HAL
open science

# Stratégie numérique pour l'analyse qualitative des interactions aube/carter

Yann Colaïtis

## To cite this version:

Yann Colaïtis. Stratégie numérique pour l'analyse qualitative des interactions aube/carter. Génie mécanique [physics.class-ph]. École Polytechnique de Montréal, 2021. Français. NNT : . tel-03318777

**HAL Id: tel-03318777**

**https://theses.hal.science/tel-03318777v1**

Submitted on 11 Aug 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**POLYTECHNIQUE MONTRÉAL**
affiliée à l'Université de Montréal

# Stratégie numérique pour l'analyse qualitative des interactions aube/carter

**YANN COLAÏTIS**
Département de génie mécanique

Thèse présentée en vue de l'obtention du diplôme de *Philosophiæ Doctor*
Génie mécanique

le 30 juillet 2021

© Yann Colaïtis, 2021.

**POLYTECHNIQUE MONTRÉAL**
affiliée à l'Université de Montréal

Cette thèse intitulée :

**Stratégie numérique pour l'analyse qualitative des interactions aube/carter**

présentée par **Yann COLAÏTIS**
en vue de l'obtention du diplôme de *Philosophiæ Doctor*
a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

**Stéphane ÉTIENNE**, président
**Alain BATAILLY**, membre et directeur de recherche
**Patricio ALMEIDA**, membre
**Aurélien GROLET**, membre externe
**Christian CARDINAL**, représentant de la direction des études supérieures

# DÉDICACE

*À mes parents,*
*Dominique, qui me manque énormément,*
*et Olivier Colaïtis.*

## REMERCIEMENTS

Je remercie en premier lieu mon directeur de thèse Alain Batailly pour m'avoir proposé ce travail de recherche et encadré durant ces quatre années. Outre son expertise, je tiens à le remercier pour avoir toujours été là pour me soutenir et me conseiller tout en m'octroyant une grande liberté ce qui a contribué à rendre ce doctorat agréable.

J'adresse également mes remerciements à Aurélien Grolet et Patricio Almeida pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse ainsi qu'à Stéphane Etienne pour en avoir été le président de jury.

J'exprime aussi toute ma reconnaissance et ma gratitude à Olivier Thomas et Arnaud Lazarus pour l'aide précieuse qu'ils m'ont apportée sur ma compréhension de l'analyse de stabilité.

Merci également à Emmanuelle Rouhaud pour m'avoir initié, encouragé et donné le goût de la recherche.

Finalement, cette thèse n'aurait certainement pas été aussi plaisante sans la bonne humeur de mes collègues Solène et Juliette, la bienveillance de Florence, les parties de squash endiablées avec Sabine et Nicolas (ainsi que les courriels d'Évariste, l'humour de Michael Scott et la détermination de Leslie Knope).

Un autre remerciement va aux érudits anonymes adeptes de stackoverflow dont les réponses et commentaires ont largement contribués à m'initier aux arcanes de numpy.

Un petit mot également pour le 170 Rachel et les bons moments passés, trop souvent autour de poutines au poulet, en compagnie de Jessica, Lillian, Julien et Aoiffe.

Je termine enfin par (Wo ! Wo ! Wo ! ma petite) Julie dont l'immense gentillesse ainsi que la tendresse continuent d'alimenter mon cœur et m'ont permis de surmonter les plus dures épreuves rendant l'aboutissement de ce travail possible.

# RÉSUMÉ

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire ont permis de développer une approche numérique basée sur la méthode de l'équilibrage harmonique couplée à un algorithme de continuation de type prédicteur-correcteur dans le but de prédire qualitativement des interactions aube/carter dans les moteurs d'avion. Les interactions de contact unilatéral et le frottement sec sont pris en compte au travers d'une loi de pénalité régularisée. Afin d'améliorer la robustesse de la méthodologie, une attention particulière est accordée à l'atténuation du phénomène de Gibbs. Pour ce faire, le schéma d'alternance fréquence/temps utilisé intègre directement un filtrage de Lanczos des efforts de contact non-linéaires, ce qui permet d'éliminer la majeure partie des oscillations parasites associées au phénomène de Gibbs. La méthodologie proposée n'impose aucune restriction, en termes de modélisation, par rapport aux stratégies industrielles d'intégration temporelle existantes. L'approche développée est appliquée en conjonction d'une technique de réduction modale sur plusieurs modèles éléments finis 3D d'aubes industrielles (compresseur et soufflante) ainsi que sur une roue aubagée complète dotée de 21 aubes. Afin d'évaluer l'influence de la régularisation de la loi de contact et du filtrage de Lanczos, les résultats obtenus sont méticuleusement comparés à une stratégie numérique existante, faisant état de référence sur le sujet, basée sur l'intégration temporelle couplée à une gestion du contact par multiplicateurs de Lagrange et ayant déjà été confrontée avec succès à des résultats expérimentaux. Les résultats présentés démontrent un très bon accord entre la méthodologie proposée et la stratégie numérique d'intégration temporelle de référence. Une analyse de la stabilité locale des solutions calculées est également effectuée sur base de la théorie de Floquet par le biais du calcul de la matrice de monodromie et de la résolution du déterminant de Hill. Les résultats obtenus à l'aide de l'approche fréquentielle proposée permettent d'enrichir la compréhension des phénomènes vibratoires inhérents aux interactions aube/carter : ils aboutissent à une analyse qualitative de ces interactions et permettent avantageusement d'estimer précisément la fréquence de résonance non-linéaire.

**Mots-clés :** méthode de l'équilibrage harmonique, continuation numérique, contacts aube/carter, frottement aube/carter, interactions rotor/stator, phénomène de Gibbs, théorie de Floquet, analyse de stabilité, bifurcation.

## ABSTRACT

This thesis introduces a frequency-domain numerical methodology based on the harmonic balance method coupled to a predictor-corrector continuation algorithm for the qualitative analysis of blade-tip/casing contacts in aircraft engines. Unilateral contact and dry friction are taken into account through a regularized penalty law. In order to enhance the robustness of the methodology, attention is paid to the mitigation of the Gibbs phenomenon. To this end, the employed alternating frequency/time scheme features a Lanczos filtering so that spurious oscillations of the computed nonlinear contact forces become negligible. The proposed methodology is shown to be fully compatible with the numerical models used for existing industrial time integration strategies. The proposed numerical methodology is combined with a model reduction technique on several industrial blades (compressor and fan) as well as on a full 21-blades bladed disk. In order to assess the influence of both contact law regularization and Lanczos filtering, obtained results are thoroughly compared to an existing, state-of-the-art, time integration-based numerical strategy relying on a Lagrange multiplier-based approach for contact treatment that was previously confronted to experimental results. The presented results underline the very good agreement between the proposed methodology and the reference time integration numerical strategy. A local stability analysis of the computed solutions is also performed thanks to Floquet theory by means of both monodromy matrix computation and Hill's determinant solution. These results thus complement existing time integration-based results on blade-tip/casing contact, providing a much needed qualitative understanding of the interaction and an accurate estimation of the nonlinear resonance frequency.

**Keywords:** harmonic balance method, numerical continuation, blade-tip/casing contacts, rotor/stator interaction, Gibbs phenomenon, Floquet theory, stability analysis, bifurcation.

# TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . . iii

REMERCIEMENTS . . . . . iv

RÉSUMÉ . . . . . v

ABSTRACT . . . . . vi

TABLE DES MATIÈRES . . . . . vii

LISTE DES TABLEAUX . . . . . xii

LISTE DES FIGURES . . . . . xiii

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS . . . . . xviii

CHAPITRE 1 INTRODUCTION . . . . . 1

CHAPITRE 2 VIBRATIONS : MISE EN CONTEXTE . . . . . 6
- 2.1 Mise en équation . . . . . 6
- 2.2 Réponse forcée . . . . . 7
- 2.3 Considérations industrielles . . . . . 10
- 2.4 Aspects non-linéaires . . . . . 10
  - 2.4.1 Non-linéarités en mécanique des solides . . . . . 11
  - 2.4.2 Oscillateur de Duffing . . . . . 12

CHAPITRE 3 RÉSOLUTION DE SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS NON-LINÉAIRES . . . . . 14
- 3.1 Domaine temporel . . . . . 15
  - 3.1.1 Méthodes analytiques de perturbation . . . . . 15
  - 3.1.2 Intégration temporelle directe . . . . . 20
  - 3.1.3 Méthode de tir . . . . . 27
- 3.2 Domaine fréquentiel . . . . . 32
  - 3.2.1 Méthode de l'équilibrage harmonique . . . . . 32
    - 3.2.1.1 Calcul des efforts non-linéaires . . . . . 37
    - 3.2.1.2 Calcul des jacobiennes . . . . . 41
    - 3.2.1.3 Sélection des harmoniques . . . . . 48

3.2.1.4 Procédure de réduction . . . . . 52
3.2.2 Méthode de collocation trigonométrique . . . . . 58
3.2.3 Équilibrage harmonique haute dimension . . . . . 59

CHAPITRE 4 CONTINUATION . . . . . 61
4.1 Résolution de systèmes algébriques non-linéaires . . . . . 61
4.1.1 Méthode de Newton-Raphson . . . . . 61
4.1.2 Méthodes de quasi-Newton . . . . . 64
4.1.3 Méthode de Newton-Krylov . . . . . 65
4.1.4 Résolution en pseudo-temps . . . . . 66
4.2 Principe de la continuation . . . . . 67
4.2.1 Approche classique : prédiction/correction . . . . . 67
4.2.1.1 Prédiction . . . . . 67
4.2.1.2 Correction . . . . . 69
4.2.1.3 Paramétrisation . . . . . 69
4.2.1.4 Contrôle du pas et mise à l'échelle . . . . . 73
4.2.2 Approche alternative : méthode asymptotique numérique . . . . . 76
4.2.2.1 Principe général . . . . . 76
4.2.2.2 Reformulation quadratique . . . . . 78

CHAPITRE 5 DESCRIPTION ET VALIDATION DE LA STRATÉGIE PROPOSÉE . . 80
5.1 Fondamentaux de la mécanique du contact . . . . . 81
5.1.1 Contact unilatéral . . . . . 81
5.1.2 Algorithmes de gestion du contact . . . . . 82
5.2 Stratégie numérique proposée . . . . . 83
5.2.1 Contexte . . . . . 83
5.2.2 Atténuation du phénomène de Gibbs . . . . . 84
5.2.2.1 Régularisation de la loi de contact . . . . . 85
5.2.2.2 Filtrage spectral des efforts de contacts . . . . . 86
5.2.3 Considérations requises pour des systèmes de grande dimension . . . . . 89
5.3 Application à un modèle académique . . . . . 91
5.3.1 Modélisation . . . . . 92
5.3.2 Configuration de référence . . . . . 93
5.3.3 HBM confrontée à l'intégration temporelle . . . . . 94
5.3.3.1 Première pulsation propre . . . . . 94
5.3.3.2 Plage de pulsations . . . . . 95
5.3.4 R-HBM confrontée à l'intégration temporelle . . . . . 96

5.3.4.1 Première pulsation propre . . . . . 96
5.3.4.2 Plage de pulsations . . . . . 98
5.3.5 RL-HBM confrontée à l'intégration temporelle . . . . . 98
5.3.5.1 Implémentation de la procédure de filtrage . . . . . 98
5.3.5.2 Résultats . . . . . 100
5.3.6 Convergence spatiale . . . . . 101
5.3.6.1 Déplacements et efforts . . . . . 102
5.3.6.2 Vitesses . . . . . 102
5.3.7 Conclusion partielle . . . . . 104

CHAPITRE 6 APPLICATIONS INDUSTRIELLES . . . . . 105
6.1 Développements spécifiques . . . . . 105
6.1.1 Seuil de contact variable . . . . . 105
6.1.1.1 Implémentation . . . . . 106
6.1.1.2 Étude paramétrique . . . . . 108
6.1.2 Extension à plusieurs nœuds frontière . . . . . 108
6.1.3 Prise en compte du frottement . . . . . 110
6.1.3.1 Considérations générales . . . . . 110
6.1.3.2 Implémentation dans un repère cylindrique . . . . . 111
6.2 Simulations d'interactions aube/carter . . . . . 113
6.2.1 Scénario de contact . . . . . 113
6.2.2 Profil du carter . . . . . 114
6.2.3 Aspects numériques . . . . . 115
6.2.3.1 Algorithme d'élimination par blocs . . . . . 115
6.2.3.2 Optimisation des performances de l'AFT . . . . . 115
6.2.3.3 Condensation non-linéaire découplée . . . . . 117
6.3 Aube rotor 37 . . . . . 118
6.3.1 Modélisation . . . . . 118
6.3.2 Paramètres du scénario de contact . . . . . 119
6.3.3 Résultats de référence . . . . . 120
6.3.4 Simulations RL-HBM . . . . . 122
6.3.4.1 Analyse de convergence . . . . . 122
6.3.4.2 Analyse des courbes de réponses en fréquence . . . . . 124
6.3.4.3 Déplacements et efforts . . . . . 125
6.3.4.4 Vitesses . . . . . 128
6.3.4.5 Zone de désaccord . . . . . 129
6.3.5 Contributions harmoniques et modales . . . . . 130

6.3.6 Cartes d'interaction . . . . . 132
6.3.7 Analyse de contraintes . . . . . 132
6.3.8 Analyses paramétriques . . . . . 133
6.3.8.1 Influence du jeu . . . . . 134
6.3.8.2 Influence de la pénétration . . . . . 135
6.3.8.3 Influence de l'amortissement . . . . . 136
6.3.8.4 Influence du frottement . . . . . 137
6.3.9 Prise en compte des effets centrifuges . . . . . 138
6.4 Aube rotor 67 . . . . . 140
6.4.1 Modélisation . . . . . 141
6.4.2 Paramètres du scénario de contact . . . . . 142
6.4.3 Résultats de référence . . . . . 143
6.4.4 Simulations RL-HBM . . . . . 143
6.4.4.1 Analyse des courbes de réponses en fréquence . . . . . 144
6.4.4.2 Déplacements, efforts et vitesses . . . . . 146
6.4.4.3 Détection d'isolats . . . . . 146
6.4.5 Contributions modales . . . . . 148
6.4.6 Analyse de contraintes . . . . . 150
6.5 Roue aubagée complète . . . . . 150
6.5.1 Modélisation . . . . . 151
6.5.2 Paramètres du scénario de contact . . . . . 152
6.5.3 Simulations RL-HBM . . . . . 152
6.5.3.1 Analyse des courbes de réponses en fréquence . . . . . 152
6.5.3.2 Déplacements, efforts et vitesses . . . . . 153
6.5.4 Conclusion partielle . . . . . 155

CHAPITRE 7 ANALYSE DE STABILITÉ . . . . . 156
7.1 Définition . . . . . 156
7.1.1 Stabilité globale . . . . . 156
7.1.2 Stabilité locale . . . . . 158
7.2 Caractérisation . . . . . 159
7.2.1 Théorie de Floquet . . . . . 159
7.2.2 Méthode de Hill . . . . . 167
7.2.2.1 Tri sur les valeurs propres . . . . . 171
7.2.2.2 Tri sur les vecteurs propres . . . . . 171
7.3 Bifurcations locales des solutions périodiques . . . . . 176
7.3.1 Détection de bifurcations . . . . . 178

7.3.1.1 Fonctions tests classiques . . . . . 179
7.3.1.2 Fonctions tests définies par techniques de bordurage . . . . . 182
7.3.2 Localisation de bifurcations . . . . . 186
7.3.3 Gestion des embranchements . . . . . 186
7.3.4 Compléments . . . . . 190
7.4 Applications . . . . . 190
7.4.1 Impacteur en contact à seuil variable . . . . . 190
7.4.1.1 Vue d'ensemble . . . . . 191
7.4.1.2 Analyse détaillée . . . . . 192
7.4.2 Barre éléments finis réduite . . . . . 194
7.4.2.1 Seuil de contact fixe . . . . . 196
7.4.2.2 Seuil de contact variable . . . . . 197
7.4.3 Aubes industrielles . . . . . 198
7.4.3.1 Rotor 37 . . . . . 198
7.4.3.2 Rotor 67 . . . . . 199
7.4.4 Conclusion partielle . . . . . 200

CHAPITRE 8 CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES . . . . . 201

RÉFÉRENCES . . . . . 204

# LISTE DES TABLEAUX


3.1 Convergence des conditions initiales de la méthode de tir vers une solution périodique. . . . . 29

5.1 Vitesses angulaires considérées dans l'analyse des résultats de la barre à seuil fixe. . . . . 100

6.1 Vitesses angulaires considérées dans l'analyse des résultats de la barre à seuil variable. . . . . 108

6.2 Caractérisation des trois premiers modes de l'aube rotor 37. . . . . 118

6.3 Vitesses angulaires considérées dans l'analyse des résultats de l'aube rotor 37. 125

6.4 Caractérisation des trois premiers modes de l'aube rotor 67. . . . . 142

6.5 Vitesses angulaires considérées dans l'analyse des résultats de l'aube rotor 67. 145

6.6 Vitesses angulaires considérées dans l'analyse des résultats de la roue aubagée accordée. . . . . 153

7.1 Évolution des valeurs propres de la matrice de monodromie et du temps de calcul en fonction du nombre de pas de temps $N$ proche de la résonance non-linéaire. . . 166

7.2 Aperçu des moyennes pondérées correspondantes à la famille $\mathbf{q}_1^l$ obtenues pour déterminer les indices $l$ de la figure 7.6. . . . . 173

7.3 Évolution des exposants, multiplicateurs de Floquet associés et du temps de calcul en fonction du nombre d'harmoniques $H$ proche de la résonance non-linéaire. . . 175

# LISTE DES FIGURES


1.1 Principales interfaces de contact dans une turbomachine. . . . . 2
2.1 Réponse d'un système sous-amorti à une excitation harmonique : réponse transitoire et permanente. . . . . 7
2.2 FRF d'un système mécanique à un degré de liberté. . . . . 9
2.3 Schéma d'un oscillateur de Duffing. . . . . 12
3.1 Solutions d'un système non-linéaire non-autonome dépendantes du temps. . 15
3.2 CRF d'un oscillateur de Duffing obtenue par la méthode des échelles multiples. 19
3.3 Domaines de stabilité du schéma d'intégration général de Newmark. . . . . 22
3.4 Algorithme d'intégration temporelle par une méthode de Newmark - cas linéaire. . . . . 23
3.5 Algorithme d'intégration temporelle par une méthode de Newmark - cas non-linéaire. . . . . 25
3.6 Intégration temporelle directe : algorithme d'un balayage fréquentiel ascendant. . 26
3.7 CRF d'un oscillateur de Duffing obtenue par intégration temporelle directe. 26
3.8 Régime transitoire et permanent obtenus par intégration temporelle directe. 27
3.9 Représentation de la convergence de la méthode de tir en 4 itérations. . . . 29
3.10 Méthode de tir : algorithme d'un balayage fréquentiel ascendant. . . . . 30
3.11 CRF d'un oscillateur de Duffing obtenue par la méthode de tir. . . . . 31
3.12 CRF d'un oscillateur de Duffing obtenue par la méthode de l'équilibrage harmonique. . . . . 37
3.13 Procédure AFT. . . . . 39
3.14 Illustration de la matrice de DFT inverse de la procédure AFT. . . . . 40
3.15 Phénomène de repliement spectral en fonction de l'échantillonage. . . . . 42
3.16 Erreurs relatives à l'utilisation de formules de différences finies en fonction du pas de différentiation. . . . . 44
3.17 Évolution de la norme de l'erreur de Fourier et des efforts associés en fonction du nombre d'harmoniques retenu. . . . . 50
3.18 Illustration de la matrice de passage dans le domaine fréquentiel pour la condensation non-linéaire. . . . . 54
3.19 Relations entre les différentes méthodes fréquentielles abordées. . . . . 60
4.2 Échecs possibles de la méthode de Newton-Raphson. . . . . 63
4.3 Différents types de prédictions. . . . . 69
4.4 Différents types de corrections. . . . . 70

4.5 Différents cas de la paramétrisation sélective. . . . . 71
4.6 Illustration d'une étape de continuation par longueur d'arc. . . . . 73
4.7 Illustration d'une étape de continuation par paramétrisation orthogonale / pseudo-longueur d'arc. . . . . 73
4.8 Évolution de différents coefficients d'adaptation du pas de continuation en fonction du nombre d'itérations. . . . . 75
4.9 Exemple de tronçon de solution issu de la MAN. . . . . 78
5.1 Schématisation du contact unilatéral entre un solide déformable et un obstacle rigide. . . . . 82
5.2 Différentes lois de contact. . . . . 86
5.3 Différentes approximations spectrales d'une fonction en dents de scie. . . . 89
5.4 Système mécanique considéré : barre encastrée-libre et obstacle rigide. . . 92
5.5 Calibration du coefficient de la loi de pénalité sur la barre éléments finis de référence. . . . . 94
5.6 Comparaison entre IT et HBM à la première pulsation propre. . . . . 95
5.7 CRF de la barre éléments finis de référence obtenues par IT et HBM. . . . 96
5.8 Superposition de la loi de pénalité bilinéaire et de sa régularisation polynomiale. 97
5.9 Comparaison entre IT et R-HBM à la première pulsation propre. . . . . 97
5.10 CRF de la barre éléments finis de référence obtenues par IT et R-HBM. . . 98
5.11 Différents filtres de Lanczos et leurs applications à une fonction en dents de scie. . . . . 99
5.12 CRF de la barre éléments finis de référence obtenues par IT, R-HBM et RL-HBM. . . . . 100
5.13 Déplacements et efforts obtenus par IT, R-HBM et RL-HBM à l'interface de contact. . . . . 101
5.14 CRF obtenues par RL-HBM pour différents modèles réduits et le modèle éléments finis complet de référence superposé aux résultats obtenus par IT. 102
5.15 Déplacements et efforts obtenus par IT pour le modèle complet et RL-HBM pour différents modèles réduits à l'interface de contact. . . . . 103
5.16 Vitesses obtenues par IT, R-HBM et RL-HBM à l'interface de contact. . . 104
6.1 CRF de la barre éléments finis réduite de référence obtenues par IT et RL-HBM dans le cas à seuil variable. . . . . 106
6.2 CRF de la barre éléments finis réduite de référence obtenues par IT et RL-HBM dans le cas à seuil variable pour un calcul de norme infinie étendu. 107
6.3 Déplacements, vitesses et efforts obtenus par IT et RL-HBM à l'interface de contact dans le cas à seuil variable. . . . . 109

6.4 Étude de l'effet de l'amplitude de l'oscillation du seuil et de la pénétration sur les CRF obtenues par RL-HBM à l'interface de contact. . . . . 110
6.5 Profil du carter ovalisé en vis-à-vis du $j^{\text{ième}}$ nœud frontière. . . . . 114
6.6 Temps de calcul de différentes méthodes d'évaluation de la jacobienne fréquentielle des efforts non-linéaires. . . . . 116
6.7 Temps de calcul de différentes stratégies de résolution relatives à la condensation non-linéaire. . . . . 117
6.8 NASA rotor 37 : roue complète et maillage éléments finis considéré. . . . . 119
6.9 Déformées modales des trois premiers modes de l'aube rotor 37. . . . . 119
6.10 Résultats d'IT pour la configuration de référence de l'aube rotor 37. . . . . 121
6.11 Analyse de convergence des résultats obtenus par RL-HBM en fonction du nombre d'harmoniques. . . . . 122
6.12 Analyse de convergence des résultats obtenus par RL-HBM en fonction de l'échantillonnage temporel. . . . . 123
6.13 Confrontation IT/RL-HBM pour la configuration de référence de l'aube rotor 37. . . . . 125
6.14 Déplacements et des efforts de contact radiaux obtenus par RL-HBM et IT aux BA et BF pour les trois premiers points de contrôle de l'aube rotor 37. 126
6.15 Déplacements et efforts de contact radiaux obtenus par RL-HBM et IT aux BA et BF pour les trois derniers points de contrôle de l'aube rotor 37. . . . 127
6.16 Vitesses radiales obtenues par RL-HBM et IT aux BA et BF pour les points de contrôle de l'aube rotor 37. . . . . 128
6.17 Solution 13,5 $T$-périodique obtenue par IT pour $\omega = 1510$ rad·s$^{-1}$. . . . . 129
6.18 Contributions harmoniques des déplacements radiaux obtenus par RL-HBM aux BA et BF de l'aube rotor 37. . . . . 130
6.19 Contributions modales des solutions en déplacements issues de la RL-HBM pour l'aube rotor 37. . . . . 131
6.20 Cartes d'interaction issues des résultats des simulations RL-HBM au BA de l'aube rotor 37. . . . . 132
6.21 Champs de contraintes obtenus par RL-HBM et IT pour l'aube rotor 37. . . 134
6.22 Étude de l'effet de la variation du jeu sur les CRF du BA et BF du rotor 37 obtenues par RL-HBM. . . . . 135
6.23 Étude de l'effet de la variation de la pénétration sur les CRF du BA et BF du rotor 37 obtenues par RL-HBM. . . . . 136
6.24 Étude de l'effet de la variation du coefficient d'amortissement des deux premiers modes sur les CRF du BA et BF du rotor 37 obtenues par RL-HBM. 137

6.25 Étude de l'effet de la variation du coefficient de frottement sur les CRF du BA et BF du rotor 37 obtenues par RL-HBM. . . . . 138
6.26 Carte d'interaction obtenue par IT au BA du rotor 37 avec effets centrifuges. 139
6.27 Comparaison des CRF en norme infinie des déplacements radiaux aux BA et BF obtenues par RL-HBM et IT avec et sans effets centrifuges. . . . . 140
6.28 NASA rotor 67 : roue complète et maillage éléments finis considéré. . . . . 141
6.29 Déformées modales des trois premiers modes de l'aube rotor 67. . . . . 142
6.30 Résultats d'IT pour la configuration de référence de l'aube rotor 67. . . . . 144
6.31 CRF obtenues par RL-HBM et IT aux BA et BF du rotor 67. . . . . 145
6.32 Déplacements, vitesses et efforts radiaux obtenus par RL-HBM et IT aux BA et BF de l'aube rotor 67 sur la CRF principale. . . . . 147
6.33 Zooms sur les isolats des CRF obtenues par RL-HBM et IT aux BA et BF du rotor 67. . . . . 148
6.34 Déplacements, vitesses et efforts radiaux obtenus par RL-HBM et IT aux BA et BF de l'aube rotor 67 sur les isolats. . . . . 149
6.35 Contributions modales des solutions en déplacements issues de la RL-HBM pour l'aube rotor 67. . . . . 149
6.36 Champs de contraintes obtenus par RL-HBM pour l'aube rotor 67. . . . . 150
6.37 Maillage éléments finis du secteur élémentaire de référence. . . . . 151
6.38 Maillage éléments finis de la roue aubagée complète et déformée modale du premier mode de flexion à deux diamètres nodaux. . . . . 152
6.39 CRF obtenues par RL-HBM et IT aux BA et BF du premier secteur de la roue aubagée accordée. . . . . 153
6.40 Comparaison des déplacements, vitesses et efforts radiaux obtenus par RL-HBM et IT aux BA de l'ensemble des secteurs de la roue aubagée accordée. . . . . 154
7.1 Schématisation de trois orbites d'un système temporelle continu. . . . . 158
7.2 Interprétation graphique de la nature globale ou locale de la stabilité à l'aide de la convexité de l'énergie potentielle du système. . . . . 159
7.3 Convergence des valeurs propres de la matrice de monodromie en fonction du nombre de pas d'intégration $N$. . . . . 165
7.4 CRF de l'oscillateur de Duffing obtenue avec analyse de stabilité et multiplicateurs associés dans le plan complexe. . . . . 166
7.5 Première zone de Brillouin de différents réseaux cristallins en deux dimensions. 171

7.6 Contributions harmoniques complexes normalisées des vecteurs propres des deux familles pour différents $l$ déterminés selon le critère de tri sur les vecteurs propres. . . . . 173
7.7 Étude comparative des techniques de résolution numérique liées à la théorie de Floquet. . . . . 174
7.8 Déplacements dans le plan complexe des exposants et multiplicateurs de Floquet lors des bifurcations de solutions périodiques. . . . . 176
7.9 Types de bifurcation simple. . . . . 177
7.10 Schéma de deux oscillateurs de Duffing linéairement couplés. . . . . 184
7.11 CRF des oscillateurs de Duffing linéairement couplés obtenue par HBM. . 184
7.12 Validation des différentes fonctions tests pour point limite. . . . . 185
7.13 Validation des différentes fonctions tests pour bifurcation fourche. . . . . 185
7.14 Transformation d'une bifurcation exacte en quasi-bifurcation par ajout d'une petite perturbation au système. . . . . 187
7.15 Changements de branche basés sur la direction de la branche émanante et la direction orthogonale à la bifurcation. . . . . 189
7.16 Schéma et CRF de l'impacteur en contact à seuil variable. . . . . 191
7.17 Multiplicateurs et exposants de Floquet obtenus par la méthode Newmark $2n$-passes pour l'impacteur. . . . . 192
7.18 CRF de l'impacteur en contact à seuil variable avec suivi de branche. . . . 193
7.19 Solutions en déplacements de différentes périodicités obtenues par R-HBM. 194
7.20 Caractérisation d'une solution chaotique obtenue par IT pour $\omega = 2{,}5$ rad·s$^{-1}$.195
7.21 Analyse de stabilité de la barre réduite à seuil fixe. . . . . 196
7.22 Analyse de stabilité de la barre réduite à seuil variable. . . . . 197
7.23 Analyse de stabilité pour l'aube rotor 37. . . . . 198
7.24 Analyse de stabilité pour l'aube rotor 67. . . . . 199

# LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

| | |
|---|---|
| 1F | premier mode de flexion |
| 1T | premier mode de torsion |
| 2F | deuxième mode de flexion |
| 3D | trois dimensions |
| ABE | Algebraic Bifurcation Equation |
| AFT | Alternating Frequency/Time |
| BA | Bord d'Attaque |
| BF | Bord de Fuite |
| BP | Branch Point |
| CFD | Computational Fluid Dynamics |
| CRF | Courbe de Réponse en Fréquence |
| ddl | degré(s) de liberté |
| DFT | Discrete Fourier Transform |
| EDO | Équation(s) Différentielle(s) Ordinaire(s) |
| FFT | Fast Fourier Transform |
| FFTW | Fastest Fourier Transform in the West |
| FRF | Fonction de Réponse en Fréquence |
| GMRES | Generalized Minimal RESidual method |
| HBM | Harmonic Balance Method |
| HCF | High Cycle Fatigue |
| HDHB | High Dimension Harmonic Balance Method |
| IT | Intégration Temporelle |
| LP | Limit Point |
| MAN | Méthode Asymptotique Numérique |
| MC | Milieu de Corde |
| NASA | National Aeronautics and Space Administration |
| NS | Neimark-Sacker |
| PD | Period-Doubling |
| R-HBM | Regularized Harmonic Balance Method |
| rFFT | real (input) Fast Fourier Transform |
| RL-HBM | Regularized-Lanczos Harmonic Balance Method |
| SVD | Singular Value Decomposition |
| TP | Transcritic Point |

# CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Une turbomachine aéronautique, plus communément appelée turboréacteur, est une machine tournante thermodynamique qui permet de fournir à un avion la force de poussée dont il a besoin pour se propulser. Son rôle est de transférer l'énergie depuis un arbre tournant appelé rotor vers le fluide la traversant. Le rotor est guidé en rotation par des paliers dans un stator appelé carter. Le long de l'axe de rotation sont disposées des roues aubagées, assemblages d'un disque et d'aubes qui, en fonction de leur forme et position, constituent les différents étages de la turbomachine. Un turboréacteur est typiquement composé d'une soufflante, de compresseurs, d'une chambre de combustion et de turbines. Les architectures de chacun de ces composants peuvent varier dépendamment des caractéristiques recherchées.

L'analyse des phénomènes vibratoires non-linéaires au sein des turbomachines aéronautiques est un champ de recherche en pleine expansion. Les turbomachines comportent en effet de nombreuses interfaces non-linéaires, associées à des contacts ou du frottement, qui imposent aux ingénieurs des défis majeurs de conception. Longtemps contournées au détriment de l'efficacité énergétique de la turbomachine, les vibrations inhérentes à ces interfaces peuvent avoir un effet préjudiciable en termes de durée de vie des composants voire, sous certaines conditions, s'avérer dangereuses en menaçant l'intégrité structurelle de la turbomachine [205, 207]. Dans ce contexte, les nouvelles contraintes environnementales imposées aux constructeurs leur demandent de mieux comprendre ces interactions afin de pouvoir les prédire et adapter leurs procédures de conception en conséquence. Deux sources principales d'excitation peuvent être distinguées :

- les sources aérodynamiques, liées à des instabilités d'écoulement, phénomènes de pompage, ou de flottement ;
- les sources mécaniques résultantes d'éventuels contacts, déséquilibres dynamiques (balourds) ou encore de chocs (ingestion d'oiseau, de glace, ou perte d'aube. . .).

La figure 1.1 met en évidence les principales interfaces de contact au sein d'une turbomachine. Chacune de ces interfaces présente des caractéristiques spécifiques qui justifient ou ont justifié le développement de méthodologies *ad-hoc* pour leur analyse :

**arbre/palier,** cette interface est étudiée dans le contexte de l'industrie aéronautique depuis les années 1960 environ. Plusieurs études antérieures peuvent être trouvées en lien avec les lignes d'arbre des moteurs de paquebots. Cette interface assure la liaison entre l'arbre en rotation et les parties fixes du moteur. Cette liaison est assurée par des paliers à roulements typiquement modélisés par des ressorts à raideur linéaire [169, 124]. Arbre et palier sont vus comme des composants rigides, l'arbre pouvant orbiter autour de son axe de rotation.

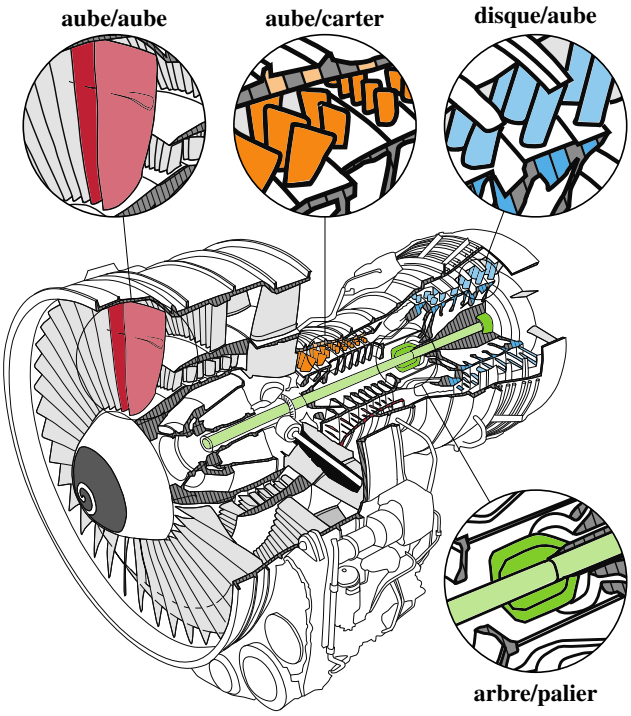



Figure 1.1 Principales interfaces de contact dans une turbomachine.

Par conséquent, les considérations géométriques sont simplifiées et les déplacements relatifs faibles, de l'ordre de grandeur du jeu arbre/palier. Les interactions engendrées par les contacts arbre/palier posent essentiellement des problèmes vibratoires (de type balourd) et n'impliquent que rarement des aspects multi-physiques. Plusieurs modèles phénomènologiques, comme le rotor de Föppl/Jeffcott/Laval [39, 83, 131], de Childs [137] ou encore de Black [140], ont été développés spécifiquement pour analyser cette interface.

**aube/aube,** cette interface est l'objet de recherches depuis le début du vingt-et-unième siècle. Il s'agit d'une interface où les aspects multi-physiques sont prépondérants : vibrations issues des chargements aérodynamiques et vibrations associées aux contacts inter-aubes y sont intimement couplées. Cette interface présente usuellement des zones de contact dont la géométrie est relativement simple et au niveau desquelles de faibles amplitudes de déplacement sont observées. Il existe dans la littérature des modèles phénomènologiques [89] et industriels [15, 17] traduisant la maturité des contributions dans ce domaine. On retouve ces interactions au niveau de la soufflante [159] et des turbines. En effet, l'élongation des aubes de turbines rend les roues aubagées particulièrement sensibles au phénomène de désaccordage qui favorise les interactions aube/aube.

**disque/aube,** aussi appelée interface pied d'aube, est un lieu critique pour la dissipation de l'énergie vibratoire des roues aubagées. C'est un sujet qui a concentré l'attention de nombreux industriels

et chercheurs depuis les années 1990. En présence de phénomènes vibratoires synchrones à haute fréquence mais de basse amplitude, les travaux de recherche se sont naturellement portés sur l'utilisation de méthodes fréquentielles [162, 170] afin de prédire les réponses vibratoires. Les géométries en jeu sont complexes (attache en pied de sapin, queue d'aronde, marteau. . .), les travaux les plus récents se focalisent sur la modélisation du frottement et de l'usure des surfaces impactées conférant un caractère multi-physique aux simulations réalisées. Là aussi, plusieurs études portent sur des modèles éléments-finis industriels [67, 13, 18].

**aube/carter,** cette interface se distingue [59] des autres interfaces de contact par plusieurs aspects : (1) contrairement aux interfaces évoquées précédemment, les contacts aube/carter peuvent survenir—avec des degrés de criticité différents—aussi bien en soufflante, dans les compresseurs [88] que dans les turbines. (2) Les déplacements relatifs peuvent être élevés au point de justifier la prise en compte de modèles géométriques non-linéaires [8], notamment en soufflante. Également, (3) les géométries en jeu peuvent être d'une grande complexité, comme c'est le cas pour les rouets (compresseurs centrifuges) de plus en plus couramment utilisés dans l'industrie aéronautique du fait de leur faible encombrement [49]. Enfin, (4) cette interface est le lieu d'une multitude de phénomènes physiques qui complexifient grandement les travaux de modélisation : vibrations non-linéaires issues des contacts sont couplées à la vibration des aubes du fait de chargements aérodynamiques mais aussi à l'usure du carter ou des aubes au niveau des surfaces de contact dont l'échauffement impose la prise en compte de considérations thermomécaniques [26, 2, 3]. Pour cette interface, méthodes temporelles et fréquentielles sont utilisées conjointement dépendamment du type d'application visée [44]. Les outils industriels prédictifs favorisent habituellement l'intégration temporelle qui permet de capter des phénomènes transitoires ou divergents et est assez robuste pour une telle sévèrité d'interaction. En revanche, l'utilisation de modèles académiques simplifiés favorise la caractérisation qualitative des vibrations non-linéaires et donc l'utilisation de méthodes fréquentielles [46, 7, 84].

En l'absence d'un cadre théorique unifié permettant d'analyser les systèmes mécaniques non-linéaires, la stratégie adoptée par les industriels pour mieux comprendre les phénomènes vibratoires associés à chaque interface s'est articulée autour de collaborations avec des laboratoires universitaires dans le but de développer des outils numériques *ad-hoc*, adaptés à leurs besoins, dépassant les capacités des codes de calcul commerciaux.

Dans le cas de l'interface aube/carter, une attention particulière a été portée à la prédiction du comportement dynamique non-linéaire des aubes. Les logiciels commerciaux ne permettent en effet pas de simuler les contacts aube/carter : la combinaison de modèles éléments finis industriels, d'interfaces frottantes ou de contact associées à de possibles phénomènes multi-physiques tels que l'usure, les excitations aérodynamiques ou la prise en compte de chargements thermiques aboutirait

à des temps de calcul incompatibles avec les contraintes industrielles en phase de conception des systèmes. Plusieurs relations privilégiées ont ainsi pu être développées entre industriels et académiques, on peut citer : (1) Rolls-Royce et l'Imperial College [1] de Londres, (2) General Electric et l'université Notre-Dame [2] et l'Université d'État de l'Ohio [3], (3) MTU Aero Engines et l'université de Stuttgart [4] ou encore (4) Safran et l'École Polytechnique de Montréal.

Au cours de la dernière décennie, les stratégies numériques basées sur l'intégration temporelle ont constitué un outil privilégié pour les chercheurs qui s'intéressent à la prédiction des contacts aube/carter au sein des moteurs d'avion. Bien que ce choix implique des simulations numériques coûteuses en termes de temps de calcul, il a été motivé par plusieurs facteurs spécifiques : (1) compte tenu des taux d'incursion relativement faibles des aubes dans le carter et des vitesses relatives très élevées en jeu, il a été supposé que l'utilisation d'un algorithme de traitement du contact très précis était essentielle afin obtenir des résultats physiquement pertinents, y compris une estimation valide du phénomène de raidissement au contact. Cette constatation a conduit plusieurs chercheurs à privilégier l'intégration temporelle par rapport aux méthodologies dans le domaine fréquentiel, car la première permet d'implémenter plus facilement une grande variété d'algorithmes de contact. (2) Ensuite, les conclusions tirées des études expérimentales publiées ont mis en avant le fait que les interactions observées sont souvent liées à des phénomènes dynamiques transitoires, voire divergents, qui ne peuvent être prédits par des approches fréquentielles. (3) Troisièmement, bien que les approches dans le domaine fréquentiel soient souvent considérées comme plus performantes en matière de temps de calcul par rapport aux algorithmes d'intégration temporelle, leur implémentation représente tout de même un défi lorsqu'elles sont appliquées à des systèmes mécaniques complexes comportant un grand nombre de degrés de liberté non-linéaires, et encore plus lorsque l'une des deux structures en contact est supposée être parfaitement rigide. Pour toutes ces raisons, la plupart des travaux numériques publiés qui ont été comparés aux observations expérimentales reposent sur des méthodes d'intégration temporelle.

La maîtrise des contacts aube/carter est une priorité pour de nombreux constructeurs car elle permet d'entrevoir des gains de performance très élevés pour les technologies actuelles. C'est également une interface particulièrement complexe qui a motivé des programmes de recherches variés, impliquant (1) le développement de nouveaux matériaux abradables [206, 35], (2) la mise en place de bancs d'essais sophistiqués pour des simulations d'interaction à échelle 1 : 1 [28, 54, 81], (3) des avancées en termes de la modélisation numérique de l'usure [22] ou encore (4) le développement de nouvelles méthodes numériques pour la réduction de modèles et la gestion du contact [21, 5]. Par ailleurs, le

1. http://www.imperial.ac.uk/dynamics
2. https://turbo.nd.edu/
3. https://gtl.osu.edu/
4. https://www.ila.uni-stuttgart.de/en/research/structural_mechanics/

coût très élevé des essais expérimentaux pour cette interface est une motivation supplémentaire pour le développement d'outils numériques prédictifs. Pour les ingénieurs, un aspect critique est d'éviter les phénomènes divergents pouvant entraîner une fissuration des aubes, voire une perte d'aube. De nombreux travaux ont eu lieu dans cette direction, pour prédire des interactions aube/carter mono et multi-aube (c'est-à-dire pour une roue aubagée entière) prenant en compte l'usure du revêtement abradable, les effets inertiels et même les effets thermomécaniques.

Les plus récents développements numériques [1, 26, 64, 10] ont permis de prédire numériquement des résultats obtenus expérimentalement [41, 11, 88] sur différents étages de moteurs d'avion et dans des configurations de contact variées, confirmant ainsi la pertinence des méthodes de résolution par intégration temporelle. De ce fait, les constructeurs de turbomachines ont à leur disposition des outils capables de prédire quantitativement la réponse d'une aube subissant des contacts répétés avec le carter. Ces résultats encourageants ont permis de mener à bien des procédures de reconception d'aubes de moteurs d'avion [50] et de dimensionner des composants de stator utilisant des nouveaux types de matériaux [24]. Il est désormais possible de dire *comment* une aube répond à des contacts aube/carter, mais pas encore *pourquoi* elle répond de la sorte. Ce manque de connaissance qualitatif de la réponse vibratoire d'une aube subissant des contacts avec le carter l'entourant représente un verrou scientifique majeur pour pouvoir envisager la prise en compte des contacts aube/carter dès la phase de conception des aubes, c'est-à-dire pour la conception d'aubes robustes au contact.

**Le projet de recherche ayant motivé ces travaux de doctorat porte sur la mise en place d'un outil numérique fréquentiel permettant d'obtenir une connaissance qualitative de la réponse vibratoire d'une aube de moteur d'avion subissant des contacts avec le carter environnant.** Une contrainte majeure de ce projet est que l'outil fréquentiel développé soit cohérent avec les outils numériques reposant sur des stratégies de type intégration temporelle (en termes de gestion du contact, de prise en compte du frottement ou encore de la gestion des effets inertiels) afin de permettre une comparaison directe des résultats obtenus entre les deux stratégies.

Le mémoire est composé de six chapitres. Le premier a pour objet la présentation des notations utilisées ainsi qu'une mise en contexte. Dans le second chapitre, plusieurs méthodes numériques utilisées pour l'analyse de systèmes non-linéaires sont présentées. Les procédures de continuation sont ensuite détaillées dans le troisième chapitre. Par la suite, la méthodologie retenue est présentée en détail et validée dans le quatrième chapitre, avant d'être appliquée, dans le cinquième chapitre, sur des modèles éléments finis industriels d'aubes de moteurs d'avion. Enfin, le dernier chapitre porte sur une analyse de stabilité détaillée des solutions obtenues. Toutes les simulations numériques présentées ont été réalisées en langage Python 3.7.

# CHAPITRE 2 VIBRATIONS : MISE EN CONTEXTE

Ce chapitre a pour objectif d'introduire les notations utilisées et de poser les bases de résolution d'un système linéaire afin de mieux faire ressortir par la suite toute la complexité introduite par la présence de non-linéarités dans un système dynamique.

## 2.1 Mise en équation

L'équation générale d'un problème de dynamique vibratoire linéaire peut s'écrire comme suit :

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{x}}(t) + \mathbf{K}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{f}_{\text{ext}}(t) \tag{2.1.1}$$

où le vecteur $\boldsymbol{x}(t)$ contient les déplacements à un instant $t$ des $n$ degrés de liberté (ddl) du système mécanique étudié, $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$ désignent les matrices de dimension $(n \times n)$, respectivement de masse, d'amortissement et de raideur et $\boldsymbol{f}_{\text{ext}}$ dénote le vecteur des efforts externes. Dans le cas d'un système à un ddl, la notation suivante est adoptée :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_{\text{ext}} \tag{2.1.2}$$

où les scalaires $m$, $c$, $k$ représentent respectivement la masse, l'amortissement et la raideur du système considéré. L'équation (2.1.2) est alors souvent représentée avec ses termes normalisés par rapport à la masse :

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{f_{\text{ext}}}{m} \tag{2.1.3}$$

plus souvent écrite sous la forme suivante :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_{\text{ext}}}{m} \tag{2.1.4}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, la pulsation propre du système et $\xi = \frac{c}{2m\omega_0}$, son coefficient d'amortissement. Dans le cas d'une excitation harmonique, la notation suivante sera adoptée :

$$f_{\text{ext}}(t) = \frac{F_{\text{ext}}}{m}\cos(\omega t) = F_0\cos(\omega t) \tag{2.1.5}$$

où $\omega$ est la pulsation ou vitesse angulaire, et $F_0$ et $F_{\text{ext}}$ sont les amplitudes normalisée ou non, de l'excitation. La résolution de l'équation (2.1.4) permet d'obtenir la réponse $x(t)$ du système en tout temps. Cette solution est la somme de deux termes [194], *cf.* figure 2.1 : le premier, d'amplitude

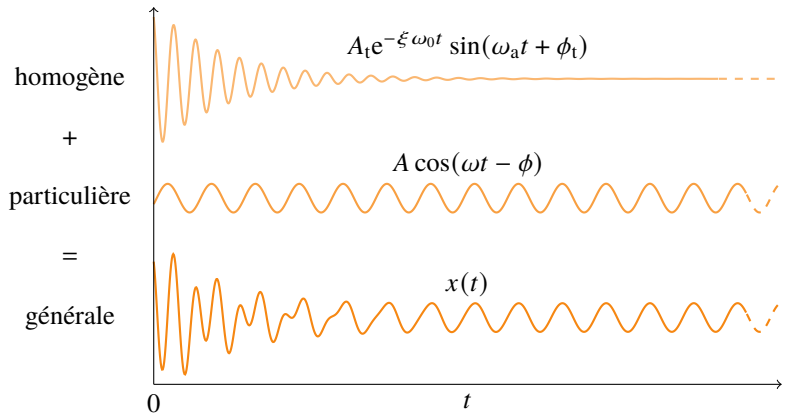



Figure 2.1 Réponse (solution générale) du système (2.1.4) sous-amorti à une excitation harmonique : réponse transitoire (solution homogène) et permanente (solution particulière).

décroissante en fonction du temps, est relatif au régime transitoire, c'est la solution homogène de l'équation (2.1.4) (calculée sans forçage extérieur). Une fois les effets transitoires dissipés, la contribution de ce terme devient négligeable. Le second terme caractérise le régime permanent, c'est la solution particulière de l'équation (2.1.4). Dans le cas d'un système linéaire, si l'excitation est harmonique, le régime permanent sera également harmonique, de même fréquence que l'excitation. Un système linéaire conservera ainsi le contenu fréquentiel de l'excitation en modifiant simplement son amplitude au niveau de sa réponse. De plus, un système linéaire est caractérisé par le fait que sa réponse à une somme de chargements est égale à la somme des réponses associées à chaque chargement, c'est le principe de superposition.

En pratique, sur une plage de fonctionnement donnée, les ingénieurs cherchent à caractériser l'amplitude (notée $A$ sur la figure 2.1) de la réponse d'un système une fois un régime permanent atteint. Par conséquent, ils ne recherchent que la solution particulière de l'équation (2.1.4). Cela leur permet notamment de s'assurer que des amplitudes de vibration trop élevées pouvant être préjudiciables à la durée de vie du système ne se produisent pas en fonctionnement. Ce type d'étude est communément appelée réponse forcée.

## 2.2 Réponse forcée

La réponse en régime permanent du système (2.1.4) forcé harmoniquement s'écrit :

$$x(t) = A\cos(\omega t - \phi) \tag{2.2.1}$$

L'amortissement introduit un retard de phase du déplacement par rapport à la phase de l'excitation, la solution particulière est donc simplement une fonction harmonique de même pulsation $\omega$ mais de

phase $\phi$ différente. On introduit les notations complexes, avec $\mathrm{i}^2 = -1$, pour le chargement (2.1.5) :

$$\frac{F_{\text{ext}}}{m}\cos(\omega t) = \Re\left(\frac{F_{\text{ext}}}{m}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right) \tag{2.2.2}$$

et pour la solution recherchée (2.2.1) :

$$x(t) = \Re\left(X\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right) \tag{2.2.3}$$

avec l'amplitude complexe $X = A\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}$, où la présence du signe négatif met en évidence le retard de phase de la réponse. Les vitesses et accélérations associées peuvent donc s'écrire :

$$\dot{x}(t) = \Re\left(\mathrm{i}\omega X\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right) \quad \text{et} \quad \ddot{x}(t) = \Re\left(-\omega^2 X\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right) \tag{2.2.4}$$

Le système initial, en omettant la notation sur la partie réelle $\Re(\cdot)$, devient alors :

$$\left(-\omega^2 + \mathrm{i}2\xi\omega_0\omega + \omega_0^2\right)X = \frac{F_{\text{ext}}}{m} \tag{2.2.5}$$

qui permet d'exprimer l'amplitude complexe de la solution particulière du système :

$$X = \frac{F_{\text{ext}}/m}{-\omega^2 + \mathrm{i}2\xi\omega_0\omega + \omega_0^2} \tag{2.2.6}$$

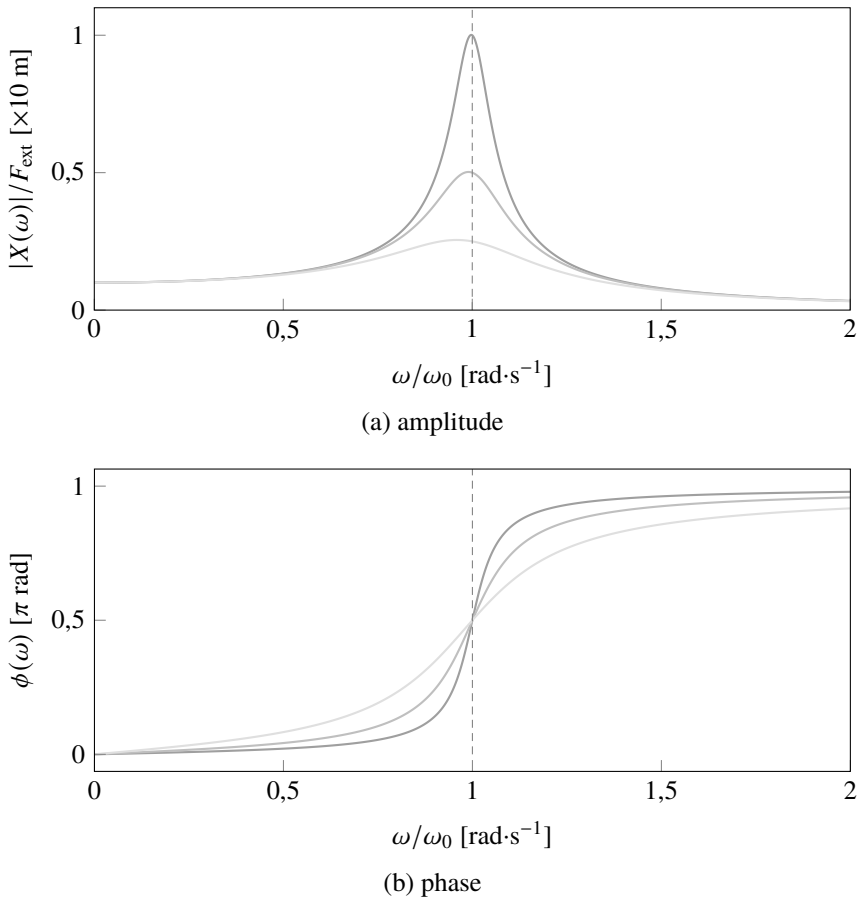
dont l'amplitude et la phase sont donnés par :

$$|X| = \frac{F_{\text{ext}}/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\xi\omega_0\omega\right)^2}} = A \quad \text{et} \quad \arg(X) = \arctan\left(\frac{2\xi\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) = \phi \tag{2.2.7}$$

Il est alors courant de factoriser le module $|X|$ par $\omega_0^2$ tel que $|X| = x_{\text{s}}D$, ce qui permet alors de distinguer le déplacement statique $x_{\text{s}}$ de l'amplification dynamique $D$ :

$$x_{\text{s}} = \frac{F_{\text{ext}}}{k} \quad \text{et} \quad D = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \tag{2.2.8}$$

L'extension de ce calcul analytique à des systèmes à $n$ ddl peut être effectuée avec un formalisme complexe analogue [211], ou plus efficacement par superposition modale [213, 195]. La figure 2.2 illustre les évolutions de l'amplitude (normalisée par l'amplitude de l'excitation $F_{\text{ext}}$) ainsi que de la phase de la réponse en fonction de la pulsation réduite $\omega/\omega_0$ d'un système à un ddl (2.1.4).




(a) amplitude

(b) phase

Figure 2.2 FRF du système (2.1.4) forcé harmoniquement obtenue pour des paramètres unitaires et un coefficient d'amortissements $\xi = \{0{,}05(\text{——}) ; 0{,}1(\text{——}) ; 0{,}2(\text{——})\}$. Le phénomène de résonance apparaît pour $\omega = \omega_0$ (- - - -) et induit (a) un pic d'amplitude, et (b) une rotation de la phase de $\pi/2$, de la réponse. Le maximum d'amplitude, pour un système amorti, se situera à $\omega_{\max} = \sqrt{1 - 2\xi^2}$ si $\xi < 1/\sqrt{2}$.

**Definition 2.2.1. Courbe de réponse en fréquence.** Dans un contexte linéaire, la fonction de réponse en fréquence (FRF) d'un système décrit l'amplitude de sa réponse normalisée par l'amplitude de l'excitation pour une plage fréquentielle donnée. Son utilisation dans un contexte non-linéaire, bien qu'elle soit relativement usuelle, est impropre dans la mesure où la dite réponse n'est alors plus indépendante de l'amplitude de l'excitation. Ainsi, l'appellation de courbe de réponse en fréquence (CRF) sera utilisée par la suite afin d'éliminer toute ambiguïté.

## 2.3 Considérations industrielles

Les ingénieurs utilisent des critères de conception basés sur la réponse forcée du système. Par exemple, lorsqu'un moteur d'avion fonctionne en régime nominal, les aubes de turbines vibrent en réponse à une excitation aérodynamique. Si la pulsation de cette excitation coïncide avec une pulsation propre de l'aube, cette dernière entre en résonance. À long terme, ces hauts niveaux d'amplitude vibratoire peuvent engendrer des fissures et éventuellement conduire à la rupture. C'est pourquoi les ingénieurs dimensionnent les aubes de turbines selon des critères de fatigue polycyclique (en anglais HCF pour *High Cycle Fatigue*) afin d'en optimiser la durée de vie en évitant les fréquences propres voisines de l'excitation. Cependant, lorsque des effets non-linéaires doivent impérativement être pris en considération, la problématique des industriels pour caractériser ces résonances devient plus ardue : la modélisation linéaire, *i.e.* l'analyse modale, ne suffit plus. Il faut alors recourir à des méthodes de résolution plus élaborées, présentées dans le chapitre 3.

## 2.4 Aspects non-linéaires

En introduisant un terme non-linéaire dans les équations du mouvement (2.1.1), il est maintenant question de s'intéresser à la résolution du système non-linéaire suivant :

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{x}}(t) + \mathbf{K}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}(\boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t)) = \boldsymbol{f}_{\mathrm{ext}}(t) \tag{2.4.1}$$

où $\boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}$ est le vecteur des efforts non-linéaires qui ne dépend généralement que des déplacements et vitesses (mais parfois aussi de la vitesse angulaire $\omega$) dans le domaine des turbomachines.

À la différence des systèmes linéaires, il est *a priori* impossible de connaître le nombre ou la nature des solutions de ce système. Il existe des méthodes de résolution globales qui permettent d'identifier toutes les solutions (*cell-mapping*, homotopie [70, 164], utilisation de base de Groebner [53]), mais ces techniques sont relativement jeunes et leur cadre d'application reste, pour le moment, circonscrit à des systèmes académiques simples. Cette thèse se focalise sur des méthodes locales permettant de trouver une solution du système à partir de conditions initiales. Il en existe plusieurs, le choix d'une méthode ou d'une autre dépend essentiellement de la nature des non-linéarités, de la taille des systèmes et du type de solution recherchée.

**Definition 2.4.1. Non-linéarités régulières et non-régulières.** Une non-linéarité est dite régulière quand la loi entrée-sortie du système considéré est représentée par une courbe régulière, soit par une fonction de classe $C^k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Dans le cas où la non-linéarité est faible et régulière (pas de discontinuités dans les champs de

vitesses ou d'accélérations), le problème peut être traité par des approches analytiques, comme les méthodes de perturbation [178, 193]. Dans le cas de problèmes de plus grande taille, ou lorsque les non-linéarités sont fortes et/ou non-régulières, comme c'est le cas du contact aube/carter, des stratégies numériques sont privilégiées.

### 2.4.1 Non-linéarités en mécanique des solides

Cette section offre un aperçu des mécanismes responsables de la perte de linéarité d'un système. En mécanique des solides, il est possible de classer les non-linéarités en différentes catégories [161] :

**matériau,** cette première catégorie se rapporte à la réponse non-linéaire d'un matériau à une contrainte mécanique, c'est donc ici sa loi de comportement qui est dite non-linéaire. Par exemple, l'élasto-plasticité pour les matériaux métalliques (caractère non-régulier, phénomène d'hystérésis et déformations irréversibles), l'hyper-élasticité pour les élastomères (caractère régulier, déformations réversibles mais relation contrainte/déformation non-linéaire), ou bien encore les alliages à mémoire de forme (relation contrainte/déformation régulière avec hystérésis et déformations réversibles). Il est également possible d'évoquer les aspects de dépendance à la température et au temps tels que les effets de visco-élasticité ou visco-plasticité, dans le cas du fluage par exemple.

**géometrique,** ces non-linéarités régulières proviennent des grands déplacements, des grandes rotations ou des grandes déformations d'une structure. En effet, lorsque la variation de géométrie du système sous l'action des sollicitations ne peut pas être négligée et occasionne des changements sur ces sollicitations, l'hypothèse des petites perturbations (combinaison des hypothèses sur les petites déformations et petits déplacements) n'est plus valide. Il n'est alors plus possible de justifier une linéarisation des modèles usuels, comme le tenseur des déformations de Green-Lagrange. Par exemple, il est possible de mentionner le cas du pendule simple et plus généralement celui des systèmes polyarticulés comme les commandes de robots, des pales d'hélicoptère ou des aubes de soufflante, ou bien celui d'instruments de musique à percussion comme les cymbales ou les gongs [161].

**de contact,** ce sont des non-linéarités non-régulières (ou régulières si précontrainte) qui apparaissent à l'interface de systèmes en contact. Il peut s'agir de contacts localisés (contact Hertzien dans le cas des paliers à roulements [169] ou engrenages par exemple), de frottement sec avec un phénomène d'alternance adhérence/glissement (freins, corde de violon [152] ou à l'interface pied d'aube [162]) ou bien encore de contacts intermittents entre deux composants d'un système en mouvement l'un par rapport à l'autre (interaction aube/carter [64]). Cette thèse se focalise sur cette classe de non-linéarité.

**de couplage,** cette dernière classe caractérise les non-linéarités qui apparaissent dans un milieu

non solide qui est couplé au système étudié et qui influent sur son comportement. Il est alors possible de distinguer les non-linéarités exerçant un couplage faible, *i.e* lorsque le comportement non-linéaire du système couplé ne modifie pas celui de la structure (solide fixe dans un écoulement fluide), de celles exerçant un couplage fort, *i.e* lorsque le comportement non-linéaire du système couplé influence celui de la structure : flottement aéroélastique (pont de Tacoma, drapeaux, ailes d'avion. . .), amortissement d'une structure dû au brassage d'un fluide ou encore un couplage électromécanique (transducteur électrostatique par exemple).

Dans un premier temps, bien que ce soient les non-linéarités de contact qui nous intéressent, dans l'optique de simplifier la présentation des différentes méthodes numériques utilisées et d'illustrer divers phénomènes typiques des systèmes non-linéaires, un système non-linéaire phénoménologique à un ddl est considéré : l'oscillateur de Duffing.

### 2.4.2 Oscillateur de Duffing

L'oscillateur de Duffing, représenté sur la figure 2.3, est un système d'étude classique [39, 45, 72] en dynamique non-linéaire.

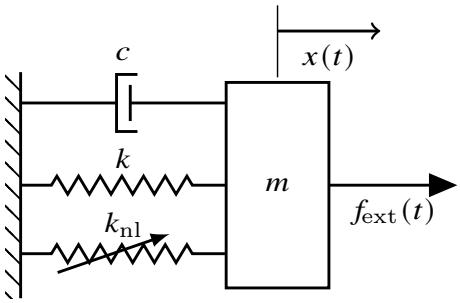



Figure 2.3 Schéma d'un oscillateur de Duffing.

Il tient son nom de l'ingénieur allemand Georg Duffing, qui l'étudia dès 1918 [203]. Dans le cas d'un forçage harmonique, son équation normalisée s'écrit :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^3 = F_0 \cos(\omega t) \tag{2.4.2}$$

où $\alpha = k_{\mathrm{nl}}/m$ désigne une raideur non-linéaire normalisée. Si $\alpha = 0$, l'équation (2.4.2) décrit le comportement d'un oscillateur harmonique, alors que pour $\alpha \neq 0$, elle décrit celui d'un oscillateur anharmonique caractérisé par la présence d'une force de rappel proportionnelle au cube du déplacement : $f_{\mathrm{nl}}(x, \dot{x}) = \alpha x^3$. Le signe de cette raideur peut représenter un ressort durcissant ($\alpha > 0$), ou assouplissant ($\alpha < 0$).

L'équation (2.4.2) présente l'avantage de disposer d'une non-linéarité simple dans son expression, analytique et régulière. Encore aujourd'hui, cet oscillateur canonique des non-linéarités géométriques [1], demeure omniprésent dans la littérature pour illustrer certains comportements non-linéaires. En effect, bien que simple d'apparence, la dynamique du système n'en demeure pas moins extrêmement riche avec la présence de phénomènes de distorsions harmoniques, de sauts d'amplitude, de bifurcations, et d'éventuelles réponses chaotiques [79, 198, 135]. Ainsi, étant donné que la variation des paramètres de l'équation de Duffing permet d'exhiber une vaste phénoménologie non-linéaire : cette équation constitue donc un cas test judicieux pour illustrer les développements réalisés. Pour cette raison, l'oscillateur de Duffing est utilisé à chaque étape de la revue de littérature du chapitre 3, afin d'illustrer divers phénomènes non-linéaires ainsi que certaines des méthodes de résolution présentées.

1. Au même titre que l'oscillateur de Van der Pol pour les phénomènes d'oscillations auto-entretenues, ou celui de Mathieu pour les cas d'excitation paramétrique.

# CHAPITRE 3 RÉSOLUTION DE SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS NON-LINÉAIRES

Dans le cadre de l'analyse des systèmes dynamiques et plus spécifiquement des vibrations non-linéaires, il existe quatre types de solutions [192] à l'équation générale (2.4.1). On considère l'équation générale d'un système non-linéaire non-autonome (dépendant explicitement du temps $t$) à $n$ ddl dans l'espace d'état :

$$\dot{z} = \boldsymbol{G}(z,t),\ \boldsymbol{G}\ :\ \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2n} \quad \text{avec} \quad z(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \dot{\boldsymbol{x}}(t) \end{bmatrix} \tag{3.0.1}$$

où $\boldsymbol{G}$ est une fonction qui régit l'évolution temporelle du système dont la formulation est explicitée plus loin en section 3.1.2, *cf.* équation (3.1.15), et $z$ est un vecteur d'inconnues augmenté communément appelé vecteur d'état. Parmi les solutions de $\boldsymbol{G}$, il est alors possible de distinguer :

**les points fixes,** aussi appelés points d'équilibre ou solutions statiques, ce sont des solutions stationnaires indépendantes du temps ; $z_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ est un point fixe de l'équation (3.0.1) si :

$$\boldsymbol{G}(z_0, t) = \boldsymbol{0} \tag{3.0.2}$$

**les solutions périodiques,** voir figure 3.1a, aussi qualifiées de cycles limites, si $z$ satisfait :

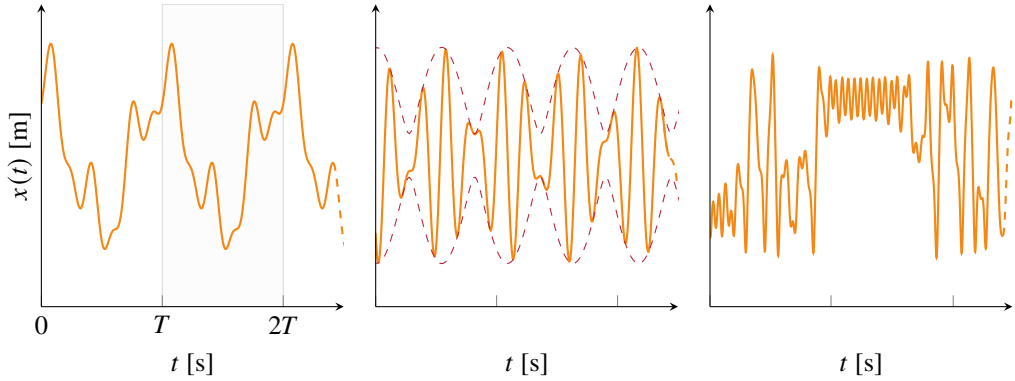
$$\exists T \in \mathbb{R}_+^* \ \text{ tel que } \ z(t+T) = z(t)\,,\ \forall t \geqslant 0 \tag{3.0.3}$$

Il sera naturel de prendre comme période $T$ la période minimale, bien qu'en soit, n'importe quel multiple entier de $T$ vérifie la condition énoncée. On note alors $f = \frac{1}{T}$ la fréquence de la solution et $\omega = 2\pi f$ sa pulsation. Le spectre de ces solutions est dit harmonique, *i.e.* il se compose de fréquences multiples de la fondamentale $\omega$ ;

**les solutions quasi-périodiques,** voir figure 3.1b, caractérisées par plusieurs fréquences dont le rapport est incommensurable, *i.e.* $\frac{\omega_i}{\omega_j} \notin \mathbb{Q}$ ;

**les solutions chaotiques,** voir figure 3.1c, dont le comportement est imprévisible mais déterministe et marqué par une forte sensibilité aux conditions initiales [187]. Elles sont caractérisées par une évolution temporelle chahutée ainsi qu'un spectre continu et large bande.

**Note :** en termes de signal, les solutions quasi-périodiques peuvent être vues comme des solutions périodiques modulées en amplitude, *cf.* figure 3.1b. Le module de la transformée de Hilbert du signal peut aider à mettre en évidence cette modulation.




(a) périodique (b) quasi-périodique (c) chaotique

Figure 3.1 Solutions d'un système non-linéaire non-autonome dépendantes du temps.

Lorsque le système étudié est soumis à une excitation harmonique, l'hypothèse fondamentale faite à travers la démarche de résolution du système (2.4.1) est la suivante : pour tout système linéaire subissant une excitation de nature périodique, sa réponse, une fois le régime permanent établi, sera elle aussi périodique. Plus généralement, si la force d'excitation du système est de nature périodique alors on peut supposer qu'il en est de même pour sa réponse. Ce constat, valide pour des systèmes linéaires, n'est cependant pas toujours vérifié dans le cas de systèmes non-linéaires. Néanmoins, dans la littérature, il est courant de supposer une réponse périodique pour les systèmes non-linéaires forcés. Pour un système non-linéaire subissant une excitation périodique, il n'est cependant pas rare d'observer des cas de réponses quasi-périodiques voire même chaotiques, mais le cas de réponses périodiques demeure le plus commun. Par exemple, dans le cas de la dynamique des turbomachines, le fonctionnement du turboréacteur implique une excitation synchrone, ce qui justifie une hypothèse de périodicité de la réponse.

Il est possible de distinguer deux paradigmes de résolution de l'équation (3.0.1) : un premier associé au domaine temporel et un second au domaine fréquentiel.

## 3.1 Domaine temporel

### 3.1.1 Méthodes analytiques de perturbation

La théorie des perturbations permet de trouver une solution approchée d'une équation notée $E_\epsilon$ dépendante d'un paramètre de perturbation $\epsilon$ quelconque, à condition d'en connaître la solution de l'équation $E_{\epsilon=0}$, correspondant au problème linéaire associé. La solution approximative trouvée est supposée très proche de la solution exacte quand la valeur absolue du paramètre $\epsilon$ tend vers zéro. Le paramètre de perturbation $\epsilon$ peut apparaître naturellement dans l'équation ou bien y

être introduit virtuellement afin d'en faciliter la résolution. L'équation $E_\epsilon$ est ici une équation différentielle du second ordre, telle que le système (2.4.1). Les méthodes de perturbation, aussi appelées méthodes asymptotiques, furent parmi les premières employées pour résoudre un système d'équations non-linéaires [204].

L'application de cette théorie conduit à l'approximation de la solution exacte par un développement asymptotique ou, en d'autres termes, un développement en série de puissances croissantes de $\epsilon$ :

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0(t) + \epsilon \boldsymbol{x}_1(t) + \epsilon^2 \boldsymbol{x}_2(t) + \cdots + O(\epsilon^{m+1}) \,,\ \epsilon \to 0 \tag{3.1.1}$$

avec $\boldsymbol{x}_i$ fonctions de référence inconnues, pour $i \in [\![0..m]\!]$ et $m$ l'ordre considéré de la série. Habituellement, dans la littérature, le développement en série est limité à deux ou trois termes de manière à fournir une approximation satisfaisante de $\boldsymbol{x}(t)$ pour un travail analytique raisonnable [175]. Historiquement, le problème fut résolu par :

**Approche directe.** En injectant l'expression (3.1.1) dans l'équation (2.4.1), puis en regroupant les termes de même puissance de $\epsilon$, on obtient une série de $m$ équations différentielles linéaires régissant l'évolution de chaque composante $\boldsymbol{x}_i$ du système. La résolution de ces équations s'effectue en cascade et mène alors à une approximation d'ordre $O(\epsilon^{m+1})$ de la solution. Cette approche constitue la méthode directe (*straightforward expansion* en anglais). Ce faisant, des termes dont l'amplitude tend vers l'infini avec le temps (typiquement de la forme $t\sin(\omega t)$), appelés termes séculaires, peuvent apparaître lors des intégrations successives [175, 193], ce qui limite le domaine de validité en temps des solutions ainsi obtenues. Un terme séculaire implique notamment la non-uniformité de l'expansion qui conduit à une déficience de l'approximation résultante.

**Méthodes alternatives.** Pour remédier à l'apparition des termes séculaires, plusieurs méthodes alternatives existent. Ces dernières suivent un schéma similaire à l'approche directe à la différence que d'autres variables y sont également développées. En voici quelques-unes :

1. la méthode de Lindstedt-Poincaré [204], où la pulsation $\omega$ est développée afin d'introduire une nouvelle échelle de temps $\tau$ sans dimension telle que $\tau = (\omega_0 + \epsilon\omega_1 + \dots)t$ ;
2. la méthode des moyennes [201, 202], où l'amplitude $a(t)$ et la phase $\phi(t)$ sont développées ;
3. la méthode des échelles multiples [193], où le temps $t$ est développé en plusieurs échelles de plus en plus lentes telle que $T_m = \epsilon^m t$, afin de mieux représenter les différents niveaux de variation du système.

Toutes ces méthodes sont notamment décrites dans les ouvrages de Nayfeh et Mook [175, 193].

## Application - Méthode des échelles multiples

Pour rester dans le domaine de validité de la méthode des échelles multiples, il faut considérer les termes d'amortissement, non-linéaire et d'excitation comme des termes de perturbation du système linéaire sous-jacent [193]. Il convient alors de supposer ces termes petits et d'introduire le coefficient adimensionné $\epsilon$ tel que $\epsilon \ll 1$. Par exemple, dans le cas de l'oscillateur de Duffing, une équation de la forme suivante peut être ainsi considérée :

$$\underbrace{\ddot{x} + \omega_0^2 x}_{\text{système linéaire}} + \underbrace{2\epsilon\xi\omega_0\dot{x} + \epsilon\alpha x^3 = \epsilon F_0 \cos(\Omega t)}_{\text{perturbation}} \tag{3.1.2}$$

On suppose une fréquence d'excitation voisine de $\omega_0$ : $\Omega \simeq \omega_0 + \sigma$, avec $\sigma = O(1)$ le paramètre de désaccord (en anglais *detuning parameter*) qui traduit une mesure de la proximité de la fréquence d'excitation avec la résonance. La solution $x(t)$ est approchée au premier ordre sous la forme d'un développement en série de puissance de $\epsilon$ :

$$x(t,\epsilon) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + O(\epsilon^2) \tag{3.1.3}$$

Le temps $t$ est ensuite réexprimé en fonction de plusieurs échelles de temps indépendantes :

$$x(t,\epsilon) = x_0(T_0,T_1) + \epsilon x_1(T_0,T_1) + O(\epsilon^2) \tag{3.1.4}$$

où $T_0 = t$ désigne l'échelle de temps rapide, et $T_1 = \epsilon t$ désigne l'échelle de temps lente. La dérivée en temps $t$ peut alors être transformée à l'aide de la règle de dérivation en chaîne :

$$\begin{aligned} \frac{dx(T_0,T_1)}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial T_0} + \epsilon\frac{\partial x}{\partial T_1} = D_0 x + \epsilon D_1 x = (D_0 + \epsilon D_1)(x_0 + \epsilon x_1) \\ \frac{d^2x(T_0,T_1)}{dt^2} &= (D_0 + \epsilon D_1)^2(x_0 + \epsilon x_1) = D_0^2(x_0 + \epsilon x_1) + 2\epsilon D_0 D_1 x_0 \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

En reportant ces nouvelles dérivées dans l'équation (3.1.2), tout en négligeant les termes d'ordre supérieur à $O(\epsilon)$, les termes de puissances $\epsilon$ identiques sont regroupés :

$$\begin{aligned} &O(\epsilon^0) : D_0^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \\ &O(\epsilon^1) : D_0^2 x_1 + \omega_0 x_1 = -2D_0 D_1 x_0 - 2\xi\omega_0 D_0 x_0 - \alpha x_0^3 + F_0\cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1) \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

La solution générale de l'équation (3.1.2) à l'ordre $\epsilon^0$ s'écrit alors :

$$x_0(T_0,T_1) = A(T_1)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 T_0} + \overline{A}(T_1)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 T_0} \tag{3.1.7}$$

où $A(T_1)$ désigne une fonction d'amplitude à valeurs complexes et $\overline{A}(T_1)$ indique le conjugué complexe. En reportant l'équation (3.1.7) dans l'équation d'ordre $O(\epsilon^1)$, il vient :

$$D_0^2 x_1 + x_1 = -\left[2\mathrm{i}\omega_0\left(\frac{\partial A}{\partial T_1} + \xi\omega_0 A\right) + 3\alpha A^2\overline{A}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 T_0} - \alpha A^3\,\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\omega_0 T_0} + \frac{1}{2}F_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)} + \text{c.c.} \tag{3.1.8}$$

où c.c. désigne le complexe conjugué des termes précédents. L'équation (3.1.8) contient un terme résonant en $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma T_1}$ dont la présence induit des termes séculaires. Pour que la solution de l'équation (3.1.8) demeure valable, ce

terme est éliminé en imposant :

$$-\left[2\mathrm{i}\omega_0\left(\frac{\partial A}{\partial T_1}+\xi\omega_0 A\right)+3\alpha A^2\overline{A}\right]+\frac{1}{2}F_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma T_1}=0 \tag{3.1.9}$$

Ceci permet de déterminer l'amplitude $A$ et donc la solution $x_0(T_0,T_1)$. En introduisant ensuite la forme polaire de l'amplitude complexe $A(T_1)=\frac{1}{2}a(T_1)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta(T_1)}$ dans l'équation (3.1.8), on obtient :

$$\mathrm{i}\omega_0(\frac{da}{dT_1}+\mathrm{i}a\frac{d\beta}{dT_1}+\xi\omega_0 a)+\frac{3}{8}\alpha a^3-\frac{F_0}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sigma T_1-\beta)} \tag{3.1.10}$$

puis en séparant les parties réelle et imaginaire de l'équation (3.1.10), on obtient :

$$\begin{aligned}\Re:\ a\frac{d\beta}{dT_1}&=\frac{3}{8}\frac{\alpha}{\omega_0}a^3+\frac{1}{2}\frac{F_0}{\omega_0}\cos(\sigma T_1-\beta)\\ \Im:\ \frac{da}{dT_1}&=-\xi\omega_0 a+\frac{1}{2}\frac{F_0}{\omega_0}\sin(\sigma T_1-\beta)\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

La solution qui correspond au régime permanent est obtenue en transformant le système (3.1.11) en système autonome, *i.e.* sans dépendance explicite au temps. Pour ce faire, on introduit la phase $\phi(T_1)=\sigma T_1-\beta(T_1)$ :

$$\begin{aligned}a\frac{d\phi}{dT_1}&=a\sigma-\frac{3}{8}\frac{\alpha}{\omega_0}a^3+\frac{1}{2}\frac{F_0}{\omega_0}\cos(\phi)\\ \frac{da}{dT_1}&=-\xi\omega_0 a+\frac{1}{2}\frac{F_0}{\omega_0}\sin(\phi)\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

Les équations (3.1.12) décrivent l'évolution de l'amplitude et de la phase à l'échelle de temps lente $T_1$, elles sont référencées sous le nom d'équations de modulation ou encore équations moyennées [174]. L'étude de la résonance se ramène ainsi à l'étude d'un système dynamique autonome (3.1.12) dont le régime permanent est donné par l'annulation des dérivées : les points fixes correspondant aux solutions d'amplitude et de phase constantes. Soit les solutions stationnaires $a^*$ et $\phi^*$ :

$$\begin{aligned}a^*\sigma-\frac{3}{8}\frac{\alpha}{\omega_0}a^{*3}&=-\frac{1}{2}\frac{F_0}{\omega_0}\cos(\phi^*)\\ \xi\omega_0 a^*&=\frac{1}{2}\frac{F_0}{\omega_0}\sin(\phi^*)\end{aligned} \tag{3.1.13}$$

On élimine $\phi^*$ en sommant les carrés des deux équations du système (3.1.13), soit :

$$\left[\xi^2\omega_0^2+\left(\sigma-\frac{3}{8}\frac{\alpha}{\omega_0}a^{*2}\right)^2\right]a^{*2}=\frac{1}{4}\frac{F_0^2}{\omega_0^2} \tag{3.1.14}$$

L'équation (3.1.14) donne l'amplitude de la réponse forcée de l'oscillateur de Duffing. En la résolvant pour $a^*$ en fonction de $\sigma$, on obtient la CRF de l'oscillateur anharmonique au voisinage de la résonance principale. Deux balayages fréquentiels sont réalisés au voisinage de $\omega_0$ pour des valeurs de $\sigma$ respectivement ascendante et descendante. Ils sont représentés sur la figure 3.2.

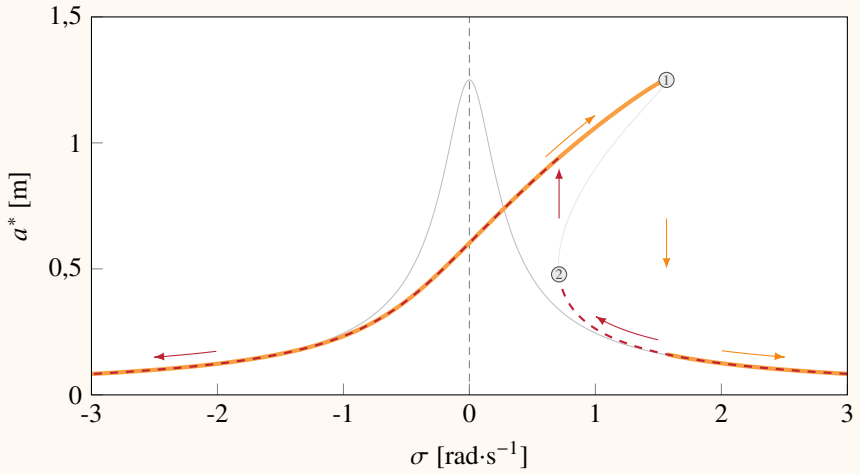



Figure 3.2 CRF de l'oscillateur de Duffing obtenue par la méthode des échelles multiples pour les paramètres : $\xi = 0{,}2$ ; $\alpha = \frac{8}{3}$ ; $\omega_0 = 1$ et $F_0 = 0{,}5$. FRF associée (——). Les flèches indiquent les sens de balayage fréquentiel : ascendant (——) et descendant (- - - -). Branche inaccessible (——).

Cette application à l'oscillateur de Duffing permet de mettre en évidence des discontinuités en amplitudes caractérisées par des sauts au niveau des points de retournement de la courbe notés ① pour le balayage ascendant et ② pour le balayage descendant. Ces points de retournement induisent un phénomène d'hystérésis et soulignent la coexistence de plusieurs solutions distinctes pour une même fréquence. L'approche actuelle employée pour résoudre l'équation (3.1.13) ne permet pas, en l'état, d'obtenir l'intégralité des branches de solutions qui relient ces points. Pour y parvenir, des efforts de calcul supplémentaires sont requis : il est nécessaire de coupler la résolution à l'une des méthodes de continuation présentées plus loin en section 4.2.

**Definition 3.1.1. Branche de solution :** courbe qui relie l'ensemble des solutions calculées pour un paramètre $\lambda$ qui varie continûment [187]. Une branche peut être qualifiée de stable ou d'instable si toutes les solutions la formant sont respectivement stables ou instables, *cf.* section 7.1. De même, elle pourra être qualifiée de périodique, ou quasi-périodique, au même titre.

Les méthodes de perturbation présentées ont l'avantage de fournir une solution analytique du problème. Néanmoins, dès le second ordre, les calculs deviennent en général assez lourds ce qui limite l'utilisation de ces méthodes à des systèmes de petite taille. De plus, ces méthodes ne sont valables que pour des non-linéarités faibles car leur domaine de validité en termes d'amplitude est réduit, ce qui rend leur application problématique pour des non-linéarités de type contact. Toutefois, il existe des versions de ces méthodes plus récentes adaptées à de fortes non-linéarités, par exemple pour les échelles multiples [33, 77].

### 3.1.2 Intégration temporelle directe

Une seconde stratégie de résolution de l'équation (2.4.1) dans le domaine temporel consiste à intégrer directement les équations du mouvement grâce à des schémas d'intégration numérique [172, 195]. Les formules d'intégration de ces schémas ont été développées de nombreuses manières, les plus répandues sont adaptées à des systèmes d'équations différentielles du premier ordre, d'autres, plus spécifiques, à des systèmes du second ordre.

**Intégrateurs du premier ordre.** Ces schémas sont conçus pour la résolution de systèmes d'équations différentielles ordinaires (EDO), soit de premier ordre en temps, de telle sorte qu'il est nécessaire de reformuler le problème dynamique du second ordre dans l'espace d'état. Pour ce faire, l'équation (2.4.1) est transformée en système d'EDO de taille $2n$ [158] à l'aide du vecteur d'état défini par l'équation (3.0.1), ce qui permet de poser :

$$\dot{z}(t) = \boldsymbol{G}(z,t) = \mathbf{L}z(t) - \boldsymbol{f}^*_{\mathrm{nl}}(z(t)) + \boldsymbol{f}^*_{\mathrm{ext}}(t) \tag{3.1.15}$$

avec :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{f}^*_{\mathrm{nl}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{f}^*_{\mathrm{ext}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\boldsymbol{f}_{\mathrm{ext}} \end{bmatrix} \tag{3.1.16}$$

où $\mathbf{I}_n$ est la matrice identité de dimension $(n \times n)$, $\mathbf{0}_n$ le matrice nulle de dimension $(n \times n)$, et la matrice masse $\mathbf{M}$ est supposée inversible.

La démarche de résolution consiste à rechercher une solution pas à pas à partir de conditions initiales connues $z_0$. On parle alors de problème à valeurs initiales. La solution $z(t)$, ainsi que les opérateurs de dérivation par rapport au temps, sont discrétisés en plusieurs instants consécutifs $t_i$ espacés d'un pas $h = t_{i+1} - t_i$, ce dernier pouvant être fixe ou variable selon le schéma utilisé. L'état du système $z(t_i)$ à l'instant $t_i$ est noté $z_i$, la forme générale des schémas d'intégration à pas multiples pour des systèmes d'EDO [195] peut s'écrire :

$$z_{i+1} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k z_{i+1-k} - h \sum_{k=0}^{m} \beta_k \dot{z}_{i+1-k} \tag{3.1.17}$$

avec $m$ le nombre de solutions aux instants précédents. Si $\alpha_k = \beta_k = 0$ pour $k > 1$, l'expression (3.1.17) correspond à des méthodes à pas unique. On distingue deux grandes catégories de schémas [172] :

**explicite,** cas où $\beta_0 = 0$, la solution $z_{i+1}$ est construite à partir de la solution aux instants précédents. Ces schémas permettent une estimation rapide de la solution car chaque itération se résume à un calcul vectoriel. Ils demeurent cependant sensibles au choix du pas de discrétisation $h$ afin

d'assurer leur stabilité. Ces schémas sont conditionnellement stables.

**implicite,** cas où $\beta_0 \neq 0$, la construction de la solution requiert l'équation du système à l'instant $t_{i+1}$ pour déterminer $z_{i+1}$, ce qui implique la résolution d'un système d'équations algébriques possiblement non-linéaire à chaque itération et a pour conséquence d'alourdir les calculs. Ces schémas sont généralement inconditionnellement stables.

Dans un contexte linéaire, les schémas d'intégration se caractérisent par trois propriétés [172] :

**Definition 3.1.2. Consistance.** Propriété d'un schéma qui assure que l'erreur de troncature (erreur introduite du fait de l'approximation d'un opérateur continu par un opérateur discret) tend vers 0 lorsque le pas de temps $h$ tend vers 0.

**Definition 3.1.3. Stabilité.** Propriété d'un schéma qui caractérise le fait que la solution du problème discrétisé reste bornée.

**Definition 3.1.4. Convergence.** Propriété d'un schéma qui garantit que la différence entre la solution exacte de l'équation et la solution numérique tend vers 0 quand le pas de temps $h$ tend vers 0. Le théorème de Lax–Richtmyer [147] assure que stabilité et consistance impliquent la convergence du schéma.

La formule générale (3.1.17) permet ainsi de déduire, par exemple pour $m = 1$, le schéma d'Euler arrière (explicite) pour $[\alpha_1 = 1\,;\, \beta_0 = 0\,;\, \beta_1 = -1]$, ou encore le schéma d'Euler avant (implicite) pour $[\alpha_1 = 1\,;\, \beta_0 = -1\,;\, \beta_1 = 0]$. Ces schémas sont d'ordre 1, ce qui correspond à une erreur issue du développement de Taylor sous-jacent en $\mathcal{O}(h^2)$. Pour améliorer la précision des résultats, il est possible d'utiliser un schéma d'ordre 2 comme le schéma d'Euler modifié (implicite), obtenu pour $[\alpha_1 = 1\,;\, \beta_0 = \beta_1 = -1/2]$, mais il est plus courant d'utiliser des méthodes d'ordres supérieurs issues des familles de méthodes de Runge-Kutta [197] ou d'Adams-Bashforth-Moulton [200].

**Intégrateurs du second ordre.** Pour ce type d'intégrateur, la représentation d'état du système (2.4.1) n'est plus requise. Tout comme dans le cas des intégrateurs du premier ordre, on distingue les schémas explicites des schémas implicites. Les schémas qui sont les plus répandus dans la littérature [212, 195] pour la résolution de systèmes dynamiques sont issus du schéma d'intégration général de Newmark [146], aussi appelé la méthode Newmark-$\beta$. Cette méthode se base sur un développement de Taylor au premier ordre des déplacements et des vitesses et sur une approximation des restes intégraux d'accélération par quadrature numérique. Le relations suivantes

constituent ainsi, dans un contexte linéaire, le schéma général de Newmark :

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{x}}_{i+1} + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{x}}_{i+1} + \mathbf{K}\boldsymbol{x}_{i+1} = \boldsymbol{f}_{\text{ext}}(t_{i+1}) \\ \boldsymbol{x}_{i+1} = \boldsymbol{x}_i + h\dot{\boldsymbol{x}}_i + h^2\,(1/2-\beta)\,\ddot{\boldsymbol{x}}_i + h^2\beta\ddot{\boldsymbol{x}}_{i+1} \\ \dot{\boldsymbol{x}}_{i+1} = \dot{\boldsymbol{x}}_i + h(1-\gamma)\ddot{\boldsymbol{x}}_i + h\gamma\ddot{\boldsymbol{x}}_{i+1} \end{cases} \tag{3.1.18}$$

où $\gamma$ et $\beta$ sont les paramètres de quadrature utilisés pour approcher les intégrales d'accélérations. Ils sont caractéristiques du schéma d'intégration utilisé et permettent d'ajuster ses propriétés (précision, stabilité *etc.*), *cf.* figure 3.3 concernant les domaines de stabilité de l'opérateur d'intégration résultant.

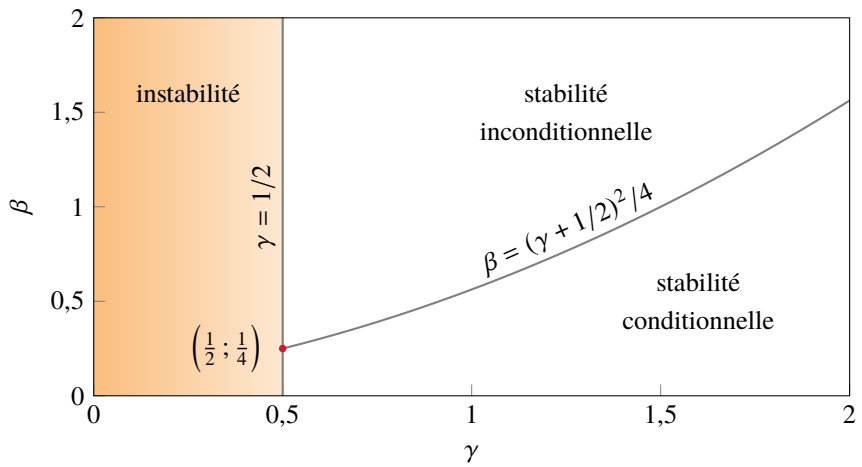



Figure 3.3 Domaines de stabilité du schéma d'intégration général de Newmark. Adaptée de [195].

Pour $\beta = 0$, le schéma est explicite. Avec les paramètres $[\gamma = 1/2\,;\,\beta = 0]$, la formulation générale (3.1.18) correspond au schéma de différences finies centrées, pour $[\gamma = 1/2\,;\,\beta = 1/4]$, à celui de l'accélération moyenne, ou encore pour $[\gamma = 1/2\,;\,\beta = 1/6]$, à celui de l'accélération linéaire (équivalent à la méthode Wilson-$\theta$ pour $\theta = 1$) [212, 195], *etc*. L'implémentation numérique de la méthode de Newmark appliquée au système linéaire (2.1.1) est présentée sur la figure 3.4. La mise en œuvre de tels algorithmes dans un contexte de dynamique non-linéaire nécessite toutefois d'être adaptée. En effet, en utilisant maintenant la formulation de l'équation d'équilibre (2.4.1), le calcul linéaire de l'accélération détaillé sur la figure 3.4 devient :

$$\left(\mathbf{M}+\gamma h\mathbf{C}+\beta h^2\mathbf{K}\right)\ddot{\boldsymbol{x}}_{i+1} = \boldsymbol{f}_{\text{ext}}(t_{i+1}) - \left[\mathbf{C}\hat{\dot{\boldsymbol{x}}}_{i+1} + \mathbf{K}\hat{\boldsymbol{x}}_{i+1} + \underbrace{\boldsymbol{f}_{\text{nl}}(\hat{\boldsymbol{x}}_{i+1} + \beta h^2\ddot{\boldsymbol{x}}_{i+1}, \hat{\dot{\boldsymbol{x}}}_{i+1} + \gamma h\ddot{\boldsymbol{x}}_{i+1})}\right] \tag{3.1.19}$$

Afin de résoudre ce système algébrique non-linéaire et d'en déterminer simultanément les efforts non-linéaires associés [163, 168], il est nécessaire de recourir à un algorithme itératif, comme celui

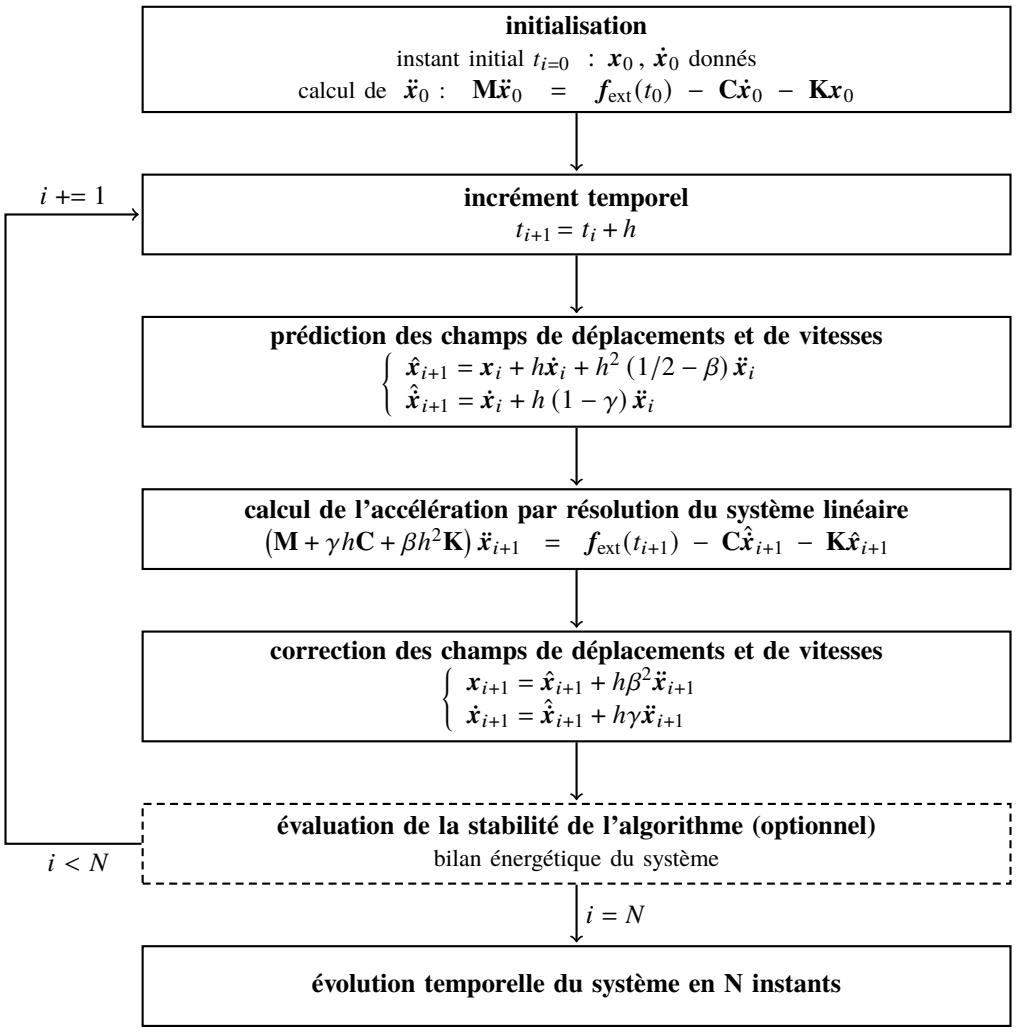



Figure 3.4 Algorithme d'intégration temporelle par une méthode de Newmark - cas linéaire.

de Newton-Raphson détaillé en section 4.1.1. La démarche consiste donc à rechercher les corrections successives $\Delta\ddot{\boldsymbol{x}}^k$ telles que :

$$\mathbf{R}^k_{i+1,\ddot{\boldsymbol{x}}}\Delta\ddot{\boldsymbol{x}}^k = -\mathbf{R}^k_{i+1} \tag{3.1.20}$$

où on définit respectivement le résidu et la matrice jacobienne (ou matrice d'itération [195]) par :

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^k_{i+1} &= \left[\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{x}}^k_{i+1} + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{x}}^k_{i+1} + \mathbf{K}\boldsymbol{x}^k_{i+1} + \boldsymbol{f}_{\text{nl}}(\boldsymbol{x}^k_{i+1}, \dot{\boldsymbol{x}}^k_{i+1})\right] - \boldsymbol{f}_{\text{ext}}(t_{i+1}) \\
\mathbf{R}^k_{i+1,\ddot{\boldsymbol{x}}} &= \mathbf{M} + \gamma h\left[\mathbf{C} + \frac{\partial \boldsymbol{f}_{\text{nl}}(\boldsymbol{x}^k_{i+1}, \dot{\boldsymbol{x}}^k_{i+1})}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right] + \beta h^2\left[\mathbf{K} + \frac{\partial \boldsymbol{f}_{\text{nl}}(\boldsymbol{x}^k_{i+1}, \dot{\boldsymbol{x}}^k_{i+1})}{\partial \boldsymbol{x}}\right]
\end{aligned} \tag{3.1.21}$$

La seule difficulté de cette procédure consiste à évaluer les dérivées partielles des efforts non-linéaires,

contenues dans l'expression de $\mathbf{R}_{i+1,\ddot{\boldsymbol{x}}}$, de manière à minimiser les temps de calcul. Pour initier la résolution du système non-linéaire, on pose alors comme itéré initial de la solution recherchée, *i.e.* pour $k = 0$ :

$$\begin{cases} \ddot{\boldsymbol{x}}_{i+1}^{0} = \hat{\ddot{\boldsymbol{x}}}_{i+1} = \mathbf{0} \\ \dot{\boldsymbol{x}}_{i+1}^{0} = \hat{\dot{\boldsymbol{x}}}_{i+1} \\ \boldsymbol{x}_{i+1}^{0} = \hat{\boldsymbol{x}}_{i+1} \end{cases} \tag{3.1.22}$$

Les corrections peuvent ainsi être appliquées successivement telles que :

$$\begin{cases} \ddot{\boldsymbol{x}}_{i+1}^{k+1} = \ddot{\boldsymbol{x}}_{i+1}^{k} + \Delta\ddot{\boldsymbol{x}}^{k} \\ \dot{\boldsymbol{x}}_{i+1}^{k+1} = \dot{\boldsymbol{x}}_{i+1}^{k} + \gamma h \Delta\ddot{\boldsymbol{x}}^{k} \\ \boldsymbol{x}_{i+1}^{k+1} = \boldsymbol{x}_{i+1}^{k} + \beta h^{2} \Delta\ddot{\boldsymbol{x}}^{k} \end{cases} \tag{3.1.23}$$

jusqu'à satisfaire un critère d'arrêt, typiquement $||\mathbf{R}_{i+1}^{k+1}||_2 \leqslant \epsilon$, où $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ désigne une tolérance numérique. L'algorithme de Newmark dans le cas non-linéaire est résumé sur la figure 3.5.

