



**HAL**  
open science

# Analyse cinéto-statique de mécanismes de tensegrité : Application à la modélisation de cous d'oiseaux et de manipulateurs bio-inspirés

Matthieu Furet

► **To cite this version:**

Matthieu Furet. Analyse cinéto-statique de mécanismes de tensegrité : Application à la modélisation de cous d'oiseaux et de manipulateurs bio-inspirés. Robotique [cs.RO]. Ecole Centrale de Nantes, 2020. Français. NNT: . tel-03286016v1

**HAL Id: tel-03286016**

**<https://theses.hal.science/tel-03286016v1>**

Submitted on 22 Feb 2021 (v1), last revised 13 Jul 2021 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE DE DOCTORAT DE

L'ÉCOLE CENTRALE DE NANTES

ÉCOLE DOCTORALE N° 602

*Sciences pour l'Ingénieur*

Spécialité : Mécanique et robotique

Par

**Matthieu FURET**

## **Analyse cinéto-statique de mécanismes de tensegrité : Application à la modélisation de cous d'oiseaux et de manipulateurs bio-inspirés**

Thèse présentée et soutenue à Nantes, le 13 Novembre 2020

Unité de recherche : UMR 6004, Laboratoire des sciences du numérique de Nantes (LS2N).

### **Rapporteurs avant soutenance :**

Med Amine Laribi  
Pierre Renaud

Maître de conférences HDR, Université de Poitiers  
Professeur des universités, INSA Strasbourg

### **Composition du Jury :**

Président : Stéphane Caro      Directeur de recherche, Ecole Centrale de Nantes

Examineurs : Christine Chevallereau      Directrice de recherche, Ecole Centrale de Nantes  
David Daney      Chargé de recherche HDR, INRIA Bordeaux Sud-Ouest, Talence

Dir. de thèse : Philippe Wenger      Directeur de recherche, Ecole Centrale de Nantes

### **Invité**

Anick Abourachid      Professeure des universités, Muséum d'Histoire Naturelle de Paris



## Résumé

Une structure de tensegrité est un assemblage d'éléments en compression (barres) et d'éléments en traction (câbles, ressorts) maintenus ensemble en équilibre. La tensegrité est connue en architecture et en art depuis plus d'un siècle et est adaptée à la modélisation des organismes vivants. Les mécanismes de tensegrité ont été étudiés plus récemment pour leurs propriétés prometteuses en robotique telles que leur faible inertie, leur compliance naturelle et la capacité de déploiement. Un mécanisme de tensegrité est obtenu lorsqu'un ou plusieurs éléments sont actionnés. Cette thèse s'inscrit dans le cadre du projet AVI-NECK, auquel participent des biologistes et des roboticiens dans un but double : avoir une meilleure compréhension de la nature et des cous d'oiseaux, et également de s'inspirer de la nature afin de concevoir des manipulateurs bio-inspirés innovants. En premier lieu, une étude a été menée sur la cinématique des vertèbres d'oiseaux. Une modélisation des contacts entre surface articulaire a permis de reconstruire en 3D le mouvement d'une vertèbre d'oiseau quelconque par rapport à une autre, à partir de scans 3D de vraies vertèbres. Ensuite, plusieurs mécanismes simples ont été comparés afin de déterminer le meilleur candidat à la modélisation de la cinématique des cous d'oiseaux. En second lieu, deux mécanismes de tensegrité à 1 degré de liberté (DDL) potentiellement intéressants pour la modélisation de cous d'oiseaux et la réalisation de manipulateurs ont été modélisés. À partir d'une démarche de conception optimale, deux mécanismes optimaux selon un critère donné ont été dimensionnés, puis comparés afin de déterminer le mécanisme le plus intéressant d'un point de vue conception de manipulateurs. Le mécanisme à 1 DDL retenu a été un anti-parallélogramme actionné de manière antagoniste, appelé mécanisme en X. Un prototype de manipulateur à 2 DDL a ensuite été conçu et réalisé. Une étude du modèle géométrique d'un tel manipulateur a mis en évidence des phénomènes intéressants comme le comportement cuspidal du robot sous certaines conditions. Une étude cinéto-statique du manipulateur a ensuite été effectuée. Le comportement du manipulateur dépendant fortement de la stratégie d'actionnement, celles-ci ont été énumérées et certaines d'entre elles comparées. Les résultats obtenus ont été vérifiés et mis en évidence sur un prototype. Enfin, la modélisation de manipulateurs plans a été étendue aux manipulateurs à N DDL. Un modèle dynamique complet a été obtenu, et une démarche de conception a été menée afin d'obtenir les dimensions et spécifications d'un manipulateur plan bio-inspiré à 10 DDL.

Mots-clés : Bio-inspiration, Cinéto-statique, Tensegrité, conception optimale, robotique.





# Abstract

A tensegrity structure is an assembly of elements in compression (bars) and elements in tension (cables, springs) held together in equilibrium. Tensegrity has been known in architecture and art for more than a century and is adapted to the modeling of living organisms. More recently, tensegrity mechanisms have been studied for their promising properties in robotics such as low inertia, natural flexibility and deployment capability. A tensegrity mechanism is obtained when one or more elements are actuated, in our case by cables. This thesis is part of the AVINECK project, in which biologists and roboticists are involved with a dual goal : to have a better understanding of nature and bird necks, and also to draw inspiration from nature in order to design innovative bio-inspired manipulators. First, a study was conducted on the kinematics of bird vertebrae. A modeling of the contacts between articular surfaces allowed to reconstruct in 3D the movement of any bird vertebra with respect to another, based on 3D scans of real vertebrae. Then, several simple mechanisms were compared in order to determine the best candidate for modeling the kinematics of bird necks. Secondly, two 1-degree of freedom (DDL) tensegrity mechanisms potentially interesting for bird neck modeling and manipulator realization were modeled. Starting from an optimal design approach, two optimal mechanisms according to a given criterion were dimensioned and then compared in order to determine the most interesting mechanism from a manipulator design point of view. The 1 DDL mechanism chosen was an antagonistically actuated anti-parallelogram, called the X mechanism. A prototype of a 2 DDL manipulator was then designed and built. A study of the geometrical model of such a manipulator revealed interesting phenomena such as the cuspidal behaviour of the robot under certain conditions. A kinetostatic study of the manipulator was then carried out. As the behavior of the manipulator strongly depends on the actuation strategy, these were listed and some of them were compared. The results obtained were verified and highlighted on a prototype. Finally, the modeling of plane manipulators was extended to N DDL manipulators. A complete dynamic model was obtained, and a design process was carried out to obtain the dimensions and specifications of a 10 DDL bio-inspired planar manipulator.

Keywords : Bio-inspiration, Kinetostatic, tensegrity



## Remerciements

Je voudrais commencer par remercier mon directeur de thèse Philippe Wenger, avec qui j'ai particulièrement apprécié de travailler durant ces trois années. Ton expérience, ta sérénité et la confiance que tu m'as accordée m'ont permis de naviguer sûrement le long de cette rivière sinueuse et parfois mouvementée qu'est la thèse. Je souhaiterais de la même manière remercier Christine Chevallereau, pour nos nombreuses réunions et moments de réflexions partagés, et tes questions parfois épineuses mais toujours pertinentes. Merci aussi à Damien Chablat pour tes conseils de mécanicien et concepteur aguerris.

Je fais de chaleureux remerciements à Anick Abourachid et tous les biologistes du projet AVINECK, trop nombreux pour être cités. L'interdisciplinarité, bien que difficile sur certains aspects, est une chance, et notre collaboration s'est révélée être un incroyable enrichissement professionnel et personnel, que ce soit en réunion au Muséum à Paris ou autour d'un alligot dans les Cévennes.

Je remercie Pierre Renaud et Med Amine Laribi d'avoir accepté de rapporter ma thèse, et pour l'ensemble de leurs remarques constructives.

Je souhaiterais rendre hommage aux ingénieurs recherche et techniciens du LS2N, notamment Stéphane Jolivet, Philippe Lemoine, Denis Creusot et Arnaud Hamon, pour leur précieuse aide sur la fabrication, l'assemblage, et surtout la commande des différents prototypes.

On entend souvent que les doctorants représentent une grosse partie de la main d'oeuvre en recherche, mais c'est sans compter les stagiaires. La démarche d'encadrement ou co-encadrement se transforme parfois en leçon d'humilité devant la qualité du travail accompli, et je voudrais en cela remercier particulièrement Anders Van Riesen, Gaurav Sonawane, Parag Khanna, Vimallesh Muralidharan et Benjamin Fasquelle pour leur aide gigantesque. Un très grand merci en plus à Benjamin qui a continué en thèse, pour nos échanges et ta sympathie, et surtout, surtout pour avoir écrit les codes en C.

Un merci également aux doctorants de Centrale Nantes, les partis, les anciens et les moins anciens, pour ces moments passés ensemble, que ce soit autour d'un café, d'un burger berlinois, au pied d'un mur d'escalade ou devant un tableau rempli d'équations à rallonge.

Un grand merci au groupe des nantais, je vous ferais lire ce manuscrit de gré ou de force pour que vous voyiez cette phrase. Vous vous en sortez bien elle est à la page 3. Un énorme merci à ma famille et en particulier à mes parents. C'est vraiment peu de choses que de dire que je ne serais pas la sans vous aujourd'hui, et je ne saurais être assez reconnaissant de votre présence et votre soutien.

Enfin, je voudrais te remercier toi, mon petit chat, pour ta présence, tes mots et ta douceur, qui savent m'apaiser plus que tout au monde. Tu es mon modèle d'optimisme, de joie de vivre et je grandis de chaque instant passé à tes côtés, instants que je veux innombrables.



# Table des matières

Résumé . . . . .	1
Abstract . . . . .	3
Remerciements . . . . .	5
Table des figures . . . . .	11
Liste des tableaux . . . . .	17

## Chapitre 1

### Introduction

---

1.1 Avant-propos . . . . .	19
1.2 Le projet AVINECK . . . . .	20
1.3 État de l'art . . . . .	21
1.3.1 La robotique bio-inspirée . . . . .	21
1.3.2 La tensegrité et ses applications . . . . .	26
1.3.3 Analyse des mécanismes de tensegrité . . . . .	39
1.4 Objectifs et démarche . . . . .	45

## Chapitre 2

### Analyse bio-mécanique du mouvement inter-vertébral

---

2.1 Introduction . . . . .	47
2.2 Modélisation du contact entre vertèbres et reconstruction du mouvement . . . . .	49
2.2.1 Acquisition des modèles 3D . . . . .	49
2.2.2 Modèle de contact . . . . .	52
2.2.3 Reconstruction des surfaces de contacts . . . . .	54
2.2.4 Calcul numérique par problème d'optimisation . . . . .	55
2.2.5 Résultats et discussion . . . . .	58
2.3 Approche du mouvement dans le plan sagittal par mécanismes simples . . . . .	62
2.3.1 Analyse géométrique des mécanismes . . . . .	62
2.3.2 Détermination des dimensions optimales de chaque mécanisme . . . . .	64
2.3.3 Résultats et discussions . . . . .	65
2.4 Conclusion . . . . .	69

## Chapitre 3

### Analyse et comparaison de mécanismes de tensegrité s à 1 degré de liberté

---

3.1 Introduction . . . . .	71
----------------------------	----

3.2	Modèle dynamique d'un mécanisme de tensegrité en X . . . . .	72
3.2.1	Description du mécanisme étudié . . . . .	72
3.2.2	Modélisation géométrique et cinématique . . . . .	73
3.2.3	Modèle dynamique . . . . .	75
3.2.4	Étude statique . . . . .	78
3.3	Modélisation statique d'une articulation pivot . . . . .	80
3.3.1	Description du mécanisme . . . . .	80
3.3.2	Modélisation . . . . .	82
3.3.3	Espace de travail atteignable statiquement . . . . .	83
3.3.4	Raideur articulaire . . . . .	83
3.4	Comparaison et choix du meilleur mécanisme 2D . . . . .	83
3.4.1	Conception optimal de l'articulation en R . . . . .	85
3.4.2	Conception optimale de l'articulation en X . . . . .	86
3.4.3	Exemple numérique et conclusion . . . . .	87
3.5	Réalisation d'un prototype de mécanisme en X . . . . .	90
3.5.1	Cahier des charges et caractéristiques . . . . .	90
3.5.2	Assemblage mécanique . . . . .	90
3.5.3	Interface et commande . . . . .	93
3.5.4	Résultats expérimentaux . . . . .	94
3.6	Conclusion . . . . .	96

## Chapitre 4

### Modélisation et conception de manipulateurs à 2 degrés de liberté

4.1	Introduction . . . . .	99
4.2	Analyse cinématique d'un manipulateur à deux degrés de liberté . . . . .	100
4.2.1	Obtention du modèle géométrique direct et inverse . . . . .	101
4.2.2	Étude des singularités et aspects . . . . .	103
4.2.3	Étude de l'espace de travail . . . . .	104
4.2.4	Étude du comportement cuspidal . . . . .	108
4.2.5	Limites articulaires . . . . .	109
4.3	Modélisation cinéto-statique d'un manipulateur plan à 2 DDL . . . . .	110
4.3.1	Dimensions du manipulateur . . . . .	110
4.3.2	Modélisation statique . . . . .	110
4.3.3	Stratégies d'actionnement . . . . .	112
4.3.4	Étude du WFW pour un manipulateur actionné par deux câbles . . . . .	115
4.3.5	Étude du WFW pour un manipulateur actionné par quatre câbles . . . . .	118
4.4	Résultats expérimentaux . . . . .	121
4.5	Conclusion . . . . .	124

## Chapitre 5

### Modélisation et conception optimale de manipulateurs à N degrés de liberté

5.1	Introduction . . . . .	127
5.2	Modélisation dynamique d'un manipulateur à N degrés de liberté . . . . .	128

5.2.1	Modélisation . . . . .	128
5.2.2	Équations de Lagrange . . . . .	129
5.2.3	Équations du mouvement . . . . .	129
5.2.4	Énergie cinétique et matrice d'inertie . . . . .	130
5.2.5	Énergie potentielle d'un empilement de N mécanismes . . . . .	136
5.2.6	Forces généralisées . . . . .	137
5.2.7	Matrice de raideur . . . . .	138
5.3	Conception d'un prototype à 10 degrés de liberté . . . . .	140
5.3.1	Présentation du manipulateur . . . . .	140
5.3.2	Détermination de la posture de repos . . . . .	141
5.3.3	Comparaison de différentes stratégies d'actionnement . . . . .	144
5.4	Conclusion . . . . .	150

## Conclusion et perspectives

---

## Bibliographie

---

## Liste des publications

---

## Annexes

---

.A	Comparaison de deux mécanismes plans à 1 DDL . . . . .	174
.A.1	Limites de mouvement de l'articulation R en raison de singularités . . . . .	174
.A.2	Conception optimale de l'articulation en P . . . . .	175
.A.3	Conception optimale de l'articulation en X . . . . .	177
.B	Prise en compte des poulies dans le calcul de la longueur active de câble . . . . .	180
.B.1	Placement des câbles . . . . .	180
.B.2	Longueur des câbles . . . . .	182
.B.3	Actionnement sur le côté . . . . .	182
.B.4	Strut-routed . . . . .	183
.B.5	Câble long . . . . .	183
.B.6	Position des moteurs . . . . .	184
.B.7	Dérivées des longueurs . . . . .	184
.C	Calcul de la matrice de Coriolis d'un manipulateur plan à N DDL . . . . .	186
.C.1	Expression de C en fonction de M . . . . .	186
.C.2	Dérivation de la matrice M . . . . .	186
.C.3	Dérivation de la matrice R . . . . .	190
.C.4	Inertie des moteurs . . . . .	193





# Table des figures

1.1	Le prototype de robot anguille avec ses 12 vertèbres [Gal07]. . . . .	23
1.2	Prototype BHA imitant une trompe d'éléphant [RS13]. . . . .	23
1.3	Bras antagoniste et principe. . . . .	24
1.4	Bras manipulateur utilisant le principe de tensegrité [Les+16]. . . . .	25
1.5	Empilement d'élastomères conducteurs (or et silicone) [Maz+12]. . . . .	26
1.6	Exposition de Karl Ioganson à Moscou en Mai 1921 [Gou98]. . . . .	27
1.7	Structure en X de Snelson, une structure 3D stable composée de deux corps rigides, 1948 [SO09]. . . . .	27
1.8	Gauche : configuration de non-tensegrité, centre : configuration de tensegrité, droite : structure (ou système) de tensegrité [SO09]. . . . .	28
1.9	Gauche : Structure de tensegrité de classe 2, droite : structure de tensegrité de classe 3 [SO09]. . . . .	29
1.10	Différentes sculptures de tensegrité de classe 1 par Kenneth Snelson [SO09]	29
1.11	Exemple d'une yourte se basant sur le concept de tensegrité. La structure est un système de tensegrité de classe 2 [SO09]. . . . .	30
1.12	Deux exemples architecturaux basés sur le principe de tensegrité. . . . .	30
1.13	Système musculo-squelettique du coude humain et son modèle de tensegrité associé [Sca12]. . . . .	31
1.14	Modèle d'un corps humain modélisé par un système de tensegrité [Fle]. . .	32
1.15	Prototype du robot SUPER-ball de la NASA [Sab+15]. . . . .	34
1.16	SUPER-ball réalisant un déplacement ou changement de face, en appui sur une face triangulaire vers une autre. Le robot commence avec les trois appuis du triangle rouge sur le sol. Puis le robot vient rétracter le câble mis en évidence en jaune, ce qui génère le mouvement, jusqu'à ce qu'il y ait que deux points de contact avec le sol. Le robot bascule ensuite en appui sur le triangle bleu. [Sab+15]. . . . .	34
1.17	prototype DuCTT (a) et modélisation associée (b) [Fri+14]. . . . .	35
1.18	Les différentes séquences du robot DuCTT pour se déplacer dans une canalisation [Fri+14]. . . . .	36
1.19	prototype de mécanisme de tensegrité à 1 DDL (a) et modélisation associée (b) [Boe+17]. . . . .	37
1.20	Schéma du système de tensegrité pour le polissage (a), processus de polissage dans deux directions (b) [Zhu+19]. . . . .	37

1.21	Prototype expérimental du robot manipulateur. Le prototype (3) est monté sur une base (6) et est en contacts avec deux obstacles (1) et (2). Un effort est appliqué sur les deux câbles, tandis que les efforts de contact sont mesurés par des jauges de contraintes (4 et 5) [Bak+15]. . . . .	38
1.22	Pince ouverte et fermée [SBZ17]. . . . .	38
1.23	Mécanisme de tensegrité plan à 1 DDL [Ars06]. . . . .	41
1.24	Mécanisme de tensegrité plan à 1 DDL [WC17]. . . . .	43
1.25	Cas sans effort extérieur : CAD (gauche) et solution stable pour $L_2 = 3/2$ et $\rho = 1$ (droite) [WC17]. . . . .	43
2.1	Plan de travail de la méthode proposée. . . . .	48
2.2	Vues du scan de la 11 <sup>ème</sup> vertèbre cervicale d'un vautour fauve. . . . .	49
2.3	Trois vertèbres de pic noir $V_5, V_6, V_7$ imprimées en 3D. . . . .	50
2.4	Vue de la 5 <sup>ème</sup> vertèbre cervicale du pic et de son repère associé. Les zones colorées correspondent aux surfaces de contact polynomiales (4 du côté cranial et 4 du côté caudal). . . . .	51
2.5	Différentes vues de la 5 <sup>ème</sup> vertèbre cervicale d'un pic noir : (a) Vue de face du côté caudal, (b) vue de côté, (c) vue de face du côté cranial. Les zones colorées correspondent aux surfaces de contact polynomiales (4 du côté cranial et 4 du côté caudal). . . . .	52
2.6	Radios d'un pic noir montrant le cou en position neutre (gauche) et en flexion dorsale maximale (droite). . . . .	52
2.7	Amplitudes de flexion ventrale et dorsale d'un pic noir ( <i>dryocopus matrus</i> ). . . . .	53
2.8	Amplitudes de flexion ventrale et dorsale d'un vautour fauve ( <i>Gyps fulvus</i> ). . . . .	53
2.9	Représentation de deux surfaces $S_{ik}$ et $S_{jk}$ en contact au point $C_k$ . . . . .	56
2.10	Évolution de la position entre les deux vertèbres pour $\gamma \in [31.2^\circ, 44.5^\circ]$ et $\beta = 0^\circ$ . . . . .	59
2.11	Évolution de la position entre les deux vertèbres pour $\beta \in [-15^\circ, 15^\circ]$ et $\gamma = 37.9^\circ$ . . . . .	59
2.12	Localisation des points de contact sur la vertèbre 5 pour toutes les positions possibles : centrum (a), zygapophyses (b). . . . .	60
2.13	Valeur de $f(q)$ selon $\gamma$ . Les limites articulaires mesurées sont montrées en rouge. . . . .	61
2.14	Évolution de la position entre les deux vertèbres $V_7$ et $V_8$ du <i>Gyps Fulvus</i> pour $\gamma \in [-2.8^\circ, 44.1^\circ]$ et $\beta = 0^\circ$ . . . . .	62
2.15	Trois mécanismes plans à 1 DDL proposés : (a) Anti-parallélogramme ou Articulation en X, (b) Anti-parallélogramme avec offset, (c) Pivot. . . . .	63
2.16	(a) Évolution de la position entre les deux vertèbres $V_7$ et $V_8$ du <i>Gyps Fulvus</i> pour $\gamma \in [-2.8^\circ, 44.1^\circ]$ et $\beta = 0^\circ$ et évolutions des trois mécanismes optimaux pour la même plage angulaire. (b) Erreur en x, en y et en norme, par rapport à la trajectoire de la vertèbre $V_8$ , pour les trois mécanismes optimaux obtenus. . . . .	66
2.17	Superposition des vertèbres $V_7$ et $V_8$ d'un <i>Gyps Fulvus</i> avec les mécanismes optimaux respectifs. . . . .	67
3.1	Paramétrage d'un mécanisme en X. . . . .	72

3.2	Forces appliquées, leurs décompositions (flèches bleues) et la trajectoire (courbes vertes) des points $D$ et $C$ du mécanisme . . . . .	77
3.3	Couple atteignable et $G(\alpha)$ pour différentes valeurs de ressorts $k_i$ . . . . .	80
3.4	Raideur atteignable pour un mécanisme en X. . . . .	81
3.5	Paramétrage d'un mécanisme pivot. . . . .	81
3.6	Variation de $F_{\max}$ dans l'espace de conception réalisable des articulations. . . . .	88
3.7	Tracé des frontières de la raideur correspondant à la conception optimale des deux mécanismes pour un WFW donné de $[-\frac{5\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}]$ , des raideurs en 0 et aux frontières de $K_0 = 1$ Nm/rad, $K_1 = 0,6$ Nm/rad et une charge appliquée de : $M = 0.2$ kg, $d = 0.25$ m. . . . .	89
3.8	Photo du prototype . . . . .	91
3.9	Vue de face de la position d'équilibre au repos du prototype (gauche) et une position d'équilibre donnée du prototype avec un effort d'actionnement (droite). . . . .	92
3.10	Boucle de commande . . . . .	94
3.11	Disposition de l'interface entre le micro-contrôleur, le variateur, le moteur et le codeur. Ce schéma est reproduit pour les deux moteurs, se connectant sur la même beaglebone. . . . .	95
3.12	Réponse angulaire du mécanisme à l'application d'un effort croissant en boucle ouverte (bleu), comparaison avec le modèle statique (rouge) et modèle statique prenant en compte le frottement dans les actionneurs (jaune). . . . .	96
3.13	Trajectoire de référence et trajectoire réelle du prototype, et erreur en temps réel sur $\alpha$ . . . . .	97
3.14	Forces appliquées dans le câble pour la trajectoire définie. . . . .	97
4.1	Description du manipulateur. . . . .	101
4.2	Les quatre solutions du modèle inverse pour $x = 0.03$ et $y = 1.6$ ( $L = 1$ et $b = 2/3$ ). . . . .	103
4.3	Courbes de singularités et aspects pour $L = 1$ et $b = 2/3$ . . . . .	105
4.4	Limites de l'espace de travail pour $L = 1$ et $b = 2/5$ (a), $b = 2/3$ (b), $b = 9/10$ (c). Les zones à quatre solutions sont remplies en gris. . . . .	107
4.5	Limites de l'espace de travail pour les deux cas dégénérés $b = L = 1$ (a) et $b = 0, L = 1$ (b). Les zones à quatre solutions sont remplies en gris. . . . .	107
4.6	Mécanisme en X en configuration normale (a) et retournée (b). . . . .	107
4.7	Régions de l'espace de travail avec un nombre et type différent de solutions ( $L = 1, b = 2/3$ . $\overline{M}_i$ (respectivement $M_i$ ) signifie que le mécanisme $i$ est en configuration basse (respectivement haute). . . . .	108
4.8	Limites de l'espace de travail quand $-\pi/2 < \theta_1, \theta_2 < \pi/2$ , et pour $L = 1, b = 2/5$ (gauche), $b = 2/3$ (centre), $b = 9/10$ (droite). La partie non vide est remplie avec des hachures verticales. Le nombre de solutions est défini par les couleurs de remplissage : pas de couleur=1, gris=2, rouge=3 and bleu=4. . . . .	110
4.9	Prototype dans sa configuration de repos. . . . .	111
4.10	Espace de travail du manipulateur avec les dimensions données. Les zones non-vides sont remplies par des lignes verticales. Le nombre de solutions est défini par la couleur de fond : blanc=1, gris=2, bleu=4. . . . .	111

4.11	Différents montages possibles de câbles. Les liaisons en rouge représentent les points attirés les uns aux autres lors de la mise en tension du câble. Les cas (a) à (d) sont des stratégies appelées "side-routed", tandis que les cas (e) et (f) nécessitent le passage du câble en strut-routed pour le premier mécanisme (non représenté). . . . .	114
4.12	Différents montages possibles de câbles pour deux câbles. Les liaisons en couleur représentent les points attirés les uns aux autres lors de la mise en tension du câble correspondant. Les autres cas sont obtenus par symétrie par rapport à l'axe de symétrie vertical du mécanisme. . . . .	114
4.13	Les 5 cas possibles de routage pour un manipulateur à deux DDL actionné par 4 câbles. . . . .	115
4.14	Espace de travail atteignable dans l'espace articulaire (gauche) et l'espace cartésien (droite). La zone bleue correspond à la zone atteignable avec les efforts $F_{min}$ et $F_{max}$ prescrit, et la zone grise le WFW pour $F_{max}$ non borné. . . . .	117
4.15	Espace de travail atteignable dans l'espace articulaire (gauche) et l'espace cartésien (droite) quand les mécanismes inférieur et supérieur ont les mêmes ressorts. . . . .	117
4.16	Raideur articulaire minimale pour la stratégie side-routed. Les zones non-colorées correspondent aux configurations non-accessibles avec les efforts prescrits. . . . .	119
4.17	Raideur articulaire maximale pour la stratégie side-routed. . . . .	120
4.18	Espace de travail accessible et raideur cartésienne minimale pour la stratégie side-routed. . . . .	120
4.19	Espace de travail accessible et raideur cartésienne maximale pour la stratégie side-routed. . . . .	121
4.20	Raideur articulaire minimale pour la stratégie strut-routed. . . . .	122
4.21	Raideur articulaire maximale pour la stratégie strut-routed. . . . .	122
4.22	Espace de travail accessible et raideur cartésienne minimale pour la stratégie strut-routed. . . . .	123
4.23	Espace de travail accessible et raideur cartésienne maximale pour la stratégie strut-routed. . . . .	123
4.24	(a) Schéma d'actionnement du manipulateur et passage des câbles (b) Photo des axes du manipulateur, comportant 4 poulies empilées sur des plans différents. . . . .	125
4.25	Trajectoire effectuée en boucle ouverte, dans l'espace articulaire (gauche) et l'espace de travail (droite). . . . .	125
4.26	Efforts appliqués pour réaliser la trajectoire donnée en boucle ouverte. Les forces expérimentales en rouge sont continues. . . . .	126
5.1	Paramétrage du manipulateur. . . . .	129
5.2	Résultat du traitement d'image donnant la position au repos bio-inspirée du manipulateur. . . . .	141
5.3	Diagramme présentant l'algorithme de sélection des raideurs de ressorts . . . . .	144
5.4	Raideurs finales obtenues s'approchant au mieux de la configuration au repos souhaité et assurant une position d'équilibre au repos stable. . . . .	145

---

5.5	Configuration d'équilibre au repos finale obtenue (en noir et vert, traits épais), par rapport à la configuration d'équilibre au repos initialement désirée (en bleu et rouge, traits fins). . . . .	145
5.6	Réseau musculaire d'un pic noir vu dans le plan sagittal. . . . .	146
5.7	Schématisation des trois stratégies d'actionnement considérées. Chaque câble de couleur différente est indépendant. Pour plus de lisibilité, le passage des câbles en strut-routed jusqu'à la base du manipulateur n'est pas représenté, mais tous les câbles courent jusqu'à la base du manipulateur. . . . .	147
5.8	Courbe représentant une partie du WFW à partir des bornes de l'espace des forces (stratégie 5.7a). . . . .	148
5.9	Courbe représentant une partie du WFW à partir des bornes de l'espace des forces (stratégie 5.7b). . . . .	149
5.10	Courbe représentant une partie du WFW à partir des bornes de l'espace des forces (stratégie 5.7c). . . . .	150
11	Limite d'amplitude de l'articulation en R due à l'annulation de $l_1$ and $l_2$ . . . . .	174
12	Limite d'amplitude de l'articulation en R due aux singularités de contraintes. . . . .	175
13	Actionnement d'un module sur le côté . . . . .	181
14	Passage du câble en strut-routed . . . . .	181
15	Câble long : actionnement des modules inférieurs . . . . .	182



# Liste des tableaux

2.1	Erreur moyenne (en mm) entre les surfaces réelles et polynomiales pour les vertèbres de vautour. . . . .	55
2.2	Erreurs moyenne quadratique (en mm) des différents mécanismes pour les couples de vertèbres du vautour fauve ( <i>Gyps fulvus</i> ). Pour chaque couple de vertèbres, la plus grande erreur en norme est indiquée en rouge, la plus petite erreur en vert et l'erreur intermédiaire en orange. . . . .	68
2.3	Valeurs géométriques des paramètres des mécanismes optimaux pour les différents couples de vertèbres du vautour fauve ( <i>Gyps Fulvus</i> ). Les valeurs sont indiquées en mm. . . . .	69
3.1	Paramètres d'un mécanisme en X. . . . .	72
3.2	Données d'un mécanisme pivot. . . . .	81
3.3	Expression des conditions pour l'articulation en P et en X . . . . .	84
3.4	Données techniques du moto-réducteur ECMAX40L/PM42 . . . . .	90
3.5	Données du prototype 1-DDL. . . . .	92





# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Avant-propos

Cette thèse, sous la direction de Philippe Wenger, est financée par un contrat doctoral spécifique normalien (CDSN) délivré par l'ENS Rennes, et s'inscrit dans le cadre du projet AVINECK qui est un projet multidisciplinaire financé par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR-16-CE33-0025). Ce projet a vu le jour en janvier 2017, rassemblant un consortium de biologistes du Muséum National d'Histoire Naturelle (MNHN), spécialistes en morphologie fonctionnelle, biomécanique, morphométrie, ornithologie et comportement, et de roboticiens de l'équipe Robotique et Vivant du Laboratoire des Sciences du Numérique de Nantes (LS2N). Les financements de l'ANR ont notamment permis les déplacements en conférence ainsi que la réalisation de plusieurs prototypes de manipulateurs.

Cette thèse vise à étudier la modélisation cinétostatique de structures de tenségrité, des structures comprenant uniquement des éléments en tensions et en compression, et d'étudier le potentiel applicatif de tels dispositifs pour la conception et la réalisation de manipulateurs robotiques. En parallèle de cet objectif principal, la modélisation de tels systèmes peut permettre la meilleure compréhension des systèmes musculo-squelettiques des cous d'oiseaux qui sont le cœur du projet AVINECK. Ainsi, des modélisations ont été proposées aux biologistes afin d'avoir une meilleure compréhension des mécanismes en jeu dans la mobilité et l'actionnement des cous d'oiseaux, et à l'inverse, des stratégies de conception et d'actionnement bio-inspirés nous ont été proposées afin de concevoir des manipulateurs innovants et performants.

Cette collaboration entre de nombreux chercheurs issus de domaines très éloignés a été particulièrement fructueuse, et un grand nombre de contributions en ont découlé. Nos travaux en robotique ont été présentés dans 7 conférences internationales dont une a permis la publication d'une version étendue d'un article dans une revue internationale. Les résultats issus des travaux en collaboration ont été présentés dans des conférences et congrès nationaux, et deux articles sont en relecture dans des revues internationales.

## 1.2 Le projet AVINECK

L'objectif de la morphologie fonctionnelle est d'étudier et de comprendre les relations entre la forme, la fonction, la physiologie du système musculo-squelettique et ses propriétés mécaniques. Les propriétés des systèmes biomécaniques naturels sélectionnés et "optimisés" par la sélection naturelle peuvent inspirer des solutions d'ingénierie, et en particulier des applications robotiques. Ces dernières approches appartiennent au domaine de la bio-inspiration et en particulier de la conception bio-inspirée, un domaine en pleine expansion à l'interface de la biologie et de l'ingénierie. L'objectif du projet ANR AVINECK est de quantifier et de comprendre la relation entre l'anatomie du cou de l'oiseau, ses propriétés mécaniques, sa fonction et son évolution, et d'apporter cette richesse de connaissances biologiques à la conception de systèmes robotiques. Comme les humains, les oiseaux sont strictement bipèdes. Leurs membres antérieurs ont été transformés en ailes au cours de l'évolution et sont spécialisés pour le vol. Les oiseaux n'ont plus de mains et les fonctions assurées par les mains chez les autres espèces, y compris l'homme, sont assurées par le bec. Ainsi, sur le plan fonctionnel, le cou d'un oiseau est l'analogue d'un bras. Certaines espèces d'oiseaux sont spécialisées de telle manière que le système tête-cou agit effectivement comme un bras porteur d'outils. C'est le cas, par exemple, des pics. Lorsqu'ils tapent sur les arbres pour trouver de la nourriture ou pour creuser des cavités dans les nids, ils utilisent leur système cranio-cervical comme un marteau-piqueur tenu fermement par le bras : le cou propulse le bec comme le marteau-piqueur et amortit l'impact entre la tête et le tronc comme le fait un bras. Dans le projet AVINECK, les adaptations fonctionnelles-morphologiques du système cranio-cervical chez les oiseaux seront utilisées pour tester des hypothèses macro-évolutives sur la variation du cou chez les oiseaux, et pour apporter des résultats biologiques tels que des solutions aux défis technologiques auxquels la robotique actuelle est confrontée.

Une étude de la morphologie 3D du système tête-cou pour un large échantillon d'oiseaux peut permettre de définir les caractéristiques et les limites de la morphologie du cou des oiseaux, avec l'hypothèse que les spécialisations correspondent aux propriétés mécaniques du cou permettant aux oiseaux de se comporter de manière optimale tout en minimisant la dépense énergétique. Le comportement des espèces sélectionnées correspond aux défis technologiques des manipulateurs robotiques en termes de performances comme la dextérité et l'espace de travail : contrairement aux hydrostats <sup>1</sup> comme la trompe de l'éléphant ou les tentacules des céphalopodes, les cous des oiseaux utilisent une architecture vertébrale rigide comme les serpents, mais ils ne reposent pas sur le sol et utilisent un environnement en trois dimensions. Le comportement des espèces sélectionnées correspond à des défis technologiques pour les manipulateurs robotiques. Le paradigme conceptuel de la tenségrité <sup>2</sup> (voir section 1.3.2) établit un pont adéquat entre la biologie et la robotique. La tenségrité est particulièrement adaptée pour modéliser les systèmes squeletto-musculaires humains (voir section 1.3.2).

Les objectifs du projet sont multiples :

---

<sup>1</sup>hydrostat musculaire : structure de collagène et de fibres musculaires qui se déforme à volume constant

<sup>2</sup>de "tensile integrity" : une structure de tenségrité est composée d'éléments comprimés et de câbles ou de ressorts en tension maintenus ensemble en équilibre

1. Innover radicalement sur le plan conceptuel dans le domaine de la morphologie fonctionnelle. L'application du paradigme de la tenségrité est innovante dans ce domaine en tant que nouvelle approche permettant de déterminer le rôle des systèmes vertébraux tels que le système crania-cervien dans l'évolution. Il s'agit d'une contribution conceptuelle sans précédent au débat concernant le rôle de la modularité dans l'évolution.
2. Concevoir, en robotique, des robots légers innovants avec de meilleures performances : meilleure dynamique, meilleure reconfigurabilité comme la capacité d'exercer des forces élevées sur ses environnements lorsque cela est nécessaire, tout en étant suffisamment souples pour se déplacer en toute sécurité parmi les obstacles physiques et les opérateurs humains. C'est une nécessité importante dans le contexte de l'usine du futur et de l'industrie 4.0.

Ce projet se décline en cinq "work packages", dont deux focalisés sur la partie "biologie" du projet (WP1 : Anatomie et WP2 : Mesures fonctionnelles). Cette thèse s'inscrit dans les trois "work packages" restants du projet :

- Modélisation du système fonctionnel : Pour comprendre les propriétés du cou de l'oiseau, la modélisation nous permettra de simuler son comportement mécanique. Il sera alors possible de comprendre les relations entre la variation de la forme et les propriétés mécaniques. Les données obtenues à partir des analyses morphométriques et morpho-fonctionnelles côté biologistes seront interprétées et utilisées comme données d'entrée pour les modèles robotiques.
- Analyse dynamique : Production de modèles, de simulateurs et de contrôleurs robotiques capables de reproduire les fonctions du cou des oiseaux et de transférer leurs connaissances à des solutions pour la conception en établissant un pont entre la biologie et la robotique. Une approche de modélisation basée sur un système de tenségrité alimentée par les résultats de modélisation du système fonctionnel sera mise en œuvre.
- Prototypage : Le prototypage et le test d'un bras robotique inspiré du cou d'un oiseau nous permettra de mettre en évidence expérimentalement les interactions entre la morphologie du cou et son comportement. Pour cette raison, un banc d'essai expérimental (ensemble d'instruments de mesure) et un cou bionique basé sur le meilleur système morpho-fonctionnel (identifié en ce qui concerne les défis robotiques) seront construits. Avec ces outils, certaines expériences seront réalisées pour soutenir l'analyse réalisée au cours du projet.

## 1.3 État de l'art

### 1.3.1 La robotique bio-inspirée

Le vivant est issu d'un processus complexe de mutations aléatoires et de survie des individus les mieux adaptés, qui amène aujourd'hui une immense diversité, autant au niveau

de la faune que de la flore, et d'un nombre incroyable de mécanismes. Le vivant constitue alors une source d'inspiration continue pour la science. Les scientifiques et chercheurs, par l'étude des mécanismes et comportement naturels, cherchent à mieux comprendre le vivant, afin de pouvoir notamment développer des technologies et principes s'inspirant de la nature, et ce dans énormément de domaines scientifiques, de la médecine au génie civil, en passant par la logistique et la sociologie. Bien sur, la robotique ne déroge pas à cette règle, bien au contraire.

Le projet AVINECK, bien que novateur sur l'idée de s'inspirer de la morphologie des cous d'oiseaux pour la conception de manipulateur robotique innovant, est loin d'être le premier projet de conception robotique bio-inspirée. En effet, depuis la renaissance l'homme cherche à concevoir en s'inspirant de la nature. On peut d'ailleurs voir la genèse de la robotique dans les automates aux formes animales conçus par les inventeurs du 16<sup>ème</sup> siècle comme Léonard de Vinci. Depuis le milieu du 20<sup>ème</sup>, la robotique dans sa définition étendue s'est propagée dans tous les milieux de la vie professionnelle et personnelle sous différentes formes. Bon nombre de chercheurs en robotique se sont inspirés et s'inspirent de la nature pour la conception de robots innovants. On peut néanmoins distinguer deux grandes catégories, la robotique bio-mimétique et la robotique bio-inspirée. La première a pour but d'imiter au plus proche la nature. Cette ressemblance est un critère essentiel du cahier des charges du système robotique, et est parfois même le critère principal [Kin+17] [Has+06]. La robotique bio-inspirée quant à elle, puise son inspiration dans les mécanismes de la nature (mode de locomotion, repérage dans l'espace, actionnement...) pour répondre à un besoin spécifique, mais sans pour autant chercher une ressemblance avec la nature. Cette partie a pour objectif de dresser un état de l'art non-exhaustif de la robotique bio-inspirée, et plus précisément des dernières avancées en robotique de manipulation.

## Bio-inspiration

**Robot mobile anguilliforme** Le robot anguille [Boy+09] est un très bon exemple de bio-inspiration. Ce robot inspiré d'un poisson anguilliforme est composé de mécanismes parallèles équivalents à une liaison rotule empilés en série. Ces mécanismes sont mécaniquement indépendants. Ainsi, le robot complet est constitué de 12 vertèbres, articulées entre elles par des liaisons rotules équivalentes (figure 1.1). Les aspects technologiques rendant complexe la réalisation d'une liaison rotule par la mise en série de trois liaisons pivots aux centres de rotations identiques, le choix s'est porté sur la réalisation d'une articulation rotule à partir d'une architecture parallèle. Les travaux récents ont même approfondi le biomimétisme en implémentant un "sens électrique" au robot qui permet de se repérer et de repérer des obstacles dans l'espace comme une vraie anguille [LM58].

**Manipulateur "trompe d'éléphant"** Le robot continu BHA [GBA11] développé par FESTO (un des leaders de la robotique bio-inspirée) est également un bon exemple de bio-inspiration. Ce robot manipulateur imite la trompe de l'éléphant et est constitué de trois segments. Chaque segment est actionné par 3 actionneurs pneumatiques, ce qui permet au robot à la fois de se plier dans l'espace, mais aussi de s'étendre et de se comprimer [RS13]. De tels robots manipulateurs sont aujourd'hui classés dans la classe des "robots continus",

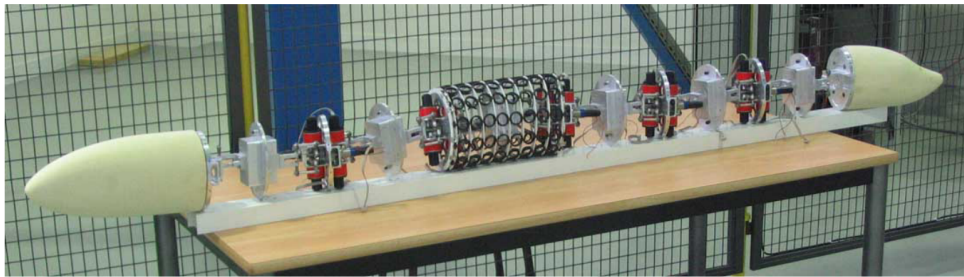


FIGURE 1.1 – Le prototype de robot anguille avec ses 12 vertèbres [Gal07].

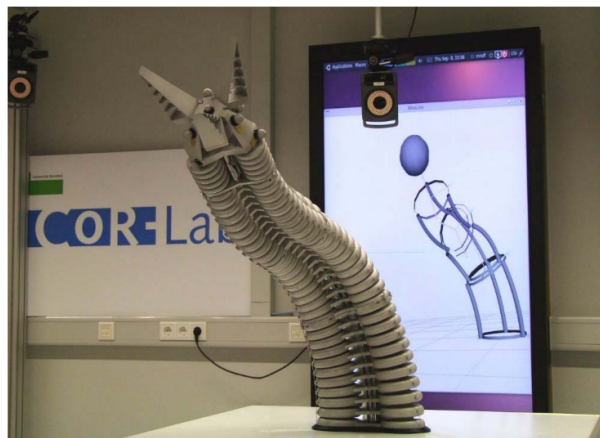


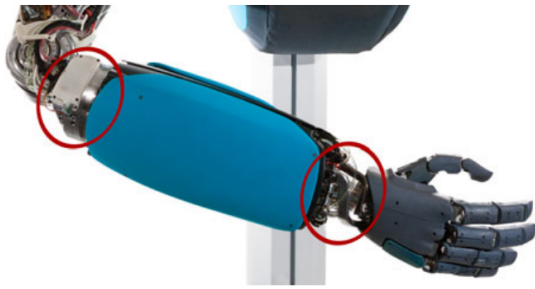
FIGURE 1.2 – Prototype BHA imitant une trompe d'éléphant [RS13].

ceux-ci étant continûment déformables. Bien qu'intéressants sur beaucoup d'aspects, ces robots souffrent encore aujourd'hui de nombreux problèmes, notamment dus à leur stratégie d'actionnement, qui rend ces robots souvent lents, peu précis et peu robustes. Il existe de nombreux types de robots continus et des revues regroupent la littérature sur le sujet [WIJ10].

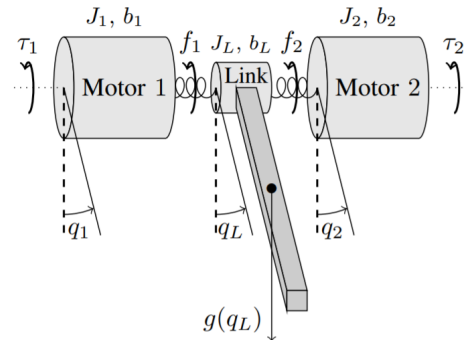
La partie robotique du projet AVINECK se développe autour du principe de tenségrité, qui est à la frontière entre la robotique classique dite "rigide" et la robotique continuellement déformable. En effet, les mécanismes de tenségrité sont composés d'éléments souples et rigides. En fonction de certains facteurs d'échelles, ils sont souvent considérés comme des robots rigides mais parfois comme des robots continus par certains auteurs [SO09]. Nous avons fait le choix pour ces travaux de considérer les mécanismes de tenségrité comme des robots rigides, et nous appliquons des méthodes et raisonnement utilisés dans la robotique "classique" (voir section 1.3.3).

### Robots humanoïdes et actionneurs anthropomorphiques

La robotique humanoïde cherche à imiter l'humain, que ce soit ses expressions, sa démarche, ses capacités de manipulation, etc. Il existe de nombreux systèmes de robots humanoïdes complets ou bras anthropomorphiques, et le but ici n'est pas d'être exhaustif, mais un système intéressant peut-être le bras manipulateur développé par le DLR



(a) Avant-bras du DLR Hand Arm System [Pet+14].



(b) Description du principe d'un actionneur à raideur variable agoniste-antagoniste [MGB13].

FIGURE 1.3 – Bras antagoniste et principe.

[Pet+14], en cela qu'il est bio-inspiré sur de nombreux aspects. En effet, au-delà de sa forme qui se veut anthropomorphique (voir figure 1.3a), sa stratégie d'actionnement basée sur un actionnement antagoniste d'éléments élastiques est également inspirée du fonctionnement des systèmes musculo-squelettiques du vivant. Quelques exemples de technologies d'actionnement bio-inspirées vont maintenant être détaillées.

### Bio-inspiration technologique

**Actionneurs à raideur variable** Les actionneurs à raideur variable (en anglais variable stiffness actuator ou encore VSA) regroupent une classe d'actionneur capables de faire varier leur impédance en temps réel, et ouvre un nouveau champ de possibilités pour la robotique. Ce principe d'impédance variable est présent naturellement dans le corps humain et les espèces vivantes, où nous sommes capables d'adapter la raideur de nos membres en temps réel et ce de manière inconsciente grâce à la proprioception, en fonction de la tâche à réaliser et de l'instant de la tâche. Cette notion de raideur variable, absente jusqu'à il y a peu dans les systèmes robotiques, limitait les capacités des systèmes robotiques : trop grande rigidité, peu d'adaptation à l'environnement extérieur, interaction homme-machine dangereuse, etc. De nombreux actionneurs à raideurs variables ont depuis été conçus, utilisant de nombreuses technologies différentes [VH+09]. Une classe d'actionneurs à raideur variable se distingue par sa bio-inspiration : les actionneurs à raideurs variables antagonistes. Ces types d'actionneurs utilisent en général deux moteurs pour un degré de liberté (appelés par la suite DDL), et des composants déformables comme des ressorts. Par la rotation combinée et asservie des deux moteurs, dans des sens identiques ou opposés (agoniste ou antagoniste), on peut contrôler à la fois la position et la raideur de l'axe de sortie du moteur (voir figure 1.3b).

**Muscles artificiels** Un autre exemple d'actionnement bio-inspiré est un actionneur composé d'élastomères diélectriques se rapprochant du fonctionnement des muscles, uti-

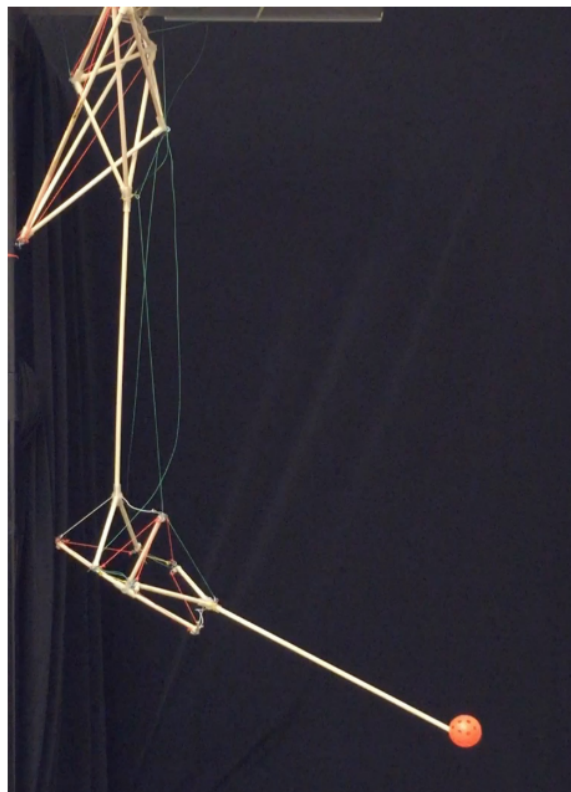


FIGURE 1.4 – Bras manipulateur utilisant le principe de tensegrité [Les+16].

lisé dans un robot cherchant à se rapprocher du comportement d'une tentacule de pieuvre. Plusieurs couches d'élastomères sont empilées les unes aux autres, et celles-ci se rapprochent ou s'écartent sous l'action d'un champ électrique extérieur, permettant de dilater ou contracter l'ensemble du système [Maz+12]. La dénomination de "muscles artificiels" regroupe d'autres technologies comme des mousses compartimentées gonflables ou encore des systèmes hydrauliques [Ran+15] [Shi+16].

**Tensegrité** L'utilisation du principe de tensegrité permet la conception et la fabrication de systèmes robotiques inspirés des systèmes musculo-squelettiques. Les systèmes musculo-squelettiques étant en effet constitué majoritairement d'os rigides fonctionnant en compression et d'ensemble muscles-tendons fonctionnant en traction (et de manière antagoniste), ils peuvent être modélisés par des systèmes de tensegrité. De la même manière, la tensegrité est utilisée dans différents domaines de l'ingénierie, et depuis un certain temps en robotique. Un exemple de système robotique bio-inspiré construit à l'aide du principe de tensegrité est le bras robotique de Lessard [Les+16]. Le bras est composé de deux articulations (coude et épaule) à plusieurs DDL (voir figure 1.4). Le principe de tensegrité a été retenu comme meilleur candidat pour la modélisation de manipulateur robotiques innovants s'inspirant des cous d'oiseaux. Nous allons maintenant expliquer ce choix, définir le principe de tensegrité, et détailler ses applications, qui sont diverses et variées.





FIGURE 1.5 – Empilement d'élastomères conducteurs (or et silicone) [Maz+12].

### 1.3.2 La tensegrité et ses applications

#### Définition et classification

**Historique et définitions** Le premier à avoir créé une structure, que l'on peut décrire par le terme de tensegrité, et pour laquelle on a une preuve matérielle, a été l'artiste letton Karl Ioganson [Gou98]. Le terme de tensegrité n'étant pas encore connu, Ioganson a décrit ses œuvres comme des "constructions spatiales" (voir figure 1.6). Le terme de tensegrité a été établi par Buckminster Fuller en 1962, année lors de laquelle un brevet est déposé à son nom [BF62]. Il l'a composé à partir des mots "tension" et "intégrité" afin de décrire une sculpture réalisée par un de ses élèves, l'artiste Kenneth Snelson (voir figure 1.7). La première définition du brevet est assez large et décrit des structures stables composées d'éléments en compression et d'éléments en tension, de telle sorte que l'ensemble est formé "d'îlots de compression dans un océan de tension" [BF62]. Fuller ne pensant pas que cette invention avait un réel intérêt en dehors d'une utilisation purement artistique, il n'a pas cherché à définir ce type de structures de manière plus précise [SPM01]. Les structures de tensegrité ont été peu étudiées pendant la seconde moitié du 20<sup>ème</sup>, jusqu'à Robert E. Skelton, qui y voit un réel intérêt pour l'ingénierie. C'est donc lui qui, le premier, affine les définitions du concept de tensegrité, afin d'être plus précis et d'utiliser des termes adaptés à l'ingénierie [SPM01]. On peut exprimer ces 4 définitions de la manière suivante :

- Définition 1.1. Une configuration donnée d'une structure est en équilibre stable si, en l'absence de forces extérieures, une déformation initiale arbitrairement faible revient à la configuration donnée.
- Définition 1.2. Une structure de tensegrité est un système stable de membres chargés axialement.

Ces définitions ont été affinées par Skelton lui même, et il définit en 2009 la configuration de tensegrité [SO09]:

Définition 2.1 : En l'absence de forces extérieures, soit un ensemble de corps rigides dans une configuration spécifique liés entre eux par des liaisons parfaites ne transmettant

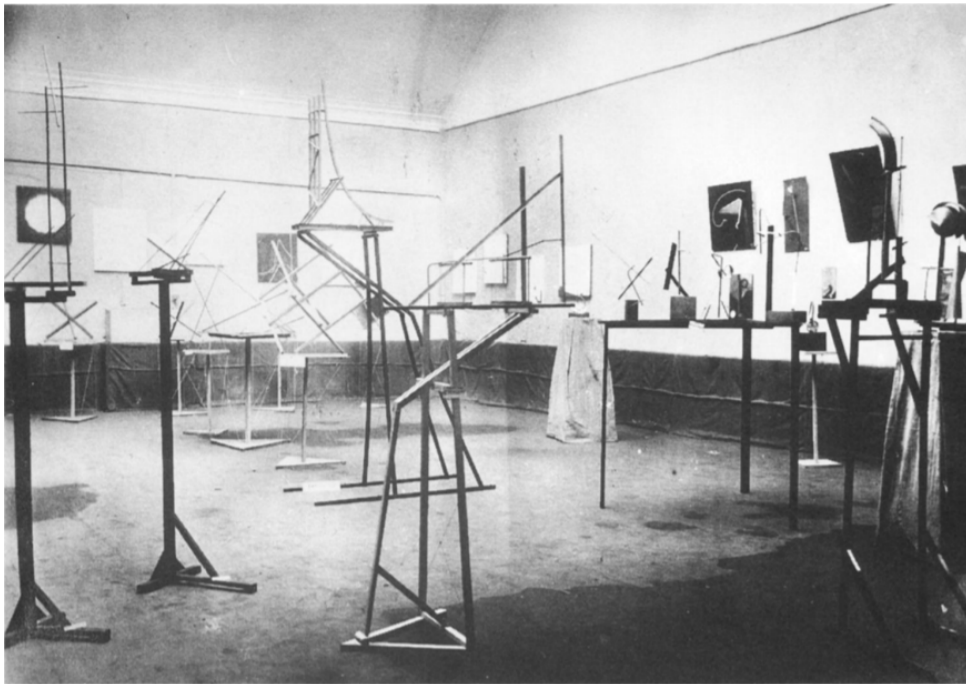


FIGURE 1.6 – Exposition de Karl Ioganson à Moscou en Mai 1921 [Gou98].

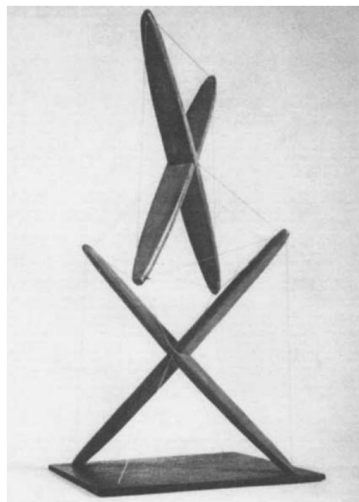


FIGURE 1.7 – Structure en X de Snelson, une structure 3D stable composée de deux corps rigides, 1948 [SO09].

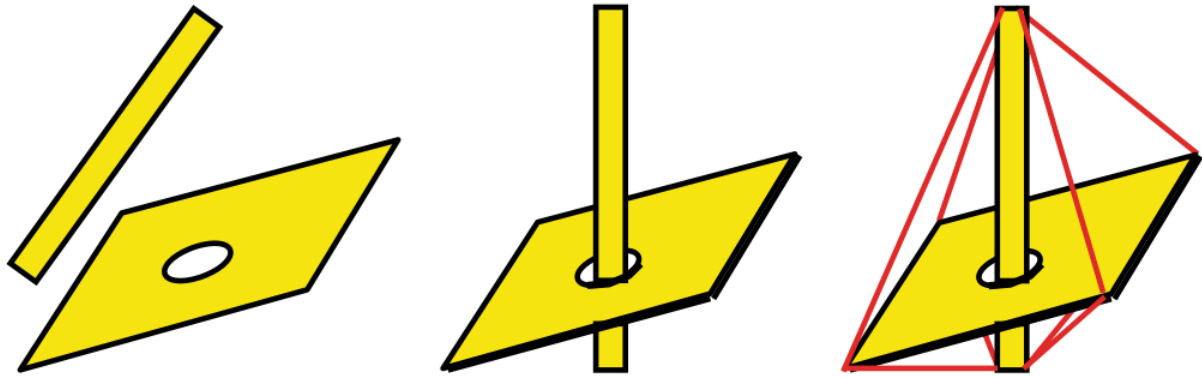


FIGURE 1.8 – Gauche : configuration de non-tenségrité, centre : configuration de tenségrité, droite : structure (ou système) de tenségrité [SO09].

pas de couple (par exemple liaison rotule). Cette configuration forme alors une configuration de tenségrité si la configuration donnée peut être stabilisée par un ensemble d'éléments de traction internes, c'est-à-dire connectés entre les corps rigides. La configuration n'est pas une configuration de tenségrité si aucun élément de traction n'est nécessaire et/ou si aucun ensemble d'éléments de traction n'existe pour stabiliser la configuration (voir figure 1.8).

À ces premières définitions, on peut définir plusieurs termes génériques utilisés très souvent pour les structures de tenségrité :

- Définition 3.1. Système (ou structure) de tenségrité : une configuration de corps rigides en tenségrité, qui a été stabilisée par des éléments de traction (ressorts, câbles) (voir figure 1.8). Ses forces internes s'annulent globalement, les éléments créent une structure stable dans l'espace ou en 2D. Une structure de tenségrité rétablit son équilibre après avoir supprimé la force externe, elle est toujours dans un état initial d'auto-contrainte.
- Définition 3.2. Mécanisme de tenségrité : Une structure de tenségrité, dont la position d'équilibre peut être modifiée à l'aide d'actionneurs.
- Définition 3.3. Élément de compression : barre sur deux appuis ne pouvant subir que des efforts de compression (éventuellement flambage). Peut être actif ou passif.
- Définition 3.4. Éléments de traction : câble ou ressort subissant des efforts de tension. Dans le cas du câble, peut être actif ou passif.

**Classe de tenségrité** Les systèmes de tenségrité sont souvent définis en fonction de leur classe, définie par Skelton [SO09] :

Définition 4.1 : Une configuration de tenségrité où il n'existe aucun contact entre ses corps rigides est un système de tenségrité de classe 1, et un système de tenségrité avec  $k$  corps rigides en contact est un système de tenségrité de classe  $k$ .

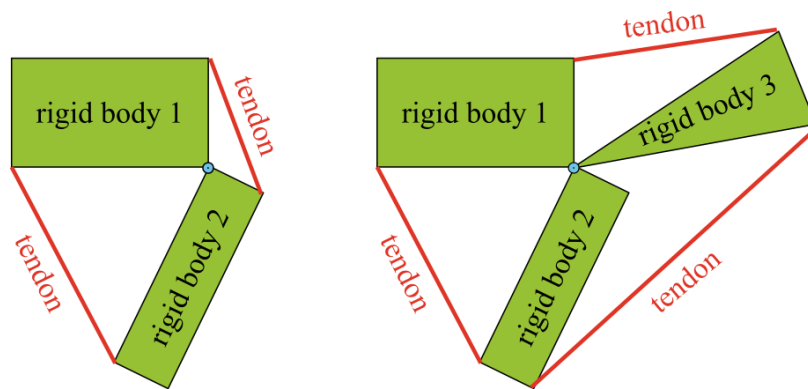


FIGURE 1.9 – Gauche : Structure de tensegrité de classe 2, droite : structure de tensegrité de classe 3 [SO09].

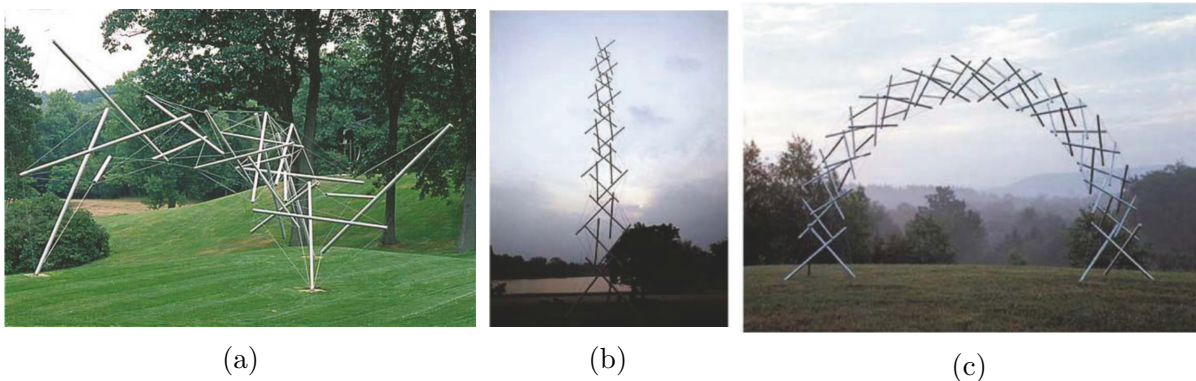


FIGURE 1.10 – Différentes sculptures de tensegrité de classe 1 par Kenneth Snelson [SO09]

Ainsi, la figure 1.9 présente deux systèmes de tensegrité. le système de gauche est composé de deux corps rigides et de deux éléments en tension. Les corps rigides étant reliés par une liaison pivot, le système est donc un système de tensegrité de classe 2. Le système de droite quant à lui est composé de 3 corps rigides ainsi que de trois éléments en tension. Les trois corps rigides étant en contact en un même point, ce système de tensegrité est donc de classe 3.

### La tensegrité dans l'art et l'architecture

Comme nous l'avons vu précédemment, la tensegrité a d'abord été découverte et utilisée pour des réalisations artistiques sans but précis. Les premiers à réaliser des structures de tensegrité jugeaient même ces structures inutiles en dehors de l'art. Snelson a réalisé de nombreuses sculptures, la première étant la structure en X présentée en figure 1.7. Il a par la suite conçu différentes oeuvres d'art comme le montre la figure 1.10.

Les structures de tensegrité ont des propriétés très intéressantes pour l'architecture. En effet, le principe de réalisation de structures uniquement avec des éléments en compression et en tension est un bon moyen pour concevoir des architectures légères et élancées, sur le même principe que les structures treillis utilisées pour la réalisation de ponts. Les

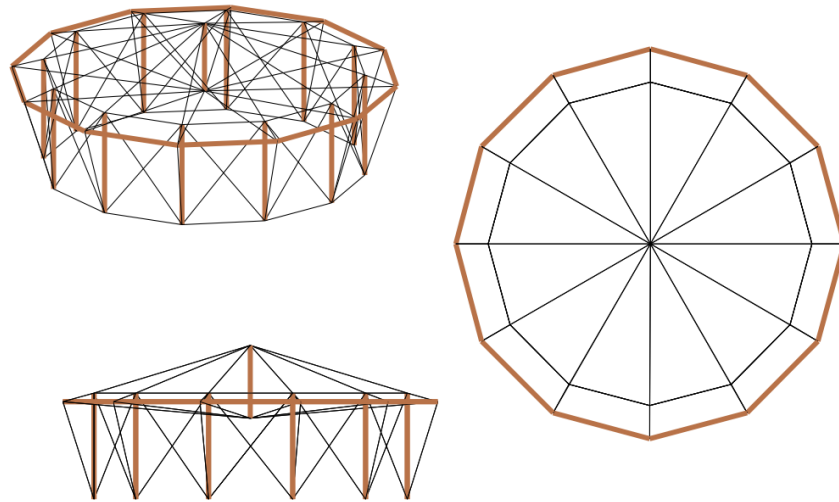


FIGURE 1.11 – Exemple d’une yourte se basant sur le concept de tensegrité. La structure est un système de tensegrité de classe 2 [SO09].



(a) Kurilpa Bridge de Brisbane.

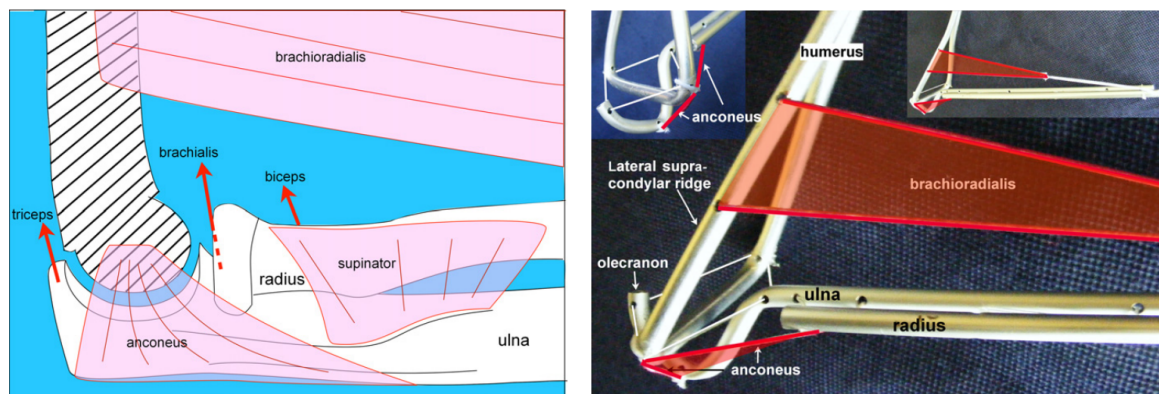


(b) Plata Stadium de Buenos Aires.

FIGURE 1.12 – Deux exemples architecturaux basés sur le principe de tensegrité.

structures de tensegrité utilisant un grand nombre d’éléments en tension pour un faible nombre d’éléments en compression, la masse des structures peut être encore optimisée, les câbles étant plus légers que des barres et non soumis aux effets de flambage. La figure 1.11 montre un exemple de modélisation d’une structure de yourte basée sur le principe de tensegrité. De vraies réalisations existent, comme par exemple le Kurilpa Bridge (figure 1.12a) construit en 2009 et est l’ouvrage de tensegrité le plus grand existant actuellement. Il est composé de 36 mats en compression et 252 câbles en tension qui assurent l’intégrité du pont. Le Plata Stadium (figure 1.12b) construit en 2003 à Buenos Aires est également un bel exemple de tensegrité. La toile du stade est en appui sur un réseau complexe de 45 barres et de nombreux câbles, ce qui en fait une structure de tensegrité.





(a) Diagramme des muscles prépondérants du coude droit. (b) Modèle simple du coude démontrant le principe de tensegrité.

FIGURE 1.13 – Système musculo-squelettique du coude humain et son modèle de tensegrité associé [Sca12].

### La tensegrité dans la nature

Comme nous l'avons déjà mentionné dans la section précédente concernant le projet AVINECK, le vivant utilise des matériaux biodégradables pour réaliser de nombreux processus très sophistiqués, et ce de la plus petite échelle à la plus grande. La science ne nous permet que de modéliser les phénomènes naturels, et ce de manière plus ou moins fine. Le principe de tensegrité peut servir de base pour une modélisation de plusieurs phénomènes et mécanismes naturels, de manière étonnante pour certains d'entre eux. Stephen Levin, un chirurgien orthopédique est le premier à observer et décrire dès le début des années 1980 des mécanismes biologiques en utilisant la tensegrité, et ce à plusieurs échelles. Il définit par la suite le terme de "biotensegrité" pour distinguer ses analyses de la définition technologique de la tensegrité, plus rigide [Lev02].

Le mécanisme le plus simple à observer qui peut être modélisé à l'aide de la tensegrité est le système musculo-squelettique des animaux. Ces derniers sont composés de muscles, tendons, os, arrangée de façon à permettre un mouvement simple à contrôler. Les os assurent la fonction d'intégrité et de résistance du système, tandis que les tendons et les muscles assurent la tension nécessaire à l'obtention d'un équilibre pour une certaine configuration. Par exemple, l'articulation du coude humain peut être modélisée par un système de tensegrité de classe 3. Ainsi, Scarr propose dans [Sca12] une modélisation du coude humain par un système de tensegrité (voir figure 1.13). Une des propriétés d'un mécanisme de tensegrité étant l'utilité de chaque élément pour maintenir son intégrité, Scarr estime que de tels modèles peuvent être utilisés pour mieux comprendre certaines pathologies musculaires simples, tel que la tendinite du coude (tennis elbow). De la même manière, Levin propose l'utilisation de la biotensegrité pour la modélisation de différents systèmes musculo-squelettiques comme le pelvis [Lev97] ou la colonne vertébrale [Lev02]. Plusieurs parties du système musculo-squelettiques du corps humain ont été fabriquées avec des modèles de tensegrité par Tom Flemons [Fle], comme le modèle de corps humain présenté figure 1.14.

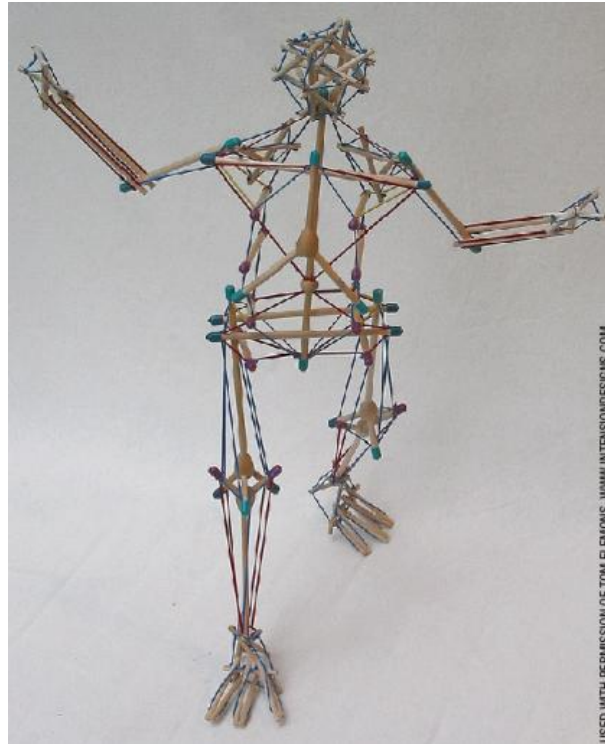


FIGURE 1.14 – Modèle d'un corps humain modélisé par un système de tensegrité [Fle].

La tensegrité a également été utilisée pour décrire des mécanismes à d'autres échelles. Wang et. al. montre que la membrane des cellules du corps humain n'est pas juste une membrane élastique continue mais est en fait une structure discrète organisée sous la forme d'un réseau inter-connecté de micro-filaments d'actine et de micro-tubulures, les micro-tubulures supportant la compression, et les micro-filaments la tension. Les analyses statiques et dynamiques menées ont montré une forte correspondance entre le modèle de tensegrité et les mesures expérimentales intracellulaires [Wan+01].

Le fascia est une enveloppe de tissu conjonctif enrichi en collagène. Cette membrane fibro-élastique enveloppe des structures anatomiques comme les muscles, tendons, viscères et organes. Les fonctions complètes du fascia sont encore étudiées mais il est connu pour être une structure passive de transmission des contraintes générées par l'activité musculaire ou des forces extérieures au corps. Stephen Levin [LM12] décrit le fascia comme l'élément qui amène la tension interne au corps humain et qui l'inter-connecte pour équilibrer les tensions et compressions internes.

### La tensegrité en robotique

Comme nous l'avons vu précédemment, le principe de tensegrité est utilisé en architecture pour la conception de structures légères et élancées, mais également pour décrire de nombreux systèmes naturels. Les structures de tensegrité sont donc connues et réputées pour de nombreuses caractéristiques, telles que :

- La légèreté

- La reconfigurabilité
- La déployabilité
- La déformabilité
- La robustesse

Ces différentes caractéristiques sont très recherchées en ingénierie, et notamment en robotique. La recherche en robotique cherche à concevoir et fabriquer des robots capables de mieux s'adapter à un environnement extérieur changeant, plus fiables et sécuritaires lors d'interactions avec l'humain, plus légers et plus rapides pour respecter des cadences de production, plus précis et plus maniables pour réaliser des actions précises notamment pour la robotique chirurgicale.

Cette partie présente un ensemble de robots réalisés à partir de mécanismes de tensegrité, des robots mobiles, manipulateurs ou chirurgicaux. Malgré les nombreux intérêts du principe de tensegrité vis-à-vis de la robotique, de nombreuses contraintes subsistent, comme la modélisation cinématique ou dynamique qui peut s'avérer très complexe ou l'étude des configurations d'équilibres du système. Un autre obstacle majeur au développement des systèmes robotiques utilisant des mécanismes de tensegrité sont les contraintes technologiques. Comme nous allons le voir, la majorité des modèles de systèmes de tensegrité en 3D se composent de barres et de câbles liés et articulés entre eux par des liaisons rotules parfaites et sans butées. En pratique, ces liaisons sont particulièrement difficiles à réaliser, au même titre que la fixation et le passage des câbles en tension.

