



**HAL**  
open science

# Description en espaces de chemins et méthode de Monte Carlo pour les transferts thermiques couplés dans les structures fluides et solides, une approche compatible avec l'informatique graphique

Loris Ibarrart

## ► To cite this version:

Loris Ibarrart. Description en espaces de chemins et méthode de Monte Carlo pour les transferts thermiques couplés dans les structures fluides et solides, une approche compatible avec l'informatique graphique. Génie des procédés. Ecole des Mines d'Albi-Carmaux, 2020. Français. NNT : 2020EMAC0009 . tel-03325516

**HAL Id: tel-03325516**

**<https://theses.hal.science/tel-03325516>**

Submitted on 25 Aug 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Fédérale



Toulouse Midi-Pyrénées

# THÈSE

en vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

délivré par

IMT – École Nationale Supérieure des Mines d'Albi-Carmaux

---

présentée et soutenue par

Loris IBARRART

le 25 février 2020

Description en espaces de chemins et méthode de Monte Carlo pour les transferts thermiques couplés dans les structures fluides et solides, une approche compatible avec l'informatique graphique

---

**École doctorale et discipline ou spécialité :**

MEGEP : Énergétique et transferts

**Unité de recherche :**

Centre RAPSODEE, UMR CNRS 5302, IMT Mines Albi

**Directeurs de thèse :**

Mouna EL HAFI, Professeur, IMT Mines Albi, Albi

Richard FOURNIER, Professeur, Université Paul Sabatier, Toulouse

**Autres membres du jury :**

Frédéric TOPIN, Maître de Conférences, Université d'Aix-Marseille, Marseille (*Rapporteur*)

Gérard VIGNOLES, Professeur, Université de Bordeaux, Bordeaux (*Rapporteur*)

Pascal BOULET, Professeur, Université de Lorraine, Nancy (*Président*)

Robert SCHOETTER, Chargé de Recherche, Météo-France, Toulouse (*Examineur*)

Cyril CALIOT, Maître de Conférences, Université de Pau et des Pays de l'Adour, Anglet (*Invité*)



Cette thèse a bénéficié d'une participation financière de la région Occitanie.

---

---

# Nomenclature

## Acronymes

CAO	Conception Assistée par Ordinateur
CFD	Computational Fluid Dynamics (Mécanique des fluides numériques)
ETR	Equation de Transfer Radiatif
MMC	Méthode de Monte Carlo

## Symboles latins

$v$	Vitesse	
$x$	Position	
$\mathcal{V}$	Volume	
$\mathbb{E}$	Espérance	
$\mathbb{R}$	Ensemble des réels	
$\mathcal{D}$	Notation alternative de l'ensemble de définition	
$\mathcal{N}$	Loi normale	
$\mathcal{S}$	Sphère	
$\mathcal{T}$	Transmissivité	
$\mathcal{W}$	Processus de Wiener	
Pe	Nombre de Péclet	
$C$	Capacité thermique massique	
$c$	Vitesse de la lumière	
$c_0$	Vitesse de la lumière dans le vide	$2,99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
$E$	Energie	
$G$	Fonction de Green	
$h$	Coefficient d'échange convectif	
$h$	Constante de Planck	$6,62607004 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$
$k$	Coefficient d'extinction	
$k_a$	Coefficient d'absorption	
$k_B$	Constante de Boltzmann	$1,38064852 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
$k_d$	Coefficient de diffusion	
$L$	Luminance	
$L^{eq}$	Luminance d'équilibre	



---

$N$	Nombre de réalisations aléatoires
$n$	Indice de réfraction
$p$	Fonction densité de probabilité
$P/\mathcal{P}$	Probabilité
$S$	Terme source
$T$	Température
$t$	Temps
$W$	Variable aléatoire poids
$w$	Poids de Monte Carlo

### Symboles grecs

$\alpha$	Diffusivité thermique	
$\Delta$	Laplacien vectoriel	
$\Delta$	Laplacien	
$\delta$	Pas de discrétisation	
$\Gamma$	Espace des chemins	
$\gamma$	Chemin statistique	
$\lambda$	Conductivité thermique (ou longueur d'onde en section 1.2)	
$\mu$	Viscosité dynamique (ou nombre d'onde en section 1.2)	
$\nu$	Fréquence	
$\Omega$	Ensemble de définition	
$\rho$	Masse volumique	
$\sigma$	Constante de Stefan-Boltzmann	$5,670374 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
$\sigma_N$	Ecart-type de l'échantillon de taille $N$	
$\theta$	Notation alternative pour la température	
$\zeta$	Coefficient de transfert radiatif	

### Indices

0/I	A l'instant initial
$\mathbf{u}$	Selon la direction $\mathbf{u}$
C	Relatif à la convection
F	Relatif au fluide
N	Relatif au renouvellement
ref	De référence
ref	Relatif au transfert radiatif
S	Relatif au solide

### Autres caractères

$\nabla$	Gradient
$\emptyset$	Ensemble vide

- $\lfloor \rfloor$  Partie entière
- $\partial$  Dérivée partielle
- $\perp$  Orthogonal

**Usages**

- $\boldsymbol{x}/\vec{x}$  Vecteurs en gras ou surmontés d'une flèche
- $X$  Variables aléatoires en capitales
- $x$  Réalisations aléatoires en minuscules



---

---

# Remerciements

Bonjour lecteur,

Avant toute chose, merci de faire vivre les pages de ce manuscrit, j'espère qu'elles t'apporteront quelque chose.

J'aurais voulu que ces lignes soient une source d'inspiration, qu'une farandole de mots virevoltants portent les yeux et l'esprit dans une scénographie fantasque, telle une danse endiablée dans un mémorial aux illustres personnes que je souhaite remercier. Mais en vérité, c'est empli d'humilité que je repense à ces moments, à ces personnes, et la sobriété semble dès lors de mise.

Pour m'avoir donné ma chance, m'avoir accompagné et tant appris pendant ces années, merci Mouna, merci Richard, merci Stéphane. Le titre de directeurs/encadrants de thèse en raconte tellement peu sur leur contribution. Pendant ce voyage, ils n'ont eu de cesse de me réapprendre à voir, à travailler, à penser, et de me démontrer qu'il n'est pas de vérité. Par-dessus tout, je tiens à les remercier pour l'univers qu'ils ont su créer et entretenir (parfois même à leur insu), dans lequel apprendre, partager, et chercher, est un réel bonheur.

S'ils sont des fondations de cet univers, je ne peux que redoubler de remerciements pour chacun des corps stellaires qui y brillent et orbitent à sa périphérie. A mes amis et collègues doctorants, Jean-Marc, Marie, Najda, Léa, Paule, Victor, Alexandre, Asaad, Jérémie, Julien, Marion, Yaniss, aux illustres Jean-Paul et Harristor Nayamo, merci. Pour ces innombrables séances au tableau, ces incessantes interruptions pour travailler ou juste discuter, ces rires et sourires partagés à longueur de temps, cette présence indéfectible dans ce couloir du 3R1 rarement tempéré, merci. Vous êtes le brasier en constant renouvellement de cette émulation scientifique et humaine.

Il est également de nombreux astres fixes de ce firmament qui m'ont guidé durant ce périple. A vous, les nombreux permanents, présents de près comme de loin, abondant de conseils, de perspectives et de bienveillance, merci. Je ne saurais tous les nommer, et l'idée d'un recensement incomplet me rebute devant la profusion de personnes qui ont tant compté, même l'espace d'un instant. Alors à tous les habitués et figures de passage dans mon entourage, au Laplace, aux Mines d'Albi, dans les locaux officiels de MésoStar, au Promes, à Roffiac, ou lors de mes déplacements, merci. Ce soutien sur tous les fronts, qu'ils soient scientifiques, techniques, administratifs, et même humains, m'a tant aidé, et tant enseigné.

Enfin, il reste ceux qui les ont tous précédés, la famille. Mon petit système solaire originel, dans lequel chacun est présent pour les autres, simplement pour le plaisir d'être là. Alors un grand merci aux Ibarrart et associés, aux Sentout, aux Lasserre, et aux autres, je ne peux m'empêcher de sourire aux souvenirs de ces moments partagés. Il est également des amis, dont on ne sait plus vraiment depuis quand ils sont là, mais qui ont clairement leur orbite au coin du soleil. J'espère à très vite les copains, et merci pour tout Oliver, Lya, Bob, Jeff, Thomas, Alex, Quentin, et Tony.

Naturellement, il en reste deux que l'on ne risque pas d'oublier (et pas seulement pour ce pot de thèse du tonnerre!), et pour lesquelles je n'aurai jamais assez de mots. Du haut de ton mètre cinquante, tu as porté un sacré bout de tout ce que j'ai fait, et de ce que je suis; merci p'tite mum. Et mon dragon personnel, rarement chaud mais qui me réchauffe le cœur au quotidien, c'est un bonheur de partager ma vie avec toi, merci Océ.

---

En un mot, merci. Puissiez-vous ne jamais arrêter d'écouter, de partager, d'apprendre, et de  
sourire.

---

---

---

# Table des matières

<i>Nomenclature</i> . . . . .	iii
<i>Remerciements</i> . . . . .	vii
<i>Table des matières</i> . . . . .	ix
<hr/>	
<b>Introduction</b> . . . . .	1
<b>1 Méthode de Monte Carlo et transferts thermiques</b> . . . . .	5
Pourquoi la méthode de Monte Carlo (MMC) ? . . . . .	5
1.1 Fondements théoriques de la Méthode de Monte Carlo . . . . .	6
1.2 Monte Carlo et transfert radiatif, une vision du transport des photons . . . . .	14
1.3 Monte Carlo et diffusion : Feynman-Kac et moyennes sphériques . . . . .	18
Monte Carlo, un outil de la complexité ? . . . . .	22
<b>2 Monte Carlo et transferts thermiques en géométrie complexe : l'apport de la synthèse d'image</b> . . . . .	25
Comment simuler des transferts thermiques couplés en géométrie complexe ? . . . . .	25
2.1 Gestion de géométries complexes et synthèse d'image . . . . .	26
2.2 Transferts thermiques couplés . . . . .	29
Problématique . . . . .	37
<b>3 Formulation probabiliste d'un problème conducto-convecto-radiatif</b> . . . . .	45
La question du couplage, vers une formulation théorique . . . . .	45
3.1 Un système couplé conduction-convection-rayonnement . . . . .	46
3.2 Formulation intégrale par l'approche de Green . . . . .	48
3.3 Formulation par l'approche de Feynman-Kac . . . . .	52
3.4 Illustrations d'échantillonnages de chemins pour des propagateurs analytiques . . . . .	56
Comment simuler ces chemins au-delà de configurations académiques ? . . . . .	59
<b>4 Une marche advecto-conducto-radiative compatible avec le ray-tracing</b> . . . . .	61
Quelle formulation probabiliste pour une compatibilité avec les outils de la synthèse d'image ? . . . . .	61
4.1 Marches advecto-diffusives en géométrie quelconque . . . . .	63
4.2 Vers une mise en œuvre dans un cas réel . . . . .	74
Comportement du schéma numérique advecto-diffusif : de premiers éléments d'analyse . . . . .	91
<b>5 Comportement des algorithmes couplés</b> . . . . .	97
Quelles sont les limites à ces approches ? . . . . .	97
5.1 Marches aléatoires couplées et longueur moyenne de chemin . . . . .	99
5.2 Des limites de praticabilité . . . . .	117
Praticabilité et limites des approches statistiques . . . . .	121
<b>6 Conclusions et Perspectives</b> . . . . .	123
Quelles pistes pour le futur de ces travaux ? . . . . .	123
6.1 Ecoulement de Stokes et formulation en espace de chemins . . . . .	124
6.2 Des ouvertures à la question du non-linéaire . . . . .	129
6.3 Quel champ de vitesse ? . . . . .	131

---

6.4	La perspective énergétique . . . . .	133
6.5	Un dernier regard critique sur nos fondements théoriques . . . . .	139
<hr/>		
<b>A</b>	<b>Plus loin dans la construction des chemins conducto-advectifs . . . . .</b>	<b>143</b>
A.1	Le cas de l'orthogonalité vitesse - gradient de température . . . . .	143
A.2	Chemins conducto-advectifs instationnaires . . . . .	145
A.3	Une construction du nombre de pas moyen pour sortir d'une sphère . . . . .	148
<hr/>		
<b>B</b>	<b>Ecrit collectif : le Papier Thermique . . . . .</b>	<b>151</b>
<hr/>		
	<i>Table des figures</i> . . . . .	177
	<i>Liste des tableaux</i> . . . . .	181
	<i>Liste des Algorithmes</i> . . . . .	183
	<i>Bibliographie</i> . . . . .	185

---

---

# Introduction

## **Description en espaces de chemins et méthode de Monte Carlo pour les transferts thermiques couplés dans les structures fluides et solides, une approche compatible avec l'informatique graphique**

Le présent manuscrit relève des sciences pour l'ingénieur. Nous nous intéressons aux outils permettant de simuler numériquement et analyser les transferts de chaleur dans des dispositifs qui doivent être contrôlés en température (on peut retenir l'exemple du refroidissement de l'électronique) ou bien qui ont vocation à canaliser l'énergie (par exemple un échangeur réchauffant un fluide par mise en contact avec une source de chaleur à haute température). Plus que l'étude des transferts thermiques conductifs (diffusion de la chaleur dans la matière), convectifs (effets conjugués de la diffusion de la chaleur et de son transport via le mouvement d'un fluide), ou radiatifs (émission et absorption d'ondes électromagnétiques par la matière chauffée), le cœur de nos travaux concerne l'interaction de ces différents modes de transferts entre eux. Cette question du couplage est centrale dans la pensée de la thermique. En particulier, un thermicien devant un nouveau problème va commencer par chercher à se faire une image de comment, et par où, la chaleur va se propager à travers un système. La difficulté à penser de tels "chemins" par lesquels l'énergie se propage augmente alors avec la diversité des différents transferts thermiques en jeu, mais aussi avec la complexité de la géométrie du milieu étudié. Bien que notre démarche reste très transversale, on s'intéressera ici plus spécifiquement à une classe de problèmes thermiques dans laquelle cette diversité des phénomènes de transfert et cette complexité de la géométrie se traduisent par des questionnements scientifiques très ouverts avec des enjeux industriels importants : l'intensification des transferts de chaleur dans les échangeurs poreux.

Pour l'étude de ce type de systèmes, il est d'usage de recourir à l'outil numérique pour simuler la propagation de la chaleur. Le présent travail ouvre une possible alternative aux méthodes déterministes les plus communément utilisées pour estimer les transferts thermiques, mais aussi pour se faire une image mentale de ces "chemins" de propagation. La proposition que nous ferons s'intègre dans une famille d'approches statistiques utilisant la méthode de Monte Carlo. L'idée est alors de représenter une grandeur, comme par exemple une valeur locale de la température, comme une moyenne des sources thermiques présentes dans le système. L'échantillonnage aléatoire de ces sources à travers le temps et l'espace est alors réalisé par la construction de chemins statistiques émanant du point d'observation. Tandis que les sources atteintes au bout des chemins permettent de reconstruire la valeur de la température, la nature même de ces chemins en fait des objets représentant une possible trajectoire qu'aurait suivie l'énergie provenant de cette source pour contribuer à la température observée. Cette approche, qui est utilisée depuis toujours pour les transferts radiatifs, l'est beaucoup moins pour les autres modes de transferts, et encore moins pour leur couplage. L'objectif est alors de reproduire ici ce qui est fait en transfert radiatif, mais pour les autres modes de transfert et pour leurs interactions.

Notre principale motivation est l'émergence très récente d'innovations dans le secteur de l'informatique graphique, qui permettent aux approches de type Monte Carlo d'atteindre une quasi-insensibilité à la complexité géométrique : les temps de calcul associés à la représentation du transfert radiatif ne dépendent pas du niveau de raffinement de la scène numérique. Ce besoin est apparu en synthèse d'images quand les artistes produisant les scènes virtuelles (pour le cinéma et le jeu vidéo essentiellement) ont commencé à devoir limiter leurs possibilités descriptives



---

pour que le calcul du rendu (production de l'image) soit possible. Un travail d'informatique très approfondi a alors été enclenché, et il a abouti à un ensemble de concepts aujourd'hui arrivés à maturité, traduits en termes algorithmiques, et mis à disposition sous formes de bibliothèques ouvertes et facilement exploitables. Ces concepts permettent aujourd'hui à l'industrie du cinéma de s'organiser autour d'une chaîne de production où les artistes ne se limitent plus en termes de niveaux de raffinement, de rapports d'échelles géométriques, de volume total de la donnée : ils sont invités à raisonner comme si le calcul des images ne dépendait plus de leurs décisions descriptives. Une des grandes idées permettant cette indépendance entre la donnée et le traitement de la donnée est l'utilisation de grilles accélératrices hiérarchiques, qui permettent de classer l'information géométrique de façon efficace et d'y accéder très rapidement lors du suivi d'un rayon lumineux à travers la scène, depuis les sources de lumière jusqu'à la caméra.

Nous imaginons donc des ingénieurs thermiciens qui pourraient bénéficier des mêmes avantages lors de la description de leurs objets d'étude, avec des CAO industrielles aussi complexes que souhaité, comptant sur le fait que les caractéristiques géométriques ou physiques retenues n'auront que peu ou pas d'impact sur le temps de calcul nécessaire à la simulation des transferts thermiques couplés au sein du système. Tout au long de cette thèse, lorsque nous parlerons de "complexité géométrique" c'est à cette idée que nous ferons référence : un ingénieur ne faisant aucune concession sur sa description géométrique, par exemple ne se donnant aucune contrainte sur le nombre de pores lors de l'étude d'un échangeur poreux.

Bien qu'alternatives, les approches que nous proposerons n'auront aucune prétention à remplacer les approches actuellement utilisées, mais plutôt à les renforcer. En effet, quand bien même une méthode statistique permettrait de simuler exactement une scène thermique très complexe, un quartier de ville par exemple, c'est bien une approche en milieux équivalents, en modèles combinant et emboîtant des sous-systèmes, qui permettra à l'architecte de proposer un plan dans lequel la thermique de la ville sera optimisée. Pour ce faire, il lui suffira de se construire un modèle générique de l'impact de chacun des bâtiments et des autres éléments de la scène. En allant vers une capacité à résoudre directement le modèle global détaillé d'un tel système, c'est-à-dire dans son infinie complexité géométrique et phénoménologique, nous ne cherchons pas à remplacer ce type de pratique. Si nous atteignons nos objectifs, ce n'est qu'une validation permettant de solidifier une modélisation système qui sera permise par la méthode de Monte Carlo.

Par contre, pour y parvenir, nous allons essentiellement travailler les images de la physique des transferts de la chaleur et si ce manuscrit n'était qu'une chose, ce serait l'illustration d'un formalisme et d'un intuitif qui permet de dire la propagation de la chaleur par différents modes de transferts couplés en chemins, ou en marches (version discrète), dans lesquels la chaleur n'est qu'un marcheur qui se déplace depuis les sources vers la partie étudiée du système.

## Guide de lecture

Le présent manuscrit est découpé en 6 chapitres :

1. Dans une approche relativement scolaire, le chapitre 1 présente les fondements de la méthode de Monte Carlo, ainsi que son utilisation pour la simulation des transferts thermiques par rayonnement, mais aussi par conduction.
2. Le chapitre 2 présente un état de l'art de l'utilisation des méthodes statistiques pour les transferts thermiques couplés face à l'enjeu de la complexité géométrique telle que nous l'avons définie. Cela nous permet d'aboutir à l'énonciation de la problématique de cette thèse.
3. Le chapitre 3 peut donner l'impression d'une régression par rapport au chapitre précédent. Nous abandonnerons en effet la question de la complexité géométrique pour plonger dans les fondements théoriques de la pensée en chemins, en repartant des formulations en fonction de Green et de Feynman-Kac qui sont à l'origine des approches statistiques que nous travaillons. Cette discussion est construite autour de fragments d'un écrit collectif dont l'écriture a fait partie intégrante des travaux réalisés pendant cette thèse.

4. Au contraire, le chapitre 4 se concentre sur la construction et la mise en œuvre d'algorithmes que nous poussons jusqu'à une preuve de concept pour une approche statistique couplant conduction, advection-diffusion, et rayonnement, par la méthode de Monte Carlo en géométrie complexe grâce aux outils de la synthèse d'image. Le cœur de cette validation est présenté sous la forme d'un article.
5. Dans le chapitre 5 nous tentons de prendre du recul par rapport à la proposition du chapitre précédent avec une analyse paramétrique, également présentée sous la forme d'un article, qui nous permet de discuter les comportements et les limites de ce type d'approches. Les limites que nous identifions résonnent fortement avec celles liées aux fortes épaisseurs optiques dans la littérature du transfert radiatif.
6. Enfin, dans le chapitre 6 nous reprenons point par point l'ensemble des idées clés de ce manuscrit afin d'en proposer une synthèse, mais aussi d'énoncer un ensemble de perspectives que nous essayons de détailler en profondeur. Telle une réponse à la problématique du chapitre 2, nous terminons ce manuscrit par une re-discussion de chacune de nos directions de recherche, d'une part sur la base des conclusions des chapitres 4 et 5, et d'autre part en intégrant un ensemble de résultats nouveaux obtenus par d'autres chercheurs sur des thématiques connexes tout au long de cette thèse.



## Méthode de Monte Carlo et transferts thermiques

Pourquoi la méthode de Monte Carlo (MMC) ?	5
1.1 Fondements théoriques de la Méthode de Monte Carlo	6
1.1.1 Eléments de probabilités et de statistiques	6
1.1.2 Simuler une variable aléatoire	9
1.1.3 La méthode de Monte Carlo en pratique	10
1.2 Monte Carlo et transfert radiatif, une vision du transport des photons	14
1.2.1 Le rayonnement thermique	14
1.2.2 Luminance et corps noir	15
1.2.3 L'Equation du Transfert Radiatif (ETR)	16
1.2.4 Une lecture probabiliste de l'ETR	16
1.3 Monte Carlo et diffusion : Feynman-Kac et moyennes sphériques	18
1.3.1 La conduction thermique, un phénomène macroscopique	18
1.3.2 Interprétation probabiliste des phénomènes diffusifs et mouvement brownien	19
1.3.3 L'exemple du Walk On Sphere pour la résolution de l'équation de la chaleur	19
1.3.4 Les alternatives et extensions du Walk on Sphere	20
Monte Carlo, un outil de la complexité ?	22

### Pourquoi la méthode de Monte Carlo (MMC) ?

Historiquement, la naissance de la méthode de Monte Carlo remonte au 18e siècle, quand le comte de Buffon proposa une méthode de calcul de  $\pi$  par un lancer d'aiguilles sur un plancher de parquet. De façon plus pragmatique, la méthode telle qu'elle est utilisée aujourd'hui prend ses sources aux travaux d'Ulam, Von Neumann, et Metropolis [Metropolis+1949] pendant la création des premières bombes atomiques. Sa praticabilité est fortement liée à l'apparition des premiers ordinateurs, puis à l'augmentation constante des moyens de calcul qui a suivi.

Le cœur de cette méthode repose sur l'approximation d'une espérance par une moyenne, en se basant sur le cadre théorique de la loi des grands nombres. Prenons l'exemple de l'espérance d'un lancer de dé. Une méthode déterministe pourrait consister à sommer les valeurs de chaque face, puis diviser ce résultat par le nombre de faces :  $\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3.5$ . Par la méthode de Monte Carlo, on se contentera de lancer le dé un grand nombre  $N$  de fois, puis de prendre la moyenne de ces  $N$  réalisations. La convergence du résultat se fera alors en  $\frac{1}{\sqrt{N}}$ . Cette vitesse de convergence est souvent considérée comme "lente" au sens où un doublement de la précision demande de multiplier par quatre le nombre de réalisations. Elle a par contre le mérite d'être insensible à la dimension. Ainsi, augmenter le nombre de faces du dé, voire le nombre de dés, n'aura pas

---

d'influence sur la vitesse de convergence, contrairement à ce que l'on observe communément avec les approches déterministes (voir figure 1.1).

De nos jours, la méthode de Monte Carlo est utilisée dans un vaste ensemble de disciplines dès lors que la complexité des problèmes posés imposerait de trop fortes hypothèses simplificatrices pour permettre une résolution par des méthodes déterministes. Dans ces situations, l'approche statistique est utilisée soit seule, de façon autonome, soit couplée à des méthodes déterministes, soit en amont de calculs déterministes simplifiés afin de valider les approximations correspondantes.

Ce premier chapitre propose de présenter les bases de la méthode de Monte Carlo et de son utilisation pour la résolution des transferts thermiques.

Dans une première section, les fondements mathématiques de la méthode et une description des grandeurs et théorèmes essentiels à cette pratique sont présentés. Après une description des outils numériques classiques disponibles que sont les générateurs de nombres aléatoires sur l'intervalle unité, une rapide section présente les méthodes permettant d'étendre ces outils à l'ensemble des situations aléatoires que nous rencontrerons par la suite. On synthétisera ensuite les concepts clés permettant une praticabilité de la méthode.

La seconde section présente un lien entre rayonnement thermique et approches statistiques. Historiquement, les méthodes statistiques sont couramment utilisées pour le transfert radiatif en raison de la lecture naturelle de l'équation de transport, ou équation de Boltzmann, en probabilités. Une présentation générale du rayonnement thermique sera donc proposée, et mettra en évidence une construction allant de la notion de la luminance à une lecture statistique de l'équation de transfert radiatif compatible avec la méthode de Monte Carlo.

Dans une troisième section, la présentation d'une sélection de travaux sur la lecture statistique des transferts diffusifs, et plus particulièrement des transferts thermiques par conduction, illustrera la pratique de Monte Carlo dans les domaines de la physique où la vision particulière n'est pas première. Nous introduirons ainsi le concept de chemins, non plus comme traduisant des trajectoires, mais comme permettant de porter un regard statistique sur la solution d'une équation aux dérivées partielles, une idée qui sera au cœur de notre approche des transferts thermiques couplés.

## 1.1 Fondements théoriques de la Méthode de Monte Carlo

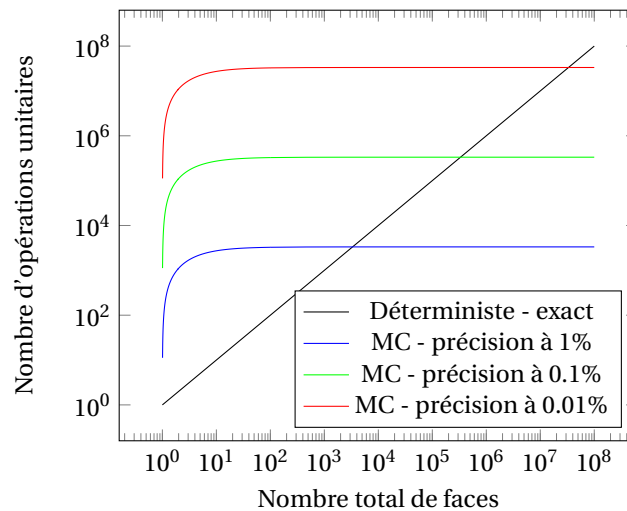
*Cette section n'a pas vocation à poser un cadre théorique exhaustif. Pour aller plus loin, des ouvrages comme [Appel2015] ou [Dunn+2012] présentent le cadre théorique de la méthode de Monte Carlo avec plus de profondeur. L'intégralité de cette section est restreinte à l'espace probabilisable  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  des nombres réels.*

### 1.1.1 Éléments de probabilités et de statistiques

La méthode de Monte Carlo part de la possibilité d'estimer l'espérance d'une variable aléatoire à l'aide d'un échantillon de taille finie. La loi des grands nombres et le théorème central limite permettent alors de caractériser la précision de cette estimation. Nous allons commencer par définir rapidement ces objets et discuter leur articulation.

#### Variables aléatoires

Toute *variable aléatoire*  $X$  se définit à partir d'une expérience. La réalisation de l'expérience produit alors une valeur particulière  $x$  dans l'espace de définition de  $X$  (son univers  $\Omega_X$ ), que l'on appelle plus brièvement une "réalisation de  $X$ ". Cette variable aléatoire peut être **discrète** (par



**FIGURE 1.1** – Comparaison entre méthodes déterministe et probabiliste pour le calcul de l'espérance d'un lancer de dé. Pour un dé équiprobable comportant  $N$  faces, l'espérance est définie comme la somme des valeurs de ces  $N$  faces divisée par le nombre total de faces. Le calcul effectif de cette espérance terme à terme (approche déterministe) requiert alors un nombre d'opérations égal au nombre de faces : il augmente comme  $N$ . La méthode de Monte Carlo n'accède pas à la solution exacte. Elle produit une estimation à un certain niveau de précision. La convergence de Monte Carlo en  $\sqrt{N}^{-1}$  signifie que la précision est proportionnelle à  $\sqrt{N}^{-1}$ , donc pour passer de 1% de précision à 0.1% puis 0.01%, le nombre  $N$  de réalisations a dû être augmenté d'un facteur 100, puis 10000. Par contre, à partir d'une dizaine de faces, ce nombre de réalisations n'augmente plus avec le nombre de faces.

exemple  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  pour un lancer de dé), ou **continu** (par exemple  $\Omega = [0, 1]$  pour un nombre aléatoire réel uniforme compris entre 0 et 1, ou encore  $\Omega = \mathbb{R}$  pour une variable aléatoire gaussienne).

En général, on cherche à pondérer les différentes réalisations de cette variable aléatoire. Pour cela, on a recours à une mesure positive normée nommée **probabilité**. Pour une variable aléatoire discrète  $X$ , on associe ainsi à chaque élément  $x$  de  $\Omega_X$  une probabilité  $P_X(x)$ . Pour une variable aléatoire absolument continue  $Y$ , on utilise sa **fonction densité de probabilité**  $p_Y$ , définie pour tout élément  $y$  de  $\Omega_Y$  telle que  $p_Y(y)dy$  est la probabilité qu'une réalisation de  $Y$  soit comprise dans l'intervalle  $dy$  autour de  $y$ .

Enfin, on représentera parfois la **fonction de répartition** d'une variable aléatoire. Fonction monotone croissante, il s'agit de la cumulée des probabilités des réalisations possibles d'une variable aléatoire sur son domaine de définition  $\Omega$ . Cette fonction se montre particulièrement utile pour simuler une variable aléatoire (voir section 1.1.2).

La figure 1.2 illustre les notions de densité de probabilité et fonction de répartition sur des exemples de variables aléatoires discrète et continues.

## Espérance et moments d'ordre supérieur

L'**espérance** est une généralisation de la notion de moyenne pondérée pour des variables aléatoires. Ainsi, les espérances d'une variable aléatoire discrète  $X$  et d'une variable aléatoire continue  $Y$  s'écrivent selon les équations 1.1 et 1.2.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \Omega} P_X(x) x \quad (1.1)$$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{\Omega} p_Y(y) dy \quad (1.2)$$

Une propriété capitale de l'espérance est sa **linéarité**. Ainsi, pour toutes variables aléatoires  $X$  et  $Y$  admettant une espérance, pour tous réels  $a$  et  $b$ , l'équation 1.3 est vraie. Plus spécifiquement, pour toute fonction  $f$  linéaire, pour toute variable aléatoire  $X$  qui admet une espérance, on a la relation 1.4, dont un intérêt pour notre étude est présenté en section 1.1.3.

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y] \quad (1.3)$$

$$\mathbb{E}[f(X)] = f(\mathbb{E}[X]) \quad (1.4)$$

L'espérance d'une variable aléatoire est aussi appelée son **moment d'ordre 1**. Pour obtenir plus d'informations sur la distribution d'une variable aléatoire, on observe ses moments d'ordre supérieur, généralement centrés. Pour toute variable aléatoire  $X$  admettant une espérance, le **moment centré d'ordre  $n$**  est défini par la relation 1.5.

$$m_n^c(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^n] \quad (1.5)$$

Le moment centré d'ordre 2 d'une variable aléatoire  $X$  est nommé **variance**. Cette variance étant homogène au carré de la dimension de  $X$ , on s'intéresse en général plutôt à l'**écart-type**, noté  $\sigma_X$ , qui est sa racine carrée. Ces objets permettent de quantifier la disparité des valeurs possibles de  $X$  autour de son espérance.

Les moments d'ordres supérieurs sont parfois utilisés pour caractériser plus finement la distribution d'une variable aléatoire. On mentionnera par exemple les **moments centrés réduits** d'ordre 3 et 4 : le **coefficient de dissymétrie** et le **kurtosis**. Ils permettent de quantifier respectivement l'asymétrie de la distribution vis-à-vis de son espérance, et son aplatissement.

La figure 1.2 illustre les deux premiers moments statistiques sur les mêmes exemples que précédemment. Fait remarquable, la distribution gaussienne ne comporte que deux paramètres (moyenne et écart-type), ses deux premiers moments suffisent donc à caractériser l'intégralité de l'information. De plus, ces deux premiers moments sont tout particulièrement pertinents : l'espérance positionne le sommet de la cloche (et l'axe de symétrie par la même occasion), tandis que l'écart-type contrôle l'ouverture de cette dernière.

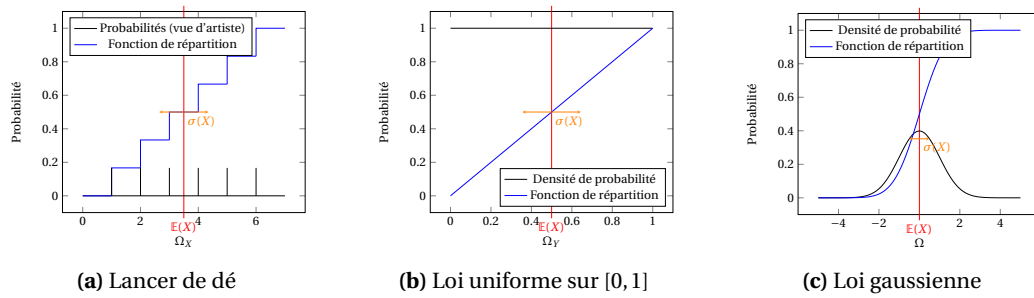
## Loi des grands nombres et théorème limite central

On s'intéresse maintenant à des tirages successifs d'une même variable aléatoire. Plus précisément, dans l'optique d'évaluer une espérance, quand peut-on se satisfaire d'un nombre fini de réalisations?

Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes, et  $Y_n$  la variable aléatoire définie par la relation 1.6, c'est-à-dire la moyenne des  $X_k$ .

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \quad (1.6)$$

Les **lois des grands nombres** établissent la convergence de la suite  $(Y_n)_{n \geq 1}$ . Plus spécifiquement, dans sa formulation **faible**, si les variables aléatoires  $X_k$  sont de mêmes espérance et variance,



**FIGURE 1.2** – Une illustration sur 3 exemples de variables aléatoires discrète (1.2a) et continues (1.2b, 1.2c), à travers la densité de probabilité, la fonction de répartition, l'espérance ( $\mathbb{E}$ ) et l'écart-type ( $\sigma$ ). Tandis que l'espérance représente la valeur que l'on obtiendra en moyenne sur un grand nombre de réalisations de la variable aléatoire, l'écart-type caractérise la moyenne quadratique des écarts par rapport à cette espérance, c'est-à-dire qu'un petit écart-type indique que les réalisations de la variable aléatoire sont en général proches de son espérance, tandis qu'un grand écart-type indique qu'elles en sont en général éloignées.

alors la suite de terme général  $Y_n$  converge en probabilité vers  $\mathbb{E}(X_k)$ . Dans sa formulation **forte**, si les  $X_k$  sont de même loi qu'une variable aléatoire  $X$ , si cette dernière est intégrable et a une espérance, alors la suite  $(Y_n)_{n \geq 1}$  converge presque sûrement vers  $\mathbb{E}[X]$ .

Cela établit que la moyenne des valeurs d'un grand nombre de réalisations indépendantes d'une même variable aléatoire converge vers son espérance. Ainsi, pour un très grand nombre de lancers de dé, la moyenne des valeurs obtenues converge vers 3.5 quand le nombre de lancers de dé tend vers l'infini.

Le **théorème central limite** permet d'aller plus loin, et établit que les fluctuations de cette valeur moyenne autour de l'espérance se font selon une loi normale (gaussienne). Plus précisément, pour des variables aléatoires  $X_k$  indépendantes et identiquement distribuées à  $X$ , la moyenne  $Y$  suit asymptotiquement la loi normale  $\mathcal{N}\left(\mathbb{E}[X], \frac{\sigma X^2}{n}\right)$ .

### 1.1.2 Simuler une variable aléatoire

Pour une variable aléatoire donnée, la méthode de Monte Carlo consiste à faire un grand nombre de réalisations de cette variable pour estimer son espérance. Dans l'optique de réaliser une simulation numérique, il est donc crucial d'être capable d'effectuer des réalisations virtuelles de cette variable aléatoire.

De très nombreuses méthodes existent pour simuler des variables aléatoires discrètes et continues [Madow1968]. Les outils informatiques classiques incluent d'office des générateurs aléatoires qui permettent de simuler une grande variété de distributions. En toute généralité, il est souvent nécessaire de savoir simuler une autre variable aléatoire à partir de ces générateurs aléatoires usuels.

#### Générateurs aléatoires

Un **générateur aléatoire (RNG)** est un processus capable de générer une suite de nombres n'ayant a priori aucun lien déterministe entre eux, mais distribués selon une loi statistique définie. En pratique, les seuls processus capables de produire de telles suites sont des mesures de grandeurs aléatoires par nature, comme par exemple la radioactivité. Des enregistrements de telles mesures peuvent ensuite être utilisés dans des simulations numériques. Cependant, ces séquences de nombres sont en général assez courtes et limitées en précision. Il est également possible de générer numériquement de telles séquences grâce à des algorithmes. Ces algorithmes étant



déterministes par essence, la création de l'"aléatoire" est un axe de recherche à part entière. Ce concept correspond au paradigme du **générateur pseudo-aléatoire**.

L'intégralité des simulations présentées dans ce manuscrit sont basées sur le générateur pseudo-aléatoire uniforme sur  $[0, 1[$  de Mersenne Twister [Matsumoto+1998]. Cependant, les bibliothèques utilisées permettent de changer à loisir ce générateur particulier par d'autres parmi les plus référencés dans la littérature de Monte Carlo [James1990]. Cela permet de vérifier que le choix du générateur n'a pas d'impact sur les résultats de simulations. De tels tests sont surtout utiles lorsque les exigences de précision demandent la réalisation d'échantillons de très grande taille, ce qui n'est le cas dans aucune des simulations ici discutées.

## Simuler une loi discrète finie

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle discrète prenant les valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$  que l'on suppose ordonnées de manière croissante, et  $F$  sa fonction de répartition. Soit  $U$  une variable aléatoire uniforme sur  $[0, 1[$  dont on possède un générateur aléatoire. Pour simuler une réalisation de  $X$ , on peut faire une réalisation  $u$  de  $U$  et chercher l'unique entier  $k$  tel qu'on ait l'inégalité 1.7 (avec  $F(x_0) = 0$ ), puis retenir  $x = x_k$ . Cette méthode est illustrée dans la figure 1.3a.

$$x = x_k \quad \text{si} \quad F(x_{k-1}) < u \leq F(x_k) \quad (1.7)$$

## Simuler une loi continue

*Méthode de la transformée inverse*

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle de fonction de répartition  $F$ . Soit  $U$  une variable aléatoire uniforme sur  $[0, 1[$  dont on possède un générateur aléatoire. Comme  $F$  est bijective, on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$  l'équation 1.8. Ainsi,  $F^{-1}(U)$  et  $X$  ont la même loi. Si on est capable d'inverser  $F$ , on peut donc simuler une réalisation de  $X$  en faisant une réalisation  $u$  de  $U$  et en retenant  $x = F^{-1}(u)$ . Cette méthode est illustrée dans la figure 1.3b.

$$\begin{aligned} F(x) &= P\{U \leq F(x)\} \\ &= P\{F^{-1}(U) \leq x\} \end{aligned} \quad (1.8)$$

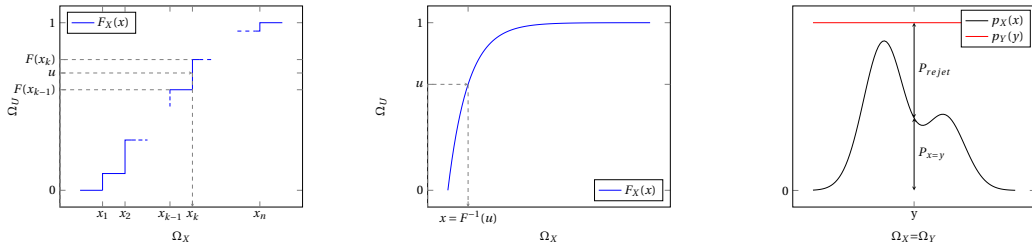
*Méthode de rejet*

Soient  $X$  et  $X'$  deux variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées de densité de probabilité  $p_X$ . Soit  $Y$  une variable aléatoire réelle de densité de probabilité  $p_Y$  dont on possède un générateur aléatoire. S'il existe un réel  $\alpha$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $p_X(x) \leq \alpha p_Y(x)$ , alors on a l'égalité 1.9. Pour simuler une réalisation de  $X$ , on peut donc effectuer une réalisation  $y$  de  $Y$ , et retenir cette réalisation avec la probabilité  $\frac{p_X(y)}{\alpha p_Y(y)}$ , sinon, on recommence avec une nouvelle réalisation de  $Y$ . Cette méthode est illustrée dans la figure 1.3c.

$$X = P(Y)Y + (1 - P(Y))X' \quad \text{avec} \quad P(y) = \frac{p_X(y)}{\alpha p_Y(y)} \quad (1.9)$$

### 1.1.3 La méthode de Monte Carlo en pratique

La **méthode de Monte Carlo** est basée sur les socles théoriques de la section 1.1.1, et très spécifiquement sur la loi des grands nombres et le théorème limite central. En effet, en plus de savoir que la moyenne d'un grand nombre de réalisations d'une variable aléatoire converge vers la valeur de son espérance, il est possible d'évaluer l'incertitude présente sur le résultat en fonction du nombre de tirages (ou nombre de réalisations de la variable aléatoire) effectués. En pratique, le cœur de la méthode consiste en :



(a)  $X$  une variable aléatoire discrète,  $u$  un tirage aléatoire dans  $[0, 1[$ .

(b)  $X$  une variable aléatoire continue,  $u$  un tirage aléatoire dans  $[0, 1[$ .

(c)  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires continues, et on sait échantillonner  $Y$ .

**FIGURE 1.3** – Illustration de trois méthodes de simulation pour des variables aléatoires discrètes (1.3a) et continues (méthode de la transformée inverse : 1.3b; et méthode de rejet : 1.3c).

- reformulation du problème étudié en termes statistiques
- réalisation d'un certain nombre  $N$  de simulations des variables aléatoires ainsi créées
- interprétation des résultats au regard du théorème limite central.

## La reformulation intégrale, lien entre sommes et variables aléatoires

Soient  $A$  et  $B$  deux grandeurs réelles définies par les égalités 1.10 et 1.11.

$$A = \sum_{k=1}^n a_k A_k \quad (1.10)$$

$$B = \int_{x_1}^{x_2} b(x) B(x) dx \quad (1.11)$$

Sous les conditions que  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, 0 \leq a_i \leq 1$  et  $\sum_{k=1}^n a_k = 1$ , alors  $A$  est, par définition, l'espérance d'une variable aléatoire réelle discrète définie sur les événements  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ , associés respectivement aux probabilités  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . De la même façon, sous les conditions que  $\forall x \in [x_1, x_2], 0 \leq b(x) \leq 1$  et  $\int_{x_1}^{x_2} b(x) dx = 1$ ,  $B$  est, par définition, l'espérance d'une variable aléatoire réelle continue de densité de probabilité  $b(x)$  sur  $[x_1, x_2]$ .

Quand ces conditions ne sont pas respectées, ou que l'on n'est pas satisfait par les probabilités qui apparaissent naturellement (voir section 1.1.3), on peut toujours forcer l'apparition de probabilités ou de densités de probabilité choisies par le biais d'une **reformulation intégrale**.

En effet, soient  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  une séquence telle que  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, 0 < p_i \leq 1$  et  $\sum_{k=1}^n p_k = 1$ , et  $p(x)$  une fonction telle que  $\forall x \in [x_1, x_2], 0 < p(x) \leq 1$  et  $\int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = 1$ <sup>1</sup>. Les quantités  $A$  et  $B$  peuvent être exprimées par les équations 1.12 et 1.13.

$$A = \sum_{k=1}^n p_k \tilde{A}_k \quad \text{avec } \tilde{A}_k = \frac{a_k A_k}{p_k} \quad (1.12)$$

$$B = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx \tilde{B}(x) \quad \text{avec } \tilde{B}(x) = \frac{b(x) B(x)}{p(x)} \quad (1.13)$$

1. En l'absence d'intuitif, ces distributions sont classiquement choisies uniformes :  $p_k = \frac{1}{n}$  &  $p(x) = \frac{1}{|x_2 - x_1|}$ ; ou sous forme de pondérations des termes existants :  $p_k = \frac{|a_k|}{\sum_{k=1}^n |a_k|}$  &  $p(x) = \frac{|b(x)|}{\int_{x_1}^{x_2} |b(x)| dx}$ .

---

De nouveau,  $A$  et  $B$  sont, par définition, les espérances de deux variables aléatoires.

Petit plus, en introduisant la fonction Heaviside (ou fonction test ici), définie telle que  $H(\text{test})$  vaut 0 quand le *test* est faux et 1 quand le *test* est vrai, la grandeur  $A$  peut être exprimée comme l'espérance d'une variable aléatoire continue (équation 1.14). Cette écriture fait le lien entre les méthodes présentées en 1.1.2 pour simuler respectivement une loi discrète, et une loi continue par la méthode de la transformée inverse.

$$A = \int_0^1 1 dx \sum_{k=1}^n H(p_{k-1} < x < p_k) \tilde{A}_k \quad \text{avec } p_0 = 0 \quad (1.14)$$

L'une ou l'autre de ces formulations sera utilisée de manière indifférenciée à travers le reste de ce manuscrit.

## Un premier algorithme de Monte Carlo

Soit  $X$  une variable aléatoire d'espérance  $\mathbb{E}[X]$ . L'algorithme 1.1 présente la structure classique de la méthode de Monte Carlo permettant d'estimer la valeur de  $\mathbb{E}[X]$  par  $N$  réalisations  $x_i$  de  $X$ . A cet estimateur noté  $\tilde{x}_N$  est associé un écart-type  $\sigma_N$ . Ce squelette général restant systématiquement le même, l'enjeu est de pouvoir simuler une réalisation  $x$  de  $X$ .

---

**Algorithme 1.1 :** Algorithme de Monte Carlo pour estimer l'espérance d'une variable aléatoire  $X$

---

**pour**  $i = 1 \rightarrow N$  **faire**

    | Simuler une réalisation  $x_i$  de  $X$

**fin**

$$\tilde{x}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i\right)^2}$$

---

Pour l'exemple de l'espérance d'un lancer de dé, en mettant en œuvre la méthode *Simuler une loi discrète finie* de la section 1.1.2, l'algorithme 1.2 permet de simuler une réalisation d'un lancer de dé.

---

**Algorithme 1.2 :** Simulation de la réalisation aléatoire  $x$  d'un lancer de dé

---

$u$  un nombre aléatoire tiré uniformément entre 0 et 1

**si**  $u < \frac{1}{6}$  **alors**

    |  $x = 1$

**sinon si**  $u < \frac{2}{6}$  **alors**

    |  $x = 2$

**sinon si**  $u < \frac{3}{6}$  **alors**

    |  $x = 3$

**sinon si**  $u < \frac{4}{6}$  **alors**

    |  $x = 4$

**sinon si**  $u < \frac{5}{6}$  **alors**

    |  $x = 5$

**sinon**

    |  $x = 6$

**fin**

---

## Intérêt de la linéarité de l'espérance

Soient  $X_1, X_2, \dots, X_n$  des variables aléatoires définies sur  $\mathbb{R}$  et admettant une espérance, et  $f$  une fonction linéaire. Pour calculer  $A = \mathbb{E}[f(X_1, X_2, \dots, X_n)]$ , donc par linéarité  $A = f(\mathbb{E}[X_1], \mathbb{E}[X_2], \dots, \mathbb{E}[X_n])$ ,

une méthode pourrait être d'évaluer  $\mathbb{E}[X_1], \mathbb{E}[X_2], \dots, \mathbb{E}[X_n]$  par la méthode de Monte Carlo, puis de faire la composée de ces valeurs et de leurs écart-types par  $f$ . Si chaque Monte Carlo est constitué de  $N$  réalisations, il faut donc effectuer  $nN$  réalisations aléatoires en tout.

Pendant, comme énoncé en section 1.1.1, l'espérance est linéaire. En posant  $X$  la variable aléatoire définie par  $X = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , on a  $\mathbb{E}[f(X_1, X_2, \dots, X_n)] = \mathbb{E}[X]$ . Dès lors, on envisage de faire ce calcul en  $N$  réalisations seulement, et ce quel que soit  $n$ , y compris quand il tend vers l'infini.

Pour illustrer cette propriété, soit un dé à 6 faces dont chacune des faces est d'une couleur différente, et 6 dés classiques, chacun de la couleur d'une des faces du dé multicolore. On cherche l'espérance du dé multicolore, sachant que lorsque l'on tombe sur une de ses faces, on retient l'espérance du dé coloré correspondant. La première approche reviendrait à faire un Monte Carlo de  $N$  réalisations pour chacun des 6 dés colorés, puis un dernier Monte Carlo de  $N$  réalisations sur le dé multicolore, en prenant les estimateurs obtenus pour chaque face. Dans la seconde approche, un seul Monte Carlo de  $N$  réalisations est nécessaire, et chacune de ces réalisations consiste en 1 tirage du dé multicolore, puis 1 tirage du dé correspondant.

Cette propriété sera tout particulièrement exploitée dans le cadre de la simulation des transferts thermiques couplés à travers ce manuscrit.

## Estimation de l'erreur statistique

L'algorithme 1.1 calcule les deux premiers moments statistiques d'un échantillon de  $N$  réalisations  $x$  d'une variable aléatoire  $X$ . Comme indiqué dans la section 1.1.1, ces grandeurs convergent respectivement vers  $\mathbb{E}[X]$  et  $\sigma(X)$ , l'espérance et l'écart-type de  $X$ . Plus spécifiquement, l'inégalité 1.15 donne la probabilité que  $m_N$  soit compris dans un intervalle autour de  $\mathbb{E}[X]$ .

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\mathbb{E}[X] - n \frac{\sigma}{\sqrt{N}} < m_N < \mathbb{E}[X] + n \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) = \int_{-n}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad n \in \mathbb{R}^+ \quad (1.15)$$

Cette inégalité permet d'obtenir à très faible coût (le calcul de la moyenne des poids au carré) un estimateur de l'erreur commise sur le résultat en substituant  $\sigma_N$  à  $\sigma(X)$  dans l'expression. L'intervalle de confiance ainsi obtenu est le plus souvent très fiable, et une rapide observation de la convergence de  $\sigma_N$  permet de s'en assurer. Le tableau 1.1 donne les indices de confiance associés à quelques valeurs de  $n$ .

$n$	$P\left(m_N \in \mathbb{E}[X] \pm n \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)$
1	68.27%
2	95.45%
3	99.73%
4	99.9937%
5	99.999942%

TABLE 1.1 – Intervalles de confiance pour quantifier l'erreur statistique.

## Stratégies de réduction de variance

Pour une variable aléatoire  $X$  dont on cherche à évaluer l'espérance  $\mathbb{E}[X]$ , et pour laquelle on souhaite réduire l'intervalle de confiance d'un facteur  $a$ , il est nécessaire de réaliser  $a^2$  fois plus de tirages aléatoires (équation 1.15). Il est également possible d'avoir recours à une des nombreuses techniques de réduction de variance, dont l'idée est de reformuler le problème pour calculer l'espérance d'une autre variable aléatoire  $Y$  de même espérance, mais de variance plus faible.

Une des méthodes les plus courantes est l'*échantillonnage par importance* : par reformulation intégrale (voir section 1.1.3), on impose une densité de probabilité arbitraire  $p_Y$  judicieusement choisie pour réduire la variance (équation 1.16).

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_X[X] &= \int_{\Omega_X} p_X(x) dx x \\ &= \int_{\Omega_X} p_Y(x) dx \frac{p_X(x)x}{p_Y(x)} \\ &= \mathbb{E}_Y \left[ \frac{p_X(Y)Y}{p_Y(Y)} \right]\end{aligned}\tag{1.16}$$

Caractéristique notable, si on connaît la solution et que l'on pose  $p_Y(x) = \frac{p_X(x)x}{\mathbb{E}_X[X]}$ , la variable aléatoire ainsi créée prend toujours la valeur  $\mathbb{E}[X]$  : sa variance est nulle. La question de l'optimisation d'un algorithme de Monte Carlo correspond alors à s'approcher de cette variance nulle, pour laquelle une seule réalisation aléatoire permet d'obtenir le résultat exact.

## 1.2 Monte Carlo et transfert radiatif, une vision du transport des photons

Dans sa vision corpusculaire, le transfert radiatif consiste à suivre la propagation des photons et leurs interactions avec la matière. L'évolution mésoscopique de la densité de photon est alors régie par une équation de Boltzmann [Cercignani1988], dont la lecture est intuitivement statistique. De nombreux ouvrages étudient en profondeur les échanges thermiques par rayonnement, et présentent comment la méthode de Monte Carlo permet d'en simuler les effets en prenant en compte de façon rigoureuse toutes les dimensions spécifiques de cette physique, notamment les aspects directionnels et fréquentiels ([Howell+2016], [Modest2013]). Cette capacité à simuler exactement l'équation de transfert radiatif fait de la méthode de Monte Carlo la *méthode de référence* en rayonnement thermique.

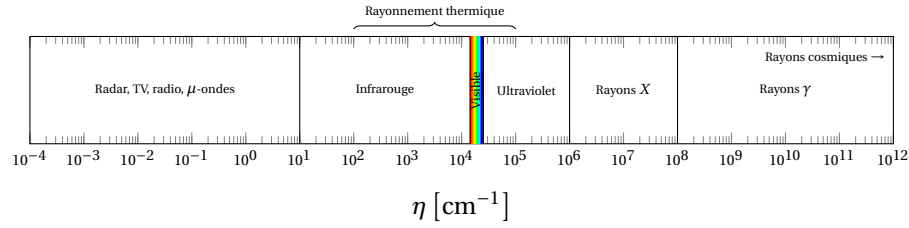
Cette section se restreint à une présentation des phénomènes radiatifs ne soulevant pas la question de l'intégration fréquentielle.

### 1.2.1 Le rayonnement thermique

Le rayonnement thermique est le rayonnement qui est émis par un milieu sous la seule excitation de sa température. Il peut être décrit d'un point de vue *ondulatoire* ou *corpusculaire*. Nulle de ces deux visions complémentaires ne permet de décrire à elle seule l'intégralité des phénomènes radiatifs connus. Par exemple, l'approche ondulatoire est généralement préférée pour l'étude des phénomènes de diffusion (scattering) et l'approche corpusculaire pour l'étude des propriétés radiatives des gaz. Dans les deux cas, l'onde, ou la particule, se propage à la *vitesse de la lumière*  $c = \frac{c_0}{n}$ , où  $c_0 = 2,998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$  est la vitesse de la lumière dans le vide, et  $n$  est l'indice de réfraction du milieu qu'elle traverse.

Dans le corpus de l'*électromagnétisme*, le transfert radiatif est décrit comme une variation des champs électromagnétiques [Maxwell1865]<sup>2</sup>. Le rayonnement est alors décrit comme une somme d'ondes monochromatiques définies pour une fréquence  $\nu$ , une longueur d'onde  $\lambda$ , ou un nombre d'onde  $\eta$  avec  $\eta = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c}$ .

2. "The agreement of the results seems to show that light and magnetism are affections of the same substance, and that light is an electromagnetic disturbance propagated through the field according to electromagnetic laws." J.C. Maxwell



**FIGURE 1.4** – Spectre du rayonnement électromagnétique en fonction du nombre d'onde  $\eta$ . Le rayonnement thermique couvre une grande partie de la bande infrarouge, l'intégralité du visible, et une portion de l'ultraviolet.

Dans le corpus de la *mécanique quantique*, à la notion d'onde monochromatique est substitué un corpuscule nommé *photon*, de masse nulle et d'énergie  $E = hc\eta$ , où  $h = 6,62607004 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$  est la constante de Planck.

La quantité d'énergie transportée, le comportement, et l'utilisation classique de ces ondes, ou photons, étant très différents selon la longueur d'onde considérée, le spectre électromagnétique a été découpé en diverses bandes spectrales. La figure 1.4 montre comment le rayonnement thermique s'étend sur les bandes spectrales de l'infrarouge, du visible, et de l'ultraviolet.

### 1.2.2 Luminance et corps noir

Dans une approche corpusculaire, le rayonnement est le transfert résultant du transport d'un nombre généralement monumental de photons. Ce champ de photons peut être décrit à l'échelle mésoscopique : au lieu de considérer chaque photon individuellement (description microscopique), on considère une distribution continue  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  de photons dans l'espace. Ainsi, à chaque point de l'espace  $\mathbf{x}$ , pour chaque vitesse  $\mathbf{v}$ , à chaque temps  $t$ , est associée une densité qui traduit la probabilité de présence d'un photon à ce point, à cette vitesse, à ce temps.

En construisant  $f_\eta(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  qui prend en compte le nombre d'onde de chaque photon, et en considérant que la norme de la vitesse des photons est localement constante avec  $\mathbf{v} = c\mathbf{u}$ , il est possible de construire la *luminance monochromatique* (relation 1.17). Cette grandeur caractéristique du transfert radiatif est une puissance par unité de surface perpendiculaire à  $\mathbf{u}$ , par unité d'angle solide, et par unité de nombre d'onde, en  $\text{W m}^{-2} \text{ sr}^{-1} \text{ cm}$ .

$$L_\eta(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = hc\eta c f_\eta(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (1.17)$$

Tout corps chaud émet du rayonnement thermique, et contribue donc à la luminance. Pour savoir en quelle proportion, et sur quelles longueurs d'ondes, la référence est le *corps noir*. Un corps noir est un milieu idéal absorbant l'intégralité du rayonnement électromagnétique qu'il reçoit. Par construction, à l'équilibre, le rayonnement provenant de ce corps est la *luminance d'équilibre* donnée par la *loi de Planck* (relation 1.18, avec  $k_B = 1,38064852 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$  la *constante de Boltzmann*), qui n'est fonction que de sa température  $T$  et du nombre d'onde  $\eta$ .

$$L_\eta^{eq}(T) = \frac{2hc^2\eta^3}{\exp\left(\frac{hc\eta}{k_B T}\right) - 1} \quad (1.18)$$

Par intégration de la luminance d'équilibre  $L_\eta^{eq}$  sur l'ensemble du spectre électromagnétique, la *loi de Stefan - Boltzmann* (équation 1.19, avec  $\sigma = 5,670374 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$  la *constante de Stefan-Boltzmann*) exprime la *luminance totale* émise par un corps noir en fonction de sa seule

température. Ce résultat met en avant la dépendance de la luminance d'un corps à sa température à la puissance 4.

$$\begin{aligned} L^{eq}(T) &= \int_0^\infty L_\eta^{eq}(T) d\eta \\ &= \frac{\sigma}{\pi} T^4 \end{aligned} \quad (1.19)$$

### 1.2.3 L'Equation du Transfert Radiatif (ETR)

La modélisation de l'évolution d'une distribution de corpuscules fait appel aux notions de la physique statistique. L'ETR, qui décrit l'évolution de la luminance, est un cas particulier des équations de la *théorie cinétique des gaz*, ou *équations de Boltzmann* ([Cercignani1988], [Piaud]). En effet, des hypothèses spécifiques au transfert radiatif viennent se rajouter aux hypothèses nécessaires à l'établissement d'une équation cinétique du transport : les photons se déplacent en ligne droite, à vitesse constante, et n'interagissent pas entre eux, et le milieu est considéré à l'*équilibre thermodynamique local*.

Sans chercher à l'établir ici, l'ETR dans un milieu participant est présentée dans l'équation 1.20, avec  $k_a$  le *coefficient d'absorption*,  $k_d$  le *coefficient de diffusion*, et  $\phi$  la *fonction de phase* du milieu. Le coefficient d'absorption est défini comme l'inverse de la distance moyenne que parcourent les photons avant d'être absorbés par le milieu. De la même façon, le coefficient de diffusion est défini comme l'inverse de la distance moyenne que parcourent les photons avant d'être diffusés par le milieu. Enfin, la fonction de phase  $\phi(\mathbf{u}|\mathbf{u}')$  est définie comme la probabilité qu'un photon de direction incidente  $\mathbf{u}$  diffuse vers une direction  $\mathbf{u}'$ .

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{1}{c} \frac{\partial L_\eta(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial t}}_{\text{évolution temporelle}} + \underbrace{\mathbf{u} \cdot \nabla L_\eta(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}_{\text{transport pur}} &= \underbrace{-k_{a,\eta}(\mathbf{x}, t) L_\eta(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}_{\text{absorption}} - \underbrace{k_{d,\eta}(\mathbf{x}, t) L_\eta(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}_{\text{diffusion sortante}} + \underbrace{k_{a,\eta}(\mathbf{x}, t) L_\eta^{eq}(\mathbf{x}, t)}_{\text{émission}} \\ &\quad + \underbrace{k_{d,\eta}(\mathbf{x}, t) \int_{4\pi} \phi_\eta(\mathbf{x}, \mathbf{u}|\mathbf{u}', t) L_\eta(\mathbf{x}, \mathbf{u}', t) d\mathbf{u}'}_{\text{diffusion entrante}} \end{aligned} \quad (1.20)$$

En général, et c'est le cas en thermique usuelle, le transfert radiatif est beaucoup plus rapide que tous les autres phénomènes physiques. L'ETR est alors prise au régime stationnaire, comme présenté dans l'équation 1.21.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \nabla L_\eta(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= -k_{a,\eta}(\mathbf{x}) L_\eta(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - k_{d,\eta}(\mathbf{x}) L_\eta(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + k_{a,\eta}(\mathbf{x}) L_\eta^{eq}(\mathbf{x}) \\ &\quad + k_{d,\eta}(\mathbf{x}) \int_{4\pi} \phi_\eta(\mathbf{x}, \mathbf{u}|\mathbf{u}') L_\eta(\mathbf{x}, \mathbf{u}') d\mathbf{u}' \end{aligned} \quad (1.21)$$

### 1.2.4 Une lecture probabiliste de l'ETR

La clé d'une lecture probabiliste de l'ETR et de sa résolution par MMC réside dans sa formulation intégrale. Il est possible d'établir cette dernière en s'intéressant à la *transmissivité*  $\mathcal{T}_\eta(\mathbf{x}, \mathbf{u}, l)$  du milieu, c'est-à-dire à la probabilité qu'un photon en  $\mathbf{x}$  de parcourir une distance  $l$  dans la direction  $\mathbf{u}$  sans être absorbé ni diffusé. L'*absence de mémoire*, c'est-à-dire la propriété selon laquelle la probabilité pour un photon de parcourir une distance  $l$  est indépendante de la distance déjà

parcourue, impose l'expression 1.22 pour la transmissivité. Pour un milieu homogène, l'épaisseur optique à l'intérieur de l'exponentielle devient  $k_\eta l$  avec  $k_\eta = k_{a,\eta} + k_{d,\eta}$ , cette expression est appelée la *loi de Beer-Lambert*.

$$\mathcal{T}_\eta(\mathbf{x}, \mathbf{u}, l) = \exp\left(-\underbrace{\int_0^l [k_{a,\eta}(\mathbf{x} + l'\mathbf{u}) + k_{d,\eta}(\mathbf{x} + l'\mathbf{u})] dl'}_{\text{épaisseur optique}}\right) \quad (1.22)$$

Dès lors, il est possible d'exprimer l'ETR sous la forme d'une intégrale récursive, comme présenté dans l'équation 1.23. La luminance en un point  $\mathbf{x}$  dans la direction  $\mathbf{u}$  est exprimée comme la somme des contributions en amont de  $\mathbf{x}$  selon la direction  $\mathbf{u}$  des luminances d'équilibre et des diffusions vers la direction  $\mathbf{u}$ , le tout atténué par la transmissivité du milieu.

$$L_\eta(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_0^\infty \underbrace{dl \mathcal{T}_\eta(\mathbf{x} - l\mathbf{u}, \mathbf{u}, l)}_{\mathbf{x}' = \mathbf{x} - l\mathbf{u}} \left( k_{a,\eta}(\mathbf{x}') L_\eta^{eq}(\mathbf{x}') + k_{d,\eta}(\mathbf{x}') \int_{4\pi} \phi_\eta(\mathbf{x}', \mathbf{u}|\mathbf{u}') L_\eta(\mathbf{x}', \mathbf{u}') d\mathbf{u}' \right) \quad (1.23)$$

Un petit travail de reformulation permet alors d'aboutir à l'équation 1.24. Il est à noter que la fonction de phase est normée sur  $4\pi$  (c'est-à-dire sur l'ensemble des directions possibles en 3D). La luminance apparaît alors comme l'espérance d'une variable aléatoire, elle-même fonction de  $L_\eta(\mathbf{x}', \mathbf{u}')$ , qui est aussi une espérance (voir section 1.1.1).

$$L_\eta(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_0^\infty \underbrace{k_\eta(\mathbf{x}') \mathcal{T}_\eta(\mathbf{x}', \mathbf{u}, l) dl}_{\text{densité de proba sur } [0, \infty[} \left( \underbrace{\frac{k_{a,\eta}(\mathbf{x}')}{k_\eta(\mathbf{x}')}}_{p_{a,\eta}(\mathbf{x}')} L_\eta^{eq}(\mathbf{x}') + \underbrace{\frac{k_{d,\eta}(\mathbf{x}')}{k_\eta(\mathbf{x}')}}_{p_{d,\eta}(\mathbf{x}')} \int_{4\pi} \phi_\eta(\mathbf{x}', \mathbf{u}|\mathbf{u}') d\mathbf{u}' L_\eta(\mathbf{x}', \mathbf{u}') \right) \quad (1.24)$$

L'algorithme 1.3 présente alors comment il serait possible de simuler cette variable aléatoire pour calculer  $L_\eta(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ . De la même façon qu'en section 1.1.3, cet emboîtement d'espérance ne pose pas de problème : les espérances d'espérances sont directement emboîtées dans une seule réalisation de Monte Carlo qui constitue un *chemin statistique*. Ce chemin statistique est en fait le chemin optique constitué de la suite des positions  $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'', \dots$  que suit cette réalisation avant de s'arrêter en rencontrant une luminance d'équilibre émise en un point  $\mathbf{x}_{fin}$  du milieu selon la probabilité  $p_{a,\eta}(\mathbf{x}_{fin})$  ou une source radiative connue.

---

**Algorithme 1.3 :** Réalisation  $w_{L_\eta(\mathbf{x}, \mathbf{u})}$  d'une variable aléatoire  $W_{L_\eta(\mathbf{x}, \mathbf{u})}$  d'espérance  $L_\eta(\mathbf{x}, \mathbf{u})$

---

$l'$  un nombre aléatoire tiré dans  $[0, \infty[$  selon la densité de probabilité  $k_\eta(\mathbf{x}') \mathcal{T}_\eta(\mathbf{x}', \mathbf{u}, l)$

$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - l'\mathbf{u}$

$u$  un nombre aléatoire tiré uniformément entre 0 et 1

**si**  $u < p_{a,\eta}(\mathbf{x}')$  **alors**

$w_{L_\eta(\mathbf{x}, \mathbf{u})} = L_\eta^{eq}(\mathbf{x}')$

**sinon**

$\mathbf{u}'$  une direction aléatoire sur la sphère 3D tirée selon la densité de probabilité  $\phi_\eta(\mathbf{x}', \mathbf{u}|\mathbf{u}')$

$w_{L_\eta(\mathbf{x}, \mathbf{u})} = L_\eta(\mathbf{x}', \mathbf{u}')$  (source connue ou récursivité)

**fin**

---

En pratique, l'algorithme 1.3 n'est praticable en l'état que pour des coefficients d'absorption et de diffusion constants. En effet, dans ce cas, il est possible d'inverser analytiquement la densité de probabilité de  $l'$ , et donc d'en simuler numériquement des réalisations aléatoires. Dans le cas contraire, des méthodes existent pour faire une approximation du résultat par discrétisation



---

du milieu ou par inversion numérique des épaisseurs optiques, ce qui fait perdre le statut de référence à la méthode. Cependant, des travaux récents ([Galtier], [Villefranque+2019]) permettent de transformer ce problème en un problème équivalent pour lequel on sait tirer les distances de collision en rajoutant des collisionneurs virtuels dans la scène. Cette approche est initialement apparue en neutronique sous le nom de *Woodcock estimator*, avant d'être plus génériquement dénommée *delta-tracking* ou *null-collision* ([Woodcock+1965],[Skullerud1968], [Lin+1978]).

## 1.3 Monte Carlo et diffusion : Feynman-Kac et moyennes sphériques

La méthode de Monte Carlo est peu utilisée pour les équations de diffusion, pour lesquelles des méthodes maillées sont généralement préférées. Cependant, la méthode reste favorable de façon situationnelle pour des problèmes en dimension élevée ou encore dans des applications où seules des valeurs locales de la solution sont recherchées, comme c'est souvent le cas en finance.

Cette section illustre les approches communément employées pour résoudre cette équation de la chaleur avec la méthode de Monte Carlo en exprimant la température locale comme l'espérance d'une variable aléatoire issue de la théorie du mouvement brownien [Lapeyre+1998].

### 1.3.1 La conduction thermique, un phénomène macroscopique

La diffusion thermique, ou conduction, est un processus de transfert de chaleur de proche en proche en l'absence de déplacement de matière. Cette dernière étant usuellement considérée à l'échelle macroscopique, le flux de chaleur qui y est associé est alors décrit par la *loi de Fourier* (relation 1.25). Cette équation de type *Fick* relie le vecteur densité de flux thermique  $\mathbf{j}$  au gradient de la température  $\nabla T$  par la conductivité thermique  $\lambda$  du milieu considéré. Ainsi, plus la conductivité d'un milieu est grande, et plus efficacement il tend à minimiser les écarts de température dans son volume.

$$\mathbf{j} = -\lambda \nabla T \quad (1.25)$$

Par un bilan d'énergie, la loi de Fourier permet d'établir l'*équation de la chaleur* 1.26 en présence d'un terme source  $S$ , où  $\rho$  est la masse volumique et  $C$  la capacité thermique massique du milieu.

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot (-\lambda \nabla T) + S \quad (1.26)$$

En l'absence de terme source, dans le cas d'un milieu à  $\rho$ ,  $C$ , et  $\lambda$  homogènes, cette équation devient une *équation de diffusion* 1.27 où le coefficient de diffusion  $\alpha$  est le rapport  $\frac{\lambda}{\rho C}$  que nous appelons diffusivité thermique.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T \quad (1.27)$$

Au régime stationnaire, cette équation diffusion devient une *équation de Laplace* 1.28.

$$\Delta T = 0 \quad (1.28)$$

### 1.3.2 Interprétation probabiliste des phénomènes diffusifs et mouvement brownien

Dès 1928, Courant, Friedrichs et Lewy [Courant+] proposent des éléments permettant de relier processus stochastique et équation aux dérivés partielles. Il faudra cependant attendre les travaux de Kac et Feynmann dans les années 50 [Kac1951] pour établir un lien plus large dans le cas des équations différentielles paraboliques, dont fait partie l'équation de la chaleur. Le processus clé dans le cadre des équations différentielles diffusives est appelé *processus de Wiener*. On parle aussi de *mouvement brownien* après le botaniste Robert Brown l'ayant découvert au 19e siècle [Pearle+2010].

En effet, en notant  $\mathcal{W}$  un processus de Wiener en 3 dimensions qui n'est fonction que du temps, la densité de la variable aléatoire  $X(t) = \mathbf{x} + \sqrt{2\alpha}\mathcal{W}(t)$  à n'importe quel temps  $t$  et position  $\mathbf{x}$  de l'espace est une gaussienne centrée en  $\mathbf{x}$  d'écart-type  $\sqrt{2\alpha t}$ . Cette dernière est solution de l'équation 1.26 en milieu infini.

Il peut alors être établi que  $T(\mathbf{x}, t) = \mathbb{E}[T_0(\mathbf{x} + \sqrt{2\alpha}\mathcal{W}(t))]$  est solution de l'équation 1.27 en notant  $T_0$  le champ de température à l'instant initial. Une lecture en espace de chemins est alors possible en lisant cette espérance comme la moyenne d'un grand nombre de réalisations de la variable aléatoire  $T_0(\mathbf{x} + \sqrt{2\alpha}\mathcal{W}(t))$  : la température en un point  $\mathbf{x}$  de l'espace et en un temps  $t$  est la moyenne des températures initiales prises au bout de chemins statistiques partant du point  $\mathbf{x}$  et s'étant propagés selon un processus de Wiener pendant un temps  $t$ . Nous illustrerons ces chemins dans le chapitre 3.

Le travail de Feynmann et Kac permet alors d'aller plus loin, en incorporant des termes sources  $S$  et réactionnels  $r$  le long de ces chemins statistiques. Ainsi, dans le cas d'une équation différentielle parabolique du type de celle présentée dans l'équation 1.29, la solution peut s'écrire comme l'équation 1.30. Dans cette dernière, deux idées sont à rajouter par rapport à la formulation précédente : à l'influence de la température initiale sur la température observée est ajoutée la contribution des sources tout le long du chemin parcouru, et chacune des contributions est atténuée ou amplifiée exponentiellement en fonction de la valeur du coefficient du terme réactif rencontré le long du chemin.

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \alpha \Delta T(\mathbf{x}, t) + r(\mathbf{x}, t)T(\mathbf{x}, t) + S(\mathbf{x}, t) \\ T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (1.29)$$

$$T(\mathbf{x}, t) = \mathbb{E} \left[ \underbrace{T_0(\mathbf{x} + \sqrt{2\alpha}\mathcal{W}(t))}_{\text{condition initiale}} \underbrace{\exp\left(\int_0^t r(\mathbf{x} + \sqrt{2\alpha}\mathcal{W}(s), t-s) ds\right)}_{\text{amplification ou atténuation le long du chemin}} + \underbrace{\int_0^t \underbrace{S(\mathbf{x} + \sqrt{2\alpha}\mathcal{W}(s), t-s)}_{\text{sources le long du chemin}} \underbrace{\exp\left(\int_0^s r(\mathbf{x} + \sqrt{2\alpha}\mathcal{W}(s'), t-s') ds'\right)}_{\text{amplification ou atténuation sur la portion de chemin}} ds}_{\text{sources le long du chemin}} \right] \quad (1.30)$$

### 1.3.3 L'exemple du Walk On Sphere pour la résolution de l'équation de la chaleur

En pratique, les marches statistiques associées au mouvement brownien ne sont jamais exhaustivement décrites. En effet, il est possible de résoudre analytiquement les densités de présence et/ou de premiers passages du processus de Wiener dans un domaine et à travers ses frontières dans des

configurations simples ou pour un domaine infini ([Sabelfeld+1997], [Redner2001]). Dès lors, une marche aléatoire selon un processus de Wiener dans un domaine  $\Omega$  est en général subdivisée en pas aléatoires échantillonnés dans des densités connues dans des sous-domaines usuels de  $\Omega$ .

Le travail de Muller en 1956 [Muller1956] repose sur cette approche : utiliser les densités de premier passage dans des sphères pour simuler un processus de Wiener en géométrie quelconque. Dans ses travaux, il propose une méthodologie pour résoudre l'équation de Laplace 1.28.

Pour résoudre cette équation différentielle bien particulière, Muller propose d'utiliser l'isotropie de la densité de premier passage du processus de Wiener  $\mathcal{W}_{\mathcal{S}(\mathbf{x}, \delta_1)}$  partant d'un point  $\mathbf{x}$  de l'espace et étant tué (arrêté) au contact de la sphère englobante  $\mathcal{S}(\mathbf{x}, \delta_1)$  centrée en  $\mathbf{x}$  et de rayon  $\delta_1$ . Ce résultat équivalent à la propriété d'harmonicité de l'opérateur laplacien amène à l'équation 1.31 où  $d\omega(\mathbf{u})$  est un angle solide élémentaire sur  $\mathcal{S}(\mathbf{x}, \delta_1)$ .

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= \mathbb{E} \left[ T \left( \mathbf{x} + \sqrt{2\alpha} \mathcal{W}_{\mathcal{S}(\mathbf{x}, \delta_1)} \right) \right] \\ &= \int_{4\pi} \frac{1}{4\pi} d\omega(\mathbf{u}) T(\mathbf{x} + \delta_1 \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (1.31)$$

Pour simplifier les écritures, notons  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{x} + \sqrt{2\alpha} \mathcal{W}_{\mathcal{S}(\mathbf{x}, \delta_1)}$  la variable aléatoire "position sur la sphère de rayon  $\delta_1$  centrée en  $\mathbf{x}$ " telle que nous venons de la définir. Ainsi,  $T(\mathbf{x})$  est l'espérance de la variable aléatoire  $T(\mathbf{X}_1)$  :

$$T(\mathbf{x}) = \mathbb{E} [T(\mathbf{X}_1)]$$

Les températures en chacune des réalisations possibles de  $\mathbf{X}_1$  peuvent être connues, auquel cas rien n'est à faire d'autre que d'échantillonner  $\mathbf{X}_1$  et prendre la moyenne des températures en ces points. Cependant, en toute généralité, ces dernières sont elles-mêmes à déterminer. Dans ce cas, il est possible d'écrire la même équation 1.31 qu'au point précédent mais en  $\mathbf{X}_1$ . Cette dernière s'écrit alors sur la sphère  $\mathcal{S}(\mathbf{X}_1, \delta_2)$  centrée en  $\mathbf{X}_1$  et de rayon  $\delta_2$ , ce qui amène à la définition de  $\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1 + \sqrt{2\alpha} \mathcal{W}_{\mathcal{S}(\mathbf{X}_1, \delta_2)}$ , puis à l'équation 1.32. Tandis que  $\mathbf{X}_1$  est distribuée uniformément sur la sphère de rayon  $\delta_1$  autour de  $\mathbf{x}$  pour permettre l'évaluation de  $T(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{X}_2$  est quant à elle distribuée uniformément sur la sphère de rayon  $\delta_2$  autour de  $\mathbf{X}_1$  pour nous permettre l'évaluation de  $T(\mathbf{X}_1)$ .

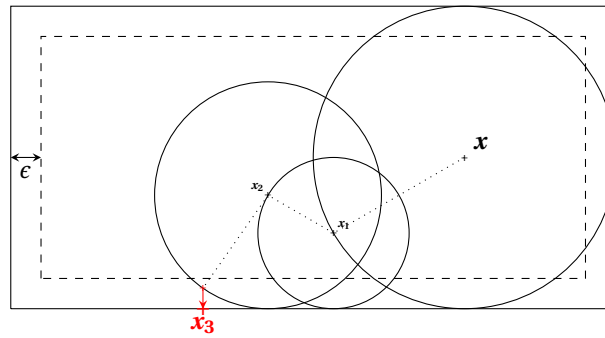
$$T(\mathbf{x}) = \mathbb{E} [\mathbb{E} [T(\mathbf{X}_2)]] \quad (1.32)$$

Cette formulation fait apparaître une espérance d'espérance, elle-même potentiellement fonction d'une espérance, etc. Encore une fois, cela ne pose pas de problème, et ces espérances peuvent être lues comme une seule espérance sur une variable aléatoire qui définit un chemin statistique reliant le point d'origine  $\mathbf{x}$  à une succession de points sur les sphères engendrées durant ce processus, jusqu'à ce que la température en un point de la réalisation soit connue.

La figure 1.5 illustre la construction d'un tel chemin dans une géométrie simple. Comme représenté, le choix des rayons des sphères est généralement choisi de façon à construire la plus grande sphère possible dans le domaine afin d'avoir de plus grandes chances de se rapprocher d'une paroi. Enfin, le support d'une sphère sur une surface de courbure différente étant de support nul, il est en théorie impossible de tomber sur une paroi du domaine. Pour contourner ce problème, une épaisseur  $\epsilon$  est ajoutée à la surface, épaisseur dans laquelle il est considéré que la distance est suffisamment petite pour sauter directement sur la paroi. En faisant ces deux choix, le nombre moyen de pas requis pour atteindre une surface est proportionnel à  $\ln(\epsilon)$  [Kurbanmuradov1979].

