



**HAL**  
open science

# Développement d'une méthode de discrétisation des EDPs basée sur le calcul extérieur discret

Rama Ayoub

► **To cite this version:**

Rama Ayoub. Développement d'une méthode de discrétisation des EDPs basée sur le calcul extérieur discret. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université de La Rochelle, 2020. Français. NNT : 2020LAROS015 . tel-03327048

**HAL Id: tel-03327048**

**<https://theses.hal.science/tel-03327048>**

Submitted on 26 Aug 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# LA ROCHELLE UNIVERSITÉ

ÉCOLE DOCTORALE EUCLIDE

LABORATOIRE DES SCIENCES DE L'INGÉNIEUR POUR L'ENVIRONNEMENT (LaSIE)

## THÈSE

présentée par

RAMA AYOUB

pour obtenir le titre de : DOCTEUR DE LA ROCHELLE UNIVERSITÉ

Discipline : « MÉCANIQUE »

---

### Développement d'une méthode de discrétisation des EDP basée sur le Calcul Extérieur Discret

---

Thèse dirigée par

AZIZ HAMDOUNI ET DINA RAZAFINDRALANDY

soutenue le 02 Octobre 2020

**Jury :**

MAJDI AZAIEZ	Professeur, Institut Polytechnique de Bordeaux	Rapporteur
JOSÉ-MARIA FULLANA	Professeur, Sorbonne Université	Rapporteur
CEDRIC LEBOND	Docteur Ingénieur, Naval Group	Examineur
CYRILLE ALLERY	Maître de Conférences - HDR, La Rochelle Université	Examineur
JACKY CRESSON	Professeur, Université de Pau	Examineur
MHAMED SOULI	Professeur, Université de Lille 1	Examineur
JEAN-FRANÇOIS SIGRIST	Ingénieur - HDR Eye-PI	Invité
AZIZ HAMDOUNI	Professeur, La Rochelle Université	Directeur de Thèse
DINA RAZAFINDRALANDY	Maître de Conférences, La Rochelle Université	Directeur de Thèse



# Développement d'une méthode de discrétisation des EDPs basée sur le calcul extérieur discret.

## Résumé

Le DEC (Discrete exterior calculus) est un intégrateur géométrique basé sur le calcul extérieur, qui a été appliqué avec succès dans différents domaines, en particulier en électromagnétisme et en mécanique des fluides isothermes. Sa construction combinatoire garantit que, comme dans le cas continu, l'opérateur dérivé extérieur discret  $d$  vérifie la relation fondamentale  $d^2 = 0$ . Par conséquent, les relations d'analyse vectorielle telles que  $\text{div rot} = 0$  et  $\text{rot grad} = 0$  sont naturellement satisfaites à la précision machine. Un opérateur crucial en calcul extérieur est l'opérateur de Hodge. Un choix populaire de l'opérateur de Hodge discret est le Hodge diagonal. Sa construction est basée sur un maillage dual circoncentrique. Dans la première partie de cette thèse, l'application du DEC en mécanique des fluides sur des écoulements anisothermes, en utilisant la formulation fonction de courant est présentée. Ensuite, dans la deuxième partie, une nouvelle construction de l'opérateur de Hodge discret est proposée. Cet opérateur appelé opérateur de Hodge analytique est général, et donc élargit le choix du maillage dual qui peut être basé sur n'importe quel point intérieur (circoncentre, barycentre, incentre ...). Des tests numériques révélant des bons résultats sont effectués et la convergence sur différents types de maillages (structurés, non structurés, non-Delaunay) est présentée. Dans la dernière partie de la thèse, nous introduisons l'expression équivalente des conditions aux limites de Neumann dans le contexte du DEC en 2D. La dérivation de cette expression peut s'effectuer sur tout type de maillage et indépendamment du choix de la discrétisation de l'opérateur de Hodge. Cela nous permet de résoudre les équations de Navier-Stokes en variables primaires vitesse-pression via des schémas de prédiction-correction adaptés au DEC. Dans un dernier chapitre, les développements précédents sont étendus au cas 3D. Dans chaque contribution, différents tests numériques évaluant la robustesse et la convergence sur différents types de maillage sont présentés.

**Mots clefs :** Calcul extérieur discret, Géométrie différentielle, Opérateur de Hodge, Mécanique des fluides, Schémas de prédiction correction.



# Development of a discretization method for PDE based on discrete exterior calculus

## Abstract

DEC (Discrete exterior calculus) is a geometric integrator based on exterior calculus, which has been successfully applied to different fields, namely to electromagnetism and isothermal fluid mechanics. Its combinatorial construction ensures that, as in the continuous case, the discrete exterior derivative operator  $d$  verifies the fundamental relation  $d^2 = 0$ . As a consequence, vector analysis relations such as  $\text{div curl} = 0$  and  $\text{curl grad} = 0$  are naturally satisfied at machine precision during the simulation. A crucial operator in exterior calculus is the Hodge operator. One of the most popular choice of discrete Hodge operator in DEC is the diagonal Hodge. Its construction is based on a circumcentric dual mesh. In this thesis, the application of the DEC in fluid mechanics on anisothermal flows, in the context of a formulation with a stream function is first presented. Then, in the second part of the thesis, a new construction of the discrete Hodge operator is proposed. The new operator called the analytical Hodge operator is general and thus extends the choice of the dual mesh which can be based on any interior point (circumcenter, barycenter, incenter ...). Numerical tests revealing the good results of our construction are performed and convergence on different types of meshes (structured, unstructured, non-Delaunay) is presented. In the last part of the thesis, we introduce the equivalent expression of Neumann boundary conditions in the context of DEC in 2D meshes. The derivation of this expression can be performed on any type of mesh and independently of the choice of discretization of the Hodge operator. This allows us to solve Navier-Stokes equations in primary variables (velocity-pressure) using prediction-correction schemes in the context of DEC. In the last chapter, the previous developments are extended to the 3D case. In each contribution, different numerical tests evaluating robustness and convergence on different types of meshes are presented.

**Keywords :** Discrete exterior calculus, Differential Geometry, Hodge operator, Fluid mechanics, Neumann boundary conditions, predictor corrector scheme.

## Remerciements

*Il me sera très difficile de remercier tout le monde car c'est grâce à l'aide de nombreuses personnes que j'ai pu mener cette thèse à son terme. Je voudrais tout d'abord remercier grandement mes directeurs de thèse, Aziz Hamdouni et Dina Razafindralandy, pour toutes leurs aides. Je suis ravi d'avoir travaillé en leur compagnie car outre leur appui scientifique, ils ont toujours été là pour me soutenir et me conseiller au cours de l'élaboration de cette thèse.*

*Je remercie également Mejdi AZEIZ et José-Maria FULLANA qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de ma thèse, ils ont pris le temps de lire mon manuscrit, de m'écouter et de discuter avec moi. Leurs remarques m'ont permis d'envisager mon travail sous un autre angle. Pour tout cela je les remercie.*

*Je remercie également Cedric LEBOND, Cyrille ALLERY, Jacky CRESSON, Mhamed SOULI et Jean-François SIGRIST pour l'honneur qu'ils me font d'être dans mon jury de thèse.*

*Il m'est impossible d'oublier mes collègues du laboratoire et mes amis pour leur soutien direct ou indirect, ainsi que toutes les personnes avec qui j'ai partagé de bons moments pendant ces années de thèse. Je tiens à remercier spécialement Mourad OULGHELOU pour toutes nos discussions et ses conseils qui m'ont accompagné tout au long de mon cursus de recherche. Ainsi que mes amies Sanae Boutarfass et Yossra ELKEBIR toujours attentionnées et à l'écoute.*

*Mes derniers remerciements vont à ma famille, mes sœurs et beaux-frères, et plus particulièrement mes parents qui ont fait de moi la personne que je suis aujourd'hui.*

*À vous tous, Merci ...*



# TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	vii
<b>1 INTRODUCTION À LA DEC</b>	<b>9</b>
1.1 INTRODUCTION . . . . .	10
1.2 RAPPELS SUR LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE . . . . .	10
1.2.1 Espace tangent et cotangent . . . . .	11
1.2.2 Forme différentielle . . . . .	12
1.2.3 Produit extérieur . . . . .	12
1.2.4 Produit intérieur . . . . .	13
1.2.5 Dérivée extérieure . . . . .	13
1.2.6 Dérivée de Lie . . . . .	15
1.3 VARIÉTÉ RIEMANNIENNE . . . . .	16
1.3.1 Opérateurs musicaux $\flat$ et $\sharp$ . . . . .	16
1.3.2 Opérateur de Hodge . . . . .	17
1.3.3 Codifférentiel et Laplacien . . . . .	20
1.4 DISCRÉTISATION DU DOMAINE . . . . .	21
1.4.1 Complexe simpliciel . . . . .	21
1.4.2 Orientation des simplexes . . . . .	24
1.5 MAILLAGE DUAL . . . . .	26
1.5.1 Orientation du complexe dual . . . . .	31
1.6 FORMES DIFFÉRENTIELLES DISCRÈTES ET DÉRIVÉE EXTÉRIEURE DISCRÈTE . . . . .	33
1.7 AUTRES OPÉRATEURS DU CALCUL EXTÉRIEUR DISCRET . . . . .	39
1.7.1 Opérateur de Hodge discret . . . . .	39
1.7.2 Opérateur codifférentiel discret . . . . .	41
1.7.3 Produit extérieur discret . . . . .	42
1.7.4 Des cochaînes aux formes différentielles . . . . .	42
1.7.5 Produit intérieur discret . . . . .	43
1.8 CONCLUSION . . . . .	44
<b>2 MISE EN ŒUVRE DU DEC EN MÉCANIQUE DES FLUIDES</b>	<b>45</b>
2.1 INTRODUCTION . . . . .	46
2.2 FORMULATION DU PROBLÈME . . . . .	46
2.2.1 Formulation tensorielle vis formulation calcul extérieur . . . . .	46

2.2.2	Formulation avec fonction du courant . . . . .	47
2.2.3	Discrétisation de l'équation . . . . .	48
2.3	RÉSULTATS NUMÉRIQUES . . . . .	50
2.3.1	Écoulements Couette et Poiseuille . . . . .	50
2.3.2	Vortex de Taylor-Green anisotherme . . . . .	53
2.3.3	Solutions Traveling waves . . . . .	55
2.3.4	Cavité différentiellement chauffée . . . . .	64
2.4	CONCLUSION . . . . .	68
3	UNE APPROCHE ANALYTIQUE DE DISCRÉTISATION ANALYTIQUE DE L'OPÉRATEUR DE HODGE . . . . .	69
3.1	INTRODUCTION . . . . .	70
3.2	DISCRÉTISATION ANALYTIQUE DE L'OPÉRATEUR DE HODGE . . . . .	70
3.2.1	Construction générale de l'opérateur de Hodge . . . . .	70
3.2.2	Illustration de la construction de l'opérateur de Hodge analytique . . . . .	73
3.3	RÉSULTATS NUMÉRIQUES . . . . .	76
3.3.1	Équation de Poisson . . . . .	76
3.3.2	Écoulements de fluides incompressibles . . . . .	79
3.3.3	Écoulements des fluides anisothermes . . . . .	81
3.3.4	Maillage non structuré . . . . .	84
3.4	CONCLUSION . . . . .	88
4	FORMULATION DEC AVEC VARIABLES PRIMAIRES EN MÉCANIQUE DES FLUIDES . . . . .	93
4.1	INTRODUCTION . . . . .	94
4.2	SCHÉMA DE PROJECTION EN DEC . . . . .	94
4.3	ÉQUATION DE POISSON AVEC UNE CONDITION DE NEUMANN EN DEC . . . . .	96
4.3.1	Discrétisation DEC . . . . .	97
4.4	SIMULATION DES ÉCOULEMENTS INCOMPRESSIBLES PAR LE SCHÉMA DE PRÉDICTION-CORRECTION EN DEC . . . . .	102
4.4.1	Écoulement des Vortex de Taylor-Green . . . . .	103
4.4.2	Écoulement de la cavité entraînée . . . . .	104
4.5	CONCLUSION . . . . .	110
5	VERS LE DEC EN 3D . . . . .	111
5.1	INTRODUCTION . . . . .	112
5.2	HODGE DISCRET 3D BASÉ SUR LES FORMES DE WHITNEY . . . . .	112
5.2.1	Les formes de Whitney 3D . . . . .	113
5.3	RÉSULTATS NUMÉRIQUES 3D . . . . .	116
5.3.1	Problème de Poisson avec conditions de Dirichlet au bords . . . . .	116
5.3.2	Problème de Poisson avec conditions de Neumann au bords . . . . .	118
5.3.3	Équations de Navier-Stokes . . . . .	120
5.3.4	Discrétisation tridimensionnelle du schéma de prédiction correction en DEC . . . . .	121

5.3.5	Taylor-Green 3D . . . . .	122
5.3.6	Écoulement de Beltrami instationnaire . . . . .	123
5.4	CONCLUSION . . . . .	125
A	MY STUDY . . . . .	132
	BIBLIOGRAPHIE . . . . .	175



# INTRODUCTION GÉNÉRALE

La simulation des phénomènes physiques apparaissant dans la nature ou dans les applications industriels pose beaucoup de problèmes, commençant du problème de base, puis sa modélisation mathématique et sa discrétisation numérique, jusqu'à sa résolution et interprétation des résultats. Afin d'assurer une bonne approximation de solutions respectant la physique du phénomène étudié, un soin particulier doit être apporté à la phase de discrétisation. Il est bien connu que les schémas de discrétisation numériques respectant la structure géométrique de l'équation, ont un bon comportement dans la reproduction des propriétés physiques. Dans les dernières décennies, les intégrateurs géométriques ont attiré l'intérêt des chercheurs vu leur propriété de préservation de la structure géométrique [1, 2]. En particulier, on cite les intégrateurs symplectiques qui préservent l'énergie d'un système hamiltonien sur un temps exponentiellement long [3] [4]. Les intégrateurs multisymplectiques montrent une robustesse supérieure à des schémas préservant simplement l'énergie [5]. On peut aussi citer que la préservation de la structure lagrangienne au niveau discret permet aux intégrateurs variationnels de respecter les lois de conservation via un théorème de Noëther discret [1]. Dans le cas d'un système ne dérivant pas d'un lagrangien, la préservation du groupe de symétrie, sur laquelle se base les intégrateurs invariants [6], ont permis de capter des solutions auto-similaire (pseudo- chocs,...) sans introduction de solutions parasites mais aussi de respecter tout simplement par exemple l'invariance galiléenne (contrairement à beaucoup d'autres schémas usuels).

Plusieurs types d'intégrateurs géométriques existent. Dans ce manuscrit, nous nous intéressons à une propriété plus en amont de la géométrie différentielle, qui est la structure d'homologie. Cette structure résulte de la propriété fondamentale  $d^2 = 0$ , où  $d$  est l'opérateur de dérivation extérieure. Formulée en calcul extérieur, cette propriété regroupe les identités du calcul vectoriel  $\text{rot grad} = 0$  et  $\text{div rot} = 0$  dans le cas particulier de  $\mathbb{R}^3$ . En simulation numérique, les opérateurs  $\text{rot}$ ,  $\text{grad}$  et  $\text{div}$  sont généralement discrétisés séparément. Les identités  $\text{rot grad} = 0$  et  $\text{div rot} = 0$  ne sont alors pas préservées par les discrétisations numériques. En conséquence, des phénomènes parasites notamment, une masse, une circulation, un potentiel ou une portance sont susceptibles d'apparaître dans la solution numérique. La préservation de ces identités et de toutes leurs homologues  $n$ -dimensionnelles est donc importantes et peut être accomplie en vérifiant la propriété d'homologie  $d^2 = 0$ . C'est d'ailleurs le but de certaines méthodes de discrétisation spatiale comme la discrétisation mimétique [7] et le Calcul Extérieur en Éléments Finis (FEEC) [8].



Le calcul extérieur fournit un formalisme concis pour écrire les équations d'une manière intrinsèque, indépendamment des coordonnées, pour coder la structure de nombreuses équations et pour calculer les lois de conservation. Au cœur du calcul extérieur se trouvent les formes différentielles. Il est bien clair que les équations des problèmes physiques, en particulier celles de l'électromagnétisme, s'écrivent mieux avec des formes différentielles et des opérateurs du calcul extérieur (voir [9, 10, 11] et la série de travaux de Bossavit [12, 13, 14, 15, 16]). L'utilisation des formes extérieures a en particulier donné un sens plus clair aux notions traditionnelles de pseudo-vecteurs. En effet, le champ magnétique  $\mathbf{B}$ , considéré comme un pseudo-vecteur de  $\mathbb{R}^3$ , n'est en fait qu'un représentant d'une 2-forme différentielle  $B$  (via l'opérateur de Hodge qu'on rappellera plus tard). Le champ électrique  $\mathbf{E}$ , quant à lui, peut être vu comme une 1-forme différentielle  $E$ .

Récemment, de nouveaux intégrateurs géométriques discrets, appelés DEC (Discrete Exterior Calculus) ont été développés [17]. Ces intégrateurs discrets peuvent être considérés de la famille des discrétisations de type volumes finis. Le DEC vise à développer une version discrète et intégrée de la théorie du calcul extérieur. Plus généralement, c'est une tentative qui a réussi à créer une théorie discrète de la géométrie et de la topologie différentielle, où la plupart des équations de la physique sont formulées. Une propriété importante du DEC est que cette discrétisation reproduit exactement le théorème de Stokes et vérifie exactement la relation  $d^2 = 0$  à l'échelle discrète. En mécanique des fluides, cette dernière propriété permet de vérifier exactement la condition d'incompressibilité, et évite l'apparition de solutions parasites. Cela garantit également la préservation exacte de la circulation dans un écoulement de fluide parfait. Par exemple, Elcott et al. [18] ont utilisé le DEC pour résoudre les équations d'Euler sur une surface plane et sur une surface courbée, avec vérification exacte du théorème de Kelvin sur la préservation de la circulation le long d'une courbe fermée. Pour décrire/retranscrire un problème physique en DEC, tout commence par la discrétisation du domaine comme un complexe simplicial (qui va jouer le rôle de la variété discrète) et les  $k$ -formes discrètes sont définies comme cochaînes sur les  $k$ -simplexes. Bien que les opérateurs discrets ont fait leur apparition dans la littérature pendant un certain temps, le DEC offre une approche unifiée à leur construction, soutenue par la rigueur de la topologie différentielle. Les principales étapes de cette approche peuvent être résumées comme suit. En premier, on formule les équations aux dérivées partielles du problème physique en utilisant les opérateurs différentiels continus du calcul extérieur. Une deuxième étape consiste à remplacer le domaine, les variables et les opérateurs par leurs homologues discrets. Enfin, on résout le système linéaire résultant par des méthodes numériques de résolution de systèmes linéaires comme LU, gmres, etc.

Dans le cadre du DEC, les définitions et les théorèmes imitent leurs homologues continus. Dans le même esprit du cas continu, les outils de base dans la théorie discrète du calcul extérieur sont les formes différentielles discrètes, considérées comme des cochaînes. On peut trouver l'approche des formes différentielles discrètes dans les travaux de Tonti

[19, 20] et plus récemment dans [21, 22]. En DEC, une variété est discrétisée en un complexe simplicial (ensemble de nœuds, segments, triangles, ...). Ainsi les formes discrètes sont définies comme cochaîne sur des chaînes de simplexes. Notons que les cochaînes représentent des formes intégrées. L'utilisation de chaînes simpliciales et cochaînes en DEC est apparu dans plusieurs travaux, notamment [23, 22, 24]. Dans ces travaux, les auteurs considèrent que les formes sont des versions interpolées linéairement de formes différentielles continues. Des idées similaires sur des maillages non-simpliciaux et d'un point de vue des différences finies sont mentionnés dans les travaux de Hyman et al. [25]. Les formes discrètes pour des maillages formés de rectangles sont définies dans le papier de Chard et Shapiro [26]. Cependant ils définissent uniquement l'opérateur  $d$  du calcul extérieur. Notons que les discrétisations mimétique et le DEC utilisent la cochaîne comme formes discrètes. Ce cadre offre une discrétisation naturellement cohérente des opérateurs de dérivation (divergence, gradient, rotationnel) puisque dans le calcul extérieur, ils sont représentés par l'opérateur  $d$ . Le développement du DEC qui sera présenté dans ce manuscrit est inspiré des travaux de Bossavit développés en électromagnétisme [27, 28, 29, 30, 31, 32] et des travaux plus récents [33, 34, 35, 36]. En mécanique des fluides, la méthode du DEC a été utilisée avec succès pour la simulation des écoulements des fluides non-visqueux, la résolution des équation de Darcy et des équations de Navier-Stokes dans des configurations basiques, et l'étude de la stabilité des vortex sur une sphère [18, 37].

Le DEC ainsi que les discrétisations mimétiques ont utilisés les notions du dual des complexes afin de discrétiser l'opérateur de Hodge. Dans une approche par éléments finis, l'opérateur de Hodge discret est construit tout simplement en appliquant le Hodge continu aux formes polynomiales différentielles constituant la base éléments finis. Plus précisément, l'opérateur de Hodge discret est dans ce cas représenté par la matrice de masse. En DEC, définir un Hodge discret est moins trivial. Cela est dû au fait que le DEC agit sur des formes déjà intégrées. En particulier, afin d'assurer la bijectivité du Hodge discret comme dans le cas continu, l'introduction d'un maillage dual est indispensable. Le dual circoncentrique est un choix populaire de maillages duals, en raison de sa nature orthogonale par rapport au maillage primal. Cette orthogonalité permet une construction simple d'un Hodge discret, ayant une représentation matricielle diagonale [28, 38]. Les entrées de cette matrice représentant ce Hodge discret, appelée Hodge diagonal, sont simplement les rapports des volumes des cellules duales et leurs correspondantes primales. Le Hodge diagonal a été initialement conçu pour des maillages simpliciaux complètement bien centrées, c'est-à-dire des maillages où chaque simplexe contient le centre de la sphère circonscrite. En pratique, il est difficile de générer ce type de triangulation [39]. Il peut être facile pour certaines géométries spécifiques dans  $\mathbb{R}^2$  [40, 41, 42] mais ce n'est pas le cas pour des géométrie simples en 3D. Pour les géométries plus complexes, VanderZee et al. proposent un algorithme de retraitement qui permet d'obtenir un maillage 2D bien centré, mais qui n'est pas applicable dans le cas des maillages 3D [43]. Hirani et ses

collaborateurs ont étendu l'utilisation du Hodge diagonal à des maillages Delaunay et non Delaunay par paires, en introduisant des volumes duaux élémentaires signés [44, 45]. Toutefois, cette approche peut encore conduire à des cotés duaux vides et à des volumes nuls lorsque les contributions des volumes positives égalisent les contributions des volumes négatives. Dans ce cas le Hodge diagonal dégénère. Mullen et al. [46] ont proposé une optimisation de la triangulation pour la discrétisation diagonale du Hodge. Ils introduisent pour cela des duals pondérés et des circoncentres pondérés, et construisent le maillage en minimisant l'erreur sur le Hodge diagonal. Mais cette technique ne génère pas des maillages bien centrés. De plus, cette approche peut devenir coûteuse en temps de calcul, notamment pour les problèmes tels que l'interaction fluide-structure où le domaine spatiale change à chaque pas de temps. Notons également que toutes ces discrétisations de l'opérateur de Hodge exigent que le maillage dual soit basé sur le centre circoncentrique, ce qui ne laisse aucune marge de manœuvre pour une optimisation.

Un autre opérateur discret de Hodge, étudié par Bossavit depuis l'introduction du DEC, est le Hodge de Galerkin [47, 12]. Cet opérateur correspond à une matrice de masse dans un cadre d'éléments finis, avec les formes de Whitney comme fonctions de base [48, 49]. L'inconvénient de l'utilisation du Hodge de Galerkin dans le DEC est que, non seulement il introduit une incohérence de discrétisation, mais aussi il n'est pas exact même pour des formes constantes. Une discrétisation du Hodge toujours basée sur les formes Whitney, est proposée dans [50]. Cette dernière est plus compatible avec DEC qu'avec la méthode des éléments finis en raison de la nécessité d'un maillage dual. Elle est définie par interpolation via les formes de Whitney puis intégration sur les simplexes duaux. L'opérateur qui en résulte est appelé Hodge de Whitney. Un autre opérateur de Hodge discret qui utilise également les formes de Whitney est proposé dans [51]. Contrairement à l'opérateur de Hodge de Whitney, cet opérateur appelé Hodge géométrique ne nécessite pas d'interpolation ni d'intégration, mais nécessite un maillage dual basé sur les barycentres pour des raisons de symétrie [52]. En effet certains auteurs affirment que l'opérateur de Hodge discret devrait être symétrique, puisque  $\star\omega \wedge \theta$  égale à  $\star\theta \wedge \omega$  pour deux 1-formes différentielles arbitraires  $\omega$  et  $\theta$ , avec  $\wedge$  étant le produit extérieur et  $\star$  l'opérateur de Hodge [51, 53]. Cependant, cette relation n'implique pas que l'opérateur de Hodge discret doit être symétrique. C'est la combinaison du Hodge discret avec le produit extérieur discret entre deux 1-formes discrètes qui devrait être symétrique. En fait, l'exigence de symétrie peut être justifiée dans une approche par éléments finis comme le fait Hiptmair dans [53] mais pas en DEC. De plus comme mentionné dans [51, 54, 55], la restriction de symétrie est une condition trop forte.

Dans le premier chapitre de ce manuscrit, le DEC, tel qu'il a été introduit par Bossavit ou Hirani sera présenté. On y précisera la définition d'un maillage bien centré et montrera comment on discrétise une forme et comment la discrétisation de l'opérateur de dérivée extérieure préservera la propriété  $d^2 = 0$ . On rappellera en particulier la méthode de dis-

crétisation la plus usuelle de l'opérateur de Hodge, qui débouche sur ce qu'on appellera opérateur de Hodge diagonal. Dans la littérature, ces opérateurs-là ont été utilisés pour résoudre, comme on l'a mentionné, des problèmes d'électromagnétisme. En mécanique des fluides, des simulations d'écoulements compressibles ont été réalisées en DEC [56].

Le deuxième chapitre de cette thèse consistera à l'extension de ces travaux à des problèmes d'écoulements anisothermes. Comme dans [56] une formulation en fonction de courant sera adoptée. Sur différents exemples d'écoulements qui seront traités, on montrera que la condition d'incompressibilité est vérifiée à l'ordre de la précision machine. Les simulations qui seront présentés dans ce chapitre se baseront sur l'opérateur de Hodge discret diagonal, comme ce qui se fait la plupart du temps dans la littérature.

À la base, l'opérateur de Hodge diagonal est conçu pour des maillages bien centrés (difficile à générer). Grâce à l'introduction d'un signe lors de sa construction élémentaire, cet opérateur peut être étendu à des maillages plus généraux [57]. Toutefois, cette généralisation échoue lorsque le maillage contient des triangles droits car la matrice qui en résulte est singulière. Dans le chapitre 3, On surmonte cette difficulté en introduisant une autre méthode de discrétisation de l'opérateur de Hodge. Cette discrétisation est indépendante du maillage dual utilisé, et non restreinte à des maillages duaux basés sur le circoncentre. En effet, n'importe quel point, à l'intérieur ou même à l'extérieur des top-simplexes peut être considéré. Cette liberté de choix permettra d'effectuer une optimisation sur la position des centres (minimisation de l'erreur globale, minimisation d'une énergie, etc). Toutefois, cette étape d'optimisation ne sera pas mise en œuvre dans cette thèse mais en restera une perspective.

La formulation par fonction de courant est souvent utilisée dans la résolution par DEC des problèmes de la mécanique des fluides, vu qu'elle permet de se débarrasser de la variable de pression. Toutefois, pour certaines applications, il est plus intéressant de résoudre en vitesse-pression (variables primaires). Les schémas de type prédiction-correction sont souvent utilisés pour cet effet. La mise en œuvre de ces schémas nécessite généralement la résolution d'un problème avec condition aux limites de Neumann. Ainsi, pour pouvoir les adapter au DEC, il nous faut décrire ce que c'est qu'une condition de Neumann en DEC. Cette condition sera donnée au chapitre 4 dans le cas général indépendamment du type de maillage dual et de l'opérateur de Hodge discret utilisés. Une formulation du schéma de prédiction-correction en DEC en résultera par la suite.

Le dernier chapitre de cette thèse traitera la résolution du problème de Navier-Stokes tridimensionnel. En effet, tous les travaux sur le DEC en mécanique des fluides sont restreints au cas bidimensionnel. Ceci est dû au fait que la génération d'un maillage bien centré 3D est compliquée. En attendant l'extension au cas 3D de la nouvelle méthode de discrétisation de l'opérateur de Hodge qui a été présentée au chapitre 3, on propose d'utiliser une discrétisation de l'opérateur de Hodge par les formes de Whitney en 3D. Notre but est de réaliser les premiers tests aux cas tridimensionnel sans restriction aux

maillages bien centrés.

Les contributions majeurs de cette thèse sont donc les suivants :

1. Appliquer le DEC en mécanique des fluides sur des problèmes des écoulements anisothermes 2D. La résolution se fait en utilisant les schémas en fonction de courant.
2. Nous proposons une nouvelle méthode de discrétisation de l'opérateur de Hodge en 2D appelé Hodge analytique avec liberté de choix du type du maillage dual.
3. Nous reformulons les conditions aux bords de type Neumann en formalisme DEC. Ces conditions sont utilisées pour formuler les schémas de prédiction-correction en DEC et résoudre le problème de Navier-Stokes en variables primaires.
4. Grâce au schéma de prédiction formulé en calcul extérieur et grâce à la condition de Neumann en DEC généralisée vers la dimension 3, nous étendons l'application du DEC vers des problèmes tri-dimensionnels.

Ce manuscrit est organisé comme suit :

- Le Chapitre 1 est consacré à la présentation du calcul extérieur discret. La première partie de ce chapitre concerne quelques rappels sur la géométrie différentielle et précisément une description théorique détaillée du calcul extérieur et ces opérateurs dans le cadre continu. Au fur et à mesure, des exemples sur le cas particulier d'une variété riemannienne dans  $\mathbb{R}^3$  seront présentés. La deuxième partie du chapitre est dédiée à une description des opérateurs et des éléments du calcul extérieur au niveau discret, ce qui définit le DEC.
- Dans le chapitre 2 le DEC est mis en œuvre pour la résolution des problèmes d'écoulements anisothermes. Nous résolvons en formulation fonction de courant et utiliserons l'opérateur de Hodge diagonal dans la formulation DEC. Les tests numériques seront effectués sur les problèmes d'écoulements de Poiseuille, Couette, vortex de Taylor-Green et le problème des ondes progressives.
- Le Chapitre 3 est dédié à l'étude de la discrétisation de l'opérateur de Hodge. La construction de notre discrétisation analytique sera détaillée dans la première section. Ensuite, la mise en œuvre et le potentiel du Hodge analytique seront examinés sur différentes configurations : Maillages Delaunay (Bien centré et droit) et maillage non Delaunay à différents pourcentages. Dans tous ces tests, le maillage dual est construit en utilisant différents types de centres (barycentre, incentre et circoncentre).
- Le Chapitre 4 est voué à la description des conditions de Neumann dans le contexte du calcul extérieur discret. Ce chapitre commence par donner un bref rappel des schémas de prédiction-corrrections usuels puis présente une formulation équivalente en calcul extérieur. Ce dernier est ensuite mis en œuvre pour la résolution du problème des vortex de Taylor-Green et du problème de la cavité entraînée.
- Le Chapitre 5 constituera une ouverture vers l'application du DEC dans la résolution des problèmes d'écoulements tridimensionnels sur des maillages arbitraires. Dans ce cas, la résolution est effectuée sur les variables primaires en utilisant le

schéma de prédiction correction et l'opérateur de Hodge discret est construit en utilisant les formes de Whitney. Les tests numériques préliminaires seront effectués sur le problème des vortex de Taylor-Green et le problème de Beltrami instationnaire.

On résumera les apports de la thèse dans une conclusion générale. On y présentera aussi quelques perspectives. On note que dans ce travail, on a choisit de faire comme ce qui a été fait dans la littérature, de partir des équations de Navier-Stokes usuelles et les transporter en formulation calcul extérieur. Mais idéalement, il faudrait reformuler entièrement la mécanique des milieux continus en calcul extérieur, avec des formes extérieures et de partir du principe général de la mécanique de milieux continue et adapter à la DEC (voir [58]).



# INTRODUCTION À LA DEC



## SOMMAIRE

---

1.1	INTRODUCTION . . . . .	10
1.2	RAPPELS SUR LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE . . . . .	10
1.2.1	Espace tangent et cotangent . . . . .	11
1.2.2	Forme différentielle . . . . .	12
1.2.3	Produit extérieur . . . . .	12
1.2.4	Produit intérieur . . . . .	13
1.2.5	Dérivée extérieure . . . . .	13
1.2.6	Dérivée de Lie . . . . .	15
1.3	VARIÉTÉ RIEMANNIENNE . . . . .	16
1.3.1	Opérateurs musicaux $\flat$ et $\sharp$ . . . . .	16
1.3.2	Opérateur de Hodge . . . . .	17
1.3.3	Codifférentiel et Laplacien . . . . .	20
1.4	DISCRÉTISATION DU DOMAINE . . . . .	21
1.4.1	Complexe simpliciel . . . . .	21
1.4.2	Orientation des simplexes . . . . .	24
1.5	MAILLAGE DUAL . . . . .	26
1.5.1	Orientation du complexe dual . . . . .	31
1.6	FORMES DIFFÉRENTIELLES DISCRÈTES ET DÉRIVÉE EXTÉRIEURE DISCRÈTE . . . . .	33
1.7	AUTRES OPÉRATEURS DU CALCUL EXTÉRIEUR DISCRET . . . . .	39
1.7.1	Opérateur de Hodge discret . . . . .	39
1.7.2	Opérateur codifférentiel discret . . . . .	41
1.7.3	Produit extérieur discret . . . . .	42
1.7.4	Des cochaînes aux formes différentielles . . . . .	42
1.7.5	Produit intérieur discret . . . . .	43
1.8	CONCLUSION . . . . .	44

---



## 1.1 INTRODUCTION

La géométrie différentielle est un bon cadre pour dégager la structure intrinsèque des équations de la physique. Certaines de ces structures se formulent plus clairement dans le cadre du calcul différentiel extérieur, dont l'outil de base est les formes différentielles extérieures. En fait, beaucoup d'outils utilisés en mécanique (forme de Liouville, théorème de Noëther, les opérateurs de dérivation tensorielle, les flux, les circulations, ...) se formalisent de manière élégante en calcul extérieur. Le DEC vise à développer une version discrète de la théorie du calcul extérieur, et plus généralement de la géométrie différentielle. C'est pour cette raison qu'on commence le chapitre par donner un rappel sur la géométrie différentielle. Après la présentation du calcul extérieur dans sa version continue et afin de faire des études numériques sur des applications à la mécanique des fluides, les opérateurs du calcul extérieur sont présentés avec leurs discrétisations tels que développés dans [38]. Ce cadre offre une discrétisation naturellement cohérente des opérateurs de dérivation (divergence, gradient, rotationnel) puisque, dans le calcul extérieur, ils sont représentés par un seul opérateur  $d$ , la dérivée extérieure. D'autres opérateurs comme le codifférentiel ( $\delta$ ) et l'opérateur de Hodge étoile ( $\star$ ), le produit extérieur ( $\wedge$ ), le produit intérieur ( $\iota_X$ ) et la dérivé de Lie ( $\mathcal{L}_X$ ) sont aussi discrétisés.

## 1.2 RAPPELS SUR LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

**Définition 1.1** *Considérons  $M$  un espace topologique. Une carte de dimension  $n$  sur  $M$  est un couple  $(U, \Phi)$  où  $U$  est un ouvert de  $M$  et  $\Phi$  est un homéomorphisme de  $U$  dans  $\Phi(U) = O \subseteq \mathbb{R}^n$ .*

$$\Phi : \begin{array}{l} U \longrightarrow \Phi(U) \\ p \longmapsto \Phi(p) = (x^1, \dots, x^n). \end{array} \quad (1.1)$$

On note qu'un point de  $M$  peut appartenir à deux cartes  $(U, \Phi)$  et  $(V, \Psi)$ .

**Définition 1.2** *Deux cartes  $(U, \Phi)$  et  $(V, \Psi)$  sont dites compatibles (ou  $c^k$ -liées) si et seulement si :*

$\Phi \circ \Psi^{-1} : \Psi(U \cap V) \longrightarrow \Phi(U \cap V)$  est un  $c^k$ -difféomorphisme.

**Définition 1.3** *Un  $c^k$ -atlas  $A$  est une famille de cartes sur  $M$ . On a  $A = (U_\alpha, \Phi_\alpha)_{\alpha \in I}$  qui doit vérifier*

1. Les ouverts  $U_\alpha$  recouvrent  $M$ ,  $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$
2. Toutes les cartes de  $A$  sont compatibles deux à deux.

**Définition 1.4** *Deux atlas sont équivalents si leur union forme aussi un atlas, i.e  $A = \{(U_\alpha, \Phi_\alpha), \alpha \in I\}$  et  $B = \{(V_\beta, \Psi_\beta), \beta \in J\}$  sont équivalents si toute carte de  $A$  est  $c^k$ -liée à toute carte de  $B$ .*

**Définition 1.5** *Un atlas est dit atlas maximal si il n'est pas contenu dans un autre atlas équivalent.*

D'après toutes ces définitions, on peut définir maintenant une variété différentielle.

**Définition 1.6** Une variété différentielle  $M$  de dimension  $n$  est un espace topologique séparé à base dénombrable équipé d'un atlas maximal.

On dit que la variété est  $c^k$  si les toutes applications  $\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}$  sont  $c^k$ . Si  $k$  est l'infini on dit que la variété est lisse.

On suppose dans tout ce qui suit que notre variété est lisse.

### 1.2.1 Espace tangent et cotangent

Pour définir l'espace tangent, on considère des courbes, c-à-d des applications de classe  $C^1$  d'un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  contenant 0 vers  $M$ .

