



HAL
open science

Effets conjoints du vieillissement, de la maintenance et de l'hétérogénéité sur des systèmes réparables : modélisation, inférence et prise de décision

Léa Brenière

► **To cite this version:**

Léa Brenière. Effets conjoints du vieillissement, de la maintenance et de l'hétérogénéité sur des systèmes réparables : modélisation, inférence et prise de décision. Statistiques [math.ST]. Université Grenoble Alpes [2020-..], 2021. Français. NNT : 2021GRALM008 . tel-03295882

HAL Id: tel-03295882

<https://theses.hal.science/tel-03295882>

Submitted on 22 Jul 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : **Mathématiques appliquées**

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

Léa BRENIÈRE

Thèse dirigée par **Laurent DOYEN**, Maître de conférences,
Université Grenoble Alpes, et
codirigée par **Christophe BÉRENGUER**, Professeur des
Universités, Université Grenoble Alpes (Grenoble INP)

préparée au sein du **Laboratoire Jean Kuntzmann** et du **GIPSA-lab**
dans l'**École Doctorale Mathématiques, Sciences et**
technologies de l'information, Informatique

Effets conjoints du vieillissement, de la maintenance et de l'hétérogénéité sur des systèmes réparables : modélisation, inférence et prise de décision

Thèse soutenue publiquement le **30 Mars 2021**,
devant le jury composé de :

M. Jean-Yves DAUXOIS

Professeur des Universités, INSA Toulouse, Rapporteur

Mme Mitra FOULADIRAD

Professeur des Universités, UT Troyes, Rapporteur

M. Olivier GAUDOIN

Professeur des Universités, Université Grenoble Alpes / Grenoble INP,
Examineur et Président du jury

Mme Leïla MARLE

Docteur, GRTgaz, Examinatrice

M. Laurent DOYEN

Maître de conférences, Université Grenoble Alpes, Directeur de thèse

M. Christophe BÉRENGUER

Professeur des Universités, Université Grenoble Alpes / Grenoble INP,
Directeur de thèse



UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES
ÉCOLE DOCTORALE MSTII
Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information, Informatique

THÈSE

pour obtenir le titre de

docteur en sciences

de l'Université Grenoble Alpes

Mention : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Présentée et soutenue par

Léa BRENIÈRE

**Effets conjoints du vieillissement, de la maintenance et de
l'hétérogénéité sur des systèmes réparables : modélisation,
inférence et prise de décision**

Thèse dirigée par Laurent DOYEN et Christophe BÉRENGUER
préparée au laboratoire Laboratoire Jean Kuntzmann (LJK) et au
GIPSA-lab

soutenue le 30 Mars 2021

Jury :

<i>Rapporteurs :</i>	Jean-Yves DAUXOIS	- INSA Toulouse
	Mitra FOULADIRAD	- UT Troyes
<i>Examineurs :</i>	Olivier GAUDOIN	- Université Grenoble Alpes, Grenoble INP
	Leïla MARLE	- GRTgaz
<i>Directeurs :</i>	Laurent DOYEN	- Université Grenoble Alpes
	Christophe BÉRENGUER	- Université Grenoble Alpes, Grenoble INP

Remerciements

Je tiens à remercier d'abord mes directeurs de thèse, Laurent Doyen et Christophe Béren-guer. Je ne leur ai pas assez dit, alors je profite de cet espace pour le faire : leur encadrement a été parfait à tous points de vue. Chacun à leur manière, ils ont su apporter ce qu'il fallait au bon moment pour que ma thèse avance. Et cela n'a pas dû être toujours facile ! Malgré mes périodes de crise, ils ont tenu bon et je leur en suis infiniment reconnaissante. Si j'ai pu fournir un travail de qualité, c'est d'abord grâce à eux.

Je remercie également tous les membres de mon jury : mes rapporteurs, Mitra Fouladirad et Jean-Yves Dauxois, pour leurs commentaires pleins de sens tant dans leurs rapports que lors de la soutenance, et mon examinatrice, Leïla Marle, qui a apporté d'autres éléments fort pertinents au cours de la séance de questions. Olivier Gaudoin, président de ce jury, n'a pas manqué de rappeler qu'il m'avait d'abord accueillie au laboratoire en tant que stagiaire de Master. Je le remercie pour cet encadrement scientifique qui m'a beaucoup apporté en tant qu'apprentie chercheuse. Je remercie également Rémy Drouilhet, qui a participé à ce projet avec bonne humeur.

Sur le plan scientifique (mais évidemment humain aussi, de manière indissociable), je souhaite remercier mes professeurs de l'université de Reims, pour m'avoir transmis leur passion avec une immense patience : en particulier (mais pas seulement) Mme Barka, M. Jaillet, M. Maes, Mme Carassus, M. Regnault... Les mathématiques n'auraient pas eu ce visage sans eux. Ils ont soutenu ma progression dans ce monde fascinant avec rigueur et bienveillance. Je salue également au passage mes camarades et amis des bancs de la fac, Pauline, Aurore, Flore, Amélie, Alexis, Marco, Fanny, et d'autres encore, avec qui j'ai passé de très bons moments.

L'accueil au Laboratoire Jean Kuntzmann a été très chaleureux à mon arrivée en stage. Je remercie tout particulièrement Laurence dont le soutien est allé bien au delà des aspects purement administratifs, et qui m'a ouvert la porte du bureau 124. Ce que j'y ai trouvé est inoubliable. Il y avait entre autres JBK, véritable pilier du bureau qu'il n'a toujours pas quitté, Jojo, dont le calme cache un humour bien placé, M'Pok, expatrié à Nantes après tant de bons et loyaux services, Thomas, qui n'était malheureusement pas beaucoup au 124, et Benoît, dont les parties d'échecs amenaient souvent des spectateurs. Il y avait aussi des objets de diverses natures comme Sophie la girafe, un certain nombre de petites balles en mousse, dont j'ai souvent été la cible, un brumisateur, des cadres accueillant les sages citations des occupants du bureau, une collection de poulpes, j'en passe mais peut-être pas des meilleurs. Mais ce sont surtout les habitants du 124 qui ont rendu ces quatre ans exceptionnels, en enrichissant ma culture de nombreux artistes et de références que je n'aurais jamais pu saisir sans eux, en me ramassant à la petite cuillère en un nombre d'occasions bien trop grand (je suis à la fois désolée et reconnaissante), en faisant honneur aux bons petits plats que je leur concoctais avec amour (le fameux service LJK'sse-croûte), en poursuivant des conversations au bon goût indéniable alors que nous aurions tous dû être en train de travailler, en m'aidant lorsque j'étais perdue en C++ ou avec luke... Ces remerciements ne seront jamais suffisants pour

exprimer toute ma gratitude à ces cobureaux de grande qualité. Ma thèse leur doit beaucoup. Je pense également à tous ceux qui n'avaient pas la chance d'être au bureau 124, mais dont la compagnie lors des pauses était tout aussi agréable, qu'ils fussent doctorants, stagiaires, permanents, post-doctorants. . .

En dehors du laboratoire, j'ai aussi pu compter sur des soutiens de taille. Mes amis dont Alexis, rencontré au détour du chœur universitaire et qui m'a accompagnée dans les pires moments comme dans les meilleurs, et Marie, dont l'appui s'est montré sans faille, ont été pour moi une grande force. Mes colocataires Laurène, qui en a vu de belles avec moi, et Lucile, arrivée il y a quelques mois, ont aussi participé à leur manière à l'achèvement de cette thèse.

À l'étonnement peut-être du lecteur, je souhaite remercier le monde médical. Il n'est que trop évident que, sans ce support, ma thèse n'aurait pas abouti. Je remercie particulièrement le Dr Ngo Ton Sang et M. Farnier, pour leur soutien ces dernières années, ainsi que Sainte Venlafaxine et Sainte Aripiprazole, petites molécules salvatrices.

Je ne saurais écrire ces remerciements sans passer par mes parents, mon frère, ma sœur et sa petite famille. Je me suis sentie protégée durant toutes ces années par leur amour indéfectible. Ils ont su accompagner mon avancée mais aussi mes doutes sur un parcours qui n'aura été évident ni pour moi ni pour eux. Je les remercie avec la plus grande affection.

Table des matières

Table des sigles et acronymes	xv
Introduction	1
1 Modélisation de maintenances récurrentes	5
1.1 Des données de survie aux événements récurrents	6
1.1.1 Modélisation	7
1.1.2 Deux modèles de base : ABAO et AGAN	9
1.2 Maintenance imparfaite	9
1.2.1 Modèle de Brown-Proschan	10
1.2.2 Modèles ARI	10
1.3 Modèles d'âge virtuel	11
1.3.1 Modélisation de Kijima	12
1.3.2 Modélisation générique	12
1.3.3 Âge virtuel des modèles de base	13
1.3.4 Modèles ARA	14
1.3.5 Modèle QR	18
1.3.6 Modèle QRG	21
1.4 Usage des modèles d'âge virtuel	22
1.4.1 Simulation de jeux de données	22
1.4.2 Estimation des paramètres du modèle à partir d'un jeu de données	23
1.4.3 Exemple de simulation d'un jeu de données et d'estimation des paramètres	26
1.5 Conclusion sur la modélisation de maintenances récurrentes	28
2 Modèles d'âge virtuel à covariables	31

2.1	Modèles à covariables existants	32
2.1.1	Modèles à covariables en analyse de survie	32
2.1.2	Modèles à covariables pour des événements récurrents	33
2.2	Modèle d'âge virtuel incluant des covariables	33
2.2.1	Modélisation de l'intensité conditionnelle	34
2.2.2	Simulation de données pour des modèles d'âge virtuel incluant des covariables	34
2.2.3	Estimation des paramètres de modèles d'âge virtuel incluant des covariables	39
2.2.4	Exemple de simulation d'un jeu de données et d'estimation des paramètres	41
2.3	Conclusion sur les modèles d'âge virtuel à covariables	43
3	Validation des modèles : qualité d'estimation	45
3.1	Protocole expérimental	46
3.2	Covariable indépendante du temps	47
3.2.1	Influence des paramètres du modèle d'âge virtuel et de l'intensité initiale	47
3.2.2	Influence du coefficient des covariables	49
3.2.3	Influence du nombre de données	50
3.3	Covariable dépendante du temps	54
3.3.1	Influence des paramètres du modèle d'âge virtuel	54
3.3.2	Influence du coefficient de la covariable	56
3.3.3	Influence du nombre de données	57
3.4	Optimisation du coût d'inspection et d'erreur d'estimation	59
3.4.1	Statistiques de comparaison et protocole de calcul	60
3.4.2	Analyse des performances d'estimation en fonction de la période d'inspection	63
3.4.3	Coût des inspections et de l'erreur d'estimation	63
3.5	Conclusion de l'étude sur la qualité d'estimation	65

4	Aide à la prise de décision en présence de covariables pour la maintenance préventive et les dates d'inspection des covariables	69
4.1	Optimisation des dates de maintenance préventive sans covariables	70
4.1.1	Réparation minimale et maintenance périodique parfaite	71
4.1.2	Réparation imparfaite et date de maintenance dynamique	72
4.2	Optimisation des dates de maintenance préventive avec covariables fixes	76
4.2.1	Réparation minimale	77
4.2.2	Réparation imparfaite	81
4.3	Optimisation des dates de maintenance préventive avec covariables dynamiques	83
4.3.1	Réparation minimale	84
4.3.2	Réparation imparfaite	97
4.4	Optimisation du pas d'inspection des covariables avec maintenances préventives	100
4.4.1	Sans coût d'inspection	100
4.4.2	Avec coût d'inspection	103
4.4.3	Covariable modifiée	105
4.5	Optimisation de la date d'inspection avec maintenances préventives	106
4.6	Conclusion sur l'aide à la décision en présence de covariables	110
5	Tests d'adéquation aux modèles d'âge virtuel	111
5.1	Tests pour des systèmes simples	112
5.1.1	Statistiques de test	112
5.1.2	Procédure de <i>bootstrap</i> paramétrique	113
5.1.3	Étude des résultats	114
5.2	Première extension des tests au cas multi-systèmes	116
5.2.1	Procédure de test	117
5.2.2	Étude des résultats	117
5.2.3	Avec des échantillons plus importants	118

5.3	Nouvelles statistiques de test	122
5.3.1	Construction des statistiques	122
5.3.2	Étude des résultats	124
5.3.3	Avec des échantillons plus importants	125
5.4	Conclusion sur les tests d'adéquation	127
Conclusion		129
A Notations		131
Bibliographie		134

Table des figures

1.1	Intensité conditionnelle et âge virtuel d'un modèle ABAO	13
1.2	Intensité conditionnelle et âge virtuel d'un modèle AGAN	14
1.3	Intensité conditionnelle et âge virtuel d'un modèle ARA_∞	16
1.4	Intensité conditionnelle et âge virtuel d'un modèle ARA_1	17
1.5	Intensité conditionnelle et âge virtuel d'un modèle ARA_m	18
1.6	Valeurs de l'efficacité	19
1.7	Intensité conditionnelle et âge virtuel d'un modèle QR	21
1.8	Intensité conditionnelle et âge virtuel d'un modèle QRG	22
1.9	Processus de comptage des défaillances	27
1.10	Log-vraisemblance du modèle en fonction des paramètres	28
1.11	Intensité de défaillance conditionnelle avec les paramètres de simulation et les paramètres estimés	28
2.1	Premier cas de calcul de la fonction de répartition	36
2.2	Second cas de calcul de la fonction de répartition	36
2.3	Troisième cas de calcul de la fonction de répartition	37
2.4	Exemple d'instant de défaillance et de sauts des covariables	40
2.5	Exemple de trois trajectoires de covariable considérées pour la simulation d'instant de défaillance	42
2.6	Processus de comptage des défaillances pour les trois trajectoires de covariable considérées	43
2.7	Log-vraisemblance du modèle à covariables en fonction des paramètres	43
3.1	EQM des estimations des quatre paramètres dans le cas d'une covariable constante, en fonction des vraies valeurs de β_0 et ρ_0	49
3.2	EQM des estimations des quatre paramètres dans le cas d'une covariable constante, en fonction des vraies valeurs de γ_0	51

3.3	EQM des estimations des quatre paramètres dans le cas d'une covariable constante, en fonction du nombre n de défaillances par système et du nombre ν de systèmes par jeu de données	53
3.4	EQM des estimations des quatre paramètres dans le cas d'une covariable dépendante du temps, en fonction des vraies valeurs de β_0 et ρ_0	56
3.5	EQM des estimations des quatre paramètres dans le cas d'une covariable dépendante du temps, en fonction des vraies valeurs de γ_0	57
3.6	Probabilités de sauter d'un état à l'autre pour la covariable dépendante du temps	58
3.7	EQM des estimations des quatre paramètres dans le cas d'une covariable dépendante du temps, en fonction du nombre n de défaillances par système et du nombre ν de systèmes par jeu de données	60
3.8	Schéma d'inspection des covariables	61
3.9	EQM des estimations des quatre paramètres en fonction de la fréquence d'inspection	64
3.10	Statistiques de qualité en fonction de la fréquence d'inspection	65
3.11	Coût en fonction de la fréquence d'inspection	66
4.1	Coût moyen par unité temps en fonction de la politique utilisée et de γ , réparation minimale	81
4.2	Coût moyen par unité temps en fonction de la politique utilisée et de γ , réparation imparfaite	82
4.3	Schéma d'optimisation des maintenances préventives	84
4.4	Instants d'inspection et valeur de la covariable	85
4.5	Seuil d'intensité (à gauche) et temps de calcul en secondes (à droite) pour différentes méthodes de calcul du seuil	90
4.6	$B(t)$ (à gauche) et $\phi(t)$ (à droite) pour différentes méthodes de calcul du seuil .	91
4.7	Seuil et instant théorique de maintenance préventive en fonction de β et $C_{rép}$; $C_{rép} = 1$ (réparation minimale)	92
4.8	Seuil et instant théorique de maintenance préventive en fonction de β et $C_{rép}$; $C_{rép} = 1$ (réparation minimale)	93
4.9	Intensités moyennes en fonction de β (réparation minimale)	93
4.10	Trajectoires de covariable et de l'intensité correspondante	94

4.11	Trajectoires d'intensité et instants d'inspection	95
4.12	Seuil et instant théorique de maintenance préventive en fonction de β et $C_{rép}$; $\rho = 0.5$, $C_{remp} = 1$ (réparation imparfaite)	98
4.13	Exemple de coût moyen par unité de temps sans coût d'inspection, $\beta = 1.5$, $C_{remp} = 3$, $C_{rép} = 1$, réparation minimale (en fonction du nombre théorique d'inspections)	101
4.14	Exemple de coût moyen par unité de temps sans coût d'inspection, $\beta = 2$, $C_{rép} = 3$, $C_{remp} = 1$, réparation minimale (en fonction du nombre théorique d'inspections)	102
4.15	Exemple de coût moyen par unité de temps sans coût d'inspection, $\beta = 1.5$, $\rho = 0.5$, $C_{rép} = 3$, $C_{remp} = 1$, réparation imparfaite (en fonction du nombre théorique d'inspections)	102
4.16	Exemple de coût moyen par unité de temps avec coût d'inspection, $\beta = 1.5$, $C_{remp} = 3$, $C_{rép} = 1$, réparation minimale (en fonction du nombre théorique d'inspections)	104
4.17	Exemple de coût moyen par unité de temps avec coût d'inspection, $\beta = 2$, $C_{rép} = 3$, $C_{remp} = 1$, réparation minimale (en fonction du nombre théorique d'inspections)	104
4.18	Exemple de coût moyen par unité de temps avec coût d'inspection, $\beta = 1.5$, $\rho = 0.5$, $C_{rép} = 3$, $C_{remp} = 1$, réparation imparfaite (en fonction du nombre théorique d'inspections)	105
4.19	Coût moyen par unité de temps sans coût d'inspection (vue entière et détail), $\beta = 2$, $C_{remp} = 1$, $C_{rép} = 3$, réparation minimale, covariable modifiée (en fonction du nombre théorique d'inspections)	106
4.20	Répliquions par <i>bootstrap</i> du coût moyen par unité de temps, covariable modi- fiée (à gauche) et covariable classique (à droite)	107
4.21	Exemple de coût moyen par unité de temps, $\beta = 1.5$, $C_{rép} = 3$, $C_{remp} = 1$, réparation minimale (en fonction de la date d'inspection)	109
5.1	Moyennes et écarts-types des U_i	123

Liste des tableaux

1.1	Paramètres de simulation du jeu de données	26
1.2	Instants de défaillance des deux systèmes simulés	27
1.3	Estimation des paramètres du modèle	27
2.1	Paramètres du jeu de données simulées	41
2.2	Instants de défaillance des trois systèmes simulés	42
2.3	Valeurs de simulation, estimations partielles et estimations totales des quatre paramètres du modèle	43
4.1	Niveau de connaissance de la covariable pour le calcul des différentes politiques de maintenance	79
4.2	Coût moyen par unité temps en fonction de la politique utilisée et de γ	80
4.3	Médianes du seuil d'intensité et du temps de calcul en secondes pour différentes méthodes de calcul du seuil	90
5.1	Un système de 30 défaillances ; statistiques PIT ; modèle testé : ARA_{∞}	115
5.2	Un système de 30 défaillances ; statistiques PIT ; modèle testé : ARA_1	115
5.3	Un système de 30 défaillances ; statistiques PIT ; modèle testé : QR	115
5.4	5 systèmes de 6 défaillances chacun ; statistiques PIT ; modèle testé : ARA_{∞}	117
5.5	5 systèmes de 6 défaillances chacun ; statistiques PIT ; modèle testé : ARA_1	117
5.6	5 systèmes de 6 défaillances chacun ; statistiques PIT ; modèle testé : QR	118
5.7	Un système de 90 défaillances ; statistiques PIT ; modèle testé : ARA_{∞}	119
5.8	Un système de 90 défaillances ; statistiques PIT ; modèle testé : ARA_1	119
5.9	Un système de 90 défaillances ; statistiques PIT ; modèle testé : QR	119
5.10	5 systèmes de 18 défaillances chacun ; statistiques PIT ; modèle testé : ARA_{∞}	119
5.11	5 systèmes de 18 défaillances chacun ; statistiques PIT ; modèle testé : ARA_1	120
5.12	5 systèmes de 18 défaillances chacun ; statistiques PIT ; modèle testé : QR	120

5.13	3 systèmes de 30 défaillances chacun ; statistiques PIT ; modèle testé : ARA_{∞}	120
5.14	3 systèmes de 30 défaillances chacun ; statistiques PIT ; modèle testé : ARA_1	120
5.15	3 systèmes de 30 défaillances chacun ; statistiques PIT ; modèle testé : QR	121
5.16	5 systèmes de 6 défaillances chacun ; nouvelles statistiques ; modèle testé : ARA_{∞}	124
5.17	5 systèmes de 6 défaillances chacun ; nouvelles statistiques ; modèle testé : ARA_1	124
5.18	5 systèmes de 6 défaillances chacun ; nouvelles statistiques ; modèle testé : QR	125
5.19	5 systèmes de 18 défaillances chacun ; nouvelles statistiques ; modèle testé : ARA_{∞}	125
5.20	5 systèmes de 18 défaillances chacun ; nouvelles statistiques ; modèle testé : ARA_1	125
5.21	5 systèmes de 18 défaillances chacun ; nouvelles statistiques ; modèle testé : QR	126
5.22	3 systèmes de 30 défaillances chacun ; nouvelles statistiques ; modèle testé : ARA_{∞}	126
5.23	3 systèmes de 30 défaillances chacun ; nouvelles statistiques ; modèle testé : ARA_1	126
5.24	3 systèmes de 30 défaillances chacun ; nouvelles statistiques ; modèle testé : QR	126

Liste des algorithmes

2.1	Algorithme alternatif de simulation	38
3.1	Calcul des statistiques de qualité d'estimation	62
4.1	Optimisation des dates de maintenance préventive sur un système à covariables, réparation minimale, inspections périodiques	96
4.2	Optimisation des dates de maintenance préventive sur un système à covariables, réparation imparfaite, inspections périodiques	98
4.3	Optimisation des dates de maintenance préventive sur un système à covariables, réparation minimale, inspection unique	108
5.1	<i>Bootstrap</i> paramétrique pour les tests d'adéquation	113
5.2	Calcul des puissances de test	114

Table des sigles et acronymes

ABAO	<i>As Bad As Old</i>
AD	Anderson-Darling
AGAN	<i>As Good As New</i>
ARA	<i>Arithmetic Reduction of Age</i>
ARI	<i>Arithmetic Reduction of Intensity</i>
BP	Brown-Proschan
CvM	Cramér-von Mises
EQM	Erreur Quadratique Moyenne
KS	Kolmogorov-Smirnov
NHPP	<i>Non Homogeneous Poisson Process</i>
PLP	<i>Power Law Process</i>
PIT	<i>Probability Integral Transform</i>
QR	Quasi-Renouvellement
QRG	Quasi-Renouvellement Généralisé

Introduction

Durant son cycle de vie, un système industriel peut être amené à subir des maintenances et des pannes. De même, un patient peut subir des récurrences, qui peuvent être traitées de manière préventive ou curative. L'enjeu est d'avoir le plus possible un système en état de fonctionner, ou un patient en bonne santé, tout en garantissant certaines conditions de sécurité, de disponibilité et de coût dans le cas d'un système industriel. C'est ainsi qu'après chaque défaillance imprévisible, le système est réparé, c'est-à-dire remis dans un état où il peut assurer ses fonctions. Cela est communément appelé maintenance corrective, le système étant dit réparable, et la défaillance étant qualifiée d'événement récurrent. Il est aussi possible de retarder les défaillances en opérant sur le système : il s'agit alors d'une maintenance préventive. Les dates successives de maintenances préventives et correctives constituent des données cruciales pour une gestion optimale du système tout au long de son fonctionnement. En effet, si par exemple des défaillances ont lieu de manière trop rapprochée, le gestionnaire du système pourra être amené à modifier les dates des futures maintenances préventives, afin de ralentir la dégradation du système et de repousser les prochaines pannes. La planification des instants de maintenance préventive peut se faire de diverses manières. La plus simple est de fixer à l'avance toutes les dates de maintenance, par exemple de manière périodique. Ces dates sont alors à caractère déterministe et ne dépendent pas du fonctionnement du système. Au contraire, il est possible de faire dépendre ces dates d'autres éléments. Par exemple, il peut être décidé de procéder à une maintenance préventive lorsqu'un certain indicateur atteint un niveau pré-défini. L'instant d'atteinte de ce niveau n'étant pas connu à l'avance, la date de maintenance préventive est alors aléatoire. Par nature, les défaillances sont des événements aléatoires. Les outils probabilistes, avec notamment les processus stochastiques, constituent donc un arsenal privilégié pour travailler à les connaître. De nombreux modèles existent dans la littérature pour répondre à cette problématique. Ceux-ci peuvent n'inclure que les maintenances correctives, que les maintenances préventives, ou bien intégrer les deux dans le même cadre.

Cependant, toutes les maintenances ne se valent pas. Il est possible de se contenter de remettre le système en marche dans l'état dans lequel il était juste avant la défaillance. Ce type de maintenance est désigné par le terme de réparation minimale, ou *As Bad As Old* (ABAO). Le processus stochastique associé est le processus de Poisson non homogène (NHPP). À l'inverse, il est aussi possible de réparer le système de sorte qu'il soit comme neuf, voire de le remplacer par un système neuf identique, ce qui est appelé réparation parfaite ou *As Good As New* (AGAN). Le processus stochastique associé est le processus de renouvellement. Évidemment, la plupart du temps, la réalité se situe entre ces deux extrêmes, et la réparation a un effet intermédiaire. Cette situation est appelée maintenance imparfaite. L'évaluation quantitative de l'effet des maintenances est un enjeu majeur, que ce soit d'un point de vue industriel pour optimiser la sûreté de fonctionnement et les coûts associés, ou pour un patient dont la santé dépend de l'efficacité d'un traitement. Les modèles de maintenance imparfaite ont pour but de prendre en compte cet effet des maintenances, que ce soit pour des maintenances correctives ou préventives. Parmi ces modèles figurent les modèles d'âge virtuel, introduit par [Kij89], qui

supposent que les maintenances rajeunissent le système, en le ramenant à un point temporel appelé âge virtuel. Des classes particulières de ces modèles ont été étudiées par [DG04], où l'effet de la maintenance est un scalaire constant déterministe. Une procédure d'estimation des paramètres du modèle, dont l'effet des maintenances correctives, est également proposée *via* la maximisation numérique de la log-vraisemblance. Les autres paramètres du modèle sont ceux de l'intensité de défaillance initiale, une fonction qui correspond à la loi du premier instant de défaillance, et donc à l'usure intrinsèque du système avant toute maintenance. Une généralisation des modèles décrits dans [DG04] est proposée dans [DDB20]. Celle-ci permet de prendre en compte des maintenances correctives et plusieurs types de maintenances préventives. Chaque type de maintenance est associé à un paramètre d'efficacité. Une méthode de simulation de dates de défaillance est donnée, qui repose sur l'inversion de la fonction de répartition conditionnelle des instants de défaillance successifs, en incluant les dates de maintenance préventive. Une procédure d'estimation paramétrique par maximum de vraisemblance est également donnée. Celle-ci est adaptée à l'observation parallèle de plusieurs systèmes indépendants et de même loi.

L'observation de plusieurs systèmes qui semblent identiques révèle pourtant que leurs dates de défaillances, au delà de leur caractère aléatoire, n'ont pas forcément exactement la même structure. Des éléments concrets peuvent expliquer ces différences. Par exemple, une éolienne ne subira pas les mêmes vents en fonction de sa région d'implantation. Un patient âgé ne réagira pas de la même manière à un traitement qu'une personne plus jeune. Ces éléments constituent une information potentiellement capitale pour la connaissance du processus de défaillance d'un système. Ces différences sont regroupées sous le nom d'hétérogénéité, qu'elle soit observée ou non. Il est possible de rendre compte de l'hétérogénéité observée par plusieurs moyens, dont les covariables. Les covariables sont des informations numériques qui peuvent dans une certaine mesure donner de l'information sur l'état du système, son usage, sa dégradation *etc.* Celles-ci peuvent être fixes, comme le sexe d'un patient ou l'année de mise en service d'un système, ou bien variables dans le temps, comme la température corporelle ou la vitesse du vent. Le moyen privilégié de prendre en compte ces covariables est l'utilisation du modèle de hasards proportionnels de Cox [Cox72], adapté aux événements récurrents. Chaque covariable est associée à un coefficient qui mesure son influence sur le processus de défaillance. En effet, les covariables ne sont pas aussi influentes les unes que les autres. Par exemple, l'âge du patient aura sûrement plus d'influence sur sa santé que celui de ses parents...

Il y a des cas où les covariables dynamiques ne sont pas entièrement connues. Par exemple, la température au cœur d'un système peut être mesurée à des intervalles réguliers, et elle n'est pas connue en dehors de ces relevés ponctuels. Nous pouvons alors faire le choix de supposer qu'entre deux relevés, elle est constante et égale à la dernière valeur mesurée. Cependant, cette hypothèse ne peut manquer d'avoir un impact sur la connaissance que nous avons du système. Notamment, l'estimation paramétrique ne sera probablement pas aussi performante dans ce cas. De plus, les covariables peuvent être utilisées pour fixer dynamiquement les maintenances préventives. Connaître plus précisément les covariables a un coût, mais les défaillances en ont un autre. Inspecter trop fréquemment peut ne pas amener un supplément d'information suffisant pour contrecarrer le coût induit. Au contraire, ne connaître les covariables que trop peu peut mener à mal planifier les maintenances préventives et subir ainsi le coût de nombreuses

défaillances. L'idée est alors de minimiser le coût global constitué du coût des inspections, de celui des maintenances préventives, et de celui des maintenances correctives et des défaillances.

Les modèles d'âge virtuel tels que présentés dans [DDB20] sont très flexibles. Cependant, face à des données, il faut être en mesure de choisir le bon modèle. Une manière de répondre à ce questionnement est de procéder à des tests d'adéquation. Des tests sur les modèles d'âge virtuel ont été présentés dans [Cha+16]. Cependant, ces tests montraient des performances très variables, et n'étaient pas adaptés à des données issues de plusieurs systèmes indépendants et de même loi.

Dans cette thèse, nous développons des contributions pour répondre à ces problématiques. Nous partons de la modélisation de l'âge virtuel pour des systèmes soumis à des covariables fixes ou dynamiques. Les modèles développés permettent de prendre en compte à la fois le vieillissement intrinsèque des systèmes *via* le taux de hasard du premier instant de défaillance, l'effet des maintenances avec l'âge virtuel des systèmes et l'hétérogénéité avec des covariables caractérisant les différences entre les systèmes. Pour utiliser ces modèles, nous développons deux méthodes de simulation afin de permettre la création de données pour les études numériques, et une méthode d'inférence paramétrique, qui permet de connaître la valeur des différents paramètres du modèle dans le cadre de systèmes existants. L'inférence statistique proposée est méticuleusement examinée dans une étude de qualité d'estimation. Enfin, la prise de décision constitue le troisième pilier de cette thèse. Deux parties le constituent : tout d'abord, nous nous intéressons à la question classique de la planification de maintenances préventives sur des systèmes régis par nos modèles. Nous montrons que l'information disponible sur l'hétérogénéité des systèmes permet d'optimiser les coûts de maintenance en plaçant intelligemment les maintenances préventives au cours de la vie des systèmes. La seconde partie s'intéresse au choix du modèle d'âge virtuel. Des tests d'adéquation viennent répondre à cette problématique. Cette thèse traite donc des modèles d'âge virtuel à covariables sous leurs divers aspects.

Dans le chapitre 1, nous introduisons le lecteur à la modélisation des maintenances. Un premier accent sera mis sur les particularités liées aux événements récurrents. Après avoir revu les deux modèles de base ABAO et AGAN, nous donnerons deux premiers exemples de modèles de maintenance imparfaite. Les modèles d'âge virtuel constitueront le cœur de ce chapitre, où nous verrons leur modélisation générique ainsi que plusieurs cas particuliers. Enfin, la simulation de données et l'estimation paramétrique seront abordées, avec un exemple de jeu de données.

Face à l'absence dans la littérature de modèles d'âge virtuel génériques incluant des covariables, le chapitre 2 introduira de tels modèles. Une première section détaillera les modèles à covariables existants, et une seconde présentera notre modèle liant les covariables (fixes ou dynamiques) aux modèles d'âge virtuel. De nouvelles méthodes de simulation et d'estimation adaptées à ces modèles seront successivement présentées pour permettre d'utiliser ces modèles, avec un exemple de jeu de données.

Le chapitre 3 présentera une vaste étude numérique de la qualité d'estimation des paramètres dans le cadre des modèles d'âge virtuel à covariables, afin de valider ces modèles. Dans

un premier temps, nous nous intéresserons uniquement aux covariables fixes, puis nous étendrons l'étude aux covariables dépendantes du temps. L'influence des paramètres du modèle ainsi que du coefficient des covariables sera soigneusement analysée, de même que l'influence de la taille des données (nombre de systèmes et nombre de défaillances par système). La qualité d'estimation sera enfin mise en regard de la fréquence d'inspection. Une section conclusive clora ce chapitre.

Le chapitre 4 étudiera l'utilisation de covariables dans la planification des dates de maintenance préventive. Ce genre de planification a été très largement traité pour des modèles sans covariables ou pour des modèles à covariables où les maintenances correctives sont parfaites, mais il apparaît que les modèles d'âge virtuel n'ont jamais été liés à des covariables dans cette optique de planification des maintenances préventives. Nous étudierons tout d'abord l'impact de la prise en compte d'une covariable fixe sur les coûts de maintenance, dans le cas des modèles d'âge virtuel. Nous donnerons ensuite la possibilité d'optimiser les maintenances préventives en surveillant une covariable dynamique. Dans le cas où les inspections de la covariable sont périodiques, nous aurons pour objectif d'optimiser la fréquence d'inspection afin de minimiser le coût de fonctionnement global du système. Lorsqu'une seule inspection est prévue, nous optimiserons sa date, pour maximiser la plus-value de l'information apportée par cette inspection.

Le chapitre 5 sera consacré aux tests d'adéquation. Une première extension au cas multi-systèmes sera envisagée et ses performances seront numériquement analysées. Une nouvelle classe de tests sera proposée pour tenter de pallier les mauvaises performances des premiers tests.

Modélisation de maintenances récurrentes

Sommaire

1.1	Des données de survie aux événements récurrents	6
1.1.1	Modélisation	7
1.1.2	Deux modèles de base : ABAO et AGAN	9
1.2	Maintenance imparfaite	9
1.2.1	Modèle de Brown-Proschan	10
1.2.2	Modèles ARI	10
1.3	Modèles d'âge virtuel	11
1.3.1	Modélisation de Kijima	12
1.3.2	Modélisation générique	12
1.3.3	Âge virtuel des modèles de base	13
1.3.4	Modèles ARA	14
1.3.5	Modèle QR	18
1.3.6	Modèle QRG	21
1.4	Usage des modèles d'âge virtuel	22
1.4.1	Simulation de jeux de données	22
1.4.2	Estimation des paramètres du modèle à partir d'un jeu de données	23
1.4.3	Exemple de simulation d'un jeu de données et d'estimation des paramètres	26
1.5	Conclusion sur la modélisation de maintenances récurrentes	28

Un système industriel peut faire face à plusieurs défaillances et réparations au cours de sa vie, plutôt que de cesser de fonctionner avec sa première et dernière panne. C'est là que l'analyse de survie laisse place aux événements récurrents : nous n'avons pas seulement un échantillon de dates d'arrêt définitif de plusieurs systèmes indépendants, mais les instants de défaillances successifs pour chaque système. Nous considérerons ici que les instants de défaillance correspondent également aux instants de réparations, c'est-à-dire que les durées de réparation ne sont pas prises en compte et sont considérées comme négligeables.

Quand un système subit une réparation, nous pouvons imaginer qu'un opérateur remet simplement en route le système, sans en faire plus. Cela peut par exemple être le cas lorsqu'un ordinateur est redémarré après un arrêt intempestif ou quand un disjoncteur est remis en fonction après une coupure de courant. Le système est alors dit As Bas As Old (ABAO),

puisque son usure est la même que juste avant la défaillance. Au contraire, il pourrait être décidé de remplacer le système avec un autre, neuf mais identique, c'est-à-dire de renouveler le système : le système est alors As Good As New (AGAN). Certaines actions de réparations peuvent correspondre à l'une ou l'autre situation, mais dans la plupart des cas, elles se situeront probablement entre les deux, avec une réduction de l'usure du système qui ne le ramène pourtant pas dans un état AGAN. Cela est appelé maintenance ou réparation imparfaite.

Parmi les modèles traitant des maintenances imparfaites se trouvent les modèles de Kijima de types I et II exposés dans [Kij89], qui fonctionnent avec une quantité appelée âge virtuel ou âge effectif du système. Pour ces modèles, [DG04] a proposé différentes paramétrisations où l'âge virtuel est réduit d'une quantité dépendant d'un scalaire ρ , qui correspond à l'efficacité de la maintenance. Cette manière de traiter les modèles d'âge virtuel est généralisée dans [DDB20], où d'autres modèles de maintenance imparfaite sont inclus, comme le modèle de Quasi-Renouvellement (QR) présenté dans [WP96]. La simulation de jeux de données et l'estimation des paramètres y sont également considérées. Pour ces modèles, [Cha+16] a proposé des tests d'adéquation avec une approche par *bootstrap* paramétrique.

D'autres modèles ont été conçus, généralement avec une procédure d'estimation, par exemple dans [DM18], [DGG19], [DFN16], [DGS17] et [Pen+18]. Certains modèles incluent également des maintenances préventives, comme ceux exposés par [Pen+17], [ST17] et [SMB20]. Les maintenances préventives sont menées lorsque le système est en fonctionnement, hors d'une défaillance. Elles peuvent également être imparfaites, ce qui conduit à des considérations supplémentaires lors de l'optimisation de l'intervalle entre deux maintenances préventives planifiées. Des modèles de maintenance préventive imparfaite ont été étudiés par [HSS20], [Huy19], [MC19], [MMT19] et [Yan+19].

L'objet de ce chapitre est la description théorique de modèles d'âge virtuel tels qu'exposés dans [DDB20]. Nous commencerons par donner quelques définitions nécessaires à cette construction, puis nous verrons deux autres exemples de modèles de maintenance imparfaite, avant de nous consacrer aux modèles d'âge virtuel. La modélisation sera détaillée puis nous donnerons quelques éléments d'usage de ces modèles.

1.1 Des données de survie aux événements récurrents

Les données de survie constituent un premier objet d'étude en fiabilité. Cependant, lorsqu'un système est réparable, plusieurs dates de défaillance successives peuvent être enregistrées pour ce même système, et nous parlons alors d'événement récurrent. Dans cette section, nous commencerons par modéliser les deux situations d'un point de vue mathématique, puis nous nous intéresserons à deux premiers modèles d'événements récurrents.

1.1.1 Modélisation

Dans notre souci de modélisation, nous nous intéressons tout d'abord à la date T de défaillance d'un système non réparable (ou à la première défaillance d'un système réparable). Nous prendrons pour convention que cette date est mesurée à partir de l'instant $t = 0$. Ainsi, la variable aléatoire T est à valeurs réelles positives. La loi de T peut être caractérisée de diverses manières. Nous définissons par exemple sa fonction de répartition comme la fonction associant à tout $t \in \mathbf{R}$ la probabilité que la variable T soit inférieure ou égale à t :

Définition 1.1 (Fonction de répartition)

La fonction de répartition de la variable aléatoire T est définie pour tout $t \in \mathbf{R}$ par

$$F_T(t) := \mathbb{P}(T \leq t). \quad (1.1)$$

Nous supposons par la suite que cette fonction de répartition est absolument continue, ce qui nous permet de définir sa dérivée, appelée densité de la variable aléatoire T :

Définition 1.2 (Densité)

La densité de la variable aléatoire T est définie pour tout $t \in \mathbf{R}$ par

$$f_T(t) := F'_T(t). \quad (1.2)$$

Une autre manière de caractériser la loi de T est le taux de hasard ou taux de défaillance, défini à partir de la probabilité que le système tombe en panne entre t et $t + \Delta t$ sachant qu'il a survécu jusqu'en t :

Définition 1.3 (Taux de hasard)

Le taux de hasard de la variable aléatoire T est défini pour tout $t \in \mathbf{R}$ par

$$h_T(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{P}(t < T \leq t + \Delta t | T > t). \quad (1.3)$$

Il est intéressant de comparer la définition du taux de hasard à la densité :

$$\begin{aligned} f_T(t) &= F'_T(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (F_T(t + \Delta t) - F_T(t)) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\mathbb{P}(T \leq t + \Delta t) - \mathbb{P}(T \leq t)) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{P}(t < T \leq t + \Delta t). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Nous voyons que le taux de hasard, au contraire de la densité, fait intervenir une probabilité conditionnelle. Il existe d'ailleurs un lien simple entre ces deux quantités :

$$\begin{aligned} h_T(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{P}(t < T \leq t + \Delta t | T > t) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{\mathbb{P}(t < T \leq t + \Delta t)}{\mathbb{P}(T > t)} \\ &= \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Donnons deux exemples de distributions couramment utilisées en fiabilité : si T suit une loi de Weibull, introduite dans [Wei51], de paramètres de forme $\beta > 0$ et d'échelle $\eta > 0$, alors elle est caractérisée, pour tout $t \geq 0$ par :

$$h_T(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta} \right)^{\beta-1}. \quad (1.6)$$

Nous parlerons d'un taux de hasard log-linéaire avec pour paramètres $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbf{R}$ lorsque, pour tout $t \geq 0$:

$$h_T(t) = \alpha e^{\beta t}. \quad (1.7)$$

Maintenant que nous avons décrit la distribution de l'instant de défaillance d'un système non réparable, nous pouvons imaginer un autre type de système, qui soit remis en fonctionnement après une panne. Nous dirons que ce système est réparable. Une fois le système remis en marche, il est à nouveau à risque de défaillance. Ainsi, les dates successives de défaillances constituent un ensemble d'événements récurrents. Il est possible de prendre en compte la durée de la maintenance dans les modèles d'événements récurrents. Cependant, nous supposons ici que cette durée est négligeable et donc que la date de la remise en route du système correspond à celle de la défaillance et de la réparation. Les n premiers instants successifs de maintenance du système sont notés T_1, \dots, T_n , et nous posons la convention $T_0 = 0$. Nous supposons par ailleurs qu'il ne peut y avoir qu'une seule panne en un instant donné.

Pour étudier les possibilités de maintenance, introduisons une généralisation du taux de hasard : l'intensité de défaillance conditionnelle. Tout d'abord, pour tout $t \geq 0$, notons N_t le nombre de pannes observées jusqu'à l'instant t . Le processus de défaillance du système est alors aussi bien défini par l'ensemble des instants de défaillance $\{T_n\}_{n \geq 1}$ que par le processus de comptage $\{N_t\}_{t \geq 0}$. En effet, pour tous $t \geq 0$ et $i \geq 0$, nous avons :

$$N_t = i \Leftrightarrow T_i \leq t < T_{i+1}. \quad (1.8)$$

Pour un processus stochastique quelconque $\{E_t\}_{t \geq 0}$, notons $E_{t_0^+}$ (resp. $E_{t_0^-}$) la limite à droite (resp. à gauche), si elle existe, de E_t lorsque t tend vers t_0 . Nous définissons maintenant l'intensité conditionnelle du processus de défaillance :

Définition 1.4 (Intensité conditionnelle de défaillance)

L'intensité conditionnelle de défaillance d'un système réparable est définie, pour tout $t \geq 0$, par

$$\lambda_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{P}(N_{t+\Delta t} - N_{t^-} = 1 | \mathcal{H}_{t^-}), \quad (1.9)$$

où \mathcal{H}_{t^-} est le passé du processus, c'est-à-dire la filtration naturelle engendrée par l'ensemble des événements arrivés juste avant t $\sigma(N_{t^-}, T_1, \dots, T_{N_{t^-}})$.

L'intensité conditionnelle caractérise complètement la distribution du processus de défaillance. En effet, la fonction de répartition conditionnelle des instants successifs de panne peut s'exprimer en fonction de l'intensité conditionnelle, comme l'indique la propriété suivante, dont la démonstration peut se trouver dans [GL07] :

Propriété 1.1

Pour tous $i \in \mathbf{N}$ et $t > T_i$,

$$\mathbb{P}(T_{i+1} \leq t | \mathcal{H}_{T_i^-}) = 1 - \exp\left(-\int_{T_i}^t \lambda_s ds\right). \quad (1.10)$$

1.1.2 Deux modèles de base : ABAO et AGAN

Deux possibilités naïves existent lors de la réparation : soit le système est simplement remis en marche dans le même état qu'avant la défaillance, et donc nous nous contentons en quelque sorte de le redémarrer, soit le système est remplacé, et il est donc neuf après chaque maintenance. Le premier cas est appelé As Bad As Old (ABAO) et correspond à une maintenance minimale, le second est appelé As Good As New (AGAN) et correspond à une maintenance parfaite ou optimale. L'intensité conditionnelle dans le cadre du modèle ABAO est, pour tout $t \geq 0$, la suivante :

$$\lambda_t = h(t), \quad (1.11)$$

où h est le taux de hasard du premier instant de défaillance du système. Il est à remarquer que l'intensité conditionnelle λ_t est, dans le cas général, une fonction aléatoire du temps. Pour le modèle ABAO, elle s'écrit en fait comme une fonction déterministe du temps. Le processus de défaillance associé à ce modèle porte le nom de processus de Poisson non homogène (NHPP). Il est dit homogène lorsque la fonction h est constante par rapport au temps. Un NHPP courant est le processus puissance (PLP), où la fonction h n'est autre que le taux de hasard d'une loi de Weibull, vu dans l'équation 1.6 (voir par exemple [Cro75]). Le modèle AGAN quant à lui a une intensité conditionnelle de la forme suivante, pour tout $t \geq 0$:

$$\lambda_t = h(t - T_{N_t^-}), \quad (1.12)$$

où h est le taux de hasard du premier instant de défaillance du système. Nous voyons que, si $h(0) = 0$, l'intensité est remise à zéro à chaque défaillance. Dans un tel processus, appelé processus de renouvellement, les durées inter-défaillances sont indépendantes et identiquement distribuées. Le modèle AGAN avec l'intensité d'une loi de Weibull est discuté dans [SL63].

1.2 Maintenance imparfaite

Cependant, entre la réparation parfaite où le système est remis à neuf et la réparation minimale où le système est simplement remis en fonction, une variété de situations existe. Il est facile d'imaginer par exemple que la maintenance comprenne une révision du système où certains composants peuvent être changés. Nous avons alors affaire à une maintenance imparfaite, qui n'est pas modélisée par les hypothèses ABAO ou AGAN. Une manière de spécifier un modèle de maintenance imparfaite est de donner un taux de hasard initial, qui correspond à l'intensité conditionnelle avant le premier instant de défaillance et donc à l'usure intrinsèque du système, et une façon de caractériser l'effet des maintenance sur le système.

1.2.1 Modèle de Brown-Proschan

Un premier modèle de maintenance imparfaite est proposé dans [BP83] et est connu sous le nom de modèle de Brown-Proschan (BP). Celui-ci suppose que chaque maintenance est aléatoirement AGAN avec une probabilité p et ABAO avec une probabilité $1 - p$. Nous pouvons modéliser la maintenance avec une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre p $\{B_i\}_{i \in \mathbf{N}^*}$, telle que $B_i = 1$ si la i^{e} maintenance est AGAN et $B_i = 0$ si elle est ABAO. L'intensité conditionnelle du modèle est alors la suivante, pour tout $t \geq 0$:

$$\lambda_t = h \left(t - T_{N_{t^-}} + \sum_{i=1}^{N_{t^-}} \left(\prod_{k=i}^{N_{t^-}} (1 - B_k) \right) (T_i - T_{i-1}) \right), \quad (1.13)$$

où h est le taux de hasard du premier instant de défaillance du système et où la somme \sum_a^b est nulle si $a > b$ (cette convention sera suivie dans toute la thèse). Supposons que la dernière maintenance AGAN soit arrivée en T_{i_0} . S'il n'y a pas eu de maintenance AGAN, nous prenons $i_0 = 0$. Alors $B_{i_0} = 1$ et pour tout $k \geq i_0$, $B_k = 0$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \left(\prod_{k=i}^{N_{t^-}} (1 - B_k) \right) &= 0, \quad \forall i \leq i_0, \\ \left(\prod_{k=i}^{N_{t^-}} (1 - B_k) \right) &= 1, \quad \forall i > i_0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \lambda_t &= h \left(t - T_{N_{t^-}} + \sum_{i=i_0+1}^{N_{t^-}} (T_i - T_{i-1}) \right) \\ &= h(t - T_{i_0}). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Nous reconnaissons alors une intensité similaire à celle du modèle AGAN.

1.2.2 Modèles ARI

Divers modèles de maintenance imparfaite sont donnés dans [DG04]. L'une des deux classes de modèles suppose que l'effet de la maintenance est de réduire l'intensité conditionnelle d'une certaine quantité dépendant du passé du processus, la vitesse d'usure du système restant la même qu'avant la défaillance. Ils sont appelés modèles à réduction arithmétique de l'intensité (ARI). Plusieurs sous-modèles sont proposés. Le premier est le modèle ARI_∞ . Juste après une réparation, l'intensité conditionnelle est réduite d'une quantité proportionnelle à l'intensité juste avant la défaillance :

$$\lambda_{T_i^+} = \lambda_{T_i^-} - \rho \lambda_{T_i^-}, \quad (1.16)$$

où ρ est un paramètre d'efficacité compris entre 0 et 1. L'intensité de défaillance du système est alors la suivante :

Propriété 1.2

Dans un modèle ARI_∞ , pour tout $t \geq 0$, l'intensité conditionnelle est donnée par :

$$\lambda_t = h(t) - \rho \sum_{j=0}^{N_{t^-} - 1} (1 - \rho)^j h(T_{N_{t^-} - j}), \quad (1.17)$$

où h est le taux de hasard du premier instant de défaillance du système.

La démonstration de cette écriture se trouve dans [DG04].

Le second modèle exposé dans [DG04] est le modèle ARI_1 . Ici, la maintenance ne réduit pas l'usure globale du système mais seulement l'usure accumulée depuis la maintenance précédente :

$$\lambda_{T_i^+} = \lambda_{T_i^-} - \rho (\lambda_{T_i^-} - \lambda_{T_{i-1}^+}), \quad (1.18)$$

où ρ est à nouveau un paramètre d'efficacité compris entre 0 et 1. L'intensité de défaillance du système est alors la suivante :

Propriété 1.3

Dans un modèle ARI_1 , pour tout $t \geq 0$, l'intensité conditionnelle est donnée par :

$$\lambda_t = h(t) - \rho (h(T_{N_{t^-}}) - h(0)), \quad (1.19)$$

où h est le taux de hasard du premier instant de défaillance du système.

La démonstration de cette écriture se trouve également dans [DG04].

Un modèle intermédiaire est aussi donné dans [DG04], le modèle ARI_m .

Définition 1.5

Dans un modèle ARI_m , pour tout $t \geq 0$, l'intensité conditionnelle est donnée par :

$$\lambda_t = h(t) - \rho \sum_{j=0}^{\min(m-1, N_{t^-} - 1)} (1 - \rho)^j h(T_{N_{t^-} - j}), \quad (1.20)$$

où h est le taux de hasard du premier instant de défaillance du système.

Pour $m = 1$, nous retrouvons bien le modèle ARI_1 , et le modèle ARI_∞ pour $m = \infty$.

1.3 Modèles d'âge virtuel

Nous nous intéresserons dans la suite aux modèles d'âge virtuel, une classe de modèles introduite dans [Kij89]. La notion même d'âge virtuel est abordée dans [KMS88].

1.3.1 Modélisation de Kijima

Dans [KMS88], l'âge virtuel d'un système après la i^e maintenance est noté V_i et est tel que, si $V_i = y \geq 0$, la durée inter-défaillance $X_{i+1} = T_{i+1} - T_i$ a la distribution suivante pour tout $x \geq 0$:

$$\mathbb{P}(X_{i+1} \leq x | V_i = y) = \frac{F(x+y) - F(y)}{1 - F(y)}, \quad (1.21)$$

où F est la fonction de répartition du premier instant de défaillance d'un nouveau système. Dans [Kij89], deux modèles sont introduits en reprenant la notion d'âge virtuel. Le degré de la i^e réparation est noté A_i et est une variable aléatoire à valeurs dans $[0, 1]$. Dans le modèle de type I, la i^e réparation réduit l'âge accumulé depuis la réparation précédente. Ainsi, l'âge virtuel après la i^e défaillance est donné par :

$$V_i = V_{i-1} + A_i X_i. \quad (1.22)$$

Dans le modèle de type II, la i^e réparation affecte l'ensemble de l'âge virtuel :

$$V_i = A_i(V_{i-1} + X_i). \quad (1.23)$$

Pour les deux types de modèle, si $A_i = 0$ pour tout $i \geq 1$, alors nous retombons dans le cas AGAN (maintenance parfaite), alors que si $A_i = 1$ pour tout $i \geq 1$, il s'agit du cas ABAO (maintenance minimale). Dans le modèle de type II, si pour tout $i \geq 1$ les A_i sont indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètre $1 - p$, alors nous retrouvons le modèle BP.

1.3.2 Modélisation générique

Nous travaillons maintenant avec la modélisation donnée dans [DDB20]. L'idée de ces modèles est de prendre en compte l'effet des réparations ou des maintenances au travers d'une quantité appelée âge virtuel du système. Après la i^e maintenance ($i \geq 1$), le système se trouve dans un état équivalent à celui d'un système neuf n'ayant connu aucune maintenance et ayant déjà survécu sans panne pendant une durée $V_i(T_i)$. Nous supposons que $\{V_i(t) : t \geq 0\}_{i \in \mathbf{N}}$ est un processus observable prévisible tel que pour tout $i \in \mathbf{N}$, $V_i(t)$ est une fonction croissante, presque sûrement dérivable, positive pour tout $t \geq T_i$, qui représente l'âge virtuel à l'instant t . Supposons de plus que $V_0(t) = t$ (car avant la première panne, l'âge virtuel du système est égal à son âge réel). Puisque l'âge virtuel est croissant, son inverse généralisée existe, que nous noterons $V_i^{-1}(t)$.

Alors jusqu'à la prochaine défaillance, l'état du système à l'instant t évoluera comme un système neuf à l'instant $V_i(t)$. Cela revient à dire que, pour tous $i \geq 1$, $t \geq T_i$,

$$\mathbb{P}(T_{i+1} \leq t | \mathcal{H}_{T_i^-}) = \mathbb{P}(T \leq V_i(t) | T > V_i(T_i), \mathcal{H}_{T_i^-}) = 1 - \exp\left(-\int_{V_i(T_i)}^{V_i(t)} h(s) ds\right), \quad (1.24)$$

où T représente la durée de vie d'un système neuf n'ayant subi aucune défaillance et h est son taux de hasard. Nous avons déjà $\mathbb{P}(T_{i+1} \leq t | \mathcal{H}_{T_i^-}) = 1 - \exp\left(-\int_{T_i}^t \lambda_s ds\right)$, donc

$$\int_{T_i}^t \lambda_s ds = \int_{V_i(T_i)}^{V_i(t)} h(s) ds = \int_{T_i}^t V_i'(z) h(V_i(z)) dz. \quad (1.25)$$

Nous en déduisons, par continuité des intégrandes pour $T_i < t \leq T_{i+1}$, que $\lambda_t = V_i'(t)h(V_i(t))$, c'est-à-dire, pour $i = N_{t-}$,

$$\lambda_t = V_{N_{t-}}'(t)h(V_{N_{t-}}(t)). \quad (1.26)$$

1.3.3 Âge virtuel des modèles de base

Revenons aux deux modèles de base, pour en expliciter l'âge virtuel. Nous avons vu que dans le modèle ABAO, l'intensité conditionnelle était donnée par l'équation 1.11. Or le fait que la maintenance n'ait pas d'effet sur l'âge virtuel se traduit mathématiquement, pour tous $t \geq 0$ et $i \geq 1$, par :

$$V_i(t) = V_{i-1}(t) = \dots = V_0(t) = t, \quad (1.27)$$

c'est-à-dire que l'âge virtuel est égal à la durée de fonctionnement du système depuis sa mise en service. Nous en déduisons que l'intensité conditionnelle vérifie bien :

$$\lambda_t = V_{N_{t-}}'(t)h(V_{N_{t-}}(t)) = h(t). \quad (1.28)$$

Ainsi, le modèle ABAO peut s'écrire comme un modèle d'âge virtuel. Un exemple de système suivant un modèle ABAO est représenté en figure 1.1. Y sont représentés l'intensité conditionnelle et l'âge virtuel d'un système simulé sous le modèle ABAO, avec $n = 10$ défaillances et une intensité initiale en loi de Weibull de paramètres $\eta = 1$ et $\beta = 3$. Les instants de défaillance sont marqués par des étoiles le long de l'axe des abscisses. Nous retrouvons bien une intensité conditionnelle identique à l'intensité initiale, de même que pour l'âge virtuel.

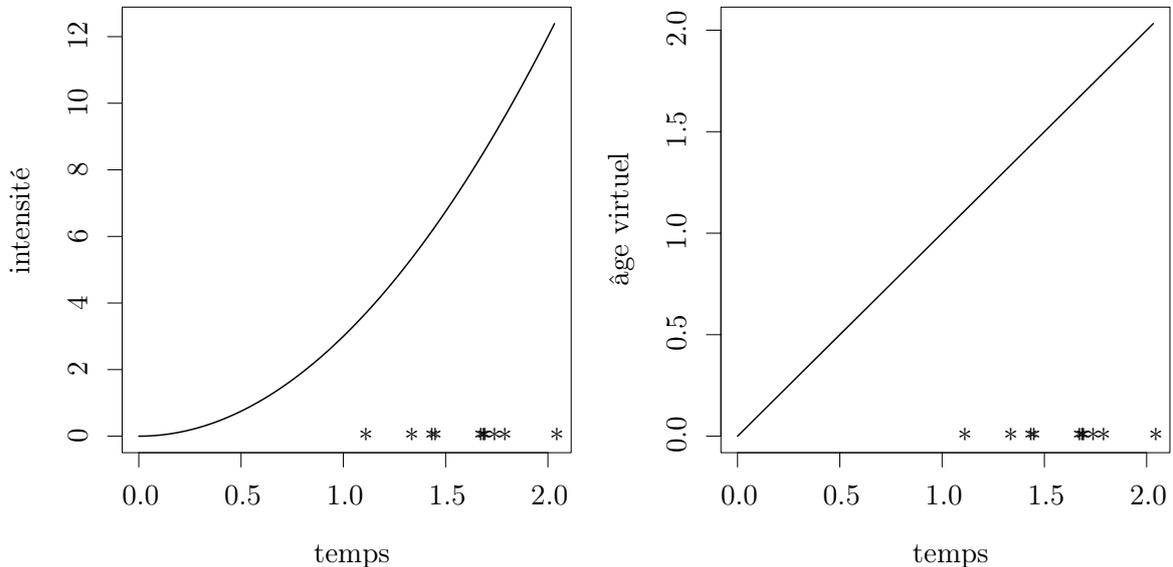


FIGURE 1.1 – Intensité conditionnelle et âge virtuel d'un modèle ABAO

Au contraire du modèle ABAO, supposons ici que la réparation est parfaite, qu'elle restaure le système à neuf : il s'agit donc d'un modèle AGAN. L'âge virtuel est remis dans les conditions

initiales : pour tous $t \geq 0$ et $i \geq 0$,

$$V_i(t) = V_0(t - T_i) = t - T_i. \quad (1.29)$$

Nous retrouvons donc bien la forme de l'intensité conditionnelle :

$$\lambda_t = h(t - T_{N_t^-}). \quad (1.30)$$

Un exemple de système suivant un modèle AGAN est représenté en figure 1.2. Y sont représentés l'intensité conditionnelle et l'âge virtuel d'un système simulé sous le modèle AGAN, avec $n = 10$ défaillances et une intensité initiale en loi de Weibull de paramètres $\eta = 1$ et $\beta = 3$. Nous retrouvons bien une intensité conditionnelle (et un âge virtuel) remise à zéro par les maintenances (ce qui est signalé par des flèches pour la deuxième et la troisième maintenances sur le graphe de l'âge virtuel) et qui reprend alors la forme de l'intensité initiale.