**Robotique mobile :** Il existe un bon nombre de robots mobiles basés sur le principe de tensegrité, dont plusieurs reposent sur le même principe de locomotion. Le mécanisme de tensegrité est posé sur le sol et donc dans une position d'équilibre donnée. Un certain nombre d'actionneurs viennent modifier la configuration de tensegrité, soit en modifiant la longueur d'un ou de plusieurs éléments en tension, soit en modifiant la longueur d'un ou plusieurs éléments en compression à l'aide d'actionneurs. Ainsi, la configuration d'équilibre change, ce qui modifie la forme de la structure de tensegrité ainsi que son centre de masse. A un moment donné, le mécanisme sur le sol n'est plus posé dans un équilibre stable et "roule" de manière discontinue vers le prochain équilibre stable. C'est le cas par exemple du robot "SUPER-ball" [Sab+15] développé par la NASA (voir figure 1.15). Ce système de tensegrité de classe 1 est un "6-strut icosahedron", soit un polyèdre composé de 6 barres et de 24 câbles. 12 câbles sont reliés à des actionneurs en bout de barre, afin de pouvoir rétracter certains des câbles et ainsi reconfigurer le mécanisme de tensegrité. Chaque actionneur est associé à un micro-contrôleur indépendant, équipé d'une plateforme inertielle, et communiquant avec les autres micro-contrôleurs. Chaque extrémité de câble est équipée d'un capteur d'effort qui permet d'obtenir la tension réelle dans chaque câble à chaque instant. Un exemple de mouvement est montré figure 1.16. Ce mouvement est assuré par la mise en mouvement d'un seul câble, ce qui montre les possibilités multiples dans le cas d'un robot avec 12 actionneurs. La NASA voit beaucoup d'intérêt dans ses mécanismes de tensegrité, qui sont en effet très légers, fiables, et déformables, ce qui



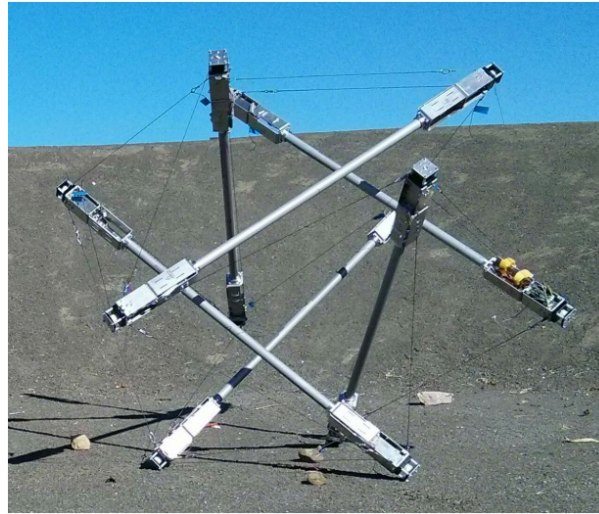


FIGURE 1.15 – Prototype du robot SUPER-ball de la NASA [Sab+15].

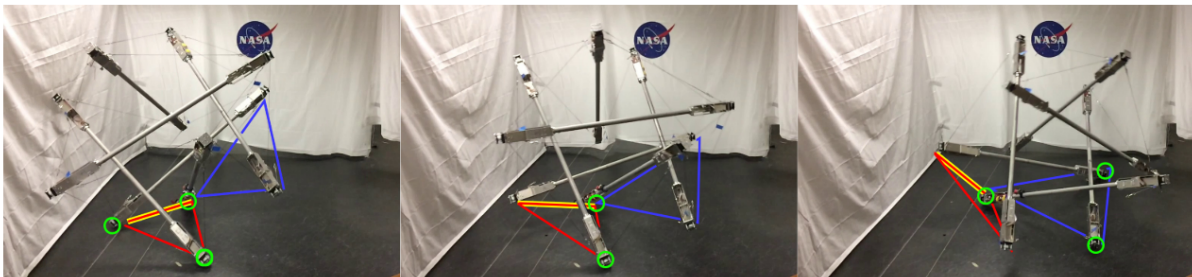


FIGURE 1.16 – SUPER-ball réalisant un déplacement ou changement de face, en appui sur une face triangulaire vers une autre. Le robot commence avec les trois appuis du triangle rouge sur le sol. Puis le robot vient rétracter le câble mis en évidence en jaune, ce qui génère le mouvement, jusqu'à ce qu'il y ait que deux points de contact avec le sol. Le robot bascule ensuite en appui sur le triangle bleu. [Sab+15].

pourrait permettre des missions en environnement extra-terrestre à coût réduit. D'autres robots de tensegrité utilisant le même principe de locomotion existent comme le robot TR-3 par Paul et. al. [PVCL06].

Des robots mobiles basés sur d'autres principes de locomotion existent, comme le robot DuCTT [Fri+14] qui est un robot d'exploration de canalisations. Ce robot est composé d'une structure de tensegrité de classe 3 en double tétraèdre. Les deux tétraèdres composés de 6 barres rigides sont reliés entre eux par 8 câbles (voir figure 1.17). Deux actionneurs linéaires sont placés au milieu des segments  $[AB]$  et  $[HG]$ , ce qui permet de faire varier leur longueur. Les câbles verticaux labellisés 1 à 4 sont actionnés indépendamment, tandis que les câbles 5 à 8 sont actionnés par paire. Ainsi, le système est redondant et la raideur peut être contrôlée en plus de la position d'un tétraèdre par rapport à un autre. Le robot peut se déplacer dans des canalisations en déplaçant chaque tétraèdre successivement. Un tétraèdre se fixe à la canalisation en utilisant l'actionneur linéaire sur une des barres. L'actionnement des câbles permet de déplacer le second tétraèdre,

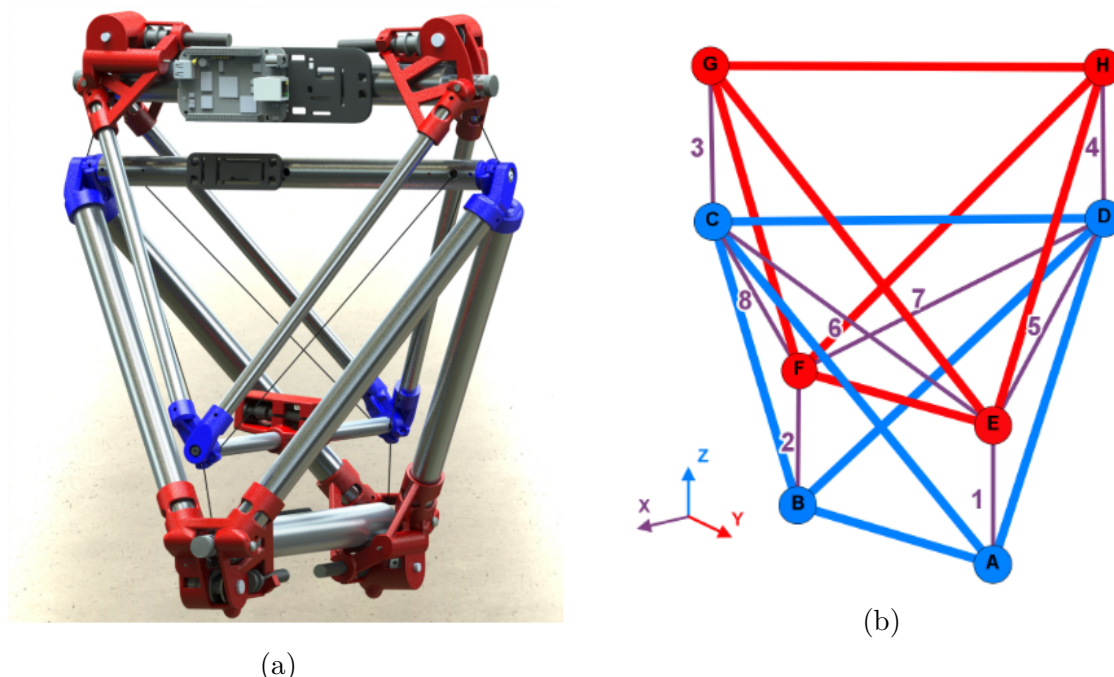


FIGURE 1.17 – prototype DuCTT (a) et modélisation associée (b) [Fri+14].

qui une fois en position vient étendre sa barre de longueur variable pour se mettre en contact avec la canalisation (voir figure 1.18).

**Robotique chirurgicale :** La robotique est de plus en plus utilisée dans l'industrie médicale, et notamment pour des opérations chirurgicales. La robotique permet en effet beaucoup de choses que ne permettent pas les opérations classiques : opérations en environnement stérile, téléopération, opération peu intrusives. Les robots chirurgicaux doivent faire preuve d'une très grande précision, mais également de retour d'effort et d'impédance variable, afin que le chirurgien contrôlant le robot ait un ressenti des surfaces et tissus qu'il touche, et que ce ressenti soit aussi proche que possible des sensations réelles. La tenségrité est un candidat intéressant pour la robotique chirurgicale pour les raisons évoquées précédemment, plus un avantage majeur. En effet, on a vu précédemment que la configuration d'un mécanisme de tenségrité peut être modifiée à l'aide d'actionneurs venant enrouler ou dérouler les câbles en tension. L'avantage de cette stratégie d'actionnement est que l'actionnement (les moteurs) peuvent donc être déportés en dehors du mécanisme en lui-même afin d'être disposés à distance du mécanisme. Le mécanisme de tenségrité peut donc être conçu avec des matériaux non ferro-magnétiques (câbles en nylon, barres en plastique ou composite), et donc être utilisé pour des interventions sous IRM ou scanner (biopsie, cryothérapie, etc.).

Un premier prototype de mécanisme de tenségrité plan à 1DDL a été proposé par Boehler [Boe+17]. Le mécanisme antagoniste est composé de 4 barres formant un parallélogramme, et de 2 ensemble câbles-ressort en série actionné par des moteurs. Une même configuration peut donc être atteinte pour des raideurs et tensions différentes, ce qui en

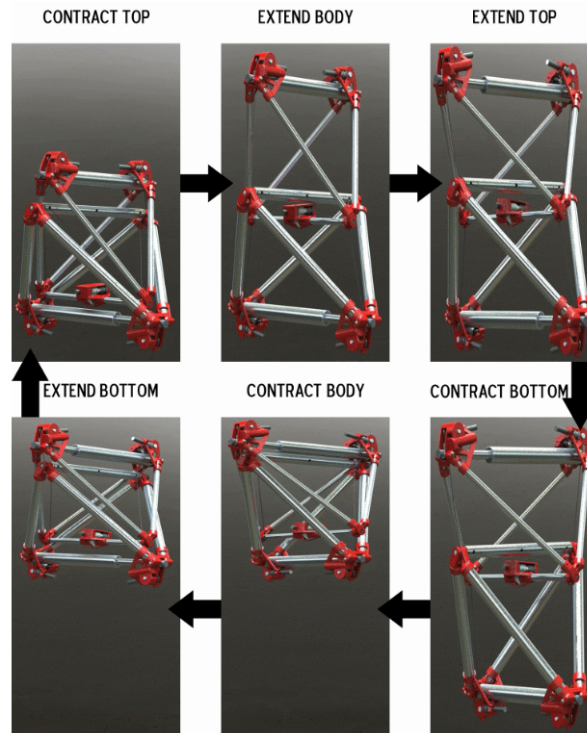


FIGURE 1.18 – Les différentes séquences du robot DuCTT pour se déplacer dans une canalisation [Fri+14].

fait un système à impédance variable utilisable pour des opérations chirurgicales (voir figure 1.19).

**Robotique manufacturière et de manipulation :** Le principe de tensegrité est utilisé pour d'autres types de robots et pour d'autres applications comme la robotique manufacturière et de manipulation. On peut citer l'exemple notamment d'un robot de polissage utilisant un mécanisme de tensegrité entre la manipulateur sériel classique et l'effecteur [Zhu+19]. Ce système est parfaitement passif mais le profil d'effort appliqué en fonction de la position et orientation de l'effecteur est étudié pour améliorer la qualité du polissage (voir figure 1.20).

Un exemple de robot manipulateur basé sur le principe de tensegrité est un manipulateur conçu par Bakker et. al. [Bak+15]. Ce prototype de robot est composé de 6 mécanismes de tensegrité en X empilés en série (voir figure 1.21). Chaque mécanisme en X est composé de 4 barres formant un anti-parallélogramme, et de ressorts de tension latéraux assurant la configuration de tensegrité. Le système est actionné par deux câbles courant le long des 5 mécanismes à gauche et à droite respectivement, ce qui en fait un mécanisme sous-actionné. Le robot se déforme donc en fonction des contacts extérieurs appliqués sur le mécanisme. Le modèle de bras de Lessard et. al. [Les+16] présenté précédemment est un autre exemple de manipulateur basé sur le principe de tensegrité (figure 1.4).

Sumi et. al. [SBZ17] ont développé un préhenseur à deux doigts basé sur le principe

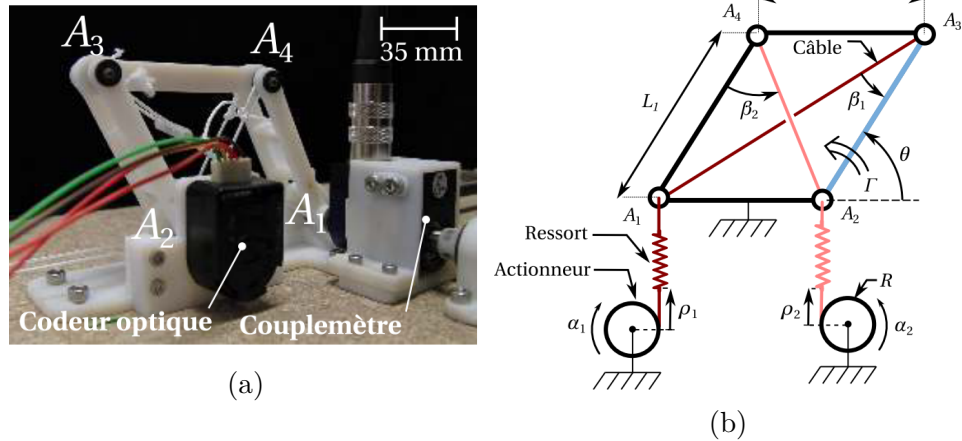


FIGURE 1.19 – prototype de mécanisme de tensegrité à 1 DDL (a) et modélisation associée (b) [Boe+17].

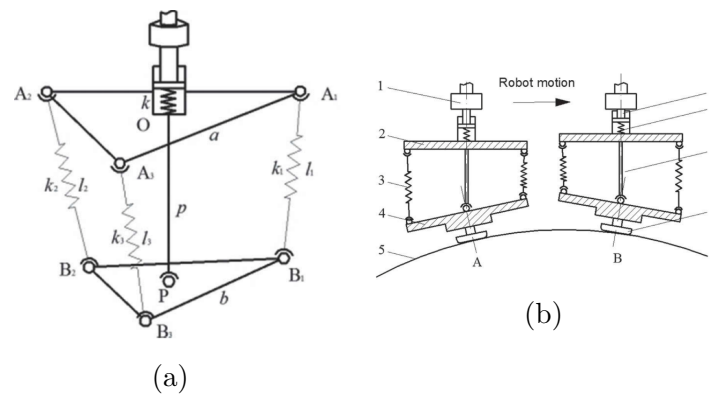


FIGURE 1.20 – Schéma du système de tensegrité pour le polissage (a), processus de polissage dans deux directions (b) [Zhu+19].



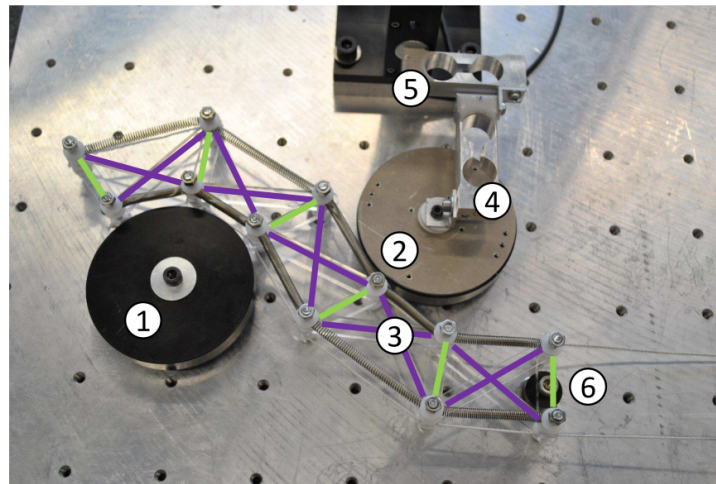


FIGURE 1.21 – Prototype expérimental du robot manipulateur. Le prototype (3) est monté sur une base (6) et est en contacts avec deux obstacles (1) et (2). Un effort est appliqué sur les deux câbles, tandis que les efforts de contact sont mesurés par des jauges de contraintes (4 et 5) [Bak+15].



FIGURE 1.22 – Pince ouverte et fermée [SBZ17].

de tensegrité. Le préhenseur est composé de barres et de ressorts, et le dimensionnement des différentes raideurs des ressorts permet d'assurer deux positions d'équilibre stable au mécanisme de tensegrité : une position pince ouverte, et une position pince fermée, ce qui en fait un système dit multistable (voir figure 1.22). L'avantage de ce système est qu'un actionneur seulement est nécessaire ponctuellement pour faire passer la pince d'un équilibre stable à un autre, ici un actionneur linéaire en liaison unilatérale avec une des barres, qui vient la pousser ou la tirer pour ouvrir ou fermer la pince. Le second avantage est qu'en position fermée, les contraintes internes du système de tensegrité assurent un effort de serrage au niveau de la pince. Cet effort peut être modifié en prenant des raideurs de ressorts différentes.

Si plusieurs systèmes utilisant la tensegrité ont aujourd'hui été modélisés et réalisés, leur utilisation et application est aujourd'hui marginale, et peu de systèmes ont été réellement mis en oeuvre. Comme dit précédemment, la réalisation de tels mécanismes de tensegrité pose plusieurs problèmes, que ce soit en terme de réalisation technologique

qu'en terme de commande. La dernière partie de l'état de l'art porte sur l'analyse des mécanismes de tensegrité au sens large, des outils de modélisation utilisés, et des limites et difficultés.

### 1.3.3 Analyse des mécanismes de tensegrité

Cette dernière partie de l'état de l'art se concentre sur les méthodes d'analyses des systèmes et mécanismes de tensegrité, utiles pour la modélisation, la conception et la commande de tels mécanismes.

#### Le "Form finding" ou la recherche des configurations de tensegrité

Un élément clé de la conception des systèmes de tensegrité est ce qu'on appelle en anglais le "form-finding", ou la détermination de leur configuration géométrique. Contrairement à un assemblage d'éléments rigides, qui donne une configuration connue, et qui demande justement des ajustements et conditions géométriques spécifiques permettant le montage, les structures de tensegrité elles, sont composées d'éléments rigides et d'éléments souples. Il est alors a priori impossible de déterminer la forme de la structure sans calculs préalables. Tibert et Pellegrino [TP03] distinguent sept méthodes de recherche de formes pour les structures de tensegrité classées en deux catégories. La première catégorie contient les méthodes géométriques, qui déterminent la configuration soit de la longueur maximale des barres, soit de la longueur minimale des éléments en tension, tandis que la longueur de l'autre type d'élément n'est pas autorisée à varier. La seconde catégorie contient des méthodes statiques, qui recherchent des configurations d'équilibre permettant l'existence d'un état de précontrainte dans la structure avec certaines caractéristiques requises.

**Méthodes géométriques :** Tibert et Pellegrino [TP03] mentionnent trois méthodes géométriques de recherche des configurations de tensegrité d'un système donné. La première, proposée par Kenner [Ken03] est purement analytique et s'appuie sur des propriétés de symétrie. Si les polygones formés par les extrémités supérieures et inférieures des barres présentent une symétrie de rotation autour d'un axe, on peut exprimer la rotation d'un polygone à un autre par un angle. Il est établi qu'un système de tensegrité doit se retrouver à sa frontière d'assemblage pour être en équilibre. Ainsi, en fixant un des deux paramètres (longueur des barres ou longueur des câbles) et en faisant varier l'autre, on peut déterminer une configuration d'assemblage possible.

Une méthode basée sur le même principe a été développée par Pellegrino [Pel86], qui utilise cette fois-ci des outils numériques et permet de trouver la configuration de tensegrité à partir d'un problème d'optimisation sous contraintes. L'avantage de cette méthode est qu'elle s'applique en théorie à n'importe quel système de tensegrité, bien que la complexité de la structure de tensegrité augmente la dimension du problème et complexifie la recherche de solution optimale.

Whittier [Whi02] propose une approche similaire à celle de Pellegrino. La seule différence est que celui-ci s'appuie sur la propriété du système de tensegrité à avoir sa configuration d'équilibre à sa frontière d'assemblage. Whittier cherche donc les dimen-

sions de barre ou de câbles pour lesquelles le système n'admet plus de solution réelle, qui correspondent donc à la configuration limite.

**Méthodes statiques :** Les méthodes statiques se basent sur les équations d'équilibres statiques des structures de tensegrité. De la même manière que les méthodes géométriques, il existe des méthodes analytiques et numériques.

Dans le cadre d'une analyse statique d'un réseau de câbles et de barres, il convient d'établir des équations d'équilibre des forces à chacun des noeuds du mécanisme. Ces équations sont fortement non-linéaires, c'est pourquoi Shek [Sch74] introduit la notion de densité de force, comme le ratio entre la force interne à un élément (câble ou barre) et sa longueur. L'introduction de cette variable permet la linéarisation des équations d'équilibre aux noeuds. Une fois le problème linéarisé, il faut choisir les densités de force appropriées, puis le système peut être inversé facilement afin de trouver la position des noeuds dans l'espace. On peut donc écrire le problème statique d'équilibre aux noeuds sous la forme de l'équation (1.1) :

$$\mathbf{S}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (1.1)$$

avec  $\mathbf{S}$  la matrice de densité de force,  $\mathbf{x}$  les coordonnées cartésiennes des noeuds et  $\mathbf{f}$  les efforts extérieurs. Dans le cas d'un système de tensegrité, il n'y a pas d'efforts extérieurs donc  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ . De ce fait, pour satisfaire l'équation (1.1), le noyau de  $\mathbf{S}$  doit être non-vide. Le choix des densités de force doit donc être effectué avec précaution, ce qui rend cette méthode plus complexe pour les systèmes de tensegrité. Il convient donc de l'évaluer de plusieurs manières (intuitivement pour les systèmes simples, analytiquement ou numériquement) [VM99]. Le même système d'équations peut-être obtenu par méthode énergétique, en considérant chacun des composants (barre ou ressort/câble) comme un ressort linéaire avec sa raideur propre [CW96]. La détermination des positions des noeuds  $\mathbf{x}$  correspond au modèle statique direct.

Dans notre cas, les systèmes de tensegrité seront principalement conçus avec des ressorts linéaires et des barres. Les câbles seront des câbles actifs, qui viennent appliquer un effort à l'un des noeuds de la structure en parallèle des ressorts afin de modifier la configuration du système de tensegrité. La raideur des ressorts étant beaucoup plus faible que la raideur des barres (peu importe leur matériau de fabrication), on considérera que la raideur des barres est infinie. On utilisera donc une méthode énergétique pour déterminer le membre de gauche de l'équation (1.1), en cherchant le minimum d'énergie potentielle  $U$ . C'est la méthode d'analyse adoptée par Arsenault pour son étude des mécanismes de tensegrité 2D [Ars06]. On considère un mécanisme de tensegrité plan à 1 DDL (voir figure 1.23). A partir des coordonnées des différents points, la longueur des ressorts est évaluée et l'énergie potentielle du mécanisme est calculée :

$$U = \frac{1}{2}K \sum_{i=1}^3 l_i^2 = K \left( \frac{3}{2}\rho^2 + 3L^2 - 2y^2 - 4\rho\sqrt{L^2 - y^2} \right) \quad (1.2)$$

avec  $K$  la raideur des ressorts et les termes définis figure 1.23. A partir de l'équation (1.2), on peut dériver l'énergie potentielle en fonction de la variable de sortie considérée, ici  $y$ . Le système de tensegrité est en équilibre si cette dérivée est nulle :

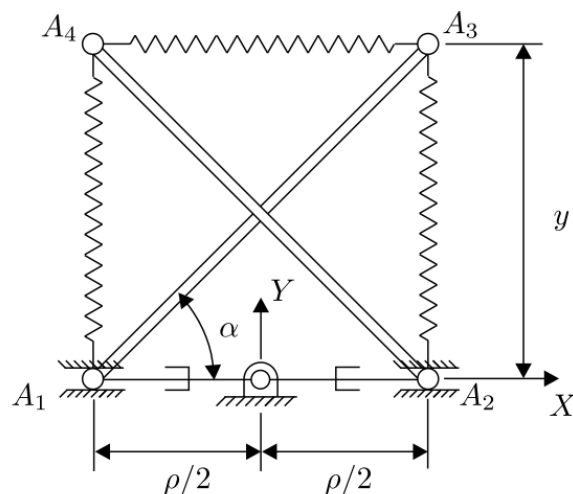


FIGURE 1.23 – Mécanisme de tensegrité plan à 1 DDL [Ars06].

$$\frac{dU}{dy} = \frac{4K(\rho - \sqrt{L^2 - y^2})y}{\sqrt{L^2 - y^2}} = 0 \quad (1.3)$$

L'équation (1.3) permet donc d'identifier les zéros de l'équation, obtenus pour  $y = 0$  (configuration plate), et  $y = \pm\sqrt{L^2 - \rho^2}$ , qui sont des configurations miroirs avec le mécanisme vers le haut ou vers le bas. En écartant la solution vers le bas et en supposant  $\rho < L$ , on obtient donc le modèle statique direct exprimant la variable de sortie en fonction de la variable d'entrée :

$$y = \sqrt{L^2 - \rho^2} \quad (1.4)$$

En appliquant le principe des travaux virtuels de Crane et. al. [CDC02], on peut obtenir facilement le membre de droite de l'équation (1.1) et ainsi obtenir le modèle statique pour un mécanisme de tensegrité soumis à des efforts externes, les efforts des câbles dans notre cas. Bakker et. al. [Bak+15] utilise aussi ce principe en utilisant une "fonction énergétique" liée au câble.

### Stabilité des systèmes de tensegrité

L'étude de la stabilité des systèmes poly-articulés a été étudiée de manière approfondie et en faire une présentation exhaustive serait aujourd'hui difficile. Les systèmes de tensegrité étant un cas particulier des systèmes poly-articulés, certaines méthodes des systèmes classiques se prêtent bien à la recherche de stabilité des systèmes de tensegrité. La recherche de forme présentée auparavant ne donnant pas d'indication sur la stabilité ou non des configurations obtenues, cette recherche de stabilité est indispensable. De manière générale, l'étude de la stabilité correspond à la réponse, en terme de configuration, d'un mécanisme à une perturbation extérieure. On établit donc l'équation suivante reliant la petite variation de force externe  $\mathbf{f}$  au niveau des noeuds à une petite déformation des coordonnées des noeuds  $\mathbf{x}$  :



$$\delta \mathbf{f} = \mathbf{K}_c \delta \mathbf{x} \quad (1.5)$$

Avec  $\mathbf{K}_c$  la matrice de raideur cartésienne d'un mécanisme. On peut définir également la matrice hessienne  $\mathbf{H}$  de l'énergie potentielle du mécanisme  $U$ , définie à partir des coordonnées généralisées  $\mathbf{q}$  du mécanisme, soit l'équation (1.6) [QG]:

$$\mathbf{H} = \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{q}^2} \quad (1.6)$$

La matrice  $\mathbf{H}$  est par définition symétrique. Pour qu'un système de tenségrité soit en équilibre dit stable, le système doit se trouver à un minimum d'énergie potentielle bien sûr, et la matrice  $\mathbf{H}$  doit être définie-positve. On peut relier  $\mathbf{H}$  à  $\mathbf{K}_c$  en utilisant la jacobienne du mécanisme reliant les coordonnées généralisées  $\mathbf{s}$  aux coordonnées cartésiennes des noeuds du mécanisme  $\mathbf{x}$ , tel que :

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{J} \delta \mathbf{q} \quad (1.7)$$

En combinant les équations (1.5) et (1.7), on a dans le cas où  $\mathbf{J}$  est inversible :

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{J}^{-\top} \mathbf{H} \mathbf{J}^{-1} \quad (1.8)$$

Cette formulation de la matrice hessienne et la matrice de raideur sera privilégiée dans ce manuscrit.

## Classification

Comme vu précédemment, l'étude statique d'un mécanisme de tenségrité permet de déterminer les configurations d'équilibre de celui-ci. Afin de s'assurer que cet équilibre est stable, il convient d'étudier la matrice hessienne du mécanisme, et de vérifier si celle-ci est définie positive pour obtenir un équilibre stable. Le modèle statique et la matrice hessienne du mécanisme étant dépendants de nombreux paramètres du mécanisme, on peut déterminer le nombre de solutions et leur état (stable/instable) en fonction des paramètres géométriques de celui-ci, ce qu'on appelle la classification de solutions. Wenger et Chablat [WC17] ont classé les solutions d'un mécanisme proche de celui présenté figure 1.23, composé d'une barre extensible, de deux barres rigides et de trois ressorts (voir figure 1.24).

La classification du nombre d'équilibres stables en fonction des paramètres géométriques et physiques revient à résoudre un système polynomial paramétré de la forme suivante :

$$E = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, p_1(\mathbf{v}) = 0, \dots, p_m(\mathbf{v}) = 0, q_1(\mathbf{v}) > 0, \dots, q_l(\mathbf{v}) > 0\} \quad (1.9)$$

Ce système est résolu en utilisant les variétés discriminantes (en anglais Discriminant Varieties (DV)) et la décomposition algébrique cylindrique (en anglais Cylindrical Algebraic Decomposition (CAD)). A partir de la normalisation des équations, on peut exprimer le nombre de solutions stables en fonction de deux paramètres (ici  $L_2$  et  $\rho$ ). La figure 1.25 montre un exemple de classification pour un cas sans charge externe. Le

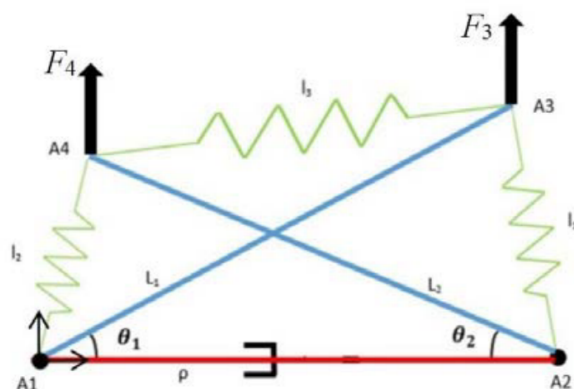


FIGURE 1.24 – Mécanisme de tensegrité plan à 1 DDL [WC17].

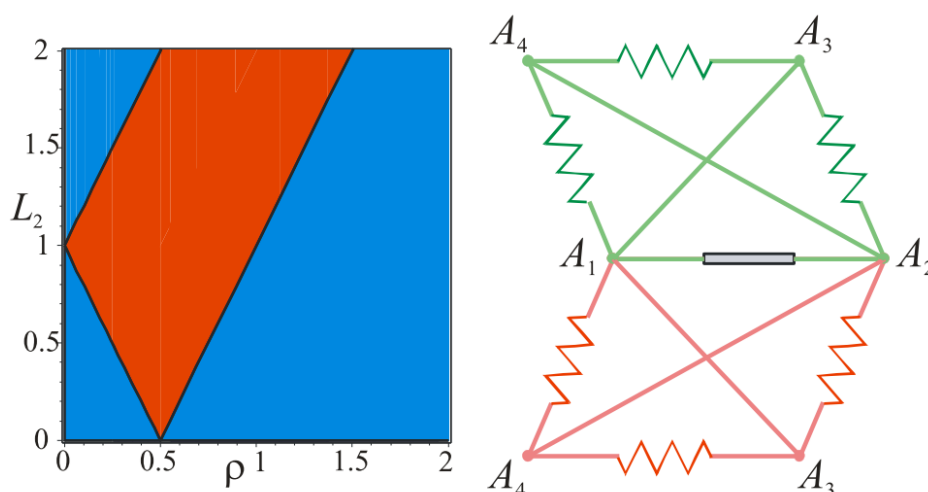


FIGURE 1.25 – Cas sans effort extérieur : CAD (gauche) et solution stable pour  $L_2 = 3/2$  et  $\rho = 1$  (droite) [WC17].

graphique à gauche de la figure décrit le nombre de solutions stables en fonction des deux paramètres géométriques (deux solutions stables dans la zone en rouge, une seule dans la zone en bleu). Les courbes frontières entre les zones rouges et bleues correspondent à des configurations de singularité ou le mécanisme est complètement plat.

### Commande des mécanismes de tensegrité

Cette partie s'intéresse à la commande en boucle fermée des mécanismes de tensegrité. La commande des mécanismes de tensegrité est un sujet vaste et complexe. En effet, les mécanismes de tensegrité peuvent être sous-actionnés ou sur-actionnés. La présence d'éléments déformables comme des ressorts, et le fait qu'il puisse y avoir des DDL non-contrôlés, nécessitent de considérer différents paramètres pour la commande, notamment les effets dynamiques qui entrent en compte et interviennent dans le comportement du mécanisme. La gestion des oscillations et des vibrations est aussi nécessaire et importante. Des straté-

gies de commande existent et ont été développées pour les mécanismes de tenségrité 2D, la modélisation de ces mécanismes étant constitué d'équations différentielles ordinaires (EDO). Pour les mécanismes de tenségrité spatiaux, la modélisation du système amène à la résolution de systèmes d'équations algébriques différentielles, qui sont bien plus complexes. De manière générale, le modèle dynamique d'un mécanisme de tenségrité peut-être obtenu avec la formulation des équations de Lagrange suivante :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} \quad (1.10)$$

Avec  $L$  lagrangien du mécanisme ou la somme de l'énergie potentielle et l'énergie cinétique. Cette formulation est assez pratique, puisque contrairement à la formulation de Newton-Euler du modèle dynamique (ou principe fondamental de la dynamique), elle ne nécessite pas de résoudre les équilibres des efforts à chaque noeud, qui peut devenir rapidement complexe dans le cas des systèmes de tenségrité. De nombreux algorithmes de commande sont basés sur le modèle dynamique, comme dans Djouadi et. al. [Djo+98] qui ont développé un algorithme minimisant les vibrations ou Aldrich et. al. [ASKD03] qui ont cherché à modifier la position d'équilibre d'une structure de tenségrité en un temps minimal.

Plus récemment, l'utilisation de Central Pattern Generator (CPGs) a montré son efficacité dans la commande des mécanismes de tenségrité. Les CPGs ou réseau locomoteur spinal en français est un réseau de neurones localisé dans la moëlle spinale responsable de la locomotion. Ce réseau génère des oscillations stables en sortie, sans nécessité d'informations capteurs, ce qui est très utile pour la robotique et la commande de mécanismes de tenségrité [Mir+] [Bli+12].

Les méthodes d'apprentissage et des réseaux de neurones ont profité d'un développement très rapide ces dernières années grâce aux vitesses de calcul des ordinateurs, et ce dans de nombreux domaines. La commande des robots et de systèmes de tenségrité ne fait pas exception. Agonino et. al. [Bru+14] ont développé des algorithmes génétiques pour la commande de leur robot SUPER-ball (voir figure 1.15. Pour cela , ils définissent d'abord un critère d'évaluation  $f$ , qui correspond à l'indice de performance du robot, soit la distance parcourue par le robot en 60 secondes :

$$f = d(C_1, A_1, \omega_1, \phi_1, \dots, C_{24}, A_{24}, \omega_{24}, \phi_{24}) \quad (1.11)$$

Cette fonction dépend de 96 paramètres. Un algorithme génétique est ensuite développé, qui part d'un jeu de  $n \times 96$  paramètres randomisés afin d'évaluer  $f$ . Les  $k$  meilleurs candidats sont conservés et les moins bons éliminés, et les  $k$  meilleurs candidats sont combinés avec des mutations aléatoires, et ainsi de suite. Ainsi, l'algorithme converge vers un choix optimal des 96 paramètres.

Cette thèse porte sur l'étude cinétostatique des structures de tenségrité. Dans le cadre d'expérimentations sur prototype, la commande en boucle fermée du mécanisme est indispensable. Bien que la modélisation dynamique soit abordée dans l'état de l'art et dans un des chapitres, les stratégies de commande ne seront pas abordées dans le détail. Les expériences seront menées soit en boucle ouverte, soit en appliquant une commande dynamique par couple calculé (Computed Torque Control ou CTC).

## 1.4 Objectifs et démarche

La robotique manipulatrice s'est énormément développée ces dernières décennies et est aujourd'hui présente dans un grand nombre de secteurs industriels, s'invitant même dans des petites entreprises (pour des tâches de manutention, logistique...) là où elle était avant cantonnée aux grandes industries comme l'automobile. Les enjeux actuels de la robotique manufacturière portent sur le développement de manipulateurs robotiques plus sûrs pour l'humain, permettant plus d'interactions et de collaboration, comme de l'aide à la manipulation de pièces ou outils, de l'assistance lors de certaines tâches demandant à la fois savoir-faire humain, force, précision... Pour toutes ces raisons, le développement actuel de la robotique manufacturière porte sur la sûreté des systèmes, la réduction de la masse, la perception de l'environnement extérieur et les interactions homme-machine. Depuis quelques années maintenant, la robotique de manipulation fait aussi son apparition dans le domaine médical, afin de pouvoir réaliser de la télé-opération à distance, en milieu stérile, et ce de manière très précise. La conception de manipulateurs sans composants ferro-magnétiques embarqués permet également certaines opérations sous scanner ou IRM.

Cette thèse part de ce constat et des recherches actuelles en robotique manipulatrice. Le principe de *tenségrité*, utilisé principalement en art et en architecture mais peu en robotique, nous est rapidement apparu comme un bon candidat à la conception et la fabrication de manipulateurs innovants. En effet, l'utilisation de structures uniquement composées de barres en compression et de câbles et ressorts en tension offre un grand nombre d'avantages structurels. La conception de telles structures est beaucoup plus légère et avec des inerties embarquées faibles, elle peut-être compacte voir même déployable. L'emploi d'éléments souples comme les câbles ou ressorts rend d'éventuelles interactions homme-machine plus sûres. L'utilisation de câbles pour l'actionnement de tels structures autorise de déporter les moteurs, ce qui permet non seulement de réduire la masse et l'inertie embarquée, mais aussi d'autoriser des manipulations dans des environnements complexes comme les interventions sous IRM.

Le second constat ayant amené à cette thèse est l'étude du vivant et de la nature. Dans énormément de domaines, la nature fait mieux que l'homme, avec autant ou moins de ressources (matière première, énergie), et ce de manière souvent neutre sur l'environnement. La présentation des caractéristiques des cous d'oiseaux par les biologistes nous ont paru particulièrement intéressantes, avec des contraintes proches des manipulateurs robotiques : légèreté, déployabilité, dextérité, robustesse... Il nous a semblé tout à fait légitime de chercher à s'inspirer de ces cous d'oiseaux, que ce soit d'un point de vue cinématique ou au niveau de l'actionnement, afin d'alimenter nos connaissances et notre savoir-faire de roboticiens. La *tenségrité* est un point de convergence des deux domaines, robotique et vivant, puisque le principe de *tenségrité* est également utilisé pour décrire l'équilibre des systèmes musculo-squelettiques et leur fonctionnement.

Les objectifs de cette thèse sont donc multiples. En premier lieu, il s'agit d'étudier le fonctionnement des systèmes musculo-squelettiques des cous d'oiseaux, afin d'en comprendre un peu mieux la constitution et le fonctionnement. Pour cela, des outils de biomécanique et robotique sont utilisés, comme la modélisation et l'analyse de surfaces de contact, et la modélisation cinématique du mouvement par chaîne cinématique fermées.

Une fois les mouvements intervertébraux des oiseaux identifiés et quantifiés, une sélection de chaînes cinématiques reproduisant plus ou moins fidèlement ces mouvements est identifiée. Ces chaînes cinématiques constituées de solides liés entre lieux par des liaisons simples sont en configuration de tensegrité. Elles peuvent donc grâce à l'ajout d'éléments en tension en des points précis devenir des structures de tensegrité à part entière. La modélisation cinéto-statique de ces structures peut donc être effectuée en utilisant les outils de modélisation propre à la robotique. A partir d'un cahier des charges prédéfini, une démarche de conception optimale peut-être menée afin de déterminer les meilleures dimensions de mécanismes. La fabrication de prototypes permet de vérifier la précision du modèle et les capacités réelles de tels mécanismes de tensegrité. Par l'assemblage en série de plusieurs mécanismes de tensegrité à 1 DDL, on peut concevoir des manipulateurs à plusieurs DDL présentant des caractéristiques intéressantes.

Le chapitre 2 porte sur l'étude du mouvement inter-vertébral des oiseaux, qui est reconstruit à partir d'une modélisation du contact entre surfaces articulaires. Des données issues de scans de vraies vertèbres en tomographie nous permettent de reconstruire un mouvement en 3D d'une vertèbre du cou par rapport à sa voisine. Ces résultats de mouvement sont ensuite utilisés afin de déterminer un modèle cinématique de l'articulation inter-vertébrale (dans le plan sagittal).

Le chapitre 3 prend comme données d'entrées deux mécanismes plans reproduisant les mouvements des vertèbres dans le plan sagittal. Ces mécanismes précédemment abordés d'un point de vue cinématique uniquement sont complétés par un actionnement, des ressorts, des propriétés de masses, et leur modélisation cinéto-statique est effectuée. Une démarche de conception optimale permet à partir de critères de conception définis de déterminer les dimensions optimales de chaque mécanisme, et de conclure sur leur performance en vue de la conception et fabrication de manipulateurs à plusieurs DDL. Un prototype de mécanisme à 1 DDL est présenté et permet de vérifier la véracité du modèle.

Le chapitre 4 porte sur la modélisation cinéto-statique d'un manipulateur plan à 2 DDL, constitué de deux mécanismes en série étudiés précédemment. La modélisation géométrique et cinématique d'un tel mécanisme est présentée, puis les stratégies d'actionnement possibles pour un tel mécanisme sont énumérées et détaillées. Une modélisation cinéto-statique de plusieurs stratégies d'actionnement distinctes permet de mieux comprendre l'influence de l'actionnement sur différents critères comme l'espace de travail statiquement atteignable ou la variation de raideur. Un prototype actionné par 4 câbles permet de vérifier la modélisation cinématique ainsi que la modélisation de l'actionnement.

Le chapitre 5 pose les bases de la modélisation de mécanisme plan à N DDL. Afin de concevoir et fabriquer un manipulateur à 10 DDL de grande dimension, le modèle dynamique complet d'un tel manipulateur est formulé par une méthode itérative. A partir de ce modèle, une démarche de conception est effectuée afin de déterminer les dimensions nécessaires à un manipulateur à 10 DDL pour répondre à un cahier des charges données (stabilité, espace de travail,...). Plusieurs stratégies d'actionnement sont étudiées, dont certaines bio-inspirées, afin de déterminer la meilleure stratégie d'actionnement permettant de respecter le cahier des charges.

Enfin, l'intérêt des manipulateurs utilisant le principe de tensegrité est discuté dans la conclusion, et des pistes de réflexion futures sont énumérées.

# Chapitre 2

## Analyse bio-mécanique du mouvement inter-vertébral

### 2.1 Introduction

Pour s’inspirer de la nature en robotique, deux facteurs doivent être associés : un modèle biologique correspondant aux exigences technologiques et une compréhension approfondie de ses caractéristiques mécaniques. Chez les oiseaux, on pense que le cou est devenu l’équivalent d’un bras car il sert à l’alimentation, au nettoyage et à de nombreuses autres tâches. En raison de cette polyvalence fonctionnelle, il offre un certain nombre de performances intéressantes qui sont d’un grand intérêt pour les manipulateurs robotiques [AW19]. Cependant, leurs caractéristiques mécaniques doivent être mieux comprises. Les données disponibles dans la littérature sont principalement composées de mesures visant à évaluer l’amplitude de mouvement des articulations cervicales [REKP17] [CRB13], mais ces données ne permettent pas de reconstituer le mouvement entre les vertèbres. Une telle reconstruction est une étape nécessaire pour construire un modèle robotique bio-inspiré avec des articulations cinématiques appropriées et peut apporter une meilleure compréhension du comportement fonctionnel du cou.

Pour atteindre cet objectif, le cou de l’oiseau peut être modélisé comme un système multicorps relié par des articulations. La modélisation du cou de l’oiseau peut être complexe et comprend des modèles cinématiques et dynamiques qui doivent être traités séparément. Le modèle cinématique se concentre sur le mouvement pur entre les corps, indépendamment des forces d’actionnement nécessaires pour déplacer ces corps, tandis que la modélisation dynamique considère à la fois le mouvement et les forces d’un système. Nous avons décidé de nous concentrer ici uniquement sur la modélisation cinématique du cou de l’oiseau, et en particulier sur la définition du mouvement entre deux vertèbres adjacentes. Le mouvement des cous d’oiseaux est difficile à observer et à quantifier. En effet, comme le cou est recouvert de plumes, son mouvement réel est le plus souvent caché. De plus, les mesures *in vivo* sont difficiles à réaliser.

Contrairement aux oiseaux, la cinématique des articulations humaines et en particulier du genou ont été largement étudiées dans un but clinique. [Sie+18] distingue deux approches principales pour l’interaction des os et la modélisation des articulations. La pre-

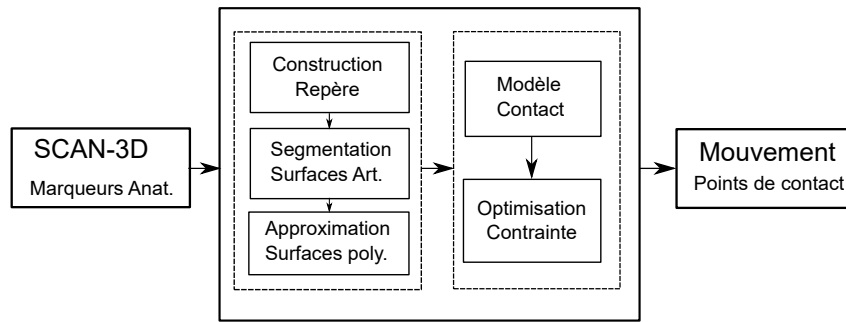


FIGURE 2.1 – Plan de travail de la méthode proposée.

mière est l'étude du contact en lui-même (localisation et contrainte) pour différentes positions articulaires obtenues à partir de mesures cadavériques [Isl+15] [Joh+14] [Gus+19]. Cette première approche est basée sur des méthodes d'éléments finis (FE) et des modèles élastiques. La seconde approche est l'étude de la relation spatiale entre les surfaces articulaires pendant un mouvement [Sie+18] [PC+04] [Cor+05] [Ott+10]. Contrairement au genou, la colonne vertébrale cervicale est composée de plusieurs petits os. Il est donc difficile d'effectuer des mesures *in vivo* et d'utiliser la première approche. De plus, contrairement aux mammifères qui ont des disques inter-vertébraux, les vertèbres chez les oiseaux s'articulent via des articulations synoviales très fines qui agissent davantage comme un fluide [Bö+19]. Ainsi, une approche corps déformable n'a pas vraiment de sens pour les contacts entre les vertèbres des oiseaux, qui présentent une morphologie d'articulation inter-vertébrale unique : les os s'articulent via des surfaces toroïdes <sup>1</sup> [Boa29]. Cette morphologie permet à la fois la mobilité et la stabilité, et rend le mouvement entre deux vertèbres plus traçable que d'autres morphologies d'articulation inter-vertébrale, telles que les articulations acoëles <sup>2</sup>.

On propose par la suite une méthode qui utilise le scan-3D (tomographie) des vertèbres afin de reconstruire le mouvement entre deux vertèbres cervicales d'un point de vue cinématique uniquement. Dans un premier temps, les surfaces articulaires sont extraites des scans et approximées grâce à des surfaces polynomiales [Ott+10] [Boy+99]. Deuxièmement, un modèle de contact entre les surfaces est établi, et un algorithme d'optimisation sous contraintes est proposé. Ensuite, pour une orientation donnée entre deux vertèbres, la position optimale entre les deux vertèbres, minimisant la distance entre les vertèbres et satisfaisant les équations de contact, est calculée. Ainsi, le mouvement entre deux vertèbres peut être calculé avec précision. La méthode proposée est résumée sur la figure 2.1.

<sup>1</sup>en forme de selle

<sup>2</sup>surfaces planes ; par exemple, chez les mammifères

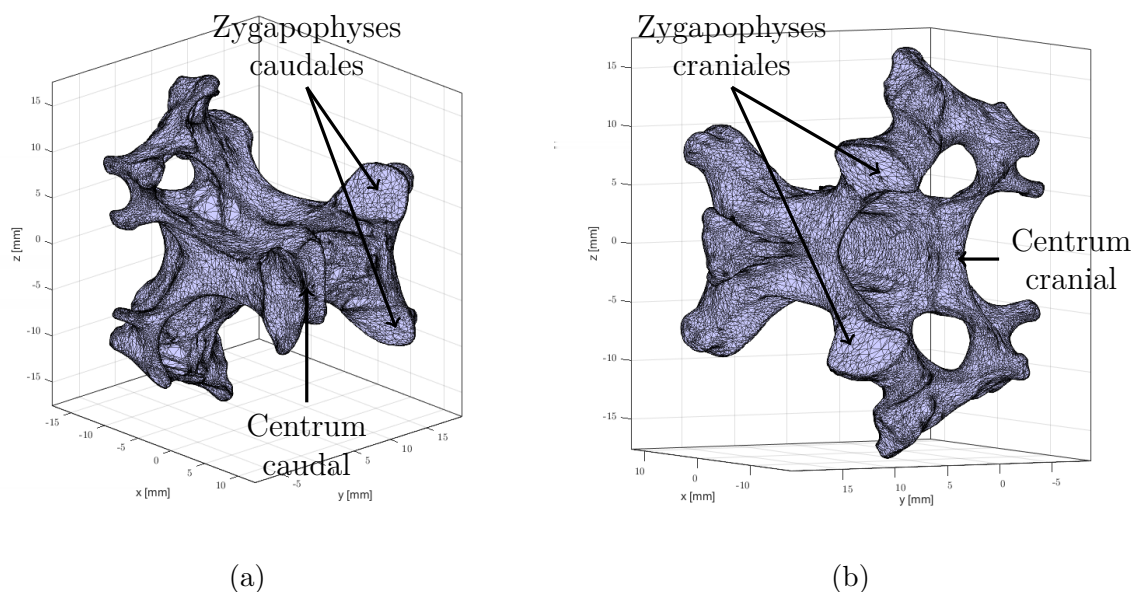


FIGURE 2.2 – Vues du scan de la 11<sup>ème</sup> vertèbre cervicale d'un vautour fauve.

## 2.2 Modélisation du contact entre vertèbres et reconstruction du mouvement

### 2.2.1 Acquisition des modèles 3D

#### Obtention des fichiers surfaciques des vertèbres par tomographie

Chez les oiseaux, toutes les vertèbres ont une structure identique même si leurs formes varient. Une vertèbre est composée de deux éléments structurels : le corps vertébral et la crête neurale dorsale. Ensemble, ils forment une cavité pour le passage de la moelle épinière. La crête neurale porte les processus articulaires crâniens et caudaux - les zygapophysys (voir figure 2.2). Deux vertèbres s'articulent via leur surface centrale et leurs zygapophysys. Ces zones de contact définissent et limitent le mouvement entre les vertèbres et ont une forme différente pour chaque vertèbre. Il est à noter que les vertèbres du cou de l'oiseau ont une faible épaisseur de cartilage articulaire, contrairement au disque inter-vertébral humain.

Les vertèbres ont été scannées par tomographie sur micro-ordinateur ( $\mu$ CT ; RX Solutions EasyTomMicro, 80kV). Les modèles 3D des vertèbres ont été reconstruits à partir des scans  $\mu$ CT (taille du voxel : 0,054 mm) en utilisant le logiciel Avizo (Version 6.3, Visualization Science Group) [Ter+19]. Certaines vertèbres ont été fabriquées en impression 3D à partir des scans en plus grande taille afin de pouvoir les manipuler aisément et d'avoir des observations physiques sur les contacts (figure 2.3).





FIGURE 2.3 – Trois vertèbres de pic noir  $V_5$ ,  $V_6$ ,  $V_7$  imprimées en 3D.

### Construction du repère lié à la vertèbre

Afin de travailler sur le mouvement entre les vertèbres, il faut considérer un système d'axes  $\mathcal{R}$  lié à chaque corps  $\mathcal{B}$ . Pour ce faire, trois marqueurs anatomiques sont pris en compte. Le premier marqueur  $S_0$  est placé au centre de la surface de contact caudale, le marqueur  $S_1$  au centre de la surface centrale crânienne, et  $S_2$  à l'extrémité dorsale de la crête neurale. Un système de coordonnées est défini comme suit (voir figure 2.4 et 2.5) :

- L'origine du repère est définie comme le point milieu entre  $S_1$  et  $S_0$
- L'axe cranio-caudal  $\vec{x}$  est défini par le vecteur  $\overrightarrow{S_1 S_0}$
- L'axe médio-latéral  $\vec{z}$  est normal au plan  $(S_0 S_1 S_2)$ , et dans la direction formant un repère direct.
- L'axe ventro-dorsal  $\vec{y}$  est normal à  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$  et est obtenu par produit vectoriel.

### Obtention des limites articulaires physiques par radio

Les limites articulaires réelles des oiseaux sont obtenues par radio sur des cadavres. La figure 2.6 montre différentes positions pour un spécimen de pic noir. Après avoir enlevé toutes les plumes et autres tissus mous, le cadavre a été positionné sur son côté latéral avec les premières vertèbres thoraciques (côté cranial) fixées sur le banc de travail horizontal. Un plomb a été inséré dans le canal auditif droit et gauche. Sur l'image aux rayons X, les deux plombs sont superposés, ce qui nous a permis d'éviter que le système tête-cou ne soit déformé. Ensuite, le cou a été soumis à une flexion maximale dans les directions dorsale et ventrale. Le cadavre a ensuite été positionné sur sa face dorsale avec les premières vertèbres crâniennes et thoraciques fixées au banc de travail afin de soumettre le cou à une flexion latérale maximale. Dans chacune de ces configurations, l'excursion d'un seul degré de liberté est maximisée, ce qui permet d'enregistrer l'angle inter-vertébral maximal sans endommager les muscles ou les ligaments. Bien que ce traitement crée une situation artificielle, il donne des indications importantes sur les mouvements possibles lors de grands mouvements de la tête [Kri+17]. On peut ainsi obtenir les amplitudes de flexion pour l'ensemble du cou (figure 2.7 et 2.8). On peut voir sur ces deux figures une tendance globale pour l'évolution des amplitudes et du débattement du cou, respectivement pour un pic noir et un vautour fauve. On peut déjà distinguer la forme de S dans le plan sagittal. La position au repos des vertèbres n'est pas indiquée car elle ne peut pas, contrairement

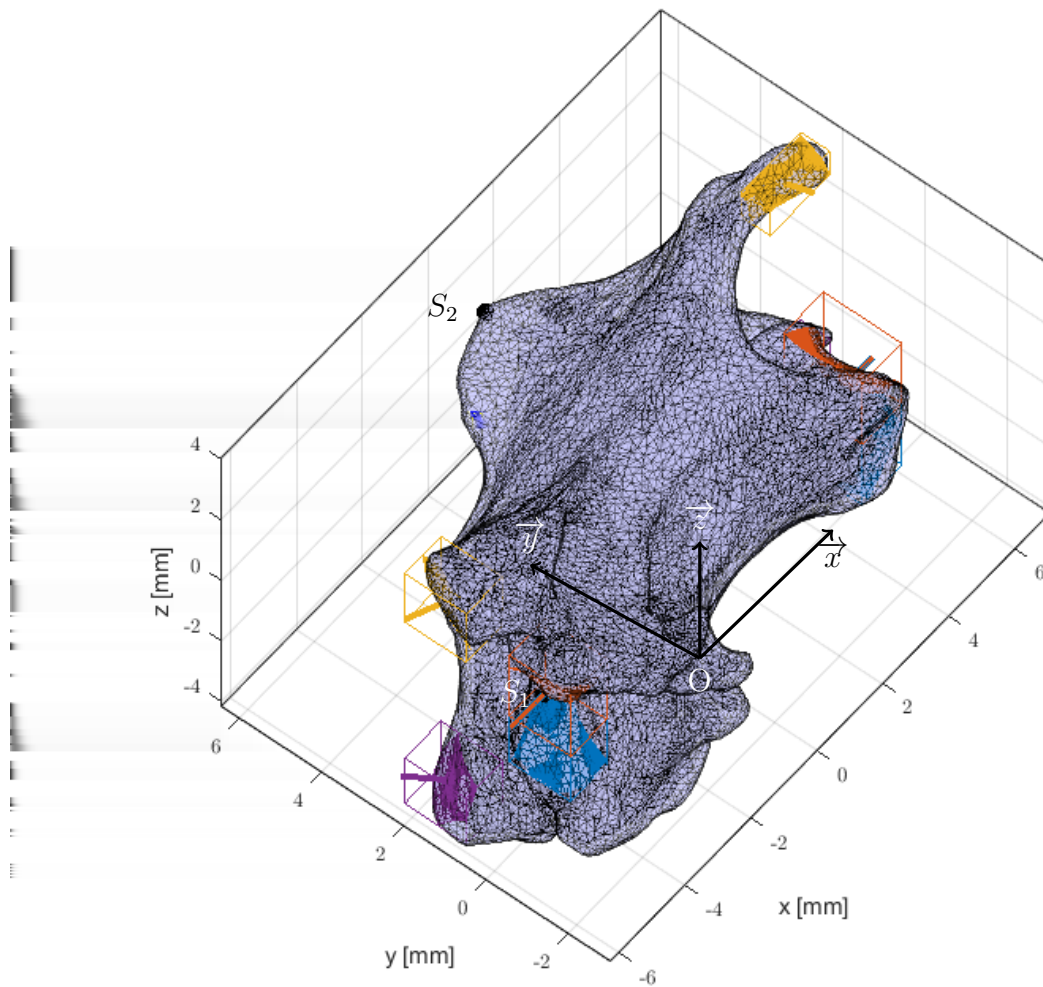


FIGURE 2.4 – Vue de la 5<sup>ème</sup> vertèbre cervicale du pic et de son repère associé. Les zones colorées correspondent aux surfaces de contact polynomiales (4 du côté cranial et 4 du côté caudal).

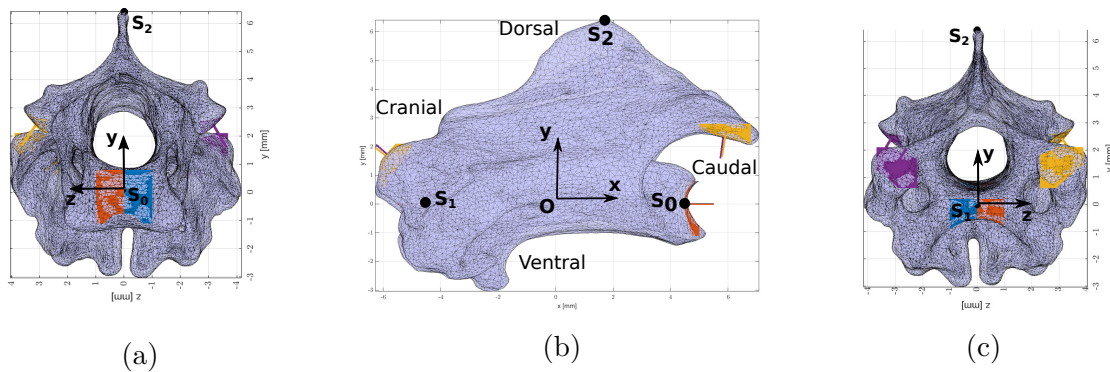


FIGURE 2.5 – Différentes vues de la 5<sup>ème</sup> vertèbre cervicale d'un pic noir : (a) Vue de face du côté caudal, (b) vue de côté, (c) vue de face du côté cranial. Les zones colorées correspondent aux surfaces de contact polynomiales (4 du côté cranial et 4 du côté caudal).

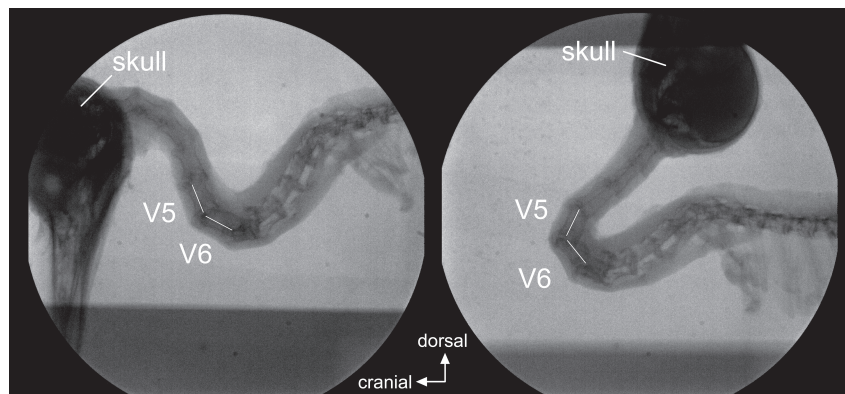


FIGURE 2.6 – Radios d'un pic noir montrant le cou en position neutre (gauche) et en flexion dorsale maximale (droite).

aux limites articulaires, être déterminée par mesure cadavérique.

## 2.2.2 Modèle de contact

Le mouvement entre deux vertèbres du cou d'oiseau étant complexe, les rotations décrites ci-dessus sont susceptibles d'être des rotations non pures, c'est-à-dire qu'une translation couplée est impliquée dans le mouvement. De tels mouvements couplés existent lorsque le centre de rotation se déplace dans le plan de mouvement, ce qui est le cas dans l'articulation du genou [PC+04]. Le mouvement précis peut être défini grâce à la modélisation des contacts, en définissant un certain nombre de points de contact qui contraignent les deux vertèbres à être positionnées de manière précise. Comme un point de contact entre deux surfaces enlève un degré de liberté, et qu'il n'y a que deux degrés de liberté entre deux vertèbres adjacentes, quatre points de contact définis sur quatre surfaces peuvent produire la mobilité attendue. Maintenant, un contact entre deux surfaces peut être décrit avec quatre équations de contact : deux équations stipulant que les surfaces partagent au moins un point commun et deux équations imposant que les surfaces partagent la même

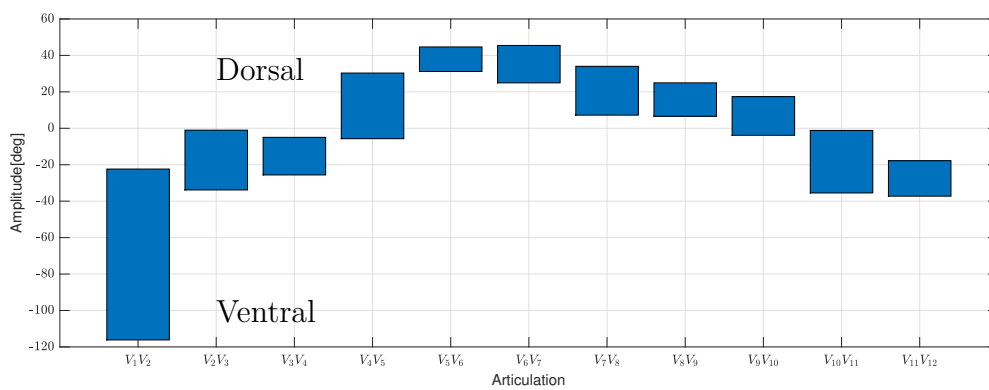


FIGURE 2.7 – Amplitudes de flexion ventrale et dorsale d’un pic noir (*dryocopus matrus*).

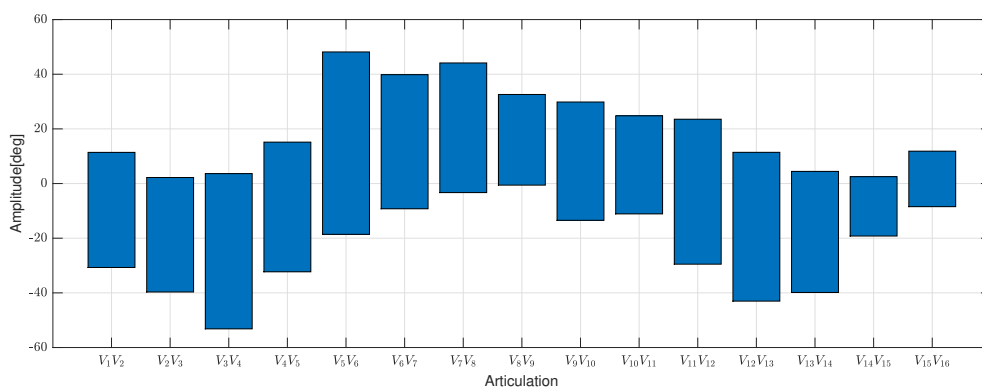


FIGURE 2.8 – Amplitudes de flexion ventrale et dorsale d’un vautour fauve (*Gyps fulvus*).

normale à leur point commun. Ensemble, ces quatre équations impliquent que les surfaces se touchent en un point de contact unique. D'autre part, un contact entre deux surfaces introduit trois inconnues, les trois coordonnées cartésiennes du point de contact à déterminer. Comme on considère quatre points de contact entre les deux vertèbres, on arrive à 16 équations pour 18 inconnues (12 coordonnées de points de contact et 6 degrés de liberté), ce qui donne deux inconnues supplémentaires indéterminées. Comme le mouvement relatif de deux vertèbres adjacentes est supposé ne reposer que sur deux rotations, le fait de considérer ces deux rotations comme des paramètres permet de définir un problème entièrement déterminé.

### 2.2.3 Reconstruction des surfaces de contacts

Une fois que les coordonnées attachées à chaque vertèbre sont définies, il faut définir les surfaces articulaires. Pour chaque vertèbre, 8 surfaces de contact distinctes sont définies : deux zones se trouvent au centre de la vertèbre, et deux zones sur les zygapophysys (des deux côtés crâniens et caudaux, voir les figures 2.4 et 2.5), en gardant à l'esprit que les 4 surfaces crâniennes s'articulent avec les 4 surfaces caudales de la vertèbre précédente, et les 4 surfaces caudales s'articulent avec les 4 surfaces crânielles de la vertèbre suivante. Comme les scanners osseux sont très précis et que les surfaces de contact sont faciles à identifier et à séparer du reste de la surface osseuse, les points correspondant aux surfaces sont sélectionnés à la main et isolés du reste du nuage de points à l'aide d'un logiciel de CAO (3DExpérience).

Afin d'obtenir les équations de contact, les surfaces réelles sont approchées avec la fonction *fit* de MATLAB, qui génère des surfaces polynomiales définies comme dans l'équation (2.1) :

$$S : f(u, v, w) = \sum_{h=0}^n \sum_{l=0}^n p_{hl} u^h v^l - w = 0 \quad (2.1)$$

où  $(u, v, w)$  sont les coordonnées dans le repère centré sur la surface, et  $n$  l'ordre de la surface polynomiale. L'axe principal  $\vec{w}$  et l'axe normal de chaque surface doivent être choisis judicieusement. Pour les surfaces centrales (c'est-à-dire les surfaces rouge et bleue sur les figures 2.4 et 2.5), l'axe général  $\vec{x}$  calculé précédemment est choisi comme axe normal  $\vec{w}$  des surfaces polynomiales. En effet, les points  $S_0$  et  $S_1$  définissant l'axe  $\vec{x}$  sont directement choisis au centre des surfaces du corps vertébral. En conséquence, l'équation polynomiale est de la forme (2.2).

$$S_c : f_c(x, y, z) = \sum_{h=0}^n \sum_{l=0}^n p_{hl} y^h z^l - x = 0 \quad (2.2)$$

Pour les zygapophysys, cependant, la direction de l'axe normal de la surface n'est pas un des axes anatomique de la vertèbre. Comme les surfaces des zygapophysys sont principalement plates (contrairement aux surfaces centrales), l'axe normal est choisi en calculant le plan des moindres carrés (c'est-à-dire la fonction *fit* avec un polynôme du premier ordre,  $n = 1$ ). L'axe normal obtenu est ensuite utilisé comme axe normal  $\vec{w}$  pour générer des surfaces polynomiales d'ordre plus élevé. La fonction polynomiale obtenue

	erreur centrum		erreur zygapophyses	
	m=2	m=3	m=1	m=2
$V_3$	0.155	0.11	0.42	0.021
$V_4$	0.110	0.091	0.282	0.021
$V_5$	0.084	0.056	0.125	0.024
$V_6$	0.084	0.048	0.125	0.027
$V_7$	0.091	0.057	0.069	0.018
$V_8$	0.087	0.047	0.101	0.024
$V_9$	0.076	0.051	0.150	0.025
$V_{10}$	0.064	0.045	0.132	0.021
$V_{11}$	0.066	0.045	0.125	0.018
$V_{12}$	0.092	0.078	0.144	0.021
$V_{13}$	0.132	0.106	0.199	0.033
$V_{14}$	0.075	0.052	0.157	0.030
$V_{15}$	0.089	0.061	0.108	0.024

TABLE 2.1 – Erreur moyenne (en mm) entre les surfaces réelles et polynomiales pour les vertèbres de vautour.

dans le repère local  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  de la zygapophyse est ensuite transformée dans le repère global  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  des vertèbres, ce qui donne l'équation (2.3) :

$$S_z : f_z(x, y, z) = \sum_{h=0}^n \sum_{l=0}^n \sum_{m=0}^n p_{hlm} x^h y^l z^m = 0 \quad (2.3)$$

L'ordre du polynôme est choisi de telle sorte que l'erreur moyenne, c'est-à-dire la distance normale entre les surfaces calculées et les points réels des scanners, soit inférieure à la taille du voxel du scanner (c'est-à-dire  $0,054 \text{ mm}$ ). Le tableau 2.1 montre qu'un troisième ordre au moins est nécessaire pour l'approximation des surfaces centrales, alors qu'un deuxième ordre est suffisant pour la zygapophyse. Cela est dû au fait que les zygapophyses sont assez plates, ce qui rend la détermination de leur axe normal  $w$  plus précise. Un ordre plus grand a été testé pour les deux surfaces, mais le gain de précision s'est avéré très faible.

Les coefficients des polynômes ne sont pas détaillés mais sont donnés directement par la fonction *fit* pour l'équation (2.2) et dépendent également du repère local de la zygapophyse pour l'équation (2.3).

## 2.2.4 Calcul numérique par problème d'optimisation

### Modélisation des contacts

La vertèbre  $i$  s'articule de son côté caudal avec le côté crânial de la vertèbre  $j$ . Soit deux surfaces  $S_{i_k}$  et  $S_{j_k}$  attachées aux corps des vertèbres  $\mathcal{B}_i$  et  $\mathcal{B}_j$ , respectivement et écrites dans les repères  $\mathcal{R}_i$  et  $\mathcal{R}_j$ , respectivement (voir figure 2.9). Les corps mentionnés ci-dessus sont adjacents dans la chaîne du cou,  $j = i + 1$ , mais pour une question de compacité,

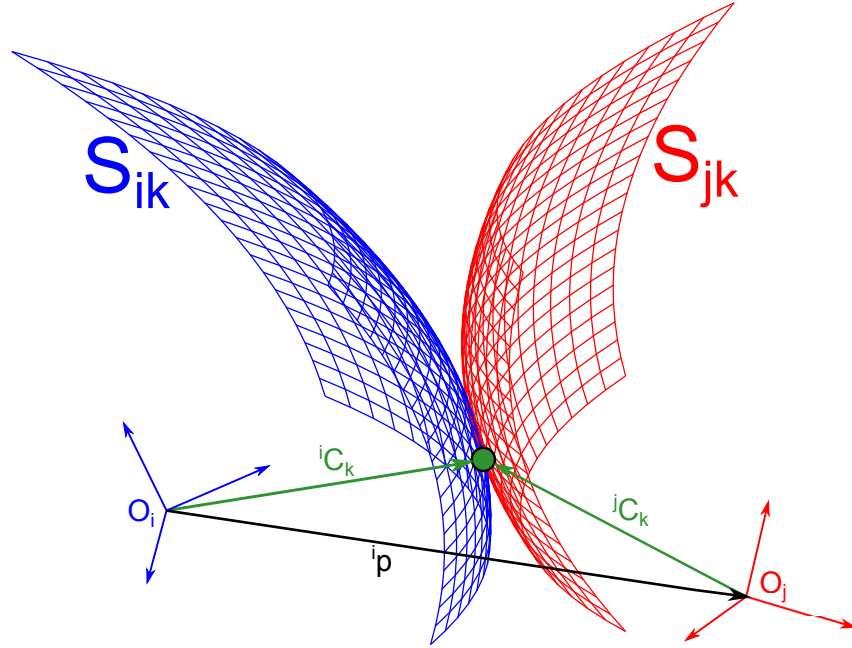


FIGURE 2.9 – Représentation de deux surfaces  $S_{ik}$  et  $S_{jk}$  en contact au point  $C_k$ .

la notation  $j$  est conservée. L'indice  $k$  correspond au numéro de la surface de contact :  $k = \llbracket 1, 4 \rrbracket$ . Les équations des surfaces sont :

$$S_{i_k}({}^i x, {}^i y, {}^i z) = 0 \quad (2.4)$$

$$S_{j_k}({}^j x, {}^j y, {}^j z) = 0 \quad (2.5)$$

où  $({}^i x, {}^i y, {}^i z)$  (respectivement  $({}^j x, {}^j y, {}^j z)$ ) sont les coordonnées d'un point dans le repère  $\mathcal{R}_i$  (respectivement dans le repère  $\mathcal{R}_j$ ).

Les expressions des surfaces dépendent de  $k$  qui définit la nature de la surface de contact. Pour  $k = \{1, 2\}$ , la surface est une surface centrale (centrum) et on prend l'équation (2.2), alors que pour  $k = \{3, 4\}$ , la surface est une zygapophyse et on prend l'équation (2.3).