**Définition 1.7** Deux courbes  $C_1$  et  $C_2$  sont tangentes au point  $p$  si :

$$— C_1(0) = C_2(0) = p$$

$$— Il existe une carte locale  $(U, \Phi)$  tel que  $p \in U$  et  $\frac{d}{dt}(\Phi \circ C_1)(0) = \frac{d}{dt}(\Phi \circ C_2)(0)$ .$$

Cette définition est indépendante de la carte choisie.

**Définition 1.8** Un vecteur tangent à  $M$  en  $p$  est une classe d'équivalence de courbes tangentes en  $p$ .

On définit l'espace tangent en tout point  $p$  appartenant à  $M$  comme étant l'ensemble des vecteurs tangent à  $M$  au point  $p$ . C'est un espace vectoriel de dimension  $n$  et qu'on note  $T_pM$ . Le fibré tangent est défini comme l'union disjointe de tous les espaces tangents définis sur les points de  $M$ .

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_pM$$

**Définition 1.9** Un champ de vecteurs est la donnée, en chaque point  $p$  de  $M$ , d'un élément  $\xi_p \in T_pM$ , c'est-à-dire une application

$$\begin{aligned} \xi : M &\longrightarrow TM \\ p &\longmapsto \xi(p) = (p, \xi_p). \end{aligned} \tag{1.2}$$

On appelle espace cotangent en  $p$ , noté  $T_p^*M$ , le dual de l'espace tangent  $T_pM$ . Ses éléments sont appelés 1-formes. Comme pour l'espace des vecteurs tangents, on définit  $T^*M$  le fibré cotangent comme l'union disjointe de tous les espaces cotangents. On note  $x^1, \dots, x^n$  les coordonnées locales sur  $M$ .  $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$  représente la base canonique liée aux coordonnées  $x^i$  de  $T_pM$  et  $\{dx^1, \dots, dx^n\}$  la base duale dans  $T_p^*M$ , définie par

$$dx^i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_j^i.$$

### 1.2.2 Forme différentielle

**Définition 1.10** Soit  $\Lambda^k(T^*M) := \bigcup_{p \in M} \Lambda^k(T_p^*M)$ , l'union disjointes des espaces des  $k$ -formes  $\Lambda^k(T_p^*M)$  sur l'espace vectoriel  $T_pM$ . Une  $k$ -forme différentielle  $\omega^k$  sur  $M$  est la donnée, en chaque point  $p$  de  $M$ , d'un élément  $\omega_p^k$  de  $\Lambda^k(T_p^*M)$  c'est-à-dire une application

$$\omega^k : \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \Lambda^k(T^*M) \\ p & \longmapsto & \omega^k(p) = (p, \omega_p^k). \end{array} \quad (1.3)$$

$\omega^k$  associe un réel  $\omega_p^k(\xi_p)$  en tout  $p$  à tout champ de vecteur  $\xi$ . L'ensemble des  $k$ -formes différentielles sur une variété  $M$  forment un espace vectoriel qu'on le note  $\Lambda^k(M)$ . La dimension de  $\Lambda^k(M)$  dépend de  $k$ . On différencie deux cas :

$$\dim \Lambda^k(M) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \text{ ou } k > n \\ \binom{n}{k} & \text{si } k \leq n. \end{cases}$$

Dans ce qui suit, le produit extérieur, la dérivée extérieure, le produit intérieur et d'autres opérateurs seront définis. De même l'opérateur de Hodge étoile sera présenté.

### 1.2.3 Produit extérieur

**Définition 1.11** Soient  $\omega^k$  et  $\alpha^l$  deux formes différentielles respectivement dans  $\Lambda^k(M)$  et  $\Lambda^l(M)$ .

$$\wedge : \begin{array}{ccc} \Lambda^k(M) \times \Lambda^l(M) & \longrightarrow & \Lambda^{k+l}(M) \\ (\omega^k, \alpha^k) & \longmapsto & \omega^k \wedge \alpha^l \end{array} \quad (1.4)$$

Pour tout point  $p$  de  $M$  et tout  $(k+l)$ -vecteur  $(\xi_1, \dots, \xi_{k+l})$  de l'espace tangent en  $p$  à  $M$ ,  $T_pM$  on a :

$$(\omega^k \wedge \alpha^l)_p(\xi_1, \dots, \xi_{k+l}) = \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \frac{(-1)^{\text{sign}(\sigma)}}{k!l!} \omega_p^k(\xi_{\sigma_1}, \dots, \xi_{\sigma_k}) \alpha_p^l(\xi_{\sigma_{k+1}}, \dots, \xi_{\sigma_{k+l}}),$$

avec  $S_{k+l}$  est l'ensemble des permutations de  $(1, \dots, k+l)$ .

**Exemple 1.1** Traitons l'exemple du produit extérieur de deux 1-formes différentielles  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . Le résultat est une 2-forme défini par  $(\omega_1 \wedge \omega_2)(X_1, X_2) = \omega_1(X_1)\omega_2(X_2) - \omega_1(X_2)\omega_2(X_1)$ , pour toute paire de champs de vecteurs  $X_1$  et  $X_2$ .

**Exemple 1.2** Maintenant si  $\omega_1$  est une 2-forme et  $\omega_2$  une 1-forme on a

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(X_1, X_2, X_3) = \omega_1(X_1, X_2)\omega_2(X_3) + \omega_1(X_3, X_1)\omega_2(X_2) + \omega_1(X_2, X_3)\omega_2(X_1).$$

L'opérateur de produit extérieur vérifie certaines propriétés. Il est commutatif gradué, distributif et associatif. Soient les formes  $\omega^k$ ,  $\alpha^l$  et  $\gamma^m$  appartenant respectivement à  $\Lambda^k(M)$ ,  $\Lambda^l(M)$  et  $\Lambda^m(M)$ , on a :

$$- \omega^k \wedge \alpha^l = (-1)^{kl} \alpha^l \wedge \omega^k.$$

- $(\omega^k + \gamma^m) \wedge \alpha^l = \omega^k \wedge \alpha^l + \gamma^m \wedge \alpha^l$ .
- $(\omega^k \wedge \gamma^m) \wedge \alpha^l = \omega^k \wedge (\gamma^m \wedge \alpha^l)$ .
- $(\omega \wedge \omega = 0$ , si  $\omega$  est une  $k$ -forme avec  $k$  impaire.

Notons que les  $dx^{i_0} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ ,  $i_1 < \dots$  forment une base canonique locale de  $\Lambda^k$ . Une  $k$ -forme différentielle se note donc localement

$$\omega^k = \omega_{i_1 \dots i_k}^k dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

(avec sommation sur les indices répétés) où les  $\omega^k = \omega_{i_1 \dots i_k}^k$  sont des fonctions à valeurs réelles. En particulier, une 0-forme différentielle est une fonction de  $M$  dans  $\mathbb{R}$ .

#### 1.2.4 Produit intérieur

**Définition 1.12** On appelle produit intérieur par un champs de vecteur  $X \in \Gamma(TM)$  l'application

$$\iota_X : \Lambda^k(M) \longrightarrow \Lambda^{k-1}(M) \quad (1.5)$$

$$\omega \longmapsto \iota_X \omega$$

défini par

$$\iota_X \omega(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) := \omega(X, \xi_1, \dots, \xi_{k-1})$$

où  $\xi_1, \dots, \xi_{k-1} \in TM$ .

**Propriété 1.1** Des propriétés du produit intérieur peuvent être notées ;

- $\forall \omega^k \in \Lambda^k(T^*M)$  et  $\forall \omega^l \in \Lambda^l(T^*M)$ ,  $\iota_X(\omega^k \wedge \omega^l) = \iota_X \omega^k \wedge \omega^l + (-1)^k \omega^k \wedge \iota_X \omega^l$ .
- $\forall \omega^k \in \Lambda^k(T^*M)$  et  $\forall X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$ ,  $\iota_{X_2}(\iota_{X_1} \omega^k) = -\iota_{X_1}(\iota_{X_2} \omega^k)$ .
- $\forall \omega^k \in \Lambda^k(T^*M)$  et  $\forall X \in \Gamma(TM)$ ,  $\iota_X(\iota_X \omega^k) = 0$ .

#### 1.2.5 Dérivée extérieure

**Définition 1.13** La dérivée extérieure  $d$  est l'unique opérateur linéaire de  $\Lambda^k(M)$  dans  $\Lambda^{k+1}(M)$  vérifiant :

1. Si  $\omega$  est une 0-forme,  $d\omega$  est la différentielle usuelle d'une fonction.
2. Pour tout  $\omega \in \Lambda^k(M)$  et  $\eta \in \Lambda^l(M)$  on a :

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$$

3. Pour tout  $\omega \in \Lambda^k(M)$ , on a  $d(d(\omega)) = 0$ .

Dans une carte locale de  $M$ , considérons une  $k$ -forme différentielle  $\omega = \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$  (de classe  $C^1$ ), alors sa dérivée extérieure s'écrit :

$$d\omega = \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \text{ (somme sur tout les } j \text{ et } i_1 < \dots < i_k). \quad (1.6)$$

**Exemple 1.3** Dans un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , soit  $\omega = \omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2$  une 1-forme.

$$\begin{aligned} d\omega &= d\omega_1 \wedge dx^1 + d\omega_2 \wedge dx^2 \\ &= \left( \frac{\partial\omega_1}{\partial x_1} dx^1 + \frac{\partial\omega_1}{\partial x_2} dx^2 \right) \wedge dx^1 + \left( \frac{\partial\omega_2}{\partial x_1} dx^1 + \frac{\partial\omega_2}{\partial x_2} dx^2 \right) \wedge dx^2 \\ &= \left( \frac{\partial\omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\omega_1}{\partial x_2} \right) dx^1 \wedge dx^2 \end{aligned}$$

**Remarque 1.1** L'application de la dérivée extérieure  $d$  deux fois à une  $k$ -forme générera une  $(k+2)$ -forme nulle n'est autre que la relation de Schwartz. Soit  $\omega = f(x, y)$  une 0-forme dans un espace de dimension  $n = 2$ .

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \\ d(d\omega) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy \wedge dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx \wedge dy \\ &= \left( \frac{-\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) dx \wedge dy = 0 \end{aligned}$$

La propriété ( $d^2 = 0$ ) va être d'une grande utilité puisqu'elle va servir dans la section suivante dans la vérification des relations  $\text{div rot} = 0$  et  $\text{rot grad} = 0$  dans le cas ou  $M = \mathbb{R}^3$ . L'opérateur de dérivée extérieure réalise le complexe de De Rham :

$$0 \xrightarrow{d} \Lambda^0 \xrightarrow{d} \Lambda^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Lambda^{n-1} \xrightarrow{d} \Lambda^n \xrightarrow{d} 0. \quad (1.7)$$

C'est une suite exacte puisque  $d^2 = 0$ . La dérivée extérieure est une application bijective, ainsi que  $\text{Im}(d_n) = \text{Ker}(d_{n+1})$ .

### Dérivée extérieure dans $M = \mathbb{R}^3$

Pour montrer le lien entre la dérivée extérieure et les opérateurs habituels de dérivation en calcul tensoriel, on va montrer comment agit la dérivée extérieure sur les  $k$ -formes dans la variété  $M = \mathbb{R}^3$

**Exemple 1.4** Soit  $\omega = f(x, y, z)$  une 0-forme dans l'espace  $\Lambda^0(\mathbb{R}^3)$ . On a :

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

On peut reconnaître dans les composantes de  $d\omega$  les composantes de l'opérateur de gradient ( $\text{grad}$ ) de  $f$ .

**Exemple 1.5** Le deuxième exemple est l'application de l'opérateur  $d$  sur une 1-forme  $\omega = A(x, y, z) dx + B(x, y, z) dy + C(x, y, z) dz \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$ . On a :

$$\begin{aligned} d\omega &= \left( \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy + \frac{\partial A}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \left( \frac{\partial B}{\partial x} dx + \frac{\partial B}{\partial y} dy + \frac{\partial B}{\partial z} dz \right) \wedge dy \\ &+ \left( \frac{\partial C}{\partial x} dx + \frac{\partial C}{\partial y} dy + \frac{\partial C}{\partial z} dz \right) \wedge dz \\ &= \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left( \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) dz \wedge dx \end{aligned}$$

Dans cet exemple, les composante de  $d\omega$  sont exactement les composantes du rotationnel du champ

$$\text{de vecteurs } v = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}.$$

**Exemple 1.6** On considère  $\omega = A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy$  une 2-forme  $\in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$  et  $A, B, C$  des fonctions différentiables de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} d\omega &= dA \wedge dy \wedge dz + dB \wedge dz \wedge dx + dC \wedge dx \wedge dy \\ &= \left( \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy + \frac{\partial A}{\partial z} dz \right) \wedge dy \wedge dz + \left( \frac{\partial B}{\partial x} dx + \frac{\partial B}{\partial y} dy + \frac{\partial B}{\partial z} dz \right) \wedge dz \wedge dx \\ &+ \left( \frac{\partial C}{\partial x} dx + \frac{\partial C}{\partial y} dy + \frac{\partial C}{\partial z} dz \right) \wedge dx \wedge dy \\ &= \left( \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

Comme le montre ce résultat, le coefficient de la 3-forme  $d\omega$  représente la divergence ( $\text{div}$ ) dans le calcul tensoriel pour un champ de vecteurs  $(A, B, C)^T$ .

### 1.2.6 Dérivée de Lie

L'opérateur de la dérivée de Lie est un opérateur qui contrairement à la dérivée extérieure et au produit intérieur, préserve le degrés de la forme. Avant de définir l'opérateur de dérivée de Lie, on présente l'opérateur "tiré en arrière", ou pull-back ou l'image réciproque.

**Définition 1.14** Soit  $\phi$  une application  $c^\infty$  d'une variété  $M$  dans une variété  $N$ . On définit le pull-back  $\phi^*\alpha$  de  $\alpha$  par  $\phi$  la  $k$ -forme sur  $M$  donnée par

$$(\phi^*\alpha)_p(v_1, \dots, v_k) = \alpha_{\phi(p)}(d\phi_p(v_1), \dots, d\phi_p(v_k)).$$

Si  $\phi$  est un difféomorphisme, le push-forward  $\phi_*$  est défini par  $\phi_* = (\phi^{-1})^*$ .

**Propriété 1.2** Le pull-back est compatible avec le produit extérieur et avec la dérivée extérieure. Les relations suivantes sont vérifiées pour tout  $\alpha \in \Lambda^k(K)$  et  $\beta \in \Lambda^l(K)$

$$\phi^*(\alpha \wedge \beta) = \phi^*\alpha \wedge \phi^*\beta$$

$$\phi^*(d\alpha) = d(\phi^*\alpha)$$

**Définition 1.15** Soient  $\omega^k$  une  $k$ -forme,  $X$  un champ de vecteurs et  $\phi_t$  son flot. La dérivée de Lie de  $\omega$  le long de  $X$  est définie comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X : \Lambda^k(M) &\longrightarrow \Lambda^k(M) \\ \omega &\longmapsto \mathcal{L}_X\omega \end{aligned}$$

$$\text{où } \mathcal{L}_X\omega = \lim_{t \rightarrow 0} [\phi_t^*\omega - \omega] = \frac{d}{dt} \phi_t^* \Big|_{t=0}. \quad (1.8)$$

La dérivée de Lie peut être aussi exprimé par la formule magique de Cartan, qui la relie aux produit intérieur et la dérivée extérieure :

$$\mathcal{L}_X = d \iota_X + \iota_X d.$$

### 1.3 VARIÉTÉ RIEMANNIENNE

Un opérateur intéressant et cruciale pour la suite de ce manuscrit est l'opérateur de Hodge. Cet opérateur, contrairement aux opérateurs de dérivation (dérivée extérieure, produit extérieur et produit intérieur) est dépendant d'une métrique. On se place dans une variété Riemannienne.

**Définition 1.16** Une métrique riemannienne  $g$  sur une variété  $M$  est une application continue de  $M$  dans l'ensemble des formes bilinéaires symétriques et définies positives sur  $TM$ . Autrement dit, à chaque point  $p \in M$ , on associe  $g_p$  un produit scalaire de  $T_pM$ . L'application  $p \mapsto g_p$  est "régulière". La métrique riemannienne  $g_p$  est donnée matriciellement  $(g_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  avec  $g_{ij}(p) = g_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$ . Cette matrice vérifie

1. symétrique :  $(g_p)_{ij} = (g_p)_{ji}$
2. Non dégénéré :  $\forall v, g_p(u, v) = 0 \Rightarrow u = 0$
3. définit positive :  $\forall u, g_p(u, u) \geq 0$

Dans ce travail, on suppose que  $g$  est lisse.

**Définition 1.17** Une variété riemannienne  $(M, g)$ , est une variété différentielle  $M$  tel que pour tout  $p \in M$  l'espace tangent  $T_pM$  est muni d'une métrique riemannienne  $g_p$ .

L'existence de la métrique nous permet de parler des notions de distances et mesures d'angle sur la variété  $M$ . Donnons des exemples sur des produits scalaires usuels.

- $\mathbb{R}^n$  est muni du produit scalaire euclidien  $g(u, v) = \sum_{i=1}^n u^i v^i$ . On a  $g_{ij} = \delta_{ij}$ .
- L'espace des matrices  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est muni du produit scalaire  $g(A, B) = \text{tr}({}^tAB)$  où  $\text{tr}$  désigne la trace.

#### 1.3.1 Opérateurs musicaux $\flat$ et $\sharp$

Dans une variété Riemannienne, la métrique peut assurer une correspondance entre les champs de vecteurs et les 1-formes différentielles. Cette correspondance est assurée par les isomorphismes musicaux  $\flat$  et  $\sharp$ . Le premier isomorphisme  $\flat$  est défini en chaque point  $p$  par

$$\flat : \begin{array}{ccc} T_pM & \longrightarrow & \Lambda^1(T_p^*M) \\ X_p & \longmapsto & X_p^\flat \end{array}, \quad (1.9)$$

avec

$$X^\flat(Y) = g_p(X, Y) \quad \text{pour tout champs de vecteur } X, Y \in T_pM.$$

Et de manière réciproque, l'opérateur  $\sharp$  permet le passage d'une 1-forme  $\omega$  à un champ de vecteur  $\omega^\sharp$ .

$$\sharp : \begin{array}{ccc} \Lambda^1(T_p^*M) & \longrightarrow & T_pM \\ \omega & \longmapsto & \omega^\sharp \end{array} , \quad (1.10)$$

avec

$$\omega(Y) = g_p(\omega^\sharp, Y) \quad \text{pour tout champ de vecteur } Y \in T_pM \text{ et } \omega \in \Lambda^1(M).$$

**Exemple 1.7** Dans le cas où  $M = \mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire canonique (voir exemple ??) on a : la 1-forme correspondante au champ de vecteur

$$X = X^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + X^n \frac{\partial}{\partial x^n} \in \Gamma(TM)$$

est donnée par

$$X^\flat = X_1 dx^1 + \cdots + X_n dx^n \in \Lambda^1.$$

Réciproquement, le champ de vecteur correspondant à la 1-forme

$$\omega = \omega_1 dx^1 + \cdots + \omega_n dx^n \in \Lambda^1$$

est obtenu en appliquant l'opérateur  $\sharp$  et s'écrit comme

$$\omega^\sharp = \omega^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + \omega^n \frac{\partial}{\partial x^n} \in \Gamma(TM).$$

### 1.3.2 Opérateur de Hodge

$\Lambda^k(M)$  et  $\Lambda^{n-k}(M)$  ont la même dimension  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ . Ils sont donc isomorphes. Cet isomorphisme est réalisé par l'opérateur de Hodge.

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de l'espace tangent  $TM$ . La variété riemannienne orientable possède une unique  $n$ -forme différentielle  $\text{Vol}$  telle que,  $\text{Vol}(e_1, \dots, e_n) = 1$ . C'est la forme volume.

**Définition 1.18** La forme volume Riemannienne est définie par :

$$\text{vol}_g = \sqrt{|\det g|} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

où  $dx^i$  forment les éléments de la base orientée de  $T^*M$ .

Dans cette équation  $\det g$  désigne le déterminant de la matrice de  $g$ . Si la matrice de  $g$  est égale à  $\delta_{ij}$  alors  $\text{vol}_g = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ .

En utilisant la forme volume, on va définir l'opérateur de Hodge étoile.



**Définition 1.19** Soit  $M$  une variété Riemannienne orientable de dimension  $n$ . Soit  $g$  la métrique sur  $M$  et  $\text{Vol}$  la forme volume sur  $M$ . L'opérateur de Hodge peut être défini par la propriété suivante :

$$\omega \wedge \star \omega' = g(\omega, \omega') \text{Vol} \quad \forall \omega, \omega' \in \Lambda^k$$

où  $g(\cdot, \cdot)$  est le produit scalaire induit par la métrique et  $\text{Vol}$  la forme volume.

La forme  $\star \omega$  peut alors être considérée comme un complément de  $\omega$  par rapport  $g(\omega, \omega') \text{Vol}$ . Il s'en suit que cette définition peut être écrite de manière plus simple

$$\begin{aligned} \star : \quad & \Lambda_p^k(M) \longrightarrow \Lambda_p^{n-k}(M) \\ & \star(\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}) = s \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_{n-k}}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

où  $(j_1, \dots, j_{n-k})$  est la suite complémentaire de  $i_1, \dots, i_k$  dans  $\{1, \dots, n\}$  et  $s$  est la signature de la permutation  $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k})$ .

L'application consécutive de l'opérateur de Hodge à une  $k$ -forme  $\omega$  donne l'identité à un signe près :

$$\star \star \omega = (-1)^{k(n-k)} \omega. \quad (1.12)$$

Ainsi l'inverse de l'opérateur de Hodge est défini par

$$\star^{-1} = (-1)^{k(n-k)} \star.$$

### Opérateur de Hodge dans $M = \mathbb{R}^3$

Dans le cas particulier  $M = \mathbb{R}^3$  doté de la métrique Euclidienne, il existe une correspondance entre les champs vectoriels et un champ de tenseur antisymétrique :

$$w = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & w_z & -w_y \\ -w_z & 0 & w_x \\ w_y & -w_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans le calcul extérieur, cette correspondance est représenté par le l'opérateur étoile de Hodge  $\star$  :

$$w^b = w_x \mathrm{d}x + w_y \mathrm{d}y + w_z \mathrm{d}z \in \Lambda^1 \longmapsto$$

$$\star w^b = w_x \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + w_y \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + w_z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \in \Lambda^2.$$

Doté de la métrique Euclidienne, la forme volume riemannienne dans ce cas est  $\text{vol} = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ . L'opérateur de Hodge fait également une correspondance entre les 0-formes différentielles (fonctions scalaires lisses) et les 3-formes comme suit

$$f \in \Lambda^0 \longmapsto \star f = f \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \in \Lambda^3.$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned}
\star dx &= dy \wedge dz, & \star dy &= dz \wedge dx, & \star dz &= dx \wedge dy, \\
\star 1 &= dx \wedge dy \wedge dz, \\
\star(dy \wedge dz) &= dx, & \star(dz \wedge dx) &= dy, & \star(dx \wedge dy) &= dz, \\
\star(dx \wedge dy \wedge dz) &= 1.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

### Divergence, rotationnel et gradient dans $M = \mathbb{R}^3$

Dans le cas  $M = \mathbb{R}^3$ , les opérateurs grad, rot et div sont liés à l'opérateur dérivée extérieure  $d$  et l'opérateur de Hodge  $\star$  par :

$$\text{grad } f = (df)^\sharp \tag{1.14}$$

$$\text{rot } X = (\star d X^\flat)^\sharp \tag{1.15}$$

$$\text{div } X = \star d \star X^\flat \tag{1.16}$$

pour toute fonction scalaire  $f$  et tout champ de vecteurs  $X$ .

Dans les exemples suivants, on va démontrer les relations  $\text{rot } X = (\star d X^\flat)^\sharp$  et  $\text{div } X = \star d \star X^\flat$  dans  $M = \mathbb{R}^3$ .

**Exemple 1.8** Soit  $X = A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y} + C \frac{\partial}{\partial z}$  un champ de vecteur. La forme qui lui correspond est  $X^\flat = A dx + B dy + C dz$ . Prouvons que  $(\star d X^\flat)^\sharp = \text{rot } X$ .

$$\begin{aligned}
d X^\flat &= \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left( \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) dz \wedge dx \\
\star d X^\flat &= \left( \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) dx + \left( \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) dy + \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dz \\
(\star d X^\flat)^\sharp &= \begin{pmatrix} \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \\ \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} \\ \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \end{pmatrix} = \text{rot } X
\end{aligned}$$

**Exemple 1.9** Soit  $X = A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y} + C \frac{\partial}{\partial z}$  un champ de vecteur. La forme qui lui correspond est  $X^\flat = A dx + B dy + C dz$ . Prouvons que  $\star d \star X^\flat = \text{div } X$ .

$$\begin{aligned}
\star X^\flat &= A dy \wedge dz - B dx \wedge dz + C dx \wedge dy \\
d \star X^\flat &= \left( \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \\
\star d \star X^\flat &= \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = \text{div } X
\end{aligned}$$

Ces correspondances sont résumées dans la Table 1.1. Comme le montre la Table 1.1 et les exemples (1.6,1.4,1.5) les trois opérateurs div, rot et grad se formulent en un seul opérateur, la dérivée extérieure  $d$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
C^\infty & \xrightarrow{\text{grad}} & TM & \xrightarrow{\text{rot}} & TM & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty \\
\downarrow = & & \downarrow \flat & & \downarrow \star \flat & & \downarrow \star \\
\Lambda^0 & \xrightarrow{d} & \Lambda^1 & \xrightarrow{d} & \Lambda^2 & \xrightarrow{d} & \Lambda^3
\end{array}$$

TABLE 1.1 – Correspondance entre les opérateurs de dérivation en calcul vectoriel et en calcul extérieur

On peut facilement constater que les relations du calcul tensoriel

$$\text{rot grad} = 0 \quad \text{et} \quad \text{div rot} = 0$$

sont simplement la conséquence de la relation :

$$d^2 = 0. \quad (1.17)$$

### 1.3.3 Codifférentiel et Laplacien

La combinaison de la dérivée extérieure avec l'opérateur de Hodge permet de définir d'autres opérateurs de dérivation tel que le codifférentiel et l'opérateur laplacien de Beltrami.

#### Opérateur codifférentiel

**Définition 1.20** Le codifférentiel ( $\delta$ ) est défini par

$$\delta : \begin{array}{ccc} \Lambda^k(M) & \longrightarrow & \Lambda^{k-1}(M) \\ \omega^k & \longmapsto & \delta\omega^k = (-1)^{n(k-1)+1} \star d \star \omega^k. \end{array}$$

Notons que le codifférentiel d'une fonction scalaire est nul.

**Remarque 1.2** On peut définir l'opérateur codifférentiel comme l'adjoint de l'opérateur de dérivé extérieure  $d$  pour le produit scalaire  $L^2$  dans le sens que

$$(\omega, \delta\omega') = (d\omega, \omega'), \quad \forall \omega \in \Lambda^{k-1}, \omega' \in \Lambda^k. \quad (1.18)$$

**Remarque 1.3** L'opérateur de codifférentiel vérifie la relation  $\delta\delta = 0$ . Cette propriété résulte de la propriété  $d^2 = 0$ .

#### Opérateur Laplacien de De Rham

Enfin, nous présentons l'opérateur Laplace-Beltrami, nommé aussi laplacien de De Rham. Il est défini par

$$\Delta = d\delta + \delta d. \quad (1.19)$$

Dans  $M = \mathbb{R}^3$ , il coïncide avec la version de calcul extérieur de l'opérateur Laplacien  $\Delta$ . En effet, pour une fonction scalaire  $f$ ,

$$(d\delta + \delta d)f = \delta d f = \text{div grad } f. \quad (1.20)$$

Pour un champ de vecteurs  $W$ ,

$$(\mathrm{d} \delta + \delta \mathrm{d})W = \mathrm{d} \delta W^b + \delta \mathrm{d} W^b = (\mathrm{grad} \operatorname{div} W - \operatorname{rot} \operatorname{rot} W)^b = (\Delta W)^b. \quad (1.21)$$

En raison de cette coïncidence, l'opérateur (1.19) est également désigné par  $\Delta$ . Après ces brefs rappels du calcul extérieur dans le cas continu, on va maintenant décrire les bases du calcul extérieur discret. On travaillera sur un domaine discrétisé. On y définira la notion de forme extérieure discrète et les opérateurs discrets.

## 1.4 DISCRÉTISATION DU DOMAINE

### 1.4.1 Complexe simpliciel

La première étape pour développer la théorie du calcul extérieur en discret, consiste à discrétiser le domaine. En topologie algébrique, les variétés sont discrétisées sous forme de complexes simpliciaux. La notion des complexes simpliciaux guide toute la théorie de DEC, puisqu'elle va intervenir de manière directe dans la discrétisation des opérateurs du calcul extérieur. Nous abordons la définition du complexe simplicial, des simplexes, des maillages primal et dual ainsi que la notion de l'orientation et tous les éléments qui seront utilisés tout au long du manuscrit. Ces notions peuvent être trouvées d'une manière détaillée dans les documents traitant la topologie algébrique (voir [59, 60]).

La présentation sera faite dans  $\mathbb{R}^n$  doté de la métrique euclidienne car cet espace suffira pour les applications numériques abordées dans cette thèse, mais le DEC peut être étendu à d'autres variétés riemanniennes orientables.

**Définition 1.21** *Un  $k$ -simplexe est l'enveloppe convexe formée par  $k + 1$  points géométriquement indépendants  $v_0, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  :*

$$\{v_0 \cdots v_k\} = \left\{ \sum_{i=0}^k \lambda^i v_i \in \mathbb{R}^n / \lambda^i \geq 0 \text{ pour } i = 0, \dots, k \text{ et } \sum_{i=0}^k \lambda^i = 1 \right\}$$

L'entier  $k$  sera appelé dimension du simplexe.

**Remarque 1.4** *En tant que figure géométrique,  $\{v_0 \cdots v_k\}$  représente le même simplexe que  $\{v_{\pi(0)} \cdots v_{\pi(k)}\}$  pour toute permutation  $\pi$  de  $\{0, \dots, k\}$*

Les  $v_i$  sont appelés sommets du simplexe.

**Définition 1.22** *On appelle faces d'un simplexe  $\sigma = \{v_0 \cdots v_k\}$  tous les simplexes engendrés par les sous ensembles strictes de l'ensemble  $\{v_0, \dots, v_k\}$ .*

**Exemple 1.10** *Les sommets  $\{v_i\}$  sont des faces de dimension 0, ou 0-faces de  $\sigma$ .*

**Exemple 1.11** *Les  $(k - 1)$ -simplexes  $\{v_0 \cdots \hat{v}_i \cdots v_k\}$  pour  $i = 0, \dots, k$  et  $\hat{v}_i$  désigne le point supprimé, sont appelés les  $(k - 1)$ -faces de  $\sigma$ .*

**Exemple 1.12** Les 2-faces dans un tétraèdre sont les quatre triangles qui le bordent. Ses 1-faces sont les six cotés qui bordent ces quatre triangles. Les 0-faces sont les sommets qui forment le tétraèdre. Voir l'exemple dans la Table 1.2

Dans la suite, pour indiquer qu'un simplexe  $\sigma$  est une face d'un autre simplexe  $\sigma'$  on utilise la notation  $\sigma \prec \sigma'$ . Cette propriété sera nommée propriété de face propre. On désigne par  $|\sigma|$  la mesure euclidienne du simplexe  $\sigma$ . Le volume d'un 0-simplexe est par convention pris égale à 1.

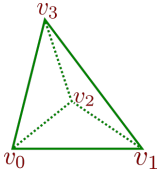
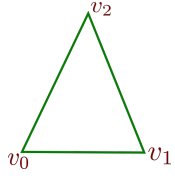
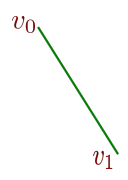

	3-simplexe	2-simplexe	1-simplexe	0-simplexe
Exemples	$\{v_0v_1v_2v_3\}$ tétraèdre 	$\{v_0v_1v_2\}$ triangle 	$\{v_0v_1\}$ coté 	$\{v_0\}$ nœud 
dimension	3	2	1	0
2-faces	$\{v_0v_1v_2\}, \{v_0v_1v_3\},$ $\{v_0v_2v_3\}, \{v_1v_2v_3\}$	—	—	—
1-faces	$\{v_0v_1\}, \{v_0v_2\}, \{v_0v_3\},$ $\{v_1v_2\}, \{v_1v_3\}, \{v_2v_3\}$	$\{v_0v_1\}, \{v_0v_2\},$ $\{v_1v_2\}$	—	—
0-faces	$\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}$	$\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}$	$\{v_0\}, \{v_1\}$	—
$p$ -volume	volume du tétraèdre	l'aire du triangle	longueur du coté	1

TABLE 1.2 – Exemples des simplexes dans  $\mathbb{R}^n$

**Définition 1.23** Un complexe simplicial  $K$  dans  $\mathbb{R}^n$  est une collection de simplexes dans  $\mathbb{R}^n$  vérifiant les conditions suivantes :

1. Les faces de tous les simplexes de  $K$  sont dans  $K$ .
2. L'intersection de deux simplexes de  $K$  est une face commune ou vide.

La dimension d'un complexe simplicial est définie comme étant la dimension la plus élevée de ses simplexes.

Un complexe simplicial  $K$  de dimension  $n$  est donc composé par ses  $n$ -simplexes, avec toutes leurs faces, les faces des faces jusqu'à atteindre les nœuds (tout en considérant que le complexe est  $C^0$ ). Par exemple un complexe simplicial de dimension 3 est composé non seulement de tétraèdres, mais aussi de leurs faces (les triangles), les faces des triangles (les cotés) et les faces des cotés qui sont les nœuds. Les simplexes ayant la dimension la plus grande sont nommés les top-simplexes. En 3D ce sont les tétraèdres, en 2D ce sont les triangles. La Figure 1.1 représente un exemple de discrétisation par complexe simplicial d'une surface courbée dans  $\mathbb{R}^3$ .

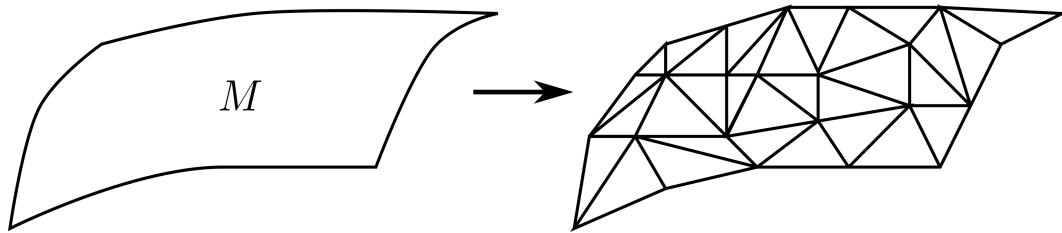


FIGURE 1.1 – Exemple d'un complexe simplicial en 2D

La deuxième propriété du complexe simplicial, interdit l'apparition des cas tel présenté dans la Figure 1.2. Cette figure représente deux 2-simplexe ayant comme intersection une partie d'un côté qui constitue une face pour l'un des triangles mais pas pour l'autre. De plus, on cherche à travailler dans une variété (manifolds-like) de classe  $C^0$  c'est pour

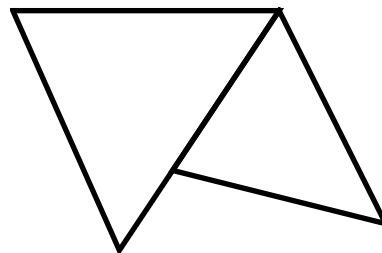
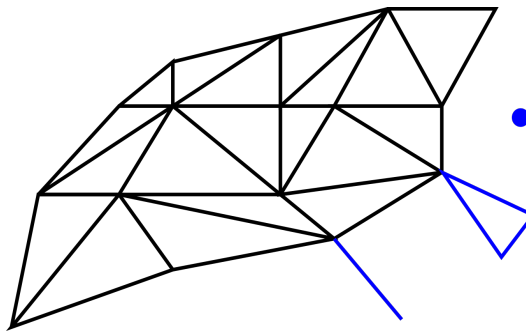


FIGURE 1.2 – Exemple d'une discrétisation de complexe non simplicial, les simplexes ne s'intersectent pas suivant une face.

cela qu'on souhaite que le complexe vérifie d'autres conditions de régularité [38, 17]. Des cas comme ceux présentés dans la Figure 1.3 sont défavorables.

FIGURE 1.3 – Exemple d'une discrétisation qui n'est pas  $C^0$ . Les éléments en bleu engendrent des singularités dans la triangulation.

En pratique, discrétiser une variété revient à la discrétisation du domaine défini par cette variété par un complexe simplicial. Ceci n'est rien qu'une triangularisation dans laquelle non seulement les cellules sont conservées, mais aussi les faces et les faces des faces. Plus généralement, on appelle triangulation d'une variété (un espace topologique) un homéomorphisme entre cette variété et un complexe simplicial.

### 1.4.2 Orientation des simplexes

Chaque simplexe peut être doté d'une orientation. Cette orientation est définie intuitivement en étant l'ordre des sommets formant le simplexe. Prenons d'abord le cas d'un  $k$ -simplexe avec  $k \geq 1$ .

**Définition 1.24** Deux arrangements  $(v_0, \dots, v_k)$  et  $(v_{\pi(0)}, \dots, v_{\pi(k)})$  des sommets d'un simplexe  $\{v_0 \cdots v_k\}$  avec  $k \geq 1$ , sont dits équivalents si  $\pi$  est une permutation paire.

**Remarque 1.5** Il y a précisément deux classes d'équivalence. On note  $+1$  la classe d'équivalence de  $(v_0, \dots, v_k)$  et  $-1$  l'autre classe d'équivalence.

**Définition 1.25** Une orientation du simplexe  $\{v_0 \cdots v_k\}$  avec  $k \geq 1$ , est un choix d'une de ces deux classes d'équivalence.