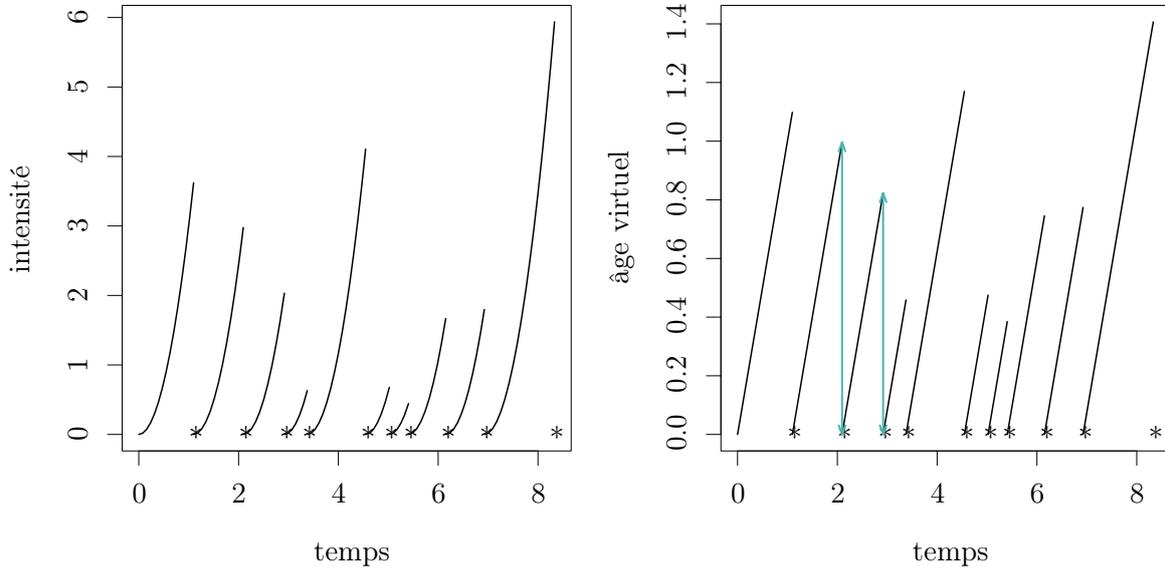


FIGURE 1.2 – Intensité conditionnelle et âge virtuel d'un modèle AGAN

1.3.4 Modèles ARA

Passons maintenant aux modèles à réduction arithmétique de l'âge virtuel (ARA), exposés dans [DG04]. Ils considèrent que chaque réparation réduit l'âge virtuel d'une quantité dépendant potentiellement du passé du processus de défaillances et d'un paramètre d'efficacité ρ .

1.3.4.1 Modèle à mémoire infinie

Le modèle ARA_∞ fait partie de cette classe de modèles de maintenance imparfaite. Il correspond au modèle de Kijima [Kij89] de type II avec effet de maintenance déterministe

et constant. L'hypothèse de base de ce modèle est que la réparation réduit l'âge virtuel du système d'une quantité proportionnelle à son âge juste avant la réparation : pour tous $t \geq 0$ et $i \geq 1$,

$$V_i(t) = V_{i-1}(t) - \rho V_{i-1}(T_i). \quad (1.31)$$

Nous pouvons donc réécrire l'âge virtuel ainsi :

Propriété 1.4

Dans un modèle ARA_∞ , pour tous $t \geq 0$ et $i \geq 0$, l'âge virtuel est donné par :

$$V_i(t) = t - \rho \sum_{j=0}^{i-1} (1 - \rho)^j T_{i-j}. \quad (1.32)$$

Démonstration. Nous pouvons le voir par récurrence sur i : il est évident que le résultat est vérifié pour $i = 0$. Supposons que

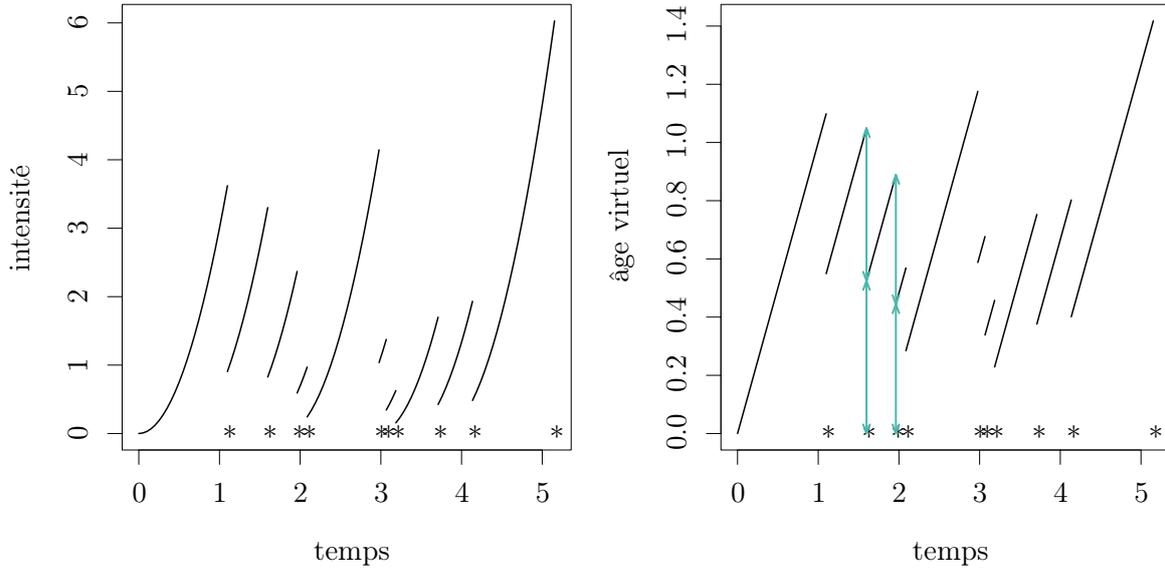
$$V_{i-1}(t) = t - \rho \sum_{j=0}^{i-2} (1 - \rho)^j T_{i-1-j}, \quad (1.33)$$

alors

$$\begin{aligned} V_i(t) &= V_{i-1}(t) - \rho V_{i-1}(T_i) \\ &= t - \rho \sum_{j=0}^{i-2} (1 - \rho)^j T_{i-1-j} - \rho T_i + \rho^2 \sum_{j=0}^{i-2} (1 - \rho)^j T_{i-1-j} \\ &= t - \rho \sum_{j=0}^{i-2} (1 - \rho)^{j+1} T_{i-1-j} - \rho T_i \\ &= t - \rho \sum_{j=1}^{i-1} (1 - \rho)^j T_{i-j} - \rho T_i \\ &= t - \rho \sum_{j=0}^{i-1} (1 - \rho)^j T_{i-j}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

□

Un exemple de système suivant un modèle ARA_∞ est représenté en figure 1.3. Y sont représentés l'intensité conditionnelle et l'âge virtuel d'un système simulé sous le modèle ARA_∞ , avec $n = 10$ défaillances, une efficacité des maintenances $\rho = 0.5$ et une intensité initiale en loi de Weibull de paramètres $\eta = 1$ et $\beta = 3$. Il est ici intéressant d'observer l'âge virtuel : l'âge du système juste avant la défaillance est réduit de moitié, puisque $\rho = 0.5$. Ce phénomène est symbolisé par des flèches. De plus, le lecteur remarquera que l'âge virtuel reste globalement stable.

FIGURE 1.3 – Intensité conditionnelle et âge virtuel d'un modèle ARA_{∞}

1.3.4.2 Modèle à mémoire 1

Le modèle ARA_1 fait partie aussi de cette classe. Il correspond au modèle de Kijima [Kij89] de type I avec effet de maintenance déterministe et constant. L'hypothèse du modèle ARA_1 est que l'effet de la réparation réduit le supplément d'âge ajouté depuis la dernière panne d'un facteur ρ : pour tous $t \geq 0$ et $i \geq 1$,

$$V_i(t) = V_{i-1}(t) - \rho(V_{i-1}(T_i) - V_{i-1}(T_{i-1})). \quad (1.35)$$

Nous pouvons alors réécrire l'âge virtuel ainsi :

Propriété 1.5

Dans un modèle ARA_1 , pour tous $t \geq 0$ et $i \geq 0$, l'âge virtuel est donné par :

$$V_i(t) = t - \rho T_i. \quad (1.36)$$

Démonstration. Nous pouvons à nouveau le montrer par récurrence sur i : il est évident que le résultat est vérifié pour $i = 0$. Supposons que

$$V_{i-1}(t) = t - \rho T_{i-1}, \quad (1.37)$$

alors

$$\begin{aligned} V_i(t) &= V_{i-1}(t) - \rho(V_{i-1}(T_i) - V_{i-1}(T_{i-1})) \\ &= t - \rho T_{i-1} - \rho(T_i - \rho T_{i-1} - (T_{i-1} - \rho T_{i-1})) \\ &= t - \rho T_i. \end{aligned} \quad (1.38)$$

□

Un exemple de système suivant un modèle ARA_1 est représenté en figure 1.4. Y sont représentés l'intensité conditionnelle et l'âge virtuel d'un système simulé sous le modèle ARA_1 , avec $n = 10$ défaillances, une efficacité des maintenances $\rho = 0.5$ et une intensité initiale en loi de Weibull de paramètres $\eta = 1$ et $\beta = 3$. Observons à nouveau l'âge virtuel : l'âge après la maintenance repart de la moitié du supplément d'âge depuis la maintenance précédente, ce qui est symbolisé par les flèches. Au contraire du modèle ARA_∞ , nous pouvons remarquer que l'âge virtuel du système a tendance à augmenter au cours du temps.

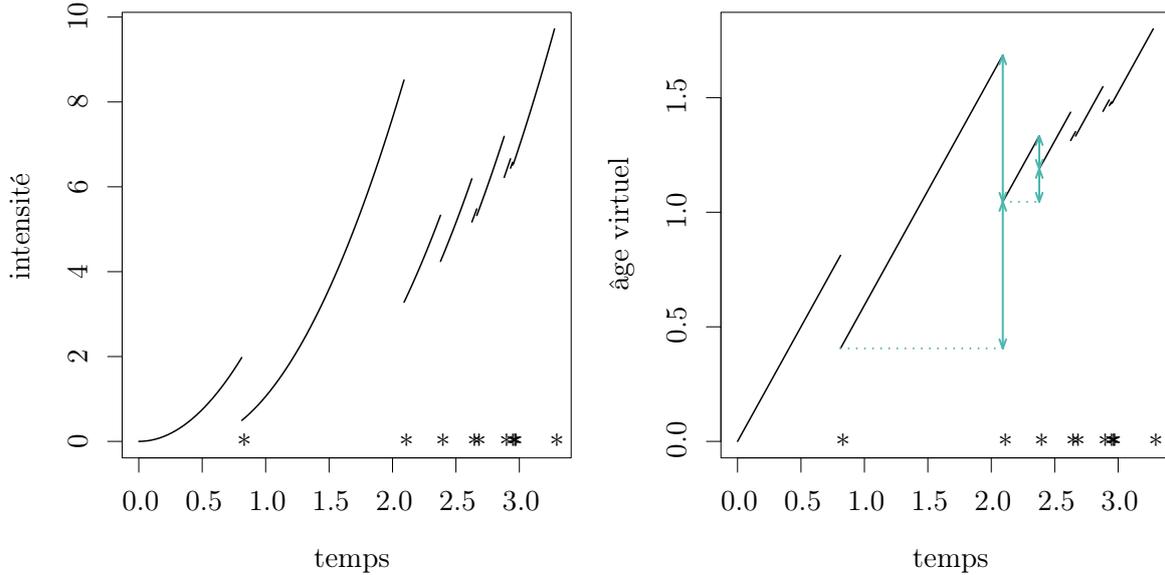


FIGURE 1.4 – Intensité conditionnelle et âge virtuel d'un modèle ARA_1

1.3.4.3 Modèle à mémoire m

Le modèle ARA_m constitue un intermédiaire entre les modèles ARA_1 et ARA_∞ : l'idée est qu'au lieu de ne retenir que le dernier instant de défaillance (ARA_1) ou bien tous les instants de défaillance (ARA_∞), nous n'en retenons que m . Ce modèle est donc défini par l'âge virtuel suivant :

Définition 1.6

L'âge virtuel d'un modèle ARA_m est défini, pour tous $t \geq 0$ et $i \geq 0$, par

$$V_i(t) = t - \rho \sum_{j=0}^{\min(m-1, i-1)} (1 - \rho)^j T_{i-j}. \quad (1.39)$$

Cette définition est cohérente, puisque pour $m = 1$, nous retrouvons bien le modèle ARA_1 et pour $m = \infty$, nous avons le modèle ARA_∞ . Un exemple de système suivant un modèle ARA_m est représenté en figure 1.5. Y sont représentés l'intensité conditionnelle et l'âge virtuel d'un système simulé sous le modèle ARA_3 , avec $n = 10$ défaillances, une efficacité des

maintenances $\rho = 0.5$ et une intensité initiale en loi de Weibull de paramètres $\eta = 1$ et $\beta = 3$. Nous observons bien un effet intermédiaire entre les modèles ARA_∞ et ARA_1 .

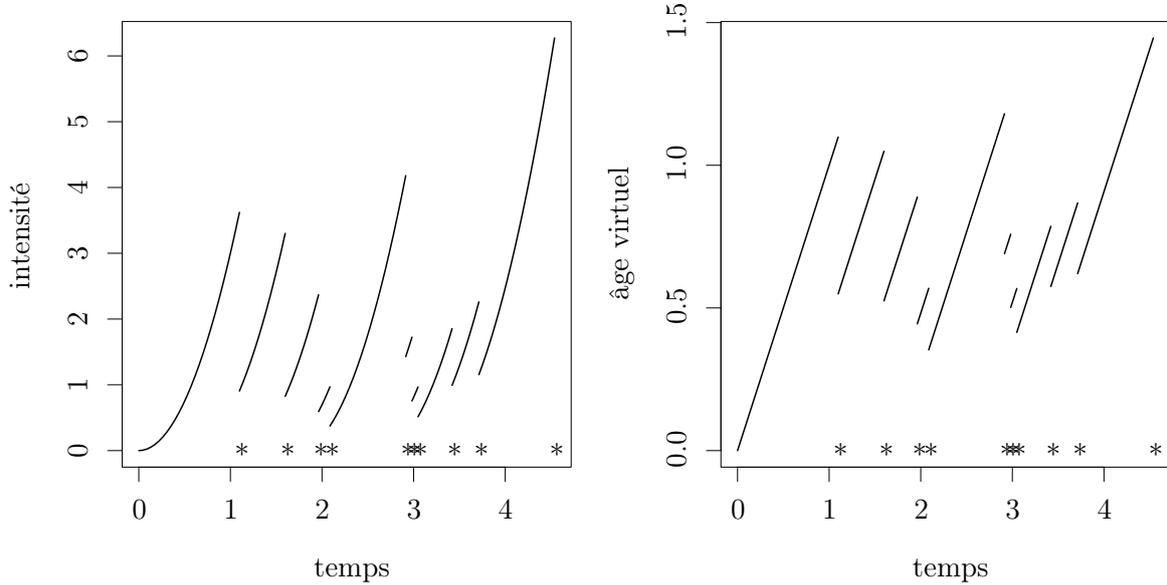


FIGURE 1.5 – Intensité conditionnelle et âge virtuel d'un modèle ARA_m

1.3.4.4 Efficacité des maintenances dans les modèles ARA

Dans tous les modèles ARA, l'efficacité de la réparation est mesurée par la valeur de ρ :

- $0 < \rho < 1$: réparation efficace ;
- $\rho = 1$: réparation parfaite (AGAN) ;
- $\rho = 0$: réparation minimale (ABAO) ;
- $\rho < 0$: réparation nuisible.

La figure 1.6 montre différentes efficacités sur un même jeu de données. Y est représenté l'âge virtuel issu des instants de panne d'une voiture AMC Ambassador détenue par le gouvernement de l'Ohio (données de l'article [ACC98]), avec un modèle ARA_3 d'intensité initiale de Weibull ($\eta = 1, \beta = 3$) et quatre valeurs différentes de ρ .

1.3.5 Modèle QR

Le modèle AGAN suppose que les durées inter-défaillances sont indépendantes et identiquement distribuées :

$$\forall i \geq 1, T_i - T_{i-1} \stackrel{\mathcal{L}oi}{=} T, \quad (1.40)$$

où T est l'instant de panne d'un nouveau système n'ayant subi aucune défaillance. Une façon de généraliser cette hypothèse est de considérer que les durées inter-défaillances sont indépen-

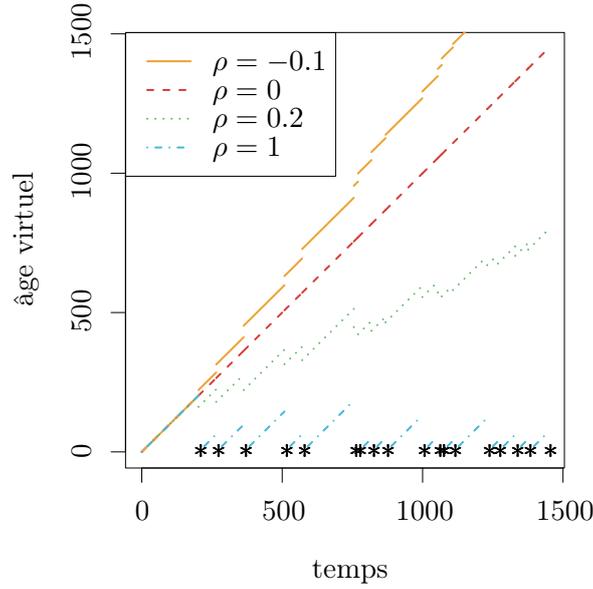


FIGURE 1.6 – Valeurs de l'efficacité

dantes mais qu'il y a une évolution géométrique de leur distribution :

$$\forall i \geq 1, T_i - T_{i-1} \stackrel{\mathcal{L}}{\equiv} \rho^{i-1}T, \quad (1.41)$$

où $\rho > 0$ est un paramètre caractérisant l'efficacité de la réparation. Ces hypothèses correspondent au modèle de Quasi-Renouvellement (QR), exposé dans [WP96], dont nous pouvons alors calculer l'intensité conditionnelle :

Propriété 1.6

Dans un modèle QR, pour tous $t \geq 0$ et $i \geq 0$, l'intensité conditionnelle est donnée par :

$$\lambda_t = \frac{1}{\rho^{N_t^-}} h\left(\frac{t - T_{N_t^-}}{\rho^{N_t^-}}\right). \quad (1.42)$$

Démonstration. En effet, soit $i \geq 1$. D'une part, pour tout $x > 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_i - T_{i-1} \leq x \mid \mathcal{H}_{T_{i-1}^-}) &= \mathbb{P}(\rho^{i-1}T \leq x) \\ &= \mathbb{P}\left(T \leq \frac{x}{\rho^{i-1}}\right) \\ &= 1 - \exp\left(-\int_0^{\frac{x}{\rho^{i-1}}} h(s) ds\right) \\ &= 1 - \exp\left(-\int_0^x \frac{1}{\rho^{i-1}} h\left(\frac{s}{\rho^{i-1}}\right) ds\right). \end{aligned} \quad (1.43)$$

D'autre part, nous avons aussi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_i - T_{i-1} \leq x \mid \mathcal{H}_{T_{i-1}^-}) &= \mathbb{P}(T_i \leq T_{i-1} + x \mid \mathcal{H}_{T_{i-1}^-}) \\ &= 1 - \exp\left(-\int_{T_{i-1}}^{T_{i-1}+x} \lambda_s ds\right) \\ &= 1 - \exp\left(-\int_0^x \lambda_{T_{i-1}+s} ds\right), \end{aligned} \quad (1.44)$$

d'où l'égalité suivante, pour $0 \leq s < T_i - T_{i-1}$:

$$\lambda_{T_{i-1}+s} = \frac{1}{\rho^{i-1}} h\left(\frac{s}{\rho^{i-1}}\right), \quad (1.45)$$

c'est-à-dire, pour $T_{i-1} \leq s < T_i$,

$$\lambda_s = \frac{1}{\rho^{i-1}} h\left(\frac{s - T_{i-1}}{\rho^{i-1}}\right). \quad (1.46)$$

Nous en déduisons la forme générale de l'intensité conditionnelle : pour tout $t \geq 0$,

$$\lambda_t = \frac{1}{\rho^{N_t^-}} h\left(\frac{t - T_{N_t^-}}{\rho^{N_t^-}}\right). \quad (1.47)$$

□

Le processus stochastique correspondant au modèle QR est communément appelé processus géométrique. Nous reconnaissons alors l'âge virtuel :

Propriété 1.7

L'âge virtuel d'un modèle QR est donné, pour tous $t \geq 0$ et $i \geq 0$, par

$$V_i(t) = \frac{t - T_i}{\rho^i}. \quad (1.48)$$

Nous voyons alors que l'âge virtuel est remis à zéro par chaque maintenance, puisque, pour tout $i \geq 0$,

$$V_i(T_i) = \frac{T_i - T_i}{\rho^i} = 0. \quad (1.49)$$

Le cas $\rho = 1$ correspond au modèle AGAN. Si $\rho \in]0, 1[$, les durées inter-pannes décroissent et donc le système se détériore. Si $\rho > 1$, le système s'améliore, ce qui peut arriver lorsque le composant défaillant du système est remplacé par un composant de nouvelle technologie. Un exemple de modèle QR est représenté en figure 1.7. Y sont représentés l'intensité conditionnelle et l'âge virtuel d'un système simulé sous le modèle QR, avec $n = 10$ défaillances, une efficacité des maintenances $\rho = 0.5$ et une intensité initiale en loi de Weibull de paramètres $\eta = 1$ et $\beta = 3$. Observons encore l'âge virtuel : nous retrouvons bien que celui-ci est remis à zéro par les maintenances. De plus, la pente de l'âge virtuel est doublée à chaque défaillance, puisque celle-ci est égale à $\frac{1}{\rho^i} = 2^i$. Cela est représenté par les flèches, et nous voyons que les durées inter-défaillances ont tendance à s'écraser rapidement.

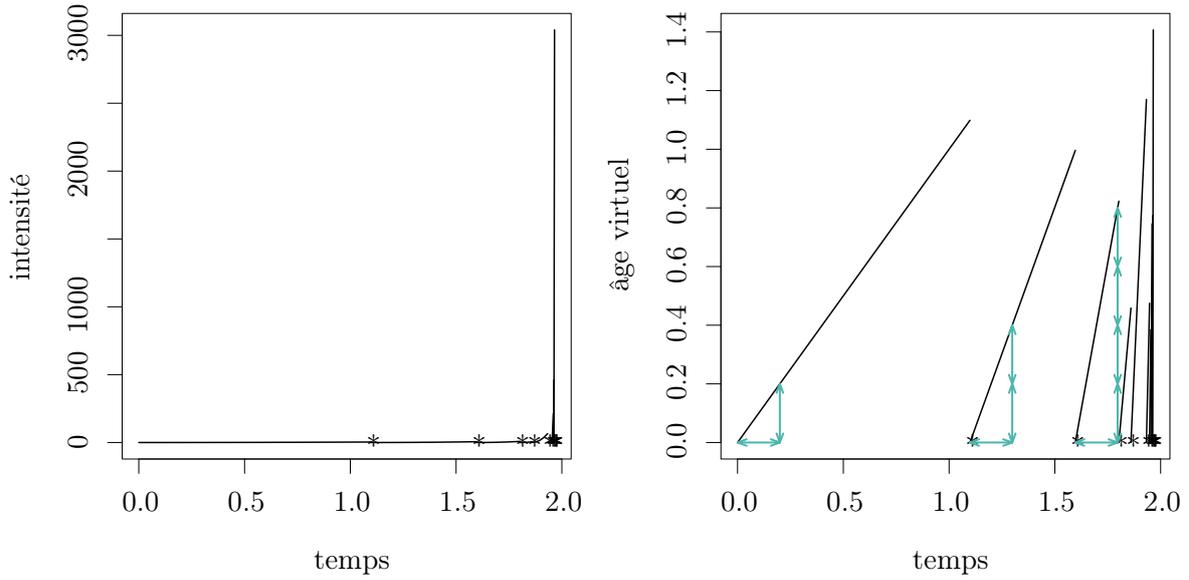


FIGURE 1.7 – Intensité conditionnelle et âge virtuel d'un modèle QR

1.3.6 Modèle QRG

Comme nous pouvons le remarquer en figure 1.7, avec ρ beaucoup plus petit que 1, la croissance géométrique des durées inter-pannes offre une évolution trop rapide, pouvant être modérée par un modèle exposé dans [BM13], pour lequel, pour $i \geq 1$,

$$T_i - T_{i-1} \stackrel{\mathcal{L}oi}{=} \rho^{b_{i-1}} T, \quad (1.50)$$

où $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de réels positifs tels que $b_0 = 0$ et $\lim_{i \rightarrow \infty} b_i = +\infty$, et T est l'instant de panne d'un nouveau système n'ayant subi aucune défaillance. Par exemple, nous pouvons prendre $b_i = i$ (modèle QR), $b_i = \sqrt{i}$ ou $b_i = \log(i+1)$. Cette nouvelle hypothèse forme le modèle de Quasi-Renouvellement Généralisé (QRG), dont l'intensité s'écrit d'une nouvelle manière :

Propriété 1.8

Dans un modèle QRG, pour tout $t \geq 0$,

$$\lambda_t = \frac{1}{\rho^{b_{N_t^-}}} h \left(\frac{t - T_{N_t^-}}{\rho^{b_{N_t^-}}} \right). \quad (1.51)$$

La démonstration est similaire à celle du modèle QR. Le processus stochastique correspondant au modèle QRG est communément appelé processus géométrique étendu. Un exemple de modèle QRG est représenté en figure 1.8. Y sont représentés l'intensité conditionnelle et l'âge virtuel d'un système simulé sous le modèle QRG, avec $n = 10$ défaillances, une efficacité des maintenances $\rho = 0.5$, la suite $b_i = \log(i+1)$ et une intensité initiale en loi de Weibull de paramètres $\eta = 1$ et $\beta = 3$. Nous voyons que les durées inter-défaillances décroissent moins vite que dans le modèle QR.

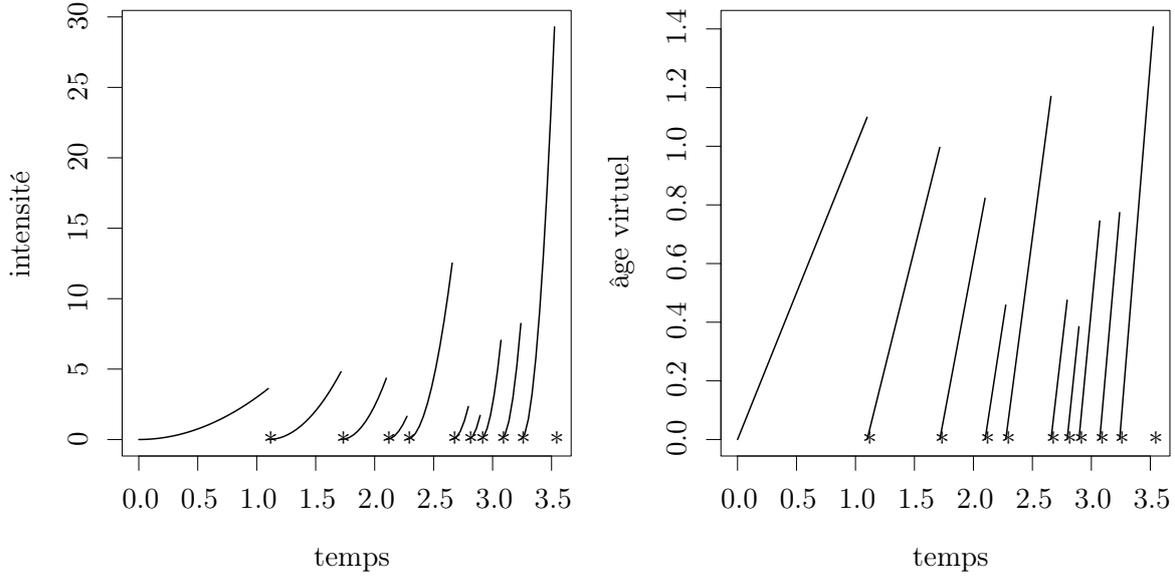


FIGURE 1.8 – Intensité conditionnelle et âge virtuel d'un modèle QRG

1.4 Usage des modèles d'âge virtuel

Dans cette section, nous verrons comment mettre en œuvre les modèles d'âge virtuel exposés en section 1.3, d'une part au travers de la simulation de jeux de données, qui sera intensivement utilisée au cours de cette thèse, et d'autre part de l'estimation des paramètres des modèles.

1.4.1 Simulation de jeux de données

La simulation d'un jeu de données suivant un modèle d'âge virtuel se fait itérativement, en appliquant l'inverse de la fonction de répartition conditionnelle à des variables aléatoires indépendantes uniformes, ce qui est une méthode classique en simulation de variables aléatoires. Notons

$$H(t) = \int_0^t h(s) ds. \quad (1.52)$$

Par exemple, nous avons pour la loi de Weibull, pour tout $t \geq 0$, $H(t) = (t/\eta)^\beta$, et $H(t) = \alpha\beta^{-1}(e^{\beta t} - 1)$ pour une intensité log-linéaire. La fonction de répartition conditionnelle du prochain instant de défaillance vérifie, pour tous $i \geq 0$ et $t > T_i$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_{i+1} \leq t \mid T_1, \dots, T_i) &= 1 - \exp\left(-\int_{T_i}^t \lambda_s ds\right) \\ &= 1 - \exp\left(-\int_{T_i}^t V_i'(s) h(V_i(s)) ds\right) \\ &= 1 - \exp\left(-\left(H(V_i(t)) - H(V_i(T_i))\right)\right). \end{aligned} \quad (1.53)$$

Inversons cette fonction :

$$\begin{aligned}
u &= 1 - \exp(- (H(V_i(t)) - H(V_i(T_i)))) \\
\Leftrightarrow \log(1 - u) &= - (H(V_i(t)) - H(V_i(T_i))) \\
\Leftrightarrow -\log(1 - u) &= H(V_i(t)) - H(V_i(T_i)) \\
\Leftrightarrow H(V_i(t)) &= H(V_i(T_i)) - \log(1 - u) \\
\Leftrightarrow t &= V_i^{-1} (H^{-1} (H(V_i(T_i)) - \log(1 - u))), \tag{1.54}
\end{aligned}$$

où $V_i^{-1}(\cdot)$ est l'inverse généralisée de $V_i(\cdot)$ et $H^{-1}(\cdot)$ est l'inverse généralisée de $H(\cdot)$. Il suffit d'appliquer la fonction ainsi calculée à une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ pour obtenir une méthode de simulation du prochain instant de défaillance : soit $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$, alors nous avons l'égalité en loi

$$T_{i+1} \stackrel{\mathcal{L}oi}{=} V_i^{-1} (H^{-1} (H(V_i(T_i)) - \log(U))). \tag{1.55}$$

Les instants de défaillance d'un système sont ainsi successivement simulés. Dans [DDB20], cette inversion de la fonction de répartition est utilisée pour simuler des jeux de données plus complexes, comprenant éventuellement un effet de maintenance corrective et plusieurs types de maintenance préventive.

1.4.2 Estimation des paramètres du modèle à partir d'un jeu de données

Les modèles d'âge virtuel dépendent de divers paramètres : d'une part les paramètres de l'intensité initiale, d'autre part l'efficacité des réparations. Face à des données, en choisissant un modèle d'âge virtuel, il faut être capable d'évaluer les valeurs de ces paramètres. Nous avons alors recours à une estimation statistique des paramètres.

La méthode d'estimation par maximum de vraisemblance dans le cas de plusieurs systèmes indépendants est décrite dans [DDB20]. Écrivons la méthode pour un seul système. Afin d'obtenir une simplification de la vraisemblance, nous introduisons une autre paramétrisation de la loi de Weibull : avec

$$\alpha = \frac{1}{\eta^\beta}, \tag{1.56}$$

nous obtenons une nouvelle expression du taux de hasard initial :

$$h(t) = \alpha \beta t^{\beta-1}. \tag{1.57}$$

Cette paramétrisation nous permet de nous rapprocher du cas du taux de hasard log-linéaire donné en Équation 1.7, qui fait aussi apparaître un paramètre α en facteur. Posons maintenant

$$h(t) = \alpha \tilde{h}(t). \tag{1.58}$$

Les paramètres du modèle sont alors α , β et ρ . Nous disposons d'un ensemble de n dates de défaillance $\{t_i\}_{1 \leq i \leq n}$ du système. Écrivons la log-vraisemblance associée au modèle. Il convient d'être prudent ici, car il n'agit pas d'observations indépendantes, nous ne pouvons

donc pas écrire la vraisemblance comme produit des densités marginales, mais comme produit des densités conditionnelles. Revenons tout d'abord à la fonction de répartition conditionnelle. Pour $1 \leq i \leq n$ et $0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t$, nous avons :

$$F_{T_i|T_1=t_1, \dots, T_{i-1}=t_{i-1}}(t) = 1 - \exp\left(-\int_{t_{i-1}}^t \lambda_s ds\right), \quad (1.59)$$

d'où la densité conditionnelle :

$$f_{T_i|T_1=t_1, \dots, T_{i-1}=t_{i-1}}(t) = \lambda_t \exp\left(-\int_{t_{i-1}}^t \lambda_s ds\right). \quad (1.60)$$

Nous en déduisons par produit la densité jointe des T_1, \dots, T_n :

$$f_{T_1, \dots, T_n}(t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n \left(\lambda_{t_i} \exp\left(-\int_{t_{i-1}}^{t_i} \lambda_s ds\right) \right), \quad (1.61)$$

et ainsi la log-vraisemblance s'écrit :

$$\mathcal{L}(t_1, \dots, t_n; \alpha, \beta, \rho) = \sum_{i=1}^n \left(\log(\lambda_{t_i}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \lambda_s ds \right). \quad (1.62)$$

Les paramètres d'un modèle d'âge virtuel donné peuvent ainsi être estimés en maximisant cette log-vraisemblance :

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\rho}) = \underset{\alpha, \beta, \rho}{\operatorname{argmax}} \mathcal{L}(t_1, \dots, t_n; \alpha, \beta, \rho). \quad (1.63)$$

En réalité, d'après la propriété suivante, il suffit de maximiser la log-vraisemblance sur β et ρ pour obtenir des estimateurs des trois paramètres.

Propriété 1.9

Les paramètres d'un modèle d'âge virtuel peuvent être estimés ainsi :

$$(\hat{\beta}, \hat{\rho}) = \underset{\beta, \rho}{\operatorname{argmax}} \mathcal{L}(t_1, \dots, t_n; \frac{n}{S_1(\beta, \rho)}, \beta, \rho) \quad \text{et} \quad \hat{\alpha} = \frac{n}{S_1(\hat{\beta}, \hat{\rho})}, \quad (1.64)$$

où $S_1(\beta, \rho) = \sum_{i=1}^n \left(\tilde{H}(V_{i-1}(T_i)) - \tilde{H}(V_{i-1}(T_{i-1})) \right)$ est une quantité ne dépendant pas de α .

Démonstration. Transformons tout d'abord l'écriture de la log-vraisemblance :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t_1, \dots, t_n; \alpha, \beta, \rho) &= \sum_{i=1}^n \left(\log(\lambda_{t_i}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \lambda_s ds \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\log \left(\alpha V'_{i-1}(t_i) \tilde{h}(V_{i-1}(t_i)) \right) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha V'_{i-1}(s) \tilde{h}(V_{i-1}(s)) ds \right) \\
&= n \log(\alpha) + \sum_{i=1}^n \log(V'_{i-1}(t_i)) + \sum_{i=1}^n \log(\tilde{h}(V_{i-1}(t_i))) \\
&\quad - \alpha \sum_{i=1}^n \left(\tilde{H}(V_{i-1}(t_i)) - \tilde{H}(V_{i-1}(t_{i-1})) \right) \\
&= n \log(\alpha) + S_3(\rho) + S_2(\beta, \rho) - \alpha S_1(\beta, \rho),
\end{aligned} \tag{1.65}$$

où

$$S_3(\rho) := \sum_{i=1}^n \log(V'_{i-1}(t_i)) \tag{1.66}$$

est une quantité ne dépendant que de ρ ,

$$S_2(\beta, \rho) := \sum_{i=1}^n \log(\tilde{h}(V_{i-1}(t_i))) \tag{1.67}$$

et

$$S_1(\beta, \rho) := \sum_{i=1}^n \left(\tilde{H}(V_{i-1}(t_i)) - \tilde{H}(V_{i-1}(t_{i-1})) \right) \tag{1.68}$$

ne dépendent que de β et ρ . Cherchons le maximum en α de la log-vraisemblance :

$$\begin{aligned}
\max_{\alpha} \mathcal{L}(t_1, \dots, t_n; \alpha, \beta, \rho) &= \max_{\alpha} (n \log(\alpha) + S_3(\rho) + S_2(\beta, \rho) - \alpha S_1(\beta, \rho)) \\
&=: \max_{\alpha} \ell_{\beta, \rho}(\alpha),
\end{aligned} \tag{1.69}$$

où $\ell_{\beta, \rho}(\alpha)$ doit être vue comme une fonction de α . Prenons la dérivée de cette fonction :

$$\ell'_{\beta, \rho}(\alpha) = \frac{n}{\alpha} - S_1(\beta, \rho) \tag{1.70}$$

s'annule si et seulement si :

$$\alpha = \frac{n}{S_1(\beta, \rho)}. \tag{1.71}$$

Observons la dérivée seconde :

$$\ell''_{\beta, \rho}(\alpha) = -\frac{n}{\alpha^2} \tag{1.72}$$

est toujours négative, nous avons donc bien trouvé un maximum. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\max_{\alpha} \mathcal{L}(t_1, \dots, t_n; \alpha, \beta, \rho) &= \mathcal{L} \left(\frac{n}{S_1(\beta, \rho)}, \beta, \rho \right) \\
&= n(\log(n) - \log(S_1(\beta, \rho)) - 1) + S_3(\rho) + S_2(\beta, \rho).
\end{aligned} \tag{1.73}$$

Nous pouvons alors écrire :

$$(\hat{\beta}, \hat{\rho}) = \operatorname{argmax}_{\beta, \rho} \left(\max_{\alpha} \mathcal{L}(t_1, \dots, t_n; \alpha, \beta, \rho) \right), \quad (1.74)$$

et les estimateurs par maximum de vraisemblance de (α, β, ρ) peuvent être trouvés ainsi :

$$(\hat{\beta}, \hat{\rho}) = \operatorname{argmax}_{\beta, \rho} \mathcal{L} \left(\frac{n}{S_1(\beta, \rho)}, \beta, \rho \right), \quad \text{et} \quad \hat{\alpha} = \frac{n}{S_1(\hat{\beta}, \hat{\rho})}. \quad (1.75)$$

□

Cette méthode se généralise aisément au cas de plusieurs systèmes indépendants. En effet, dans ce cas, la vraisemblance est égale au produit des vraisemblances correspondant à chaque système. La maximisation de la log-vraisemblance se fait ensuite numériquement. De plus, il est tout à fait possible de considérer une censure par le temps dans le calcul de la vraisemblance.

1.4.3 Exemple de simulation d'un jeu de données et d'estimation des paramètres

Cette sous-section vise à illustrer l'usage des modèles d'âge virtuel, d'abord par la simulation d'un jeu de données, puis avec l'estimation paramétrique sur ce jeu de données.

1.4.3.1 Simulation du jeu de données

Nous allons simuler un jeu de données suivant le modèle ARA_{∞} -PLP avec les paramètres fixés en table 1.1, où ν est le nombre de systèmes présents dans le jeu de données et n est le nombre de défaillances de chaque système. Nous procédons donc à une censure par le nombre

nb. systèmes	nb. défaillances	échelle du PLP	forme du PLP	efficacité des maint.
$\nu = 2$	$n = 10$	$\eta = 1$	$\beta = 2.5$	$\rho = 0.7$

TABLE 1.1 – Paramètres de simulation du jeu de données

de défaillances, mais nous pourrions aussi décider d'arrêter la simulation lorsque les systèmes ont vécu une certaine durée, ce qui constituerait une censure par le temps. Rappelons par ailleurs que $\eta = 1$ correspond à $\alpha = 1$. Nous avons reproduit en table 1.2 les 10 instants de défaillance de chaque système, arrondis à 10^{-4} . En figure 1.9, nous avons représenté le processus de comptage des défaillances pour les deux systèmes simulés. Le temps se trouve en abscisse et un saut d'une unité a lieu en ordonnée à chaque défaillance.

1.4.3.2 Estimation des paramètres

Nous procédons maintenant à l'estimation des paramètres du modèle sur le jeu de données simulé. Nous avons représenté en figure 1.10 le contraste du modèle, c'est-à-dire la log-

Numéro	Système 1	Système 2
1	0.1656	1.2542
2	1.0841	2.0696
3	2.1650	2.3571
4	3.2570	3.5727
5	3.9971	4.1117
6	4.2653	5.2689
7	5.1142	5.7035
8	5.1714	7.3125
9	6.3262	7.3259
10	6.8912	8.2157

TABLE 1.2 – Instants de défaillance des deux systèmes simulés

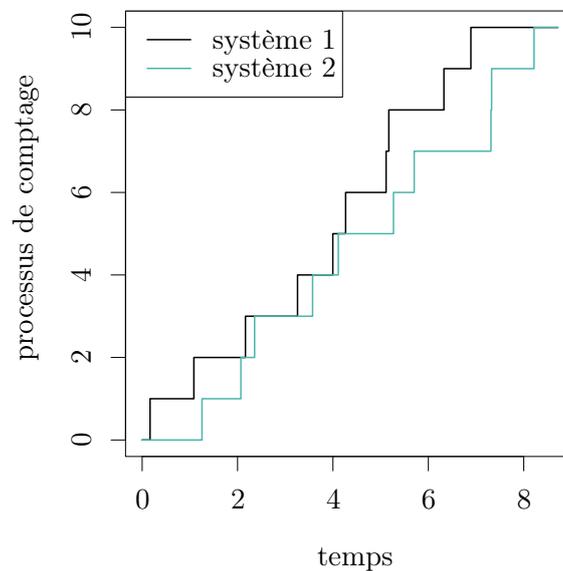


FIGURE 1.9 – Processus de comptage des défaillances

vraisemblance profilée en α , comme expliqué dans la sous-section 1.4.2. Nous observons facilement qu'il y a un maximum en β et ρ , ce point est précisément ce que nous cherchons : le maximum de vraisemblance, qui constitue l'estimation des paramètres du modèle. La maximisation numérique de la log-vraisemblance se fait ici avec une méthode de gradient conjugué, les valeurs initiales de l'algorithme étant fixées à $\beta = 2$ et $\rho = 0.5$. Les résultats arrondis à 10^{-4} sont donnés en table 1.3. Ces valeurs sont plutôt satisfaisantes compte tenu de la très petite

$\hat{\alpha}$	$\hat{\eta}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\rho}$
0.7222	1.1361	2.551	0.6900

TABLE 1.3 – Estimation des paramètres du modèle

taille de notre jeu de données. Nous avons représenté en figure 1.11 l'intensité de défaillance

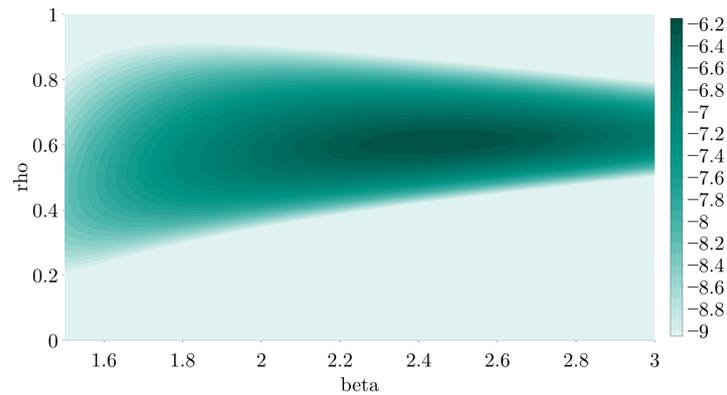


FIGURE 1.10 – Log-vraisemblance du modèle en fonction des paramètres

conditionnelle pour le premier système de notre jeu de données. La courbe noire correspond à l'intensité calculée avec les paramètres de simulation. La courbe verte correspond à l'intensité calculée avec les paramètres estimés. Nous voyons que les deux courbes sont relativement proches, mais pas exactement superposées.

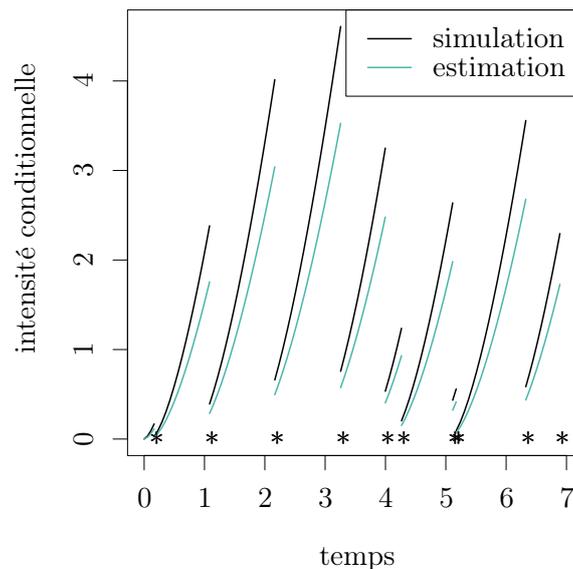


FIGURE 1.11 – Intensité de défaillance conditionnelle avec les paramètres de simulation et les paramètres estimés

1.5 Conclusion sur la modélisation de maintenances récurrentes

Dans ce chapitre, nous avons revu différents modèles servant à appréhender des événements récurrents. Le point de départ était donné avec deux modèles de base, ABAO et AGAN, pour ensuite introduire les modèles d'âge virtuel, qui sont le support de cette thèse. Un modèle

générique a été exposé, avec quelques déclinaisons particulières. Enfin, ce modèle générique a été mis en œuvre avec la simulation de jeux de données et l'estimation des paramètres du modèle.

Modèles d'âge virtuel à covariables

Sommaire

2.1	Modèles à covariables existants	32
2.1.1	Modèles à covariables en analyse de survie	32
2.1.2	Modèles à covariables pour des événements récurrents	33
2.2	Modèle d'âge virtuel incluant des covariables	33
2.2.1	Modélisation de l'intensité conditionnelle	34
2.2.2	Simulation de données pour des modèles d'âge virtuel incluant des covariables	34
2.2.3	Estimation des paramètres de modèles d'âge virtuel incluant des covariables	39
2.2.4	Exemple de simulation d'un jeu de données et d'estimation des paramètres	41
2.3	Conclusion sur les modèles d'âge virtuel à covariables	43

Avec la disponibilité croissante d'informations venant de capteurs ou de collectes de données automatiques, un nouveau champ de recherche est apparu pour étudier et modéliser l'hétérogénéité observée entre des systèmes apparemment identiques. En effet, des systèmes *a priori* identiques et indépendants modélisés par un même processus de défaillance peuvent présenter des disparités dans leur manière de tomber en panne. Nous notons par ailleurs que des systèmes similaires peuvent être distingués selon des informations observées qui peuvent potentiellement influencer leur processus de défaillance, comme les conditions météorologiques, l'année de mise en service, la charge de travail, ou encore la température corporelle, le sexe, ou la taille d'une tumeur si nous nous intéressons à des patients. Ces différences sont rassemblées sous le nom d'hétérogénéité observée, et leur prise en compte dans l'étude du processus de défaillance constitue potentiellement un atout majeur dans la compréhension des pannes des systèmes : savoir que tel ou tel facteur dégrade la fiabilité d'un système peut permettre d'y remédier en agissant sur ce paramètre, ou de prédire avec plus d'acuité les prochaines défaillances. La connaissance des différences entre les systèmes et de leur évolution dans le temps peut aussi permettre de planifier des maintenances préventives de manière optimale, en prenant en compte cette information, comme nous le verrons au chapitre 4. L'hétérogénéité peut aussi être non observée, par exemple si un dysfonctionnement interne vient perturber le système. Le fait de ne pas pouvoir prendre en compte tous les paramètres, parce qu'ils sont inconnus, difficiles à quantifier ou simplement non enregistrés, peut ainsi être intégré dans l'hétérogénéité non observée.

Pour prendre en compte l'hétérogénéité, différentes approches ont été utilisées. Nous distinguerons notamment les *frailties*, qui sont des effets aléatoires non observés, et les covariables.

Les covariables sont les valeurs relevées de certains indicateurs comme la localisation géographique du système, qui est une information statique, ou la température du système en fonctionnement, qui peut être mesurée de manière continue. Pour un patient, nous pouvons penser au sexe comme une covariable statique ou à la pression artérielle comme une covariable dynamique. Différents systèmes auront différentes valeurs de covariables, reflétant leur hétérogénéité.

Ces covariables peuvent être intégrées aux modèles de maintenance imparfaite en ajoutant un facteur exponentiel dans l'intensité conditionnelle, à la manière du taux de hasard dans [Cox72]. Cependant, toutes les différences observées entre les systèmes n'ont pas la même influence sur le processus de défaillance. Le score d'une équipe de football de l'autre côté de la planète, bien que ce soit une information observée qui peut être enregistrée, aura probablement peu d'influence sur la santé de notre patient, au contraire de sa glycémie, par exemple. C'est pourquoi les covariables sont associées à un coefficient qui est constant dans le temps et pour tous les systèmes. Une grande valeur absolue du coefficient indique que la covariable associée a une influence importante sur le processus de défaillance. *A contrario*, une valeur absolue faible révèle une faible influence de la covariable. Le signe du coefficient désigne une influence bénéfique ou délétère pour le système.

Dans ce chapitre, nous exposerons d'abord des modèles à covariables existants, que ce soit en analyse de survie ou pour des événements récurrents, puis nous proposerons notre modèle d'âge virtuel incluant des covariables, en l'étudiant au travers de la simulation de jeux de données et de l'estimation paramétrique. Nous avons valorisé ce modèle dans trois contributions originales : [DDB20] présente un modèle d'âge virtuel à covariables statiques, tandis qu'un tel modèle avec des covariables dynamiques est introduit dans [BDB19] et étudié du point de vue de l'inférence statistique dans [BDB20].

2.1 Modèles à covariables existants

Nous commençons ce chapitre par un état de l'art sur les modèles à covariables.

2.1.1 Modèles à covariables en analyse de survie

Bien des articles traitent de l'ajout de covariables en analyse de survie. Par exemple, [Ara+16], [MZ18a] et [MZ18b] étudient des covariables avec des données de survie et fournissent une procédure d'estimation. La simulation de durées de survie sous l'influence de covariables est étudiée dans [BAB05]. La différence entre des covariables constantes et des covariables dépendantes du temps est discutée dans [FL99]. [Zho+14] donne un modèle joint où la dégradation devient une covariable dépendante du temps de l'instant de défaillance.

Cependant, les modèles issus de ces articles ne permettent pas de traiter directement les événements récurrents, pour lesquels d'autres modèles doivent être proposés.

2.1.2 Modèles à covariables pour des événements récurrents

Les événements récurrents sont aussi associés à des covariables dans un certain nombre d'articles. Par exemple, [LP19] traite des problèmes de type *Big Data* quand un grand nombre de covariables est disponible. Nous pouvons citer [Fos+06], [Zha+12], [GGP14], [Nov15] et [Li+16], où des maintenances ABAO avec des covariables constantes sont étudiées et où des procédures d'estimation sont données et évaluées. D'autres modèles sont donnés dans [He+17], [MAC20], [Nin+20] et [Xu+17]. Des événements récurrents avec un événement terminal et des covariables sont traités dans [AAR19], [Han+18], [Han+20], [Kim19] et [SDS19]. Des *frailties* sont parfois aussi ajoutées comme dans [DVZ19], [Lee+18], [LLD18] et [SL17]. Dans les quatre articles, une méthode d'estimation est donnée. Nous pouvons aussi citer [AO16], où une analyse de sensibilité est faite avec des données manquantes d'événements récurrents influencés par des covariables. Cependant, aucun de ces articles ne traite de maintenances imparfaites. Tous supposent des réparations ABAO ou AGAN.

Très peu d'articles travaillent avec des modèles incluant à la fois des covariables et des maintenances imparfaites. [WS15] considère les modèles ARA avec des covariables dynamiques, mais aucune procédure d'estimation n'est donnée. [Peñ16] donne des propriétés asymptotiques de l'estimateur de l'effet des covariables mais sans estimer l'effet des maintenances. [SN11] estime les effets à la fois des covariables et des maintenances. Cependant, seuls deux modèles particuliers sont traités et cette procédure n'est pas évaluée. De plus, seules des covariables constantes entre deux instants de défaillances sont considérées. [CCLG14] propose une estimation par maximum de vraisemblance avec des covariables dépendantes du temps dans le cas du *Linear Extended Yule Process*, qui est un modèle de maintenance imparfaite distinct des modèles d'âge virtuel. [LH14] utilise les modèles de Kijima avec des covariables constantes par morceaux mais les covariables agissent sur l'effet de maintenance, ce qui ne sera pas le cas ici. De plus, une méthode d'inférence bayésienne est utilisée. [LBJ04] définit plusieurs modèles, avec un effet de maintenance ou un âge virtuel introduit comme covariable ou directement dans l'intensité. Cependant, cet article ne considère pas d'aspect statistique de ces modèles, et n'aborde notamment pas l'estimation des paramètres du modèle. Dans le même esprit, dans [WJB11], l'effet de la réparation est covariable du modèle, ce qui constitue un modèle différent du nôtre. L'utilisation du modèle n'y est illustrée qu'au travers d'un exemple numérique.

Nous allons, dans la prochaine section, proposer un modèle qui répond à la fois au besoin de mesurer et d'estimer l'efficacité des maintenances, et à l'importance de prendre en compte l'effet de covariables.

2.2 Modèle d'âge virtuel incluant des covariables

Cette section vise à présenter notre modèle générique d'âge virtuel doté de covariables. Ce modèle générique reprend en partie le modèle exposé dans 1.3.2, mais y adjoint des covariables fixes ou dynamiques.

Le modèle générique que nous avons proposé dans [DDB20] inclut des covariables statiques. Les modèles d'âge virtuel y sont utilisés comme ici, avec des méthodes de simulation et d'estimation. Cependant, les performances statistiques du modèle proposé ne sont pas étudiées, et seules les covariables constantes sont traitées. Nous avons étendu ce cadre mathématique dans [BDB19], où les modèles d'âge virtuel incluent à la fois des covariables constantes et dépendantes du temps, mais à nouveau sans donner d'étude approfondie de la qualité d'estimation. La version étendue de ce travail correspond à [BDB20], où nous répondons à cette étude de performances manquante. Nous reprenons ici le contenu de cet article, qui développe une présentation plus détaillée du cadre de modélisation proposé et de la méthode d'estimation et qui étudie en profondeur au travers d'expérimentations numériques la qualité d'estimation dans le modèle mathématique donné. D'un point de vue applicatif, ce travail contribue à une meilleure compréhension de la possibilité d'utiliser des modèles d'âge virtuel en présence d'environnements divers et variés, représentés par les covariables. Il considère donc des conditions plus proches de la réalité et peut être vu comme une étape vers une applicabilité améliorée de ces modèles, ce qui est crucial pour des applications sur le terrain d'approches de modélisation fiables avancées.

2.2.1 Modélisation de l'intensité conditionnelle

D'un point de vue modélisation, les covariables, dépendantes ou non du temps, sont ici incluses dans l'intensité conditionnelle de défaillance *via* une fonction exponentielle, de même que dans le modèle de régression de Cox [Cox72]. Notre modèle générique s'écrit maintenant, pour tout $t \geq 0$:

$$\lambda_t = V'_{N_{t-}}(t)h(V_{N_{t-}}(t))\exp(\gamma'\mathbb{X}_t), \quad (2.1)$$

où \mathbb{X}_t sont les covariables dépendantes du temps et γ est le vecteur des coefficients scalaires associés à chacune des covariables. γ a donc pour taille le nombre de covariables. S'il n'y a que des informations statiques, c'est-à-dire des covariables constantes dans le temps, nous notons ces covariables simplement \mathbb{X} .

2.2.2 Simulation de données pour des modèles d'âge virtuel incluant des covariables

Un enjeu, maintenant que notre modèle est mis au point, est de simuler de nouveaux jeux de données selon ce modèle. La présente sous-section répondra à ce besoin, d'abord avec des covariables fixes, puis avec des covariables dynamiques.