On définit également les gradients des deux surfaces exprimés dans leur propre repère :

$${}^i \nabla S_{i_k} = \left( \frac{\partial S_{i_k}}{\partial {}^i x}, \frac{\partial S_{i_k}}{\partial {}^i y}, \frac{\partial S_{i_k}}{\partial {}^i z} \right)^\top \quad (2.6)$$

$${}^j \nabla S_{j_k} = \left( \frac{\partial S_{j_k}}{\partial {}^j x}, \frac{\partial S_{j_k}}{\partial {}^j y}, \frac{\partial S_{j_k}}{\partial {}^j z} \right)^\top \quad (2.7)$$

$$k = 1, 2, 3, 4 \quad (2.8)$$

Deux surfaces sont en contact si et seulement si elles remplissent les conditions suivantes : (i) elles ont un point de contact commun  $C_k$  et (ii) les deux surfaces ont une normale commune au point de contact. Ces deux conditions peuvent être exprimées par

quatre équations, à savoir  $C_k$  satisfait l'équation (2.4) et (2.5) et le plan tangent des deux surfaces est le même au point de contact  $C_k$ , c'est-à-dire en prenant les coordonnées appropriées de (2.6) et (2.7) :

$$\begin{cases} S_{ik}({}^i\mathbf{C}_k) = 0 \\ S_{jk}({}^j\mathbf{C}_k) = 0 \\ {}^i\nabla S_{ik}x^i \nabla S_{jk}z - {}^i\nabla S_{jk}x^i \nabla S_{ik}z = 0 \\ {}^i\nabla S_{ik}y^i \nabla S_{jk}z - {}^i\nabla S_{jk}y^i \nabla S_{ik}z = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Notons que les équations ci-dessus doivent être exprimées dans le même repère. Soit  ${}^i\mathbf{p} = [t_x, t_y, t_z]^\top$  le vecteur de position du centre du repère  $\mathcal{R}_j$  dans  $\mathcal{R}_i$ . La relation reliant les coordonnées de  ${}^i\mathbf{C}_k$  et  ${}^j\mathbf{C}_k$  dans le repère  $\mathcal{R}_i$  et  $\mathcal{R}_j$ , respectivement, peut être écrite comme suit [KD04] :

$${}^i\mathbf{C}_k = {}^i\mathbf{R}_j {}^j\mathbf{C}_k + {}^i\mathbf{p} \quad (2.10)$$

où  ${}^i\mathbf{R}_j$  est la matrice de rotation qui transforme un élément en  $\mathcal{R}_i$  en un élément en  $\mathcal{R}_j$ , décrit avec des angles d'Euler extrinsèques  $[\alpha, \beta, \gamma]^\top$  :

$$\begin{aligned} {}^i\mathbf{R}_j &= \mathbf{Rot}(x, \alpha)\mathbf{Rot}(y, \beta)\mathbf{Rot}(z, \gamma) \\ {}^i\mathbf{R}_j &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & S\alpha \\ 0 & -S\alpha & C\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\beta & 0 & -S\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ S\beta & 0 & C\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\gamma & S\gamma & 0 \\ -S\gamma & C\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.11)$$

où C et S représentent respectivement les fonctions *cosinus* et *sinus*.

Notons que la relation (2.10) représente des points. Pour les vecteurs, le dernier terme  ${}^i\mathbf{p}$  doit être supprimé [KD04].

Comme observé précédemment, on obtient alors un système de quatre équations à chaque point de contact, et un point de contact introduit trois inconnues (les trois coordonnées de position de  $C_k$ ). Comme les repères  $\mathcal{R}_i$  et  $\mathcal{R}_j$  sont liées par l'équation (2.10), le système (2.9) dépend également du vecteur de position  ${}^i\mathbf{p}$  et de la matrice de rotation  ${}^i\mathbf{R}_j$ .

### Définition du problème optimal pour une résolution numérique

Comme indiqué précédemment, le mouvement entre deux vertèbres adjacentes du cou de l'oiseau peut être défini par 4 points de contact qui obligent les deux vertèbres à être positionnées de manière précise : deux points de contact au centre (un de chaque côté du plan sagittal des vertèbres, à savoir le plan  $(xOy)$ ), et un point de contact sur chaque zygapophyse. Comme chaque point de contact implique 4 équations, il y a un système de 16 équations de contact à résoudre. Les inconnues sont les coordonnées de chaque point de contact, et les 6 paramètres de position et d'orientation entre les repères  $R_i$  et  $R_j$ , ce qui donne 18 inconnues au total. Un système d'équations complet est alors obtenu en imposant les valeurs des angles  $\beta$  et  $\gamma$  décrivant la rotation autour des axes  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ , respectivement. Ces deux variables d'angle sont discrétisées et pour chaque valeur de  $\beta$



et  $\gamma$ , on peut déterminer la position correspondante  $[t_x, t_y, t_z]$  et l'angle de rotation  $\alpha$  satisfaisant toutes les équations de contact (c'est-à-dire que chaque surface  $S_{i_k}$  du corps  $i$  est en contact avec sa surface correspondante  $S_{j_k}$  du corps  $j$  au point  $C_k$ ).

Le système d'équations est résolu comme un problème optimal sous contraintes définies comme suit. Ce problème optimal sera résolu en utilisant la fonction *fmincon* de MATLAB :

$$\min_{\mathbf{q}} f(\mathbf{q}) \text{ tel que } \begin{cases} |\mathbf{c}(\mathbf{q})| < 0 \\ \mathbf{l}_b \leq \mathbf{q} \leq \mathbf{u}_b \end{cases} \quad (2.12)$$

où  $\mathbf{q} = [\mathbf{d}_i, \mathbf{d}_j, {}^i\mathbf{C}_1, {}^i\mathbf{C}_2, {}^i\mathbf{C}_3, {}^i\mathbf{C}_4, t_x, t_y, t_z, \alpha]^\top$  est le vecteur d'optimisation. Huit nouveaux paramètres  $\mathbf{d}_i = [d_{i1}, d_{i2}, d_{i3}, d_{i4}]^\top$  et  $\mathbf{d}_j = [d_{j1}, d_{j2}, d_{j3}, d_{j4}]^\top$  ont été introduits. Ils correspondent à un décalage de chaque surface des vertèbres  $i$  et  $j$  le long de l'axe normal de la surface considérée (voir l'équation (2.13)). Cette flexibilité dans la résolution du problème a été introduite pour éviter les artefacts numériques et pour obtenir des mouvements plus fluides. D'un point de vue physique, ce décalage peut être considéré comme une épaisseur de joint synovial entre les surfaces de contact. Sa valeur est inconnue et peut varier le long de la trajectoire (c'est-à-dire qu'il dépend de  $\beta$  et  $\gamma$ ), mais il est autorisé à varier entre  $\pm 0.05 \text{ mm}$ . Cette valeur a été choisie conformément à la précision du tomographe qui est de l'ordre de  $0.05 \text{ mm}$ . Le reste du vecteur d'optimisation contient les 16 inconnues à déterminer,  $f$  est la fonction objectif,  $\mathbf{c}$  est le vecteur des contraintes égalités non linéaires,  $\mathbf{l}_b$  (resp.  $\mathbf{u}_b$ ) le vecteur des limites inférieures (resp. limites supérieures) du vecteur d'optimisation. La fonction objectif à minimiser est choisie comme la plus petite erreur quadratique de la somme des équations de contact :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{q}) = & \sum_{4k} [(d_{ik} + S_{ik}({}^i\mathbf{C}_k))^2 + (d_{jk} + S_{jk}({}^j\mathbf{C}_k))^2 \\ & + ({}^i\nabla S_{ik}x^i \nabla S_{jk}z - {}^i\nabla S_{jk}x^i \nabla S_{ik}z)^2 \\ & + ({}^i\nabla S_{ik}y^i \nabla S_{jk}z - {}^i\nabla S_{jk}y^i \nabla S_{ik}z)^2] \end{aligned} \quad (2.13)$$

Comme les équations de surface (2.4) et (2.5) ne tiennent pas compte des limites physiques des surfaces articulaires, les deux vecteurs  $\mathbf{l}_b$  et  $\mathbf{u}_b$  et le vecteur  $\mathbf{c}$  imposent que les points de contact se trouvent à l'intérieur d'un prisme qui comprend la totalité de la surface articulaire, et respectivement pour chaque point de contact et pour les surfaces décrites (2.4) et (2.5).

## 2.2.5 Résultats et discussion

### Mouvement entre deux vertèbres de pic noir

Les résultats de la méthode décrite sont présentés pour un spécimen de pic noir *Dryocopus martius*, et pour les vertèbres numérotées  $V_5$  et  $V_6$ . Comme un mouvement combiné impliquant deux rotations autour de  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  est difficile à représenter, les deux rotations possibles sont effectuées séparément. La figure 2.10 montre l'évolution des coordonnées du repère par rapport à  $\gamma$  pour  $\beta = 0^\circ$ , à savoir la translation  $t_x$ ,  $t_y$  et  $t_z$  entre les repère  $\mathcal{R}_5$  et

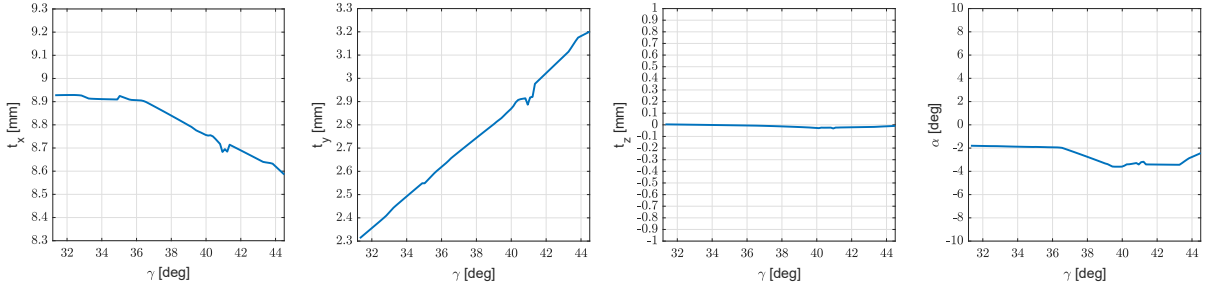


FIGURE 2.10 – Évolution de la position entre les deux vertèbres pour  $\gamma \in [31.2^\circ, 44.5^\circ]$  et  $\beta = 0^\circ$ .

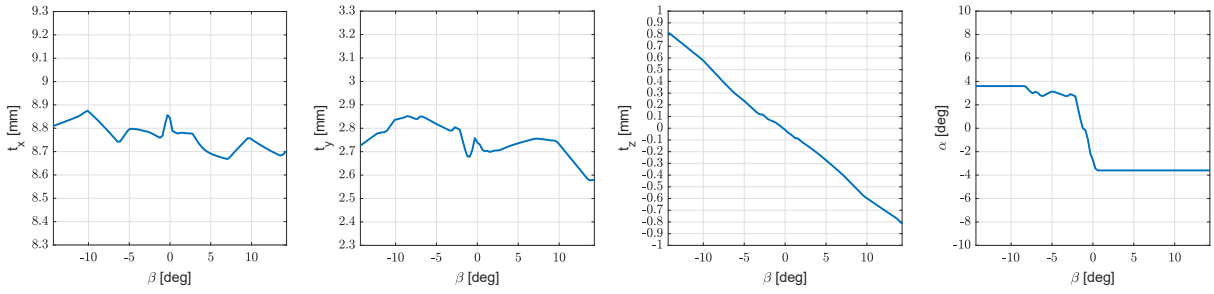


FIGURE 2.11 – Évolution de la position entre les deux vertèbres pour  $\beta \in [-15^\circ, 15^\circ]$  et  $\gamma = 37.9^\circ$ .

$\mathcal{R}_6$ , et la rotation  $\alpha$  autour de  $\vec{x}$ . La rotation dans le plan sagittal  $\gamma$  a été discrétisée entre les limites obtenues sur les mesures aux rayons X (figure 2.6), donc  $\gamma \in [31.2^\circ, 44.5^\circ]$ . On peut voir que l'algorithme converge pour toutes les valeurs considérées de  $\gamma$ , ce qui signifie que pour chaque valeur discrétisée de  $\gamma$  on trouve une solution minimisant  $f$  et satisfaisant les équations de contraintes. Pour réduire les effets des minima locaux, la fonction *fmincon* est exécutée plusieurs fois avec différents points de départ en utilisant la toolbox d'optimisation globale et la fonction *multistart* de MATLAB. La plus grande amplitude de mouvement est observée pour la translation  $t_y$  (voir figure 2.10). La translation  $t_z$  est proche de zéro et ne varie pas beaucoup, ce qui était prévu pour un mouvement dans le plan sagittal. On pouvait également s'attendre à ce que  $\alpha = 0^\circ$  à partir des observations physiques, néanmoins on voit que la rotation  $\alpha$  varie entre  $-4^\circ$  et  $-2^\circ$ . Deux types d'erreurs peuvent être observés, l'erreur de décalage de l'ordonnée à l'origine, qui provient de la reconstruction du repère des vertèbres qui n'est pas exacte et les erreurs de variation dues à l'approximation des surfaces.

Une rotation est également effectuée autour de  $\vec{y}$ . La figure 2.11 montre l'évolution des coordonnées du repère par rapport à  $\beta$  pour une valeur fixe de  $\gamma = 37.9^\circ$ , la valeur moyenne entre  $\gamma_{min}$  et  $\gamma_{max}$ . L'angle  $\beta$  a été discrétisé entre les limites obtenues sur les mesures aux rayons X, donc  $\beta \in [-15^\circ, 15^\circ]$ . Comme prévu, la plus grande variation concerne la valeur  $t_z$ . Les valeurs  $t_x$  et  $t_y$  varient moins, mais sont moins lisses que pour le mouvement autour de  $\vec{z}$ . Cela peut être dû au calcul numérique, qui ne lie pas les

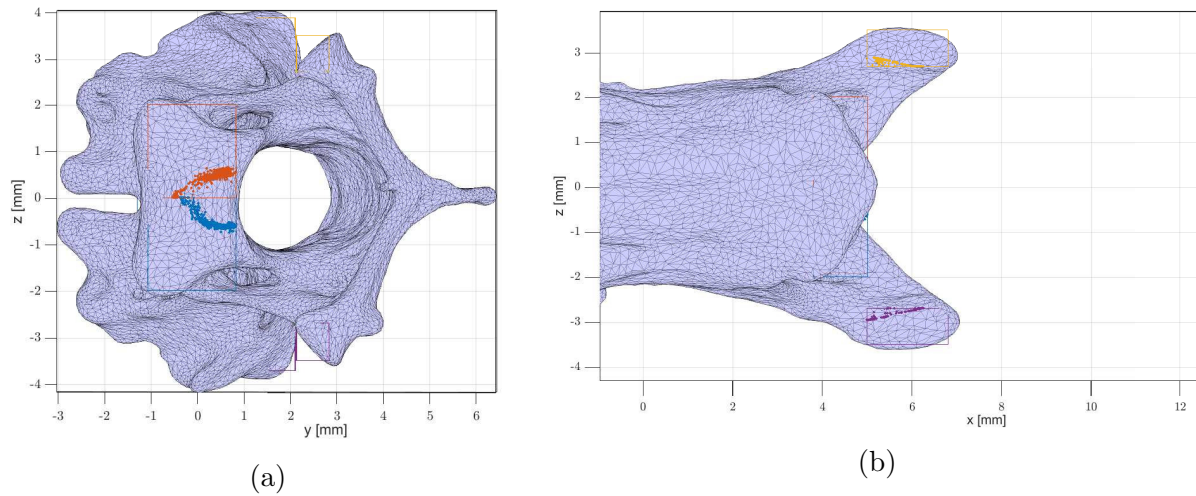


FIGURE 2.12 – Localisation des points de contact sur la vertèbre 5 pour toutes les positions possibles : centrum (a), zygapophysies (b).

solutions pour les différentes valeurs de  $\beta$ , ce qui signifie que différents minimums locaux peuvent être trouvés d'une valeur à l'autre. Comme le mouvement est une rotation autour de  $\vec{y}$ , on peut voir que l'évolution de  $t_x$ ,  $t_y$  et  $\alpha$  est presque symétrique, comme on pouvait s'y attendre.

Une vidéo compilant les mouvements des figures 2.10 et 2.11 est disponible sur [<http://videos.univ-nantes.fr/medias/2020/05/f7d5863c22b38c8322d5377a376872f7.mp4>]. L'observation basée sur cette animation valide la méthodologie d'un point de vue qualitatif, car le mouvement entre les vertèbres est lisse et les surfaces de contact sont respectées. Pour tous les ensembles d'orientations possibles  $[\beta, \gamma]$ , les coordonnées des points de contact peuvent être obtenues (voir figure 2.12). On peut voir que la position des points de contact se situe autour d'une petite zone de la surface articulaire complète.

### Comparaison entre les limites réelles et calculées

En observant la valeur de la fonction d'optimisation  $f$ , on remarque un résultat secondaire intéressant (figure 2.13). En essayant de discrétiser l'angle  $\gamma$  dans le plan sagittal pour un intervalle plus grand que celui mesuré avec les rayons X, on remarque que la valeur de  $f$  augmente de façon exponentielle une fois que l'angle  $\gamma$  atteint une valeur spécifique. Cette valeur pour la flexion dorsale est proche de la limite physique articulaire  $\gamma_{max}$ , mais pour la flexion ventrale, l'erreur n'augmente pas au-delà de la valeur  $\gamma_{min}$ . Ce résultat est conforme à l'observation réelle sur les vertèbres. En effet, pour la flexion dorsale, nous voyons que la limite articulaire est une limite physique de contact entre les os, qui ne peut être dépassée car les deux vertèbres sont en contact du côté de leur crête neurale. Ce contact n'est pas pris en compte dans ce modèle mais correspond à une limite de contact sur les surfaces de la zygapophyse. Sur la face ventrale, cependant, la limite mesurée est due à l'action des muscles et des tendons, qui sont principalement situés sur la face dorsale du cou de l'oiseau et pourraient participer à une restriction de la flexion ventrale

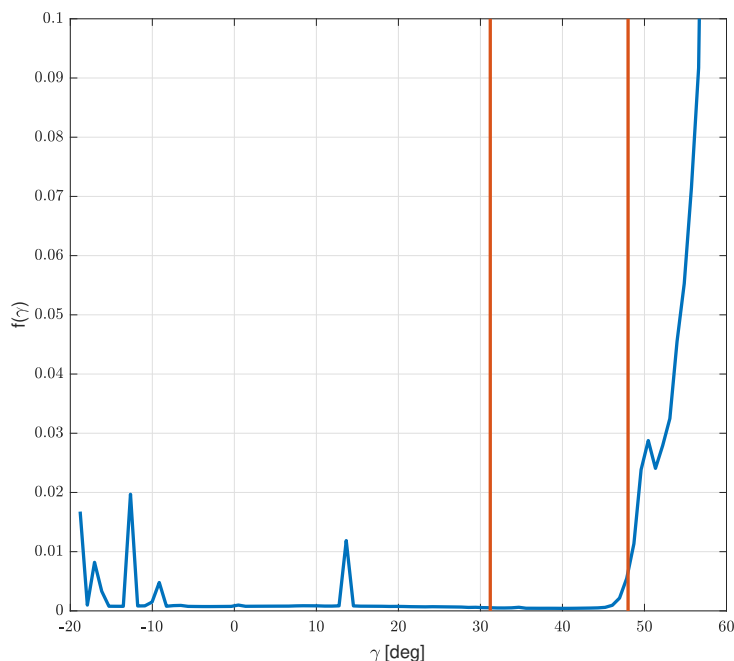


FIGURE 2.13 – Valeur de  $f(q)$  selon  $\gamma$ . Les limites articulaires mesurées sont montrées en rouge.

[Bö+19]. Comme notre méthode est uniquement basée sur la modélisation du contact des os, l'interaction avec les tendons et les muscles n'est pas prise en compte, ce qui rend l'amplitude de mouvement possible en flexion ventrale plus grande que celle mesurée.

### Mouvements entre vertèbres d'un cou de vautour fauve

La méthode a été détaillée précédemment pour un couple de vertèbres de pic noir, pour lesquelles les données scannées ne sont que partielles. Les biologistes nous ayant également fournis un scan d'un cou entier de vautour fauve (*Gyps Fulvus*), l'algorithme de reconstruction de mouvement a également été éprouvé sur l'ensemble des vertèbres qui composent le cou du vautour (13 vertèbres scannées soit 12 couples de vertèbres).

La figure 2.14 montre l'évolution du mouvement de la vertèbre 8 d'un vautour fauve par rapport à la vertèbre 7, pour  $\gamma \in [-2.8^\circ, 44.1^\circ]$ . Comme précédemment, on peut remarquer que le mouvement selon l'axe  $z$  varie peu le long de la trajectoire. L'offset en  $z$  ainsi qu'en  $\alpha$  s'explique par la construction des repères qui peuvent être décalés.

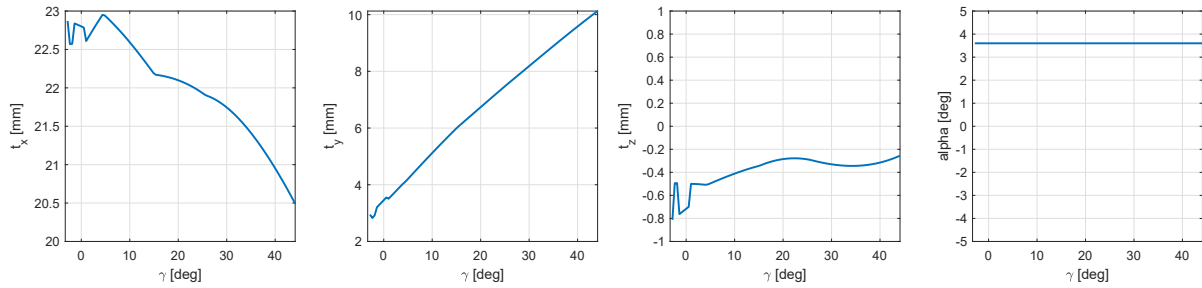


FIGURE 2.14 – Évolution de la position entre les deux vertèbres  $V_7$  et  $V_8$  du *Gyps Fulvus* pour  $\gamma \in [-2.8^\circ, 44.1^\circ]$  et  $\beta = 0^\circ$ .

## 2.3 Approche du mouvement dans le plan sagittal par mécanismes simples

### 2.3.1 Analyse géométrique des mécanismes

Une fois le mouvement des vertèbres reconstruit, on peut essayer de l'approcher par des mécanismes simples. Il a été montré que différents mécanismes peuvent être appropriés pour la modélisation d'articulation, et que le vivant se compose d'articulations en chaînes ouvertes ou fermées [Lev97]. La cinématique du genou, par exemple, peut-être reproduite dans le plan sagittal à partir d'un anti-parallélogramme formé par les ligaments croisés [HA10]. Pour ce qui est du mouvement entre vertèbres d'oiseau dans le plan sagittal, on cherche à savoir quel peut-être le meilleur mécanisme pour modéliser le mouvement. Le mécanisme doit être un mécanisme à 1 DDL, et donc plusieurs choix s'offrent à nous, à partir de [Tod02]. A partir de la synthèse des mécanismes à 1 DDL et de l'état de l'art des mécanismes de tensegrité, il a été choisi de comparer trois mécanismes entre eux :

- Un anti-parallélogramme simple (figure 2.15a)
- Un anti-parallélogramme à offset (figure 2.15b)
- Une liaison pivot (figure 2.15c)

#### Pivot

Le mécanisme pivot (figure 2.15c) est composé de deux triangles isocèles articulés au niveau de leur sommet par une liaison pivot. Les deux triangles isocèles peuvent avoir des dimensions différentes et sont décrites par la longueur de leurs demi bases  $r_1$  et  $r_2$ , ainsi que par leur hauteur  $h_1$  et  $h_2$ . La position de la liaison, soit la position du triangle supérieur par rapport au triangle inférieur, est décrite par l'angle  $\theta_p$ . La première étude se concentrant uniquement sur une analyse géométrique, la stratégie d'actionnement n'est pas détaillée ici.

On peut décrire dans le plan  $(xOy)$  la position du point  $p_p$  de la manière suivante :

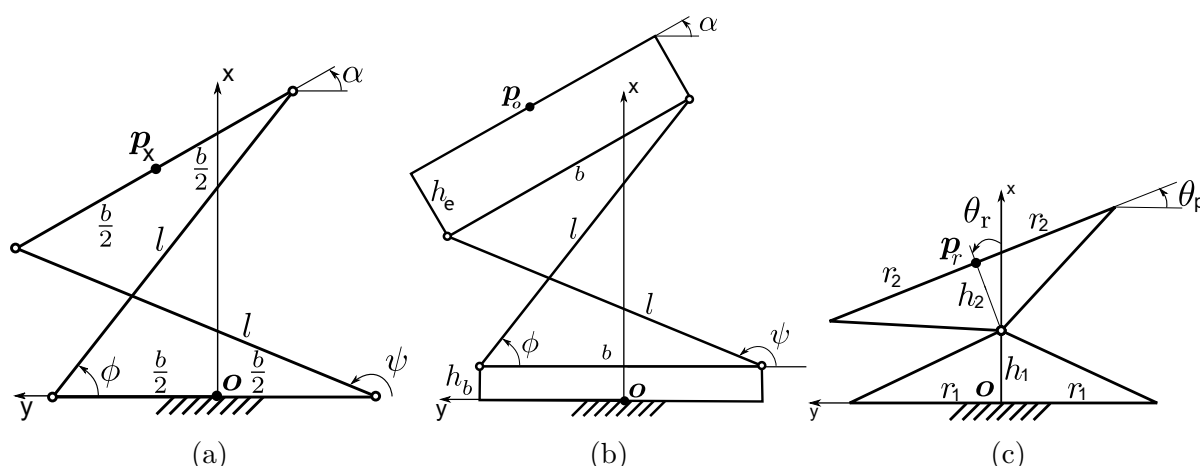


FIGURE 2.15 – Trois mécanismes plans à 1 DDL proposés : (a) Anti-parallélogramme ou Articulation en X, (b) Anti-parallélogramme avec offset, (c) Pivot.

$$p_p = \begin{pmatrix} h_1 + h_2 \cos(\theta_p) \\ h_2 \sin(\theta_p) \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

On peut remarquer qu'ici seule la hauteur des deux triangles isocèles importe. Les autres dimensions nous seront utiles pour la modélisation statique.

### Anti-parallélogramme

L'anti-parallélogramme (figure 2.15a), quant à lui, est composé de 4 barres rigides articulées par des liaisons pivots. Les barres inférieures et supérieures sont de longueur  $b$ , tandis que les barres diagonales sont de longueur  $l$ . L'orientation de la barre supérieure est décrite avec l'angle  $\alpha$ .

On peut décrire la position du point  $p_x$  de la manière suivante :

$$p_x = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\alpha}{2}) \sqrt{l^2 - b^2 \cos^2(\frac{\alpha}{2})} \\ \sin(\frac{\alpha}{2}) \sqrt{l^2 - b^2 \cos^2(\frac{\alpha}{2})} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

### Anti-parallélogramme avec offsets

L'anti-parallélogramme avec offset (figure 2.15b) a la même cinématique que l'anti-parallélogramme, mais des rectangles fixes sont ajoutés au niveau de la barre inférieure (de dimensions  $h_b \times b$ ) et supérieure (de dimensions  $h_e \times b$ ). On peut également décrire la position du point  $p_o$  à partir de l'orientation  $\alpha$  de la barre supérieure et des dimensions géométriques :

$$p_o = \begin{pmatrix} h_b + \cos(\frac{\alpha}{2}) \sqrt{l^2 - b^2 \cos^2(\frac{\alpha}{2})} + h_e \cos(\alpha) \\ \sin(\frac{\alpha}{2}) \sqrt{l^2 - b^2 \cos^2(\frac{\alpha}{2})} + h_e \sin(\alpha) \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

### 2.3.2 Détermination des dimensions optimales de chaque mécanisme

#### Hypothèses

Afin de trouver les dimensions optimales de chaque mécanisme reproduisant le plus fidèlement possible le mouvement entre deux vertèbres dans le plan sagittal, on prend les hypothèses suivantes :

- L'origine de chaque mécanisme (le point  $O$  sur les figures 2.15) coïncide avec l'origine  $O_i$  de la vertèbre  $i$  (fixe).
- Les axes  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  coïncident avec les axes  $\vec{x}_i$  et  $\vec{y}_i$ .
- L'angle décrivant chaque mécanisme correspond à l'angle entre les vertèbres  $i$  et  $j$  décrivant la rotation dans le plan sagittal :  $\gamma$ . Donc  $\gamma$  correspond à  $\theta_p$  pour le pivot et à  $\alpha$  pour les deux anti-parallélogramme (avec et sans offset).

#### Dimensions optimales

Afin d'obtenir les dimensions optimales de chaque mécanisme permettant de s'approcher au mieux de la trajectoire plane de l'origine de la vertèbre, on pose trois problèmes d'optimisation sous-contrainte de la forme du système (2.12). Pour ce problème d'optimisation, la fonction objectif à minimiser est l'erreur moyenne quadratique entre la trajectoire du point  $p$  du mécanisme et la trajectoire du centre de la vertèbre considéré. Pour chaque valeur de  $t_x$  et  $t_y$ , on calcule l'erreur correspondante avec le mécanisme, pour la valeur  $\gamma$  associée. L'erreur quadratique moyenne entre la trajectoire et le mécanisme est la somme des erreurs au carré pour chaque itération. On a donc :

-pour l'articulation pivot :

$$f(\mathbf{q}) = \frac{1}{N} \sum_N \left[ (t_x(i) - (h_1 + h_2 \cos(\gamma)))^2 + (t_y - (h_2 \sin(\gamma)))^2 \right] \quad (2.17)$$

avec  $\mathbf{q} = [h_1, h_2]$ , le vecteur des variables d'optimisation.

-pour l'articulation en X :

$$f(\mathbf{q}) = \frac{1}{N} \sum_N \left[ \left( t_x - \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \sqrt{l^2 - b^2 \cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \right)^2 \right. \quad (2.18)$$

$$\left. + \left( t_y - \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \sqrt{l^2 - b^2 \cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \right)^2 \right] \quad (2.19)$$

avec  $\mathbf{q} = [l, b]$ , le vecteur des variables d'optimisation.

-pour l'articulation en X avec offsets :

$$f(\mathbf{q}) = \frac{1}{N} \sum_N \left[ \left( t_x - (h_b + \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \sqrt{l^2 - b^2 \cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)} + h_e \cos(\gamma)) \right)^2 \right. \quad (2.20)$$

$$\left. + \left( t_y - (\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \sqrt{l^2 - b^2 \cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)} + h_e \sin(\gamma)) \right)^2 \right] \quad (2.21)$$

avec  $\mathbf{q} = [l, b, h_b, h_e]$ , le vecteur des variables d'optimisation.

Pour les trois problèmes d'optimisation, on impose bien sûr aux variables d'optimisation d'être positives. Dans le cas de l'anti-parallélogramme (sans et avec offsets), on impose des conditions supplémentaires : les dimensions des mécanismes doivent respecter la condition d'assemblage ( $l > 1.05b$ ) et on impose un ratio maximal entre  $l$  et  $b$  tel que ( $l < 50b$ ). En effet, le cas  $l = b$  et  $l \gg b$  sont deux cas dégénérés du mécanisme en X qui seront traités dans le chapitre 4.

### 2.3.3 Résultats et discussions

#### Résultats pour un couple de vertèbres

Si l'on reprend le couple de vertèbre  $V_7V_8$  d'un vautour *Gyps Fulvus* (figure 2.14) et que l'on applique les trois optimisations pour les trois mécanismes, on obtient trois mécanismes aux dimensions suivantes :

- Articulation en X :  $l = 23.9 \text{ mm}$ ,  $b = 6.91 \text{ mm}$
- Articulation en X avec offset :  $l = 9.49 \text{ mm}$ ,  $b = 9.03 \text{ mm}$ ,  $h_b = 5.46 \text{ mm}$ ,  $h_e = 14.5 \text{ mm}$
- Articulation pivot :  $h_1 = 7.22 \text{ mm}$ ,  $h_2 = 16.3 \text{ mm}$

L'évolution de la trajectoire des trois mécanismes optimaux en fonction de  $\gamma$  est montrée figure 2.16a, en même temps que l'évolution de la trajectoire de la vertèbre  $V_8$  par rapport à  $V_7$ . L'erreur entre la trajectoire de la vertèbre et la trajectoire de chaque mécanisme est indiquée figure 2.16b. Les valeurs des erreurs moyennes quadratique sont également indiquées sur la figure 2.16b, pour l'axe  $\vec{x}$ , l'axe  $\vec{y}$  et également la norme entre les deux vecteurs.

Pour ce couple de vertèbre, les mécanismes aux dimensions optimales sont tracés sur la figure 2.17. Chaque mécanisme est superposé sur le couple de vertèbres (ici dans leur position dorsale limite,  $\gamma_{max} = 44.1^\circ$ ).

#### Résultats pour un cou complet

A partir de chaque mouvement reconstruits entre couples de vertèbres du cou du *Gyps Fulvus*, les trois mécanismes optimaux ont été calculés suivant la méthode présentée. L'erreur moyenne quadratique entre la trajectoire du centre de la vertèbre en mouvement et le point  $p$ , pour chaque mécanisme, et chaque couple de vertèbre, est montré dans le tableau 2.2. Pour chaque couple de vertèbre  $V_iV_j$ , l'erreur moyenne quadratique de chaque mécanisme est indiquée selon l'axe  $\vec{x}$ , l'axe  $\vec{y}$  et en norme. Un code couleur est mis en place pour l'erreur en norme qui est celle qui nous intéresse le plus. L'erreur la plus grande est indiquée en rouge, l'erreur intermédiaire en orange et l'erreur la plus faible en vert. On peut remarquer plusieurs choses :

- pour 6 couples de vertèbres, l'articulation pivot reproduit mieux le mouvement que l'anti-parallélogramme avec offset ;



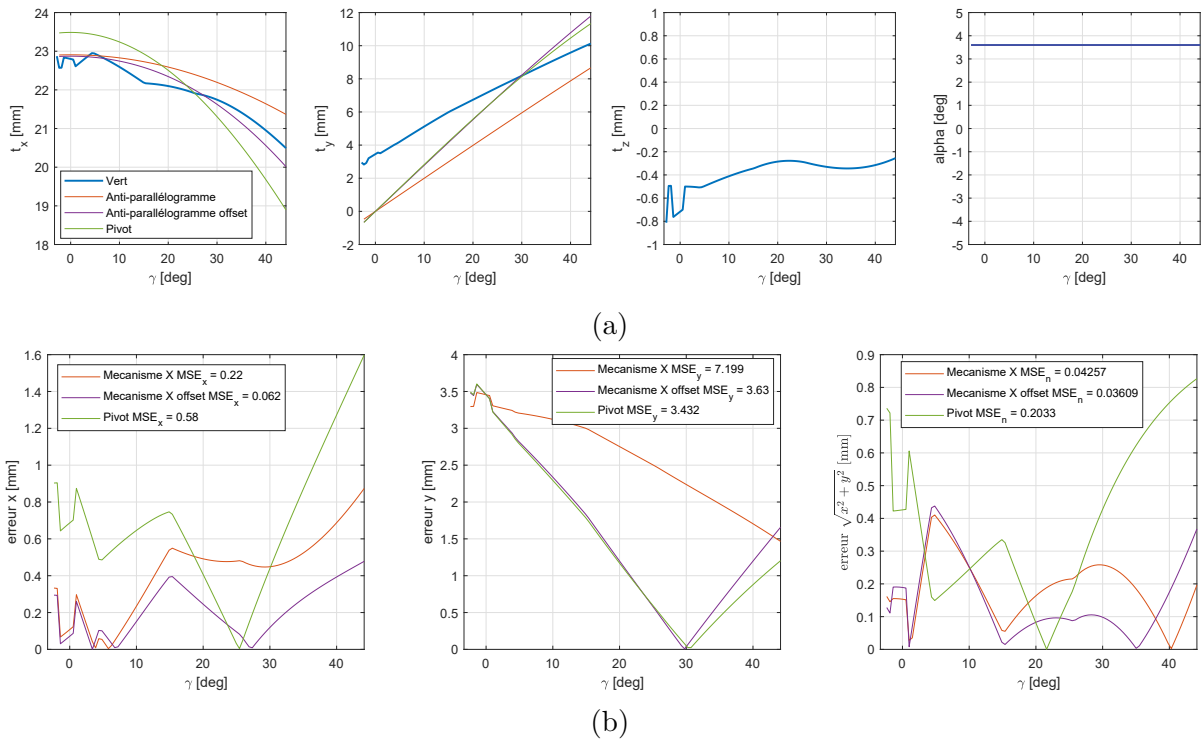
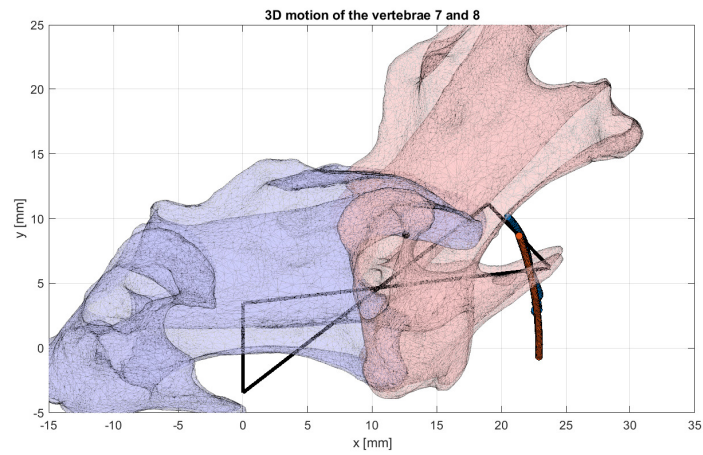
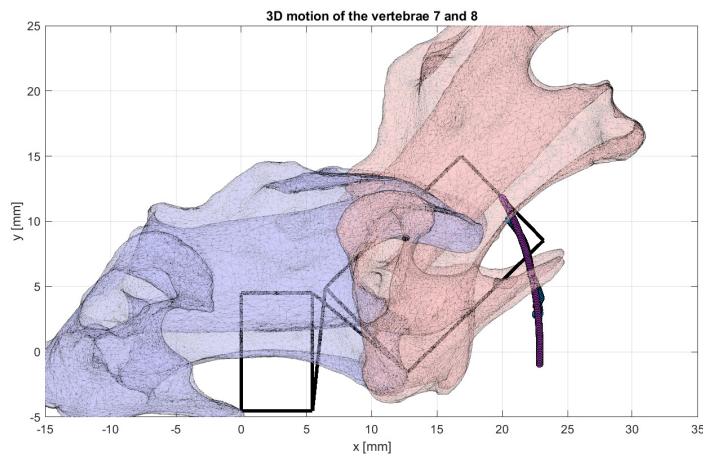


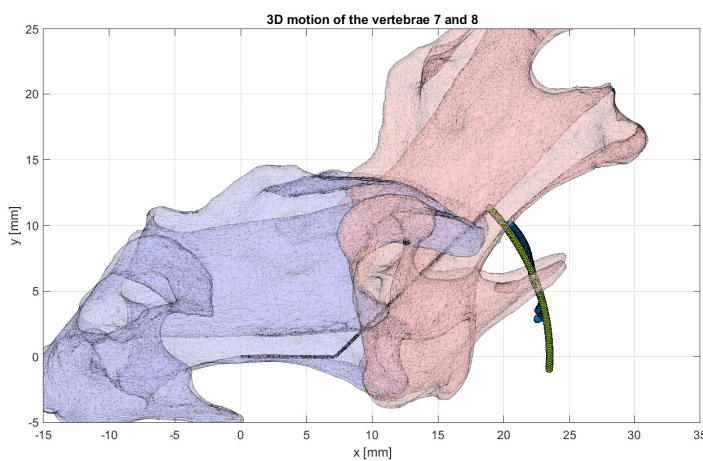
FIGURE 2.16 – (a) Évolution de la position entre les deux vertèbres  $V_7$  et  $V_8$  du *Gyps Fulvus* pour  $\gamma \in [-2.8^\circ, 44.1^\circ]$  et  $\beta = 0^\circ$  et évolutions des trois mécanismes optimaux pour la même plage angulaire. (b) Erreur en x, en y et en norme, par rapport à la trajectoire de la vertèbre  $V_8$ , pour les trois mécanismes optimaux obtenus.



(a) Anti-parallélogramme



(b) Anti-parallélogramme avec offset



(c) Pivot

FIGURE 2.17 – Superposition des vertèbres  $V_7$  et  $V_8$  d'un *Gyps Fulvus* avec les mécanismes optimaux respectifs.

Mécanisme	Anti-parallélogramme			Anti-parallélogramme offset			Pivot		
	x	y	Norme	x	y	Norme	x	y	Norme
$V_3V_4$	0.592	0.672	0.765	0.267	0.152	0.257	0.219	0.152	0.209
$V_4V_5$	0.209	2.22	0.348	0.147	1.72	0.203	0.134	1.72	0.188
$V_5V_6$	0.074	0.797	0.0631	0.0447	0.555	0.059	0.269	0.557	0.275
$V_6V_7$	0.296	1.02	0.287	0.259	0.598	0.267	0.751	0.56	0.699
$V_7V_8$	0.217	7.2	0.0426	0.0622	3.63	0.0361	0.584	3.43	0.203
$V_8V_9$	0.0449	0.26	0.0728	9.7e-4	8e-4	10.2e-4	11.4e-4	6.3e-4	10.4e-4
$V_9V_{10}$	0.0473	7.95	0.0467	0.0151	7.08	0.0434	0.234	7.08	0.179
$V_{10}V_{11}$	0.539	3.22	0.648	0.531	3.14	0.642	1.25	3.17	1.31
$V_{11}V_{12}$	2.22	2.24	2.71	2.14	1.83	2.56	2.13	1.83	2.54
$V_{12}V_{13}$	2.24	3.62	2.93	2.05	0.915	2.2	1.97	0.913	2.11
$V_{13}V_{14}$	0.957	2.26	1.25	0.819	0.117	0.829	0.772	0.117	0.781
$V_{14}V_{15}$	1.59	0.415	1.7	1.54	0.0253	1.54	1.52	0.0252	1.53

TABLE 2.2 – Erreurs moyenne quadratique (en mm) des différents mécanismes pour les couples de vertèbres du vautour fauve (*Gyps fulvus*). Pour chaque couple de vertèbres, la plus grande erreur en norme est indiquée en rouge, la plus petite erreur en vert et l'erreur intermédiaire en orange.

- pour les 6 autres couples de vertèbres, l'articulation anti-parallélogramme avec offset est celle qui reproduit le mieux les mouvements de la vertèbre ;
- de manière générale, l'articulation anti-parallélogramme avec offset obtient toujours une erreur plus faible que l'anti-parallélogramme, ce qui est normal, l'articulation avec offset ayant plus de paramètres d'optimisation. Néanmoins, on peut remarquer que lorsque l'articulation avec offset est meilleure que l'articulation pivot, l'articulation anti-parallélogramme sans offset l'est aussi (sauf pour le couple  $V_8V_9$ ) ;
- les couples de vertèbres pour lesquelles l'articulation anti-parallélogramme est meilleure sont le groupe de vertèbres  $V_5$  à  $V_{11}$ , qui ont une amplitude de déplacement principalement dorsale (voir figure 2.8) ;
- pour un certain nombres de couples de vertèbres (notamment de la vertèbre  $V_{11}$  à  $V_{15}$ ), on peut remarquer que l'erreur moyenne est assez grande, et qu'elle ne diminue par beaucoup d'un mécanisme à un autre (alors que pour d'autres couples de vertèbres, il y a environ un facteur 2 entre l'erreur anti-parallélogramme et pivot). Cela laisse à penser que le mouvement pour ces couples de vertèbres est assez spécifique et peut être difficilement approché par les seuls mécanismes considérées ici.

Les valeurs des paramètres de chaque mécanisme pour chaque couple de vertèbres sont regroupées dans le tableau 2.3, avec toutes les valeurs en mm. On peut remarquer que dans la plupart des cas, pour le mécanisme en X, la valeur de  $b$  est sur la borne

Articulation	Anti-parallélogramme		Anti-parallélogramme offset				Pivot	
	$l$	$b$	$l$	$b$	$h_b$	$h_e$	$h_1$	$h_2$
$V_3V_4$	14.8	1	1.36	1	8.3	6.04	8.79	6.53
$V_4V_5$	17.7	1	1.39	1	9.81	7.07	10.3	7.56
$V_5V_6$	20.1	1	7.17	6.83	7.7	10.2	9.02	11.5
$V_6V_7$	28.1	18.2	13.5	12.9	6.82	10.5	9.2	12.8
$V_7V_8$	23.9	6.91	9.49	9.03	5.46	14.5	7.22	16.3
$V_8V_9$	23.2	1	1.39	1	12.7	9.76	13.2	10.3
$V_9V_{10}$	33.9	24.8	16.8	16	5.33	12.6	8.11	15.4
$V_{10}V_{11}$	54.3	49.8	42.9	40.9	2.98	5.6	9.91	12.5
$V_{11}V_{12}$	20.7	1	1.39	1	12.1	7.83	12.6	8.32
$V_{12}V_{13}$	18.8	1	1.38	1	12.8	5.34	13.3	5.83
$V_{13}V_{14}$	18.6	1	1.39	1	12.5	5.39	13	5.89
$V_{14}V_{15}$	19.2	1	1.41	1	12.1	6.22	12.6	6.72

TABLE 2.3 – Valeurs géométriques des paramètres des mécanismes optimaux pour les différents couples de vertèbres du vautour fauve (*Gyps Fulvus*). Les valeurs sont indiquées en mm.

minimale (1 mm), et  $l$  est beaucoup plus grand. En effet, plus le ratio  $l/b$  est grand, plus le mouvement correspondant du point  $p_x$  se rapproche d'un mouvement à centre instantané de rotation (CIR) fixe, donc de l'articulation pivot. Les cas où le ratio  $l/b$  est plus faible correspondent aux couples de vertèbres pour lesquelles le mécanisme en X est meilleur que la liaison pivot, où le CIR du mécanisme se rapproche plus du CIR de la vertèbre  $j$  par rapport à la vertèbre  $i$ .

## 2.4 Conclusion

L'objectif de ce chapitre a été de mettre en place une démarche afin de reconstruire le mouvement entre vertèbres, qui était jusqu'ici inconnu et difficile à mesurer de manière fiable, les vertèbres étant nombreuses, de petite taille, et le cou étant vu de l'extérieur comme un élément continu. À l'aide de scans 3D de vertèbres et d'une méthode de reconstruction du mouvement par contact, on a réussi à reconstruire un mouvement entre vertèbres. Cette méthode a été testée sur des vertèbres de pic noir et sur des vertèbres de vautour, et a montré sa robustesse. Les résultats sont néanmoins à utiliser avec précaution, car ceux-ci n'ont jusqu'ici pas été vérifiés expérimentalement. Ils permettent néanmoins d'avoir une première base. L'ajustement des paramètres d'optimisation peut permettre d'affiner les résultats et la reconstruction du mouvement a permis de proposer et de trouver des mécanismes optimaux plans suivant le mieux possible les trajectoires des vertèbres. Trois mécanismes à 1 DDL ont été proposés, qui sont des mécanismes réalisables et dont l'étude cinéstatique est possible. Les résultats obtenus ne mettent pas forcément en avant un mécanisme par rapport à un autre. Ils montrent plutôt qu'à la fois le mécanisme en X et

le pivot peuvent présenter un intérêt et s'approcher du mouvement de certains couples de vertèbres. Cette étude ne permet donc pas d'écarter un mécanisme, et ils seront donc tous les deux étudiés d'un point de vue cinématique et statique, en vue de la modélisation et fabrication d'un prototype de robot manipulateur inspiré de ceux d'oiseaux. D'autres mécanismes auraient pu être considérés, notamment des mécanismes non-symétriques avec des longueurs de barres différents. Cependant, leur modélisation cinéto-statique engendre des équations algébriques bien plus complexes pour être pleinement exploitées [Mle].

La méthode de reconstruction de mouvement permet d'obtenir le mouvement selon deux rotations des vertèbres, et donc un mouvement en 3D. Ainsi, une étude similaire à celle effectuée avec les mécanismes plans à 1 DDL pourrait être menée de la même manière sur le mouvement selon les deux rotations des vertèbres. À partir d'un jeu de mécanismes spatiaux à 2 DDL, on pourrait trouver les dimensions et le mécanisme optimal permettant d'approcher le mouvement de la vertèbre.

# Chapitre 3

## Analyse et comparaison de mécanismes de tenségrité s à 1 degré de liberté

### 3.1 Introduction

Le chapitre précédent a montré que le mouvement entre deux vertèbres d'oiseaux peut-être approché dans le plan sagittal par un mécanisme plan à 1 DDL. Plusieurs mécanismes ont été proposés, et les résultats n'ont pas permis de dégager un mécanisme par rapport aux autres. On remarque en effet qu'en fonction des cas, une liaison pivot simple est plus appropriée qu'un mécanisme en anti-parallélogramme, et inversement.

Afin de compléter l'étude, il est important de s'intéresser à ces mécanismes d'un point de vue plus général tant sur les plans cinéto-statique que géométrique. Le but de ce chapitre est de construire des mécanismes de tenségrité à 1 DDL à partir des mécanismes présentés précédemment, et d'étudier leurs performances sur différents aspects : espace de travail, forces nécessaires, raideur atteignable, stabilité...

En premier lieu, le mécanisme de tenségrité en X, inspiré du mécanisme en X de Snelson, est étudié. Les modèles géométriques et dynamiques sont établis, et une étude statique est menée afin de déterminer l'espace de travail statiquement atteignable du mécanisme ainsi que sa raideur articulaire en fonction des données du mécanisme (longueur, masse, raideur des ressorts). La même analyse est effectuée sur une liaison pivot actionnée de manière antagoniste par deux câbles. Une démarche de conception optimale est ensuite menée pour ces deux mécanismes, afin de déterminer les meilleures dimensions et raideurs des ressorts maximisant leur espace de travail. Les résultats optimaux sont comparés afin de déterminer quel mécanisme est le plus adapté à la conception et fabrication d'un prototype de mécanisme de tenségrité.

Enfin, un prototype de mécanisme de tenségrité en X actionné de manière antagoniste est présenté. Le modèle statique est vérifié et une loi de commande en boucle fermée utilisant le modèle dynamique est mise en place.

## 3.2 Modèle dynamique d'un mécanisme de tensegrité en X

### 3.2.1 Description du mécanisme étudié

Un mécanisme unique se compose d'un mécanisme à trois barres avec une barre supérieure, deux barres croisées et deux ressorts précontraints en parallèle des barres croisées. Les barres sont infiniment rigides, homogènes et linéaires. Elles sont reliées par A, B, C et D, supposés être des liaisons pivot parfaites sans frottement et sans amortissement, voir figure 3.1. Le mécanisme est fixé au bâti en A et B. Les deux ressorts relient A et D, et B et C, et sont pour le moment considérés comme étant sans masse. Leurs longueurs dites "actives" valent respectivement  $l_l$  et  $l_r$  (pour "left" and "right") pour le ressort de gauche et de droite. De la même manière, ces ressorts ont une longueur à vide non-nulle  $l_{l0}$  et  $l_{r0}$ . Les données du mécanisme sont présentées dans le tableau 3.1. Les deux barres croisées ont la même longueur  $L$  et la barre supérieure et l'espacement entre A et B vaut  $b$ .

Afin d'anticiper la modélisation statique d'un empilement de plusieurs mécanismes, on considère que chaque mécanisme doit porter la sous-chaîne composée des mécanismes aval empilés en hauteur et de la tête (uniquement la tête pour le dernier mécanisme). Par conséquent, le mécanisme est soumis à une masse ponctuelle  $M$  positionnée à une distance verticale  $d$  de centre de la barre supérieure. La modélisation des mécanismes empilés supérieure sera détaillée dans le chapitre 4.

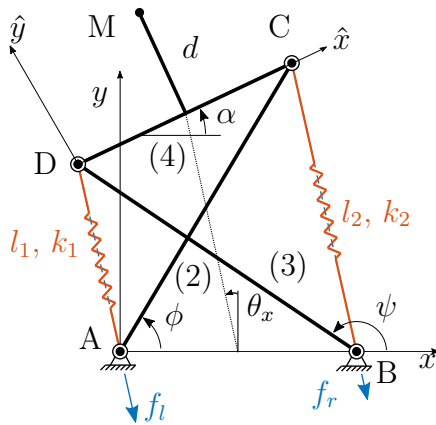


FIGURE 3.1 – Paramétrage d'un mécanisme en X.

	Longueur	Masse	Raideur
Lien 2	$L$	$m_2$	-
Lien 3	$L$	$m_3$	-
Lien 4	$b$	$m_4$	-
Ressort Gauche	$l_l, l_{l0}$	-	$k_l$
Ressort Droite	$l_r, l_{r0}$	-	$k_r$

TABLE 3.1 – Paramètres d'un mécanisme en X.

Le mécanisme est actionné par des câbles reliés aux points D et C et passe à travers les ressorts. Les câbles sont considérés comme ayant une raideur infinie, donc les forces d'entrée  $f_l$  et  $f_r$  sont considérés comme agissant directement sur D et C, respectivement. Les forces  $f_l$  et  $f_r$  sont limitées par  $F_{max}$  et  $F_{min}$  avec  $F_{min} > 0 N$  puisque les câbles travaillent uniquement en tension. La plage de rotation du mécanisme est  $-\pi < \alpha < \pi$ , c'est-à-dire que le mécanisme ne peut pas atteindre les configurations singulières plates (voir section 3.2.2). La masse et l'inertie des ressorts ne sont pas prises en compte.

### 3.2.2 Modélisation géométrique et cinématique

#### Fermeture cinématique

L'orientation des solides 2, 3 et 4 est définie par leur inclinaison  $\phi$ ,  $\psi$  et  $\alpha$ , respectivement (figure 3.1). Les angles  $\phi$  et  $\psi$  sont définis comme coordonnées dépendantes. Le mécanisme a un degré de liberté et  $\alpha$  est choisi comme coordonnée généralisée pour spécifier la configuration du mécanisme. On définit également l'angle  $\theta_x$ , qui correspond à l'angle entre la verticale et la droite reliant les milieux des segments  $[AB]$  et  $[CD]$ . On peut montrer que l'on a la relation suivante :  $\theta_x = \alpha/2$ . En considérant à nouveau la figure 3.1, le repère est défini de telle sorte que l'origine coïncide avec A et l'axe  $\vec{x}$  est de direction (AB). L'axe  $\vec{y}$  est vertical. La décomposition de l'équation de contrainte de fermeture de la boucle (écrite en A) dans les directions  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  donne :

$$b + L \cos(\psi) + b \cos(\alpha) - L \cos(\phi) = 0 \quad (3.1a)$$

$$L \sin(\psi) + b \sin(\alpha) - L \sin(\phi) = 0 \quad (3.1b)$$

Résoudre l'équation (3.1) en exprimant l'une des deux coordonnées dépendantes en fonction de la coordonnée généralisée donne les deux équations de contraintes suivantes :

$$\phi(\alpha) = 2 \arctan \left[ \frac{2bL \sin(\alpha) + S}{(2b^2 + 2bL) [\cos(\alpha) + 1]} \right] \quad (3.2a)$$

$$\psi(\alpha) = 2 \arctan \left[ \frac{-2bL \sin(\alpha) - S}{(2b^2 - 2bL) [\cos(\alpha) + 1]} \right] \quad (3.2b)$$

avec  $S = \sqrt{(-2bL \sin(\alpha))^2 + (-2bL [\cos(\alpha) + 1])^2 - (2b^2 [\cos(\alpha) + 1])^2}$ .

Les relations entre les vitesses des coordonnées généralisées sont obtenues en différenciant la fermeture de boucle (équation 3.1) par rapport au temps, ce qui donne :

$$-L\dot{\psi} \sin(\psi) - b\dot{\alpha} \sin(\alpha) + L\dot{\phi} \sin(\phi) = 0 \quad (3.3a)$$

$$L\dot{\psi} \cos(\psi) + b\dot{\alpha} \cos(\alpha) - L\dot{\phi} \cos(\phi) = 0 \quad (3.3b)$$

En exprimant les dérivées temporelles des coordonnées dépendantes en fonction de la dérivée temporelle de la coordonnée généralisée (soit  $\dot{\alpha}$ ), on obtient :

$$\dot{\phi} = \frac{b \sin(\psi - \alpha)}{L \sin(\psi - \phi)} \dot{\alpha} \quad (3.4a)$$

$$\dot{\psi} = \frac{b \sin(\phi - \alpha)}{L \sin(\psi - \phi)} \dot{\alpha} \quad (3.4b)$$



### Expression des vitesses articulaires

A partir des équations (3.4), on peut donc exprimer les dérivées de  $\psi$  et  $\phi$  par rapport à  $\alpha$  :

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\phi}{d\alpha} = \frac{b \sin(\psi - \alpha)}{L \sin(\psi - \phi)} \quad (3.5a)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\psi}{d\alpha} = \frac{b \sin(\phi - \alpha)}{L \sin(\psi - \phi)} \quad (3.5b)$$

De la même manière, en dérivant une nouvelle fois les expressions (3.5) par rapport à  $\alpha$ , on obtient :

$$\frac{d^2\phi}{d\alpha^2} = \frac{\partial}{\partial\phi} \left( \frac{d\phi}{d\alpha} \right) \frac{d\phi}{d\alpha} + \frac{\partial}{\partial\psi} \left( \frac{d\phi}{d\alpha} \right) \frac{d\psi}{d\alpha} + \frac{\partial}{\partial\alpha} \left( \frac{d\phi}{d\alpha} \right) \quad (3.6a)$$

$$\frac{d^2\psi}{d\alpha^2} = \frac{\partial}{\partial\phi} \left( \frac{d\psi}{d\alpha} \right) \frac{d\phi}{d\alpha} + \frac{\partial}{\partial\psi} \left( \frac{d\psi}{d\alpha} \right) \frac{d\psi}{d\alpha} + \frac{\partial}{\partial\alpha} \left( \frac{d\psi}{d\alpha} \right) \quad (3.6b)$$

avec :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\phi} \left( \frac{d\phi}{d\alpha} \right) &= \frac{b \sin(\psi - \alpha) \cos(\psi - \phi)}{L \sin^2(\psi - \phi)} & \frac{\partial}{\partial\phi} \left( \frac{d\psi}{d\alpha} \right) &= \frac{b \sin(\psi - \alpha)}{L \sin^2(\psi - \phi)} \\ \frac{\partial}{\partial\psi} \left( \frac{d\phi}{d\alpha} \right) &= \frac{-b \sin(\phi - \alpha)}{L \sin^2(\psi - \phi)} & \frac{\partial}{\partial\psi} \left( \frac{d\psi}{d\alpha} \right) &= \frac{-b \sin(\phi - \alpha) \cos(\psi - \phi)}{L \sin^2(\psi - \phi)} \\ \frac{\partial}{\partial\alpha} \left( \frac{d\phi}{d\alpha} \right) &= \frac{-b \cos(\psi - \alpha)}{L \sin(\psi - \phi)} & \frac{\partial}{\partial\alpha} \left( \frac{d\psi}{d\alpha} \right) &= \frac{-b \cos(\phi - \alpha)}{L \sin(\psi - \phi)} \end{aligned}$$

### Longueurs des ressorts

Les longueurs dites "actives" des ressorts, également utiles pour la modélisation dynamique, sont évaluées en utilisant le théorème d'Al-Kashi :

$$l_l = \sqrt{b^2 + L^2 + 2bL \cos(\psi)} \quad (3.7a) \quad l_r = \sqrt{b^2 + L^2 - 2bL \cos(\phi)} \quad (3.7b)$$

Les dérivées des longueurs des ressorts par rapport à  $\alpha$  s'expriment :

$$\frac{dl_l}{d\alpha} = \frac{dl_l}{d\psi} \frac{d\psi}{d\alpha} = \frac{-bL \sin(\psi)}{l_l} \frac{d\psi}{d\alpha} \quad (3.8a)$$

$$\frac{dl_r}{d\alpha} = \frac{dl_r}{d\phi} \frac{d\phi}{d\alpha} = \frac{bL \sin(\phi)}{l_r} \frac{d\phi}{d\alpha} \quad (3.8b)$$

### 3.2.3 Modèle dynamique

#### Équation de Lagrange

Pour simplifier l'écriture, la plupart des équations de cette section sont des expressions de coordonnées généralisées indépendantes et dépendantes. Les coordonnées généralisées dépendantes doivent être remplacées par leur expression dérivée de la section 3.2.2.

L'équation de mouvement du mécanisme est établie à l'aide de l'approche lagrangienne. L'équation de Lagrange est exprimée comme suit :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = Q \quad (3.9)$$

avec  $L = E - U$ , où  $E$  est l'énergie cinétique,  $U$  est l'énergie potentielle et  $Q$  la force généralisée non conservatrice agissant sur le mécanisme. Sachant que l'énergie potentielle, par définition, ne dépend pas de la vitesse, on peut réécrire la forme réduite de l'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial E}{\partial \alpha} + \frac{dU}{d\alpha} = Q \quad (3.10)$$

#### Énergie cinétique

L'énergie cinétique totale du mécanisme s'obtient en sommant les énergies cinétiques de translation et de rotation de chaque solide (2, 3 et 4) :

$$E = \frac{1}{2} (m_2 v_2^2 + I_2 \dot{\phi}^2) + \frac{1}{2} (m_3 v_3^2 + I_3 \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} (m_4 v_4^2 + I_4 \dot{\alpha}^2) \quad (3.11)$$

avec  $v_i$  ( $i = 2, 3, 4$ ) les vitesses de translation des centres de masse des solides et  $I_i$  ( $i = 2, 3, 4$ ) les moments d'inerties des solides exprimés en leur centre de gravité. Les vitesses de translation au carré s'écrivent :

$$v_2^2 = \left( \frac{1}{2} L \dot{\phi} \right)^2 = \frac{1}{4} L^2 \dot{\phi}^2 \quad (3.12a)$$

$$v_3^2 = \left( \frac{1}{2} L \dot{\psi} \right)^2 = \frac{1}{4} L^2 \dot{\psi}^2 \quad (3.12b)$$

$$v_4^2 = L^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{4} b^2 \dot{\alpha}^2 - b L \dot{\phi} \dot{\alpha} \cos(\phi - \alpha) \quad (3.12c)$$

On considère les solides 2, 3 et 4 comme étant des barres infiniment rigides, homogènes et prismatiques. On a donc :

$$I_2 = \frac{1}{12} m_2 L^2 \quad (3.13a)$$

$$I_3 = \frac{1}{12} m_3 L^2 \quad (3.13b)$$

$$I_4 = \frac{1}{12} m_4 b^2 \quad (3.13c)$$

Ainsi, l'énergie cinétique totale vaut :

$$E = \left( \frac{1}{6} m_2 + \frac{1}{2} m_4 \right) L^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{6} m_3 L^2 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{6} m_4 b^2 \dot{\alpha}^2 - \frac{1}{2} m_4 b L \dot{\phi} \dot{\alpha} \cos(\phi - \alpha) \quad (3.14)$$

### Énergie potentielle

L'énergie potentielle est la somme de l'énergie potentielle de pesanteur et de l'énergie potentielle des ressorts. Considérant les barres 2, 3 et 4, et la position selon l'axe  $\vec{y}$  de leur centre de masse, l'énergie potentielle de pesanteur s'écrit :

$$U_g = \frac{g}{2} (m_2 L \sin(\phi) + (m_3 + 2m_4) L \sin(\psi) + m_4 b \sin(\alpha) + 2M(d \cos(\alpha) + \cos(\frac{\alpha}{2}) \sqrt{l^2 - b^2 \cos^2(\frac{\alpha}{2})})) \quad (3.15)$$

L'énergie potentielle des ressorts s'écrit quant à elle :

$$U_s = \frac{1}{2} k_l (l_l - l_{l0})^2 + \frac{1}{2} k_r (l_r - l_{r0})^2 \quad (3.16)$$

Ainsi, on obtient l'énergie potentielle totale du mécanisme :

$$U = \frac{g}{2} (m_2 L \sin(\phi) + (m_3 + 2m_4) L \sin(\psi) + m_4 b \sin(\alpha) + 2M(d \cos(\alpha) + \cos(\frac{\alpha}{2}) \sqrt{l^2 - b^2 \cos^2(\frac{\alpha}{2})})) + \frac{1}{2} k_l (l_l - l_{l0})^2 + \frac{1}{2} k_r (l_r - l_{r0})^2 \quad (3.17)$$

Cette expression générale nous sera utile dans les développements suivants. Afin de comparer l'articulation en X avec l'articulation pivot, on peut réécrire l'énergie potentielle totale simplifiée en définissant la densité linéaire des barres (masse par unité de longueur  $\rho$ ), et en considérant des raideurs à gauche et à droite symétriques, soit  $k_1 = k_2 = k$  :

$$U = -\cos(\alpha) (b^2 k - dgM) + (\rho(b+l) + M)g \cos(\frac{\alpha}{2}) \sqrt{l^2 - b^2 \cos^2(\frac{\alpha}{2})} \quad (3.18)$$

### Force généralisée

La force généralisée  $Q$  est associée à la coordonnée généralisée, ici  $\alpha$ . Ainsi,  $Q$  représente le couple appliqué sur le centre instantané de rotation de la barre supérieure 4, dont l'orientation est décrite par  $\alpha$ . Ce couple est obtenu par l'application d'efforts de traction des câbles attachés à l'extrémité de gauche D et de droite C de la barre supérieure (voir figure 3.1). Ces câbles appliquent un effort  $f_l$  et  $f_r$  à gauche et à droite, respectivement. Plusieurs méthodes sont possibles afin de déterminer  $Q$ . Dans un premier temps, on considère la figure 3.2. Les forces appliquées sont décomposées en composantes tangentielle et normales aux trajectoires circulaires  $s_1$  et  $s_2$  des points D et C. Seules les composantes tangentielles sont intéressantes car les composantes normales n'influencent pas le mouvement. En effet, celle-ci sont dans l'axe des barres 2 et 3, et celles-ci étant infiniment rigides, l'effort normal n'a pas d'influence sur le comportement du mécanisme. Les composantes tangentielles s'expriment sous la forme :

$$f_{lt} = f_l \sin(\beta_1) = f_l \frac{b}{l_l} \sin(\psi) \quad f_{rt} = f_r \sin(\beta_2) = f_r \frac{b}{l_r} \sin(\phi) \quad (3.19)$$

Le travail virtuel des forces est exprimé par :

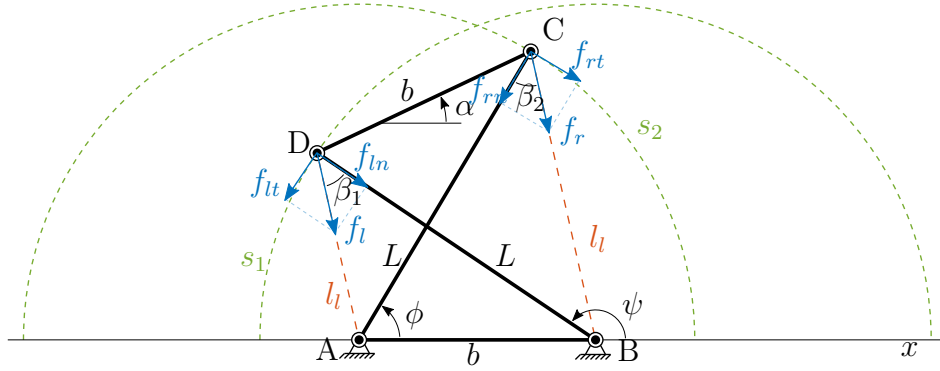


FIGURE 3.2 – Forces appliquées, leurs décompositions (flèches bleues) et la trajectoire (courbes vertes) des points  $D$  et  $C$  du mécanisme

$$\delta W_{ex} = f_{lt} \delta s_1 - f_{rt} \delta s_2 = \left( f_{lt} \frac{\partial s_1}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - f_{rt} \frac{\partial s_2}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right) \delta \alpha = Q \delta \alpha \quad (3.20)$$

Les dérivées de  $s_1$  et  $s_2$  sont  $\frac{\partial s_1}{\partial \psi} = \frac{\partial s_2}{\partial \phi} = L$ .

En remplaçant ces termes et l'équation (3.19) dans l'équation (3.20), la force généralisée s'écrit :

$$Q = f_l \frac{bL \sin(\psi)}{l_l(\psi)} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - f_r \frac{bL \sin(\phi)}{l_r(\phi)} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \quad (3.21)$$

Plus simplement, on peut écrire la force généralisée  $Q$  comme la variation selon les coordonnées généralisées des travaux virtuels des câbles. Celui-ci s'exprime :

$$V_c = f_l(l_l - l_{l0}) + f_r(l_r - l_{r0}) \quad (3.22)$$

Ainsi, on a :

$$Q = f_l \frac{dl_l}{d\alpha} + f_r \frac{dl_r}{d\alpha} \quad (3.23)$$

En remplaçant les dérivées de la longueur des câbles par rapport à  $\alpha$  par leurs expressions respectives (équations (3.8)), on retrouve bien l'expression (3.21).

### Équation du mouvement

La substitution des équations (3.14), (3.17) et (3.21) dans l'équation (3.10) donne l'équation du mouvement :

$$M(\alpha)\ddot{\alpha} + C(\alpha)\dot{\alpha}^2 + G(\alpha) = Z_l(\alpha)f_l + Z_r(\alpha)f_r \quad (3.24)$$

où :

$$M(\alpha) = \left(\frac{1}{3}m_2L^2 + m_4L^2\right) \frac{\partial\phi^2}{\partial\alpha} + \frac{1}{3}m_3L^2 \frac{\partial\psi^2}{\partial\alpha} + \frac{1}{3}m_4b^2 - m_4bL \cos(\phi - \alpha) \frac{\partial\phi}{\partial\alpha} \quad (3.25a)$$

$$C(\alpha) = \left(\frac{1}{3}m_2L^2 + m_4L^2\right) \frac{\partial\phi}{\partial\alpha} \frac{\partial^2\phi}{\partial\alpha^2} + \left(\frac{1}{3}m_3L^2\right) \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{2}m_4bL \sin(\phi - \alpha) \left(\frac{\partial\phi}{d\alpha} - 1\right) \frac{\partial\phi}{\partial\alpha} - \frac{1}{2}m_4bL \cos(\phi - \alpha) \frac{\partial^2\phi}{\partial\alpha^2} \quad (3.25b)$$

$$G(\alpha) = \frac{1}{2}m_4bg \cos(\alpha) + \left[\frac{1}{2}m_2gL \cos(\phi) + k_r bL \sin(\phi)\right] \frac{\partial\phi}{\partial\alpha} + \left[\left(\frac{1}{2}m_3 + m_4\right)gL \cos(\psi) - k_l bL \sin(\psi)\right] \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} \quad (3.25c)$$

$$Z_l(\alpha) = \frac{bL \sin(\psi)}{l_l(\psi)} \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} \quad (3.25d)$$

$$Z_r(\alpha) = -\frac{bL \sin(\phi)}{l_r(\phi)} \frac{\partial\phi}{\partial\alpha} \quad (3.25e)$$

### 3.2.4 Étude statique

#### Espace de travail atteignable statiquement

La condition d'équilibre statique est obtenue si les termes dépendant du temps de l'équation (3.24) sont omis et  $f_l$  et  $f_r$  sont considérés comme constants, ce qui donne :

$$G_x(\alpha) = Z_l(\alpha)f_l + Z_r(\alpha)f_r \quad (3.26)$$

L'expression à droite de l'équation (3.26) est liée aux efforts d'actionnement dans les câbles. En utilisant cette équation, on peut définir les configurations (position et orientation) de l'effecteur atteignables statiquement, c'est à dire les configurations pour lesquelles les efforts dans les câbles sont à l'intérieur des valeurs autorisées (effort positif dans le câble car câble en tension et effort inférieur à la valeur maximale applicable par l'actionneur). L'ensemble de ces configurations atteignables statiquement est appelé l'espace de travail atteignable statiquement (en anglais "*Wrench Feasible Workspace*" ou WFW) [RLC20] [GMD07] [BREU06]. Ce terme peut désigner deux critères différents qu'il convient d'explicitier. [GMD07] distingue en effet le "static (equilibrium) workspace", qui correspond à l'espace de travail atteignable statiquement lorsque le robot n'est soumis qu'à son propre poids et à la masse embarquée, du "force-closure (FC) workspace", qui correspond à l'espace de travail pour lequel un robot soumis à un n'importe quel efforts extérieurs parmi un ensemble d'efforts extérieurs données pourra maintenir sa configuration à partir des efforts d'actionnements. Les usages et définitions du WFW varient donc d'un auteur à un autre. Dans notre cas, nous considérons que le mécanisme (et plus tard le manipulateur) n'est soumis qu'à son propre poids. Nous appellerons donc dorénavant l'espace de travail statique, soit l'ensemble des configurations atteignables statiquement, le WFW. Celui-ci peut-être déterminé de plusieurs manières, de manière géométrique pour des cas simples, le plus souvent par discrétisation de l'espace, ou par analyse d'intervalles.

Ainsi, le WFW doit respecter, par définition, les équations de contraintes cinématiques, l'équilibre statique et les limites pour les forces externes  $F_{max}$  et  $F_{min}$ . Les coefficients du côté droit de l'équation (3.26) définis par les équations (3.25d) et (3.25e), ont les propriétés suivantes :

$$Z_l(\alpha) > 0 \quad \text{et} \quad Z_r(\alpha) < 0 \quad \text{pour} \quad -\pi < \alpha < \pi \quad (3.27)$$

En conséquence, il est possible de déterminer les limites du couple d'actionnement  $\Gamma$  sur la base des limites des forces dans les câbles comme suit :

$$\begin{aligned} \Gamma_{max}(\alpha) &= Z_l(\alpha)F_{max} + Z_r(\alpha)F_{min} \\ \Gamma_{min}(\alpha) &= Z_l(\alpha)F_{min} + Z_r(\alpha)F_{max} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Le couple d'actionnement est limité par l'équation (3.28) (voir figure 3.3). La zone délimitée par les courbes en pointillés indique que le couple est atteignable avec les efforts minimum et maximum définis. Trois instances de  $G(\alpha)$  (équation (3.25c)) sont également présentes dans la figure. L'équilibre statique (équation (3.26)) est obtenu pour une plage de  $\alpha$  où  $G$  est à l'intérieur des courbes limites du couple applicable :

$$\Gamma_{min}(\alpha) \leq G_x(\alpha) \leq \Gamma_{max}(\alpha) \quad (3.29)$$

Le WFW est déterminé par l'intersection de  $G(\alpha)$  avec  $\Gamma_{min}$  et l'intersection de  $G$  avec  $\Gamma_{max}$ . Les trois courbes  $G$  varient en fonction de la raideur du ressort pour illustrer leur influence sur le WFW. En comparant la courbe  $G_{k=0}$  avec la courbe  $G_{k=25}$ , on constate que l'augmentation de la raideur du ressort se traduit par un WFW plus grand. Cependant, si la raideur du ressort est encore augmentée, on peut voir pour la courbe  $G_{k=50}$  qu'il est possible d'obtenir un WFW discontinu car la courbe dépasse partiellement les courbes limites du couple applicable. Dans le cas de la figure 3.3, les dimensions du mécanisme sont volontairement très grandes afin de mettre en évidence le phénomène de WFW discontinu. En effet, la masse importante des barres rend certaines configurations inatteignables avec les efforts considérés. Une fois passées ces configurations critiques, le mécanisme atteint des configurations qui sont de nouveaux atteignables avec de faibles efforts. On peut alors montrer que ces configurations sont instables. En pratique, ces configurations nécessiteraient d'être atteintes en utilisant des phénomènes dynamiques afin de franchir sans actionnement les zones inaccessibles. Dans le cadre de cette thèse, les mécanismes considérés sont de dimensions beaucoup plus faible et les raideurs des ressorts sont bien plus élevées, ce qui rend inexistant ces phénomènes de WFW discontinu.