**Définition 1.26** Un simplexe orienté est un simplexe muni d'une orientation. On notera  $[v_0 \cdots v_k]$  le simplexe  $\{v_0 \cdots v_k\}$  muni de l'orientation  $+1$  et  $-[v_0 \cdots v_k]$  le même muni de l'orientation  $-1$ .

Prenons maintenant le cas  $k = 0$ . Les 0-simplexes sont orientés comme suit.

**Définition 1.27** Une orientation d'un 0-simplexe est un choix d'un élément de  $\{+1, -1\}$ .

On note par  $[v]$  le 0-simplexe  $\{v\}$  muni de l'orientation  $+1$  et  $-[v]$  le 0-simplexe  $\{v\}$  orienté selon la classe d'équivalence  $-1$ .

On note par  $K_k$  l'ensemble des simplexes orientés de dimension  $k$  dans  $K$

$$K_k = \{\sigma \in K, \sigma \text{ orienté}, \dim \sigma = k\}.$$

**Exemple 1.13** Dans la Figure 1.4, on peut repérer des simplexes orientés. À titre d'exemple on a  $[v_0v_1]$ ,  $[v_1v_2]$ ,  $[v_0v_2]$  des 1-simplexes (arbitrairement) orientés. En effet en écrivant les 1-simplexes avec cet ordre, cela indique que le simplexe  $[v_0v_1]$  est orienté de  $v_0$  vers  $v_1$ . De même pour  $[v_0v_2]$ , ce simplexe est orienté dans le sens de  $v_0$  vers  $v_2$ . Pour le 2-simplexe  $[v_0v_1v_2] = [v_1v_2v_0] = [v_2v_0v_1]$ , indique une même orientation selon le sens inverse des aiguilles d'une montre. Alors que pour  $[v_0v_2v_1]$ , on a  $[v_0v_2v_1] = -[v_0v_1v_2]$ , de même  $[v_1v_0v_2] = -[v_0v_1v_2]$ .

**Définition 1.28** Soit  $\sigma^k = [v_0 \cdots v_k]$  un simplexe orienté avec  $k \geq 1$ . On appelle orientation induite par  $\sigma^k$  sur sa  $(k-1)$ -face  $\{v_0 \cdots \hat{v}_i \cdots v_k\}$  l'orientation  $(-1)^i$ . En d'autres termes, les  $(k-1)$ -faces munies de l'orientation induite par  $\sigma^k$  sont les simplexes orientés  $(-1)^i[v_0 \cdots \hat{v}_i \cdots v_k]$ .

**Exemple 1.14** Dans la Figure 1.4, les 1-faces du 2-simplexe  $[v_0v_1v_2]$  munies des orientations induites sont  $[v_1v_2]$  (orienté de  $v_1$  vers  $v_2$ ),  $-[v_0v_2] = [v_2v_0]$  (orienté de  $v_2$  vers  $v_0$ ) et  $[v_0v_1]$  (orienté de  $v_0$  vers  $v_1$ ). Les 0-simplexes admettent aussi des orientations induites par les côtés auquel ils appartiennent. Prenons l'exemple du 1-simplexe  $[v_0v_2]$ , les 0-faces munies des orientations induites sont  $-[v_0]$  et  $[v_2]$ .

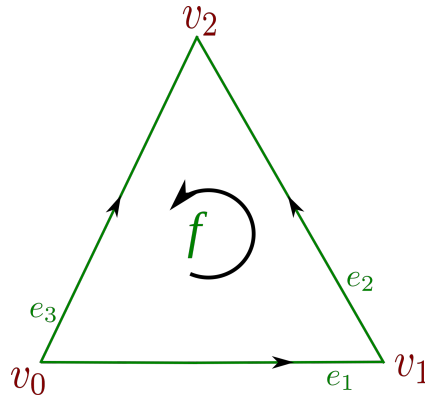


FIGURE 1.4 – Exemple d'un maillage orienté à un seul triangle. Une flèche désigne l'orientation de chaque coté et du triangle.

Après avoir défini l'orientation et l'orientation induite, on peut voir que la comparaison des orientations des simplexes est désormais possible.

On désigne par  $P(\sigma)$  le plus petit sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  contenant  $\sigma$ .

**Définition 1.29** Soit le  $k$ -simplexe  $\sigma^k = \{v_0 \cdots v_k\}$ , la collection de vecteurs ordonnée  $(v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_k - v_0)$ , est une base pour le sous-espace vectoriel  $P(\sigma^k)$ . Cette dernière est nommée base au coin du simplexe en  $v_0$ . De même la collection de vecteurs ordonnée  $(v_1 - v_0, v_2 - v_1, \dots, v_k - v_{k-1})$ , est également une autre base, et sera appelée base polygline du simplexe  $\sigma^k$ .

**Remarque 1.6** Les deux bases définies dans 1.29 orientent  $P(\sigma)$  et  $\sigma$ . La notion d'orientation par ces deux bases coïncide avec l'orientation par permutation (voir [61] lemme 5a page 360).

**Remarque 1.7** Soient  $\sigma^k$  et  $\tau^k$  deux simplexes orientés de même dimension  $k$ , alors leurs orientations peuvent être comparés s'ils vérifient une des deux conditions ci dessous.

1. Si  $\sigma^k$  et  $\tau^k$  appartiennent au même sous-espace vectoriel, c'est-à-dire si  $P(\sigma^k) = P(\tau^k)$ . Dans ce cas la comparaison de l'orientation des deux simplexes se fait par rapport à l'orientation de  $P(\sigma)$  par l'une des bases notées dans 1.29.
2. Si  $\sigma^k$  et  $\tau^k$  partagent une face commune de dimension  $(k - 1)$ . Dans ce cas  $\sigma^k$  et  $\tau^k$  ont même orientation si la  $(k - 1)$ -face commune, admet deux orientations opposés par les orientations induites de  $\sigma^k$  et  $\tau^k$ .

**Exemple 1.15** Dans la Figure 1.5, les deux triangles partagent la face  $\{v_1v_2\}$ . Cette dernière est orientée de  $v_1$  vers  $v_2$  par le simplexe  $[v_0v_1v_2]$  et de  $v_2$  vers  $v_1$  dans le deuxième simplexe  $[v_1v_3v_2]$ . Ainsi d'après la remarque on peut conclure que les deux simplexe sont orientés de la même façon.

**Définition 1.30** Soient  $\sigma$  et  $\tau$  2 simplexes.

$$\text{sign} : (\sigma, \tau) \in K_k \longmapsto \text{sign}(\sigma, \tau) = \begin{cases} +1 & \text{si } \sigma \text{ et } \tau \text{ ont même orientation} \\ -1 & \text{si } \sigma \text{ et } \tau \text{ ont des orientations opposées} \\ 0 & \text{si } \sigma \text{ et } \tau \text{ sont non comparables.} \end{cases} \quad (1.22)$$



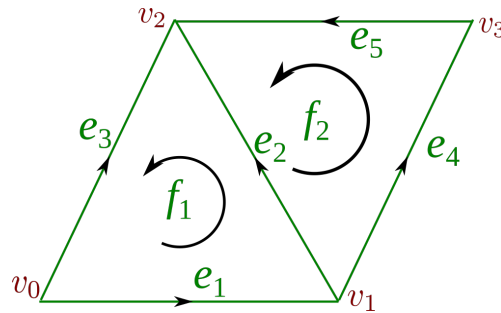


FIGURE 1.5 – Exemple d'un maillage orienté.

**Définition 1.31** Une orientation d'un complexe  $K$  de dimension  $n$  est un choix de l'orientation des  $n$ -simplexes tels que deux  $n$ -simplexes partageant une même face ont la même orientation.

La définition 1.31 permet de dire que les top-simplexes doivent être orientés de la même façon. C'est à dire en 3D par exemples, tous les tétraèdres doivent avoir une même orientation. En 2D ce sont les triangles qui occupent la position de top-simplexe et c'est à eux d'être dotés par la même orientation. En ce qui concerne les autres éléments du complexe simplicial, ils sont orientés de manière arbitraire, sauf les points.

**Définition 1.32** Un complexe est orientable s'il admet une orientation.

**Exemple 1.16** Le ruban de Möbius discrétisé en des triangles est un exemple de complexe non orientable.

Dans ce travail, on considère le complexe simplicial  $K$  toujours orienté. Dans la suite c'est ce maillage qu'on va nommer le maillage primal.

## 1.5 MAILLAGE DUAL

Afin de définir l'opérateur de Hodge dans sa version discrète, un maillage dual est nécessaire. Cette nécessité est justifiée par le fait que l'opérateur de Hodge discret doit réaliser un isomorphisme entre  $\Lambda^k(K)$  et  $\Lambda^{n-k}(K)$  comme sont correspondant continue. Cela n'est pas possible sur le même maillage  $K$  à cause de la non compatibilité des dimension des espaces  $\Lambda^k(K)$  et  $\Lambda^{n-k}(K)$  (voir 1.7.1). Plus de détails sur la discrétisation de l'opérateur de Hodge et le rôle du maillage dual vont être présentés dans la section 1.7.1. Notons que maillage dual représente le même domaine que définit le maillage primal, mais il crée une structure de donnée différentes liés à l'information géométrique. On notera  $*K$  le maillage dual correspondant au maillage primal  $K$ . Ce maillage dual est constitué de cellules telles qu'il existe une correspondance univoque entre les  $k$ -simplexes de  $K$  et les cellules de dimension  $(n - k)$  de  $*K$ .

On attribue à chaque simplexe  $\sigma^k$  un point qu'on note  $c(\sigma^k)$  nommé centre du simplexe. Il peut être le circoncentre du simplexe  $\sigma^k$ , son barycentre, son incentre ou n'importe quel autre point. Si  $k = 0$  et  $\sigma = \{v\}$ , alors  $c(\sigma) = v$ .

**Définition 1.33** Soit  $\sigma^k$  un simplexe de dimension  $k$  de  $K$ . Considérons des simplexes  $\sigma^{k+i}$ , pour  $i = 1, \dots, n - k$ , de dimension respectives  $k + i$  tels que  $\sigma^{k+i} \prec \sigma^{k+i+1}$ . Le simplexe  $\{c(\sigma^k)c(\sigma^{k+1}) \dots c(\sigma^n)\}$  est appelé dual élémentaire de  $\sigma^k$  dans  $\sigma^n$ .

Afin de simplifier la compréhension de cette définitions, on présente les exemples suivants. Soit  $K$  un complexe simplicial de  $\dim n = 2$  et  $\sigma^k$  un simplexe dans  $K$ .

**Exemple 1.17** Si  $k = 0$ , le dual élémentaire de  $\sigma^0$  s'écrit comme  $\{c(\sigma^0)c(\sigma^1)c(\sigma^2)\}$  avec  $\sigma^0 \prec \sigma^1 \prec \sigma^2$ . En se référant à la Figure 1.6, on a que  $\sigma^0 = \{v_0\}$ ,  $\sigma^1 = e_1 = \{v_0v_1\}$  et  $\sigma^2 = f = \{v_0v_1v_2\}$ . Alors un dual élémentaire n'est autre que le 2-simplexe  $\{c(v_0)c(e_1)c(f)\}$

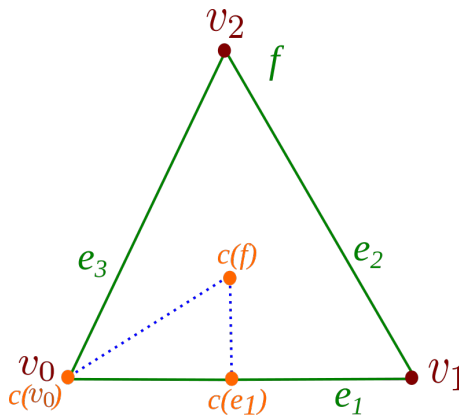


FIGURE 1.6 – Dual élémentaire d'un 0-simplexe dans un complexe simplicial de dim 2D.

**Exemple 1.18** Si  $k = 1$ , un dual élémentaire de  $\sigma^1$  s'écrit comme  $\{c(\sigma^1)c(\sigma^2)\}$  avec  $\sigma^1 \prec \sigma^2$ . Dans la Figure 1.7, on considère  $\sigma^1$  le 1-simplexe  $e_1 = \{v_0v_1\}$  et  $\sigma^2$  le triangle  $f = \{v_0v_1v_2\}$ . Alors dans ce cas un dual élémentaire est le 1-simplexe  $\{c(e_1)c(f)\}$

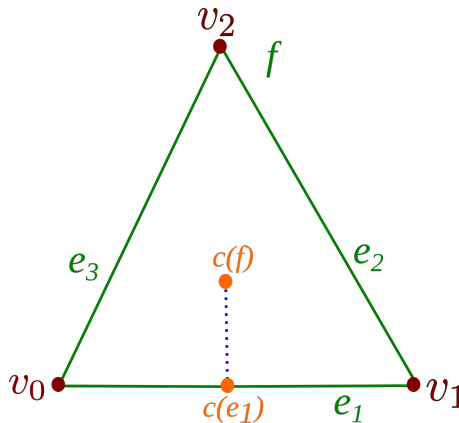


FIGURE 1.7 – Dual élémentaire d'un 1-simplexe dans un complexe simplicial de dim 2D.

Dans le cas où  $K$  est un complexe simplicial 3D, un dual élémentaire d'un 0-simplexe est un 3-simplexe, et celui d'un 1-simplexe est un 2-simplexe. Plus de détails se présente dans les Figures 1.8 et 1.9 et les exemples ci-dessous. Soit  $K$  un complexe simplicial de  $\dim n = 3$  et  $\sigma^k$  un simplexe dans  $K$ .

**Exemple 1.19** Si  $k = 0$ , un dual élémentaire de  $\sigma^0$  s'écrit comme  $\{c(\sigma^0)c(\sigma^1)c(\sigma^2)c(\sigma^3)\}$  toujours en vérifiant  $\sigma^0 \prec \sigma^1 \prec \sigma^2 \prec \sigma^3$ . Dans la Figure 1.8,  $\sigma$  est le 0-simplexe  $\{v_0\}$ , et  $\sigma^1 = \{v_0v_1\}$ ,  $\sigma^2$  le triangle  $f = \{v_0v_1v_2\}$  et  $\sigma^3 = T = \{v_0v_1v_2v_3\}$ . Alors dans ce cas un dual élémentaire est le 3-simplexe  $\{v_0c(e_1)c(f)c(T)\}$ .

D'autres simplexes duaux élémentaires de  $\sigma$  peuvent être aussi construits. Considérons le cas où  $\sigma^1 = e_4 = \{v_0v_3\}$ ,  $\sigma_2 = f' = \{v_0v_2v_3\}$ , et  $\sigma^3 = T$ . On a  $\{v_0c(e_4)c(f')c(T)\}$  est aussi un dual élémentaire de  $\{v_0\}$ .

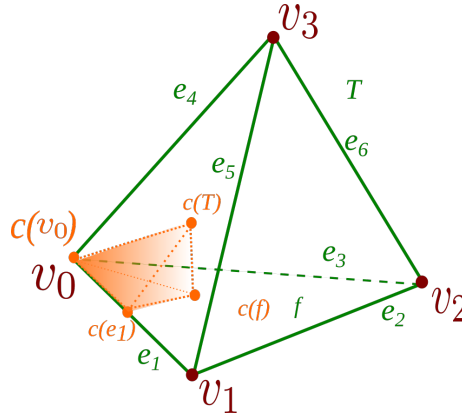


FIGURE 1.8 – Dual élémentaire d'un 0-simplexe dans un complexe simplicial de dim 3D.

**Exemple 1.20** Si  $k = 1$ , un dual élémentaire de  $\sigma^1$  dans  $\sigma^3$  s'écrit comme  $\{c(\sigma^1)c(\sigma^2)c(\sigma^3)\}$  avec  $\sigma^1 \prec \sigma^2 \prec \sigma^3$ .  $\sigma^1$  est le 1-simplexe  $e_1 = \{v_0v_1\}$ .  $\sigma^2$  n'est autre que le triangle  $f = \{v_0v_1v_2\}$  et  $\sigma^3 = T = \{v_0v_1v_2v_3\}$ . Alors un dual élémentaire est le 2-simplexe  $\{c(e_1)c(f)c(T)\}$ . voir 1.9.

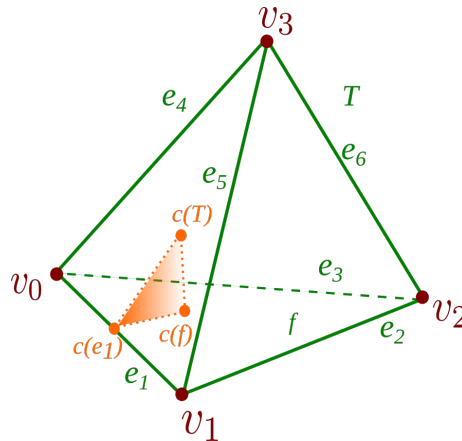


FIGURE 1.9 – Dual élémentaire d'un 1-simplexe dans un complexe simplicial de dim 3D.

De la même façon on peut définir les duals élémentaires pour tout  $\sigma^k$  dans  $K$ . Notons qu'un dual élémentaire peut être dégénéré. Pour illustrer ce cas, considérons le dual élémentaire de l'hypoténuse  $e$  dans un triangle rectangle. Si on choisit comme centre des simplexes leurs circoncentres alors le centre du côté et celui du triangle sont confondus. Alors le dual de  $e$  est vide voir Figure 1.10.

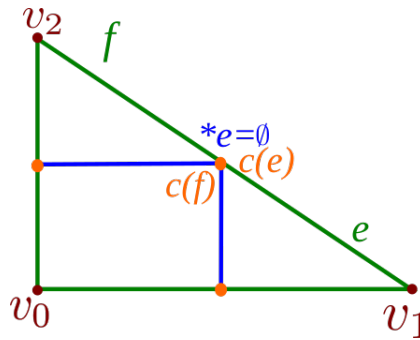


FIGURE 1.10 – Exemple de dual élémentaire non dégénéré.

**Définition 1.34** Soit  $\sigma$  un simplexe du complexe simplicial  $K$ . La réunion  $*\sigma$  de tous les duals élémentaires de  $\sigma$  est appelée cellule duale de  $\sigma$ .

Remarquons que les duals élémentaires d'un simplexe  $\sigma$  sont des simplexes mais que leur réunion  $*\sigma$  ne l'est pas forcément. Remarquons aussi que si la dimension de  $\sigma$  égale  $k$  alors la cellule duale  $*\sigma$  est de dimension  $n - k$ . Notons

$$*K_k = \{*\sigma \text{ tels que } \sigma \in K_k\}$$

l'ensemble des  $(n - k)$ -cellules (c-à-d des cellules de dimension  $n - k$ ) duales et  $*K = \bigcup_{k=0}^n *K_k$ .  $K$  sera appelé le maillage primal et  $*K$  le maillage dual. Comme on a une bijection entre  $K_k$  et  $*K_k$ , on a également une bijection entre  $K$  et  $*K$ .

Comme on l'a vu, le maillage dual dépend du centre  $c(\sigma)$  choisis de chaque simplexe  $\sigma$ . Un exemple de maillage dual est le dual circoncentrique.

### Dual circoncentrique

Le dual circoncentrique est un choix commun en DEC mais pas le seul. L'orthogonalité entre ses éléments primaux et les cellules duales, permet une définition simple de l'opérateur de Hodge discret qu'on traite dans la section 1.7.1.

**Définition 1.35** On appelle dual circoncentrique d'un complexe simplicial  $K$  le maillage dual  $*K$  construit en choisissant comme centre  $c(\sigma)$  de tout simplexe  $\sigma \in K$  son circoncentre.

Le dual circoncentrique est un choix populaire en DEC. En effet, l'orthogonalité entre les simplexes primaux et leurs cellules duales permet une discrétisation simple de l'opérateur de Hodge. Mais pour que le dual circoncentrique ne soit pas dégénéré (ne contiennent pas de cellules dégénérées), une condition suffisante est que le maillage primal  $K$  soit bien centré, comme on va le définir.

**Définition 1.36** Un simplexe  $\sigma$  est dit bien centré si son circoncentre appartient à l'intérieur de  $\sigma$ .

**Définition 1.37** Un complexe simplicial bien centré est un complexe dont tous les simplexes de toutes les dimensions sont bien centrés.

Dans un maillage 2D, comme le montre la Figure 1.11, le dual circoncentrique d'un triangle est son circoncentre, le dual d'un coté primaire est le coté orthogonale joignant les circoncentres des deux triangles qui se partagent ce coté (l'union des deux 1-simplexes élémentaires de par et d'autre du coté primal), le dual d'un sommet est une surface formé par les circoncentres des triangles ayant ce sommet comme face (l'union des 2-simplexes duaux élémentaires). La Figure 1.12 présente un exemple de maillage d'un carré avec son

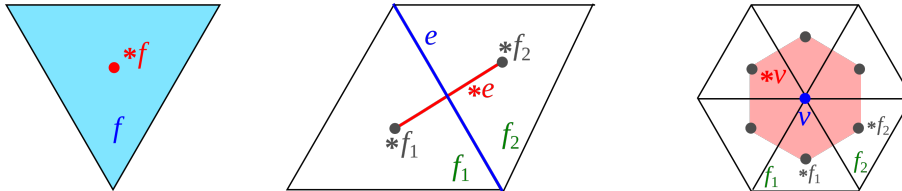


FIGURE 1.11 – Simplexe primaire (en bleu) d'un triangle  $f$  (gauche), d'un coté  $e$  (au milieu) et d'un sommet  $v$  (droite) et leur cellules duales  $*f$ ,  $*e$ ,  $*v$  (en rouge) dans un maillage 2D.

dual circoncentrique. Notons que le maillage primal et le maillage dual partagent les cotés du bord. En 3D, la construction d'un maillage dual n'est pas plus compliqué. La Figure

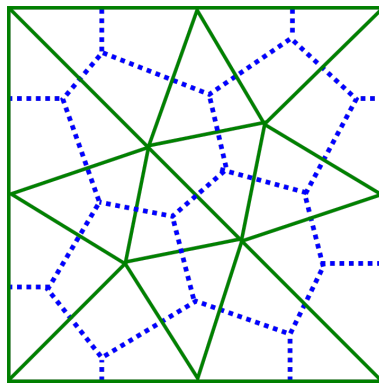


FIGURE 1.12 – Exemple d'un simple maillage avec son dual en 2D (en vert le maillage primaire et en bleu le maillage dual)

1.13 illustre la relation entre les  $k$ -simplexes primaux et les  $(n - k)$ -cellules duales.

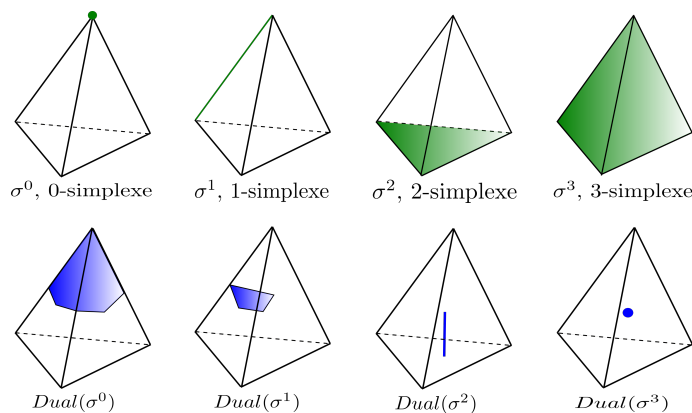


FIGURE 1.13 – Représentation des simplexes primaux (en vert) et de leurs cellules duales correspondantes (en bleu) en 3D.

### 1.5.1 Orientation du complexe dual

L'orientation des simplexes primaux induisent une orientation des cellules duales.

**Remarque 1.8** Soit  $\sigma^k \in K$ , les cellules s'écrivant comme  $c(\sigma^0) \cdots c(\sigma^k)$  tel que  $\sigma^0 \prec \cdots \prec \sigma^k$  sont des  $k$ -simplexe vérifiant  $P(\sigma^k) = P(\{c(\sigma^0) \cdots c(\sigma^k)\})$

**Exemple 1.21** Dans la Figure 1.14, le 2-simplexe  $f$  et la cellule  $c(v_0)c(e_1)c(f)$  admettent le même sous-espace vectoriel. De même pour le 1-simplexe  $e_2$  et  $\{c(v_1)c(e_2)\}$  on a  $P(e_2) = P(\{c(v_1)c(e_2)\})$ .

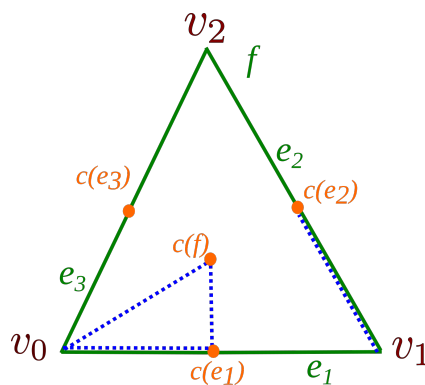


FIGURE 1.14 – Représentation des simplexes et des cellules appartenant à un même plan euclidien.

**Définition 1.38** Soit  $\sigma^k \in K$ , l'orientation d'un simplexe dual élémentaire  $\{c(\sigma^k) \cdots c(\sigma^n)\}$  de  $\sigma^k$  est donnée par :

$$s := \text{sign}([c(\sigma^0) \cdots c(\sigma^k)], \sigma^k) \times \text{sign}([c(\sigma^0) \cdots c(\sigma^n)], \sigma^n)$$

où  $\sigma^0 \prec \cdots \prec \sigma^k \prec \cdots \prec \sigma^n$ .

Dans la définition 1.38, on utilise la notation suivante :

Si  $s = +1$ , le dual élémentaire orienté est noté  $[c(\sigma^k) \cdots c(\sigma^n)]$ .

Si  $s = -1$ , le dual élémentaire orienté est noté  $-[c(\sigma^k) \cdots c(\sigma^n)]$ . Dans la définition 1.38, on a que  $\sigma^k$  et le simplexe élémentaire  $[c(\sigma^0) \cdots c(\sigma^k)]$ , d'après la remarque 1.8, peuvent être comparés car ils appartiennent au même espace euclidien  $P(\sigma^k)$ . De même  $\sigma^n$  et  $[c(\sigma^0) \cdots c(\sigma^n)]$  sont comparables pour la même raison.

**Exemple 1.22** On considère un complexe simplicial de dimension  $n = 2$  formé d'un seul triangle  $f$ , nous souhaitons déterminer l'orientation du dual d'un  $k$ -simplexe dans ce complexe. Prenons l'exemple si  $k = 1$ . Dans la Figure 1.15, on cherche à trouver l'orientation de  $*e_2$  le dual du 1-simplexe  $\sigma^k = \sigma^1 = [v_1v_2]$ . Dans ce cas  $\sigma^0 = [v_1]$  et  $\sigma^2 = [v_0v_1v_2]$ . Le dual élémentaire de  $\sigma^1$  est par définition  $\{c(\sigma^1)c(\sigma^2)\}$

On cherche à définir  $s$  pour déterminer si ce dernier est orienté de  $c(\sigma^1)$  vers  $c(\sigma^2)$  ou l'inverse.

En appliquant la définition 1.38 on a :

$$\begin{aligned} s &= \text{sign}([c(\sigma^0)c(\sigma^1)], \sigma^1) \times \text{sign}([c(\sigma^0)c(\sigma^1)c(\sigma^2)], \sigma^2) \\ &= \text{sign}([v_1, c_{e_2}], [v_1v_2]) \times \text{sign}([v_1c_{e_2}c_f], [v_0v_1v_2]) \\ &= (1) \times (1) = +1 \end{aligned}$$

Donc  $s = +1$  et  $[c(\sigma^1), c(\sigma^2)]$  est orienté de  $c_{e_2}$  vers  $c_f$ . En suivant la même formule, le dual de  $[v_0, v_2]$  est orienté de  $c_f$  vers  $c_{e_3}$ .

$$\begin{aligned} s &= \text{sign}([v_0, c_{e_3}], [v_0v_2]) \times \text{sign}([v_0c_{e_3}c_f], [v_0v_1v_2]) \\ &= (1) \times (-1) = -1 \end{aligned}$$

En d'autre terme, l'angle  $(\vec{e}_i, * \vec{e}_i)$  admet la même orientation que le triangle  $f$ . Dans la Figure 1.15,  $f$  est orienté dans le sens anti-horaire. L'orientation de  $*e_i$  est donc obtenue en effectuant une rotation de  $e$  dans le ce même sens géométrique.

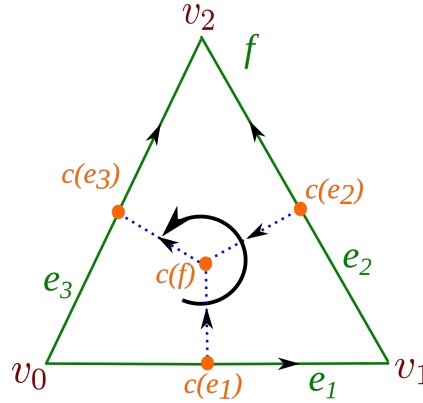


FIGURE 1.15 – Orientation d'un coté dual en 2D

Dans la suite, pour la définition de certains opérateurs du calcul extérieur dans le cas discret, les volumes de cellules duales seront nécessaires. En général, le volume de la cellule dual est égale à la somme des volumes des simplexes duaux élémentaires. Si  $\sigma$  est un simplexe d'ordre  $n$ , alors  $|* \sigma| = 1$  vu que  $c$ 'est un sommet. Dans le cas d'une variété de dimension  $n = 2$  par exemple, les volumes duaux des éléments de  $K_0$  et  $K_1$  sont calculés comme indiqué dans les algorithmes (1) et (2) respectivement.

---

**Algorithme 1 :** Volume dual  $|* v|$  de  $v \in K_0$  dans un maillage bidimensionnel

---

```

1  $|* v| = 0;$ 
2 for  $e/v \prec e$  do
3   for  $f$  tel que  $e \prec f$  do
4      $|* v| = |* v| + \text{volume}\{vc(f)c(e)\}$ 

```

---

De point de vue numérique, le fait de stoker les cellules duales n'a pas d'utilité. À chaque fois qu'on en a besoin, on peut les repérer à travers leurs correspondants primaux.

---

**Algorithme 2 :** Volume dual  $|*e|$  de  $e \in K_1$  dans un maillage bidimensionnel

---

```

1  $|*e| = 0;$ 
2 for  $f$  tel que  $e \prec f$  do
3    $|*e| = |*e| + \text{volume} \{ \text{centre}(f) \text{centre}(e) \}$ 

```

---

Après la discrétisation du domaine, dans ce qui suit on va définir l'analogue discrets des formes différentielles.

## 1.6 FORMES DIFFÉRENTIELLES DISCRÈTES ET DÉRIVÉE EXTÉRIEURE DISCRÈTE

Une forme différentielle est une quantité qui peut être intégrée. Comme exemple le  $\omega(x,y)dx$  dans  $\int \omega dx$ . Plus formellement, soit  $M \subset \mathbb{R}^n$ , une variété de dimension  $n$ , l'espace vectoriel  $T_x M$  formé de tous les vecteurs tangents au point  $x \in M$  peut être identifié avec  $\mathbb{R}^n$ . Dans la théorie continue une  $k$ -forme différentielle  $\omega$  peut être vue comme une application qui associe à chaque  $k$ -sous-variété  $C$  de dimension  $k$  un nombre réel. Cette propriété assure une dualité entre  $k$ -formes et  $k$ -sous-variétés. Dans le cadre discret, on cherche à mimer cette propriété. Avant on va définir les notions de chaînes et cochaînes.

**Définition 1.39** Soit  $K$  un maillage primal d'une variété  $M$  lisse de dimension  $n$ . Une  $k$ -chaîne  $c$  est une combinaison linéaire des éléments de  $K_k$ .

$$c = \sum_{\sigma_i \in K_k} c_i \sigma_i,$$

avec  $c_i$  sont des valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

L'ensemble de ces chaînes forment un espace vectoriel des  $k$ -chaînes qu'on note  $\Lambda_k(K)$ .

$$\Lambda_k(K) = \text{span } K_k = \left\{ c = \sum_{\sigma_i \in K_k} c_i \sigma_i, \quad c_i \in \mathbb{R} \right\}$$

La dimension de  $\Lambda_k(K)$  est donnée par  $|\Lambda_k(K)|$  égale aux nombre des éléments de  $K_k$ . Alors, une  $k$ -chaîne  $c$  est représentée par un vecteur colonne de taille  $|\Lambda_k(K)|$ . Dans l'espace dual, comme dans l'espace primal, on peut définir les chaînes du complexe  $*K$  de la même manière.

**Définition 1.40** Soit  $K$  un maillage primal d'une variété  $M$  lisse de dimension  $n$  et soit  $*K$  le maillage dual correspondant. Une  $(n-k)$ -chaîne  $c$  sur  $*K$  est une combinaison linéaire des éléments de  $*K_k$ .

$$c = \sum_{\sigma_i \in K_k} c_i * \sigma_i,$$

avec  $c_i$  sont des valeurs dans  $\mathbb{R}$ .



On note l'ensemble des ces  $k$ -chaînes duales par  $\Lambda_k(*K)$ .

$$\Lambda_k(*K) = \text{span } *K_k = \left\{ c = \sum_{\sigma_i \in K_k} c_i * \sigma_i, \quad c_i \in \mathbb{R} \right\}$$

En théorie les composantes  $c_i$  peuvent être n'importe quelle valeur réelles, mais en pratique, uniquement les valeur  $\{0, 1, -1\}$  admettent un sens physique. Une valeur 0 signifie que l'élément  $\sigma_i$  n'appartient pas à la chaîne, 1 signifie que le simplexe  $\sigma_i$  est présent dans  $c$ , alors que  $-1$  indique la présence de  $\sigma_i$  mais avec l'orientation opposée.

**Exemple 1.23** *A titre d'exemple, la 1-chaîne*

$$e_1 + e_4 + e_5 - e_3 \in \Lambda_1(K) \quad (1.23)$$

dans la Figure 1.5 constitue une chaîne fermée. Cette chaîne peut être présentée par le tableau  $(1, 0, -1, 1, 1)$  avec chaque ième éléments correspond au 1-simplexe  $e_i$ .

Les formes discrètes seront définies comme des objets qu'on peut évaluer sur les chaînes, et c'est ce qu'on appelle cochaînes, c'est un type de dualité. Donc c'est une cochaîne sur un simplexe complexe. Plus précisément c'est une fonction linéaire sur les simplexe et elle est définie en donnant à chaque simplexe une valeur.

**Définition 1.41** *Une  $k$ -cochaîne est une application qui, à chaque élément de  $K_k$ , associe un nombre réel :*

$$\omega \in \Lambda^k(K) : \begin{array}{ccc} K_k & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \sigma & \longmapsto & \langle \omega, \sigma \rangle . \end{array} \quad (1.24)$$

Les cochaînes jouent le rôles des analogues discrets des formes différentielles. Concrètement, une  $k$ -cochaîne  $\omega$  est un tableau dont les éléments sont les  $\langle \omega, \sigma_i \rangle$  avec  $\sigma_i \in K_k$ . Ainsi, l'intégration de  $\omega$  sur  $\sigma$  est exactement la même que l'évaluation de  $\omega$  sur  $\sigma$  en considérant les crochets comme intégration.

$$\int_{\sigma} \omega = \omega(\sigma) = \langle \omega, \sigma \rangle$$

Cela permet de définir la discrétisation (ou la réduction) des formes différentielles via l'application de De Rham :

$$R : \begin{array}{ccc} \Lambda^k(M) & \longrightarrow & \Lambda^k(K) \\ \omega & \longmapsto & R\omega. \end{array} \quad (1.25)$$

où  $R\omega$  est la  $K$ -cochaîne définie sur la base de  $K^k$  de  $\Lambda_k(K)$  par

$$R\omega : \sigma \in K_k \longmapsto \langle R\omega, \sigma \rangle = \begin{cases} \int_{\sigma} \omega & \text{si } k \geq 1 \\ \omega(\sigma) & \text{si } k = 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

Par linéarité on peut étendre cette propriété à  $\Lambda_k(K)$ .

Notons que

$$\dim \Lambda^k(K) = \dim \Lambda_k(K) = \text{card} K_k$$

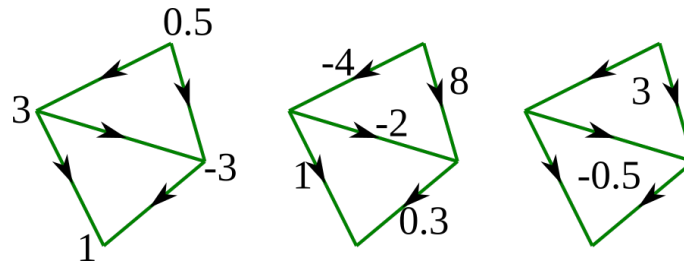


FIGURE 1.16 – Exemple les 0-formes sont associés aux sommets, les 1-formes sont liées aux cotés et les 2-formes sont liés aux triangles.

---

**Algorithme 3 :** Discrétisation d'une  $k$ -forme différentielle  $\omega$  en une cochaîne primal

---

- 1 **Data :** Complexe simplicial  $K = K_0 \cup \dots \cup K_n$
  - 2 **for**  $\sigma_i \in K_k$  **do**
  - 3      $\langle \omega, \sigma_i \rangle = \int_{\sigma_i} \omega$
- 

Une  $k$ -forme peut être discrétiser en une  $k$ -cochaîne primale ou duale en utilisant les algorithmes (3) et (4) respectivement.

Pour définir une version discrète des différents opérateurs différentiels, il faut d'abord définir la dérivée extérieure discrète. Nous utiliserons la définition alternative du dérivé extérieur dans le cas continue pour motiver notre définition discrète. En premier, nous définissons l'opérateur de bord dans le cas discret.

