.15 – Amerrissage d’urgence d’hélicoptère. Influence des traitements pour le décollement de jets. Evolution temporelle de l’angle d’assiette.

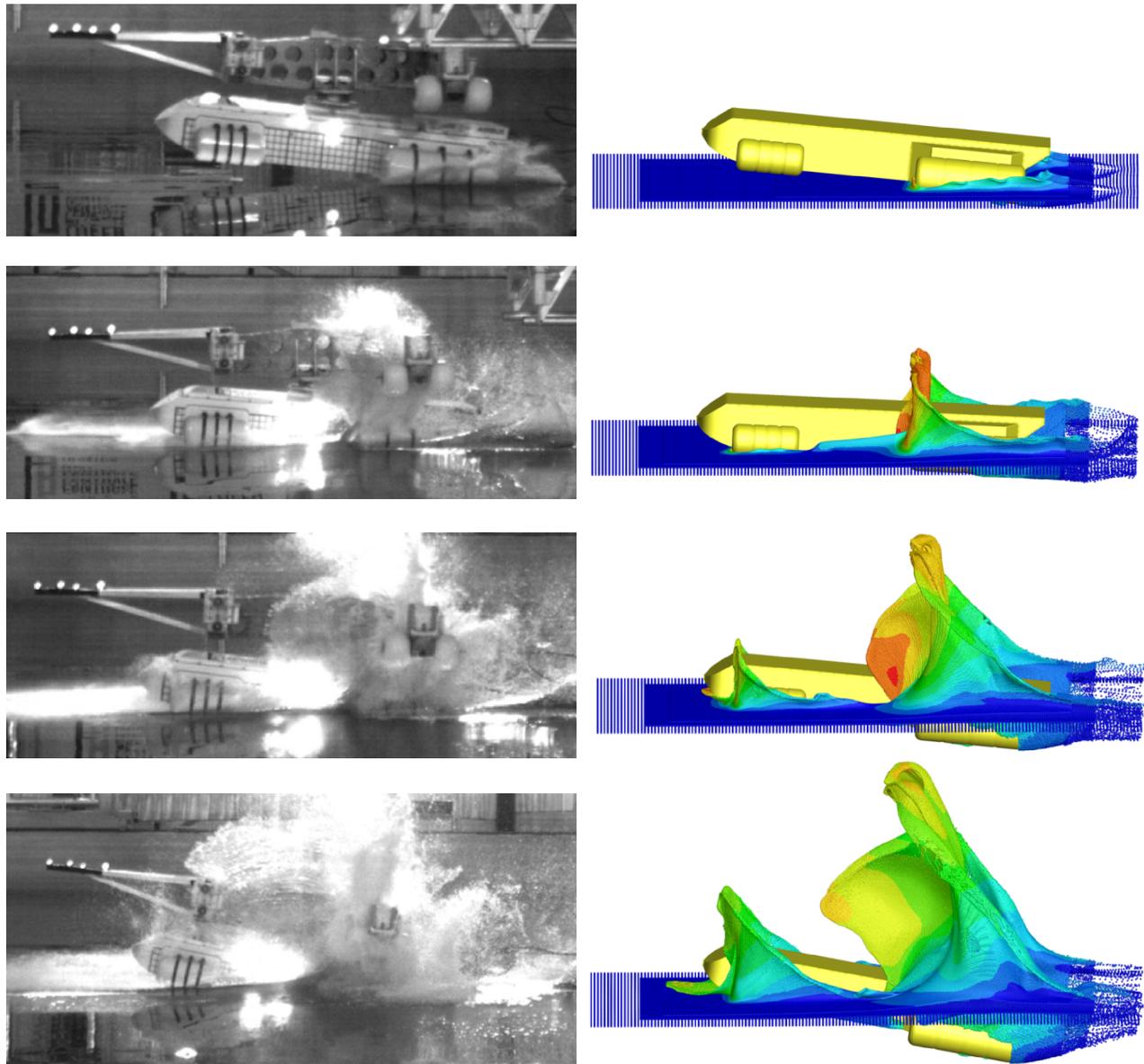


FIGURE 4.16 – Amerrissage d’urgence d’hélicoptère. Comparaison numérique/expérimental à $t = 0.1s, t = 0.2s, t = 0.3s, t = 0.4s$.

4.5 Discussion

Dans ce chapitre, après avoir introduit la méthodologie utilisée auparavant au sein du laboratoire pour traiter le décollement de jet de surface libre de parois solides convexes, nous avons montré des problèmes apparaissant avec cette méthodologie, en particulier lorsqu’un tel traitement était nécessaire en parallèle de la prise en compte des effets de succion.

En s’inspirant de la littérature, nous avons ensuite exhibé des critères rendant compatible la prise en compte de ces deux phénomènes, que nous avons validés sur des cas académiques. Fort des résultats obtenus, nous avons enfin montré l’applicabilité de ces critères sur un cas "industriel".

Concernant l’application au couplage fluide/structure, nous verrons dans le Chapitre 6 que le nouveau traitement introduit dans ce chapitre (en complément de la nouvelle PST introduite au Chapitre 3) permet une amélioration du compromis temps de restitution/précision.

Chapitre 5

Validation du couplage fluide/structure

Cette thèse est la troisième au sein du laboratoire dédiée au couplage entre la méthode SPH côté fluide et la méthode des Eléments Finis (FE) côté structure pour la simulation de problèmes d'interaction fluide/structure, et la seconde étudiant son application au phénomène de l'hydroplanage.

Au cours de la première thèse, Fourey [29] a notamment étudié l'influence de différents schémas FE d'intégration temporelle sur le compromis stabilité du couplage/précision des résultats, et ce pour des schémas de couplage séquentiel et parallèle. Il a ainsi montré que l'utilisation de solveurs FE implicites introduisant une diffusion numérique des hautes fréquences permet une amélioration de la stabilité du couplage SPH/FE. Cette stratégie a été validée sur des cas tests comportant des solutions de référence analytiques ou expérimentales, montrant (i) la capacité d'un couplage SPH/FE à reproduire ces solutions de référence, (ii) la pertinence d'utiliser un tel couplage pour les écoulements à surface libre.

Ensuite, Hermange [37], après avoir étudié la conservation de l'énergie à l'interface pour le couplage SPH/FE, a proposé différentes formulations concernant les efforts fluides transmis à la structure, permettant ainsi une amélioration du compromis stabilité/diffusion. Puis, en se basant sur les travaux de Farhat & Lesoinne [26] et Piperno & Farhat [76], il a montré que l'emploi de schémas de couplage utilisant des pas de temps différés entre les deux solveurs permettait une amélioration conséquente du compromis temps de restitution/précision. Enfin, fort de ces développements, l'étude du phénomène de l'hydroplanage a été réalisée, en utilisant le solveur FE Abaqus développé par Simulia côté structure. Des effets tels que la hauteur d'eau, la vitesse du véhicule ou encore l'usure du pneumatique ont ainsi été investigués, montrant que les tendances observées expérimentalement étaient retrouvées numériquement.

L'emploi de pas de temps différés entre les deux solveurs est aussi étudié dans le cas d'un couplage SPH/FE par Nunez-Ramirez *et al.* [70], pour lequel les deux solveurs sont explicites (à l'inverse de Fourey [29] et Hermange [37] où un couplage explicite-implicite est utilisé). Dans un tel cas, le pas de temps solide est soumis à une condition de stabilité CFL, devenant ainsi très petit en comparaison des pas de temps pouvant être utilisés avec un schéma implicite. Cet aspect, en addition des résultats obtenus par Fourey [29] concernant l'utilisation de solveurs FE implicites à des fins de stabilité, nous ont conduits à utiliser un couplage SPH/FE explicite-implicite pour l'étude de l'hydroplanage. Ainsi, les travaux présentés ici s'inscrivent dans la continuité des recherches déjà menées au sein du laboratoire [29,30,37–39].

Pour l'étude du phénomène d'hydroplanage, la méthode SPH est appropriée côté fluide du fait de la complexité des écoulements considérés, en particulier afin de capturer les grandes déformations de la surface libre. Côté structure, de par la variété et la complexité des différents matériaux entrant dans la composition d'un pneumatique (voir [31] par exemple), il est nécessaire de modéliser précisément le pneumatique dans toute sa complexité afin de capturer numériquement la physique qui est en jeu. Aussi, à l'issue des travaux effectués par Hermange, il a été décidé d'utiliser le code FE développé spécifiquement par Michelin pour ses applications : DELI, code développé en collaboration avec le Groupe Interdisciplinaire de Recherche en Eléments Finis (GIREF).

La validation sur des cas tests académiques du couplage entre la méthode SPH et ce code structure spécifique fait donc l'objet de ce chapitre. Après une brève introduction au couplage fluide/structure (de plus

amples détails pouvant être trouvés dans [29] et [37]), nous explicitons les principales caractéristiques du couplage SPH/FE utilisé ici, avant finalement d'effectuer la validation du couplage SPH-Flow/DELI.

5.1 Généralités à propos du couplage fluide/structure

Dans de nombreux problèmes physiques, le fluide et la structure interagissent de telle sorte qu'il est impossible de rendre compte du phénomène dans son ensemble sans considérer les déformations des deux milieux. Afin de simuler de tels phénomènes numériquement, il est par conséquent nécessaire d'utiliser un couplage entre les domaines fluide et structure. Les conditions d'interface entre les deux domaines (continuité de la vitesse et des contraintes) doivent être respectées, et deux stratégies de couplage peuvent alors être mises en place.

Dans l'approche monolithique, les équations relatives au fluide et à la structure sont résolues simultanément (généralement en utilisant la même méthode numérique pour les deux domaines), conférant à une telle stratégie l'avantage de respecter intrinsèquement les conditions d'interface. Le principal inconvénient d'un tel couplage est qu'il est difficile à mettre en place en pratique, en particulier avec deux codes industriels issus d'entreprises différentes utilisant chacun une méthode numérique spécifique, comme c'est le cas ici.

Dans l'approche partitionnée, un solveur spécifique à chacun des domaines est utilisé. Une telle stratégie permet ainsi de mettre à profit les qualités de chacun des solveurs; elle est donc naturellement retenue dans cette thèse. L'inconvénient majeur de cette stratégie, et plus particulièrement lorsque deux codes différents sont utilisés comme ici, réside dans le fait de faire communiquer les solveurs entre eux. En effet, les données nécessaires à l'avance en temps de chacun des solveurs doivent être transférées d'un solveur à l'autre, cette tâche étant généralement réalisée par un troisième code (le coupleur). Plus précisément, le solveur structure fournit la cinématique du corps au solveur fluide, cette dernière servant de condition aux limites pour le fluide. Le solveur fluide fournit quant à lui les efforts que le fluide applique localement sur le corps déformable, ces efforts permettant au solveur structure de déterminer ensuite la cinématique du corps, et ainsi de suite jusqu'à la fin de la simulation. Différentes méthodes numériques (pour chacun des domaines) peuvent alors être couplées et, dans cette thèse, le fluide est simulé par la méthode SPH tandis que la méthode FE est utilisée côté structure.

5.2 Couplage SPH/FE au sein du laboratoire

Au sein du laboratoire, au cours des précédentes thèses sur le sujet, une étude approfondie du couplage SPH/FE a été effectuée, et les outils nécessaires à la mise en place d'un tel couplage sont rappelés ici.

5.2.1 Efforts transmis au corps déformable

Du point de vue du fluide, la structure est considérée comme "rigide" à chaque instant t , la cinématique instantanée du corps étant le résultat donné par le solveur structure. Cette cinématique étant calculée à partir des efforts fluides, nous rappelons ici l'historique des travaux réalisés au sein du laboratoire sur ce sujet, justifiant le choix retenu dans ce travail. Sous l'hypothèse de fluide parfait (équations d'Euler), les contraintes de cisaillement ne sont pas prises en compte, et seuls les efforts normaux doivent être transmis à la structure.

Dans une première approche [30], sur chaque panneau c constituant la surface mouillée du corps déformable, les efforts normaux à la paroi $F(c) \cdot \mathbf{n}_c$ étaient calculés à partir de la pression des particules situées dans une zone de taille R , comme illustré sur la figure 5.1. Plus précisément, on avait :

$$F(c) \cdot \mathbf{n}_c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_i S_c, \quad (5.1)$$

où N est le nombre de particules rouges sur la figure 5.1 et S_c est la surface du panneau c .

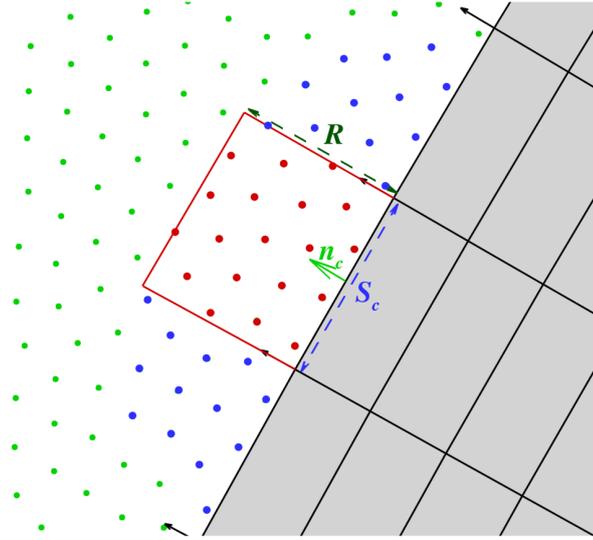


FIGURE 5.1 – Définition de la zone de taille R (particules rouges) servant au calcul des efforts dans [30], et particules dont le support intersecte le panneau c (particules rouges et bleues) servant au calcul des efforts dans [37, 39].

Ensuite, après une étude concernant la conservation de l'énergie à l'interface entre le fluide et la structure, deux manières de calculer les efforts ont été proposées par Hermange *et al.* [39]. La première approche consiste à assurer la réciprocité des efforts entre le fluide et la structure, s'inspirant des travaux de Bouscasse *et al.* [11] dans le cadre de corps non-déformables, et de Long *et al.* [52] pour les corps déformables. La seconde approche consiste quant à elle à assurer la conservation de l'énergie à l'interface, ce qui nécessite le calcul de l'énergie pour chaque particule, entraînant en contrepartie une augmentation du temps de calcul. Bien que très différentes dans leur conception, ces deux approches de calcul des efforts permettent la conservation de l'énergie à l'interface entre le fluide et la structure, de telle sorte que les différences entre les deux en ce qui concerne les résultats sont minimales (aussi bien avec les particules fantômes [37, 39] qu'avec la méthode BIM-CFA [37]). La première approche permettant des temps de restitution plus courts, elle a donc été retenue dans cette thèse.

Dans le cas de la méthode BIM-CFA, les efforts normaux transmis par le fluide au panneau c s'écrivent alors :

$$\mathbf{F}(c) \cdot \mathbf{n}_c = \sum_{i \in \mathcal{C}} \sum_{s_j \in \partial \mathcal{D}_i} (P_i + P_{s_j}) W_{is_j} V_i S_{s_j}, \quad (5.2)$$

avec \mathcal{C} l'ensemble des particules dont le support est tronqué par le panneau c (particules bleues et rouges sur la figure 5.1), $\partial \mathcal{D}_i$ l'ensemble des facettes de surface S_{s_j} et de centre s_j discrétisant la surface d'intersection entre le support du noyau de la particule i et le panneau c , et P_{s_j} la pression extrapolée en s_j définie par (1.128). Il est à noter que, contrairement à la méthode des particules fantômes, la formulation pour les efforts 5.2 (i.e. avec BIM-CFA) n'est pas purement conservative, du fait de la correction Shepard γ_i intervenant dans l'équation de quantité de mouvement (1.127). Afin de retrouver cette propriété, une correction devrait également être prise en compte dans le calcul des efforts. Faute de temps, cet aspect du couplage n'a pas été abordé dans cette thèse, et pourrait faire l'objet de futures recherches.

5.2.2 Schémas de couplage

Différents schémas de couplage existent dans la littérature [26, 76], parmi lesquels on trouve les schémas Conventional Parallel Staggered (CPS) et Conventional Sequential Staggered (CSS), qui ont été largement étudiés au sein du laboratoire dans le cadre du couplage SPH/FE [30, 39]. Dans cette section nous commençons donc par rappeler ces deux schémas [26, 76].

L'amélioration du compromis entre le temps de restitution et la précision des simulations numériques constitue un enjeu majeur, en particulier dans un contexte industriel. Nous rappelons tout d'abord que ce travail de recherche s'appuie sur un schéma en temps implicite pour la partie structure (nécessitant la résolution d'un système linéaire) et explicite pour la partie fluide. Or, lors de simulations impliquant des géométries complexes avec de fait un nombre de mailles conséquent côté structure, et en considérant un nombre optimal de processeurs alloués pour chacun des codes (cf. [74] pour le solveur fluide), le temps de restitution du solveur structure s'avère très supérieur à celui du solveur fluide. Ceci est à mettre en contraste avec la taille relative des pas de temps des deux schémas : les pas de temps côté fluide sont beaucoup plus petits, du fait de la condition CFL qui s'appuie sur la vitesse du son (relativement élevée dans le cas de l'application à l'hydroplanage). Ainsi, l'emploi d'un schéma de couplage utilisant des pas de temps adaptés à chaque solveur constitue un levier pour la réduction du temps de restitution des simulations. Ce besoin a déjà été identifié par Hermange [37, 38], qui a proposé l'emploi des variantes des schémas CPS et CSS introduites dans [26, 76] utilisant des pas de temps différés. Ces variantes seront nommées p -CPS et p -CSS dans ce manuscrit, p étant le nombre d'itérations du solveur fluide effectuées pendant une itération du solveur structure.

Ces variantes ont par ailleurs récemment été utilisées dans la littérature [31, 70]. Dans le cas d'un couplage SPH/FE pour lequel les deux solveurs sont explicites, Nunez-Ramirez *et al.* [70] ont utilisé ces schémas dans (i) le cas le plus naturel (en explicite-explicite) où le pas de temps côté structure est plus petit que le pas de temps côté fluide, (ii) le cas opposé lors d'utilisation d'une résolution spatiale très fine côté fluide ou de liquides hautement denses. Concernant l'application visée, de tels schémas ont également été utilisés par Gillard [31] pour étudier le phénomène de l'hydroplanage, à l'aide d'un couplage entre un solveur fluide basé sur la méthode des Volumes Finis avec advection de la surface libre par la méthode Volume Of Fluid (VOF) et un solveur FE côté structure.

5.2.2.1 Schéma CSS/ p -CSS

Le schéma CSS, pour lequel les deux solveurs effectuent leur avance en temps de manière séquentielle, fonctionne en 4 étapes (voir figure 5.2) qui se répètent durant toute la simulation :

1. Le solveur structure fournit la cinématique du corps à l'instant t^n au solveur fluide, \mathbf{U} et \mathbf{V} étant respectivement le déplacement et la vitesse du corps.
2. Le solveur fluide effectue son intégration temporelle pour avancer en temps jusqu'à l'instant t^{n+1} .
3. Le solveur fluide fournit les efforts à l'instant t^{n+1} au solveur structure.
4. Le solveur structure effectue son intégration temporelle jusqu'à l'instant t^{n+1} , permettant ainsi l'obtention de la cinématique du corps à l'instant t^{n+1} .

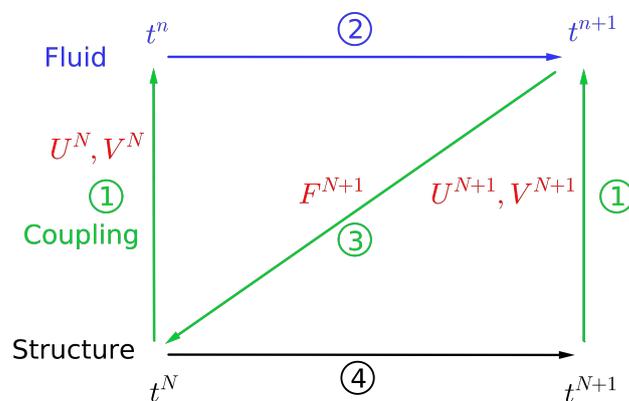


FIGURE 5.2 – Schéma de couplage Conventional Sequential Staggered (CSS).

Les communications entre les deux solveurs sont effectuées via le coupleur et, dans le cadre du couplage SPH-Flow/DELI, en utilisant des communications via Message Passing Interface (MPI) [30].

Pour les raisons citées précédemment, l'emploi de pas de temps différés est un des leviers pour diminuer le temps de restitution des simulations, et dans le cas d'un couplage parallèle, nous obtenons le schéma p -CSS, illustré sur la figure 5.3. Un tel schéma nécessite une extrapolation de la cinématique du corps pendant les p itérations du solveur fluide [37]. En effet, pendant ces itérations, la cinématique du corps n'est connue qu'à l'instant t^n , et $\tilde{\mathbf{u}}^{n+k}$ et $\tilde{\mathbf{v}}^{n+k}$ doivent être extrapolées pour $k \in \{1, \dots, p-1\}$. Hermange [37] propose de considérer que la vitesse est constante, la cinématique du point de vue du fluide pendant les $p-1$ premières itérations étant par conséquent :

$$\tilde{\mathbf{u}}^{n+k} = \mathbf{u}^{n+k-1} + \mathbf{v}^N \Delta t, \tag{5.3}$$

$$\tilde{\mathbf{v}}^{n+k} = \mathbf{v}^N. \tag{5.4}$$

On peut remarquer qu'à l'instant $t^{n+p} = t^{N+1}$, il est également possible de calculer la p -ième extrapolation de la cinématique $(\tilde{\mathbf{u}}^{n+p}, \tilde{\mathbf{v}}^{n+p})$, fournissant ainsi une erreur entre cette dernière et la cinématique donnée par le solveur structure au même instant $(\mathbf{u}^{N+1}, \mathbf{v}^{N+1})$.

Le temps total CPU_{CSS} nécessaire à une simulation de temps physique T^{simu} utilisant le schéma p -CSS est, en négligeant le temps CPU des communications MPI :

$$CPU_{CSS} = \frac{T^{simu}}{p_{CSS} \Delta t} (p_{CSS} CPU^{SPH} + CPU^{FE}), \tag{5.5}$$

où p_{CSS} est le ratio entre les pas de temps des solveurs fluide et structure (indiqué ici par CSS à des fins de différentiation avec le schéma p -CPS, cf. ci-après), CPU^{SPH} et CPU^{FE} étant respectivement le temps de calcul nécessaire à une itération du solveur fluide et du solveur structure.

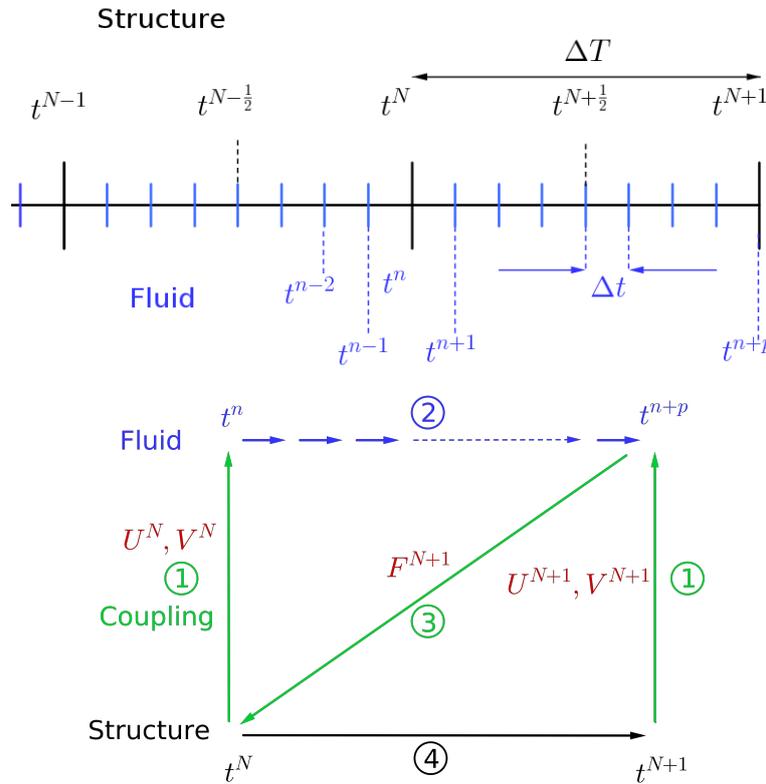
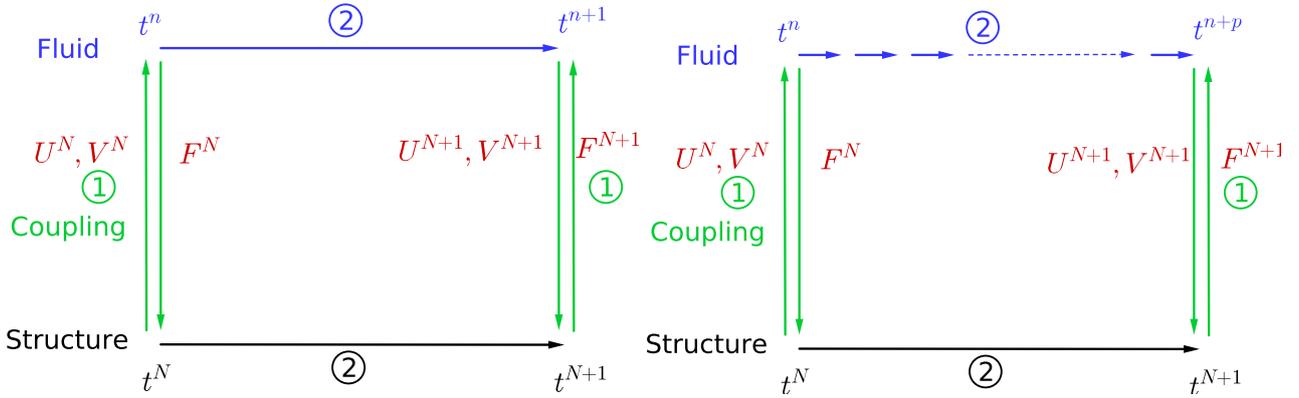


FIGURE 5.3 – Schéma p -CSS. Haut : pas de temps du point de vue du fluide et de la structure. Bas : fonctionnement du schéma p -CSS.

5.2.2.2 Schéma CPS/ p -CPSFIGURE 5.4 – Schéma CPS (gauche) et p -CPS (droite).

A l'inverse du schéma CSS, avec le schéma CPS les deux solveurs effectuent leur avance en temps en parallèle. Un tel schéma (illustré sur la partie gauche de la figure 5.4), possède donc l'avantage de ne pas nécessiter les résultats issus du solveur fluide pour commencer une itération du solveur structure. Le principal désavantage étant que le caractère implicite du solveur structure n'est plus strictement respecté. En effet, l'intégration temporelle côté structure est effectuée via un schéma Euler implicite :

$$\frac{1}{\Delta T} \overline{\overline{M}} \left[\frac{\mathbf{u}^{N+1} - \mathbf{u}^N}{\Delta T} - \mathbf{v}^N \right] + \mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}^{N+1}) = \mathbf{F}_{ext}(\mathbf{u}^{N+1}), \quad (5.6)$$

où F_{int} sont les efforts internes, F_{ext} les efforts externes, $\overline{\overline{M}}$ la matrice de masse, la vitesse \mathbf{V}^N étant quant à elle déduite du déplacement en utilisant une différence divisée décentrée amont :

$$\mathbf{v}^N = \frac{\mathbf{u}^N - \mathbf{u}^{N-1}}{\Delta T}. \quad (5.7)$$

Aussi, contrairement au schéma CSS avec lequel les efforts fluides sont bien ceux de l'instant t^{N+1} (permettant de satisfaire le caractère implicite du solveur FE), avec le schéma CPS les efforts fluides sont ceux de l'instant t^N , de telle sorte que le caractère implicite du schéma n'est plus exactement vérifié. La différence de chargement entre les instants t^n et t^{n+1} est néanmoins faible (d'autant plus que les pas de temps côté fluide sont petits). Cet aspect, en addition du caractère parallèle de ce schéma (constituant un avantage certain concernant le temps de restitution) font qu'il est utilisé dans cette thèse.

A l'instar du schéma p -CSS, une variante utilisant des pas de temps différés entre les deux solveurs peut être construite avec un schéma de couplage parallèle [26,76]. Ce schéma, nommé ici p -CPS, est illustré sur la partie droite de la figure 5.4. Avec ce schéma, une "protection" concernant le pas de temps est obligatoire [37]. En effet, à l'instant t^n , on ne connaît pas le pas de temps qui sera donné par la condition CFL côté fluide pour les itérations t^{n+k} , $k \in \{1, \dots, p-1\}$. Ainsi, durant toutes ces itérations, le pas de temps côté fluide est fixé à $\alpha \Delta t^n$ (Δt^n étant le pas de temps à l'instant t^n), et par conséquent le pas de temps structure devient $\alpha p_{CPS} \Delta t^n$, où α est le coefficient de protection, typiquement fixé à $\alpha = 0.8$ [37]. A l'instar du schéma p -CSS, la cinématique du corps est déterminée via (5.3) et (5.4).

Le temps de restitution d'une simulation avec un schéma p -CPS est quant à lui donné par :

$$CPU_{CPS} = \frac{T^{simu}}{\alpha p_{CPS} \Delta t} \max(p_{CPS} CPU^{SPH}, CPU^{FE}), \quad (5.8)$$

où p_{CPS} représente le ratio entre les pas de temps des deux solveurs avec le schéma p -CPS.

Avec le schéma p -CPS – toute chose étant égale par ailleurs – plus le ratio p_{CPS} est élevé, plus la différence de chargement entre t^N et t^{N+1} est grande, et moins le caractère implicite du solveur est respecté. Par ailleurs, lorsque $p_{CPS}CPU^{SPH} < CPU^{FE}$ (ce qui est majoritairement le cas dans l'application visée si le nombre de processeurs alloués est optimal), plus le ratio p_{CPS} est élevé, plus le nombre d'itérations du solveur FE nécessaire à la réalisation de la simulation est faible; ainsi, plus p_{CPS} est grand, plus le temps de restitution de la simulation est faible. Aussi, une tentative d'amélioration du schéma p -CPS sera proposée au Chapitre 6, ayant pour but d'augmenter le ratio p_{CPS} tout en conservant la précision/stabilité. L'idée principale est d'utiliser une projection temporelle des efforts à l'instant t^{N+1} (à partir des efforts connus aux instants précédents), afin de s'approcher du caractère implicite du solveur FE.

5.2.3 Critère pour augmenter/diminuer le p -ratio de manière adaptative dans une simulation

Un critère d'augmentation (et de diminution) du p -ratio est proposé dans [38]. Ce critère, valable aussi bien en p -CPS qu'en p -CSS, est basé sur la variation temporelle des efforts fluides, et le p -ratio est calculé à la fin de chaque boucle de la manière incrémentale suivante :

$$p = \begin{cases} \max(1, p - 1) & \text{si } th_{min} < \frac{\left| \sum_c \|F^{N+1}(c)\| - \sum_c \|F^N(c)\| \right|}{\sum_c \|F^N(c)\|} < th_{max} \\ \min(p + 1, p_{max}) & \text{si } \frac{\left| \sum_c \|F^{N+1}(c)\| - \sum_c \|F^N(c)\| \right|}{\sum_c \|F^N(c)\|} < th_{min} \\ 1 & \text{si } \frac{\left| \sum_c \|F^{N+1}(c)\| - \sum_c \|F^N(c)\| \right|}{\sum_c \|F^N(c)\|} > th_{max} \end{cases}, \quad (5.9)$$

où th_{min} et th_{max} sont des valeurs seuils, typiquement $th_{min} = 7.5\%$ et $th_{max} = 15\%$ [37], p_{max} est une valeur maximale fixée au début de la simulation qui dépend de la dynamique du cas ainsi que de la résolution spatiale SPH (Δx et $R/\Delta x$) et de la vitesse du son nominale c_0 utilisée dans le fluide, la notation $F(c) = \mathbf{F}(c) \cdot \mathbf{n}_c$ étant utilisée.