### 1.3.4 Les alternatives et extensions du Walk on Sphere

Tandis que Brown propose également en 1956 une méthode de marche aléatoire sur des directions discrètes dans [Beckenbach2013], l'approche de Muller sera davantage retenue et rapidement étendue à la conduction instationnaire ([HajiSheikh+1966], [HajiSheikh+1967], [Minkowycz+2006]),



**FIGURE 1.5** – Une illustration de la construction d’une réalisation aléatoire du Walk on Sphere partant du point  $x$ . En chaque point de la marche, la position suivante est échantillonnée de façon isotrope sur la plus grande sphère englobante contenue dans le milieu. Quand la position atteinte se situe à une distance inférieure à  $\epsilon$  de la paroi, la position est projetée sur cette dernière pour finir la marche. Pour le calcul de la température en  $x$ , le poids de cette réalisation de Monte Carlo par cette approche vaut  $T(x_3)$  qui est une condition aux limites connue.

mais aussi aux milieux hétérogènes ainsi qu’à des premières ébauches de couplage sous la forme de conditions limites de convection, ou encore de termes sources dans le milieu. Dans le cas de propriétés hétérogènes, les pas de la marche aléatoire sont alors choisis suffisamment petits de telle sorte que des hypothèses d’homogénéité puissent être localement posées.

Les difficultés principales rencontrées par ces marches aléatoires sont les suivantes : pour chaque pas de la marche, il est nécessaire de résoudre un problème d’optimisation pour connaître la distance à la plus proche frontière, et cette dernière est par ailleurs épaissie virtuellement afin de permettre à la marche d’atteindre la surface. Une décennie plus tard, une nouvelle approche émerge en réponse à ces difficultés. Elle provient de la théorie du potentiel et consiste à reformuler le problème initial de façon à ne plus avoir à échantillonner la trajectoire d’un processus dans le milieu, mais directement la frontière du milieu étudié. Cette reformulation en séries de Fredholm est initialement proposée par Hoffman [Hoffman+1976], ce qui permet alors d’obtenir un algorithme de Monte Carlo de transport semblable au transfert radiatif, par le biais de lancers de rayon comme illustré dans la figure 1.6. La méthode présente alors une grande attractivité par son économie en temps de calcul par rapport aux marches aléatoires dans le champ, mais aussi par sa possibilité à évaluer la solution du problème en plusieurs points en une seule simulation. Cependant, elle présente des contraintes importantes, notamment pour son couplage, mais aussi pour son incapacité à être étendue aux calculs instationnaires. Plus récemment, cette proposition a fait l’objet d’une revisite<sup>3</sup> dans laquelle la géométrie est initialement pré-traitée afin d’accélérer les lancers de rayon tout du long de la simulation [Zagajac1995] (voir figure 1.7). Cette même extension est par la suite étendue aux marches aléatoires de type Walk on Sphere [Suresh+1997] par l’utilisation de diagrammes de Voronoï.

L’approche la plus utilisée pour l’équation de diffusion restera celle de Feynman et Kac dans laquelle un processus associé à l’équation différentielle est échantillonné un grand nombre de fois dans le domaine. Des variantes par rapport aux algorithmes proposés jusque là seront tout de même proposées pour améliorer la précision ou les temps de calcul. Par exemple, [Grigoriu1997], [Grigoriu2000] propose de construire le mouvement brownien comme une suite de mouvements browniens par une discrétisation du temps plutôt que de l’espace afin d’obtenir une approximation des densités de passage en temps et en espace dans un système donné. Peu après, [Golyandina2004] construit une marche alternative dans laquelle les sphères ne sont plus centrées par rapport au point courant, ce qui permet de diminuer sensiblement le nombre total de pas

3. Cette revisite consistant à pré-traiter la donnée géométrique de façon à accélérer les lancers de rayon n’est pas sans rappeler les outils de la synthèse d’image plus récemment développés et mentionnés en section 2.1.2

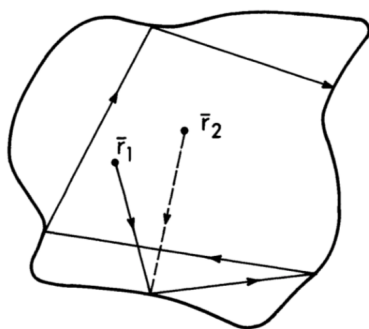


Fig. 4. Surface density approach to the Dirichlet problem.

**FIGURE 1.6** – Illustration des chemins aléatoires de conduction dans une approche en échantillonnage de surfaces par lancers de rayon tels que présentés dans [Hoffman+1976]. A partir de la réalisation aléatoire pour le point  $r_1$ , la valeur en la position  $r_2$  peut être évaluée sans beaucoup de calculs supplémentaires.

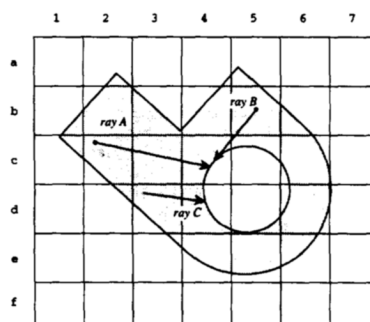


Figure 4: Accelerated ray-tracing via hashing of b-rep primitives in a uniform spatial subdivision.

**FIGURE 1.7** – Illustration de la grille accélératrice sur laquelle est effectué le pré-calcul permettant de réaliser plus rapidement les lancers de rayon dans [Zagajac1995]. L'utilisation d'une telle grille permet alors de réduire considérablement l'effet de la complexité géométrique sur le temps de calcul lié aux intersections.

avant d'atteindre la paroi. Ou encore les travaux [Deaconu+2013], [Deaconu+2017] dans lesquels une approche Walk on Sphere consiste à échantillonner aléatoirement le rayon de chaque sphère afin de simplifier l'évaluation du temps de sortie et [Deaconu+2006] pour une marche sur des pavés droits plutôt que des sphères.

## Monte Carlo, un outil de la complexité ?

Au travers de ce chapitre, nous venons de poser les fondements théoriques mais également de premiers éléments de la pratique associée à la méthode de Monte Carlo. Cette méthode basée sur la théorie des grands nombres et le théorème limite central est couramment utilisée dans les problèmes de dimension élevée pour sa capacité à intégrer des dimensions supplémentaires sans impacter son temps de calcul.

De fait, sa capacité à calculer des intégrales est mise à profit en transfert radiatif afin d'obtenir une solution exacte du rayonnement là où, face à la dimension infinie de la réflexion multiple et de la diffusion multiple, les méthodes déterministes doivent passer par des modèles approchés, notamment pour les intégrations directionnelles et fréquentielles. Cette vertu en fait une méthode de référence pour le transfert radiatif.

Des propositions permettant de garder cette même approche pour des phénomènes diffusifs comme la conduction de la chaleur ont émergé depuis les travaux de Feynman et Kac dans les années 1950. Cependant, ces approches restent marginales en thermique où la dimension du problème reste en général raisonnable. Même si la phénoménologie tridimensionnelle de la conduction est parfois complexifiée par l'ajout de sources énergétiques avec leur propre phénoménologie, ou de modèles avancés des paramètres de la diffusion, la dimension totale du problème reste faible par rapport aux questions de diffusion dans des espaces de dimension très élevée qui justifient l'emploi de Monte Carlo en finance par exemple. Par ailleurs, les algorithmes de Monte Carlo en diffusion ne sont pas "exacts" au sens donné à ce mot dans la littérature de Monte Carlo en transfert radiatif : il ne suffit plus d'augmenter le nombre de réalisations pour converger vers la solution à un niveau de précision maîtrisé. Il faut aussi réduire des paramètres numériques,

comme par exemple l'épaisseur numérique  $\epsilon$ , qui ont le même statut que les paramètres de discrétisation spatiale et temporelle des méthodes déterministes. A ce jour, la pratique de Monte Carlo en conduction thermique préfère donc souvent des approches déterministes bien maîtrisées, qui ont de plus l'avantage de conduire naturellement à la connaissance de l'ensemble du champ de température, là où les approches de type Walk on Sphere sont plutôt tournées vers la question d'évaluer des grandeurs ponctuelles.

C'est ici la question du couplage qui va motiver l'emploi de Monte Carlo, y compris en conduction. Dans des travaux tels que [Kraus1988] et [Kovtanyuk+2012], des couplages entre conduction et rayonnement ont été abordés avec Monte Carlo pour la partie rayonnement et des méthodes déterministes en champ pour la partie conduction. Cependant, dans cette combinaison avec d'autres méthodes, on perd une partie de la souplesse de Monte Carlo, notamment en ce qui concerne la gestion des modèles géométriques de grande taille (géométriquement raffinés) tels que ceux issus des CAO industrielles. Le chapitre suivant aborde simultanément ces deux questions : dans le cadre strict de la méthode de Monte Carlo, comment peut-on gérer des phénomènes couplés et le faire dans des systèmes géométriquement complexes ?



# Monte Carlo et transferts thermiques en géométrie complexe : l'apport de la synthèse d'image

Comment simuler des transferts thermiques couplés en géométrie complexe ? . . . . .	25
2.1 Gestion de géométries complexes et synthèse d'image . . . . .	26
2.1.1 Luminance et synthèse d'image . . . . .	27
2.1.2 Insensibilité à la complexité géométrique . . . . .	27
2.1.3 Exemple du transfert radiatif dans les nuages . . . . .	29
2.2 Transferts thermiques couplés . . . . .	29
2.2.1 Marcheurs statistiques pour l'évaluation directe de propriétés effectives . . . . .	31
2.2.2 Espaces de chemins et calcul local . . . . .	33
Problématique . . . . .	37
Une perspective énergétique . . . . .	37
Couplage et géométrie complexe . . . . .	38
Des marches advecto-diffusives . . . . .	39
Quel champ de vitesse ? . . . . .	40
Fondements théoriques des chemins en thermique couplée . . . . .	41
Une preuve de concept . . . . .	42
Retour sur la complexité . . . . .	42

## Comment simuler des transferts thermiques couplés en géométrie complexe ?

Dans le présent chapitre, on aborde la question de la complexité géométrique et des approches possibles pour simuler les transferts thermiques couplés dans ces dernières. Un accent tout particulier est mis sur les outils de la synthèse d'image qui proposent une approche dans laquelle l'acte de simulation, et en particulier le temps de calcul associé, atteint une forme d'indépendance à la complexité de la géométrie étudiée.

La section 2.1 présente l'approche "physiquement réaliste" de la synthèse d'image qui émerge depuis une vingtaine d'années dans cette communauté et son adéquation avec l'approche Monte Carlo telle que présentée au chapitre précédent. Nous commencerons par une rapide contextualisation qui mettra en perspective les objectifs de la synthèse d'image avec ceux du rayonnement



---

thermique pour montrer à quel point ces questions sont similaires. Dans un second temps, une présentation générique des outils développés par cette communauté pour répondre à un besoin de réduction des temps de calcul nous permettra d'introduire le concept de *structure accélératrice* dont la fonction est d'accélérer l'accès à une information répartie dans l'espace. Enfin, nous illustrerons ces concepts en présentant de récents résultats en rayonnement thermique atmosphérique qui font usage de ces mêmes outils. Cela démontrera que l'indépendance des temps de calcul au raffinement de données géométriques surfaciques, mais également volumiques, n'est pas seulement une potentialité théorique. Dans ce contexte radiatif, avec un sol terrestre raffiné et une description détaillée de l'atmosphère exigeant un maillage volumique  $1000 \times 1000 \times 1000$ , ces méthodes font d'ores et déjà la preuve de leur passage à l'échelle.

Dans la section 2.2, nous considérons la question de la complexité géométrique dans une perspective de couplage des transferts thermiques. En raison du comportement en temps de calcul des méthodes déterministes lorsque les géométries sont trop complexes, on est communément amené à changer de modèle physique : accepter que les transferts thermiques détaillés ne pourront pas être résolus en dessous d'une certaine échelle et remplacer leur description par des descriptions simplifiées, des approximations que l'on valide précisément sur des ensembles de configurations académiques puis que l'on met ensuite en œuvre dans un contexte applicatif afin d'atteindre les rapidités de calcul attendues. Dans le cadre du transfert thermique dans les milieux poreux, on parle alors d'approches par *milieux effectifs*. Ces approches ont fait leurs preuves très largement dans des domaines très divers, mais les questions de recherche associées sont loin d'être fermées et cette démarche ouvre encore des questions sur la détermination de ces propriétés effectives, mais aussi sur la validation des solutions résultantes. Nous présenterons donc les tentatives rapportées à ce jour de faire appel à Monte Carlo dans ces contextes, soit pour contourner entièrement la difficulté et aborder directement les géométries complexes sans approximation dans un contexte applicatif, soit pour évaluer les paramètres des modèles simplifiés, soit pour valider leur utilisation.

Ces tentatives proposent essentiellement deux approches : traduire la température initiale en un champ de quanta d'énergie que l'on fait évoluer au cours du temps (approche *forward*), ou partir d'une expression de type Feynman-Kac permettant d'exprimer la température en un point sonde, dans le temps et l'espace, en propageant des chemins statistiques à partir de ce point à rebours dans le temps pour évaluer les contributions respectives de chacune des sources rencontrées le long du chemin (approche *reverse*). Nous insisterons plus sur la seconde approche car c'est celle que nous retiendrons dans le reste du document. Nous essaierons donc d'illustrer en détail les types de chemins employés dans les algorithmes *reverse* sur quelques configurations académiques et de donner à sentir ce qu'est la pratique résultante dans des contextes industriels tels que le refroidissement de cartes électroniques ou de moteurs électriques.

Ces descriptions nous conduiront à l'énoncé de notre problématique.

## 2.1 Gestion de géométries complexes et synthèse d'image

Etre capable de simuler l'ETR n'intéresse pas que les physiciens du rayonnement et le monde de l'ingénierie à des fins de modélisation des transferts thermiques. En effet, depuis quelques dizaines d'années, le secteur montant de la synthèse d'image porte une grande importance à la création d'images physiquement réalistes. Que ce soit pour modifier des images ou des vidéos à travers des effets spéciaux, ou pour les créer de toutes pièces, les outils informatiques de la synthèse d'image se sont multipliés. Tandis que les artistes passent du temps à créer leurs œuvres dans un environnement virtuel, le *moteur de rendu* est ensuite chargé de transformer cette information en images. Nous décrivons brièvement ici le cadre scientifique correspondant car nos travaux sont fortement inspirés de cette pratique.

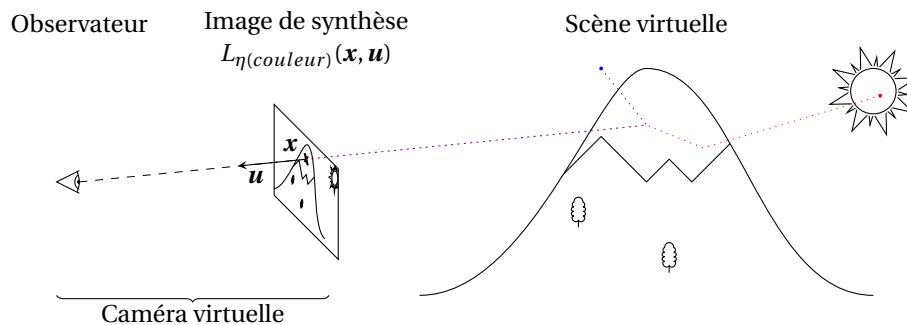
### 2.1.1 Luminance et synthèse d'image

La luminance, et plus spécifiquement la luminance dans les longueurs d'ondes du visible, est l'information que nos yeux sont chargés de détecter. L'œil humain est ainsi composé de trois types de cônes, et de bâtonnets. Tandis que ces derniers sont chargés de permettre une vision nocturne (faible luminosité) et sont associés à la détection des mouvements par le cortex visuel, les cônes permettent de percevoir les couleurs. Au sens physique du terme, une couleur correspondrait à une longueur d'onde. Cependant, comme il n'existe que trois types de bâtonnets, l'œil humain capte en fait seulement la superposition de trois ensembles de couleurs qui couvrent chacun différentes bandes spectrales du rayonnement visible.

La Commission Internationale de l'Eclairage (CIE) a mis en place en 1931 deux systèmes colorimétriques qui font office de référence. Le système CIE RGB, très répandu et simple d'utilisation, est basé sur les pics de réceptivité de chaque type de bâtonnets : le rouge R (700 nm), le vert G (546,1 nm), et le bleu B (435,8 nm). Le système CIE XYZ est quant à lui basé sur une représentation exhaustive de la réponse de l'œil humain aux stimuli, les couleurs virtuelles X, Y, et Z sont donc chacune une intégrale (donc une espérance) sur le spectre visible, ce qui permet d'être capable de représenter toutes les couleurs effectivement visibles.

Etre capable de synthétiser une image est ainsi la capacité à simuler la luminance pour trois couleurs données, sur un "cadre virtuel" placé devant l'observateur, dans la direction de son regard. En pratique, cette image est discrétisée en une grille de points réguliers, les *pixels*, et c'est en ces points que doivent être calculées trois valeurs de luminance.

Pour les moteurs graphiques de type *ray tracing*, le calcul de ces luminances est réalisé par la méthode de Monte Carlo, de manière homologue aux algorithmes présentés en section 1.2 pour le rayonnement thermique : de multiples chemins statistiques sont lancés depuis les pixels de l'image, dans le sens inverse au regard de l'observateur, afin de remonter les chemins lumineux jusqu'à leurs sources (figure 2.1). Cette approche n'est présente en toute rigueur dans cette communauté que suite aux travaux fondateurs de la thèse de Veach en 1997 [Veach1997] qui a exprimé formellement des quantités radiatives comme des intégrales sur des espaces de chemins.



**FIGURE 2.1** – Illustration de la relation entre la luminance et la synthèse d'image. L'image de synthèse est une matrice de pixels, chacun contenant la valeur de la luminance au point  $x$  du pixel, dans la direction  $u$  du regard de l'observateur, pour trois couleurs distinctes. En rouge, un chemin statistique remonte depuis le pixel un chemin optique jusqu'au soleil après deux réflexions sur la neige, tandis qu'en bleu, un autre chemin statistique atteint le ciel. La moyenne d'un grand nombre de réalisations aléatoires de tels chemins permet d'évaluer la valeur de la luminance en un pixel.

### 2.1.2 Insensibilité à la complexité géométrique

Ce n'est qu'avec l'apparition de capacités de calcul conséquentes, vers les années 2000, que l'utilisation de telles méthodes de ray tracing, basées sur la stricte résolution de l'ETR, a commencé

---

à se répandre dans la communauté de la synthèse d'image<sup>1</sup>. L'intérêt pour cette communauté venait alors d'un besoin de rendus physiquement réalistes, mais aussi d'un besoin de séparer la partie artistique du projet de la partie calcul de rendu.

Cette séparabilité est fondamentalement associée à la pensée en chemins. Elle est aussi appelée plus génériquement *orthogonalité donnée/traitement* et porte notamment l'idée d'une insensibilité à la taille de la donnée d'entrée : la scène virtuelle peut être aussi complexe en géométrie et en paramètres que souhaité, sans que cela n'influence le fonctionnement du calcul du rendu. L'idée est que la méthode numérique de résolution est fondée sur la construction de chemins optiques traversant une scène donnée et non pas sur la transformation de cette scène en une scène discrétisée qui serait ensuite le support du calcul. Dans les méthodes numériques discrétisant l'espace, la scène maillée porte à la fois la donnée et les grandeurs de calcul. Les deux sont structurées comme un tout, de façon indissociable. L'idée d'un chemin qui traverse la donnée permet au contraire de séparer autant que possible la donnée (la géométrie de la scène, les propriétés optiques associées à cette géométrie) et le calcul numérique (la construction des chemins). Bien sûr, les chemins ne sont pas construits indépendamment de la scène et il faudra donc bien que l'algorithme de construction des chemins interroge la donnée. Mais ce moment de l'interrogation de la donnée n'est pas un lien systématique à l'intégralité de la donnée et on est donc en mesure de poser la question de l'accélération de l'accès à la donnée nécessaire au moment de l'interrogation.

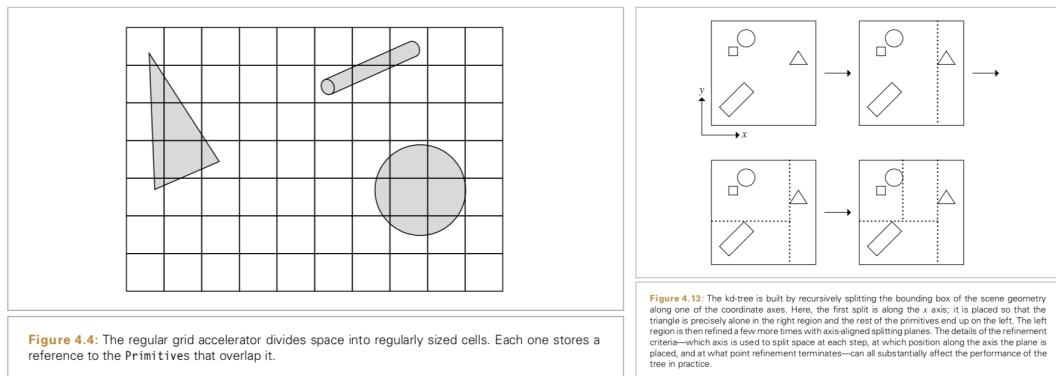
Cette accélération a donné lieu à une littérature très abondante dont le concept clé est la *structure accélératrice*. Dans sa vision la plus simple, pour un transfert radiatif entre surfaces opaques séparées par un milieu non participant, la structure accélératrice répond à la question suivante : les chemins étant composés de lignes droites jusqu'à l'intersection avec une surface opaque, comment accélérer cette recherche d'information (la prochaine intersection) au sein de la donnée géométrique (les primitives géométriques utilisées pour décrire la géométrie). Ces structures, ou *grilles accélératrices*, reposent sur l'idée d'un pré-traitement de la donnée géométrique dans lequel l'information est triée dans une grille alignée avec les axes, donc numériquement très facile d'accès. Cette grille est hiérarchique donc on ne croise que des éléments de grosse taille dans les zones contenant peu de primitives surfaciques et au contraire des éléments très raffinés dans les zones géométriquement complexes. Ainsi, le calcul de l'intersection entre un rayon et une géométrie ne nécessitera de tester qu'un nombre limité d'éléments de la scène (ceux contenus dans les éléments de grille traversés) en adaptant la vitesse de traversée à la complexité locale. La figure 2.2 présente des illustrations de [Pharr+2010] sur les grilles accélératrices dans des exemples simples.

Le fait que la méthode de Monte Carlo permette l'exploitation de telles grilles au point que le temps de calcul devienne souvent insensible au niveau de raffinement de la description géométrique est certainement la raison du succès industriel actuel de la méthode de Monte Carlo face aux méthodes déterministes dans le domaine de la synthèse d'image. Un parallèle peut être fait avec la figure 1.1 qui montre l'insensibilité de la méthode à partir d'une certaine dimension d'intégration. Sa déclinaison concrète a par ailleurs fait l'objet de démonstrations spectaculaires comme la capacité qu'ont les algorithmes de rendu actuels de prendre en entrée des données aussi énormes que la ville virtuelle de San Fransokyo développée par Disney [Unknown2015].

Parmi les outils développés par la communauté de l'informatique graphique, beaucoup sont diffusés sous licence open-source. C'est le cas des kernels *Embree* développés par Intel pour faire du calcul sur CPU. Dans le cadre du présent document, c'est l'outil *Star-engine* développé par la société *MésoStar* qui est utilisé pour l'ensemble des applications en géométrie complexe. Ces bibliothèques en C sont basées sur les kernels d'Embree pour les lancers de rayon, mais fournissent en plus un ensemble de fonctionnalités dont notamment la génération de nombres aléatoires, la parallélisation des calculs, et l'importation de fichiers de géométries comme le *.stl* ou le *.obj*.

---

1. Clarisse by Isotropix, Hyperion by Disney [Madow1968], Renderman by Pixar, ou encore Maxwell by Next Limit pour des images fixes.



**FIGURE 2.2** – Illustrations issues de [Pharr+2010] sur la notion de grilles accélératrices. A gauche, une grille régulière très rapide à construire et utiliser, mais qui présente des limites lorsque la scène est très hétérogène en géométrie, ce qui correspond à la problématique du *teapot in a stadium*. A droite, une représentation de la création d'un *kd-tree*, qui consiste à scinder la scène par dichotomie jusqu'à obtenir des volumes contenant tous une quantité suffisamment petite d'information géométrique. C'est cette dernière option qui est la plus utilisée avec l'*octree* qui consiste à subdiviser l'espace en 8 régions à chaque étape.

### 2.1.3 Exemple du transfert radiatif dans les nuages

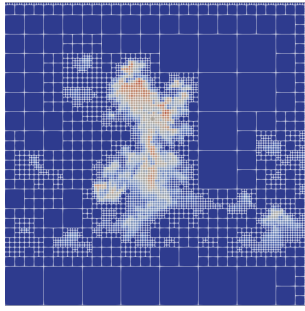
Dans le cadre des travaux de thèse de Najda Villefranque en collaboration avec Météo-France, un algorithme de Monte Carlo du type de celui présenté en section 1.2 a été mis en place pour réaliser des calculs radiatifs sur des scènes nuageuses issues de simulation LES [Villefranque+2019]. En utilisant des outils de la synthèse d'image de type *grille hiérarchique* sur les données volumiques et surfaciques (voir figure 2.3), des images de synthèse de scènes nuageuses sur des orographies de terrain ont pu être obtenues; un exemple est donné en figure 2.4. Comme escompté, les figures 2.5 et 2.6 mettent en exergue l'insensibilité du temps de calcul requis pour réaliser ces simulations au raffinement de la donnée d'entrée, que cette dernière soit surfacique dans le cas de la géométrie, ou volumique dans le cas du champ d'épaisseur optique issu de la simulation LES.

Ces figures illustrent ce que la communauté de recherche sur Monte Carlo entend par traitement efficace des géométries complexes. Le temps de calcul ne change pas lorsqu'on passe d'une surface opaque décrite avec  $10^4$  triangles à une surface contenant  $10^7$  triangles. De même, un volume dont les hétérogénéités sont décrites sur une grille régulière  $1000 \times 1000 \times 1000$  ne demande aucun temps de calcul supplémentaire par rapport à un volume de propriétés similaires décrit sur une grille  $50 \times 50 \times 50$ .

## 2.2 Transferts thermiques couplés

Les approches numériques visant à représenter le couplage des transferts thermiques utilisent généralement des approches de type différences finies [Milandri+], éléments finis [Le Hardy+2016] [Asllanaj+2004], volumes finis [Sun+2016] [Coquard+2009], ou encore Lattice-Boltzmann [Mishra+2007]. Quand la complexité géométrique augmente, c'est-à-dire quand le rapport entre la taille requise pour représenter les objets du système et la taille globale du système augmente, ces méthodes maillées nécessitent alors de résoudre un nombre de mailles potentiellement problématique.

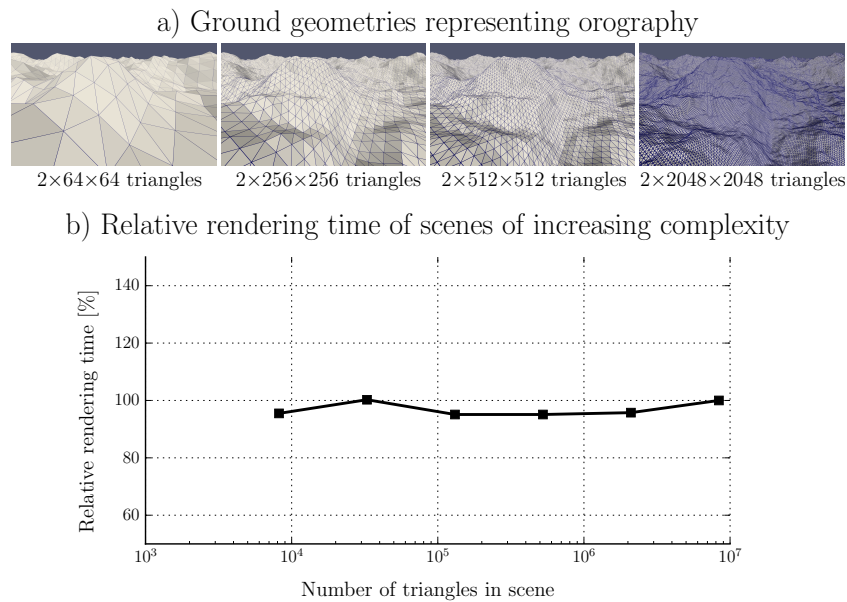
Dans ce cas, des approches de type milieu continu équivalent, ou *milieu effectif*, peuvent permettre de contourner le problème du nombre de mailles en considérant des structures plus grandes ayant des propriétés macroscopiques représentatives de la structure microscopique et de ses propriétés.



**FIGURE 2.3** – Coupe 2D d’une grille hiérarchique utilisée pour réaliser du lancer de rayon dans un champ de propriétés radiatives hétérogènes issues d’un calcul LES [Villefranque+2019] (couleurs proportionnelles à l’épaisseur optique du milieu).

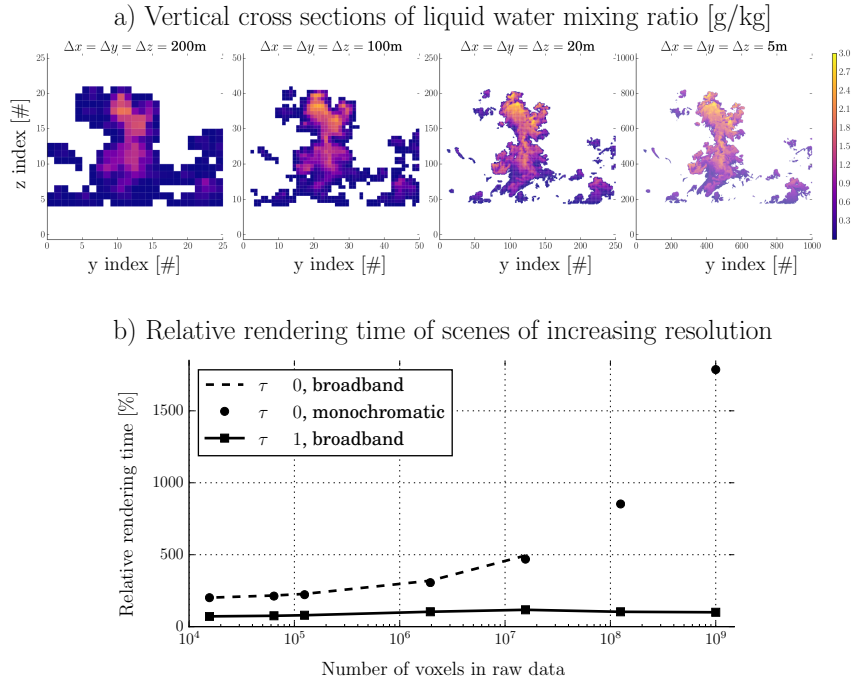


**FIGURE 2.4** – Image de synthèse d’un champ nuageux issu d’une simulation LES. Dans cette image, chaque pixel est le résultat de 3 calculs de Monte-Carlo (une par couleur XYZ), dont les résultats sont ensuite projetés dans le système RGB du fichier JPEG présenté [Villefranque+2019]



**FIGURE 2.5** – Dépendance du temps de calcul d’un rendu au raffinement de la donnée géométrique surfacique. a) Illustration du sol à différents raffinements en nombre de triangles. b) Evolution du temps de calcul du rendu relatif au temps de calcul obtenu pour le meilleur raffinement en fonction du raffinement de la donnée surfacique en nombre de triangles.

L’étude des milieux poreux présente ainsi une large littérature proposant des méthodes analytiques [Bauer1993], expérimentales [Leidenfrost+], [Mo+2017], mais aussi numériques [Jobic+2018], [Dietrich+2010], [Kanaun+2008], [Kumar+2014], [Ranut2016] pour évaluer les *propriétés effectives* d’un milieu poreux. Malgré tout, des limitations à ces approches peuvent apparaître quand le système étudié est trop hétérogène.



**FIGURE 2.6** – Dépendance du temps de calcul d'un rendu au raffinement de la donnée paramétrique volumique dans les nuages. a) Illustration du champ d'épaisseur optique à différents raffinements en nombre de voxels. b) Evolution du temps de calcul du rendu relatif au temps de calcul obtenu pour le meilleur raffinement en fonction du raffinement de la donnée volumique en nombre de voxels. Seule la courbe en trait plein  $\tau = 1$  utilise une structure accélératrice pour accéder à la donnée.

Dans ce cadre, l'utilisation de méthodes statistiques non maillées praticables en géométrie complexe peuvent donner des éléments de réponse en permettant de réaliser des simulations directes à des fins de validation ou d'évaluation des propriétés effectives.

Nous allons ici entrer dans la description des travaux de recherche qui se donnent précisément l'objectif d'utiliser la méthode de Monte Carlo pour simuler numériquement des transferts thermiques couplés dans des scènes géométriquement complexes et retrouver le comportement que nous venons de décrire dans le cas du rayonnement, c'est-à-dire des temps de calculs qui s'avèrent insensibles au niveau de raffinement de la donnée géométrique.

### 2.2.1 Marcheurs statistiques pour l'évaluation directe de propriétés effectives

Dès les années 1990, les travaux de [Tomadakis+1993] proposent d'évaluer des propriétés effectives de matériaux fibreux, sans et avec chevauchement des fibres, par une approche numérique statistique. Dans cette dernière, des marcheurs aléatoires représentant une quantité de molécules d'une espèce sont initialement répartis de manière uniforme entre les fibres du milieu. En laissant ces marcheurs se déplacer selon un mouvement brownien avec réflexion sur les fibres suffisamment longtemps, il leur est alors possible de remonter à une diffusivité effective grâce à la relation d'Einstein [Einstein1956]. Cette approche montre de bonnes corrélations avec des relevés expérimentaux, et est par la suite étendue à d'autres types milieux fibreux [Transvalidou+1996].

Plus récemment, des travaux [Vignoles2016] [Vignoles+2016] ont proposé d'appliquer cette même approche aux transferts thermiques couplés dans des géométries 3D issues de Microtomographie



aux rayons X. Le couplage porte alors sur la conduction dans des solides opaques et sur le rayonnement linéarisé dans le vide. Dans ces travaux, les marcheurs aléatoires représentent alors une quantité d'enthalpie et se déplacent par conduction dans des solides opaques et par rayonnement dans le vide. Le point crucial de cette approche est alors d'exprimer correctement la probabilité pour un marcheur arrivant à une interface de traverser cette dernière et de changer de mode de transfert. Tandis que la probabilité d'absorption pour un marcheur radiatif incident à la surface du solide (c'est-à-dire la probabilité de passer en conduction) est simplement l'absorptivité du solide, la probabilité de traversée pour un marcheur arrivant à la même interface depuis le milieu solide est établie théoriquement de façon à assurer la continuité du flux. La figure 2.7 représente les trajectoires de ces marcheurs à travers un système constitué de slabs solides séparés par le vide permettant de faire une validation de l'approche. Dans ces travaux, la représentation de la géométrie 3D est basée sur une amélioration de l'algorithme de l'informatique graphique du *marching cube* [Blasi+1997] [Vignoles+2011], qui consiste à indexer la donnée surfacique à partir des intersections entre la surface réelle et les angles d'une grille de cubes subdivisant l'espace.

[Sizyuk+2014] propose également une méthode à base de marcheurs "thermiques" aléatoires initialement répartis dans le milieu puis suivis au cours du temps de telle sorte à pouvoir évaluer la température en n'importe quel point du temps et de l'espace en conduction pure. La précision des résultats dépend alors du nombre initial de "particules thermiques" ayant été introduites. Les auteurs mettent en avant la capacité de la méthode à être utilisée en géométrie complexe et sa possibilité d'extension à des systèmes thermiques couplés.

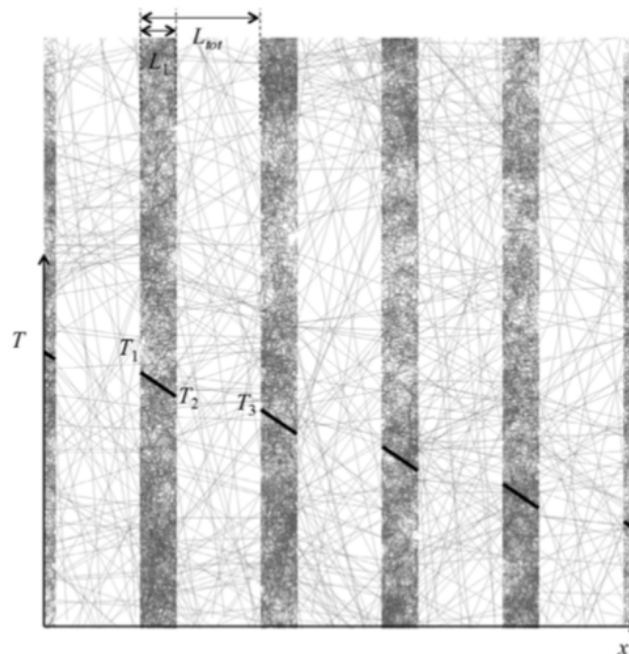


Fig. 3. Periodic medium with parallel plates. Solid and void spaces are identified by the distinct nature of the random walk steps. A temperature profile  $T(x)$  is superimposed to the figure. Note that  $T$  has not to be defined in the void space.

**FIGURE 2.7** – Illustration du couplage conducto-radiatif par des marcheurs aléatoires porteurs d'enthalpie tel que présenté dans [Vignoles2016] dans une configuration de slabs solides parallèles permettant de faire une validation de l'approche. Tandis que de longs traits rectilignes représentent les trajectoires radiatives dans le vide, les trajectoires dans le milieu solide sont échantillonnées selon un mouvement brownien.

## 2.2.2 Espaces de chemins et calcul local

Avec l'apparition des bibliothèques d'informatique graphique libres d'accès et de droits dont nous avons parlé au paragraphe 2.1.2, des travaux s'orientent aujourd'hui vers la construction de marches aléatoires à partir de lancers de rayons pour des transferts thermiques couplés afin de préserver à la fois la vision en espaces de chemins héritée de Feynman et Kac et l'insensibilité à la complexité géométrique démontrée dans le cas radiatif.

En thermique, les travaux de [Fournier+2016] proposent un cadre théorique dans lequel la pensée en espaces de chemins permet d'aborder des transferts thermiques conducto-convecto-radiatifs couplés où le transfert radiatif est linéarisé dans des milieux semi-transparents et la convection est effectuée dans des cellules fluides homogènes en température. Dans cette pensée, la marche aléatoire part du point d'observation, comme dans un algorithme Walk on Sphere, mais dans la lignée de [Vignoles2016] [Vignoles+2016], la marche ne se contente plus de se propager dans l'espace selon un seul processus physique, mais change de processus régulièrement le long de son chemin. La figure 2.8 illustre une réalisation aléatoire d'un tel chemin. Pour un point partant du solide, la réalisation du chemin commence par un processus de Wiener. Il traduit la propagation conductive dans le solide jusqu'à atteindre soit la condition initiale (on remonte dans le temps), soit un événement d'échange radiatif (initiation d'un chemin radiatif au sein du solide semi-transparent), soit un point sur une interface solide-fluide où le chemin peut soit repartir en conduction soit initier un chemin convectif au sein du fluide. En raison du modèle de fluide parfaitement mélangé, le chemin suit un *bruit blanc* parfaitement uniforme au sein de la cellule fluide lorsqu'il y pénètre, c'est-à-dire que la position de la marche à n'importe quel temps est distribuée de façon aléatoire et uniforme dans l'ensemble du domaine fluide, de façon indépendante de l'historique de ses positions précédentes. Par contre, le temps continue à être remonté en fonction de la capacité calorifique du fluide et le chemin peut là encore s'arrêter si il trouve la condition initiale, se transformer en un chemin radiatif au sein du fluide qui est ici semi-transparent, ou bien retrouver l'interface solide-fluide et décider comme précédemment si il retourne en convection dans la cellule ou s'il amorce une marche diffusive dans le solide. La construction du chemin couplé apparaît alors comme une succession de portions de chemins respectivement régies par l'un des trois phénomènes de transfert thermique : conduction, convection ou rayonnement.

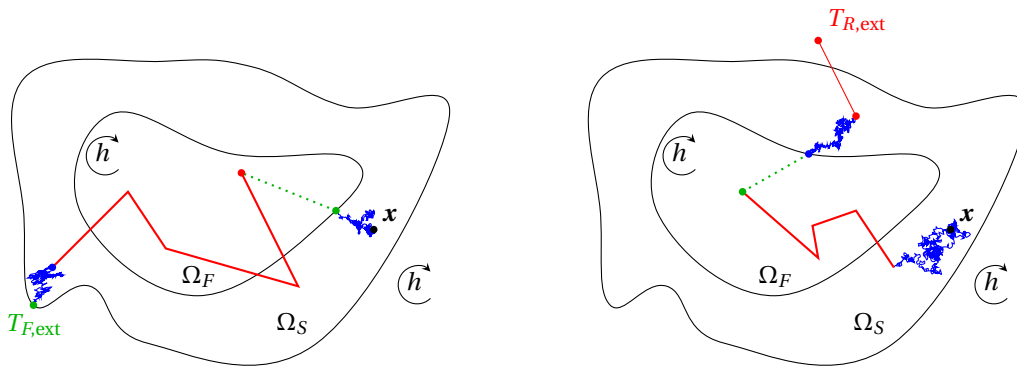
Ces travaux ont fait l'objet de nombreuses mises en pratique pour diverses applications allant de la thermique de l'habitat à l'étude de procédés solaires [Delatorre+2014] en passant par l'étude des milieux poreux [Caliot+2018], [Sans+2019], dont la plupart sont encore en cours de développement, comme dans le cas de la thermique planétaire (voir figure 2.10).

Dans une approche plus industrielle, la société MésoStar à l'origine de la librairie Star-Engine utilisée dans les travaux sus-présentés propose également un outil clé en main pour la simulation de ces problèmes conducto-convecto-radiatifs : l'outil Stardis. Ce dernier est couramment utilisé pour des problématiques industrielles comme le refroidissement de l'électronique de puissance ou des moteurs (voir figure 2.9). Il est par ailleurs implémenté depuis quelques années dans le code de calcul SYRTHES développé par la société EDF.

Enfin, dans une approche à vocation pédagogique, l'ensemble de cette communauté s'est réunie autour d'un projet web de démonstration actuellement accessible à l'adresse [http://www.laplace.univ-tlse.fr/edstar\\_demo/test/fr/](http://www.laplace.univ-tlse.fr/edstar_demo/test/fr/). Sur cette plateforme, un *démonstrateur thermique* permet de réaliser en ligne des calculs de thermique en ayant la possibilité de visualiser les chemins statistiques échantillonnés. Dans une logique similaire à celle de la figure 2.8, les figures 2.11 et 2.12 représentent ainsi des illustrations de "véritables" chemins statistiques issus de ce démonstrateur qui permettent d'évaluer une température dans un système thermique couplé en géométrie 2D. On se propose ici de décrire qualitativement ces deux exemples pour illustrer l'intuitif qui accompagne la lecture de ces chemins.

Dans la figure 2.11, un système à deux composants entourés par le vide est présenté. A gauche, un solide conductif instationnaire opaque fait office de "planète Terre" avec une condition initiale en température donnée et qui échange par rayonnement avec le vide spatial et un "Soleil". Le Soleil

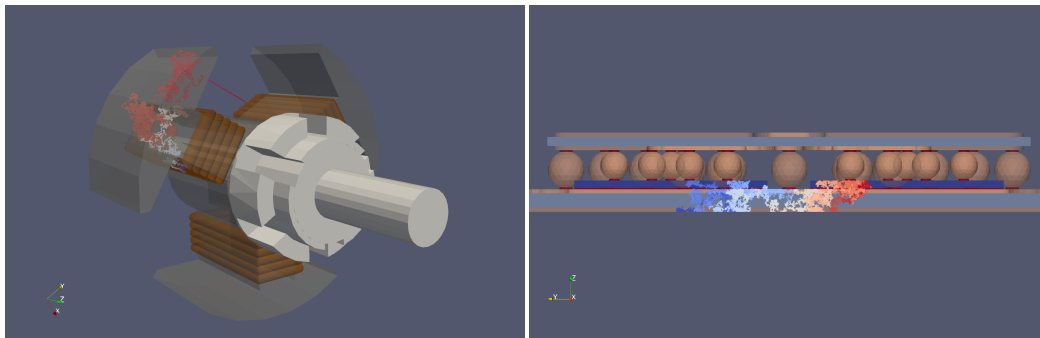




(a) Un chemin statistique qui finit à la température convective extérieure.

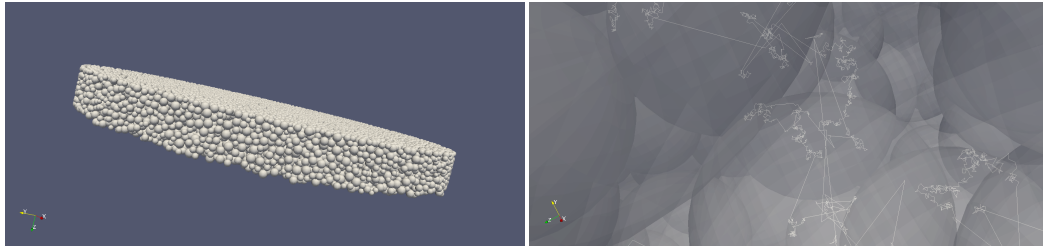
(b) Un chemin statistique qui finit à la température radiative extérieure.

**FIGURE 2.8** – Illustration de la construction aléatoire de deux chemins statistiques couplés pour évaluer la température au point  $\mathbf{x}$  du solide par la méthode de Monte Carlo. Le chemin statistique est alors composé d'une succession de portions de chemins respectivement conductifs (bleu), convectifs (vert), ou radiatifs (rouge). Dans l'exemple 2.8a, le chemin est successivement conductif dans le solide, convectif dans la cellule fluide, radiatif à travers la cellule et le solide qui sont tous deux semi-transparents, puis à nouveau conductif dans le solide pour s'arrêter lors d'un échange convectif avec le fluide extérieur dont la température est connue. Dans l'exemple 2.8b, le chemin se termine avec un sous-chemin radiatif qui sort du solide pour trouver le rayonnement incident à l'extérieur qui est connu.



**FIGURE 2.9** – Illustration de chemins statistiques conducto-convecto-radiatifs dans des géométries réelles de moteurs électriques et de puces électroniques. Sur ces deux images, un seul chemin de la sorte est représenté, et sa couleur correspond à l'accumulation d'un terme source d'échauffement par effet joule tout le long de la trajectoire. Tandis que la convection est une condition limite sur les parois extérieures, le chemin statistique peut se déplacer par conduction à l'intérieur des volumes solides ainsi que par rayonnement entre ces différents volumes. Le chemin s'arrête quand il rencontre une condition limite convective, ou quand il a suffisamment remonté le temps pour atteindre la condition initiale. Le poids de la réalisation est alors la température ainsi atteinte à laquelle est ajoutée la contribution du terme source par effet Joule tout le long de sa trajectoire. Crédits [|Méso|Star](#).

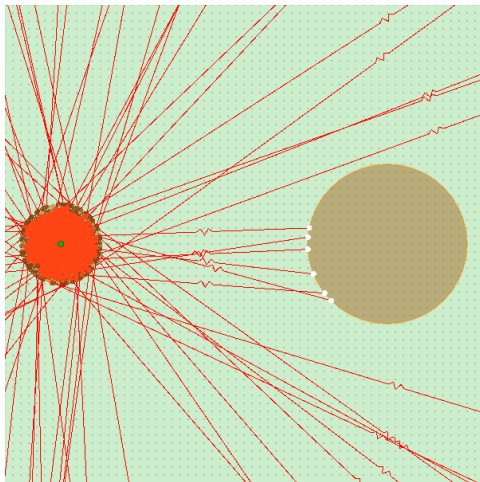
qui est le second élément de la scène est supposé à température constante. La Terre et le Soleil sont opaques et se comportent comme des corps noirs. Le rayonnement est linéarisé même si cela n'a pratiquement aucun sens physique étant donné que l'espace est à zéro Kelvin (l'objectif est seulement d'illustrer le couplage conducto-radiatif). Dans une première configuration 2.11a, le système est regardé à un temps court par rapport à l'inertie de la Terre; la majorité des chemins se



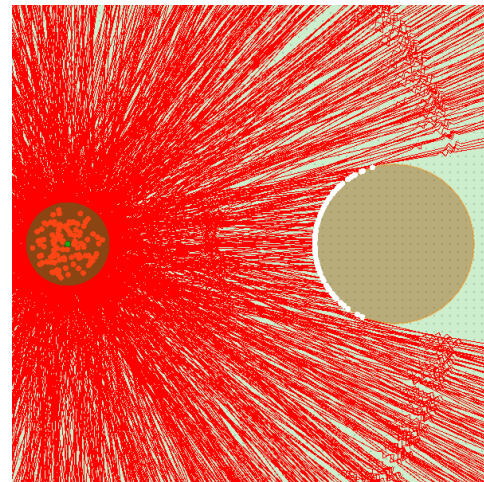
**FIGURE 2.10** – Illustration d'un problème de thermique planétaire pour le calcul de propriétés thermiques effectives de régolithe lunaire. A gauche, la géométrie utilisée constituée d'un empilement de sphères inter-pénétrantes. A droite, la représentation d'un chemin aléatoire conducto-radiatif se propageant à travers le milieu.

propagent donc à l'intérieur de la planète sans jamais s'en échapper et retiennent donc en fin de chemin la température initiale. Dans la seconde configuration, 2.11b, on évalue la température au centre de la Terre à un temps dix fois plus grand. Le nombre de chemins finissant à la condition initiale est alors grandement réduit, et la majorité de ces derniers prennent fin par émission radiative, soit en échange avec le vide spatial, soit à la température de surface du Soleil. Comme le point de départ est situé au cœur de la boule planétaire, la distribution des directions d'émissions radiatives est isotrope. Si au contraire ce point de départ est déplacé dans le solide pour se rapprocher de la face opposée (figure 2.11c) ou de la face tournée vers le Soleil (figure 2.11d), alors la distribution des positions de sortie des chemins conductifs dans la Terre est fortement modifiée, ce qui implique des échanges radiatifs beaucoup moins importants avec l'astre solaire, ou respectivement plus, et donc des températures calculées plus faibles ou plus fortes que pour un point au centre de la Terre.

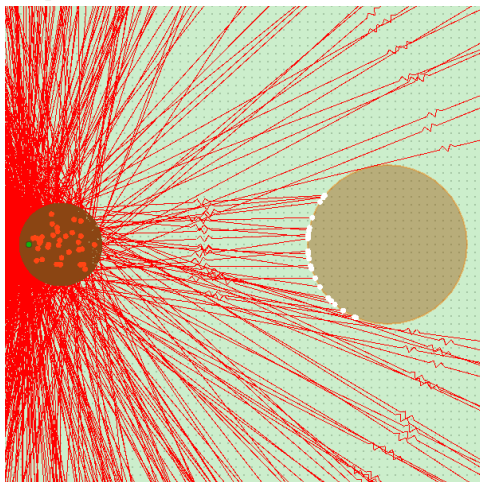
Un second exemple proposant un couplage thermique plus avancé est présenté en figure 2.12. Dans ce dernier, des échanges conductifs, convectifs dans une cellule fluide homogène, et radiatifs de surface à surface dans cette cellule sont illustrés. Le système considéré est constitué d'un solide carré présentant trois inclusions : les deux premières inclusions sont constituées de solides de conductivités thermiques différentes, et la troisième inclusion est une cellule fluide parfaitement mélangée (et donc homogène en température) transparente. Cette configuration est observée au régime stationnaire, le seul événement permettant de finir un chemin statistique est donc la condition limite sur la surface extérieure du solide carré. Cette condition limite est constituée d'un échange convectif avec un fluide extérieur supposé constant en température (fin des chemins représentés par des points bleus sur la surface extérieure du solide) et une température radiative également supposée constante et homogène à l'extérieur du système (rayons rouges partant de cette même surface). Cet exemple permet d'illustrer la dynamique des chemins en fonction des transferts thermiques et de leurs paramètres. Ainsi, tandis que les chemins conductifs se propagent rarement à travers l'inclusion solide ayant une conductivité thermique plus faible, ceux qui atteignent le milieu solide de conductivité plus élevés ont tendance à y passer plus de temps. La couleur marron uniforme de cette seconde inclusion est en fait la superposition d'une grande quantité de chemins conductifs. La vue d'ensemble de ces chemins permet d'observer que la cellule fluide et l'inclusion solide de forte conductivité thermique ont tendance à uniformiser les positions de sortie des chemins statistiques les ayant atteint, tandis que l'inclusion de conductivité thermique faible agit comme une zone que les chemins ont beaucoup de mal à traverser, et doivent donc en général contourner pour atteindre le milieu solide dans le coin en haut à gauche. Ces observations sur la dynamique des chemins peuvent être directement transposées en des conclusions d'ordre thermique : la cellule fluide et l'inclusion solide de forte conductivité thermique tendent à homogénéiser efficacement les écarts de températures tandis que l'inclusion solide de faible conductivité thermique tend à préserver les hétérogénéités de température en son sein.



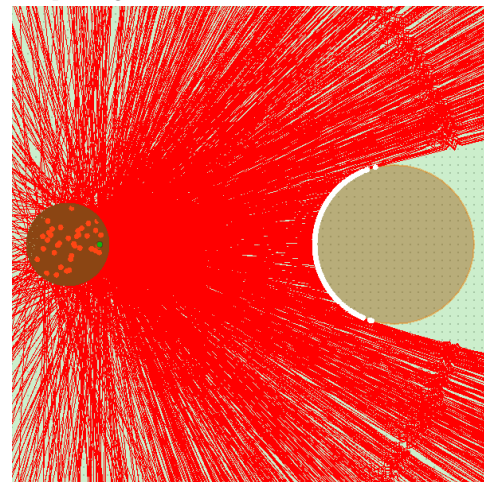
(a) Illustration "Terre Soleil" température à un temps court



(b) Illustration "Terre Soleil" température à un temps long



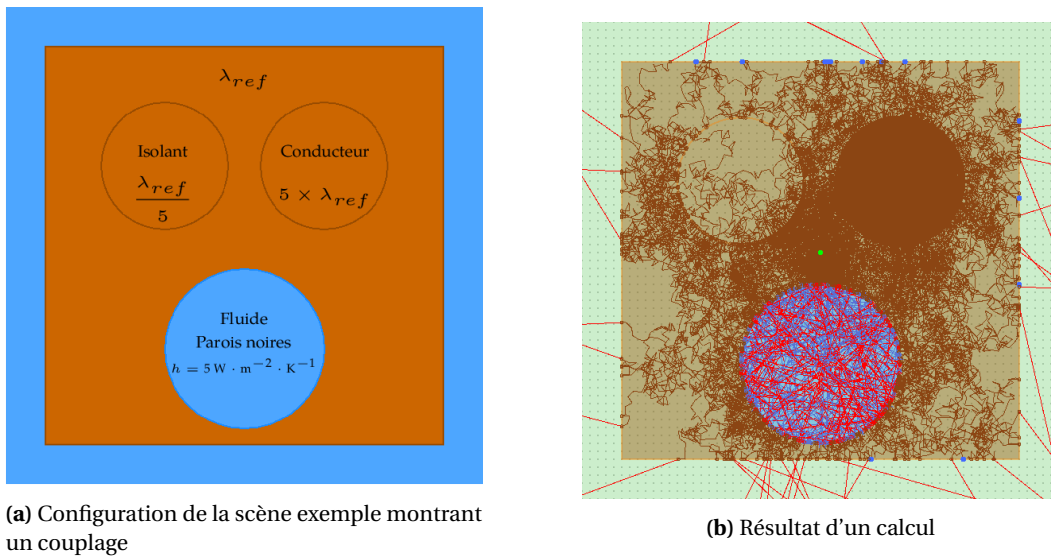
(c) Illustration "Terre Soleil" température de la face cachée



(d) Illustration "Terre Soleil" température de la face visible

**FIGURE 2.11** – Illustration du [démonstrateur thermique](#) sur une configuration factice du système Terre-Soleil (2000 chemins statistiques affichés). Sur chacune des images, à gauche, la "Terre", et à droite, le "Soleil". Tandis que les grandes lignes rouges représentent les chemins radiatifs qui partent de la "Terre" soit vers le "Soleil" soit vers le vide spatial, les points rouges dans l'intérieur de la planète représentent les chemins s'étant arrêtés à la condition initiale en température de cette dernière. Le point initial est matérialisé par un point vert, qui est positionné soit au centre de la Terre, soit proche de sa face opposée au "Soleil", soit proche de sa face côté "Soleil". Cette démonstration est directement accessible dans les [scénarios d'apprentissage](#) de la plateforme.

Le même site recense et illustre un ensemble des projets transversaux en thermique utilisant une approche Monte Carlo conjointe aux outils de la synthèse d'image. Il illustre également d'autres types d'applications en dehors de la thermique, comme la micro-fluidique [[Terrée](#)] ou l'électromagnétisme [[Charon](#)], faisant appel à l'extension de Monte Carlo au non-linéaire de [[Dauchet+2018](#)]. Nous discuterons de ces algorithmes de Monte Carlo non-linéaire dans notre chapitre 6 de perspectives.



**FIGURE 2.12** – Illustration du **démonstrateur thermique** dans une configuration montrant un couplage des phénomènes conductifs, convectifs, et radiatifs. Ce système est constitué d'un solide carré comportant trois inclusions : deux de ces inclusions sont également des solides mais de conductivités thermiques différentes, la troisième est un fluide parfaitement mélangé. Sur l'image de droite, les chemins marron représentent des chemins conductifs, les chemins bleus des chemins convectifs, et les chemins rouges des chemins radiatifs. Cette démonstration est directement accessible dans les **scénarios d'apprentissage** de la plateforme.

Pour conclure cette présentation, revenons aux illustrations de la figure 2.9. Ce que montrent ces mises en œuvre de la méthode dans un contexte applicatif, à partir de CAO industrielles, c'est avant tout la capacité de préserver la propriété d'insensibilité au niveau de raffinement de la donnée géométrique. Ces mêmes exemples ont été simulés avec des CAO plus grossières et les temps de calcul étaient identiques. Le temps de calcul est piloté par la construction des chemins dont nous voyons deux exemples dans cette figure. Ces chemins peuvent être très longs et demander un temps de calcul significatif. Mais leur construction demande exactement le même temps si les plaques, les jonctions, ou les aimants, ont les mêmes dimensions géométriques mais sont décrites avec plus ou moins de détails dans la CAO. Peut-être plus intéressant encore dans un contexte d'ingénierie, le changement de géométrie ne demande aucune nouvelle phase de maillage. L'algorithme part de la CAO elle-même, la construction des grilles accélératrices étant automatique et peu exigeante en temps de calcul.

Bien sûr, comme on le voit sur la figure 2.10, augmenter la complexité géométrique peut tout à fait augmenter les temps de calcul si les dimensions sont changées. Multiplier par deux le diamètre de la galette poreuse, donc multiplier par quatre le nombre de grains, ne change pas les temps de calcul. Par contre, multiplier par deux l'épaisseur rallonge les chemins (qui ne s'arrêtent ici que lorsqu'ils rencontrent les frontières) et le temps de calcul augmente très significativement.

## Problématique

### Une perspective énergétique

Dans le contexte à la fois théorique et applicatif que nous venons de décrire, nos recherches sont profondément ancrées dans une pratique des sciences pour l'ingénieur. Une image qui nous a beaucoup guidés, et a même présidé à la définition de nos priorités, est celle d'une centrale solaire à concentration : un champ d'héliostats chargés de suivre la course du soleil pour concentrer ses

---

rayons vers une tour dans laquelle on attend de très fortes densités de flux d'énergie. Au point de convergence, un récepteur est conçu pour capter cette énergie. Dans l'optique de produire de l'électricité, cette énergie doit alors être cédée à un fluide qui sera ensuite détendu dans une turbine. Afin d'optimiser l'efficacité de conversion dans la turbine, il est nécessaire que le fluide (de l'air par exemple) soit le plus chaud possible. Pour produire ce fluide chaud, ayant à disposition une forte densité de flux solaire, on va passer par un intermédiaire solide qui sera réchauffé à cœur par le soleil, puis cédera cette énergie au fluide grâce à une grande surface d'échange : un récepteur poreux.

Lors de la conception d'un tel récepteur poreux, comment simuler les transferts thermiques à toutes les échelles (l'échelle du pore, l'échelle de la tache solaire)? Comment simuler la réponse temporelle du système lorsqu'un nuage passe au-dessus du champ d'héliostats? Comment évaluer la production électrique totale sur de grandes périodes (voire sur l'ensemble de la durée de vie de l'installation) en incluant ces transitoires, donc en prévoyant l'effet intégré des petites échelles temporelles? Peut-on penser à la fois "thermique du poreux" et "énergétique de la centrale"?

Nous partons de l'idée que si la réponse à ce type de questions doit un jour être positive, alors il est probable que les approches statistiques y seront pour beaucoup. Nous allons nous concentrer sur la brique "transferts thermiques couplés dans un échangeur poreux" dans cette perspective. Nous espérons que les outils que nous mettrons en place pourront déjà être employés à court terme dans des contextes plus restreints, par exemple pour la validation de modèles effectifs, mais nos choix sont avant tout pilotés par l'idée d'un couplage, non pas seulement entre modes de transferts thermiques, mais avec le reste du système. Dans le même esprit que les travaux en cours de [Gattepaille] qui couple le rayonnement au sein d'un photo-bioréacteur industriel avec d'une part un champ d'héliostats et d'autre part l'électromagnétisme au sein des micro-organismes et la photosynthèse, nous concevons nos algorithmes de Monte Carlo pour la petite échelle du poreux de façon à préserver ce qui dans Monte Carlo permettra ensuite un couplage avec la modélisation du champ d'héliostats d'une part et la modélisation de la turbine d'autre part, pour des échelles de temps à la fois petites et grandes.

Nous avons vu que la méthode de Monte Carlo a de ce point de vue de très bonnes propriétés, avec notamment son comportement en temps de calcul qui ne dépend pas de la dimension de ce qui est intégré, voire même du nombre d'intégrations emboîtées en raison de la linéarité de l'espérance. Ici, typiquement, si nous sommes capables de connaître la température du fluide en sortie du poreux pour une tache solaire à une date donnée, alors dans l'esprit des travaux de [Farges+2015] nous pouvons conjecturer que ce calcul ou son intégrale sur 10 ans demanderont exactement le même temps de calcul. Inspirés d'autres travaux du même auteur [Farges], nous pouvons même imaginer que la grandeur d'intérêt véritable, c'est-à-dire l'énergie convertie dans la turbine plutôt que l'intégrale de la température de sortie, pourrait être évaluée pour le même type de coût de calcul malgré sa non-linéarité.

Les objectifs affichés dans les chapitres qui suivent vont être beaucoup plus modestes, mais nous aurons toujours en tête cet exemple applicatif et à travers lui nous espérons proposer des étapes utiles dans d'autres contextes se définissant par des objectifs d'optimisation énergétique impliquant des rapports d'échelles spatiales et temporelles similaires. Nous pensons par exemple à la modélisation thermique d'une ville dans son environnement climatique qui a beaucoup de points communs avec la modélisation d'une centrale thermique, à la fois en ce qui concerne la modélisation thermique (bâtiments et rues versus récepteur poreux) et la pensée énergétique à long terme en relation avec la modélisation du rayonnement atmosphérique.

## Couplage et géométrie complexe

Ce cadre de réflexion étant posé, les questions concrètement abordées ici vont être resserrées : sommes-nous capables de résoudre du rayonnement, de la conduction, et de la convection couplée (au-delà de l'hypothèse de cellules fluides brassées qui ne fait aucun sens dans les



échangeurs que nous venons de décrire)? Sommes-nous capables de le faire en préservant la gestion des géométries complexes que nous avons illustrée aux paragraphes 2.1.3 et 2.2.2?

En première lecture, ces questions se résument de la façon suivante : comment ajouter le phénomène d'advection dans les algorithmes du paragraphe 2.2.2 avec une base algorithmique de type lancer de rayon compatible avec les grilles accélératrices de la synthèse d'image? Mais ce résumé serait valable si nous disposions d'un véritable recul sur les algorithmes qu'il s'agit d'étendre, ce qui n'est pas le cas. Le travail va bien viser le passage d'un algorithme diffusif à un algorithme advecto-diffusif ainsi que l'extension de chacun des mécanismes de couplage nécessaires à la représentation d'un écoulement le long d'une paroi solide, avec par exemple du rayonnement en paroi lorsque celle-ci est opaque. Mais cette extension à la fluide se fera sur un terrain encore fragile conceptuellement.

Au-delà des démonstrations déjà convaincantes, de nombreuses questions restent en suspens. Quel est le critère qui fait qu'une géométrie est complexe dans notre contexte? Une quantité d'objets à décrire? Des facteurs d'échelle entre des éléments de petite taille que l'on a besoin de décrire dans tous leurs détails au sein d'une structure beaucoup plus grosse? Typiquement, un milieu poreux utilisé pour constituer une plaque d'échangeur de taille élevée devant celle des pores sera un exemple de complexité géométrique dans un contexte d'ingénierie, mais peut-on définir cette complexité indépendamment de la phénoménologie thermique? En rayonnement, l'impact de la complexité purement géométrique d'un nuage ne sera pas le même si le nuage est optiquement mince ou optiquement épais. Le libre parcours moyen de diffusion entre dans la question des rapports d'échelles. Devons-nous raisonner en des termes équivalents et introduire des dimensions caractéristiques liées aux chemins que nous avons illustrés au paragraphe 2.2.2? Au-delà de la performance calculatoire et du désir d'un rendu réaliste, les progrès de la communauté de synthèse d'image dans son utilisation de Monte Carlo sont surtout partis d'une volonté de séparer le travail de l'artiste et celui de l'informaticien responsable du calcul rendu. Retrouvons-nous cette séparation dans la souplesse avec laquelle les études thermiques de la figure 2.9 ont pu être menées directement à partir des CAO? Préserverons-nous cette souplesse en ajoutant un milieu fluide?

## Des marches advecto-diffusives

Nous avons déjà vu que la question de la conduction a pu être abordée sous l'angle statistique depuis les années 50 à partir des travaux de Kac puis Feynman. Ces travaux permettent de dire que l'on est capable d'exprimer la température comme une espérance sur un processus stochastique : le mouvement brownien. La convection traduit quant à elle l'effet couplé de la conduction et de l'advection qui traduit le transport d'une quantité dans un champ de vitesse. Il se trouve que cette question fait aussi partie des travaux de Feynman-Kac. Leur proposition sur le mouvement brownien pour la conduction englobe en effet également l'advecto-diffusion, en utilisant alors un mouvement brownien avec drift. Cependant, ce mouvement brownien avec ou sans drift ne s'inscrit pas directement dans une structure algorithmique de type lancer de rayon. L'un de nos premiers travaux sera donc de faire un choix parmi les différentes possibilités de représenter de tels chemins afin de continuer à bénéficier des travaux sur l'accélération du lancer de rayon en géométrie complexe.

Les simulations couplées que nous avons brièvement présentées au paragraphe 2.2.2 n'ont été possibles qu'en affrontant la même question pour la simple diffusion (conduction dans les parties solides). Les algorithmes de type Walk on Sphere interrogent la donnée géométrique d'une façon qui est très différente du lancer de rayon : il faut trouver la plus grande sphère inscrite dans le solide autour du point considéré à étape de la marche. Cette exigence est très différente de celle de trouver le prochain point d'intersection avec la frontière du solide dans une direction donnée. Les techniques d'accélération de la synthèse d'image rendent le lancer de rayon presque insensible à la complexité géométrique, mais ce n'est pas du tout le cas pour la recherche de la plus grande sphère inscrite. Il a donc fallu abandonner les algorithmes Walk on Sphere et penser la

---

construction des chemins diffusifs à l'aide de briques algorithmiques ne nécessitant rien d'autre que la détermination de la première intersection dans une direction donnée. Pour cela, le point de départ a été une discrétisation spatiale de l'équation de diffusion. Au lieu que le rayon  $\delta$  de la sphère soit celui qui assure l'existence d'un point tangent à la frontière du solide,  $\delta$  est alors un paramètre numérique suffisamment petit pour servir de base à une discrétisation en différences finies des dérivées secondes de l'opérateur de diffusion. Les chemins ne sont alors plus construits à partir de la vraie équation de diffusion, mais à partir d'une approximation de celle-ci.

Ce type de solutions est très communément employé pour simuler le mouvement brownien en espace confiné et nous détaillerons la solution particulière qui a été retenue pour les simulations du paragraphe 2.2.2. Ce sera notre inspiration principale lorsque nous chercherons les moyens les plus efficaces de construire une marche advecto-diffusive compatible avec les grilles accélératrices. Nous restreindrons par ailleurs encore le cadre de réflexion en nous en tenant à la question de l'advection-diffusion en régime stationnaire.

## Quel champ de vitesse ?

Se pose ensuite la question de déterminer le champ de vitesse et d'y accéder efficacement le long de la marche. En ce qui concerne la détermination de la vitesse, la question est de nature très différente selon que

1. l'écoulement du fluide est indépendant de la température (faible effet de la dilatation thermique sur l'écoulement, faible dépendance à la température des propriétés du fluide, notamment de la viscosité);
2. l'écoulement du fluide est dépendant de la température, comme par exemple dans une situation de convection naturelle.

Dans le premier cas, le champ de température peut être considéré comme une donnée d'entrée du problème de thermique. On peut donc s'intéresser à la meilleure façon de produire le champ de vitesse indépendamment et en amont des algorithmes de Monte Carlo que nous cherchons à développer. Il ne reste ensuite qu'à se poser la question de l'accès informatique à ce champ de vitesse, supposé disponible, lorsque l'algorithme de Monte Carlo a besoin de connaître cette dernière en un point donné de l'écoulement. Cette question semble triviale et on voit bien comment une grille accélératrice du type de celles que nous utilisons pour la géométrie peut être conçue pour interroger rapidement une telle donnée en champ. Cependant, nous avons pourtant été surpris de ne pas trouver de bibliothèques adaptées à ce besoin d'accéder rapidement à la valeur locale de la vitesse, par exemple pour un champ issu d'une simulation numérique de mécanique des fluides appuyée sur un maillage non structuré tétraédrique, comme c'est le plus souvent le cas dans les solveurs usuels. Nous n'aborderons ici cette difficulté qu'à l'aide de solutions ad-hoc, temporaires, sachant que l'équipe développant la bibliothèque [Star-Engine](#) revisite aujourd'hui en profondeur la question des structures accélératrices pour l'accès aux données volumiques et que nous pouvons faire l'hypothèse que de telles solutions seront rapidement disponibles et facilement utilisables dans notre environnement de développement.

Cependant, même en nous en tenant au premier cas (écoulement découplé de la thermique) et en acceptant l'idée que l'accès au champ de vitesse se fait efficacement lorsqu'il est connu, la question de la production du champ de vitesse au sein de structures solides aussi complexes que celles que nous envisageons reste entière. Si nous imaginons que la description géométrique de la plaque poreuse que nous souhaitons étudier est issue d'un scanner à haute résolution, ou d'une synthèse numérique nous donnant tous les détails des milliers, dizaines de milliers, centaines de milliers de pores présents en son sein, alors nous savons que les approches Monte Carlo auxquelles nous pensons sont conçues pour gérer informatiquement la complexité de cette donnée géométrique, à la fois en termes de rapports d'échelle et d'occupation mémoire. Cependant, qu'en est-il des solveurs de mécanique des fluides actuels? Il ne fait aucun doute que ce champ de recherche est très actif, notamment en relation avec le développement des outils de CAO face aux complexités géométriques toujours croissantes. Les calculs d'écoulement réalisés

actuellement dans des quartiers de villes de grande taille, où les bâtiments sont décrits dans tous leurs détails (voir par exemple les travaux de [Tornay+2017] ou [Wyszogrodzki+2012]), montrent aussi à quel point la communauté de la simulation numérique en mécanique des fluides progresse dans la même direction que celle que nous explorons ici pour la thermique. Nous faisons donc l'hypothèse que de tels champs de vitesse, au niveau de complexité que nous envisageons, seront bientôt disponibles.

La question est toute autre lorsque l'on est dans le second cas : un écoulement qui ne peut être prédit sans un couplage avec la thermique (ce qui est d'ailleurs assez largement le cas dans l'exemple de la ville qui vient d'être mentionné). Dans ce cas, nous ne pouvons plus supposer que le champ de vitesse est connu au moment où nous nous posons la question de simuler les transferts thermiques. Le long de notre marche advecto-diffusive, lorsque nous aurons besoin de connaître la température en un point, il nous faudra donc la construire. Si nous savions faire la construction d'un algorithme de Monte Carlo capable de prédire la vitesse de l'écoulement en un point connaissant le champ de température, nous aurions défini cette vitesse comme une espérance, et nous pourrions alors utiliser la loi des espérances pour penser une marche couplée qui passerait de la thermique à la mécanique des fluides de la même façon que les marches couplées du paragraphe 2.2.2 passent de la conduction au rayonnement, puis à la convection, etc. Cependant, cette piste de recherche bute sur deux difficultés majeures. Tout d'abord il n'y a que peu d'exemples convaincants de résolution numérique de la mécanique des fluides par Monte Carlo, la plupart ne permettant pas une évaluation locale de la vitesse à partir de chemins initiés au point, mais évaluant plutôt le champ de vitesse dans son entier à l'aide d'un grand ensemble de marcheurs distribués dans l'ensemble du système. On quitte alors la pensée en chemins qui permet le couplage tel que nous l'envisageons. Ensuite, le couplage thermique/mécanique des fluides est non linéaire en température. Bien sûr, il y a de réelles perspectives face à ces deux difficultés (les références [Dauchet+], [Tregan2020], [Terrée] sont particulièrement pertinentes sur ce point particulier) et comme nous l'avons déjà annoncé précédemment, il s'agit bien de l'une des motivations sur le long terme pour les recherches ici présentées. Cependant, cette question du couplage "fort" entre thermique et mécanique des fluides restera pour nous de l'ordre de la perspective et toutes nos démonstrations numériques seront faites sur des configurations où le découplage est pertinent.

## Fondements théoriques des chemins en thermique couplée

On accepte dès lors que le champ de vitesse est connu et que la question du couplage est restreinte au couplage conduction/convection/rayonnement dans l'équation de la chaleur. A lui seul, ce couplage reste une question difficile. Nous allons voir que la pratique décrite dans la section 2.2.2 sera assez facile à étendre de façon à intégrer une marche advecto-diffusive dans les parties fluides, couplée à la conduction dans les parties solides et au rayonnement dans toutes les parties où la propagation radiative est possible. Il sera également assez facile dans notre cas de montrer par la pratique que nos algorithmes convergent bien vers les mêmes solutions que celles obtenues avec des solveurs déterministes plus usuels. Mais si nous en restions là, l'approche que nous défendons manquerait de fondement théorique. En parallèle de l'extension vers l'advection-diffusion, la mise en œuvre, la validation et les tests de comportement sur différents échangeurs, une grosse partie de notre recherche a donc concerné la prise de recul sur le couplage lui-même : l'argumentation complète d'une formulation en espace de chemins pour une physique conducto-convecto-radiative.

Pour cela nous avons temporairement restreint (au chapitre 3) la modélisation convective au cas très particulier de cellules fluides parfaitement mélangées, décrites avec une seule température et un champ de coefficients d'échange convectif le long de la frontière solide. Cette restriction nous a permis d'aborder cette question sans attendre la validation de nos propositions sur les chemins advecto-diffusifs. Elle nous a également permis de définir un ensemble de configurations académiques pour lesquelles des solutions analytiques étaient disponibles, et qui nous permettaient de mettre en œuvre des algorithmes de Monte Carlo "exacts", au sens de la pratique en transfert



---

radiatif usuelle, c'est-à-dire sans aucun autre paramètre numérique que le nombre de réalisations. Dans ces exemples, nous n'avons besoin d'aucune approximation, ni d'une épaisseur de paroi  $e$  comme dans les algorithmes de Walk on Sphere, ni même d'un pas de discrétisation  $\delta$  comme dans les algorithmes utilisés pour produire les chemins approchés des figures 2.9, 2.10, 2.11, et 2.12.

Même si cette partie de notre réflexion n'ira pas jusqu'à l'advecto-diffusif, elle sert à comprendre notre sous-bassement théorique : rien de ce que nous explorerons là en terme de justification de la formulation en espace de chemins ne sera proprement attaché à l'approximation des cellules fluides parfaitement mélangées, l'advecto-diffusif étant de ce point de vue complètement similaire à la pure diffusion. Simplement il n'y a que sous cette hypothèse que nous sommes capables de produire une chaîne allant jusqu'à la mise en œuvre d'un échantillonnage exact des chemins, sans discrétisation et sans simplification en proche paroi.

## Une preuve de concept

Dans les recherches que nous présenterons à partir du chapitre 4, ce sera tout le contraire. L'objectif sera de prouver qu'il est possible de réaliser concrètement des simulations thermiques avec notre approche au sein d'une plaque d'échangeur poreux de grande extension en tenant compte de façon explicite de tous les détails de la structure poreuse : une simulation directe, c'est-à-dire sans faire appel à des propriétés effectives.

Afin de faire cette preuve de concept, il nous faudra faire des choix à chacune des étapes, en sachant que ces choix mériteront une revisite ultérieure. Rien ne sera définitif dans nos mises en œuvre et nous serons très loin encore d'un code de calcul solidifié pouvant être directement incorporé dans un logiciel à vocation industrielle tel que [Stardis](#). L'idée est de dessiner un espace des possibles et voir si effectivement un projet plus informatique pourrait être initié qui viserait à implémenter et distribuer des codes issus de nos réflexions sur la simulation de sous-chemins advecto-diffusifs et leur couplage avec la conduction et le rayonnement en géométrie complexe.

## Retour sur la complexité

Depuis le début de cet écrit, nous disons que Monte Carlo est capable de traiter des complexités géométriques et phénoménologiques très élevées. Nous avons déjà souligné ci-dessus à quel point le concept de "complexité géométrique" nécessite une clarification. Il ne s'agit pas ici de discuter la pertinence de l'utilisation du mot "complexité" dans notre contexte. Dans de nombreux autres contextes, notamment au sein des instituts de recherche sur les sciences de la complexité qui se sont créés dans la dernière décennie, le mot "complexité" est souvent réservé au *complexus* (tressé ensemble) par opposition au *con-plicare* (plié ensemble), donc principalement à des phénomènes d'émergence (une corde tressée est plus résistante qu'une assemblée de brins parallèles). Dans notre pratique, par exemple celle de la thermique industrielle, "complexité" ne renvoie pas à la question de l'émergence mais plutôt à la difficulté à penser, à intégrer dans une approche numérique, une immense quantité d'informations, ici essentiellement géométriques, au sens élargi, c'est-à-dire en associant à la géométrie la description des propriétés physiques des matériaux et les champs de vitesse pour les parties fluides.

Mais même avec cette image précisée de la complexité des systèmes thermiques, comment la caractériser? Dans le cas d'un échangeur, des formes géométriques similaires vont avoir des impacts totalement différents selon leur orientation par rapport à la direction d'application du flux de chaleur. On voit déjà qu'il va falloir s'intéresser non pas seulement aux structures géométriques et aux propriétés physiques associées à chaque matériau, mais aussi aux conditions à la limite.

Dès que l'on aborde cette question, on retrouve tous les réflexes usuels du thermicien en phase d'analyse ou de dimensionnement de systèmes couplés. Mais ici la question sera celle du comportement des algorithmes de Monte Carlo. Dans tous les domaines de la physique, c'est une

caractéristique récurrente de la méthode de Monte Carlo que d'inviter le spécialiste à relier très étroitement l'observation du comportement de l'algorithme et les moyens d'analyse disponibles pour penser ce que la physique locale produit à l'échelle du système. Considérons l'exemple de l'analyse des algorithmes de Monte Carlo simulant le transfert radiatif à travers des plaques diffusives, par exemple pour écranter un rayonnement ionisant. Comme ces plaques sont très diffusives, les algorithmes qui simulent des chemins de diffusion multiple rencontrent de nombreuses difficultés numériques, d'une part parce que ces chemins peuvent être très longs et donc que leur construction peut être très coûteuse, d'autre part parce que peu de chemins traversent (c'est l'objectif d'un tel écran) et que la variance du poids de Monte Carlo peut donc être très forte. Face à cette question, c'est à la théorie de la diffusion macroscopique (la loi de Fick) que l'on se retrouve à faire appel, dans une pensée approchée à l'échelle du système, pour essayer de comprendre puis d'améliorer des algorithmes dont l'objectif est pourtant précisément de quantifier l'écart à de tels modèles approchés.