**Définition 1.42** *Le bord d'un  $k$ -simplexe est la  $(k - 1)$ -chaîne définie par :*

$$\partial_k([v_0 \cdots v_k]) = \sum_{i=0}^k (-1)^i [v_0 \cdots \hat{v}_i \cdots v_k].$$

Le bord d'un simplexe  $\sigma$  est donc la chaîne formée par ses  $(k - 1)$ -faces munies de l'orientation induite par  $\sigma$ . La notion de bord s'étend naturellement par linéarité sur tout  $\Lambda_k(K)$ .

---

**Algorithme 4 :** Discrétisation d'une  $k$ -forme différentielle en une  $k$ -cochaîne duale

---

- 1 **Data :**  $k$ -forme différentielle  $\omega$
  - 2 **for**  $\sigma_i \in K_{n-k}$  **do**
  - 3     Déterminer le dual  $*\sigma_i \in *K_{n-k}$  de  $\sigma_i$
  - 4      $\langle \omega, *\sigma_i \rangle = \int_{*\sigma_i} \omega$
-

**Exemple 1.24** Soit  $\sigma = [v_0v_1v_2]$  un des deux triangles orientés de la Figure 1.17. Le bord de  $\sigma$  est

$$\begin{aligned}\partial_2\sigma^2 &= (-1)^0[\hat{v}_0v_1v_2] \\ &\quad + (-1)^1[v_0\hat{v}_1v_2] \\ &\quad + (-1)^2[v_0v_1\hat{v}_2] \\ &= [v_1v_2] - [v_0v_2] + [v_0v_1] \\ &= e_2 - e_3 + e_1\end{aligned}$$

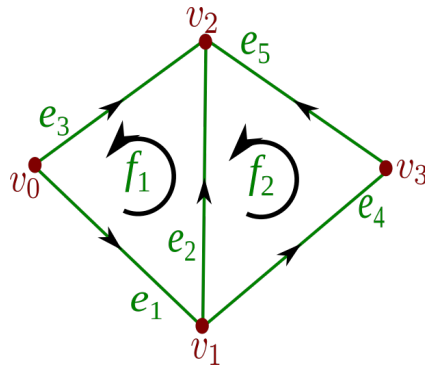


FIGURE 1.17 – Exemple d'un complexe simplicial 2D.

**Définition 1.43** L'opérateur de bord  $\partial_k$  est défini par

$$\begin{aligned}\Lambda_k(K) &\longrightarrow \Lambda_{k-1}(K) \\ \sum c_i\sigma_i &\longmapsto \sum c_i\partial_k\sigma_i\end{aligned}$$

**Exemple 1.25** Soit  $\sigma$  le triangle de l'exemple 1.24. On a

$$\begin{aligned}\partial_1(\partial_2(\sigma)) &= \partial_1(e_2) - \partial_1(e_3) + \partial_1(e_1) \\ &= (v_2 - v_1) - (v_2 - v_0) - (v_1 - v_0) \\ &= \emptyset\end{aligned}$$

En fait, l'opérateur de bord vérifie une propriété intéressante

**Propriété 1.3**

$$\partial_k \circ \partial_{k+1} = \emptyset.$$

Matriciellement,  $\partial_k$  est représenté par une matrice de  $\sharp K_{k-1}$  lignes et  $\sharp K_k$  colonnes ( $\sharp$  désignant le nombre d'éléments ou cardinal). Par exemple, sur le maillage présenté sur la Figure 1.17 on a :

$$\partial_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \partial_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

On peut maintenant définir l'opérateur de dérivation extérieure discret. On va d'abord le faire sur le maillage primal.

**Définition 1.44** *L'opérateur de dérivation extérieure  $d_k$  est l'application linéaire de  $\Lambda^k(K)$  dans  $\Lambda^{k+1}(K)$  telle que*

$$\langle d\omega, c \rangle = \langle \omega, \partial c \rangle, \quad \text{pour tout } \omega \in \Lambda^k(K), c \in \Lambda_{k+1}(K). \quad (1.28)$$

On peut remarquer que la relation (1.28) est simplement l'expression du théorème Stokes si l'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est une intégration.

$$\int_{\partial c} \omega = \langle \omega, \partial c \rangle = \langle d\omega, c \rangle = \int_c d\omega$$

où  $\omega$  est une  $k$ -cochaîne et  $c$  une  $(k+1)$ -chaîne.

**Exemple 1.26** *Si une 0-forme  $\omega$  prend les valeurs  $\omega_1$  et  $\omega_2$  aux sommets  $v_1$  et  $v_2$  de la Figure 1.5, alors*

$$\langle d\omega, e_1 \rangle = \langle \omega, v_2 - v_1 \rangle = \omega_2 - \omega_1.$$

*Et si  $\omega$  est une 1-forme, alors*

$$\langle d\omega, f_1 \rangle = \langle \omega, e_1 \rangle + \langle \omega, e_2 \rangle - \langle \omega, e_3 \rangle.$$

Comme la relation (1.28) définit  $d_k$  comme l'adjoint de  $\partial_k$ , la matrice de  $d_k$  est la transposée de celle de  $\partial_k$  :  $d_k = \partial_k^T$ . L'algorithme 5 permet de construire informatiquement la matrice de  $d_k$ . La Figure 1.18 présente une 0-forme  $\omega$  arbitraire, sa dérivée extérieure  $d\omega$

---

**Algorithme 5** : opérateur de dérivée extérieure  $d|_{\Lambda_k}$

---

```

1 Data : Complexe simpliciel  $K = K_0 \cup \dots \cup K_n$ 
2  $d|_{\Lambda_k} = 0$ ;
3 for  $\sigma_i \in K_{k+1}$  do
4   for  $s_j \in \text{coface}(\sigma) \subset K_{k-1}$  do
5      $(d|_{\Lambda_k})_i^j =$  orientation relative de  $\sigma_i$  dans  $s_j$ ;

```

---

et  $d^2\omega$ . Dans cet exemple,

$$d^2\omega = 0. \quad (1.29)$$

En fait, cette relation est valable pour toute  $k$ -forme. Ceci est dû à la dualité entre  $\partial$  et  $d$ , et au fait que  $\partial^2 = 0$ , signifiant que le bord d'un bord est l'ensemble vide. Les opérateurs de bord et de dérivation extérieur discrets peuvent être étendus au maillage dual  $*K$ .

**Définition 1.45** *Soit  $\sigma = [v_0 \dots v_k]$  un  $k$ -simplexe de  $K$  et  $*\sigma$  sa  $(n-k)$ -cellule duale. Alors*

$$\partial_{n-k}(*\sigma) = \sum_{\sigma \prec \sigma_i} s^i(*\sigma_i)$$

*la somme étant sur tous les  $(k+1)$ -simplexes de  $K$  ayant  $\sigma$  comme face et  $s^i = 1$  si  $\sigma$  est doté de l'orientation induite par  $\sigma_i$  et  $-1$  sinon.*

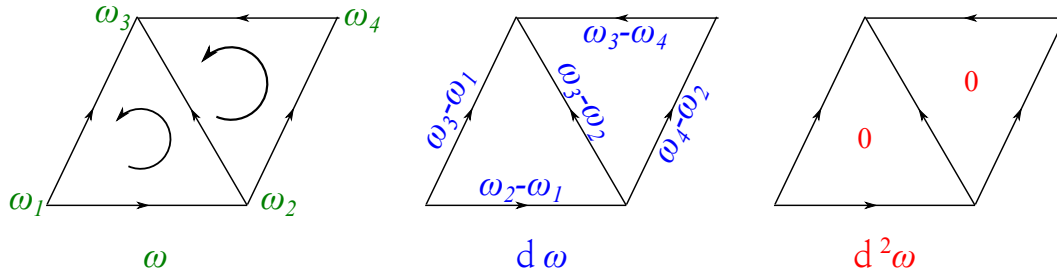


FIGURE 1.18 – À gauche une 0-forme discrète  $\omega$  définie par les valeurs  $\langle \omega_i, v_i \rangle$  aux sommet  $v_i$ . Au milieu la dérivée extérieure de  $\omega$ . À droite la seconde dérivée extérieure de  $\omega$

On note par  $d_k^{dual}$  la restriction de  $d_k$  à  $\Lambda^k(K)$ . Lorsqu’il faut le préciser, on écrira  $D_k$  la matrice de  $d_k$  dans  $\Lambda^k(K)$ . Connaissant les matrices des dérivées extérieures sur le maillage primal, celles sur le maillage dual se déduisent simplement par :

$$D_k^{dual} = [(-1)^{k(n-k)} D_{n-k-1}]^t \tag{1.30}$$

si le bord de  $K$  est vide.

Dans la suite nous adoptons les notations suivantes :

Si  $n = 2$

$$D_0^{dual} = D_1^t \quad D_1^{dual} = -D_0^t$$

Si  $n = 3$

$$D_0^{dual} = -D_2^t \quad D_1^{dual} = D_1^t \quad D_3^{dual} = -D_0^t.$$

**Exemple 1.27** Prenons par exemple la cellule duale située dans le coin inférieur gauche du maillage sur la Figure 1.12, qui est agrandie sur la Figure 1.19. La différentielle de la 1-forme  $\omega$  sur la cellule

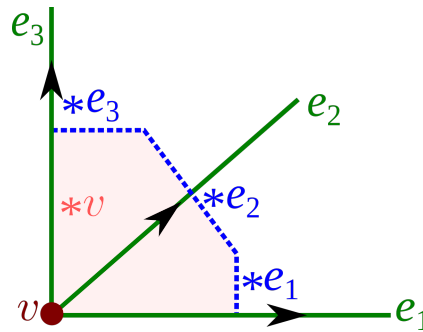


FIGURE 1.19 – La cellule duale dans le coin inférieur droit de la Figure 1.12

duale  $*v$  est

$$\langle d\omega, *v \rangle = \langle \omega, *e_1 \rangle + \langle \omega, *e_2 \rangle + \langle \omega, *e_3 \rangle + \frac{1}{2} \langle \omega, e_1 \rangle - \frac{1}{2} \langle \omega, e_3 \rangle,$$

si  $*v$  est orienté dans le sens des aiguilles d’une montre et que la métrique est Euclidienne. Sur l’ensemble de la maille, nous aurions

$$d_{1,*} \omega = -d_0^T \omega + \frac{1}{2} |d_0^T| \text{diag}(d_1^T \mathbb{1}).$$

La matrice  $|d_0^T|$  est la matrice  $d_0^T$  avec toutes les entrées non négatives et  $\mathbb{1}$  est un tableau de dimension  $\text{card } \Lambda_2$  avec 1 comme composantes.

Dans le cas où  $\partial\omega$  n'est pas vide, un complément de bord doit être rajouté à (1.30) en raison du fait que si une  $n$ -cellule duale  $\sigma$  touche  $\partial K$ , alors  $\partial(*\sigma)$  est composé de deux faces *et* de parties de faces primales aux bords. Plus généralement, la relation (1.30) doit être remplacé par

$$\mathbf{d}_k^{dual} = (-1)^{k(n-k)} (\mathbf{d}_{n-k-1}^{primal})^T + \mathbf{d}_b \quad (1.31)$$

où  $\mathbf{d}_b$  est le complément de bord dans la matrice. On note par  $D_b$  la matrice de l'opérateur  $d_b$ . Tel que son nom l'indique, cet opérateur fait intervenir les cochaînes définies sur le bord de  $K$ . À titre d'exemple en 2D, le  $D_b$  appliqué à une 0-forme discrète n'est autre que le tableau formé par  $\langle \omega, c(e_i) \rangle$  avec  $e_i \in K_1 \cup \partial K$ , et le  $D_b$  appliqué à 1-forme discrète dual n'est autre que le tableau formé par  $\langle \omega, [v_i, c(e_i)] \rangle$  avec  $e_i \in K_1 \cup \partial K$  et  $v_i \prec e_i$ . L'opérateur  $D_b$  va nous servir dans l'imposition des conditions de bords lors des simulations numériques.

En conclusion, la DEC est construite de sorte que l'exactitude du complexe de de Rham soit préservée à l'échelle discrète. On a deux suites exactes, une pour l'opérateur de bord  $\partial$  et la deuxième pour l'opérateur de dérivée extérieure  $d$  comme indiqué dans les Tables (1.3 1.4). De plus, par construction de l'opérateur de dérivation extérieure, le théorème de Stokes est aussi préservé.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \Lambda^0(K) & \xrightarrow{d} & \Lambda^1(K) & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & \Lambda^{n-1}(K) & \xrightarrow{d} & \Lambda^n(K) & \xrightarrow{d} & 0 \\ 0 & \xleftarrow{\partial} & \Lambda_0(K) & \xleftarrow{\partial} & \Lambda_1(K) & \xleftarrow{\partial} & \dots & \xleftarrow{\partial} & \Lambda_{n-1}(K) & \xleftarrow{\partial} & \Lambda_n(K) \end{array}$$

TABLE 1.3 – Suites d'homologies discrètes sur  $K$ 

$$\begin{array}{ccccccccccc} \Lambda^0(*K) & \xrightarrow{d} & \Lambda^1(*K) & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & \Lambda^{n-1}(*K) & \xrightarrow{d} & \Lambda^n(*K) & \xrightarrow{d} & 0 \\ 0 & \xleftarrow{\partial} & \Lambda_0(*K) & \xleftarrow{\partial} & \Lambda_1(*K) & \xleftarrow{\partial} & \dots & \xleftarrow{\partial} & \Lambda_{n-1}(*K) & \xleftarrow{\partial} & \Lambda_n(*K) \end{array}$$

TABLE 1.4 – Suites d'homologies discrètes sur  $*K$ 

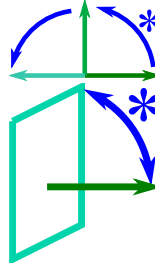
## 1.7 AUTRES OPÉRATEURS DU CALCUL EXTÉRIEUR DISCRET

### 1.7.1 Opérateur de Hodge discret

Dans la suite, on définit l'opérateur de Hodge étoile discret. Rappelons que dans le cas continu, l'opérateur de Hodge  $\star$  est un isomorphisme allant de  $\Lambda^k(M)$  à  $\Lambda^{n-k}(M)$ . Cette isomorphisme satisfait la relation

$$\tau \wedge \star \omega = g^{(k)}(\tau, \omega) vol$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

FIGURE 1.20 – Représentation du Hodge dans  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ 

Dans le cas discret, l'opérateur de Hodge  $\star$  doit aussi à son tour réaliser un isomorphisme entre  $\Lambda^k(K)$  et  $\Lambda^{n-k}(K)$ . Ce n'est pas possible dans la même grille car généralement  $\dim \Lambda^k(K) \neq \dim \Lambda^{n-k}(K)$ . Prenons par exemple le cas d'un complexe simplicial formé par deux triangles adjacents. On a pour  $n=2$  :  $\dim \Lambda^0(K) = 4$  alors que  $\dim \Lambda^{n-k}(K) = \dim \Lambda^2(K) = 2$ .

On va plutôt définir  $\star$  comme un isomorphisme entre  $\Lambda^k(K)$  et  $\Lambda^{n-k}(*K)$ . Pour ce faire, remarquons que la relation 1.11 permet d'écrire

$$\frac{1}{|\star \sigma|} \int_{\star \sigma} \star \omega \simeq \frac{1}{|\sigma|} \int_{\sigma} \omega$$

si  $\sigma$  est orthogonal à  $\star \sigma$ , comme dans le cas lorsque le maillage dual est circoncentrique. On définit un opérateur de Hodge discret, appelé Hodge diagonal, en mimant cette propriété.

**Définition 1.46** Soit un maillage  $K$  dont le dual  $*K$  n'est pas dégénéré ( $|\star \sigma| \neq 0$  pour tout  $\sigma \in K$ ). L'opérateur de Hodge diagonal est l'isomorphisme

$$\star : \begin{array}{ccc} \Lambda^k(K) & \longrightarrow & \Lambda^{n-k}(*K) \\ \omega & \longmapsto & \star \omega \end{array}$$

défini par

$$\frac{\langle \star \omega, \star \sigma \rangle}{|\star \sigma|} = \frac{\langle \omega, \sigma \rangle}{|\sigma|} \quad (1.32)$$

pour tout  $\sigma$  un  $k$ -simplexe de  $K$  et toute  $k$ -forme discrète  $\omega$  de  $\Lambda^k(K)$ .

Cet opérateur de Hodge est appelé diagonal car il es représenté par une matrice diagonale  $H$ , dont les éléments diagonaux sont

$$H_{ii} = \frac{|\star \sigma_i|}{|\sigma_i|}.$$

La relation(1.32) peut être interpréter comme suit : la forme discrète  $\omega$  et  $\star \omega$ , normalisées par la mesure du simplexe/cellule sur laquelle elle est appliqué, représente la même densité mais sur des domaines complémentaire en dimension et orthogonaux.

L'opérateur de Hodge dans sa version continue vérifie une propriété qu'on souhaite conserver dans le cadre discret.

$$\star \star \omega = (-1)^{k(n-k)} \omega$$

Cette propriété relie l'opérateur de Hodge avec son inverse. Dans le but de bien la garantir, on définit l'inverse du Hodge de  $\Lambda^{n-k}(\star K)$  dans  $\Lambda^k(K)$  par

$$\star_{n-k}^{dual} = (-1)^{k(n-k)} (\star_k^{primal})^{-1}.$$

**Exemple 1.28** Prenons l'exemple d'un maillage à un seul triangle 1.21.  $c_f$  et  $c_i$  sont les centres des cercle circonscrit du triangle et des cotes respectivement. La matrice du Hodge qui agit sur une 1-cochaîne primale est

$$H_{diagonal} = \begin{bmatrix} \frac{|\star e_1|}{|e_1|} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{|\star e_2|}{|e_2|} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{|\star e_3|}{|e_3|} \end{bmatrix}. \quad (1.33)$$

Dans la suite, on note par  $H_k$  la matrice de l'opérateur de Hodge dans  $\Lambda^k(K)$ , et par  $(-1)^{k(n-k)}(H_k)^{-1}$  son inverse.

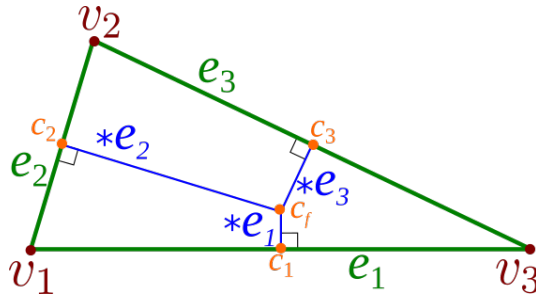


FIGURE 1.21 – Simplexes primaux et leurs centres circoncentriques dans un maillage unitaire en 2D.  $c_i$  est le circoncentre du coté primal  $e_i$ , pour  $i = 1, 2, 3$ , et  $c_f$  est le circoncentre du triangle.  $\star e_i$  est perpendiculaire à  $e_i$ .

La structure diagonale de  $H_k^{primal}$ , rend l'inversion facile, ce qui fait que le Hodge diagonal est un choix populaire pour un opérateur de Hodge discret. Dans la suite les indices (*primal* et *dual*) ne seront utilisés que si besoin ou si une confusion existe. Notons que cette construction de l'opérateur de Hodge discret n'est pas unique.

### 1.7.2 Opérateur codifférentiel discret

Le codifférentiel comme déjà définie dans le cas continu, n'est que l'inverse de l'opérateur de la dérivée extérieur discret  $d$ . Au contraire de la dérivée extérieur qui augmente la dimension d'une forme différentielle, le codifférentiel agit de manière qu'il diminue la dimension d'une forme différentielle auquel il est appliqué.

$$\delta : \Lambda^{k+1}(K) \longrightarrow \Lambda^k(K) \quad (1.34)$$

$$\beta \longmapsto (-1)^{nk+1} \star d \star \beta \quad (1.35)$$

Avec cette définition, la discrétisation du codifférentiel est évidente. Il suffit d'utiliser les opérateurs de Hodge et de la dérivée extérieur en version discrètes construit précédemment. Dans le cas discret, la propriété que  $\delta$  est l'inverse de  $d$  s'interprète comme suit. En



effet, en appliquant  $\delta$  sur une maille primale se résume à appliquer  $d$  sur ma maille duale correspondante, et vice-versa, à un signe près.

### 1.7.3 Produit extérieur discret

Les opérateurs discrets définis ci-dessus ainsi que l'opérateur étoile de Hodge discret permettent déjà de résoudre quelques problèmes linéaires intéressants, tels que les équations de Poisson, de Helmholtz ou de Stokes. Toutefois, d'autres outils tels que le produit extérieur discret est également nécessaire en général. La définition du produit extérieur discret dépend du rang des formes concernés et de leur emplacement (maillage primal ou dual) (voir [38]). Par exemple, le produit extérieur entre une 1-forme définie sur le maillage primal  $\omega$  et une 0-forme primale  $\theta$  peut être définie comme suit sur un coté orienté  $[v_i, v_j]$  :

$$\langle \omega \wedge \theta, [v_i, v_j] \rangle = \frac{\langle \omega, [v_i, v_j] \rangle \langle \theta, v_i \rangle + \langle \theta, v_j \rangle}{2}.$$

Si la dualité  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est considérée comme une intégration, alors le second membre de l'équation (1.7.3) est une approximation linéaire de l'intégrale de  $\omega \wedge \theta$  sur le coté  $[v_i, v_j]$ . Une autre possibilité de définir un produit extérieur discret est d'interpoler la cochaîne sous une forme différentielle continue par morceaux (voir section suivante), appliquer la définition du produit extérieur, et enfin, discrétiser le résultat. nous invitons le lecteur à lire [35] pour trouver des définitions du produit extérieur discret agissant sur d'autres formes discrètes.

### 1.7.4 Des cochaînes aux formes différentielles

Nous avons vu dans la section 1.6 comment discrétiser une forme différentielle en une cochaîne. Inversement, on peut reconstruire une cochaîne en un différentiel continu par morceaux en utilisant une technique d'interpolation. L'interpolation la plus basique couramment utilisée dans le DEC est la reconstruction par les formes de Whitney. Une  $k$ -forme de Whitney  $\phi^\sigma$  est définie sur un  $k$ -simplex  $\sigma$  comme suit.

**Définition 1.47** Pour un sommet  $v_i$ ,  $\phi^{v_i}$  est la fonction de coordonnées barycentriques. Elle vérifie que  $\phi^{v_i}(v_j) = \delta_j^i$  pour tout sommet  $v_j$ .

Pour  $k \geq 1$ , la  $k$ -forme de Whitney correspondant à un  $k$ -simplexe  $[v_0, \dots, v_k]$  est (voir [?]) :

$$\phi^{[v_0 \dots v_k]} = k! \sum_{i=0}^k (-1)^i \phi^{v_i} d\phi^{v_0} \wedge \dots \wedge d\phi^{v_{i-1}} \wedge d\phi^{v_{i+1}} \dots \wedge d\phi^{v_k}.$$

On a  $\phi^{c_i}(c_j) = \delta_j^i$  pour deux  $k$ -simplexes arbitraires  $c_i$  et  $c_j \in K_k$ .

**Exemple 1.29** Dans cet exemple, on cherche à construire les formes de Whitney dans un triangle unitaire. Soit  $f = [v_0 v_1 v_2]$  le triangle dans  $K_2$  formé par les sommets :  $v_0 = (0, 0)$ ,  $v_1 = (1, 0)$  et  $v_2 = (0, 1)$ .

Identifions les cotés de  $f$  :  $e_1 = [v_0, v_1]$ ,  $e_2 = [v_1, v_2]$  et  $e_3 = [v_2, v_0]$ .

D'après la définition des formes de Whitney on a que les 0-formes sont les fonctions des coordonnées barycentrique alors :

$$\phi^{v_1} = x, \phi^{v_2} = y, \text{ et } \phi^{v_0} = 1 - \phi^{v_1} - \phi^{v_2} = 1 - x - y.$$

Les 1-formes de Whitney sont calculées à partir des  $\phi^{v_i}$  comme suit :

$$\begin{aligned} \phi^{e_1} &= \phi^{v_0 v_1} = \phi^{v_3} d\phi^{v_1} - \phi^{v_1} d\phi^{v_3} = (1 - y) dx + x dy \\ \phi^{e_2} &= \phi^{v_1 v_2} = \phi^{v_1} d\phi^{v_2} - \phi^{v_2} d\phi^{v_1} = -y dx + x dy \\ \phi^{e_3} &= \phi^{v_2 v_0} = \phi^{v_2} d\phi^{v_3} - \phi^{v_3} d\phi^{v_2} = -y dx + (x - 1) dy \end{aligned}$$

Un autre exemple sur la construction des formes de Whitney dans un tétraèdre sera présenté dans le chapitre 5 dédié au calcul 3D.

Notons que la construction des formes des Whitney sur un simplexe est directement liée à l'orientation de ce dernier. Le changement de l'orientation entraîne donc un changement de signe.

Sur un maillage 3D, les 0-, 1- et 2- formes de Whitney sont linéaires par morceaux, tandis que les 3-formes de Whitney sont constantes sur chaque tétraèdre. En fait, les formes de Whitney ne sont que les éléments de Lagrange en éléments finis, auxquels on applique l'isomorphisme  $\flat$ . Ainsi, la reconstruction par les formes de Whitney est donnée par :

$$W : \begin{array}{ccc} \Lambda^k(K) & \longrightarrow & \Lambda^k(M) \\ \omega & \longmapsto & W\omega = \sum \langle \omega, c \rangle \phi^\sigma. \end{array}$$

Notons que les opérateurs de discrétisation et d'interpolation vérifient

$$RW\omega = \omega \quad \text{pour toute cochaîne } \omega.$$

Les cartes de De Rham et de Whitney sont essentielles à l'analyse de la convergence (voir pour exemple [29, 62, 63]). Des formes de Whitney d'ordre supérieur sont proposées, par exemple, dans [64, 65]. Comme indiqué, les cartes de Whitney fournissent une seule interpolation à l'intérieur de chaque tétraèdre (si le maillage est tridimensionnel). On peut aussi interpoler une cochaîne différemment, car par exemple en divisant chaque tétraèdre en plusieurs sous-régions et en construisant au coup par coup une forme interpolée dans chaque sous-région. Cette approche est utilisée dans la méthode covolume et la reconstruction mimétique [7]. Ajoutons, que les formes de Whitney servent pour la construction d'un opérateur de Hodge discret, nommé Hodge de Whitney. Ce dernier sera abordé dans les chapitres 4 et 5.

### 1.7.5 Produit intérieur discret

Pour résoudre certains problèmes tels que les équations de Navier-Stokes, un produit intérieur discret ou un dérivé de Lie discrète est nécessaire. Une possibilité de définir le produit intérieur discret est d'utiliser l'opérateur Hodge star discret et d'appliquer la propriété du produit intérieur suivante (voir [38]) :

$$\iota_X \omega = (-1)^{k(n-k)} \star (\star \omega \wedge X^\flat). \quad (1.36)$$

pour tout champ vectoriel  $X$  et toute  $k$ -forme  $\omega$ . La dérivée de Lie  $\mathcal{L}$  peut être décomposée entre produit intérieur et produit extérieur en utilisant la formule magique de Cartan. Une remarque doit être faite sur la formule (1.36). L'utilisation d'une métrique est nécessaire pour définir la version discrète de l'opérateur de Hodge star et ensuite le produit intérieur discret. Dans de nombreuses applications, une métrique est disponible. Par exemple, une métrique est nécessaire pour construire des lois constitutives. Ainsi, la formule (1.36) peut être utilisée dans ces applications. Toutefois, elle présente un inconvénient majeur. Cet inconvénient se résume par le fait que ça définit le produit intérieur discret et la dérivée de Lie discrète, qui sont des opérateurs indépendants de la métrique dans le cas d'une continue, à partir de l'opérateur de Hodge qui est dépendant de la métrique. Des alternatives peuvent être trouvées dans la littérature. Par exemple, un dérivé discret de Lie peut être construit à partir de l'extrusion, comme développé dans [66, 67].

## 1.8 CONCLUSION

Nous avons présenté DEC qui est un intégrateur spatial basé sur le calcul extérieur et qui reproduit exactement le théorème de Stokes et la relation  $d^2 = 0$  à l'échelle discrète. La deuxième propriété permet, par exemple, de vérifier exactement la condition d'incompressibilité. Cela permet également de garantir la préservation exacte de la circulation dans un écoulement de fluide idéal incompressible. L'utilisation de la DEC en mécanique étant très récente, nous avons présentons dans la suite quelques applications en mécanique des fluides.

# MISE EN ŒUVRE DU DEC EN MÉCANIQUE DES FLUIDES

# 2

## SOMMAIRE

---

2.1	INTRODUCTION . . . . .	46
2.2	FORMULATION DU PROBLÈME . . . . .	46
2.2.1	Formulation tensorielle vis formulation calcul extérieur . . . . .	46
2.2.2	Formulation avec fonction du courant . . . . .	47
2.2.3	Discrétisation de l'équation . . . . .	48
2.3	RÉSULTATS NUMÉRIQUES . . . . .	50
2.3.1	Écoulements Couette et Poiseuille . . . . .	50
2.3.2	Vortex de Taylor-Green anisotherme . . . . .	53
2.3.3	Solutions Traveling waves . . . . .	55
2.3.4	Cavité différentiellement chauffée . . . . .	64
2.4	CONCLUSION . . . . .	68

---

## 2.1 INTRODUCTION

On s'intéresse à l'application de la DEC à la mécanique des fluides, plus précisément aux problèmes des écoulements des fluides anisothermes. Pour commencer, les équations de Navier-Stokes anisothermes sont formulées en calcul tensoriel. Ensuite on montre les étapes pour passer de la formulation calcul tensoriel à la formulation calcul extérieur. Une formulation en passant par intermédiaire de la fonction de courant est adoptée dans la forme discrète du problème en calcul extérieur. le schéma numérique est présenté. Les tests numériques sont effectués en premier sur les problèmes de Couette et Poiseuille afin de déterminer la convergence du schéma numérique. Ensuite une série de simulation sur les problèmes de Taylor-Green et les problèmes des ondes progressives sont effectués et comparés avec les solutions exactes. Pour terminer, on fait un dernier test sur l'étude de l'écoulement dans une cavité différentiellement chauffée. Les résultats de ces tests vont être comparés avec des résultats existant dans la littérature.

## 2.2 FORMULATION DU PROBLÈME

Considérons un fluide newtonien avec les propriétés physiques suivantes.

- $\rho$  : La densité
- $\nu$  : la viscosité cinématique
- $\beta$  : le coefficient de dilatation thermique
- $\kappa$  : le coefficient de diffusion thermique
- $g$  : La valeur de l'accélération de la pesanteur

On se place dans un domaine simplement connexe  $M$ . Dans la limite d'approximation de Boussinesq, l'évolution de la vitesse  $u$ , la pression  $p$  et la température  $\theta$  sont gouvernées par les équations de Navier-Stokes anisothermes.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u \otimes u) + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - \nu \Delta u + \beta g \theta e_y = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \operatorname{div}(u \theta) - \kappa \Delta \theta = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Dans ce qui suit on va reformuler les équations (2.1) dans le langage du calcul extérieur.

### 2.2.1 Formulation tensorielle vis formulation calcul extérieur

Dans le but d'exprimer le problème dans le contexte du calcul extérieur, l'opérateur  $\flat$  est appliqué à l'équation (2.1). Cette manœuvre permet d'introduire  $v = u^\flat$ , la 1-forme associé à la vitesse. Comme montré dans le premier chapitre le terme  $(\operatorname{div} u)^\flat$  se traduit par  $\delta v$ . Avec ceci, la condition d'incompressibilité prend alors la forme suivante :

$$\delta v = 0. \quad (2.2)$$

Comme conséquence, le terme de diffusion dans l'équation de moments se formule

$$(\Delta u)^b = d\delta v + \delta d v = \delta d v. \quad (2.3)$$

Dans la suite, comme ce qui est montré dans [68], le terme non linéaire de l'équation se formule par

$$[\text{div}(u \otimes u)]^b = \mathcal{L}_u v - \frac{1}{2} d[v(u)]$$

ou  $\mathcal{L}$  est l'opérateur de la dérivée de Lie. Ensuite l'utilisation de la formule magique de Cartan permet d'écrire

$$[\text{div}(u \otimes u)]^b = d(i_u v) + i_u d v - \frac{1}{2} d[v(u)].$$

Mais d'après la définition (1.3.1),

$$i_u v = v(u) = u \cdot u = u^2,$$

On a :

$$[\text{div}(u \otimes u)]^b = i_u d v + \frac{1}{2} d u^2. \quad (2.4)$$

En ce qui concerne le gradient de la pression, ce dernier correspond à la forme

$$(\text{grad } p)^b = d p$$

et la 1-forme correspondant au terme de la température est simplement

$$(\beta g \theta e_y)^b = \beta g \theta d y. \quad (2.5)$$

Pour conclure en utilisant les relations (1.20),(1.21) et (2.2)-(2.5) , la formulation calcul extérieur du problème (2.1) est obtenue et prend la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + i_{v^\sharp} d v + \frac{1}{\rho} d \bar{p} - \nu \delta d v + \beta g \theta d y = 0, \\ \delta v = 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \delta(\theta v) + \kappa \delta d \theta = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Dans (2.6),  $\bar{p} = p + \frac{1}{2} \rho u^2$  n'est autre que la pression dynamique.

### 2.2.2 Formulation avec fonction du courant

Comme le domaine est simplement connexe, la condition d'incompressibilité dans (2.6) nous informe que  $\star v$  est une forme fermée. Rappelons qu'une forme fermée est telle qu'en lui appliquant la dérivée extérieure on obtient une forme nulle. Le lemme de Poincaré garanti l'existence d'une 0-forme  $\psi$  tel que

$$\star v = d \psi.$$

En d'autres termes,  $u$  est exacte.  $\psi$  est la fonction de courant usuelle ou son opposé, selon la parité de la dimension  $n$  de  $M$ . Dans l'étape suivante, on applique l'opérateur  $d$  sur l'équation de quantité de mouvement. Cela revient à l'application de l'opérateur rot en calcul tensoriel. Le gain de cette manœuvre est l'élimination de la pression dynamique puisque  $d^2 \bar{p}$

Les équations (2.6) deviennent alors

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} d \star d \psi + d(i_{v^\sharp} d \star d \psi) - \nu d \delta d \star d \psi + \beta g d(\theta d y) = 0, \\ v = \star d \psi, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \delta(\theta v) + \kappa \delta d \theta = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Ce sont ces équations qu'on va résoudre numériquement en  $\psi$  et  $\theta$ . Si nécessaire, la pression dynamique peut être calculée auxiliairement en appliquant l'opérateur codifférentiel  $\delta$  à l'équation de la quantité de mouvement dans (2.6). Notons qu'appliquer  $\delta$  à est équivalent, en calcul tensoriel à l'application de l'opérateur de divergence à l'équation de moment dans (2.1). Comme  $\delta v = 0$ , cette propriété nous amène à l'équation suivante :

$$\Delta \bar{p} = -\delta(i_{v^\sharp} d v) - \beta g \delta d(\theta d y). \quad (2.8)$$

Le terme diffusif s'annule car  $\delta \delta = 0$ .

Comme  $p$  est une 0-forme et que donc  $\delta p = \Delta p$ , c'est une équation de Poisson.

### 2.2.3 Discrétisation de l'équation

Chaque forme et chaque opérateur dans l'équation (2.7) peut être remplacé par sa version discrète en DEC. Pour les formes discrètes  $v$ ,  $\theta$  et  $p$ , on doit choisir sur quel maillage elles sont définies. Il faut faire le choix entre maillage dual et primal. Ce choix dépend des conditions aux bords. Comme cité dans [?], la forme  $v$  est placée sur le maillage dual. Dans ce cas, la valeur  $\langle v, \star e \rangle$  de  $v$  sur l'élément dual  $\star e$  correspondant au côté  $e$  peut être interpréter comme étant le flux de la vitesse  $u$  à travers  $\star e$  qui est une surface dans un maillage 3D et un segment dans le cas d'un maillage 2D. Les conditions de Dirichlet interviennent uniquement par le complément du bord  $d_b$ . Chaque fois que cela est nécessaire (par exemple, pour le calcul du terme convectif), une approximation de  $v$  sur la grille primale peut être calculée, en utilisant l'interpolation avec les formes de Whitney.

Le flux étant défini sur le maillage dual, la fonction du courant  $\psi$  est automatiquement localisée sur le maillage primal. La température est également placée sur les nœuds primaux. Après le remplacement de  $\psi$ ,  $v$ ,  $\theta$  et  $p$  par les cochaînes qui correspondent, et tous les opérateurs du calcul extérieur par leurs contres-parts discrets, les équations (2.7) deviennent des équations différentielles ordinaires matricielles dépendant du temps.

L'équation de quantité de mouvement discrétisée en 2D devient :

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial t} [-D_0^t] H_1 D_0 + [-D_0^t] (i_{v^{\sharp n}}) [-D_0^t] H_1 D_0 \right] \Psi + \\ & - \nu \left[ [-D_0^t] H_1 D_0 H_0^{-1} [-D_0^t] H_1 D_0 \right] \Psi + \\ & \beta g [-D_0^t] (\theta^n \, d y) = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Avec  $\Psi$  est le tableau de valeurs de  $\psi$ . Afin de ne pas surcharger les équations, le schéma numérique temporelle sera exprimer en utilisant les opérateur et non pas les matrices. La discrétisation temporelle se fait comme suit. En premier, la valeur de  $\psi^{n+1/2}$  est approximée avec un schéma Euler explicite :

$$\begin{aligned} & \left[ d \star d \right] \psi^{n+1/2} = d v^n \\ & + \frac{\Delta t}{2} \left[ - d i_{v^{\sharp n}} d v^n + \nu d \delta d v^n - \beta g d (\theta^n \, d y) \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

Une fois  $\psi^{n+1/2}$  est calculée, la vitesse (plus précisément , le flux)  $v^{n+1/2}$  est déduite :

$$v^{n+1/2} = \star d \psi^{n+1/2}. \quad (2.11)$$

En suite,  $\psi^{n+1}$  est résolue semi implicitement :

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\Delta t} d \star d + d i_{v^{\sharp n+1/2}} d \star d - \nu d \delta d \star d \right] \psi^{n+1} \\ & = d f^{n+1} + \frac{1}{\Delta t} d v^n - \beta' d (\theta^n \, d y). \end{aligned} \quad (2.12)$$

La vitesse est de nouveau calculé :

$$v^{n+1} = \star d \psi^{n+1}. \quad (2.13)$$

Finalement, la température est résolue avec un schéma d'Euler implicite :

$$\left[ \frac{1}{\Delta t} + \star d \star v^{n+1} \wedge \cdot + \kappa \delta d \right] \theta^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \theta^n. \quad (2.14)$$

La vitesse calculée dans (2.13) est une approximation de la solution de

$$\frac{\partial v}{\partial t} + i_{v^{\sharp}} d v + \frac{1}{\rho} d \bar{p} - \nu \delta d v + \beta g \theta \, d y = 0 \quad (2.15)$$

qui vérifie *exactement* la condition d'incompressibilité

$$\delta v = 0.$$

Par conséquent, chaque fois que nécessaire, la pression dynamique peut être calculée par l'application de l'opérateur de la codifférentielle  $\delta$  à l'équation (2.15) :

$$\left[ \delta d \right] \bar{p}^{n+1} = -\delta i_{v^{\sharp n+1}} d v^{n+1} + \nu \delta \delta d v^{n+1} - \beta g \delta (\theta^{n+1} \, d y). \quad (2.16)$$

Alors, si  $\text{div rot}$  n'est pas exactement zero, la résolution de (2.16) introduirait une pression parasite supplémentaire.