Les avantages de ce type de critères sont nombreux. En effet, ils ne dépendent pas d'une quantité physique de référence qu'il faut déterminer pour chaque nouveau cas test. De plus, bien qu'agissant a posteriori, ils permettent une augmentation/diminution progressive du p -ratio, dont la sensibilité est régulée par les valeurs seuil th_{min} et th_{max} . De plus, lorsque les variations (des efforts ici) sont trop élevées, le ratio retombe à 1, permettant ainsi d'éviter que de trop grandes instabilités perdurent dans le couplage.

En contrepartie, cette augmentation/diminution incrémentale fait que le p -ratio optimal n'est peut-être pas atteint en permanence dans la simulation. En particulier, lorsque la valeur seuil th_{max} a été dépassée et que le ratio est tombé à 1, un certain nombre d'itérations est alors nécessaire à sa remontée, période pendant laquelle les performances du couplage sont fortement dégradées (cf. section 5.2.2).

Dans [31], Gillard propose une stratégie de calcul du p -ratio pour les pas de temps différés, basée sur le rapport entre l'énergie à l'interface et une énergie de référence (estimée a priori et dépendante du cas test considéré). Ce critère permet un calcul direct (non-incrémental) du p -ratio, et un effet mémoire pour éviter des variations trop brusques d'un pas de temps à l'autre est utilisé. L'inconvénient majeur d'un tel critère est qu'il nécessite la connaissance a priori d'une énergie de référence dépendante du cas considéré, raison pour laquelle l'approche n'est pas retenue ici.

5.3 Validation du couplage SPH-Flow/DELI

L'objectif de cette section est de valider le couplage SPH-Flow/DELI sur des cas tests académiques, tout en se plaçant dans les mêmes conditions de simulation que pour l'étude du phénomène d'hydroplanage. Ainsi, le schéma de Parshikov & Medin combiné à la méthode surfacique BIM-CFA de traitement des frontières est employé. De plus, bien que la plupart de ces cas tests de validation ne nécessitent pas de traitement spécifique pour le décollement de jets de surface libre, le traitement introduit dans le Chapitre 4 est utilisé, puisqu'un tel traitement est nécessaire pour les simulations d'hydroplanage. Enfin, la PST introduite au chapitre 3 est utilisée.

La validation est effectuée pour les schémas de couplage 1-CPS et 1-CSS (i.e. sans pas de temps différés), les résultats obtenus étant comparés aux références (analytiques ou expérimentales), ainsi qu'aux résultats obtenus avec le couplage SPH-Flow/Aster, pour lequel la validation a déjà été effectuée au sein du laboratoire [30,37,39].

Des paramètres numériques identiques sont par conséquent utilisés pour les deux couplages. Néanmoins des différences subsistent de par l'utilisation de solveurs mécaniques distincts. Notamment le schéma de Newmark avec un coefficient de dissipation $\alpha = -0.3$ est utilisé avec Aster, tandis que le schéma Euler implicite est employé avec DELI.

5.3.1 Hydrostatique sur une barre déformable en 2D

5.3.1.1 Présentation du cas

Le premier cas de validation du couplage est un cas d'hydrostatique sur une barre déformable en 2D, pour lequel une solution analytique est fournie [29], notamment les efforts fluides et la flèche de la barre (i.e. le déplacement maximal de la barre localisé au centre de celle-ci). Une cuve constituée de deux parois latérales non-déformables, sur lesquelles est fixée une barre déformable en aluminium faisant office de fond, est remplie d'eau (voir figure 5.5). A $t = 0s$, la barre n'est ni déformée par son propre poids ni par celui de l'eau et est soudainement laissée libre de se déformer sous l'action de ces deux forces, conduisant à une situation d'équilibre qui doit être retrouvée par le couplage.

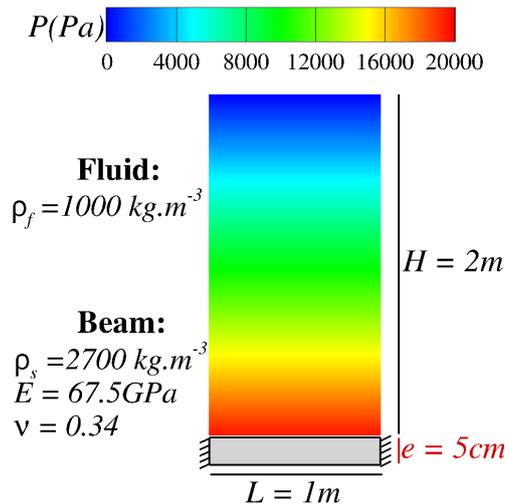


FIGURE 5.5 – Hydrostatique sur une barre déformable en 2D. Présentation du cas.

5.3.1.2 Validation

Les paramètres numériques utilisés pour la simulation (identiques à [30]) sont répertoriés dans le tableau 5.1. Comme nous pouvons l'observer sur la partie gauche de la figure 5.6, les résultats en matière d'efforts fluides sont proches entre les deux couplages, les pics étant tout de même plus marqués avec Aster qu'avec

DELI. Ces derniers sont dus à l'onde acoustique créée par le choc initial côté fluide (provenant du caractère faiblement compressible de la méthode SPH utilisée), et venant se réfléchir alternativement à la surface libre et sur la barre [30]. Nous voyons d'ailleurs sur la figure 5.7 que les résultats obtenus avec Aster et DELI sont très proches, et que l'onde de pression ($P^* = \frac{P - \rho_f g(H-y)}{\rho_f g H}$) apparaissant sur la figure est plus marquée avec Aster, d'où la différence observée sur les pics.

La valeur moyenne des efforts fluides est, quant à elle, proche de la solution analytique (cf. figure 5.6). Concernant la flèche, malgré une légère sous-estimation (avec Aster on obtient une surestimation), les résultats obtenus sont proches de ceux attendus, et les résultats sont identiques avec les schémas CPS et CSS.

$L/\Delta x$ (en SPH)	100
$L/\Delta x_{FE}$	40
$e/\Delta y_{FE}$	4
$R/\Delta x$	4.0
Vitesse du son nominale c_0	50 m.s^{-1}
α_{CFL}	0.375
Elements finis	quadrangles avec polynômes du 2 nd ordre

TABLE 5.1 – Hydrostatique sur une barre déformable en 2D. Paramètres numériques utilisés.

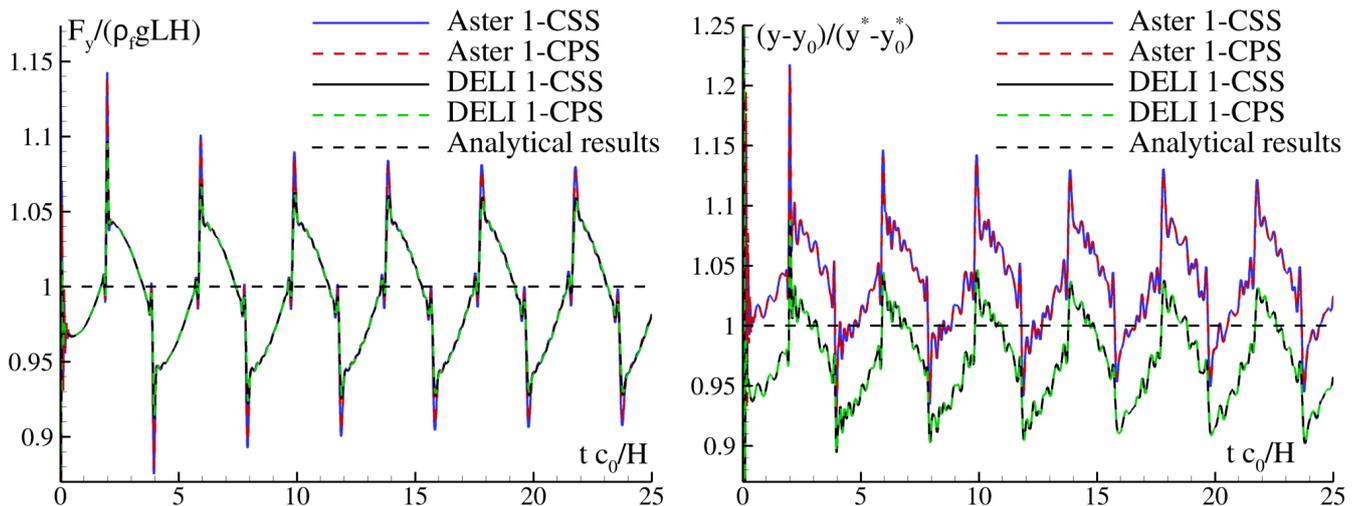


FIGURE 5.6 – Hydrostatique sur une barre déformable en 2D. Comparaison des résultats obtenus pour les couplages avec Aster et DELI, avec comparaison à la solution analytique. Gauche : efforts transmis par le fluide à la barre. Droite : déplacement du centre de la barre (flèche). $y^* - y_0^*$ réfère ici à la flèche analytique.

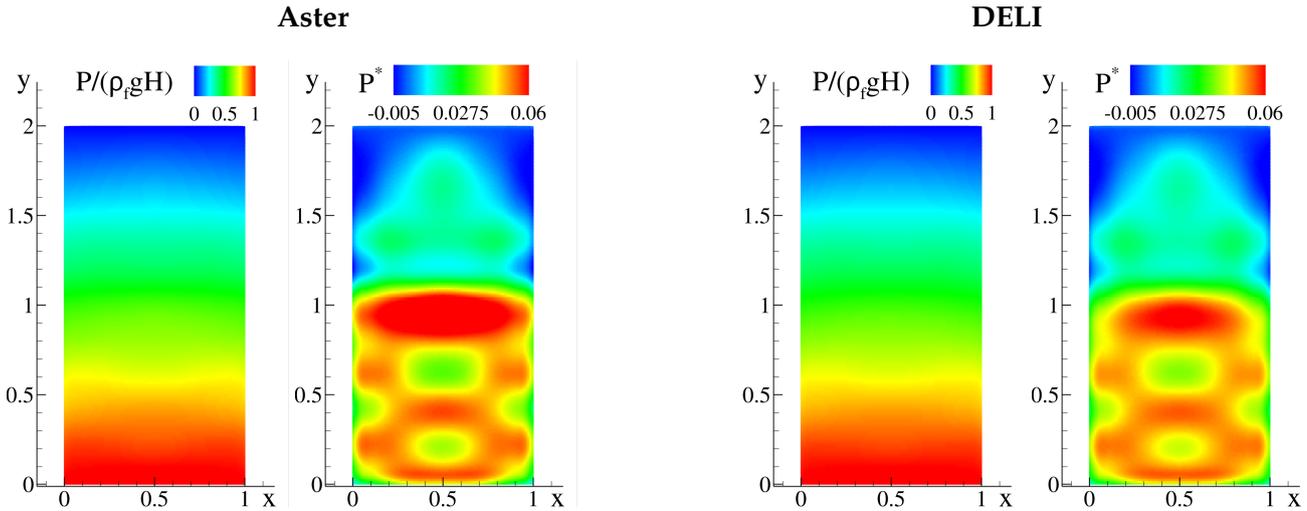


FIGURE 5.7 – Hydrostatique sur une barre déformable en 2D. Comparaison des champs de pression absolus $\frac{P}{\rho_f g H}$ et acoustiques P^* obtenus avec Aster (à gauche) et DELI (à droite), avec le schéma 1-CPS à $tc_0/H = 6.25$.

5.3.2 Impact d'un demi-dièdre déformable dans une cuve de fluide en 2D

5.3.2.1 Présentation du cas

Le second cas test est un impact d'un demi-dièdre déformable inclinée d'un angle $\beta = 10^\circ$ dans une cuve remplie d'eau (voir figure 5.8). Le demi-dièdre est entraîné à la vitesse $u = 30m.s^{-1}$ par l'imposition d'un mouvement vertical à ses deux extrémités (liaisons encastrement déplacées à cette vitesse imposée), une étude semi-analytique de ce cas ayant été effectuée fournissant le déplacement du centre du demi-dièdre (flèche par rapport à la fibre neutre), les efforts fluides verticaux, ainsi que la pression en différents points du demi-dièdre (capteurs a , b et c sur la figure 5.8). Ces résultats de référence issus d'un rapport interne [83] peuvent être trouvés par exemple dans [25].

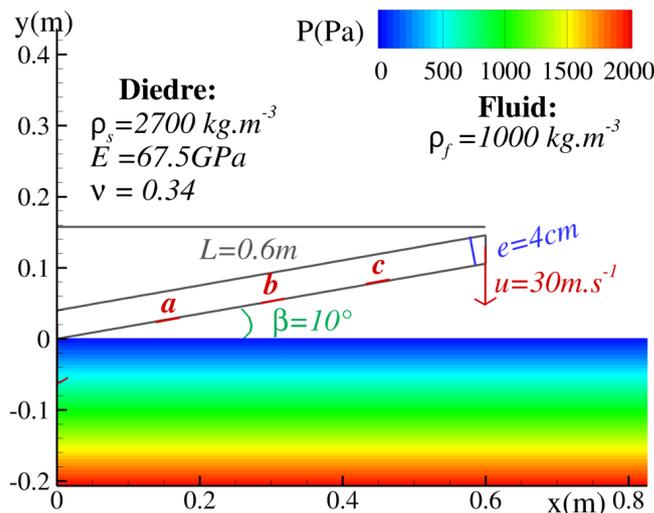


FIGURE 5.8 – Impact d'un demi-dièdre déformable dans une cuve de fluide en 2D. Présentation du cas.

5.3.2.2 Validation

La validation est effectuée en utilisant les paramètres du tableau 5.2, correspondant à la résolution spatiale la plus fine étudiée par Fourey *et al.* [30], la cuve étant dimensionnée afin d'éviter la réflexion des ondes

acoustiques sur ses parois. Du fait de la vitesse particulièrement élevée des jets de surface libre dans cette simulation, la vitesse du son nominale est prise ici comme la vitesse physique du son dans l'eau, c'est-à-dire $c_0 = 1500 \text{ m.s}^{-1}$. Afin de limiter le nombre de particules dans la simulation, une résolution spatiale à longueur de lissage variable est utilisée [71] (voir section 1.7). A l'instar de [30], les particules fines sont toutes concentrées dans la zone d'impact et une variation de 3% de la longueur de lissage est utilisée, comme préconisé dans [71].

$L/\Delta x$ (en SPH)	600 (dans la zone d'impact puis 3% de variation)
$L/\Delta x_{FE}$	40
$e/\Delta y_{FE}$	4
$R/\Delta x$	3.0
c_0	1500 m.s^{-1}
α_{CFL}	0.375
Eléments Finis	quadrangles avec polynômes du 1 ^{er} ordre

TABLE 5.2 – Impact d'un demi-dièdre déformable dans une cuve de fluide en 2D. Paramètres numériques utilisés dans les simulations.

Comme nous pouvons l'observer sur la figure 5.9, les résultats sont similaires avec Aster et DELI en ce qui concerne les efforts, que ce soit avec le schéma CPS ou CSS. Avec le schéma CPS, les efforts sont légèrement supérieurs à ceux obtenus avec le schéma CSS, et ce aussi bien avec Aster qu'avec DELI, notamment dans la seconde partie de la simulation, à partir de 2.5 ms , instant de libération des jets fluides. La flèche du demi-dièdre obtenue est à l'instar du cas précédent légèrement supérieure avec Aster, que ce soit avec le schéma CPS ou CSS. Comme observé sur la figure 5.10, les champs de pression à l'instant où la différence de flèche est maximale sont malgré tout similaires avec Aster et DELI. La flèche est également légèrement supérieure avec le schéma CPS par rapport au CSS quel que soit le code structure utilisé. L'amplitude des efforts calculés (ainsi que celle de la flèche par conséquent) est inférieure à celle prédite par la solution semi-analytique. Ceci peut être attribué au fait que les jets ne sont pas pris en compte dans la solution semi-analytique [29]. Concernant la pression aux points (a), (b) et (c), nous observons un bon accord entre la solution semi-analytique et les solutions obtenues, avec là-encore peu de différences entre DELI et Aster.

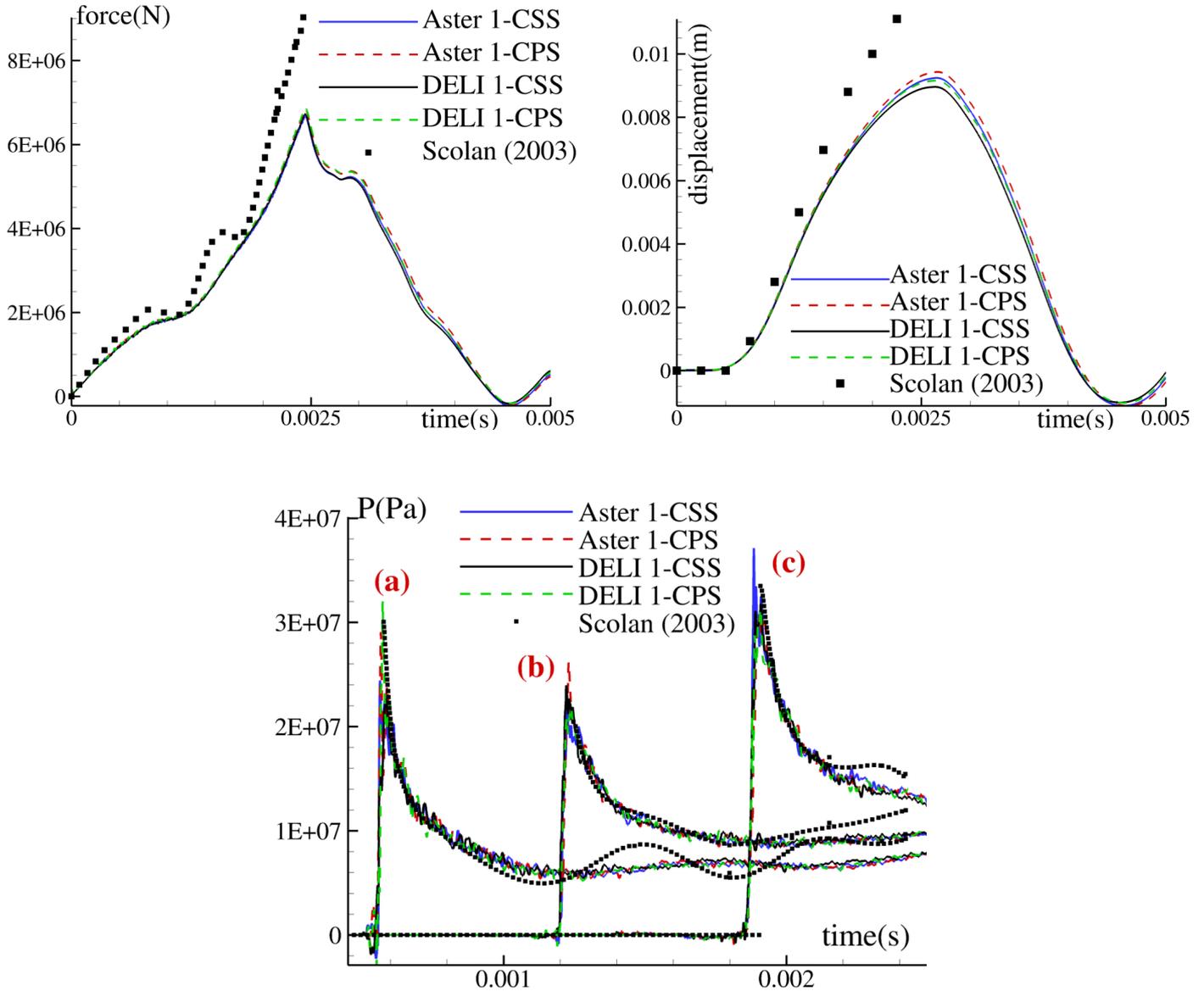


FIGURE 5.9 – Impact d'un demi-dièdre déformable dans une cuve remplie d'eau en 2D. Résultats obtenus avec DELI et Aster, et comparaison à la solution semi-analytique. En haut à gauche : évolution temporelle des efforts fluides verticaux. En haut à droite : évolution temporelle de la flèche. Bas : évolution temporelle de la pression en (a), (b) et (c).

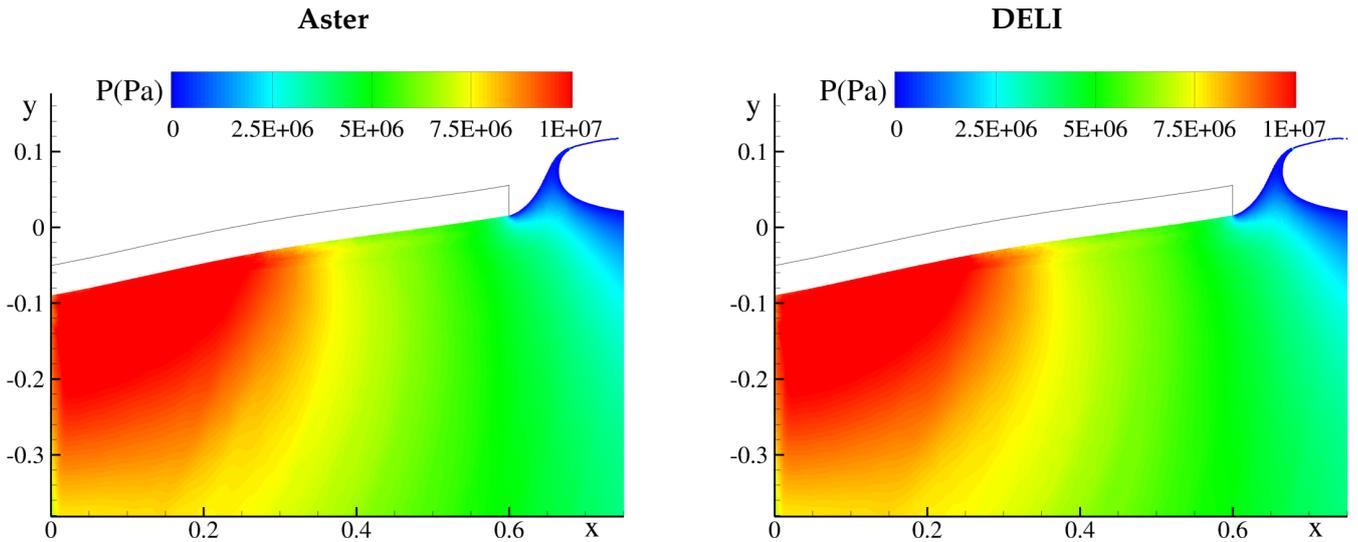


FIGURE 5.10 – Impact d’un demi-dièdre déformable dans une cuve remplie d’eau en 2D. Comparaison du champ de pression obtenu avec Aster (à gauche) et DELI (à droite) en utilisant le schéma 1-CPS, à $t = 2.5ms$.

5.3.3 Dam-break à travers une porte déformable

5.3.3.1 Présentation du cas

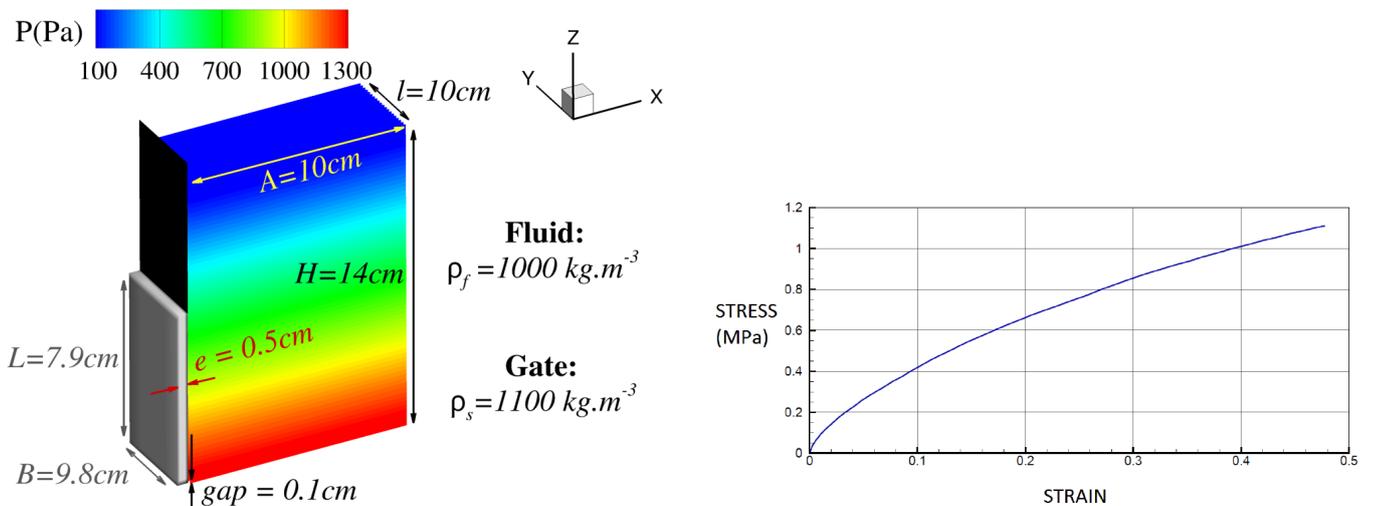


FIGURE 5.11 – Dam-break à travers une porte déformable. Présentation du cas. Gauche : géométrie du cas. Droite : courbe contrainte-déformation caractérisant le matériau constituant la porte déformable.

Le troisième cas de validation correspond à un dam-break à travers une porte déformable, pour lequel des expériences ont été menées par Antoci *et al.* [1], la géométrie du cas étant rappelée dans la partie gauche de la figure 5.11. La porte déformable étant en caoutchouc, le coefficient de Poisson est $\nu \approx 0.5$, et la loi contrainte-déformation n’est pas linéaire. Dans [48, 106] le modèle de Mooney-Rivlin est utilisé, tandis qu’au sein du laboratoire la loi tabulée caractérisant le matériau et représentée dans la partie droite de la figure 5.11 est généralement utilisée [30, 37, 39], permettant de retrouver le comportement expérimental grâce à la prise en compte des non-linéarités du matériau. Afin de vérifier que les développements introduits dans les chapitres 3 et 4 n’introduisent pas d’erreurs sur la solution, la validation est dans un premier temps effectuée avec Aster en utilisant la loi tabulée, une telle loi n’étant à ce jour pas utilisable avec DELI. Aussi, la validation du

couplage avec DELI est effectuée en considérant un module de Young constant $E = 6MPa$, le résultat obtenu avec Aster et $E = 6MPa$ étant choisi comme solution de référence. Les effets 3D étant considérés négligeables, les simulations sont effectuées en 2D, comme souvent dans la littérature [1, 48, 106].

5.3.3.2 Validation du couplage : loi tabulée (Aster)

$L/\Delta x$ (en SPH)	316
$L/\Delta z_{FE}$	40
$e/\Delta x_{FE}$	4
$R/\Delta x$	4.0
c_0	$25 m.s^{-1}$
α_{CFL}	0.375
Eléments Finis	quadrangles avec polynômes du 2 nd ordre

TABLE 5.3 – Dam-break à travers une porte déformable. Paramètres numériques.

La validation sur ce cas est effectuée en utilisant les paramètres numériques répertoriés dans le tableau 5.3 (identiques à Fourey *et al.* [30]). Comme nous pouvons l'observer sur la figure 5.12, les résultats sont similaires avec les schémas 1-CPS et 1-CSS, que ce soit au niveau des efforts, du déplacement de l'extrémité de la porte, et de la hauteur d'eau. Concernant les efforts fluides horizontaux, nous observons en début de simulation de fortes variations, dues à l'onde acoustique générée au début de la simulation (du fait de l'hypothèse faiblement compressible de la méthode SPH) venant se réfléchir alternativement sur la paroi verticale de la cuve et le corps déformable. Le déplacement est en adéquation avec les résultats expérimentaux. En revanche, concernant la hauteur d'eau nous remarquons un décalage temporel d'environ 0.04 s, phénomène déjà remarqué par Antoci *et al.* [1] ainsi qu'au sein du laboratoire [30]. La dynamique du fluide semble donc plus élevée dans la simulation que dans l'expérience. Au début de la simulation, le nombre de Reynolds étant faible, la non-prise en compte de la viscosité aurait pu expliquer cette différence, mais nous avons observé qu'elle n'avait finalement pas d'influence significative (tests effectués avec la méthode des particules fantômes, cf. section 1.2.4). Ne possédant pas de points de mesure expérimentaux entre $t = 0 s$ et $t = 0.04 s$ pour le déplacement de la porte, il est difficile de conclure; il s'agit peut-être simplement d'une erreur de synchronisation des signaux expérimentaux entre eux.

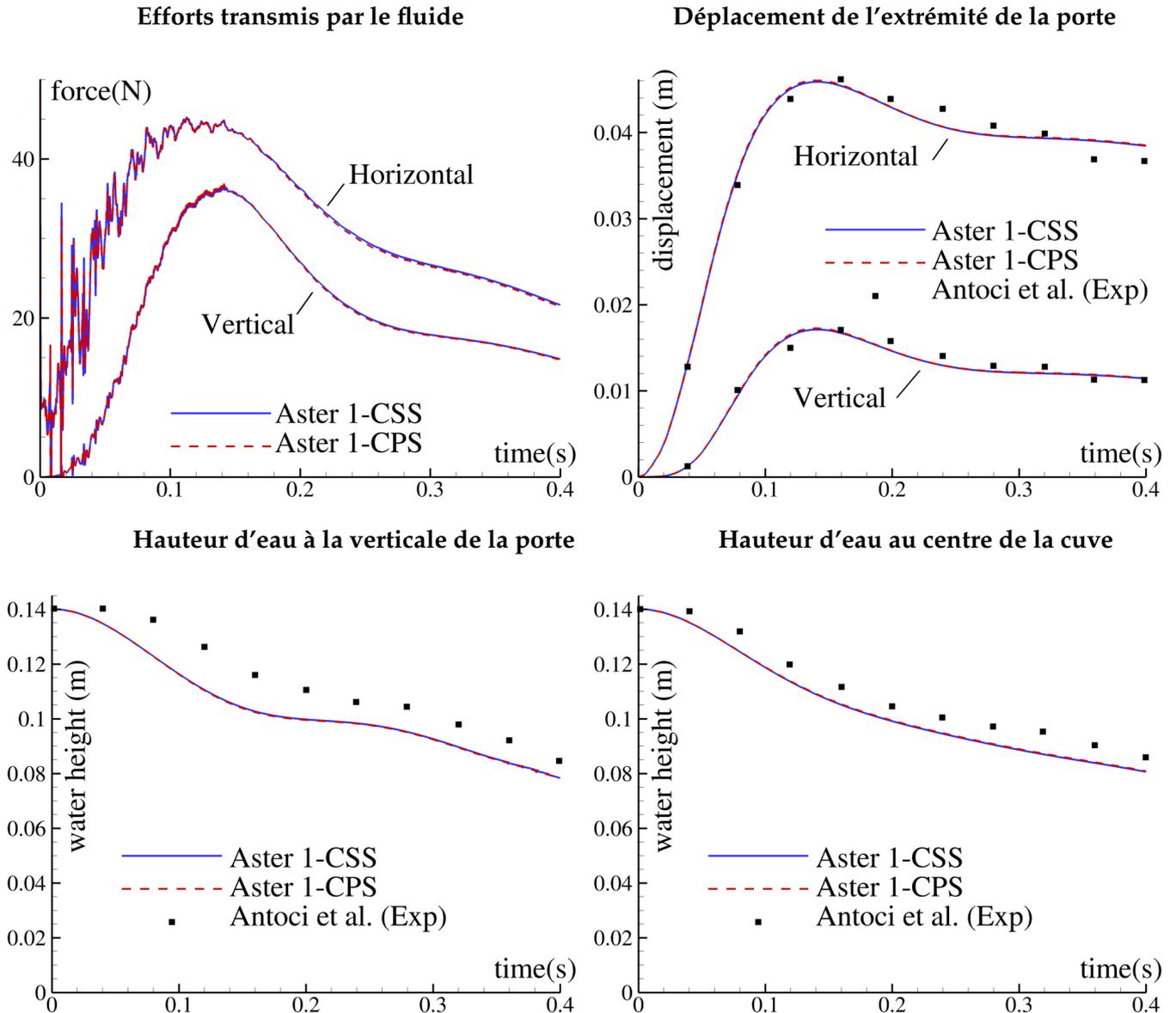


FIGURE 5.12 – Dam-break à travers une porte déformable en 2D. Résultats obtenus avec Aster (CPS et CSS) et la loi tabulée pour la caractérisation du matériau, avec comparaison aux résultats expérimentaux.