**Note :** en fonction de l'application, il peut être intéressant d'introduire de l'amortissement numérique, noté $\alpha$, sans pour autant dégrader la précision de l'intégrateur. Le schéma de Newmark peut alors s'étendre à la méthode-$\alpha$ généralisée [212, 85, 120]. Plus de détails sur les schémas de Newmark et la méthode-$\alpha$ (Hilber-Hughes-Taylor) sont donnés dans l'ouvrage de Géradin et Rixen [195].

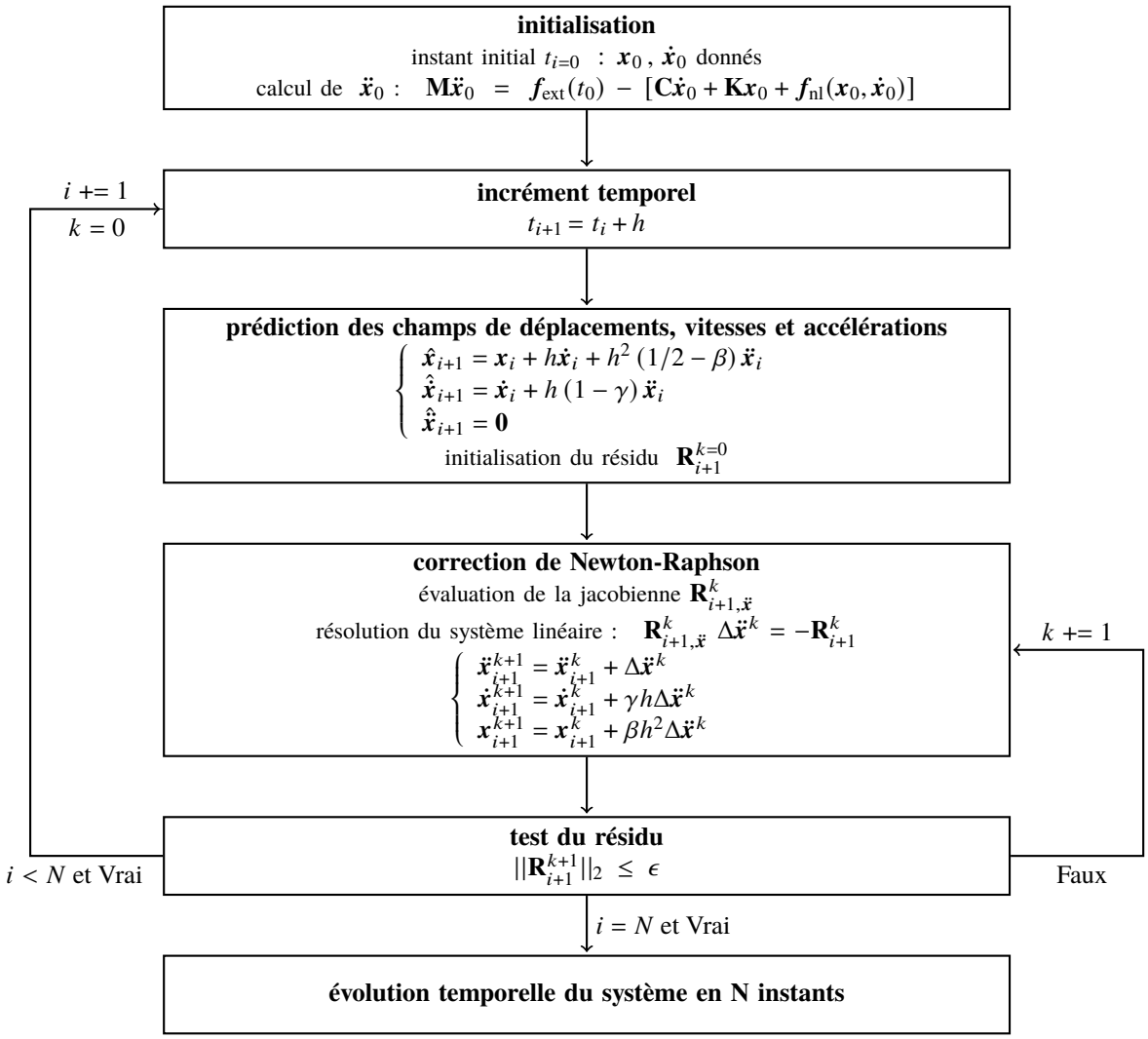



Figure 3.5 Algorithme d'intégration temporelle par une méthode de Newmark - cas non-linéaire.

## Application - Intégration temporelle directe

L'équation de l'oscillateur de Duffing (2.4.2) est ici résolue par intégration temporelle directe. Pour ce faire, on choisit un intégrateur du premier ordre : la méthode de Dormand-Prince [134]. Elle combine deux méthodes de Runge-Kutta d'ordre 4 et 5 afin d'évaluer l'erreur commise à chaque itération et d'adapter le pas de temps $h$ en conséquence. L'équation (2.4.2) est réécrite dans l'espace d'état :

$$\dot{z}(t) = \boldsymbol{G}(z, t) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -2\xi\omega_0 v - \omega_0^2 x - \alpha x^3 + F_0\cos(\omega t) \end{cases} \tag{3.1.24}$$

L'intégrateur est ensuite utilisé à travers deux balayages en fréquence, respectivement ascendant (——) et

descendant (- - - ), pour différentes valeurs de raideur non-linéaire $\alpha$. La figure 3.6 présente l'algorithme de résolution pour un balayage ascendant.

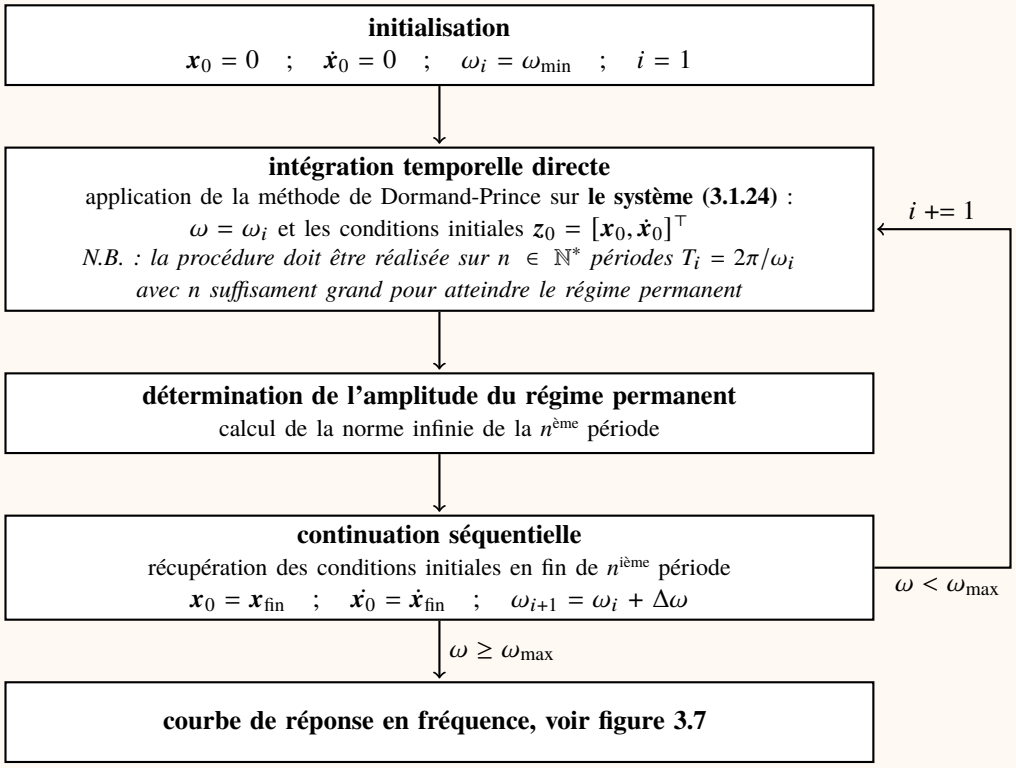



Figure 3.6 Intégration temporelle directe : algorithme d'un balayage fréquentiel ascendant.

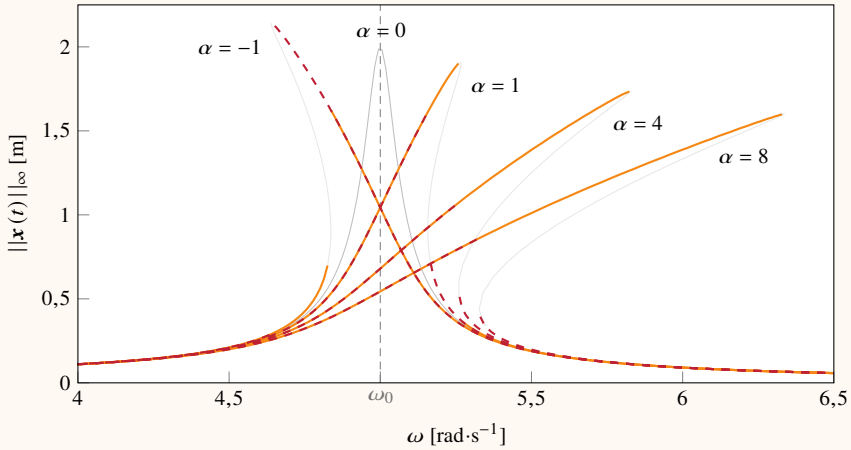
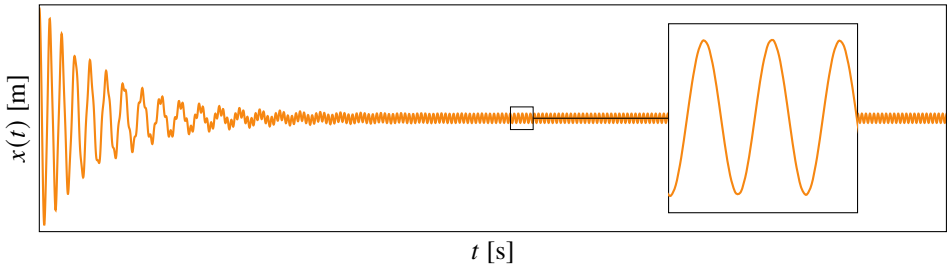



Figure 3.7 CRF de l'oscillateur de Duffing obtenue par intégration temporelle directe pour les paramètres : $\omega_0 = 5$ ; $\xi = 0{,}01$ ; $F_0 = 1$ et $\alpha$ variable. FRF associée (——). Balayages fréquentiels : ascendant (——) ; descendant (- - - ·). Branches inaccessibles (——).

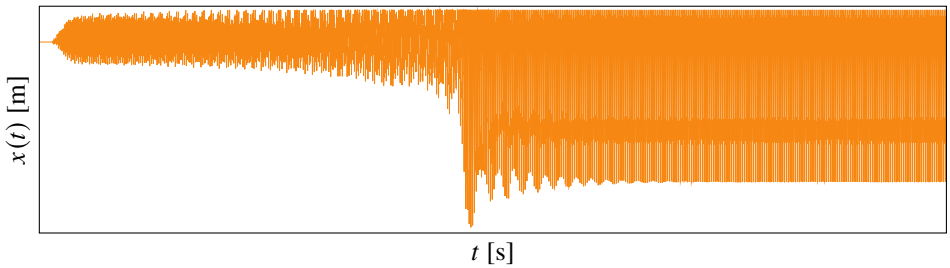
Pour les applications présentées par la suite, l'icône de chronomètre fournit un indicatif visuel de l'ordre de grandeur du temps de calcul de la méthode utilisée, il est ici conséquent, soit environ une minute et demie par balayage.

Les différentes réponses en fréquence obtenues sont présentées en figure 3.7. Cette application à l'oscillateur de Duffing est l'occasion de faire apparaître l'effet de la variation de la raideur non-linéaire $\alpha$ sur le système. Pour $\alpha$ négatif, le pic de résonance principal se décale vers des fréquences plus basses, ce qui résulte en un assouplissement du système. De plus, dans cette configuration, et pour des non-linéarités plus fortes, il est possible d'observer un comportement chaotique. Pour $\alpha$ positif, plus $\alpha$ augmente, *i.e.* plus le raidissement du système est important, plus le pic de résonance se décale vers des plus hautes fréquences.

Les avantages des intégrateurs directs résident dans leur simplicité d'utilisation, dans le fait qu'aucune hypothèse sur l'ordre de grandeur de la non-linéarité n'est nécessaire et qu'ils permettent de capter tout type de solution. Toutefois, lors de la recherche de solutions périodiques, il est nécessaire de calculer la réponse jusqu'à l'apparition d'un régime permanent, *cf.* figure 3.8, ce qui implique une phase coûteuse en temps de calcul du régime transitoire, en particulier si l'amortissement du système est faible.




(a) cas idéal




(b) cas non-linéaire avec saut d'amplitude

Figure 3.8 Régime transitoire et permanent obtenus par intégration temporelle directe.

### 3.1.3 Méthode de tir

La méthode de tir, en anglais *shooting method*, permet d'approximer la solution de problèmes différentiels aux conditions aux limites [78]. Le problème à valeurs initiales (3.1.15) peut être

transformé en faisant l'hypothèse que la solution recherchée est périodique de période $T = 2\pi/\omega$. De ce fait, la solution doit ainsi vérifier :

$$\mathbf{R}(z_0, T) = z(z_0, T) - z_0 = z(T) - z(0) = \mathbf{0} \tag{3.1.25}$$

le système (3.1.15) augmenté à résoudre devient :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \boldsymbol{G}(z, t) \\ \mathbf{R}(z_0, T) = z(z_0, T) - z_0 = \mathbf{0} \end{cases} \tag{3.1.26}$$

où $\mathbf{R}$ désigne une fonction non-analytique appelée *fonction de tir* [78] dont l'évaluation passe par l'intégration temporelle des équations de mouvement. Pour une période $T$ donnée, il faut corriger itérativement les conditions initiales $z_0$ qui ne vérifient pas exactement $\mathbf{R}(z_0, T) = \mathbf{0}$. On utilise pour cela une procédure de Newton-Raphson telle que décrite en section 4.1.1. Avec la correction $\Delta z_0^k$ et $\mathbf{R}_{,z_0}^k$ la matrice jacobienne du système à l'itération $k$, les conditions initiales corrigées à l'itération suivante s'écrivent :

$$z_0^{k+1} = z_0^k + \Delta z_0^k \quad \text{avec} \quad \mathbf{R}_{,z_0}^k \Delta z_0^k = -\mathbf{R}^k \tag{3.1.27}$$

où :

$$\mathbf{R}^k = \mathbf{R}(z_0^k, T) \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_{,z_0}^k = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial z_0}(z_0^k, T) = \frac{\partial z}{\partial z_0}(z_0^k, T) - \mathbf{I}_{2n} \tag{3.1.28}$$

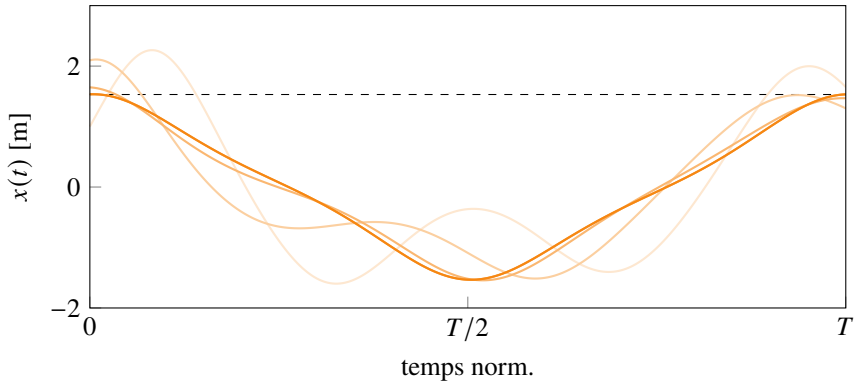
L'intégration temporelle n'est requise que sur une seule période $T$ afin d'évaluer le second membre $\mathbf{R}$, obtenu à l'aide de l'équation (3.1.25), et la jacobienne $\mathbf{R}_{,z_0}$. Le coût de calcul est par conséquent fortement diminué comparativement à une procédure d'intégration directe utilisée dans le cadre de l'obtention du régime permanent. Les corrections sont appliquées sur les conditions initiales jusqu'à atteindre la précision souhaitée et que ces dernières correspondent à une solution périodique. On incrémente alors $T$ et un nouveau cycle de corrections recommence.

**Note :** dans le cas où la période $T$ constitue une inconnue, pour des systèmes autonomes, ou comme c'est le cas pour le calcul de modes non-linéaires par exemple, il est possible d'adapter la méthode de tir en ajoutant une équation de contrainte permettant de fixer la phase de la solution [151, 75].

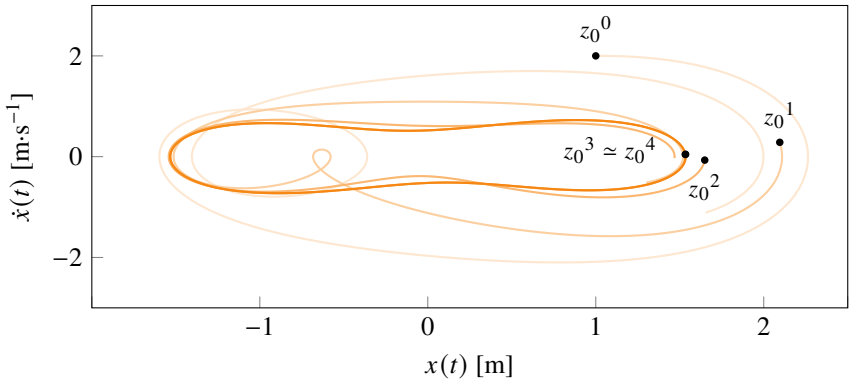
La figure 3.9 illustre une séquence de corrections nécessaires pour converger vers une solution périodique. Les différentes solutions intermédiaires obtenues y sont représentées d'une couleur orange clair à foncé. Dans l'espace des phases, voir figure 3.9b, la convergence de la méthode de tir vers une solution périodique s'interprète par la fermeture progressive de la trajectoire. Les

paramètres utilisés sont ceux de la CRF sur la figure 3.11 pour $\omega = 0{,}55$ rad·s$^{-1}$. Le critère d'arrêt de la procédure de Newton-Raphson est fixé à $10^{-4}$. Les conditions initiales associées sont également listées dans le tableau 3.1.

**Note :** l'un des attraits de la méthode de tir est que le calcul de la jacobienne fait intervenir l'évaluation du terme intermédiaire $\mathcal{M} = \partial z / \partial z_0$ appelé matrice de monodromie ou de transition de Floquet [158]. Cette matrice décrit l'évolution d'une perturbation sur une période et permet de statuer quant à la stabilité de la solution calculée. Ce dernier point sera abordé plus en détail en section 7.2.




(a) évolution temporelle




(b) espace des phases

Figure 3.9 Représentation de la convergence de la méthode de tir en 4 itérations.

| Itération $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $z_0^{k\top}$ | $[1; 2]$ | $[2{,}1; 0{,}29]$ | $[1{,}65; -0{,}07]$ | $[1{,}54; 0{,}05]$ | $[1{,}53; 0{,}04]$ |
| Trajectoire $z^k$ | ( ) | ( ) | ( ) | ( ) | ( ) |

Tableau 3.1 Convergence des conditions initiales de la méthode de tir vers une solution périodique.

## Application - Méthode de tir

La résolution est effectuée sur l'oscillateur de Duffing (2.4.2). L'intégrateur temporel est identique à celui de l'application faite en section 3.1.2. La méthode de tir est utilisée à travers deux balayages en fréquence, respectivement ascendant (——) et descendant (- - - ). La figure 3.10 présente l'algorithme de résolution pour un balayage ascendant.

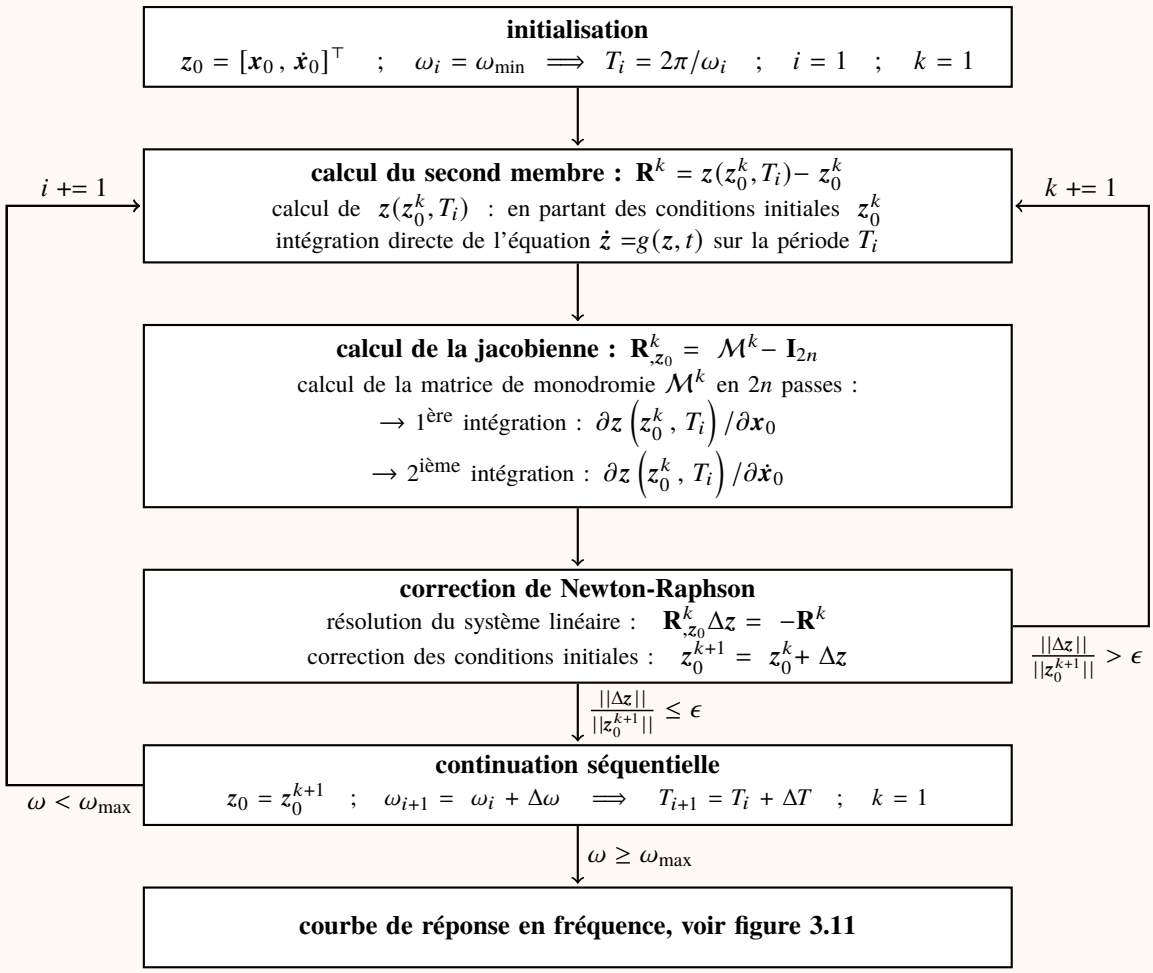



Figure 3.10 Méthode de tir : algorithme d'un balayage fréquentiel ascendant.

Les réponses en fréquence obtenues sont présentées sur la figure 3.11.

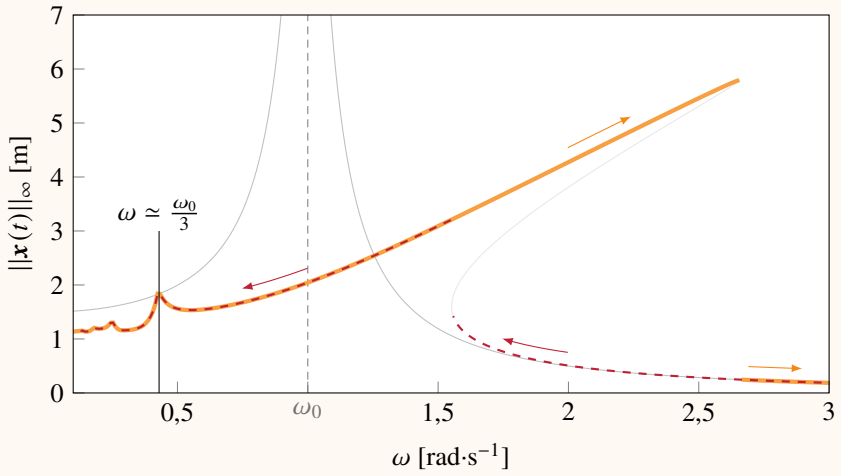



Figure 3.11 CRF d'un oscillateur de Duffing obtenue par la méthode de tir pour les paramètres : $\omega_0 = 1$ ; $\xi = 0{,}05$ ; $F_0 = 1{,}5$ et $\alpha = 0{,}25$. FRF associée (——). Les flèches indiquent les sens de balayage fréquentiel : ascendant (——) et descendant (- - - -). Branche inaccessible (——).

Par choix, l'influence de la non-linéarité est ici plus prononcée que pour les applications précédentes, l'oscillateur de Duffing laisse entrevoir, en plus de la résonance principale, un autre phénomène caractéristique des systèmes non-linéaires appelé résonance secondaire [156, 193].

**Résonances secondaires** Ces résonances sont ici des résonances sur-harmoniques, observables lorsqu'il existe une relation de la forme $\omega = \omega_i/p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ (à distinguer des résonances sous-harmoniques, observables lorsqu'il existe une relation de la forme $\omega = p\omega_i$). La résonance sur-harmonique d'ordre 3 est mise en évidence à $\omega \simeq \omega_0/3$.

Le temps de calcul est sensiblement réduit par rapport à l'intégration temporelle directe. Il est d'environ 5 secondes par balayage contre plus d'une minute précédemment.

La méthode de tir permet donc de s'affranchir du calcul de la phase transitoire lors de la recherche de solutions périodiques à partir d'un intégrateur temporel [78, 114], ce qui a pour conséquence de réduire le temps de calcul. Elle peut être par ailleurs généralisée au calcul de solutions quasi-périodiques [125]. Enfin, l'obtention de la matrice de monodromie en tant que sous-produit de calcul de la matrice jacobienne rend cette méthode attractive lorsqu'il s'agit en plus d'évaluer la stabilité des solutions.

**Note :** il existe une autre méthode temporelle assez répandue dans la littérature et adaptée au calcul de solutions périodiques, c'est la méthode de collocation orthogonale. Elle est présentée en détail dans plusieurs thèses [157, 169] et utilisée dans les codes AUTO-07P [218] ou encore

MatCont [216].

## 3.2 Domaine fréquentiel

### 3.2.1 Méthode de l'équilibrage harmonique

La méthode de l'équilibrage harmonique [171, 106], ou HBM (de l'anglais *Harmonic Balance Method*), est une méthode fréquentielle qui permet de calculer la réponse périodique du système (2.4.1). Une des hypothèses de la HBM est donc l'existence de cette solution périodique, ce qui permet de la développer en série de Fourier :

$$\boldsymbol{x}(t) \simeq \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_0 + \sum_{j=1}^{\nu H}\left[\boldsymbol{a}_{j/\nu}\cos\left(\frac{j\omega t}{\nu}\right) + \boldsymbol{b}_{j/\nu}\sin\left(\frac{j\omega t}{\nu}\right)\right] \tag{3.2.1}$$

Numériquement, la décomposition de $\boldsymbol{x}(t)$ est restreinte à un nombre fini $H$ d'harmoniques. De même, les efforts non-linéaires et les forces extérieures sont exprimés sous la forme :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}}) &\simeq \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_0^{\mathrm{nl}} + \sum_{j=1}^{\nu H}\left[\boldsymbol{a}_{j/\nu}^{\mathrm{nl}}\cos\left(\frac{j\omega t}{\nu}\right) + \boldsymbol{b}_{j/\nu}^{\mathrm{nl}}\sin\left(\frac{j\omega t}{\nu}\right)\right] \\
\boldsymbol{f}_{\mathrm{ext}}(\omega,t) &\simeq \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_0^{\mathrm{ext}} + \sum_{j=1}^{\nu H}\left[\boldsymbol{a}_{j/\nu}^{\mathrm{ext}}\cos\left(\frac{j\omega t}{\nu}\right) + \boldsymbol{b}_{j/\nu}^{\mathrm{ext}}\sin\left(\frac{j\omega t}{\nu}\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Les coefficients de chaque décomposition sont regroupés dans les quantités vectorielles—de dimension $n(2\nu H+1)$—suivantes :

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{x}} &= \left[\,\boldsymbol{a}_0,\ \boldsymbol{a}_{1/\nu},\ \boldsymbol{b}_{1/\nu},\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_H,\ \boldsymbol{b}_H\,\right]^\top \\
\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl}} &= \left[\,\boldsymbol{a}_0^{\mathrm{nl}},\ \boldsymbol{a}_{1/\nu}^{\mathrm{nl}},\ \boldsymbol{b}_{1/\nu}^{\mathrm{nl}},\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_H^{\mathrm{nl}},\ \boldsymbol{b}_H^{\mathrm{nl}}\,\right]^\top \\
\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{ext}} &= \left[\,\boldsymbol{a}_0^{\mathrm{ext}},\ \boldsymbol{a}_{1/\nu}^{\mathrm{ext}},\ \boldsymbol{b}_{1/\nu}^{\mathrm{ext}},\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_H^{\mathrm{ext}},\ \boldsymbol{b}_H^{\mathrm{ext}}\,\right]^\top
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

où les coefficients de Fourier réels relatifs aux composantes cosinus $\boldsymbol{a}_{j/\nu}^{\alpha}$ et sinus $\boldsymbol{b}_{j/\nu}^{\alpha}$, $\alpha = \{\cdot,\ \mathrm{nl},\ \mathrm{ext}\}$, sont définis par :

$$\begin{cases}
\boldsymbol{a}_{j/\nu}^{\alpha} = \left[a_{j/\nu}^{\alpha,1},\ a_{j/\nu}^{\alpha,2},\ \ldots,\ a_{j/\nu}^{\alpha,n}\right] & \text{pour} \quad j \in [\![0..\nu H]\!] \\
\boldsymbol{b}_{j/\nu}^{\alpha} = \left[b_{j/\nu}^{\alpha,1},\ b_{j/\nu}^{\alpha,2},\ \ldots,\ b_{j/\nu}^{\alpha,n}\right] & \text{pour} \quad j \in [\![1..\nu H]\!]
\end{cases} \tag{3.2.4}$$

Le symbole ( ~ ) indique dans la suite de ce document des variables appartenant au domaine fréquentiel.

On note $\mathbb{T}_H$, le vecteur ligne représentant la base de Fourier associée à la décomposition (3.2.1) :

$$\mathbb{T}_H = \left[ \frac{1}{2},\ \cos\left(\frac{\omega t}{\nu}\right),\ \sin\left(\frac{\omega t}{\nu}\right),\ \ldots,\ \cos\left(H\omega t\right),\ \sin\left(H\omega t\right) \right] \tag{3.2.5}$$

Le paramètre $\nu \in \mathbb{N}^*$, utilisé dans les équations venant d'être présentées, désigne le rapport sous-harmonique ou *sub-harmonic ratio* [106, 123, 124] en anglais. En effet, dans le cas où des vibrations sous-harmoniques devraient être analysées, $\nu$ permet de représenter certains des harmoniques contenus dans la base $\mathbb{T}_H$ sous forme de nombres fractionnaires, en offrant ainsi la possibilité de calculer des réponses non-linéaires périodiques dont la période de vibration est plus grande que la période des forces d'excitation, de telle sorte que :

$$\begin{cases} \nu = 1 & \text{pour l'étude de résonances harmoniques et sur-harmoniques} \\ \nu = k & \text{pour l'étude de la k}^{\text{ième}} \text{ résonance sous-harmonique } (k > 1) \end{cases} \tag{3.2.6}$$

Le cas échéant, $\nu$ est souvent pris égal à une puissance de 2 [118] dans le cas où des doublements de périodes sont recherchés, *cf.* section 7.4. Les décompositions (3.2.1) et (3.2.2) s'écrivent alors sous une forme plus compacte :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= (\mathbb{T}_H \otimes \mathbf{I}_n)\tilde{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{f}_{\text{nl}}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) &= (\mathbb{T}_H \otimes \mathbf{I}_n)\tilde{\boldsymbol{f}}_{\text{nl}} \\ \boldsymbol{f}_{\text{ext}}(\omega, t) &= (\mathbb{T}_H \otimes \mathbf{I}_n)\tilde{\boldsymbol{f}}_{\text{ext}} \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

où $\otimes$ désigne le produit de Kronecker.

Soit $\boldsymbol{\nabla}_j$, la matrice élémentaire regroupant les coefficients constants des dérivées premières en temps du $j/\nu^{\text{ième}}$ harmonique :

$$\boldsymbol{\nabla}_j = \frac{j}{\nu} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{pour} \quad j \in [\![1 \,..\, \nu H]\!] \tag{3.2.8}$$

On introduit l'opérateur global de dérivation de la base $\mathbb{T}_H$ noté $\boldsymbol{\nabla}$ tel que :

$$\boldsymbol{\nabla} = \text{diagblock}(0,\ \boldsymbol{\nabla}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{\nabla}_j,\ \ldots,\ \boldsymbol{\nabla}_H) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\nabla}^2 = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} \tag{3.2.9}$$

qui permet, à partir de l'équation (3.2.7), d'exprimer les dérivées première et seconde de $\boldsymbol{x}(t)$ par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= (\dot{\mathbb{T}}_H \otimes \mathbf{I}_n)\tilde{\boldsymbol{x}} = \omega((\mathbb{T}_H\boldsymbol{\nabla}) \otimes \mathbf{I}_n)\tilde{\boldsymbol{x}} \\ \ddot{\boldsymbol{x}}(t) &= (\ddot{\mathbb{T}}_H \otimes \mathbf{I}_n)\tilde{\boldsymbol{x}} = \omega^2((\mathbb{T}_H\boldsymbol{\nabla}^2) \otimes \mathbf{I}_n)\tilde{\boldsymbol{x}} \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

En substituant les expressions des déplacements et efforts (3.2.7) ainsi que celles des vitesses et accélérations (3.2.10) dans l'équation d'équilibre générale (2.4.1), l'équation à résoudre s'écrit :

$$\underbrace{\mathbf{M}\omega^2((\mathbb{T}_H\boldsymbol{\nabla}^2)\otimes\mathbf{I}_n)}_{\text{a}}\tilde{\boldsymbol{x}}+\underbrace{\mathbf{C}\omega((\mathbb{T}_H\boldsymbol{\nabla})\otimes\mathbf{I}_n)}_{\text{b}}\tilde{\boldsymbol{x}}+\underbrace{\mathbf{K}(\mathbb{T}_H\otimes\mathbf{I}_n)}_{\text{c}}\tilde{\boldsymbol{x}}+(\mathbb{T}_H\otimes\mathbf{I}_n)\tilde{\boldsymbol{f}}_{\text{nl}}\simeq(\mathbb{T}_H\otimes\mathbf{I}_n)\tilde{\boldsymbol{f}}_{\text{ext}} \tag{3.2.11}$$

Il n'y a pas, *a priori*, égalité stricte entre les termes gauche et droite de l'équation (3.2.11) à cause de la troncature aux $H$ premiers harmoniques effectuée sur les décompositions des déplacements et efforts. En utilisant la propriété du produit-mixte de Kronecker $(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})(\mathbf{C}\otimes\mathbf{D})=(\mathbf{AC})\otimes(\mathbf{BD})$, il est possible de réarranger les termes a, b et c de l'équation (3.2.11) :

$$\mathbf{M}\omega^2((\mathbb{T}_H\boldsymbol{\nabla}^2)\otimes\mathbf{I}_n)=\omega^2(1\otimes\mathbf{M})((\mathbb{T}_H\boldsymbol{\nabla}^2)\otimes\mathbf{I}_n)=\omega^2(\mathbb{T}_H\boldsymbol{\nabla}^2)\otimes\mathbf{M} \tag{3.2.12a}$$

$$\mathbf{C}\omega((\mathbb{T}_H\boldsymbol{\nabla})\otimes\mathbf{I}_n)=\omega(1\otimes\mathbf{C})((\mathbb{T}_H\boldsymbol{\nabla})\otimes\mathbf{I}_n)=\omega(\mathbb{T}_H\boldsymbol{\nabla})\otimes\mathbf{C} \tag{3.2.12b}$$

$$\mathbf{K}(\mathbb{T}_H\otimes\mathbf{I}_n)=(1\otimes\mathbf{K})(\mathbb{T}_H\otimes\mathbf{I}_n)=\mathbb{T}_H\otimes\mathbf{K} \tag{3.2.12c}$$

La différence entre les termes gauche et droite de l'équation (3.2.11), appelée résidu et notée $\boldsymbol{r}(\tilde{\boldsymbol{x}},t)$, s'écrit alors :

$$\boldsymbol{r}(\tilde{\boldsymbol{x}},t)=\omega^2((\mathbb{T}_H\boldsymbol{\nabla}^2)\otimes\mathbf{M})\tilde{\boldsymbol{x}}+\omega((\mathbb{T}_H\boldsymbol{\nabla})\otimes\mathbf{C})\tilde{\boldsymbol{x}}+(\mathbb{T}_H\otimes\mathbf{K})\tilde{\boldsymbol{x}}+(\mathbb{T}_H\otimes\mathbf{I}_n)\tilde{\boldsymbol{f}}_{\text{nl}}(\tilde{\boldsymbol{x}})-(\mathbb{T}_H\otimes\mathbf{I}_n)\tilde{\boldsymbol{f}}_{\text{ext}}(\omega,t) \tag{3.2.13}$$

Le résidu représente l'erreur induite par les fonctions d'approximation de la base de Fourier $\mathbb{T}_H$. Afin de minimiser cette erreur, on cherche à rendre le résidu orthogonal à une base de fonctions tests qui, dans le cas de la HBM, correspond également à $\mathbb{T}_H$. On parle alors de projection de Galerkin [110, 145]. Le résidu $\boldsymbol{r}$ est ainsi projeté sur le sous-espace vectoriel engendré par $\mathbb{T}_H$ en considérant comme produit scalaire de deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ :

$$\langle f(t),\,g(t)\rangle=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)g(t)\,dt \tag{3.2.14}$$

et en utilisant la propriété d'orthogonalité des fonctions trigonométriques de la base $\mathbb{T}_H$ :

$$\langle\mathbb{T}_H^\top(\omega t),\,\mathbb{T}_H(\omega t)\rangle=\mathbf{I}_{2H+1} \tag{3.2.15}$$

ce qui permet d'obtenir les équations suivantes :

$$\begin{cases}\langle\boldsymbol{r},\,\frac{1}{2}\rangle &=0 \quad \text{pour} \quad j=0\\ \langle\boldsymbol{r},\,\cos\left(\frac{j\omega t}{\nu}\right)\rangle &=0 \quad \text{pour} \quad j\in[\![1..\nu H]\!]\\ \langle\boldsymbol{r},\,\sin\left(\frac{j\omega t}{\nu}\right)\rangle &=0 \quad \text{pour} \quad j\in[\![1..\nu H]\!]\end{cases} \tag{3.2.16}$$

où la dépendance en temps de l'équation (3.2.11) a été éliminée. La concaténation des relations (3.2.16) aboutit ainsi à la relation :

$$\mathbf{R}(\tilde{\boldsymbol{x}},\omega) = \omega^2(\boldsymbol{\nabla}^2\otimes\mathbf{M})\tilde{\boldsymbol{x}} + \omega(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{C})\tilde{\boldsymbol{x}} + (\mathbf{I}_{2H+1}\otimes\mathbf{K})\tilde{\boldsymbol{x}} + (\mathbf{I}_{2H+1}\otimes\mathbf{I}_n)\tilde{\boldsymbol{f}}_{\text{nl}} - (\mathbf{I}_{2H+1}\otimes\mathbf{I}_n)\tilde{\boldsymbol{f}}_{\text{ext}} \quad (3.2.17)$$

soit, sous forme compacte :

$$\mathbf{R}(\tilde{\boldsymbol{x}},\omega) = \mathbf{Z}(\omega)\tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{\boldsymbol{f}}_{\text{nl}}(\tilde{\boldsymbol{x}}) - \tilde{\boldsymbol{f}}_{\text{ext}}(\omega) = \mathbf{0} \quad (3.2.18)$$

avec $\mathbf{Z}(\omega)$ la matrice de rigidité dynamique linéaire, diagonale par blocs de taille $(n(2\nu H+1)\times n(2\nu H+1))$ regroupant les matrices structurelles du modèle, définie par :

$$\mathbf{Z}(\omega) = \omega^2\boldsymbol{\nabla}^2\otimes\mathbf{M} + \omega\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{C} + \mathbf{I}_{2H+1}\otimes\mathbf{K} \quad (3.2.19)$$

ou, de manière explicite :

$$\mathbf{Z}(\omega) = \text{diagblock}(\mathbf{K}, \mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_j, \ldots, \mathbf{Z}_H) \quad \text{avec} \quad \mathbf{Z}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - \left(\frac{j\omega}{\nu}\right)^2\mathbf{M} & \frac{j\omega}{\nu}\mathbf{C} \\ -\frac{j\omega}{\nu}\mathbf{C} & \mathbf{K} - \left(\frac{j\omega}{\nu}\right)^2\mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (3.2.20)$$

Le système différentiel (2.4.1) a été transformé en un système algébrique non-linéaire (3.2.18) de $n_H = n(2\nu H+1)$ équations dont les $n_H$ inconnues sont les coefficients de Fourier contenus dans le vecteur $\tilde{\boldsymbol{x}}$. La résolution d'un tel système se fait à l'aide d'une procédure itérative telle que la méthode de Newton-Raphson [48, 154, 52], la méthode hybride de Powell [99, 139] ou encore celle de Broyden [142]. En partant d'un itéré initial $\tilde{\boldsymbol{x}}^{k=0}$ et de l'évaluation de la jacobienne $\mathbf{R}^k_{,\tilde{\boldsymbol{x}}}$ du système (3.2.17) par rapport à $\tilde{\boldsymbol{x}}$ en $\tilde{\boldsymbol{x}}^k$, la $k+1^{\text{ième}}$ itération de la procédure de Newton-Raphson est donnée par :

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^{k+1} = \tilde{\boldsymbol{x}}^k + \Delta\tilde{\boldsymbol{x}}^k \quad \text{avec} \quad \mathbf{R}^k_{,\tilde{\boldsymbol{x}}}\Delta\tilde{\boldsymbol{x}}^k = -\mathbf{R}^k \quad (3.2.21)$$

où :

$$\mathbf{R}^k = \mathbf{R}(\tilde{\boldsymbol{x}}^k,\omega) \quad \text{et} \quad \mathbf{R}^k_{,\tilde{\boldsymbol{x}}} = \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\tilde{\boldsymbol{x}}}(\tilde{\boldsymbol{x}}^k,\omega) = \mathbf{Z}(\omega) + \frac{\partial\tilde{\boldsymbol{f}}_{\text{nl}}(\tilde{\boldsymbol{x}}^k)}{\partial\tilde{\boldsymbol{x}}} \quad (3.2.22)$$

**Application - Méthode de l'équilibrage harmonique**

L'application de la HBM à l'équation de Duffing (2.4.2) permet l'approximation monochromatique ($H=1$) :

$$x(t) \simeq a_0 + a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t) \quad (3.2.23)$$

Il vient :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\omega a_1 \sin(\omega t) + \omega b_1 \cos(\omega t)\\ \ddot{x}(t) &= -\omega^2 a_1 \cos(\omega t) - \omega^2 b_1 \sin(\omega t)\end{aligned} \tag{3.2.24}$$

L'utilisation de formules trigonométriques usuelles permet ensuite de développer le terme non-linéaire $x^3$ :

$$\begin{aligned}f_{\mathrm{nl}}(x) = x^3 = a_0^3 &+ \frac{3a_0 b_1^2}{2} + \frac{3a_0 a_1^2}{2}\\ &+ \left(\frac{3a_1^3}{4} + 3a_1 a_0^2 + \frac{3a_1 b_1^2}{4}\right)\cos(\omega t) + \left(3a_1^2 b_1 4 + 3a_0^2 b_1 + \frac{3b_1^3}{4}\right)\sin(\omega t)\\ &+ \left(3a_1^2 a_0 2 - 3a_0 b_1^2 2\right)\cos(2\,\omega t) + 3a_1 a_0 b_1\ \sin(2\,\omega t)\\ &+ \left(\frac{a_1^3}{4} - \frac{3a_1 b_1^2}{4}\right)\cos(3\,\omega t) + \left(\frac{3a_1^2 b_1}{4} - \frac{b_1^3}{4}\right)\sin(3\omega t)\end{aligned} \tag{3.2.25}$$

La projection de Galerkin est alors appliquée à l'aide du produit scalaire (3.2.14), à l'équation (2.4.2) dans laquelle les expressions harmoniques (3.2.23), (3.2.24) et (3.2.25) ont été injectées, sur la base de Fourier $\mathbb{T}_1 = \left[\ \frac{1}{2},\ \cos(\omega t),\ \sin(\omega t)\ \right]$, ce qui permet d'obtenir le système :

$$\begin{cases} 1/2 : a_0[\omega_0^2 + \alpha(a_0^2 + \frac{3}{2}(a_1^2 + b_1^2))] = 0 & \text{(3.2.26a)}\\ \cos(\omega t) : (\omega_0^2 - \omega)a_1 + 2\xi\omega_0\omega b_1 + 3\alpha a_1(a_0^2 + \frac{1}{4}(a_1^2 + b_1^2)) = F_0 & \text{(3.2.26b)}\\ \sin(\omega t) : (\omega_0^2 - \omega)b_1 - 2\xi\omega_0\omega a_1 + 3\alpha b_1(a_0^2 + \frac{1}{4}(a_1^2 + b_1^2)) = 0 & \text{(3.2.26c)}\end{cases}$$

L'équation (3.2.26a) implique que $a_0 = 0$ pour la composante moyenne. L'équation de la CRF, de manière similaire à celle obtenue par échelles multiples (3.1.14), s'obtient alors en calculant l'amplitude $a^*$ suivant la norme euclidienne (2) définie telle que $||a^*||_2 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$. En sommant les carrés des équations (3.2.26b) et (3.2.26c), il vient finalement :

$$\left[(2\xi\omega_0\omega)^2 + \left((\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{3}{4}\alpha a^*\right)^2\right] a^{*2} = F_0^2 \tag{3.2.27}$$

L'équation (3.2.27) permet d'obtenir la CRF de l'oscillateur de Duffing approximée par HBM à l'ordre $H = 1$. Étant donné la nature non-linéaire du système, l'approximation monoharmonique faite dans le développement (3.2.23) est vraisemblablement insuffisante pour obtenir une représentation précise de la solution. Plusieurs alternatives d'estimation du terme non-linéaire sont également présentées en section 3.2.1.1. La solution de l'équation de Duffing (2.4.2) est obtenue par HBM pour $H = 1$, 3 et 20. Les résultats sont présentés sur la figure 3.12. Les différentes CRF révèlent que la solution pour $H = 1$ (——) ne permet pas de capter de résonances secondaires et tend aussi à sous-estimer l'amplitude maximale du pic de résonance principale, alors que la solution pour $H = 3$ (——) capte bien la résonance sur-harmonique située à $\omega = \omega_0/3 \simeq 0{,}4$ (*cf.* section 3.1.3). Finalement, la solution pour $H = 20$ (——) permet de capter des résonances sur-harmoniques supplémentaires. Cette dernière approximation a pu être obtenue à l'aide d'une approche temps/fréquence sur laquelle la section 3.2.1.1 revient plus en détail.

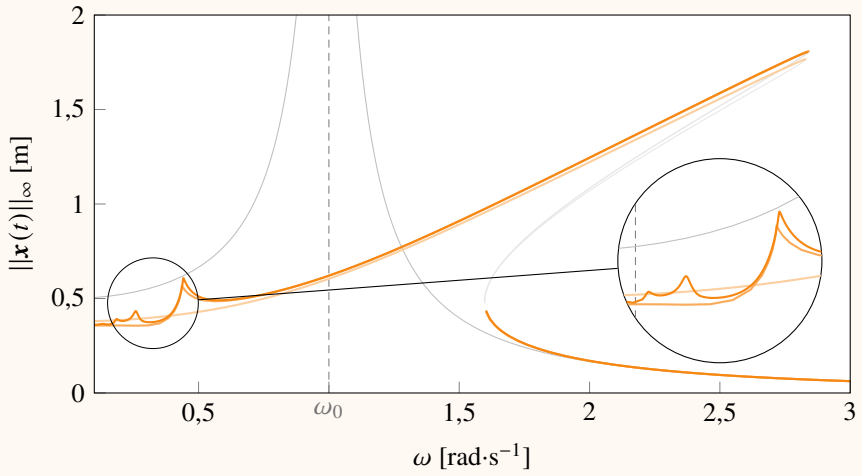



Figure 3.12 CRF d'un oscillateur de Duffing obtenue par la méthode de l'équilibrage harmonique pour : $\omega_0 = 1$ ; $\xi = 0{,}05$ ; $F_0 = 0{,}5$ et $\alpha = 3$, FRF associée (——). Les trois autres courbes correspondent aux solutions obtenues pour $H = 1$ (——), $H = 3$ (——) et $H = 20$ (——). Branches inaccessibles (——).

**Note :** pour l'oscillateur de Duffing, une étude de la parité des efforts non-linéaires permet de mettre en évidence que seuls les harmoniques impairs ont de l'influence sur la réponse, *e.g.* la relation trigonométrique $\cos^3(\omega t) = \frac{3}{4}\cos\omega t + \frac{1}{4}\cos 3\omega t$.

La méthode de l'équilibrage harmonique peut s'adapter à tout type de non-linéarité (faible ou forte), régulière (comme les non-linéarités géométriques), ou non-régulières (comme le contact). Elle permet avantageusement de mettre en évidence les phénomènes de résonances secondaires. Bien que limitée à des régimes d'oscillations périodiques, elle est toutefois généralisable, dans sa version multidimensionnelle, à des régimes quasi-périodiques [43, 53, 65]. Par ailleurs, elle peut être utilisée sur une base d'ondelettes dans le cas d'efforts non-linéaires présentant des non-régularités comme ceux relatifs au contact, ceci permettant notamment d'atténuer l'impact du phénomène de Gibbs [57]. D'autre part, il est impossible de déterminer *a priori* le nombre d'harmoniques à retenir dans la décomposition de la solution qui garantit une bonne approximation de la solution recherchée.

#### 3.2.1.1 Calcul des efforts non-linéaires

L'une des principales difficultés d'application de la HBM consiste à déterminer les composantes fréquentielles du vecteur des efforts non-linéaires $\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl}}(\tilde{\boldsymbol{x}})$. Les trois différentes approches envisageables sont recensées dans ce qui suit.

**Calcul analytique direct.** Approche dans laquelle les coefficients de Fourier des efforts non-linéaires sont évalués à partir de leur expression dans le domaine temporel transposée dans le domaine fréquentiel à l'aide d'identités trigonométriques. Cette approche est laborieuse à mettre en œuvre comme la précédente application l'a démontré et ce, même à l'aide d'un outil de calcul symbolique [1]. De plus, toute nouvelle non-linéarité ou considération d'harmonique supplémentaire nécessitent un travail manuel préparatoire. Une autre manière d'évaluer les efforts non-linéaires dans le domaine de Fourier consiste à exploiter le fait que le produit de deux séries de Fourier dans le domaine temporel correspond au produit de convolution de leurs spectres dans le domaine fréquentiel. Il est important de souligner que les applications de l'une ou l'autre de ces deux stratégies sont circonscrites à des non-linéarités polynomiales régulières, par exemple [92].

**Calcul analytique par morceaux.** Similaire à l'approche précédente, mais applicable uniquement à des non-linéarités polynomiales définies par morceaux, comme par exemple une non-linéarité de contact formulée par pénalité bilinéaire. L'idée de cette méthode consiste à évaluer analytiquement l'expression des intégrales relatives aux coefficients de Fourier pour chaque morceau. Toutefois, afin de pouvoir approximer ces intégrales, il est nécéssaire de déterminer les instants de transition entre un état du système et un autre, ce qui s'avère être une tâche ardue étant donné que ces instants sont *a priori* inconnus. Il faudra alors avoir recours à des algorithmes de type *event-driven* afin de déterminer préalablement les instants de transition [60, 101] au cours d'une période. Bien que cette approche soit très précise, le coût calcul supplémentaire engendré par la détection possible de multiples instants de transition constitue un désavantage.

**L'alternance fréquence/temps.** De l'anglais *alternating frequency/time*, abrégée AFT par la suite [128, 131], cette méthode est plus générique que les précédentes et permet de traiter tout type de non-linéarité. À chaque itération, les inconnues fréquentielles sont transposées dans le domaine temporel à l'aide d'une transformée de Fourier discrète inverse ($\mathrm{DFT}^{-1}$), ce qui permet de calculer les efforts non-linéaires et la jacobienne du système. Ces derniers sont ensuite projetés dans le domaine fréquentiel à l'aide d'une transformée de Fourier discrète (DFT). Ce principe est illustré sur la figure 3.13. Le calcul des transformées de Fourier discrètes s'effectue alors généralement à l'aide d'un algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT, de l'anglais *fast Fourier transform* [143]) dont l'efficacité est optimisée pour un nombre d'échantillons égal à une puissance de 2.

Une alternative aux algorithmes usuels permettant de calculer les opérations de DFT consiste à réécrire les transformées de Fourier discrètes directe et inverse comme des opérateurs linéaires notés $\mathbf{\Gamma}^{-1}$ et $\mathbf{\Gamma}$. Cet usage est largement répandu dans la littérature [48, 52, 110]. En considérant une période discrétisée en $N$ instants uniformément répartis $t_i = \frac{\nu 2\pi}{\omega}\frac{i}{N}$ avec $i \in [\![0..N-1]\!]$ et les vecteurs

1. Comme la librairie Python SymPy ou encore le moteur de recherche WolframAlpha.

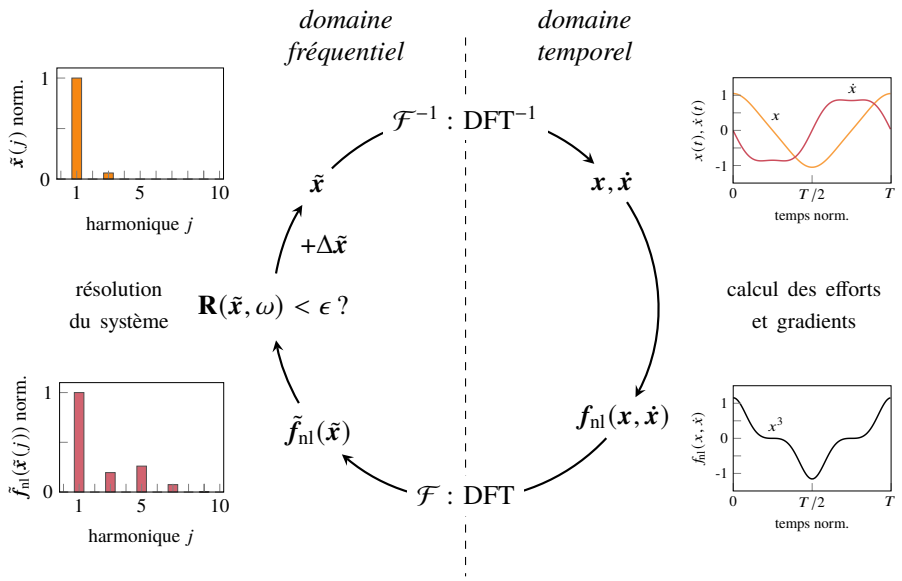



Figure 3.13 Procédure AFT. Adaptée de [171].

$\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}$ contenant les $nN$ instants associés aux déplacements et efforts non-linéaires concaténés de l'ensemble des ddl :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= [\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n]^\top = \left[x_{1,0}, \ldots, x_{1,N-1}, \ldots, x_{n,0}, \ldots, x_{n,N-1}\right]^\top \\ \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) &= [\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n]^\top = \left[f_{1,0}, \ldots, f_{1,N-1}, \ldots, f_{n,0}, \ldots, f_{n,N-1}\right]^\top \end{aligned} \tag{3.2.28}$$

La transformée de Fourier inverse, permettant de calculer les déplacements, peut ainsi s'écrire sous la forme d'un produit matriciel :

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Gamma}\tilde{\boldsymbol{x}} \tag{3.2.29}$$

De manière identique, pour les vitesses et accélérations, il vient :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \omega\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{I}_n)\tilde{\boldsymbol{x}} \\ \ddot{\boldsymbol{x}} &= \omega^2\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\nabla}^2 \otimes \mathbf{I}_n)\tilde{\boldsymbol{x}} \end{aligned} \tag{3.2.30}$$

avec la matrice de dimension $(nN \times n(2\nu H+1))$, *cf.* figure 3.14 :

$$\mathbf{\Gamma} = \left[ \mathbf{I}_n \otimes \begin{bmatrix} 1/2 \\ \vdots \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_n \otimes \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\omega}{\nu} t_0\right) \\ \vdots \\ \cos\left(\frac{\omega}{\nu} t_{N-1}\right) \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_n \otimes \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\omega}{\nu} t_0\right) \\ \vdots \\ \sin\left(\frac{\omega}{\nu} t_{N-1}\right) \end{bmatrix} \quad \dots \right.$$
$$\left. \dots \quad \mathbf{I}_n \otimes \begin{bmatrix} \cos\left(H\omega t_0\right) \\ \vdots \\ \cos\left(H\omega t_{N-1}\right) \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_n \otimes \begin{bmatrix} \sin\left(H\omega t_0\right) \\ \vdots \\ \sin\left(H\omega t_{N-1}\right) \end{bmatrix} \right] \tag{3.2.31}$$

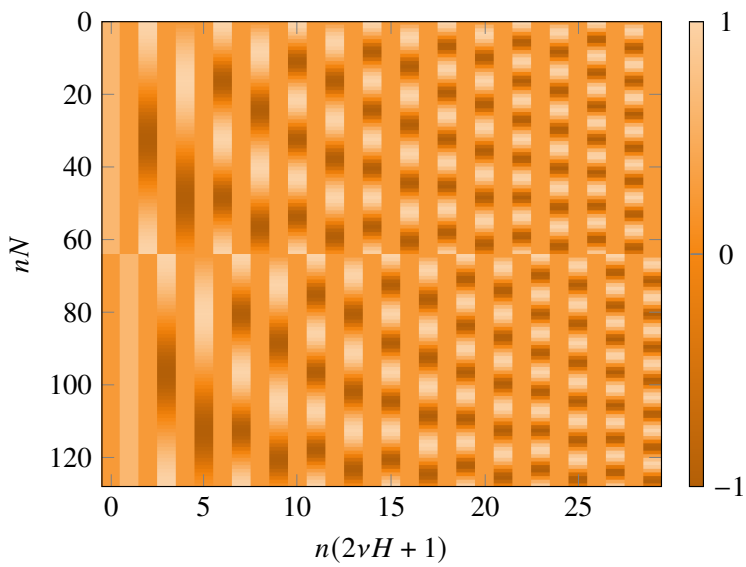



Figure 3.14 Illustration de la matrice $\mathbf{\Gamma}$ ($\mathrm{DFT}^{-1}$) pour $n = 2$, $N = 64$, $H = 7$ et $\nu = 1$. Adaptée de [52].

D'une manière similaire, la transformée de Fourier directe peut alors également s'écrire comme une multiplication de matrices :

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \mathbf{\Gamma}^{-1}\boldsymbol{x} \tag{3.2.32}$$

où l'inverse $\mathbf{\Gamma}^{-1}$ constitue la matrice de transformée directe [39] et se définit analytiquement telle que :

$$\mathbf{\Gamma}^{-1} = \frac{2}{N} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n\otimes & [1 & \dots & 1] \\ \mathbf{I}_n\otimes & \left[\cos\left(\frac{\omega}{\nu} t_0\right) & \dots & \cos\left(\frac{\omega}{\nu} t_{N-1}\right)\right] \\ \mathbf{I}_n\otimes & \left[\sin\left(\frac{\omega}{\nu} t_0\right) & \dots & \sin\left(\frac{\omega}{\nu} t_{N-1}\right)\right] \\ & & \vdots & \\ \mathbf{I}_n\otimes & [\cos\left(H\omega t_0\right) & \dots & \cos\left(H\omega t_{N-1}\right)] \\ \mathbf{I}_n\otimes & [\sin\left(H\omega t_0\right) & \dots & \sin\left(H\omega t_{N-1}\right)] \end{bmatrix} \tag{3.2.33}$$

Toutefois, il n'est pas rare de voir certains auteurs [52] directement définir cet opérateur à l'aide du pseudo-inverse de Moore-Penrose, et ce, bien que cela induise des erreurs d'arrondi numériques supplémentaires.

**Definition 3.2.1. Pseudo-inverse de Moore-Penrose.** Si $\mathbf{A}$ est une matrice de dimension $(m \times n)$, son pseudo-inverse de Moore-Penrose (ou inverse généralisé), désigné par l'exposant $(+)$, est donné par :

$$\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}^{\top}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\top})^{-1}$$

En outre, en introduisant au sein des équations (3.2.31) et (3.2.33) l'adimensionnement temporel suivant :

$$\nu\tau = \omega t \quad \text{soit discrétisé} \quad \tau_i = 2\pi\frac{i}{N} \quad \text{pour} \quad i \in [\![0..N-1]\!] \tag{3.2.34}$$

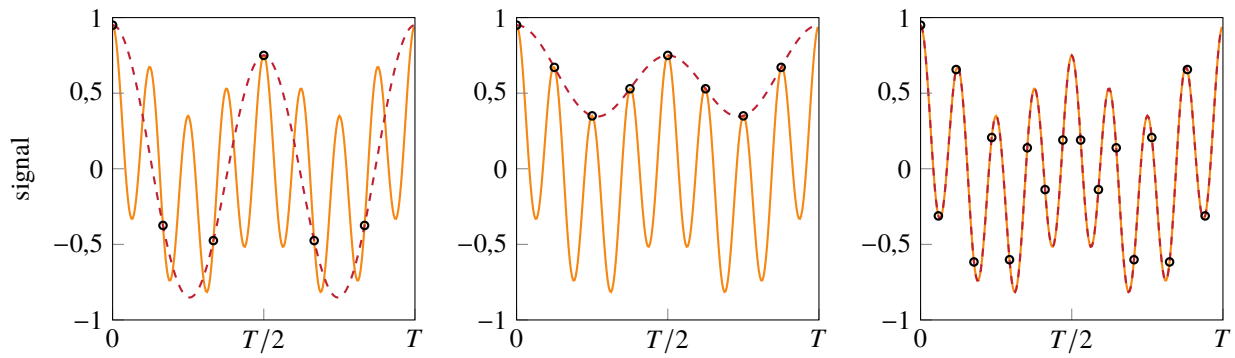
on remarque que les opérateurs $\mathbf{\Gamma}$ et $\mathbf{\Gamma}^{-1}$ sont en réalité indépendants de la pulsation $\omega$. Il n'est donc nécessaire de les calculer qu'une seule fois. Finalement, après avoir évalué $\boldsymbol{f}_{\text{nl}}$ dans le domaine temporel, la forme fréquentielle des efforts non-linéaires s'obtient alors *via* la relation :

$$\tilde{\boldsymbol{f}}_{\text{nl}} = \mathbf{\Gamma}^{-1}\boldsymbol{f}_{\text{nl}} \tag{3.2.35}$$

**Note :** l'implémentation numérique de l'AFT impose de maîtriser les erreurs classiques liées à l'échantillonnage d'un signal [185]. Afin d'éviter un éventuel phénomène de repliement du spectre, en anglais *aliasing*, illustré sur la figure 3.15, le théorème de Nyquist-Shannon pose la condition $N \geqslant (2H+1)$ : l'échantillonnage temporel $N$ doit être égal ou supérieur au double de la fréquence maximale du signal échantillonné. Bien que ce critère offre ainsi une limite inférieure théorique de $N$ en vue d'éviter les erreurs d'*aliasing*, en pratique, lorsque l'on considère de fortes non-linéarités telles que des non-linéarités de contact, le schéma AFT nécessite alors une fréquence d'échantillonnage plus importante [37]. Il n'existe toutefois que des critères empiriques pour un choix de $N$ suffisant, tel que $N = \min(500 + 25H,\ 2000)$ [25]. Enfin, prendre comme période d'échantillonage la période $T$ permet de s'affranchir du phénomène de fuite spectrale, en anglais *spectral leakage*.

#### 3.2.1.2 Calcul des jacobiennes

La procédure de Newton-Raphson utilisée pour la résolution du système (3.2.18) requiert l'évaluation de la matrice jacobienne $\mathbf{R}_{,\tilde{x}}$ à chaque nouvelle correction, *cf.* équation (3.2.21). Pour cela, seule la jacobienne fréquentielle des efforts non-linéaires par rapport aux coefficients de Fourier des




(a) $N = 6$ (b) $N = 8$ (c) $N = 17$

Figure 3.15 Phénomène de repliement spectral pour différentes valeurs d'échantillonage $N$ appliquées au signal $0{,}1\cos(\omega t) + 0{,}25\cos(2\omega t) + 0{,}6\cos(8\omega t)$. Signal d'origine (——) et signaux reconstruits (- - - -). Il faut donc ici respecter $N \geqslant 17$ afin de représenter convenablement l'information portée par le huitième harmonique.

déplacements $\partial \tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl}}(\tilde{\boldsymbol{x}})/\partial \tilde{\boldsymbol{x}}$ est à déterminer étant donné que le terme $\mathbf{Z}(\omega)$ est connu. Elle s'écrit [2] telle que :

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl}}(\tilde{\boldsymbol{x}})}{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{a}_0^{\mathrm{nl}}}{\partial \boldsymbol{a}_0} & \dfrac{\partial \boldsymbol{a}_0^{\mathrm{nl}}}{\partial \boldsymbol{a}_1} & \cdots & \dfrac{\partial \boldsymbol{a}_0^{\mathrm{nl}}}{\partial \boldsymbol{b}_H} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{nl}}}{\partial \boldsymbol{a}_0} & \dfrac{\partial \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{nl}}}{\partial \boldsymbol{a}_1} & \cdots & \dfrac{\partial \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{nl}}}{\partial \boldsymbol{b}_H} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{b}_H^{\mathrm{nl}}}{\partial \boldsymbol{a}_0} & \dfrac{\partial \boldsymbol{b}_H^{\mathrm{nl}}}{\partial \boldsymbol{a}_1} & \cdots & \dfrac{\partial \boldsymbol{b}_H^{\mathrm{nl}}}{\partial \boldsymbol{b}_H} \end{bmatrix} \tag{3.2.36}$$

où chaque bloc de dimension $(n \times n)$ est formé, par exemple pour le couple $(\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{nl}}, \boldsymbol{b}_1)$, tel que :

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{nl}}}{\partial \boldsymbol{b}_1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial a_1^{\mathrm{nl},1}}{\partial b_1^1} & \dfrac{\partial a_1^{\mathrm{nl},1}}{\partial b_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial a_1^{\mathrm{nl},1}}{\partial b_1^n} \\ \dfrac{\partial a_1^{\mathrm{nl},2}}{\partial b_1^1} & \dfrac{\partial a_1^{\mathrm{nl},2}}{\partial b_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial a_1^{\mathrm{nl},2}}{\partial b_1^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial a_1^{\mathrm{nl},n}}{\partial b_1^1} & \dfrac{\partial a_1^{\mathrm{nl},n}}{\partial b_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial a_1^{\mathrm{nl},n}}{\partial b_1^n} \end{bmatrix} \tag{3.2.37}$$

Il existe alors plusieurs techniques pour calculer cette matrice, soit (1) analytiquement, (2) par différences finies, (3) par différentiation automatique, ou encore (4) par une méthode semi-analytique basée sur l'utilisation de l'AFT.

2. Pour plus de clarté, dans le cas où $\nu = 1$.

**Calcul analytique.** En général, le calcul analytique n'est applicable que pour des systèmes de petites dimensions et quand la forme des non-linéarités le permet, par exemple dans l'article [130].

**Différences finies.** Aussi appelée différentiation numérique, cette technique constitue un outil numérique classique qui peut cependant s'avérer lourd en temps de calcul et relativement imprécis [158, 124]. Pour rappel, si $f$ désigne une fonction de classe $C^3$, les approximations au premier ordre avant $(+h)$ et arrière $(-h)$ de sa dérivée première évaluée en $x_i$ notée $\hat{f}^{(1)}$ sont données par [181] :

$$\hat{f}^{(1)} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} + O(h)\,, \quad \hat{f}^{(1)} = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h} + O(h) \tag{3.2.38}$$

ou bien au second ordre avec la formule de différences finies centrée :

$$\hat{f}^{(1)} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + O(h^2) \tag{3.2.39}$$

sous réserve d'un pas de discrétisation $h$ uniforme. Les approximations pour les bords du domaine seront alors généralement effectuées à l'aide des formules avant et arrière. Ainsi, si on réécrit la jacobienne fréquentielle telle que :

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl}}(\tilde{\boldsymbol{x}})}{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}} = \left[ \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl}}}{\partial a_0^1}, \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl}}}{\partial a_0^2}, \ldots, \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl}}}{\partial a_0^n}, \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl}}}{\partial a_1^1}, \ldots, \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl}}}{\partial b_H^n} \right] \tag{3.2.40}$$

elle peut être calculée colonne par colonne (de dimension $n(2H+1)$), par exemple, dans le cas d'une approximation du second ordre, la dérivée de $\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl}}$ par rapport à la seconde composante harmonique en cosinus d'indice $j = 3$ du ddl d'indice $i = 1$ est donnée par :

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl}}}{\partial a_2^1} = \frac{\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl}}(\tilde{\boldsymbol{x}} + h\mathbf{e}_{ij}) - \tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl}}(\tilde{\boldsymbol{x}} - h\mathbf{e}_{ij})}{2h} \tag{3.2.41}$$

où $\mathbf{e}_{ij}$ est un vecteur dont toutes les composantes sont nulles exceptée la $i(2H+1) + j^{\text{ième}}$ qui est égale à l'unité (pour $i \in [\![0..n-1]\!]$, $j \in [\![0..2H]\!]$). L'évaluation du terme $\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl}}(\tilde{\boldsymbol{x}} \pm h\mathbf{e}_{ij})$ s'effectuera alors analytiquement ou par AFT, *cf.* section 3.2.1.1.

En utilisant une approximation par différences finies, il faut choisir $h$ de manière à minimiser l'erreur d'arrondi numérique et dans un même temps l'erreur d'approximation de la sécante. D'un point de vue pratique (et sous réserve que $x_i \neq 0$), *cf.* figure 3.16, dans le cas d'une formule au premier ordre, $h$ pourra être choisi de l'ordre de $x_i\sqrt{\epsilon_{\mathrm{m}}} \simeq 1{,}5 \cdot 10^{-8}$ et pour une approximation du second ordre, d'environ $x_i\sqrt[3]{\epsilon_{\mathrm{m}}} \simeq 6 \cdot 10^{-6}$, avec $\epsilon_{\mathrm{m}}$ la précision machine, soit $2{,}2 \cdot 10^{-16}$ pour les réels double-précision (selon la norme IEEE754 64-bits). Toutefois, si $f$ est analytique, la formule

centrée (3.2.39) peut être réécrite avec un pas de différentiation complexe i$h$ [111] :

$$\hat{f}^{(1)} = \frac{\Im\left(f(x_i + \mathrm{i}h)\right)}{h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{3.2.42}$$

de manière à ce que la dérivée ne soit plus affectée par une erreur d'annulation générée par l'opération de soustraction.

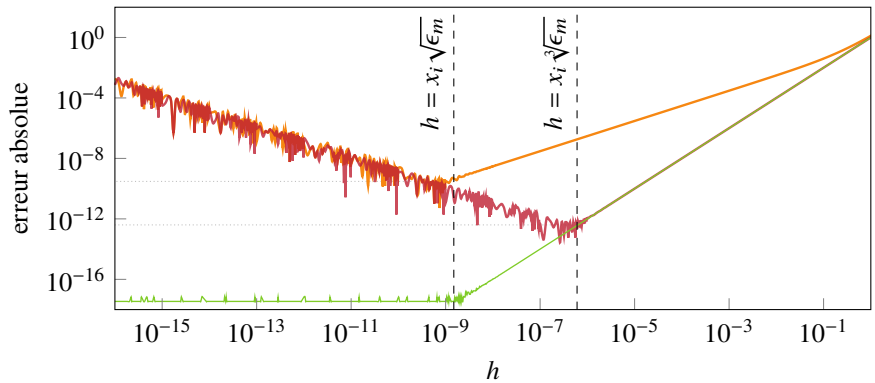



Figure 3.16 Erreur de précision des formules avant (——), centrée (——) et à pas complexe (——) pour l'évaluation de la dérivée de la fonction $f(x) = x^3$ en $x_i = 0{,}1$ en fonction de différentes valeurs de pas $h$. La partie à gauche des optimums de précision, contient des oscillations liées aux erreurs d'arrondis numériques amplifiées par annulation, celle de droite, relève de l'erreur d'approximation du schéma considéré.

**Différentiation automatique** [73]**.** Également appelée *auto-differentiation* ou *algorithmic differentiation* en anglais, l'idée principale de cette méthode est que tout programme informatique peut être décomposé en un certain nombre d'opérations élémentaires, et qu'en applicant la règle de dérivation en chaîne successivement à ces opérations, il est possible de déterminer les valeurs d'une fonction et de ses dérivées, avec une grande précision, tout en n'effectuant au maximum qu'un faible nombre constant d'opérations arithmétiques supplémentaires par rapport au programme d'origine. Bien qu'*a priori* performante, cette technique semble peu répandue dans la littérature, on la retrouve néanmoins dans le code MANLAB basé sur une résolution HBM [215, 157, 80].

**Approches semi-analytiques** [158, 169, 117]**.** Cette catégorie d'approches repose sur le calcul explicite de la jacobienne *via* l'utilisation de transformées de Fourier, autrement dit, à l'aide d'une approche de type AFT vue en debut de section 3.2.1.1. Il existe plusieurs variantes dans la littérature dont la complexité d'implémentation et l'efficacité vont de pair. Deux de ces méthodes sont présentées ici.

Une première approche [48, 52] consiste à combiner un calcul analytique de la jacobienne de $\boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})$ avec les matrices de DFT directe $\boldsymbol{\Gamma}^{-1}$ et inverse $\boldsymbol{\Gamma}$ [110]. Ainsi, de part la linéarité des opérateurs de DFT et à l'aide de la règle de dérivation en chaîne, on obtient :

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl}}(\tilde{\boldsymbol{x}})}{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}} = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl}}}{\partial \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}}\frac{\partial \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}}{\partial \boldsymbol{x}}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}} + \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl}}}{\partial \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}}\frac{\partial \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\frac{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{\Gamma}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{\Gamma}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{\Gamma}(\omega\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{I}_n) \tag{3.2.43}$$

avec les matrices de dimension $(nN \times nN)$ des dérivées de $\boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}$ aux $N$ instants $t_i$ :

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial \boldsymbol{x}_1}\right) & \dots & \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial \boldsymbol{x}_n}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_n}{\partial \boldsymbol{x}_1}\right) & \dots & \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_n}{\partial \boldsymbol{x}_n}\right) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} = \begin{bmatrix} \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_1}\right) & \dots & \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_n}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_n}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_1}\right) & \dots & \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_n}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_n}\right) \end{bmatrix} \tag{3.2.44}$$

où les dérivées partielles des $k^{\text{ième}}$ efforts par rapport aux $l^{\text{ième}}$ ddl en déplacements, ou en vitesses, évaluées sur une période discrétisée en $N$ instants sont données par :

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}_k}{\partial \boldsymbol{x}_l} = \left[\left.\frac{\partial f_k}{\partial x_l}\right|_{\tau_0}, \dots, \left.\frac{\partial f_k}{\partial x_l}\right|_{\tau_{N-1}}\right]^\top \quad \text{et} \quad \frac{\partial \boldsymbol{f}_k}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_l} = \left[\left.\frac{\partial f_k}{\partial \dot{x}_l}\right|_{\tau_0}, \dots, \left.\frac{\partial f_k}{\partial \dot{x}_l}\right|_{\tau_{N-1}}\right]^\top \tag{3.2.45}$$

Une seconde approche permet de construire la jacobienne à l'aide de FFT en suivant le même raisonnement. Une description de l'implémentation de cette approche est donnée dans l'article [110],§ A.1. La différence majeure avec l'approche par matrices de DFT de l'équation (3.2.43) réside dans le fait que la FFT renvoie des coefficients de Fourier sous forme complexe et non réelle. Il est donc nécessaire de les convertir *a posteriori* en coefficients réels afin de pouvoir construire la jacobienne. Pour rappel, les représentations complexes $\boldsymbol{c}_j$ et réelles $(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_j)$ des séries de Fourier de $\boldsymbol{x}$ sont reliées par la formule d'Euler telles que :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_0 + \sum_{j=1}^{H}\left[\boldsymbol{a}_j\cos(j\omega t) + \boldsymbol{b}_j\sin(j\omega t)\right] \\ &= \sum_{j=0}^{H}\left[\underbrace{\frac{\boldsymbol{a}_j - \mathrm{i}\boldsymbol{b}_j}{2}}_{\boldsymbol{c}_{+j}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\omega t} + \underbrace{\frac{\boldsymbol{a}_j + \mathrm{i}\boldsymbol{b}_j}{2}}_{\boldsymbol{c}_{-j}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\omega t}\right] \\ &= \sum_{j=-H}^{H}\frac{\boldsymbol{a}_j - \mathrm{i}\boldsymbol{b}_j}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\omega t} = \sum_{j=-H}^{H}\boldsymbol{c}_j\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\omega t} \end{aligned} \tag{3.2.46}$$

En supposant que les efforts non-linéaires sont seulement fonction des déplacements et des vitesses (bien qu'une extension à une dépendance aux accélérations soit directe), l'approche consiste en

trois étapes principales : (1) calculer les dérivées partielles des efforts non-linéaires par rapport aux déplacements $\partial \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}/\partial \boldsymbol{x}$ et vitesses $\partial \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}/\partial \dot{\boldsymbol{x}}$ des $n$ ddl dans le domaine temporel ; (2) multiplier ces dérivées par les fonctions appropriées de la base de Fourier $\mathbb{T}_H$ (identifiées ci-après en orange) et sa dérivée par rapport au temps $\dot{\mathbb{T}}_H$ (en rouge), et (3) effectuer les FFT et la conversion complexe à réelle des coefficients de Fourier résultants. Les expressions des différents termes des blocs de la matrice jacobienne, *cf.* équations (3.2.36) et (3.2.37), peuvent être alors explicitées analytiquement en fonction des composantes harmoniques cosinus ou sinus $i, j \in [\![0..H]\!]$ des FFT, et des bases $\mathbb{T}_H$ et $\dot{\mathbb{T}}_H$, ainsi que les indices des ddl $k, l \in [\![1..n]\!]$ en jeu, telles que :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial a_0^{\mathrm{nl},k}}{\partial a_0^l} &= \frac{2}{T}\int_0^T \left[ \left.\frac{\partial f_k}{\partial x_l}\right|_t \frac{1}{2} + \left.\frac{\partial f_k}{\partial \dot{x}_l}\right|_t 0 \right] dt \\
\frac{\partial a_0^{\mathrm{nl},k}}{\partial a_j^l} &= \frac{2}{T}\int_0^T \left[ \left.\frac{\partial f_k}{\partial x_l}\right|_t \cos(j\omega t) - j\omega \left.\frac{\partial f_k}{\partial \dot{x}_l}\right|_t \sin(j\omega t) \right] dt \\
\frac{\partial a_0^{\mathrm{nl},k}}{\partial b_j^l} &= \frac{2}{T}\int_0^T \left[ \left.\frac{\partial f_k}{\partial x_l}\right|_t \sin(j\omega t) + j\omega \left.\frac{\partial f_k}{\partial \dot{x}_l}\right|_t \cos(j\omega t) \right] dt \\
\frac{\partial a_i^{\mathrm{nl},k}}{\partial a_0^l} &= \frac{2}{T}\int_0^T \left[ \left.\frac{\partial f_k}{\partial x_l}\right|_t \frac{1}{2} + \left.\frac{\partial f_k}{\partial \dot{x}_l}\right|_t 0 \right] \cos(i\omega t)\, dt \\
\frac{\partial b_i^{\mathrm{nl},k}}{\partial a_0^l} &= \frac{2}{T}\int_0^T \left[ \left.\frac{\partial f_k}{\partial x_l}\right|_t \frac{1}{2} + \left.\frac{\partial f_k}{\partial \dot{x}_l}\right|_t 0 \right] \sin(i\omega t)\, dt \\
\frac{\partial a_i^{\mathrm{nl},k}}{\partial a_j^l} &= \frac{2}{T}\int_0^T \left[ \left.\frac{\partial f_k}{\partial x_l}\right|_t \cos(j\omega t) - j\omega \left.\frac{\partial f_k}{\partial \dot{x}_l}\right|_t \sin(j\omega t) \right] \cos(i\omega t)\, dt \\
\frac{\partial a_i^{\mathrm{nl},k}}{\partial b_j^l} &= \frac{2}{T}\int_0^T \left[ \left.\frac{\partial f_k}{\partial x_l}\right|_t \sin(j\omega t) + j\omega \left.\frac{\partial f_k}{\partial \dot{x}_l}\right|_t \cos(j\omega t) \right] \cos(i\omega t)\, dt \\
\frac{\partial b_i^{\mathrm{nl},k}}{\partial a_j^l} &= \frac{2}{T}\int_0^T \left[ \left.\frac{\partial f_k}{\partial x_l}\right|_t \cos(j\omega t) - j\omega \left.\frac{\partial f_k}{\partial \dot{x}_l}\right|_t \sin(j\omega t) \right] \sin(i\omega t)\, dt \\
\frac{\partial b_i^{\mathrm{nl},k}}{\partial b_j^l} &= \frac{2}{T}\int_0^T \left[ \left.\frac{\partial f_k}{\partial x_l}\right|_t \sin(j\omega t) + j\omega \left.\frac{\partial f_k}{\partial \dot{x}_l}\right|_t \cos(j\omega t) \right] \sin(i\omega t)\, dt
\end{aligned}
\tag{3.2.47}
$$

En pratique, en amont des calculs, on initialise et stocke la base de Fourier $\mathbb{T}_H$, *cf.* équation (3.2.5), et sa dérivée par rapport au temps $\dot{\mathbb{T}}_H$ (en omettant le terme $\omega$) sur une période $\tau = \omega t$, ce qui conduit à deux matrices de dimensions $(2H+1 \times N)$. Toutes les combinaisons de l'équation (3.2.47) sont ensuite évaluées en multipliant chacune des dérivées partielles par $\mathbb{T}_H$ (respectivement $\omega\dot{\mathbb{T}}_H$) pour des dérivées par rapport aux déplacements (respectivement aux vitesses). Tout ceci permet d'effectuer un total de $n^2(2H+1)$ FFT–des termes entre crochets–qui conduisent à l'obtention de l'intégralité des coefficients sous forme complexe de la jacobienne. Ces coefficients complexes sont ensuite réexprimés sous forme réelle et réordonnés afin de terminer la construction de la matrice.

Pour optimiser les opérations, dans le cas où le système étudié ne contient seulement que des non-linéarités localisées, comme c'est le cas pour du contact, seuls les éléments contributeurs de l'équation (3.2.36) sont évalués, c'est-à-dire que le nombre de FFT nécéssaires est réduit à $k_{\mathrm{dp}}(2H+1)$, pour $k_{\mathrm{dp}} \in [\![0..n^2]\!]$ le nombre de dérivées partielles non-nulles. En pratique, pour s'adapter à n'importe quel système, on effectue plus concrètement $d_{\mathrm{dp}}(2H+1) + v_{\mathrm{dp}}(2H+1)$ FFT de manière indépendante, avec $d_{\mathrm{dp}}$ le nombre de dérivées partielles non-nulles par rapport aux déplacements et $v_{\mathrm{dp}}$ par rapport aux vitesses (où usuellement $d_{\mathrm{dp}} \neq v_{\mathrm{dp}}$ étant donné que les deux dérivées partielles ne sont pas forcément nulles simultanément). Par exemple, dans le cas de l'aube rotor 37 traité dans la section 6.3, cette stratégie permet de réduire drastiquement le nombre total de dérivées partielles à considérer en le faisant passer de $24^2 = 576$ à seulement 56, soit une réduction d'un facteur 10,3. Bien que plus délicate d'implémentation, cette méthode s'avère être la plus rapide de toutes celles qui ont été testées, c'est pourquoi elle est utilisée dans ces travaux de thèse.

**Note :** étant donné que les efforts non-linéaires $\boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}(t)$, et leurs dérivées partielles, sont des quantités à valeurs réelles, il devient numériquement très avantageux d'utiliser un algorithme de rFFT, de l'anglais, *real* (*input*) FFT. La rFFT tire avantage du fait que lorsqu'une DFT, sous forme complexe, est calculée pour une fonction à valeurs réelles, on observe une symétrie dans les coefficients de Fourier complexes résultants, *i.e.* les termes de fréquence négative $\boldsymbol{c}_{-j}$ ne sont que les conjugués complexes des termes de fréquence positive $\boldsymbol{c}_{+j}$ correspondants. Cela signifie qu'il n'y a aucune information dans les composantes de fréquence négatives qui ne soit déjà disponible dans les composantes de fréquence positives. Par conséquent les termes relatifs aux fréquences négatives sont redondants : seul le calcul de la moitié des coefficients est requis, *cf.* l'équation (3.2.46).

À la fois très compacte d'écriture et somme toute, assez facile à mettre en œuvre, la première méthode basée sur l'utilisation des matrices de DFT offre un moyen bien plus précis, rapide et efficace que l'utilisation des différences finies. Elle dispose néanmoins d'une complexité en $O(n^2)$ (correspondant à un produit matriciel implémenté *via* un algorithme de Strassen ou de Coppersmith–Winograd par exemple) et sera donc bien moins rapide pour des grandes dimensions en comparaison à la FFT qui offre une complexité asymptotique minimale en $O(n \log n)$. De plus, l'erreur d'arithmétique flottante inévitablement générée par ces algorithmes est moins importante dans le cas de la FFT. À titre d'illustration, dans la version de la FFT originellement proposée par Cooley et Tuckey [143], la borne supérieure d'erreur relative s'exprime en $O(\epsilon_{\mathrm{m}} \log n)$, où $\epsilon_{\mathrm{m}}$ correspond à la précision machine considérée, alors qu'elle est de $O(\epsilon_{\mathrm{m}} n^{3/2})$ pour la version triviale de la DFT. Pour de grandes valeurs d'échantillonage temporel $N$, limiter les erreurs d'artihmétique flottante devient essentiel dans une optique de développement de code. Finalement, la FFT a également l'avantage de disposer de nombreuses librairies dédiées fortement optimisées comme par exemple FFTpack ou la

FFTW [90], soit la Transformée de Fourier la plus rapide de l'Ouest, de l'anglais *Fastest Fourier Transform in the West*, avec notamment son portage python pyFFTW [3].

**Note :** (1) les méthodes de continuation, présentées en section 4.2, requièrent le calcul du gradient $\mathbf{R}_{,\omega}$ qui s'obtient directement par dérivation de l'équation (3.2.18) :

$$\mathbf{R}_{,\omega} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} = \mathbf{Z}_{,\omega}\tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl},\omega} - \tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{ext},\omega} = \left(2\omega\boldsymbol{\nabla}^2 \otimes \mathbf{M} + \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{C}\right)\tilde{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl}}(\tilde{\boldsymbol{x}},\omega)}{\partial \omega} - \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{ext}}(\omega)}{\partial \omega} \tag{3.2.48}$$

(2) dépendamment du système étudié, il est possible que les termes $\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl}}$ et/ou $\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{ext}}$ dépendent d'une autre variable du système comme $\omega$ par exemple [37]. Il convient alors de prendre en compte ces éventuelles contributions. Concernant le gradient des efforts non-linéaires $\partial \tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl}}/\partial\omega$, s'il est non-nul, par exemple lorsque la vitesse absolue d'un rotor intervient dans la direction tangentielle lors de la prise compte de phénomènes de frottement, une dérivation en chaîne, telle que réalisée dans l'équation (3.2.43), permet d'obtenir l'expression analytique suivante [37] :

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl}}(\tilde{\boldsymbol{x}},\omega)}{\partial \omega} = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl}}}{\partial \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}}\frac{\partial \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}}{\partial \omega} + \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl}}}{\partial \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}}\frac{\partial \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\frac{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}{\partial \omega} = \boldsymbol{\Gamma}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}}{\partial \omega} + \boldsymbol{\Gamma}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{I}_n)\tilde{\boldsymbol{x}} \tag{3.2.49}$$

Concernant le gradient des efforts extérieurs $\partial \tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{ext}}/\partial\omega$, dans le cas d'une excitation harmonique, $\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{ext}}$ est constant ce qui implique une contribution nulle. Par contre, dans le cas d'une excitation par balourd par exemple, lorsque $\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{ext}}$ est proportionnel à $\omega^2$, une contribution non-nulle doit être prise en considération.

#### 3.2.1.3 Sélection des harmoniques

Le nombre d'harmoniques $H$ a un impact significatif sur les temps de calcul pour les problèmes de grande dimension. En effet, le nombre d'équations à résoudre, *i.e.* $n_H = n(2H+1)$, augmente linéairement avec le nombre d'harmoniques $H$. Il est donc crucial de choisir un nombre d'harmoniques minimal permettant de représenter adéquatement la solution du système. Différentes stratégies d'adaptation visant à solutionner ce problème ont été développées ; elles se distinguent les unes des autres selon qu'elle agissent à une échelle globale ou locale de la représentation fréquentielle de la réponse du système. Les stratégies globales considèrent un même nombre d'harmoniques pour l'ensemble des ddl du système et permettent d'adapter ce nombre en fonction de divers critères tels que l'erreur de Fourier ou encore des critères énergétiques.

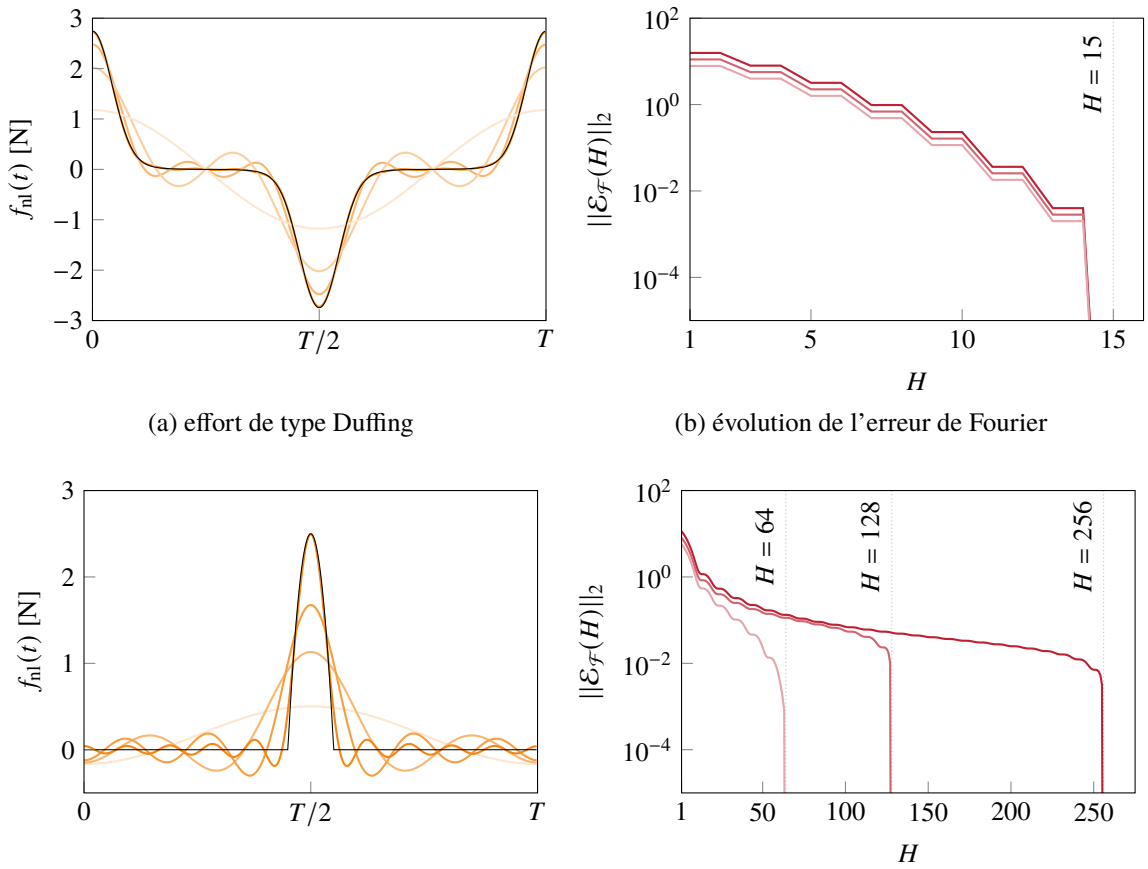
3. http://hgomersall.github.io/pyFFTW/

**L'erreur de Fourier.** Elle correspond à l'erreur d'approximation introduite sur les efforts non-linéaires lors de leur passage du domaine temporel au domaine de Fourier [165]. À partir des efforts $\boldsymbol{f}_{\text{nl}}$ et de leur reconstructions à partir des coefficients $\tilde{\boldsymbol{f}}_{\text{nl}}$ évalués par AFT, cette erreur s'écrit :

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(H) = \frac{1}{T}\int_0^T \underbrace{\boldsymbol{f}_{\text{nl}}\left(\boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t)\right)}_{\text{efforts exacts}} - \underbrace{\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_0^{\text{nl}} + \sum\nolimits_{j=1}^{H}\left[\boldsymbol{a}_j^{\text{nl}}\cos\left(j\omega t\right) + \boldsymbol{b}_j^{\text{nl}}\sin\left(j\omega t\right)\right]\right)}_{\text{efforts effectifs}} dt \tag{3.2.50}$$

où pour un calcul donné, en fonction de la valeur de la norme de l'erreur $||\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(H)||_2$ par rapport à une tolérance d'erreur fixe, on choisira d'augmenter ou de diminuer globalement $H$. La figure 3.17 permet d'illustrer l'évolution de cette erreur par rapport à $H$ pour deux types d'efforts non-linéaires distincts (——). Le premier effort représenté sur la 3.17a, issue d'une non-linéarité polynomiale de la forme $\boldsymbol{f}_{\text{nl}} = [\cos(\omega t) + 0{,}3\cos(3\omega t) + 0{,}1\cos(5\omega t)]^3$, s'apparente à un effort d'oscillateur de Duffing (fonction de classe $C^\infty$). L'erreur de troncature est de l'ordre de la précision machine à compter du plongeon soudain situé à $H = 15$. Cette décroissance s'explique par l'expression de l'effort lui-même, en effet le développement $\cos(5\omega t)^3 = 0{,}25\,[3\cos(5\omega t) + \cos(15\omega t)]$ indique que le contenu fréquentiel de $\boldsymbol{f}_{\text{nl}}$ est parfaitement décrit dès lors que $H \geqslant 15$ (et sous réserve que l'effort de départ soit échantilloné sur $N \geqslant 31$ instants). De plus, pour rappel, la nature cubique impaire de la non-linéarité est ici la raison pour laquelle les harmoniques pairs n'ont aucune influence sur la qualité de l'approximation de la solution, comme en témoignent les paliers horizontaux sur la courbe d'évolution de l'erreur 3.17b. Ainsi, une étude de la forme des efforts non-linéaires du système peut éventuellement s'avérer bénéfique en permettant d'éliminer d'emblée certains harmoniques de la série considérée, ici les harmoniques pairs.
Le second effort, représenté en 3.17c, de forme implicite, traduit une impulsion semblable à un effort de contact (fonction de classe $C^0$, continue par morceaux). Dans ce cas, la présence de non-régularités dans les efforts provoque des oscillations liées au phénomène de Gibbs, sur lequelles on revient plus en détail dans la section 5.2.2. La convergence de la série est alors bien plus lente que précédemment et le contenu fréquentiel du signal y est infiniment plus riche, comme le montre la lente décroissance de l'erreur de la figure 3.17c. En effet, en échantillonnant l'effort exact sur $N = \{128\ ;\ 256\ ;\ 512\}$ instants, une erreur machine résiduelle est seulement atteinte pour la limite prévue par Nyquist-Shannon. Ce qui veut dire que contrairement à la non-linéarité polynomiale, la procédure d'échantillonnage au sein de l'AFT n'est jamais exacte car l'effort de contact génère une séquence infinie de coefficients de Fourier décroissants mais non-nuls. Par conséquent, une erreur d'*aliasing* est forcément induite par un schéma AFT pour des non-linéarités de contact.