Nous n'en sommes qu'aux débuts d'une pratique de Monte Carlo en thermique système, mais il est prévisible que si cette pratique s'installe alors on retrouvera ces aller-retours entre un diagnostic détaillé du comportement de l'algorithme échantillonnant des chemins couplés et l'interprétation de ces comportements à l'aide des concepts déjà existants pour penser l'impact des transferts couplés à l'échelle d'un système. Nous regrouperons au sein du chapitre 5 un ensemble d'observations faites en ce sens tout au long de nos travaux de conception et de mise en œuvre algorithmiques.



# Formulation probabiliste d'un problème conducto-convecto-radiatif

La question du couplage, vers une formulation théorique . . . . .	45
3.1 Un système couplé conduction-convection-rayonnement . . . . .	46
3.2 Formulation intégrale par l'approche de Green . . . . .	48
3.2.1 Solution intégrale en fonctions de Green du problème . . . . .	49
3.2.2 Interprétation probabiliste de cette formulation intégrale . . . . .	50
3.3 Formulation par l'approche de Feynman-Kac . . . . .	52
3.4 Illustrations d'échantillonnages de chemins pour des propagateurs analytiques . . . . .	56
Comment simuler ces chemins au-delà de configurations académiques ? . . . . .	59

## La question du couplage, vers une formulation théorique

Le chapitre 1 nous a permis de présenter les concepts de base de la méthode de Monte Carlo et de donner quelques éléments de sa pratique pour la simulation du transfert radiatif, et pour la simulation de la conduction thermique dans des cas très simples. Dans ces deux situations, nous avons montré que pour évaluer une luminance ou une température en un point, une réalisation aléatoire de Monte Carlo consiste en la construction d'un chemin statistique qui se propage à travers le système tout en récupérant la contribution des sources le long de sa trajectoire et/ou à la limite du système lorsqu'il l'atteint.

Dans le chapitre 2, nous avons abordé deux questions distinctes : la question de la complexité géométrique et celle du couplage des transferts thermiques. On a alors présenté des travaux existants mettant à profit les outils de la synthèse d'image (développés pour répondre à la problématique de la complexité géométrique en transfert radiatif) pour la résolution de problèmes thermiques couplés. Sur cette base, notre problématique a pu être énoncée, avec au premier plan la question de l'extension de ces approches à des écoulements de fluides lorsqu'il est nécessaire de décrire de façon détaillée le champ de température en leur sein. L'idée était de conserver l'objectif de la complexité géométrique et de rajouter la dimension fluide.

Ici, temporairement, nous laissons de côté ces deux éléments pour approfondir la question du couplage. Les géométries seront simples et la convection sera abordée, sous l'hypothèse de cellules fluides parfaitement mélangées, à l'aide du seul concept de coefficient d'échange convectif. L'objectif visé est d'inscrire les algorithmes décrits dans la section 2.2.2 dans un cadre formel

---

rigoureux qui permet de définir pleinement le concept de chemin auquel nous faisons appel en référence aux travaux de Feynman et Kac.

Le formalisme lui-même ne fera bien sûr aucune hypothèse quant au niveau de complexité géométrique de l'objet d'étude, mais à ce stade, aucun raisonnement théorique ne sera spécifiquement mené en lien avec l'objectif de la complexité. En conséquence nous ne pourrons présenter des mises en œuvre que pour quelques exemples géométriques très simples. En ce sens, il n'est pas complètement vrai que nous inscrivons dès ce stade les algorithmes décrits dans la section 2.2.2 dans un cadre formel rigoureux : il manquera un ensemble de développements que nous ne donnerons qu'au chapitre 4. Par contre, pour les exemples académiques géométriquement simples du présent chapitre, les algorithmes que nous décrirons seront exacts (au sens de Monte Carlo, c'est-à-dire au sens du grand nombre de réalisations), ce qui ne sera plus le cas au chapitre 4.

Nous nous donnons donc ici des objets d'étude simplifiés, mais nous visons la complétude avec :

- un édifice théorique partant d'une forme particulière de l'équation de la chaleur, mais n'ajoutant ensuite aucune approximation d'ordre numérique (viser la même exactitude que celle à laquelle nous sommes habitués avec la pratique de Monte Carlo en rayonnement), ce que nous ferons à l'aide du formalisme de Green;
- une définition complète des sous-chemins correspondant à chaque mode de transfert (chemin conductif, chemin convectif, chemin radiatif), ce qui nous conduira à faire appel à la théorie des processus stochastiques;
- un argumentaire solide sur le caractère récursif des chemins utilisés pour la thermique couplée (le caractère aléatoire de l'enchaînement successif des sous-chemins);
- des tests de mise en œuvre permettant une validation analytique des algorithmes de Monte Carlo résultants.

Nous partons d'un écrit collectif, sous la forme d'un article en préparation, qui est joint à ce manuscrit en annexe B. Nous ne chercherons pas à décrire ici l'ensemble des développements mathématiques qui sont proposés dans ce texte. Nous extrairons les étapes essentielles pour les commenter à la fois en termes physiques et algorithmiques.

Même si la suite du manuscrit explore des solutions pratiques différentes en termes de techniques numériques d'échantillonnage de l'espace des chemins, les étapes que nous discutons ici resteront inchangées et à travers des exemples plus simples, c'est donc un des fondements de notre approche qui est ici illustré.

*Dans ce chapitre, pour des raisons d'uniformité avec l'écrit collectif présenté en annexe B, la température sera notée  $\theta$  plutôt que  $T$ , et les domaines seront notés  $\mathcal{D}$  au lieu de  $\Omega$ . Les extraits de ce même écrit seront présentés dans des encadrés tels que celui-ci.*

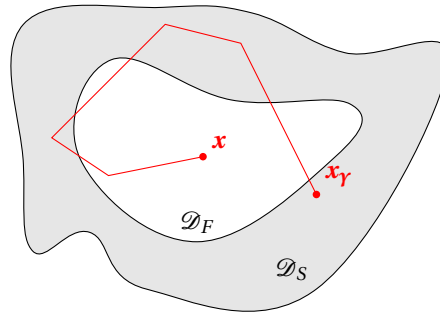
## 3.1 Un système couplé conduction-convection-rayonnement

Le système étudié est constitué de domaines solides  $\mathcal{D}_S$  et fluides  $\mathcal{D}_F$  connexes, de frontières respectives  $\partial\mathcal{D}_S$  et  $\partial\mathcal{D}_F$ . Tandis qu'en toute rigueur ces milieux devraient être indexés  $\mathcal{D}_{S1}, \mathcal{D}_{S2}, \dots$  et  $\mathcal{D}_{F1}, \mathcal{D}_{F2}, \dots$  s'il y en a plusieurs, on préfère omettre ces index et supposer que les milieux concernés sont connus sans ambiguïté pour alléger les expressions. La figure 3.1 illustre une configuration de ce genre, dans laquelle les modes de transferts possibles dans les milieux solides sont la conduction et le rayonnement, tandis que dans les milieux fluides il s'agit de la convection et du rayonnement. Les milieux solides et fluides sont tous deux semi-transparents. A un temps initial  $t = t_I$ , le champ de température est connu en tout point et est noté  $\theta_I$ .



La température radiative  $\theta_R$  est ici définie en tout point de la scène par l'équation 3.3, comme la moyenne des températures prises au bout des chemins radiatifs  $\gamma$  définis sur l'espace de chemins  $\mathcal{D}_\Gamma$ .

Cette définition correspond directement à la pratique la plus usuelle de Monte Carlo en transfert radiatif. Du fait de la linéarisation, au lieu de penser en luminance, on pense en température, mais l'algorithme échantillonnant le chemin  $\gamma$  à travers une suite de diffusions, jusqu'à un arrêt en un lieu d'absorption, est exactement le même que celui que nous avons illustré au chapitre 1. La seule différence est que le poids de Monte Carlo est ici la valeur de la température au point d'absorption au lieu de la valeur de la luminance d'équilibre à cette température. La figure 3.2 illustre ces chemins de diffusion multiple qui définissent la température radiative  $\theta_R$  dans notre énoncé du problème (équation 3.3).



**FIGURE 3.2** – Illustration de l'échantillonnage d'un chemin radiatif partant du point  $x$  pour évaluer la température radiative  $\theta_R(x)$ . L'algorithme est exactement la même que pour l'évaluation d'un terme source radiatif classique, sauf que le poids retenu au bout du chemin radiatif n'est pas en  $\sigma\theta(x_\gamma)^4$ , mais directement en  $T(x_\gamma)$  (linéarisation) : échantillonnage isotrope de la direction initiale; échantillonnage aléatoire de la prochaine distance de collision; si collision de type absorption, fin du chemin; si collision de type diffusion, échantillonnage aléatoire de la direction de diffusion (éventuellement selon une fonction de phase particulière) et poursuite du chemin.

## 3.2 Formulation intégrale par l'approche de Green

Les *fonctions de Green* (notées  $G$  dans ce texte) introduites par le physicien George Green au début du XIXème siècle, sont des outils d'analyse et de résolution standards pour les systèmes différentiels linéaires. Une fonction de Green est une fonction élémentaire à partir de laquelle peuvent être reconstruites par convolution les solutions d'un système linéaire pour n'importe quelle valeur des sources, conditions aux limites ou conditions initiales. La fonction de Green caractérise ainsi complètement le système linéaire (en incluant ses caractéristiques géométriques) et permet de reconstruire n'importe quels flux en assurant l'intuitif de la superposition. L'expression de la solution du système étudié apparaît alors comme une intégrale sur le domaine exprimant l'action de cette fonction de Green sur les sources (au sens large du terme, c'est-à-dire en incluant les conditions limites et initiales) du problème.

En électrodynamique quantique, Feynman a introduit le vocabulaire de "propagateur" pour désigner une fonction de Green particulière. En effet, dans cette expression, la fonction de Green apparaît comme un opérateur qui a pour rôle de décrire comment les sources se sont propagées à travers le système, d'un point dans le temps et l'espace vers un autre point dans le temps et l'espace. Dans le cas de l'étude du transfert de la chaleur instationnaire, les fonctions de Green

usuellement utilisées (voir par exemple [Cole2011] ou [Hahn2012]) représentent la distribution de la température  $T(\mathbf{x}, t)$  à n'importe quelle position  $\mathbf{x}$  et n'importe quel temps  $t$  d'observation en réponse à une source en *Dirac*  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t')$  à l'instant  $t'$  et à la position  $\mathbf{x}'$ .

En notant  $\mathcal{L}$  l'opérateur différentiel linéaire du système étudié, toute fonction  $G$  solution de l'équation 3.5 est donc une fonction de Green du problème aux limites. En pratique, la connaissance d'une telle fonction de Green permet par la suite de reconstruire la solution générale 3.6 du problème comme étant un produit de convolution de la fonction de Green avec la source  $S$  du problème initial 3.4. Dans une lecture en superposition, la somme des contributions des propagations de ces sources conduit alors à la température attendue.

$$\mathcal{L}T(\mathbf{x}, t) = S(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D}, t \geq 0 \quad (3.4)$$

$$\mathcal{L}G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', t') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t'), \quad \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{D}, t \geq t' \geq 0 \quad (3.5)$$

$$T(\mathbf{x}, t) = (G * S)(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D}, t \geq 0 \quad (3.6)$$

Les notations  $G_S$  et  $G_F$  sont par la suite attribuées aux fonctions de Green respectivement associées au domaine solide et au domaine fluide.

### 3.2.1 Solution intégrale en fonctions de Green du problème

En utilisant ce formalisme, on peut établir les formulations intégrales 3.7 et 3.8 dans lesquelles la température en n'importe quel point  $\mathbf{x}$  à n'importe quel instant  $t$  est exprimée comme le produit de convolution des sources par la fonction de Green du problème. Toute la difficulté (liée à la complexité géométrique du système étudié par exemple) est alors reportée dans la détermination de cette fonction  $G$ .

EXACT SOLUTION OF OUR TRANSIENT COUPLED HEAT TRANSFER PROBLEM UNDER AN INTEGRAL FORM

At time  $t$ , for a location  $\vec{x}$  within the solid,

$$\begin{aligned} \vec{x} \in \mathcal{D}_S, t \in [t_I, +\infty[ : \quad \theta(\vec{x}, t) = & \int_{\mathcal{D}_S} d\vec{x}_I G_S(\vec{x}, t; \vec{x}_I, t_I) \rho(\vec{x}_I, t_I) C(\vec{x}_I, t_I) \theta_I(\vec{x}_I) \\ & + \int_{\mathcal{D}_S} d\vec{x}_R \int_{t_I}^t dt_R G_S(\vec{x}, t; \vec{x}_R, t_R) \zeta(\vec{x}_R, t_R) \theta_R(\vec{x}_R, t_R) \\ & + \int_{\partial\mathcal{D}_S} d\vec{y}_C \int_{t_I}^t dt_C G_S(\vec{x}, t; \vec{y}_C, t_C) h(\vec{y}_C, t_C) \theta_F(\vec{y}_C, t_C) \end{aligned} \quad (3.7)$$

At time  $t$ , within the fluid (the solution is the same at all locations),

$$\begin{aligned} \vec{x} \in \mathcal{D}_F, t \in [t_I, +\infty[ : \quad \theta(\vec{x}, t) = & G_F(t; t_I) \rho(t_I) C(t_I) \mathcal{V}_F \theta_I(\vec{x}) \\ & + \int_{t_I}^t dt_R G_F(t; t_R) \zeta(t_R) \int_{\mathcal{D}_F} \theta_R(\vec{x}_R, t_R) d\vec{x}_R \\ & + \int_{t_I}^t dt_C G_F(t; t_C) \int_{\partial\mathcal{D}_F} h(\vec{y}_C, t_C) \theta_S(\vec{y}_C, t_C) d\vec{y}_C \\ & + \int_{t_I}^t dt_N G_F(t; t_N) \rho(t_N) C(t_N) \phi(t_N) \theta_N(t_N) \end{aligned} \quad (3.8)$$

where  $\mathcal{V}_F$  is the volume of  $\mathcal{D}_F$ . These two equations, together with Eq. 3.3, provide a vector Fredholm expression for  $\theta$  within the solid,  $\theta$  within the fluid and  $\theta_R$  at all locations :



- the solid temperature of Eq. 3.7 involves the fluid temperature  $\theta_F$  at  $\vec{y}_C$  and the radiative temperature  $\theta_R$  at  $\vec{x}_R$ ;
- the fluid temperature of Eq. 3.8 involves the solid temperature  $\theta_S$  at  $\vec{y}_C$  and the radiative temperature  $\theta_R$  at  $\vec{x}_R$ ;
- the radiative temperature of Eq. 3.3 is expressed using the temperature at the absorption location  $\vec{x}_\gamma$ , which may lie anywhere in the system (all parts are semi-transparent), and involves therefore both the solid and fluid temperatures.

Dans l'expression 3.7, la température solide  $\theta_S(\mathbf{x}, t)$  apparaît comme la somme de trois contributions, propagées à travers le système par la fonction de Green  $G_S$  jusqu'à l'instant  $t$  à la position  $\mathbf{x}$  :

- $\rho C \theta_I$  l'énergie contenue et distribuée dans le milieu solide à l'instant initial  $t_I$
- $\zeta \theta_R$  les sources volumiques radiatives reçues dans le volume entre l'instant initial et  $t$
- $h \theta_F$  le flux surfacique convectif aux interfaces solide/fluide tout au long du temps

Parmi ces trois contributions, seule la condition initiale  $\theta_I$  est connue en toute généralité. Les deux autres sont quant à elles définies par les équations 3.8 et 3.3.

De la même façon, l'équation 3.8 permet d'exprimer la température dans le milieu fluide  $\theta_F$  comme la somme des contributions de quatre contributions propagées jusqu'au point d'observation  $(\mathbf{x}, t)$  par la fonction de Green  $G_F$  :

- $\rho C \mathcal{V}_F \theta_I$  l'énergie contenue dans le milieu fluide à l'instant initial  $t_I$
- $\zeta \theta_R$  les sources volumiques radiatives reçues dans le volume entre l'instant initial et  $t$
- $h \theta_S$  le flux surfacique convectif aux interfaces solide/fluide tout au long du temps
- $\rho C \phi \theta_N$  la source volumique de renouvellement vers la température  $\theta_N$

Ici, les deux températures  $\theta_I$  et  $\theta_N$  sont toujours connues, par contre, les températures  $\theta_S$  et  $\theta_R$  ne sont définies que par les équations 3.7 et 3.3.

### 3.2.2 Interprétation probabiliste de cette formulation intégrale

Par un jeu de reformulations intégrales, il est possible de transformer les équations 3.7 et 3.8 pour faire émerger des probabilités  $\mathcal{P}$  correspondant aux différentes sources contribuant à la valeur locale de la température dans ces expressions. Ce travail permet par la même occasion de normaliser les valeurs des fonctions de Green  $G_S$  et  $G_F$  sur les espaces d'intégration correspondant aux différentes sources, ce qui fait émerger des densités de probabilité spatiales et temporelles  $p$  en lieu et place de ces fonctions de Green.

THE MONTE CARLO ALGORITHM WITHOUT RECURSIVITY FOR CONDUCTION AND CONVECTION

$$\begin{aligned}
\vec{x} \in \mathcal{D}_S, t \in [t_I, +\infty[ : \quad \theta(\vec{x}, t) = & \mathcal{P}_I(\vec{x}, t) \int_{\mathcal{D}_S} d\vec{x}_I p_I(\vec{x}_I | \vec{x}, t) \theta_I(\vec{x}_I) \\
& + \mathcal{P}_R(\vec{x}, t) \int_{\mathcal{D}_S} d\vec{x}_R \int_{t_I}^t dt_R p_R(\vec{x}_R, t_R | \vec{x}, t) \theta_R(\vec{x}_R, t_R) \\
& + \mathcal{P}_C(\vec{x}, t) \int_{\partial \mathcal{D}_S} d\vec{z}_C \int_{t_I}^t dt_C p_C(\vec{z}_C, t_C | \vec{x}, t) \theta_F(\vec{z}_C, t_C)
\end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}
 \vec{x} \in \mathcal{D}_F, t \in [t_I, +\infty[ : \quad \theta(\vec{x}, t) = & \mathcal{P}_I(t) \theta_I(\vec{x}) \\
 & + \mathcal{P}_R(t) \int_{\mathcal{D}_F} d\vec{x}_R \int_{t_I}^t dt_R p_R(\vec{x}_R, t_R | \vec{x}, t) \theta_R(\vec{x}_R, t_R) \\
 & + \mathcal{P}_C(t) \int_{\partial\mathcal{D}_F} d\vec{y}_C \int_{t_I}^t dt_C p_C(\vec{y}_C, t_C | \vec{x}, t) \theta_S(\vec{y}_C, t_C) \\
 & + \mathcal{P}_N(t) \int_{t_I}^t dt_N p_N(t_N | \vec{x}, t) \theta_N(t_N)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Ces deux formulations intégrales apparaissent alors comme deux espérances sur des températures aléatoires. Une réalisation d'une de ces températures aléatoires a alors une probabilité  $\mathcal{P}_I$  de retenir une valeur initiale de température  $\theta_I$ , une probabilité  $\mathcal{P}_R$  de retenir une valeur de température radiative  $\theta_R$ , une probabilité  $\mathcal{P}_C$  de retenir une température fluide  $\theta_F$  dans le cas de la température solide ou une température solide  $\theta_S$  dans le cas de la température fluide, ou enfin une probabilité  $\mathcal{P}_N$  de retenir une température de renouvellement  $\theta_N$ . Pour aller au bout de cette vision probabiliste, on définit alors les variables aléatoires suivantes :

- Le vecteur aléatoire  $(A_I, A_R, A_C, A_N)$  prend la valeur  $(1, 0, 0, 0)$  avec la probabilité  $\mathcal{P}_I$ ,  $(0, 1, 0, 0)$  avec la probabilité  $\mathcal{P}_R$ ,  $(0, 0, 1, 0)$  avec la probabilité  $\mathcal{P}_C$ , ou  $(0, 0, 0, 1)$  avec la probabilité  $\mathcal{P}_N$ .
- La position aléatoire  $\mathbf{X}_I$  est définie en tout point du milieu solide par la densité de probabilité  $p_I$ , et en une position arbitraire dans le fluide (en raison de son uniformité).
- La position aléatoire  $\mathbf{X}_R$  et le temps aléatoire  $T_R$  sont tous deux définis par la densité de probabilité  $p_R$  sur le temps et l'espace.
- Les positions aléatoires  $\mathbf{Y}_C$  et  $\mathbf{Z}_C$ , et le temps aléatoire  $T_C$  à l'interface solide/fluide sont définis par la densité de probabilité  $p_C$  sur le temps et l'espace. Dans cette définition, la position  $\mathbf{Y}_C$  appartient alors au milieu solide tandis que la position  $\mathbf{Z}_C$  appartient au milieu fluide.

Ces deux dernières positions aléatoires  $\mathbf{Y}_C$  et  $\mathbf{Z}_C$  seront par la suite regroupées en une seule variable aléatoire  $\mathbf{X}_C$ . Il est cependant à retenir que dans le cas de l'expression de la température solide, toute position échantillonnée sur l'interface solide/fluide mène à la même température uniforme du fluide. Cependant, l'échantillonnage d'une position sur l'interface solide/fluide pour l'expression de la température fluide mène à une température du milieu solide en paroi qui n'est pas la même en tout point de l'interface. La distribution de ces positions à l'interface est alors fortement dépendante du profil du coefficient d'échange convectif  $h$  à la paroi.

Il est alors possible de ré-écrire en espérance les équations 3.9 et 3.10 en utilisant ces variables aléatoires :

$$\theta = \mathbb{E} [ A_I \theta_I(\vec{X}_I) + A_R \theta_R(\vec{X}_R, T_R) + A_C \theta_F(\vec{Z}_C, T_C) ] \text{ for solid} \tag{3.11}$$

$$\theta = \mathbb{E} [ A_I \theta_I(\vec{X}_I) + A_R \theta_R(\vec{X}_R, T_R) + A_C \theta_S(\vec{Y}_C, T_C) + A_N \theta_N(T_N) ] \text{ for fluid} \tag{3.12}$$

Cette écriture n'apporte pas d'idées supplémentaires. Cependant, elle permet de souligner la lecture des températures dans le solide et dans le fluide sous la forme de variables aléatoires.

Par ailleurs, il est immédiat de faire ce même travail pour exprimer la température radiative  $\theta_R$ . On pose donc  $\mathbf{X}_R$  la position aléatoire définie dans tout le domaine par la densité de probabilité  $p_R$  (voir l'équation 3.3) :

$$\theta_R(\vec{x}, t) = \mathbb{E}[\theta(\vec{X}_\Gamma(\vec{x}, t), t)] \quad (3.13)$$

En tout point  $\mathbf{x}$  du milieu solide ou fluide, à tout temps  $t$ , on est donc capable d'exprimer la température du milieu ou la température radiative de façon probabiliste, et donc d'en faire une réalisation aléatoire :

- pour une température en un point du solide, on retient aléatoirement la condition initiale  $\theta_I$  en un point aléatoire  $\mathbf{X}_I$  du milieu, la température radiative  $\theta_R$  en un point aléatoire  $\mathbf{X}_R$  du milieu au temps aléatoire  $T_R$ , ou la température du fluide à une position aléatoire  $\mathbf{Z}_C$  de l'interface solide/fluide en un temps aléatoire  $T_C$  ;
- pour une température en un point du fluide, on peut retenir aléatoirement la condition initiale  $\theta_I$  du fluide, la température radiative  $\theta_R$  en un point aléatoire  $\mathbf{X}_R$  du milieu au temps aléatoire  $T_R$ , la température du solide à une position aléatoire  $\mathbf{Y}_C$  de l'interface solide/fluide en un temps aléatoire  $T_C$ , ou la température de renouvellement  $\theta_N$  au temps aléatoire  $T_N$  ;
- pour une température radiative, on retient la température locale à la position aléatoire  $\mathbf{X}_I$  au même temps  $t$  (le transfert radiatif est instantané).

A ce stade, on est donc capable de réaliser un algorithme de Monte Carlo pour chacune de ces trois températures. Cependant, aucun de ces algorithmes n'aborde la question du couplage. Pour adresser cette question, il reste à mettre en œuvre l'idée essentielle de la linéarité de l'espérance présentée dans le chapitre 1.

Dans l'optique de ne garder en grandeur d'intérêt qu'une température définie en n'importe quel point du milieu solide ou fluide, une première étape est de regrouper les expressions 3.11 et 3.12 sous la forme d'une seule équation en imposant simplement une probabilité virtuelle  $\mathcal{P}_N = 0$  dans le milieu solide, mais aussi en éliminant les notations  $\theta_S$  et  $\theta_F$  qui ne sont qu'une redite de la définition de la variable aléatoire  $\mathbf{X}_C$  de la position aléatoire à l'interface solide/fluide lors d'un échange convectif. La température en n'importe quel point de l'espace  $\mathbf{x}$  et du temps  $t$  peut alors s'exprimer sous la forme :

$$\theta = \mathbb{E}[A_I \theta_I(\vec{X}_I) + A_R \mathbb{E}[\theta(\vec{X}_\Gamma(\vec{X}_R, T_R), T_R)] + A_C \theta(\vec{X}_C, T_C) + A_N \theta_N(T_N)] \quad (3.14)$$

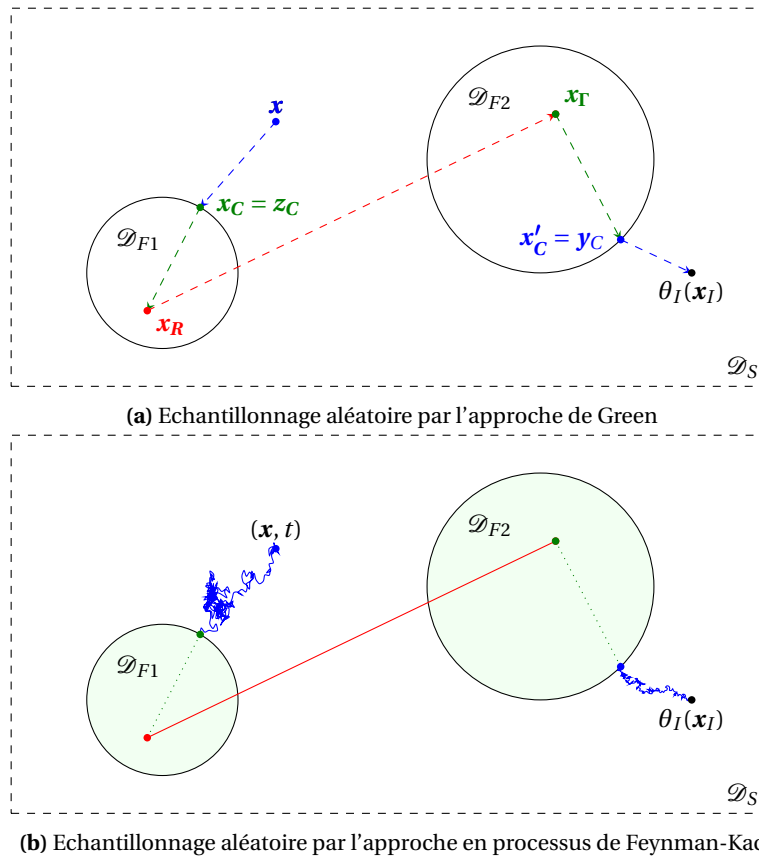
Par la propriété de linéarité de l'espérance, ou plus génériquement le *théorème de l'espérance totale*, l'espérance sur les positions radiatives peut être factorisée dans l'espérance globale de l'expression 3.14. Cela permet de faire émerger une unique variable aléatoire  $\Theta$ , et donc de justifier théoriquement un unique algorithme de Monte Carlo permettant de simuler des transferts thermiques conducto-convecto-radiatifs couplés.

$$\begin{aligned} \theta &= \mathbb{E}[\Theta] \\ \Theta &= A_I \theta_I(\vec{X}_I) + A_R \Theta(\vec{X}_\Gamma(\vec{X}_R, T_R), T_R) + A_C \Theta(\vec{X}_C, T_C) + A_N \theta_N(T_N) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Une réalisation aléatoire d'un tel algorithme de Monte Carlo est illustrée dans la figure 3.3a.

### 3.3 Formulation par l'approche de Feynman-Kac

A ce stade, on a démontré théoriquement l'existence d'une variable aléatoire pouvant être échantillonnée par la méthode de Monte Carlo dans une approche reverse pour évaluer la température en n'importe quel point de l'espace et du temps dans un problème de transferts thermiques couplés. Cependant, la figure 3.3a qui illustre cet échantillonnage représente une succession de



**FIGURE 3.3** – Illustration d'une réalisation aléatoire permettant de mettre en œuvre un algorithme de Monte Carlo couplant conduction, convection, et rayonnement pour évaluer la température  $\theta(\mathbf{x}, t)$  au point  $\mathbf{x}$  au temps  $t$ . Tandis que l'approche de Green fait apparaître une succession de "sauts aléatoires" d'un point de l'espace et du temps à un autre, l'approche de Feynman-Kac illustre une trajectoire continue à travers l'espace et le temps allant du point d'observation jusqu'à la source retenue par cet échantillon, ici la condition initiale, pour la conduction et le rayonnement seulement. En effet, par définition de la convection parfaitement mélangée, le processus de bruit blanc uniforme représente quant à lui une succession de positions indépendantes dans le volume fluide au court du temps.

sauts aléatoires. Il manque donc un élément pour obtenir la notion de "chemins" illustrés dans la figure 3.3b, qui définissent des trajectoires continues à travers le temps et l'espace, en allant du point d'observation jusqu'à la source retenue, de façon homologues aux exemples approchés que l'on a montrés dans le chapitre 2.

Pour faire émerger cette vision en chemins aléatoires, il est nécessaire de passer par une nouvelle reformulation du problème, cette fois en processus. C'est le travail de Feynman et Kac annoncé en section 1.3 qui fonde cette pensée. Dans ce formalisme en processus, chacune des équations différentielles associées aux différents transferts thermiques est reformulée en utilisant un processus associé :

- la conduction instationnaire dans les milieux solides est représentée grâce au processus de Wiener;
- la convection parfaitement brassée dans les régions fluides est représentée par un bruit blanc uniforme, c'est-à-dire que la position du processus à n'importe quel instant  $t$  est une variable aléatoire uniformément distribuée dans le volume fluide, sans aucune dépendance à l'histoire du processus;

- 
- le transfert radiatif à travers l'ensemble des domaines solides et fluides est quant à lui décrit de façon strictement similaire à ce qui a été présenté en section 1.2, malgré un formalisme plus lourd afin de se conformer aux écritures en processus (notamment par l'indexation de la position courante du processus par un temps qui n'a pas de sens physique).

Chacun de ces processus permet alors de justifier en toute rigueur de l'existence de chemins statistiques qui sont des réalisations aléatoires de ces processus et qui correspondent à notre vision en propagation à travers le temps et l'espace.

Dans les expressions qui suivent, ces processus sont notés de la façon suivante :

- $\mathcal{X}$  est le processus défini sur l'ensemble du domaine solide et fluide comme étant un processus de Wiener dans les zones solides, et un bruit blanc uniforme dans les zones fluides.
- Le transfert radiatif est défini par l'utilisation conjointe du processus  $\mathcal{R}$  défini sur l'ensemble du domaine solide et fluide, et du processus  $\Omega$  défini sur la sphère unité. Tandis que  $\mathcal{R}$  matérialise la position courante du chemin radiatif,  $\Omega$  définit sa direction courante qui évolue selon la fonction de phase du transfert radiatif à chaque collision (ces collisions sont elles-mêmes distribuées selon l'épaisseur optique du milieu), et qui est par ailleurs distribuée uniformément sur l'ensemble des directions à l'instant initial (par définition de la température radiative).

Par ailleurs, ces processus sont indexés par le temps courant  $s$  et conditionnés par la connaissance de la position  $\mathbf{x}$  à laquelle le processus doit être au temps  $t$ , cette information est donnée en exposant. Ainsi,  $\mathcal{X}_s^{\mathbf{x}, t}$  est la variable aléatoire de position au temps  $s$  du processus sachant qu'il sera en  $\mathbf{x}$  au temps  $t$ .

Enfin, deux variables aléatoires associées aux processus  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{R}$  sont définies selon les densités de premier passage en temps de ces processus :

- $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$  est définie sur l'intervalle  $[t_I, t]$  comme le temps auquel le processus  $\mathcal{X}$  atteint la frontière parabolique  $\{\mathcal{D} \times t_I\} \cup \{\partial\mathcal{D} \times [t_I, t]\}$  du milieu courant  $\mathcal{D}$  (qui peut être soit un milieu solide  $\mathcal{D}_S$  soit un milieu fluide  $\mathcal{D}_F$ ) ; c'est-à-dire comme le temps auquel le processus  $\mathcal{X}$  atteint la frontière  $\partial\mathcal{D}$  du domaine  $\mathcal{D}$  dans lequel il est, ou alors comme le temps initial si le processus n'a pas atteint de frontière.
- $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$  est quant à lui défini sur l'intervalle  $] - \infty, t]$  comme le temps auquel le processus  $\mathcal{R}$  atteint la frontière parabolique  $\partial\mathcal{D}$  de l'ensemble du domaine  $\mathcal{D}$  regroupant tous les domaines solides et fluides. En effet, bien que référencé par un temps pour permettre une formulation de type Feynman-Kac, le transfert radiatif est considéré au régime stationnaire, et cette information temporelle est donc ensuite "oubliée", la condition initiale ne peut donc pas être atteinte.

Avec ce formalisme, les systèmes différentiels 3.1 et 3.2 ainsi que l'équation 3.3 peuvent être reformulés selon les équations 3.16, 3.17, et 3.18, qui utilisent les grandeurs  $q_S$ ,  $q_F$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  définies dans les expressions 3.19, 3.20, 3.21, et 3.22 :

- $q_S(\mathbf{x}, t')$  est la température définie sur la frontière parabolique  $\{\mathcal{D}_S \times t_I\} \cup \{\partial\mathcal{D}_S \times [t_I, t]\}$  comme étant la température initiale quand  $t' = t_I$ , et la température du domaine fluide attenant à la position  $\mathbf{x}$  quand cette position est sur la frontière  $\partial\mathcal{D}_S$  ;
- $q_F(\mathbf{x}, t')$  est la température définie sur la frontière parabolique  $\{\mathcal{D}_F \times t_I\} \cup \{\partial\mathcal{D}_F \times [t_I, t]\}$  comme étant la température initiale quand  $t' = t_I$ , la température du solide à la position  $\mathbf{x}$  quand cette position est sur la frontière commune entre le milieu solide et le milieu fluide  $\partial\mathcal{D}_F \cap \partial\mathcal{D}_S$ , ou la température de renouvellement  $\theta_N$  au temps  $t'$  si la position  $\mathbf{x}$  est à la position virtuelle du terme source de renouvellement ici notée  $y_{in}$  ;
- $\alpha(\mathbf{x}, t')$  est la valeur locale de la fréquence d'émission radiative du milieu (ou l'inverse du temps caractéristique d'émission), ainsi, par exemple, pour une valeur uniforme de ce paramètre dans le domaine  $\mathcal{D}_S$ , un chemin conducteur se propagera en moyenne pendant un temps  $\frac{\rho C}{\alpha}$  avant de prendre fin et de retenir la température radiative  $\theta_R$  à son point courant ;

- $\beta$  est la valeur locale de la fréquence d'absorption radiative du milieu (ou l'inverse du temps caractéristique d'absorption par le milieu), cette information est habituellement plutôt donnée directement par le coefficient d'absorption  $k_a$  en espace comme l'inverse de la longueur moyenne parcourue par le chemin radiatif avant d'être absorbé par le milieu.

$$\begin{aligned} \vec{x} \in \mathcal{D}_S, t \in [t_I, +\infty[ : \quad \theta(\vec{x}, t) = \mathbb{E} \left[ q_S(\vec{\mathcal{X}}_{\tau_{\vec{x}}^{\vec{x},t}}, \tau_{\vec{x}}^{\vec{x},t}) \exp \left( - \int_{\tau_{\vec{x}}^{\vec{x},t}}^t \alpha(\vec{\mathcal{X}}_p^{\vec{x},t}, p) dp \right) \right. \\ \left. + \int_{\tau_{\vec{x}}^{\vec{x},t}}^t \alpha(\vec{\mathcal{X}}_p^{\vec{x},t}, p) \theta_R(\vec{\mathcal{X}}_p^{\vec{x},t}, p) \exp \left( - \int_p^t \alpha(\vec{\mathcal{X}}_u^{\vec{x},t}, u) du \right) dp \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \vec{x} \in \mathcal{D}_F, t \in [t_I, +\infty[ : \quad \theta(\vec{x}, t) = \mathbb{E} \left[ q_F(\vec{\mathcal{X}}_{\tau_{\vec{x}}^{\vec{x},t}}, \tau_{\vec{x}}^{\vec{x},t}) \exp \left( - \int_{\tau_{\vec{x}}^{\vec{x},t}}^t \alpha(\vec{\mathcal{X}}_p^{\vec{x},t}, p) dp \right) \right. \\ \left. + \int_{\tau_{\vec{x}}^{\vec{x},t}}^t \alpha(\vec{\mathcal{X}}_p^{\vec{x},t}, p) \theta_R(\vec{\mathcal{X}}_p^{\vec{x},t}, p) \exp \left( - \int_p^t \alpha(\vec{\mathcal{X}}_u^{\vec{x},t}, u) du \right) dp \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} t \in [t_I, +\infty[ : \quad \theta_R(\vec{x}, t) = \mathbb{E} \left[ \hat{\theta}_R(\vec{\mathcal{R}}_{\tau_{\vec{x}}^{\vec{x},t}}^{\vec{x},t}, \vec{\Omega}_{\tau_{\vec{x}}^{\vec{x},t}}^{\vec{x},t}, t) \exp \left( - \int_{\tau_{\vec{x}}^{\vec{x},t}}^t \beta(\vec{\mathcal{R}}_p^{\vec{x},t}, p) dp \right) \right. \\ \left. + \int_{\tau_{\vec{x}}^{\vec{x},t}}^t \beta(\vec{\mathcal{R}}_p^{\vec{x},t}, p) \theta(\vec{\mathcal{R}}_p^{\vec{x},t}, t) \exp \left( - \int_p^t \beta(\vec{\mathcal{R}}_u^{\vec{x},t}, u) du \right) dp \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

with

$$q_S(\vec{x}, t) \equiv \begin{cases} \theta_I(\vec{x}) & \text{if } t = t_I, \vec{x} \in \mathcal{D}_S \\ \theta_F(\vec{x}, t) & \text{if } t > t_I, \vec{x} \in \mathcal{D}_S \end{cases} \quad (3.19)$$

$$q_F(\vec{x}, t) \equiv \begin{cases} \theta_I(\vec{x}) & \text{if } t = t_I, \vec{x} \in \mathcal{D}_F \\ \theta_S(\vec{x}, t) & \text{if } t > t_I, \vec{x} \in \partial \{ \mathcal{D}_S - \vec{y}_{in} \} \\ \theta_N(t) & \text{if } t > t_I, \vec{x} = \vec{y}_{in} \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\alpha = \frac{\zeta}{\rho C} \quad (3.21)$$

$$\beta = k_a c \quad (3.22)$$

Les trois expressions 3.16, 3.17, et 3.18 permettent bien de lire les températures dans le milieu solide, dans le milieu fluide, et la température radiative, comme des espérances. Toutes les trois sont de même structure que la formulation donnée en toute généralité en 3.23 pour un processus  $\mathcal{X}$  de temps de première sortie  $\mathcal{T}$  et de fréquence d'absorption/émission dans le volume  $\alpha$ .

$$\begin{aligned} \theta(\mathbf{x}, t) = \mathbb{E} \left[ \overbrace{\exp \left( - \int_{\mathcal{T}^{\mathbf{x},t}}^t \frac{1}{\alpha} ds \right)}^{P_{\text{frontières}}} \theta_{\text{frontières}}(\mathcal{X}^{\mathbf{x},t}(\mathcal{T}^{\mathbf{x},t}), \mathcal{T}^{\mathbf{x},t}) \right. \\ \left. + \overbrace{\int_{\mathcal{T}^{\mathbf{x},t}}^t \frac{1}{\alpha} \exp \left( - \int_s^t \frac{1}{\alpha} ds' \right) ds}_{P_{\text{temps}}} \theta_{\text{volume}}(\mathcal{X}^{\mathbf{x},t}(s), s) \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

L'interprétation probabiliste d'une telle formulation peut alors se faire comme suit :

- 
- Avec une probabilité  $P_{\text{frontières}}$ , la réalisation du processus  $\mathcal{X}$  défini sur  $\mathcal{D}$  atteint la frontière parabolique  $\{\mathcal{D} \times t_I\} \cup \{\partial\mathcal{D} \times [t_I, t]\}$ . Par définition, la position  $\mathcal{X}_{\mathcal{F}^{\mathbf{x},t}}$  est alors soit sur la frontière  $\partial\mathcal{D}$  si  $\mathcal{F}^{\mathbf{x},t} \in ]t_I, t[$ , soit dans le volume  $\mathcal{D}$  si  $\mathcal{F}^{\mathbf{x},t} = t_I$ . La température  $\theta_{\text{frontières}}$  retenue par cette réalisation correspond alors soit à la température initiale, soit à la température en ce point de l'interface  $\partial\mathcal{D}$ .
  - Avec une probabilité  $P_{\text{volume}}$ , la réalisation du processus  $\mathcal{X}$  s'arrête avant d'avoir atteint la frontière parabolique. L'instant  $s$  auquel s'arrête le processus est alors échantillonné selon la densité de probabilité  $p_{\text{temps}}$ . A cet instant, à la position  $\mathcal{X}_s^{\mathbf{x},t}$ , c'est le terme source volumique qui est alors retenu, ici, la température  $\theta_{\text{volume}}$ .

Dans cette lecture, les températures dans les milieux solides, fluides, et la température radiative, redeviennent en tout point similaires à ce qui a été présenté dans la section précédente par l'approche de Green. Cependant, cette fois, l'écriture permet de justifier l'existence de chemins aléatoires :

- la température en un point  $\mathbf{x}$  du milieu solide à un temps  $t$  est la résultante de la contribution des températures  $q_S$  à sa frontière parabolique (condition initiale et de bord), ainsi que des sources radiatives dans le milieu  $\theta_R$  aux instants antérieurs à  $t$ ;
- la température en un point  $\mathbf{x}$  du milieu fluide à un temps  $t$  est la résultante de la contribution des températures  $q_F$  à sa frontière parabolique (condition initiale et de bord), ainsi que des sources radiatives dans le milieu  $\theta_R$  aux instants antérieurs à  $t$ ;
- la température radiative en un point  $\mathbf{x}$  de l'espace à un temps  $t$  est la résultante de la contribution des températures radiatives directionnelles  $\hat{\theta}_R$  sur la frontière extérieure à l'ensemble des volumes solides et fluides (une température radiative d'ambiance), et de la température des milieux solides et fluides  $\theta$  à l'instant  $t$ .

Plutôt que d'échantillonner directement l'une ou l'autre de ces températures, ce tirage est ici pensé par la construction même du processus stochastique : la première condition limite ou source rencontrée lors de cette construction est celle qui est retenue.

La question du couplage des expressions 3.16, 3.17, et 3.18 se fait alors de la même façon que précédemment, par la substitution de chacune de ces expressions dans les autres, et par le regroupement des diverses espérances en une unique par la propriété de linéarité. Cet emboîtement des espérances apparaît alors comme un emboîtement des différents processus à travers l'espace et le temps, où le point d'arrivée d'un processus constitue le point de départ du suivant, tel que représenté dans la figure 3.3b.

### 3.4 Illustrations d'échantillonnages de chemins pour des propagateurs analytiques

En pratique, bien que les formulations intégrales par l'approche de Green et par le formalisme de Feynman-Kac sont exactes, elles ne sont que très rarement praticables. En effet, l'évaluation des fonctions de Green, ou de manière homologue la détermination des densités de premier passage en temps et en espace des processus, n'est possible que pour des configuration simples.

Pour gagner en confiance dans ces approches, et en particulier pour se convaincre de la capacité à réaliser des algorithmes de Monte Carlo permettant de résoudre de façon exacte des transferts thermiques couplés, l'écrit présenté en annexe B présente trois configurations dans lesquelles un échantillonnage exact des chemins statistiques est possible :

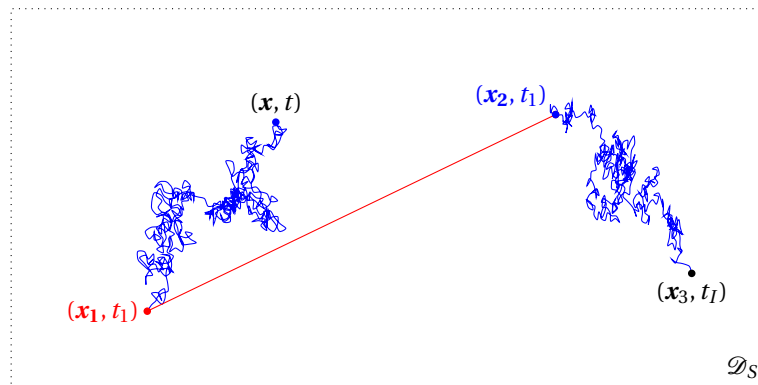
- couplage conduction rayonnement dans un milieu infini semi-transparent ;
- couplage conduction rayonnement dans un pavé droit de conditions limites de Dirichlet ;
- couplage conduction convection rayonnement d'un mur fluide semi-transparent parfaitement mélangé entre deux solides semi-infinis semi-transparentes.

Dans ces trois exemples, nous avons pu vérifier que l'algorithme de Monte Carlo converge bien vers la solution du problème. Tandis que les algorithmes et tableaux de validation correspondants peuvent être retrouvés en annexe B, cette section présente un aperçu de ces différentes configurations et des chemins couplés qui en résultent.

### Milieu infini semi-transparent

Soit  $\mathcal{D}_S$  un milieu solide infini semi-transparent de propriétés physiques homogènes. La température initiale  $\theta_I$  étant hétérogène dans le milieu, l'effet combiné de la conduction et du rayonnement tend à homogénéiser le champ de température au cours du temps.

L'échantillonnage du processus de propagation est illustré dans la figure 3.4 pour l'évaluation de la température  $\theta(\mathbf{x}, t)$  en un point  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_S$  au temps  $t$ . Ce dernier consiste à suivre un mouvement brownien partant du point de départ  $\mathbf{x}$  se propageant à rebours dans le temps jusqu'à ce que ce dernier soit arrêté à un temps échantillonné aléatoirement selon la constante de temps caractéristique d'émission radiative. La distribution des positions possibles pour le marcheur est alors exactement connue comme étant une gaussienne centrée en  $\mathbf{x}$  d'écart-type fonction de ce temps d'émission ainsi que des propriétés du milieu. Depuis ce nouveau point, un unique chemin radiatif est émis à travers le milieu et subit d'éventuelles multiples diffusions jusqu'à être à nouveau absorbé par le milieu. Le processus se répète alors jusqu'à ce que la condition initiale soit atteinte.



**FIGURE 3.4** – Représentation d'un chemin conducto-radiatif dans un milieu infini semi-transparent  $\mathcal{D}_S$ . Du point de départ  $\mathbf{x}$ , le chemin aléatoire se propage selon un mouvement brownien (trait bleu) jusqu'au point d'émission par rayonnement  $\mathbf{x}_1$  au temps d'émission  $t_1$ . Le chemin se poursuit alors selon le processus radiatif qui est ici représenté sans diffusions (trait rouge rectiligne). Au bout d'une certaine distance parcourue, le rayon est absorbé en une nouvelle position  $\mathbf{x}_2$  aléatoirement distribuée selon la distance moyenne d'absorption par le milieu. En ce point, un nouveau mouvement brownien se propage à travers le milieu jusqu'à une nouvelle émission radiative, ou dans ce cas, atteindre la condition initiale en  $\mathbf{x}_3$ .

La validation de cette configuration est réalisée pour le cas particulier d'une condition initiale constituée de fonctions sinus selon les trois directions de l'espace, pour laquelle la solution analytique du problème est connue. Cependant, l'algorithme de Monte Carlo mis en œuvre resterait exact pour n'importe quelle forme de condition initiale, ainsi que pour des propriétés radiatives non-uniformes.

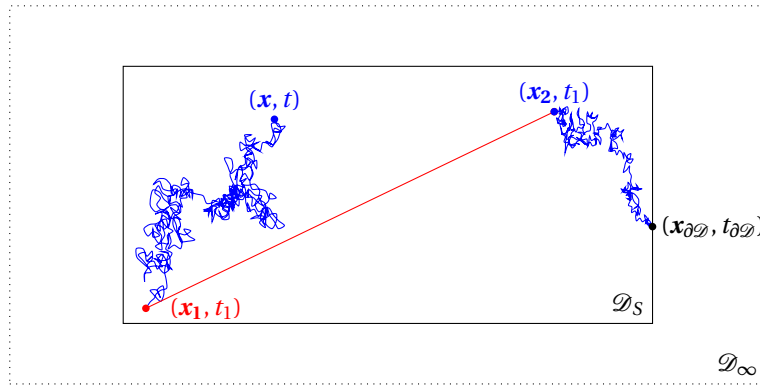
### Pavé droit et Random Walk on Rectangles

Soit  $\mathcal{D}_S$  un pavé droit solide semi-transparent de propriétés physiques homogènes. Dans ce dernier, l'ensemble des paramètres physiques ainsi que la condition limite  $\theta_{\partial\mathcal{D}}$  sont choisis de telle sorte que la solution soit exactement la même que pour le milieu infini. Ce choix impose en particulier



que la température radiative  $\hat{\theta}_R$  soit imposée dans l'ensemble de l'espace autour de  $\mathcal{D}_S$ , à partir de la solution du problème infini équivalent.

En théorie, cet exemple se comporte strictement comme l'exemple précédent. Cependant, en raison de la frontière finie du domaine solide, l'échantillonnage des positions et temps d'émissions browniens requièrent une attention toute particulière. La solution proposée par [Deaconu+2006] a alors été mise en œuvre pour être capable d'échantillonner les temps de sortie du mouvement brownien à travers  $\partial\mathcal{D}_S$ , mais aussi les positions de sortie sur  $\partial\mathcal{D}_S$  sachant que le chemin brownien est sorti du domaine, et les positions d'émission radiative ou d'atteinte de la condition initiale dans  $\mathcal{D}_S$  sachant qu'il n'a jamais atteint la paroi. Dans cette géométrie particulière, la proposition du Random Walk on Rectangles est particulièrement adaptée et permet d'obtenir un algorithme comparable à l'exemple précédent, illustré par la figure 3.5.



**FIGURE 3.5** – Représentation d'un chemin conducto-radiatif dans un milieu fini semi-transparent. Du point de départ  $\mathbf{x}$ , un temps d'émission radiative et un temps d'atteinte de la paroi du mouvement brownien sont échantillonnés. Seul le premier de ces événements se produit alors, dans cet exemple, il s'agit d'une émission radiative au temps  $t_1$  en  $\mathbf{x}_1$  une position échantillonnée sachant que le mouvement brownien n'a jamais atteint la paroi. Le processus radiatif propage alors ici sans diffusion le chemin jusqu'au point  $\mathbf{x}_2$  où il est à nouveau absorbé par le milieu. De nouveaux temps d'émission et de sortie du milieu sont à nouveau échantillonnés, et l'événement le plus court est alors l'atteinte de la paroi, ce qui mène à l'échantillonnage de la position  $\mathbf{x}_{\partial\mathcal{D}}$  sachant que l'on est sorti exactement au temps  $t_{\partial\mathcal{D}}$ . Le poids de Monte Carlo retenu par cet échantillon est alors la température de paroi en ce point, à ce temps, qui est issue de la solution analytique en milieu infini.

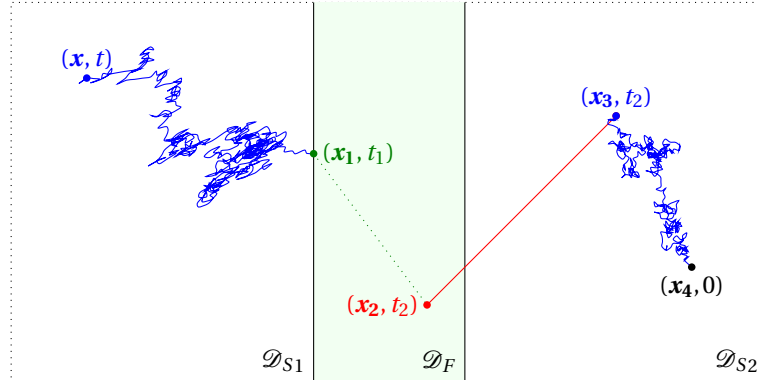
Il est à noter qu'un exemple similaire aurait pu être produit dans une sphère plutôt qu'un pavé droit en utilisant les résultats fondateurs de [HajiSheikh+1967] pour la conduction instationnaire.

## Mur fluide parfaitement mélangé

L'exemple du mur fluide  $\mathcal{D}_F$  parfaitement mélangé entre deux solides semi-infinis  $\mathcal{D}_{S1}$  et  $\mathcal{D}_{S2}$  permet de mettre en œuvre un couplage conducto-convecto-radiatif. Son échantillonnage exact est possible grâce à la fonction de Green du solide semi-infini en présence d'une condition limite convective. Cette dernière permet alors d'échantillonner pour un mouvement brownien des temps d'absorption par le fluide, ainsi que des positions d'émissions radiatives ou d'atteinte de la condition initiale sachant que la paroi n'a jamais été traversée.

La figure 3.6 illustre le comportement d'un tel chemin couplé. Dans cet exemple, le mouvement brownien partant du point  $\mathbf{x}$  peut alors être soit absorbé à la paroi convective, soit être émis par rayonnement, soit atteindre la condition initiale. L'ordre des processus conductifs, convectifs, et radiatifs qui se succèdent n'est donc pas a priori connu, et doit être déterminé systématiquement. En pratique, l'échantillonnage de cet ordre se fait comme précédemment en tirant aléatoirement

des temps correspondant au changement de phénomènes de transfert, et en réalisant l'événement le plus proche dans le temps.



**FIGURE 3.6** – Représentation d'un chemin conducto-convecto-radiatif dans un mur fluide parfaitement mélangé confiné entre deux solides semi-infinis. Du point de départ  $\mathbf{x}$ , le chemin aléatoire se propage selon un mouvement brownien jusqu'à avoir été absorbé par la condition limite convective, ou avoir été émis par rayonnement. Dans cet exemple, l'absorption par la paroi est l'événement ayant lieu, ce qui mène à un chemin convectif dans le fluide. Ce dernier peut soit amener à la condition initiale, soit au terme de renouvellement, soit à l'absorption par le solide en paroi, soit encore à une émission radiative en un point aléatoire du milieu. Ici, il s'agit de ce dernier cas de figure, et le chemin se poursuit alors selon un chemin radiatif se propageant dans cet exemple sans diffusion jusqu'au point  $\mathbf{x}_3$  où il est nouveau absorbé par le milieu. Le chemin se propage alors à nouveau selon un mouvement brownien jusqu'à atteindre la condition initiale, être absorbé par le fluide en paroi, ou être émis par rayonnement. Dans cet exemple, c'est la condition initiale qui est atteinte en  $\mathbf{x}_4$ .

## Comment simuler ces chemins au-delà de configurations académiques ?

Dans ce chapitre, nous avons montré comment un problème couplé conducto-convecto-radiatif pouvait être reformulé de sorte que la température en un point apparaisse comme l'espérance d'une variable aléatoire. Dans un premier temps, cette formulation a été présentée à partir des travaux de Green. Dans un second temps elle a été redite en processus, en accord avec le formalisme de Feynman-Kac. Les algorithmes de Monte Carlo résultants étaient exacts.

A ce stade, étant donnés nos objectifs, mais toujours dans cet esprit de définir le cadre formel et justifier un raisonnement en espaces de chemins, deux questions se présentent à nous :

- sommes-nous capables d'intégrer une réelle fluïdique, c'est-à-dire de dépasser le modèle des cellules parfaitement brassées ?
- que signifie d'aller au-delà des géométries simples que nous venons d'aborder ?

En ce qui concerne la première question, il s'agit non plus de résoudre l'équation 3.2 mais l'équation 3.24 où  $\alpha_F$  est la diffusivité thermique du fluide et  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  son champ de vitesse.

$$\frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = -\nabla \cdot (-\alpha_F \nabla T(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) T(\mathbf{x}, t)), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D}_F, t \leq 0 \quad (3.24)$$

Le processus associé à cette nouvelle équation est connu sous le nom de *Processus de Wiener avec drift*, c'est-à-dire que sa trajectoire est similaire à un processus de Wiener, mais advectée en tout point par la vitesse locale du fluide. Dans le cas d'un champ de vitesse uniforme, sa densité de

présence dans un milieu infini est une gaussienne d'écart-type  $\sqrt{2\alpha_F t}$  centrée sur le point de départ et advectée pendant  $t$  par le champ de vitesse. Cependant, en toute généralité, cette densité de présence est inconnue pour un champ de vitesse hétérogène.

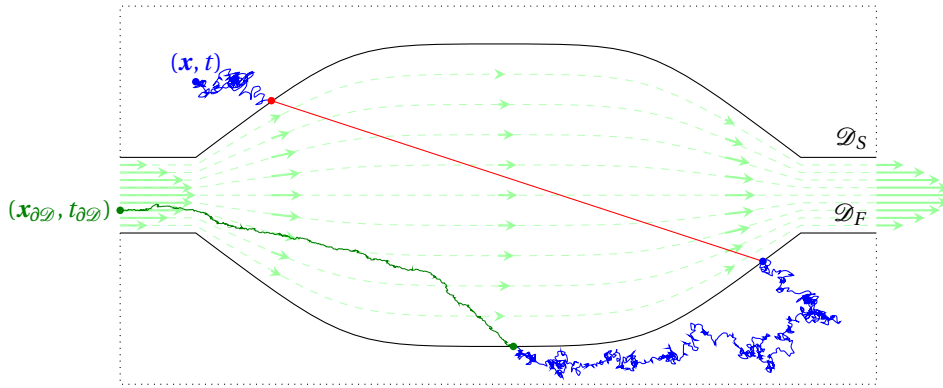
Par ailleurs, la formulation exacte de la solution du système couplé en présence de ce nouveau processus pose problème en raison de la condition limite de continuité du flux à la frontière solide-fluide. En effet, en considérant une condition de non-glissement à la paroi (vitesse nulle), la condition limite sur la surface  $\partial\mathcal{D}_S \cap \partial\mathcal{D}_F$  s'écrit selon l'équation 3.25 où  $\mathbf{n}(\mathbf{y})$  est la normale à la surface  $\partial\mathcal{D}_S \cap \partial\mathcal{D}_F$  en  $\mathbf{y} \in \partial\mathcal{D}_S \cap \partial\mathcal{D}_F$  pointant vers  $\mathcal{D}_F$ .

$$-\lambda_S \nabla T(\mathbf{y}^-) \cdot \mathbf{n} = -\lambda_F \nabla T(\mathbf{y}^+) \cdot (-\mathbf{n}), \quad \mathbf{y} \in \partial\mathcal{D}_S \cap \partial\mathcal{D}_F \quad (3.25)$$

avec  $\mathbf{y}^- = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}} (\mathbf{x} \in \mathcal{D}_S)$  et  $\mathbf{y}^+ = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}} (\mathbf{x} \in \mathcal{D}_F)$ .

Le travail de formulation permettant de réaliser le couplage des processus dans les deux milieux distincts par cette condition de continuité du flux est un travail qui reste à ce jour très ouvert. En introduisant l'advection, nous rencontrons donc des difficultés supplémentaires qui font qu'il est difficile de concevoir des exemples de mise en œuvre avec un vrai couplage avec la conduction et le rayonnement, même en géométrie simple. Cependant rien ne change radicalement en ce qui concerne la définition des chemins. La figure 3.7 illustre comment un tel processus, si on savait l'échantillonner, pourrait être intégré à une modélisation statistique du type de celles que nous venons de présenter.

Les images physiques que proposent cette figure seront conservées par la suite, même si pour cela nous devons abandonner l'idée d'échantillonner les chemins de façon exacte. C'est de toute façon également en abandonnant l'idée de l'exactitude que nous trouverons la réponse à la seconde des deux questions que nous venons de formuler : pour aller au-delà des géométries simples et aborder la question de la complexité géométrique telle que nous l'avons définie, dans les chapitres qui suivent nous ferons appel à des approximations faisant intervenir un pas d'espace et ce n'est qu'à la limite où ce pas d'espace tend vers zéro que les marches que nous emploierons retrouveront les marches exactes du présent chapitre.



**FIGURE 3.7** – Illustration d'un potentiel chemin statistique advecto-conducto-radiatif couplé dans lequel le transfert radiatif est restreint au domaine fluide (milieu solide opaque et fluide transparent) et dans lequel un mouvement brownien avec drift est utilisé pour simuler le transfert thermique advecto-diffusif dans le fluide. La continuité du processus à la frontière solide-fluide est inspirée d'une approximation de type schéma d'Euler.

# Une marche advecto-conducto-radiative compatible avec le ray-tracing

Quelle formulation probabiliste pour une compatibilité avec les outils de la synthèse d'image ? . . . . .	61
4.1 Marches advecto-diffusives en géométrie quelconque . . . . .	63
4.1.1 En conduction, un Walk on Sphere à pas constant . . . . .	63
4.1.2 En convection, une marche lagrangienne s'inspirant du schéma exponentiel et de la marche conductive . . . . .	65
4.1.3 Une différence finie pour évaluer la température de paroi . . . . .	72
4.1.4 Un bilan sur les schémas numériques utilisés . . . . .	73
4.2 Vers une mise en œuvre dans un cas réel . . . . .	74
Comportement du schéma numérique advecto-diffusif : de premiers éléments d'analyse	91

## Quelle formulation probabiliste pour une compatibilité avec les outils de la synthèse d'image ?

Dans le précédent chapitre, nous avons présenté des éléments théoriques permettant de justifier rigoureusement l'existence d'une pensée, mais aussi une pratique, en espaces de chemins pour la résolution des transferts thermiques couplés. Sur une configuration conducto-convecto-radiative avec cellules fluides homogènes et rayonnement linéarisé, nous avons formellement exprimé la température comme une espérance sur une variable aléatoire. Par l'approche de Feynman-Kac, cette variable aléatoire nous est alors apparue comme un processus continu dans le temps, dont une réalisation consiste en la construction d'un chemin statistique au bout duquel une température connue est retenue. Dans le chapitre présent, on souhaite mettre en œuvre cette approche pour des transferts thermiques advecto-conducto-radiatifs dans des systèmes réels en géométrie complexe.

Les deux difficultés principales sont d'une part la construction d'une marche diffusive ou advecto-diffusive dans un solide ou un fluide de frontière quelconque, et d'autre part la connexion entre elles de deux marches dans des milieux distincts : diffusion/diffusion à l'interface entre deux solides de propriétés différentes, diffusion/advecto-diffusion à l'interface entre un solide et un fluide, le tout potentiellement à combiner avec une marche radiative. Nous avons mené tout au

---

long de cette recherche une étude bibliographique approfondie concernant les solutions exactes disponibles. Nous appelons "solutions exactes" les algorithmes permettant d'échantillonner rigoureusement les chemins, donc de reconstruire la fonction de Green du problème sans autre approximation que le nombre limité de réalisations (dont la source d'incertitude est mesurée). Par opposition, les "solutions approchées" feront appel à des paramètres numériques, la reconstruction de la fonction de Green n'étant typiquement assurée que lorsqu'on fait tendre ces paramètres numériques vers zéro. La littérature ne laisse aucun doute sur le fait qu'aucune solution exacte qui permettrait la gestion de géométries aussi complexes que celles illustrées dans la section 2.2.2 n'est aujourd'hui disponible pour la diffusion, l'advection-diffusion et les interfaces.

On est donc obligé de choisir une solution approchée. Les travaux existants qui correspondent à cette question sont séparés en deux parties :

- Dans une première famille d'approches, les raisonnements sont menés dans le cadre conceptuel des processus stochastiques et les approximations proposées sont donc directement énoncées en termes de variables aléatoires : la numérisation est intrinsèquement statistique.
- Dans une seconde famille, le point de départ est un travail numérique mené sur l'équation de la chaleur et ses conditions à la limite. On abandonne donc temporairement le point de vue statistique ce qui permet de faire appel à tout l'édifice théorique de la thermique numérique usuelle. Et ce n'est qu'une fois que le schéma numérique est entièrement établi en termes déterministes que sa prédiction approchée est interprétée en termes statistiques : la marche aléatoire est construite après numérisation.

Nous avons fait le choix de cette seconde famille. Toutes nos propositions partiront donc d'une sélection parmi les méthodes numériques disponibles dans la littérature de la thermique numérique la plus usuelle. Cette sélection devra être faite à la fois en ce qui concerne la résolution de l'équation de la chaleur et le traitement des conditions à la limite. Notre seule originalité consistera alors à décliner ces choix en termes statistiques. Nous obtiendrons ainsi des chemins qui ne seront plus exacts mais qui tendront vers l'exactitude en jouant sur les paramètres de numérisation (typiquement en réduisant le pas de discrétisation spatiale) de la même façon que la méthode d'origine.

Un élément essentiel de notre recherche est le souhait de gérer des géométries complexes grâce à des techniques d'accélération algorithmique issues de la recherche en informatique graphique. Les méthodes numériques que nous retiendrons pour décrire la thermique, et que nous serons parfois conduits à modifier légèrement par rapport à leurs versions déterministes usuelles, devront donc satisfaire une contrainte forte : les expressions obtenues doivent conduire à des marches aléatoires n'implémentant rien d'autre qu'un lancer de rayon (recherche de l'interface la plus proche dans une direction donnée).

La première section commence par une description des choix numériques réalisés pour la construction du propagateur approché de la conduction thermique à l'origine des exemples de la section 2.2.2. Ce dernier s'appuie effectivement sur le lancer de rayon et est bien compatible avec les outils de la synthèse d'image, de telle sorte qu'il reste utilisable en l'état indépendamment de la complexité géométrique du système étudié. A ce stade, nous aurons justifié les algorithmes ayant déjà fait la preuve de leur passage à l'échelle dans différents contextes industriels en l'absence d'advection.

Ensuite, toujours dans cette même section, nous proposerons une extension à des situations advection-diffusives non-uniformes en température. Cette extension prend inspiration du schéma exponentiel énoncé par Patankar en 1980. Ce schéma inspiré de la solution analytique 1D du problème advection-diffusif permet alors d'exprimer la température en tout point de l'espace comme une moyenne pondérée de températures en d'autres points de l'espace. Cette propriété est particulièrement importante car son interprétation statistique, dans l'esprit des écritures obtenues par les approches de Feynman-Kac et de Green dans le chapitre 3, permet de voir la température locale comme l'espérance d'une variable aléatoire renvoyant la température en d'autres points du voisinage. Par récursivité, cette brique élémentaire permet alors de continuer à penser la

température dans le fluide sur un espace de chemins. Le choix de ce schéma plutôt qu'un autre sera discuté dans cette section.

La seconde section est constituée d'un article qui re-contextualise la construction des marches conductives, convectives, et radiatives ainsi que leur couplage, puis propose une écriture des algorithmes correspondants. Après une validation sur des exemples donnant lieu à des solutions analytiques puis numériques, une mise en œuvre dans un échangeur poreux solaire permet de démontrer l'insensibilité de la méthode à la complexité géométrique, de manière homologue aux résultats présentés dans le chapitre 2 dans le cas du seul transfert radiatif.

Dans une dernière section, une validation plus approfondie du schéma advecto-diffusif utilisé est proposée afin d'en mesurer les limites et comportements en fonction de la nature de l'écoulement et du paramètre numérique de discrétisation de l'espace choisi.

## 4.1 Marches advecto-diffusives en géométrie quelconque

De la proposition initiale de [Muller1956] présentée en section 1.3.3 est née une famille de marches statistiques sur des géométries simples pour la résolution de l'équation de diffusion. La première grande proposition suivant cette dernière est son extension à des calculs instationnaires, ainsi que la prise en compte d'un grand nombre de conditions aux limites, ou termes sources volumiques avec les travaux de [HajiSheikh+1966] qui sont plus extensivement détaillés dans le chapitre 8 de [Minkowycz+2006]. Malgré une période présentant peu de nouvelles formulations depuis cette époque, des travaux plus récents [Deaconu+2006] proposent une marche sur des pavés droits au lieu de sphères, ce qui permet notamment de limiter l'approximation d'épaississement des frontières dans des géométries constituées de portions de plans.

En parallèle, peu de travaux se consacrent à la formulation de marches statistiques permettant de résoudre l'équation d'advection-diffusion par cette même approche. Cependant, des travaux contemporains aux propositions ici présentées proposent une marche de type Walk on Sphere pour les problèmes advecto-diffusifs [Sabelfeld2016]. Dans ces derniers, les auteurs construisent une marche sur des sphères, dans laquelle la distribution de sortie sur chaque sphère est une *distribution de Von Mises-Fisher*. Ces travaux ont alors été rapidement étendus au régime instationnaire et à l'inclusion de termes réactifs.

Cependant, l'ensemble de ces propositions repose sur la connaissance de la distance à la plus proche paroi en tout point de l'espace. Cette section présente le détail de la construction d'une marche conductive ainsi que d'une marche advecto-diffusive, toutes deux au régime stationnaire, qui de façon alternative reposent sur le lancer de rayon.

Une ébauche de discussion concernant l'extension en instationnaire des marches statistiques présentées ici est disponible en annexe A.2.

### 4.1.1 En conduction, un Walk on Sphere à pas constant

#### Conduction stationnaire et Walk on Sphere

Soit un problème de diffusion thermique en absence de sources internes décrit par le système 4.1.

$$\begin{cases} \Delta T(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega_S \\ T(\mathbf{y}) = T_0(\mathbf{y}), & \mathbf{y} \in \partial\Omega_S \end{cases} \quad (4.1)$$

En conduction, la marche historique usuellement utilisée pour résoudre un tel problème est la Random Walk On Sphere, telle que présentée en section 1.3.3. Chaque pas de cette marche

aléatoire revient à exprimer la température au point courant selon la formulation intégrale 4.2 où  $\mathcal{S}(\mathbf{x}, \delta)$  est la sphère de centre  $\mathbf{x}$  et de rayon  $\delta$ . La marche aléatoire ainsi construite se déplace sur la surface de sphères centrées sur le point courant de la marche, et de rayon maximal de façon à être tangent à la surface  $\partial\Omega_S$ .

$$T(\mathbf{x}) = \int_{4\pi} \frac{1}{4\pi} d\omega(\mathbf{u}) T(\mathbf{x} + \delta(\mathbf{x})\mathbf{u}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_S, \quad \delta(\mathbf{x}) = \max_{\delta}(\{\mathcal{S}(\mathbf{x}, \delta) \cap \partial\Omega_S\} = \emptyset) \quad (4.2)$$

## Une proposition de marche compatible avec les outils de la synthèse d'image

Comme présenté dans la section 2.1, les outils de la synthèse d'image permettant de gérer les géométries complexes sont optimisés pour le lancer de rayon, c'est-à-dire pour évaluer efficacement la distance  $\delta_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \min_{\delta>0}(\{[\mathbf{x}, \mathbf{x} + \delta\mathbf{u}] \cap \partial\Omega_S\} \neq \emptyset)$  qui est la distance à la plus proche paroi en n'importe quel point  $\mathbf{x} \in \Omega_S$ , dans n'importe quelle direction  $\mathbf{u}$ . Cette distance ne permet pas, en l'état, de remonter à la donnée de la distance à la plus proche paroi requise dans la formulation de l'équation 4.2. En effet, obtenir la distance à la plus proche paroi reviendrait à lancer un rayon pour chaque direction possible, c'est-à-dire une infinité.

Afin de bénéficier des avantages des outils de la synthèse d'image, une marche modifiée a été mise au point lors des travaux recensés en section 2.2.2. Cette dernière, basée sur le lancer de rayon, consiste à fixer une taille de pas constante, qui est ajustée en proche paroi par deux lancers de rayons. L'expression intégrale d'un pas de cette nouvelle marche reste similaire à l'équation 4.2, mais pour une expression  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  du pas qui dépend cette fois de la direction. L'expression de ce nouveau pas de la marche est donnée dans l'équation 4.3 comme étant le minimum entre un paramètre numérique  $\delta_{\Omega_S}(\mathbf{x})$ ,  $\delta_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$  la distance à la plus proche paroi dans la direction  $\mathbf{u}$ , et  $\delta_{-\mathbf{u}}(\mathbf{x})$  la distance à la plus proche paroi dans la direction opposée. Ainsi, pour chaque pas de la marche partant d'un point  $\mathbf{x} \in \Omega_S$ , une direction aléatoire  $\mathbf{u}$  est échantillonnée comme précédemment, puis deux rayons sont lancés dans la scène : un rayon dans la direction  $\mathbf{u}$  pour évaluer  $\delta_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ , et un rayon dans la direction opposée pour évaluer  $\delta_{-\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ .

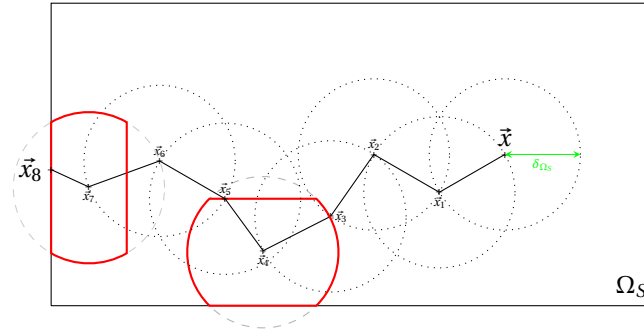
$$\begin{cases} \delta(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \min(\delta_{\Omega_S}(\mathbf{x}), \delta_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}), \delta_{-\mathbf{u}}(\mathbf{x})) \\ \delta_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) &= \min_{\delta>0}(\{[\mathbf{x}, \mathbf{x} + \delta\mathbf{u}] \cap \partial\Omega_S\} \neq \emptyset) \\ \delta_{-\mathbf{u}}(\mathbf{x}) &= \min_{\delta>0}(\{[\mathbf{x}, \mathbf{x} - \delta\mathbf{u}] \cap \partial\Omega_S\} \neq \emptyset) \end{cases} \quad (4.3)$$

La figure 4.1 illustre la création d'une marche utilisant ce pas  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  compatible avec le lancer de rayon. Au prix d'un plus grand nombre de pas pour atteindre la frontière, cette marche se comporte comme un Walk on Sphere sur des sphères de taille fixe. Cependant, en proche paroi, ces sphères sont déformées. Outre la compatibilité avec le lancer de rayon, cela permet à la marche de s'arrêter strictement sur la frontière  $\partial\Omega_S$  sans avoir recours à un "épaississement  $\epsilon$ -esque" de cette dernière comme dans la méthode du Walk on Sphere.

## Les bonnes propriétés de cette marche

Par construction, la marche proposée résout exactement l'équation de diffusion 4.1 loin des parois. En effet, en l'absence de parois, le pas  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  devient indépendant de la direction, la marche se comporte alors exactement comme une Random Walk on Sphere sur des sphères de taille fixe.

Par ailleurs, le choix réalisé d'un tel pas  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  permet également de résoudre l'équation de diffusion en proche paroi, sous l'hypothèse que la température  $y$  est localement trilineaire (c'est-à-dire linéaire selon chaque direction de l'espace). En effet, en supposant que le champ de température peut être localement exprimé sous la forme  $T(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + b$  dans la sphère  $\mathcal{S}(\mathbf{x}, \delta_{\Omega_S}(\mathbf{x}))$ , il est possible de vérifier que la formulation intégrale 4.2 utilisant le pas  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  défini par l'équation 4.3 est bien solution :



**FIGURE 4.1** – Illustration 2D de la construction de la marche conductive proposée, compatible avec le lancer de rayon. Dans cet exemple, le paramètre numérique  $\delta_{\Omega_S}(\mathbf{x})$  est choisi constant en tout point du milieu. La marche aléatoire débute au point d'observation  $\mathbf{x} \in \Omega_S$ . En ce point, et en chacun des suivants, une direction aléatoire  $\mathbf{u}$  sur  $2\pi$  ( $4\pi$  en 3D) est échantillonnée, puis le point courant se déplace dans cette direction de la distance  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ . Après 8 pas, la marche atteint la frontière en  $\mathbf{x}_8 \in \partial\Omega_S$ . Pour évaluer la température en  $T(\mathbf{x})$ , cette réalisation de Monte Carlo retient la valeur  $T_{\delta\Omega_S}(\mathbf{x}_8)$ .

$$\begin{aligned}
 \int_{4\pi} \frac{1}{4\pi} d\omega(\mathbf{u}) T(\mathbf{x} + \delta(\mathbf{x}, \mathbf{u})\mathbf{u}) &= \int_{2\pi} \frac{1}{2\pi} d\omega(\mathbf{u}) \left[ \frac{1}{2} (T(\mathbf{x} + \delta(\mathbf{x}, \mathbf{u})\mathbf{u}) + T(\mathbf{x} - \delta(\mathbf{x}, -\mathbf{u})\mathbf{u})) \right] \\
 &= \int_{2\pi} \frac{1}{2\pi} d\omega(\mathbf{u}) \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} + \delta(\mathbf{x}, \mathbf{u})\mathbf{u}) + b + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \delta(\mathbf{x}, -\mathbf{u})\mathbf{u}) + b) \right] \\
 &= \int_{2\pi} \frac{1}{2\pi} d\omega(\mathbf{u}) \left[ \frac{1}{2} (2\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + 2b + \underbrace{\mathbf{a} \cdot (\delta(\mathbf{x}, \mathbf{u})\mathbf{u} - \delta(\mathbf{x}, -\mathbf{u})\mathbf{u})}_{=0}) \right] \\
 &= \int_{2\pi} \frac{1}{2\pi} d\omega(\mathbf{u}) T(\mathbf{x}) \\
 &= T(\mathbf{x})
 \end{aligned}$$

Cette propriété vient de la symétrie centrale de la distribution de  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  sur les directions  $\mathbf{u}$ .

#### 4.1.2 En convection, une marche lagrangienne s'inspirant du schéma exponentiel et de la marche conductive

Dans la situation bien particulière d'un champ de vitesse orthogonal en tout point au gradient de la température, la résolution de la température dans le fluide peut être ramenée à un problème de conduction pure (voir annexe A.1). Dans le cas contraire, plusieurs approches sont possibles pour tenir compte de la présence conjointe de flux diffusifs et advectifs. En effet, de nombreuses approximations du propagateur sont disponibles dans la littérature, notamment dans la communauté de la *mécanique des fluides numérique (CFD)*.

Dans cette section, l'objectif est cependant de construire une expression de la température homologue à l'équation 4.2 dans laquelle la température apparaît comme une moyenne de températures englobantes. En effet, une telle expression permet ensuite une lecture statistique consistant en une suite de pas en chacun desquels la grandeur d'observation est systématiquement une température. La suite des positions de ces températures à travers l'espace (et le temps au régime instationnaire) constitue alors un chemin approché des chemins exprimés dans le chapitre 3 par l'approche de Feynman-Kac.

Les travaux de [Spalding1972] puis [Patankar1980] en 1980 s'inspirent de la solution 1D de l'équation advecto-diffusive 4.4 pour établir un schéma numérique permettant de résoudre les pro-



blèmes advecto-diffusifs stationnaires, puis instationnaires, dans des écoulements incompressibles.

$$\nabla \cdot (\alpha \nabla T - \mathbf{v}T) = 0 \quad (4.4)$$

Dans ces travaux, Patankar présente les raisons pour lesquelles une approche différences finies peut poser des problèmes de stabilité. Par ailleurs, son alternative naturelle, l'*Upwind Scheme* (ou *Schéma Amont*), présente des limites pour de faibles valeurs du nombre de Péclet, c'est-à-dire lorsque la diffusion prédomine sur l'advection. Il propose alors de construire un schéma exponentiel exact en 1D, qu'il étend par la suite aux dimensions plus grandes sous des hypothèses d'homogénéité sous maille. Pour des raisons de temps de calcul, il choisit par la suite de construire des alternatives plus économiques pour approcher le schéma exponentiel, par exemple avec des fonctions puissance (*Hybrid Scheme* et *Power-Law Scheme*). Les convergences associées à ces différents schémas seront par la suite comparées, par exemple dans [Patel+1985] qui montre une vitesse de convergence parmi les plus rapides avec le schéma exponentiel, malgré des temps de calcul rédhibitoires en raison de la fonction exponentielle dans son expression.