5.3.3.3 Validation du couplage avec DELI

Nous observons sur la figure 5.13 que les résultats obtenus avec Aster et DELI (tous deux avec un module de Young constant $E = 6\text{MPa}$) sont proches, que ce soit avec le schéma CPS ou CSS. Les oscillations en début de simulation des efforts fluides horizontaux sont également observées et, conformément au comportement attendu, leur amplitude est ici (modèle élastique avec $E = 6\text{MPa}$) plus élevée qu'avec le modèle plus réaliste utilisé précédemment.

Un fait remarquable est à noter sur ce cas : les efforts fluides étant plus élevés avec Aster qu'avec DELI (dans la direction horizontale en particulier), on s'attendrait à un déplacement plus important du corps déformable avec Aster. Or comme on peut le voir dans la partie droite de la figure 5.13, le phénomène inverse se produit. Les différences relatives aux schémas d'intégration temporelle de ces deux codes FE sont certainement à l'origine de ces écarts somme toute minimales entre les deux solutions. Par ailleurs, les champs de pression obtenus avec Aster et DELI sont très proches, comme illustré sur la figure 5.14 où ils sont donnés à l'instant où la déformation de la porte est maximale.

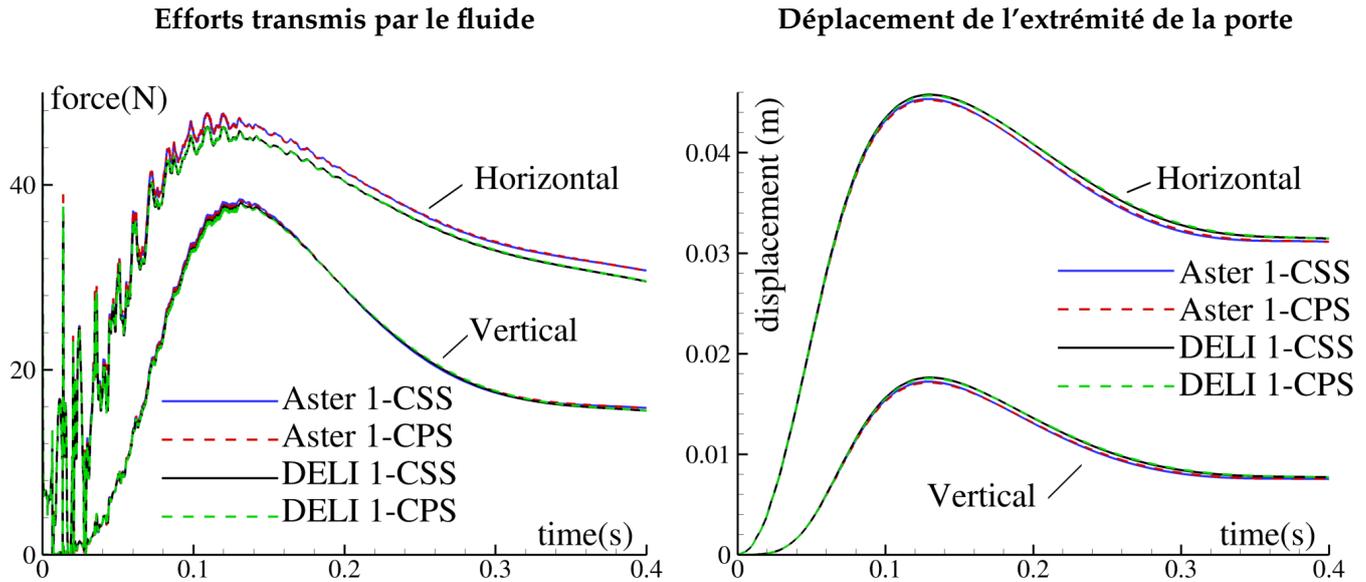


FIGURE 5.13 – Dam-break à travers une porte déformable en 2D. Comparaison DELI/Aster avec un module de Young constant $E = 6MPa$.

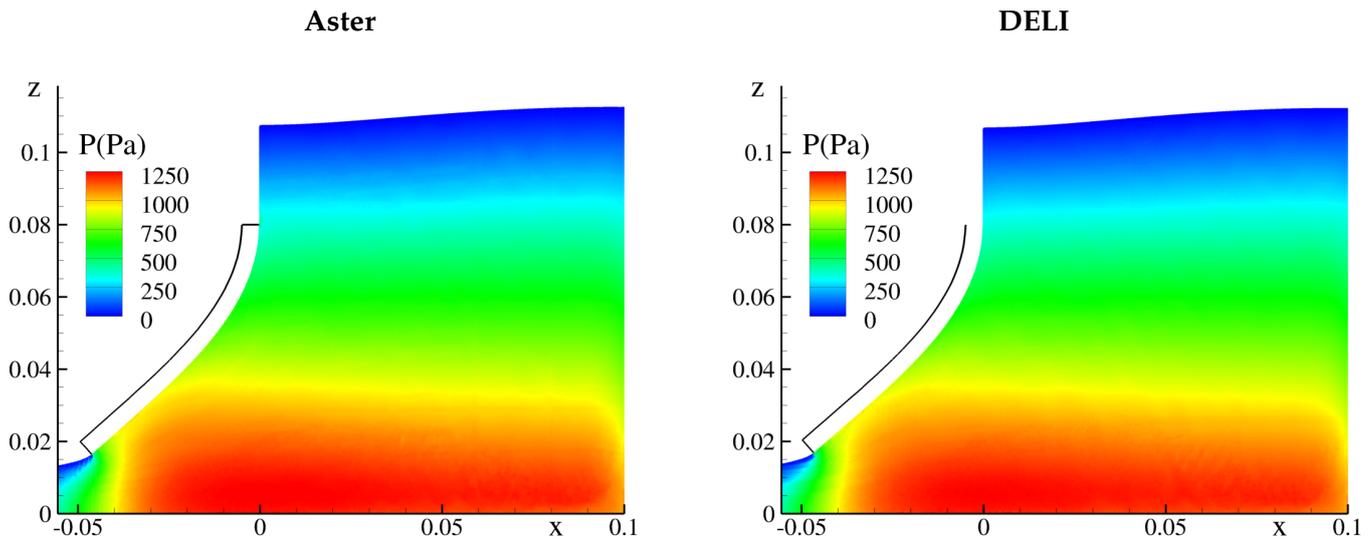


FIGURE 5.14 – Dam-break à travers une porte déformable en 2D. Comparaison du champ de pression obtenu avec Aster (à gauche) et DELI (à droite), en utilisant le schéma 1-CPS, avec $E = 6MPa$ à $t = 0.13s$.

5.3.4 Dam-break impactant une plaque déformable

Le troisième cas de validation est un cas de dam-break impactant une plaque déformable, pour lequel des expériences ont été menées par Liao *et al.* [49]. Comme dans le cas précédent, la plaque déformable est en caoutchouc. Le matériau utilisé n'est donc pas linéaire, mais aucune caractérisation permettant la prise en compte de ces non-linéarités n'est fournie dans [49]; seul le module de Young $E = 3.5MPa$ est renseigné. Ainsi, nous n'avons malheureusement aucun renseignement permettant de prendre en compte le caractère visco-élastique du matériau dans les simulations. Faute de mieux, les simulations seront effectuées ici en considérant une loi de déformation élastique, et un coefficient de Poisson $\nu \approx 0.5$.

Ce cas n'ayant pas été étudié par le passé au sein du laboratoire dans le cadre du couplage SPH/FE, une étude préliminaire à la validation du couplage avec DELI est nécessaire, notamment afin de déterminer la résolution spatiale permettant un bon compromis coût/précision. Pour des raisons de disponibilité des

différentes ressources numériques, l'étude a été effectuée avec Aster. Ensuite, la validation du couplage SPH-Flow/DELI est réalisée en utilisant la résolution spatiale finalement retenue.

5.3.4.1 Présentation du cas

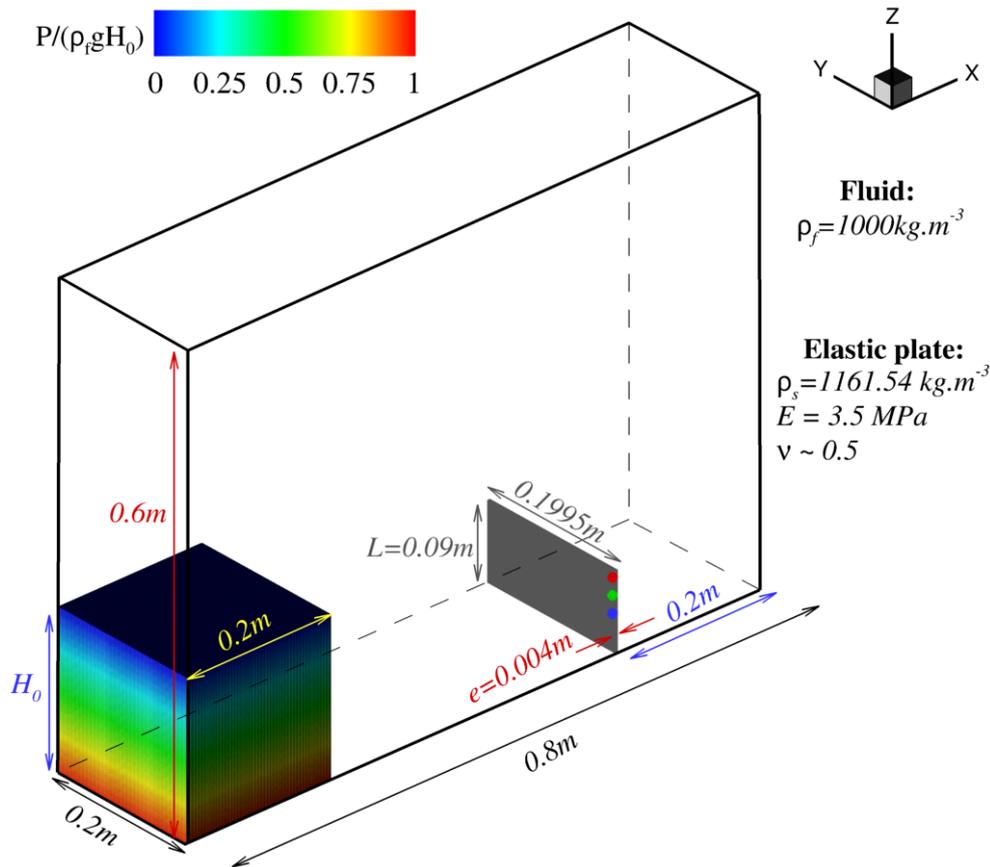


FIGURE 5.15 – Dam-break impactant une plaque déformable. Présentation du cas.

La géométrie du cas est rappelée sur la figure 5.15, et les expériences ont été réalisées pour trois hauteurs d'eau initiales, à savoir $H_0 = 0.2\text{m}$, $H_0 = 0.3\text{m}$ et $H_0 = 0.4\text{m}$. L'évolution temporelle du déplacement horizontal de la plaque est fournie en trois points, correspondant aux capteurs rouge, vert et bleu sur la figure 5.15, et respectivement situés à 0.0875m , 0.065m et 0.04m de la base du corps déformable. Les paramètres de cette étude se basent sur celle réalisée par Sun *et al.* [90]. Ces derniers ont utilisé un couplage entre la méthode SPH pour le fluide et la méthode Total Lagrangian Particle (TLP) pour la structure en 2D (les effets 3D étant négligeables [49]). Ils ont montré qu'à partir de l'instant où le fluide impacte le mur opposé – entraînant l'emprisonnement d'une poche d'air – le cas ne pouvait plus être simulé en négligeant la phase gazeuse. Aussi, la validation du couplage sur ce cas est effectuée avant cet instant dans ce travail, les simulations multi-phases n'ayant pas été étudiées dans cette thèse, faute de temps. La vitesse du son nominale est choisie ici, à l'instar de Sun *et al.*, comme $c_0 = 10\sqrt{gH_0}$, et les autres paramètres numériques utilisés dans les simulations sont répertoriés dans le tableau 5.4.

$L/\Delta z_{FE}$	40
$e/\Delta x_{FE}$	4
$R/\Delta x$	4.0
α_{CFL}	0.375
Éléments Finis	quadrangles avec polynômes du 2 nd ordre

TABLE 5.4 – Dam-break impactant une plaque déformable en 2D. Paramètres numériques utilisés dans les simulations.

5.3.4.2 Influence du décollement de jets

Tout d'abord, comme nous pouvons l'observer au centre de la la figure 5.16, un détachement entre la plaque et le fluide (non-observé expérimentalement) se produit avec l'ancien traitement de décollement de jets, puisque les effets de succion ne sont pas pris en compte. Au contraire, avec le traitement introduit au Chapitre 4, les basses pressions apparaissant lorsque la plaque tend à aspirer le fluide sont bien prises en compte, permettant au fluide de retenir la plaque conformément à ce qui est observé expérimentalement (partie gauche de la figure 5.16).

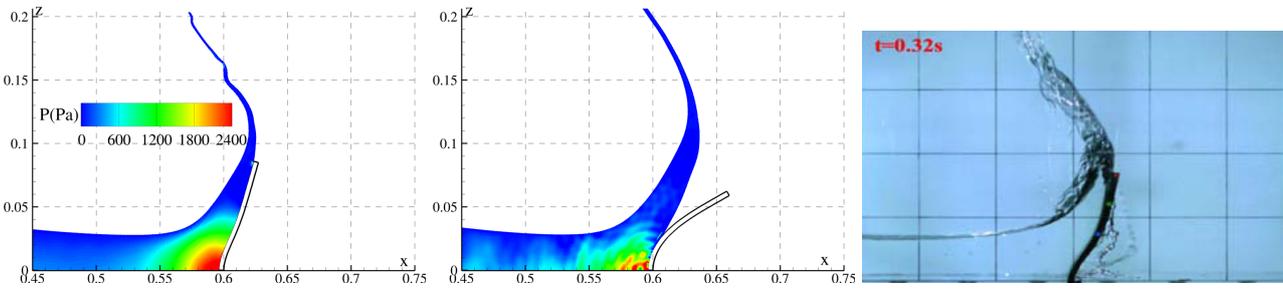


FIGURE 5.16 – Dam-break impactant une plaque déformable en 2D avec $H_0 = 0.2m$. Champ de pression obtenu à $t = 0.32s$, et comparaison à l'expérience. Gauche : avec le nouveau traitement pour le décollement de jets. Centre : avec l'ancien traitement pour le décollement de jets. Droite : expérience.

5.3.4.3 Etude préliminaire de convergence (SPH-Flow/Aster avec le schéma CSS)

Comme nous pouvons l'observer sur la figure 5.17 sur laquelle sont représentés les efforts fluides horizontaux ainsi que le déplacement horizontal du point initialement situé à $0.0875m$ de la base de la plaque (capteur rouge), la convergence est obtenue pour les trois hauteurs d'eau à partir de $L/\Delta x = 180$. Pour les trois hauteurs d'eau, les simulations reproduisent bien le tout début de l'expérience, à savoir le recul de l'extrémité de la plaque.

Pour le cas $H_0 = 0.2m$, le déplacement (horizontal) de la plaque est bien capturé au début de la simulation. En revanche, il est sous-évalué entre $t = 0.32s$ et $t = 0.5s$, lorsque la plaque est déjà bien déformée. Or la plaque étant en caoutchouc, on s'attend à ce que la rigidité du matériau diminue avec les déformations dans les expériences. Dans les simulations, du fait du modèle élastique utilisé, ce phénomène n'est pas pris en compte. Les différences observées entre simulations et expérience sont donc cohérentes avec la non-prise en compte du caractère visco-élastique du matériau, comme illustré sur la figure 5.18 où la plaque paraît plus "raide" en simulation à $t = 0.37s$ alors qu'à $t = 0.32s$ la solution obtenue est proche de l'expérience.

Cette hypothèse est confirmée par les résultats observés avec les hauteurs d'eau initiales $H_0 = 0.3m$ et $H_0 = 0.4m$. En effet, plus la hauteur d'eau initiale H_0 est élevée, plus le fluide impacte la plaque à grande vitesse. Or, la plaque étant en caoutchouc, la rigidité du matériau augmente avec la fréquence de sollicitation dans les expériences, et donc avec la vitesse d'impact. Les simulations ne prenant pas en compte ce phénomène, cela explique que plus la hauteur H_0 est grande, plus le déplacement est surévalué en simulation par rapport aux expériences (cf. figure 5.17).

Ainsi, avec $H_0 = 0.3m$ ces deux effets apparaissent (d'abord fréquence de sollicitation, puis lien déformation/rigidité), le second aspect étant bien illustré sur la figure 5.19.

En ce qui concerne $H_0 = 0.4m$, une comparaison entre la solution obtenue et l'expérience est donnée dans la figure 5.20, sur laquelle nous avons fait correspondre au plus proche (moyennant la fréquence de sortie de la simulation) les déplacements respectifs du haut de la plaque obtenus dans l'expérience et en simulation. Nous y observons une certaine ressemblance, la simulation ayant un temps d'avance sur l'expérience. Par ailleurs (cf. figure 5.17), les résultats obtenus ici concernant le déplacement (horizontal) de la plaque sont très proches de ceux obtenus par Sun *et al.* [90] où une loi élastique est également utilisée; les résultats de Sun *et al.* [90] utilisés ici correspondant à la solution mono-phase que les auteurs ont présentée à titre de comparaison aux résultats multi-phases (et non à titre de validation effectuée quant à elle en multi-phases).

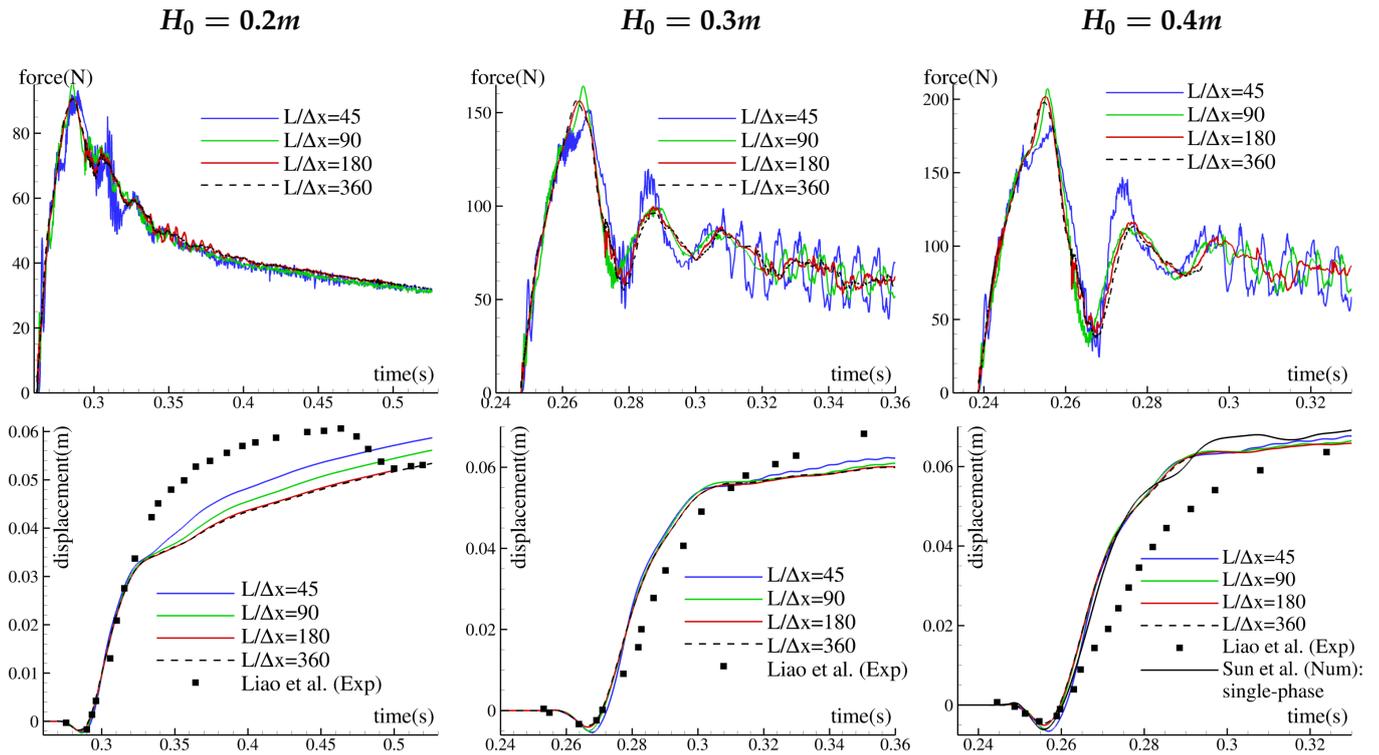


FIGURE 5.17 – Dam-break impactant une plaque déformable en 2D. Solution obtenue avec Aster et le schéma CSS pour quatre discrétisations spatiales, et trois hauteurs d'eau (de gauche à droite). Haut : évolution temporelle des efforts fluides horizontaux. Bas : évolution temporelle du déplacement horizontal de la plaque pour le capteur rouge (à $0.0875m$ de la base), avec comparaison aux résultats expérimentaux.

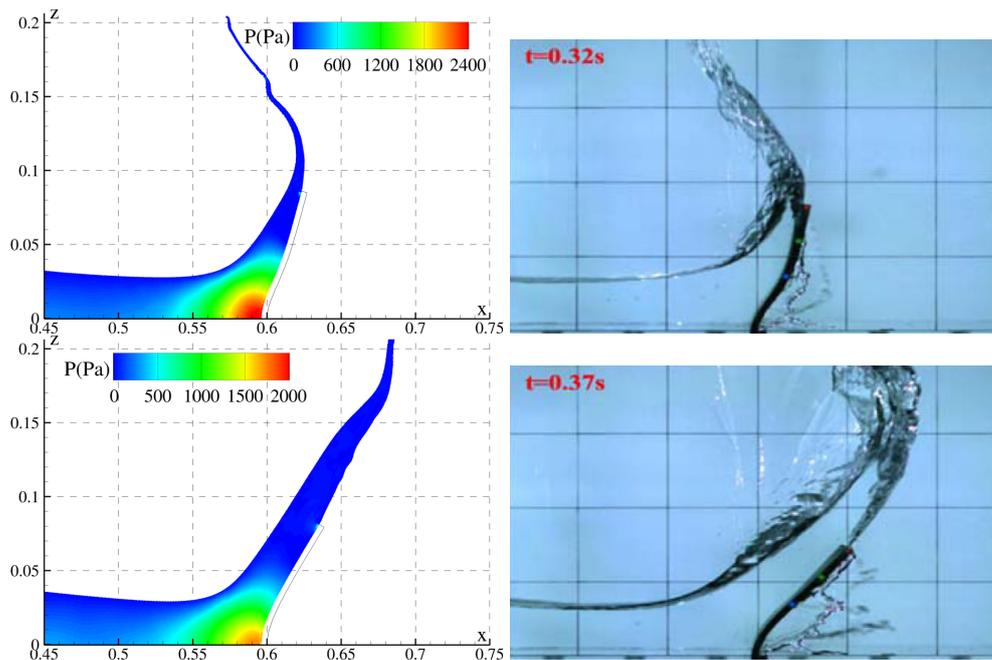


FIGURE 5.18 – Dam-break impactant une plaque déformable en 2D avec $H_0 = 0.2m$. Comparaison qualitative des résultats obtenus entre expérience et simulation (Aster avec schéma CSS et $L/\Delta x = 180$).

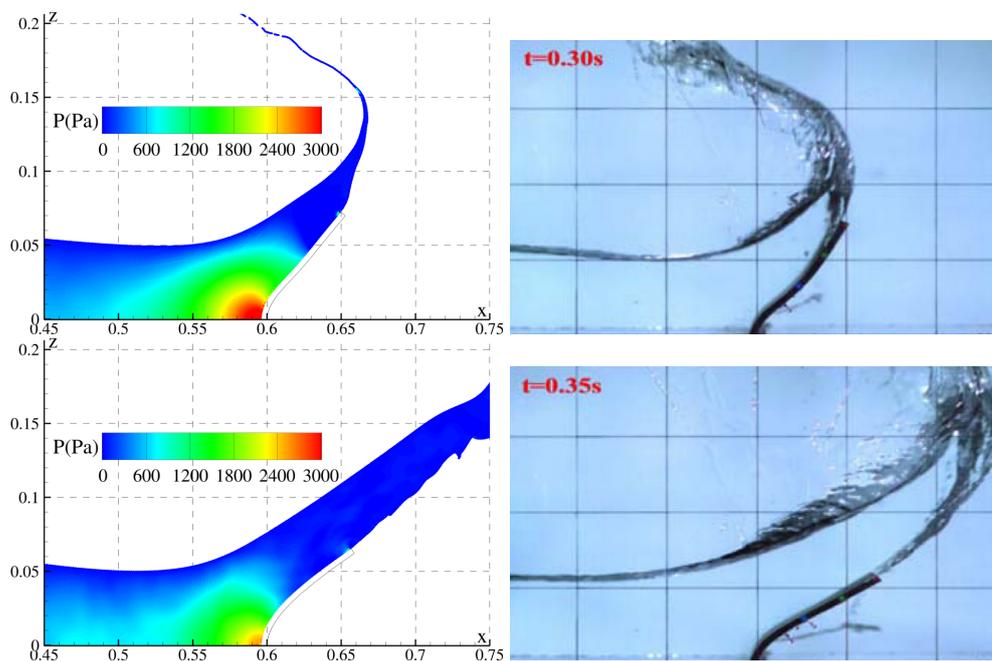


FIGURE 5.19 – Dam-break impactant une plaque déformable en 2D avec $H_0 = 0.3m$. Comparaison qualitative des résultats obtenus entre expérience et simulation (Aster avec schéma CSS et $L/\Delta x = 180$).

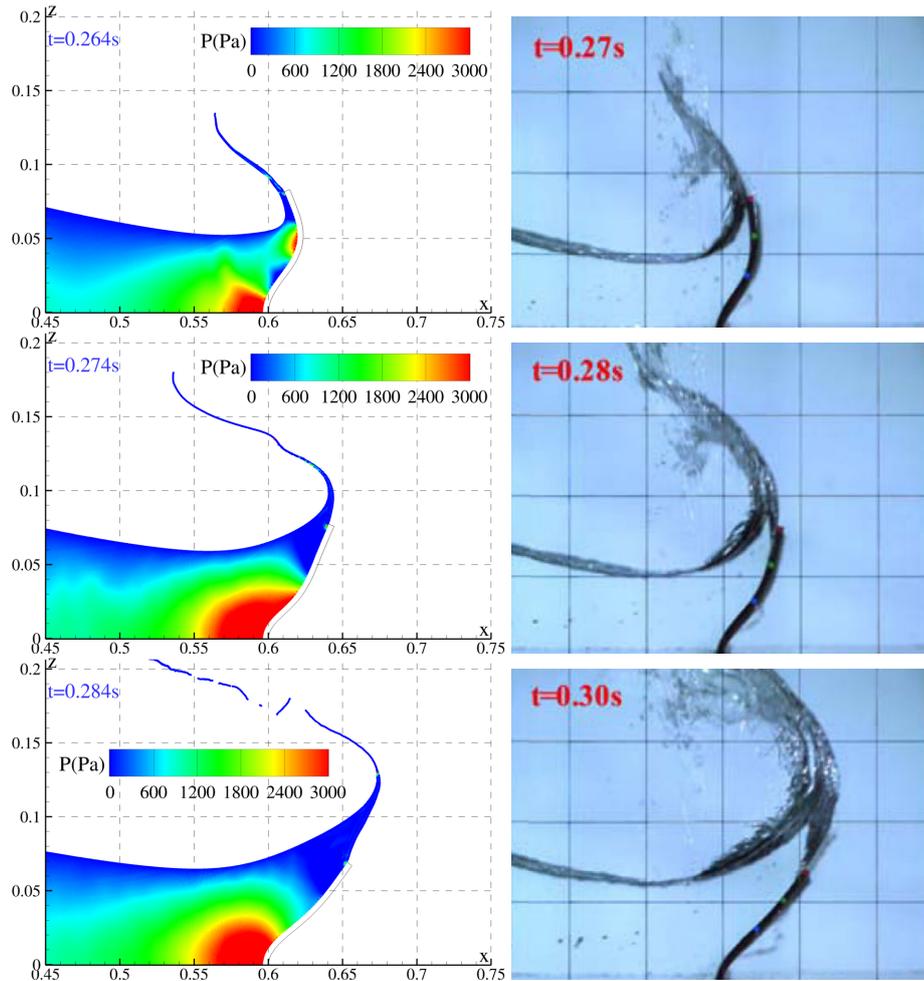


FIGURE 5.20 – Dam-break impactant une plaque déformable en 2D avec $H_0 = 0.4m$. Comparaison qualitative des résultats obtenus entre expérience et simulation (Aster avec schéma CSS et $L/\Delta x = 180$), lorsque l'on fait correspondre les déplacements (horizontaux) respectifs du haut de la plaque.

5.3.4.4 Validation du couplage avec DELI

A la lumière des premières simulations réalisées avec SPH-Flow/Aster, la validation du couplage SPH-Flow/DELI sur ce cas est effectuée avec $L/\Delta x = 180$. La validation du couplage SPH-Flow/DELI est effectuée ici en comparant les résultats obtenus avec Aster, le modèle élastique utilisé ne permettant pas de retrouver le comportement observé expérimentalement. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 5.21.