## 2.3 RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Un code Fortran 2003 en programmation objet a été réalisé pour les simulations numériques. L'inversion des matrices est faite par une décomposition LU. Les simulations présentées par la suite concernent des tests en 2D.

### 2.3.1 Écoulements Couette et Poiseuille

Dans cette première sous section, les écoulements laminaire Couette et Poiseuille dynamique et thermique sont simulés, principalement pour déterminer la convergence du schéma numérique. Pour les deux flux, le domaine spatial est le carré unitaire. La température exacte est linéaire dans le sens vertical.

Le domaine est discrétisé en des petits carrés. Chaque carré est à son tour décomposé en 14 triangles aigus bien centrés. La grille unitaire de ce maillage est représentée dans la Figure 2.1. Cette discrétisation bien centrée du domaine a été proposée dans [69]. Dans la suite du manuscrit, la longueur moyenne des côtés est notée  $\Delta x_{mean}$  et utilisée pour représenter la taille du maillage. Comme on n'a pas effectué d'étude sur la valeur optimale de la condition CFL, cette dernière est prise égale à 0.5. Une vitesse initiale nulle est

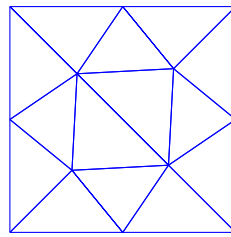


FIGURE 2.1 – Maillage élémentaire

donnée et les simulations s'arrêtent quand la stabilité est atteinte. Les profils de la vitesse horizontale et de la température pour l'écoulement Couette sont montrés dans la Figure 2.2. De même pour l'écoulement Poiseuille, les profils de la vitesse horizontale et de la température sont présentés dans la Figure 2.3. Ces graphes sont les résultats des simulations sur le maillage ayant  $\Delta x_{mean} = 1.39 \cdot 10^{-2}$ . Visuellement, les résultats numériques se superposent bien aux solutions exactes. Les erreurs relatives entre solutions exactes et solutions calculées sont de l'ordre de  $10^{-5}$  pour la fonction de courant et la pression, d'ordre de  $10^{-6}$  pour la température et d'ordre de  $10^{-4}$  pour la vitesse. Les valeurs des erreurs sont résumées dans la Table 2.1.

$\psi$	flux	$u$	p	$\theta$
$2.128 \cdot 10^{-5}$	$4.270 \cdot 10^{-4}$	$1.592 \cdot 10^{-4}$	$2.445 \cdot 10^{-5}$	$4.144 \cdot 10^{-6}$

TABLE 2.1 – Écoulement Poiseuille. Erreur relative.

Pour l'analyse de convergence, on va maintenant effectuer plusieurs tests avec différentes tailles de maillage, à savoir  $\Delta x_{mean} \cdot 10^2 = 8.408, 4.917, 2.091, 1.393, 1.044, 0.8354,$

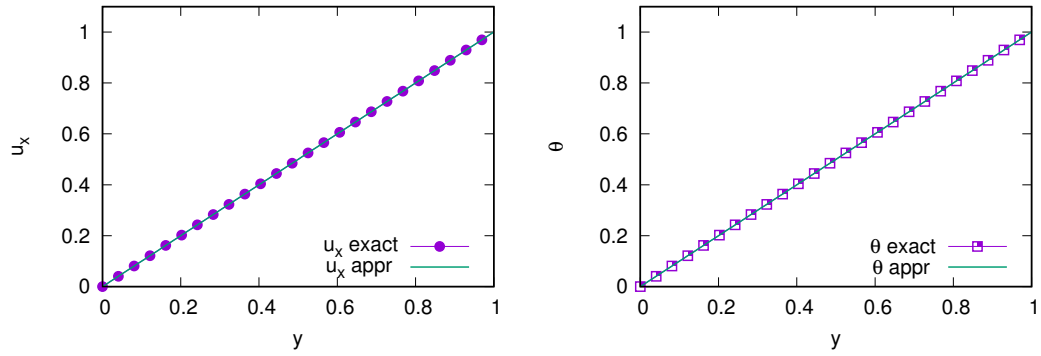


FIGURE 2.2 – Écoulement Couette : Profils de vitesse (gauche) et température (droite)

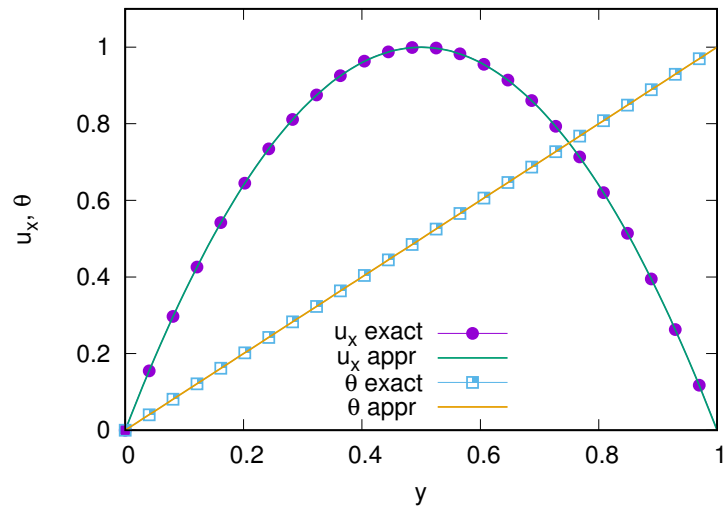


FIGURE 2.3 – Écoulement Poiseuille : Profils de vitesse et température

0.6961. Pour les 0-cochaines primales,  $\omega \in \Lambda^0(K)$  (fonction de courant et température), on définit une norme  $\|\omega_{k_0}\|$  par :

$$\|\omega\|_{K_0}^2 := \sum_{\sigma^0 \in K_0} \langle \omega, \sigma^0 \rangle^2 |\sigma^0|.$$

Cette norme correspond à la norme  $L^2$  habituelle pour une 0-forme différentielle constante par morceaux à l'intérieur de chaque cellule duale. Cette définition est utilisée à la place de la norme  $L^2$  habituelle de la forme reconstruite  $\hat{\omega}$  car elle est plus facile à calculer.

Pour une 0-forme duale (comme la pression), la norme ci-dessous est utilisée pour l'analyse de l'erreur :

$$\|\omega\|_{*K_2}^2 := \sum_{\sigma^2 \in K_2} \langle \omega, * \sigma^2 \rangle^2 |\sigma^2|.$$

Pour les 1-formes duales (comme le flux  $v$ ), nous utilisons une norme basée sur les longueurs des côtés :

$$\|\omega\|_{*K_1}^2 := \sum_{\sigma^1 \in K_1} \langle \omega, * \sigma^1 \rangle^2 |\sigma^1|.$$

Figure 2.4 montre l'évolution de l'erreur en fonction de la taille du maillage. Cette erreur est mise à l'échelle par la norme de la solution exacte, à l'exception de l'erreur

sur la pression dynamique. Cette exception est due à la valeur nulle de la solution exacte correspondant à la pression dynamique. Comme indiqué dans la Table 2.3, le taux de

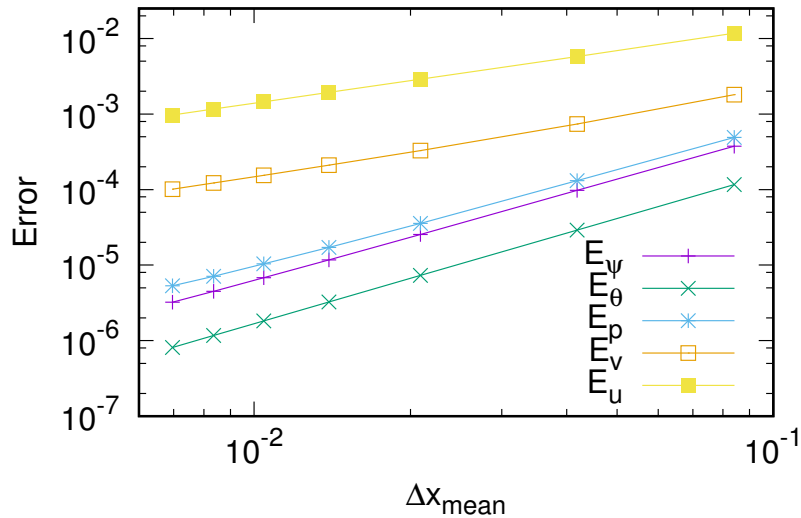


FIGURE 2.4 – Écoulement Couette : Erreur relative de la vorticité  $\psi$ , la température  $\theta$ , le flux  $v$  et la vitesse  $u$ , et l'erreur absolue  $E_p$  sur la pression dynamique  $\bar{p}$

convergence pour la fonction du courant  $\psi$  est d'une valeur de 1.84. Pour la température, un ordre de convergence d'ordre deux est atteint. Le flux et la vitesse sont de premier ordre de convergence, alors que pour la pression on a un taux de 1.65. Pour l'écoulement

$\psi$	flux	$u$	p	$\theta$
1.84	1.15	0.99	1.65	1.99

TABLE 2.2 – Écoulement Couette. Taux de convergence.

Poiseuille, l'évolution de l'erreur en fonction de  $\Delta x_{mean}$  pour les différentes variables est représenté dans la Figure 2.5. Les taux de convergence sont résumés dans la Table 2.3. On a que le taux de convergence de la fonction de courant est de 1.37. Alors que pour la température, un taux de convergence proche d'être de second ordre est observé 1.95. Pour le flux et la vitesse comme obtenue par [56], le taux de convergence est de premier ordre.

$\psi$	flux	$u$	p	$\theta$
1.37	1.13	1.00	1.86	1.95

TABLE 2.3 – Écoulement Poiseuille. Taux de convergence.

Les prochaines séries de résultats, sont ceux obtenus sur le problème du vortex de Taylor-Green.

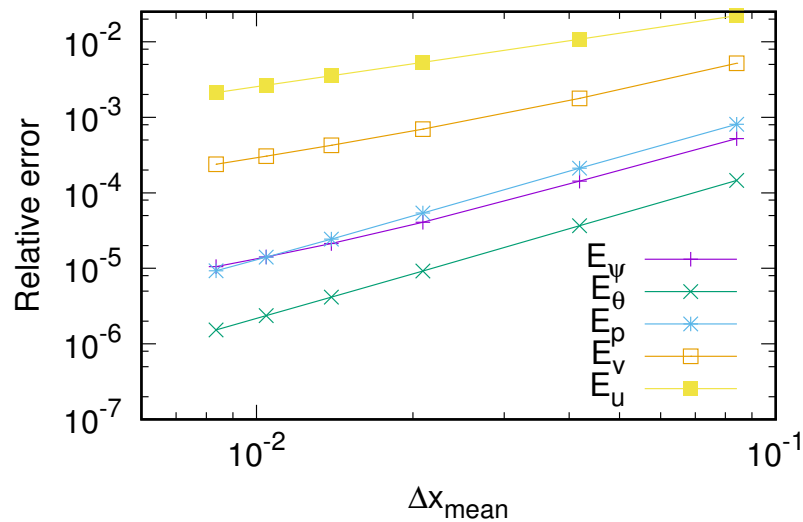


FIGURE 2.5 – Écoulement Poiseuille : Erreur relative de la vorticité  $\psi$ , la température  $\theta$ , le flux  $v$ , la pression dynamique  $\bar{p}$  et la vitesse  $u$

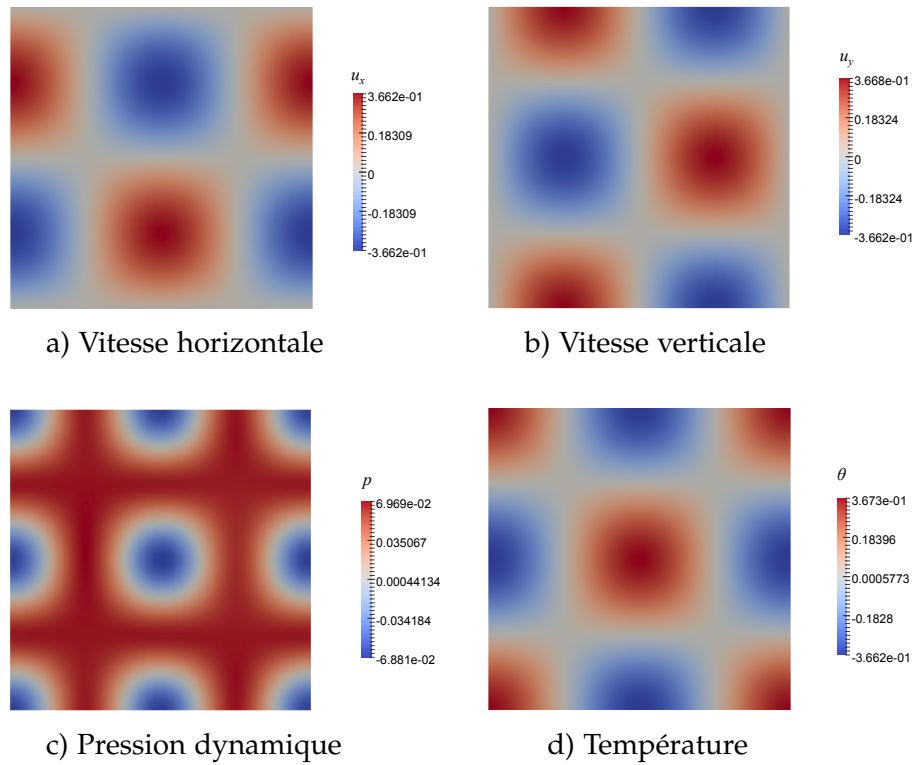
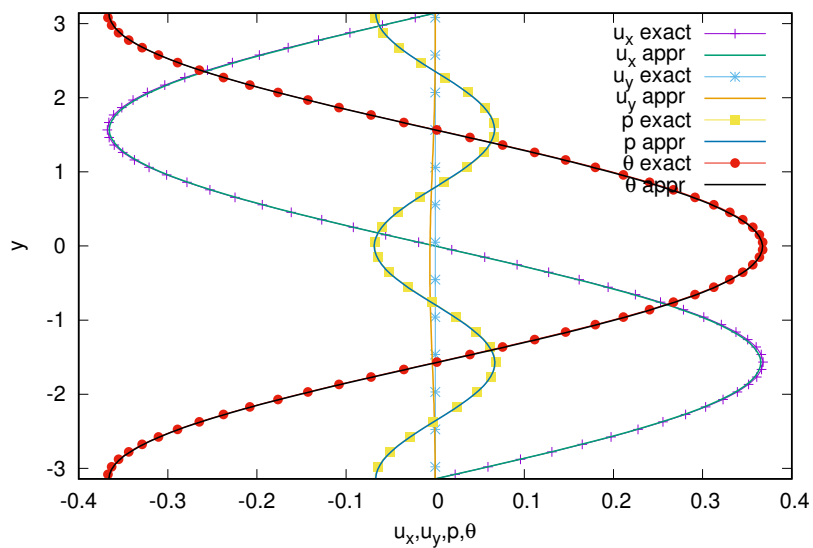
### 2.3.2 Vortex de Taylor-Green anisotherme

Considérons l'extension suivante de la solution du vortex de Taylor-Green dans le cas anisotherme

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = -\cos x \sin y e^{-2vt}, \\ u_y = \sin x \cos y e^{-2vt} \\ p = -\rho 4(\cos 2x + \cos 2y) e^{-4vt} \\ \theta = \cos x \cos y e^{-2\kappa t}. \end{array} \right.$$

Ce vortex est une solution de l'équation (2.1) dans le cas où la température est découplée de la vorticité c-à-d  $\beta = 0$ . Dans le cas où  $\beta \neq 0$ , une force volume doit être ajoutée aux équations. Les simulations sont arrêtées quand on atteint le temps  $T$ , tel que  $2\nu T = 1$ . Le domaine spatial est le carré  $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ . La longueur moyenne des côtés du maillage est  $\Delta x_{mean} = 6.56 \cdot 10^{-2}$ . Dans la Figure (2.6) le comportement de la solution dans le domaine avec les paramètres  $\nu = 0.1, \kappa = 0.1, \beta g = 1$  est présenté. Les profils calculés le long de l'axe  $y$  sont tracés dans la Figure 2.7. Cette figure montre un accord des profils de la vitesse horizontale, de la pression dynamique et de la température avec la solution exacte. Pour la vitesse verticale, qui doit s'annuler en  $x = 0$ , une petite différence peut être noté au milieu.

Le long de l'axe  $x$ , l'erreur sur les profils de la vitesse, de la pression dynamique et de la température est faible comme le montre la figure 2.8. Notons que le maillage élémentaire 2.1, n'est pas complètement symétrique. Cela entraîne que le maillage à son

FIGURE 2.6 – Vortex de Taylor-Green : Solution approchée à  $T = 5$ FIGURE 2.7 – Vortex de Taylor-Green. Profils de la vitesse, la pression dynamique et la température le long de l'axe  $x = 0$  à  $T = 5$

tour n'est pas symétrique. Cela pourrait être la cause de la légère dissymétrie des résultats le long des deux axes. la Table 2.4 présente les valeurs de l'erreur relative à  $T = 5$  pour

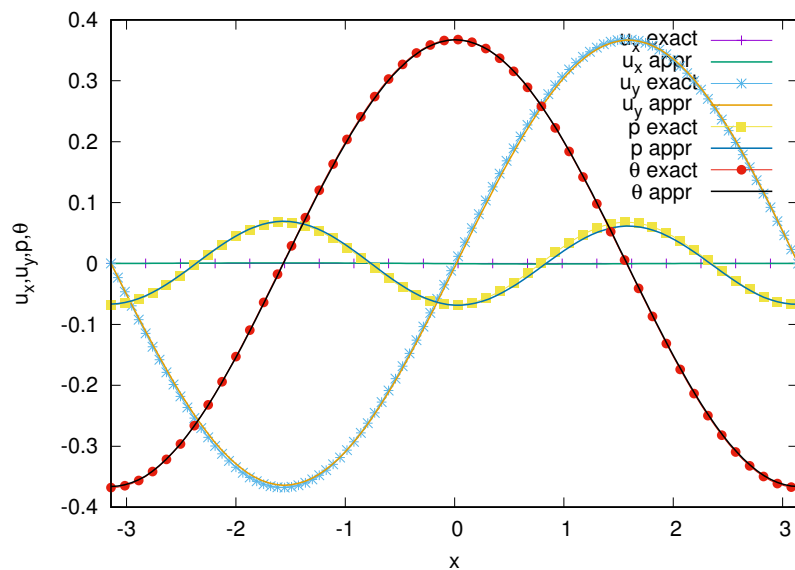


FIGURE 2.8 – Vortex de Taylor-Green. Profils de la vitesse, la pression dynamique et la température le long de l'axe  $y = 0$  à  $T = 5$

$\psi$	flux	$u$	$p$	$\theta$
$1.065 \cdot 10^{-2}$	$1.003 \cdot 10^{-2}$	$1.103 \cdot 10^{-2}$	$3.644 \cdot 10^{-2}$	$6.526 \cdot 10^{-3}$

TABLE 2.4 – Vortex de Taylor-Green. Erreur relative à  $T = 5$

le problème de Taylor-Green. Les valeurs de l'erreur relative pour toute les variables est d'ordre  $10^{-2}$  à l'exception de la température qui a une erreur de l'ordre  $10^{-3}$ .

À cause de la compatibilité des opérateurs de la divergence et du rotationnel en DEC, la condition d'incompressibilité est exactement vérifiée. En effet,  $\delta v$ , qui est l'expression de  $\text{div } u$  dans le calcul extérieur, est inférieur à la précision machine, comme on peut le voir sur la Figure 2.9. Cela confirme l'absence de production de masse artificielle ni localement ni globalement.

Dans la section suivante, quelques solutions des problèmes d'ondes progressives (traveling wave) anisothermes des équations (2.1) sont étudiées et on examine la capacité de notre code de prédire ces solutions.

### 2.3.3 Solutions Traveling waves

Cherchons des solutions sous la forme

$$u_x(\xi), u_y(\xi), p(\xi), \theta(\xi)$$

où

$$\xi = ax + by + ct \tag{2.17}$$

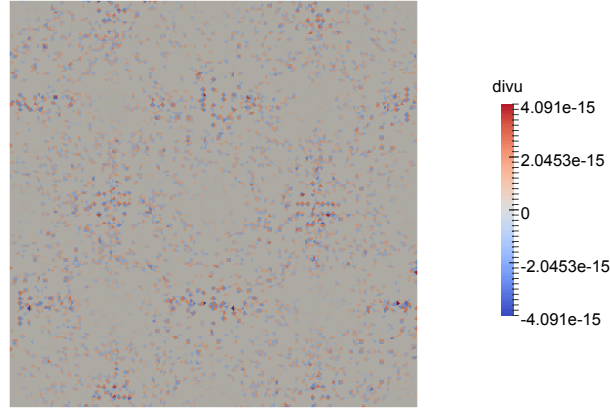


FIGURE 2.9 – Vortex de Taylor-Green. Divergence de la vitesse,  $\text{div } u$ , à  $t = 5$

est la variable d'ondes progressives. Il en résulte l'équation réduite suivante

$$\begin{cases} au'_x + bu'_y = 0, \\ (c + au_x + bu_y)u'_x + \frac{a}{\rho}p' = \nu(a^2 + b^2)u''_x, \\ (c + au_x + bu_y)u'_y + \frac{b}{\rho}p' = \nu(a^2 + b^2)u''_y - \beta g\theta, \\ (c + au_x + bu_y)\theta' = \kappa(a^2 + b^2)\theta'', \end{cases} \quad (2.18)$$

où l'indice prime ( $'$ ) désigne la dérivée par rapport à  $\xi$ . Il s'ensuit de la première équation de (2.18) que

$$au_x + bu_y = w \quad (2.19)$$

pour une certaine constante  $w$ . Dans l'étude qui suivra, nous allons voir que selon les valeurs des paramètres du problème, la solution de vitesse  $u$  du problème des ondes progressives peut s'exprimer en fonction de la fonction exponentielle, d'un polynôme ou du produit des deux.

**Cas 1 : cas où  $b \neq 0$ ,  $c + w \neq 0$  et  $\nu \neq \kappa$**

En résolvant la température à partir de la dernière équation du problème (2.18) on obtient :

$$\theta = \theta_1 e^{\lambda\xi/\kappa} \quad (2.20)$$

où  $\theta_1$  est une constante et la deuxième constante d'intégration a été fixée à zéro. Et  $\lambda$  est le paramètre donné par

$$\lambda = \frac{c + w}{a^2 + b^2},$$

L'élimination de la pression de la seconde et troisième équation du problème (2.18) résulte en

$$\lambda u'_x = \nu u''_x + \frac{\beta abg}{(a^2 + b^2)^2} \theta. \quad (2.21)$$

Quand  $\kappa \neq \nu$ , la solution de cette équation est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = u_1 e^{\lambda \zeta / \nu} + \frac{\kappa^2 \beta abg}{(c+w)^2 (\kappa - \nu)} \theta_1 e^{\lambda \zeta / \kappa} \\ u_y = \frac{w - au_1}{b}, \\ p = -\frac{\rho \beta bg \kappa \theta_1}{c+w} \exp^{\lambda \zeta / \kappa} \\ \theta = \theta_1 e^{\lambda \zeta / \kappa} \\ \psi = -\frac{u_1 \nu}{\lambda b} e^{\lambda \zeta / \nu} - \frac{\kappa^2 \beta abg}{(c+w)^2 (\kappa - \nu)} \frac{\theta_1 \kappa}{\lambda b} e^{\lambda \zeta / \kappa} + \frac{wx}{b} \end{array} \right. \quad (2.22)$$

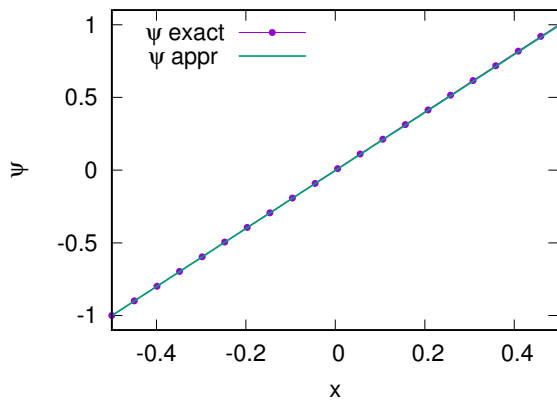
Où  $u_1$  est une constante. On considère la deuxième constante d'intégration égale à zéro. On observe que la température et la pression sont proportionnelles et dépendent exponentiellement de  $\zeta$ , tandis que la vitesse est exprimée par une combinaison de deux exponentiels. Un test numérique a été effectué en considérant le temps final  $T$  tel que  $|\lambda c|T/\kappa = 1$ . L'écoulement est caractérisé par une masse volumique  $\rho = 1$ , un coefficient de diffusion  $\nu = 0.2$ , coefficient de diffusion thermique  $\kappa = 0.1$  et coefficient de dilatation thermique  $\beta = 1$ . La valeur de l'accélération de la pesanteur  $g$  est fixée à  $g = 10$ . Le domaine spatial choisi est défini par le carré  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  où une discrétisation régulière composée de  $40 \times 40$  copies d'un motif basique est considérée (voir Figure 2.5).  $\Delta x_{mean}$  pour ce maillage est de  $1.04 \cdot 10^{-2}$ . Les données du problème sont résumées dans la Table 2.5. Dans la Fi-

$a$	$b$	$c$	$w$	$\theta_1$	$u_1$
1	1	-1	2	$e^{-5}$	$2e^{-5}$

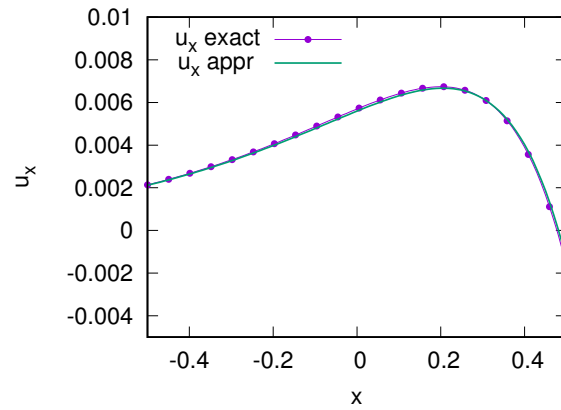
TABLE 2.5 – Valeurs des paramètres considérés dans le problème des ondes progressives (2.22)

gure 2.10, les solutions numériques sont représentées vis-à-vis des solutions exactes. Cette figure montre une bonne concordance entre les valeurs exactes et les valeurs prédites de la fonction de courant, la vitesse et la température le long de l'axe des  $y$ . Cependant, des petites différences ont été observés dans pour la pression. Afin de quantifier la qualité des solutions obtenues numériquement, les taux d'erreur  $L^2$  pour chaque variable sont listés dans la Table 2.6. On y observe que les erreurs globales sont très faibles. Elle est inférieur à 0.3 pourcent pour la température. Elle est encore plus faible pour les autres variables.

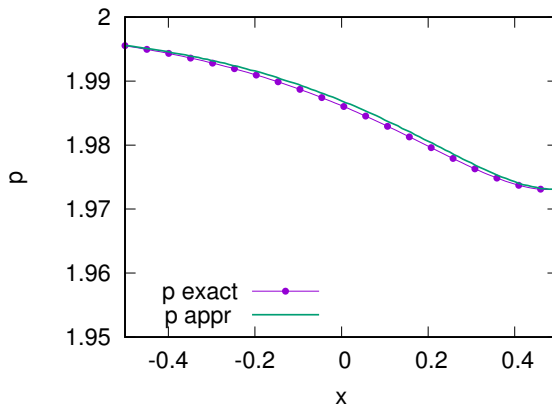




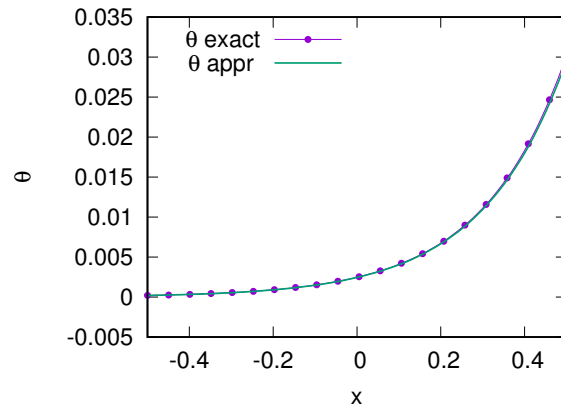
a) Fonction de courant



b) Vitesse horizontale



c) Pression dynamique



d) Température

FIGURE 2.10 – Solution ondes progressives (2.22) : les profils le long de  $y = 0$ **Cas 2 : cas où  $b \neq 0$ ,  $c + w \neq 0$  et  $\nu = \kappa$** 

Ici nous considérons l'écoulement d'ondes progressives dans le cas où le coefficient de viscosité cinématique est égal au coefficient de diffusion thermique, i.e,  $\kappa = \nu$ . La

Fonction du courant	Flux	Vitesse	Pression	Température
$2.151 \cdot 10^{-5}$	$5.808 \cdot 10^{-5}$	$5.236 \cdot 10^{-5}$	$2.171 \cdot 10^{-4}$	$2.922 \cdot 10^{-3}$

TABLE 2.6 – Profils des solutions du problème des ondes progressives (2.22) et les erreurs relatives associées

résolution de l'équation 2.21 donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = \frac{\beta a b g \theta_1}{(c+w)(a^2+b^2)} (x_0 - \xi) e^{\lambda \xi / \kappa} \\ u_y = \frac{w - a u_1}{b}, \\ p = -\frac{\rho \beta b g \kappa \theta_1}{c+w} e^{\lambda \xi / \kappa} \\ \theta = \theta_1 e^{\lambda \xi / \kappa} \\ \psi = -\frac{\beta a g \theta_1}{(c+w)(a^2+b^2)} \frac{\kappa(\lambda \xi_1 + \kappa - \lambda \xi)}{\lambda^2} e^{\lambda \xi / \kappa} + \frac{w x}{b} \end{array} \right. \quad (2.23)$$

où  $x_0$  est une constante arbitraire. Dans ce cas, la solution de vitesse s'exprime comme produit d'une fonction linéaire avec la fonction exponentielle. Dans le test numérique, la même configuration des paramètres de le cas 1 est considérée sauf  $\nu = \kappa = 0.1$ ,  $w = 0$  et  $x_0 = 1/2$ . Les profils des solutions calculées peuvent être observés dans la Figure 2.11. On y voit que la vitesse et la température prédites sont en très bon accord avec les solutions de référence, tandis que des petites différences peuvent être observées pour la fonction de courant et la pression. On note que la solution dans ce cas croit de façon exponentielle en temps (ceci est dû au choix des paramètres  $w = 0$  et  $c < 0$ ) contrairement au cas précédent ou où une décroissance en temps était observée. Les erreurs relatives associées sont listées dans la Table 2.7.

Fonction de courant	Flux	Vitesse	Pression	Température
$2.215 \cdot 10^{-3}$	$3.593 \cdot 10^{-3}$	$3.190 \cdot 10^{-3}$	$2.338 \cdot 10^{-3}$	$1.178 \cdot 10^{-3}$

TABLE 2.7 – Profils des solutions du problème des ondes progressives (2.23) et les erreurs relatives associées

**Cas 3 : cas où  $b \neq 0$ ,  $c + w = 0$**

Nous considérons l'écoulement des ondes progressives dans le cas où la somme de la constante temporelle  $c$  et la constante d'intégration  $w$  est nulle. Dans ce cas, l'équation

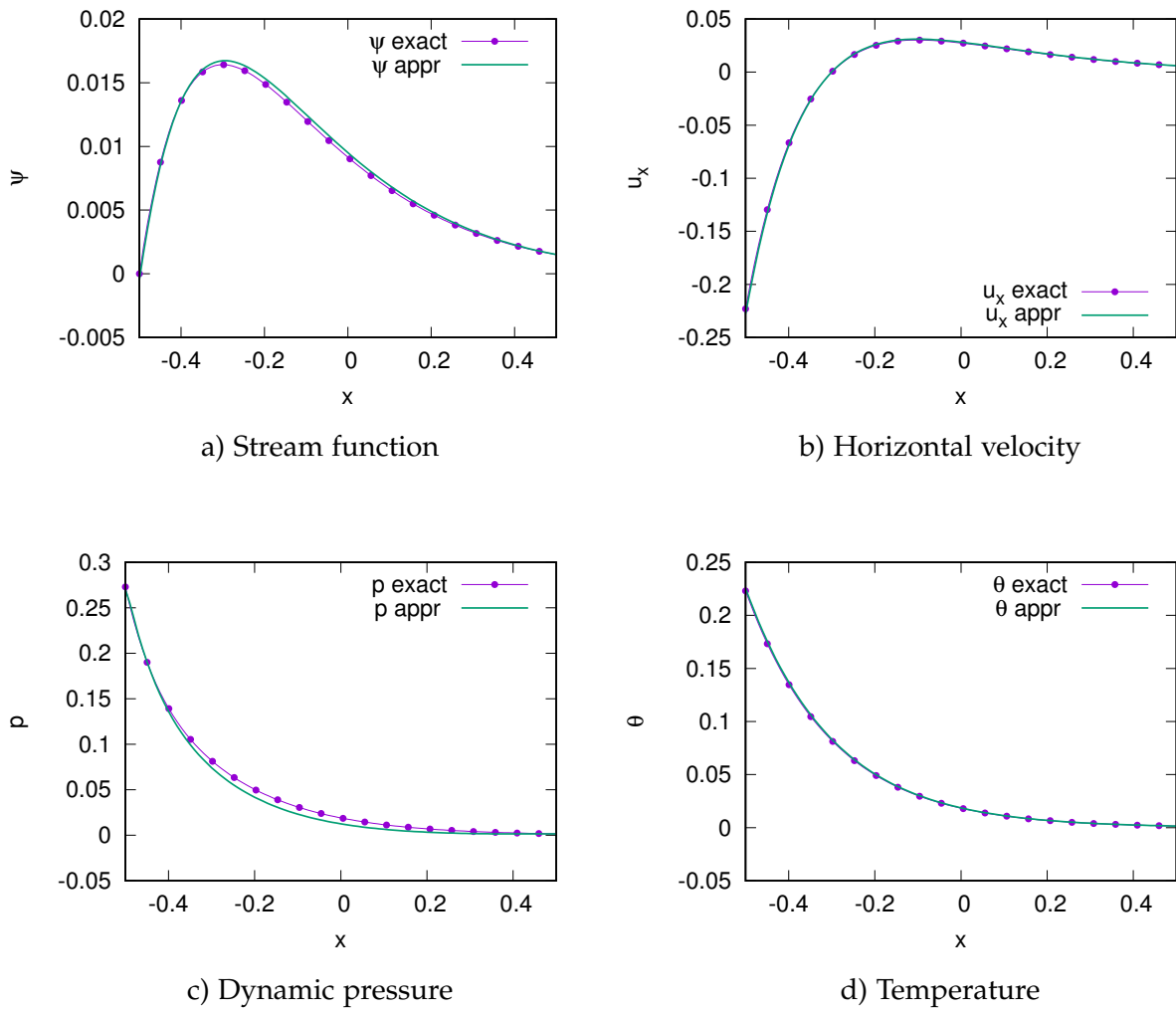


FIGURE 2.11 – Solution ondes progressives (2.23) : les profils le long de  $y = 0$

(2.18) devient

$$\begin{cases} \frac{a}{\rho} p' = \nu(a^2 + b^2) u_x'' \\ \frac{b}{\rho} p' = \nu(a^2 + b^2) u_y'' - \beta g \theta \\ 0 = \kappa(a^2 + b^2) \theta'' \end{cases} \quad (2.24)$$

Il est facile de voir que la température est une fonction linéaire en  $\zeta$ . On peut écrire

$$\theta = \theta_1 \zeta \quad (2.25)$$

où  $\theta_1$  est une constante arbitraire. D'autre part, l'élimination de la pression permet de retrouver l'équation

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = u_1 \zeta - \frac{\beta a b g \theta_1}{6\nu(a^2 + b^2)^2} \zeta^3 \\ u_y = \frac{-c - a u_x}{b}, \\ p = \frac{\rho\nu(a^2 + b^2)}{a} \left[ u_1 - \frac{\beta a b g \theta_1}{2\nu(a^2 + b^2)^2} \zeta^2 \right] \\ \theta = \theta_1 \zeta \\ \psi = -\frac{cx}{b} - \frac{u_2}{2b} [(ax + by)^2 + 2(ax + by)ct] + \frac{\beta a g \theta_2}{24\nu(a^2 + b^2)^2} \zeta^4 \end{array} \right. \quad (2.26)$$

où  $u_1$  est une constante arbitraire. Dans ce cas, la vitesse, la pression et de température sont linéaires en  $\zeta$ . Pour le teste numérique, les mêmes valeurs des paramètres  $a$ ,  $b$  et  $c$  que dans la simulation précédentes sont utilisées. Le domaine spatial est le carré  $[0, 1] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  discrétisé de façon régulière (voir Figure 2.1) et le temps final de la simulation est fixé à  $T = 1$ . Le pas d'espace moyen est  $\Delta x_{mean} = 1.39 \cdot 10^{-2}$ . Les constantes  $u_1$  et  $\theta_1$  sont choisi tels que  $u_1 = 1$  et  $\theta_1 = \frac{1}{3}$ .