Tandis que de nombreux schémas plus récents présentent de meilleures performances que le schéma exponentiel de Patankar (voir par exemple [Prakash1984]), nous retenons ce dernier en raison de son fondement théorique qui en fait un des schémas "classiques" de la résolution de l'équation d'advecto-diffusion. La réflexion plus générale autour des couplages des chemins advecto-conducto-radiatifs ne dépend cependant pas de la nature du schéma utilisé pour résoudre cette équation, et n'importe quel autre schéma peut donc y être substitué à condition qu'il permette d'exprimer la température comme une moyenne d'autres températures. A titre d'exemple, les schémas de type différences finies d'ordre supérieur à 2 font apparaître des pondérations de grandeurs étant l'opposée d'une valeur de température ( $-T(\mathbf{x})$ ) en certains points, ce qui ne permet plus de penser la réalisation de cet événement comme une portion de chemin.

Cette section reprend les éléments principaux de la construction du schéma exponentiel, auxquels sont ajoutés des choix d'écriture permettant d'aboutir à une formulation intégrale homologue à celle proposée pour la marche conductive.

## Le Schéma Exponentiel 1D

Dans un segment 1D  $[0, \delta]$  de températures de bords  $T_0$  et  $T_\delta$ , mû par une advection uniforme  $\mathbf{v}$ , et en présence d'une diffusivité thermique  $\alpha$  uniforme également, la solution de l'équation 4.4 illustrée dans la figure 4.2 peut s'écrire selon l'équation 4.5<sup>1</sup> où Pe est le nombre de Péclet défini par la relation 4.6 où  $\nu$  est la norme orientée de la vitesse telle que  $\mathbf{v} = \nu \mathbf{e}_x$  avec  $\mathbf{e}_x$  un vecteur directeur unitaire de l'espace.

$$\frac{T(x) - T_0}{T_\delta - T_0} = \frac{\exp\left(\text{Pe} \frac{x}{\delta}\right) - 1}{\exp(\text{Pe}) - 1} \quad (4.5)$$

$$\text{Pe} = \frac{\nu \delta}{\alpha} \quad (4.6)$$

D'après l'équation 4.4, le flux  $\mathbf{j}_{|0, \delta|} = -\alpha \nabla T + \mathbf{v}T$  est alors constant en tout point et fonction des valeurs du nombre de Péclet, et des deux températures  $T_0$  et  $T_\delta$  :

1. Pour rappel,

$$\lim_{\text{Pe} \rightarrow 0} \left( \frac{\exp\left(\text{Pe} \frac{x}{\delta}\right) - 1}{\exp(\text{Pe}) - 1} \right) = \frac{x}{\delta}$$

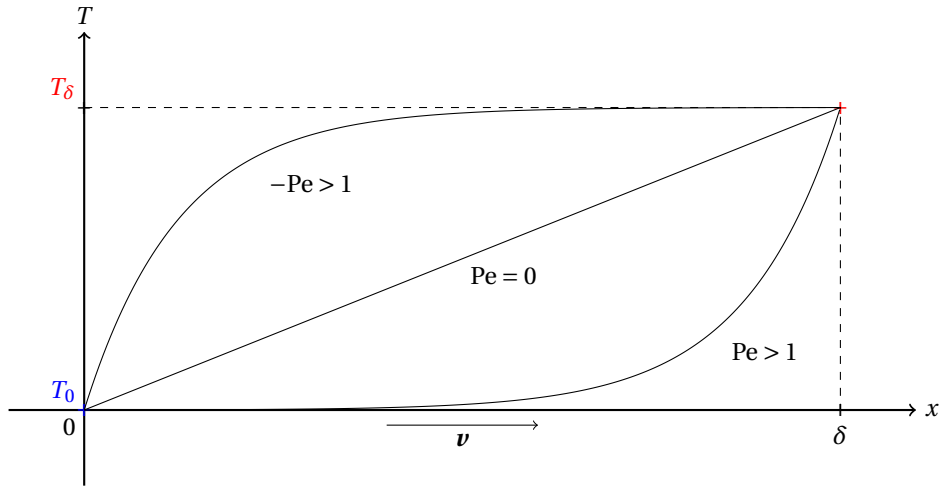


FIGURE 4.2 – Illustration de la solution de l'équation advecto-diffusive dans un segment 1D parcouru par une vitesse uniforme  $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ .

$$\frac{\mathbf{j}_{0,\delta} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \|\mathbf{v}\| \left( T_0 - \frac{T_\delta - T_0}{\exp(\text{Pe}) - 1} \right)$$

En considérant ensuite le segment  $[-\delta, 0]$  dans les mêmes conditions, il est à nouveau possible d'écrire une expression du flux  $\mathbf{j}_{[-\delta, 0]}$  dans cette zone de l'espace en fonction du même nombre de Péclet, ainsi que des températures  $T_0$  et  $T_{-\delta}$  :

$$\frac{\mathbf{j}_{[-\delta, 0]} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \|\mathbf{v}\| \left( T_{-\delta} - \frac{T_0 - T_{-\delta}}{\exp(\text{Pe}) - 1} \right)$$

Par continuité du flux, la température en  $T_0$  peut alors être exprimée comme l'équation 4.7.  $T_0$  apparaît alors comme la moyenne pondérée des températures  $T_{-\delta}$  et  $T_\delta$ . Cette expression est le schéma exponentiel 1D proposé par Patankar. Il peut être vérifié qu'aux limites de la diffusion pure  $\text{Pe} \rightarrow 0$  et de l'advection pure  $\text{Pe} \rightarrow \infty$ , l'expression de  $T_0$  tend respectivement vers la linéarité, et le schéma amont<sup>2</sup>.

$$T_0 = \frac{1}{1 + \exp(\text{Pe})} T_\delta + \frac{\exp(\text{Pe})}{1 + \exp(\text{Pe})} T_{-\delta} \quad (4.7)$$

### Extension en trois dimensions

En 3D, Patankar propose d'utiliser un volume de référence, par exemple le cube présenté en figure 4.3, dans lequel l'équation 4.4 est réécrite en utilisant le théorème de *Green-Ostrogradski*. En appelant  $J_k$  ( $k \in \{1, \dots, 6\}$ ) le flux total traversant la  $k$ -ième face du cube, l'équation 4.4 se ramène au bilan 4.8. En supposant alors que le flux est uniforme sur chaque face et que la dimension du cube  $\delta$  est suffisamment petite pour négliger les variations de  $\mathbf{v}$  et  $\alpha$ , l'injection de l'expression 1D de la densité de flux présentée précédemment mène à l'équation 4.9. Un travail de reformulation permet alors de construire l'expression 4.10, dans laquelle la température au point d'observation  $\mathbf{x}$  apparaît comme la moyenne pondérée des températures dans les volumes de contrôle englobants. Par construction, cette expression est alors exacte si le champ de température est mono-dimensionnel dans le volume étudié, c'est-à-dire que son expression est sous la forme de l'équation 4.5 selon une direction de l'espace.

2. A la limite  $\text{Pe} \rightarrow 0$ , on retrouve en effet l'expression  $T_0 = \frac{1}{2} T_\delta + \frac{1}{2} T_{-\delta}$ . De même, à la limite  $\text{Pe} \rightarrow \infty$ , on obtient l'égalité  $T_0 = T_{-\delta}$ .

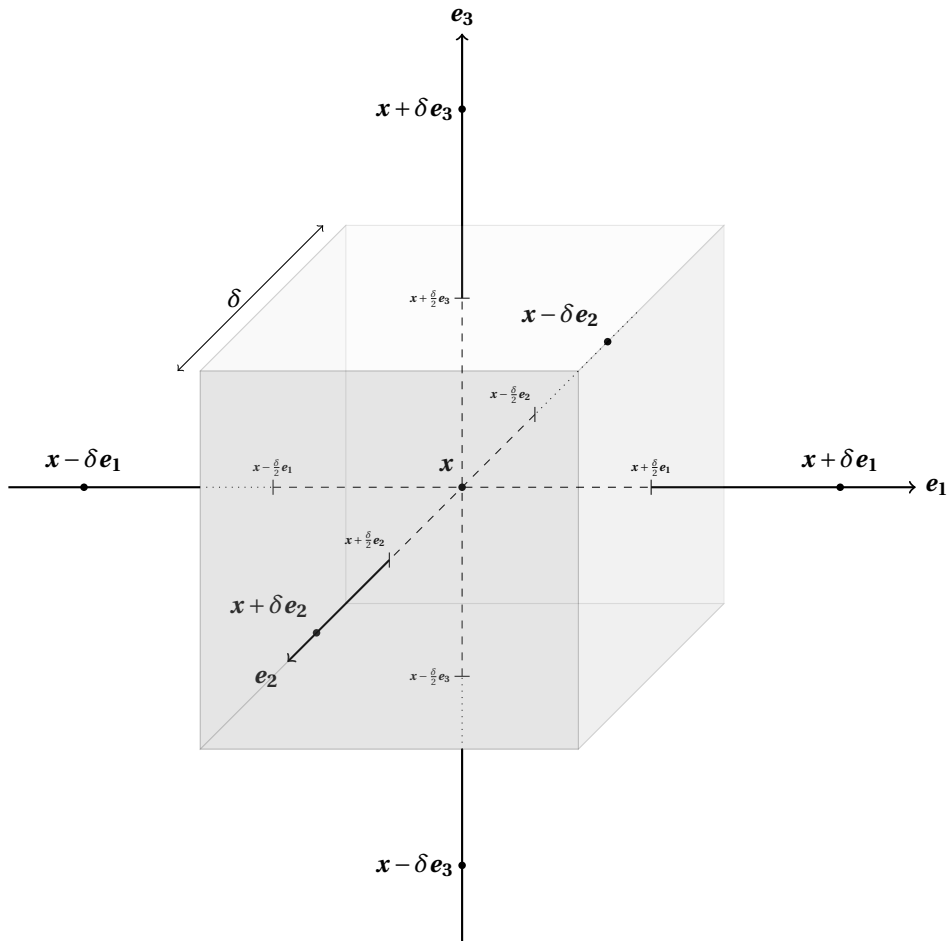


FIGURE 4.3 – Illustration du volume de contrôle 3D utilisé pour construire le schéma exponentiel 3D.

$$\sum_{k=1}^6 J_k = 0 \quad (4.8)$$

$$\sum_{k=1}^6 \left[ \text{Pe}_k \left( T(\mathbf{x}) - \frac{T(\mathbf{x} + \delta \mathbf{u}_k) - T(\mathbf{x})}{\exp(\text{Pe}_k) - 1} \right) \right] = 0, \quad \mathbf{u}_k = (-1)^k \mathbf{e}_{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}, \text{Pe}_k = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k \delta}{\alpha} \quad (4.9)$$

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^6 \left[ T(\mathbf{x} + \delta \mathbf{u}_k) \frac{\frac{\text{Pe}_k}{\exp(\text{Pe}_k) - 1}}{\sum_{k=1}^6 \left[ \frac{\text{Pe}_k}{\exp(\text{Pe}_k) - 1} \right]} \right] \quad (4.10)$$

### Lecture en marche statistique du schéma exponentiel

La proposition de Patankar consiste ensuite à considérer que le volume de contrôle utilisé pour établir l'expression 4.10 est un élément du maillage permettant de décrire le système étudié. Ceci mène à une expression matricielle reliant toutes les températures des zones de contrôle entre elles, ainsi qu'aux conditions limites. Cette équation matricielle peut ensuite être résolue par une des nombreuses méthodes numériques existantes.

Cependant, l'expression 4.10 peut également être utilisée pour construire une marche advecto-diffusive permettant d'approcher la solution de l'équation 4.4. En effet, la température au point  $\mathbf{x}$  apparaît comme la somme pondérée de six températures englobantes. A chacune de ces températures  $T(\mathbf{x} + \delta \mathbf{u}_k)$ , l'expression 4.10 associe une probabilité discrète  $p_k$  d'être réalisée telle que :

$$p_k = \frac{\frac{\text{Pe}_k}{\exp(\text{Pe}_k) - 1}}{\sum_{k=1}^6 \left[ \frac{\text{Pe}_k}{\exp(\text{Pe}_k) - 1} \right]}$$

Un pas de cette marche aléatoire consiste alors à se déplacer dans l'une des six directions  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_6\}$  selon le jeu de probabilités  $\{p_1, \dots, p_6\}$ . En ce nouveau point, la même opération est répétée avec les valeurs locales de  $\nu$ ,  $\delta$ , et  $\alpha$ , et ainsi de suite jusqu'à atteindre un point auquel la température échantillonnée est connue.

### Une proposition lagrangienne possible en absence de maillage

Dans la lecture statistique faite de l'expression 4.10, la notion de maillage n'existe plus, le choix du repère  $(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  est donc arbitraire. Dans cette section, une proposition de choix de repère est présentée afin de garantir l'exactitude du schéma à certaines limites, ainsi que de raccrocher certains éléments de ce schéma à la marche conductive présentée précédemment.

A la limite advective pure du schéma exponentiel, les probabilités  $p_k$  comportant un nombre de Péclet  $\text{Pe}_k$  négatif tendent vers zéro. A cette limite, en alignant un des axes du repère avec le vecteur vitesse, toutes les probabilités  $p_k$  tendent donc vers zéro, sauf celle correspondant à la direction opposée au vecteur vitesse. En faisant ce choix, dans un champ à nombre de Péclet infini, le schéma est alors exact pour toute valeur du pas  $\delta$  (voir équation 4.12). Par exemple, en choisissant  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_\nu = \frac{\nu}{\|\nu\|}$ , l'expression 4.10 s'écrit selon l'équation 4.11, où  $\text{Pe}$  est le nombre de Péclet local défini en 4.6.

$$T(\mathbf{x}) = \frac{\text{Pe}}{\text{Pe}(1 + \exp(\text{Pe})) + 4(\exp(\text{Pe}) - 1)} T(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_\nu) + \frac{\text{Pe} \exp(\text{Pe})}{\text{Pe}(1 + \exp(\text{Pe})) + 4(\exp(\text{Pe}) - 1)} T(\mathbf{x} - \delta \mathbf{e}_\nu) + \sum_{k=3}^6 \left[ \frac{\exp(\text{Pe}) - 1}{\text{Pe}(1 + \exp(\text{Pe})) + 4(\exp(\text{Pe}) - 1)} T(\mathbf{x} + \delta \mathbf{u}_k) \right] \quad (4.11)$$

$$\lim_{\text{Pe} \rightarrow \infty} T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x} - \delta \mathbf{e}_\nu) \quad (4.12)$$

En ce qui concerne le choix du degré de liberté restant pour fixer les directions  $\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}_3$ , aucune direction n'est a priori à favoriser. Un choix tout particulier possible reste de tirer aléatoirement la direction  $\mathbf{e}_2$  dans le plan orthogonal à  $\mathbf{e}_\nu$  à chaque pas (ce qui fixe  $\mathbf{e}_3$  par la même occasion). Ce choix singulier correspond à un calcul bien particulier de  $T(\mathbf{x})$ . En effet, le processus aléatoire consistant à tirer aléatoirement sur  $2\pi$  la direction de  $\mathbf{e}_2$  revient à réaliser l'intégrale sur l'espace des possibles de  $\mathbf{e}_2$  de l'expression de la température. L'équation 4.11 peut alors être réécrite selon l'équation 4.13, ce qui a fait apparaître le tirage aléatoire de  $\mathbf{e}_2$  dans la formulation intégrale de  $T(\mathbf{x})$ .

$$T(\mathbf{x}) = \frac{\text{Pe}}{\text{Pe}(1 + \exp(\text{Pe})) + 4(\exp(\text{Pe}) - 1)} T(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_\nu) + \frac{\text{Pe} \exp(\text{Pe})}{\text{Pe}(1 + \exp(\text{Pe})) + 4(\exp(\text{Pe}) - 1)} T(\mathbf{x} - \delta \mathbf{e}_\nu) + \frac{4(\exp(\text{Pe}) - 1)}{\text{Pe}(1 + \exp(\text{Pe})) + 4(\exp(\text{Pe}) - 1)} \int_{\perp \mathbf{e}_\nu, (2\pi)} \frac{1}{2\pi} d\omega(\mathbf{e}_2) \sum_{k=3}^6 \left[ \frac{1}{4} T(\mathbf{x} + \delta \mathbf{u}_k) \right] \quad (4.13)$$

Enfin, le dernier terme de l'équation 4.13 peut être simplifié pour faire apparaître une expression similaire à l'expression 4.2 de la marche conductive dans un espace 2D. L'intégrale est alors réalisée sur un cercle plutôt qu'une sphère. Cette simplification mène à l'équation 4.14. Dans cette dernière, la température en  $\mathbf{x}$  apparaît comme étant la somme pondérée de la température à  $\delta$  en aval du courant, la température à  $\delta$  en amont du courant, et la moyenne purement diffusive des températures sur un cercle de rayon  $\delta$  centré en  $\mathbf{x}$  dans le plan orthogonal à la vitesse.

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{x}) = & \underbrace{\frac{\text{Pe}}{\text{Pe}(1 + \exp(\text{Pe})) + 4(\exp(\text{Pe}) - 1)}}_{\text{Probabilité de convection aval}} T(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_v) + \underbrace{\frac{\text{Pe} \exp(\text{Pe})}{\text{Pe}(1 + \exp(\text{Pe})) + 4(\exp(\text{Pe}) - 1)}}_{\text{Probabilité de convection amont}} T(\mathbf{x} - \delta \mathbf{e}_v) \\
& + \underbrace{\frac{4(\exp(\text{Pe}) - 1)}{\text{Pe}(1 + \exp(\text{Pe})) + 4(\exp(\text{Pe}) - 1)}}_{\text{Probabilité de diffusion orthogonale}} \underbrace{\int_{\perp \mathbf{e}_v(2\pi)} \frac{1}{2\pi} d\omega(\mathbf{u})}_{\text{Walk on Circle}} T(\mathbf{x} + \delta \mathbf{u})
\end{aligned} \tag{4.14}$$

### Définition du pas de la marche advecto-diffusive

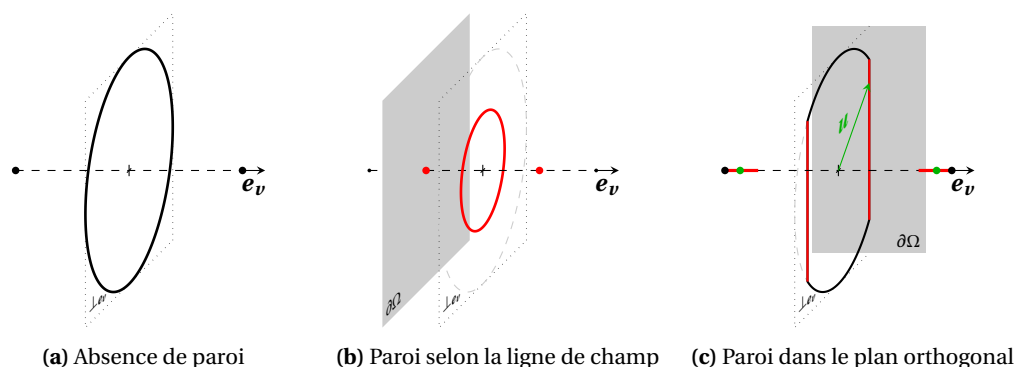
De manière homologue à la marche conductive, il y a lieu de définir le pas  $\delta$  de l'expression 4.14 de telle sorte que ce dernier soit compatible avec les outils de la synthèse d'image. L'expression 4.14 doit alors être réécrite une dernière fois afin de tenir compte de la dépendance de  $\delta$  aux directions  $\mathbf{e}_v$  et  $\mathbf{u}$ , ce qui mène à l'écriture 4.15 dans laquelle  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{e}_v, \mathbf{u})$  est défini par l'équation 4.16 dans laquelle  $\delta_{\Omega_F}(\mathbf{x})$  est un paramètre numérique définissant le pas de la marche loin des parois.

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{x}) = & \int_{\perp \mathbf{e}_v(2\pi)} \frac{1}{2\pi} d\omega(\mathbf{u}) \cdot \left( \frac{\text{Pe}}{\text{Pe}(1 + \exp(\text{Pe})) + 4(\exp(\text{Pe}) - 1)} T(\mathbf{x} + \delta(\mathbf{x}, \mathbf{e}_v, \mathbf{u}) \mathbf{e}_v) \right. \\
& + \frac{\text{Pe} \exp(\text{Pe})}{\text{Pe}(1 + \exp(\text{Pe})) + 4(\exp(\text{Pe}) - 1)} T(\mathbf{x} - \delta(\mathbf{x}, \mathbf{e}_v, \mathbf{u}) \mathbf{e}_v) \\
& \left. + \frac{4(\exp(\text{Pe}) - 1)}{\text{Pe}(1 + \exp(\text{Pe})) + 4(\exp(\text{Pe}) - 1)} T(\mathbf{x} + \delta(\mathbf{x}, \mathbf{e}_v, \mathbf{u}) \mathbf{u}) \right)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{cases}
\delta(\mathbf{x}, \mathbf{e}_v, \mathbf{u}) & = \min(\delta_{\Omega_F}(\mathbf{x}), \delta_v(\mathbf{x}), \delta_{-v}(\mathbf{x}), \delta_u(\mathbf{x}), \delta_{-u}(\mathbf{x})) \\
\delta_{\mathbf{e}_v}(\mathbf{x}) & = \min_{\delta > 0}(\{[\mathbf{x}, \mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_v] \cap \partial\Omega_S\} \neq \emptyset) \\
\delta_{-\mathbf{e}_v}(\mathbf{x}) & = \min_{\delta > 0}(\{[\mathbf{x}, \mathbf{x} - \delta \mathbf{e}_v] \cap \partial\Omega_S\} \neq \emptyset) \\
\delta_u(\mathbf{x}) & = \min_{\delta > 0}(\{[\mathbf{x}, \mathbf{x} + \delta \mathbf{u}] \cap \partial\Omega_S\} \neq \emptyset) \\
\delta_{-u}(\mathbf{x}) & = \min_{\delta > 0}(\{[\mathbf{x}, \mathbf{x} - \delta \mathbf{u}] \cap \partial\Omega_S\} \neq \emptyset)
\end{cases} \tag{4.16}$$

Avec cette formulation, la marche peut soit se déplacer selon l'axe de la vitesse locale, soit selon une direction orthogonale. Dans le cas d'un déplacement orthogonal à la vitesse, la marche se comporte de façon strictement similaire à celle illustrée dans la figure 4.1 pour une marche conductive 2D, dans laquelle  $\delta_{\Omega_S}(\mathbf{x})$  le paramètre numérique serait le minimum entre  $\delta_{\Omega_F}(\mathbf{x})$ ,  $\delta_{\mathbf{e}_v}(\mathbf{x})$ , et  $\delta_{-\mathbf{e}_v}(\mathbf{x})$ . Par ailleurs, lors d'un déplacement selon l'axe de la vitesse, le pas de déplacement est également conditionné par le pas qu'aurait fait la marche si le déplacement avait été selon la direction orthogonale échantillonnée  $\mathbf{u}$ . La figure 4.4 illustre ce comportement en absence et en présence de parois.

En supposant que les propriétés du fluide et que la valeur locale  $\mathbf{v} = \nu \mathbf{e}_v$  de la vitesse sont connues en tout point  $\mathbf{x}$  du fluide, la réalisation aléatoire d'un pas statistique régi par la formulation intégrale 4.16 se fait donc comme suit :



**FIGURE 4.4** – Illustration de la construction de la marche advecto-diffusive proposée, compatible avec le lancer de rayon. En l’absence de paroi, la figure 4.4a illustre les différentes positions possibles de déplacement qui sont toutes à une distance fixe  $\delta_{\Omega_F}$  du point de départ. Tandis que les positions en amont et en aval de l’écoulement (selon la direction  $\mathbf{e}_v$  de la vitesse) peuvent être échantillonnées avec une certaine probabilité, les directions de diffusion pure dans le plan orthogonal à l’écoulement  $\perp_{\mathbf{e}_v}$  sont échantillonnées aléatoirement sur un cercle. En présence d’une paroi  $\partial\Omega$  détectée selon la direction  $\mathbf{e}_v$ , l’ensemble des positions possibles est modifié de telle sorte qu’elles restent toutes équidistantes du point de départ à la distance séparant le point de départ de cette paroi (voir figure 4.4b). En présence d’une paroi dans le plan orthogonal à l’écoulement  $\perp_{\mathbf{e}_v}$ , la démarche est similaire à ce qui a été fait pour la marche conductive illustrée dans la figure 4.1. Cependant, la distance retenue pour une réalisation aléatoire de la direction  $\mathbf{u}$  est également répercutée sur les positions en amont et en aval de l’écoulement (voir figure 4.4c).

- Tirage d’une direction aléatoire  $\mathbf{u}$  sur  $2\pi$  dans le plan orthogonal à la vitesse locale ;
- Détection des parois dans les directions  $\mathbf{u}$ ,  $-\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{e}_v$ , et  $-\mathbf{e}_v$  pour évaluer respectivement les distances  $\delta_{\mathbf{u}}$ ,  $\delta_{-\mathbf{u}}$ ,  $\delta_{\mathbf{e}_v}$ , et  $\delta_{-\mathbf{e}_v}$  ;
- Calcul du pas retenu  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{e}_v, \mathbf{u})$  comme le minimum de ces quatre distances et de  $\delta_{\Omega_F}$  (le pas loin des parois), et calcul des probabilités amont, aval, et diffusives correspondantes (en effet, la valeur du Péclet local  $Pe$  défini dans la relation 4.6 dépend bien de la taille du pas) ;
- Echantillonnage d’une réalisation parmi les trois probabilités (amont, aval, et diffusion), puis déplacement selon la direction aval  $\mathbf{e}_v$ , la direction amont  $-\mathbf{e}_v$ , ou la direction de diffusion  $\mathbf{u}$ .

## Les bonnes propriétés de cette marche

La marche advecto-diffusive ici proposée est construite à partir du schéma exponentiel de Patankar, auquel viennent s’ajouter des choix inspirés de la marche conductive précédemment illustrée. Par construction, toutes les propriétés de convergence et de comportement en champ et en proche paroi de la marche statistique sont donc au moins équivalentes à celles du schéma exponentiel.

En particulier, le schéma exponentiel est exact quand le champ de température est 1D dans un champ de vitesse uniforme  $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_v$ , c’est-à-dire pour un profil de température exponentiel selon la direction  $\mathbf{e}_v$ . La marche ici construite permet d’aller plus loin, en garantissant l’exactitude du schéma dans ce même champ de vitesse uniforme, pour un champ de température exponentiel selon la direction de l’écoulement et bilinéaire dans les deux autres directions, y compris en présence de parois (parois se déplaçant alors à la même vitesse que l’écoulement pour garantir le non-glissement). En effet, pour un champ de température localement exprimé sous la forme de la

relation 4.17, il peut être vérifié que la formulation intégrale 4.15 utilisant le pas  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{e}_v, \mathbf{u})$  de la relation 4.16 est bien solution, grâce aux mêmes propriétés de symétrie que précédemment.

$$T(\mathbf{x}) = a \exp\left(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{\alpha}\right) + b \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_v^\perp + c \quad (4.17)$$

En particulier, si la vitesse est supposée homogène et localement nulle en proche paroi, cette formulation intégrale permet de capter exactement un champ de température trilineaire.

### 4.1.3 Une différence finie pour évaluer la température de paroi

Quand une des deux marches présentées ci-dessus atteint une paroi, la suite de la marche doit y assurer la continuité du flux. En proche paroi, la marche conductive et la marche advecto-diffusive traduisent toutes les deux des flux parfaitement diffusifs (vitesse nulle à la paroi dans le fluide). Un flux radiatif peut également être ajouté du côté fluide que nous représentons à l'aide d'un coefficient d'échange radiatif (rayonnement linéarisé).

L'équation de continuité correspondante est celle de l'équation 4.18 en tout point  $\mathbf{y}$  de la paroi, où  $\mathbf{n}$  est la normale sortante au point  $\mathbf{y}$  en direction du milieu fluide,  $h_R$  est le coefficient d'échange radiatif,  $T_R$  est la température radiative, et les gradients de température  $\nabla^- T(\mathbf{y})$  et  $\nabla^+ T(\mathbf{y})$  sont respectivement définis dans le milieu solide et dans le milieu fluide.

$$-\lambda_S \nabla^- T(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} = -\lambda_F \nabla^+ T(\mathbf{y}) \cdot (-\mathbf{n}) + h_R (T(\mathbf{y}) - T_R(\mathbf{y})) \quad (4.18)$$

Nous utiliserons ici une discrétisation de type différence finie pour exprimer directement la valeur de la température de paroi comme une moyenne d'autres températures, ce qui amène à l'équation 4.19 où  $\delta_S$  est le pas de discrétisation du gradient thermique dans le solide et  $\delta_F$  le pas de discrétisation dans le fluide.

$$T(\mathbf{y}) = \underbrace{\frac{\frac{\lambda_S}{\delta_S}}{\frac{\lambda_S}{\delta_S} + \frac{\lambda_F}{\delta_F} + h_R}}_{P_S} T(\mathbf{y} - \delta_S \mathbf{n}) + \underbrace{\frac{\frac{\lambda_F}{\delta_F}}{\frac{\lambda_S}{\delta_S} + \frac{\lambda_F}{\delta_F} + h_R}}_{P_F} T(\mathbf{y} + \delta_F \mathbf{n}) + \underbrace{\frac{h_R}{\frac{\lambda_S}{\delta_S} + \frac{\lambda_F}{\delta_F} + h_R}}_{P_R} T_R(\mathbf{y}) \quad (4.19)$$

La température de paroi est ainsi définie comme une espérance, ce qui permet de continuer la marche aléatoire : avec une probabilité  $P_S$ , le chemin devient un chemin de conduction pure depuis le point  $\mathbf{y} - \delta_S \mathbf{n}$  dans le solide; avec une probabilité  $P_F$ , le chemin devient un chemin advecto-diffusif depuis le point  $\mathbf{y} + \delta_F \mathbf{n}$  dans le fluide; avec une probabilité  $P_R$ , le chemin devient un chemin radiatif partant du point  $\mathbf{y}$  de la surface. Pour un fluide parfaitement transparent et un solide de type corps noir, ce chemin radiatif consiste alors à échantillonner une direction lambertienne autour de la normale  $\mathbf{n}$  de la surface, et à retenir la température de la première paroi rencontrée dans cette direction.

Cette approche par différences finies est une des deux approches classiquement utilisées pour traiter le problème d'une discontinuité de coefficient de diffusion à la paroi [Lejay+2013a], la seconde approche étant de formuler le problème directement en processus. Dans la littérature, la problématique du comportement du mouvement brownien en présence d'hétérogénéités du coefficient de diffusion est abordée de façon plus générique sous la dénomination de *Skew Brownian Motion*.

#### 4.1.4 Un bilan sur les schémas numériques utilisés

L'approche ici employée consiste à utiliser une méthode numérique classique, à la modifier pour faire émerger des grandeurs pouvant être évaluées par lancer de rayon, puis à l'interpréter de façon probabiliste comme une marche statistique. Cette lecture garantit donc les mêmes gammes de validité que les méthodes numériques retenues, ce qui mène aux résultats du tableau 4.1. Cependant, en faisant apparaître des quantités pouvant être calculées par lancer de rayon, ces méthodes peuvent maintenant être utilisées en géométrie quelconque, de façon indépendante de sa complexité, grâce aux outils d'accélération de la synthèse d'image.

Marche conductive	- Loin des parois - Proche paroi	Exact. Exact pour des champs de température localement trilineaires : $T(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + b$ .
Marche advecto-diffusive	- Loin des parois  - Proche paroi	Même gamme de validité que le schéma exponentiel de Patankar (sachant que l'on se met toujours dans le cas favorable d'un repère aligné avec la direction de l'écoulement). Exact pour un champ de vitesse uniforme et un champ de température exponentiel dans la direction de la vitesse, bilinéaire pour les deux autres directions : $T(\mathbf{x}) = a \exp\left(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{\alpha}\right) + b \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_v^\perp + c$ . Aucune base théorique en référence aux travaux de Patankar. Exact pour un écoulement le long d'une plaque plane à la même vitesse que celle de la paroi (nulle si la paroi est immobile), et un champ de température exponentiel dans la direction de la vitesse, bilinéaire pour les deux autres directions.
Premier saut partant d'un point sur la paroi (ré-injection)		Même gamme de validité que la différence finie dans les milieux conductifs et convectifs. Exact pour un champ de température linéaire selon la normale dans le solide, et linéaire selon la normale dans le fluide (aucune contrainte sur la partie radiative).

**TABLE 4.1** – Tableau récapitulatif des champs de température exactement représentés par les marches statistiques présentées. Pour un pas de discrétisation numérique suffisamment petit, l'ensemble de ces configurations finissent par être rencontrées.

Comme nous l'avons déjà dit au début de ce chapitre, la construction de telles marches résilientes à la complexité géométrique peut être abordée de nombreuses façons, et nous avons fait le choix d'un point de départ ancré dans les schémas numériques déterministes usuels. L'ouvrage [Lapeyre+1998] présente de nombreuses alternatives, que ce soit pour les équations de diffusion ou de transport (sans pour autant aborder réellement la question de la complexité géométrique). Dans cette lignée, certaines études académiques portent notamment sur la construction de processus représentant finement le comportement des marches browniennes en présence de conditions aux limites en flux [Singer+2008]. Sur cette base, la proposition originale de [Vignoles2016] constitue un travail particulièrement intéressant pour le couplage des transferts thermiques conducto-radiatifs car la marche statistique qui en résulte est parfaitement compatible avec la gestion des géométries complexes.

Nous n'avons pas évalué le comportement numérique de cette marche par rapport à celle que nous proposons, mais on peut en tout cas retenir qu'il est possible de travailler sur la construction



---

des marches en restant dans le monde des processus, tout en assurant les mêmes types d'exigences géométriques que les nôtres. Par contre, une étude comparative du schéma proposé par [Vignoles2016] se dirait nécessairement en des termes différents de ceux de la table 4.1, qui restent très ancrés dans la thermique numérique usuelle.

## 4.2 Vers une mise en œuvre dans un cas réel

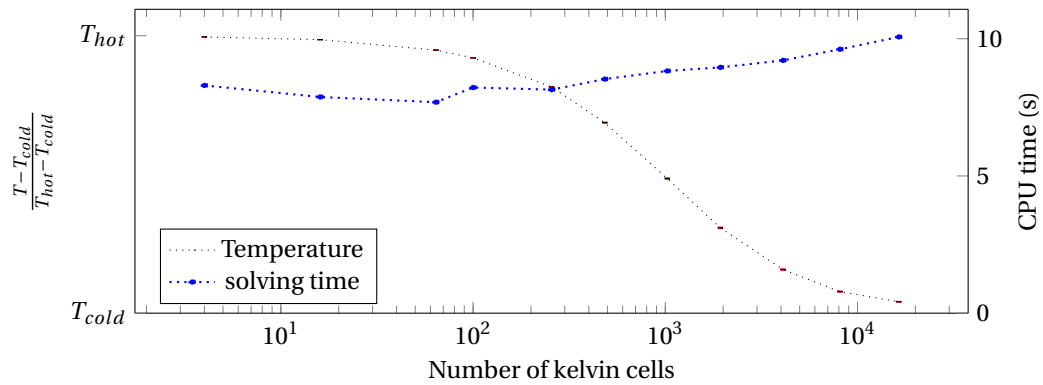
Cette section est constituée d'un article rédigé en vue d'une soumission à une revue scientifique spécialisée en transfert thermique. Dans une première partie, l'ensemble des éléments présentés jusqu'ici sont rapidement repris pour fermer la description d'un schéma conducto-convecto-radiatif compatible avec les outils de la synthèse d'image. Dans une seconde partie, les algorithmes correspondant aux formulations intégrales sont exhaustivement décrits. Dans une troisième partie, la validation de ces algorithmes sur des exemples analytiques et numériques est présentée. Enfin, dans une dernière partie, une mise en œuvre sur un cas réel d'échangeur poreux solaire est présentée et utilisée pour démontrer les bénéfices de la synthèse d'image sur une géométrie de complexité croissante.

Les messages mis en avant dans cet article sont les suivants :

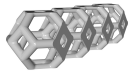
- l'échantillonnage statistique de chemins constitués de sous-chemins conductifs, convectifs et radiatifs est validé par comparaison à des résultats de simulations numériques issus de solveurs déterministes usuels ;
- l'algorithme ne pose aucune difficulté lorsque l'échangeur poreux est étendu jusqu'à plus de 10000 pores décrits de façon explicite ;
- l'utilisation des techniques d'accélération de la synthèse d'image conduit même à des temps de calculs qui sont insensibles au nombre de pores.

Ce dernier résultat est au cœur de la présente thèse. Nous l'annonçons dès ce stade avec la figure 4.5. La configuration étudiée est alors constituée d'un échangeur poreux en plaque constitué de cellules de Kelvin (4 cellules à la traversée). Cette plaque est parcourue par un fluide initialement froid, et éclairée par une tache solaire (qui conserve une taille fixe lorsque l'on change les dimensions de la plaque poreuse). On calcule la température moyenne de l'air en sortie de l'échangeur par l'échantillonnage de 10000 chemins conducto-convecto-radiatifs représentant les couplages thermiques tridimensionnels au sein du poreux. Dans cet exemple, le flux radiatif incident est représenté par une température équivalent corps noir, et les écarts de température sont restreints afin de rester dans la gamme de validité de la linéarisation du rayonnement. La figure présente ces résultats de calcul avec leurs incertitudes statistiques ainsi que leurs temps de calcul correspondants en fonction de la complexité de la géométrie (extension de la plaque poreuse). Le temps de calcul reste alors le même quelle que soit l'extension de la plaque, donc quel que soit le nombre de cellules poreuses prises en compte explicitement lors du calcul.

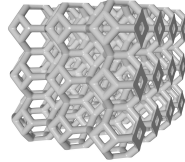
Cette démonstration n'est pas sans rappeler les résultats obtenus en transfert radiatif dans la section 2.1.3 et plus particulièrement dans la figure 2.5 dans laquelle on a déjà illustré l'insensibilité au raffinement de la géométrie de l'algorithme de transfert radiatif utilisant les outils de la synthèse d'image. Dans l'exemple ici présenté, c'est un algorithme de transferts thermiques couplés construit autour des mêmes outils de lancer de rayon qui a été mis en œuvre dans une géométrie de taille croissante et qui affiche ces mêmes propriétés d'indépendance à la complexité géométrique.



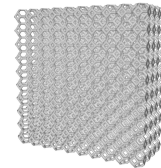
(a) Evolution of the mean outlet temperature and computation time for an increasing number of kelvin cells. The solving time is the time required to sample  $10^4$  coupled random paths in the system.



(b) 4 cellules de Kelvin



(c) 36 cellules de Kelvin



(d) 400 cellules de Kelvin

**FIGURE 4.5** – Evolution de la température du fluide sortant, du temps de chargement de la géométrie, et du temps de calcul en fonction de la complexité de la géométrie dans une simulation d'échangeur solaire. La géométrie considérée est un milieu poreux constitué d'un nombre croissant de cellules de Kelvin soumis au réchauffement d'une tache solaire et balayé par un fluide froid. Au fur et à mesure que la géométrie est déployée, une proportion croissante de la tache solaire participe au réchauffement du fluide, tandis que le débit d'entrée du fluide augmente proportionnellement à la surface d'entrée.

---

# Simulation of coupled advection, conduction and radiation in a single Monte-Carlo algorithm for complex geometries by making use of computer graphic tools

Loris IBARRART<sup>a,c,\*</sup>, Stéphane BLANCO<sup>b</sup>, Cyril CALIOT<sup>c</sup>, Mouna EL HAFI<sup>a</sup>,  
Vincent FOREST<sup>d</sup>, Richard FOURNIER<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*RAPSODEE, UMR CNRS 5302, Mines Albi, Albi, France*

<sup>b</sup>*LAPLACE - UMR CNRS 5213, Toulouse, France*

<sup>c</sup>*PROMES - CNRS, UPR 8521, Odeillo, France*

<sup>d</sup>*Mésostar SAS, Toulouse, France*

---

## Abstract

Numerical simulation of coupled conductive-convective-radiative heat transfer is commonly achieved using deterministic methods. With the increase of the amount, the geometrical refinement and the accuracy level of input data, these methods have to deal with endless increases in computation times. The present contribution is related to today's search for stochastic alternatives: there are indeed motivated hopes that the resulting algorithms could be less sensitive to system complexity. We describe a Monte Carlo algorithm sampling heat transfer paths constituted of subpaths each representing one of the three heat transfer modes in a recursive manner. The algorithm is validated against standard deterministic solvers and is shown to encounter no specific difficulty when applied to a porous exchanger involving up to 10000 pores. Using acceleration techniques inherited from recent computer graphics researches, it is even shown that the computation time can be fully independent of the number of pores.

---

## Introduction

The most frequently used numerical methods for the simulation of combined heat transfers include Finite volume ([13]), Finite element ([6]), and Lattice Boltzmann ([8]). They are all based on deterministic approaches. The idea of designing alternative methods including random sampling algorithms has been discussed since the 1950's. But it is only quite recently that practical achievements have been reported as far as coupling the three heat transfer modes is concerned. Significant advances have been made in [14] with a stochastic random walk based on an Ito-Taylor algorithm for opaque solids interacting via radiation applied to stationary heat transfer in porous media. Another method, presented in [4], implements an integral formulation of the temperature in the case of combined conductive-convective-radiative stationary heat transfer. On the condition that the dependency with the temperature is linearized for the radiative term,

---

\*loris.ibarrart@mines-albi.fr

that the properties of the materials do not depend on temperature, and that fluids are perfectly mixed, this method introduces the formulation of the heat balance equation in each media as a Fredholm equation of the second kind. It is then possible to write an integral formulation of the temperature which can be solved by a stochastic method using a Monte Carlo algorithm. The energy equation becomes an integral over a path space, path intersections with geometry being computed using very efficient 3D graphics rendering algorithms, developed by the computer graphics community. One main advantage of this method is therefore to handle very complex geometries without heavy meshing works and too high computing times.

Along this line, the present study illustrates the possibility to broaden historic Monte Carlo algorithms such as Walk On Sphere in [9] to advecto-diffusive transfers, and implement them in stochastic methods. To that end, an advective term is added to the Fredholm integral formulation of the heat equation, thus allowing its simulation by a Monte Carlo algorithm, as it was to be expected according to Feynmann-Kac formula ([5]). An experienced reader may then directly interpret the Fredholm integral equation as the succession of paths, each associated with one of the physical phenomenon, spreading the sources throughout the domains and conveying a physical representation and understanding of the heat mechanisms at stake. Thanks to this integral formulation, the resulting algorithm allows the simulation of a probe result, such as the temperature at a given point, the paths all starting from this point (inverse formulation). If required, an additional randomized sampling over a surface or volume enables to calculate an average over this domain.

The article sticks to the idea of inter-comparison between stochastic and deterministic methods in the evaluation of temperature in a porous media immersed in a transparent fluid flow. Whilst section 3 extensively develops the integral formulation and algorithm, sections 5 and 6 set benchmarks to validate it against analytical solutions and deterministic methods when analytical solutions are not available. Section 7 finally offers a full case comparison on a small 3D stack of Kelvin cells, which is followed by a demonstration on a progressively complex porous media which showcases the interest of this approach.

## 1. Problem of interest

Let  $\Omega_S$  be a motionless solid domain of boundary  $\partial\Omega_S$  and  $\Omega_F$  an adjacent fluid domain of boundary  $\partial\Omega_F$ . In such a system, thermal transport takes place throughout three distinct modes : conduction, advection, and radiation. Whilst both conduction and radiation may theoretically happen anywhere, advection is confined to the fluid. Given that : (i) the system is at the stationary state (ii) both densities  $\rho$ , heat capacities  $C$ , and conductivities  $\lambda$ , are homogeneous; (iii) the fluid flow velocity  $\mathbf{v}$  is known and independent of temperature; (iv) the solid is an opaque black body; (v) the fluid is transparent; (vi) radiation is linearized around a reference temperature  $T_{ref}$ , which defines a surface radiative heat transfer coefficient  $h_R = 4\sigma T_{ref}^3$ ; the heat transfer can be modeled as equations  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  where  $\mathbf{n}$  is the unit normal vector at the solid-fluid interface pointing towards the fluid,  $\sigma$  is the Stefan-Boltzmann constant,  $c$  is the speed of light in vacuum, and  $\mathcal{L}_l$  is the radiative intensity such that every radiative source term is linearized around  $T_{ref}$ .

---


$$\begin{cases} \Delta T(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega_S & (1) \\ \nabla \cdot (-\lambda_F \nabla T(\mathbf{x}) + \rho_F C_F \mathbf{v} T(\mathbf{x})) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega_F & (2) \\ c\mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{L}_l(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega_F & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_S \nabla T(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} = -\lambda_F \nabla T(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} + h_R (T(\mathbf{y}) - T_R(\mathbf{y})), & \mathbf{y} \in \partial\Omega_S \cap \partial\Omega_F & (4) \\ T_R(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sigma T_{ref}^3} \int_{2\pi} |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}| \mathcal{L}_l(\mathbf{y}, \mathbf{u}) d\omega(\mathbf{u}), & \mathbf{y} \in \partial\Omega_S \cap \partial\Omega_F & (5) \end{cases}$$

## 2. Heat transfer and random process

The work of Feynmann and Kac in the 50's [5] plays a key role in establishing the links between parabolic partial differential equations such as (1), (2), or (3), and random processes. Indeed, Feynmann-Kac's formula settles that these equations can be rewritten as expectancies of stochastic processes, which can be simulated by the sampling of random paths spreading throughout the domain until they reach a boundary condition in time or space.

However, in the case of diffusive equations such as 1 and 2, the said stochastic process is based on the Brownian motion, which is not always straightforward to simulate. In those cases, established results on the densities of first passage in simple geometries may be used instead.

Radiative transfer will be discussed in section 3 as its random process is compatible by nature with ray tracing.

### 2.1. Random Walk on Sphere for conduction

The historic Random Walk on Sphere (RWS) method proposed by Brown in [1] and rigorously justified by Muler in [9] is one of such methods : it makes use of the position's density of first passage of a brownian motion starting from the center of a sphere for stationary state diffusion. This distribution, which is also described by the harmonicity property of the laplacian operator, can be written as equation 6, where  $\mathcal{S}(\mathbf{x}, \delta)$  is the sphere of radius  $\delta$  and centered in  $\mathbf{x}$ , and  $d\omega$  is the differential solid angle.

$$T(\mathbf{x}) = \int_{4\pi} \frac{1}{4\pi} d\omega(\mathbf{u}) T(\mathbf{x} + \delta\mathbf{u}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_S, \quad \delta \leq \max_{\mathbf{y} \in \partial\Omega_S} \{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|\} \quad (6)$$

The corresponding algorithm used to evaluate the temperature at any probe position  $\mathbf{x}$  is showcased in figure 1.

### 2.2. Random Walk on Sphere for coupled advection and conduction

Recently, Sabelfeld [10] used the densities of first passage of a drifted brownian motion in a sphere to extend the RWS method to coupled advection and diffusion for cathodoluminescence and electron beam induced current imaging. At the stationary state, for a homogeneous velocity field, it was proven that the distribution of first passage positions in a sphere corresponds to the von Mises-Fisher distribution  $f$ . Equation 7 shows how this distribution can be applied to equation 2. It can be noted that in the case of a zero

velocity field, this expression leads to equation 6, and to a Dirac distribution centered in  $\mathbf{v} = \mathbf{u}/|\mathbf{v}|$  at the limit of an infinite local Peclet number.

$$T(\mathbf{x}, t) = \int_0^{4\pi} f(\mathbf{u}|\mathbf{v}) d\omega(\mathbf{u}) T(\mathbf{x} + \delta\mathbf{u}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_F, \quad \delta \leq \max(\{\mathcal{S}(\mathbf{x}, \delta) \cap \partial\Omega_F\} = \emptyset) \quad (7)$$

with

$$f(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\frac{Pe}{2}}{\sinh\left(\frac{Pe}{2}\right)} \exp\left(-\frac{Pe}{2} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{v}|}\right)$$

where  $Pe = \frac{\delta|\mathbf{v}|}{\alpha}$ .

### 3. A coupled random walk compatible with ray tracing

Both formulations defined in section 2 are based on the exact solution of equation 1 or 2. However, they both rest on the knowledge of the integrated sphere's radius  $\delta$ , which must be inferior to the minimum distance separating the position of interest from the boundary, or equal to it in order to reach minimal computation times (see [11]). In the case of a complex geometry, by definition, this data is not known, or at least computation intensive.

The computer graphics tools currently in use in the image synthesis industry allows for fast computation of the first intersection between a ray (defined by a point and a direction) and a complex surface geometry. In order to obtain the distance between a point and its closest boundary, one would need to trace a ray for every possible direction, which is infinite.

The current section presents a formulation for conduction and coupled advection and diffusion which requires only a moderate amount of ray tracing for each step of the walk. Both of these schemes rely on the taking of a fixed step  $\delta$ , which is then adjusted when close to a boundary.

#### 3.1. An onwards - backwards scheme for conduction

Regarding conduction, the formulation of equation 6 is taken as it is with a fixed step  $\delta_S$ . Therefore, at each step, given a sampled direction  $\mathbf{u}$  on  $4\pi$ , the walk should shift to the position  $\mathbf{x} + \delta_S\mathbf{u}$ . However, in order to account for boundaries, the rays defined by  $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  and  $(\mathbf{x}, -\mathbf{u})$  are traced; let  $\delta_{\mathbf{u}}$  and  $\delta_{-\mathbf{u}}$  be the distances between  $\mathbf{x}$  and the boundary in the directions  $\mathbf{u}$  and  $-\mathbf{u}$ . Then, the walk is only shifted by the minimum of  $\delta_S$ ,  $\delta_{\mathbf{u}}$ , and  $\delta_{-\mathbf{u}}$ , which leads to a position in  $\Omega_S$  or directly on its boundary  $\partial\Omega_S$ . This algorithm corresponds to equation 8

$$T(\mathbf{x}) = \int_{4\pi} \frac{1}{4\pi} d\omega(\mathbf{u}) T(\mathbf{x} + \delta\mathbf{u}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_S, \quad \delta = \min(\delta_S, \delta_{\mathbf{u}}, \delta_{-\mathbf{u}}) \quad (8)$$

Under the assumption that the temperature field is locally trilinear in  $\mathcal{S}(\mathbf{x}, \delta)$ , this equation exactly solves equation 1. Indeed, let  $T(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + b$  be the local expression of the temperature in a radius of  $\delta$  around  $\mathbf{x}$ . It can be verified that the expression 8

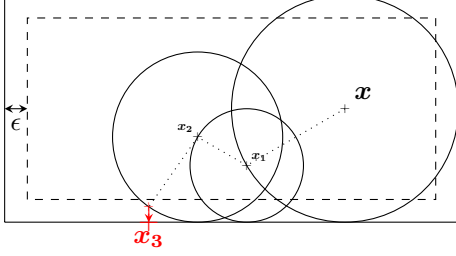


Figure 1: Representation of the sampling of a random path using the RWS method to simulate the value of temperature at the point  $\mathbf{x}$ . In order to end the algorithm, the studied domain's surface is thickened by a small value  $\epsilon$  in which the position is projected on the border.

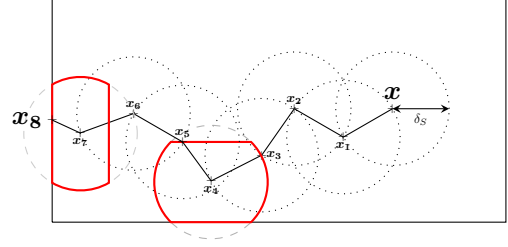


Figure 2: Representation of the sampling of a random path compatible with ray tracing. All of the sampled spheres (or circles in this case) have the same radius  $\delta_S$ , and are distorted when getting close to the boundary.

gives exactly the temperature at point  $\mathbf{x}$  when using the adaptative step  $\delta$ , because of its symmetry :

$$\begin{aligned}
\int_{4\pi} \frac{1}{4\pi} d\omega(\mathbf{u}) T(\mathbf{x} + \delta(\mathbf{x}, \mathbf{u})\mathbf{u}) &= \int_{2\pi} \frac{1}{2\pi} d\omega(\mathbf{u}) \left[ \frac{1}{2} (T(\mathbf{x} + \delta(\mathbf{x}, \mathbf{u})\mathbf{u}) + T(\mathbf{x} - \delta(\mathbf{x}, -\mathbf{u})\mathbf{u})) \right] \\
&= \int_{2\pi} \frac{1}{2\pi} d\omega(\mathbf{u}) \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} + \delta(\mathbf{x}, \mathbf{u})\mathbf{u}) + b + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \delta(\mathbf{x}, -\mathbf{u})\mathbf{u}) + b) \right] \\
&= \int_{2\pi} \frac{1}{2\pi} d\omega(\mathbf{u}) \left[ \frac{1}{2} (2\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + 2b + \underbrace{\mathbf{a} \cdot (\delta(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \delta(\mathbf{x}, -\mathbf{u}))}_{=0}) \right] \\
&= \int_{2\pi} \frac{1}{2\pi} d\omega(\mathbf{u}) T(\mathbf{x}) \\
&= T(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

### 3.2. A lagrangian Patankar's scheme for coupled advection and conduction

Regarding coupled advection and diffusion, Patankar's work [12] suggests a numerical scheme based on the analytical solution of equation 2 in a 1D homogenous media. In a local orthonormal basis  $(\mathbf{O}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  chosen such that  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1|\mathbf{v}|$ , it leads to equation 9 where  $\delta_F$  is a fixed step and  $\mathbf{u}_i = (-1)^i \mathbf{e}_1 \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor$  ( $\lfloor \cdot \rfloor$  being the floor function).

$$T(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^6 p_i T(\mathbf{x} + \delta_F \mathbf{u}_i), \quad \mathbf{x} \in \Omega_F \quad (9)$$

with

$$\begin{cases} p_1 = \frac{Pe e^{Pe}}{Pe(e^{Pe} + 1) + 4(e^{Pe} - 1)} \\ p_2 = \frac{Pe}{Pe(e^{Pe} + 1) + 4(e^{Pe} - 1)} \\ p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{(e^{Pe} - 1)}{Pe(e^{Pe} + 1) + 4(e^{Pe} - 1)} \end{cases}$$

where  $Pe = \frac{\delta_F v}{\alpha_F}$  and  $\alpha_F = \frac{\lambda_F}{\rho_F C_F}$ .

This equation can be directly interpreted as a random walk, which moves in 6 directions according to their 6 probabilities. Assuming that the direction  $\mathbf{e}_2$  can be randomly sampled at each step of the walk, equation 9 can be rewritten as equation 10. This way, the diffusive directions can be treated in 2D in the same way as in section 3.1. Following the same guidelines as previously, each step now requires 4 ray tracing to evaluate the length of the next step : 2 in the velocity direction, and 2 in the diffusion direction.

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}, t) = & p_1 T\left(\mathbf{x} - \delta \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{v}(\mathbf{x})\|}\right) + p_2 T\left(\mathbf{x} + \delta \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{v}(\mathbf{x})\|}\right) \\ & + 4.p_3 \int_{2\pi} \frac{1}{2\pi} d\omega_{\perp \mathbf{v}}(\mathbf{u}) T(\mathbf{x} + \delta \mathbf{u}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_F, \quad \delta = \min(\delta_F, \delta_{\mathbf{v}}, \delta_{-\mathbf{v}}, \delta_{\mathbf{u}}, \delta_{-\mathbf{u}}) \end{aligned} \quad (10)$$

where  $p_1$ ,  $p_2$ , and  $p_3$  are defined as mentioned for equation 9 but with an updated value of the Peclet number  $Pe = \frac{\delta v}{\alpha_F}$ .

### 3.3. Surface to surface radiation

Radiative transfer in a transparent media is a pure transport phenomenon. Therefore, equation 3 can be rewritten as equation 11. A radiative random walk for  $\mathcal{L}_l(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  is thusly defined by a single step which reaches the closest boundary in the direction  $\mathbf{u}$ .

$$\mathcal{L}_l(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathcal{L}_l(\mathbf{x} + \delta \mathbf{u}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_F, \quad \delta = \max_{\delta} ([\mathbf{x}, \mathbf{x} + \delta \mathbf{u}] \cap \partial\Omega_F) \neq \emptyset \quad (11)$$

### 3.4. Discretized boundary condition and coupling of the walks

Using the same approach as [7], the coupled boundary condition (equation 4), gradients can be discretized using the same small steps  $\delta_S$  and  $\delta_F$  as in the previous sections, which leads to equation 12.

$$T(\mathbf{y}) = p_{\text{cond}} T(\mathbf{y} - \delta_S \mathbf{n}) + p_{\text{conv}} T(\mathbf{y} + \delta_F \mathbf{n}) + p_{\text{rad}} T_R(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \partial\Omega_S \cap \partial\Omega_F \quad (12)$$

where



$$\begin{cases} p_{\text{cond}} = \frac{\delta_F \lambda_S}{\delta_F \lambda_S + \delta_S \lambda_S + \delta_S \delta_F h_R} \\ p_{\text{conv}} = \frac{\delta_S \lambda_F}{\delta_F \lambda_S + \delta_S \lambda_S + \delta_S \delta_F h_R} \\ p_{\text{rad}} = \frac{\delta_S \delta_F h_R}{\delta_F \lambda_S + \delta_S \lambda_S + \delta_S \delta_F h_R} \end{cases}$$

This far, random walks were only defined one process at a time. However, this formulation links those different walks when they reach the boundary condition. Indeed, when a random walk hits this condition, equation 12 makes the walk switch to a conductive walk starting in  $(\mathbf{y} - \delta_S \mathbf{n})$  with a probability  $p_{\text{cond}}$ , a convective walk starting in  $(\mathbf{y} + \delta_F \mathbf{n})$  with a probability  $p_{\text{conv}}$ , or a radiative walk at the point  $\mathbf{y}$  in a lambertian distributed direction  $\mathbf{u}$  (see equation 5).

In practice, even if the lengths  $\delta_S$  and  $\delta_F$  are supposed small enough, another surface might be present between  $\mathbf{y}$  and its point of re-injection in the solid or fluid (e.g. in sharp corners). To avoid this problem, 2 rays are traced from the point  $\mathbf{y}$  to redefine the lengths  $\delta_S$  and  $\delta_F$  for this one step only : if a surface is detected between  $\mathbf{y}$  and its point of re-injection, the length is reduced so that the re-injection point ends up strictly on this boundary. Those corrected lengths can be formally written as  $\delta_{S_c}$  and  $\delta_{F_c}$  :

$$\begin{cases} \delta_{S_c} = \min\left(\delta_S, \frac{\delta_{-\mathbf{n}}}{2}\right) \\ \delta_{F_c} = \min\left(\delta_F, \frac{\delta_{\mathbf{n}}}{2}\right) \end{cases}$$

#### 4. Algorithms

**Algorithm 1:** Monte Carlo algorithm used to evaluate  $T(\mathbf{x})$

```

for  $k \leftarrow 1$  to  $N$  do
  if  $\mathbf{x} \in \Omega_S$  then
    | Call algorithm 2
  else if  $\mathbf{x} \in \Omega_F$  then
    | Call algorithm 3
  else
    | Call algorithm 5
  end
  Store weight  $W_i = T(\mathbf{y}_{\text{end}})$ 

```

**end**

$$T(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N W_i$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N W_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N W_i\right)^2}$$

**Algorithm 2:** Random walk for conduction starting from point  $\mathbf{x}$  in  $\Omega_S$

```

while  $\mathbf{x} \in \Omega_S \setminus \partial\Omega_S$  do
  Uniformly sample a random direction  $\mathbf{u}$ 
  Evaluate lengths  $\delta_{\mathbf{u}}$  and  $\delta_{-\mathbf{u}}$  with ray tracing
  Update local step length  $\delta \leftarrow \min(\delta_S, \delta_{\mathbf{u}}, \delta_{-\mathbf{u}})$ 
  Update position  $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \delta\mathbf{u}$ 
end
Current position  $\mathbf{y} \leftarrow \mathbf{x}$  is on  $\partial\Omega_S$ 
Call algorithm 5 at point  $\mathbf{y}$ 

```

**Algorithm 3:** Random walk for convection starting from point  $\mathbf{x}$  in  $\Omega_F$

```

while  $\mathbf{x} \in \Omega_F \setminus \partial\Omega_F$  do
  Uniformly sample a random direction  $\mathbf{u}$  orthonormal to the direction of  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ 
  Evaluate lengths  $\delta_{\mathbf{v}}$ ,  $\delta_{-\mathbf{v}}$ ,  $\delta_{\mathbf{u}}$ , and  $\delta_{-\mathbf{u}}$  with ray tracing
  Update local step length  $\delta \leftarrow \min(\delta_F, \delta_{\mathbf{v}}, \delta_{-\mathbf{v}}, \delta_{\mathbf{u}})$ 
  Evaluate probabilities  $p_1$  and  $p_2$  according to equation 10
  Canonically sample a random number  $r$  in  $[0,1]$ 
  if  $r < p_1$  then
    Update position  $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} - \delta \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{v}(\mathbf{x})\|}$ 
  else if  $r < p_1 + p_2$  then
    Update position  $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \delta \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{v}(\mathbf{x})\|}$ 
  else
    Update position  $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \delta\mathbf{u}$ 
  end
end
Current position  $\mathbf{y} \leftarrow \mathbf{x}$  is on  $\partial\Omega_F$ 
Call algorithm 5 at point  $\mathbf{y}$ 

```

**Algorithm 4:** Random walk for radiation starting from point  $\mathbf{y}$  on  $\partial\Omega_F$

```

Lambertian sample of a direction  $\mathbf{u}$  around the normal  $\mathbf{n}$ 
Evaluate length  $\delta$  with ray tracing
Update position  $\mathbf{y} \leftarrow \mathbf{y} + \delta\mathbf{u}$ 
Call algorithm 5 at point  $\mathbf{y}$ 

```

---

**Algorithm 5:** Random walk for coupled boundary condition starting from point  $\mathbf{y}$  on  $\partial\Omega_S \cup \partial\Omega_F$

```

if Temperature is known at the boundary position  $\mathbf{y}$  then
  |  $\mathbf{y}_{end} \leftarrow \mathbf{y}$ 
  | Return to algorithm 1
else
  | Evaluate lengths  $\delta_{\mathbf{n}}$  and  $\delta_{-\mathbf{n}}$  with ray tracing
  | Update local step lengths  $\delta_{Sc} = \min(\delta_S, \delta_{-\mathbf{n}})$  and  $\delta_{Fc} = \min(\delta_F, \delta_{\mathbf{n}})$ 
  | Evaluate probabilities  $p_{cond}$  and  $p_{conv}$  according to equation 12
  | Canonically sample a random number  $r$  in  $[0,1]$ 
  | if  $r < p_{cond}$  then
  | | Update position  $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{y} - \delta_{Sc}\mathbf{n}$ 
  | | Call algorithm 2 at point  $\mathbf{x}$ 
  | | else if  $r < p_{cond} + p_{conv}$  then
  | | | Update position  $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{y} + \delta_{Fc}\mathbf{n}$ 
  | | | Call algorithm 3 at point  $\mathbf{x}$ 
  | | else
  | | | Call algorithm 4 at point  $\mathbf{y}$ 
  | end
end

```

## 5. Validation of the uncoupled random walks

Before considering a fully coupled case, the algorithms presented in section 4 can be validated separately. In this section, a validation against analytical solutions in cubes is performed.

### 5.1. Analytical validation of the conductive random walk

Equation 1 is true for various analytical functions. For example, let us consider the following boundary value problem :

$$\begin{cases} \Delta f(x, y, z) = 0, & (x, y, z) \in \Omega \\ f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2 + x + y + z + 1, & (x, y, z) \in \partial\Omega \end{cases}$$

Algorithm 1, along with algorithms 2 and 5 where the boundary condition is always known, lead to the results of table 1 in the specific case of  $\Omega$  being the unit cube defined by  $0 \leq x, y, z \leq 1$ . Those results show a convergence of these algorithms towards the expected value of  $f$ , even for step lengths as big as half of the domain's size.

### 5.2. Analytical validation of the advecto-diffusive random walk

Equation 2 is also true for various analytical functions. For example, let us consider the following boundary value problem :

$$\begin{cases} \Delta g(x, y, z) - \mathbf{u}(x, y, z) \cdot \nabla g(x, y, z) = 0, & (x, y, z) \in \Omega \\ \mathbf{u}(x, y, z) \cdot \mathbf{e}_x = \|\mathbf{u}\| = -4, & (x, y, z) \in \Omega \\ g(x, y, z) = y^2 + z^2 - x + y + z + 1, & (x, y, z) \in \partial\Omega \end{cases}$$

Algorithm 1, along with algorithms 3 and 5 where the boundary condition is always known, lead to the results of table 2 in the specific case of  $\Omega$  being the unit cube defined by  $0 \leq x, y, z \leq 1$ . Those results show a convergence of these algorithms towards the expected value of  $g$ . However, for values of  $\delta_F$  as big as half of the domain's size, the error bar does not cover the analytical solution. Therefore, peculiar attention needs to be accorded to the setting of this numerical parameter.

$\delta_S$	$x, y, z$	$f(x, y, z)$	$\tilde{f}(x, y, z)$	$\sigma$	$\delta_F$	$x, y, z$	$g(x, y, z)$	$\tilde{g}(x, y, z)$	$\sigma$
0.5	0.1	1.3	1.297	0.0026	0.5	0.1	1.12	1.123	0.0029
0.5	0.3	1.9	1.889	0.0077	0.5	0.3	1.48	1.474	0.0077
0.5	0.5	2.5	2.479	0.0109	0.5	0.5	2	2.005	0.0094
0.5	0.7	3.1	3.099	0.0104	0.5	0.7	2.68	2.682	0.0082
0.5	0.9	3.7	3.706	0.0053	0.5	0.9	3.52	3.533	0.0040
0.1	0.1	1.3	1.302	0.0025	0.1	0.1	1.12	1.117	0.0028
0.1	0.3	1.9	1.895	0.0075	0.1	0.3	1.48	1.476	0.0078
0.1	0.5	2.5	2.499	0.0105	0.1	0.5	2	2.000	0.0098
0.1	0.7	3.1	3.097	0.0101	0.1	0.7	2.68	2.675	0.0085
0.1	0.9	3.7	3.705	0.0051	0.1	0.9	3.52	3.525	0.0040
0.05	0.1	1.3	1.301	0.0025	0.05	0.1	1.12	1.116	0.0027
0.05	0.3	1.9	1.907	0.0075	0.05	0.3	1.48	1.490	0.0078
0.05	0.5	2.5	2.503	0.0106	0.05	0.5	2	2.005	0.0098
0.05	0.7	3.1	3.097	0.0101	0.05	0.7	2.68	2.671	0.0085
0.05	0.9	3.7	3.702	0.0051	0.05	0.9	3.52	3.522	0.0041

Table 1: Results of algorithms 1, 2, and 5 for  $N = 10000$  random samples on an analytical boundary value problem  $f(x, y, z)$  in a unit cube for various values of position  $x = y = z$  and step length  $\delta_S$ . The Monte Carlo results are shown in column  $\tilde{f}$  along with their corresponding standard deviation  $\sigma$ .

Table 2: Results of algorithms 1, 3, and 5 for  $N = 10000$  random samples on an analytical boundary value problem  $g(x, y, z)$  in a unit cube for various values of position  $x = y = z$  and step length  $\delta_F$ . The Monte Carlo results are shown in column  $\tilde{g}$  along with their corresponding standard deviation  $\sigma$ .

## 6. Validation of the coupled random walk with an analytical heterogeneous velocity field

In this section, algorithm 5 is used to effectively couple the algorithms 2 and 3. The 2D configuration is presented in figure 3 : a cold Poiseuille flow enters a 2D solid duct which is heated by its external faces. In this configuration, no radiation is taken into account. Therefore,  $p_{rad} = 0$  and algorithm 4 is never used.

The results are compared with a *Comsol Multiphysics* simulation in figure 6 for various positions in the domain. The number of Monte Carlo samplings are kept at 1000 only in order to be able to see the error-bars. Taking into account those error-bars, a good correlation of both simulations can be observed.

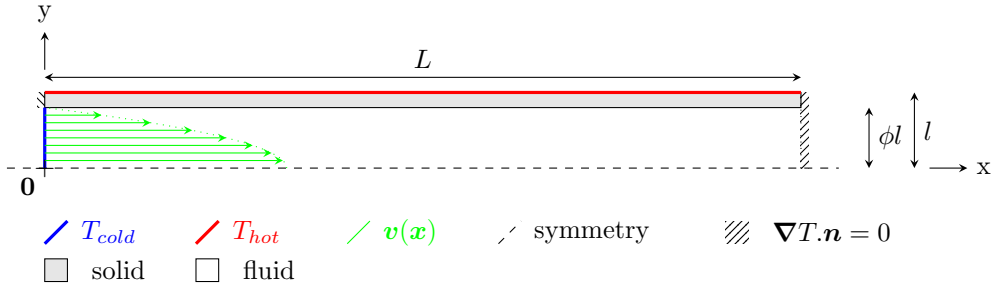


Figure 3: 2D-slice of an isolated duct structure used as a heat exchanger between a thermal source at  $T_{hot}$  and an incoming cold Poiseuille circulation at  $T_{cold}$ . Retained values for the experiment :  $\frac{L}{l} = 10$ ,  $\phi = 0.8$ ,  $\frac{\lambda_S}{\lambda_F} = 10$ , and  $\max\left(\frac{\|v\|l}{\alpha_F}\right) = 5$

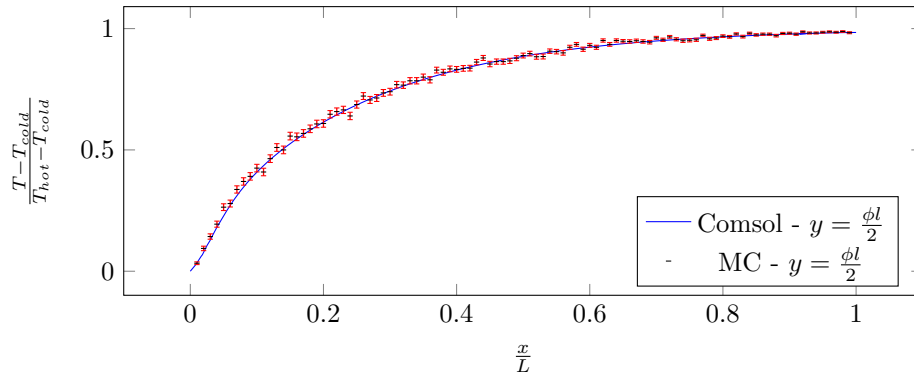


Figure 4: Comparison of the temperature obtained with Comsol Multiphysics and the Monte Algorithm on the experiment defined by figure 3. In these simulations,  $\delta_S = \delta_F = \frac{l}{100}$ .

## 7. Simulation on a small stack of Kelvin cells

In this section, a test case based on a concentrated solar experiment is presented to validate the algorithms when fully coupled. The considered geometry is constituted of a stack of 4 kelvin cells, which is illustrated in figure 7. The solid stack of kelvin cells is heated by a radiative temperature  $T_{hot}$  set on the inlet face and cooled by the fluid at  $T_{cold}$  which enters by the same face. On the outlet face, a radiative temperature is set at  $T_{cold}$  to represent the environment. Finally, all other 4 faces are symmetry boundaries.

In order to obtain the velocity field and a reference temperature field, an ANSYS Fluent's simulation was performed on the geometry. The temperatures obtained using the Monte-Carlo algorithm is then compared with Fluent's result in figure 7. Both simulations lead to similar results in a solar configuration for a large range of solid and fluid parameters.

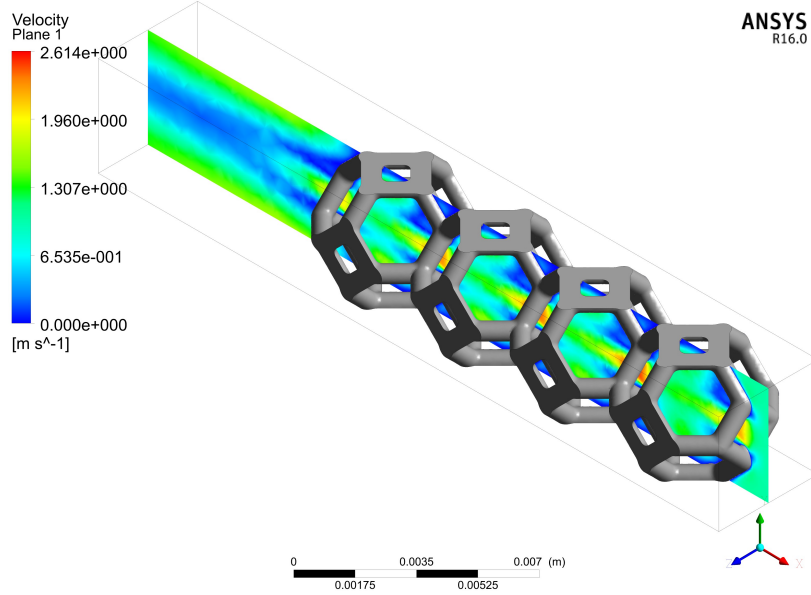


Figure 5: Stack of 4 kelvin cells and surface representation of the fluid flow for an homogeneous inlet fluid flow at  $1 m.s^{-1}$  on the bottom right face and an outlet at the top left face.

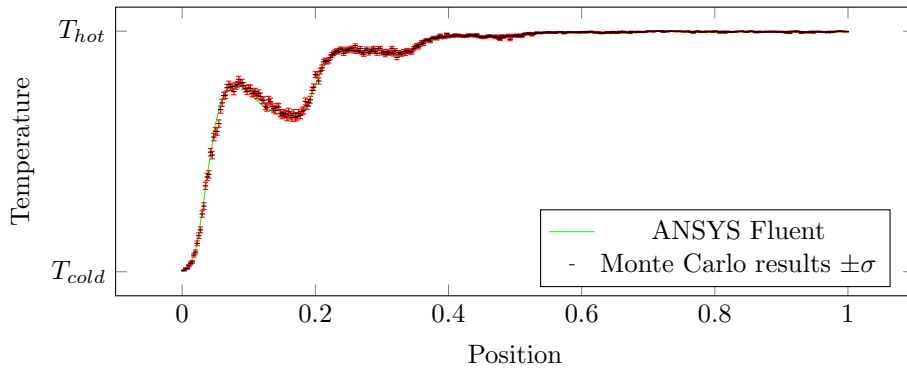


Figure 6: Comparison of the temperature obtained with ANSYS Fluent and the Monte Algorithm on the center line going down the flow. In this graph, the inlet face is represented at the position 0 and the outlet at the position 1. In order to obtain a curve showing high variations of temperature in the fluid, the solid's and fluid's thermal diffusivities are respectively set at  $80.10^{-6} m^2.s^{-1}$  and  $130.10^{-6} m^2.s^{-1}$ , which is highly overestimated regarding the fluid in solar applications (usually air). The inlet velocity field is homogeneous at  $1 m.s^{-1}$

### 8. Demonstration on a deployed foam of Kelvin cells

The geometry showcased in the previous section 7 is only a portion of a realistic porous media which could be used for solar applications.

In this section, this same geometry and its corresponding flow field are duplicated over

the symmetry boundaries. However, in order to account for the concentrated solar spot, the analytical parabolic expression 13 is set as the radiative temperature  $T_{hot}$ , where  $(\mathbf{O}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  is an orthonormal basis located at the center of the inlet face where  $\mathbf{e}_1$  is in the direction of the flow field, and  $L$  is the width of a kelvin cell. A depiction of this configuration is presented in figure 7 and its associated results are given in figure 8 for an increasing number of duplications.

$$T_{hot}(\mathbf{y}) = T_{cold} + (T_{hot} - T_{cold}) \exp\left(-\left(\frac{(\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_2)^2}{2(5l)^2} + \frac{(\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_3)^2}{2(5l)^2}\right)\right) \quad (13)$$

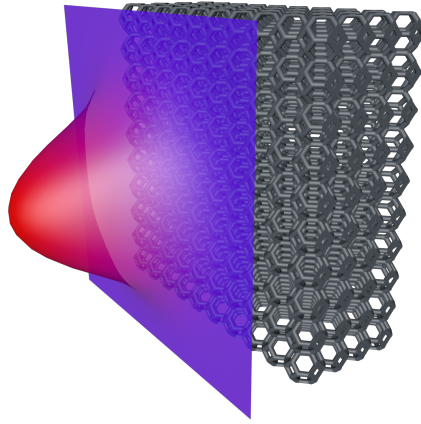


Figure 7: Representation of the deployed porous media heated by a concentrated heat spot.

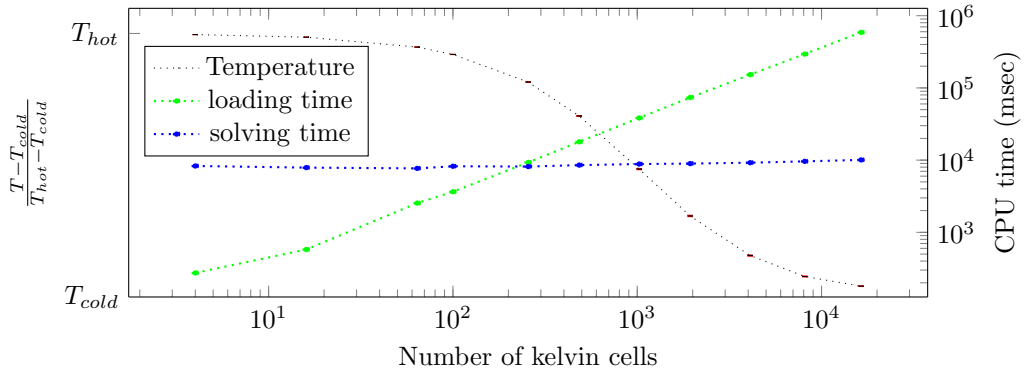


Figure 8: Evolution of the mean outlet temperature and computation time for an increasing number of kelvin cells. Loading time corresponds to the time required to generate and copy the geometry in the RAM memory as well as build the acceleration grid, whilst the solving time is the time required to sample  $10^4$  coupled random paths in the system.

Results show no increase in computation time for increasingly complicated geometries, for as high as four order of magnitudes. In the meantime, the loading time, which cor-

responds to the time required for the procedural generation of the studied geometry, its copy in the RAM memory, and the construction of the acceleration grid, significantly increases, which was to be expected. Regarding temperature values, as the surface covered by the geometry increases, the outflow temperature decreases because of the increasingly large flow of cold inlet fluid.

## Conclusion

Following a stochastic methodology, a Monte Carlo algorithm was designed to solve combined conductive-convective-radiative problems in complex geometries at the stationary state. Required hypothesis for this methodology notably include the integral linearity of the energy conservation equation in terms of temperature in both solid and fluid, and the preliminary knowledge of the velocity field. The corresponding algorithm was then implemented in increasingly complex systems and compared with results obtained with the finite volume method (ANSYS Fluent software). The stochastic method showed good correlation with both analytical and numerical results, as well as a high resilience to the complexification of the studied geometry in situations where the linearisation of the radiative term is valid. Ongoing work already includes extensions of this methodology to both transient and non-linear radiation.