**L'énergie.** Le choix des harmoniques peut également être effectué sur base d'un critère énergétique. Par exemple dans le cas où l'on considère l'énergie élastique de déformation du système $U_H$ [160],




(a) effort de type Duffing

(b) évolution de l'erreur de Fourier

(c) effort de type impact

(d) évolution de l'erreur de Fourier

Figure 3.17 Évolution de la norme euclidienne de l'erreur de Fourier $||\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(H)||_2$ et des efforts temporels associés. À gauche : efforts exacts (——) et efforts effectifs reconstruits pour $H = \{1(\text{——}) ; 3(\text{——}) ; 5(\text{——}) ; 10(\text{——})\}$ obtenus pour $N = 512$. À droite : erreurs de troncature pour des efforts exacts échantillonnés sur $N = \{128(\text{——}) ; 256(\text{——}) ; 512(\text{——})\}$ instants.

dont la valeur moyenne sur une période $\langle U_H \rangle$ est donnée par :

$$\langle U_H \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T U_H(t)\, dt = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{x}}^\top (\mathbf{L}_1 \otimes \mathbf{K})\, \tilde{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{2N} \sum_{i=0}^{N-1} \boldsymbol{x}^\top(t_i)\, \mathbf{K}\, \boldsymbol{x}(t_i) \tag{3.2.51}$$

avec $\mathbf{L}_1$ la matrice carrée de dimension $(2H+1)$ définie par la propriété d'orthogonalité des fonctions de $\mathbb{T}_H$ vue dans l'équation (3.2.15) telle que :

$$\mathbf{L}_1 = \frac{\mathbf{I}_{2H+1}}{2} \tag{3.2.52}$$

Il est alors possible d'exprimer la variation relative de $U$ en fonction du nombre d'harmoniques retenus dans la série au moyen de l'erreur relative définie par :

$$\mathcal{E}_U(H) = \frac{\langle U_H \rangle - \langle U_{H-1} \rangle}{\langle U_H \rangle} \tag{3.2.53}$$

Le nombre d'harmoniques à retenir est alors choisi de manière itérative comme la plus petite valeur de $H$ permettant de vérifier une tolérance donnée sur $\mathcal{E}_U(H)$. Selon l'objectif visé, il est possible d'adapter cette approche à d'autres quantités énergétiques comme l'énergie dissipée par frottement dans le cas d'une étude de *fretting* en pied d'aube par exemple [162].

Les stratégies locales, en revanche, permettent d'ajuster les contributions harmoniques de chacun des ddl. Elles peuvent être basées sur une mesure de la densité spectrale ou encore sur la qualité d'une prédiction de la solution recherchée.

**La densité spectrale** [98]**.** Dans ce cas, la densité spectrale relative à la composante de fréquence maximale, *i.e.* l'harmonique $H$, est évaluée localement pour chaque ddl $d$ telle que :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{DS}}(H, d) = \frac{(a_H^d)^2 + (b_H^d)^2}{\frac{1}{2}(a_0^d)^2 + \sum_{j=1}^{H} \left[(a_j^d)^2 + (b_j^d)^2\right]} \tag{3.2.54}$$

Si la densité spectrale $\mathcal{E}_{\mathrm{DS}}(H, d)$ est trop grande, il faut alors ajouter des harmoniques supplémentaires, si elle trop faible, en retirer. Ce critère a ainsi l'avantage de proposer un ajustement local de $H$ pour chaque ddl.

**Prédiction tangente** [156]**.** Dans un contexte de continuation des solutions périodiques, *cf.* section 4.2, une approximation de la solution recherchée est généralement obtenue à l'aide d'un prédicteur, comme la tangente relative à la dernière solution convergée (4.2.3). Il est alors raisonnable de faire l'hypothèse que la solution recherchée dispose d'un contenu fréquentiel proche de celui de la prédiction. Le calcul des prédictions peut s'effectuer aussi bien pour un nombre d'harmoniques maximal que pour un sous-ensemble des harmoniques disponibles. De cette manière, pour chaque ddl $d$, on peut quantifier l'importance relative des contributions énergetiques de chacun des harmoniques et adapter les séries en conséquence.

En pratique, il n'existe pas de critère permettant de quantifier l'importance relative d'un harmonique au niveau de la réponse du système. Il faut alors effectuer préalablement une analyse de convergence des solutions obtenues en fonction du nombre d'harmoniques considéré. La suppression d'harmoniques spécifiques afin de dimimuer les temps de calcul peut également entraîner une suppression d'une partie de la phénoménologie du système étudié. Par exemple, dans le cas d'un oscillateur de

Duffing, en supprimant les harmoniques pairs, on élimine l'apparition de solutions de pulsation $2\omega$ par bifurcation, *cf.* section 7.1.

#### 3.2.1.4 Procédure de réduction

Quelle que soit la méthode de résolution utilisée, un gain significatif en temps de calcul est obtenu en projetant la cinématique du problème sur un sous-espace plus adapté [156, 162, 165] : c'est le principe de condensation ou encore de synthèse modale sur lequel on revient notamment en section 5.2.3

Une partition des ddl du système, distinguant ceux sur lesquels s'appliquent les efforts non-linéaires, permet de réduire la dimension du sytème à résoudre. En effet, en faisant la distinction entre les ddl qui–interviennent ou non–dans l'expression des efforts non-linéaires $\boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}$, le système non-linéaire étudié dispose de $n$ ddl répartis en $p$ ddl linéaires $\boldsymbol{x}^{\mathrm{l}}$ et $q$ ddl non-linéaires $\boldsymbol{x}^{\mathrm{nl}}$ ; il est alors possible de résoudre un système similaire à celui de l'équation (3.2.18) mais de dimension réduite $q_H = q(2H+1)$.

Cette partition [176] s'effectue à l'aide de la matrice de passage $\mathbf{P}$ qui réordonne les éléments partitionnés vers les éléments initiaux dans le domaine temporel :

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{\mathrm{l}} \\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{nl}} \end{bmatrix} \tag{3.2.55}$$

où $\mathbf{P}$ est une matrice de permutation [4] et où la dépendance explicite en temps de $\boldsymbol{x}$ est omise pour la suite de ces dévéloppements dans le but d'offrir la meilleure lisibilité possible. Ainsi, en multipliant préalablement le système d'équations (2.4.1) par $\mathbf{P}^\top$ pour le réordonner puis en y injectant la relation (3.2.55), on obtient le système partitionné :

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{\mathrm{ll}} & \mathbf{M}^{\mathrm{lnl}} \\ \mathbf{M}^{\mathrm{nll}} & \mathbf{M}^{\mathrm{nlnl}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{l}} \\ \ddot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{nl}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\mathrm{ll}} & \mathbf{C}^{\mathrm{lnl}} \\ \mathbf{C}^{\mathrm{nll}} & \mathbf{C}^{\mathrm{nlnl}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{l}} \\ \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{nl}} \end{bmatrix} \\ &\qquad + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{\mathrm{ll}} & \mathbf{K}^{\mathrm{lnl}} \\ \mathbf{K}^{\mathrm{nll}} & \mathbf{K}^{\mathrm{nlnl}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{\mathrm{l}} \\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{nl}} \end{bmatrix} \\ &\qquad + \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{nl}}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{nl}}, \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{nl}}) \\ \boldsymbol{f}^{\mathrm{nl}}_{\mathrm{nl}}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{nl}}, \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{nl}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{ext}} \\ \boldsymbol{f}^{\mathrm{nl}}_{\mathrm{ext}} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.2.56}$$

En projetant le système partitionné sur la base de Fourier $\mathbb{T}_H$, *cf.* équation (3.2.5), on obtient un

4. Ses coefficients sont 0 ou 1 et il n'y qu'un seul 1 par ligne et par colonne, elle est par conséquent orthogonale ce qui implique $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^\top$.

système d'équations intermédiaire d'inconnue $\tilde{\boldsymbol{x}}'$, or on cherche à résoudre un système fréquentiel partitionné d'inconnue $\tilde{\boldsymbol{x}}''$, tel que :

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_0 \\ \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{x}}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_0^{\mathrm{l}} \\ \boldsymbol{a}_0^{\mathrm{nl}} \\ \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{l}} \\ \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{nl}} \\ \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{l}} \\ \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{nl}} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\boldsymbol{x}}'' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_0^{\mathrm{l}} \\ \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{l}} \\ \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{l}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_0^{\mathrm{nl}} \\ \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{nl}} \\ \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{nl}} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{l}} \\ \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{nl}} \end{bmatrix} \tag{3.2.57}$$

où $\tilde{\boldsymbol{x}}'$ est lié à $\tilde{\boldsymbol{x}}$ par la relation :

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = (\mathbf{I}_{2H+1} \otimes \mathbf{P})\, \tilde{\boldsymbol{x}}' \tag{3.2.58}$$

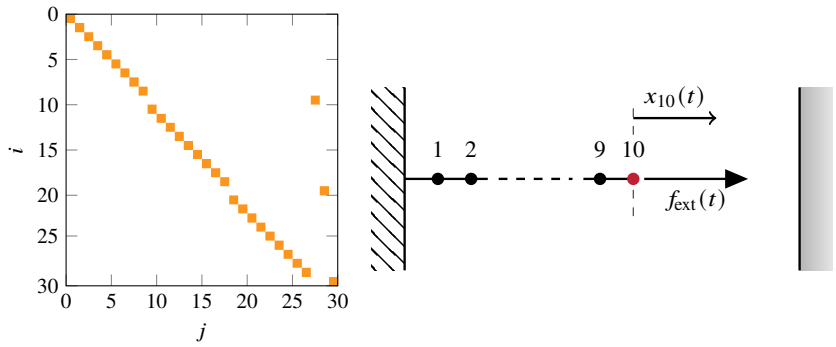
Cette relation désormais connue, il reste encore à réordonner $\tilde{\boldsymbol{x}}'$ adéquatement, *i.e.* avec les coefficients de Fourier associés aux $p$ ddl linéaires en haut et ceux relatifs aux $q$ ddl non-linéaires en bas du vecteur, afin qu'il corresponde à l'inconnue $\tilde{\boldsymbol{x}}''$, ce qui conduit à la relation suivante :

$$\tilde{\boldsymbol{x}}' = \left[ \mathbf{I}_{2H+1} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p \\ \mathbf{0}_{q,p} \end{bmatrix}, \mathbf{I}_{2H+1} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{p,q} \\ \mathbf{I}_q \end{bmatrix} \right] \tilde{\boldsymbol{x}}'' \tag{3.2.59}$$

Finalement, l'inconnue fréquentielle partitionnée $\tilde{\boldsymbol{x}}''$ peut être reliée au vecteur de départ $\tilde{\boldsymbol{x}}$ à l'aide de la matrice de permutation fréquentielle $\tilde{\mathbf{P}}$ de dimension $(n_H)$, telle que :

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\left[ \mathbf{I}_{2H+1} \otimes \left( \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p \\ \mathbf{0}_{q,p} \end{bmatrix} \right), \mathbf{I}_{2H+1} \otimes \left( \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{p,q} \\ \mathbf{I}_q \end{bmatrix} \right) \right]}_{\tilde{\mathbf{P}}} \tilde{\boldsymbol{x}}'' \tag{3.2.60}$$

La figure 3.18b offre un aperçu typique de la forme que peut prendre la matrice $\tilde{\mathbf{P}}$ pour un système académique présentant une non-linéarité localisée. À l'aide de $\tilde{\mathbf{P}}$, en omettant la dépendance en $\omega$ de la matrice $\mathbf{Z}$ et des efforts $\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{ext}}$ par souci de clarté, les différents éléments de l'équation initiale à




(a) matrice $\tilde{\mathbf{P}}$ (b) barre simplifiée en contact unilatéral

Figure 3.18 Illustration de la matrice de passage dans le domaine fréquentiel $\tilde{\mathbf{P}}$, (a), dans le cas d'une barre encastrée à une extrémité et sujette à une non-linéarité de contact avec un mur indéformable (▭) à l'autre, (b). La barre est constituée de 10 nœuds, soit ici $n = 10$ ddl au total dont $p = 9$ ddl linéaires (●) et $q = 1$ ddl non-linéaire de contact (●). Une approximation monoharmonique du modèle HBM conduit à $2H + 1 = 3$, la dimension résultante de $\tilde{\mathbf{P}}$ est donc de (30).

résoudre (3.2.18) peuvent être alors partitionnés tels que :

$$\tilde{\mathbf{P}}^\top \mathbf{Z}(\omega)\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}^{\text{ll}} & \mathbf{Z}^{\text{lnl}} \\ \mathbf{Z}^{\text{nll}} & \mathbf{Z}^{\text{nlnl}} \end{bmatrix} \tag{3.2.61a}$$

$$\tilde{\mathbf{P}}^\top \tilde{f}_{\text{nl}}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} \tilde{f}^{\text{l}}_{\text{nl}}(\tilde{\boldsymbol{x}}^{\text{nl}}) \\ \tilde{f}^{\text{nl}}_{\text{nl}}(\tilde{\boldsymbol{x}}^{\text{nl}}) \end{bmatrix} \tag{3.2.61b}$$

$$\tilde{\mathbf{P}}^\top \tilde{f}_{\text{ext}}(\omega) = \begin{bmatrix} \tilde{f}^{\text{l}}_{\text{ext}} \\ \tilde{f}^{\text{nl}}_{\text{ext}} \end{bmatrix} \tag{3.2.61c}$$

Il découle de l'équation (3.2.18) ainsi le système réordonné :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{Z}^{\text{ll}} & \mathbf{Z}^{\text{lnl}} \\ \mathbf{Z}^{\text{nll}} & \mathbf{Z}^{\text{nlnl}} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{P}}^\top \mathbf{Z}(\omega)\tilde{\mathbf{P}}} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{x}}^{\text{l}} \\ \tilde{\boldsymbol{x}}^{\text{nl}} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{f}^{\text{l}}_{\text{nl}}(\tilde{\boldsymbol{x}}^{\text{nl}}) \\ \tilde{f}^{\text{nl}}_{\text{nl}}(\tilde{\boldsymbol{x}}^{\text{nl}}) \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{P}}^\top \tilde{f}_{\text{nl}}(\tilde{\boldsymbol{x}})} - \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{f}^{\text{l}}_{\text{ext}} \\ \tilde{f}^{\text{nl}}_{\text{ext}} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{P}}^\top \tilde{f}_{\text{ext}}(\omega)} = \mathbf{0} \tag{3.2.62}$$

La première ligne de ce système offre alors une relation entre $\tilde{\boldsymbol{x}}^{\text{l}}$ et $\tilde{\boldsymbol{x}}^{\text{nl}}$ :

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\text{l}} = \mathbf{Z}^{\text{ll}^{-1}} \left[ \tilde{f}^{\text{l}}_{\text{ext}} - \mathbf{Z}^{\text{lnl}}\tilde{\boldsymbol{x}}^{\text{nl}} - \tilde{f}^{\text{l}}_{\text{nl}}(\tilde{\boldsymbol{x}}^{\text{nl}}) \right] \tag{3.2.63}$$

qui, une fois introduite dans sa seconde ligne, permet d'obtenir un système d'équations non-linéaires

algébriques réduit de dimension $q(2H+1)$ qui ne dépend seulement plus que de $\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{nl}}$ :

$$\underbrace{\left[\mathbf{Z}^{\mathrm{nlnl}} - \overbrace{\mathbf{Z}^{\mathrm{nll}}\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{-1}}\mathbf{Z}^{\mathrm{lnl}}}^{C}\right]}_{\mathbf{Z}_{\mathrm{red}}}\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{nl}} + \underbrace{\left(\tilde{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{nl}}_{\mathrm{nl}}(\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{nl}}) - \overbrace{\mathbf{Z}^{\mathrm{nll}}\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{-1}}}^{C}\tilde{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{nl}}(\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{nl}})\right)}_{\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl,red}}(\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{nl}})} - \underbrace{\left(\tilde{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{nl}}_{\mathrm{ext}} - \overbrace{\mathbf{Z}^{\mathrm{nll}}\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{-1}}}^{C}\tilde{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{ext}}\right)}_{\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{ext,red}}} = \mathbf{0} \quad (3.2.64)$$

Cette dernière étape de la procédure revient alors à déterminer le complément de Schur du bloc $\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}}$ du système linéaire sous-jacent du système partitionné (3.2.62). Ainsi, l'équation (3.2.64) du système à résoudre devient :

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{red}}\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{nl}} + \tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl,red}}(\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{nl}}) - \tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{ext,red}} = \mathbf{0} \quad (3.2.65)$$

où les quantités réduites $\mathbf{Z}_{\mathrm{red}}$, $\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl,red}}$ et $\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{ext,red}}$ représentent les condensations respectives de $\mathbf{Z}(\omega)$, $\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl}}(\tilde{\boldsymbol{x}})$ et $\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{ext}}(\omega)$ sur l'interface des $q$ ddl non-linéaires. En l'absence d'efforts non-linéaires appliqués sur les $p$ ddl linéaires, *i.e.* $\tilde{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{nl}}(\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{nl}}) = \mathbf{0}$, les relations (3.2.63), (3.2.64) et (3.2.65) se simplifient alors et $\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl,red}}(\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{nl}}) = \tilde{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{nl}}_{\mathrm{nl}}$. Ainsi, une solution convergée donnée $\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{nl}*}$, permet directement d'obtenir $\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{l}*}$ à l'aide de la relation (3.2.63). Contrairement à la réduction de Guyan, dans un contexte de dynamique des structures, l'équation (3.2.65) constitue une réduction exacte du problème initial [106], aux erreurs d'arrondis près.

En applicant cette condensation, la jacobienne $\mathbf{R}_{,\tilde{\boldsymbol{x}}}$ s'obtient de façon similaire à la définition faite en (3.2.22), en y incluant les termes réduits partitionnés issus de (3.2.64). Le gradient $\mathbf{R}_{,\omega}$, *cf.* équation (3.2.48), s'écrit alors :

$$\mathbf{R}_{,\omega} = \mathbf{Z}_{\mathrm{red},\omega}\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{nl}} + \tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl,red},\omega} - \tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{ext,red},\omega} \quad (3.2.66)$$

avec les termes :

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{red},\omega} = \mathbf{Z}^{\mathrm{nlnl}}_{,\omega} - \underbrace{\mathbf{Z}^{\mathrm{nll}}_{,\omega}\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{-1}}}_{\mathcal{A}}\mathbf{Z}^{\mathrm{lnl}} - \underbrace{\mathbf{Z}^{\mathrm{nll}}\left[\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{-1}}\right]_{,\omega}}_{\mathcal{B}}\mathbf{Z}^{\mathrm{lnl}} - \underbrace{\mathbf{Z}^{\mathrm{nll}}\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{-1}}}_{C}\mathbf{Z}^{\mathrm{lnl}}_{,\omega} \quad (3.2.67)$$

et :

$$\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{ext,red},\omega} = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{nl}}_{\mathrm{ext}}}{\partial \omega} - \underbrace{\mathbf{Z}^{\mathrm{nll}}_{,\omega}\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{-1}}}_{\mathcal{A}}\tilde{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{ext}} - \underbrace{\mathbf{Z}^{\mathrm{nll}}\left[\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{-1}}\right]_{,\omega}}_{\mathcal{B}}\tilde{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{ext}} - \underbrace{\mathbf{Z}^{\mathrm{nll}}\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{-1}}}_{C}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{ext}}}{\partial \omega} \quad (3.2.68)$$

L'expression du gradient réduit $\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl,red},\omega}$ est alors la même que celle du système non-réduit de l'équation (3.2.48) sous réserve que l'hypothèse $\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl,red}}(\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{nl}}) = \tilde{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{nl}}_{\mathrm{nl}}(\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{nl}})$ soit vraie.

**Note : 1.** les équations (3.2.67) et (3.2.68) requièrent l'évaluation du terme $\left[\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{-1}}\right]_{,\omega}$. L'expression de ce terme s'obtient analytiquement à l'aide de la formule de la dérivée de l'inverse d'une matrice. Cette formule peut se retrouver assez naturellement en s'appuyant sur la dérivée nulle de la matrice identité : $\left[\mathbf{I}\right]_{,\omega} = \left[\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}}\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{-1}}\right]_{,\omega} = \left[\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}}\right]_{,\omega}\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{-1}} + \mathbf{Z}^{\mathrm{ll}}\left[\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{-1}}\right]_{,\omega}$, ce qui conduit à l'équation $\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}}\left[\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{-1}}\right]_{,\omega} = -\left[\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}}\right]_{,\omega}\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{-1}}$ qui une fois résolue conduit à la formule :

$$\left[\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{-1}}\right]_{,\omega} = -\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{-1}}\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}}_{,\omega}\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{-1}} \tag{3.2.69}$$

De plus, d'un point de vue numérique, le calcul direct de l'inverse d'une matrice est généralement à proscrire. Le calcul du terme $\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{-1}}$, intervenant dans les équations (3.2.64), (3.2.67) et (3.2.68), est alors remplacé par l'évaluation des trois produits intermédiaires $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $C$, *via* la résolution de trois systèmes linéaires. L'obtention de ces trois systèmes linéaires est détaillée par la suite :

**calcul du terme** $C = \mathbf{Z}^{\mathrm{nll}}\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{-1}}$ ;

1. on peut transposer l'ensemble et poser $C^{\top} = \left[\mathbf{Z}^{\mathrm{nll}}\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{-1}}\right]^{\top}$,
2. développer le produit pour obtenir $C^{\top} = \mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{-\top}}\mathbf{Z}^{\mathrm{nll}^{\top}}$ *via* la relation de la transposée du produit de deux matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$, soit $(\mathbf{AB})^{\top} = \mathbf{B}^{\top}\mathbf{A}^{\top}$ ($\mathbf{Z}^{\mathrm{nll}^{\top}} \neq \mathbf{Z}^{\mathrm{lnl}}$ car l'opérateur $\boldsymbol{\nabla}$ intervenant dans la formulation de $\mathbf{Z}(\omega)$ est antisymétrique),
3. et résoudre le système $\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{\top}}C^{\top} = \mathbf{Z}^{\mathrm{nll}^{\top}}$, transposer le résultat et trouver $C$.

**calcul du terme** $\mathcal{B} = \mathbf{Z}^{\mathrm{nll}}\left[\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{-1}}\right]_{,\omega}$ ;

1. l'équation (3.2.69) indique que ce terme vaut $\mathcal{B} = \mathbf{Z}^{\mathrm{nll}}\left[-\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{-1}}\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}}_{,\omega}\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{-1}}\right]$,
2. ce qui peut aussi s'écrire $\mathcal{B} = -C\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}}_{,\omega}\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{-1}}$ où l'on retrouve le terme $C$ déterminé précédemment,
3. on se ramène donc à calculer $\mathcal{B} = -\hat{\mathcal{B}}\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{-1}}$ avec $\hat{\mathcal{B}} = C\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}}_{,\omega}$,
4. il suffit alors de réarranger les termes de l'équation $\mathcal{B} = -\hat{\mathcal{B}}\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{-1}}$ ce qui équivaut à $\mathcal{B}^{\top} = -\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{-\top}}\hat{\mathcal{B}}^{\top}$ une fois de plus de par la relation sur produit transposé de deux matrices,
5. pour finalement résoudre $\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{\top}}\mathcal{B}^{\top} = -\hat{\mathcal{B}}^{\top}$, transposer le résultat et trouver $\mathcal{B}$.

**calcul du terme** $\mathcal{A} = \mathbf{Z}^{\mathrm{nll}}_{,\omega}\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{-1}}$.

1. en suivant la même logique que pour le terme $C$, on pose $\mathcal{A}^{\top} = \left[\mathbf{Z}^{\mathrm{nll}}_{,\omega}\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{-1}}\right]^{\top}$,
2. développer et obtenir $\mathcal{A}^{\top} = \mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{-\top}}\mathbf{Z}^{\mathrm{nll}^{\top}}_{,\omega}$ (similairement pour la formulation de $\mathbf{Z}_{,\omega}$ il faut noter que $\mathbf{Z}^{\mathrm{lnl}}_{,\omega} \neq \mathbf{Z}^{\mathrm{nll}^{\top}}_{,\omega}$),

3. pour ainsi résoudre $\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^\top}\mathcal{A}^\top = \mathbf{Z}_{,\omega}^{\mathrm{nll}^\top}$, tranposer le résultat et trouver $\mathcal{A}$.

Les trois systèmes linéaires à résoudre partagent le même terme de gauche $\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^\top}$, stocker sa décomposition LU permet ainsi d'optimiser grandement leur résolution.

**2.** étant donné que l'évaluation directe de l'inverse $\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^{-1}}$ doit être répétée pour toute nouvelle valeur de $\omega$, le temps de calcul cumulé peut rapidement devenir excessif. En effet, lorsque sont considérés des modèles de grande dimension, le temps requis pour calculer l'inverse peut vite largement dépasser le temps de calcul associé à la résolution du problème non-linéaire condensé (3.2.66), et ce, d'autant plus que $p \gg q$. Toutefois, dans le cas où la condensation non-linéaire s'effectue sur des matrices préalablement issues d'une réduction de type Craig-Bampton réalisée sur les $q$ ddl non-linéaires physiques, et sous réserve d'un modèle d'amortissement approprié, il est possible de recourir à une approche exploitant la structure des matrices $\mathbf{M}$ et $\mathbf{K}$ permettant d'évaluer efficacement cette inverse [167].
**3.** le système fréquentiel partitionné peut également être résolu sans avoir recours à l'évaluation du complément de Schur. En effet, à l'aide des fréquences et modes propres du système, il est possible d'obtenir une approximation spectrale de l'inverse de la matrice de rigidité dynamique [61, 69], appelée en anglais *dynamic compliance matrix* ou plus généralement *frequency response function*, notée $\mathbf{A}(\omega)$ telle que $\mathbf{A}(\omega) = \mathbf{Z}(\omega)^{-1}$. Avec cette approximation, le système (3.2.62) se réécrit :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{l}} \\ \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{nl}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{ll}} & \mathbf{A}^{\mathrm{lnl}} \\ \mathbf{A}^{\mathrm{nll}} & \mathbf{A}^{\mathrm{nlnl}} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{l}}(\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{nl}}) \\ \tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{nl}}(\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{nl}}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{l}} \\ \tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{nl}} \end{bmatrix} \right) = \mathbf{0} \tag{3.2.70}$$

Sa seconde ligne conduit alors au système non-linéaire réduit suivant :

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{nl}} = \underbrace{\mathbf{A}^{\mathrm{nll}}(\omega)\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{l}} + \mathbf{A}^{\mathrm{nlnl}}(\omega)\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{nl}}}_{\tilde{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{nl}}} - \mathbf{A}^{\mathrm{nlnl}}(\omega)\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{nl}}(\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{nl}}) \tag{3.2.71}$$

où $\tilde{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{nl}}$ représente la réponse des $q$ ddl non-linéaires dus aux efforts extérieurs. Une fois résolu, et avec la même logique que dans le cas de l'équation 3.2.63, $\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{l}}$ s'obtient explicitement à l'aide de la première ligne du système et des valeurs convergées des efforts $\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{nl}}(\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{nl}})$.

Une condensation sur les ddl non-linéaires peut donc s'avérer très efficace dans une implémentation numérique de la HBM, ce qui constitue un atout majeur dans l'optique de traiter des problèmes industriels de grande dimension. Par ailleurs, et toujours dans le cas de problèmes de contact, si on se positionne dans un cas de contact entre solides flexibles, on peut noter qu'il est encore

possible de réduire la taille du système de moitié à l'aide d'une condensation supplémentaire basée sur une formulation en déplacements relatifs découlant directement du principe des actions réciproques [165].

### 3.2.2 Méthode de collocation trigonométrique

La méthode de collocation trigonométrique permet également d'approcher une solution périodique [66, 166, 169] de l'équation (2.4.1). De la même manière que la HBM, cette solution est décomposée en une série de Fourier dont les coefficients constituent l'inconnue du problème, *cf.* équation (3.2.1). La procédure de collocation consiste ainsi à venir vérifier les équations du mouvement en $N \geqslant 2H+1$ instants équirépartis notés $\tau_i$ sur la période de mouvement, *cf.* équation (3.2.34), ce qui permet d'écrire :

$$\mathbf{R}(\tilde{\boldsymbol{x}},\omega) = \begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(\tau_0) + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{x}}(\tau_0) + \mathbf{K}\boldsymbol{x}(\tau_0) + \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}(\tau_0) - \boldsymbol{f}_{\mathrm{ext}}(\omega,\tau_0) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(\tau_i) + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{x}}(\tau_i) + \mathbf{K}\boldsymbol{x}(\tau_i) + \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}(\tau_i) - \boldsymbol{f}_{\mathrm{ext}}(\omega,\tau_i) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(\tau_{N-1}) + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{x}}(\tau_{N-1}) + \mathbf{K}\boldsymbol{x}(\tau_{N-1}) + \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}(\tau_{N-1}) - \boldsymbol{f}_{\mathrm{ext}}(\omega,\tau_{N-1}) \end{cases} \tag{3.2.72}$$

Ces équations constituent dans le cas où :

$$\begin{cases} N = 2H+1, & \text{un système carré de dimension } (nN \times nN) \\ N > 2H+1, & \text{un système rectangulaire sur-déterminé de dimension } (nN \times n(2H+1)) \end{cases} \tag{3.2.73}$$

Le système (3.2.72) peut alors être réécrit sous une forme plus compacte à l'aide de l'opérateur $\mathbf{\Gamma}$ désignant la transformée de Fourier inverse tel que :

$$\mathbf{R}(\tilde{\boldsymbol{x}},\omega) = \mathbf{\Gamma}\mathbf{Z}(\omega)\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{col}}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{f}_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{col}}(\omega,\tau) = \mathbf{0} \tag{3.2.74}$$

où l'on retrouve la matrice de rigidité dynamique linéaire $\mathbf{Z}(\omega)$, *cf.* équation (3.2.19), du problème HBM et où le vecteur $\boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{col}}$ représente les efforts non-linéaires *exacts* du problème. Le système d'équations algébriques non-linéaires (3.2.74) peut alors être résolu itérativement par un solveur non-linéaire quelconque dans le cas $N = 2H+1$, ou bien par un algorithme d'optimisation de type moindres carrés dans le cas où $N > 2H+1$.

Dans le cas où l'on a recours à un solveur de type Newton, l'expression de la jacobienne des efforts non-linéaires $\boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{col}}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})$ est alors assez similaire à celle vue dans les équations (3.2.43) et (3.2.44) et

se définie telle que :

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{col}}}{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}} = \frac{\partial \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{col}}}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{\Gamma} + \frac{\partial \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{col}}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{\Gamma}(\omega \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{I}_n) \tag{3.2.75}$$

D'un point de vue plus général, les méthodes de collocation font partie, tout comme la HBM, de la famille des méthodes de résidus pondérés, aussi appelées méthodes de Ritz-Galerkin. En effet, les méthodes de collocation se caractérisent par le fait qu'elles utilisent des distributions de Dirac en tant que fonctions tests (de projection) pour évaluer le résidu en $N$ instants. La spécificité de la collocation trigonométrique réside dans le choix de la base de Fourier comme fonctions d'approximation, se distinguant, à titre d'illustration, de la collocation orthogonale qui peut s'appuyer sur des polynômes de Legendre [218] ou Lagrange [157] comme fonctions d'approximation. Comme on l'a vu plus tôt, dans le cas de la HBM, fonctions d'approximation et fonctions tests sont identiques et correspondent aux fonctions de la base de Fourier.

### 3.2.3 Équilibrage harmonique haute dimension

La méthode de l'équilibrage harmonique haute dimension [55, 66], de l'anglais *high dimension harmonic balance method* (HDHB) et également appelée *time spectral method*, fut originellement proposée dans le domaine de la dynamique des fluides [103] et constitue une autre alternative fréquentielle à la résolution du problème (2.4.1). Contrairement à la HBM et la collocation trigonométrique, la HDHB se distingue par le fait qu'elle ne dispose plus que de $n(2H+1)$ coefficients de Fourier des déplacements en tant qu'inconnues. En effet, elle a la spécificité de ne traiter seulement que $N = n(2H+1)$ inconnues en déplacements équirépartis sur une période adimensionnée tel que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Gamma}\tilde{\boldsymbol{x}}$. Pour ce faire, sous réserve que les matrices de DFT directe $\boldsymbol{\Gamma}^{-1}$ et inverse $\boldsymbol{\Gamma}$ soient inversibles (ce qui implique qu'elle ne peuvent uniquement être construites que pour $N = 2H+1$ instants), le problème à résoudre peut être formulé tel que :

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{x}, \omega) = \underbrace{\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\mathbf{Z}(\omega)\boldsymbol{\Gamma}}_{\mathbf{H}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{hd}}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{f}_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{hd}}(\omega, \tau) = \mathbf{0} \tag{3.2.76}$$

où $\mathbf{H}$ est une matrice pleine, et non diagonale par blocs, de dimension $(n(2H+1) \times n(2H+1))$ qui assure la cohésion entre chaque instants. Il n'y a ici pas besoin de schéma AFT pour évaluer les efforts non-linéaires. Ce système d'équations peut alors être résolu comme un problème de statique de la forme $\mathbf{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$.

Attention néanmoins, il convient de souligner que la HDHB et la collocation trigonométrique peuvent être faussement interprétées comme un équivalent de la HBM dans le domaine temporel [55], or ceci n'est vrai qu'en apparence, et elles ne se soustraient absolument pas aux erreurs liées à l'échantillonnage. En effet, et plus particulièrement pour la HDHB, étant donné que le nombre

d'instants $N$ doit obligatoirement être égal à $2H + 1$, ceci implique potentiellement un fort *alisasing* dépendamment de la sévérité de la non-linéarité du système. L'*aliasing* peut être ainsi susceptible de générer des solutions non-physiques, en plus des solutions physiques du système considéré. Il est néanmoins possible de réduire ce problème à l'aide d'un filtrage approprié [56, 76].

Pour terminer, le positionnement relatif des différentes méthodes fréquentielles qui ont été présentées est schématisé sur la figure 3.19. La majorité des différences entre ces méthodes tient essentiellement au fait que leurs inconnues et/ou leur résidu respectifs sont formulés dans le domaine temporel ou bien fréquentiel. Dans le cas où $N = 2H + 1$, il est possible de démontrer que la HBM couplée au schéma AFT, la collocation trigonométrique et la HDHB sont des méthodes complètement équivalentes [171].

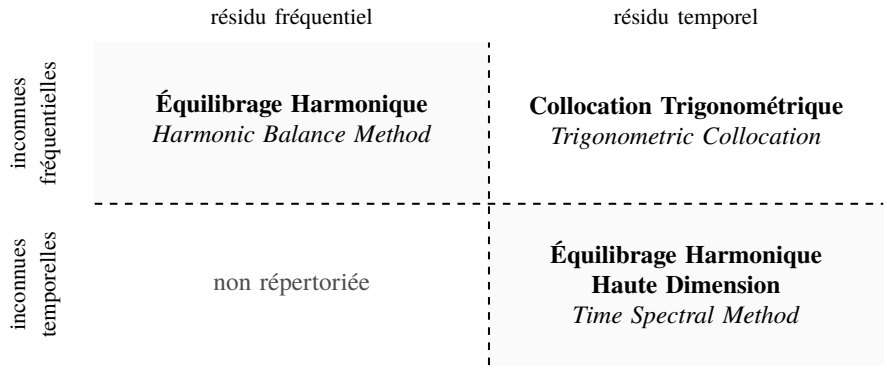



Figure 3.19 Relations entre les différentes méthodes fréquentielles abordées. Adaptée de [171].

# CHAPITRE 4 CONTINUATION

Dans le but de résoudre le système d'équations différentielles non-linéaires (2.4.1), certaines des méthodes numériques présentées dans le chapitre précédent, telle que la méthode de tir ou celle de l'équilibrage harmonique, requièrent la résolution de systèmes d'équations algébriques non-linéaires, *cf.* équations (3.1.26) et (3.2.18). De plus, ces systèmes peuvent notamment dépendre de paramètres quelconques comme la pulsation de l'excitation $\omega$ ou encore un paramètre relatif aux efforts non-linéaires. De tels systèmes peuvent alors s'écrire :

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \lambda) = \mathbf{0}, \ \mathbf{R} \ : \ \mathbb{R}^{n_{\text{eq}}} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \tag{4.0.1}$$

où $\mathbf{R}$ est un système constitué de $n_{\text{eq}}$ équations algébriques d'inconnues $\mathbf{X} = [X_1, \ldots, X_{n_{\text{eq}}}]^\top$ dépendant également d'un *paramètre de contrôle* $\lambda$. Ce chapitre présente ainsi dans un premier temps des méthodes permettant de résoudre le système (4.0.1) pour un paramètre $\lambda_0$ supposé fixe, puis on s'intéresse à des méthodes dites de continuation, qui permettent d'étendre la résolution de ces systèmes à différentes valeurs de $\lambda$ en vue de la réalisation d'études paramétriques.

## 4.1 Résolution de systèmes algébriques non-linéaires

Lors de la recherche de zéros, ou racines, d'une équation non-linéaire, il est souvent difficile, voire impossible d'obtenir une expression analytique des solutions comme le montre le théorème d'Abel-Ruffini pour les polynômes d'ordre supérieur ou égal à 5. Il est donc assez courant d'avoir recours à des méthodes numériques itératives [172, 186, 139, 142] afin d'approximer la solution d'un système d'équations non-linéaires. La présente section propose ainsi une liste non-exhaustive de méthodes couramment employées en dynamique non-linéaire.

### 4.1.1 Méthode de Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson consiste à rechercher itérativement la solution du système (4.0.1) $\mathbf{X}^{k+1}$ à partir de sa linéarisation issue d'un développement de Taylor du premier ordre en $\mathbf{X}^k$ tel que :

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}^{k+1}) = \mathbf{R}(\mathbf{X}^k + \Delta\mathbf{X}^k) = \mathbf{R}(\mathbf{X}^k) + \mathbf{R}^k_{,\mathbf{X}}\Delta\mathbf{X}^k + \mathcal{O}(||\Delta\mathbf{X}^k||^2) = \mathbf{0} \tag{4.1.1}$$

où $\Delta\mathbf{X}^k = \mathbf{X}^{k+1} - \mathbf{X}^k$ désigne une correction, ou encore une direction de Newton, et où $\mathbf{R}_{,\mathbf{X}}$ correspond à la matrice jacobienne du système évaluée en $\mathbf{X}^k$. Il vient alors la relation de récurrence :

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k + \Delta\mathbf{X}^k \quad \text{avec} \quad \mathbf{R}^k_{,\mathbf{X}}\Delta\mathbf{X}^k = -\mathbf{R}(\mathbf{X}^k) \tag{4.1.2}$$

En partant d'un itéré initial $\mathbf{X}^0$, puis en lui appliquant itérativement des corrections $\Delta\mathbf{X}$ déterminées à partir de la résolution de systèmes linéaires, chaque correction permet ainsi à $\mathbf{X}^k$ de se rapprocher progressivement de l'une des solutions du système jusqu'à satisfaire une condition préalablement établie qui détermine la fin des itérations. En fixant les tolérances $\epsilon_m \in \mathbb{R}^*_+$ permettant d'atteindre une précision souhaitée, deux types de critères d'arrêt peuvent être distingués, ceux relatifs à :

**la convergence de la solution** :

$$||\Delta\mathbf{X}^k|| \leqslant \epsilon_1 \quad \text{ou} \quad \frac{||\Delta\mathbf{X}^k||}{||\mathbf{X}^k||} \leqslant \epsilon_2 \tag{4.1.3}$$

qui correspondent respectivement à la norme absolue ou relative de la correction ;

**l'erreur d'approximation** :

$$||\mathbf{R}(\mathbf{X}^k, \lambda_0)|| \leqslant \epsilon_3 \quad \text{ou} \quad \frac{||\mathbf{R}(\mathbf{X}^k, \lambda_0)||}{||\mathbf{X}^k||} \leqslant \epsilon_4 \tag{4.1.4}$$

qui correspondent respectivement à l'erreur absolue ou relative commise sur le résidu.

Il convient de souligner que les critères d'arrêt dépendent de la norme choisie, usuellement la norme 2, bien que ce choix n'influence pas la convergence de l'algorithme [156, 186]. La figure 4.1 donne une interprétation géométrique de la méthode pour un problème unidimensionnel. La résolution débute par une estimation initiale de la solution recherchée en $\mathbf{X}^0$, ce qui correspond au point de la courbe $y = \mathbf{R}(\mathbf{X})$ (——) situé en $(\mathbf{X}^0, \mathbf{R}(\mathbf{X}^0))$. La jacobienne y est ensuite évaluée, soit plus simplement ici, la dérivée $\mathbf{R}_{,\mathbf{X}}(\mathbf{X}^0)$, ce qui permet de tracer la tangente (——) en ce point qui équivaut au développement de Taylor présenté en (4.1.1) autour de $\mathbf{X}^0$. L'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses $\mathbf{R}(\mathbf{X}) = 0$, située en $\mathbf{X}^1 = \mathbf{X}^0 - (\mathbf{R}_{,\mathbf{X}}(\mathbf{X}^0))^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{X}^0)$, devient alors la nouvelle estimation de la solution. Le même raisonnement est ainsi répété jusqu'à respecter un critère d'arrêt. Il faut toutefois noter que la figure 4.1 représente un cas où l'algorithme converge sans difficultés, ce n'est cependant pas toujours le cas comme l'illustre la figure 4.2.

D'un point de vue global, la réussite et la convergence de l'algorithme sont fortement conditionnées par le choix de l'itéré initial $\mathbf{X}^0$. Ce dernier doit se situer dans le bassin d'attraction de la solution ciblée, *i.e.* l'ensemble des valeurs de $\mathbf{X}^0$ pour lesquelles $\mathbf{X}^k$ tend vers la solution lorsque $k$ tend vers l'infini [172], voir la figure 4.2c. Malgré cela, localement, pour certaines conditions de régularité

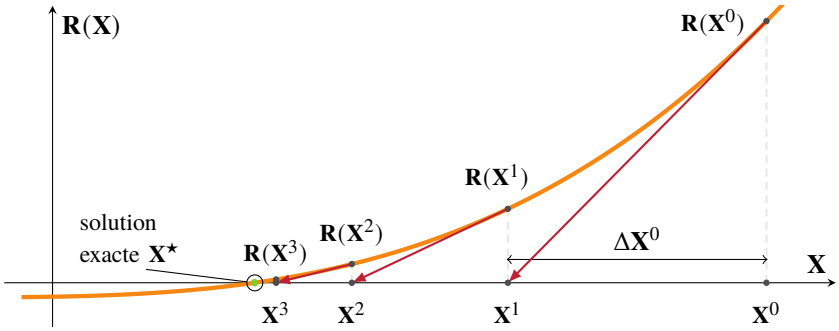
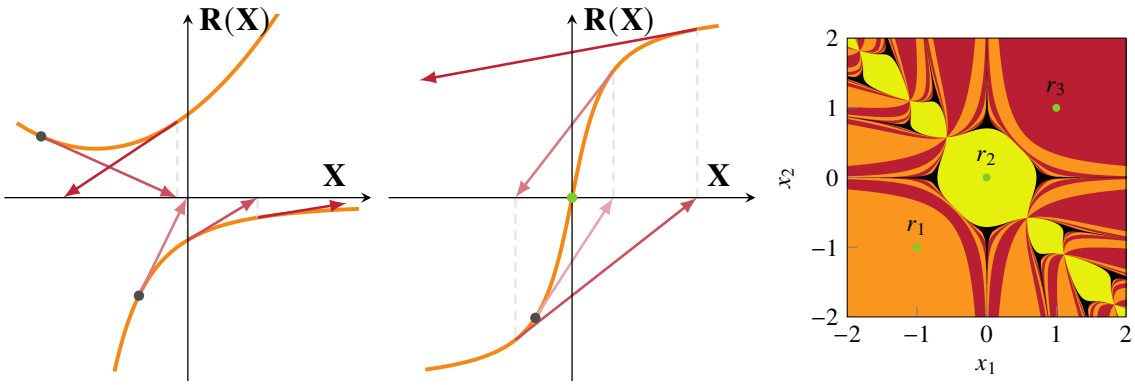



Figure 4.1 Interprétation géométrique de la méthode de Newton-Raphson.




(a) extremum local / asymptote (b) point d'inflexion (c) bassin d'attraction

Figure 4.2 Différents scénarios où la méthode de Newton-Raphson peut échouer : (a) en présence d'extremums locaux / asymptotes, (b) pour une certaine catégorie de points d'inflexion qui engendrent alors de l'*overshooting*, *i.e.* comme ici le zéro de la fonction arctan, et (c) lorsque l'itéré initial est situé en dehors du bassin d'attraction du zéro ciblé. Le bassin d'attraction, représenté en (c), est associé au système $f(x_1, x_2) = \left[x_1^3 - x_2\,,\ x_2^3 - x_1\right]^\top$ qui dispose des trois racines distinctes (●) $r_1 = [-1\,,\ -1]^\top$, $r_2 = [0\,,\ 0]^\top$ et $r_3 = [1\,,\ 1]^\top$. Ainsi, dépendamment du choix de l'itéré initial, le processus itératif convergera vers $r_1$ (■), $r_2$ (■) ou $r_3$ (■), ou n'y parviendra tout simplement pas (■) car ici la jacobienne du système y est singulière.

sur **R** et ses dérivées, et pour $\mathbf{X}^0$ supposé suffisamment proche de la solution, il est possible de démontrer que la méthode de Newton-Raphson dispose d'une convergence quadratique [172, 186], *i.e.* l'erreur à l'itération courante est proportionnelle au carré de l'erreur à l'itération précédente. Ainsi, sous réserve d'un itéré initial adéquatement choisi et d'une évaluation efficace de la jacobienne du système, cette méthode se révèle extrêmement performante.

### 4.1.2 Méthodes de quasi-Newton

Les méthodes de type quasi-Newton regroupent de manière générale toutes méthodes qui se basent sur une approximation de la jacobienne $\mathbf{R}_{,\mathbf{X}}$ lors de la phase de résolution. En effet, en partant du constat que l'évaluation de la jacobienne à chaque itération peut vite devenir coûteuse en temps de calcul, son approximation peut s'avérer être une stratégie envisageable. Ainsi, une première idée peut simplement consister à ne plus actualiser systématiquement la jacobienne à chaque itération, à ce moment-là, la convergence n'est plus quadratique, mais cela permet potentiellement d'économiser en temps de calcul dans le cas où les variations de $\mathbf{R}_{,\mathbf{X}}$ sont faibles entre plusieurs itérations. Il faut néanmoins noter que dans le cas de non-linéarités de contact, les erreurs induites par une réutilisation de la jacobienne dans des domaines de fortes variations peuvent conduire le processus itératif en dehors du bassin d'attraction de la solution recherchée. L'ajout d'amortissement numérique au processus peut alors aider à compenser ce travers, ce qui revient à modifier la phase de correction tel que :

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k + \alpha \Delta \mathbf{X}^k \quad \text{avec} \quad \alpha \in \,]0; 1] \tag{4.1.5}$$

où $\alpha$ correspond à un facteur d'amortissement numérique qui en théorie, minimise la valeur de la fonction objectif en $\mathbf{X}^{k+1}$, *i.e.* ici le résidu $\mathbf{R}(\mathbf{X}^{k+1})$. Pour $\alpha = 1$, on retrouve la méthode de Newton-Raphson présentée plus tôt. En pratique, trouver la valeur exacte de $\alpha$ s'avère être une tâche aussi difficile que de trouver le zéro de la fonction objectif et constitue en soit un problème d'optimisation. Idéalement, elle peut être déterminée *via* une recherche linéaire exacte :

$$\alpha = \underset{0<\alpha\leqslant 1}{\arg\min} \left\| \mathbf{R}(\mathbf{X}^k + \alpha \Delta \mathbf{X}^k) \right\| \tag{4.1.6}$$

mais une approche plus appropriée consiste à approximer $\alpha$ à l'aide d'une procédure de recherche linéaire inexacte en se basant par exemple soit sur les règles d'Armijo, de Goldstein ou encore de Wolfe [183]. Dans le cas de la règle d'Armijo, on pose initialement $\alpha = 1$ puis on applique dans un premier temps la correction de Newton et vérifie si le critère $||\mathbf{R}(\mathbf{X}^{k+1})|| \leqslant ||\mathbf{R}(\mathbf{X}^k)||$ est satisfait. Si oui, $\mathbf{X}^{k+1}$ devient le nouvel itéré, si non, on divise la valeur de $\alpha$ de moitié jusqu'à satisfaire le critère d'amélioration du résidu.

La méthode de Broyden [107, 18, 142], analogue multidimensionnel de la méthode de la sécante, pousse cette logique encore plus loin en se contentant d'approximer et d'actualiser la jacobienne à chaque itération. En ayant recours à la formule d'actualisation usuellement qualifiée en anglais de *good Broyden update* (en raison de sa meilleure efficacité numérique comparée à une autre formule également proposée dans l'article d'origine [142]), l'actualisation de la jacobienne équivaut alors à

l'ajout d'une matrice de rang 1 :

$$\mathbf{R}^k_{,\mathbf{X}} = \mathbf{R}^{k-1}_{,\mathbf{X}} + \frac{\left(\Delta\mathbf{R}(\mathbf{X}^{k-1}) - \mathbf{R}^{k-1}_{,\mathbf{X}}\Delta\mathbf{X}^{k-1}\right)}{\Delta\mathbf{X}^{k-1\top}\Delta\mathbf{X}^{k-1}}\Delta\mathbf{X}^{k-1\top} \tag{4.1.7}$$

où $\Delta\mathbf{R}(\mathbf{X}^{k-1}) = \mathbf{R}(\mathbf{X}^k) - \mathbf{R}(\mathbf{X}^{k-1})$. L'initialisation de $\mathbf{R}^0_{,\mathbf{X}}$ peut alors être obtenue par différences finies ou tout autre moyen usuel. L'utilisation de la formule de Sherman-Morrison [107] permet alors même d'étendre cette formule à une approximation directe de l'inverse de la jacobienne $\mathbf{R}^{-1}_{,\mathbf{X}}$. D'un point de vue global, l'approximation de la jacobienne a donc l'avantage de réduire les temps de calcul au prix d'une diminution de la convergence. Il est néanmoins possible de démontrer que la méthode de Broyden dispose d'une convergence superlinéaire.

### 4.1.3 Méthode de Newton-Krylov

La méthode de Newton-Krylov [94] constitue une alternative à la résolution du système (4.0.1) ne requérant aucunes évaluations de la matrice jacobienne. Cette méthode allie la logique d'une méthode de type Newton à convergence superlinéaire, à une résolution par une méthode des sous-espaces de Krylov des systèmes linéaires sous-jacents issus de la méthode de Newton. Les méthodes des sous-espaces de Krylov forment une famille de méthodes itératives qui permettent de résoudre des systèmes linéaires de grande dimension de la forme $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{b}$ à l'aide du $j^{\text{ième}}$ sous-espace vectoriel de Krylov associé $\mathcal{K}_j$ défini tel que :

$$\mathcal{K}_j(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \boldsymbol{x}_0) = \text{vect}(\mathbf{r}_0, \mathbf{A}\mathbf{r}_0, \mathbf{A}^2\mathbf{r}_0, \ldots, \mathbf{A}^{j-1}\mathbf{r}_0) \quad \text{avec} \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{x}_0 \tag{4.1.8}$$

Pour un système non-symétrique, c'est la Généralisation de la méthode de Minimisation du RESidu (GMRES), de l'anglais *Generalized Minimal RESidual method* [133] qui sera usuellement utilisée pour approximer la solution du système linéaire. Ainsi, à une itération $k$ donnée de la méthode de Newton, on pose comme résidu initial pour démarrer le processus de Krylov $\mathbf{r}_0 = -\mathbf{R}^k - \mathbf{R}^k_{,\mathbf{X}}\Delta\mathbf{X}^k_0$, où la première correction $\Delta\mathbf{X}^k_0$ est initialisée à zéro étant donné que, dans un contexte de Newton, la direction de Newton précédente correspond à un mouvement localement optimal et que les corrections sont supposées tendre vers zéro à mesure que l'algorithme converge. La $j^{\text{ième}}$ correction de Newton issue du sous-espace engendré par les vecteurs de Krylov $\mathcal{K}_j$ se définit telle que :

$$\Delta\mathbf{X}^k_j = \Delta\mathbf{X}^k_0 + \sum_{i=0}^{j-1} \beta_i (\mathbf{R}^k_{,\mathbf{X}})^i \mathbf{r}_0 \tag{4.1.9}$$

où les coefficients $\beta_i$ viennent minimiser la norme du résidu $||\mathbf{R}^k_{,\mathbf{X}}\Delta\mathbf{X}^k_j + \mathbf{R}^k||_2$ au sens des moindres carrés. En pratique, $\Delta\mathbf{X}^k_j$ est ainsi déterminée comme une combinaison linéaire des vecteurs

orthonormaux d'Arnoldi produits par la méthode GMRES qui forment une base de $\mathcal{K}_j$. En examinant l'équation (4.1.9), tout l'intérêt de la méthode de Newton-Krylov résulte alors du fait que l'algorithme GMRES ne nécessite l'action de la jacobienne que sous la forme de produits matrice-vecteur qui peuvent être approximés par différences finies, généralement à l'aide d'une formule avant [94], § 2.3. Ainsi, la matrice jacobienne n'a jamais besoin d'être réellement évaluée. Finalement, l'utilisation d'un préconditionneur approprié pour initialiser l'algorithme est également de rigueur compte tenu de la nature itérative de cette méthode.

### 4.1.4 Résolution en pseudo-temps

Une autre alternative notable aux solveurs de type Newton, employée majoritairement dans le domaine de la dynamique des fluides [56, 87], consiste à transformer le système algébrique non-linéaire à résoudre en un système d'EDO. Tout comme pour la méthode de Newton-Krylov, il n'y a également plus besoin d'évaluer ou stocker la jacobienne du système. En effet, en considérant la solution recherchée comme un point fixe du système dynamique étudié, on peut écrire :

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t^*} + \mathbf{R}(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \tag{4.1.10}$$

où $t^*$ correspond à un pseudo-temps. Ainsi, si l'on intègre ce système jusqu'à trouver un point fixe $\mathbf{X}^*$, *i.e.* une solution caractérisée par $\partial \mathbf{X}^* / \partial t^* = \mathbf{0}$, alors $\mathbf{X}^*$ permet de résoudre le système algébrique $\mathbf{R}(\mathbf{X}^*) = \mathbf{0}$. Dans un contexte de dynamique non-linéaire, cette technique de résolution est souvent utilisée sur les systèmes non-linéaires issus de la HDHB (3.2.76) [66], ce qui dans ce contexte revient donc à intégrer :

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t^*} + \boldsymbol{\Gamma}^{-1}\mathbf{Z}(\omega)\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{hd}}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{f}_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{hd}} \tag{4.1.11}$$

jusqu'à satisfaire $\partial \boldsymbol{x} / \partial t^* = \mathbf{0}$ afin de trouver la solution du problème. La résolution en pseudo-temps a ainsi l'avantage de converger plus rapidement que la méthode de Newton lorsqu'elle est appliquée sur des systèmes de grande dimension bien qu'elle requiert toutefois un préconditionnement adapté.

Dans le cadre de cette thèse et dans l'optique d'une application de la HBM à des problèmes d'interactions aube/carter, des efforts d'implémentation ont été mis en œuvre pour évaluer la jacobienne fréquentielle $\mathbf{R}_{,\tilde{\boldsymbol{x}}}$ de manière optimale. De plus, cette dernière permet également d'évaluer la stabilité des solutions périodiques calculées, *cf.* section 7.2, c'est pourquoi la méthode de Newton-Raphson a été préférentiellement utilisée.

## 4.2 Principe de la continuation

Comme on vient de le voir, la méthode de Newton-Raphson permet d'approcher une solution du système (4.0.1) pour une valeur fixée du paramètre $\lambda = \lambda_0$. Si on considère maintenant le paramètre $\lambda$ comme une variable additionnelle du système, on recherche alors une solution $\mathbf{X}$ fonction de $\lambda$ qu'on peut regrouper dans le vecteur solution noté :

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_{\text{eq}}+1} \tag{4.2.1}$$

tel que $\mathbf{Y}_i = [\mathbf{X}_i, \lambda_i]^\top$ désigne une solution précédemment obtenue sur l'intervalle $\lambda \in [\lambda_{\text{inf}}; \lambda_{\text{sup}}]$. Le système (4.0.1) devient alors sous-déterminé : il y a $n_{\text{eq}} + 1$ inconnues pour seulement $n_{\text{eq}}$ équations. Afin de pouvoir le résoudre, il convient de fixer l'une des variables de $\mathbf{Y}$ ou plus généralement de fixer une direction de descente à l'algorithme de résolution utilisé. Il découle du théorème des fonctions implicites que l'ensemble de solution $\mathbf{X}$ est localement paramétrable en $\lambda$ (tant que la jacobienne $\mathbf{R}_{,\mathbf{X}}$ est non-singulière). Les méthodes de continuation, ou méthodes de suivi de branche, de l'anglais *path following*, sont bâties sur cette propriété mathématique. Elles tirent avantage du fait que le calcul d'une solution du système à un paramètre $\lambda_0$ donné peut raisonnablement être obtenue à partir de solutions précédemment calculées au voisinage de ce paramètre. Il apparaît alors assez naturellement que l'utilisation conjointe d'une méthode de continuation et d'un solveur de type Newton permet de (1) générer des itérés initiaux à moindre coût, en contribuant de ce fait à améliorer la convergence du solveur, et (2) d'offrir un fort apport qualitatif sur la dynamique du système, en permettant notamment de positionner les points de bifurcations, *cf.* section 7.1.

### 4.2.1 Approche classique : prédiction/correction

Ces méthodes reposent sur une stratégie en deux temps de type prédiction/correction qui permet de contrôler la convergence du solveur non-linéaire. Il en existe de nombreuses variantes qui se différencient au niveau de quatre aspects fondamentaux [177] : prédiction, correction, paramétrisation et enfin, contrôle du pas et mise à l'échelle.

#### 4.2.1.1 Prédiction

L'étape de prédiction permet de donner une approximation $\mathbf{Y}^0_{i+1}$ de la prochaine solution $\mathbf{Y}_{i+1}$ d'une branche de solutions. Elle est réalisée pour un pas prédicteur $\Delta p$ dont la valeur est discutée plus en détails un peu plus loin en 4.2.1.4. Il existe deux classes de predictions [177], celles de type EDO, *i.e.* construites à partir de $\mathbf{R}$ et ses dérivées, et celles de type extrapolation polynomiale, qui se basent uniquement sur les solutions précédentes. Soit les prédictions :

**sécante,** voir figure 4.3a, formée à partir des deux dernières solutions obtenues :

$$\mathbf{Y}_{i+1}^{0} = \mathbf{Y}_i + \Delta p \frac{\mathbf{Y}_i - \mathbf{Y}_{i-1}}{||\mathbf{Y}_i - \mathbf{Y}_{i-1}||} \tag{4.2.2}$$

**tangente,** voir figure 4.3b, formée à partir de la tangente issue de la dernière solution calculée :

$$\mathbf{Y}_{i+1}^{0} = \mathbf{Y}_i + \Delta p\, \mathbf{t}_i \tag{4.2.3}$$

avec la tangente $\mathbf{t}_i$ induite par la matrice jacobienne du problème $\mathbf{R}_{,\mathbf{Y}}$ qui est l'unique solution du système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{,\mathbf{Y}}(\mathbf{Y}_i) \\ \mathbf{e}_k^{\top} \end{bmatrix} \mathbf{t}_i = \mathbf{e}_{n_{\text{eq}}+1} \quad \text{avec} \quad \mathbf{R}_{,\mathbf{Y}} = \left[\mathbf{R}_{,\mathbf{X}} \,|\, \mathbf{R}_{,\lambda}\right] = \left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}} \,|\, \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda}\right] \tag{4.2.4}$$

où $\mathbf{e}_k$ est un vecteur de dimension $(n_{\text{eq}} + 1)$ dont toutes les composantes sont nulles exceptée la $k^{\text{ième}}$ qui est égale à l'unité. Une autre alternative couramment utilisée pour évaluer $\mathbf{t}_i$ est de recourir directement à l'algorithme de Keller [109], § 3.1.

**polynomiale d'ordre $d$,** voir figure 4.3c, qui comparées aux deux prédictions précédentes, sont des prédictions d'ordres supérieurs. Elles peuvent être construites à l'aide d'une extrapolation par des polynômes de Lagrange à partir des $d + 1$ solutions précédentes. La variable alors utilisée pour définir ces polynômes est généralement l'abcisse curviligne $s$ dont l'origine est redéfinie localement au niveau de la dernière solution convergée d'indice $i$, telle que :

$$\begin{cases} s_i = 0 \\ s_{i-j} = s_{i-j+1} - \Delta s_{i-j+1} = s_{i-j+1} - ||\mathbf{Y}_{i-j+1} - \mathbf{Y}_{i-j}|| < 0 \quad \text{pour} \quad j \in [\![1\,..\,d]\!] \end{cases} \tag{4.2.5}$$

L'unique polynôme d'interpolation de Lagrange $\mathbf{P}$ d'ordre $d$, satisfaisant $\mathbf{P}_d(s_{i-j}) = \mathbf{Y}_{i-j}$ et permettant ainsi d'obtenir la prédiction $\mathbf{Y}_{i+1}^{0}$, s'écrit :

$$\mathbf{Y}_{i+1}^{0} = \mathbf{P}_d(s) = \sum_{j=i-d}^{i} \left( \prod_{\substack{k=i-d \\ k \neq j}}^{i} \frac{s - s_k}{s_j - s_k} \right) \mathbf{Y}_j \quad \text{pour} \quad s = s_{i+1} = \Delta p \tag{4.2.6}$$

D'un point de vue pratique, l'interpolation de Lagrange est fortement sensible au phénomène de Runge, *i.e.* l'approximation d'une fonction par interpolation polynomiale en des points d'abscisses équirépartis se dégrade à mesure que le nombre de points d'interpolation augmente, en donnant naissance à des oscillations d'amplitude croissante. Ainsi, pour ne pas venir détériorer la prédiction, on ne dépasse généralement pas un ordre $d = 3$. En pratique, la prédiction sécante peut être vue comme une extrapolation polynomiale d'ordre 1.

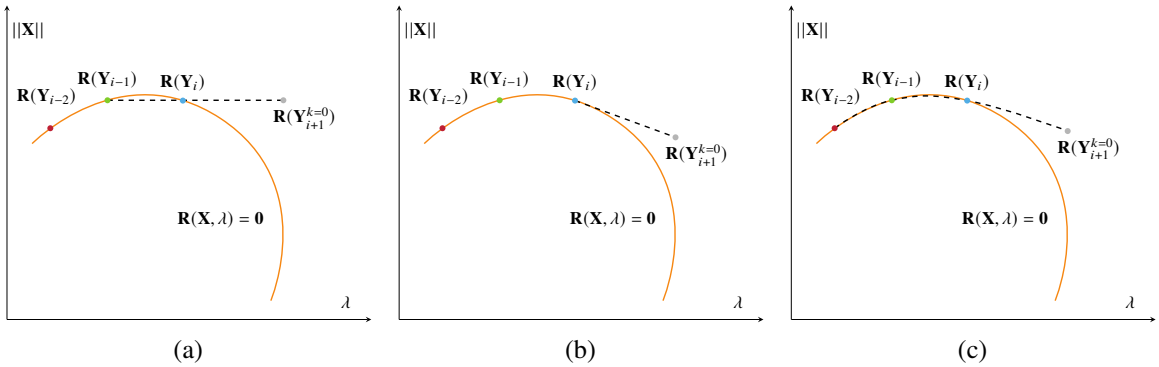



Figure 4.3 Prédictions : (a) sécante, (b) tangente et (c) polynomiale d'ordre 2. Adaptée de [154].

Dépendamment de la qualité de la prédiction initiale, l'algorithme peut converger vers un point en amont ou en aval de la branche de solutions. Il est donc courant d'imposer une condition de non-retournement afin de conserver le même sens de parcours le long d'une branche. Dans le cas d'un prédicteur tangent par exemple, la direction de la tangente $\mathbf{t}_i$ peut être fixée en imposant $\mathbf{t}_{i-1}\mathbf{t}_i \geq 0$.

#### 4.2.1.2 Correction

Cette étape correspond à la résolution du système non-linéaire algébrique. D'un point de vue pratique, le choix du solveur utilisé relève essentiellement de l'utilisateur. Dans le présent travail, c'est la méthode de Newton-Raphson. L'approximation obtenue à l'étape de prédiction permet alors généralement d'initialiser adéquatement le processus itératif.

#### 4.2.1.3 Paramétrisation

La paramétrisation est le moyen mathématique d'identifier chaque solution $\mathbf{Y}_i$ d'une branche de solution. Soit le paramètre général $\gamma$, il est ainsi possible de choisir une équation de paramétrisation $\mathcal{P}(\mathbf{X}, \lambda, \gamma)$ qui permet de définir le système étendu [177] :

$$\begin{cases} \mathbf{R}(\mathbf{X}, \lambda) = \mathbf{0} \\ \mathcal{P}(\mathbf{X}, \lambda, \gamma) = 0 \end{cases} \tag{4.2.7}$$

constitué de $n_{\text{eq}} + 1$ équations pour $n_{\text{eq}} + 1$ inconnues. Voici quelques paramétrisations possibles :

**naturelle,** voir figure 4.4a, cette paramétrisation constitue la méthode de continuation séquentielle [192]. C'est une simple adaptation de l'algorithme itératif utilisé pour résoudre le système (4.0.1). Elle repose sur une paramétrisation des solutions du système en fonction du

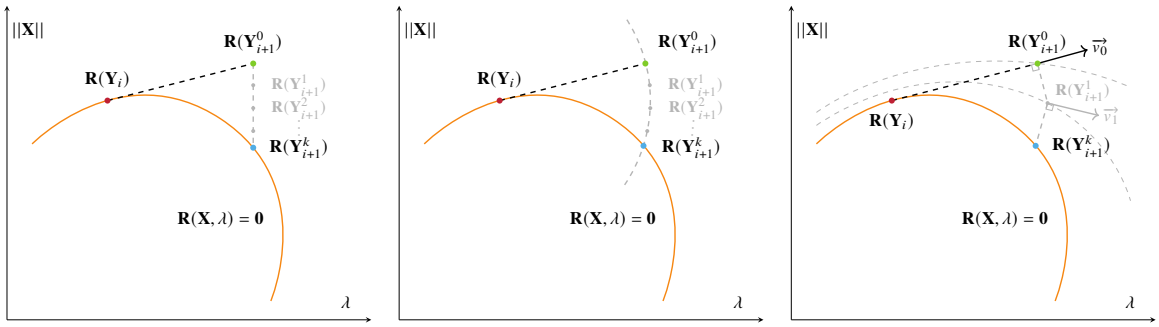
paramètre $\gamma$ le plus évident : $\lambda$ lui-même. Soit :

$$\mathcal{P}(\mathbf{X}_{i+1}^{k}, \lambda) = \lambda - \lambda_{i+1} = 0 \tag{4.2.8}$$

qui permet d'écrire les corrections sur $\mathbf{X}$ :

$$\mathbf{Y}_{i+1}^{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{i+1}^{k} + \Delta\mathbf{X} \\ \lambda_{i+1} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{R}_{,\mathbf{X}}(\mathbf{X}_{i+1}^{k}, \lambda_{i+1})\Delta\mathbf{X} = -\mathbf{R}(\mathbf{X}_{i+1}^{k}, \lambda_{i+1}) \tag{4.2.9}$$

Bien que la paramétrisation naturelle offre généralement une interprétation physique de la variation du paramètre de contrôle $\lambda$, celle-ci échoue si la courbe solution du système (4.0.1) présente un point de retournement, *i.e.* un point doté d'une tangente verticale qui traduit la singularité de la matrice jacobienne, soit $\det(\mathbf{R}_{,\mathbf{X}}) = 0$.




(a) (b) (c)

Figure 4.4 Corrections : (a) naturelle, (b) par longueur d'arc et (c) de Moore-Penrose. Les courbes (- - - -) de la figure 4.4c représentent des isovaleurs de $\mathbf{R}$. Adaptée de [154, 164].

Pour remédier à ce problème, il est possible de faire appel une paramétrisation dite :

**sélective (ou locale),** voir figure 4.5, où l'une des composantes de $\mathbf{Y}$, *i.e.* soit l'une de $\mathbf{X}$ ou soit $\lambda$, est fixée à tour de rôle de telle sorte que l'équation de contrainte s'écrit :

$$\mathcal{P}(\mathbf{X}_{i+1}, \lambda) = \mathbf{Y}_{i+1}^{(j)} - \eta = 0 \quad \text{avec} \quad j \in [\![1..n_{\text{eq}} + 1]\!] \tag{4.2.10}$$

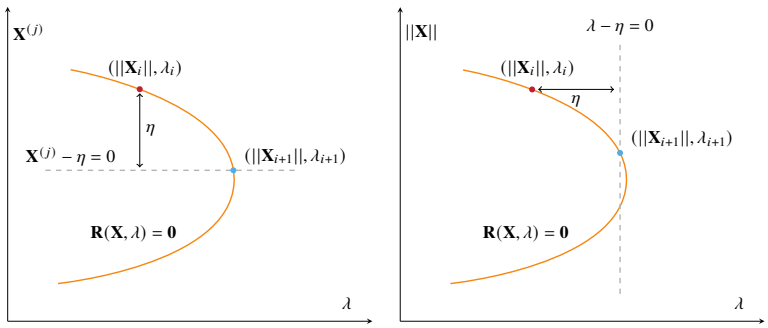
avec $\mathbf{Y}_{i+1}^{(j)}$ la $j^{\text{ième}}$ composante du vecteur $\mathbf{Y}_{i+1}$ et où le paramètre $\eta$ et l'indice $j$ s'adaptent à chaque pas $i$. Généralement l'indice $j$ sera choisi comme étant l'indice du terme ayant subi la plus grande variation relative $\Delta\mathbf{Y}_{i+1}^{(j)}$ entre deux calculs consécutifs, tel que :

$$\Delta\mathbf{Y}_{i+1}^{(j)} = \max\left(\Delta\mathbf{Y}_{i+1}^{(1)}, \ldots, \Delta\mathbf{Y}_{i+1}^{(n_{\text{eq}+1})}\right) \quad \text{avec} \quad \Delta\mathbf{Y}_{i+1}^{(j)} = \frac{|\mathbf{Y}_{i+1}^{(j)} - \mathbf{Y}_{i}^{(j)}|}{|\mathbf{Y}_{i+1}^{(j)}|} \tag{4.2.11}$$

Une fois $j$ déterminé, il faut choisir une valeur appropriée pour $\eta$ telle que :

$$\eta = \mathbf{Y}_{i+1}^{(j)} + \zeta(\mathbf{Y}_{i+1}^{(j)} - \mathbf{Y}_{i}^{(j)}) \tag{4.2.12}$$

avec $\zeta$ un facteur d'ajustement entre l'ancien et le nouvel incrément, respectivement $\mathbf{Y}_{i+1}^{(j)} - \mathbf{Y}_{i}^{(j)}$ et $\eta - \mathbf{Y}_{i+1}^{(j)}$. Étant donné que la paramétrisation en $\mathbf{X}_{i+1}^{(j)}$, pour $j \in [\![1..n_{\text{eq}}]\!]$, ne présente qu'un intérêt local, *i.e.* aux points de retournement, il est alors possible de pondérer par une constante supérieure à 1 la composante $\mathbf{Y}_{i+1}^{(n_{\text{eq}}+1)}$, *i.e.* $\lambda_{i+1}$, afin de favoriser le choix d'une paramétrisation en $\lambda$ (ce qui équivaut alors à une paramétrisation naturelle où $\eta = \Delta\lambda$ qui s'adapte cependant au niveau des points de retournement).




(a) (b)

Figure 4.5 Paramétrisation sélective : (a) selon la composante $\mathbf{X}_{i+1}^{(j)}$, (b) selon $\lambda_{i+1}$. Adaptée de [166]. En pratique, le cas (a) revient à effectuer une rotation du repère de 90° pour contourner la singularité de la jacobienne. Quant au cas (b), il équivaut simplement à une paramétrisation naturelle.

Il est aussi courant de s'appuyer sur l'abscisse curviligne $s$ de la courbe. En considérant comme acquis les points solutions $(\mathbf{Y}_0 \dots \mathbf{Y}_i)$ ainsi que les abscisses curvilignes $(s_0 \dots s_i)$ qui leurs sont associés, viennent alors les paramétrisations :

**par longueur d'arc (Keller ou Crisfield),** voir figures 4.4b et 4.6, qui consiste à imposer que la longueur d'arc entre les solutions $\mathbf{Y}_i$ et $\mathbf{Y}_{i+1}^k$ soit égale à $\Delta s$ tout au long de la phase de correction. Le point corrigé $\mathbf{Y}_{i+1}^k$ doit se situer à l'intersection de la courbe $\mathbf{R}(\mathbf{X}, \lambda) = \mathbf{0}$ et l'hypersphère de $\mathbb{R}^{n_{\text{eq}}+1}$ de rayon $\Delta s$ centrée en $\mathbf{Y}_i$ :

$$\mathcal{P}(\mathbf{X}_{i+1}^k, \lambda_{i+1}^k, s) = ||\mathbf{X}_{i+1}^k - \mathbf{X}_i||^2 + (\lambda_{i+1}^k - \lambda_i)^2 - \Delta s^2 = 0 \tag{4.2.13}$$

La correction simultanée de $\mathbf{X}$ et $\lambda$ est ainsi donnée par :

$$\mathbf{Y}_{i+1}^{k+1} = \mathbf{Y}_{i+1}^{k} + \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{X} \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{,\mathbf{X}}(\mathbf{Y}_{i+1}^{k}) & \mathbf{R}_{,\lambda}(\mathbf{Y}_{i+1}^{k}) \\ \mathcal{P}_{,\mathbf{X}}^{\top}(\mathbf{Y}_{i+1}^{k}, s) & \mathcal{P}_{,\lambda}(\mathbf{Y}_{i+1}^{k}, s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{X} \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}(\mathbf{Y}_{i+1}^{k}) \\ -\mathcal{P}(\mathbf{Y}_{i+1}^{k}, s) \end{bmatrix} \tag{4.2.14}$$

où les dérivées $\mathcal{P}_{,\mathbf{X}}$ et $\mathcal{P}_{,\lambda}$ sont définies tel que :

$$\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\mathbf{X}}(\mathbf{X}_{i+1}^{k}, \lambda_{i+1}^{k}, s) = 2(\mathbf{X}_{i+1}^{k} - \mathbf{X}_{i}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\lambda}(\mathbf{X}_{i+1}^{k}, \lambda_{i+1}^{k}, s) = 2(\lambda_{i+1}^{k} - \lambda_{i}) \tag{4.2.15}$$

**Note :** l'équation de contrainte (4.2.13) par longueur d'arc a le désavantage d'être non-linéaire en $\mathbf{X}$, un simple développement de Taylor permet néanmoins de la linéariser de telle sorte qu'elle devient [177] :

$$\mathcal{P}(\mathbf{Y}_{i+1}^{k}, s) = (\mathbf{Y}_{i+1}^{k} - \mathbf{Y}_{i})^{\top}\mathbf{t}_{i} - \Delta s = 0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{P}_{,\mathbf{Y}}(\mathbf{Y}_{i+1}^{k}, s) = \mathbf{t}_{i} \tag{4.2.16}$$

**orthogonale,** voir figure 4.7, qui consiste à imposer que la direction de descente du correcteur soit orthogonale à la direction de la prédiction $\mathbf{Y}_{i+1}^{0} - \mathbf{Y}_{i}$. Le point corrigé $\mathbf{Y}_{i+1}^{k}$ doit se situer sur l'hyperplan de $\mathbb{R}^{n_{\text{eq}}+1}$ normal à la direction de prédiction :

$$\mathcal{P}(\mathbf{Y}_{i+1}^{k}, s) = \mathbf{t}_{i}^{\top}(\mathbf{Y}_{i+1}^{k} - \mathbf{Y}_{i+1}^{0}) = 0 \tag{4.2.17}$$

avec pour dérivée constante $\mathcal{P}_{,\mathbf{Y}}(\mathbf{Y}_{i+1}^{k}, s) = \mathbf{t}_{i}^{\top}$. Ceci peut être vu comme un cas particulier de la paramétrisation par longueur d'arc [1] où la première itération de Newton-Raphson est la même mais où la direction de recherche n'est plus actualisée aux itérations suivantes :

$$\mathbf{Y}_{i+1}^{k+1} = \mathbf{Y}_{i+1}^{k} + \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{X} \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{,\mathbf{X}}(\mathbf{Y}_{i+1}^{k}) & \mathbf{R}_{,\lambda}(\mathbf{Y}_{i+1}^{k}) \\ \mathcal{P}_{,\mathbf{Y}}(\mathbf{Y}_{i+1}^{k}, s) & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{X} \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}(\mathbf{Y}_{i+1}^{k}) \\ -\mathcal{P}(\mathbf{Y}_{i+1}^{k}, s) \end{bmatrix} \tag{4.2.18}$$

Il est aussi possible de considérer des paramétrisations plus abstraites comme celle :

**de Moore-Penrose (Gauss-Newton),** voir figure 4.4c, qui consiste à considérer directement la matrice jacobienne $\mathbf{R}_{,\mathbf{Y}}$ comme fonction de $\mathbf{Y}$. Étant donné que l'équation manquante pour la résolution du système (4.0.1) implique une matrice jacobienne rectangulaire, il est alors possible, en suivant la même logique que pour Newton-Raphson, de recourir directement à un

1. Certains auteurs la désignent d'ailleurs comme une paramétrisation par pseudo-longueur d'arc.

pseudo-inverse de Moore-Penrose ( $^+$ ), *cf.* section 3.2.1.1 :

$$\mathbf{Y}_{i+1}^{k+1} = \mathbf{Y}_{i+1}^{k} + \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{X} \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{X} \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} = -\mathbf{R}^{+}_{,\mathbf{Y}}(\mathbf{Y}_{i+1}^{k})\,\mathbf{R}(\mathbf{Y}_{i+1}^{k}) \tag{4.2.19}$$

Lorsque le critère d'arrêt des corrections est satisfait, la solution obtenue est celle pour laquelle le critère $||\mathbf{X} - \mathbf{X}_{i+1}^{0}||^2 + (\lambda - \lambda_{i+1}^{0})^2$ est minimum, *i.e.* le point de la branche de solution le plus proche, au sens des moindres carrés, du point prédit.

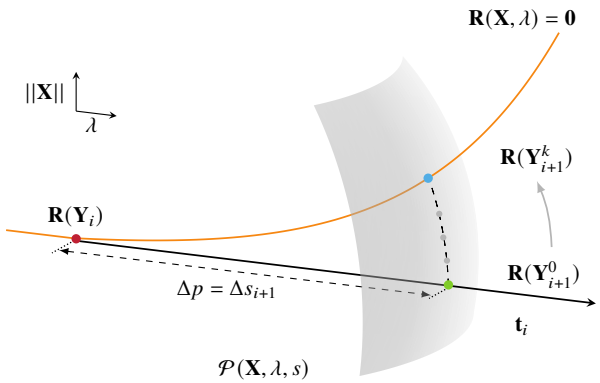



Figure 4.6 Illustration d'une étape de continuation par longueur d'arc. Point de départ (●), prédiction tangente (●), prédiction corrigée (●). La direction de recherche est actualisée à chaque correction.

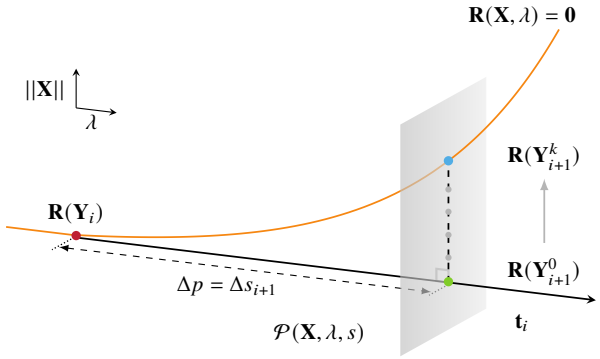



Figure 4.7 Illustration d'une étape de continuation par paramétrisation orthogonale / pseudo-longueur d'arc. Point de départ (●), prédiction tangente (●), prédiction corrigée (●). Adaptée de [199].

#### 4.2.1.4 Contrôle du pas et mise à l'échelle

Afin d'assurer la stabilité et la robustesse d'une technique de continuation, il est primordial d'en contrôler le pas (par exemple, dans le cas d'une paramétrisation par longueur d'arc, le pas $\Delta p = \Delta s$).

Avec un pas trop grand, la prédiction initiale sera de mauvaise qualité car trop éloignée de la solution recherchée, et de ce fait, elle conduira à un grand nombre d'itérations du correcteur avant de converger (si toutefois il converge). D'un autre côté, un pas trop faible donnera une discrétisation excessive de la courbe de réponse du système. Il est donc souhaitable d'adapter le pas du processus de continuation à chaque itération afin d'optimiser le temps de calcul global et d'améliorer la convergence du correcteur.

Par exemple, en matière d'intégrateur temporel, la méthode de Dormand-Prince [134] adapte son pas sur des critères de précision. Dans le cas présent, l'application d'un tel critère est loin d'être trivial. Il existe néanmoins de telles méthodes basées sur des estimations de l'erreur locale [177, 188], cependant il est plus courant d'employer des statégies faciles à mettre en œuvre, par exemple en recourant à des critères de nature :

**statistique,** où le contrôle du pas s'effectue selon l'historique de convergence du correcteur. Pour le calcul de chaque solution, le principe est de multiplier par un coefficient $\alpha$ le pas employé pour la solution précédente $\Delta s_{i-1}$ tel que :

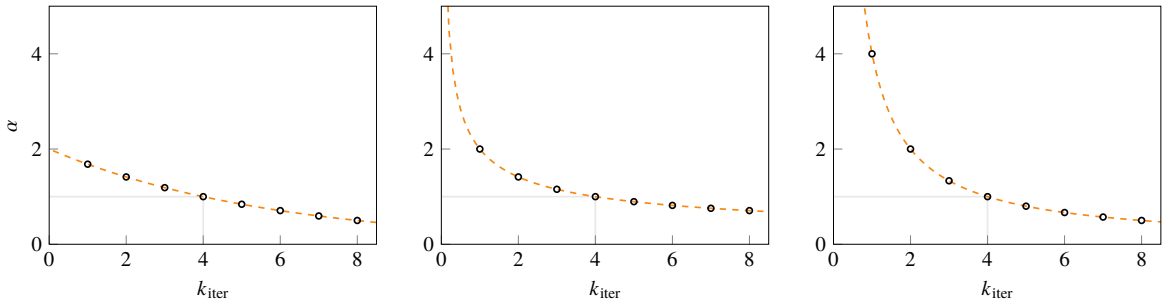
$$\Delta s_i = \alpha \Delta s_{i-1} \tag{4.2.20}$$

Ce facteur multiplicatif dépend du nombre d'itérations effectuées par le correcteur pour le calcul de la solution précédente $k_{\text{iter}}$ et du nombre optimal d'itérations du correcteur $k_{\text{opti}}$ pour calculer une solution (fonction du correcteur choisi et de son critère d'arrêt associé). La littérature offre de nombreuses alternatives concernant la forme du coefficient $\alpha$, en voici quelques-unes [158, 169, 109] :

$$\alpha = 2^{\frac{k_{\text{opti}} - k_{\text{iter}}}{k_{\text{opti}}}} \quad \text{ou} \quad \alpha = \sqrt{\frac{k_{\text{opti}}}{k_{\text{iter}}}} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{k_{\text{opti}}}{k_{\text{iter}}} \tag{4.2.21}$$

Ces différentes formules sont illustrées au travers de la figure 4.8 ;

**Note :** un nombre optimal d'itérations $k_{\text{opti}} = 3$, ou 4, est usuellement choisi si la précision du correcteur de Newton-Raphson est fixée à $10^{-4}$.




(a) $2^{\frac{k_{\text{opti}}-k_{\text{iter}}}{k_{\text{opti}}}}$ (b) $\sqrt{\frac{k_{\text{opti}}}{k_{\text{iter}}}}$ (c) $\frac{k_{\text{opti}}}{k_{\text{iter}}}$

Figure 4.8 Évolution du coefficient d'adaptation $\alpha$ en fonction du nombre d'itérations $k_{\text{iter}}$ pour $k_{\text{opti}} = 4$. La vitesse d'adaptation du pas croît respectivement de gauche à droite.

**géométrique,** basé sur l'angle entre les directions de deux prédicteurs consécutifs [196]. Par exemple, pour des prédicteurs tangents, l'angle $\theta_i$ en degrés de la $i^{\text{ième}}$ solution est donné par :

$$\theta_i = \arccos\left(\frac{\mathbf{t}_{i-1}^{\top}\mathbf{t}_i}{||\mathbf{t}_{i-1}||_2||\mathbf{t}_i||_2}\right)\frac{180}{\pi} \tag{4.2.22}$$

Le pas $\Delta s_i$ peut alors être ajusté géométriquement si $\theta_i$ sort de la plage angulaire $[\theta_{\min};\theta_{\max}]$. En effet, dans le cas où $\theta_i < \theta_{\min}$, la courbe de réponse du système s'apparente localement à une droite ce qui fait que la longueur du pas courant peut être augmentée. Si au contraire $\theta_i > \theta_{\max}$, la longueur du pas courant doit être réduite afin de s'adapter à une variation rapide de la pente de la courbe de réponse. Ce critère ne constitue ainsi rien de plus qu'une mesure de la courbure locale de la courbe ;

**pragmatique,** où le pas ne doit pas excéder certaines valeurs limites. Si $\Delta s_i > \Delta s_{\max}$, il est possible de passer à côté de certains phénomènes non-linéaires comme des bifurcations ou tout simplement d'effectuer des prédictions de piètre qualité. Dans le cas où $\Delta s_i < \Delta s_{\min}$, il est fortement probable que le correcteur éprouve des problèmes de convergence (*e.g.* présence de singularités ou mauvaises approximations des gradients), il est alors simplement préférable de stopper l'exécution de l'algorithme. Étant donné que ces situations ne sont pas souhaitables, il convient de borner $\Delta s_i$ dans un intervalle $[\Delta s_{\min};\Delta s_{\max}]$ pour éviter que les formules d'adaptation (4.2.20) et (4.2.22) ne puissent conduire à des valeurs hors d'une plage raisonnable. De manière comparable, il est également possible d'encadrer le coefficient $\alpha$ de l'équation (4.2.21), par exemple au sein de l'intervalle $[1/2;2]$. En pratique, si le solveur utilisé ne converge pas dans les $k_{\text{opti}}$ itérations prescrites, la distance de prédiction peut aussi être réduite de moitié afin d'obtenir une meilleure prédiction et de relancer un nouveau cycle de corrections.

**Note :** en démarrant le processus de continuation loin de la résonance principale (*i.e.* au niveau d'un segment *plat* de la courbe), la variation de l'abscisse curviligne se rapporte essentiellement à celle du paramètre de contrôle, soit $\Delta s = \sqrt{\Delta \mathbf{X}^\top \Delta \mathbf{X} + \Delta\lambda^2} \simeq |\Delta\lambda|$, la valeur du pas de continuation peut donc être initialisée à un ordre de grandeur correspondant à la discrétisation en $\lambda = \omega$ désirée.

Un autre moyen pour améliorer la convergence du correcteur utilisé consiste à appliquer une mise à l'échelle entre $\mathbf{X}$ et $\lambda$. De cette manière, il est possible d'accentuer la discrétisation selon l'une des variables. Pour ce faire, il est courant d'introduire des coefficients pondérateurs sur les termes de l'équation de paramétrisation $\mathcal{P}(\mathbf{X}, \lambda, \gamma)$ [171, 177, 169]. Par exemple, pour une continuation par longueur d'arc, en introduisant le paramètre d'ajustement $\zeta \in ]0; 1[$, l'équation (4.2.13) devient :

$$\mathcal{P}(\mathbf{X}_{i+1}^k, \lambda_{i+1}^k, s) = \zeta ||\mathbf{X}_{i+1}^k - \mathbf{X}_i||^2 + (1-\zeta)\,(\lambda_{i+1}^k - \lambda_i)^2 - \Delta s^2 \tag{4.2.23}$$

ou encore un autre ajustement possible [112] :

$$\mathcal{P}(\mathbf{X}_{i+1}^k, \lambda_{i+1}^k, s) = \frac{||\mathbf{X}_{i+1}^k - \mathbf{X}_i||^2}{\sigma^2} + (\lambda_{i+1}^k - \lambda_i)^2 - \Delta s^2 \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{||\mathbf{X}_i||}{\lambda_i} \tag{4.2.24}$$

Pour plus de détails sur la continuation, les ouvrages [177, 192, 196] et les thèses [155, 164, 166] peuvent être consultés.

### 4.2.2 Approche alternative : méthode asymptotique numérique

La méthode asymptotique numérique (MAN) [152, 157, 179] s'inscrit dans la lignée des méthodes de perturbation et constitue une alternative semi-analytique aux méthodes de continuation de logique prédicteur-correcteur.

#### 4.2.2.1 Principe général

Cette méthode consiste à rechercher les solutions du système (4.0.1) sous la forme d'une juxtaposition de séries entières d'un paramètre de chemin $a$. Celles-ci sont tronquées à l'ordre $m$ et développées au voisinage d'une solution de départ connue $\mathbf{Y}_0 = [\mathbf{X}_0, \lambda_0]^\top$ telles que :

$$\mathbf{Y}(a) = \mathbf{Y}_0 + \sum_{j=1}^{m} a^j \mathbf{Y}_j \tag{4.2.25}$$

Ce qui équivaut sensiblement à la même approche faite pour les méthodes de perturbation en section 3.1.1. En injectant la forme (4.2.25) dans l'équation (4.0.1) et en effectuant un développement limité dans le voisinage du point solution $\mathbf{Y}_0$, on peut montrer [157] que les coefficients $\mathbf{Y}_j$ vérifient les $m$ systèmes d'équations linéaires suivants :

$$\mathbf{R}_{,\mathbf{Y}}(\mathbf{Y}_0)\mathbf{Y}_j = \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}^j(\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_{j-1}) \tag{4.2.26}$$

où les seconds membres $\boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}^j$ pour un ordre $j$ donné ne dépendent que des ordres précédents : c'est donc un ensemble de systèmes linéaires en cascade. Ces systèmes sont toutefois sous-déterminés. En vue de les fermer, on rajoute une équation de contrainte sur le paramètre de chemin $a$, usuellement en le définissant localement comme la projection de la branche de solutions recherchée sur la tangente $\mathbf{Y}_1$, soit la pseudo-longueur d'arc :

$$a = (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0)^\top \mathbf{Y}_1 \tag{4.2.27}$$

ce qui permet de fournir comme équations de contrainte aux différents ordres :

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_1^\top \mathbf{Y}_1 = ||\mathbf{Y}_1||^2 = 1 & \text{pour} \quad j = 1 \\ \mathbf{Y}_1^\top \mathbf{Y}_j = 0 & \text{pour} \quad j \in [\![2..m]\!] \end{cases} \tag{4.2.28}$$

La résolution des systèmes linéaires s'effectue alors l'un après l'autre par ordre croissant. Pour ce faire, seule l'inversion de la matrice jacobienne du système augmenté est alors nécessaire, *cf.* équation (4.2.26), soit :

$$\mathbf{J}_{\mathrm{MAN}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{,\mathbf{Y}}(\mathbf{Y}_0) \\ \mathbf{Y}_1^\top \end{bmatrix} \tag{4.2.29}$$

Elle est donc évaluée à l'ordre 1 puis ré-utilisée pour la résolution des $m - 1$ systèmes restants.

La résolution de ces systèmes permet ainsi d'obtenir un tronçon de branche de solutions illustré sur la figure 4.9 et qui se présente sous la forme d'une série analytique fonction du paramètre de chemin $a$ mais qui demeure seulement valable pour un intervalle fini. La longueur maximale de cet intervalle, notée $a_{\max}$, au delà de laquelle la série tronquée commencera alors à diverger de la solution exacte du problème de continuation, est déterminée de telle sorte que le résidu vérifie le critère :

$$||\mathbf{R}\left(\mathbf{Y}(a)\right)|| \leq \epsilon, \quad \forall a \in [0; a_{\max}] \tag{4.2.30}$$

où $\epsilon$ est une tolérance numérique. Une approximation du pas maximum peut alors être obtenue en supposant que le résidu soit dominé par le premier terme négligé de la série, *i.e.* celui d'ordre $m + 1$ :

$$a_{\max} = \left( \frac{\epsilon}{||\boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}^{m+1}||} \right)^{\frac{1}{m+1}} \tag{4.2.31}$$

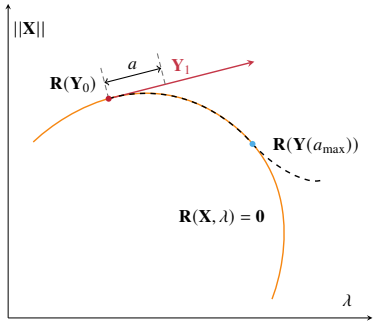



Figure 4.9 Exemple de tronçon de solution issu de la MAN (- - - -) en partant d'une solution $\mathbf{Y}_0$.

La procédure est ainsi appliquée itérativement en repartant du dernier point du tronçon précédent $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}(a_{\max})$ jusqu'à décrire l'intégralité de la branche de solution. Si toutefois le critère (4.2.30) n'est plus satisfait entre deux pas consécutifs car le résidu est trop grand, on peut appliquer un algorithme de Newton-Raphson pour se replacer sur la courbe de solution afin de définir un nouveau point de départ pour la prochaine série.

**Note :** d'un point de vue purement calculatoire, l'avantage principal de la MAN réside dans le fait que tous les systèmes linéaires (4.2.26) à résoudre sont définis par une même matrice et donc que leur résolution ne requiert qu'une seule inversion (seuls les seconds membres varient d'un ordre à l'autre). De plus, aucune adaptation du pas d'avancement n'est nécéssaire étant donné que chaque série dispose de son propre rayon de convergence, *cf.* équation (4.2.30), permettant de déterminer $a_{\max}$.

#### 4.2.2.2 Reformulation quadratique

La MAN nécéssite pour être appliquée de préalablement réexprimer le système algébro-différentiel ciblé sous une forme polynomiale quadratique. L'application suivante illustre une telle procédure de reformulation dans le cas d'un oscillateur de Duffing.

**Application - Reformulation quadratique d'un oscillateur de Duffing**

L'application d'une continuation de type MAN couplée à une résolution par HBM nécessite de reformuler le système (2.4.1) préalablement sous une forme polynomiale quadratique définie tel que :

$$m(\dot{\mathbf{Z}}) = c(t,\lambda) + l(\mathbf{Z},t,\lambda) + q(\mathbf{Z},\mathbf{Z},t,\lambda) \tag{4.2.32}$$

où $c$, $l(\cdot)$, $q(\cdot,\cdot)$ sont respectivement des opérateurs constant, linéaire et quadratique de $\mathbf{Z}$ et $m(\cdot)$ est un opérateur linéaire. Le vecteur d'inconnues $\mathbf{Z}$ contient les composantes du vecteur d'état $z$, *cf.* équation (3.0.1), ainsi que des variables additionnelles permettant l'obtention de la forme quadratique.

Pour mieux illustrer ce processus, on étudie de nouveau l'équation de l'oscillateur de Duffing (2.4.2). La démarche consiste tout d'abord à réécrire le système sous forme d'état, pour rappel :

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -2\xi\omega_0 v - \omega_0^2 x - \alpha x^3 + F_0 \cos(\omega t) \end{cases} \tag{4.2.33}$$

Il faut ensuite transformer ce système d'EDO en un nouveau système disposant seulement de termes non-linéaires quadratiques. En introduisant, une équation auxiliaire supplémentaire, on a donc :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \\ 0 \end{bmatrix}}_{m(\dot{\mathbf{Z}})} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ F_0 \cos(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix}}_{c(t,\lambda)} + \underbrace{\begin{bmatrix} v \\ -2\xi\omega_0 v - \omega_0^2 x \\ w \end{bmatrix}}_{l(\mathbf{Z},t,\lambda)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha x w \\ -x^2 \end{bmatrix}}_{q(\mathbf{Z},\mathbf{Z},t,\lambda)} \tag{4.2.34}$$

Le vecteur d'inconnues $z_{\mathrm{MAN}}$ peut donc être défini comme $z_{\mathrm{MAN}}(t) = [x(t),\ v(t),\ w(t)]^\top$ et $\lambda = \omega$ est choisi comme paramètre de contrôle. La MAN peut ainsi être appliquée après quelques manipulations algébriques nécéssaires pour reformuler le système initial.