2.2.2.1 Covariables constantes

Dans le cas de covariables constantes, la méthode de simulation est la même qu'avec un modèle d'âge virtuel sans covariables. La fonction de répartition conditionnelle du prochain instant de défaillance T_{i+1} connaissant le passé du processus $\mathcal{H}_{T_i^-}$ et les covariables \mathbb{X} est la

suivante, pour tout $t > T_i$:

$$F_{i+1}(t) := F_{T_{i+1}|\mathcal{H}_{T_i^-}, \mathbb{X}}(t) := \mathbb{P}(T_{i+1} \leq t | \mathcal{H}_{T_i^-}, \mathbb{X}) = 1 - \exp\left(-\int_{T_i}^t \lambda_s ds\right) \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} &= 1 - \exp\left(-\int_{T_i}^t V_i'(s)h(V_i(s)) \exp(\gamma'\mathbb{X}) ds\right) \\ &= 1 - \exp\left(-\exp(\gamma'\mathbb{X})(H(V_i(t)) - H(V_i(T_i)))\right), \end{aligned} \quad (2.3)$$

où $H(t) = \int_0^t h(s)ds$. Nous pouvons ensuite facilement calculer l'inverse généralisée de F_{i+1} , de même que dans l'équation 1.55. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Alors nous pouvons simuler le prochain instant de défaillance avec l'égalité en loi suivante :

$$T_{i+1} \stackrel{\text{Loi}}{=} F_{i+1}^{-1}(U) = V_i^{-1}(H^{-1}(H(V_i(T_i)) - \exp(-\gamma'\mathbb{X}) \log(1 - U))). \quad (2.4)$$

2.2.2.2 Covariables dépendantes du temps

Lorsque nous considérons des covariables dépendantes du temps, l'expression de la fonction de répartition est la même que dans l'équation 2.2. Nous voudrions aussi calculer $F_{i+1}^{-1}(U)$ où $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$. Dans le cas général, à cause du facteur dépendant du temps $\exp(\gamma'\mathbb{X}_t)$ dans l'intensité, nous ne pouvons pas explicitement inverser la fonction de répartition. Puisque F_{i+1} est croissante, nous pourrions utiliser un simple algorithme incrémentiel. Pour cela, nous devons être capable d'évaluer F_{i+1} en tout point t . Mais quand $\{\mathbb{X}_s\}_{s \geq 0}$ dépend du temps, nous ne pouvons pas calculer explicitement l'intégrale. Celle-ci pourrait être évaluée numériquement, mais il faudrait une évaluation d'intégrale à chaque étape de l'algorithme d'inversion, ce qui serait trop coûteux. Pour résoudre ce problème, nous proposons deux approches. La première repose sur une inversion exacte de la fonction de répartition, alors que la seconde utilise une approximation de la probabilité de défaillance.

Première méthode Nous faisons l'hypothèse suivante : les covariables sont constantes par morceaux, avec un nombre fini L de paliers constants. Les points de discontinuité de $\{\mathbb{X}_t\}_{t \geq 0}$ sont déterministes et connus. Nous les notons τ_l , pour tout $0 \leq l \leq L - 1$, avec la convention $\tau_0 = 0$. Les valeurs prises par $\{\mathbb{X}_t\}_{t \geq 0}$ sur les paliers constants pour une réalisation (dépendante du système) sont notées χ_l , $1 \leq l \leq L$, avec la correspondance suivante :

$$\begin{aligned} \forall l \in \{1, \dots, L - 1\}, \forall t \in [\tau_{l-1}, \tau_l[, \quad \mathbb{X}_t = \chi_l, \\ \forall t \in [\tau_{L-1}, +\infty[, \quad \mathbb{X}_t = \chi_L. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ainsi, avec la convention $\tau_L = +\infty$, nous pouvons écrire :

$$\mathbb{X}_t = \sum_{l=1}^L \chi_l \mathbf{1}_{[\tau_{l-1}, \tau_l[}(t). \quad (2.6)$$

Il est important de remarquer que les $\{\chi_l\}_{1 \leq l \leq L}$ sont des variables aléatoires. La réalisation de χ_l est différente pour chaque système. Par ailleurs, nous avons spécifié que les $\{\tau_l\}_{0 \leq l \leq L-1}$

étaient déterministes. Nous aurions pu simplement supposer qu'ils étaient déterministes conditionnellement au passé du processus, ce qui ne perturberait pas le fonctionnement de notre méthode de simulation, ni de l'estimation à suivre dans la sous-section 2.2.3. La situation où les covariables sont constantes entre deux défaillances serait alors un cas particulier de notre modèle, ce qui permettrait de généraliser les travaux de [SN11].

Grâce à notre hypothèse, nous pouvons décomposer la fonction de répartition conditionnelle ainsi :

$$F_{i+1}(t) = 1 - \exp \left(- \underbrace{\sum_{l=1}^L \exp(\gamma' \chi_l) \int_{\max(T_i, \tau_{l-1})}^{\min(t, \tau_l)} V_i'(s) h(V_i(s)) ds}_{:=f} \right). \quad (2.7)$$

Maintenant, le calcul de $F_{i+1}(t)$ dépend des points de discontinuité τ_{l-1} et τ_l entre lesquels se trouvent T_i et t . Entre deux points de discontinuité, les covariables sont constantes et leur valeur peut être sortie de l'intégrale, de sorte que l'intégrande ne dépende plus de l . Nous introduisons la notation suivante : $l(t) \in \{1, \dots, L\}$ est tel que $t \in [\tau_{l(t)-1}, \tau_{l(t)}[$, c'est-à-dire que $l(t) = \sum_{l=0}^{L-1} \mathbf{1}_{\{\tau_l \leq t\}}$ est le nombre cumulé de paliers de covariables au temps t . Il y a trois cas :

1. Quand $l(T_i) = l(t)$, ce qui est représenté en figure 2.1, le calcul est le suivant :

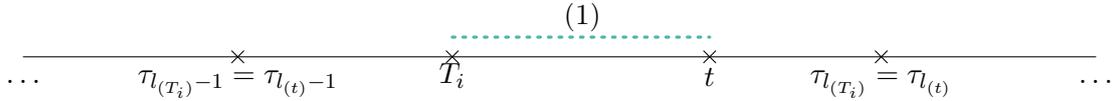


FIGURE 2.1 – Premier cas de calcul de la fonction de répartition

$$f = \exp(\gamma' \chi_{l(T_i)}) \int_{T_i}^t V_i'(s) h(V_i(s)) ds = \exp(\gamma' \chi_{l(T_i)}) (H(V_i(t)) - H(V_i(T_i))). \quad (2.8)$$

2. Quand $l(T_i) = l(t) - 1$, ce qui est représenté en figure 2.2, le calcul est le suivant :

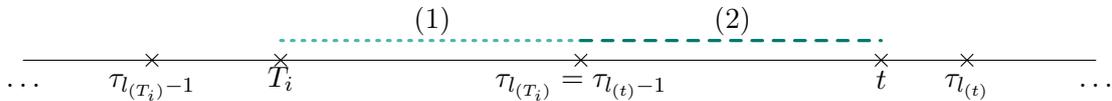


FIGURE 2.2 – Second cas de calcul de la fonction de répartition

$$\begin{aligned} f &= \exp(\gamma' \chi_{l(T_i)}) \int_{T_i}^{\tau_{l(T_i)}} V_i'(s) h(V_i(s)) ds + \exp(\gamma' \chi_{l(t)}) \int_{\tau_{l(t)-1}}^t V_i'(s) h(V_i(s)) ds \\ &= \exp(\gamma' \chi_{l(T_i)}) \left(H(V_i(\tau_{l(T_i)})) - H(V_i(T_i)) \right) + \exp(\gamma' \chi_{l(t)}) \left(H(V_i(t)) - H(V_i(\tau_{l(t)-1})) \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

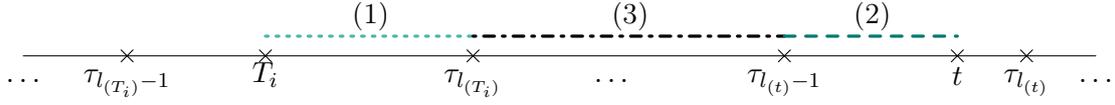


FIGURE 2.3 – Troisième cas de calcul de la fonction de répartition

3. Quand $l(T_i) \leq l(t) - 2$, ce qui est représenté en figure 2.3, le calcul est le suivant :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f} &= \overbrace{\sum_{l=l(T_i)+1}^{l(t)-1} \exp(\gamma' \chi_l) \int_{\tau_{l-1}}^{\tau_l} V_i'(s) h(V_i(s)) ds}^{(3)} + \overbrace{\exp(\gamma' \chi_{l(T_i)}) \int_{T_i}^{\tau_{l(T_i)}} V_i'(s) h(V_i(s)) ds}^{(1)} \\
 &\quad + \overbrace{\exp(\gamma' \chi_{l(t)}) \int_{\tau_{l(t)-1}}^t V_i'(s) h(V_i(s)) ds}^{(2)} \\
 &= \sum_{l=l(T_i)+1}^{l(t)-1} \exp(\gamma' \chi_l) (H(V_i(\tau_l)) - H(V_i(\tau_{l-1}))) \\
 &\quad + \exp(\gamma' \chi_{l(T_i)}) (H(V_i(\tau_{l(T_i)})) - H(V_i(T_i))) + \exp(\gamma' \chi_{l(t)}) (H(V_i(t)) - H(V_i(\tau_{l(t)-1}))).
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Ainsi, si $l(T_i) = l(t)$,

$$F_{i+1}(t) = 1 - \exp\left(-\exp(\gamma' \chi_{l(T_i)}) (H(V_i(t)) - H(V_i(T_i)))\right); \tag{2.11}$$

sinon,

$$\begin{aligned}
 F_{i+1}(t) &= 1 - \exp\left(-\sum_{l=l(T_i)+1}^{l(t)-1} \exp(\gamma' \chi_l) (H(V_i(\tau_l)) - H(V_i(\tau_{l-1})))\right. \\
 &\quad \left.- \exp(\gamma' \chi_{l(T_i)}) (H(V_i(\tau_{l(T_i)})) - H(V_i(T_i))) - \exp(\gamma' \chi_{l(t)}) (H(V_i(t)) - H(V_i(\tau_{l(t)-1})))\right),
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

la somme étant éventuellement vide si $l(T_i) = l(t) - 1$. Nous pouvons alors inverser de manière exacte la fonction de répartition conditionnelle. Un nombre aléatoire $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$ est tiré. Après avoir calculé l'indice du palier de covariable où a lieu la précédente défaillance ($l(T_i)$), nous le prenons comme point de départ pour la recherche du palier de covariable où la prochaine défaillance aura lieu. Ce palier a pour indice $l(t)$. Pour cela, puisque F_{i+1} est croissante, nous calculons itérativement sa valeur à chaque point de discontinuité des covariables τ_l , $l(T_i) \leq l \leq L - 1$. Quand cette valeur dépasse U pour la première fois, au point noté $\tau_{l(t)}$, nous savons que la prochaine défaillance aura lieu sur le palier d'indice $l(t)$. Nous pouvons alors calculer explicitement $F_{i+1}^{-1}(U)$ ainsi : si $l(T_i) = l(t)$,

$$F_{i+1}^{-1}(U) = V_i^{-1}\left(H^{-1}\left(H(V_i(T_i)) - \exp(-\gamma' \chi_{l(T_i)}) \log(1 - U)\right)\right); \tag{2.13}$$

sinon,

$$F_{i+1}^{-1}(U) = V_i^{-1} \left(H^{-1} \left(H(V_i(\tau_{l(t)-1})) - \exp(-\gamma' \chi_{l(t)}) \times (S + \log(1 - U)) \right) \right), \quad (2.14)$$

où

$$S = \sum_{l=l(T_i)+1}^{l(t)-1} \exp(\gamma' \chi_l) (H(V_i(\tau_l)) - H(V_i(\tau_{l-1}))) + \exp(\gamma' \chi_{l(T_i)}) \left(H(V_i(\tau_{l(T_i)})) - H(V_i(T_i)) \right). \quad (2.15)$$

Seconde méthode Dans le cas où nous pouvons enregistrer les valeurs des covariables de manière continue, il est possible d'utiliser la méthode de simulation précédente avec une discrétisation des covariables. Nous proposons une autre méthode qui ne nécessite pas l'inversion de la fonction de répartition conditionnelle. Supposons que nous connaissons les valeurs des covariables en chaque instant de la forme $k\Delta t$, $k \in \mathbf{N}^*$. Ensuite faisons l'hypothèse que le prochain instant de défaillance est lui aussi de la forme $k\Delta t$, $k \in \mathbf{N}^*$. Si nous supposons de plus que l'intensité conditionnelle est constante sur un petit intervalle de longueur Δt , alors nous pouvons approcher la probabilité que la prochaine défaillance ait lieu Δt plus tard :

$$\mathbb{P}(T_{i+1} \leq T_i + k\Delta t \mid \mathcal{H}_{T_i^-}, T_{i+1} > T_i + (k-1)\Delta t) = 1 - e^{-\int_{T_i+(k-1)\Delta t}^{T_i+k\Delta t} \lambda_s ds} \simeq 1 - e^{-\lambda_{T_i+k\Delta t}\Delta t}. \quad (2.16)$$

Pour savoir si une défaillance a lieu en $T_i + k\Delta t$, nous tirons une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $1 - e^{-\lambda_{T_i+k\Delta t}\Delta t}$. Avec cette simplification, nous pouvons mettre en place un algorithme pour simuler le prochain instant de défaillance :

Algorithme 2.1 – Algorithme alternatif de simulation

```

initialisation : k=0, D=0 ;
tant que (D==0) :
    k <- k+1 ;
    λ(k) <- λTi+k*Δt ;
    D <- tirage d'une variable aléatoire de loi
        de Bernoulli de paramètre 1-exp(-λ(k)*Δt) ;
fin tant que ;
Ti+1 <- Ti + k*Δt ;
sortie: Ti+1 ;

```

2.2.2.3 Comparaison des deux méthodes de simulation

Nous comparons maintenant les deux méthodes de simulation présentées dans cette sous-section. Nous parlerons de « la première méthode » pour celle où la fonction de répartition est inversée de manière exacte, de « la seconde méthode » pour celle où la probabilité de défaillance est approchée à chaque intervalle. Nous avons comparé la vitesse de simulation des deux méthodes. Nous avons trouvé qu'avec une covariable qui saute avec une haute fréquence,

la seconde méthode est environ 3.5 fois plus rapide que la première. Au contraire, si nous avons une covariable qui saute avec une faible fréquence, il est deux fois plus rapide d'utiliser la première méthode avec une valeur de covariable par saut plutôt que la seconde méthode avec une covariable constante sur plusieurs paliers consécutifs. Il n'est pas recommandé d'utiliser la seconde méthode avec de longs paliers de covariable puisque la simulation ne serait pas suffisamment précise dans ce cas.

2.2.3 Estimation des paramètres de modèles d'âge virtuel incluant des covariables

Lorsque nous avons un jeu de données, un point crucial pour l'application de nos modèles est l'estimation des paramètres du modèle. Cette sous-section vient répondre à cet enjeu.

De même qu'en sous-section 1.4.2, l'estimation des paramètres en présence de covariables se fait par maximisation numérique de la log-vraisemblance du modèle avec les données. Cependant, le calcul de la log-vraisemblance doit être revu puisqu'il implique maintenant des covariables. Nous écrivons les calculs pour un seul système, la log-vraisemblance totale étant simplement la somme des log-vraisemblances pour chaque système, en gardant à l'esprit que les valeurs des covariables et de l'âge virtuel dépendent du système. Nous disposons des n premières observations t_1, \dots, t_n des instants de défaillance d'un système. La log-vraisemblance peut être écrite ainsi :

$$\mathcal{L}(t_1, \dots, t_n; \alpha, \beta, \rho, \gamma) = \sum_{i=1}^n (\log(\lambda_{t_i})) - \int_0^{t_n} \lambda_s ds. \quad (2.17)$$

Le problème est fondamentalement le même que pour la simulation : la valeur des covariables dépend du temps. Le calcul de la somme est assez simple en trouvant $l_{(t_i)} \in \{1, \dots, L\}$ pour $1 \leq i \leq n$ tel que $t_i \in [\tau_{l_{(t_i)}-1}, \tau_{l_{(t_i)}}[$:

$$\sum_{i=1}^n (\log(\lambda_{t_i})) = \sum_{i=1}^n \log(V'_{i-1}(t_i)) + \sum_{i=1}^n \log(h(V_{i-1}(t_i))) + \sum_{i=1}^n \gamma' \chi_{l_{(t_i)}}. \quad (2.18)$$

Pour calculer l'intégrale, nous composons une partition du temps à partir des instants de défaillance et des instants de saut des covariables. En effet, à chaque nouvelle défaillance, la valeur de l'âge virtuel change et à chaque saut de covariables, les valeurs des covariables changent. Puisque ces deux quantités sont impliquées dans le calcul de l'intensité conditionnelle λ_s , nous devons retracer ces modifications. Tout d'abord, nous rassemblons tous les points de modification dans un seul vecteur ordonné $\varsigma = \{\varsigma_k\}_{k \in \{0, \dots, n+L-1\}}$. Nous introduisons deux compteurs : $\ell_k = \sum_{l=0}^L \mathbf{1}_{\{\tau_l \leq \varsigma_k\}}$, qui est l'index actuel du palier de covariables, et $\nu_k = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{t_i \leq \varsigma_k\}}$, qui est le nombre actuel de défaillances, où $k \in \{0, \dots, n+L-1\}$ est l'index du segment dans la partition. Un exemple graphique est donné en figure 2.4, reproduisant les valeurs de k , ℓ_k et ν_k sur quelques segments, où ς_k est la borne inférieure du k^e segment. Sur cette figure, les points ς_k sont uniformément placés, ce qui n'est pas nécessairement le cas en pratique. Les nombres entre parenthèses n'ont pas besoin d'être algorithmiquement calculés. En effet, nous avons toujours $\varsigma_0 = 0$ (le temps commence en zéro), $\ell_0 = 1$ (c'est le premier palier des covariables)

$s_k :$	0	t_1	τ_1	t_2	t_3	τ_2	τ_3	t_4	t_5	t_6	τ_4
$k :$	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	
$\ell_k :$	(1)	1	2	2	2	3	4	4	4	(4)	
$\nu_k :$	(0)	1	1	2	3	3	3	4	5	(6)	

FIGURE 2.4 – Exemple d'instant de défaillance et de sauts des covariables

et $\nu_0 = 0$ (aucune défaillance n'a lieu avant la fin du premier segment). L'intégrale est alors la somme des intégrales restreintes à chaque segment, jusqu'à atteindre t_n :

$$\int_0^{t_n} \lambda_s ds = \sum_{k=0}^K \exp(\gamma' \chi_{\ell_k}) (H(V_{\nu_k}(s_{k+1})) - H(V_{\nu_k}(s_k))), \quad (2.19)$$

où $K \in \{0, \dots, n + L - 1\}$ est tel que $s_{K+1} = t_n$.

Les équations 2.18 et 2.19 fournissent une expression calculable de la log-vraisemblance. Par analogie avec le cas sans covariables, présenté en sous-section 1.4.2, nous écrivons, en rappelant que $H(t) = \alpha \tilde{H}(t)$,

$$\mathcal{L}(t_1, \dots, t_n; \alpha, \beta, \rho, \gamma) = n \log \alpha - \alpha S_1(\beta, \rho, \gamma) + S_2(\beta, \rho) + S_3(\rho) + S_4(\gamma), \quad (2.20)$$

où

$$S_1(\beta, \rho, \gamma) := \sum_{k=0}^K \exp(\gamma' \chi_{\ell_k}) \left(\tilde{H}(V_{\nu_k}(s_{k+1})) - \tilde{H}(V_{\nu_k}(s_k)) \right) \quad (2.21)$$

dépend de β , ρ et γ ,

$$S_2(\beta, \rho) := \sum_{i=1}^n \log(\tilde{h}(V_{i-1}(t_i))), \quad (2.22)$$

dépend de β et ρ ,

$$S_3(\rho) := \sum_{i=1}^n \log(V'_{i-1}(t_i)) \quad (2.23)$$

ne dépend que de ρ et

$$S_4(\gamma) := \sum_{i=1}^n \gamma' \chi_{l(t_i)} \quad (2.24)$$

ne dépend que de γ . L'optimisation prend ici la même forme qu'en sous-section 1.4.2 : l'unique valeur de α maximisant la log-vraisemblance est égale à

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{S_1(\beta, \rho, \gamma)}. \quad (2.25)$$

Ainsi, l'optimisation peut être faite uniquement sur β , ρ et γ avec la formule suivante :

$$(\hat{\beta}, \hat{\rho}, \hat{\gamma}) = \operatorname{argmax}_{\beta, \rho, \gamma} \mathcal{L}(\beta, \rho, \gamma), \quad (2.26)$$

où

$$\mathcal{L}(\beta, \rho, \gamma) = n(\log(n) - \log(S_1(\beta, \rho, \gamma)) - 1) + S_2(\beta, \rho) + S_3(\rho) + S_4(\gamma). \quad (2.27)$$

2.2.4 Exemple de simulation d'un jeu de données et d'estimation des paramètres

Pour illustrer l'influence des covariables dans notre modèle, un jeu de données est simulé, puis les paramètres du modèle sont estimés pour ce jeu de données.

2.2.4.1 Simulation du jeu de données

Nous simulons les 15 premières défaillances de trois systèmes influencés par une covariable, avec la première méthode exposée dans 2.2.2.2. Ils ont tous été simulés avec le modèle ARA_∞ avec les mêmes paramètres, qui sont reproduits en table 2.1. Seules les valeurs de la covariable

nb. systèmes	nb. défaillances	échelle PLP	forme PLP	efficacité maint.	coef covar.
$\nu = 3$	$n = 15$	$\eta = 0.5^{-1/3}$	$\beta = 3$	$\rho = 0.35$	$\gamma = 0.3$

TABLE 2.1 – Paramètres du jeu de données simulées

changent avec le système. La covariable est un processus de saut qui saute en les instants $\{2, 3, 4, 6, 8\}$. Chaque saut est la réalisation d'une variable aléatoire de loi Gamma de taux 1 et de forme α , où α est la longueur du palier multipliée par 1, 2 ou 4 respectivement pour les trois systèmes. Pour le premier système, la covariable croît doucement. Pour le troisième, elle croît rapidement. Le second système est entre les deux. En figure 2.5, les valeurs de la covariable sont représentées en fonction du temps, pour chaque système. Nous avons reproduit en table 2.2 les 15 instants de défaillance de chaque système, arrondis à 10^{-4} . En figure 2.6, nous voyons les instants de défaillances simulés correspondants. Le processus de comptage est représenté en fonction du temps. Nous voyons clairement l'influence de la covariable sur le processus de défaillance. L'enjeu principal maintenant est d'extraire de l'information des données à propos de cette influence, en même temps que sur le modèle de maintenance.

2.2.4.2 Estimation des paramètres

Nous souhaitons ici illustrer l'estimation paramétrique pouvant être faite avec notre modèle sur le jeu de données simulé.

En figure 2.7, à gauche, nous avons représenté le contour de la log-vraisemblance du modèle ARA_∞ -PLP pour notre jeu de données en fonction du coefficient des covariables (en abscisse) et de l'efficacité des maintenances (en ordonnée), tandis que la forme du PLP est supposée connue. À droite, nous avons représenté la même log-vraisemblance mais en fonction de β (en abscisse) et ρ (en ordonnée), tandis que γ est supposé connu. Sur les deux graphes, nous voyons clairement un maximum. À nouveau, il s'agit de l'estimateur du maximum de vraisemblance des paramètres. Pour le même jeu de données simulées, nous avons numériquement maximisé la log-vraisemblance du modèle ARA_∞ -PLP. Nous pouvons soit procéder à une estimation partielle, ce qui correspond à la figure 2.7, soit à une estimation totale de tous les paramètres.

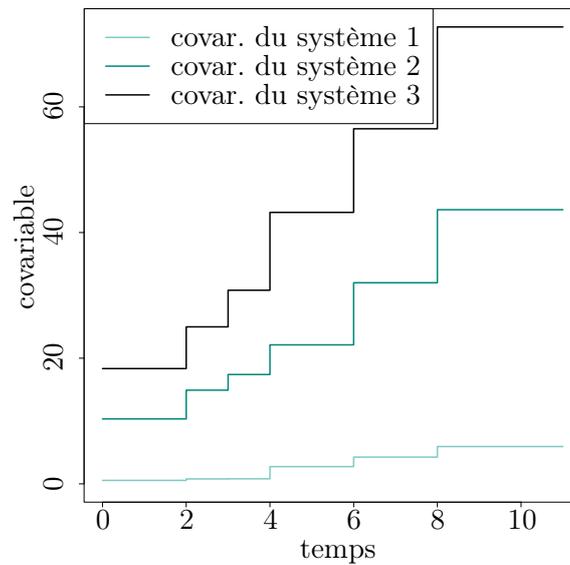


FIGURE 2.5 – Exemple de trois trajectoires de covariable considérées pour la simulation d'instants de défaillance

Numéro	Système 1	Système 2	Système 3
1	1.3071	0.2635	0.1696
2	2.2356	0.7320	0.3117
3	2.8041	0.7671	0.4150
4	3.1618	1.0854	0.4344
5	3.2742	1.1305	0.4715
6	3.9609	1.3504	0.5126
7	4.3479	1.4109	0.5800
8	4.3995	1.5725	0.6830
9	4.4054	1.7832	0.8928
10	4.6143	2.0276	0.8952
11	4.7492	2.0429	0.9145
12	5.3005	2.0736	1.0462
13	5.8696	2.0950	1.1021
14	6.3074	2.1088	1.1490
15	6.5908	2.2668	1.1628

TABLE 2.2 – Instants de défaillance des trois systèmes simulés

Nous trouvons les estimations données en table 2.3. Ces estimations sont plutôt satisfaisantes, surtout si nous nous rappelons que le jeu de données n'est pas très grand (seulement trois systèmes) et que nous avons quatre paramètres à estimer.

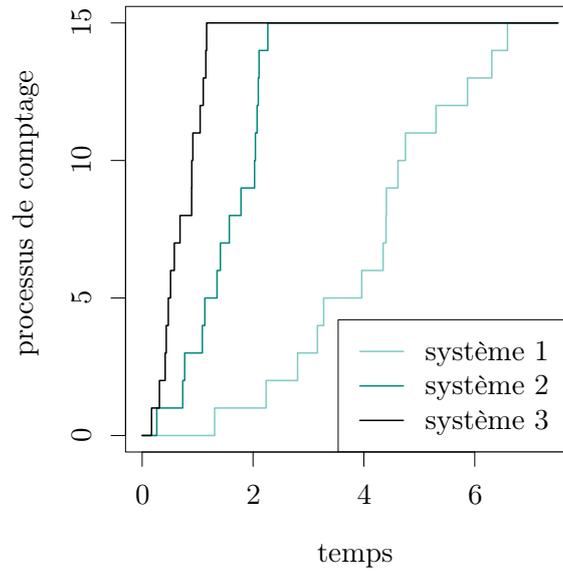


FIGURE 2.6 – Processus de comptage des défaillances pour les trois trajectoires de covariable considérées

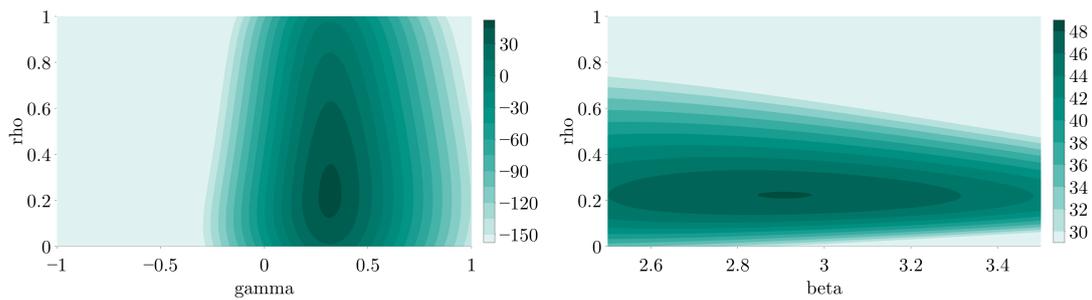


FIGURE 2.7 – Log-vraisemblance du modèle à covariables en fonction des paramètres

		η	β	ρ	γ
valeurs de simulation		1.26	3	0.35	0.3
estimations quand	β connu	1.66	/	0.22	0.32
	γ connu	1.58	2.91	0.22	/
	tous inconnus	1.88	3.42	0.23	0.36

TABLE 2.3 – Valeurs de simulation, estimations partielles et estimations totales des quatre paramètres du modèle

2.3 Conclusion sur les modèles d'âge virtuel à covariables

Après une revue bibliographique, ce chapitre nous a principalement permis d'introduire notre modèle d'âge virtuel à covariables, qui est la base de la suite de cette thèse. La modélisation a été exposée, suivie de méthodes de simulation de jeux de données et d'estimation des paramètres, nécessaires pour notre utilisation de ce modèle.

Validation des modèles : qualité d'estimation

Sommaire

3.1	Protocole expérimental	46
3.2	Covariable indépendante du temps	47
3.2.1	Influence des paramètres du modèle d'âge virtuel et de l'intensité initiale	47
3.2.2	Influence du coefficient des covariables	49
3.2.3	Influence du nombre de données	50
3.3	Covariable dépendante du temps	54
3.3.1	Influence des paramètres du modèle d'âge virtuel	54
3.3.2	Influence du coefficient de la covariable	56
3.3.3	Influence du nombre de données	57
3.4	Optimisation du coût d'inspection et d'erreur d'estimation	59
3.4.1	Statistiques de comparaison et protocole de calcul	60
3.4.2	Analyse des performances d'estimation en fonction de la période d'inspection	63
3.4.3	Coût des inspections et de l'erreur d'estimation	63
3.5	Conclusion de l'étude sur la qualité d'estimation	65

L'objectif dans ce chapitre est d'évaluer les performances statistiques de la méthode d'estimation exposée dans le chapitre 2. Ce travail est à nouveau issu de notre article [BDB20]. Pour cela, nous avons établi une étude numérique mettant en œuvre l'estimation paramétrique dans diverses situations, avec d'abord des covariables fixes, puis des covariables dynamiques.

Nous terminons ce chapitre par l'optimisation du coût d'inspection et d'erreur d'estimation, qui constitue le sujet de notre article [BBD]. En effet, l'erreur générée lors de l'estimation des paramètres du modèle peut avoir un impact non négligeable sur une prise de décision. Nous affectons donc un coût unitaire à l'erreur d'estimation. Nous ajoutons également une autre dimension : une covariable dynamique n'est pas forcément connue en chaque instant. Si l'information disponible sur les covariables est restreinte, la qualité d'estimation pourra en être affectée. Nous étudions cette hypothèse, puis nous proposons une optimisation des instants d'inspection des covariables pour minimiser le coût associé à la fois à l'erreur d'estimation et aux inspections.

3.1 Protocole expérimental

Cette section vise à détailler la procédure suivie pour l'évaluation des performances statistiques de notre modèle. L'étude mise en place dans ce chapitre consiste à simuler un grand nombre de jeux de données avec un modèle d'âge virtuel et des paramètres fixés (ce que nous avons fait avec la première méthode détaillée dans la sous-section 2.2.2.2 dans le cas d'une covariable dépendante du temps), et, à partir des jeux de données obtenus, estimer les paramètres du modèle comme si les vrais paramètres n'étaient pas connus. La maximisation numérique de la log-vraisemblance a été faite avec la méthode Nelder-Mead [NM65], qui ne nécessite pas de calculer le gradient de la fonction à optimiser. Les valeurs initiales de l'algorithme ont été fixées à $\beta = 2.1$, $\rho = 0.55$ pour les modèles ARA, $\rho = 0.82$ pour le modèle QR et $\gamma = 0$. Le résultat est une collection d'estimations, qui doivent être comparées aux vraies valeurs utilisées pour la simulation. Une statistique courante pour l'évaluation de la qualité d'estimation est l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM), qui met en regard le biais des estimations avec leur écart-type. La formule empirique de l'EQM pour un ensemble $\hat{\theta}_{(M)} := (\hat{\theta}_m)_{1 \leq m \leq M}$ de M estimations d'un paramètre θ est la suivante :

$$EQM(\hat{\theta}_{(M)}) = s_{\hat{\theta}_{(M)}}^2 + (m_{\hat{\theta}_{(M)}} - \theta_0)^2, \quad (3.1)$$

où $m_{\hat{\theta}_{(M)}}$ est la moyenne empirique de $\hat{\theta}_{(M)}$, $s_{\hat{\theta}_{(M)}}^2$ est sa variance empirique et θ_0 est le vrai paramètre utilisé lors de la simulation.

Le paramètre η est un paramètre d'échelle. Dans le cas de covariables dépendantes du temps, nous avons fixé sa valeur dans les simulations de sorte que les 20 défaillances de chaque système aient lieu approximativement dans la même fenêtre de temps, qui consiste en l'intervalle des sauts de covariable. Pour cela, nous avons simulé un jeu de données comportant de nombreux systèmes et nous avons calculé la moyenne du 20^e instant de défaillance. Cette moyenne devait être à peu près égale à l'instant du dernier saut de covariable. Nous avons répété cette procédure en changeant la valeur de η_0 jusqu'à ce que la moyenne tombe approximativement sur ce dernier instant de saut (avec une certaine tolérance). Les valeurs que prend le paramètre η_0 sont donc très hétérogènes et dépendent du modèle ainsi que de la valeur des autres paramètres. Pour pouvoir analyser la qualité d'estimation sans être biaisé par la vraie valeur η_0 , toutes les EQM de ce paramètre ont été normalisées. Les EQM normalisées sont notées EQMn et sont calculées ainsi :

$$EQMn(\hat{\theta}_{(M)}) = \frac{1}{\theta_0^2} EQM(\hat{\theta}_{(M)}). \quad (3.2)$$

L'étude se concentre sur les modèles ARA₁, ARA_∞ et QR, avec une intensité initiale PLP de paramètre d'échelle η_0 et de paramètre de forme β_0 . Cependant, dans la plupart des cas, les résultats avec les deux modèles ARA sont similaires. En conséquence, les graphes ne représentent pas les deux modèles, mais seulement le modèle ARA_∞. Le modèle inclut une covariable unidimensionnelle qui est simulée comme une variable aléatoire uniforme (covariable constante), comme une somme cumulée de telles variables (covariable dépendante du temps) ou comme un processus aléatoire à sauts prenant ses valeurs dans un espace d'états fini.

Dans tous les graphes de cette section, μ est un raccourci pour 10^{-6} .

3.2 Covariable indépendante du temps

Dans cette section, nous travaillerons avec une covariable constante. La première partie de l'étude est consacrée à l'influence du paramètre de forme β de la loi de Weibull, du paramètre d'efficacité ρ du modèle d'âge virtuel et du coefficient d'influence γ de la covariable sur la qualité d'estimation. Pour chaque configuration, $M = 10\,000$ jeux de données ont été simulés, avec un nombre fixé de systèmes par jeu de données et un nombre fixé de défaillances par système, et ensuite utilisés pour l'estimation. Dans l'idée de nous concentrer sur l'influence des paramètres du modèle sur la qualité d'estimation, cette partie est faite avec de grands jeux de données de taille fixée : le nombre de systèmes par jeu de données est fixé à $\nu = 50$ et le nombre de défaillances par système est fixé à $n = 20$. Avec de tels jeux de données, nous espérons nous affranchir de la taille des données, pour obtenir des résultats proches d'un cas idéal. La seconde partie de l'étude est consacrée à l'influence de la taille des données. Les paramètres du modèle sont fixés mais le nombre de systèmes par jeu de données et de défaillances par système varie.

3.2.1 Influence des paramètres du modèle d'âge virtuel et de l'intensité initiale

Nous commençons par étudier l'influence de β_0 et ρ_0 sur la qualité d'estimation.

3.2.1.1 Mise en place de l'étude

Une covariable constante a été simulée comme une variable aléatoire uniforme entre 0 et 1 pour chaque système. Le vrai coefficient d'influence de cette covariable a été fixé à $\gamma_0 = 1$. Le paramètre d'échelle de la loi de Weibull a été fixé à $\eta_0 = 1/(0.1^{1/\beta_0})$. Nous avons fait varier son paramètre de forme β_0 dans l'ensemble $\{1.5, 1.75, \dots, 3\}$ et l'efficacité des maintenances ρ_0 dans l'ensemble $\{0.1, 0.2, \dots, 0.9\}$ dans le cas d'un modèle ARA, et $\{0.7, 0.75, \dots, 0.95\}$ dans le cas du modèle QR. Nous rappelons que, dans le modèle d'âge virtuel, plus ρ_0 est grand, meilleure est la maintenance. En particulier, quand $\rho_0 = 1$, le processus décrit par les modèles ARA et QR est un processus de renouvellement, ce qui veut dire que le système est AGAN après chaque maintenance. Cependant, dans le cas du modèle QR, si ρ_0 est trop éloigné de 1, les défaillances ont lieu dans un intervalle de temps très restreint. Cela est compréhensible en regardant l'équation 1.41, qui donne la loi des durées inter-défaillances : stochastiquement, celles-ci diminuent exponentiellement. Nous le voyons également sur la figure 1.7, où sont représentés l'âge virtuel et l'intensité conditionnelle d'un jeu de données simulé sous le modèle QR. De plus, dans l'intensité initiale, plus β_0 est grand, plus vite le système se détériore.

3.2.1.2 Heat maps

Les heat maps des EQM empiriques obtenues dans cette configuration sont données en figure 3.1. Ces EQM sont calculées pour chacun des quatre paramètres : β et η , respectivement le paramètre de forme et d'échelle de la loi de Weibull, sont sur la partie supérieure. γ , le coefficient de la covariable, est en bas à gauche tandis que ρ , l'efficacité des maintenances, est en bas à droite. Dans chacun de ces quadrants, il y a deux heat maps : à gauche est celle du modèle ARA_∞ , à droite est celle du modèle QR. Comme précisé au début de ce chapitre, le modèle ARA_1 n'est pas représenté sur les heat maps, puisque ses motifs sont très similaires à ceux du modèle ARA_∞ .

3.2.1.3 Résultats généraux

Nous donnons maintenant quelques premières observations sur la qualité d'estimation.

La première chose à remarquer sur la figure 3.1 est que les résultats semblent très satisfaisants : toutes les valeurs des EQM sont raisonnablement basses, de même que les biais (pas plus de 0.018 pour β , 0.06 pour ρ et 0.011 pour γ), et les écarts-types (pas plus de 5 % de la vraie valeur pour β , 9 % pour η , 12 % pour γ). Les écarts-types de ρ dépendent fortement de sa vraie valeur et de la valeur de β_0 dans le cas des modèles ARA (ils ne dépassent pas 0.4 % pour le modèle QR) : plus ρ_0 et β_0 sont grands, moins l'écart-type relatif est fort.

Nous avons mené la même étude sans covariable afin d'obtenir des valeurs de référence. Nous avons observé que pour β , η et ρ , les EQM sont très similaires lorsque nous regardons le motif dessiné par les heat maps et que, pour le paramètre η , les EQM sont généralement un peu plus hautes dans le cas du modèle QR. Cela signifie que l'estimation simultanée de l'effet des covariables n'affecte pas significativement l'estimation des paramètres de l'intensité initiale et du modèle d'âge virtuel.

3.2.1.4 Influence des paramètres

Enfin, nous pouvons analyser les variations de l'EQM en fonction des vraies valeurs β_0 et ρ_0 : dans le modèle ARA_∞ , β est mieux estimé quand ρ_0 est grand, et également légèrement mieux estimé quand sa propre vraie valeur est faible. Cela peut être dû dans la plupart des configurations à la simple échelle du paramètre, et nous observons en fait par exemple que les EQM pour $\beta_0 = 1.5$ sont plus fortes qu'un quart de la valeur de celles pour $\beta_0 = 3$. Dans le modèle QR, plus ρ_0 est grand et plus β_0 est faible, meilleures sont les estimations.

Le paramètre de forme de la loi de Weibull β_0 a une influence claire sur la qualité d'estimation du paramètre d'échelle de cette loi dans les modèles ARA : les EQM des estimations de η sont bien inférieures quand β_0 est grand. ρ_0 ne semble pas avoir une influence aussi évidente, mais il semble que de fortes valeurs de ce paramètre sont corrélées avec des estimations de η légèrement meilleures. Dans le modèle QR, il y a aussi une légère amélioration des estimations

quand β_0 est grand, mais surtout, plus ρ_0 est grand, meilleures sont les estimations. Nous avons déjà souligné le fait que quand ρ_0 est trop éloigné de 1 dans le modèle QR, les durées inter-défaillances sont très petites, rendant l'estimation des paramètres plus difficile.

Les vraies valeurs de β et ρ n'ont quasiment aucune influence sur la qualité d'estimation de γ . Les EQM sont peut-être légèrement plus faibles dans les modèles ARA quand ρ_0 est fort, mais la différence n'est pas flagrante : de 0.0137 à 0.0158.

Concernant la qualité d'estimation de ρ , nous pouvons dire que plus β_0 est fort, meilleure est l'estimation de ρ , quelque soit le modèle (excepté pour $\rho_0 = 0.7$ dans le modèle QR). La vraie valeur ρ_0 a aussi un impact sur la qualité d'estimation dans tous les modèles. De grandes valeurs sont préférables dans le modèle QR. C'est l'inverse dans le modèle ARA_∞ pour $\rho_0 \leq 0.7$. Pour des valeurs plus fortes, la qualité d'estimation est à nouveau un peu meilleure.

Pour β , η et ρ , nous trouvons que dans les modèles ARA, l'écart-type pèse plus que le biais dans la valeur de l'EQM, alors que les contributions sont à peu près les mêmes dans le modèle QR.

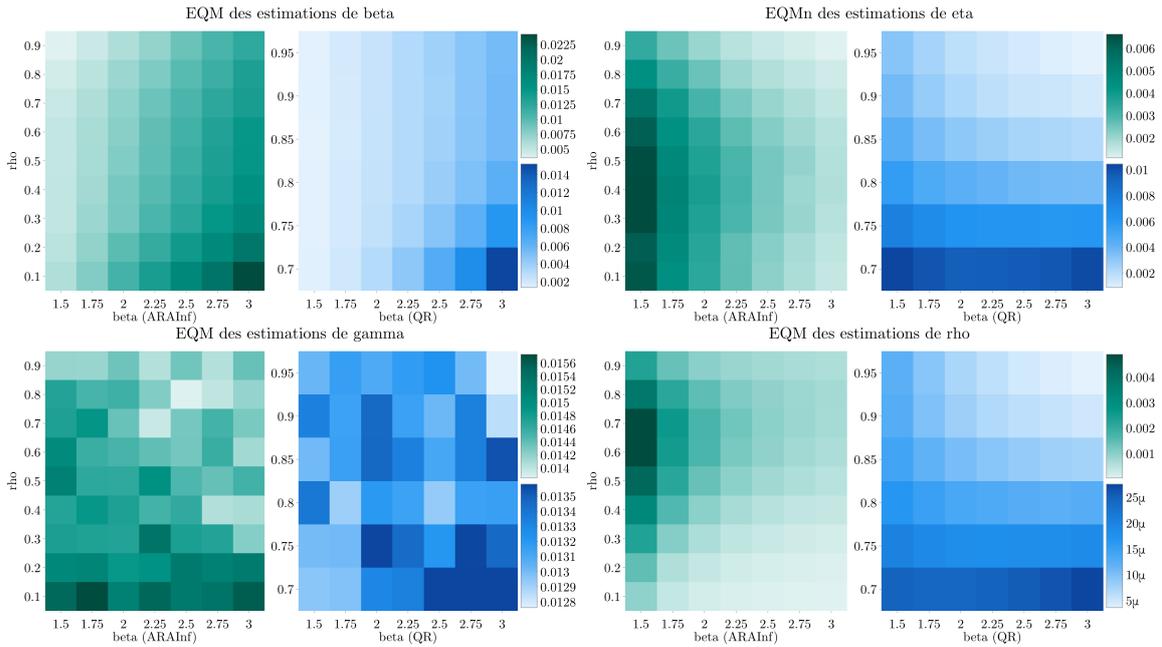


FIGURE 3.1 – EQM des estimations des quatre paramètres dans le cas d'une covariable constante, en fonction des vraies valeurs de β_0 et ρ_0

3.2.2 Influence du coefficient des covariables

Nous nous concentrons ici sur l'influence de γ_0 sur la qualité d'estimation. Cette fois, seul le cas $\eta_0 = 1/(0.1^{1/2.5})$, $\beta_0 = 2.5$, $\rho_0 = 0.7$ pour les modèles ARA et $\rho_0 = 0.9$ pour le modèle QR a été considéré, tandis que nous avons fait varier γ_0 dans l'ensemble $\{-3, -2, \dots, 3\}$. Les

graphes des EQM empiriques obtenues dans cette configuration sont donnés en figure 3.2. Nous observons à nouveau des résultats satisfaisants, avec des performances encore meilleures dans le cas du modèle QR. Nous ne trouvons pas d'influence significative de la vraie valeur γ_0 sur la qualité d'estimation des trois autres paramètres. De plus, les biais sont très faibles pour tous les paramètres (au plus 0.016 pour β , 0.060 pour η , 0.0018 pour γ et 0.0020 pour ρ), de même que les écarts-types pour β , η et ρ (au plus 0.010 pour β , 0.018 pour η , 0.17 pour γ et 0.032 pour ρ), par rapport aux vraies valeurs des paramètres.

Le graphe pour γ dans la figure 3.2 est très curieux : son allure symétrique nous dit que l'influence de la covariable pèse de la même manière que γ_0 soit positif ou négatif. Plus la valeur absolue de γ_0 est forte, plus l'EQM est grande. Les courbes ont une allure quadratique, mais nous ne pouvons pas directement inférer une telle conclusion. Cependant, nous devons nous rappeler que l'EQM est composée du biais au carré et de la variance. Sa valeur a donc l'ordre de grandeur du carré de la vraie valeur du paramètre. La variation de l'EQM en fonction de la vraie valeur γ_0 pourrait être étudiée mathématiquement dans de futurs travaux. Nous soulignons que cette variation vient principalement de l'écart-type, puisque les biais pour γ sont 10 à 600 fois plus faibles que les écarts-types. Dans les modèles ARA, les biais montrent une très légère tendance à sous-estimer γ en valeur absolue. Néanmoins, ces biais sont très faibles, toujours en dessous de 0.02, pour une vraie valeur de $\gamma_0 = 1$.

Le graphe pour γ de la figure 3.2 montre une autre caractéristique intéressante : les trois courbes, correspondant aux trois modèles étudiés, se rencontrent en un seul point en $\gamma_0 = 0$. Cela pourrait aussi être une propriété mathématique à étudier, de même que le fait que la qualité d'estimation des autres paramètres ne soit pas influencée par la valeur de γ_0 .

3.2.3 Influence du nombre de données

Cette sous-section de l'analyse numérique étudie comment les dimensions des jeux de données influencent la qualité d'estimation. Les dimensions d'un jeu de données sont le nombre de systèmes identiques et indépendants qui sont observés, qui est noté ν , et le nombre de défaillances que chaque système subit. Ici, nous avons choisi d'observer chaque système (c'est-à-dire de simuler des défaillances) jusqu'à avoir un nombre fixe n de défaillances par système. D'autres situations sont possibles : chaque système peut être observé jusqu'à atteindre son propre nombre fixé de défaillances, ou jusqu'à la fin d'une période fixée d'observation.

3.2.3.1 Mise en place de l'étude

Nous détaillons ici les nouveaux paramètres de cette étude. Nous avons fait varier ν et n dans l'ensemble $\{5, 10, \dots, 50\}$. En faisant ce choix, nous sommes capables de comparer les performances avec un nombre fixe de systèmes et un nombre de variable de défaillances, et *vice versa*, ou avec un nombre total fixe de défaillances. Par exemple, des jeux de données de taille 10×10 (10 systèmes de 10 défaillances chacun), 5×20 ou 20×5 correspondent tous à un nombre total de 100 défaillances. Afin de nous concentrer sur la taille des données, nous

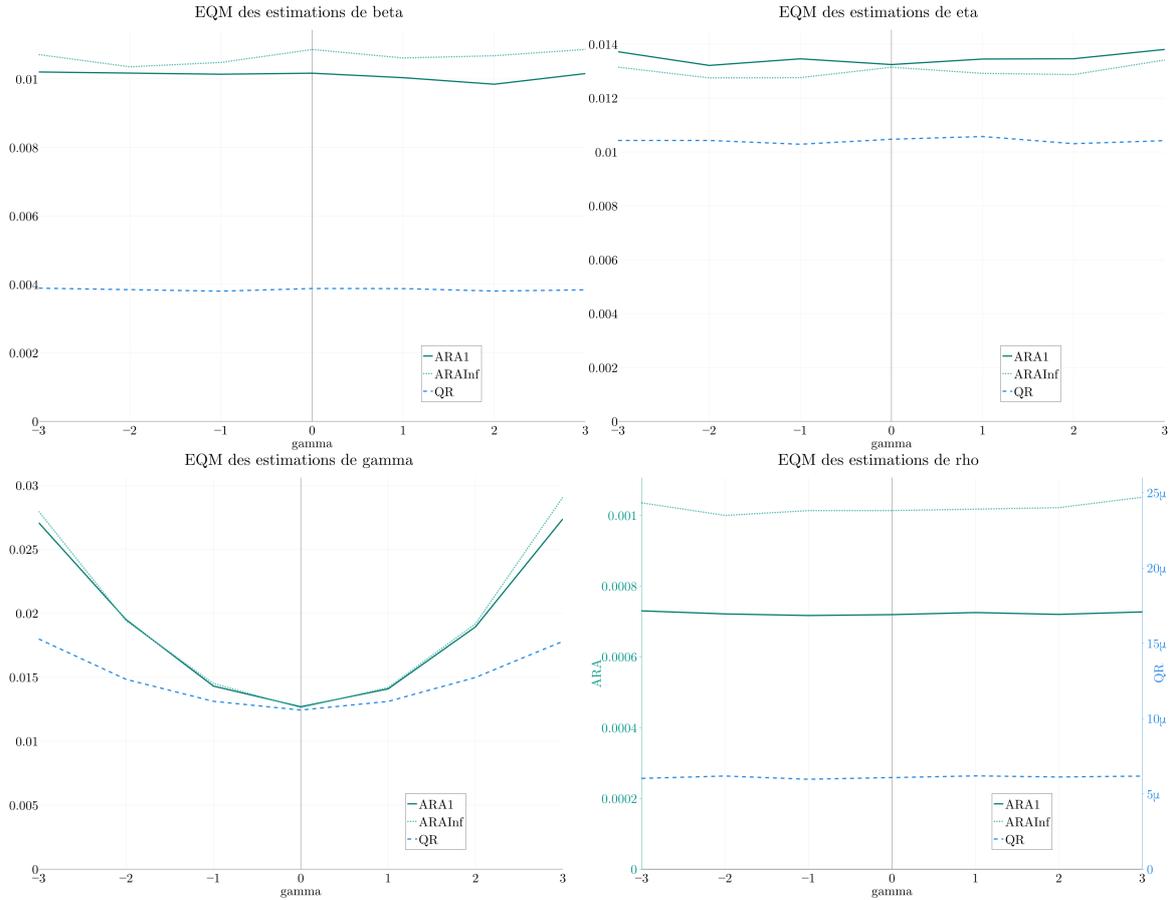


FIGURE 3.2 – EQM des estimations des quatre paramètres dans le cas d’une covariable constante, en fonction des vraies valeurs de γ_0

avons choisi les paramètres du modèle parmi ceux qui ont donné de bons résultats : $\rho_0 = 0.7$ pour les modèles ARA, $\rho_0 = 0.9$ pour le modèle QR, $\eta_0 = 1/(0.1^{1/2.5})$, $\beta_0 = 2.5$ et $\gamma_0 = 1$. La covariable constante a été simulée comme précédemment, comme une variable aléatoire uniforme entre 0 et 1. Pour chaque paire de ν et n , nous avons simulé $M = 10\,000$ jeux de données.

3.2.3.2 Heat maps

Les heat maps des EQM empiriques obtenues dans cette configuration sont données en figure 3.3. Ces EQM sont calculées pour chacun des quatre paramètres : β et η sont sur la partie supérieure. γ est en bas à gauche tandis que ρ est en bas à droite. Dans chacun de ces quadrants, il y a deux heat maps : à gauche est celle du modèle ARA_∞ , à droite est celle du modèle QR. Chaque heat map représente l’EQM en fonction de n , le nombre de défaillances par système, en abscisse, et de ν , le nombre de systèmes, en ordonnée. L’allure de la figure 3.3 est immédiatement satisfaisant : une tendance claire pour de meilleures estimations quand la taille des données augmente se dégage, que ce soit en nombre de systèmes ou en nombre de

défaillances.

3.2.3.3 Paramètres de la loi de Weibull

Pour β , nous observons une heat map symétrique avec le modèle QR, mais ce n'est pas le cas avec le modèle ARA_∞ . Nous trouvons qu'il est plus facile d'estimer β avec plus de systèmes qu'avec plus de défaillances par système. Par exemple, l'EQM pour β avec des jeux de données de 5 systèmes et 15 défaillances est d'environ 0.20, alors qu'avec des jeux de données de 15 systèmes et 5 défaillances, l'EQM est d'environ 0.12, c'est-à-dire seulement 60 % de la précédente. Une explication naturelle pour cela est que β est le paramètre de forme de la loi de Weibull, qui correspond à la loi du premier instant de défaillance. Nous avons donc plus d'information sur β quand il y a de nombreux systèmes. Nous observons la même chose pour η , qui est le paramètre d'échelle de l'intensité initiale, et cela est même visible avec le modèle QR.

3.2.3.4 Efficacité des maintenances

Il est intéressant de voir que l'inverse est vrai pour ρ dans le modèle QR : puisque ρ correspond à l'efficacité des maintenances, il est cohérent que les estimations en soient meilleures avec plus de défaillances par système. De manière assez surprenante, cela n'est pas le cas avec le modèle ARA_∞ . Comme explication possible, nous pouvons avancer que les meilleures estimations de ρ avec le modèle ARA_∞ quand il y a plus de systèmes sont liées aux meilleures estimations de β et η qui ont lieu dans ce cas. En effet, β et ρ se compensent dans le modèle d'âge virtuel : un système qui vieillit lentement (c'est-à-dire avec un faible β) avec des maintenances peu efficaces (c'est-à-dire un faible ρ) peut être une réalisation d'un processus de défaillance similaire à celui d'un système qui vieillit rapidement (β fort) mais avec des maintenances efficaces (ρ fort). En conséquence, si par exemple β est surestimé pour un jeu de données, cela peut être corrélé avec une surestimation de ρ pour le même jeu de données. Cela expliquerait pourquoi nous avons de meilleures estimations de ρ dans le modèle ARA_∞ quand il y a beaucoup de systèmes. Le modèle QR ne montre pas la même tendance, mais nous pouvons émettre l'hypothèse que c'est en raison d'une caractéristique particulière de ce modèle : les durées inter-défaillances sont de même loi que des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées multipliées par les puissances successives de ρ . Il est donc facile d'estimer ρ avec un faible nombre de défaillances par système : nous voyons que nous avons de très bons résultats à partir de seulement 10 défaillances par système, quel que soit le nombre de systèmes, l'estimation de ρ étant en quelque sorte décorrélée de celle de β et η .

3.2.3.5 Coefficient de la covariable

Concernant γ , nous trouvons que les estimations sont loin d'être aussi bonnes qu'avec de grands jeux de données. Nous voyons que les résultats sont meilleurs quand il y a plus de systèmes plutôt que plus de défaillances par système. Dans le modèle ARA_∞ par exemple,

avec 5 systèmes de 25 défaillances chacun, l'EQM de γ est d'environ 0.13, alors qu'avec 25 systèmes de 5 défaillances chacun, l'EQM est d'environ 0.06, c'est-à-dire moins d'un demi de la précédente. Cela est également vrai avec le modèle QR. Une manière d'expliquer cela est de considérer la taille des données utiles pour l'estimation de γ . Avec un seul système, il est impossible d'estimer γ , puisqu'il est indiscernable du paramètre d'échelle η . Le besoin d'une covariable vient de la présence de plusieurs systèmes identiques et indépendants. Chaque système correspond à une seule valeur de la covariable. Avec une covariable constante comme c'est le cas ici, nous avons donc seulement un point de données par système, quel que soit le nombre de défaillances. Dans l'exemple précédent, pour estimer γ , nous avons seulement 5 points dans le premier cas et 25 dans le second. En comparaison, l'estimation de η et β repose sur tous les $25 \times 5 = 125$ points, et sur $24 \times 5 = 120$ ou $25 \times 4 = 100$ points pour ρ (le premier instant de défaillance n'apporte pas d'information sur ρ , puisqu'il n'y a pas encore eu de maintenance).

Pour tous les paramètres, l'écart-type pèse plus dans la valeur de l'EQM que le biais. Les biais sont dans tous les cas très satisfaisants, mais nous pouvons observer un phénomène intéressant pour les paramètres η et ρ . Dans les modèles ARA, les biais sont plus faibles quand il y a plus de systèmes alors que dans le modèle QR, les biais sont plus faibles quand il y a plus de défaillances par système.

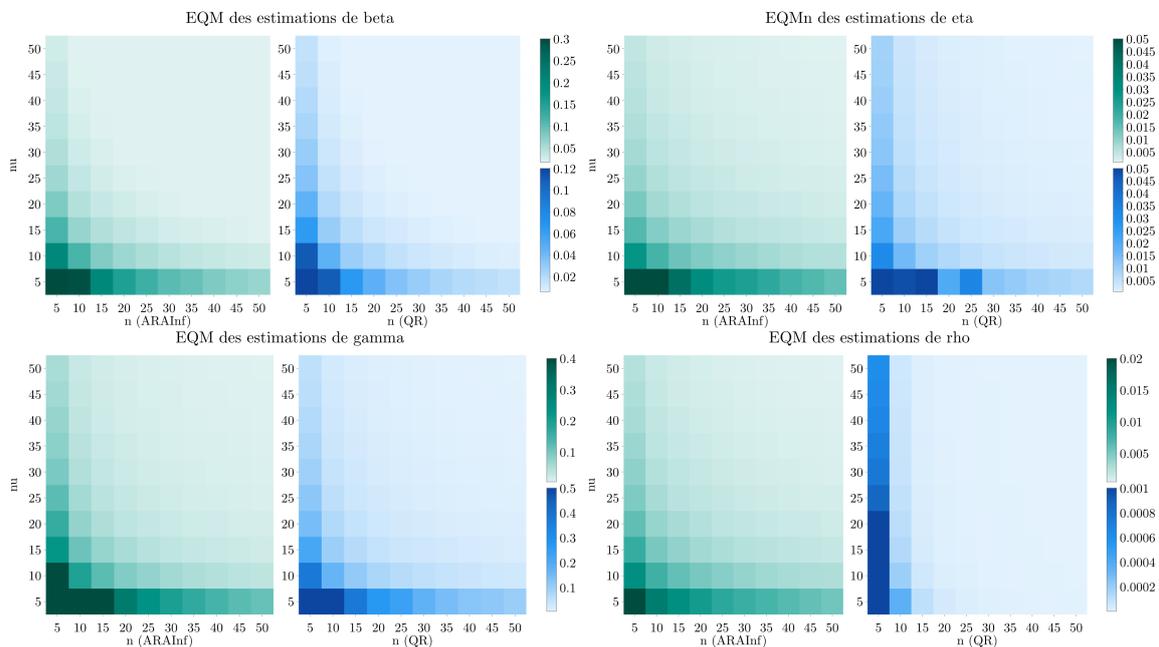


FIGURE 3.3 – EQM des estimations des quatre paramètres dans le cas d'une covariable constante, en fonction du nombre n de défaillances par système et du nombre ν de systèmes par jeu de données

3.3 Covariable dépendante du temps

Nous allons maintenant adapter notre étude à une covariable dépendante du temps.