Comme le montre la Figure 2.12 b) et d), la vitesse et la température sont bien prédites. La précision sur la température n'est pas étonnante car cette dernière est linéaire en temps et en espace. De même, la fonction de courant 2.12a) et la pression 2.12c), qui sont des polynômes d'ordre 3 et 6 respectivement, sont reproduites avec une bonne précision.

#### Cas 4 : cas où $b = 0$ et $\nu \neq \kappa$

Quand  $b = 0$ , la vitesse horizontale  $u_x$  est constante due à la condition d'incompressibilité. Choisissons alors

$$u_x = 0.$$

L'équation réduite (2.18) devient dans ce cas

$$\left\{ \begin{array}{l} p' = 0, \\ c u_y' = \nu a^2 u_y'' - \beta g \theta, \\ c \theta' = \kappa a^2 \theta''. \end{array} \right. \quad (2.27)$$

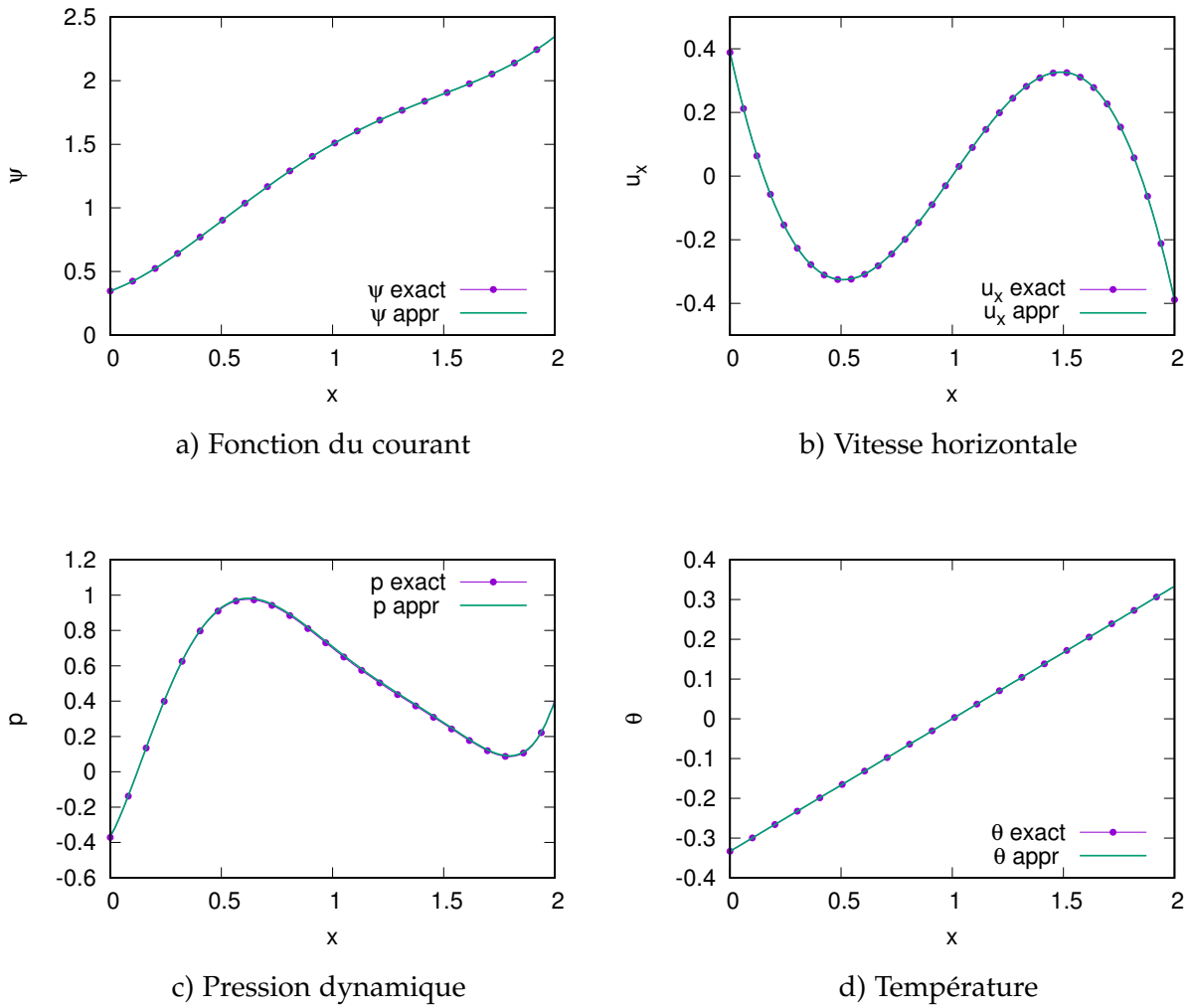


FIGURE 2.12 – Profils des solutions du problème des ondes progressives (2.26) selon la droite  $y = 0$

Si  $\nu \neq \kappa$ , les solutions particulières suivantes sont retrouvées

$$\begin{cases} u_x = 0, \\ u_y = v_1 e^{c\tilde{\zeta}/\nu a^2} + \frac{\kappa^2 a^2 \beta g}{c^2(\nu - \kappa)} \theta_3 e^{c\tilde{\zeta}/\kappa a^2}, \\ p = 0, \\ \theta = \theta_1 e^{c\tilde{\zeta}/\kappa a^2}, \\ \psi = \frac{v_1 a \nu}{c} e^{c\tilde{\zeta}/\nu a^2} + \frac{\kappa^3 a^3 \beta g}{c^3(\nu - \kappa)} \theta_3 e^{c\tilde{\zeta}/\kappa a^2} \end{cases} \quad (2.28)$$

où  $v_1$  et  $\theta_1$  sont des constantes arbitraires et

$$\tilde{\zeta} = ax + ct.$$

On note que la température croit exponentiellement en temps et la solution de vitesse verticale est une somme de deux termes à croissance exponentielle par rapport à la variable  $\tilde{\zeta}$ . Pour la simulation numérique, on considère le domaine spatial  $[0, 1] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

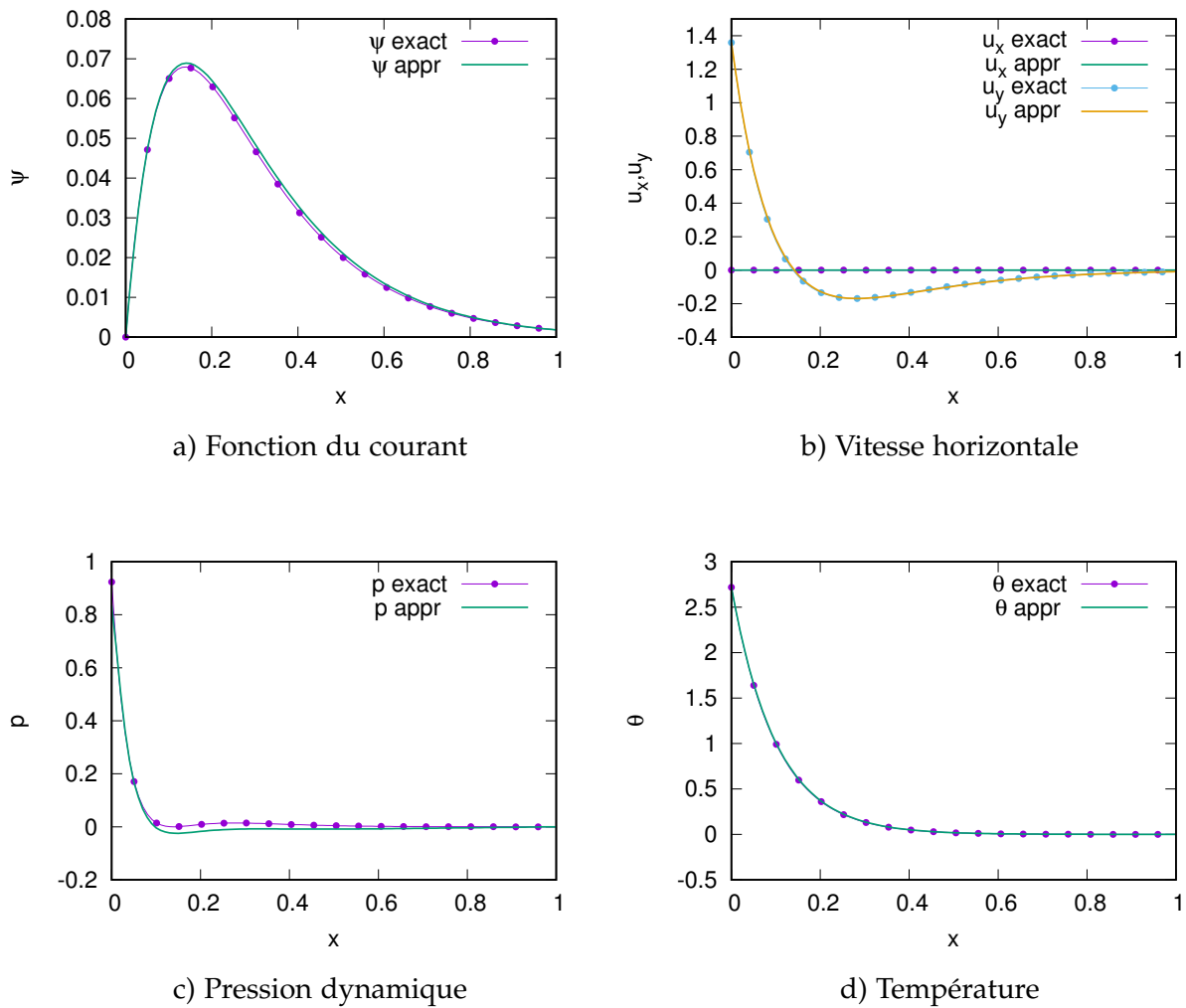


FIGURE 2.13 – Profils des solutions du problème des ondes progressives (2.28) le long de la droite  $y = 0$

discrétisé régulièrement en  $40 \times 40$  motifs basiques (Figure 2.1) et le temps final  $T$  tel que  $c^2 T / \kappa a^2 = 1$ . On prend les mêmes paramètres que dans la partie 2.3.3 sauf  $a = 1$  et  $c = -1$ . De plus on a choisi  $\theta_1 = 1$  et  $v_1 = -\frac{1}{2} e^{1/2}$  tels que les deux termes de  $u_y$  sont comparables lorsque  $t = T$ . Les profils des champs calculés sont présentés sur la Figure 2.13. D'après cette figure, des petites différences peuvent être observées entre la fonction de courant exacte et celle prédite le long de l'axe des  $x$ , mais la précision reste satisfaisante. La même conclusion peut être tirée pour la pression dynamique. Pour la vitesse et la température, les valeurs obtenues numériquement se confondent visuellement avec les valeurs exactes.

**Cas 5 : cas où  $b = 0$  et  $\nu = \kappa$**

Quand  $\nu = \kappa$ , la résolution du problème (2.27) donne la solution suivante

$$\begin{cases} u_x = 0, \\ u_y = (v_1 + \frac{\beta g \theta_1}{c} \xi) e^{c\xi/\kappa a^2}, \\ p = 0, \\ \theta = \theta_1 e^{c\xi/\kappa a^2}, \\ \psi = \frac{a\kappa}{c^3} (v_1 c^2 + (c\xi - \kappa a^2) \beta g \theta_1) e^{c\xi/\kappa a^2} \end{cases} \quad (2.29)$$

où  $v_1$  et  $\theta_1$  sont des constantes arbitraires. Dans ce cas, l'écoulement est vertical où la vitesse verticale est le produit d'une fonction linéaire avec une fonction exponentielle. Pour la simulation numérique, considérons le domaine spatial  $[0, 1] \times [-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}]$  et le temps final  $T$  tel que  $c^2 T / \kappa a^2 = 1$ . Les caractéristiques de l'écoulement sont identiques à ceux du cas 2.3.3 sauf pour  $a = 1$ ,  $c = -1$ ,  $\theta_1 = \frac{2}{5}$  et  $v_1 = -\frac{1}{2}e^{1/2}$ .

On observe dans la Figure 2.14 que les solutions de la fonction de courant, la vitesse et la température sont très bien prédites. Pour la pression dynamique, des petites différences sont observées mais la prédiction reste assez satisfaisante.

### 2.3.4 Cavité différentiellement chauffée

Le dernier test dans cette section est effectué sur un écoulement dans une cavité carré dont la dynamique est pilotée par une différence de température entre les parois. La description détaillée du problème, pour les lecteurs intéressés se trouve dans [70]. Les parois gauche et droit de la cavité sont maintenus à une température constante, tandis que le haut et le bas sont adiabatiques. Une condition de non-glissement est imposée sur tous les murs de la cavité. Ces conditions aux bords sont résumées sur la Figure 2.15.

Après une non-dimensionnalisation appropriée (voir [71, 72]), le comportement de l'écoulement est caractérisé par le nombre de Rayleigh

$$Ra = \frac{g\beta H^3 |\theta_L - \theta_R|}{\nu\kappa}$$

et le nombre de Prandtl

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}$$

où  $H$  est la longueur des côtés de la cavité. Pour les simulations, on prends  $Pr = 0.71$ . Les températures de parois sont fixées à  $\theta_G = 0.5$  et  $\theta_D = -0.5$  et on prend deux valeurs du coefficient de dilatation thermique  $\beta$  de manière à avoir deux nombres de Rayleigh  $Ra = 10^4$  et  $10^5$ . Il est connu que l'écoulement atteint un état stable avec ces deux valeurs. Le maillage est composé de  $30 \times 30$  copies du maillage élémentaire de la Figure 2.1. La longueur moyenne  $\Delta_x^{mean}$  vaut  $2.09 \cdot 10^{-2}$ . Les résultats sont comparés à ceux obtenus par Davis dans la référence [70]. Notons que les résultats de Davis sont obtenus par des

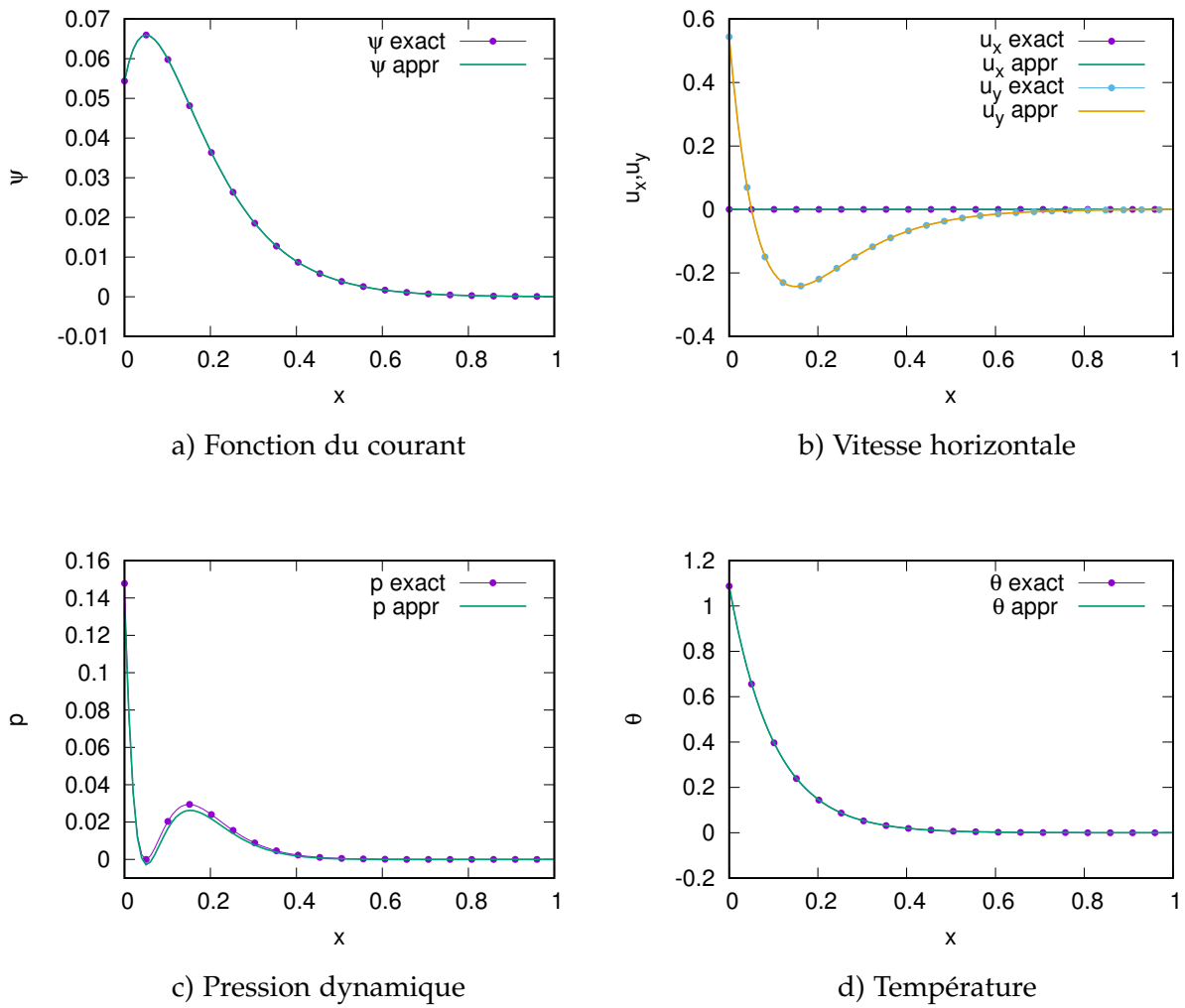


FIGURE 2.14 – Profils des solutions du problème des ondes progressives (2.14) selon  $y = 0$

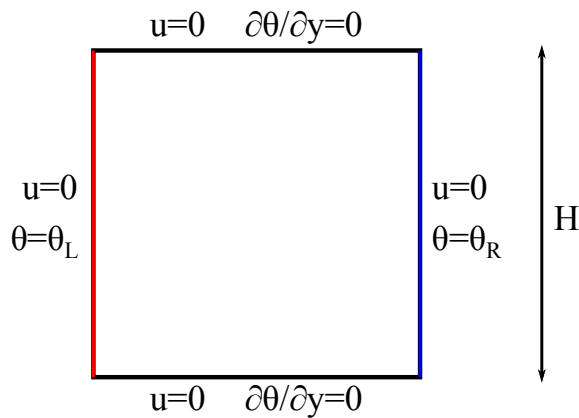


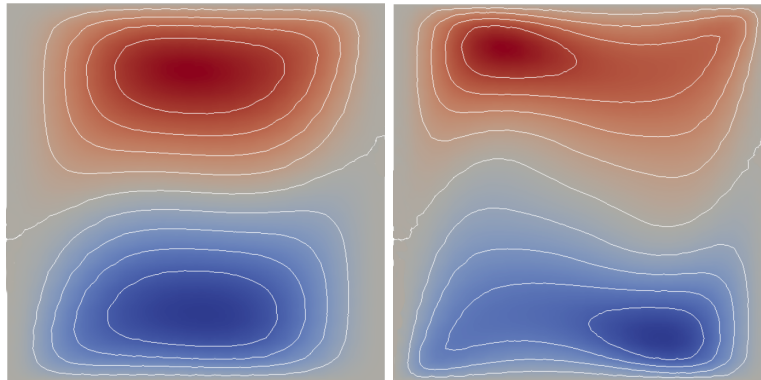
FIGURE 2.15 – Géométrie de la cavité chauffée.

simulations en différence finie.

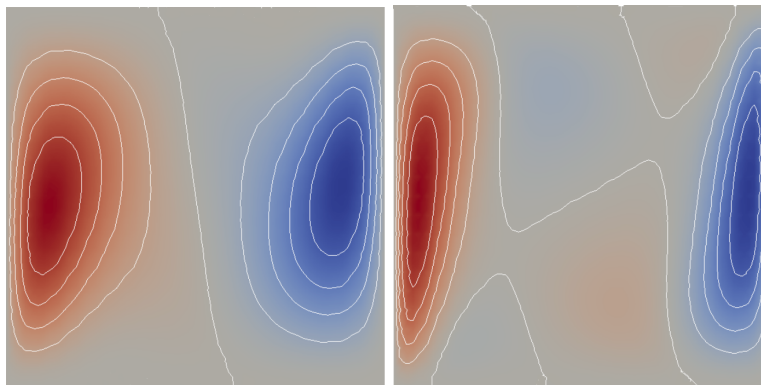
Quelques isolignes des composantes horizontale et verticale de la vitesse sont présentés dans la Figure 2.16. Les lignes de contours de la fonction de courant et de la température



sont présentés dans la Figure 2.17. Elles sont toutes similaires à ceux présentés dans [70] pour les deux valeurs du nombre de Rayleigh.



a) Vitesse horizontale



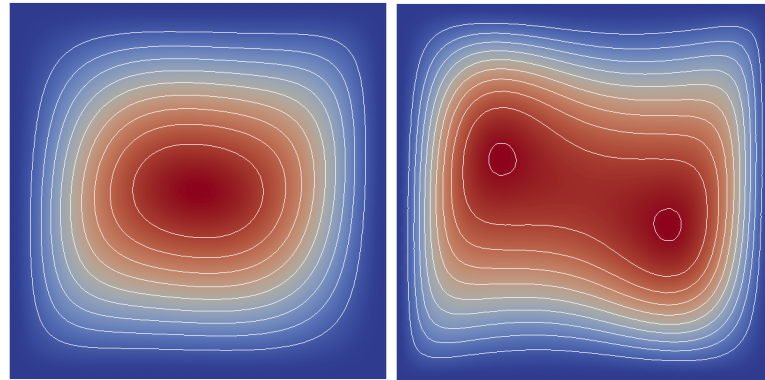
b) Vitesse verticale

FIGURE 2.16 – Cavité différentiellement chauffée. Lignes de contour de la vitesse pour  $Re = 10^4$  (gauche) et  $Re = 10^5$  (droite).

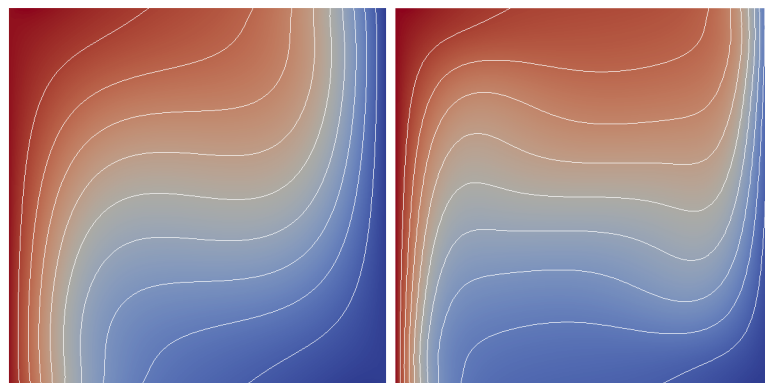
Quelques valeurs caractéristiques sont pr sent es dans la Table 2.8. Dans ce tableau,  $\psi_{\text{mid}}$  est la valeur de la fonction du courant  $\psi$  au centre ( $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$ ) de la cavité.  $\psi_{\text{max}}$  est la valeur maximale de  $\psi$ , localis e au point de coordonnées  $(x_{\psi_{\text{max}}}, y_{\psi_{\text{max}}})$ . La valeur  $u_{x,\text{max}}$  est la valeur maximale de la vitesse horizontale  $u_x$  le long de la ligne verticale ( $x = \frac{1}{2}$ ). Cette valeur est localis e au point d'abscisse  $y = y_{u_{x,\text{max}}}$ . De manière similaire, on définit  $u_{y,\text{max}}$ , la valeur maximale de la vitesse verticale  $u_y$  le long de la droite horizontale ( $x = \frac{1}{2}$ ), localis e en  $x = x_{u_{y,\text{max}}}$ . Finalement,  $\overline{Nu}$  est la moyenne du nombre de Nusselt

$$\overline{Nu} = \int_{\text{M}} \left( Ra^{1/2} u \theta - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \text{Vol.}$$

D'après la Table 2.8, la valeur  $\psi_{\text{mid}}$  de la fonction de courant au centre est 5% plus petite que la valeur dans la référence [70] avec la valeur  $Ra = 10^4$ . Comme la vitesse est calcul e à partir de la forme  $\psi$ , cela entraîne une différence du même ordre pour la



a) Fonction de courant



b) Température

FIGURE 2.17 – Cavity différentiellement chauffée. La fonction du courant et lignes de contour de la température pour  $Re = 10^4$  (gauche) et  $Re = 10^5$  (droite)

	Tavaux présents $Ra = 10^4$	Ref [70] $Ra = 10^4$	Travaux présents $Ra = 10^5$	Ref [70] $Ra = 10^5$
$ \psi_{\text{mid}} $	0.0484	0.05098	0.09128	0.09142
$ \psi_{\text{max}} $	0.0484	—	0.09403	0.09644
$x_{\psi_{\text{max}}}$	0.50	—	0.275	0.285
$y_{\psi_{\text{max}}}$	0.50	—	0.60	0.602
$u_{x,\text{max}}$	0.153	0.162	0.320	0.348
$y_{u_{x,\text{max}}}$	0.82	0.823	0.85	0.855
$u_{y,\text{max}}$	0.189	0.195	0.657	0.682
$x_{u_{y,\text{max}}}$	0.12	0.120	0.07	0.066
$\overline{Nu}$	2.299	2.234	4.518	4.510

TABLE 2.8 – Cavity différentiellement chauffée. Les valeurs caractéristiques

vitesse. La valeur maximale  $u_{x,\text{max}}$  et  $u_{y,\text{max}}$  sont localisés pratiquement au même point que dans [70]. Notons que, dans [70] une interpolation est nécessaire pour déterminer les localisations de ces points avec plus de précision, alors que dans notre travail aucune interpolation n'est nécessaire.

Pour  $Ra = 10^5$ , la différence sur  $\psi_{\text{mid}}$  est uniquement 0.2%. Les emplacements des valeurs maximales sont proches de ceux dans [70]. Et enfin, la moyenne des nombres Nusselt est la même comme dans [70].

## 2.4 CONCLUSION

Dans le chapitre 2, la formulation intrinsèque, indépendamment des coordonnées en formulation calcul extérieure des équations de Navier-Stokes anisothermes a été présentée. Ces équations ont été ensuite discrétiser en utilisant l'approche du calcul extérieur discret. Les tests numériques montrent un accord avec les solutions exactes et les solutions existant dans la littérature. On a fait l'étude du taux de convergence dans les problèmes de couette et Poiseuille qui révèle une bonne convergence. Ainsi que pour les solutions de Taylor-Green et des ondes progressives, nos résultats obtenus par calcul extérieur collent bien avec les solutions exactes. L'intérêt des différents tests présentés dans ce chapitre était de pouvoir appliquer le DEC aux différents types de solutions. On avait des solutions linéaire, trigonométriques et exponentielles. On a pu montrer que la vitesse vérifie exactement la condition d'incompressibilité.

# UNE APPROCHE ANALYTIQUE DE DISCRÉTISATION ANALYTIQUE DE L'OPÉRATEUR DE HODGE

## SOMMAIRE

---

3.1	INTRODUCTION . . . . .	70
3.2	DISCRÉTISATION ANALYTIQUE DE L'OPÉRATEUR DE HODGE . . . . .	70
3.2.1	Construction générale de l'opérateur de Hodge . . . . .	70
3.2.2	Illustration de la construction de l'opérateur de Hodge analytique . . . . .	73
3.3	RÉSULTATS NUMÉRIQUES . . . . .	76
3.3.1	Équation de Poisson . . . . .	76
3.3.2	Écoulements de fluides incompressibles . . . . .	79
3.3.3	Écoulements des fluides anisothermes . . . . .	81
3.3.4	Maillage non structuré . . . . .	84
3.4	CONCLUSION . . . . .	88

---

### 3.1 INTRODUCTION

Sur une triangulation en 2D, l'opérateur de Hodge discret est construit à l'aide d'un maillage dual formé par les centres de ces triangles. Le choix classique traité dans la littérature consiste à discrétiser le domaine spatial en des triangles bien centrés, puis de choisir leurs centres (circoncentres) comme étant les noeuds formant le maillage dual. Ainsi, et du fait de l'orthogonalité vérifiée entre les cotés duaux et primaux, l'opérateur de Hodge qui en résulte est tout simplement représenté par une matrice diagonale. Bien que cette approche soit avantageuse, elle souffre d'être limitée à des discrétisations bien centrées qui ne sont pas en générale facile à générer de manière efficace pour des géométries arbitraires. Dans ce chapitre, nous contournons cette limitation en introduisant une construction analytique et générale de l'opérateur de Hodge discret, dans laquelle un choix libre des points centres formant le maillage dual peut être opté. Cette flexibilité dans le choix de la discrétisation duale étend la construction de l'opérateur de Hodge à des géométries arbitraires et donc à des cas physiques réalistes. Par exemple, on peut choisir le barycentre, l'incentre ou même un point arbitraire dans les triangles du maillage. En particulier, dans le cas où le maillage primal est bien centré et le maillage dual est considéré sur les circoncentres, notre construction coïncide exactement avec l'opérateur de Hodge diagonal. Dans le but de valider notre approche, plusieurs tests numériques ont été effectués. Notamment, les problèmes de Poisson et des écoulements isotherme et anisothermes en 2D ont fait objet d'investigation. Dans ces tests numériques, l'étude de la construction générale de l'opérateur de Hodge est faite sur différents types de maillages : maillages bien centrés, maillages droits et d'autres maillages non Delaunay. Les résultats du Hodge diagonal sont présentés à titre de référence lorsque ceux-ci sont disponibles.

### 3.2 DISCRÉTISATION ANALYTIQUE DE L'OPÉRATEUR DE HODGE

Dans la suite, nous présentons d'abord la construction de l'opérateur de Hodge analytique localement en se servant d'un seul triangle. L'opérateur complet est obtenu par suite en assemblant toutes les matrices de Hodge locales.

#### 3.2.1 Construction générale de l'opérateur de Hodge

Considérons un maillage bidimensionnel orienté composé d'un seul triangle  $T$ , comme dans la Figure 3.1. Le point  $c_i$  est un point situé sur le côté  $e_i$  et  $c_t$  un point se trouvant à l'intérieur du triangle  $T$ . La position de  $e_i$  et  $c_t$  est choisie de façon arbitraire. En particulier,  $c_i$  peut être le point milieu de  $e_i$ , et  $c_t$  le barycentre (resp. circoncentre, incentre) de  $T$ . Nous allons maintenant construire un opérateur de Hodge discret  $H_1^{\text{primal}}$  agissant sur les 1-formes discrètes primales

$$H_1^{\text{primal}} : \Lambda^1(K) \rightarrow \Lambda^1(*K)$$

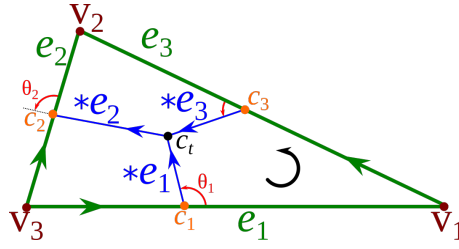


FIGURE 3.1 – Illustration des 1-simplexes primaux et leurs duaux orientés dans un maillage 2D composé d'un seul triangle. Les points  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$  sont des points arbitraires des bords  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$  respectivement et  $c_i$  un point intérieur arbitraire du triangle. Le triangle est orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Les flèches indiquent les orientations des cotés primaux et les orientations induites des cotés duaux. Les angles  $\theta_i$  définis dans (3.1) sont dessinés en rouge.

Pour simplifier les notations, on va simplement noter  $H$  cet opérateur au lieu de  $H_1^{\text{primal}}$  lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion. Un indice pourra être ajouté à  $H$  pour indiquer le type de maillage dual utilisé lorsque cela devient utile. Désignons par  $\vec{e}_i$  et  $\vec{*e}_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , les vecteurs représentant les cotés orientés  $e_i$  et  $*e_i$  respectivement, et  $\vec{u}_i$  et  $\vec{*u}_i$  les vecteurs unitaires correspondants tels que

$$\vec{u}_i = \frac{\vec{e}_i}{\|\vec{e}_i\|} \quad \text{et} \quad \vec{*u}_i = \frac{\vec{*e}_i}{\|\vec{*e}_i\|}$$

Ces deux vecteurs sont liés par une rotation :

$$\begin{pmatrix} *u_{ix} \\ *u_{iy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \end{pmatrix}$$

où l'angle qu'ils forment (voir figure 3.1) est

$$\theta_i = (\vec{u}_i, \vec{*u}_i) \quad (3.1)$$

Considérons la 1-forme différentielle suivante

$$\omega = a \, dx + b \, dy$$

où  $a$  et  $b$  sont des fonctions scalaires dépendant de l'espace. D'après la définition 1.11, l'image de cette 1-forme par l'étoile de Hodge continue est est

$$\star \omega = -b \, dx + a \, dy.$$

Nous désignons par  $\omega_i = \langle \omega, e_i \rangle$  et  $\omega_i^* = \langle \star \omega, *e_i \rangle$  les valeurs des cochaînes primales et duales correspondantes. Supposons que  $\omega$  est constant à l'intérieur du triangle, alors

$$\begin{aligned} \omega_i^* &= \int_{*e_i} \star \omega = \star \omega(*u_i) \mid *e_i = (-b(*u_{ix}) + a(*u_{iy})) \mid *e_i \\ &= \left( (au_{ix} + bu_{iy}) \sin \theta_i + (-bu_{ix} + au_{iy}) \cos \theta_i \right) \mid *e_i \\ &= \left( \omega(\vec{u}_i) \sin \theta_i + \omega(-\mathbb{J}\vec{u}_i) \cos \theta_i \right) \mid *e_i, \\ &= \left( \frac{\omega(\vec{e}_i)}{\|\vec{e}_i\|} \sin \theta_i + \frac{\omega(-\mathbb{J}\vec{e}_i)}{\|\mathbb{J}\vec{e}_i\|} \cos \theta_i \right) \mid *e_i, \end{aligned}$$

$\mathbb{J}$  étant la matrice asymétrique

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sachant que  $|\mathbb{J}\vec{e}_i| = |\vec{e}_i|$ , nous avons :

$$\omega_i^* = \frac{|*e_i|}{|e_i|} \omega_i \sin \theta_i + \frac{|*e_i|}{|e_i|} \omega(-\mathbb{J}\vec{e}_i) \cos \theta_i. \quad (3.2)$$

Prenons  $i = 1$ . Si le triangle  $T$  n'est pas dégénéré, on peut trouver des coefficients réels  $a_1^2$  et  $a_1^3$  tels que

$$-\mathbb{J}\vec{e}_1 = a_1^2 \vec{e}_2 + a_1^3 \vec{e}_3.$$

Donc,

$$\omega_1^* = \frac{|*e_1|}{|e_1|} \omega_1 \sin \theta_1 + \frac{|*e_1|}{|e_1|} a_1^2 \omega_2 \cos \theta_1 + \frac{|*e_1|}{|e_1|} a_1^3 \omega_3 \cos \theta_1. \quad (3.3)$$

En utilisant des arguments similaires pour  $i = 2$  et  $i = 3$ , on obtient :

$$\begin{bmatrix} \omega_1^* \\ \omega_2^* \\ \omega_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{|*e_1|}{|e_1|} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{|*e_2|}{|e_2|} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{|*e_3|}{|e_3|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta_1 & a_1^2 \cos \theta_1 & a_1^3 \cos \theta_1 \\ a_2^1 \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & a_2^3 \cos \theta_2 \\ a_3^1 \cos \theta_3 & a_3^2 \cos \theta_3 & \sin \theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Cette relation fait apparaître l'opérateur de Hodge discret comme le produit de deux matrices, dont la première contient les rapports des volumes duaux et primaux. Dans le cas d'un maillage dual circoncentrique, la seconde matrice se réduit à la matrice d'identité et on retombe sur le cas classique du Hodge diagonal (1.32). On peut réécrire les angles  $\theta_i$  et les coefficients  $a_i^j$  dans (3.4) en fonction des  $\vec{e}_i$  et  $*\vec{e}_i$  comme suit

$$\cos \theta_i = \frac{\vec{e}_i \cdot *\vec{e}_i}{|e_i| |*e_i|}, \quad \sin \theta_i = \frac{\vec{e}_i \times *\vec{e}_i}{|e_i| |*e_i|}, \quad \theta_i \in [0, \pi]$$

où  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  est le produit scalaire de  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ . Le produit vectoriel avec un point est défini comme la troisième composante du produit vectoriel habituel de l'extension de  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  à  $\mathbb{R}^3$  :

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_x b_y - a_y b_x$$

qui peut également être considéré comme la valeur réelle du produit vectoriel 2D. De plus, pour  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  tels que  $i \neq j$ , il est facile de montrer que

$$a_j^i = \frac{\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k}{\vec{e}_i \times \vec{e}_k}, \quad \text{où } k \neq i, j$$

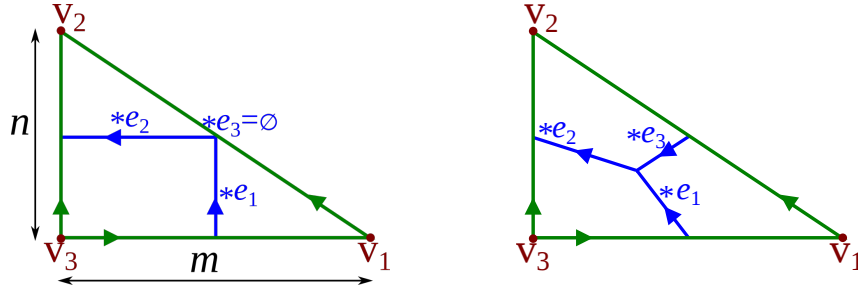


FIGURE 3.2 – Maillages primaux composés d'un seul triangle droit, avec des de côté de longueurs  $m$  et  $n$ . À gauche : maillage dual circoncentrique. À droite : maillage dual barycentrique.