### Étude de la raideur articulaire

En dérivant l'équation d'équilibre statique (équation (3.26)) par rapport à  $\alpha$ , on obtient la raideur articulaire du mécanisme  $K_x$  [QG] :

$$K_x = \frac{\partial G}{\partial \alpha} - \frac{\partial Z_l}{\partial \alpha} F_l - \frac{\partial Z_r}{\partial \alpha} F_r \quad (3.30)$$

La raideur désirée est souvent positive afin d'obtenir un équilibre stable. Une raideur négative signifie que, soumis à une perturbation extérieure, le mécanisme quitterait sa

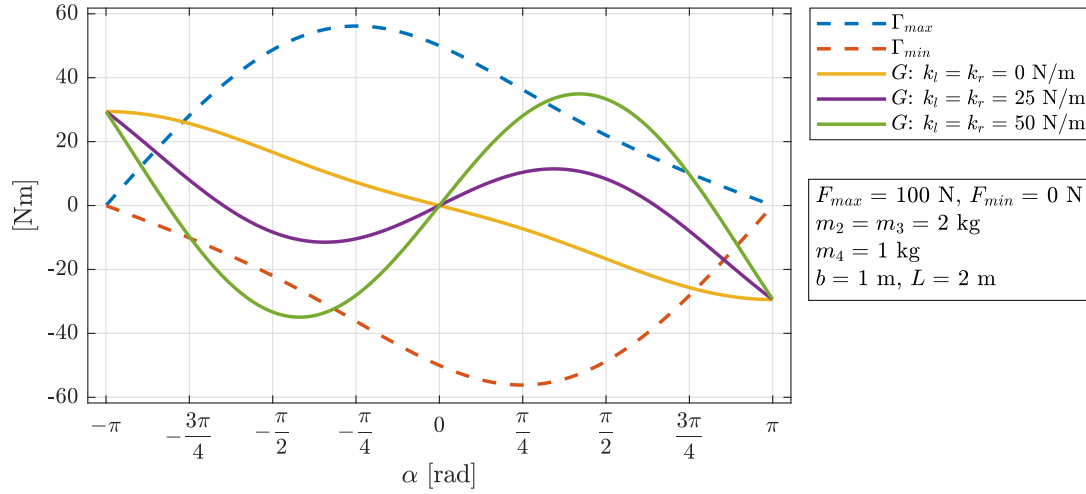


FIGURE 3.3 – Couple atteignable et  $G(\alpha)$  pour différentes valeurs de ressorts  $k_i$ .

configuration d'équilibre pour aller vers une prochaine position d'équilibre stable. Par exemple, ce phénomène pourrait être utilisé pour éviter les collisions lors d'interactions homme-robot.

Similairement au WFW défini dans la figure 3.3 sur la base de la limite des forces  $f_l$  et  $f_r$  qui peuvent être appliquées, une raideur de mécanisme atteignable est définie. Du côté droit de l'équation (3.30), il est possible de déterminer les limites de la raideur du mécanisme sur la base des limites des forces externes comme suit :

$$\begin{aligned}
 K_{x,min}(\alpha) &= \min_{F_{min} \leq F_{h,h=l,r} \leq F_{max}} \frac{\partial G_x}{\partial \alpha} - \frac{\partial Z_l}{\partial \alpha} F_l - \frac{\partial Z_r}{\partial \alpha} F_r \\
 K_{x,max}(\alpha) &= \max_{F_{min} \leq F_{h,h=l,r} \leq F_{max}} \frac{\partial G_x}{\partial \alpha} - \frac{\partial Z_l}{\partial \alpha} F_l - \frac{\partial Z_r}{\partial \alpha} F_r
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

La raideur atteignable est bornée par l'équation (3.31). Cette équation peut être utilisée pour déterminer la raideur que le mécanisme ne peut pas atteindre pour les forces d'actionnement maximales. En se basant à la fois sur l'équation (3.31) et (3.24), on peut déterminer l'espace des raideurs atteignables en fonction des positions d'équilibre. On voit sur la figure 3.4 que le mécanisme peut avoir une raideur positive sur un large espace de travail, mais que passé une certaine valeur, la raideur minimale comme maximale devient négative, ce qui correspond à un système instable.

### 3.3 Modélisation statique d'une articulation pivot

#### 3.3.1 Description du mécanisme

Le mécanisme pivot (figure 3.5) est composé de deux triangles isocèles articulés au niveau de leur sommet par une liaison pivot. Les deux triangles isocèles sont décrits par la longueur de leur base  $r$  ainsi que par leur hauteur  $h$ . L'orientation du triangle supérieur

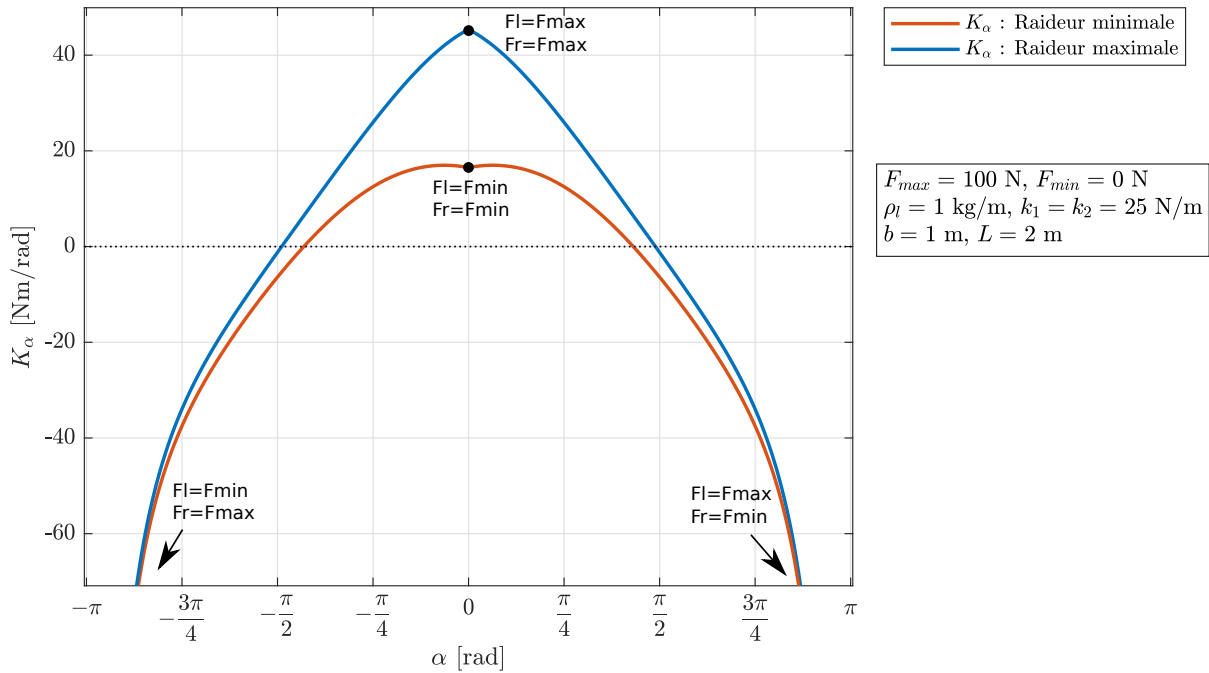


FIGURE 3.4 – Raideur atteignable pour un mécanisme en X.

par rapport au triangle inférieur est décrite par l'angle  $\theta_p$ . On considère ici des triangles inférieurs et supérieurs de dimension égales. Les extrémités des deux triangles sont reliées par des ressorts de traction de même raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ . Les barres ont une densité linéaire (masse par unité de longueur)  $\rho$ . Une masse  $M$  est accrochée à une distance  $d$  du milieu de la barre supérieure. Enfin, l'articulation est actionnée de manière antagoniste par deux câbles passant sur les cotés gauche et droit du mécanisme, en parallèle des ressorts, et appliquant sur les points D et C un effort de traction  $f_l$  et  $f_r$ , respectivement.

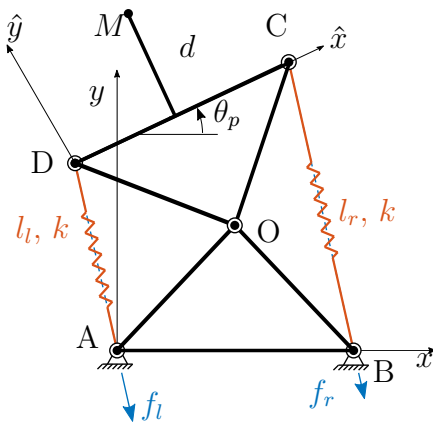


FIGURE 3.5 – Paramétrage d'un mécanisme pivot.

	paramètre	unité
Base triangles	$2r$	m
Hauteur triangles	$h$	m
Longueur Ressorts	$l_l, l_r, l_0$	m
Raideur Ressorts	$k$	$N/m$
Densité linéaire barres	$\rho$	$kg/m$

TABLE 3.2 – Données d'un mécanisme pivot.



### 3.3.2 Modélisation

#### Longueur des ressorts

La modélisation cinématique est assez simple puisque c'est celle d'une articulation pivot classique. Néanmoins, on peut exprimer, à partir de la figure 3.5 et des relations géométriques dans les triangles, les longueurs des ressorts de gauche et de droite :

$$l_l = 2 \left( h \cos \frac{\theta_p}{2} - r \sin \frac{\theta_p}{2} \right), \quad l_r = 2 \left( h \cos \frac{\theta_p}{2} + r \sin \frac{\theta_p}{2} \right) \quad (3.32)$$

#### Singularités

La plage de rotation de l'articulation P est limitée par des singularités dues aux câbles, et ce de deux manières différentes. Premièrement, lorsque les points (A, O, D) ou (B, O, C) sont alignés, le câble est aligné avec la liaison pivot et ne peut donc plus appliquer de couple sur la liaison pivot (en O). Deuxièmement, en raison de l'annulation de  $l_l$  ou  $l_r$ , où la direction de la force appliquée par le câble respectif devient non définie. Il peut être démontré que la limite de mouvement est due à la première singularité d'effort lorsque  $r < h$  et à la disparition de  $l_l$  ou  $l_r$  lorsque  $r > h$ . La plage de rotation dépend de la longueur des barres et atteint son amplitude maximale  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  quand  $r = h$  (voir annexe A pour plus de détails).

#### Modèle statique

En considérant le potentiel nul le long de l'axe  $\vec{x}$ , on peut exprimer l'énergie potentielle de gravité de la manière suivante :

$$U_g = 2\rho g \left( r + \sqrt{r^2 + h^2} \right) y_c \cos \theta_p + Mg(d + h) \cos \theta_p, \quad (3.33)$$

avec  $y_c = \frac{h(2r + \sqrt{r^2 + h^2})}{2(r + \sqrt{r^2 + h^2})}$  la distance entre le centre de masse du triangle mobile et le point O. On exprime également l'énergie potentielle due aux ressorts :

$$U_{sp} = \frac{1}{2}k \left( l_l^2 + l_r^2 \right) = 2k \left( r^2 + h^2 - \left( r^2 - h^2 \right) \cos \theta_p \right). \quad (3.34)$$

Ainsi, l'énergie potentielle totale du mécanisme s'exprime :

$$U_p = U_g + U_{sp}, \quad (3.35)$$

$$U_p = \rho g h \left( 2r + \sqrt{r^2 + h^2} \right) \cos \theta_p + Mg(d + h) \cos \theta_p + 2k \left( r^2 + h^2 - \left( r^2 - h^2 \right) \cos \theta_p \right) \quad (3.36)$$

On peut également exprimer les travaux virtuels des câbles de gauche et de droite :

$$U_f = f_l l + f_r l_r = 2f_l \left( h \cos \frac{\theta_p}{2} - r \sin \frac{\theta_p}{2} \right) + 2f_r \left( h \cos \frac{\theta_p}{2} + r \sin \frac{\theta_p}{2} \right). \quad (3.37)$$

La dérivation de l'énergie potentielle totale du mécanisme (gravité et ressorts) et les travaux virtuels des câbles par rapport à  $\theta_p$  nous donne le modèle statique, qui s'écrit sous la forme  $G(\theta_p) = \Gamma(\theta_p, f_l, f_r)$ , avec :

$$G_p = \left( 2k(r^2 - h^2) - g(M(d+h) + h\rho(\sqrt{h^2 + r^2} + 2r)) \right) \sin \theta_p \quad (3.38)$$

$$\Gamma_p = -f_l \frac{\partial l}{\partial \theta_p} - f_r \frac{\partial l_r}{\partial \theta_p} = f_l \left( h \sin \frac{\theta_p}{2} + r \cos \frac{\theta_p}{2} \right) + f_r \left( h \sin \frac{\theta_p}{2} - r \cos \frac{\theta_p}{2} \right) \quad (3.39)$$

$\Gamma_p$  représente le couple appliqué par les câbles sur le point O du mécanisme. Les forces d'actionnement sont nécessairement positives et limitées physiquement par les couples moteurs, on a donc  $f_l, f_r \in [F_{\min}, F_{\max}]$ . Le coefficient de  $f_l$  (respectivement  $f_r$ ) est toujours négatif (respectivement positif), donc les limites maximales (respectivement minimales) du couple applicable  $\Gamma_{\max}$  (resp.  $\Gamma_{\min}$ ) est atteint quand  $f_l = F_{\max}$  et  $f_r = F_{\min}$  (respectivement  $f_l = F_{\min}$  et  $f_r = F_{\max}$ ).

### 3.3.3 Espace de travail atteignable statiquement

Une fois les limites  $\Gamma_{\max}$  et  $\Gamma_{\min}$  définies, l'équation d'équilibre statique ne peut être obtenue que pour  $G_p \in [\Gamma_{\min}, \Gamma_{\max}]$ . L'ensemble des valeurs  $\theta_p$  pour lesquelles cette condition correspond au WFW.

### 3.3.4 Raideur articulaire

La raideur articulaire autour de  $\theta_p$  s'obtient en dérivant le modèle statique (équation (3.39)) par rapport à  $\theta_p$ . On obtient :

$$K_p = \frac{1}{3} \left( 6k(r^2 - h^2) - 4\rho gh(r + \sqrt{r^2 + h^2}) - 3Mg(d+h) \right) \cos \theta_p \quad (3.40)$$

$$+ \frac{1}{2} f_l \left( -h \cos \frac{\theta_p}{2} + r \sin \frac{\theta_p}{2} \right) - \frac{1}{2} f_r \left( h \cos \frac{\theta_p}{2} + r \sin \frac{\theta_p}{2} \right) \quad (3.41)$$

## 3.4 Comparaison et choix du meilleur mécanisme 2D

On considère que les longueurs des éléments et les raideurs des ressorts (symétriques) sont les variables de conception des mécanismes. Les masses des barres et masses embarquées sont quant à elle des paramètres dont les valeurs sont a priori connues. L'objectif de cette section est de trouver une conception optimale des deux types d'articulations, satisfaisant les conditions suivantes :

- L'articulation doit avoir un WFW de la forme :  $[-\theta_{max}, \theta_{max}]$  avec  $\theta_{max} < \frac{\pi}{2}$  pour éviter les singularités (pour les deux mécanismes).
- La raideur des articulations doit être positive le long du WFW pour toutes les valeurs d'effort satisfaisant l'équation d'équilibre statique. De plus, la raideur articulaire doit valoir une valeur donnée ( $K_0 > 0$ ) quand aucun effort d'actionnement n'est appliqué et une valeur ( $K_1 > 0$ ) sur les bornes du WFW.
- Les efforts nécessaires pour déplacer les mécanismes à leurs bornes doivent être minimums.

Grâce à la symétrie des articulations autour de leur orientation neutre (angle nul), on peut étudier le WFW ainsi que la raideur seulement sur une moitié de l'espace de travail articulaire des mécanismes, ici  $\theta_p > 0$  et  $\theta_x > 0$ . Par la suite, la limite positive du WFW sera notée  $\theta_{pm}$  pour l'articulation pivot et  $\theta_{xm}$  pour l'articulation en X. Afin de satisfaire aux conditions énumérées ci-dessus, un système d'équations et d'inégalités a été formulé pour les deux articulations, comme indiqué dans le tableau 3.3 (en supposant que  $F_{min} = 0$ ). Physiquement, les deux premières conditions garantissent qu'aucune singularité ne se produit dans le WFW et que la limite positive du WFW est formée par l'intersection des courbes  $G_p$  (respectivement  $G_x$ ) et  $\Gamma_{max}$ . Les troisième et cinquième conditions

Articulation P		Articulation X	
$l_l(\theta_{pm}) > 0$	(3.42a)	Pas de singularités quand $\left(\theta_{xm} < \frac{\pi}{2}\right)$	
$G_p(\theta_{pm}) + F_{max} \frac{dl_l}{d\theta_p}(\theta_{pm}) = 0$	(3.42b)	(3.43a)	
$K_p(\theta_p = 0, f_l = 0, f_r = 0) = K_0$	(3.42c)	$G_x(\theta_{xm}) + F_{max} \frac{dl_l}{d\theta_x}(\theta_{xm}) = 0$	(3.43b)
$K_p(\theta_p = 0, f_l = F_{max}, f_r = F_{max}) \geq 0$	(3.42d)	$K_x(\theta_x = 0, f_l = 0, f_r = 0) = K_0$	(3.43c)
$K_p(\theta_p = \theta_{pm}, f_l = F_{max}, f_r = 0) = K_1$	(3.42e)	$K_x(\theta_x = 0, f_l = F_{max}, f_r = F_{max}) \geq 0$	(3.43d)
		$K_x(\theta_x = \theta_{xm}, f_l = F_{max}, f_r = 0) = K_1$	(3.43e)

TABLE 3.3 – Expression des conditions pour l'articulation en P et en X

garantissent que la raideur de l'articulation est égale à  $K_0$  en l'absence de forces appliquées, et égale à  $K_1$  à la limite du WFW. La condition restante garantit que l'articulation possède une raideur non-négative à l'orientation zéro lorsque des forces maximales sont appliquées. Le rapport des longueurs de liaison :  $\eta(= \frac{r}{h})$  pour l'articulation P et  $\lambda(= \frac{L}{b})$  pour l'articulation X ont été introduits dans la formulation, en éliminant les variables  $h$  et  $L$ , respectivement. Cela s'explique par le fait que le ratio permet de mieux comprendre le problème et simplifie également considérablement les expressions qui en résultent. Les conditions du tableau 3.3 sont ensuite évaluées en fonction des paramètres de l'articulation. Leurs expressions ne sont pas rapportées, mais peuvent être trouvées en annexe .A. On peut donc formuler le problème d'optimisation pour les deux types de mécanismes.

### 3.4.1 Conception optimal de l'articulation en R

Il est à noter que l'ensemble des variables de conception de l'articulation pivot est formé par  $r$ ,  $\eta$ , et  $k$ . L'utilisation de l'équation (3.41) dans (3.42c) donne la condition suivante :  $C = K_0$ . À partir de l'expression de  $C$  fournie dans l'équation (3.25b), il est possible d'exprimer  $k$  :

$$k = \frac{\eta^2}{2r^2(\eta^2 - 1)} \left( K_0 + \frac{4r^2}{3\eta^2} \rho g \left( \eta + \sqrt{\eta^2 + 1} \right) + Mg \left( d + \frac{r}{\eta} \right) \right) \quad (3.44)$$

D'après l'équation ci-dessus, il est clair que la condition  $\eta > 1$  est nécessaire pour garantir que  $k$  reste positif. De plus, à partir de l'inégalité dans l'équation (3.42a), on obtient la condition :  $\eta < \cot \frac{\theta_{pm}}{2}$ . En substituant  $C = K_0$  dans l'équation (3.42b), on obtient la force nécessaire pour atteindre le WFW spécifié comme :

$$F_{\max} = \frac{K_0 \eta \sin \theta_{pm}}{r \left( \eta \cos \frac{\theta_{pm}}{2} + \sin \frac{\theta_{pm}}{2} \right)} \quad (3.45)$$

En utilisant les conditions ci-dessus, on peut montrer que l'inégalité dans l'équation (3.42d) est satisfaite par défaut, lorsque  $\eta > 1$ , pour toutes les valeurs de  $\theta_{pm} \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  (voir annexe .A pour les détails). En outre, la substitution de  $C = K_0$  et de l'expression ci-dessus de  $F_{\max}$  dans l'équation (3.42e), conduit à :

$$\eta = \frac{K_0(1 - \cos \theta_{pm}) + 2K_1}{K_0(1 + \cos \theta_{pm}) - 2K_1} \tan \left( \frac{\theta_{pm}}{2} \right) \quad (3.46)$$

L'équation ci-dessus fournit une relation simple entre les spécifications de conception imposées ( $\theta_{pm}$ ,  $K_0$ ,  $K_1$ ) et  $\eta$ . Il est intéressant de remarquer que pour un ensemble donné de spécifications, le rapport des dimensions des barres reste fixe, indépendamment de la charge utile ( $M$ ,  $d$ ) et du matériau des barres  $\rho$ . Il est à noter que les spécifications  $K_0$ ,  $K_1$ , et  $\theta_{pm}$ , doivent permettre de respecter les limites sur :  $\eta \in ]1, \cot \frac{\theta_{pm}}{2}[$ , pour l'existence de conceptions réalisables. En remplaçant l'expression de  $\eta$  donnée dans l'équation (3.46), l'équation (3.45) et l'équation (3.44),  $F_{\max}$  et  $k$  peuvent être exprimés en fonction de  $r$ , qui est la seule variable restante. Ainsi, pour minimiser la force nécessaire pour déplacer l'articulation, le problème d'optimisation suivant est posé :

$$\begin{aligned} \text{Min}_r \quad F_{\max}(r) &= \frac{(K_0(1 - \cos \theta_{pm}) + 2K_1)}{r} \sin \left( \frac{\theta_{pm}}{2} \right) \\ \text{avec} \quad r &\in [0.025, 0.1], \\ k &\in [0, 2000], \end{aligned} \quad (3.47)$$

où  $r$  est la variable de conception de ce problème. La contrainte sur  $\eta$  n'est pas mentionnée dans le problème car elle devrait être satisfaite par le choix de  $K_0$ ,  $K_1$ , et  $\theta_{pm}$ . Les contraintes sur les variables  $r$  et  $k$  ont été imposées dans le problème en raison de

considérations pratiques, telles que la disponibilité des composants correspondants sur le marché et la facilité de fabrication/assemblage. En utilisant l'équation (3.44), on peut obtenir des conditions algébriques équivalentes sur  $r$ , correspondant aux limites sur  $k$ . Ces conditions seraient utilisées pour définir l'espace de conception possible de l'articulation pivot. La condition nécessaire du premier ordre pour que  $F_{\max}$  atteigne un minimum local nécessite l'annulation de sa dérivée par rapport à  $r$ . Toutefois, on constate que  $\frac{dF_{\max}}{dr} = -\frac{(K_0(1-\cos\theta_{pm})+2K_1)}{r^2} \sin\left(\frac{\theta_{pm}}{2}\right)$ , est négatif pour toutes les valeurs possibles des variables et paramètres de conception. Cela implique que  $F_{\max}$  diminue avec l'augmentation de  $r$ , et sa valeur minimale se produirait lorsque  $r$  est aussi grand que possible, tout en satisfaisant aux contraintes spécifiées dans l'équation (3.47). De plus amples informations sur la valeur minimale de la force et les variables de conception correspondantes peuvent être obtenues en étudiant le comportement de  $F_{\max}$  à l'intérieur de l'espace de conception, comme illustré dans la figure 3.6a.

### 3.4.2 Conception optimale de l'articulation en X

Pour avoir une même base de comparaison entre l'articulation pivot et l'articulation en X, on définit  $\theta_x = \alpha/2$  et on réécrit l'équation (3.26) par rapport à  $\theta_x$  comme suit :  $G_x = \Gamma_x$ , avec :

$$\begin{cases} G_x = C_1 \sin 2\theta_x + \frac{C_2 \sin \theta_x (2b^2 \cos^2 \theta_x - l^2)}{b\sqrt{l^2 - b^2 \cos^2 \theta_x}}, \\ \text{avec } C_1 = 2(b^2k - Mgd), C_2 = bg(M + \rho(b + l)) \end{cases} \quad (3.48)$$

$$\Gamma_x = -F_1 \frac{\partial l_1}{\partial \theta_x} - F_2 \frac{\partial l_2}{\partial \theta_x} \quad (3.49)$$

Les variables de conception de l'articulation X sont :  $b$ ,  $\lambda$ , et  $k$ . En utilisant les équations (3.43b) et (3.43e), il est possible d'obtenir l'expression de  $F_{\max}$  rapportée dans l'équation (3.52), et une relation entre  $C_1$  et  $C_2$  de la forme :  $C_1 = \gamma_1 K_1 + \gamma_2 C_2$ , où  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont des fonctions de  $\lambda$  et  $\theta_{xm}$ , présentées en annexe .A. La substitution de cette relation dans l'équation (3.43c) conduit à :

$$2\gamma_1 K_1 + \gamma_3 C_2 - K_0 = 0, \text{ avec } \gamma_3 = 2\gamma_2 - \frac{\lambda^2 - 2}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \quad (3.50)$$

En remplaçant l'expression de  $C_2$  à partir de l'équation (3.48) dans (3.50), on peut obtenir une équation quadratique en  $b$  :  $\rho g \gamma_3 (\lambda + 1) b^2 + M g \gamma_3 b + 2\gamma_1 K_1 - K_0 = 0$ . Si l'on considère  $b > 0$ , cette équation donne une solution unique :

$$b = \frac{\sqrt{\gamma_3^2 g^2 M^2 - 4\gamma_3 g (\lambda + 1) \rho (2\gamma_1 K_1 - K_0)} - \gamma_3 g M}{2\gamma_3 g (\lambda + 1) \rho} \quad (3.51)$$

En utilisant cette expression de  $b$ , il est possible d'obtenir  $C_2$  (à partir de l'équation (3.48)), puis  $C_1$  en fonction de  $\lambda$ . De plus, à partir de la définition de  $C_1$  (voir équation (3.48)), la constante de ressort  $k$  peut être déterminée comme suit :  $k = \frac{C_1 + 2Mgd}{2b^2}$ .

En utilisant l'équation (3.50), on peut montrer que l'inégalité dans l'équation (3.43d) se réduit à :  $K_0 + \frac{2bF_{\max}}{\sqrt{\lambda^2-1}} \geq 0$ , qui est satisfaite par défaut, puisque tous ses termes sont positifs. Ainsi, le problème d'optimisation pour la conception de l'articulation en X se pose comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\lambda} \quad F_{\max}(\lambda) &= \frac{C_2 \lambda^4 \sin \theta_{xm} \tan^2 \theta_{xm} + K_1 \tan \theta_{xm} (\lambda^2 - \cos^2 \theta_{xm})^{3/2}}{b \cos \theta_{xm} ((\lambda^2 - \cos^2 \theta_{xm})^{3/2} - \sin^3 \theta_{xm})} \\ \text{avec} \quad k &\in [0, 2000], \\ b &\in [0.05, 0.2], \\ \lambda &\in [1, 5], \end{aligned} \tag{3.52}$$

où  $\lambda$  est la seule variable de conception dans ce problème ( $\lambda = \frac{l}{b}$ ). Les limites sur  $k$  et  $b$  doivent être transférées à  $\lambda$ , pour définir l'espace de conception possible pour l'articulation en X. Cependant, en raison de la relation fonctionnelle complexe entre les variables, un ensemble équivalent de conditions algébriques sur  $\lambda$  n'a pas pu être obtenu. Néanmoins, à partir d'un tracé de  $b$  (respectivement  $k$ ) en fonction de  $\lambda$ , il est possible d'identifier visuellement les régions réalisables, puis de calculer numériquement les points limites correspondants, pour définir l'espace de conception réalisable (voir figure 3.6b).

Comme dans le cas précédent, la condition nécessaire du premier ordre pour que  $F_{\max}$  atteigne un minimum est obtenue à partir de la condition :  $\frac{dF_{\max}}{d\lambda} = 0$ . L'expression algébrique correspondante est trop grande pour être rapportée ici (voir annexe A pour plus de détails). La solution de la dite équation donnerait les points fixes de  $F_{\max}$ . Tout d'abord, il est essentiel de vérifier s'il existe une ou plusieurs solutions qui satisfont à toutes les contraintes spécifiées dans l'équation (3.52). Deuxièmement, ces solutions doivent être classées comme un minimum ou un maximum ou un point d'inflexion, par le test de la dérivée seconde ou en inspectant la courbe de  $F_{\max}$  par rapport à  $\lambda$ , comme illustré dans la figure 3.6b. S'il existe plusieurs minima dans l'espace de conception possible, il faut choisir celui qui correspond à la plus petite valeur de  $F_{\max}$ . En revanche, si aucun minimum n'existe, la solution à ce problème doit se trouver à la limite de l'espace de conception réalisable, selon que le point limite est inclus ou non.

### 3.4.3 Exemple numérique et conclusion

Tous les éléments sont considérés comme étant imprimés en 3D en ABS, ayant une section circulaire d'un diamètre égal à 0,01 m. Par conséquent, la densité de masse linéaire  $\rho$  des éléments est de 0,0825 kg/m. Les valeurs de la masse ponctuelle  $M$  et du décalage  $d$  sont considérées comme étant :  $M = 0,2$  kg et  $d = 0,25$  m, respectivement. Idéalement, une valeur appropriée pour la raideur prescrite ( $K_0, K_1$ ) devrait être déterminée expérimentalement pour estimer le niveau de perturbation que l'articulation doit supporter. Dans cette étude, ces valeurs sont choisies pour être :  $K_0 = 1$  Nm/rad et  $K_1 = 0,6$  Nm/rad, pour les deux articulations après avoir vérifié que les conditions nécessaires discutées dans les sections 3.4.1 et 3.4.2 sont satisfaites. Le WFW est fixé à  $[-\frac{5\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}]$  (c'est-à-dire  $[-50^\circ, 50^\circ]$ ) pour les deux mécanismes.

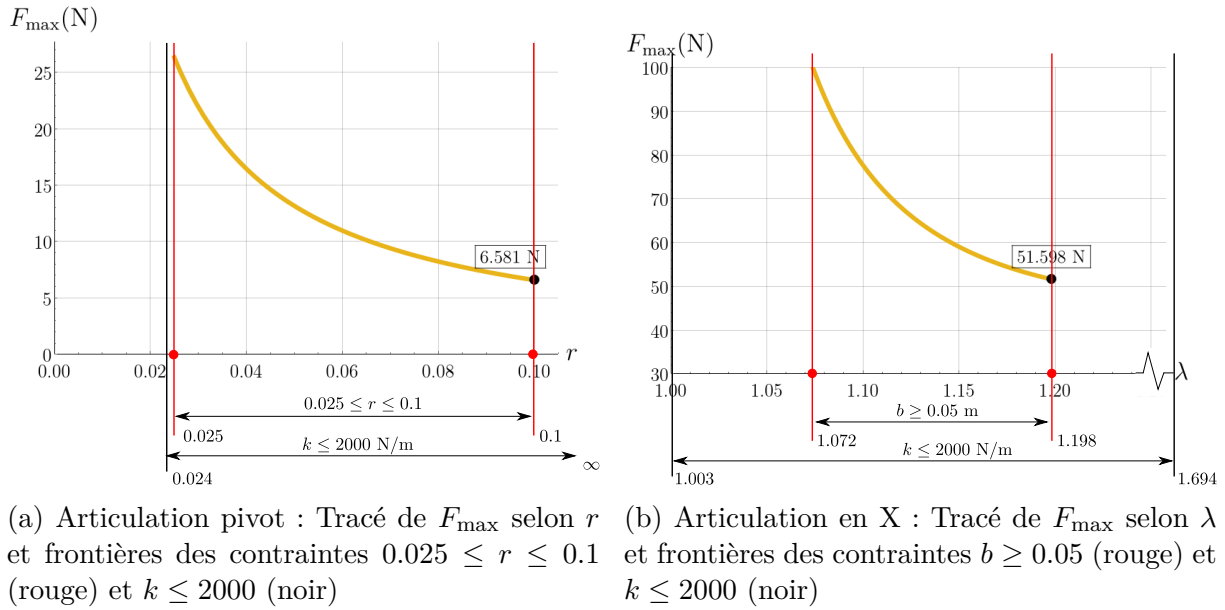


FIGURE 3.6 – Variation de  $F_{\max}$  dans l'espace de conception réalisable des articulations.

En utilisant les données ci-dessus,  $F_{\max}$  est tracé dans l'espace de conception ( $r$ ) de l'articulation pivot comme indiqué sur la figure 3.6a. On observe que l'espace de conception possible est formé par la contrainte :  $0.025 \leq r \leq 0.1$  (en rouge). À partir du tracé,  $F_{\max}$  atteint sa valeur minimale de 6.581 N quand :  $r = 0,1$  m,  $\eta = 1,6399$  ( $h = r/\eta = 0,061$  m), et  $k = 129,2487$  N/m.

Sur la figure 3.6b,  $F_{\max}$  est tracé par rapport à la variable de conception  $\lambda$  de l'articulation X. On observe que l'espace de conception possible est réduit à  $\lambda \in [1.072, 1.198]$ , par la contrainte  $b \geq 0.05$  (en rouge). On constate que l'équation  $\frac{dF_{\max}}{d\lambda} = 0$ , donne  $\lambda = 1,3$ , ce qui est en dehors du domaine réalisable. Ainsi, à partir du tracé, la valeur minimale de  $F_{\max} = 51,598$  N se produit lorsque  $\lambda = 1,1982$ ,  $b = 0,05$  m ( $l = \lambda, b = 0,0599$  m), et  $k = 287,2395$  N/m.

Les conceptions optimales, les forces correspondantes et les limites de la raideur des articulations sont présentées dans la figure 3.7. Les résultats obtenus permettent de tirer les conclusions suivantes :

- A partir des dimensions des barres, on observe que la largeur (respectivement la hauteur) de la liaison P est 4 (respectivement environ 3,7) fois plus grande que celle de l'articulation en X. La masse de l'articulation P (sans la charge utile) est de 0,085 kg, soit environ 4,5 fois la masse de l'articulation X, calculée à 0,018 kg.
- La limite supérieure de raideur de l'articulation P (ou de l'articulation X) est atteinte lorsque l'une des forces appliquées est égale à  $F_{\min}$  (ou  $F_{\max}$ ). Cela montre que l'augmentation des forces appliquées *diminue* la raideur de l'articulation P, alors qu'elle *augmente* la raideur de l'articulation X.
- La force nécessaire pour déplacer l'articulation P est environ 1/8 fois plus faible que celle de l'articulation X. Cela signifie que l'articulation P est plus sensible aux

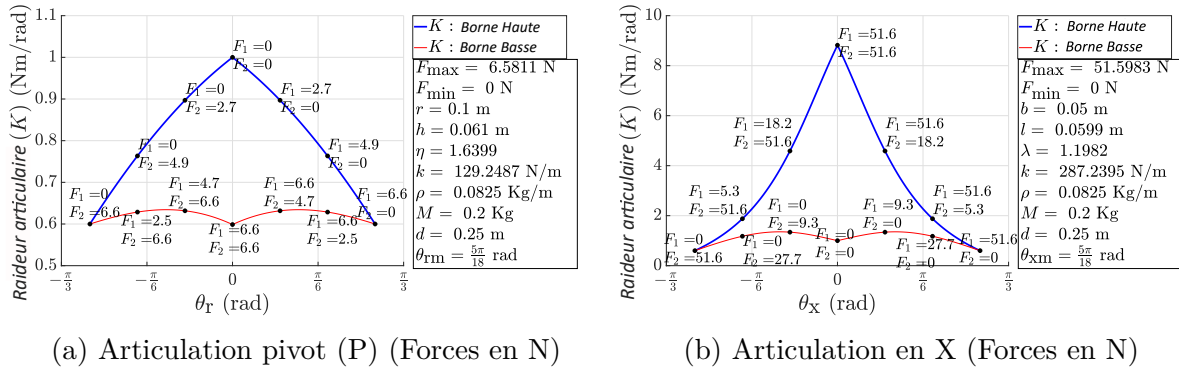


FIGURE 3.7 – Tracé des frontières de la raideur correspondant à la conception optimale des deux mécanismes pour un WFW donné de  $[-\frac{5\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}]$ , des raideurs en 0 et aux frontières de  $K_0 = 1 \text{ Nm/rad}$ ,  $K_1 = 0,6 \text{ Nm/rad}$  et une charge appliquée de :  $M = 0.2 \text{ kg}$ ,  $d = 0.25 \text{ m}$ .

petites variations de forces appliquées.

- La valeur de la raideur de l'articulation X est plus élevée (environ 9 fois) que celle de l'articulation P, autour de l'orientation zéro. En outre, la distribution de la raideur est plus uniforme dans toute l'espace atteignable statiquement pour l'articulation P, tandis que des différences relativement importantes de raideur sont observées pour l'articulation X à l'intérieur de son WFW, entre l'orientation zéro et la limite. En outre, la différence entre la rigidité minimale et maximale est plus importante pour l'articulation en X, en particulier autour de l'orientation zéro. L'articulation X est donc plus adaptée à une raideur variable.
- La valeur de la constante de ressort ( $k$ ) nécessaire est environ deux fois plus grande pour l'articulation X que pour l'articulation P.

L'analyse statique de deux articulations actionnées de manière antagoniste avec une charge utile a été réalisée : l'articulation pivot (P) et l'articulation antiparallèle (X). Une stratégie de conception optimale a été proposée afin de minimiser les forces d'actionnement pour un WFW avec une raideur prescrite au repos et aux limites du WFW. Les articulations ont été comparées en termes de forces d'actionnement et de raideur, alors qu'elles sont conçues pour avoir le même WFW. Il s'avère que l'articulation P est plus lourde, qu'elle nécessite des forces plus faibles, qu'elle est plus sensible aux forces appliquées et qu'elle possède une répartition de la raideur plus uniforme dans son WFW. D'autre part, l'articulation X atteint une raideur plus élevée près de son orientation zéro et présente des variations de raideur relativement importantes au sein de son WFW. Physiquement, contrairement à l'articulation X, l'articulation P a tendance à tomber sous son propre poids. La raideur de l'articulation X peut être facilement augmentée en augmentant l'amplitude des forces. Pour l'articulation P, en revanche, la raideur et les forces restent très faibles sur toute la plage de rotation et elle diminue lorsque l'ampleur des forces augmente. Les conclusions de cette étude montre que le comportement de l'articulation pivot antagoniste est difficile à mettre en oeuvre, et que son comportement dépend énormément



Tension	24 VCC
Courant max	4 A
Constante de couple	44.8 mNm/A
Vitesse à vide	202 tr/min
Couple nominal	3.10 Nm
Vitesse nominale	160 tr/min
Rapport de réduction	25
Rendement	0.75

TABLE 3.4 – Données techniques du moto-réducteur ECMAX40L/PM42

des paramètres géométriques choisis, ce qui n'est pas le cas pour l'articulation en X. Dans le cadre de cette thèse, on se concentre maintenant sur l'articulation en X.

## 3.5 Réalisation d'un prototype de mécanisme en X

### 3.5.1 Cahier des charges et caractéristiques

Les dimensions du prototype doivent d'abord respecter la contrainte d'assemblage qui impose  $L > b$ . Pour ce mécanisme, la longueur minimale du ressort est donnée par  $(L - b)$  et la longueur maximale par  $(L + b)$ , ce qui correspond aux configurations plates du mécanisme. À partir d'un large ensemble de ressorts disponibles et des caractéristiques des longueurs à vide et longueurs d'élongation maximale, les meilleures dimensions ont été déterminées. Les paramètres  $L$  et  $b$  sont choisis de manière à ce que le nombre maximal de ressorts différents disponibles puisse être monté sur le prototype, ce qui permet un comportement différent du mécanisme, une raideur non symétrique des ressorts, etc. Nous nous sommes assurés que pour chaque ressort disponible, la longueur libre  $l_0$  était inférieure à  $(L - b)$  et que la longueur maximale étirée du ressort  $l_{max}$  était supérieure à  $(L + b)$ . À partir de cette analyse, les dimensions pour  $L$  et  $b$  ont été choisies de telle sorte que  $L = 100\text{ mm}$  et  $b = 50\text{ mm}$ .

Les deux moteurs choisis sont deux moto-réducteurs synchrones MAXON<sup>1</sup>. Les données techniques des moteurs sont indiquées dans le tableau 3.4. Les câbles sont fixés à l'arbre du moteur grâce à un enrouleur (ou tambour), dont le rayon doit être déterminé. En effet, le rayon du tambour relie le couple du moteur à la tension ainsi que la vitesse du moteur et la vitesse du câble. Ainsi, un rayon de 20 mm a été choisi pour le tambour, ce qui donne une tension max de 155 N, prise comme  $F_{max}$  et une vitesse nominale de 0,33 m/s pour les câbles.

### 3.5.2 Assemblage mécanique

Une première conception a été réalisée avec un logiciel de CAO (3DEXPERIENCE), qui a mis en évidence la nécessité d'utiliser des plans différents pour l'assemblage du mécanisme

<sup>1</sup>ECMAX40L / PM42

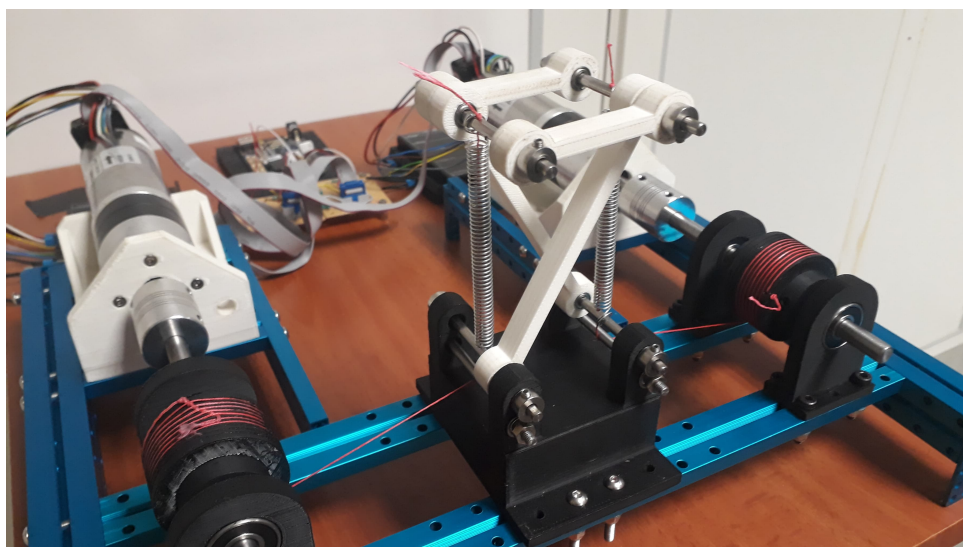


FIGURE 3.8 – Photo du prototype

en X, afin d'éviter les collisions entre les barres. Chaque articulation tournante est réalisée autour d'un axe qui relie les barres entre elles. Chaque barre a été imprimée en 3D en ABS. La liaison pivot entre l'extrémité de chaque barre et l'arbre est assurée par deux roulements. En effet, en fonction de la profondeur utilisée, deux roulements assurant un centrage long sont préférables à un seul roulement qui permet la torsion et la déformation du prototype. Ainsi, deux barres croisées sont fixées à la base du mécanisme, et deux barres supérieures pour le corps 3, afin d'avoir plus de rigidité en torsion (voir figure 3.8). Entre l'arbre supérieur gauche et l'arbre inférieur gauche (respectivement droit), le ressort gauche (respectivement droit) est fixé et pré-tendu, assurant ainsi une position d'équilibre stable du mécanisme (voir figure 3.9). On peut également monter sur chaque côté un ressort à chaque extrémité du mécanisme, afin de répartir les efforts de torsion. On peut également avoir un panel de raideurs important en utilisant les propriétés de mise en parallèle des ressorts. Chaque câble passe autour d'une poulie sur l'arbre inférieur et est attaché à une poulie sur l'arbre supérieur, afin de diminuer les frottements. Le passage des câbles est optimisé afin d'assurer un contact entre le câble et les poulies, peu importe la position du mécanisme. Le tambour est également imprimé en 3D et une vis assure le bon enroulement du câble autour de celui-ci. Les caractéristiques du prototype sont indiquées dans le tableau 3.5.

Le mécanisme en X étant léger, sa propre inertie est faible par rapport à l'inertie de la chaîne d'actionnement. L'inertie de l'actionneur en tenant compte de la chaîne cinématique complète peut s'écrire en fonction de  $\alpha$  comme suit :

$$M_a(\alpha) = \frac{I_a}{r_{drum}^2} \left[ \left( \frac{\partial l_l}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial l_r}{\partial \alpha} \right)^2 \right] \quad (3.53)$$

On remarque que  $M_a$  dépend fortement de  $\alpha$ . Ainsi, la prise en compte de  $M_a$  dans l'équation (3.54) pour le calcul de  $M(\alpha)$  (voir équation (3.25a)) est nécessaire pour assurer un suivi de trajectoire satisfaisant.

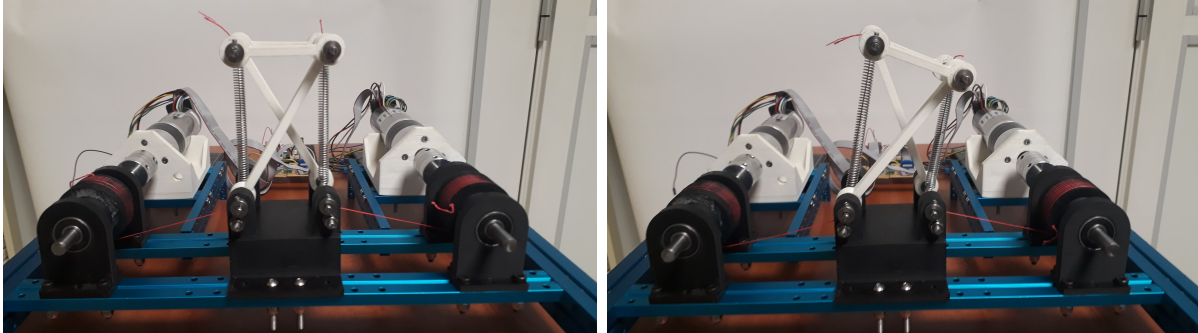


FIGURE 3.9 – Vue de face de la position d'équilibre au repos du prototype (gauche) et une position d'équilibre donnée du prototype avec un effort d'actionnement (droite).

Paramètre	Valeur	Unité
$b$ : longueur des barres inférieures et supérieures	0.05	m
$L$ : Longueur des barres croisées	0.1	m
$m_4$ : Masse de la barre supérieure	0.009	kg
$m_2, m_3$ : Masse d'une barre croisée	0.016	kg
$k_l, k_r$ : Raideur des ressorts	90	N/m
$l_0$ : Longueur à vide des ressorts	0.037	m
$r_{drum}$ : Rayon de l'enrouleur	0.02	m
$I_a$ : Inertie de l'actionneur ramenée à l'arbre moteur	0.0078	kg.m <sup>2</sup>
$f_{max}$ : Force maximale appliquée par le câble	155	N

TABLE 3.5 – Données du prototype 1-DDL.

### 3.5.3 Interface et commande

Un micro-contrôleur Beaglebone (BB) Blue est utilisé pour contrôler le prototype. Ce micro-contrôleur offre un large ensemble de fonctions et de broches, de l'ADC (convertisseur analogique-numérique) à la PWM (modulation à largeur d'impulsion) et aux entrées des codeurs. Chaque moteur MAXON est contrôlé grâce à un variateur ESCON 50/5, qui assure le contrôle de la vitesse et du couple de chaque moteur. Les variateurs ESCON permettent une liaison directe depuis le codeur qui mesure la position angulaire du moteur, de sorte qu'une loi de contrôle de vitesse interne est possible. Dans notre cas, nous avons utilisé une loi de contrôle plus complexe impliquant le modèle dynamique, c'est pourquoi nous avons eu besoin d'un micro-contrôleur et d'une interface entre les codeurs, le micro-contrôleur et le variateur (voir figure 3.11).

La boucle fermée est présentée sur la figure 3.10. Étant donné une trajectoire souhaitée  $(\ddot{\alpha}_d, \dot{\alpha}_d, \alpha_d)$  et la position actuelle  $\alpha$ , les forces à appliquer sont calculées avec la loi de commande dynamique fournie dans l'équation (3.24). La vitesse  $\dot{\alpha}$  est également utilisée, elle doit donc être mesurée ou calculée. Ces forces sont converties en signaux PWM  $s_l, s_r$  qui sont donnés aux moteurs (grâce au contrôleur ESCON). Ainsi, les deux moteurs appliquent un couple sur l'enrouleur, qui est lié au couple appliqué sur le CIR du mécanisme  $\Gamma$  grâce au rayon de l'enrouleur et à la partie droite de l'équation (3.24). Les longueurs  $l_l, l_r$  des deux câbles sont liées aux positions des moteurs  $p_l, p_r$ , qui sont les sorties des codeurs. Les codeurs sont directement connectés au micro-contrôleur, avec une certaine adaptation de la tension. L'inclinaison  $\alpha$  du mécanisme de tenségrité est déduite de  $p_l$  et  $p_r$ , des dimensions du mécanisme et du tambour.

Pour une trajectoire souhaitée  $(\alpha_d, \dot{\alpha}_d, \ddot{\alpha}_d)$ , on utilise une commande en couple avec une correction proportionnelle-intégrale-dérivée (PID). Les forces  $(F_l, F_r)$  sont calculées en utilisant (3.54) :

$$M(\alpha)(\ddot{\alpha}_d + k_d(\dot{\alpha}_d - \dot{\alpha}) + k_p(\alpha_d - \alpha) + k_i \int_0^{\tau} (\alpha_d - \alpha)(t)dt) + G(\alpha) = Z_l(\alpha)f_l + Z_r(\alpha)f_r \quad (3.54)$$

Pour simplifier les calculs, les effets de Coriolis sont négligés (on suppose que les vitesses sont faibles). Les gains sont calculés comme expliqué dans [Car+15], à savoir,  $k_p = 3\omega^2, k_i = 3\omega, k_d = \omega^3$ , où  $\omega$  est une fonction de la constante de couple, de la constante diélectrique, du rendement du moteur et de son inertie. À chaque itération, l'orientation réelle  $\alpha$  du mécanisme est calculée en mesurant les positions du moteur à l'aide de codeurs. Ces informations des codeurs sont utilisées pour calculer les longueurs de câble effectives  $l_l$  et  $l_r$  et la valeur correspondante de  $\alpha$ .  $\dot{\alpha}$  est calculé numériquement. Comme dans (3.54), il y a deux forces et une équation, une infinité de forces peut être définie. Un couple unique de forces peut être déterminé en utilisant l'équation de raideur du mécanisme (équation (3.30)) et en imposant une raideur pour la configuration donnée. Cette raideur imposée n'aurait pas d'influence sur le comportement du mécanisme en boucle fermée, le correcteur PID chercherait à minimiser l'erreur en position et viendrait donc augmenter la raideur du mécanisme le plus possible. L'influence de la raideur imposée peut-être vérifiée en boucle ouverte une fois la position de référence atteinte, comme cela

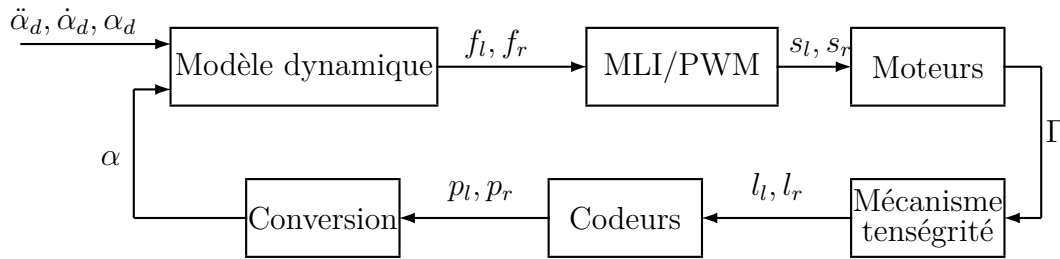


FIGURE 3.10 – Boucle de commande

est fait dans [Boe+17]. Une commande en impédance pourrait également être envisagée mais n'a pas été abordée ici. Afin de déterminer l'ensemble des forces, on décide de fixer une des tensions à une valeur minimale. Cette valeur minimale permet d'assurer que les deux câbles sont toujours en tension. La valeur de la force doit être assez importante pour dépasser les phénomènes de frottement statiques apparaissant dans le moto-réducteur mais également lors du passage du câble dans les poulies.

L'algorithme de commande du micro-contrôleur est écrit en C. Une librairie de commande des servomoteurs est utilisée pour contrôler les entrées/sorties.

### 3.5.4 Résultats expérimentaux

#### Modèle statique en boucle ouverte

Le premier protocole vise à valider la modélisation statique et à identifier les écarts entre le modèle et l'expérience. Pour cela, on applique sur le câble d'un côté du mécanisme un effort croissant, l'effort sur l'autre câble étant fixé à 15N. Ici, cet effort est appliqué en boucle ouverte, le but étant juste d'avoir la relation entre la position angulaire du mécanisme et l'effort appliqué. Les résultats sont montrés sur la figure 3.12. En bleu est tracée la position angulaire du mécanisme en fonction de l'effort  $f_l$ . En rouge, la courbe correspondant au modèle statique (3.26). On peut remarquer en premier lieu que la courbe du modèle est décalée par rapport à la réponse du mécanisme en boucle ouverte. Cela est principalement dû au frottement statique dans les moteurs, qui n'est pas pris en compte dans la modélisation statique. Ce frottement a été identifié expérimentalement, et vaut  $14,5\text{ N}$  en terme d'effort dans le câble. Cela veut dire que pour le câble actionné (celui qui est tiré), la tension dans le câble est en réalité diminuée de la valeur du frottement. En revanche, pour le câble opposé (celui qui est maintenu à un effort minimal), le frottement statique s'ajoute à l'effort minimal imposé, ce qui retient le mouvement du mécanisme. Cela revient à ajouter un effort constant appelé  $F_{sec}$  au modèle statique comme suit :

$$G_x(\alpha) = Z_l(\alpha)(f_l + \delta F_{sec}) + Z_r(\alpha)(f_r - \delta F_{sec}) \quad (3.55)$$

avec  $\delta = -1$  si on tire du côté gauche, et  $\delta = 1$  si on tire du côté droit.

La courbe correspondant à l'équation (3.55) avec  $F_{sec} = 14,5\text{ N}$  est présentée en jaune sur la figure 3.12. On voit que dans ce cas elle suit bien les résultats expérimentaux sur une large plage du mécanisme. Les irrégularités dans la courbe expérimentale sont dues aux efforts internes au sein du mécanisme (frottement dans les liaisons, frottements dans les

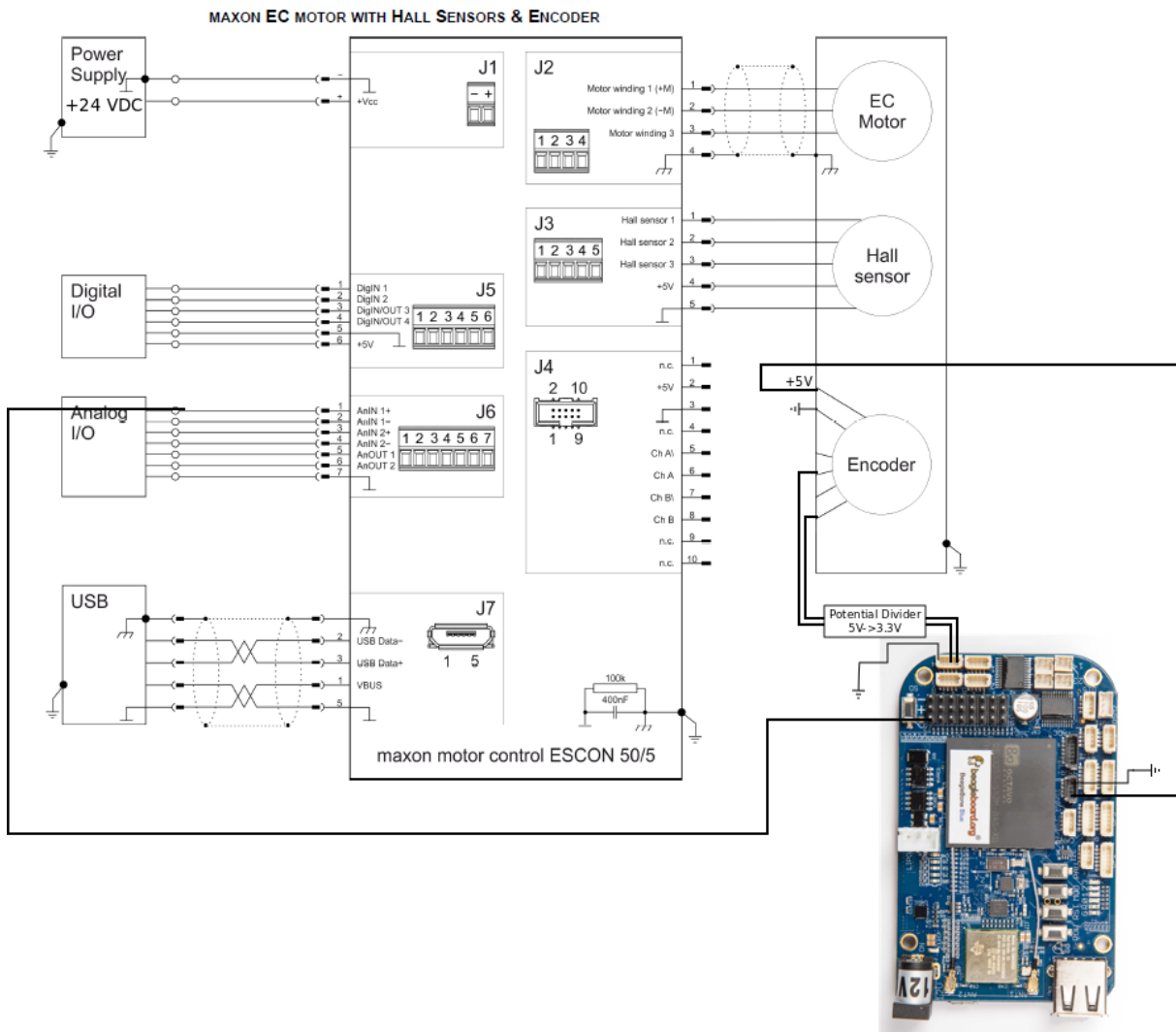


FIGURE 3.11 – Disposition de l'interface entre le micro-contrôleur, le variateur, le moteur et le codeur. Ce schéma est reproduit pour les deux moteurs, se connectant sur la même beaglebone.

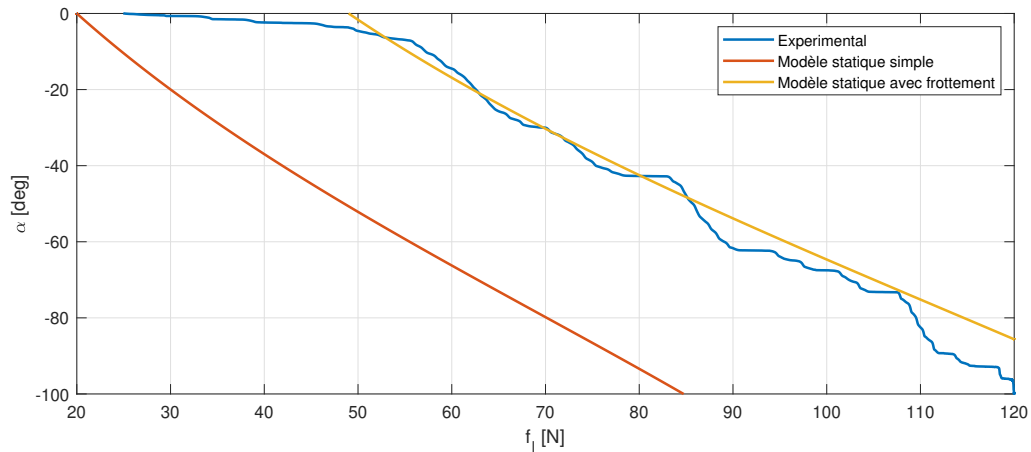


FIGURE 3.12 – Réponse angulaire du mécanisme à l’application d’un effort croissant en boucle ouverte (bleu), comparaison avec le modèle statique (rouge) et modèle statique prenant en compte le frottement dans les actionneurs (jaune).

câbles et poulies). De plus, quand l’effort  $f_i$  devient grand, d’autres phénomènes entrent en compte, comme l’allongement du câble. Ces effets ne sont pas pris en compte ici, mais ont été étudiés pour des robots parallèles à câbles, par le développement de modèles élasto-géométriques [BCC18] et élasto-dynamiques [Bak+17][Bak+19]. L’élasticité linéaire du câble a été prise en compte dans l’algorithme de commande afin d’avoir une réponse plus précise et moins d’oscillations pour la commande en boucle fermée, pour un et plusieurs mécanismes en série.

### Modèle dynamique en boucle fermée

Les résultats pour une trajectoire de référence composée de trois mouvements successifs d’aller et retour d’amplitude croissante  $\alpha_d = \{\pm 30^\circ, \pm 60^\circ, \pm 90^\circ\}$  sont présentés sur la figure 3.13 et 3.14, avec  $\omega = 9$  rad/s et  $f_{min} = 3,5$  N. L’erreur absolue moyenne pour l’ensemble de la trajectoire est de  $1,4768^\circ$ , et les forces de valeur maximale sont inférieures à 60 N. Les petites oscillations des forces sont causées par le calcul numérique de  $\dot{\alpha}$  et par la friction entre le câble et l’arbre, mais elles n’ont pas d’impact sur le comportement de l’articulation.

Ces résultats permettent de valider le modèle pour un mécanisme simple en X, ainsi que les performances du modèle dynamique, le réglage du correcteur PID. Ces caractéristiques seront utilisées par la suite pour la commande d’un empilement de plusieurs mécanismes en X.

## 3.6 Conclusion

Ce chapitre portait sur l’analyse cinéto-statique comparative de deux mécanismes de tenségrité distincts. A partir des conclusions du chapitre sur la mobilité des vertèbres, des chaînes cinématiques à 1 DDL ont été sélectionnées, chaînes cinématiques qui sont des

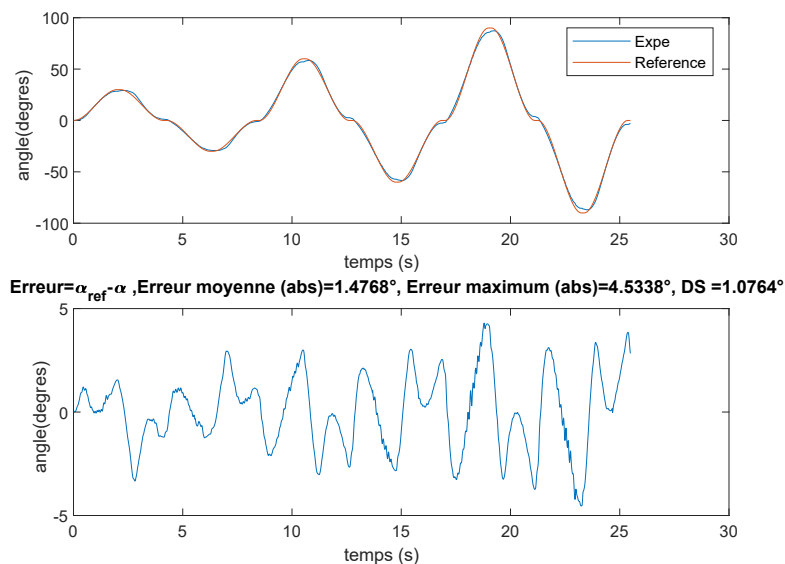


FIGURE 3.13 – Trajectoire de référence et trajectoire réelle du prototype, et erreur en temps réel sur  $\alpha$ .

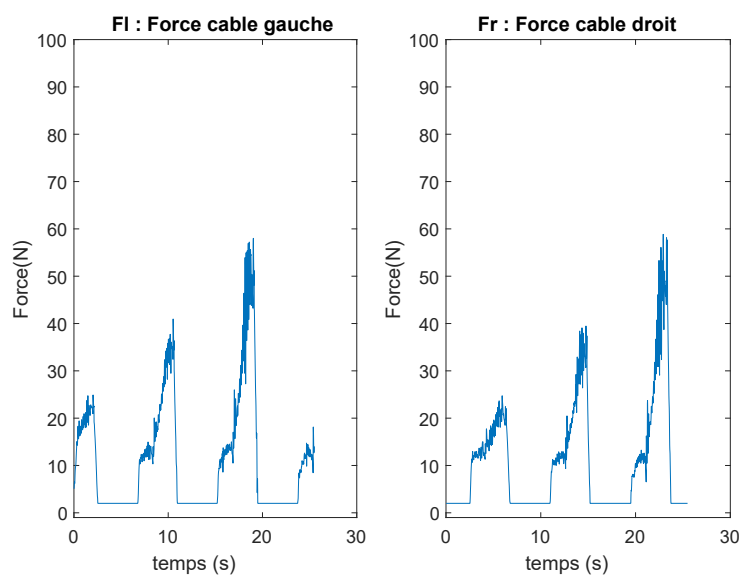


FIGURE 3.14 – Forces appliquées dans le câble pour la trajectoire définie.



configurations de tensegrité, ce qui veut dire qu'elles peuvent devenir des mécanismes de tensegrité en venant appliquer des ressorts/câbles en tension entre les points appropriés. A la suite de ce chapitre, deux mécanismes distincts, un anti-parallélogramme et une articulation pivot, ont été étudiés. Leur modélisation cinématique et statique a été effectuée. Une comparaison entre les mécanismes, sur la base d'un WFW et de raideurs prescrits, a été effectuée. Une conception optimale de ces mécanismes a également été réalisée. Il ressort de cette étude que le mécanisme pivot peut-être intéressant sur certains aspects, mais présente un WFW trop réduit. En effet, en augmentant la raideur des ressorts et ou la tension dans les câbles, la raideur globale du mécanisme diminue, et donc sa stabilité, à l'inverse du mécanisme en X qui montre des performances de stabilité et de variation de raideur assez intéressantes. C'est donc ce mécanisme qui a été choisi pour la suite de l'étude. Un prototype d'un mécanisme de tensegrité en X actionné de manière antagoniste a été réalisé, et il a permis de valider la modélisation cinéto-statique et dynamique. Les principes de base de ce mécanisme de tensegrité étant maintenant validés, nous allons nous intéresser à l'empilement en série de plusieurs mécanismes de ce type, d'un point cinématique d'abord, puis dynamique, en s'appuyant sur les résultats obtenus pour un mécanisme, que ce soit en terme de modélisation ou de conception. L'assemblage de plusieurs mécanismes de ce type permet de concevoir un bras manipulateur, bioinspiré, à plusieurs DDL, basé sur la tensegrité.

# Chapitre 4

## Modélisation et conception de manipulateurs à 2 degrés de liberté

### 4.1 Introduction

Le chapitre précédent portait sur l'étude et la comparaison de deux mécanismes de tensegrité distincts, un mécanisme composé de 4 barres formant un anti-parallélogramme (mécanisme en X) et un second mécanisme se comportant comme une liaison pivot classique (mécanisme P). Le mécanisme en X a été retenu comme un bon candidat pour la réalisation de manipulateurs plans à plusieurs degrés de liberté. Ce type de mécanisme présente en effet des propriétés cinéostatiques intéressantes, une grande stabilité à l'intérieur de son espace de travail. Il peut être actionné facilement par des câbles.

Le but de ce chapitre est d'avoir un premier aperçu des propriétés d'un manipulateur composé de plusieurs mécanismes en X en série, ici deux. Dans un premier temps, une analyse purement cinématique d'un tel manipulateur est effectuée. Comme chaque mécanisme en X a un CIR variable, l'expression et la résolution du modèle géométrique inverse est un réel challenge : nous verrons que des polynômes caractéristiques d'ordre élevés peuvent apparaître rapidement si le problème n'est pas considéré correctement. Une méthode pratique permettant de réduire le polynôme caractéristique à un polynôme d'ordre 4 (ordre minimal) sera présentée, ainsi qu'une étude des singularités cinématiques du mécanisme et des aspects de l'espace articulaire. Nous verrons également qu'en fonction de ses paramètres géométriques, le manipulateur peut-être cuspidal, c'est-à-dire capable de passer d'une solution de son modèle géométrique inverse à une autre sans franchir de singularité.

La seconde partie de ce chapitre est dédiée à l'analyse statique et la détermination du WFW du manipulateur. Après avoir présenté les caractéristiques du manipulateur étudié et les équations générales du modèle statique, nous nous concentrerons sur la définition de la stratégie d'actionnement par câbles. Différents cas seront énumérés pour un manipulateur à 2 DDL, ces derniers étant facilement généralisables à un manipulateur plan à N DDL, notamment les stratégies appelées "side-routed" et "strut-routed". Trois stratégies seront étudiées d'un point de vue statique : une première stratégie composée de deux câbles uniquement, et deux stratégies d'actionnement antagoniste sur-actionné à 4

câbles, l'une utilisant le "side-routed" et l'autre le "strut-routed". Pour ces deux dernières, une analyse cinéto-statique complète comprenant l'étude du WFW mais également de la variation de raideur dans l'espace de travail sera menée.

Enfin, le modèle statique sera vérifié sur un prototype de manipulateur plan à 2 DDL, pour la stratégie à 4 câbles dite "strut-routed". Nous verrons que la réalisation pratique de ces stratégies nécessite l'utilisation d'enrouleurs et de poulies, qui peuvent introduire des erreurs et perturbations par rapport au modèle statique simple proposé en amont.

## 4.2 Analyse cinématique d'un manipulateur à deux degrés de liberté

Comme vu précédemment, la spécificité du mécanisme en X est d'avoir un CIR variable. Nous avons donc cherché à savoir si cette spécificité pouvait amener des propriétés cinématiques différentes des robots sériels classiques. Pour cela, un manipulateur composé d'un assemblage de deux mécanismes en X en série est considéré. On remarque que l'obtention du modèle géométrique est beaucoup plus complexe que pour un 2R : on obtient rapidement des polynômes caractéristiques de degrés élevés. Une méthode de calcul a été développée, ce qui permet d'obtenir un polynôme caractéristique minimal de degré 4. L'étude des singularités montre que l'espace articulaire est divisé en deux zones sans singularités appelées *aspects* [BL86]. En fonction des valeurs des paramètres géométriques, il apparaît que le manipulateur peut-être *cuspidal*, c'est-à-dire capable de passer d'une solution inverse à une autre sans franchir une singularité [Wen07]. L'influence des limites articulaires sur les régions accessibles est aussi étudiée.

Dans cette section, le manipulateur est constitué d'un assemblage en série de deux mécanismes en X, comme le montre la figure 4.1. Chaque mécanisme en X comporte une barre de base et une barre supérieure de longueur  $b$  et deux barres croisées de longueur  $L$ , définissant ainsi un anti-parallélogramme. La condition d'assemblage des mécanismes est  $b \leq L$  et le cas particulier  $b = L$  définit un manipulateur dégénéré comme indiqué plus loin. Les ressorts n'ont aucun impact sur l'analyse cinématique et ont été cachés dans la figure 4.1 pour plus de lisibilité. Nous devons définir une variable appropriée qui décrit chaque configuration de mécanisme sans aucune ambiguïté. Dans [Bak+15], la configuration du mécanisme a été choisie comme l'orientation  $\alpha_i$  de la barre supérieure par rapport à la barre inférieure, mais un tel choix est autorisé pour les mouvements du mécanisme limités à  $-\pi < \alpha_i < \pi$ . Pour une question d'exhaustivité de l'analyse cinématique, nous souhaitons permettre à chaque mécanisme de se déplacer dans toute sa gamme au-delà de ses deux singularités où il prend une configuration plate. Puisque la barre supérieure effectue deux tours pour un mécanisme complet,  $\alpha_i$  n'est pas approprié pour définir la configuration du mécanisme. Introduisons un segment de ligne de longueur  $l_i$  (équation (4.1)) qui relie les points médians des barres supérieure et inférieure de chaque mécanisme  $i$  (représenté en pointillés dans la figure 4.1). L'angle entre cette ligne et la direction orthogonale à la barre de base est appelé  $\theta_i$ . Pour la conception symétrique considérée ici, on peut montrer que  $\alpha_i = 2\theta_i$ . Ainsi, lorsque le mécanisme effectue un tour complet, on a :  $-\pi < \theta_i < \pi$ . En supposant que chaque mécanisme reste toujours en mode

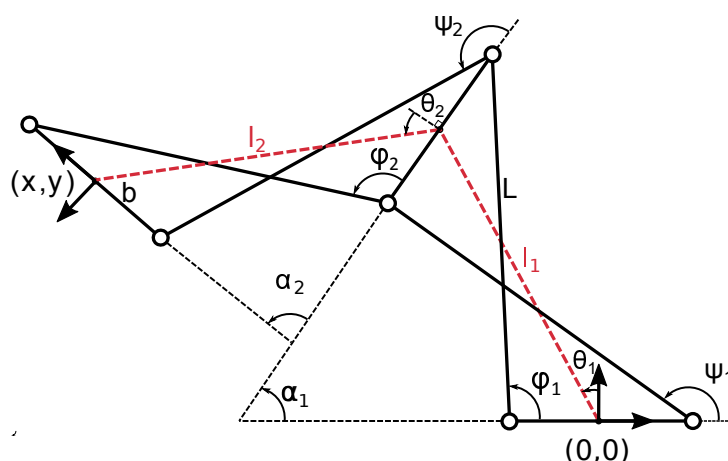


FIGURE 4.1 – Description du manipulateur.

d'assemblage à barres croisées, la configuration du manipulateur peut donc être définie sans ambiguïté avec  $(\theta_1, \theta_2)$ . Par ailleurs, les angles supplémentaires, à savoir  $\varphi_i$  et  $\psi_i$  sont considérés car ils seront utiles pour développer le modèle géométrique inverse. On peut exprimer à partir des longueurs des ressorts de gauche et de droite (équation (3.7)) la longueur du segment médian  $l_i$  :

$$l_i(\theta_i) = \sqrt{L^2 - b^2 \cos^2(\theta_i)} \quad (4.1)$$

## 4.2.1 Obtention du modèle géométrique direct et inverse

### Modèle géométrique direct

Pour établir les équations du modèle géométrique direct, on part de l'origine du repère global, au centre de la barre de base du premier mécanisme. Le point de référence de coordonnées  $(x, y)$  est choisi comme le point milieu de la barre supérieure du second mécanisme (figure 4.1).