## References

- [1] Brown G. M., "Monte Carlo Methods," *Modern Mathematics*, 1956.
- [2] Caliot, C., Blanco, S., Coustet, C., Eymet, V., Forest, V., Fournier, R., and Piaud, B., "Combined conductive-radiative heat transfer analysis in complex geometry using the Monte Carlo method," *Ecos*, 1, (2017).
- [3] Dauchet, J., Bezian, J.-J., Blanco, S., Caliot, C., Charon, J., Coustet, C., Hafi, M. E., Eymet, V., Farges, O., Forest, V., Fournier, R., Galtier, M., Gautrais, J., Khuong, A., Pelissier, L., Piaud, B., Roger, M., Terrée, G., and Weitz, S., "Monte Carlo and nonlinearities," 1 (October), (2016).
- [4] Fournier, R., Blanco, S., Eymet, V., Hafi, M. E., and Spiesser, C., "Radiative, conductive and convective heat-transfers in a single Monte Carlo algorithm," *Journal of Physics: Conference Series*, p. 012007, 676 (1), (2016).
- [5] Kac, M., "On some connections between probability theory and differential and integral equations," *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, p. 189, 1, (1951).
- [6] Le Hardy, D., Favennec, Y., Domingues, G., and Rousseau, B., "3D Radiative Transfer Equation Coupled with Heat Conduction Equation with Realistic Boundary Conditions Applied on Complex Geometries," *Journal of Applied Mathematics and Physics*, pp. 1488–1493, 4 (4), (2016).
- [7] Lejay, A., Maire, S., and Pichot, G., "Monte Carlo simulations in media with interfaces," *HAL-Inria*, (2013).
- [8] Mishra, S. C. and Roy, H. K., "Solving transient conduction and radiation heat transfer problems using the lattice Boltzmann method and the finite volume method," *Journal of Computational Physics*, pp. 89–107, 223 (1), (2007).
- [9] Muller, M., "Some continuous Monte Carlo methods for the Dirichlet problem," *The Annals of Mathematical Statistics*, pp. 569–589, 27 (3), (1956).
- [10] Sabelfeld, K., "Random walk on spheres method for solving drift-diffusion problems," *Monte Carlo Methods and Applications*, 22(4), (2016).
- [11] Kurbanmuradov O.A., "Estimation of the mean value of steps of  $\epsilon$ -spherical process," *Monte Carlo Methods in Computational Mathematics and Mathematical Physics 2*, 137-144, (1979).
- [12] Patankar, S. V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere publishing corporation, (1980).



- 
- [13] Sun, Y., Zhang, X., and Howell, J. R., “Evaluation of three different radiative transfer equation solvers for combined conduction and radiation heat transfer,” *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, pp. 262–273, 184, (2016).
- [14] Vignoles, G. L., “A hybrid random walk method for the simulation of coupled conduction and linearized radiation transfer at local scale in porous media with opaque solid phases,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, pp. 707–719, 93, (2016).

## 9. Acknowledgement

We acknowledge support from the Agence Nationale de la Recherche (ANR, grant HIGH-TUNE ANR-16-CE01-0010, <http://www.umr-cnrm.fr/high-tune>, ANR, grant ANR-10-LBX-22-01-SOLSTICE, and ANR, grant MGC-RAD) and from Region Occitanie.

## Comportement du schéma numérique advecto-diffusif : de premiers éléments d'analyse

Nous venons de présenter une marche couplant des transferts thermiques conductifs, advecto-diffusifs, et radiatifs dont la mise en œuvre est basée sur le lancer de rayons. Après une description de la construction des marches pour la conduction et l'advecto-diffusion, un article a présenté la construction de l'ensemble des algorithmes nécessaires à l'implémentation de cette approche. Une mise en œuvre dans plusieurs configurations sans et avec couplage nous a alors permis de réaliser une preuve de concept de la méthode. Dans cette démonstration, une configuration solaire de complexité géométrique croissante nous a permis d'illustrer l'insensibilité de cette approche à la complexité géométrique.

En ce qui concerne le schéma advecto-diffusif original de cette approche, seul un nombre limité de validations a été traité. En effet, en dehors des situations triviales où ce schéma est exact, seules des validations classiques à champ de vitesse uniforme dans un cube et pour des problèmes couplés contre des simulations déterministes ont été effectuées (d'autres validations de ce même type peuvent être retrouvées dans [Ibarrart+2018]). Une réflexion reste donc à mener sur la convergence de ce schéma dans des champs de vitesse non uniformes, ainsi que sur son comportement en proche paroi. Nous donnons ci-dessous un ensemble de résultats complémentaires concernant la question des champs de vitesses non-uniformes.

L'autre problématique, c'est-à-dire l'étude du comportement de notre schéma en proche paroi, est toujours en cours : nous réfléchissons d'une part à des problèmes académiques en convection forcée, tels que le problème monodimensionnel défini par [Blasius1907] et [Pohlhausen1921] (voir par exemple [Bejan2013]) le long d'une plaque plane isotherme, ainsi qu'à des solutions tridimensionnelles construites à l'aide de champs de forces volumiques introduits artificiellement de façon à permettre des expressions analytiques. Mais à ce stade, au-delà des validations faites par comparaison à des solveurs déterministes dans l'article précédent, nous ne disposons d'aucune étude théorique du comportement de notre schéma en proche paroi dans des configurations représentatives de ce que sont les principaux besoins, à savoir un écoulement cisailé au voisinage d'une paroi solide immobile.

On peut noter néanmoins que les exemples qui suivent incluent des parois solides. Ces parois sont mobiles, mais il s'agit quand même de résultats d'études paramétriques dans lesquelles la partie de notre schéma combinant le lancer de rayon avec l'advecto-diffusion en proche paroi est effectivement mise en œuvre. Cela ne remplace en aucun cas les études paramétriques que nous souhaitons faire pour le proche paroi de façon spécifique, notamment en ce qui concerne la simulation des écoulements de couche limite, mais constitue tout de même un premier élément de confiance qui vient s'ajouter aux tests numériques de l'article.

Nous n'insisterons pas sur ce point dans la discussion des résultats de simulations suivants, de façon à nous concentrer sur la seule question de l'advection-diffusion en champ de vitesse non-uniformes. Nous invitons seulement le lecteur à retenir que dans ces résultats, le schéma de proche paroi est effectivement actif.

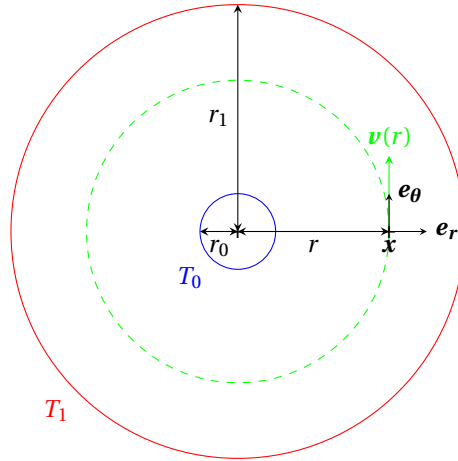
### Solution analytique dans un champ tournant

Soit un domaine fluide défini entre deux parois cylindriques concentriques. L'équation stationnaire advecto-diffusive rappelée dans l'équation 4.20 peut être simplifiée en l'équation 4.21 pour un champ de vitesse tournant toujours dirigé selon  $e_\theta$ . La solution du problème 4.22 est alors connue en tout point si les températures de paroi sont imposées constantes. Cette configuration est illustrée par la figure 4.6.

$$\nabla \cdot (\alpha \nabla T - \mathbf{v} T) = 0 \quad (4.20)$$

$$\Delta T = 0 \quad (4.21)$$

$$T(r) = T_0 + \frac{\ln r - \ln r_0}{\ln r_1 - \ln r_0} (T_1 - T_0) \quad (4.22)$$



**FIGURE 4.6** – Illustration d’une configuration en champ tournant entre deux parois cylindriques uniformes en température.

On utilisera par la suite l’expression 4.23 du nombre de Péclet caractéristique de cette configuration dans lequel la vitesse utilisée  $v_{max}$  est la plus grande norme de la vitesse présente dans l’écoulement.

$$Pe = \frac{(r_1 - r_0) v_{max}}{\alpha} \quad (4.23)$$

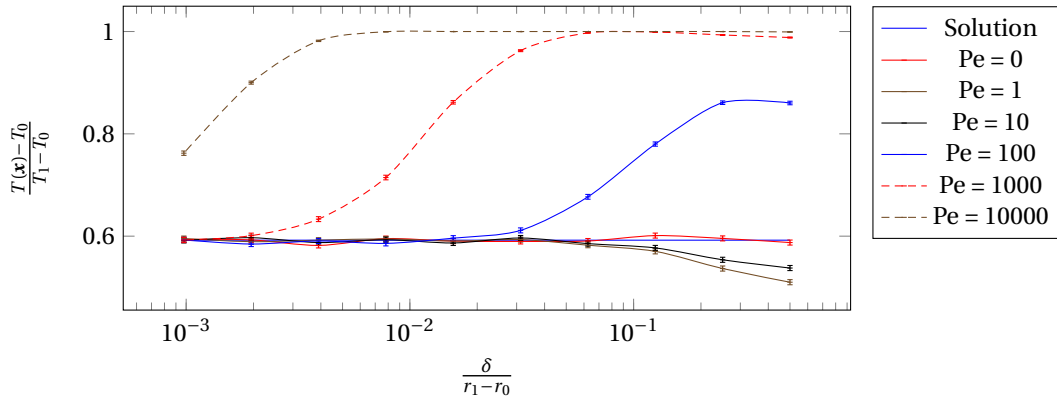
### Comportement dans un champ à rotationnel constant

Considérons le champ de vitesse défini par l’équation 4.24 qui correspond à un milieu solide tournant autour de l’axe central du cylindre. La figure 4.7 illustre alors les résultats obtenus dans cette configuration avec la marche advecto-diffusive en fonction du paramètre numérique  $\delta$ , le pas de la marche.

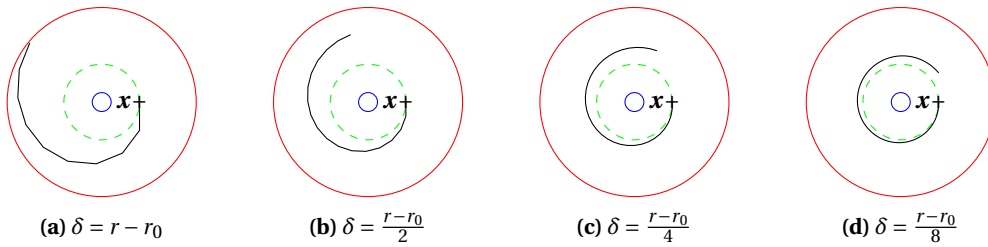
$$v(r) = \frac{r}{r_1} v_{max} e_\theta \quad (4.24)$$

Ces résultats font apparaître des convergences progressivement plus lentes au fur et à mesure de l’augmentation du nombre de Péclet. En effet, tandis que l’écoulement devient de plus en plus advectif, il devient primordial que la marche statistique remonte correctement les lignes de courant. A la limite  $Pe \rightarrow \infty$ , il faudrait même que la marche se propage indéfiniment sur le cercle de rayon  $r$ . Cependant, étant donné la géométrie circulaire et le champ de vitesse tournant ici utilisés, tous les "pas advectifs" de la marche sont légèrement décalés sur les lignes de courant positionnées sur des rayons plus grands (voir figure 4.8).

Ce comportement met en évidence un "biais" de la marche associé à l’hypothèse d’homogénéité locale du champ de vitesse. Ce comportement a déjà été observé dans le cadre de simulations déterministes maillées sur ce même cas test en utilisant le schéma exponentiel tel que proposé par Patankar dans [Virag+1994]. Dans ces travaux, une proposition d’amélioration du schéma permet d’accélérer cette vitesse de convergence par l’ajout d’un terme source fonction du gradient de



**FIGURE 4.7** – Résultats à différentes valeurs du nombre de Péclet du schéma advecto-diffusif dans un champ tournant à rotationnel constant. Ces résultats sont obtenus avec les paramètres suivants :  $r_0 = 0.5$ ,  $r_1 = 5$ ,  $\mathbf{x} = \{3, 4, 5\}$ , et l’axe de révolution est choisi selon  $\mathbf{u} = \{2, 4, 1\}$  pour éviter tout alignement avec les axes cartésiens. Enfin,  $10^4$  réalisations de Monte Carlo sont effectuées pour chaque point.



**FIGURE 4.8** – Illustration de la construction de la marche statistique dans une situation purement advective. Etant donné la configuration tournante bien particulière, chaque nouveau pas entraîne un éloignement de la ligne de champ initiale. Il est alors nécessaire de choisir un pas d’espace suffisamment petit pour restreindre l’impact de l’erreur systématique réalisée à chaque pas.

température local. Cette solution n’est à ce jour pas envisageable pour une méthode en espace de chemins telle que celle présentée jusque ici, l’évaluation d’un gradient thermique étant encore une question ouverte. Cependant, l’impact sur le temps de calcul de la diminution du paramètre numérique  $\delta$  évolue asymptotiquement en  $\frac{1}{\delta^2}$  pour la marche statistique ici présentée<sup>3</sup>, contrairement aux méthodes maillées qui se comportent a minima en  $\frac{1}{\delta^3}$ , ce qui permet de mitiger le rôle de ce facteur.

## Comparaison avec les différences finies

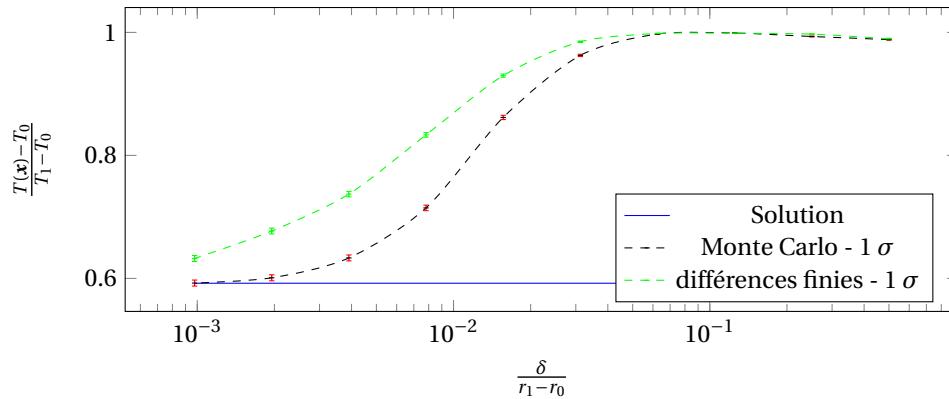
Sur ce même exemple, il est possible de comparer la vitesse de convergence avec celle qui aurait été obtenue avec un schéma de type différences finies. Dans le repère choisi tel que  $\mathbf{u}_1 = -\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$  et  $\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ , les différences finies avec un schéma amont sur le terme advectif mènent à l’équation 4.25, ce qui permet d’établir le schéma 4.26.

$$\frac{\alpha}{\delta^2} \left[ \sum_{k=1}^6 T(\mathbf{x} + \delta \mathbf{u}_k) - 6T(\mathbf{x}) \right] - \frac{\|\mathbf{v}\|}{\delta} [T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x} + \delta \mathbf{u}_1)] = 0 \quad (4.25)$$

3. Cette discussion est extensivement traitée dans le chapitre 5.

$$T(\mathbf{x}) = \frac{1}{6 + \text{Pe}} \left[ (1 + \text{Pe})T(\mathbf{x} + \delta \mathbf{u}_1) + \sum_{k=2}^6 T(\mathbf{x} + \delta \mathbf{u}_k) \right] \quad (4.26)$$

La mise en œuvre de ce schéma dans la configuration à rotationnel constant pour un Péclet de 1000 produit les résultats de la figure 4.9. La convergence apparaît être du même ordre, quoique a priori un peu plus lente que le schéma exponentiel proposé jusque ici.



**FIGURE 4.9** – Comparaison des convergences du schéma advecto-diffusif inspiré du schéma exponentiel et du schéma en différences finies avec un terme advectif amont dans un champ tournant à rotationnel constant pour un nombre de Péclet de 1000.

## Comportement dans un tourbillon de Rankine

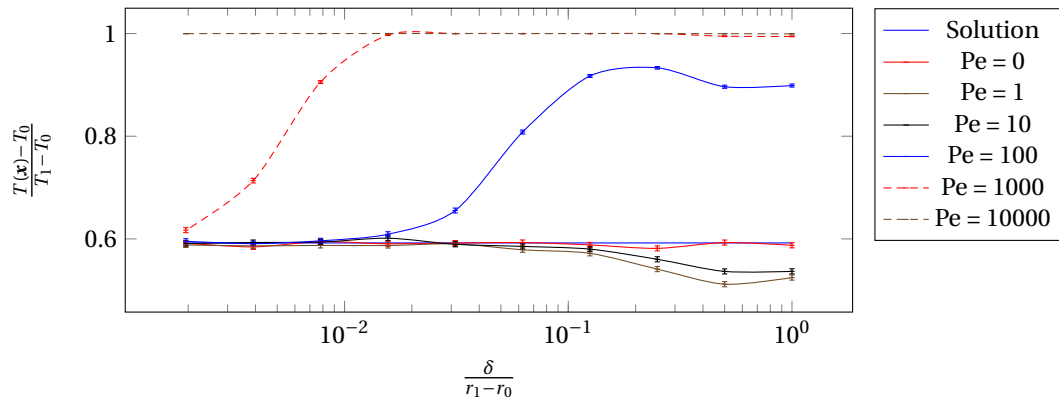
Parmi les écoulements tournants classiques, le tourbillon de Rankine, qui est un modèle de tourbillon dans les fluides visqueux, présente un champ de vitesse compatible avec l'exemple analytique ici présenté. L'expression de la vitesse en tout point dans un champ infini est donnée dans l'équation 4.27 où  $\Gamma$  est la circulation du vortex et  $R$  son rayon caractéristique. Ce tourbillon est constitué d'un cœur forcé similaire au tourbillon présenté dans l'exemple précédent, entouré par un tourbillon libre qui s'éteint à l'infini. On réalisera une simulation sur une portion tronquée de cet écoulement de façon à préserver la même solution analytique que précédemment.

$$\begin{cases} \mathbf{v}(r) = \frac{\Gamma}{2\pi R} \frac{r}{R} \mathbf{e}_\theta & r \leq R \\ \mathbf{v}(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta & r \geq R \end{cases} \quad (4.27)$$

Les résultats obtenus avec cet écoulement sont présentés dans la figure 4.10. Malgré une tendance générale similaire, la vitesse de convergence est plus lente que précédemment. En effet, bien que le nombre de Péclet soit de même valeur que dans l'exemple précédent, le maximum de vitesse est maintenant situé dans l'intervalle  $[r_0, r_1]$ , ce qui implique des variations du champ plus rapides, et donc la nécessité de choisir un paramètre numérique  $\delta$  plus petit pour vérifier l'hypothèse d'homogénéité locale du champ de vitesse.

## Un point sur la validité dans un champ de vitesse hétérogène

De façon générale, les observations faites à travers ces simulations dans des configurations de champ de vitesse tournant montrent une convergence du schéma advecto-diffusif utilisé vers la solution analytique. Cependant, il apparaît que pour des situations où le cisaillement est trop important, il est nécessaire de choisir un pas d'espace très petit afin de représenter correctement les lignes de champ.



**FIGURE 4.10** – Résultats à différentes valeurs du nombre de Péclet du schéma advecto-diffusif dans un tourbillon de Rankine. Ces résultats sont obtenus avec les paramètres suivants :  $R = 2$ ,  $r_0 = 0.5$ ,  $r_1 = 5$ ,  $\mathbf{x} = \{3, 4, 5\}$ , et l'axe de révolution est choisi selon  $\mathbf{u} = \{2, 4, 1\}$  pour éviter tout alignement avec les axes cartésiens. Enfin,  $10^4$  réalisations de Monte Carlo sont effectuées pour chaque point.

Cette question de représenter correctement le suivi d'une ligne de courant par une marche de type lagrangien est par ailleurs très présente dans la littérature, qui propose de nombreuses alternatives et améliorations [Chiesa+2005] [Zhu+2008] [Fede+2018]. Nous n'envisagerons cependant de l'aborder qu'après les travaux informatiques que nous devons faire sur la représentation et l'accès rapide à un champ de vitesse hétérogène issu d'une simulation de CFD (typiquement décrite à base d'un maillage tétraédrique non structuré). Ce n'est en effet qu'à ce stade que nous pourrons mesurer l'impact numérique d'un raffinement du suivi lagrangien.



# Comportement des algorithmes couplés

Quelles sont les limites à ces approches ? . . . . .	97
5.1 Marches aléatoires couplées et longueur moyenne de chemin . . . . .	99
5.2 Des limites de praticabilité . . . . .	117
5.2.1 Marche aléatoire et milieux isothermes, sur la route des chemins infinis . . . . .	117
5.2.2 Précision numérique et discontinuité des nombres réels . . . . .	118
5.2.3 Le grain de sel de la distance de ré-injection . . . . .	120
Praticabilité et limites des approches statistiques . . . . .	121

## Quelles sont les limites à ces approches ?

Dans la première section du chapitre précédent, nous avons commencé par expliciter la construction d'une marche conductive compatible avec les outils de la synthèse d'image. En restreignant une marche de type Walk on Sphere à des sphères de taille réduite, on a alors montré qu'en réalisant deux lancers de rayon par pas de la marche, on obtenait une marche exacte sous des hypothèses de linéarité locale en proche paroi. Dans une seconde partie, on a construit une marche advecto-diffusive combinant des idées provenant du schéma exponentiel de Patankar ainsi que de la marche conductive. Pour la mise en œuvre de cette marche, quatre lancers de rayon par pas sont alors nécessaires. Dans une seconde section, nous avons présenté une validation de ces marches dans des systèmes conducto-convecto-radiatifs couplés. Les algorithmes établis ont alors montré une bonne corrélation contre des validations analytiques et numériques. Dans une dernière partie, une démonstration dans une géométrie de complexité croissante a montré des résultats similaires à ceux présentés dans le chapitre 2 pour des algorithmes en transfert radiatif pur : une insensibilité du temps de calcul à la complexité géométrique. Enfin, dans une troisième section, nous avons poussé plus loin la validation de la marche advecto-diffusive dans des configurations où le champ de température est connu analytiquement. On a alors montré une convergence de cette marche vers les solutions analytiques, avec des vitesses de convergence en fonction du pas de la marche plus rapide que pour un schéma amont classique.

Le présent chapitre tente de faire émerger les limites de cette approche statistique dans des configurations de type échangeur, ainsi que d'en comprendre les comportements, notamment en termes de temps de calcul. De façon plus générale, ces limites sont travaillées plus transversalement dès lors que l'on utilise la méthode de Monte Carlo pour la résolution de problèmes de type transport linéaire en présence de collisions multiples. Ces besoins de compréhension apparaissent ainsi dans les champs du transfert radiatif ou de la neutronique depuis de nombreuses années. Bien que des solutions partielles existent, la question reste problématique et bien



---

ouverte. Par exemple, en présence d'un milieu très diffusant (épaisseur optique forte), la question de l'écrantage des rayonnements ionisants en physique nucléaire et la question de la transmission de la lumière solaire à travers des nuages épais sont travaillées depuis l'origine de la méthode ([Hammersley+1964]) et restent encore difficiles à contourner. Dans ce cas, on rencontre deux sources de difficulté distinctes :

- La première est liée à la précision de la grandeur observée : on cherche à évaluer la proportion de chemins statistiques qui ont effectivement traversé l'écran (ou le nuage), qui peut être extrêmement faible (pour une radio-protection, c'est bien l'objectif recherché). Typiquement, en physique nucléaire, si la transmission du milieu est de l'ordre de  $10^{-6}$ , il y a en moyenne une particule qui traverse pour un million de particules entrant dans la couche. Si on désire obtenir une précision de 1% sur le résultat, il faut donc échantillonner environ  $10^{10}$  chemins aléatoires.
- La seconde difficulté est liée à la production même de chacun de ces chemins multi-diffusifs. En effet, même si beaucoup de ces chemins ressortent assez vite par le côté par lequel ils sont rentrés dans le milieu, certains d'entre eux vont rentrer profondément dans ce dernier, voire même le traverser. Dans ce cas, on sait que le nombre de diffusions est asymptotiquement proportionnel au carré de l'épaisseur optique [Bachelier1900] (rapport de l'épaisseur typique du système sur le libre parcours moyen), soit dans l'exemple précédent environ  $10^{12}$  événements de collision. En remettant le point précédent en perspective, en ne comptant que les chemins ayant effectivement traversé le milieu (soit  $10^{10} \cdot 10^{-6}$ ), on aurait a minima  $10^{16}$  ( $10^4 \cdot 10^{12}$ ) collisions à générer, ce qui est totalement impraticable.

Cette illustration reste bien sûr extrême, mais elle permet de comprendre la question.

Dans notre situation, nous pouvons tout à fait imaginer que du fait de la représentation des trajectoires browniennes par des marches de type "diffusif", des comportements équivalents pourraient émerger dans des conditions particulières. Néanmoins, il n'est pas évident de deviner directement les situations problématiques du fait de la modification des marches pour rendre compte du processus advectif et radiatif entre parois. On peut par exemple supposer que les comportements ne seront pas similaires pour différents profils de vitesse. L'objectif de ce chapitre est donc d'essayer de repérer ces difficultés au travers d'une série de tests paramétriques sur des configurations académiques.

La première section prend la forme d'un article proposant une analyse paramétrique du comportement des marches conducto-convecto-radiatives dans deux configurations de type échangeur. En faisant varier des paramètres géométriques, ces résultats illustrent pourquoi des calculs sur des géométries de complexité géométrique croissante peuvent conserver, ou pas, un temps de calcul constant. Des résultats classiques sur le nombre de pas moyen des marches isotropes sont par ailleurs retrouvés sur des variations des paramètres numériques de la marche, y compris sur la marche advecto-diffusive anisotrope. Enfin, une analyse sur les paramètres physiques permet de mettre en exergue une limite pratique à la méthode dans le cas de ratios de conductivités trop importants lorsque la zone de plus forte conductivité ne comporte que des conditions limites en flux.

Dans la seconde section, une synthèse des limites rencontrées avec l'utilisation de la marche conducto-convecto-radiative couplée est présentée. Deux principales limites pratiques ont été rencontrées jusqu'ici. La première de ces limites est celle présentée dans la section précédente dans le cas de ratios de conductivités trop importants, et malgré un ensemble d'approches permettant de contourner cette limite de façon ponctuelle, aucune solution générale n'est connue à ce jour. Une seconde catégorie de problèmes est d'ordre numérique, et n'est ici mentionnée qu'à titre informatif. En effet, du fait de l'utilisation de l'outil informatique, la représentation des nombres réels est limitée (espace mémoire restreint). Ces problèmes ont notamment été rencontrés lors de la duplication des structures dans les échangeurs lorsque les détails de ces géométries devenaient trop petits devant la taille globale du système.

## 5.1 Marches aléatoires couplées et longueur moyenne de chemin

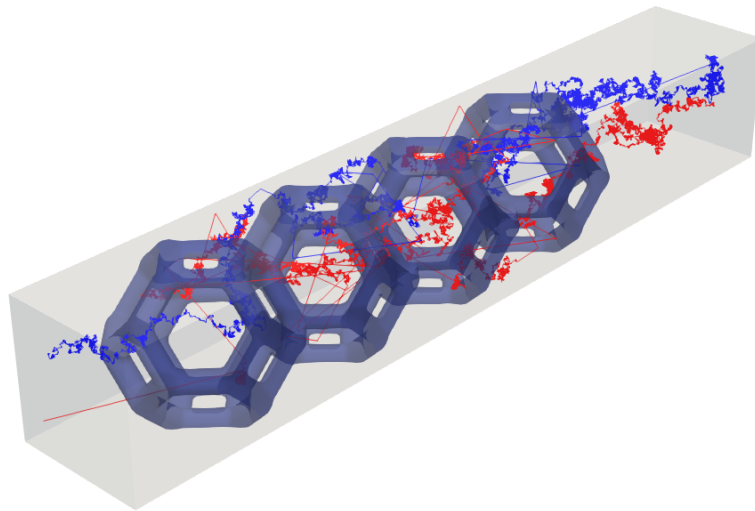
Les marches aléatoires à pas constants présentées dans le chapitre 4 pour la résolution des transferts de la chaleur advecto-diffusifs représentent un cas parmi une plus grande famille de marches présentant des caractéristiques similaires. Ces dernières se retrouvent dans un ensemble de domaines tels que la cinétique des gaz, l'économie, ou encore la biologie, mais aussi en transfert radiatif semi-transparent pour de fortes épaisseurs optiques.

Pour ces marches, quand elles sont isotropes, pour un pas de longueur moyenne  $\delta$ , le comportement asymptotique pour un grand nombre de pas implique un nombre moyen de pas en  $(\frac{L}{\delta})^2$  pour atteindre une position à une distance  $L$  de la position initiale (voir annexe A.3).

Par ailleurs, dans les marches présentées jusqu'ici, le pas de la marche  $\delta$  est un paramètre numérique. C'est sur ce dernier qu'est construit le modèle approché, qui est lui exactement résolu par la méthode de Monte Carlo. Le choix de la "bonne" valeur du paramètre numérique prend alors le sens suivant :  $\delta$  doit être suffisamment petit pour assurer la convergence du modèle approché vers la solution du problème étudié, mais le plus grand possible pour limiter le nombre de pas par chemins, et donc le temps de calcul.

Cependant, en toute généralité, la définition de ces deux paramètres ( $L$  et  $\delta$ ) ne suffit plus à caractériser le nombre de pas moyen que va parcourir la marche quand cette dernière est une marche couplée telle que celle présentée dans le chapitre 4. En effet, tandis que la marche conductive se comporte comme une marche isotrope, les marches advecto-diffusives et radiatives ont un comportement tout à fait différent. Le comportement en temps de calcul de ces trois types de marche couplés n'a donc a priori aucune raison de se comporter de façon similaire à une marche isotrope. La figure 5.1 présente un tel chemin couplé dans la simulation solaire des cellules de Kelvin présentée dans le chapitre 4.

L'écrit qui suit présente une analyse paramétrique dans un échangeur poreux de ces chemins couplés, sur des paramètres numériques, géométriques, et physiques. Une lecture au regard du nombre moyen de pas avant sortie dans un problème couplé y est mise en avant, et propose une interprétation des variations paramétriques en "distance effective aux conditions limites".



**FIGURE 5.1** – Représentation de deux chemins conducto-convecto-radiatifs dans un empilement de quatre cellules de Kelvin parcourues par un champ de vitesse imposé. Ces deux chemins démarrent en advecto-diffusion pure dans l'écoulement en aval de la structure poreuse (point de départ en haut à droite), dans une zone où le fluide s'est donc déjà réchauffé au contact du milieu poreux, lui-même chauffé par rayonnement. Les portions de chemins se propageant selon de longues lignes droites représentent des émissions radiatives en surface du milieu poreux. Ainsi, tandis que le chemin bleu se termine en advecto-diffusion à la condition limite d'entrée de l'écoulement à température constante (surface en bas à gauche), le chemin rouge finit en transfert radiatif sur cette même paroi virtuelle, où la température radiative représentant le flux incident est alors retenue.

# Random walks in coupled conductive, convective, and radiative heat transfer, a parametric analysis

Loris IBARRART<sup>a,c,\*</sup>, Stéphane BLANCO<sup>b</sup>, Cyril CALIOT<sup>c</sup>, Mouna EL HAFI<sup>a</sup>,  
RICHARD FOURNIER<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*RAPSODEE, UMR CNRS 5302, Mines Albi, Albi, France*

<sup>b</sup>*LAPLACE - UMR CNRS 5213, Toulouse, France*

<sup>c</sup>*PROMES - CNRS, UPR 8521, Odeillo, France*

---

## Abstract

The Monte Carlo method is widely used for the simulation of radiative heat transfer. In recent studies, the use of similar algorithms for the resolution of coupled conducto-convective-radiative thermal transfers is proposed. Thanks to the tools of image synthesis, these statistical approaches have the advantage of being resilient to geometric complexity, even in the presence of large scale ratios of time and space. However, some difficulties arose at certain parametric limits in terms of calculation times. This study attempts to draw a parallel between these difficulties and those encountered for high optical thicknesses in the resolution of radiative transfer by the Monte Carlo method.

---

## Introduction

The resolution of differential equations by statistical methods, especially for heat transfer, is not a new idea. Indeed, from the beginning of the 20th century, Courant, Friedrichs, and Lewy [1] made the link between random walks and boundary problems for elliptic differential equations. Subsequently, the work of Feynmann and Kac [2] opened the door to solving many linear problems by the exploration of a space of stochastic paths. Shortly afterwards, Haji-Sheikh and Sparrow [3] introduced random walks as part of the heat conduction resolution [4] in meshless geometries. At the same time, the probabilistic vision for radiation heat exchange has been in use for many years. This is due to the Boltzmann's equation, whose statistical interpretation is direct and exact. The Monte Carlo method has thus become the reference method for radiative transfer. More recently, the image synthesis industry has adopted this statistical vision as well as the Monte Carlo algorithms that go hand in hand in order to overcome certain limitations related to rasterization (shape factors approach) [5]. Nowadays, the scientific community using the statistical methods benefits from the tools resulting from this investment, which allows for the management of geometrical complexity. In addition, since the average number of steps for each statistical path is a function of the optical thickness of the system, it is possible to make a theoretical prediction of the calculation times from

---

\*loris.ibarrart@mines-albi.fr

---

reasoning on equivalent simplified configurations. A new range of methods now offers a statistical reading of the coupling between different physical phenomena [6] [7]. In these algorithms, statistical walkers spread throughout space and time, but also jump from one phenomenon to another. In this current paper, it is proposed to observe the behavior of a coupled algorithm to identify the parameters that drive the average number of steps in a simple configuration. The first part describes the model used and the approach to construct its integral formulation. Then, the corresponding algorithms are presented. Finally, the evolution of computing time as a function of geometric, physical, and numerical parameters is represented and discussed in the last section.

## 1. Statistical model of heat transfer

In this paper, both the model and the statistical method of [8] are used to solve a coupled conductive, convective, radiative heat transfer problem at the stationary state. Details of equation and integral formulation are reminded thereafter.

### 1.1. Coupled conduction convection and radiation problem

Let  $\Omega_S$  be an opaque homogenous solid and  $\Omega_F$  be a transparent homogenous fluid of known velocity field  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ . Heat transfer is modelled as equations  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  where  $\alpha_F$  is the fluid's thermal diffusivity,  $\lambda_S$  is the solid's thermal conductivity,  $\lambda_F$  is the fluid's thermal conductivity,  $\mathbf{n}$  is the unit normal vector at the solid-fluid interface pointing towards the fluid,  $\sigma$  is the Stefan-Boltzmann constant,  $c$  is the speed of light in vacuum, and  $\mathcal{L}_l$  is the radiative intensity such that every radiative source term is linearized around  $T_{ref}$ , which leads to a radiative heat transfer coefficient  $h_R$  in the boundary equation 4.

$$\begin{cases} \Delta T(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega_S & (1) \\ \alpha_F \Delta T(\mathbf{x}) - \mathbf{v} \cdot \nabla T(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega_F & (2) \\ c\mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{L}_l(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega_F & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_S \nabla T(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} = -\lambda_F \nabla T(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} + h_R (T(\mathbf{y}) - T_R(\mathbf{y})), & \mathbf{y} \in \partial\Omega_S \cap \partial\Omega_F & (4) \\ T_R(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sigma T_{ref}^3} \int_{2\pi} |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}| \mathcal{L}_l(\mathbf{y}, \mathbf{v}) d\omega(\mathbf{u}), & \mathbf{y} \in \partial\Omega_S \cap \partial\Omega_F & (5) \end{cases}$$

### 1.2. Integral formulation

According to the harmonicity property of the laplacian operator, for any point  $\mathbf{x}$  in the solid, for any length  $\delta_S$  shorter than the minimal distance between  $\mathbf{x}$  and the solid boundary, the solution of equation 1 can be written as equation 6. The Random Walk on Sphere method [16] stands on this principle : temperature at any given point is equal to the mean temperature over any sphere centered on this point. In this method, the integral formulation is interpreted in a probabilistic way, which allows the defining of a walk using double randomization : from the initial point  $\mathbf{x}$ , the next point is randomly sampled on an enclosing sphere, for which a point is randomly sampled on its own enclosing sphere, etc. When a sampled point lands on a boundary, the temperature at this point is scored as a weight of Monte-Carlo. In the original algorithm of WoS, this landing was allowed by a virtual thickening of the boundary.

$$T(\mathbf{x}) = \int_{4\pi} \frac{1}{4\pi} d\omega(\mathbf{u}) T(\mathbf{x} + \delta_S \mathbf{u}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_S; \forall \mathbf{u}, \mathbf{x} + \delta_S \mathbf{u} \in \Omega_S \quad (6)$$

In the present work, ray tracing is used, which allows an exact landing of the walk on the solid boundary  $\partial\Omega_S$ . Indeed, before each step of the walk, two rays are traced to detect the minimal distance between  $\mathbf{x}$  and the solid boundary in two directions only, which leads to the definition of the length step  $\delta_s(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  of equation 7. Away from the boundary, the random walk is still the integral solution presented in the equation 6. However, close to the boundary, this expression of  $T(\mathbf{x})$  is no longer exact, but still converges to the solution of equation 1 when  $\delta_S$  tends to 0. Furthermore, this expression keeps its exact characteristic in the vicinity of the boundary if the temperature is locally tri-linear.

$$\begin{cases} T(\mathbf{x}) \approx \int_{4\pi} \frac{1}{4\pi} d\omega(\mathbf{u}) T(\mathbf{x} + \delta_s(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \mathbf{u}), & \mathbf{x} \in \Omega_S \\ \delta_s(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \min_{\delta > 0} (\delta_S; (\mathbf{x} + \delta \mathbf{u}) \in \partial\Omega_S; (\mathbf{x} - \delta \mathbf{u}) \in \partial\Omega_S) \end{cases} \quad (7)$$

Under the assumption that the variations of the velocity field in norm and direction are negligible, equation 2 can also be rewritten as an integral over an enclosing sphere [10]. Under this same assumption, we choose to use Patankar's approach [11] by injecting the solution 8 where  $Pe = \frac{v\delta}{\alpha}$  of the 1-dimension problem to express the fluxes on the surfaces of a control volume. In a local orthonormal basis  $(\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  chosen such that  $\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1 = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_v$ , this exponential scheme leads to equation 9 where  $\delta_F$  is the step length and  $\lfloor \cdot \rfloor$  is the floor function. The resulting scheme is exact when the local temperature field is solution of the equation 2 in 1D, and when a bi-linear field is added to this 1D solution in the plane orthogonal to the velocity field.

$$T(\mathbf{x}) = \frac{1}{1 + \exp(Pe)} T(\mathbf{x} + \delta_F \mathbf{e}_v) + \frac{\exp(Pe)}{1 + \exp(Pe)} T(\mathbf{x} - \delta_F \mathbf{e}_v) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) \approx & \underbrace{\frac{Pe e^{Pe}}{Pe(e^{Pe} + 1) + 4(e^{Pe} - 1)}}_{\mathbb{P}_{up}} T(\mathbf{x} - \delta_F \mathbf{e}_v) + \underbrace{\frac{Pe}{Pe(e^{Pe} + 1) + 4(e^{Pe} - 1)}}_{\mathbb{P}_{down}} T(\mathbf{x} + \delta_F \mathbf{e}_v) \\ & + \underbrace{\frac{4(e^{Pe} - 1)}{Pe(e^{Pe} + 1) + 4(e^{Pe} - 1)}}_{\mathbb{P}_{diff}} \frac{1}{4} \sum_{k=3}^6 T(\mathbf{x} + (-1)^k \delta_F \mathbf{e}_{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_F \end{aligned} \quad (9)$$

Once again, ray tracing can be used to detect the presence of the boundary in a meshless approach. This time, four different directions are tested out to set the step length  $\delta_f(\mathbf{x}, \mathbf{e}_v, \mathbf{u})$ . Furthermore, the direction  $\mathbf{e}_2$  (and subsequently  $\mathbf{e}_3$ ) is randomly sampled at each step of the walk. The length step is thus defined according to equation 10, where the direction  $\mathbf{u}$  is randomly sampled among  $\mathbf{e}_2$  and  $\mathbf{e}_3$ .

$$\delta_f(\mathbf{x}, \mathbf{e}_v, \mathbf{u}) = \delta = \min_{\delta > 0} (\delta_F; (\mathbf{x} + \delta \mathbf{u}) \in \partial\Omega_F; (\mathbf{x} - \delta \mathbf{u}) \in \partial\Omega_F; (\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_v) \in \partial\Omega_F; (\mathbf{x} - \delta \mathbf{e}_v) \in \partial\Omega_F) \quad (10)$$

Finally, equation 4 is discretized using the same small lengths  $\delta_S$  and  $\delta_F$  to obtain equation 11. In this expression, the radiative temperature described in equation 4 is also a mean value of the linearized radiative intensity, which is itself governed by the pure transport equation 3. In this expression, the step lengths are also adjusted using ray tracing in order to avoid injections out of the target media.

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{x}_p) = & \underbrace{\frac{\delta_F \lambda_S}{\delta_F \lambda_S + \delta_S \lambda_F + \delta_S \delta_F h_R}}_{\mathbb{P}_S} T(\mathbf{x}_p - \delta_S \mathbf{n}) + \underbrace{\frac{\delta_S \lambda_F}{\delta_F \lambda_S + \delta_S \lambda_F + \delta_S \delta_F h_R}}_{\mathbb{P}_F} T(\mathbf{x}_p + \delta_F \mathbf{n}) \\
& + \underbrace{\frac{\delta_S \delta_F h_R}{\delta_F \lambda_S + \delta_S \lambda_F + \delta_S \delta_F h_R}}_{\mathbb{P}_R} T_R(\mathbf{x}_p), \quad \mathbf{x}_p \in \partial\Omega_S \cap \partial\Omega_F
\end{aligned} \tag{11}$$

All three equations 7, 9, and 11 express the temperature at a point as a weighted average (continuous or discrete) of other close-by temperatures. Using the same approach as Random Walk on Sphere methods, these equations are interpreted as a probabilistic description of a random process which defines paths. In this case, these paths can switch from one equation to another thanks to the coupling in the boundary condition 11. A broad version of the corresponding algorithms is given in section 2.

## 2. Algorithms

The integral formulations presented in subsection 1.2 correspond to the following algorithms, where the step length using the min function are evaluated using ray tracing.

<b>Algorithm 1:</b> Sampling of a conductive random step at the point $\mathbf{x}_S \in \Omega_S$
Uniform sampling of the direction $\mathbf{u}$ on $4\pi$ $\delta = \min_{\delta > 0}(\delta_S; (\mathbf{x} + \delta \mathbf{u}) \in \partial\Omega_S; (\mathbf{x} - \delta \mathbf{u}) \in \partial\Omega_S)$ $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \delta \mathbf{u}$ <b>if</b> $\mathbf{x}' \in \partial\Omega_S$ <b>then</b>   $\mathbf{x}_P = \mathbf{x}'$ (see algorithm 4) <b>else</b>   $\mathbf{x}_S = \mathbf{x}'$ (recursivity) <b>end</b>

**Algorithm 2:** Sampling of a convective random step at the point  $\mathbf{x}_F \in \Omega_F$ 

Uniform sampling of the direction  $\mathbf{u}$  orthogonal to  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_F)$  on  $2\pi$   
 $\delta = \min_{\delta>0}(\delta_F; (\mathbf{x} + \delta\mathbf{u}) \in \partial\Omega_F; (\mathbf{x} - \delta\mathbf{u}) \in \partial\Omega_F; (\mathbf{x} + \delta\mathbf{e}_v) \in \partial\Omega_F; (\mathbf{x} - \delta\mathbf{e}_v) \in \partial\Omega_F)$   
 Evaluate the local values of  $\mathbb{P}_{up}$ ,  $\mathbb{P}_{down}$ , and  $\mathbb{P}_{diff}$  (see equation 9)  
 Uniform sampling of  $r$  on  $[0, 1]$   
**if**  $r < \mathbb{P}_{up}$  **then**  
 |  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \delta\mathbf{e}_v$  (*recursivity*)  
**else if**  $r < \mathbb{P}_{up} + \mathbb{P}_{down}$  **then**  
 |  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \delta\mathbf{e}_v$  (*recursivity*)  
**else**  
 |  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \delta\mathbf{u}$  (*recursivity*)  
**end**  
**if**  $\mathbf{x}' \in \partial\Omega_F$  **then**  
 |  $\mathbf{x}_P = \mathbf{x}'$  (*see algorithm 4*)  
**end**

**Algorithm 3:** Sampling of a radiative random step at the point  $\mathbf{x}_R \in \partial\Omega_S$ 

Lambertian sampling of the direction  $\mathbf{u}$  around  $\mathbf{n}$   
 $\delta = \min_{\delta>0}((\mathbf{x} + \delta\mathbf{u}) \in \partial\Omega_S)$  (closest boundary in the direction  $\mathbf{u}$ )  
 $\mathbf{x}_P = \mathbf{x}_R + \delta\mathbf{u}$  (*see algorithm 4*)

**Algorithm 4:** Sampling of a boundary random step at the point  $\mathbf{x}_P \in \partial\Omega_S \cap \partial\Omega_F$ 

**if**  $\mathbf{x}_P$  is on a known boundary condition **then**  
 | End the random walk  
 | Score  $T(\mathbf{x}_P)$   
 | *Note : Neumann boundary conditions do not terminate the walk.*  
**else**  
 | Evaluate the local values of  $\mathbb{P}_S$ ,  $\mathbb{P}_F$ , and  $\mathbb{P}_R$  (see equation 11)  
 | Uniform sampling of  $r$  on  $[0, 1]$   
 | **if**  $r < \mathbb{P}_S$  **then**  
 | |  $\mathbf{x}_S = \mathbf{x}_P - \delta_S\mathbf{n}$  (*see algorithm 1*)  
 | **else if**  $r < \mathbb{P}_S + \mathbb{P}_F$  **then**  
 | |  $\mathbf{x}_F = \mathbf{x}_P + \delta_F\mathbf{n}$  (*see algorithm 2*)  
 | **else**  
 | |  $\mathbf{x}_R = \mathbf{x}_P$  (*see algorithm 3*)  
 | **end**  
**end**

**3. Coupled random paths in exchangers, a parametric analysis**

So far, the coupled random walk presented in section 1 and described in section 2 has been validated against analytical and numerical results [8] [9]. Its use of the ray tracing tools provided by the computer graphics' community was shown to provide it



with efficient CPU times regardless of the geometric complexity thanks to top of the art acceleration structures [5].

In the present paper, we intend to draw out the practical limits of this coupled random walk. The exploratory domain suggested in this paper includes a number of geometrical, numerical, and physical parameters.

Two study cases based on the same HiTRec geometry (see figure 1) were considered to conduct the experiments. The geometry is constituted of parallel square ducts (see figure 1). In configuration *exchanger* (see figure 2), the inlet fluid is heated by the porous structure, which is itself heated by one of its faces, while all the other lateral faces are insulated. Down the flow, the studied flow field is extended by a characteristic length  $\frac{\|v\|_{max}(\sqrt{\phi}L)^2}{2\alpha}$  between insulated faces in order to straighten the isotherm to be able to set a temperature outlet boundary condition ( $\nabla T \cdot \mathbf{n} = 0$ ). In the *solar* configuration (see figure 3), the porous structure is heated by a radiative source coming from the same face as the fluid inlet, while all the lateral faces are insulated and an outlet boundary condition is set down the flow.

In the ducts, a fully developed laminar flow is considered. Its expression can be analytically solved as equation 12 [17] under the same hypothesis as a Poiseuille flow in a square unit duct, where  $\nabla p$  is the pressure gradient and  $\mu$  the viscosity.

$$v(x, y) = \frac{\|\nabla p\|}{\mu} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{16 \sin((2i-1)\pi x) \sin((2j-1)\pi y)}{((2i-1)^2 + (2j-1)^2) (2i-1) (2j-1) \pi^4} \mathbf{e}_z \quad (12)$$

Finally, table 1 displays the reference parameters chosen as ground values for all the following experiments for both *exchanger* and *solar* configurations.

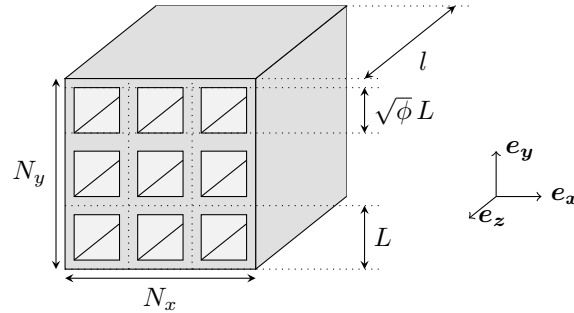


Figure 1: The HiTRec porous structure of porosity  $\phi$ . It is composed of  $N_x$  times  $N_y$  regular square ducts.

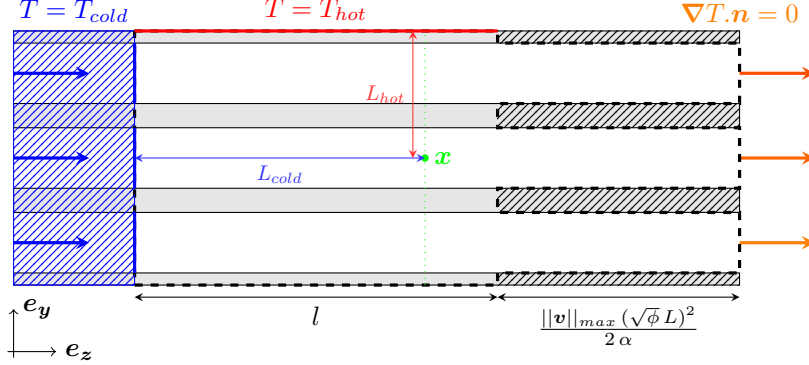


Figure 2: *Exchanger configuration.* The porous structure is heated by its upper surface and the fluid volume is extended down the flow in order to be able to avoid boundary effects on the outflow (the porous structure is also extended by this length, but with adiabatic surfaces).  $\mathbf{x}$  represents the mean position of the start of the walk to evaluate the mean fluid temperature on the green dotted line. This figure also showcases the mean distance between the starting point and the Dirichlet boundary conditions  $L_{cold}$  and  $L_{hot}$  where the random path can be stopped.

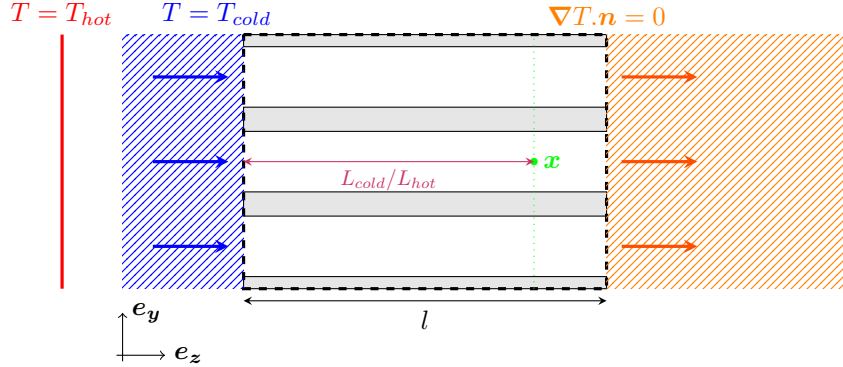


Figure 3: *Solar configuration.* The porous structure is heated by a radiative surface through the transparent fluid flow.  $\mathbf{x}$  represents the mean position of the start of the walk to evaluate the mean fluid temperature on the green dotted line. This figure also showcases the mean distance between the starting point and the Dirichlet boundary conditions  $L_{cold}$  and  $L_{hot}$  where the random path can be stopped.

test case	$N_x$	$N_y$	$\Phi$	$\frac{z}{l}$	$Pe_{max}$	$\frac{\lambda_S}{\lambda_F}$	$\frac{h_R L}{\lambda_F}$	$\frac{\delta_S}{(1-\sqrt{\Phi})L}$	$\frac{\delta_F}{\sqrt{\Phi}L}$
<i>exchanger</i>	1	1	0.7	0.8	200	0.1	10	0.05	0.01
<i>solar</i>	100	100	0.7	0.8	200	0.1	500	0.05	0.01
range	$1 : 10^4$	$1 : 10^4$	0.01 : 0.81	0.1 : 0.9	$10^{-1} : 10^5$	$10^{-4} : 10^4$	$10^{-3} : 10^7$	$10^{-2} : 0.5$	$5 \cdot 10^{-4} : 0.5$

Table 1: Reference parameters for the *exchanger* and *solar* configurations, and overall range used in the parametric analysis.  $N_x$  : number of ducts along the  $x$  axis.  $N_y$  : number of ducts along the  $y$  axis.  $\Phi$  : porosity of the solid structure.  $\frac{z}{l}$  : position of the starting position  $\mathbf{x}$  along the  $z$  axis.  $Pe_{max}$  : maximum Peclet number in the fluid of expression  $\frac{v_{max} \sqrt{\Phi} L}{\alpha_F}$  where  $v_{max}$  is the highest norm of the velocity in the flow.  $\frac{\lambda_S}{\lambda_F}$  : ratio of conductivities between the solid and the fluid.  $\frac{h_R L}{\lambda_F}$  : radiative Biot number accounting for the predominance of radiation over diffusion in the fluid media.  $\frac{\delta_S}{(1-\sqrt{\Phi})L}$  : dimensionless numeric step in the solid.  $\frac{\delta_F}{\sqrt{\Phi}L}$  : dimensionless numeric step in the fluid.

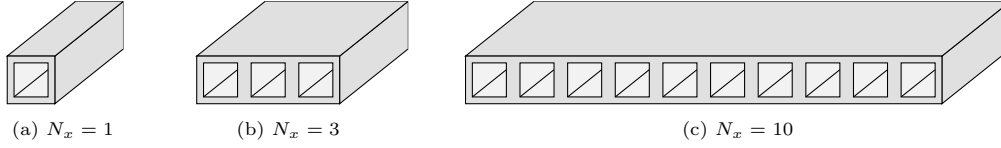


Figure 4: *Test  $N_x$* . The number of ducts along the  $x$  axis is progressively increased. Given that all faces are insulated, except the inlet and outlet faces, as well as the upper face in the *exchanger* configuration only. All these systems lead to similar outflow temperatures as they are symmetrical, and therefore thermally equivalent.

Every single parameter of table 1 was chosen to be tested on, which leads to the nine following tests :

- *Test  $N_x$*  : Given both configurations of the study cases, an increase in the number of parallel ducts along the  $x$  axis should lead to no change in the temperature value given the symmetry of the problem. This exemple acts as a basis line showing the behaviour of random walks in an increasingly complex geometry. (see figure 4)
- *Test  $N_y$*  : Given both configurations of the study cases, an increase in the number of parallel ducts along the  $y$  axis should lead to a change in the temperature value for the *exchanger* configuration only. (see figure 5)
- *Test  $\Phi$*  : A change in the porosity of the exchanger leads to no complexification of the geometry, but a mere modification of the proportion of solid and fluid volumes. (see figure 6)
- *Test  $\frac{z}{l}$*  : Without any change to the present configuration, this test shows how the starting point of the random walk impacts the temperature and mean number of steps. (see figure 7)
- *Test  $Pe_{max}$*  : A change in the Peclet number of the flow field infers a modification of the anisotropic walk in the fluid only (probabilities  $\mathbb{P}_{up}$ ,  $\mathbb{P}_{down}$ , and  $\mathbb{P}_{diff}$  in equation 9). (see figure 8)
- *Test  $\frac{\lambda_S}{\lambda_F}$*  : While the ratio of conductivities between the solid and the fluid implies no change whatsoever to the construction of the random walks, it does imply a change in the values of the probabilities of equation 11 at their interface.
- *Test  $\frac{h_{RL}}{\lambda_F}$*  : Similarly to the previous test, the radiative Biot number only influences the set of probabilities at the interface between the solid and the fluid. Higher values imply a predominance of radiation over conduction in the fluid, while lower values imply a predominance of conduction.
- *Test  $\frac{\delta_S}{(1-\sqrt{\Phi})L}$*  : In the context of a coupled random walk, the numerical convergence in the solid must be achieved. This test shall show how the overall mean number of steps is influenced by the steps size in the solid only .
- *Test  $\frac{\delta_F}{\sqrt{\Phi}L}$*  : Likewise the previous test regarding the steps size, but in the fluid only.

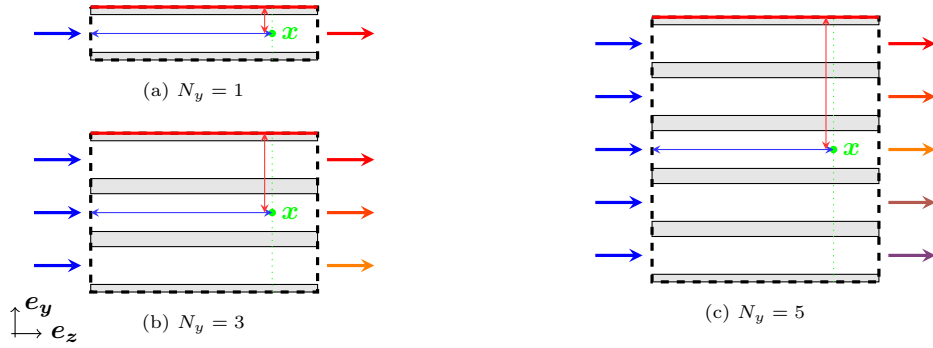


Figure 5: Test  $N_y$  in the *exchanger* configuration. As the number of ducts increases, the mean value of temperature decreases. In the *solar* configuration, this parameter has no more impact than  $N_x$ .

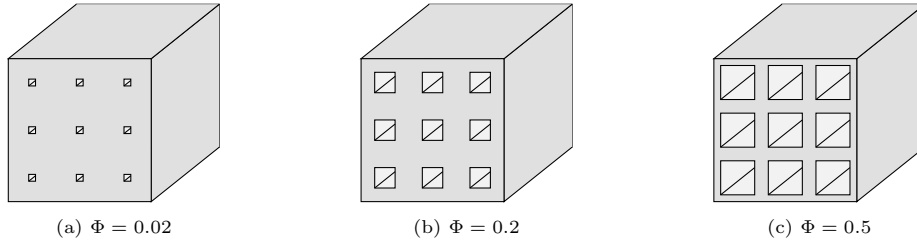


Figure 6: Test  $\Phi$ . As the porosity increases, ducts become larger, which lead to higher rates of flow.

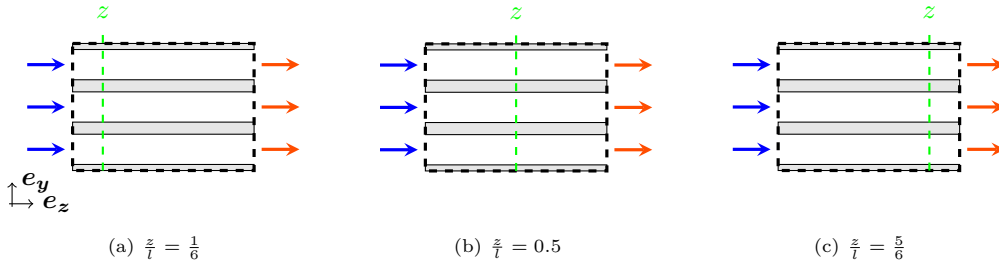


Figure 7: Test  $\frac{z}{l}$ . As the mean temperature's surface of integration is moved down the flow, more time is given for the fluid to exchange with the solid media, which leads to higher temperatures.



Figure 8: Test  $Pe_{max}$  in the *exchanger* configuration. In this illustration, a variation of the velocity is shown, but other parameters can influence this parameter, such as the conductivity of the fluid or the dimension of the duct. As  $Pe_{max}$  changes, the extended zone down the flow is also extended.

The historic result ([12], [13], [14], [15]) stating that a random walk of constant length  $\delta$  averages  $(\frac{L}{\delta})^2$  steps to cover a distance  $L$  will be kept as a guideline to conduct the results discussion. For both study cases, the random path has to reach either the cold boundary condition or the hot one in order to end the walk. Two associated distances  $L_{cold}$  and  $L_{hot}$  will be considered, defined as the expected distance required by the random walk to respectively reach the cold and hot boundary condition (see figures 2, 3).

Presented results include the mean outflow temperature and mean number of random steps to reach the boundary condition. From the point of view of the random walk, the mean temperature  $\bar{T}$  accounts for the percentage of random walks ending at each boundary condition. In the meantime, the mean number of random steps  $\langle N_{path} \rangle$  is directly related to the expected CPU time required for each simulation, as granted by the ray tracing tools being used to build the steps.

$$Test \frac{\delta_S}{(1-\sqrt{\phi})L} :$$

Figure 9 shows the influence of the step length  $\delta_S$  on the temperature and the random walk's mean number of steps. Regarding temperature, results show full convergence for steps  $\delta_S$  as big as half of the solid's thickness  $(1-\sqrt{\phi})L$ . This seems to indicate that the temperature field in the solid is trilinear, as it is the local hypothesis for the conductive random step of algorithm 1. In the meantime, as it was to be expected, the mean number of random steps show an asymptotic behaviour in  $\frac{1}{\delta_S^2}$  for small enough values of the parameter.

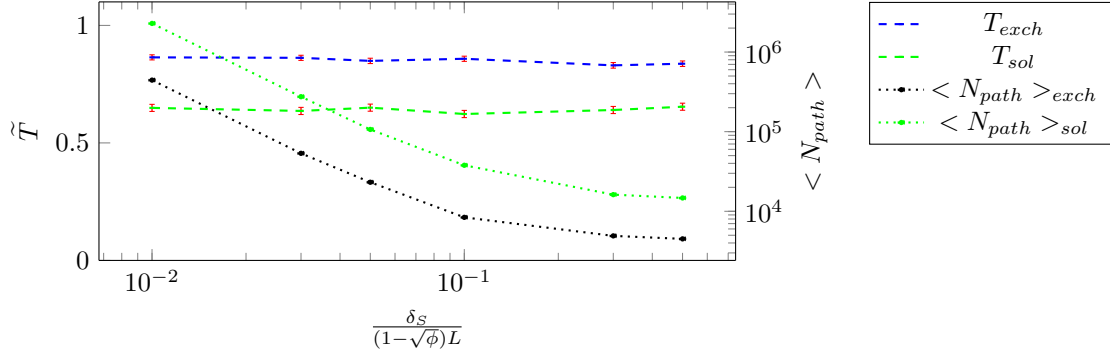


Figure 9: Evolution of the mean dimensionless temperature and mean number of random steps as a function of the length of the numerical step in the solid.

$$Test \frac{\delta_F}{\sqrt{\phi}L}$$

In the case of the step length in the fluid in figure 10, the local uniformity of the velocity field hypothesis is not verified for large values of the parameter. The curve therefore shows signs of a convergence of the temperature when the step length is small enough. In these results, the required step's length  $\delta_F$  in the fluid seems to be somewhere between 1/10th and 1/100th of the ducts width  $\sqrt{\phi}L$ . As a reference, in solid media, the step's size is usually taken around 1/20th of the smallest characteristic length. Oddly

enough, in the *solar* configuration, a decrease in the mean number of steps seems to happen when decreasing the length of the step on the large value side of the chart. This behaviour may be explained by the modification of the interface probabilities of equation 11, where smaller values of  $\delta_F$  may lead to smaller probabilities of being injected in the solid, and therefore a higher chance of ending the walk. As in the previous example, for smaller values of  $\delta_F$ , the  $\frac{1}{\delta_F^2}$  asymptotic convergence can also be observed.

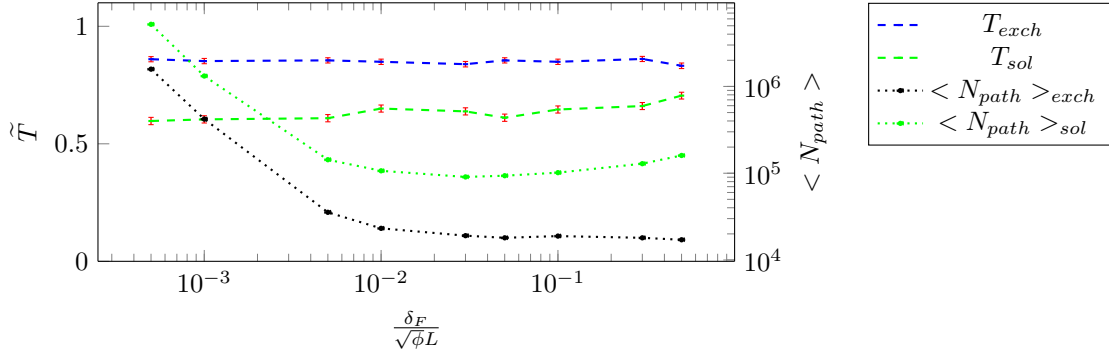


Figure 10: Evolution of the mean dimensionless temperature and mean number of random steps as a function of the length of the numerical step in the fluid.

*Test  $\frac{z}{l}$*

The mean temperature along the duct's flow is presented in figure 11. In both configurations, the temperature slowly increases as the observation point is moved down the flow, as the fluid is given more time to be heated by the solid structure. In the meantime, moving the observation point down the flow also lengthen the length  $L_{cold}$ , which leads to longer paths in order to reach this boundary. In the *solar* configuration, the distance  $L_{hot}$  is also lengthened, which should lead to a faster growth of the mean number of steps.

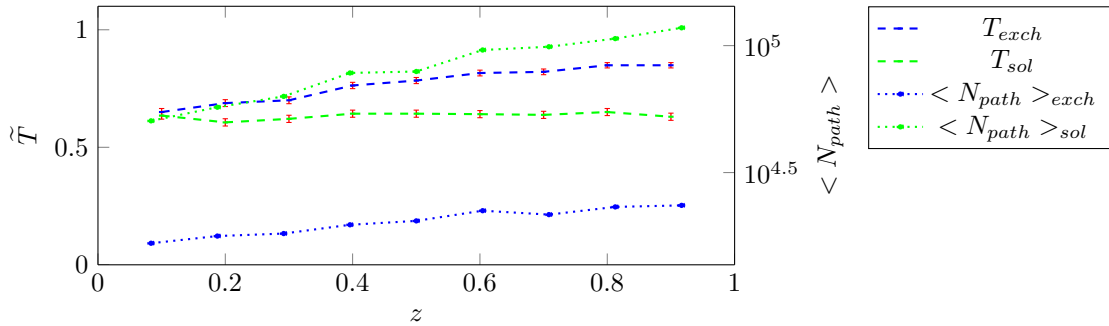


Figure 11: Evolution of the mean dimensionless temperature and mean number of random steps as a function of the integrated surface's position along  $z$ .

*Test  $N_x$*

In both configurations the number of ducts along the  $x$  axis  $N_x$  leads to no change regarding temperature nor mean number of steps. As computer graphics' tools are being used, no impact on the CPU time is noticeable neither. Indeed, in algorithms 1, 2, 3, and 4, the path length  $\delta$  is computed using ray tracing tools which can benefit from accelerating structures.

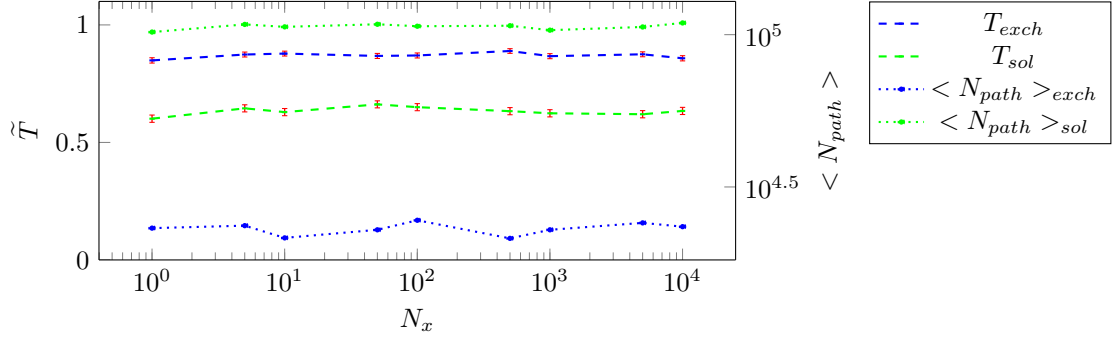


Figure 12: Evolution of the mean dimensionless temperature and mean number of random steps as a function of the number of ducts in the direction  $\mathbf{e}_x$ .

*Test  $N_y$*

For the *exchanger* configuration in the case of the number of ducts  $N_y$  presented in figure 13, increasing the number of ducts impacts both the temperature and the mean number of steps. This case is similar to the previous example of the starting position. Indeed, as the number of ducts increases, the average starting point is driven away from the hot boundary condition and  $L_{hot}$  gets larger. After about 100 ducts, the system can be seen as being opaque (by analogy with radiative optical thickness) to the hot boundary condition :  $L_{cold} \ll L_{hot}$ . From this point onwards, the random walks always reach the cold boundary condition, in about  $1.3 \cdot 10^5$  steps.

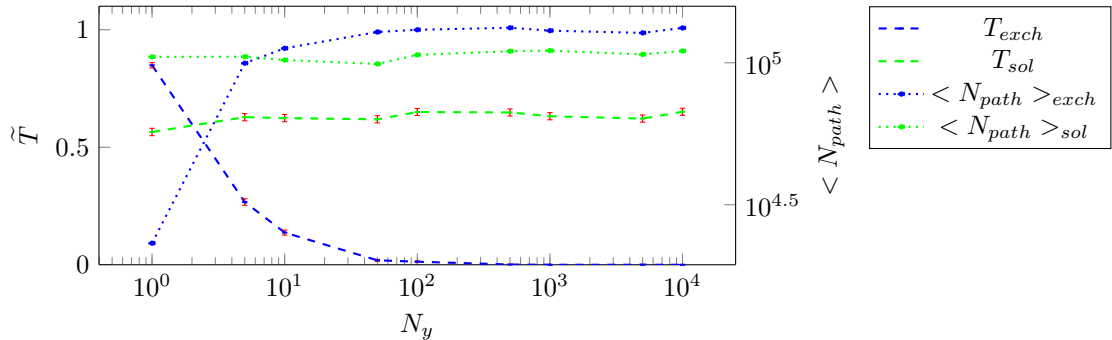


Figure 13: Evolution of the mean dimensionless temperature and mean number of random steps as a function of the number of ducts in the direction  $\mathbf{e}_y$ .

*Test  $\Phi$* 

Figure 14 showcases variations of the porosity of the ducts in figure 14. In the *solar* configuration, greater apertures lead to a hotter solid, and therefore a hotter fluid. In the *exchanger* configuration, as the ducts get smaller, less fluid has to be heated by the solid which gets hotter, leading to a hotter outflow temperature.

However, in the *exchanger* configuration, the random paths are getting stuck in the solid media for high values of the porosity. Indeed, as  $\phi \rightarrow 1$ , the length step in the solid gets smaller and smaller ( $\delta_S \rightarrow 0$ ), and therefore  $P_S \rightarrow 1$  in equation 11. Thus, the random path is trapped in the solid media where its step are incredibly small. In the *solar* configuration, the same phenomenon also happens for large values of porosity. As for lower values of the porosity, as  $\phi \rightarrow 0$ , the random paths also get stuck in the fluid media as  $P_F \rightarrow 1$ .

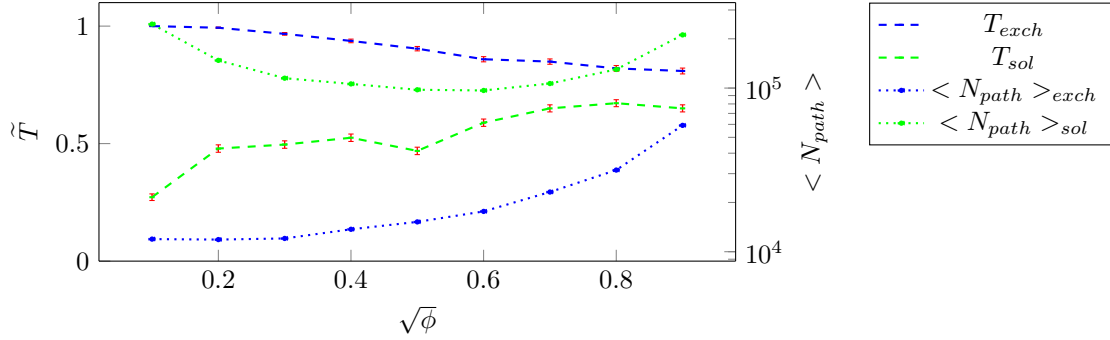


Figure 14: Evolution of the mean dimensionless temperature and mean number of random steps as a function of the porosity of the porous media.

*Test  $Pe_{max}$* 

The maximum Peclet number sets the flow rate of the fluid with respect to the maximum value of the velocity. Figure 15 illustrates how the conductive limit is reached for values of this parameter below  $10^5$  and an advective limit is to be reached for values over  $10^5$ . An intermediate behaviour is observed between those two limits. Regarding CPU time, in both cases, it can be seen that large values of the Peclet number lead to shorter paths, and therefore fast computation times. Indeed, as the Peclet gets larger, equation 9 slowly tends towards an upwards scheme which implies random paths following a straight line in the direction  $-\mathbf{e}_1$  going from the starting point to the inlet surface.

*Test  $\frac{h_R L^2}{\lambda_F}$* 

Regarding the radiative Biot number in figure 16, the *solar* configuration goes from a no exchange situation when there is no radiation ( $h_R \rightarrow 0$ ) to a very efficient one when it is predominant. For the *exchanger* configuration, whilst no radiation is required, some of it actually improves the exchange by improving the effective conductivity of the solid. However, the upper limit means a null exchange between the solid and the fluid at the boundary as  $\lambda_F \rightarrow 0$ .



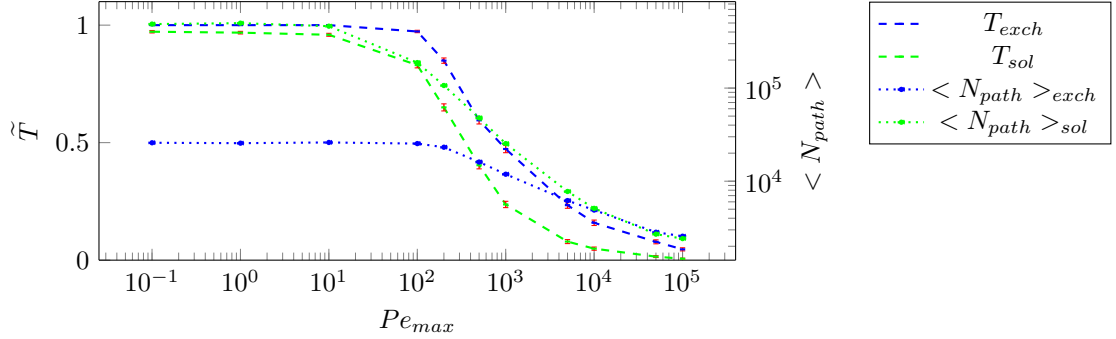


Figure 15: Evolution of the mean dimensionless temperature and mean number of random steps as a function of the maximal Peclet number in the flow field.

Regarding CPU time, thermally equivalent problems (respectively the upper and lower limits) lead to similar paths and therefore similar mean number of steps. Indeed, the probabilities of equation 11 do not change anymore at these limits .

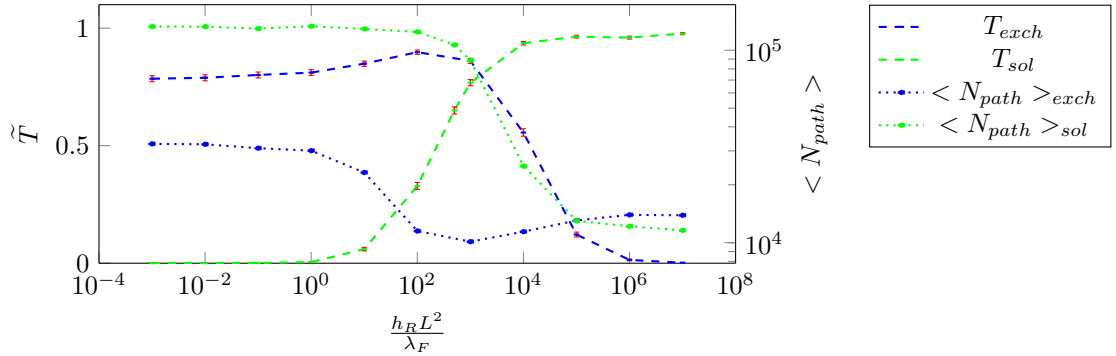


Figure 16: Evolution of the mean dimensionless temperature and mean number of random steps as a function of the dimensionless ratio of radiative and conductive transfers in the fluid.

*Test*  $\frac{\lambda_E}{\lambda_S}$

Figure 17 showcases variations of the dimensionless ratio of conductivities between the fluid and the solid. In the *exchanger* configuration, the lower limit  $\lambda_S \rightarrow \infty$  implies an homogeneous solid media which therefore heats the fluid very well. At the lower limit,  $\lambda_S \rightarrow 0$  the solid acts as an insulating media and the fluid stays at his inlet temperature. In the *solar* configuration, the studied range of values seem to lead to no change of the fluid's temperature down the flow as the radiative transfer takes charge of the heating of the solid's surface.

Regarding the mean number of steps, as  $\lambda_F \rightarrow 0$ , the random paths is once again stuck in the solid media as  $P_F \rightarrow 0$  in equation 11. However, whilst the path can be stopped by the hot boundary condition in the *exchanger* configuration, the random path does not have any way of being stopped without leaving the solid in the *solar* configuration. This phenomenon leads to exponentially longer paths and therefore CPU time.

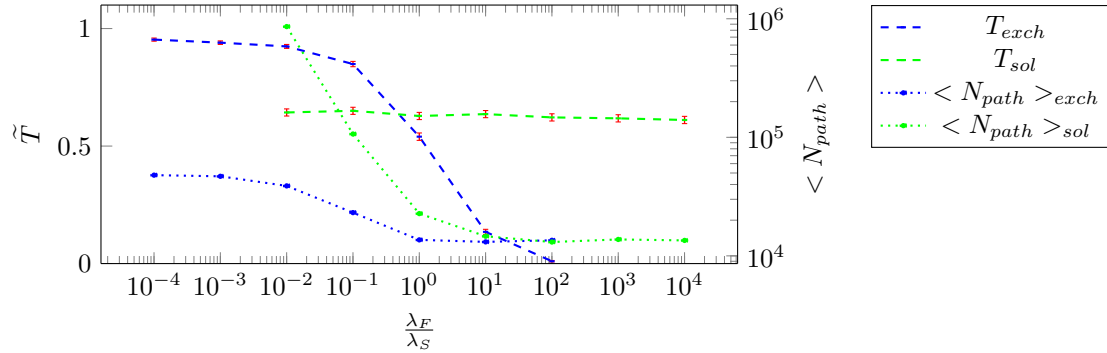


Figure 17: Evolution of the mean dimensionless temperature and mean number of random steps as a function of the ratio of the solid and fluid conductivities.

## Conclusion

Using a stochastic methodology, a Monte Carlo algorithm was implemented to solve a coupled conducto-advecto-diffusive problem. This algorithm was then used to solve two problems in the same geometry over a large range of geometric, physical, and numerical parameters. The results show different behaviours from both a thermal and a numerical point of view. Emphasis has been placed on the numerical aspects, and more specifically the computation time, for which one can observe behaviours similar to the Monte Carlo algorithms conventionally used for radiative transfer. Indeed, we seem to observe a correlation between thermal penetration and the average number of steps in statistical paths, in the same way as for the optical thickness in radiative transfer. The Monte Carlo algorithm used showed a limitation to its simulation capabilities for low fluid / solid conductivity ratios. This limits remain open-bounded problems for future work, in which one can imagine reworking the integral formulations to define probability densities adapted to the problem. Furthermore, other choices for modelling the heat transfer in the solid and fluid could lead to different behaviours regarding CPU time.

## References

- [1] Courant, R., Friedrichs, K. and Lewy, H. (1967). On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics. *IBM Journal of Research and Development*, 11(2), pp.215-234.
- [2] Kac, M. (1951). On some connections between probability theory and differential and integral equations. *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, pp.189-215.
- [3] Haji-Sheikh, A. and Sparrow, E. (1967). The Solution of Heat Conduction Problems by Probability Methods. *Journal of Heat Transfer*, 89(2), p.121.
- [4] Ozisik, M. (2013). Boundary Value Problems of Heat Conduction. Dover Publications.
- [5] Pharr, M., Humphreys, G. and Jakob, W. (2017). *Physically based rendering*. Cambridge, MA: Morgan Kaufmann.
- [6] Vignoles, G. (2016). A hybrid random walk method for the simulation of coupled conduction and linearized radiation transfer at local scale in porous media with opaque solid phases. *International Journal of Heat and Mass Transfer*.
- [7] Fournier, R., Blanco, S., Eymet, V., Hafi, M. and Spiesser, C. (2016). Radiative, conductive and convective heat-transfers in a single Monte Carlo algorithm. *Journal of Physics: Conference Series*, 676, p.012007.