Avec ces relations, la matrice de l'opérateur de Hodge agissant sur la 1-forme primale discrète devient

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{*e}_1}{|e_1|^2} & \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{*e}_1}{|e_1|^2} \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3}{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3} & \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{*e}_1}{|e_1|} \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2} \\ \frac{\vec{e}_2 \cdot \vec{*e}_2}{|e_2|^2} \frac{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3}{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3} & \frac{\vec{e}_2 \cdot \vec{*e}_2}{|e_2|^2} & \frac{\vec{e}_2 \cdot \vec{*e}_2}{|e_2|^2} \frac{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1}{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1} \\ \frac{\vec{e}_3 \cdot \vec{*e}_3}{|e_3|^2} \frac{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2}{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2} & \frac{\vec{e}_3 \cdot \vec{*e}_3}{|e_3|^2} \frac{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1}{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1} & \frac{\vec{e}_3 \cdot \vec{*e}_3}{|e_3|^2} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

### 3.2.2 Illustration de la construction de l'opérateur de Hodge analytique

A titre d'illustration, considérons le triangle droit présenté dans la figure 3.2 pour lequel deux maillages duaux sont considérés, un maillage dual circoncentrique (gauche) et un autre barycentrique (droite). Clairement, on observe que le maillage dual circoncentrique est dégénéré, du fait que le coté dual de  $e_3$  noté  $*e_3$  est de mesure nulle, et donc, conduisant à une matrice de Hodge  $H$  singulière. Ceci représente un obstacle qui réduit le champs d'applicabilité du maillage dual circoncentrique en particulier pour des triangulations droites. Néanmoins, cet obstacle est surmonté avec le dual barycentrique et la matrices  $H$  obtenue est non singulière. Dans ce cas, un calcul directe permet de montrer que  $H$  s'écrit

$$H_{\text{barycentre}} = \begin{bmatrix} \frac{n}{3m} & \frac{m}{6n} & 0 \\ \frac{n}{6m} & \frac{m}{3n} & 0 \\ \frac{n(m^2 - n^2)}{6m(m^2 + n^2)} & \frac{m(m^2 - n^2)}{6n(m^2 + n^2)} & \frac{mn}{3(m^2 + n^2)} \end{bmatrix}.$$

Dans un triangle droit unitaire ( $m = n = 1$ ), avec un maillage dual barycentrique et un maillage dual incentrique,  $H$  s'écrit

$$H_{\text{barycentre}} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_{\text{incentre}} = \frac{1}{4 + 2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$



Pour un maillage arbitraire, formé par plusieurs triangles, un assemblage habituel permet de déduire la matrice globale de Hodge qui est une matrice creuse, transformant une 1-cochaîne primale en une 1-cochaîne duale. Encore une fois, par la relation (1.12), l'opérateur de Hodge  $H_1^{\text{dual}} : \Lambda^1(*K) \rightarrow \Lambda^1(K)$  agissant sur les cochaînes duales peut être simplement représenté par l'inverse de la matrice assemblée. Cependant, une inversion de cette matrice est en général coûteuse. Pour éviter ce coût, une inversion locale sur chaque triangle est adoptée. De plus, l'inversion locale maintient la structure creuse de la matrice, contrairement à une inversion complète. Cela peut réduire considérablement le coût de la simulation pour des problèmes réalistes. Malgré cette approximation, nous verrons dans la section 3.3.1 que le Hodge nouvellement défini fournit des résultats numériques compétitifs.

**Remarque 3.1** *L'attention du lecteur est attiré au fait que la nouvelle matrice du Hodge discret n'est pas nécessairement symétrique. En effet, il n'y a pas de raison évidente d'exiger la condition de symétrie en DEC. Pourtant, certains auteurs affirment qu'une matrice de Hodge devrait être symétrique, car dans le cas continu, pour deux 1-formes différentielles arbitraires  $\omega$  et  $\theta$ , l'opérateur de Hodge vérifie la relation*

$$\star \omega \wedge \theta = \star \theta \wedge \omega \quad (3.6)$$

*Combinée à une forme de volume, cette relation représente un produit scalaire. Toutefois, elle n'implique pas que le Hodge discret est symétrique. De même, une symétrie de la matrice de l'opérateur de Hodge n'aide pas à vérifier la propriété (3.6). C'est la combinaison de la matrice de Hodge discret avec l'opérateur du produit extérieur discret entre deux 1-formes discrètes qui doit être symétrique. Par définition, la symétrie de la matrice de l'opérateur de Hodge seule signifierait, dans un maillage simple formé triangle unique, que*

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \cdot \left( H \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \right) = \left( H \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

*pour toute paire  $\omega$  et  $\theta$  de 1-cochaînes primales, où le symbole du point  $(\cdot)$  désigne le produit scalaire euclidien dans  $\mathbb{R}^3$ . D'autre part, l'exigence de symétrie peut être justifiée dans une approche par éléments finis comme le montre Hiptmair dans [53]. Dans ce cadre, c'est la matrice de masse qui est appelée opérateur de Hodge. Elle ne représente pas directement l'opérateur de Hodge, mais les produits scalaires tels que (3.6) intégrés sur les éléments.*

Il convient de noter que le choix des centres formant le maillage dual et servant à construire l'opérateur de Hodge joue un rôle très important dans la précision de ce dernier. En particulier, pour les 1-formes non constantes, la précision dépend de la forme elle-même. Par exemple, considérons la 1-forme différentielle

$$\omega = (x - y)(dx - dy).$$

Le tableau 3.1 indique l'erreur de l'opérateur discret de Hodge  $H$  sur  $\omega$ ,  $H$  étant soit le Hodge barycentrique soit le Hodge incentrique. L'erreur est définie comme la norme  $L^2$  de la différence entre les cochaînes duales  $H(\omega_K)$  et  $(\star\omega)_{\star K}$ . Dans cet exemple, deux tests sont effectués. Le premier test est fait sur un maillage formé de triangles rectangles unitaires dont la longueur moyenne des cotés est de 1.1381, et le second test sur un maillage formé par des triangles isocèles droits (similaire au maillage de droite de la figure de 3.3), dont la longueur moyenne des cotés est de  $5.6965 \times 10^{-2}$ . Le tableau 3.1 montre que, avec la forme considérée, le Hodge basé sur le barycentre est plus précis que celui basé sur l'incentre sur le maillage à un seul triangle. La même conclusion peut être tirée dans le maillage entier. Toutefois, dans ce dernier cas, la différence entre les erreurs est plus faible. Pour la forme différentielle

$$\omega = (x + y)(dx + dy),$$

la situation est inversée. En effet, le tableau 3.1 montre que pour cette forme, le Hodge incentrique est environ 1.94 fois plus précis que le barycentrique, aussi bien sur le maillage à un seul triangle que sur le maillage tout entier.

Forme différentielle	Un seul triangle		Maillage droit	
	Barycentrique	Incentrique	Barycentrique	Incentrique
$(x - y)(dx - dy)$	0.2946	0.3232	$1.5243 \cdot 10^{-2}$	$1.5715 \cdot 10^{-2}$
$(x + y)(dx + dy)$	0.0589	0.0303	$6.6882 \cdot 10^{-4}$	$3.4424 \cdot 10^{-4}$

TABLE 3.1 – Norme  $L^2$  de l'erreur de l'opérateur de Hodge discret sur le triangle droit unitaire et sur un carré à triangulation droite de 20 points dans chaque direction

Ce test simple montre qu'il n'est pas facile de prédire quel centre donnera les meilleurs résultats en termes de précision. En outre, dans des problèmes plus concrets, il peut y avoir d'autres contraintes que la précision à prendre en compte. La liberté de choisir le centre rend concevable une optimisation de l'opérateur discret de Hodge. Enfin, remarquons que, dans le développement précédent, il n'y a pas de restriction sur la position des centres des simplexes, tant que le maillage dual n'est pas dégénéré. Par exemple, le centre  $c_t$  peut être à l'extérieur du triangle, voire à l'extérieur du domaine dans le cas d'un maillage formé de plusieurs triangles.

L'opérateur de Hodge qu'on vient de proposer s'applique aux 1-formes discrètes. Pour les 0 et 2-formes discrètes, on utilisera le Hodge diagonal habituel. Les éléments diagonaux de sa matrice sont les ratios des mesures comme dans la section 1.7.1. Dans la section suivante, des tests numériques sur l'équation de Poisson (linéaire) et des applications aux problèmes d'écoulement de fluides (non linéaires) isothermes et anisothermes sont présentées. Nous nous concentrerons en particulier sur la convergence en utilisant le Hodges basé sur le circoncentre, le barycentre et l'incentre sur différents types de maillages.

### 3.3 RÉSULTATS NUMÉRIQUES

#### 3.3.1 Équation de Poisson

Dans un premier temps, nous commençons par des tests numériques sur l'équation de Poisson avec des conditions aux limites de Dirichlet. Soit  $M$  un domaine bidimensionnel plat et  $\partial M$  son bord, l'équation de Poisson est donnée par

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } M, \\ u = g & \text{sur } \partial M, \end{cases} \quad (3.8)$$

où  $f$  et  $g$  sont les données du problème et la fonction scalaire inconnue. En formulation calcul extérieur, cette équation s'écrit

$$\begin{cases} \star d \star d u = f & \text{dans } M, \\ u = g & \text{sur } \partial M. \end{cases} \quad (3.9)$$

Prenons comme domaine  $M$  le carré unitaire. Dans les tests numériques qui vont suivre, deux maillages de  $M$  sont considérés : un maillage « aigu » et un maillage droit « droit ». Dans le maillage aigu, les triangles sont bien centrés (voir figure 3.3, à gauche) et basés sur le modèle utilisé dans le chapitre 2 proposé dans [69]. Dans ce cas on comparera le Hodge diagonal usuel avec le nouveau Hodge basé sur les maillages duaux barycentriques et incentriques. Dans le maillage droit, les triangles sont droits isocèles (voir figure 3.3, à droite). Étant donné que l'opérateur de Hodge diagonal ne peut pas être défini sur ce dernier, le nouvel opérateur de Hodge construit sur des maillages duaux barycentriques et incentriques sera considéré. La variable  $u$  est placée, comme cochaîne, sur les nœuds

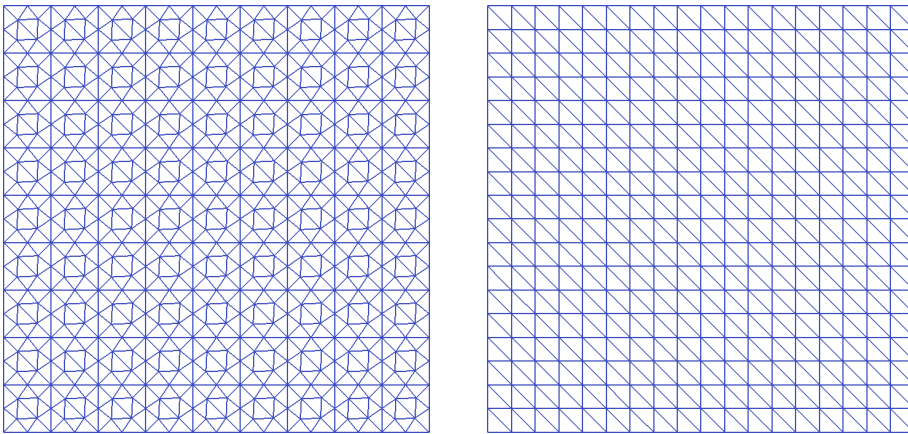


FIGURE 3.3 – Triangulation aigu et droite d'un carré unitaire

duaux  $\star\sigma \in \star K_2$ . Cela signifie que l'inconnu est le vecteur noté  $U = (\langle u, \star\sigma \rangle)_{\star\sigma \in \star K_2}$ . L'équation discrétisée s'écrit en terme d'opérateurs comme

$$H_2 D_1 [-H_1^{-1}] D_1^t U = F$$

où  $F$  est le second membre discret. Afin de mesurer la précision des solutions discrète calculées, nous considérons l'erreur relative suivante

$$E = \frac{\|u - u_{exact}\|_{*K_2}}{\|u_{exact}\|_{*K_2}} \quad (3.10)$$

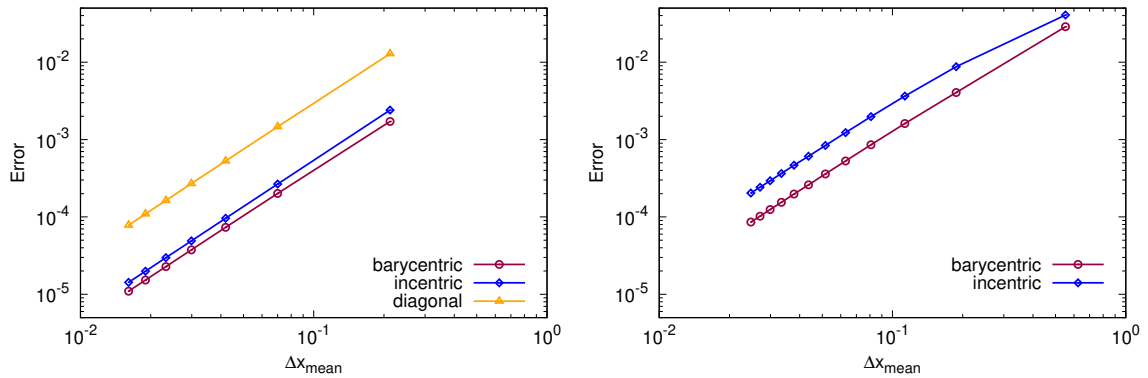
où  $\|v\|_{*K_2}$  désigne une norme d'une 0-cochaîne discrète duale  $v$ , définie comme suit :

$$\|v\|_{*K_2}^2 := \sum_{*\sigma \in *K_2} \langle v, *\sigma \rangle^2 \quad (3.11)$$

Comme pour les simulation du chapitre 2, un code Fortran en programmation orienté objet a été conçu pour les simulations où le solveur par LU est utilisé pour la résolution des systèmes linaires. Dans un premier test, les données  $f$  et  $g$  sont choisies de telle sorte que la solution exacte soit la fonction quadratique

$$u_{exact} = x^2 + y^2.$$

La figure 3.4a montre l'évolution de l'erreur relative  $E$  avec la longueur moyenne du bord  $\Delta x_{moyen}$ . Comme le montre la figure 3.4a, l'opérateur de Hodge analytique défini sur les maillages duaux barycentrique et incentrique donnent de meilleurs résultats par rapport à l'opérateur de Hodge diagonale. Le tableau 3.2 liste les taux de convergence pour les trois types de maillages duaux considérés sur le maillage aigu. On peut voir que ces taux sont presque tous d'ordre quadratique.



(a) Maillage aigu

(b) Maillage droit

FIGURE 3.4 – Évolution de l'erreur de la solution de l'équation de Poisson où  $u_{exact} = x^2 + y^2$ 

	Maillage aigu	Maillage droit
Dual circoncentrique	1.995	–
Dual barycentrique	1.985	1.923
Dual incentrique	1.992	1.921

TABLE 3.2 – Taux de convergence de l'erreur sur l'équation de Poisson où  $u_{exact} = x^2 + y^2$ 

Avec le maillage droit, les résultats sont moins précis mais restent acceptables. Comme on peut le voir sur la figure 3.4b, en utilisant un maillage dual barycentrique, l'erreur

relative est d'environ  $7,55 \times 10^{-5}$  lorsque  $\Delta x_{moyen} \simeq 2,3 \cdot 10^{-2}$  (alors qu'elle était de  $2,28 \cdot 10^{-5}$  avec une triangulation aigue). Les différences entre les solutions issues des maillages duaux barycentriques et incentriques sont plus prononcées. Cependant, les taux de convergence sont similaires comme le montre le tableau 3.2.

Dans un deuxième test, nous considérons la solution exacte suivante

$$u_{exacte} = \sin(\pi x) \sinh(\pi y),$$

La figure 3.5 montre qu'avec le maillage aigue, les trois types de maillages duaux présentent des précisions proches. La solution issue du maillage dual barycentrique est un peu plus précise alors que la solution sur le maillage dual incentrique a légèrement perdu en précision. Cependant, les solutions convergent de la même façon avec un taux de d'ordre 2 (voir le tableau 3.3).

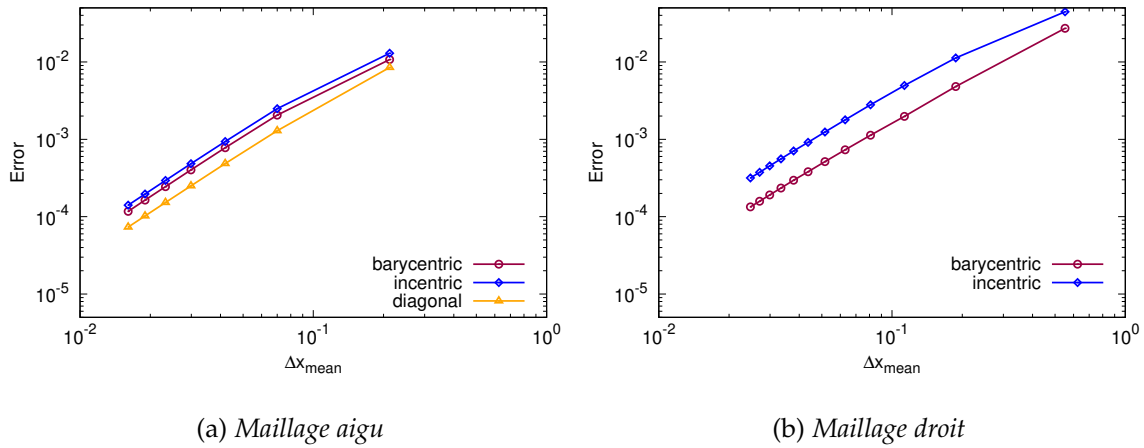


FIGURE 3.5 – Évolution de l'erreur de la solution de l'équation de Poisson où  $u_{exact} = \sin(\pi x) \sinh(\pi y)$

	Maillage aigu	Maillage droit
Dual circoncentrique	1.975	–
Dual barycentrique	1.979	1.809
Dual incentrique	1.982	1.840

TABLE 3.3 – Taux de convergence de l'erreur de la solution de l'équation de Poisson où  $u_{exact} = \sin(\pi x) \sinh(\pi y)$

D'après ces deux tests, il est évident que lorsque le maillage est bien centré (aigu), on ne peut pas prédire si le Hodge diagonale est plus précis que les autres opérateurs discrets de Hodge. En revanche, l'opérateur de Hodge construit sur le maillage dual barycentrique a donné une meilleure précision que celui construit sur le maillage incentrique. Les tests qu'on vient de traiter ont été effectués sur l'équation de Poisson qui est une équation linéaire. Dans ce qui suit, nous montons en complexité en abordant les problèmes non linéaires issus de la mécanique des fluides. Dans ces tests, la précision sur la fonction de courant  $\psi$  et sur la vitesse  $u$  sera mesurée par les erreurs relatives définies de la même manière que l'équation (3.10) mais avec le simplexe/cellule approprié.

### 3.3.2 Écoulements de fluides incompressibles

Considérons un écoulement bidimensionnel de fluide newtonien incompressible de densité  $\rho$  et de viscosité cinématique  $\nu$ . L'évolution de la vitesse  $u$  et de la pression  $p$  est régie par les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \nabla) u + \frac{1}{\rho} \text{grad } p - \nu \Delta u = 0, \\ \text{div } u = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Pour garantir que la vitesse soit à divergence nulle, on utilise la formulation par fonction de courant. De plus, pour se débarrasser de la pression, l'opérateur rotationnel est appliquée sur l'équation du moment. L'équation résultante est réécrite dans une formulation de calcul extérieur et discrétisée comme dans [56], (voir aussi la section 2.2.3). Les valeurs de la fonction de courant discrétisée sont placées sur les sommets primaux. Par conséquent, la vitesse est discrétisée en une 1-cochaîne duale.

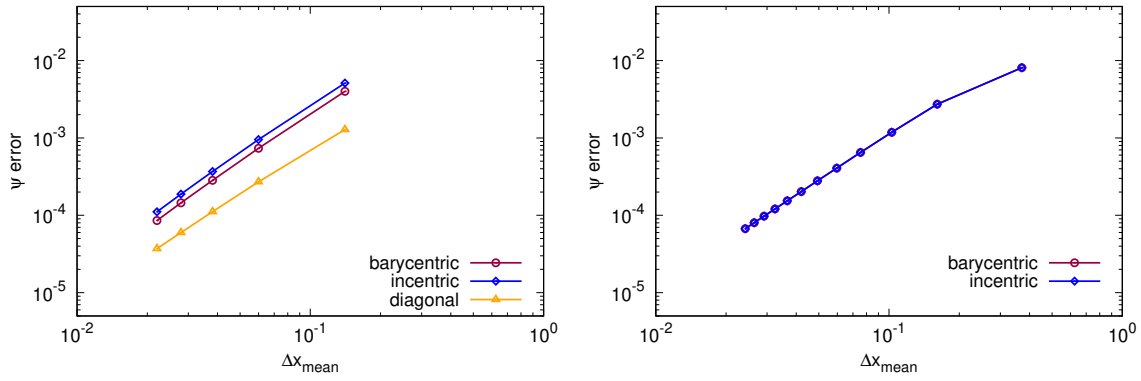
#### Problème de Poiseuille

Nous considérons un écoulement de poiseuille dans le domaine spatial carré unitaire. La solution initiale est fixé à zéro et la simulation est exécutée jusqu'à ce que l'écoulement se stabilise. La convergence de la variable principale  $\psi$  en fonction de la longueur moyenne du bord est présentée dans la figure 3.6. Cette figure montre une plus grande précision du Hodge diagonal dans la triangulation aiguë dans la plage donnée de  $\Delta x_{mean}$ , mais une vitesse de convergence légèrement plus élevée avec le nouveau Hodge avec des duaux barycentriques et incentriques. Ceci peut être vu plus clairement dans l'évolution des taux de convergence listés dans le tableau 3.4. En ce qui concerne la variable de vitesse, construite par interpolation de premier ordre de la 1-forme discrète  $\star d\psi$ , le dual circoncentrique a montré une précision et une vitesse de convergence plus élevées. Ceci peut être observé de la figure 3.7a représentant l'évolution de l'erreur sur la vitesse et du tableau 3.4 listant les taux de convergences correspondants.

	Maillage aigu		Maillage droit	
	Fonction de courant	Vitesse	Fonction de courant	Vitesse
Circoncentrique	2.006	1.421	–	–
Barycentrique	2.184	1.106	1.989	1.553
Incentrique	2.185	1.096	1.989	1.539

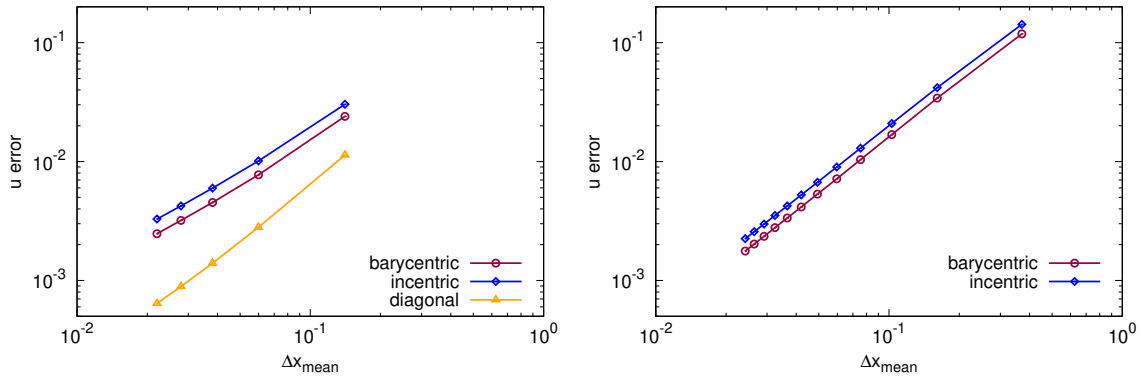
TABLE 3.4 – Écoulement de poiseuille : taux de convergence

Dans le cas du maillage par des triangles droits, les duaux barycentrique et incentrique fournissent des précisions similaires, aussi bien pour la fonction du courant  $\psi$  que pour la vitesse  $u$ . Pour  $\psi$ , les erreurs sont visuellement indiscernables dans la figure 3.6b. Pour la variable de vitesse, le taux de convergence est d'environ 1.5, ce qui est supérieur au taux



(a) Maillage aigu

(b) Maillage droit

FIGURE 3.6 – Écoulement de poiseuille : erreurs sur  $\psi$ 

(a) Maillage aigu

(b) Maillage droit

FIGURE 3.7 – Écoulement de poiseuille : erreurs sur  $u$ 

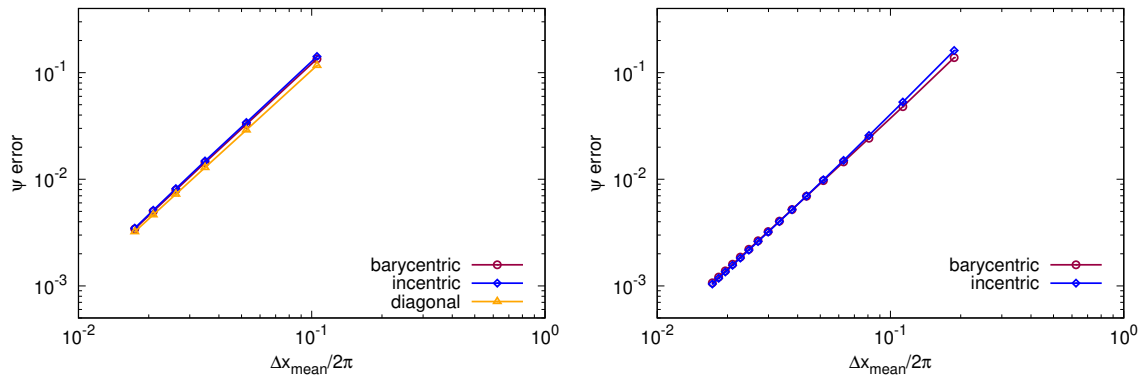
de convergence dans le cas du dual circoncentrique sur une triangulation aiguë (voir la dernière colonne du tableau 3.4).

### Vortex de Taylor-Green

Considérons dans le domaine  $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ , le problème Taylor-Green correspondant au champ vectoriel

$$u = \begin{pmatrix} -\cos x \sin y \\ \sin x \cos y \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

où la viscosité cinématique et la densité sont fixées à 1. Comme pour l'exemple du problème de Poiseuille, l'écoulement initial est mis à zéro et la simulation est exécutée jusqu'à ce que l'écoulement se stabilise. L'erreur sur  $\psi$  en fonction de la longueur moyenne des cotés du maillage est représentée sur la figure 3.8. Il s'avère que le comportement de l'évolution de l'erreur est le même pour les trois types de maillages duaux construits sur un maillage aiguë ou un maillage droit. Concrètement, le taux de convergence est d'environ d'ordre 2 pour tous les cas considérés (voir le tableau 3.5).



(a) Maillage aigu

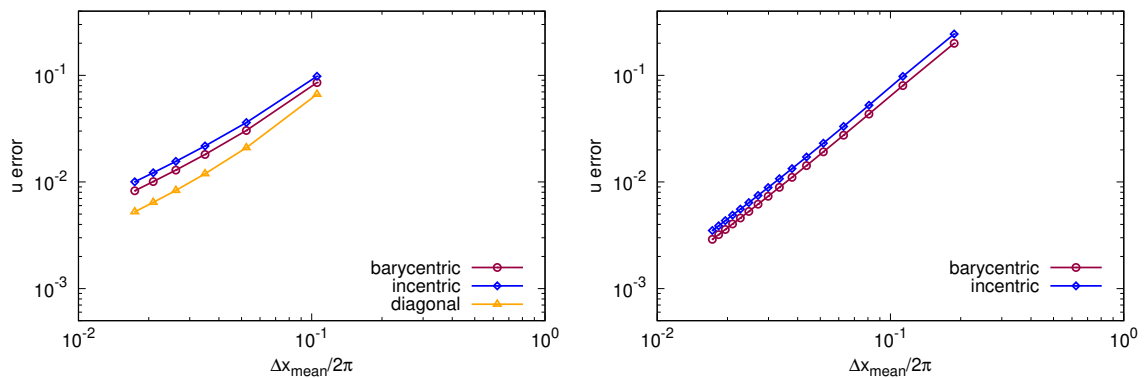
(b) Maillage droit

FIGURE 3.8 – Taylor-Green vortex : erreur sur  $\psi$

	Maillage aigu		Maillage droit	
	Fonction du courant	Vitesse	Fonction du courant	Vitesse
Circoncentrique	1.996	1.187	–	–
Barycentrique	2.065	1.130	2.018	1.735
Incentrique	2.088	1.118	2.067	1.736

TABLE 3.5 – Vortexe de Taylor-Green : taux de convergence

Pour la variable vitesse, des différences peuvent être observées entre le maillage aiguës et le maillage droit. En effet, on peut voir sur la figure 3.9 que la décroissance de l’erreur est plus rapide dans le maillage droit. Le taux de convergence est d’environ 1.74 (pour les deux barycentriques et incentriques) alors qu’il est proche de 1.14 dans le maillage aiguë (pour les trois types de duals). Les taux de convergences sont listés dans le tableau 3.5.



(a) Maillage aigu

(b) Maillage droit

FIGURE 3.9 – Taylor-Green vortex : erreur sur  $u$

### 3.3.3 Écoulements des fluides anisothermes

Considérons maintenant le cas d’un écoulement de fluide anisotherme avec un coefficient de dilatation thermique  $\beta$  et une diffusivité thermique  $\kappa$ , tel que l’évolution de la



vitesse, de la pression et de la température  $\theta$  est régie par les équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u \otimes u) + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - \nu \Delta u + \beta g \theta e_y = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \operatorname{div}(u \theta) - \kappa \Delta \theta = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

où  $-g e_y$  est le vecteur d'accélération gravitationnelle. De la même façon que dans la section 2.2.2 du chapitre 2, la résolution par DEC des équations ci-dessus est effectuée par intermédiaire de la fonction du courant.

### Problème de traveling waves

Supposons que  $\nu \neq \kappa$ . Nous choisissons comme référence la solution d'ondes progressives suivante qui a déjà été utilisée dans la section 2.3.3

$$\begin{cases} u_x = u_1 e^{\lambda \xi / \nu} + \frac{\kappa^2 \beta a b g}{(c + w)^2 (\kappa - \nu)} \theta_1 e^{\lambda \xi / \kappa} \\ u_y = \frac{w - a u_x}{b}, \\ p = -\frac{\rho \beta b g \kappa \theta_1}{c + w} e^{\lambda \xi / \kappa} \\ \theta = \theta_1 e^{\lambda \xi / \kappa} \end{cases} \quad (3.15)$$

où la variable de l'onde progressive est

$$\xi = a x + b y + c t \quad (3.16)$$

et  $a, b, c, w, u_1, \lambda$  et  $\theta_1$  sont des constantes telles que  $b \neq 0, w \neq -c$  et  $\lambda = (c + w)/(a^2 + b^2)$ . Le fluide est caractérisé par  $\rho = 1, \nu = 0,2, \kappa = 0,1$  et  $\beta = 1$ . L'accélération de la gravité est fixée à  $g = 10$ . Les valeurs des différentes constantes dans la solution de référence sont fixées à  $a = b = 1, c = -1, w = 2, \theta_1 = e^{-5}$  et  $u_1 = 2 e^{-5}$ . Le domaine spatial considéré est  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , discrétisé par des triangles droits comme dans la figure 3.3 à où la longueur moyenne des cotés est de  $1.894 \times 10^{-2}$ . La simulation numérique est effectuée jusqu'au temps  $T$  tel que  $|\lambda c| T / \kappa = 1$ .

La figure 3.10a reproduit les erreurs relatives sur la fonction de courant le long de l'axe  $x$ . Même si cette figure présente quelques plateaux par manque de résolution (et quelques arrondis machine), elle montre clairement une bonne précision avec les deux maillages duaux barycentrique et incentrique. Dans le cas le plus défavorable, l'erreur maximal est

de 0.025% et l'erreur moyenne sur l'ensemble du domaine est encore plus faible. Comme l'indique le tableau 3.6, elle est d'environ 0.008% avec le maillage dual incentrique et d'environ 0.002 avec le maillage dual barycentrique. Comme la vitesse est calculée a posteriori

Maillage dual	Fonction de courant	Vitesse	Température
Barycentrique	$2.651 \cdot 10^{-5}$	$7.270 \cdot 10^{-5}$	$5.529 \cdot 10^{-3}$
Incentrique	$8.875 \cdot 10^{-5}$	$2.132 \cdot 10^{-4}$	$5.589 \cdot 10^{-3}$

TABLE 3.6 – Ondes progressives : Erreurs relatives

à partir de la fonction de courant, la même conclusion peut être tirée sur l'erreur. En effet, le dual barycentrique est plus précis le long de l'axe des  $x$  comme le montre la figure 3.10b. Il est également plus précis en moyenne sur l'ensemble du domaine (voir le tableau 3.6). En revanche, pour la température, les deux maillages duaux ont une précision simi-

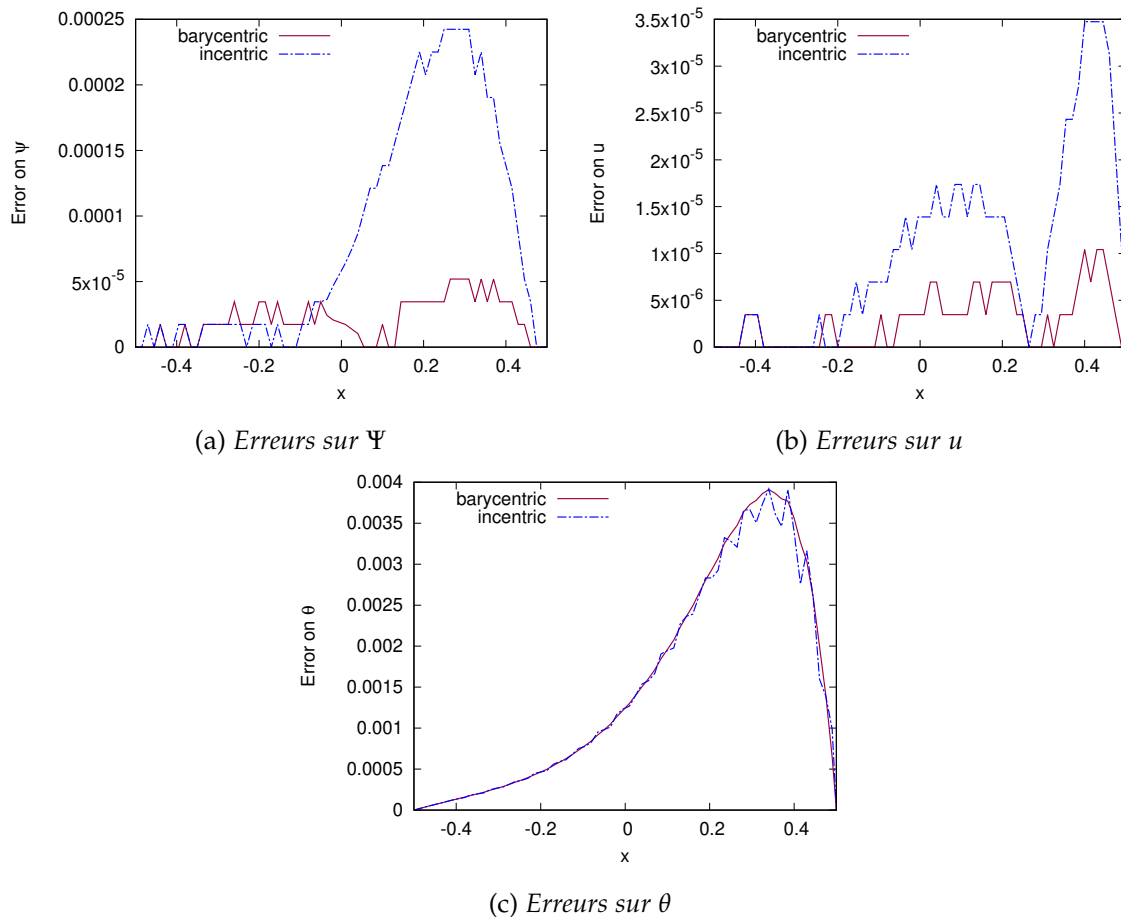


FIGURE 3.10 – Ondes progressives : Profile de l'erreur relative de la fonction de courant, de la vitesse horizontale et de la température le long de  $y = 0$  au temps final  $T$

laire. Les profils d'erreur sur l'axe  $x$ , présentés dans la figure 3.10c, ont la même tendance. Les erreurs globales sont presque égales comme on peut le voir dans la dernière colonne du tableau 3.6. En moyenne, l'erreur relative est d'environ 0.56%. Ces résultats révèlent une bonne précision du nouveau Hodge discret analytique sur un problème de transfert de chaleur, avec différents choix de maillages duaux.