Avec $H_0 = 0.2m$, concernant les efforts fluides, nous pouvons observer que des résultats similaires sont obtenus avec Aster et DELI au début de la simulation. Ensuite, autour de $t = 0.35s$, de petites oscillations (absentes avec DELI) apparaissent avec Aster. Enfin, dans la seconde partie de la simulation, les efforts fluides sont légèrement plus élevés avec DELI qu'avec Aster, laissant penser que ce devrait être également le cas en ce qui concerne le déplacement. Or, similairement au cas test du dam-break à travers une porte déformable (section 5.3.3), on remarque ici que le comportement inverse se produit. Un tel phénomène n'est pas aisé à investiguer, cependant une concordance est observée quant à la gamme d'efforts dans laquelle ce phénomène se produit dans ces deux cas tests, i.e. inférieurs à $50N$.

Avec $H_0 = 0.3m$, des résultats similaires sont observés entre Aster et DELI concernant les efforts fluides et le déplacement. Les efforts fluides sont légèrement supérieurs avec le schéma CSS qu'avec le schéma CPS, et cette différence se traduit sur le déplacement.

Avec $H_0 = 0.4m$, concernant les efforts fluides, malgré le peu de différences entre Aster et DELI, nous pouvons remarquer des oscillations plus importantes avec Aster en toute fin de simulation, i.e. à partir de

$t = 0.31s$. A l'instar de $H_0 = 0.3m$, le déplacement des points matérialisés par les capteurs est similaire entre les deux couplages, une légère sous-estimation du déplacement étant observée avec le schéma CPS par rapport au CSS, cohérente avec les résultats obtenus en matière d'efforts.

Ainsi, pour le cas du dam-break impactant une plaque déformable, plus les efforts fluides sont faibles, plus les légers écarts observés au global augmentent entre Aster et DELI.

Concernant les champs de pression obtenus (cf. figure 5.22), nous pouvons observer qu'ils sont là-encore très proches avec Aster et DELI, et ce pour les trois hauteurs d'eau initiales.

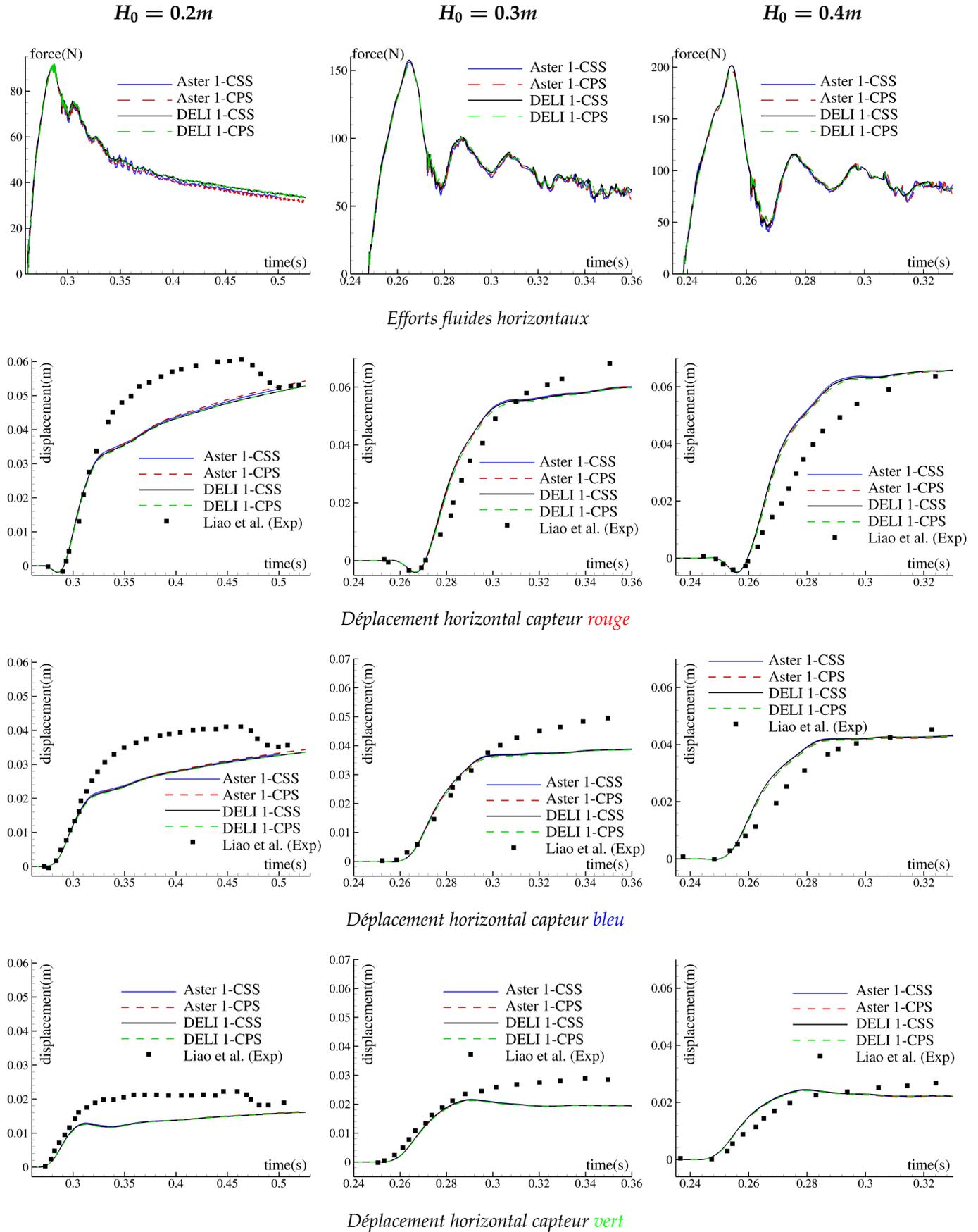


FIGURE 5.21 – Dam-break impactant une plaque déformable en 2D. Résultats obtenus avec Aster et DELI pour les schémas CPS et CSS, avec $L/\Delta x = 180$, avec comparaison aux résultats expérimentaux.

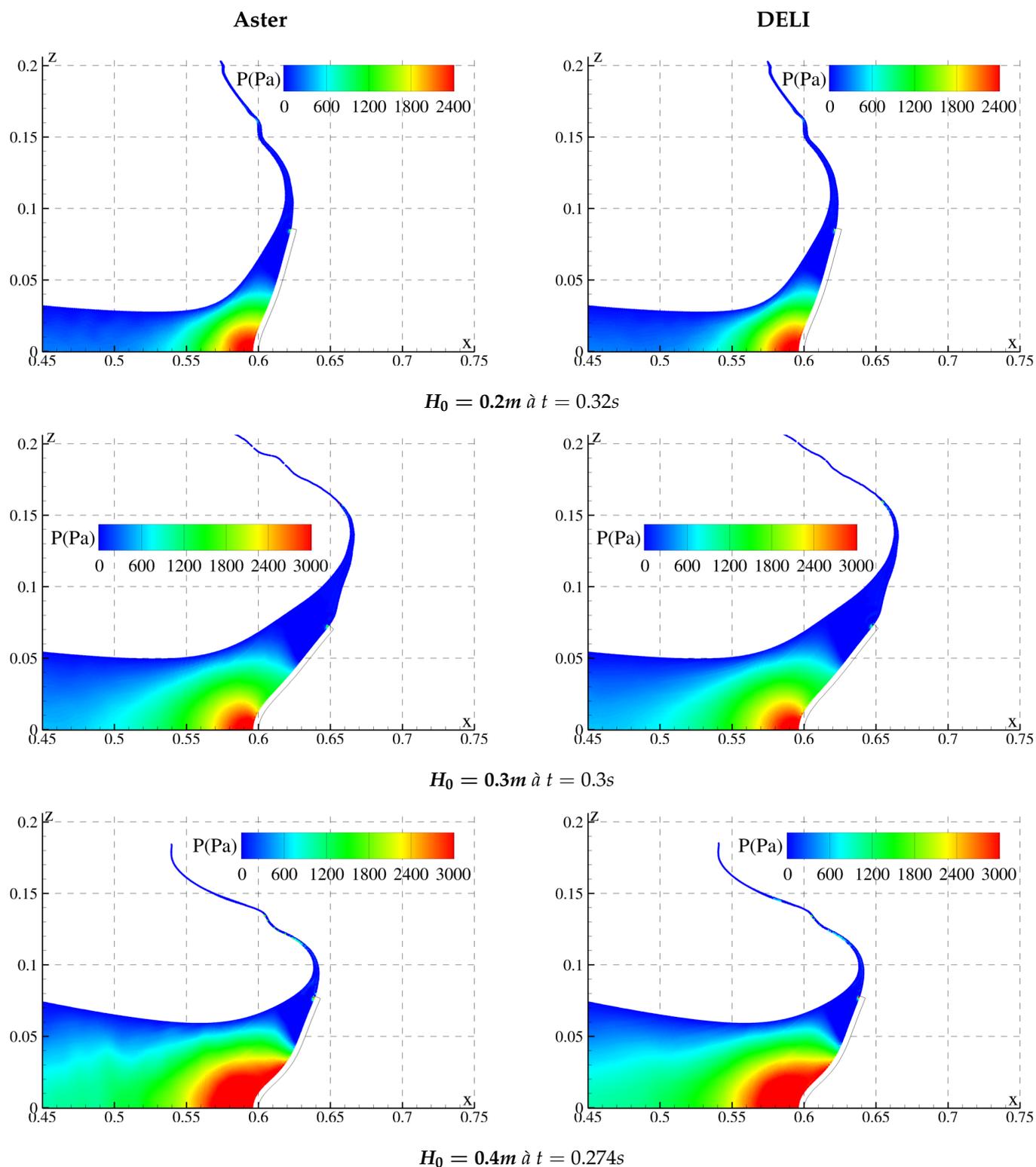


FIGURE 5.22 – Dam-break impactant une plaque déformable en 2D. Comparaison du champ de pression obtenu avec Aster (à gauche) et DELI (à droite) en utilisant le schéma 1-CPS, avec $L/\Delta x = 180$.

5.4 Synthèse

Dans ce chapitre, la validation du couplage SPH-Flow/DELI a été effectuée, en confrontant les résultats obtenus aux solutions analytiques ou expérimentales lorsque cela était possible, et aux résultats obtenus avec le couplage SPH-Flow/Aster autrement. Cette validation a été effectuée dans des conditions similaires aux simulations d'hydroplanage, i.e. en considérant le traitement introduit au Chapitre 4 pour le décollement de jets de surface libre et avec la PST introduite au Chapitre 3. Un cas de rupture de barrage impactant une plaque déformable, non étudié par le passé au sein du laboratoire dans le cadre du couplage SPH/FE, a été considéré ici, cas pour lequel nous avons montré la supériorité du traitement pour le décollement de jets introduit au Chapitre 4 par rapport au traitement qui existait auparavant au sein du laboratoire. Pour ce cas, une description complète du matériau constituant la plaque déformable semble indispensable afin de prendre en compte les non-linéarités de ce dernier dans les simulations. Par ailleurs, comme souligné par Sun *et al.* [90], la prise en compte de la phase gazeuse dans les simulations est essentielle pour étudier le cas dans sa globalité (i.e. après l'impact du fluide sur la paroi opposée); aussi ce cas est intéressant pour la validation des simulations multi-phases (non étudiées ici faute de temps).

De légers écarts sont observés entre les solutions obtenues avec Aster et DELI, écarts d'autant plus faibles que les interactions entre le fluide et la structure sont fortes. Le couplage SPH-Flow/DELI fournit donc des résultats très satisfaisants sur les cas tests académiques considérés ici. Pour l'étude du phénomène d'hydroplanage, et en particulier dans un contexte industriel, la recherche du meilleur compromis coût/temps de restitution/précision dans les simulations constitue un enjeu majeur. Ainsi des travaux ont été réalisés en ce sens, faisant l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 6

Tentative d'amélioration du compromis entre temps de restitution et précision, et application à l'hydroplanage

La recherche du meilleur compromis entre le temps de restitution des simulations et la précision des résultats constituant un enjeu majeur, en particulier dans un contexte industriel, un travail en ce sens a été réalisé dans cette thèse. Pour les simulations d'hydroplanage, un grand nombre de mailles est nécessaire côté structure pour discrétiser le pneumatique, impliquant un temps de restitution pour une itération du solveur structure élevée en comparaison de celui nécessaire au solveur fluide. Par ailleurs, du fait des valeurs élevées de la vitesse du son c_0 utilisée côté fluide dans les simulations d'hydroplanage, le pas de temps fluide est très inférieur au pas de temps pouvant être utilisé côté structure.

Dans un tel cas, l'emploi d'un schéma utilisant des pas de temps différés (p -CPS et p -CSS) est un des outils permettant l'amélioration du compromis temps de restitution/précision. Avec le schéma p -CSS, le fait d'augmenter le ratio p_{CSS} implique un nombre plus faible d'itérations du solveur FE nécessaires à la réalisation de la simulation. Le nombre d'itérations du solveur fluide reste quant à lui inchangé. De par l'exécution séquentielle des deux solveurs, le temps de restitution global s'en trouve alors diminué (cf. équation (5.5)). Avec le schéma p -CPS, deux cas de figure peuvent arriver selon le caractère bloquant de tel ou tel solveur. En effet, si le temps nécessaire à une itération du solveur FE est supérieur à p itérations du solveur fluide (i.e. $CPU^{FE} > p_{CPS}CPU^{SPH}$) signifiant que le solveur FE est bloquant, le temps de restitution de la simulation est alors inversement proportionnel au p -ratio (cf. équation (5.8)). Une augmentation de ce ratio implique alors une réduction du temps de restitution de la simulation. A l'inverse, si le p -ratio devient suffisamment grand pour que $p_{CPS}CPU^{SPH} > CPU^{FE}$ (signifiant que le code fluide est bloquant), le nombre de processeurs alloués au solveur fluide peut alors être augmenté (diminuant de fait CPU^{SPH}) jusqu'à atteindre $p_{CPS}CPU^{SPH} \approx CPU^{FE}$, impliquant une baisse du temps de restitution. Dans le même temps, cette augmentation du p -ratio ne doit pas se faire au détriment de la précision/stabilité des résultats. Ainsi, les travaux initiés par Hermange [37] sur ce sujet ont été poursuivis dans cette thèse.

Dans ce chapitre, l'influence des travaux réalisés dans les chapitres précédents (sur la PST et le traitement du décollement des jets de surface libre) sur l'augmentation du p -ratio permettant le maintien de la stabilité est étudiée en premier lieu. Ensuite, les différentes tentatives d'amélioration de ce compromis, en se focalisant sur les informations transmises à l'interface entre les domaines fluide et structure, sont présentées. Enfin, un cas d'application à l'hydroplanage pour trois pneumatiques différents est réalisé.

6.1 Influence des améliorations discutées précédemment sur le temps de restitution de calculs couplés : augmentation du p -ratio

Dans cette section, nous commençons par effectuer une étude comparative du temps de restitution des schémas p -CPS et p -CSS, selon que SPH-Flow (respectivement DELI) soit "bloquant", c'est-à-dire selon que le temps nécessaire aux p itérations du solveur fluide soit plus long (respectivement plus court) que celui nécessaire à une itération du solveur structure. Puis, dans un second temps, nous montrons l'influence des développements introduits dans les Chapitres 3 et 4 sur l'augmentation du p -ratio.

6.1.1 Etude comparative du temps de restitution des schémas p -CPS et p -CSS

Comme souligné dans la section 5.2.2, le temps de restitution d'un calcul couplé utilisant les schémas p -CPS et p -CSS est dépendant (i) des ratios p_{CPS} et p_{CSS} maximaux permettant le maintien de la stabilité du couplage, (ii) du temps CPU nécessaire à chacun des solveurs pour effectuer son avance en temps. Avec le schéma p -CSS, savoir quel solveur est le plus lent n'a pas d'influence sur le temps de restitution global, les deux codes étant exécutés l'un après l'autre. A l'inverse, avec le schéma p -CPS pour lequel ces exécutions sont effectuées en parallèle, le temps nécessaire pour effectuer une boucle complète du schéma p -CPS est piloté par le solveur le plus lent. De plus, toute chose étant égale par ailleurs, le p -ratio pouvant être utilisé avec le schéma p -CSS est généralement plus élevé qu'avec le schéma p -CPS [26, 37, 76]. Ainsi, la condition pour laquelle un schéma est à privilégier à un autre (en matière de temps de restitution) est fonction de deux paramètres : d'une part, de la différence entre les ratios p_{CPS} et p_{CSS} maximaux pouvant être utilisés tout en préservant la stabilité du couplage et, d'autre part, du rapport CPU^{FE} / CPU^{SPH} représentant la différence de temps CPU nécessaire à l'avance en temps de chacun des solveurs. Cette condition diffère selon que SPH-Flow ou DELI est bloquant, comme représenté dans le tableau 6.1.

	SPH-Flow bloquant ($p_{CPS} \times CPU^{SPH} > CPU^{FE}$)	DELI bloquant ($p_{CPS} \times CPU^{SPH} < CPU^{FE}$)
CPU^{CPS}	$\frac{T^{simu}}{\alpha \Delta t} CPU^{SPH}$	$\frac{T^{simu}}{\alpha p_{CPS} \Delta t} CPU^{FE}$
Condition pour laquelle le schéma p -CSS devient favorable	$\frac{CPU^{FE}}{CPU^{SPH}} < \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) p_{CSS}$	$\frac{CPU^{FE}}{CPU^{SPH}} \left(\frac{1}{\alpha p_{CPS}} - \frac{1}{p_{CSS}}\right) > 1$

TABLE 6.1 – Temps de restitution du schéma p -CPS, et condition à partir de laquelle le temps de restitution est inférieur avec le schéma p -CSS, selon que SPH-Flow ou DELI soit bloquant.

Ainsi, sans coefficient de protection sur le pas de temps pour le schéma p -CPS (i.e. pour $\alpha = 1$), nous voyons que le temps de restitution est toujours inférieur avec le schéma p -CPS dès lors que SPH-Flow est bloquant. A partir de ce premier tableau, et en utilisant la valeur $\alpha = 0.8$ préconisée dans [37] (et utilisée systématiquement par la suite), nous pouvons construire le tableau 6.2.

p_{CPS} \ $\frac{CPU^{FE}}{CPU^{SPH}}$	5	10	15	20	25	30	40	50	60
4	9	5	5	4	4	4	4	4	4
8		18	12	10	9	9	8	8	8
12		240	27	19	16	15	13	12	12
16			88	36	27	23	19	18	17
20				80	45	35	27	24	22
24				480	83	54	37	32	29
28					216	89	51	41	36
32						175	72	53	45

TABLE 6.2 – Ratio équivalent p_{CSS} à partir duquel le temps de restitution du schéma p -CSS devient plus favorable que pour le schéma p -CPS, en fonction du ratio maximal p_{CPS} permettant de garantir la stabilité du couplage avec le schéma p -CPS et du rapport des temps CPU nécessaires à une itération de chaque solveur, lorsque le coefficient de protection pour le schéma p -CPS est fixé à $\alpha = 0.8$.

Dans ce tableau, nous pouvons remarquer que plus le rapport $\frac{CPU^{FE}}{CPU^{SPH}}$ est élevé, plus le schéma p -CSS devient intéressant. Par ailleurs, plus le ratio p_{CPS} permettant le maintien de la stabilité du couplage avec le schéma p -CPS est élevé, plus la différence entre les ratios p_{CSS} et p_{CPS} devra être grande pour que le schéma p -CSS devienne intéressant.

A titre d'exemple, si le ratio permettant le maintien de la stabilité avec le schéma p -CPS est $p_{CPS} = 8$, et si le temps nécessaire à une itération du solveur structure est 40 fois plus élevé que celui nécessaire à une itération du solveur fluide, le ratio à partir duquel le schéma p -CSS est plus rapide est $p_{CSS} = 8$. Ainsi, dans un tel cas, il est plus intéressant d'utiliser le schéma p -CSS. En effet, celui-ci étant généralement plus stable, il permet l'emploi de ratios plus grands [26, 37, 76].

A l'inverse, avec les valeurs $p_{CPS} = 24$ et $\frac{CPU^{FE}}{CPU^{SPH}} = 20$, il faudra utiliser le schéma p -CPS puisque le ratio p_{CSS} équivalent est 480, qui a priori ne permettra pas le maintien de la stabilité avec le schéma p -CSS.

6.1.2 Influence des développements de la thèse sur le p -ratio garantissant le maintien de la stabilité.

Au cours de cette thèse, de nombreux efforts ont été déployés pour tenter d'améliorer le compromis entre temps de restitution et précision des calculs couplés, sans succès dans la majorité des cas, ou bien non-applicables à l'étude du phénomène d'hydroplanage, comme nous le verrons dans la section suivante. En revanche, et ceci fait l'objet de cette section, les développements introduits aux chapitres précédents permettent d'augmenter le p -ratio utilisé dans les calculs couplés (en particulier avec le schéma p -CPS), ratio directement lié au temps de restitution des simulations, en particulier lorsque CPU^{FE} devient grand devant CPU^{SPH} , comme c'est le cas en pratique pour les simulations d'hydroplanage.

Comme rappelé dans le chapitre 5, un traitement pour le décollement des jets de surface libre est nécessaire aux simulations d'hydroplanage. Ici, nous comparons donc les résultats que l'on obtenait avant les développements (i.e. avec l'ancien traitement pour le décollement de jets et l'ancienne PST), à ceux obtenus après ces développements (i.e. avec le nouveau traitement pour le décollement de jets et la nouvelle PST). Pour ce faire, nous considérons deux cas tests pour lesquels les dynamiques sont très différentes. Le premier est le cas d'un dam-break à travers une porte déformable (Antoci *et al.* [1], cf. section 5.3.3), pour lequel la dynamique est relativement faible en comparaison du second cas test, qui est celui du dam-break impactant une plaque déformable avec $H_0 = 0.4m$ (Liao *et al.* [49], cf. section 5.3.4); la hauteur d'eau initiale $H_0 = 0.4m$ étant choisie puisqu'elle fournit la dynamique la plus forte parmi les trois hauteurs H_0 .

Afin de s'affranchir des problèmes d'analyse liés à l'augmentation/diminution du p -ratio par l'utilisation d'un critère (section 5.2.3), un p -ratio fixe est considéré dans cette étude, ce ratio étant indiqué dans le nom du schéma; par exemple 8-CPS signifie que le schéma CPS est utilisé avec un ratio fixe $p_{CPS} = 8$. Une rampe

initiale d'incrémentation est tout de même utilisée : le ratio est initialement fixé à 1, et l'incrémentation a lieu après chaque boucle de couplage avec un pas de 1, jusqu'à obtention de la valeur p qui est ensuite conservée dans toute la simulation.

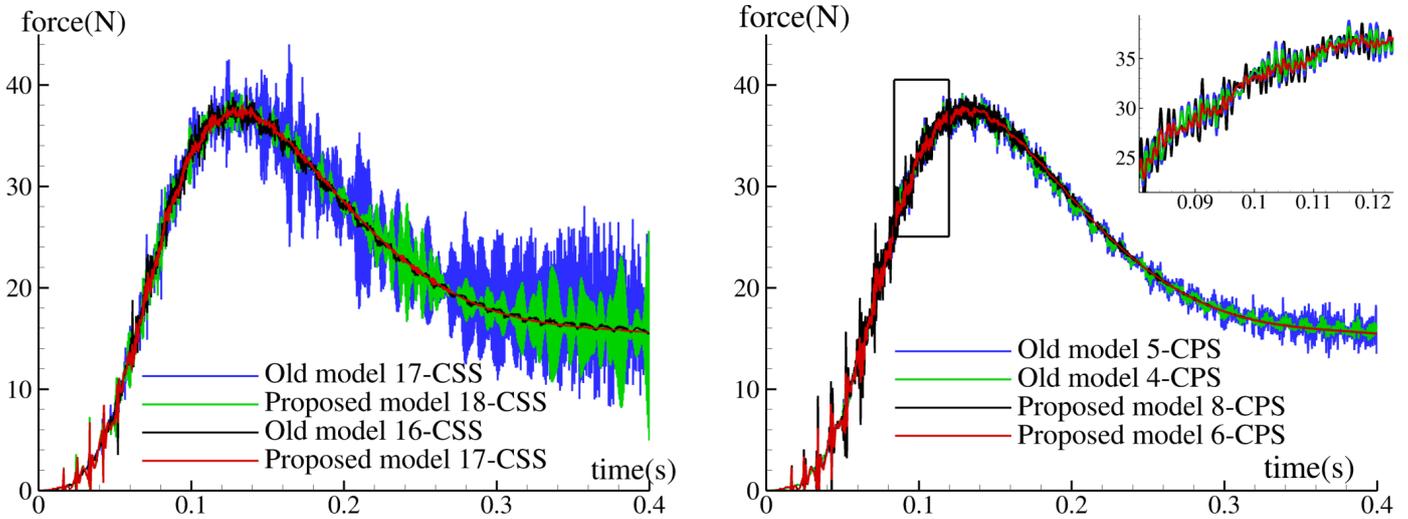


FIGURE 6.1 – Evolution temporelle des efforts verticaux pour le cas du dam-break à travers une porte déformable en 2D avec $L/\Delta x = 316$. Influence des nouveaux développements sur la PST et le décollement de jets sur le p -ratio. Gauche : p -CSS. Droite : p -CPS.

Comme nous pouvons le voir sur la figure 6.1, les résultats sont améliorés avec les nouveaux développements, aussi bien avec les schémas p -CSS que p -CPS. Cette différence s'explique principalement par le fait qu'avec l'ancien traitement pour le décollement de jets, l'interaction particule/paroi est coupée lorsque la pression est négative. Ainsi, toute pression négative est exclue des efforts transmis au corps déformable. Aussi, lorsqu'une onde de pression (due au caractère faiblement compressible de la méthode SPH) vient se réfléchir sur le corps déformable, seule la partie correspondant aux pressions positives est considérée du point de vue des efforts. Cela entraîne une discontinuité temporelle dans les efforts transmis à la structure. Cette différence majeure n'affecte pas outre mesure la limite de stabilité avec le schéma p -CSS, dans le sens où les p -ratios maximaux pouvant être utilisés sont presque identiques. En revanche, avec le schéma p -CPS, les résultats s'avèrent meilleurs dans toute la simulation avec le schéma 6-CPS avec les nouveaux développements qu'avec le schéma 4-CPS sans ces derniers, soit une augmentation d'un facteur 1.5 du ratio pouvant être atteint, et donc potentiellement un facteur 1.5 sur le temps de restitution. En utilisant $p_{CPS} = 8$ avec les nouveaux développements, nous voyons sur la figure 6.2 que lors de la première phase (dans laquelle la porte déformable s'ouvre, i.e. jusqu'à $t \approx 0.12s$) des instabilités apparaissent dans le champ de pression. Ces oscillations sont plus marquées qu'avec le schéma 4-CPS sans les nouveaux développements. A l'inverse, dans la seconde phase où la porte redescend, les oscillations s'atténuent et le champ de pression est plus régulier avec $p_{CPS} = 8$ et les nouveaux développements, qu'avec $p_{CPS} = 4$ sans ces développements. Ainsi, dans la seconde phase, le facteur d'augmentation du p -ratio est de 2.

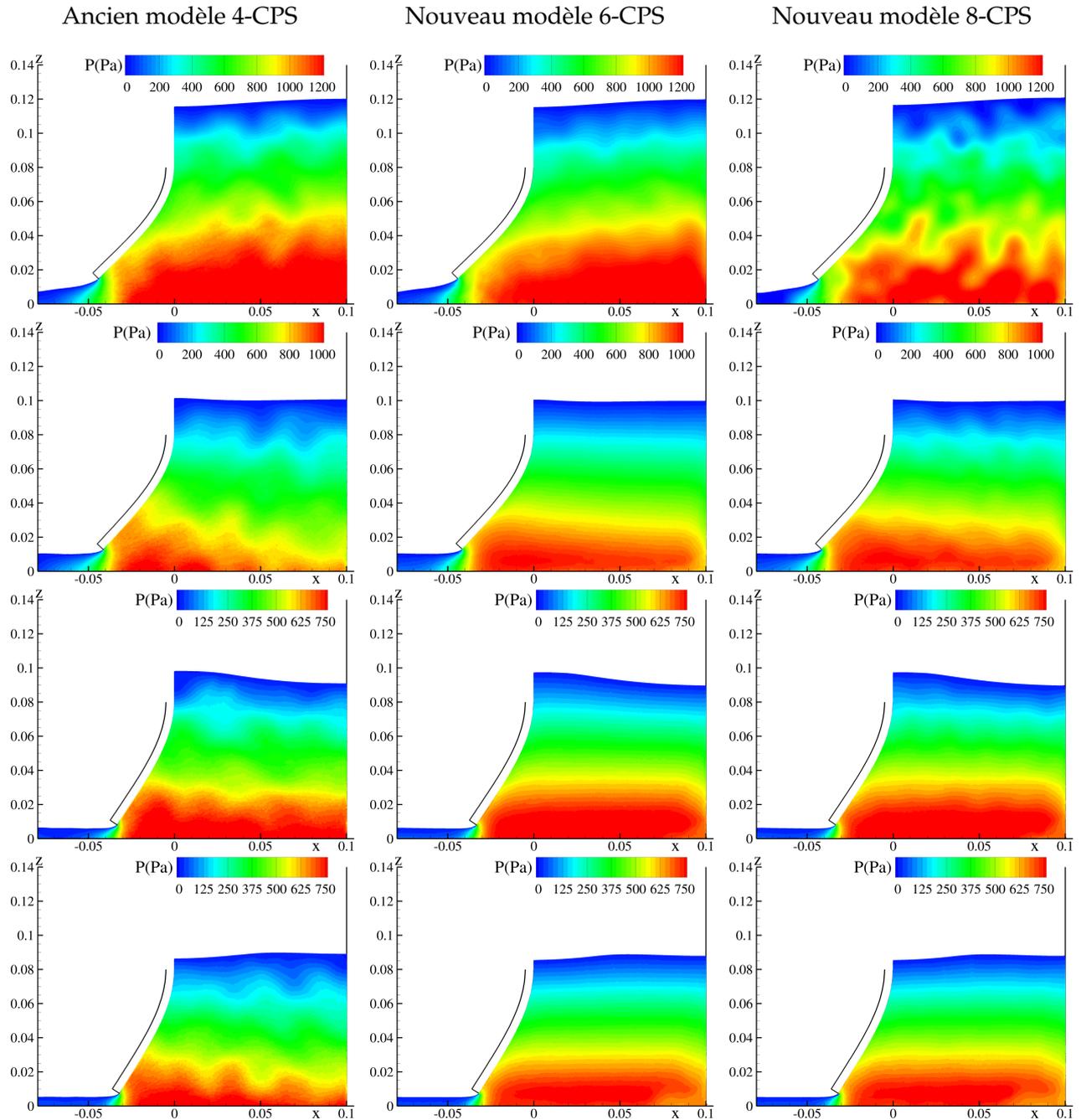


FIGURE 6.2 – Dam-break à travers une porte déformable en 2D avec $L/\Delta x = 316$. Influence des nouveaux développements (PST et décollement de jets) sur le p -ratio. Champ de pression obtenus avec le schéma p -CPS aux instants $t = 0.1s$, $t = 0.2s$, $t = 0.3s$, $t = 0.4s$ (de haut en bas), pour 3 valeurs de p_{CPS} : $p_{CPS} = 4$ avec l'ancien modèle (à gauche), $p_{CPS} = 6$ avec le nouveau modèle (au centre), $p_{CPS} = 8$ avec le nouveau modèle (à droite).