Pour un manipulateur constitué de deux mécanismes en série, avec comme coordonnées généralisées  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , on peut écrire le modèle géométrique direct comme suit :

$$\begin{cases} x = -l_1(\theta_1) \sin(\theta_1) - l_2(\theta_2) \sin(2\theta_1 + \theta_2) \\ y = l_1(\theta_1) \cos(\theta_1) + l_2(\theta_2) \cos(2\theta_1 + \theta_2) \end{cases} \quad (4.2)$$

avec  $l_1$  et  $l_2$  définis précédemment (équation (4.1)).

### Modèle géométrique inverse

L'obtention d'un polynôme caractéristique à une variable permet de résoudre le modèle géométrique inverse. Les équations du modèle géométrique direct (équations (4.2)) ont été obtenues sous leur forme la plus compacte, à savoir, les deux variables de sortie  $x$  et  $y$  sont exprimées en fonction des deux variables d'entrée  $\theta_1$  et  $\theta_2$  comme dans un manipulateur

série 2R. Cependant, il n'est pas approprié de partir de ces équations pour obtenir un polynôme caractéristique. En effet, les racines carrées apparaissant dans les expressions de  $l_1$  et  $l_2$  devraient d'abord être éliminées, ce qui aurait pour conséquence d'augmenter le degré du polynôme caractéristique résultant et de fournir des solutions parasites. Il est préférable d'écrire  $x$  et  $y$  en fonction des angles des barres croisées  $\varphi_1$  et  $\psi_2$  comme suit :

$$\begin{cases} x = -\frac{b}{2} + L \cos(\varphi_1) + L \cos(\psi_2 + \alpha_1) + \frac{1}{2}b \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \\ y = L \sin(\varphi_1) + L \sin(\psi_2 + \alpha_1) + \frac{1}{2}b \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \end{cases} \quad (4.3)$$

De plus, on peut écrire les équations de fermeture des deux anti-parallélogrammes projetés sur les axes  $x$  et  $y$ , ce qui donne :

$$\begin{cases} b + L \cos(\psi_i) + b \cos(\alpha_i) - L \cos(\varphi_i) = 0 \\ L \sin(\psi_i) + b \sin(\alpha_i) - L \sin(\varphi_i) = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

En arrangeant les équations (4.4) pour chaque mécanisme,  $\psi_1$  et  $\varphi_2$  peuvent être éliminés. Finalement, on obtient les deux équations de fermeture suivantes :

$$\begin{cases} -2Lb \sin(\alpha_1) \sin(\varphi_1) - 2Lb(\cos(\alpha_1) + 1) \cos(\varphi_1) + 2b^2(\cos(\alpha_1) + 1) = 0 \\ 2Lb \sin(\alpha_2) \sin(\psi_2) + 2Lb(\cos(\alpha_2) + 1) \cos(\psi_2) + 2b^2(\cos(\alpha_2) + 1) = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Un ensemble de quatre équations et quatre inconnues est donc disponible. Un polynôme peut être obtenu par l'élimination de trois des quatre inconnues. Il y a plusieurs façons de le faire avec un logiciel de calcul formel. Nous avons utilisé Maple et sa librairie *Siropa* [Jha+18]. Cette bibliothèque a été développée dans le cadre d'un projet collaboratif sur la cinématique des manipulateurs parallèles, voir par exemple [Man+12], [Mor+10] pour plus de détails sur la mise en œuvre et l'utilisation de ces outils. Il contient des macro-fonctions spécifiques qui utilisent des outils algébriques efficaces tels que les bases de Groebner. Plus précisément, la fonction *Projection* a été utilisée pour projeter le système de quatre équations afin d'obtenir une seule équation à une seule variable, choisie ici comme  $\varphi_1$ . Le changement de variable de la tangente de l'angle moitié donne un polynôme factorisé, dont l'un des facteurs définit le polynôme caractéristique. Le polynôme caractéristique obtenu s'avère être de degré 4 en  $t = \tan(\varphi_1/2)$  et peut s'écrire comme suit :

$$a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 = 0 \quad (4.6)$$

avec :

$$a_4 = (b + 1)^2 (b^2 y^2 + x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 + 4x^3 + 4xy^2 + 5x^2 + y^2 + 2x) \quad (4.7a)$$

$$a_3 = 4y(b + 1)(2b^2 x + b^2 - 2x^2 - 2y^2 - 4x - 1) \quad (4.7b)$$

$$a_2 = 2(b^4 y^2 + b^2 x^4 + 2b^2 x^2 y^2 + b^2 y^4 + b^2 x^2 - 10b^2 y^2 + x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 - 3x^2 + 9y^2) \quad (4.7c)$$

$$a_1 = 4y(b - 1)(2b^2 x - b^2 + 2x^2 + 2y^2 - 4x + 1) \quad (4.7d)$$

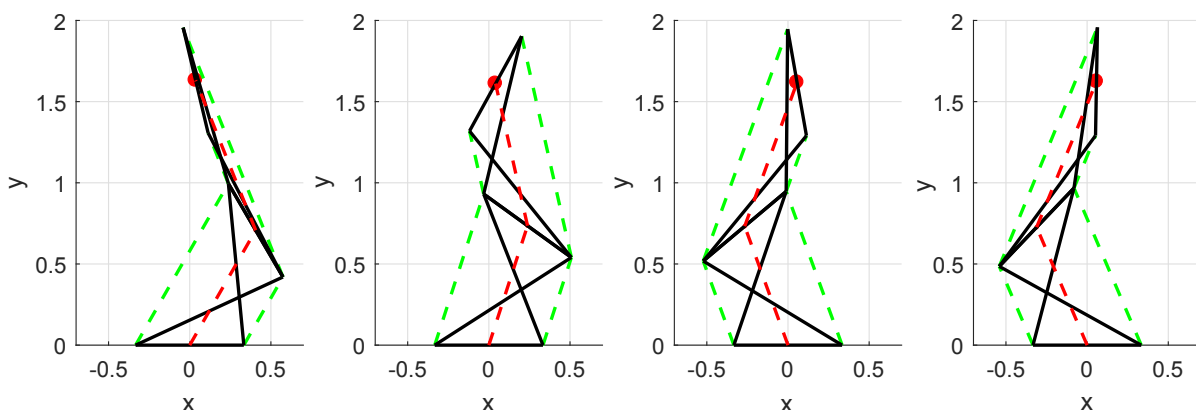


FIGURE 4.2 – Les quatre solutions du modèle inverse pour  $x = 0.03$  et  $y = 1.6$  ( $L = 1$  et  $b = 2/3$ ).

$$a_0 = (b - 1)^2(b^2y^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 4x^3 - 4xy^2 + 5x^2 + y^2 - 2x) \quad (4.7e)$$

Notez que  $L$  a été fixé à 1 pour simplifier les calculs sans perte de généralité. Pour chaque solution  $\varphi_1$ ,  $\alpha_1$  est alors résolu à partir de la première équation du système (4.5) en éliminant la solution  $\alpha_1 = \pi$  correspondant à l'assemblage en parallélogramme :

$$\tan(\alpha_1/2) = \frac{-L \cos(\varphi_1) + b}{L \sin(\varphi_1)} \quad (4.8)$$

Enfin,  $\psi_2$  et  $\alpha_2$  sont déterminés à partir du système (4.3), ce qui donne deux solutions, dont l'une ne satisfait jamais les équations en boucle fermée (4.5). Au total, on arrive donc à un nombre maximum de quatre solutions. Le modèle géométrique inverse est résolu pour un manipulateur défini par  $L = 1$  et  $b = 2/3$  à  $x = 0.03$  et  $y = 1.6$ . Quatre solutions sont trouvées (voir figure 4.2), montrant que le polynôme caractéristique (4.6) est de degré minimal.

## 4.2.2 Étude des singularités et aspects

La matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  du manipulateur, définie telle que  $[\dot{x}, \dot{y}]^\top = \mathbf{J}[\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2]^\top$ , est obtenue à partir du système (4.2) :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

avec :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} = -\sin(\theta_1)^2 b^2 \cos(\theta_1) - (L^2 - b^2 \cos(\theta_1)^2)(\cos(\theta_1) + 2 \cos(\theta_2 + 2\theta_1)) \\ \frac{\partial x}{\partial \theta_2} = -\sin(\theta_2 + 2\theta_1) b^2 \cos(\theta_2) \sin(\theta_2) - (L^2 - b^2 \cos(\theta_2)^2) \cos(\theta_2 + 2\theta_1) \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} = \cos(\theta_1)^2 b^2 \sin(\theta_1) - (L^2 - b^2 \cos(\theta_1)^2)(\sin(\theta_1) + 2 \sin(\theta_2 + 2\theta_1)) \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_2} = \cos(\theta_2 + 2\theta_1) b^2 \cos(\theta_2) \sin(\theta_2) - (L^2 - b^2 \cos(\theta_2)^2) \sin(\theta_2 + 2\theta_1) \end{cases} \quad (4.10)$$

Son déterminant peut-être mis sous la forme suivante, après avoir supprimé le terme

$\sqrt{L^2 - b^2 \cos(\theta_1)^2} \sqrt{L^2 - b^2 \cos(\theta_2)^2}$  du numérateur, étant un terme qui ne s'annule jamais si  $b < L$  :

$$\begin{aligned} Det(\mathbf{J}) = & (L^2 - b^2) \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) (L^2 - 2b^2 \cos(\theta_2)^2) \\ & + \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) (L^2 (L^2 + b^2) - 2L^2 b^2 \cos(\theta_2)^2) \\ & - 2 \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) \sqrt{-b^2 \cos(\theta_1)^2 + L^2} \sqrt{L^2 - b^2 \cos(\theta_2)^2} b^2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Les solutions de  $Det(\mathbf{J}) = 0$  définissent les conditions de singularité se produisant lorsque les CIR des deux mécanismes en X sont alignés avec le point de contrôle de l'effecteur final. Une situation particulière se présente lorsque les deux mécanismes en X coïncident. Cette situation est équivalente à la configuration entièrement repliée d'un manipulateur série 2R planaire avec des longueurs de bras égales. Lorsque le manipulateur se trouve dans cette singularité, le point de référence reste à l'origine  $x = 0$  et  $y = 0$ . Cette singularité particulière est définie par  $\theta_1 = -\theta_2 \pm \pi$  et on peut vérifier que  $Det(\mathbf{J})$  est nul dans ces configurations. La singularité générale est analogue à la configuration entièrement étendue d'un manipulateur série 2R planaire. Dans cette singularité, le manipulateur ne peut pas produire un mouvement instantané le long d'une ligne passant par les deux CIR et le point de référence de l'effecteur. De manière inattendue, il a été possible d'obtenir une forme explicite de cette solution générale en étudiant les conditions d'annulation de l'équation (4.11) et des simplifications et manipulations trigonométriques sur Maple. Lorsque  $\cos(\theta_2) \neq 0$ , cette solution peut être écrite sous la forme :

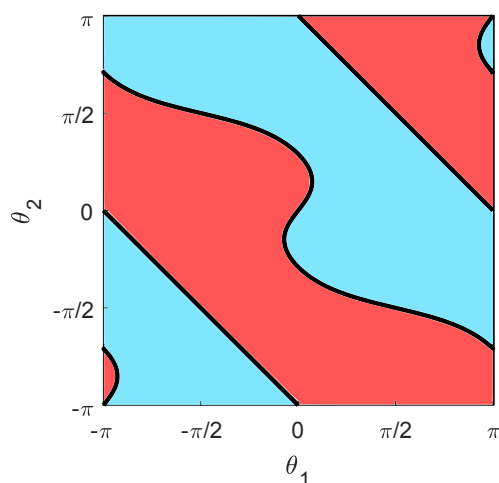
$$\tan(\theta_1) = \frac{-\sin(\theta_2) ((2b^2 \cos(\theta_2)^2 - L^2)^2 - L^2 b^2)}{\cos(\theta_2) ((2b^2 \cos(\theta_2)^2 - L^2)^2 + 3L^2 b^2 - 4 \cos(\theta_2)^2 b^4)} \quad (4.12)$$

Lorsque  $\cos(\theta_2) = 0$ , on vérifie facilement que  $\cos(\theta_1) = 0$ , ce qui signifie que les deux mécanismes sont en configuration plate. On peut montrer que le deuxième facteur de du dénominateur de (4.12) ne s'annule jamais.

Les singularités ci-dessus divisent l'espace articulaire en domaines sans singularité appelés *aspects* [BL86]. La singularité  $\theta_1 = -\theta_2 \pm \pi$  produit deux droites tandis que la singularité définie par l'équation (4.12) donne une courbe, comme le montre la figure 4.3. En l'absence de limites articulaires, les côtés opposés du carré représentant l'espace articulaire sont connectés et les courbes de singularité divisent l'espace articulaire en deux aspects seulement. Puisque le manipulateur admet jusqu'à quatre solutions, il y a deux solutions dans chaque aspect, ce qui signifie que les manipulateurs peuvent passer d'une solution à une autre sans rencontrer une singularité, qui est la définition même d'un comportement *cuspidal* [Wen07]. A notre connaissance, c'est la première fois qu'un manipulateur plan sériel se révèle être cuspidal.

### 4.2.3 Étude de l'espace de travail

Lorsqu'elles sont tracées dans l'espace de travail cartésien, les courbes de singularité définissent les limites externes et internes de l'espace de travail. L'équation de ces courbes peut

FIGURE 4.3 – Courbes de singularités et aspects pour  $L = 1$  et  $b = 2/3$ .

être obtenue en calculant le discriminant du polynôme caractéristique (4.6). Ce faisant, on obtient un polynôme de degré 16 en  $x$  et  $y$  (4.13).

$$\begin{aligned}
& 4b^{14}y^6 + 12b^{12}x^4y^4 + 28b^{12}x^2y^6 + 17b^{12}y^8 + 12b^{10}x^8y^2 + 60b^{10}x^6y^4 + 112b^{10}x^4y^6 \\
& + 92b^{10}x^2y^8 + 28b^{10}y^{10} + 4b^8x^{12} + 36b^8x^{10}y^2 + 126b^8x^8y^4 + 224b^8x^6y^6 + 216b^8x^4y^8 \\
& + 22b^8y^{12} + 4b^6x^{14} + 32b^6x^{12}y^2 + 108b^6x^{10}y^4 + 200b^6x^8y^6 + 220b^6x^6y^8 + 144b^6x^4y^{10} \\
& + 52b^6x^2y^{12} + b^4x^{16} + 8b^4x^{14}y^2 + 28b^4x^{12}y^4 + 56b^4x^{10}y^6 + 70b^4x^8y^8 + 56b^4x^6y^{10} \\
& + 28b^4x^4y^{12} + 8b^4x^2y^{14} + b^4y^{16} - 24b^{12}x^2y^4 - 36b^{12}y^6 - 48b^{10}x^6y^2 + 108b^8x^2y^{10} \\
& - 204b^{10}x^4y^4 - 276b^{10}x^2y^6 - 120b^{10}y^8 - 24b^8x^{10} - 204b^8x^8y^2 - 612b^8x^6y^4 + 8b^6y^{14} \\
& - 852b^8x^4y^6 - 564b^8x^2y^8 - 144b^8y^{10} - 36b^6x^{12} - 252b^6x^{10}y^2 - 720b^6x^8y^4 \\
& - 900b^6x^4y^8 - 396b^6x^2y^{10} - 72b^6y^{12} - 12b^4x^{14} - 84b^4x^{12}y^2 - 252b^4x^{10}y^4 - 420b^4x^8y^6 \\
& - 1080b^6x^6y^6 + 810b^4x^8y^4 + 1080b^4x^6y^6 - 32b^2x^6y^2 + 2b^2x^{10} \\
& - 420b^4x^6y^8 - 252b^4x^4y^{10} - 84b^4x^2y^{12} - 12b^4y^{14} - 8b^{12}y^4 + 32b^{10}x^4y^2 + 126b^{10}x^2y^4 \\
& + 40b^8x^8 + 332b^8x^6y^2 + 826b^8x^4y^4 + 816b^8x^2y^6 + 282b^8y^8 + 110b^6x^{10} + 666b^6x^8y^2 \\
& + 1564b^6x^6y^4 + 1796b^6x^4y^6 + 1014b^6x^2y^8 + 226b^6y^{10} + 54b^4x^{12} + 324b^4x^{10}y^2 \\
& + 810b^4x^4y^8 + 324b^4x^2y^{10} + 54b^4y^{12} - 4b^{10}x^2y^2 + 56b^{10}y^4 - 36b^8x^6 + 102b^{10}y^6 \\
& - 164b^8x^4y^2 - 228b^8x^2y^4 - 92b^8y^6 - 148b^6x^8 - 716b^6x^6y^2 - 1244b^6x^4y^4 - 932b^6x^2y^6 \\
& - 256b^6y^8 - 116b^4x^{10} - 572b^4x^8y^2 - 1128b^4x^6y^4 - 1112b^4x^4y^6 - 548b^4x^2y^8 \\
& - 108b^4y^{10} + 4b^{10}y^2 + 17b^8x^4 + 14b^8x^2y^2 - 143b^8y^4 + 126b^6x^6 + 294b^6x^4y^2
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + 136b^6x^2y^4 - 36b^6y^6 + 141b^4x^8 + 492b^4x^6y^2 + 622b^4x^4y^4 + 332b^4x^2y^6 + 61b^4y^8 \\
& + 6b^2x^8y^2 + 4b^2x^6y^4 - 4b^2x^4y^6 - 6b^2x^2y^8 - 2b^2y^{10} - 4b^8x^2 - 20b^8y^2 - 60b^6x^4 \\
& - 20b^6x^2y^2 + 172b^6y^4 - 132b^4x^6 - 200b^4x^4y^2 + 28b^4x^2y^4 + 96b^4y^6 - 16b^2x^8 \\
& + 32b^2x^2y^6 + 16b^2y^8 + 16b^6x^2 + 40b^6y^2 + 70b^4x^4 + 16b^4x^2y^2 - 98b^4y^4 + 38b^2x^6 \\
& + 38b^2x^4y^2 - 38b^2x^2y^4 - 38b^2y^6 - 24b^4x^2 - 40b^4y^2 - 28b^2x^4 - 8b^2x^2y^2 \\
& + 20b^2y^4 + 16b^2x^2 + 20b^2y^2 + x^4 + 2y^2x^2 + y^4 - 4x^2 - 4y^2 = 0
\end{aligned} \tag{4.13}$$

La figure 4.4 montre le tracé de ces courbes de singularité pour trois exemples. Dans les figures du milieu et de droite, elles divisent l'espace de travail en trois régions. Le nombre de solutions dans chaque région peut être établi en comptant le nombre de solutions en un point quelconque de chaque région. Dans la plus grande, le manipulateur admet deux solutions inverses. Dans les deux plus petites régions, il y a quatre solutions. Dans la figure de gauche, il n'y a pas de limites internes et le manipulateur admet deux solutions inverses dans tout son espace de travail. Il y a deux situations dégénérées, à savoir,  $b = L$  et  $b = 0$ . Lorsque  $b = L$ , chaque mécanisme dégénère en une barre (les barres supérieure et inférieure coïncident et leurs articulations gauche et droite aussi). Ainsi, ces deux barres peuvent se déplacer avec une rotation pure autour de n'importe laquelle de leurs deux articulations tournantes. En conséquence, le manipulateur se comporte comme deux manipulateurs plans 2R identiques dont les segments proximaux et distaux sont respectivement  $b$  et  $b/2$ , et dont le centre de leur articulation de base est située à  $x = -b/2$  et  $x = b/2$ , respectivement<sup>1</sup>. Ainsi, l'espace de travail est la réunion de deux disques creux de rayon extérieur  $3b/2$  et intérieur  $b/2$ . Il existe quatre solutions dans les zones de chevauchement des zones non-vides des deux disques creux et deux solutions partout ailleurs (voir figure 4.5, à gauche). Lorsque  $b = 0$ , le manipulateur dégénère en un manipulateur plan 2R de longueurs de segment identiques égaux à  $L$  et son espace de travail est un disque plein de rayon  $2L$ , avec deux solutions inverse partout, voir figure 4.5, à droite. Ces deux conceptions dégénérées ont été mentionnées par souci d'exhaustivité dans l'analyse cinématique, mais elles n'ont aucun intérêt pratique et doivent être évitées. Des exemples de trajectoire pour le cas de la figure 4.2 et les deux cas dégénérés figure 4.5 sont disponibles en vidéo ici [<http://videos.univ-nantes.fr/medias/2020/09/3f828a3e790713f52d579e2e14e40959.mp4>].

Les limites de l'espace de travail obtenues à partir de  $Det(\mathbf{J})$  sont associées aux singularités du manipulateur 2-X mais ne prennent pas en compte les singularités propres à chaque mécanisme en X. Ces singularités apparaissent lorsque l'un des mécanismes en X est plat, c'est-à-dire lorsque  $\theta_i = \pm \frac{\pi}{2}$ . Ces singularités nous permettent de distinguer les configurations "normales" (la barre supérieure est au dessus de la barre de base), des configurations "retournées" (la barre supérieure est en dessous de la barre de base). Ces deux configurations sont illustrées figure 4.6.

Les courbes des singularités des mécanismes en X sont maintenant ajoutées dans l'espace de travail cartésien, voir figure 4.7. Ces courbes additionnelles divisent la zone à deux et quatre solutions en zones plus petites associées à différentes combinaisons de configuration de mécanismes, comme expliqué dans la figure 4.7. Par exemple, la région colorée

<sup>1</sup>La présence de  $b/2$  s'explique par le repère de base et le repère de l'effecteur qui sont situés au milieu de leur barres associées

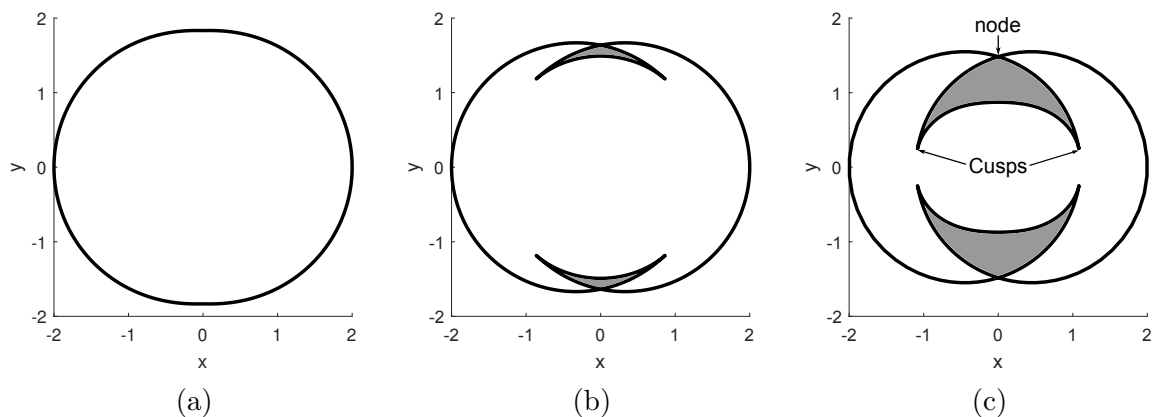


FIGURE 4.4 – Limites de l'espace de travail pour  $L = 1$  et  $b = 2/5$  (a),  $b = 2/3$  (b),  $b = 9/10$  (c). Les zones à quatre solutions sont remplies en gris.

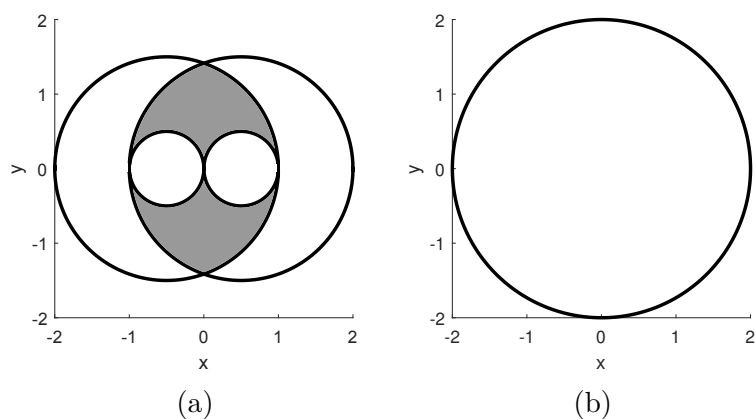


FIGURE 4.5 – Limites de l'espace de travail pour les deux cas dégénérés  $b = L = 1$  (a) et  $b = 0, L = 1$  (b). Les zones à quatre solutions sont remplies en gris.

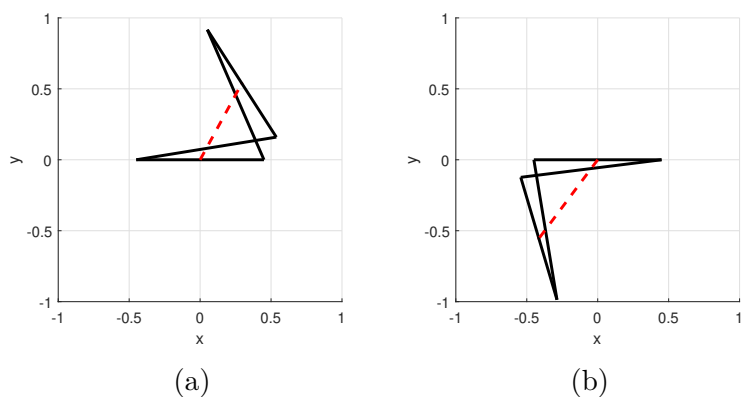


FIGURE 4.6 – Mécanisme en X en configuration normale (a) et retournée (b).

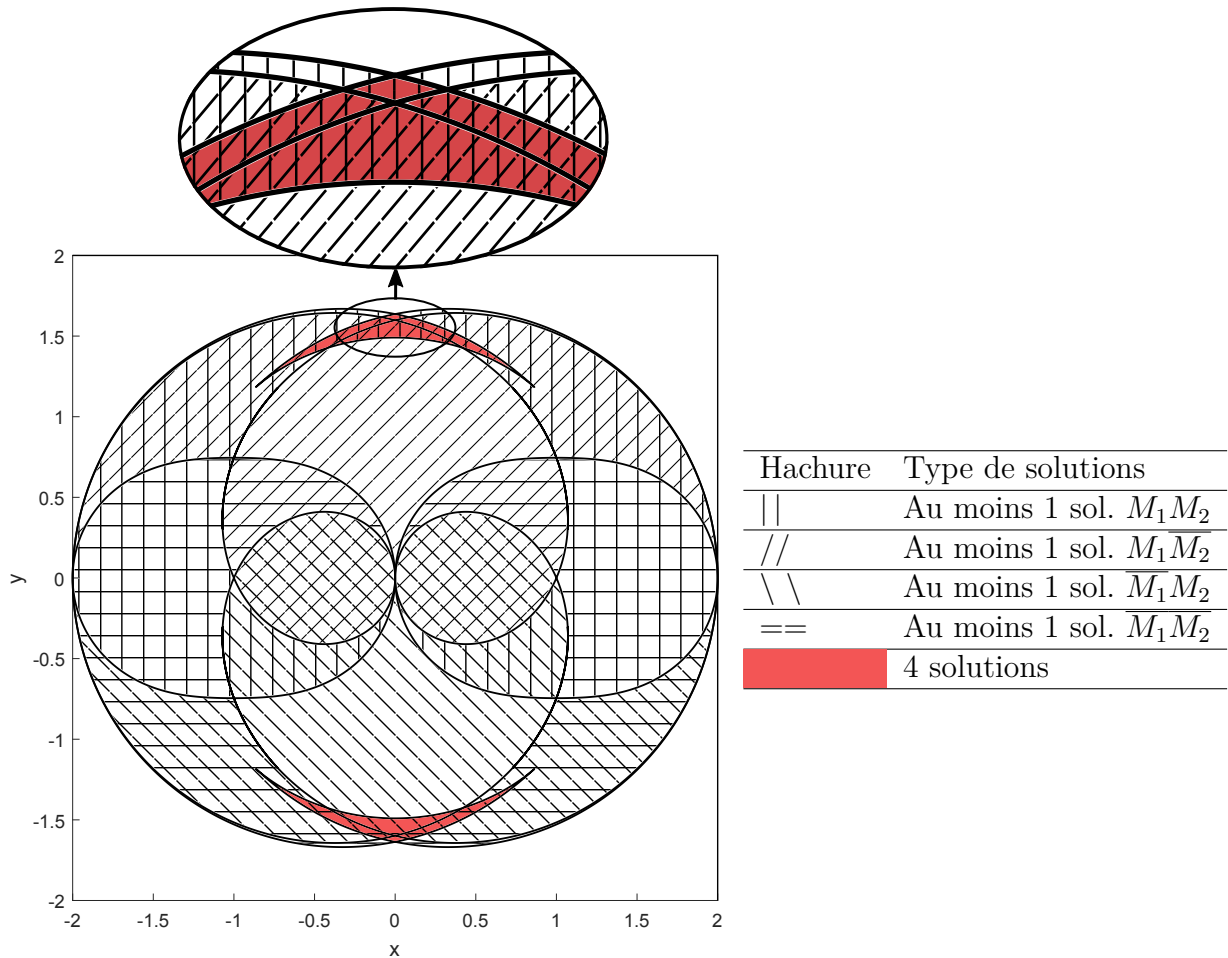


FIGURE 4.7 – Régions de l'espace de travail avec un nombre et type différent de solutions ( $L = 1$ ,  $b = 2/3$ .  $\overline{M}_i$  (respectivement  $M_i$ ) signifie que le mécanisme  $i$  est en configuration basse (respectivement haute).

avec les hachures || et // signifie que deux des quatre solutions de cette zone sont de type  $M_1M_2$  (les deux mécanismes sont en configuration normale) et les deux autres sont de type  $M_1\overline{M}_2$  (le premier mécanisme est en configuration normale et le second en configuration retournée). Notons que dans le cas d'un manipulateur utilisant la tensegrité et actionné par des câbles, l'espace de travail accessible est réduit à des zones où il existe au moins une solution avec les deux mécanismes en configuration normale. Cela correspond à l'ensemble des régions avec des hachures verticales sur la figure 4.7.

#### 4.2.4 Étude du comportement cuspidal

Comme mis en évidence précédemment, l'espace de travail peut contenir des zones à 4 solutions inverses ou pas, en fonction de la valeur de ses paramètres géométriques. Lorsque deux régions à 4 solutions existent, leurs frontières ont trois points singuliers : Un noeud et deux cusps comme on peut le voir sur la figure 4.4. L'existence de points cusps montre que le manipulateur est cuspidal [EOW95; Wen07].

D'après la figure 4.4, les régions à 4 solutions sont plus petites quand  $b$  est plus petit. En fait, les régions à quatre solutions peuvent même disparaître (figure 4.4, à gauche) et il en va de même pour les points cusps. La transition, appelée *swallowtail bifurcation* [TW11], se produit lorsque les deux cusps et le nœud coïncident et définissent un point où les quatre solutions du modèle géométrique inverses coïncident. Cette transition peut donc être établie en écrivant une condition sur les paramètres géométriques pour que le polynôme caractéristique de degré 4 admette une racine quadruple. Cette dernière condition peut être énoncée comme suit [WCB05] :

$$\begin{cases} a_4 a_0 - \frac{1}{4} a_3 a_1 + \frac{1}{12} a_2^2 = 0 \\ \frac{1}{6} a_4 a_2 a_0 - \frac{1}{16} a_4 a_1^2 - \frac{1}{16} a_3^2 a_0 + \frac{1}{48} a_3 a_2 a_1 - \frac{1}{216} a_2^3 = 0 \\ \frac{1}{6} a_4 a_2 - \frac{1}{16} a_3^2 = 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

Le système ci-dessus peut être simplifié en observant que la racine quadruple apparaît à  $x = 0$  en raison de la symétrie. Le calcul de  $b$  à partir des deux dernières équations de (4.14) donne  $b = \sqrt{6}/6$ . Lorsque  $b > \sqrt{6}/6$ , le manipulateur est cuspidal et a quatre solutions inverses, sinon il n'a que deux solutions et il n'est pas cuspidal. En gardant à l'esprit que  $L$  a été fixé à 1 et en tenant compte de la condition d'assemblage, la condition est en fait  $b < L < b\sqrt{6}$ . le théorème suivant peut donc être énoncé comme suit :

*Théorème* : un manipulateur planaire 2-DDL constitué de deux mécanismes en X symétriques identiques de dimensions  $b$  et  $L$  est cuspidal et a quatre solutions inverses si et seulement si  $b < L < b\sqrt{6}$ .

## 4.2.5 Limites articulaires

Aucune limite articulaire n'a été considérée jusqu'ici. En pratique, celles-ci doivent être prises en compte puisque les singularités plates des mécanismes en X ne peuvent pas être franchies. Pour déterminer les frontières de l'espace de travail en présence de limites articulaires, on trace les courbes associées à ces limites articulaires dans l'espace de travail cartésien. La figure 4.8 montre comment l'espace de travail sans limites articulaires de la figure 4.4 est modifié lorsque  $-\pi/2 < \theta_1 < \pi/2$  et  $-\pi/2 < \theta_2 < \pi/2$  (limites maximales pour éviter les singularités des mécanismes en X). Par rapport à la figure 4.7, l'espace de travail de la figure du milieu est réduit aux zones avec des hachures verticales, ou les deux mécanismes sont en configuration normale. En effet, les limites articulaires empêchent le mécanisme de passer en configuration retournée. Ainsi, la majeure partie de l'espace de travail a une seule solution au modèle inverse. Quand on a  $b = 2/3$ , la zone à 4 solutions est réduite à une très petite zone en forme de losange (la petite zone centrale contenant uniquement des hachures verticales dans la partie zoomée de la figure 4.7).

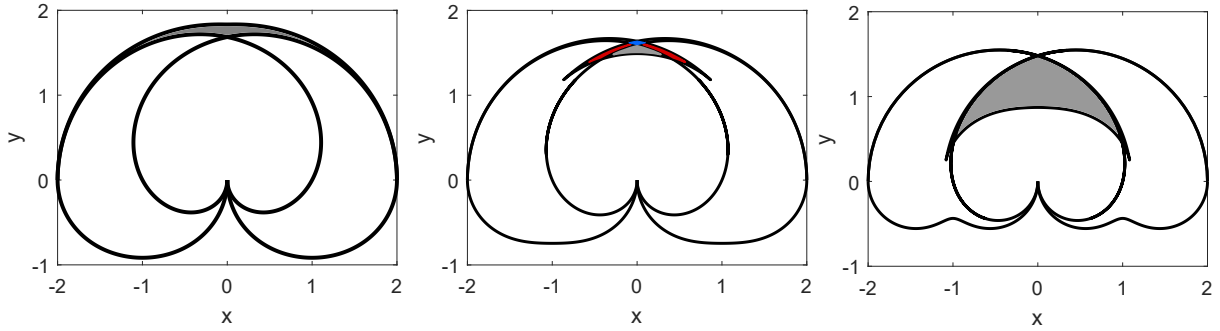


FIGURE 4.8 – Limites de l'espace de travail quand  $-\pi/2 < \theta_1, \theta_2 < \pi/2$ , et pour  $L = 1$ ,  $b = 2/5$  (gauche),  $b = 2/3$  (centre),  $b = 9/10$  (droite). La partie non vide est remplie avec des hachures verticales. Le nombre de solutions est défini par les couleurs de remplissage : pas de couleur=1, gris=2, rouge=3 and bleu=4.

## 4.3 Modélisation cinétostatique d'un manipulateur plan à 2 DDL

### 4.3.1 Dimensions du manipulateur

Le prototype de manipulateur plan à 2 DDL est présenté figure 4.9. Les dimensions des barres ont été fixées à  $L = 0,1$  m et  $b = 0,05$  m. L'espace de travail ainsi que le nombre de solutions cinématiques inverses dans chaque région sont indiqués sur la figure 4.10. Notez qu'avec ces dimensions, le manipulateur est cuspidal, mais la zone cuspidale est limitée dans la petite région en queue d'hirondelle sur le dessus de l'espace de travail. Les raideurs des ressorts sont  $k_{l1} = k_{r1} = 200$  N/m pour le premier étage et  $k_{l2} = k_{r2} = 100$  N/m pour le second, et leurs longueurs à vide sont  $l_{l10} = l_{r10} = l_{l20} = l_{r20} = 0,047$  m. Les valeurs de longueur à vide choisies garantissent que les ressorts sont toujours en tension. Les barres ont été usinées en aluminium avec une section rectangulaire de dimension  $0,01$  m  $\times$   $0,005$  m. Leurs masses sont de  $0,009$  kg pour les barres croisées et de  $0,006$  kg pour les barres supérieures et de base.

### 4.3.2 Modélisation statique

Comme pour la modélisation statique d'un mécanisme de tensegrité, on écrit d'abord l'énergie potentielle totale  $U$  du manipulateur, comme la somme de l'énergie potentielle de gravité  $U_g$  et l'énergie potentielle des ressorts  $U_{sp}$ . On peut directement y ajouter le travail des câbles, appelé ici  $U_c$ .

$$U = U_c + U_s + U_g \quad (4.15)$$

Soit  $(f_{ri}, f_{li})$ ,  $(l_{ri}, l_{li})$ ,  $(k_{ri}, k_{li})$  et  $(l_{r0i}, l_{l0i})$  les efforts dans les câbles, les longueurs actives des câbles, les raideurs des ressorts et leur longueur à vide, respectivement (où les indices  $r$  et  $l$  sont pour gauche et droite, et soit  $m_i$  et  $y_i$  la masse et la hauteur du centre

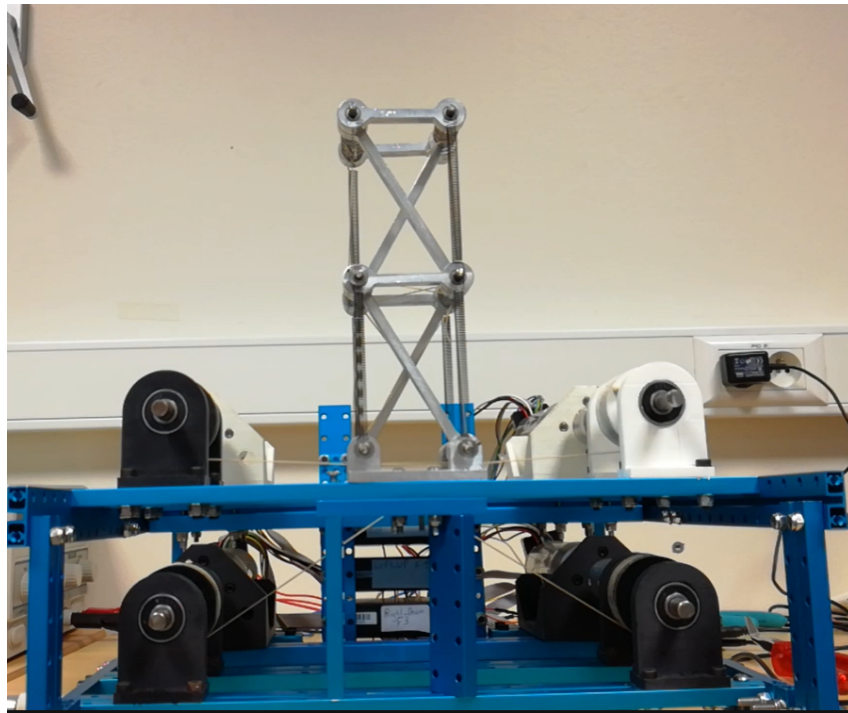


FIGURE 4.9 – Prototype dans sa configuration de repos.

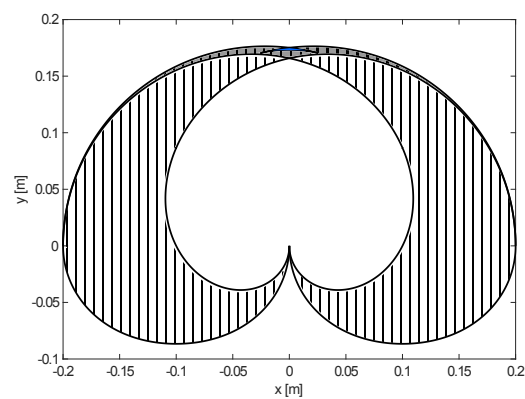


FIGURE 4.10 – Espace de travail du manipulateur avec les dimensions données. Les zones non-vides sont remplies par des lignes verticales. Le nombre de solutions est défini par la couleur de fond : blanc=1, gris=2, bleu=4.

de gravité du mécanisme  $i$ . On a donc :

$$U_{sp} = \frac{1}{2}(k_{r1}(l_{r1} - l_{r10})^2 + k_{l1}(l_{l1} - l_{l10})^2 + k_{r2}(l_{r2} - l_{r20})^2 + k_{l2}(l_{l2} - l_{l20})^2) \quad (4.16a)$$

$$U_g = g(m_1y_1 + m_2y_2) \quad (4.16b)$$

$$U_c = f(f_{li}, f_{ri}, l_{li}, l_{ri}) \quad (4.16c)$$

L'expression de  $U_c$  en fonction des efforts dans les câbles et de leur longueur dépend de la stratégie d'actionnement considérée, détaillée section 4.3.3.

L'équation d'équilibre statique correspond aux minimums d'énergie potentielle. Ainsi, en différenciant l'équation (4.15) par rapport aux variables articulaires  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , on obtient les deux relations entre les efforts dans les câbles et la configuration du manipulateur :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

La matrice Hessienne de l'énergie potentielle peut également être calculée afin d'analyser la stabilité des configurations d'équilibre et définir la matrice de raideur du manipulateur appelée  $\mathbf{K}_\theta$  [QG] :

$$\mathbf{K}_\theta = \begin{pmatrix} K_{\theta_1} & K_{\theta_1\theta_2} \\ K_{\theta_1\theta_2} & K_{\theta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U_{total}}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 U_{total}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \\ \frac{\partial^2 U_{total}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \frac{\partial^2 U_{total}}{\partial \theta_2^2} \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

La matrice de raideur cartésienne  $\mathbf{K}_c$  du manipulateur est ensuite obtenue à l'aide de la matrice jacobienne du manipulateur  $\mathbf{J}$  :

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{J}^{-\top} \mathbf{K}_\theta \mathbf{J}^{-1} \quad (4.19)$$

### 4.3.3 Stratégies d'actionnement

#### Définition des stratégies d'actionnement

Le mécanisme 2D de base utilisé est un mécanisme en X à 1 DDL. L'étude cinématique d'un mécanisme ainsi que d'un empilement de plusieurs de ces mécanismes a été réalisée. L'étude cinématique se concentre uniquement sur les mouvements et pas sur l'actionnement. Les stratégies d'actionnement ont une forte influence sur les performances du manipulateur, en particulier une influence sur ses caractéristiques en statique, comme son WFW, sa raideur, etc. Une très large variété de stratégies d'actionnement est possible, des actionneurs intégrés (liaison pivot motorisée) aux actionneurs déportés avec entraînement par câbles. Afin de conserver les propriétés et avantages des mécanismes de tenségrité, un actionnement par câble a été envisagé pour la mise en mouvement des mécanismes. En effet, ce type d'actionnement permet de conserver la légèreté et la faible inertie des parties en mouvement en déportant les moteurs sur le bâti. Cela peut permettre également certaines applications où un manipulateur sans matériau ferro-magnétique est nécessaire, comme des interventions chirurgicales sous IRM. Comme la majorité des structures musculo-squelettiques, le mécanisme en X est un mécanisme antagoniste par nature,

ce qui signifie qu'il a besoin de deux actions opposées pour maximiser son WFW, actions qui sont réalisées par des câbles et/ou des ressorts. Pour un mécanisme à 1 DDL, un actionnement symétrique nécessite deux câbles antagonistes, l'un générant un couple positif autour de l'articulation et l'autre un couple négatif.

A partir de deux mécanismes assemblés en série, on peut choisir un grand nombre de stratégies d'actionnement par câble différentes, allant d'un sous actionnement à un câble à un actionnement antagoniste complet à 4 câbles. Le routage des câbles d'un mécanisme à l'autre peut également être différent. [Moo+11] définit deux types de routages différents :

- "*Side-routed*" : Le câble passe sur l'un des cotés du mécanisme et vient appliquer un effort d'attraction entre les extrémités des barres supérieures et inférieures, du côté où le câble passe. Le câble génère un couple sur l'articulation du mécanisme (voir figure 4.11a à 4.11d)
- "*Strut-routed*" : Le câble passe le long d'une des barres transversales du mécanisme. Il n'applique aucun effort sur le mécanisme (cas sur le mécanisme inférieur, des figures 4.11e et 4.11f).

On considère un modèle d'actionnement par câble parfait, donc avec les hypothèses suivantes :

- (i) Les câbles sont inextensibles
- (ii) Les câbles passent par les centres des liaisons pivots, sans poulies
- (iii) Il n'y a pas de frottement entre les câbles et les différents corps rigides

Nous verrons qu'en pratique, la réalisation d'un manipulateur nécessite l'utilisation de poulies qui complexifient le comportement du câble, et qu'il est nécessaire de modéliser plus finement son comportement. Nous verrons notamment que dans le cas d'un actionnement "strut-routed", les poulies font que le câble peut appliquer un effort sur le mécanisme [Pic+18].

### Comparaison des différentes stratégies d'actionnement possible

En considérant un mécanisme plan à 2 DDL, il existe une multitude de stratégies d'actionnement possible. On peut considérer que le mécanisme est complètement actionné à partir de deux câbles, et si chaque mécanisme est actionné en side-routed avec au moins un câble. En fonction de ces paramètres dimensionnels (raideurs des ressorts symétrique ou non, dimensions géométriques), le WFW pourra être plus ou moins grand et symétrique ou non. La figure 4.11 montre les différentes possibilités de montage d'un câble unique sur un manipulateur à deux DDL. Les montages (a) et (b) visent à activer le premier mécanisme uniquement. Les montages (c) et (d) utilisent un câble qui passe le long des deux mécanismes. Ainsi, l'action du câble s'applique sur les deux mécanismes de manière identique. C'est un montage "side-routed". Les montages (e) et (f) visent à actionner le mécanisme supérieur uniquement : pour cela, le câble passe en side-routed sur le mécanisme supérieur et en strut-routed, soit le long d'une barre diagonale, pour le premier



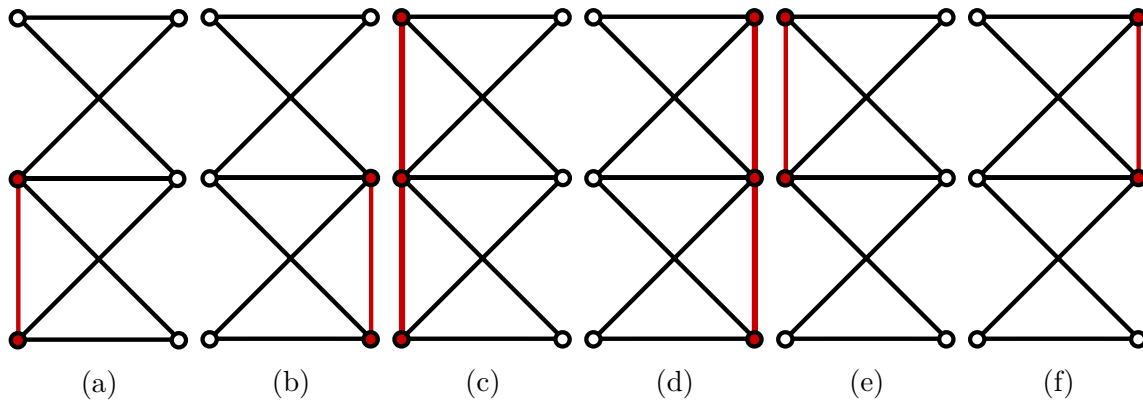


FIGURE 4.11 – Différents montages possibles de câbles. Les liaisons en rouge représentent les points attirés les uns aux autres lors de la mise en tension du câble. Les cas (a) à (d) sont des stratégies appelées "side-routed", tandis que les cas (e) et (f) nécessitent le passage du câble en strut-routed pour le premier mécanisme (non représenté).

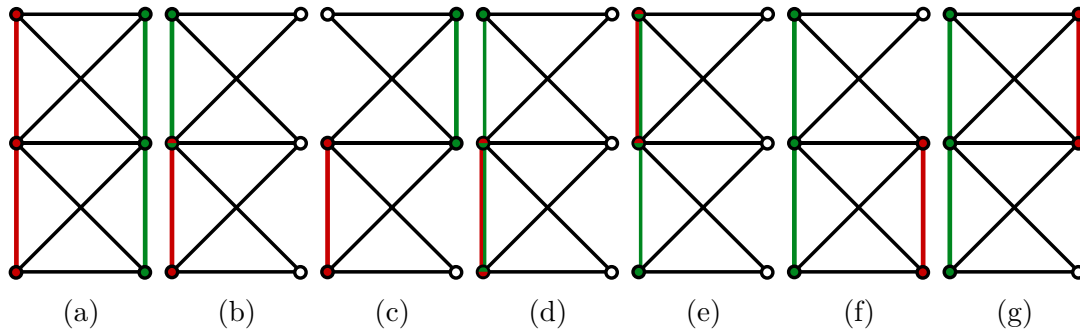


FIGURE 4.12 – Différents montages possibles de câbles pour deux câbles. Les liaisons en couleur représentent les points attirés les uns aux autres lors de la mise en tension du câble correspondant. Les autres cas sont obtenus par symétrie par rapport à l'axe de symétrie vertical du mécanisme.

mécanisme, ce qui neutralise son effet. Le cas où un même câble passerait à gauche du premier mécanisme et à droite du second (et vice-versa) n'a que peu d'intérêt et n'est pas présenté ici. On a donc montré qu'il y a 6 possibilités d'actionnement intéressantes pour un câble uniquement.

On considère maintenant deux câbles actionnant le manipulateur. Si on enlève les configurations où le routage des deux câbles est identique, ainsi que les configurations pour lesquelles un des deux mécanismes n'est pas du tout actionné, on obtient 13 configurations potentiellement intéressantes, détaillées en figure 4.12. Seulement 7 cas sont représentés, le reste des cas intéressants étant obtenus par symétrie axiale gauche-droite (en dehors du premier cas qui lui est le même par symétrie).

Une stratégie d'actionnement à trois câbles comporte énormément de cas différents et n'est pas présentée ici. L'étude d'une stratégie d'actionnement avec  $N + 1$  câbles ( $N$  étant le nombre de DDL) a été étudiée pour un manipulateur à 3 DDL [Fas+20]. Une stratégie d'actionnement à 4 câbles représente un sur-actionnement antagoniste complet,

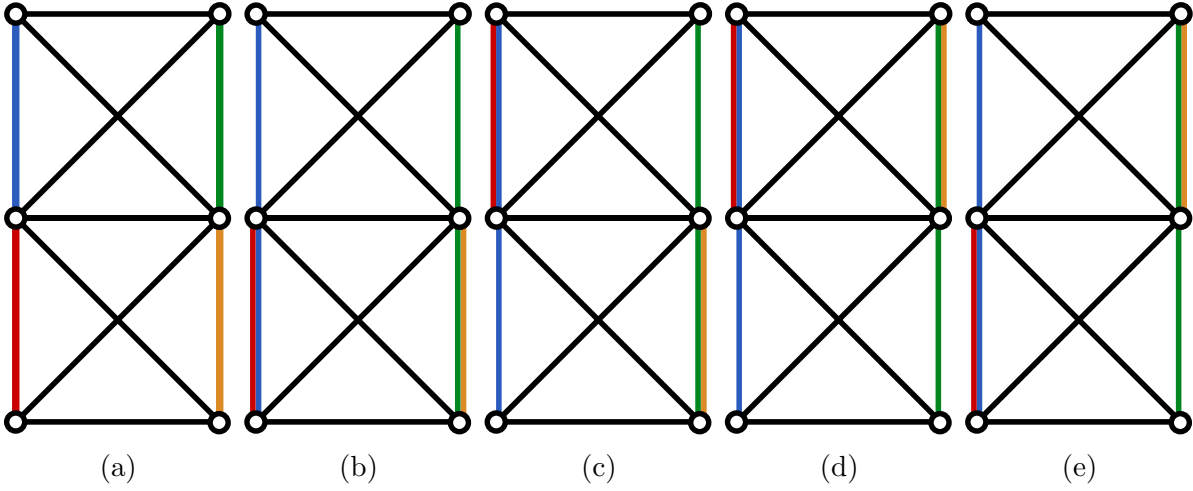


FIGURE 4.13 – Les 5 cas possibles de routage pour un manipulateur à deux DDL actionné par 4 câbles.

les deux mécanismes étant actionnés par un câble à gauche et un câble à droite. Cette stratégie d'actionnement permet donc un actionnement complet ainsi qu'une variation de raideur articulaire des deux articulations, et donc du manipulateur complet. Les différentes stratégies d'actionnement à 4 câbles sont présentées figure 4.13.

#### 4.3.4 Étude du WFW pour un manipulateur actionné par deux câbles

La première stratégie d'actionnement étudiée utilise deux câbles symétriques passant en side-routed le long des deux mécanismes du manipulateur, à gauche et à droite, correspondant à la figure 4.12a. Le travail produit par les câbles peut être écrit comme suit :

$$U_c = f_l(l_{l1} + l_{l2}) + f_r(l_{r1} + l_{r2}) \quad (4.20)$$

avec  $f_l$  et  $f_r$  les forces appliquées sur les câbles de gauche et de droite (car  $f_{l1} = f_{l2}$  et  $f_{r1} = f_{r2}$ ), respectivement. L'équation (4.17) peut donc être mise sous la forme suivante :

$$\begin{cases} -f_l \frac{\partial l_{l1}}{\partial \theta_1} - f_r \frac{\partial l_{r1}}{\partial \theta_1} = k_{l1} \frac{\partial l_{l1}}{\partial \theta_1} (l_{l1} - l_{l10}) + k_{r1} \frac{\partial l_{r1}}{\partial \theta_1} (l_{r1} - l_{r10}) + g(m_1 \frac{\partial y_1}{\partial \theta_1} + m_2 \frac{\partial y_2}{\partial \theta_1}) \\ -f_l \frac{\partial l_{l2}}{\partial \theta_2} - f_r \frac{\partial l_{r2}}{\partial \theta_2} = k_{l2} \frac{\partial l_{l2}}{\partial \theta_2} (l_{l2} - l_{l20}) + k_{r2} \frac{\partial l_{r2}}{\partial \theta_2} (l_{r2} - l_{r20}) + g(m_2 \frac{\partial y_2}{\partial \theta_2}) \end{cases} \quad (4.21)$$

Ce système d'équations est linéaire en  $f_l$  et  $f_r$ , le modèle statique inverse peut donc être résolu simplement et il existe un unique couple  $(f_l, f_r)$  pour un couple  $(\theta_1, \theta_2)$  donné.

La résolution du modèle statique direct (l'obtention de  $(\theta_1, \theta_2)$  pour un  $(f_l, f_r)$ ) est beaucoup plus difficile à traiter sur le plan algébrique. En effet, les expressions de tous les termes dérivés dans le système (4.21) font apparaître des formes complexes impliquant des racines carrées d'expressions trigonométriques à la fois dans les numérateurs et les dénominateurs. Les premières tentatives de résolution numériques ont révélé l'existence

de jusqu'à sept solutions d'équilibre sur l'intervalle  $-\pi/2 \leq \theta_1 \leq \pi/2$ ,  $-\pi/2 \leq \theta_2 \leq \pi/2$ , dont une ou deux seulement sont stables.

Afin de trouver l'ensemble des points  $(x, y)$  que le manipulateur peut atteindre avec cette stratégie d'actionnement, l'espace articulaire  $(\theta_1, \theta_2)$  est discrétisé et les points  $(x, y)$  et forces  $(f_l, f_r)$  correspondants sont calculés. Comme les câbles ne travaillent qu'en tension, les forces doivent toujours être positives. Une valeur positive minimale  $F_{min} = 15\text{ N}$  est imposée pour garantir que les câbles sont toujours en tension (le frottement statique des moteurs a été identifié à 14,5 N), et une valeur maximale  $F_{max} = 155\text{ N}$ , liée aux caractéristiques du moteur. L'ensemble des points  $(x, y)$  qui satisfont à ces contraintes correspond au WFW, dans le cas particulier où les seuls efforts extérieurs considérés sont ceux dus à la gravité. Le WFW peut être déterminé par ses limites, qui sont générées par les bornes des efforts d'actionnement et par les singularités du système (4.21). En remplaçant une des forces, par exemple  $f_l$ , par chacune de ses limites et en éliminant l'autre force dans le système (4.21), on obtient un ensemble d'équations en  $(\theta_1, \theta_2)$ . Chacune de ces équations définit une courbe limite dans l'espace articulaire, qui est ensuite projetée dans l'espace cartésien en utilisant les équations du modèle géométrique direct (4.2) pour obtenir les courbes limites du WFW. Les singularités du système (4.21), qui est linéaire en effort, sont facilement obtenues par la condition d'annulation de son déterminant, à savoir,  $\theta_1 = \theta_2$ . Cette singularité signifie qu'il n'est généralement pas possible d'atteindre de telles configurations avec cette stratégie d'actionnement. En fait, les configurations  $\theta_1 = \theta_2$  ne seraient réalisables que dans un plan horizontal (pas d'effets de gravité) et avec les mêmes raideurs de ressort pour les deux mécanismes. Dans ce cas, les deux équations du système (4.21) seraient donc identiques et le manipulateur serait actionné de manière antagoniste avec un seul degré de liberté puisque  $\theta_1 = \theta_2$  seraient les seules configurations possibles. La condition de singularité  $\theta_1 = \theta_2$  définit une ligne dans le plan  $(\theta_1, \theta_2)$ , qui, lorsqu'elle est projetée dans l'espace cartésien, définit une courbe dans le WFW. La figure 4.14 montre le WFW du manipulateur pour les données du prototype. Le WFW est représentée en bleu. Les zones grises ont été ajoutées pour montrer les solutions satisfaisant uniquement la contrainte  $f_l > F_{min}$  et  $f_r > F_{min}$ , donc pour des efforts d'actionnement potentiellement infinis. Il apparaît clairement que le WFW est beaucoup plus petit que l'espace de travail géométrique. La plupart des points du WFW se trouvent dans le bas de l'espace de travail, même lorsque les forces maximales ne sont pas limitées. La figure 4.15 montre que lorsque toutes les raideurs des ressorts sont égales, la taille du WFW est encore réduite. En effet, dans ce cas, les deux mécanismes sont identiques et leurs comportements diffèrent uniquement en raison des effets de la gravité. Comme ces effets sont faibles, la plupart des configurations accessibles se situent autour de  $\theta_1 = \theta_2$ . Comme remarqué plus haut, en l'absence de gravité et avec des ressorts identiques, les deux mécanismes auraient exactement le même comportement et le manipulateur ne pourrait atteindre que les configurations  $\theta_1 = \theta_2$ , c'est-à-dire qu'il n'aurait qu'un seul degré de liberté effectif.

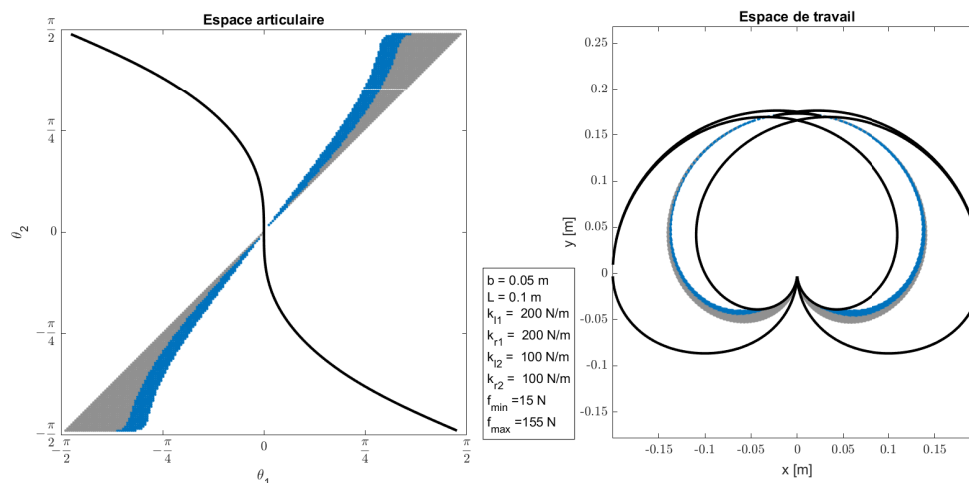


FIGURE 4.14 – Espace de travail atteignable dans l'espace articulaire (gauche) et l'espace cartésien (droite). La zone bleue correspond à la zone atteignable avec les efforts  $F_{min}$  et  $F_{max}$  prescrit, et la zone grise le WFW pour  $F_{max}$  non borné.

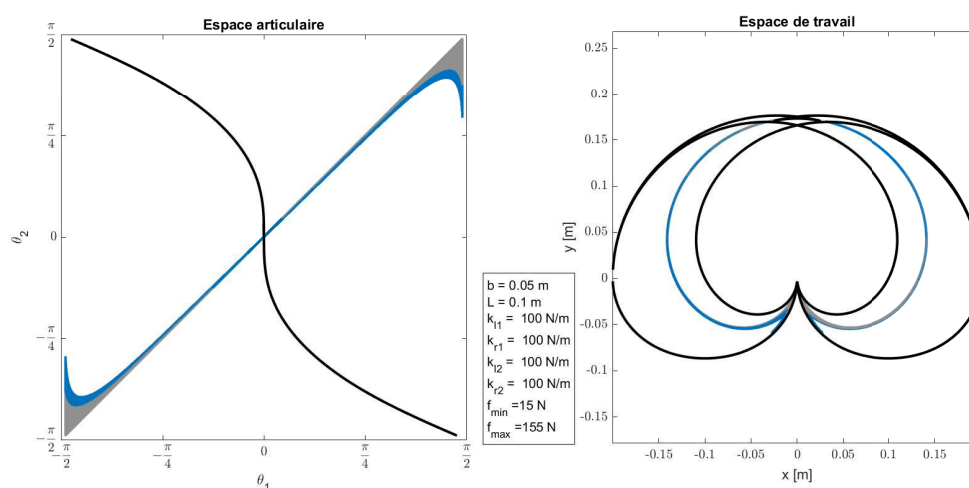


FIGURE 4.15 – Espace de travail atteignable dans l'espace articulaire (gauche) et l'espace cartésien (droite) quand les mécanismes inférieur et supérieur ont les mêmes ressorts.

### 4.3.5 Etude du WFW pour un manipulateur actionné par quatre câbles

Nous venons de voir qu'une stratégie d'actionnement à deux câbles présente un WFW très petit. De plus, la raideur du manipulateur ne peut pas être modifiée indépendamment de sa configuration. Pour avoir un actionnement complet et efficace d'un manipulateur plan à 2 DDL, quatre câbles sont nécessaires. La figure 4.13 montre les différentes possibilités d'actionnement à quatre câbles, notamment des stratégies "strut-routed" et "side-routed", qui vont être comparées.

#### Stratégie "side-routed"

La première stratégie d'actionnement à quatre câbles étudiée est la stratégie "side-routed" correspondant à la figure 4.13b : deux câbles passent en side-routed le long des deux mécanismes, à gauche et à droite, et sont fixés aux liaisons pivots supérieures du manipulateur. Les deux câbles restant passent le long du premier mécanisme uniquement, à gauche et à droite, et sont attachés aux liaisons pivots intermédiaires. Pour ce premier mécanisme, il y a donc un couplage entre les câbles : en actionnant le second mécanisme avec les câbles longs, un couple est aussi appliqué sur le CIR du premier mécanisme, qui doit être compensé si nécessaire par les deux câbles courts. Cet effet se traduit de la manière suivante lors de l'écriture des travaux virtuels des câbles :

$$U_c = f_{l1}l_{l1} + f_{r1}l_{r1} + f_{l2}(l_{l1} + l_{l2}) + f_{r2}(l_{r1} + l_{r2}) \quad (4.22)$$

où  $f_{l2}$  et  $f_{r2}$  désignent les câbles longs agissant sur les premiers et seconds mécanismes. Comme le manipulateur possède 4 câbles, le système (4.17) a une infinité de solutions. La redondance d'actionnement peut-être gérée en imposant une raideur donnée aux éléments de  $\mathbf{K}_\theta$ , selon le type de tâche souhaitée. Les efforts d'actionnement n'apparaissant que dans les termes diagonaux de  $\mathbf{K}_\theta$  (les termes non-diagonaux dépendent uniquement de la gravité), on peut choisir une valeur pour  $K_{\theta_1}$  et  $K_{\theta_2}$ . Afin de calculer le WFW correspondant, l'espace de travail articulaire est balayé pour chaque configuration  $(\theta_1, \theta_2)$ , et l'ensemble des efforts d'actionnement  $(f_{l1}, f_{l2}, f_{r1}, f_{r2})$  avec des valeurs minimales et maximales de  $K_{\theta_1}$  et  $K_{\theta_2}$  est calculé. Sachant que chaque mécanisme  $i$  est actionné par des forces antagonistes, on peut montrer que la raideur minimale  $K_{\theta_i}$  est obtenue quand une des deux forces  $(f_{li}, f_{ri})$  est minimale. Un algorithme a été développé pour trouver les deux efforts minimums associés à une configuration donnée  $(\theta_1, \theta_2)$ , et les deux efforts restants sont calculés en utilisant le système (4.17). Si les forces évaluées sont comprises dans les bornes  $[F_{min}, F_{max}]$ , les raideurs correspondantes  $K_{\theta_1}$  et  $K_{\theta_2}$  sont calculées en utilisant l'équation (4.18). La même approche est menée pour calculer les raideurs articulaires maximales, mais cette fois-ci deux des quatre efforts sont à leur valeur maximale  $F_{max}$ . Les figures 4.16 (respectivement figure 4.17) montrent le WFW dans l'espace articulaire ainsi que la valeur de la raideur articulaire minimale (respectivement maximale) de la première et deuxième articulation. Cette figure montre en premier lieu que la stratégie d'actionnement en side-routed ne permet pas d'atteindre toutes les configurations de l'espace de travail géométrique. Les zones inaccessibles augmentent encore lorsque la

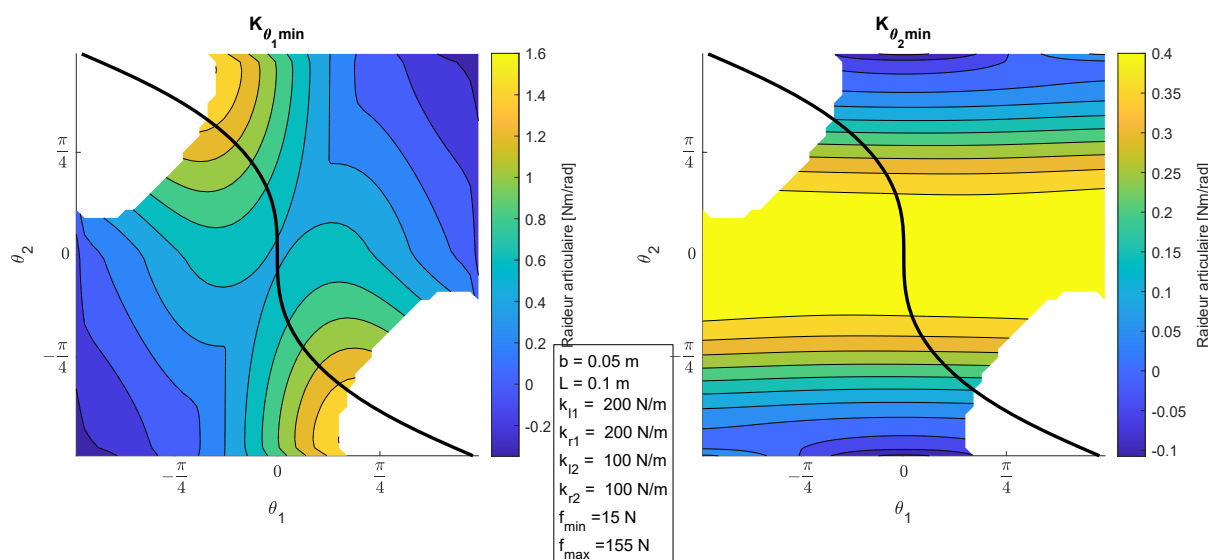


FIGURE 4.16 – Raideur articulaire minimale pour la stratégie side-routed. Les zones non-colorées correspondent aux configurations non-accessibles avec les efforts prescrits.

raideur est maximale (les efforts maximaux sur certains câbles sont plus importants et plus difficiles à compenser). On peut aussi voir que la raideur du second mécanisme  $K_{\theta_2}$  dépend principalement de  $\theta_2$ , tandis que la raideur du premier mécanisme  $K_{\theta_1}$  dépend à la fois de  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Ce comportement est dû à la stratégie d'actionnement. Certaines configurations proches des limites articulaires ont une raideur négative, ce qui signifie que le manipulateur atteint des configurations d'équilibre instable. Cela s'explique par la proximité de la configuration plate de chaque mécanisme, qui est instable. Ces configurations seront en pratique évitées en restant suffisamment éloigné des limites articulaires calculées.

Pour chaque couple  $(\theta_1, \theta_2)$ , la position  $(x, y)$  correspondante est calculée en utilisant l'équation (4.2), et la raideur cartésienne  $\mathbf{K}_c$  est calculée en utilisant l'équation (4.19). Les valeurs minimales et maximales des éléments diagonaux de la matrice cartésienne (appelés  $K_x$  et  $K_y$ ), qui définissent la raideur dans les directions  $x$  et  $y$ , sont calculés de la même manière que les valeurs extrêmes de la raideur articulaire (on peut montrer que les raideurs cartésiennes atteignent leur minimum et maximum pour les mêmes efforts que les raideurs articulaires, soit quand la raideur articulaire est minimale (respectivement maximale), la raideur cartésienne est minimale (respectivement maximale)). Les figures 4.18 (respectivement 4.19) montrent les WFW obtenus avec les raideurs cartésiennes dans les directions  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ . Le calcul de la matrice de raideur cartésienne faisant intervenir la matrice jacobienne, les valeurs des coefficients de cette dernière sont naturellement influencées par les singularités du manipulateur et de chaque mécanisme. En effet, la raideur devient infinie dans la direction définie par les deux centres instantanés de rotation et de l'effecteur. Par exemple en position de repos (manipulateur vertical), la raideur dans la direction  $\vec{y}$  est infinie (avec l'hypothèse de barres incompressibles). Afin d'éviter l'affichage de valeurs trop grandes, le calcul de la raideur cartésienne n'a pas été pris en compte sur les singularités et à proximité. On peut remarquer qu'il y a globalement un

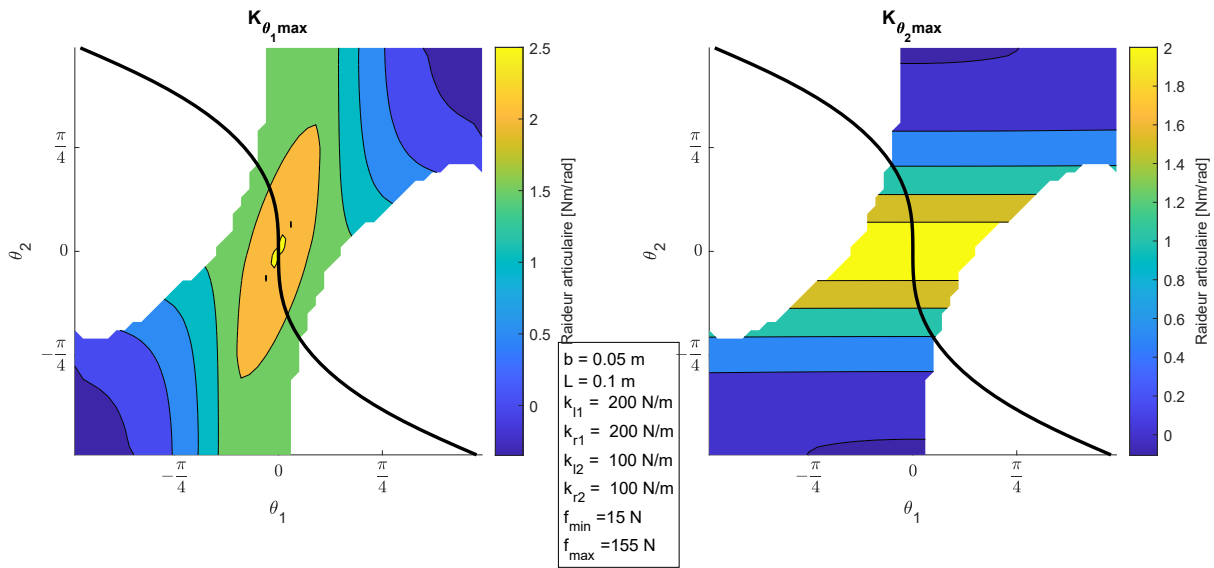


FIGURE 4.17 – Raideur articulaire maximale pour la stratégie side-routed.

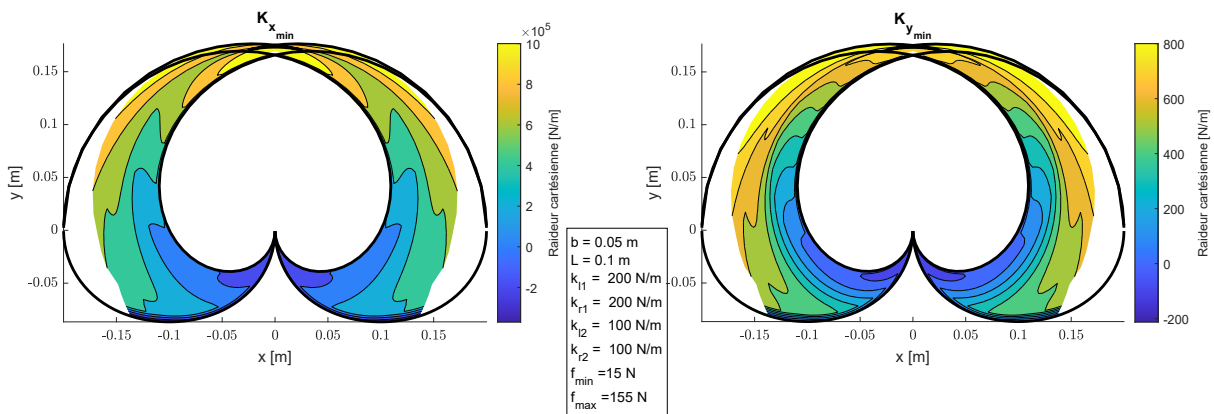


FIGURE 4.18 – Espace de travail accessible et raideur cartésienne minimale pour la stratégie side-routed.

rapport de 1 à 10 entre la raideur minimale et maximale à la fois dans l'espace articulaire et cartésien <sup>2</sup>. La raideur cartésienne a ici été calculée et affichée selon les deux directions principales  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ , mais aurait pu être calculée selon une direction prédéfinie.