3.3.1 Influence des paramètres du modèle d'âge virtuel

Dans cette sous-section, nous analysons l'influence du paramètre de forme β_0 de la loi de Weibull et de l'efficacité ρ_0 du modèle d'âge virtuel.

3.3.1.1 Mise en place de l'étude

Détaillons les conditions de notre étude. Comme dans la sous-section 3.2.1, $M = 10\,000$ jeux de données ont été simulés pour chaque configuration, avec $\nu = 50$ systèmes par jeu de données et $n = 20$ défaillances par système. Les valeurs des paramètres étaient les mêmes : le coefficient d'influence de la covariable était fixé à $\gamma_0 = 1$, nous avons fait varier β_0 dans l'ensemble $\{1.5, 1.75, \dots, 3\}$ et ρ_0 dans l'ensemble $\{0.1, 0.2, \dots, 0.9\}$ dans le cas des modèles ARA, et dans l'ensemble $\{0.7, 0.75, \dots, 0.95\}$ dans le cas du modèle QR. η_0 était choisi de sorte que toutes les défaillances arrivent dans un intervalle de temps comparable. La différence réside dans le type de covariable : ici, il ne s'agissait plus d'une covariable constante dans le temps, mais d'une covariable dépendante du temps, qui saute à chaque unité de temps dans $[0, 10]$. Nous avons simulé cette covariable en tirant 11 variables aléatoires uniformes entre 0 et 1, et en accumulant successivement ces variables. Le résultat était donc une covariable constante par morceaux et croissante, dont les hauteurs de saut étaient uniformément distribuées. Nous avons divisé cette covariable par 11, le nombre de paliers constants, de sorte que les valeurs de la covariable restaient entre 0 et 1. Nous avons fait ce choix en raison de la manière dont les valeurs de la covariable sont intégrées dans l'intensité conditionnelle : sans diviser la covariable simulée, nous aurions obtenu une valeur maximale de $\exp(\gamma_0' \mathbb{X}_{10}^{(\max)}) = \exp(11) \simeq 60\,000$, avec une moyenne de $(\exp(11) - 1)/11 \simeq 5\,400$. Ces valeurs potentielles, qui apparaissent en facteur de l'intensité conditionnelle, auraient rendu trop faible l'information du modèle d'âge virtuel lui-même. Plutôt que de changer l'ordre de grandeur de γ_0 , nous avons choisi de normaliser la covariable. Par ailleurs, nous avons simulé les jeux de données avec la première méthode exposée dans la Sous-section 2.2.2.2.

Les heat maps des EQM empiriques obtenues dans cette configuration sont données en figure 3.4, qui se lit de la même manière que la figure 3.1.

3.3.1.2 Résultats généraux

Nous donnons maintenant de premiers résultats de l'étude avec une covariable dépendante du temps. En comparaison avec le cas d'une covariable constante, nous trouvons ici des motifs de heat maps plutôt similaires, à part pour γ , le coefficient de la covariable, qui n'a plus

la même allure aléatoire. Les valeurs des EQM sont presque les mêmes pour β et ρ . Elles sont multipliées par 2 (modèles ARA) ou 4 (modèle QR) pour η , et par 8 (modèles ARA) ou 37 (modèle QR) pour γ . Il est important de noter que η et γ ont un lien fort dans le modèle : les deux ont un effet multiplicatif (*via* une reparamétrisation pour η et au travers de la fonction exponentielle pour γ) sur l'intensité conditionnelle. Nous voyons ici que l'introduction d'une covariable dépendante du temps perturbe la qualité d'estimation des deux paramètres. Cependant, excepté certaines fortes valeurs pour γ dans le modèle QR, les EQM restent raisonnablement basses.

3.3.1.3 Influence des paramètres

Pour β , nous trouvons à nouveau que plus ρ_0 est grand et plus β_0 est faible, meilleures sont les estimations. Les biais sont en dessous de 0.02 pour les modèles ARA et 0.1 pour le modèle QR.

Nous trouvons une influence un peu plus claire de ρ_0 sur la qualité d'estimation de η : plus il est grand, plus les EQM sont faibles. Au premier coup d'œil, nous pourrions croire que cette influence est la même pour β_0 , mais nous devons remarquer que ce n'est pas le cas pour de faibles valeurs de ρ_0 dans le modèle QR. Les biais relatifs à la vraie valeur sont en dessous de 1 % pour les modèles ARA et en dessous de 19 % pour le modèle QR, avec de bien plus faibles valeurs quand ρ_0 est fort.

Pour ρ , nous obtenons quasiment les mêmes heat maps que dans le cas d'une covariable constante, avec seulement des valeurs légèrement plus élevées dans les modèles ARA.

Le cas de γ , le coefficient de la covariable, est le plus intéressant. Cette fois, il y a une influence à la fois de β_0 et de ρ_0 sur la qualité d'estimation de γ . Il semble que, pour tous les modèles, plus ρ_0 est grand, meilleures sont les estimations, même si cela n'est pas vrai pour $\rho_0 = 0.7$ dans le modèle QR. L'effet de β_0 quant à lui n'est pas le même pour tous les modèles. Dans les modèles ARA, plus il est grand, plus faibles sont les EQM, surtout pour de grandes valeurs de ρ_0 . Le motif pour de faibles valeurs de ρ_0 n'est pas très clair. Dans le modèle QR, il est clair que plus β_0 est faible, meilleures sont les estimations de γ . Dans le modèle ARA $_{\infty}$, γ est généralement sous-estimé, avec des biais allant jusqu'à 0.027. Au contraire, γ est surestimé dans le modèle QR, avec des biais allant jusqu'à 0.66. Par rapport à la vraie valeur $\gamma_0 = 1$, il s'agit de valeurs plutôt élevées. Dans le modèle ARA $_1$, nous trouvons que γ est surestimé avec des biais allant jusqu'à 0.012 quand β_0 est fort et ρ_0 est faible, et est sous-estimé avec des biais allant jusqu'à 0.0057 quand β_0 est faible et ρ_0 est fort. Dans la seconde configuration, qui signifie que le système s'use lentement et que les réparations sont très efficaces, l'intensité conditionnelle croît lentement. Les instants de défaillances sont donc plus espacés. Dans la procédure d'estimation, cela peut être pris comme un faible impact de la covariable (qui est positive), menant à une sous-estimation de γ . L'inverse est vrai pour la première configuration.

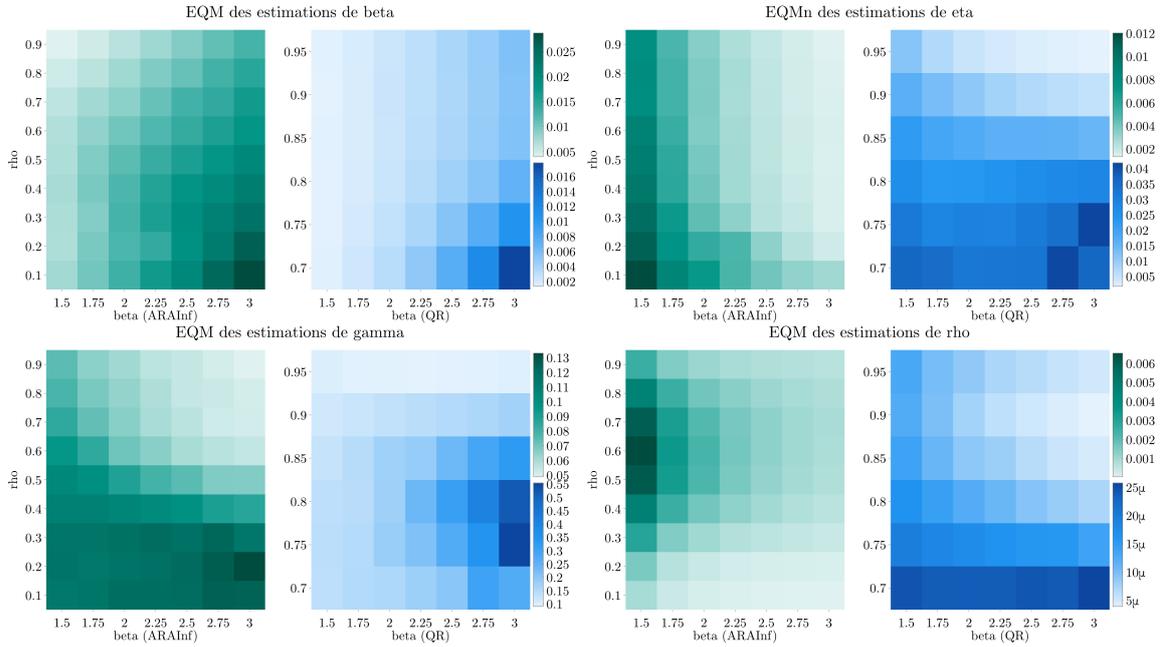


FIGURE 3.4 – EQM des estimations des quatre paramètres dans le cas d’une covariable dépendante du temps, en fonction des vraies valeurs de β_0 et ρ_0

3.3.2 Influence du coefficient de la covariable

Nous nous concentrons ici sur l’influence de γ_0 sur la qualité d’estimation. Seul le cas $\beta_0 = 2.5$, $\rho_0 = 0.7$ pour les modèles ARA et $\rho_0 = 0.9$ pour le modèle QR était considéré, tandis que nous avons fait varier γ_0 dans l’ensemble $\{-3, -2, \dots, 3\}$. η_0 a été choisi suivant la procédure déjà expliquée en début de chapitre. Les graphes des EQM empiriques obtenues dans cette configuration sont donnés en figure 3.5.

Les résultats sont très différents du cas à covariable constante. Pour β , il n’y a pas d’influence de γ_0 sur les estimations dans les modèles ARA_∞ et QR, mais plus γ_0 est grand, plus les EQM sont grandes dans le modèle ARA_1 . Pour les trois modèles, les biais sont constants. La variation qui apparaît pour le modèle ARA_1 vient donc de l’écart-type, qui montre effectivement le même phénomène. Cependant, pour les trois modèles, les valeurs ont le même ordre de grandeur que dans le cas de la covariable constante. Nous observons la même chose dans l’estimation de η , excepté que c’est ici le modèle QR qui montre les plus fortes valeurs d’EQM. Nous ne pouvons pas directement comparer ces valeurs, puisque nous parlons d’EQM non normalisées dans le cas d’une covariable constante, alors qu’ici nous avons dû normaliser les EQM par la valeur variable de η_0 . Si nous normalisons les premières, nous trouvons des valeurs du même ordre de grandeur que les secondes. Concernant ρ , la situation est la même que pour β , avec un accroissement des EQM dans le modèle ARA_1 pour de fortes valeurs de γ_0 , ce qui est également observable sur les écarts-types. L’ordre de grandeur est le même que pour une covariable constante. L’allure du graphe pour les estimations de γ est complètement différente du cas covariable constante. Ici, les courbes pour les modèles ARA ont un compor-

tement constant, que ce soit pour l'EQM, le biais ou l'écart-type. Le biais n'est jamais plus élevé que 0.017, ce qui est une valeur faible par rapport aux vraies valeurs de γ_0 . L'écart-type ne va pas au delà de 0.44 pour le modèle ARA_1 et de 0.27 pour le modèle ARA_∞ . Ensuite, nous voyons que plus γ_0 est grand, plus les EQM sont grands dans le modèle QR. Cela vient aussi bien de l'écart-type, qui montre la même monotonie, que du biais, qui s'accroît lorsque γ_0 est grand. En fait, γ est de plus en plus sous-estimé, avec un biais allant jusqu'à 0.22.

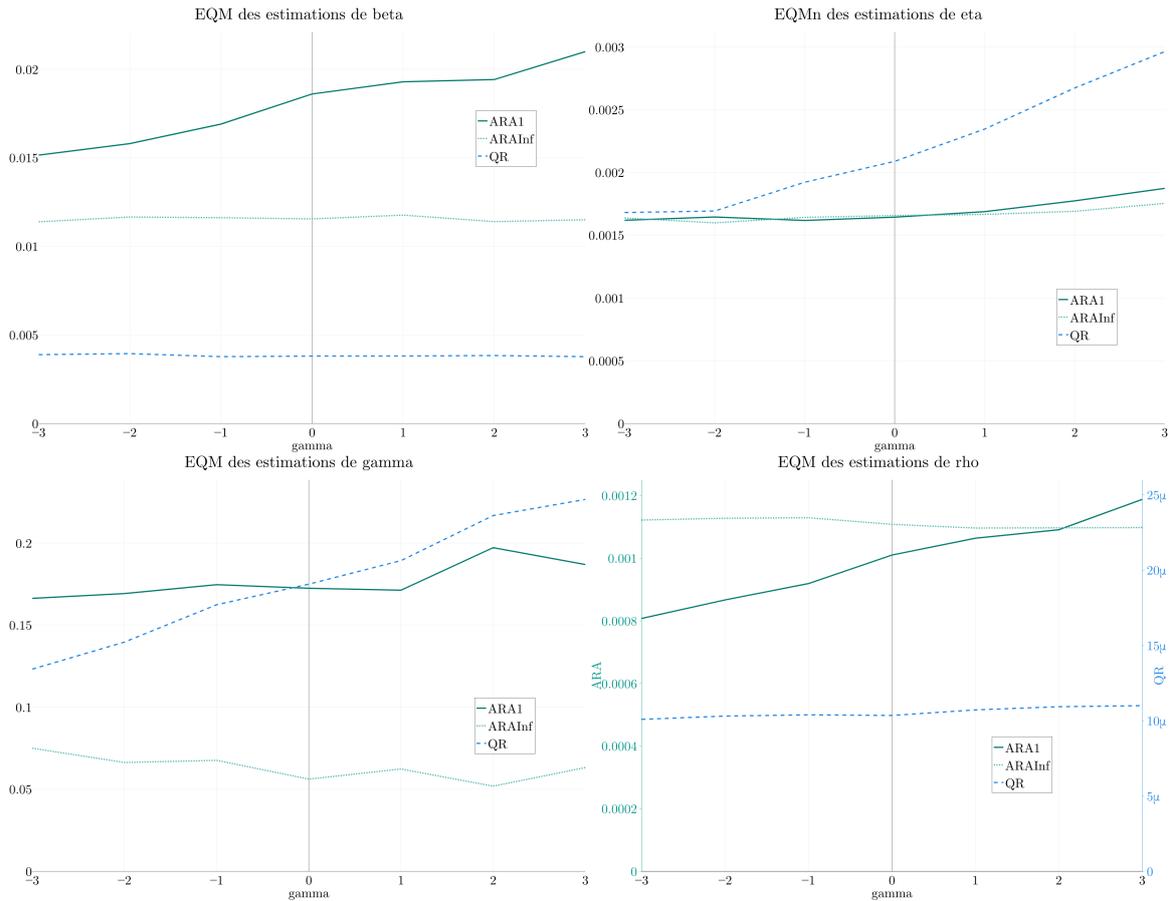


FIGURE 3.5 – EQM des estimations des quatre paramètres dans le cas d'une covariable dépendante du temps, en fonction des vraies valeurs de γ_0

3.3.3 Influence du nombre de données

Cette partie de l'étude numérique a pour objectif d'analyser comment les dimensions des jeux de données influencent la qualité d'estimation.

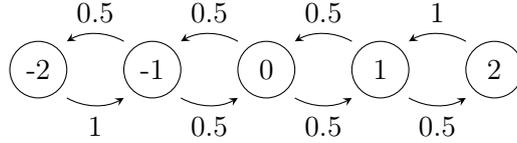


FIGURE 3.6 – Probabilités de sauter d'un état à l'autre pour la covariable dépendante du temps

3.3.3.1 Mise en place de l'étude

Nous commençons par donner les détails de notre étude. Nous avons à nouveau fait varier le nombre de systèmes ν et le nombre de défaillances par système n dans l'ensemble $\{5, 10, \dots, 50\}$. Nous avons choisi cette fois de nous concentrer sur le modèle ARA_∞ afin d'étudier deux types différents de covariable. Nous avons choisi les paramètres du modèle parmi ceux qui avaient montré de bons résultats : $\eta_0 = 1/(0.1^{1/2.5})$, $\beta_0 = 2.5$, $\rho_0 = 0.7$ et $\gamma_0 = 1$. Pour chaque paire de ν et n , nous avons simulé $M = 10\,000$ jeux de données.

La covariable était simulée soit comme précédemment, comme la somme cumulée normalisée de 11 variables aléatoires uniformes (et donc croissante dans le temps), soit comme un processus aléatoire prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, sautant d'un état à un état adjacent en des instants simulés comme une somme cumulée de variables aléatoires exponentielles standards. Nous avons fixé des probabilités du type suivant : en -2, la probabilité de sauter en -1 est 1 ; en -1, la probabilité de sauter en -2 est 0.5 et celle de sauter en 0 est 0.5, *etc.* Un résumé graphique de ces probabilités est donné en figure 3.6. L'état initial était toujours 0.

3.3.3.2 Heat maps

Les heat maps des EQM empiriques obtenues dans cette configuration sont données en figure 3.7, qui se lit de la même manière que la figure 3.3, mis à part que les graphes pour le modèle ARA_∞ sont remplacés par les graphes pour la covariable croissante et que les graphes pour le modèle QR sont remplacés par les graphes pour la covariable à espace d'états fini. À nouveau, nous observons une tendance claire à avoir de meilleures estimations quand la taille des données augmente, que ce soit en terme de nombre de systèmes ou de nombre de défaillances, ce qui est ce que nous attendions. À part pour γ , les échelles sont comparables et même légèrement plus faibles que dans le cas à covariable constante. Il semble que pour de petits échantillons, l'estimation fonctionne mieux dans le cas de covariables dépendantes du temps.

3.3.3.3 Paramètres de la loi de Weibull

En ce qui concerne les paramètres de la loi de Weibull, nous observons ici le même phénomène que pour une covariable constante : il est plus facile d'estimer β et η , respectivement

les paramètres de forme et d'échelle de l'intensité initiale, avec plus de systèmes qu'avec plus de défaillances par système. Les biais sont plutôt symétriques, et montrent que ces deux paramètres sont généralement surestimés. Cependant, cette surestimation décroît rapidement avec plus de données. Les écarts-types ne sont pas symétriques, et montrent la même tendance que les EQM.

3.3.3.4 Efficacité des maintenances

Nous passons à l'influence du nombre de données sur l'estimation de l'efficacité des maintenances. À nouveau, comme dans le cas du modèle ARA_∞ avec une covariable constante, ρ est plus facile à estimer avec plus de systèmes plutôt qu'avec plus de défaillances par système. Nous avons déjà donné une explication potentielle à cela : les trois autres paramètres sont plus faciles à estimer avec plus de systèmes, ce qui peut affecter la qualité d'estimation de ρ , bien que ce paramètre représente l'efficacité des maintenances. Les biais peuvent même mieux révéler ce phénomène : avec seulement 5 systèmes par jeu de données, les biais atteignent 0.018, quel que soit le nombre de défaillances, alors qu'avec 10 systèmes, ils n'atteignent jamais 0.010. Dans tous les cas, ces biais sont raisonnablement bas, et montrent seulement une légère sous-estimation de ρ .

3.3.3.5 Coefficient des covariables

Finalement, en ce qui concerne le coefficient des covariables, nous observons que dans le cas de la covariable non monotone, comme attendu, il est plus facile d'estimer γ quand il y a plus de systèmes. Cependant, dans le cas de la covariable uniforme cumulée, c'est le contraire : plus de défaillances par systèmes amènent une meilleure estimation que plus de systèmes par jeu de données. Concernant les biais, il est intéressant de voir qu'avec la covariable uniforme cumulée, γ tend à être sous-estimé (biais de 0.39 pour un jeu de données 5×5 , seulement 0.15 pour un jeu de données 5×10 ou 10×5) alors qu'avec la covariable à espace d'états fini, γ est légèrement surestimé (biais de 0.095 pour un jeu de données 5×5 , seulement 0.050 pour un jeu de données 5×10 ou 10×5).

3.4 Optimisation du coût d'inspection et d'erreur d'estimation

Nous avons étudié en section 3.3 l'impact des valeurs des paramètres et de la taille du jeu de données sur la qualité d'estimation des paramètres du modèle. La taille du jeu de données était entendue comme le nombre de systèmes et le nombre de défaillances par système. Les covariables étaient supposées entièrement connues. Cependant, cette hypothèse peut ne pas être vérifiée en réalité. L'information sur des covariables dépendantes du temps est potentiellement incomplète si elles ne sont mesurées qu'à certains instants donnés par exemple. L'estimation reste possible avec notre procédure par paliers, mais celle-ci peut souffrir de biais supplémentaires induits par les mauvaises valeurs sur certains paliers.

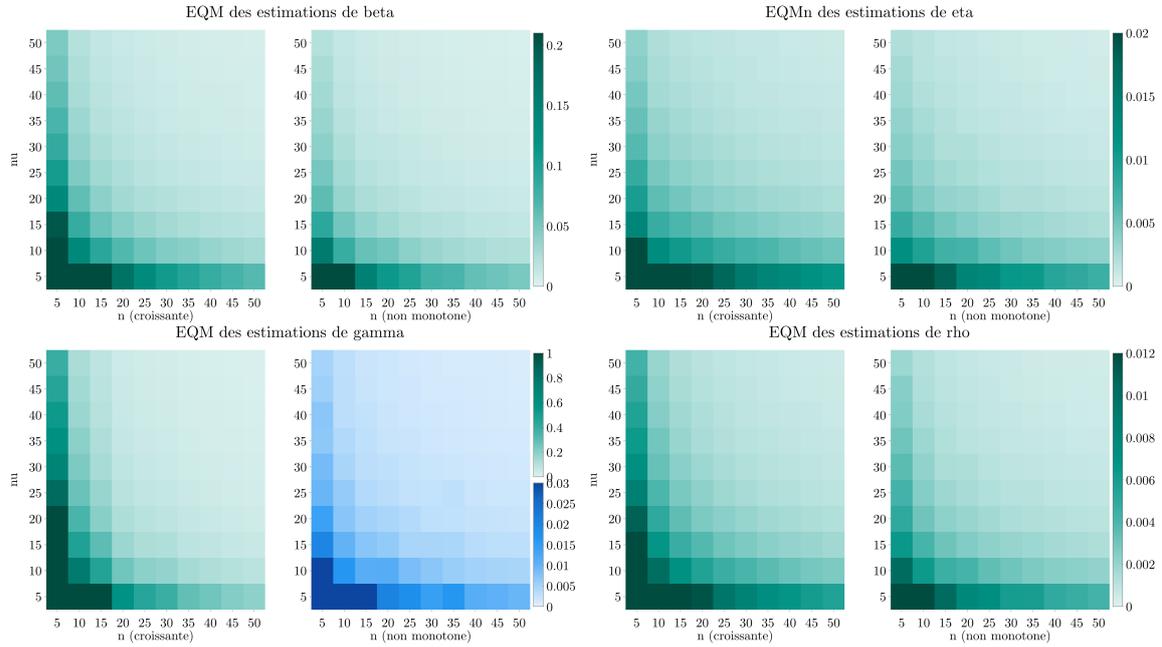


FIGURE 3.7 – EQM des estimations des quatre paramètres dans le cas d'une covariable dépendante du temps, en fonction du nombre n de défaillances par système et du nombre ν de systèmes par jeu de données

Nous présentons en figure 3.8 deux cas de connaissance d'une covariable. Dans le premier cas, deux inspections ont lieu avant $t = 10$ en $I_1 = 3.5$ et $I_2 = 6.5$. Dans le second cas, cinq inspections ont lieu avant $t = 10$ en $I_1 = 1.5$, $I_2 = 3.5$, $I_3 = 5.5$, $I_4 = 7.5$ et $I_5 = 9.5$. Ces instants d'inspection sont marqués par des droites verticales en pointillés. La trajectoire réelle de la covariable est représentée par la courbe noire en escalier. Les escaliers de couleur représentent quant à eux la covariable observée, c'est-à-dire ce que nous en connaissons entre deux inspections. Nous remarquons que la trajectoire observée est bien plus proche de la trajectoire réelle lorsqu'il y a plus d'inspections entre 0 et 10. Cette information plus exacte devrait mener à une estimation des paramètres du modèle plus fidèle à leur vraie valeur.

Le but dans cette section est donc d'étudier l'effet d'une information incomplète sur les covariables. Ce travail est issu de notre article [BBD]. Par souci de simplicité, nous avons choisi d'étudier un modèle avec une seule covariable qui sera inspectée plus ou moins fréquemment. L'idée est de simuler un jeu de données avec une covariable complète puis de restreindre l'information disponible sur la covariable avant de procéder à l'estimation des paramètres. Nous avons choisi de travailler avec des inspections périodiques. Le nouveau paramètre de l'étude est donc la fréquence d'inspection. Cette fréquence pourra ensuite être optimisée.

3.4.1 Statistiques de comparaison et protocole de calcul

Dans cette sous-section, nous décrivons l'étude mise en place pour répondre à notre problématique, et plus particulièrement les statistiques utilisées pour comparer la qualité d'esti-

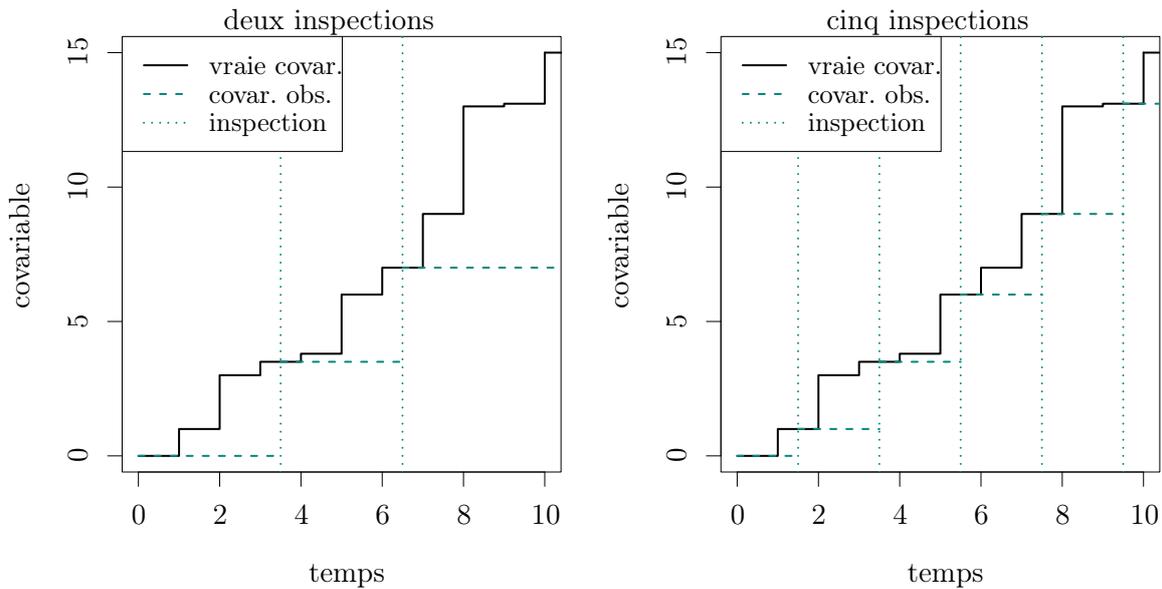


FIGURE 3.8 – Schéma d'inspection des covariables

mation dans les différents cas.

Nous nous intéressons tout d'abord à des indicateurs de qualité d'estimation. Nous re- prenons pour cela l'EQM vue dans le début de ce chapitre, et nous introduisons d'autres indicateurs faisant appel à la simulation du prochain instant de défaillance. Pour ces autres indicateurs, nous estimons les paramètres du modèle puis nous simulons le prochain instant de défaillance de chaque système du jeu de données. Le premier indicateur sera une statistique mesurant l'écart absolu moyen entre la distribution attendue et la distribution observée. Les trois autres seront des statistiques de type Kolmogorov-Smirnov (KS), agrégées par moyenne, par médiane ou par maximum sur l'ensemble des systèmes. Les cinq indicateurs dont nous disposons sont donc les suivants :

- EQM des estimations,
- écart absolu moyen entre la distribution attendue et la distribution observée,
- statistique KS agrégée par moyenne,
- statistique KS agrégée par médiane,
- statistique KS agrégée par maximum.

De manière générale, plus ces statistiques sont faibles, meilleure est la qualité d'estimation.

Notre étude repose sur la simulation de $M = 1\,000$ jeux de données puis sur le calcul des statistiques sur chacun des jeux de données. Les statistiques sont ensuite moyennées pour obtenir leur tendance. Les intervalles d'inspection de la covariable sont choisis dans $\{0.2, 0.25, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.75, 0.8, 1, 1.2, 1.5, 1.6, 2, 2.4, 3\}$.

Nous nous sommes à nouveau concentrés sur les modèles ARA_1 , ARA_∞ et QR avec une intensité initiale PLP. Les jeux de données sont de grande taille : $\nu = 50$ systèmes de $n = 20$ défaillances chacun. La covariable est simulée de la même manière quand dans la sous-section 3.3.3 : il s'agit d'un processus à sauts à espaces d'états fini. Les sauts ont lieu en moyenne

toutes les unités de temps mais les instants précis sont également aléatoires, puisqu'ils sont définis par une somme cumulée de variables aléatoires exponentielles standards. Les valeurs du processus sont prises dans l'ensemble $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, avec les probabilités données en figure 3.6. Les paramètres sont fixés à $\gamma_0 = 1$, $\eta_0 = 1/(0.025^{1/2.5})$ pour les modèles ARA, $\eta_0 = 1/(0.087^{1/2.5})$ pour le modèle QR, $\beta_0 = 2.5$, $\rho_0 = 0.7$ pour les modèles ARA, $\rho_0 = 0.9$ pour le modèle QR.

L'algorithme suivant décrit le calcul des statistiques. Chacun des $M=1000$ jeux de données contient $nu=50$ systèmes de 20 défaillances chacun. Les statistiques sont calculées pour chacun des $nb_freq=15$ intervalles d'inspection possibles. Les échantillons de prochains instants de défaillance sont constitués de $nb_rep=1000$ réplifications.

Algorithme 3.1 – Calcul des statistiques de qualité d'estimation

```

pour m allant de 1 à M :
  simuler des covariables et un jeu de données ;
  estimer les paramètres avec les covariables complètes ;
  pour j allant de 1 à nu :
    pour i allant de 1 à nb_rep :
      proch[i,j] <- simuler le prochain instant de
        défaillance du système j ;
    fin pour ;
    m[j] <- moyenne(proch[ ,j]) ;
  fin pour ;
  pour s allant de 1 à nb_freq :
    tronquer les covariables en fonction de
      l'intervalle d'inspection ;
    estimer les paramètres avec les covariables tronquées ;
    pour j allant de 1 à nu :
      pour i allant de 1 à nb_rep :
        proch_s[i,j] <- simuler le prochain instant de
          défaillance du système j avec les paramètres
            estimés ;
      fin pour ;
      KS[j] <- calculer la statistique d'écart KS entre
        proch[ ,j] et proch_s[ ,j] ;
      m_s[j] <- moyenne(proch_s[ ,j]) ;
    fin pour ;
    KS_moy_s[m,s] <- moyenne(KS) ;
    KS_med_s[m,s] <- médiane(KS) ;
    KS_max_s[m,s] <- maximum(KS) ;
    ecart_s[m,s] <- moyenne(abs(m - m_s)) ;
  fin pour ;
fin pour ;
pour s allant de 1 à nb_freq :
  KS_moy[s] <- moyenne(KS_moy_s[, s]) ;
  KS_med[s] <- moyenne(KS_med_s[, s]) ;
  KS_max[s] <- moyenne(KS_max_s[, s]) ;
  ecart[s] <- moyenne(ecart_s) ;
  EQMn[s] <- somme(EQMn des estimations des quatre

```

```

paramètres) ;
fin pour ;

```

La statistique KS est calculée sur deux échantillons comme suit :

$$KS = \sqrt{r} \sup_{x \in [0,1]} |F_r(x) - G_r(x)|, \quad (3.3)$$

où F_r et G_r sont les fonctions de répartition empiriques des deux échantillons à comparer, r correspondant à la taille des échantillons.

3.4.2 Analyse des performances d'estimation en fonction de la période d'inspection

Cette sous-section vient étudier les cinq indicateurs de qualité d'estimation pour mieux comprendre l'influence de l'inspection sur l'estimation.

En figure 3.9, nous avons représenté les EQM des estimations des quatre paramètres, pour chaque modèle étudié, en fonction de l'intervalle d'inspection. Par exemple, à la ligne d'abscisse 2, nous lisons l'EQM lorsque la covariable est mesurée toutes les deux unités de temps. Nous voyons que pour les quatre paramètres et pour les trois modèles, l'EQM est nettement croissante avec l'intervalle d'inspection. Nous obtenons donc que plus les inspections sont fréquentes, meilleure est l'estimation des paramètres.

Nous retrouvons cette caractéristique sur la figure 3.10, où sont représentées les cinq statistiques calculées : les statistiques sont croissantes avec la durée des intervalles d'inspection, avec des pentes plus ou moins fortes. Cette observation est bien celle que nous voulions obtenir : il est logique que l'estimation soit meilleure quand l'information sur la covariable est plus importante.

3.4.3 Coût des inspections et de l'erreur d'estimation

Nous ajoutons maintenant une dimension de coût dans notre étude. En effet, des inspections très fréquentes peuvent avoir un coût élevé, et le gain en qualité d'estimation n'en vaut pas forcément la peine. Nous calculons alors un coût qui met en regard l'erreur d'estimation et le coût d'inspection. Pour commencer, nous restons dans le cadre de la sous-section 3.4.2. Nous construisons une fonction de coût comme étant la somme du nombre d'inspections (chaque inspection vaut donc 1) et de la statistique choisie multipliée par un coefficient de coût positif. Le coefficient vise à rendre commensurables les deux quantités :

$$\text{Coût total} = C_I N_I + C_E S_E, \quad (3.4)$$

où $C_I = 1$ est le coût d'une inspection, N_I est le nombre d'inspections, C_E est le coût de l'erreur d'estimation et S_E est la statistique d'erreur d'estimation. Ainsi, plus la statistique

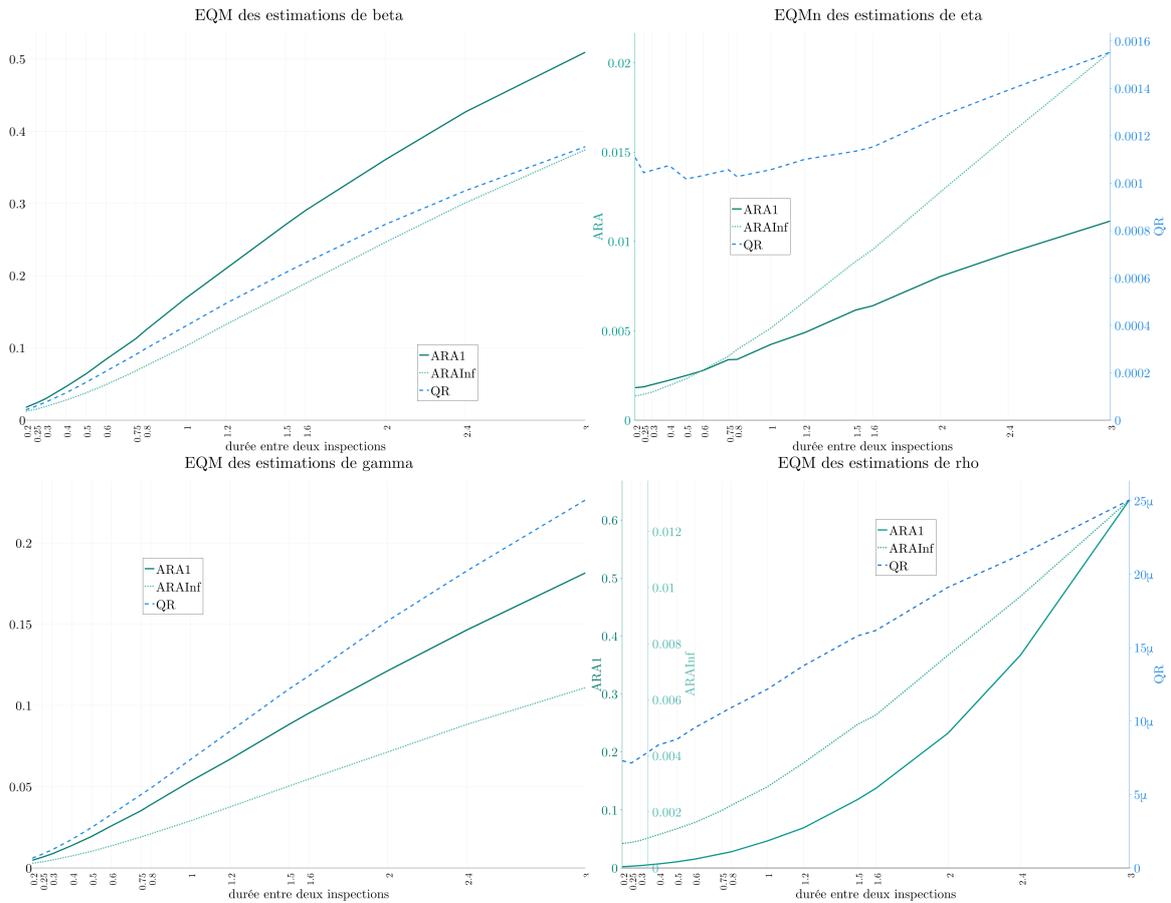


FIGURE 3.9 – EQM des estimations des quatre paramètres en fonction de la fréquence d'inspection

est grande, plus son coût est élevé. Le nombre d'inspections est trivialement décroissant en fonction de l'intervalle d'inspection. Nous avons vu que nos statistiques quant à elles sont croissantes en fonction de l'intervalle d'inspection. En équilibrant ces deux quantités, nous devrions trouver la fréquence d'inspection optimale pour ne pas inspecter trop souvent sans toutefois dégrader la qualité d'estimation. Nous cherchons donc un minimum à notre fonction de coût.

Dans la figure 3.11, un exemple est donné avec $C_E = 500$ pour le coût d'erreur d'estimation, pour les cinq statistiques et les trois modèles considérés. Nous observons dans tous les cas un minimum. L'intervalle d'inspection correspondant est donné dans la légende des graphes. Évidemment, la pondération faite par le coefficient a toute son importance. À un extrême, si ce coefficient est nul, le coût est égal au nombre d'inspections. Le minimum intervient donc pour l'intervalle d'inspection le plus long. Cela est compréhensible : si nous ne tenons pas compte de l'erreur d'estimation, nous pouvons faire aussi peu d'inspections que possible. *A contrario*, pour un coefficient suffisamment élevé, le nombre d'inspections ne pèse plus rien face à la contribution de l'erreur d'estimation dans le coût. L'optimisation va alors choisir une erreur la plus faible possible, c'est-à-dire pour un intervalle d'inspection le plus petit possible.

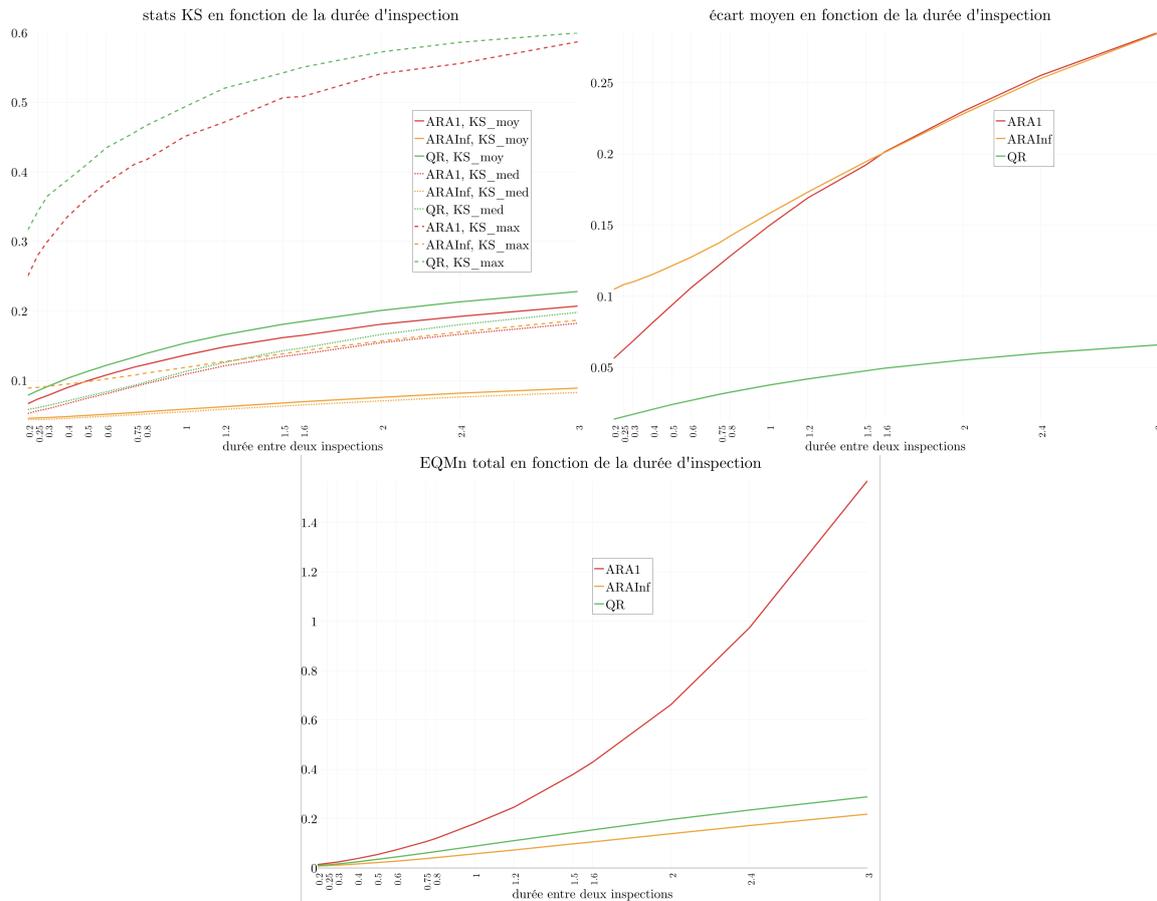


FIGURE 3.10 – Statistiques de qualité en fonction de la fréquence d'inspection

À nouveau, cela se comprend car si l'inspection coûte très peu face à l'erreur d'estimation, autant inspecter très souvent pour obtenir une estimation de bonne qualité.

3.5 Conclusion de l'étude sur la qualité d'estimation

Dans ce chapitre nous avons évalué la qualité d'estimation dans le cadre de modèles d'âge virtuel avec des covariables constantes ou dépendantes du temps. Nous avons obtenu des résultats satisfaisants lors de l'estimation conjointe des paramètres du modèle d'âge virtuel et du coefficient d'une covariable constante. Ces résultats étaient proches en termes d'EQM de ceux que nous avons pu observer pour les mêmes modèles sans covariable. L'influence des différents paramètres de simulation sur la qualité d'estimation a été minutieusement étudiée. En particulier, nous avons empiriquement trouvé que le taux d'usure intrinsèque des systèmes et l'efficacité des maintenances n'ont pas d'influence sur la qualité d'estimation du coefficient de la covariable, et réciproquement pour une covariable constante. Concernant le coefficient de la covariable, quelques questions intéressantes ont été soulevées : la qualité pour ce coefficient est symétrique que sa valeur de simulation soit positive ou négative. De plus, la qualité augmente

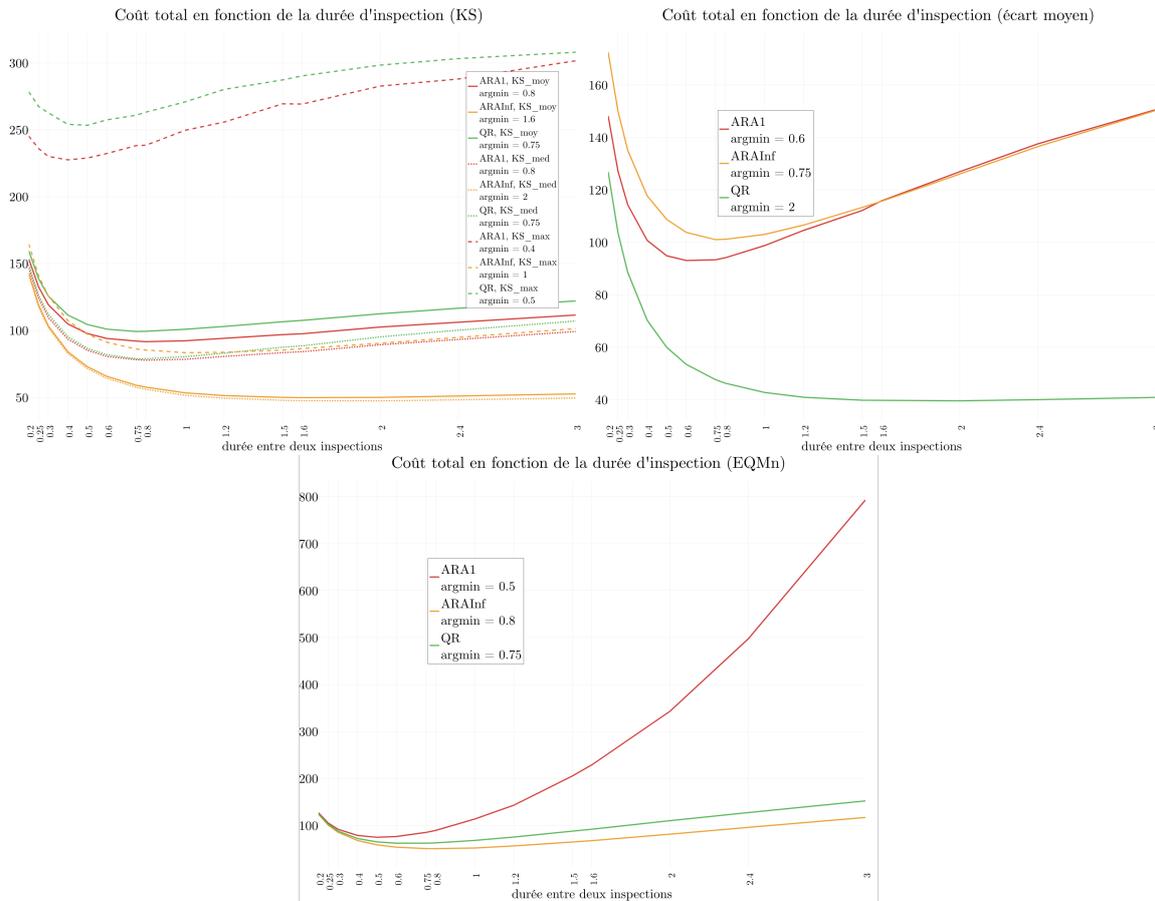


FIGURE 3.11 – Coût en fonction de la fréquence d'inspection

quand la valeur de simulation est forte, avec une allure quadratique. Finalement, les trois modèles étudiés montrent la même qualité d'estimation pour un coefficient nul. Cela pourrait mener à de futurs travaux pour démontrer des propriétés théoriques sur les estimateurs. La qualité d'estimation avec une covariable dépendante du temps n'est pas aussi bonne qu'avec une covariable constante, mais reste plutôt satisfaisante. Nous avons observé différents motifs en considérant la qualité d'estimation en fonction des paramètres du modèle. En particulier, alors que le coefficient de la covariable constante n'a pas d'influence sur la qualité d'estimation des autres paramètres, il en a une lorsque la covariable est dépendante du temps.

Concernant l'influence de la taille des données, nous avons heureusement trouvé que plus il y a de données, meilleure est l'estimation. Nous avons souligné le fait que le comportement des estimateurs n'est pas symétrique que ce soit le nombre de systèmes qui augmente ou le nombre de défaillances par système. Tout d'abord, plus nous avons de systèmes, plus il est facile d'estimer les paramètres de l'usure intrinsèque des systèmes : en effet, ces paramètres sont mieux estimés lorsque nous observons un grand nombre de premiers instants de défaillances. Après réparations, l'information tend à être brouillée par l'effet des maintenances, qui est estimé simultanément. Ensuite, l'inverse est vrai pour le modèle QR et est aisément compréhensible : plus nous avons de défaillances successives, mieux l'efficacité des maintenances peut être es-

timée. Enfin, l'estimation de l'influence de la covariable est moins précise avec de petits jeux de données. Plus nous avons de systèmes, meilleure elle est, puisque pour un seul système, ce coefficient est indiscernable de l'échelle de l'intensité initiale. Chaque système correspond à une valeur de covariable. Ainsi, la quantité d'information avec peu de systèmes est trop faible pour pouvoir obtenir une bonne estimation.

Nous avons aussi étudié l'influence de la fréquence d'inspection sur la qualité de l'estimation, étant donné un modèle d'âge virtuel à covariable dépendante du temps. Nous avons d'abord vu que plus les inspections sont fréquentes, meilleure est la qualité d'estimation, en termes de cinq différentes statistiques mesurant l'erreur d'estimation. Ensuite, nous avons vu qu'il est possible de trouver numériquement l'optimum d'une fonction de coût qui équilibre le coût des inspections et le coût de l'erreur d'estimation. Avec un coût unitaire de l'erreur d'estimation bien choisi, nous avons été capables de trouver l'intervalle d'inspection qui minimise le coût total.

Les bons résultats de la procédure d'estimation devraient être examinés pour comprendre quelles sont les propriétés mathématiques sous-jacentes des estimateurs. Nous avons aussi souligné quelques caractéristiques intéressantes de l'influence du coefficient de la covariable sur la qualité d'estimation. Des propriétés mathématiques pourraient également être tirées de ces caractéristiques.

Par ailleurs, l'étude de l'impact de la fréquence d'inspection est un premier pas vers la planification de maintenances préventives. En effet, nous pouvons songer à une situation où nous voulons utiliser la connaissance des covariables pour la mise en place des maintenances. La première étape de cette procédure serait d'estimer les paramètres du modèle, étant donné un jeu de données. Mais nous aurons alors besoin de savoir si cette estimation est de bonne qualité, en particulier si nous ne pouvons inspecter les systèmes qu'à des instants discrets donnés. Dans [Gil+16], les modèles d'âge virtuel sont utilisés pour optimiser les maintenances préventives. Cependant, cet article n'incluait pas de covariables. Une extension à la fois de ce travail et du nôtre serait d'incorporer des covariables dynamiques dans la procédure d'optimisation de [Gil+16]. Nous étudierons au chapitre 4 cette possibilité.

Aide à la prise de décision en présence de covariables pour la maintenance préventive et les dates d'inspection des covariables

Sommaire

4.1	Optimisation des dates de maintenance préventive sans covariables	70
4.1.1	Réparation minimale et maintenance périodique parfaite	71
4.1.2	Réparation imparfaite et date de maintenance dynamique	72
4.2	Optimisation des dates de maintenance préventive avec covariables fixes	76
4.2.1	Réparation minimale	77
4.2.2	Réparation imparfaite	81
4.3	Optimisation des dates de maintenance préventive avec covariables dynamiques	83
4.3.1	Réparation minimale	84
4.3.2	Réparation imparfaite	97
4.4	Optimisation du pas d'inspection des covariables avec maintenances préventives	100
4.4.1	Sans coût d'inspection	100
4.4.2	Avec coût d'inspection	103
4.4.3	Covariable modifiée	105
4.5	Optimisation de la date d'inspection avec maintenances préventives	106
4.6	Conclusion sur l'aide à la décision en présence de covariables	110

En dehors des maintenances correctives, qui interviennent suite à une défaillance, il est possible de faire des maintenances préventives, qui visent à améliorer l'état du système et ainsi repousser la prochaine défaillance. L'intérêt est qu'il est potentiellement plus défavorable de subir une panne du système, compte tenu de la durée où le système est hors d'usage, du coût des réparations imprévues, *etc.*, plutôt que de procéder à une maintenance préventive lorsque le système est en fonction. Cependant, il n'est pas forcément préférable de faire des maintenances préventives trop souvent, puisque cela pourrait générer un gaspillage de ressources si le système est maintenu alors qu'il est encore en bon état.

Ce chapitre sera consacré à l'optimisation des dates de maintenance préventive. Après avoir revu le cas sans covariables issu de la littérature, nous verrons qu'il est possible de prendre en compte l'information des covariables fixes pour réduire encore le coût des maintenances. Un premier regard sera donné sur quatre politiques de maintenance dans le cas de la réparation minimale, puis nous aborderons celui de la réparation imparfaite. De même, en nous intéressant à l'optimisation des maintenances préventives en présence de covariables dynamiques, nous considérerons d'abord avec attention le cas de la réparation minimale, notamment sur le calcul du seuil d'intensité au delà duquel il faut procéder à une maintenance préventive. Nous passerons ensuite au cas de la réparation imparfaite. Enfin, nous optimiserons la fréquence ou la date d'inspection des covariables dynamiques lorsque celles-ci ne sont pas entièrement connues. Le contenu de ce chapitre a été développé dans [BDB].

4.1 Optimisation des dates de maintenance préventive sans covariables

La littérature regorge de références sur l'optimisation des dates de maintenance préventive. Celles-ci suivent un calendrier qui peut être fixé au préalable ou évoluer au cours de la vie du système. Dans les calendriers fixes, nous pouvons notamment parler de politique de maintenance périodique, où les maintenances préventives ont lieu à intervalle fixé. C'est ce type de politique qui est exposé dans [BH60] : les maintenances préventives y sont des renouvellements périodiques du système, et les maintenances correctives sont soit minimales (ABAO), soit parfaites (AGAN). L'enjeu est alors de déterminer la période optimale de remplacement τ_P . Les maintenances préventives seront alors faites en les instants $\tau_P, 2\tau_P, \dots$. Beaucoup de publications supposent de même que dans [BH60] que les maintenances préventives sont parfaites. Avec des maintenances correctives minimales, [GC07] étudie la politique périodique après estimation des paramètres du modèle. Dans [Gil+16] et [ZW06], les maintenances correctives sont imparfaites. [Gil+16] propose une politique dynamique qui prend en compte l'histoire du processus de défaillance. [ZW06] expose un modèle à deux composants prenant le relais l'un de l'autre après défaillance et où les durées de réparation sont prises en compte. Le système est renouvelé soit après un certain nombre de défaillances, soit après une certaine durée de fonctionnement. Au contraire, certains travaux étudient des maintenances correctives minimales et des maintenances préventives imparfaites. C'est le cas par exemple de [LPX10], où les maintenances préventives ont lieu dès que la fiabilité du système atteint un certain seuil, ou de [MU11], avec soit une minimisation du coût sous contrainte de fiabilité, soit une maximisation de la fiabilité sous contrainte budgétaire. Enfin, certains auteurs considèrent à la fois des maintenances préventives et des maintenances correctives imparfaites. Nous pouvons à ce titre citer [NDF17], qui propose trois politiques de maintenance avec le modèle ARA_∞ -PLP et se base sur les propriétés de ce modèle pour résoudre l'optimisation, ou encore [SAB19], où le double objectif est de trouver la période optimale de maintenance préventive et de décider si après chaque défaillance si le système doit être renouvelé ou imparfaitement réparé. Citons encore [Lov+00], où à chaque défaillance, la décision doit être prise de renouveler ou de réparer imparfaitement le système, mais sans considérer de maintenance préventive, et [Zho+20], qui

expose une politique de maintenance périodique où les maintenances préventives ont un effet variable, mais sans donner la période optimale pour un système.

Dans toute la suite, nous supposons que les maintenances préventives sont parfaites, c'est-à-dire qu'elles remettent à neuf le système. Pour déterminer une période optimale de remplacement, il importe de fixer les coûts des maintenances préventives et des maintenances correctives. Nous les notons respectivement C_{rem} et $C_{rép}$. Si $C_{rép}$ représente uniquement le coût de la maintenance corrective dont l'efficacité est moindre que celle d'un renouvellement, il sera logiquement plus petit que C_{rem} , qui quant à lui représente un renouvellement complet du système. Si $C_{rép}$ prend aussi en compte le coût de la défaillance, alors il pourra être plus élevé que C_{rem} . Nous supposons de plus que l'intensité de défaillance de base $h(\cdot)$ est strictement croissante et dérivable.

Soient $\{\tau_r\}_{r \geq 0}$ les instants successifs de renouvellement, avec $\tau_0 = 0$ (puisque le système est comme neuf à sa mise en route), $\{x_r\}_{r \geq 1}$ les durées entre deux renouvellements successifs, c'est-à-dire, pour tout $r \geq 1$, $x_r = \tau_r - \tau_{r-1}$, $\{R_t\}_{t \geq 0}$ le processus de comptage des renouvellements, et $M_r = C_{rem} + C_{rép}(N_{\tau_r} - N_{\tau_{r-1}})$, $r \geq 1$, les coûts de maintenance sur chaque cycle. Puisque le système est renouvelé par les maintenances préventives, les durées $\{x_r\}_{r \geq 1}$ et les coûts $\{M_r\}_{r \geq 1}$ sont indépendants et de même loi. Le coût total à l'instant $t \geq 0$ est alors égal à

$$C(t) = \sum_{r=1}^{R_t} M_r = \sum_{r=1}^{R_t} (C_{rem} + C_{rép}(N_{\tau_r} - N_{\tau_{r-1}})). \quad (4.1)$$

D'après le théorème de renouvellement ([Tij03] page 41), avec probabilité 1,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C(t)}{t} = \frac{\mathbb{E}M}{\mathbb{E}X}, \quad (4.2)$$

où M est une variable aléatoire de même loi que les $\{M_r\}_{r \geq 1}$ et X est de même loi que les $\{x_r\}_{r \geq 1}$. Nous cherchons donc à minimiser le coût moyen asymptotique par unité de temps

$$G(\tau) = \frac{\mathbb{E}M}{\mathbb{E}X} = \frac{\mathbb{E}[C_{rem} + C_{rép}N_\tau]}{\mathbb{E}\tau} = \frac{C_{rem} + C_{rép}\mathbb{E}N_\tau}{\mathbb{E}\tau}, \quad (4.3)$$

où τ est le premier instant de maintenance préventive.

4.1.1 Réparation minimale et maintenance périodique parfaite

Dans le cas de la réparation minimale avec des maintenances préventives périodiques, $G(\tau) = \frac{C_{rem} + C_{rép}\Lambda_\tau}{\tau}$. En dérivant, nous obtenons $G'(\tau) = \frac{C_{rép}\lambda_\tau\tau - (C_{rem} + C_{rép}\Lambda_\tau)}{\tau^2}$ et donc $G'(\tau) = 0$ est équivalent à $B(\tau) := \lambda_\tau\tau - \Lambda_\tau = \frac{C_{rem}}{C_{rép}}$. De plus, puisque le système s'use continuellement, c'est-à-dire que $h(t)$ est strictement croissante et de plus dérivable, λ_t l'est aussi, et nous avons, pour τ tel que $G'(\tau) = 0$,

$$\begin{aligned} G''(\tau_P) &= \frac{1}{\tau^4} ((C_{rép}\lambda'_\tau\tau + C_{rép}\lambda_\tau - C_{rép}\lambda_\tau)\tau^2 - 2\tau(C_{rép}\lambda_\tau\tau - (C_{rem} + C_{rép}\Lambda_\tau))) \\ &= \frac{C_{rép}\lambda'_\tau}{\tau} - \frac{2}{\tau} \underbrace{G'(\tau)}_{=0} > 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

ce qui assure que nous avons un minimum. Ainsi, $\tau_P = B^{-1}(C_{rem}/C_{rép})$ est la période optimale de remplacement lorsque les maintenances correctives sont minimales. Nous retrouvons bien le résultat de [BH60].