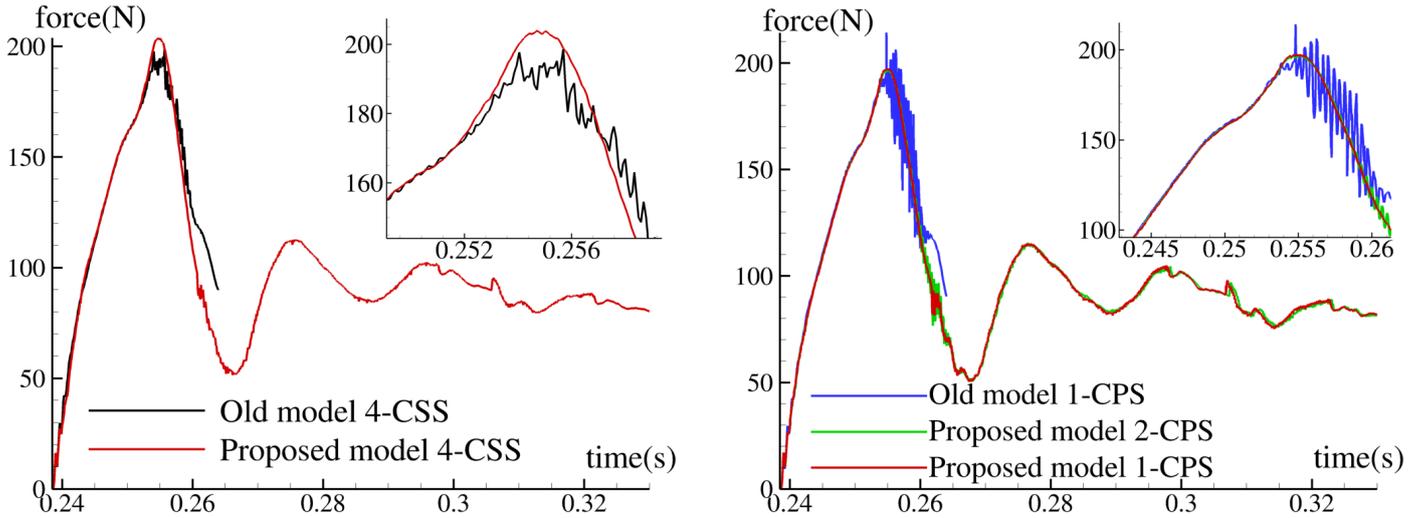


FIGURE 6.3 – Dam-break impactant une plaque déformable en 2D avec $H_0 = 0.4m$ et $L/\Delta x = 180$. Influence des nouveaux développements sur le p -ratio. Gauche : p -CSS. Droite : p -CPS.

Pour le cas d'impact d'un dam-break sur une plaque déformable avec $H_0 = 0.4m$, la comparaison ne peut être effectuée qu'avant le détachement de la plaque du fluide (cf. section 5.3.4.2), les résultats avec l'ancien traitement devenant ensuite trop éloignés de l'expérience, i.e. avant $t = 0.26s$.

Comme nous pouvons le voir sur la figure 6.3, les conclusions sont les mêmes que pour le cas test précédent. En effet, avec le schéma p -CSS les oscillations présentes sans les développements sont absentes avec les développements. Malgré tout, à l'instar du cas précédent, le ratio maximal permettant le maintien de la stabilité est dans les deux cas $p_{CSS} = 4$. Avec le schéma p -CPS, des oscillations dans les efforts fluides apparaissent sans les développements avec $p_{CPS} = 1$, ces dernières étant absentes avec $p_{CPS} = 2$ et les nouveaux développements, soit un facteur 2 sur le p -ratio maintenant la stabilité.

Nous observons, entre ces deux cas tests, un facteur 4 environ entre les ratios maximaux permettant le maintien de la stabilité du couplage, et ce aussi bien avec les schémas p -CSS que p -CPS. Ce facteur 4 trouve son explication dans (i) la différence de dynamique entre les deux cas tests, (ii) la différence concernant la résolution spatiale utilisée côté fluide. Concernant cette deuxième cause, les résolutions spatiales sont telles que $\Delta x_{Liao et al.} = 2\Delta x_{Antoci et al.}$. Or, nous avons observé, lors de tests préliminaires que le p -ratio permettant le maintien de la stabilité était augmenté lorsque la résolution spatiale Δx diminuait.

Ainsi, en vue d'améliorer les résultats du schéma fluide/structure couplé, il semble judicieux de ne pas se focaliser exclusivement sur les informations transmises à l'interface entre le fluide et la structure : améliorer les modèles dans chacun des domaines permet également une amélioration des résultats au global. En effet, comme nous venons de le voir, les développements concernant la PST et le décollement de jets permettent d'améliorer le modèle fluide, et finalement les résultats des calculs couplés, de façon substantielle.

En parallèle du travail mené côté fluide, et dont nous avons montré l'intérêt dans cette section pour le couplage SPH/FE, nous avons également tenté d'améliorer le compromis entre le temps de restitution et la précision en nous concentrant cette fois-ci sur la zone d'interface entre les deux milieux. Ainsi, différents aspects du couplage SPH/FE ont été étudiés, faisant l'objet de la section suivante.

6.2 Tentatives d'amélioration du compromis entre temps de restitution et précision

Cette section est dédiée à la présentation de différentes pistes explorées durant cette thèse pour améliorer le compromis temps de restitution/précision, via le couplage en lui-même. La plupart des tentatives n'ayant pas abouti à une amélioration notable, nous détaillons ici uniquement l'une d'entre elles (section 6.2.1).

La première piste suivie concerne l'extrapolation de la cinématique du corps déformable durant les p itérations du solveur fluide. La solution proposée par Hermange [37] est de considérer l'hypothèse d'une vitesse constante, calculée en utilisant une différence divisée décentrée amont d'ordre 1 (cf. section 5.2.2.1). Nous avons testé l'utilisation de différences divisées (décentrées amont) d'ordre supérieur pour le calcul de l'extrapolation de la vitesse, en décidant dans un premier temps de maintenir l'hypothèse d'une vitesse constante. Un travail similaire a ensuite été réalisé avec l'hypothèse d'une accélération constante. Parmi ces différentes tentatives, la solution présentant les meilleurs résultats s'est avérée être celle proposée initialement par Hermange [37, 39].

La seconde piste suivie concerne l'erreur d'extrapolation se produisant du point de vue du fluide sur la cinématique du corps déformable à la fin de chaque boucle de couplage (cf. section 5.2.2.1). En effet, lorsque le solveur structure fournit sa solution $(\mathbf{U}^{N+1}, \mathbf{V}^{N+1})$ à l'instant t^{N+1} , cette dernière est utilisée telle quelle par le solveur fluide en tant que condition aux limites. Or, au même instant du point de vue du fluide, cette cinématique est vue comme un "saut" en comparaison de la cinématique extrapolée $(\tilde{\mathbf{u}}^{n+p}, \tilde{\mathbf{v}}^{n+p})$. Afin de lisser ce "saut", nous avons considéré (du point de vue du fluide) la solution extrapolée $(\tilde{\mathbf{u}}^{n+p}, \tilde{\mathbf{v}}^{n+p})$ pour l'instant t^{N+1} , puis distribué le "saut" durant la boucle de couplage suivante (entre t^{N+1} et t^{N+2}), de telle sorte qu'à t^{N+2} la solution extrapolée $(\tilde{\mathbf{u}}^{n+p}, \tilde{\mathbf{v}}^{n+p})$ ait disparue au profit de $(\mathbf{U}^{N+1}, \mathbf{V}^{N+1})$. Les résultats obtenus en utilisant ce procédé se sont avérés plus souvent dégradés qu'améliorés par rapport à l'existant; il n'a donc pas été retenu.

La troisième piste suivie concerne la recherche d'une condition de stabilité propre au couplage. L'objectif était d'obtenir le pas de temps maximal pouvant être utilisé entre deux itérations du solveur structure, fournissant ainsi le p -ratio optimal. Parmi tous les essais réalisés durant cette recherche, la piste la plus prometteuse a été de baser la condition de stabilité sur la différence entre la vitesse locale du corps déformable et la vitesse du fluide extrapolée à la paroi. Cette condition peut être vue comme une mesure du respect de la condition de continuité de la vitesse à l'interface. A l'instar du nombre de Courant pour la condition CFL, un nombre accompagnait cette condition de stabilité du couplage. Malheureusement, les valeurs de ce nombre permettant le maintien de la stabilité étaient fortement dépendantes du cas test considéré, n'offrant donc pas le caractère générique recherché. Cette piste a donc été finalement abandonnée.

Un autre aspect exploré dans cette thèse concerne l'amélioration du critère permettant le choix du p -ratio (cf. section 5.2.3). Dans une première approche, nous avons utilisé la différence entre la puissance des efforts normaux côté fluide \mathcal{Q}_F et côté structure \mathcal{Q}_S , afin que les efforts et la vitesse soient pris en compte dans le critère. L'idée étant que plus $\|\mathcal{Q}_F - \mathcal{Q}_S\|$ est grand, plus le p -ratio doit être faible. Or nous avons remarqué que $\|\mathcal{Q}_F - \mathcal{Q}_S\|$ n'est pas uniquement lié à la stabilité du couplage mais aussi à l'amplitude des efforts (la valeur étant plus élevée lorsque l'amplitude des efforts est grande, même dans un cas stable). Ainsi plusieurs pistes ont été suivies dans le but de normaliser $\|\mathcal{Q}_F - \mathcal{Q}_S\|$. Nous avons donc basé le critère sur la formule suivante :

$$p = \frac{\|E\| / (\|\mathcal{Q}_F - \mathcal{Q}_S\|)}{\Delta t}, \quad (6.1)$$

où E est une énergie dérivée de l'écoulement (typiquement l'énergie cinétique du fluide à l'interface, l'énergie de pression du fluide à l'interface). Là-encore, aucune solution intéressante n'a été trouvée, et la piste a été abandonnée.

Une autre piste suivie pour l'augmentation/diminution du p -ratio a été l'utilisation de l'erreur d'extrapolation entre la vitesse extrapolée $\tilde{\mathbf{V}}^{n+p}$ et la solution FE au même instant \mathbf{V}^{N+1} (cf. section 5.2.2.1). Les premiers essais sur les cas tests académiques se sont avérés concluants. Cependant, dans le cas de l'hydroplanage, un algorithme de contact solide-solide intervient pour gérer le contact entre le pneumatique et la route. Cet algorithme fait que lorsqu'une maille du pneumatique "rencontre" la route, la vitesse de cette dernière est alors

régie par le contact. Dans un tel cas, la valeur $\|\tilde{\mathbf{V}}^{n+p} - \mathbf{V}^{N+1}\|$ n'est plus le reflet des instabilités du couplage mais celui de l'algorithme de contact, rendant malheureusement ce critère inadapté à l'étude du phénomène d'hydroplanage.

6.2.1 Schéma p -CPS avec projection des efforts

Ici, nous détaillons l'une des tentatives d'amélioration du compromis temps de restitution/précision portant sur le schéma p -CPS.

Comme rappelé dans la section 5.2.2, l'avantage du schéma p -CPS par rapport au schéma p -CSS est l'exécution en parallèle des deux solveurs, l'inconvénient majeur étant que le caractère implicite du solveur FE n'est plus strictement respecté. Afin de pallier ce problème tout en conservant le caractère parallèle du schéma p -CPS, nous proposons de projeter les efforts en t^{N+1} au sein du schéma p -CPS, à partir des efforts aux instants $t^N (= t^n), t^{n-1}, t^{n-2}, \dots, t^{n-p} (= t^{N-1}), \dots, t^{N-2}$ qui eux sont connus.

Le schéma obtenu est illustré sur la figure 6.4, et la projection des efforts F_π^{N+1} en l'instant t^{N+1} est effectuée pour tous les panneaux constituant la surface mouillée, via un développement en série de Taylor à l'ordre 1 :

$$\mathbf{F}_\pi^{N+1} \approx \mathbf{F}^\eta + \left\langle \frac{d\mathbf{F}^\eta}{dt} \right\rangle (t^{N+1} - t^\eta) . \quad (6.2)$$

Différentes projections peuvent alors être considérées, selon le choix de la différentielle $\left\langle \frac{d\mathbf{F}^\eta}{dt} \right\rangle$ à l'instant η . L'expression (6.2) est valide uniquement lorsque F est différentiable et par conséquent continue. Ainsi, lors d'un choc par exemple, cette condition n'est plus respectée et une limitation spécifique doit donc être introduite. On peut noter qu'avec $\eta = N$ et $\left\langle \frac{d\mathbf{F}^\eta}{dt} \right\rangle = \mathbf{0}$, le schéma p -CPS original est retrouvé. Pour une question de lisibilité, la notation $\left\langle \frac{d\mathbf{F}^\eta}{dt} \right\rangle = \mathcal{DF}^\eta$ sera utilisée dans le reste du chapitre.

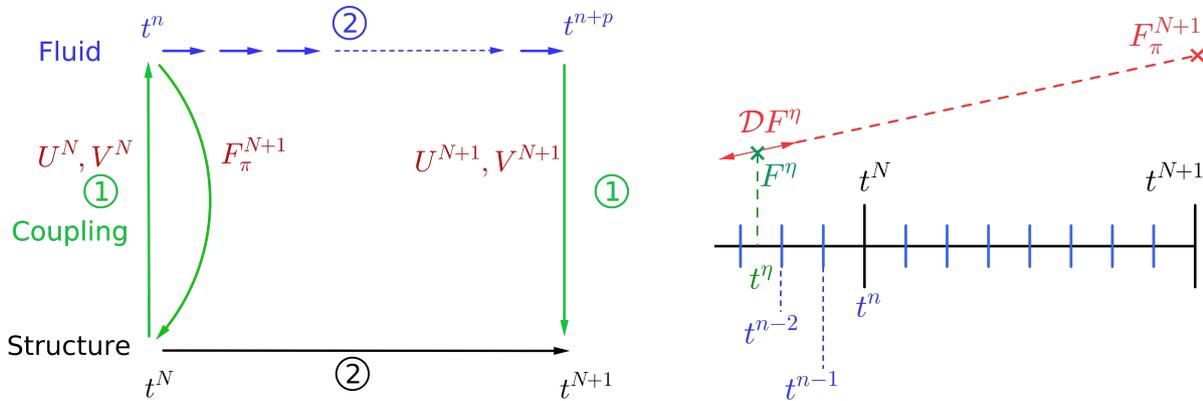


FIGURE 6.4 – Schéma de couplage p -CPS avec projection des efforts. Gauche : description du schéma. Droite : méthode générale de la projection utilisée.

Deux approches sont considérées ici, selon que l'on utilise les pas de temps SPH ou les pas de temps FE pour calculer la différentielle et donc effectuer la projection.

6.2.1.1 Extrapolation basée sur les pas de temps SPH

Différentielle basée sur deux points : schéma p -CPS- Π_{2PTS}^{SPH}

La première idée pour calculer la différentielle est d'utiliser une différence divisée d'ordre 1 basée sur les efforts aux derniers instants SPH :

$$\mathcal{D}_{2pts}^{SPH} \mathbf{F}^n = \frac{\mathbf{F}^n - \mathbf{F}^{n-1}}{\Delta t}. \quad (6.3)$$

Utiliser directement cette formulation dans (6.2) génère des instabilités dans le couplage, spécifiquement lors de chocs où de fortes valeurs de $\mathcal{D}_{2pts}^{SPH} \mathbf{F}$ sont observées numériquement. Afin de limiter l'influence de tels chocs, nous proposons ici une technique inspirée de la limitation introduite par Titarev & Toro [95] dans le cas de reconstructions spatiales avec le schéma WENO en proche paroi : l'extrapolation est annulée quand la variation relative des efforts est trop élevée (les efforts sont alors ceux du schéma original p -CPS). Les efforts effectivement transmis au solveur FE pour le panneau c sont alors :

$$\mathbf{F}^{N+1}(c) = \begin{cases} \mathbf{F}_\pi^{N+1}(c) & \text{si } \|\mathbf{F}_\pi^{N+1}(c) - \mathbf{F}^n(c)\| < \alpha_\pi \|\mathbf{F}^n(c)\|, \\ \mathbf{F}^n(c) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (6.4)$$

où $\mathbf{F}_\pi^{N+1}(c) = \mathbf{F}^n(c) + \mathcal{D}_{2pts}^{SPH} \mathbf{F}^n(c) (t^{N+1} - t^n)$, et α_π est un coefficient.

Différentielle basée sur trois points : schéma p -CPS- Π_{3PTS}^{SPH}

Pour améliorer la qualité de l'approximation de la différentielle, une seconde méthode est introduite, qui consiste à considérer trois points pour le calcul de cette dernière au lieu de deux. Plus précisément, les efforts $\mathbf{F}^n, \mathbf{F}^{n-1}, \mathbf{F}^{n-2}$ sont considérés et deux différentielles décentrées amont, chacune basée sur deux points, sont calculées :

$$\mathcal{D}_{2pts}^{SPH} \mathbf{F}^n = \frac{\mathbf{F}^n - \mathbf{F}^{n-1}}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{2\Delta t}^{SPH} \mathbf{F}^n = \frac{\mathbf{F}^n - \mathbf{F}^{n-2}}{2\Delta t}. \quad (6.5)$$

Un limiteur de pente est ensuite employé entre $\mathcal{D}_{2pts}^{SPH} \mathbf{F}^n$ et $\mathcal{D}_{2\Delta t}^{SPH} \mathbf{F}^n$ afin de "lisser" la différentielle, et le limiteur *minmod* est retenu :

$$\text{minmod}(a, b) = \max(0, \min(a, b)) + \min(0, \max(a, b)). \quad (6.6)$$

Finalement, la différentielle :

$$\mathcal{D}_{3pts}^{SPH} \mathbf{F}^n = \text{minmod}(\mathcal{D}_{2pts}^{SPH} \mathbf{F}^n, \mathcal{D}_{2\Delta t}^{SPH} \mathbf{F}^n) \quad (6.7)$$

est introduite dans l'équation (6.2) pour calculer la projection des efforts $\mathbf{F}_\pi^{N+1}(c)$, comme illustré sur la figure 6.5. Une fois la projection des efforts effectuée, la limitation dérivée de Titarev & Toro est là-encore utilisée, et les efforts $\mathbf{F}^{N+1}(c)$ effectivement transmis au solveur FE sont ceux définis par (6.4) (avec $\mathcal{D}_{3pts}^{SPH} \mathbf{F}^n(c)$ en lieu et place de $\mathcal{D}_{2pts}^{SPH} \mathbf{F}^n(c)$).

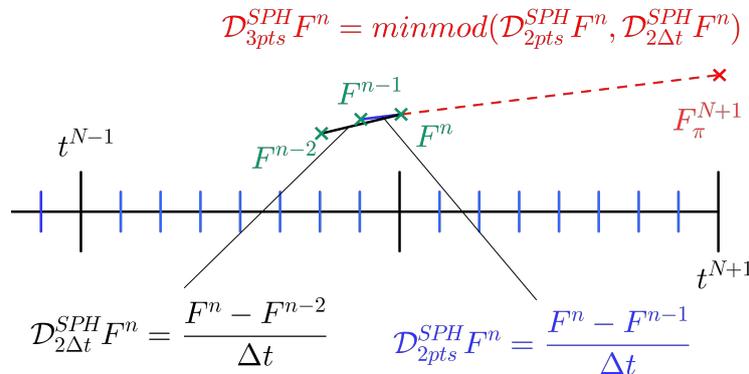


FIGURE 6.5 – Calcul de l'extrapolation des efforts avec le schéma p -CPS- Π_{3PTS}^{SPH} .

6.2.1.2 Extrapolation basée sur les pas de temps FE

La seconde idée est de baser le calcul de l'extrapolation des efforts sur les pas de temps utilisés par le solveur structure. La solution exacte de la cinématique étant connue aux pas de temps FE, nous utilisons également ces pas de temps pour calculer l'extrapolation des efforts, la contrepartie étant une perte de localité du calcul de la différentielle. Ceci implique que les efforts ne sont plus considérés aux instants SPH, mais comme une moyenne sur les p instants précédents ; au passage, nous comptons aussi sur un lissage des efforts, notamment en présence d'ondes acoustiques (dues à l'hypothèse faiblement compressible côté SPH), qui pourrait améliorer la stabilité du couplage.

Au continu, de tels efforts sont :

$$F = \frac{1}{\Delta T} \int_{t^{N-1}}^{t^N} F(t) dt . \quad (6.8)$$

Ces efforts sont alors considérés comme situés au milieu de t^{N-1} et t^N , i.e. à $t^{N-\frac{1}{2}}$. Ils sont ensuite discrétisés en utilisant une formule de quadrature :

$$F^{N-\frac{1}{2}} := \frac{1}{\Delta T} \sum_{q=n-p}^n F^q \Delta t = \frac{\Delta t}{\Delta T} \sum_{q=n-p}^n F^q = \frac{1}{p} \sum_{q=n-p}^n F^q , \quad (6.9)$$

comme illustré sur la figure 6.6.

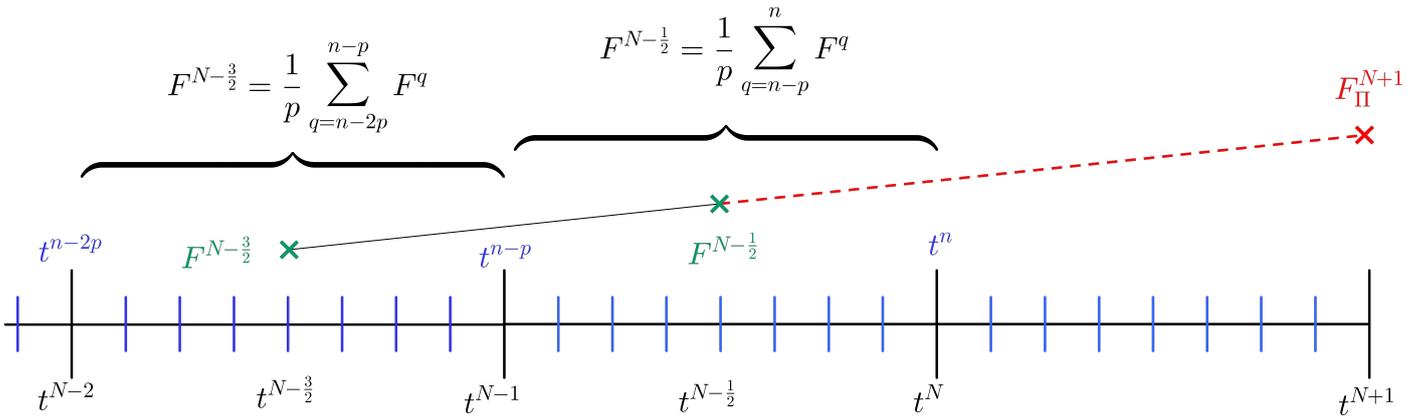


FIGURE 6.6 – Calcul de l'extrapolation des efforts utilisant les pas de temps FE.

Pour utiliser un développement en série de Taylor, la différentielle doit également être calculée au point $t^{N-\frac{1}{2}}$, et en suivant l'exemple de la section 6.2.1.1, les différentielles utilisant deux et trois points peuvent être déterminées. Les efforts effectivement transmis au solveur FE sont alors :

$$F^{N+1}(c) = \begin{cases} F_{\pi}^{N+1}(c) & \text{si } \|F_{\pi}^{N+1}(c) - F^n(c)\| < \alpha_{\pi} \|F^n(c)\| , \\ F^n(c) & \text{sinon ,} \end{cases} \quad (6.10)$$

où $F_{\pi}^{N+1}(c) = F^{N-\frac{1}{2}}(c) + \mathcal{D}_{2/3pts}^{FE} F^{N-\frac{1}{2}}(c) (t^{N+1} - t^{N-\frac{1}{2}})$, avec

$$- \mathcal{D}_{2pts}^{FE} F^{N-\frac{1}{2}}(c) = \frac{F^{N-\frac{1}{2}}(c) - F^{N-\frac{3}{2}}(c)}{\Delta T} ,$$

$$- \mathcal{D}_{3pts}^{FE} F^{N-\frac{1}{2}}(c) = \text{minmod} \left(\mathcal{D}_{2pts}^{FE} F^{N-\frac{1}{2}}(c), \mathcal{D}_{2\Delta T}^{FE} F^{N-\frac{1}{2}}(c) \right) ,$$

$$- \mathcal{D}_{2\Delta T}^{FE} F^{N-\frac{1}{2}}(c) = \frac{F^{N-\frac{1}{2}}(c) - F^{N-\frac{5}{2}}(c)}{2\Delta T} .$$

A l'instar des schémas basés sur les pas de temps SPH, la limitation dérivée de Titarev & Toro est utilisée ici. Les schémas obtenus sont notés $p\text{-CPS-}\Pi_{2\text{PTS}}^{\text{FE}}$ et $p\text{-CPS-}\Pi_{3\text{PTS}}^{\text{FE}}$ respectivement.

6.2.2 Résultats

Le cas du dam-break à travers une porte déformable (Antoci *et al.*) est considéré ici, pour lequel les paramètres numériques sont identiques à ceux utilisés dans la section 6.1.2. L'objectif est de déterminer si la méthode de projection des efforts permet une amélioration des résultats. Nous avons vu précédemment qu'avec $p_{\text{CPS}} = 8$, la limite de stabilité était atteinte avec le schéma $p\text{-CPS}$ original. Ainsi, les simulations sont effectuées avec $p = 8$ pour les schémas utilisant la projection.

Tout d'abord, une étude de sensibilité du coefficient α_π est effectuée, et comme nous pouvons le voir sur la figure 6.7, les meilleurs résultats sont obtenus avec $\alpha_\pi = 0.25$, et ce pour les quatre schémas de couplage utilisant la projection des efforts. Ceci s'explique par l'amplification des oscillations des efforts fluides lorsqu'une méthode de projection est utilisée. En effet, lorsque de telles oscillations apparaissent (typiquement en présence d'une onde de pression acoustique), l'emploi d'une projection accroît l'amplitude du signal, ce qui déstabilise le couplage in fine. Aussi, plus la valeur de α_π est faible, moins l'amplification est forte, et meilleurs sont les résultats.

Les projections basées sur les pas de temps SPH donnent les meilleurs résultats et, dans ce cas, utiliser trois points pour effectuer la projection (en addition d'un limiteur de pentes) permet une amélioration par rapport à une projection n'utilisant que deux points. Ainsi, entre tous les schémas utilisant une projection des efforts, celui donnant les meilleurs résultats est le $p\text{-CPS-}\Pi_{3\text{PTS}}^{\text{SPH}}$.

Enfin, comme nous pouvons le voir sur la figure 6.8, les résultats sont améliorés avec le schéma $8\text{-CPS-}\Pi_{3\text{PTS}}^{\text{FE}}$ par rapport au 8-CPS original en début de simulation (dans la phase d'augmentation des efforts fluides). Ensuite, une fois que la porte déformable a atteint sa déformation maximale et qu'elle commence à redescendre, des oscillations sont observées sur le champ de pression, indiquant une déstabilisation du couplage.

Finalement, au vu de ces résultats, il demeure difficile de conclure quant à un gain à utiliser les schémas avec projections des efforts.

Les travaux initiés par Hermange [37] sur les schémas de couplage à pas de temps différés suscitaient des interrogations, quant aux éventuelles possibilités d'amélioration qu'on pouvait espérer. Ainsi, les travaux de recherche présentés ici étaient nécessaires (et attendus par l'équipe), puisque l'impact sur la diminution des temps de calcul aurait été très appréciable en cas de succès. Ces travaux, bien que donnant finalement des résultats mitigés, du moins pas à la hauteur de nos espérances, ont demandé certes un effort de recherche important, mais méritaient donc d'être engagés. Comme c'est parfois le cas dans la recherche, ces efforts n'ont pas été fructueux, mais ont tout de même permis de répondre aux interrogations de départ, à savoir qu'il semble malheureusement compliqué d'aller plus loin sur la valeur maximale du p -ratio. Bien sûr, le sujet n'est pas totalement clos. Peut-être que d'autres idées émergeront à la lumière de ces tentatives infructueuses et en s'inspirant donc de cette base de recherches, pour finalement aboutir à des améliorations futures.

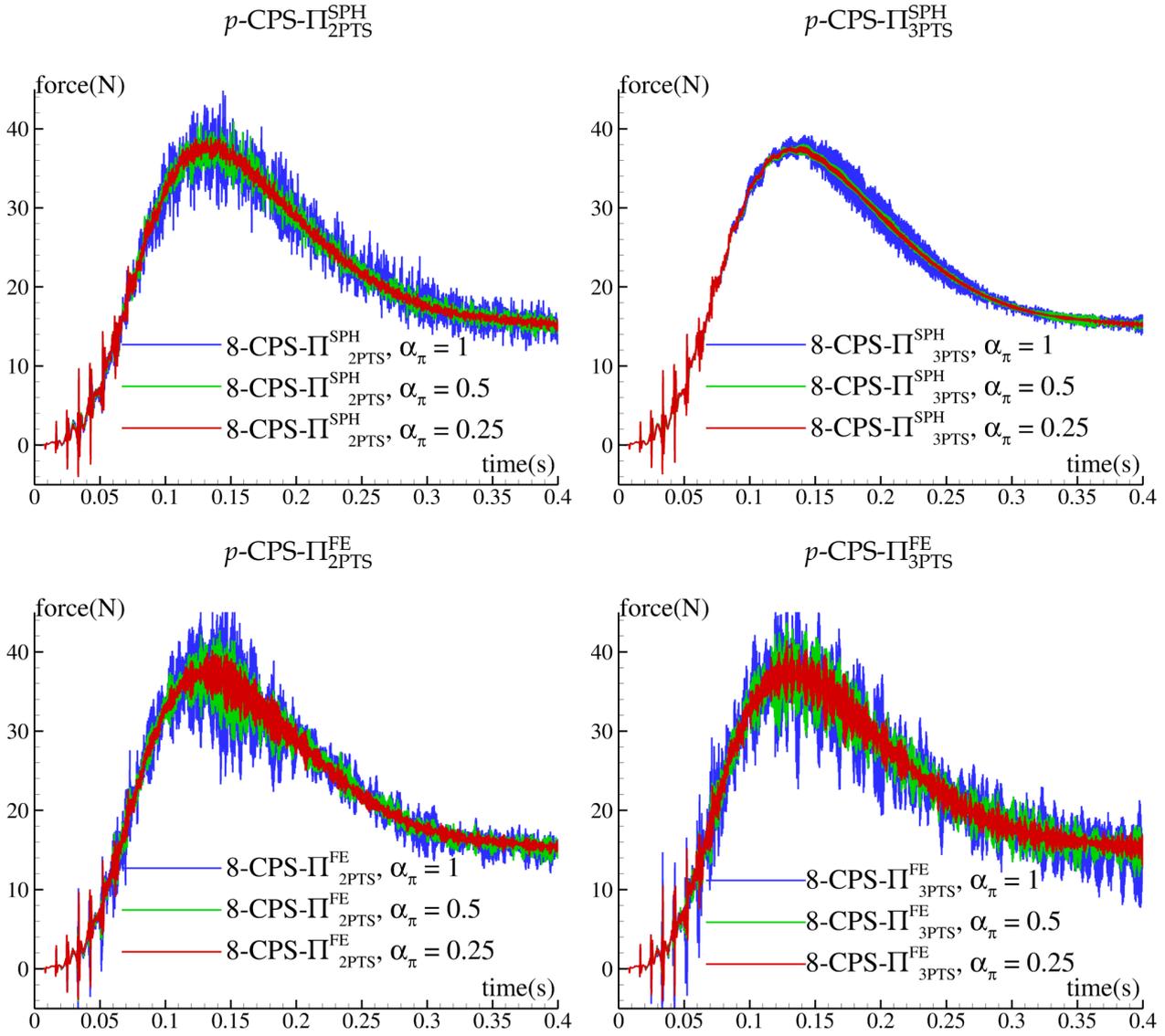


FIGURE 6.7 – Dam-break à travers une porte déformable en 2D. Evolution temporelle des efforts fluides verticaux avec $L/\Delta x = 316$. Résultats obtenus avec les schémas utilisant la projection des efforts pour différentes valeurs du coefficient α_π avec un ratio fixe $p_{\text{CPS}} = 8$.