### Stratégie "strut-routed" et comparaison

La seconde stratégie d'actionnement à l'étude est la stratégie présentée en figure 4.13a ou appelée stratégie "strut-routed". Pour ce schéma d'actionnement, le premier mécanisme est actionné par deux câbles antagonistes, et les câbles actionnant le second mécanisme passent par le premier mécanisme le long des barres diagonales, ce qui neutralise leur effet

<sup>2</sup>Ce rapport n'est pas affecté par les limites définies pour éviter des valeurs de raideurs cartésiennes trop grandes

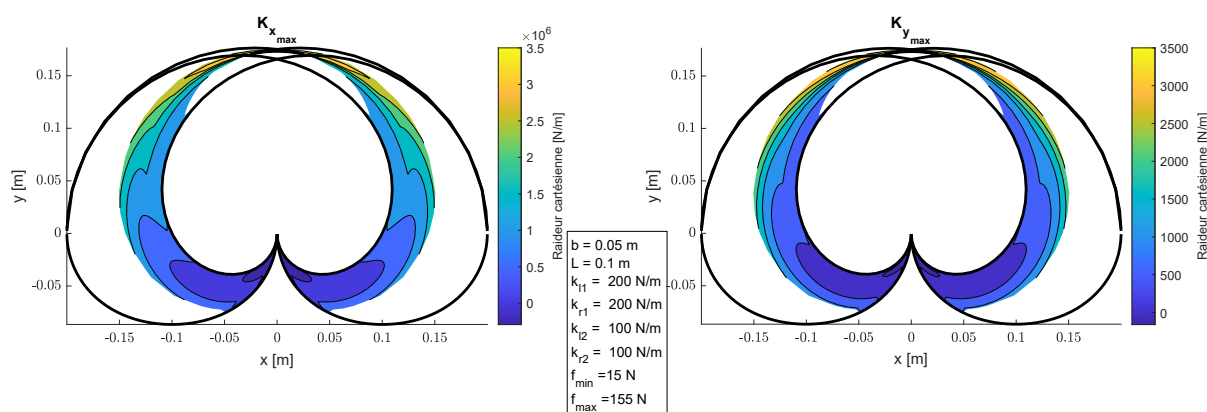


FIGURE 4.19 – Espace de travail accessible et raideur cartésienne maximale pour la stratégie side-routed.

sur le premier mécanisme. Les deux mécanismes sont donc ici complètement indépendants (hors effet de la gravité). On peut donc écrire les travaux virtuels des câbles :

$$U_c = f_{l1}l_{l1} + f_{r1}l_{r1} + f_{l2}l_{l2} + f_{r2}l_{r2} \quad (4.23)$$

Les figures 4.20 (respectivement figure 4.21) montrent le WFW dans l'espace articulaire ainsi que la valeur de la raideur articulaire minimale (respectivement maximale) de la première et deuxième articulation. La méthode de calcul du WFW et de la raideur articulaire est la même que pour la première stratégie d'actionnement. On remarque en premier lieu que dans ce cas, la totalité de l'espace de travail géométrique est atteignable, pour la raideur minimale et maximale. On peut aussi voir que la raideur du premier mécanisme est indépendante de la position du second mécanisme. Pour ce qui est des valeurs numériques de la raideur articulaire, les ordres de grandeur sont les mêmes que ce soit pour les valeurs minimales et maximales. Les figures 4.22 (respectivement 4.23) montrent les WFW calculés avec les raideurs cartésiennes dans les directions  $x$  et  $y$ . Comme pour la raideur articulaire, les valeurs numériques des raideurs cartésiennes sont sensiblement égales pour les deux stratégies, mais le WFW est plus grand dans le cas de la stratégie strut-routed.

D'un point de vue purement statique (WFW et raideur), on peut donc en conclure que la stratégie side-routed ne présente dans ce cas pas d'avantage particulier. Cette stratégie peut néanmoins être utile pour actionner plusieurs mécanismes en série avec un seul câble afin de concevoir des manipulateurs sous actionnés, ce qui sera abordé dans le dernier chapitre 5.

## 4.4 Résultats expérimentaux

Un manipulateur plan à 2 DDL a été conçu et fabriqué afin de valider la modélisation cinétostatique effectuée précédemment. La base du manipulateur est la même que pour le mécanisme à 1 DDL (voir section 3.5, deux moteurs supplémentaires ont été rajoutés sur le bâti pour pouvoir actionner jusqu'à 4 câbles à la fois (voir figure 4.9)). Ainsi, 4



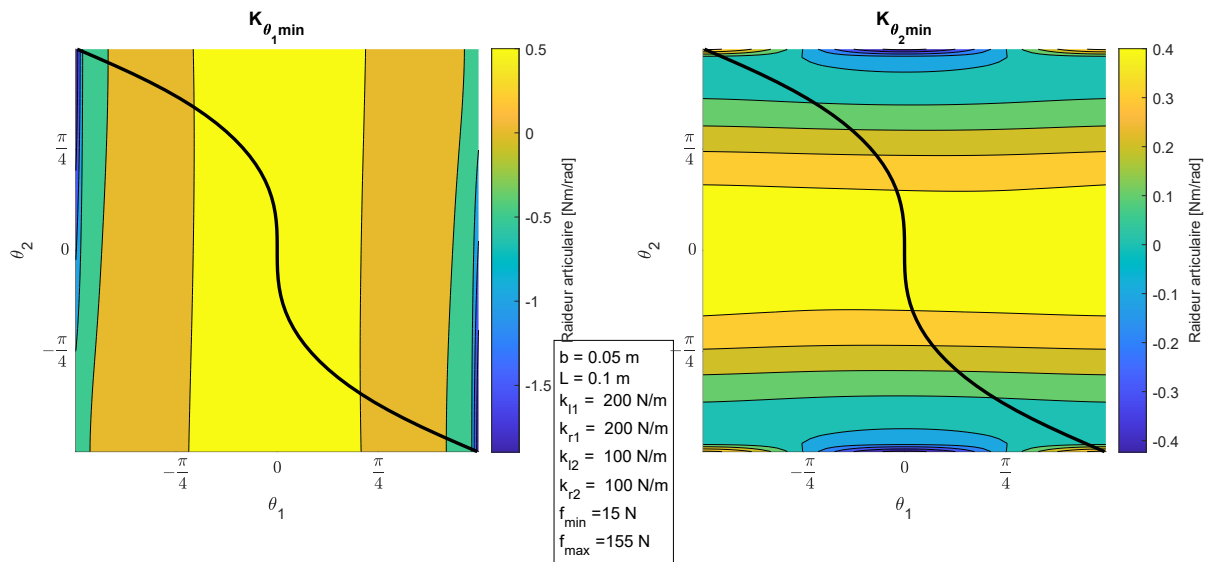


FIGURE 4.20 – Raideur articulaire minimale pour la stratégie strut-routed.

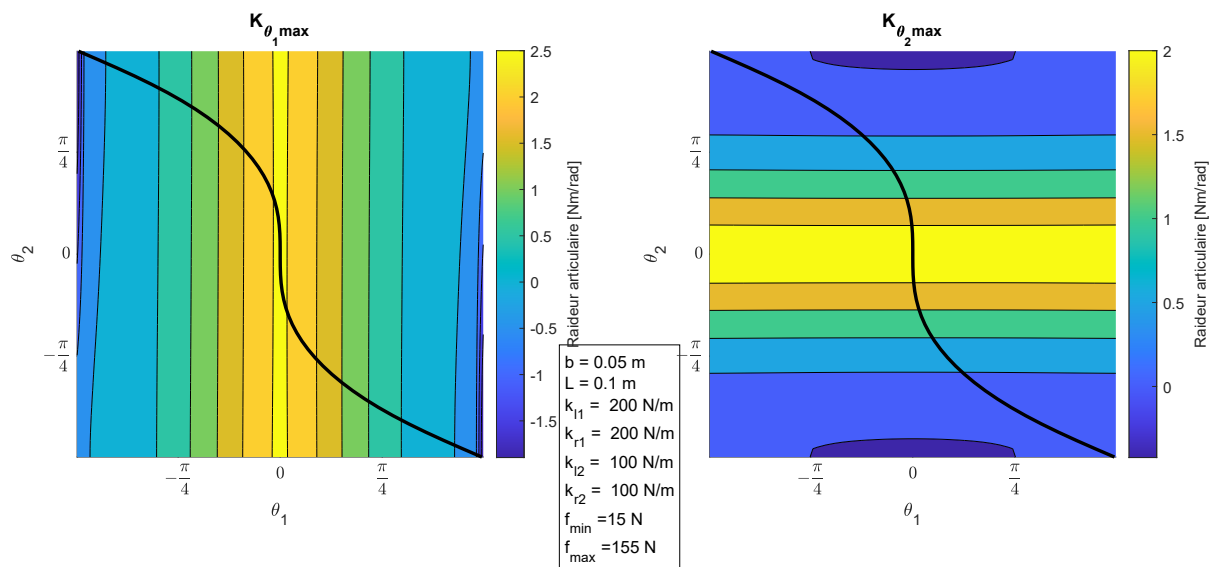


FIGURE 4.21 – Raideur articulaire maximale pour la stratégie strut-routed.

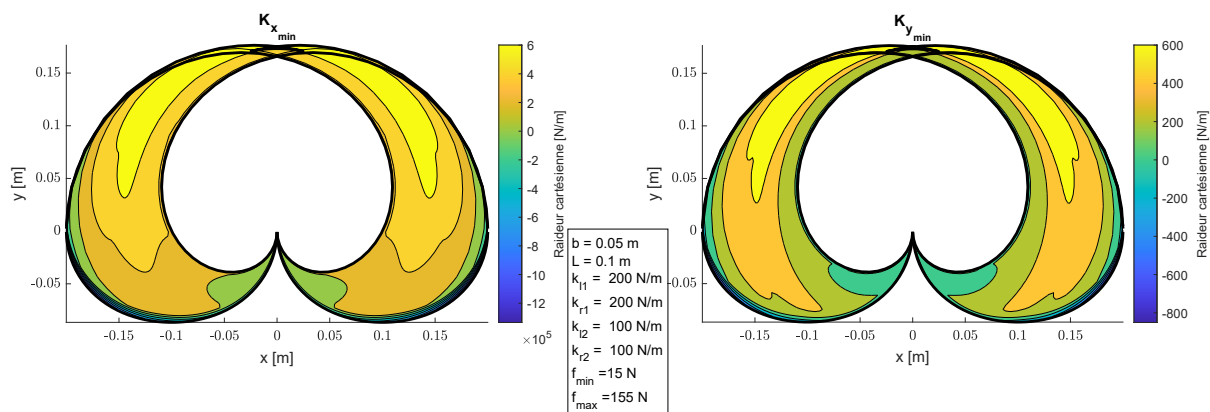


FIGURE 4.22 – Espace de travail accessible et raideur cartésienne minimale pour la stratégie strut-routed.

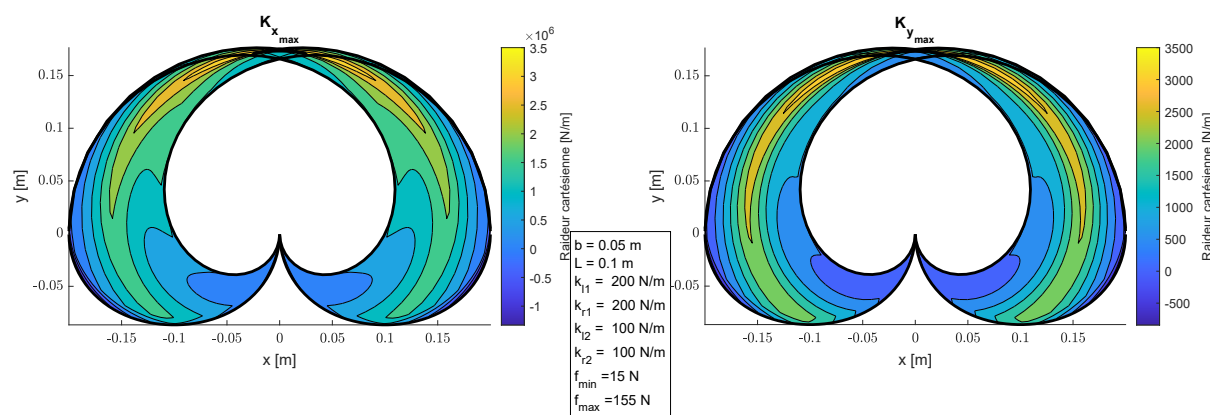


FIGURE 4.23 – Espace de travail accessible et raideur cartésienne maximale pour la stratégie strut-routed.

plans de poulies sont disposés sur chaque axe liant les barres entre elles, afin de pouvoir passer les différents câbles sans contact entre eux (voir figure 4.24b). De cette manière, un grand nombre de stratégies d'actionnement sont possibles. Contrairement aux schémas d'actionnement présentés en section 4.3.3 qui considèrent que les câbles passent à travers/-sont attaché au centre de la liaison pivot d'un mécanisme, les câbles passent ici le long de poulies. Leur passage doit donc être choisi judicieusement, afin d'assurer à la fois un chemin minimisant les frottements, mais assurant un contact entre le câble et les poulies quelque soit la position du manipulateur. En effet, un passage du câble trop simple en strut-routed sur le premier mécanisme, entraînerait un décollement du câble avec certaines poulies à partir d'une certaine orientation du deuxième mécanisme en X. C'est pourquoi les câbles passant en strut-routed sur le second mécanisme passent également en strut-routed le long de la barre horizontale commune aux deux mécanismes, les poulies agissant ici comme un galet tendeur (voir figure 4.24a). On peut également remarquer sur la figure 4.24a qu'une fois considérées des poulies avec un diamètre non-nul, le passage des câbles en strut-routed n'est plus tout à fait parallèle à la barre transversale, ce qui remet en cause l'hypothèse formulée section 4.3.3. Dans ce cas en effet, les câbles actionnant le second mécanisme auront un effet sur le premier. Bien que cet effet soit faible, il est pris en compte dans les boucles de contrôle, ainsi que la raideur du câble, selon [Pic+18]. Les dimensions du manipulateur sont les mêmes que celles indiquées section 4.3.1.

Afin de vérifier la modélisation statique, on réalise une trajectoire en plusieurs étapes en découplant les mouvements des deux articulations, et ce en boucle ouverte. Une séquence d'efforts est appliquée au manipulateur, allant de 15 à 50 N (voir figure 4.26, courbes rouges). La trajectoire correspondante du mécanisme est montrée en figure 4.25 dans l'espace articulaire et l'espace de travail. Afin de comparer les données expérimentales avec le modèle statique, le modèle statique inverse (équation (4.17)) a été résolu pour cette stratégie d'actionnement et pour chaque valeur  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2]^T$  obtenue à partir des efforts appliqués en boucle ouverte. Les résultats sont présentés sur la figure 4.26, en bleu. On remarque que comme on pouvait s'y attendre, les forces nécessaires au mouvement dans le cas de la modélisation ne prenant en compte ni les frottements ni l'allongement du câble sont plus faibles que les efforts réellement appliqués. Néanmoins, la séquence d'actionnement (l'ordre dans lequel sont appliquées les forces) est conforme. On peut voir également que les efforts sur un câble varient un peu entre les différents paliers, ce qui est dû à la stratégie d'actionnement strut-routed avec poulies, qui induit un effet sur le premier mécanisme lorsque des efforts sont appliqués sur les câbles  $f_{l2}$  et  $f_{r2}$ .

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, un manipulateur plan à 2 DDL composé de deux mécanismes en X en série a été étudié. La cinématique de ce manipulateur, que l'on pouvait espérer simple, s'est finalement montrée assez complexe, la résolution du modèle géométrique inverse nécessitant une méthode de résolution appropriée. Les singularités ont été déterminées et l'étude de l'espace de travail et de l'influence des limites articulaires ont été effectuées. Nous avons pu constater que le manipulateur a deux ou quatre solutions en fonction de ses paramètres géométriques. Lorsqu'il a quatre solutions, ce manipulateur s'est également ré-

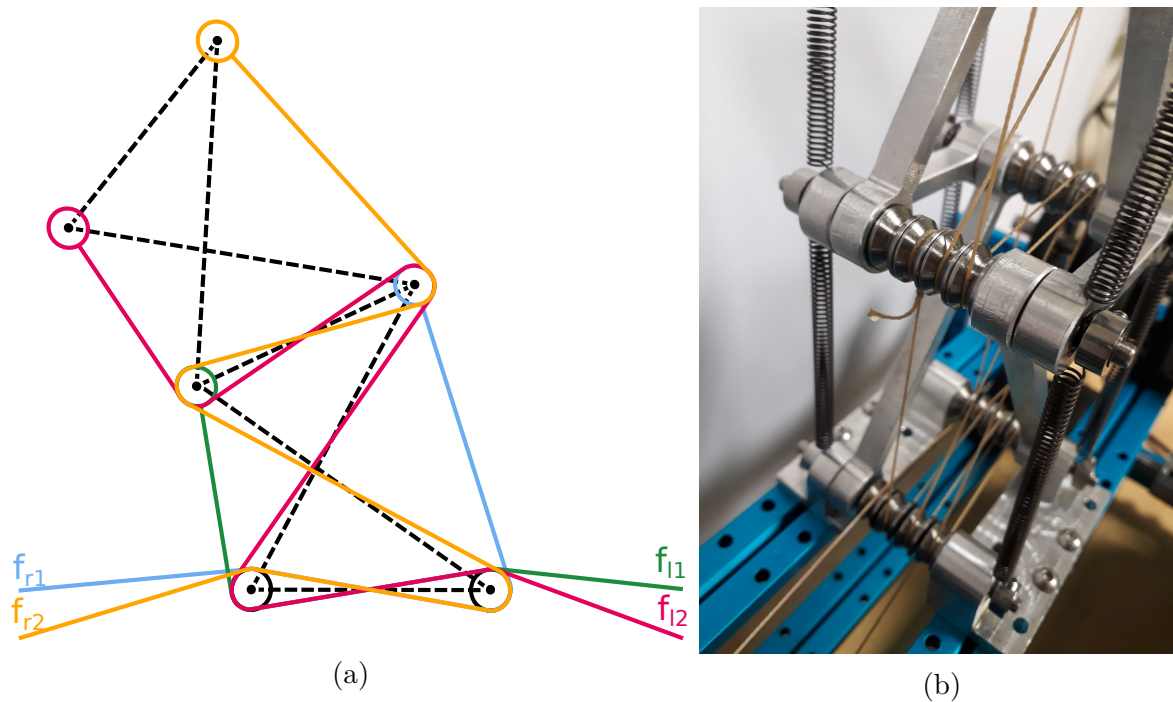


FIGURE 4.24 – (a) Schéma d'actionnement du manipulateur et passage des câbles (b) Photo des axes du manipulateur, comportant 4 poulies empilées sur des plans différents.

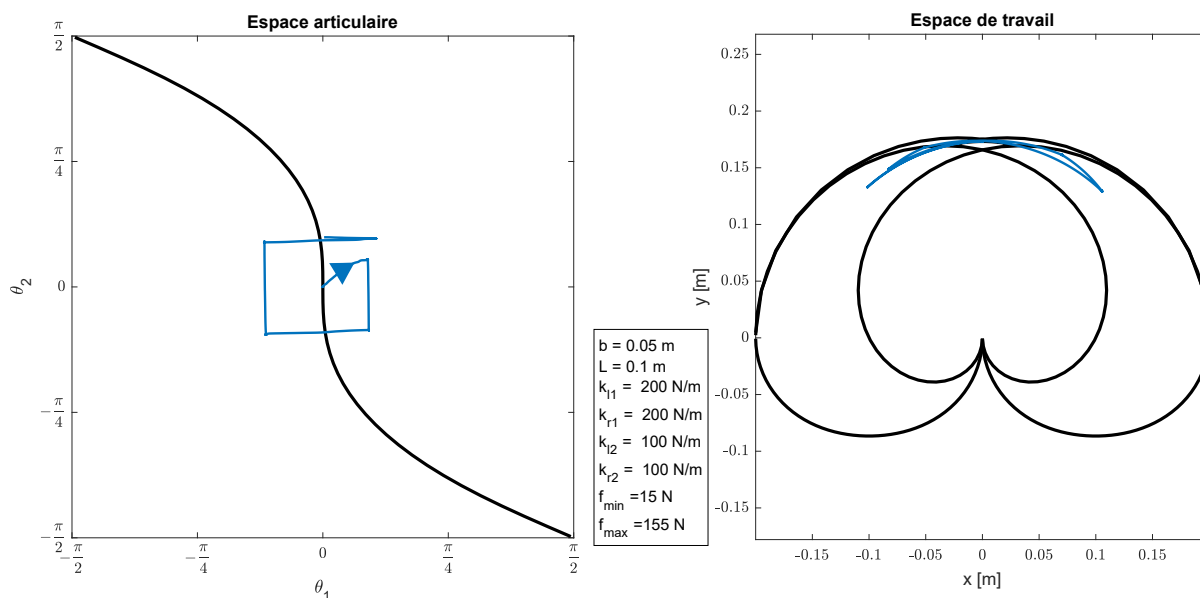


FIGURE 4.25 – Trajectoire effectuée en boucle ouverte, dans l'espace articulaire (gauche) et l'espace de travail (droite).

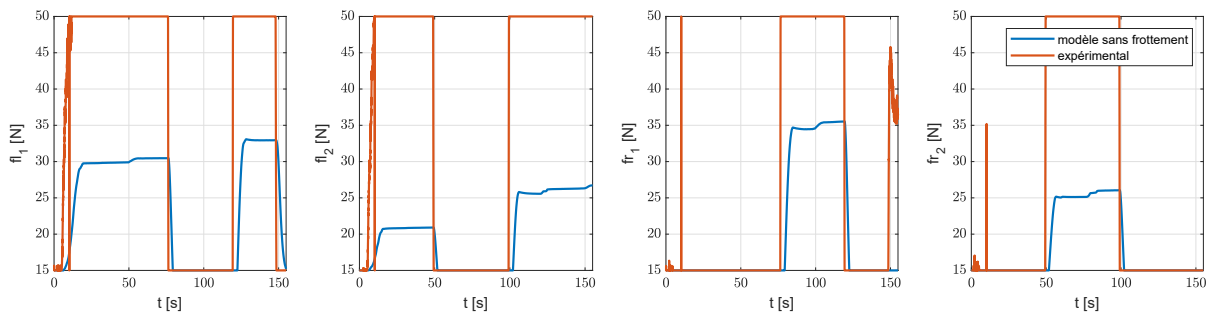


FIGURE 4.26 – Efforts appliqués pour réaliser la trajectoire donnée en boucle ouverte. Les forces expérimentales en rouge sont continues.

véle être cuspidal, ce qui est à notre connaissance une première pour un manipulateur plan à 2 DDL. La seconde partie de ce chapitre s'est concentrée sur la modélisation statique et l'étude des stratégies d'actionnement sur un tel manipulateur. Différentes stratégies d'actionnement ont été étudiées. La première, composée de deux câbles uniquement, a rapidement montré ses limites, avec un WFW très réduit. Ce résultat n'était pas forcément attendu, le manipulateur étant dans ce cas complètement actionné. Deux autres stratégies d'actionnement ont été ensuite étudiées. Dans les deux cas, chaque mécanisme est actionné de manière antagoniste, ce qui porte le nombre total de câbles à quatre et rend le manipulateur sur-actionné. Cette redondance d'actionnement permet dans notre cas à la fois de couvrir un WFW plus large, qui peut se rapprocher de l'espace de travail géométrique, mais également de faire varier la raideur du manipulateur. La modélisation statique a été vérifiée en boucle ouverte sur un prototype de manipulateur. Les résultats montrent que la modélisation est bonne, mais que certains phénomènes nécessitent d'être pris en compte, comme par exemple le frottement dans la chaîne d'actionnement (moteurs-réducteurs, poulies), mais également l'influence des poulies sur la géométrie des câbles, qui modifie l'expression du travail virtuel du câble en la rendant bien plus complexe et créant des dépendances entre les différents mécanismes.

# Chapitre 5

## Modélisation et conception optimale de manipulateurs à N degrés de liberté

### 5.1 Introduction

Nous avons montré précédemment qu'il était possible de concevoir un manipulateur plan à 2 DDL, utilisant le principe de tenségrité. La modélisation cinétostatique d'un tel manipulateur s'est trouvée être plus complexe que prévu (cinématique, actionnement...). Néanmoins, les concepts abordés pour un manipulateur à 2 DDL peuvent être étendus à un manipulateur plan à N DDL composé de mécanismes du même type (mécanisme en X). Le but de ce dernier chapitre est de montrer que l'assemblage en série de plusieurs mécanismes de tenségrité en X permet de concevoir des manipulateurs aux caractéristiques intéressantes.

L'assemblage d'un grand nombre de mécanismes en série amène plusieurs problématiques nouvelles. D'un point de vue purement cinématique, la résolution du modèle géométrique inverse pour un manipulateur à 2 DDL s'est révélée plus difficile que prévu et des méthodes spécifiques ont été mises en place. L'extension de ces méthodes à un manipulateur à 3 DDL pour une tâche définie en position et orientation dans le plan est directe, mais l'obtention d'un polynôme caractéristique sous Maple s'est avérée impossible en général. Il a toutefois été possible d'obtenir un polynôme de degré 4 en affectant au préalable des valeurs numériques aux paramètres géométriques ainsi qu'à la coordonnée d'orientation de l'effecteur. Au delà de 3 DDL, la résolution du modèle géométrique inverse nécessite de résoudre la redondance cinématique. D'un point de vue statique, la conception et fabrication de manipulateurs longs et élancés nécessite de prendre correctement en compte l'influence de la gravité, qui peut rapidement devenir un problème dans certaines configurations. Les concepts et modèles liés aux stratégies d'actionnement restent parfaitement valables pour des manipulateurs à N DDL. Cela dit, dans ce chapitre, le sur-actionnement antagoniste complet est écarté car il nécessiterait un nombre d'actionneurs bien trop élevé ( $2N$  actionneurs).

La première partie de ce chapitre porte sur la modélisation dynamique d'un manipulateur plan à N DDL composé d'un assemblage en série de mécanismes en X. Cette modélisation dynamique a été élaborée à partir d'une méthode itérative et de la formula-

tion lagrangienne, qui rend possible l'expression symbolique et systématique du modèle. Ce modèle dynamique est utilisé pour la modélisation et la commande de mécanismes plans, et est évidemment valable et en accord avec les modélisations à 1 et 2 DDL des chapitres précédents.

La seconde partie de ce chapitre porte sur la conception d'un prototype à 10 DDL, qui est l'un des objectifs majeurs du projet AVINECK. Nous verrons que pour un prototype de cette taille, l'influence de la gravité est importante et qu'un grand nombre de paramètres vont influencer sur la stabilité du mécanisme et son WFW. Une configuration d'équilibre au repos bio-inspirée (forme en S) est ainsi proposée pour ce manipulateur. Une méthode basée sur le modèle statique est développée afin de déterminer les raideurs de ressorts permettant d'obtenir la position de repos voulue, puisque contrairement aux analyses des chapitres précédents, les raideurs de ressorts entre la gauche et la droite ne sont plus symétriques. Une fois les raideurs des ressorts déterminées, différentes stratégies d'actionnement seront étudiées afin d'en déterminer une permettant de maximiser le WFW et d'atteindre des configurations prescrites, comme par exemple une configuration "cou-tendu" à partir de la position de repos. Là encore, des stratégies d'actionnement "bio-inspirées" seront proposées.

## 5.2 Modélisation dynamique d'un manipulateur à $N$ degrés de liberté

### 5.2.1 Modélisation

On considère maintenant un empilement de  $N$  mécanismes en  $X$ . Les mécanismes sont numérotés par  $i$  avec  $i \in [1, N]$ , le numéro 1 correspondant au mécanisme de base et le  $N$  au dernier mécanisme de la chaîne. Chaque mécanisme  $i$  est un mécanisme de tensegrité de classe 2 [SO09] constitué d'une barre de base  $\mathcal{B}_{1i}$ , de deux barres croisées  $\mathcal{B}_{2i}$   $\mathcal{B}_{3i}$  et d'une barre supérieure  $\mathcal{B}_{4i}$ , ainsi que de deux ressorts de tension. Il est important de noter que la barre de base du mécanisme  $i$  se confond avec la barre supérieure du mécanisme  $i-1$ , soit  $\mathcal{B}_{1i} = \mathcal{B}_{4(i-1)}$ . La barre de base du premier mécanisme est fixe et tous les ressorts et barres sont liés par des liaisons pivot parfaites.

Les différents angles utiles à l'écriture du modèle dynamique sont montrés sur la figure 5.1.  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \dots, \alpha_N]^\top$  est choisi comme vecteur des coordonnées généralisées, avec  $\alpha_i$  l'angle entre la barre inférieure  $\mathcal{B}_{1i}$  et la barre supérieure  $\mathcal{B}_{4i}$  du mécanisme  $i$ . Les autres angles  $\phi_i$  et  $\psi_i$  sont utiles pour le calcul et peuvent être exprimés comme fonction de  $\alpha_i$  (équation (3.2)) [VR+18].

Afin d'avoir une formulation générique et itérative, on appelle  $\gamma_i$  l'angle entre la barre inférieure du premier mécanisme  $\mathcal{B}_{11}$  et l'angle de la barre inférieure du mécanisme  $i$   $\mathcal{B}_{1i}$ , que l'on peut écrire comme suit :

$$\gamma_i = \sum_{j=1, i} \alpha_{j-1} \quad (5.1)$$

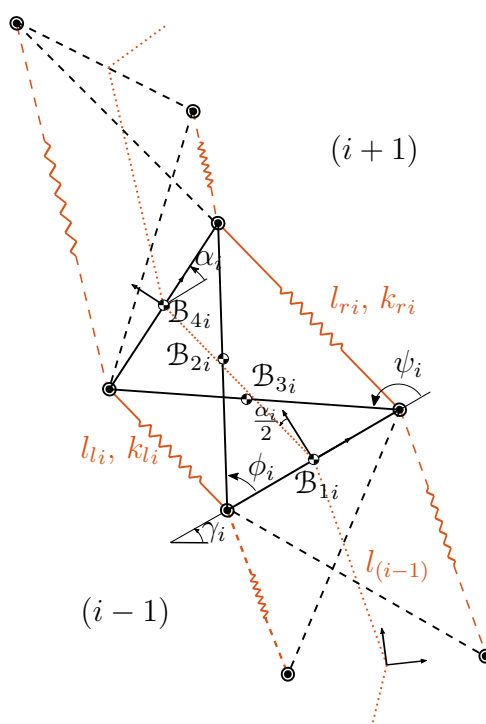


FIGURE 5.1 – Paramétrage du manipulateur.

### 5.2.2 Équations de Lagrange

Les équations de Lagrange pour un système à  $N$  DDL s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha_i} + \frac{dV}{d\alpha_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (5.2)$$

avec

$T$  : Énergie cinétique

$V$  : Énergie potentielle

$Q$  : Forces généralisées

Par la suite, les énergies cinétiques et potentielles, ainsi que les forces généralisées sont calculées. Elles sont ensuite substituées aux équations de Lagrange (5.2) afin de déterminer les équations du mouvement.

### 5.2.3 Équations du mouvement

Les équations de Lagrange sont réécrites comme suit afin de décrire la dynamique du manipulateur :

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\alpha})\ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}) \quad (5.3)$$

avec  $\boldsymbol{\alpha}$  le vecteur des coordonnées généralisées,  $\mathbf{M}$  la matrice d'inertie,  $\mathbf{C}$  la matrice de Coriolis,  $\mathbf{G}$  le vecteur des effets potentiels et  $\mathbf{Q}$  le vecteur des forces généralisées.



## 5.2.4 Énergie cinétique et matrice d'inertie

### Énergie cinétique du mécanisme $i$

La différence par rapport à l'énergie cinétique pour un seul mécanisme est que maintenant la barre inférieure du mécanisme  $i$  est mobile, et a donc une vitesse de rotation et de translation. Le repère local du mécanisme  $i$  est situé au centre  $(x_i, y_i)$  de la barre inférieure avec l'axe  $\vec{x}$  le long de cette barre, formant un angle  $\gamma_i$  avec l'axe horizontal. Ainsi, le repère local de chaque mécanisme est décrit par les trois paramètres  $x_i, y_i, \gamma_i$ . Les vitesses de translation (respectivement de rotation) sont  $\dot{x}_i, \dot{y}_i$  (respectivement  $\dot{\gamma}_i$ ). L'énergie cinétique totale du mécanisme  $i$  est obtenue par la sommation de l'énergie cinétique de translation et de rotation des trois liaisons mobiles  $\mathcal{B}_{2i}, \mathcal{B}_{3i}$  et  $\mathcal{B}_{4i}$  :

$$T_i = \frac{1}{2} (m_{2i}v_{2i}^2 + I_{2i}(\dot{\phi}_i + \dot{\gamma}_i)^2) + \frac{1}{2} (m_{3i}v_{3i}^2 + I_{3i}(\dot{\psi}_i + \dot{\gamma}_i)^2) + \frac{1}{2} (m_{4i}v_{4i}^2 + I_{4i}(\dot{\alpha}_i + \dot{\gamma}_i)^2) \quad (5.4)$$

avec  $m_{ji}$  et  $I_{ji}$  les masses et inerties de la barre  $\mathcal{B}_{ji}$  et  $v_{ji}$  la vitesse du centre de masse de la barre  $\mathcal{B}_{ji}$ . On a par définition  $x_{i+1} = x_{4i}$  et  $y_{i+1} = y_{4i}$ . On définit la distance séparant les centres de masse de la barre inférieure et supérieure du module  $i$ ,  $l_i^2 = (x_{4i} - x_i)^2 + (y_{4i} - y_i)^2$ . On peut montrer que  $l_i$  ne dépend pas de  $\gamma_i$  mais est une fonction de  $\alpha_i$  [FLW18]:  $l_i(\alpha_i) = \sqrt{L^2 - b^2 \cos(\frac{\alpha_i}{2})^2}$ . Les coordonnées dans le repère global (lié à la barre inférieure du premier module) des centres de masse des barres 2, 3 et 4 peuvent s'écrire :

$$x_{2i} = x_i - \frac{b}{2} \cos(\gamma_i) + \frac{L}{2} \cos(\gamma_i + \phi_i) \quad (5.5a)$$

$$y_{2i} = y_i - \frac{b}{2} \sin(\gamma_i) + \frac{L}{2} \sin(\gamma_i + \phi_i) \quad (5.5b)$$

$$x_{3i} = x_i + \frac{b}{2} \cos(\gamma_i) + \frac{L}{2} \cos(\gamma_i + \psi_i) \quad (5.5c)$$

$$y_{3i} = y_i + \frac{b}{2} \sin(\gamma_i) + \frac{L}{2} \sin(\gamma_i + \psi_i) \quad (5.5d)$$

$$x_{4i} = x_{i+1} = x_i - l_i(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \quad (5.5e)$$

$$y_{4i} = y_{i+1} = y_i + l_i(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \quad (5.5f)$$

On a donc par dérivation les vitesses :

$$\dot{x}_{2i} = \dot{x}_i + \frac{b}{2} \sin(\gamma_i) \dot{\gamma}_i - \frac{L}{2} \sin(\gamma_i + \phi_i) (\dot{\gamma}_i + \dot{\phi}_i) \quad (5.6a)$$

$$\dot{y}_{2i} = \dot{y}_i - \frac{b}{2} \cos(\gamma_i) \dot{\gamma}_i + \frac{L}{2} \cos(\gamma_i + \phi_i) (\dot{\gamma}_i + \dot{\phi}_i) \quad (5.6b)$$

$$\dot{x}_{3i} = \dot{x}_i - \frac{b}{2} \sin(\gamma_i) \dot{\gamma}_i - \frac{L}{2} \sin(\gamma_i + \psi_i) (\dot{\gamma}_i + \dot{\psi}_i) \quad (5.6c)$$

$$\dot{y}_{3i} = \dot{y}_i + \frac{b}{2} \cos(\gamma_i) \dot{\gamma}_i + \frac{L}{2} \cos(\gamma_i + \psi_i) (\dot{\gamma}_i + \dot{\psi}_i) \quad (5.6d)$$

$$\dot{x}_{4i} = \dot{x}_i - \frac{dl_i(\alpha_i)}{d\alpha_i} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \dot{\alpha}_i - l_i(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) (\dot{\gamma}_i + \frac{\dot{\alpha}_i}{2}) \quad (5.6e)$$

$$\dot{y}_{4i} = \dot{y}_i + \frac{dl_i(\alpha_i)}{d\alpha_i} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \dot{\alpha}_i - l_i(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) (\dot{\gamma}_i + \frac{\dot{\alpha}_i}{2}) \quad (5.6f)$$

On exprime les coordonnées dépendantes comme suit :

$$\dot{\phi}_i = S_{2i}(\alpha_i)\dot{\alpha}_i \quad (5.7a)$$

$$\dot{\psi}_i = S_{3i}(\alpha_i)\dot{\alpha}_i \quad (5.7b)$$

On peut donc réécrire les équations des vitesses :

$$\dot{x}_{2i} = \dot{x}_i + \dot{\gamma}_i \left( \frac{b}{2} \sin(\gamma_i) - \frac{L_i}{2} \sin(\gamma_i + \phi_i) \right) - \dot{\alpha}_i \left( \frac{L_i}{2} S_{2i}(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \phi_i) \right) \quad (5.8a)$$

$$\dot{y}_{2i} = \dot{y}_i + \dot{\gamma}_i \left( -\frac{b}{2} \cos(\gamma_i) + \frac{L_i}{2} \cos(\gamma_i + \phi_i) \right) + \dot{\alpha}_i \left( \frac{L_i}{2} S_{2i}(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \phi_i) \right) \quad (5.8b)$$

$$\dot{x}_{3i} = \dot{x}_i + \dot{\gamma}_i \left( -\frac{b}{2} \sin(\gamma_i) - \frac{L_i}{2} \sin(\gamma_i + \psi_i) \right) - \dot{\alpha}_i \left( \frac{L_i}{2} S_{3i}(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \psi_i) \right) \quad (5.8c)$$

$$\dot{y}_{3i} = \dot{y}_i + \dot{\gamma}_i \left( \frac{b}{2} \cos(\gamma_i) + \frac{L_i}{2} \cos(\gamma_i + \psi_i) \right) + \dot{\alpha}_i \left( \frac{L_i}{2} S_{3i}(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \psi_i) \right) \quad (5.8d)$$

$$\dot{x}_{4i} = \dot{x}_i + \dot{\gamma}_i \left( -l_i(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) + \dot{\alpha}_i \left( \frac{dl_i(\alpha_i)}{d\alpha_i} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{l_i(\alpha_i)}{2} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \quad (5.8e)$$

$$\dot{y}_{4i} = \dot{y}_i + \dot{\gamma}_i \left( -l_i(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) + \dot{\alpha}_i \left( \frac{dl_i(\alpha_i)}{d\alpha_i} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{l_i(\alpha_i)}{2} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \quad (5.8f)$$

On obtient alors l'expression des vitesses des centres de masse au carré :

$$v_{2i}^2 = \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{\gamma}_i^2 \left( \frac{b^2}{4} + \frac{L_i^2}{4} - \frac{bL_i}{2} \cos(\phi_i) \right) \quad (5.9a)$$

$$+ \dot{\alpha}_i^2 \left( \frac{L_i^2 S_{2i}^2(\alpha_i)}{4} \right) + 2\dot{\gamma}_i \dot{\alpha}_i \left( \frac{L_i}{4} S_{2i}(\alpha_i) - \frac{bL_i}{4} S_{2i}(\alpha_i) \cos(\phi_i) \right)$$

$$+ 2\dot{x}_i \dot{\gamma}_i \left( \frac{b}{2} \sin(\gamma_i) - \frac{L_i}{2} \sin(\gamma_i + \phi_i) \right) - 2\dot{x}_i \dot{\alpha}_i \left( \frac{L_i}{2} S_{2i}(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \phi_i) \right)$$

$$+ 2\dot{y}_i \dot{\gamma}_i \left( -\frac{b}{2} \cos(\gamma_i) + \frac{L_i}{2} \cos(\gamma_i + \phi_i) \right) + 2\dot{y}_i \dot{\alpha}_i \left( \frac{L_i}{2} S_{2i}(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \phi_i) \right)$$

$$v_{3i}^2 = \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{\gamma}_i^2 \left( \frac{b^2}{4} + \frac{L_i^2}{4} - \frac{bL_i}{2} \cos(\psi_i) \right) \quad (5.9b)$$

$$+ \dot{\alpha}_i^2 \left( \frac{L_i^2 S_{3i}^2(\alpha_i)}{4} \right) + 2\dot{\gamma}_i \dot{\alpha}_i \left( \frac{L_i}{4} S_{3i}(\alpha_i) - \frac{bL_i}{4} S_{3i}(\alpha_i) \cos(\psi_i) \right)$$

$$+ 2\dot{x}_i \dot{\gamma}_i \left( -\frac{b}{2} \sin(\gamma_i) - \frac{L_i}{2} \sin(\gamma_i + \psi_i) \right) - 2\dot{x}_i \dot{\alpha}_i \left( \frac{L_i}{2} S_{3i}(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \psi_i) \right)$$

$$+ 2\dot{y}_i \dot{\gamma}_i \left( \frac{b}{2} \cos(\gamma_i) + \frac{L_i}{2} \cos(\gamma_i + \psi_i) \right) + 2\dot{y}_i \dot{\alpha}_i \left( \frac{L_i}{2} S_{3i}(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \psi_i) \right)$$

$$v_{4i}^2 = \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{\gamma}_i^2 \left( l_i^2(\alpha_i) \right) + \dot{\alpha}_i^2 \left( \left( \frac{dl_i(\alpha_i)}{d\alpha_i} \right)^2 + \frac{l_i^2(\alpha_i)}{4} \right) + 2\dot{\gamma}_i \dot{\alpha}_i \left( \frac{l_i^2(\alpha_i)}{4} \right) \quad (5.9c)$$

$$+ 2\dot{x}_i \dot{\gamma}_i \left( -l_i(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) + 2\dot{x}_i \dot{\alpha}_i \left( \frac{dl_i(\alpha_i)}{d\alpha_i} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{l_i(\alpha_i)}{2} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right)$$

$$+ 2\dot{y}_i \dot{\gamma}_i \left( -l_i(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) + 2\dot{y}_i \dot{\alpha}_i \left( \frac{dl_i(\alpha_i)}{d\alpha_i} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{l_i(\alpha_i)}{2} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right)$$

La contribution des termes d'inertie s'écrit :

$$I_{2i}(\dot{\phi}_i + \dot{\gamma}_i)^2 + I_{3i}(\dot{\psi}_i + \dot{\gamma}_i)^2 + I_{4i}(\dot{\alpha}_i + \dot{\gamma}_i)^2 = \dot{\gamma}_i^2 (I_{2i} + I_{3i} + I_{4i}) \\ + \dot{\alpha}_i^2 (S_{2i}^2(\alpha_i)I_{2i} + S_{3i}^2(\alpha_i)I_{3i} + I_{4i}) + 2\dot{\gamma}_i\dot{\alpha}_i (S_{2i}(\alpha_i)I_{2i} + S_{3i}(\alpha_i)I_{3i} + I_{4i}) \quad (5.10)$$

En conclusion, l'énergie cinétique totale pour le mécanisme  $i$  peut se mettre sous la forme suivante :

$$T_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{x}_i & \dot{y}_i & \dot{\gamma}_i & \dot{\alpha}_i \end{bmatrix} \mathbf{M}_i \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\gamma}_i \\ \dot{\alpha}_i \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

avec  $\mathbf{M}_i$  :

$$T_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{x}_i & \dot{y}_i & \dot{\gamma}_i & \dot{\alpha}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{xxi} & 0 & M_{\gamma xi} & M_{\alpha xi} \\ 0 & M_{yyi} & M_{\gamma yi} & M_{\alpha yi} \\ M_{\gamma xi} & M_{\gamma yi} & M_{\gamma\gamma i} & M_{\alpha\gamma i} \\ M_{\alpha xi} & M_{\alpha yi} & M_{\alpha\gamma i} & M_{\alpha\alpha i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\gamma}_i \\ \dot{\alpha}_i \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Pour les équations précédentes, on a :

$$M_{\alpha\alpha i} = m_{2i} \left( \frac{L_i^2 S_{2i}^2(\alpha_i)}{4} \right) + m_{3i} \left( \frac{L_i^2 S_{3i}^2(\alpha_i)}{4} \right) + m_{4i} \left( \left( \frac{dl_i(\alpha_i)}{d\alpha_i} \right)^2 + \frac{l_i^2(\alpha_i)}{4} \right) \\ + S_{2i}^2(\alpha_i)I_{2i} + S_{3i}^2(\alpha_i)I_{3i} + I_{4i} \quad (5.13a)$$

$$M_{\gamma\gamma i} = m_{2i} \left( \frac{b^2}{4} + \frac{L_i^2}{4} - \frac{bL_i}{2} \cos(\phi_i) \right) + m_{3i} \left( \frac{b^2}{4} + \frac{L_i^2}{4} - \frac{bL_i}{2} \cos(\psi_i) \right) + m_{4i} \left( l_i^2(\alpha_i) \right) \\ + I_{2i} + I_{3i} + I_{4i} \quad (5.13b)$$

$$M_{\alpha\gamma i} = m_{2i} \left( \frac{L_i^2}{4} S_{2i}(\alpha_i) - \frac{bL_i}{4} S_{2i}(\alpha_i) \cos(\phi_i) \right) + m_{3i} \left( \frac{L_i^2}{4} S_{3i}(\alpha_i) - \frac{bL_i}{4} S_{3i}(\alpha_i) \cos(\psi_i) \right) \\ + m_{4i} \left( \frac{l_i^2(\alpha_i)}{4} \right) + S_{2i}(\alpha_i)I_{2i} + S_{3i}(\alpha_i)I_{3i} + I_{4i} \quad (5.13c)$$

$$M_{\alpha xi} = -m_{2i} \left( \frac{L_i}{2} S_{2i}(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \phi_i) \right) - m_{3i} \left( \frac{L_i}{2} S_{3i}(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \psi_i) \right) \\ + m_{4i} \left( \frac{dl_i(\alpha_i)}{d\alpha_i} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{l_i(\alpha_i)}{2} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \quad (5.13d)$$

$$M_{\alpha yi} = m_{2i} \left( \frac{L_i}{2} S_{2i}(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \phi_i) \right) + m_{3i} \left( \frac{L_i}{2} S_{3i}(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \psi_i) \right) \\ + m_{4i} \left( \frac{dl_i(\alpha_i)}{d\alpha_i} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{l_i(\alpha_i)}{2} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \quad (5.13e)$$

$$M_{\gamma xi} = m_{2i} \left( \frac{b}{2} \sin(\gamma_i) - \frac{L_i}{2} \sin(\gamma_i + \phi_i) \right) + m_{3i} \left( \frac{b}{2} \sin(\gamma_i) - \frac{L_i}{2} \sin(\gamma_i + \psi_i) \right) \\ + m_{4i} \left( -l_i(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \quad (5.13f)$$

$$M_{\gamma yi} = m_{2i} \left( -\frac{b}{2} \cos(\gamma_i) + \frac{L_i}{2} \cos(\gamma_i + \phi_i) \right) + m_{3i} \left( -\frac{b}{2} \cos(\gamma_i) + \frac{L_i}{2} \cos(\gamma_i + \psi_i) \right) \\ + m_{4i} \left( -l_i(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \quad (5.13g)$$

$$M_{xxi} = M_{yyi} = m_{2i} + m_{3i} + m_{4i} \quad (5.13h)$$

Cette matrice de masse pour un mécanisme  $i$  va maintenant être prise en compte pour le calcul de la matrice d'inertie du manipulateur complet.

### Matrice d'inertie d'un assemblage de $N$ mécanismes en série

Pour un empilement de  $N$  mécanismes, on rappelle :

$$x_{i+1} = x_i - l_i(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \quad (5.14)$$

$$y_{i+1} = y_i + l_i(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \quad (5.15)$$

$$\gamma_{i+1} = \sum_{k=1}^i \alpha_k \quad (5.16)$$

On peut donc évaluer une matrice  $\mathbf{R}$  reliant les coordonnées dépendantes  $[\dot{x}_i \dot{y}_i \dot{\gamma}_i \dot{\alpha}_i]^\top$  aux coordonnées généralisées  $[\alpha_1 \dots \alpha_i \dots \alpha_N]^\top$ .

$$[\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{\gamma}_i, \dot{\alpha}_i]^\top = \mathbf{R}_i [\dot{\alpha}_1, \dots, \dot{\alpha}_N]^\top \quad (5.17)$$

Les vitesses de translation et de rotation sont calculées par dérivation des équations (5.1), (5.5e) et (5.5f) par rapport au temps :

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i - l_i \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \dot{\gamma}_i + \left( -\frac{dl_i}{d\alpha_i} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{l_i}{2} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \dot{\alpha}_i \quad (5.18a)$$

$$\dot{y}_{i+1} = \dot{y}_i + l_i \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \dot{\gamma}_i + \left( \frac{dl_i}{d\alpha_i} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{l_i}{2} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \dot{\alpha}_i \quad (5.18b)$$

$$\dot{\gamma}_{i+1} = \dot{\gamma}_i + \dot{\alpha}_i \quad (5.18c)$$

Sachant que  $\dot{x}_1 = \dot{y}_1 = \dot{\gamma}_1 = 0$ , la première matrice de transformation  $\mathbf{R}_1$  s'écrit :

$$\mathbf{R}_1 = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & \\ 0 & \mathbf{0}_{4 \times (N-1)} \\ 0 & \\ 1 & \end{array} \right] \quad (5.19)$$

La matrice  $\mathbf{R}_i$  peut-être calculée de manière itérative. En utilisant l'équation (5.1), on réécrit l'équation (5.18) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{i+1} \\ \dot{y}_{i+1} \\ \dot{\gamma}_{i+1} \\ \dot{\alpha}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\gamma}_i \\ \dot{\alpha}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{\gamma i} \\ y_{\gamma i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (\dot{\alpha}_1 + \dots + \dot{\alpha}_{i-1}) + \begin{bmatrix} x_{\alpha i} \\ y_{\alpha i} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \dot{\alpha}_i + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\alpha}_{i+1} \quad (5.20)$$

avec  $x_{\gamma i} = -l_i \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2})$ ,  $x_{\alpha i} = \left( -\frac{dl_i}{d\alpha_i} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{l_i}{2} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right)$ ,  $y_{\gamma i} = -l_i \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2})$ ,  $y_{\alpha i} = \left( \frac{dl_i}{d\alpha_i} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{l_i}{2} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right)$ .

On a donc :

$$\mathbf{R}_{i+1} = \mathbf{R}_i + \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} x_{\gamma i} \\ y_{\gamma i} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \times \mathbf{1}_{1 \times (i-1)} \left| \begin{array}{c} x_{\alpha i} \\ y_{\alpha i} \\ 1 \\ -1 \end{array} \right| \left. \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right| \mathbf{0}_{4 \times (N-i)} \end{array} \right] \quad (5.21)$$

### Exemple : Matrice d'inertie d'un mécanisme unique

Dans ce cas, il n'y a qu'une coordonnée généralisée  $\alpha_1$ , et on a l'orientation du repère de base  $\gamma_1 = 0$  ainsi que sa vitesse  $\dot{\gamma}_1 = \dot{x}_1 = \dot{y}_1 = 0$ .

$$T_1 = \frac{1}{2} \left[ \dot{\alpha}_1 \right] \left[ M_{\alpha\alpha 1}(\alpha_1) \right] \left[ \dot{\alpha}_1 \right] \quad (5.22)$$

avec

$$M_{\alpha\alpha 1} = m_{21} \left( \frac{L_1^2 S_{21}^2(\alpha_1)}{4} \right) + m_{31} \left( \frac{L_1^2 S_{31}^2(\alpha_1)}{4} \right) + m_{41} \left( \left( \frac{dl_1(\alpha_1)}{d\alpha_1} \right)^2 + \frac{l_1^2(\alpha_1)}{4} \right) + S_{21}^2(\alpha_1) I_{21} + S_{31}^2(\alpha_1) I_{31} + I_{41} \quad (5.23)$$

### Exemple : Matrice d'inertie pour un manipulateur à deux mécanismes en série

L'énergie cinétique totale est la somme des énergies cinétiques pour les deux mécanismes. Les coordonnées généralisées qui décrivent les mouvements sont  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . Pour le premier mécanisme on a  $\dot{\gamma}_1 = \dot{x}_1 = \dot{y}_1 = 0$ . Donc on a l'énergie cinétique :

$$T_1 = \frac{1}{2} \left[ \dot{\alpha}_1 \quad \dot{\alpha}_2 \right] \left[ \begin{array}{cc} M_{111}(\alpha_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{array} \right] \quad (5.24)$$

avec  $M_{111} = M_{\alpha\alpha 1}$  défini dans l'équation (5.23).

Pour le second mécanisme, on utilise la relation linéaire reliant les coordonnées locales du second mécanisme ( $\dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{\gamma}_2, \dot{\alpha}_2$ ) aux coordonnées généralisées ( $\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2$ ). On a donc :

$$\left[ \begin{array}{c} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{\gamma}_2 \\ \dot{\alpha}_2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc} -\frac{dl_i(\alpha_i)}{d\alpha_i} \sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) - \frac{1}{2}l_1(\alpha_1) \cos\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) & 0 \\ \frac{dl_i(\alpha_i)}{d\alpha_i} \cos\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) - \frac{1}{2}l_1(\alpha_1) \sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{array} \right] \quad (5.25)$$

On appelle cette matrice  $\mathbf{R}_2$ .

L'énergie cinétique du second module s'écrit :

$$T_2 = \frac{1}{2} \left[ \dot{\alpha}_1 \quad \dot{\alpha}_2 \right] \left[ \begin{array}{cc} M_{112} & M_{122} \\ M_{122} & M_{222} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{array} \right] \quad (5.26)$$

avec :

$$\left[ \begin{array}{cc} M_{112} & M_{122} \\ M_{122} & M_{222} \end{array} \right] = \mathbf{R}_2^\top \left[ \begin{array}{cccc} M_{xx2} & 0 & M_{\gamma x2} & M_{\alpha x2} \\ 0 & M_{yy2} & M_{\gamma y2} & M_{\alpha y2} \\ M_{\gamma x2} & M_{\gamma y2} & M_{\gamma\gamma 2} & M_{\alpha\gamma 2} \\ M_{\alpha x2} & M_{\alpha y2} & M_{\alpha\gamma 2} & M_{\alpha\alpha 2} \end{array} \right] \mathbf{R}_2 \quad (5.27)$$

On a donc :

$$M_{112} = l_1(\alpha_1)M_{xx2} + 2(-l_1(\alpha_1)\cos(\alpha_1)M_{\gamma x2} + l_1(\alpha_1)\sin(\alpha_1)M_{\gamma y2}) + M_{\gamma\gamma2} \quad (5.28a)$$

$$M_{122} = -l_1(\alpha_1)\cos(\alpha_1)M_{\alpha x2} + l_1(\alpha_1)\sin(\alpha_1)M_{\alpha y2} + M_{\gamma\gamma2} \quad (5.28b)$$

$$M_{222} = M_{\alpha\alpha2} \quad (5.28c)$$

Et la matrice d'inertie totale  $\mathbf{M}$  :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

avec :

$$M_{11} = M_{\alpha\alpha1} + l_1(\alpha_1)M_{xx2} + M_{\gamma\gamma2} \quad (5.30a)$$

$$+ 2(-l_1(\alpha_1)\cos(\alpha_1)M_{\gamma x2} + l_1(\alpha_1)\sin(\alpha_1)M_{\gamma y2})$$

$$M_{12} = -l_1(\alpha_1)\cos(\alpha_1)M_{\alpha x2} + l_1(\alpha_1)\sin(\alpha_1)M_{\alpha y2} + M_{\gamma\gamma2} \quad (5.30b)$$

$$M_{22} = M_{\alpha\alpha2} \quad (5.30c)$$

### Inertie des actionneurs

L'inertie des actionneurs doit être prise en compte, d'autant plus que la masse et l'inertie des systèmes de tenségrité est souvent faible. Le manipulateur est actionné par  $M$  câbles, chaque câble  $k$  étant relié à un moteur  $k$  grâce à un tambour de rayon  $r_{d_k}$ . Ces tambours sont fixés à un axe relié au moteur par un réducteur de rapport de transmission  $R_k$ . La position des moteurs est notée  $\mathbf{q}$ , qui est un vecteur de taille  $M$ . Les équations du mouvement étant décrites avec le vecteur  $\alpha$ , on doit exprimer les énergies cinétiques des moteurs par rapport aux coordonnées généralisées. On exprime l'énergie cinétique du moteur  $k$  avec  $k \in [1, M]$  :

$$E_{mot_k} = \frac{1}{2}I_{mot_k}\dot{q}_k^2 \quad (5.31)$$

Avec  $q_k$  la position angulaire du moteur  $k$ . Chaque moteur correspond à un câble, il y a donc  $M$  câbles, chaque câble étant associé à un seul moteur. Chaque câble est relié à une extrémité de la barre supérieure d'un mécanisme en X. Si le câble est relié à la barre supérieure  $\mathcal{B}_{4_i}$  du mécanisme  $i$ , celui-ci passe par tous les mécanismes jusqu'à la base, donc du mécanisme 1 à  $i$ . Pour chaque câble et chaque mécanisme, il faut déterminer si le câble passe en "side-routed" ou en "strut-routed", et dans le cas du side-routed, si le câble passe sur le coté gauche ou droit du mécanisme. En premier lieu, considérant le câble infiniment rigide, on peut écrire la vitesse de celui-ci en fonction de la vitesse du moteur, du rayon de l'enrouleur ainsi que du rapport de transmission :

$$E_{mot_k} = \frac{1}{2}I_{mot_k}\frac{R_k^2}{r_{d_k}^2}v_{c_k}^2 \quad (5.32)$$

La vitesse du câble est liée aux vecteurs des coordonnées généralisées  $\alpha$  et sa dérivée  $\dot{\alpha}$  par l'expression de la longueur active du câble  $l_k$  :

$$v_{c_k} = \dot{l}_k = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial l_k}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \right) \quad (5.33)$$

La longueur active du câble correspond à la longueur de câble dépendant de  $\alpha$ . L'expression de la longueur active dépend de la stratégie d'actionnement choisie et de la modélisation de câble choisie (voir annexe .B.1). Pour une modélisation simple (pas de modélisation du comportement des poulies, pas d'influence des câbles en "strut-routed", pas d'élongation des câbles...), on peut écrire que si le câble passe en "side-routed" le long d'un mécanisme  $i$ , alors  $\frac{\partial l}{\partial \alpha_i} \neq 0$  et on utilise l'équation (3.7) (en fonction du côté du mécanisme, gauche ou droite, où passe le câble). A l'inverse, si le câble ne passe pas par un mécanisme  $i$  ou  $y$  passe en "strut-routed", on a  $\frac{\partial l}{\partial \alpha_i} = 0$ , le câble n'a pas d'influence sur ce mécanisme.

On peut donc écrire l'énergie cinétique d'un moteur par rapport aux coordonnées généralisées  $\alpha$  :

$$E_{mot_k} = \frac{1}{2} I_{mot_k} \frac{R_k^2}{r_{d_k}^2} \left[ \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial l_k}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \right) \right]^2 \quad (5.34)$$

De la même manière, on appelle  $I_d$  l'inertie de l'enrouleur et de l'axe autour de son axe de rotation (en sortie de moteur). On peut donc écrire :

$$E_{drum_k} = \frac{1}{2} I_{d_k} \frac{1}{r_{d_k}^2} \left[ \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial l}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \right) \right]^2 \quad (5.35)$$

Les inerties des moteurs et enrouleurs sont donc prises en compte dans la modélisation et peuvent être ajoutées à la matrice  $\mathbf{M}$ . Il est important de noter que contrairement à des robots sériels classiques, les termes inertiels des moteurs dépendent de la position du mécanisme.

## Matrice de Coriolis $\mathbf{C}$

Les calculs étant très lourds, la matrice de Coriolis n'est pas calculée ici. Voir annexes .C.1.

### 5.2.5 Énergie potentielle d'un empilement de $N$ mécanismes

L'énergie potentielle d'un mécanisme est composée de l'énergie potentielle de pesanteur et de l'énergie potentielle élastique des ressorts. On peut écrire l'énergie potentielle d'un mécanisme comme suit :

$$V_i = V_{sp_i} + V_{g_i} \quad (5.36a)$$

$$V_i = \frac{1}{2} k_{l_i} (l_{l_i} - l_{l_{0i}})^2 + \frac{1}{2} k_{r_i} (l_{r_i} - l_{r_{0i}})^2 + g(m_{2i}y_{2i} + m_{3i}y_{3i} + m_{4i}y_{4i}) \quad (5.36b)$$

avec  $g$  l'accélération de la gravité, portée par l'axe  $-\vec{y}$ . L'énergie potentielle totale d'un manipulateur à  $N$  mécanismes empilés en série s'écrit :

$$V = \sum_{i=1}^N V_i \quad (5.37)$$

On peut écrire le vecteur des potentiels  $\mathbf{G}$  :

$$\mathbf{G}(\alpha) = \left[ \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} \quad \cdots \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_N} \right]^\top \quad (5.38)$$

Sachant que la longueur des ressorts dépend uniquement de la configuration du mécanisme  $i$  (donc de  $\alpha_i$ ), chaque membre de  $\mathbf{G}$  peut s'écrire :

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial V_{sp_i}}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \sum_{k=i}^N V_{gk} \quad (5.39)$$

avec :

$$\frac{\partial V_{sp_i}}{\partial \alpha_i} = k_{li} l_i' (l_i - l_{l0i}) + k_{ri} l_{ri}' (l_{ri} - l_{r0i}) \quad (5.40a)$$

$$\frac{\partial V_{gk}}{\partial \alpha_i} = g(m_{2k} \frac{\partial y_{2k}}{\partial \alpha_i} + m_{3k} \frac{\partial y_{3k}}{\partial \alpha_i} + m_{4k} \frac{\partial y_{4k}}{\partial \alpha_i}) \quad (5.40b)$$

Pour calculer  $\frac{\partial y_k}{\partial \alpha_i}$ , il faut considérer trois différents cas, détaillés ci-dessous :

$$\text{si } i < k \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial y_{2k}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial y_{4k-1}}{\partial \alpha_i} - \frac{b}{2} \cos(\gamma_k) + \frac{L_k}{2} \cos(\gamma_k + \phi_k) \\ \frac{\partial y_{3k}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial y_{4k-1}}{\partial \alpha_i} + \frac{b}{2} \cos(\gamma_k) + \frac{L_k}{2} \cos(\gamma_k + \phi_k) \\ \frac{\partial y_{4k}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial y_{4k-1}}{\partial \alpha_i} - l_k \sin(\gamma_k + \frac{\alpha_k}{2}) \end{cases} \quad (5.41a)$$

$$\text{si } i = k \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial y_{2k}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial y_{4k-1}}{\partial \alpha_i} + \phi_k' \frac{L_k}{2} \cos(\gamma_k + \phi_k) \\ \frac{\partial y_{3k}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial y_{4k-1}}{\partial \alpha_i} + \psi_k' \frac{L_k}{2} \cos(\gamma_k + \psi_k) \\ \frac{\partial y_{4k}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial y_{4k-1}}{\partial \alpha_i} + l_k' \cos(\gamma_k + \frac{\alpha_k}{2}) - \frac{1}{2} l_k \sin(\gamma_k + \frac{\alpha_k}{2}) \end{cases} \quad (5.41b)$$

$$\text{si } i > k \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial y_{2k}}{\partial \alpha_i} = 0 \\ \frac{\partial y_{3k}}{\partial \alpha_i} = 0 \\ \frac{\partial y_{4k}}{\partial \alpha_i} = 0 \end{cases} \quad (5.41c)$$

Si  $k = 1$ , on a  $\frac{\partial y_{4k-1}}{\partial \alpha_i} = 0$ .

## 5.2.6 Forces généralisées

$\mathbf{Q}$  correspond à la dérivée des travaux virtuels générés par les efforts d'actionnement par rapport à  $\alpha$ . Les travaux virtuels appliqués par les forces d'actionnement correspondent au produit de l'intensité de l'effort d'actionnement (tension du câble) par le déplacement du câble considéré :

$$\delta W_v = \sum_{i=1}^N F_{li} \delta l_i - F_{ri} \delta l_{ri} \quad (5.42)$$



Donc :

$$\mathbf{Q} = \frac{dW_v}{d\boldsymbol{\alpha}} = \left[ \frac{\partial W_v}{\partial \alpha_1} \dots \frac{\partial W_v}{\partial \alpha_i} \dots \frac{\partial W_v}{\partial \alpha_N} \right]^\top \quad (5.43)$$

On voit que l'expression des forces généralisées dépend fortement de la stratégie d'actionnement. Le manipulateur étant composé de mécanismes antagonistes, on décompose  $\mathbf{Q}$  en une somme des contributions des efforts de gauche et de droite :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Z}_l \mathbf{f}_l + \mathbf{Z}_r \mathbf{f}_r \quad (5.44)$$

Avec  $\mathbf{f}_l$  et  $\mathbf{f}_r$  vecteurs des efforts d'actionnement du côté gauche et droite, respectivement, et  $\mathbf{Z}_l$ ,  $\mathbf{Z}_r$  sont liés aux longueurs des câbles. Ces matrices dépendent de la stratégie d'actionnement et de la modélisation considérée. Si l'on considère un modèle simple de câbles parallèles aux ressorts, sans poulies, et infiniment rigides, les matrices sont diagonales et leur terme  $i$  vaut respectivement  $-\frac{dl_{li}}{d\alpha_i}$  et  $-\frac{dl_{ri}}{d\alpha_i}$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Si l'on considère une modélisation plus fine (influence du strut-routed, des poulies,...), les matrices ne sont plus diagonales et plus complexes à exprimer (voir annexe .B.1).

Les vecteurs des efforts d'actionnement de gauche et de droite s'écrivent respectivement  $\mathbf{f}_l = [f_{l1}, \dots, f_{lN}]^\top$  et  $\mathbf{f}_r = [f_{r1}, \dots, f_{rN}]^\top$ . Dans le cas d'un modèle simple "strut-routed" et "side-routed", sans considérer l'influence des poulies, l'expression de ces vecteurs est la suivante. Si un câble passe en "side-routed" le long du mécanisme  $i$ , à gauche ou à droite, alors la  $i^{\text{eme}}$  valeur de ce vecteur est non-nulle. Si un câble ne passe pas ou passe en strut-routed le long d'un mécanisme, alors la valeur de l'effort correspondant est nulle. Si un même câble passe le long de plusieurs mécanismes en "side-routed", alors le même effort est appliqué sur tous ces mécanismes.

### 5.2.7 Matrice de raideur

L'équation d'équilibre statique correspond aux termes non-dynamiques de l'équation du mouvement :

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}) \quad (5.45)$$

La matrice de raideur articulaire  $\mathbf{K}_\alpha$  (aussi appelée matrice Hessienne) de taille  $N \times N$  est définie comme la dérivée du modèle statique (5.45) par le vecteur des coordonnées généralisées :

$$\mathbf{K}_\alpha(i, j) = \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial \mathbf{Q}_i}{\partial \alpha_j} \quad (5.46)$$

En réécrivant  $\mathbf{G}$  à partir de l'énergie potentielle du mécanisme et  $\mathbf{Q}$  à partir des travaux virtuels, on a :

$$\mathbf{K}_\alpha(i, j) = \frac{\partial^2 V_s}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} + \frac{\partial^2 V_g}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} - \frac{\partial^2 l_{li}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} f_{li} + \frac{\partial^2 l_{ri}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} f_{ri} \quad (5.47)$$

En appliquant le théorème de Cauchy-Schwarz, on a ( $\frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha_j \partial \alpha_i}$ ), donc  $K_\alpha(i, j) = K_\alpha(j, i)$ , la matrice de raideur est symétrique. On peut maintenant distinguer deux cas, quand  $i = j$  et quand  $i \neq j$ .

**Calcul des termes diagonaux** ( $i = j$ )

Pour les termes diagonaux, en décomposant  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{Q}$  on a :

$$\mathbf{K}_\alpha(i, i) = \frac{\partial^2 V_s}{\partial \alpha_i^2} + \frac{\partial^2 V_g}{\partial \alpha_i^2} - \frac{\partial^2 l_{li}}{\partial \alpha_i^2} F_{li} + \frac{\partial^2 l_{ri}}{\partial \alpha_i^2} F_{ri} \quad (5.48)$$

avec :

$$\frac{\partial^2 V_s}{\partial \alpha_i^2} = k_{li}(l_{li}''(l_{li} - l_{0i}) + l_{li}'^2) + k_{ri}(l_{ri}''(l_{ri} - l_{r0i}) + l_{ri}'^2) \quad (5.49a)$$

$$\frac{\partial^2 V_g}{\partial \alpha_i^2} = g \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i^2} \left( \sum_{k=i}^N (m_{2k} y_{2k} + m_{3k} y_{3k} + m_{4k} y_{4k}) \right) \quad (5.49b)$$

Pour les calculs des dérivées secondes de  $y_{2k}$ ,  $y_{3k}$ ,  $y_{4k}$ , on applique les mêmes règles qu'aux équations (5.41), ce qui fait apparaître les dérivées secondes de  $\phi_k$ ,  $\phi_k$  et  $l_k$ .

**Calcul des termes non diagonaux** ( $i \neq j$ )

Pour les calculs suivants, on rappelle que  $i$  et  $j$  sont interchangeables. Pour les termes non-diagonaux, la longueur des ressorts ne dépendant que d'un seul angle, on peut écrire :

$$\frac{\partial^2 V_s}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = 0 \quad (5.50a)$$

$$\frac{\partial^2 l_{li}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = 0 \quad (5.50b)$$

$$\frac{\partial^2 l_{ri}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = 0 \quad (5.50c)$$

Donc :

$$\mathbf{K}_\alpha(i, j) = \frac{\partial^2 V_g}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = g \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \left( \sum_{k=\min(i,j)}^N (m_{2k} y_{2k} + m_{3k} y_{3k} + m_{4k} y_{4k}) \right) \quad (5.51)$$

Pour le calcul de  $\frac{\partial^2 y_k}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}$ , on distingue plusieurs cas différents :

$$\begin{cases} i \leq j < k \text{ ou } j \leq i < k \\ i < j = k \text{ ou } j < i = k \\ i \geq j > k \text{ ou } j \geq i > k \text{ ou } j > k > i \text{ ou } i > k > j \end{cases} \quad (5.52)$$

Le cas où  $i = j = k$  correspond aux termes diagonaux. Le calcul des dérivées secondes de la hauteur des centres de masse n'est pas détaillée. On peut néanmoins remarquer que les termes non-diagonaux de la matrice de raideur ne dépendent que de l'énergie potentielle de gravité. Si on néglige les effets de la pesanteur, la position d'un mécanisme par rapport à un autre n'a pas d'influence sur le comportement statique. Les termes diagonaux, quant à eux, dépendent à la fois de la gravité et de la raideur des ressorts, ainsi que des efforts dans les câbles. On peut montrer qu'augmenter la raideur des ressorts augmente la raideur articulaire globale du mécanisme, aussi appelé Hessien.

## 5.3 Conception d'un prototype à 10 degrés de liberté

### 5.3.1 Présentation du manipulateur

#### Nombre de DDL

Un des objectifs du projet AVINECK est la conception et la fabrication d'un manipulateur robotique bio-inspiré. Les précédents développements ont permis de poser des principes et d'obtenir des résultats importants sur des manipulateurs composés de mécanisme de tensegrité en X en série. L'étude cinéto-statique d'un manipulateur à deux mécanismes en série s'est avérée assez complexe. La conception d'un manipulateur bio-inspiré d'un cou d'oiseau nécessite d'utiliser plus de mécanismes empilés en série afin d'obtenir un nombre de degrés de liberté élevé, permettant d'avoir une grande mobilité dans l'espace de travail et d'effectuer des tâches diverses. Nous avons décidé d'étudier la conception et la fabrication d'un manipulateur plan à 10 DDL, donc composé de 10 mécanismes en X empilés en série. Ce nombre correspond au nombre de vertèbres minimal chez les oiseaux. L'effecteur se déplaçant uniquement dans un plan  $(x,y)$  et ayant une orientation donnée  $\gamma_E$ , le manipulateur est donc hyper-redondant de degré 7, ce qui n'a pas été rencontré jusqu'ici.

#### Dimensions du manipulateur et position au repos

Afin de faciliter la fabrication d'un tel manipulateur, nous avons décidé de conserver les dimensions des mécanismes utilisés auparavant, soit des mécanismes en X composés de barres transversales de longueur  $L = 0.1 m$  et de barre inférieure et supérieure de longueur  $b = 0.05 m$ , fabriquée en aluminium. Pour ce manipulateur, une position d'équilibre au repos ou chaque mécanisme  $i$  a sa propre position d'équilibre  $\alpha_i = 0^\circ$  résulterait en un manipulateur d'1m de haut, et très élancé. On peut montrer dans ce cas que l'influence de la gravité serait très importante sur les mécanismes proches de la base et que des ressorts particulièrement raides seraient nécessaires afin d'assurer une stabilité minimale du manipulateur. C'est pourquoi nous avons fait le choix pour ce manipulateur de le concevoir à partir d'une position au repos bio-inspirée. En effet, les cous d'oiseaux adoptant une posture de repos en forme de S, nous avons dimensionné les ressorts du manipulateur afin de suivre au plus près une telle posture d'une espèce spécifique (un pic noir) (voir figure 5.2). Cette section présentera une méthode de sélection de ressorts à partir d'un ensemble de raideurs définies, afin de s'approcher au plus proche de la posture au repos choisie.