La MAN permet ainsi d'obtenir avantageusement des tronçons de solutions continus (sous la forme de séries entières) et non un ensemble de solutions discrètes. Cependant elle requiert une reformulation des équations du système sous forme quadratique à l'aide de nouvelles équations auxiliaires, ce qui peut poser certaines difficultés en termes de formalisme en fonction de la complexité de la non-linéarité rencontrée. Néanmoins, bien que ce dernier point puisse paraître restrictif, cette transformation permet à la MAN de traiter un grand nombre de non-linéarités (aussi bien polynomiales, que puissances entières ou encore inverses). Une implémentation numérique de la MAN couplée à une résolution par HBM [72, 74] est disponible dans le code MANLAB [215]. Néanmoins, deux limites à l'utilisation de la MAN s'esquissent clairement dans une optique de traiter des interactions aube/carter. (1) Son utilisation suppose plutôt des systèmes sujets à des non-linéarités régulières. Une régulariation des non-linéarités de contact devra alors nécéssairement être opérée. De plus, (2) la reformulation quadratique du système implique la définition d'un certain nombre de variables intermédiaires supplémentaires qui peuvent rapidement allonger les temps de calcul si des systèmes industriels sont considérés. Une étude comparative des approches prédicteur/correcteur comparées à la MAN a récemment été proposée [25] et va dans ce sens. Cette denière relève notamment de meilleures performances de la part des approches prédicteur/correcteur lorsque ce sont des systèmes comportant des non-linéarités non-régulières comme le contact qui sont ciblées.

# CHAPITRE 5 DESCRIPTION ET VALIDATION DE LA STRATÉGIE PROPOSÉE

Les deux chapitres précédents ont permis de réaliser un état de l'art détaillé concernant la résolution de systèmes dynamiques non-linéaires. Parmi les méthodes existantes, la HBM se démarque pour plusieurs raisons : (1) elle est bien adaptée à l'analyse de mouvements périodiques qui constituent le cadre d'étude usuel pour les phénomènes vibratoires dans les machines tournantes, (2) c'est une méthode qui est déjà utilisée dans l'industrie (*e.g.* Rolls Royce [7], Pratt & Whitney [82], Safran [66, 167], ou encore MTU Aero Engines [31]) et (3) c'est une méthode propice à la caractérisation qualitative d'un système mécanique sous condition de la coupler à une procédure de continuation. Pour toutes ces raisons, l'application de la HBM pour l'analyse de différents systèmes industriels a fait l'objet d'un grand nombre de publications au cours des dernières décennies [37, 46, 52, 95]. Cette méthode est notamment devenue une procédure standard pour l'analyse des phénomènes de frottement en pied d'aube [63], caractérisés par des vibrations de faible amplitude et de haute fréquence. En revanche, l'application de la HBM pour d'autres interfaces non-linéaires, telles que l'interface aube/carter, reste circonscrite à des modèles analytiques ou phénoménologiques simplifiés [46, 7, 84] ne permettant pas encore d'envisager son utilisation dans un contexte industriel. En effet, l'interface aube/carter présente des caractéristiques qui complexifient l'implémentation de la HBM. En particulier, il est essentiel de prédire très fidèlement l'amplitude des efforts de contact en fonction du déplacement du sommet d'une aube afin de déterminer précisément sa réponse vibratoire [26]. Plus généralement, pour tout système mécanique industriel présentant une interface de contact avec des vitesses et des déplacements relatifs significatifs, l'application de la HBM se heurte à plusieurs verrous scientifiques :

1. d'un point de vue théorique, la base de Fourier est mal adaptée à la représentation de quantités discontinues telles que les champs de vitesses et d'accélérations d'une structure en contact. Connues sous le nom de phénomène de Gibbs [191], les oscillations de la série de Fourier tronquée au voisinage de la discontinuité dégradent fortement les performances numériques de la HBM ;
2. d'un point de vue numérique, des déplacements relatifs significatifs (voire un ordre de grandeur au-dessus du jeu initial dans le cas des interactions aube/carter) sur une interface de contact pouvant contenir un grand nombre de ddl non-linéaires rend très sensible la convergence de la HBM. Par ailleurs, une implémentation numérique efficace est requise pour les systèmes industriels de grande dimension afin d'éviter une explosion des temps de calcul.

Ce chapitre présente une évolution de la HBM permettant d'envisager son application à une plus vaste gamme de non-linéarités de type contact. Après un bref rappel concernant la mécanique du contact, la stratégie numérique proposée est détaillée puis validée par l'intermédiaire de son

application à un modèle académique de barre éléments finis en contact avec un obstacle rigide.

## 5.1 Fondamentaux de la mécanique du contact

Cette section a pour objectif de décrire les bases théoriques de la mécanique du contact avec une emphase sur la notion de contact unilatéral [182, 168].

### 5.1.1 Contact unilatéral

Considérons la réponse d'un système, sous l'hypothèse de petites déformations et de la recherche de solutions périodiques, des interactions de contact unilatéral, supposées sans adhésion/collement, ayant lieu entre un solide déformable/flexible $\Omega$ et un obstacle indéformable/rigide. La frontière $\Gamma$ du solide élastique est partitionnée en quatre différentes parties dépendamment de la nature du chargement qu'elles subissent : (1) $\Gamma_\sigma$ désigne la partition soumise à une densité d'efforts surfaciques imposée, (2) $\Gamma_x$ la partition sur laquelle des déplacements sont imposés, (3) $\Gamma_l$ est une partition libre et (4) $\Gamma_c$, la partition comprenant tous les points potentiellement en contact avec l'obstacle pendant l'intervalle de temps $t \in [0;T]$. La fonction distance entre un point de $\Gamma_c$ et l'obstacle est notée $g(x(\Gamma_c), d(t))$, où $d(t)$ désigne la position de référence du point de l'obstacle le plus proche de $x(\Gamma_c)$. De ce fait, si $f_n$ désigne la densité d'effort surfacique de contact orientée selon la normale extérieure $\vec{n}$ à la surface de contact de l'obstacle à l'instant $t$, les efforts non-linéaires $f_{nl}(t)$ proviennent alors des contraintes d'inégalité définies par les conditions de Hertz-Signorini-Moreau [1] :

**une condition géométrique,** qui indique qu'il ne peut y avoir que décollement et non-pénétration de la matière ;

$$g \leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g < 0 & \text{pas de contact} \\ g = 0 & \text{contact} \end{cases} \tag{5.1.1}$$

**une condition mécanique,** de contact sans adhésion, *i.e.* les efforts normaux ne peuvent être associés qu'à de la compression ;

$$f_n \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_n = 0 & \text{pas de contact} \\ f_n > 0 & \text{contact} \end{cases} \tag{5.1.2}$$

**une condition énergétique,** qui impose une relation de complémentarité/exclusion : n'autorisant que deux états distincts.

$$f_n\, g = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_n = 0 & \text{pas de contact} \\ g = 0 & \text{contact} \end{cases} \tag{5.1.3}$$

1. Ces conditions coïncident avec les conditions de Karush-Kuhn-Tuker en optimisation [182].

Ces relations doivent rester vraies pour tout point appartenant aux surfaces de contact. L'application de la méthode des éléments finis permet de discrétiser ce problème où les efforts surfaciques $f_\mathrm{n}$ sont approximés par des efforts ponctuels $\boldsymbol{f}_\mathrm{n}$ associés à chacun des nœuds du solide discrétisé au niveau de la zone de contact. La fonction de distance signée $g$ séparant les nœuds de contact appartenant à la frontière $\Gamma_\mathrm{c}$ de l'obstacle s'écrit alors :

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{d}(t) \tag{5.1.4}$$

Soit il existe un jeu entre le solide et l'obstacle $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}) < \mathbf{0}$, il n'y a donc pas contact ce qui se traduit par un effort de réaction nul $\boldsymbol{f}_\mathrm{n} = \mathbf{0}$ sur l'ensemble des nœuds frontière ; soit une pénétration est détectée $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}) > \mathbf{0}$ sur un ou plusieurs nœuds, ce qui conduit au calcul d'un effort de contact $\boldsymbol{f}_\mathrm{n} \geqslant \mathbf{0}$ permettant ainsi une correction des déplacements et le respect de la condition géométrique. Le problème sous contrainte à résoudre s'écrit alors :

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{x}}(t) + \mathbf{K}\boldsymbol{x}(t) + \mathbf{G}^\top \boldsymbol{f}_\mathrm{n}(t) = \boldsymbol{f}_\mathrm{ext}(t) \\ \mathbf{G}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}) = \mathbf{0} \end{cases} \tag{5.1.5}$$

où $\mathbf{G}$ est une matrice de contrainte de dimension $(n \times n)$ indiquant la présence ou non de contact sur les différents ddl du système. Une schématisation synthétisant les interactions de contact unilatéral venant d'être décrites est présentée sur la figure 5.1.

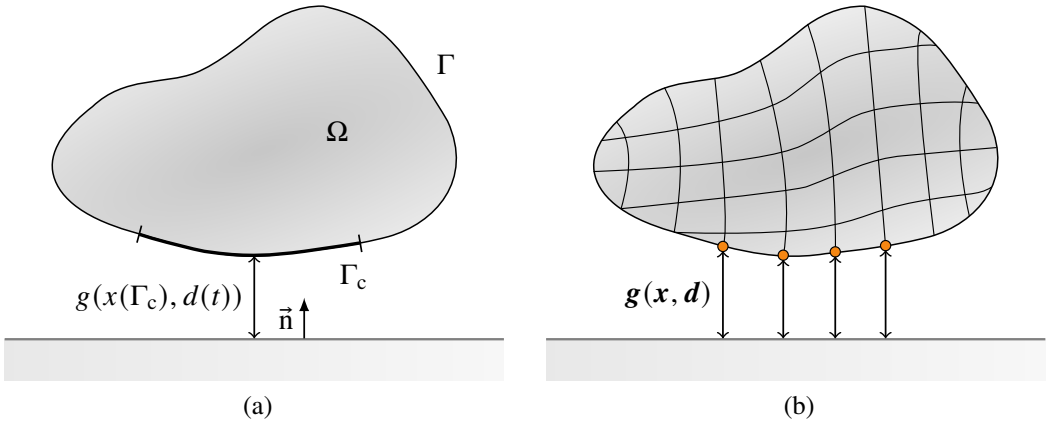



Figure 5.1 Schématisation du contact unilatéral entre un solide déformable et un obstacle rigide dans un contexte (a) continu et (b) discrétisé. Adaptée de [58].

### 5.1.2 Algorithmes de gestion du contact

Dans le domaine temporel, de nombreuses méthodes existent pour la gestion de contact [182]. Parmi celles-ci, les plus courantes sont la méthode de pénalité, l'utilisation de multiplicateurs de

Lagrange [122], la méthode des Lagrangiens perturbés ou des Lagrangiens augmentés [68], des méthodes de points intérieurs [184] (*barrier method*), des algorithmes d'optimisation quadratique successive [121] (*sequential quadratic programming methods*) ou encore la résolution d'un problème de complémentarité linéaire équivalent (*linear complementary problem*) [58]. L'algorithme de Carpenter [122], reposant sur une gestion du contact par intégration temporelle (IT) et calcul de multiplicateurs de Lagrange, est souvent utilisé comme référence dans le domaine de la dynamique du contact [29, 34]. Le traitement du contact par calcul de multiplicateurs de Lagrange présente l'avantage de garantir que la contrainte géométrique de non-pénétration soit toujours respectée. Cette loi de contact est néanmoins fortement non-régulière, comme l'illustre la figure 5.2a.

Dans le domaine fréquentiel, les méthodes de résolution sont surtout focalisées sur des systèmes présentant de faibles amplitudes de déplacement. Le contact entre des corps flexibles est alors couramment modélisé à l'aide de la méthode des Lagrangiens dynamiques [6, 99, 170], de l'anglais *Dynamic Lagrangian Frequency-Time* (DLFT). Une description détaillée de cette méthode est présentée en Annexe A de la thèse [150]. Dans le cas d'un contact avec un obstacle rigide, un traitement du contact par méthode de pénalité est souvent privilégié. Ce dernier a l'avantage d'exprimer explicitement les efforts de contact en fonction des pénétrations détectées. L'évaluation des expressions analytiques des gradients associés, au sein de la procédure itérative de résolution, est numériquement efficace et directe. Avec une telle loi de contact, l'effort sur le $j^{\text{ième}}$ nœud en contact d'un système est donné par :

$$f_{\mathrm{n},j}(t) = k_{\mathrm{n}} \max\left(0, g_j(t)\right) \tag{5.1.6}$$

où $k_{\mathrm{n}} \in \mathbb{R}_+$ désigne la raideur de pénalité, aussi appelé coefficient de pénalisation. La méthode de pénalité autorise une pénétration résiduelle entre les solides, elle est couramment utilisée dans la littérature [106]. La réponse d'un système est néanmoins sensible au choix du paramètre $k_{\mathrm{n}}$. Une valeur trop faible implique des pénétrations résiduelles importantes alors qu'une valeur trop élevée est source d'instabilités numériques ayant généralement pour conséquence de faire diverger l'algorithme de résolution.

## 5.2 Stratégie numérique proposée

### 5.2.1 Contexte

L'application de la HBM pour la résolution du problème (5.1.5) dans le cadre de systèmes mécaniques présentant des déplacements relatifs significatifs au voisinage de l'interface de contact a déjà été identifiée comme problématique [57, 58]. Le principal frein à l'utilisation de la HBM est lié au phénomène de Gibbs, ou phénomène de Gibbs-Wilbraham [191], qui caractérise un défaut d'approximation d'une fonction discontinue et/ou non-périodique par des séries de Fourier. Aux

abords des discontinuités de la fonction, ce phénomène se manifeste par l'apparition de fortes oscillations, qualifiées de ressauts positifs ou négatifs. Dans une moindre mesure, des oscillations plus faibles, d'amplitude décroissante, se propagent également sur le reste de l'approximation.

Dans un contexte de résolution par HBM, ces oscillations parasites peuvent dégrader la précision de la procédure itérative au point d'en empêcher la convergence. De ce fait, l'atténuation du phénomène de Gibbs a déjà fait l'objet de nombreuses recherches. Par exemple, une procédure mixte de tir-HBM [47] a récemment été développée à cette fin. Des fonctions polynomiales discontinues [97] et des fonctions de base d'ondelettes [57] ont également été envisagées en conjonction, ou en remplacement, des fonctions de base de Fourier afin de mieux représenter les fonctions discontinues. D'autres études mathématiques [180] ont également montré qu'il est possible d'éliminer le phénomène de Gibbs par une technique de reprojection spectrale basée sur l'utilisation des polynômes de Gegenbauer.

### 5.2.2 Atténuation du phénomène de Gibbs

La convergence non-uniforme (et lente) de la série de Fourier vers la fonction discontinue approximée est attribuable [113] à (1) une lente décroissance des coefficients de Fourier, et (2) la nature globale de la définition même des coefficients de Fourier qui s'appuie sur l'évaluation de l'intégrale de la fonction approximée sur une période entière incluant les discontinuités. L'augmentation du nombre d'harmoniques ne permet de réduire les oscillations que loin des discontinuités. À mesure que le nombre d'harmoniques $H$ augmente, l'amplitude des oscillations tend vers une limite strictement plus grande que l'amplitude de la discontinuité et les oscillations les plus fortes se regroupent localement au niveau des discontinuités. Ces oscillations induisent, du point de vue numérique, une augmentation importante des temps de calcul. Afin d'atténuer le phénomène de Gibbs, plusieurs stratégies sont envisageables :

**une régularisation de la loi de contact** dans le but de lisser les efforts $\boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}$ résultants pour en améliorer la convergence des séries associées ;

**un filtrage spectral** permet d'ajuster les coefficients de Fourier des efforts non-linéaires $\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl}}$ de manière à ce que la série ajustée converge plus rapidement que la série d'origine loin des discontinuités ;

**un filtrage spatial** qui se base sur une localisation des discontinuités afin de mieux restituer les informations portées par le signal d'efforts et de ce fait, améliorer la convergence des séries de Fourier. Dans un contexte de dynamique du contact, cela revient à effectuer une prédiction des instants de transition entre les états de contact. Cette méthode implique toutefois une augmentation importante des temps de calcul, elle est ainsi peu adaptée à l'analyse de systèmes de grande dimension et n'est donc pas considérée dans cette étude.

L'approche développée dans cette étude pour permettre l'application de la HBM à une plus vaste gamme de non-linéarités de type contact repose sur une régularisation de la loi de contact (5.1.6) et l'utilisation d'un filtrage spectral. L'implémentation de ces deux évolutions est détaillée dans la suite de cette section.

#### 5.2.2.1 Régularisation de la loi de contact

Pour des configurations de contact sévères (ce qui est typiquement le cas avec des vitesses ou des déplacements relatifs importants), la non-dérivabilité de la loi de pénalité bilinéaire (5.1.6) impacte négativement la convergence de la HBM. Une régularisation de la loi de contact, la rendant dérivable sur $\mathbb{R}$, peut alors permettre d'améliorer le comportement numérique du solveur tout en limitant l'amplitude des pénétrations résiduelles. Dans la littérature, il existe plusieurs régularisations usuelles pour une fonction bilinéaire :

**polynomiale,** *cf.* figure 5.2b, définie telle que :

$$f_{\mathrm{n},j}(t) = k_{\mathrm{n}} \frac{g_j(t)}{2} + \sqrt{\left(k_{\mathrm{n}} \frac{g_j(t)}{2}\right)^2 + \epsilon_{\mathrm{n}}^2} \tag{5.2.1}$$

où $\epsilon_{\mathrm{n}} \in \mathbb{R}_+$ est un paramètre de lissage adaptatif tel qu'en $g_j = 0$, $f_{\mathrm{n},j} = \epsilon_{\mathrm{n}}$. Pour $\epsilon_{\mathrm{n}} = 0$, les lois (5.1.6) et (5.2.1) sont équivalentes. Cette régularisation a la particularité d'être compatible avec une continuation par MAN [25], voir section 4.2.2.

***softplus*,** donnée par la relation :

$$f_{\mathrm{n},j}(t) = \frac{k_{\mathrm{n}}}{o_{\mathrm{n}}} \log\left(1 + \exp\left(o_{\mathrm{n}}\, g_j(t)\right)\right) \tag{5.2.2}$$

où $o_{\mathrm{n}} \in \mathbb{R}_+^*$ est un paramètre de lissage qui à l'inverse de $\epsilon_{\mathrm{n}}$ pour la régularisation (5.2.1) offre une régularisation d'autant plus importante qu'il est petit. L'usage de cette loi n'est néanmoins pas recommandée étant donné que des instabilités numériques peuvent rapidement survenir en raison de la présence de l'exponentielle.

**exponentielle,** *cf.* figure 5.2c :

$$f_{\mathrm{n},j}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad g_j(t) \leqslant -c_0 \\ \frac{f_0}{\exp(1)-1}\left[\left(\frac{g_j(t)}{c_0}+1\right)\left(\exp\left(\frac{g_j(t)}{c_0}+1\right)-1\right)\right] & \text{si} \quad g_j(t) > -c_0 \end{cases} \tag{5.2.3}$$

où $f_0 \in \mathbb{R}_+$ désigne la valeur de l'effort normal en $g_j = 0$ et $c_0 \in \mathbb{R}_+$ contrôle l'abscisse de départ de la fonction exponentielle à $g_j - c_0$. Les tests numériques effectués dans cette étude indiquent que la présence de l'exponentielle nuit à sa robustesse numérique.

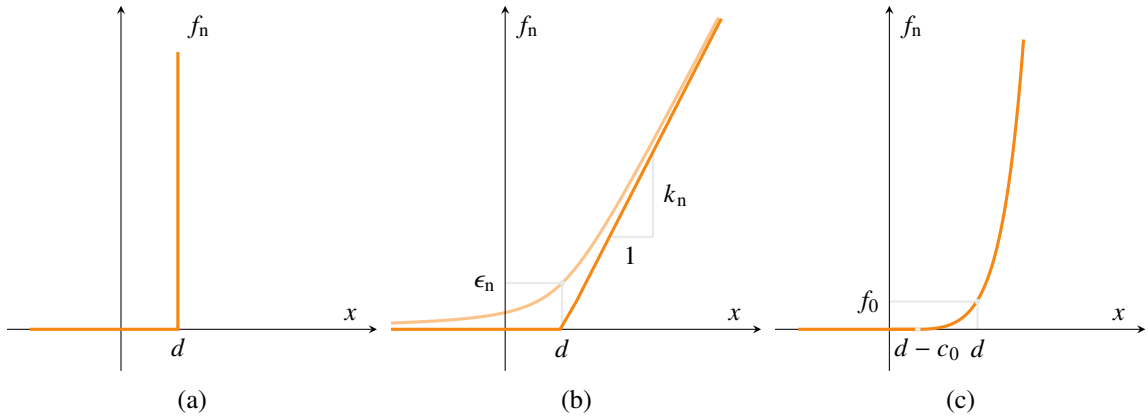



Figure 5.2 Lois de contact : (a) non-régularisée, régularisées par (b) pénalité bilinéaire classique et pénalité polynomiale, et (c) pénalité exponentielle. Adaptée de [165].

Les différents tests effectués ont permis d'identifier que la régularisation polynomiale (5.2.1) est la plus robuste numériquement. Cette régularisation est celle retenue au sein de l'approche développée.

#### 5.2.2.2 Filtrage spectral des efforts de contacts

Le phénomène de Gibbs peut être atténué en accélérant le taux de décroissance des coefficients de Fourier de la fonction périodique discontinue approximée *via* l'utilisation de fonctions filtrantes adaptées directement dans le domaine fréquentiel.

**Definition 5.2.1. Filtre d'ordre $p$ dans l'espace de Fourier** au sens de Vandeven [127] : Une fonction paire à valeurs réelles $\sigma(\mathcal{X}) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^{p-1}$ constitue un filtre d'ordre $p$ dans le domaine fréquentiel si :

1. $\sigma(\mathcal{X}) = 0$ pour $|\mathcal{X}| \geqslant 1$,
2. $\sigma(0) = 1$ et $\sigma(1) = 0$,
3. $\sigma^{(l)}(0) = \sigma^{(l)}(1) = 0$ pour $1 \leqslant l \leqslant p - 1$.

Les propriétés satisfaites par ces conditions sont détaillées dans l'article de Gottlieb [113]. L'utilisation d'un filtre permet de retrouver une vitesse de convergence à l'ordre $p$ des séries de Fourier en tout point suffisamment éloigné de la discontinuité.

L'idée d'intégrer une procédure de filtrage pour améliorer la convergence de la HBM et atténuer le phénomène de Gibbs est déjà assez répandue dans certains domaines. Par exemple, des filtres sont utilisés en électronique pour l'obtention de la réponse de circuits non-linéaires comportant des diodes [116]. Il existe également d'autres applications en interaction fluide-structure, par exemple

pour l'analyse d'écoulements instationnaires autour d'un cylindre oscillant en rotation [4, 42]. L'utilisation de filtres ne semble cependant jamais avoir été envisagée dans le domaine de la dynamique du contact.

L'application d'un filtre sur l'approximation des efforts non-linéaires $\boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}$ introduite dans l'équation (3.2.2) est donnée par :

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) \simeq \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_0^{\mathrm{nl}} + \sum_{j=1}^{H} \sigma_j \left[\boldsymbol{a}_j^{\mathrm{nl}} \cos(j\omega t) + \boldsymbol{b}_j^{\mathrm{nl}} \sin(j\omega t)\right] \tag{5.2.4}$$

où les coefficients d'un filtre adapté à une série de Fourier réelle peuvent être définis tels que :

$$\sigma_j = \sigma\left(\mathcal{X}_j\right) \quad \text{avec} \quad \mathcal{X}_j = \frac{j}{D} \quad \text{pour} \quad j \in [\![0..H]\!],\ D \in \mathbb{N} \tag{5.2.5}$$

Un filtre est donc une fonction continue qui affecte principalement les coefficients harmoniques relatifs aux plus hautes fréquences. Le caractère continu du filtre est important car la simple annulation des coefficients relatifs aux harmoniques de plus hautes fréquences d'une série n'améliore aucunement sa convergence, puisqu'on obtient alors au final qu'une somme partielle de la série initialement considérée. Parmi les filtres couramment utilisés dans la littérature [180, 191, 113], on peut citer pour $|\mathcal{X}| \leqslant 1$ [113] :

**la sommation de Fejér,** d'ordre 1, basée sur le théorème de Fejér qui stipule que les moyennes de Césaro de la série de Fourier de la fonction approximée convergent uniformément vers cette fonction. Ceci équivaut à l'application du filtre :

$$\sigma(\mathcal{X}) = 1 - |\mathcal{X}| \tag{5.2.6}$$

**l'approximation $\sigma$ de Lanczos** combine l'intégration d'une série de Fourier avec son $H^{\text{ième}}$ noyau de Dirichlet $D_H$ [2] à un opérateur de différences finies centrées adapté dont le pas de différenciation a été judicieusement choisi $(\pi/H)$ [191]. La nouvelle approximation qui en résulte constitue une série convergente avec le noyau de Lanczos dont les oscillations sont significativement réduites. L'expression du filtre est donnée par :

$$\sigma(\mathcal{X}) = \mathrm{sinc}(\mathcal{X}) \tag{5.2.7}$$

où $\mathrm{sinc}(\cdot)$ correspond à la fonction sinus cardinal normalisé [3] ;

2. Une série de Fourier peut être représentée comme le produit de convolution de la fonction approximée avec $D_H$.
3. D'ordre 1, le filtre de Lanczos pour $\mathcal{X} = 0$ satisfait toutefois la condition 3 de la définition 5.2.2.2 exigée par un filtre d'ordre 2.

**le filtre cosinus surélevé,** de l'anglais *raised cosine*, d'ordre 2 :

$$\sigma(\mathcal{X}) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(\pi\mathcal{X})\right) \tag{5.2.8}$$

**les familles de filtres exponentiels,** d'ordre $p$, par exemple :

$$\sigma(\mathcal{X}) = \exp\left(-\alpha|\mathcal{X}|^p\right) \tag{5.2.9}$$

où $p \in 2\mathbb{N}$ et $\alpha = -\log(\epsilon_{\mathrm{m}})$ exprime l'intensité du filtre, tel que $\sigma(1) \backsimeq \mathcal{O}(\epsilon_{\mathrm{m}})$, avec $\epsilon_{\mathrm{m}}$ la précision machine considérée ;

**le filtre de Vandeven** [127]**,** d'ordre $p$ :

$$\sigma(\mathcal{X}) = 1 - \frac{(2p-1)!}{((p-1)!)^2}\int_0^{|\mathcal{X}|}\left[t(1-t)\right]^{p-1}\,dt \tag{5.2.10}$$

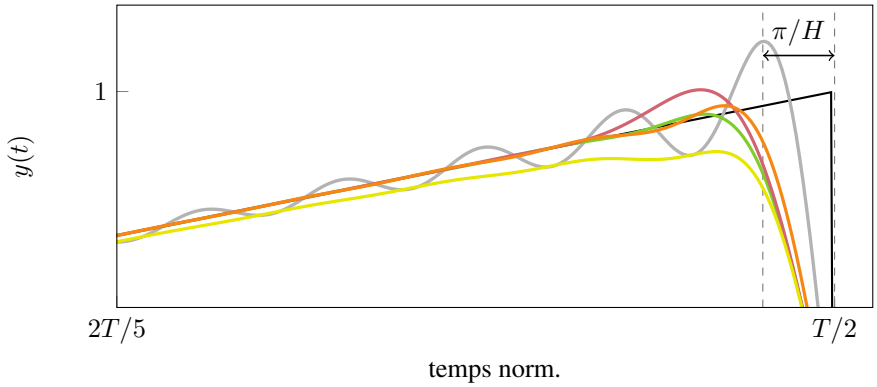
**le filtre Erfc-Log** [19]**,** d'ordre $p$, qui permet d'approximer assez précisément le filtre de Vandeven par la fonction analytique suivante :

$$\sigma(\mathcal{X}) = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(2\sqrt{p}(|\mathcal{X}| - \frac{1}{2})\sqrt{\frac{-\log(1-4(|\mathcal{X}|-\frac{1}{2})^2)}{4(|\mathcal{X}|-\frac{1}{2})^2}}\right) \tag{5.2.11}$$

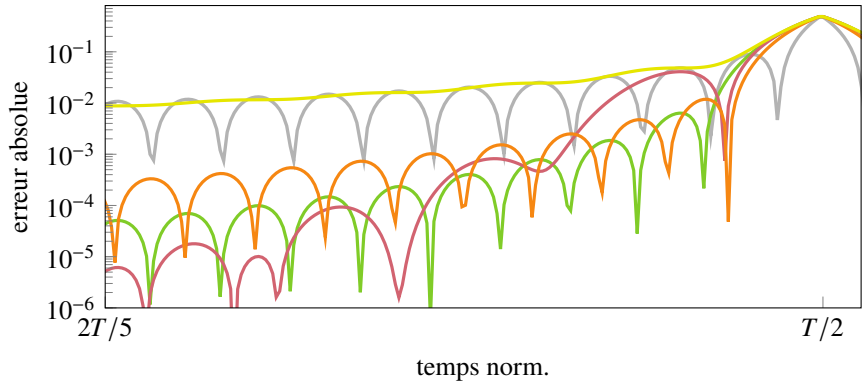
où $\operatorname{erfc}(\cdot)$ est la fonction d'erreur de Gauss complémentaire.

La figure 5.3 met en évidence le phénomène de Gibbs dans le cas de l'approximation, pour $H = 50$ (——), d'une fonction en dents de scie $y(t)$ (——) $T$-périodique comportant une discontinuité à $T/2$. Le maximum d'amplitude du premier ressaut se situe, indépendamment de la fonction considérée, à une distance de $\pi/H$ de la discontinuité, ce qui correspond à la valeur du pas de différentiation choisi par Lanczos. Certaines des techniques de filtrage énumérées plus tôt y sont représentées pour un dénominateur $D = H + 1$. L'application de la sommation de Fejér (——) permet de moyenner indirectemment les maxima et minima et ainsi d'éliminer le phénomène de Gibbs. Toutefois, la vitesse de transition au niveau de la discontinuité est particulièrement lente et l'amplitude de la fonction approximée est sous-évaluée. Dans le cas de l'utilisation des filtres de Lanczos (——), cosinus surélevé (——) et Erfc-Log (pour $p = 4$) (——), on constate que le phénomène de Gibbs est fortement réduit mais pas complètement éliminé. De plus, on observe un éloignement des ressauts par rapport à la discontinuité. Pour ces trois filtres, hors du voisinage de la discontinuité, la convergence de la série y est nettement améliorée, d'autant plus que l'ordre du filtre est grand. Toutefois, comme on peut le voir pour le filtre Erfc-Log d'ordre 4, l'utilisation d'ordre $p$ plus élevés tend à dégrader la qualité de l'approximation encore plus que le phénomène de Gibbs proche de la discontinuité. Ainsi, bien qu'un filtre n'améliore pas la convergence non-uniforme

des séries de Fourier au niveau de la discontinuité, un filtre adéquatement choisi améliorera la convergence loin de cette dernière [113], théorème 3.3.




(a) approximations au bord de la discontinuité à $T/2$




(b) erreurs associées au bord de la discontinuité à $T/2$

Figure 5.3 Approximations d'une fonction en dents de scie (——) $T$-périodique pour $H = 50$ : Fourier (——), Fejér (——), Lanczos (——), cosinus surélevé (——) et Erfc-Log ($p = 4$) (——).

Bien que le filtre de Lanczos ne fasse qu'atténuer le phénomène de Gibbs, à nombre d'harmoniques égal, ce filtre est celui qui permet d'obtenir la vitesse de transition au niveau de la discontinuité—représentée par la pente de la courbe (——) au point $\tau = T/2$ sur la figure 5.3—la plus élevée parmi les différents filtres présentés. C'est donc celui qui dégrade le moins la convergence ponctuelle des séries au niveau de la discontinuité. Pour ces raisons, le filtrage de Lanczos est celui utilisé dans la stratégie numérique proposée.

### 5.2.3 Considérations requises pour des systèmes de grande dimension

Pour des modèles éléments finis industriels (pouvant contenir plusieurs millions de ddl), l'application directe de la HBM, même avec une condensation non-linéaire telle que celle présentée à la section 3.2.1.4, n'est pas envisageable. En supposant qu'une solution puisse être obtenue, le coût en

temps de calcul serait inacceptable. L'utilisation de méthodes de réduction modale, permettant de projeter les équations du problème à résoudre dans un sous-espace, est une solution couramment employée pour pouvoir analyser efficacement des systèmes industriels. Parmi ces méthodes, on peut citer la condensation statique de Guyan [144] et les méthodes de condensation dynamique de Craig-Bampton [141], MacNeal [138], ou Craig-Martinez [20]. Les méthodes POD [91] (de l'anglais *Proper Orthogonal Decomposition*, aussi appelées méthodes KLD de Karhunen-Loève *Decomposition*) ou celles reposant sur une décomposition en valeurs singulières (SVD) [115] sont aussi couramment utilisées dans la littérature. En particulier, il a été montré que la méthode de Craig-Bampton est bien adaptée aux problèmes avec des non-linéarités localisées comme dans le cas du contact [71]. Sa robustesse numérique est un atout majeur pour des simulations dynamiques non-linéaires. C'est cette méthode qui est considérée dans la suite de cette section pour application dans la méthodologie proposée.

La méthode de Craig-Bampton s'appuie sur une partition des $n$ ddl du système entre ddl linéaires—ou internes—et ddl de contact—aussi appelés ddl frontières—respectivement notés $\boldsymbol{x}^{\mathrm{i}}$ et $\boldsymbol{x}^{\mathrm{f}}$ dans la suite du document :

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{\mathrm{i}} \\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{f}} \end{bmatrix} \tag{5.2.12}$$

ce qui induit une réorganisation des matrices masse et raideur :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{\mathrm{ii}} & \mathbf{M}^{\mathrm{if}} \\ \mathbf{M}^{\mathrm{fi}} & \mathbf{M}^{\mathrm{ff}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{\mathrm{ii}} & \mathbf{K}^{\mathrm{if}} \\ \mathbf{K}^{\mathrm{fi}} & \mathbf{K}^{\mathrm{ff}} \end{bmatrix} \tag{5.2.13}$$

La base de réduction associée est composée de :

**modes statiques** correspondant aux déformées statiques du système pour un déplacement unitaire imposé sur un des $n^{\mathrm{f}}$ ddl frontières, tous les autres étant encastrés. Il y a ainsi autant de modes statiques que de ddl frontières. Les modes statiques sont obtenus en résolvant l'équation :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{\mathrm{ii}} & \mathbf{K}^{\mathrm{if}} \\ \mathbf{K}^{\mathrm{fi}} & \mathbf{K}^{\mathrm{ff}} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{s}} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\text{modes statiques}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{5.2.14}$$

où $\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{s}}$ est la matrice des déformées statiques, solution du système linéaire :

$$\mathbf{K}^{\mathrm{ii}}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{s}} = -\mathbf{K}^{\mathrm{if}} \tag{5.2.15}$$

**modes internes,** aussi appelés modes encastrés, correspondant aux modes libres de la structure

lorsque ses ddl frontières sont encastrés. Ils sont obtenus en résolvant :

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{\mathrm{ii}} & \mathbf{K}^{\mathrm{if}} \\ \mathbf{K}^{\mathrm{fi}} & \mathbf{K}^{\mathrm{ff}} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{\mathrm{ii}} & \mathbf{M}^{\mathrm{if}} \\ \mathbf{M}^{\mathrm{fi}} & \mathbf{M}^{\mathrm{ff}} \end{bmatrix}\right) \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}^{\mathrm{i}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\text{modes internes}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{5.2.16}$$

avec $\mathbf{\Phi}^{\mathrm{i}}$ solution du problème aux valeurs propres :

$$\mathbf{K}^{\mathrm{ii}}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{i}} = \omega^2 \mathbf{M}^{\mathrm{ii}}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{i}} \tag{5.2.17}$$

La richesse de la base de réduction est directement liée au nombre $\eta$ de modes internes conservés, $\eta \in [\![0..n - n^{\mathrm{f}}]\!]$.

Finalement, la matrice de passage de Craig-Bampton $\mathbf{\Phi}^{\mathrm{cb}}$ permettant de projeter les équations du système s'écrit :

$$\mathbf{\Phi}^{\mathrm{cb}} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}^{\mathrm{s}} & \mathbf{\Phi}^{\mathrm{i},\eta} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{5.2.18}$$

où $\mathbf{\Phi}^{\mathrm{i},\eta}$ est la restriction de $\mathbf{\Phi}^{\mathrm{i}}$ aux $\eta$ premiers modes internes conservés pour la réduction. Les matrice masse et raideur réduites, notées respectivement $\mathbf{M}^{\mathrm{cb}}$ et $\mathbf{K}^{\mathrm{cb}}$, sont obtenues par projection :

$$\mathbf{M}^{\mathrm{cb}} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{cb}\top}\mathbf{M}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{cb}} \quad \text{et} \quad \mathbf{K}^{\mathrm{cb}} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{cb}\top}\mathbf{K}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{cb}} \tag{5.2.19}$$

L'espace réduit est dit mixte puisqu'il contient les ddl frontières $\boldsymbol{x}^{\mathrm{f}}$ et des coefficients modaux $\boldsymbol{\phi}$. Le redéploiement d'un vecteur solution de l'espace réduit vers l'espace éléments finis initial se réalise alors à l'aide d'un simple changement de variable :

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{cb}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{\mathrm{f}} \\ \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix} \tag{5.2.20}$$

## 5.3 Application à un modèle académique

Dans cette section, la stratégie numérique proposée est appliquée à un modèle académique de barre éléments finis en contact inspiré de la littérature [58, 68]. La stratégie proposée est présentée en deux temps : (1) le terme R-HBM est utilisé en référence à la HBM couplée à la régularisation polynomiale de la loi de contact. Ensuite, (2) le terme RL-HBM est employé en référence à la HBM couplée à la régularisation de la loi de contact et à laquelle on applique également un filtrage de Lanczos.

### 5.3.1 Modélisation

Le modèle éléments finis de la barre est représenté sur la figure 5.4. La barre est modélisée par $n = 100$ éléments de Lagrange linéaires de longueur $l = L/n$ et de section $A = 0{,}05$ m$^2$. Le modèle dispose ainsi de $n + 1$ nœuds qui sont chacun associés à un unique ddl $x_i$, $i \in [\![0..n]\!]$. La barre est caractérisée par sa longueur $L = 1$ m, son module d'Young $E = 21$ GPa et sa masse volumique $\rho = 7500$ kg·m$^{-3}$. Elle est encastrée à son extrémité A. L'autre extrémité, libre, située à une distance fixe $\boldsymbol{d}(t) = d = 6 \cdot 10^{-5}$ m d'un obstacle rigide, est soumise à une excitation harmonique $f_{\text{ext}}(t) = F_0 \cos(\omega t)$ avec $F_0 = 25000$ N. L'amplitude de l'excitation est telle que, au voisinage de la première fréquence propre de la barre, l'amplitude de vibration à son extrémité permet d'initier le contact sur le ddl $x_{100}$.

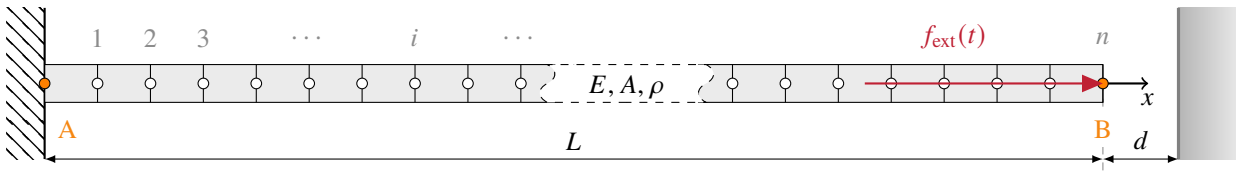



Figure 5.4 Système mécanique considéré : barre encastrée-libre et obstacle rigide (▭).

Les matrices élémentaires de masse et de raideur sont :

$$\mathbf{M}_{\text{e}} = \frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_{\text{e}} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.3.1}$$

Les matrices de masse $\mathbf{M}$ et de raideur $\mathbf{K}$ du modèle éléments finis sont obtenues par une procédure classique d'assemblage et la prise en compte des conditions aux limites. La matrice d'amortissement $\mathbf{C}$ est obtenue en considérant un coefficient d'amortissement modal $\xi = 7{,}5 \cdot 10^{-3}$ pour tous les modes du système.

Afin de démontrer que la stratégie proposée est bien adaptée à la résolution du problème (5.1.5), la suite de cette section est organisée comme suit :

1. une configuration de référence reposant sur une procédure d'IT et un traitement du contact par pénalité est établie dans la section 5.3.2. Les paramètres de la loi de pénalité sont choisis de façon à assurer que les résultats obtenus se superposent à ceux obtenus pour un traitement du contact par multiplicateurs de Lagrange ;
2. une résolution HBM couplée à la loi de pénalité bilinéaire est ensuite appliquée en section 5.3.3 en vue de résoudre le problème (5.1.5). Il est alors mis en évidence que le phénomène de Gibbs perturbe l'algorithme de résolution au point qu'il est impossible d'obtenir des résultats convergés sur une partie importante de la plage de pulsations considérée ;

3. la section 5.3.4 présente les résultats obtenus par R-HBM. L'influence de la procédure de régularisation est évaluée en termes de son apport pour la robustesse de l'algorithme de résolution et des approximations induites sur le calcul des solutions du problème étudié ;
4. l'application de la RL-HBM, en section 5.3.5, est ensuite l'occasion de démontrer l'apport du filtrage aussi bien pour l'obtention des courbes de réponse en fréquence que pour les réponses temporelles (efforts et déplacements) ;
5. enfin, la combinaison de la procédure RL-HBM à une procédure de réduction modale de type Craig-Bampton du système mécanique est évaluée dans la section 5.3.6. Cette étude permet d'envisager l'application de la RL-HBM à des systèmes mécaniques de grande taille. Une analyse de convergence détaillée permet notamment de mettre en évidence le rôle clé de la procédure de filtrage pour l'amélioration de la convergence du solveur pour de faibles valeurs du paramètre de réduction.

Toutes les simulations d'IT effectuées dans cette application utilisent un pas de temps d'intégration $h = 10^{-6}$ s. Sauf mention contraire, tous les calculs HBM dans la suite de ce chapitre sont effectués avec les paramètres $H = 30$ et $N = 1024$, valeurs pour lesquelles il a été vérifié que les résultats obtenus sont convergés.

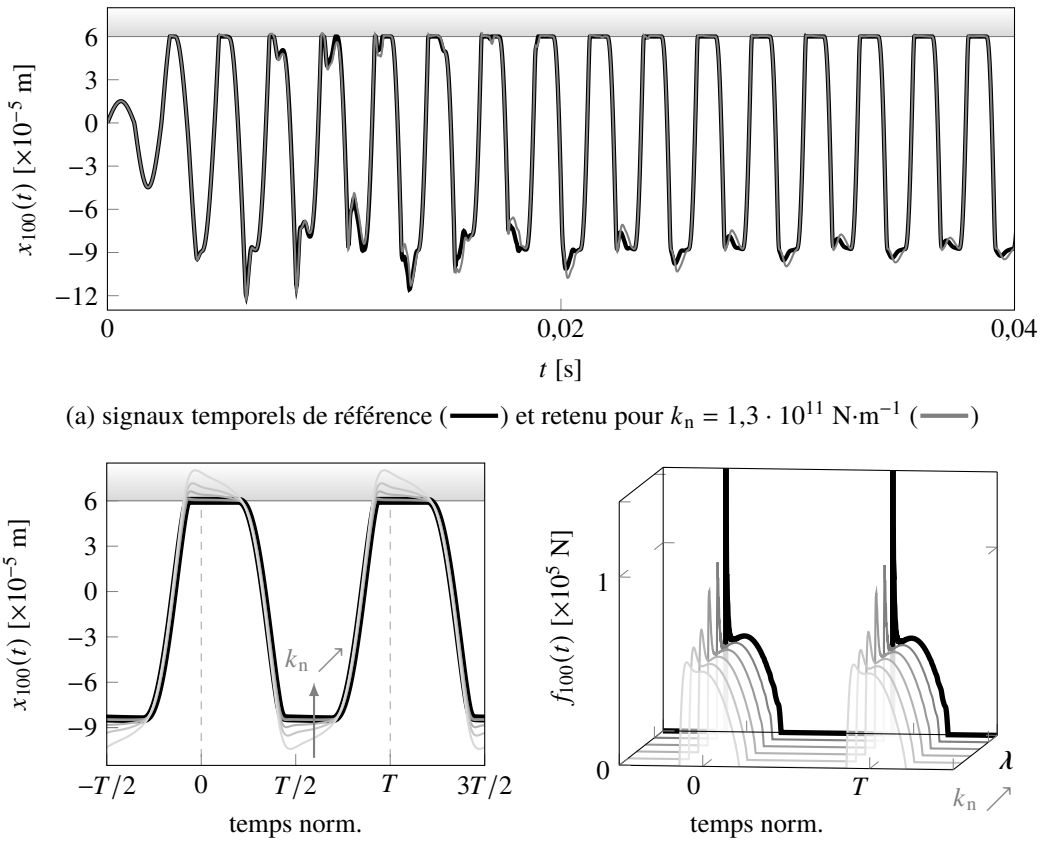
### 5.3.2 Configuration de référence

Les résultats présentés dans cette sous-section sont obtenus pour une excitation correspondant à la première pulsation propre du système linéaire : $\omega_1 = 2628$ rad·s$^{-1}$ (①). Ils sont obtenus par une procédure d'IT explicite reposant sur le schéma des différences finies centrées et différents algorithmes de traitement du contact : (1) un traitement du contact par multiplicateurs de Lagrange [122] et, (2) un traitement du contact par pénalité bilinéaire (5.1.6). Une fois le régime permanent atteint, les différents résultats obtenus sont superposés sur la figure 5.5.

Les résultats obtenus pour différentes valeurs de $k_\mathrm{n}$ (——) ...(——), représentés par opacité croissante, sont superposés à ceux obtenus pour un traitement du contact par multiplicateurs de Lagrange (——) sur la figure 5.5. Pour $k_\mathrm{n} = 1{,}3 \cdot 10^{11}$ N·m$^{-1}$, l'effort sur l'extrémité de la barre et le déplacement du nœud associé se superposent presque parfaitement [4] avec la solution de référence (——). Pour cette valeur de $k_\mathrm{n}$, la pénétration résiduelle est négligeable devant l'amplitude du déplacement.

Dans la suite de cette application, tous les résultats sont obtenus par IT avec un traitement du contact par pénalité pour $k_\mathrm{n} = 1{,}3 \cdot 10^{11}$ N·m$^{-1}$. Ces résultats sont utilisés comme référence pour la validation

4. Le pic prédit à l'établissement du contact par multiplicateurs de Lagrange, *cf.* 5.5c, n'est pas physique et constitue un artefact numérique dont la hauteur dépend du pas de temps de l'IT. Il n'est donc pas question ici de chercher à retrouver ce pic dans les efforts évalués par pénalité.




(a) signaux temporels de référence (▬) et retenu pour $k_n = 1{,}3 \cdot 10^{11}$ N·m$^{-1}$ (▬)

(b) régime permanent

(c) efforts de contact

Figure 5.5 Résultats obtenus à $\omega_1$, avec pénalité pour $k_n = \{3{,}3 \cdot 10^9;\ 6{,}3 \cdot 10^9;\ 1{,}3 \cdot 10^{10};\ 6{,}3 \cdot 10^{10};\ 1{,}3 \cdot 10^{11}\}$ N·m$^{-1}$ (▬) et multiplicateurs de Lagrange $\lambda$ (▬). Obstacle (▭)

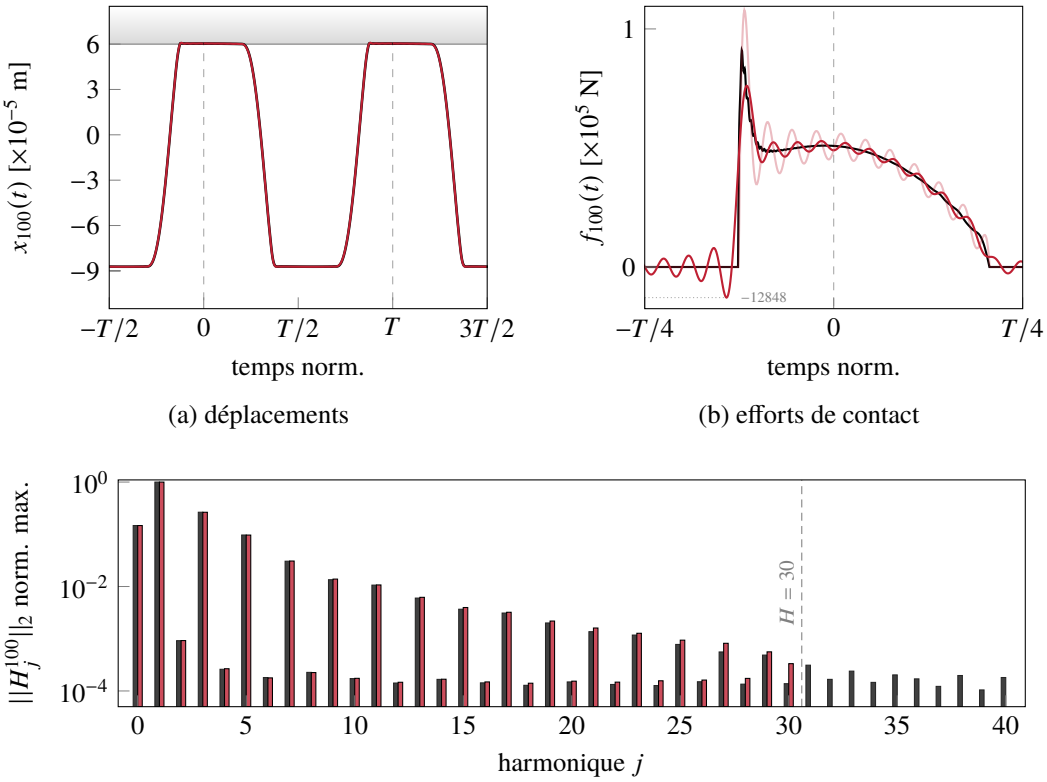
des calculs HBM.

### 5.3.3 HBM confrontée à l'intégration temporelle

#### 5.3.3.1 Première pulsation propre

Les résultats obtenus par IT et par HBM sont tout d'abord comparés au niveau de la première pulsation propre du système linéaire $\omega_1$. Ces résultats sont présentés sur la figure 5.6. La loi de pénalité non-régularisée (5.1.6) est utilisée pour les calculs par HBM.

L'analyse comparative des déplacements et des spectres fréquentiels associés, représentés sur les figures 5.6a et 5.6c, souligne l'excellent accord entre les résultats obtenus par chaque méthode. En effet, les disparités observées sont très faibles, elles deviennent uniquement visibles à partir de l'harmonique 25. La comparaison des efforts de contact obtenus par chaque méthode, superposés sur la figure 5.6b, permet cependant de mettre en évidence des oscillations de la solution obtenue




(a) déplacements

(b) efforts de contact

(c) spectre fréquentiel des déplacements

Figure 5.6 Comparaison entre IT et HBM à $\omega_1$. IT (——) et HBM (——). Efforts HBM prédits (——) et effectifs reconstruits (——).

par HBM. Ces oscillations ont une amplitude maximale de −12848 N autour de $\tau = -T/8$ ce qui correspond au début de la phase de contact entre la barre et l'obstacle rigide et traduit la sensibilité de la HBM au phénomène de Gibbs.

#### 5.3.3.2 Plage de pulsations

HBM et IT sont ici comparées sur la plage de pulsations $\omega \in [1885; 3580]$ rad·s$^{-1}$. Chaque méthodologie est utilisée en conjonction avec une procédure de continuation par longueur d'arc pour la HBM et séquentielle pour l'IT. Deux balayages fréquentiels (ascendant (○) et descendant (+)) sont effectués en IT. La comparaison des CRF obtenues est présentée sur la figure 5.7. La résolution par HBM diverge pour $\omega = 2714$ rad·s$^{-1}$, au-delà de cette pulsation, aucun résultat n'a pu être obtenu par HBM. Pour des pulsations inférieures, les résultats obtenus par IT et HBM se superposent presque parfaitement.

Les deux balayages d'IT révèlent des phénomènes de saut situés à environ 3355 rad·s$^{-1}$ dans le cas ascendant et 2993 rad·s$^{-1}$ dans le cas descendant. Le balayage montant illustre notamment le

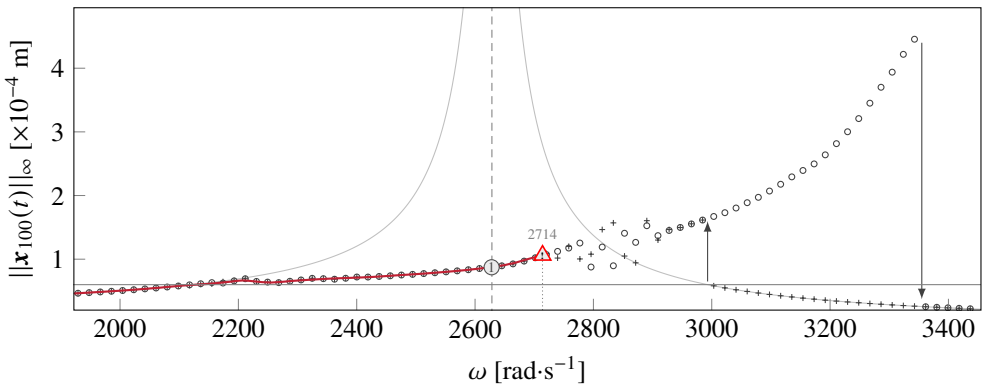



Figure 5.7 CRF de la barre éléments finis de référence obtenues par IT en balayage ascendant (○) et descendant (+), et HBM (——).

phénomène de raidissement au contact. Celui-ci est à l'origine d'un décalage du pic de résonance vers des fréquences plus élevées. Ce décalage est d'autant plus marqué lorsque $k_\mathrm{n}$ augmente. Par ailleurs, aux alentours de 2800 rad·s$^{-1}$, les amplitudes prédites par les deux balayages sont perturbées. Il a été vérifié qu'il ne s'agit pas de perturbations liées à la présence d'un régime transitoire résiduel. Une analyse de stabilité dédiée, qui dépasse le cadre des développements présentés dans cette section, est requise pour mieux comprendre ces résultats. Ce dernier point fait l'objet du chapitre 7.

### 5.3.4 R-HBM confrontée à l'intégration temporelle

La résolution par HBM est maintenant couplée à la loi de pénalité régularisée (5.2.1) en remplacement de la loi bilinéaire (5.1.6) pour la gestion du contact. Le paramètre de régularisation $\epsilon_\mathrm{n}$ est fixé à $6 \cdot 10^4$ N. À titre d'illustration, les lois de contact non-régularisée et régularisée sont superposées sur la figure 5.8.

#### 5.3.4.1 Première pulsation propre

Les résultats obtenus par IT et R-HBM sont superposés sur la figure 5.9 à $\omega_1$. L'amplitude du ressaut négatif au moment de la prise de contact, précédemment d'environ −12848 N sur la figure 5.6b, a diminué de plus de 79 % comme le montre la figure 5.9b où elle n'est plus que de −2599 N. Cette observation met en évidence l'effet bénéfique de la régularisation de la loi de contact sur le comportement de l'algorithme de résolution de la HBM.

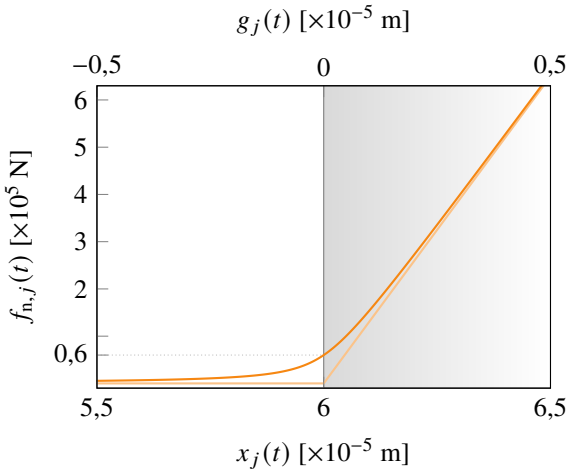
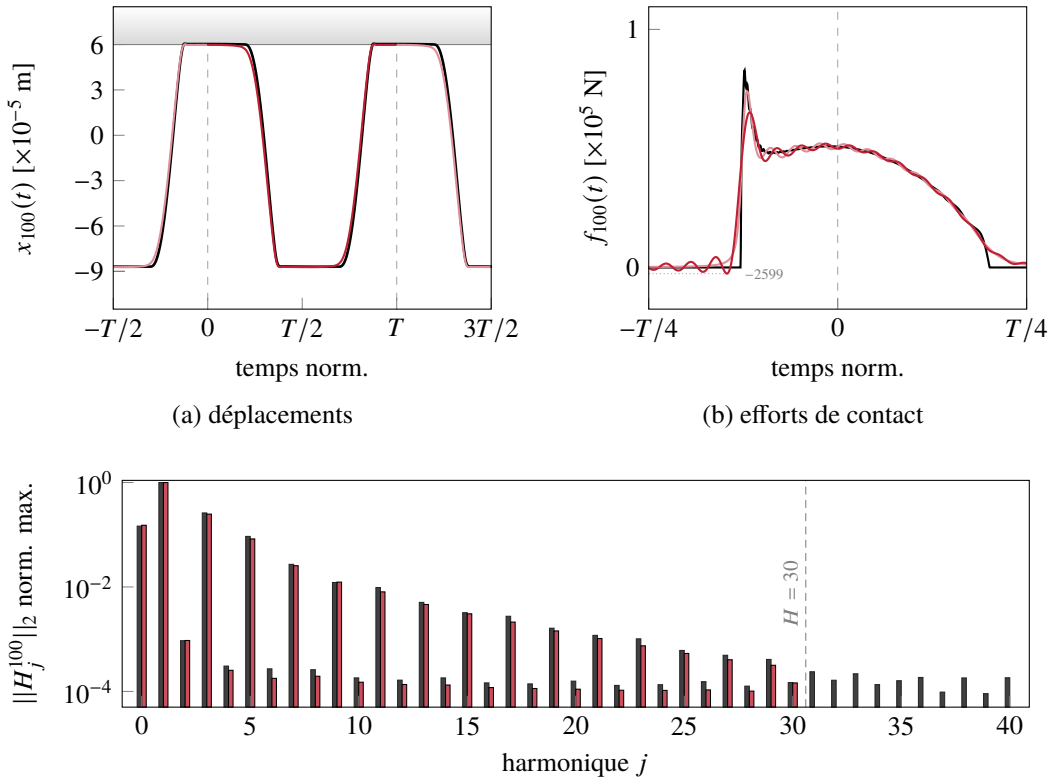



Figure 5.8 Superposition de la loi de pénalité bilinéaire (5.1.6) (——) et de sa régularisation polynomiale (5.2.1) (——) pour $k_n = 1{,}3 \cdot 10^{11}$ N·m$^{-1}$ et $\epsilon_n = 6 \cdot 10^4$ N. Zone de contact (▭).




(a) déplacements

(b) efforts de contact

(c) spectre fréquentiel des déplacements

Figure 5.9 Comparaison entre IT et R-HBM à $\omega_1$. IT (——) et R-HBM (——). Efforts R-HBM prédits (——) et reconstruits (——).

#### 5.3.4.2 Plage de pulsations

Les CRF obtenues par R-HBM et IT sur la plage de pulsations $\omega \in [1885; 3580]$ rad·s$^{-1}$ sont représentées sur la figure 5.10. Il est remarquable que l'ajout de la régularisation permet désormais

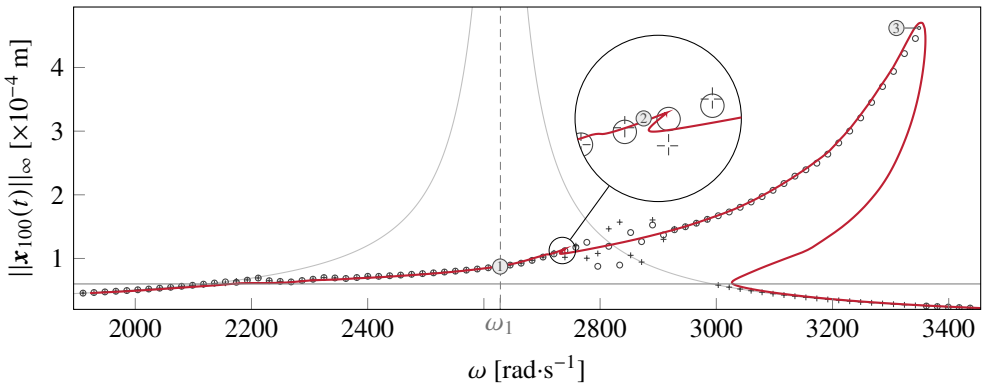



Figure 5.10 CRF de la barre éléments finis de référence obtenues par IT en balayage ascendant (○) et descendant (+), et R-HBM (——).

d'obtenir la CRF complète sur la plage de pulsations considérée avec la R-HBM. La prédiction sécante se révèle également être plus robuste numériquement que la prédiction tangente pour la majorité des configurations testées. Il a été également remarqué que le pas adaptatif de la procédure de continuation atteignait des valeurs significativement plus élevées qu'avec la loi de pénalité non-régularisée. Ceci traduit le fait que les calculs effectués sont moins sensibles numériquement. Les résultats obtenus montrent également que la R-HBM a tendance a légèrement surévaluer l'amplitude maximale des déplacements au niveau de la résonance non-linéaire. D'un point de vue global, l'utilisation d'une loi de contact régularisée améliore ainsi drastiquement la convergence de la HBM.

### 5.3.5 RL-HBM confrontée à l'intégration temporelle

#### 5.3.5.1 Implémentation de la procédure de filtrage

Le filtrage de Lanczos (5.2.7) est ici appliqué pour chaque harmonique comme suit :

$$\sigma_j = \sigma(\mathcal{X}_j) = \operatorname{sinc}\left(\mathcal{X}_j\right)^m = \left(\frac{\sin\left(\pi\mathcal{X}_j\right)}{\pi\mathcal{X}_j}\right)^m \tag{5.3.2}$$

où le paramètre $\mathcal{X}_j$ est défini de telle sorte que :

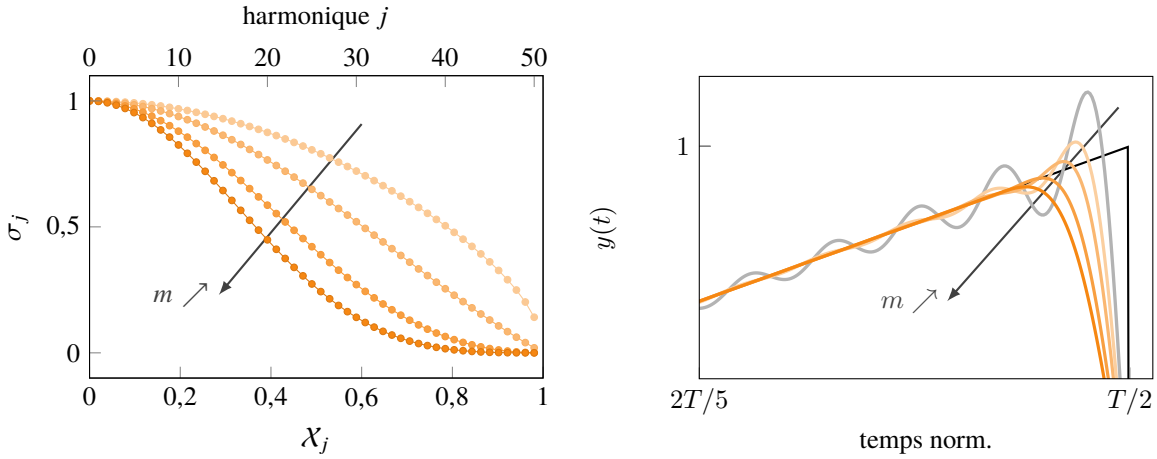
$$\mathcal{X}_j = \frac{\rho_j}{H+1} \quad \text{pour} \quad j \in [\![0..H]\!] \tag{5.3.3}$$

et le numérateur $\rho_j$ contrôle le début de la fenêtre de filtrage à partir d'un harmonique de coupure notée $C_H$ tel que :

$$\rho_j = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad j < C_H \\ j & \text{pour} \quad C_H \leqslant j \leqslant H \end{cases} \tag{5.3.4}$$

La vitesse de transition du filtre de Lanczos [191] à compter de l'harmonique de coupure $C_H$ peut être adaptée en faisant varier l'exposant $m \in \mathbb{R}_+$ de l'équation (5.3.2). Les valeurs usuelles de $m$ sont 1, 2 ou 3 dépendamment de l'intensité d'atténuation désirée. Un compromis doit être trouvé entre une meilleure atténuation du phénomène de Gibbs ($m$ grand) et une vitesse de transition satisfaisante ($m$ petit). Par ailleurs, pour une valeur de $m$ donnée, une augmentation du nombre d'harmoniques permet d'augmenter la vitesse de transition. Différents profils de filtres obtenus en faisant varier le paramètre $m$ et leurs effets associés sur l'approximation de la fonction dents de scie $y(t)$ sont présentés sur la figure 5.11.

Les coefficients de Lanczos ainsi définis s'intègrent directement au sein de la matrice de DFT ($\mathbf{\Gamma}^{-1}$) de l'équation (3.2.33) qui est ensuite utilisée au sein du processus d'AFT. L'intégration de filtres dans l'espace de Fourier n'entraîne ainsi aucun coût de calcul supplémentaire.




(a) filtres d'ordre $m$

(b) filtrages associés

Figure 5.11 Filtres de Lanczos avec $H = 50$ et $m = \{0{,}5(\text{——}); 1(\text{——}); 2(\text{——}); 3(\text{——})\}$ appliqués à l'approximation (——) d'une fonction en dents de scie (——).

Étant donné que $\text{sinc}(0) = 1$, la composante constante du signal n'est jamais filtrée. De plus, pour $m = 0$, les coefficients du filtre sont unitaires : aucun filtrage n'est appliqué et l'opérateur de DFT initial $\mathbf{\Gamma}^{-1}$ (3.2.33) est retrouvé. Enfin, la valeur maximale du paramètre $\mathcal{X}_j$ est toujours strictement inférieure à 1, ce qui implique que le plus haut harmonique n'est jamais complètement filtré.

Les paramètres de filtrage utilisés dans la suite de chapitre sont $m = 1$ et $C_H = 1$. Un tel filtre,

appelé filtre unitaire, s'avère bien adapté au système de barre éléments finis en contact présenté précédemment. La valeur $m = 1$ considérée est en accord avec les valeurs usuellement considérées—$m = 1$ ou $m = 2$—dans le domaine du traitement des signaux numériques. Le choix de la fréquence de coupure $C_H$ est plus sensible au système et à la nature de l'excitation. Lorsqu'il est possible de supposer que la réponse du système est dominée par le même contenu fréquentiel que celui de l'excitation [42], une valeur $C_H = 1$ semble bien adaptée.

#### 5.3.5.2 Résultats

Les résultats obtenus par IT, R-HBM et RL-HBM sont superposés sur la figure 5.12. Les CRF obtenues avec (——) et sans (——) filtrage se superposent presque parfaitement. Seul un léger écart en amplitude est perceptible au voisinage de la résonance, au niveau du point ③ sur la figure 5.12. La

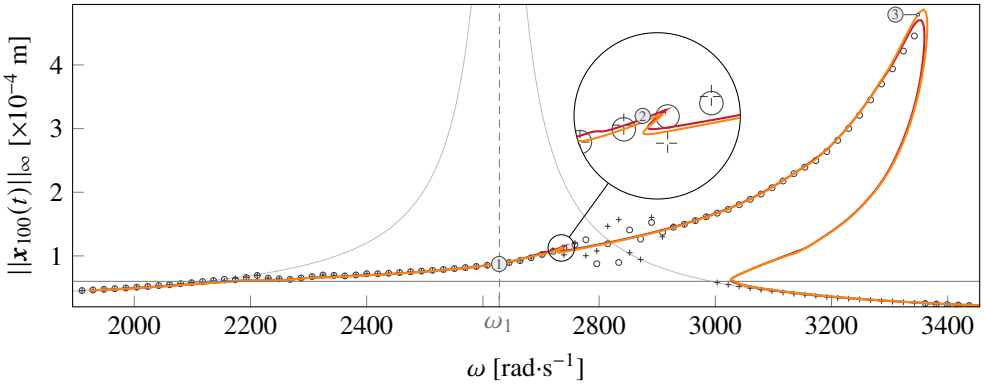
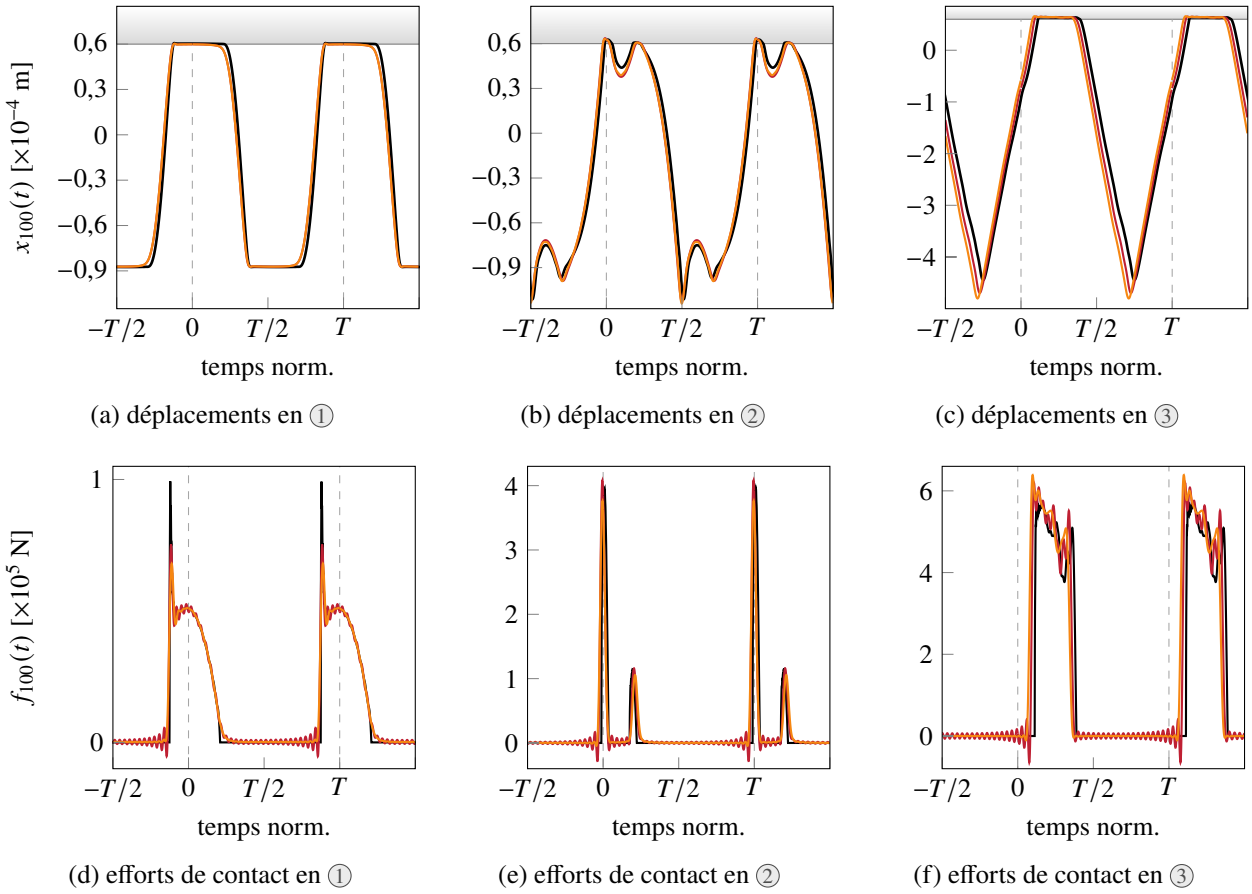



Figure 5.12 CRF de la barre éléments finis de référence obtenues pa IT en balayage ascendant (○) et descendant (+), R-HBM (——) et RL-HBM (——).

comparaison des solutions obtenues pour chaque point ①, ② et ③–voir le tableau 5.1– de la CRF met en évidence une nette amélioration des résultats grâce au filtrage de Lanczos. Les signaux de déplacements et d'efforts obtenus avec et sans filtrage pour les différents points sont superposés sur la figure 5.13. Les solutions de référence (——), obtenues par IT, sont également tracées sur ces figures. La procédure de filtrage permet une forte réduction des oscillations des signaux tout en conservant un excellent accord avec les solutions de référence.

| point | ① | ② | ③ |
|---|---|---|---|
| $\omega$ [rad·s$^{-1}$] | 2627,942 | 2736,075 | 3349,503 |

Tableau 5.1 Vitesses angulaires considérées dans l'analyse des résultats de la barre à seuil fixe.




(a) déplacements en ①

(b) déplacements en ②

(c) déplacements en ③

(d) efforts de contact en ①

(e) efforts de contact en ②

(f) efforts de contact en ③

Figure 5.13 Déplacements et efforts obtenus par IT (——), R-HBM (——) et RL-HBM (——) à l'interface de contact.

### 5.3.6 Convergence spatiale

Le modèle éléments finis de barre est réduit à l'aide de la méthode de Craig-Bampton en considérant $\eta = 5,\ 8,\ 10,\ 12,\ 15$ et 20 modes encastrés. Le ddl $x_{100}$ est le seul ddl physique retenu sur la frontière du domaine pour la gestion du contact. Les CRF obtenues par RL-HBM pour les différentes valeurs de $\eta$ sont superposées sur la figure 5.14. Le nombre d'harmoniques retenus dans la série de Fourier, ainsi que le nombre d'échantillons (respectivement $H = 30$ et $N = 1024$) sont supposés suffisamment élevés pour ne pas avoir d'influence significative sur les observations faites dans cette section.

Pour les plus faibles valeurs de $\eta$, $\eta = 5$ et $\eta = 8$, la procédure de résolution par RL-HBM diverge au voisinage de la première pulsation propre du système linéaire (les points de divergence sont indiqués par des triangles rouges sur la figure 5.14). En revanche, la procédure de résolution par RL-HBM converge pour $\eta \geqslant 10$. Pour $\eta = 10$ et $\eta = 12$, de légères ondulations sont perceptibles sur les CRF, voir notamment l'agrandissement de la figure 5.14. Bien que cela ne soit pas montré ici pour des raisons de brièveté, l'application de la R-HBM pour $\eta = 10$ aboutit à une divergence de

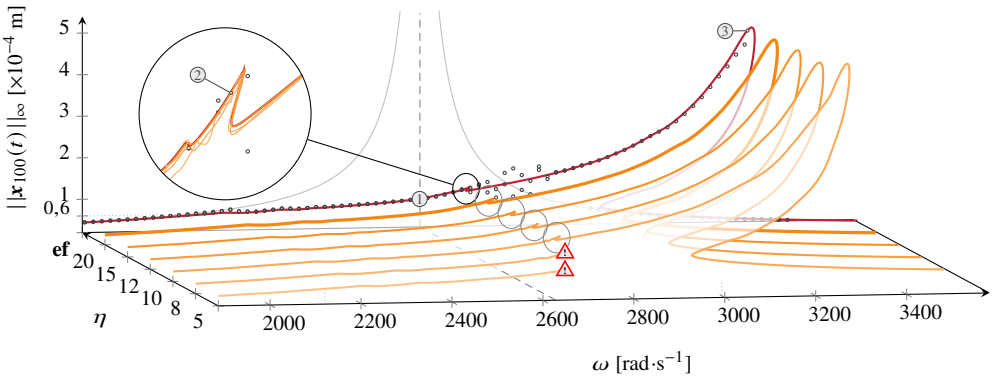



Figure 5.14 CRF obtenues par RL-HBM pour $\eta$ = {5(——) ; 8(——) ; 10(——) ; 12(——) ; 15(——) ; 20(——)} et le modèle éléments finis complet de référence (——) superposé aux résultats obtenus par IT (○).

la procédure de résolution. Il est ainsi mis en évidence que le filtrage joue un rôle bénéfique pour la convergence de la procédure de résolution. Sur base des résultats présentés sur la figure 5.14, la convergence semble être atteinte à compter de $\eta = 15$. En effet, à partir de cette valeur de $\eta$, les CRF se superposent presque parfaitement avec celle obtenue pour le modèle éléments finis (——).

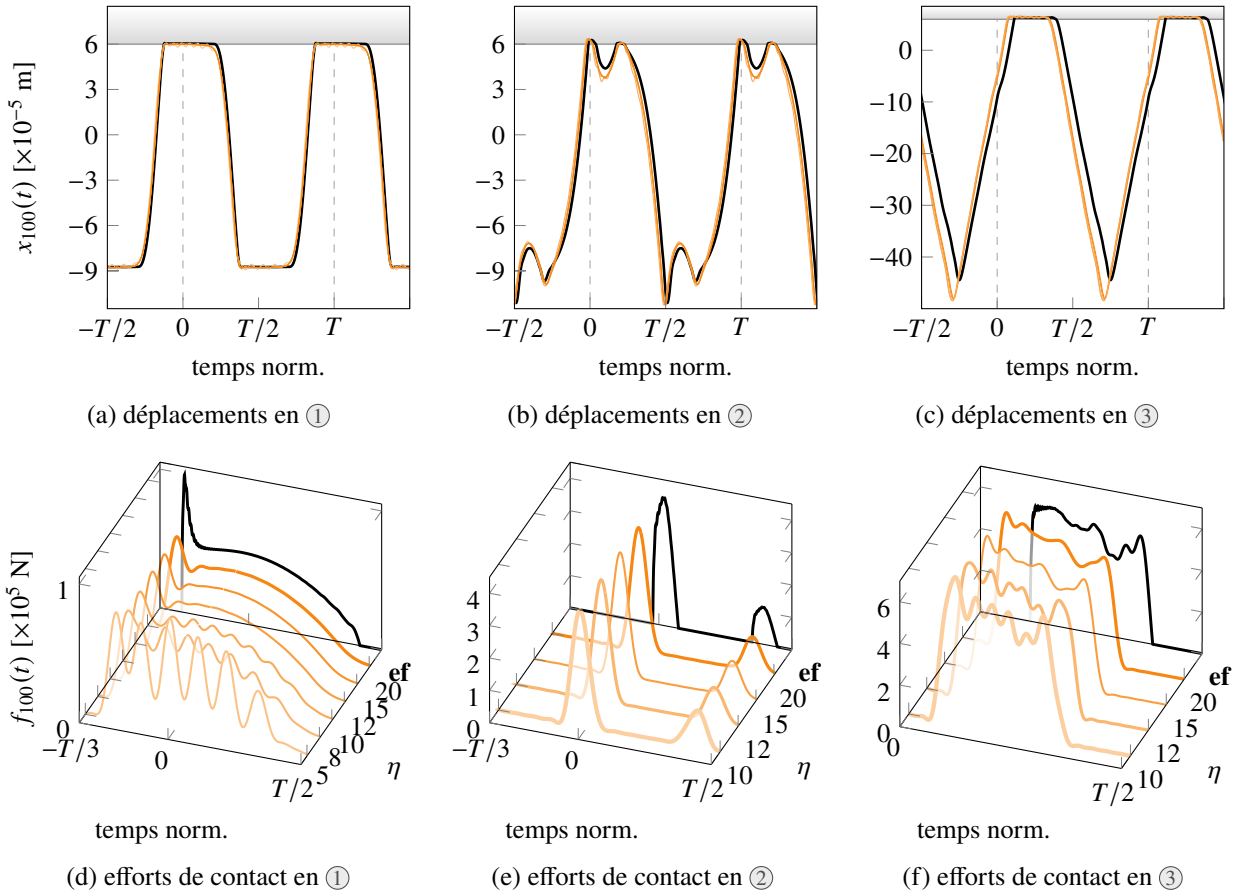
#### 5.3.6.1 Déplacements et efforts

La comparaison des résultats en déplacements et efforts obtenus pour les différentes valeurs de $\eta$ au niveau de la résonance linéaire, de la zone de transition de contact et de la résonance non-linéaire—tous tracés sur la figure 5.15—confirme la convergence des résultats pour $\eta \geqslant 15$. Afin d'éliminer toute présence d'artéfacts numériques liés à la réduction, les résultats de référence fournis par IT sont obtenus avec le modèle éléments finis complet de la barre.

Les efforts de contact sont les quantités les plus sensibles au choix du paramètre de réduction. Pour de faibles valeurs de $\eta$, ces efforts oscillent significativement comme le montrent les figures 5.15d et 5.15f.

#### 5.3.6.2 Vitesses

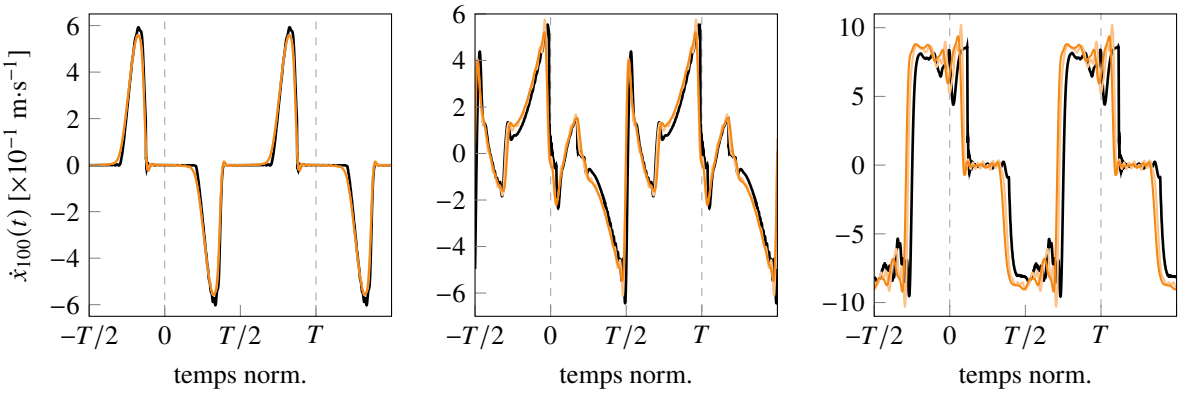
Si la prédiction des déplacements est critique pour connaître avec précision les niveaux de contraintes dans une structure, la prédiction des champs de vitesses est également importante pour des aspects énergétiques et la prise en compte du frottement. De plus, la discontinuité des vitesses en fonction du temps sur l'interface de contact rend l'approximation de ces fonctions par série de Fourier particulièrement délicate.




(a) déplacements en ①
(b) déplacements en ②
(c) déplacements en ③
(d) efforts de contact en ①
(e) efforts de contact en ②
(f) efforts de contact en ③

Figure 5.15 Déplacements et efforts obtenus par RL-HBM à différentes valeurs de $\eta = \{5(\text{——}) ; 8(\text{——}) ; 10(\text{——}) ; 12(\text{——}) ; 15(\text{——}) ; 20(\text{——})\}$. Résultats de référence du modèle éléments finis obtenus par IT (——).

Les champs de vitesses obtenus lorsque la réduction modale est combinée à la RL-HBM pour $\eta = 20$ sont tracés sur la figure 5.16. Les vitesses issues de l'IT proviennent du modèle éléments finis complet. Les vitesses obtenues au niveau de l'interface de contact par IT, R-HBM et RL-HBM sont superposées pour les trois pulsations étudiées précédemment : résonance linéaire ①, zone de retournement ② et résonance non-linéaire ③ de façon à analyser le comportement de la méthode de résolution dans les zones les plus sensibles en termes de convergence. Ces résultats sont respectivement tracés sur les figures 5.16a, 5.16b et 5.16c. Les résultats obtenus démontrent le bon comportement de l'approche RL-HBM ainsi que la réduction efficace du phénomène de Gibbs. La comparaison des résultats obtenus par R-HBM (——) et par RL-HBM (——) met en évidence le rôle fondamental de la régularisation de la loi de contact alors que le filtrage permet d'améliorer encore la qualité des résultats en éliminant quasiment complètement les oscillations résiduelles liées au phénomène de Gibbs.




(a) vitesses en ①

(b) vitesses en ②

(c) vitesses en ③

Figure 5.16 Vitesses obtenues par IT (——), R-HBM (——) et RL-HBM pour $\eta = 20$ (——) à l'interface de contact.

### 5.3.7 Conclusion partielle

Les résultats obtenus en termes de déplacements, de vitesses et d'efforts confirment que la stratégie numérique proposée permet de prédire avec précision le comportement vibratoire du système étudié. La RL-HBM semble donc bien adaptée à la résolution du problème (5.1.5). De plus, la validation de la RL-HBM avec réduction modale permet d'entrevoir la possibilité de traiter des problèmes de contact industriels.

# CHAPITRE 6 APPLICATIONS INDUSTRIELLES

La méthodologie présentée dans le chapitre 5 est utilisée pour la prédiction de la réponse vibratoire d'une aube de moteur d'avion subissant des contacts répétés avec le carter environnant. Dans le but de démontrer la robustesse et l'efficacité de la méthodologie proposée pour cette application, plusieurs types d'aubes sont considérées : une aube de compresseur transsonique (NASA rotor 37) et un aube de soufflante (NASA rotor 67). La dernière section de ce chapitre présente une extension de la méthodologie proposée à une roue aubagée complète—comportant 21 aubes—du compresseur basse-pression d'un moteur d'avion civil.

## 6.1 Développements spécifiques

Du point de vue de l'implémentation numérique de la méthodologie proposée, plusieurs ajustements doivent être effectués compte tenu de la complexité accrue de la configuration de contact, relativement à celle présentée dans le chapitre précédent sur le modèle de barre éléments finis :

1. dans le repère d'une aube de moteur d'avion, la rotation de l'aube se traduit par la rotation du carter et le défilement d'une surface de contact $2\pi$-périodique en vis-à-vis du sommet d'aube. Le carter d'un moteur d'avion n'étant pas parfaitement circulaire—notamment du fait de l'application de gradients thermiques en fonctionnement—, il est nécessaire de prendre en compte la variation de la position radiale du seuil de contact en fonction du temps. Cet aspect est abordé dans la section 6.1.1 ;
2. une aube de moteur d'avion est une structure de géométrie complexe qui doit être modélisée à l'aide d'éléments finis en trois dimensions (3D). Contrairement au modèle de barre du chapitre précédent, le contact peut avoir lieu en différents nœuds sur tout le sommet d'aube, du bord d'attaque au bord de fuite, ce qui implique que plusieurs nœuds frontières doivent être considérés comme cela est détaillé dans la section 6.1.2 ;
3. enfin, une prédiction fine du comportement vibratoire d'une aube impose la prise en compte du frottement aube/carter, ce qui implique des développements spécifiques au niveau de la gestion des efforts de contact. Ce dernier point est l'objet de la section 6.1.3.

### 6.1.1 Seuil de contact variable

La prise en compte d'un seuil de contact variable et périodique en fonction du temps a pour objectif de forcer le contact sur chaque période. Contrairement à la configuration de contact envisagée au

chapitre précédent, il n'existe donc plus de plage de fréquence sur laquelle le système admet de solution linéaire. De ce fait, ce développement est sensible du point de vue numérique.

La validation de l'implémentation du seuil variable est effectuée progressivement en repartant du système de barre en contact présenté sur la figure 5.4.

#### 6.1.1.1 Implémentation

Dans un premier temps, la distance entre l'extrémité de la barre et l'obstacle est réécrite sous la forme suivante :

$$d(\tau) = c\,(1 + \cos(\tau)) - p \tag{6.1.1}$$

où $c$ représente l'amplitude de l'oscillation du seuil de contact, et $p$ correspond au niveau maximal de pénétration, c'est-à-dire le niveau de pénétration entre la position au repos de l'extrémité de la barre et la position extrême du seuil de contact. Avec $p > 0$, aucun effort extérieur n'est requis pour initier le contact, il y a obligatoirement contact entre la barre et l'obstacle.

Des simulations sont réalisées sur la barre éléments finis réduite (en considérant le paramètre de réduction $\eta = 20$). La configuration de référence du seuil variable est fixée pour $c = 1 \cdot 10^{-4}$ m et $p = 5 \cdot 10^{-5}$ m. La procédure d'IT est couplée à une gestion du contact par multiplicateurs de Lagrange. Les paramètres de résolution de la RL-HBM sont $H = 30$, $N = 1024$, $k_\mathrm{n} = 1{,}3 \cdot 10^{11}$ N·m$^{-1}$ et $\epsilon_\mathrm{n} = 3 \cdot 10^4$ N, avec un filtre de Lanczos unitaire. Les CRF obtenues par IT et RL-HBM pour la plage de pulsations $\omega \in [1885; 4400]$ rad·s$^{-1}$ sont tracées sur la figure 6.1. Les résultats IT et

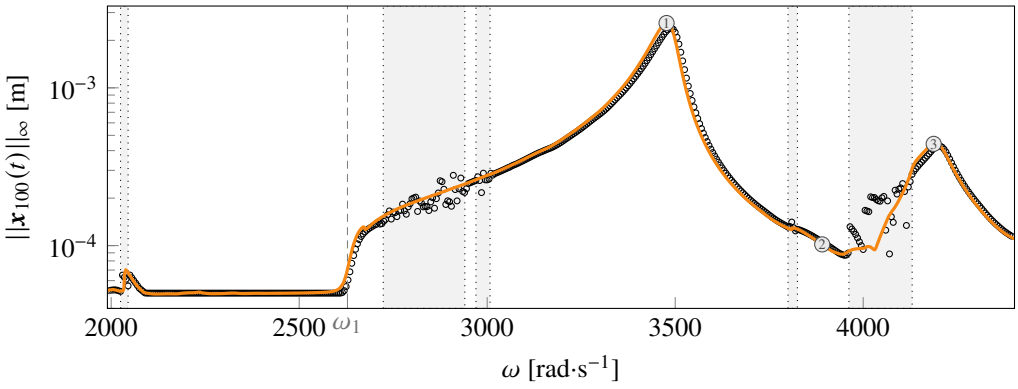



Figure 6.1 CRF obtenues par IT (○) sans continuation et RL-HBM (——). Zones où les écarts les plus importants sont observés (▭).

HBM se superposent presque parfaitement, les seuls écarts observés se situent dans des plages de pulsations indiquées par les zones grises (▭). Parmi ces dernières, les deux zones qui témoignent des plus forts désaccords, en termes d'écarts d'amplitude prédites, se situent aux alentours de $\omega = 2800$

et 4100 rad·s$^{-1}$. Il a été vérifié que les signaux issus de l'IT sont stabilisés dans ces zones. Pour les solutions obtenues par IT, le calcul de la norme infinie $\|\boldsymbol{x}_{100}(t)\|_\infty$ de la figure 6.1 est effectué en considérant la dernière période du signal, supposée de longueur $T = 2\pi/\omega$. Toute modification de la périodicité de la solution—comme cela peut être observé au passage d'un point de bifurcation de la réponse du système—engendre une erreur dans le calcul de la norme infinie, ce qui se traduit typiquement par une répartition diffuse des points calculés autour de la CRF obtenue par HBM. Par exemple, en augmentant la longueur de la fenêtre de calcul de la norme infinie à $50T$, les CRF obtenues sont présentées sur la figure 6.2.

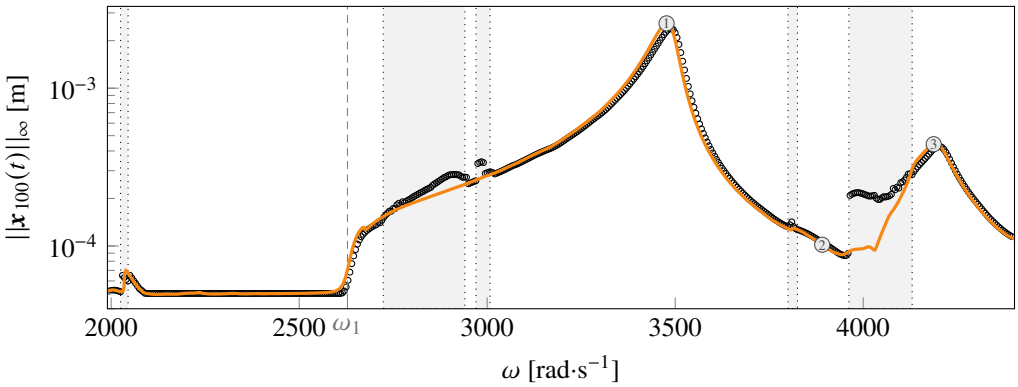



Figure 6.2 CRF obtenues par IT (○) sans continuation et RL-HBM (——) pour un calcul de la norme infinie effectué sur les 50 dernières périodes. Zones où les écarts les plus importants sont observés (▭).

Une analyse détaillée de ces zones est présentée à la section 7.4 de cette thèse.

Les résultats obtenus par IT et HBM sont comparés en termes de déplacements, d'efforts et vitesses en trois points distincts, *cf.* tableau 6.1, sur la figure 6.3. Au voisinage du pic de la résonance principale ①, des écarts significatifs d'amplitude des déplacements sont visibles sur la figure 6.3a. Ces écarts sont liés au fait que la résonance n'est pas rigoureusement obtenue pour la même pulsation entre IT et RL-HBM. Cet écart en terme de position de la première résonance prédite est probablement imputable au fait que différents algorithmes de traitement du contact sont utilisés en IT et en RL-HBM. La gestion du contact par une loi de pénalité régularisée pour la RL-HBM induit un comportement plus souple du système qui se traduit par un léger décalage de la résonance vers des fréquences plus faibles.

Au niveau du point de contrôle ②, localisé au voisinage du creux de plus basse amplitude de vibration situé entre les deux pics de résonance prédits, les résultats se superposent presque parfaitement. Les amplitudes et l'allure générale des courbes de déplacements et de vitesses tracées sur les figures 6.3b et 6.3e sont identiques. Enfin, au niveau du second pic de résonance prédit numériquement, au point ③, déplacement, vitesse et effort au niveau de l'extrémité de la barre sont également presque

| point | ① | ② | ③ |
|---|---|---|---|
| $\omega$ [rad·s$^{-1}$] | 3477,079 | 3891,035 | 4187,491 |

Tableau 6.1 Vitesses angulaires considérées dans l'analyse des résultats de la barre à seuil variable.

parfaitement superposés entre IT et RL-HBM.

#### 6.1.1.2 Étude paramétrique

L'influence des deux paramètres $c$ et $p$ de l'équation (6.1.1) est étudiée dans cette section. Les CRF obtenues pour différentes valeurs de ces deux paramètres sont présentées sur la figure 6.4. Ces simulations permettent d'évaluer la sensibilité et la robustesse de la RL-HBM vis-à-vis de chacun de ces deux paramètres. En effet, une augmentation de l'un ou l'autre de ces deux paramètres se traduit par une augmentation directe de la sévérité du cas de contact.

Pour toutes les valeurs de $c$ et de $p$ considérées, la RL-HBM a permis d'obtenir des CRF complètes, sans problème de convergence. En revanche, l'initialisation de la résolution devient sensible pour les plus grandes valeurs de $c$ et de $p$ (relativement à la configuration de référence (——)). Dans le cas présent, la convergence est rendue possible à l'aide d'un processus d'homotopie permettant de générer les itérés initiaux des différentes CRF présentées.