4.1.2 Réparation imparfaite et date de maintenance dynamique

Pour des maintenances correctives qui ne sont pas minimales, le processus de défaillance entre deux renouvellements n'est plus un NHPP et donc l'intensité cumulée est aléatoire. Nous posons donc

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \mathbb{E}[N_t] = \mathbb{E}[\Lambda_t] \text{ et} \\ \phi(t) &= \Phi'(t).\end{aligned}\tag{4.5}$$

Nous supposons par la suite que $\phi(t)$ est strictement croissante et dérivable pour tout $t \geq 0$. Le coût moyen asymptotique par unité de temps pour une politique de maintenance périodique est alors le suivant :

$$G(\tau) = \frac{C_{rem} + C_{rép}\Phi(\tau)}{\tau}.\tag{4.6}$$

Nous avons maintenant $G'(\tau) = \frac{C_{rép}\phi(\tau)\tau - (C_{rem} + C_{rép}\Phi(\tau))}{\tau^2}$ et donc $G'(\tau) = 0$ est équivalent à $B(\tau) := \phi(\tau)\tau - \Phi(\tau) = \frac{C_{rem}}{C_{rép}}$. De plus, nous obtenons par le même argument que dans l'équation 4.4 que cet extremum est un minimum. La solution optimale devient donc $\tau_P = B^{-1}(C_{rem}/C_{rép})$, où $B(t) := t\phi(t) - \Phi(t)$.

Le but de cette section est de présenter les principaux résultats de [Gil+16] qui nous seront utiles pour la suite. L'idée est que dans le cas de maintenances correctives imparfaites, la politique optimale n'est pas périodique mais utilise l'histoire du processus de défaillance. En effet, s'il a été décidé de faire une maintenance préventive en τ_P et que le système tombe en panne juste avant, la maintenance corrective (efficace) va augmenter la fiabilité du système et la maintenance préventive pourrait alors être décalée. Pour prendre en compte l'histoire du système, il convient de noter, pour tout $t \geq 0$, la tribu $\mathcal{F}_t = \sigma\{N_s, s \leq t\}$ et pour tous $0 \leq s \leq t$,

$$\begin{aligned}\Phi(t|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}[N_t|\mathcal{F}_s] \\ \phi(t|\mathcal{F}_s) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(\Phi(t+h|\mathcal{F}_s) - \Phi(t|\mathcal{F}_s)).\end{aligned}\tag{4.7}$$

Nous supposons à nouveau que $\phi(t|\mathcal{F}_s)$ est strictement croissante et dérivable pour tous $0 \leq s \leq t$.

Sachant tout ce qu'il s'est passé jusqu'à l'instant s , considérons la politique de maintenance jusqu'à l'instant $s + T$ ($T > 0$) notée $PM(s, T) = (n; x_1, \dots, x_n | s, T)$, qui donne n maintenances préventives aux instants $s + x_1, s + x_1 + x_2, \dots, s + x_1 + \dots + x_n$, avec $x_1 + \dots + x_n \leq T$. Les x_i , $1 \leq i \leq n$, sont ici les durées entre les maintenances préventives. Le coût total moyen

conditionnel $C(n; x_1, \dots, x_n | s, T)$ d'une telle politique est égal à

$$C(n; x_1, \dots, x_n | s, T) = nC_{rem} + C_{rép} \left(\Phi(s + x_1 | \mathcal{F}_s) - N_s + \sum_{i=2}^n \Phi(x_i) + \Phi \left(T - \sum_{j=1}^n x_j \right) \right). \quad (4.8)$$

La politique $PM^*(s, T) = (n^*; x_1^*, \dots, x_{n^*}^* | s, T)$ est optimale si pour toute autre politique, $C(n^*; x_1^*, \dots, x_{n^*}^* | s, T) \leq C(n; x_1, \dots, x_n | s, T)$.

Tout d'abord, puisque le système est renouvelé en $s + x_1$ et qu'à partir de s , il n'y a plus d'information sur le système, nous décomposons le coût de la manière suivante :

$$C(n; x_1, \dots, x_n | s, T) = C(1; x_1 | s, s + x_1) + C(n - 1; x_2, \dots, x_n | 0, T - x_1). \quad (4.9)$$

Remarquons que si (a^*, b^*) minimise $g(a) + h(a, b)$, alors b^* minimise $h(a^*, b)$. En effet, si (a^*, b^*) minimise $g(a) + h(a, b)$, alors pour tout b , $g(a^*) + h(a^*, b^*) \leq g(a^*) + h(a^*, b)$, d'où $h(a^*, b^*) \leq h(a^*, b)$, et donc b^* est un minimum de $h(a^*, b)$. Ainsi, si $PM^*(s, T) = (n^*; x_1^*, \dots, x_{n^*}^* | s, T)$ est optimale, alors $PM^*(0, T - x_1^*) = (n^* - 1; x_2^*, \dots, x_{n^*}^* | 0, T - x_1^*)$ est aussi optimale. Nous cherchons d'abord $PM^*(0, T)$. Nous commençons par minimiser le coût par rapport à x_1, \dots, x_n en supposant n fixé. D'après 4.8,

$$\frac{\partial C}{\partial x_i}(n; x_1, \dots, x_n | 0, T) = C_{rép} (\phi(x_i) - \phi(T - x_1 - \dots - x_n)) \quad (4.10)$$

pour $1 \leq i \leq n$. Comme ϕ est strictement croissante et dérivable,

$$x_1^* = \dots = x_{n^*}^* = T - x_1^* - \dots - x_{n^*}^* = \frac{T}{n^* + 1}, \quad (4.11)$$

et il s'agit bien du minimum de la fonction de coût puisque

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2} = C_{rép} \left(\phi'(x_i) + \phi' \left(T - \sum_{j=1}^n x_j \right) \right) > 0. \quad (4.12)$$

En d'autres termes, étant donné le nombre optimal de maintenances préventives n^* , les instants de maintenance préventive sont périodiques. Ensuite nous utilisons les durées optimales x_i^* dans la fonction de coût :

$$C^*(n | 0, T) = nC_{rem} + C_{rép}(n + 1) \Phi \left(\frac{T}{n + 1} \right). \quad (4.13)$$

Si n était une variable continue, l'optimum serait trouvé en dérivant C^* . Nous aurions alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C^*}{\partial n} &= C_{rem} + C_{rép} \left(\Phi \left(\frac{T}{n + 1} \right) - \frac{T}{n + 1} \phi \left(\frac{T}{n + 1} \right) \right) \\ &= C_{rem} - C_{rép} B \left(\frac{T}{n + 1} \right), \end{aligned} \quad (4.14)$$

où $B(t) = t\phi(t) - \Phi(t)$. Nous savons que B est strictement croissante ($B'(t) = t\phi'(t) > 0$ pour tout $t > 0$), et donc

$$\frac{\partial C^*}{\partial n^*} = 0 \Leftrightarrow n^* = \frac{T}{B^{-1}(C_{remp}/C_{rép})} - 1. \quad (4.15)$$

Or C^* est convexe :

$$\frac{\partial^2 C^*}{\partial n^2} = C_{rép} \frac{T^2}{(n+1)^3} \phi' \left(\frac{T}{n+1} \right) \geq 0 \quad (4.16)$$

puisque ϕ est strictement croissante. Donc l'entier n^* est l'un des deux entiers encadrant $\frac{T}{B^{-1}(C_{remp}/C_{rép})} - 1$. Ainsi, si $T \leq B^{-1}(C_{remp}/C_{rép})$, alors $n^* = 0$. Sinon,

$$n^* = \frac{T}{B^{-1}(C_{remp}/C_{rép})} - 1 + \epsilon(0, T) \text{ où } |\epsilon(0, T)| < 1. \quad (4.17)$$

Cela donne le résultat suivant : la politique $PM^*(0, T) = (n^*; x_1^*, \dots, x_{n^*}^* | 0, T)$ satisfait

$$x_1^* = \dots = x_{n^*}^* = \frac{T}{n^* + 1} \quad (4.18)$$

et

$$n^* = \frac{T}{B^{-1}(C_{remp}/C_{rép})} - 1 + \epsilon(0, T) \text{ où } |\epsilon(0, T)| < 1. \quad (4.19)$$

De plus,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{n^*} = \lim_{T \rightarrow \infty} x_i^* = B^{-1}(C_{remp}/C_{rép}), \quad (4.20)$$

et nous retrouvons bien l'optimum du cas périodique de début de section.

Nous revenons à la politique optimale $PM^*(s, T) = (n^*; x_1^*, \dots, x_{n^*}^* | s, T)$. Nous avons que

$$x_2^* = \dots = x_{n^*}^* = \frac{T - \tau_1^*}{n^*}. \quad (4.21)$$

Il reste donc à déterminer x_1^* et n^* . La fonction à minimiser est

$$C^*(n, x_1) = nC_{remp} + C_{rép} \left(\Phi(s + x_1 | \mathcal{F}_s) - N_s + n\Phi \left(\frac{T - x_1}{n} \right) \right), \quad (4.22)$$

car

$$\Phi \left(T - \sum_{j=1}^n x_j \right) = \Phi \left(T - x_1 - (n-1) \frac{T - x_1}{n} \right). \quad (4.23)$$

En dérivant, nous obtenons

$$\frac{1}{C_{rép}} \frac{\partial C^*}{\partial x_1} = \phi(s + x_1 | \mathcal{F}_s) - \phi \left(\frac{T - x_1}{n} \right) \quad (4.24)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial C^*}{\partial n} &= C_{remp} + C_{rép} \left(\Phi \left(\frac{T - x_1}{n} \right) - \frac{T - x_1}{n} \phi \left(\frac{T - x_1}{n} \right) \right) \\ &= C_{remp} - C_{rép} B \left(\frac{T - x_1}{n} \right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Les équations $\frac{\partial C^*}{\partial x_1} = 0$ et $\frac{\partial C^*}{\partial n} = 0$ indiquent les points critiques de C^* . Il peut être montré avec le déterminant et la trace de la matrice hessienne que ces points sont des minima, en utilisant le fait que $\phi'(t) > 0$ et $\phi'(t|\mathcal{F}_s) > 0$ pour tous $0 \leq s \leq t$. Nous avons alors le résultat suivant : la politique optimale $PM^*(s, T)$ satisfait

$$x_2^* = \dots = x_{n^*}^* = \frac{T - x_1^*}{n^*}, \tag{4.26}$$

$$\phi(s + x_1^*|\mathcal{F}_s) = \phi\left(\frac{T - x_1^*}{n^*}\right) \tag{4.27}$$

et

$$n^* = \frac{T - x_1^*}{B^{-1}(C_{rem}/C_{rép})} + \epsilon(s, T), \text{ où } |\epsilon(s, T)| < 1. \tag{4.28}$$

De plus,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{n^*} = \lim_{T \rightarrow \infty} x_i^* = B^{-1}(C_{rem}/C_{rép}), \quad i = 2, \dots, n^* \tag{4.29}$$

et

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \phi(s + x_1^*|\mathcal{F}_s) = \phi(B^{-1}(C_{rem}/C_{rép})). \tag{4.30}$$

Dans la précédente approche, l'information est statique : à l'instant s , nous connaissons \mathcal{F}_s , et il faut alors planifier les maintenances jusqu'en $s + T$, sans connaître plus de choses sur les événements qui surviennent sur $]s, s + T]$. Cette approche peut être rendue dynamique en considérant toute l'information apportée en continu sur le système. Supposons qu'à chaque instant s nous ayons connaissance de \mathcal{F}_s . Nous pouvons alors revoir la politique de maintenance en calculant $PM^*(s, T)$. Imaginons que pour T grand, $PM^*(s, T \rightarrow \infty)$ indique de faire une maintenance préventive en $s + x_1^*$. En l'instant $s + h$ ($h < x_1^*$), nous avons connaissance de \mathcal{F}_{s+h} , qui donnera la politique $PM^*(s + h, \infty)$. Alors le premier instant de maintenance prévu dans cette politique pourra éventuellement être différent de $s + x_1^*$, qui est alors obsolète compte tenu de la récente information sur le système (s'il y a une maintenance corrective entre s et $s + h$). Ainsi, avec une information en continu, une maintenance préventive a lieu si et seulement si

$$\phi(s + x_1^*|\mathcal{F}_s) = \phi(B^{-1}(C_{rem}/C_{rép})) \tag{4.31}$$

pour $x_1^* = 0$ à l'instant s , c'est-à-dire $\lambda_s = \phi(s|\mathcal{F}_s) = \phi(B^{-1}(C_{rem}/C_{rép}))$. Ainsi, le prochain instant de maintenance préventive est la variable aléatoire suivante :

$$\tau_D = \inf\{t > 0 : \lambda_t \geq \phi(B^{-1}(C_{rem}/C_{rép}))\}. \tag{4.32}$$

Nous noterons $s_\lambda = \phi(B^{-1}(C_{rem}/C_{rép}))$.

La politique de maintenance dynamique se fait donc en deux temps : d'abord il faut calculer le seuil d'intensité s_λ , puis, lors de la vie du système, calculer l'intensité conditionnelle en continu et la comparer à s_λ . Dès que l'intensité dépasse ce seuil, une maintenance préventive est faite. En réalité, l'intensité conditionnelle n'est pas calculée de manière continue, mais à chaque instant de défaillance. En effet, l'intensité conditionnelle est une fonction déterministe de l'âge virtuel. Or la forme de l'âge virtuel n'est modifiée qu'aux instants de défaillance. Ainsi, lors d'une défaillance, nous calculons l'intensité conditionnelle avec l'âge virtuel courant, à

partir de l'instant de défaillance et jusqu'à trouver l'instant où l'intensité dépasse le seuil. Cet instant est celui de la prochaine maintenance préventive prévue. Soit il est atteint sans qu'aucune défaillance supplémentaire n'ait lieu, soit une défaillance arrive avant, et l'intensité conditionnelle est recalculée pour connaître la nouvelle prévision de date de maintenance préventive. Il est montré dans [Gil+16] que la politique dynamique est moins coûteuse que la politique périodique selon le critère présenté en début de section.

La première étape consiste donc pour une intensité de défaillance donnée à calculer s_λ . Cela ne peut pas être fait analytiquement dans le cas général des modèles de maintenance imparfaite. [Gil+16] propose donc d'estimer s_λ par *bootstrap*, en utilisant le fait que $\Phi(t)$ est convexe. La procédure suivante est donnée :

- Simuler M trajectoires avec le même modèle et les mêmes paramètres que le système à étudier ;
- Calculer $\hat{\Phi}(t)$ comme le plus grand minorant convexe de l'estimateur de Nelson-Aalen de $\Phi(t)$ à partir des M trajectoires simulées ;
- Calculer $\hat{\phi}(t)$ comme la dérivée à droite de $\hat{\Phi}(t)$;
- Calculer $\hat{B}(t) = t\hat{\phi}(t) - \hat{\Phi}(t)$;
- Inverser \hat{B} pour calculer une estimation de $B^{-1}(C_{rem}/C_{rep})$ puis de s_λ .

Afin d'inverser \hat{B} en C_{rem}/C_{rep} , l'horizon de simulation des M trajectoires doit être suffisamment grand. Nous proposons la précision suivante :

- Simuler M trajectoires avec un premier horizon de temps \mathcal{T} ;
- Calculer \hat{B} comme précédemment ;
- Tant que $\hat{B}(\mathcal{T}) < C_{rem}/C_{rep}$, simuler à nouveau M trajectoires avec un nouvel horizon de temps \mathcal{T} plus grand et recalculer \hat{B} ;
- Calculer l'estimation de $B^{-1}(C_{rem}/C_{rep})$ puis de s_λ .

D'après quelques expérimentations numériques, nous proposons empiriquement $\mathcal{T} = \eta$ (paramètre de forme du PLP) comme premier horizon temporel.

4.2 Optimisation des dates de maintenance préventive avec covariables fixes

Nous avons introduit au chapitre 2 la possibilité d'adjoindre aux modèles d'âge virtuel des covariables fixes ou dépendantes du temps. L'information collectée peut être utilisée avec profit en la prenant en compte lors de la planification des maintenances préventives. Plusieurs études s'intéressent à ce problème. Dans beaucoup d'entre elles, les maintenances correctives sont parfaites (AGAN), comme dans [GF11], [MJ92], [TL11], [TLW12], [Vlo+02] et [LB15]. Dans ce dernier article est également pris en compte le coût de l'inspection des covariables. À notre connaissance, aucun article n'étudie l'intégration de covariables dans la planification de maintenances préventives avec des maintenances correctives imparfaites. Pourtant, les covariables peuvent apporter une information dynamique au même titre que l'histoire du processus de défaillance dans [Gil+16]. L'objet de cette section et de la suivante est donc l'optimisation du calendrier de maintenance préventive lorsque que les systèmes sont soumis à l'influence de covariables et à des maintenances correctives imparfaites. Dans cette section, nous nous

4.2. Optimisation des dates de maintenance préventive avec covariables fixes 77

intéresserons au cas où les covariables sont fixes, puis nous étudierons le cas de covariables dynamiques en section 4.3.

4.2.1 Réparation minimale

Pour simplifier au maximum notre étude, nous la plaçons d'abord dans le cas de la maintenance corrective minimale avec une covariable fixe. Nous considérons que pour chaque système, nous avons une nouvelle valeur de covariable à chaque maintenance préventive (renouvellement). L'intensité de défaillance entre deux renouvellements préventifs s'écrit

$$\lambda_t = \exp(\gamma'X)h(t) \quad (4.33)$$

et l'intensité cumulée

$$\Lambda_t = \exp(\gamma'X)H(t) \quad (4.34)$$

où X est la valeur de la covariable après le dernier renouvellement, γ est le coefficient d'influence de la covariable, et $h(\cdot)$ est le taux de hasard du premier instant de défaillance sans covariable, $H(\cdot)$ étant sa primitive s'annulant en zéro. Deux cas d'information sont possibles au départ : nous pouvons connaître ou non avant la mise en marche du système les valeurs x prises par la covariable après les différents renouvellements successifs.

4.2.1.1 Absence de connaissance de x a priori

Dans le cas où nous ne connaissons pas x , nous avons

$$\Phi(t) = \mathbb{E}[\Lambda_t] = \mathbb{E}[\exp(\gamma'X)]H(t) \quad (4.35)$$

et

$$\phi(t) = \Phi'(t) = \mathbb{E}[\exp(\gamma'X)]h(t), \quad (4.36)$$

puisque que $H(\cdot)$ est une fonction déterministe du temps. Nous pouvons alors écrire

$$B(t) = t\phi(t) - \Phi(t) = \mathbb{E}[\exp(\gamma'X)](th(t) - H(t)). \quad (4.37)$$

En notant $B_*(t) := th(t) - H(t)$, nous avons

$$B^{-1}(t) = B_*^{-1} \left(\frac{t}{\mathbb{E}[\exp(\gamma'X)]} \right), \quad (4.38)$$

et donc

$$s_\lambda = \phi(B^{-1}(C_{rem}/C_{rép})) = \mathbb{E}[\exp(\gamma'X)]h \left(B_*^{-1} \left(\frac{C_{rem}/C_{rép}}{\mathbb{E}[\exp(\gamma'X)]} \right) \right). \quad (4.39)$$

x inconnu à la prise de décision Nous pouvons maintenant comparer l'intensité de défaillance observée à ce seuil s_λ pour trouver l'instant de maintenance préventive. Si nous ne connaissons toujours pas x lorsque que le système est remis en marche après une maintenance préventive, nous utilisons l'espérance de l'intensité de défaillance (théorème d'innovation [And+12]) et nous obtenons que l'instant de maintenance préventive $\tau_D^{(1)}$ est tel que

$$\mathbb{E}[\exp(\gamma'X)]h(\tau_D^{(1)}) = \mathbb{E}[\exp(\gamma'X)]h\left(B_*^{-1}\left(\frac{C_{rem}/C_{rép}}{\mathbb{E}[\exp(\gamma'X)]}\right)\right) \quad (4.40)$$

et ainsi

$$\tau_D^{(1)} = B_*^{-1}\left(\frac{C_{rem}/C_{rép}}{\mathbb{E}[\exp(\gamma'X)]}\right), \quad (4.41)$$

puisque nous avons supposé $h(\cdot)$ croissante. Il est à noter que $\tau_D^{(1)}$ est périodique, puisque rien ne vient modifier sa valeur au cours de la vie du système.

x connu à la prise de décision Si au contraire nous avons connaissance de la valeur x de la covariable après chaque maintenance préventive (renouvellement), nous pouvons l'utiliser dans l'intensité de défaillance et nous obtenons que l'instant de maintenance préventive $\tau_D^{(2)}$ est tel que

$$\exp(\gamma'x)h(\tau_D^{(2)}) = \mathbb{E}[\exp(\gamma'X)]h\left(B_*^{-1}\left(\frac{C_{rem}/C_{rép}}{\mathbb{E}[\exp(\gamma'X)]}\right)\right) \quad (4.42)$$

et donc

$$\tau_D^{(2)} = h^{-1}\left(\frac{\mathbb{E}[\exp(\gamma'X)]}{\exp(\gamma'x)}h\left(B_*^{-1}\left(\frac{C_{rem}/C_{rép}}{\mathbb{E}[\exp(\gamma'X)]}\right)\right)\right). \quad (4.43)$$

Ce cas correspond au développement de la section 4.1 dans un cas à covariable. En effet, la politique obtenue est dynamique, puisque nous ne connaissons la valeur de la covariable qu'après la maintenance préventive.

4.2.1.2 Avec connaissance de x a priori

Un autre cas de figure est possible : nous pouvons avoir connaissance de la valeur de x dès le calcul du seuil s_λ . Nous avons alors

$$\tilde{\Phi}(t) = \exp(\gamma'x)H(t) \quad (4.44)$$

et

$$\tilde{\phi}(t) = \exp(\gamma'x)h(t), \quad (4.45)$$

d'où

$$\tilde{B}(t) = \exp(\gamma'x)B_*(t) \quad (4.46)$$

et ainsi

$$\tilde{s}_\lambda = \tilde{\phi}(\tilde{B}^{-1}(C_{rem}/C_{rép})) = \exp(\gamma'x)h\left(B_*^{-1}\left(\frac{C_{rem}/C_{rép}}{\exp(\gamma'x)}\right)\right). \quad (4.47)$$

4.2. Optimisation des dates de maintenance préventive avec covariables fixes 79

En comparant l'intensité observée (donc avec x) et ce seuil, nous obtenons

$$\tilde{\tau}_D = B_*^{-1} \left(\frac{C_{remp}/C_{rép}}{\exp(\gamma'x)} \right). \quad (4.48)$$

Nous pouvons comparer ce résultat au cas où la connaissance de la loi de la covariable n'est pas du tout prise en compte, c'est-à-dire où nous considérons que $\mathbb{X} = 0$, où nous avons

$$\tau_P = B_*^{-1}(C_{remp}/C_{rép}). \quad (4.49)$$

τ_P est un instant de maintenance périodique, de même que $\tau_D^{(1)}$. Puisque la valeur de la covariable x change à chaque renouvellement, $\tilde{\tau}_D$ et $\tau_D^{(2)}$ ne le sont pas.

4.2.1.3 Comparaison des quatre politiques de maintenance

Nous allons maintenant comparer numériquement les quatre politiques de maintenance exposées. Rappelons tout d'abord en table 4.1 le niveau de connaissance de la covariable pour chaque politique.

	τ_P	$\tau_D^{(1)}$	$\tau_D^{(2)}$	$\tilde{\tau}_D$
$\mathbb{E}[\exp(\gamma'\mathbb{X})]$ connu	non	oui	oui	oui
x connu pour le calcul du seuil	non	non	non	oui
x connu pour la prise de décision	non	non	oui	oui

TABLE 4.1 – Niveau de connaissance de la covariable pour le calcul des différentes politiques de maintenance

Nous mettons en place une étude pour comparer les coûts moyens par unité de temps des quatre politiques de maintenance. Nous allons simuler N histoires de systèmes jusqu'à leur premier instant de maintenance préventive. Cela est équivalent à la simulation d'un seul système subissant N maintenances préventives, puisque ces dernières sont supposées parfaites. D'après l'équation 4.1, le coût total sur un système j jusqu'à sa première date de maintenance préventive observée $\tau^{(j)}$ est égal à

$$C^{(j)}(\tau^{(j)}) = C_{remp} + C_{rép}N_{\tau^{(j)}}^{(j)}, \quad (4.50)$$

où $N_{\tau^{(j)}}^{(j)}$ est le nombre de défaillances observées sur le système j jusqu'à l'instant $\tau^{(j)}$. Pour estimer le coût moyen asymptotique par unité de temps, nous utilisons la limite $\frac{C_{remp} + C_{rép}\mathbb{E}N_{\tau}}{\mathbb{E}\tau}$ avec les N histoires de systèmes en estimant le coût comme la moyenne du coût total observé sur tous les systèmes divisée par la moyenne de l'instant de maintenance préventive :

$$\hat{G}(\tau) = \frac{\sum_{j=1}^N C^{(j)}(\tau^{(j)})}{\sum_{j=1}^N \tau^{(j)}}. \quad (4.51)$$

Nous répétons cette procédure avec les quatre politiques, en prenant $N = 100$. Nous choisissons une intensité de défaillance initiale en PLP, c'est-à-dire

$$h(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta} \right)^{\beta-1}, \quad (4.52)$$

avec $\eta = 15\,000$ pour paramètre d'échelle et $\beta = 2$ pour paramètre de forme. Avec une telle intensité initiale, le calcul de $B_*^{-1}(t)$ est explicite. Nous n'avons donc pas besoin d'estimer $\Phi(t)$ comme dans [Gil+16]. Nous prenons $C_{remp} = 1$ pour le coût de renouvellement préventif et $C_{rép} = 3$ pour le coût de réparation minimale.

Nous étudions par ailleurs l'influence du coefficient γ sur les coûts de maintenance. Pour cela, nous fixons $\gamma \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. La valeur prise par la covariable sur un système entre deux renouvellements préventifs est de loi uniforme discrète sur $\{-5, -4, \dots, 4, 5\}$. Cela veut dire que pour chaque histoire de système, nous tirons une valeur de la covariable suivant cette loi. Cette valeur observée est utilisée différemment suivant les différentes politiques.

Nous présentons en table 4.2 et en figure 4.1 les coûts moyens par unité de temps obtenus dans chaque configuration. La courbe rouge, qui correspond à τ_P , reprend la politique de

γ	τ_P	$\tau_D^{(1)}$	$\tau_D^{(2)}$	$\tilde{\tau}_D$
-2	2.52×10^{-1}	1.07×10^{-2}	5.56×10^{-3}	8.86×10^{-6}
-1	2.14×10^{-3}	8.37×10^{-4}	5.34×10^{-4}	9.31×10^{-5}
0	2.61×10^{-4}	1.92×10^{-4}	2.09×10^{-4}	2.19×10^{-4}
1	2.09×10^{-3}	1.06×10^{-3}	5.36×10^{-4}	8.54×10^{-5}
2	2.18×10^{-1}	1.12×10^{-2}	5.56×10^{-3}	1.46×10^{-5}

TABLE 4.2 – Coût moyen par unité temps en fonction de la politique utilisée et de γ

[BH60]. Nous voyons que cette politique, qui ne prend en compte aucune information sur la covariable, est d'autant plus mauvaise que la valeur absolue de γ est grande. La symétrie vient du fait que les valeurs possibles de la covariable sont elles-mêmes symétriques et de loi uniforme sur $\{-5, -4, \dots, 4, 5\}$. Ainsi, prendre $\gamma = 1$ ou $\gamma = -1$ revient à prendre l'opposé de la covariable, et comme il y a autant de poids sur les valeurs négatives de la covariable que sur les valeurs positives, une symétrie apparaît sur les coûts. Cette observation sur la symétrie vaut pour toutes les politiques. Par ailleurs, lorsque $\gamma > 0$, la politique donnant τ_P va faire un remplacement trop tard (trop de défaillances auraient lieu) si $x > 0$ et trop tôt (l'instant de maintenance préventif serait trop hâtif) si $x < 0$. C'est l'inverse si $\gamma < 0$. Dans les deux cas, le coût est plus élevé que lorsque la covariable a un effet nul (c'est-à-dire $\gamma = 0$). Nous retrouvons cette observation pour toutes les politiques de maintenance, sauf pour $\tilde{\tau}_D$: la courbe bleue est concave, ce qui reste à ce jour inexpliqué.

Nous observons d'ailleurs que les coûts moyens par unité de temps de toutes les politiques se rejoignent en $\gamma = 0$. Pour le comprendre, il suffit de reprendre l'expression de l'instant de maintenance préventive dans chaque politique en remplaçant γ par 0. Nous voyons dans ce cas que $\tau_P = \tau_D^{(1)} = \tau_D^{(2)} = \tilde{\tau}_D = B_*^{-1}(C_{remp}/C_{rép})$.

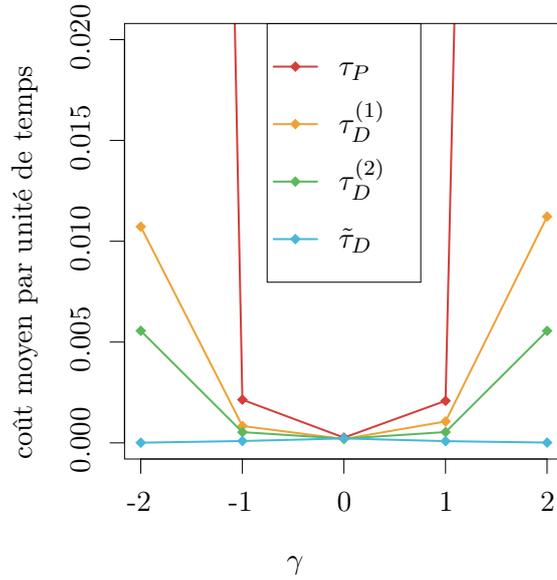


FIGURE 4.1 – Coût moyen par unité temps en fonction de la politique utilisée et de γ , réparation minimale

En dehors de $\gamma = 0$, les courbes s'établissent en un classement très net. La politique périodique qui prend en compte $\mathbb{E}[\exp(\gamma'X)]$, donnant $\tau_D^{(1)}$ (courbe orangée), est meilleure que la politique périodique de [BH60] donnant τ_P (courbe rouge). La connaissance de la loi de la covariable a donc eu un impact positif sur les coûts de maintenance. Ensuite, la politique dynamique correspondant à l'approche de [Gil+16] adaptée aux covariables, donnant $\tau_D^{(2)}$ (courbe verte), est meilleure que la précédente, où la valeur observée de x n'est pas du tout utilisée. Le théorème d'optimalité de [Gil+16] s'applique dans ce cas et prouve que la politique $\tau_D^{(2)}$ est meilleure en termes de coût que τ_P . Observer x est donc utile pour prévoir un instant de maintenance préventive. Enfin, la courbe de coût bleue, qui correspond à $\tilde{\tau}_D$ et donc au cas où x est connu dès le calcul du seuil, est la plus basse, montrant que cette politique est la meilleure. Cela signifie que l'information qui arrive en continu (ici la valeur de la covariable après un renouvellement préventif) doit être gérée au mieux pour optimiser les maintenances préventives. [Gil+16] proposait une politique dynamique adaptée au cas de maintenances correctives imparfaites mais sans covariables, et nous voyons ici que lorsque des covariables interviennent, cette politique, une fois adaptée aux covariables, n'est pas la meilleure.

4.2.2 Réparation imparfaite

Lorsque que les maintenances correctives sont imparfaites, l'information apportée en continu peut aussi contenir les dates de défaillance du système. Dans cette sous-section, nous supposons que ces dates nous sont connues au fur et à mesure de la vie du système. En cela, nous nous rapprochons de l'étude de [Gil+16]. Cependant, nous supposons aussi que le système est influencé par une covariable fixe. Nous allons comparer le cas où la covariable nous est totalement inconnue (donc la politique qui donne τ_P) et le cas où elle nous est connue

dès le calcul du seuil (donc la politique qui donne $\tilde{\tau}_D$). Avec des réparations imparfaites, le calcul de $B_*^{-1}(t)$ n'est plus explicite. Nous reprenons donc la méthode de [Gil+16] pour estimer $\Phi_*(t) = \mathbb{E}[\int_0^t V'_{N_{s-}}(s)h(V_{N_{s-}}(s))ds]$, c'est-à-dire l'espérance de l'intensité cumulée sans covariable. Pour la politique à covariable inconnue, nous comparons l'intensité conditionnelle sans covariable $V'_{N_{t-}}(t)h(V_{N_{t-}}(t))$ au seuil $\phi_*(B_*^{-1}(C_{rem}/C_{rép}))$. Pour celle où la covariable est connue dès le calcul du seuil, nous comparons l'intensité conditionnelle sans covariable $V'_{N_{t-}}(t)h(V_{N_{t-}}(t))$ au seuil $\phi_*\left(B_*^{-1}\left(\frac{C_{rem}/C_{rép}}{\exp(\gamma'x)}\right)\right)$.

Dans notre étude, nous utiliserons le modèle ARA_1 avec $\rho = 0.5$ pour paramètre d'efficacité des maintenances. Nous conservons l'intensité initiale en PLP avec $\eta = 15\,000$ et $\beta = 2$. Nous gardons les coûts $C_{rem} = 1$ et $C_{rép} = 3$, le coefficient $\gamma \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et une covariable à valeurs uniformes dans $\{-5, -4, \dots, 4, 5\}$. Nous faisons à nouveau $N = 100$ tirages d'histoires de systèmes.

Nous présentons en figure 4.2 les coûts moyens par unité de temps obtenus dans les deux cas de connaissance de la covariable, en fonction de γ . Nous retrouvons la symétrie des courbes

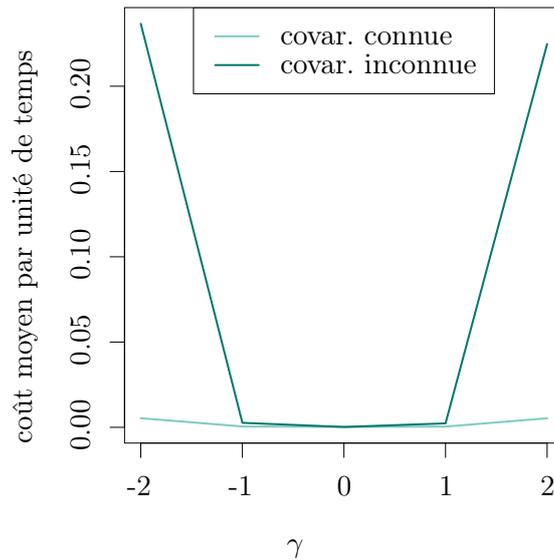


FIGURE 4.2 – Coût moyen par unité temps en fonction de la politique utilisée et de γ , réparation imparfaite

et l'équivalence des politiques pour $\gamma = 0$. À nouveau, nous constatons que l'information apportée par la covariable est cruciale, puisqu'elle permet de réduire drastiquement les coûts de maintenance : le coût moyen par unité de temps est environ 5 fois plus élevé lorsque γ vaut -1 ou 1 , et plus de 42 fois plus élevé lorsque γ vaut -2 ou 2 .

Dans cette section, nous avons montré que la connaissance d'une covariable fixe ayant une influence sur un système impliquait des coûts de maintenances plus faibles que lorsque la covariable n'était pas connue. L'information contenue dans les covariables est donc de grande valeur pour l'optimisation des maintenances effectuées sur un système, et doit être utilisée au mieux au fur et à mesure de son arrivée.

4.3 Optimisation des dates de maintenance préventive avec covariables dynamiques

Dans cette section, nous étudierons à nouveau l'optimisation des dates de maintenance préventive mais lorsque les covariables sont dépendantes du temps. L'information contenue dans les covariables sera alors prise en compte dans le temps pour régler au mieux l'instant de maintenance préventive.

Nous supposons que nous n'observons pas la totalité de la trajectoire des covariables. Nous ne pouvons les observer qu'en des instants d'inspection donnés. De plus, nous faisons l'hypothèse que nous n'observons pas les covariables lors d'une défaillance. Pour prendre en compte l'histoire des covariables de la même manière que celle du processus de défaillance dans [Gil+16], nous surveillons les covariables ponctuellement. À chaque inspection, nous relevons la valeur des covariables et nous calculons l'intensité conditionnelle. Si l'intensité atteint le terme de comparaison s_λ avant la date prévue de la prochaine inspection, nous planifions une maintenance préventive. Sinon, continuons la surveillance des covariables. Nous faisons par ailleurs l'hypothèse que les covariables sont positives, croissantes, qu'elles sont remises à zéro par les maintenances préventives, qu'elles gardent alors la même loi et que les trajectoires entre deux maintenances préventives sont indépendantes. Cette procédure est à mettre en regard avec celle de [Gil+16], où à chaque défaillance, nous calculons l'âge virtuel et l'intensité conditionnelle afin de planifier une maintenance préventive.

Dans [Gil+16], une propriété de l'intensité conditionnelle est utilisée pour établir que la politique de maintenance proposée est meilleure que la politique périodique. Cette propriété n'est plus prouvée avec une covariable dynamique. La comparaison des politiques sera donc numérique. La politique périodique revient à utiliser notre procédure d'optimisation des maintenances sans aucune inspection des covariables, avec seulement la connaissance de la loi des covariables. Le premier instant de remplacement est donc déterminé dès le début de la vie du système, et puisque la maintenance préventive est un renouvellement, les instants de remplacement auront lieu à intervalle fixe.

L'idée de l'optimisation des maintenances préventives avec connaissance de la covariable est présentée en figure 4.3, sur un système à réparations minimales. L'intensité moyenne, en fins pointillés noirs, atteint le seuil d'intensité, en pointillés gris, à l'instant de maintenance préventive théorique τ_0 marqué par une droite verticale grise. Cependant, l'intensité observée avec en l'occurrence une covariable plus faible que la moyenne, en vert foncé, n'atteint le seuil d'intensité qu'un peu plus tard. L'instant effectif de maintenance préventive, marqué par une droite verticale vert foncé, est donc repoussé grâce à la connaissance de la vraie trajectoire de la covariable. À l'inverse, après le premier renouvellement préventif, l'intensité observée, en vert clair, augmente plus rapidement que l'intensité moyenne. L'instant de maintenance préventive, marqué par une droite verticale vert clair, est donc rapproché.

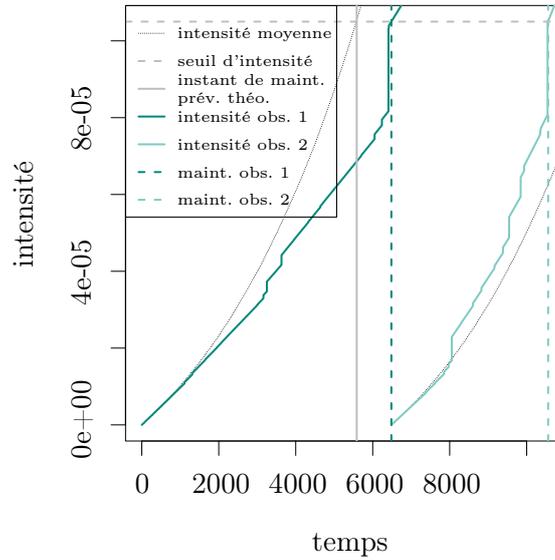


FIGURE 4.3 – Schéma d'optimisation des maintenances préventives

4.3.1 Réparation minimale

Pour introduire des covariables dynamiques, nous reprenons d'abord l'hypothèse de réparation minimale. Il est donc inutile de calculer l'âge virtuel du système, puisqu'il est simplement égal à la durée écoulée depuis la précédente maintenance préventive (ou le début de la vie du système). En sous-section 4.3.2, nous adapterons les algorithmes à la maintenance imparfaite avec covariables dynamiques.

4.3.1.1 Forme de la covariable

Nous supposons ici que nous travaillons avec une seule covariable dont nous connaissons la loi. Dans notre exemple, il s'agira d'un processus Gamma de paramètres de forme a et d'intensité b échantillonné à pas de temps constant dt_{cov} , c'est-à-dire que les valeurs en kdt_{cov} seront simulées comme les valeurs d'un processus Gamma en ces points, et que sur l'intervalle $[kdt_{cov}; (k+1)dt_{cov}]$, la valeur sera constante et égale à celle prise en kdt_{cov} . Cette limitation vient du fait que l'algorithme de simulation des défaillances (voir 2.2.2.2) ne fonctionne qu'avec une covariable constante par morceaux. Nous noterons \mathbb{X}_t la valeur de la covariable à l'instant t . L'intensité de défaillance du système sur le premier cycle de maintenance s'écrit alors :

$$\lambda_t = \alpha \beta t^{\beta-1} \exp(\gamma \mathbb{X}_t), \quad (4.53)$$

où γ est le coefficient mesurant l'influence de la covariable sur le processus de défaillance, α et β sont les paramètres d'échelle et de forme de la loi de Weibull.

Nous rappelons la notation suivante : $l_{(t)} = \lceil t/dt_{cov} \rceil$ est l'entier strictement positif tel que

$$(l_{(t)} - 1)dt_{cov} < t \leq l_{(t)}dt_{cov}. \quad (4.54)$$

En l'instant $t = 0$, la covariable vaut $\mathbb{X}_0 = 0$, et garde cette valeur jusqu'à $t = dt_{cov}$. Si nous faisons une inspection en $I_1 > 0$, nous connaissons alors la valeur de la covariable \mathbb{X}_{I_1} , et donc sur le palier de temps $[(l_{(I_1)} - 1)dt_{cov}, l_{(I_1)}dt_{cov}]$. Sur l'intervalle $]0, (l_{(I_1)} - 1)dt_{cov}[$, nous ne connaissons pas la trajectoire de la covariable. Deux possibilités s'offrent à nous : soit nous supposons que la covariable observée est constante entre deux inspections et prend alors la dernière valeur connue sur l'intervalle, soit nous utilisons notre connaissance de la loi de la covariable. Dans ce second cas, nous supposons que la covariable observée vaut

$$\mathbb{X}_t = \mathbb{X}_{I_i} + \frac{a}{b}(l(t) - l_{(I_i)})dt_{cov} \quad (4.55)$$

en tout $t \in [(l_{(I_i)} - 1)dt_{cov}, (l_{(I_{i+1})} - 1)dt_{cov}[$, I_i et I_{i+1} étant deux instants d'inspection consécutifs avec $dt_{cov} \ll I_{i+1} - I_i$ pour tout $i \geq 1$. Ceci correspond à prendre la trajectoire de covariable moyenne à partir de I_i sachant que la covariable valait \mathbb{X}_{I_i} en I_i et qu'elle progresse par paliers, tel que l'illustre la figure 4.4. C'est ce que nous ferons par la suite.

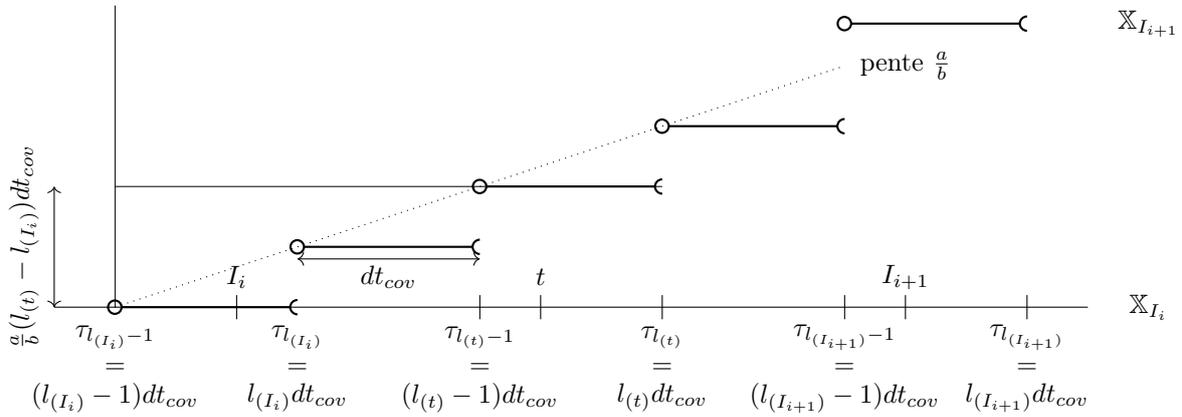


FIGURE 4.4 – Instants d'inspection et valeur de la covariable

4.3.1.2 Calcul du seuil

Nous aurions pu garder la même approche de calcul de $s_\lambda = \phi(B^{-1}(C_{remp}/C_{rép}))$ que dans [Gil+16], en incluant les covariables dynamiques lors de la simulation des systèmes servant à calculer $\Phi(t)$. Cependant, cette méthode donne des temps de calcul très longs dans le cas à covariables, puisque la simulation des instants de défaillance est beaucoup plus complexe. Mais dans le cas de la réparation minimale, ces simulations ne sont pas nécessaires. Nous allons voir différentes méthodes de calcul du seuil valables avec des réparations minimales.

Méthodes issues de l'approche à réparations imparfaites Le calcul de s_λ dans [Gil+16] consiste à simuler des défaillances pour calculer empiriquement $\Phi(t) = \mathbb{E}[N_t]$, puis $\phi(t) = \Phi'(t)$ et $B(t) = t\phi(t) - \Phi(t)$, à inverser B et à appliquer ϕ pour obtenir $s_\lambda = \phi(B^{-1}(C_{remp}/C_{rép}))$. La première solution pour travailler avec des covariables est de simuler autant de trajectoires de covariables qu'il y a de systèmes, puis de simuler des dates

de défaillances sous l'influence de ces covariables et de reprendre la même procédure que dans [Gil+16]. Cela constituera notre première méthode. Pour éviter la simulation des covariables en plus de celle des défaillances, nous pouvons travailler avec la covariable moyenne, ce qui donne une seconde méthode de calcul du seuil. Cette covariable moyenne vaut

$$\mathbb{X}_t^{moy} = \frac{a}{b}(l_{(t)} - 1)dt_{cov}. \quad (4.56)$$

Méthode à covariable moyenne Cependant, cette covariable moyenne est déterministe. Ainsi, puisque nous travaillons avec un NHPP, l'espérance du nombre de défaillances calculée avec la covariable moyenne $\Phi^{moy}(t)$ est aussi déterministe :

$$\Phi^{moy}(t) = \mathbb{E}[N_t^{moy}] = \mathbb{E}[\Lambda_t^{moy}] = \Lambda_t^{moy}. \quad (4.57)$$

Or

$$\begin{aligned} \Lambda_t^{moy} &= \int_0^t \lambda_s^{moy} ds = \int_0^t \alpha \beta s^{\beta-1} \exp(\gamma \mathbb{X}_s) ds \\ &= \alpha \sum_{l=1}^{l_{(t)}-1} \exp\left(\gamma \frac{a}{b}(l-1)dt_{cov}\right) \int_{(l-1)dt_{cov}}^{ldt_{cov}} \beta s^{\beta-1} ds \\ &\quad + \alpha \exp\left(\gamma \frac{a}{b}(l_{(t)}-1)dt_{cov}\right) \int_{(l_{(t)}-1)dt_{cov}}^t \beta s^{\beta-1} ds \\ &= \alpha \sum_{l=1}^{l_{(t)}-1} \exp\left(\gamma \frac{a}{b}(l-1)dt_{cov}\right) \left((ldt_{cov})^\beta - ((l-1)dt_{cov})^\beta\right) \\ &\quad + \alpha \exp\left(\gamma \frac{a}{b}(l_{(t)}-1)dt_{cov}\right) \left(t^\beta - ((l_{(t)}-1)dt_{cov})^\beta\right). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} B^{moy}(t) &= t\phi^{moy}(t) - \Phi^{moy}(t) \\ &= t\lambda_t^{moy} - \Lambda_t^{moy} \\ &= \alpha \beta t^\beta \exp\left(\gamma \frac{a}{b}(l_{(t)}-1)dt_{cov}\right) \\ &\quad - \alpha \sum_{l=1}^{l_{(t)}-1} \exp\left(\gamma \frac{a}{b}(l-1)dt_{cov}\right) \left((ldt_{cov})^\beta - ((l-1)dt_{cov})^\beta\right) \\ &\quad - \alpha \exp\left(\gamma \frac{a}{b}(l_{(t)}-1)dt_{cov}\right) \left(t^\beta - ((l_{(t)}-1)dt_{cov})^\beta\right) \\ &= \alpha(\beta-1)t^\beta \exp\left(\gamma \frac{a}{b}(l_{(t)}-1)dt_{cov}\right) \\ &\quad + \alpha \exp\left(\gamma \frac{a}{b}(l_{(t)}-1)dt_{cov}\right) ((l_{(t)}-1)dt_{cov})^\beta \\ &\quad - \alpha \sum_{l=1}^{l_{(t)}-1} \exp\left(\gamma \frac{a}{b}(l-1)dt_{cov}\right) \left((ldt_{cov})^\beta - ((l-1)dt_{cov})^\beta\right). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Le calcul de $B^{moy}(t)$ est ainsi explicite, et nous pouvons même l'inverser analytiquement pour calculer $B^{moy,-1}(C_{rempe}/C_{rép})$. Il faut pour cela trouver $l_{(t)}$: puisque B^{moy} est croissante, il suffit de calculer $B^{moy}(l dt_{cov})$, $l \geq 1$, et de s'arrêter dès que cette quantité dépasse $C_{rempe}/C_{rép}$:

$$l_{(t)} = \inf(l \geq 1 \mid B^{moy}(l dt_{cov}) \geq C_{rempe}/C_{rép}). \quad (4.60)$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} B^{moy,-1}(C_{rempe}/C_{rép}) &= \left(\frac{\exp(-\gamma \frac{a}{b}(l_{(t)} - 1) dt_{cov})}{\beta - 1} \left(\frac{C_{rempe}}{\alpha C_{rép}} \right. \right. \\ &\quad - \exp\left(\gamma \frac{a}{b}(l_{(t)} - 1) dt_{cov}\right) ((l_{(t)} - 1) dt_{cov})^\beta \\ &\quad \left. \left. + \sum_{l=1}^{l_{(t)}-1} \exp\left(\gamma \frac{a}{b}(l - 1) dt_{cov}\right) \left((l dt_{cov})^\beta - ((l - 1) dt_{cov})^\beta \right) \right) \right)^{1/\beta} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Il reste enfin à calculer s_λ :

$$\begin{aligned} s_\lambda &= \phi^{moy}(B^{moy,-1}(C_{rempe}/C_{rép})) = \lambda_{B^{moy,-1}(C_{rempe}/C_{rép})}^{moy} \\ &= \alpha \beta (B^{moy,-1}(C_{rempe}/C_{rép}))^{\beta-1} \exp\left(\gamma \frac{a}{b}(l_{(t)} - 1) dt_{cov}\right). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Cette troisième méthode est très rapide, mais, comme nous le verrons, les seuils obtenus diffèrent légèrement de ceux obtenus avec la méthode de [Gil+16] : ils sont un peu inférieurs.

Méthode intermédiaire Une méthode intermédiaire consiste à simuler M trajectoires de covariable. Notons $(\{\mathbb{X}_t^{(j)}\}_{t \geq 0})_{1 \leq j \leq M}$ l'ensemble des M trajectoires de la covariable. Nous calculons ensuite exactement, avec chacune des trajectoires, l'intensité de défaillance $\lambda_t^{ex,(j)}$, l'intensité cumulée $\Lambda_t^{ex,(j)}$ et nous prenons la moyenne de ces quantités $\phi^{ex}(t)$ et $\Phi^{ex}(t)$:

$$\begin{aligned} \phi^{ex}(t) &= \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \lambda_t^{ex,(j)} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \alpha \beta t^{\beta-1} \exp(\gamma \mathbb{X}_t^{(j)}), \end{aligned} \quad (4.63)$$

et

$$\begin{aligned} \Phi^{ex}(t) &= \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \Lambda_t^{ex,(j)} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \int_0^t \alpha \beta s^{\beta-1} \exp(\gamma \mathbb{X}_s^{(j)}) ds. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Il suffit ensuite de calculer $B^{ex}(t) := t\phi^{ex}(t) - \Phi^{ex}(t)$, avant d'inverser numériquement B^{ex} et de calculer le seuil en appliquant $\phi^{ex}(t)$.

Ce calcul est à nouveau très long, en raison du calcul de l'intensité cumulée $\Lambda_t^{ex,(j)}$ pour chaque trajectoire et de l'inversion numérique de B^{ex} . Cependant, il est utile par comparaison à la précédente méthode. En effet, puisque $x \mapsto \exp(\gamma x)$ est convexe, par l'inégalité de Jensen, pour tout $s \in [0, t]$,

$$\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \exp(\gamma \mathbb{X}_s^{(j)}) \geq \exp\left(\gamma \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \mathbb{X}_s^{(j)}\right), \quad (4.65)$$

et donc

$$\Phi^{ex}(t) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \int_0^t \alpha \beta s^{\beta-1} \exp(\gamma \mathbb{X}_s^{(j)}) ds \geq \int_0^t \alpha \beta s^{\beta-1} \exp\left(\gamma \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \mathbb{X}_s^{(j)}\right) ds =: \Phi^{(1)}(t). \quad (4.66)$$

La moyenne sur les simulations de l'intensité cumulée calculée avec chaque trajectoire de la covariable est supérieure à l'intensité cumulée calculée avec la moyenne sur les trajectoires de la covariable. $\Phi^{(1)}(t)$ correspond à la première méthode, qui utilise la trajectoire moyenne théorique de la covariable (approchée par $\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \mathbb{X}_s^{(j)}$). $\Phi^{ex}(t)$ correspond à la méthode intermédiaire. En pratique, nous observons que les fonctions correspondantes $B^{(1)}(t)$ et $B^{ex}(t)$ sont suffisamment proches pour être utilisées indifféremment, mais comme $\Phi^{(1)}(t) \leq \Phi^{ex}(t)$, nous avons que $\phi^{(1)}(t) \leq \phi^{ex}(t)$ et ainsi apparaît la différence observée sur les seuils entre la méthode à covariable moyenne et la méthode intermédiaire.

Méthode hybride Nous proposons donc une cinquième méthode, qui commence comme la troisième jusqu'au calcul de B^{moy} , puis revient à la méthode intermédiaire : elle consiste donc à calculer et inverser B^{moy} comme dans l'équation 4.61, à simuler M trajectoires de covariables, à calculer l'intensité de défaillance moyenne avec les covariables simulées $\phi^{ex}(t)$ avec l'équation 4.63 et enfin à appliquer cette intensité sur $B^{moy,-1}(C_{remp}/C_{rép})$. Cette méthode hybride donne à la fois des résultats très proches de ceux obtenus par la méthode de [Gil+16] et des temps de calcul considérablement réduits, même sans être aussi faibles que la première méthode à covariable moyenne.

Méthode intermédiaire corrigée Il est à noter que le calcul de $\phi^{ex}(t)$ et $\Phi^{ex}(t)$ dans la méthode intermédiaire est loin d'être optimal. En effet, si nous récrivons ces fonctions, nous avons

$$\begin{aligned} \phi^{ex}(t) &= \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \alpha \beta t^{\beta-1} \exp(\gamma \mathbb{X}_t^{(j)}) \\ &= \alpha \beta t^{\beta-1} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \exp(\gamma \mathbb{X}_t^{(j)}) \end{aligned} \quad (4.67)$$

et

$$\begin{aligned}
 \Phi^{ex}(t) &= \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \int_0^t \alpha \beta s^{\beta-1} \exp(\gamma \mathbb{X}_s^{(j)}) ds \\
 &= \int_0^t \alpha \beta s^{\beta-1} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \exp(\gamma \mathbb{X}_s^{(j)}) ds \\
 &= \sum_{l=1}^{l_{(t)}-1} \int_{(l-1)dt_{cov}}^{ldt_{cov}} \alpha \beta s^{\beta-1} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \exp(\gamma \chi_l^{(j)}) ds \\
 &\quad + \int_{(l_{(t)}-1)dt_{cov}}^t \alpha \beta s^{\beta-1} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \exp(\gamma \chi_{l_{(t)}}^{(j)}) ds \\
 &= \alpha \sum_{l=1}^{l_{(t)}-1} \left[\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \exp(\gamma \chi_l^{(j)}) \right] \left((ldt_{cov})^\beta - ((l-1)dt_{cov})^\beta \right) \\
 &\quad + \alpha \left[\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \exp(\gamma \chi_{l_{(t)}}^{(j)}) \right] \left(t^\beta - ((l_{(t)}-1)dt_{cov})^\beta \right), \tag{4.68}
 \end{aligned}$$

où nous avons repris la notation

$$\forall l \geq 1, \forall t \in [(l-1)dt_{cov}, ldt_{cov}[, \quad \mathbb{X}_t = \chi_l. \tag{4.69}$$

Ainsi, il suffit de calculer la valeur moyenne des trajectoires de $\exp(\gamma \mathbb{X}_t)$, puis à utiliser cette trajectoire moyenne dans le calcul des intensités $\phi^{ex}(t)$ et $\Phi^{ex}(t)$. Comme nous allons le voir, cette sixième méthode est beaucoup plus rapide que la méthode intermédiaire, alors qu'elle calcule les mêmes quantités.

Comparaison des méthodes Nous comparons en figure 4.5 et en table 4.3 les différentes méthodes de calcul du seuil, du point de vue de la valeur obtenue du seuil et du temps de calcul nécessaire. Pour chaque méthode, le seuil est calculé 100 fois, avec pour paramètres $\eta = 15\,000$, $\beta = 2$, $C_{rem} = 1$, $C_{rép} = 4$, $dt_{cov} = 100$, $a = 0.001$, $b = 8$. Nous représentons côte-à-côte en figure 4.5 une boîte à moustaches de ces cent points pour les six méthodes. Les médianes sont reprises en table 4.3. Les méthodes utilisées sont :

- 1 = méthode de [Gil+16] avec des simulations de covariable pour chaque trajectoire,
- 2 = méthode de [Gil+16] avec la trajectoire moyenne de la covariable,
- 3 = méthode explicite avec covariable moyenne,
- 4 = méthode intermédiaire,
- 5 = méthode hybride,
- 6 = méthode intermédiaire corrigée.