#### Stratégie d'actionnement

Pour un manipulateur à 10 DDL et à partir des différentes stratégies d'actionnement présentées dans le chapitre 4, un très grand nombre de stratégies d'actionnement sont possibles. Un actionnement antagoniste complet pour un tel manipulateur nécessiterait l'utilisation de 20 moteurs et de 20 câbles passant le long du manipulateur et étant guidés de la base au dernier mécanisme. Une telle stratégie d'actionnement permettrait beaucoup de flexibilité pour le manipulateur mais rendrait sa conception très complexe (routage de 20 câbles). Nous avons donc fait le choix de n'utiliser que quatre câbles, qui peuvent

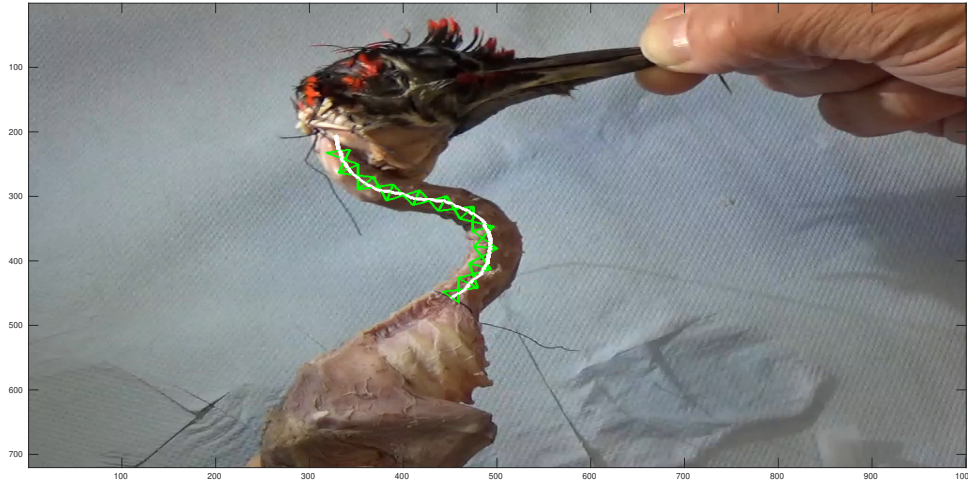


FIGURE 5.2 – Résultat du traitement d'image donnant la position au repos bio-inspirée du manipulateur.

donc permettre de contrôler les 3 degrés de liberté de l'effecteur dans l'espace de travail. Le quatrième câble permet de contrôler un paramètre de raideur du manipulateur. Pour une stratégie d'actionnement à 4 câbles, de nombreuses stratégies sont possibles, et nous étudierons certaines d'entre elles, notamment une stratégie bio-inspirée.

### 5.3.2 Détermination de la posture de repos

#### Définition du problème

Ce problème s'apparente à un problème de form-finding. Une posture de repos précise du manipulateur est souhaitée. Elle est en forme de S et bio-inspirée. Pour cela, des travaux ont été menés afin de déterminer la posture au repos du manipulateur à partir d'un cadavre de pic noir [Fas+19a]. Un algorithme de traitement d'image détecte sur l'image le cou de l'oiseau et en extrait la ligne médiane. Un second algorithme géométrique vient ensuite déterminer la meilleure posture au repos d'un manipulateur permettant d'approcher au mieux la ligne médiane, en commençant par la base du cou. Le résultat de cette méthode est présenté figure 5.2. On peut notamment remarquer que dans ce cas, l'orientation initiale du premier module, appelé  $\gamma_0$ , est non-nulle et vaut  $\gamma_0 = -45^\circ$ . Le vecteur des positions angulaires des mécanismes au repos est appelé  $\alpha_0$  et vaut :

$$\alpha_0 = [7.61^\circ, 23.65^\circ, 19.07^\circ, 36.26^\circ, 21.36^\circ, 13.34^\circ, 0.734^\circ, -32.50^\circ, -24.48^\circ, -14.16^\circ]^\top \quad (5.53)$$

On cherche maintenant à déterminer les raideurs de ressorts permettant d'obtenir la posture au repos indiquée. Cette posture doit être une configuration d'équilibre stable, qui doit donc satisfaire plusieurs conditions : le système d'équations d'équilibre statique au

repos (système (5.45)) doit être vérifié, et la matrice de raideur du manipulateur doit être définie positive. Plusieurs problèmes se posent à nous pour la résolution de ces contraintes. En premier lieu, un algorithme de résolution minimisant  $\mathbf{G}$  nous donnerait une posture au repos très proche de  $\boldsymbol{\alpha}_0$  mais des valeurs de raideurs non-arrondies, qui sont difficiles à obtenir. Nous avons fait le choix de sélectionner un panel de ressorts permettant d'obtenir 17 raideurs possibles, allant de  $100\text{ N/m}$  jusqu'à  $2000\text{ N/m}$ , en jouant sur la potentielle mise en parallèle de deux ressorts, sur le coté gauche ou droit d'un mécanisme. Ainsi, les raideurs minimisant  $\mathbf{G}$  sont choisies parmi ce panel, ce qui entraîne une potentielle erreur de la position au repos  $\boldsymbol{\alpha}_0$ . Nous considérons a priori que cette erreur est faible et n'aura pas d'impact sur la position bio-inspirée du manipulateur. Le panel de ressorts est noté  $\mathbf{k}_{pos}$  et vaut :

$$\mathbf{k}_{pos} = 1000[0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.75, 0.8, 0.85, 1, 1.05, 1.1, 1.25, 1.3, 1.5, 1.75, 2]^\top \quad (5.54)$$

La seconde difficulté vient de la résolution de  $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ . En effet, en observant l'expression de  $\mathbf{G}$ , on peut réécrire le  $i^{eme}$  du vecteur comme suit :

$$G_i = k_{li}g_{li} + k_{ri}g_{ri} + g_{gi} \quad (5.55)$$

où  $g_{li}$  et  $g_{ri}$  ne dépendent que de l'orientation  $i$  du mécanisme  $i$  (soit de  $\alpha_i$ ) et  $g_{gi}$  dépend des orientations de tous les mécanismes (soit de  $\boldsymbol{\alpha}$ ). Ainsi, on ne peut résoudre le système  $\mathbf{G} = \mathbf{0}$  de manière itérative en commençant par le mécanisme de la base ou de la tête du manipulateur. On peut néanmoins remarquer que les trois coefficients  $g_{li}$ ,  $g_{ri}$  et  $g_{gi}$  ne dépendent pas des raideurs du mécanisme. On choisit donc d'évaluer ces valeurs de coefficient pour  $i$  allant de 1 à 10, avec les valeurs du prototype connues (dimensions, masse, position au repos).

### Algorithme de sélection des raideurs de ressorts

Le diagramme de l'algorithme de sélection des ressorts est présenté en figure 5.3. Les différentes étapes sont explicitées :

- La première étape consiste en une phase d'initialisation. Pour  $i \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$ , les coefficients  $g_{li}$ ,  $g_{ri}$  et  $g_{gi}$  sont calculés à partir des données connues du prototype. On initialise  $k_{li}min$  et  $k_{ri}min$  à 0, ces valeurs sont exploitées et actualisées plus tard dans l'algorithme.
- Ensuite, toujours pour chaque valeur de  $i$ , on cherche le couple de raideurs  $(k_{li}, k_{ri})$  minimisant  $|G_i|$ . Cette recherche est faite de manière systématique, et on peut dénombrer 289 couples de raideurs différents possibles. Une fois tous les couples de raideurs minimisant chaque coefficient du vecteur  $\mathbf{G}$  obtenus, on sauvegarde ces valeurs de raideurs.
- On évalue ensuite la matrice de raideur articulaire au repos appelée  $\mathbf{K}_\alpha$ , ainsi que ses valeurs propres  $\mathbf{e}$ . Pour que le manipulateur soit stable dans sa configuration d'équilibre au repos, la matrice  $\mathbf{K}_\alpha$  doit être définie positive, ou encore toutes ses

valeurs propres doivent être positives. On regarde donc les 10 valeurs propres de  $\mathbf{K}_\alpha$  : si celles ci sont toutes positives, on conserve les valeurs de raideurs trouvées et on passe à l'étape suivante. Si au moins une valeur est négative, on regarde quelle est la plus petite valeur propre de la matrice  $\mathbf{K}_\alpha$ , appelée  $e_j$ . Les termes diagonaux de la matrice de raideur  $\mathbf{K}_\alpha$  étant prépondérants et faisant intervenir les raideurs des ressorts, on peut montrer que la valeur propre  $e_j$  est directement liée aux raideurs de ressorts  $k_{li}$  et  $k_{ri}$ .

- Pour le mécanisme  $j$ , on impose donc une nouvelle limite inférieure aux raideurs de ressorts, soit  $k_{li}min = k_{li}$  et  $k_{ri}min = k_{ri}$ .
- On réévalue  $|G_i|$  pour chaque  $i$ , en prenant en compte cette fois-ci les nouvelles bornes inférieures imposées au ressort. Les nouveaux ressorts obtenus pour le mécanisme  $j$  qui avait sa raideur articulaire la plus faible doivent avoir une raideur supérieure à celle obtenue  $k_{li}min$  et  $k_{ri}min$  redéfinis précédemment.
- Cette itération est répétée jusqu'à ce que toutes les valeurs propres  $e$  soient positives (ou supérieures à une valeur donnée), ce qui signifie que le système est stable dans sa configuration d'équilibre au repos.
- Une fois les valeurs de raideurs déterminées, on détermine la nouvelle posture au repos  $\alpha_0$ , qui est différente de la posture initiale recherchée.

## Résultats

Les raideurs obtenues à l'issue du nombre d'itérations nécessaires de l'algorithme sont présentés en figure 5.4. Dans ce cas, on a choisi d'imposer une raideur articulaire par mécanisme minimale de  $1 Nm/rad$ . Cette valeur a été choisie afin d'avoir un système suffisamment stable en dehors de sa posture de repos, et de limiter l'influence de la gravité. Les résultats de WFW présentés par la suite ont permis de valider ce choix. On peut remarquer que ces raideurs varient beaucoup d'un mécanisme à un autre et peuvent être assez élevées. Cela s'explique par la combinaison de la posture au repos souhaitée du mécanisme  $i$  et par l'influence du poids des mécanismes supérieurs, qui peut être critique dans certains cas. La raideur du ressort de gauche est plus importante pour les 6 premiers mécanismes, et ensuite la raideur de droite devient plus grande. Cela peut s'expliquer par la forme au repos du manipulateur, les 6 premiers mécanismes étant au repos penchés vers la gauche, et les suivants vers la droite. Cela montre aussi qu'une fois la raideur articulaire minimale assez grande, c'est bien la posture au repos du mécanisme qui est prépondérante devant l'influence de la gravité. Dans un cas plus simple (cou horizontal par exemple), on pourrait s'attendre à ce que la raideur soit plus élevée d'un côté que de l'autre, et que ces raideurs soient les plus fortes au niveau de la base du cou, celles ci supportant le poids de tous les mécanismes suivants. La figure 5.5 présente la configuration d'équilibre au repos obtenue après obtention des raideurs de ressorts nécessaires, contre la configuration d'équilibre au repos initialement désirée. On peut voir que la différence entre les deux configurations est très faible, notre panel de 17 raideurs permettant de

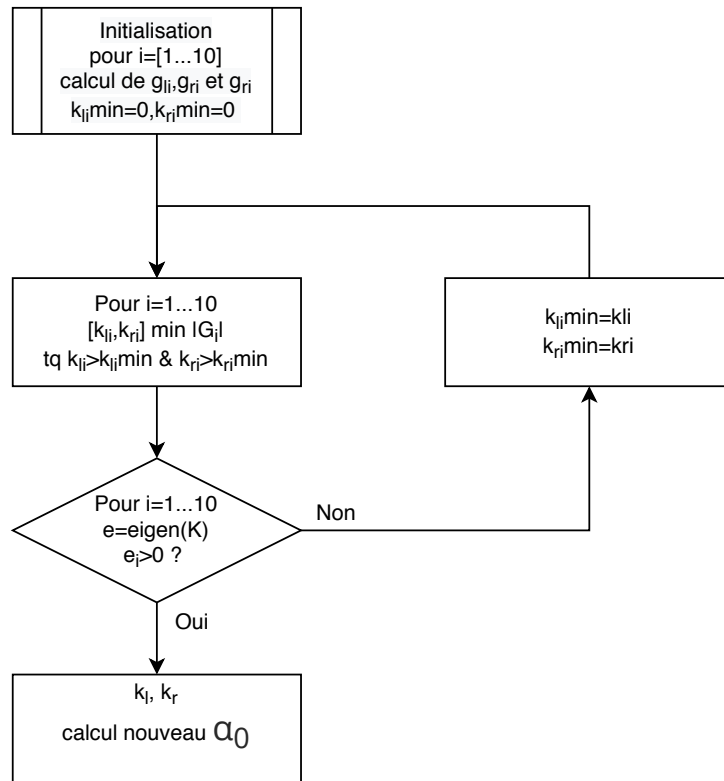


FIGURE 5.3 – Diagramme présentant l’algorithme de sélection des raideurs de ressorts

générer 289 combinaisons différentes de raideurs. On a en effet une erreur moyenne sur l’ensemble des mécanismes qui vaut  $0.38^\circ$ , ce qui est très satisfaisant et valide a posteriori notre méthode basée sur les coefficients  $g_{li}$ ,  $g_{ri}$  et  $g_{gi}$  fixes.

### 5.3.3 Comparaison de différentes stratégies d’actionnement

#### Stratégie d’actionnement bio-inspirée

La musculature des cous d’oiseaux est complexe et il serait présomptueux de chercher à la reproduire fidèlement. Néanmoins, les travaux de dissection et de classification des biologistes ont montrés des tendances qui se retrouvent chez beaucoup d’espèces. En effet, le cou a, comme nous l’avons déjà vu, une forme de S au repos, et peut-être séparé en trois zones majeures au niveau de l’actionnement. Nous nous intéressons ici aux mouvements dans le plan sagittal. La figure 5.6 montre le réseau musculaire dans le plan sagittal d’un pic noir (*dryocopus martius*). On peut d’abord remarquer qu’il y a beaucoup de muscles et que ceux-ci fonctionnent pour la plupart en ramification, un muscle étant en général rattaché à plusieurs vertèbres à la fois. Le cou se sépare donc en trois zones distinctes que l’on a repérées sur la figure 5.6 par différentes couleurs. La première zone, allant de la tête à la vertèbre 5 incluse, en vert clair, correspond à la zone de flexion dorsale dans le plan sagittal. La deuxième zone, en turquoise, allant de la vertèbre 6 à la vertèbre 10, correspond à la zone de flexion ventrale. La dernière zone enfin, en vert foncé, compre-

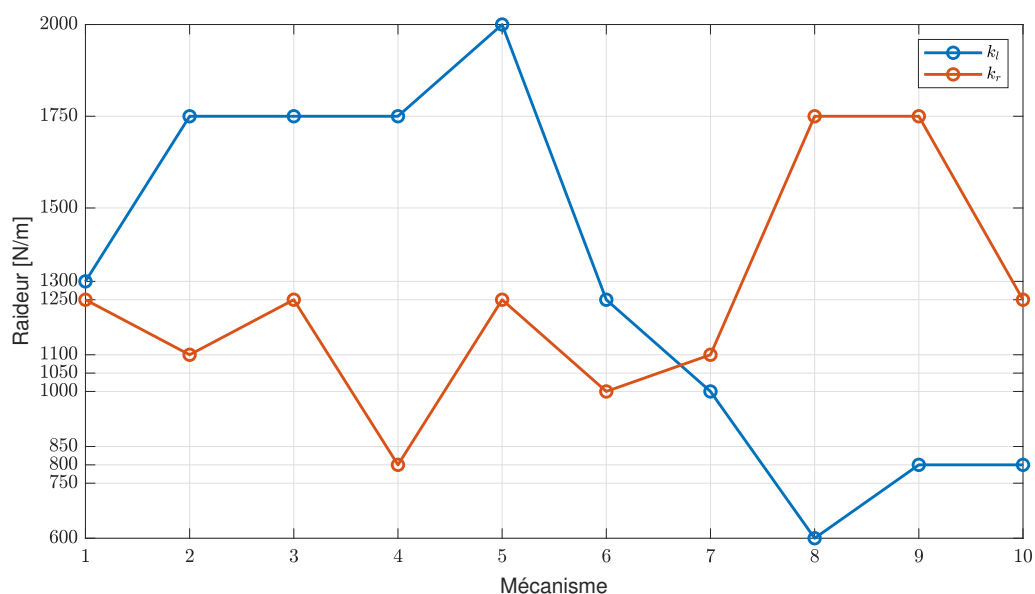


FIGURE 5.4 – Raideurs finales obtenues s’approchant au mieux de la configuration au repos souhaité et assurant une position d’équilibre au repos stable.

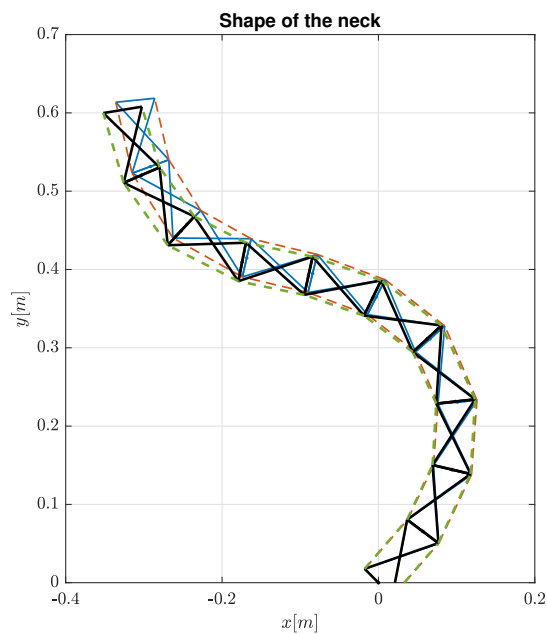


FIGURE 5.5 – Configuration d’équilibre au repos finale obtenue (en noir et vert, traits épais), par rapport à la configuration d’équilibre au repos initialement désirée (en bleu et rouge, traits fins).



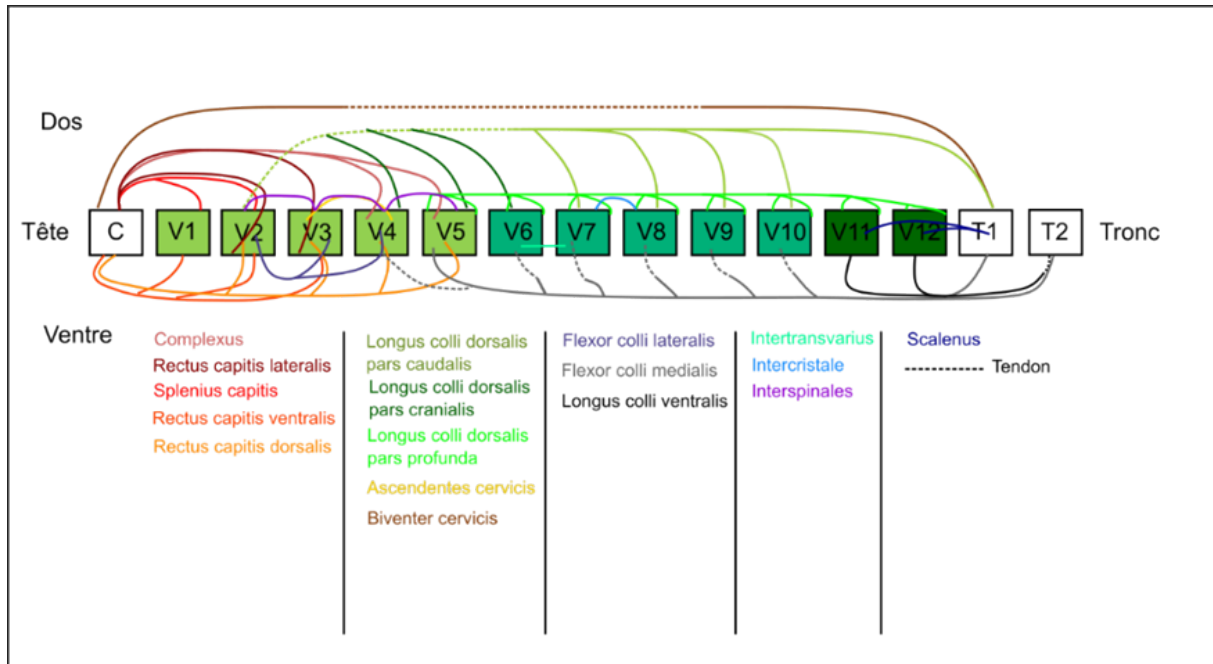


FIGURE 5.6 – Réseau musculaire d'un pic noir vu dans le plan sagittal.

nant les vertèbres V11 et V12, correspond à une zone robuste avec un faible débattement articulaire. Ces zones identifiées correspondent à des zones d'actionnement qui leur sont propres. On peut voir en effet que les différents muscles représentés sont rattachés de manière générale aux vertèbres d'une même zone. On peut aussi remarquer que la zone proche de la tête a un réseau musculaire plus complexe, car la tête a des libertés de mouvement bien plus importantes que le reste du cou (comme pourrait l'avoir le poignet d'un bras robotique anthropomorphique). Sur cette figure, n'est pas représenté un réseau de petits muscles inter-vertébraux qui assurent principalement la cohésion des vertèbres entre elles. L'ensemble montre que le mouvement dans le plan sagittal du cou d'oiseau peut-être reproduit avec un nombre limité de muscles, et qu'un sous-actionnement d'un cou complet est possible. Par analogie, un muscle connectant plusieurs vertèbres entre elles peut-être associé à un câble passant en "side-routed" à travers plusieurs articulations en X, appliquant un couple à toutes ces articulations à la fois. De cette manière, le réseau musculaire du cou d'oiseau dans le plan sagittal peut-être approché par un nombre réduit de câbles, et des mouvements d'extensions du cou peuvent être reproduits. A la manière des bras anthropomorphiques et conformément à la nature, on pourrait imaginer un actionnement complet antagoniste (deux câbles) pour le mécanisme en X distal, représentant la tête, afin d'augmenter l'espace de travail de l'organe terminal.

### Comparaison de trois stratégies d'actionnement

Nous avons décidé d'actionner le manipulateur avec 4 câbles, ce qui offre énormément de possibilités d'actionnement différentes. Nous en choisissons ici 3 (voir figure 5.7) qui nous paraissent intéressantes et que nous allons comparer en terme de WFW. Étant ici en

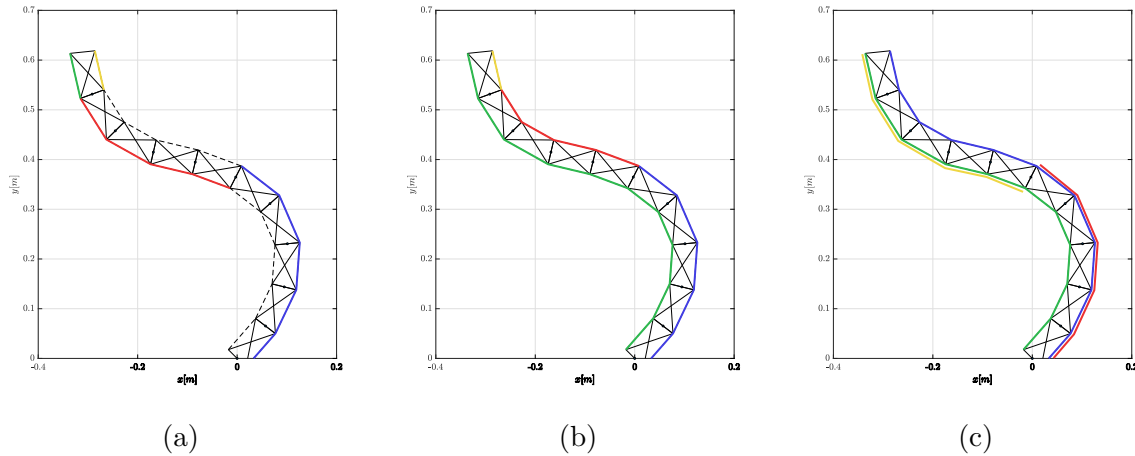


FIGURE 5.7 – Schématisation des trois stratégies d'actionnement considérées. Chaque câble de couleur différente est indépendant. Pour plus de lisibilité, le passage des câbles en strut-routed jusqu'à la base du manipulateur n'est pas représenté, mais tous les câbles courent jusqu'à la base du manipulateur.

présence d'un manipulateur à 10 DDL sous-actionné, il est plus simple d'utiliser le modèle statique inverse nous permettant d'obtenir la configuration du manipulateur à partir des efforts dans les câbles. Le WFW est estimé en balayant les frontières de l'espace des forces et en observant les frontières correspondantes dans l'espace de travail. Ces frontières sont calculées de manière numérique en utilisant la fonction *fsolve*. En parallèle, la raideur du manipulateur est évaluée à chaque itération, afin de vérifier que la matrice de raideur articulaire est toujours définie positive, et que le manipulateur est toujours stable dans la position évaluée. Cette méthode de détermination ne nous permet d'avoir qu'une idée générale de la forme et de la dimension du WFW, et non pas une représentation exacte de celui-ci. D'autres méthodes auraient pu être envisagées, comme la méthode Diamant [Boe+15] ou l'analyse par intervalles [GMD07].

**Stratégie d'actionnement (a) :** La première stratégie d'actionnement est une stratégie d'actionnement bio-inspirée qui nous a paru particulièrement intéressante. Le détail de cette stratégie d'actionnement est présenté en figure 5.7a. Elle est composée de deux câbles longs, un qui parcourt les 5 mécanismes proximaux du côté droit et un qui parcourt les 4 mécanismes suivants sur la gauche. Les deux câbles restant actionnent le dernier mécanisme de manière antagoniste. Ainsi, le mécanisme le plus distal peut-être contrôlé avec précision, ce qui augmente la dextérité du manipulateur dans le cas où celui-ci porterait un actionneur, comme cela peut-être le cas pour le poignet d'un bras manipulateur anthropomorphique. Ici et pour les cas suivants, les forces ont été bornées entre  $F_{min} = 0 N$  et  $F_{max} = 50 N$ , principalement car pour des efforts plus grands, des phénomènes de collision entre mécanismes peuvent arriver. Ce phénomène n'ayant pas été traité ici, nous avons limité les efforts pour des cas où les collisions n'apparaissent pas. Pour permettre à la fonction *fsolve* de converger rapidement et vers le bon minimum local, la position de départ donnée est la position de repos, avec toutes les forces nulles. Ensuite, une des forces

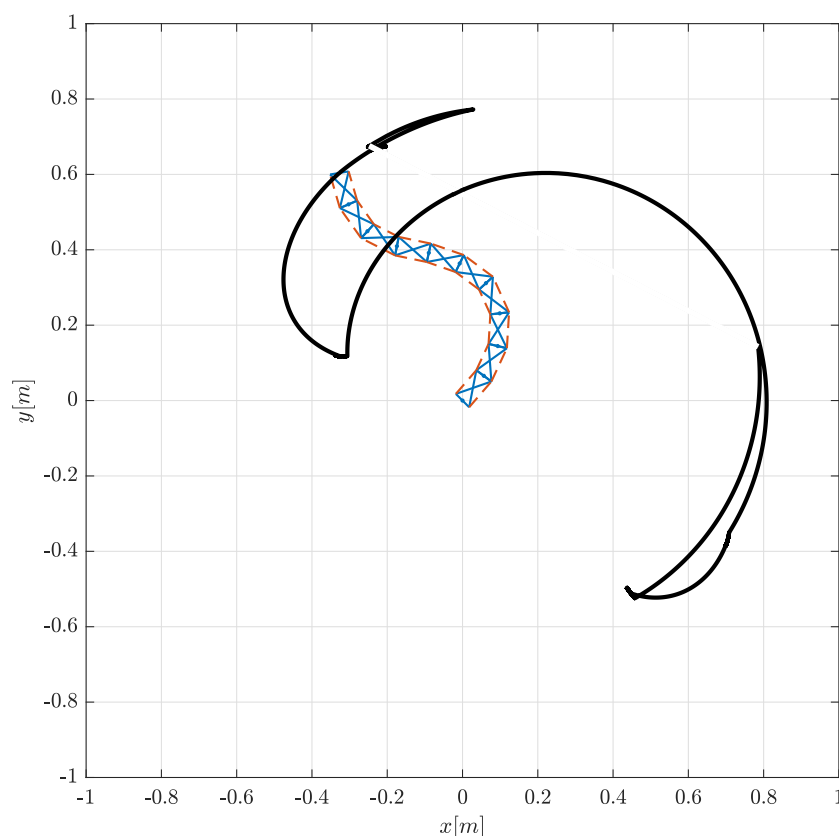


FIGURE 5.8 – Courbe représentant une partie du WFW à partir des bornes de l'espace des forces (stratégie 5.7a).

est discrétisée en  $n$  valeurs entre sa valeur minimale et maximale. A chaque itération, la fonction  $f_{solve}$  trouve la nouvelle position d'équilibre du manipulateur et sauvegarde cette position d'équilibre comme vecteur de départ pour la recherche de la position suivante. Une fois que la force choisie a atteint sa valeur  $F_{max}$ , une deuxième force est discrétisée et varie entre  $F_{min}$  et  $F_{max}$ , et ainsi de suite en suivant le principe de Gray (binaire réfléchi), permettant de ne faire varier qu'un effort à la fois, et permettant donc au manipulateur de suivre une courbe continue par morceau dans l'espace de travail. Malgré ces précautions, il arrive que la fonction  $f_{solve}$  n'arrive pas à converger dans certaines zones de l'espace de travail, et ce malgré la diminution du pas de discrétisation. Cela entraîne une discontinuité dans la courbe au niveau de l'espace de travail cartésien. Il est néanmoins possible de comparer les trois stratégies d'actionnement et leur WFW respectif.

Dans le cas de cette première stratégie d'actionnement (voir figure 5.7a), on voit que le WFW du manipulateur se trouve principalement sur sa partie haute et droite à partir de sa position de repos (voir figure 5.8). Pour toutes les configurations obtenues (courbes noires), la matrice de raideur du mécanisme est définie positive. Le fait d'avoir un dernier mécanisme (au niveau de l'effecteur) actionné par deux câbles antagonistes permet d'avoir plus de dextérité et de réaliser des tâches plus complexes, mais ce résultat est difficilement observable ici, les variations de la position de l'effecteur dues au dernier mécanisme étant

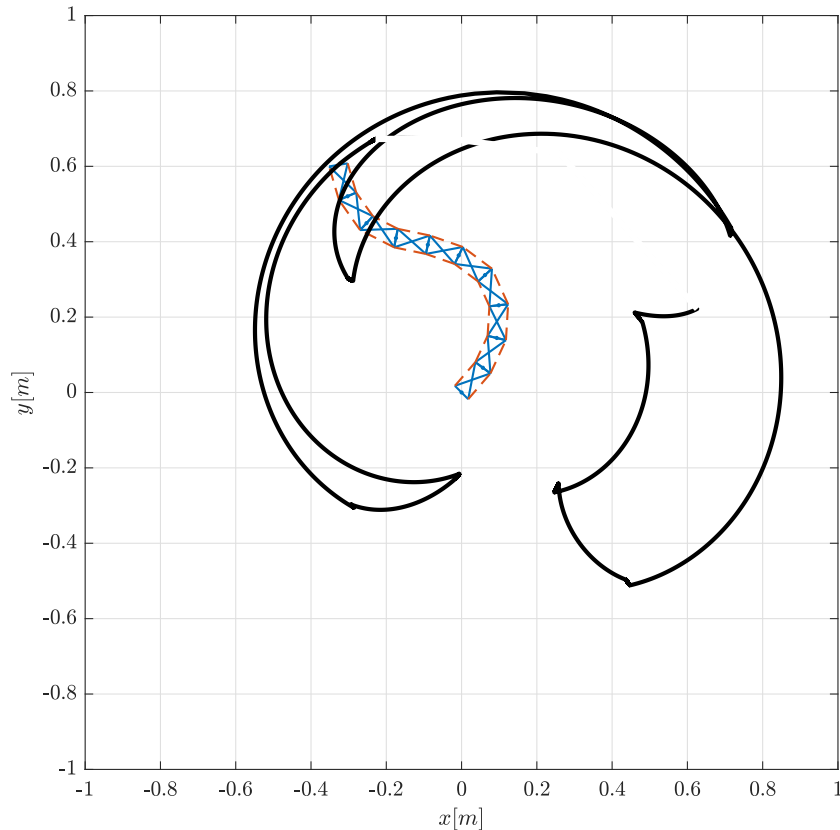


FIGURE 5.9 – Courbe représentant une partie du WFW à partir des bornes de l'espace des forces (stratégie 5.7b).

faibles.

**Stratégie d'actionnement (b) :** La seconde stratégie d'actionnement est présentée en figure 5.7b. Pour cette dernière, un câble long parcourt tous les mécanismes du côté gauche du manipulateur, tandis que trois câbles parcourent le coté droit. Le premier actionne les 5 mécanismes de base du manipulateur, le second les mécanismes 6 à 9 et un câble actionne le dernier mécanisme uniquement. Nous avons voulu pour cette stratégie conserver un actionnement semi-indépendant pour le dernier mécanisme. Cette stratégie d'actionnement permet également de faire de la raideur variable, les efforts d'un côté du mécanisme pouvant être composés par un câble de l'autre coté du mécanisme (exemple : en appliquant un effort égal non-nul sur les 4 câbles, le mécanisme retrouvera sa configuration d'équilibre au repos, ce qui n'est pas le cas pour la stratégie d'actionnement (a)).

Dans ce cas, on voit que le WFW est plus grand et disposé tout autour du mécanisme (voir figure 5.9). Cela est du au câble long qui permet d'"enrouler" le mécanisme vers la gauche, et aux trois câbles de droites qui permettent également d'atteindre des configurations enroulées, contrairement à la stratégie d'actionnement (a) qui permet uniquement de "déplier" le manipulateur en S. Pour toutes les configurations obtenues (courbes noires), la matrice de raideur du mécanisme est définie positive.

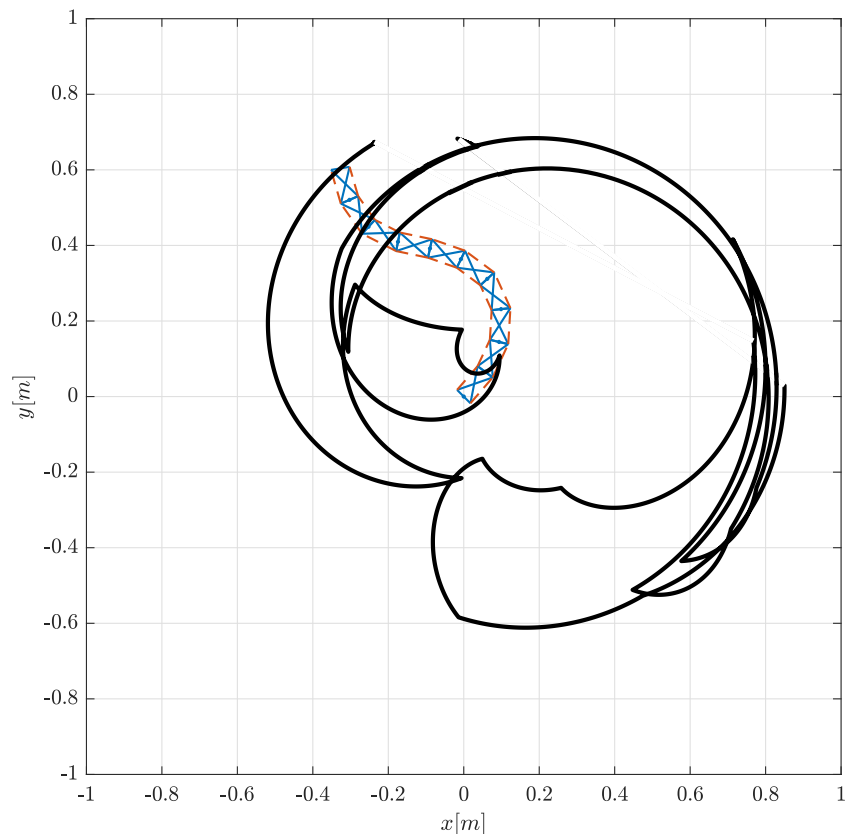


FIGURE 5.10 – Courbe représentant une partie du WFW à partir des bornes de l'espace des forces (stratégie 5.7c).

**Stratégie d'actionnement (c) :** La troisième stratégie d'actionnement est présentée figure 5.7c. Pour celle-ci, des câbles se superposent puisque le choix a été fait d'avoir deux câbles longs parcourant les deux mécanismes à gauche et à droite, un câble à droite permettant de "déplier" la partie basse du manipulateur, et un autre à gauche permettant de "déplier" la partie haute. On peut remarquer que c'est pour cette stratégie d'actionnement que le WFW est le plus grand (voir figure 5.10), mais également qu'il y a des collisions internes, puisque l'effecteur passe au niveau de la base du manipulateur pour certains efforts. Pour toutes les configurations obtenues (courbes noires), la matrice de raideur du mécanisme est définie positive. Cette stratégie d'actionnement est potentiellement intéressante du point de vue de la raideur variable, puisque les deux câbles long à gauche et à droite permettent d'augmenter facilement les efforts internes au manipulateur et donc sa raideur. La position peut ensuite être ajustée avec les deux câbles restants.

## 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons explicité la modélisation dynamique d'un manipulateur plan à  $N$  degrés de liberté. Ce modèle a été formulé de façon itérative afin d'être le plus général possible et de pouvoir être facilement implémenté pour différentes optimisations

ou pour des algorithmes de commande. Dans cette thèse, les aspects statiques uniquement ont été présentés avec une utilisation partielle du modèle dynamique. Le modèle dynamique complet a néanmoins été utilisé dans d'autres travaux autour du projet AVI-NECK, notamment sur la conception, fabrication et la commande d'un manipulateur à 3 DDL [Fas+19a] [Fas+20], [Fas+19b]. Une démarche de conception a été adoptée afin de déterminer certains paramètres dimensionnels, notamment en terme de raideur des ressorts, d'un manipulateur à 10 DDL avec une configuration au repos bio-inspirée (en S). La démarche visait à découper les équations statiques en des équations linéaires selon les raideurs de ressorts, et en considérant les autres termes constants lors du processus de sélection. Un algorithme a été élaboré afin de déterminer, parmi un ensemble de raideurs de ressorts disponibles, les meilleures raideurs permettant à la fois d'assurer une posture au repos proche de la celle souhaitée, mais aussi une raideur articulaire minimale assurant la stabilité du mécanisme en dehors de sa configuration d'équilibre au repos. Le résultat de cette démarche a montré qu'il est possible, à partir du panel de ressorts disponibles, de trouver un ensemble de raideurs satisfaisant ces contraintes et ces souhaits. La dernière partie de ce chapitre reprend les paramètres obtenus précédemment et cherche à avoir une idée générale du WFW avec un tel manipulateur, celui-ci étant actionné par 4 câbles uniquement. Différentes stratégies d'actionnement sont possibles, et trois stratégies d'actionnement ont été comparées. Les WFW obtenus sont d'une taille globalement satisfaisante, certains étant plus grands mais permettant moins de possibilités d'actionnement, notamment concernant le dernier mécanisme de la chaîne. Nous avons également montré que pour toutes les configurations des espaces de travail évalués, le mécanisme est dans une position d'équilibre stable.

# Conclusion et perspectives

## Conclusion

Cette thèse porte sur l'analyse cinéto-statique de structures de tensegrité, et son application à la modélisation de cous d'oiseaux et de manipulateurs bio-inspirés. Elle s'inscrivait dans le contexte d'un projet ANR en partenariat avec des biologistes et des roboticiens, projet qui dépasse largement le cadre de cette thèse.

La première étape de ces travaux a d'abord été de chercher à mieux comprendre les cous d'oiseaux, en commençant par les aspects cinématiques. Les observations sur des oiseaux vivants et des cadavres nous ont permis d'arriver à des résultats simples, telles que la forme de S au repos, ainsi que la mobilité entre vertèbres. En effet, la forme des surfaces articulaires de contact entre vertèbres ne permet que deux rotations, et il a été facile de le vérifier manuellement avec de vraies vertèbres ou des modèles en impression 3D. Nous avons cherché à connaître la forme générale de ces mouvements pour essayer de les approcher par des mécanismes simples, dans le plan sagittal en premier lieu. Cependant, les vertèbres étant de petites tailles et recouvertes de chair, de peau et de plumes, il est très difficile de mesurer et d'évaluer le mouvement intervertébral. Nous avons donc décidé d'obtenir ce résultat par une modélisation des vertèbres et en utilisant un algorithme de mise en contact des surfaces articulaires, avec comme données d'entrée des scans 3D de vraies vertèbres obtenues par tomographie. Ainsi, nous avons pu avoir une idée générale du mouvement inter-vertébral, et également vérifier quelques observations faites sur les spécimens réels, tels que l'absence de torsion entre vertèbres. Cette méthode de détermination du mouvement est applicable à toutes les vertèbres d'oiseaux, quelque soit la vertèbre et l'espèce. Même si elle manque encore de robustesse, elle est, à notre sens, assez inédite dans l'étude des mouvements inter-vertébraux. En effet, la majorité des travaux en biomécanique portent sur l'étude d'articulations humaines, notamment le genou, et utilise des méthodes différentes basées sur la modélisation par éléments finis et de concentrations de contraintes. Une fois le mouvement entre vertèbres obtenu, un algorithme d'optimisation a été conçu, afin de déterminer les dimensions optimales de trois mécanismes plans différents permettant d'approcher au mieux le mouvement inter-vertébral dans le plan sagittal. Pour l'espèce étudiée (vautour fauve), aucun de ces mécanismes ne s'est révélé être meilleur candidat qu'un autre, d'un point de vue cinématique uniquement. Certains couples de vertèbres ont des mouvements dans le plan sagittal très proches d'une articulation pivot à point fixe, tandis que d'autres ont des mouvements très éloignés, pouvant se rapprocher d'un roulement entre deux ellipses voire sans doute entre deux surfaces plus de forme plus quelconques. D'autres mécanismes pourraient donc être proposés (des mé-

canismes 4 barres plus complexes, ou mécanismes à 1DDL à plus de barres), mais ceux-ci présenteraient moins d'intérêt pour la conception de manipulateurs plans.

Ne pouvant déterminer de meilleurs mécanismes reproduisant plus fidèlement la cinématique du mouvement intervertébral, nous avons décidé de conserver deux de ces mécanismes afin de mener une étude cinéto-statique plus poussée. Le premier est un mécanisme 4 barres en anti-parallélogramme appelé "mécanisme en X", et le second une liaison pivot actionnée par câble déporté, appelé "mécanisme pivot". Ces deux mécanismes sont maintenus en équilibre stable par des ressorts latéraux, ce qui en font des mécanismes de tenségrité, et sont actionnés de manière antagoniste par une paire de câbles. Le modèle cinéto-statique de ces mécanismes a donc été calculé, et une démarche de conception optimale a été menée afin de déterminer les dimensions optimales de chaque mécanisme répondant à un même critère, et de pouvoir ensuite comparer les mécanismes optimaux obtenus. La première observation des résultats a mis en évidence un comportement drastiquement différent entre les deux types de mécanismes. En effet, l'augmentation des raideurs des ressorts et des efforts dans les câbles amènent à une augmentation de la raideur articulaire pour le mécanisme en X, et à une diminution de cette raideur pour le mécanisme pivot, qui est par nature instable. Cette instabilité dépend de certaines conditions géométriques, et de nombreux cas sont à considérer afin d'avoir une vue d'ensemble complète du comportement d'un tel mécanisme. Une analyse globale des résultats a montré que pour un WFW identique, le mécanisme en X est plus léger, offre une plus grande variation de raideur le long de son espace de travail, et un WFW stable beaucoup plus grand. Elle nécessite en revanche des efforts d'actionnement plus élevée que l'articulation pivot, mais cela est principalement du au fait que l'articulation pivot tombe sous son propre poids. Nous avons donc sélectionné l'articulation en X comme meilleur candidat à la réalisation de manipulateurs plans utilisant la tenségrité. Un prototype de mécanisme en X a été réalisé afin de vérifier la modélisation statique.

Une fois le meilleur mécanisme de tenségrité sélectionné, nous avons étudié l'empilement de deux mécanismes en X en série. La première étude a d'abord été purement géométrique et cinématique, avec une approche orientée algébrique. L'aspect "tenségrité" a donc été mis de côté. Le modèle géométrique direct a été facilement établi, et nous avons pu établir le modèle géométrique inverse en utilisant une méthodologie bien précise. La résolution du modèle géométrique inverse s'est avérée plus complexe que prévue. L'étude des singularités et de l'espace de travail s'est également révélée intéressante puisque nous avons pu mettre en évidence et établir des comportements similaires entre un tel manipulateur et un manipulateur 2R plan classique, notamment au niveau des singularités. Le manipulateur plan à 2 DDL considéré s'est avéré être cuspidal sous certaines conditions géométriques, ce qui est à notre connaissance une première pour un manipulateur plan à 2 DDL. Une fois l'étude géométrique réalisée, nous avons approfondi l'étude d'un manipulateur plan à 2 DDL. Ce cas d'étude nous a permis d'aborder et de définir la notion de stratégie d'actionnement pour ce type de manipulateur. Une énumération des différentes stratégies et possibilités d'actionnement a été réalisée, et quelques stratégies ont été comparées en terme de WFW et également variation de raideur. Cette étude a permis de mettre en évidence des avantages et inconvénients pour les différents types de stratégies. Un manipulateur à 2 DDL et actionné par 4 câbles a été réalisé et a permis



de valider la modélisation cinétostatique. De plus amples expérimentations seront nécessaires, notamment sur l'aspect raideur, qui a été modélisée mais n'a pour le moment pas été vérifié expérimentalement.

Le dernier chapitre constitue l'aboutissement de la modélisation 2D de manipulateurs plans. En premier lieu, le modèle dynamique complet d'un manipulateur plan à N DDL composé d'un assemblage en série de manipulateurs en X a été calculé. Ce modèle a été écrit de manière itérative afin d'être le plus général possible et de pouvoir être facilement implémenté dans des algorithmes de modélisation ou de commande. Le modèle dynamique complet a notamment été utilisé et valorisé pour la commande d'un manipulateur à 3 DDL actionné par 4 câbles. Dans le cadre de cette thèse, la partie statique du modèle dynamique nous a servi pour une démarche de conception d'un manipulateur plan à 10 DDL bio-inspiré. A partir d'une position au repos réelle d'une espèce de pic et des paramètres connus du manipulateur (dimension, masse...), un ensemble de ressorts permettant d'approcher au mieux cette position a été sélectionné. Ce manipulateur étant actionné par 4 câbles uniquement, nous avons choisi et comparé différentes stratégies d'actionnement en terme de WFW. Les résultats obtenus sont principalement exploratoires, et une démarche de conception optimale visant à obtenir le meilleur routage des câbles en fonction d'un critère précis comme la taille de l'espace de travail pourrait être développée. Un prototype est actuellement en cours de réalisation et permettra dans un premier temps de valider la modélisation, mais ensuite de pouvoir tester différentes stratégies d'actionnement, et éventuellement des trajectoires à haute dynamique ou des tâches de préhension.

## Perspectives

Ces travaux faisant partie d'une première collaboration entre roboticiens et biologistes, et portant sur la réalisation de manipulateurs utilisant les mécanismes de tenségrité, concept encore assez récent dans le domaine de l'ingénierie et de la robotique, de nombreuses perspectives s'ouvrent. Il est possible de voir ces perspectives à court, moyen ou long terme.

## Réalisation de manipulateurs

La première perspective à court terme liée à ce travail est la finalisation de la fabrication du manipulateur plan à 10 DDL. Les premiers prototypes à 1, 2 et 3 DDL ont été réalisés pour valider la modélisation et tester des algorithmes de commandes. Ils nous ont également permis de mettre en évidence certains comportements en termes de stratégies d'actionnement et également des difficultés liées à l'utilisation de câbles, l'absence de capteurs autres que les codeurs moteurs, et la présence de frottement dans les moteurs et au niveau des poulies. Les modèles ont été affinés, et le choix a été fait pour le prototype à 10 DDL d'ajouter un codeur absolu au niveau de chaque articulation, afin de pouvoir obtenir son orientation réelle, sans avoir à la reconstruire à partir de l'enroulement/déroulement des câbles. Nous avons également fait le choix de travailler sur une nouvelle architecture logicielle et matérielle plus intégrée. La réalisation du manipulateur à 10 DDL permettra la validation des modèles et des solutions technologiques choisies. Jusqu'ici, les prototypes

réalisés ne comportaient pas d'effecteur. Une fois le prototype fabriqué, celui-ci pourra être utilisé en condition réelle, et ses performances pourront être comparées avec des bras manipulateurs classiques, sur plusieurs aspects. Pour cela, une tâche pourra être affectée au manipulateur, comme par exemple une tâche de prise et dépose. L'utilisation d'une pince sous-actionnée pourrait être envisagée, des prototypes utilisant la tensegrité existant déjà dans la littérature [SBZ17]. Il serait également possible de commander l'ouverture et/ou la fermeture du préhenseur à partir des câbles déjà présents sur le mécanisme, en combinant cette ouverture/fermeture avec une variation de raideur du préhenseur, qui peut-être souhaitée lors d'une tâche de préhension.

## Commande de manipulateurs

Dans cette thèse, nous avons principalement travaillé sur la modélisation cinéto-statique de manipulateurs plans utilisant le principe de tensegrité. Ces manipulateurs présentent des caractéristiques statiques intéressantes notamment en terme de variation de raideur, comme nous l'avons montré pour un mécanisme simple, mais également pour un manipulateur à 2 DDL. Il a été difficile de vérifier ce comportement de raideur variable sur les prototypes, ceux-ci étant en premier lieu plutôt destiné à un asservissement en position. Le passage en boucle ouverte une fois la position demandée atteinte permet d'avoir un comportement de raideur variable. Il serait intéressant d'envisager d'autres types de commande pour ce type de manipulateur, comme des commandes en impédance, qui permettrait de plus grandes variations de raideurs. Une modélisation des contacts le long du manipulateur permettrait également de développer des lois de commandes complexes, permettant notamment la prise en compte de contact avec des obstacles extérieurs ou exploitant la raideur naturelle du manipulateur pour des interactions homme-machine fiables.

## 3D et futur du projet

Ce manuscrit s'est concentré sur la modélisation 2D de mécanismes de tensegrité et de manipulateurs. Il s'est avéré durant nos travaux que la modélisation 2D de tels mécanismes était assez complexe, et qu'une étude sérieuse pouvait prendre beaucoup de temps. La réalisation des premiers prototypes a permis de mettre en évidence des phénomènes sous-estimés comme l'influence des poulies sur la variation de longueurs de câbles et sur les frottements internes. La conception de manipulateurs 3D utilisant la tensegrité reste encore aujourd'hui un réel challenge, que ce soit en terme de modélisation ou de solutions technologiques. La recherche de forme pour les structures de tensegrité 3D concentre la majorité des travaux de recherche dans le domaine, et ce même pour des mécanismes de tensegrité 3D basiques. La réalisation de manipulateurs 3D à plusieurs mécanismes de tensegrité en série a été abordée pour quelques applications, mais souvent sur des prototypes en boucle ouverte et sans modélisation précise. D'un point de vue technologique, la réalisation de manipulateurs 3D amène beaucoup de contraintes. Contrairement au 2D, il n'est plus possible d'utiliser différents "plans" pour assembler les mécanismes sans collision. La réalisation de liaisons spatiales (joint de cardan, rotule) est plus complexe.

De plus, l'utilisation de ressorts et de câbles pour des manipulateurs 3D est plus difficile, puisqu'il faut déterminer la position des points d'ancrages des ressorts, et les zones de passages des câbles, qui ne peuvent plus être de simples poulies. Une première idée pourrait être la réalisation de mécanismes 2,5D, avec des mécanismes plans orientés dans des plans différents. Il serait possible d'étendre l'étude du chapitre 2 à l'approximation du mouvement des vertèbres en 3D par des mécanismes. On pourrait comparer un mécanisme composé d'un joint de cardan actionné par des câbles, ou un mécanisme de tensegrité 3D basique (un 3-strut par exemple) pour lequel certains câbles seraient actifs et d'autres passifs, afin d'obtenir les mobilités nécessaires. Des travaux ont été menés sur la modélisation d'un mécanisme de tensegrité 3D composé d'un joint de cardan, maintenu en équilibre par des ressorts de tension et actionné par des câbles [Ven+19], pour un robot d'exploration de canalisations.



# Bibliographie

- [Ars06] Marc Arsenault. “Développement et analyse de mécanismes de tensegrité”. PhD thesis. 2006.
- [ASKD03] JB Aldrich, RE Skelton, and K Kreutz-Delgado. “Control synthesis for a class of light and agile robotic tensegrity structures”. In: *Proceedings of the 2003 American Control Conference, 2003*. Vol. 6. IEEE. 2003, pp. 5245–5251.
- [AW19] A Abourachid and P Wenger. “Avineck, the neck of the bird, an arm for the robots”. In: *44ème congrès de la Société de Biomécanique*. Poitiers, France, 2019.
- [Bak+15] Daan L Bakker, Daisuke Matsuura, Yukio Takeda, and Just L Herder. “Design of an environmentally interactive continuum manipulator”. In: *Proceedings of 14th IFToMM World Congress in Mechanism and Machine Science, October 25-30, 2015, Taipei, Taiwan, 2015*, pp. 327–336.
- [Bak+17] Sana Baklouti, Eric Courteille, Stéphane Caro, and Mohamed Dkhil. “Dynamic and oscillatory motions of cable-driven parallel robots based on a non-linear cable tension model”. In: *Journal of Mechanisms and Robotics* 9.6 (2017).
- [Bak+19] Sana Baklouti, Eric Courteille, Philippe Lemoine, and Stéphane Caro. “Vibration reduction of Cable-Driven Parallel Robots through elasto-dynamic model-based control”. In: *Mechanism and Machine Theory* 139 (2019), pp. 329–345.
- [BCC18] Sana Baklouti, Stéphane Caro, and Eric Courteille. “Sensitivity analysis of the elasto-geometrical model of cable-driven parallel robots”. In: *Cable-Driven Parallel Robots*. Springer, 2018, pp. 37–49.
- [BF62] Richard Buckminster Fuller. *Tensile-integrity structures*. US Patent 3,063,521. 1962.
- [BL86] Paul Borrel and Alain Liégeois. “A study of multiple manipulator inverse kinematic solutions with applications to trajectory planning and workspace determination”. In: *Proceedings of 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), April 7-10, 1986, San Francisco, CA, USA*. Vol. 3. IEEE. 1986, pp. 1180–1185.

- [Bli+12] Thomas Bliss, Jeffrey Werly, Tetsuya Iwasaki, and Hilary Bart-Smith. “Experimental validation of robust resonance entrainment for CPG-controlled tensegrity structures”. In: *IEEE Transactions On Control Systems Technology* 21.3 (2012), pp. 666–678.
- [Boa29] Johan Erik Vesti Boas. *Biologisch-anatomische Studien über den Hals der Vögel*. Vol. 9. AF Høst & søn, 1929.
- [Boe+15] Quentin Boehler, Isabelle Charpentier, Marc S Vedrines, and Pierre Renaud. “Definition and computation of tensegrity mechanism workspace”. In: *Journal of Mechanisms and Robotics* 7.4 (2015), p. 044502.
- [Boe+17] Quentin Boehler, Salih Abdelaziz, Marc Vedrines, Philippe Poignet, and Pierre Renaud. “From modeling to control of a variable stiffness device based on a cable-driven tensegrity mechanism”. In: *Mechanism and Machine Theory* 107 (2017), pp. 1–12.
- [Böh+19] Christine Böhmer, Matthieu Furet, Benjamin Fasquelle, Philippe Wenger, Damie Chablat, Christine Chevallereau, and Anick Abourachid. “Combining precision and power to maximize performance : a case study of the woodpecker’s neck”. In: *44ème Congrès de la société de biomécanique, Poitiers, France, 2019*. 2019.
- [Boy+09] Frédéric Boyer, Damien Chablat, Philippe Lemoine, and Philippe Wenger. “The eel-like robot”. In: *ASME 2009 international design engineering technical conferences and computers and information in engineering conference*. American Society of Mechanical Engineers Digital Collection. 2009, pp. 655–662.
- [Boy+99] S Boyd, J Ronsky, Derek Lichti, D Salkauskas, and M Chapman. “Joint Surface Modeling with Thin-Plate Splines”. In: *Journal of Biochemical Engineering* 121.5 (1999), pp. 525–532.
- [BREU06] Paul Bosscher, Andrew T Riechel, and Imme Ebert-Uphoff. “Wrench-feasible workspace generation for cable-driven robots”. In: *IEEE Transactions on Robotics* 22.5 (2006), pp. 890–902.
- [Bru+14] Jonathan Bruce, Ken Caluwaerts, Atil Iscen, Andrew P Sabelhaus, and Vytas SunSpiral. “Design and evolution of a modular tensegrity robot platform”. In: *2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. IEEE. 2014, pp. 3483–3489.
- [Bö+19] Christine Böhmer, Jocerand PrevotEAU, Olivier Duriez, and Anick Abourachid. “Gulper, ripper and scrapper : anatomy of the neck in three species of vultures”. In: *Journal of Anatomy (2019)* (2019).
- [Car+15] Stéphane Caro, Damien Chablat, Philippe Lemoine, and Philippe Wenger. “Kinematic analysis and trajectory planning of the Orthoglide 5-axis”. In: *Proc. Int. Design Eng. Technical Conf. and Comp. and Inf. in Engineering Conference, August 2-5, 2015, Boston, USA*. ASME. 2015.

- [CDC02] Carl D Crane, Joseph Duffy, and Julio C Correa. “Static analysis of prestressed tensegrity structures”. In: *ASME 2002 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. American Society of Mechanical Engineers Digital Collection. 2002, pp. 689–695.
- [Cor+05] Federico Corazza, Rita Stagni, Vincenzo Parenti Castelli, and Alberto Lear dini. “Articular contact at the tibiotalar joint in passive flexion”. In: *Journal of biomechanics* 38.6 (2005), pp. 1205–1212.
- [CRB13] Matthew J Cobley, Emily J Rayfield, and Paul M Barrett. “Inter-vertebral flexibility of the ostrich neck : implications for estimating sauropod neck flexibility”. In: *PLoS One* 8.8 (2013).
- [CW96] Robert Connelly and Walter Whiteley. “Second-order rigidity and prestress stability for tensegrity frameworks”. In: *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 9.3 (1996), pp. 453–491.
- [Djo+98] S Djouadi, R Motro, JC Pons, and B Crosnier. “Active control of tensegrity systems”. In: *Journal of Aerospace Engineering* 11.2 (1998), pp. 37–44.
- [EOW95] J El Omri and P Wenger. “How to recognize simply a non-singular posture changing 3-DOF manipulator”. In: *Proceedings of 7th International Conference on Advanced Robotics (ICAR), September 20-22, 1995, Sant Feliu de Guixois, Spain*. 1995, pp. 215–222.
- [Fas+19a] Benjamin Fasquelle, Matthieu Furet, Anick Abourachid, Christine Böhmer, Damien Chablat, Christine Chevallereau, and Philippe Wenger. “Modelling, design and control of a bird neck using tensegrity mechanisms”. In: *ICRA ’2019 Worskhop on Tensegrity*. Montréal, Canada, 2019.
- [Fas+19b] Benjamin Fasquelle, Matthieu Furet, Christine Chevallereau, and Philippe Wenger. “Dynamic modeling and control of a tensegrity manipulator mimicking a bird neck”. In: *Proceedings of 15th IFToMM World Congress on Mechanism and Machine Science, June 30-July 4, 2019, Krakow, Poland*. Springer. 2019, pp. 2087–2097.
- [Fas+20] Benjamin Fasquelle, Matthieu Furet, Parag Khanna, Damien Chablat, Christine Chevallereau, and Philippe Wenger. “A bio-inspired 3-DOF light-weight manipulator with tensegrity X-joints”. In: *ICRA ’2020. Proc. Int. Conf. Robotics and Automation 2020*. Paris, France, 2020.
- [Fle] T Flemons. *The geometry of anatomy*. URL: [http://www.intensiondesigns.com/geometry\\_of\\_anatomy](http://www.intensiondesigns.com/geometry_of_anatomy).
- [FLW18] Matthieu Furet, Max Lettl, and Philippe Wenger. “Kinematic analysis of planar tensegrity 2-X manipulators”. In: *Proceedings of the 16th International Symposium on Advances in Robot Kinematics (ARK), July 1-5, Bologna, Italia*. Springer. 2018, pp. 153–160.

- [Fri+14] Jeffrey Friesen, Alexandra Pogue, Thomas Bewley, Mauricio de Oliveira, Robert Skelton, and Vytas Sunspirai. “DuCTT : A tensegrity robot for exploring duct systems”. In: *2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. IEEE. 2014, pp. 4222–4228.
- [Fur+18] Matthieu Furet, Anders Van Riesen, Christine Chevallereau, and Philippe Wenger. “Optimal design of tensegrity mechanisms used in a bird neck model”. In: *Proceedings of the 7th European Conference on Mechanism Science (EuCoMeS), September 4 - 6, 2018, Aachen, Germany*. Springer. 2018, pp. 365–375.
- [Fur+19] Matthieu Furet, Damien Chablat, Benjamin Fasquelle, Parag Khanna, Christine Chevallereau, and Philippe Wenger. “Prototype of a tensegrity manipulator to mimic bird necks”. In: *Congrès français de mécanique, Brest, France, 2019*. 2019.
- [FW18] Matthieu Furet and Philippe Wenger. “Workspace and cuspidality analysis of a 2-X planar manipulator”. In: *Proceedings of the 4th IFToMM Symposium on Mechanism Design for Robotics (MEDER), September 11 - 13, 2018, Udine, Italy*. Springer. 2018, pp. 110–117.
- [FW19] Matthieu Furet and Philippe Wenger. “Kinetostatic Analysis and Actuation Strategy of a Planar Tensegrity 2-X Manipulator”. In: *Journal of Mechanisms and Robotics* 11.6 (2019).
- [Gal07] Guillaume Gallot. “Modélisation Dynamique et Commande d’un robot Anguille”. PhD thesis. 2007.
- [GBA11] Andrzej Grzesiak, Ralf Becker, and Verl Alexander. “The Bionic Handling Assistant : a success story of additive manufacturing”. In: *Assembly Automation* 31.4 (2011), p. 329.
- [GMD07] Marc Gouttefarde, Jean-Pierre Merlet, and David Daney. “Wrench-feasible workspace of parallel cable-driven mechanisms”. In: *Proceedings 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE. 2007, pp. 1492–1497.
- [Gou98] Maria Gough. “In the laboratory of constructivism : Karl Ioganson’s cold structures”. In: *JSTOR* 84 (1998), pp. 91–117.
- [Gus+19] Jonathan A Gustafson, John J Elias, Richard E Debski, and Shawn Farrokhi. “Development and validation of a kinematically-driven discrete element model of the patellofemoral joint”. In: *Journal of biomechanics* 88 (2019), pp. 164–172. ISSN: 0021-9290.
- [HA10] Arnaud Hamon and Yannick Aoustin. “Cross four-bar linkage for the knees of a planar bipedal robot”. In: *2010 10th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*. IEEE. 2010, pp. 379–384.



- [Has+06] Takuya Hashimoto, Sachio Hitramatsu, Toshiaki Tsuji, and Hiroshi Kobayashi. “Development of the face robot SAYA for rich facial expressions”. In: *2006 SICE-ICASE International Joint Conference*. IEEE. 2006, pp. 5423–5428.
- [Isl+15] Kamrul Islam, Kajsa Duke, Tanvir Mustafy, Samer M. Adeeab, Janet L. Ronsky, and Marwan El-Rich. “A geometric approach to study the contact mechanisms in the patellofemoral joint of normal versus patellofemoral pain syndrome subjects”. In: *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering* 18.4 (2015), pp. 391–400.
- [Jha+18] Ranjan Jha, Damien Chablat, Luc Baron, Fabrice Rouillier, and Guillaume Moroz. “Workspace, joint space and singularities of a family of delta-like robot”. In: *Mechanism and Machine Theory* 127 (2018), pp. 73–95.
- [Joh+14] Joshua E. Johnson, Terence E. McIff, Phil Lee, E. Bruce Toby, and Kenneth J. Fischer. “Validation of radiocarpal joint contact models based on images from a clinical MRI scanner”. In: *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering* 17.4 (2014), pp. 378–387.
- [KD04] Wisama Khalil and Etienne Dombre. *Modeling, identification and control of robots*. Butterworth-Heinemann, 2004.
- [Ken03] Hugh Kenner. *Geodesic math and how to use it*. Univ of California Press, 2003.
- [Kin+17] Tetsuya Kinugasa, Koichi Osuka, Ryota Hayashi, Naoki Miyamoto, and Koji Yoshida. “Development of a small and lightweight myriapod robot using passive dynamics”. In: *Artificial Life and Robotics* 22.4 (2017), pp. 429–434.
- [Kri+17] Markus Krings, John A Nyakatura, Mark LLM Boumans, Martin S Fischer, and Hermann Wagner. “Barn owls maximize head rotations by a combination of yawing and rolling in functionally diverse regions of the neck”. In: *Journal of anatomy* 231.1 (2017), pp. 12–22.
- [Les+16] Steven Lessard, Dennis Castro, William Asper, Shaurya Deep Chopra, Leya Breanna Baltaxe-Admony, Mircea Teodorescu, Vytas SunSpiral, and Adrian Agogino. “A bio-inspired tensegrity manipulator with multi-DOF, structurally compliant joints”. In: *2016 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. IEEE. 2016, pp. 5515–5520.
- [Lev02] Stephen M Levin. “The tensegrity-truss as a model for spine mechanics : biotensegrity”. In: *Journal of mechanics in medicine and biology* 2.03n04 (2002), pp. 375–388.
- [Lev97] Stephen M Levin. “10. A different approach to the mechanics of the human pelvis : tensegrity”. In: *Movement, Stability, and Lower Back Pain* (1997), pp. 157–167.

- [LM12] Stephen M Levin and Danièle-Claude Martin. “Biotensegrity : the mechanics of fascia”. In: *Fasciae the Tensional Network of the Human Body. The Science and Clinical Applications in Manual and Movement Therapy*. Elsevier, Edinburgh (2012), pp. 137–142.
- [LM58] HW Lissmann and KE Machin. “The mechanism of object location in *Gymnarchus niloticus* and similar fish”. In: *Journal of Experimental Biology* 35.2 (1958), pp. 451–486.
- [Man+12] Montserrat Manubens, Guillaume Moroz, Damien Chablat, Philippe Wenger, and Fabrice Rouillier. “Cusp points in the parameter space of degenerate 3-RPR planar parallel manipulators”. In: *Journal of mechanisms and robotics* 4.4 (2012), p. 041003.
- [Maz+12] B Mazzolai, L Margheri, M Cianchetti, P Dario, and C Laschi. “Soft-robotic arm inspired by the octopus : II. From artificial requirements to innovative technological solutions”. In: *Bioinspiration & biomimetics* 7.2 (2012), p. 025005.
- [MGB13] Tomas Menard, Giorgio Grioli, and Antonio Bicchi. “A real time robust observer for an Agonist-Antagonist Variable Stiffness Actuator”. In: *2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE. 2013, pp. 3988–3993.
- [Mir+] Brian T Mirlletz, In-Won Park, Thomas E Flemons, Adrian K Agogino, Roger D Quinn, and Vytas SunSpiral. “Design and control of modular spine-like tensegrity structures”. In: *proceedings of the 6th World Conference of the International Association for Structural Control and Monitoring (IACSM)*.
- [Mle] “Max Lettl, Kinetostatic analysis of tensegrity mechanisms, application to the modelling of bird necks”. MA thesis.
- [Moo+11] KW Moored, TH Kemp, NE Houle, and H Bart-Smith. “Analytical predictions, optimization, and design of a tensegrity-based artificial pectoral fin”. In: *International Journal of Solids and Structures* 48.22-23 (2011), pp. 3142–3159.
- [Mor+10] Guillaume Moroz, Fabrice Rouiller, Damien Chablat, and Philippe Wenger. “On the determination of cusp points of 3-RPR parallel manipulators”. In: *Mechanism and Machine Theory* 45.11 (2010), pp. 1555–1567.
- [MWF20] Vimallesh Muralidharan, Philippe Wenger, and Matthieu Furet. “Static Analysis and Design Strategy of Two Antagonistically Actuated Joints”. In: *New Trends in Mechanism and Machine Science*. Ed. by Doina Pisla, Burkhard Corves, and Calin Vaida. Cham: Springer International Publishing, 2020, pp. 459–469.

- [Ott+10] A Ottoboni, V Parenti-Castelli, N Sancisi, C Belvedere, and A Leardini. “Articular surface approximation in equivalent spatial parallel mechanism models of the human knee joint : an experiment-based assessment”. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H : Journal of Engineering in Medicine* 224.9 (2010), pp. 1121–1132.
- [PC+04] Vincenzo Parenti-Castelli, Alberto Leardini, Raffaele Di Gregorio, and John J O’connor. “On the modeling of passive motion of the human knee joint by means of equivalent planar and spatial parallel mechanisms”. In: *Autonomous Robots* 16.2 (2004), pp. 219–232.
- [Pel86] Sergio Pellegrino. “Mechanics of kinematically indeterminate structures”. PhD thesis. University of Cambridge, 1986.
- [Pet+14] Florian Petit, Werner Friedl, Hannes Höppner, and Markus Grebenstein. “Analysis and synthesis of the bidirectional antagonistic variable stiffness mechanism”. In: *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 20.2 (2014), pp. 684–695.
- [Pic+18] Etienne Picard, Stéphane Caro, Fabien Claveau, and Franck Plestan. “Pulleys and force sensors influence on payload estimation of cable-driven parallel robots”. In: *2018 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. IEEE. 2018, pp. 1429–1436.
- [PVCL06] Chandana Paul, Francisco J Valero-Cuevas, and Hod Lipson. “Design and control of tensegrity robots for locomotion”. In: *IEEE Transactions on Robotics* 22.5 (2006), pp. 944–957.
- [QG] Cyril Quennouelle and CM Gosselin. “Stiffness matrix of compliant parallel mechanisms”. In: *Advances in Robot Kinematics : Analysis and Design*. Ed. by Lenarčič J. and Wenger P., pp. 331–341.
- [Ran+15] Tommaso Ranzani, Giada Gerboni, Matteo Cianchetti, and A Menciassi. “A bioinspired soft manipulator for minimally invasive surgery”. In: *Bioinspiration & biomimetics* 10.3 (2015), p. 035008.
- [REKP17] Andrew A. Biewener Robert E. Kambic and Stephanie E. Pierce. “Experimental determination of three-dimensional cervical mobility in the avian neck”. In: *Frontier in Zoology (2017)* (2017).
- [RLC20] Tahir Rasheed, Philip Long, and Stéphane Caro. “Wrench-Feasible Workspace of Mobile Cable-Driven Parallel Robots”. In: *Journal of Mechanisms and Robotics* 12.3 (2020).
- [RS13] Matthias Rolf and Jochen J Steil. “Efficient exploratory learning of inverse kinematics on a bionic elephant trunk”. In: *IEEE transactions on neural networks and learning systems* 25.6 (2013), pp. 1147–1160.

- [Sab+15] Andrew P Sabelhaus, Jonathan Bruce, Ken Caluwaerts, Pavlo Manovi, Roya Fallah Firoozi, Sarah Dobi, Alice M Agogino, and Vytas SunSpiral. “System design and locomotion of SUPERball, an untethered tensegrity robot”. In: *2015 IEEE international conference on robotics and automation (ICRA)*. IEEE. 2015, pp. 2867–2873.
- [SBZ17] Susanne Sumi, Valter Boehm, and Klaus Zimmermann. “A multistable tensegrity structure with a gripper application”. In: *Mechanism and Machine Theory* 114 (2017), pp. 204–217.
- [Sca12] Graham Scarr. “A consideration of the elbow as a tensegrity structure”. In: *International Journal of Osteopathic Medicine* 15.2 (2012), pp. 53–65.
- [Sch74] H-J Schek. “The force density method for form finding and computation of general networks”. In: *Computer methods in applied mechanics and engineering* 3.1 (1974), pp. 115–134.
- [Shi+16] Ali Shiva, Agostino Stilli, Yohan Noh, Angela Faragasso, Iris De Falco, Giada Gerboni, Matteo Cianchetti, Arianna Menciassi, Kaspar Althoefer, and Helge A Wurdemann. “Tendon-based stiffening for a pneumatically actuated soft manipulator”. In: *IEEE Robotics and Automation Letters* 1.2 (2016), pp. 632–637.
- [Sie+18] Sorin Siegler, Tobias Konow, Claudio Belvedere, Andrea Ensini, Rewati Kulkarni, and Alberto Leardini. “Analysis of surface-to-surface distance mapping during three-dimensional motion at the ankle and subtalar joints”. In: *Journal of Biomechanics* 76 (2018), pp. 204–211. ISSN: 0021-9290.
- [SO09] Robert E Skelton and Mauricio C de Oliveira. *Tensegrity systems*. Vol. 1. Boston, MA: Springer, 2009.
- [SPM01] Robert E Skelton, Jean Paul Pinaud, and D Lewis Mingori. “Dynamics of the shell class of tensegrity structures”. In: *Journal of the Franklin Institute* 338.2-3 (2001), pp. 255–320.
- [Ter+19] L. Terray, O. Plateau, A. Abourachid, Christine Böhmer, Arnaud Delapre, Xavier De La Bernardie, and R. Cornette. “Modularity and diversity of the bird’s neck : a 3D-geometric morphometric approach of cervical vertebrae”. In: *International Congress of Vertebrate Morphology (ICVM)*. Vol. 280. S1. Prague, Czech Republic, 2019, S228.
- [Tod02] Todor Stoilov Todorov. “Synthesis of four-bar mechanisms by Freudenstein–Chebyshev”. In: *Mechanism and Machine Theory* 37.12 (2002), pp. 1505–1512.
- [TP03] AG Tibert and Sergio Pellegrino. “Review of form-finding methods for tensegrity structures”. In: *International Journal of Space Structures* 18.4 (2003), pp. 209–223.