### 6.1.2 Extension à plusieurs nœuds frontière

La prise en compte d'un seuil variable pour plusieurs nœuds frontière implique de redéfinir les composantes de l'équation (6.1.1) indépendamment pour chaque nœud $j$ tel que :

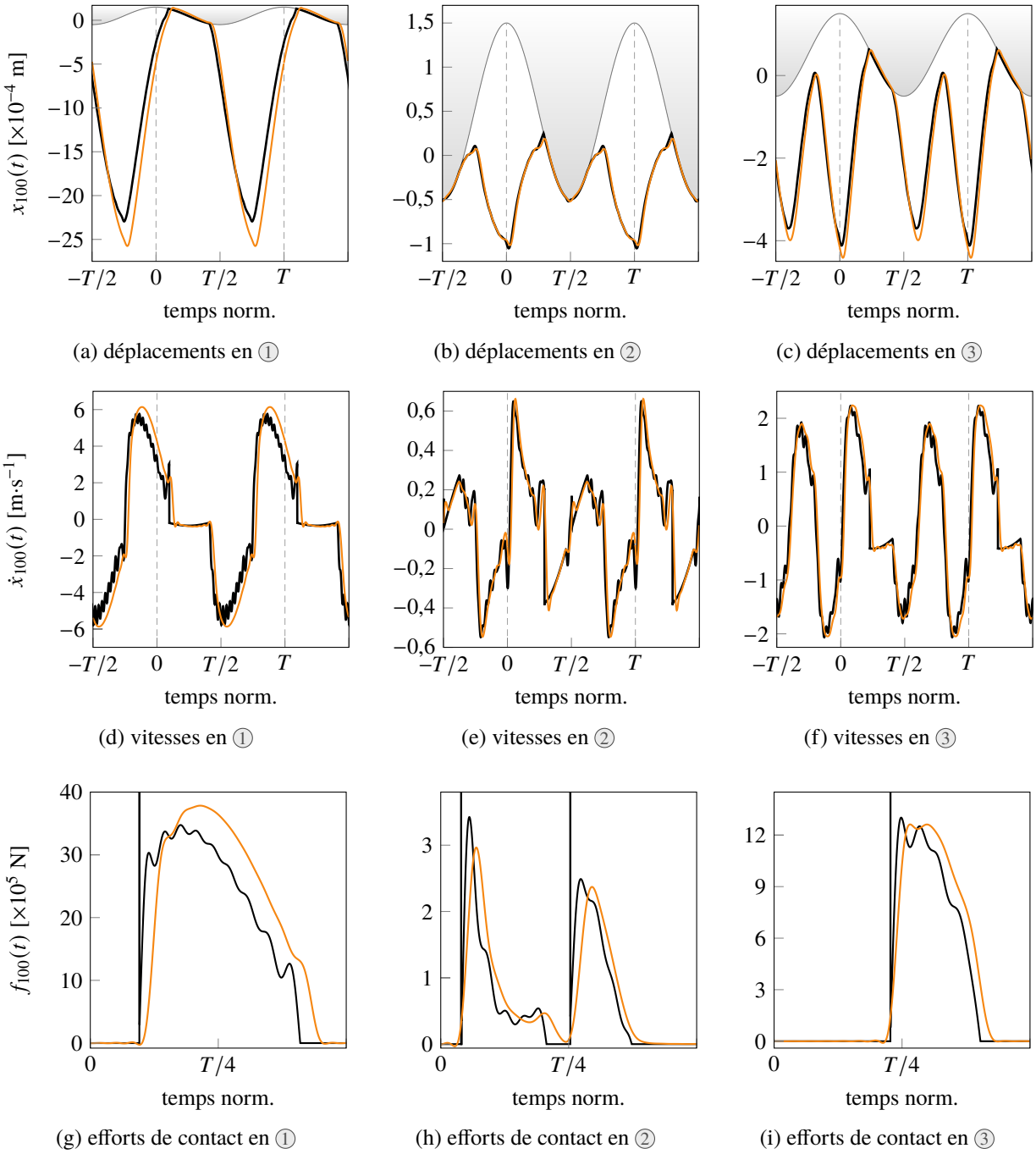
$$d_j(\tau_i) = d_{j,i} = c_j\,(1 + \cos(\tau_i)) - p_j \quad \text{pour } j \in [\![1..n_\mathrm{b}]\!],\ i \in [\![0..N-1]\!] \tag{6.1.2}$$

Cette notation permet de spécifier des caractéristiques géométriques $c_j$ et $p_j$ distinctes pour chacun des $n_\mathrm{b}$ nœuds frontière considérés. Cette extension revient donc essentiellement à devoir considérer la présence de plusieurs positions indépendantes $\boldsymbol{d}_j$ de l'obstacle :

$$\boldsymbol{d} = \left[\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_{n_\mathrm{b}}\right]^\top = \left[d_{1,0}, \ldots, d_{1,N-1}, \ldots, d_{n_\mathrm{b},0}, \ldots, d_{n_\mathrm{b},N-1}\right]^\top \tag{6.1.3}$$

qui impose l'existence de nouvelles composantes à la fonction de distance signée définie à l'équation (5.1.4), de telle sorte que :

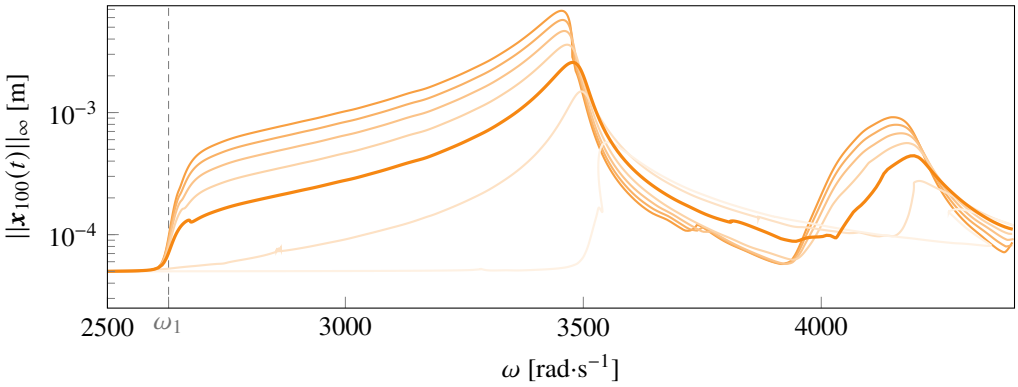
$$\boldsymbol{g} = \left[\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_{n_\mathrm{b}}\right]^\top = \left[g_{,0}, \ldots, g_{1,N-1}, \ldots, g_{n_\mathrm{b},0}, \ldots, g_{n_\mathrm{b},N-1}\right]^\top \tag{6.1.4}$$



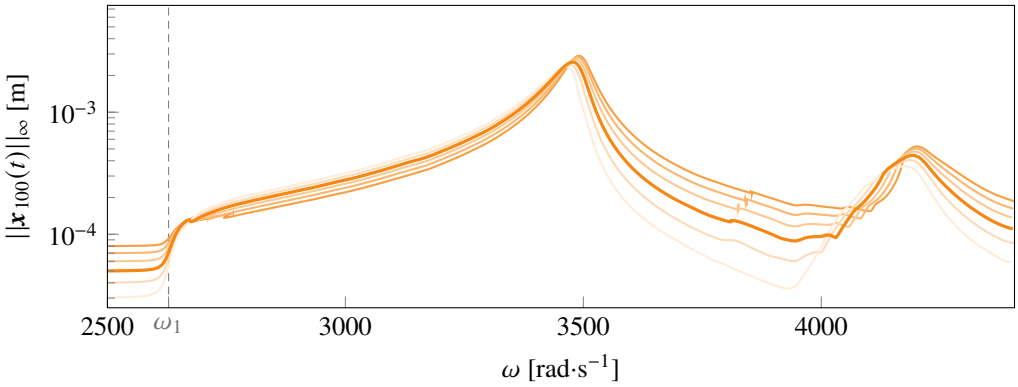

(a) déplacements en ①
(b) déplacements en ②
(c) déplacements en ③
(d) vitesses en ①
(e) vitesses en ②
(f) vitesses en ③
(g) efforts de contact en ①
(h) efforts de contact en ②
(i) efforts de contact en ③

Figure 6.3 Déplacements, vitesses et efforts obtenus par IT (——) et RL-HBM (——) aux points ①, ② et ③ à l'interface de contact.

D'un point de vue algorithmique, la gestion du contact sur plusieurs nœuds frontière implique une augmentation du coût en temps de calcul de la procédure AFT et de la résolution du système non-linéaire HBM condensé.




(a) variation de $c$




(b) variation de $p$

Figure 6.4 CRF obtenues par RL-HBM : $c$ = {0,25( ) ; 0,5( ) ; 1( ) ; 1,5( ) ; 2( ) ; 2,5( ) ; 3( )} [$\times 10^{-4}$] m et $p$ = {3( ) ; 4( ) ; 5( ) ; 6( ) ; 7( ) ; 8( )} [$\times 10^{-5}$] m.

### 6.1.3 Prise en compte du frottement

#### 6.1.3.1 Considérations générales

La prise en compte d'interactions de frottement au niveau de l'interface de contact s'effectue dans le plan orthogonal à la normale de la surface de contact. Les interactions de frottement peuvent être divisées en deux phases distinctes. Dans la première, aucun déplacement tangentiel relatif n'a lieu entre les solides à l'interface de contact en dessous d'une certaine force et les solides demeurent immobiles : c'est la phase de collement/adhérence. Cette phase équivaut à la condition $\dot{\boldsymbol{g}}_\mathrm{t} = \mathbf{0}$, *i.e.* lorsque la vitesse tangentielle de glissement entre les solides est nulle. Dans la seconde, au-dessus d'une certaine limite d'effort, un déplacement relatif tangentiel entre les solides est effectué : c'est la phase de glissement. Cette phase débute donc au moment où les efforts dans la direction tangentielle dépassent une valeur seuil et que les surfaces en contact commencent à se déplacer relativement l'une par rapport à l'autre. Le glissement est décrit classiquement par la loi de Coulomb [46, 7, 182]

en fonction des vitesses relatives dans les directions tangentielles tel que :

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{t}} = -\mu \frac{\dot{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{t}}}{||\dot{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{t}}||_2} |f_{\mathrm{n}}| \quad \text{si} \quad ||\boldsymbol{f}_{\mathrm{t}}|| > \mu |f_{\mathrm{n}}| \tag{6.1.5}$$

où $\mu$ est le coefficient de frottement (glissant) et demeure constant dans la loi de Coulomb classique. La valeur de $\mu$ dépend de plusieurs facteurs tels que le couple de matériaux des solides en contact, des traitements de surface ou encore de la présence de contaminants. La loi de Coulomb, considérée dans la suite de cette étude, est aujourd'hui encore largement utilisée pour résoudre des problèmes de contact frottant.

#### 6.1.3.2 Implémentation dans un repère cylindrique

Dans l'optique de traiter des interactions aube/carter, les efforts sont généralement exprimés dans un système de coordonnées cylindriques $(r,\ \theta,\ z)$ dans lequel les efforts normaux de contact sont associés à la direction radiale. Les composantes des efforts radiaux sont données par la loi de pénalité régularisée (5.2.1) :

$$f_{3j-2,i} = k_{\mathrm{n}} \frac{g_{j,i}}{2} + \sqrt{\left(k_{\mathrm{n}} \frac{g_{j,i}}{2}\right)^2 + \epsilon_{\mathrm{n}}^2} \quad \text{pour } j \in [\![1..n_{\mathrm{b}}]\!],\ i \in [\![0..N-1]\!] \tag{6.1.6}$$

De ce fait, la prise en compte du frottement implique l'existence d'une composante de l'effort de contact dans le plan orthogonal à la direction radiale, répartie entre les directions tangentielle :

$$f_{3j-1,i} = \underbrace{\mu \frac{\dot{x}_{3j-1,i} + r_j \omega}{\sqrt{\left(\dot{x}_{3j-1,i} + r_j \omega\right)^2 + \dot{x}_{3j,i}^2}}}_{\mu_{3j-1,i}} f_{3j-2,i} \quad \text{pour } j \in [\![1..n_{\mathrm{b}}]\!],\ i \in [\![0..N-1]\!] \tag{6.1.7}$$

et axiale :

$$f_{3j,i} = \underbrace{\mu \frac{\dot{x}_{3j,i}}{\sqrt{\left(\dot{x}_{3j-1,i} + r_j \omega\right)^2 + \dot{x}_{3j,i}^2}}}_{\mu_{3j,i}} f_{3j-2,i} \quad \text{pour } j \in [\![1..n_{\mathrm{b}}]\!],\ i \in [\![0..N-1]\!] \tag{6.1.8}$$

tel que $\sqrt{\mu_{3j-1,i}^2 + \mu_{3j,i}^2} = \mu$, et où $\dot{x}_{3j-1,i}$, $\dot{x}_{3j,i}$ et $r_j$ sont respectivement la vitesse tangentielle, la vitesse axiale et la position radiale du $j^{\text{ième}}$ nœud frontière. Les expressions analytiques de ces efforts permettent d'évaluer les dérivées partielles relatives à chaque nœud du système en vue de construire les jacobiennes $\partial \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}} / \partial \boldsymbol{x}$ et $\partial \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}} / \partial \dot{\boldsymbol{x}}$ par blocs. Le $k^{\text{ième}}$ bloc de dimension $(3N \times 3N)$ de la jacobienne temporelle des efforts non-linéaires par rapport aux déplacements associé au $j^{\text{ième}}$

nœud frontière dispose de la structure suivante :

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}_j}{\partial \boldsymbol{x}_j} = \begin{bmatrix} \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_{3j-2}}{\partial \boldsymbol{x}_{3j-2}}\right) & \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_{3j-2}}{\partial \boldsymbol{x}_{3j-1}}\right) & \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_{3j-2}}{\partial \boldsymbol{x}_{3j}}\right) \\ \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_{3j-1}}{\partial \boldsymbol{x}_{3j-2}}\right) & \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_{3j-1}}{\partial \boldsymbol{x}_{3j-1}}\right) & \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_{3j-1}}{\partial \boldsymbol{x}_{3j}}\right) \\ \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_{3j}}{\partial \boldsymbol{x}_{3j-2}}\right) & \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_{3j}}{\partial \boldsymbol{x}_{3j-1}}\right) & \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_{3j}}{\partial \boldsymbol{x}_{3j}}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_{3j-2}}{\partial \boldsymbol{x}_{3j-2}}\right) & \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N \\ \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_{3j-1}}{\partial \boldsymbol{x}_{3j-2}}\right) & \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N \\ \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_{3j}}{\partial \boldsymbol{x}_{3j-2}}\right) & \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N \end{bmatrix} \tag{6.1.9}$$

avec les termes non-nuls associés aux gradients des efforts non-linéaires par rapport au déplacement radial :

$$\left.\frac{\partial f_{3j-2}}{\partial x_{3j-2}}\right|_{\tau_i} = \frac{k_\mathrm{n}}{2} + \frac{k_\mathrm{n}^2 g_{j,i}}{2\sqrt{k_\mathrm{n}^2 g_{j,i}^2 + 4\epsilon_\mathrm{n}^2}} \tag{6.1.10}$$

$$\left.\frac{\partial f_{3j-1}}{\partial x_{3j-2}}\right|_{\tau_i} = \mu_{3j-1,i} \left.\frac{\partial f_{3j-2}}{\partial x_{3j-2}}\right|_{\tau_i} \tag{6.1.11}$$

$$\left.\frac{\partial f_{3j}}{\partial x_{3j-2}}\right|_{\tau_i} = \mu_{3j,i} \left.\frac{\partial f_{3j-2}}{\partial x_{3j-2}}\right|_{\tau_i} \tag{6.1.12}$$

De la même manière pour la jacobienne temporelle des efforts non-linéaires par rapport aux vitesses, le $k^{\text{ième}}$ bloc s'écrit :

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}_j}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_j} = \begin{bmatrix} \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_{3j-2}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_{3j-2}}\right) & \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_{3j-2}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_{3j-1}}\right) & \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_{3j-2}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_{3j}}\right) \\ \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_{3j-1}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_{3j-2}}\right) & \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_{3j-1}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_{3j-1}}\right) & \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_{3j-1}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_{3j}}\right) \\ \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_{3j}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_{3j-2}}\right) & \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_{3j}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_{3j-1}}\right) & \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_{3j}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_{3j}}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N \\ \mathbf{0}_N & \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_{3j-1}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_{3j-1}}\right) & \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_{3j-1}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_{3j}}\right) \\ \mathbf{0}_N & \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_{3j}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_{3j-1}}\right) & \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_{3j}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_{3j}}\right) \end{bmatrix} \tag{6.1.13}$$

avec les gradients des efforts non-linéaires tangentiels et axiaux par rapport aux vitesses associées non-nuls suivants :

$$\left.\frac{\partial f_{3j-1}}{\partial \dot{x}_{3j-1}}\right|_{\tau_i} = \mu \frac{\dot{x}_{3j,i}^2}{\left(\left(\dot{x}_{3j-1,i} + r_j\omega\right)^2 + \dot{x}_{3j,i}^2\right)^{3/2}} f_{3j-2,i} \tag{6.1.14}$$

$$\left.\frac{\partial f_{3j}}{\partial \dot{x}_{3j}}\right|_{\tau_i} = \mu \frac{\left(\dot{x}_{3j-1,i} + r_j\omega\right)^2}{\left(\left(\dot{x}_{3j-1,i} + r_j\omega\right)^2 + \dot{x}_{3j,i}^2\right)^{3/2}} f_{3j-2,i} \tag{6.1.15}$$

$$\left.\frac{\partial f_{3j-1}}{\partial \dot{x}_{3j}}\right|_{\tau_i} = \left.\frac{\partial f_{3j}}{\partial \dot{x}_{3j-1}}\right|_{\tau_i} = -\mu \frac{\left(\dot{x}_{3j-1,i} + r_j\omega\right)\dot{x}_{3j-1}}{\left(\left(\dot{x}_{3j-1,i} + r_j\omega\right)^2 + \dot{x}_{3j,i}^2\right)^{3/2}} f_{3j-2,i} \tag{6.1.16}$$

Ceci conduit à l'évaluation de 7 dérivées partielles non-nulles des efforts de contact, par rapport aux déplacements et vitesses, par nœud frontière considéré. Finalement, contrairement aux efforts radiaux (6.1.6), les efforts tangentiels (6.1.7) et axiaux (6.1.8) dépendent également de la vitesse de rotation $\omega$, ce qui implique ainsi d'en calculer les gradients associés :

$$\left.\frac{\partial f_{3j-1}}{\partial \omega}\right|_{\tau_i} = \mu \frac{r_j \dot{x}_{3j,i}^2}{\left(\left(\dot{x}_{3j-1,i} + r_j\omega\right)^2 + \dot{x}_{3j,i}^2\right)^{3/2}} f_{3j-2,i} \tag{6.1.17}$$

$$\left.\frac{\partial f_{3j}}{\partial \omega}\right|_{\tau_i} = -\mu \frac{r_j \dot{x}_{3j-1}\left(\dot{x}_{3j-1,i} + r_j\omega\right)}{\left(\left(\dot{x}_{3j-1,i} + r_j\omega\right)^2 + \dot{x}_{3j,i}^2\right)^{3/2}} f_{3j-2,i} \tag{6.1.18}$$

## 6.2 Simulations d'interactions aube/carter

### 6.2.1 Scénario de contact

Expérimentalement, les phénomènes d'interaction aube/carter sont coûteux et très délicats à simuler. Des problèmes de confidentialité des données sont également un frein à la publication de tels essais lorsqu'ils sont effectués sur des moteurs commerciaux. Les rares publications sur le sujet [28, 41, 11] présentent toutes un dispositif expérimental pour lequel la mise en contact du sommet d'aube et du carter est obtenue par application des effets centrifuges sur l'aube. Le banc d'essai est conçu de telle façon que la mise en rotation de l'aube génère un premier contact au voisinage d'une vitesse de rotation cible, supposée critique. Plusieurs observations expérimentales motivent des hypothèses de modélisation effectuées dans ce chapitre. Tout d'abord, les phénomènes d'interactions aube/carter ayant été expérimentalement observés sous vide, aucun chargement aérodynamique n'est pris en compte. De plus, la très grande rigidité des carters ne permet pas, expérimentalement, d'observer des niveaux de vibrations significatifs. Pour cette raison, le carter est supposé infiniment rigide : il ne se déforme pas sous l'influence des contacts avec le sommet d'aube. En revanche, la mise en contact ne peut pas être numériquement effectuée par application progressive d'effets centrifuges dans un paradigme fréquentiel. Ainsi, en accord avec les modélisations existantes de ces interactions [64] dans un paradigme temporel, le contact est initié par une déformation de la surface de contact du carter. Une déformation présentant deux lobes de contact symétriques est considérée, ce type de profil de déformation peut être obtenu lors de l'application d'un gradient thermique sur les carters de moteurs civils, du fait du positionnement des points d'attache [26]. Enfin, dans les configurations usuelles, la vitesse d'ensemble $r_j\omega$ du $j^{\text{ième}}$ nœud frontière est très largement supérieure aux vitesses relatives associées à la direction tangentielle $\dot{x}_{3j-1}$ et axiale $\dot{x}_{3j}$. À titre d'exemple, pour les rotors 37 [208] et 67 [210] de la NASA, les vitesses linéaires relatives entre le sommet d'aube et le carter

sont respectivement 454 et 429 m·s$^{-1}$ en condition nominale de fonctionnement. Cette différence d'ordre de grandeur ne permet pas d'entrevoir de phases de collement. C'est la raison pour laquelle, dans les simulations numériques effectuées, une hypothèse de glissement permanent est faite lors des phases de contact entre le sommet d'aube et le carter environnant.

### 6.2.2 Profil du carter

Comme mentionné dans la section précédente, le carter est supposé déformé de telle façon qu'il existe deux lobes symétriques au niveau desquels le contact aube/carter est imposé. Cette configuration est illustrée sur la figure 6.5. Numériquement, ce profil déformé de la surface de contact du carter est

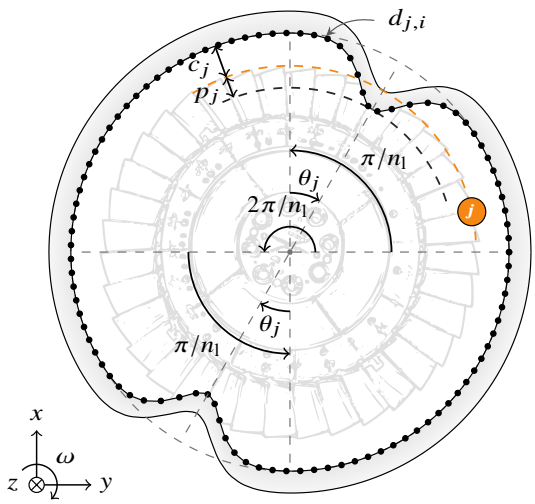



Figure 6.5 Profil du carter ovalisé (▭) en vis-à-vis du $j^{\text{ième}}$ nœud frontière (●).

pris en compte par un seuil de contact variable et repose donc sur les développements présentés à la section 6.1.1. Dans le cas général où la surface de contact du carter présente $n_l$ lobes équirépartis, l'équation du seuil variable associé est :

$$d_j(\tau_i) = d_{j,i} = c_j - \left(c_j + p_j\right) \exp\left[-\left(\frac{\left(\tau_i + \theta_j\right) \pmod{2\pi/n_l} - \pi/n_l}{w_l}\right)^2\right] \tag{6.2.1}$$

où $w_l$ est un facteur pondérateur qui définit la largeur angulaire des zones de contact le long de la circonférence du carter, $\theta_j$ représente la position angulaire du $j^{\text{ième}}$ nœud frontière par rapport à la position de référence de l'aube (du fait de son vrillage), $c_j$ désigne le jeu fonctionnel, et $p_j$ définit la pénétration du profil du carter (- - - -) par rapport au cercle (- - - -) défini par la position radiale du $j^{\text{ième}}$ nœud frontière lorsque l'aube est au repos. Le temps adimensionnel $\tau$, *cf.* (3.2.34), est compris dans l'intervalle $[0; 2\pi[$ ou $[0; -2\pi[$ dépendamment du sens de rotation de l'aube et de l'orientation

du repère de définition de son maillage. L'allure globale d'une section du profil d'un carter ovalisé à $n_l = 2$ lobes est illustrée sur la figure 6.5.

Dans un paradigme temporel, afin d'éviter toute pénétration de l'aube dans le carter à l'instant initial, la déformation de la surface de contact du carter est prise en compte progressivement au cours des premiers tours de la simulation. Cette déformation progressive prend la forme d'une exponentielle décroissante $\exp(-t/t_{99}\log(0{,}01)) = 0{,}01^{t/t_{99}}$ qui module l'expression de l'équation (6.2.1), de telle sorte qu'à $t = t_{99}$ le carter atteint 99 % de sa déformée finale. Pour toutes les simulations effectuées par la suite en IT, le carter atteint la quasi-totalité de sa déformation à $t_{99} = 5 \cdot 10^{-2}$ s.

### 6.2.3 Aspects numériques

Dans le but d'assurer la robustesse et la performance de l'implémentation de la RL-HBM pour des modèles industriels, plusieurs optimisations algorithmiques ont été effectuées et sont présentées dans cette section. Les temps de calcul ont été évalués sur un serveur de calcul possédant 40 cœurs physiques (80 cœurs logiciels) répartis sur deux processeurs Intel®Core™ Xeon-E5-2698 v4 @2,2 GHz et 512 Go de mémoire vive. L'exécution des calculs a été restreinte à 16 cœurs logiciels. Pour les sous-sections 6.2.3.2 et 6.2.3.3, les paramètres $H = 40$ et $N = 1024$ ont été considérés.

#### 6.2.3.1 Algorithme d'élimination par blocs

La résolution du système augmenté issu de la continuation par longueur d'arc, *cf.* équation (4.2.14), peut être réalisée en recourant à l'utilisation d'un algorithme d'élimination par blocs [189, 132] qui tire avantage de la structure bordurée de la matrice de coefficients du membre de gauche. Cette technique permet avantageusement d'éviter les difficultés numériques pouvant provenir de la singularité de la matrice jacobienne $\mathbf{R}_{,\tilde{\boldsymbol{x}}}$ (3.2.22) aux points de retournement. De plus, seule la factorisation de $\mathbf{R}_{,\tilde{\boldsymbol{x}}}$ est nécessaire.

#### 6.2.3.2 Optimisation des performances de l'AFT

Assurer l'efficacité de la procédure AFT, au cœur de la HBM, est essentiel pour pouvoir appliquer la RL-HBM à des modèles industriels. En effet, comme mentionné à la section 3.2.1.1, l'AFT permet l'évaluation des efforts de contact ainsi que la jacobienne $\mathbf{R}_{,\tilde{\boldsymbol{x}}}$ et divers gradients du système. Le nombre de nœuds frontières $n_b$, potentiellement élevé pour un modèle industriel, implique une augmentation du nombre d'opérations numériques pour le calcul des efforts de contact et l'évaluation de la jacobienne fréquentielle des efforts non-linéaires $\partial \tilde{\boldsymbol{f}}_{nl}/\partial \tilde{\boldsymbol{x}}$ ; cette dernière constitue l'opération la plus coûteuse en temps de calcul de la procédure AFT. Par ailleurs, il est essentiel que la jacobienne soit calculée avec une grande précision puisqu'elle est utilisée pour guider la résolution itérative par

la méthode de Newton. L'évaluation précise de la jacobienne est donc critique pour assurer le bon comportement de toute la procédure de résolution.

Plusieurs approches numériques sont envisageables pour évaluer le terme $\partial \tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{nl}}/\partial \tilde{\boldsymbol{x}}$, *cf.* équation (3.2.43). Les temps de calcul associés à ces différentes approches sont comparés sur la figure 6.6 pour différentes valeurs de $n_{\mathrm{b}}$. La dimension de la partition non-linéaire du système $q$ vaut alors $q = 3n_{\mathrm{b}}$. Les temps de calcul mesurés correspondent uniquement à l'évaluation de l'opération (3.2.43), toutes les quantités requises sont supposées connues. Les DFT sont réalisés sur l'ensemble des ddl non-linéaires à l'aide de (1) multiplications matricielles denses [1] (——), (2) creuses scipy csc [2] (- - - -), et (3) creuses Intel MKL [3] (——). Dans le cas creux, les temps de conversion au format creux ne sont pas inclus. Les DFT sont également réalisées par rFFT (4) avec (——), et (5) sans (——) prise en compte du caractère localisé des non-linéarités de contact. Si traiter l'ensemble

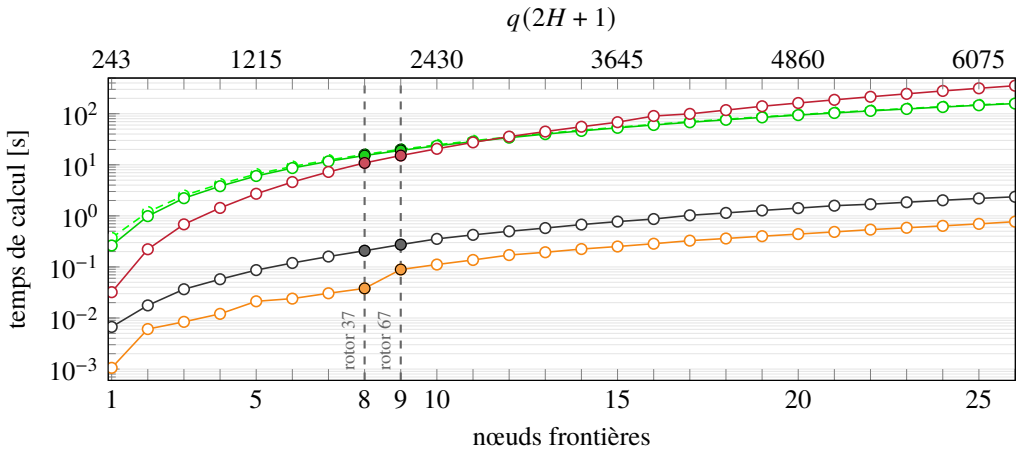



Figure 6.6 Temps de calcul pour l'évaluation de la jacobienne fréquentielle des efforts non-linéaires : multiplications matricielles denses (——), creuses scipy csc (- - - -), creuses Intel MKL (——), et par rFFT avec (——) et sans (——) prise en compte du caractère localisé des non-linéarités de contact.

des ddl non-linéaires apparaît être inefficace, que ça soit par multiplication dense ou creuse, dès lors que $n_{\mathrm{b}} \geq 3$, il est remarquable que plus d'un ordre de grandeur supplémentaire puisse être gagné en effectuant les DFT par rFFT. Une approche basée sur des matrices de DFT denses, traitant chaque ddl non-linéaire individuellement, aurait pu également être comparée mais il a été supposé que l'approche rFFT resterait supérieure compte tenu de sa complexité asymptotique minimale. C'est cette procédure qui est utilisée dans la suite de ce chapitre.

1. https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.matmul.html
2. https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.sparse.csc_matrix.dot.html
3. https://pypi.org/project/sparse-dot-mkl/

#### 6.2.3.3 Condensation non-linéaire découplée

Lors de la procédure de condensation sur les ddl non-linéaires du système en HBM, *cf.* section 3.2.1.4, les évaluations des termes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $C$ des équations (3.2.64), (3.2.67) et (3.2.68) font intervenir la résolution de systèmes linéaires disposant de la même matrice de coefficients $\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^\top}$ de dimension $(p(2H+1) \times p(2H+1))$ où, pour rappel, $p$ le nombre de ddl associé à la partition linéaire du système. En pratique, dans un contexte de réduction modale, $p = \eta$. Les temps de calcul associés à différentes approches sont présentés sur la figure 6.7 dans le cas du calcul du terme $C$ pour une dimension $p$ variable.

La résolution du système linéaire associé peut s'effectuer par (1) une factorisation LU (——) de la matrice $\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^\top}$ complète suivie d'une phase de descente-remontée pour la résolution des systèmes triangulaires. Cependant, étant donné que $\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}}$ correspond à une partition de la matrice de rigidité dynamique $\mathbf{Z}(\omega)$, elle est également diagonale par blocs, ce qui signifie que les blocs associés à chacun des harmoniques sont découplés les uns des autres. Il est donc possible de (2) résoudre plutôt $H+1$ systèmes linéaires de dimensions $(p \times p)$ pour la composante constante, et $(2p \times 2p)$ pour les harmoniques, puis concaténer les résultats afin d'améliorer les performances numériques (——). Cette stratégie est alors (3) parallélisable avec l'aide du module python numba (——) et permet des gains très significatifs dès que $p \geq 9$.

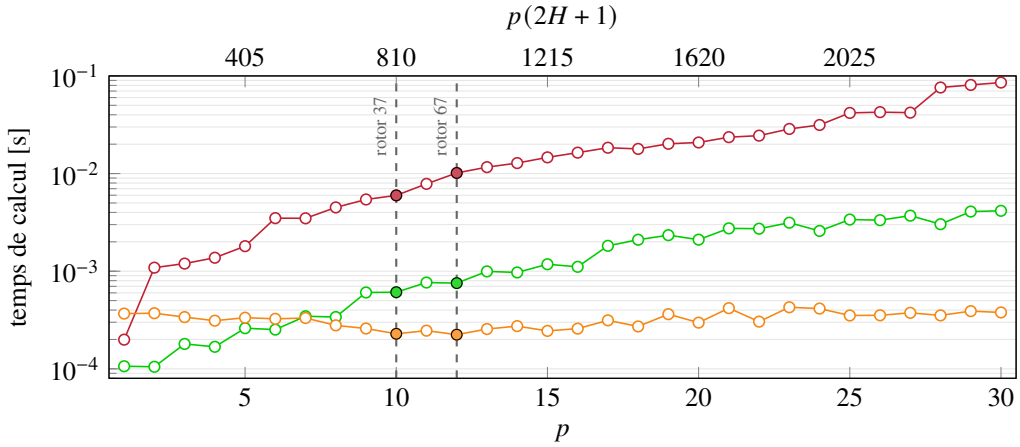



Figure 6.7 Temps de calcul pour la résolution du système linéaire intervenant dans le calcul de $C$ : factorisation LU (——) de la matrice $\mathbf{Z}^{\mathrm{ll}^\top}$ suivie d'une résolution des systèmes triangulaires, résolution de $H+1$ systèmes linéaires non parallélisée (——) et parallélisée (——).

Les temps de calcul issus de la parallélisation dépendent fortement du nombre de cœurs ainsi que du nombre d'harmoniques considéré. Néanmoins, la version parallélisée dispose de performances équivalentes à la version non-parallélisée lorsque ces deux paramètres sont petits. Pour les deux figures 6.6 et 6.7, les lignes pointillées verticales (- - - -) illustrent les configurations étudiées des

aubes rotor 37 de la section 6.3, et rotor 67 de la section 6.4.

## 6.3 Aube rotor 37

Rotor 37 est un compresseur axial transsonique composé de 36 aubes. Il est représenté sur la figure 6.8a. Cette roue aubagée fut initialement conçue au centre de recherche de la NASA de Lewis (Cleveland, Ohio, États-Unis) en 1978 dans le cadre de recherches en aérodynamique [208]. Les résultats expérimentaux ainsi que la géométrie du rotor 37 furent largement repris et utilisés dans le domaine de la mécanique des fluides numérique (CFD, de l'anglais *Computational Fluid Dynamics*) comme configuration de référence dans le but d'évaluer les performances des solveurs CFD tout au long des années 1990. Le rotor 37 est aujourd'hui un cas test standard dans le domaine de la mécanique des fluides. Plus récemment, ce même modèle a été utilisé pour mettre au point une configuration de référence pour l'analyse d'interactions aube/carter [29] par intégration temporelle.

### 6.3.1 Modélisation

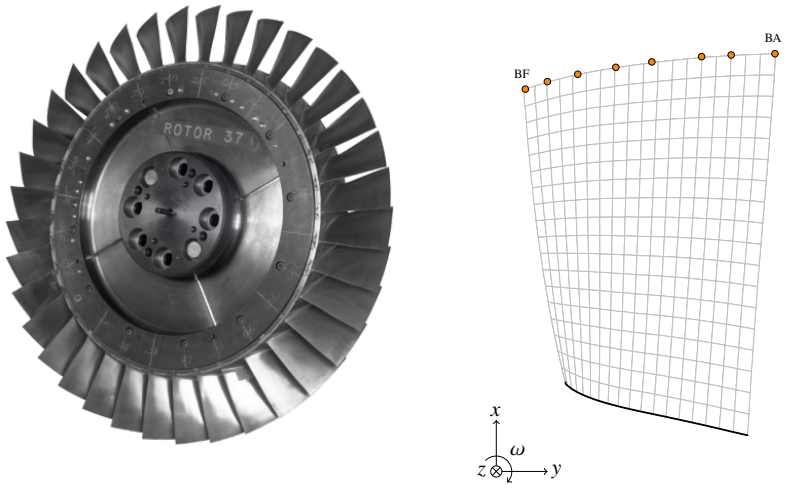
Le matériau du rotor 37 est un alliage à base de nickel : un acier maraging (terme issu de la contraction des mots anglais *martensitic* et *ageing*) de grade 200 [208]. L'alliage 18-Ni 200-maraging, sélectionné pour les simulations, dispose d'un module d'Young $E = 180$ GPa, d'une masse volumique $\rho = 8000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, d'un coefficient de Poisson $\nu = 0{,}3$, ainsi que d'une limite élastique $\sigma_Y = 1{,}38$ GPa. Le modèle volumique de l'aube ainsi que son maillage éléments finis sont générés à l'aide du logiciel ouvert Salome [4]. Le maillage éléments finis comporte 1800 éléments de type pentaèdre quadratique, et un total de 5745 nœuds pour 3 ddl/nœud, voir la figure 6.8b. L'aube est encastrée sur sa base (▬) et comporte huit nœuds frontières utilisés pour la gestion du contact, équirépartis entre le bord d'attaque (BA) et le bord de fuite (BF) le long du sommet d'aube. Dans un premier temps, les effets centrifuges sont négligés. L'étude des déformées des premiers modes propres de l'aube, présentées sur la figure 6.9, permet d'identifier s'il s'agit de modes de flexion ou de torsion. Les caractéristiques associées sont regroupées dans le tableau 6.2.

| mode | 1F | 1T | 2F |
|---|---|---|---|
| $\omega$ [rad·s$^{-1}$] | 5272,3 | 15760,5 | 19071,3 |
| $f$ [Hz] | 839,1 | 2508,4 | 3035,3 |

Tableau 6.2 Caractérisation des trois premiers modes de l'aube rotor 37.

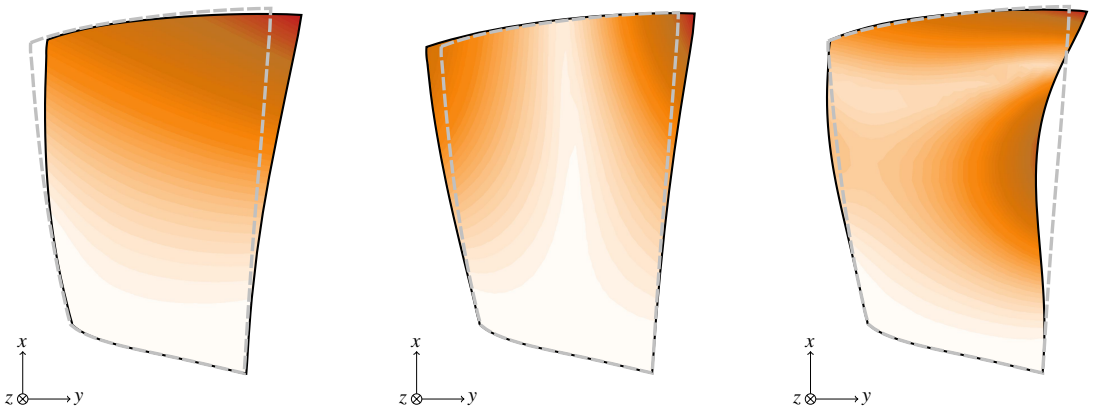
Pour des raisons d'efficacité numérique, une réduction de type Craig-Bampton est réalisée. Le modèle

4. https://www.salome-platform.org/




(a) (b)

Figure 6.8 NASA rotor 37 : (a) roue complète [219] et (b) maillage éléments finis considéré.




(a) mode 1F (b) mode 1T (c) mode 2F

Figure 6.9 Déformées modales des trois premiers modes de l'aube rotor 37.

réduit est obtenu en conservant les 8 nœuds frontières ainsi que $\eta = 10$ modes internes. Au total, le modèle réduit comprend ainsi $n = 34$ ddl. Un amortissement modal est considéré : le coefficient d'amortissement des premiers modes de flexion (1F) et de torsion (1T) est $\xi_{1-2} = 1 \cdot 10^{-3}$, le coefficient d'amortissement des autres modes vaut $\xi_{3+} = 5 \cdot 10^{-3}$. Ceci permet notamment d'atténuer l'influence des modes parasites à haute fréquence liés à la réduction modale.

### 6.3.2 Paramètres du scénario de contact

Les paramètres relatifs au scénario de contact et la déformation du carter considérés, tous deux définis dans la sous-section 6.2, sont les suivants. Le profil du carter dispose de $n_l = 2$ lobes de largeur

$w_1 = 0{,}15$. Pour l'ensemble des nœuds frontière de l'aube, $c_j = 5 \cdot 10^{-4}$ m et $p_j = 1{,}25 \cdot 10^{-4}$ m. Dans la cadre de la résolution par RL-HBM, les efforts de contact radiaux sont évalués à l'aide de l'équation (6.1.6) pour $k_\mathrm{n} = 1 \cdot 10^9$ N·m$^{-1}$ et $\epsilon_\mathrm{n} = 6 \cdot 10^2$ N. Les efforts tangentiels et axiaux, sont évalués à partir des équations (6.1.7) et (6.1.8) pour un coefficient de frottement $\mu = 0{,}15$. Un filtrage de Lanczos unitaire est considéré.

La vitesse nominale du rotor 37 est 17188,7 tr·min$^{-1}$, soit environ 1800 rad·s$^{-1}$. Sur le diagramme de Campbell tracé par la NASA pour la roue aubagée complète, voir la figure 16.c du document de référence [208], la vitesse critique la plus proche en lien avec le mode 1F est liée au quatrième régime moteur à 14500 tr·min$^{-1}$, soit environ $\omega = 1518$ rad·s$^{-1}$. Dans le cadre de simulations numériques en IT, et en ne considérant qu'une seule aube, une étude récente [29] a établi que cette même condition d'interaction se produit pour $\omega = 1672$ rad·s$^{-1}$. L'écart entre ces deux vitesses est lié au fait qu'un modèle mono-aube, encastré sur sa base, est nécessairement plus rigide que l'aube d'une roue aubagée complète, pour laquelle la flexibilité du disque permet un déplacement non nul du pied d'aube. D'autres sources d'erreurs peuvent être mentionnées, notamment de possibles variations de la géométrie considérée dans chaque étude ainsi qu'une incertitude sur les propriétés mécaniques du matériau utilisé dans le rapport de référence.

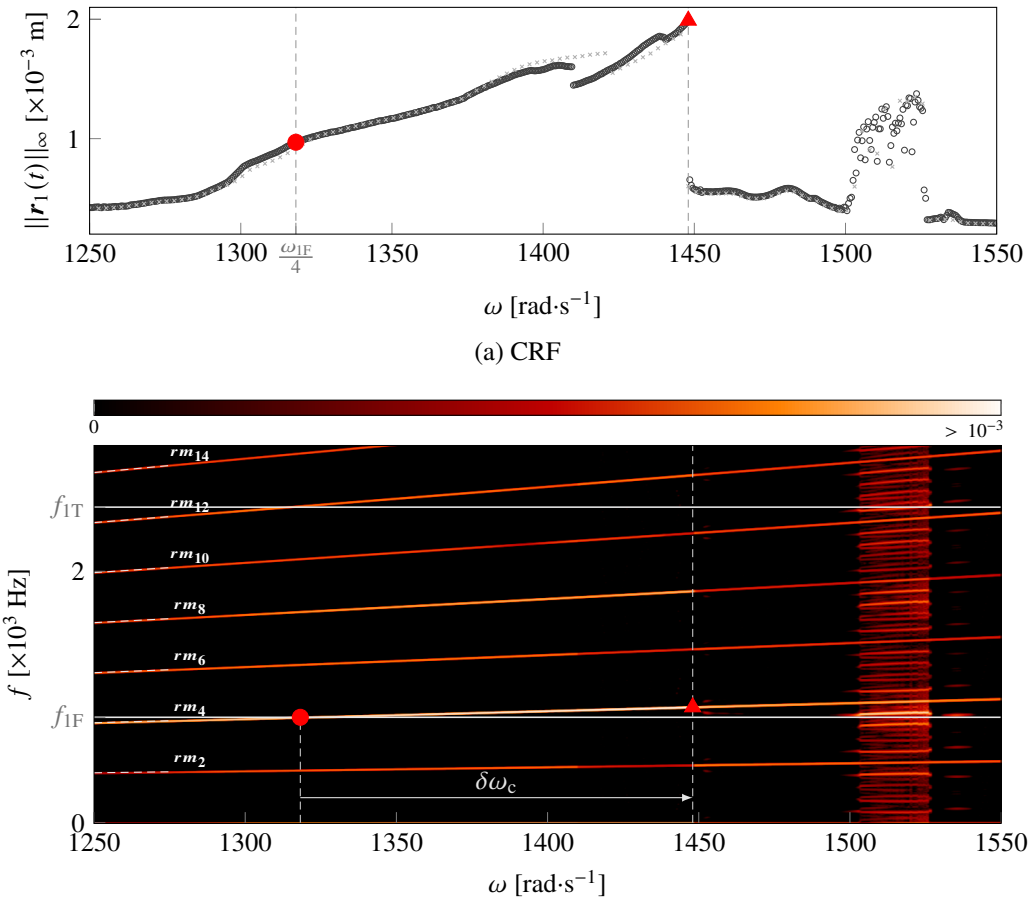
Les effets centrifuges ne sont pas pris en compte dans la première partie de cette étude. La première fréquence propre linéaire de l'aube est alors indépendante de sa vitesse de rotation. Cela a pour conséquence de déplacer vers des vitesses de rotation significativement plus faibles le lieu de l'intersection avec le quatrième régime moteur, de telle sorte que pour le modèle numérique considéré, l'interaction est prédite pour $\omega_{1\mathrm{F}}/4 = 1318$ rad·s$^{-1}$. Du fait du phénomène de raidissement au contact, et en prenant compte les résultats obtenus en IT [24, 26, 29], il semble raisonnable de rechercher la résonance non-linéaire sur une plage de vitesses pouvant dépasser de plus de 15 % la vitesse critique linéaire. Pour cette raison, la plage de vitesses étudiée est $\omega \in [1250; 1550]$ rad·s$^{-1}$.

### 6.3.3 Résultats de référence

La stratégie de référence d'IT a été spécifiquement validée par confrontation à des résultats expérimentaux dans le contexte des interactions de contact aube/carter [40, 41, 64]. Une simulation est effectuée tous les 0,5 rad·s$^{-1}$ avec un pas de temps $h = 2{,}5 \cdot 10^{-7}$ s sur un total de 200 tours. Toutes les simulations sont lancées indépendamment les unes des autres en supposant des conditions initiales nulles [24, 26, 29]. L'amplitude du régime permanent—norme infinie $\|r_j(t)\|_\infty$ du déplacement radial du nœud frontière $j$—est évaluée sur le dernier tour de simulation. Le contenu fréquentiel du régime permanent est quant à lui évalué sur les 40 derniers tours.

Les résultats en déplacements du BA ($j = 1$) sont présentés sur la figure 6.10. Outre la CRF tracée sur la figure 6.10a, une carte d'interaction—obtenue par la juxtaposition des spectres fréquentiels

calculés pour chaque simulation—est représentée sur la figure 6.10b. L'amplitude des spectres est représentée par un code couleur allant du noir (amplitude négligeable) au blanc (amplitude maximale). Du fait que la configuration de contact considérée présente deux zones de contact privilégiées par tour ($n_l = 2$), le contenu fréquentiel se situe le long des régimes moteur pairs, voir les lignes pointillées blanches $\boldsymbol{rm}_i$, $i \in 2[\![1\,..\,7]\!]$. Ces résultats illustrent également le phénomène de raidissement au contact puisque l'amplitude maximale de la résonance non-linéaire (▲) est localisée à une vitesse angulaire significativement plus élevée que la prédiction de la résonance linéaire (●) correspondant à l'intersection de la fréquence propre du 1F et de du quatrième régime moteur ($\boldsymbol{rm}_4$) à $\omega_{1F}/4 = 1318$ rad·s$^{-1}$.




(a) CRF

(b) carte d'interaction

Figure 6.10 Résultats d'IT de la configuration de référence de l'aube rotor 37. Déplacements radiaux du BA obtenus avec multiplicateurs de Lagrange (○) et pénalité régularisée (×) ; résonances linéaire (●) et non-linéaire (▲).

La CRF tracée sur la figure 6.10a reflète la dynamique sophistiquée de l'aube à travers la plage de vitesses angulaires considérée. Plusieurs sauts d'amplitude sont observables. Par ailleurs, la grande proximité des résultats obtenus pour les algorithmes de gestion de contact par multiplicateurs de

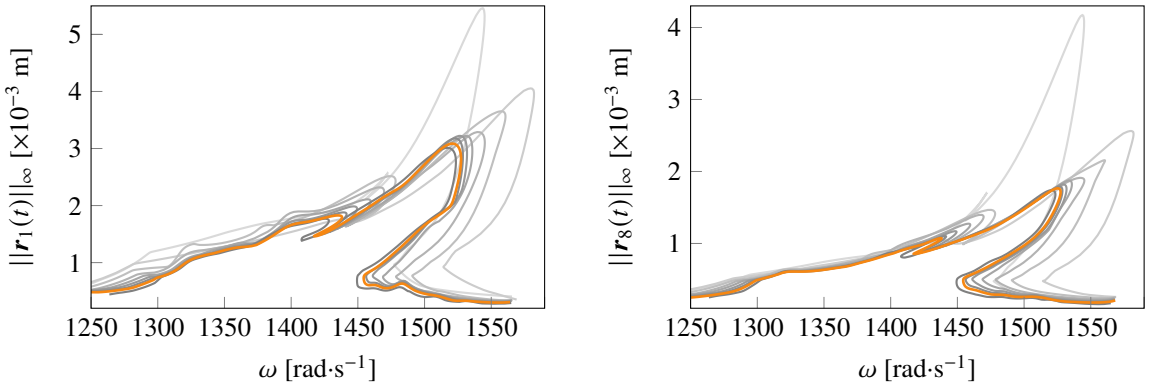
Lagrange (——) et pénalité régularisée (×) en IT permet de souligner la faible dépendance des résultats à l'algorithme de gestion du contact. Les amplitudes obtenues concordent en effet très bien entre les deux séries de simulation.

Finalement, les résultats présentés sur la figure 6.10 soulignent les limitations des stratégies IT pour l'analyse de tels systèmes non-linéaires. Les sauts en amplitude observés sont des indications claires que l'intégrateur temporel a subitement changé de branche de solution, mais il est impossible de savoir pourquoi ni—et c'est un point essentiel pour les ingénieurs en bureau d'études—si des solutions existent sur la branche de solutions à haute amplitude, au-delà de la résonance non-linéaire (▲) identifiée en IT.

### 6.3.4 Simulations RL-HBM

#### 6.3.4.1 Analyse de convergence

La convergence des résultats obtenus par HBM doit être évaluée par rapport à deux paramètres numériques clés : le nombre d'harmoniques retenus $H$ et le nombre d'échantillons dans le domaine temporel $N$. Dans un premier temps, les CRF des déplacements radiaux obtenus aux BA et BF ($j = 8$) sont tracées sur la figure 6.11 en fixant le nombre d'échantillons à $N = 1024$ et en faisant varier le nombre d'harmoniques retenus de $H = 5$ à $H = 80$. Il apparaît que les plus faibles valeurs




(a) BA (b) BF

Figure 6.11 CRF obtenues par RL-HBM ($N = 1024$) pour $H = \{5(\text{——}) ; 10(\text{——}) ; 15(\text{——}) ; 20(\text{——}) ; 25(\text{——}) ; 30(\text{——}) ; 35(\text{——}) ; 40(\text{——}) ; 80(\text{——})\}$ aux (a) BA et (b) BF.

de $H$ fournissent des résultats très approximatifs, bien que convergés au sens de la procédure itérative de Newton, avec une surestimation significative de la fréquence et de l'amplitude à la résonance non-linéaire. À mesure que $H$ augmente, les CRF deviennent de plus en plus proches, soulignant ainsi la convergence asymptotique des résultats fournis par la RL-HBM. Seules des différences très

mineures sont visibles entre les CRF obtenues pour $H = 40$ et $H = 80$, de sorte que les résultats sont supposés être convergés à partir de $H = 40$.

Les CRF obtenues par RL-HBM pour $H = 40$ et un nombre d'échantillons temporels variant entre $N = 128$ et $N = 4096$ sont représentées sur la figure 6.12. Des agrandissements sur les zones les plus sensibles numériquement—le point de retournement autour de $\omega = 1430$ rad·s$^{-1}$ et la résonance non-linéaire—sont fournis sur les figures 6.12c et 6.12d. Le paramètre $N$ est notamment essentiel pour contrôler les erreurs d'*aliasing*. Ces dernières peuvent entraîner une divergence du solveur, un retournement de la procédure de continuation ou des oscillations numériques au niveau de la CRF [25] susceptibles de ralentir la convergence du solveur. À l'exception de la valeur la plus faible

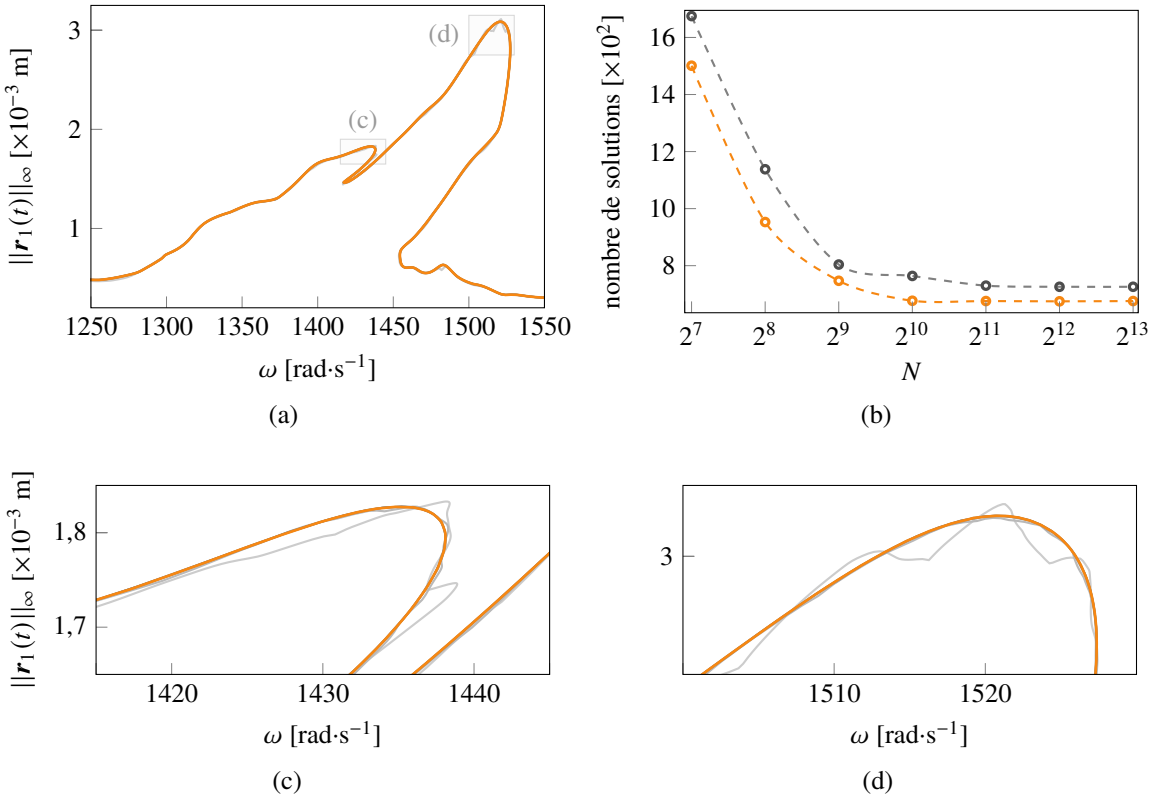



Figure 6.12 CRF obtenues par RL-HBM ($H = 40$) pour $N = \{2^7 = 128$(——) ; 256(——) ; 512(——) ; 1024(——) ; 2048(——) ; $2^{13} = 4096$(——)$\}$ (a) aperçu global de la CRF au BA, (b) nombre de solutions total avec (-o-) et sans (-o-) filtre de Lanczos, zooms (c) au niveau du point de retournement et (d) de la résonance non-linéaire.

$N = 128$ pour laquelle la CRF présente des oscillations particulièrement visibles, la valeur de $N$ a un impact faible ou nul sur l'allure des CRF. Cependant, l'augmentation de $N$ diminue de manière très significative le nombre de points de solution requis pour décrire l'entièreté de la CRF, ce qui indique une efficacité globale accrue de la procédure numérique. Le nombre de points de solution

requis devient stable pour $N \geq 1024$. De plus, la figure 6.12b permet de mettre en évidence que l'utilisation du filtrage de Lanczos réduit—d'environ 10 % en moyenne—le nombre de points de solution requis pour décrire les CRF calculées.

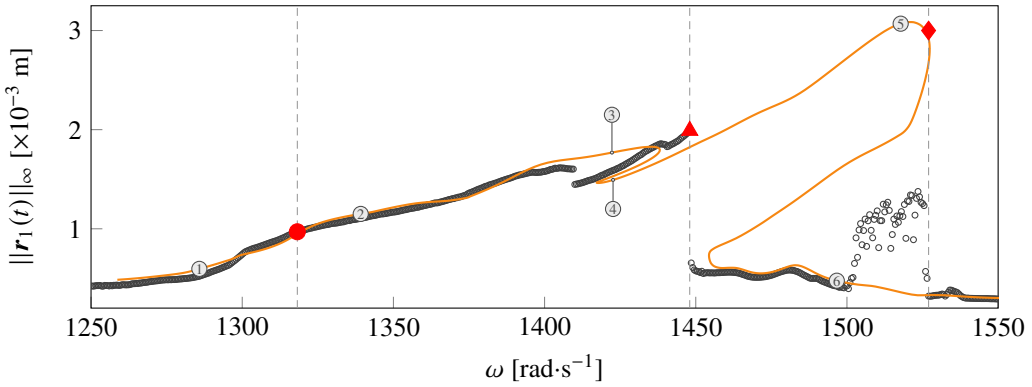
Les valeurs $H = 40$ et $N = 1024$ sont utilisées pour tous les calculs RL-HBM effectués dans la suite de cette section.

#### 6.3.4.2 Analyse des courbes de réponses en fréquence

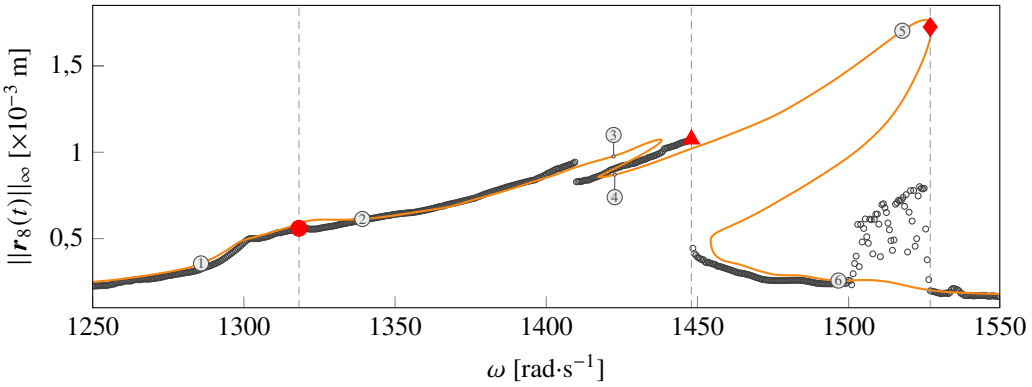
Les CRF en termes de déplacements radiaux aux BA et BF de l'aube obtenues par RL-HBM sont présentées respectivement sur les figures 6.13a et 6.13b. Les solutions de référence d'IT correspondantes sont également représentées sur ces figures à des fins de comparaison. Dans l'ensemble, il y a un très bon accord entre les résultats obtenus par IT et RL-HBM. Il est avant tout remarquable de constater que la résonance non-linéaire prédite par la RL-HBM, $\omega_{rnl} \simeq 1527$ rad·s$^{-1}$ (♦), est bien plus élevée que celle prédite avec la stratégie d'IT $\omega_{rnl} \simeq 1448$ rad·s$^{-1}$ (▲). Par rapport à la résonance linéaire attendue pour $\omega_{1F}/4 = 1318$ rad·s$^{-1}$ (●), cela implique un phénomène de raidissement au contact prédit par la RL-HBM ($\delta\omega_{c,HB} = 209$ rad·s$^{-1}$) qui est 61 % plus élevé que le raidissement au contact prédit par IT ($\delta\omega_c = 130$ rad·s$^{-1}$). Outre ce décalage fréquentiel, un élément clé pour les concepteurs réside dans le fait que les amplitudes maximales de vibration prédites par les solutions de référence d'IT sont inférieures d'environ 59 % à celles obtenues avec la RL-HBM. Les différences constatées entre l'évolution des amplitudes de vibration aux BA et BF traduisent la richesse de la réponse dynamique de l'aube. Il est intéressant de noter que la vitesse angulaire pour laquelle l'amplitude de vibration maximale est mise en évidence au BA, voir le point ⑤ sur la figure 6.13a, est légèrement inférieure à celle correspondant à l'amplitude de vibration maximale au niveau du BF. Ces observations soulignent à nouveau toute la complexité du comportement dynamique de l'aube en réponse à des contacts répétés.

Il existe cependant une zone pour laquelle l'IT et la RL-HBM ne semblent pas fournir des résultats similaires. En effet, au niveau de la branche inférieure de solutions pour $\omega \in [1500; 1527]$ rad·s$^{-1}$, les solutions de référence IT ont des amplitudes beaucoup plus élevées que celles prédites par RL-HBM. Une analyse approfondie de cette dernière zone est effectuée dans la sous-section 6.3.4.5.

Afin d'évaluer plus quantitativement la précision des résultats obtenus avec la RL-HBM, plusieurs points—numérotés de ① à ⑥ sur la figure 6.13, voir le tableau 6.3—sont considérés pour une analyse comparative approfondie. Dans les zones où la RL-HBM révèle un comportement dynamique complexe (points ③ et ⑥) ou dans les zones de coexistence de solutions où les amplitudes prédites peuvent ne pas correspondre entre IT et la RL-HBM (zones ③ et ⑤), les simulations de référence IT sont réexécutées en utilisant des conditions initiales directement générées à partir des solutions RL-HBM correspondantes. Pour ce faire, les coefficients de Fourier des solutions RL-HBM associées




(a) BA




(b) BF

Figure 6.13 CRF obtenues par RL-HBM (——) et IT (○) aux (a) BA et (b) BF du rotor 37 : résonance linéaire (●), résonances non-linéaires IT (▲) et RL-HBM (♦).

| point | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\omega$ [rad·s$^{-1}$] | 1285,823 | 1339,193 | 1422,277 | 1422,643 | 1517,767 | 1496,641 |

Tableau 6.3 Vitesses angulaires considérées dans l'analyse des résultats de l'aube rotor 37.

sont utilisés pour générer les déplacements à deux instants consécutifs en phase avec le carter ovalisé. Ces résultats sont alors superposés aux résultats issus de la RL-HBM.

#### 6.3.4.3 Déplacements et efforts

Les déplacements et les efforts de contact obtenus avec les deux méthodologies pour les points ① à ⑥ sont représentés sur les figures 6.14 et 6.15. Sur chaque sous-figure, les couleurs sombres sont utilisées pour les quantités relatives au BA tandis que les couleurs plus claires sont utilisées pour les quantités relatives au BF. Le vrillage de l'aube implique un décalage angulaire entre ces deux points,

ce qui explique pourquoi les lobes du carter apparaissent à des endroits légèrement différents dans les tracés des déplacements.

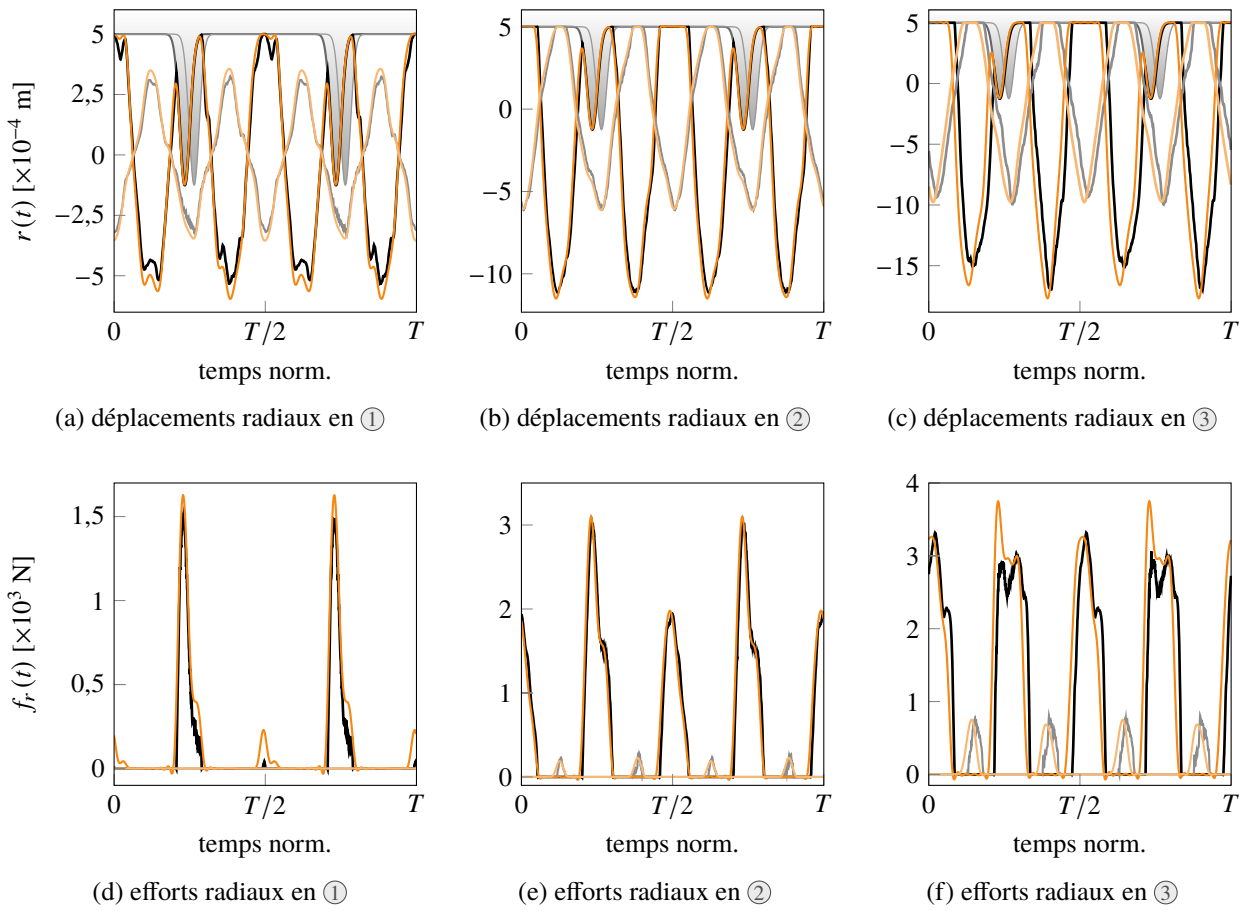
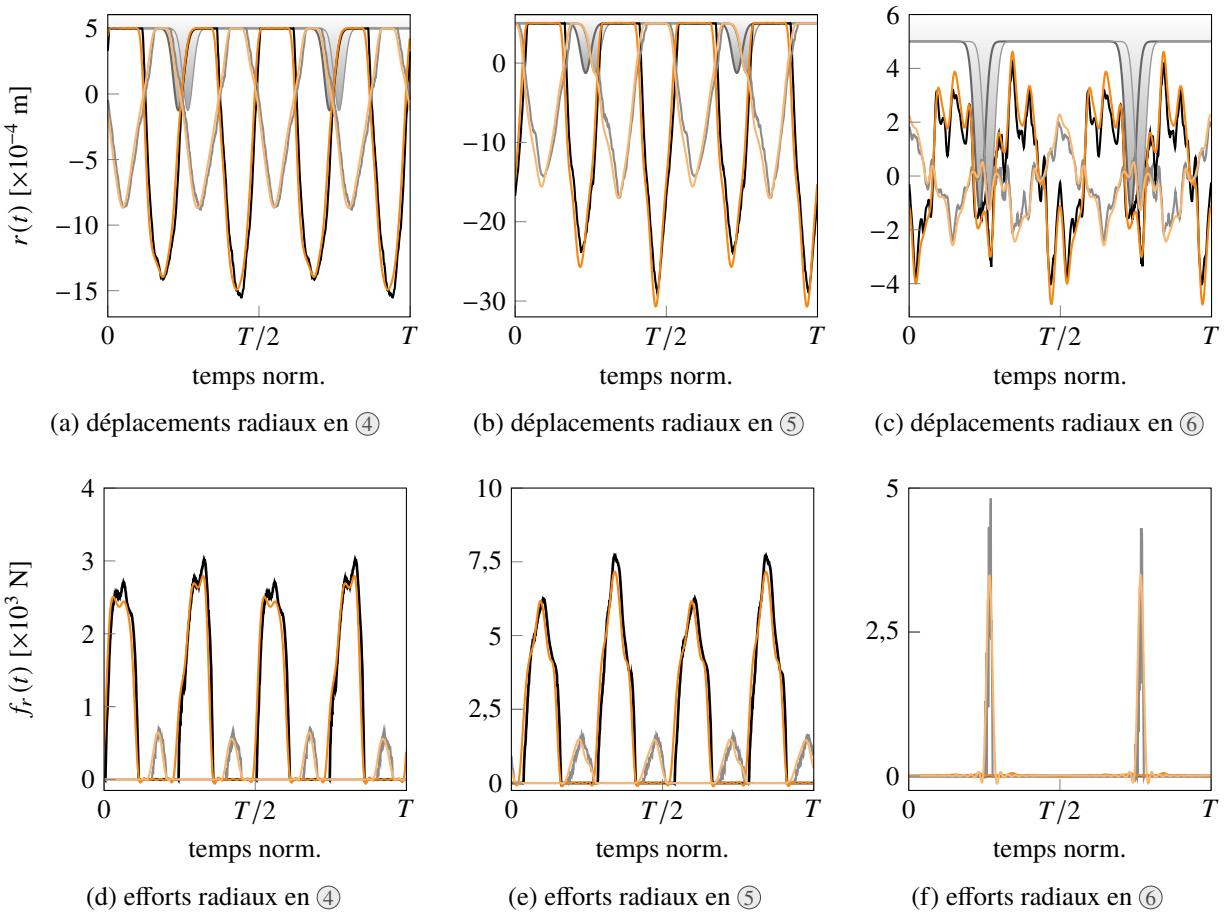



Figure 6.14 Déplacements et des efforts de contact radiaux obtenus par RL-HBM et IT aux BA et BF pour les points de contrôle : ①, ②, et ③ : IT BA (——), BF (——), RL-HBM BA (——) et BF (——).

En examinant à la fois les déplacements et les efforts de contact pour chacun des six points analysés, on constate un très bon accord entre les résultats obtenus avec les deux stratégies numériques. Malgré la sévérité de la configuration de contact, il n'y a pratiquement aucune oscillation parasite visible sur les résultats obtenus avec la RL-HBM. Cela met en évidence les effets bénéfiques de la technique de filtrage de Lanczos employée pour atténuer le phénomène de Gibbs.

Les seules différences non-négligeables entre les solutions issues de l'IT et celles de la RL-HBM se situent au niveau des efforts de contact, en particulier sur les figures 6.14f, 6.15d et 6.15e. Il est intéressant de noter que ces écarts ne se traduisent pas par des erreurs significatives sur les déplacements prédits. Il est supposé que l'origine de ces différences réside dans le fait que deux algorithmes de traitement de contact très distincts (multiplicateurs de Lagrange / méthode de

pénalité régularisée) sont employés. Néanmoins, et de manière similaire à ce qui a été observé sur l'application académique de la barre, les résultats obtenus confirment dans l'ensemble une relative faible sensibilité des résultats à l'algorithme de gestion du contact.




(a) déplacements radiaux en ④ (b) déplacements radiaux en ⑤ (c) déplacements radiaux en ⑥

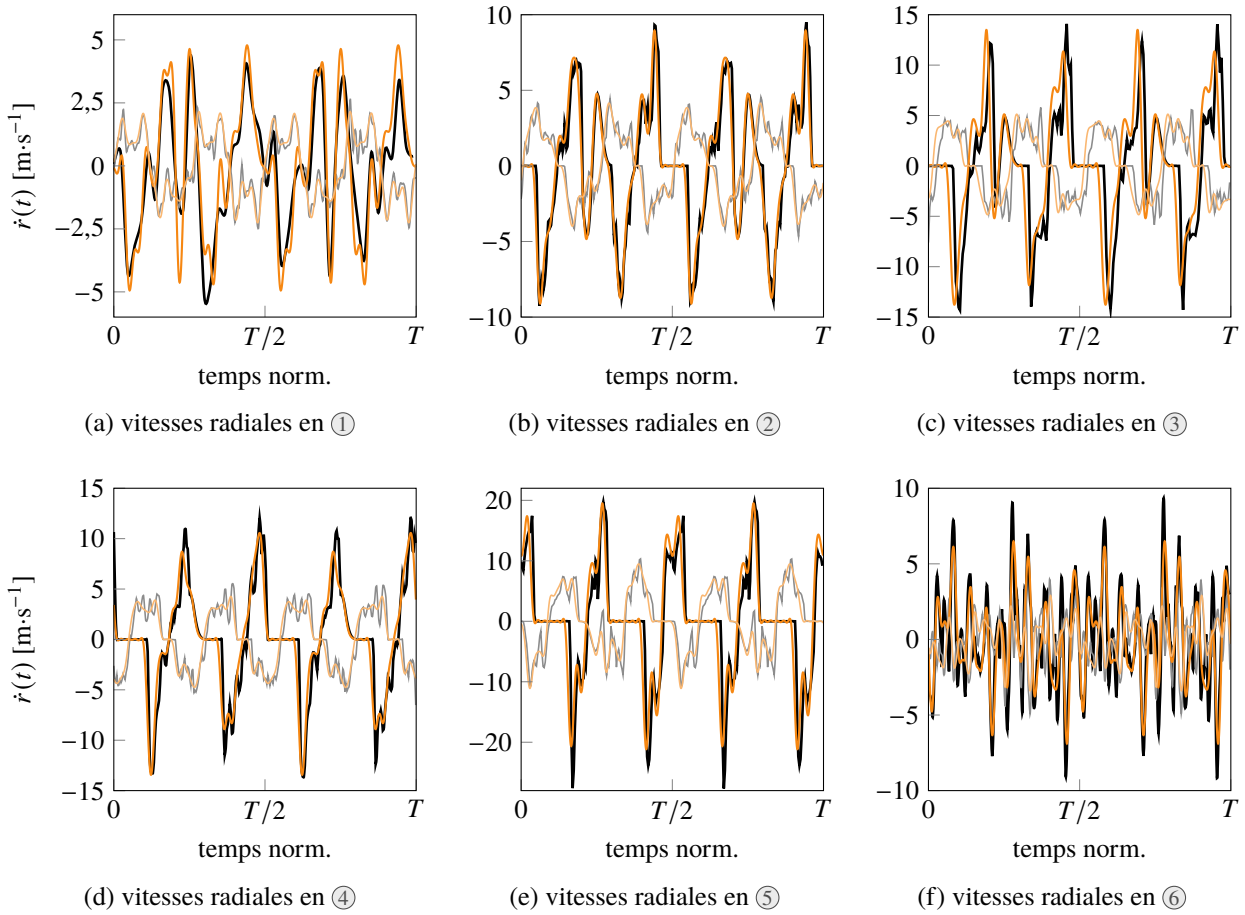
(d) efforts radiaux en ④ (e) efforts radiaux en ⑤ (f) efforts radiaux en ⑥

Figure 6.15 Déplacements et efforts de contact radiaux obtenus par RL-HBM et IT aux BA et BF pour les points de contrôle : ④, ⑤, et ⑥ : IT BA (——), BF (——), RL-HBM BA (——) et BF (——).

L'excellent accord obtenu au point ⑤ mérite d'être souligné car il démontre que la résonance non-linéaire prédite avec la RL-HBM—une solution qui n'a pas été obtenue par IT avec des conditions initiales nulles—peut effectivement être obtenue sous réserve de partir du bon jeu de conditions initiales. Bien qu'une analyse de stabilité soit nécessaire pour le confirmer, cette solution est très probablement stable puisque les conditions initiales utilisées sont associées à une procédure de traitement du contact (pénalité régularisée) différente de celle employée par la stratégie d'IT (multiplicateurs de Lagrange). Bien que cela ne soit pas montré ici, il a également été vérifié qu'il y a un très bon accord sur les déplacements radiaux, tangentiels et axiaux de tous les autres nœuds frontières.

#### 6.3.4.4 Vitesses

Les champs de vitesses obtenues aux BA et BF avec la stratégie de référence IT et la RL-HBM sont représentés sur la figure 6.16. Là encore, on constate un très bon accord entre les deux stratégies numériques employées. En IT, la forte sensibilité du calcul des vitesses liée à (1) la nature du schéma aux différences finies, combinée à (2) l'algorithme de prédiction/correction employé pour la gestion des contacts, provoque l'apparition d'oscillations parasites hautes fréquences sur les signaux de référence. Dans ce contexte, les signaux obtenus par RL-HBM ont une apparence plus lisse, avec des oscillations minimales au voisinage des instants de transition d'état.



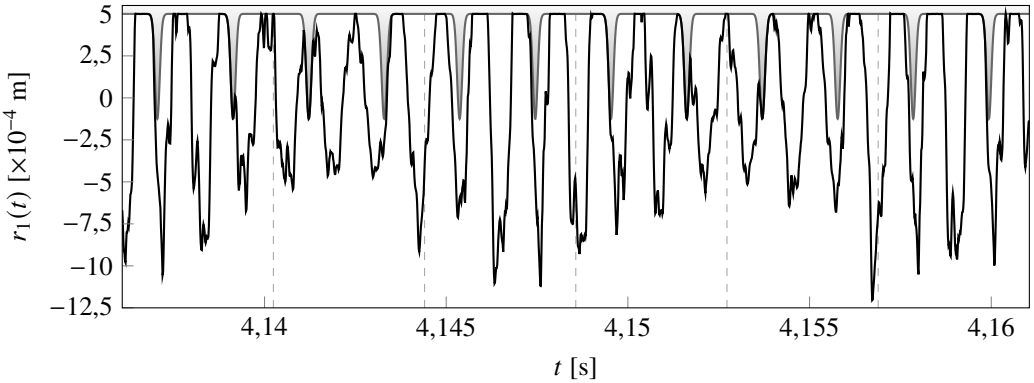

(a) vitesses radiales en ①
(b) vitesses radiales en ②
(c) vitesses radiales en ③
(d) vitesses radiales en ④
(e) vitesses radiales en ⑤
(f) vitesses radiales en ⑥

Figure 6.16 Vitesses radiales obtenues par RL-HBM et IT aux BA et BF pour les points de contrôle : ①, ②, ③, ④, ⑤ et ⑥ : IT BA (——), BF (——), RL-HBM BA (——) et BF (——).

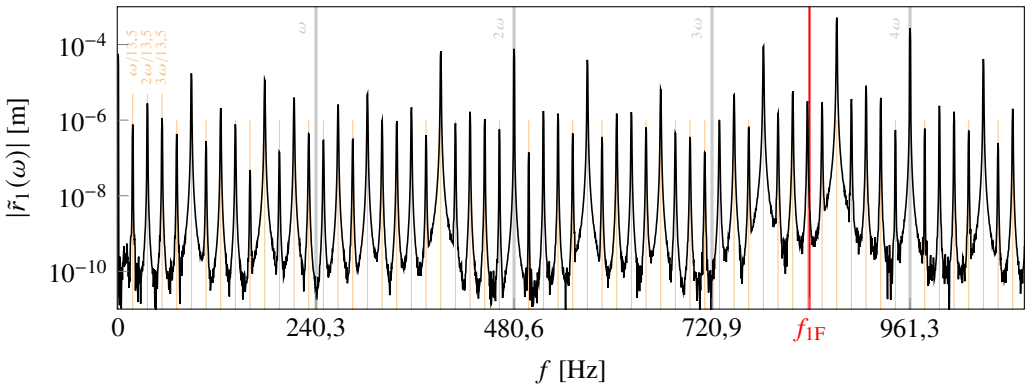
La comparaison des résultats en vitesses est plus délicate. En effet, les champs de vitesses demeurent une quantité numériquement très sensible à calculer en IT pour ce système car le schéma d'intégration utilisé requiert un pas très petit pour être stable, ce qui a tendance à accentuer les erreurs d'arrondi. Néanmoins, les allures globales des vitesses comparées restent d'une qualité satisfaisante.

#### 6.3.4.5 Zone de désaccord

Comme évoqué précédemment, IT et RL-HBM prédisent des solutions d'amplitudes très différentes sur la plage de vitesses $\omega \in [1500; 1527]$ rad·s$^{-1}$. Une attention particulière doit être portée sur cette plage de vitesses puisque la RL-HBM ne parvient pas à capter les solutions de grande amplitude qui pourraient être préjudiciables à la durée de vie de l'aube. Le déplacement radial du BA prédit avec la stratégie de référence d'IT pour $\omega = 1510$ rad·s$^{-1}$ est tracé sur la figure 6.17a pour les six derniers tours de simulation. Le spectre de fréquences de ce signal temporel est lui représenté sur la figure 6.17b. La figure 6.17b met en évidence la présence d'une solution en déplacements d'amplitude modulée qui explique le caractère diffus de l'amplitude des solutions captée dans ce voisinage. De plus, l'analyse du spectre associé permet de distinguer clairement la présence de composantes fréquentielles non-négligeables hors harmoniques HBM. En effet, le pic d'amplitude maximale du spectre ne peut même pas être représenté par la résolution HBM utilisée ici.




(a) déplacements obtenus du 995$^{\text{ième}}$ au 1000$^{\text{ième}}$ tour




(b) spectre fréquentiel obtenu par FFT

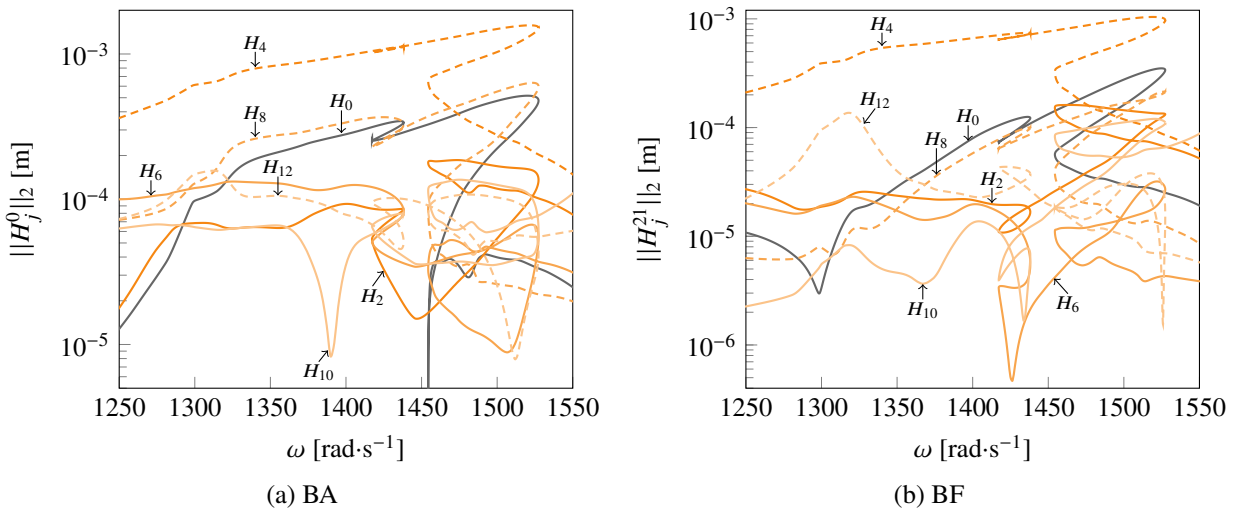
Figure 6.17 Solution 13,5 $T$-périodique obtenue par IT pour $\omega = 1510$ rad·s$^{-1}$.

Une inspection minutieuse du spectre de la figure 6.17b révèle que seule une petite partie du contenu harmonique du signal est représenté dans la base de Fourier considérée par la RL-HBM (voir les

lignes grises (——) de la figure 6.17b). Ceci explique pourquoi l'approche RL-HBM ne parvient pas à capter les solutions de haute amplitude. Il est intéressant de noter que le signal temporel représenté sur la figure 6.17a présente en fait une période qui est 13,5 fois plus grande que la période de révolution de l'aube $T$ : c'est une solution sous-harmonique. Bien que le calcul de ce type de solution avec la RL-HBM soit théoriquement envisageable, celui-ci impliquerait de considérer un rapport sous-harmonique $\nu = 27$, augmentant de ce fait la taille de la base de Fourier $\mathbb{T}_H$ à $n(2\nu H + 1)$ (soit une augmentation du nombre d'inconnues fréquentielles de 2754 à 73474). Le coût en termes de temps de calcul deviendrait tout simplement inacceptable avec les ressources informatiques actuelles.

### 6.3.5 Contributions harmoniques et modales

Les contributions harmoniques des déplacements radiaux aux BA et BF sont représentées sur la figure 6.18 en utilisant une échelle semi-logarithmique. Pour des raisons de clarté, seuls les douze premiers harmoniques y sont représentés. La contribution du $j^{\text{ième}}$ harmonique associé au $i^{\text{ième}}$ ddl




(a) BA (b) BF

Figure 6.18 Contributions harmoniques des déplacements radiaux obtenus par RL-HBM aux (a) BA et (b) BF : $H_0$ (——), $H_2$ (——), $H_4$ (- - - -), $H_6$ (——), $H_8$ (- - - -), $H_{10}$ (——) and $H_{12}$ (- - - -).

d'un système mécanique est évaluée comme suit :

$$||H_j^i||_2 = \begin{cases} |a_0^i|/2 & \text{pour } j = 0 \\ \sqrt{{a_j^i}^2 + {b_j^i}^2} & \text{pour } j \in [\![1\,..\,H]\!] \end{cases} \tag{6.3.1}$$

Les résultats tracés sur les figures 6.18a et 6.18b soulignent que seuls les harmoniques pairs répondent, ce qui est cohérent avec le fait que la configuration de contact présente deux lobes régulièrement espacés sur la surface interne du carter. Cette constatation était déjà mise en évidence à travers la

carte d'interaction issue des résultats d'IT de référence décrite sur la figure 6.10b. Dans un paradigme de résolution fréquentiel, cette parité des harmoniques pourrait être exploitée en envisageant une décomposition restreinte aux harmoniques pairs de la réponse du système pour ainsi diviser la taille des systèmes à résoudre par deux, et ainsi bénéficier de meilleures performances en termes de temps de calcul.

Il peut également être intéressant d'analyser les contributions (également appelés facteurs de participation, voir [195], § 2.5) modales de la réponse de l'aube pour chacune des solutions en déplacements calculées par RL-HBM. Dans cette optique, la contribution maximale du $j^{\text{ième}}$ mode est évaluée le long d'une période de mouvement telle que :

$$||\boldsymbol{\gamma}_{j,i}||_\infty = \max_{i \in [\![0..N-1]\!]} \left( |\boldsymbol{\phi}_j^\top \mathbf{M} \boldsymbol{x}(\tau_i)| \right) \tag{6.3.2}$$

où $\boldsymbol{\phi}_j$ est le $j^{\text{ième}}$ vecteur propre constitutif de la base modale $\mathbf{M}$-normée de la structure étudiée et $\boldsymbol{x}(\tau_i)$ le vecteur des déplacements du système à l'instant $\tau_i$. Les contributions modales des trois premiers modes (relatives) des solutions issues de la RL-HBM sont tracées sur la figure 6.19 pour $\eta = 30$ afin de s'assurer de la représentativité des modes de la base réduite et des contributions résultantes.

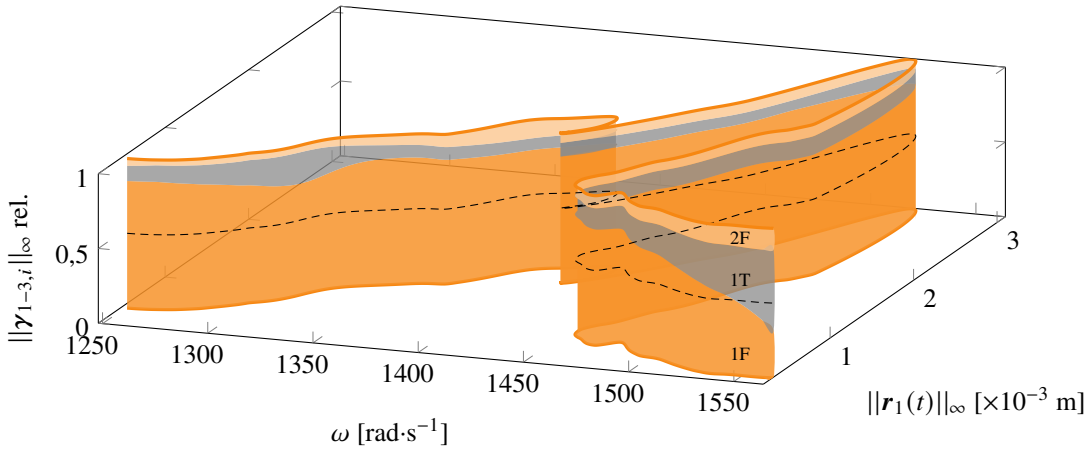
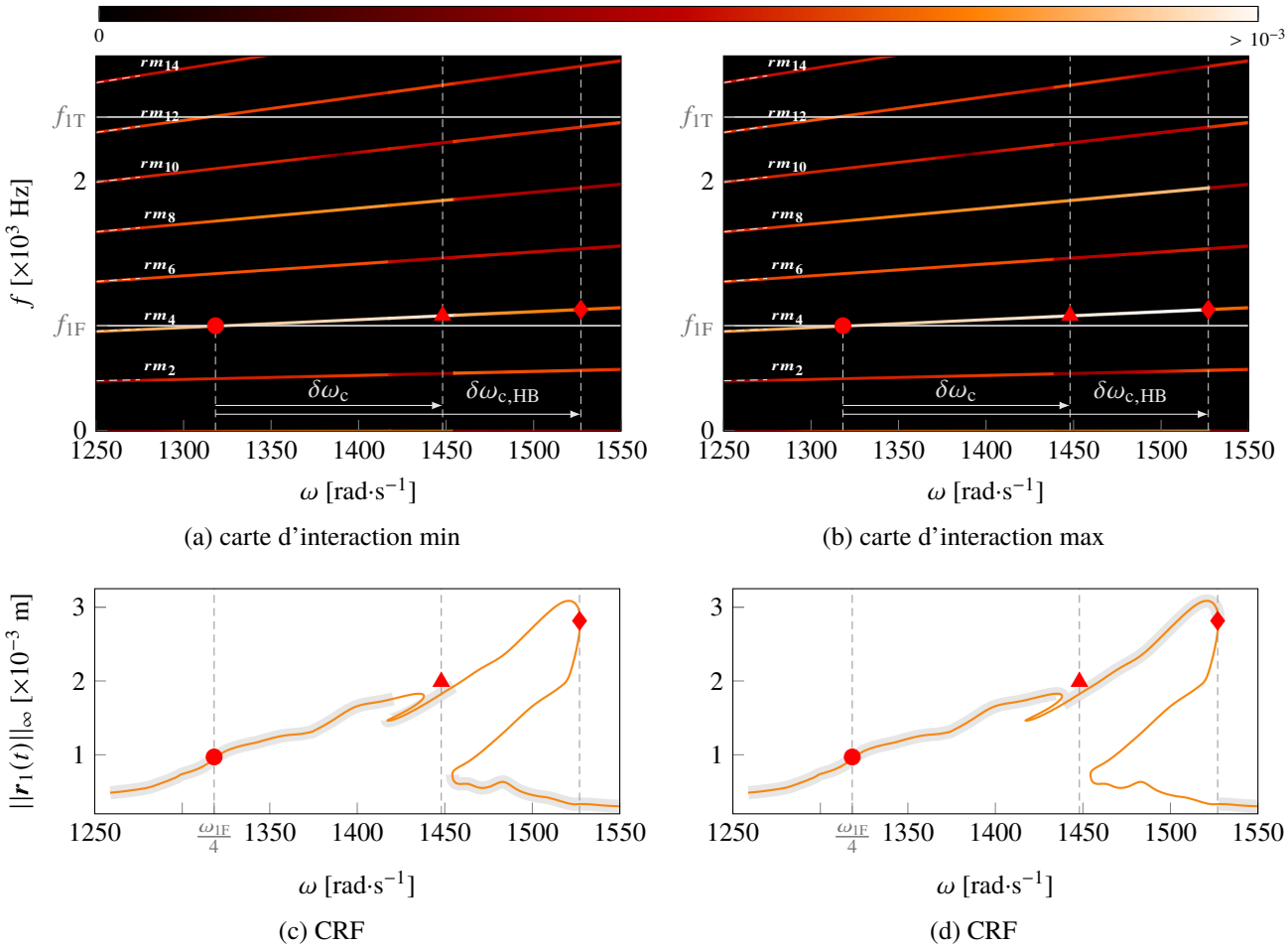



Figure 6.19 Contributions modales (1F (■), 1T (■), 2F (■)) des solutions en déplacements issues de la RL-HBM pour l'aube rotor 37 pour un calcul réalisé à $\eta = 30$. Seuil de 50 % (- - - -).

La contribution du premier mode de flexion 1F est majoritaire sur l'ensemble de la plage de vitesses étudiée. La répartition des contributions des modes 1T et 2F semble également être relativement homogène sur la plage d'études.

### 6.3.6 Cartes d'interaction

Les résultats issus de la RL-HBM permettent également de construire sans coût supplémentaire des cartes d'interactions telles que présentées sur la figure 6.20. En effet plusieurs cartes sont traçables car pour les zones où plusieurs solutions coexistent pour une même vitesse $\omega$, il est aussi bien possible de sélectionner (▭) le contenu fréquentiel de la solution d'amplitude minimale, voir la figure 6.20a, que de retenir celui de la solution d'amplitude maximale, voir la figure 6.20b.




(a) carte d'interaction min

(b) carte d'interaction max

(c) CRF

(d) CRF

Figure 6.20 Cartes d'interaction issues des résultats des simulations RL-HBM au BA du rotor 37 : critère de sélection (▭) du (a) minimum et (b) maximum d'amplitude de vibration. Légendes : résonance linéaire (●), résonances non-linéaires prévues par l'IT (▲) et par la RL-HBM (♦).

### 6.3.7 Analyse de contraintes

Pour chacun des six points auxquels les résultats obtenus par IT et RL-HBM ont été confrontés, *cf.* tableau 6.3, les champs de contraintes dans l'aube sont obtenus à l'instant où le déplacement radial

de l'aube est maximal. Ces champs sont obtenus en deux étapes : (1) un redéploiement du champ de déplacements de l'espace réduit sur le maillage éléments finis est effectué avant (2) d'obtenir le champ de contraintes de von Mises par résolution d'un calcul statique à déplacements imposés. Ces champs de contraintes sont représentés sur la figure 6.21. Pour chacun d'entre eux, la contrainte maximale calculée est indiquée relativement à la limite d'élasticité du matériau de l'aube $\sigma_{\mathrm{Y}}$.

Il y a un excellent accord entre les champs de contraintes obtenus avec les deux méthodologies. En complément des observations faites précédemment sur les déplacements aux BA et BF, ces observations confirment que les résultats obtenus avec la RL-HBM sont très précis, aussi bien au niveau de l'interface non-linéaire de contact qu'au niveau des ddl linéaires, liés aux valeurs des coefficients modaux dans l'espace réduit.

Il est remarquable que la configuration de contact considérée soit extrêmement sévère au niveau de la résonance non-linéaire : les niveaux de contrainte dans l'aube dépassent de loin sa limite d'élasticité, voir les figures 6.21i et 6.21j. D'une part, cette observation met évidence la sévérité de la configuration de contact considérée ainsi que la robustesse de la RL-HBM qui permet d'obtenir des solutions dont les amplitudes de déplacement importantes peuvent entraîner l'apparition de fissures dans l'aube. D'autre part, les niveaux de contraintes obtenus sont une bonne indication que les solutions prédites au voisinage de la résonance non-linéaire—que ce soit en IT ou par RL-HBM—doivent être considérées avec prudence puisqu'elles sortent du cadre des petites perturbations inhérent à l'utilisation de modèles éléments finis linéaires.

### 6.3.8 Analyses paramétriques

Dans cette sous-section, les CRF associées aux BA et BF tracées sur la figure 6.13 servent de référence pour toutes les analyses paramétriques considérées ; elles sont dorénavant mises en avant via un plan coloré (▭) tandis que les CRF obtenues en faisant varier un paramètre sont tracées en orange (——)/(——). Les résultats de référence d'IT sont également tracés (——) dans toutes les figures suivantes (avec une norme infinie calculée sur 40 tours). Cependant, pour chaque nouveau jeu de paramètres, afin d'éviter des graphiques visuellement trop denses, seul un nombre limité de simulations d'IT, représentées par des marqueurs noirs, a été réalisé en utilisant des conditions initiales issues des solutions de la RL-HBM. L'accord entre IT et RL-HBM, constaté dans la figure 6.13, reste représentatif de l'accord global entre les deux méthodologies pour tout jeu de paramètres considérés (coefficient de frottement exclu).