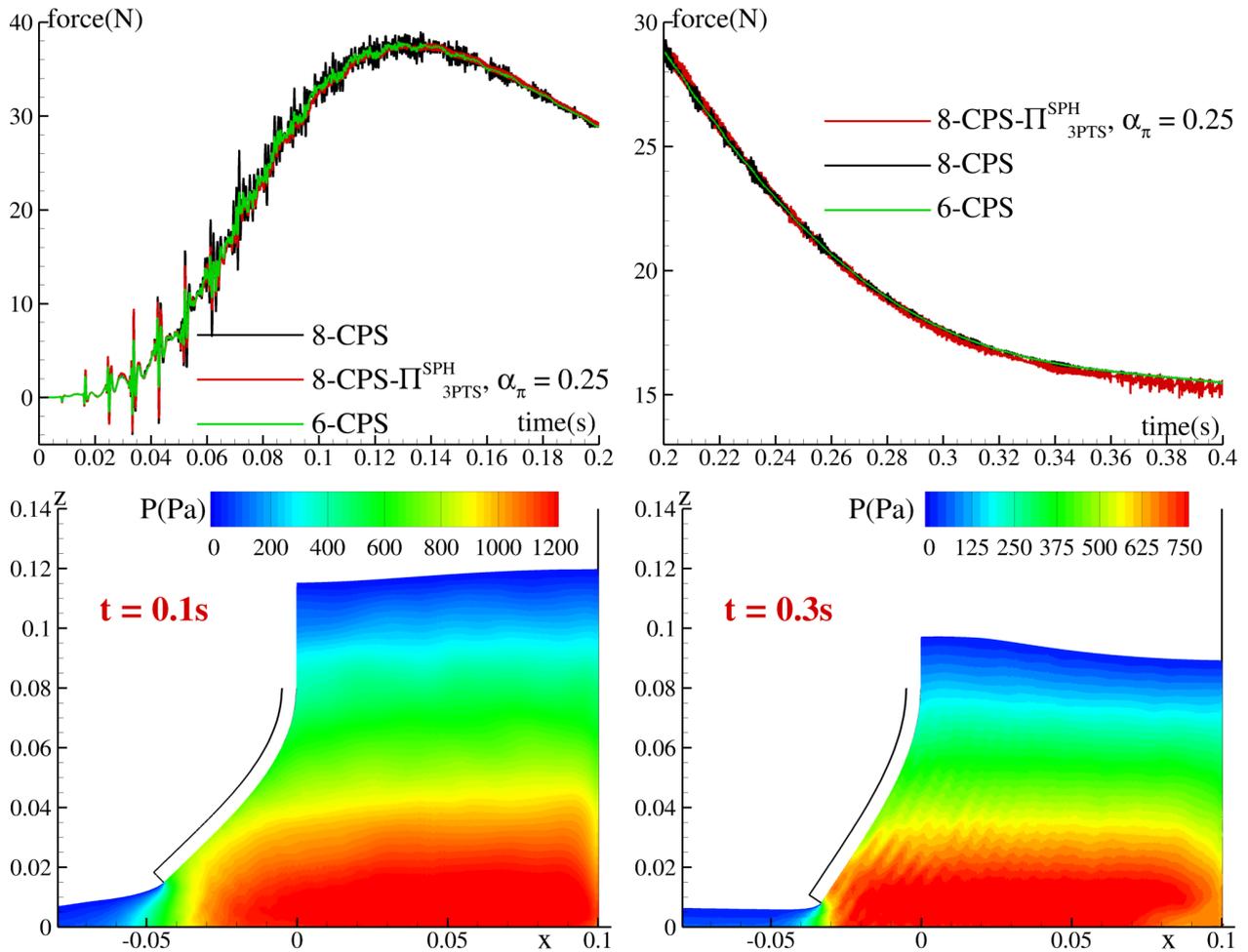


FIGURE 6.8 – Dam-break à travers une porte déformable en 2D. Haut : évolution temporelle des efforts fluides verticaux avec $L/\Delta x = 316$. Bas : champs de pression obtenus avec le schéma p -CPS-II $_{3PTS}^{SPH}$ à $t = 0.1s$ et $t = 0.3s$.

6.3 Cas d'application à l'hydroplanage

Les sections précédentes ont montré qu'il est difficile d'augmenter la performance des simulations par l'utilisation de schémas de couplage alternatifs ou par les informations transmises à l'interface entre le fluide et la structure. Néanmoins, il est possible d'optimiser le temps de restitution de telles simulations via les paramètres utilisés côté fluide, en particulier la résolution spatiale, le ratio $R/\Delta x$ et la vitesse du son c_0 . Dans [37, 38], Hermange *et al.* ont étudié des géométries de pneumatiques présentant uniquement des sillons longitudinaux. Ensuite, au cours du projet HydroSafeTire dans lequel cette thèse s'inscrit, des résultats très satisfaisants ont été obtenus pour différentes géométries de pneumatiques. Néanmoins, en réutilisant des paramètres semblables à ceux proposés par Hermange *et al.* [37, 38], cette fois-ci pour l'étude de pneumatiques présentant des entailles directionnelles, nous observons des différences élevées en fonction des paramètres utilisés côté fluides. Il semble donc intéressant d'analyser ces cas d'un point de vue physico-numérique. Aussi, afin d'étudier l'influence des paramètres numériques utilisés côté fluide sur la pertinence du modèle physique, nous proposons de nous intéresser ici à trois géométries distinctes de pneumatiques avec des sculptures directionnelles, très différentes de celles étudiées par Hermange *et al.* [37, 38] et un paramètre numérique, le ratio $R/\Delta x$.

6.3.1 Présentation du cas

Les pneumatiques considérés ici possèdent des sculptures directionnelles, de sorte que l'évacuation du fluide est effectuée en amont de l'aire de contact par l'expulsion du fluide par l'avant d'une part, et d'autre part par les entailles transverses permettant une évacuation sur les côtés du pneumatique. Le pneumatique est gonflé à 2.2bars et une force correspondant à un quart du poids du véhicule est exercée sur le pneumatique, soit 4800N , la vitesse du véhicule étant de 65km.h^{-1} . Trois types d'entailles sont considérés, comme illustré sur la figure 6.9. Le pneumatique 1 présente des entailles transverses allant du centre vers l'extérieur. Les pneumatiques 2 et 3 possèdent quant à eux une telle entaille en alternance avec une entaille plus courte à l'épaule (sur le côté de la bande de roulement). Pour ces trois images de pneumatiques, le véhicule se déplace de la gauche vers la droite, si bien que l'évacuation dans les entailles est effectuée du centre vers l'extérieur, et dans le sens d'avance du véhicule. Les pneumatiques sont représentés dans les simulations dans toute leur complexité, tant au niveau des matériaux utilisés que des différentes couches constituant ces pneumatiques.

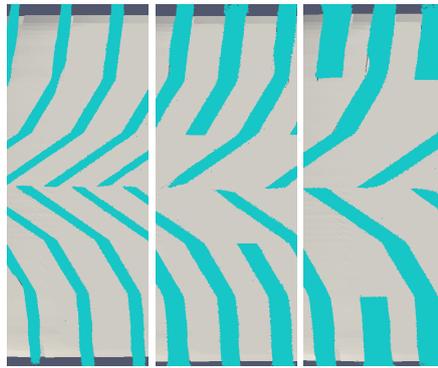


FIGURE 6.9 – Pneumatiques ne présentant que des entailles transverses, en vue de dessus. Gauche : pneumatique 1. Centre : pneumatique 2. Droite : pneumatique 3. Le véhicule se déplace vers la droite sur la figure.

Pour les différents pneumatiques, une flaque d'eau de 1mm de hauteur est considérée, représentative de la législation en vigueur pour la mise sur le marché des pneumatiques (European Legislation N 2009/1222). Dans la direction d'avance du véhicule, cette flaque est dimensionnée de telle sorte qu'elle soit suffisamment longue pour que la phase stabilisée puisse être atteinte. Côté SPH, le schéma de Parshikov & Medin combiné à la méthode surfacique de traitement des frontières BIM-CFA est utilisé, avec la PST introduite au Chapitre 3 et le traitement de décollement de jets introduit au Chapitre 4. La vitesse du son nominale du fluide est, dans une première approche, fixée à $c_0 = 300\text{m.s}^{-1}$ dans toutes les simulations, représentant un compromis acceptable entre temps de restitution des simulations et obtention d'un nombre de Mach suffisamment faible pour respecter la condition de faible compressibilité. Afin de limiter le nombre de particules dans les simulations, deux boîtes de raffinement (APR) emboîtées l'une dans l'autre sont utilisées. Ces boîtes de raffinement se déplacent à la vitesse du véhicule et permettent le raffinement progressif de la flaque d'eau en amont de l'aire de contact, pour atteindre $\Delta x = 0.25\text{mm}$ dans la zone la plus raffinée (l'aire de contact étant la zone dans laquelle le pneumatique est en contact avec la route). De manière symétrique, les particules sont dé-raffinées à l'arrière du pneumatique. Ainsi, la simulation compte 768 000 particules à son début, pour atteindre finalement environ 4 millions de particules. Ce choix de discrétisation spatiale a été guidé par les résultats obtenus par Hermange [37] concernant le compromis temps de restitution/précision des simulations pour des pneumatiques présentant des sillons longitudinaux. Ainsi, tandis que pour les cas tests académiques étudiés précédemment, une attention particulière a été systématiquement portée à la vérification de la convergence des solutions obtenues côté fluide par rapport à Δx , dans ce contexte industriel le choix de Δx est issu d'un compromis faisant entrer dans la balance le temps de restitution des simulations. A titre d'exemple, une division par deux de Δx entraînerait une multiplication par huit du nombre de particules dans la boîte APR où sont concentrées la majeure partie des particules, et une division par deux du pas de temps Δt côté fluide. Sauf mention contraire, la stratégie de couplage utilisée ici est le schéma p -CPS avec un ratio maximal

$p_{max} = 20$ et le critère pour l'augmentation/diminution du p -ratio défini par l'équation (5.9) avec les valeurs seuils $th_{min} = 7.5\%$ et $th_{max} = 15\%$. Cette valeur de p_{max} peut paraître a priori élevée au vu des résultats obtenus sur les cas tests académiques, mais à l'instar de ce qui a été évoqué précédemment concernant la résolution spatiale Δx , le temps de restitution des simulations entre dans la balance concernant le choix de ce p -ratio. En effet, dans les configurations étudiées ici, une division par deux de p_{max} (cette valeur p_{max} étant effectivement atteinte puis conservée sur un rythme de croisière, cf. section 6.3.3) entraîne une multiplication par deux du temps de restitution dans la phase où cette valeur est effectivement atteinte.

Les premières simulations avec ces pneumatiques, étaient effectuées avec le ratio $R/\Delta x = 2.11$. Or, avec de faibles valeurs de $R/\Delta x$, les erreurs de quadrature sont plus fortes et les champs solutions généralement moins régulier qu'avec des valeurs élevées. La question s'est alors posée de savoir si cette faible valeur de $R/\Delta x$ n'était pas responsable des différences observées sur les efforts de portance, via l'introduction d'erreurs sur les champs solutions.

Par ailleurs, dans le Chapitre 2, nous avons observé une dérive de la pression avec le schéma de Parshikov & Medin en présence d'un domaine confiné. Or, lors des premières simulations, des pressions élevées étaient observées avec les pneumatiques 2 et 3 dans les entailles courtes à l'épaule (bord de la bande de roulement du pneumatique) situées dans l'aire de contact entre le pneumatique et la route. Bien que de telles entailles ne forment pas à proprement parler un domaine confiné, du point de vue du fluide le polyèdre constitué des faces des entailles et de la route ne possède qu'une seule face ouverte. Nous nous sommes alors demandés si un tel phénomène de dérive n'était pas à l'oeuvre ici. Or, les problèmes de dérives observés dans le Chapitre 2 étaient atténués par l'emploi de ratio $R/\Delta x$ plus élevés. Aussi, l'augmentation du ratio $R/\Delta x$ devrait permettre de déterminer si un tel phénomène est en jeu ici.

A l'inverse, avec un ratio élevé (et à Δx fixe), les particules sont en contact avec plus de surface solide. Ainsi, dans ce cas spécifique où Δx est du même ordre de grandeur que la section d'entaille, les particules fluides sont – dans les entailles du pneumatique – en majorité en contact soit avec la route, soit avec le pneumatique et souvent avec les deux à la fois. Nous nous sommes alors demandés si l'évacuation du fluide ne pourrait pas être "freinée" par l'utilisation d'un ratio plus élevé, impliquant de fait des surpressions dans les entailles. De plus, la viscosité numérique du schéma SPH est d'autant plus élevée que le ratio $R/\Delta x$ est grand, pouvant également participer au ralentissement de l'évacuation du fluide.

Pour toutes ces raisons, nous avons décidé d'étudier l'influence du ratio $R/\Delta x$ sur les résultats, et cette étude a été effectuée pour les trois pneumatiques.

6.3.2 Résultats pour le pneumatique 1.

Pour étudier l'influence du ratio $R/\Delta x$ sur les résultats, deux solutions sont envisageables. La première est de considérer un nombre de Courant identique pour tous les ratios, impliquant une différence sur le pas de temps fluide et ainsi à p -ratio constant une différence sur le pas de temps structure. La seconde est d'adapter le nombre de Courant pour obtenir le même pas de temps avec tous les ratios. Ici, la seconde solution est retenue, et le nombre de Courant est $\alpha_{CFL} = 0.375 \frac{2.11}{R/\Delta x}$.

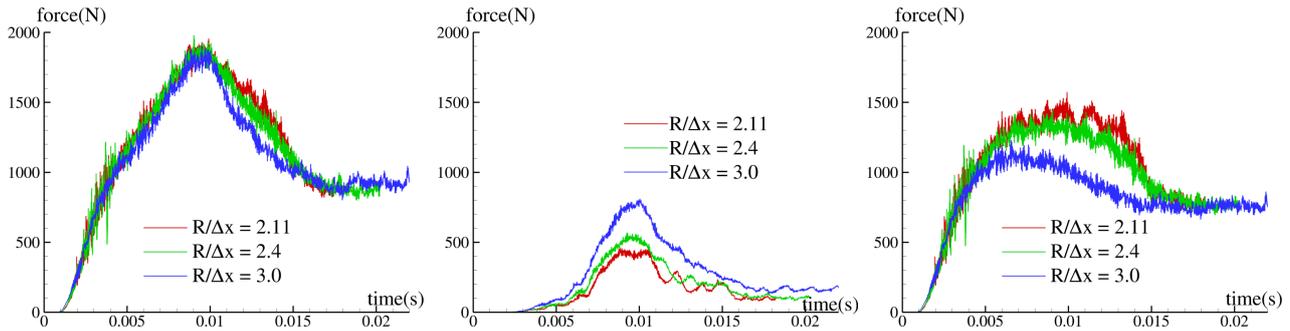


FIGURE 6.10 – Evolution temporelle des efforts de portance exercés par le fluide sur le pneumatique 1 pour trois ratios $R/\Delta x$. Gauche : efforts de portance totaux. Centre : efforts de portance dans les entailles situées dans l'aire de contact. Droite : efforts de portance exceptés dans cette zone.

Comme nous pouvons le voir sur la figure 6.10, deux phases distinctes apparaissent dans la simulation. La première entre $t = 0s$ et $t = 0.015s$, dans laquelle le pneumatique commence par entrer en contact avec la flaque initialement au repos. Une forte augmentation des efforts de portance exercés par le fluide est dans un premier temps observée, suivie d'une diminution. Cette phase dans laquelle les variations globales apparaissent est appelée phase 1 dans la suite du manuscrit. Ensuite, la phase stabilisée qui nous intéresse est atteinte, dans laquelle les quantités physiques se conservent globalement (ici à partir de $t = 0.015s$). Cette phase stabilisée sera nommée phase 2 dans la suite du manuscrit.

Dans la phase 1, nous observons que les efforts de portance dans les entailles situées dans l'aire de contact sont plus élevés lorsque $R/\Delta x$ est grand. A l'inverse, dans les autres zones, les efforts sont plus faibles lorsque $R/\Delta x$ augmente. Les efforts étant plus faibles en amont de l'aire de contact avec $R/\Delta x$ grand, la surface de contact entre le pneumatique et la route augmente, comme le montre la figure 6.11. Il y a donc plus de surface d'entailles dans l'aire de contact avec $R/\Delta x$ grand, d'où l'augmentation des efforts dans cette zone. Ainsi, un transfert des efforts d'une zone à une autre entre les deux ratios est observé dans la phase 1, puisque les efforts totaux sont quant à eux identiques, du moins dans la partie d'augmentation des efforts, i.e. avant $t = 9ms$. En augmentant le ratio $R/\Delta x$ (à Δx fixé), le support du noyau augmente. Ainsi, la surface d'interaction entre une particule et le pneumatique augmente lorsque $R/\Delta x$ est grand, de telle sorte que la particule voit plus de facettes du pneumatique. En particulier, pour une particule située dans la flaque en amont de l'aire de contact, la moyenne des normales des facettes du pneumatique avec lesquelles elle est en interaction est légèrement plus orientée dans la direction d'avance du véhicule. Nous pouvons donc supposer que de telles particules sont expulsées de cette zone d'autant plus que $R/\Delta x$ est grand. Cette hypothèse géométrique est tout de même à nuancer de par les multiples conséquences qu'implique l'augmentation du ratio $R/\Delta x$, notamment concernant l'erreur de quadrature.

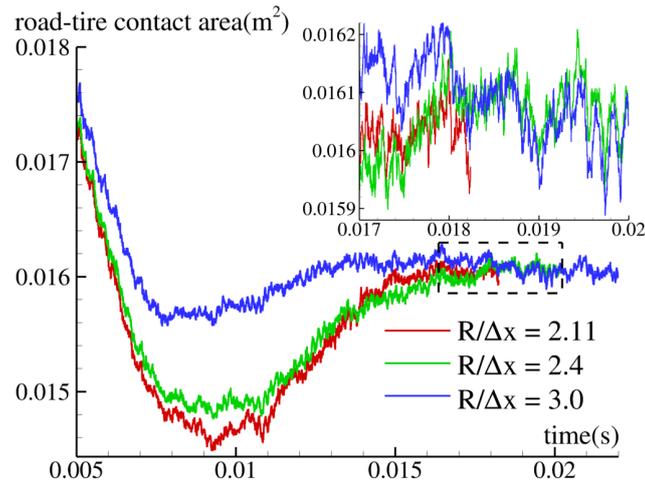


FIGURE 6.11 – Evolution temporelle de la surface de contact entre le pneumatique 1 et la route, pour trois ratios $R/\Delta x$.

Dans la phase 2, les efforts de portance calculés sont proches pour tous les ratios $R/\Delta x$ testés. Une légère différence est tout de même à noter en ce qui concerne les efforts dans les entailles de l'aire de contact, où ils sont plus élevés avec un ratio $R/\Delta x$ plus grand (cf. figure 6.10).

Sur la figure 6.12, les champs solutions sont affichés pour un instant de la phase 2. Concernant le champ de pression dans les entailles situées dans l'aire de contact, nous observons que malgré quelques différences, il est globalement similaire avec $R/\Delta x = 2.11$ et $R/\Delta x = 3.0$, les surpressions étant par exemple localisées aux mêmes endroits dans les entailles. Nous observons également qu'avec $R/\Delta x = 2.11$, plus de particules sont présentes entre le pneumatique et la route à l'entrée de l'aire de contact. Le contact entre le pneumatique et la route a lieu plus en amont avec $R/\Delta x = 3.0$, la différence de surface entre les deux ratios étant somme toute faible comme observé sur la figure 6.11.

Concernant la vitesse transversale dans les entailles, nous observons que l'évacuation est bien effectuée à partir du centre du pneumatique vers l'extérieur pour les entailles entrant en contact avec la flaque. Lorsque l'entaille est dans l'aire de contact, la vitesse d'évacuation est plus faible et, dans les zones de surpression loin de l'épaule du pneumatique, nous observons une inversion de la vitesse dans la partie centrale de l'entaille, l'évacuation étant alors effectuée d'une part vers l'extérieur, et d'autre part vers le centre du pneumatique lorsque cette partie de l'entaille n'est pas pleine de fluide. Ce phénomène est lié à la mécanique du pneumatique (effet Poisson dans l'aire de contact), les entailles se refermant à l'endroit où sont observées ces surpressions. tandis qu'elle s'ouvrent plus en aval, dans la partie la plus proche du centre du pneumatique.

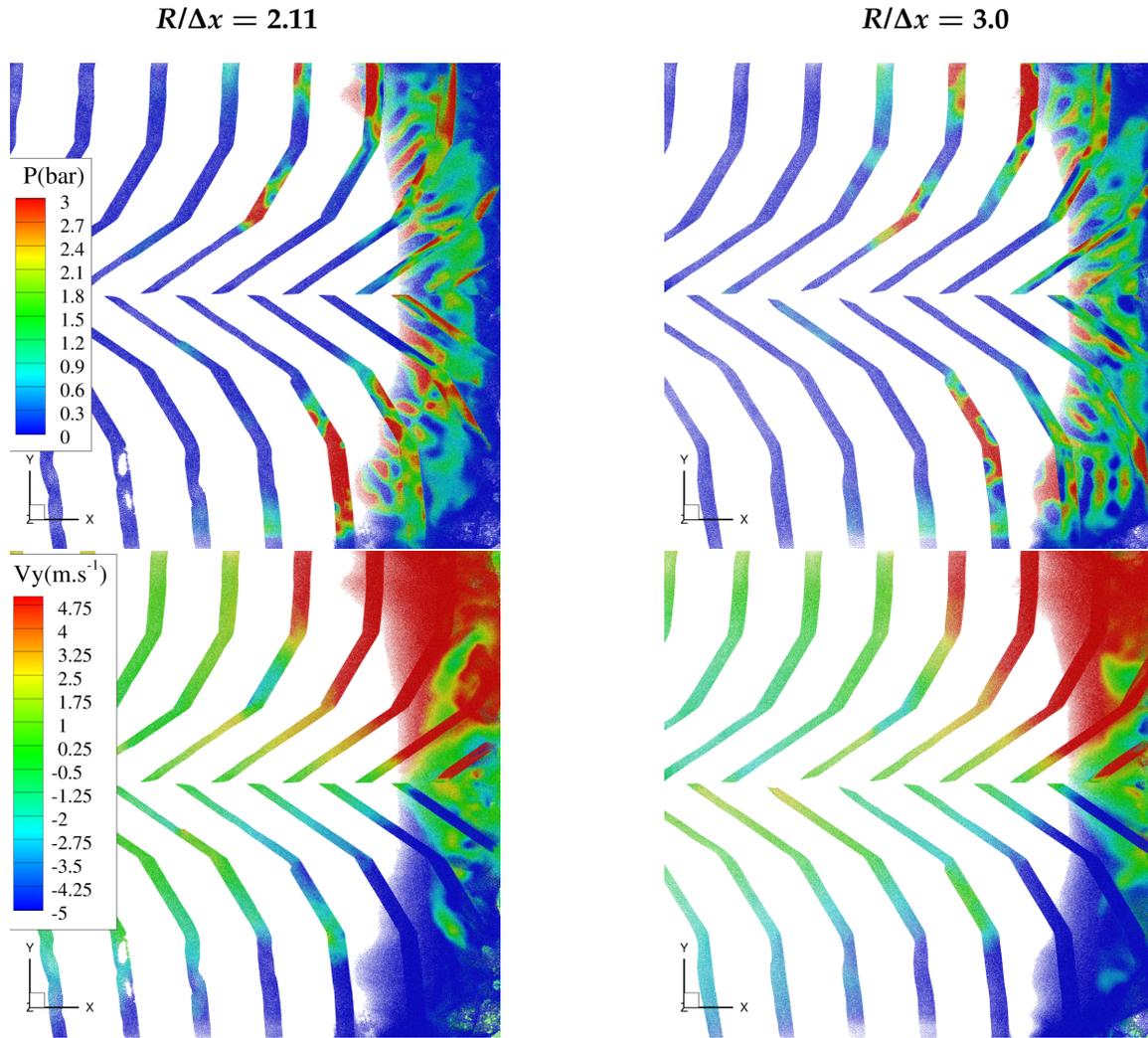


FIGURE 6.12 – Champs solutions obtenus pour le pneumatique 1 à $t = 17.5ms$ en vue de dessus pour $R/\Delta x = 2.11$ (à gauche) et $R/\Delta x = 3.0$ (à droite). Haut : champ de pression. Bas : champ de vitesse transversale.

Finalement, pour ce pneumatique, des différences apparaissent sur des quantités locales selon le ratio $R/\Delta x$ utilisé, mais le comportement global n'est que peu impacté par ces différences, du moins dans la phase d'intérêt (phase 2).

6.3.3 Résultats pour le pneumatique 2.

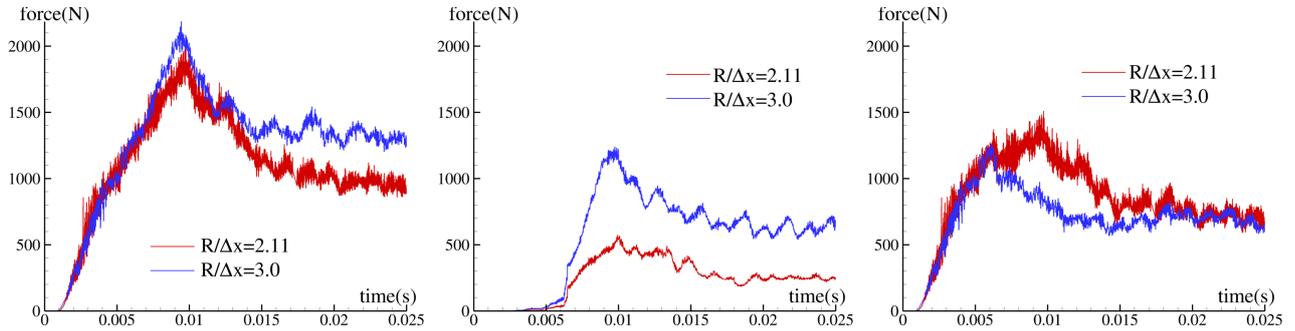


FIGURE 6.13 – Evolution temporelle des efforts de portance exercés par le fluide sur le pneumatique 2 pour deux ratios $R/\Delta x$. Gauche : efforts de portance totaux. Centre : efforts de portance dans les entailles de l'aire de contact. Droite : efforts de portance exceptés dans cette zone.

L'influence du ratio $R/\Delta x$ sur les résultats est à nouveau étudiée ici.

Dans la phase 1, un comportement similaire au pneumatique 1 est observé ici, à savoir qu'avec un ratio $R/\Delta x$ plus grand, les efforts fluides sont plus élevés dans les entailles de l'aire de contact, et plus faibles ailleurs (cf. figure 6.13). Les différences observées entre les deux ratios concernant les efforts de portance dans les entailles de l'aire de contact sont tout de même plus marquées avec le pneumatique 2 qu'avec le pneumatique 1, dès la phase 1.

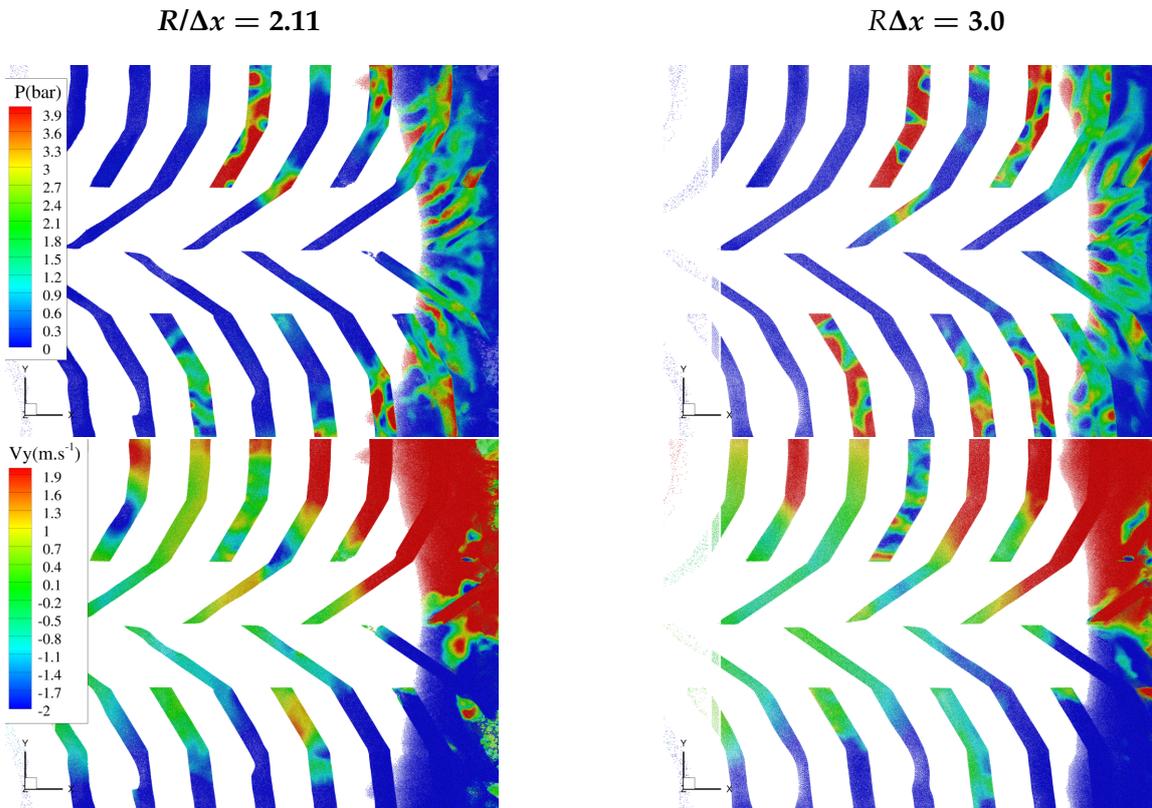


FIGURE 6.14 – Champs solutions obtenus pour le pneumatique 2 à $t = 24.75ms$ en vue de dessus pour $R/\Delta x = 2.11$ (à gauche) et $R/\Delta x = 3.0$ (à droite). Haut : champ de pression. Bas : champ de vitesse transversale.

Dans la phase 2, à l'inverse du pneumatique 1 pour lequel les efforts de portance obtenus étaient relativement proches pour tous les ratios $R/\Delta x$ testés, ici nous voyons apparaître des niveaux différents de portance (totaux) selon le ratio utilisé. En dehors des entailles situées dans l'aire de contact, les résultats sont similaires avec les deux ratios $R/\Delta x$. En revanche, des différences sont observées quant aux efforts dans les entailles de l'aire de contact.