- 
- [8] L Ibarrart, C Caliot, M El-Hafi, R Fournier, S Blanco, et al. (2018). Combined conductive-convective-radiative heat transfer in complex geometry using the Monte Carlo method: application to solar receivers. *IHTC 16 - 16th International Heat Transfer Conference, Beijing*.
- [9] L. Ibarrart, S. Blanco, C. Caliot, M. El Hafi, V. Forest, R. Fournier (2020). Simulation of coupled advection, conduction and radiation in a single Monte-Carlo algorithm for complex geometries by making use of computer graphic tools.
- [10] Sabelfeld, K. (2017). Random walk on spheres algorithm for solving transient drift-diffusion-reaction problems. *Monte Carlo Methods and Applications*, 23(3).
- [11] Patankar, S. (1980). *Numerical heat transfer and fluid flow*. [U.S.]: Hemisphere Pub.
- [12] Pearson, K. (1905). The Problem of the Random Walk. *Nature*, 72(1865), pp.294-294.
- [13] Rayleigh, L. (1880). XXXVI. Acoustical observations. III. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 9(56), pp.278-283.
- [14] Bachelier, L. (1900). *Théorie de la spéculation*. Paris: Gabay.
- [15] Einstein, A. (1905), "On the Motion of Small Particles Suspended in a Stationary Liquid, as Required by the Molecular Kinetic Theory of Heat". *Ann. Phys.*, 322: 549-560.
- [16] Muller, M., "Some continuous Monte Carlo methods for the Dirichlet problem". *The Annals of Mathematical Statistics*, pp. 569-589, 27 (3), (1956).
- [17] Spiga, M., et al. (1994). A symmetric solution for velocity profile in laminar flow through rectangular ducts. *International Communications in Heat and Mass Transfer*

#### 4. Acknowledgement

We acknowledge support from the Agence Nationale de la Recherche (ANR, grant HIGH-TUNE ANR-16-CE01-0010, <http://www.umr-cnrm.fr/high-tune>, ANR, grant ANR-10-LBX-22-01-SOLSTICE, and ANR, grant MGC-RAD) and from Region Occitanie.

## 5.2 Des limites de praticabilité

L'utilisation couplée de la méthode de Monte Carlo et de l'échantillonnage de chemins aléatoires comporte deux limites pratiques : des problèmes de convergence de l'algorithme de Monte Carlo pour des variables aléatoires de forte variance, ainsi que des problèmes liés à la réalisation même des chemins aléatoires. Dans ces deux cas, la simple augmentation de la puissance et de la précision de calcul pourrait être une réponse. Cependant, cela ne fait que repousser la limite où ces mêmes problèmes apparaissent, d'où la nécessité d'une compréhension plus profonde de ces comportements.

En général, des pratiques de l'ordre de la reformulation intégrale telles que de l'échantillonnage par importance [Dunn+2012] [Dutré+1995] sont utilisées pour essayer de contourner la problématique de convergence de l'algorithme de Monte Carlo. Ces améliorations proviennent le plus souvent de l'apport d'une connaissance a priori ou d'une intuition sur le résultat escompté. Dans le cadre de l'observation de la température dans des systèmes tels que ceux présentés jusqu'ici, la convergence de l'algorithme de Monte Carlo se fait cependant sans problèmes. Cette thématique n'est donc pas abordée ici.

L'article de la section précédente met en évidence un ensemble de comportements de la longueur moyenne des marches aléatoires couplées. Un de ces comportements y a alors été présenté comme une limite potentielle à l'utilisation en l'état de la marche mise en œuvre jusqu'ici : un ratio de conductivités trop important entre deux milieux adjacents. Cette problématique a par ailleurs été déjà observée dans le cas de milieux hétérogènes présentant une forte différence de coefficients de diffusion à l'interface [Lejay+2013b].

Cette section reprend plus en profondeur cette problématique afin de comprendre les enjeux qui y sont associés et de les replacer dans un contexte de méthodes numériques.

En effet, d'autres problématiques, d'ordre numérique cette fois, émergent lors de la mise en œuvre des algorithmes présentés jusqu'ici en raison de la précision finie que nous impose l'outil informatique. Dans une seconde partie de cette section, un constat de ces difficultés est présenté. Les questions qui en émergent relèvent du cadre de l'informatique et aucune piste de solution n'est donc ici présentée. Cependant, cette problématique est abordée dans la communauté de la synthèse d'image par lancer de rayon, notamment sous la thématique d'*étanchéité numérique* [Woop+2013], c'est-à-dire la faculté à garantir qu'un rayon partant d'un milieu d'une scène ne puisse pas finir dans un autre milieu sans en avoir détecté l'interface.

### 5.2.1 Marche aléatoire et milieux isothermes, sur la route des chemins infinis

La limite évoquée dans l'écrit précédent est caractéristique des conditions limites de continuité du flux. Dans cette section, une mise en évidence de cette question dans un système minimal est présentée.

Soient deux milieux solides  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  de conductivités thermiques  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  tels que  $\partial\Omega_1 = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ , c'est-à-dire tels que le milieu 1 soit totalement englobé par le milieu 2 (voir la figure 5.2). La température en tout point  $\mathbf{x} \in \Omega_1$  est alors régie par le système 5.1 où  $\mathbf{n}$  est la normale sortant de  $\Omega_1$  et les positions  $\mathbf{y}_1$  et  $\mathbf{y}_2$  sont situées en le même point  $\mathbf{y}$ , mais appartiennent respectivement aux milieux  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

$$\begin{cases} \Delta T(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ \lambda_1 \nabla T(\mathbf{y}_1) \cdot \mathbf{n} = -\lambda_2 \nabla T(\mathbf{y}_2) \cdot \mathbf{n}, & \mathbf{y} \in \partial\Omega_1 \end{cases} \quad (5.1)$$

La discrétisation par un même paramètre numérique  $\delta$  des gradients de la condition limite de continuité du flux s'écrit alors selon l'équation 5.2. En supposant que  $\delta$  est bien choisi, les positions  $\mathbf{y} \pm \delta \mathbf{n}$  appartiennent alors bien à leurs milieux respectifs  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

$$T(\mathbf{y}) = \underbrace{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}}_{P_{\Omega_1}} \underbrace{T(\mathbf{y} - \delta \mathbf{n})}_{\in \Omega_1} + \underbrace{\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}}_{P_{\Omega_2}} \underbrace{T(\mathbf{y} + \delta \mathbf{n})}_{\in \Omega_2} \quad (5.2)$$

A la limite  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \rightarrow \infty$ , ce schéma amène à  $P_{\Omega_1} = 1$  et  $P_{\Omega_2} = 0$ , c'est-à-dire une paroi parfaitement réfléchissante pour les chemins provenant de  $\Omega_1$  et parfaitement absorbante pour les chemins provenant de  $\Omega_2$ . En pratique, cette limite n'est jamais atteinte, sans quoi le problème n'est plus "bien posé". Cependant, cela signifie que les chemins qui atteignent la surface  $\partial\Omega_1$  dans une proportion croissante  $P_{\Omega_1}$ , sont ré-injectés de façon quasi-systématique dans le milieu  $\Omega_1$ .

A ce jour, aucune méthode ne permet de lever cet écueil en toute généralité. Cependant, certaines pistes peuvent apporter des solutions dans certaines situations :

- modifier les tailles caractéristiques de ré-injection d'un côté et de l'autre de la frontière dans des limites raisonnables afin de modérer  $P_{\Omega_1}$  et  $P_{\Omega_2}$ , mais cela implique de modifier également la taille des pas dans les milieux en question pour avoir un quelconque effet, et donc de déplacer le temps de calcul sur une autre portion du chemin statistique ;
- modifier artificiellement les probabilités à la frontière par reformulation, c'est-à-dire en imposant un jeu de probabilités différent, ce qui a pour conséquence de reporter le problème dans le poids de chaque chemin, et donc dans la variance de l'algorithme de Monte Carlo ;
- changer de modèle pour le milieu  $\Omega_1$ , dans certaines configurations simples ce milieu peut par exemple être représenté par un milieu homogène ou 1D (voir la figure 5.2).

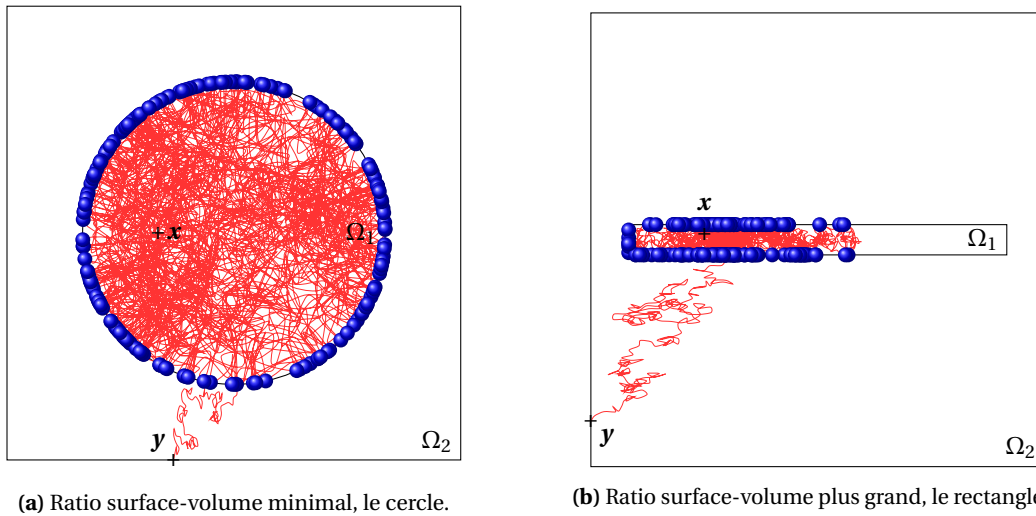
Une telle limite fait s'interroger sur le parallèle de cette question dans les approches déterministes. Il apparaît, par l'expérimentation, que les méthodes traditionnellement utilisées par volumes et éléments finis ne sont pas sensibles à ce paramètre. La signification de cette problématique dans la communauté des méthodes numériques déterministes en champs est donc une question qui reste ouverte.

## 5.2.2 Précision numérique et discontinuité des nombres réels

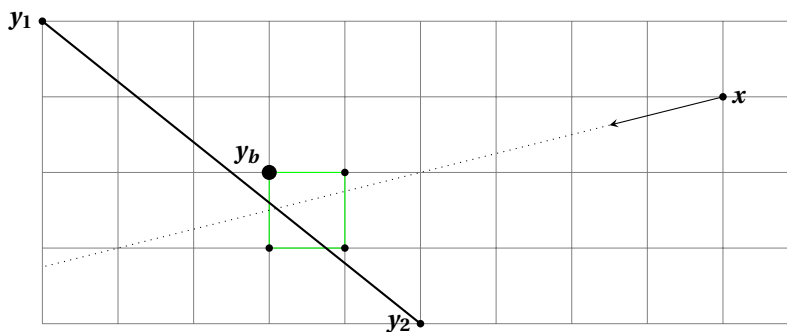
L'utilisation de l'outil informatique implique une représentation discrète de la donnée. De fait, l'encodage d'un nombre sur une zone mémoire implique de ne donner qu'un nombre fini de chiffres significatifs. Ce paradigme permet de décrire avec une grande précision des nombres qu'ils soient petits ou grands grâce, par exemple, à une représentation en base dix dans deux espaces mémoires distincts : un espace dédié à un nombre fini de chiffres significatifs, et l'autre au stockage de l'exposant du premier chiffre significatif dans le système décimal. Cependant, ces nombres ne sont pas compatibles entre eux en programmation classique. Ainsi, l'ajout d'un petit nombre à un nombre très grand entraînera de façon quasi-systématique une perte d'information.

Cet environnement numérique implique notamment que les points d'intersection entre un rayon et une surface quelconque sont en nombre fini, et que ces derniers sont potentiellement distribués non pas sur la surface même mais dans son alentour (voir figure 5.3). La question de la position d'un point par rapport à une surface peut dès lors perdre son sens en dessous d'une certaine échelle. Par ailleurs, tandis que la description d'un objet minuscule dans une vaste scène sera pertinente proche de l'origine, elle se dégradera au fur et à mesure de son éloignement.

Ces questions relèvent du cadre de l'informatique et ne sont pas plus approfondies ici. Cependant, il est à noter qu'elles occupent une place centrale dans l'acte de mise en œuvre des algorithmes présentés jusqu'ici. Des réponses pratiques aux deux problématiques énoncées jusqu'ici incluent



**FIGURE 5.2** – Illustration d’un milieu  $\Omega_1$  très conducteur englobé par un milieu  $\Omega_2$  peu conducteur. Dans les deux configurations, le chemin statistique partant du point  $x$  effectue exactement 200 rebonds sur la paroi avant d’être réinjecté dans le milieu  $\Omega_2$  depuis lequel il atteint la frontière absorbante  $\partial\Omega_2 \setminus \partial\Omega_1$  en  $y$ , en ayant la chance de ne pas toucher  $\partial\Omega_1$  entre-temps auquel cas le chemin aurait probablement été réinjecté dans  $\Omega_1$ . Dans la configuration 5.2a, malgré la position initiale  $x$  qui n’est pas centrée par rapport au cercle, la répartition des points de sortie est à peu près homogène sur l’ensemble de la surface  $\partial\Omega_1$ , ce qui indiquerait que la valeur de la température en tout point  $x \in \Omega_1$  est indépendante de sa position, c’est-à-dire que le milieu est homogène. Au contraire, dans la configuration 5.2b, la distribution des points de sortie est nettement plus importante à proximité du point de départ  $x$ . Cependant, dans cette configuration, la répartition entre la surface du haut et la surface du bas du rectangle  $\Omega_1$  semble à peu près équivalente, ce qui indiquerait qu’il n’est pas nécessaire de résoudre cette dimension spatiale et qu’une marche mono-dimensionnelle selon la longueur du rectangle serait suffisante.



**FIGURE 5.3** – Illustration d’un lancer de rayon dans un monde 2D numérique. L’ensemble des couples  $(a, b)$  où  $a$  et  $b$  sont des nombres réels est alors restreint à une grille de points en nombre fini à cause de la limitation en espace mémoire du nombre de chiffres significatifs pouvant être stockés pour chaque nombre. Le lancer de rayon partant de  $x$  et intersectant  $[y_1, y_2]$  illustré dans cette figure retiendra donc le point  $y_b$  qui correspond à l’arrondi de l’abscisse et de l’ordonnée du point d’intersection en arithmétique exacte.

l’ajout de zones de détection d’imprécision numérique en bout de rayons, ou encore des techniques d’instance pour décrire de petits objets dans des scènes importantes, c’est-à-dire de découper la scène en plusieurs volumes plus petits dans lesquels le repère est à nouveau centré

pour éviter de garder en espace mémoire l'information de la distance à l'origine du repère de la scène globale.

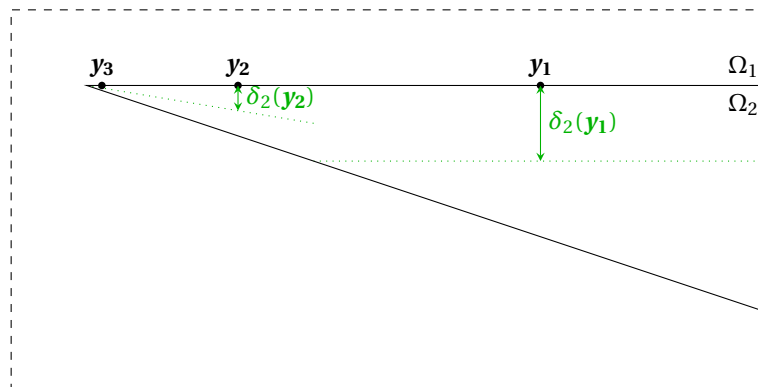
### 5.2.3 Le grain de sel de la distance de ré-injection

Bien qu'a priori restreintes à deux univers complètement distincts, les problématiques des sections 5.2.1 et 5.2.2 précédentes trouvent une intersection inattendue dans la pratique. En effet, les marches présentées jusqu'ici sont caractérisées par une taille de pas numérique  $\delta$  adaptative en proche paroi. Ainsi, au cours de la marche, quand un lancer de rayon détecte une paroi entre le point courant de la marche  $\mathbf{x}$  et sa potentielle future position  $\mathbf{x} + \delta \mathbf{u}$  dans la direction  $\mathbf{u}$ , le pas  $\delta$  est adapté de sorte que  $\mathbf{x} + \delta \mathbf{u}$  se positionne exactement sur la paroi en question, à l'approximation numérique près. Ce comportement est également vrai lors de la ré-injection qui fait l'objet de la section 5.2.1 et dont l'équation est rappelée en 5.3 dans le cas de pas de ré-injection différents selon le côté de la surface.

$$T(\mathbf{y}) = \underbrace{\frac{\lambda_1 \delta_2}{\lambda_1 \delta_2 + \lambda_2 \delta_1}}_{P_{\Omega_1}} T(\mathbf{y} - \delta_1 \mathbf{n}) + \underbrace{\frac{\lambda_2 \delta_1}{\lambda_1 \delta_2 + \lambda_2 \delta_1}}_{P_{\Omega_2}} T(\mathbf{y} + \delta_2 \mathbf{n}) \quad (5.3)$$

Comme précédemment mentionné, un moyen effectif de limiter la valeur de  $P_{\Omega_1}$  quand  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \rightarrow \infty$  est de diminuer proportionnellement la valeur du pas de ré-injection. En l'occurrence, pour un ratio de conductivités fixé, la probabilité  $P_{\Omega_1}$  tend vers la valeur 0 quand  $\delta_2 \rightarrow 0$ .

En supposant alors une géométrie telle que celle illustrée en figure 5.4 et un ratio de conductivité  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  très grand, la ré-injection dans le milieu  $\Omega_2$  devient très probable lorsque le chemin touche une position située dans la pointe de l'angle, zone dans laquelle les distances deviennent justement problématiques pour l'outil informatique. Si le rapport de conduction  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  est trop important et que le chemin reste piégé dans  $\Omega_1$ , ce type de simulation nécessite alors un travail numérique important pour éviter un écueil du calcul. L'outil [Stardis](#) fait d'ailleurs une proposition à ce sujet dans son implémentation en déplaçant localement les positions trop proches des angles dont la faible ouverture fait problème vers des positions ne présentant pas de problème numérique.



**FIGURE 5.4** – Illustration de l'évolution de la taille du pas de ré-injection  $\delta_2$  dans le milieu  $\Omega_2$  en fonction de la position  $\mathbf{y}$  sur la paroi  $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ . En  $\mathbf{y}_1$ , la distance de ré-injection prévue "par défaut" est utilisée. En  $\mathbf{y}_2$ , en raison de la présence d'une paroi détectée par lancer de rayon comme étant plus proche que la distance de ré-injection par défaut, la distance de ré-injection est imposée de telle sorte à finir dans le milieu  $\Omega_2$ , à la moitié de la distance avec la paroi détectée. En  $\mathbf{y}_3$ , le processus est le même qu'en  $\mathbf{y}_2$ , cependant, la distance de ré-injection risque d'être de l'ordre de l'imprécision numérique, ce qui pourrait aboutir en un point ré-injecté dans le milieu  $\Omega_1$  au lieu du milieu  $\Omega_2$ .

## Praticabilité et limites des approches statistiques

Dans le présent chapitre, nous venons de discuter de façon extensive la dynamique des chemins statistiques advecto-conducto-radiatifs couplés en mettant un accent important sur la thématique du temps de calcul. En effet, étant donné qu'un calcul par la méthode de Monte Carlo d'une température dans un système couplé consiste en l'échantillonnage d'un grand nombre de chemins aléatoires, il est normal que ce soient les caractéristiques de ces chemins qui déterminent à la fois la température recherchée, mais aussi le temps de calcul. Cependant, tandis que dans les simulations présentées jusqu'ici, seule la position au bout du chemin importait pour l'évaluation de la température, c'est le nombre de pas de ce chemin statistique qui détermine le temps de calcul.

Le nombre moyen de pas que met une marche statistique isotrope à pas constant pour parcourir une certaine distance est un problème résolu et référencé dans de multiples domaines ([Rayleigh1877], [Bachelier1900], [Pearson1905], [Einstein1956]). Cependant, ce nombre de pas moyen n'est plus connu dès lors que l'on mélange des portions de marches isotropes et anisotropes à pas variables. Sans prétendre répondre à cette question en toute généralité, nous avons cependant réalisé une analyse paramétrique de notre marche couplée dans une géométrie bien particulière d'échangeur thermique. Des observations sur la dépendance du nombre de pas moyen de cette dernière en fonction de paramètres géométriques, numériques, et physiques (c'est-à-dire sur les propriétés d'anisotropie de la marche advecto-diffusive, mais aussi sur la condition de raccordement entre les différentes marches) ont permis de proposer une première interprétation de la dynamique de chemins statistiques couplés.

Ainsi, tandis que des variations sur les paramètres numériques des marches conductives et advecto-diffusives ont permis de retrouver le comportement asymptotique attendu, c'est le rôle des paramètres géométriques et physiques qui a permis d'observer des comportements plus complexes. L'extension d'un échangeur poreux a permis d'observer le critère responsable de l'insensibilité au temps de calcul des marches statistiques, à savoir l'invariance de la distance entre le point d'observation et les conditions aux limites de Dirichlet. Cependant, il est apparu au travers des variations des paramètres physiques que cette distance n'est pas suffisante, et qu'il y aurait ainsi lieu de définir une "épaisseur numérique" (de façon homologue à l'épaisseur optique) qui permettrait de caractériser la facilité qu'a un chemin à traverser une distance donnée. En particulier, de fortes valeurs du nombre de Péclet dans un écoulement en favorise la direction aval, ce qui amène à des chemins plus courts si une condition de Dirichlet y est positionnée (ce qui est en général le cas). Dans un même temps, il est apparu que la majorité des difficultés numériques résultaient directement des conditions de ré-injection à la paroi solide-fluide, qui pouvaient être responsables de phénomènes de type "piégeage" de chemins (rapports de conductivités très importants).

C'est ainsi que cette analyse paramétrique a ouvert la question d'une des limites de cette approche statistique dans une configuration où des ratios de conductivités trop importants peuvent entraîner ce type de comportements problématiques. Cette discussion a ensuite été prolongée dans la seconde section de ce chapitre.

Dans une plus courte partie, nous avons abordé la thématique de l'incertitude numérique et de ses conséquences en lancer de rayon. Bien que ce manuscrit n'aborde pas les questions d'ingénierie relatives à la mise en pratique des algorithmes présentés, cette courte section a donné l'opportunité d'illustrer un des questionnements les plus présents dans l'acte de programmation de ces marches statistiques faisant l'usage du lancer de rayon.





# Conclusions et Perspectives

Quelles pistes pour le futur de ces travaux ? . . . . .	123
6.1 Ecoulement de Stokes et formulation en espace de chemins . . . . .	124
6.1.1 Equation de Stokes et milieux poreux . . . . .	124
6.1.2 Formulation intégrale et Monte Carlo . . . . .	125
6.1.3 Validation . . . . .	126
6.1.4 Vers la géométrie complexe, une question de conditions aux limites en pression . . . . .	127
6.2 Des ouvertures à la question du non-linéaire . . . . .	129
6.3 Quel champ de vitesse ? . . . . .	131
6.4 La perspective énergétique . . . . .	133
6.4.1 La possibilité d'un couplage avec d'autres éléments d'une chaîne de modélisation énergétique . . . . .	133
6.4.2 Synthèse d'images thermiques . . . . .	134
6.4.3 Un calcul simultané des sensibilités à la grandeur d'observation . . . . .	137
6.4.4 Monte Carlo symbolique pour l'obtention de fonctions de transfert . . . . .	137
6.5 Un dernier regard critique sur nos fondements théoriques . . . . .	139
6.5.1 Retour sur la complexité . . . . .	139
6.5.2 Des marches advecto-diffusives . . . . .	140
6.5.3 Fondements théoriques des chemins en thermique couplée . . . . .	141

## Quelles pistes pour le futur de ces travaux ?

Au moment de tirer les conclusions de cette recherche et d'énoncer un ensemble de perspectives, nous nous retrouvons en premier lieu devant la question qui, dans l'annonce de notre problématique, portait le titre suivant : "Quel champ de vitesse?" Nous la reprendrons dans la troisième section de ce chapitre après deux sections qui la préparent :

- une section dans laquelle nous essaierons d'illustrer ce qui nous semble aujourd'hui le plus proche d'une simulation statistique de la mécanique des fluides compatible avec la logique de cette thèse;
- une section sur le traitement des non-linéarités, ce qui nous permettra d'envisager un couplage thermique / mécanique des fluides via le produit température - vitesse du terme advectif de l'équation de la chaleur (qui induit bien une non-linéarité lorsque vitesse et température sont résolues simultanément).

Les sections suivantes reprendront plus brièvement chacun des autres éléments de notre problématique à partir des résultats des chapitres 4 et 5 que nous combinerons avec des résultats de recherches en cours sur l'utilisation de Monte Carlo dans différents contextes de thermique industrielle.

---

## 6.1 Ecoulement de Stokes et formulation en espace de chemins

Est-il possible de penser la mécanique des fluides dans l'esprit des travaux que nous avons présentés ici? Dans cette section, il ne s'agit pas encore d'énoncer des perspectives concernant la question du couplage thermique / mécanique des fluides, mais seulement de voir s'il serait envisageable, par le balayage d'un espace de chemins, de simuler des écoulements dans des géométries aussi complexes que celle du poreux que nous avons étudié au chapitre 4 et d'afficher des performances calculatoires indépendantes du nombre de pores.

Avec Navier-Stokes comme point de départ, on peut affirmer sans risque qu'un tel objectif relève du long terme. Malgré les avancées récentes concernant la représentation des non-linéarités dans le cadre théorique de Monte Carlo avec des espaces de chemins branchés [Dimov2008] [Dauchet+2018] [Tregan2020], aucune tentative concernant Navier-Stokes n'a encore été rapportée.

Cependant, si le point de départ est la théorie de Stokes, alors on peut être beaucoup plus optimiste. L'équation d'évolution de la vitesse devient de type diffusif et des travaux ont déjà été menés sur des bases très similaires à la nôtre : la vitesse en un point a pu être exprimée comme l'espérance d'une variable aléatoire dont la réalisation passe par la construction de chemins voisins de ceux des chapitres 4 et 5.

Pour commencer à tester cette piste de recherche, nous avons essayé de mettre en œuvre certains des algorithmes proposés dans la littérature, en évaluant leur adéquation avec les techniques d'accélération du suivi de rayon de l'informatique graphique.

### 6.1.1 Equation de Stokes et milieux poreux

La question de l'écoulement au sein d'un milieu poreux est le plus souvent traitée par une *équation de Darcy* [Kumar+2014]. Cependant, cette dernière décrit un écoulement moyen à travers un milieu poreux. La forme détaillée de l'écoulement, celle qui prend en compte la géométrie précise du poreux (à partir de laquelle est construite l'équation de Darcy) est l'*équation de Stokes* présentée dans l'équation 6.1 où  $p$  est la pression,  $\mu$  la viscosité dynamique,  $\mathbf{v}$  la vitesse, et  $\Delta$  l'opérateur laplacien vectoriel. Nous donnons cette dernière au régime stationnaire en l'absence de champ de force volumique extérieur, donc en l'absence de pesanteur. Cet écoulement décrit l'évolution d'un fluide newtonien visqueux de propriétés physiques uniformes dans lequel les termes inertiels peuvent être négligés (faible *nombre de Reynolds*) [Pozrikidis+1997].

$$-\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (6.1)$$

En prenant la divergence de cette équation, pour un fluide incompressible tel que  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , la pression apparaît comme étant solution de l'équation de Laplace 6.2.

$$\Delta p = 0 \quad (6.2)$$

Il est alors possible d'établir l'équation 6.3 en prenant le laplacien de l'équation 6.1 en l'absence de force massique pour un fluide incompressible. La vitesse apparaît comme étant solution d'une *équation biharmonique vectorielle*, c'est-à-dire que chaque composante de  $\mathbf{v}$  est solution d'une *équation biharmonique*.

$$\nabla^4 \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (6.3)$$

Dans la littérature, les équations 6.1 et 6.3 ont été toutes deux prises comme point de départ pour la définition de chemins permettant d'évaluer une vitesse locale. Lorsque l'équation 6.1 est choisie,

il est nécessaire de connaître le gradient de pression en tout point du fluide car il apparaît comme une source dans cette équation de type source-diffusion. On impose également la nullité de la vitesse le long de chaque paroi solide et on suppose connus les champs de vitesse à l'entrée et à la sortie. Lorsque l'équation 6.3 est choisie, la question des conditions aux limites est plus complexe, mais on peut déjà retenir que le problème est bien posé si on connaît la vitesse en tout point de la frontière, mais aussi le laplacien de la vitesse, c'est-à-dire le gradient de pression (cf. équation 6.1) en tout point de la frontière.

## 6.1.2 Formulation intégrale et Monte Carlo

L'idée de résoudre l'un de ces deux problèmes par une méthode de Monte Carlo apparaît rapidement comme prometteuse en raison de l'existence de solutions exprimées comme une superposition de "solutions fondamentales" ou "Stokeslet" qui correspondent assez directement à une vision en fonctions de Green similaire à celle que nous avons adoptée au chapitre 3 pour construire nos chemins [Blake1971] [Pozrikidis1992] [Cortez2001] [Nitsche+2009] [Fan+2015] [Young+2006] [Pozrikidis+1997]. Etant données les contraintes informatiques qui sont les nôtres, il ne nous est possible d'exploiter pratiquement ces travaux que si nous savons les traduire en des algorithmes à base de lancer de rayon.

Si on choisit de partir de l'équation de 6.1, il est par exemple possible d'utiliser la marche proposée par [HajiSheikh+1966] pour l'équation de diffusion avec terme source pour exprimer la vitesse en tout point  $\mathbf{x}$  de l'espace comme l'équation 6.4.

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \int_{4\pi} \frac{1}{4\pi} d\omega(\mathbf{u}) \left[ \mathbf{v}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{u}) - \frac{\delta^2}{6} \frac{1}{\mu} \nabla p(\mathbf{x}) \right] \quad (6.4)$$

Malgré le fait que cette équation fait l'hypothèse que la valeur de  $\nabla p$  est localement homogène, cette formulation intégrale pourrait dès lors être utilisée pour résoudre l'équation 6.1 en utilisant la marche conductive présentée dans le chapitre 4. Cependant, l'ajout d'une contribution de la source à chaque pas de la marche est alors nécessaire. C'est en fait exactement le même calcul que celui présenté en annexe A.1 pour le calcul de la température entre deux plans parallèles infinis, dans lequel l'algorithme de conduction est utilisé en présence d'un terme source visqueux. Cependant, dans le cas présent, les conditions limites ne sont plus des températures mais des vitesses, et la source n'est plus une source visqueuse de température mais une source de vitesse imposée par le gradient de pression.

Cependant, si on ne souhaite pas être contraint par la nécessité d'utiliser des pas d'espace très petits devant la taille du domaine (la taille des pores), l'utilisation d'une marche basée sur le lancer de rayon sur la base de cette formulation intégrale nécessite de mener une réflexion importante sur la gestion du terme source. En effet, l'utilisation d'une marche telle que celle proposée pour la conduction dans le chapitre 4 repose sur un ensemble de raisonnements sans terme source. En présence de ce dernier, la "bonne propriété" d'être exact lorsque le champ solution est localement trilineaire en frontière ne tient plus. En effet, le terme source dans l'équation 6.4 prend en compte la contribution d'un terme source homogène dans l'ensemble de la sphère de rayon  $\delta$ , tandis que l'intégrale réalisée en utilisant les algorithmes présentés avec lancers de rayon ne se fait que sur une portion de sphère en proche paroi (voir par exemple la figure 4.1). Bien que l'approche reste exacte à la limite où le pas numérique  $\delta$  tend vers 0, les travaux rapportés dans la section 2.2.2 pour de la conduction thermique en présence de terme source par effet Joule conduisent à l'observation qu'il est pratiquement nécessaire d'ajouter un terme correctif à la paroi afin d'accélérer la convergence. Des travaux sont actuellement en cours sur cette question dans le groupe et il est raisonnable d'imaginer que nous pourrions rapidement y faire appel et aborder la résolution du problème de Stokes, c'est-à-dire évaluer la vitesse dans un milieu poreux à l'aide des mêmes algorithmes que ceux de la thermique conductive avec source.

Pour ne pas rentrer dans ces algorithmes de proche paroi en présence d'un champ de source, dans nos tests, nous avons préféré nous tourner vers les solutions partant de l'équation 6.3. Nous avons finalement choisi d'explorer la proposition de [Gopalsamy+1970] [Gopalsamy+1973] qui est un Walk on Sphere résolvant exactement l'équation biharmonique 6.3 en reconstruisant la solution uniquement à partir des conditions de frontière. Le point de départ consiste à observer que si la vitesse  $\mathbf{v}$  est solution d'une équation biharmonique, alors le laplacien de la vitesse  $\Delta \mathbf{v}$  est solution d'une équation harmonique. On peut donc écrire

$$\Delta \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \int_{4\pi} \frac{1}{4\pi} d\omega(\mathbf{u}) \Delta \mathbf{v}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{u}) \quad (6.5)$$

On peut alors combiner cette expression intégrale exacte avec l'expression suivante qui est vraie pour tout champ vectoriel si on peut faire l'approximation que son laplacien est uniforme sur une sphère de rayon  $\delta$ , ou exacte dans le cas où la grandeur observée est une fonction biharmonique (voir par exemple [Sabelfeld+1997]), ce qui est ici le cas de la vitesse :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \int_{4\pi} \frac{1}{4\pi} d\omega(\mathbf{u}) \left[ \mathbf{v}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{u}) - \frac{\delta^2}{6} \Delta \mathbf{v}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{u}) \right] \quad (6.6)$$

Le couplage de ces deux formulations intégrales, dans l'esprit des couplages que nous avons abordés au chapitre 4, permet de justifier une marche sur les sphères en tout point similaire à l'algorithme du Walk on Sphere de [Muller1956]. Une différence est cependant notable sur le poids de la réalisation qui fait apparaître la condition de frontière sur la vitesse  $\mathbf{v}$ , mais aussi sur le laplacien de la vitesse  $\Delta \mathbf{v}$  en ce même point de l'espace multiplié par un coefficient fonction de la taille  $\delta$  des pas réalisés. Nous avons modifié la proposition initiale de [Gopalsamy+1973] de façon à définir une marche à pas constants (et non pas une marche sur la plus grande sphère englobante) en adaptant la marche en proche paroi exactement de la même façon que nous l'avons fait pour la marche conductive du chapitre 4. L'algorithme 6.1 résultant est le suivant :

---

**Algorithme 6.1 :** Algorithme de la réalisation aléatoire  $\mathbf{w}$  de la variable aléatoire  $W$  d'espérance  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  pour un pas numérique  $\delta_v$ .

---

Initialiser le marqueur  $k \leftarrow 0$  du nombre de pas

**tant que**  $\mathbf{x} \in \Omega_F \setminus \partial\Omega_F$  **faire**

- Echantillonner aléatoirement une direction  $\mathbf{u}$  uniforme sur  $4\pi$
- Evaluer les distances  $\delta_{\mathbf{u}}$  et  $\delta_{-\mathbf{u}}$  de la distance à la plus proche paroi dans les directions  $\mathbf{u}$  et  $-\mathbf{u}$  par lancer de rayons (voir chapitre 4)
- Mettre à jour le pas courant de la marche  $\delta_k \leftarrow \min(\delta_v, \delta_{\mathbf{u}}, \delta_{-\mathbf{u}})$
- Mettre à jour la position courante  $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \delta_k \mathbf{u}$
- Incrémenter le marqueur  $k \leftarrow k + 1$

**fin**

Stocker le poids de Monte Carlo  $W \leftarrow \left[ \mathbf{v}(\mathbf{x}) - \sum_{i=0}^k \frac{\delta_i^2}{6} \Delta \mathbf{v}(\mathbf{x}) \right]$

---

### 6.1.3 Validation

De la même manière que [Gopalsamy+1973] vérifie la pertinence de son algorithme sur des situations analytiques 2D dans des carrés, nous avons commencé par valider notre version modifiée de cet algorithme 6.1 qui utilise le lancer de rayon, sur un problème simple où la fonction  $f$  présentée dans l'équation 6.7 est solution de l'équation biharmonique.

$$f(x, y) = x^4 - y^4 \quad (6.7)$$

Les résultats de cette mise œuvre numérique sont présentés dans le tableau 6.1 et montrent une bonne corrélation pour des valeurs du pas numérique  $\delta$  suffisamment petites.

$\delta$	$x = -y$	$f(x, y)$	$\tilde{f}(x, y)$	$\sigma$
0.5	0.1	-0.656	-0.7780	0.0024
0.5	0.3	-0.232	-0.2806	0.0016
0.5	0.5	0	-0.0077	0.0013
0.5	0.7	0.232	0.2307	0.0013
0.5	0.9	0.656	0.6624	0.0010
0.05	0.1	-0.656	-0.6591	0.0011
0.05	0.3	-0.232	-0.2343	0.0014
0.05	0.5	0	-0.0011	0.0014
0.05	0.7	0.232	0.2323	0.0013
0.05	0.9	0.656	0.6577	0.0011
0.05	0.1	-0.656	-0.6559	0.0012
0.05	0.3	-0.232	-0.2296	0.0014
0.05	0.5	0	-0.0014	0.0014
0.05	0.7	0.232	0.2300	0.0013
0.05	0.9	0.656	0.6563	0.0011

**TABLE 6.1** – Résultats de l’algorithme 6.1 pour  $N = 10^5$  réalisations dans un carré unitaire sur la frontière duquel sont imposés  $f$  et  $\Delta f$ . Les résultats de l’algorithme de Monte Carlo sont présentés dans la colonne  $\tilde{f}(x, y)$ , et accompagnés de leur barre d’erreur  $\sigma$ . Les résultats colorés en rouge indiquent que la valeur obtenue par la méthode de Monte Carlo est à plus de  $3\sigma$  de la valeur analytique.

Notre second test a consisté à reconstruire l’écoulement de Poiseuille. Entre deux plans parallèles infinis, pour une condition de non-glissement à la paroi et un gradient de pression constant selon l’axe de l’écoulement, l’équation de Stokes en absence de force volumique amène à la solution particulière de l’écoulement de Poiseuille (figure 6.1). Par exemple, dans un repère orthonormé  $(\mathbf{0}, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ , en prenant un gradient de pression orienté selon la direction opposée à  $\mathbf{e}_x$ , et en positionnant ces deux plans parallèles en  $z = a$  et  $z = b$ , le système 6.8 amène à la solution 6.9. Le profil de l’écoulement résultant est bien parabolique, de vitesse nulle aux parois, et de norme maximale dans le plan équidistant à ces parois, comme donné dans la relation 6.10.

$$\begin{cases} -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \nabla p = -\|\nabla p\| \mathbf{e}_x \\ \mathbf{v}(x, y, z) = \mathbf{0} \text{ pour } z = a \text{ et } z = b \end{cases} \quad (6.8)$$

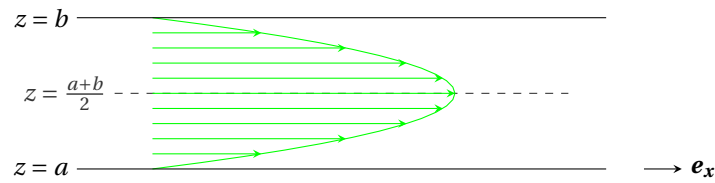
$$\mathbf{v}(x, y, z) = -\frac{\|\nabla p\|}{2\mu} (z-a)(z-b) \mathbf{e}_x \quad (6.9)$$

$$v_{max} = \left\| \mathbf{v} \left( z = \frac{a+b}{2} \right) \right\| = \frac{\|\nabla p\|}{8\mu} (b-a)^2 \quad (6.10)$$

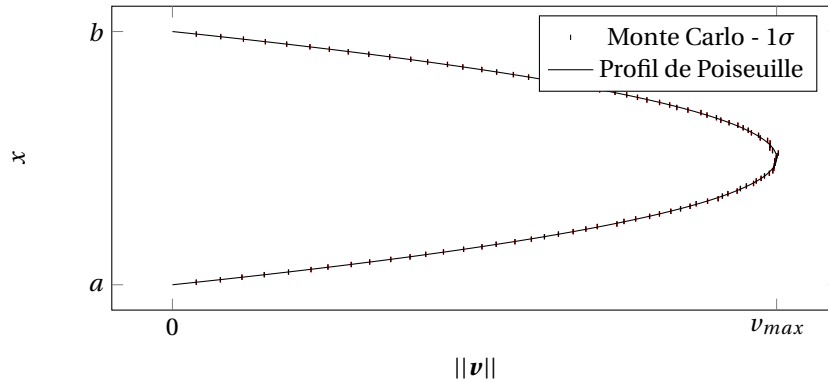
Nos résultats sont présentés dans la figure 6.2.

### 6.1.4 Vers la géométrie complexe, une question de conditions aux limites en pression

Nous retenons de cette expérience que rien ne nous empêche d’évaluer la vitesse du fluide en un point d’un milieu poreux avec un algorithme de Monte Carlo dont on peut prévoir avec confiance qu’il sera insensible au nombre de pores, exactement de la même façon que nos algorithmes en transfert thermique. Cette affirmation est alors vraie sous la condition de connaître le gradient de



**FIGURE 6.1** – Écoulement de Poiseuille entre deux plans infinis parallèles respectivement positionnés en  $z = a$  et  $z = b$ . De profil parabolique, le maximum de la vitesse est dans le plan  $z = \frac{a+b}{2}$ .



**FIGURE 6.2** – Résultats de l’algorithme 6.1 inspiré de la proposition de [Gopalsamy+1973] pour retrouver un écoulement de Poiseuille. Dans cette approche, une géométrie constituée de deux plans parallèles est considérée, sur lesquels un gradient de pression constant est imposé. Contrairement à la proposition originelle de [Gopalsamy+1973], la marche aléatoire n’est plus un Walk on Sphere "classique" utilisant la distance à la plus proche paroi, mais une marche en tout point similaire à la marche conductive présentée dans le chapitre 4. La justification de l’approximation réalisée à la paroi est alors semblable à celle précédemment réalisée, car toute fonction harmonique (comme c’est le cas de la solution linéaire sur laquelle est faite la justification) est également biharmonique.

pression. L’équation sur la pression est simple (diffusion pure) et il suffirait de connaître la pression en tout point de la frontière fluide/solide pour construire une marche statistique correspondante, et envisager son couplage avec la marche de l’équation de Stokes. Comme nous avons choisi l’approche partant de l’équation biharmonique, nous n’avons besoin de connaître le gradient de pression que sur la frontière fluide/solide. Cependant, la question des conditions à la limite en pression est connue pour être un problème épineux de la littérature de la mécanique des fluides numérique. En effet, tandis que les conditions limites en entrée et en sortie sont souvent triviales, la condition limite aux frontières solide/fluide nécessite toujours un travail particulier [Coles1964] [Fernholz+1996] [George+1997].

Nous retrouvons cette difficulté sans entrevoir à ce stade de porte de sortie simple étant donnés nos objectifs. Deux questions pourraient se poser et définir des axes de travail à court ou moyen terme. D’une part, les nombreux travaux rapportés sur les écoulements au sein de milieux poreux tels que ceux de [Kumar+2014] et [Inayat+2011] nous permettent-ils de trouver une justification au fait d’utiliser une approche de type Darcy pour prévoir le gradient de pression moyen et d’utiliser ce gradient dans les algorithmes que nous venons de tester? D’un point de vue purement numérique, il semble tout à fait possible de traiter Darcy à l’aide d’une marche aléatoire du type de celles que nous travaillons ici et de la coupler à celle de Stokes de façon à rendre compte des effets géométriques locaux. Cependant, il y a peut-être une contradiction, au niveau de la modélisation, à combiner ces deux niveaux d’approximation. Nous n’avons pas exploré cette question à ce

stade. D'autre part, serait-il possible de trouver une inspiration dans les travaux numériques qui contournent cette même difficulté en résolvant une forme approchée de la mécanique des fluides compressibles, en faisant donc la résolution des ondes sonores, bien que sachant qu'elles n'ont pas d'effet perceptible sur l'écoulement, avec comme seul objectif de pouvoir travailler de façon explicite sur la pression à la paroi? On pourrait alors, pour la pression, retrouver des algorithmes de chemins de type transport, c'est-à-dire proches de ceux du transfert radiatif (voir chapitre 1), et travailler à leur couplage avec Stokes. L'approche consisterait alors à reprendre les travaux menés dans cet esprit du côté des méthodes déterministes et les traduire en termes statistiques.

Ces pistes ont peut-être un niveau de pertinence faible car nous les identifions à la toute fin de ce travail. Mais en tout cas, elles illustrent ce qui est le point bloquant à ce stade : on pourrait aborder la fluide dans un poreux de grande taille de la même façon que nous avons abordé les transferts thermiques, mais pour cela il nous faudrait trouver une stratégie convaincante concernant la pression.

## 6.2 Des ouvertures à la question du non-linéaire

Si nous parvenions à construire une marche qui permet l'évaluation de la vitesse locale, alors la question de coupler cette marche à celles que nous avons construites pour la thermique serait principalement une question de non-linéarité, celle issue du produit vitesse température dans le terme advectif de l'équation de la chaleur advecto-diffusive. Mais avant de discuter ce point nous allons commencer par décrire brièvement la littérature sur l'utilisation de la méthode de Monte Carlo pour des problèmes non-linéaires en insistant sur ce que nous pourrions intégrer à court terme dans les algorithmes du chapitre 4, en préservant un champ de vitesse connu.

Dans le présent manuscrit, la question de la résolution de systèmes différentiels s'est limitée à des problèmes linéaires. Il s'agit là d'ailleurs d'une réalité à travers la majorité des travaux réalisés par la communauté travaillant sur la méthode de Monte Carlo à ce jour. Cependant, comme énoncé dans la problématique au chapitre 2, l'idée est de se projeter vers un couplage complet dans lequel la physique peut être non-linéaire. Deux physiques présentent un intérêt immédiat pour les applications que nous envisageons :

- la non-linéarité des émissions radiatives (typiquement  $\sigma T^4$  pour un corps noir) ;
- la possibilité d'aborder des milieux dont les propriétés physiques dépendent de la valeur locale de la température, notamment la conductivité thermique et la capacité calorifique.

Un assez grand ensemble de travaux abordent cette question de la non-linéarité dans le corpus théorique de la méthode de Monte Carlo [Gobet2016] [Formanov+2012] [HenryLabordère+2014] [Bahadori+2017] [Dauchet+]. Ces travaux peuvent aujourd'hui être classifiés selon deux questions :

- Comment résoudre une équation ou un système différentiel non-linéaire?
- Comment évaluer une grandeur  $A = \mathbb{E}[f(\mathbb{E}[X])]$  où  $f$  est une fonction non-linéaire?

La première question est bien sûr beaucoup plus large que la seconde. Elle est presque systématiquement abordée par l'introduction d'un grand ensemble de marcheurs corrélés. Pour l'étude de champs tels que le champ de température en thermique ou le champ de vitesse en mécanique des fluides, cela signifie en pratique que suffisamment de marcheurs sont suivis de façon à couvrir correctement le domaine étudié, qu'ils interagissent entre eux, et que les grandeurs recherchées (typiquement la vitesse) sont évaluées à l'aide d'opérateurs statistiques appliqués aux marcheurs se trouvant à l'intérieur d'éléments d'une grille qui joue un rôle équivalent à celui d'un maillage spatial.

Ces approches sont difficilement compatibles avec notre objectif de produire des algorithmes ayant des coûts de calcul insensibles à la complexité géométrique, notamment à l'extension du domaine. En effet, si nous appliquions ce type d'algorithmes dans une géométrie de plaque poreuse telle que celle du chapitre 4, le nombre de marcheurs augmenterait avec le nombre de pores et donc le temps de calcul aussi.



---

De ce point de vue, un travail ressort très clairement de la littérature : le travail de Dimov [Dimov2008] qui ne porte pas directement sur la résolution d'équations différentielles, mais sur des équations de Fredholm qui peuvent en découler. Ce travail a jeté les bases d'une autre famille d'approches dans lesquelles les marcheurs corrélés sont remplacés par des chemins branchés. Le coût de calcul associé au suivi d'un grand nombre de marcheurs répartis dans le domaine est partiellement retrouvé dans un coût associé au suivi d'un grand nombre de branches, mais le bénéfice de cette transformation est très important dans notre contexte : même si le chemin est branché, il part de la position de l'espace où l'on souhaite évaluer la grandeur étudiée. L'idée de la localité est préservée et plus rien dans l'algorithme n'induit des temps de calcul croissant avec la complexité du domaine.

La seconde des deux questions de non-linéarité que nous avons listées ci-dessus peut sembler d'une portée plus marginale, mais nous verrons qu'elle aboutit à des propositions algorithmiques proches de celles de Dimov [Dauchet+], que nous pouvons donc exploiter concrètement en thermique.

Un travail fondateur a été celui de [Galtier] qui propose d'aborder la question particulière des coefficients d'absorption et de diffusion hétérogènes lors de la résolution de l'équation de transfert radiatif (cette question particulière a déjà été mentionnée dans la section 1.2). Sa proposition consiste à introduire des collisionneurs virtuels dans la scène pour se ramener à une solution analytique, dans laquelle une méthode de type rejet permet d'obtenir un échantillonnage exact de la distance de collision. On voit alors s'évanouir tout un ensemble de difficultés algorithmiques associées à la non-linéarité de la loi d'extinction de Beer [Eymet+2013] [Villefranque+2019].

Un peu plus tôt, la proposition de [Dauchet] avait permis d'aborder cette même famille de questions en se ramenant à des approches de type "chemins branchés". Les chemins statistiques dans ces approches peuvent alors se démultiplier en une multitude de chemins, et la contribution de l'intégralité de ces chemins devra être prise en compte en fin de réalisation. Pour aboutir à une telle formulation en toute généralité, une interprétation du développement limité de la fonction  $f$  qui est non-linéaire est nécessaire.

Ces deux propositions ont été utilisées avec succès, soit de façon séparée, soit de façon combinée, dans des domaines très divers (énergétique [Delatorre+2014], biochimie [Dauchet+2016], électromagnétique [Charon+2016]) et ont motivé [Terrée] à attaquer de front la question de la mécanique des fluides en partant directement de l'équation de Boltzmann. L'idée des "collisions nulles" telle que retravaillée par [Galtier] a été au cœur de cette expérience numérique. Dans une vision Monte Carlo reverse, un chemin statistique consiste à remonter l'histoire d'une molécule de fluide en interaction avec ses semblables (en pratique, on évalue en fait la fonction de distribution des molécules dans le milieu). Chaque interaction avec une autre molécule nécessite alors de résoudre un nouveau chemin sur l'histoire de cette dernière avant de pouvoir continuer le chemin de la première molécule observée, et ainsi de suite. Cette approche une fois de plus de type "chemins branchés" a néanmoins montré ses limites dès que la densité de molécule devient trop importante. Cependant, en se limitant à de bas nombres de Knudsen (c'est-à-dire des situations où il y a peu d'interactions entre les molécules), des simulations de micro-fluidique en géométrie complexe ont pu être réalisées, et surtout, la localité de l'arbre a pu être exploitée pour évaluer précisément des événements très rares de collisions entre particules à très haute énergie qui sont essentiels dans le contexte de la chimie nucléaire [Dauchet+].

Partant de la question d'évaluer  $A = \mathbb{E}[f(\mathbb{E}[X])]$ , via les collisions nulles, on retrouvait donc la question de résoudre une équation différentielle non-linéaire. Une analyse détaillée des difficultés rencontrées par [Terrée] a conduit très récemment [Tregan2020] à revisiter sous l'angle statistique les approches de type *point fixe* utilisant une *méthode de Picard* pour résoudre, cette fois de façon approchée, des systèmes d'équations différentielles non-linéaires. Dans cette approximation, l'approche est alors similaire à celle proposée par [Terrée], mais le nombre de branches possiblement générées par le chemin initial est borné. Ce contrôle sur le nombre de branches (et donc le temps de calcul) étant acquis, une large gamme de résolutions de problèmes non-linéaires a pu être

abordée, notamment pour les transferts conducto-convecto-radiatifs tels que ceux présentés dans le chapitre 3 et la section 2.2.2. Ces non-linéarités incluent le terme source radiatif en  $T^4$  ainsi que la prise en compte d'une conductivité thermique fonction de la température  $\lambda(T)$ . Cette même approche a par ailleurs été explorée par [Gattepaille] pour un ensemble de non-linéarités présentes dans des systèmes de photobioréacteurs.

Les travaux de [Tregan2020] nous concernent très directement. D'une part, ils sont parfaitement compatibles avec les propositions algorithmiques que nous avons faites dans cette thèse, ce qui signifie que nous pouvons étendre nos algorithmes à des configurations incluant des écarts de température incompatibles avec la linéarisation du rayonnement, ou pour lesquelles la conductivité thermique et la capacité calorifique ne peuvent plus être supposées indépendantes de la température. D'autre part, comme nous le verrons dans la section suivante, ils sont une source d'inspiration pour la question du couplage avec la mécanique des fluides. De façon à en donner une première illustration, considérons le cas d'un milieu purement conductif avec une conductivité thermique fonction de la température :

$$\nabla \cdot (\lambda(T) \nabla T) = 0 \quad (6.11)$$

L'approche de [Tregan2020] consiste alors à résoudre le système 6.12 où le champ de température  $T_0$  est imposé de façon arbitraire, et dans lequel chacune des équations différentielles est linéaire. Par exemple, la température  $T_1$  est régie par la seconde équation de ce système dans lequel, si  $T_0$  est non-uniforme,  $\lambda(T_0)$  est simplement une conductivité non-uniforme indépendante de  $T_1$ . La limite quand  $n$  tend vers l'infini de  $T_n$  converge alors vers la solution de l'équation 6.11. Au lieu de résoudre chacune de ces équations en champ pour résoudre la suivante, l'approche consiste plutôt à initier un chemin statistique dans l'équation  $n$ , qui nécessitera de lancer une branche dans l'équation  $(n - 1)$  pour évaluer la conductivité locale, et ainsi de suite.

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot (\lambda(T_0) \nabla T_1) = 0 \\ \nabla \cdot (\lambda(T_1) \nabla T_2) = 0 \\ \dots \\ \nabla \cdot (\lambda(T_{n-1}) \nabla T_n) = 0 \end{array} \right. \quad (6.12)$$

Les mises en œuvre présentées par [Tregan2020] semblent indiquer que même pour des écarts de température induisant un facteur 2 sur la conductivité, un ordre de branchement  $n = 2$  ou  $n = 3$  est souvent suffisant pour assurer de très bons niveaux de précision sur la prédiction du champ de température, ce qui signifie que les augmentations de temps de calcul liées au branchement sont bien canalisées. Les mises en œuvre concernant la non-linéarité du rayonnement aboutissent aux mêmes conclusions.

## 6.3 Quel champ de vitesse ?

On peut donc envisager de tenir compte de ces non-linéarités ( $\sigma T^4$ ,  $\lambda(T)$ ) dans nos calculs d'échangeurs poreux en géométrie complexe. Mais peut-on aller jusqu'à envisager d'aborder la non-linéarité du couplage avec la mécanique des fluides ?

Comme nous l'avons déjà annoncé, cette question devient centrale à la fin du présent travail : nous pouvons aborder des poreux d'un très haut niveau de complexité, mais à quoi nous sert l'insensibilité de nos temps de calcul à la complexité géométrique, pour la thermique, si à partir d'un nombre de pores vite limité nous ne savons plus produire les champs de vitesse dont nous avons besoin en entrée pour résoudre l'équation de la chaleur ?

Nous avons contourné cette difficulté en multipliant le nombre de pores sans complexifier la fluidique. En effet, lorsque nous avons étendu les dimensions de nos échangeurs, le motif géométrique était simplement répété spatialement à l'identique. En admettant que la fluidique était

indépendante de la température, nous pouvions nous contenter d'un seul calcul de mécanique des fluides sur quelques cellules poreuses, et le dupliquer autant que nécessaire. Le problème de thermique était alors différent en chaque endroit de la plaque du fait de la non-homogénéité de la tache solaire, mais la fluidique était la même pour chaque ensemble de pores dupliqués. Rien n'aurait changé en ce qui concerne la thermique si nous avions utilisé un poreux réel, par exemple issu d'une tomographie, mais qu'aurions-nous fait pour la fluidique au-delà de plusieurs centaines de pores?

Même en admettant que l'écoulement est indépendant de la thermique, les écoulements détaillés au sein d'échangeurs contenant beaucoup de pores posent deux difficultés : la production de la donnée (le calcul fluidique) et l'accès à cette donnée. La question de l'accès à une donnée volumique complexe s'inscrit dans une dynamique par ailleurs bien affirmée dans d'autres domaines comme la description des champs de nuages de la section 2.1.3. On peut supposer que nous ne rencontrerons pas de difficultés incontournables de ce côté. Par contre la question de la production du champ de vitesse va nous bloquer rapidement. C'est la raison pour laquelle nous avons mené le travail exploratoire de la section 6.1. En effet, au-delà d'un certain nombre de pores, la seule possibilité que nous envisageons concrètement est d'être capable de résoudre l'écoulement par une approche statistique, plus précisément par une méthode de Monte Carlo reverse à base d'échantillonnage de chemins, telle que celles que nous avons travaillées jusqu'ici. Il s'agirait d'exprimer la vitesse  $\boldsymbol{v}$  comme l'espérance d'une variable aléatoire  $\boldsymbol{V}$ . Ainsi, un emboîtement phénoménologique allant jusqu'à la résolution de la mécanique des fluides dans le milieu poreux pourrait être envisagé. La section 6.1 nous indique que cette piste peut avoir beaucoup de sens si nous trouvons une solution pour la gestion des conditions à la limite en pression.

Si on imagine qu'une solution soit trouvée pour ce problème de pression, alors la variable aléatoire  $\boldsymbol{V}$  pourrait être définie via une marche statistique qui aurait les mêmes propriétés d'insensibilité à la complexité géométrique que celles de nos marches de thermique couplée. La question qui se poserait alors serait de coupler les deux marches. L'équation d'advection-diffusion 6.13 fait apparaître le produit  $\boldsymbol{v}T$  de la vitesse par la température, qui est par la suite source de non-linéarité dans l'expression de la température. Pour preuve, l'expression exacte de la température dans un milieu 1D sur laquelle est basé le schéma exponentiel est rappelée dans l'équation 6.14. La température apparaît alors comme l'espérance d'une fonction non-linéaire  $f$  d'une espérance, ce qui nous ramène à la seconde des familles de problèmes de Monte Carlo non-linéaire de la section précédente.

$$\nabla \cdot (\alpha \nabla T - \boldsymbol{v}T) = 0 \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{1 + \exp(\text{Pe})} T(x - \delta) + \frac{\exp(\text{Pe})}{1 + \exp(\text{Pe})} T(x + \delta), & \text{Pe} &= \frac{\delta \|\boldsymbol{v}\|}{\alpha} \\ &= \mathbb{E}[f(\mathbb{E}[\boldsymbol{V}]) T(x - \delta) + (1 - f(\mathbb{E}[\boldsymbol{V}])) T(x + \delta)] \end{aligned} \quad (6.14)$$

avec

$$f(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\delta \|\boldsymbol{a}\|}{\alpha}\right)} \quad (6.15)$$

En suivant la logique proposée par [Dauchet], il s'agirait alors de travailler sur un développement limité de la fonction  $f$ , ce qui conduirait à un algorithme où à chacun des pas de la marche advection-diffusive que nous avons introduite au chapitre 4, on tirerait aléatoirement un ordre  $n$  du développement de  $f$ , puis on initierait  $n$  chemins tels que ceux que nous avons définis à la section 6.1 pour la marche biharmonique de l'approximation de Stokes.

Le message que nous souhaitons faire passer dans ce paragraphe de perspectives est avant tout qu'à l'exception de la question de la pression, dans une pensée à long terme, il n'y a aujourd'hui aucun verrou identifié qui rendrait irréaliste l'exploration d'un couplage des marches advecto-diffusives et biharmoniques de façon à simuler conjointement thermique et fluïdique au sein d'un poreux contenant un grand nombre de pores décrits géométriquement de façon détaillée.

## 6.4 La perspective énergétique

Nous poursuivons ce chapitre en rediscutant chacun des points de notre problématique initiale à la lueur des propositions que nous avons réussies à faire jusqu'ici, mais aussi en tenant compte d'un ensemble de travaux dont nous avons connaissance, qui ont été menés par d'autres chercheurs pendant la durée de cette thèse et permettent d'affiner les perspectives. Nous commençons par ce qui était notre point de départ applicatif : envisager la simulation thermique d'un échangeur solaire complexe d'une façon qui permette une intégration dans une chaîne de modélisation énergétique entièrement statistique. Ensuite, toujours dans une perspective énergétique mais au-delà de la question solaire, le cadre théorique que nous avons choisi nous permet aussi de bénéficier de trois familles de développements récents qui se donnent comme objet d'exploiter différemment un espace de chemins déjà existant afin d'en extraire des informations énergétiques supplémentaires, soit pour répondre à des besoins d'analyse, soit pour travailler la question de la mesure et du contrôle/pilotage. Nous prenons le temps de décrire ces extensions qui ont pour l'instant été testées sans fluïdique, mais qui pourraient être directement implémentées à partir de nos marches advecto-conducto-radiatives.

### 6.4.1 La possibilité d'un couplage avec d'autres éléments d'une chaîne de modélisation énergétique

En abordant nos marches advecto-conducto-radiatives, nous affichions la volonté de préserver l'ensemble des forces ayant été identifiées concernant la Méthode de Monte Carlo. Parmi ces dernières, il y avait justement le souhait d'une compatibilité avec une chaîne algorithmique complète, qui permette une résolution complète, par exemple du problème que nous avons retenu à titre d'emblème : la simulation d'une centrale solaire à concentration depuis la prise en compte de son environnement météorologique lors du calcul de la concentration, jusqu'à la modélisation thermique du récepteur et la conversion électrique.

La méthodologie proposée dans cette thèse ne concerne que la question des transferts thermiques au sein du milieu poreux faisant office de récepteur. Mais tous nos choix, notamment ceux concernant la pensée en chemins, ont été faits pour permettre le couplage, en tenant compte des travaux menés en parallèle sur les autres éléments de la chaîne de modélisation. Nous avons par exemple toujours en tête le fait que lorsque nous supposons connu le rayonnement incident sur notre échangeur, i.e. la valeur de la tache solaire en un point atteint par notre marcheur à la surface du poreux, en pratique ce rayonnement incident serait finalement inconnu. Il faudrait continuer l'exploration statistique en initiant un chemin radiatif remontant jusqu'au soleil via le champ d'héliostats et via l'atmosphère au-dessus de la centrale, avec ses aérosols, ses nuages, l'absorption gazeuse, etc.

De ce point de vue, en arrivant à la fin de notre travail, le paysage a beaucoup évolué. Nous pouvons maintenant raisonner avec des outils de simulation statistique existants, déjà en production, pour toutes ces autres physiques en amont du récepteur poreux, notamment le [High Tune : RenDeRer \(htrdr\)](#) et [Solstice](#). Le premier de ces deux outils est à l'origine des images de la section [2.1.3](#) et propose donc une solution pratique à la résolution des transferts radiatifs dans des scènes atmosphériques complexes. L'outil Solstice adresse quant à lui la question de la simulation du transfert radiatif au sein d'une centrale solaire composée par exemple d'un champ d'héliostats et d'un récepteur solaire en haut d'une tour.

---

Cette perspective raisonne fortement avec les travaux en cours de [Gattepaille] dont la question est de penser l'emboîtement d'approches statistiques à de multiples échelles pour de multiples phénoménologies physiques en vue de la simulation complète d'un photobioréacteur. Ce type de proposition n'est possible que parce que les descriptions statistiques préalablement réalisées à toutes les échelles (jusqu'à la résolution de l'électro-magnétisme à la plus petite échelle [Charon]) s'expriment comme des espérances de variables aléatoires définies sur des espaces de chemins.

Ainsi, lorsque nous avons affiché le souhait de toujours raisonner en regardant une grandeur locale comme l'espérance d'une variable aléatoire définie à base de chemins, il ne s'agissait pas seulement de chercher à obtenir des algorithmes qui puissent être insensibles à la complexité géométrique, mais il s'agissait aussi d'anticiper le couplage. Nous nous imposons la contrainte de rentrer dans un cadre formel tout à fait étroit en pensant à des bénéfices espérés en termes de souplesse dans la perspective plus large d'une modélisation statistique de systèmes énergétiques.

De ce point de vue, et par opposition aux conclusions de la section précédente sur le couplage avec la fluïdique, ces bénéfices peuvent être envisagés à court terme et l'idée de coupler notre code avec le [High Tune : RenDeRer \(htrdr\)](#) et [Solstice](#) est travaillée concrètement dans l'environnement de recherche autour de la plateforme EDStar et de la bibliothèque [Star-Engine](#).

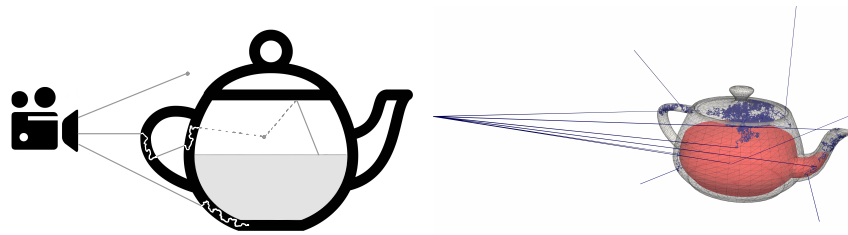
## 6.4.2 Synthèse d'images thermiques

Par construction, l'algorithme advecto-conducto-radiatif permet d'évaluer la température en n'importe quel point de l'espace. En répétant un certain nombre de fois l'algorithme complet en différents points, il est donc possible de créer une carte de température, par exemple sur un plan quelconque. L'image ainsi obtenue nécessitera alors  $N$  réalisations de Monte Carlo pour chacun des pixels de l'image désirée où  $N$  est un nombre de réalisations que l'on peut supposer fixé pour obtenir une variance suffisamment petite sur chaque observable. Cette perspective ouvre dès lors la voie à l'obtention de cartographies de températures dans des zones restreintes de l'espace dans des systèmes potentiellement très complexes.

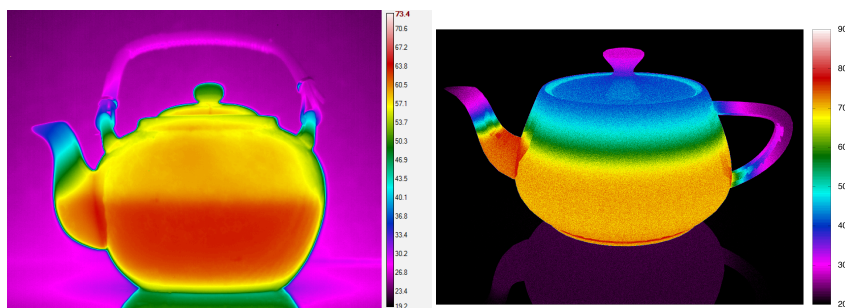
Il est alors possible de rajouter une idée en s'inspirant de la pratique de l'informatique graphique présentée en section 2.1.1 : synthétiser une image consiste à simuler la réponse d'une caméra virtuelle devant une scène virtuelle. Une caméra virtuelle se résume simplement par le positionnement d'un observateur fictif devant lequel est interposée une matrice de pixels (qui correspond à l'image synthétisée) au travers de laquelle la luminance dans chaque pixel dans la direction de l'observateur est évaluée. Supposons alors que l'on souhaite obtenir la réponse d'une caméra thermique, c'est-à-dire d'une caméra dont la réponse est fonction de la température de l'objet observé. Dès lors, la grandeur devant être inscrite dans chaque pixel de l'image synthétisée doit être la température au bout de chaque ligne de visée observateur - pixel. Cette température peut alors être évaluée pour chaque pixel par la méthode de Monte Carlo en utilisant une marche statistique. L'idée à retenir est alors que l'on construit des images thermiques sans avoir besoin de pré-calculer la température des objets visés ou la température des objets dont le rayonnement peut être réfléchi par l'objet visé. On part des techniques actuelles de construction d'images par Monte Carlo et lorsqu'un chemin partant de la caméra (algorithme reverse) a besoin de connaître une température demandant la résolution de l'équation de la chaleur, un chemin thermique est tout simplement initié à partir de ce point exactement comme nous l'avons fait tout au long de cette thèse.

Cette technique a déjà été mise en œuvre dans le cas de transferts conducto-convecto-radiatifs stationnaires avec des cellules fluides parfaitement mélangées [Eymet+2019]. Dans cette démonstration, l'exemple d'une théière contenant de l'eau chaude à l'instant initial et étant laissée à refroidir a été utilisé. Tandis que la figure 6.3 présente le concept de cette caméra thermique virtuelle, la figure 6.4 présente une comparaison qualitative entre un résultat ainsi obtenu et une véritable image thermique de théière. Malgré des conditions expérimentales et numériques sensiblement différentes (géométrie, point de vue, conditions limites), des ressemblances notables peuvent être observées, notamment la présence de forts gradients de température sur le niveau du

liquide, dans le bec, l'anse, et la poignée du couvercle. Une réflexion sur la surface sous la théière est également visible dans les deux images, mais de façon moins nette dans l'image expérimentale.



**FIGURE 6.3** – Illustration du concept de caméra thermique virtuelle [Eymet+2019]. A gauche, un dessin de trois chemins statistiques partant de la caméra pour évaluer trois pixels différents. Le chemin le plus en haut est absorbé par le milieu participant (air) dont la température est retenue pour la réalisation. Le chemin du milieu atteint la surface de la théière où un jeu de probabilité l'injecte en conduction dans la céramique, puis en rayonnement, etc, avant de finir son parcours à la température du fluide. Le chemin du bas atteint également la surface de la théière où il est injecté en conduction avant de finir un peu plus loin à la condition initiale. L'image de droite présente 5 de ces chemins effectivement échantillonnés pour l'obtention de l'image de synthèse.

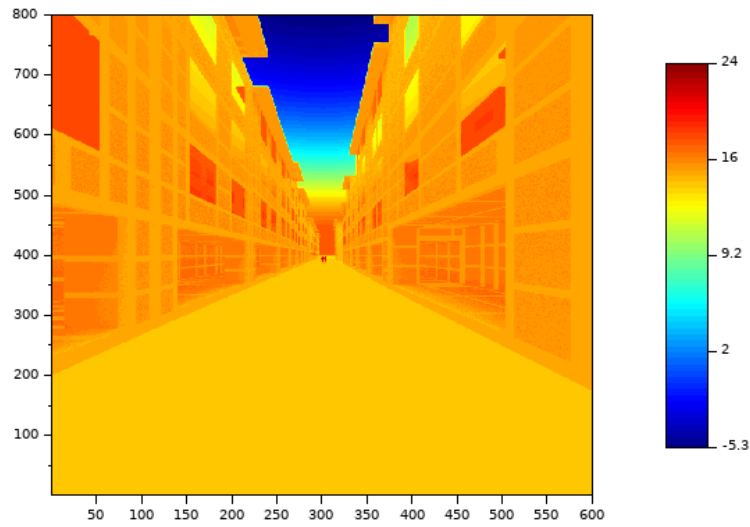


**FIGURE 6.4** – Comparaison qualitative entre une image thermique de synthèse (gauche) et expérimentale par thermographie infrarouge (droite) [Eymet+2019]. Malgré des divergences de géométrie, conditions aux limites, et un point de vue différent, une certaine ressemblance peut être qualitativement observée.

L'image 6.5 illustre un travail en cours où la même idée est exploitée pour mener une étude énergétique à l'échelle d'une rue dans une ville. A ce stade, les températures de surface ont été imposées et il ne s'agit que de la mise en œuvre des techniques de la synthèse d'image actuelle. Cependant, la saisie de la donnée intègre déjà les informations qui seront nécessaires pour remplacer ces températures imposées par des marches aléatoires rendant compte de la thermique instationnaire des bâtiments de façon à intégrer la réponse inertielle du bâti, notamment pour l'étude des îlots de chaleur urbains. Cette recherche fait partie d'un projet plus large en partenariat avec les météorologues/climatologues de Météo-France qui sont capables de produire des champs de vitesse d'air à l'extérieur des bâtiments à l'échelle de plusieurs rues ce qui conduit à des problématiques qui rejoignent celles des poreux (la ville vue comme un poreux en géométrie complexe). On peut donc envisager de faire appel à nos algorithmes pour simuler l'ensemble de la thermique de telles scènes, bâtiment et air dans la rue (à champ de vitesse supposé connu et découplé) à l'aide exactement des mêmes algorithmes que ceux que nous avons testés ici, pour produire des images infrarouges qui sont au cœur de la pratique expérimentale des thermiciens de ce domaine.

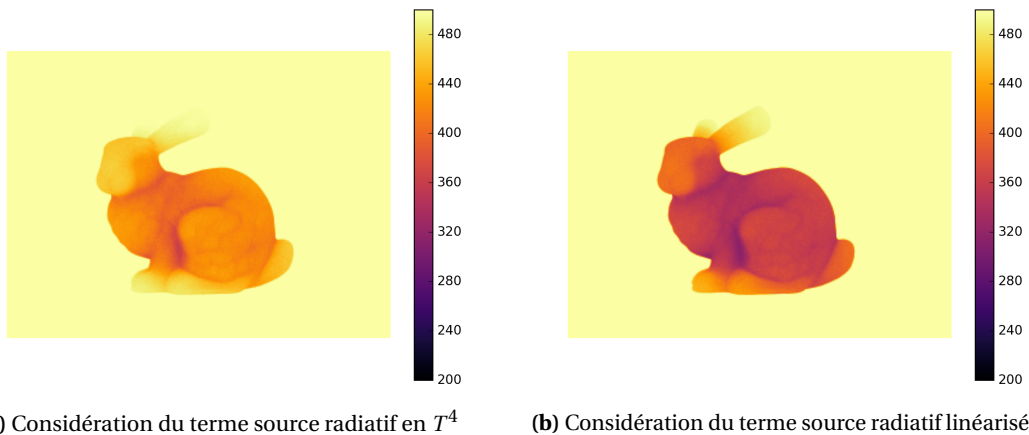
Pour revenir à un exemple plus académique, la figure 6.6 présente un autre exemple de synthèse d'image infrarouge, celui-ci sans connaissance a priori des températures de surface, c'est-à-





**FIGURE 6.5** – Image du rendu infrarouge d’une scène urbaine (rue des Tonneliers, Bayonne) : températures équivalent corps noir en °C.  $N = 1000$  réalisations par pixel (600x800). Tandis que toutes les températures de la scène sont ici imposées, le calcul de rendu résout exactement le transfert radiatif dans la scène.

dire avec des chemins optiques qui se poursuivent par des chemins thermiques, mais avec une différence importante par rapport à la figure 6.4 : la figure 6.6a a été produite en mettant en œuvre l’algorithme de prise en compte de la non-linéarité du rayonnement que nous avons discuté en section 6.2. L’image que l’on aurait obtenue avec linéarisation du rayonnement est représentée dans la figure 6.6b. Comme les différences de températures imposées sont élevées, l’erreur liée à la linéarisation est très élevée, ce qui illustre bien l’importance des travaux de J.M. Tregan en termes applicatifs.



**(a)** Considération du terme source radiatif en  $T^4$

**(b)** Considération du terme source radiatif linéarisé

**FIGURE 6.6** – Image du rendu infrarouge d’un lapin initialement à 200K dans un environnement à 500K (calcul instationnaire).  $N = 4096$  réalisations par pixel (320x240).

### 6.4.3 Un calcul simultané des sensibilités à la grandeur d'observation

La seconde piste consiste à exploiter le grand nombre de chemins que nous réalisons dans tous les algorithmes de Monte Carlo dont nous parlons, pour produire une analyse de sensibilité. La sensibilité est définie comme la réponse de la sortie d'un système à une petite variation d'une ou plusieurs de ses entrées. Formellement, la sensibilité correspond donc à la dérivée partielle de la grandeur de sortie  $A$  par rapport à la variable notée génériquement  $\pi$  sur laquelle se porte la variation. La connaissance de cette grandeur dérivée présente aujourd'hui un enjeu presque aussi grand que la connaissance de la grandeur elle-même dans une large gamme d'applications en ingénierie.

En pratique, de nombreux travaux sur la méthode de Monte Carlo ont observé qu'il était possible d'obtenir cette information sans quasiment aucun calcul supplémentaire [Weise+1997] [dLataillade+2002] [Roger+2005] [Dauchet+2013]. Cette propriété peut être observée sur l'exemple générique présenté dans l'équation 6.16. La sensibilité au paramètre  $\pi$  de la grandeur  $A(\pi)$  apparaît alors sous la même forme intégrale et avec la même densité de probabilité que l'observable elle-même, mais pour un poids de Monte Carlo différent (terme entre crochets). Le calcul de ces deux intégrales peut alors être réalisé en utilisant le même échantillonnage des variables aléatoires définies sur la densité de probabilité  $p_\gamma$ , et en stockant simplement deux valeurs de poids différentes associées aux deux calculs distincts. L'échantillonnage de la variable aléatoire est en effet la partie la plus chronophage du calcul, elle correspond par exemple à la création des chemins statistiques aléatoires dans les exemples présentés en transferts thermiques jusqu'ici.

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\pi) = \int_{\gamma} p_{\gamma}(\pi) d\gamma [a(\pi)] \\ \partial_{\pi} A(\pi) = \int_{\gamma} p_{\gamma}(\pi) d\gamma \left[ \partial_{\pi} a(\pi) + \frac{\partial_{\pi} p_{\gamma}(\pi)}{p_{\gamma}(\pi)} a(\pi) \right] \end{array} \right. \quad (6.16)$$

Cette propriété se limite cependant à des variations de paramètres n'ayant pas d'influence sur le domaine d'intégration, c'est-à-dire en général la géométrie étudiée. Dans le cas où le paramètre modifie la géométrie, d'autres méthodes doivent être mises en place, ce qui implique souvent de réaliser un calcul de Monte Carlo pour la valeur de l'observable, et un autre calcul (avec des parties communes) pour sa sensibilité [Dauchet] [Farges] [Lapeyre+2019].

Ces questions de sensibilité géométrique restent très ouvertes, mais des avancées récentes permettent une certaine dose d'optimisme [Lapeyre+] et l'enjeu est suffisamment important pour que ces algorithmes de calcul de sensibilité soient toujours au premier plan dans les projets énergétiques s'appuyant sur Monte Carlo. C'est le cas notamment pour le projet sur la ville que nous avons mentionné ci-dessus, avec des questions telles que la sensibilité d'observables radiatives, ou de confort, à des paramètres tels que la largeur de rue, la hauteur des bâtiments, etc.

### 6.4.4 Monte Carlo symbolique pour l'obtention de fonctions de transfert

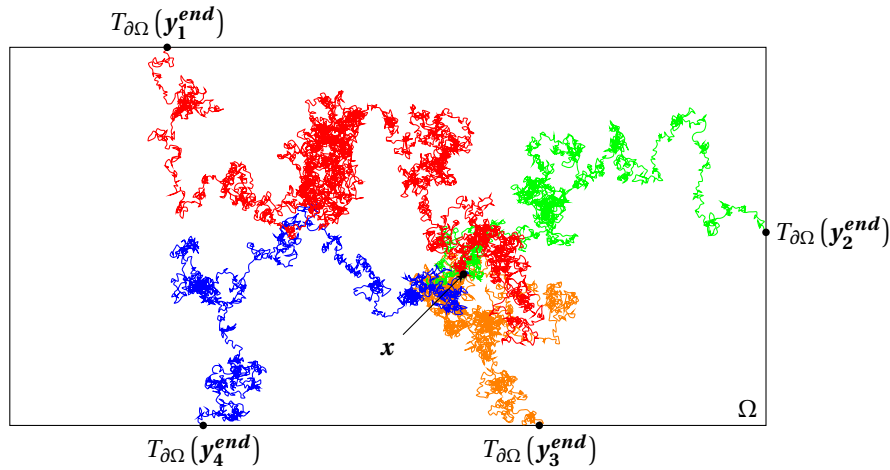
Dans une démarche proche des sensibilités paramétriques, une accumulation d'informations sur l'échantillonnage réalisé par un algorithme de Monte Carlo peut permettre de réaliser une fonction de transfert approchée du système général. Cette démarche ici dénommée *Monte Carlo symbolique* [Galtier+2017] est également retrouvée dans la littérature comme *Méthode de Monte Carlo Inverse* [Dunn1981] [Subramaniam+1991].