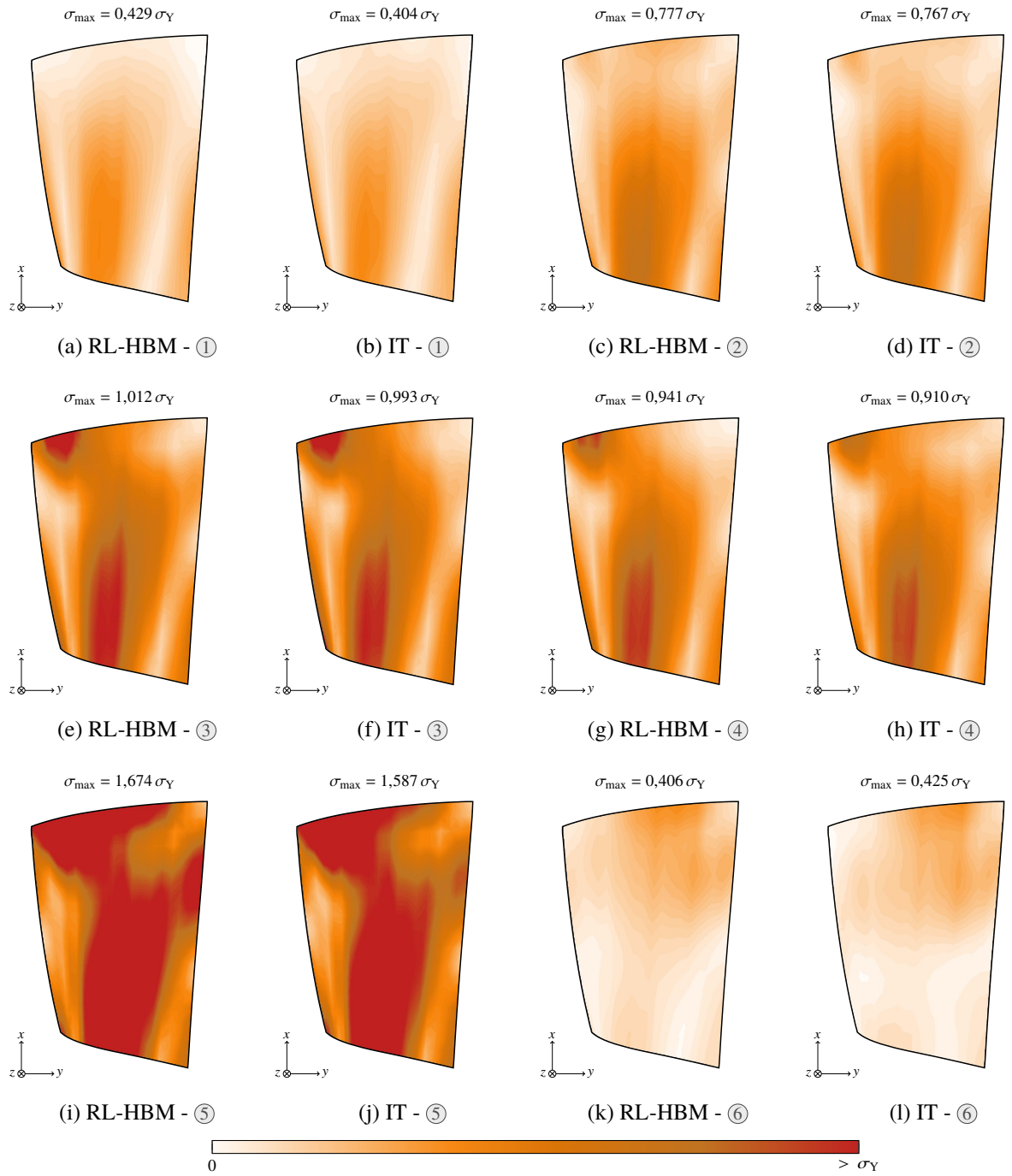
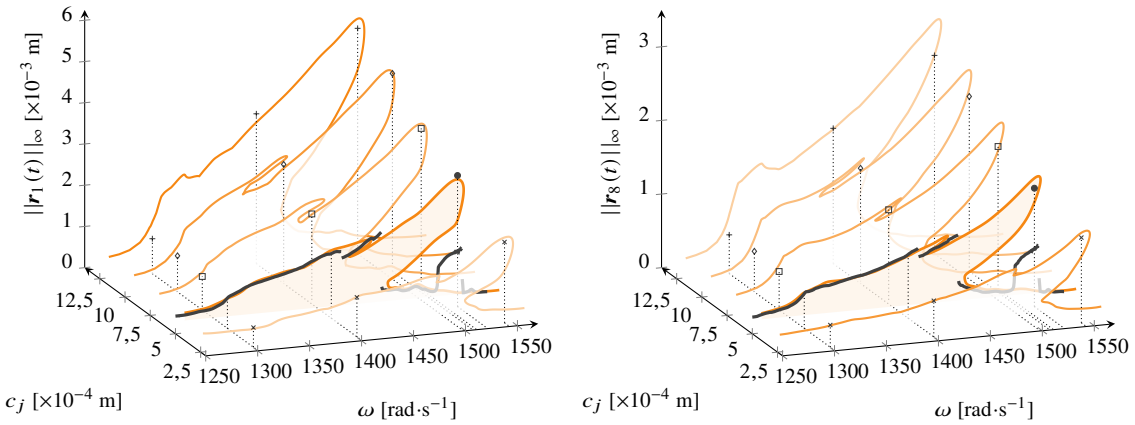



Figure 6.21 Champs de contraintes obtenus par RL-HBM et IT pour l'aube rotor 37.

#### 6.3.8.1 Influence du jeu

Le jeu entre l'extrémité de l'aube et le carter est un paramètre essentiel pour l'analyse des interactions aube/carter. C'est en effet dans l'intention de minimiser cette quantité que les motoristes investissent

pour mieux comprendre les interactions aube/carter [88]. Au cours des dernières années, il a été démontré que les jeux de fonctionnement peuvent affecter de manière significative la dynamique de l'aube, et qu'un changement mineur de cette quantité peut, d'un point de vue numérique, conduire à des variations significatives des amplitudes de vibration résultantes. Il a également été souligné que l'idée d'atténuer les interactions dangereuses liées au contact par une augmentation des jeux de fonctionnement peut être contre-productive, car des jeux plus importants signifient également que l'aube a plus de place pour vibrer, de sorte que les interactions aube/carter avec des jeux plus importants peuvent être encore plus préjudiciables pour les amplitudes de vibration de l'aube. Dans cette étude, la résolution RL-HBM est utilisée pour des jeux (qui sont supposés égaux du BA au BF) allant de $2{,}5 \cdot 10^{-4}$ m à $12{,}5 \cdot 10^{-4}$ m. Les résultats obtenus aux BA et BF pour chaque configuration sont représentés sur la figure 6.22. Le jeu $c_j$ a globalement une influence très importante sur la dynamique de l'aube. Plus le jeu est petit, plus les amplitudes des vibrations sont faibles. Cependant, des jeux plus petits augmentent aussi très significativement la fréquence de résonance non-linéaire du système. Il est intéressant de noter qu'en moyenne, l'amplitude maximale de vibration de l'aube est 5 à 6 fois plus élevée que la valeur du jeu considérée, de sorte que le rapport entre l'amplitude maximale de vibration et $c_j$ reste constant pour toutes les configurations considérées.



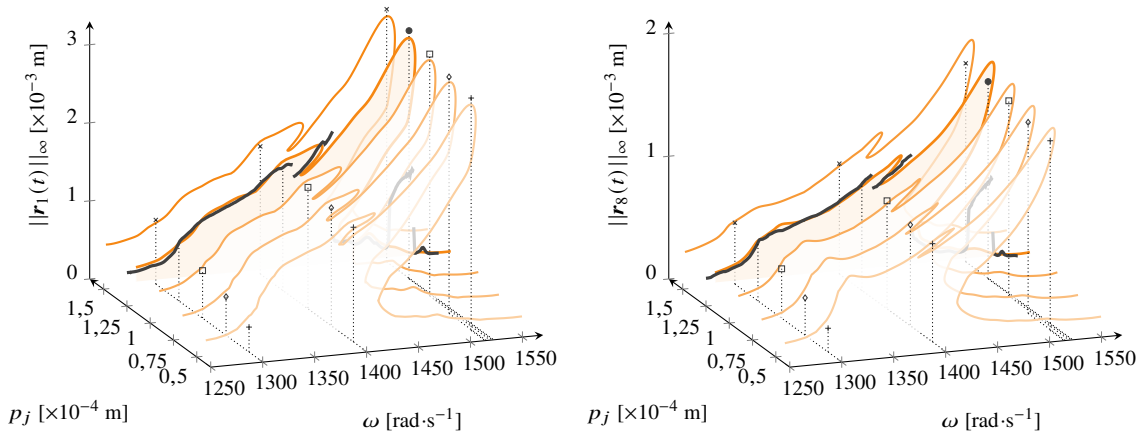

(a) BA (b) BF

Figure 6.22 CRF du BA (a) et BF (b) du rotor 37 obtenues par RL-HBM en faisant varier le jeu $c_j$.

#### 6.3.8.2 Influence de la pénétration

La deuxième analyse paramétrique se concentre sur le paramètre $p_j$ qui définit l'amplitude radiale de la déformation du carter, *cf.* figure 6.5. À notre connaissance, l'influence de ce paramètre n'a jamais été étudiée dans la littérature. Les résultats obtenus avec la RL-HBM sont représentés sur la figure 6.23 pour $p_j$ variant entre $0{,}5 \cdot 10^{-4}$ m et $1{,}5 \cdot 10^{-4}$ m. Pour la plage de variation considérée

de ce paramètre, l'influence sur les CRF, d'allures relativement similaires, est limitée pour toutes les valeurs de $p_j$. Ceci constitue un résultat important puisque $p_j$ peut être considéré comme un paramètre purement numérique qui est extrêmement difficile à calibrer sur la base de données expérimentales. L'augmentation mineure de la localisation de la résonance non-linéaire lorsque $p_j$ augmente semble également cohérente avec le fait qu'une valeur plus élevée de $p_j$ implique une configuration de contact plus sévère.



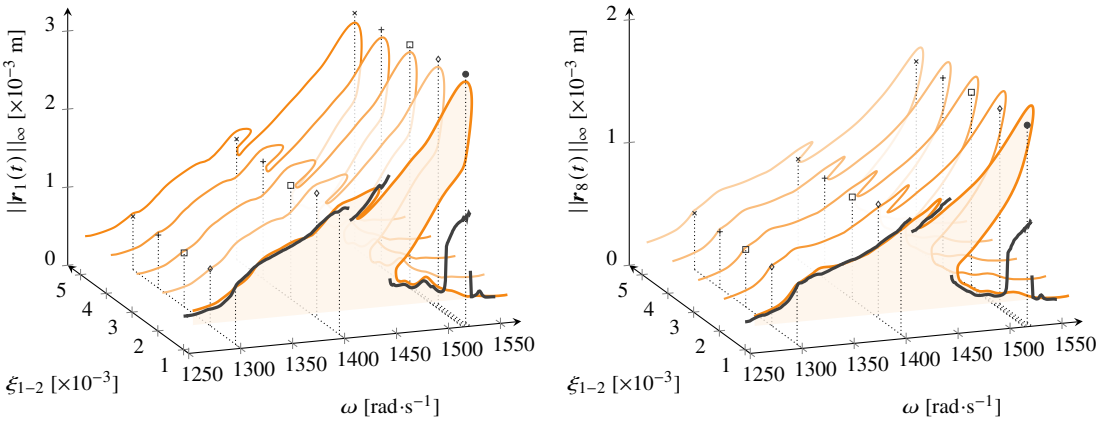

(a) BA (b) BF

Figure 6.23 CRF du BA (a) et BF (b) du rotor 37 obtenues par RL-HBM en faisant varier la pénétration $p_j$.

#### 6.3.8.3 Influence de l'amortissement

Lorsqu'on essaie de prédire numériquement des interactions observées expérimentalement, la définition de l'amortissement modal d'une aube est une tâche difficile. Pour les modèles industriels, en supposant que les propriétés modales ne sont pas occultées pour des raisons de confidentialité, il est rarement possible de disposer de coefficients d'amortissement modal appropriés pour les modes de vibration libre au-delà du premier mode de torsion. Par conséquent, les chercheurs s'appuient fréquemment sur des valeurs empiriques et considèrent souvent un seul coefficient d'amortissement modal pour l'ensemble des modes. Dans le cas présent, le coefficient modal des deux premiers modes (1F-1T) $\xi_{1-2}$ varie entre $10^{-3}$ et $5 \cdot 10^{-3}$, les valeurs communément acceptées pour les aubes de moteur d'avion étant généralement comprises entre $5 \cdot 10^{-4}$ et $2 \cdot 10^{-3}$. Tous les autres modes présentent un coefficient d'amortissement $\xi_{3+} = 5 \cdot 10^{-3}$. L'effet de la variation du paramètre $\xi_{1-2}$ sur les CRF obtenues est présenté sur la figure 6.24. Il apparaît que $\xi_{1-2}$ n'a pratiquement aucun impact sur les résultats de la RL-HBM. On suppose que ce constat est lié à la nature forcée de l'interaction de contact combinée à l'absence d'excitation externe sur le système. Ce résultat est

cependant important car il confirme que les résultats présentés ne dépendent pas significativement de ces coefficients d'amortissement et que la RL-HBM reste bien adaptée à des valeurs relativement faibles de coefficients d'amortissement.

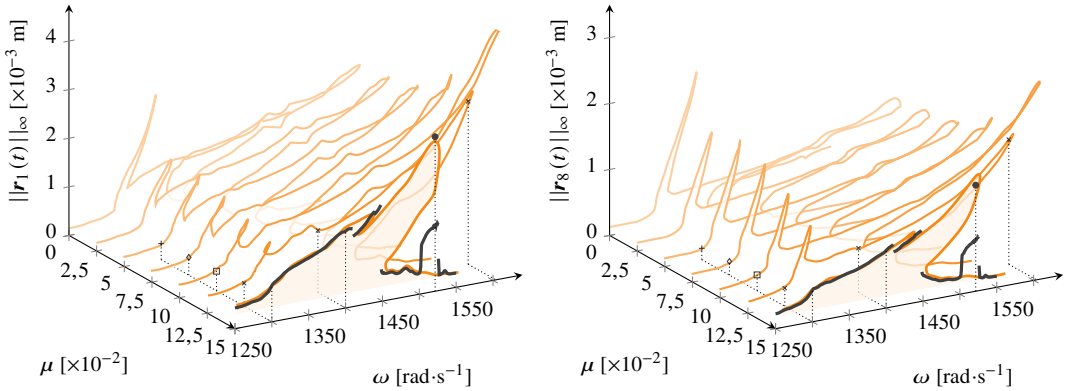



(a) BA (b) BF

Figure 6.24 CRF du BA (a) et BF (b) du rotor 37 obtenues par RL-HBM en faisant varier le coefficient d'amortissement des deux premiers modes $\xi_{1-2}$.

#### 6.3.8.4 Influence du frottement

La dernière analyse paramétrique se focalise sur l'influence du coefficient de frottement $\mu$. Une variation de $\mu$ comprise entre 0 et 0,15 est ici considérée en accord avec les valeurs usuellement retenues dans la littérature pour le frottement aube/carter. Les CRF obtenues sont tracées sur la figure 6.25. Pour de faibles valeurs du coefficient de frottement, on observe un fort resserrement des différentes branches de solution au niveau du pic de résonance. Il devient alors extrêmement délicat d'accrocher en IT les solutions de plus hautes amplitudes prédites par RL-HBM. Il semble probable que dans un contexte aussi sensible, les faibles écarts inhérents à la différence d'algorithme de traitement du contact entre IT et RL-HBM soient à l'origine de la difficulté d'obtenir les solutions RL-HBM en IT. Outre le pic de résonance, la diminution du frottement a également pour conséquence de faire apparaître un second pic (situé autour de $\omega = 1310$ rad·s$^{-1}$). Globalement, il apparaît que la valeur $\mu = 0{,}15$ choisie comme référence dans cette étude—un choix uniquement associé aux valeurs considérées dans de précédentes publications sur les interactions aube/carter—représente une configuration assez favorable et numériquement moins sensible que pour de plus faibles valeurs de $\mu$. D'un point de vue industriel, la très forte augmentation des amplitudes de vibration, ainsi que du raidissement au contact, pour $\mu = 0{,}1$ et $\mu = 0{,}125$ indique que du point de vue vibratoire, la réduction du frottement aube/carter pourrait être néfaste.




(a) BA (b) BF

Figure 6.25 CRF du BA (a) et BF (b) du rotor 37 obtenues par RL-HBM en faisant varier le coefficient de frottement $\mu$.

### 6.3.9 Prise en compte des effets centrifuges

Afin d'augmenter la représentativité physique du système mécanique considéré, cette sous-section porte sur la prise en compte des effets centrifuges. En ce qui concerne le système mécanique considéré, l'influence des effets centrifuges est double : (1) d'une part, la matrice de rigidité de l'aube devient dépendante de la vitesse angulaire $\omega$, et (2) d'autre part, les effets centrifuges impliquent également une légère déformation de l'aube de sorte que le jeu entre les nœuds frontières en bout d'aube et le carter dépend également de $\omega$. L'influence des effets centrifuges est ici limitée à la dépendance de la matrice de rigidité vis-à-vis de la vitesse angulaire $\omega$. Cette simplification est motivée par le fait que l'influence des jeux entre l'extrémité de l'aube et le carter a déjà été examinée dans la sous-section 6.3.8.1. Cependant, la prise en compte éventuelle de l'influence des effets centrifuges sur les jeux ne poserait aucune difficulté supplémentaire à l'application de la RL-HBM.

Lorsqu'on tient compte des effets centrifuges sur une plage de vitesse angulaire $\omega \in [0; \omega_{\max}]$, il est possible de montrer que la matrice de rigidité de l'aube peut être écrite comme suit [14] :

$$\mathbf{K}(\omega) = \mathbf{K}_0 + \omega^2 \mathbf{K}_1 + \omega^4 \mathbf{K}_2 \tag{6.3.3}$$

où $\mathbf{K}_0$, $\mathbf{K}_1$ et $\mathbf{K}_2$ sont des matrices obtenues par combinaison linéaire des matrices de rigidité évaluées à $\omega = 0$, $\omega = \omega_{\max}/2$ et $\omega = \omega_{\max}$. Le transfert de ce développement polynomial dans un espace réduit—ce qui est essentiel pour des calculs performants—nécessite d'enrichir la base de réduction de Craig-Bampton avec des modes contraints et encastrés calculés à ces trois mêmes vitesses angulaires. Ceci résulte en un modèle réduit comprenant trois fois plus de ddl, qui dans le

cas de l'aube considérée passe à $n = 3 \times 34 = 102$.

Dans le cadre de la résolution HBM, la matrice de rigidité dynamique $\mathbf{Z}(\omega)$ de l'équation (3.2.19) doit ainsi être reformulée en conséquence. De la même manière, l'expression de sa dérivée par rapport à $\omega$ notée $\mathbf{Z}_{,\omega}$ et introduite dans l'équation (3.2.48), doit être actualisée :

$$\mathbf{Z}_{,\omega} = 2\omega\nabla^2 \otimes \mathbf{M} + \nabla \otimes \mathbf{C} + \mathbf{I}_{2H+1} \otimes (2\omega\mathbf{K}_1 + 4\omega^3\mathbf{K}_2) \tag{6.3.4}$$

La fréquence propre du mode 1F augmente significativement avec la vitesse angulaire $\omega$ lorsque les effets centrifuges sont pris en compte. En conséquence, la plage de vitesse angulaire sur laquelle la première fréquence propre de l'aube croise la ligne du quatrième régime moteur est décalée. L'augmentation de la première fréquence propre de l'aube implique également une plus grande proximité entre cette ligne de fréquence avec la ligne du quatrième régime moteur, visible sur la carte d'interaction obtenue par IT et tracée sur la figure 6.26. Ceci explique que la plage de vitesse angulaire sur laquelle des amplitudes de vibration plus élevées sont prédites est bien plus large avec les effets centrifuges : $\omega \in [1620; 1916]$ rad·s$^{-1}$, comparée avec la plage précédente $\omega \in [1300; 1530]$ rad·s$^{-1}$ sans effets centrifuges. L'interaction du mode 1F avec le quatrième régime moteur est désormais

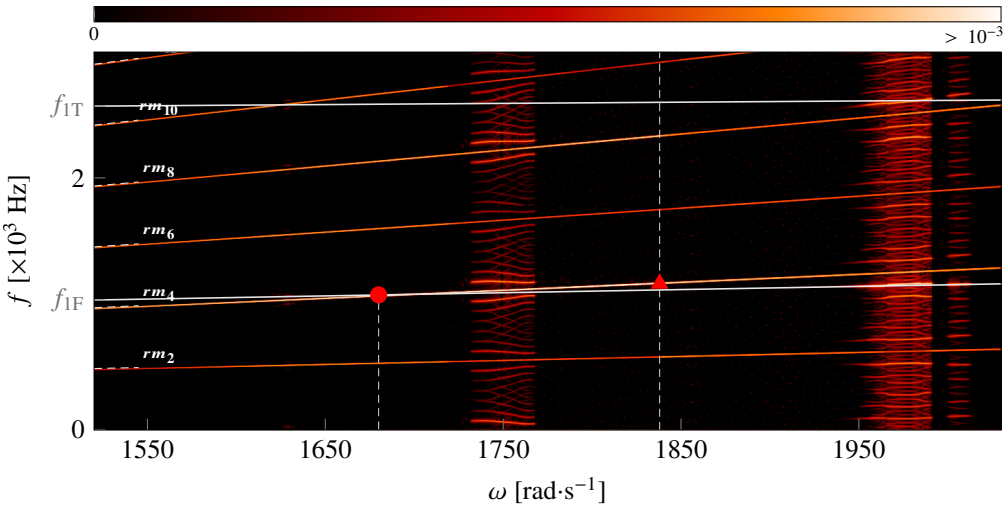
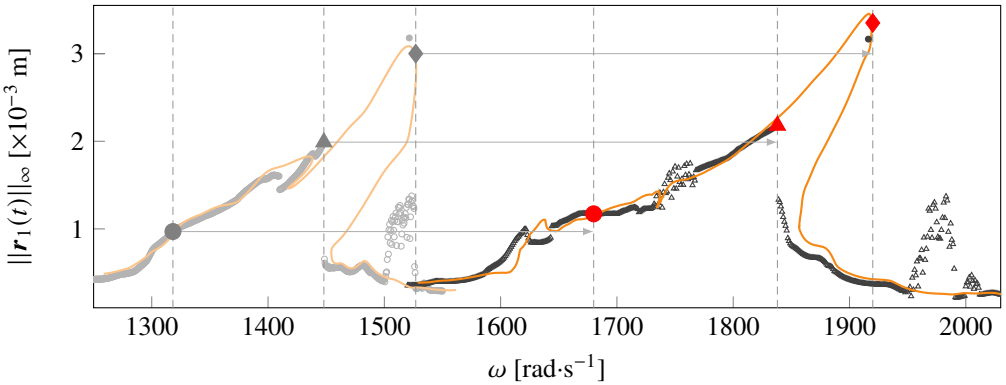



Figure 6.26 Carte d'interaction obtenue par IT au BA du rotor 37 avec effets centrifuges.

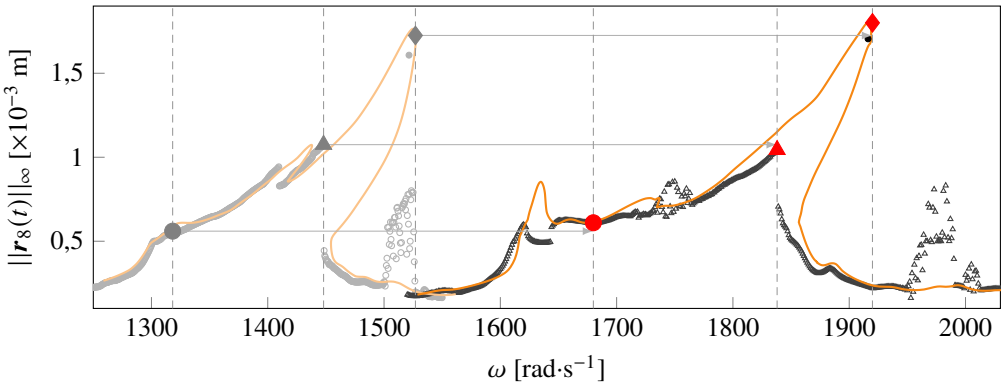
prévue à $\omega_{1F}/4 = 1680$ rad·s$^{-1}$ (●) (contre 1318 rad·s$^{-1}$ précédemment (●)), soit 27 % d'effet de raidissement supplémentaire. La résonance non-linéaire est prédite à $\omega = 1916$ rad·s$^{-1}$.

Les CRF obtenues avec prise en compte des effets centrifuges (——) sont représentées sur les figures 6.27a et 6.27b, en termes de norme infinie du déplacement radial obtenue aux BA et BF. Les résultats précédents, sans effets centrifuges (——), sont également représentés pour faciliter la comparaison des résultats. Dans les deux cas, les résultats d'IT correspondant à des conditions

initiales nulles sont tracés en noir (△) et l'amplitude de la solution d'IT obtenue à la résonance non-linéaire en partant de conditions initiales issues de la RL-HBM est marquée par un point noir (●).




(a) BA




(b) BF

Figure 6.27 CRF des déplacements radiaux aux BA et BF obtenues par RL-HBM et IT avec (——)/(△), et sans (——)/(○) effets centrifuges.

Il y a une très bonne concordance entre les résultats des deux méthodologies. Il y a néanmoins plus de zones pour lesquelles des différences mineures apparaissent. Ceci est notamment lié au contenu harmonique particulièrement riche prévu par les résultats d'IT autour de $\omega = 1750$ rad·s$^{-1}$. De même, des solutions 13,5 $T$-périodiques sont à nouveau prédites juste en dessous de $\omega = 2000$ rad·s$^{-1}$.

## 6.4 Aube rotor 67

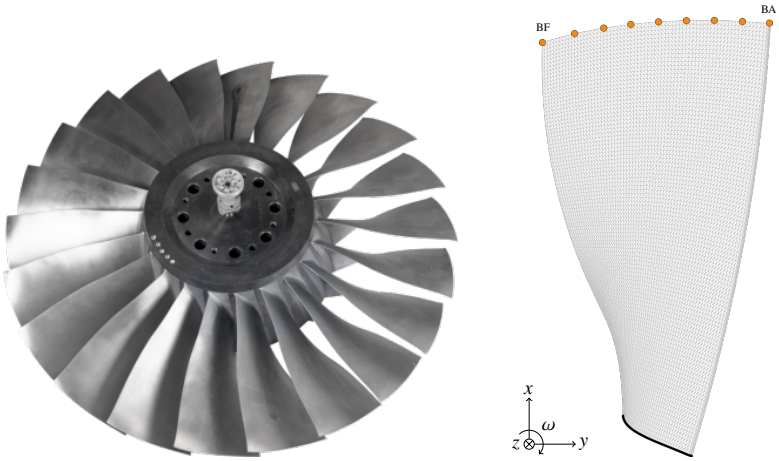
La version du rotor 67 étudiée ici [210], correspond au premier étage d'une soufflante à deux étages composé de 22 aubes. Une photographie d'archives est représentée sur la figure 6.28a. Ce rotor fut conçu en 1979, peu après le rotor 37, dans le centre de recherche de la NASA à Lewis. Le rotor 67

est devenu un cas test standard pour la validation de procédures CFD de prédiction d'écoulement visqueux 3D [16] dans les années 1990, ce qui s'explique notamment par sa géométrie ouverte et par la présence de données expérimentales détaillées provenant de mesures réalisées par vélocimétrie laser [209]. Contrairement au rotor 37, le rotor 67 n'a encore jamais été étudié dans le contexte d'interactions aube/carter.

### 6.4.1 Modélisation

Bien qu'il ait déjà été étudié pour des problématiques d'interactions fluide/structure [16], incluant des analyses par HBM [12], les propriétés matériau du rotor 67 ne semblent pas avoir été consignées dans les rapports techniques originaux de la NASA. Plusieurs articles font l'hypothèse que ce rotor est constitué d'un matériau générique typique des soufflantes de moteur d'avion : un alliage base titane TA6V de grade 5 (Ti 6Al 4V). Pour un tel alliage, les propriétés sélectionnées pour les calculs sont les suivantes : un module d'Young $E = 108$ GPa, une masse volumique $\rho = 4400$ kg·m$^{-3}$, un coefficient de Poisson $\nu = 0{,}34$, et une limite d'élasticité $\sigma_Y = 0{,}824$ GPa. Le rotor 67 dispose d'une vitesse nominale de 16042,8 tr·min$^{-1}$ [210], soit 1680 rad·s$^{-1}$.

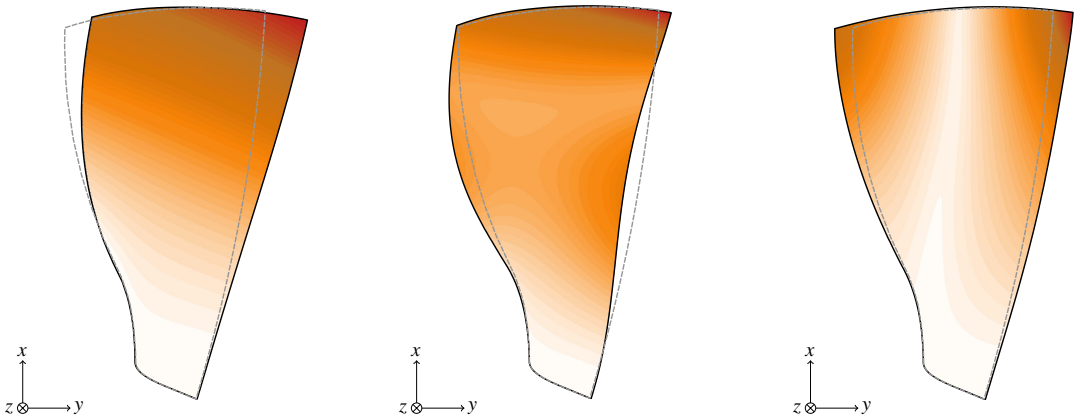
Le modèle géométrique 3D de l'aube ainsi que son maillage éléments finis sont générés à l'aide du logiciel Salome. Le modèle éléments finis 3D résultant comporte 129181 éléments de type tétraèdre quadratique et un total de 201287 nœuds, voir la figure 6.28b. Tous les nœuds appartenant au pied d'aube sont encastrés (▬). Le modèle réduit est calculé en retenant 9 nœuds équirépartis le long du sommet d'aube entre le BA et le BF. La convergence du modèle réduit est atteinte pour $\eta = 12$ coefficients modaux. Ce modèle contient au total $n = 37$ ddl.




(a) (b)

Figure 6.28 NASA rotor 67 : (a) roue complète [220] et (b) maillage éléments finis considéré.

L'analyse modale du modèle éléments finis, dont les trois premières déformées modales sont représentées sur la figure 6.29, conduit à une caractérisation de ces trois premiers modes résumée dans le tableau 6.4.




(a) mode 1F (b) mode 2F (c) mode 1T

Figure 6.29 Déformées modales des trois premiers modes de l'aube rotor 67.

| mode | 1F | 2F | 1T |
|---|---|---|---|
| $\omega$ [rad·s$^{-1}$] | 2039,6 | 6339,7 | 10735,1 |
| $f$ [Hz] | 324,6 | 1009 | 1708,5 |

Tableau 6.4 Caractérisation des trois premiers modes de l'aube rotor 67.

Le même modèle d'amortissement modal que le rotor 37 est considéré. Les coefficients d'amortissement des deux premiers modes de flexion (1F-2F) valent $\xi_{1-2} = 1 \cdot 10^{-3}$ et les coefficients d'amortissement des autres modes valent $\xi_{3+} = 5 \cdot 10^{-3}$.

### 6.4.2 Paramètres du scénario de contact

Le jeu radial entre le sommet d'aube et le carter est égal à $c_j = 4 \cdot 10^{-4}$ m pour l'ensemble des nœuds frontières en accord avec les informations contenues dans le rapport initial de la NASA [210]. Tous les autres paramètres géométriques sont identiques à ceux utilisés dans la sous-section 6.3.2 pour l'aube rotor 37. Par ailleurs, les paramètres de gestion du contact sont identiques à ceux de la section précédente : $k_\mathrm{n} = 1 \cdot 10^9$ N·m$^{-1}$, $\epsilon_\mathrm{n} = 6 \cdot 10^2$ N et $\mu = 0{,}15$. Un filtrage de Lanczos unitaire est pris en compte.

Les effets centrifuges ne sont pas pris en compte dans cette étude. Par conséquent, étant donné que $n_1 = 2$, l'interaction ciblée—entre le mode 1F et le deuxième régime moteur—est attendue pour

$\omega_{1F}/2 = 1020$ rad·s$^{-1}$. Après quelques simulations exploratoires, la plage de vitesses étudiée par la suite est définie telle que $\omega \in [900; 1780]$ rad·s$^{-1}$.

### 6.4.3 Résultats de référence

Les simulations par IT sont exécutées tous les 1 rad·s$^{-1}$ avec un pas de temps $h = 2 \cdot 10^{-7}$ s sur un total de 200 tours. Toutes les simulations sont effectuées indépendamment les unes des autres en supposant des conditions initiales nulles. L'amplitude du régime permanent est évaluée sur le dernier tour de simulation. Le contenu fréquentiel du régime permanent est évalué sur les 40 derniers tours.

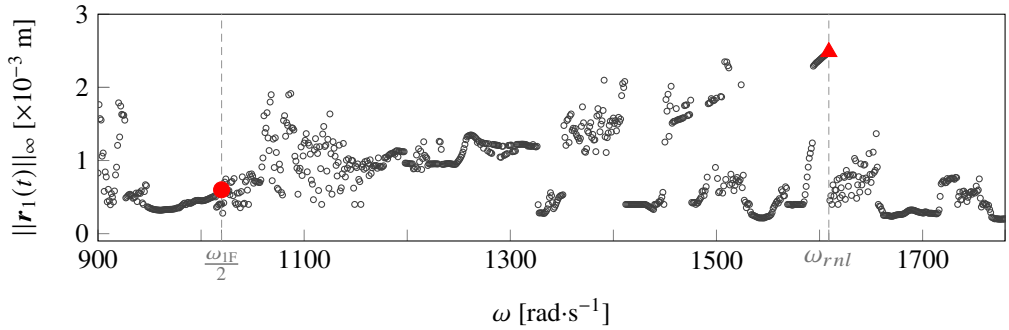
Les résultats en déplacements du BA sont tracés sur la figure 6.30, à travers une CRF en norme infinie sur la figure 6.30a et sa carte d'interaction associée sur la figure 6.30b. Le contenu fréquentiel de la réponse n'est que partiellement localisé le long des régimes moteurs pairs. En effet, de nombreuses franges de largeur variable, réparties tout au long de la plage de vitesses étudiée, présentent un contenu fréquentiel très riche avec des amplitudes significatives prédites en dehors des régimes moteurs pairs. Du fait du raidissement au contact, la résonance du mode 1F sur le deuxième régime moteur ($\boldsymbol{rm}_2$) pour $\omega_{1F}/2 = 1020$ rad·s$^{-1}$ (●), est prédite pour $\omega_{rnl} \simeq 1609$ rad·s$^{-1}$ (▲).

Bien que 200 tours soient simulés, les signaux obtenus pour certaines vitesses de rotation ne sont pas stabilisés. En particulier, il a été observé que certaines réponses avaient tendance à basculer soudainement entre deux solutions d'amplitude stabilisée sans jamais en accrocher une définitivement. La carte d'interaction illustre ainsi la richesse de la dynamique de l'aube rotor 67 soumise à des contacts répétés avec le carter. Le phénomène de raidissement au contact empêche d'associer simplement une plage d'interaction à un mode en particulier et il est ainsi extrêmement délicat, sur base de ces seuls résultats IT, de comprendre les liens entre ces différentes zones critiques.

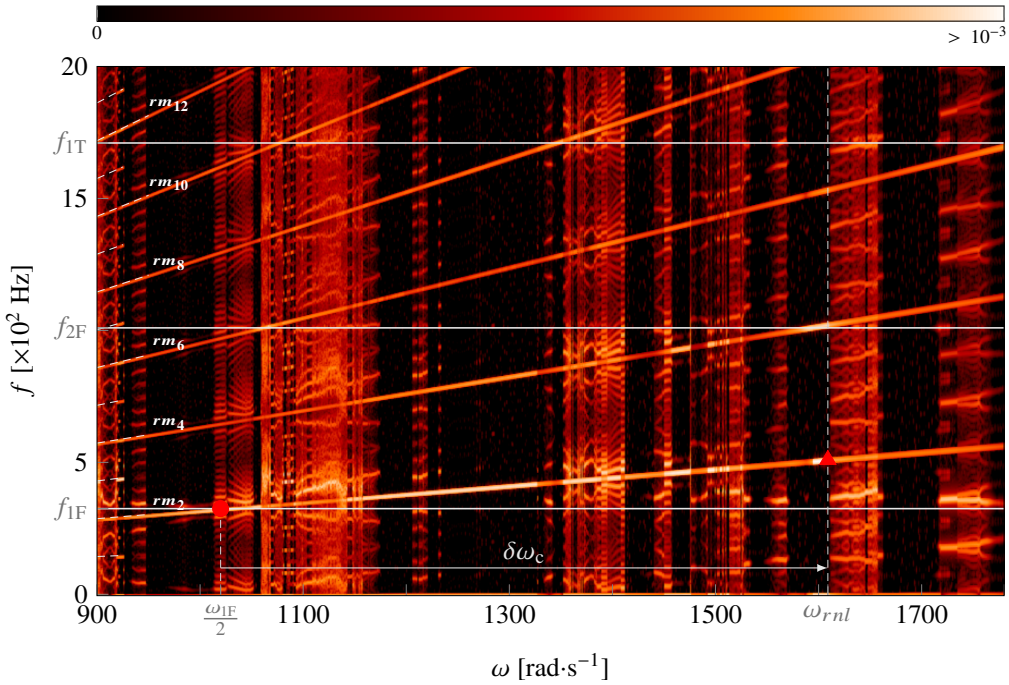
### 6.4.4 Simulations RL-HBM

Une analyse de convergence en fonction des paramètres $H$ et $N$, non détaillée par souci de concision, a été réalisée. Aucune différence significative n'a été observée entre les résultats obtenus avec $H = 40$ et $H = 80$. La valeur $H = 40$ est supposée donc suffisante pour décrire la dynamique de la plage d'interactions ciblée [5]. Tous les résultats RL-HBM présentés dans la suite de cette section ont été obtenus pour $H = 40$ et $N = 1024$.

5. Voire surestimée étant donné que l'harmonique fondamental de la réponse correspond ici au second harmonique, et non au quatrième comme c'était le cas pour rotor 37.




(a) CRF




(b) carte d'interaction

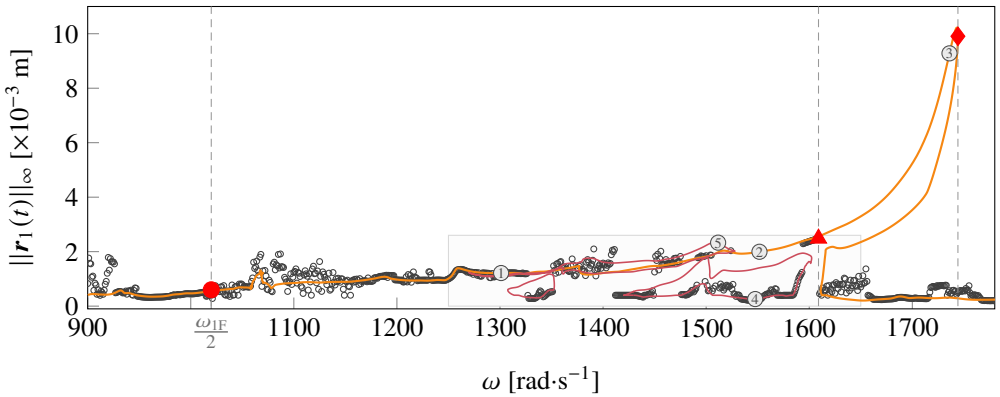
Figure 6.30 Résultats IT de référence du rotor 67, résonances linéaire (●) et non-linéaire (▲).

#### 6.4.4.1 Analyse des courbes de réponses en fréquence

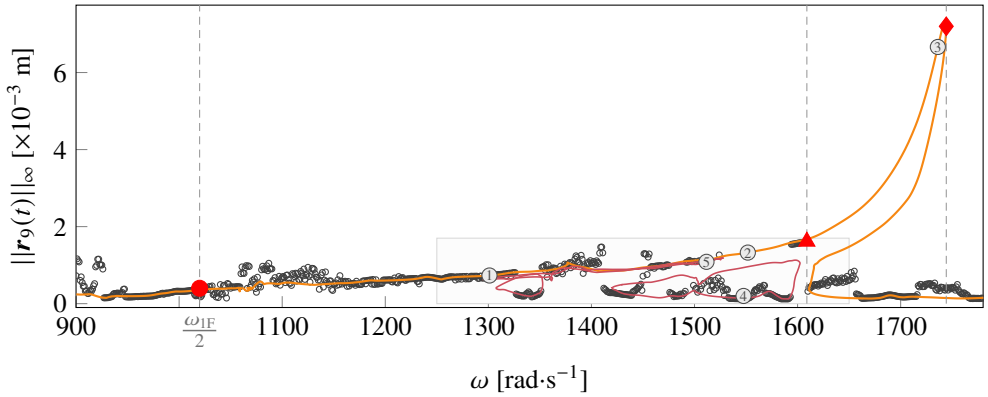
Les CRF obtenues à partir des déplacements radiaux du BA ($j = 1$) et du BF ($j = 9$) de l'aube par RL-HBM, tracées en orange (——), sont comparées aux solutions de référence d'IT sur la figure 6.31. Globalement, les résultats de la RL-HBM concordent bien avec ceux obtenus par IT au niveau des tronçons continus de solutions, révélateurs de solutions $T$-périodiques. La résonance non-linéaire prédite par la RL-HBM, $\omega_{rnl} \simeq 1744$ rad·s$^{-1}$ (♦), est significativement plus élevée, d'environ 23 %, que celle prédite avec la stratégie d'IT $\omega_{rnl} \simeq 1609$ rad·s$^{-1}$ (▲) mais se démarque par son amplitude presque 4 fois supérieure.

Sur base de solutions IT isolées ne se situant pas sur la CRF initiale, trois isolats (——) sont obtenus

par RL-HBM. La sous-section 6.4.4.3 est focalisée sur ces isolats.




(a) BA




(b) BF

Figure 6.31 CRF obtenues par RL-HBM (——) et IT (○) aux (a) BA et (b) BF du rotor 67 : résonance linéaire (●), résonances non-linéaires IT (▲) et RL-HBM (♦).

Plusieurs points de contrôle—numérotés de ① à ⑤ sur la figure 6.31 et correspondant aux vitesses de rotation indiquées dans le tableau 6.5—sont utilisés pour une analyse comparative approfondie des résultats obtenus par chacune des deux méthodologies. Les points ① à ③ sont situés à différents paliers d'amplitude le long de la CRF principale (——). En revanche, les points ④ et ⑤ sont respectivement situés sur un isolat à basse amplitude et un isolat à plus haute amplitude. L'analyse de ces deux derniers points est également abordée en sous-section 6.4.4.3.

| point | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\omega$ [rad·s$^{-1}$] | 1301,086 | 1551,729 | 1738,085 | 1547,583 | 1511,611 |

Tableau 6.5 Vitesses angulaires considérées dans l'analyse des résultats de l'aube rotor 67.

Pour l'ensemble des points, les simulations de référence IT sont effectuées en utilisant des conditions

initiales générées à partir des solutions RL-HBM. Au total, 25 tours sont simulés afin de s'assurer que l'amplitude d'une solution obtenue par IT soit stabilisée et correspond bien à la solution RL-HBM ciblée.

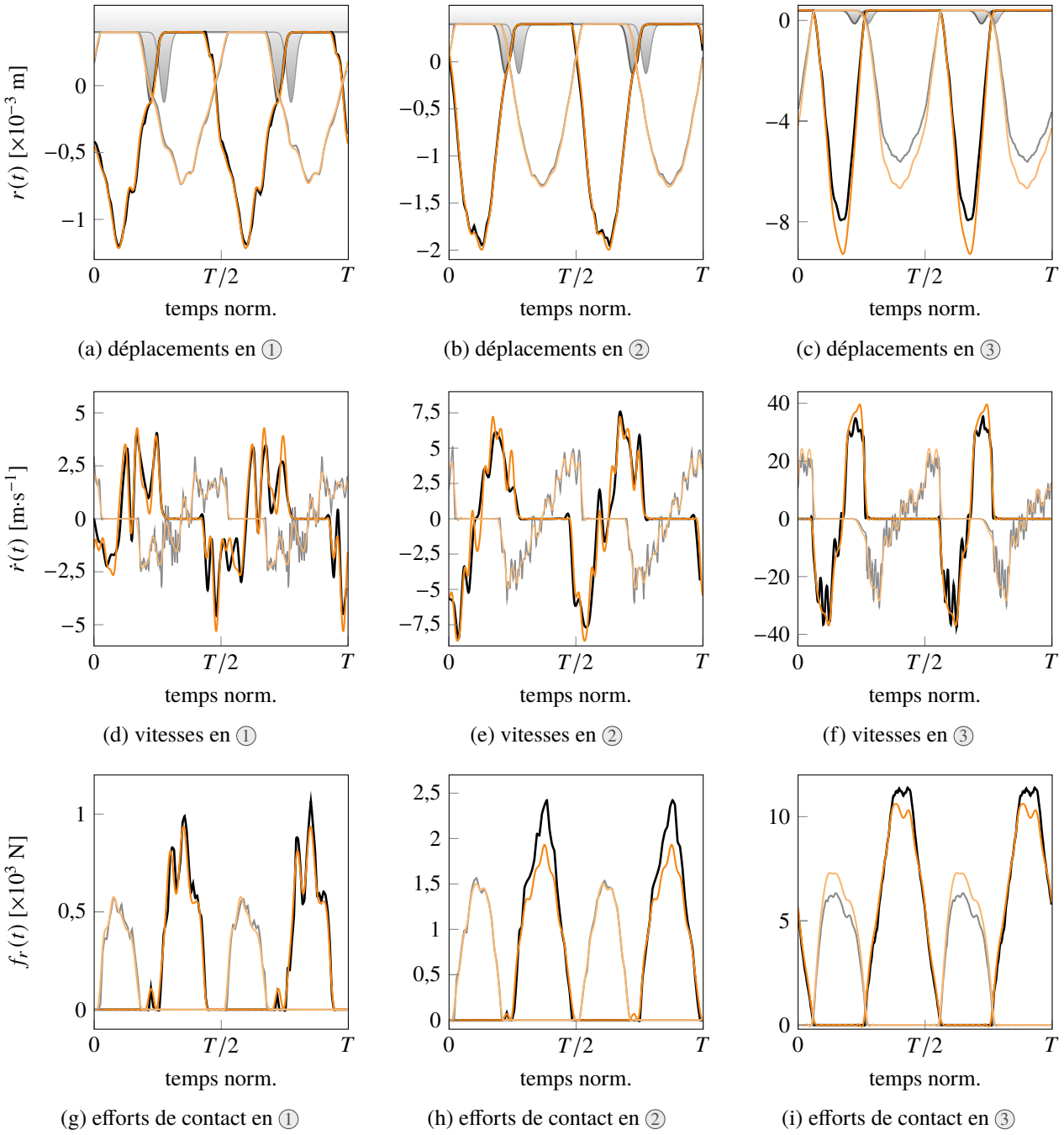
#### 6.4.4.2 Déplacements, efforts et vitesses

Les déplacements, efforts de contact, et vitesses, selon la direction radiale aux BA et BF prédits par les deux méthodologies pour les points ① à ③ sont représentés sur la figure 6.32. Les couleurs foncées sont utilisées pour les quantités relatives au BA, les couleurs plus claires sont utilisées pour les quantités relatives au BF.

Les déplacements, vitesses et efforts de contact prédits pour les points ① à ③ soulignent le très bon accord entre les deux méthodologies. Pour les vitesses auxquelles l'amplitude des efforts de contact est la plus grande, des écarts non négligeables sont observés—voir la figure 6.32h—sans que cela n'affecte de façon significative l'amplitude des déplacements associés. Tout comme dans le cas de l'aube rotor 37, les écarts les plus importants entre les déplacements prédits par RL-HBM et IT sont repérés au voisinage de la résonance non-linéaire, voir la figure 6.32c. Plus qu'une limitation de la RL-HBM, ces écarts sont imputables à la différence d'algorithme de traitement du contact qui a pour conséquence de légèrement décaler la résonance non-linéaire en IT vers les plus hautes fréquences, ce qui implique que la solution prédite en IT au point ③ est d'amplitude légèrement inférieure à celle prédite par RL-HBM. Il est toutefois remarquable que la solution obtenue à la résonance non-linéaire par RL-HBM puisse effectivement être obtenue en IT avec les bonnes conditions initiales.

#### 6.4.4.3 Détection d'isolats

Comme mentionné précédemment, trois isolats sont détectés sur la figure 6.31. Un isolat correspond à une branche de solutions fermée sur elle-même [27, 46]. Pour obtenir ces trois isolats, les calculs RL-HBM sont initialisés à partir des coefficients de Fourier directement issus des solutions périodiques calculées en IT à $\omega$ = 1297, 1343 et 1430 rad·s$^{-1}$. La figure 6.33 présente des agrandissements des figures 6.31a et 6.31b, localisés au niveau des rectangles gris (▭), pour mieux visualiser ces isolats. La recherche d'isolats pour les systèmes mécaniques non-linéaires fait l'objet de plusieurs travaux de recherche [27, 32, 46] et constitue un enjeu de taille pour les concepteurs et ingénieurs. Cette recherche est ici facilitée par le fait que de nombreuses solutions IT sont éloignées de la CRF initialement prédite par RL-HBM, ce qui renforce l'idée que IT et RL-HBM sont deux approches qui peuvent jouer des rôles complémentaires pour la conception de systèmes mécaniques non-linéaires. L'existence de zones où jusqu'à cinq solutions coexistent pour une même vitesse angulaire (là où les isolats se superposent) est mise en évidence et souligne la richesse de la dynamique de l'aube

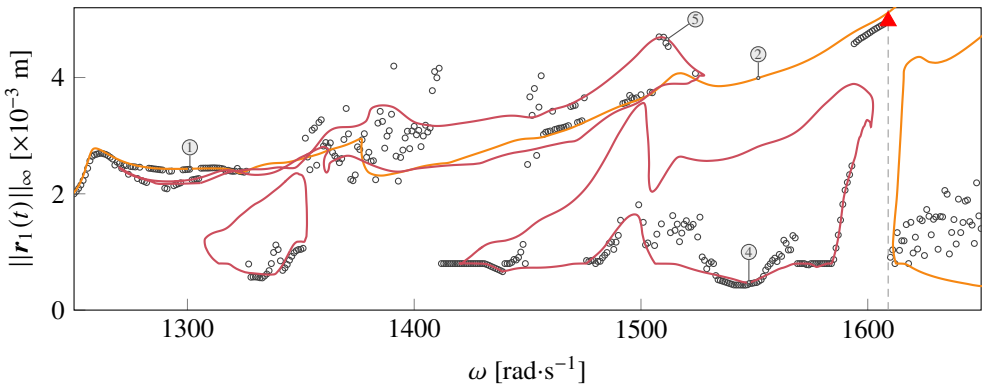



(a) déplacements en ①
(b) déplacements en ②
(c) déplacements en ③
(d) vitesses en ①
(e) vitesses en ②
(f) vitesses en ③
(g) efforts de contact en ①
(h) efforts de contact en ②
(i) efforts de contact en ③

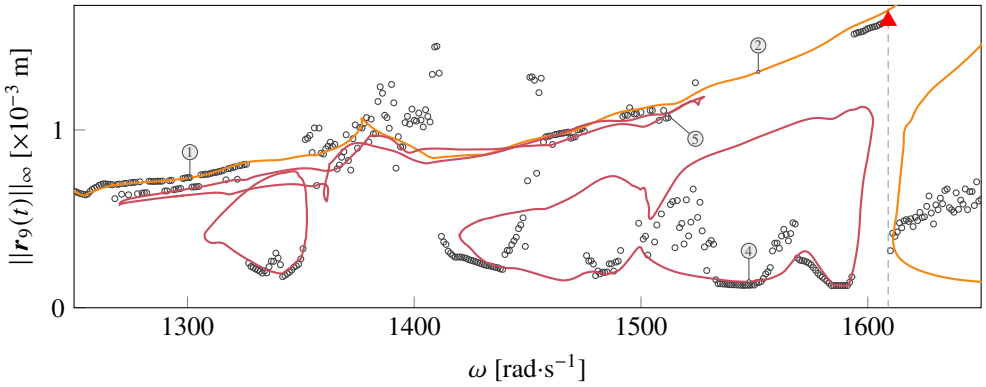
Figure 6.32 Déplacements, vitesses et efforts radiaux obtenus par RL-HBM et IT aux BA et BF de l'aube rotor 67 pour les points de contrôle : (a) (d) (g) ①, (b) (e) (h) ②, and (c) (f) (i) ③. Légendes : IT BA (——), BF (——), RL-HBM BA (——) et BF (——).

étudiée.

Les déplacements, efforts, et vitesses, prédits par les deux méthodologies dans la direction radiale pour les points ④ et ⑤ sont représentés sur la figure 6.34. Aussi bien au niveau du point basse




(a) zoom au BA



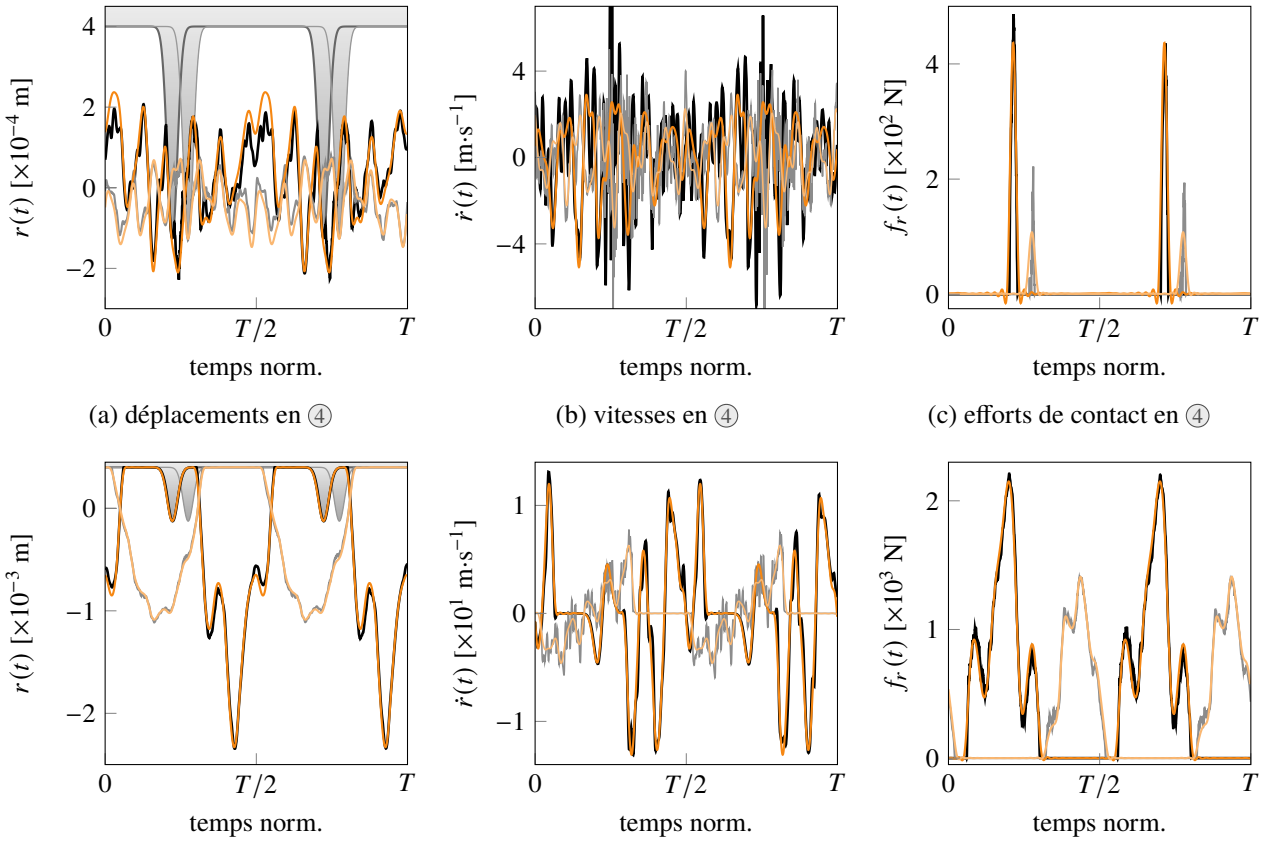

(b) zoom au BF

Figure 6.33 Zooms sur les isolats des CRF obtenues par RL-HBM (——) et IT (○) aux (a) BA et (b) BF du rotor 67.

amplitude ④ que du point haute amplitude ⑤, la comparaison des prédictions issues de l'IT et la RL-HBM démontre le très bon accord entre les deux méthodologies.

### 6.4.5 Contributions modales

Les contributions modales des solutions en déplacements obtenues par RL-HBM, isolats exclus, pour un calcul à $\eta = 30$, sont représentées sur la figure 6.35 pour les trois premiers modes. Une dominance du mode 1F est observable. Toutefois, des zones où les modes 2F et 1T ont une forte influence sont également identifiées, ce qui supposément, explique la présence d'ondulations sur les CRF de la figure 6.31. Deux zones se distinguent également, à environ $\omega = 1060$ rad·s$^{-1}$ où les modes 2F et 1T ont une plus forte influence, et à $\omega = 1610$ rad·s$^{-1}$, au niveau de la branche intermédiaire, où la contribution du 2F est particulièrement prononcée.




(a) déplacements en ④ (b) vitesses en ④ (c) efforts de contact en ④

(d) déplacements en ⑤ (e) vitesses en ⑤ (f) efforts de contact en ⑤

Figure 6.34 Déplacements, vitesses et efforts radiaux obtenus par RL-HBM et IT aux BA et BF aux points ④ et ⑤ : IT BA (——), BF (——), RL-HBM BA (——) et BF (——).

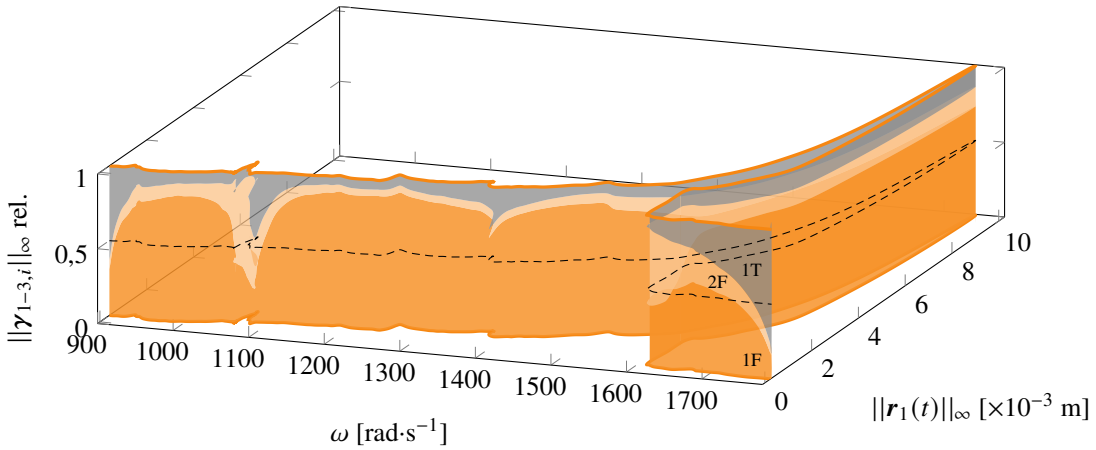



Figure 6.35 Contributions modales (1F (■), 2F (□), 1T (■)) des solutions en déplacements issues de la RL-HBM pour l'aube rotor 67 pour un calcul réalisé à $\eta = 30$. Seuil de 50 % (- - - -).

### 6.4.6 Analyse de contraintes

Pour les points de contrôle ① à ③ situés sur la CRF principale, voir tableau 6.5, les champs de contraintes de von Mises dans l'aube sont calculés à l'instant où le déplacement radial du BA est maximal. Ces champs de contraintes sont tracés sur les figures 6.36a, 6.36b et 6.36c. La valeur

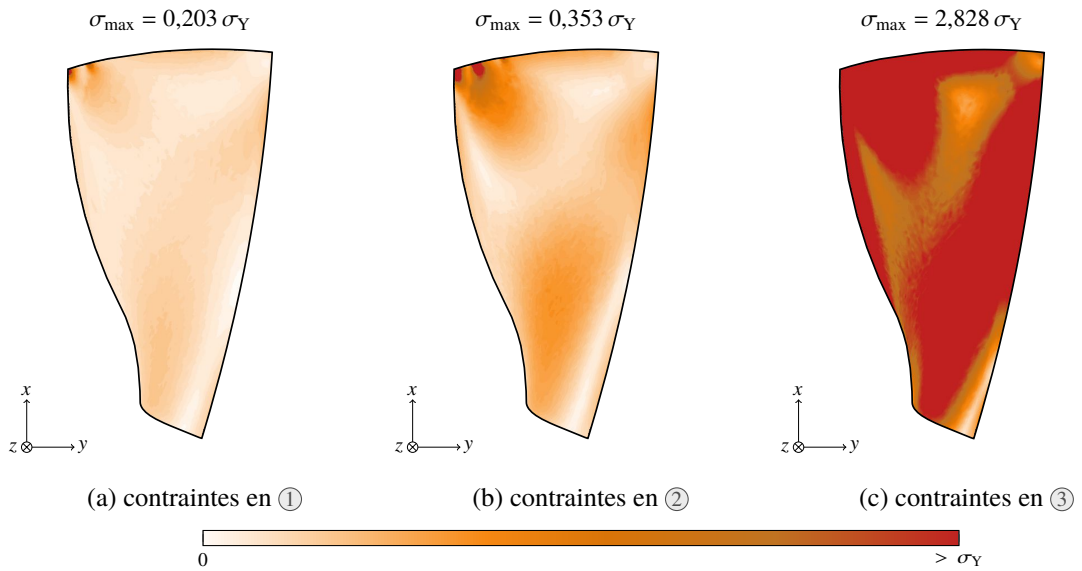



Figure 6.36 Champs de contraintes obtenus par RL-HBM pour l'aube rotor 67.

maximale de la contrainte de von Mises est indiquée au-dessus de chaque champ en fonction de la limite d'élasticité $\sigma_Y$ du matériau de l'aube. Il est intéressant de remarquer que les solutions de plus haute amplitude prévues par IT, proches du point ② correspondent à des contraintes maximales dans l'aube qui sont très inférieures à la limite d'élasticité $\sigma_Y$. Ceci signifie que l'IT seule ne permet pas de capter des solutions qui respectent le cadre des petites déformations (déplacements relatifs faibles et contraintes inférieures à la limite d'élasticité). En se limitant à l'IT, les concepteurs pourraient donc être amenés à sous-évaluer la criticité de l'interaction étudiée. Inversement, les solutions obtenues par RL-HBM au niveau de la résonance non-linéaire engendrent des valeurs de contraintes dans l'aube qui ne sont pas réalistes (près de trois fois la limite d'élasticité). Il semble donc vraisemblable que l'interaction étudiée peut engendrer une perte d'aube.

## 6.5 Roue aubagée complète

Cette application constitue un défi numérique d'envergure, non seulement compte tenu de la dimension de la frontière de contact, c'est-à-dire du nombre élevé de ddl non-linéaires considérés,

mais aussi en raison de la dimension de la partition linéaire issue de la réduction modale qui implique également un nombre de ddl conséquent à traiter lors de la phase de condensation.

### 6.5.1 Modélisation

La roue aubagée étudiée compte $M = 21$ aubes et correspond au premier étage d'un compresseur basse pression. Le matériau considéré pour la roue est un acier standard dont les propriétés sélectionnées pour les simulations sont : un module d'Young $E = 200$ GPa, une masse volumique $\rho = 7850$ kg·m$^{-3}$ et un coefficient de Poisson $\nu = 0{,}3$. Le maillage éléments finis d'un secteur élémentaire (correspondant à une portion du disque et une aube) est présenté sur la figure 6.37. Il est constitué de 9850 éléments de type tétraèdre quadratique pour un total de 17487 nœuds. Tous les nœuds appartenant à la bride avale du disque sont encastrés (▬). La méthode de réduction utilisée pour ce modèle multi-secteurs [51], supposé parfaitement accordé, repose sur une réduction de Craig-Bampton des matrices masse et raideur projetées dans la base de Fourier mais n'est pas détaillée ici par souci de concision [163, 168]. Le modèle réduit est calculé en retenant 3 nœuds frontières le long du sommet de chaque aube, aux BA, milieu de corde (MC) et BF. Étant donné que la roue comporte un nombre impair d'aubes, *cf.* figure 6.38a, le nombre maximum de diamètres nodaux est de $(M-1)/2 = 10$ ce qui implique que seul l'harmonique 0 est simple. En considérant un modèlé réduit à $\eta = 6$, il y a donc 6 modes pour l'harmonique simple 0 et 12 pour les 10 harmoniques doubles restants. En guise d'illustration, la déformée modale du premier mode de flexion à deux diamètres nodaux (1F2D) est présentée sur la figure 6.38b. Au total, il est question de traiter un système de $n = 189 + 126 = 315$ ddl.

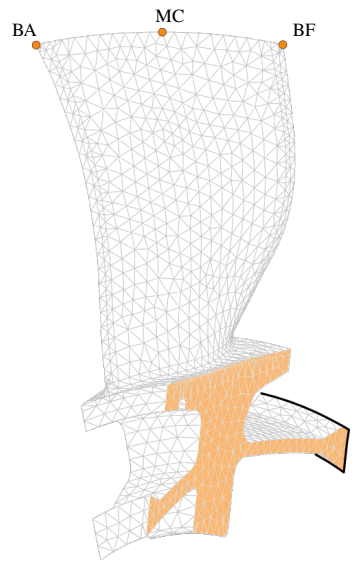
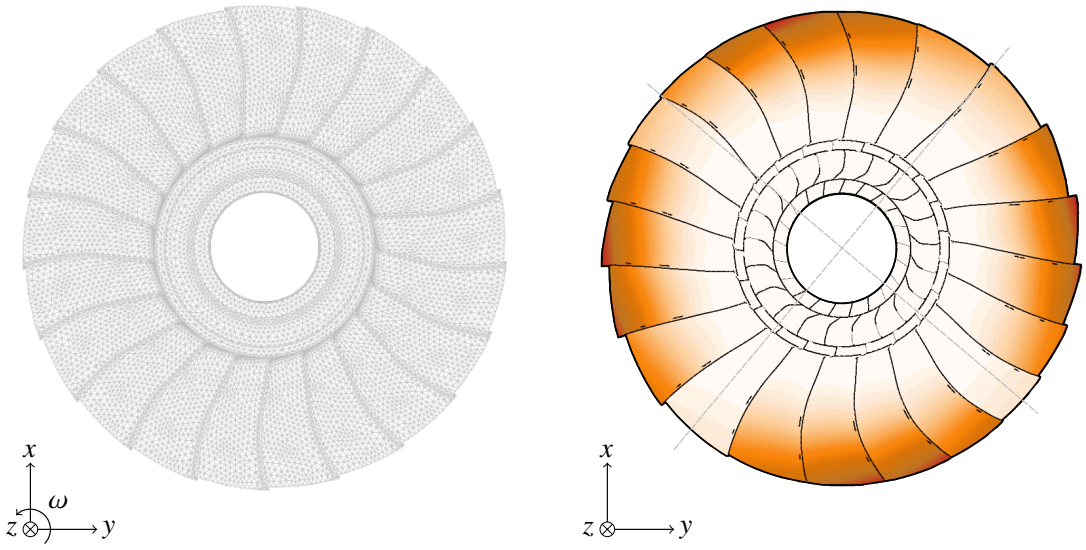



Figure 6.37 Maillage éléments finis du secteur élémentaire de référence, frontières cycliques (▭).

Le même modèle d'amortissement modal que celui utilisé dans les section précédentes est considéré. Le coefficient d'amortissement est $\xi_{1-63} = 1 \cdot 10^{-3}$ pour les modes de plus basse fréquence (modes 1F des modes de disque, modes 2F pour les harmoniques 1 à 10, et modes 1F, 2F, et 1T pour le 0 diamètre) alors que le coefficient d'amortissement des autres modes est égal à $\xi_{63+} = 5 \cdot 10^{-3}$.




(a) (b)

Figure 6.38 Maillage éléments finis de la roue aubagée complète et déformée modale associée au premier mode de flexion à deux diamètres nodaux (- - - -).

### 6.5.2 Paramètres du scénario de contact

Les paramètres géométriques d'ovalisation du carter sont identiques à ceux de l'aube rotor 37, *cf.* sous-section 6.3.2, à l'exception de la largeur angulaire des lobes, prise égale ici à $w_1 = 0{,}25$. Il en est de même pour les paramètres relatifs à la gestion du contact frottant. Sans prise en compte d'effets centrifuges et en considérant une roue parfaitement accordée, pour $n_l = 2$ lobes, une interaction—entre le mode 1F à deux diamètres et le deuxième régime moteur—est attendue pour $\omega_{1F2D}/2 = 2018{,}19$ rad·s$^{-1}$. La plage de vitesses considérée par la suite est ainsi définie telle que $\omega \in [1960; 2400]$ rad·s$^{-1}$.

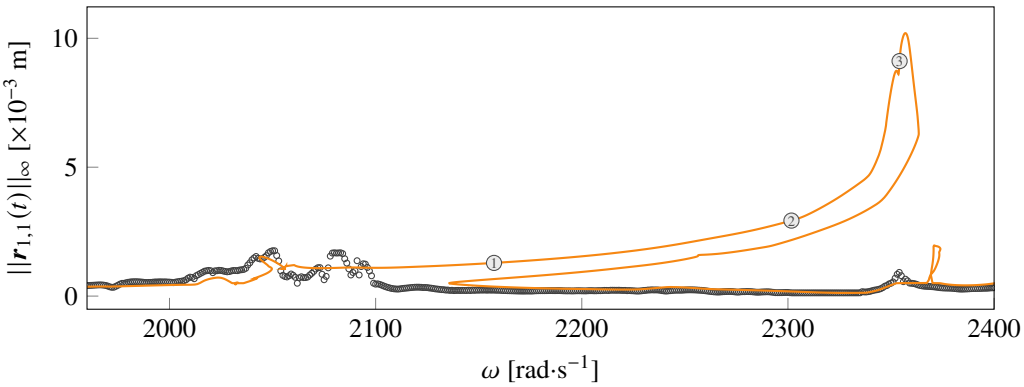
### 6.5.3 Simulations RL-HBM

Les résultats RL-HBM présentés par la suite sont obtenus pour $H = 20$, $N = 1024$ et filtre de Lanczos unitaire.

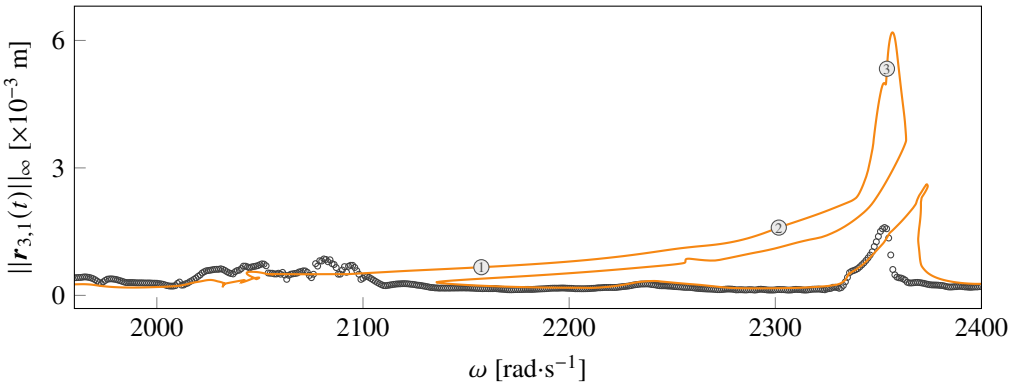
#### 6.5.3.1 Analyse des courbes de réponses en fréquence

Les CRF en norme infinie des déplacements radiaux obtenus aux BA et BF du premier secteur par RL-HBM et IT sont comparées sur la figure 6.39. Dans le cadre de l'IT, une simulation est effectuée

tous les 1 rad·s$^{-1}$ avec un pas de temps $h = 1 \cdot 10^{-7}$ s sur 250 tours à partir de conditions initiales supposées nulles. Il a été observé que l'étude de telles interactions en IT est extrêmement sensible d'un point de vue numérique.




(a) BA du secteur 1




(b) BF du secteur 1

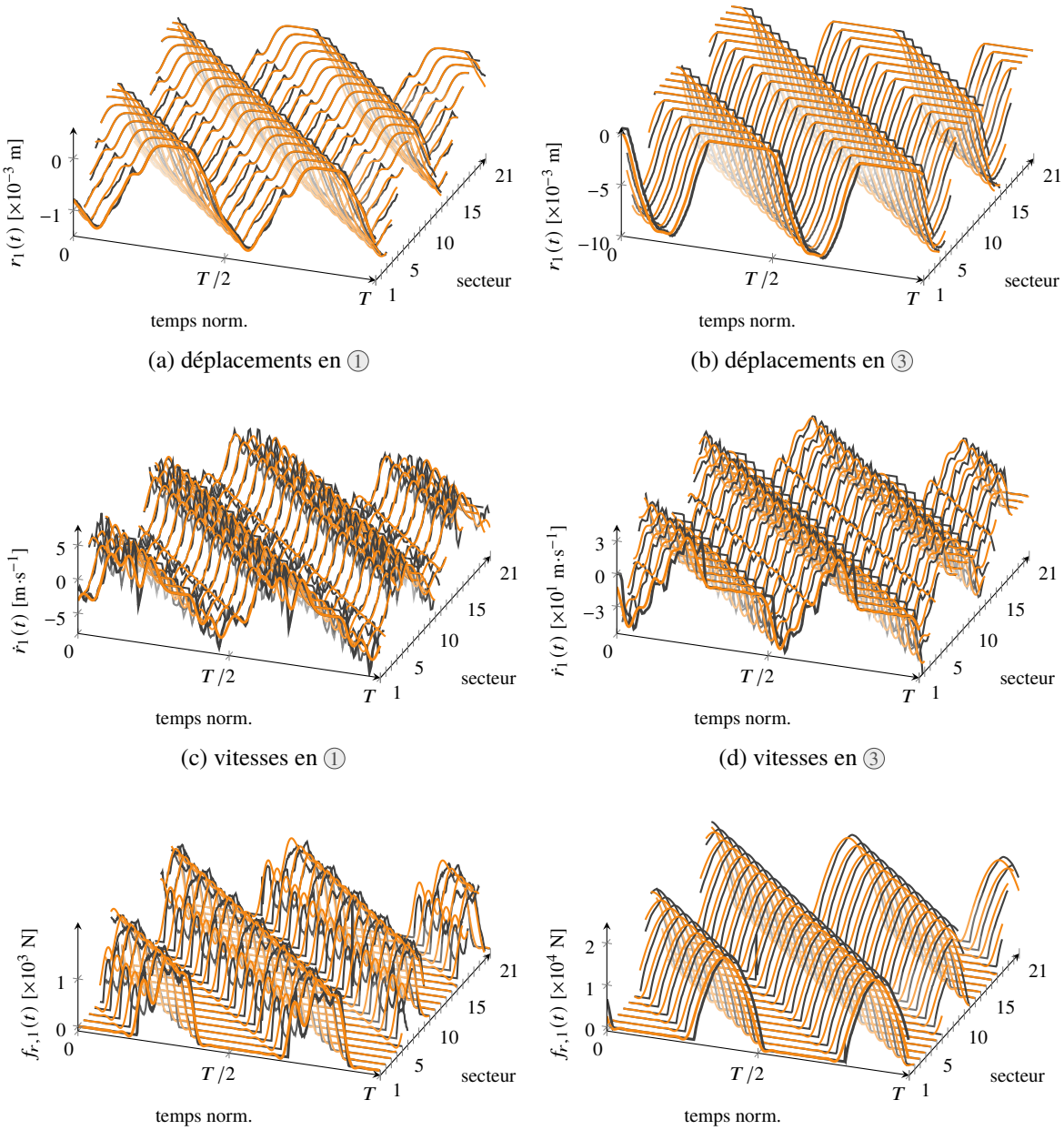
Figure 6.39 CRF obtenues par RL-HBM (——) et IT (○) aux (a) BA et (b) BF du premier secteur de la roue aubagée accordée.

| point | ① | ② | ③ |
|---|---|---|---|
| $\omega$ [rad·s$^{-1}$] | 2157,423 | 2301,697 | 2354,155 |

Tableau 6.6 Vitesses angulaires considérées dans l'analyse des résultats de la roue aubagée accordée.

#### 6.5.3.2 Déplacements, efforts et vitesses

Par souci de concision, seules les solutions issues de l'IT et la RL-HBM associées aux points ① et ③ sont comparées sur la figure 6.40. Là encore, l'algorithme d'IT est initialisé à partir des conditions initiales fournies par la RL-HBM à chaque vitesse ciblée et exécuté sur une durée de 25 tours.




(a) déplacements en ①

(b) déplacements en ③

(c) vitesses en ①

(d) vitesses en ③

(e) efforts de contact en ①

(f) efforts de contact en ③

Figure 6.40 Comparaison des déplacements, vitesses et efforts radiaux obtenus par RL-HBM et IT aux BA de l'ensemble des secteurs de la roue aubagée accordée pour les points de contrôle : (a) (c) (e) ① et (b) (d) (f) ③. Légendes : IT (——), RL-HBM (——).

Outre le très bon accord entre les deux méthodologies, à la fois en déplacements, vitesses et efforts, un déphasage constant des signaux associé au décalage angulaire spatial des différents secteurs de la roue est observable.

### 6.5.4 Conclusion partielle

L'approche HBM proposée est validée et montre ici toute l'étendue de l'apport qualitatif qu'elle peut offrir. En effet, l'outil mis en place permet non seulement d'éclaircir des phénomènes jusque là inexplicables en termes d'amplitude, mais aussi de mieux appréhender le phénomène de raidissement au contact dans le cas des rotors 37 et 67, ce qui n'était pas possible en IT. Il est également remarquable que les résultats obtenus avec la RL-HBM—en considérant un algorithme de traitement du contact basé sur la pénalité régularisée—soient dans l'ensemble très proches de ceux obtenus avec la stratégie de référence d'IT—reposant sur un algorithme de traitement du contact basé sur les multiplicateurs de Lagrange. Dans une certaine mesure, cela est inattendu, car il était initialement supposé qu'une approche basée sur la pénalité pourrait ne pas être en mesure de prédire avec précision les efforts de contact pour une large plage de vitesses angulaires sur laquelle les amplitudes des vibrations et des efforts de contact varient considérablement. Ces résultats semblent donc indiquer que l'analyse des contacts aube/carter peut être effectuée avec suffisamment de précision à l'aide d'une approche basée sur la pénalité, bien que toutefois, une étude numérique coûteuse soit *a priori* requise pour évaluer des valeurs cohérentes des paramètres $k_{\mathrm{n}}$ et $\epsilon_{\mathrm{n}}$.

De plus, le cas du rotor 67 a permis de montrer une réelle complémentarité entre l'approche RL-HBM et l'IT en venant notamment souligner la présence d'isolats très efficacement. Enfin, bien que les résultats RL-HBM fournissent là encore des résultats prometteurs dans le cas de la roue aubagée, les applications multi-secteur laissent entrevoir un défi numérique de taille.

Finalement, en ce qui concerne les temps de calcul, l'approche RL-HBM s'avère très efficace. À titre d'exemple, environ 18 minutes sont nécessaires pour calculer les CRF du rotor 37 illustrées sur la figure 6.13 sur un ordinateur standard (Intel®Core™ i7 7700K @4,2 GHz). C'est environ 20 fois plus rapide que les temps de calcul requis pour les simulations d'IT (pour un nombre total de solutions similaire). Toutefois, bien que les simulations d'IT reposent sur un code Python/Numba optimisé, on estime que les temps de calcul d'IT pourraient encore être réduits de manière significative, par exemple, *via* la mise en place d'une procédure d'auto-corrélation permettant la détection du régime permanent. Pour cette raison, le gain évalué est certainement légèrement surestimé.

# CHAPITRE 7 ANALYSE DE STABILITÉ

Bien que les solutions obtenues dans les chapitres précédents vérifient l'équation du mouvement des systèmes non-linéaires étudiés, il faut aussi pouvoir les caractériser au sens de leur stabilité. En effet, il est tout à fait possible que certaines d'entre elles ne soient jamais observées en réalité. Ces solutions sont dites instables et sont alors quasi-dépourvues de bassin d'attraction. Autrement dit, une infime perturbation est suffisante pour déstabiliser l'une de ces solutions, ce qui l'écarte de son état d'équilibre et par conséquent l'amène à se stabiliser vers un autre état équilibre stable (périodique ou non) voire éventuellement diverger (en absence de solution bornée).

En outre, la caractérisation de la stabilité des solutions permet de mieux comprendre l'évolution du comportement dynamique d'un système non-linéaire en fonction d'un paramètre de contrôle qui peut présenter des changements qualitatifs importants appelés bifurcations. Ainsi, si plusieurs solutions de l'équation du mouvement du système coexistent, celui-ci peut, suite à une variation (perturbation) de son paramètre de contrôle, comme la vitesse angulaire $\omega$ par exemple, sauter de l'une à l'autre, ce qui peut être préjudiciable au système (saut vers une solution de haute amplitude de vibration réduisant la durée de vie en fatigue polycyclique par exemple).

Pour toutes ces raisons, il est capital d'étudier la stabilité des solutions de l'équation du mouvement d'un système non-linéaire. Dans cette optique, ce chapitre pose tout d'abord les fondements du concept de stabilité, présente ensuite des méthodes permettant de caractériser la stabilité des solutions périodiques de systèmes dynamiques non-linéaires et des moyens de détecter l'apparition de bifurcations, et enfin présente l'application de ces algorithmes aux systèmes précédemment étudiés.

## 7.1 Définition

La stabilité d'un état d'équilibre est caractérisée par la faculté du système à revenir à ce même état lorsqu'il est soumis à une perturbation. Dépendamment de la nature de la solution étudiée et de l'amplitude de la perturbation associée, différentes définitions et méthodes d'analyse existent pour caractériser sa stabilité [173, 187]. Pour ce faire, on considère un système d'EDO (3.1.15), de la forme :

$$\dot{z} = \boldsymbol{G}(z, t, \lambda), \ \boldsymbol{G} \ : \ \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2n} \tag{7.1.1}$$

### 7.1.1 Stabilité globale

Le concept de stabilité peut être établi par l'une de ces définitions les plus fondamentales :

**Definition 7.1.1. Stabilité de Lyapunov ou uniforme.** Une solution $z(t)$ est dite stable au sens de Lyapunov si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0\,,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tel que } ||z(t_0) - y(t_0)|| \leq \delta \implies ||z(t) - y(t)|| \leq \epsilon\,,\ \forall t > t_0,\ t_0 \in \mathbb{R} \tag{7.1.2}$$

Vue géométriquement, pour une solution stable $z(t)$, toutes les solutions $y(t)$ assez proches de $z(t)$ à un instant $t = t_0$ doivent rester à l'intérieur d'un domaine de section cylindrique de rayon $\epsilon$ dont le centre correspond à la trajectoire $z(t)$. Cette définition étant relativement générale, une version plus contraignante de la stabilité de Lyapunov, la définition de stabilité asymptotique, peut alors être considérée :

**Definition 7.1.2. Stabilité asymptotique.** Une solution $z(t)$ est dite asymptotiquement stable si et seulement si :

$$z(t) \text{ est stable au sens de Lyapunov} \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\infty}(||z(t) - y(t)||) = 0 \tag{7.1.3}$$

Ce qui permet d'ajouter une condition sur les solutions proches $y(t)$ qui non seulement doivent rester proches, mais aussi converger vers $z(t)$ à mesure que $t \to \infty$. La norme de la perturbation est ainsi bornée.

Ces deux définitions sont bien adaptées à l'étude de la stabilité des points fixes (ou plus globalement des systèmes autonomes), cependant, elles s'avèrent trop restrictives lors de l'étude de la stabilité de solutions périodiques puisque, dans ce contexte, toute solution d'un système libre non amorti sera instable [192]. Afin d'étendre la définition de stabilité aux solutions périodiques, Poincaré a introduit la notion de stabilité orbitale, *cf.* figure 7.1 :

**Definition 7.1.3. Stabilité orbitale.** Une solution $z(t)$ est dite orbitalement stable si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0\,,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tel que si } z(t) \text{ vérifie } ||z(t = 0) - y(t = \tau)|| \leq \delta$$
$$\text{alors } \exists\ (t_1\,,\ t_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } ||z(t_1) - y(t_2)|| \leq \epsilon \tag{7.1.4}$$

Cette définition se focalise davantage sur la comparaison des trajectoires géométriques des solutions périodiques plutôt que sur leurs valeurs en chaque instant $t$ et permet ainsi d'élargir la notion de stabilité à une classe plus large de solutions. Dans le cas où une condition sur la norme de la perturbation est également imposée, cette définition devient alors celle de la stabilité asymptotique

orbitale [187].

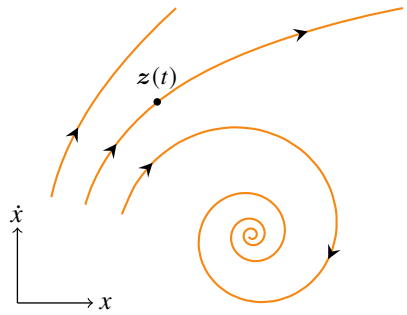


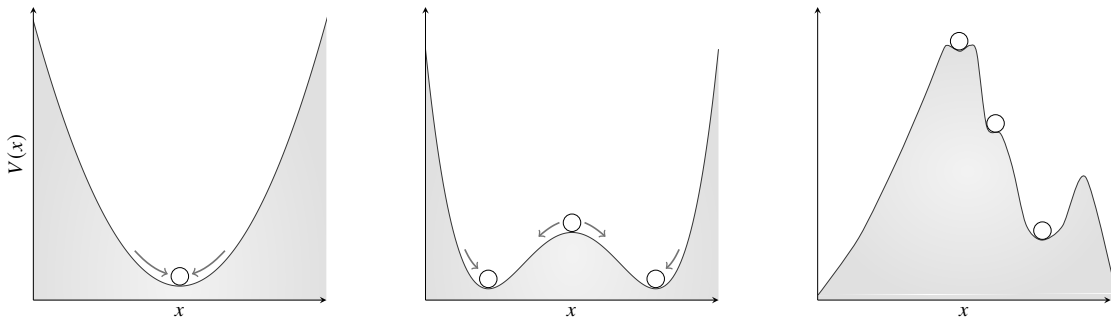

Figure 7.1 Schématisation de trois orbites d'un système temporelle continu. Géométriquement, une orbite est une courbe dans l'espace d'état de $z$, solution du système (7.1.1), paramétrée suivant le temps $t$ et orientée dans sa direction d'évolution croissante. Adaptée de [173].

Toutes ces notions de stabilité sont relatives à la stabilité globale d'un système. En pratique, il est extrêmement difficile, de prouver la stabilité globale d'une solution [177, 102] (ce qui équivaut à devoir répondre à la question : quelle est la largeur du domaine d'attraction des solutions du système étudié ?), il est alors principalement question d'étudier la stabilité locale où le principe de stabilité linéarisée permet de mieux comprendre ce qui se passe au voisinage d'un point d'équilibre.

### 7.1.2 Stabilité locale

La figure 7.2 propose une interprétation visuelle de la nature globale ou locale de la stabilité à l'aide de l'énergie potentielle du système notée $V(x)$. Le premier cas, voir la figure 7.2a correspond à un système linéaire globalement stable, où $V(x) = \frac{1}{2}x^2$. Le second cas 7.2b, correspond à un oscillateur de Duffing localement stable, présentant deux puits et une barrière, où $V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$. Bien qu'un équilibre puisse être localement stable, il est possible qu'il soit globalement instable lorsque de grandes perturbations se produisent. En pratique, lorsque la largeur du bassin d'attraction est plus petite que l'ampleur des perturbations possibles, une analyse de stabilité locale présente peu d'intérêt comme le montre le modèle d'une montagne et d'un rocher illustré sur la figure 7.2c. À première vue, lorsque le rocher est placé dans le creux au sommet, ce dernier est stable sous de petites secousses, mais instable sous l'influence d'un violent tremblement de terre. De ce fait, la figure 7.2c présente deux équilibres faiblement stables et un équilibre fortement stable.

Étant donné que les théories permettant de caractériser la stabilité des points fixes et des solutions périodiques sont assez similaires [177, 187], par la suite, il est uniquement question de présenter des techniques de caractérisation locale de la stabilité d'une solution périodique.




(a) système linéaire (b) oscillateur de Duffing (c) montagne et rocher

Figure 7.2 Interprétation graphique de la nature globale ou locale de la stabilité à l'aide de la convexité de l'énergie potentielle du système [119]. Équilibres (○). Adaptée de [177, 169].

## 7.2 Caractérisation

Il existe plusieurs moyens de caractériser la stabilité d'une solution périodique, qui dépendent pour la plupart de la manière dont les solutions périodiques sont elles-mêmes déterminées, soit dans le domaine temporel, soit dans le domaine fréquentiel. Ces deux paradigmes d'analyse linéaire de la stabilité des solutions périodiques sont présentés ici.

### 7.2.1 Théorie de Floquet

Établie il y a déjà plus d'un siècle, la théorie de Floquet [149] permet l'étude de la stabilité des systèmes linéaires à coefficients périodiques. Elle s'appuie sur une description du problème dans le domaine temporel. Pour rappel, dans ce domaine, déterminer la solution périodique d'un système dynamique peut se résumer au problème général dans l'espace d'état [161, 164] :

$$\begin{cases} \dot{z} = \boldsymbol{G}(z, t, \lambda) = \mathbf{L}z(t) - \boldsymbol{f}^*_{\text{nl}}(z(t)) + \boldsymbol{f}^*_{\text{ext}}(t) \\ z(0) = z(T) = z_0 \end{cases} \tag{7.2.1}$$

avec :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{f}^*_{\text{nl}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n \\ \mathbf{M}^{-1}\boldsymbol{f}_{\text{nl}} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{f}^*_{\text{ext}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n \\ \mathbf{M}^{-1}\boldsymbol{f}_{\text{ext}} \end{bmatrix} \tag{7.2.2}$$

où l'on recherche le couple solution $(z_0, T) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^*_+$. Ceci s'apparente directement à l'approche faite par la méthode de tir couplée à un intégrateur du premier ordre en section 3.1.3.

En considérant une solution périodique $z_0(t)$, disposant d'une période minimale $T = 2\pi/\omega$, pour un paramètre de contrôle fixé $\lambda = \lambda_0$, calculer sa stabilité revient alors à imposer une petite perturbation

$\boldsymbol{y}(t)$ telle que :

$$z(t) = z_0(t) + \boldsymbol{y}(t) \tag{7.2.3}$$

puis à vérifier si $\boldsymbol{y}(t)$ s'amplifie, cas où $z_0(t)$ est instable, ou disparaît avec le temps, cas où $z_0(t)$ stable. Pour cela, en substituant l'équation (7.2.3) dans (7.2.1), puis en réalisant un développement de Taylor en $z_0$ il est possible d'écrire :

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = \mathbf{J}(t)\boldsymbol{y}(t) + O(||\boldsymbol{y}(t)||^2) \tag{7.2.4}$$

soit en ne gardant que les termes linéaires de la perturbation [1] :

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = \mathbf{J}(t)\boldsymbol{y}(t) \tag{7.2.5}$$

avec :

$$\mathbf{J}(t) = \frac{\partial g}{\partial z}(z_0, t, \lambda_0) = \mathbf{L} - \frac{\partial \boldsymbol{f}^*_{\mathrm{nl}}}{\partial z}(z_0, t, \lambda_0) \tag{7.2.6}$$

où :

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}^*_{\mathrm{nl}}}{\partial z} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{M}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}}{\partial \boldsymbol{x}} & \mathbf{M}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} \end{bmatrix} \tag{7.2.7}$$

Étant donné que $z_0(t)$ est $T$-périodique, la jacobienne $\mathbf{J}(t)$ est aussi $T$-périodique ce qui, par conséquent, rend la perturbation $\boldsymbol{y}(t)$ solution d'un système linéaire à coefficients périodiques. Le théorème de Floquet est donc applicable au système (7.2.5) et permet de montrer que pour tout $m \in [\![1..2n]\!]$, $\boldsymbol{y}(t)$ est la somme de $2n$ solutions fondamentales $\boldsymbol{y}_m(t)$ linéairement indépendantes telles que :

$$\boldsymbol{y}(t) = \sum_{m=1}^{2n} \boldsymbol{y}_m(t) \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{y}_m(t) = \boldsymbol{p}_m(t)\,\mathrm{e}^{\alpha_m t},\ \boldsymbol{p}_m\ T\text{-périodique},\ \alpha_m \in \mathbb{C} \tag{7.2.8}$$

où les $\alpha_m$ correspondent aux exposants (ou coefficients) de Floquet définis de manière unique modulo $2\mathrm{i}\pi/T$ et les fonctions propres $\boldsymbol{p}_m$ sont les formes de Floquet [30]. Il est alors possible de montrer que si les solutions $\boldsymbol{y}_m$ sont regroupées au sein d'une matrice fondamentale de solutions $\boldsymbol{Y}(t) = [\boldsymbol{y}_1(t)\,\boldsymbol{y}_2(t)\ \ldots\ \boldsymbol{y}_{2n}(t)]$, cette dernière satisfait :

$$\dot{\boldsymbol{Y}}(t) = \mathbf{J}(z_0, t)\boldsymbol{Y}(t) \tag{7.2.9}$$

1. Notons que c'est la linéarisation de la perturbation qui confère alors à l'analyse de stabilité son caractère local.

avec le changement de variable $\tau = t + T$, il vient alors naturellement la relation :

$$\frac{d\boldsymbol{Y}}{d\tau} = \mathbf{J}(z_0, \tau - T)\boldsymbol{Y}(\tau - T) = \mathbf{J}(z_0, \tau)\boldsymbol{Y}(\tau) \tag{7.2.10}$$

Par conséquent si $\boldsymbol{Y}(t)$ est une matrice fondamentale de solutions alors, $\boldsymbol{Y}(t+T)$ l'est aussi. Or, étant donné que le système (7.2.5) n'admet au plus que $2n$ solutions linéairement indépendantes, les solutions $\boldsymbol{y}_m(t+T)$ ne sont donc que des combinaisons linéaires des $\boldsymbol{y}_m(t)$, de ce fait :

$$\forall t \ : \ \boldsymbol{Y}(t+T) = \mathcal{M}\boldsymbol{Y}(t) \tag{7.2.11}$$

où $\mathcal{M}$ est la matrice de monodromie ou de transition de Floquet [158, 192]. Elle permet de calculer l'état de la perturbation à un instant $t$ en fonction de son état une période plus tôt. Cependant, $\mathcal{M}$ dépend du choix de la matrice fondamentale $\boldsymbol{Y}(t)$ et n'est donc pas unique. On peut néanmoins choisir d'imposer comme conditions initiales :

$$\boldsymbol{Y}(0) = \frac{\partial g(z_0, t=0)}{\partial z_0} = \frac{\partial z_0}{\partial z_0} = \mathbf{I}_{2n} \tag{7.2.12}$$

ce qui permet ainsi de simplifier le système (7.2.11) et d'obtenir :

$$\mathcal{M} = \boldsymbol{Y}(T) \tag{7.2.13}$$

Les valeurs propres $\rho_m$ de la matrice de monodromie $\mathcal{M}$ sont appelés les multiplicateurs de Floquet. Chaque multiplicateur $\rho_m$ fournit une mesure de la convergence ou de la divergence orbitale locale de l'orbite fermée du système (7.2.5) dans une direction particulière sur une période [192]. Les multiplicateurs peuvent être reliés aux exposants de Floquet $\alpha_m$ par la relation :

$$\rho_m = \mathrm{e}^{\alpha_m T} \Leftrightarrow \alpha_m = \frac{1}{T}\ln(|\rho_m|) + \mathrm{i}\,\frac{\arg(\rho_m) + 2k\pi}{T}, \ k \in \mathbb{Z} \tag{7.2.14}$$

Finalement, il est possible de définir la stabilité d'une solution périodique $z_0$ en fonction des exposants et multiplicateurs de Floquet de telle sorte qu'une solution sera dite :

**stable,** si $\forall m, \ \Re(\alpha_m) < 0$ ou $|\rho_m| < 1$. Autrement dit, toutes les solutions fondamentales $\boldsymbol{y}_m$ tendent vers zéro avec le temps, la perturbation $\boldsymbol{y}$ s'atténue et la solution périodique $z_0$ est qualifiée d'asymptotiquement stable, de cycle limite stable ou encore d'attracteur périodique ;

**instable,** si $\exists m$ tel que $\Re(\alpha_m) > 0$ ou $|\rho_m| > 1$. La solution fondamentale $\boldsymbol{y}_m$ croît alors exponentiellement dans le temps.

Pour le cas particulier où des exposants de Floquet se situent sur l'axe imaginaire ou que des multiplicateurs se situent exactement sur le cercle unitaire, une analyse non-linéaire est requise afin

de statuer sur la stabilité de la solution. D'un point de vue numérique, il est possible d'obtenir $\mathcal{M}$ de multiples manières :

**Intégration temporelle en $2n$-passes** [158, 108, 109]**.** Dans cette méthode, les coefficients de la matrice de monodromie $\mathcal{M}$ associée à un système quelconque (2.4.1) s'obtiennent en intégrant $2n$ fois le système linéaire (7.2.5) sur une durée d'une période $T$. Ce qui équivaut ainsi à intégrer l'équation :

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(t) + \underbrace{\left[\mathbf{C} + \frac{\partial \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right]}_{\mathbf{C}(t)} \dot{\boldsymbol{x}}(t) + \underbrace{\left[\mathbf{K} + \frac{\partial \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}}{\partial \boldsymbol{x}}\right]}_{\mathbf{K}(t)} \boldsymbol{x}(t) = \mathbf{0} \tag{7.2.15}$$

en partant des $2n$ conditions initiales linéairement indépendantes contenues dans les vecteurs d'état $z_0^{(k)}$ correspondant aux colonnes de la matrice identité $\mathbf{I}_{2n}$, tel que $k \in [\![1..2n]\!]$. La matrice de monodromie s'obtient ainsi colonne après colonne :

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(1)}(T) & \dots & \boldsymbol{x}^{(k)}(T) & \dots & \boldsymbol{x}^{(2n)}(T) \\ \dot{\boldsymbol{x}}^{(1)}(T) & \dots & \dot{\boldsymbol{x}}^{(k)}(T) & \dots & \dot{\boldsymbol{x}}^{(2n)}(T) \end{bmatrix} \tag{7.2.16}$$

Cette approche est précise mais peut devenir rapidement coûteuse en temps de calcul pour des systèmes de grandes tailles. Il faut également souligner que cette approche ne constitue rien de plus que l'une des étapes intermédiaires de la méthode du tir afin d'en déterminer la jacobienne $\mathbf{R}_{,z_0}$, *cf.* figure 3.10.