Comme nous pouvons le voir sur la figure 6.14, le même comportement est observé dans les entailles longues entre les pneumatiques 1 et 2, notamment concernant l'inversion de la vitesse d'évacuation au centre de l'entaille, à l'endroit où la surpression est observée. Dans les entailles plus courtes à l'épaule présentes sur le pneumatique 2, nous observons que la vitesse d'évacuation du fluide est globalement plus faible que dans les entailles longues, et ce dès l'entrée de ces entailles dans l'aire de contact, en particulier dans la partie la plus proche du centre du pneumatique. Par conséquent, lorsque ces entailles se referment par la suite plus en aval dans l'aire de contact, le fluide se retrouve pressurisé, cela impliquant une augmentation des efforts. La vitesse dans la partie la plus proche du centre du pneumatique des entailles courtes étant plus faible avec $R/\Delta x = 3.0$ qu'avec $R/\Delta x = 2.11$, ceci explique en partie la différence observée sur les efforts dans les entailles de l'aire de contact entre ces deux ratios (cf. figure 6.13).

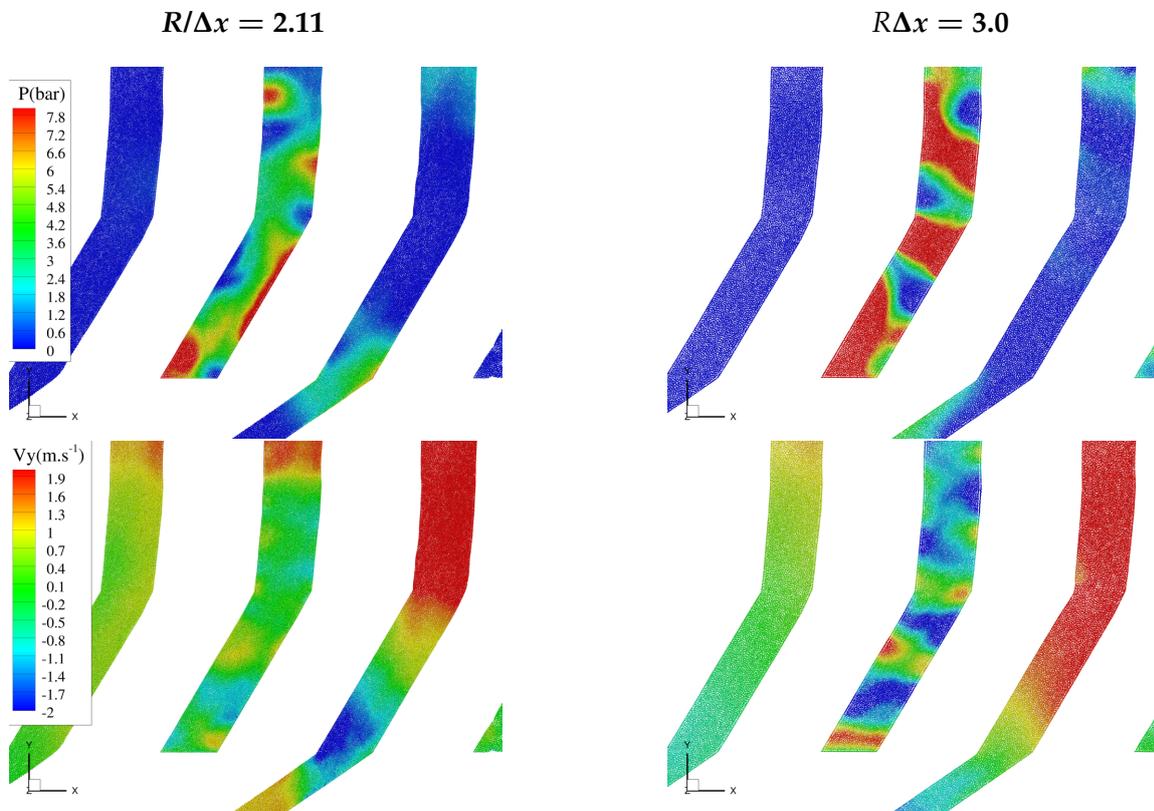


FIGURE 6.15 – Champs solutions obtenus pour le pneumatique 2 à $t = 24.75ms$ en vue de dessus pour $R/\Delta x = 2.11$ (à gauche) et $R/\Delta x = 3.0$ (à droite). Zoom sur une entaille courte dans l'aire de contact. Haut : champ de pression. Bas : champ de vitesse transversale.

De très fortes irrégularités dans le champ de pression sont observées dans ces entailles courtes, et ces dernières induisent des irrégularités dans le champ de vitesse. Ces irrégularités sont plus marquées avec un ratio $R/\Delta x$ grand, comme nous pouvons le voir sur la figure 6.15, où un zoom sur une entaille courte est représenté, l'échelle de pression étant différente de la figure 6.14. Ainsi, les fortes valeurs atteintes par la pression dans les instabilités, font que la différence concernant les efforts de portance (totaux) entre les deux ratios $R/\Delta x$ est presque entièrement concentrée dans ces entailles courtes. Déterminer précisément l'origine des différences observées entre les deux ratios dans les entailles courtes n'est pas chose aisée, tant les conséquences de l'augmentation/diminution du ratio $R/\Delta x$ sont multiples (erreurs de quadrature, viscosité numérique, localité des

interpolations, etc). Néanmoins, un phénomène d'effet "bouchon" a été observé par ailleurs au sein du laboratoire sur des cas d'écoulements simplifiés en 2D, correspondant à un réservoir cylindrique partiellement rempli de fluide avec un orifice dans son fond, la dimension de l'orifice étant du même ordre de grandeur que la taille des particules. Pour ce cas simplifié, plus le ratio $R/\Delta x$ est grand, plus l'effet bouchon est amplifié, de par la plus faible localité des interpolations (stencil plus large à section d'orifice constante), l'augmentation de la vitesse du son participant également à l'accroissement de cet effet, peut-être via une diffusion numérique accrue. Dans le cas du pneumatique 2, les instabilités sont plus marquées avec $R/\Delta x$ grand. De plus, elles sont prédominantes dans les entailles courtes, là où la vitesse d'évacuation est la plus faible, laissant à penser qu'un effet "bouchon" est peut-être en jeu ici, cette explication étant évidemment au stade de l'hypothèse.

Malgré les grosses différences observées en matière d'efforts de portance dans les entailles de l'aire de contact (de l'ordre de 100% entre $R/\Delta x = 2.11$ et $R/\Delta x = 3.0$), la différence sur la surface de contact elle-même est en comparaison très faible entre les deux ratios $R/\Delta x$ (inférieure à 2%, cf. figure 6.16), cette différence étant localisée dans la partie amont de l'aire de contact (voir figure 6.14).

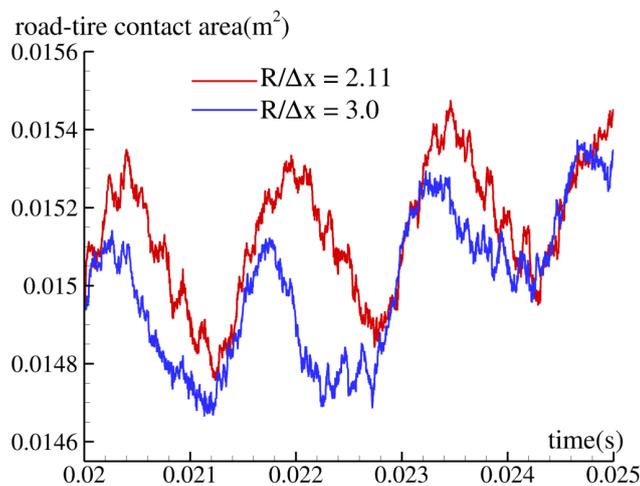


FIGURE 6.16 – Zoom sur l'évolution temporelle de la surface de contact entre le pneumatique 2 et la route, pour deux ratios $R/\Delta x$.

Comme nous venons de le voir, l'ensemble des irrégularités des champs solutions est fortement lié au ratio $R/\Delta x$ utilisé. Afin de s'affranchir des différences liées à la phase 1 (qui pourraient a priori influencer la phase 2), une reprise de calcul est effectuée à partir d'un instant de la phase 2. Les champs solutions à partir desquels la reprise est effectuée sont issus du résultat obtenu avec le ratio $R/\Delta x = 2.11$ à $t = 17.5ms$. La reprise est effectuée avec trois ratios $R/\Delta x$, et nous observons sur la figure 6.17 que les efforts de portance augmentent fortement dans les entailles de l'aire de contact lorsque l'on augmente le ratio $R/\Delta x$, tandis que la même gamme d'efforts est observée dans les autres zones de l'écoulement. Les résultats présentés ici sont issus d'une reprise à partir du ratio $R/\Delta x = 2.11$, mais les conclusions sont identiques lorsque la reprise est effectuée à partir de la solution obtenue avec $R/\Delta x = 3.0$, i.e. une diminution de la portance lorsque l'on diminue le ratio $R/\Delta x$.

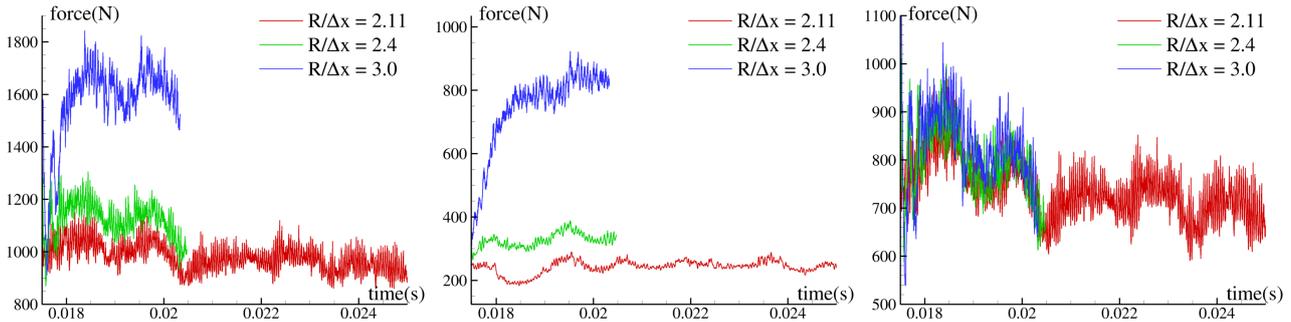


FIGURE 6.17 – Evolution temporelle des efforts de portance pour le pneumatique 2, pour trois ratios $R/\Delta x$ à partir d'une reprise de calcul. Gauche : efforts de portance totaux. Centre : efforts de portance dans les entailles de l'aire de contact. Droite : efforts de portance exceptés dans cette zone.

Un autre aspect étudié sur ce pneumatique est l'influence du ratio p_{max} utilisé dans les simulations. En effet, au vu des résultats présentés auparavant sur les cas tests académiques (augmentation des instabilités avec l'emploi de p -ratios trop grands), la question d'une valeur trop élevée de p_{max} peut se poser. Or, comme nous pouvons l'observer sur la figure 6.18, peu de différences sont observées dans la phase 1 entre $p_{max} = 10$ et $p_{max} = 20$, qui sont des valeurs effectivement atteintes lors de la simulation, presque tout le temps après $t = 5.5ms$. Même si la phase 2 n'a pas été atteinte pour le cas $p_{max} = 10$ (pour rappel le temps de restitution est multiplié par 2 avec $p_{max} = 10$ comparé à $p_{max} = 20$), nous pouvons voir que ce paramètre a peu d'influence sur les efforts de portance en comparaison au ratio $R/\Delta x$.

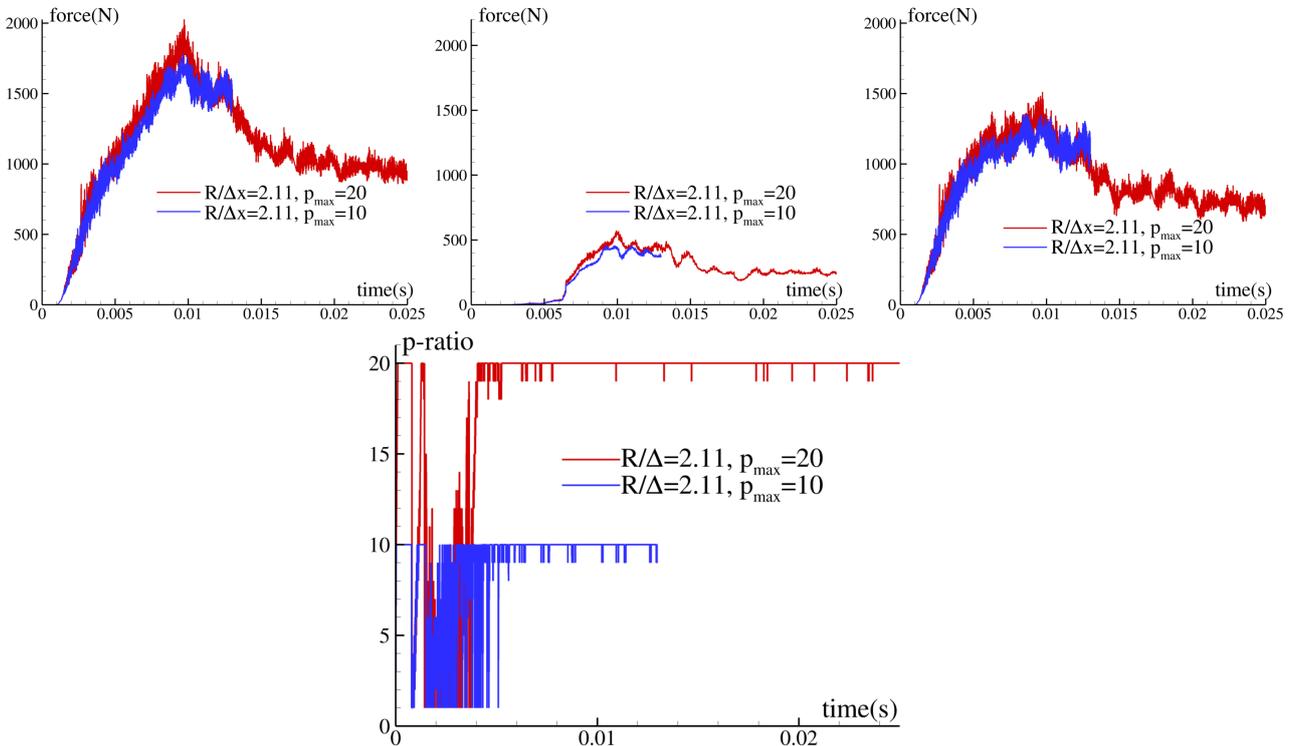


FIGURE 6.18 – Haut : évolution temporelle des efforts de portance pour le pneumatique 2, pour deux valeurs de p_{max} . Gauche : efforts de portance totaux. Centre : efforts de portance dans les entailles de l'aire de contact. Droite : efforts de portance exceptés dans cette zone. Bas : évolution temporelle du p -ratio effectivement atteint dans la simulation.

Finalement, pour le pneumatique 2, nous avons observé que des surpressions et des instabilités dans le champ de pression apparaissent dans les entailles courtes à l'épaulé. Dans ces entailles, la vitesse d'évacuation

globale est plus faible que dans les entailles longues (pour lesquelles ces phénomènes sont moindres). Par conséquent, un lien entre la vitesse globale d'évacuation et les surpressions dans ces entailles est observé d'une part, et d'autre part les instabilités du champ de pression sont également plus marquées lorsque la vitesse d'évacuation est faible. Par ailleurs, nous avons montré que les différences observées dans la phase 2 étaient indépendantes de la phase 1. La forte dépendance des résultats au ratio $R/\Delta x$ dans les entailles courtes montre ainsi que les paramètres numériques utilisés côté fluide (résolution spatiale Δx , vitesse du son c_0) ne permettent pas de représenter correctement l'écoulement dans ces entailles courtes.

Malgré ces grosses différences observées concernant les efforts de portance dans les entailles de l'aire de contact, la surface de contact elle-même est comparativement peu impactée. De plus, les efforts de portance dans la phase 2 en dehors de cette zone sont quant à eux indépendants du ratio $R/\Delta x$ considéré.

6.3.4 Résultats pour le pneumatique 3.

Concernant les champs solutions, nous observons sur la figure 6.19 qu'un phénomène similaire au pneumatique 2 se produit ici. En effet, de fortes pressions sont observées dans les entailles courtes où la vitesse d'évacuation est globalement plus faible, non observées dans les entailles longues. Des fortes instabilités sur le champ de pression apparaissent également dans ces entailles courtes, montrant que sur ce pneumatique un lien entre vitesse d'évacuation et irrégularités du champ de pression est aussi présent.

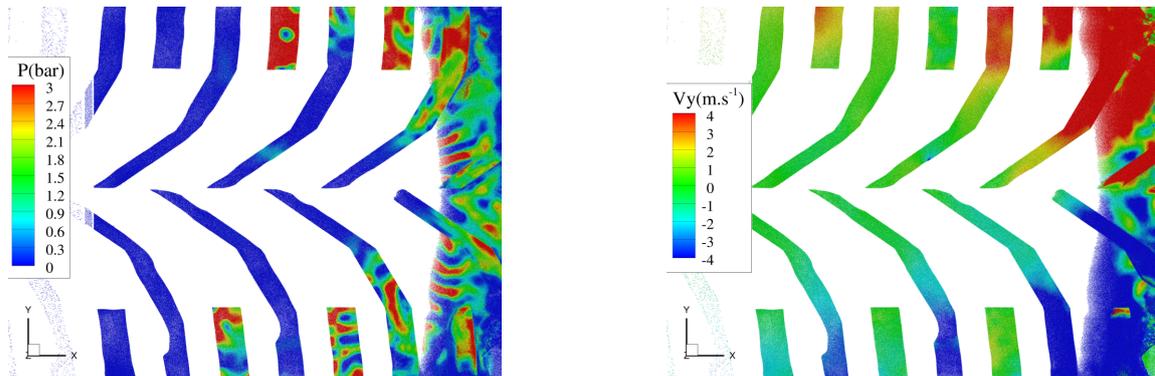


FIGURE 6.19 – Champs solutions obtenus pour le pneumatique 3 à $t = 18.75ms$ avec $R/\Delta x = 2.4$ en vue de dessus. Gauche : champ de pression. Droite : champ de vitesse transversale.

Comme nous pouvons le voir sur la figure 6.20, le ratio $R/\Delta x$ est là-encore un paramètre important concernant les efforts de portance dans les entailles situées dans l'aire de contact. Dans les autres zones, la portance dans la phase 2 n'est que peu dépendante de ce ratio. A l'instar du cas précédent, les forts écarts concernant les efforts de portance dans les entailles de l'aire de contact entre les différents ratios $R/\Delta x$ n'affectent que relativement peu la surface de contact en elle-même (cf. figure 6.21). Nous pouvons également observer que les résultats obtenus avec le schéma utilisant la projection des efforts $p\text{-CPS-II}_{3PTS}^{SPH}$ sont proches de ceux obtenus avec le schéma $p\text{-CPS}$ (cf. figures 6.20 et 6.21).

Ainsi, nous pouvons supposer que les effets observés dans les entailles courtes pour les pneumatiques 2 et 3 ont la même cause, à savoir un lien entre la vitesse d'évacuation et les phénomènes sur la pression.

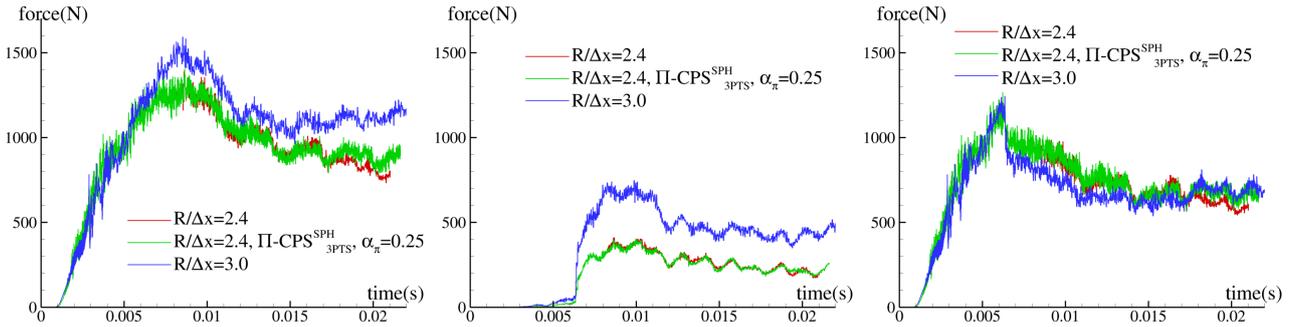


FIGURE 6.20 – Evolution temporelle des efforts de portance exercés par le fluide sur le pneumatique 3 pour deux ratios $R/\Delta x$. Gauche : efforts de portance totaux. Centre : efforts de portance dans les entailles de l'aire de contact. Droite : efforts de portance exceptés dans cette zone.

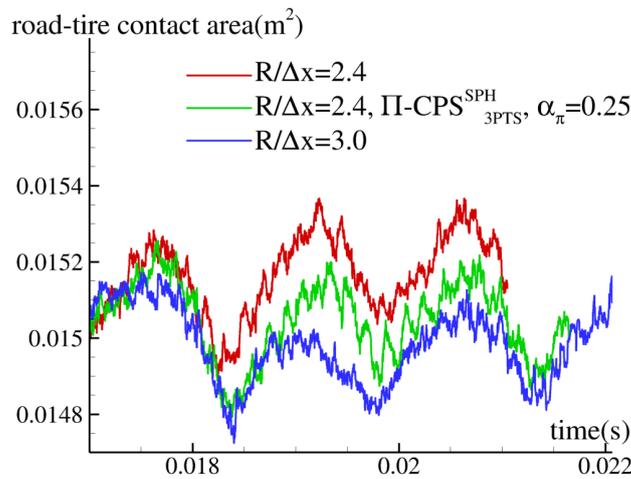


FIGURE 6.21 – Zoom sur l'évolution temporelle de la surface de contact entre le pneumatique 3 et la route, pour deux ratios $R/\Delta x$.

Afin de vérifier que les problèmes observés ne sont pas liés aux effets de compressibilité du fluide, nous avons également étudié l'influence de la vitesse du son nominale c_0 utilisée côté fluide. Comme nous pouvons le voir sur la figure 6.22, la valeur de c_0 n'a pas d'influence sur les efforts en dehors des entailles situées dans l'aire de contact, et ce aussi bien dans la phase 1 que dans la phase 2. Il est à noter que les fortes oscillations sur les efforts observées avec $c_0 = 600 m.s^{-1}$ sont probablement dues au ratio p_{max} utilisé dans la simulation. En effet, afin de limiter le temps de restitution de cette simulation, une valeur $p_{max} = 40$ a été choisie. Les efforts dans les entailles de l'aire de contact sont quant à eux fortement dépendants du choix de c_0 . Ainsi, la valeur $c_0 = 300 m.s^{-1}$ semble trop faible dans ce cas pour respecter l'hypothèse de faible compressibilité. Pour le vérifier, il faudrait pousser l'étude jusqu'à la valeur réelle de la vitesse du son dans l'eau, afin de déterminer la valeur de c_0 à partir de laquelle la saturation attendue des efforts est obtenue. Là-encore, rien ne dit que des conclusions similaires seraient obtenues avec une résolution spatiale Δx plus fine, du fait de la viscosité numérique accrue par l'augmentation de c_0 et du lien observé précédemment entre vitesse et instabilités.

Malgré ces différences observées avec différentes valeurs de c_0 concernant les efforts dans les entailles de l'aire de contact, la surface de contact entre le pneumatique 3 et la route est peu impactée, comme le montre la figure 6.23.

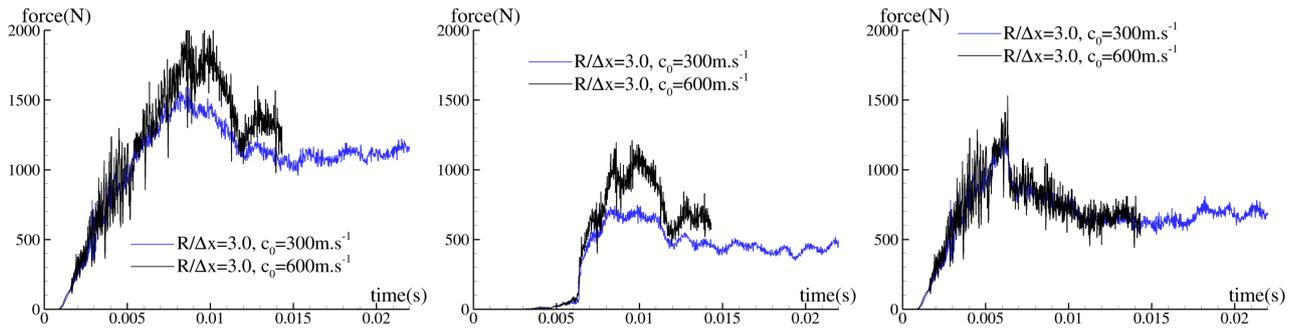


FIGURE 6.22 – Evolution temporelle des efforts de portance exercés par le fluide sur le pneumatique 3 pour deux valeurs de c_0 avec $R/\Delta x = 3$. Gauche : efforts de portance totaux. Centre : efforts de portance dans les entailles de l'aire de contact. Droite : efforts de portance exceptés dans cette zone.

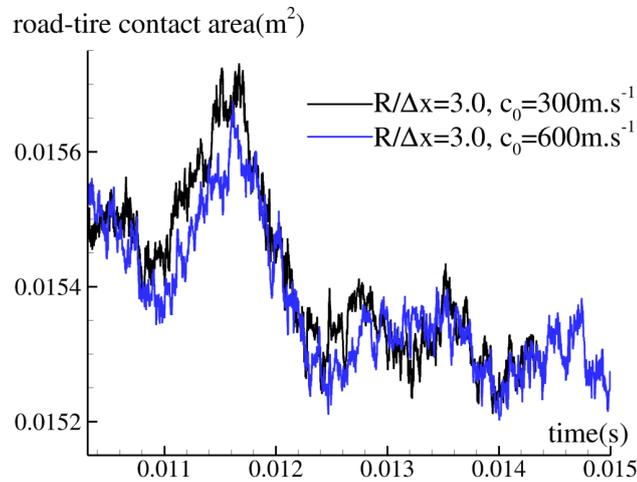


FIGURE 6.23 – Zoom sur l'évolution temporelle de la surface de contact entre le pneumatique 3 et la route, pour deux valeurs de c_0 avec $R/\Delta x = 3$.

6.3.5 Discussion

Comme mentionné dans les sections précédentes, des variations sont observées concernant les efforts de portance dans les entailles situées dans l'aire de contact. Ces variations sont plus importantes pour les pneumatiques 2 et 3 présentant des entailles plus courtes à l'épaule, dans lesquelles la vitesse d'évacuation du fluide est plus faible que dans les entailles longues. Nous avons mis en lumière qu'un des paramètres influents en ce qui concerne les champs solutions est le ratio $R/\Delta x$ utilisé côté SPH. Les multiples conséquences induites par l'augmentation du ratio $R/\Delta x$ font qu'une conclusion tranchée est impossible. Certes l'action combinée de la perte de localité des interpolations et de la viscosité numérique augmentée lorsque l'on augmente le ratio $R/\Delta x$ a probablement une influence. Mais dans le même temps, l'utilisation de ratios $R/\Delta x$ faibles implique une augmentation des erreurs de quadratures et des champs solutions moins régulier. De plus, rien ne dit que les conclusions seraient identiques avec une discrétisation spatiale Δx plus fine.

Nous avons dans un second temps étudié l'influence de la vitesse du son c_0 sur les résultats pour le pneumatique 3, montrant une forte dépendance des efforts de portance au choix de ce paramètre dans les entailles situées dans l'aire de contact, et une faible dépendance de ces efforts ailleurs. Ceci semble indiquer que la vitesse du son n'est peut-être pas assez élevée pour représenter correctement ce qui se passe dans les entailles. Afin de s'affranchir des doutes relatifs à la discrétisation spatiale Δx , il faudrait en premier lieu déterminer la valeur de Δx assurant la convergence (avec ce que cela implique en matière de temps de restitution). Si la

tendance observée concernant les effets de compressibilité persiste, il faudrait augmenter la valeur de c_0 jusqu'à la saturation des efforts, la contrepartie étant là-encore une forte augmentation du temps de restitution des simulations. Par ailleurs, utiliser la vitesse réelle du son dans l'eau permettrait de déterminer si des effets réels de compressibilité sont en jeu ici.

Afin d'étudier plus en détail toutes ces questions, il serait plus commode d'envisager un cas test simplifié, permettant de pouvoir étudier l'influence des différents paramètres, tout en se comparant à une solution de référence. Pour tester les limites du modèle utilisé côté fluide, un cas d'écrasement d'un film mince de fluide dans une cuve ouverte sur une face latérale pourrait être considéré, en premier lieu avec une paroi mobile non-déformable venant écraser le film verticalement. Si les effets de compressibilité physique sont réellement négligeables, une solution serait peut-être d'utiliser un schéma SPH incompressible, ce qui pourrait faire l'objet de futures recherches.

De par cette forte variabilité des résultats (plus marquée pour les pneumatiques 2 et 3), il est impossible de tirer des conclusions sur le comportement global de l'écoulement. Néanmoins, comme remarqué précédemment, lorsqu'on exclut les entailles de l'aire de contact de l'analyse, les efforts de portance dans la phase qui nous intéresse (i.e. stabilisée) ne dépendent pas des paramètres numériques étudiés ici, et ce pour les trois pneumatiques étudiés. Les résultats obtenus en terme de portance sont alors très proches avec les trois pneumatiques, comme illustré sur la figure 6.24.

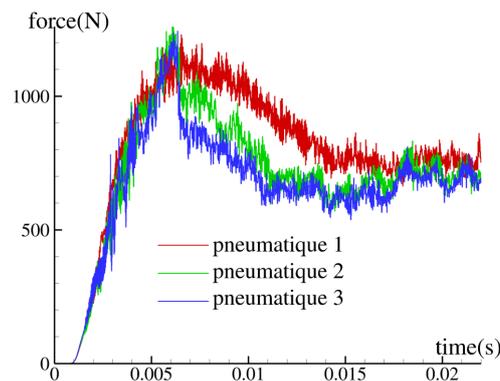


FIGURE 6.24 – Evolution temporelle des efforts de portance desquels sont soustraits ceux de la zone correspondant aux entailles situées dans l'aire de contact, obtenus avec $R/\Delta x = 3$ pour les trois pneumatiques.

6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit les différentes pistes suivies afin d'améliorer le compromis temps de restitution/précision. Ces différentes pistes se sont avérées non concluantes dans la plupart des cas, ou inapplicables dans l'application visée à l'hydroplanage. En revanche, les développements introduits dans les chapitres précédents concernant la méthode SPH ont permis d'améliorer ce compromis. Ainsi, il ne faut pas se focaliser uniquement sur l'interface entre les deux milieux pour améliorer les résultats du couplage : améliorer les méthodes spécifiques à chaque milieu permet également une amélioration des résultats au global. Finalement, un cas d'application à l'hydroplanage a été étudié, montrant une forte dépendance des résultats aux paramètres utilisés côté fluide dans les simulations, lorsque l'on considère le système dans son ensemble. Néanmoins, les variations sont concentrées dans les entailles de l'aire de contact, et ne se traduisent que très peu sur les efforts de portance en dehors de cette zone d'une part, et sur la surface de contact en elle-même d'autre part.