- [TW11] Federico Thomas and Philippe Wenger. “On the topological characterization of robot singularity loci. A catastrophe-theoretic approach”. In: *Proceedings of 2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), May 9-13 2011, Shanghai, China*. IEEE. 2011, pp. 3940–3945.
- [Ven+19] Swaminath Venkateswaran, Matthieu Furet, Damien Chablat, and Philippe Wenger. “Design and analysis of a tensegrity mechanism for a bio-inspired robot”. In: *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. Vol. 59230. American Society of Mechanical Engineers. 2019, V05AT07A026.
- [VH+09] Ronald Van Ham, Thomas Sugar, Bram Vanderborght, Kevin Hollander, and Dirk Lefeber. “Compliant actuator designs”. In: *Robotics & Automation Magazine, IEEE* 16 (2009), pp. 81–94.
- [VM99] Nicolas Vassart and René Motro. “Multiparametered formfinding method : application to tensegrity systems”. In: *International journal of space structures* 14.2 (1999), pp. 147–154.
- [VR+18] Anders Van Riesen, Matthieu Furet, Christine Chevallereau, and Philippe Wenger. “Dynamic analysis and control of an antagonistically actuated tensegrity mechanism”. In: *Proceedings of 22nd CISM IFToMM Symposium on Robot Design, Dynamics and Control (ROMANSY), June 25-28, 2018, Rennes, France*. Springer, 2018, pp. 481–490.
- [Wan+01] Ning Wang, Keiji Naruse, Dimitrije Stamenović, Jeffrey J Fredberg, Srboj M Mijailovich, Iva Marija Tolić-Nørrelykke, Thomas Polte, Robert Mannix, and Donald E Ingber. “Mechanical behavior in living cells consistent with the tensegrity model”. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 98.14 (2001), pp. 7765–7770.
- [WC17] Philippe Wenger and Damien Chablat. “Kinetostatic analysis and solution classification of a planar tensegrity mechanism”. In: *Proceedings of the 7th International Workshop on Computational Kinematics, May 22-24, 2017, Poitiers, France*. Ed. by Laribi M. Zeghloul S. Romdhane L. Dordrecht, Germany: Springer, 2017, pp. 422–431.
- [WCB05] Philippe Wenger, Damien Chablat, and Maher Baili. “A DH-parameter based condition for 3R orthogonal manipulators to have four distinct inverse kinematic solutions”. In: *Journal of Mechanical Design* 127.1 (2005), pp. 150–155.
- [Wen07] Philippe Wenger. “Cuspidal and noncuspidal robot manipulators”. In: *Robotica* 25.6 (2007), pp. 677–689.
- [WF21] Philippe Wenger and Matthieu Furet. “Kinematic Analysis of a Planar Manipulator with Anti-parallellogram Joints and Offsets”. In: *Advances in Robot Kinematics 2020*. Ed. by Jadran Lenarčič and Bruno Siciliano. Cham: Springer International Publishing, 2021, pp. 319–326.

- 
- [Whi02] William Brooks Whittier. “Kinematic analysis of tensegrity structures”. PhD thesis. Virginia Tech, 2002.
- [WIJ10] Robert J Webster III and Bryan A Jones. “Design and kinematic modeling of constant curvature continuum robots : A review”. In: *The International Journal of Robotics Research* 29.13 (2010), pp. 1661–1683.
- [Zhu+19] Wei Zhu, Jiahong Liu, Hanbing Li, and Kairong Gu. “Design and analysis of a compliant polishing manipulator with tensegrity-based parallel mechanism”. In: *Australian Journal of Mechanical Engineering* (2019), pp. 1–9.

# Liste des publications

## Publications dans des revues d'audience internationale à comité de lecture

### Editée

- [FW19] M. Furet and P. Wenger, Kinetostatic analysis and actuation strategy of a planar tensegrity 2-X manipulator, ASME. J. Mechanisms Robotics. December 2019; 11(6) : 060904.

### Soumise

- M. Furet, A. Abourachid, C. Böhmer, V. Chummun, C. Chevallereau, R. Cornette, X. De La Bernardie, P. Wenger, Estimating motion between avian vertebrae by contact modelling of joint surfaces, Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering, 2021
- A. Abourachid, B. Gagnier, M. Furet, R. Cornette, A. Delapre, R. Hackert, P. Wenger, Modelization of the intervertebral articulation, the module à doigt mechanical joint in birds and mammals, Journal of anatomy, 2021

## Communications à des congrès internationaux à comité de sélection et actes publiés

### Réalisées

- [FLW18] M. Furet, M. Lettl, P. Wenger, Kinematic analysis of planar tensegrity 2-X manipulators, Proc. 16th International Symposium on Advances in Robot Kinematics, Bologna, Italia, Juin 2018 : Présentation orale par M. Furet.
- [FW18] M. Furet and P. Wenger, Workspace and cuspidality analysis of a 2-X planar manipulator, Proc. 4th IFToMM Symposium on Mechanism Design for Robotics, Udine, Italia, Septembre 2018 : Présentation orale par P. Wenger. Médaille d'argent du "Best Paper Award".

- [VR+18] A. Van Riesen, M. Furet, C. Chevallereau, P. Wenger, Dynamic Analysis and Control of an Antagonistically Actuated Tensegrity Mechanism, in Romansy 22 Robot Design, Dynamics and Control, Rennes, France, Juin 2018 : Présentation orale par M. Furet.
- [Fur+18] M. Furet, A. Van Riesen, C. Chevallereau, P. Wenger, Optimal Design of Tensegrity Mechanisms Used in a Bird Neck Model, in EuCoMeS2018 : Proceedings of the 7th European Conference on Mechanism Science, Aachen, Germany, Septembre 2018 : Présentation orale par M. Furet.
- [Fas+19b] B. Fasquelle, M. Furet, C. Chevallereau, P. Wenger, Dynamic modeling and control of a tensegrity manipulator mimicking a bird neck, 15th IFToMM World Congress, Krakow, Poland, Juillet 2019 : Présentation orale par B. Fasquelle.
- [Ven+19] S. Venkateswaran, D. Chablat, M. Furet, P. Wenger, Design and analysis of a tensegrity mechanism for a bio-inspired robot, International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Anaheim, USA, Septembre 2019 : Présentation orale par S. Venkateswaran.
- [Fas+20] B. Fasquelle, Matthieu Furet, Parag Khanna, Damien Chablat, Christine Chevallereau, P. Wenger, A bio-inspired 3-DOF light-weight manipulator with tensegrity X-joints. ICRA'2020, Paris, France, Mai 2020 : Présentation vidéo par M. Furet et B. Fasquelle.

## Acceptées

- [WF21] Wenger, P., & Furet, M. Kinematic Analysis of a Planar Manipulator with Anti-parallellogram Joints and Offsets. In International Symposium on Advances in Robot Kinematics (pp. 319-326), December 2020. Springer, Cham.
- [MWF20] Muralidharan, V., Wenger, P., & Furet, M. Static Analysis and Design Strategy of Two Antagonistically Actuated Joints. In European Conference on Mechanism Science (pp. 459-469), September 2020. Springer, Cham.

## Communications à des congrès nationaux et actes publiés

### Réalisées

- [Fur+19] M. Furet, D. Chablat, B. Fasquelle, C. Chevallereau, P. Wenger, Prototype of a tensegrity manipulator to mimic bird necks, Congrès français de mécanique, Brest, France, 2019 : Présentation orale par M. Furet
- [Böh+19] C. Böhmer, M. Furet, B. Fasquelle, P. Wenger and A. Abourachid, Combining precision and power to maximize performance : a case study of the woodpe-



cker's neck, 44ème Congrès de la société de biomécanique, Poitiers, France, 2019 : Présentation orale par C. Böhmer.

- M. Furet, Analyse cinétostatique de structures de tensegrité, Journées des jeunes chercheurs en robotique, Vittel, France, 2019 : Présentation poster par M. Furet.

## **Communications lors de workshop de conférences internationales**

### **Réalisée**

- [Fas+19a] B. Fasquelle, M. Furet, A. Abourachid, C. Böhmer, D. Chablat, C. Chevallereau, P.Wenger, Modelling, design and control of a bird neck using tensegrity mechanisms, IEEE International Conference on Robotics and Automation, Tensegrity Workshop, Montreal, Canada, 2019 : Poster par B. Fasquelle.



# Annexes



## .A Comparaison de deux mécanismes plans à 1 DDL

### .A.1 Limites de mouvement de l'articulation R en raison de singularités

Les directions des forces appliquées  $F_1$  et  $F_2$  ne sont pas définies lorsque  $l_1 = 0$  et  $l_2 = 0$ , respectivement. Il n'est donc pas possible de contrôler le manipulateur dans ces configurations, et par conséquent, elles définissent les limites de l'espace de travail atteignable statiquement (lorsqu'aucune limite n'est imposée aux forces appliquées par les câbles) de l'articulation. Ceci est illustré dans la Fig. 11.

Les manipulateurs à câble souffrent également de singularités de contraintes en plus des singularités observées dans les manipulateurs parallèles. Les singularités de contraintes font référence aux configurations dans lesquelles le manipulateur ne peut pas résister à un effort extérieur arbitraire appliqué sur l'un des maillons, lorsque tous les câbles sont en tension et verrouillés. Pour l'articulation en R, de telles situations se produisent lorsque la ligne d'action de la force,  $l_1$  ou  $l_2$  passe par le point  $b_o$  comme illustré dans la Fig. 12.

Cependant, les limites de mouvement sont définies par une seule de ces singularités, en fonction du rapport  $\frac{r}{h}$ . D'après les figures 11 et 12, les observations suivantes sur les limites de la motion peuvent être faites :

- Cas 1 ( $r > h$ ) : La limite de mouvement est formée par  $l_i = 0, i = 1, 2$ , conduisant à :  

$$\theta_p \in \left( -\left( \pi - 2 \tan^{-1} \left( \frac{r}{h} \right) \right), \left( \pi - 2 \tan^{-1} \left( \frac{r}{h} \right) \right) \right).$$
- Cas 2 ( $r < h$ ) : L'apparition d'une singularité de contraintes limite le mouvement, ce qui conduit à :  

$$\theta_p \in \left( -2 \tan^{-1} \left( \frac{r}{h} \right), 2 \tan^{-1} \left( \frac{r}{h} \right) \right)$$
- Cas 3 ( $r = h$ ) : La limite de mouvement est formée par les deux  $l_i = 0, i = 1, 2$  et la singularité de contraintes simultanément :  $\theta_p \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ . L'amplitude du mouvement libre de la singularité est maximale dans ce cas.

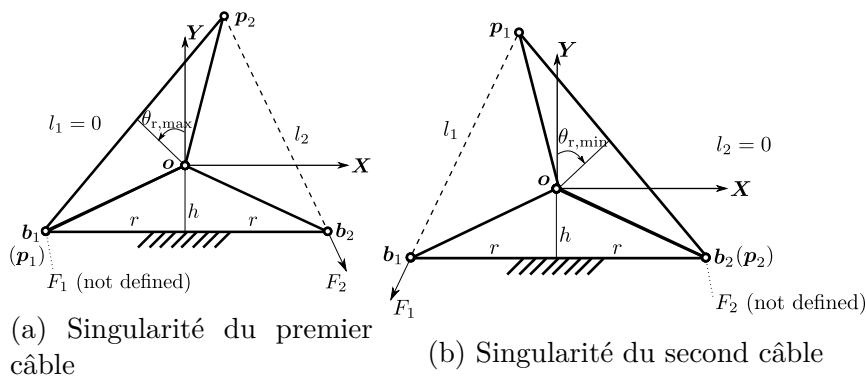


FIGURE 11 – Limite d'amplitude de l'articulation en R due à l'annulation de  $l_1$  and  $l_2$ .

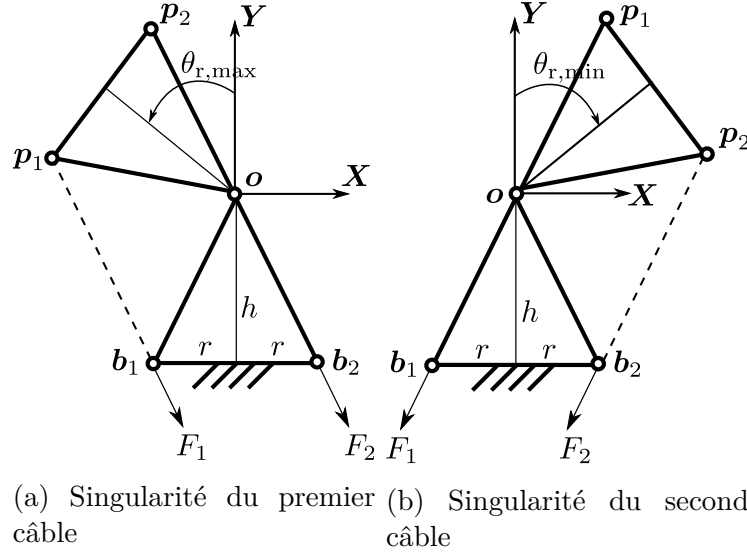


FIGURE 12 – Limite d'amplitude de l'articulation en R dûe aux singularités de contraintes.

## .A.2 Conception optimale de l'articulation en P

Il est à noter que l'ensemble des variables de conception de l'articulation pivot est formé par  $r$ ,  $\eta$ , et  $k$ . À partir de l'équation (3.42a), on obtient la condition suivante :

$$\eta < \cot \frac{\theta_{\text{pm}}}{2} \quad (56)$$

L'équation (3.42c) donne :

$$C = K_0 \quad (57)$$

En substituant l'expression de  $C$  de l'équation (3.39) dans l'équation ci-dessus et en résolvant pour  $k$ , on obtient :

$$k = \frac{1}{2(\eta^2 - 1)r^2} \left( g\eta M(d\eta + r) + g \left( \sqrt{\eta^2 + 1} + 2\eta \right) \rho r^2 + \eta^2 K_0 \right) \quad (58)$$

D'après l'équation ci-dessus, il est clair que la condition  $\eta > 1$  est nécessaire pour garantir que  $k$  reste positif. L'équation (60) conduit à :

$$-C \sin \theta_{\text{pm}} + \frac{r}{\eta} F_{\text{max}} \sin \frac{\theta_{\text{pm}}}{2} + F_{\text{max}} r \cos \frac{\theta_{\text{pm}}}{2} = 0 \quad (59)$$

En remplaçant  $C$  dans l'équation (57) par l'équation (59) et en résolvant pour  $F_{\text{max}}$ , on obtient :

$$F_{\text{max}} = \frac{K_0 \eta \sin \theta_{\text{pm}}}{r \left( \eta \cos \frac{\theta_{\text{pm}}}{2} + \sin \frac{\theta_{\text{pm}}}{2} \right)} \quad (60)$$

A partir de l'équation (3.42e), on obtient :

$$C \cos \theta_{\text{pm}} + \frac{1}{2} F_{\text{max}} r \sin \frac{\theta_{\text{pm}}}{2} - \frac{r \cos \frac{\theta_{\text{pm}}}{2}}{\eta} - K_1 = 0 \quad (61)$$

Par substitution des expressions pour  $C$  et  $F_{\text{max}}$  des équations (57) et (60) dans l'équation (61) :

$$\frac{K_0 \sin \theta_{\text{pm}} \left( \eta \sin \frac{\theta_{\text{pm}}}{2} - \cos \frac{\theta_{\text{pm}}}{2} \right)}{2 \left( \eta \cos \frac{\theta_{\text{pm}}}{2} + \sin \frac{\theta_{\text{pm}}}{2} \right)} + K_0 \cos \theta_{\text{pm}} - K_1 = 0 \quad (62)$$

La résolution de  $\eta$  de l'équation ci-dessus donne le résultats suivants :

$$\eta = \frac{K_0(1 - \cos \theta_{\text{pm}}) + 2K_1}{K_0(1 + \cos \theta_{\text{pm}}) - 2K_1} \tan \frac{\theta_{\text{pm}}}{2} \quad (63)$$

L'équation ci-dessus fournit une relation simple entre les spécifications de conception ( $\theta_{\text{pm}}, K_0, K_1$ ) et  $\eta$ . C'est assez intéressant car pour un ensemble donné de spécifications, le rapport des dimensions des barres reste fixe, indépendamment de la charge utile ( $M, d$ ) et du matériau des barres ( $\rho$ ). Il est à noter que les spécifications  $K_0, K_1$ , et  $\theta_{\text{pm}}$ , doivent permettre de respecter les limites sur :  $\eta \in ]1, \cot \frac{\theta_{\text{pm}}}{2}[$ , pour l'existence de conceptions réalisables. En substituant l'expression de  $\eta$  de l'équation (63) dans les équations (58) et (60), il est possible de trouver  $k$  et  $F_{\text{max}}$  uniquement en termes de  $r$ , la seule variable de conception qui reste dans ce problème.

L'inégalité de l'équation (3.42d), donne :

$$C - F_{\text{max}} \frac{r}{\eta} \geq 0 \quad (64)$$

En remplaçant les conditions dans l'équation (57) et (60), on a :

$$\eta \geq \tan \frac{\theta_{\text{pm}}}{2} \left( 2 \cos \frac{\theta_{\text{pm}}}{2} - 1 \right) \quad (65)$$

Étant donné que  $\theta_{\text{pm}} \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , il est évident que le côté droit de l'inégalité ci-dessus serait toujours inférieur à 1. Mais, à partir de l'équation (58), il a été démontré que  $\eta > 1$  est une condition nécessaire pour que  $k$  soit positif. Ainsi, l'inégalité dans l'équation (65) reste satisfaite par défaut sans qu'aucune condition supplémentaire ne soit imposée.

Ainsi, un problème d'optimisation pour la minimisation des efforts appliqués peut être formulé comme suit :

$$\begin{aligned} \underset{r}{\text{minimisant}} \quad & F_{\text{max}}(r) = \frac{K_0(1 - \cos \theta_{\text{pm}}) + 2K_1}{r} \sin \frac{\theta_{\text{pm}}}{2} \\ \text{subject à} \quad & r \in [0.025, 0.1], \\ & k \in [0, 2000], \end{aligned} \quad (66)$$

où  $r$  est la seule variable de conception dans ce problème. La contrainte sur  $\eta$  n'est pas mentionnée dans le problème car elle devrait être satisfaite par le choix de  $K_0, K_1$ ,

et  $\theta_{\text{pm}}$ . Les contraintes sur les variables  $r$  et  $k$  ont été imposées dans le problème en raison de considérations pratiques, telles que la disponibilité des composants correspondants sur le marché et la facilité de fabrication/assemblage. En utilisant l'équation (58), on peut obtenir des conditions algébriques équivalentes sur  $r$ , correspondant aux limites sur  $k$ . Par exemple, la condition  $k \leq k_{\text{max}} (= 2000)$  conduit à une expression quadratique en  $r$  qui doit être non négative :

$$\left(2(\eta^2 - 1)k_{\text{max}} - g\left(\sqrt{\eta^2 + 1} + 2\eta\right)\rho\right)r^2 - Mg\eta r - \eta^2(K_0 + Mg d) \geq 0 \quad (67)$$

Il est à noter que l'expression de  $\eta$  est connue de l'équation (63), mais n'a pas été substituée, pour que les expressions résultantes soient courtes. Dans le cas limite où l'inégalité dans l'équation (67) devient une égalité, les solutions pour  $r$  peuvent être trouvées analytiquement comme suit :

$$r_1 = \frac{Mg\eta - \sqrt{g^2\eta^2 M^2 + 4\eta^2 \left(2(\eta^2 - 1)k_{\text{max}} - g\left(\sqrt{\eta^2 + 1} + 2\eta\right)\rho\right)(K_0 + dgM)}}{2\left(2(\eta^2 - 1)k_{\text{max}} - g\left(\sqrt{\eta^2 + 1} + 2\eta\right)\rho\right)}, \quad (68)$$

$$r_2 = \frac{Mg\eta + \sqrt{g^2\eta^2 M^2 + 4\eta^2 \left(2(\eta^2 - 1)k_{\text{max}} - g\left(\sqrt{\eta^2 + 1} + 2\eta\right)\rho\right)(K_0 + dgM)}}{2\left(2(\eta^2 - 1)k_{\text{max}} - g\left(\sqrt{\eta^2 + 1} + 2\eta\right)\rho\right)} \quad (69)$$

La plage possible de  $r$  correspondant à l'inégalité dans l'équation (67) réduira l'espace de conception à  $r \in [r_1, r_2]$  ou  $r \in (-\infty, r_1) \cup (\infty, r_2)$ , selon les valeurs attribuées aux paramètres du problème. Ces conditions seraient utilisées pour définir l'espace de conception possible du joint R. Il est rappelé à partir de l'équation (58) que la contrainte :  $k \geq 0$  serait satisfaite par défaut lorsque  $\eta > 1$ .

La condition nécessaire au premier ordre pour  $F_{\text{max}}$  pour atteindre un minimum local exige la disparition de sa dérivé par rapport à  $r$ . Cependant, on constate que  $\frac{dF_{\text{max}}}{dr} = -\frac{K_0(1 - \cos\theta_{\text{pm}}) + 2K_1}{r^2} \sin\left(\frac{\theta_{\text{pm}}}{2}\right)$ , est négatif pour toutes les valeurs possibles des variables et paramètres de conception. Cela implique que  $F_{\text{max}}$  diminue avec l'augmentation de  $r$ , et sa valeur minimale se produirait lorsque  $r$  est aussi grand que possible dans l'espace de conception possible défini par les contraintes dans l'équation (66). De plus amples informations sur la valeur minimale de la force et les variables de conception correspondantes peuvent être obtenues en étudiant le comportement de  $F_{\text{max}}$  à l'intérieur de l'espace de conception avec des valeurs numériques pour les paramètres.

### .A.3 Conception optimale de l'articulation en X

On sait que l'ensemble des variables de conception de l'articulation en X est composée de :  $b, \lambda$ , and  $k$ . L'équation (3.43b) donne :

$$bF_{\text{max}} \cos\theta_{\text{xm}} \left( \frac{\sin\theta_{\text{xm}}}{\sqrt{\lambda^2 - \cos^2\theta_{\text{xm}}}} - 1 \right) + C_1 \sin 2\theta_{\text{xm}} + \frac{C_2 \sin\theta_{\text{xm}} (2\cos^2\theta_{\text{xm}} - \lambda^2)}{\sqrt{\lambda^2 - \cos^2\theta_{\text{xm}}}} = 0 \quad (70)$$



L'équation (3.43e) mène à :

$$bF_{\max} \left( \frac{\lambda^2 \cos 2\theta_{xm} - \cos^4 \theta_{xm}}{(\lambda^2 - \cos^2 \theta_{xm})^{3/2}} + \sin \theta_{xm} \right) + 2C_1 \cos 2\theta_{xm} - K_1 - \frac{C_2 \cos \theta_{xm} \left( (\lambda^2 - \cos 2\theta_{xm})^2 - (\lambda^2 - 1) \cos 2\theta_{xm} \right)}{(\lambda^2 - \cos^2 \theta_{xm})^{3/2}} = 0 \quad (71)$$

A partir de l'équation (70) et (71), il est possible d'exprimer  $F_{\max}$  et  $C_1$  comme suit :

$$F_{\max} = \frac{\left( C_2 \lambda^4 \sin \theta_{xm} \tan^2 \theta_{xm} + K_1 \tan \theta_{xm} (\lambda^2 - \cos^2 \theta_{xm})^{3/2} \right)}{b \cos \theta_{xm} \left( (\lambda^2 - \cos^2 \theta_{xm})^{3/2} - \sin^3 \theta_{xm} \right)} \quad (72)$$

$$C_1 = \gamma_1 K_1 + \gamma_2 C_2 \quad (73)$$

avec

$$\gamma_1 = \frac{\sec^2 \theta_{xm} (\lambda^2 - \cos^2 \theta_{xm})}{2 \left( \sin \theta_{xm} \sqrt{\lambda^2 - \cos^2 \theta_{xm}} + \sin^2 \theta_{xm} - \cos^2 \theta_{xm} + \lambda^2 \right)} \quad (74)$$

$$\gamma_2 = \left( \lambda^4 \sec^3 \theta_{xm} - \cos \theta_{xm} \left( \sin \theta_{xm} \sqrt{\lambda^2 - \cos^2 \theta_{xm}} + 2 \sin^2 \theta_{xm} + 3\lambda^2 \right) + \tan \theta_{xm} \left( \lambda^2 \sin \theta_{xm} + (\lambda^2 - 1) \sqrt{\lambda^2 - \cos^2 \theta_{xm}} + \sin^2 \theta_{xm} \sqrt{\lambda^2 - \cos^2 \theta_{xm}} \right) + 2 \cos^3 \theta_{xm} \right) / \left( 2 \sqrt{\lambda^2 - \cos^2 \theta_{xm}} \left( \sin \theta_{xm} \sqrt{\lambda^2 - \cos^2 \theta_{xm}} + \sin^2 \theta_{xm} - \cos^2 \theta_{xm} + \lambda^2 \right) \right) \quad (75)$$

L'équation (3.43c) est de la forme :

$$2C_1 - \frac{C_2 (\lambda^2 - 2)}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} - K_0 = 0 \quad (76)$$

En remplaçant  $C_1$  à partir de l'équation (73) dans l'équation (76), on obtient :

$$2\gamma_1 K_1 + \gamma_3 C_2 - K_0 = 0, \text{ où } \gamma_3 = 2\gamma_2 - \frac{\lambda^2 - 2}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \quad (77)$$

En remplaçant l'expression de  $C_2$  de l'équation (3.48) dans (77), on obtient une équation quadratique en  $b$  :  $\rho g \gamma_3 (\lambda + 1) b^2 + M g \gamma_3 b + 2\gamma_1 K_1 - K_0 = 0$ . La simplification par le terme dominant donne :  $b^2 + \frac{M}{\rho(\lambda+1)} b + \frac{2\gamma_1 K_1 - K_0}{\rho g \gamma_3 (\lambda+1)} = 0$ . Les deux solutions à cette équation sont données par :

$$b = -\frac{M}{2\rho(\lambda+1)} \pm \sqrt{\left( \frac{M}{2\rho(\lambda+1)} \right)^2 - \left( \frac{2\gamma_1 K_1 - K_0}{\rho g \gamma_3 (\lambda+1)} \right)} \quad (78)$$

Les solutions faisant intervenir un signe "-" avant la racine carrée sont évidemment négatives. Ainsi, seule la solution avec un signe "+" est considérée pour s'assurer que  $b > 0$ . Après certaines simplifications l'expression de  $b$  exprimée selon  $\lambda$  peut-être écrite comme suit :

$$b = \frac{\sqrt{\gamma_3^2 g^2 M^2 - 4\gamma_3 g(\lambda + 1)\rho(2\gamma_1 K_1 - K_0)} - \gamma_3 g M}{2\gamma_3 g(\lambda + 1)\rho} \quad (79)$$

En utilisant cette expression de  $b$ , il est possible d'obtenir  $C_2$  (à partir de l'équation (3.48)), et ainsi  $C_1$  en fonction de  $\lambda$ . Ensuite, à partir de la définition de  $C_1$  (voir équation (3.43b)), la constante de raideur  $k$  peut-être trouvée comme :  $k = \frac{C_1 + 2Mgd}{2b^2}$ . L'inégalité dans l'équation (3.43d) fournit :

$$2C_1 - \frac{C_2(\lambda^2 - 2)}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} + \frac{2bF_{\max}}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \geq 0 \quad (80)$$

En utilisant l'équation (76), l'inégalité précédente devient :

$$K_0 + \frac{2bF_{\max}}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \geq 0 \quad (81)$$

Étant donné que les deux conditions figurant à gauche de l'inégalité susmentionnée sont positives, il s'ensuit que l'inégalité serait satisfaite par défaut sans imposer de conditions supplémentaires.

Ainsi, le problème d'optimisation pour la conception de l'articulation en X se pose comme suit :

$$\begin{aligned} \underset{\lambda}{\text{Minimise}} \quad F_{\max}(\lambda) &= \frac{C_2 \lambda^4 \sin \theta_{xm} \tan^2 \theta_{xm} + K_1 \tan \theta_{xm} (\lambda^2 - \cos^2 \theta_{xm})^{3/2}}{b \cos \theta_{xm} ((\lambda^2 - \cos^2 \theta_{xm})^{3/2} - \sin^3 \theta_{xm})} \\ \text{sujet à} \quad k &\in [0, 2000], \\ b &\in [0.05, 0.2], \\ \lambda &\in [1, 5], \end{aligned} \quad (82)$$

où  $\lambda$  est la seule variable de conception dans ce problème ( $\lambda = \frac{l}{b}$ ). Les limites sur  $k$  et  $b$  doivent être transférées à  $\lambda$ , pour définir l'espace de conception possible pour l'articulation en X. Cependant, en raison de la relation fonctionnelle complexe entre les variables, un ensemble équivalent de conditions algébriques sur  $\lambda$  n'a pas pu être obtenu. Néanmoins, à partir d'un tracé de  $b$  (respectivement  $k$ ) selon  $\lambda$ , il est possible d'identifier visuellement les régions réalisables, puis de calculer numériquement les points limites correspondants, pour définir l'espace de conception réalisable.

Comme dans le cas précédent, la condition nécessaire au premier ordre pour que  $F_{\max}$  atteigne un minimum est obtenue à partir de la condition :  $\frac{dF_{\max}}{d\lambda} = 0$ . On trouve l'expression algébrique correspondante :

$$\begin{aligned} \frac{dF_{\max}}{d\lambda} &= \frac{\lambda \tan^3 \theta_{xm} \left( C_2 \lambda^2 \left( (\lambda^2 - 4 \cos^2 \theta_{xm}) \sqrt{\lambda^2 - \cos^2 \theta_{xm}} - 4 \sin^3 \theta_{xm} \right) + 3K_1 \sin \theta_{xm} \cos \theta_{xm} \sqrt{\lambda^2 - \cos^2 \theta_{xm}} \right)}{b \left( (\lambda^2 - \cos^2 \theta_{xm})^{3/2} - \sin^3 \theta_{xm} \right)^2} \\ &+ \frac{\lambda^4 \tan^3 \theta_{xm}}{b \left( (\lambda^2 - \cos^2 \theta_{xm})^{3/2} - \sin^3 \theta_{xm} \right)} \frac{dC_2}{d\lambda}, \end{aligned} \quad (83)$$

où

$$\frac{dC_2}{d\lambda} = -\frac{2K_1}{\gamma_3} \frac{d\gamma_1}{d\lambda} + -\frac{K_0 - 2\gamma_1 K_1}{\gamma_3^2} \frac{d\gamma_3}{d\lambda}, \text{ in which,} \quad (84)$$

$$\frac{d\gamma_1}{d\lambda} = \frac{2\gamma_1^2 \lambda \sin \theta_{xm} \cos^2 \theta_{xm} \left( 2 \sin \theta_{xm} \sqrt{\lambda^2 - \cos^2 \theta_{xm}} - \cos^2 \theta_{xm} + \lambda^2 \right)}{(\lambda^2 - \cos^2 \theta_{xm})^{5/2}} \quad (85)$$

$$\frac{d\gamma_3}{d\lambda} = \frac{\lambda^3 \sec^3 \theta_{xm} \left( 2 \sin \theta_{xm} \sqrt{\lambda^2 - \cos^2 \theta_{xm}} + 3 \cos^4 \theta_{xm} - 7 \cos^2 \theta_{xm} + \lambda^2 + 3 \right)}{\sqrt{\lambda^2 - \cos^2 \theta_{xm}} \left( \sin \theta_{xm} \sqrt{\lambda^2 - \cos^2 \theta_{xm}} + \sin^2 \theta_{xm} - \cos^2 \theta_{xm} + \lambda^2 \right)^2} - \frac{\lambda^3}{(\lambda^2 - 1)^{3/2}} \quad (86)$$

## .B Prise en compte des poulies dans le calcul de la longueur active de câble

### .B.1 Placement des câbles

Nous allons étudier deux cas différents :

- Celui où le câble passe sur le côté d'un module  $i$ , puis en strut-routed sur tous les modules  $j$  en dessous ( $j < i$ )
- Celui où le câble passe tout le long du manipulateur sur l'un des côtés

Commençons avec le premier cas, que nous séparons en deux : la partie sur le module actionné par le côté, et la partie en strut-routed.

La partie actionnée sur le côté est résumée sur la Figure 13. Le câble rouge tire sur le côté gauche, est attaché au milieu de la poulie 3 et s'enroule autour de la poulie 1. De manière symétrique, le câble bleu tire sur le côté droit, est attaché au milieu de la poulie 4 et s'enroule autour de la poulie 2.

La partie en strut-routed est résumée sur la Figure 14. Le câble rouge passe par la droite de la poulie 2, s'enroule par la gauche sur la poulie 3 puis s'enroule par le bas de la poulie 4. La solution symétrique, non représentée sur la figure, est également possible.

Poursuivons avec le second cas, où le câble passe tout le long du manipulateur sur l'un des côtés. Ici aussi, on sépare le cas en deux : le dernier module actionné d'un part, les modules situés en dessous d'autre part. Concernant le dernier module actionné, le câblage est celui de la Figure 13. Pour tous les modules inférieurs, le câblage est celui de la Figure 15. Le câble s'enroule autour de la poulie 1 puis autour de la poulie 3, en liant les deux par l'extérieur (en faisant un tour complet sur chacune des poulies pour garantir que le câble passe toujours par ces poulies). La solution symétrique, non représentée sur la figure, est également possible.

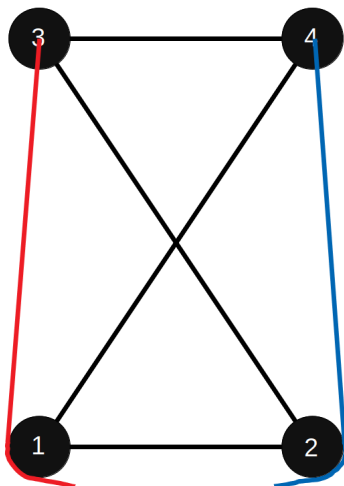


FIGURE 13 – Actionnement d'un module sur le côté

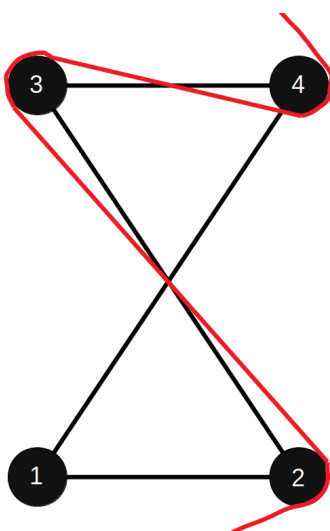


FIGURE 14 – Passage du câble en strut-routed

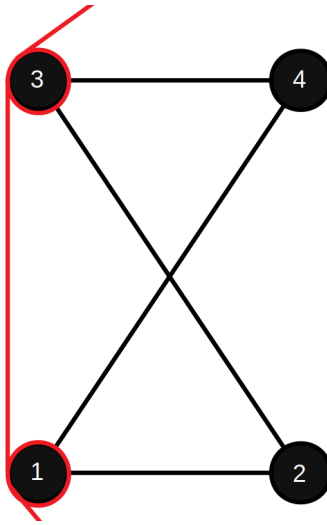


FIGURE 15 – Câble long : actionnement des modules inférieurs

## .B.2 Longueur des câbles

Introduisons d'abord quelques longueurs générales. Soit  $l_m(i)$  la distance entre le milieu de la barre du bas et le milieu de la barre du haut du module  $i$ . On a :

$$l_m(i) = \sqrt{L^2 - b^2 \cos^2\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)} \quad (87)$$

Soient  $l_l(i)$  et  $l_r(i)$  les longueurs des ressorts respectivement à gauche et à droite (distance entre les centres des poulies 1 – 3 et 2 – 4). On a :

$$l_l(i) = l_m(i) - b \sin\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \quad (88)$$

$$l_r(i) = l_m(i) + b \sin\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \quad (89)$$

## .B.3 Actionnement sur le côté

Nous pouvons maintenant étudier le câblage de la Figure 13. Nous détaillons les calculs pour la câble rouge, sur la gauche. La longueur de ce câble qui ne dépend que de ce module  $i$  peut s'écrire de la manière suivante :

$$l_i = l_i^t(i) + r\beta_1^1(i) \quad (90)$$

où  $l_i^t(\alpha_i)$  est la longueur du câble entre le centre de la poulie 3 et l'endroit où le câble entre en contact avec la poulie 1, et  $\beta_1^1(i)$  est l'angle d'enroulement du câble sur la poulie 1 qui ne dépend que de l'orientation du module  $i$ .

La longueur  $l_i^t(i)$  s'obtient avec le théorème de Pythagore (à partir de l'angle droit qu'effectue le câble avec un rayon de la poulie 1) :

$$l_i^t(i) = \sqrt{l_l(i)^2 - r^2} \quad (91)$$

L'angle  $\beta_1^1(i)$  obtenue par raisonnement géométrique est :

$$\beta_1^1(i) = -atan\left(\frac{\sqrt{l_l(i)^2 - r^2}}{r}\right) - \frac{\alpha_i}{2} \quad (92)$$

L'équation (90) peut donc se réécrire :

$$l_i = l_l^t(i) + r\left(-atan\left(\frac{\sqrt{l_l(i)^2 - r^2}}{r}\right) - \frac{\alpha_i}{2}\right) \quad (93)$$

Avec le même raisonnement, la longueur du câble bleu s'écrit :

$$l_i = l_r^t(i) + r\left(\frac{\alpha_i}{2} - atan\left(\frac{\sqrt{l_r(i)^2 - r^2}}{r}\right)\right) \quad (94)$$

avec

$$l_r^t(i) = \sqrt{l_r(i)^2 - r^2} \quad (95)$$

#### .B.4 Strut-routed

On calcule ici la longueur  $l_i$  du câble rouge de la Figure 14 qui ne dépend que du module  $i$  de cette figure. Tout d'abord, on peut démontrer géométriquement que les portions de câbles qui lient les poulies ont une longueur constante (calculable avec le théorème de Pythagore). On peut donc écrire :

$$l_i = r(\beta_2^2(i) + \beta_3^2(i) + \beta_4^2(i)) \quad (96)$$

où  $\beta_k^2(i)$  est l'angle d'enroulement du câble autour de la poulie  $k$  qui ne dépend que de l'orientation du module  $i$ .

On obtient par raisonnement géométrique :

$$\beta_2^2(i) = \psi_i \quad (97)$$

$$\beta_3^2(i) = \psi_i - \alpha_i \quad (98)$$

$$\beta_4^2(i) = 0 \quad (99)$$

On en déduit donc que :

$$l_i = r(2\psi_i - \alpha_i) \quad (100)$$

Il se trouve que ce résultat est symétrique en  $\alpha$ . Ceci implique que le cas du strut-routed symétrique a la même longueur relative de câble.

#### .B.5 Câble long

Le cas du dernier module actionné par le câble long a déjà été traité dans la partie .B.3. Il reste à traiter le cas de la Figure 15, dont on doit déterminer la longueur du câble  $l_i$  qui ne dépend que de ce module  $i$ .

Par raisonnement géométrique, on peut montrer que la portion de câble qui lie les poulies 1 et 3 est de longueur  $l_l(i)$ . On a donc :

$$l_i = l_l(i) + r(\beta_1^3(i) + \beta_3^3(i)) \quad (101)$$

où  $\beta_k^3(i)$  est l'angle d'enroulement du câble autour de la poulie  $k$  qui ne dépend que de l'orientation du module  $i$ .

Par raisonnement géométrique, on obtient :

$$\beta_1^3(i) = -\frac{\alpha_i}{2} \quad (102)$$

$$\beta_3^3(i) = -\frac{\alpha_i}{2} \quad (103)$$

On en déduit que :

$$l_i = l_l(i) - r\alpha_i \quad (104)$$

Par symétrie, on en déduit que la longueur équivalente pour un câble passant à droite est :

$$l_i = l_r(i) + \alpha_i \quad (105)$$

## .B.6 Position des moteurs

La conversion entre la longueur d'un câble  $j$  et la position moteur associée  $q(j)$  est :

$$q(j) = q_0(j) + \frac{R}{r_d} l(j) \quad (106)$$

où  $q_0(j)$  est une constante.

## .B.7 Dérivées des longueurs

Les dérivées des longueurs nous sont utiles pour calculer les coefficients de la matrice  $Z$  et la matrice d'inertie des moteurs. Les dérivées secondes sont utiles dans le calcul de Coriolis, mais ne sont pas détaillées dans ce rapport.

En dérivant (87), on obtient :

$$\frac{\partial l_m(i)}{\partial \alpha_i} = \frac{b^2 \cos(\frac{\alpha_i}{2}) \sin(\frac{\alpha_i}{2})}{2l_m(i)} = \frac{b^2 \sin(\alpha_i)}{4l_m(i)} \quad (107)$$

En dérivant (88) et (89), on obtient :

$$\frac{\partial l_l(i)}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial l_m(i)}{\partial \alpha_i} - \frac{b}{2} \cos(\frac{\alpha_i}{2}) \quad (108)$$

$$\frac{\partial l_r(i)}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial l_m(i)}{\partial \alpha_i} + \frac{b}{2} \cos(\frac{\alpha_i}{2}) \quad (109)$$

En dérivant (93), on obtient que la dérivée de la longueur relative du câble rouge de la Figure 13 est :

$$\frac{\partial l_i}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial l_i^t(i)}{\partial \alpha_i} \left(1 - \frac{r^2}{l_i(i)^2}\right) - \frac{r}{2} \quad (110)$$

avec

$$\frac{\partial l_i^t(i)}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial l_i(i)}{\partial \alpha_i} \frac{l_i(i)}{l_i^t(i)} \quad (111)$$

En dérivant (94), on obtient que la dérivée de la longueur relative du câble bleu de la Figure 13 est :

$$\frac{\partial l_i}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial l_r^t(i)}{\partial \alpha_i} \left(1 - \frac{r^2}{l_r(i)^2}\right) + \frac{r}{2} \quad (112)$$

avec

$$\frac{\partial l_r^t(i)}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial l_r(i)}{\partial \alpha_i} \frac{l_r(i)}{l_r^t(i)} \quad (113)$$

En dérivant (100), on obtient que la dérivée de la longueur relative du câble rouge de la Figure 14 est :

$$\frac{\partial l_i}{\partial \alpha_i} = r \left(2 \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i} - 1\right) \quad (114)$$

Par symétrie, le résultat est identique pour un câble en strut-routed de façon symétrique.

En dérivant (104), on obtient que la dérivée de la longueur relative du câble rouge de la Figure 15 est :

$$\frac{\partial l_i}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial l_i(i)}{\partial \alpha_i} - r \quad (115)$$

Dans le cas symétrique (le câble long passant à droite), on a :

$$\frac{\partial l_i}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial l_r(i)}{\partial \alpha_i} + r \quad (116)$$

On peut donc écrire les coefficients de la matrice  $Z$  à partir des équations (110), (112), (114), (115) et (116).

Pour notre manipulateur avec 3 modules et 4 moteur, la matrice  $Z$  s'écrit donc :

$$Z = \begin{pmatrix} \frac{\partial l_i(1)}{\partial \alpha_1} - r & \frac{\partial l_r^t(1)}{\partial \alpha_1} \left(1 - \frac{r^2}{l_r(1)^2}\right) + \frac{r}{2} & r \left(2 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} - 1\right) & r \left(2 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} - 1\right) \\ \frac{\partial l_i(2)}{\partial \alpha_2} - r & 0 & \frac{\partial l_r^t(2)}{\partial \alpha_2} \left(1 - \frac{r^2}{l_r(2)^2}\right) + \frac{r}{2} & r \left(2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} - 1\right) \\ \frac{\partial l_i^t(3)}{\partial \alpha_3} \left(1 - \frac{r^2}{l_i(3)^2}\right) - \frac{r}{2} & 0 & 0 & \frac{\partial l_r^t(3)}{\partial \alpha_3} \left(1 - \frac{r^2}{l_r(3)^2}\right) + \frac{r}{2} \end{pmatrix} \quad (117)$$

C'est une matrice non-diagonale, mais qui possède une partie triangulaire.



## .C Calcul de la matrice de Coriolis d'un manipulateur plan à N DDL

### .C.1 Expression de C en fonction de M

$$C(\alpha, \dot{\alpha}) = \dot{M}\dot{\alpha} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}^T & \frac{\partial M}{\partial \alpha_1} & \dot{\alpha} \\ \dot{\alpha}^T & \dots & \\ \dot{\alpha}^T & \frac{\partial M}{\partial \alpha_N} & \dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad (118)$$

$$M = \sum_{i=1}^N R_i^T M_i R_i \quad (119)$$

$$\dot{M} = \sum_{i=1}^N \dot{R}_i^T M_i R_i + R_i^T \dot{M}_i R_i + R_i^T M_i \dot{R}_i \quad (120)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \alpha_k} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial R_i^T}{\partial \alpha_k} M_i R_i + R_i^T \frac{\partial M_i}{\partial \alpha_k} R_i + R_i^T M_i \frac{\partial R_i}{\partial \alpha_k} \quad (121)$$

### .C.2 Dérivation de la matrice M

$$M_{xxi} = M_{yyi} = m_{2i} + m_{3i} + m_{4i} \quad (122)$$

$$\dot{M}_{xxi} = \dot{M}_{yyi} = 0 \quad (123)$$

$$\frac{\partial M_{xxi}}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial M_{yyi}}{\partial \alpha_k} = 0 \quad (124)$$

$$M_{\alpha\alpha i} = m_{2i} \left( \frac{L^2 S_{2i}^2(\alpha_i)}{4} \right) + m_{3i} \left( \frac{L^2 S_{3i}^2(\alpha_i)}{4} \right) + m_{4i} \left( \left( \frac{dl_i(\alpha_i)}{d\alpha_i} \right)^2 + \frac{l_i^2(\alpha_i)}{4} \right) + S_{2i}^2(\alpha_i) I_{2i} + S_{3i}^2(\alpha_i) I_{3i} + I_{4i} \quad (125)$$

$$\dot{M}_{\alpha\alpha i} = m_{2i} \left( \frac{L^2 \dot{S}_{2i} S_{2i}(\alpha_i)}{2} \right) + m_{3i} \left( \frac{L^2 \dot{S}_{3i} S_{3i}(\alpha_i)}{2} \right) + m_{4i} \left( 2 \left( \frac{dl_i(\alpha_i)}{d\alpha_i} \right) \left( \frac{dl_i(\alpha_i)}{d\alpha_i} \right) + \frac{2l_i \dot{l}_i(\alpha_i)}{4} \right) + 2\dot{S}_{2i} S_{2i}(\alpha_i) I_{2i} + 2\dot{S}_{3i} S_{3i}(\alpha_i) I_{3i} \quad (126)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{\alpha\alpha i}}{\partial \alpha_i} &= m_{2i} \left( \frac{L^2 \frac{\partial S_{2i}}{\partial \alpha_i} S_{2i}(\alpha_i)}{2} \right) + m_{3i} \left( \frac{L^2 \frac{\partial S_{3i}}{\partial \alpha_i} S_{3i}(\alpha_i)}{2} \right) \\ &+ m_{4i} \left( 2 \left( \frac{d^2 l_i(\alpha_i)}{d^2 \alpha_i} \right) \left( \frac{dl_i(\alpha_i)}{d\alpha_i} \right) + \frac{\left( \frac{dl_i(\alpha_i)}{d\alpha_i} \right) l_i(\alpha_i)}{2} \right) + 2 \frac{\partial S_{2i}}{\partial \alpha_i} S_{2i}(\alpha_i) I_{2i} + 2 \frac{\partial S_{3i}}{\partial \alpha_i} S_{3i}(\alpha_i) I_{3i} \end{aligned} \quad (127)$$

$$M_{\gamma\gamma i} = m_{2i} \left( \frac{b^2}{4} + \frac{L^2}{4} - \frac{bL}{2} \cos(\phi_i) \right) + m_{3i} \left( \frac{b^2}{4} + \frac{L^2}{4} - \frac{bL}{2} \cos(\psi_i) \right) + m_{4i} \left( l_i^2(\alpha_i) \right) + I_{2i} + I_{3i} + I_{4i} \quad (128)$$

$$\dot{M}_{\gamma\gamma i} = \dot{\phi}_i \frac{m_{2i}bL}{2} \sin(\phi_i) + \dot{\psi}_i \frac{m_{3i}bL}{2} \sin(\psi_i) + 2m_{4i}\dot{l}_i l_i(\alpha_i) \quad (129)$$

$$\frac{\partial M_{\gamma\gamma i}}{\partial \alpha_k} = S_{2i} \frac{m_{2i}bL}{2} \sin(\phi_i) + S_{3i} \frac{m_{3i}bL}{2} \sin(\psi_i) + 2m_{4i}l_i(\alpha_i) \frac{\partial l_i}{\partial \alpha_i} \quad (130)$$

$$M_{\alpha\gamma i} = m_{2i} \left( \frac{L^2}{4} S_{2i}(\alpha_i) - \frac{bL}{4} S_{2i}(\alpha_i) \cos(\phi_i) \right) + m_{3i} \left( \frac{L^2}{4} S_{3i}(\alpha_i) - \frac{bL}{4} S_{3i}(\alpha_i) \cos(\psi_i) \right) + m_{4i} \left( \frac{l_i^2(\alpha_i)}{4} \right) + S_{2i}(\alpha_i) I_{2i} + S_{3i}(\alpha_i) I_{3i} + I_{4i} \quad (131)$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_{\alpha\gamma i} &= m_{2i} \left( \frac{L^2}{4} \dot{S}_{2i}(\alpha_i) - \frac{bL}{4} \dot{S}_{2i}(\alpha_i) \cos(\phi_i) + \dot{\phi}_i \frac{bL}{4} S_{2i}(\alpha_i) \sin(\phi_i) \right) \\ &+ m_{3i} \left( \frac{L^2}{4} \dot{S}_{3i}(\alpha_i) - \frac{bL}{4} \dot{S}_{3i}(\alpha_i) \cos(\psi_i) + \dot{\psi}_i \frac{bL}{4} S_{3i}(\alpha_i) \sin(\psi_i) \right) \\ &+ m_{4i} \left( \frac{2\dot{l}_i l_i(\alpha_i)}{4} \right) + \dot{S}_{2i}(\alpha_i) I_{2i} + \dot{S}_{3i}(\alpha_i) I_{3i} \end{aligned} \quad (132)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{\alpha\gamma i}}{\partial \alpha_k} &= m_{2i} \left( \frac{L^2}{4} \frac{\partial S_{2i}}{\partial \alpha_k} - \frac{bL}{4} \frac{\partial S_{2i}}{\partial \alpha_k} \cos(\phi_i) + \frac{bL}{4} S_{2i}^2(\alpha_i) \sin(\phi_i) \right) \\ &+ m_{3i} \left( \frac{L^2}{4} \frac{\partial S_{3i}}{\partial \alpha_k} - \frac{bL}{4} \frac{\partial S_{3i}}{\partial \alpha_k} \cos(\psi_i) + \frac{bL}{4} S_{3i}^2(\alpha_i) \sin(\psi_i) \right) \\ &+ m_{4i} \left( \frac{2 \frac{\partial l_i}{\partial \alpha_k} l_i(\alpha_i)}{4} \right) + \frac{\partial S_{2i}}{\partial \alpha_k} I_{2i} + \frac{\partial S_{3i}}{\partial \alpha_k} I_{3i} \end{aligned} \quad (133)$$

$$M_{\alpha\alpha i} = -m_{2i} \left( \frac{L}{2} S_{2i}(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \phi_i) \right) - m_{3i} \left( \frac{L}{2} S_{3i}(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \psi_i) \right) + m_{4i} \left( \frac{dl_i(\alpha_i)}{d\alpha_i} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{l_i(\alpha_i)}{2} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \quad (134)$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_{\alpha\alpha i} &= -m_{2i} \left( \frac{L}{2} \dot{S}_{2i} \sin(\gamma_i + \phi_i) + (\dot{\gamma}_i + \dot{\phi}_i) \frac{L}{2} S_{2i}(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \phi_i) \right) \\ &- m_{3i} \left( \frac{L}{2} \dot{S}_{3i} \sin(\gamma_i + \psi_i) + (\dot{\gamma}_i + \dot{\psi}_i) \frac{L}{2} S_{3i}(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \psi_i) \right) \\ &+ m_{4i} \left( \frac{dl_i(\alpha_i)}{d\alpha_i} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) + (\dot{\gamma}_i + \frac{\dot{\alpha}_i}{2}) \frac{dl_i(\alpha_i)}{d\alpha_i} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{l_i(\alpha_i)}{2} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) + (\dot{\gamma}_i + \frac{\dot{\alpha}_i}{2}) \frac{l_i(\alpha_i)}{2} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \end{aligned} \quad (135)$$

Si  $k < i$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{\alpha\alpha i}}{\partial \alpha_k} &= -m_{2i} \left( \frac{L}{2} S_{2i}(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \phi_i) \right) \\ &- m_{3i} \left( \frac{L}{2} S_{3i}(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \psi_i) \right) \\ &+ m_{4i} \left( \frac{dl_i(\alpha_i)}{d\alpha_i} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) + \frac{l_i(\alpha_i)}{2} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \end{aligned} \quad (136)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_{\alpha yi}}{\partial \alpha_k} &= -m_{2i} \left( \frac{L}{2} S_{2i}(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \phi_i) \right) \\
&\quad - m_{3i} \left( \frac{L}{2} S_{3i}(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \psi_i) \right) \\
&\quad + m_{4i} \left( -\frac{dl_i(\alpha_i)}{d\alpha_i} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{l_i(\alpha_i)}{2} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right)
\end{aligned} \tag{137}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_{\gamma xi}}{\partial \alpha_k} &= m_{2i} \left( \frac{b}{2} \cos(\gamma_i) - \frac{L}{2} \cos(\gamma_i + \phi_i) \right) \\
&\quad + m_{3i} \left( \frac{b}{2} \cos(\gamma_i) - \frac{L}{2} \cos(\gamma_i + \psi_i) \right) \\
&\quad + m_{4i} \left( l_i(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right)
\end{aligned} \tag{138}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_{\gamma xi}}{\partial \alpha_k} &= m_{2i} \left( \frac{b}{2} \sin(\gamma_i) - \frac{L}{2} \sin(\gamma_i + \phi_i) \right) \\
&\quad + m_{3i} \left( \frac{b}{2} \sin(\gamma_i) - \frac{L}{2} \sin(\gamma_i + \psi_i) \right) \\
&\quad + m_{4i} \left( -l_i(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right)
\end{aligned} \tag{139}$$

Si  $k = i$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_{\alpha xi}}{\partial \alpha_k} &= -m_{2i} \left( \frac{L}{2} \frac{\partial S_{2i}}{\partial \alpha_k} \sin(\gamma_i + \phi_i) + \frac{L}{2} S_{2i}^2 \cos(\gamma_i + \phi_i) \right) \\
&\quad - m_{3i} \left( \frac{L}{2} \frac{\partial S_{3i}}{\partial \alpha_k} \sin(\gamma_i + \psi_i) + \frac{L}{2} S_{3i}^2(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \psi_i) \right) \\
&\quad + m_{4i} \left( \frac{d^2 l_i(\alpha_i)}{d^2 \alpha_i} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{1}{2} \frac{\partial l_i}{\partial \alpha_k} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{dl_i(\alpha_i)}{d\alpha_i} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) + \frac{1}{4} l_i \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right)
\end{aligned} \tag{140}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_{\alpha yi}}{\partial \alpha_k} &= +m_{2i} \left( \frac{L}{2} \frac{\partial S_{2i}}{\partial \alpha_k} \cos(\gamma_i + \phi_i) - \frac{L}{2} S_{2i}^2(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \phi_i) \right) \\
&\quad + m_{3i} \left( \frac{L}{2} \frac{\partial S_{3i}}{\partial \alpha_k} \cos(\gamma_i + \psi_i) - \frac{L}{2} S_{3i}^2(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \psi_i) \right) \\
&\quad + m_{4i} \left( \frac{d^2 l_i(\alpha_i)}{d^2 \alpha_i} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{1}{2} \frac{\partial l_i}{\partial \alpha_k} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{dl_i(\alpha_i)}{d\alpha_i} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{1}{4} l_i \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right)
\end{aligned} \tag{141}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_{\gamma xi}}{\partial \alpha_k} &= m_{2i} \left( -S_{2i} \frac{L}{2} \cos(\gamma_i + \phi_i) \right) \\
&\quad + m_{3i} \left( -S_{3i} \frac{L}{2} \cos(\gamma_i + \psi_i) \right) \\
&\quad + m_{4i} \left( -\frac{\partial l_i}{\partial \alpha_k} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) + \frac{1}{2} l_i(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right)
\end{aligned} \tag{142}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{\gamma xi}}{\partial \alpha_k} &= +m_{2i} \left( -S_{2i} \frac{L}{2} \sin(\gamma_i + \phi_i) \right) \\ &\quad + m_{3i} \left( -S_{3i} \frac{L}{2} \sin(\gamma_i + \psi_i) \right) \\ &\quad + m_{4i} \left( -\frac{\partial l_i}{\partial \alpha_k} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{1}{2} l_i(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \end{aligned} \quad (143)$$

Si  $k > i$

$$\frac{\partial M_{\alpha xi}}{\partial \alpha_k} = 0 \quad (144)$$

$$\begin{aligned} M_{\alpha yi} &= m_{2i} \left( \frac{L}{2} S_{2i}(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \phi_i) \right) + m_{3i} \left( \frac{L}{2} S_{3i}(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \psi_i) \right) + \\ &\quad m_{4i} \left( \frac{dl_i(\alpha_i)}{d\alpha_i} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{l_i(\alpha_i)}{2} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \end{aligned} \quad (145)$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_{\alpha yi} &= m_{2i} \left( \frac{L}{2} \dot{S}_{2i} \cos(\gamma_i + \phi_i) - (\dot{\gamma}_i + \dot{\phi}_i) \frac{L}{2} S_{2i}(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \phi_i) \right) \\ &\quad + m_{3i} \left( \frac{L}{2} \dot{S}_{3i} \cos(\gamma_i + \psi_i) - (\dot{\gamma}_i + \dot{\psi}_i) \frac{L}{2} S_{3i}(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \psi_i) \right) \\ &\quad + m_{4i} \left( \frac{dl_i(\alpha_i)}{d\alpha_i} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - (\dot{\gamma}_i + \frac{\dot{\alpha}_i}{2}) \frac{dl_i(\alpha_i)}{d\alpha_i} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{l_i(\alpha_i)}{2} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - (\dot{\gamma}_i + \frac{\dot{\alpha}_i}{2}) \frac{l_i(\alpha_i)}{2} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \end{aligned} \quad (146)$$

$$\frac{\partial M_{\alpha yi}}{\partial \alpha_k} = 0 \quad (147)$$

$$\begin{aligned} M_{\gamma xi} &= m_{2i} \left( \frac{b}{2} \sin(\gamma_i) - \frac{L}{2} \sin(\gamma_i + \phi_i) \right) \\ &\quad + m_{3i} \left( \frac{b}{2} \sin(\gamma_i) - \frac{L}{2} \sin(\gamma_i + \psi_i) \right) \\ &\quad + m_{4i} \left( -l_i(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \end{aligned} \quad (148)$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_{\gamma xi} &= m_{2i} \left( \dot{\gamma}_i \frac{b}{2} \cos(\gamma_i) - (\dot{\gamma}_i + \dot{\phi}_i) \frac{L}{2} \cos(\gamma_i + \phi_i) \right) \\ &\quad + m_{3i} \left( \dot{\gamma}_i \frac{b}{2} \cos(\gamma_i) - (\dot{\gamma}_i + \dot{\psi}_i) \frac{L}{2} \cos(\gamma_i + \psi_i) \right) \\ &\quad + m_{4i} \left( -\dot{l}_i(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) + (\dot{\gamma}_i + \frac{\dot{\alpha}_i}{2}) l_i(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \end{aligned} \quad (149)$$

$$\frac{\partial M_{\gamma xi}}{\partial \alpha_k} = 0 \quad (150)$$

$$M_{\gamma yi} = m_{2i} \left( -\frac{b}{2} \cos(\gamma_i) + \frac{L}{2} \cos(\gamma_i + \phi_i) \right) + m_{3i} \left( -\frac{b}{2} \cos(\gamma_i) + \frac{L}{2} \cos(\gamma_i + \psi_i) \right) + m_{4i} \left( -l_i(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \quad (151)$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_{\gamma yi} &= m_{2i} \left( \dot{\gamma}_i \frac{b}{2} \sin(\gamma_i) - (\dot{\gamma}_i + \dot{\phi}_i) \frac{L}{2} \sin(\gamma_i + \phi_i) \right) \\ &\quad + m_{3i} \left( \dot{\gamma}_i \frac{b}{2} \sin(\gamma_i) - (\dot{\gamma}_i + \dot{\psi}_i) \frac{L}{2} \sin(\gamma_i + \psi_i) \right) \\ &\quad + m_{4i} \left( -\dot{l}_i(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - (\dot{\gamma}_i + \frac{\dot{\alpha}_i}{2}) l_i(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \end{aligned} \quad (152)$$

$$\frac{\partial M_{\gamma xi}}{\partial \alpha_k} = 0 \quad (153)$$

### .C.3 Dérivation de la matrice $\mathbf{R}$

$$\mathbf{R}_{i+1} = \mathbf{R}_i + \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} x_{\gamma i} \\ y_{\gamma i} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \times \mathbf{1}_{1 \times (i-1)} \left| \begin{array}{c} x_{\alpha i} \\ y_{\alpha i} \\ 1 \\ -1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right| \mathbf{0}_{4 \times (N-i)} \end{array} \right] \quad (154)$$

$$\dot{\mathbf{R}}_{i+1} = \dot{\mathbf{R}}_i + \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} \dot{x}_{\gamma i} \\ \dot{y}_{\gamma i} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \times \mathbf{1}_{1 \times (i-1)} \left| \begin{array}{c} \dot{x}_{\alpha i} \\ \dot{y}_{\alpha i} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right| \mathbf{0}_{4 \times (N-i)} \end{array} \right] \quad (155)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_{i+1}}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \alpha_k} + \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial x_{\gamma i}}{\partial \alpha_k} \\ \frac{\partial y_{\gamma i}}{\partial \alpha_k} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \times \mathbf{1}_{1 \times (i-1)} \left| \begin{array}{c} \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial \alpha_k} \\ \frac{\partial y_{\alpha i}}{\partial \alpha_k} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right| \mathbf{0}_{4 \times (N-i)} \end{array} \right] \quad (156)$$

$$x_{\gamma i} = -l_i \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \quad (157)$$

$$\dot{x}_{\gamma i} = -\dot{l}_i \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) + l_i \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) (\dot{\gamma}_i + \frac{\dot{\alpha}_i}{2}) \quad (158)$$

si  $k < i$  :

$$\frac{\partial x_{\gamma i}}{\partial \alpha_k} = l_i \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \quad (159)$$

si  $k = i$  :

$$\frac{\partial x_{\gamma i}}{\partial \alpha_k} = -\frac{\partial l_i}{\partial \alpha_k} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) + \frac{l_i}{2} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \quad (160)$$

si  $k > i$  :

$$\frac{\partial x_{\gamma i}}{\partial \alpha_k} = 0 \quad (161)$$

$$y_{\gamma i} = -l_i \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \quad (162)$$

$$\dot{y}_{\gamma i} = -\dot{l}_i \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - l_i \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2})(\dot{\gamma}_i + \frac{\dot{\alpha}_i}{2}) \quad (163)$$

si  $k < i$  :

$$\frac{\partial y_{\gamma i}}{\partial \alpha_k} = -l_i \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \quad (164)$$

si  $k = i$  :

$$\frac{\partial y_{\gamma i}}{\partial \alpha_k} = -\frac{\partial l_i}{\partial \alpha_k} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{l_i}{2} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \quad (165)$$

$$\frac{\partial y_{\gamma i}}{\partial \alpha_k} = 0 \quad (166)$$

si  $k > i$  :

$$x_{\alpha i} = \left( -\frac{dl_i}{d\alpha_i} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{l_i}{2} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \quad (167)$$

$$\dot{x}_{\alpha i} = -\frac{d\dot{l}_i}{d\alpha_i} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{d l_i}{d \alpha_i} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2})(\dot{\gamma}_i + \frac{\dot{\alpha}_i}{2}) - \frac{\dot{l}_i}{2} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) + \frac{l_i}{2} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2})(\dot{\gamma}_i + \frac{\dot{\alpha}_i}{2}) \quad (168)$$

si  $k < i$  :

$$\frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial \alpha_k} = -\frac{dl_i}{d\alpha_i} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) + \frac{l_i}{2} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \quad (169)$$

si  $k = i$  :

$$\frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial \alpha_k} = -\frac{d^2 l_i}{d^2 \alpha_i} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{1}{2} \frac{dl_i}{d\alpha_i} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{1}{2} \frac{dl_i}{d\alpha_i} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) + \frac{l_i}{4} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \quad (170)$$

si  $k > i$  :

$$\frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial \alpha_k} = 0 \quad (171)$$

$$y_{\alpha i} = \left( \frac{dl_i}{d\alpha_i} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{l_i}{2} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \quad (172)$$

$$\dot{y}_{\alpha i} = \frac{d\dot{l}_i}{d\alpha_i} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{dl_i}{d\alpha_i} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2})(\dot{\gamma}_i + \frac{\dot{\alpha}_i}{2}) - \frac{\dot{l}_i}{2} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{l_i}{2} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2})(\dot{\gamma}_i + \frac{\dot{\alpha}_i}{2}) \quad (173)$$

si  $k < i$  :

$$\frac{\partial y_{\alpha i}}{\partial \alpha_k} = -\frac{dl_i}{d\alpha_i} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{l_i}{2} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \quad (174)$$

si  $k = i$  :

$$\frac{\partial y_{\alpha i}}{\partial \alpha_k} = -\frac{d^2 l_i}{d^2 \alpha_i} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{1}{2} \frac{dl_i}{d\alpha_i} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{1}{2} \frac{dl_i}{d\alpha_i} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{l_i}{4} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \quad (175)$$

si  $k > i$  :

$$\frac{\partial y_{\alpha i}}{\partial \alpha_k} = 0 \quad (176)$$

### .C.4 Inertie des moteurs

$$E_{mot} = \frac{1}{2} \left( I_{mot} \frac{R^2}{r_d^2} + \frac{I_d}{r_d^2} \right) \left( \sum_{i=1}^N \frac{dl}{d\alpha_i} \dot{\alpha}_i \right)^2 \quad (177)$$

Pour chaque moteur  $m$ , si le câble correspondant passe par la gauche du module  $i$  et la gauche du module  $j$ , alors :

$$M_m(i, j) = \left( I_{mot} \frac{R^2}{r_d^2} + \frac{I_d}{r_d^2} \right) \frac{dl_{li}}{d\alpha_i} \frac{dl_{lj}}{d\alpha_j} \quad (178)$$

Si le câble correspondant passe par la gauche du module  $i$  et la droite du module  $j$ , alors :

$$M_m(i, j) = \left( I_{mot} \frac{R^2}{r_d^2} + \frac{I_d}{r_d^2} \right) \frac{dl_{li}}{d\alpha_i} \frac{dl_{rj}}{d\alpha_j} \quad (179)$$

Si le câble correspondant passe par la droite du module  $i$  et la droite du module  $j$ , alors :

$$M_m(i, j) = \left( I_{mot} \frac{R^2}{r_d^2} + \frac{I_d}{r_d^2} \right) \frac{dl_{ri}}{d\alpha_i} \frac{dl_{rj}}{d\alpha_j} \quad (180)$$

$$M_{mot} = \sum_m M_m \quad (181)$$

Si le câble correspondant passe par la gauche du module  $i$  et la gauche du module  $j$ , alors :

$$\dot{M}_m(i, j) = \left( I_{mot} \frac{R^2}{r_d^2} + \frac{I_d}{r_d^2} \right) \left( \frac{d\dot{l}_{li}}{d\alpha_i} \frac{dl_{lj}}{d\alpha_j} + \frac{dl_{li}}{d\alpha_i} \frac{d\dot{l}_{lj}}{d\alpha_j} \right) \quad (182)$$

Si le câble correspondant passe par la gauche du module  $i$  et la droite du module  $j$ , alors :

$$\dot{M}_m(i, j) = \left( I_{mot} \frac{R^2}{r_d^2} + \frac{I_d}{r_d^2} \right) \left( \frac{d\dot{l}_{li}}{d\alpha_i} \frac{dl_{rj}}{d\alpha_j} + \frac{dl_{li}}{d\alpha_i} \frac{d\dot{l}_{rj}}{d\alpha_j} \right) \quad (183)$$

Si le câble correspondant passe par la droite du module  $i$  et la droite du module  $j$ , alors :

$$\dot{M}_m(i, j) = \left( I_{mot} \frac{R^2}{r_d^2} + \frac{I_d}{r_d^2} \right) \left( \frac{d\dot{l}_{ri}}{d\alpha_i} \frac{dl_{rj}}{d\alpha_j} + \frac{dl_{ri}}{d\alpha_i} \frac{d\dot{l}_{rj}}{d\alpha_j} \right) \quad (184)$$



Si le câble correspondant passe par la gauche du module  $i$  et la gauche du module  $j$ , alors :

$$\frac{\partial M_m(i, j)}{\partial \alpha_i} = \left( I_{mot} \frac{R^2}{r_d^2} + \frac{I_d}{r_d^2} \right) \frac{d^2 l_i}{d^2 \alpha_i} \frac{d l_j}{d \alpha_j} \quad (185)$$

(x2 si  $i = j$ )

Si le câble correspondant passe par la gauche du module  $i$  et la droite du module  $j$ , alors :

$$\frac{\partial M_m(i, j)}{\partial \alpha_i} = \left( I_{mot} \frac{R^2}{r_d^2} + \frac{I_d}{r_d^2} \right) \frac{d^2 l_i}{d^2 \alpha_i} \frac{d l_{rj}}{d \alpha_j} \quad (186)$$

Si le câble correspondant passe par la droite du module  $i$  et la gauche du module  $j$ , alors :

$$\frac{\partial M_m(i, j)}{\partial \alpha_i} = \left( I_{mot} \frac{R^2}{r_d^2} + \frac{I_d}{r_d^2} \right) \frac{d^2 l_{ri}}{d^2 \alpha_i} \frac{d l_j}{d \alpha_j} \quad (187)$$

Si le câble correspondant passe par la droite du module  $i$  et la droite du module  $j$ , alors :

$$\frac{\partial M_m(i, j)}{\partial \alpha_i} = \left( I_{mot} \frac{R^2}{r_d^2} + \frac{I_d}{r_d^2} \right) \frac{d^2 l_{ri}}{d^2 \alpha_i} \frac{d l_{rj}}{d \alpha_j} \quad (188)$$

(x2 si  $i = j$ )



---

**Titre :** Analyse cinéto-statique de mécanismes de tensegrité : Application à la modélisation de cous d'oiseaux et de manipulateurs bio-inspirés

**Mots clés :** de 3 à 6 mots clefs

**Résumé :** Une structure de tensegrité est un assemblage d'éléments en compression (barres) et d'éléments en traction (câbles, ressorts) maintenus ensemble en équilibre. La tensegrité est connue en architecture et en art depuis plus d'un siècle et est adaptée à la modélisation des organismes vivants. Les mécanismes de tensegrité ont été étudiés plus récemment pour leurs propriétés prometteuses en robotique telles que leur faible inertie, leur compliance naturelle et la capacité de déploiement. Un mécanisme de tensegrité est obtenu lorsqu'un ou plusieurs éléments sont actionnés. Cette thèse s'inscrit dans le cadre du projet AVINECK, auquel participent des biologistes et des roboticiens dans un but double : avoir une meilleure compréhension de la nature et des cous d'oiseaux, et également de s'inspirer de la nature afin de concevoir des manipulateurs bio-inspirés innovants. En premier lieu, une étude a été menée sur la cinématique des vertèbres d'oiseaux. Une modélisation des contacts entre surface articulaire a permis de reconstruire en 3D le mouvement d'une vertèbre d'oiseau quelconque par rapport à une autre, à partir de scans 3D de vraies vertèbres. Ensuite, plusieurs mécanismes simples ont été comparés afin de déterminer le meilleur candidat à la modélisation de la cinématique des cous d'oiseaux.

En second lieu, deux mécanismes de tensegrité à 1 degré de liberté (DDL) potentiellement intéressants pour la modélisation de cous d'oiseaux et la réalisation de manipulateurs ont été modélisés. A partir d'une démarche de conception optimale, deux mécanismes optimaux selon un critère donné ont été dimensionnés, puis comparés afin de déterminer le mécanisme le plus intéressant d'un point de vue conception de manipulateurs. Le mécanisme à 1 DDL retenu a été un anti-parallélogramme actionné de manière antagoniste, appelé mécanisme en X. Un prototype de manipulateur à 2 DDL a ensuite été conçu et réalisé. Une étude du modèle géométrique d'un tel manipulateur a mis en évidence des phénomènes intéressants comme le comportement cuspidal du robot sous certaines conditions. Une étude cinéto-statique du manipulateur a ensuite été effectuée. Le comportement du manipulateur dépendant fortement de la stratégie d'actionnement, celles-ci ont été énumérées et certaines d'entre elles comparées. Les résultats obtenus ont été vérifiés et mis en évidence sur un prototype. Enfin, la modélisation de manipulateurs plans a été étendue aux manipulateurs à N DDL. Un modèle dynamique complet a été obtenu, et une démarche de conception a été menée afin d'obtenir les dimensions et spécifications d'un manipulateur plan bio-inspiré à 10 DDL.

---

**Title :** Kinetostatic analysis of tensegrity mechanisms : Application to the modelling of bird necks and bio-inspired manipulators

**Keywords :** Bio-inspiration, Kinetostatic, tensegrity

**Abstract :** A tensegrity structure is an assembly of elements in compression (bars) and elements in tension (cables, springs) held together in equilibrium. Tensegrity has been known in architecture and art for more than a century and is adapted to the modeling of living organisms. More recently, tensegrity mechanisms have been studied for their promising properties in robotics such as low inertia, natural flexibility and deployment capability. A tensegrity mechanism is obtained when one or more elements are actuated, in our case by cables. This thesis is part of the AVINECK project, in which biologists and roboticists are involved with a dual goal: to have a better understanding of nature and bird necks, and also to draw inspiration from nature in order to design innovative bio-inspired manipulators. First, a study was conducted on the kinematics of bird vertebrae. A modeling of the contacts between articular surfaces allowed to reconstruct in 3D the movement of any bird vertebra with respect to another, based on 3D scans of real vertebrae. Then, several simple mechanisms were compared in order to determine the best candidate for modeling the kinematics of bird necks.

Secondly, two 1-degree of freedom (DDL) tensegrity mechanisms potentially interesting for bird neck modeling and manipulator realization were modeled. Starting from an optimal design approach, two optimal mechanisms according to a given criterion were dimensioned and then compared in order to determine the most interesting mechanism from a manipulator design point of view. The 1 DDL mechanism chosen was an antagonistically actuated anti-parallelogram, called the X mechanism. A prototype of a 2 DDL manipulator was then designed and built. A study of the geometrical model of such a manipulator revealed interesting phenomena such as the cuspidal behaviour of the robot under certain conditions. A kinetostatic study of the manipulator was then carried out. As the behavior of the manipulator strongly depends on the actuation strategy, these were listed and some of them were compared. The results obtained were verified and highlighted on a prototype. Finally, the modeling of plane manipulators was extended to N DDL manipulators. A complete dynamic model was obtained, and a design process was carried out to obtain the dimensions and specifications of a 10 DDL bio-inspired planar manipulator.