**Note :** (1) pour intégrer l'équation (7.2.15), le schéma implicite de Newmark de l'accélération moyenne, $[\gamma = 1/2\,;\, \beta = 1/4]$, peut être utilisé. Ce dernier a l'avantage d'être—inconditionnellement stable—pour les systèmes linéaires. L'algorithme décrit sur la figure 3.4 peut être ainsi repris en prenant soin d'utiliser les matrices $\mathbf{C}(t)$ et $\mathbf{K}(t)$ qui incluent les contributions des matrices $\partial \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}/\partial \dot{\boldsymbol{x}}$ et $\partial \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}/\partial \boldsymbol{x}$ (3.2.44), à l'instant associé, déterminées au cours de la phase d'AFT. Par la suite, cette approche est donc désignée par le nom de Newmark $2n$-passes. (2) En pratique, on intègre $N+1$ instants (et non $N$) pour approcher au mieux $\boldsymbol{z}(T)$. Les dérivées partielles associées au $N+1^{\text{ème}}$ instant, *i.e.* $t = T$, correspondent alors à celles calculées à $t = 0$. Quel que soit l'algorithme considéré dans cette section, ce deuxième point demeure valable.

**Approximation par exponentielles de matrices** [109, 129, 136]**.** En découpant en $N$ intervalles temporels $[t_i; t_{i+1}]$ la période d'étude $T$, faire l'hypothèse que le système (7.2.5) est invariant au cours de chaque intervalle permet de considérer une jacobienne $\mathbf{J}(t)$ (7.2.6) constante par

morceaux. L'équation différentielle à coefficients périodiques (7.2.5) est ensuite transformée en $N$ équations différentielles à coefficients constants. Intégrer analytiquement l'une de ces équations sur un intervalle permet alors de trouver la relation :

$$\boldsymbol{y}(t_{i+1}) = \exp(h\mathbf{J}_i)\,\boldsymbol{y}(t_i) \tag{7.2.17}$$

où $\mathbf{J}_i$ est une matrice de transition élémentaire du système entre les temps consécutifs $t_i$ et $t_{i+1}$, elle est en pratique prise égale à la valeur moyenne entre ces deux instants $\mathbf{J}_i = (\mathbf{J}(t_{i+1})+\mathbf{J}(t_i))/2$, et $h = t_{i+1} - t_i$ correspond au pas de temps. Ainsi, on peut approximer $\mathcal{M}$ comme étant le produit des matrices $\mathbf{J}_i$ sur une période tel que :

$$\mathcal{M} = \prod_{i=0}^{N} \exp(h\mathbf{J}_i) \tag{7.2.18}$$

Cette approche fournit des résultats, certes un peu moins précis que la méthode $2n$-passes, mais elle est moins coûteuse numériquement.

**Note :** l'approche par exponentielles de matrices comporte deux difficultés numériques : (1) l'évaluation des exponentielles de matrices et (2) le contrôle des erreurs commises lors des multiplications matricielles des dites exponentielles. Concernant le calcul des exponentielles, il peut être effectué *via* un développement de Taylor, approximant de Padé ou encore à l'aide d'une décomposition en valeurs singulières. L'étape de multiplication requise pour l'assemblage de $\mathcal{M}$ peut présenter de fortes variations d'un produit à l'autre (et causer des *partial product overflow* en anglais), ce qui peut réduire la qualité de l'approximation numérique résultante. Pour éviter ce problème, on peut appliquer une procédure récursive de normalisation comme celle proposée dans l'article [109], § 4.1.1.2, celle-ci consiste à imposer une norme matricielle infinie unitaire à chaque produit intermédiaire de manière à venir limiter la propagation d'erreur.

**Intégration temporelle simple-passe** [109, 136]**.** Similaire à la méthode des exponentielles de matrices, cette approche ne requiert qu'une unique passe d'intégration temporelle. Le calcul de $\mathcal{M}$ repose alors encore sur l'hypothèse d'invariance du système entre deux instants consécutifs. L'intégration peut alors se baser sur une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 pondérées par les coefficients de Gill [108, 136], choisis pour minimiser les erreurs d'arrondis et réduire les besoins de stockage mémoire de l'algorithme, ou encore sur un schéma de Newmark [109].

Dans tout les cas, $\mathcal{M}$ s'exprime à nouveau comme un produit de matrices élémentaires :

$$\mathcal{M} = \prod_{i=0}^{N} \mathbf{D}_i \tag{7.2.19}$$

Il est possible de montrer que dans le cas d'un intégrateur de Newmark [109], les matrices de transition élémentaires $\mathbf{D}_i$ s'obtiennent alors en résolvant les systèmes linéaires suivants :

$$\mathbf{H}_1 \mathbf{D}_i = \mathbf{H}_0 \tag{7.2.20}$$

où les matrices $\mathbf{H}_0$ et $\mathbf{H}_1$, de dimension $(2n \times 2n)$, dépendent des matrices de masse $\mathbf{M}$, d'amortissement $\mathbf{C}(t)$ et de raideur $\mathbf{K}(t)$, *cf.* équation (7.2.15), notées respectivement $\mathbf{C}_i$ et $\mathbf{K}_i$ à l'instant $t_i$, des paramètres de quadrature du schéma $\gamma$ et $\beta$, ainsi que du pas d'intégration $h$. Elles sont définies telles que :

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{M} + \beta h^2 \mathbf{K}_{i+1} & \beta h^2 \mathbf{C}_{i+1} \\ \gamma h \mathbf{K}_{i+1} & \mathbf{M} + \gamma h \mathbf{C}_{i+1} \end{bmatrix} \tag{7.2.21}$$

et

$$\mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{M} - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) h^2 \mathbf{K}_i & h\mathbf{M} - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) h^2 \mathbf{C}_i \\ -(1-\gamma) h \mathbf{K}_i & \mathbf{M} - (1-\gamma) h \mathbf{C}_i \end{bmatrix} \tag{7.2.22}$$

Cette approche tout aussi rapide que celles des exponentielles, offre cependant des résultats conservatifs concernant la stabilité du système car il a été montré que les multiplicateurs obtenus numériquement convergent vers la limite supérieure des multiplicateurs de Floquet théoriques [109].

**Note :** la procédure de normalisation des produits intermédiaires utilisée par la méthode d'approximation par exponentielles de matrices peut ici aussi être appliquée lors de l'évaluation numérique de l'équation (7.2.19) étant donné que les matrices de transitions élémentaires $\mathbf{D}_i$ peuvent être simplement vues comme une autre forme d'approximation des exponentielles de matrices $\exp(h\mathbf{J}_i)$.

**Utilisation des polynômes de Tchebychev** [126]**.** À la place d'intégrer un système d'EDO linéaires, cette méthode permet de résoudre un système algébrique d'équations linéaires pour obtenir $\mathcal{M}$. Bien que performante, cette méthode introduit cependant un nouveau niveau d'incertitude lié au degré de l'approximation polynomiale utilisée.

**Procédure d'ondelette-Galerkin** [100, 104]**.** Bien qu'initialement développée afin d'obtenir les

régimes transitoires et permanents de systèmes à solutions périodiques, cette procédure permet également d'évaluer la matrice de monodromie $\mathcal{M}$. Conceptuellement proche de la méthode basée sur les polynômes de Tchebychev, elle permet d'exploiter les propriétés de localisation temps-fréquence des ondelettes ainsi que les performances des algorithmes existants afin d'évaluer en une unique passe la matrice de monodromie. Un important effort d'implémentation est néanmoins requis.

Les multiplicateurs de Floquet $\rho_m$ s'obtiennent en diagonalisant $\mathcal{M}$. Ils sont uniques et viennent par paires conjuguées complexes. Notons également les particularités suivantes. (1) Dans le cas de l'étude de systèmes autonomes, une exception demeure. En effet, il est possible de montrer que les oscillations périodiques ne sont pas localement uniques et restent valables à un déphasage près, il y aura donc toujours un multiplicateur $\rho_m = 1$ [192], § 3.2.2. Le verdict de stabilité résultant se basera donc seulement sur les multiplicateurs restants. (2) Quand la période minimale de la jacobienne de l'équation (7.2.9) est par exemple égale à $T/2$, avec un changement de variable comparable à celui fait en (7.2.10), il est possible de montrer que les valeurs propres de la matrice fondamentale $\boldsymbol{Y}(T)$ correspondront aux carrés des valeurs propres de la matrice $\boldsymbol{Y}(T/2)$ [192], § 3.2.3.

### Application - Matrice de monodromie par Newmark $2n$-passes [72]

Une analyse de stabilité temporelle est effectuée sur les solutions issues d'une résolution HBM pour un oscillateur de Duffing pour un nombre d'harmoniques $H = 12$ fixé et différentes valeurs d'échantillonnage $N$. Les paramètres de l'oscillateur sont $m = 1$ kg, $k = 1$ N·m$^{-1}$, $c = 5 \cdot 10^{-2}$ N·m$^{-1}$·s, $k_{\mathrm{nl}} = 1$ N·m$^{-3}$ et $F_0 = 1$ N. La convergence des valeurs propres de la matrice de monodromie est étudiée en fonction du nombre de pas d'intégration $N$ sur une période $T$ par le schéma de Newmark de l'accélération moyenne. Les modules des multiplicateurs de Floquet $\rho_m$, soit les modules des valeurs propres de la matrice de monodromie, en fonction de la pulsation d'excitation sont présentés sur la figure 7.3.

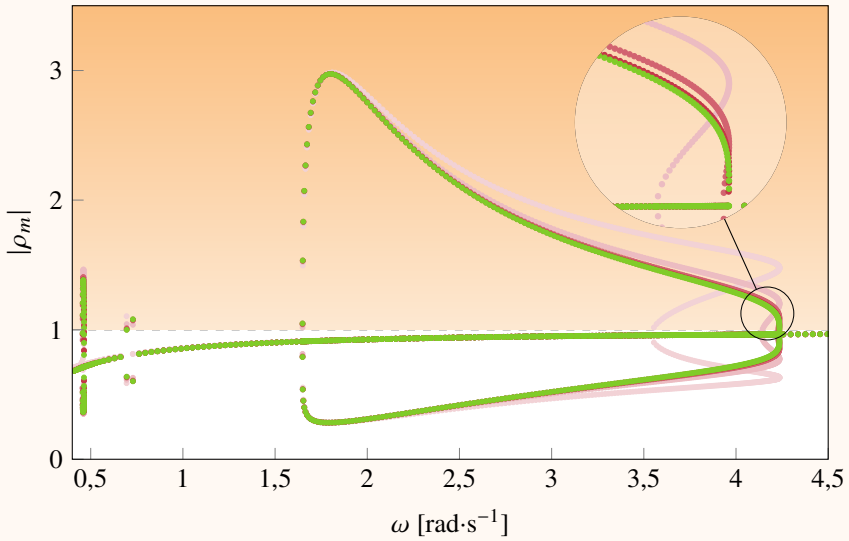



Figure 7.3 Convergence des valeurs propres de la matrice de monodromie en fonction du nombre de

pas d'intégration $N$. Modules des $2n$ multiplicateurs de Floquet en fonction de la pulsation d'excitation $\omega$ évalués pour $N$ égal à 32 (●), 64 (●), 128 (●), 256 (●) et 1024 (●).

Les multiplicateurs obtenus pour $\omega = 4{,}23$ rad·s$^{-1}$, au niveau d'une solution stable proche du maximum d'amplitude de la résonance non-linéaire, sont présentés dans le tableau 7.1.

| $N$ | $\rho_1$ | $\rho_2$ | $\mathcal{E}(\rho_1)$ [%] | $\mathcal{E}(\rho_2)$ [%] | $\mathcal{E}_{\text{moy}}$ [%] | temps [ms] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 32 | 1,4538 + 0i | 0,6393 + 0i | 52,32 | 34,59 | 43,45 | 0,81 |
| 64 | 1,1680 + 0i | 0,7950 + 0i | 23,86 | 19,66 | 21,76 | 1,48 |
| 128 | 1,0073 + 0i | 0,9217 + 0i | 11,10 | 10,61 | 10,85 | 2,91 |
| 256 | 0,9602 + 0,0797i | 0,9602 − 0,0797i | 1,61 | 1,61 | 1,61 | 5,96 |
| 512 | 0,9591 + 0,0917i | 0,9591 − 0,0917i | 0,37 | 0,37 | 0,37 | 11,4 |
| 1024 | 0,9589 + 0,0944i | 0,9589 − 0,0944i | 0,08 | 0,08 | 0,08 | 22,7 |
| 4096 | 0,9588 + 0,0953i | 0,9588 − 0,0953i | 0 | 0 | 0 | 91,9 |

Tableau 7.1 Évolution des valeurs propres de la matrice de monodromie et du temps de calcul en fonction du nombre de pas de temps $N$ proche de la résonance non-linéaire.

Pour $N = 32$, 64 et 128, les deux multiplicateurs obtenus ne sont pas complexes conjugués comme ils devraient l'être, ce qui se retrouve par contre à partir de $N \geqslant 256$. Pour quantifier la précision des résultats numériques, on définit l'erreur relative $\mathcal{E}$, exprimée en pourcentage. Un calcul de l'erreur relative moyenne $\mathcal{E}_{\text{moy}}$ sur les deux multiplicateurs par rapport aux valeurs de référence obtenues pour $N = 4096$ permet de montrer qu'il faut au moins $N = 256$ pour garantir une précision satisfaisante sur les multiplicateurs. Cette observation se retrouve également dans les travaux de Peletan [62, 158]. La CRF obtenue avec analyse de stabilité pour $N = 512$ ainsi que le plan complexe des multiplicateurs associés sont présentés sur la figure 7.4. La caractérisation des points de bifurcations est détaillée plus loin en section 7.3.

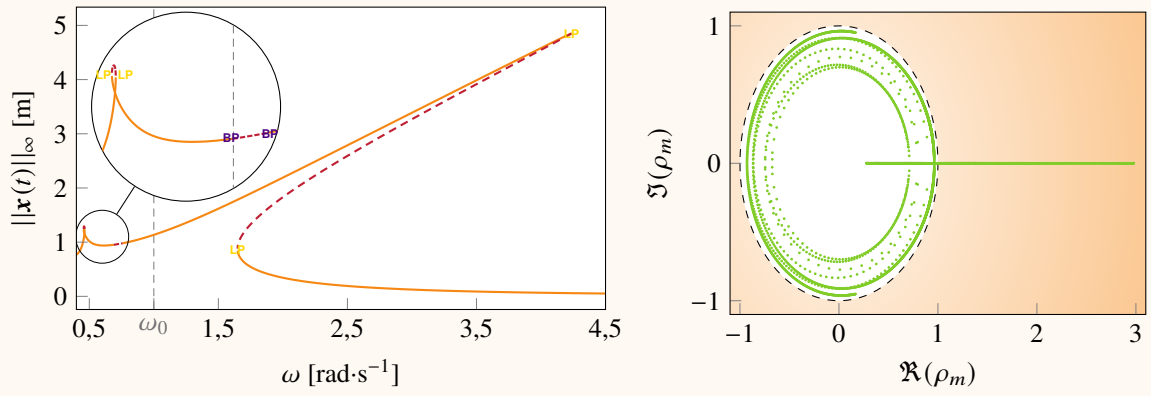



Figure 7.4 CRF de l'oscillateur de Duffing obtenue avec analyse de stabilité et multiplicateurs associés (●) dans le plan complexe. Zone d'instabilité des solutions périodiques (□). Branches : stables (——); instables (- - - -). Bifurcations : point limite (LP) et fourche (BP).

Le temps de calcul a par ailleurs tendance à doubler avec le nombre de pas utilisé pour l'intégration, ce qui est cohérent étant donné que le coût de l'analyse de stabilité dans le domaine temporel est essentiellement dû ici à

l'étape de construction de la matrice $\mathcal{M}$ puisque le coût de la diagonalisation est relativement modeste vu qu'il ne dépend que du nombre de ddl $n$. Enfin, bien que non présenté, il a été observé que l'utilisation de la méthode d'intégration Newmark simple-passe semble offrir un bon compromis entre précision des résultats et réduction des temps de calcul, ce qui est également attesté dans la littérature [62].

### 7.2.2 Méthode de Hill

La méthode de Hill [148] constitue une variante de la théorie de Floquet adaptée au domaine fréquentiel [23, 39, 52, 9]. Elle permet de calculer les solutions $\boldsymbol{p}_m$ et exposants $\alpha_m$ de Floquet. Pour ce faire, les fonctions inconnues périodiques $\boldsymbol{p}_m$ sont développées en séries de Fourier complexes :

$$\boldsymbol{p}_m(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{p}_m^j \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}j\omega t} \tag{7.2.23}$$

avec $\boldsymbol{p}_m^j$ des vecteurs complexes de dimension $2n$. En injectant l'équation (7.2.23) dans la forme de Floquet (7.2.8), n'importe quelle solution fondamentale $\boldsymbol{y}_m(t)$ peut alors s'écrire :

$$\boldsymbol{y}_m(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{p}_m^j \, \mathrm{e}^{\alpha_m t} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}j\omega t} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{p}_m^j \, \mathrm{e}^{(\alpha_m + \mathrm{i}j\omega)t} \tag{7.2.24}$$

Étant donné qu'on cherche $\boldsymbol{p}_m$ $T$-périodique, la jacobienne $\mathbf{J}(t)$ est aussi $T$-périodique, ce qui permet également d'appliquer un développement en série de Fourier infinie :

$$\mathbf{J}(t) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \mathbf{J}^h \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}h\omega t} \tag{7.2.25}$$

avec $\mathbf{J}^h$ des matrices de dimension $(2n \times 2n)$. Ainsi, en injectant les séries de Fourier de $\boldsymbol{y}_m(t)$ et $\mathbf{J}(t)$, des équations (7.2.24) et (7.2.25), dans le système linéaire à coefficients périodiques (7.2.5), il vient :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=-\infty}^{+\infty} (\alpha_m + \mathrm{i}j\omega) \boldsymbol{p}_m^j \, \mathrm{e}^{(\alpha_m + \mathrm{i}j\omega)t} &= \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \mathbf{J}^h \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}h\omega t} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{p}_m^j \, \mathrm{e}^{(\alpha_m + \mathrm{i}k\omega)t} \\
&= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \mathbf{J}^h \boldsymbol{p}_m^j \, \mathrm{e}^{[\alpha_m + \mathrm{i}(k+h)\omega]t} \\
&= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \mathbf{J}^h \boldsymbol{p}_m^{j-h} \, \mathrm{e}^{(\alpha_m + \mathrm{i}j\omega)t}
\end{aligned} \tag{7.2.26}$$

où l'indiçage en $j$ peut être librement décalé, en le remplaçant par $j-h$, étant donné que les sommes considérées sont infinies, ce qui donne ainsi :

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{h=-\infty}^{+\infty}\mathbf{J}^h\boldsymbol{p}_m^{j-h}-(\alpha_m+\mathrm{i}j\omega)\boldsymbol{p}_m^j\right]\mathrm{e}^{(\alpha_m+\mathrm{i}j\omega)t}=\mathbf{0} \tag{7.2.27}$$

Une procédure d'équilibrage harmonique est par la suite appliquée à l'équation (7.2.27). Pour les harmoniques $j\in[\![-1\,..\,1]\!]$ constituant les lignes centrales du système, ceci s'écrit (pour $l=0$ voir ci-après l'équation (7.2.31)) :

$$\begin{aligned}\cdots+\mathbf{J}^{-2}\boldsymbol{p}_m^1+\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{p}_m^0+\left[\mathbf{J}^0-(\alpha_m-\mathrm{i}\omega)\mathbf{I}_{2n}\right]\boldsymbol{p}_m^{-1}+\mathbf{J}^1\boldsymbol{p}_m^{-2}+\mathbf{J}^2\boldsymbol{p}_m^{-3}+\ldots&=\mathbf{0}\\ \cdots+\mathbf{J}^{-2}\boldsymbol{p}_m^2+\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{p}_m^1+\left[\mathbf{J}^0-\alpha_m\mathbf{I}_{2n}\right]\boldsymbol{p}_m^0+\mathbf{J}^1\boldsymbol{p}_m^{-1}+\mathbf{J}^2\boldsymbol{p}_m^{-2}+\ldots&=\mathbf{0}\\ \cdots+\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{p}_m^2+\left[\mathbf{J}^0-(\alpha_m+\mathrm{i}\omega)\mathbf{I}_{2n}\right]\boldsymbol{p}_m^1+\mathbf{J}^1\boldsymbol{p}_m^0+\mathbf{J}^2\boldsymbol{p}_m^{-1}+\mathbf{J}^3\boldsymbol{p}_m^{-2}+\ldots&=\mathbf{0}\end{aligned} \tag{7.2.28}$$

L'équation (7.2.27) est donc transformée en un problème aux valeurs propres—de dimension infinie—via l'annulation de chaque harmonique d'indice $j$ :

$$(\mathcal{H}-s\mathbf{I})\,\mathbf{q}=\mathbf{0} \tag{7.2.29}$$

où $s\in\mathbb{C}$, $\mathbf{q}$ est un vecteur de dimension infinie (concaténation des $\boldsymbol{p}_m^j$), $\mathbf{I}$ est la matrice identité de taille adéquate et $\mathcal{H}$ est la matrice de Hill de dimension infinie définie par blocs tel que :

$$\mathcal{H}=\begin{bmatrix}\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\iddots\\ \cdots&\mathbf{J}^0+2\mathrm{i}\omega\mathbf{I}_{2n}&\mathbf{J}^{-1}&\mathbf{J}^{-2}&\mathbf{J}^{-3}&\mathbf{J}^{-4}&\cdots\\ \cdots&\mathbf{J}^1&\mathbf{J}^0+\mathrm{i}\omega\mathbf{I}_{2n}&\mathbf{J}^{-1}&\mathbf{J}^{-2}&\mathbf{J}^{-3}&\cdots\\ \cdots&\mathbf{J}^2&\mathbf{J}^1&\mathbf{J}^0&\mathbf{J}^{-1}&\mathbf{J}^{-2}&\cdots\\ \cdots&\mathbf{J}^3&\mathbf{J}^2&\mathbf{J}^1&\mathbf{J}^0-\mathrm{i}\omega\mathbf{I}_{2n}&\mathbf{J}^{-1}&\cdots\\ \cdots&\mathbf{J}^4&\mathbf{J}^3&\mathbf{J}^2&\mathbf{J}^1&\mathbf{J}^0-2\mathrm{i}\omega\mathbf{I}_{2n}&\cdots\\ \iddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{bmatrix} \tag{7.2.30}$$

Les valeurs propres $s_m$ et vecteurs propres $\mathbf{q}_m$ peuvent être reliés aux coefficients de Floquet $\alpha_m$ et aux contributions harmoniques $\boldsymbol{p}_m^j$ des formes de Floquet en comparant les équations (7.2.27) et (7.2.29) par les relations :

$$s_m^l=\alpha_m+\mathrm{i}l\omega\quad\text{et}\quad\mathbf{q}_m^l=[\ldots,\boldsymbol{p}_m^{-1-l},\boldsymbol{p}_m^{0-l},\boldsymbol{p}_m^{1-l},\ldots]^\top\quad\text{avec}\quad\mathcal{H}\mathbf{q}_m^l=(\alpha_m+\mathrm{i}l\omega)\mathbf{q}_m^l \tag{7.2.31}$$

pour tout $l\in\mathbb{Z}$ et $m\in[\![1\,..\,2n]\!]$. La relation (7.2.31) permet d'illustrer que chaque exposant de

Floquet $\alpha_m$ est associé à un ensemble infini de valeurs propres $s_m^l$. De ce fait, connaître l'infinité des $s_m^l$ permettrait de calculer $\alpha_m$ et donc de statuer sur la stabilité de la solution périodique examinée. En pratique, l'ordre des séries de Fourier est fini ce qui implique que la matrice $\mathcal{H}$ est tronquée. De plus, dans le cadre d'un développement en série de Fourier réelle de la HBM et d'une résolution par algorithme itératif avec gradient, on peut tirer avantage du fait que la jacobienne $\mathbf{R}_{,\tilde{\boldsymbol{x}}}$ est déjà calculée. Ainsi entreprendre une démarche similaire à celle suivie pour la construction de $\mathcal{H}$ appliquée au système (2.4.1), dont la démonstration n'est pas détaillée ici [52, 166, 106], conduit au problème aux valeurs propres quadratique suivant :

$$(\mathbf{R}_{,\tilde{\boldsymbol{x}}} + \boldsymbol{\Delta}_1 \hat{s} + \boldsymbol{\Delta}_2 \hat{s}^2)\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \tag{7.2.32}$$

où $\hat{s}$ et $\hat{\mathbf{q}}$ sont les valeurs et vecteurs propres complexes du problème tronqué, $\mathbf{R}_{,\tilde{\boldsymbol{x}}}$ est la jacobienne définie par l'équation (3.2.22) et où les termes $\boldsymbol{\Delta}_1$ et $\boldsymbol{\Delta}_2$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Delta}_1 &= 2\omega \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{M} + \mathbf{I}_{2H+1} \otimes \mathbf{C} + \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{\Gamma} \\ \boldsymbol{\Delta}_2 &= \mathbf{I}_{2H+1} \otimes \mathbf{M} \end{aligned} \tag{7.2.33}$$

Étant donné que la jacobienne est déjà calculée et que les termes $\boldsymbol{\Delta}_1$ et $\boldsymbol{\Delta}_2$ sont faciles à évaluer, la difficulté principale consiste à résoudre le problème aux valeurs propres quadratique (7.2.32). Toutefois, avant de s'y atteler, il convient de noter la présence du terme $\boldsymbol{\Gamma}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{f}_{\mathrm{nl}}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{\Gamma}$ [32, 38] qui n'apparaît pas dans la résolution du problème HBM en lui-même et demeure quasiment absent de la littérature. Pour parvenir à résoudre ce problème, il est nécessaire de reformuler (7.2.32) en un problème aux valeurs propres généralisé équivalent—de taille double—à l'aide d'une linéarisation de type *first companion form* [105] (procédure analogue à un passage en formulation d'état), il devient :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_H} & \mathbf{N} \\ -\mathbf{R}_{,\tilde{\boldsymbol{x}}} & -\boldsymbol{\Delta}_1 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{q}} = \hat{s} \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{0}_{n_H} \\ \mathbf{0}_{n_H} & \boldsymbol{\Delta}_2 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{q}} \tag{7.2.34}$$

ou sous la même forme que (7.2.29) :

$$(\hat{\mathcal{H}} - \hat{s}\, \mathbf{I}_{2n_H})\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \tag{7.2.35}$$

avec :

$$\hat{\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_H} & \mathbf{I}_{n_H} \\ -\boldsymbol{\Delta}_2^{-1}\mathbf{R}_{,\tilde{\boldsymbol{x}}} & -\boldsymbol{\Delta}_2^{-1}\boldsymbol{\Delta}_1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}} \\ \hat{s}\hat{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \tag{7.2.36}$$

où $\mathbf{N}$ est généralement choisie comme étant égale à la matrice identité $\mathbf{I}_{n_H}$ ou un de ces multiples tels que $||\mathbf{R}_{,\tilde{\boldsymbol{x}}}||\, \mathbf{I}_{n_H}$ ou encore $||\boldsymbol{\Delta}_2||\, \mathbf{I}_{n_H}$, où $||\cdot||$ correspond ici à une norme matricielle [105]. La résolution de ce problème permet ainsi d'obtenir les coefficients de Hill $\hat{s}$ définis comme étant les

$2n_H = 2n(2H+1)$ valeurs propres complexes de la matrice réelle de Hill tronquée $\hat{\mathcal{H}}$.

Le problème de stabilité (7.2.35) peut également être approximé par un problème linéaire aux valeurs propres généralisé [38] en ramenant l'étude de stabilité d'une solution périodique à l'étude de stabilité d'un point fixe dans l'espace de Fourier à l'aide d'une méthode des moyennes [166] ce qui conduit à l'équation suivante :

$$\mathbf{R}_{\dot{x}}\,\hat{\mathbf{q}} = \hat{s}\,[-2\omega\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{M}]\,\hat{\mathbf{q}} \tag{7.2.37}$$

ce qui réduit ainsi à $n_H$ la dimension du système à résoudre et de ce fait, le nombre de valeurs propres résultantes. Notons finalement que dans ce cas, la seule présence du terme $\boldsymbol{\nabla}$ dans le produit de kronecker du membre de droite de l'équation (7.2.37) implique qu'il y aura toujours $n$ valeurs propres singulières parmi les $n_H$ calculées qui se doivent d'être exclues de l'analyse à suivre.

**Note :** lors de l'étude de systèmes de grandes dimensions et/ou pour un nombre d'harmoniques élevé, et dépendamment de la non-linéarité considérée, on pourra tenir compte de la structure creuse de la matrice $\hat{\mathcal{H}}$ ($\geqslant$ 75 % de zéros) en recourant alors à une méthode de résolution itérative du problème aux valeurs propres (7.2.35) et en ne calculant qu'un sous-ensemble de ces solutions.

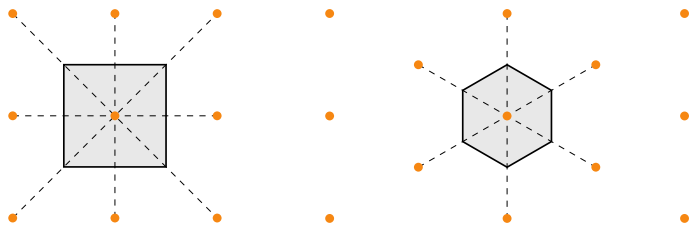
À ce stade, étant donné qu'il y a $2n_H$ valeurs propres $\hat{s}$ (ou respectivement $n_H$ dans le cas du problème linéaire) pour seulement $2n$ coefficients de Floquet $\alpha_m$ qui disposent d'un sens physique, certaines d'entre elles sont donc redondantes (usuellement qualifiées en anglais de *spurious* ou *redundant*). Idéalement, comme le montre l'équation (7.2.31), les valeurs propres redondantes ne sont pas problématiques car elles disposent de la même partie réelle et d'une partie imaginaire modulo $l\omega$, *i.e.* les membres d'une famille sont simplement séparés sur l'axe imaginaire à une fréquence de modulation près tel que $\hat{s}_m^l = \hat{s}_m^0 + \mathrm{i}l\omega$. Mais comme, d'un point de vue numérique, le problème (7.2.32) se base sur des séries de Fourier tronquées, les valeurs propres obtenues ne correspondent pas nécessairement tout à fait aux valeurs du problème infini (7.2.29) en raison des erreurs commises sur les bords du spectre de Hill. Néanmoins, certaines des valeurs propres et vecteurs propres de (7.2.35) convergent éventuellement vers celles de (7.2.29) à mesure que l'ordre $H$ des séries augmente, bien qu'il subsiste toujours une partie du spectre erronée quelle que soit $H$, *cf.* [30] Annexe 3.

La méthode de Hill nous confronte donc à une situation où, à mesure que $H$ augmente, on obtient une meilleure approximation des exposants de Floquet mais au risque de sélectionner une valeur propre redondante pas assez convergée étant donné que la dimension du problème (7.2.35) est proportionnelle à $H$. Ainsi, dans le but d'obtenir les exposants de Floquet de la solution étudiée, différentes stratégies de tri des coefficients de Hill sont possibles [38, 52].

#### 7.2.2.1 Tri sur les valeurs propres

Ce premier tri, dont la convergence a été formellement démontrée [93, 96], consiste à ne retenir que les $2n$ valeurs propres $\hat{s}$ disposant des parties imaginaires les plus petites en module, car il suppose que seules ces dernières disposent d'une signification physique et correspondent aux exposants de Floquet.

**Note :** un critère de tri similaire (*cf.* [96], théorème 3) se retrouve dans l'étude des milieux périodiques et notamment dans le cadre de la théorie des ondes de Bloch [86]. Cette théorie fait intervenir la notion de cellule primitive (de l'espace des nombres d'ondes), ou encore appelée première zone de Brillouin (en cristallographie), zone dans laquelle le comportement des solutions peut être entièrement caractérisé, *cf.* figure 7.5. Ce tri consiste alors à ne retenir que les valeurs propres dont les parties imaginaires sont situées dans la cellule primitive du spectre telles que $-\omega/2 < \Im(\hat{s}) \leqslant \omega/2$ (en prenant soin d'exclure soit $-\omega/2$ ou $\omega/2$). Dans la majorité des cas [30], ce tri fonctionne bien étant donné que l'espace d'état est censé contenir $2n$ valeurs et vecteurs propres. Cependant, en présence de bifurcations dynamiques, *cf.* section 7.3, comme un doublement de période, pour une forme de Floquet $2T$-périodique, on retrouve alors $2n+2$ valeurs et vecteurs propres au sein de la cellule primitive étant donné que le spectre de l'une des formes de Floquet sera exactement localisé en $\omega/2$. Cet exemple est notamment illustré sur la figure 7.17 en fin de section 7.3.



(a) carré (b) hexagonal

Figure 7.5 Première zone de Brillouin (▭) de différents réseaux cristallins en deux dimensions.

#### 7.2.2.2 Tri sur les vecteurs propres

Ce second critère de tri se base sur une observation de la forme des vecteurs propres associés [23, 30, 9]. Il n'est toutefois pas applicable en l'état car il se base sur les contributions des vecteurs propres $\hat{\mathbf{q}}_m^l$ sous forme de séries de Fourier complexes, *cf.* équation (7.2.31). Ainsi, sous réserve de

la convention sur le coefficient réel $a_0$ (*i.e.* double de la valeur moyenne) suivante :

$$a_0(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt = 2c_0(f) \tag{7.2.38}$$

où $f$ désigne une fonction à valeurs réelles et le coefficient de Fourier complexe $c_0$ la valeur moyenne de $f$, il est possible d'uniformiser l'ensemble des définitions des coefficients de Fourier qui commencent ainsi tous par $2/T$. Le passage de représentation réelle $(a_j, b_j)$ à complexe $(c_{\pm j})$ des coefficients s'effectue alors simplement à l'aide des formules :

$$c_{-j} = \frac{a_j + \mathrm{i}b_j}{2}\,, \quad c_0 = \frac{a_0}{2}\,, \quad c_{+j} = \frac{a_j - \mathrm{i}b_j}{2} \quad \text{pour} \quad j \in \mathbb{N}^* \tag{7.2.39}$$

et inversement

$$a_0 = 2c_0\,, \quad a_j = c_{+j} + c_{-j}\,, \quad b_j = \mathrm{i}(c_{+j} - c_{-j}) \quad \text{pour} \quad j \in \mathbb{N}^* \tag{7.2.40}$$

ce qui permet alors de réexprimer les contributions des $\hat{\mathbf{q}}_m^l$ en série complexe.

Le principe de ce tri se base sur le constat que pour $l = 0$, l'équation (7.2.31) du problème tronqué s'écrit :

$$\hat{s}_m^0 = \alpha_m \quad \text{et} \quad \mathbf{q}_m^0 = [\boldsymbol{p}_m^{-H}, \ldots, \boldsymbol{p}_m^{-1}, \boldsymbol{p}_m^0, \boldsymbol{p}_m^1, \ldots, \boldsymbol{p}_m^H]^\top \tag{7.2.41}$$

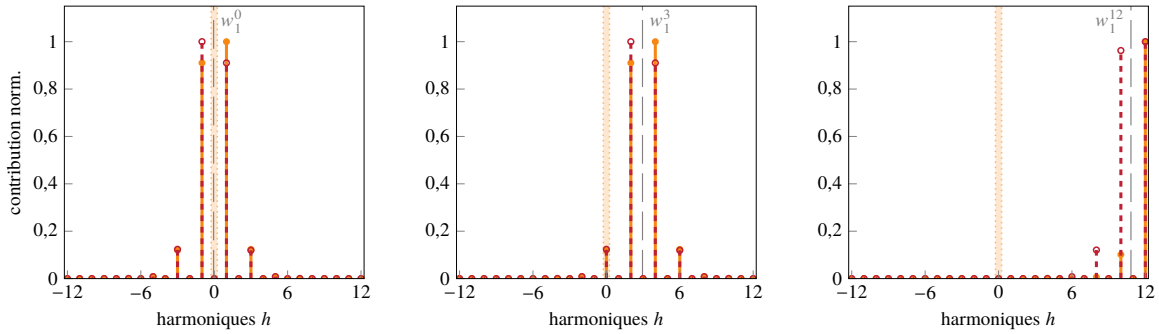
or, la méthode de Hill repose sur l'hypothèse que les séries de Fourier (7.2.23) et (7.2.25) convergent, *i.e.* $\boldsymbol{p}_m^j$ tend vers zéro pour $j \to \infty$. Il s'avère donc que parmi tous les vecteurs propres $\hat{\mathbf{q}}_m^l$ évalués, les composantes des $2n$ associées à $l = 0$, *i.e.* les $\hat{\mathbf{q}}_m^0$, disposeront d'une forme quasiment symétrique (respectivement par rapport à l'axe des ordonnées) étant donné qu'ils n'incluent que que les $\boldsymbol{p}_m^j$ pour $-H \leq j \leq H$. En conséquence, ce tri émet l'hypothèse que ce sont les $\hat{\mathbf{q}}_m^0$ qui convergeront le plus vite vers les $\mathbf{q}_m^0$ par rapport aux autres vecteurs propres associés aux $l \neq 0$.

Pour sélectionner numériquement les vecteurs propres associés à $l = 0$, il est possible d'évaluer les moyennes des modules des composantes de chaque vecteur propre $\hat{\mathbf{q}}_m^l$ pondérées par leurs coefficients harmoniques $h$ respectifs :

$$w_m^l = \sum_{h=-H}^{H} h|\hat{\boldsymbol{p}}_m^{h-l}| \Bigg/ \sum_{h=-H}^{H} |\hat{\boldsymbol{p}}_m^{h-l}| \tag{7.2.42}$$

Les $2n$ vecteurs propres finalement retenus sont ceux dont les moyennes pondérées sont les plus proches de 0, autrement dit, ceux qui disposent d'un spectre centré symétrique, *cf.* illustrations de la figure 7.6 issues de l'analyse de stabilité d'une solution d'un oscillateur de Duffing. Les coefficients de Floquet $\alpha_m$ correspondent alors aux $2n$ valeurs propres $\hat{s}_m^0$ qui leur sont associés. À ce jour, il n'existe pas de preuve mathématique de la convergence de cette méthode de tri bien qu'elle montre

des résultats prometteurs [30].




(a) $l = 0$ (b) $l = 3$ (c) $l = 12$

Figure 7.6 Contributions harmoniques complexes normalisées des vecteurs propres $\hat{\mathbf{q}}_m^l$ des familles $m = 1$ (- - -●) et $m = 2$ (- - -○) pour différents $l$ déterminés selon le critère (7.2.42).

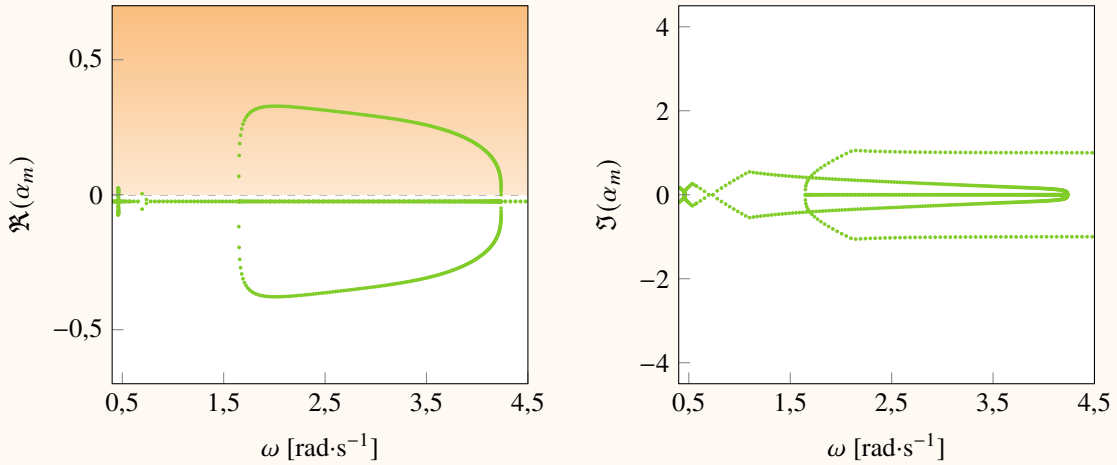
| $l$ | $-12$ | $-11$ | ... | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | ... | $11$ | $12$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $w_1^l$ | $-11{,}791$ | $-10{,}824$ | ... | $-2{,}048$ | $-1{,}048$ | $-0{,}048$ | $0{,}952$ | $1{,}952$ | ... | $10{,}791$ | $10{,}824$ |

Tableau 7.2 Aperçu des moyennes pondérées correspondantes à la famille $\mathbf{q}_1^l$ obtenues pour déterminer les indices $l$ de la figure 7.6.

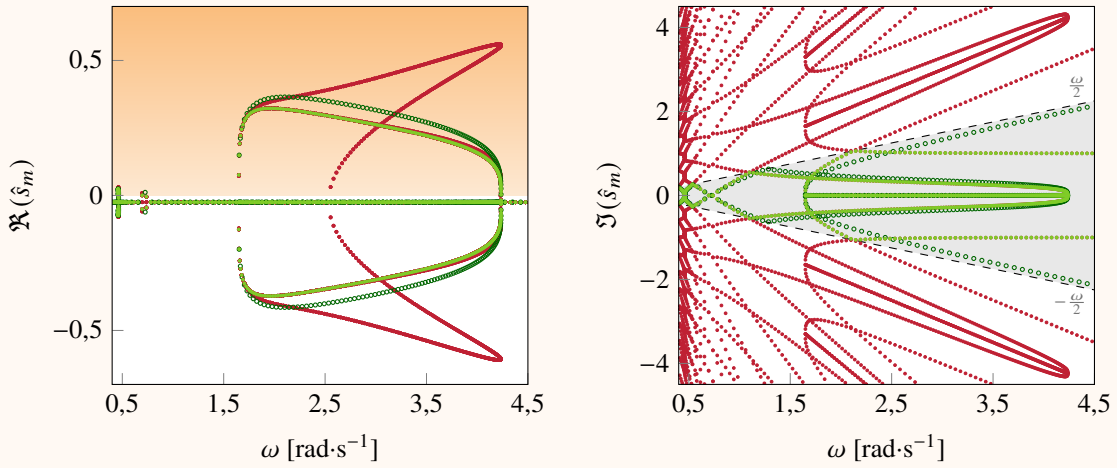
**Note :** pour s'assurer de la bonne implémentation du tri sur les vecteurs propres, on peut vérifier qu'on obtient bien des moyennes pondérées espacées unitairement sur l'ensemble du spectre convergé, *cf.* tableau 7.2, à l'exception des extremums où apparaissent des divergences liées à des effets de bords résultants de la troncature.

### Application - Méthode de Hill et procédure de tri [72]

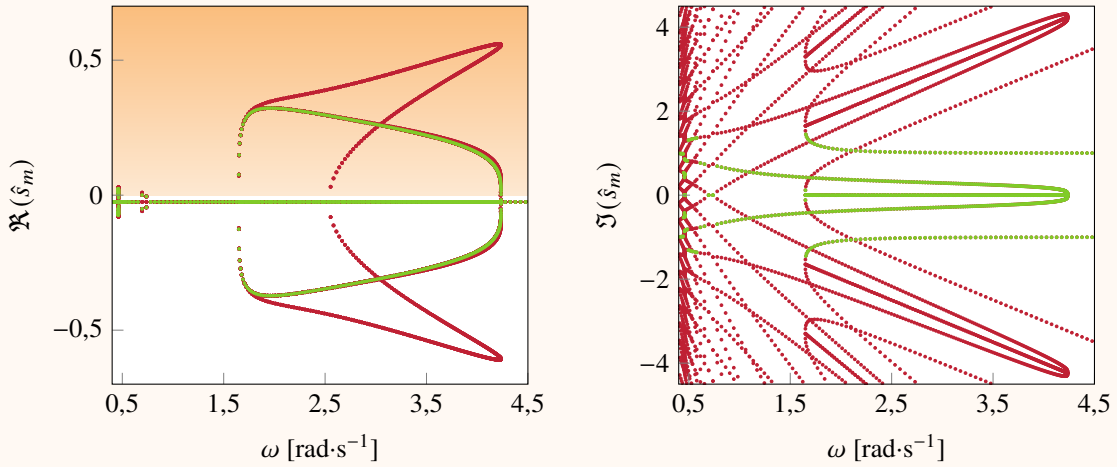
Dans le cas de la même configuration d'oscillateur de Duffing faite en fin de sous-section précédente 7.2.1, on compare les coefficients de Floquet obtenus par la méthode de Hill, pour $H = 12$ et $N = 512$, selon les deux stratégies de tri présentées, par rapport aux coefficients obtenus par diagonalisation de la matrice de monodromie via la méthode $2n$-passes. Les résultats sont présentés sur la figure 7.7. Les exposants, et multiplicateurs associés, obtenus pour différentes valeurs de $H$ ($N$ fixé) pour une solution proche du maximum d'amplitude de la résonance principale à $\omega = 4{,}23$ rad·s$^{-1}$ sont également présentés dans le tableau 7.2.2.2.




(a) Newmark $2n$-passes et diagonalisation de $\mathcal{M}$




(b) résolution du déterminant de Hill et tri basé sur les valeurs propres 7.2.2.1




(c) résolution du déterminant de Hill et tri basé sur les vecteurs propres 7.2.2.2

Figure 7.7 Étude comparative des techniques de résolution numérique liées à la théorie de Floquet - parties réelles et imaginaires des exposants de Floquet (●) et des coefficients de Hill (●). Zone

d'instabilité des solutions périodiques (▭) et cellule primitive (▭). En (b), on présente également les exposants de Floquet retenus par le tri sur les valeurs propres mais issus du problème de Hill linéarisé (7.2.37) (○).

| $H$ | $\alpha_{1-2}$ | $\rho_{1-2}$ | $\mathcal{E}(\alpha_{1-2})$ [%] | temps tri $\hat{s}$ [ms] | temps tri $\hat{\mathbf{q}}$ [ms] |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | $-0{,}025 \pm 0{,}0637\mathrm{i}$ | $0{,}9592 \pm 0{,}0910\mathrm{i}$ | 3,31 | 0,32 | 0,53 |
| 6 | $-0{,}025 \pm 0{,}0628\mathrm{i}$ | $0{,}9593 \pm 0{,}0898\mathrm{i}$ | 4,48 | 0,64 | 1,31 |
| 12 | $-0{,}025 \pm 0{,}0655\mathrm{i}$ | $0{,}9589 \pm 0{,}0937\mathrm{i}$ | 0,64 | 2,16 | 4,86 |
| 24 | $-0{,}025 \pm 0{,}0660\mathrm{i}$ | $0{,}9589 \pm 0{,}0943\mathrm{i}$ | 0 | 35,5 | 44,8 |

Tableau 7.3 Évolution des exposants, multiplicateurs de Floquet associés et du temps de calcul en fonction du nombre d'harmoniques $H$ proche de la résonance non-linéaire.

Les résultats des analyses de stabilité temporelle et fréquentielle concordent parfaitement en terme de partie réelle. En ce qui concerne la partie imaginaire des exposants de Floquet, le tri sur les valeurs propres $\hat{s}$ semble plus performant que le tri sur les vecteurs propres $\hat{\mathbf{q}}$. En effet, les résultats de l'article de validation [72] n'ont pu être retrouvés sur l'ensemble de la plage d'études (hypothèses : (1) MANLAB / HBM par continuation prédicteur/correcteur, et (2) différence d'algorithmes de recherche des valeurs/vecteurs propres, Matlab/Python). Cependant, il a été montré que le tri sur les vecteurs propres fonctionne mieux dans le cas de systèmes disposant de bifurcations *dynamiques*, *cf.* section 7.3. La méthode de Hill fournit des résultats quantitativement tout aussi précis que ceux obtenus à l'aide de la matrice de monodromie pour $N \geq 256$. Bien que moins précise globalement, sa version linéarisée (7.2.37), parvient tout de même à prédire adéquatement les transitions entre solutions stables et instables.

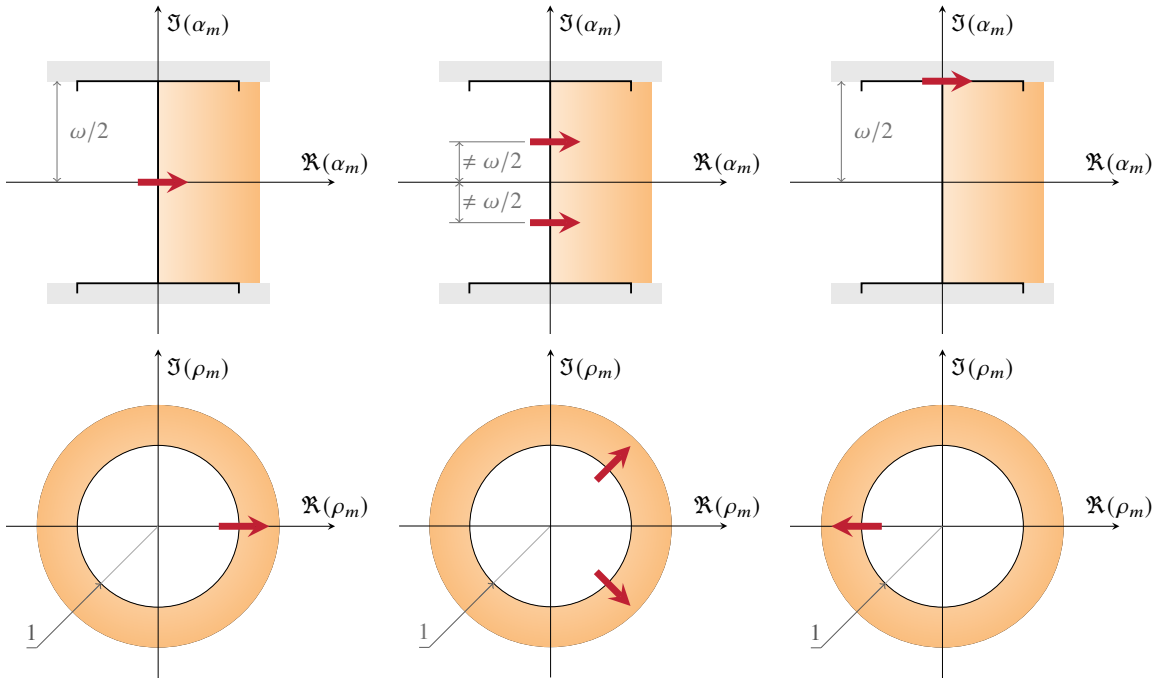
Au niveau du temps de calcul, la méthode de Hill s'avère à première vue plus compétitive que son équivalent temporel car elle permet un gain de temps substantiel pour une précision équivalente. Néanmoins, le coût résultant de l'analyse de stabilité fréquentielle est cette fois majoritairement dû à la diagonalisation de $\hat{\mathcal{H}}$, et non à sa construction, comme en témoigne la forte augmentation des temps de calcul mesurés pour $H = 24$ comparés à ceux pour $H = 12$.

Il est courant de voir dans la littérature des critiques à l'égard de la méthode de Hill comparée à celle de la matrice de monodromie étant donné qu'elles peut potentiellement fournir des résultats érronés. En somme, sous réserve d'un tri approprié des valeurs propres et dans le cas de non-linéarités régulières, la méthode de Hill fournit des résultats équivalents en termes de précision comparée à l'évaluation de la matrice de monodromie pour un nombre raisonnable d'harmoniques. Toutefois, il faut s'attendre à ce que le coût numérique de ces deux approches augmente au fur et à mesure que le nombre de ddl $n$ augmente.

## 7.3 Bifurcations locales des solutions périodiques

L'analyse du chemin emprunté par les exposants de Floquet lorsqu'ils traversent l'axe des ordonnées du plan complexe [173, 187, 192], et de manière équivalente, du chemin utilisé par les multiplicateurs de Floquet lorsqu'ils traversent le cercle unité, *cf.* figure 7.8, permet de déterminer le type de bifurcation rencontré.

**Definition 7.3.1. Bifurcation.** Une bifurcation désigne un changement *qualitatif* des caractéristiques d'un système, tel que le nombre ou la nature de ses solutions, qui se produit lors de la variation de $m \in \mathbb{N}^*$ paramètres de contrôle. Elle sera dite locale si elle se rapporte à des changements qualitatifs au voisinage d'un point fixe ou d'une solution périodique du système, tout autre changement étant alors considéré comme bifurcation globale. Une bifurcation est dite de co-dimension 1 si cette dernière ne requiert la variation que de $m = 1$ paramètre pour se produire. Par la suite, les valeurs critiques de paramètre auxquelles elles se produisent seront signalées par un symbole ( $^\star$ ), tel que $\lambda = \lambda^\star$ au point de bifurcation.




(a) bifurcation simple (b) Neimark-Sacker (c) doublement de période

Figure 7.8 Déplacements dans le plan complexe des exposants $\alpha_m$ et multiplicateurs $\rho_m$ de Floquet lors des bifurcations de solutions périodiques. Zone instable (▭). Les crochets délimitent la cellule primitive. Adaptée de [161].

Lorsqu'un seul exposant de Floquet traverse l'axe imaginaire en 0 ou, de manière équivalente, qu'un

multiplicateur de Floquet sort du cercle unité le long de l'axe des réels en +1, *cf.* figure 7.8a, il apparaît une bifurcation dite *simple*. Les bifurcations simples peuvent alors être de type :

**point limite (LP),** voir figure 7.9a, aussi appelé nœud-col (en anglais *cyclic fold*), c'est un point de retournement de la CRF qui correspond à une singularité de la jacobienne $\mathbf{R}_{,\mathbf{X}}$ de l'équation (4.0.1), et donc à la présence d'une tangente verticale ;

**fourche (BP),** voir figure 7.9b, aussi appelé point d'embranchement ou bifurcation par rupture de symétrie (en anglais *branch(ing) point* ou *pitchfork*). Il y a perte de stabilité d'une branche et naissance d'une nouvelle branche stable dans le cas sur-critique, et inversement pour le cas sous-critique. Afin de déterminer à quel cas la bifurcation se rapporte, il est possible de calculer $l_1$ : le premier nombre de Lyapunov [173] ;

**transcritique (TP),** voir figure 7.9c, où deux branches de solutions se croisent avec échange de stabilité.

Ces bifurcations sont généralement dites *statiques* ou encore *stationnaires*.

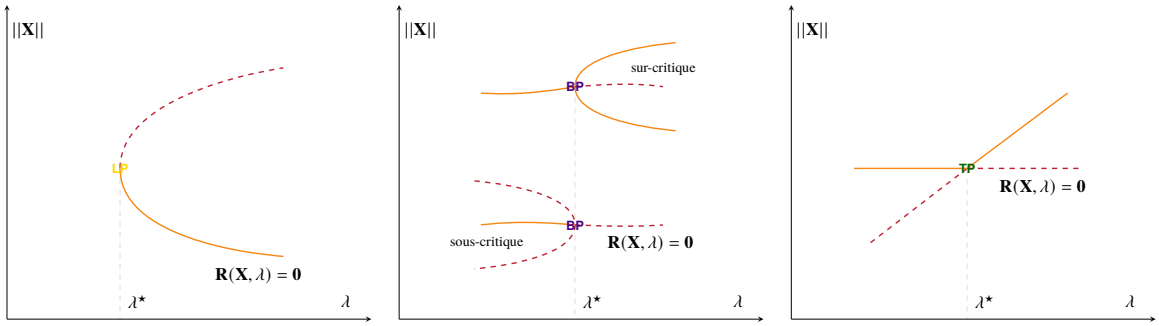



Figure 7.9 Bifurcation simple de type : (a) point limite (LP), (b) fourche (BP) et (c) transcritique (TP). Branches : stable (——), instable (- - - -). Adaptée de [39, 166].

Dans le cas d'un couple d'exposants de Floquet conjugués imaginaires purs qui traversent l'axe imaginaire entre $]-\omega/2;\omega/2[$, ou de manière comparable, lorsqu'un couple de multiplicateurs de Floquet sort du cercle unité en tant que conjugué complexe autre part qu'en $\pm 1$, *cf.* figures 7.8b, il se produit une bifurcation de type Neimark-Sacker (NS) (aussi appelée Hopf secondaire, en référence directe aux bifurcations des points fixes lors de la transition d'un point fixe vers un cycle limite alors désignée par une bifurcation de Hopf primaire). Si la pulsation associée à la branche émanante de cette bifurcation est notée $\omega_j$ et que la pulsation de la branche courante est notée $\omega_i$, deux cas sont possibles :

1. $\omega_i/\omega_j \notin \mathbb{Q}$, une branche de solutions quasi-périodiques bifréquence apparaît à cette bifurcation. C'est pourquoi ces bifurcations sont également appelées en anglais *torus bifurcations*, car

les solutions quasi-périodiques décrivent une surface torique dans l'espace des phases. Ces bifurcations peuvent amener à une transition vers un régime chaotique, *via* un scénario de Ruelle-Takens-Newhouse [177] qui montre que l'apparition d'un régime chaotique est plus probable que l'apparition d'un tore trifréquence ;

2. $\omega_i/\omega_j \in \mathbb{Q}$, alors une branche de solutions périodiques prend naissance, dont la période minimale est la plus petite période commune aux deux composantes oscillantes (sur-harmonique si $\omega_j < \omega_i$, sous-harmonique si $\omega_j > \omega_i$).

Finalement, lorsqu'un exposant de Floquet imaginaire pur traverse l'axe imaginaire en $\omega/2$, ou de manière équivalente, lorsqu'un multiplicateur de Floquet sort du cercle unité en $-1$, il se produit une bifurcation de doublement de période (**PD**) (en anglais *period-doubling* ou *flip*), figure 7.8c. Cette bifurcation donne alors naissance à une nouvelle branche de solutions périodiques de période double. Ces bifurcations peuvent conduire à l'apparition d'un régime chaotique *via* un phénomène de cascade de doublement de période, aussi appelé cascade sous-harmonique [192] ou encore scénario de Feigenbaum [114].

Les bifurcations de Neimark-Sacker et de doublement de période sont dites *dynamiques* car elles s'associent à un changement du régime dynamique des solutions. De la même manière que pour les bifurcations fourches, les cas sur-critique et sous-critique sont à distinguer, avec des implications similaires.

### 7.3.1 Détection de bifurcations

Les solutions obtenues durant le processus de continuation peuvent être classifiées en deux catégories distinctes, à savoir les solutions régulières et les solutions singulières que sont les bifurcations. Pour rappel, en considérant un système d'équations $\mathbf{R} : \mathbb{R}^{n_{\text{eq}+1}} \to \mathbb{R}$, si on note $\mathbf{Y}^\star$ une solution qui satisfait $\mathbf{R}(\mathbf{Y}^\star) = \mathbf{0}$, est dite régulière dans le cas où le théorème des fonctions implicites reste applicable, autrement dit que la jacobienne du système augmenté de dimension $(n_{\text{eq}} \times n_{\text{eq}+1})$ évaluée en $\mathbf{Y}^\star$ et notée $\mathbf{R}^\star_{,\mathbf{Y}}$, avec pour rappel $\mathbf{R}_{,\mathbf{Y}} = \left[\mathbf{R}_{,\mathbf{X}} \,|\, \mathbf{R}_{,\lambda}\right]$, est de rang plein, *i.e.* $\text{rg}\,(\mathbf{R}^\star_{,\mathbf{Y}}) = n_{\text{eq}}$. À son tour, une solution régulière peut se singulariser et devenir une bifurcation de type :

**point limite,** si $\dim(\ker(\mathbf{R}^\star_{,\mathbf{X}})) = 1$, *i.e.* la jacobienne du système non-augmenté $\mathbf{R}_{,\mathbf{X}}$ devient singulière, ce qui témoigne d'une déficience du rang du système augmenté tel que $\text{rg}(\mathbf{R}_{,\mathbf{Y}}) = n_{\text{eq}} - 1$. De plus, il faut également souligner que $\mathbf{R}^\star_{,\lambda} \notin \text{im}(\mathbf{R}^\star_{,\mathbf{X}})$, ce qui implique que $\dim(\ker(\mathbf{R}^\star_{,\mathbf{Y}})) = 1$ et où le noyau correspond au sous-espace vectoriel engendré par le vecteur propre $\boldsymbol{\phi}_1$ associé à la valeur propre nulle tel que $\ker(\mathbf{R}^\star_{,\mathbf{Y}}) = \text{vect}(\boldsymbol{\phi}_1)$.

**fourche,** si et seulement si (1) $\dim(\ker(\mathbf{R}^\star_{,\mathbf{X}})) = 1$ et $\mathbf{R}^\star_{,\lambda} \in \text{im}(\mathbf{R}^\star_{,\mathbf{X}})$, ou bien que (2) $\dim(\ker(\mathbf{R}^\star_{,\mathbf{X}})) = 2$ et $\mathbf{R}^\star_{,\lambda} \notin \text{im}(\mathbf{R}^\star_{,\mathbf{X}})$. Les fourches se caractérisent donc par un noyau bidimensionnel de la jacobienne augmentée tel que $\dim(\ker(\mathbf{R}^\star_{,\mathbf{Y}})) = 2$. Cette dernière propriété est notamment

exploitée dans le cadre de la gestion des embranchements en section 7.3.3 afin d'en évaluer les deux tangentes distinctes.

**Neimark-Sacker,** lorsque qu'il existe une unique paire d'exposants de Floquet complexes conjuguées imaginaires purs tels que $\alpha_{i,j} = \pm \mathrm{i}\kappa$, $0 < \kappa < \lambda^\star/2$.

**doublement de période,** lorsque qu'il existe une unique paire d'exposants de Floquet complexes conjuguées imaginaires purs tels que $\alpha_{i,j} = \pm \mathrm{i}\lambda^\star/2$.

#### 7.3.1.1 Fonctions tests classiques

D'un point de vue numérique, afin de détecter l'apparition d'éventuelles bifurcations au cours du processus de continuation, il est possible de suivre l'évolution de fonctions tests notées $\tau$ [39, 173, 177, 188]. Les zéros de ces fonctions, ou plus spécifiquement, les changements de signe observés entre deux solutions consécutives lors de l'obtention de la courbe d'équilibre, permettent ainsi de révéler la présence de bifurcations.

Pour les points limites, une première alternative peut consister à s'appuyer sur la déficience unitaire du rang de la jacobienne $\mathbf{R}_{,\tilde{x}}$, ce qui conduit à la fonction test :

$$\tau^1_{\mathsf{LP}} = \det(\mathbf{R}_{,\tilde{x}}) \quad \text{pour} \quad \mathbf{R}^\top_{,\omega}\boldsymbol{\phi}_1 \neq \mathbf{0} \tag{7.3.1}$$

Toutefois, le calcul du déterminant tend à devenir assez vite coûteux et numériquement instable à raison que la taille du système augmente. Il est alors plus robuste de se baser directement sur le repliement géométrique de la branche suivie, il vient ainsi naturellement :

$$\tau^2_{\mathsf{LP}} = \mathbf{t}_\omega \tag{7.3.2}$$

où $\mathbf{t}_\omega$ désigne la dernière composante du vecteur tangent (ou plus généralement du prédicteur utilisé lors de la continuation) relative au paramètre de contrôle $\omega$.

**Note :** si l'on souhaite calculer $\det(\mathbf{R}_{,\tilde{x}})$ et que la décomposition LU pivotée de $\mathbf{R}_{,\tilde{x}}$ a été préalablement stockée à la suite d'un processus de résolution itératif, le calcul de son déterminant est trivial ([177], p.206) si on se base sur les trois propriétés suivantes :

1. le déterminant d'une matrice triangulaire ($\mathbf{L}$ et $\mathbf{U}$) correspond au produit des éléments de sa diagonale principale.
2. le déterminant d'une matrice de permutation ($\mathbf{P}$) est égal à $(-1)^n$, où $n$ correspond au nombre de permutations effectuées.
3. le déterminant d'un produit de matrices est égal au produit des déterminants de ces

matrices, autrement dit, si $\mathbf{R}_{,\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{PLU}$, alors $\det(\mathbf{R}_{,\tilde{\boldsymbol{x}}}) = \det(\mathbf{P})\det(\mathbf{L})\det(\mathbf{U})$.

Pour augmenter la robustesse de cette opération sur de plus grands systèmes, l'évaluation du logarithme naturel des déterminants est recommandée.

Dans le cas des bifurcations fourches, suivre la même logique qu'en (7.3.1), permet d'écrire :

$$\tau^1_{\mathsf{BP}} = \det(\mathbf{R}_{,\tilde{\boldsymbol{x}}}) \quad \text{pour} \quad \mathbf{R}^\top_{,\omega}\boldsymbol{\phi}_1 = \mathbf{0} \tag{7.3.3}$$

Il est cependant plus efficace de se diriger vers l'évaluation du déterminant de la jacobienne de Keller (système augmenté issu de la continuation par longueur d'arc) [188] :

$$\tau^2_{\mathsf{BP}} = \begin{vmatrix} \mathbf{R}_{,\tilde{\boldsymbol{x}}} & \mathbf{R}_{,\omega} \\ & \mathbf{t}^\top \end{vmatrix} \tag{7.3.4}$$

où $\mathbf{t}$ est la tangente induite par la jacobienne du problème augmenté, *cf.* (4.2.4). Ce déterminant permet alors de distinguer les fourches des points limites (contrairement à la simple évaluation de $\det(\mathbf{R}_{,\tilde{\boldsymbol{x}}})$) et ne requiert donc pas de calculs supplémentaires.

Les bifurcations de Neimark-Sacker sont détectables *via* l'annulation de la fonction suivante :

$$\tau^1_{\mathsf{NS}} = \prod_{1 \leq j < i \leq 2n} (\alpha_i + \alpha_j) \tag{7.3.5}$$

Cette fonction n'est, en pratique, que rarement utilisée. En effet, il est plus efficace d'évaluer le produit bialterné de la matrice $\tilde{\mathbf{A}}$ regroupant les coefficients de Floquet et définie telle que :

$$\tilde{\mathbf{A}} = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}) \tag{7.3.6}$$

**Definition 7.3.2. Produit matriciel bialterné.** Soient les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ de dimension $(n \times n)$ ayant pour entrées $(a_{ij})$ et $(b_{ij})$ pour $1 \leq i, j \leq n$. En posant $m = (n/2)(n-1)$, le produit bialterné (aussi appelé biproduit) de $A$ par $B$, noté $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$, désigne la matrice $m \times m$ dont les lignes sont indicées $pq$ pour $(p \in [\![2..n]\!]\,; q \in [\![1..p-1]\!]$ et colonnes $rs$ pour $(r \in [\![2..n]\!]\,; s \in [\![1..p-1]\!]$ telle que :

$$(\mathbf{A} \odot \mathbf{B})_{(p,q),(r,s)} = \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} a_{pr} & a_{ps} \\ b_{qr} & b_{qs} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{pr} & b_{ps} \\ a_{qr} & a_{qs} \end{vmatrix}\right\} \tag{7.3.7}$$

En désignant par $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}$ ordonnées arbitrairement, le produit bialterné a pour propriétés ([188], théorème 3.3) :

1. $\mathbf{A} \odot \mathbf{A}$ a pour valeurs propres $(\lambda_i \lambda_j)_{1 \leq j < i \leq n}$.
2. $2\mathbf{A} \odot \mathbf{I}_n$ a pour valeurs propres $(\lambda_i + \lambda_j)_{1 \leq j < i \leq n}$.

Le cas particulier du produit bialterné de la forme $2\mathbf{A} \odot \mathbf{I}_n$, appelé produit bialterné de $\mathbf{A}$, permet la définition d'une forme explicite simple d'implémentation :

$$(2\mathbf{A} \odot \mathbf{I}_n)_{(p,q),(r,s)} = \begin{cases} -a_{ps} & \text{si } q = r, \\ a_{pr} & \text{si } p \neq r \text{ et } q = s, \\ a_{pp} + a_{qq} & \text{si } p = r \text{ et } q = s, \\ a_{qs} & \text{si } p = r \text{ et } q \neq s, \\ -a_{qr} & \text{si } p = s, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{7.3.8}$$

Étant donné la seconde propriété du produit bialterné, un indicateur strictement équivalent à (7.3.5) est donc :

$$\tau_{\mathrm{NS}}^2 = \det\left(2\tilde{\mathbf{A}} \odot \mathbf{I}_{2n}\right) \tag{7.3.9}$$

**Note :** (1) Lorsqu'il est appliqué à la matrice $\tilde{\mathbf{A}}$, diagonale par définition, les propriétés conservatives de la structure du produit bialterné permettent de montrer que son produit $2\tilde{\mathbf{A}} \odot \mathbf{I}_{2n}$ l'est également. Ceci permet d'optimiser son évaluation en le restreignant au cas particulier $p = r$ et $q = s$. (2) Remarquons aussi que les indicateurs (7.3.5) et (7.3.9) s'annulent tout aussi bien pour des paires de valeurs propres complexes conjugués imaginaires pures, indiquant la présence de bifurcation de Neimark-Sacker, que pour une paire de valeurs propres réelles de signe opposé tel que $\lambda = \pm\kappa$, $0 < \kappa < \omega/2$, indiquant la présence d'un point-selle neutre, en anglais *neutral saddle point*. Ces derniers ne sont pas à l'origine de bifurcations à

proprement parler [188, 189] et sortent ainsi du cadre de ce travail, il convient donc de les exclure de cette analyse.

D'autres fonctions tests se basent sur l'évaluation des déterminants de Hurwitz [177].

Pour détecter les bifurcations de doublement de période, en partant du problème aux valeurs propres quadratique (7.2.32), si on substitue les valeurs propres $\hat{s}$ par $\pm \mathrm{i}\frac{\omega}{2}$ et qu'on sépare les parties réelles et imaginaires des vecteurs propres complexes $\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{q}}_{\Re} + \mathrm{i}\hat{\mathbf{q}}_{\Im}$, on obtient le système d'équations suivant [27] :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{,\tilde{x}} - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 & \frac{\omega}{2}\mathbf{\Delta}_1 \\ -\frac{\omega}{2}\mathbf{\Delta}_1 & \mathbf{R}_{,\tilde{x}} - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}_{\Re} \\ \hat{\mathbf{q}}_{\Im} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{7.3.10}$$

où il s'avère que la matrice des coefficients $\mathbf{B}$ se singularise au niveau des doublements de période. La fonction $\det(\mathbf{B})$ ne constitue cependant pas directement une fonction test appropriée pour la détection des points de doublement de période étant donné que ces derniers n'en sont que des minimums locaux. Il convient ainsi d'en approximer la dérivée de manière à y faire apparaître un changement de signe. Un indicateur entre deux solutions consécutives peut donc être :

$$\tau^1_{\mathsf{PD}} = \frac{\partial \det(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} \simeq \det(\mathbf{B}_i) - \det(\mathbf{B}_{i-1}) \tag{7.3.11}$$

Dans le cas où les exposants de Floquet ont été calculés, si on sélectionne le multiplicateur disposant du plus grand module $\bar{\rho}$ tel que :

$$\bar{\rho} = \max_{m \in [\![0..2n]\!]} (|\rho_m|) \tag{7.3.12}$$

Une autre fonction test peut alors être définie à partir du multiplicateur dominant $\bar{\rho}$ :

$$\tau^2_{\mathsf{PD}} = \operatorname{sgn}(\Re(\bar{\rho}))\,|\bar{\rho}| + 1 \tag{7.3.13}$$

#### 7.3.1.2 Fonctions tests définies par techniques de bordurage

D'un point de vue numérique, bien que l'évaluation du déterminant d'une matrice demeure une opération bien moins coûteuse que celle d'évaluer l'intégralité de ses valeurs propres, des problèmes numériques de mise à l'échelle (liés aux erreurs d'*overflow*) surviennent assez rapidement à mesure que la taille du système étudié augmente, et ce, même en recourant à une évaluation du logarithme du déterminant plutôt que le déterminant lui-même. Tout ceci tend alors à diminuer la robustesse des stratégies présentées dans la section précédente. Une alternative consiste alors à s'orienter vers des techniques de bordurage, ou *bordering techniques* en anglais [153, 188, 189].

Ces techniques permettent de s'affranchir de l'évaluation du déterminant d'une matrice $\mathbf{G}(s)$ en substituant celle-ci par l'évaluation d'une fonction scalaire $g(s)$ qui a la particularité de s'annuler si et seulement si $\det(\mathbf{G}(\mathbf{s})) = 0$, où $s$ correspond à une paramétrisation de la branche suivie telle que son abscisse curviligne. Dans le cas de bordurage unidimensionnel, l'image de la fonction $g(s)$ peut alors être obtenue en résolvant le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}(s) & \mathbf{p} \\ \mathbf{q}^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ g(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7.3.14}$$

où les vecteurs $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n_{\text{eq}}}$ sont choisis de manière à assurer le meilleur conditionnement possible du système. La régle de Cramer permet en effet de montrer qu'il existe une relation de proportionnalité directe entre $g(s)$ et $\det(\mathbf{G}(s))$, tel que :

$$g(s) = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{G}(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{q}^\top & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{G}(s) & \mathbf{p} \\ \mathbf{q}^\top & 0 \end{vmatrix}} = \frac{\det(\mathbf{G}(s))}{\begin{vmatrix} \mathbf{G}(s) & \mathbf{p} \\ \mathbf{q}^\top & 0 \end{vmatrix}} \tag{7.3.15}$$

Ainsi, l'ensemble des fonctions tests qui se basent sur le calcul du déterminant d'une matrice peuvent être ici remplacées par autant de fonctions $g(s)$ obtenues *via* la résolution du système borduré associé (7.3.14).

D'un point de vue pratique, les vecteurs $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ doivent être adaptés tout au long de la branche de solution suivie afin de rendre le système (7.3.14) non-singulier et d'en permettre ainsi la résolution. Dans la littérature [153, 46, 188], ils sont typiquement choisis comme proches des vecteurs des noyaux de $\mathbf{G}^\top$ et $\mathbf{G}$.

**Note :** il existe de nombreuses méthodes pour évaluer les vecteurs associés au noyau d'une matrice, on peut par exemple citer la méthode du pivot de Gauss, la décomposition en valeurs singulières (SVD) ou encore la décomposition QR. C'est néanmoins la SVD qui est la plus souvent utilisée en raison de la précision et stabilité numérique qu'elle offre. La SVD permet de déterminer une factorisation d'une matrice rectangulaire à coefficients réels ou complexes telle que $\mathbf{G} = \mathbf{USV}^*$ et où $(^*)$ désigne la transconjuguée. Une fois obtenue, l'évaluation des vecteurs $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ revient à sélectionner les vecteurs colonnes de $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ associés à l'élément diagonal de $\mathbf{S}$ le plus petit en valeur absolue, *i.e.* la valeur singulière associée à la déficience de rang de $\mathbf{G}$. Il convient également de rajouter que $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ doivent être orientés de manière à ne pas impliquer de changement de signe du dénominateur de l'équation (7.3.15).

## Application - Indicateurs numériques de bifurcations [153]

Au travers de cette application, on s'intéresse à un système constitué de deux oscillateurs de Duffing linéairement couplés et soumis à une excitation monoharmonique [153]. Ce système est présenté sur la figure 7.10. Les paramètres de ce système sont les suivants, $m_1 = m_2 = 1$ kg, $k = 1$ N·m$^{-1}$, $k_{12} = 5$ N·m$^{-1}$, $k_{\mathrm{nl}} = 1$ N·m$^{-3}$ et $F_0 = 2$ N. Les deux modes linéaires sont prévus à $\omega_1 = 1$ rad·s$^{-1}$ et $\omega_2 = 3{,}32$ rad·s$^{-1}$. Un amortissement modal est considéré avec $\xi_1 = 5 \cdot 10^{-2}$ et $\xi_2 = 1{,}51 \cdot 10^{-2}$, de manière à ce que $c \simeq 0{,}1$ N·m$^{-1}$·s.

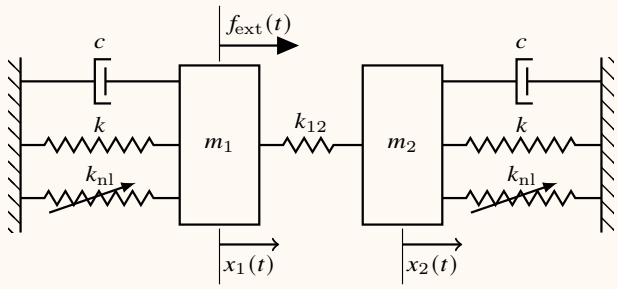



Figure 7.10 Schéma de deux oscillateurs de Duffing linéairement couplés.

Comme le montre la CRF présentée sur la figure 7.11, l'analyse de stabilité de ce système se révèle phénoménologiquement très riche.

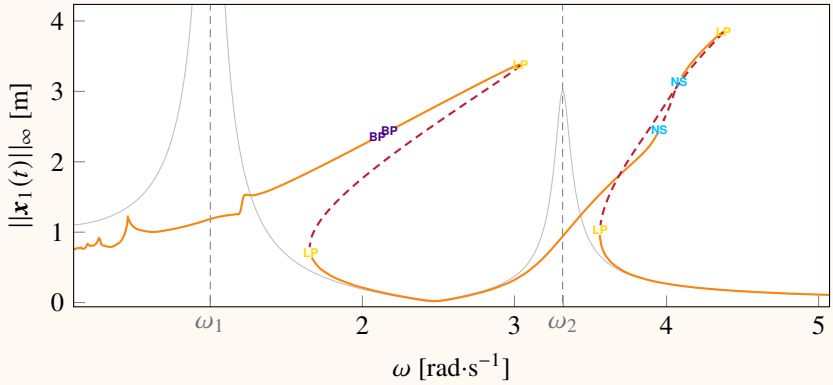



Figure 7.11 CRF du système obtenue par HBM pour $H = 15$ et $N = 1024$. Branches : stables (——); instables (- - - -). Bifurcations : point limite (**LP**), fourche (**BP**) et Neimark-Sacker (**NS**).

Les fonctions tests présentées plus tôt permettent de révéler la présence de bifurcations de type points limites, fourches et Neimark-Sacker. Dépendamment des bifurcations ciblées, on présente par la suite parallèlement les différentes valeurs prises par les fonctions tests lors du processus de continuation pour les points limites sur la figure 7.12 et les fourches sur la figure 7.13. Les cercles noirs (○) symbolisent la détection de bifurcations *via* la présence d'un zéro de la fonction test considérée.

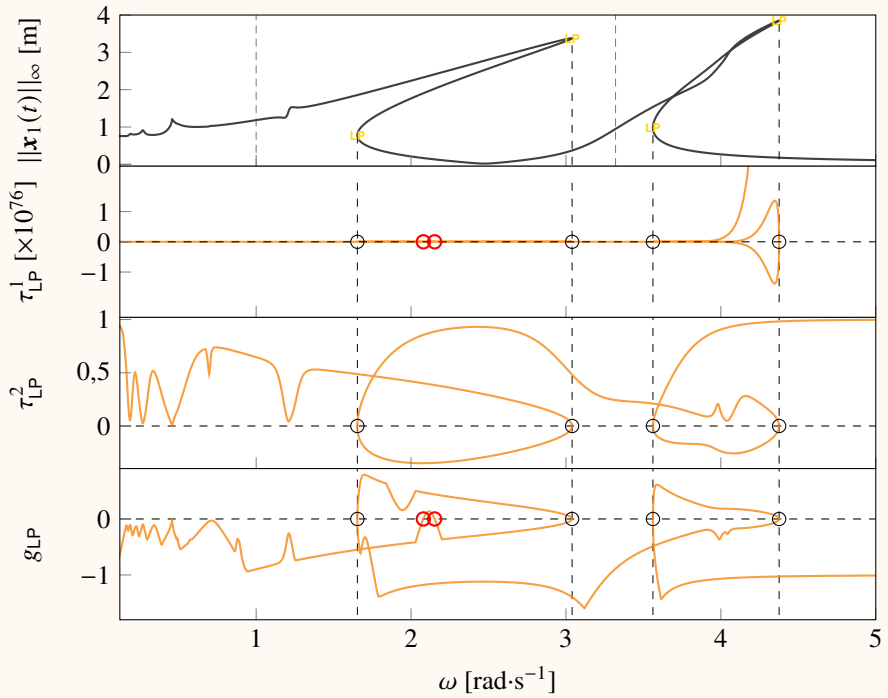



Figure 7.12 Validation des différentes fonctions tests pour point limite. De haut en bas : CRF du système avec mise en évidence des points limite détectés, $\tau^1_{\mathsf{LP}}$ calcul du déterminant de la jacobienne $\mathbf{R}_{,\tilde{x}}$, $\tau^2_{\mathsf{LP}}$ composante fréquentielle du prédicteur, et $g_{\mathsf{LP}}$ *bordering* pour points limite.

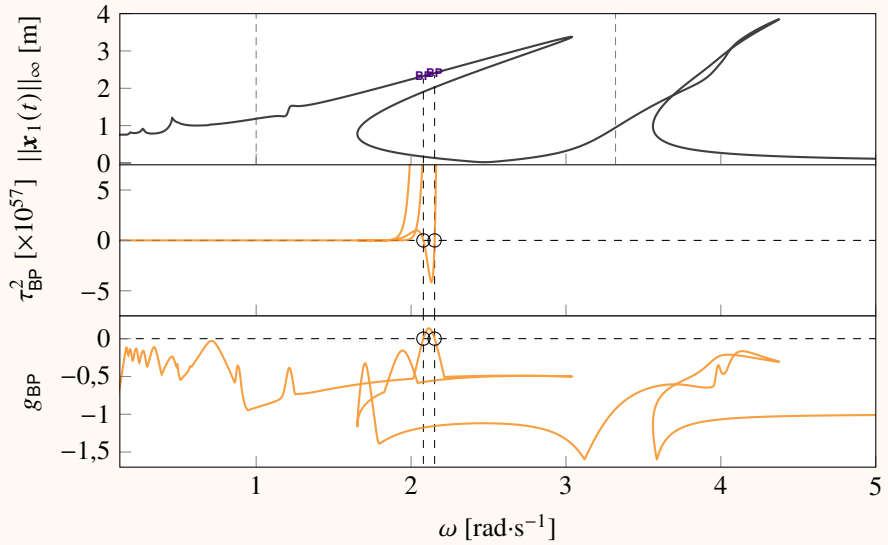



Figure 7.13 Validation des différentes fonctions tests pour bifurcation fourche. De haut en bas : CRF du système avec mise en évidence des fourches détectées, $\tau^2_{\mathsf{BP}}$ calcul du déterminant de la jacobienne de Keller et $g_{\mathsf{BP}}$ *bordering* pour fourches.

Les déterminants des indicateurs $\tau^1_{\mathsf{LP}}$ et $g_{\mathsf{LP}}$ s'annulent également au niveau des bifurcations fourches (○), ce qui

constitue des faux positifs, respectivement en $\omega \simeq 2{,}07$ et $\omega \simeq 2{,}15$. C'est là encore une raison pour laquelle l'utilisation de la fonction test $\tau^2_{\mathsf{LP}}$ est à privilégier.

### 7.3.2 Localisation de bifurcations

Une fois les bifurcations détectées, un calcul précis du point de bifurcation peut être nécessaire en vue de réaliser un suivi de bifurcations [27, 39, 48, 52] dans un espace paramétrique choisi. Deux types de stratégies sont envisageables. Le premier consiste à exploiter les valeurs, déjà calculées, des fonctions tests adjacentes à la bifurcation détectée. Ces dernières peuvent être utilisées afin d'obtenir une première estimation allant de la simple interpolation linéaire [177], § 5.3.1-2, à l'utilisation d'un algorithme d'interpolation polynomiale de Neville [177], § 5.3.3, voire jusqu'au déploiement d'algorithmes de recherche de zéro comme la méthode de la bissection ou de la sécante [46]. Néanmoins, dans l'optique d'évaluer précisément un point de bifurcation, il est plus efficace de se baser sur un deuxième type de stratégies plus directes qui se basent sur la résolution d'un système augmenté complètement, ou un système augmenté minimalement [45, 173, 216, 188, 189] (de l'anglais *fully* ou *minimally extended system*). La première approche consiste à ajouter une ou plusieurs équations additionnelles permettant de caractériser la bifurcation recherchée. La seconde ne rajoute qu'une équation scalaire et base sa résolution sur des techniques de bordurage. Dans les deux cas, le nouveau système est généralement résolu par un algorithme de Newton-Raphson.

### 7.3.3 Gestion des embranchements

Lorsque deux branches de solutions s'intersectent, un processus de continuation usuel ne permet de tracer que la branche courante sur laquelle il est déjà fixé. Or, dans l'absolu, on désire déterminer l'intégralité de ces branches. Pour ce faire, lorsqu'on se place au niveau du point d'embranchement, il existe différentes méthodes pour contraindre le processus de continuation à suivre l'une ou l'autre de ces branches, et d'ainsi accéder à l'intégralité des branches. Parmi ces méthodes, deux catégories d'approches se distinguent, celles qui se basent sur une perturbation du système, et celles qui visent à construire les tangentes de chaque branche émanante. Ces techniques sont référencées sous le nom anglais de *branch switching* [177, 164].

**Embranchement par perturbation.** L'ajout d'une perturbation sur le système vient "casser" le point d'embranchement de manière à ce que les branches ne se coupent plus, ce qui peut générer un isolat [46]. La bifurcation "parfaite" est donc transformée en une quasi-bifurcation. De ce fait, le processus de continuation bifurque alors naturellement sur la branche émergente tel qu'illustré sur la figure 7.14.

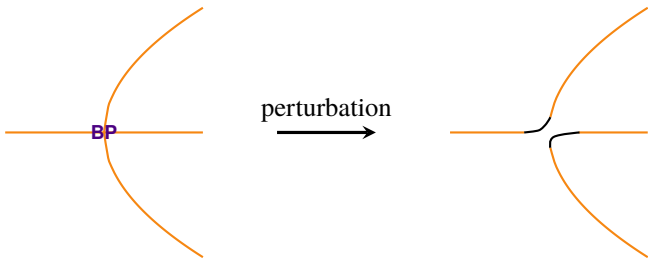



Figure 7.14 Transformation d'une bifurcation exacte en quasi-bifurcation par ajout d'une petite perturbation au système.

**Résolution du système d'embranchement.** Dans le but d'évaluer les deux tangentes émanantes au niveau d'une bifurcation fourche, il est possible de résoudre un problème d'embranchement [27, 45, 46, 164, 188]. L'idée principale de la résolution d'un tel problème étant d'évaluer la hessienne $\mathbf{R}^{\star}_{,,\mathbf{Y}}$ au niveau de la bifurcation étant donné que les tangentes qui y sont recherchées annulent la jacobienne $\mathbf{R}^{\star}_{,\mathbf{Y}}$. Une fois ces tangentes déterminées, le processus de continuation peut prédire une solution proche de la nouvelle branche à suivre. Ainsi, en supposant qu'on dispose d'une estimation suffisamment précise de la fourche $\mathbf{Y}^{\star}$ sur une branche courante notée $\mathbf{c}_1$ et paramétrée par l'abscisse curviligne $s$, telle que $\mathbf{c}_1(0) = \mathbf{Y}^{\star}$, à la bifurcation on doit avoir :

$$\ker(\mathbf{R}^{\star}_{,\mathbf{Y}}) = \mathrm{vect}(\boldsymbol{\phi}_1,\, \boldsymbol{\phi}_2) \quad \text{et} \quad \ker(\mathbf{R}^{\star\top}_{,\mathbf{Y}}) = \mathrm{vect}(\boldsymbol{\psi}) \tag{7.3.16}$$

où $\boldsymbol{\phi}_1$, $\boldsymbol{\phi}_2$ sont deux vecteurs indépendants qui forment une base du noyau de la jacobienne et $\boldsymbol{\psi}$ un vecteur qui va ici permettre de justifier l'existence des deux tangentes $\dot{\mathbf{c}}_{1,2}(s)$ recherchées. En partant de l'équation $\mathbf{R}(\mathbf{Y}(s)) = \mathbf{R}(\mathbf{c}_1(s)) = \mathbf{0}$ le long de la branche courante, si on différencie deux fois par rapport à $s$, puis multiplie à gauche chaque terme résultant par $\boldsymbol{\psi}^{\top}$, il vient en $s = 0$ :

$$\boldsymbol{\psi}^{\top}\mathbf{R}^{\star}_{,,\mathbf{Y}}\dot{\mathbf{c}}_1(0)\,\dot{\mathbf{c}}_1(0) + \underbrace{\boldsymbol{\psi}^{\top}\mathbf{R}^{\star}_{,\mathbf{Y}}}_{=\mathbf{0}^{\top}}\,\ddot{\mathbf{c}}_1(0) = \mathbf{0} \tag{7.3.17}$$

où seul le premier terme persiste :

$$\boldsymbol{\psi}^{\top}\mathbf{R}^{\star}_{,,\mathbf{Y}}\dot{\mathbf{c}}_1(0)\,\dot{\mathbf{c}}_1(0) = \mathbf{0} \tag{7.3.18}$$

Les tangentes recherchées peuvent être alors considérées comme une combinaison linéaire des vecteurs du sous-espace engendré par le noyau de la jacobienne (étant donné qu'elles l'annulent) en écrivant que tout vecteur $\boldsymbol{v}$ du noyau se définit tel que $\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{\phi}_1 + \beta\boldsymbol{\phi}_2$ pour $(\alpha,\, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Une fois substituée dans l'expression précédente, puis après développement, on obtient finalement l'équation algébrique de bifurcation, de l'anglais *algebraic bifurcation* (ou *branching*) *equation* (ABE) [188,

190] :

$$\underbrace{\boldsymbol{\psi}^\top \mathbf{R}^\star_{,,\mathbf{Y}} \boldsymbol{\phi}_1 \boldsymbol{\phi}_1}_{c_{11}} \alpha^2 + 2 \underbrace{\boldsymbol{\psi}^\top \mathbf{R}^\star_{,,\mathbf{Y}} \boldsymbol{\phi}_1 \boldsymbol{\phi}_2}_{c_{12}} \alpha\beta + \underbrace{\boldsymbol{\psi}^\top \mathbf{R}^\star_{,,\mathbf{Y}} \boldsymbol{\phi}_2 \boldsymbol{\phi}_2}_{c_{22}} \beta = \mathbf{0} \tag{7.3.19}$$

Ce système peut être plus simplement réécrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.3.20}$$

Dans le cas d'une bifurcation fourche, le déterminant $c_{11}c_{22} - c_{12}^2$ est négatif ce qui implique qu'il existe deux paires de solutions réelles distinctes. La première, représentée par le couple $(\alpha_1, \beta_1) = (1, 0)$, est évidente et redonne simplement la tangente $\mathbf{t}_1^\star = \boldsymbol{\phi}_1 = \dot{\mathbf{c}}_1(0)$, *i.e.* la tangente obtenue par continuation, *cf.* (4.2.3). À partir de là, on pose le vecteur de la base $\boldsymbol{\phi}_1 = \mathbf{t}_1^\star = \dot{\mathbf{c}}_1(0)$ et on cherche $\boldsymbol{\phi}_2$ orthogonal à $\boldsymbol{\phi}_1$ tel que $\mathbf{R}^\star_{,\mathbf{Y}} \boldsymbol{\phi}_2 = \mathbf{0}$. Il ne reste donc qu'à trouver le second couple solution $(\alpha_2, \beta_2)$ pour déterminer $\mathbf{t}_2^\star$. Pour ce faire, sachant que $\mathbf{t}_1^\star$ est une tangente solution, réinjecter le couple $(1, 0)$ dans l'ABE implique que $c_{11} = 0$, ce qui contraint directement la valeur de $\alpha_2$. Pour fixer $\beta_2$ par contre, il est nécessaire d'ajouter une contrainte supplémentaire en imposant une condition de normalisation sur la tangente $||\mathbf{t}_2^\star||_2 = 1$. Le second couple est alors solution du système :

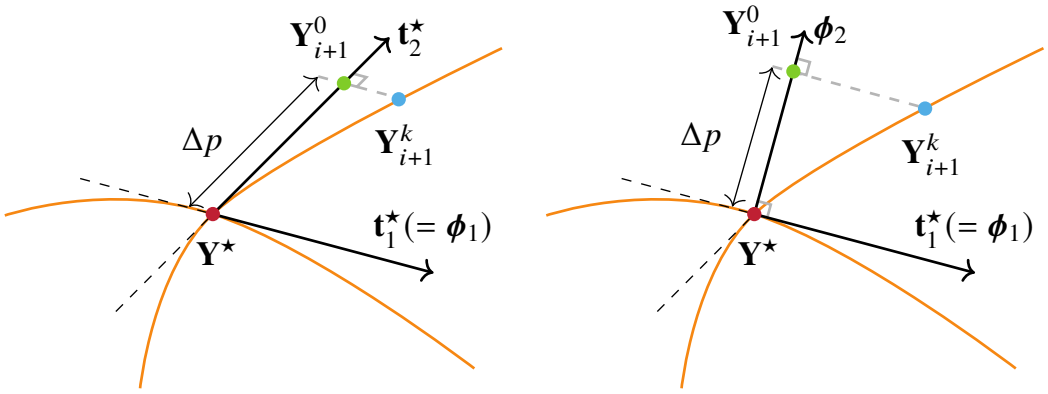
$$\begin{cases} \alpha_2 + \frac{c_{22}}{2c_{12}}\beta_2 & = 0 \\ ||\alpha_2 \boldsymbol{\phi}_1 + \beta_2 \boldsymbol{\phi}_2||_2 & = 1 \end{cases} \tag{7.3.21}$$

qui une fois résolu donne :

$$\alpha_2 = \frac{c_{22}}{\sqrt{4c_{12}^2 \boldsymbol{\phi}_2^\top \boldsymbol{\phi}_2 + c_{22}^2 \boldsymbol{\phi}_1^\top \boldsymbol{\phi}_1}} \quad \text{et} \quad \beta_2 = \frac{2c_{12}}{\sqrt{4c_{12}^2 \boldsymbol{\phi}_2^\top \boldsymbol{\phi}_2 + c_{22}^2 \boldsymbol{\phi}_1^\top \boldsymbol{\phi}_1}} \tag{7.3.22}$$

Numériquement, le calcul des vecteurs propres $\boldsymbol{\phi}_1$, $\boldsymbol{\phi}_2$ et $\boldsymbol{\psi}$ ne pose pas de difficultés pourvu que l'approximation de la fourche soit suffisamment précise. Afin d'approximer les coefficients $c_{12}$ et $c_{22}$, les dérivées de la hessienne sont généralement évaluées par différences finies [46, 164]. La figure 7.15 illustre un changement de branche, effectué dans la direction exacte de la tangente $\mathbf{t}_2^\star$, *cf.* 7.15a, et selon la direction orthogonale $\boldsymbol{\phi}_2$, *cf.* 7.15b. Dans le second cas, ce changement de branche simplifié [188], a l'avantage de ne pas recourir à la hessienne.

**Particularité des doublements de période en HBM.** Dans le cas où la nouvelle branche à suivre est de période double, la HBM s'adapte particulièrement bien. Pour rappel, l'approximation par HBM s'appuie sur la base de Fourier tronquée $\mathbb{T}_H$, *cf.* équation (3.2.5), jusqu'ici toujours définie




(a) exact (b) simplifié

Figure 7.15 Changements de branche basés sur (a) la direction de la branche émanante $\mathbf{t}^\star_2$ et (b) la direction orthogonale à la bifurcation $\boldsymbol{\phi}_2$. Adaptée de [188].

pour $\nu = 1$ :

$$\mathbb{T}^1_H = \left[ \frac{1}{2}, \cos(\omega t), \sin(\omega t), \cos(2\omega t), \sin(2\omega t), \ldots \right] \tag{7.3.23}$$

dont les termes sont uniquement des harmoniques de la fréquence fondamentale $\omega$. En l'état, la résolution HBM/continuation ne peut prendre en compte d'éventuelles réponses sous-harmoniques et donc bifurquer sur de telle branche de solutions. Néanmoins, pour $\nu = 2$, on obtient alors :

$$\mathbb{T}^2_H = \left[ \frac{1}{2}, \cos\left(\frac{\omega}{2}t\right), \sin\left(\frac{\omega}{2}t\right), \cos(\omega t), \sin(\omega t), \ldots \right] \tag{7.3.24}$$

Cette base peut être alors plus simplement vue comme l'union $\mathbb{T}^2_H = \mathbb{T}^1_H \cup \mathbb{T}^{1/2}_H$, où $\mathbb{T}^{1/2}_H$ désigne le nouvel ensemble de fonctions sous-harmoniques défini tel que :

$$\mathbb{T}^{1/2}_H = \left[ \cos\left(\frac{\omega}{2}t\right), \sin\left(\frac{\omega}{2}t\right), \ldots, \cos\left(\frac{(2H-1)\omega}{2}t\right), \sin\left(\frac{(2H-1)\omega}{2}t\right) \right] \tag{7.3.25}$$

Ainsi, étant donné que $\mathbb{T}^1_H \subset \mathbb{T}^2_H$, n'importe quelle solution $T$-périodique du système considéré y reste constructible. L'ajout des fonctions sous-harmoniques de $\mathbb{T}^{1/2}_H$ implique désormais que la pulsation minimale est $\omega/2$, soit de période $2T$. Par conséquent, dans ce nouveau référentiel, une bifurcation de doublement de période n'est plus associée à un changement de période, mais plutôt à une bifurcation statique engendrant un phénomène de brisure de symétrie [173] donc une bifurcation fourche.

### 7.3.4 Compléments

De nombreux codes ont été développés pour la résolution et l'analyse de stabilité de systèmes dynamiques non-linéaires. En voici quelques-uns : AUTO-07P [218], PyDSTool [217], MatCont [216], MANLAB [215] ou encore NLvib [214].

## 7.4 Applications

Dans une optique de validation de l'implémentation des différentes méthodes d'analyse de la stabilité des solutions périodiques présentées, mais aussi pour souligner la complexité induite par des phénomènes de bifurcations en dynamique non-linéaire, cette section présente tout d'abord une analyse de la stabilité d'un impacteur, système phénoménologique à un ddl en contact. Par la suite, les résultats d'analyses de stabilité obtenus pour la barre éléments finis réduite en contact—système étudié en détail dans le chapitre 5 pour la validation de la RL-HBM—et pour les aubes rotor 37 et 67—déjà utilisées dans le chapitre 6 pour application de la RL-HBM à des modèles industriels—permettent de démontrer la faisabilité et la pertinence de telles analyses sur des systèmes industriels. Les résultats obtenus démontrent l'apport qualitatif de la stratégie numérique proposée par rapport aux stratégies reposant sur l'intégration temporelle.