De façon académique, considérons le problème de conduction stationnaire illustré par la figure 6.7 dans lequel la température en  $\mathbf{x}$  du milieu  $\Omega$  est cherchée en fonction de la température de bord  $T_{\partial\Omega}(\mathbf{y})$ . L'échantillonnage des chemins permettant de trouver la valeur de la température



en  $\mathbf{x}$  est indépendant des valeurs de ces conditions limites. Au lieu de stocker "en dur" la valeur de chacune de ces températures en bout de chemin dans le poids de Monte Carlo, il est possible d'enregistrer simplement les positions de sorties de ces derniers. Etant donné un échantillon de taille  $N$  de réalisations de chemins statistiques, la connaissance des positions de sorties  $\mathbf{y}_k^{end}$  avec  $k \in \{1, 2, \dots, N\}$  permet alors de donner non plus la valeur de la température en  $\mathbf{x}$ , mais l'estimateur de  $T(\mathbf{x})$  présenté dans l'égalité 6.17 qui peut être utilisé pour n'importe quelle condition limite  $T_{\partial\Omega}$ . Cette démarche est ainsi appelée "symbolique" car elle correspond à une pratique dans laquelle ce n'est plus la valeur  $T_{\partial\Omega}(\mathbf{y}_k^{end})$  qui est retenue comme poids, mais un "symbole" (par rappel au calcul formel, ou calcul symbolique) qui représente cette variable.

$$T(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N T_{\partial\Omega}(\mathbf{y}_k^{end}) \quad (6.17)$$



**FIGURE 6.7** – Illustration de la construction de chemins statistiques conductifs partant du point  $\mathbf{x}$  pour évaluer la température  $T(\mathbf{x})$ . Sur les 4 chemins ici représentés, un seul atteint la condition limite chaude  $T_{hot}$  tandis que les autres atteignent  $T_{cold}$ . Ce résultat est indépendant de la valeur de ces conditions limites.

Le concept de Monte Carlo symbolique permet d'aller plus loin que cette première vision. En effet, on vient de voir comment une réalisation de Monte Carlo permet d'évaluer un propagateur approché du problème. Cependant, il est également possible de l'utiliser sur des paramètres qui auraient eu un impact sur l'échantillonnage aléatoire. Formellement, cette possibilité apparaît dans l'acte de reformulation intégrale rappelé dans la relation 6.18. En effet, il est toujours possible de fixer une densité de probabilité choisie puis de compenser ce choix dans le poids de Monte Carlo. Dès lors, on peut à nouveau considérer que ce poids de Monte Carlo est un symbole, ce qui permet de construire une expression fonctionnelle de ce paramètre.

$$A(\pi) = \int_{\gamma} p_{\gamma}(\pi) d\gamma a(\pi) = \int_{\gamma} p_{\gamma}(\tilde{\pi}) d\gamma \underbrace{\frac{p_{\gamma}(\pi)}{p_{\gamma}(\tilde{\pi})}}_{\text{symbole}} a(\pi) \quad (6.18)$$

Les travaux [Penazzi+2019] présentent la mise en œuvre d'une telle approche pour des transferts conducto-convecto-radiatifs dans laquelle la température est ainsi exprimée comme une fonction du coefficient d'échange convectif  $h$  dans un contexte de géométrie complexe en utilisant la même famille d'algorithmes que ceux utilisés dans le présent manuscrit. Dans cette approche, le

paramètre  $\pi$  de l'équation 6.18 est alors le coefficient d'échange  $h$ , et le calcul est réalisé pour une valeur de référence  $\tilde{h}$  de ce paramètre pour la construction des chemins aléatoires. La fonctionnelle ainsi créée permet alors de générer des solutions du problème pour une large gamme de valeurs de  $h$ , pour des coûts CPU qui sont alors 4 ordres de grandeur moins importants que le calcul direct par MMC. Cette forme est alors particulièrement adaptée à des problématiques de contrôle commande ou d'inversion.

Là encore, rien dans nos marches n'a été introduit qui rendrait impossible l'exploitation de ces techniques. On peut donc très bien imaginer de produire, à l'aide de nos algorithmes, des fonctions de transfert qui remplaceraient le calcul de Monte Carlo au sein d'algorithmes permettant l'inversion, l'optimisation, ou le pilotage de systèmes énergétiques où le calcul thermique doit être appelé de façon itérative et doit donc être très rapide.

## 6.5 Un dernier regard critique sur nos fondements théoriques

Dans ce qui précède, nous n'avons pas hésité à mettre en avant des perspectives de long terme mais cela ne signifie pas que nous ignorons tous les lieux de fragilité de la proposition que nous avons faite. Toujours dans l'esprit de revisiter notre problématique initiale, nous concluons cette thèse sur ces fragilités.

### 6.5.1 Retour sur la complexité

Au travers des exemples de mise en œuvre sur des échangeurs, la résolution statistique n'a a priori pas posé de difficultés de convergence. A ce titre, on peut imaginer mettre dès aujourd'hui ces éléments à la disposition de la communauté de recherche sur les échangeurs thermiques. Cependant, si les échangeurs sont conçus pour l'efficacité des échanges et ont donc la particularité de n'être "thermiquement pas trop épais", c'est-à-dire que nos marcheurs sortent assez rapidement du domaine (voir le chapitre 5), ce n'est pas le cas de tous les systèmes où se rencontre le besoin de simuler conduction, convection et rayonnement en géométrie complexe.

Nous avons déjà mentionné dans le chapitre 2 l'exemple d'un sol lunaire composé d'un assemblage d'un grand nombre de grains où la famille d'algorithmes que nous travaillons rencontre de véritables limites en termes de temps de calcul. On retrouve les mêmes problèmes que ceux de la littérature du rayonnement en milieu diffusant optiquement épais : les marcheurs mettent un temps trop important à atteindre les limites du domaine pour que la méthode de Monte Carlo soit praticable. La courbe du chapitre 4 montrant l'insensibilité du temps de calcul au nombre de pores n'est donc pas illustrative de la réalité pratique dans de tels contextes : elle ne vaut que pour les types d'échangeurs que nous avons étudiés.

Une autre source de difficulté, qui n'a rien à voir avec le niveau de complexité géométrique, est la présence de forts écarts de conductivité thermique, ou plus généralement la présence de parties du système tellement favorables au transfert de la chaleur (tellement conductives pour les parties solides) que nos marcheurs finissent "piégés" dans ces parties du système : la marche peut être extrêmement longue en leur sein avant de finir par sortir. Sur certaines situations de blocs métalliques entourés de matériaux beaucoup moins conducteurs, les tests sur le code [Stardis](#) ont identifié des configurations tout à fait pathologiques où les marcheurs ne ressortent "plus" du métal dès qu'ils l'ont pénétré, ou en ressortent au bout de temps de calcul inacceptables. Bien sûr, dans de tels cas il est toujours possible de changer de modèle thermique et de poser que le solide est isotherme (c'est ce que traduit la longueur extrême des marches en leur sein). Mais de tels changements de modèle sont handicapants dans un contexte d'ingénierie car ils obligent souvent à une phase coûteuse de validation externe, alors que justement les méthodes de Monte Carlo sont au contraire souvent envisagées comme permettant précisément ce type de validations.

---

Il y a donc encore de nombreuses questions ouvertes concernant la gestion de la complexité géométrique et phénoménologique d'un système thermique par la méthode de Monte Carlo et ces questions ne sont pas à l'interface physique-informatique que nous avons explorée principalement. Elles relèvent de la seule modélisation physique à base d'espaces de chemins à des limites encore peu explorées.

## 6.5.2 Des marches advecto-diffusives

Une marche advecto-diffusive a été proposée dans le cadre de cette thèse en partant de l'inspiration du schéma exponentiel proposé par Patankar [Patankar1980], mais aussi de la marche conductive précédemment proposée pour résoudre la conduction en géométrie complexe par le biais du lancer du rayon. Tandis que cette dernière permet la résolution des transferts thermiques en géométrie complexe, notre proposition s'est restreinte à la question des problèmes stationnaires.

Bien qu'une ébauche de construction d'une telle marche instationnaire soit présente en annexe [A.2](#) en s'inspirant une fois de plus de ce qui a été établi en conduction, un recul théorique profond semble indispensable avant de produire une quelconque proposition à ce sujet. En effet, la question du transport advecto-diffusif instationnaire nécessite d'ouvrir un ensemble de raisonnements dont notamment l'*advection de motifs* ou la *diffusion numérique*. Le terrain pour aborder cette question semble aujourd'hui prêt et de futurs travaux ne manqueront certainement pas de s'y intéresser, mais étant donnée la largeur de la littérature du domaine, on peut raisonnablement imaginer que sa déclinaison en termes statistiques ne sera pas une tâche anodine. Il suffit de commencer à imaginer ce que pourrait être une version en marche aléatoire des schémas de type limiteur de flux, par exemple, pour s'en convaincre. En tout cas, nous retenons que notre proposition est limitée au régime stationnaire et que l'extension à l'instationnaire n'est pas immédiate.

Nous devons aussi mentionner une autre faiblesse, plus conceptuelle, de notre travail sur les marches diffusives et advecto-diffusives. Depuis le départ, nous avons choisi d'imposer que nos marches soient compatibles avec le lancer de rayon. La raison était que les algorithmes permettant d'accélérer l'interrogation d'une donnée géométrique complexe avaient été conçus par des chercheurs en informatique graphique qui partaient du lancer de rayon.

Mais une avancée numérique vient d'être rapportée récemment par la même communauté qui permet aujourd'hui un accès accéléré à la distance à la plus proche paroi. Cette avancée a été annoncée et publiée lors de la [Embree v3.6.0 Release](#) du 20 août 2019 dans laquelle le "support for point queries" est implémenté pour la première fois dans la librairie. Les algorithmes correspondants sont même déjà implémentés dans la [v0.9](#) de la bibliothèque [Star-Engine](#) que nous utilisons.

Est-ce que cette nouvelle avancée remet en cause la pertinence de nos choix? Partiellement oui, en ce qui concerne la conduction dans les parties solides homogènes. En effet, pour cette dernière, la mise en œuvre de Walk on Sphere sur la plus grande sphère englobante est donc maintenant envisageable, et permettrait de réduire le nombre de pas nécessaire pour atteindre la paroi. Cependant, des travaux en cours semblent montrer que les bénéfices ne sont pas aussi immédiats que l'on pourrait l'imaginer, on peut aujourd'hui combiner Walk on Sphere et géométrie complexe de façon beaucoup plus directe et envisager des marches sur des sphères de plus grande taille. Bien sûr, les bénéfices attendus sont moins importants sur la partie fluide où nous devons de toute façon adapter le pas de la marche à l'échelle des hétérogénéités du champ de vitesse. Mais quoi qu'il en soit, le paysage informatique a changé et certaines de nos affirmations de début de recherche sont certainement à revisiter.

### 6.5.3 Fondements théoriques des chemins en thermique couplée

Au début du travail réalisé pendant ces trois années, les algorithmes dont nous nous inspirions étaient systématiquement pensés et décrits en espace de chemins, selon un intuitif inspiré du travail de Feynmann et Kac. Mais, presque par opposition, le formalisme théorique qui justifiait ces algorithmes rigoureusement reposait quant à lui sur les fonctions de Green. Bien que cette première étape théorique ait permis de fonder un travail mené sur le propagateur du système thermique complet, en intégrant les couplages entre modes de transfert et les découpages géométriques, les chemins n'apparaissent que de façon assez indirecte à travers un vocabulaire tel que "échantillonnage de la fonction de Green" ou "échantillonnage du propagateur" qui convenait bien en termes algorithmiques, notamment pour construire un Monte Carlo à partir de schémas numériques déterministes existants, mais qui ne suffisait pas à définir le concept de chemin en thermique couplée de façon complète. L'édifice restait fragile.

A travers un ensemble de réflexions que nous avons tenté d'illustrer dans le chapitre 3, il a été possible de commencer à se ré-appropriier les idées de Feynman-Kac plus en profondeur, d'explorer la littérature de physique et de mathématique correspondante jusqu'à un premier niveau qui nous permet aujourd'hui de mieux cerner les limites du cadre théorique que nous essayons de mettre en place. Nous sommes par exemple capable d'assurer complètement les fondements des simulations Monte Carlo exactes du chapitre 3. Cela ne signifie pas seulement que nous pouvons prouver que les simulations sont exactes : nous le pouvions déjà, d'une façon très traditionnelle dans la littérature de Physique, en partant de la théorie de Green et en la traduisant dans le formalisme intégral de Monte Carlo. Mais maintenant nous pouvons aussi définir complètement les chemins que nous utilisons dans le cadre théorique des processus stochastiques, et notamment les voir comme des successions de sous-chemins existant chacun dans une littérature dédiée.

Au-delà de ces exemples simples, beaucoup de travail reste à faire si nous souhaitons pouvoir combiner avec plus de souplesse notre littérature de thermique usuelle, et la partie de la littérature mathématique sur les processus stochastiques qui tente de répondre aux questions voisines des nôtres.



# Plus loin dans la construction des chemins conducto-advectifs

A.1 Le cas de l'orthogonalité vitesse - gradient de température . . . . .	143
A.2 Chemins conducto-advectifs instationnaires . . . . .	145
A.2.1 Heat transfer and random process . . . . .	145
A.2.2 A random walk compatible with ray tracing tools . . . . .	147
A.3 Une construction du nombre de pas moyen pour sortir d'une sphère . . . . .	148

## A.1 Le cas de l'orthogonalité vitesse - gradient de température

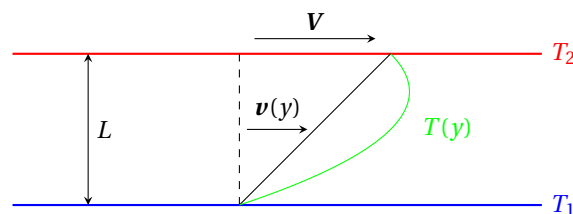
### L'exemple de l'écoulement de Couette

L'écoulement de Couette est un cas d'étude académique couramment étudié. Ce cas de référence de mécanique des fluides traite le cas de l'écoulement d'un fluide visqueux entre deux surfaces planes, dont l'une est en mouvement par rapport à l'autre. Dans cette brève étude, on rajoutera en plus des conditions de température différentes sur ces deux surfaces.

On notera  $\lambda$  la conductivité thermique du fluide, et  $\mu$  sa viscosité dynamique.

### Analytique

Par un simple bilan de masse et d'énergie, la solution de ce problème 1D est bien connue [Burmeister1993] : l'écoulement est linéaire, et le bilan d'énergie mène à l'équation A.1 ci-dessous.



**FIGURE A.1** – Illustration du profil de vitesse  $v$  et de température  $T$  dans un écoulement de Couette au régime stationnaire en présence de termes sources visqueux.

---


$$\frac{d^2 T}{dy^2} = -\frac{\mu}{\lambda} \left( \frac{dv(y)}{dy} \right)^2 \quad (\text{A.1})$$

La vitesse  $v$  étant linéaire, le terme de droite est constant, et la solution de  $T$  est parabolique (cf figure A.1).

### Formulation intégrale par les différences finies

La solution de l'équation A.1 peut être directement approchée sous la forme d'une espérance par une discrétisation de l'espace, ce qui suppose que la valeur du terme source  $\frac{\delta^2}{2} \frac{\mu}{\lambda} \left( \frac{dv}{dy} \right)^2$  est localement constante devant le pas d'espace  $\delta$ , ce qui est ici exact.

$$T(x, t) \approx \frac{1}{2} (T(x - \delta, t) + T(x + \delta, t)) + \frac{\delta^2}{2} \frac{\mu}{\lambda} \left( \frac{dv}{dy} \right)^2 \quad (\text{A.2})$$

### Monte Carlo sur schéma

L'équation A.2 peut alors être résolue par la méthode de Monte Carlo, par exemple avec l'algorithme A.1 qui consiste à réaliser une marche isotrope 1D au cours de laquelle le terme source est accumulé lors de chaque pas, puis ajouté à la température de bord en fin de marche.

---

**Algorithme A.1 :** Algorithme de Monte Carlo du calcul de la température  $T$  au point  $y$  au régime stationnaire dans une section  $[0, L]$  en présence d'un champ de vitesse  $v(y)$  orthogonal au gradient de température.

---

$N$  le nombre d'itérations choisi

$rng$  un générateur de nombres aléatoires

**pour**  $i = 1 \rightarrow N$  **faire**

$y' = y$

    sources = 0

    SORTIE = 0

**tant que** SORTIE=0 **faire**

        sources = sources +  $\frac{\delta^2}{2} \frac{\mu}{\lambda} \left( \frac{dv}{dy}(y') \right)^2$

**si**  $rng < 0.5$  **alors**

$y' = y' - \delta$

**sinon**

$y' = y' + \delta$

**fin**

**si**  $y = 0$  ou  $y = L$  **alors**

$W_i = T(y') + sources$

            SORTIE = 1

**fin**

**fin**

**fin**

$T(y) \approx \frac{1}{N} \sum W_i$

---

## A.2 Chemins conducto-advectifs instationnaires

Let  $\Omega_S$  be a motionless solid domain of boundary  $\partial\Omega_S$  and  $\Omega_F$  an adjacent fluid domain of boundary  $\partial\Omega_F$ . In such a system, thermal transport takes place throughout three distinct modes : conduction, advection, and radiation. Whilst both conduction and radiation may theoretically happen anywhere, advection is confined to the fluid. Given that : (i) both densities  $\rho$ , heat capacities  $C$ , and conductivities  $\lambda$ , are homogeneous; (ii) the fluid flow velocity  $\mathbf{u}$  is known and independent of temperature; (iii) the solid is an opaque black body; (iv) the fluid is transparent; (v) radiation is stationary and linearized around a reference temperature  $T_{ref}$ , which defines a surface radiative heat transfer coefficient  $h_R = 4\sigma T_{ref}^3$ ; the heat transfer can be modeled as equations {A.3, A.4, A.5, A.6, A.7, A.8} where  $S$  are the volume sources,  $\mathbf{n}$  is the unit normal vector at the solid-fluid interface pointing towards the fluid,  $\sigma$  is the Stefan-Boltzmann constant, and  $\mathcal{L}_l$  is the luminance such that every radiative source term is linearized around  $T_{ref}$ .

$$\begin{cases} \rho_S C_S \partial_t T = \lambda_S \Delta T + S, & \mathbf{x} \in \Omega_S, \quad t > 0 & (A.3) \\ \rho_F C_F \partial_t T = -\nabla \cdot (-\lambda_F \nabla T + \rho_F C_F \mathbf{u} T) + S, & \mathbf{x} \in \Omega_F, \quad t > 0 & (A.4) \\ c\mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{L}_l(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega_F, \quad t > 0 & (A.5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_S \nabla T(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} = -\lambda_F \nabla T(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} + h_R (T(\mathbf{y}) - T_R(\mathbf{y})), & \mathbf{y} \in \partial\Omega_S \cap \partial\Omega_F, \quad t > 0 & (A.6) \\ T_R(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sigma T_{ref}^3} \int_{2\pi} |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}| \mathcal{L}_l(\mathbf{y}, \mathbf{u}) d\omega(\mathbf{u}), & \mathbf{y} \in \partial\Omega_S \cap \partial\Omega_F, \quad t > 0 & (A.7) \\ T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_S \cup \Omega_F & (A.8) \end{cases}$$

### A.2.1 Heat transfer and random process

The work of Feynmann and Kac in the 50's [Kac1951] plays a key role in establishing the links between parabolic partial differential equations such as (A.3), (A.4), and (A.5), and random processes. Indeed, Feynmann-Kac's formula settles that these equations can be rewritten as expectancies of stochastic processes, which can be simulated by the sampling of random paths spreading throughout the domain until they reach a boundary condition in time or space.

However, in the case of diffusive equations such as A.3 and A.4, the said stochastic process is based on the Brownian motion, which is not always straightforward to simulate. In those cases, established results on the densities of first passage in simple geometries may be used instead.

Radiative transfer will be discussed in section A.2.2 as it is compatible by nature with ray tracing.

### Random Walk on Sphere for conduction

The historic Random Walk on Sphere (RWS) method proposed by Brown and rigorously justified by Muler in [Muller1956] is one of such methods : it makes use of the position's density of first passage of a brownian motion starting from the center of a sphere for stationary state diffusion. This distribution, which is also described by the harmonicity property of the laplacian operator, can be written as equation A.9.

$$\Delta T = 0 \iff T(\mathbf{x}) = \int_{4\pi} \frac{1}{4\pi} d\omega(\mathbf{v}) T(\mathbf{x} + \delta \mathbf{v}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \delta \leq \max_{\delta} (\{\mathcal{S}(\delta) \cap \partial\Omega\} = \emptyset) \quad (A.9)$$

About a decade later, Haji-Sheikh [HajiSheikh+1966] introduced a transient walk on sphere based on equation A.10. This formulation describes the same walk on sphere, but paired with a sampling



of time, such that the paths goes back in time as it moves. When the sampled time would go further than the initial condition, a random position is sampled inside the sphere, at the initial time.

$$T(\mathbf{x}, t) = \int_0^1 a(\tau) d\tau \int_{4\pi} \frac{1}{4\pi} d\omega(\mathbf{v}) [\mathcal{H}(\tau > t) \cdot G_0(\mathbf{x}, t) + \mathcal{H}(\tau < t) \cdot G(\mathbf{x} + \delta \mathbf{v}, t - \tau)], \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad \delta \leq \max_{\delta}(\{\mathcal{S}(\delta) \cap \partial\Omega\} = \emptyset)$$

with the following definitions :

$$\begin{cases} a(\tau) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} - \frac{k^2 \pi^2 \alpha}{\delta^2} \exp\left(-\frac{k^2 \pi^2 \alpha \tau}{\delta^2}\right) \\ G_0(\mathbf{x}, t) = \int_{4\pi} \frac{1}{4\pi} d\omega(\mathbf{v}) \int_0^1 db(\delta_0) \left( T_0(\mathbf{x} + \delta_0 \mathbf{v}) + \frac{\delta_0^2}{6\lambda} S(\mathbf{x}, 0) \right) \\ b(\delta_0) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{k^2 \pi^2 \alpha \tau}{\delta^2}\right) \left( \frac{1}{k\pi} \sin(k\pi\delta_0) - \delta_0 \cos(k\pi\delta_0) \right) \\ G(\mathbf{x}, t) = T(\mathbf{x}, t) + \frac{\delta^2}{6\lambda} S(\mathbf{x}, t) \end{cases}$$

It turns out that the cumulative distribution function of  $a$  is known as the fourth Jacobi theta function :  $\vartheta_4\left(0, \exp\left(-\frac{\pi^2 \alpha \tau}{\delta^2}\right)\right)$

## Random Walk on Sphere for coupled advection and conduction

Recently, Sabelfeld [Sabelfeld2016] used the densities of first passage of a drifted brownian motion in a sphere to extend the RWS method to coupled advection and diffusion for cathodoluminescence and electron beam induced current imaging. At the stationary state, for a homogeneous velocity field, it was proven that the distribution of first passage positions in a sphere corresponds to the von Mises-Fisher distribution. Equation A.11 shows how this distribution applies to equation A.4 when the Z-axis coincides with the direction of the velocity. It can be noted that in the case of a zero velocity field, this expression leads to equation A.9, and to a Dirac function centered on  $\mathbf{u} = \mathbf{v}|\mathbf{u}|$  at the limit of an infinite norm velocity field.

$$T(\mathbf{x}, t) = \int_0^{4\pi} c(\mathbf{v}|\mathbf{u}) d\omega(\mathbf{v}) T(\mathbf{x} + \delta \mathbf{v}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \delta \leq \max_{\delta}(\{\mathcal{S}(\delta) \cap \partial\Omega\} = \emptyset) \quad (\text{A.11})$$

with

$$c(\mathbf{v}|\mathbf{u}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\frac{Pe}{2}}{\sinh\left(\frac{Pe}{2}\right)} \exp\left(\frac{Pe}{2} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|}\right)$$

where  $Pe = \frac{\delta|\mathbf{u}|}{\alpha}$ .

This formulation was quickly extended to transient drift-diffusion-reaction problems in [Sabelfeld2017], which leads to equation A.12 when applied to equation A.4. At the diffusive limit, this formulation corresponds to equation A.10, without taking into account the initial condition.

$$T(\mathbf{x}, t) = \int_0^{\infty} d(\tau) d\tau \int_{4\pi} c(\mathbf{v}|\mathbf{u}) d\omega(\mathbf{v}) T(\mathbf{x} + \delta \mathbf{v}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \delta \leq \max_{\delta}(\{\mathcal{S}(\delta) \cap \partial\Omega\} = \emptyset) \quad (\text{A.12})$$

where  $c(\mathbf{v}|\mathbf{u})$  is the same as in equation A.11 and

$$d(\tau) = 2 \frac{\sinh\left(\frac{Pe}{2}\right)}{\frac{Pe}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k^2 \pi^2 \alpha}{\delta^2} \exp\left(-\left(\frac{k^2 \pi^2 \alpha}{\delta^2} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{4\alpha}\right)\tau\right)$$

## A.2.2 A random walk compatible with ray tracing tools

Every formulation defined in section A.2.1 is based on the exact solution of equation A.3 or A.4. However, all of those rest on the knowledge of the integrated sphere's radius  $\delta$ , which must be inferior, or generally equal, to the minimum distance separating the position of interest from the boundary. In the case of a complex geometry, this data is, by definition, not known, or at least computation intensive. Moreover, a common technique used to allow a RWS method to land on a boundary consists in thickening the actual position of the surface. In a multi-domain, multi-scale geometry, such a trick raises many questions on the sizing of this thickening on the one hand, but also on the generation and management of this surface data.

The current section presents a formulation for conduction and coupled advection and diffusion which is also compatible with ray tracing tools.

### Finite differences for conduction

Regarding conduction, equation A.3 can be discretized over an orthonormal basis  $(\mathbf{O}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  by an infinitesimal length  $\delta$ , which leads to equation A.13 where  $\alpha = \frac{\lambda}{\rho C}$  and  $\mathbf{v}_i = (-1)^i \mathbf{e}_{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor}$  ( $\lfloor \cdot \rfloor$  being the floor function).

$$\partial_t T = -6 \frac{\alpha}{\delta^2} \left( T(\mathbf{x}, t) - \underbrace{\left[ \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 T(\mathbf{x} + \delta \mathbf{v}_i, t) + \frac{\delta^2}{6\lambda} S(\mathbf{x}, t) \right]}_{F(\mathbf{x}, T)} \right) \quad (\text{A.13})$$

Which can be solved analytically as equation A.14 introducing the Heaviside step function  $\mathcal{H}$  which is equal to 0 for negative arguments and 1 for positive ones.

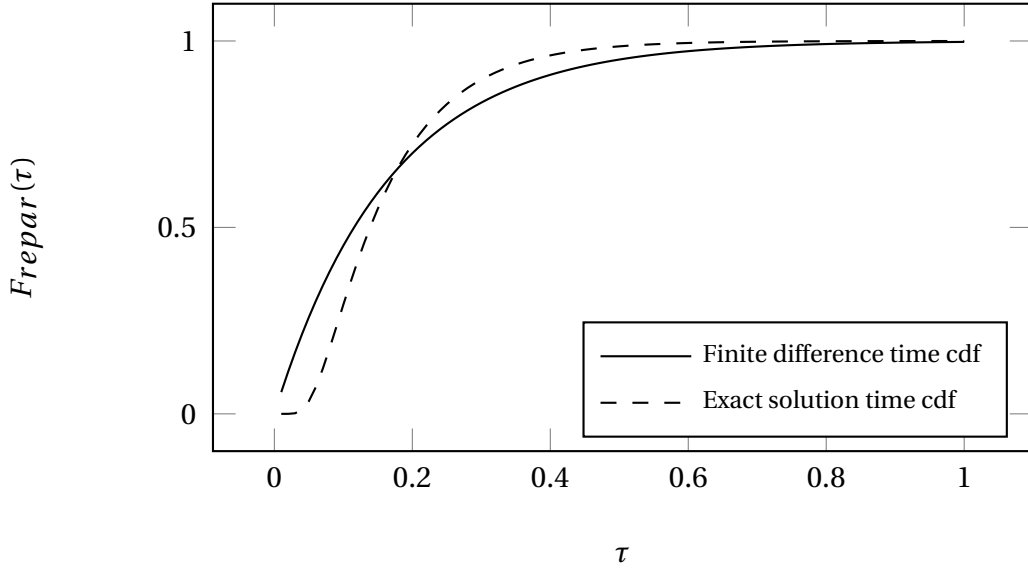
$$T(\mathbf{x}, t) = \int_0^{\infty} 6 \frac{\alpha}{\delta^2} e^{-6 \frac{\alpha}{\delta^2} \tau} d\tau [\mathcal{H}(\tau > t) \cdot T_0(\mathbf{x}) + \mathcal{H}(\tau < t) \cdot F(\mathbf{x}, t - \tau)] \quad (\text{A.14})$$

Given that the orthonormal basis  $(\mathbf{O}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  is randomly sampled at each step in the case of the finite difference scheme, both equation A.10 and equation A.14 give the same structure of weights :  $F(\mathbf{x}, t) = G(\mathbf{x}, t)$ . However, the sampling times of the random walks do not follow the same densities. Indeed, whilst both distribution of times have the same mean value of  $\frac{\delta^2}{6\alpha}$ , this finite difference scheme tends to underestimate short times and over-estimate large ones (see figure A.2). Given that both densities still share the same mean value, both formulations should lead to close results for a high enough number of steps (usually around 20).

### A Patankar's scheme derivative for coupled advection and conduction

Patankar's scheme [Patankar1980] is based on the analytical solution of equation A.4 in a 1D homogenous media. In a local orthonormal basis  $(\mathbf{O}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  chosen such that  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 |\mathbf{u}|$ , it leads to equation A.15 where  $\mathbf{v}_i$  is defined in the same way as in equation A.13.

$$\partial_t T = - \underbrace{\left( 4 \frac{\alpha}{\delta^2} + \frac{2\|\mathbf{v}\|}{\delta(e^{Pe} - 1)} + \frac{\|\mathbf{v}\|}{\delta} \right)}_{\frac{1}{\tau_p}} \left( T(\mathbf{x}, t) - \underbrace{\left[ \sum_{i=1}^6 p_i T(\mathbf{x} + \delta \mathbf{v}_i, t) + \frac{\delta^2}{6\lambda} S(\mathbf{x}, t) \right]}_{H(\mathbf{x}, T)} \right) \quad (\text{A.15})$$



**FIGURE A.2** – Comparison of the cumulative distribution functions of time in the finite difference and spherical mean formulations

with

$$\begin{cases} p_1 = \frac{Pe e^{Pe}}{Pe(e^{Pe} + 1) + 4(e^{Pe} - 1)} \\ p_2 = \frac{Pe}{Pe(e^{Pe} + 1) + 4(e^{Pe} - 1)} \\ p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{(e^{Pe} - 1)}{Pe(e^{Pe} + 1) + 4(e^{Pe} - 1)} \end{cases}$$

Equation A.15 is then solved analytically as equation A.16.

$$T(\mathbf{x}, t) = \int_0^\infty \frac{1}{\tau^p} e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau [\mathcal{H}(\tau > t) \cdot T_0(\mathbf{x}) + \mathcal{H}(\tau < t) \cdot H(\mathbf{x}, t - \tau)] \quad (\text{A.16})$$

### A.3 Une construction du nombre de pas moyen pour sortir d'une sphère

*Cette section ne constitue pas une démonstration du nombre moyen de pas pour sortir d'une sphère, qui est par ailleurs un élément bien établi dans la littérature. Cependant, elle propose de faire émerger ce résultat à partir des éléments de la section précédente A.2.*

Considérons un problème de diffusion pure dans une boule en n-dimensions de rayon  $r$ , à la surface de laquelle la condition limite est de type Dirichlet (température connue).

Pour évaluer la température au centre de cette boule par un Walk on Sphere, on peut faire le choix de choisir un pas  $\delta = r$ , c'est-à-dire que la marche aléatoire s'arrête toujours en un seul pas. Les formulations intégrales de la section A.2 établissent alors que le temps moyen de sortie est  $\tau_r = \frac{r^2}{2^n \alpha}$  où  $\alpha$  est la diffusivité thermique (ici, ce temps dépend de la dimension du problème, par opposition aux résultats précédents). Ce résultat établit qu'en moyenne, un mouvement brownien partant du centre d'une sphère de rayon  $r$  atteint sa surface en  $\tau_r$ .

Considérons maintenant que l'on souhaite résoudre ce même problème avec un WOS de pas  $\delta < r$ . Une fois de plus, on connaît le temps moyen que prend chacun de ces pas pour être réalisé :  $\tau_\delta = \frac{\delta^2}{2^{\frac{1}{d}}\alpha}$ . Il est alors trivial de déterminer le nombre moyen  $N_{\text{pas}}$  de pas que mettra cette marche pour atteindre la surface :

$$N_{\text{pas}} = \frac{\tau_\delta}{\tau_r} = \left(\frac{\delta}{r}\right)^2$$

Attention, ce résultat attendu n'a de sens que s'il est effectivement possible de réaliser ce WOS avec des sphères de pas  $\delta < r$ , ce qui n'est en fait praticable sans approximations qu'aux limites  $\delta \rightarrow 0$  et  $\delta \rightarrow r$ .

Ce résultat connu est plus généralement obtenu par la distribution de Rayleigh, ou encore à partir à partir de l'interprétation en fractales de Hausdorff du mouvement brownien pour  $\delta \rightarrow 0$ .



---

## ANNEXE B

---

# Écrit collectif : le Papier Thermique

Cette annexe est constituée d'extraits d'un écrit collectif de travail en l'état. Seuls les tableaux et algorithmes référencés dans le chapitre 3 sont ici présentés. Sa diffusion intégrale est prévue sous la forme d'un article. La compréhension de cette annexe et de l'écrit final peut être facilitée par une lecture préalable du chapitre 3.

---

# Transient radiative, conductive and convective heat-transfers in a single Monte Carlo algorithm

## 1. Introduction

### Notations

$\mathcal{D}_S$  : connex solid volume.

$\partial\mathcal{D}_S$  : boundary of  $\mathcal{D}_S$ .

$\mathcal{D}_F$  : connex fluid volume.

$\partial\mathcal{D}_F$  : boundary of  $\mathcal{D}_F$ .

$\mathcal{V}_F$  : volume of  $\mathcal{D}_F$ .

$\mathcal{S}_F$  : surface of  $\partial\mathcal{D}_F$ .

$(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  : repère cartésien, orthonormé.  $\vec{x}, \vec{x}_R, \vec{x}_G$  : vecteurs positions (défini à partir de  $O$ ) au sein de  $\mathcal{D}_S$  ou  $\mathcal{D}_F$ .

$\vec{y}, \vec{y}_G$  : vecteurs position à la frontière entre  $\mathcal{D}_S$  et  $\mathcal{D}_F$ .

$\vec{n} \equiv \vec{n}(\vec{y})$  : vecteur unitaire normal à la frontière en  $\vec{y}$ , orienté vers le solide.

$t, t_G$  : temps.

$t_I$  : valeur du temps à l'instant initial.

$\rho \equiv \rho(\vec{x}, t)$  : density (uniforme dans chaque domaine fluide,  $\equiv \rho(t)$ ).

$C \equiv C(\vec{x}, t)$  : specific heat capacity (uniforme dans chaque domaine fluide,  $\equiv C(t)$ ).

$\theta \equiv \theta(\vec{x}, t)$  : température (uniforme dans chaque domaine fluide,  $\equiv \theta(t)$ ).

$\theta_I \equiv \theta_I(\vec{x})$  : température à l'instant initial,  $\equiv \theta(\vec{x}, t_I)$  (uniforme dans chaque domaine fluide).

$\theta_F \equiv \theta_F(\vec{y}, t)$  : température du fluide (pour un point à la frontière).

$\theta_S \equiv \theta_S(\vec{y}, t)$  : température du solide (pour un point à la frontière).

$\theta_R \equiv \theta_R(\vec{x}, t)$  : radiative temperature.

$\zeta \equiv \zeta(\vec{x}, t)$  : volumetric radiative heat transfer coefficient (uniforme dans chaque domaine fluide,  $\equiv \zeta(t)$ ).

$h \equiv h(\vec{y}, t)$  : convective heat transfer coefficient d'échange (pour un point à la frontière).

$\phi \equiv \phi(t)$  : volumetric flow rate.

$\theta_N \equiv \theta_N(t)$  : temperature of the incoming fluid.

$G_S \equiv G_S(\vec{x}, t; \vec{x}_G, t_G)$  : fonction de Green du solide en  $\vec{x} \in \mathcal{D}_S$  à  $t$ , pour une source en  $\vec{x}_G \in \mathcal{D}_S$  à  $t_G$ .

$G_F \equiv G_F(t; t_G)$  : fonction de Green du fluide à  $t$ , pour une source à  $t_G$ .

$G_{S,stat} \equiv G_{S,stat}(\vec{x}; \vec{x}_G)$  : fonction de Green du solide en régime stationnaire.

## 2. A transient coupled heat-transfer example

We consider a system constituted of solid and fluid connex domains, noted  $\mathcal{D}_S$  and  $\mathcal{D}_F$  respectively, of boundary  $\partial\mathcal{D}_S$  and  $\partial\mathcal{D}_F$  (see Fig. 1). If the system includes several such domains, we index them  $\mathcal{D}_{S,1}, \mathcal{D}_{S,2}, \mathcal{D}_{S,3} \dots$  and  $\mathcal{D}_{F,1}, \mathcal{D}_{F,2}, \mathcal{D}_{F,3} \dots$  but these indexes will be omitted in the formal expressions, assuming that they are known without ambiguity. The heat transfer modes are conduction/radiation in the solid, and convection/radiation in the fluid. Both the

solid and the fluid are semi-transparent. In the solid, the density  $\rho$ , specific heat capacity  $C$ , conductivity  $\lambda$  and absorption coefficient  $k_a$  (as well as all other radiative properties) can be heterogeneous but are independent of temperature. The fluid is assumed perfectly mixed in each connex domain:  $\rho$ ,  $C$  and  $k_a$  are therefore homogeneous. They are also independent of temperature. Convective heat transfer is resumed to

- a heat-exchange coefficient  $h$  representing the boundary layer at each location along the solid boundary, and
- an incoming/outgoing flow of volumetric flow-rate  $\phi$ .

According to this model, at any location  $\vec{y}$  at the interface between the solid and the fluid, the temperature is discontinuous. We note  $\theta_S(\vec{y}, t)$  the solid-temperature and  $\theta_F(\vec{y}, t)$  the fluid-temperature. The convective parameters  $\phi$  and  $h$  are independent of the fluid and solid temperatures. The temperature  $\theta_N(t)$  of the incoming flow is known at each time  $t$ . Radiation is stationary and is linearised around a reference temperature  $\theta_{ref}$ , defining a volumetric radiative heat transfer coefficient  $\zeta$ . Under the grey medium assumption  $\zeta = 16k_a\sigma\theta_{ref}^3$ , where  $\sigma$  is the Stefan-Boltzmann constant. Its general expression is provided in Appendix A. The temperature at any location  $\vec{x}$  and time  $t$  is noted  $\theta(\vec{x}, t)$ . At an initial time  $t_I$  this temperature field is known and is noted  $\theta_I$ , meaning that  $\theta(\vec{x}, t_I) = \theta_I(\vec{x})$ . The resulting heat-transfer model is linear in temperature:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{x} \in \mathcal{D}_S, t \in [t_I, +\infty[ : \rho C \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (-\lambda \vec{\nabla} \theta) + \zeta(\theta_R - \theta) \\ \vec{x} \in \mathcal{D}_S, t = t_I : \theta = \theta_I \\ \vec{x} \equiv \vec{y} \in \partial \mathcal{D}_S, t \in [t_I, +\infty[ : -\lambda \vec{\nabla} \theta \cdot \vec{n} = h(\theta_F - \theta) \end{array} \right\} \quad \text{solid} \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{x} \in \mathcal{D}_F, t \in [t_I, +\infty[ : \rho C \mathcal{V}_F \frac{\partial \theta}{\partial t} = \rho C \phi (\theta_N - \theta) + \zeta \int_{\mathcal{D}_F} (\theta_R(\vec{x}_R, t) - \theta) d\vec{x}_R \\ \quad + \int_{\partial \mathcal{D}_S} h(\vec{y}_C, t) (\theta_S(\vec{y}_C, t) - \theta) d\vec{y}_C \\ \vec{x} \in \mathcal{D}_F, t = t_I : \theta = \theta_I \end{array} \right\} \quad \text{fluid} \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{x} \in \mathcal{D}_S \cup \mathcal{D}_F, t \in [t_I, +\infty[ : \theta_R = \int_{\mathcal{D}_\Gamma} p_\Gamma(\gamma) d\gamma \theta(\vec{x}_\gamma, t) \end{array} \right\} \quad \text{solid or fluid} \quad (3)$$

where  $\vec{n}$  is the unit normal at the solid-fluid interface, heading toward the solid. The radiative temperature  $\theta_R(\vec{x}, t)$  is defined using the space  $\mathcal{D}_\Gamma$  of all radiative-paths  $\gamma$  corresponding to photons emitted at location  $\vec{x}$  and time  $t$ , until their absorption at  $\vec{x}_\gamma$ . The probability density  $p_\Gamma(\gamma)$  of path  $\gamma$  reflects the statistical pictures associated to the radiative transfer equation and  $\theta_R$  is simply the average value of the temperature at absorption locations (see Appendix A).

As the problem is linear, its general solution can be expressed using an integral formulation involving Green functions. For the solid, the Green function  $G_S$  from  $(\vec{x}_G, t_G)$  to  $(\vec{x}, t)$  is defined the following way:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{x} \in \mathcal{D}_S, t \in [t_G, +\infty[ : \rho C \frac{\partial G_S}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (-\lambda \vec{\nabla} G_S) - \zeta G_S + \delta_X(\vec{x} - \vec{x}_G) \delta_T(t - t_G) \\ \vec{x} \equiv \vec{y} \in \partial \mathcal{D}_S, t \in [t_G, +\infty[ : -\lambda \vec{\nabla} G_S \cdot \vec{n} = -h G_S \\ \vec{x} \in \mathcal{D}_S, t \in ] -\infty, t_G[ : G_S = 0 \end{array} \right\} \quad (4)$$



---

Similarly for the fluid, the Green function  $G_F$  from  $(\vec{x}_G, t_G)$  to  $(\vec{x}, t)$  is defined as follows. Only the temporal propagation is addressed because the fluid is homogeneous:

$$\left. \begin{aligned} t \in [t_G, +\infty[ : \quad \rho C \mathcal{V}_F \frac{\partial G_F}{\partial t} &= - \left( \rho C \phi + \zeta \mathcal{V}_F + \int_{\partial \mathcal{D}_V} h(\vec{y}, t) d\vec{y} \right) G_F + \delta_T(t - t_G) \\ t \in ] - \infty, t_G[ : \quad &G_F = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

These Green functions allow to write the exact solution of our transient coupled heat transfer problem under an integral form. At time  $t$ , for a location  $\vec{x}$  within the solid,

$$\begin{aligned} \vec{x} \in \mathcal{D}_S, t \in [t_I, +\infty[ : \quad \theta(\vec{x}, t) &= \int_{\mathcal{D}_S} d\vec{x}_I G_S(\vec{x}, t; \vec{x}_I, t_I) \rho(\vec{x}_I, t_I) C(\vec{x}_I, t_I) \theta_I(\vec{x}_I) \\ &+ \int_{\mathcal{D}_S} d\vec{x}_R \int_{t_I}^t dt_R G_S(\vec{x}, t; \vec{x}_R, t_R) \zeta(\vec{x}_R, t_R) \theta_R(\vec{x}_R, t_R) \\ &+ \int_{\partial \mathcal{D}_S} d\vec{y}_C \int_{t_I}^t dt_C G_S(\vec{x}, t; \vec{y}_C, t_C) h(\vec{y}_C, t_C) \theta_F(\vec{y}_C, t_C) \end{aligned} \quad (6)$$

At time  $t$ , within the fluid (the solution is the same at all locations),

$$\begin{aligned} \vec{x} \in \mathcal{D}_F, t \in [t_I, +\infty[ : \quad \theta(\vec{x}, t) &= G_F(t; t_I) \rho(t_I) C(t_I) \mathcal{V}_F \theta_I(\vec{x}) \\ &+ \int_{t_I}^t dt_R G_F(t; t_R) \zeta(t_R) \int_{\mathcal{D}_F} \theta_R(\vec{x}_R, t_R) d\vec{x}_R \\ &+ \int_{t_I}^t dt_C G_F(t; t_C) \int_{\partial \mathcal{D}_F} h(\vec{y}_C, t_C) \theta_S(\vec{y}_C, t_C) d\vec{y}_C \\ &+ \int_{t_I}^t dt_N G_F(t; t_N) \rho(t_N) C(t_N) \phi(t_N) \theta_N(t_N) \end{aligned} \quad (7)$$

where  $\mathcal{V}_F$  is the volume of  $\mathcal{D}_F$ . These two equations, together with Eq. 3, provide a vector Fredholm expression for  $\theta$  within the solid,  $\theta$  within the fluid and  $\theta_R$  at all locations:

- the solid temperature of Eq. 6 involves the fluid temperature  $\theta_F$  at  $\vec{y}_C$  and the radiative temperature  $\theta_R$  at  $\vec{x}_R$ ;
- the fluid temperature of Eq. 7 involves the solid temperature  $\theta_S$  at  $\vec{y}_C$  and the radiative temperature  $\theta_R$  at  $\vec{x}_R$ ;
- the radiative temperature of Eq. 3 is expressed using the temperature at the absorption location  $\vec{x}_\gamma$ , which may lie anywhere in the system (all parts are semi-transparent), and involves therefore both the solid and fluid temperatures.

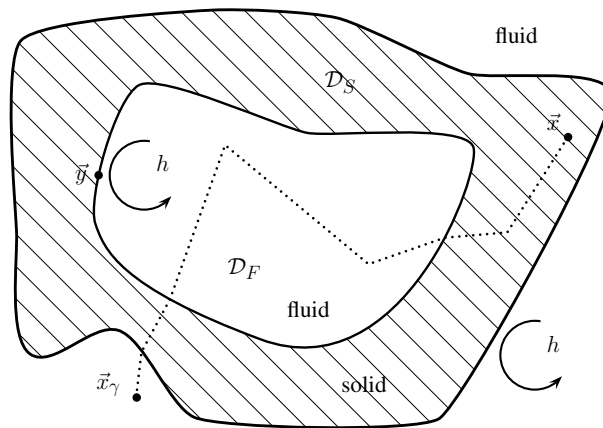


Figure 1: Fluid and solid domains.

---

### 3. From the Green's functions of separate modes to a combined heat-transfer Monte Carlo algorithm

In this section, we only introduce new notations for the very same integral formulations as those of the preceding section. These notations will allow a statistical interpretation: at a given location  $\vec{x}$  and time  $t$ , the temperature  $\theta(\vec{x}, t)$  of the solid or the fluid, i.e. the exact solution of the set of coupled equations 1,2,3, will be seen as the expectation of a random variable  $\Theta(\vec{x}, t)$ ,

$$\theta(\vec{x}, t) = \mathcal{E} [\Theta(\vec{x}, t)] \quad (8)$$

this random variable being recursively defined using random paths, backward in time, across the system. The Monte Carlo algorithm then evaluates  $\theta(\vec{x}, t)$  as the average of a large number of  $\Theta$  samples. We successively give the formal definition of each new quantity, associate it a statistical picture, and give the resulting Monte Carlo algorithm, first without and then with recursivity.

#### 3.1. Radiation

Statistical translation of radiative heat transfer is very common. Equation 3 was already interpreted in statistical terms with radiative paths of probability density  $p_\Gamma$  and we only introduce a corresponding random variable  $\vec{X}_\Gamma(\vec{x}, t)$  that represents the absorption location for a radiative path  $\Gamma$  initiated at  $(\vec{x}, t)$ . The radiative temperature is then the expectation of the temperature at the random location  $\vec{X}_\Gamma$ :

$$\theta_R(\vec{x}, t) = \mathcal{E} \left[ \theta \left( \vec{X}_\Gamma(\vec{x}, t), t \right) \right] \quad (9)$$

Figure 1 gives the corresponding Monte Carlo algorithm (for radiative transfer alone): it evaluates  $\theta_R$  using  $N$  sampled radiative-paths.

#### 3.2. Statistical notations for conduction and convection

Let us note

$$\mathcal{P}_I = \frac{\mathcal{G}_I}{\mathcal{S}} \quad \text{with} \quad \mathcal{G}_I \equiv \begin{cases} \mathcal{G}_I(\vec{x}, t) = \int_{\mathcal{D}_S} d\vec{x}_I G_S(\vec{x}, t; \vec{x}_I, t_I) \rho(\vec{x}_I, t_I) C(\vec{x}_I, t_I) & \text{for solid} \\ \mathcal{G}_I(t) = G_F(t; t_I) \rho(t_I) C(t_I) \mathcal{V}_F & \text{for fluid} \end{cases} \quad (10)$$

$$\mathcal{P}_R = \frac{\mathcal{G}_R}{\mathcal{S}} \quad \text{with} \quad \mathcal{G}_R \equiv \begin{cases} \mathcal{G}_R(\vec{x}, t) = \int_{\mathcal{D}_S} d\vec{x}_R \int_{t_I}^t dt_R G_S(\vec{x}, t; \vec{x}_R, t_R) \zeta(\vec{x}_R, t_R) & \text{for solid} \\ \mathcal{G}_R(t) = \int_{t_I}^t dt_R G_F(t; t_R) \zeta(t_R) \mathcal{V}_F & \text{for fluid} \end{cases} \quad (11)$$

$$\mathcal{P}_C = \frac{\mathcal{G}_C}{\mathcal{S}} \quad \text{with} \quad \mathcal{G}_C \equiv \begin{cases} \mathcal{G}_C(\vec{x}, t) = \int_{\partial \mathcal{D}_S} d\vec{y}_C \int_{t_I}^t dt_C G_S(\vec{x}, t; \vec{y}_C, t_C) h(\vec{y}_C, t_C) & \text{for solid} \\ \mathcal{G}_C(t) = \int_{t_I}^t dt_C G_F(t; t_C) \int_{\partial \mathcal{D}_F} h(\vec{y}_C, t_C) d\vec{y}_C & \text{for fluid} \end{cases} \quad (12)$$

$$\mathcal{P}_N = \frac{\mathcal{G}_N}{\mathcal{S}} \quad \text{with} \quad \mathcal{G}_N \equiv \begin{cases} \mathcal{G}_N(\vec{x}, t) = 0 & \text{for solid} \\ \mathcal{G}_N(t) = \int_{t_I}^t dt_N G_F(t; t_N) \rho(t_N) C(t_N) \phi(t_N) & \text{for fluid} \end{cases} \quad (13)$$

where  $\mathcal{S} = \mathcal{G}_I + \mathcal{G}_R + \mathcal{G}_C + \mathcal{G}_N$ . These definitions will be interpreted as probabilities that the next path, backward in time within the solid or the fluid, ends

- at an initial condition for  $\mathcal{P}_I$ ,
- at a radiative source for  $\mathcal{P}_R$ ,
- at a boundary layer for  $\mathcal{P}_C$ ,
- at an incoming flow for  $\mathcal{P}_N$ .

We associate to this set of probabilities a random vector  $(A_I, A_R, A_C, A_N)$  that takes the values  $(1, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 0)$  or  $(0, 0, 0, 1)$  with probabilities  $\mathcal{P}_I$ ,  $\mathcal{P}_R$ ,  $\mathcal{P}_C$  and  $\mathcal{P}_N$  respectively (an extended Bernoulli test). When randomly sampling a path, this vector will therefore hold the information about the physics that ended the path.

The next definitions concern the paths themselves :

$$p_I \equiv \begin{cases} p_I(\vec{x}_I|\vec{x}, t) = \frac{1}{\mathcal{G}_I(t)} [G_S(\vec{x}, t; \vec{x}_I, t_I)\rho(\vec{x}_I, t_I)C(\vec{x}_I, t_I)] & \text{for solid} \\ & \text{unused for fluid} \end{cases} \quad (14)$$

$$p_R \equiv \begin{cases} p_R(\vec{x}_R, t_R|\vec{x}, t) = \frac{1}{\mathcal{G}_R(t)} [G_S(\vec{x}, t; \vec{x}_R, t_R)\zeta(\vec{x}_R, t_R)] & \text{for solid} \\ p_R(\vec{x}_R, t_R|\vec{x}, t) = \frac{1}{\mathcal{G}_R(t)} [G_F(t; t_R)\zeta(t_R)] & \text{for fluid} \end{cases} \quad (15)$$

$$p_C \equiv \begin{cases} p_C(\vec{y}_C, t_C|\vec{x}, t) = \frac{1}{\mathcal{G}_C(t)} [G_S(\vec{x}, t; \vec{y}_C, t_C)h(\vec{y}_C, t_C)] & \text{for solid} \\ p_C(\vec{y}_C, t_C|\vec{x}, t) = \frac{1}{\mathcal{G}_C(t)} [G_F(t; t_C)h(\vec{y}_C, t_C)] & \text{for fluid} \end{cases} \quad (16)$$

$$p_N \equiv \begin{cases} & \text{unused for solid} \\ p_N(t_N|\vec{x}, t) = \frac{1}{\mathcal{G}_N(t)} [G_F(t; t_N)\rho(t_N)C(t_N)\phi(t_N)] & \text{for fluid} \end{cases} \quad (17)$$

These are probability-density functions and they all concern a path starting at  $(\vec{x}, t)$  :

- Knowing that the path ends at the initial condition,  $p_I$  gives the distribution of the location  $\vec{x}_I$  at which the initial condition is reached. The associated random variable, that depends on  $\vec{x}$  and  $t$ , is noted  $\vec{X}_I(\vec{x}, t)$ . As the fluid is homogeneous,  $\vec{X}_I$  is not required for the fluid, but in order to unify the notations we still define it, imposing arbitrarily  $\vec{X}_I = \vec{x}$  (i.e.  $p_I(\vec{x}_I|\vec{x}, t) = \delta_X(\vec{x}_I - \vec{x})$ ).
- Knowing that the path ends at a radiative source,  $p_R$  gives the distribution of the location  $\vec{x}_R$  and time  $t_R$  at which the radiative source is evaluated. The associated random variables, that depend on  $\vec{x}$  and  $t$ , are noted  $\vec{X}_R(\vec{x}, t)$  and  $T_R(\vec{x}, t)$ . Although the fluid is homogeneous,  $\vec{X}_R$  is still required in the fluid case: the incoming radiation is indeed not homogeneous (see the term  $\int_{\mathcal{D}_F} \theta_R(\vec{x}_R, t_R)d\vec{x}_R$  in Eq. 7).
- Knowing that the path ends at a boundary-layer,  $p_C$  gives the distribution of the location  $\vec{y}_C$  (at the solid/fluid interface) and time  $t_C$  of the path-end. The associated random variables, that depend on  $\vec{x}$  and  $t$ , are noted  $\vec{Y}_C(\vec{x}, t)$  and  $T_C(\vec{x}, t)$ . Because  $\vec{Y}_C$  is exactly at the interface, we need to choose whether it belongs to the solid or the fluid. We choose the solid, which means that  $\theta(\vec{Y}_C, T_C) = \theta_S(\vec{Y}_C, T_C)$ . We also define an associated random variable  $\vec{Z}_C$ , with the same coordinates as  $\vec{Y}_C$ , but belonging to the fluid. We therefore have  $\theta(\vec{Z}_C, T_C) = \theta_F(\vec{Z}_C, T_C)$  (see Figure 2). Although the model assumes that the fluid is homogeneous, it is still required to deal with the  $\vec{Z}_C$  statistics: the exchange coefficient  $h$  and the surface temperature  $\theta_S$  may indeed not be identical at all locations at the interface (see the term  $\int_{\partial\mathcal{D}_F} h(\vec{y}_C, t_C)\theta_S(\vec{y}_C, t_C)d\vec{y}_C$  in Eq. 7).

- Knowing that the path ends at an incoming flow,  $p_N$  gives the distribution of the time  $t_N$  at which this incoming flow is reached. The associated random variable, that depends on  $\vec{x}$  and  $t$ , is noted  $T_N(\vec{x}, t)$ . It is not required for the solid.

There is one subtlety associated to the solid/fluid interface, and this is the reason why we introduced two associated random variables  $\vec{Y}_C$  and  $\vec{Z}_C$ , one belonging to the solid, the other to the fluid. When a path reaches a boundary-layer, it is either coming from the solid or from the fluid. If it comes from the solid (a conductive-path), the last step through the boundary-layer makes it end within the fluid :  $\vec{Z}_C$  is retained. If the path comes from the fluid (a convective-path), the last step through the boundary-layer makes it end at the solid boundary :  $\vec{Y}_C$  is retained. We resume this alternative using the following random variable

$$\vec{X}_C : \begin{cases} \vec{X}_C(\vec{x}, t) = \vec{Z}_C(\vec{x}, t) & \text{for a conductive-path reaching the boundary layer from the solid} \\ \vec{X}_C(\vec{x}, t) = \vec{Y}_C(\vec{x}, t) & \text{for a convective-path reaching the boundary layer from the fluid} \end{cases} \quad (18)$$

### 3.3. The Monte Carlo algorithm without recursivity for conduction and convection

Altogether, these notations allow us to rewrite Eqs. 6 and 7.

$$\begin{aligned} \vec{x} \in \mathcal{D}_S, t \in [t_I, +\infty[ : \theta(\vec{x}, t) = & \mathcal{P}_I(\vec{x}, t) \int_{\mathcal{D}_S} d\vec{x}_I p_I(\vec{x}_I|\vec{x}, t) \theta_I(\vec{x}_I) \\ & + \mathcal{P}_R(\vec{x}, t) \int_{\mathcal{D}_S} d\vec{x}_R \int_{t_I}^t dt_R p_R(\vec{x}_R, t_R|\vec{x}, t) \theta_R(\vec{x}_R, t_R) \\ & + \mathcal{P}_C(\vec{x}, t) \int_{\partial\mathcal{D}_S} d\vec{z}_C \int_{t_I}^t dt_C p_C(\vec{z}_C, t_C|\vec{x}, t) \theta_F(\vec{z}_C, t_C) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \vec{x} \in \mathcal{D}_F, t \in [t_I, +\infty[ : \theta(\vec{x}, t) = & \mathcal{P}_I(t) \theta_I(\vec{x}) \\ & + \mathcal{P}_R(t) \int_{\mathcal{D}_F} d\vec{x}_R \int_{t_I}^t dt_R p_R(\vec{x}_R, t_R|\vec{x}, t) \theta_R(\vec{x}_R, t_R) \\ & + \mathcal{P}_C(t) \int_{\partial\mathcal{D}_F} d\vec{y}_C \int_{t_I}^t dt_C p_C(\vec{y}_C, t_C|\vec{x}, t) \theta_S(\vec{y}_C, t_C) \\ & + \mathcal{P}_N(t) \int_{t_I}^t dt_N p_N(t_N|\vec{x}, t) \theta_N(t_N) \end{aligned} \quad (20)$$

It can be easily recognized that these two integrals are expectations of random temperatures : discrete sums ponderated by probabilities  $\mathcal{P}_*$  and integrals ponderated by probability density functions  $p_*$ . Using the above defined random variables  $A_I, A_R, A_C, A_N$  for  $\mathcal{P}_*$ , and  $\vec{X}_I, \vec{X}_R, T_R, \vec{Y}_C, T_C, T_N$  for  $p_*$ , they translate into

$$\theta = \mathcal{E} \left[ A_I \theta_I(\vec{X}_I) + A_R \theta_R(\vec{X}_R, T_R) + A_C \theta_F(\vec{Z}_C, T_C) \right] \text{ for solid} \quad (21)$$

$$\theta = \mathcal{E} \left[ A_I \theta_I(\vec{X}_I) + A_R \theta_R(\vec{X}_R, T_R) + A_C \theta_S(\vec{Y}_C, T_C) + A_N \theta_N(T_N) \right] \text{ for fluid} \quad (22)$$

Figures 2 and 3 provide the corresponding Monte Carlo algorithms. They use  $N$  sampled paths, each starting at location  $\vec{x}$  and time  $t$ , and their outputs are

- $m$  : an estimator of  $\theta(\vec{x}, t)$ ,
- $s$  : an estimator of the uncertainty.

```

sum = 0;
sumOfSquares = 0;
foreach radiative-path i in 1:N do
    Sample a radiative-path  $\gamma$  as if a photon was emitted by the volume at  $(\vec{x}, t)$ ;
    Get the location  $\vec{x}_\gamma$  at which the photon is absorbed (the end of the radiative-path);
     $w = \theta(\vec{x}_\gamma, t)$ ;
    sum = sum + w;
    sumOfSquares = sumOfSquares + w2;
end
m =  $\frac{sum}{N}$ ;
s =  $\frac{1}{\sqrt{N}} \left( \frac{sumOfSquares}{N} - m^2 \right)$ ;

```

**Algorithm 1:** The non-recursive algorithm evaluating the radiative temperature at location  $\vec{x}$  and time  $t$ .  $N$  radiative-paths  $\gamma$  are sampled, each starting at location  $\vec{x}$  and time  $t$ . The estimator  $m$  is the average of the solid or fluid temperatures  $\theta(\vec{x}_\gamma, t)$  at  $\vec{x}_\gamma$  (the end of path  $\gamma$ ) and  $s$  is its statistical uncertainty.

```

sum = 0;
sumOfSquares = 0;
foreach conductive-path i in 1:N do
    Sample the conductive-path through the solid according to  $G_S$ ;
    case  $a_I = 1$  (the conductive-path ends at an intial condition) do
        Get the location  $\vec{x}_I$  of the path-end;
         $w = \theta_I(\vec{x}_I)$ ;
    end
    case  $a_R = 1$  (the conductive-path ends at a radiative source) do
        Get the location  $\vec{x}_R$  of the path-end;
        Get the time  $t_R$  of the path-end;
         $w = \theta_R(\vec{x}_R, t_R)$ ;
    end
    case  $a_C = 1$  (the conductive-path ends at a boundary-layer) do
        Get the location  $\vec{z}_C$  of the path-end;
        Get the time  $t_C$  of the path-end;
         $w = \theta_F(\vec{z}_C, t_C)$ ;
    end
    sum = sum + w;
    sumOfSquares = sumOfSquares + w2;
end
m =  $\frac{sum}{N}$ ;
s =  $\frac{1}{\sqrt{N}} \left( \frac{sumOfSquares}{N} - m^2 \right)$ ;

```

**Algorithm 2:** The non-recursive algorithm evaluating the temperature at location  $\vec{x}$  and time  $t$  within the solid.  $N$  conductive-paths are sampled, starting at  $\vec{x}$ , backward in time from  $t$ . The estimator  $m$  is the average of temperature values found at the end of the path:  $\theta_I$  when nothing occurs before reaching the initial condition,  $\theta_R$  if the conductive path is interrupted in order to evaluate the radiative source, and  $\theta_F$  if the conductive path ends at a boundary layer.  $s$  is the statistical uncertainty associated to  $m$ .

---

### 3.4. The full recursive algorithm

At this stage, we have obtained two Monte Carlo algorithms : one for the solid, one for the fluid. If we include the Monte Carlo algorithm associated to radiative transfer (see Section 2 and Appendix A), altogether this makes three Monte Carlo algorithms. They each evaluate local quantities, but they are *separate* : the coupling has not yet been adressed. And indeed  $\theta_I$  and  $\theta_N$  are known quantities, but

- the algorithm for the solid requires the knowledge, at all times, of  $\theta_R$  at all locations within the solid and  $\theta_F$  at all locations at the interface (i.e. the temperature  $\theta$  of the flow along the solid),
- the algorithm for the fluid requires the knowledge, at all times, of  $\theta_R$  at all locations within the fluid and  $\theta_S$  at all locations at the interface (i.e. the temperature  $\theta$  at the surface of the solid),
- the algorithm for radiative transfer requires the knowledge of  $\theta$  at all times and all locations (within the solid and within the fluid),

and all these quantities are unknown. So we need to justify theoretically how the algorithm for the solid may call the algorithm for the fluid when  $\theta_F$  is needed, how the algorithm for the fluid may call the algorithm for the solid when  $\theta_S$  is needed, how both may call the radiative transfer algorithm when  $\theta_R$  is needed, and finally how the radiative transfer algorithm may call one of the two others when  $\theta$  is needed. The overall resulting algorithm will then be fully recursive and provide the exact solution of our initial coupled heat-transfer problem.

This final step is quite trivial. We first make use of the  $A_N$  definition that imposes  $A_N = 0$  for the solid: this allows the very same formulation to be valid for both the solid and the fluid, despite of the fact that the incoming flow does not exist for the solid. We also make use of the random variable  $\vec{X}_C$  defined in Sec. 3.2:  $\vec{X}_C \equiv \vec{Y}_C \in \partial\mathcal{D}_F$  when reaching the boundary layer from the fluid,  $\vec{X}_C \equiv \vec{Z}_C \in \mathcal{D}_F$  when reaching the boundary layer from the solid. This allows us to replace both  $\theta_S(\vec{Y}_C, T_C)$  and  $\theta_F(\vec{Y}_C, T_C)$  by a unique expression:  $\theta(\vec{X}_C, T_C)$ . Finally, we replace  $\theta_R$  with the expectation of Eq. 8. Altogether, Eq. 21, Eq. 22 and Eq. 8 can be gathered into a single equation,

$$\theta = \mathcal{E} \left[ A_I \theta_I(\vec{X}_I) + A_R \mathcal{E} \left[ \theta \left( \vec{X}_\Gamma(\vec{X}_R, T_R), T_R \right) \right] + A_C \theta \left( \vec{X}_C, T_C \right) + A_N \theta_N(T_N) \right] \quad (23)$$

and using the law of total expectation (the expectation of an expectation is an expectation) we get

$$\theta = \mathcal{E} \left[ A_I \theta_I(\vec{X}_I) + A_R \theta \left( \vec{X}_\Gamma(\vec{X}_R, T_R), T_R \right) + A_C \theta \left( \vec{X}_C, T_C \right) + A_N \theta_N(T_N) \right] \quad (24)$$

The coupling is here translated into the fact that  $\theta$  (the solution) appears within the expectation. It is therefore possible to replace these appearances by the expectation itself, reporting Eq. 24 into Eq. 24 in a recursive manner. Then, using again the law of total expectation we can define rigorously the random variable  $\Theta$  that was our initial objective:

$$\begin{aligned} \theta &= E[\Theta] \\ \Theta &= I \theta_I(\vec{X}_I) + R \Theta \left( \vec{X}_\Gamma(\vec{X}_R, T_R), T_R \right) + C \Theta \left( \vec{X}_C, T_C \right) + V \theta_V(T_V) \end{aligned} \quad (25)$$

At this stage, it is usefull to rewrite all the dependencies in order to recall that the corresponding

algorithm evaluates the temperature at a given location  $\vec{x}$  and a given time  $t$  :

$$\begin{aligned}
 \theta(\vec{x}, t) &= E[\Theta(\vec{x}, t)] \\
 \Theta(\vec{x}, t) &= I^{\vec{x}, t} \theta_I(\vec{X}_I(\vec{x}, t)) \\
 &\quad + R^{\vec{x}, t} \Theta\left(\vec{X}_\Gamma(\vec{X}_R(\vec{x}, t), T_R(\vec{x}, t)), T_R(\vec{x}, t)\right) \\
 &\quad + C^{\vec{x}, t} \Theta\left(\vec{X}_C(\vec{x}, t), T_C(\vec{x}, t)\right) \\
 &\quad + V^{\vec{x}, t} \theta_V(T_V(\vec{x}, t))
 \end{aligned} \tag{26}$$

Equations 25 or 26 have been established rigorously, starting from our initial heat transfer problem.  $\theta(\vec{x}, t) = \mathcal{E}[\Theta(\vec{x}, t)]$  is therefore the exact solution of this initial problem. When translating Eq. 25 into a Monte Carlo algorithm, i.e. replacing the expectation by the average of  $N$  samples, we are therefore sure that the algorithm is unbiased: if it converges, this will be toward the exact solution. We detail this algorithmic translation in Fig. 4, but with some practice the algorithm is easily readable in the equation itself:

- The expression for the random variable  $\Theta$  includes  $\Theta$  itself. This random variable is therefore defined in a recursive manner. This recursivity reflects the fact that the coupling is made: when the Monte Carlo algorithm requires an unknown temperature, it simply calls itself.
- As in the preceding uncoupled examples,  $A_I$ ,  $A_R$ ,  $A_C$  and  $A_N$  are tests depending on the type of ending for conductive-paths within the solid or convective-paths within the fluid.
- In each case, the capital letters  $X$  and  $T$  are respectively random positions and random times associated to a conductive-path, a convective-path or a radiative-path. Their sampling consists in sampling one of these paths and retaining the position and time of the end of the path.
- $\vec{X}_\Gamma$  has a specific status: it is a function of the random variables  $\vec{X}_R$  and  $T_R$ . This means that when a radiative-path is sampled, this is always after the sampling of either a conductive-path or a convective-path that ended at location  $\vec{X}_R$  and time  $T_R$ .
- If  $\vec{x}$  is within the solid, the first step in the Monte Carlo Algorithm consists in sampling a conductive-path. If  $\vec{x}$  is within the fluid, this first step is a convective-path. In both cases, at the end of this path either the temperature is known and the algorithm stops, or the temperature is unknown. In this last case, a new path is sampled to adress this unknown temperature:
  - if the unknown temperature is a solid temperature, the new path is a conductive-path within the solid,
  - if the unknown temperature is a fluid temperature, the new path is a convective-path within the fluid,
  - if the unknown temperature is a radiative temperature, the new path is a radiative-path that may travel through both the solid and the fluid,
- The process is continued until one of the successively sampled paths ends at a location and time for which the temperature is known.
- This succession of sampled conductive, convective or radiative-paths will be named a recursive-path.

Up to now, boundary conditions were mentionned neither in the problem description of Sec. 2 nor in the proposed algorithms. In Fig. 4, the algorithm includes the possibility of handling fixed-temperature boundary-conditions via the conditions « if  $\theta(\vec{x}_\gamma, t_R)$  is known » and « if  $\theta(\vec{x}_C, t_C)$  is known » leading to the end of the recursion. This simply means that the recursive-path is stopped when it reaches a boundary at which the solid or fluid temperature is known. The question of handling other types of boundary conditions will be discussed in Sec. 10.



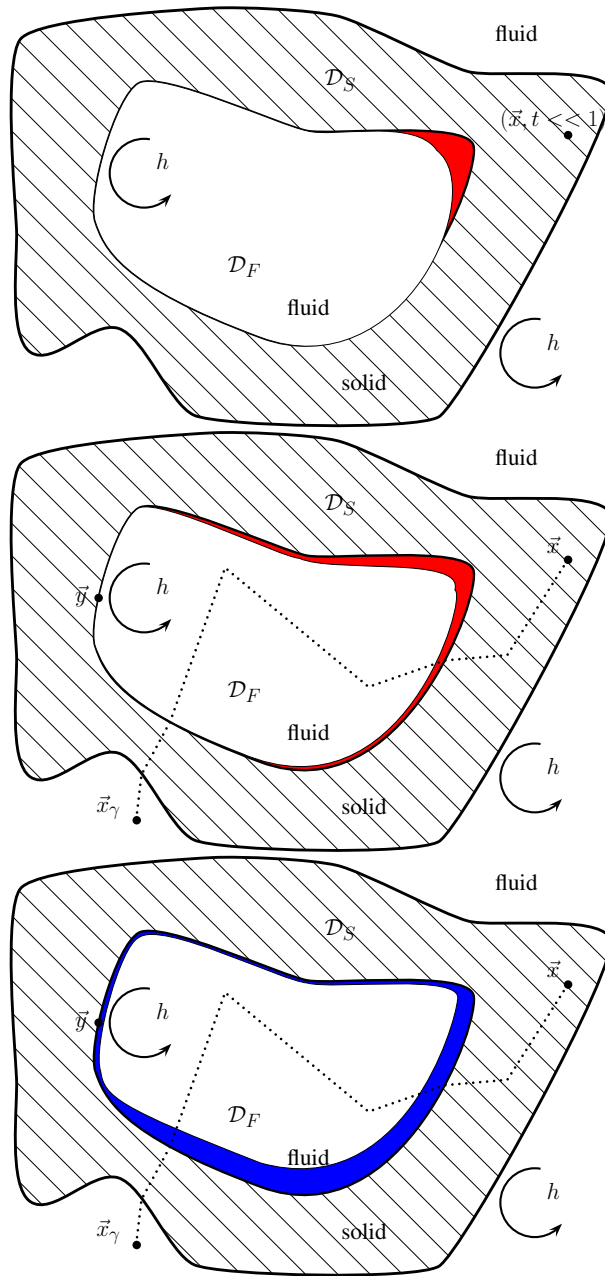


Figure 2: The temperature jump at the solid-fluid interface.

```

sum = 0;
sumOfSquares = 0;
foreach convective-path i in 1:N do
    Sample the convective-path through the fluid according to  $G_F$ ;
    case  $a_I = 1$  (the convective-path ends at an initial condition) do
        |  $w = \theta_I(\vec{x}_I)$ ;
    end
    case  $a_R = 1$  (the convective-path ends at a radiative source) do
        | Get the location  $\vec{x}_R$  of the path-end;
        | Get the time  $t_R$  of the path-end;
        |  $w = \theta_R(\vec{x}_R, t_R)$ ;
    end
    case  $a_C = 1$  (the convective-path ends at a boundary-layer) do
        | Get the location  $\vec{y}_C$  of the path-end;
        | Get the time  $t_C$  of the path-end;
        |  $w = \theta_S(\vec{y}_C, t_C)$ ;
    end
    case  $a_N = 1$  (the convective-path ends at an incoming flow) do
        | Get the time  $t_N$  of the path-end;
        |  $w = \theta_N(t_N)$ ;
    end
    sum = sum + w;
    sumOfSquares = sumOfSquares + w2;
end
m =  $\frac{sum}{N}$ ;
s =  $\frac{1}{\sqrt{N}} \left( \frac{sumOfSquares}{N} - m^2 \right)$ ;

```

**Algorithm 3:** The non-recursive algorithm evaluating the temperature at time  $t$  within the fluid.  $N$  convective-paths are sampled backward in time from  $t$ . The estimator  $m$  is the average of temperature values found at the end of the path:  $\theta_I$  when nothing occurs before reaching the initial condition,  $\theta_R$  if the convective path is interrupted in order to evaluate the radiative source,  $\theta_S$  if the convective path ends at a boundary layer.  $s$  is the statistical uncertainty associated to  $m$ .

---

```

sum = 0;
sumOfSquares = 0;
foreach recursive-path i in 1:N do
  Set recursion to true;
  while recursion do
    case  $\vec{x}$  is within the solid do
      | Sample a conductive-path starting at  $(\vec{x}, t)$ ;
    case  $\vec{x}$  is within the fluid do
      | Sample a convective-path starting at  $(\vec{x}, t)$ ;
    end
    case  $a_I = 1$  (the path ends at an initial condition) do
      | Get the location  $\vec{x}_I$  of the end of the path;
      | Set recursion to false;
    case  $a_R = 1$  (the path ends at a radiative source) do
      | Get the location  $\vec{x}_R$  and time  $t_R$  of the end of the path;
      | Sample a radiative-path  $\gamma$  starting at location  $\vec{x}_R$  at time  $t_R$ ;
      | Get the location  $\vec{x}_\gamma$  of the end of the radiative-path;
      | if  $\theta(\vec{x}_\gamma, t_R)$  is known then Set recursion to false;
      | else Set  $\vec{x} = \vec{x}_\gamma$  and  $t = t_R$ ;
    case  $a_C = 1$  (the path ends at a boundary-layer) do
      | Get the location  $\vec{x}_C$  and time  $t_C$  of the end of the path;
      |  $\vec{x}_C$  is exactly at the interface between the solid and the fluid interface :
      | case the path is a conductive-path do
          | Set  $\vec{x}_C$  as belonging to the fluid;
        | case the path is a convective-path do
          | Set  $\vec{x}_C$  as belonging to the solid;
        end
      | if  $\theta(\vec{x}_C, t_C)$  is known then Set recursion to false;
      | else Set  $\vec{x} = \vec{x}_C$  and  $t = t_C$ ;
    case  $a_N = 1$  (the path ends at an incoming flow) do
      | Get the time  $t_N$  of the end of the path;
      | Set recursion to false;
    end
  end
  end
  case  $a_I = 1$  do  $w = \theta_I(\vec{x}_I)$ ;
  case  $a_R = 1$  do  $w = \theta(\vec{x}_\gamma, t_R)$ ;
  case  $a_C = 1$  do  $w = \theta(\vec{x}_C, t_C)$ ;
  case  $a_N = 1$  do  $w = \theta_N(t_N)$ ;
  sum = sum + w;
  sumOfSquares = sumOfSquares + w2;
end
m =  $\frac{sum}{N}$ ;
s =  $\frac{1}{\sqrt{N}} \left( \frac{sumOfSquares}{N} - m^2 \right)$ ;

```

**Algorithm 4:** The recursive algorithm evaluating the temperature at location  $\vec{x}$  and time  $t$  with a full conduction/convection/radiation coupling.  $\vec{x}$  and  $t$  may be within the solid or within the fluid.  $N$  recursive-paths are sampled, starting at  $\vec{x}$ , backward in time from  $t$ . The estimator is  $m$  and  $s$  is its statistical uncertainty.

4. Defining the combined heat-transfer paths with a Feynman-Kac approach
5. Illustration with academic examples
6. Scalling up examples
7. Sampling procedures
8. Exact simulation examples

All the simulation examples provided in this section make use of the generic algorithm established in Secs. 3, and of the exact-sampling algorithms of Sec. 7, and Appendix B. The corresponding results can therefore be considered as the exact solutions of our initial model (Sec. 2), remembering that in the Monte Carlo context, “exact” means that uncertainty associated with the non-infinite number of sampled-paths is quantified. Despite of this systematic uncertainty-measure, we will still make comparisons with analytical or numerical solutions, when available, in order to validate the computer implementation of the algorithms. For each of the presented example-simulations, we will provide two figures and a table: a figure illustrating the configuration and briefly describing the sampled paths, one illustrating the simulation results graphically, and a table listing the simulation results numerically. The algorithms will be recalled in the captions of the results-figures. Analytical solutions are provided in Appendix C.

The results of this section will be used in Sec. 9 to validate the approximate-sampling algorithms devoted to complex geometries.

#### 8.1. Conduction/radiation: uniform-infinite solid

The first example, labeled *sinus*, is an infinite solid with  $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $C$ ,  $\zeta$  and all radiative properties uniform and constant. The initial temperature condition is sinusoidal :

$$\theta_I(\vec{x}) = \theta_0 + \Delta\theta_0 \sin\left(2\pi \frac{\vec{x} \cdot \vec{\omega}_1}{L_1}\right) \sin\left(2\pi \frac{\vec{x} \cdot \vec{\omega}_2}{L_2}\right) \sin\left(2\pi \frac{\vec{x} \cdot \vec{\omega}_3}{L_3}\right) \quad (27)$$

The three vectors  $\vec{\omega}_1$ ,  $\vec{\omega}_2$  and  $\vec{\omega}_3$  are unit vectors forming an orthonormal basis. There is one periodicity length per direction, noted  $L_1$ ,  $L_2$  and  $L_3$ . Starting from this initial condition, the transient coupling of conduction and radiation leads to a decrease of the amplitude, but the sinusoidal shape (period and phase) remains identical at all times. An analytical solution is available in all cases provided that scattering is isotropic (see Appendix C).

The configuration is illustrated in Fig. 3. The simulations have been held with the parameter values of Table 1. Results are displayed numerically in Table 2. Fig. 4 illustrates cases 3 and 4 for which no analytical solution is known, but for the asymptotical solutions of the thin and thick limits.

#### 8.2. Conduction/radiation: rectangular-parallelepiped solid with Dirichlet boundary conditions

In the examples labeled *box-Dirichlet-sinus* and *box-Dirichlet-linear*, a homogeneous rectangular-parallelepiped solid is considered ( $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $C$  and  $\zeta$  and all radiative properties uniform and constant). The parallelepiped is centered on  $O$  and its edges are parallel to three orthonormal unit vectors of an orthonormal basis ( $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ). The edge-lengths are noted ( $H_1, H_2, H_3$ ). The surface-temperature and the incoming radiation are known at the boundary. They can vary in time and space.