Nous retrouvons que les méthodes issues de [Gil+16] sont beaucoup plus longues que les méthodes à covariable moyenne. Le temps de calcul de la méthode intermédiaire (4) n'apparaît pas sur le graphe tant ses valeurs sont élevées, ce qui se retrouve dans le tableau 4.3 avec une médiane à environ 348 secondes. La méthode 6 est une correction de la méthode 4, donnant

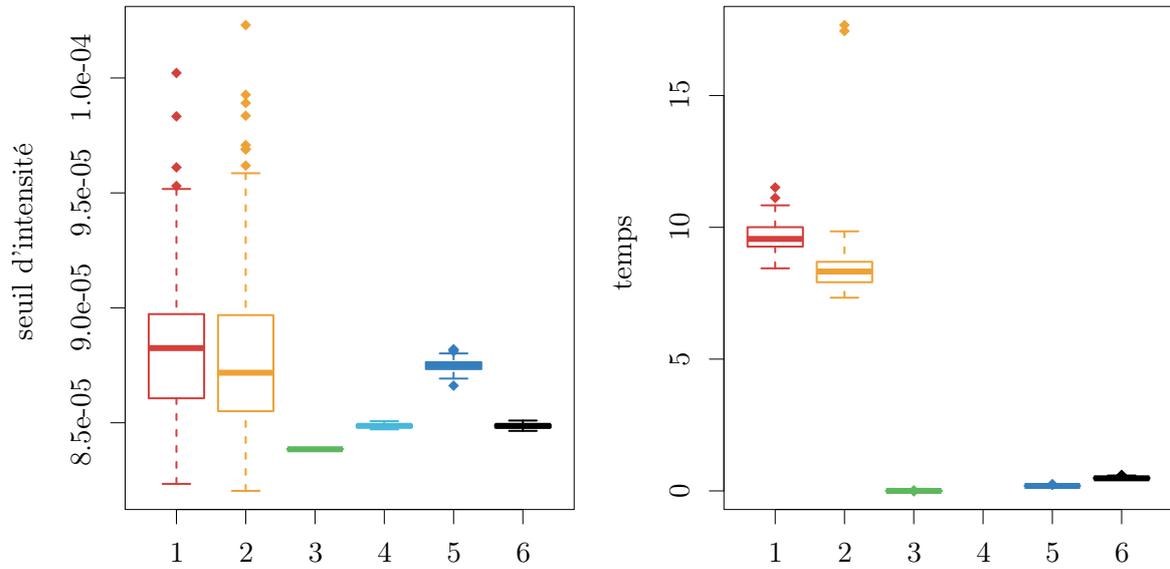


FIGURE 4.5 – Seuil d'intensité (à gauche) et temps de calcul en secondes (à droite) pour différentes méthodes de calcul du seuil

	1	2	3	4	5	6
seuil	8.82×10^{-5}	8.72×10^{-5}	8.38×10^{-5}	8.49×10^{-5}	8.75×10^{-5}	8.49×10^{-5}
temps	9.56	8.32	9.99×10^{-4}	3.48×10^2	1.89×10^{-1}	4.78×10^{-1}

TABLE 4.3 – Médianes du seuil d'intensité et du temps de calcul en secondes pour différentes méthodes de calcul du seuil

des temps de calcul bien plus faibles. Les méthodes 3 et 5 sont peu gourmandes en temps de calcul, la méthode 3 s'établissant comme la plus faible avec une médiane de 9.99×10^{-4} . Quant aux valeurs du seuil, elles sont très dispersées pour les méthodes issues de [Gil+16], en raison des simulations des trajectoires de systèmes (et éventuellement de covariable). La méthode 3 étant exacte, il n'y a aucune dispersion autour de la médiane, mais comme nous l'avons montré, les valeurs obtenues sont plus faibles qu'avec les méthodes 1 et 2. Les méthodes 4, 5 et 6 exhibent une dispersion bien plus faible que les méthodes 1 et 2. Cependant, les valeurs restent légèrement inférieures à celles de la méthode 1, qui est notre référence.

Nous donnons en figure 4.6 une comparaison de B et ϕ pour les différentes méthodes. Sur le graphe de $B(t)$, la droite horizontale grise a pour ordonnée $C_{remp}/C_{rép}$, qui est la valeur en laquelle nous voulons inverser B . Beaucoup de courbes se superposent : celles des méthodes 4 et 6 se confondent sur les deux graphes, puisqu'elles calculent les mêmes quantités. La courbe verte correspond à la méthode explicite avec covariable moyenne, et sur le graphe de B , elle se confond avec celle de la méthode hybride, puisque le calcul est exactement le même. Sur le graphe de ϕ , la courbe de la méthode 5 (hybride) se superpose à celles des méthodes 4 et 6, puisque ϕ y est calculé de la même manière, à partir de covariables simulées. Ces graphes révèlent encore l'instabilité des méthodes issues de [Gil+16], et montrent par ailleurs que les méthodes donnent des résultats relativement proches.

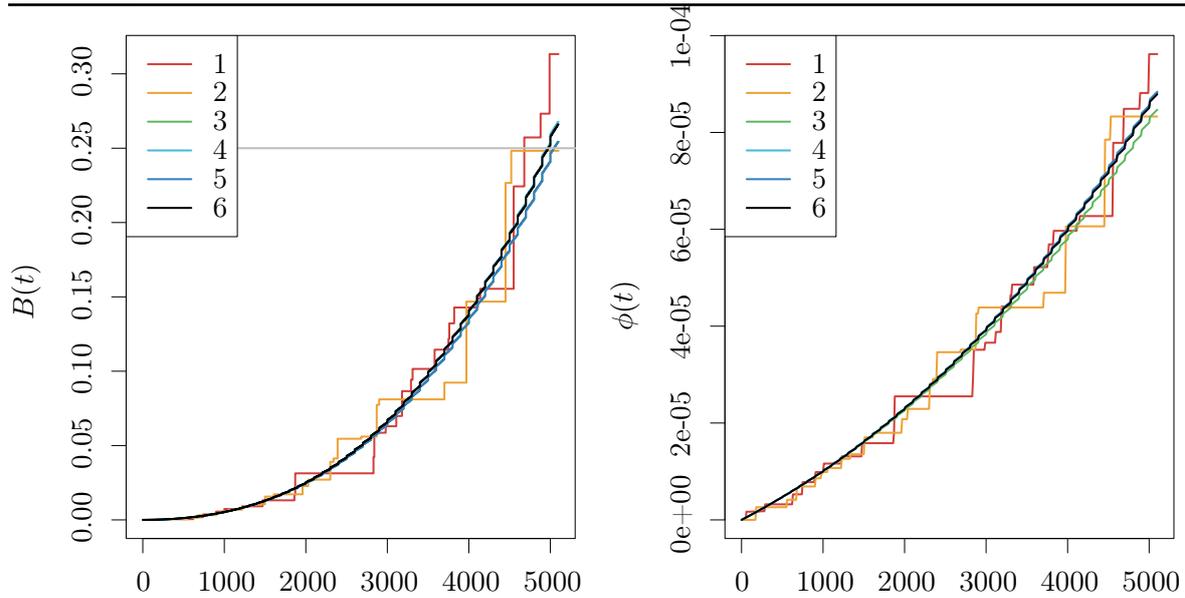


FIGURE 4.6 – $B(t)$ (à gauche) et $\phi(t)$ (à droite) pour différentes méthodes de calcul du seuil

Le choix de la méthode de calcul du seuil se discute. Comme nous l’avons vu, les méthodes 1 et 2, où des trajectoires de défaillance sont simulées, sont relativement longues et peu précises, que la covariable soit simulée ou moyenne, puisque d’une réalisation à l’autre nous observons une grande fluctuation. Un moyen de stabiliser le résultat serait d’augmenter le nombre de trajectoires simulées, mais cela aurait aussi pour effet d’augmenter drastiquement le temps de calcul. Cette instabilité semble condamner ces deux méthodes. Le calcul exact de l’intensité cumulée moyenne sur des covariables simulées est encore plus long. En revanche, le même calcul exact mais avec une covariable moyenne est beaucoup plus rapide, mais la valeur obtenue semble éloignée de la valeur médiane de la méthode 1. Pouvons-nous nous fier à cette valeur médiane? La dispersion est telle que la question se pose. Des méthodes 3 à 6, la méthode 5 est celle dont les valeurs se rapprochent le plus de celles des deux premières méthodes. La dispersion y est raisonnable (écart-type 2.70×10^{-7}), et cette méthode hybride sera notre choix pour la suite.

Une quantité d’intérêt pour la vérification des calculs sera le temps d’atteinte moyen τ_0 :

$$\tau_0 = B^{-1}(C_{rem}/C_{rep}), \quad (4.70)$$

avec B calculé selon la méthode choisie.

4.3.1.3 Résultats numériques sur le seuil

Nous représentons en figures 4.7 et 4.8 les valeurs calculées du seuil s_λ pour différentes valeurs de b , C_{rem} et C_{rep} (coûts de maintenance préventive et corrective), et les temps d’atteinte moyens τ_0 correspondants. Les autres paramètres sont fixés de la manière suivante :

Intensité initiale : PLP

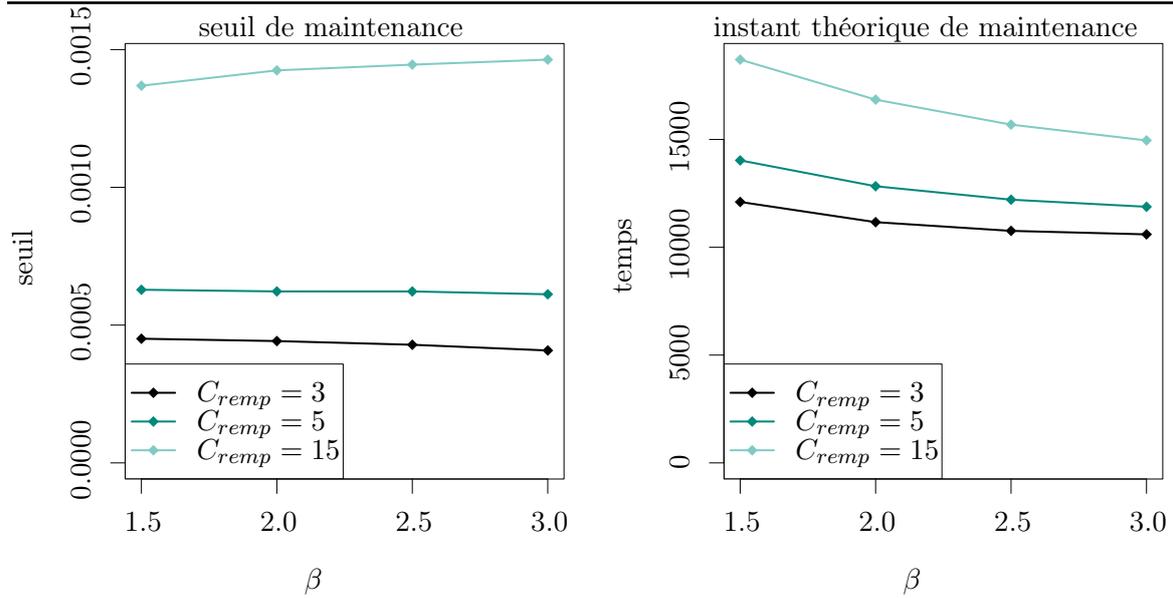


FIGURE 4.7 – Seuil et instant théorique de maintenance préventive en fonction de β et C_{remp} ; $C_{rép} = 1$ (réparation minimale)

Paramètres de l'intensité initiale : $\eta = 15\ 000$, $\beta \in \{1.5, 2, 2.5, 3\}$

Coût des maintenances : $C_{remp} = 1$ et $C_{rép} \in \{3, 5, 15\}$ ou $C_{remp} \in \{3, 5, 15\}$ et $C_{rép} = 1$

Loi de la covariable : processus Gamma de forme $a = 10^{-3}$ et d'intensité $b = 8$ échantillonné toutes les $dt_{cov} = 10$ unités de temps

Influence de la covariable : $\gamma = 1$

Nombre de trajectoires de covariable simulées : $M = 10\ 000$

Nous observons notamment en figures 4.7 et 4.8 que plus le coût C_{remp} d'une maintenance préventive est élevé par rapport au coût $C_{rép}$ des maintenances correctives (rapport $C_{remp}/C_{rép}$), plus le seuil s_λ est haut et plus l'instant de maintenance préventive théorique τ_0 est élevé. Cela est logique car si une maintenance préventive est très coûteuse, nous allons chercher à la faire le plus loin possible dans le temps. De plus, lorsque $C_{rép} > C_{remp}$ (figure 4.8), plus β est élevé, plus s_λ est faible et plus τ_0 est élevé. Ces observations sont inversées quand $C_{remp} > C_{rép}$ (figure 4.7), même si le seuil de maintenance semble stable et non croissant lorsque $C_{remp} = 3$ ou $C_{remp} = 5$. La croissance par rapport à β n'apparaît qu'avec $C_{remp} = 15$. Le résultat de la figure 4.8 peut paraître contre-intuitif : lorsque β est élevé, le système s'use plus vite, et l'instant de maintenance théorique τ_0 devrait être plus faible. La figure 4.9 peut expliquer ce phénomène : nous y avons représenté des intensités avec covariable moyenne pour différentes valeurs de β . Nous voyons que dans l'ordre de grandeur des τ_0 obtenus avec les différents β (entre 2 500 et 6 500, voir figure 4.8), les intensités ne se sont pas encore croisées, et la plus forte est donc celle où β est le plus faible. Nous observons également que pour l'ordre de grandeur des τ_0 pour $C_{remp} > C_{rép}$ (entre 10 000 et 20 000, voir figure 4.7), nous avons bien que l'intensité la plus forte est celle où β est le plus élevé.

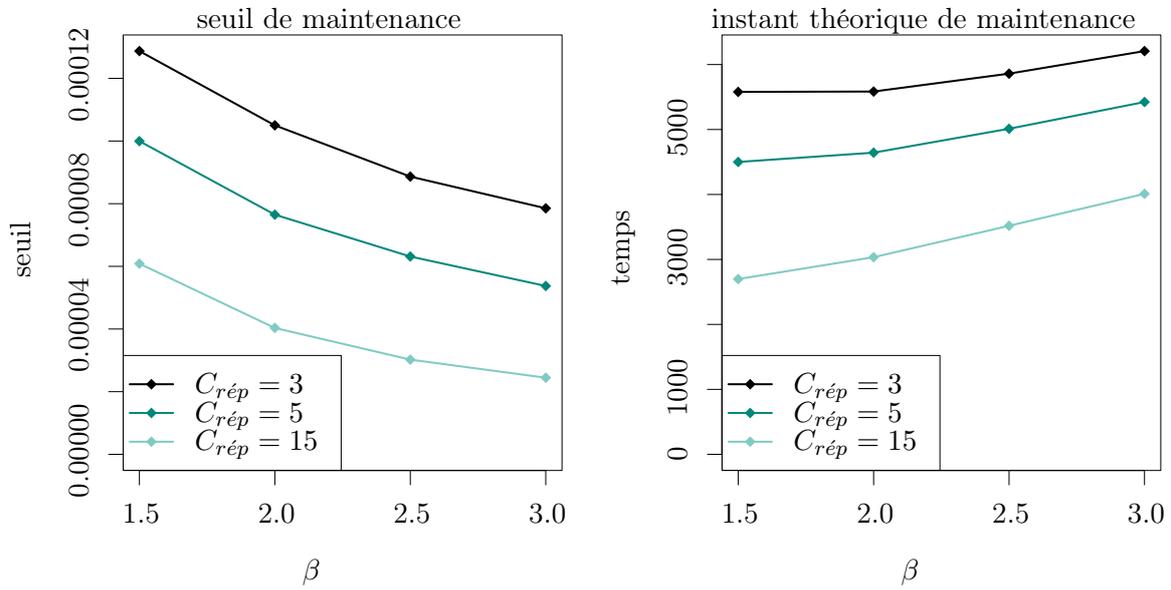


FIGURE 4.8 – Seuil et instant théorique de maintenance préventive en fonction de β et $C_{rép}$; $C_{remp} = 1$ (réparation minimale)

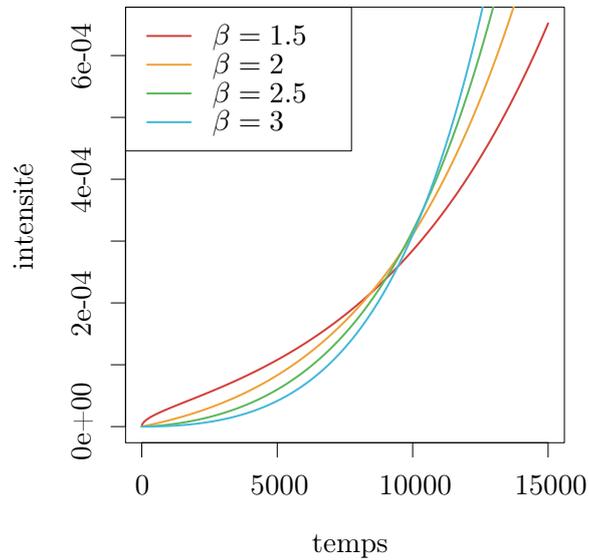


FIGURE 4.9 – Intensités moyennes en fonction de β (réparation minimale)

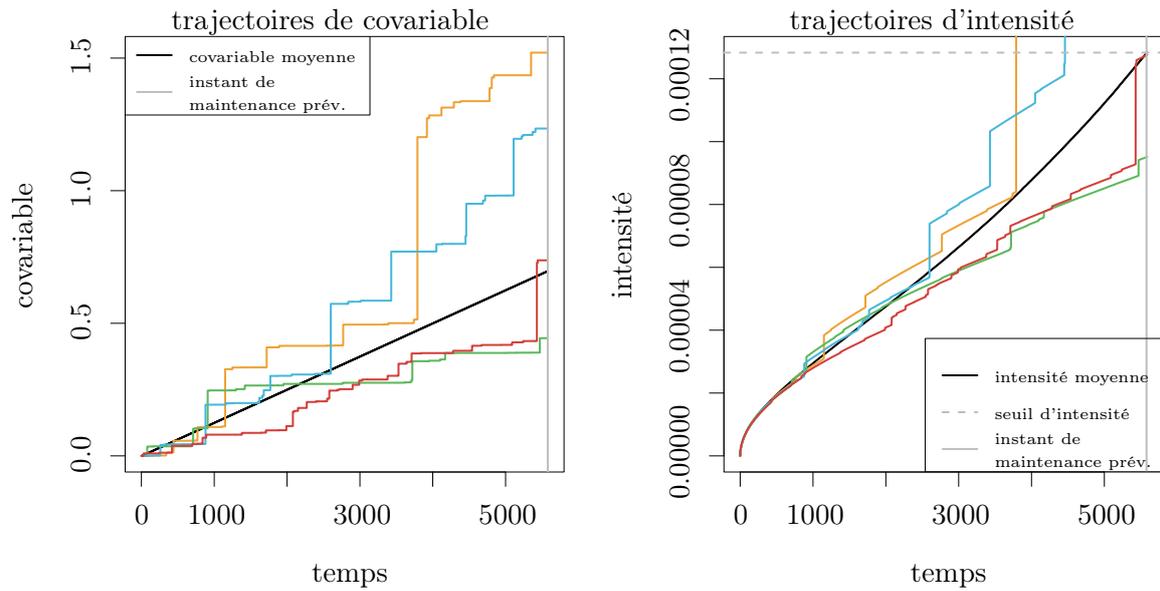


FIGURE 4.10 – Trajectoires de covariable et de l'intensité correspondante

4.3.1.4 Trajectoires de covariable et d'intensité

Pour savoir si la covariable est suffisamment variable et si elle influe suffisamment sur l'intensité pour que les inspections aient une chance d'avoir un impact, en figure 4.10 nous représentons dans une configuration donnée d'une part quelques trajectoires de covariable jusqu'à τ_0 , d'autre part les intensités correspondantes. Nous avons pris pour paramètres $\eta = 15\,000$ et $\beta = 1.5$ pour l'intensité initiale, $C_{rem} = 1$ et $C_{rep} = 3$ pour les coûts de maintenance et $\gamma = 1$, $a = 10^{-3}$, $b = 8$ et $dt_{cov} = 10$ pour la covariable. La courbe noire correspond à la moyenne de l'intensité λ^{moy} calculée sur M simulations de trajectoires de covariables. Nous reconnaissons bien l'influence de la covariable sur l'intensité. De plus, sur le graphe de l'intensité, la droite horizontale en pointillés gris a pour ordonnée la valeur du seuil dans cette configuration (ce qui est confirmé par le fait que l'intensité moyenne en noir atteint cette droite en τ_0 , la droite grise verticale). Nous voyons donc que la covariable change largement le temps d'atteinte du seuil par l'intensité, qui est l'abscisse du point d'intersection d'une courbe colorée avec la droite horizontale du seuil.

4.3.1.5 Choix de la période d'inspection

Pour notre expérimentation, nous choisissons la période d'inspection en fonction de τ_0 , l'objectif étant d'avoir un nombre moyen d'inspections au plus proche de la valeur choisie. Par exemple, si nous voulons faire environ une inspection sur le cycle du système, nous divisons par deux le temps d'atteinte moyen τ_0 : $dt_{insp} = \tau_0/2$. Ainsi, dans la plupart des trajectoires, une inspection a lieu environ au milieu de la vie du système. D'autres inspections peuvent avoir lieu si τ_D dépasse τ_0 . Si nous voulons faire n inspections, nous choisissons $dt_{insp} = \tau_0/(n+1)$. Dans notre exemple en section 4.4, nous avons choisi $n \in \{1, 2, 4, 8, 16\}$, en plus du cas sans

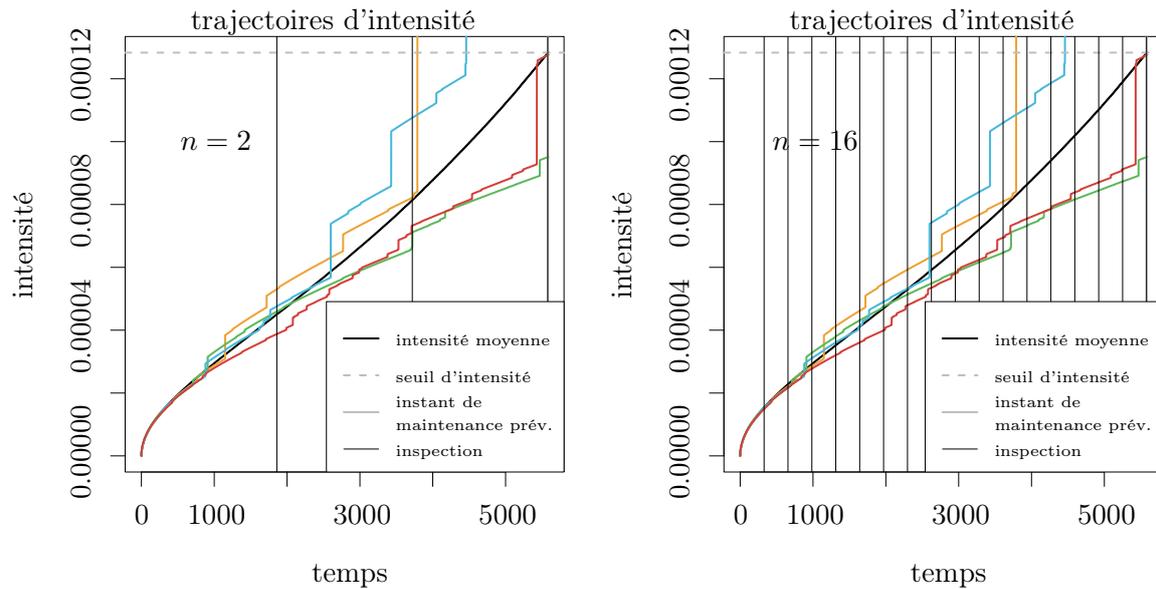


FIGURE 4.11 – Trajectoires d'intensité et instants d'inspection

inspection. Regardons le τ_0 le plus faible obtenu lors du calcul du seuil (voir figure 4.8) : il est environ égal à 2 700 unités de temps. Nous obtenons alors des inspections toutes les 1 350, 900, 540, 300 ou 159 unités de temps respectivement pour les différentes valeurs de n . Ces intervalles d'inspection dt_{ins} sont à contraster avec $dt_{cov} = 10$ dans notre expérimentation.

Reprenons le graphe des intensités de la figure 4.10 en l'augmentant : nous ajoutons en figure 4.11 les instants d'inspections, représentés par des droites verticales. Nous avons opposé $n = 2$ et $n = 16$ inspections avant τ_0 . Nous voyons par exemple qu'avec seulement $n = 2$ inspections, nous aurions manqué le grand saut de l'intensité jaune juste après la seconde inspection. Alors que cette intensité était proche de l'intensité moyenne lors de l'inspection, ce saut va provoquer une atteinte bien plus rapide du seuil de maintenance. Avec $n = 16$ inspections, ce saut est beaucoup plus rapidement pris en compte dans l'optimisation des maintenances préventives.

4.3.1.6 Vie du système étudié et calcul du coût

Maintenant que nous avons calculé le seuil d'intensité s_λ au delà duquel une maintenance préventive doit être faite, nous pouvons mettre en place la surveillance de l'intensité jusqu'au dépassement de ce seuil. Dans [Gil+16], l'instant de maintenance préventive est recalculé à chaque défaillance, les réparations y étant imparfaites. Dans le cas présent de réparation minimale, cette actualisation n'a plus lieu d'être puisque l'intensité n'est pas modifiée au moment des défaillances. En revanche, les inspections de la covariable donneront lieu à un nouveau calcul de l'instant de maintenance préventive.

S'il n'y a pas d'inspection de la covariable, celle-ci est supposée avoir la trajectoire moyenne donnée par sa loi, et l'instant de maintenance préventive est égal à l'instant théorique $\tau_D = \tau_0$

et est périodique. Nous retrouvons alors la politique non dynamique optimale de [BH60]. Pour simuler une histoire de système, il suffit donc de simuler une covariable et des défaillances jusqu'à τ_D .

Si au contraire nous inspectons la covariable à intervalles dt_{ins} de temps, la connaissance de la covariable réelle et non plus de sa trajectoire moyenne en un instant d'inspection va permettre de réévaluer τ_D , à la hausse si la valeur observée est plus faible que la valeur moyenne, à la baisse dans le cas contraire.

Voici l'algorithme d'optimisation de la date de maintenance préventive, adapté à des inspections périodiques. Il consiste, à chaque instant d'inspection $t = dt_{ins} * i$, à relever la valeur `valcov` de la covariable. Nous vérifions tout d'abord si le seuil d'intensité s_λ est instantanément dépassé avec cette nouvelle valeur. Dans ce cas, la maintenance préventive est faite immédiatement. Sinon, nous utilisons `valcov` et la pente moyenne `a/b` de la covariable pour prédire si le seuil sera dépassé avant la prochaine inspection. Si oui, l'intensité conditionnelle est inversée en trouvant d'abord le palier de covariable `l` où se trouvera la maintenance préventive. Sinon, la maintenance préventive est repoussée à l'infini. La covariable est simulée jusqu'à soit la maintenance préventive, si elle est finie, soit le prochain instant d'inspection. Ces étapes sont répétées jusqu'à ce qu'il y ait effectivement une maintenance préventive. Dans cet algorithme, la covariable est simulée, mais elle serait simplement observée dans le cas d'un vrai système.

Algorithme 4.1 – Optimisation des dates de maintenance préventive sur un système à covariables, réparation minimale, inspections périodiques

```

MP <- Faux      // indicateur de maintenance préventive
i <- 0         // compteur des inspections
tant que (non MP) {
  // temps courant (dernière inspection)
  t <- dtins * i
  // palier de covariable du dernier instant d'inspection
  llast <- ceiling(t/dtcov)
  // prochain instant d'inspection
  tnext <- dtins * (i+1)
  // palier de covariable du prochain instant d'inspection
  lnext <- ceiling(tnext/dtcov)
  // dernière valeur observée de la covariable
  valcov <- si_sinon(i==0, 0, X[llast])
  si (alpha*beta*t^(beta-1)*exp(gamma*valcov) >= sλ) {
    // dépassement immédiat du seuil d'intensité
    tau_D <- t
  } sinon si (alpha*beta*tnext^(beta-1)
    *exp(gamma*(valcov+(lnext-llast)*dtcov*a/b)) >= sλ) {
    // dépassement du seuil d'intensité
    // avant la prochaine inspection
    u <- llast * dtcov
    l <- llast
    // recherche du palier de covariable
    // où a lieu le dépassement

```

```

    tant que (alpha*beta*u^(beta-1
        *exp(gamma*(valcov+(1+1-llast)*dtcov*a/b)) < s $\lambda$ ) {
        u <- u + dtcov
        l <- l + 1
    }
    // inversion de l'intensité observée
    tau_D <- (s $\lambda$ /(alpha*beta)
        *exp(-gamma*(valcov+(1-llast)*dtcov*a/b)))
        ^ (1/(beta-1))
} sinon {
    tau_D <- Inf
}
Simulation de la covariable de t à min(tau_D, tnext)
si (min(tau_D, tnext)==tau_D) {
    MP <- Vrai
} sinon {
    i <- i + 1
}
}

```

Pour terminer l'histoire du système, il suffit de récupérer la covariable simulée dans l'algorithme précédent et de simuler des défaillances influencées par cette covariable jusqu'à τ_D . Il n'y a rien d'autre à faire si nous sommes dans un cas réel d'observation d'un système.

Cet algorithme sera illustré en section 4.4, lors de l'optimisation de la fréquence des inspections des covariables avec réparations minimales.

4.3.2 Réparation imparfaite

Dans le cas de la réparation imparfaite, nos nouvelles méthodes de calcul du seuil ne sont plus valables. Nous revenons donc à la méthode de [Gil+16], en incluant la trajectoire moyenne de la covariable dans les calculs. Cette méthode étant beaucoup plus longue, nous prenons un pas de simulation des covariables plus large : $dt_{cov} = 100$.

4.3.2.1 Résultats numériques sur le seuil

Nous reprenons les paramètres de l'étude de la sous-section 4.3.1.3, mais cette fois avec des réparations imparfaites et non minimales. Pour rester dans la continuité de [Gil+16], nous n'avons gardé que le cas où $C_{rép} > C_{rempl}$ (réparation plus coûteuse que le remplacement préventif). De plus, lorsque $C_{rép} < C_{rempl}$, les durées de simulation sont allongées, puisque la maintenance préventive, plus coûteuse, interviendra tard dans la vie du système. Le modèle choisi est le modèle d'âge virtuel ARA_1 , comme dans [Gil+16], avec pour paramètre d'efficacité des réparations $\rho \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.5, 0.7, 0.9\}$. Nous rappelons que le paramètre θ de [Gil+16] correspond à $1 - \rho$. Pour le calcul du seuil, nous simulons $M = 10\,000$ trajectoires

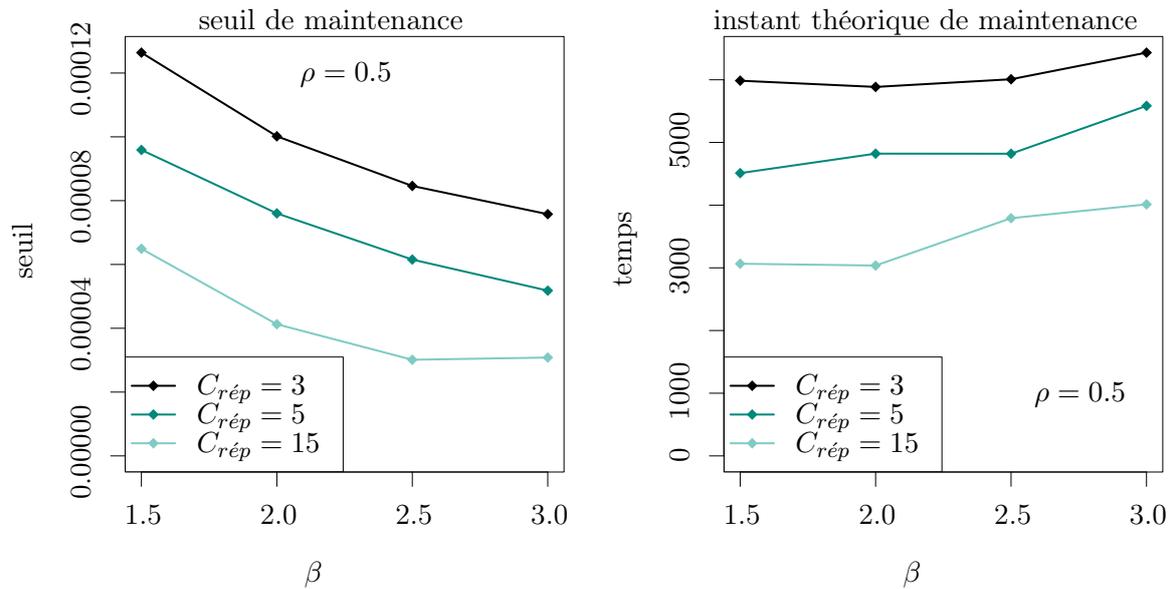


FIGURE 4.12 – Seuil et instant théorique de maintenance préventive en fonction de β et $C_{rép}$; $\rho = 0.5$, $C_{remp} = 1$ (réparation imparfaite)

de défaillances. Nous représentons en figure 4.12 les valeurs calculées du seuil s_λ pour différentes valeurs de β , et $C_{rép}$ (coût de maintenance corrective; $C_{remp} = 1$, $\rho = 0.5$), et les temps d'atteinte moyens τ_0 correspondants. Nous observons à nouveau que plus le coût $C_{rép}$ d'une maintenance corrective est élevé, plus le seuil s_λ est faible, de même que l'instant de maintenance préventive théorique τ_0 . Nous retrouvons là la logique expliquée en sous-section 4.3.1.3, de même que la décroissance du seuil en β . Nous notons que ces courbes semblent plus instables, moins lisses que dans le cas de la réparation minimale (figures 4.7 et 4.8). Rappelons que la méthode de calcul du seuil n'est pas la même : pour la réparation imparfaite, nous avons dû abandonner notre nouvelle méthode et revenir à celle de [Gil+16].

4.3.2.2 Algorithme d'optimisation des maintenances

Une fois les seuils obtenus, il reste à mettre en place la surveillance de l'intensité de défaillance du système. Nous proposons dans l'algorithme suivant une procédure modifiée pour optimiser les maintenances préventives dans le cas de réparation imparfaite et de covariables dynamiques. Au contraire de l'algorithme 4.1, les défaillances sont simulées en même temps que l'optimisation des dates de maintenance, puisque ces dernières dépendent maintenant de l'âge virtuel du système. Le reste de l'algorithme est très similaire. Nous l'avons écrit pour l'âge virtuel du modèle ARA_1 , mais il pourrait s'adapter à d'autres formes d'âge virtuel.

Algorithme 4.2 – Optimisation des dates de maintenance préventive sur un système à covariables, réparation imparfaite, inspections périodiques

```

i <- 0 // compteur d'inspections
MP <- Faux // indicateur de maintenance préventive
Tlast <- 0 // dernier instant de défaillance observée

```

```

tant que (non MP) {
  // temps courant (dernière inspection ou dernière défaillance)
  t <- max(dtins * i, Tlast)
  // palier de covariable du dernier instant d'inspection
  llast <- ceiling(dtins * i / dtcov)
  // prochain instant d'inspection
  tnext <- dtins * (i + 1)
  // palier de covariable du prochain instant d'inspection
  lnext <- ceiling(tnext / dtcov)
  // dernière valeur observée de la covariable
  valcov <- si_sino(i==0, 0, X[llast])
  si (alpha*beta*(t-rho*Tlast)^(beta-1)*exp(gamma*valcov) >= sλ) {
    // dépassement immédiat du seuil d'intensité
    tau_D <- t
  } sinon si (alpha*beta*(tnext-rho*Tlast)^(beta-1)
    *exp(gamma*(valcov+(lnext-llast)*dtcov*a/b)) >= sλ) {
    // dépassement du seuil d'intensité
    // avant la prochaine inspection
    u <- llast * dtcov
    l <- llast
    // recherche du palier de covariable
    // où a lieu le dépassement
    tant que (alpha*beta*(u-rho*Tlast)^(beta-1)
      *exp(gamma*(valcov+(l+1-llast)*dtcov*a/b)) < sλ) {
      u <- u + dtcov
      l <- l + 1
    }
    // inversion de l'intensité observée
    tau_D <- (sλ/(alpha*beta)
      *exp(-gamma*(valcov+(l-llast)*dtcov*a/b)))
      ^ (1/(beta-1)) + rho*Tlast
  } sinon {
    tau_D <- Inf
  }
  Simulation des covariables et d'au plus une défaillance de t à
  min(tau_D, tnext, Tlast+1)
  si (min(tau_D, tnext, Tlast+1)==tau_D) {
    MP <- Vrai
  } sinon si (min(tau_D, tnext, Tlast+1)==tnext) {
    i <- i + 1
  } sinon {
    Tlast <- Tlast+1
  }
}

```

Cet algorithme sera illustré en section 4.4, lors de l'optimisation de la fréquence des inspections des covariables avec réparations imparfaites.

4.4 Optimisation du pas d'inspection des covariables avec maintenances préventives

Dans cette section, nous allons nous intéresser au problème d'optimisation de la fréquence d'inspection des covariables lorsque celles-ci ne sont pas entièrement connues. Nous étudierons la question lorsque l'inspection n'a pas de coût et lorsqu'elle en a un, puis nous procéderons à une modification de la covariable pour renforcer nos résultats.

4.4.1 Sans coût d'inspection

Si l'inspection n'a pas de coût, nous avons sûrement intérêt à inspecter le plus souvent possible, pour connaître au mieux les covariables et ainsi prévoir le plus précisément possible la date de maintenance préventive, afin d'éviter à la fois d'avoir trop de défaillances ou une maintenance préventive trop hâtive, ce qui augmenterait dans les deux cas le coût de maintenance sur le système considéré. Cette première hypothèse mérite d'être vérifiée. Étant donné les algorithmes 4.1 et 4.2 pour un pas d'inspection fixé, nous pouvons vérifier cette hypothèse numériquement, en simulant un grand nombre N de systèmes jusqu'à leur première maintenance préventive pour divers pas d'inspection, toutes choses égales par ailleurs, et en comparant les coûts moyens par unité de temps obtenus dans chaque configuration. Ces coûts sont estimés de même que dans l'équation 4.51 :

$$\hat{G}(\tau) = \frac{\sum_{j=1}^N C^{(j)}(\tau^{(j)})}{\sum_{j=1}^N \tau^{(j)}}, \quad (4.71)$$

où le coût observé sur le système j est égal à

$$C^{(j)}(\tau^{(j)}) = C_{remp} + C_{rép} N_{\tau^{(j)}}^{(j)}. \quad (4.72)$$

4.4.1.1 Réparation minimale

Nous commençons avec le cas de la réparation minimale. Les paramètres de l'étude reprennent ceux de la sous-section 4.3.1.3. Nous ajoutons les suivants :

Nombre théorique d'inspections de la covariable : $\{0, 1, 2, 4, 8, 16\}$

Nombre de trajectoires simulées : $N = 1\ 000\ 000$

Ne pouvant pas donner de figure pour toutes les configurations étudiées, nous avons choisi de ne donner qu'un exemple caractéristique. Nous représentons en figure 4.13 les coûts moyens par unité de temps obtenus dans une configuration avec $C_{remp} > C_{rép}$ (c'est-à-dire que les maintenances préventives sont plus onéreuses que les réparations), en fonction du nombre théorique d'inspections. Le résultat est très net : plus il y a d'inspections au cours de la vie du système, plus le coût moyen de maintenance est faible. Toutes les configurations montrent des courbes de ce type, avec plus ou moins de stabilité. Cela montre que l'information que nous pouvons avoir sur la covariable a une valeur non négligeable pour l'optimisation des dates

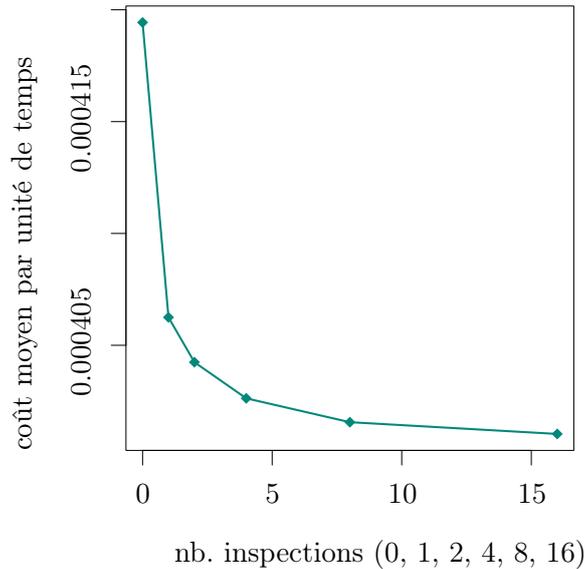


FIGURE 4.13 – Exemple de coût moyen par unité de temps sans coût d'inspection, $\beta = 1.5$, $C_{rem} = 3$, $C_{rép} = 1$, réparation minimale (en fonction du nombre théorique d'inspections)

de maintenance préventive du système. Nous vérifions aussi ce constat lorsque $C_{rem} < C_{rép}$ (réparations plus chères que les maintenances préventives) : en figure 4.14 sont donnés les coûts de maintenance moyens par unité de temps dans un exemple de configuration. Nous retrouvons des coûts nettement décroissants avec l'augmentation du nombre d'inspections. Nous rappelons par ailleurs que le cas où il n'y a aucune inspection correspond à la politique optimale de [BH60]. Nous voyons donc que notre politique dynamique a amélioré le coût moyen par unité de temps, puisqu'à partir d'une inspection ce coût est inférieur au coût sans inspection.

4.4.1.2 Réparation imparfaite

Nous poursuivons notre étude avec le cas de la réparation imparfaite. Les paramètres de l'étude reprennent ceux de la sous-section 4.3.2.1. Nous ajoutons les suivants :

Nombre théorique d'inspections de la covariable : $\{0, 1, 2, 4, 8, 16\}$

Nombre de trajectoires simulées : $N = 1\,000\,000$

Nous représentons en figure 4.15 les coûts moyens par unité de temps obtenus dans un exemple de configuration. Nous retrouvons que moins il y a d'inspections, plus le coût moyen de maintenance par unité de temps est élevé. Certaines configurations montrent des résultats plus stables que d'autres, mais l'allure générale de la courbe est globalement respectée. De plus, nous avons montré que notre politique avec surveillance des covariables (à partir d'une inspection) était meilleure qu'une politique dynamique sans surveillance des covariables, telle que celle de [Gil+16], qui est observable dans notre étude avec le cas où aucune inspection n'est faite. Nous avons donc réussi à utiliser l'information sur la covariable de manière pertinente

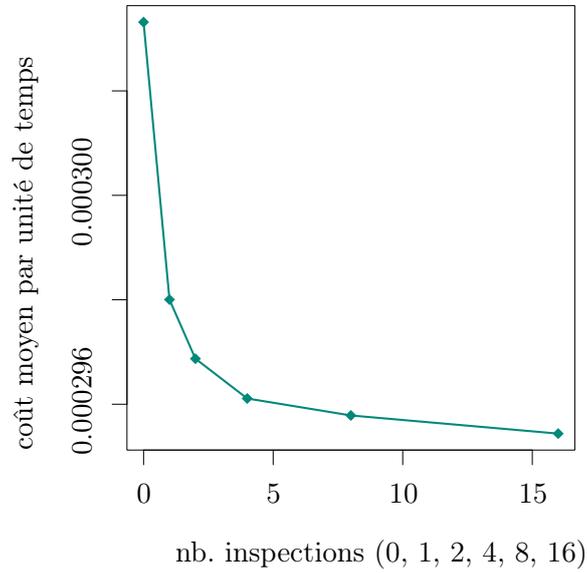


FIGURE 4.14 – Exemple de coût moyen par unité de temps sans coût d'inspection, $\beta = 2$, $C_{rép} = 3$, $C_{remp} = 1$, réparation minimale (en fonction du nombre théorique d'inspections)

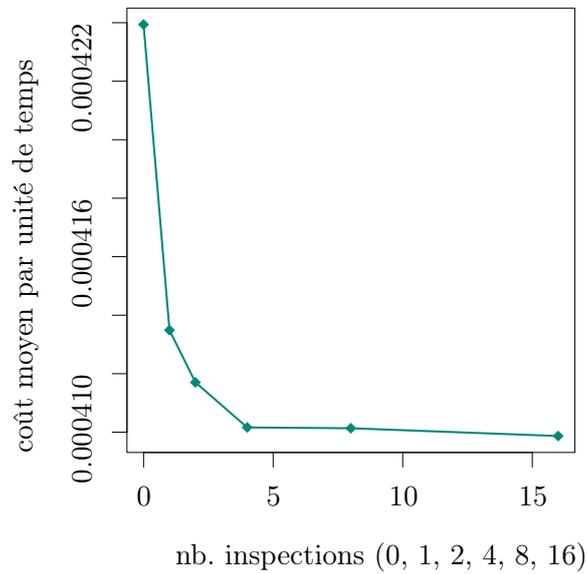


FIGURE 4.15 – Exemple de coût moyen par unité de temps sans coût d'inspection, $\beta = 1.5$, $\rho = 0.5$, $C_{rép} = 3$, $C_{remp} = 1$, réparation imparfaite (en fonction du nombre théorique d'inspections)

dans un contexte de réparation imparfaite. Ce travail est à la croisée de [Gil+16] (réparation imparfaite mais pas de covariables) et de la sous-section 4.4.1.1 (covariables dynamiques mais réparation minimale). Il montre que l'information sur un système peut permettre de planifier intelligemment des maintenances préventives.

4.4.2 Avec coût d'inspection

Si l'inspection a un coût, il peut être intéressant d'optimiser la fréquence d'inspection. Si nous inspectons trop souvent les covariables, cela serait trop coûteux par rapport à la plus-value apportée par l'information supplémentaire. Si au contraire nous n'inspectons pas assez les covariables, le gain en coût d'inspection serait surpassé par la perte engendrée par de mauvaises décisions de maintenance. Entre les deux situations, un équilibre optimal doit pouvoir être trouvé. Nous pouvons à nouveau résoudre cette question comme en sous-section 4.4.1. Nous reprenons donc l'étude du coût moyen par unité de temps mais en incluant cette fois-ci le coût des inspections. Le coût entre deux maintenances préventives devient

$$C(\tau) = C_{rem} + C_{rép}N_{\tau} + C_I N_{\tau}^{(I)}, \quad (4.73)$$

où $N_{\tau}^{(I)}$ est le nombre d'inspection faites sur le cycle et C_I est le coût d'une inspection.

4.4.2.1 Réparation minimale

Nous nous plaçons d'abord dans le cas de la réparation minimale. Nous fixons le coût d'inspection $C_I = 0.01$ dans le cas $C_{rem} > C_{rép}$ (maintenance préventive plus chère qu'une réparation) et $C_I = 0.001$ dans le cas contraire. Nous présentons les résultats de nos simulations de la même manière, avec d'abord le cas $C_{rem} > C_{rép}$ en figure 4.16 puis $C_{rem} < C_{rép}$ en figure 4.17. Nous pouvons clairement voir un minimum se dessiner sur les courbes d'exemple. C'est le point que nous cherchions : le nombre optimal d'inspections au delà duquel les nouvelles inspections coûtent trop cher par rapport à ce qu'elles apportent, et en deçà duquel l'information sur le système n'est pas suffisante.

4.4.2.2 Réparation imparfaite

Nous abordons désormais le cas de la maintenance imparfaite. Nous fixons le coût d'inspection $C_I = 0.005$. Nos résultats sont à nouveau présentés avec un exemple en figure 4.18. Nous retrouvons un point minimal sur cette courbe, nettement visible sur l'exemple. Il s'agit de la fréquence optimale d'inspection pour un tel système, avec les mêmes paramètres. Avec moins d'inspections, nous manquerions des informations importantes sur l'évolution des covariables. Plus d'inspections donneraient un coût d'inspection trop élevé par rapport au gain en termes de coût de maintenance.

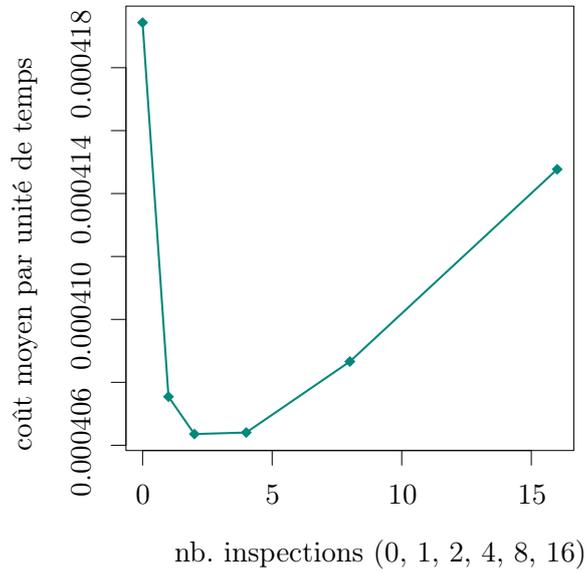


FIGURE 4.16 – Exemple de coût moyen par unité de temps avec coût d'inspection, $\beta = 1.5$, $C_{remp} = 3$, $C_{rép} = 1$, réparation minimale (en fonction du nombre théorique d'inspections)

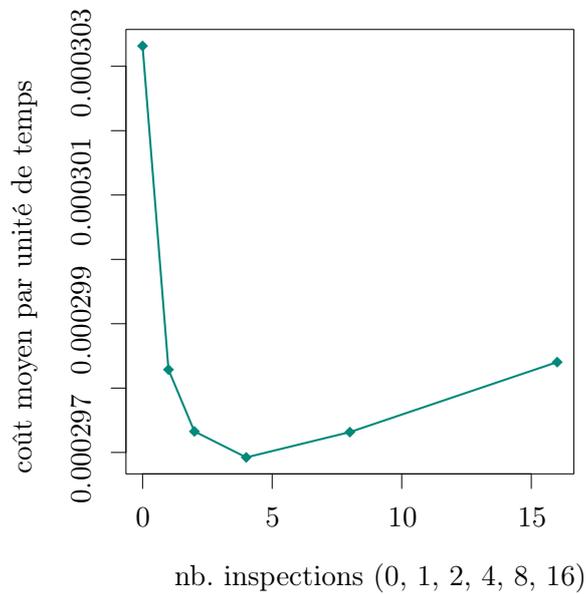


FIGURE 4.17 – Exemple de coût moyen par unité de temps avec coût d'inspection, $\beta = 2$, $C_{rép} = 3$, $C_{remp} = 1$, réparation minimale (en fonction du nombre théorique d'inspections)

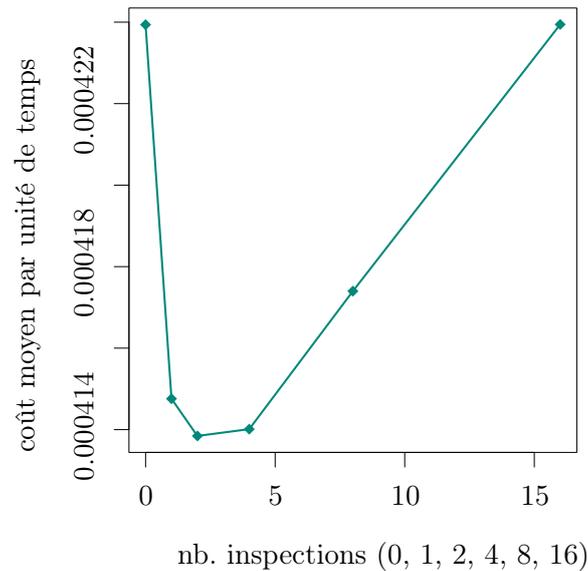


FIGURE 4.18 – Exemple de coût moyen par unité de temps avec coût d'inspection, $\beta = 1.5$, $\rho = 0.5$, $C_{rép} = 3$, $C_{remp} = 1$, réparation imparfaite (en fonction du nombre théorique d'inspections)

4.4.3 Covariable modifiée

Le minimum en figures 4.16 ou 4.17 est très net. Cependant, il n'y a respectivement que 5.09 % et 4.43 % de baisse entre le cas sans inspection et le cas avec une inspection, et encore moins entre une et plusieurs inspections. Nous avons alors émis l'hypothèse que cette baisse peu spectaculaire était due à une trop faible variabilité de la covariable d'une trajectoire à une autre. Nous avons donc mis en place, pour le cas de la réparation minimale, une nouvelle étude, où la covariable est modifiée.

Cette nouvelle covariable suit un modèle à effet aléatoire suivant un processus Gamma dont la valeur initiale et le paramètre de forme a sont tirés aléatoirement. Nous tirons une valeur initiale centrée. Le calcul du seuil est identique à la méthode hybride choisie dans la sous-section 4.3.1.2, avec la valeur moyenne de a et aucun décalage à l'origine. Cette valeur moyenne de a est la seule donnée sur cette modification de la covariable : lors de l'optimisation des maintenances préventives, la prédiction de la trajectoire de la covariable se fait toujours à partir de la valeur observée et avec le a moyen. Cependant, les simulations de la covariable utilisent une valeur de a et une valeur à l'origine tirées au sort avant le début de la vie du système.

Pour réduire notre étude à une seule configuration, nous choisissons $\beta = 2$, $C_{remp} = 1$, $C_{rép} = 3$, $dt_{cov} = 1$. Le décalage est tiré uniformément parmi les valeurs $\{-1, -0.5, 0, 0.5, 1\}$ et a parmi $\{0.001, 0.002, \dots, 0.005\}$. Nous représentons en figure 4.19 le coût moyen par unité de temps sans coût d'inspection. Le saut du coût entre aucune inspection et une inspection est bien plus marqué, écrasant même le reste de la courbe. Plus précisément, la différence est

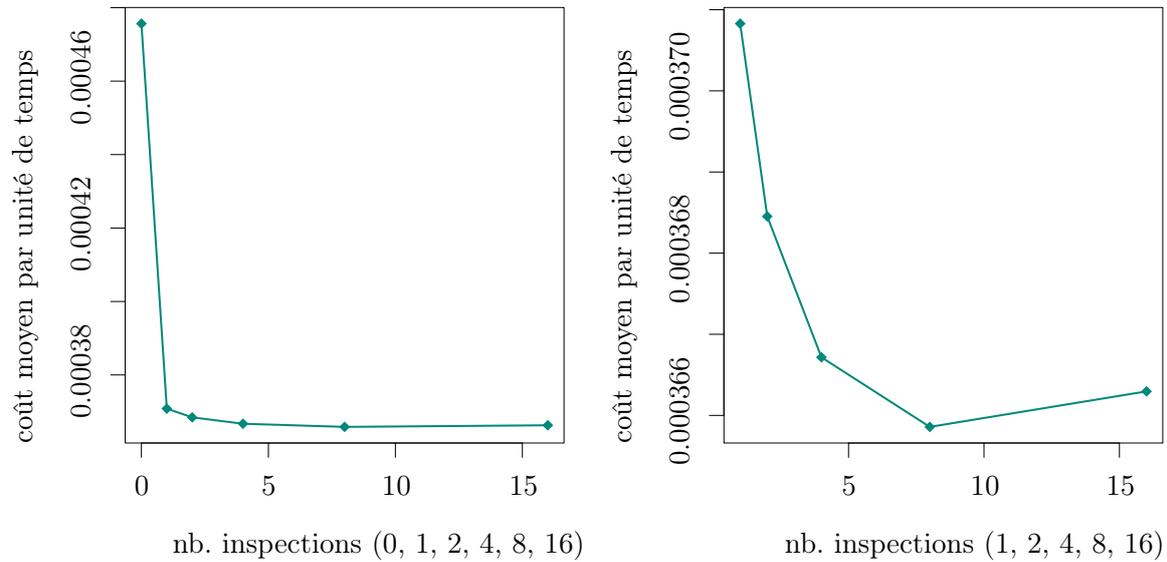


FIGURE 4.19 – Coût moyen par unité de temps sans coût d'inspection (vue entière et détail), $\beta = 2$, $C_{rem} = 1$, $C_{rep} = 3$, réparation minimale, covariable modifiée (en fonction du nombre théorique d'inspections)

d'environ 22.0 %. Il semble donc que plus la covariable offre des trajectoires différentes, plus les inspections ont de valeur pour la planification des maintenances préventives. Nous notons tout de même que le coût remonte légèrement entre 8 et 16 inspections. Cela pourrait être une instabilité due au nombre de trajectoires. Nous donnons donc en figure 4.20 plusieurs courbes de coût. Chacune a été tracée en tirant aléatoirement et avec remise $K = 10^6$ histoires de systèmes parmi celles qui ont été simulées et en calculant le coût moyen par unité de temps avec ces tirages. Cette procédure de *bootstrap* permet de vérifier la variabilité des résultats sur les systèmes simulés. Nous observons effectivement une certaine instabilité. Nous la comparons en figure 4.20 à celle qui existait pour la même configuration mais avec une covariable classique. Si nous retrouvons l'allure décroissante de la courbe, nous voyons qu'elle est sujette à variation.

4.5 Optimisation de la date d'inspection avec maintenances préventives

Dans cette section, la question d'intérêt sera la suivante : si nous ne voulons placer qu'une inspection, quel est le moment idéal ? Il est intuitif qu'une inspection au tout début de la vie du système n'aura pas le même impact que lorsque celui-ci a déjà fonctionné un certain temps. En début de course, les covariables n'auront peut-être pas suffisamment dévié de leur trajectoire moyenne pour que l'inspection offre une information utile. Au contraire, si l'inspection intervient trop tard, la covariable aura peut-être largement dépassé un seuil critique et la maintenance préventive arriverait alors trop tard, après plusieurs défaillances coûteuses du système. La question du placement d'une inspection est donc tout à fait légitime. Pour y

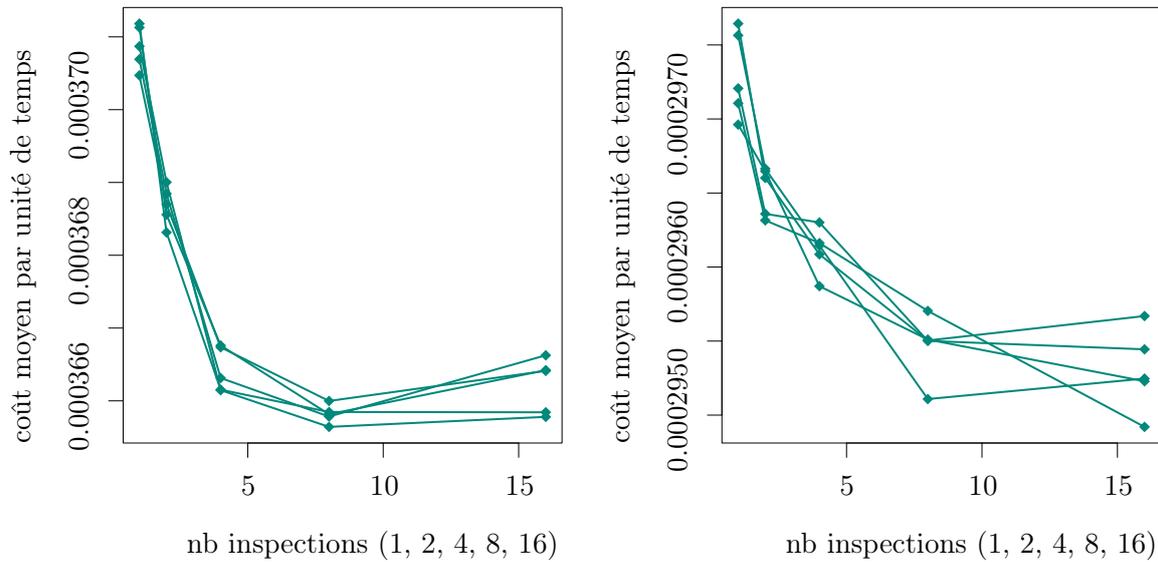


FIGURE 4.20 – Répliques par *bootstrap* du coût moyen par unité de temps, covariable modifiée (à gauche) et covariable classique (à droite)

répondre, nous utilisons la même méthodologie que pour l'optimisation de la fréquence d'inspection : nous simulons un grand nombre de trajectoires avec diverses dates d'inspection, et nous choisissons celle qui minimise le coût moyen par unité de temps.