### 7.4.1 Impacteur en contact à seuil variable

Pour l'application industrielle visée—l'analyse des contacts aube/carter—la prise en compte d'un carter déformé impose un forçage du contact tour après tour. La notion de seuil de contact variable, présentée dans la section 6.1.1, que cela implique d'un point de vue numérique n'a été que très peu abordée dans la littérature dans le cadre d'un paradigme de résolution fréquentiel. Par conséquent, aucune publication n'a pu être trouvée relativement à l'analyse de stabilité d'un système en contact avec seuil de contact variable. Ce manque est problématique car les simulations et analyses préliminaires effectuées sur de tels systèmes ont mis en avant la complexité accrue de la dynamique de ces systèmes par rapport à un seuil de contact fixe.

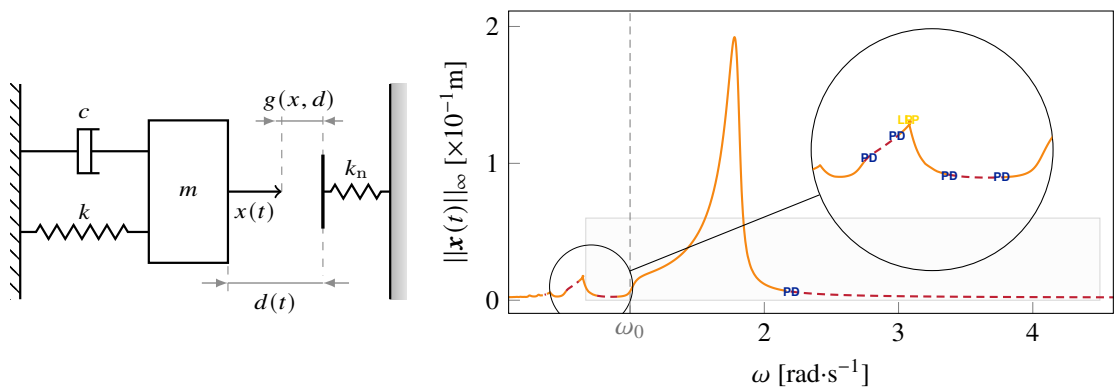
Toutefois, compte-tenu de l'importance de la prise en compte d'un seuil de contact variable dans le présent mémoire, une validation—même partielle—de l'analyse de stabilité sur un tel système est essentielle. Les résultats présentés dans cette section sont liés à un système d'impacteur à seuil de contact variable représenté sur la figure 7.16a. Ce système est inspiré d'un modèle semblable analysé dans une présentation (un temps disponible en ligne mais retirée au moment de l'écriture de ce mémoire) du code *FOrced Response SuitE* développé par les chercheurs du laboratoire Vibration University Technology Centre de l'Imperial College de Londres depuis le début des années 2000. Étant donné que plusieurs paramètres ne sont pas spécifiés dans le document source, les paramètres

utilisés dans cette section ont dû être estimés par recalage visuel des résultats obtenus.

#### 7.4.1.1 Vue d'ensemble

Les paramètres de l'oscillateur sont une masse $m = 1$ kg, une raideur $k = 1$ N·m$^{-1}$ et un coefficient d'amortissement modal $\xi = 5 \cdot 10^{-2}$. Aucun forçage extérieur n'est appliqué. Le seuil variable suit un profil sinusoïdal défini par l'équation (6.1.1) pour une amplitude d'oscillation du seuil $c = 10^{-2}$ m et un niveau maximal de pénétration $p = 2 \cdot 10^{-3}$ m. La gestion du contact est effectuée par une loi de pénalité avec régularisation polynomiale (5.2.1) pour $k_\mathrm{n} = 100$ N·m$^{-1}$ et $\epsilon_\mathrm{n} = 7{,}5 \cdot 10^{-3}$ N (valeur surestimée pour meilleure convergence des simulations). Aucun filtrage n'est considéré ici. Les paramètres numériques $H = 30$ et $N = 1024$ permettent d'obtenir des résultats convergés.

La CRF obtenue pour $\omega \in [0{,}1; 4{,}6]$ rad·s$^{-1}$ par R-HBM est présentée sur la figure 7.16b. La stabilité des solutions est évaluée par la méthode Newmark $2n$-passes.

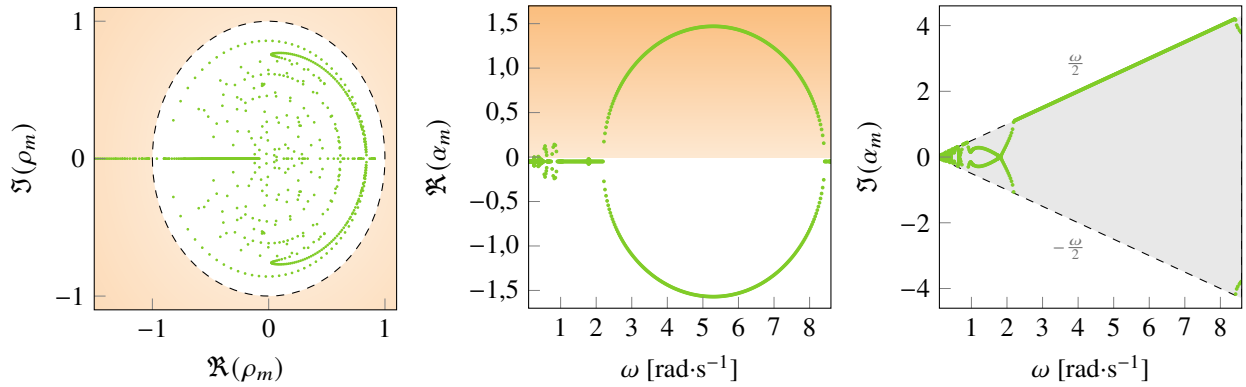



(a) schéma (b) CRF

Figure 7.16 Schéma et CRF de l'impacteur en contact à seuil variable. Branches : stables (——); instables (- - - -). Bifurcations : point limite (LP) et doublement de période (PD).

L'analyse de stabilité permet de détecter 8 bifurcations de doublements de périodes sur l'ensemble de la plage de vitesses considérée. La figure 7.17 donne un aperçu d'ensemble des multiplicateurs et exposants de Floquet obtenus.

La figure 7.17a permet de distinguer les bifurcations au travers des entrées/sorties des multiplicateurs du cercle unité du plan complexe en $-1$ pour les doublements de périodes. Bien qu'une boucle super-harmonique soit prédite lors de la continuation (telle que sur la figure 7.4 de l'oscillateur de Duffing), impliquant de ce fait la présence géométrique de deux points limites, vers $\omega = 0{,}65$ rad·s$^{-1}$, les multiplicateurs ne sortent cependant pas du cercle en $+1$. Parmi l'ensemble des cas tests étudiés durant ces travaux, c'est le seul exemple d'un tel comportement qui ait été observé. Le long des




(a) multiplicateurs (b) partie réelle des exposants (c) partie imaginaire des exposants

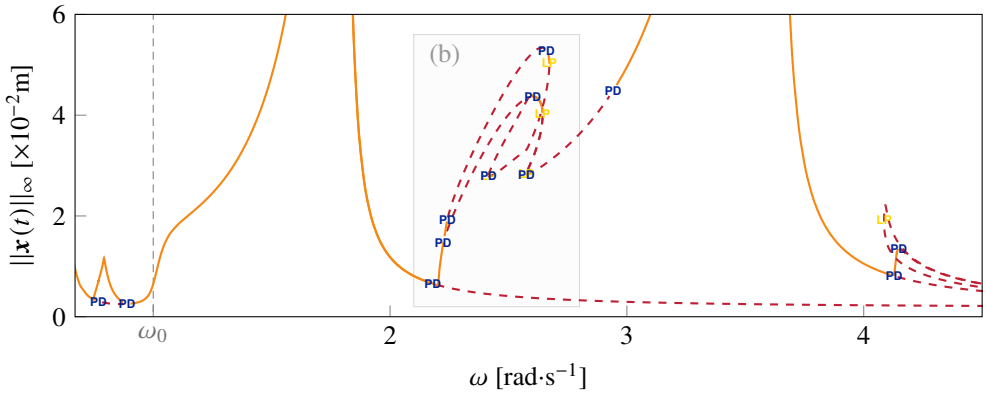
Figure 7.17 Multiplicateurs et exposants de Floquet (●) obtenus par la méthode Newmark $2n$-passes. Zone d'instabilité des solutions périodiques (▢) et cellule primitive (▢).

4 branches instables, il est remarquable d'observer également que les $2n$ exposants de Floquet $\alpha_m$ disposent d'une partie imaginaire exactement bloquée en $\omega/2$, *cf.* figures 7.17b et 7.17c. Dans le cadre d'une analyse de stabilité fréquentielle, la présence de cette forme de Floquet $2T$-periodique implique la présence de $2n+2$ valeurs et vecteurs propres dans la cellule primitive du spectre de Hill, rendant par conséquent la procédure de tri considérée bien plus délicate numériquement. En effet, bien que non-présentée, une analyse de stabilité de Hill (7.2.35) couplée à un tri sur les valeurs propres échoue en ne parvenant pas à sélectionner correctement les exposants de Floquet au niveau des branches instables en raison des nombreux doublements de période. À l'inverse, il a été observé que le tri sur les vecteurs propres est plus robuste en présence de telles bifurcations et présente un meilleur accord avec le verdict de stabilité temporel dans ces zones.

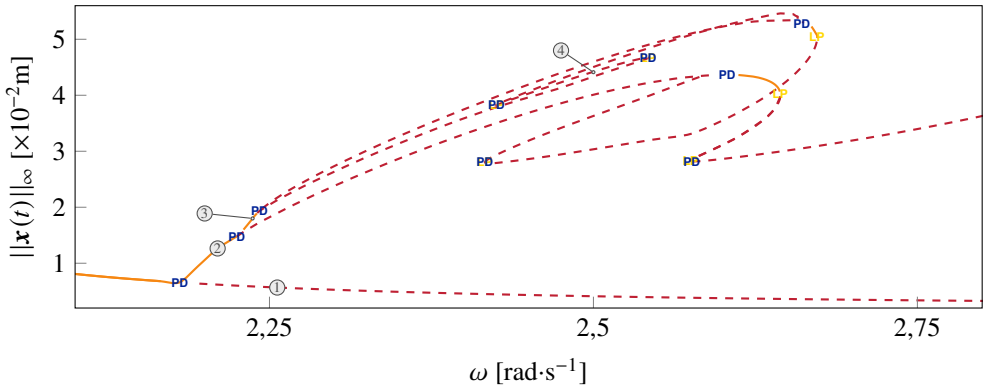
#### 7.4.1.2 Analyse détaillée

L'analyse est ici focalisée sur la zone grise (▢) de la figure 7.16. L'agrandissement de cette zone est présenté sur la figure 7.18 au niveau de la sous-figure 7.18a.

Un suivi partiel des différentes branches issues des bifurcations de doublement de période est rendu possible par la variation du rapport sous-harmonique pour $\nu = \{2\,;4\,;8\}$ de la base de Fourier considérée. Un réseau de branches stables et instables, de différentes périodicités, est alors tracé en suivant les directions des tangentes obtenues par la résolution des systèmes d'embranchement (7.3.19) propres à chaque doublement de période (transformé en fourche pour $\nu \neq 1$). La figure 7.18b offre un nouvel agrandissement de la zone centrale (▢) du précédent zoom. L'enchaînement de multiples doublements de période rapprochés jusqu'à atteindre des solutions $8T$-périodiques permet d'entrevoir un scénario de Feigenbaum et de prédire raisonnablement la présence de solutions chaotiques dans




(a) aperçu global

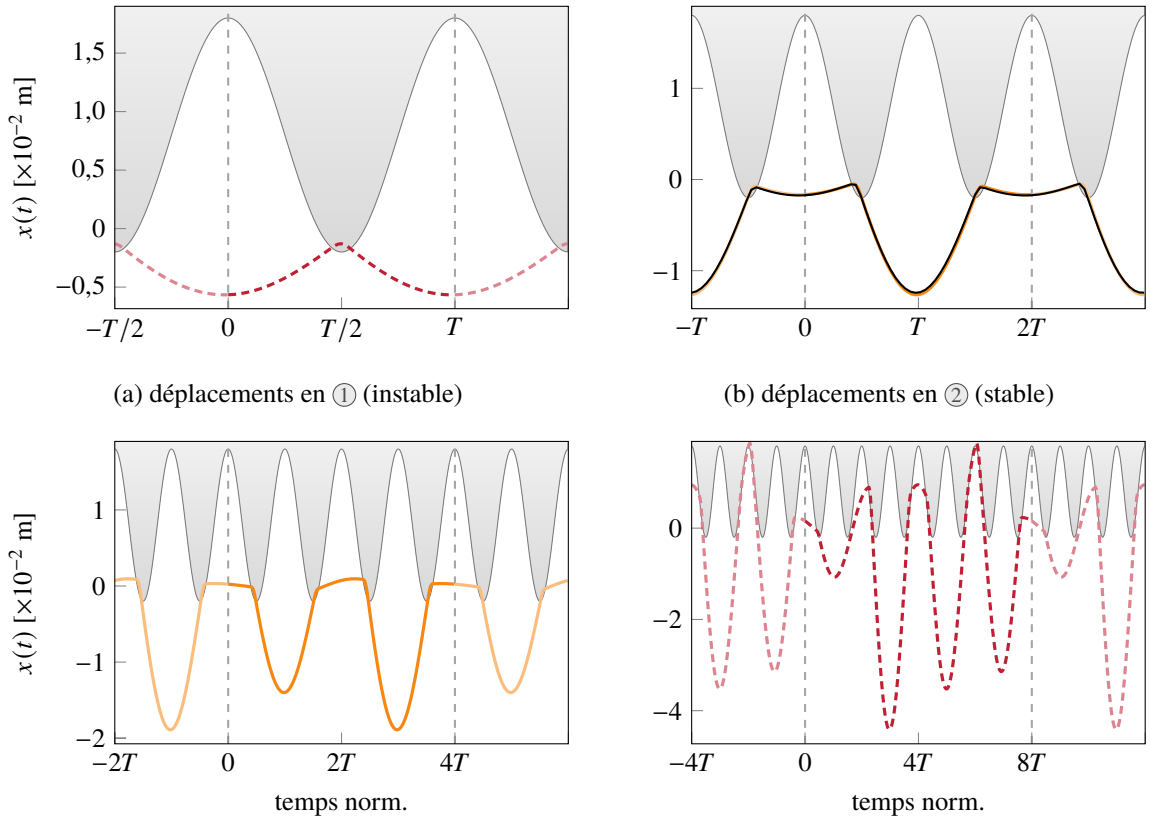



(b) zoom

Figure 7.18 CRF avec suivi de branche. Branches : stables (——) ; instables (- - - -). Bifurcations : point limite (**LP**) et doublement de période (**PD**).

ce voisinage de $\omega$. Les déplacements associés à des solutions de 4 périodicités différentes de cette zone, désignées par les points ① à ④, sont représentés sur la figure 7.19.

Une solution chaotique obtenue par IT, en utilisant la même loi de contact et à partir de conditions initiales nulles pour $\omega = 2{,}5$ rad·s$^{-1}$, est tracée sur la figure 7.20. Les déplacements prévus sur une durée d'intégration de $50T$ sont présentés sur la figure 7.20a. Le spectre fréquentiel de cette solution obtenu par FFT est également tracé sur la figure 7.20b. Il se distingue par la présence d'un bruit de nature continue et large bande caractéristique des solutions chaotiques. Une section de Poincaré est également construite sur la figure 7.20c. Une section de Poincaré [177, 187], est un outil classique en dynamique non-linéaire qui consiste, à la manière d'un stroboscope, à relever les couples $(x(t), \dot{x}(t))$ à des instants régulièrement espacés dans le temps, ou bien, à chaque passage des trajectoires de l'espace des phases à travers un plan de l'espace fixe. Cette dernière est réalisée en échantillonnant les 8000 dernières périodes d'une simulation effectuée d'une durée de $15000T$.La présence d'un attracteur étrange [177], caractérisé par un amas de points non-ordonnés d'allure fractale présentant




(a) déplacements en ① (instable)

(b) déplacements en ② (stable)

(c) déplacements en ③ (stable)

(d) déplacements en ④ (instable)

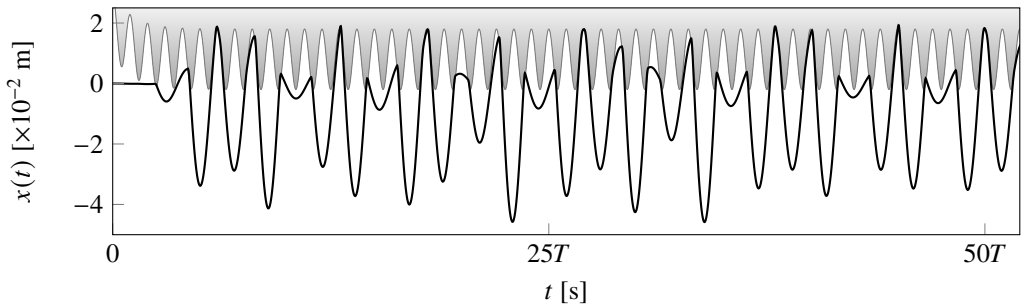
Figure 7.19 Solutions $T$, $2T$, $4T$ et $8T$-périodiques en déplacements obtenues par R-HBM. Les résultats issus de l'IT (——) sont également superposés en (b). Solutions : stables (——) et instables (- - - -).

de multiples replis, permet d'identifier la nature chaotique de cette solution.

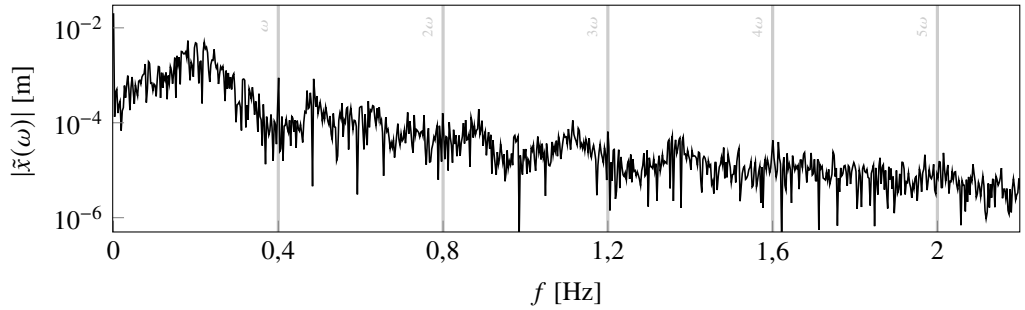
Les résultats obtenus sont en excellent accord avec ceux présentés pour le système de référence. En particulier, les différentes bifurcations, et les branches indiquées sur la figure 7.18b sont en accord avec les résultats obtenus par les chercheurs du laboratoire Vibration University Technology Centre de l'Imperial College de Londres. Compte tenu du fait que plusieurs systèmes académiques simples ont pu être analysés correctement dans les sections précédentes et qu'il a été possible de retrouver les bifurcations de ce système à seuil de contact variable, la méthodologie proposée est supposée prête pour application à des systèmes plus complexes avec différents types de seuils de contact.

### 7.4.2 Barre éléments finis réduite

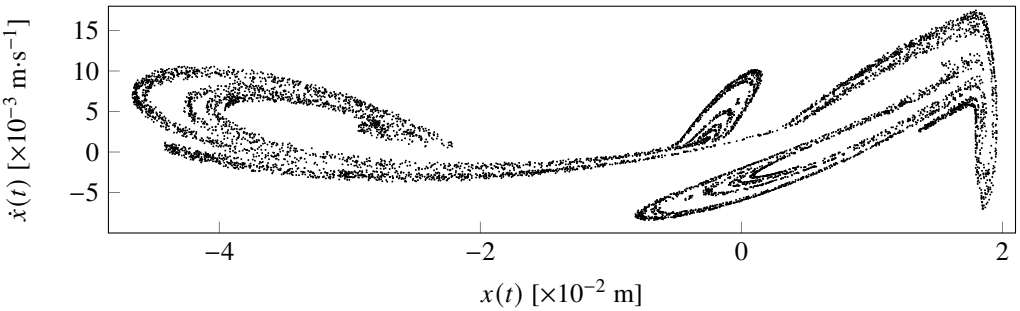
Une analyse de stabilité des résultats issus des simulations pour la barre éléments finis réduite ($\eta = 20$) en contact avec seuils fixe et variable, *cf.* section 5.3.6 et section 6.1.1, est réalisée dans




(a) réponse en déplacements




(b) spectre fréquentiel




(c) section de Poincaré

Figure 7.20 Caractérisation d'une solution chaotique obtenue par IT (——) pour $\omega = 2{,}5$ rad·s$^{-1}$.

cette section. Les paramètres RL-HBM sont inchangés : $H = 30$, $N = 1024$ et filtrage unitaire.

L'étude de la stabilité des solutions de systèmes de grande dimension reste encore à ce jour une question très ouverte et relativement peu explorée. En particulier, les études de stabilité sur des systèmes issues d'une technique de synthèse modale sont rares dans la littérature scientifique. Les seules publications trouvées sur le sujet sont associées à l'application de la méthode de Hill [32, 38]. C'est pourquoi les analyses de stabilité réalisées par la suite se basent également sur la méthode de Hill. Pour ce faire, la jacobienne $\mathbf{R}_{,\tilde{x}}$ du système condensé (3.2.65) est redéployée sur l'espace du système réduit.

Étant donné que l'algorithme de tri des vecteurs propres considéré doit être appliqué à l'ensemble

du spectre de Hill brut [30], son utilisation est rendue peu efficace pour des systèmes de grande dimension, par conséquent, c'est le tri sur les valeurs propres qui est considéré et pour des raisons d'efficacité numérique, seules les $4n$ valeurs propres de plus petites magnitudes sont calculées. Afin de faciliter l'analyse des résultats présentés par la suite, les CRF obtenues par RL-HBM sont directement superposées aux cartes d'interaction correspondantes obtenues par IT (basée sur une gestion du contact par multiplicateurs de Lagrange).

#### 7.4.2.1 Seuil de contact fixe

Les résultats obtenus pour la barre à seuil de contact fixe sont présentés sur la figure 7.21. À des fins de comparaison, la carte d'interaction obtenue par IT est représentée en arrière-plan. Le long de la CRF, les solutions stables sont représentées pas des traits pleins et les solutions instables par des traits pointillés.

Pour chaque zone où l'IT prévoit des solutions périodiques, c'est-à-dire là où le spectre fréquentiel de la solution est localisé le long des différents régimes moteurs $\boldsymbol{rm}_i$, la méthode de Hill prévoit des solutions stables et les résultats IT et RL-HBM concordent. Sur ces zones, les CRF obtenues par IT et RL-HBM sont donc superposées comme le montre la figure 5.12. Inversement, pour la plupart des zones où l'IT prévoit des solutions de contenu fréquentiel plus dense, la RL-HBM prévoit des solutions instables sur la branche parcourue et les résultats des deux méthodologies diffèrent donc logiquement.

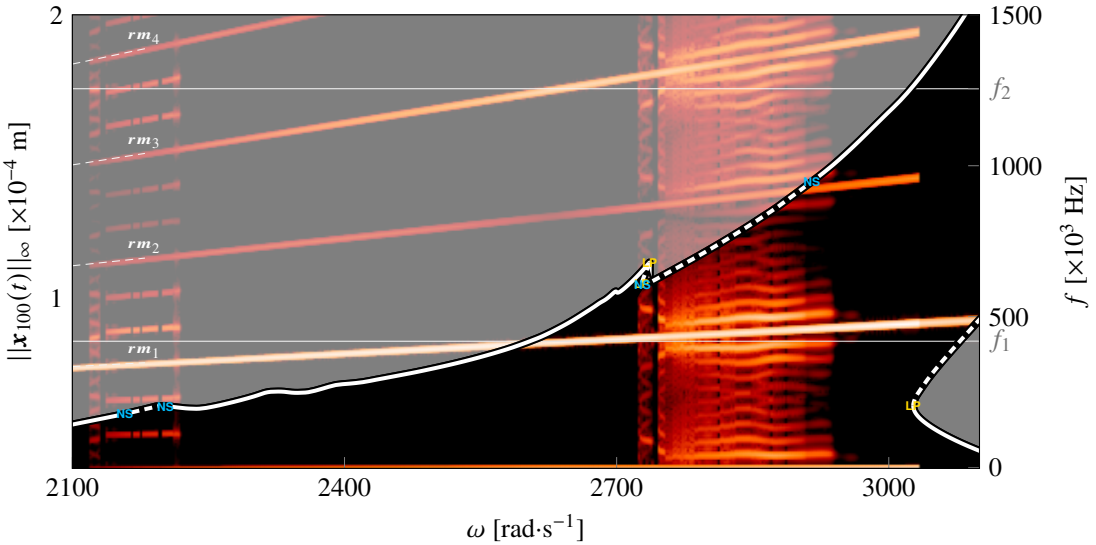



Figure 7.21 Analyse de stabilité de la barre réduite à seuil fixe. Bifurcations : point limite (LP) et Neimark-Sacker (NS).

Là où un nuage de points diffus apparaissait sur la CRF obtenue par IT, voir la figure 5.12, l'analyse de stabilité indique que les solutions obtenues par RL-HBM sont instables. Dans l'ensemble, la localisation des différents tronçons de solutions stables et instables apparaît satisfaisante compte tenu de la sévérité de la configuration de contact et de la différence d'algorithmes de traitement du contact. Cette dernière différence est particulièrement marquée à l'initiation du contact, à gauche de la plage de vitesses, entre environ $\omega = 2100$ et 2200 rad·s$^{-1}$, là où l'IT prédit des solutions de période triple, et où il est assez courant d'observer un phénomène de *grazing* [36] qu'une régularisation de la loi de pénalité a tendance à atténuer. Les bifurcations détectées correspondent respectivement à des points limites au niveau des retournements de la CRF et à des bifurcations dynamiques de type Neimark-Sacker au niveau des zones de contenu fréquentiel plus riche, ce qui est cohérent avec la carte d'interaction obtenue par IT.

#### 7.4.2.2 Seuil de contact variable

Dans le cas de la barre à seuil de contact variable, les résultats obtenus sont illustrés sur la figure 7.21. De manière équivalente au cas à seuil fixe, les zones de désaccord entre l'IT et la RL-HBM identifiées sur la figure 6.1 peuvent être expliquées grâce l'analyse de stabilité. Au total, 5 zones de solutions instables sont prédites. Ces zones coïncident presque parfaitement avec les zones de contenu fréquentiel plus dense prévues par l'IT. Deux bifurcations de doublement de période sont notamment prévues à $\omega = 2025$ et 2040 rad·s$^{-1}$. Toutes les autres bifurcations dynamiques identifiées correspondent à des bifurcations de Neimark-Sacker. Un léger repli de la CRF est également observé

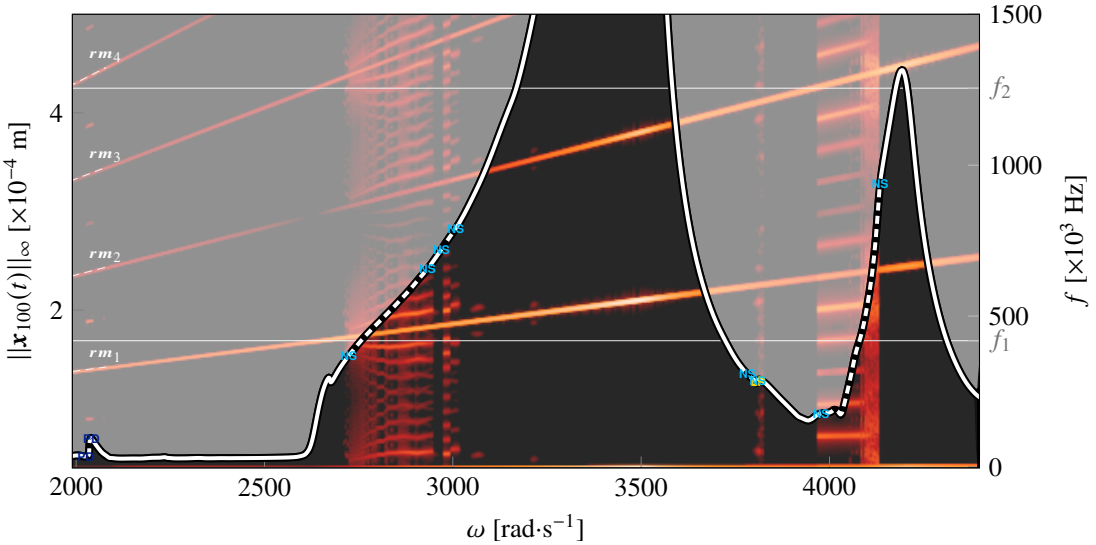



Figure 7.22 Analyse de stabilité de la barre réduite à seuil variable. Bifurcations : point limite (LP), Neimark-Sacker (NS) et doublement de période (PD).

vers $\omega$ = 3810 rad·s$^{-1}$ avec la présence de points limite. L'observation des parties imaginaires associées aux exposants de Floquet traversant l'axe imaginaire du plan complexe lors des bifurcations de Neimark-Sacker ne permet cependant pas de discerner clairement la $10T$ et $6T$-périodicité des solutions prédites par l'IT aux environs de $\omega$ = 3000 et 4000 rad·s$^{-1}$.

### 7.4.3 Aubes industrielles

Les deux aubes rotor 37 et 67, déjà présentées dans les chapitres précédents, sont ici considérées pour démontrer l'applicabilité et la pertinence d'une analyse de stabilité en complément des résultats obtenus dans les sections 6.3 et 6.4. Pour ces aubes, afin d'améliorer la convergence des valeurs propres de la matrice de Hill, et ainsi augmenter la fiabilité des résultats obtenus, l'analyse de stabilité est effectuée sur les résultats de RL-HBM obtenus pour $H$ = 80, $N$ = 1024 et filtre de Lanczos unitaire.

#### 7.4.3.1 Rotor 37

L'analyse de stabilité de l'aube rotor 37 est présentée sur la figure 7.23. La CRF déjà tracée sur la figure 6.13a y est superposée à la carte d'interaction issue de l'IT. Les solutions stables sont tracées en trait plein, celles instables en pointillés.

De même que pour la barre éléments finis, les zones de désaccord entre RL-HBM et IT peuvent être prédites par analyse de stabilité. En particulier, la zone de désaccord liée aux solutions 13,5$T$-

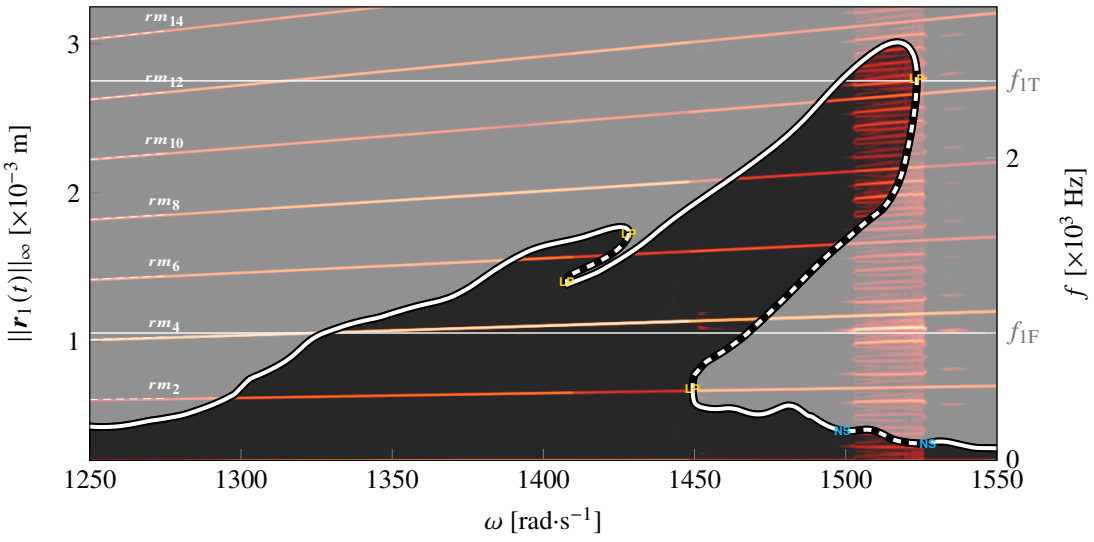



Figure 7.23 Analyse de stabilité pour l'aube rotor 37. Bifurcations : point limite (LP) et Neimark-Sacker (NS).

périodique vers $\omega = 1510\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ est délimitée par deux bifurcations de Neimark-Sacker. Les solutions prédites sur le reste de la CRF sont stables, sauf au niveau du repliement vers $\omega = 1410\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et au niveau de la branche intermédiaire de la résonance principale. L'évaluation de la stabilité des solutions périodiques permet donc *a priori*, pour le rotor 37, de prédire localement si des solutions de plus hautes amplitudes pourraient être détectées par l'IT. D'un point de vue industriel, ces résultats permettent d'envisager de concentrer avantageusement le coût requis par les stratégies IT sur les zones les plus sensibles, pour des plages de vitesses spécifiques.

#### 7.4.3.2 Rotor 67

Les résultats associés à l'aube rotor 67 sont présentés sur la figure 7.24. De même que pour les systèmes précédents, la CRF déjà tracée sur la figure 6.31a y est superposée à la carte d'interaction issue de l'IT. Les solutions stables sont tracées en trait plein, celles instables en pointillés.

En comparaison à l'aube rotor 37, les résultats obtenus par RL-HBM et par IT soulignent la très grande richesse de la dynamique de l'aube rotor 67, plus élancée et plus souple. Il n'est donc pas surprenant que l'analyse de stabilité pour cette aube révèle un plus grand nombre de bifurcations tout au long de la CRF. Dans l'ensemble, il est remarquable que là où des solutions stables sont identifiées—notamment pour $\omega \in [950; 1015]\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, $\omega \in [1240; 1335]\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\omega \in [1660; 1710]\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$—les solutions obtenues par IT et RL-HBM correspondent bien. Une exception notable concerne la branche de solution stable de haute amplitude, pour $\omega \in [1450; 1740]\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, le long de laquelle les solutions

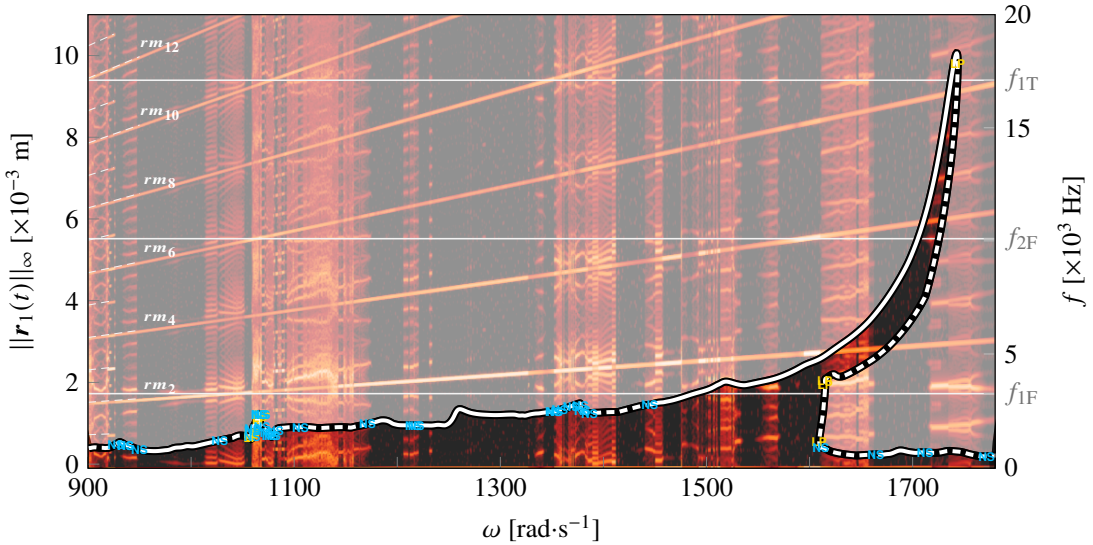



Figure 7.24 Analyse de stabilité pour l'aube rotor 67. Bifurcations : point limite (LP) et Neimark-Sacker (NS).

obtenues par IT sont très différentes de celles obtenues par RL-HBM. Sur cette plage de fréquences, l'intégrateur temporel avec conditions initiales nulles semble converger vers des solutions de plus faible amplitude, ce qui a notamment permis d'identifier les isolats tracés sur la figure 6.33a.

### 7.4.4 Conclusion partielle

Les résultats présentés dans cette section démontrent qu'il est possible, pour un coût en temps de calcul raisonnable, de prédire la stabilité des solutions obtenues par RL-HBM pour des modèles industriels d'aubes de moteurs d'avion. Du point de vue de la conception de ces composants, la stratégie numérique proposée—RL-HBM et analyse de stabilité par méthode de Hill—permettent donc d'enrichir la compréhension des phénomènes vibratoires engendrés par des contacts aube/carter. Outre la prédiction de la position de la résonance non-linéaire, l'analyse de stabilité permet d'expliquer la présence de solutions au contenu fréquentiel très riche pouvant s'avérer préjudiciables en termes de fatigue polycyclique notamment. Dans le cas des aubes rotor 37 et rotor 67, ces solutions présentent même des amplitudes significatives pouvant les rendre encore plus problématiques que les phénomènes de résonance au voisinage des vitesses critiques.

# CHAPITRE 8 CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

## Synthèse des travaux

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire ont abouti au développement d'une approche numérique fréquentielle basée sur la méthode de l'équilibrage harmonique (HBM) permettant d'analyser qualitativement les interactions de contact aube/carter dans les moteurs d'avion. Cette approche, désignée par l'acronyme RL-HBM, pour *Regularized-Lanczos* HBM, s'articule autour de deux éléments clés : (1) une régularisation adaptative de la loi de contact par pénalité et (2) un filtrage de Lanczos des efforts de contact prédits dans le but de réduire l'impact néfaste du phénomène de Gibbs sur la convergence du processus de résolution. Afin de démontrer la validité et la robustesse de l'approche RL-HBM, des variantes d'un système académique de barre éléments finis en contact unilatéral avec un obstacle rigide ont été étudiées pour différentes configurations de contact, en considérant des seuils de contact fixe et variable. Dans le but de démontrer sa pertinence et son applicabilité dans un contexte industriel, la RL-HBM a été utilisée pour prédire la réponse vibratoire de deux modèles éléments finis 3D d'aubes industrielles (compresseur et soufflante) ainsi que la réponse du modèle d'une roue aubagée complète contenant 21 aubes ce qui, à ce jour, n'avait jamais été réalisé. Les résultats obtenus permettent de confirmer l'apport qualitatif de l'approche proposée. Ces résultats sont complémentaires de ceux, plus quantitatifs, obtenus par intégration temporelle avec des méthodologies similaires aux standards industriels.

Dans l'ensemble, les résultats obtenus avec la RL-HBM ont permis de mettre en évidence la complexité de la dynamique de la réponse d'une aube subissant des contacts répétés avec le carter environnant. Point fondamental pour les concepteurs d'aubes, la RL-HBM permet de capter précisément la résonance non-linéaire pour une configuration de contact donnée, ce qui constitue un apport majeur par rapport aux stratégies s'appuyant sur l'intégration temporelle pour lesquelles il n'est pas possible de déterminer précisément cette résonance. Inversement, les résultats obtenus ont permis de souligner que l'intégration temporelle permet de capter des solutions dont le contenu fréquentiel très complexe rendrait la détection par méthode fréquentielle extrêmement coûteuse en temps de calcul. De ce fait, les travaux présentés dans ce mémoire soulignent la complémentarité des stratégies fréquentielle et temporelle : la combinaison de ces deux paradigmes semble requise pour envisager une caractérisation complète de la dynamique d'une aube en contact.

Outre la possibilité de prédire finement le lieu de la résonance non-linéaire, l'apport qualitatif de la RL-HBM est aussi mis en évidence par la possibilité de mener des analyses de stabilité des solutions obtenues. Grâce aux développements effectués, l'application de méthodes de suivi de bifurcation ouvre notamment des perspectives intéressantes pour la conception d'aubes robustes au contact.

### Publications

Les travaux de doctorat présentés dans ce mémoire ont donné lieu aux publications suivantes :

1. acte de conférence présenté au *Joint Congress of the Canadian Society for Mechanical Engineering and CFD Society of Canada* de 2019 [222] ;
2. article de revue publié dans le *Journal of Sound and Vibration* [221] ;
3. article accepté pour publication dans le *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* après relecture de l'acte soumis pour la conférence ASME Turbo Expo 2021 : Y. Colaïtis et A. Batailly, « Development of a Harmonic Balance-based numerical strategy for blade-tip/casing interactions : application to NASA rotor 37 », *in Proceedings of the ASME Turbo Expo 2021*, 2021, p.12. ;
4. article de revue en cours de rédaction sur les résultats issus de l'analyse de stabilité pour l'aube rotor 67.

### Perspectives de développements

L'outil numérique développé autour de la RL-HBM se présente comme le pendant fréquentiel d'outils numériques industriels développés au laboratoire et reposants sur des stratégies d'intégration temporelle. Pour les simulations de contact aube/carter, les mêmes modèles numériques peuvent être analysés par intégration temporelle et par RL-HBM : l'utilisation de la RL-HBM n'impose en effet aucune contrainte de modélisation spécifique (même gestion tridimensionnelle du frottement, même prise en compte des effets inertiels, mêmes modèles réduits, même prise en compte du carter. . .), ce qui permet d'envisager son **application dans un environnement industriel**. Le soin particulier apporté à l'optimisation des performances numériques du code (environnement Intel® Python, utilisation d'un compilateur juste-à-temps Numba [1], optimisation des opérations matricielles et du calcul analytique des jacobiennes par FFT. . .) et la portabilité du code sont des avantages déterminants pour envisager le transfert de la méthodologie proposée vers un environnement industriel.

Outre le contact aube/carter direct, la prédiction de la réponse d'une l'aube en contact avec un revêtement abradable est une problématique importante pour plusieurs constructeurs de moteurs d'avion. La prise en compte de l'usure du revêtement abradable—et ce que cela implique en termes de dépendance au temps de la frontière de contact—peut sembler incompatible avec la RL-HBM. Toutefois, l'observation de réponses périodiques, aussi bien numériquement qu'expérimentalement, permet d'envisager la mise en place de modèles qualitatifs originaux permettant, grâce à la RL-HBM, de prédire qualitativement la réponse vibratoire d'une aube dans ce contexte. Il est important de préciser que, d'un point de vue numérique, les problèmes de contact aube/carter résolus dans ce

1. http://numba.pydata.org/

mémoire sont significativement plus sévères que ceux liés au contact aube/abradable, ce qui permet d'envisager que la RL-HBM restera bien adaptée au traitement du contact aube/abradable.

Dans l'optique d'analyses paramétriques fines, la possibilité d'une continuation multi-paramétrique serait très profitable. En effet, un suivi des maxima d'amplitude correspondant à la résonance non-linéaire d'un système, ou le suivi d'une bifurcation d'intérêt, *via* l'ajout d'un second paramètre de contrôle dans le processus de continuation, permettrait de grandement réduire le coût numérique de telles analyses. Enfin, l'extension de la RL-HBM au calcul de modes non-linéaires permettrait également d'apporter un nouveau regard sur certaines des interactions observées en permettant notamment de superposer les *backbone curves* des systèmes étudiés sur les CRF précédemment obtenues. De tels développements pourraient permettre de définir à moindre coût des critères de conception pour la conception d'aubes robustes au contact.

# RÉFÉRENCES

## Actes de conférence


[1] L. Pacyna *et al.*, « Implementation of a Rig Test for Rotor/Stator Interaction of Low-Pressure Compressor Blades and Comparison of Experimental Results With Numerical Model », in *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2020*, doi: 10.1115/GT2020-14266, 2020, p. 10.

[2] F. Nyssen et A. Batailly, « Investigations on thermo-mechanical modeling of abradable coating in the context of rotor/stator interactions », in *Proceedings of the ISROMAC - 17th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery*, oai: hal-02136824, 2017.

[3] A. Batailly *et al.*, « Experimental and numerical simulation of a contact induced rotor/stator interaction inside an aircraft engine high-pressure compressor », in *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2016*, doi : 10.1115/GT2016-56718, 2016, p. 10.

[4] R. Djeddi et K. Ekici, « Modified Spectral Operators for Time-Collocation and Time-Spectral Solvers », in *Proceedings of the 54th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, doi : 10.2514/6.2016-1311, 2016.

[5] M. Mitra *et al.*, « Adaptive Microslip Projection (AMP) for Reduction of Frictional and Contact Non-Linearities in Shrouded Blisks », in *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2015*, doi: 10.1115/GT2015-43967, 2015, p. 16.

[6] A. Herzog *et al.*, « Comparison of two widely-used frequency-time domain contact models for the vibration simulation of shrouded turbine blades », in *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2014*, doi : 10.1115/GT2014-26226, 2014, p. 10.

[7] E. P. Petrov, « Multiharmonic Analysis of Nonlinear Whole Engine Dynamics With Bladed Disc-Casing Rubbing Contacts », in *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2012*, doi: 10.1115/GT2012-68474, 2012, p. 1181-1191.

[8] A. Grolet et F. Thouverez, « Vibration analysis of a nonlinear system with cyclic symmetry », in *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2010*, doi : 10.1115/GT2010-22681, 2010, p. 917-929.

[9] O. Thomas *et al.*, « A harmonic-based method for computing the stability of periodic oscillations of non-linear structural systems », in *Proceedings of the ASME IDETC/CIE 2010*, doi : 10.1115/DETC2010-28407 - oai: hal-01148758, 2010, p. 883-892.

[10] K. E. Turner *et al.*, « Airfoil Deflection Characteristics During Rub Events », in *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2010*, doi: 10.1115/GT2010-22166, 2010, p. 779-789.

[11] A. Millecamps *et al.*, « Influence of Thermal Effects During Blade-Casing Contact Experiments », in *Proceedings of the ASME IDETC/CIE 2009*, doi : 10.1115/DETC2009-86842 - oai: hal-01223060, 2009, p. 855-862.

[12] T. S. R. Reddy et M. A. Bakhle, « Aeroelastic Computations of a Compressor Stage Using the Harmonic Balance Method », in *Proceedings of the 45th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit*, doi : 10.2514/6.2009-5420, 2009, p. 15.

[13] D. Laxalde *et al.*, « Vibration control for integrally bladed disks using friction ring dampers », in *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2007*, doi : 10.1115/GT2007-27087, 2007, p. 255-265.

[14] A. Sternchüss et E. Balmès, « On the reduction of quasi-cyclic disk models with variable rotation speeds », in *Proceedings of the Int. Conference on Adv. Acoustics and Vib. Eng.*, oai:hal-00266394, 2006, p. 3925-3939.

[15] E. P. Petrov, « Method for direct parametric analysis of nonlinear forced response of bladed discs with friction contact interfaces », in *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2004*, doi : 10.1115/GT2004-53894, 2004, p. 397-408.

[16] H. Doi et J. J. Alonso, « Fluid/Structure Coupled Aeroelastic Computations for Transonic Flows in Turbomachinery », in *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2002*, doi : 10.1115/GT2002-30313, 2002, p. 787-794.

[17] L. Panning *et al.*, « Optimization of interblade friction damper design », in *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2000*, doi : 10.1115/2000-GT-0541, 2000, p. 8.

[18] J. Guillen et C. Pierre, « An Efficient, Hybrid, Frequency-Time Domain Method for The Dynamics of Large-Scale Dry-Friction Damped Structural Systems », in *IUTAM Symposium on Unilateral Multibody Contacts*, F. Pfeiffer et C. Glocker, éd., Dordrecht : Springer Netherlands, 1999, p. 169-178, isbn : 978-94-011-4275-5.

[19] J. P. Boyd, « The Erfc-Log filter and the asymptotics of the Euler and Vandeven sequence acceleration », in *Proceedings of the Third International Conference on Spectral and High Order Methods*, Houston Math. J., 1995, p. 267-276.

[20] D. Martinez *et al.*, « Combined experimental/analytical modeling using component mode synthesis », in *Proceedings of the 25th structures, structural dynamics and materials conference*, doi : 10.2514/6.1984-941, 1984, p. 941.

**Articles**


[21] E. Delhez *et al.*, « Reduced order modeling of blades with geometric nonlinearities and contact interactions », *J. Sound Vib.*, t. 500, p. 116 037, 2021, doi : 10.1016/j.jsv.2021.116037 - oai: hal-03152678, issn : 0022-460X.

[22] S. Skiba *et al.*, « Thermoelastoviscoplastic Bilinear Compressive Constitutive Law of an AlSi-PE Abradable Material Based on Experimental Investigations », *J. Dyn. Behav. Mater.*, p. 10, 2021, doi : 10.1007/s40870-021-00294-8, issn : 2199-7454.

[23] L. Guillot *et al.*, « A purely frequency based Floquet-Hill formulation for the efficient stability computation of periodic solutions of ordinary differential systems », *J. Comput. Phys.*, t. 416, p. 109 477, 2020, doi : 10.1016/j.jcp.2020.109477 - oai: hal-02864713, issn : 0021-9991.

[24] F. Nyssen *et al.*, « Experimental and numerical characterization of a ceramic matrix composite shroud segment under impact loading », *J. Sound Vib.*, t. 467, p. 115 040, 2020, doi : 10.1016/j.jsv.2019.115040 - oai: hal-02378746, issn : 0022-460X.

[25] L. Woiwode *et al.*, « Comparison of two algorithms for Harmonic Balance and path continuation », *Mech. Syst. Sig. Process.*, t. 136, p. 106 503, 2020, doi : 10.1016/j.ymssp.2019.106503 - oai: hal-02424746, issn : 0888-3270.

[26] Q. Agrapart *et al.*, « Multi-physics numerical simulation of an experimentally predicted rubbing event in aircraft engines », *J. Sound Vib.*, t. 460, p. 114 869, 2019, doi : 10.1016/j.jsv.2019.114869 - oai: hal-02269517, issn : 0022-460X.

[27] R. Alcorta *et al.*, « Period doubling bifurcation analysis and isolated sub-harmonic resonances in an oscillator with asymmetric clearances », *Nonlinear Dyn.*, t. 98, n° 4, p. 2939-2960, 2019, doi : 10.1007/s11071-019-05245-6 - oai: hal-02295420, issn : 1573-269X.

[28] S. Nitschke *et al.*, « An advanced experimental method and test rig concept for investigating the dynamic blade-tip/casing interactions under engine-like mechanical conditions », *Wear*, t. 422-423, p. 161-166, 2019, doi : 10.1016/j.wear.2018.12.072, issn : 0043-1648.

[29] E. Piollet *et al.*, « Blade/casing rubbing interactions in aircraft engines : Numerical benchmark and design guidelines based on NASA rotor 37 », *J. Sound Vib.*, t. 460, p. 114 878, 2019, doi : 10.1016/j.jsv.2019.114878 - oai: hal-02281666, issn : 0022-460X.

[30] B. Bentvelsen et A. Lazarus, « Modal and stability analysis of structures in periodic elastic states : application to the Ziegler column », *Nonlinear Dyn.*, t. 91, n° 2, p. 1349-1370, 2018, doi : 10.1007/s11071-017-3949-4 - oai: hal-01686514, issn : 1573-269X.

[31] A. Hartung *et al.*, « Rig and Engine Validation of the Nonlinear Forced Response Analysis Performed by the Tool OrAgL », *J. Eng. Gas Turbines Power*, t. 141, n° 2, p. 9, 2018, doi : 10.1115/1.4041160, issn : 0742-4795.

[32] E. P. Petrov, « A Method for Parametric Analysis of Stability Boundaries for Nonlinear Periodic Vibrations of Structures With Contact Interfaces », *J. Eng. Gas Turbines Power*, t. 141, n° 3, p. 11, 2018, doi : 10.1115/1.4040850, issn : 0742-4795.

[33] M. A. Razzak *et al.*, « Modified multiple time scale method for solving strongly non-linear damped forced vibration systems », *Results Phys.*, t. 8, p. 231-238, 2018, doi : 10.1016/j.rinp.2017.12.015, issn : 2211-3797.

[34] A. Thorin *et al.*, « Nonsmooth Thermoelastic Simulations of Blade–Casing Contact Interactions », *J. Eng. Gas Turbines Power*, t. 141, n° 2, p. 7, 2018, doi : 10.1115/1.4040857 - oai: hal-01989188, issn : 0742-4795.

[35] C. Delebarre *et al.*, « Tribological characterization of a labyrinth-abradable interaction in a turbo engine application », *Wear*, t. 370, p. 29-38, 2017, doi : 10.1016/j.wear.2016.11.007, issn : 0043-1648.

[36] H. Jiang *et al.*, « Grazing-induced bifurcations in impact oscillators with elastic and rigid constraints », *Int. J. Mech. Sci.*, t. 127, p. 204-214, 2017, doi : 10.1016/j.ijmecsci.2017.02.001, issn : 0020-7403.

[37] M. Krack *et al.*, « Vibration prediction of bladed disks coupled by friction joints », *Arch. Comput. Methods Eng.*, t. 24, n° 3, p. 589-636, 2017, doi : 10.1007/s11831-016-9183-2 - oai: hal-01825517.

[38] E. P. Petrov, « Stability Analysis of Multiharmonic Nonlinear Vibrations for Large Models of Gas Turbine Engine Structures With Friction and Gaps », *J. Eng. Gas Turbines Power*, t. 139, n° 2, p. 022 508, 2017, doi: 10.1115/1.4034353, issn : 0742-4795.

[39] L. Xie *et al.*, « Bifurcation tracking by Harmonic Balance Method for performance tuning of nonlinear dynamical systems », *Mech. Syst. Sig. Process.*, t. 88, p. 445-461, 2017, doi : 10.1016/j.ymssp.2016.09.037 - oai: hal-01402109, issn : 0888-3270.

[40] P. Almeida *et al.*, « Numerical Analysis of Bladed Disk–Casing Contact With Friction and Wear », *J. Eng. Gas Turbines Power*, t. 138, n° 12, p. 11, 2016, doi : 10.1115/1.4033065, issn : 0742-4795.

[41] A. Batailly *et al.*, « Experimental and numerical simulation of a rotor/stator interaction event localized on a single blade within an industrial high-pressure compressor », *J. Sound Vib.*, t. 375, p. 308-331, 2016, doi : 10.1016/j.jsv.2016.03.016 - oai: hal-01342401, issn : 0022-460X.

[42] R. Djeddi et K. Ekici, « Resolution of Gibbs phenomenon using a modified pseudo-spectral operator in harmonic balance CFD solvers », *Int. J. Comput. Fluid Dyn.*, t. 30, n° 7-10, p. 495-515, 2016, doi : 10.1080/10618562.2016.1242726.

[43] M. Krack *et al.*, « On the Interaction of Multiple Traveling Wave Modes in the Flutter Vibrations of Friction-Damped Tuned Bladed Disks », *J. Eng. Gas Turbines Power*, t. 139, n° 4, p. 9, 2016, doi : 10.1115/1.4034650, issn : 0742-4795.

[44] H. Ma *et al.*, « A review on dynamic characteristics of blade–casing rubbing », *Nonlinear Dyn.*, t. 84, n° 2, p. 437-472, 2016, doi : 10.1007/s11071-015-2535-x, issn : 1573-269X.

[45] E. P. Petrov, « Analysis of Bifurcations in Multiharmonic Analysis of Nonlinear Forced Vibrations of Gas Turbine Engine Structures With Friction and Gaps », *J. Eng. Gas Turbines Power*, t. 138, n° 10, p. 11, avr. 2016, 102502, issn : 0742-4795.

[46] L. Salles *et al.*, « Continuation techniques for analysis of whole aeroengine dynamics with imperfect bifurcations and isolated solutions », *Nonlinear Dyn.*, t. 86, p. 1897-1911, 2016, doi : 10.1007/s11071-016-3003-y, issn : 1573-269X.

[47] F. Schreyer et R. I. Leine, « A mixed shooting – harmonic balance method for unilaterally constrained mechanical systems », *Arch. Mech. Eng.*, t. vol. 63, n° No 2, p. 297-314, 2016, doi : 10.1515/meceng-2016-0017 - oai: hal-01356796v1.

[48] L. Xie *et al.*, « Numerical tracking of limit points for direct parametric analysis in nonlinear rotordynamics », *J. Vib. Acoust.*, t. 138, n° 2, p. 021 007, 2016, doi : 10.1115/1.4032182 - oai: hal-01265919, issn : 1048-9002.

[49] P. Almeida *et al.*, « Experimental analysis of dynamic interaction between a centrifugal compressor and its casing », *J. Turbomach.*, t. 137, n° 3, p. 031 008, 2015, doi : 10.1115/1.4028328 - oai: hal-01574149, issn : 0889-504X.

[50] A. Batailly *et al.*, « Redesign of a high-pressure compressor blade accounting for nonlinear structural interactions », *J. Eng. Gas Turbines Power*, t. 137, n° 2, p. 8, 2015, doi : 10.1115/1.4028263 - oai: hal-01120158, issn : 0742-4795.

[51] A. Batailly *et al.*, « Unilateral contact induced blade/casing vibratory interactions in impellers : Analysis for rigid casings », *J. Sound Vib.*, t. 337, p. 244-262, 2015, doi : 10.1016/j.jsv.2014.10.010 - oai: hal-01120157, issn : 0022-460X.

[52] T. Detroux *et al.*, « The harmonic balance method for bifurcation analysis of large-scale nonlinear mechanical systems », *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, t. 296, p. 18-38, 2015, doi : 10.1016/j.cma.2015.07.017, issn : 0045-7825.

[53] A. Grolet et F. Thouverez, « Computing multiple periodic solutions of nonlinear vibration problems using the harmonic balance method and Groebner bases », *Mech. Syst. Sig. Process.*, t. 52, p. 529-547, 2015, doi : 10.1016/j.ymssp.2014.07.015 - oai: hal-02121532, issn : 0888-3270.

[54] N. Langenbrunner *et al.*, « Dynamic Response of a Metal and a CMC Turbine Blade During a Controlled Rub Event Using a Segmented Shroud », *J. Eng. Gas Turbines Power*, t. 137, n° 6, juin 2015, doi: 10.1115/1.4028685, issn : 0742-4795.

[55] H. Dai *et al.*, « A time domain collocation method for studying the aeroelasticity of a two dimensional airfoil with a structural nonlinearity », *J. Comput. Phys.*, t. 270, p. 214-237, 2014, doi : 10.1016/j.jcp.2014.03.063, issn : 0021-9991.

[56] H. Huang et K. Ekici, « Stabilization of High-Dimensional Harmonic Balance Solvers Using Time Spectral Viscosity », *AIAA J.*, t. 52, n° 8, p. 1784-1794, 2014, doi : 10.2514/1.J052698.

[57] S. Jones et M. Legrand, « Forced vibrations of a turbine blade undergoing regularized unilateral contact conditions through the wavelet balance method », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, t. 101, n° 5, p. 351-374, 2014, doi : 10.1002/nme.4807 - oai: hal-00806545, issn : 1097-0207.

[58] M. B. Meingast *et al.*, « A linear complementarity problem formulation for periodic solutions to unilateral contact problems », *Int. J. Non-Linear Mech.*, t. 66, p. 18-27, 2014, doi : 10.1016/j.ijnonlinmec.2014.01.007 - oai: hal-00955647v1, issn : 0020-7462.

[59] G. Jacquet-Richardet *et al.*, « Rotor to stator contacts in turbomachines. Review and application », *Mech. Syst. Sig. Process.*, t. 40, n° 2, p. 401-420, 2013, doi : 10.1016/j.ymssp.2013.05.010 - oai: hal-00934050, issn : 0888-3270.

[60] M. Krack *et al.*, « A high-order harmonic balance method for systems with distinct states », *J. Sound Vib.*, t. 332, n° 21, p. 5476-5488, 2013, doi : 10.1016/j.jsv.2013.04.048, issn : 0022-460X.

[61] ——, « A method for nonlinear modal analysis and synthesis : Application to harmonically forced and self-excited mechanical systems », *J. Sound Vib.*, t. 332, n° 25, p. 6798-6814, 2013, doi : 10.1016/j.jsv.2013.08.009, issn : 0022-460X.

[62] L. Peletan *et al.*, « A comparison of stability computational methods for periodic solution of nonlinear problems with application to rotordynamics », *Nonlinear Dyn.*, t. 72, n° 3, p. 671-682, 2013, doi : 10.1007/s11071-012-0744-0 - oai: hal-00813265v1, issn : 1573-269X.

[63] S. Zucca *et al.*, « Modeling underplatform dampers for turbine blades : a refined approach in the frequency domain », *J. Vib. Control*, t. 19, n° 7, p. 1087-1102, 2013, doi : 10.1177/1077546312440809, issn : 1077-5463.

[64] A. Batailly *et al.*, « Numerical-experimental comparison in the simulation of rotor/stator interaction through blade-tip/abradable coating contact », *J. Eng. Gas Turbines Power*, t. 134, n° 8, p. 11, 2012, doi : 10.1115/1.4006446 - oai: hal-00746632, issn : 0742-4795.

[65] M. Guskov et F. Thouverez, « Harmonic balance-based approach for quasi-periodic motions and stability analysis », *J. Vib. Acoust.*, t. 134, n° 3, p. 031 003, 2012, doi : 10.1115/1.4005823 - oai: hal-01081604, issn : 1048-9002.

[66] L. Salles *et al.*, « Dual Time Stepping Algorithms With the High Order Harmonic Balance Method for Contact Interfaces With Fretting-Wear », *J. Eng. Gas Turbines Power*, t. 134, n° 3, p. 7, 2012, doi : 10.1115/1.4004236 - oai: hal-00975699, issn : 0742-4795.

[67] C. W. Schwingshackl *et al.*, « Effects of contact interface parameters on vibration of turbine bladed disks with underplatform dampers », *J. Eng. Gas Turbines Power*, t. 134, n° 3, p. 032 507, 2012, doi : 10.1115/1.4004721, issn : 0742-4795.

[68] D. Laxalde et M. Legrand, « Nonlinear modal analysis of mechanical systems with frictionless contact interfaces », *Comput. Mech.*, t. 47, n° 4, p. 469-478, 2011, doi : 10.1007/s00466-010-0556-3, issn : 1432-0924.

[69] E. P. Petrov, « A High-Accuracy Model Reduction for Analysis of Nonlinear Vibrations in Structures With Contact Interfaces », *J. Eng. Gas Turbines Power*, t. 133, n° 10, p. 10, 2011, doi : 10.1115/1.4002810, issn : 0742-4795.

[70] E. Sarrouy *et al.*, « Global and bifurcation analysis of a structure with cyclic symmetry », *Int. J. Non-Linear Mech.*, t. 46, n° 5, p. 727-737, 2011, doi : 10.1016/j.ij nonlinmec.2011.02.005 - oai: hal-00623630, issn : 0020-7462.

[71] A. Batailly *et al.*, « Assessment of reduced models for the detection of modal interaction through rotor stator contacts », *J. Sound Vib.*, t. 329, n° 26, p. 5546-5562, 2010, doi : 10.1016/j.jsv.2010.07.018 - oai: hal-00524762v1, issn : 0022-460X.

[72] A. Lazarus et O. Thomas, « A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems », *Comptes Rendus Mécanique*, t. 338, n° 9, p. 510-517, 2010, doi : 10.1016/j.crme.2010.07.020 - oai: hal-01452004v1, issn : 1631-0721.

[73] R. D. Neidinger, « Introduction to Automatic Differentiation and MATLAB Object-Oriented Programming », *SIAM Rev.*, t. 52, n° 3, p. 545-563, 2010, doi : 10.1137/080743627, issn : 0036-1445.

[74] B. Cochelin et C. Vergez, « A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions », *J. Sound Vib.*, t. 324, n° 1-2, p. 243-262, 2009, doi : 10.1016/j.jsv.2009.01.054 - oai: hal-00315288, issn : 0022-460X.

[75] F. Georgiades *et al.*, « Modal analysis of a nonlinear periodic structure with cyclic symmetry », *AIAA J.*, t. 47, n° 4, p. 1014-1025, 2009, doi : 10.2514/1.40461.

[76] A. LaBryer et P. J. Attar, « High dimensional harmonic balance dealiasing techniques for a Duffing oscillator », *J. Sound Vib.*, t. 324, n° 3, p. 1016-1038, 2009, doi : 10.1016/j.jsv.2009.03.005, issn : 0022-460X.

[77] M. Pakdemirli *et al.*, « A new perturbation algorithm with better convergence properties : Multiple Scales Lindstedt Poincare method », *Mathematical and Computational Applications*, t. 14, n° 1, p. 31-44, 2009, doi : 10.3390/mca14010031, issn : 2297-8747.

[78] M. Peeters *et al.*, « Nonlinear normal modes, Part II : Toward a practical computation using numerical continuation techniques », *Mech. Syst. Sig. Process.*, t. 23, n° 1, p. 195-216, 2009, doi : 10.1016/j.ymssp.2008.04.003, issn : 0888-3270.

[79] M. J. Brennan *et al.*, « On the jump-up and jump-down frequencies of the Duffing oscillator », *J. Sound Vib.*, t. 318, n° 4-5, p. 1250-1261, 2008, doi : 10.1016/j.jsv.2008.04. 032, issn : 0022-460X.

[80] I. Charpentier et M. Potier-Ferry, « Différentiation automatique de la méthode asymptotique numérique typée : l'approche Diamant », *Comptes Rendus Mécanique*, t. 336, n° 3, p. 336-340, 2008, doi : 10.1016/j.crme.2007.11.022, issn : 1631-0721.

[81] M. Cuny *et al.*, « Experimental Measurement of Dynamic Forces Generated during Short-Duration Contacts : Application to Blade-Casing Interactions in Aircraft Engines », *Exp. Mech.*, t. 54, n° 2, p. 101-114, 2008, doi : 10.1007/s11340-013-9780-z, issn : 1741-2765.

[82] A. Saito *et al.*, « Efficient Nonlinear Vibration Analysis of the Forced Response of Rotating Cracked Blades », *J. Comput. Nonlinear Dyn.*, t. 4, n° 1, p. 10, 2008, doi : 10.1115/1.3007908, issn : 1555-1415.

[83] J. Jiang, « The analytical solution and the existence condition of dry friction backward whirl in rotor-to-stator contact systems », *J. Vib. Acoust.*, t. 129, n° 2, p. 260-264, 2007, doi : 10.1115/1.2345677, issn : 1048-9002.

[84] N. Lesaffre *et al.*, « Contact analysis of a flexible bladed-rotor », *Eur. J. Mech. A/Solids*, t. 26, n° 3, p. 541-557, 2007, doi : 10.1016/j.euromechsol.2006.11.002 - oai: hal-00322887, issn : 0997-7538.

[85] G. Baldo *et al.*, « The accuracy of the Generalized-$\alpha$ method in the time integration of non-linear Single-and Two-DOF forced systems », *Comput. Mech.*, t. 38, n° 1, p. 15-31, 2006, doi : 10.1007/s00466-005-0718-x, issn : 1432-0924.

[86] B. Deconinck et J. Nathan Kutz, « Computing spectra of linear operators using the Floquet–Fourier–Hill method », *J. Comput. Phys.*, t. 219, n° 1, p. 296-321, 2006, doi : 10.1016/j.jcp.2006.03.020, issn : 0021-9991.

[87] M. S. McMullen et A. Jameson, « The computational efficiency of non-linear frequency domain methods », *J. Comput. Phys.*, t. 212, n° 2, p. 637-661, 2006, doi : 10.1016/j.jcp.2005.07.021, issn : 0021–9991.

[88] C. Padova *et al.*, « Experimental Results From Controlled Blade Tip/Shroud Rubs at Engine Speed », *J. Turbomach.*, t. 129, n° 4, p. 713-723, 2006, doi : 10.1115/1.2720869 - oai: hal-01333702v1, issn : 0889-504X.

[89] S. W. Shaw et C. Pierre, « The dynamic response of tuned impact absorbers for rotating flexible structures », *J. Comput. Nonlinear Dyn.*, t. 1, n° 1, p. 13-24, 2006, doi : 10.1115/1.1991872, issn : 1555-1415.

[90] M. Frigo et S. G. Johnson, « The Design and Implementation of FFTW3 », *Proc. IEEE*, t. 93, n° 2, p. 216-231, 2005, doi : 10.1109/JPROC.2004.840301.

[91] G. Kerschen *et al.*, « The method of proper orthogonal decomposition for dynamical characterization and order reduction of mechanical systems : an overview », *Nonlinear Dyn.*, t. 41, n° 1-3, p. 147-169, 2005, doi : 10.1007/s11071-005-2803-2, issn : 1573-269X.

[92] B. H. K. Lee *et al.*, « Airfoil motion in subsonic flow with strong cubic nonlinear restoring forces », *J. Sound Vib.*, t. 281, n° 3-5, p. 699-717, 2005, doi : 10.1016/j.jsv.2004.01.034, issn : 0022-460X.

[93] G. Moore, « Floquet theory as a computational tool », *SIAM J. Numer. Anal.*, t. 42, n° 6, p. 2522-2568, 2005, doi : 10.1137/S0036142903434175.

[94] D. A. Knoll et D. E. Keyes, « Jacobian-free Newton–Krylov methods : a survey of approaches and applications », *J. Comput. Phys.*, t. 193, n° 2, p. 357-397, 2004, doi : 10.1016/j.jcp.2003.08.010, issn : 0021-9991.

[95] E. P. Petrov et D. J. Ewins, « Generic Friction Models for Time-Domain Vibration Analysis of Bladed Disks », en, *J. Turbomach.*, t. 126, n° 1, p. 184-192, 2004, doi : 10.1115/1.1644557, issn : 0889-504X.

[96] J. Zhou *et al.*, « Spectral characteristics and eigenvalues computation of the harmonic state operators in continuous-time periodic systems », *Systems & Control Letters*, t. 53, n° 2, p. 141-155, 2004, doi : 10.1016/j.sysconle.2004.03.002, issn : 0167-6911.

[97] W.-J. Kim et N. Perkins, « Harmonic balance/Galerkin method for non-smooth dynamic systems », *J. Sound Vib.*, t. 261, n° 2, p. 213-224, 2003, doi : 10.1016/S0022-460X(02)00949-5 - oai: hal-01693093v1, issn : 0022-460X.

[98] R. C. Maple *et al.*, « Adaptive Harmonic Balance Solutions to Euler's Equation », *AIAA J.*, t. 41, n° 9, p. 1705-1714, 2003, doi : 10.2514/2.7316.

[99] S. Nacivet *et al.*, « A dynamic Lagrangian frequency–time method for the vibration of dry-friction-damped systems », *J. Sound Vib.*, t. 265, n° 1, p. 201-219, 2003, doi : 10.1016/S0022-460X(02)01447-5 - oai: hal-01635272, issn : 0022-460X.

[100] S. Pernot et C.-H. Lamarque, « A Wavelet-Balance Method to Investigate the Vibrations of Nonlinear Dynamical Systems », *Nonlinear Dyn.*, t. 32, n° 1, p. 33-70, 2003, doi : 10.1023/A:1024263917587, issn : 1573-269X.

[101] E. P. Petrov et D. J. Ewins, « Analytical formulation of friction interface elements for analysis of nonlinear multi-harmonic vibrations of bladed disks », *J. Turbomach.*, t. 125, n° 2, p. 364-371, 2003, doi : 10.1115/1.1539868, issn : 0889-504X.

[102] R. Díaz-Sierra et V. Fairén, « New method for the estimation of domains of attraction of fixed points from lyapunov functions », *International Journal of Bifurcation and Chaos*, t. 12, n° 11, p. 2467-2477, 2002, doi : 10.1142/S0218127402005984.

[103] K. C. Hall *et al.*, « Computation of Unsteady Nonlinear Flows in Cascades Using a Harmonic Balance Technique », *AIAA J.*, t. 40, n° 5, p. 879-886, 2002, doi : 10.2514/2.1754.

[104] S. Pernot et C.-H. Lamarque, « A wavelet-Galerkin procedure to investigate time-periodic systems : transient vibration and stability analysis », *J. Sound Vib.*, t. 245, n° 5, p. 845-875, 2001, doi : 10.1006/jsvi.2001.3610, issn : 0022-460X.

[105] F. Tisseur et K. Meerbergen, « The quadratic eigenvalue problem », *SIAM Rev.*, t. 43, n° 2, p. 235-286, 2001, doi : 10.1137/S0036144500381988.

[106] G. Von Groll et D. J. Ewins, « The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems », *J. Sound Vib.*, t. 241, n° 2, p. 223-233, 2001, doi : 10.1006/jsvi.2000.3298 - oai: hal-01333704, issn : 0022-460X.

[107] C. Broyden, « On the discovery of the "good Broyden" method », *Math. Program.*, t. 87, n° 2, p. 209-213, 2000, doi : 10.1007/s101070050111, issn : 0025-5610.

[108] F. G., « Rigid rotor dynamic stability using Floquet theory », *Eur. J. Mech. A/Solids*, t. 19, n° 1, p. 139-150, 2000, doi : 10.1016/S0997-7538(00)00151-0, issn : 0997-7538.

[109] A. Cardona *et al.*, « Fast Fourier nonlinear vibration analysis », *Comput. Mech.*, t. 22, n° 2, p. 128-142, 1998, doi : 10.1007/s004660050347, issn : 1432-0924.

[110] S. Narayanan et P. Sekar, « A frequency domain based numeric–analytical method for non-linear dynamical systems », *J. Sound Vib.*, t. 211, n° 3, p. 409-424, 1998, doi : 10.1006/jsvi.1997.1319, issn : 0022-460X.

[111] W. Squire et G. Trapp, « Using Complex Variables to Estimate Derivatives of Real Functions », *SIAM Rev.*, t. 40, n° 1, p. 110-112, 1998, doi : 10.1137/S003614459631241X, issn : 0036-1445.

[112] K. B. Blair *et al.*, « Harmonic balance and continuation techniques in the dynamic analysis of Duffing's equation », *J. Sound Vib.*, t. 202, n° 5, p. 717-731, 1997, doi : 10.1006/jsvi.1996.0863, issn : 0022-460X.

[113] D. Gottlieb et C.-H. Shu, « On the Gibbs Phenomenon and Its Resolution », *SIAM Rev.*, t. 39, n° 4, p. 644-668, 1997, doi : 10.1137/S0036144596301390.

[114] P. Sundararajan et S. T. Noah, « Dynamics of forced nonlinear systems using shooting/arc-length continuation method—application to rotor systems », *J. Vib. Acoust.*, t. 119, n° 1, p. 9-20, 1997, doi : 10.1115/1.2889694, issn : 1048-9002.

[115] E. Balmès, « Optimal Ritz vectors for component mode synthesis using the singular value decomposition », *AIAA J.*, t. 34, n° 6, p. 1256-1260, 1996, doi : 10.2514/3.13221.

[116] A. Brambilla et D. D'Amore, « A filter-based technique for the harmonic balance method », *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications*, t. 43, n° 2, p. 92-98, 1996, doi : 10.1109/81.486431.

[117] A. Y. T. Leung et S. K. Chui, « Non-linear vibration of coupled duffing oscillators by an improved incremental harmonic balance method », *J. Sound Vib.*, t. 181, n° 4, p. 619-633, 1995, doi : 10.1006/jsvi.1995.0162, issn : 0022-460X.

[118] A. Y. T. Leung et T. Ge, « Toeplitz Jacobian Matrix for Nonlinear Periodic Vibration », *J. Appl. Mech.*, t. 62, n° 3, p. 709-717, 1995, doi : 10.1115/1.2897004, issn : 0021-8936.

[119] H. B. Stewart *et al.*, « Optimal escape from potential wells-patterns of regular and chaotic bifurcation », *Physica D*, t. 85, n° 1-2, p. 259-295, 1995, doi : 10.1016/0167-2789(95)00172-Z.

[120] J. Chung et G. Hulbert, « A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation : the generalized-α method », *J. Appl. Mech.*, t. 60, n° 2, p. 371-375, 1993, doi : 10.1115/1.2900803, issn : 0021-8936.

[121] K. Schittkowski, « Solving nonlinear programming problems with very many constraints », *Optimization*, t. 25, n° 2-3, p. 179-196, 1992, doi : 10.1080/02331939208843818.

[122] N. J. Carpenter *et al.*, « Lagrange constraints for transient finite element surface contact », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, t. 32, n° 1, p. 103-128, 1991, doi : 10.1002/nme.1620320107 - oai: hal-01389918, issn : 1097-0207.

[123] Y. B. Kim et S. T. Noah, « Steady-state analysis of a nonlinear rotor-housing system », *J. Eng. Gas Turbines Power*, t. 113, n° 4, p. 550-556, 1991, doi : 10.1115/1.2906276, issn : 0742-4795.

[124] Y. B. Kim *et al.*, « Periodic response of multi-disk rotors with bearing clearances », *J. Sound Vib.*, t. 144, n° 3, p. 381-395, 1991, doi : 10.1016/0022-460X(91)90558-2 - oai: hal-01693096, issn : 0022-460X.

[125] F. H. Ling, « Quasi-periodic solutions calculated with the simple shooting technique », *J. Sound Vib.*, t. 144, n° 2, p. 293-304, 1991, doi : 10.1016/0022-460X(91)90750-E, issn : 0022-460X.

[126] S. C. Sinha et D.-H. Wu, « An efficient computational scheme for the analysis of periodic systems », *J. Sound Vib.*, t. 151, n° 1, p. 91-117, 1991, doi : 10.1016/0022-460X(91)90654-3, issn : 0022-460X.

[127] H. Vandeven, « Family of spectral filters for discontinuous problems », *J. Sci. Comput.*, t. 6, n° 2, p. 159-192, 1991, doi : 10.1007/BF01062118, issn : 0885-7474.

[128] T. M. Cameron et J. H. Griffin, « An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems », *J. Appl. Mech.*, t. 56, n° 1, p. 149-154, 1989, doi : 10.1115/1.3176036 - oai: hal-01333697, issn : 0021-8936.

[129] P. Friedmann, « Numerical methods for determining the stability and response of periodic systems with applications to helicopter rotor dynamics and aeroelasticity », *Computers & Mathematics with Applications*, t. 12, n° 1, p. 131-148, 1986, doi : 10.1016/0898-1221(86)90091-X.

[130] C. Pierre *et al.*, « Multi-harmonic analysis of dry friction damped systems using an incremental harmonic balance method », *J. Appl. Mech.*, t. 52, n° 4, p. 958-964, 1985, doi : 10.1115/1.3169175, issn : 0021-8936.

[131] S. Saito, « Calculation of nonlinear unbalance response of horizontal Jeffcott rotors supported by ball bearings with radial clearances », *J. Vib., Acoust., Stress, and Reliab.*, t. 107, n° 4, p. 416-420, 1985, doi : 10.1115/1.3269282, issn : 1048-9002.

[132] H. B. Keller, « The Bordering Algorithm and Path Following Near Singular Points of Higher Nullity », *SIAM J. Sci. and Stat. Comput.*, t. 4, n° 4, p. 573-582, 1983, doi : 10.1137/0904039.

[133] Y. Saad et M. H. Schultz, « GMRES, a generalized minimal residual algorithm for solving non-symmetric linear systems », *SIAM J. Sci. and Stat. Comput.*, t. 7, n° 3, p. 856-869, 1983, doi : 10.1137/0907058.

[134] J. R. Dormand et P. J. Prince, « A family of embedded Runge-Kutta formulae », *Journal of Computational and Applied Mathematics*, t. 6, n° 1, p. 19-26, 1980, doi : 10.1016/0771-050X(80)90013-3.

[135] F. C. Moon et P. J. Holmes, « A magnetoelastic strange attractor », *J. Sound Vib.*, t. 65, n° 2, p. 275-296, 1979, doi : 10.1016/0022-460X(79)90520-0, issn : 0022-460X.

[136] P. Friedmann *et al.*, « Efficient numerical treatment of periodic systems with application to stability problems », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, t. 11, n° 7, p. 1117-1136, 1977, doi : 10.1002/nme.1620110708, issn : 1097-0207.

[137] D. W. Childs, « A modal transient rotordynamic model for dual-rotor jet engine systems », *J. Eng. Ind.*, t. 98, n° 3, p. 876-882, 1976, doi : 10.1115/1.3439046, issn : 0022-0817.

[138] R. H. MacNeal, « A hybrid method of component mode synthesis », *Computers & Structures*, t. 1, n° 4, p. 581-601, 1971, doi : 10.1016/0045-7949(71)90031-9, issn : 0045-7949.

[139] M. J. D. Powell, « A hybrid method for nonlinear equations », *Numerical methods for nonlinear algebraic equations*, 1970.

[140] H. F. Black, « Interaction of a whirling rotor with a vibrating stator across a clearance annulus », *J. Mech. Eng. Sci.*, t. 10, n° 1, p. 1-12, 1968, doi : 10.1243/JMES_JOUR_1968_010_003_02, issn : 0022-2542.

[141] R. R. Craig Jr et M. C. C. Bampton, « Coupling of substructures for dynamic analyses », *AIAA J.*, t. 6, n° 7, p. 1313-1319, 1968, doi : 10.2514/3.4741.

[142] C. G. Broyden, « A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations », *Math. Comput.*, t. 19, n° 92, p. 577-593, 1965, doi : 10.2307/2003941, issn : 0025-5718.

[143] J. W. Cooley et J. W. Tukey, « An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series », *Math. Comput.*, t. 19, n° 90, p. 297-301, 1965, doi : 10.2307/200 3354, issn : 0025-5718.

[144] R. J. Guyan, « Reduction of stiffness and mass matrices », *AIAA J.*, t. 3, n° 2, p. 380-380, 1965, doi : 10.2514/3.2874 - oai: hal-01711552.

[145] M. Urabe, « Galerkin's procedure for nonlinear periodic systems », *Arch. Ration. Mech. Anal.*, t. 20, n° 2, p. 120-152, 1965, doi : 10.1007/BF00284614.

[146] N. M. Newmark, « A method of computation for structural dynamics », *Journal of the Engineering Mechanics Division*, t. 85, n° 3, p. 67-94, 1959, doi : 10.1061/JMCEA3.0000098.

[147] P. D. Lax et R. D. Richtmyer, « Survey of the stability of linear finite difference equations », *Commun. Pure Appl. Math.*, t. 9, n° 2, p. 267-293, 1956, doi : 10.1002/cpa.3160090206.

[148] G. W. Hill, « On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon », *Acta Mathematica*, t. 8, n° 1, p. 1-36, 1886, doi : 10.1007/BF02417081.

[149] M. G. Floquet, « Sur les equations differentielles lineaires à coefficients périodiques », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, t. 12, n° 2, p. 47-88, 1883. adresse : http://eudml.org/doc/80895.

**Thèses et mémoires**

[150] A. Mabilia, « Dynamique non-linéaire d'une soufflante en rotation », oai: tel-03152435, thèse de doct., Ecole Centrale de Lyon, 2020.

[151] L. Meyrand, « Modes Non Linéaires : Approches réduites par PGD/HBM et applications aux réponses forcées », oai: tel-02408126, thèse de doct., Université d'Aix-Marseille, 2019.

[152] P. Vigué, « Solutions périodiques et quasi-périodiquesde systèmes dynamiques d'ordre entier ou fractionnaire - Applications à la corde frottée », oai: tel-01621755, thèse de doct., Université d'Aix-Marseille, 2017.

[153] T. Detroux, « Performance and Robustness of Nonlinear Systems Using Bifurcation Analysis », oai: orbi-uliege-195883, thèse de doct., Université de Liège, 2016.

[154] M. Claeys, « Réponses vibratoires non-linéaires dans un contexte industriel : essais et simulations », oai: tel-01356746v1, thèse de doct., Ecole Centrale de Lyon, 2015.

[155] Z. Dakel, « Stabilité et dynamique non linéaire de rotors embarqués », oai: tel-01082878, thèse de doct., INSA de Lyon, 2014.

[156] A. Grolet, « Dynamique non-linéaire des structures mécaniques : application aux systèmes à symétrie cyclique », oai: tel-01727750, thèse de doct., Ecole Centrale de Lyon, 2013.

[157] S. Karkar, « Méthodes numériques pour les systèmes dynamiques non linéaires. Application aux instruments de musique auto-oscillants », oai: tel-00742651v1, thèse de doct., Université d'Aix-Marseille, 2012.

[158] L. Peletan, « Stratégie de modélisation simplifiée et de résolution accélérée en dynamique non linéaire des machines tournantes : Application au contact rotor-stator », oai: tel-00808515, thèse de doct., INSA de Lyon, 2012.

[159] B. Al Sayed, « Comportement dynamique des ensembles tournants de turbomachines : Maîtrise des effets des dispositifs de liaisonnement amortisseurs », oai: tel-00782341v1, thèse de doct., INSA de Lyon, 2011.

[160] V. Jaumouillé, « Dynamique des structures à interfaces non linéaires : Extension des techniques de balance harmonique », oai: tel-00670283v1, thèse de doct., Ecole Centrale de Lyon, 2011.

[161] O. Thomas, *Dynamique linéaire et non linéaire de structures élastiques et piézoélectriques. Instruments de musique, micro/nano systèmes électromécaniques, contrôle de vibration*, oai: tel-00718727v1 - Habilitation à Diriger des Recherches - Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2011.

[162] L. Salles, « Etude de l'usure par fretting sous chargements dynamiques dans les interfaces frottantes : application aux pieds d'aubes de turbomachines », oai: tel-00600613, thèse de doct., Ecole Centrale de Lyon et Université Technique d'Etat Bauman de Moscou, 2010.

[163] A. Batailly, « Simulation de l'interaction rotor/stator pour des turbomachines aéronautiques en configuration non-accidentelle », oai: tel-00364945v1, thèse de doct., Ecole Centrale de Nantes, 2008.

[164] E. Sarrouy, « Analyse globale de systèmes mécaniques non-linéaires-Application à la dynamique des rotors », oai: tel-00366857v1, thèse de doct., Ecole Centrale de Lyon, 2008.

[165] D. Laxalde, « Etude d'amortisseurs non-linéaires appliqués aux roues aubagées et aux systèmes multi-étages », oai: tel-00344168v1, thèse de doct., Ecole Centrale de Lyon, 2007.

[166] N. Lesaffre, « Stabilité et analyse non-linéaire du contact rotor-stator », oai: tel-01375079, thèse de doct., Ecole Centrale de Lyon, 2007.

[167] O. J. Poudou, « Modeling and analysis of the dynamics of dry-friction-damped structural systems », oai: tel-00508905, thèse de doct., Université du Michigan, 2007.

[168] M. Legrand, « Modèles de prédiction de l'interaction rotor/stator dans un moteur d'avion », oai: tel-00011631v2, thèse de doct., Ecole Centrale de Nantes, 2005.

[169] D. Demailly, « Etude du comportement non-linéaire dans le domaine fréquentiel — Application à la dynamique rotor », oai: tel-00587168, thèse de doct., Ecole Centrale de Lyon, 2003.

[170] S. Nacivet, « Modélisation du frottement en pied d'aube par une approche fréquentielle », oai: tel-01119596v1, thèse de doct., Ecole Centrale de Lyon, 2002.

**Livres**

[171] M. Krack et J. Gross, *Harmonic Balance for Nonlinear Vibration Problems*. Springer, Cham, 2019, doi : 10.1007/978-3-030-14023-6.

[172] A. Fortin, *Analyse numérique pour ingénieurs*. Presses internationales de Polytechnique, 2016, t. 5, ISBN : 978-2-553-01680-6.

[173] Y. A. Kuznetsov, *Elements of applied bifurcation theory*. Springer-Verlag New York, 2013, t. 112, doi : 10.1007/978-1-4757-3978-7.

[174] T. Kalmár-Nagy et B. Balachandran, « Forced Harmonic Vibration of a Duffing Oscillator with Linear Viscous Damping », in *The Duffing Equation*, doi : 10.1002/9780470977859.ch5, John Wiley & Sons, 2011, chap. 5, p. 139-174, isbn : 9780470977859.

[175] A. H. Nayfeh, *Introduction to perturbation techniques*. John Wiley & Sons, 2011, ISBN : 978-0471310136.

[176] E. Sarrouy et J.-J. Sinou, « Non-Linear Periodic and Quasi-Periodic Vibrations in Mechanical Systems - On the use of the Harmonic Balance Methods », in *Advances in Vibration Analysis Research*, F. Ebrahimi, éd., doi : 10.5772/15638 - oai: hal-00730895, Rijeka : IntechOpen, 2011, chap. 21, p. 419-434.

[177] R. Seydel, *Practical bifurcation and stability analysis*. Springer, New York, NY, 2009, t. 5, doi : 10.1007/978-1-4419-1740-9.

[178] A. H. Nayfeh, *Perturbation methods*. John Wiley & Sons, 2008, ISBN : 978-0471399179.

[179] B. Cochelin *et al.*, *Méthode asymptotique numérique*. Hermes Lavoissier, 2007, ISBN : 978-2746215672.

[180] A. Gelb et S. Gottlieb, « The resolution of the Gibbs phenomenon for Fourier spectral methods », in *Advances in The Gibbs Phenomenon. 1st edition (2011)*, ISBN : 0967301-0-8, Sampling Publishing. Potsdam, New York., 2007, chap. 7.

[181] A. Quarteroni *et al.*, *Numerical Mathematics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007, doi : 10.1007/b98885.

[182] P. Wriggers et T. A. Laursen, *Computational Contact Mechanics*. Springer, Vienna, 2007, t. 498, doi : 10.1007/978-3-211-77298-0.

[183] J. F. Bonnans *et al.*, *Numerical Optimization*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006, doi : 10.1007/978-3-540-35447-5.

[184] M. S. Bazaraa *et al.*, *Nonlinear Programming : Theory and Algorithms*. John Wiley & Sons, 2005, doi : 10.1002/0471787779.

[185] R. G. Lyons, *Understanding Digital Signal Processing*. Prentice Hall PTR, 2004, t. 2, ISBN : 978-0137027415.

[186] C. T. Kelley, *Solving Nonlinear Equations with Newton's Method*. SIAM, 2003, ISBN : 978-0898715460 ; doi : 10.1137/1.9780898718898.

[187] S. Wiggins, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. Springer-Verlag New York, 2003, t. 2, doi : 10.1007/b97481.

[188] W.-J. Beyn *et al.*, « Chapter 4 - Numerical Continuation, and Computation of Normal Forms », in *Handbook of Dynamical Systems*, sér. Handbook of Dynamical Systems, B. Fiedler, éd., t. 2, doi : 10.1016/S1874-575X(02)80025-X, Elsevier Science, 2002, p. 149-219.

[189] W. J. F. Govaerts, *Numerical Methods for Bifurcations of Dynamical Equilibria*. SIAM, 2000, doi : 10.1137/1.9780898719543.

[190] Z. Mei, *Numerical Bifurcation Analysis for Reaction-Diffusion Equations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000, t. 28, doi : 10.1007/978-3-662-04177-2.

[191] A. J. Jerri, *The Gibbs Phenomenon in Fourier Analysis, Splines and Wavelet Approximations*. Springer, Boston, MA, 1998, t. 446, doi : 10.1007/978-1-4757-2847-7.

[192] A. H. Nayfeh et B. Balachandran, *Applied nonlinear dynamics : analytical, computational and experimental methods*. John Wiley & Sons, 1995, chap. 3, doi : 10.1002/9783527617548.

[193] A. H. Nayfeh et D. T. Mook, *Nonlinear oscillations*. John Wiley & Sons, 1995, p. 720, ISBN : 978-0-471-12142-8.

[194] D. J. Inman et R. S. Chandra, *Engineering vibration*. Prentice Hall, 1994, t. 3, ISBN : 978-0132871693.

[195] M. Géradin et D. J. Rixen, *Théorie des vibrations : application à la dynamique des structures*. Masson, 1993, t. 2, ISBN : 2-225-85173-5.

[196] E. L. Allgower et K. Georg, *Introduction to numerical continuation methods*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990, t. 13, doi: 10.1007/978-3-642-61257-2.

[197] J. C. Butcher, *The numerical analysis of ordinary differential equations : Runge-Kutta and general linear methods*. John Wiley & Sons, 1987, ISBN : 978-0-471-91046-6.

[198] J. Guckenheimer et P. Holmes, « Local Bifurcations », in *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, Springer, New York, 1983, p. 117-165.

[199] H. B. Keller, *Numerical solution of two point boundary value problems*. SIAM, 1976, t. 24, ISBN : 978-0-89871-021-2 ; doi : 10.1137/1.9781611970449.

[200] L. F. Shampine et M. K. Gordon, *Computer solution of ordinary differential equations : the initial value problem*. Chapman & Hall - Mathematics, 1975, ISBN : 978-0716704614.

[201] N. N. Bogoliubov et Y. A. Mitropolski, *Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations*. New York : Gordon & Breach, 1961.

[202] N. Kryloff et N. N. Bogoliubov, *Introduction to Non-linear Mechanics*, 11. Princeton University Press, 1947.

[203] G. Duffing, *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung*, 41-42. R, Vieweg & Sohn, 1918.

[204] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste : Méthodes de M. M. Newcomb, Glydén, Lindstedt et Bohlin*. Gauthier-Villars et fils, 1899, t. 3.

**Rapports techniques**

[205] « Aircraft Accident Report : National Airlines, Inc., DC-10-10, N60NA, Near Albuquerque, New Mexico, November 3, 1973 », National Transportation Safety Board, rapp. tech., url : https://ntrl.ntis.gov/NTRL/dashboard/searchResults/titleDetail/PB239889.xhtml, 1975 (accédé le 2021-05-24).

[206] R. C. Bill et D. W. Wisander, « Friction and wear of several compressor gas-path seal movements », NASA Lewis Research Center Cleveland, OH, United States, rapp. tech., url : https://ntrs.nasa.gov/citations/19780007286, 1978 (accédé le 2021-04-29).

[207] « Investigation : 200700356 - In-flight engine failure, Sydney, February 3, 2007, Boeing Company 747-438, VH-OJM », Australian Transport Safety Bureau, rapp. tech., url : https://www.atsb.gov.au/publications/investigation_reports/2007/aair/aair200700356, 2008 (accédé le 2020-10-29).

[208] L. Reid et R. D. Moore, « Design and overall performance of four highly loaded, high speed inlet stages for an advanced high-pressure-ratio core compressor », NASA Lewis Research Center Cleveland, OH, United States, rapp. tech., url : https://ntrs.nasa.gov/citations/19780025165, 1978 (accédé le 2020-10-29).

[209] A. J. Strasizar *et al.*, « Laser anemometer measurements in a transonic axial-flow fan rotor », NASA Lewis Research Center Cleveland, OH, United States, rapp. tech., url : https://ntrs.nasa.gov/citations/19900001929, 1989 (accédé le 2021-04-22).

[210] D. C. Urasek *et al.*, « Performance of two-stage fan having low-aspect-ratio first-stage rotor blading », NASA Lewis Research Center Cleveland, OH, United States, rapp. tech., url : https://ntrs.nasa.gov/citations/19790018972, 1979 (accédé le 2020-04-20).

**Notes de cours**

[211] J. Ault *et al.*, *Introduction to Dynamics and Vibrations - chap. 5 Vibrations*, School of Engineering, Brown University, Providence, RI. url : https://www.brown.edu/Departments/Engineering/Courses/En4/Notes/Vibrations/Vibrations.pdf, Summer 2021.

[212] H. P. Gavin, *Numerical integration in structural dynamics*, Department of Civil and Environmental Engineering, Duke University, Durham, NC. url : http://people.duke.edu/~hpgavin/StructuralDynamics/NumericalIntegration.pdf, Fall 2020.

[213] ——, *Modal Superposition*, Department of Civil and Environmental Engineering, Duke University, Durham, NC. url : http://people.duke.edu/~hpgavin/StructuralDynamics/ModalSuperposition.pdf, Fall 2018.

**Logiciels**

[214] M. Krack et J. Gross, *NLvib : a Matlab tool for nonlinear vibration analysis*, url : https://www.ila.uni-stuttgart.de/nlvib, 2018.

[215] R. Arquier *et al.*, *Manlab : an interactive path-following and bifurcation analysis software*, url : http://manlab.lma.cnrs-mrs.fr/, 2013.

[216] A. Dhooge *et al.*, « New features of the software MatCont for bifurcation analysis of dynamical systems », *Math. Comput. Modell. Dyn. Syst.*, t. 14, n° 2, p. 147-175, 2008, url : https://sourceforge.net/projects/matcont/.

[217] R. H. Clewley *et al.*, « PyDSTool, a software environment for dynamical systems modeling », 2007, url : http://pydstool.sourceforge.net.

[218] E. J. Doedel *et al.*, « AUTO-07P : Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations », 2007, url : http://cmvl.cs.concordia.ca/auto/.

**Images**

[219] D. Huebler, *Rotor 37 and stator 37 assembly. Records of the National Aeronautics and Space Administration, 1903 - 2006. Photographs relating to agency activities, facilities and personnel, 1973 - 2013*, https://catalog.archives.gov/id/17468389, 1977 (accédé le 2020-10-29).

[220] D. Laity, *Stage 67 rotor and stage 67 casing half stators mounted. Records of the National Aeronautics and Space Administration, 1903 - 2006. Photographs relating to agency activities, facilities and personnel, 1973 - 2013*, https://catalog.archives.gov/id/17500556, 1980 (accédé le 2021-04-20).

**Publications**

[221] Y. Colaïtis et A. Batailly, « The harmonic balance method with arc-length continuation in blade-tip/casing contact problems », *J. Sound Vib.*, t. 502, p. 116 070, 2021, doi : 10.1016/j.jsv.2021.116070 - oai: hal-03163560, issn : 0022-460X.

[222] S. Kojtych *et al.*, « Experimental and numerical modelling of a one-degree of freedom non-smooth mechanical system », in *Proceedings of the CSME-CFDSC Congress 2019*, oai: hal-02060883v2, 2019.