Conclusions et perspectives

Les travaux présentés dans ce manuscrit portent sur des recherches d'amélioration de la méthode SPH d'une part, et du couplage SPH/FE pour la simulation de problèmes d'interactions fluide/structure d'autre part.

Le premier axe de recherche a été consacré à l'étude de différents schémas SPH utilisant une technique de désordre particulaire (PST). Nous avons montré que le fait de prendre en compte cette PST uniquement dans l'équation de la trajectoire entraînait des problèmes de dérives (en pression d'une part et sur le volume d'autre part), et ce peu importe la technique de stabilisation employée au sein du schéma SPH. L'utilisation du formalisme ALE pouvait représenter une solution pour s'affranchir de ces problèmes. Néanmoins, de fortes variations de volume et de masse pour des particules isolées apparaissent avec ce formalisme, venant à terme déstabiliser le schéma. De par la difficulté de déterminer un terme diffusif dans l'équation de la masse lors d'une stabilisation par solveur de Riemann au sein de ce formalisme, nous nous sommes concentrés sur la proposition de formulations hybrides à flux de masse nul. Ces dernières permettent de supprimer les problèmes de dérives, tout en s'affranchissant du problème de variation de la masse de particules isolées. Elles sont par conséquent très prometteuses, en particulier celle dérivée des travaux de Colagrossi *et al.* [18] et adaptée aux solveurs de Riemann dans ce manuscrit. Cependant, la méthode surfacique de traitement des frontières BIM-CFA (particulièrement adaptée aux géométries complexes) n'a pour l'heure pas été étendue à ces nouvelles formulations, et cela pourrait faire l'objet de futures recherches.

Le deuxième axe de recherche a porté sur l'amélioration de la PST elle-même. Bien qu'étant largement utilisée au sein de la communauté SPH afin de régulariser les champs solutions, les conditions qu'elle doit remplir n'étaient pas clairement discutées dans la littérature. Les conditions de convergence, d'invariance, et d'indépendance par rapport à l'écoulement global ont été identifiées dans ce manuscrit, et nous avons présenté une méthodologie permettant de satisfaire ces conditions. En suivant cette méthodologie, nous avons dérivé une nouvelle PST, valable également en présence d'une surface libre et de parois, que ces dernières soient discrétisées par une méthode volumique ou surfacique. Le fait que la validation de cette PST ait été effectuée pour différents schémas (basés sur l'hypothèse faiblement compressible), chacun possédant une façon différente de prendre en compte la PST dans ses équations, montre le caractère générique de cette dernière. Par ailleurs, ne faisant pas intervenir la vitesse du son, elle est a priori compatible avec l'hypothèse incompressible, et la vérification de cette conjecture en pratique pourra faire l'objet de futures recherches.

Le troisième axe de recherche a consisté en le développement d'un modèle permettant le décollement de jets de surface libre de parois solides, et en même temps compatible avec la prise en compte des effets de succion. Un traitement existait au sein du laboratoire pour permettre le décollement de jets de surface libre, mais l'activation de ce dernier entraînait une impossibilité de prise en compte des éventuels effets de succion. Nous avons alors repris l'idée proposée initialement par Sun *et al.* [91], consistant à considérer que le traitement pour le décollement de jets ne pouvait être activé qu'à la surface libre, et en présence de basses pressions. Nous avons ensuite ajouté un critère concernant la vitesse relative du fluide par rapport à la paroi dans ce modèle. Ce modèle utilisant un algorithme de détection de surface libre, l'emploi d'une PST est indispensable, en particulier pour la succion. Après l'avoir validé sur des cas tests académiques, ce modèle a été appliqué à la simulation d'amerrissage d'urgence d'hélicoptère, montrant une nette amélioration des résultats

en comparaison de ceux obtenus avec le traitement qui existait auparavant au sein du laboratoire. Ce modèle donne des résultats satisfaisants, mais pourrait encore être amélioré en travaillant sur l'augmentation de la robustesse de l'algorithme de détection de surface libre en présence d'une paroi discrétisée, notamment en formalisme surfacique. Ceci pourra faire l'objet de futures recherches.

Concernant le couplage SPH/FE, la validation du couplage entre SPH-Flow et le code Eléments Finis spécifiquement développé par Michelin pour ses applications a été effectuée dans ce travail, en utilisant les améliorations introduites précédemment sur la méthode SPH. Nous avons non seulement montré que ces développements n'introduisaient pas d'erreurs sur les solutions des calculs couplés, mais également que leur utilisation permettait d'améliorer le compromis entre le temps de restitution et la précision des simulations. Nous avons ainsi montré que pour améliorer les performances du couplage, il ne faut pas se focaliser sur les schémas de couplage exclusivement, mais que les calculs couplés profitent des améliorations apportées à chacune des méthodes fluide et structure.

Le principal axe de recherche concernant le couplage SPH/FE a été de tenter d'améliorer le compromis entre le temps de restitution des simulations et la précision des résultats obtenus, en se focalisant sur les informations transmises à l'interface entre les domaines fluide et structure. Un effort de recherche important a été déployé sur ce sujet, où de nombreuses pistes d'amélioration ont été explorées. Malheureusement, malgré tous ces efforts, les résultats obtenus n'ont pas été concluants, tout du moins pas à la hauteur de nos espérances. L'une des pistes suivies dans ce manuscrit donnait malgré tout des premiers résultats encourageants sur des cas tests académiques. Ayant été mise de côté durant cette thèse du fait de sa non applicabilité à l'étude de l'hydroplanage, elle pourra néanmoins être ré-ouverte pour des calculs couplés n'impliquant pas de contact solide-solide.

Finalement, un cas d'application à l'hydroplanage, impliquant des sculptures directionnelles du pneumatique très différentes de celles utilisées au cours des précédents travaux effectués durant la longue coopération entre Michelin et l'Ecole Centrale de Nantes, a été étudié dans ce travail. Pour les différentes géométries étudiées, nous avons remarqué une forte dépendance des efforts de portance dans les entailles de l'aire de contact aux paramètres utilisés côté fluide. Il a été mis en lumière que le ratio $R/\Delta x$ avait une forte influence, en particulier dans des entailles courtes à l'épaule, et un lien entre la vitesse d'évacuation dans les entailles et les instabilités des champs solutions a été observé. De plus, la valeur de la vitesse du son utilisée côté fluide pour respecter totalement l'hypothèse de faible compressibilité semble avoir été sous-estimée, et il faudrait pousser l'étude jusqu'à la vitesse physique du son dans l'eau pour déterminer à partir de quelle vitesse du son une saturation attendue des efforts est observée. Cela permettrait par ailleurs de voir si de réels effets de compressibilité sont à l'oeuvre ici. Si les effets de compressibilité sont réellement absents de l'écoulement, utiliser une méthode SPH incompressible pourrait permettre de s'affranchir des problèmes relatifs à la vitesse du son, ouvrant alors de nouvelles pistes de recherche. Les conclusions tirées ici sont tout de même à nuancer du fait de la résolution spatiale Δx utilisée côté fluide. En effet, tandis que pour les cas tests académiques étudiés précédemment l'influence de Δx sur les résultats était particulièrement scrutée, le choix de ce paramètre dans ce contexte industriel est à mettre en balance de façon pragmatique avec le temps de restitution des simulations. Aussi, rien ne dit que les tendances observées ici concernant le ratio $R/\Delta x$ et la vitesse du son seront identiques pour une solution dont on est certain qu'elle est convergée en Δx . Malgré tout, une faible dépendance aux paramètres étudiés a été décelée dans les autres zones de l'écoulement en ce qui concerne les efforts de portance une fois la phase stabilisée atteinte, indiquant que la solution est peut-être convergée dans ces zones. De plus cette la forte variabilité observée concernant les efforts dans les entailles situées dans l'aire de contact n'altère pas les résultats dans ces autres zones. En particulier, la surface de contact entre le pneumatique et la route n'est que peu impactée par ces différences.

Bibliographie

- [1] C. Antoci, M. Gallati, and S. Sibilla. Numerical simulation of fluid-structure interaction by SPH. *Computers & Structures*, 85(11-14) :879–890, 2007.
- [2] M. Antuono, B. Bouscasse, A. Colagrossi, and S. Marrone. A measure of spatial disorder in particle methods. *Computer Physics Communications*, 185 :2609–2621, 2014.
- [3] M. Antuono, A. Colagrossi, S. Marrone, and C. Lugni. Propagation of gravity waves through an SPH scheme with numerical diffusive terms. *Computer Physics Communications*, 182(4) :866–877, 2011.
- [4] M. Antuono, A. Colagrossi, S. Marrone, and D. Molteni. Free-surface flows solved by means of SPH schemes with numerical diffusive terms. *Computer Physics Communications*, 181(3) :532–549, 2010.
- [5] D. Avesani, M. Dumbser, and A. Bellin. A new class of Moving-Least-Squares WENO–SPH schemes. *Journal of Computational Physics*, 270 :278 – 299, 2014.
- [6] D.A. Barcarolo, D. Le Touzé, G. Oger, and F. de Vuyst. Adaptive particle refinement and derefinement applied to the smoothed particle hydrodynamics method. *Journal of Computational Physics*, 273 :640 – 657, 2014.
- [7] M. Basa, N.J. Quinlan, and M. Lastiwka. Robustness and accuracy of SPH formulations for viscous flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 60(10) :1127–1148, 2009.
- [8] M.J. Berger and P. Colella. Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 82(1) :64 – 84, 1989.
- [9] M.J. Berger and J. Olinger. Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 53(3) :484 – 512, 1984.
- [10] J. Bonet and T.S.L. Lok. Variational and momentum preservation aspects of Smoothed Particle Hydrodynamics formulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 180 :97–115, 1999.
- [11] B. Bouscasse, A. Colagrossi, S. Marrone, and M. Antuono. Nonlinear water wave interaction with floating bodies in SPH. *Journal of Fluids and Structures*, 42 :112–129, 2013.
- [12] S. Børve, M. Omang, and J. Trulsen. Regularized smoothed particle hydrodynamics with improved multi-resolution handling. *Journal of Computational Physics*, 208(1) :345 – 367, 2005.
- [13] L. Chiron. *Coupling and improvements of the SPH method to treat flows involving temporal and spatial multi-scales*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes (ECN), March 2017.
- [14] L. Chiron, M. De Lefte, G. Oger, and D. Le Touzé. Fast and accurate SPH modelling of 3D complex wall boundaries in viscous and non viscous flows. *Computer Physics Communications*, 234 :93–111, 2019.
- [15] L. Chiron, S. Marrone, A. Di Mascio, and D. Le Touzé. Coupled SPH–FV method with net vorticity and mass transfer. *Journal of Computational Physics*, 364 :111 – 136, 2018.
- [16] L. Chiron, G. Oger, M. De Lefte, and D. Le Touzé. Analysis and improvements of adaptive particle refinement (APR) through CPU time, accuracy and robustness considerations. *Journal of Computational Physics*, 354 :552 – 575, 2018.
- [17] A. Colagrossi, M. Antuono, and D. Le Touzé. Theoretical considerations on the free-surface role in the smoothed-particle-hydrodynamics model. *Physical Review E*, 79 :056701, 2009.

- [18] A. Colagrossi, M. Antuono, S. Marrone, P.N. Sun, and A.M. Zhang. Notes on the SPH model within the Arbitrary-Lagrangian-Eulerian framework. In *13th international SPHERIC workshop*, pages 22–29, 2018.
- [19] A. Colagrossi, M. Antuono, A. Souto-Iglesias, and D. Le Touzé. Theoretical analysis and numerical verification of the consistency of viscous smoothed-particle-hydrodynamics formulations in simulating free-surface flows. *Physical Review E*, 84 :26705+, 2011.
- [20] A. Colagrossi, B. Bouscasse, M. Antuono, and S. Marrone. Particle packing algorithm for SPH schemes. *Computer Physics Communications*, 183(2) :1641–1683, 2012.
- [21] A. Colagrossi and M. Landrini. Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 191(2) :448 – 475, 2003.
- [22] M. De Lefte. *Modélisation d'écoulements visqueux par méthode SPH en vue d'application à l'hydrodynamique navale*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, April 2011.
- [23] M. De Lefte, D. Le Touzé, and B. Alessandrini. Normal flux method at the boundary for SPH. In *Proceedings of the 4th international SPHERIC workshop*, pages 149–156, 2009.
- [24] W. Dehnen and H. Aly. Improving convergence in smoothed particle hydrodynamics simulations without pairing instability. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 425(2) :1068–1082, 2012.
- [25] J.-B. Deuff. *Extrapolation au réel des mesures de pressions obtenues sur des cuves modèle réduit*. PhD Thesis, Ecole Centrale de Nantes, October 2007.
- [26] C. Farhat and M. Lesoinne. Two efficient staggered algorithms for the serial and parallel solution of three-dimensional nonlinear transient aeroelastic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 182(3) :499 – 515, 2000.
- [27] J. Feldman and J. Bonet. Dynamic refinement and boundary contact forces in SPH with applications in fluid flow problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 72(3) :295–324, 2007.
- [28] M. Ferrand, D.R. Laurence, B.D. Rogers, D. Violeau, and C. Kassiotis. Unified semi-analytical wall boundary conditions for inviscid, laminar or turbulent flows in the meshless SPH method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 71(4) :446–472, 2013.
- [29] G. Fourey. *Développement d'une méthode de couplage fluide structure SPH Eléments Finis en vue de son application à l'hydrodynamique navale*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, December 2012.
- [30] G. Fourey, C. Hermange, D. Le Touzé, and G. Oger. An efficient FSI coupling strategy between Smoothed Particle Hydrodynamics and Finite Element methods. *Computer Physics Communications*, 217 :66 – 81, 2017.
- [31] J. Gillard. *An Efficient Partitioned Coupling Scheme for Tire Hydroplaning Analysis*. PhD thesis, Technische Universität München, May 2018.
- [32] R.A. Gingold and J.J. Monaghan. Smoothed Particle Hydrodynamics : theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society (MNRAS)*, 181 :375–389, 1977.
- [33] M.D. Green, R. Vacondio, and J. Peiró. A smoothed particle hydrodynamics numerical scheme with a consistent diffusion term for the continuity equation. *Computers & Fluids*, 179 :632 – 644, 2019.
- [34] M. Greenhow and W.M. Lin. Nonlinear Free Surface Effects : Experiments and Theory, Technical Report. *DTIC Document*, 1983.
- [35] I. Hammani, S. Marrone, A. Colagrossi, G. Oger, and D. Le Touzé. Detailed study on the extension of the δ -SPH model to multi-phase flow. *under revision in Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.
- [36] A. Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 49(3) :357 – 393, 1983.
- [37] C. Hermange. *Numerical simulation of the fluid-structure interactions inside the aquaplaning problem*. PhD Thesis, Ecole Centrale de Nantes, June 2017.

- [38] C. Hermange, G. Oger, Y. Le Chenadec, and D. Le Touzé. A 3D SPH/FE coupling for FSI problems and its application to tire hydroplaning simulations on rough ground. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 355 :558–590, 2019.
- [39] C. Hermange, G. Oger, and D. Le Touzé. Energy considerations in the SPH method with deformable boundaries and application to FSI problems. *Journal of Computational Physics : X*, 1 :100008, 2019.
- [40] L. Hernquist and N. Katz. TreeSPH : A Unification of SPH with the Hierarchical Tree Method. *Astrophysical Journal Supplement*, 70 :419–446, 1989.
- [41] M. Hirschler, G. Oger, U. Nieken, and D. Le Touzé. Modeling of droplet collisions using Smoothed Particle Hydrodynamics. *International Journal of Multiphase Flow*, 95 :175 – 187, 2017.
- [42] A. Khayyer, H. Gotoh, and Y. Shimizu. Comparative study on accuracy and conservation properties of two particle regularization schemes and proposal of an optimized particle shifting scheme in ISPH context. *Journal of Computational Physics*, 332 :236 – 256, 2017.
- [43] P.K. Koukouvinis, J.S. Anagnostopoulos, and D.E. Papantonis. An improved MUSCL treatment for the SPH-ALE method : comparison with the standard SPH method for the jet impingement case. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 71(9) :1152–1177, 2013.
- [44] S. Kulasegaram, J. Bonet, and R. Lewis. A variational formulation based contact algorithm for rigid boundaries in two-dimensional SPH applications. *Computational Mechanics*, 33 :316–325, 2004.
- [45] S. Kvicinsky. *Méthode d'analyse des écoulements 3D à surface libre : application aux turbines Pelton*. PhD thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), 2002.
- [46] D. Le Touzé, A. Colagrossi, G. Colicchio, and M. Greco. A critical investigation of smoothed particle hydrodynamics applied to problems with free-surfaces. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 73(7) :660 – 691, 2013.
- [47] J. Leduc, F. Leboeuf, M. Lance, E. Parkinson, and J.-C. Marongiu. Improvement of multiphase model using preconditioned Riemann solvers. In *Proceedings of the 5th international SPHERIC workshop*, pages 1–6, 2010.
- [48] Z. Li, J. Leduc, J. Nunez-Ramirez, A. Combescure, and J.-C. Marongiu. A non-intrusive partitioned approach to couple smoothed particle hydrodynamics and finite element methods for transient fluid-structure interaction problems with large interface motion. *Computational Mechanics*, 55(4) :697–718, 2015.
- [49] K. Liao, C. Hu, and M. Sueyoshi. Free surface flow impacting on an elastic structure : Experiment versus numerical simulation. *Applied Ocean Research*, 50 :192 – 208, 2015.
- [50] L.D. Libersky, A.G. Petschek, T.C. Carney, J.R. Hipp, and F.A. Allahdadi. High strain Lagrangian hydrodynamics a three-dimensional SPH code for dynamic material response. *Journal of Computational Physics*, 109(1) :67–75, 1993.
- [51] S.J. Lind, R. Xu, P.K. Stansby, and B.D. Rogers. Incompressible smoothed particle hydrodynamics for free-surface flows : A generalised diffusion-based algorithm for stability and validations for impulsive flows and propagating waves. *Journal of Computational Physics*, 231(4) :1499–1523, 2012.
- [52] T. Long, D. Hu, D. Wan, C. Zhuang, and G. Yang. An arbitrary boundary with ghost particles incorporated in coupled FEM–SPH model for FSI problems. *Journal of Computational Physics*, 350 :166 – 183, 2017.
- [53] Y. Reyes López, D. Roose, and C. Recarey Morfa. Dynamic particle refinement in SPH : application to free surface flow and non-cohesive soil simulations. *Computational Mechanics*, 51 :731 – 734, 2013.
- [54] L.B. Lucy. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *Astronomical Journal*, 82 :1013–1024, 1977.
- [55] J.-C. Marongiu. *Méthode numérique lagrangienne pour la simulation d'écoulements à surface libre - Application aux turbines Pelton*. PhD Thesis, Ecole Centrale de Lyon, December 2007.

- [56] J.-C. Marongiu, F. Leboeuf, J. Caro, and E. Parkinson. Free surface flows simulations in Pelton turbines using an hybrid SPH-ALE method. *Journal of Hydraulic Research*, 48(S1) :40–49, 2010.
- [57] S. Marrone, M. Antuono, A. Colagrossi, G. Colicchio, D. Le Touzé, and G. Graziani. δ -SPH model for simulating violent impact flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(13–16) :1526–1542, 2011.
- [58] S. Marrone, A. Colagrossi, D. Le Touzé, and G. Graziani. Fast free-surface detection and level-set function definition in SPH solvers. *Journal of Computational Physics*, 229(10) :3652–3663, 2010.
- [59] S. Marrone, A. Di Mascio, and D. Le Touzé. Coupling of Smoothed Particle Hydrodynamics with Finite Volume method for free-surface flows. *Journal of Computational Physics*, 310 :161 – 180, 2016.
- [60] A. Mayrhofer, M. Ferrand, C. Kassiotis, D. Violeau, and F.-X. Morel. Unified semi-analytical wall boundary conditions in SPH : analytical extension to 3-D. *Numerical Algorithms*, 68 :1–20, 2014.
- [61] J. Michel, G. Oger, and D. Le Touzé. Effects of particle disordering on local and global fluid volume in the SPH method and proposition of an improved SPH-ALE scheme. In *Proceedings of the 13th international SPHERIC workshop*, pages 275–282, 2018.
- [62] J. Michel, A. Vergnaud, G. Oger, and D. Le Touzé. On Particle Shifting Techniques (PST) : analysis and proposition of a convergent and multi-invariant law. *submitted to Journal of Computational Physics*.
- [63] D. Molteni and A. Colagrossi. A simple procedure to improve the pressure evaluation in hydrodynamic context using the SPH. *Computer Physics Communications*, 180 :861–872, 2009.
- [64] J.J. Monaghan. On the problem of penetration in particle methods. *Journal of Computational Physics*, 82 :1–15, 1989.
- [65] J.J. Monaghan. Smoothed Particle Hydrodynamics. *Annual Review of Astronomy and astrophysics*, 30 :543–574, 1992.
- [66] J.J. Monaghan. Simulating Free Surface Flows with SPH. *Journal of Computational Physics*, 110(2) :39–406, 1994.
- [67] J.J. Monaghan. SPH without a Tensile Instability. *Journal of Computational Physics*, 159(2) :290 – 311, 2000.
- [68] J.J. Monaghan and R.A. Gingold. Shock Simulation by the particle method SPH. *Journal of Computational Physics*, 52(2) :374–389, 1983.
- [69] J.P. Morris, P.J. Fox, and Y. Zhu. Modeling Low Reynolds Number Incompressible Flows Using SPH. *Journal of Computational Physics*, 136 :214–226, 1997.
- [70] J. Nunez-Ramirez, J.-C. Marongiu, M. Brun, and A. Combescure. A partitioned approach for the coupling of SPH and FE methods for transient nonlinear FSI problems with incompatible time-steps. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 109(10) :1391–1417, 2017.
- [71] G. Oger. *Aspects théoriques de la méthode SPH et applications à l'hydrodynamique à surface libre*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, October 2006.
- [72] G. Oger, M. Doring, B. Alessandrini, and P. Ferrant. Two-dimensional SPH simulations of wedge water entries. *Journal of Computational Physics*, 213 (2) :803–822, 2006.
- [73] G. Oger, S. Marrone, D. Le Touzé, and M. De Lefte. SPH accuracy improvement through the combination of a quasi-Lagrangian shifting transport velocity and consistent ALE formalisms. *Journal of Computational Physics*, 313 :76–98, 2016.
- [74] G. Oger, D. Le Touzé, D. Guibert, M. de Lefte, J. Biddiscombe, J. Soumagne, and J.-G. Piccinalli. On distributed memory MPI-based parallelization of SPH codes in massive HPC context. *Computers Physics Communications*, 1200 :1 – 14, 2016.
- [75] A.N. Parshikov and S.A. Medin. Smoothed Particle Hydrodynamics Using Interparticle Contact Algorithms. *Journal of Computational Physics*, 180(1) :358 – 382, 2002.

- [76] S. Piperno and C. Farhat. Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems – Part II : energy transfer analysis and three-dimensional applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(24) :3147 – 3170, 2001.
- [77] D.J. Piro and K.J. Maki. In *Proceedings of the 11th International Conference on Fast Sea Transportation*, pages 653–660, 2011.
- [78] D.J. Piro and K.J. Maki. Hydroelastic analysis of bodies that enter and exit water. *Journal of Fluids and Structures*, 37 :134 – 150, 2013.
- [79] N.J. Quinlan, M. Lastiwka, and M. Basa. Truncation error in mesh-free particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66(13) :2064–2085, 2006.
- [80] P.W. Randles and L.D. Libersky. Smoothed Particle Hydrodynamics : some recent improvements and applications. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 39 :375–408, 1996.
- [81] P.A. Raviart. On analysis of particle methods. *Numerical methods in fluid dynamics*, 1127 :243–324, 1985.
- [82] G.A. Renaut. *Schémas d'ordre élevé pour la méthode SPH-ALE appliquée à des simulations sur machines hydrauliques*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, December 2015.
- [83] Y.-M. Scolan. Coupling of the Wagner model to a linear elasticity model for the hydrodynamic impact of an elastic wedge. *Internal report (EGIM)*, pages 1–20, 2003.
- [84] M.S. Shadloo, G. Oger, and D. Le Touzé. Smoothed particle hydrodynamics method for fluid flows, towards industrial applications : Motivations, current state, and challenges. *Computers & Fluids*, 136 :11 – 34, 2016.
- [85] D. Shepard. A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data. *Proceedings of the 1968 ACM National Conference*, pages 517 – 524, 1968.
- [86] A. Skillen, S. Lind, P.K. Stansby, and B.D. Rogers. Incompressible smoothed particle hydrodynamics (SPH) with reduced temporal noise and generalised fickian smoothing applied to body–water slam and efficient wave–body interaction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 265 :163 – 173, 2013.
- [87] H. Sun and O. M. Faltinsen. Water impact of horizontal circular cylinders and cylindrical shells. *Applied Ocean Research*, 28(5) :299 – 311, 2006.
- [88] P.N. Sun, A. Colagrossi, S. Marrone, M. Antuono, and A.-M. Zhang. A consistent approach to particle shifting in the δ -plus-SPH model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 348 :912 – 934, 2019.
- [89] P.N. Sun, A. Colagrossi, S. Marrone, and A.M. Zhang. The δ plus-SPH model : Simple procedures for a further improvement of the SPH scheme. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 315 :25 – 49, 2017.
- [90] P.N. Sun, D. Le Touzé, and A.-M. Zhang. Study of a complex fluid-structure dam-breaking benchmark problem using a multi-phase SPH method with APR. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 104 :240 – 258, 2019.
- [91] P.N. Sun, A.-M. Zhang, S. Marrone, and F. Ming. An accurate and efficient SPH modeling of the water entry of circular cylinders. *Applied Ocean Research*, 72 :60 – 75, 2018.
- [92] P.N. Sun, A.M. Zhang, A. Colagrossi, S. Marrone, and M. Antuono. The δ ALE-SPH model : an improved δ -SPH scheme containing particle shifting and ALE formulation. In *Proceedings of the 2017 SPHERIC Beijing International Workshop*, pages 15–22, 2017.
- [93] P.K. Sweby. High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 21(5) :995 – 1011, 1984.
- [94] G. Taylor and A.E. Green. Mechanism of the production of small eddies from large ones. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 158 :499–521, 1937.

- [95] V.A. Titarev and E.F. Toro. Finite-volume WENO schemes for three-dimensional conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 201(1) :238 – 260, 2004.
- [96] E.F. Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. Springer, Berlin, 1997.
- [97] R. Vacondio, B.D. Rogers, P.K. Stansby, P. Mignosa, and J. Feldman. Variable resolution for SPH : A dynamic particle coalescing and splitting scheme. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 256 :132 – 148, 2013.
- [98] B. Van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. v. a second-order sequel to godunov's method. *Journal of Computational Physics*, 32(1) :101 – 136, 1979.
- [99] A. Vergnaud, G. Oger, and D. Le Touzé. Use of WENO reconstructions in a high-order Riemann-SPH scheme. In *Proceedings of the 13th international SPHERIC workshop*, pages 283–290, 2018.
- [100] A. Vergnaud, G. Oger, and D. Le Touzé. A higher order SPH scheme based on WENO reconstructions for two-dimensional problems. In *Proceedings of the 14th international SPHERIC workshop*, pages 174–181, 2019.
- [101] J.-P. Vila. On particle weighted methods and Smooth Particle Hydrodynamics. *Mathematical Models & Methods in Applied Sciences*, 9(2) :161–209, 1999.
- [102] J. Von Neumann and R.D. Richtmyer. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks. *Journal of Applied Physics*, 21 :232–237, 1950.
- [103] S.J. Watkins, A.S. Bhattal, N. Francis, J.A. Turner, and A.P. Whitworth. A new prescription for viscosity in Smoothed Particle Hydrodynamics. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 119 :177–187, 1996.
- [104] H. Wendland. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree. *Advances in Computational Mathematics*, 4(4) :389–396, 1995.
- [105] R. Xu, P. Stansby, and D. Laurence. Accuracy and stability in incompressible SPH (ISPH) based on the projection method and a new approach. *Journal of Computational Physics*, 228(18) :6703–6725, 2009.
- [106] Q. Yang, V. Jones, and L. McCue. Free-surface flow interactions with deformable structures using an SPH-FEM model. *Ocean Engineering*, 55 :136 – 147, 2012.

Titre : Développements numériques de la méthode SPH couplée aux Eléments Finis appliqués au phénomène de l'hydroplanage

Mots clés : Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH), Particle Shifting Technique, détachement de jets, couplage Fluid/Structure, hydroplanage

Résumé :

Cette thèse s'inscrit dans le projet Fond Unique Interministériel (FUI) HydroSafeTire, dédié à l'étude du phénomène de l'hydroplanage. Au cours d'une précédente thèse sur le sujet au sein du laboratoire, l'étude de ce phénomène a été réalisée via un couplage fluide/structure SPH/FE en utilisant le solveur FE Abaqus développé par Simulia.

Des effets tels que la hauteur d'eau, la vitesse du véhicule ou encore l'usure du pneumatique ont ainsi été investigués, montrant que les tendances observées durant les expérimentations étaient retrouvées numériquement.

A l'issue de ces travaux, il a donc été décidé d'utiliser le solveur structure FE développé spécifiquement par Michelin (en collaboration avec le GIREF) pour ses applications, afin de tirer profit des avantages de ce solveur pour le problème spécifique de l'hydroplanage.

Ainsi dans cette thèse, la première étape est la validation du couplage SPH/FE avec ce code structure sur des cas tests académiques. L'obtention d'un bon compromis précision des résultats / temps de restitution des simulations constitue un enjeu majeur, en particulier dans un contexte industriel. Ainsi, cette thèse s'articule autour de trois axes. Premièrement, un travail sur la consistance des schémas SPH utilisant une méthode de désorganisation particulière est effectué, en parallèle d'un travail sur la méthode de désorganisation en elle même. Ensuite, un modèle de décollement de jets de surface libre est proposé, compatible avec la prise en compte des effets de succion. Enfin, différents schémas de couplage SPH/FE à pas de temps différés sont étudiés, avec une application à l'hydroplanage.

Title : Numerical development of the SPH method coupled with the Finite Element method applied to the hydroplaning phenomenon

Keywords : Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH), Particle Shifting Technique (PST), non viscous flow separation, fluid/structure interaction, hydroplaning

Abstract : This PhD thesis takes place in the Fond Unique Interministériel (FUI) HydroSafeTire project, dedicated to the study of the hydroplaning phenomenon. During a previous PhD thesis regarding this topic in the lab., the hydroplaning phenomenon has been investigated via a fluid/structure SPH/FE coupling, using the FE solver Abaqus developed by Simulia. Physical effects such as the water height, the velocity of the vehicle and the tire wear have been studied, showing that the tendencies experimentally observed were retrieved in the simulations.

Therefore, it has been decided to use the FE structure solver specifically developed by Michelin for their tire applications, in order to take benefits of this solver for the specific hydroplaning problem.

Then, in the present PhD thesis, the first step is the validation of the SPH/FE coupling, using this FE code, on academic test cases.

The compromise between the accuracy of the results and the restitution time of the simulations is of paramount importance, particularly in an industrial context. Thus, three main topics are investigated in this work. Firstly, the consistency of SPH schemes using a Particle Shifting Technique (PST) is studied, in addition to a work on the PST itself. Then, a model of flow separation is proposed, compatible with suction effects. Finally, different coupling schemes SPH/FE using differed time-steps are studied, with an hydroplaning application.