Nous conservons dans notre étude les mêmes paramètres qu'en sous-section 4.4.1.1, lorsque nous avons optimisé la fréquence d'inspection dans le cas de réparations minimales. Nous nous restreignons à nouveau au cas où la maintenance corrective est plus coûteuse que la maintenance préventive ($C_{rép} > C_{remp}$), pour rester dans la configuration proposée par [Gil+16], et par souci d'économie. Nous choisissons de régler les dates d'inspection proportionnellement à la date théorique de maintenance préventive τ_0 : l'inspection pourra intervenir en $0.1\tau_0, 0.2\tau_0, \dots, \tau_0$. Par rapport à l'étude de la sous-section 4.4.1.1, il n'est pas nécessaire de recalculer les seuils s_λ : seules les dates d'inspection changent, mais pas la loi de la covariable, qui est utilisée pour le calcul du seuil. Par ailleurs, le coût d'inspection n'a pas d'influence sur les résultats, puisque qu'il n'y aura toujours qu'une seule inspection. Le coût total des inspections est donc constant.

L'algorithme suivant optimise la date de la maintenance préventive lorsqu'une seule inspection est faite sur la covariable. Il diffère quelque peu de l'algorithme 4.1 où les inspections étaient périodiques. Nous commençons par vérifier si, avec la trajectoire moyenne de la covariable, il est prévu que l'intensité dépasse le seuil de maintenance avant la date de l'inspection `t insp`. Si oui, une date de maintenance préventive `tau_D` est calculée, et la covariable est simulée jusqu'à cette date. Sinon, cette maintenance est repoussée à l'infini. La covariable est alors simulée jusqu'à la date d'inspection, où sa vraie valeur `valcov` est relevée. Si, avec cette valeur actualisée, l'intensité dépasse son seuil s_λ , la maintenance préventive est faite immédiatement, c'est-à-dire à l'instant `t insp`. Sinon, nous utilisons `valcov` et la pente moyenne `a/b` de la covariable pour calculer l'instant auquel le seuil devrait être dépassé. La covariable est

ici simulée, mais serait simplement observée s'il s'agissait d'un système réel.

Algorithme 4.3 – Optimisation des dates de maintenance préventive sur un système à covariables, réparation minimale, inspection unique

```

// tinsp : instant unique d'inspection
si (alpha*beta*tinsp^(beta-1)
    *exp(gamma*(ceiling(tinspec/dt_cov)-1)*dt_cov*a/b) >= s_lambda) {
    // dépassement du seuil d'intensité avant l'inspection
    u <- 0
    l <- 0
    // recherche du palier de covariable où a lieu le dépassement
    tant que (alpha*beta*u^(beta-1)*exp(gamma*l*dt_cov*a/b) < s_lambda) {
        u <- u + dt_cov
        l <- l + 1
    }
    // inversion de l'intensité
    tau_D <- (s_lambda/(alpha*beta)
        *exp(-gamma*(l-1)*dt_cov*a/b))^(1/(beta-1))
} sinon {
    tau_D <- Inf
}
si (tau_D < tinsp) {
    Simulation de la covariable jusqu'à tau_D
} sinon {
    Simulation de la covariable jusqu'à tinsp
    // dernière valeur observée de la covariable
    valcov <- si_sinon(i==0, 0, X[l_1last])
    si (alpha*beta*tinsp^(beta-1)*exp(gamma*valcov) >= s_lambda) {
        // dépassement immédiat du seuil d'intensité
        tau_D <- tinsp
    } sinon {
        L <- ceiling(tinsp/dt_cov)
        u <- L * dt_cov
        l <- L
        // recherche du palier de covariable
        // où a lieu le dépassement
        tant que (alpha*beta*u^(beta-1)
            *exp(gamma*(valcov+(l+1-L)*dt_cov*a/b)) < s_lambda) {
            u <- u + dt_cov
            l <- l + 1
        }
        // inversion de l'intensité observée
        tau_D <- (s_lambda/(alpha*beta)
            *exp(-gamma*(valcov+(l-L)*dt_cov*a/b)))^(1/(beta-1))
    }
    Simulation de la covariable jusqu'à tau_D
}

```

Il ne reste plus qu'à récupérer la covariable simulée dans l'algorithme précédent et simuler des défaillances influencées par cette covariable jusqu'à τ_D . Dans le cas d'un système réel, les

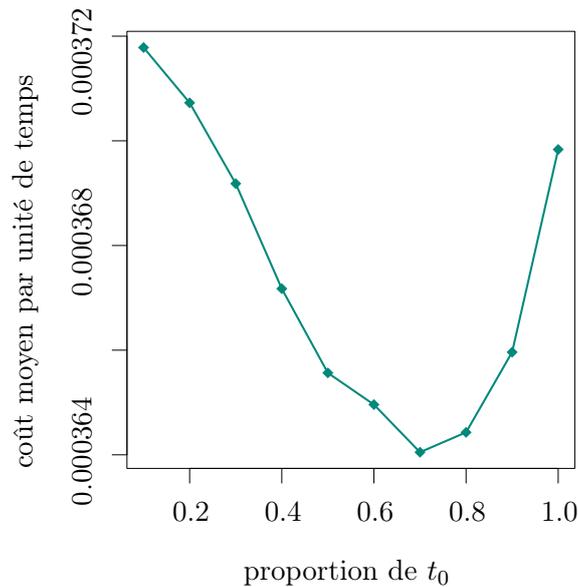


FIGURE 4.21 – Exemple de coût moyen par unité de temps, $\beta = 1.5$, $C_{rép} = 3$, $C_{rem} = 1$, réparation minimale (en fonction de la date d'inspection)

défaillances seraient simplement observées.

Nous présentons en figure 4.21 les coûts moyens par unité de temps obtenus dans une des configurations, en fonction de la date d'inspection (plus précisément de la proportion de τ_0 que représente cette date). Sur cette figure, nous observons immédiatement un minimum pour une inspection en $0.7\tau_0$. C'est le point recherché.

Il est à noter que la situation n'est pas si flagrante dans toutes les configurations de paramètres. En effet, le minimum se montre instable, même avec $N = 1\,000\,000$ trajectoires simulées pour le trouver. Cette instabilité dépend fortement des paramètres, et la courbe que nous avons représentée en figure 4.21 constitue un cas particulier où le minimum est très net. Par exemple, plus le ratio $C_{rem}/C_{rép}$ est faible, moins les résultats sont stables. En fait, si $C_{rép}$ (coût de maintenance corrective) est grand, nous allons chercher à faire la maintenance préventive le plus tôt possible, pour éviter les défaillances. Or la date de la seule inspection est réglée sur l'instant théorique de maintenance préventive τ_0 : l'inspection est faite en $x\%$ de τ_0 , avec x dans $\{10, 20, \dots, 100\}$ (ce sont les différentes valeurs de x qui formeront la courbe des coûts). Donc si $C_{rép}$ est grand, τ_0 est faible et la covariable n'a pas eu le temps de varier suffisamment pour que les différences d'information à $x\%$ de τ_0 soient flagrantes, donnant ainsi un minimum moins marqué. Il convient de se souvenir que la longueur des paliers de la covariable n'est pas égale à dt_{cov} , le pas de simulation de la covariable. En effet, la covariable a tendance à stagner, c'est-à-dire à garder presque la même valeur, sur une certaine longueur avant de varier vraiment. Il serait intéressant de refaire la même étude avec un N plus grand pour voir si les résultats sont améliorés en termes de stabilité dans les cas où $C_{rép}$ est grand. Cependant, les temps de calcul seraient eux aussi allongés.

4.6 Conclusion sur l'aide à la décision en présence de covariables

Dans ce chapitre, nous avons proposé une procédure d'optimisation des maintenances préventives en présence de covariables fixes ou dynamiques, avec des réparations minimales ou imparfaites. Cette procédure se fait en deux temps : d'abord, il faut utiliser la connaissance de la loi de la covariable (ou sa valeur pour une covariable fixe) pour calculer un seuil d'intensité au delà duquel une maintenance préventive sera faite. Ensuite, lors de la vie du système, l'intensité conditionnelle observée avec les vraies valeurs des covariables (connues lors d'inspections) est comparée au seuil. Dès que ce seuil est dépassé, une maintenance préventive est faite.

Nous avons vu numériquement que la connaissance de la covariable apportait lors de l'optimisation des maintenances une plus-value en termes de coûts moyens par unité de temps, par rapport aux politiques périodiques (pour les réparations minimales, [BH60]) ou dynamiques sans surveillance des covariables (pour les réparations imparfaites, [Gil+16]). L'utilisation de l'information dynamique à la fois sur les défaillances et sur les covariables est donc de grand intérêt dans une optique d'optimisation du calendrier de maintenance. Nous avons montré d'une part que plus les inspections étaient rapprochées, plus le coût de maintenance était faible, et d'autre part qu'il était possible de trouver la fréquence optimale d'inspection des covariables lorsque celles-ci avaient un coût, en simulant des histoires de systèmes avec différentes périodes d'inspection. Nous avons aussi vu qu'une procédure similaire permettait de trouver l'instant optimal pour procéder à une inspection lorsque nous ne voulons en faire qu'une seule au cours de la vie du système.

Ce dernier point ouvre des pistes de recherche. En effet, si nous sommes capables de placer une seule inspection, nous pourrions en placer une seconde, une troisième et ainsi de suite jusqu'à ce que cela n'améliore plus le coût total, c'est-à-dire que trop d'inspections soient faites. Cela pourrait permettre de déterminer le nombre optimal d'inspections à placer le long de la vie du système, ainsi que leurs dates.

Le calcul du seuil constitue aussi un point d'avancée possible. Les méthodes exposées ici prennent différemment en compte l'information sur les covariables. D'autres méthodes pourraient être proposées, et être comparées aux nôtres.

Par ailleurs, nous avons ici supposé que les paramètres du modèle d'âge virtuel, ceux de l'intensité initiale et le coefficient des covariables étaient connus. L'estimation de ces paramètres apporterait un biais supplémentaire dans les diverses optimisations, qui serait à prendre en compte dans une étude plus poussée. Dans [Gil+16], qui ne traite pas de covariables, les paramètres du modèle sont estimés. De plus, les paramètres de la loi de la covariable pourraient aussi être estimés dynamiquement, au fil de l'information apportée par les inspections.

Tests d'adéquation aux modèles d'âge virtuel

Sommaire

5.1	Tests pour des systèmes simples	112
5.1.1	Statistiques de test	112
5.1.2	Procédure de <i>bootstrap</i> paramétrique	113
5.1.3	Étude des résultats	114
5.2	Première extension des tests au cas multi-systèmes	116
5.2.1	Procédure de test	117
5.2.2	Étude des résultats	117
5.2.3	Avec des échantillons plus importants	118
5.3	Nouvelles statistiques de test	122
5.3.1	Construction des statistiques	122
5.3.2	Étude des résultats	124
5.3.3	Avec des échantillons plus importants	125
5.4	Conclusion sur les tests d'adéquation	127

Dans tout ce qui précède, nous avons travaillé avec un modèle fixé, connu à tout instant. Cependant, face à un jeu de données, il n'est pas évident de savoir quel modèle appliquer. Dans ce chapitre, nous cherchons donc à déterminer si un modèle d'âge virtuel est adapté ou non à des données. Une manière de le faire est d'avoir recours aux tests d'adéquation, une catégorie de tests statistiques qui compare des données à une loi définie. La problématique des tests d'adéquation appliqués aux modèles d'âge virtuel est traitée dans [Cha+16] dans le cas de systèmes simples. Notre objectif est d'étendre ces tests à des jeux de données contenant plusieurs systèmes et de comparer les performances de ces tests. En effet, lorsque l'acquisition des données se fait sur plusieurs systèmes indépendants et de même loi, nous pouvons vouloir utiliser toutes ces données ainsi que leur structure pour tester un modèle. De plus, les tests dans [Cha+16] donnent des puissances empiriques généralement faibles, et nous voulons savoir si des tests adaptés à une structure de données multi-systèmes seraient plus performants, à quantité de données égale.

Cette tentative de résoudre un problème non trivial et peu traité dans la littérature est restée infructueuse. Ce travail étant issu du mémoire de master préalable à la thèse, il pourrait

être profitable de le poursuivre et de développer de nouvelles méthodes, son intérêt pratique pour le choix de modèle dans des cas multi-systèmes étant indéniable.

Étant donné qu'un processus ponctuel est caractérisé par son intensité, un modèle de maintenance imparfaite peut être noté $\mathcal{C} = \{\lambda(\theta), \theta \in \Theta \subset \mathbf{R}^d\}$, où θ est le paramètre du modèle. Nous voulons déterminer si \mathcal{C} est un modèle pertinent pour les données observées $\{t_{j,i}\}_{1 \leq j \leq \nu, 1 \leq i \leq n_j}$, où nous rappelons que ν est le nombre de systèmes observés et n_j est le nombre de défaillances pour le j^e système. Un test d'adéquation teste l'hypothèse nulle $H_0 : \lambda \in \mathcal{C}$ contre l'alternative $H_1 : \lambda \notin \mathcal{C}$.

5.1 Tests pour des systèmes simples

Nous détaillons dans cette section la procédure de test donnée dans [Cha+16].

5.1.1 Statistiques de test

Nous commençons par la construction des statistiques de test. Puisque dans le cas multi-systèmes, nous n'utiliserons que les statistiques basées sur une transformation appelée *Probability Integral Transform* (PIT), nous ne présentons que ces dernières, bien que l'article [Cha+16] comprenne également une autre classe de statistiques. Cette dernière classe de tests ne semble pas immédiatement adaptable au cas multi-systèmes, contrairement aux tests faisant appel à la PIT.

L'intensité conditionnelle étant ici paramétrique, notons

$$\Lambda(\theta) = \{\Lambda_t(\theta)\}_{t \geq 0} = \left\{ \int_0^t \lambda_s(\theta) ds \right\}_{t \geq 0} \quad (5.1)$$

l'intensité cumulée du processus de défaillance pour un paramètre θ donné. Cependant, le paramètre θ est inconnu et doit être estimé. Nous notons $\hat{\theta}$ cette estimation.

Pour un seul système, le principe est que sous l'hypothèse H_0 , les variables aléatoires $\Lambda_{T_{i+1}}(\theta) - \Lambda_{T_i}(\theta)$ sont indépendantes et de même loi exponentielle standard. Les auteurs proposent alors de transformer ces variables en variables de loi uniforme en leur appliquant leur fonction de survie, pour tout $0 \leq i \leq n - 1$:

$$U_i(\theta) := \exp(-\Lambda_{T_{i+1}}(\theta) + \Lambda_{T_i}(\theta)), \quad (5.2)$$

où n est le nombre de défaillances du système. L'idée est que si le modèle considéré n'est pas adapté aux données, ces $\{U_i(\theta)\}_{0 \leq i \leq n-1}$ ne sont plus des variables de loi uniforme.

Sous l'hypothèse nulle, les $\{U_i(\hat{\theta})\}_{0 \leq i \leq n-1}$ ne sont plus forcément des variables indépendantes et uniformes, mais nous pouvons nous attendre à ce qu'elles en soient proches.

La procédure de test consiste à tester l'uniformité des $\{U_i(\hat{\theta})\}_{0 \leq i \leq n-1}$. Les auteurs proposent pour cela trois statistiques de test : Kolmogorov-Smirnov (KS), Cramér-von Mises (CvM) et Anderson-Darling (AD) :

$$\begin{aligned}
 KS(\hat{\theta}) &= \sqrt{n} \sup_{x \in [0,1]} |F_{n,S}(x) - x| \\
 &= \sqrt{n} \max \left(\max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{i}{n} - U_{(i-1)}(\hat{\theta}) \right), \max_{1 \leq i \leq n} \left(U_{(i-1)}(\hat{\theta}) - \frac{i-1}{n} \right) \right), \\
 CvM(\hat{\theta}) &= n \int_0^1 (F_{n,S}(x) - x)^2 dx \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(U_{(i-1)}(\hat{\theta}) - \frac{2i-1}{2n} \right)^2 + \frac{1}{12n}, \\
 AD(\hat{\theta}) &= n \int_0^1 \frac{(F_{n,S}(x) - x)^2}{x(1-x)} dx \\
 &= -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) \left(\log \left(U_{(i-1)}(\hat{\theta}) \right) + \log \left(1 - U_{(n-i)}(\hat{\theta}) \right) \right), \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

où $F_{n,S}$ est la fonction de répartition empirique des variables $\{U_i(\hat{\theta})\}_{0 \leq i \leq n-1}$ et les $\{U_{(i)}(\hat{\theta})\}_{0 \leq i \leq n-1}$ sont les statistiques d'ordre des $\{U_i(\hat{\theta})\}_{0 \leq i \leq n-1}$.

Les auteurs dans [Cha+16] ont prouvé empiriquement qu'à cause de l'estimation de θ , nous ne pouvons pas comparer les valeurs des statistiques de test aux valeurs critiques usuelles des tests d'adéquation à la loi uniforme. Ils ont alors proposé une procédure de *bootstrap* paramétrique pour trouver les quantiles empiriques de la distribution de ces statistiques sous l'hypothèse nulle.

5.1.2 Procédure de *bootstrap* paramétrique

Un test statistique consiste à comparer la statistique calculée sur les observations à la loi de cette statistique sous l'hypothèse nulle. Le *bootstrap* paramétrique nous permet de contourner le fait que la loi de la statistique sous l'hypothèse nulle ne soit pas connue. La procédure de test est décrite dans [Cha+16], nous la reproduisons ici. Notons $Z(\hat{\theta})$ la statistique de test choisie. Sous H_0 , $Z(\hat{\theta})$ est calculée à partir du jeu de données observées t_1, \dots, t_n . L'idée est d'obtenir des répliques identiques et de même loi que $Z(\hat{\theta})$ afin de calculer les quantiles empiriques de la loi de la statistique. Nous simulons alors L répliques indépendantes et de même loi $\{t_{1,i}^*, \dots, t_{n,i}^*\}_{1 \leq i \leq L}$ d'un processus ponctuel d'intensité $\lambda(\hat{\theta})$. Pour chaque réplique, l'estimateur $\hat{\theta}^*$ et la statistique de test $Z^*(\hat{\theta}^*)$ peuvent être calculés. Il est attendu que θ et $\hat{\theta}$ soient suffisamment proches pour qu'il n'y ait qu'une très faible différence entre les quantiles empiriques de $Z(\hat{\theta})$ et $Z^*(\hat{\theta}^*)$. L'algorithme est le suivant :

Algorithme 5.1 – *Bootstrap* paramétrique pour les tests d'adéquation

calculer l'estimateur $\hat{\theta}$ dans le modèle \mathcal{C} sur t_1, \dots, t_n ;
calculer la statistique $Z(\hat{\theta})$ à partir de t_1, \dots, t_n et $\hat{\theta}$;

```

pour i allant de 1 à L :
  simuler  $t_{1,i}^*, t_{2,i}^*, \dots, t_{n,i}^*$  sous le modèle d'intensité  $\lambda(\hat{\theta}) \in \mathcal{C}$  ;
  calculer l'estimateur  $\hat{\theta}_i^*$  dans le modèle  $\mathcal{C}$  sur  $t_{1,i}^*, t_{2,i}^*, \dots, t_{n,i}^*$  ;
  calculer la statistique  $Z_i^* = Z_i^*(\hat{\theta}_i^*)$  à partir de
     $t_{1,i}^*, t_{2,i}^*, \dots, t_{n,i}^*$  et  $\hat{\theta}_i^*$  ;
fin pour ;
 $H_0$  est rejetée avec un niveau de significativité  $\alpha$  si  $Z(\hat{\theta})$  est
  plus grand que le quantile empirique d'ordre  $1-\alpha$  de  $Z_1^*, \dots, Z_L^*$ .

```

Il est également possible de calculer une p-valeur comme étant la proportion des Z_1^*, \dots, Z_L^* supérieurs à $Z(\hat{\theta})$. L'hypothèse nulle est alors rejetée si la p-valeur est inférieure à α .

5.1.3 Étude des résultats

Pour avoir une idée de la validité des tests statistiques, nous calculons des puissances de test. La puissance d'un test est la probabilité avec laquelle, sous l'hypothèse alternative, le test rejette l'hypothèse nulle. Dans notre cas, nous ne pouvons pas la calculer analytiquement car nous ne connaissons pas la loi de nos statistiques sous l'hypothèse alternative. Nous avons alors recours à un calcul empirique, avec l'algorithme suivant qui teste un modèle A sur des données issues d'un modèle B :

Algorithme 5.2 – Calcul des puissances de test

```

pour i allant de 1 à M :
  simuler des données suivant le modèle B ;
  tester le modèle A sur les données simulées ;
  si l'hypothèse nulle est rejetée :
    p[i] <- 1 ;
  sinon :
    p[i] <- 0 ;
  fin si ;
fin pour ;
puissance <- moyenne(p) ;

```

Le nombre de réplifications M est choisi suffisamment grand pour approcher la valeur théorique de la puissance. Dans la suite, nous avons fixé $M = 1\,500$, de même que dans [Cha+16]. Les puissances ainsi calculées sont partielles, puisqu'elles concernent un cas particulier de l'hypothèse alternative (données issues du modèle B). Cependant, elles donnent un aperçu des puissances globales.

Nous avons reproduit en partie les expérimentations menées dans [Cha+16]. Malheureusement, malgré de multiples vérifications du code source, nous n'avons pas retrouvé partout les mêmes puissances. Nous donnons ici nos résultats numériques en tables 5.1 à 5.3, ainsi que leur interprétation.

Les jeux de données simulés (correspondant donc à l’hypothèse alternative) comprennent chacun un unique système de 30 défaillances. Les paramètres d’échelle et de forme de l’intensité initiale PLP ont été fixés à $\alpha = 0.05$ et $\beta \in \{1.5, 2, 2.5, 3\}$. Pour les modèles ARA, nous avons choisi $\rho \in \{0.2, 0.8\}$ et $\rho \in \{0.8, 0.9, 0.95\}$ pour le modèle QR. Cette variabilité permettait de tester la sensibilité des puissances de test aux paramètres du modèle simulé, avec une usure intrinsèque plus ou moins forte et une maintenance plus ou moins efficace. Le paramètre α ne correspond qu’à l’échelle du PLP et nous ne l’avons donc pas fait varier. Pour le *bootstrap* paramétrique, nous avons choisi $L = 1\ 000$, et $M = 1\ 500$ pour le calcul des puissances. L’erreur de première espèce a été fixée à 5 %. Les tableaux sont donnés en pourcentages.

ρ	β	KS	CvM	AD	ρ	β	KS	CvM	AD	β	ρ	KS	CvM	AD
0.2	1.5	4.5	5.1	6.0	0.2	1.5	5.5	5.1	5.1	1.5	0.80	100.0	100.0	100.0
0.2	2.0	6.3	6.6	6.7	0.2	2.0	6.9	7.0	6.6	1.5	0.90	29.3	32.4	27.1
0.2	2.5	6.4	5.4	5.8	0.2	2.5	5.8	5.7	4.8	1.5	0.95	6.8	8.7	8.4
0.2	3.0	5.6	5.3	5.5	0.2	3.0	5.1	5.3	5.1	2.0	0.80	99.1	99.1	99.1
0.8	1.5	5.5	4.0	4.5	0.8	1.5	3.9	3.7	3.9	2.0	0.90	13.9	13.9	10.1
0.8	2.0	4.6	3.7	3.6	0.8	2.0	3.1	3.1	2.1	2.0	0.95	11.6	12.7	12.1
0.8	2.5	3.7	4.3	4.7	0.8	2.5	6.7	6.8	4.9	2.5	0.80	99.7	99.7	99.7
0.8	3.0	4.1	4.6	5.3	0.8	3.0	11.8	13.4	10.1	2.5	0.90	9.3	9.4	7.6
										2.5	0.95	13.5	14.6	15.5

(a) Modèle simulé : ARA $_{\infty}$ (b) Modèle simulé : ARA $_1$ (c) Modèle simulé : QR

TABLE 5.1 – Un système de 30 défaillances ; statistiques PIT ; modèle testé : ARA $_{\infty}$

ρ	β	KS	CvM	AD	ρ	β	KS	CvM	AD	β	ρ	KS	CvM	AD
0.2	1.5	6.5	6.7	6.9	0.2	1.5	4.7	4.5	4.4	1.5	0.80	74.3	81.6	86.9
0.2	2.0	7.2	7.7	6.9	0.2	2.0	4.1	3.9	4.3	1.5	0.90	7.9	9.3	7.8
0.2	2.5	6.8	6.9	6.2	0.2	2.5	4.9	4.1	4.1	1.5	0.95	9.0	9.2	7.8
0.2	3.0	5.6	6.4	7.3	0.2	3.0	4.2	4.4	4.2	2.0	0.80	56.8	64.9	72.1
0.8	1.5	5.5	5.5	5.5	0.8	1.5	4.7	4.3	4.6	2.0	0.90	17.1	19.6	15.3
0.8	2.0	4.8	5.9	5.1	0.8	2.0	5.4	5.1	5.7	2.0	0.95	12.5	15.1	12.1
0.8	2.5	4.4	4.9	5.3	0.8	2.5	5.9	5.4	5.4	2.5	0.80	40.1	46.7	55.1
0.8	3.0	5.7	5.9	5.7	0.8	3.0	6.5	5.6	6.3	2.5	0.90	28.1	33.4	28.1
										2.5	0.95	13.0	15.5	13.3

(a) Modèle simulé : ARA $_1$ (b) Modèle simulé : ARA $_{\infty}$ (c) Modèle simulé : QR

TABLE 5.2 – Un système de 30 défaillances ; statistiques PIT ; modèle testé : ARA $_1$

β	ρ	KS	CvM	AD	ρ	β	KS	CvM	AD	ρ	β	KS	CvM	AD
1.5	0.80	4.8	4.9	5.0	0.2	1.5	6.2	6.1	6.2	0.2	1.5	5.5	5.5	5.8
1.5	0.90	5.8	5.5	5.8	0.2	2.0	6.5	7.0	7.4	0.2	2.0	4.5	4.8	6.3
1.5	0.95	4.7	4.3	4.7	0.2	2.5	7.9	8.5	8.5	0.2	2.5	5.5	5.9	5.7
2.0	0.80	5.1	4.4	4.5	0.2	3.0	8.7	8.9	8.6	0.2	3.0	4.0	4.1	4.4
2.0	0.90	4.4	4.2	4.3	0.8	1.5	4.6	4.3	4.5	0.8	1.5	6.7	6.7	7.5
2.0	0.95	5.5	5.4	5.6	0.8	2.0	5.5	5.8	6.3	0.8	2.0	8.4	8.8	10.4
2.5	0.80	4.7	4.8	4.5	0.8	2.5	6.3	7.3	7.6	0.8	2.5	8.1	8.8	9.9
2.5	0.90	4.6	4.5	4.3	0.8	3.0	7.0	7.2	7.9	0.8	3.0	8.3	8.9	10.4
2.5	0.95	4.5	4.5	4.3										

(a) Modèle simulé : QR (b) Modèle simulé : ARA $_1$ (c) Modèle simulé : ARA $_{\infty}$

TABLE 5.3 – Un système de 30 défaillances ; statistiques PIT ; modèle testé : QR

Tout d’abord, nous observons la première section de chaque tableau. Elle consiste à tester un modèle sur des données issues du même modèle. Si le test est bien construit, nous devons retrouver comme « puissance » l’erreur de première espèce, puisque cette dernière correspond au taux de rejet de l’hypothèse nulle sous cette même hypothèse nulle. Nous voyons dans les tables 5.1 à 5.3 que ce seuil est à peu près respecté. C’était aussi le cas dans [Cha+16].

Pour le reste des tableaux, plus le pourcentage est élevé, meilleur est le test. Nous observons que les tests d'adéquation ont beaucoup de mal à distinguer les modèles ARA_1 et ARA_∞ entre eux, quel que soit le sens du test et quels que soient les paramètres du modèle simulé. Les puissances sont d'au plus 13.4 %, ce qui est très faible. Dans [Cha+16], les puissances étaient plus élevées que les nôtres lors du test du modèle ARA_1 sur le modèle simulé ARA_∞ avec $\rho = 0.8$. En revanche, lorsque nous testons un modèle ARA sur des données simulées avec le modèle QR, les résultats sont extrêmement variables en fonction des paramètres de simulation. Pour les deux modèles ARA, les puissances sont plus élevées lorsque le modèle QR est simulé avec une faible efficacité de maintenance, $\rho = 0.8$. Cela s'explique par l'écrasement très rapide des durées inter-défaillances dans ce modèle où, rappelons-le, ces durées sont stochastiquement multipliées par ρ à chaque nouvelle défaillance. Si ρ est éloigné de 1, il faut peu de temps avant que les défaillances ne s'accumulent. Les modèles ARA ne peuvent pas rendre compte de ce comportement, d'où les meilleures puissances avec $\rho = 0.8$, jusqu'à 100 %. Nous observons également lorsque $\rho = 0.8$ que plus β est faible, meilleures sont les puissances. Par ailleurs, lorsque le modèle simulé est QR, les puissances que nous avons trouvées sont plus fortes que dans [Cha+16] pour $\rho = 0.8$, mais plus faibles ailleurs, sauf pour $\beta = 1.5$ et $\rho = 0.95$.

Nous ne trouvons pas de différence flagrante entre les trois statistiques de test, hormis lorsque nous testons le modèle ARA_1 sur des données issues du modèle QR, où la statistique AD semble être meilleure que CvM, qui elle-même est meilleure que KS, lorsque $\rho = 0.8$. Quand $\rho \in \{0.9, 0.95\}$, CvM devient la statistique la plus performante, même si les puissances sont alors assez faibles.

Lorsque nous testons le modèle QR, les puissances sont très faibles, de l'ordre de 4 à 10 %, que le modèle simulé soit ARA_1 ou ARA_∞ . Cette observation se retrouve dans [Cha+16]. Le modèle QR semble donc offrir une grande souplesse, puisqu'il peut s'adapter à des données issues d'un autre modèle. Lors de l'estimation, le paramètre ρ trouvé doit probablement être proche de 1.

Pour le cas de systèmes simples, nous avons donc partiellement retrouvé les résultats de [Cha+16]. En particulier, l'article concluait que les modèles ARA_1 et QR étant très flexibles, ils étaient rarement rejetés par un test, ce que nous ne pouvons qu'appuyer. De manière générale, les puissances ne sont pas très élevées dans la plupart des cas de figure.

5.2 Première extension des tests au cas multi-systèmes

Notre première idée était d'adapter l'une des deux classes de tests exposées dans [Cha+16] : les statistiques basées sur la PIT. La première hypothèse nécessaire est que les systèmes soient indépendants et de même loi.

5.2.1 Procédure de test

Pour étendre cette procédure au cas multi-systèmes, nous calculons les $\{U_{j,i}(\theta)\}_{1 \leq j \leq \nu, 0 \leq i \leq n_j-1}$ sur les ν systèmes, $U_{j,\bullet}$ étant l'ensemble $\{U_i(\theta)\}_{0 \leq i \leq n_j-1}$ pour le j^e système, avec n_j le nombre de défaillances du j^e système. Nous notons que sous H_0 , ces variables devraient toujours être indépendantes et de loi uniforme, puisque nos systèmes sont indépendants. Notre idée est alors de calculer les trois statistiques de tests sur l'ensemble $\{U_{j,i}(\theta)\}_{1 \leq j \leq \nu, 0 \leq i \leq n_j-1}$, et d'avoir recours au *bootstrap* paramétrique de la même manière que dans [Cha+16].

5.2.2 Étude des résultats

Nous complétons maintenant notre étude par le cas où le jeu de données à tester comporte plusieurs systèmes identiquement distribués et indépendants. L'approche est la même, si ce n'est que les jeux de données simulés comportent maintenant 5 systèmes de 6 défaillances chacun. Ce premier choix a été fait pour conserver le même nombre de données : dans chaque jeu de données, 30 observations seront disponibles pour tester le modèle. Les puissances sont présentées dans les tables 5.4 à 5.6.

ρ	β	KS	CvM	AD	ρ	β	KS	CvM	AD	β	ρ	KS	CvM	AD
0.2	1.5	5.4	4.6	5.5	0.2	1.5	5.0	4.3	5.8	1.5	0.80	11.3	12.7	9.1
0.2	2.0	5.4	5.3	5.8	0.2	2.0	5.3	5.1	5.1	1.5	0.90	5.3	6.5	5.2
0.2	2.5	5.7	6.6	6.2	0.2	2.5	5.3	6.0	5.1	1.5	0.95	5.5	6.1	5.5
0.2	3.0	5.3	5.6	5.9	0.2	3.0	5.9	4.9	4.5	2.0	0.80	20.5	23.5	19.3
0.8	1.5	4.3	3.8	4.5	0.8	1.5	4.5	3.8	3.6	2.0	0.90	6.1	6.5	6.1
0.8	2.0	4.3	4.1	4.6	0.8	2.0	3.9	3.3	2.7	2.0	0.95	5.6	5.5	5.5
0.8	2.5	4.9	5.9	5.1	0.8	2.5	4.1	5.7	4.5	2.5	0.80	16.7	18.4	16.8
0.8	3.0	5.9	5.7	5.6	0.8	3.0	6.2	5.9	5.2	2.5	0.90	6.3	6.3	6.3
										2.5	0.95	6.0	5.7	5.9

(a) Modèle simulé : ARA_∞ (b) Modèle simulé : ARA_1 (c) Modèle simulé : QR

TABLE 5.4 – 5 systèmes de 6 défaillances chacun ; statistiques PIT ; modèle testé : ARA_∞

ρ	β	KS	CvM	AD	ρ	β	KS	CvM	AD	β	ρ	KS	CvM	AD
0.2	1.5	6.4	5.9	5.7	0.2	1.5	5.9	6.4	5.9	1.5	0.80	7.3	8.5	7.0
0.2	2.0	5.6	6.4	6.5	0.2	2.0	3.8	4.6	4.6	1.5	0.90	6.1	5.8	5.4
0.2	2.5	5.1	4.7	5.2	0.2	2.5	3.7	4.3	3.5	1.5	0.95	5.3	5.6	5.0
0.2	3.0	5.9	6.1	5.3	0.2	3.0	4.3	4.0	3.5	2.0	0.80	7.6	10.3	9.7
0.8	1.5	4.7	4.8	4.5	0.8	1.5	4.7	5.1	4.5	2.0	0.90	5.1	5.7	5.7
0.8	2.0	5.6	5.3	5.1	0.8	2.0	4.7	4.6	5.5	2.0	0.95	5.5	5.5	5.6
0.8	2.5	4.5	4.3	5.0	0.8	2.5	4.7	5.5	5.8	2.5	0.80	10.0	11.9	11.5
0.8	3.0	5.0	4.9	4.7	0.8	3.0	5.5	4.5	5.2	2.5	0.90	6.3	8.1	7.7
										2.5	0.95	5.5	6.1	5.5

(a) Modèle simulé : ARA_1 (b) Modèle simulé : ARA_∞ (c) Modèle simulé : QR

TABLE 5.5 – 5 systèmes de 6 défaillances chacun ; statistiques PIT ; modèle testé : ARA_1

Nous observons une dégringolade des puissances. Les erreurs de première espèce sont bien respectées, mais les puissances sont très faibles pour la plupart. Par rapport au cas d'un seul système, les données ne sont pas arrangées de la même manière. Cela peut avoir un impact sur la manière dont les tests distinguent les modèles. Par exemple, les premiers instants de défaillance ont tous la même loi, quel que soit le modèle, puisqu'il n'y a pas encore eu de

β	ρ	KS	CvM	AD
1.5	0.80	5.0	4.3	4.3
1.5	0.90	5.4	5.7	5.3
1.5	0.95	5.9	5.8	5.9
2.0	0.80	5.2	5.4	5.1
2.0	0.90	6.7	5.8	5.4
2.0	0.95	5.3	5.8	5.3
2.5	0.80	5.0	4.9	4.5
2.5	0.90	4.5	4.7	4.4
2.5	0.95	6.0	5.9	6.1

(a) Modèle simulé : QR

(b) Modèle simulé : ARA₁(c) Modèle simulé : ARA_∞

TABLE 5.6 – 5 systèmes de 6 défaillances chacun ; statistiques PIT ; modèle testé : QR

maintenance : d'après l'équation 1.10,

$$\mathbb{P}(T_1 \leq t) = 1 - \exp \left(- \int_0^t \underbrace{V_0'(s)}_{=1} \underbrace{h(V_0(s))}_{=s} ds \right). \quad (5.4)$$

Ces premiers instants de défaillances ne sont donc pas utiles pour différencier les modèles. Pour distinguer le modèle QR d'un modèle ARA, nous disposons ainsi de $30 - 1 = 29$ données pour un seul système de 30 défaillances, mais seulement $5 \times (6 - 1) = 25$ quand nous observons 5 systèmes de 6 défaillances chacun. Pour distinguer le modèle ARA₁ du modèle ARA_∞, la situation est même pire puisque les deux premiers instants de défaillance ont la même loi dans ces deux modèles : toujours d'après l'équation 1.10,

$$\mathbb{P}(T_2 \leq t \mid T_1) = 1 - \exp \left(- \int_{T_1}^t \underbrace{V_1'(s)}_{=1} \underbrace{h(V_1(s))}_{=s-\rho T_1} ds \right). \quad (5.5)$$

Il ne reste donc plus que $5 \times (6 - 2) = 20$ données pour les distinguer dans le cas multi-systèmes, au lieu de $30 - 2 = 28$ avec un seul système.

5.2.3 Avec des échantillons plus importants

Pour comprendre si les tests montrent des résultats médiocres (un seul système) voire mauvais (multi-systèmes) à cause de la quantité de données, nous avons reproduit les mêmes expérimentations avec cette fois une taille de jeux de données bien plus importante : 90 défaillances dans le cas d'un seul système, et 5 systèmes de 18 défaillances chacun ou 3 systèmes de 30 défaillances chacun pour le cas multi-systèmes. Dans tous les cas, le nombre total d'observations est égal à $1 \times 90 = 5 \times 18 = 3 \times 30 = 90$. Le cas 5×18 permet de comparer les résultats à ceux de la sous-section 5.2.2, où les jeux de données étaient de taille 5×6 . Nous avons donc le même nombre de systèmes mais trois fois plus de défaillances par système. Le cas 3×30 vient en comparaison avec les résultats de la sous-section 5.1.3, où il y avait un seul système de 30 défaillances. Les puissances sont présentées dans les tables 5.7 à 5.15.

Dans le cas simple système de 90 défaillances, les puissances sont améliorées par l'augmentation de la taille des données, par rapport au cas d'un système de 30 défaillances. Lorsque le

ρ	β	KS	CvM	AD	ρ	β	KS	CvM	AD	β	ρ	KS	CvM	AD
0.2	1.5	5.9	5.3	5.3	0.2	1.5	12.2	13.7	13.7	1.5	0.80	100.0	100.0	100.0
0.2	2.0	4.8	5.5	5.9	0.2	2.0	45.5	52.1	51.1	1.5	0.90	100.0	100.0	100.0
0.2	2.5	5.1	5.0	6.0	0.2	2.5	48.4	49.7	49.7	1.5	0.95	99.9	99.9	99.9
0.2	3.0	4.9	4.3	5.0	0.2	3.0	18.2	18.2	18.3	2.0	0.80	100.0	100.0	100.0
0.8	1.5	5.0	5.6	5.4	0.8	1.5	5.7	6.3	6.5	2.0	0.90	100.0	100.0	100.0
0.8	2.0	4.8	4.6	4.3	0.8	2.0	15.2	17.5	16.1	2.0	0.95	100.0	100.0	100.0
0.8	2.5	5.0	5.2	5.0	0.8	2.5	28.0	32.3	30.6	2.5	0.80	100.0	100.0	100.0
0.8	3.0	4.7	4.3	4.2	0.8	3.0	38.8	42.0	41.4	2.5	0.90	100.0	100.0	100.0
										2.5	0.95	100.0	100.0	100.0

(a) Modèle simulé : ARA_∞ (b) Modèle simulé : ARA_1 (c) Modèle simulé : QR

TABLE 5.7 – Un système de 90 défaillances ; statistiques PIT ; modèle testé : ARA_∞

ρ	β	KS	CvM	AD	ρ	β	KS	CvM	AD	β	ρ	KS	CvM	AD
0.2	1.5	5.8	6.5	5.8	0.2	1.5	3.7	2.7	2.6	1.5	0.80	100.0	100.0	100.0
0.2	2.0	6.5	5.9	6.3	0.2	2.0	4.8	5.0	5.2	1.5	0.90	100.0	100.0	100.0
0.2	2.5	5.9	5.8	5.2	0.2	2.5	5.7	5.5	5.7	1.5	0.95	39.9	46.5	44.7
0.2	3.0	4.6	5.6	5.2	0.2	3.0	6.0	6.4	5.7	2.0	0.80	100.0	100.0	100.0
0.8	1.5	4.7	5.1	4.8	0.8	1.5	6.1	6.1	5.9	2.0	0.90	100.0	100.0	100.0
0.8	2.0	5.6	5.2	4.5	0.8	2.0	6.9	5.7	7.7	2.0	0.95	14.3	15.5	13.3
0.8	2.5	4.2	4.7	5.1	0.8	2.5	7.3	8.5	10.3	2.5	0.80	100.0	100.0	100.0
0.8	3.0	6.1	6.1	6.1	0.8	3.0	8.5	8.9	10.8	2.5	0.90	100.0	100.0	100.0
										2.5	0.95	13.6	15.9	17.7

(a) Modèle simulé : ARA_1 (b) Modèle simulé : ARA_∞ (c) Modèle simulé : QR

TABLE 5.8 – Un système de 90 défaillances ; statistiques PIT ; modèle testé : ARA_1

β	ρ	KS	CvM	AD	ρ	β	KS	CvM	AD	ρ	β	KS	CvM	AD
1.5	0.80	4.8	3.7	3.7	0.2	1.5	6.8	7.5	7.8	0.2	1.5	4.3	4.4	4.3
1.5	0.90	4.2	4.8	5.1	0.2	2.0	11.0	11.1	10.8	0.2	2.0	5.1	5.7	5.9
1.5	0.95	5.5	4.8	4.9	0.2	2.5	14.3	17.8	16.9	0.2	2.5	7.1	7.3	8.3
2.0	0.80	5.5	4.7	4.8	0.2	3.0	23.1	26.3	26.2	0.2	3.0	7.7	9.1	9.9
2.0	0.90	3.9	4.1	4.2	0.8	1.5	6.3	6.5	6.3	0.8	1.5	8.0	8.1	9.9
2.0	0.95	4.8	4.3	4.1	0.8	2.0	4.8	5.3	5.5	0.8	2.0	11.8	13.5	16.4
2.5	0.80	4.5	4.4	4.3	0.8	2.5	4.9	5.4	5.5	0.8	2.5	12.7	14.1	17.4
2.5	0.90	5.2	5.3	5.1	0.8	3.0	6.3	5.6	5.5	0.8	3.0	13.7	14.6	18.0
2.5	0.95	4.0	3.7	4.1										

(a) Modèle simulé : QR (b) Modèle simulé : ARA_1 (c) Modèle simulé : ARA_∞

TABLE 5.9 – Un système de 90 défaillances ; statistiques PIT ; modèle testé : QR

ρ	β	KS	CvM	AD	ρ	β	KS	CvM	AD	β	ρ	KS	CvM	AD
0.2	1.5	5.2	5.7	5.9	0.2	1.5	5.2	5.9	5.2	1.5	0.80	99.3	99.7	99.5
0.2	2.0	6.1	5.6	5.9	0.2	2.0	4.9	5.3	5.5	1.5	0.90	23.3	28.3	29.9
0.2	2.5	4.7	5.3	5.6	0.2	2.5	5.5	4.9	4.9	1.5	0.95	14.5	16.9	17.5
0.2	3.0	4.9	5.3	4.8	0.2	3.0	5.1	5.3	4.9	2.0	0.80	97.7	98.9	98.6
0.8	1.5	5.3	5.4	5.2	0.8	1.5	5.1	5.2	4.1	2.0	0.90	32.9	40.8	42.7
0.8	2.0	4.2	3.5	3.6	0.8	2.0	15.2	20.3	16.9	2.0	0.95	11.1	12.8	13.7
0.8	2.5	5.6	5.0	4.5	0.8	2.5	36.2	46.2	43.1	2.5	0.80	63.6	66.3	71.8
0.8	3.0	5.3	5.1	4.5	0.8	3.0	51.6	66.3	63.9	2.5	0.90	37.9	48.1	52.7
										2.5	0.95	14.2	18.9	20.2

(a) Modèle simulé : ARA_∞ (b) Modèle simulé : ARA_1 (c) Modèle simulé : QR

TABLE 5.10 – 5 systèmes de 18 défaillances chacun ; statistiques PIT ; modèle testé : ARA_∞

modèle simulé est QR, les puissances atteignent même d'excellents niveaux sauf pour $\rho = 0.95$ quand le modèle testé est ARA_1 . Lorsque le modèle simulé est ARA_1 , les puissances sont moyennes, et quand le modèle simulé est ARA_∞ , les puissances restent mauvaises malgré une légère amélioration.

ρ	β	KS	CvM	AD	ρ	β	KS	CvM	AD	β	ρ	KS	CvM	AD
0.2	1.5	6.7	5.9	6.1	0.2	1.5	4.7	4.8	4.9	1.5	0.80	52.8	59.6	54.8
0.2	2.0	4.6	5.7	5.5	0.2	2.0	5.3	5.5	5.5	1.5	0.90	26.4	31.3	32.9
0.2	2.5	4.5	4.4	5.1	0.2	2.5	8.0	7.5	6.0	1.5	0.95	12.7	17.5	18.6
0.2	3.0	4.8	5.0	4.9	0.2	3.0	12.1	12.7	10.3	2.0	0.80	22.9	27.9	27.1
0.8	1.5	3.8	3.9	4.2	0.8	1.5	5.3	4.8	4.5	2.0	0.90	49.1	57.5	61.3
0.8	2.0	4.9	5.9	5.5	0.8	2.0	6.1	6.7	7.2	2.0	0.95	14.4	19.6	22.3
0.8	2.5	4.6	5.4	4.8	0.8	2.5	6.0	7.3	8.7	2.5	0.80	20.7	27.5	31.5
0.8	3.0	5.0	5.4	5.4	0.8	3.0	6.1	7.0	7.9	2.5	0.90	57.8	69.0	70.4
										2.5	0.95	14.3	22.0	24.3

(a) Modèle simulé : ARA₁ (b) Modèle simulé : ARA_∞ (c) Modèle simulé : QR

TABLE 5.11 – 5 systèmes de 18 défaillances chacun ; statistiques PIT ; modèle testé : ARA₁

β	ρ	KS	CvM	AD	ρ	β	KS	CvM	AD	ρ	β	KS	CvM	AD
1.5	0.80	4.8	4.7	4.8	0.2	1.5	4.5	4.2	4.8	0.2	1.5	5.0	5.2	5.5
1.5	0.90	4.4	5.5	5.2	0.2	2.0	4.4	5.1	5.7	0.2	2.0	6.1	6.3	7.1
1.5	0.95	4.5	4.8	5.0	0.2	2.5	6.3	6.8	7.4	0.2	2.5	7.9	8.3	10.5
2.0	0.80	5.2	5.0	5.0	0.2	3.0	5.5	6.2	6.1	0.2	3.0	9.0	9.1	10.6
2.0	0.90	5.5	5.7	6.1	0.8	1.5	6.1	6.9	7.3	0.8	1.5	8.1	7.8	9.3
2.0	0.95	6.1	5.7	5.3	0.8	2.0	10.9	11.6	12.9	0.8	2.0	11.1	12.8	16.7
2.5	0.80	5.9	6.1	5.1	0.8	2.5	13.0	17.1	19.0	0.8	2.5	13.9	15.0	19.1
2.5	0.90	4.8	5.1	5.8	0.8	3.0	20.1	24.1	27.0	0.8	3.0	12.9	14.5	17.2
2.5	0.95	5.6	6.0	5.6										

(a) Modèle simulé : QR (b) Modèle simulé : ARA₁ (c) Modèle simulé : ARA_∞

TABLE 5.12 – 5 systèmes de 18 défaillances chacun ; statistiques PIT ; modèle testé : QR

ρ	β	KS	CvM	AD	ρ	β	KS	CvM	AD	β	ρ	KS	CvM	AD
0.2	1.5	4.7	5.7	4.9	0.2	1.5	5.3	5.1	5.4	1.5	0.80	100.0	100.0	100.0
0.2	2.0	5.6	5.7	6.1	0.2	2.0	4.5	4.1	4.0	1.5	0.90	68.3	73.1	67.5
0.2	2.5	4.7	5.2	5.3	0.2	2.5	4.9	5.1	5.1	1.5	0.95	15.8	18.0	19.2
0.2	3.0	4.9	4.9	4.9	0.2	3.0	5.2	4.7	4.5	2.0	0.80	100.0	100.0	100.0
0.8	1.5	4.3	3.9	4.9	0.8	1.5	4.1	4.1	3.8	2.0	0.90	38.3	43.9	42.6
0.8	2.0	5.5	5.1	5.5	0.8	2.0	8.3	9.4	8.3	2.0	0.95	21.5	25.7	28.2
0.8	2.5	4.7	4.4	4.7	0.8	2.5	23.9	28.7	25.9	2.5	0.80	100.0	100.0	100.0
0.8	3.0	4.7	4.9	4.5	0.8	3.0	35.7	42.5	37.9	2.5	0.90	40.3	50.8	55.4
										2.5	0.95	27.5	36.7	39.9

(a) Modèle simulé : ARA_∞ (b) Modèle simulé : ARA₁ (c) Modèle simulé : QR

TABLE 5.13 – 3 systèmes de 30 défaillances chacun ; statistiques PIT ; modèle testé : ARA_∞

ρ	β	KS	CvM	AD	ρ	β	KS	CvM	AD	β	ρ	KS	CvM	AD
0.2	1.5	4.3	6.0	5.9	0.2	1.5	4.0	4.7	4.6	1.5	0.80	100.0	100.0	100.0
0.2	2.0	5.9	6.1	5.8	0.2	2.0	6.0	5.6	5.0	1.5	0.90	12.9	15.3	14.2
0.2	2.5	5.4	6.0	5.5	0.2	2.5	6.6	7.5	6.9	1.5	0.95	21.4	29.1	29.9
0.2	3.0	4.9	4.6	5.1	0.2	3.0	12.8	14.2	11.6	2.0	0.80	100.0	100.0	100.0
0.8	1.5	5.1	4.3	4.7	0.8	1.5	5.0	4.9	4.9	2.0	0.90	38.3	46.4	49.0
0.8	2.0	5.9	6.2	5.7	0.8	2.0	6.6	6.7	6.9	2.0	0.95	37.3	46.1	48.4
0.8	2.5	4.8	5.0	4.7	0.8	2.5	7.4	8.3	9.8	2.5	0.80	99.4	99.6	99.7
0.8	3.0	4.9	3.7	3.7	0.8	3.0	6.7	8.3	9.7	2.5	0.90	63.1	70.9	75.1
										2.5	0.95	42.5	53.7	55.7

(a) Modèle simulé : ARA₁ (b) Modèle simulé : ARA_∞ (c) Modèle simulé : QR

TABLE 5.14 – 3 systèmes de 30 défaillances chacun ; statistiques PIT ; modèle testé : ARA₁

Dans le cas de 5 systèmes de 18 défaillances chacun, nous observons par rapport au cas 5×6 une nette amélioration lorsque le modèle simulé est QR, surtout lorsque ρ est faible. Lorsque le modèle simulé est ARA, les puissances sont légèrement améliorées mais restent mauvaises.

β	ρ	KS	CvM	AD
1.5	0.80	5.4	5.5	5.1
1.5	0.90	4.4	4.3	3.7
1.5	0.95	3.7	4.3	4.2
2.0	0.80	4.7	5.5	5.4
2.0	0.90	5.2	5.3	5.5
2.0	0.95	4.5	5.0	5.3
2.5	0.80	5.3	5.5	5.5
2.5	0.90	4.8	4.6	4.7
2.5	0.95	5.7	4.8	4.7

ρ	β	KS	CvM	AD
0.2	1.5	6.6	6.1	5.9
0.2	2.0	5.8	4.8	5.3
0.2	2.5	8.6	8.5	8.1
0.2	3.0	11.6	13.3	12.9
0.8	1.5	4.4	4.9	5.3
0.8	2.0	7.7	8.2	8.5
0.8	2.5	10.4	11.5	12.0
0.8	3.0	12.9	13.8	15.9

ρ	β	KS	CvM	AD
0.2	1.5	4.5	5.1	5.4
0.2	2.0	5.9	6.8	7.2
0.2	2.5	5.9	6.4	7.9
0.2	3.0	8.2	9.2	10.0
0.8	1.5	7.5	7.5	10.2
0.8	2.0	12.1	14.0	16.9
0.8	2.5	13.4	15.5	19.6
0.8	3.0	12.8	13.6	17.7

(a) Modèle simulé : QR (b) Modèle simulé : ARA_1 (c) Modèle simulé : ARA_∞

TABLE 5.15 – 3 systèmes de 30 défaillances chacun ; statistiques PIT ; modèle testé : QR

Enfin, dans le cas de 3 systèmes de 30 défaillances chacun, nous retrouvons une large hausse des puissances par rapport au cas 1×30 lorsque le modèle simulé est QR. Dans tous les autres cas, il y a une légère amélioration, qui ne parvient pas à hisser les puissances à des niveaux raisonnables. Nous notons que ces puissances sont moins bonnes que le cas 1×90 , sauf en testant ARA_1 sur des données simulées avec ARA_∞ pour $\rho = 0.2$ ou en testant QR sur des données simulées ARA_1 avec $\rho = 0.8$.

Dans la plupart des situations, les puissances sont améliorées par l'augmentation de la taille des données. Seuls certains cas mettent en évidence un problème : avec un seul système, lorsque nous testons le modèle ARA_1 ou QR sur des données simulées avec le modèle ARA_∞ , ou bien le modèle QR sur des données issues de ARA_1 avec $\rho = 0.8$, les puissances peinent à se hausser au delà de la valeur de l'erreur de première espèce. Cela peut indiquer que les tests sont biaisés dans ces cas. Nous faisons la même remarque dans le cas multi-systèmes lorsque nous testons le modèle ARA_∞ sur des données simulées avec ARA_1 et $\rho = 0.2$.

Il est intéressant de noter que lorsque les données sont issues d'un modèle QR, il est très peu probable de pouvoir y ajuster un modèle ARA, que ce soit avec un seul ou plusieurs systèmes. Nous avons déjà avancé une raison à cela dans la sous-section 5.1.3 : les durées inter-défaillances du modèle QR sont de loi très peu semblable à celle des durées inter-défaillances des modèles ARA. Cette particularité explique les puissances maximales obtenues dans cette configuration.

Concernant les différences entre les trois statistiques, nous constatons que CvM et AD donnent des puissances très similaires, et que KS est légèrement en deçà.

Nous concluons donc que la taille des échantillons a effectivement un impact sur les puissances de test. De plus, à nombre d'observations constant, il vaut mieux avoir plus de défaillances par système que plus de systèmes. Cela se comprend aisément lorsque nous nous rappelons de ce sur quoi portent les tests : il s'agit du modèle de maintenance corrective, qui s'observera d'autant mieux qu'il y a plus de défaillances par système.

5.3 Nouvelles statistiques de test

Face aux mauvaises performances des tests avec la procédure PIT dans le cas multi-systèmes et pour une taille d'échantillon raisonnable, nous avons cherché une autre manière d'utiliser les $\{U_{j,i}(\theta)\}_{1 \leq j \leq \nu, 0 \leq i \leq n-1}$, avec cette fois leur structure matricielle, où j est l'indice du système et i est l'indice de la défaillance. Il est donc maintenant nécessaire d'avoir le même nombre de défaillances n pour tous les systèmes.

5.3.1 Construction des statistiques

Nous développons ici la méthode de construction des nouvelles statistiques de test.

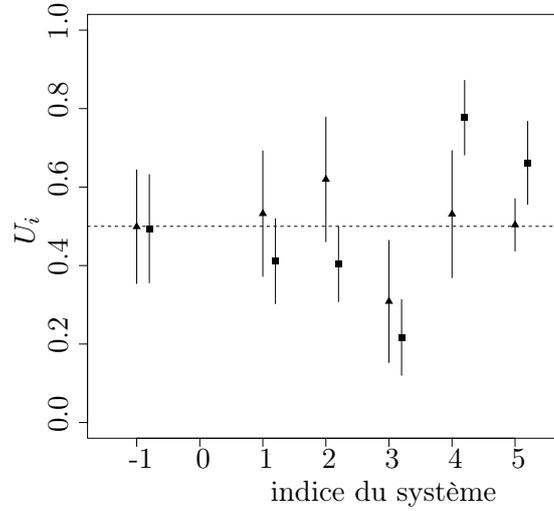
Nous avons simulé des jeux de données avec un premier modèle puis calculé les $\{U_{j,i}(\hat{\theta})\}_{1 \leq j \leq \nu, 0 \leq i \leq n-1}$ avec ce même modèle et un autre modèle, pour comparer le comportement de ces variables sous H_0 et sous H_1 . L'idée était de comparer ce qu'il se passe système par système (pour les différents i), ou défaillance par défaillance (pour les différents j).