The spatio-temporal variation of the boundary condition allows us to reproduce the example of the preceding section: we use the same initial condition as that of *sinus*,

$$\theta_I(\vec{x}) = \theta_0 + \Delta\theta_0 \sin\left(2\pi \frac{\vec{x} \cdot \vec{\omega}_1}{L_1}\right) \sin\left(2\pi \frac{\vec{x} \cdot \vec{\omega}_2}{L_2}\right) \sin\left(2\pi \frac{\vec{x} \cdot \vec{\omega}_3}{L_3}\right) \quad (28)$$

and at each time  $t > t_I$  and each location  $\vec{y}$  on the boundary of the rectangular-parallelepiped we impose the exact solution of *sinus* (when available, see Appendix C),

$$\theta_S(\vec{y}, t) = \theta_{sinus}(\vec{y}, t) \quad (29)$$

Figure 3: 2D slice of the initial condition  $\theta_I(\vec{x})$  for the *sinus* example for a set of directions  $(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3)$  such that  $\vec{\omega}_3 = \vec{e}_3$ . In the *box-Dirichlet-sinus* example, the same medium is truncated in  $(-\frac{H_1}{2}, \frac{H_1}{2}, -\frac{H_2}{2}, \frac{H_2}{2}, -\frac{H_3}{2}, \frac{H_3}{2})$ , and the *sinus* example solution field is kept outside the box as the boundary condition.

	$\frac{L_2}{L_1}$	$\frac{L_3}{L_1}$
case 1	1	1
case 2	10	10

(a) Isotropic scattering

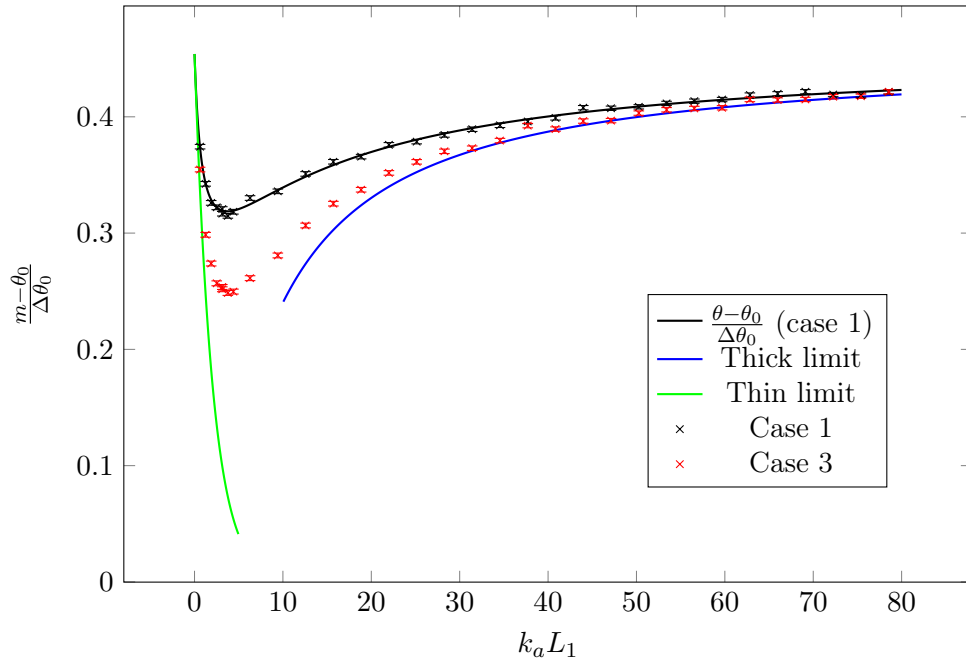
	$\frac{L_2}{L_1}$	$\frac{L_3}{L_1}$	$k_a L_1$	$k_s L_1$	$\frac{\zeta L_1^2}{\lambda}$
case 3	1	1	1	5	1
case 4	1	1	1	100	1000

(b) Anisotropic scattering ( $g = 0.8$ )

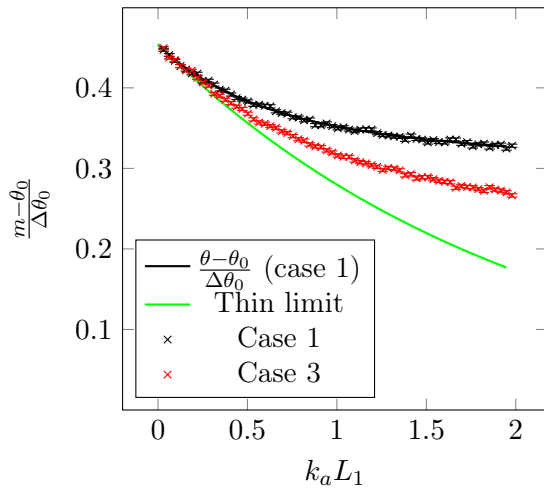
Table 1: Parameter values for *sinus* defining the different test cases.  $\frac{L_2}{L_1}$  and  $\frac{L_3}{L_1}$  are the ratios of the periodicity lengths,  $k_a L_1$  and  $k_s L_1$  are the absorptive and diffusive optical thicknesses,  $g$  is the asymmetrical coefficient, and  $\frac{\zeta L_1^2}{\lambda}$  is the dimensionless ratio of radiation and conduction.

case	$\frac{\vec{x} \cdot \vec{\omega}_1}{L_1}$	$t/\tau_S$	$\frac{m-\theta_0}{\Delta\theta_0}$	$\frac{s}{\Delta\theta_0}$	$\frac{m_{ref}-\theta_0}{\Delta\theta_0}$	$N_{1\%}$	$CT_{1\%}(\mu s)$
1	0.1	1	0.218	0.004	0.216	1385	4283
1	0.2	1	0.352	0.004	0.350	1240	1903
1	0.25	1	0.365	0.003	0.368	1129	1701
1	0.3	1	0.347	0.003	0.350	1240	1756
1	0.4	1	0.219	0.004	0.216	1416	2044
1	0.25	0.1	0.906	0.001	0.905	11	16
1	0.25	0.3	0.741	0.002	0.741	330	426
1	0.25	0.5	0.608	0.003	0.607	683	849
1	0.25	0.7	0.498	0.003	0.497	977	1208
1	0.25	0.9	0.405	0.003	0.407	1098	1343
2	0.25	1	0.360	0.006	0.368	3600	4555
3	0.25	1	0.365	0.003	*	1273	1583
4	0.25	1	0.361	0.005	*	2182	269517

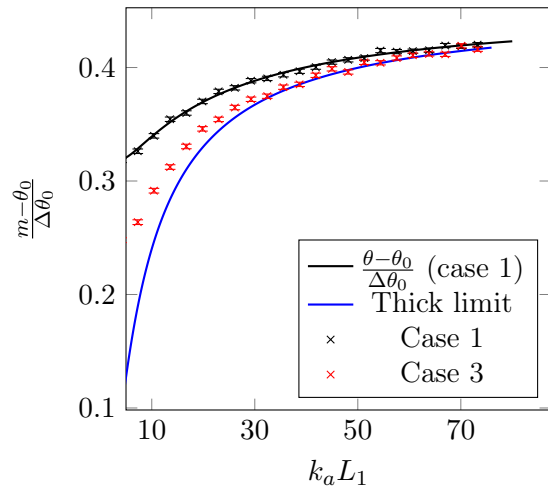
Table 2: Results of *sinus* using an exact-sampling of conducto-radiative paths. For all shown results,  $\frac{\vec{x} \cdot \vec{\omega}_2}{L_2} = 0.25$ ,  $\frac{\vec{x} \cdot \vec{\omega}_3}{L_3} = 0.25$  and 10000 paths were sampled (left side of the table). Algorithms: the general recursive algorithm of Alg. 4 (in which convection will never be activated) together with the exact-sampling algorithms of Appendix B. Column 1 : case - cases as defined in Table 1; column 2 :  $\frac{\vec{x} \cdot \vec{\omega}_1}{L_1}$  - dimensionless positions along  $\vec{\omega}_1$ ; column 3 :  $t/\tau_S$  - dimensionless times (see Appendix C for the expression of  $\tau_S$ ); column 4 :  $\frac{m-\theta_0}{\Delta\theta_0}$  - dimensionless numerical results; column 5 :  $\frac{s}{\Delta\theta_0}$  - dimensionless uncertainties over  $m$ ; column 6 : when available, dimensionless analytical solutions (see Appendix C); column 7 :  $N_{1\%}$  - numbers of paths to be sampled in order to reach  $s = \frac{1}{100}\Delta\theta_0$ ; column 8 :  $CT_{1\%}(\mu s)$  - computation times associated to  $N_{1\%}$  with a single-thread Intel(R) Core(TM) i3-4150 CPU @ 3.50GHz.



(a)



(b)



(c)

Figure 4: Simulation result  $m$  and uncertainty  $s$  (as errorbars) at  $t = 0.02$  for *sinus* (see Appendix C) using an exact-sampling of conducto-radiative paths (see Table 2 for the numerical values and the numbers of sampled paths). Algorithms: the general recursive algorithm of Alg. 4 (in which convection will never be activated) together with the exact-sampling algorithms of Appendix B. When available,  $m_{ref}$  is the analytical solution provided in Appendix C.

---

The corresponding simulation example is therefore a parallelepipedic extraction of the infinite-domain *sinus* example (see Fig. 3). It is labeled *box-Dirichlet-sinus*.

With the same parallelepipedic configuration, we run a second example, labeled *box-Dirichlet-linear*, that illustrates the behaviour of our algorithm at the stationary limit. Note that when addressing a stationary solution, the only change in the algorithm is that the sampling of time is no more required: the initial condition is pushed back in time to infinity and can never be reached. We test this using the following linear temperature-field,

$$\theta_{linear}(\vec{x}) = \theta_0 + \Delta\theta_1 \frac{\vec{x} \cdot \vec{e}_1}{H_1} + \Delta\theta_2 \frac{\vec{x} \cdot \vec{e}_2}{H_2} + \Delta\theta_3 \frac{\vec{x} \cdot \vec{e}_3}{H_3} \quad (30)$$

which is a stationary solution of conduction coupled with radiation in a homogeneous infinite domain, whatever the parameter values. The *box-Dirichlet-linear* example is a parallelepipedic extraction of this infinite-domain solution, which we obtain by imposing

$$\theta_S(\vec{y}) = \theta_{linear}(\vec{y}) \quad (31)$$

at each location  $\vec{y}$  on the boundary. We then check that we indeed recover  $\theta_S(\vec{x}) = \theta_{linear}(\vec{x})$  at each location  $\vec{x}$  within the parallelepiped.

As both the *box-Dirichlet-sinus* and *box-Dirichlet-linear* examples are extractions of infinite-domain solutions, radiation at the boundary for each incoming direction must be identical to that of the infinite-domain solution. To achieve this, when a radiative path reaches the boundary, it is continued outside the parallelepiped until absorption, as if the domain was infinite.

The configuration and the two associated examples are illustrated in Fig. 5. The simulations have been held with the parameter values of Tables 3 and 4. Results are displayed numerically in Tables 5 and 6.

A FAIRE

Figure 5: The *box-Dirichlet-sinus* and *box-Dirichlet-linear* examples.

	$\frac{H_2}{H_1}$	$\frac{H_3}{H_1}$	$k_a H_1$	$k_s H_1$	$\frac{\zeta H_1^2}{\lambda}$	$\frac{L_2}{L_1}$	$\frac{L_3}{L_1}$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
case 1	1	1	1	1	1	1	1	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$
case 2	10	10	1	1	1	10	10	0	0	0

Table 3: Parameter values for *box-Dirichlet-sinus* defining the different test cases. For both of these cases, scattering is kept isotropic.  $\frac{H_2}{H_1}$  and  $\frac{H_3}{H_1}$  are the ratios of the parallelepiped edge-lengths,  $k_a H_1$  and  $k_s H_1$  are the absorptive and diffusive optical thicknesses,  $\frac{\zeta H_1^2}{\lambda}$  is the dimensionless ratio of radiation and conduction,  $\frac{L_2}{L_1}$  and  $\frac{L_3}{L_1}$  are the ratios of the periodicity lengths, and  $\alpha$   $\beta$  and  $\gamma$  are the three Euler angles transforming  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  into  $(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3)$ .

	$\frac{H_2}{H_1}$	$\frac{H_3}{H_1}$	$k_a H_1$	$k_s H_1$	g	$\frac{\zeta H_1^2}{\lambda}$	$\frac{\Delta\theta_2}{\Delta\theta_1}$	$\frac{\Delta\theta_3}{\Delta\theta_1}$
case 1	1	1	1	1	0	0.01	1	1
case 2	1	1	1	1	0	1	1	1
case 3	10	10	1	1	0	1	1	1
case 4	1	1	1	5	0.8	1	2	3

Table 4: Parameter values for *box-Dirichlet-linear* defining the different test cases.  $\frac{H_2}{H_1}$  and  $\frac{H_3}{H_1}$  are the ratios of the parallelepiped edge-lengths,  $k_a H_1$  and  $k_s H_1$  are the absorptive and diffusive optical thicknesses,  $\frac{\zeta H_1^2}{\lambda}$  is the dimensionless ratio of radiation and conduction,  $\frac{\Delta\theta_2}{\Delta\theta_1}$  and  $\frac{\Delta\theta_3}{\Delta\theta_1}$  are the ratios of the variations of temperature in the cube along each direction of its basis.



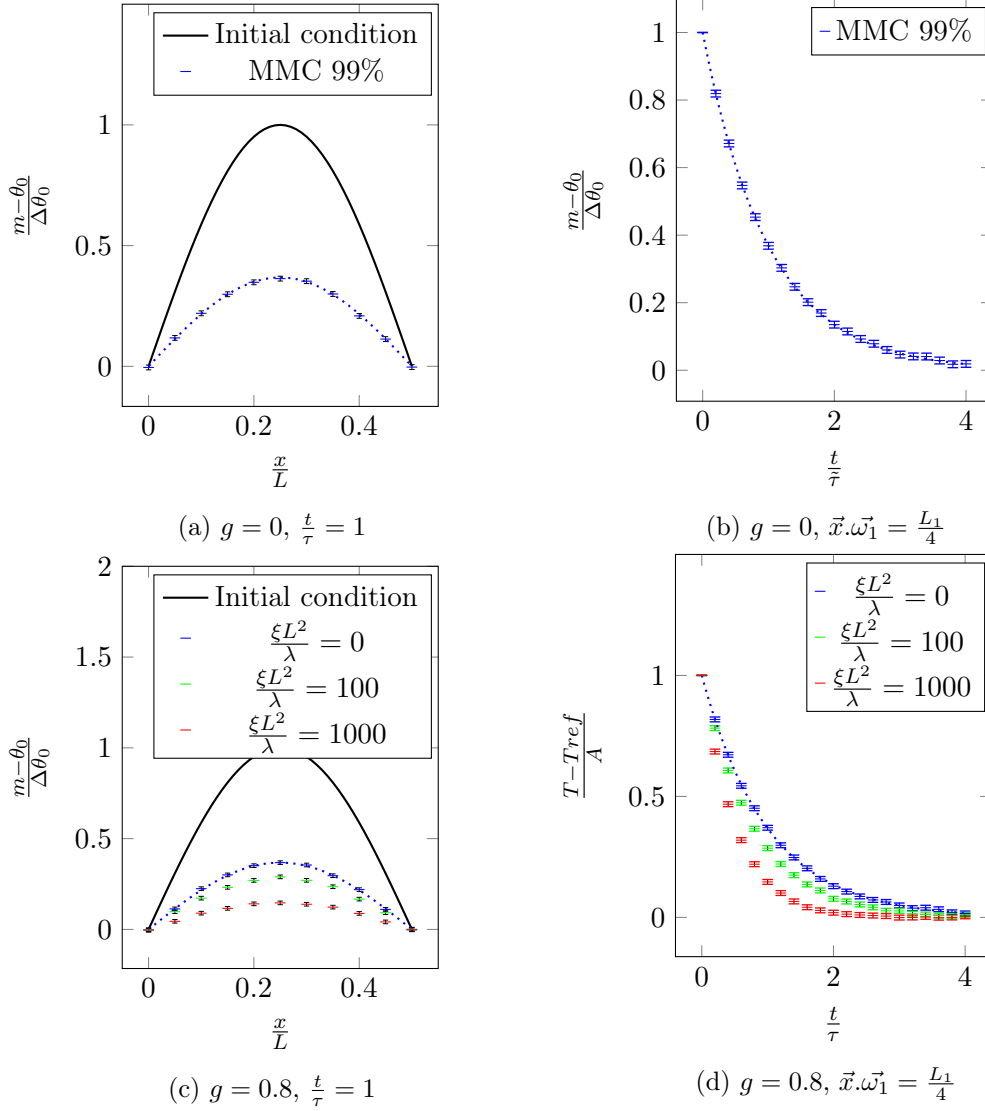


Figure 6: Simulation result  $m$  and uncertainty  $s$  (as errorbar) at  $k_a L = 1$ ,  $k_d L = 100$ ,  $\vec{x} \cdot \vec{\omega}_2 = \frac{L_2}{4}$ , and  $\vec{x} \cdot \vec{\omega}_3 = \frac{L_3}{4}$ , for *sinus* using an exact-sampling of conducto-radiative paths (see Table 2 for the numerical values and the numbers of sampled paths). Algorithms: the general recursive algorithm of Alg. 4 (in which convection will never be activated) together with the exact-sampling algorithms of Appendix B. When available,  $m_{ref}$  is the analytical solution provided in Appendix C.

case	$\frac{\vec{x}\cdot\vec{\omega}_1}{L_1}$	$t/\tau_S$	$\frac{L_1}{H_1}$	$\frac{m-\theta_0}{\Delta\theta_0}$	$\frac{s}{\Delta\theta_0}$	$\frac{m_{ref}-\theta_0}{\Delta\theta_0}$	$N_{1\%}$	$CT_{1\%}(ms)$
1	0.1	1	0.1	0.215	0.004	0.216	1364	1362
1	0.2	1	0.1	0.354	0.003	0.350	1154	1154
1	0.25	1	0.1	0.367	0.003	0.368	1174	1174
1	0.3	1	0.1	0.350	0.003	0.350	1175	1169
1	0.4	1	0.1	0.215	0.004	0.216	1299	1295
1	0.25	0.1	0.1	0.906	0.001	0.905	28	27
1	0.25	0.3	0.1	0.738	0.002	0.741	379	377
1	0.25	0.5	0.1	0.612	0.003	0.607	633	631
1	0.25	0.7	0.1	0.497	0.003	0.497	907	904
1	0.25	0.9	0.1	0.403	0.003	0.407	1118	1116
2	0.1	1	1	0.210	0.006	0.216	3997	3162
2	0.2	1	1	0.348	0.006	0.350	2985	2528
2	0.25	1	1	0.359	0.005	0.368	2654	2048
2	0.3	1	1	0.351	0.005	0.350	2272	1720
2	0.4	1	1	0.217	0.004	0.216	1619	1184
2	0.25	0.1	1	0.905	0.001	0.905	162	120
2	0.25	0.3	1	0.747	0.003	0.741	1008	763
2	0.25	0.5	1	0.600	0.004	0.607	1709	1295
2	0.25	0.7	1	0.494	0.005	0.497	2242	1706
2	0.25	0.9	1	0.411	0.005	0.407	2483	1890

Table 5: Results of *box-Dirichlet-sinus* using an exact-sampling of conducto-radiative paths. For all shown results,  $\frac{\vec{x}\cdot\vec{\omega}_2}{L_2} = 0.25$ ,  $\frac{\vec{x}\cdot\vec{\omega}_3}{L_3} = 0.25$  and 10000 paths were sampled (left side of the table). Algorithms: the general recursive algorithm of Alg. 4 (in which convection will never be activated) together with the exact-sampling algorithms of Appendix B. Column 1 : case - cases as defined in Table 3; column 2 :  $\frac{\vec{x}\cdot\vec{\omega}_1}{L_1}$  - dimensionless positions along  $\vec{\omega}_1$ ; column 3 :  $t/\tau_S$  - dimensionless times (see Appendix C for the expression of  $\tau_S$ ); column 4 :  $\frac{m-\theta_0}{\Delta\theta_0}$  - dimensionless numerical results; column 5 :  $\frac{s}{\Delta\theta_0}$  - dimensionless uncertainties over  $m$ ; column 6 : dimensionless analytical solutions (see Appendix C); column 7 :  $N_{1\%}$  - numbers of paths to be sampled in order to reach  $s = \frac{1}{100}\Delta\theta_0$ ; column 8 :  $CT_{1\%}(\mu s)$  - computation times associated to  $N_{1\%}$  with a single-thread Intel(R) Core(TM) i3-4150 CPU @ 3.50GHz.

case	$\frac{\vec{x}\cdot\vec{\omega}_1}{L_1}$	$\frac{\vec{x}\cdot\vec{\omega}_2}{L_2}$	$\frac{\vec{x}\cdot\vec{\omega}_3}{L_3}$	$\frac{m-\theta_0}{\Delta\theta_0}$	$\frac{s}{\Delta\theta_0}$	$\frac{m_{ref}-\theta_0}{\Delta\theta_0}$	$N_{1\%}$	$CT_{1\%}(ms)$
1	0	0	0	0.001	0.006	0.000	3285	3121
1	0.2	0	0	0.198	0.005	0.200	2895	2935
1	0.4	0	0	0.403	0.004	0.400	1330	1215
1	0.49	0	0	0.490	0.001	0.490	50	45
1	0	0	0	0.006	0.006	0.000	3391	3206
1	0.2	0.2	0.2	0.598	0.005	0.600	2426	2793
1	0.4	0.4	0.4	1.200	0.002	1.200	450	384
1	0.49	0.49	0.49	1.470	0.000	1.470	*	*
2	0	0	0	-0.008	0.006	0.000	3758	3669
2	0.2	0	0	0.202	0.006	0.200	3264	3387
2	0.4	0	0	0.396	0.004	0.400	1587	1462
2	0.49	0	0	0.492	0.001	0.490	249	220
2	0	0	0	0.001	0.006	0.000	3730	3609
2	0.2	0.2	0.2	0.597	0.005	0.600	2735	3178
2	0.4	0.4	0.4	1.198	0.002	1.200	297	253
2	0.49	0.49	0.49	1.470	0.000	1.470	*	*
3	0.2	0.2	0.2	0.587	0.005	0.600	2422	2158
4	0.2	0.2	0.2	0.403	0.004	0.400	1420	1652

Table 6: Results of *box-Dirichlet-linear* using an exact-sampling of conducto-radiative paths. For all shown results, 10000 paths were sampled (left side of the table). Algorithms: the general recursive algorithm of Alg. 4 (in which convection will never be activated, and the initial condition will never be reached) together with the exact-sampling algorithms of Appendix B. Column 1 : case - cases as defined in Table 3; column 2 :  $\frac{\vec{x}\cdot\vec{\omega}_1}{L_1}$  - dimensionless positions along  $\vec{\omega}_1$ ; column 3 :  $\frac{\vec{x}\cdot\vec{\omega}_2}{L_2}$  - dimensionless positions along  $\vec{\omega}_2$ ; column 4 :  $\frac{\vec{x}\cdot\vec{\omega}_3}{L_3}$  - dimensionless positions along  $\vec{\omega}_3$ ; column 5 :  $\frac{m-\theta_0}{\Delta\theta_0}$  - dimensionless numerical results; column 6 :  $\frac{s}{\Delta\theta_0}$  - dimensionless uncertainties over  $m$ ; column 7 : dimensionless analytical solutions (see Appendix C); column 8 :  $N_{1\%}$  - numbers of paths to be sampled in order to reach  $s = \frac{1}{100}\Delta\theta_0$ ; column 9 :  $CT_{1\%}(\mu s)$  - computation times associated to  $N_{1\%}$  with a single-thread Intel(R) Core(TM) i3-4150 CPU @ 3.50GHz.

8.3. Conduction/convection/radiation: semi-infinite solids separated by a fluid

With the example labeled *fluid-slab* we test the implementation of a full conduction/convection/radiation transient coupling using exact-sampling algorithms. Two semi-infinite homogeneous solids are facing each other and define a slab filled with a fluid. The properties  $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $C$ ,  $\zeta$  and all radiative properties are indexed 1 for the first solid, 2 for the fluid, and 3 for the second solid. The convective heat transfer coefficient is noted  $h_{12}$  for the interface between the first solid and the fluid, and  $h_{23}$  for the interface between the fluid and the second solid. The first solid and the fluid are initially isothermal at temperature  $\theta_0$ ; the second solid is isothermal at temperature  $\theta_0 + \Delta\theta_0$ . Although this example is geometrically simple, analytical solutions are only available in quite restricted limit-cases (see Appendix C).

The configuration is illustrated in Fig. 7. The simulations have been held with the parameter values of Table 7. Results are displayed numerically in Table 8.

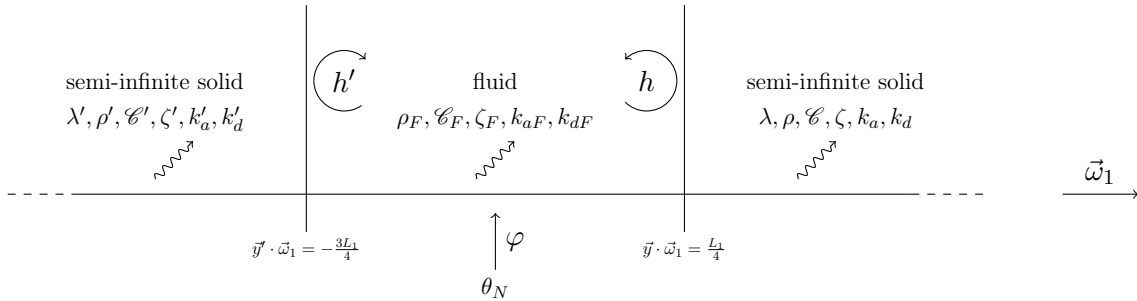


Figure 7: The *fluid-slab* example.

8.4. Analysis of the simulation results

9. Approximate simulation examples

10. Limits and perspectives

---

case	$\Psi$	$\frac{\tau \zeta_S}{\rho C}$	$k_{a_F} L$	$\frac{\phi_{TF}}{\mathcal{V}_F}$
1	0.001	0	0	0
2	1	0	0	0
3	1000	0	0	0
4	1000	10	1	0
5	1000	10	0	0
6	1000	0	0	0.1
7	1000	0	0	0.9

Table 7: Parameter values for *fluid-slab* defining the different test cases. For clarity purpose, the physical parameters of both semi-infinite media are equal in all cases, and there is no radiative diffusion.  $\Psi = \frac{h\sqrt{D\tau}}{\lambda}$  with  $\tau = \frac{\rho_F C_F L}{h}$  is the dimensionless ratio of conduction and convection,  $k_a\sqrt{D\tau}$  and  $k_{a_f}L$  are the optical thicknesses in the solids and fluid, and  $\frac{\phi_{TF}}{\mathcal{V}_F}$  with  $\tau_F = \frac{\rho C \mathcal{V}_F}{\rho C \phi + \zeta \mathcal{V}_F + 2h}$  is the dimensionless ratio of volumetric flow rate in the fully coupled fluid. For all cases, we consider a unit optical length in the solids :  $k_{a_s}\sqrt{D\tau} = 1$

case	$\frac{x}{\sqrt{D\tau}}$	$\frac{t}{\tau}$	$\frac{m-\theta_0}{\Delta\theta}$	$\frac{s}{\Delta\theta}$	$\frac{m_{ref}-\theta_0}{\Delta\theta}$	$N_{1\%}$	$CT_{1\%}(ms)$
1	-1000.5	1	1.000	2.00e-04	1.000	*	*
1	-100.5	1	0.999	2.45e-04	1.000	*	*
1	0	1	0.438	4.96e-03	0.432	2470	332
1	100.5	1	0.000	2.00e-04	0.000	*	*
1	1000.5	1	0.000	1.73e-04	0.000	*	*
2	-1.5	1	0.823	3.82e-03	*	1383	51
2	-0.6	1	0.597	4.91e-03	*	2417	123
2	0	1	0.316	4.65e-03	*	2211	161
2	0.6	1	0.138	3.45e-03	*	981	50
2	1.5	1	0.046	2.10e-03	*	341	14
3	-0.501	1	0.522	5.00e-03	0.521	2492	84
3	-0.5001	1	0.055	2.28e-03	0.057	641	33
3	0	1	0.001	3.31e-04	0.000	*	*
3	0.5001	1	0.001	3.16e-04	0.000	*	*
3	0.501	1	0.000	1.41e-04	0.000	*	*
4	-0.501	1	0.365	4.81e-03	*	2328	654
4	-0.5001	1	0.054	2.26e-03	*	515	49
4	0	1	0.001	3.74e-04	*	*	*
4	0.5001	1	0.008	8.96e-04	*	*	*
4	0.501	1	0.025	1.57e-03	*	*	*
5	-0.501	1	0.378	4.85e-03	*	2388	752
5	-0.5001	1	0.064	2.44e-03	*	*	*
5	0	1	0.002	4.12e-04	*	*	*
5	0.5001	1	0.033	1.79e-03	*	392	43
5	0.501	1	0.100	2.99e-03	*	805	242
6	-0.501	1	0.497	5.32e-03	*	2858	92
6	-0.5001	1	-0.015	2.84e-03	*	*	*
6	0	1	-0.077	1.56e-03	*	205	10
6	0.5001	1	-0.066	1.49e-03	*	176	9
6	0.501	1	-0.021	9.08e-04	*	*	*
7	-0.501	1	0.342	6.88e-03	*	4729	101
7	-0.5001	1	-0.305	3.22e-03	*	1168	16
7	0	1	-0.385	3.85e-05	*	36	0
7	0.5001	1	-0.363	8.92e-04	*	38	0
7	0.501	1	-0.180	1.92e-03	*	365	8

Table 8: Results of *fluid-slab* using an exact-sampling of conducto-convecto-radiative paths. For all shown results, 10000 paths were sampled (left side of the table). Algorithms: the general recursive algorithm of Alg. 4 together with the exact-sampling algorithms of Appendix B. Column 1 : case - cases as defined in Table 7; column 2 :  $\frac{x}{\sqrt{D\tau}}$  - dimensionless positions (see Appendix C); column 3 :  $\frac{t}{\tau}$  - dimensionless times (see Appendix C); column 4 :  $\frac{m-\theta_0}{\Delta\theta_0}$  - dimensionless numerical results; column 5 :  $\frac{s}{\Delta\theta_0}$  - dimensionless uncertainties over  $m$ ; column 6 : dimensionless analytical limit solutions for  $\Psi \rightarrow 0$  and  $\Psi \rightarrow \infty$  (see Appendix C); column 7 :  $N_{1\%}$  - numbers of paths to be sampled in order to reach  $s = \frac{1}{100}\Delta\theta_0$ ; column 8 :  $CT_{1\%}(\mu s)$  - computation times associated to  $N_{1\%}$  with a single-thread Intel(R) Core(TM) i3-4150 CPU @ 3.50GHz. PS : \* in column 6 stand for a lack of closeby limits or analytical solutions, and in column 7-8 for a meaningless number of paths (typically equal to 2) and corresponding computation time.

---

**Appendix A. Radiative transfer**  
**Appendix B. Exact sampling algorithms**  
**Appendix C. Analytical solutions**

---

---

# Table des figures

1.1	Comparaison entre méthodes déterministe et probabiliste pour le calcul de l'espérance d'un lancer de dé. . . . .	7
1.2	Une illustration sur 3 exemples de variables aléatoires discrète (1.2a) et continues (1.2b,1.2c), à travers la densité de probabilité, la fonction de répartition, l'espérance (E) et l'écart-type ( $\sigma$ ). . . . .	9
1.3	Illustration de trois méthodes de simulation pour des variables aléatoires discrète (1.3a) et continues (méthode de la transformée inverse : 1.3b; et méthode de rejet : 1.3c). . . . .	11
1.4	Spectre du rayonnement électromagnétique en fonction du nombre d'onde. . . . .	15
1.5	Une illustration de la construction d'une réalisation aléatoire du Walk on Sphere. . .	21
1.6	Illustration des chemins aléatoires de conduction dans une approche en échantillonnage de surfaces par lancers de rayon tels que présentés dans [Hoffman+1976]. . . .	22
1.7	Illustration de la grille accélératrice sur laquelle est effectué le pré-calcul permettant de réaliser plus rapidement les lancers de rayon dans [Zagajac1995]. . . . .	22
2.1	Illustration de la relation entre la luminance et la synthèse d'image. . . . .	27
2.2	Illustrations issues de [Pharr+2010] sur la notion de grilles accélératrices. . . . .	29
2.3	Coupe 2D d'une grille hiérarchique utilisée pour réaliser du lancer de rayon dans un champ de propriétés radiatives hétérogènes issues d'un calcul LES [Villefranche+2019].	30
2.4	Image de synthèse d'un champ nuageux issu d'une simulation LES. . . . .	30
2.5	Dépendance du temps de calcul d'un rendu au raffinement de la donnée géométrique surfacique. . . . .	30
2.6	Dépendance du temps de calcul d'un rendu au raffinement de la donnée paramétrique volumique dans les nuages. . . . .	31
2.7	Illustration du couplage conducto-radiatif par des marcheurs aléatoires porteurs d'enthalpie tel que présenté dans [Vignoles2016] dans une configuration de slabs solides parallèles. . . . .	32
2.8	Illustration de la construction aléatoire de deux chemins statistiques conducto-convecto-radiatifs pour évaluer la température d'un point du solide par la méthode de Monte Carlo. . . . .	34
2.9	Illustration de chemins statistiques conducto-convecto-radiatifs dans des géométries réelles de moteurs électriques et de puces électroniques. . . . .	34
2.10	Illustration d'un problème de thermique planétaire pour le calcul de propriétés thermiques effectives de régolithe lunaire. . . . .	35



---

2.11	Illustration du démonstrateur thermique sur une configuration factice du système Terre-Soleil. . . . .	36
2.12	Illustration du démonstrateur thermique dans une configuration montrant un couplage des phénomènes conductifs, convectifs, et radiatifs. . . . .	37
3.1	Illustration de la configuration étudiée constituée de milieux solides $\mathcal{D}_S$ et fluides $\mathcal{D}_F$ , de frontières respectives $\partial\mathcal{D}_S$ et $\partial\mathcal{D}_F$ . . . . .	47
3.2	Illustration de l'échantillonnage d'un chemin radiatif permettant d'évaluer la température radiative. . . . .	48
3.3	Illustration d'une réalisation aléatoire permettant de mettre en œuvre un algorithme de Monte Carlo couplant conduction, convection, et rayonnement pour évaluer la température en un point de l'espace et du temps. . . . .	53
3.4	Représentation d'un chemin conducto-radiatif dans un milieu infini semi-transparent. . . . .	57
3.5	Représentation d'un chemin conducto-radiatif dans un milieu fini semi-transparent. . . . .	58
3.6	Représentation d'un chemin conducto-convecto-radiatif dans un mur fluide parfaitement mélangé confiné entre deux solides semi-infinis. . . . .	59
3.7	Illustration d'un potentiel chemin statistique advecto-conducto-radiatif couplé dans lequel le transfert radiatif est restreint au domaine fluide (milieu solide opaque et fluide transparent) et dans lequel un mouvement brownien avec drift est utilisé pour simuler le transfert thermique advecto-diffusif dans le fluide. . . . .	60
4.1	Illustration 2D de la construction de la marche conductive proposée, compatible avec le lancer de rayon. . . . .	65
4.2	Illustration de la solution de l'équation advecto-diffusive dans un segment 1D parcouru par une vitesse uniforme $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ . . . . .	67
4.3	Illustration du volume de contrôle 3D utilisé pour construire le schéma exponentiel 3D. . . . .	68
4.4	Illustration de la construction de la marche advecto-diffusive proposée, compatible avec le lancer de rayon. . . . .	71
4.5	Evolution de la température du fluide sortant, du temps de chargement de la géométrie, et du temps de calcul en fonction de la complexité de la géométrie dans une simulation d'échangeur solaire. . . . .	75
4.6	Illustration d'une configuration en champ tournant entre deux parois cylindriques uniformes en température. . . . .	92
4.7	Résultats à différentes valeurs du nombre de Péclet du schéma advecto-diffusif dans un champ tournant à rotationnel constant. . . . .	93
4.8	Illustration de la construction de la marche statistique dans une situation purement advective. . . . .	93
4.9	Comparaison des convergences du schéma advecto-diffusif inspiré du schéma exponentiel et du schéma en différences finies avec un terme advectif amont dans un champ tournant à rotationnel constant pour un nombre de Péclet de 1000. . . . .	94
4.10	Résultats à différentes valeurs du nombre de Péclet du schéma advecto-diffusif dans un tourbillon de Rankine. . . . .	95
5.1	Représentation de deux chemins conducto-convecto-radiatifs dans un empilement de quatre cellules de Kelvin parcourues par un champ de vitesse imposé. . . . .	100

---

5.2	Illustration d'un milieu $\Omega_1$ très conducteur englobé par un milieu $\Omega_2$ peu conducteur.	119
5.3	Illustration d'un lancer de rayon dans un monde 2D numérique.	119
5.4	Illustration de l'évolution de la taille du pas de ré-injection $\delta_2$ dans le milieu $\Omega_2$ en fonction de la position $\mathbf{y}$ sur la paroi $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ .	120
6.1	Ecoulement de Poiseuille entre deux plans infinis parallèles.	128
6.2	Résultats de l'algorithme 6.1 inspiré de la proposition de [Gopalsamy+1973] pour retrouver un écoulement de Poiseuille.	128
6.3	Illustration du concept de caméra thermique virtuelle [Eymet+2019].	135
6.4	Comparaison qualitative entre une image thermique de synthèse et expérimentale par thermographie infrarouge [Eymet+2019].	135
6.5	Image du rendu infrarouge d'une scène urbaine.	136
6.6	Image du rendu infrarouge d'un lapin initialement à 200K dans un environnement à 500K (calcul instationnaire).	136
6.7	Illustration de la construction de chemins statistiques conductifs partant d'un point pour y évaluer la température.	138
A.1	Illustration du profil de vitesse $v$ et de température $T$ dans un écoulement de Couette au régime stationnaire en présence de termes sources visqueux.	143
A.2	Comparison of the cumulative distribution functions of time in the finite difference and spherical mean formulations	148



---

---

# Liste des tableaux

1.1	Intervalles de confiance pour quantifier l'erreur statistique. . . . .	13
4.1	Tableau récapitulatif des champs de température exactement représentés par les marches statistiques présentées. . . . .	73
6.1	Résultats de l'algorithme 6.1 pour $N = 10^5$ réalisations dans un carré unitaire sur la frontière duquel sont imposés $f$ et $\Delta f$ . . . . .	127



---

# Liste des Algorithmes

1.1	Algorithme de Monte Carlo pour estimer l'espérance d'une variable aléatoire $X$ . . . .	12
1.2	Simulation de la réalisation aléatoire $x$ d'un lancer de dé . . . . .	12
1.3	Réalisation $w_{L_\eta(x,u)}$ d'une variable aléatoire $W_{L_\eta(x,u)}$ d'espérance $L_\eta(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ . . . . .	17
6.1	Algorithme de la réalisation aléatoire $\mathbf{w}$ de la variable aléatoire $\mathbf{W}$ d'espérance $\nu(\mathbf{x})$ pour un pas numérique $\delta_\nu$ . . . . .	126
A.1	Algorithme de Monte Carlo du calcul de la température $T$ au point $y$ au régime stationnaire dans une section $[0, L]$ en présence d'un champ de vitesse $\nu(y)$ orthogonal au gradient de température. . . . .	144



---

---

# Bibliographie

- [Appel2015] Walter APPEL. *Probabilités pour les non-probabilistes*. 2015 (cf. p. 6).
- [Asllanaj+2004] Fatmir Asllanaj, Gérard Jeandel, Jean Rodolphe Roche, and David Lacroix. “Transient Combined Radiation and Conduction Heat Transfer in Fibrous Media with Temperature and Flux Boundary Conditions”. In: *International Journal of Thermal Sciences* 43.10 (Oct. 2004), pp. 939–950 (cit. on p. 29).
- [Bachelier1900] L. BACHELIER. *Théorie de la spéculation*. T. 17. 1900 (cf. p. 98, 121).
- [Bahadori+2017] Reza Bahadori, Hector Gutierrez, Shashikant Manikonda, and Rainer Meinke. “Two-Dimensional Transient Heat Conduction in Multi-Layered Composite Media with Temperature Dependent Thermal Diffusivity Using Floating Random Walk Monte-Carlo Method”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 115 (Dec. 2017), pp. 570–580 (cit. on p. 129).
- [Bauer1993] T.H. Bauer. “A General Analytical Approach toward the Thermal Conductivity of Porous Media”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 36.17 (Nov. 1993), pp. 4181–4191 (cit. on p. 30).
- [Beckenbach2013] Edwin F. Beckenbach, ed. *Modern Mathematics for the Engineer*. Dover Books on Engineering. Mineola, New York: Dover Publications, Inc, 2013. 514 pp. (cit. on p. 20).
- [Bejan2013] Adrian Bejan. *Convection Heat Transfer*. Fourth edition. Hoboken, New Jersey: Wiley, 2013. 658 pp. (cit. on p. 91).
- [Blake1971] J. R. Blake. “A Note on the Image System for a Stokeslet in a No-Slip Boundary”. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 70.2 (Sept. 1971), pp. 303–310 (cit. on p. 125).
- [Blasi+1997] Philippe Blasi, Bertrand Le Saëc, and Gérard Vignoles. “Application of Rendering Techniques to Monte-Carlo Physical Simulation of Gas Diffusion”. In: *Rendering Techniques '97*. Ed. by Julie Dorsey and Philipp Slusallek. Red. by W. Hansmann, W. T. Hewitt, and W. Purgathofer. Vienna: Springer Vienna, 1997, pp. 297–308 (cit. on p. 32).
- [Blasius1907] Heinrich Blasius. *Grenzschichten in Flüssigkeiten Mit Kleiner Reibung*. Druck von BG Teubner, 1907 (cit. on p. 91).
- [Burmeister1993] Louis C. Burmeister. *Convective Heat Transfer*. 2nd ed. New York: Wiley, 1993. 619 pp. (cit. on p. 143).
- [Caliot+2018] Cyril Caliot, Stéphane Blanco, Christophe Coustet, Mouna El Hafi, Vincent Eymet, Richard Fournier, and Benjamin Piaud. “Combined Conductive-Radiative Heat Transfer Analysis in Complex Geometry Using the Monte Carlo Method”. In: (Jan. 2018), p. 9 (cit. on p. 33).
- [Cercignani1988] Carlo Cercignani. *The Boltzmann Equation and Its Applications*. New York, NY: Springer New York, 1988 (cit. on pp. 14, 16).
- [Charon] Julien CHARON. « Résolution par la méthode de Monte Carlo de formulations intégrales du problème de diffusion électromagnétique par une suspension de particules à géométries complexes » (cf. p. 36, 134).



- 
- [Charon+2016] Julien Charon, Stéphane Blanco, Jean-François Cornet, Jérémie Dauchet, Mouna El Hafi, Richard Fournier, Mira Kaissar Abboud, and Sebastian Weitz. “Monte Carlo Implementation of Schiff’s Approximation for Estimating Radiative Properties of Homogeneous, Simple-Shaped and Optically Soft Particles: Application to Photosynthetic Micro-Organisms”. In: *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 172 (Mar. 2016), pp. 3–23 (cit. on p. 130).
- [Chiesa+2005] Matteo Chiesa, Vidar Mathiesen, Jens A. Melheim, and Britt Halvorsen. “Numerical Simulation of Particulate Flow by the Eulerian–Lagrangian and the Eulerian–Eulerian Approach with Application to a Fluidized Bed”. In: *Computers & Chemical Engineering* 29.2 (Jan. 2005), pp. 291–304 (cit. on p. 95).
- [Cole2011] K. D. Cole, ed. *Heat Conduction Using Green’s Functions*. 2nd ed. Series in Computational and Physical Processes in Mechanics and Thermal Sciences. Boca Raton: CRC Press, 2011. 643 pp. (cit. on p. 49).
- [Coles1964] Donald Coles. “The Turbulent Boundary Layer in a Compressible Fluid.” In: *The Physics of Fluids* 7.9 (1964), pp. 1403–1423 (cit. on p. 128).
- [Coquard+2009] R. Coquard, D. Rochais, and D. Baillis. “Experimental Investigations of the Coupled Conductive and Radiative Heat Transfer in Metallic/Ceramic Foams”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 52.21–22 (Oct. 2009), pp. 4907–4918 (cit. on p. 29).
- [Cortez2001] Ricardo Cortez. “The Method of Regularized Stokeslets”. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 23.4 (Jan. 2001), pp. 1204–1225 (cit. on p. 125).
- [Courant+] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewyt. “On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics”. In: (), p. 20 (cit. on p. 19).
- [Dauchet] Jérémie DAUCHET. « Analyse radiative des photobioréacteurs » (cf. p. 130, 132, 137).
- [Dauchet+] Jérémie Dauchet, Jean-Jacques Beziau, Stéphane Blanco, Cyril Caliot, Julien Charon, Christophe Coustet, Mouna El Hafi, Vincent Eymet, Olivier Farges, Vincent Forest, Richard Fournier, Mathieu Galtier, Jacques Gautrais, Anaïs Khuong, Lionel Pelissier, Benjamin Piaud, Maxime Roger, Guillaume Terrée, and Sebastian Weitz. “Monte Carlo and Nonlinearities”. In: (), p. 37 (cit. on pp. 41, 129, 130).
- [Dauchet+2013] Jérémie Dauchet, Stéphane Blanco, Jean-François Cornet, Mouna El Hafi, Vincent Eymet, and Richard Fournier. “The Practice of Recent Radiative Transfer Monte Carlo Advances and Its Contribution to the Field of Microorganisms Cultivation in Photobioreactors”. In: *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 128 (Oct. 2013), pp. 52–59 (cit. on p. 137).
- [Dauchet+2016] Jérémie Dauchet, Jean-François Cornet, Fabrice Gros, Matthieu Roudet, and Claude-Gilles Dussap. “Photobioreactor Modeling and Radiative Transfer Analysis for Engineering Purposes”. In: *Advances in Chemical Engineering*. Vol. 48. Elsevier, 2016, pp. 1–106 (cit. on p. 130).
- [Dauchet+2018] Jérémie Dauchet, Jean-Jacques Beziau, Stéphane Blanco, Cyril Caliot, Julien Charon, Christophe Coustet, Mouna El Hafi, Vincent Eymet, Olivier Farges, Vincent Forest, Richard Fournier, Mathieu Galtier, Jacques Gautrais, Anaïs Khuong, Lionel Pelissier, Benjamin Piaud, Maxime Roger, Guillaume Terrée, and Sebastian Weitz. “Addressing Nonlinearities in Monte Carlo”. In: *Scientific Reports* 8.1 (Dec. 2018), p. 13302 (cit. on pp. 36, 124).
- [Deaconu+2006] Madalina Deaconu and Antoine Lejay. “A Random Walk on Rectangles Algorithm”. In: *Methodology and Computing in Applied Probability* 8.1 (Mar. 2006), pp. 135–151 (cit. on pp. 22, 58, 63).
- [Deaconu+2013] Madalina Deaconu and Samuel Herrmann. “Hitting Time for Bessel Processes—Walk on Moving Spheres Algorithm (WoMS)”. In: *The Annals of Applied Probability* 23.6 (Dec. 2013), pp. 2259–2289 (cit. on p. 22).

- [Deaconu+2017] M. Deaconu, S. Herrmann, and S. Maire. “The Walk on Moving Spheres: A New Tool for Simulating Brownian Motion’s Exit Time from a Domain”. In: *Mathematics and Computers in Simulation* 135 (May 2017), pp. 28–38 (cit. on p. 22).
- [Delatorre+2014] J. Delatorre et al. “Monte Carlo Advances and Concentrated Solar Applications”. In: *Solar Energy* 103 (May 2014), pp. 653–681 (cit. on pp. 33, 130).
- [Dietrich+2010] B. Dietrich, G. Schell, E.C. Bucharsky, R. Oberacker, M.J. Hoffmann, W. Schabel, M. Kind, and H. Martin. “Determination of the Thermal Properties of Ceramic Sponges”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 53.1-3 (Jan. 2010), pp. 198–205 (cit. on p. 30).
- [Dimov2008] Ivan Dimov. *Monte Carlo Methods for Applied Scientists*. Hackensack, N.J: World Scientific, 2008. 291 pp. (cit. on pp. 124, 130).
- [dLataillade+2002] A. de Lataillade, S. Blanco, Y. Clergent, J.L. Dufresne, M. El Hafi, and R. Fournier. “Monte Carlo Method and Sensitivity Estimations”. In: *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 75.5 (Dec. 2002), pp. 529–538 (cit. on p. 137).
- [Dunn+2012] William L. Dunn and J. Kenneth Shultis. *Exploring Monte Carlo Methods*. Amsterdam ; Boston: Elsevier/Academic Press, 2012. 384 pp. (cit. on pp. 6, 117).
- [Dunn1981] William L. Dunn. “Inverse Monte Carlo Analysis”. In: *Journal of Computational Physics* 41.1 (May 1981), pp. 154–166 (cit. on p. 137).
- [Dutr +1995] Philip Dutr  and Yves D. Willems. *Importance-Driven Monte Carlo Light Tracing*. Ed. by Georgios Sakas, Stefan M ller, and Peter Shirley. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1995 (cit. on p. 117).
- [Einstein1956] Albert Einstein. *Investigations on the Theory of the Brownian Movement*. Courier Corporation, 1956 (cit. on pp. 31, 121).
- [Eymet+2013] V. Eymet, D. Poitou, M. Galtier, M. El Hafi, G. Terrée, and R. Fournier. “Null-Collision Meshless Monte-Carlo—Application to the Validation of Fast Radiative Transfer Solvers Embedded in Combustion Simulators”. In: *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 129 (Nov. 2013), pp. 145–157 (cit. on p. 130).
- [Eymet+2019] Vincent Eymet, Vincent Forest, Benjamin Piaud, Christophe Coustet, Richard Fournier, Stéphane Blanco, Loris Ibarrart, Jean-Marc Tr gan, Pascal Lavieille, C. Caliot, El Hafi Mouna, Jean Jacques B zian, Rémi Bouchi , Mathieu Galtier, Maxime Roger, J r mi Dauchet, Olivier Farges, Christophe P niguel, and Isabelle Rupp. “Synthèse d’images Infrarouges sans Calcul Préalable Du Champ de Température.” In: *Actes Du Congrès Annuel de La Société Française de Thermique 2019*. Congrès Annuel de La Société Française de Thermique 2019. Oct. 2019 (cit. on pp. 134, 135).
- [Fan+2015] Chia-Ming Fan and Po-Wei Li. “Numerical Solutions of Direct and Inverse Stokes Problems by the Method of Fundamental Solutions and the Laplacian Decomposition”. In: *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals* 68.3 (Sept. 2, 2015), pp. 204–223 (cit. on p. 125).
- [Farges] Olivier FARGES. « Conception optimale de centrales solaires   concentration : application aux centrales   tour et aux installations ”beam down” » (cf. p. 38, 137).
- [Farges+2015] O. Farges, J.J. B zian, H. Bru, M. El Hafi, R. Fournier, and C. Spiesser. “Life-Time Integration Using Monte Carlo Methods When Optimizing the Design of Concentrated Solar Power Plants”. In: *Solar Energy* 113 (Mar. 2015), pp. 57–62 (cit. on p. 38).
- [Fede+2018] Pascal Fede and Olivier Simonin. “Direct Simulation Monte-Carlo Predictions of Coarse Elastic Particle Statistics in Fully Developed Turbulent Channel Flows: Comparison with Deterministic Discrete Particle Simulation Results and Moment Closure Assumptions”. In: *International Journal of Multiphase Flow* 108 (Nov. 2018), pp. 25–41 (cit. on p. 95).
- [Fernholz+1996] H.H. Fernholz and P.J. Finley. “The Incompressible Zero-Pressure-Gradient Turbulent Boundary Layer: An Assessment of the Data”. In: *Progress in Aerospace Sciences* 32.4 (Aug. 1996), pp. 245–311 (cit. on p. 128).

- 
- [Formanov+2012] Sh. Formanov, A. Rasulov, and G. Raimova. “Solution of Initial-Boundary Value Problems for Nonlinear Parabolic Equations by Method of Statistical Modeling”. In: (2012), p. 15 (cit. on p. 129).
- [Fournier+2016] Richard Fournier, Stéphane Blanco, Vincent Eymet, Mouna El Hafi, and Christophe Spiesser. “Radiative, Conductive and Convective Heat-Transfers in a Single Monte Carlo Algorithm”. In: *Journal of Physics: Conference Series* 676 (Jan. 2016), p. 012007 (cit. on p. 33).
- [Galtier] Mathieu GALTIER. « Approche statistique du rayonnement dans les milieux gazeux hétérogènes : de l'échantillonnage des transitions moléculaires au calcul de grandeurs radiatives » (cf. p. 18, 130).
- [Galtier+2017] M. Galtier, M. Roger, F. André, and A. Delmas. “A Symbolic Approach for the Identification of Radiative Properties”. In: *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 196 (July 2017), pp. 130–141 (cit. on p. 137).
- [Gattepaille] Victor Gattepaille. “Modélisation de Procédés Photo-Réactifs Pour La Production Solaire de Vecteurs Énergétiques” (cit. on pp. 38, 131, 134).
- [George+1997] William K. George and Luciano Castillo. “Zero-Pressure-Gradient Turbulent Boundary Layer”. In: *Applied Mechanics Reviews* 50.12 (Dec. 1, 1997), pp. 689–729 (cit. on p. 128).
- [Gobet2016] Emmanuel Gobet. *Monte-Carlo Methods and Stochastic Processes: From Linear to Non-Linear*. Boca Raton London New York: CRC Press, 2016. 309 pp. (cit. on p. 129).
- [Golyandina2004] N. Golyandina. “Convergence Rate for Spherical Processes with Shifted Centres\*”. In: *Monte Carlo Methods and Applications* 10.3-4 (Jan. 2004) (cit. on p. 21).
- [Gopalsamy+1970] K. Gopalsamy and B.D. Aggarwala. “Monte Carlo Methods for Some Fourth Order Partial Differential Equations”. In: *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 50.12 (1970), pp. 759–767 (cit. on p. 126).
- [Gopalsamy+1973] K. Gopalsamy and B.D. Aggarwala. “On a Monte Carlo Method for Biharmonic Boundary Value Problems”. In: *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 53.5 (1973), pp. 293–298 (cit. on pp. 126, 128).
- [Grigoriu1997] Mircea Grigoriu. “Local Solutions of Laplace, Heat, and Other Equations by Itô Processes”. In: *Journal of Engineering Mechanics* 123.8 (Aug. 1997), pp. 823–829 (cit. on p. 21).
- [Grigoriu2000] M. Grigoriu. “A Monte Carlo Solution of Heat Conduction and Poisson Equations”. In: *Journal of Heat Transfer* 122.1 (Feb. 1, 2000), pp. 40–45 (cit. on p. 21).
- [Hahn2012] David W. Hahn. *Heat Conduction*. 3rd ed. Hoboken, N.J: Wiley, 2012. 718 pp. (cit. on p. 49).
- [HajiSheikh+1966] A. Haji-Sheikh and E. M. Sparrow. “The Floating Random Walk and Its Application to Monte Carlo Solutions of Heat Equations”. In: *SIAM Journal on Applied Mathematics* 14.2 (Mar. 1966), pp. 370–389 (cit. on pp. 20, 63, 125, 145).
- [HajiSheikh+1967] A. Haji-Sheikh and E. M. Sparrow. “The Solution of Heat Conduction Problems by Probability Methods”. In: *Journal of Heat Transfer* 89.2 (May 1, 1967), pp. 121–130 (cit. on pp. 20, 58).
- [Hammersley+1964] J. M HAMMERSLEY et D. C HANDSCOMB. *Monte Carlo Methods*. Dordrecht : Springer Netherlands, 1964 (cf. p. 98).
- [HenryLabordère+2014] Pierre Henry-Labordère, Xiaolu Tan, and Nizar Touzi. “A Numerical Algorithm for a Class of BSDEs via the Branching Process”. In: *Stochastic Processes and their Applications* 124.2 (Feb. 2014), pp. 1112–1140 (cit. on p. 129).
- [Hoffman+1976] T. J. Hoffman and N. E. Banks. “Monte Carlo Surface Density Solution to the Dirichlet Heat Transfer Problem”. In: *Nuclear Science and Engineering* 59.3 (Mar. 1976), pp. 205–214 (cit. on pp. 21, 22).
- [Howell+2016] John R. Howell, M. Pinar Mengüç, and Robert Siegel. *Thermal Radiation Heat Transfer*. Sixth edition. Boca Raton London New York: CRC Press, 2016. 982 pp. (cit. on p. 14).

- [Ibarrart+2018] Loris Ibarrart, Cyril Caliot, M. El Hafi, R. Fournier, S. Blanco, S. Dutour, J. Dauchet, J.-M. Tregan, V. Eymet, and V. Forest. “Combined Conductive-Convective-Radiative Heat Transfer in Complex Geometry Using the Monte Carlo Method : Application to Solar Receivers”. In: *Proceedings of the International Heat Transfer Conference 16*. International Heat Transfer Conference 16. Beijing, China: Begellhouse, 2018, pp. 8135–8142 (cit. on p. 91).
- [Inayat+2011] Amer Inayat, Jan Schwerdtfeger, Hannsjörg Freund, Carolin Körner, Robert F. Singer, and Wilhelm Schwieger. “Periodic Open-Cell Foams: Pressure Drop Measurements and Modeling of an Ideal Tetrakaidecahedra Packing”. In: *Chemical Engineering Science* 66.12 (June 2011), pp. 2758–2763 (cit. on p. 128).
- [James1990] F. James. “A Review of Pseudorandom Number Generators”. In: *Computer Physics Communications* 60.3 (Oct. 1990), pp. 329–344 (cit. on p. 10).
- [Jobic+2018] Yann Jobic, Prashant Kumar, Frédéric Topin, and René Occelli. “Transport Properties of Solid Foams Having Circular Strut Cross Section Using Pore Scale Numerical Simulations”. In: *Heat and Mass Transfer* 54.8 (Aug. 2018), pp. 2351–2370 (cit. on p. 30).
- [Kac1951] Mark Kac. “On Some Connections between Probability Theory and Differential and Integral Equations.” In: *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (1951), pp. 189–215 (cit. on pp. 19, 145).
- [Kanaun+2008] Sergey Kanaun and Oleksandr Tkachenko. “Effective Conductive Properties of Open-Cell Foams”. In: *International Journal of Engineering Science* 46.6 (June 2008), pp. 551–571 (cit. on p. 30).
- [Kovtanyuk+2012] Andrey E. Kovtanyuk, Nikolai D. Botkin, and Karl-Heinz Hoffmann. “Numerical Simulations of a Coupled Radiative-Conductive Heat Transfer Model Using a Modified Monte Carlo Method”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 55.4 (Jan. 2012), pp. 649–654 (cit. on p. 23).
- [Kraus1988] H. G. Kraus. “Hybrid Finite Element-Monte Carlo Method for Coupled Conduction and Gas Radiation Enclosure Heat Transport”. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 26.2 (Feb. 1988), pp. 361–378 (cit. on p. 23).
- [Kumar+2014] Prashant Kumar and Frederic Topin. “Investigation of Fluid Flow Properties in Open Cell Foams: Darcy and Weak Inertia Regimes”. In: *Chemical Engineering Science* 116 (Sept. 2014), pp. 793–805 (cit. on pp. 30, 124, 128).
- [Kurbanmuradov1979] O.A. Kurbanmuradov. “Estimation of the Mean Value of Steps of Epsilon-Spherical Process.” In: *Monte Carlo Methods in Computational Mathematics and Mathematical Physics 2* (1979) (cit. on p. 20).
- [Lapeyre+] P. Lapeyre, S. Blanco, C. Caliot, J. Dauchet, M. El Hafi, R. Fournier, O. Farges, J. Gautrais, and M. Roger. “Monte-Carlo and Sensitivity Transport Models for Domain Deformation.” In: () (cit. on p. 137).
- [Lapeyre+1998] Bernard LAPEYRE, Etienne PARDOUX et Rémi SENTIS. *Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion*. Mathématiques & applications 29. Berlin : Springer, 1998. 176 p. (cf. p. 18, 73).
- [Lapeyre+2019] Paule Lapeyre, Stephane Blanco, Cyril Caliot, Jérémie Dauchet, Mouna El Hafi, R Fournier, Olivier Farges, and Maxime Roger. “Monte-Carlo and Domain-Deformation Sensitivities.” In: *Proceedings of the 9th International Symposium on Radiative Transfer, RAD-19*. Begel House Inc. 2019 (cit. on p. 137).
- [Le Hardy+2016] D. Le Hardy, Y. Favennec, G. Domingues, and B. Rousseau. “3D Radiative Transfer Equation Coupled with Heat Conduction Equation with Realistic Boundary Conditions Applied on Complex Geometries”. In: *Journal of Applied Mathematics and Physics* 04.08 (2016), pp. 1488–1493 (cit. on p. 29).
- [Leidenfrost+] W. Leidenfrost and D. Lindemann. “Simple Met to Determine the Effective Conductivity of Porous Media Saturated with a Phase Changing Liquid”. In: (), p. 9 (cit. on p. 30).

- 
- [Lejay+2013a] Antoine Lejay and Sylvain Maire. “[New Monte Carlo Schemes for Simulating Diffusions in Discontinuous Media](#)”. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 245 (June 2013), pp. 97–116 (cit. on p. 72).
- [Lejay+2013b] Antoine Lejay, Sylvain Maire, and Géraldine Pichot. “Monte Carlo Simulations in Media with Interfaces.” In: 2013 (cit. on p. 117).
- [Lin+1978] S.L. Lin and J.N. Bardsley. “[The Null-Event Method in Computer Simulation](#)”. In: *Computer Physics Communications* 15.3-4 (Oct. 1978), pp. 161–163 (cit. on p. 18).
- [Madow1968] William G. Madow. *Elementary Sampling Theory*. Vol. 10. Aug. 1968 (cit. on pp. 9, 28).
- [Matsumoto+1998] Makoto Matsumoto and Takuji Nishimura. “[Mersenne Twister: A 623-Dimensionally Equidistributed Uniform Pseudo-Random Number Generator](#)”. In: *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation* 8.1 (Jan. 1, 1998), pp. 3–30 (cit. on p. 10).
- [Maxwell1865] James Clerk Maxwell. *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*. The Royal Society, 1865 (cit. on p. 14).
- [Metropolis+1949] Nicholas Metropolis and S. Ulam. “[The Monte Carlo Method](#)”. In: *Journal of the American Statistical Association* 44.247 (Sept. 1949), pp. 335–341 (cit. on p. 5).
- [Milandri+] A. Milandri, F. Asllanaj, G. Jeandel, and J.R. Roche. “Heat Transfer by Radiation and Conduction in Ybrous Media without Axial Symmetry”. In: (), p. 19 (cit. on p. 29).
- [Minkowycz+2006] W.J. Minkowycz, E.M. Sparrow, and Jayathi Murthy, eds. *Handbook of Numerical Heat Transfer*. 2nd ed. Hoboken, N.J.: J. Wiley, 2006. 968 pp. (cit. on pp. 20, 63).
- [Mishra+2007] Subhash C. Mishra and Hillol K. Roy. “[Solving Transient Conduction and Radiation Heat Transfer Problems Using the Lattice Boltzmann Method and the Finite Volume Method](#)”. In: *Journal of Computational Physics* 223.1 (Apr. 2007), pp. 89–107 (cit. on p. 29).
- [Mo+2017] Jingwen Mo and Heng Ban. “[Measurements and Theoretical Modeling of Effective Thermal Conductivity of Particle Beds under Compression in Air and Vacuum](#)”. In: *Case Studies in Thermal Engineering* 10 (Sept. 2017), pp. 423–433 (cit. on p. 30).
- [Modest2013] M.F. Modest. *Radiative Heat Transfer, Third Edition*. Kidlington, Oxford, U.K.: Academic Press, 2013 (cit. on p. 14).
- [Muller1956] Mervin E. Muller. “[Some Continuous Monte Carlo Methods for the Dirichlet Problem](#)”. In: *The Annals of Mathematical Statistics* 27.3 (Sept. 1956), pp. 569–589 (cit. on pp. 20, 63, 126, 145).
- [Nitsche+2009] Ludwig C. Nitsche and Prashanth Parthasarathi. “[Cubically Regularized Stokeslets for Fast Particle Simulations of Low-Reynolds-Number Drop Flows](#)”. In: *Chemical Engineering Communications* 197.1 (Oct. 23, 2009), pp. 18–38 (cit. on p. 125).
- [Patankar1980] Suhas V. Patankar. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences. Washington : New York: Hemisphere Pub. Corp. ; McGraw-Hill, 1980. 197 pp. (cit. on pp. 65, 140, 147).
- [Patel+1985] M. K. Patel, N. C. Markatos, and M. Cross. “[A Critical Evaluation of Seven Discretization Schemes for Convection-Diffusion Equations](#)”. In: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 5.3 (Mar. 1985), pp. 225–244 (cit. on p. 66).
- [Pearle+2010] Philip Pearle, Brian Collett, Kenneth Bart, David Bilderback, Dara Newman, and Scott Samuels. “[What Brown Saw and You Can Too](#)”. In: *American Journal of Physics* 78.12 (Dec. 2010), pp. 1278–1289 (cit. on p. 19).
- [Pearson1905] Karl Pearson. “[The Problem of the Random Walk](#)”. In: *Nature* 72.1865 (July 1905), pp. 294–294 (cit. on p. 121).



- [Penazzi+2019] L. Penazzi, S. Blanco, Cyril Caliot, C. Coustet, M. El Hafi, R. Fournier, Mathieu Galtier, Loris Ibarrart, and Maxime Roger. “Toward the Use of Symbolic Monte Carlo for Conduction-Radiation Coupling in Complex Geometries”. In: *Proceedings of the 9th International Symposium on Radiative Transfer, RAD-19*. Proceedings of the 9th International Symposium on Radiative Transfer, RAD-19. Athens, Greece: Begellhouse, 2019, pp. 311–318 (cit. on p. 138).
- [Pharr+2010] Matt Pharr and Greg Humphreys. *Physically Based Rendering: From Theory to Implementation*. 2nd ed. Burlington, MA: Morgan Kaufmann/Elsevier, 2010. 1167 pp. (cit. on pp. 28, 29).
- [Piaud] Benjamin PIAUD. « Modélisation mésoscopique des écoulements avec changement de phase à partir de l'équation de Boltzmann-Enskog. Introduction des effets thermiques. » (cf. p. 16).
- [Pohlhausen1921] E. Pohlhausen. “Der Wärmeaustausch Zwischen Festen Körpern Und Flüssigkeiten Mit Kleiner Reibung Und Wärmeleitung. The Heat Transfer between Solid Bodies and Fluids with Small Friction and Heat Conduction.” In: *Angew Math Mech* 1 (1921), pp. 115–121 (cit. on p. 91).
- [Pozrikidis+1997] Costas Pozrikidis and Joel H. Ferziger. *Introduction to Theoretical and Computational Fluid Dynamics*. Vol. 50. Sept. 1997 (cit. on pp. 124, 125).
- [Pozrikidis1992] C. Pozrikidis. *Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow*. Cambridge: Cambridge University Press, 1992 (cit. on p. 125).
- [Prakash1984] C. Prakash. “Application of the Locally Analytic Differencing Scheme to Some Test Problems for the Convection-Diffusion Equation”. In: *Numerical Heat Transfer* 7.2 (Apr. 1984), pp. 165–182 (cit. on p. 66).
- [Ranut2016] Paola Ranut. “On the Effective Thermal Conductivity of Aluminum Metal Foams: Review and Improvement of the Available Empirical and Analytical Models”. In: *Applied Thermal Engineering* 101 (May 2016), pp. 496–524 (cit. on p. 30).
- [Rayleigh1877] Lord Rayleigh. *The Theory of Sound*. 1877 (cit. on p. 121).
- [Redner2001] Sidney Redner. *A Guide to First-Passage Processes*. Cambridge, UK ; New York: Cambridge University Press, 2001. 312 pp. (cit. on p. 20).
- [Roger+2005] Maxime Roger, Stephane Blanco, Mouna El Hafi, and Richard Fournier. “Monte Carlo Estimates of Domain-Deformation Sensitivities”. In: *Physical Review Letters* 95.18 (Oct. 24, 2005), p. 180601 (cit. on p. 137).
- [Sabelfeld+1997] Karl K. Sabelfeld and Irina S. Shalimova. *Spherical Means for PDEs*. Berlin, Boston: De Gruyter, Dec. 31, 1997 (cit. on pp. 20, 126).
- [Sabelfeld2016] Karl K. Sabelfeld. “Random Walk on Spheres Method for Solving Drift-Diffusion Problems”. In: *Monte Carlo Methods and Applications* 22.4 (Jan. 1, 2016) (cit. on pp. 63, 146).
- [Sabelfeld2017] Karl K. Sabelfeld. “Random Walk on Spheres Algorithm for Solving Transient Drift-Diffusion-Reaction Problems”. In: *Monte Carlo Methods and Applications* 23.3 (Jan. 1, 2017) (cit. on p. 146).
- [Sans+2019] M. Sans, O. Farges, V. Schick, Christian Moyne, and Gilles Parent. “Modeling the Flash Method by Using a Conducto-Radiative Monte Carlo Algorithm: Application to Porous Media”. In: *Proceeding of Proceedings of the 9th International Symposium on Radiative Transfer, RAD-19*. Proceedings of the 9th International Symposium on Radiative Transfer, RAD-19. Athens, Greece: Begellhouse, 2019, pp. 319–326 (cit. on p. 33).
- [Singer+2008] A. Singer, Z. Schuss, A. Osipov, and D. Holcman. “Partially Reflected Diffusion”. In: *SIAM Journal on Applied Mathematics* 68.3 (Jan. 2008), pp. 844–868. arXiv: [objectObject] (cit. on p. 73).

- 
- [Sizyuk+2014] Valeryi Sizyuk and Ahmed Hassanein. “Efficient Monte Carlo Simulation of Heat Conduction Problems for Integrated Multi-Physics Applications”. In: *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals* 66.5 (Nov. 2014), pp. 381–396 (cit. on p. 32).
- [Skullerud1968] H.R. Skullerud. “The Stochastic Computer Simulation of Ion Motion in a Gas Subjected to a Constant Electric Field”. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 1.11 (Nov. 1, 1968), pp. 1567–1568 (cit. on p. 18).
- [Spalding1972] D.B. Spalding. “A Novel Finite Difference Formulation for Differential Expressions Involving Both First and Second Derivatives”. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 4.4 (July 1972), pp. 551–559 (cit. on p. 65).
- [Subramaniam+1991] Shanker Subramaniam and M.Pinar Mengüç. “Solution of the Inverse Radiation Problem for Inhomogeneous and Anisotropically Scattering Media Using a Monte Carlo Technique”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 34.1 (Jan. 1991), pp. 253–266 (cit. on p. 137).
- [Sun+2016] Yujia Sun, Xiaobing Zhang, and John R. Howell. “Evaluation of Three Different Radiative Transfer Equation Solvers for Combined Conduction and Radiation Heat Transfer”. In: *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 184 (Nov. 2016), pp. 262–273 (cit. on p. 29).
- [Suresh+1997] K. Suresh and J. Lagajac. “Fast Monte Carlo Domain Sampling for Discrete Field Value Estimation”. In: *Proceedings of the Fourth ACM Symposium on Solid Modeling and Applications - SMA '97*. The Fourth ACM Symposium. Atlanta, Georgia, United States: ACM Press, 1997, pp. 354–363 (cit. on p. 21).
- [Terrée] Guillaume TERRÉE. « Méthode de Monte-Carlo et non-linéarités : de la physique du transfert radiatif à la cinétique des gaz » (cf. p. 36, 41, 130).
- [Tomadakis+1993] Manolis M. Tomadakis and Stratis V. Sotirchos. “Effective Diffusivities and Conductivities of Random Dispersions of Nonoverlapping and Partially Overlapping Unidirectional Fibers”. In: *The Journal of Chemical Physics* 99.12 (Dec. 15, 1993), pp. 9820–9827 (cit. on p. 31).
- [Tornay+2017] Nathalie Tornay, Robert Schoetter, Marion Bonhomme, Serge Faraut, and Valéry Masson. “GENIUS: A Methodology to Define a Detailed Description of Buildings for Urban Climate and Building Energy Consumption Simulations”. In: *Urban Climate* 20 (June 2017), pp. 75–93 (cit. on p. 41).
- [Transvalidou+1996] Faye Transvalidou and Stratis V. Sotirchos. “Effective Diffusion Coefficients in Square Arrays of Filament Bundles”. In: *AIChE Journal* 42.9 (Sept. 1996), pp. 2426–2438 (cit. on p. 31).
- [Tregan2020] Jean-Marc Tregan. “Monte Carlo, Vers Une Ingénierie Statistique Des Transferts Thermiques.” 2020 (cit. on pp. 41, 124, 130, 131).
- [Unknown2015] Unknown. “Building San Fransokyo: Creating the World of Disney’s “Big Hero 6””. In: *ACM SIGGRAPH 2015 Computer Animation Festival on - SIGGRAPH '15*. ACM SIGGRAPH 2015 Computer Animation Festival. Los Angeles, California: ACM Press, 2015, pp. 169–169 (cit. on p. 28).
- [Veach1997] Eric Veach. “Robust Monte Carlo Methods for Light Transport Simulation”. 1997 (cit. on p. 27).
- [Vignoles+2011] Gerard L. Vignoles, Marc Donias, Christianne Mulat, Christian Germain, and Jean-François Delesse. “Simplified Marching Cubes: An Efficient Discretization Scheme for Simulations of Deposition/Ablation in Complex Media”. In: *Computational Materials Science* 50.3 (Jan. 2011), pp. 893–902 (cit. on p. 32).
- [Vignoles+2016] Gerard L. Vignoles and Alberto Ortona. “Numerical Study of Effective Heat Conductivities of Foams by Coupled Conduction and Radiation”. In: *International Journal of Thermal Sciences* 109 (Nov. 2016), pp. 270–278 (cit. on pp. 31, 33).

- [Vignoles2016] Gerard L. Vignoles. “A Hybrid Random Walk Method for the Simulation of Coupled Conduction and Linearized Radiation Transfer at Local Scale in Porous Media with Opaque Solid Phases”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 93 (Feb. 2016), pp. 707–719 (cit. on pp. 31–33, 73, 74).
- [Villefranque+2019] Najda Villefranque, Fleur Couvreur, Richard Fournier, Stéphane Blanco, Céline Cornet, Vincent Eymet, Vincent Forest, and Jean-Marc Tregan. “Path-Tracing Monte Carlo Library for 3D Radiative Transfer in Highly Resolved Cloudy Atmospheres”. In: *Journal of Advances in Modeling Earth Systems* 11.8 (Aug. 2019), pp. 2449–2473. arXiv: [objectObject] (cit. on pp. 18, 29, 30, 130).
- [Virag+1994] Z. Virag and G. Trincas. “An Improvement of the Exponential Differencing Scheme for Solving the Convection-Diffusion Equation”. In: *Advances in Engineering Software* 19.1 (Jan. 1994), pp. 1–20 (cit. on p. 92).
- [Weise+1997] K. Weise and H. Zhang. “Uncertainty Treatment in Monte Carlo Simulation.” In: *Journal of Physics A, Mathematical and General* 30.17 (Sept. 1997), pp. 5971–5980 (cit. on p. 137).
- [Woodcock+1965] E. Woodcock, T. Murphy, P. Hemmings, and S. Longworth. “Techniques Used in the GEM Code for Monte Carlo Neutronics Calculations in Reactors and Other Systems of Complex Geometry.” In: *Proc. Conf. Applications of Computing Methods to Reactor Problems*. Vol. 557. 2. 1965 (cit. on p. 18).
- [Woop+2013] Sven Woop, Carsten Benthin, and Ingo Wald. “Watertight Ray/Triangle Intersection”. In: 2.1 (2013), p. 18 (cit. on p. 117).
- [Wyszogrodzki+2012] Andrzej A. Wyszogrodzki, Shiguang Miao, and Fei Chen. “Evaluation of the Coupling between Mesoscale-WRF and LES-EULAG Models for Simulating Fine-Scale Urban Dispersion”. In: *Atmospheric Research* 118 (Nov. 2012), pp. 324–345 (cit. on p. 41).
- [Young+2006] D.L. Young, C.L. Chiu, C.M. Fan, C.C. Tsai, and Y.C. Lin. “Method of Fundamental Solutions for Multidimensional Stokes Equations by the Dual-Potential Formulation”. In: *European Journal of Mechanics - B/Fluids* 25.6 (Nov. 2006), pp. 877–893 (cit. on p. 125).
- [Zagajac1995] Jovan Zagajac. “A Fast Method for Estimating Discrete Field Values in Early Engineering Design.” In: *Proceedings of the Third ACM Symposium on Solid Modeling and Applications*. 1995, pp. 420–430 (cit. on pp. 21, 22).
- [Zhu+2008] H.P. Zhu, Z.Y. Zhou, R.Y. Yang, and A.B. Yu. “Discrete Particle Simulation of Particulate Systems: A Review of Major Applications and Findings”. In: *Chemical Engineering Science* 63.23 (Dec. 2008), pp. 5728–5770 (cit. on p. 95).







## RÉSUMÉ

### **Description en espaces de chemins et méthode de Monte Carlo pour les transferts thermiques couplés dans les structures fluides et solides, une approche compatible avec l'informatique graphique.**

Les travaux présentés dans ce manuscrit abordent la thématique du couplage des transferts thermiques. En particulier, ils s'inscrivent dans une réflexion actuelle autour de l'échantillonnage de chemins aléatoires par la méthode de Monte Carlo. Ce choix est justifié par un souhait d'obtenir des algorithmes ne présentant pas de contraintes sur la complexité des géométries étudiées. En effet, l'utilisation conjointe de ce type d'approches statistiques et des outils d'accélération de la synthèse d'image (grilles accélératrices) permet d'ores et déjà une résolution exacte du transfert radiatif en géométrie quelconque. Pour les transferts thermiques de type diffusif, l'exactitude des approches en espaces de chemins n'est atteignable que pour des configurations simples. On choisit donc d'utiliser des chemins statistiques approchés pour rendre compte de ce type de phénomènes thermiques dans des géométries quelconques. Parmi les choix disponibles, on retiendra des espaces de chemins construits autour du lancer de rayon, qui permettront donc de bénéficier de l'ensemble des avantages des outils développés par la communauté de l'informatique graphique. Une preuve de concept de l'insensibilité du temps de calcul au nombre de pores de la résolution thermique d'un échangeur poreux par l'utilisation de marches aléatoires conducto-convecto-radiatives sera ainsi présentée. Au-delà de ce résultat, une analyse du comportement de la méthode sur des échangeurs à canaux permettra de classifier des situations d'insensibilité, ou pas, à la complexité des milieux poreux étudiés. La capacité à expliquer les limites de cette insensibilité et le comportement de ce temps de calcul fera alors émerger un concept d'épaisseur thermique homologue à la problématique de l'épaisseur optique en transfert radiatif.

MOTS-CLÉS : Méthode de Monte Carlo, Transferts thermiques, Couplage, Conduction, Advection, Rayonnement, Mécanique des fluides, Synthèse d'image

---

## ABSTRACT

### **Paths description and Monte Carlo method for coupled heat transfer in fluid and solid structures, a computer graphics' compatible approach**

The present manuscript deals with the coupling of thermal heat transfers. More precisely, it addresses this coupling by making use of the Monte Carlo method and the sampling of random paths. This choice was made in the perspective of building algorithms that do not present constraints regarding the complexity of the studied geometry. Indeed, the combined use of this kind of statistical approaches, and acceleration tools coming from the image synthesis community, already allowed for an exact resolution of radiative transfer in arbitrary geometries. Regarding diffusive heat transfers, exact results using random paths are only achievable in academic configurations. Thus, approximate random paths are commonly used to account for this kind of thermal transport. Among the possible choices, we will use random paths built on ray tracing, therefore allowing to benefit once again from all the advantages of the tools developed in computer graphics. A proof of concept of the insensitivity of the computation time of the resolution of thermal transfers in porous exchangers to the number of pores by making use of conducto-convecto-radiative random paths will be presented. Beyond this result, an analysis of the behaviour of this method in ducts heat exchangers will allow to clarify when this kind of insensitivity can indeed be observed. This analysis will induce the concept of thermal thickness, by analogy with optical thickness for radiative transfer.

KEYWORDS: Monte Carlo Method, Heat transfer, Combined, Conduction, Convection, Radiation, Fluid dynamics, Ray tracing