En figure 5.1, nous avons représenté la moyenne (points) et l'écart-type (barres) des $\{U_{j,\bullet}(\hat{\theta})\}_{1 \leq j \leq \nu}$ système par système. Sur ce graphe, deux jeux de données sont représentés. Les triangles correspondent au jeu de données simulé avec le modèle testé (ici QR), tandis que les carrés correspondent au jeu de données simulé avec un autre modèle (ici ARA_∞). Nous avons calculé les $\{U_{j,i}(\hat{\theta})\}_{1 \leq j \leq \nu, 0 \leq i \leq n-1}$ pour ces deux jeux de données sous l'hypothèse nulle d'un modèle QR. La première abscisse, -1 , correspond à la moyenne (ordonnée du triangle ou du carré) et à l'écart-type (longueur de la barre) de l'ensemble des $\{U_{j,i}(\hat{\theta})\}_{1 \leq j \leq \nu, 0 \leq i \leq n-1}$. Nous ne voyons pas de différence frappante entre les deux jeux de données, ce qui indique que la distribution des $\{U_{j,i}(\hat{\theta})\}_{1 \leq j \leq \nu, 0 \leq i \leq n-1}$ pourrait être proche dans les deux cas. Cela pourrait expliquer le manque de puissance des tests multi-systèmes exposés en section 5.2. Ensuite, pour chaque abscisse entre 1 et le nombre de systèmes (ici 5), nous avons représenté la même information mais seulement pour le système indexé par l'abscisse. Par exemple, les points et les barres en abscisse 3 correspondent aux $\{U_{3,i}(\hat{\theta})\}_{1 \leq i \leq n}$, c'est-à-dire les variables transformées pour le troisième système. Nous pouvons voir des différences : certains carrés sont loin de l'espérance des $\{U_{j,i}(\hat{\theta})\}_{1 \leq j \leq \nu, 0 \leq i \leq n-1}$ (puisque sous l'hypothèse nulle ces variables devraient être proches d'une loi uniforme sur $[0, 1]$), et l'écart-type semble faible comparé à celui des triangles.

Tout d'abord, nous construisons une matrice $\nu \times n$ avec les $\{U_{j,i}(\hat{\theta})\}_{1 \leq j \leq \nu, 0 \leq i \leq n-1}$. Ensuite nous calculons ligne par ligne l'écart-type des $\{U_{j,i}(\hat{\theta})\}_{0 \leq i \leq n-1}$. Nous obtenons un écart-type par système. Nous calculons la moyenne sur tous les systèmes de ces écarts-types :

$$M^1 := \frac{1}{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \left(U_{j,i}(\hat{\theta}) - \overline{U_{j,\bullet}(\hat{\theta})} \right)^2}. \quad (5.6)$$

Ensuite nous mélangeons aléatoirement tous les $\{U_{j,i}(\hat{\theta})\}_{1 \leq j \leq \nu, 0 \leq i \leq n-1}$ et nous reconstruisons une matrice $\nu \times n$ avec ces variables mélangées. Nous calculons M_1^1 de la même manière que

FIGURE 5.1 – Moyennes et écarts-types des U_i

M^1 mais avec les $\{U_{j,i}(\hat{\theta})\}_{1 \leq j \leq \nu, 0 \leq i \leq n-1}$ mélangés. Nous répétons cette procédure 1 000 fois de manière à obtenir un ensemble $\{M_k^1\}_{1 \leq k \leq 1000}$. Si les $\{U_{j,i}(\hat{\theta})\}_{1 \leq j \leq \nu, 0 \leq i \leq n-1}$ sont indépendants, ce qui devrait être le cas sous H_0 , alors le mélange n'affectera pas la valeur de M_k^1 . Nous comparons donc les $\{M_k^1\}_{1 \leq k \leq 1000}$ à la valeur M^1 calculée sur la matrice initiale, en calculant notre première statistique de test, qui est la moyenne de la différence absolue entre M^1 et les $\{M_k^1\}_{1 \leq k \leq 1000}$:

$$S_1 = \frac{1}{1000} \sum_{k=1}^{1000} |M^1 - M_k^1|. \quad (5.7)$$

La statistique S_2 est calculée de manière similaire mais nous transposons la matrice : au lieu de comparer les systèmes sur leurs défaillances successives, nous comparons les i^e défaillances sur les différents systèmes. Nous avons :

$$M^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\frac{1}{\nu-1} \sum_{j=1}^{\nu} (U_{j,i}(\hat{\theta}) - \overline{U_{\bullet,i}(\hat{\theta})})^2} \quad (5.8)$$

et

$$S_2 = \frac{1}{1000} \sum_{k=1}^{1000} |M^2 - M_k^2|. \quad (5.9)$$

Si le modèle testé est bien celui dont sont issues les données, S_1 et S_2 devraient être faibles.

Les statistiques S_3 et S_4 sont calculées de même si ce n'est qu'au lieu d'agréger les colonnes (pour S_3 , ligne par ligne) ou les lignes (pour S_4 , colonne par colonne) avec un écart-type, nous les agrégeons avec une moyenne. Ainsi,

$$M^3 := \frac{1}{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} \overline{U_{j,\bullet}(\hat{\theta})}, \quad (5.10)$$

$$S_3 = \frac{1}{1000} \sum_{k=1}^{1000} |M^3 - M_k^3|, \quad (5.11)$$

$$M^4 := \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \overline{U_{\bullet,i}(\hat{\theta})}, \quad (5.12)$$

et

$$S_4 = \frac{1}{1000} \sum_{k=1}^{1000} |M^4 - M_k^4|. \quad (5.13)$$

5.3.2 Étude des résultats

De même que pour les tests PIT présentés en section 5.2, nous étudions ici les puissances obtenues avec les nouvelles statistiques de test, notées de S_1 à S_4 . Les jeux de données simulés comportent 5 systèmes de 6 défaillances chacun. Les résultats sont donnés dans les tables 5.16 à 5.18.

ρ	β	S_1	S_2	S_3	S_4	ρ	β	S_1	S_2	S_3	S_4	β	ρ	S_1	S_2	S_3	S_4
0.2	1.5	4.7	4.7	5.1	5.3	0.2	1.5	6.3	4.2	4.1	4.8	1.5	0.80	20.8	6.9	3.9	3.5
0.2	2.0	4.5	4.9	4.5	4.6	0.2	2.0	4.7	4.2	4.7	5.5	1.5	0.90	9.3	4.6	4.3	4.1
0.2	2.5	4.7	5.5	5.9	4.9	0.2	2.5	5.1	5.7	4.1	5.2	1.5	0.95	7.5	4.9	5.7	4.3
0.2	3.0	5.0	5.2	4.8	4.7	0.2	3.0	3.7	5.8	4.4	4.9	2.0	0.80	23.4	20.8	3.7	3.0
0.8	1.5	4.9	5.7	5.5	5.3	0.8	1.5	5.6	4.7	5.6	5.5	2.0	0.90	7.5	10.6	4.9	4.5
0.8	2.0	5.1	4.3	4.7	4.7	0.8	2.0	3.9	6.9	4.7	4.3	2.0	0.95	7.9	5.4	6.0	4.8
0.8	2.5	5.6	4.5	5.2	4.7	0.8	2.5	4.2	12.2	4.9	4.1	2.5	0.80	21.3	39.3	4.1	2.9
0.8	3.0	4.9	5.1	5.1	4.6	0.8	3.0	3.4	18.1	4.7	3.9	2.5	0.90	8.8	15.4	4.8	3.8
												2.5	0.95	7.1	8.6	5.8	3.8

(a) Modèle simulé : ARA_∞ (b) Modèle simulé : ARA_1

(c) Modèle simulé : QR

TABLE 5.16 – 5 systèmes de 6 défaillances chacun ; nouvelles statistiques ; modèle testé : ARA_∞

ρ	β	S_1	S_2	S_3	S_4	ρ	β	S_1	S_2	S_3	S_4	β	ρ	S_1	S_2	S_3	S_4
0.2	1.5	6.2	5.1	5.5	5.5	0.2	1.5	3.4	5.9	5.5	6.1	1.5	0.80	25.8	3.1	4.7	3.3
0.2	2.0	5.1	4.7	5.3	4.4	0.2	2.0	3.8	6.5	5.6	4.7	1.5	0.90	11.3	4.5	5.5	4.7
0.2	2.5	4.4	4.3	5.1	4.4	0.2	2.5	3.1	8.3	4.6	5.1	1.5	0.95	8.5	4.5	4.8	4.3
0.2	3.0	4.3	5.4	4.5	4.5	0.2	3.0	1.9	10.9	4.7	6.1	2.0	0.80	40.3	2.3	5.2	3.6
0.8	1.5	4.6	5.9	4.4	6.3	0.8	1.5	5.0	6.6	4.0	5.7	2.0	0.90	14.7	3.5	5.0	5.9
0.8	2.0	6.6	4.9	5.3	4.7	0.8	2.0	3.4	6.7	4.8	5.6	2.0	0.95	8.1	5.1	6.1	4.9
0.8	2.5	4.5	5.2	5.9	4.3	0.8	2.5	2.6	7.3	5.5	5.7	2.5	0.80	47.9	2.0	5.7	3.4
0.8	3.0	6.3	4.9	4.7	6.3	0.8	3.0	2.2	8.8	4.2	5.2	2.5	0.90	19.3	3.7	4.4	5.0
												2.5	0.95	10.7	3.7	5.6	5.7

(a) Modèle simulé : ARA_1 (b) Modèle simulé : ARA_∞

(c) Modèle simulé : QR

TABLE 5.17 – 5 systèmes de 6 défaillances chacun ; nouvelles statistiques ; modèle testé : ARA_1

Les statistiques S_1 , S_3 et S_4 montrent des résultats très décevants : les puissances ne se hissent pas au dessus des 5 % de l'erreur de première espèce. Pire : pour S_1 , nous observons même des valeurs bien en deçà, ce qui indique que les tests issus de cette statistique sont biaisés, bien que certaines valeurs soient meilleures (notamment pour des données simulées avec QR). Seule la statistique S_2 obtient des résultats un peu meilleurs, tout en restant plutôt médiocres. Ils sont à peu près comparables aux résultats des statistiques PIT, hormis lorsque nous testons le modèle QR sur des données issues d'un modèle ARA avec $\rho = 0.2$, où les nouvelles statistiques sont bien meilleures (mais encore insuffisamment puissantes).

β	ρ	S_1	S_2	S_3	S_4
1.5	0.80	4.7	5.6	5.7	4.6
1.5	0.90	5.1	5.1	5.0	4.3
1.5	0.95	4.6	4.8	4.9	5.2
2.0	0.80	5.9	4.6	5.2	5.6
2.0	0.90	5.7	5.5	5.8	5.9
2.0	0.95	5.1	4.7	4.5	6.1
2.5	0.80	6.4	5.5	5.3	4.5
2.5	0.90	4.3	5.5	4.1	4.4
2.5	0.95	5.1	4.4	4.4	4.5

ρ	β	S_1	S_2	S_3	S_4
0.2	1.5	0.9	8.9	5.2	6.3
0.2	2.0	0.1	14.9	5.4	3.9
0.2	2.5	0.1	23.2	4.7	4.4
0.2	3.0	0.0	28.6	4.2	4.8
0.8	1.5	1.5	6.9	4.3	5.0
0.8	2.0	0.6	6.1	4.2	3.9
0.8	2.5	0.5	7.0	4.5	3.7
0.8	3.0	0.2	8.3	4.1	3.9

ρ	β	S_1	S_2	S_3	S_4
0.2	1.5	0.6	9.1	5.9	4.5
0.2	2.0	0.3	18.3	4.5	4.3
0.2	2.5	0.0	28.7	4.9	4.4
0.2	3.0	0.0	37.6	4.0	4.2
0.8	1.5	1.9	5.1	4.3	4.7
0.8	2.0	1.6	7.4	5.1	4.6
0.8	2.5	1.1	7.9	4.7	4.1
0.8	3.0	1.1	10.1	3.7	4.1

(a) Modèle simulé : QR (b) Modèle simulé : ARA₁ (c) Modèle simulé : ARA_∞

TABLE 5.18 – 5 systèmes de 6 défaillances chacun ; nouvelles statistiques ; modèle testé : QR

5.3.3 Avec des échantillons plus importants

À titre de comparaison, nous donnons également dans les tableaux 5.19 à 5.24 les puissances des nouvelles statistiques sur des jeux de données comprenant 5 systèmes de 18 défaillances chacun ou 3 systèmes de 30 défaillances chacun.

ρ	β	S_1	S_2	S_3	S_4
0.2	1.5	6.0	4.7	5.1	6.3
0.2	2.0	6.0	5.1	5.2	5.3
0.2	2.5	5.5	5.6	5.5	6.3
0.2	3.0	4.9	5.9	4.3	6.0
0.8	1.5	4.9	5.3	5.6	5.1
0.8	2.0	4.3	4.8	4.6	6.0
0.8	2.5	5.1	5.4	5.9	5.3
0.8	3.0	4.3	4.1	5.2	5.9

ρ	β	S_1	S_2	S_3	S_4
0.2	1.5	5.6	4.9	4.7	5.7
0.2	2.0	4.7	4.8	5.2	4.7
0.2	2.5	4.3	6.4	4.5	3.5
0.2	3.0	3.6	5.1	4.6	5.3
0.8	1.5	4.1	6.7	4.6	4.5
0.8	2.0	2.5	10.4	4.4	2.9
0.8	2.5	2.3	12.7	3.1	3.2
0.8	3.0	1.4	15.6	2.4	2.0

β	ρ	S_1	S_2	S_3	S_4
1.5	0.80	0.0	100.0	6.5	3.3
1.5	0.90	4.0	83.0	5.6	2.3
1.5	0.95	4.8	31.0	3.2	3.9
2.0	0.80	0.3	100.0	8.7	3.8
2.0	0.90	1.7	94.5	6.1	3.1
2.0	0.95	1.5	64.7	6.4	4.1
2.5	0.80	27.9	100.0	5.6	2.7
2.5	0.90	1.5	94.4	6.9	2.9
2.5	0.95	1.4	84.1	5.5	3.0

(a) Modèle simulé : ARA_∞ (b) Modèle simulé : ARA₁ (c) Modèle simulé : QR

TABLE 5.19 – 5 systèmes de 18 défaillances chacun ; nouvelles statistiques ; modèle testé : ARA_∞

ρ	β	S_1	S_2	S_3	S_4
0.2	1.5	5.9	4.4	5.2	5.9
0.2	2.0	5.2	4.6	5.4	4.0
0.2	2.5	5.7	5.1	5.5	6.0
0.2	3.0	5.3	5.7	6.2	4.3
0.8	1.5	5.0	4.5	6.3	5.6
0.8	2.0	5.3	5.1	5.2	5.1
0.8	2.5	5.8	4.9	4.7	5.1
0.8	3.0	5.8	5.1	5.1	5.1

ρ	β	S_1	S_2	S_3	S_4
0.2	1.5	2.7	5.7	3.9	5.5
0.2	2.0	1.3	10.2	3.9	4.8
0.2	2.5	0.3	15.3	3.7	3.7
0.2	3.0	0.2	22.5	3.2	4.7
0.8	1.5	2.3	5.7	5.1	6.0
0.8	2.0	1.7	6.7	4.9	4.9
0.8	2.5	1.7	7.2	5.7	4.3
0.8	3.0	1.4	7.7	4.3	5.4

β	ρ	S_1	S_2	S_3	S_4
1.5	0.80	81.2	97.4	5.9	4.2
1.5	0.90	58.7	7.1	5.2	4.1
1.5	0.95	28.6	4.4	5.3	4.6
2.0	0.80	92.4	96.3	6.1	3.7
2.0	0.90	72.3	4.2	3.3	4.0
2.0	0.95	33.9	3.9	5.3	4.4
2.5	0.80	95.6	92.4	5.3	3.3
2.5	0.90	78.1	3.8	5.1	4.1
2.5	0.95	41.3	3.4	5.1	5.0

(a) Modèle simulé : ARA₁ (b) Modèle simulé : ARA_∞ (c) Modèle simulé : QR

TABLE 5.20 – 5 systèmes de 18 défaillances chacun ; nouvelles statistiques ; modèle testé : ARA₁

Les puissances des statistiques S_3 et S_4 restent très faibles. Il n'y a qu'une légère augmentation pour 3×30 lorsque nous testons un modèle ARA sur des données simulées avec QR mais les puissances sont toujours mauvaises. Celles de S_1 sont tout aussi faibles, parfois plus faibles encore que dans le cas 5×6 , et passent même en dessous des 5 % de l'erreur de première espèce dans beaucoup de cas. Pour cette statistique, il n'y a qu'en testant le modèle ARA₁ sur des données issues de QR que les puissances sont améliorées. Celles de S_2 montent parfois jusqu'au maximum, notamment en testant un modèle ARA sur des données issues de

β	ρ	S_1	S_2	S_3	S_4
1.5	0.80	4.3	5.2	5.5	6.1
1.5	0.90	4.9	5.0	5.6	5.5
1.5	0.95	6.1	4.9	4.3	4.6
2.0	0.80	5.7	5.5	4.9	4.7
2.0	0.90	5.6	4.9	5.8	5.5
2.0	0.95	5.1	4.7	4.4	6.2
2.5	0.80	5.1	5.3	4.6	4.9
2.5	0.90	5.9	4.7	4.9	4.9
2.5	0.95	4.9	5.4	4.7	4.9

ρ	β	S_1	S_2	S_3	S_4
0.2	1.5	1.1	9.7	5.5	4.5
0.2	2.0	0.1	21.7	4.4	5.9
0.2	2.5	0.4	35.1	5.4	4.3
0.2	3.0	0.1	50.1	5.5	6.0
0.8	1.5	0.9	6.3	4.6	5.0
0.8	2.0	0.2	8.9	3.7	4.3
0.8	2.5	0.1	11.8	4.1	4.2
0.8	3.0	0.1	17.0	3.3	4.1

ρ	β	S_1	S_2	S_3	S_4
0.2	1.5	0.5	8.5	4.7	5.9
0.2	2.0	0.1	19.6	4.2	4.7
0.2	2.5	0.1	29.6	4.1	4.5
0.2	3.0	0.0	41.2	3.7	5.5
0.8	1.5	1.6	6.6	4.1	4.3
0.8	2.0	0.8	6.8	3.9	4.1
0.8	2.5	1.3	6.2	3.4	5.4
0.8	3.0	0.7	7.0	4.2	4.5

(a) Modèle simulé : QR (b) Modèle simulé : ARA₁ (c) Modèle simulé : ARA_∞

TABLE 5.21 – 5 systèmes de 18 défaillances chacun ; nouvelles statistiques ; modèle testé : QR

ρ	β	S_1	S_2	S_3	S_4
0.2	1.5	4.5	5.8	5.0	4.5
0.2	2.0	4.9	4.9	5.2	4.8
0.2	2.5	5.1	5.6	5.5	4.5
0.2	3.0	4.7	5.3	5.6	5.6
0.8	1.5	5.2	5.5	4.7	5.9
0.8	2.0	6.0	4.8	5.1	4.7
0.8	2.5	4.6	5.7	5.2	5.9
0.8	3.0	5.4	4.8	4.9	5.6

ρ	β	S_1	S_2	S_3	S_4
0.2	1.5	5.4	6.2	4.9	4.3
0.2	2.0	4.4	7.1	5.1	4.0
0.2	2.5	3.7	3.9	4.3	4.7
0.2	3.0	3.7	4.7	5.1	5.3
0.8	1.5	2.9	6.7	4.1	3.9
0.8	2.0	1.5	14.1	3.7	3.4
0.8	2.5	1.9	11.1	3.2	3.4
0.8	3.0	0.8	7.2	1.9	3.7

β	ρ	S_1	S_2	S_3	S_4
1.5	0.80	0.0	100.0	9.3	11.2
1.5	0.90	0.3	99.1	7.4	2.4
1.5	0.95	1.9	61.8	6.1	3.9
2.0	0.80	0.0	100.0	9.2	11.9
2.0	0.90	0.0	99.9	8.1	2.6
2.0	0.95	0.4	90.3	5.6	3.3
2.5	0.80	0.0	100.0	7.9	10.1
2.5	0.90	0.1	100.0	7.5	2.5
2.5	0.95	0.2	99.1	5.8	3.1

(a) Modèle simulé : ARA_∞ (b) Modèle simulé : ARA₁ (c) Modèle simulé : QR

TABLE 5.22 – 3 systèmes de 30 défaillances chacun ; nouvelles statistiques ; modèle testé : ARA_∞

ρ	β	S_1	S_2	S_3	S_4
0.2	1.5	4.9	4.7	4.7	5.0
0.2	2.0	6.0	5.5	4.9	5.1
0.2	2.5	4.7	5.3	5.7	5.4
0.2	3.0	5.5	4.6	5.9	4.7
0.8	1.5	4.5	4.2	4.9	4.7
0.8	2.0	5.5	4.5	5.1	5.1
0.8	2.5	5.3	5.2	5.9	4.7
0.8	3.0	4.8	6.5	4.7	4.7

ρ	β	S_1	S_2	S_3	S_4
0.2	1.5	2.1	5.3	3.5	4.9
0.2	2.0	0.8	6.5	3.5	5.2
0.2	2.5	0.2	9.3	3.1	4.5
0.2	3.0	0.1	10.7	2.5	4.7
0.8	1.5	3.5	4.8	5.1	5.5
0.8	2.0	2.1	6.0	3.0	4.7
0.8	2.5	1.7	5.7	3.0	4.3
0.8	3.0	1.1	5.9	3.9	5.5

β	ρ	S_1	S_2	S_3	S_4
1.5	0.80	78.7	100.0	7.7	9.5
1.5	0.90	64.8	27.3	4.8	4.9
1.5	0.95	36.4	3.5	3.5	4.5
2.0	0.80	85.5	100.0	9.6	7.3
2.0	0.90	73.3	18.5	3.2	4.1
2.0	0.95	46.9	3.0	2.7	3.3
2.5	0.80	88.3	100.0	8.1	6.7
2.5	0.90	78.1	13.4	3.3	2.7
2.5	0.95	50.7	3.4	3.1	4.9

(a) Modèle simulé : ARA₁ (b) Modèle simulé : ARA_∞ (c) Modèle simulé : QR

TABLE 5.23 – 3 systèmes de 30 défaillances chacun ; nouvelles statistiques ; modèle testé : ARA₁

β	ρ	S_1	S_2	S_3	S_4
1.5	0.80	5.2	5.8	4.5	5.8
1.5	0.90	4.8	4.7	4.6	4.4
1.5	0.95	6.3	5.2	5.9	4.5
2.0	0.80	5.3	4.6	5.3	4.7
2.0	0.90	4.9	4.7	4.9	4.6
2.0	0.95	5.1	4.9	4.7	4.8
2.5	0.80	4.9	6.0	3.9	4.3
2.5	0.90	5.0	5.3	4.8	5.1
2.5	0.95	5.0	5.8	5.9	5.7

ρ	β	S_1	S_2	S_3	S_4
0.2	1.5	0.7	7.1	5.2	5.9
0.2	2.0	0.5	10.6	4.0	5.7
0.2	2.5	0.7	16.7	7.0	4.9
0.2	3.0	0.3	24.6	5.2	5.9
0.8	1.5	0.8	5.8	5.4	4.4
0.8	2.0	0.6	8.5	5.1	3.5
0.8	2.5	0.3	8.1	3.7	4.5
0.8	3.0	0.4	12.3	3.5	4.3

ρ	β	S_1	S_2	S_3	S_4
0.2	1.5	0.5	6.3	4.7	5.5
0.2	2.0	0.0	8.4	3.5	4.4
0.2	2.5	0.0	12.9	4.4	4.9
0.2	3.0	0.1	14.7	5.2	4.9
0.8	1.5	2.6	6.1	4.0	4.3
0.8	2.0	1.8	5.9	2.9	4.5
0.8	2.5	1.6	5.1	3.5	4.8
0.8	3.0	1.5	6.1	3.1	4.3

(a) Modèle simulé : QR (b) Modèle simulé : ARA₁ (c) Modèle simulé : ARA_∞

TABLE 5.24 – 3 systèmes de 30 défaillances chacun ; nouvelles statistiques ; modèle testé : QR

QR, mais leurs valeurs dépendent fortement des modèles et des paramètres.

5.4 Conclusion sur les tests d'adéquation

Dans ce chapitre, nous avons essayé de mettre en place des tests d'adéquation des modèles d'âge virtuel à des données issues de plusieurs systèmes indépendants et de même loi. Tout d'abord, nous avons cherché à généraliser une des classes de tests présentées dans [Cha+16] (les tests PIT), où les tests ne s'appliquaient qu'à des systèmes uniques. La procédure de test reste la même, passant par un *bootstrap* paramétrique pour le calcul de la loi des statistiques sous l'hypothèse nulle. Une étude numérique des puissances de tests a été menée pour valider nos tests. Malheureusement, ces puissances sont trop faibles pour être exploitables. Avec de plus grands jeux de données, les puissances augmentent, mais restent trop disparates en fonction des hypothèses alternatives choisies pour la simulation. Face à ces mauvais résultats, nous avons imaginé d'autres tests. Ceux-ci conservent l'idée du *bootstrap* paramétrique, mais de nouvelles statistiques de test sont employées. Ces dernières reposent sur des observations empiriques faites à une étape du calcul des statistiques PIT. Cependant, les résultats n'ont pas été ceux que nous espérions et les tests issus de ces nouvelles statistiques sont inemployables en pratique.

Ces résultats médiocres ne sont pas forcément une mauvaise nouvelle pour les modèles d'âge virtuel. En effet, ils signifient aussi que ces modèles sont suffisamment souples pour s'adapter à des données issues d'un modèle voisin. L'estimation du paramètre d'efficacité joue ici un rôle important : pour $\rho = 1$, les trois modèles étudiés sont identiques à un modèle de renouvellement (système AGAN après les maintenances), et pour $\rho = 0$, les modèles ARA sont identiques à un NHPP (système ABAO après les maintenances). Nous voyons donc que pour des valeurs d'efficacité proches de 0 ou de 1, les modèles sont suffisamment semblables pour s'adapter à diverses données.

Conclusion et perspectives

Conclusion

L'objectif de cette thèse était de concilier au sein de modèles statistiques différents types d'information autour de systèmes réparables, et d'utiliser cette information pour la prise de décision. L'usure intrinsèque du système et l'efficacité des maintenances, déjà prises en compte par les modèles d'âge virtuel, se trouvent maintenant liées à des covariables fixes ou dynamiques, porteuses d'enseignements sur les systèmes. Nous avons mis en place un cadre mathématique permettant de manipuler ces modèles. Deux méthodes de simulation ont été données, ainsi qu'une procédure d'inférence statistique. En effet, les modèles présentés dans cette thèse reposent sur plusieurs paramètres. Ces derniers doivent être estimés lorsqu'ils sont inconnus. L'estimation paramétrique a été minutieusement analysée dans une vaste étude numérique, afin de s'assurer de sa validité. La prise de décision a été abordée sous deux aspects : la maintenance préventive, et le choix du modèle. Une optimisation des maintenances préventives prenant en compte tous les aspects des informations disponibles a été rendue possible. Nous avons également pu trouver des façons d'obtenir le meilleur calendrier d'inspection des covariables, afin de diminuer encore les coûts des systèmes. Enfin, le développement de tests d'adéquation a permis le choix d'un modèle particulier d'âge virtuel face à des données.

Perspectives

Les limites de cette thèse offrent de nombreuses perspectives de recherche.

Simulation de données : Notamment, nous avons développé deux méthodes de simulation de données, qui reposent sur l'hypothèse que les covariables sont constantes par morceaux. Une avancée majeure serait de proposer d'autres algorithmes sans cette hypothèse, en partant par exemple de covariables affines par morceaux.

Estimation paramétrique (méthode) : De même, l'estimation se fait entièrement par maximisation numérique de la vraisemblance. L'article [SL17] propose par exemple une méthode d'estimation en plusieurs étapes pour des modèles à réparations minimales et avec des covariables fixes. Introduire des covariables dynamiques dans cette approche n'est pas trivial, d'où notre idée de nous restreindre d'abord à des covariables constantes par morceaux. Nous avons donné une première solution avec l'estimation par maximisation numérique, mais d'autres méthodes peuvent être recherchées.

Estimation paramétrique (propriétés) : Par ailleurs, les propriétés mathématiques de notre procédure d'estimation devraient être étudiées.

Calcul du seuil de maintenance préventive : Ensuite, l'optimisation du calendrier de maintenance préventive est un travail en cours. Notamment, le calcul du seuil pourrait probablement être amélioré, et les différentes méthodes comparées avec soin.

Applications : Nous avons vu qu'il y avait un avantage significatif à connaître une covariable, que ce soit sa valeur constante ou une valeur en une inspection, plutôt que de se fier à une valeur moyenne. Cette observation demande à être vérifiée sur des applications concrètes, qui ne manqueront pas d'exister. En effet, l'utilisation croissante de capteurs et de données dans notre monde laisse supposer que ces mesures peuvent être valorisées avec des modèles qui les prennent en compte pour des usages stratégiques, tels que la réduction des coûts de maintenance.

Optimisation du calendrier d'inspection : Nous avons ouvert une piste en optimisant la fréquence d'inspection ou la date d'une seule inspection. L'optimisation de tout un calendrier d'inspection est alors un formidable objectif de recherche.

Optimisation et estimation paramétrique : Lors de l'optimisation des maintenances préventives et de la fréquence d'inspection, nous avons supposé que les paramètres du modèle étaient connus. Il faut maintenant étudier l'influence de l'estimation paramétrique sur ces optimisations.

Optimisation et loi de la covariable : Nous avons supposé connus les paramètres de la loi de la covariable. Une prochaine étape serait de les estimer au fur et à mesure des inspections sur cette covariable.

Tests d'adéquation : Finalement, les mauvais résultats de nos tests d'adéquation devraient être moteur pour trouver un moyen de choisir le meilleur modèle en fonction de données multi-systèmes.

Notations

Système non réparable :

T	instant de défaillance d'un système non réparable
$F_T(\cdot)$	fonction de répartition de la variable aléatoire T
$f_T(\cdot)$	densité de la variable aléatoire T
$h_T(\cdot)$	taux de hasard de la variable aléatoire T

Modèles d'âge virtuel :

T_1, \dots, T_n	n premiers instants de défaillance d'un système réparable, avec $T_0 = 0$
$N = \{N_t\}_{t \geq 0}$	processus de comptage des défaillances
$\lambda = \{\lambda_t\}_{t \geq 0}$	intensité conditionnelle de défaillance
$E_{t_0^+}$ (resp. $E_{t_0^-}$)	pour un processus stochastique $\{E_t\}_{t \leq 0}$, limite à droite (resp. à gauche) de E_t lorsque t tend vers t_0
$\lambda_{t_0^+}$ (resp. $\lambda_{t_0^-}$)	limite à droite (resp. à gauche) de λ_t lorsque t tend vers t_0
\mathcal{H}_{t-}	histoire du processus de défaillance juste avant t
$h(\cdot)$	taux de hasard du premier instant de défaillance
\sum_a^b	somme nulle si $a > b$
V_i	âge virtuel d'un système après la i^{e} maintenance dans la modélisation de Kijima
A_i	degré de la i^{e} maintenance dans la modélisation de Kijima
$V_i(t), t \geq 0, i \geq 0$	âge virtuel à l'instant t après i défaillances dans la modélisation générique
$\mathbb{X}_t, t \geq 0$	covariable dépendante du temps à l'instant t

Simulation :

$F_{i+1}(\cdot), i \geq 0$	fonction de répartition conditionnelle de T_{i+1} connaissant le passé du processus et des covariables
----------------------------	--

$H(\cdot)$	taux de hasard cumulé du premier instant de défaillance : primitive de $h(\cdot)$ avec $H(0) = 0$
$F_{i+1}^{-1}(\cdot), i \geq 0$	inverse généralisée de $F_{i+1}(\cdot)$
$V_i^{-1}(\cdot), i \geq 0$	inverse généralisée de $V_i(\cdot)$
$H^{-1}(\cdot)$	inverse généralisée de $H(\cdot)$
L	nombre de paliers des covariables
$\tau_l, 0 \leq l \leq L - 1$	instants de discontinuité des covariables, avec $\tau_0 = 0$
$\chi_l, 1 \leq l \leq L$	valeurs prises par les covariables sur les paliers constants
$l_{(t)}, t \geq 0$	index du palier de covariables au temps t , c'est-à-dire $l_{(t)} = \sum_{l=0}^{L-1} \mathbf{1}_{\{\tau_l \leq t\}}$

Estimation :

\mathcal{T}	durée fixée d'observation des systèmes
$t_1, \dots, t_n, 1 \leq i \leq n$	observations des n premiers instants de défaillance d'un système
$\mathcal{L}(t_1, \dots, t_n; \alpha, \beta, \rho, \gamma)$	log-vraisemblance pour les observations $\{t_i\}_{1 \leq i \leq n}$ en fonction des paramètres α, β, ρ et γ
$h(\cdot) = \alpha \tilde{h}(\cdot)$	reparamétrisation de l'intensité initiale
$\varsigma_k, 0 \leq k \leq N_{\mathcal{T}^-} + L$	instant soit de saut de covariables soit de défaillance
$\ell_k, 0 \leq k \leq N_{\mathcal{T}^-} + L$	index du palier de covariables actuel, c'est-à-dire $\ell_k = \sum_{l=0}^L \mathbf{1}_{\{\tau_l \leq \varsigma_k\}} = l_{(\varsigma_k)}$
$\nu_k, 0 \leq k \leq N_{\mathcal{T}^-} + L$	nombre actuel de défaillances, c'est-à-dire $\nu_k = \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{T}^-} + 1} \mathbf{1}_{\{T_i \leq \varsigma_k\}} = N_{\varsigma_k}$
K	$K \in \{0, \dots, N_{\mathcal{T}^-} + L\}$ tel que $\varsigma_{K+1} = T_{N_{\mathcal{T}^-} + 1}$

Paramètres :

ν	nombre de systèmes d'un jeu de données
n	nombre de défaillances d'un système
η, β	paramètres d'échelle et de forme d'un PLP
α, β	paramètres de la loi log-linéaire
ρ	paramètre d'efficacité d'un modèle d'âge virtuel
γ	coefficients d'influence des covariables
$\theta, \theta_0, \hat{\theta}$	paramètre, sa vraie valeur pour la simulation, son estimation
$m_{\hat{\theta}_{(M)}}, s_{\hat{\theta}_{(M)}}^2$	moyenne et écart-type de l'ensemble des estimations $\hat{\theta}_{(M)} = (\hat{\theta}_m)_{1 \leq m \leq M}$
$EQM(\hat{\theta}_{(M)})$	EQM d'un paramètre θ

$EQMn(\hat{\theta}_{(M)})$

EQM normalisé d'un paramètre θ

Maintenances préventives :

$C_{rem}, C_{rép}, C_I$

coûts respectifs de maintenance préventive, de maintenance corrective, et d'inspection

$\{\tau_r\}_{r \geq 0}$

instants successifs de renouvellement d'un système

$\{x_r = \tau_r - \tau_{r-1}\}_{r \geq 1}$

durées entre deux renouvellement successifs

$\{R_t\}_{t \geq 0}$

processus de comptage des renouvellements

$M_r = C_{rem} + C_{rép}(N_{\tau_r} - N_{\tau_{r-1}}), r \geq 1$

coûts de maintenance sur chaque cycle

$C(t), t \geq 0$

coût total en fonction du temps

$G(\tau)$

coût moyen asymptotique par unité de temps

$\Phi(t), \phi(t)$

espérance de l'intensité cumulée et sa dérivée

$\mathcal{F}_t = \sigma\{N_s, s \leq t\}$

tribu engendrée par le processus de défaillance

$\Phi(t|\mathcal{F}_s), \phi(t|\mathcal{F}_s)$

espérance conditionnelle de l'intensité cumulée et sa dérivée

$PM(s, T) = (n; \tau_1, \dots, \tau_n | s, T)$

politique de maintenance préventive sur l'intervalle $[s, s + T]$ avec n maintenances aux instants $s + \tau_1, \dots, s + \tau_1 + \dots + \tau_n$

$\{\tau_i\}_{1 \leq i \leq n}$

durées entre deux maintenances préventives successives

$C(n; \tau_1, \dots, \tau_n | s, T)$

coût de la politique $PM(s, T) = (n; \tau_1, \dots, \tau_n | s, T)$

$PM^*(s, T) = (n^*; \tau_1^*, \dots, \tau_n^* | s, T)$

politique optimale sur l'intervalle $[s, s + T]$

$\tau_P, \tau_D, \tau_D^{(1)}, \tau_D^{(2)}, \tilde{\tau}_D$

prochain instant optimal de maintenance préventive selon diverses politiques

$s_\lambda = \phi(B^{-1}(C_M/C_R))$

seuil d'intensité au delà duquel une maintenance préventive est faite

t_0

instant théorique de maintenance préventive

a, b

paramètres de forme et d'intensité du processus Gamma

dt_{cov}

pas de simulation des covariables

$l_{(t)} = \lceil t/dt_{cov} \rceil$

entier strictement positif tel que $(l_{(t)} - 1)dt_{cov} < t \leq l_{(t)}dt_{cov}$

$I_i, i \geq 1$

instants successifs d'inspection des covariables

dt_{ins}

pas d'inspection des covariables

Bibliographie

- [AAR19] Per Kragh ANDERSEN, Jules ANGST et Henrik RAVN. “Modeling marginal features in studies of recurrent events in the presence of a terminal event”. In : *Lifetime data anal.* 25.4 (2019), p. 681-695 (cf. p. 33).
- [ACC98] Chang-Won AHN, Kyung-Chul CHAE et Gordon M CLARK. “Estimating parameters of the power law process with two measures of failure time”. In : *J. Qual. Technol.* 30.2 (1998), p. 127-132 (cf. p. 18).
- [And+12] Per K ANDERSEN et al. *Statistical models based on counting processes*. Springer Science & Business Media, 2012 (cf. p. 78).
- [AO16] Mouna AKACHA et Emmanuel O. OGUNDIMU. “Sensitivity analyses for partially observed recurrent event data”. In : *Pharm. stat.* 15.1 (2016), p. 4-14 (cf. p. 33).
- [Ara+16] M ARAMESH et al. “Estimating the remaining useful tool life of worn tools under different cutting parameters : A survival life analysis during turning of titanium metal matrix composites (Ti-MMCs)”. In : *CIRP J. Manuf. Sci. Technol.* 12 (2016), p. 35-43 (cf. p. 32).
- [BAB05] Ralf BENDER, Thomas AUGUSTIN et Maria BLETTNER. “Generating survival times to simulate Cox proportional hazards models”. In : *Stat. med.* 24.11 (2005), p. 1713-1723 (cf. p. 32).
- [BBD] Léa BRENIÈRE, Christophe BÉRENGUER et Laurent DOYEN. “Virtual Age Models : Monitoring Information Level and Quality of Parametric Estimation”. In : *67th Annual Reliability and Maintainability Symposium RAMS 2021*. à paraître (cf. p. 45, 60).
- [BDB] Léa BRENIÈRE, Laurent DOYEN et Christophe BÉRENGUER. “Optimization of preventive replacements dates and covariates inspections for repairable systems in varying environments”. Soumis à *IEEE Trans. Reliab.* (cf. p. 70).
- [BDB19] Léa BRENIÈRE, Laurent DOYEN et Christophe BÉRENGUER. “Simulation and Parameter Estimation for Virtual Age Models with Time-Dependent Covariates : Methodology and Performance Evaluation”. In : *Proc. 29th Eur. Saf. Reliab. Conf. - ESREL 2019*. Hannover, Germany, 2019, p. 1025-1032 (cf. p. 32, 34).
- [BDB20] Léa BRENIÈRE, Laurent DOYEN et Christophe BÉRENGUER. “Virtual Age Models With Time-Dependent Covariates : A Framework for Simulation, Parametric Inference and Quality of Estimation”. In : *Reliab. Eng. Syst. Saf.* 203 (2020), p. 107054 (cf. p. 32, 34, 45).
- [BH60] Richard BARLOW et Larry HUNTER. “Optimum preventive maintenance policies”. In : *Oper. res.* 8.1 (1960), p. 90-100 (cf. p. 70, 72, 80, 81, 96, 101, 110).
- [BM13] Laurent BORDES et Sophie MERCIER. “Extended geometric processes : Semiparametric estimation and application to reliability”. In : *J. Iran. Stat. Soc.* 12.1 (2013), p. 1-34 (cf. p. 21).

- [BP83] Mark BROWN et Frank PROSCHAN. “Imperfect repair”. In : *J. Appl. probab.* 20.4 (1983), p. 851-859 (cf. p. 10).
- [CCLG14] Karim CLAUDIO, Vincent COUALLIER et Yves LE GAT. “Integration of time-dependent covariates in recurrent events modelling : application to failures on drinking water networks”. In : *J. Soc. Fr. Stat.* 155.3 (2014), p. 62-77 (cf. p. 33).
- [Cha+16] Cécile CHAUVEL et al. “Parametric bootstrap goodness-of-fit tests for imperfect maintenance models”. In : *IEEE Trans. Reliab.* 65.3 (2016), p. 1343-1359 (cf. p. 3, 6, 111-117, 127).
- [Cox72] David R COX. “Regression models and life-tables”. In : *J. Royal Stat. Soc. : Ser. B (Methodol.)* 34.2 (1972), p. 187-202 (cf. p. 2, 32, 34).
- [Cro75] L. H. CROW. *Reliability Analysis For Complex, Repairable Systems*. Rapp. tech. 1975 (cf. p. 9).
- [DDB20] Laurent DOYEN, Remy DROUILHET et Léa BRENIÈRE. “A generic framework for generalized virtual age models”. In : *IEEE Trans. Reliab.* 69.2 (2020), p. 816-832 (cf. p. 2, 3, 6, 12, 23, 32, 34).
- [DFN16] Yann DIJOUX, Mitra FOULADIRAD et Dinh Tuan NGUYEN. “Statistical inference for imperfect maintenance models with missing data”. In : *Reliab. Eng. Syst. Saf.* 154 (2016), p. 84-96 (cf. p. 6).
- [DG04] Laurent DOYEN et Olivier GAUDOIN. “Classes of imperfect repair models based on reduction of failure intensity or virtual age”. In : *Reliab. Eng. Syst. Saf.* 84.1 (2004), p. 45-56 (cf. p. 2, 6, 10, 11, 14).
- [DGG19] Jean-Yves DAUXOIS, Soufiane GASMI et Olivier GAUDOIN. “Semiparametric inference for an extended geometric failure rate reduction model”. In : *J. Stat. Plan. Inference* 199 (2019), p. 14-28 (cf. p. 6).
- [DGS17] Laurent DOYEN, Olivier GAUDOIN et Annamraju SYAMSUNDAR. “On geometric reduction of age or intensity models for imperfect maintenance”. In : *Reliab. Eng. Syst. Saf.* 168 (2017), p. 40-52 (cf. p. 6).
- [DM18] Jean-Yves DAUXOIS et Eliane MAALOUF. “Statistical Inference in a Model of Imperfect Maintenance With Arithmetic Reduction of Intensity”. In : *IEEE Trans. Reliab.* 67.3 (2018), p. 987-997 (cf. p. 6).
- [DVZ19] Akash DEEP, Dharmaraj VEERAMANI et Shiyu ZHOU. “Event Prediction for Individual Unit Based on Recurrent Event Data Collected in Teleservice Systems”. In : *IEEE Trans. Reliab.* (2019) (cf. p. 33).
- [FL99] Lloyd D FISHER et Danyu Y LIN. “Time-dependent covariates in the Cox proportional-hazards regression model”. In : *Annu. rev. public health* 20.1 (1999), p. 145-157 (cf. p. 32).
- [Fos+06] Johan FOSEN et al. “Dynamic analysis of recurrent event data using the additive hazard model”. In : *Biom. J. : J. Math. Methods Biosci.* 48.3 (2006), p. 381-398 (cf. p. 33).
- [GC07] Gustavo L GILARDONI et Enrico A COLOSIMO. “Optimal maintenance time for repairable systems”. In : *J. qual. Technol.* 39.1 (2007), p. 48-53 (cf. p. 70).

- [GF11] Hamid Reza GOLMAKANI et Fahimeh FATTAHIPOUR. “Optimal replacement policy and inspection interval for condition-based maintenance”. In : *Int. J. Prod. Res.* 49.17 (2011), p. 5153-5167 (cf. p. 76).
- [GGP14] Massimiliano GIORGIO, Maurizio GUIDA et Gianpaolo PULCINI. “Repairable system analysis in presence of covariates and random effects”. In : *Reliab. Eng. Syst. Saf.* 131 (2014), p. 271-281 (cf. p. 33).
- [Gil+16] G. L. GILARDONI et al. “Dynamics of an Optimal Maintenance Policy for Imperfect Repair Models”. In : *Eur. J. Oper. Res.* 248.3 (2016), p. 1104-1112 (cf. p. 67, 70, 72, 76, 80-83, 85-90, 95, 97, 98, 101, 103, 107, 110).
- [GL07] Olivier GAUDOIN et James LEDOUX. *Modélisation aléatoire en fiabilité des logiciels*. Hermès Science, 2007 (cf. p. 8).
- [Han+18] Miao HAN et al. “Joint analysis of recurrent event data with additive–multiplicative hazards model for the terminal event time”. In : *Metrika* 81.5 (2018), p. 523-547 (cf. p. 33).
- [Han+20] Dongxiao HAN et al. “Variable selection in joint frailty models of recurrent and terminal events”. In : *Biometrics* (2020) (cf. p. 33).
- [He+17] Haijin HE et al. “Analysis of a fixed center effect additive rates model for recurrent event data”. In : *Comput. Stat. Data Anal.* 112 (2017), p. 186-197 (cf. p. 33).
- [HSS20] Jiawen HU, Jingyuan SHEN et Lijuan SHEN. “Periodic preventive maintenance planning for systems working under a Markovian operating condition”. In : *Comput. Ind. Eng.* 142 (2020), p. 106291 (cf. p. 6).
- [Huy19] Khac Tuan HUYNH. “A Hybrid Condition-Based Maintenance Model for Deteriorating Systems Subject to Nonmemoryless Imperfect Repairs and Perfect Replacements”. In : *IEEE Trans. Reliab.* (2019) (cf. p. 6).
- [Kij89] Masaaki KIJIMA. “Some results for repairable systems with general repair”. In : *J. Appl. probab.* 26.1 (1989), p. 89-102 (cf. p. 1, 6, 11, 12, 14, 16).
- [Kim19] Yang-Jin KIM. “Joint model for recurrent event data with a cured fraction and a terminal event”. In : *Biom. J.* (2019) (cf. p. 33).
- [KMS88] Masaaki KIJIMA, Hidenori MORIMURA et Yasusuke SUZUKI. “Periodical replacement problem without assuming minimal repair”. In : *Eur. J. Oper. Res.* 37.2 (1988), p. 194-203 (cf. p. 11, 12).
- [LB15] Ji Ye Janet LAM et Dragan BANJEVIC. “A myopic policy for optimal inspection scheduling for condition based maintenance”. In : *Reliab. Eng. Syst. Saf.* 144 (2015), p. 1-11 (cf. p. 76).
- [LBJ04] Diederik LUGTIGHEID, Dragan BANJEVIC et Andrew KS JARDINE. “Modelling repairable system reliability with explanatory variables and repair and maintenance actions”. In : *IMA J. Manag. Math.* 15.2 (2004), p. 89-110 (cf. p. 33).
- [Lee+18] Chi Hyun LEE et al. “Semiparametric regression analysis for alternating recurrent event data”. In : *Stat. med.* 37.6 (2018), p. 996-1008 (cf. p. 33).

- [LH14] Li LI et Timothy E HANSON. “A Bayesian semiparametric regression model for reliability data using effective age”. In : *Comput. Stat. Data Anal.* 73 (2014), p. 177-188 (cf. p. 33).
- [Li+16] Shanshan LI et al. “Recurrent event data analysis with intermittently observed time-varying covariates”. In : *Stat. med.* 35.18 (2016), p. 3049-3065 (cf. p. 33).
- [LLD18] Li-An LIN, Sheng LUO et Barry R DAVIS. “Bayesian regression model for recurrent event data with event-varying covariate effects and event effect”. In : *J. appl. stat.* 45.7 (2018), p. 1260-1276 (cf. p. 33).
- [Lov+00] CE LOVE et al. “A discrete semi-Markov decision model to determine the optimal repair/replacement policy under general repairs”. In : *Eur. j. oper. res.* 125.2 (2000), p. 398-409 (cf. p. 70).
- [LP19] Xiao LIU et Rong PAN. “Analysis of Large Heterogeneous Repairable System Reliability Data with Static System Attributes and Dynamic Sensor Measurement in Big Data Environment”. In : *Technometrics* (2019), p. 1-34 (cf. p. 33).
- [LPX10] Wenzhu LIAO, Ershun PAN et Lifeng XI. “Preventive maintenance scheduling for repairable system with deterioration”. In : *J. Intell. Manuf.* 21.6 (2010), p. 875-884 (cf. p. 70).
- [MAC20] Poulami MAITRA, Leila D. A. F. Amorim AMORIM et Jianwen CAI. “Multiplicative rates model for recurrent events in case-cohort studies”. In : *Lifetime Data Anal.* 26.1 (2020), p. 134-157 (cf. p. 33).
- [MC19] Sophie MERCIER et Inmaculada Torres CASTRO. “Stochastic comparisons of imperfect maintenance models for a gamma deteriorating system”. In : *Eur. J. Oper. Res.* 273.1 (2019), p. 237-248 (cf. p. 6).
- [MJ92] Viliam MAKIS et Andrew KS JARDINE. “Optimal replacement in the proportional hazards model”. In : *Inf. Syst. Oper. Res.* 30.1 (1992), p. 172-183 (cf. p. 76).
- [MMT19] Rubén MULLOR, Julio MULERO et Mario TROTTINI. “A modelling approach to optimal imperfect maintenance of repairable equipment with multiple failure modes”. In : *Comput. Ind. Eng.* 128 (2019), p. 24-31 (cf. p. 6).
- [MU11] Kamran S MOGHADDAM et John S USHER. “Preventive maintenance and replacement scheduling for repairable and maintainable systems using dynamic programming”. In : *Comput. Ind. Eng.* 60.4 (2011), p. 654-665 (cf. p. 70).
- [MZ18a] Jianing MAN et Qiang ZHOU. “Prediction of hard failures with stochastic degradation signals using Wiener process and proportional hazards model”. In : *Comput. Ind. Eng.* 125 (2018), p. 480-489 (cf. p. 32).
- [MZ18b] Jianing MAN et Qiang ZHOU. “Remaining useful life prediction for hard failures using joint model with extended hazard”. In : *Qual. Reliab. Eng. Int.* 34.5 (2018), p. 748-758 (cf. p. 32).
- [NDF17] Dinh Tuan NGUYEN, Yann DIJOUX et Mitra FOULADIRAD. “Analytical properties of an imperfect repair model and application in preventive maintenance scheduling”. In : *Eur. J. Oper. Res.* 256.2 (2017), p. 439-453 (cf. p. 70).

- [Nin+20] Jing NING et al. “Semiparametric modelling and estimation of covariate-adjusted dependence between bivariate recurrent events”. In : *Biometrics* (2020) (cf. p. 33).
- [NM65] J. A. NELDER et R. MEAD. “A Simplex Method for Function Minimization”. In : *Comput. J.* 7.4 (jan. 1965), p. 308-313 (cf. p. 46).
- [Nov15] Petr NOVÁK. “Regression Models for Repairable Systems”. In : *Methodol. Comput. Appl. Probab.* 17.4 (2015), p. 963-972 (cf. p. 33).
- [Pen+17] Lan PENG et al. “Mixed arithmetic reduction model for two-unit system maintenance”. In : *2017 Second International Conference on Reliability Systems Engineering (ICRSE)*. IEEE. 2017, p. 1-8 (cf. p. 6).
- [Pen+18] Weiwen PENG et al. “Reliability analysis of repairable systems with recurrent misuse-induced failures and normal-operation failures”. In : *Reliab. Eng. Syst. Saf.* 171 (2018), p. 87-98 (cf. p. 6).
- [Peñ16] Edsel A PEÑA. “Asymptotics for a class of dynamic recurrent event models”. In : *J. nonparametric stat.* 28.4 (2016), p. 716-735 (cf. p. 33).
- [SAB19] Fatemeh SAFAEI, Jafar AHMADI et N BALAKRISHNAN. “A repair and replacement policy for repairable systems based on probability and mean of profits”. In : *Reliab. Eng. Syst. Saf.* 183 (2019), p. 143-152 (cf. p. 70).
- [SDS19] Xiaowei SUN, Jieli DING et Liuquan SUN. “A semiparametric additive rates model for the weighted composite endpoint of recurrent and terminal events”. In : *Lifetime data anal.* (2019), p. 1-22 (cf. p. 33).
- [SL17] Václav SLIMÁČEK et Bo Henry LINDQVIST. “Nonhomogeneous Poisson process with nonparametric frailty and covariates”. In : *Reliab. Eng. Syst. Saf.* 167 (2017), p. 75-83 (cf. p. 33, 129).
- [SL63] WL SMITH et MR LEADBETTER. “On the renewal function for the Weibull distribution”. In : *Technometrics* 5.3 (1963), p. 393-396 (cf. p. 9).
- [SMB20] Gabriel SALLES, Sophie MERCIER et Laurent BORDES. “Semiparametric estimate of the efficiency of imperfect maintenance actions for a gamma deteriorating system”. In : *J. Stat. Plan. Inference* 206 (2020), p. 278-297 (cf. p. 6).
- [SN11] Annamraju SYAMSUNDAR et Vallayil N Achutha NAIKAN. “Imperfect repair proportional intensity models for maintained systems”. In : *IEEE Trans. Reliab.* 60.4 (2011), p. 782-787 (cf. p. 33, 36).
- [ST17] Uthman SAID et Sharareh TAGHIPOUR. “Modeling failure process and quantifying the effects of multiple types of preventive maintenance for a repairable system”. In : *Qual. Reliab. Eng. Int.* 33.5 (2017), p. 1149-1161 (cf. p. 6).
- [Tij03] Henk C TIJMS. *A first course in stochastic models*. John Wiley et sons, 2003 (cf. p. 71).
- [TL11] Zhigang TIAN et Haitao LIAO. “Condition based maintenance optimization for multi-component systems using proportional hazards model”. In : *Reliab. Eng. Syst. Saf.* 96.5 (2011), p. 581-589 (cf. p. 76).

- [TLW12] Zhigang TIAN, Daming LIN et Bairong WU. "Condition based maintenance optimization considering multiple objectives". In : *J. Intell. Manuf.* 23.2 (2012), p. 333-340 (cf. p. 76).
- [Vlo+02] PJ VLOK et al. "Optimal component replacement decisions using vibration monitoring and the proportional-hazards model". In : *J. oper. res. soc.* 53.2 (2002), p. 193-202 (cf. p. 76).
- [Wei51] Waloddi WEIBULL. "A Statistical Distribution Function of Wide applicability". In : *J. appl. mech.* 103.730 (1951), p. 293-297 (cf. p. 8).
- [WJB11] E Lorna WONG, Andrew KS JARDINE et Dragan BANJEVIC. "Incorporating repair information into maintenance optimization models for repairable systems". In : *2011 Proceedings-Annual Reliability and Maintainability Symposium*. IEEE. 2011, p. 1-5 (cf. p. 33).
- [WP96] Hongzhou WANG et Hoang PHAM. "A quasi renewal process and its applications in imperfect maintenance". In : *Int. j. syst. sci.* 27.10 (1996), p. 1055-1062 (cf. p. 6, 19).
- [WS15] Shaomin WU et Philip SCARF. "Decline and repair, and covariate effects". In : *Eur. J. Oper. Res.* 244.1 (2015), p. 219-226 (cf. p. 33).
- [Xu+17] Gongjun XU et al. "Joint scale-change models for recurrent events and failure time". In : *J. Am. Stat. Assoc.* 112.518 (2017), p. 794-805 (cf. p. 33).
- [Yan+19] Li YANG et al. "A two-phase preventive maintenance policy considering imperfect repair and postponed replacement". In : *Eur. J. Oper. Res.* 274.3 (2019), p. 966-977 (cf. p. 6).
- [Zha+12] Xingqiu ZHAO et al. "Analysis of multivariate recurrent event data with time-dependent covariates and informative censoring". In : *Biom. j.* 54.5 (2012), p. 585-599 (cf. p. 33).
- [Zho+14] Qiang ZHOU et al. "Remaining useful life prediction of individual units subject to hard failure". In : *IIE Trans.* 46.10 (2014), p. 1017-1030 (cf. p. 32).
- [Zho+20] Yu ZHOU et al. "Sequential imperfect preventive maintenance model with failure intensity reduction with an application to urban buses". In : *Reliab. Eng. Syst. Saf.* 198 (2020), p. 106871 (cf. p. 70).
- [ZW06] Yuan Lin ZHANG et Guan Jun WANG. "A bivariate optimal repair-replacement model using geometric processes for a cold standby repairable system". In : *Eng. Optim.* 38.5 (2006), p. 609-619 (cf. p. 70).

Effets conjoints du vieillissement, de la maintenance et de l'hétérogénéité sur des systèmes réparables : modélisation, inférence et prise de décision

Résumé — Cette thèse s'intéresse à des problèmes de fiabilité en lien avec la modélisation du processus des défaillances et maintenances de systèmes réparables à l'aide d'événements récurrents. Des modèles d'âge virtuel génériques sont étendus en y adjoignant des covariables dépendantes du temps. Ces covariables prennent en compte l'hétérogénéité observée entre des systèmes par ailleurs identiques et indépendants. Elles peuvent amener une information cruciale sur le niveau de dégradation des systèmes. Nous permettons l'utilisation de ces modèles au travers de deux méthodes de simulation de données nouvelles, ainsi qu'avec une procédure d'estimation paramétrique. Cette méthode inférentielle est évaluée numériquement dans une vaste étude de qualité d'estimation. Ensuite, les modèles sont utilisés pour optimiser les dates de maintenance préventive au cours de la vie des systèmes en fonction de l'information apportée par les covariables et des réparations déjà effectuées, permettant de diminuer les coûts de maintenance. Nous allons plus loin en proposant également d'optimiser les dates d'inspection des covariables dynamiques. Enfin, la mise en place de tests d'adéquation multi-systèmes est étudiée.

Mots clés : Probabilités appliquées, modélisation statistique, fiabilité, processus ponctuels, systèmes réparables, effet de maintenance, inférence statistique, covariables, maintenance préventive, inspections, tests d'adéquation

Joint effects of ageing, maintenance and heterogeneity on repairable systems : modelling, inference and decision-making

Abstract — This thesis deals with reliability issues in connection with the modelling of the failure and maintenance process of repairable systems, using recurrent events. Generic virtual age models are extended by adding time-dependent covariates. These covariates take into account the observed heterogeneity between systems that are otherwise identical and independent. They can bring crucial information on the systems degradation level. We allow to use these models through two data simulation methods, as well as a parametric estimation procedure. This inferential method is numerically assessed in a thorough quality of estimation study. Then, the models are used to optimise the preventive maintenance dates along the systems' life according to the information brought by the covariates and the past repairs, allowing to reduce the maintenance costs. We go further by offering to optimise the inspections dates of the dynamic covariates. Finally, we study the implementation of multi-systems goodness-of-fit tests.

Keywords : Applied probabilities, statistical modelling, reliability, point processes, repairable systems, maintenance effect, statistical inference, covariates, preventive maintenance, inspections, goodness-of-fit tests

Laboratoire Jean Kuntzmann
Bâtiment IMAG - Université Grenoble Alpes
700 Avenue Centrale

Campus de Saint Martin d'Hères
38401 Domaine Universitaire de Saint-Martin-d'Hères, France

GIPSA-lab
Université Grenoble Alpes
11 rue des Mathématiques