### 3.3.4 Maillage non structuré

Dans cette partie, nous montrons que le nouveau Hodge discret analytique donne également des résultats satisfaisants sur diverses types de maillages non structurés et non bien centrés. Pour simplifier, seuls les résultats sur les duals barycentriques sont présentés. Nous fixons  $\nu = \kappa$  et choisissons la solution exacte suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = \frac{\beta abg\theta_1}{(c+w)(a^2+b^2)} (x_0 - \zeta) e^{\lambda\zeta/\kappa} \\ u_y = \frac{w - au_1}{b}, \\ p = -\frac{\rho\beta bg\kappa\theta_1}{c+w} e^{\lambda\zeta/\kappa} \\ \theta = \theta_1 e^{\lambda\zeta/\kappa} \end{array} \right. \quad (3.17)$$

où, comme précédemment,  $\zeta = ax + by + ct$  est la variable de l'onde progressive. Les caractéristiques du fluide sont  $\rho = 1$ ,  $g = 10$ ,  $\nu = \kappa = 0,1$ ,  $\beta = 1$ . Nous choisissons  $a = b = 1$ ,  $c = -1$ ,  $x_0 = 0.5$ ,  $w = 0$  et le domaine spatial  $[0, 1] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . Un premier test est effectué sur les cinq maillages présentés dans la figure 3.11. Ces maillages sont de plus en plus raffinés, mais sont tous non structurés, non centrés et non-Delaunay. Elles comportent environ 40% de triangles non de Delaunay. Il convient de noter qu'un maillage non Delaunay est toujours non bien centré [73]. Ici, un triangle est dit non de Delaunay si son cercle contient d'autres nœuds que ses sommets. Pour illustrer, ces triangles sont assombris dans les figures du maillage. La figure 3.12 montre les erreurs globales relatives sur la fonction de courant et sur la température avec les cinq maillages considérés. Comme on peut le remarquer, l'erreur décroît avec la longueur moyenne des cotés. Les taux de décroissance, qui sont indiqués dans le tableau 3.7, sont d'environ 1.3690 pour  $\psi$  et 1.1430 pour  $\theta$ .

	Fonction de courant	Température
Taux de convergence	1.3690	1.1430

TABLE 3.7 – Maillages non structurés. Taux de convergence de la fonction du courant et de la température

Les profils d'erreur relative sur la vitesse horizontale, la fonction de courant et la température le long de l'axe  $x$  sont représentés sur la figure 3.13. Par souci de simplicité, seuls les résultats sur le maillage le plus raffiné (figure 3.11) sont présentés. La longueur moyenne des cotés dans ce maillage est  $\Delta x_{mean} = 2.285 \times 10^{-2}$ . La figure 3.13 montre que les erreurs le long de l'axe restent très faibles par rapport à la norme des solutions exactes. Les erreurs globales sont listés dans le tableau 3.8. Comme on peut le constater, l'erreur sur la vitesse est d'environ 2.316% de la norme de la solution exacte, tandis que l'erreur sur la fonction de courant et sur la température est inférieure à 0.4%. Les triangulations

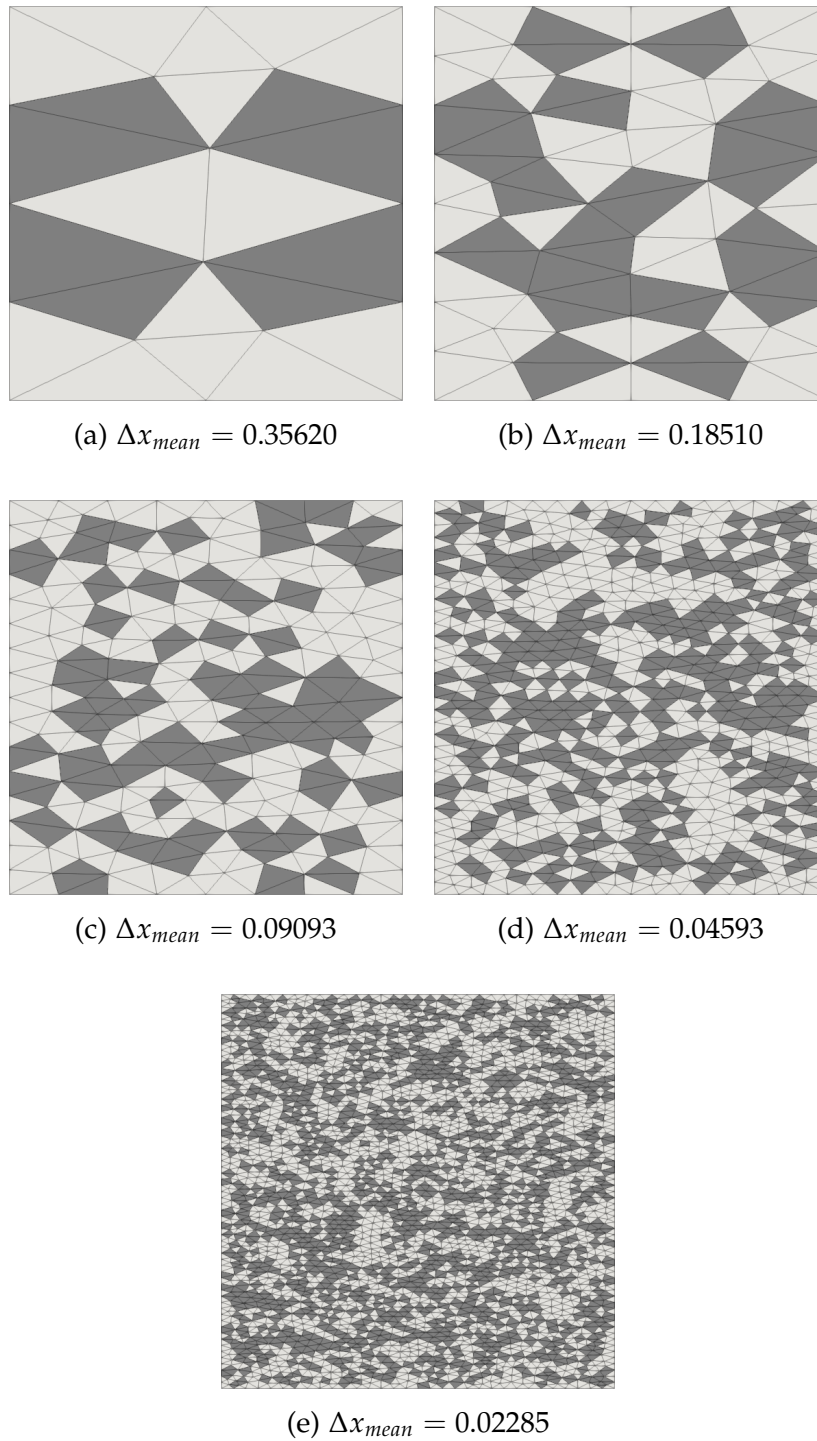


FIGURE 3.11 – Maillages non structurés avec respectivement 36.36%, 40.69%, 39.41%, 43.46% et 44.20% de leurs triangles sont non Delaunay

	Fonction de courant	Température	Vitesse
Erreur relative	$3.581 \cdot 10^{-3}$	$3.682 \cdot 10^{-3}$	$2.316 \cdot 10^{-2}$

TABLE 3.8 – Erreur relative des calcul sur le maillage (e) de la figure 3.11

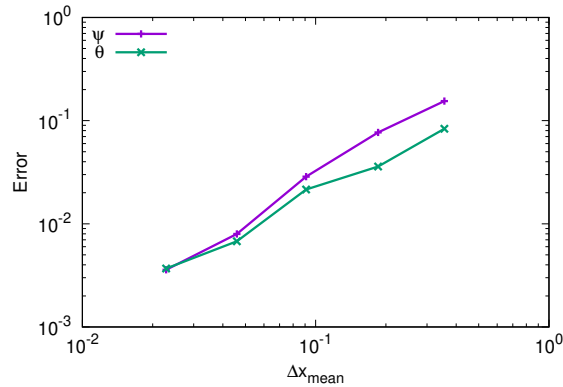
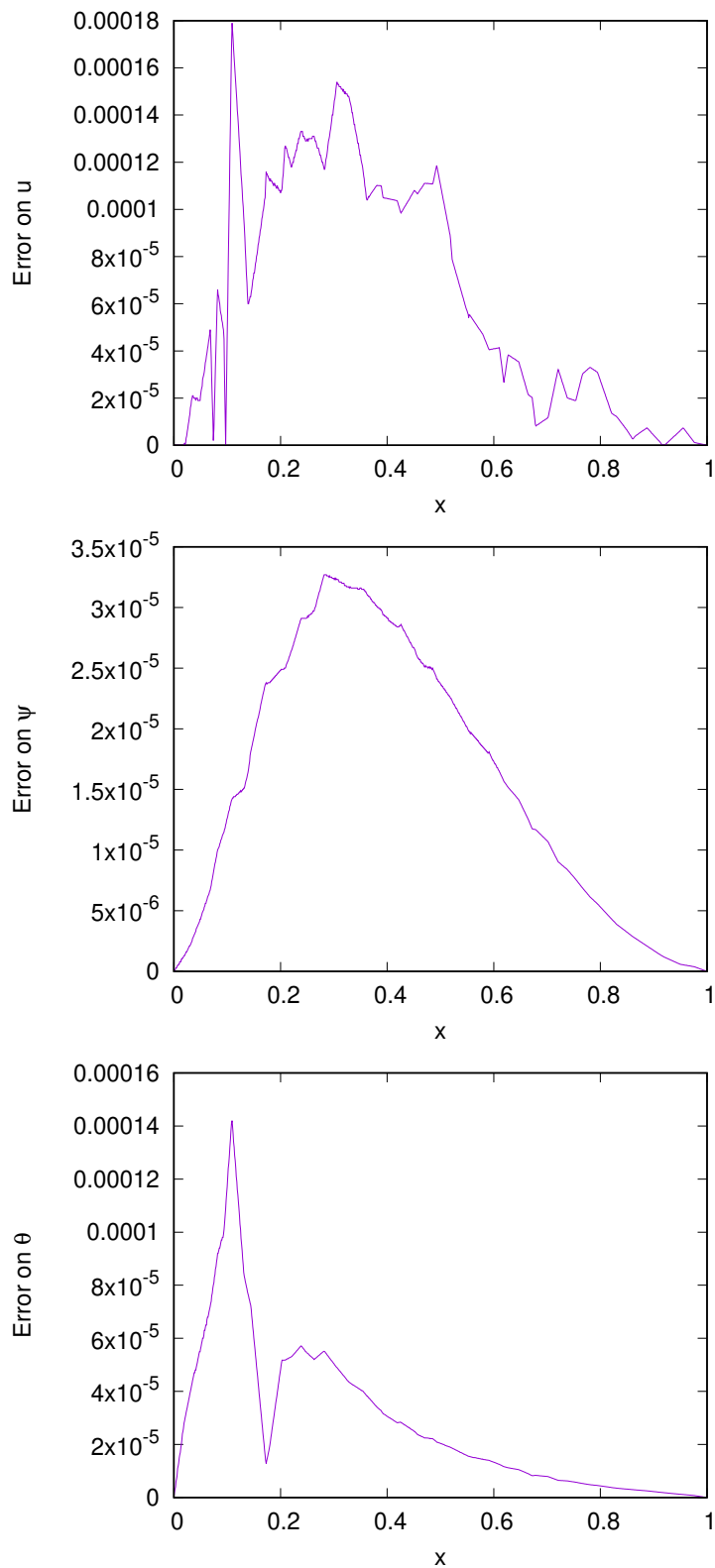


FIGURE 3.12 – Maillages non structurés. Convergence de la fonction du courant et de la température

utilisées pour les résultats précédents sont non structurées et très peu proches de celles de Delaunay. Cependant, elles sont assez régulières dans le sens où les triangles ont des surfaces comparables et les cotés ont des longueurs comparables. Dans un dernier test, une analyse sur des maillages non-Delaunay avec des triangles de forme particulière est effectuée. Ces maillages sont obtenus à partir des maillages de Delaunay générés par Gmsh [74], dont certains sommets aléatoires sont déplacés, afin d'obtenir un rapport prescrit de triangles non Delaunay. Contrairement à la procédure de distorsion dans [57], les triangles non de Delaunay ne sont pas nécessairement par paire.

Trois ensembles de quatre maillages de plus en plus fines sont utilisés. Dans chaque ensemble, les maillages comptent respectivement 40, 184, 676 et 2658 triangles. Les quatre maillages du premier ensemble comprennent environ 15% de triangles non Delaunay. Ils sont présentés dans la figure 3.14. Dans le deuxième ensemble, le ratio des triangles non Delaunay est d'environ 25%, alors que dans le dernier ensemble, 50% des triangles sont des triangles non Delaunay. Les maillages du deuxième ensemble sont représentés sur la figure 3.15 et le troisième ensemble sur la figure 3.16. Les longueurs moyennes des cotés dans les trois ensembles vont de  $2.546 \times 10^{-1}$  à  $3.066 \times 10^{-2}$ . On peut remarquer dans les figures 3.14 à 3.16 que les triangles ont des formes irrégulières. Beaucoup d'entre eux ont un angle proche de 180 degrés et la variation de la surface des triangles est très importante. Par exemple, l'aire minimal du triangle du maillage (d) de la figure 3.15 est de  $1.962 \times 10^{-7}$  alors que le maximal est égale à  $2.228 \times 10^{-3}$ , soit plus de  $10^4$  fois plus élevé. Le Tableau 3.9 liste les caractéristiques des trois groupes de maillage distinctes par le pourcentage de triangle non Delaunay dans chacun. On désigne par rapport de forme d'un triangle le rapport entre le rayon du cercle circonscrit et celui du cercle inscrit. Il vaut 2 pour un triangle équilatéral. Pour tous ces maillages, le calcul s'effectue sans complication particulière. Les erreurs diminuent avec la longueur moyenne des arêtes. La figure 3.17 rapporte l'évolution de l'erreur sur la fonction de courant et sur la température avec les trois ensembles de maillages. Une bonne convergence sur les deux variables est observée. Pour le premier ensemble de maillages, la convergence est proche du second ordre pour  $\psi$  et est à un taux de 1.5159 pour  $\theta$ , comme indiqué dans le tableau 3.10. Pour les

FIGURE 3.13 – Erreur relative des calculs sur le maillage ( $e$ ) de la figure 3.11

maillages non Delaunay à 25%, les taux de convergence sont légèrement inférieurs mais reste très suffisante. Concrètement, les taux de convergence sont de 1.6729 pour  $\psi$  et de

% non Delaunay	raffinement	$\Delta x$	rapport de forme		
			minimal	moyen	maximal
15%	fig 3.14(a)	0.2546	2.123	3.012	$1.580 \cdot 10$
	fig 3.14(b)	0.1167	2.004	8.182	$8.585 \cdot 10^2$
	fig 3.14(c)	0.0609	2	$1.683 \cdot 10$	8.916
	fig 3.14(d)	0.0312	2	9.623	$8.282 \cdot 10^3$
25%	fig 3.15(a)	0.256	2.123	3.609	$1.580 \cdot 10$
	fig 3.15(b)	0.1186	2.004	6.898	$4.151 \cdot 10^2$
	fig 3.15(c)	0.0618	2	$1.756 \cdot 10$	$8.916 \cdot 10^3$
	fig 3.15(d)	0.0307	2	$3.239 \cdot 10$	$2.184 \cdot 10^4$
50%	fig 3.16(a)	0.2682	2.037	6.184	$8.363 \cdot 10$
	fig 3.16(b)	0.1265	2.002	$1.229 \cdot 10^7$	$2.261 \cdot 10^9$
	fig 3.16(c)	0.0650	2	$2.990 \cdot 10^4$	$2.003 \cdot 10^7$
	fig 3.16(d)	0.0328	2	$8.035 \cdot 10^2$	$8.863 \cdot 10^5$

TABLE 3.9 – Caractéristiques des groupes des maillages non Delaunay.

1.2154 pour  $\theta$ . Pour l'ensemble des maillages 50% non-Delaunay,  $\psi$  a un taux de convergence similaire à celui du second ensemble. Pour la température, le résultat est moins satisfaisant puisque le taux de convergence est inférieur à 1.

	Fonction de courant	Température
Maillages 15% non Delaunay	1.9005	1.5159
Maillages 25% non-Delaunay	1.6729	1.2154
Maillages 50% non-Delaunay	1.6591	0.8660

TABLE 3.10 – Taux de convergence

### 3.4 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle construction de l'opérateur discret Hodge dans le contexte de la DEC. Elle ne nécessite ni un maillage bien centré ni un dual circoncentrique comme avec la diagonale Hodge. Elle ne nécessite pas non plus de dual barycentrique comme dans le Hodge géométrique. La nouvelle discrétisation de l'opérateur de Hodge est exacte pour les formes constantes par morceaux, quels que soient les points intérieurs choisis comme centres. Comme le montrent les simulations numériques avec l'équation de Poisson, même dans un maillage bien centré, la discrétisation populaire diagonale de l'opérateur de Hodge, construite sur un dual orthogonal, ne génère pas toujours des résultats plus précis que le nouveau Hodge discret. Quoi qu'il en soit, les taux de convergence dans les deux sont très proches. Ensuite, on a montré que le nouveau Hodge discret est un bon alternatif au Hodge diagonal, en termes de taux de convergence, dans la résolution des équations de Navier-Stokes. Les tests numériques des

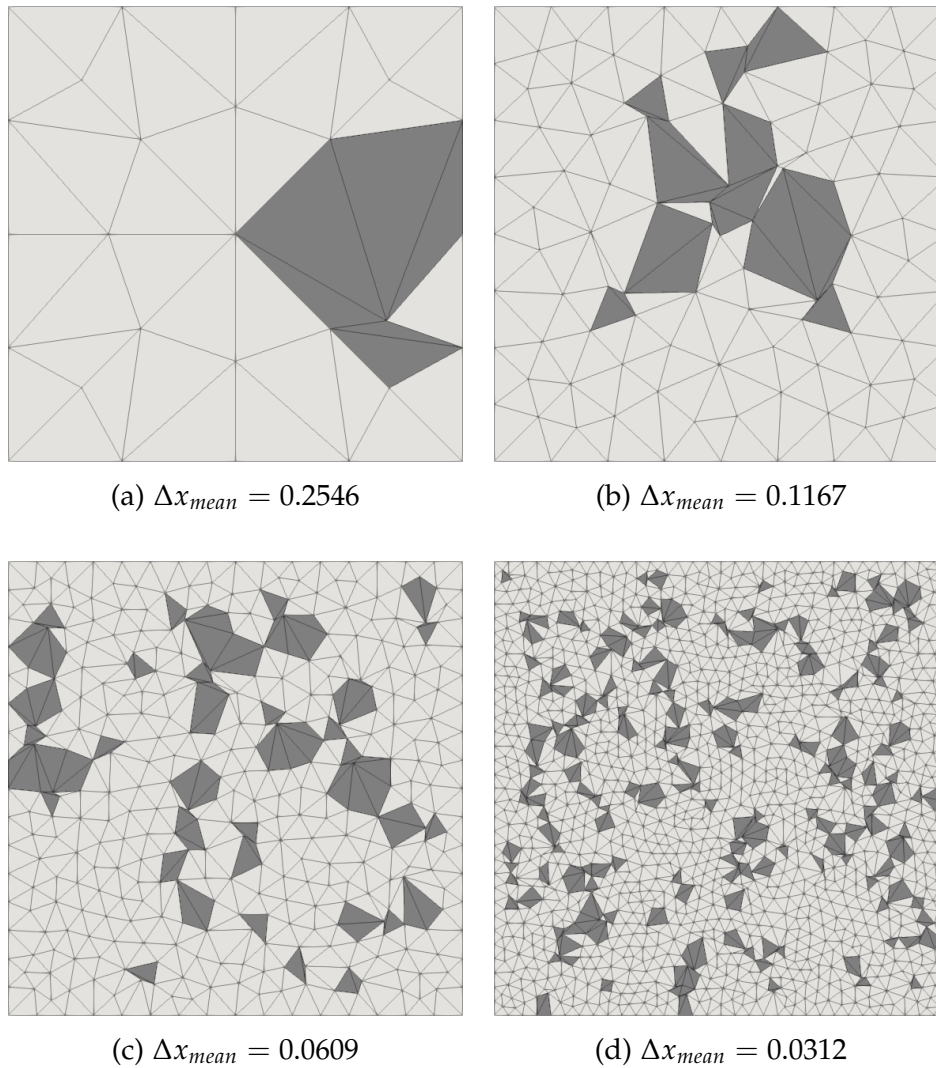


FIGURE 3.14 – Ensemble de maillage à 15% de triangles non Delaunay

sections 3.3.3 et 3.3.4 ont montré la capacité de la DEC, et du nouveau Hodge discret en particulier, pour résoudre les problèmes liés au transfert thermique. Des tests sur différents types de maillages ont été effectués. Des maillages aigus structurés (bien centrés) et des maillages droits ont été choisis dans les sections 3.3.1 à 3.3.3. Des maillages non structurés mais plutôt réguliers, contenant environ 40% de triangles non Delaunay ont été examinés à la section sec :nonstructured. Des ensembles de maillage non structurés contenant des formes de triangles irréguliers et comprenant 15, 25 ou 50% de triangles non Delaunay ont également été utilisés. Dans toutes ces configurations, le nouvel opérateur étoile de Hodge assure une bonne convergence. Les expériences numériques des sections 3.3.1 à 3.3.3 tendent à montrer qu'un dual barycentrique fournit des résultats aussi précis, voire meilleurs, qu'un dual incentrique. Cependant, cette conclusion ne doit pas être considérée comme le cas général. En effet, comme indiqué dans le tableau 3.1, dans certains cas le dual incentrique peut être beaucoup plus précis que le dual barycentrique. En outre, dans d'autres types de problèmes, il peut y avoir d'autres critères que l'er-



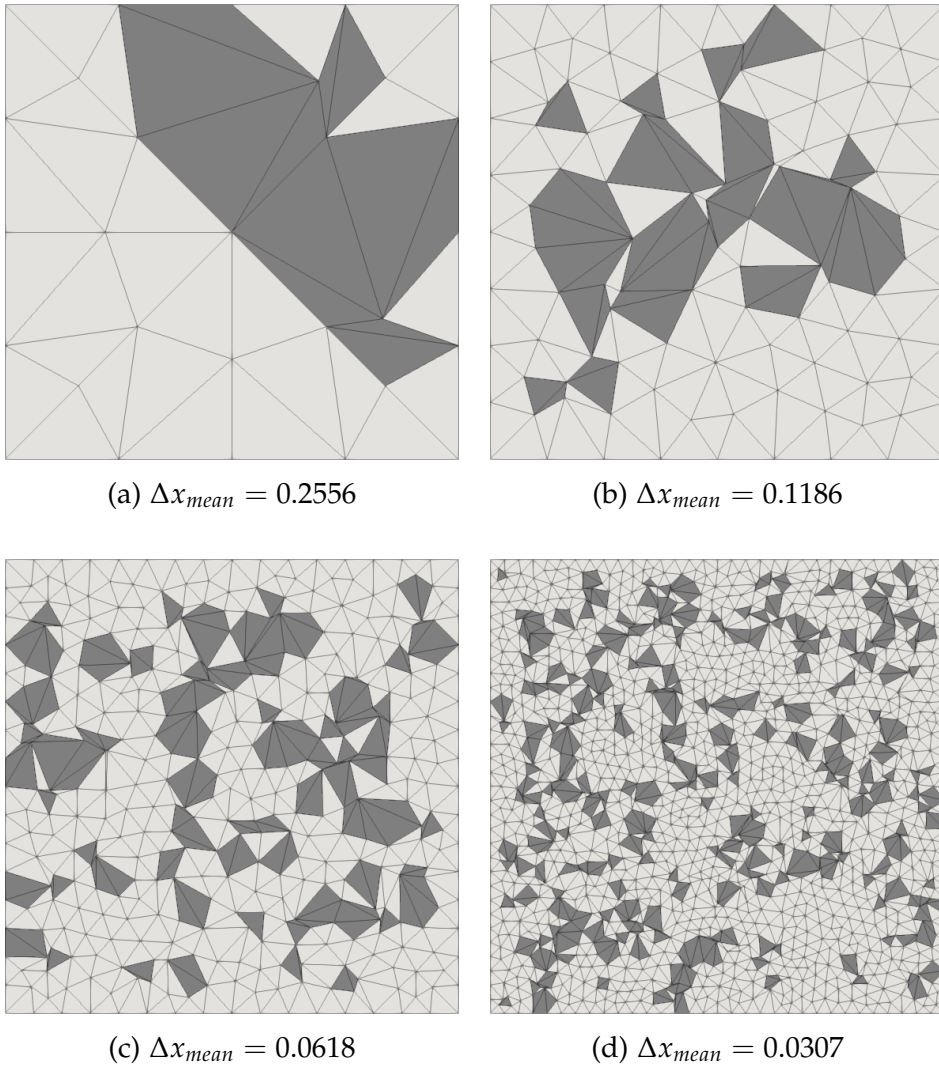


FIGURE 3.15 – Ensemble de maillage à 25% de triangles non Delaunay

reur à prendre en considération. Le barycentre et l'incentre ont été choisis comme centres des maillages duals à cause de leur simplicité. Avec notre construction générale, d'autres points intérieurs peuvent également être pris en considération, sans rompre l'exactitude du Hodge discret sur des formes différentielles constantes par morceaux. Le choix des points intérieurs peut être fait de manière algorithmique pour minimiser certains indicateurs d'erreur (par exemple, l'ensemble erreur de l'opérateur Hodge discret sur certaines classes de formes différentielles). Le développement d'un tel processus d'optimisation est actuellement à l'étude. Enfin, l'extension du nouveau opérateur discret de Hodge au cas tridimensionnel est en cours de développement.

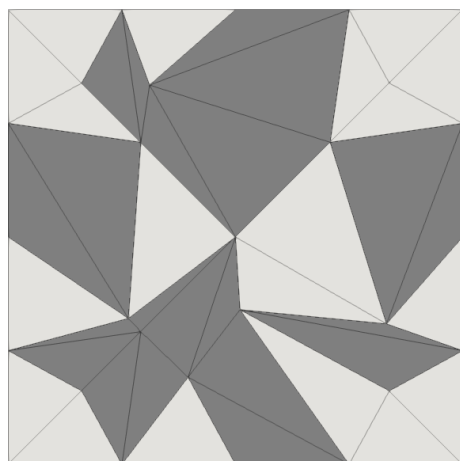
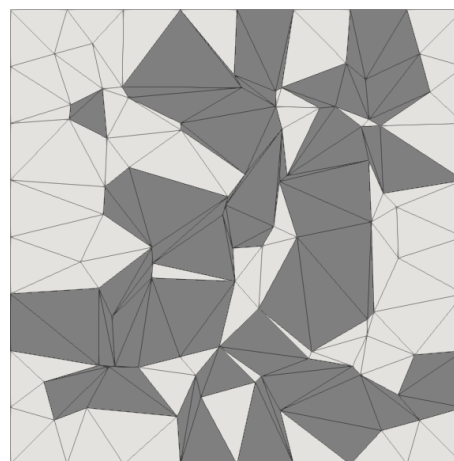
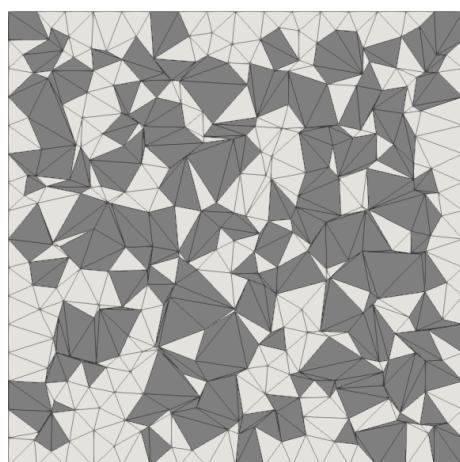
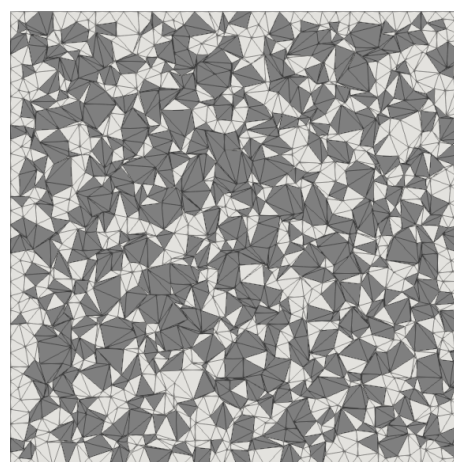
(a)  $\Delta x_{mean} = 0.2682$ (b)  $\Delta x_{mean} = 0.1265$ (c)  $\Delta x_{mean} = 0.0650$ (d)  $\Delta x_{mean} = 0.0328$ 

FIGURE 3.16 – Ensemble de maillage à 50% de triangles non Delaunay

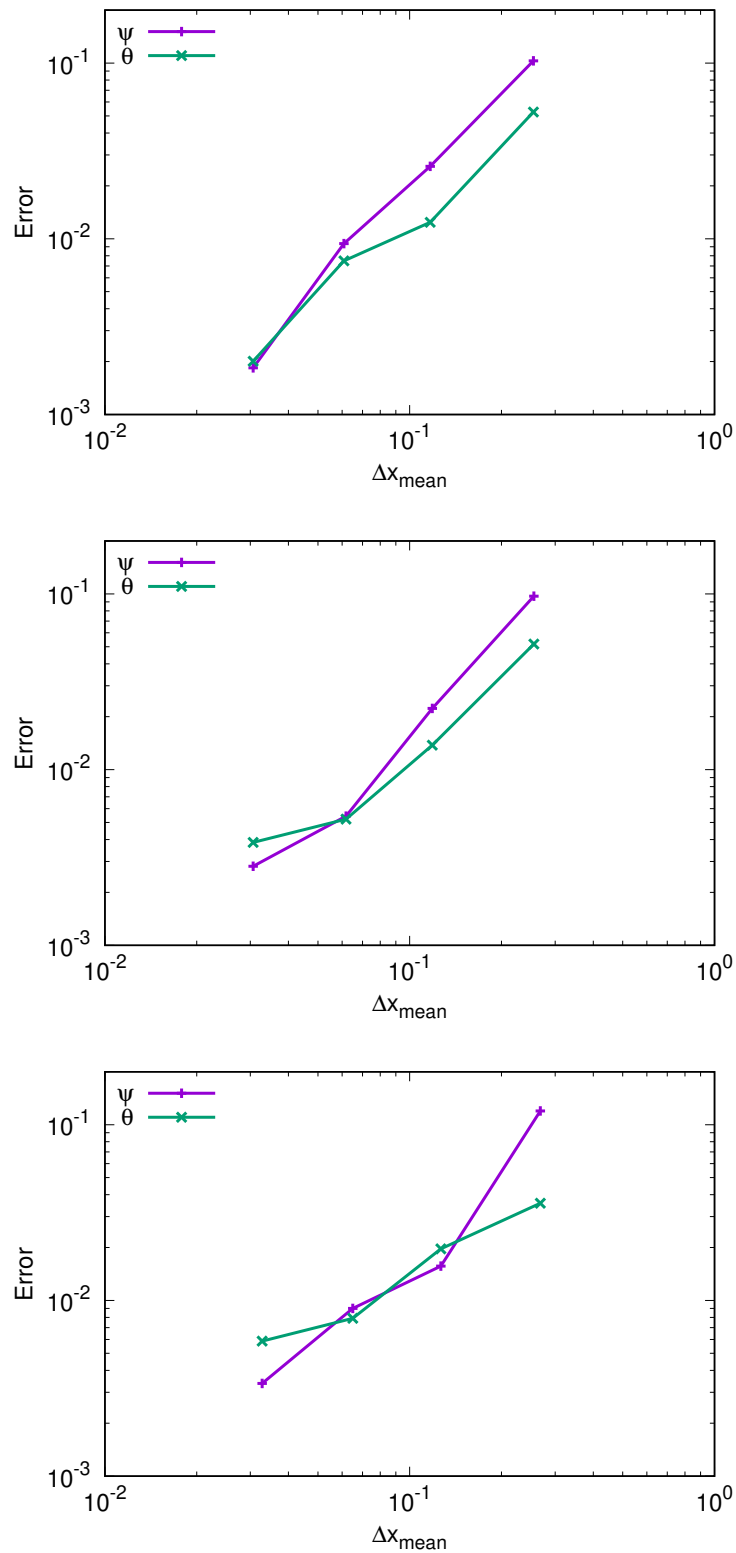


FIGURE 3.17 – Convergence de la fonction de courant et de la température. Pour le premier ensemble (Figure 3.14), le deuxième ensemble (Figure 3.15) et le troisième ensemble (Figure 3.16) de maillage

# FORMULATION DEC AVEC VARIABLES PRIMAIRES EN MÉCANIQUE DES FLUIDES

# 4

## SOMMAIRE

---

4.1	INTRODUCTION . . . . .	94
4.2	SCHÉMA DE PROJECTION EN DEC . . . . .	94
4.3	ÉQUATION DE POISSON AVEC UNE CONDITION DE NEUMANN EN DEC . . . . .	96
4.3.1	Discrétisation DEC . . . . .	97
4.4	SIMULATION DES ÉCOULEMENTS INCOMPRESSIBLES PAR LE SCHÉMA DE PRÉDICTION-CORRECTION EN DEC . . . . .	102
4.4.1	Écoulement des Vortex de Taylor-Green . . . . .	103
4.4.2	Écoulement de la cavité entraînée . . . . .	104
4.5	CONCLUSION . . . . .	110

---

## 4.1 INTRODUCTION

Dans les chapitres 2 et 3, les équations de Navier-Stokes ont été résolues en introduisant la fonction de courant afin d'éliminer les problèmes liés au couplage entre la vitesse et la pression. Il est cependant souhaitable dans de nombreuses applications, que l'on résolve directement avec les variables primaires de vitesse et de pression. Les méthodes de prédiction-correction ou schémas de projection [75, 76, 77] sont parmi les méthodes les plus utilisées à cet effet. Ces schémas se composent de deux étapes. Premièrement, une vitesse intermédiaire ne vérifiant pas la contrainte d'incompressibilité est prédite via la résolution d'un problème de type Helmholtz. Ensuite, cette vitesse est corrigée via la résolution d'un problème de Poisson avec des conditions aux limites de type Neumann. Un travail préliminaire effectué par Mohamed [45] a permis d'éclaircir le traitement des conditions limites de type Neumann dans le cadre du DEC. Cependant, cette étude a été limitée au cas de l'opérateur de Hodge discret diagonal, et donc à un type de maillage bien particulier qui se restreint sur des simplexes bien centrés. Dans ce chapitre, nous présentons une adaptation générale des schémas de prédiction-correction au cadre du DEC. Dans ce schéma, la condition aux limites de Neumann est formulée pour des maillages duaux arbitraires, avec un choix libre de l'opérateur de Hodge discret (diagonal, analytique, Whitney ou autre). Au mieux de nos connaissances, c'est la première fois qu'un schéma de prédiction-correction est étudié dans le cadre du DEC. L'approche est validée sur les problèmes modèles de l'écoulement des vortex de Taylor-green et l'écoulement de la cavité entraînée. Les discrétisations de l'opérateur de Hodge considérées sont la discrétisation analytique et la discrétisation basée sur les formes de Whitney.

## 4.2 SCHÉMA DE PROJECTION EN DEC

Une difficulté majeure qui se manifeste dans la simulation numérique des écoulements incompressibles est le couplage entre les variables de vitesse et de pression. Les méthodes de prédiction-correction initialement introduites par Chorin et Temam [75, 76] sont un outil très populaires permettant de surmonter ce couplage. Ces méthodes sont basées sur la décomposition de Helmholtz (parfois appelée décomposition de Helmholtz-Hodge) de tout champ vectoriel en une partie solénoïdale (à divergence nulle) et une partie irrotationnelle. Ainsi, à chaque pas de temps, l'algorithme de prédiction correction est décrit en deux étapes. Dans la première étape, une vitesse intermédiaire ne satisfaisant pas la contrainte d'incompressibilité est calculée. Ensuite, la pression calculée via la résolution d'un problème de Poisson est utilisée pour projeter la vitesse intermédiaire sur l'espace de champ de vecteurs à divergence nulle. De nombreuses versions des schémas de prédiction-correction existent [77]. Dans ce manuscrit, nous nous restreindrons sur le schéma de base de Van-Kan [75] et formulons son équivalent dans le cadre du calcul extérieur.

Considérons maintenant l'écoulement incompressible défini dans un domaine  $M$  de bord

$\Gamma$ , gouverné par les équations de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u \otimes u) + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - \nu \Delta u = g_M, & \text{dans } M \\ \operatorname{div} u = 0, & \text{dans } M \\ u = u_\Gamma, & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.1)$$

où Rappelons d'abord le schéma de Van-Kan dans la formulation tensoriel des équations. À chaque instant de temps  $t^{n+1}$ , le schéma de prédiction-corrrection de Van-Kan se compose de deux étapes principales. Premièrement, sans aucune exigence d'incompressibilité, une vitesse intermédiaire  $\tilde{u}^{n+1}$  est calculée en résolvant le problème de Helmholtz suivant

$$\begin{cases} \frac{\tilde{u}^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \frac{3}{2} \operatorname{div}(u^n \otimes u^n) - \frac{1}{2} \operatorname{div}(u^{n-1} \otimes u^{n-1}) + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p^n - \nu \Delta \tilde{u}^{n+1} = g_M^{n+1}, & \text{dans } M \\ \tilde{u}^{n+1} = u_\Gamma^{n+1}, & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.2)$$

Ensuite, afin de forcer la condition d'incompressibilité, la solution du problème de Poisson suivant est calculée

$$\begin{cases} \Delta \tilde{p}^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \operatorname{div} \tilde{u}^{n+1}, & \text{dans } M \\ \nabla \tilde{p}^{n+1} \cdot N = 0, & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.3)$$

où  $N$  désigne la normale extérieure à  $\Gamma$ . Une fois les problèmes (4.2) et (4.3) sont résolus, les variables prédites de vitesse et de pression sont corrigées comme suit

$$p^{n+1} = \tilde{p}^{n+1} + p^n \quad \text{et} \quad u^{n+1} = \tilde{u}^{n+1} - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla \tilde{p}^{n+1} \quad (4.4)$$

Dans ce qui suit, le schéma ci-dessus est adapté au calcul extérieur. À cette fin, en posant  $v = u^b$ , l'équation (4.1) devient

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \delta \operatorname{d} v + i_u \operatorname{d} v + \frac{1}{\rho} \operatorname{d} \bar{p} = g_M, & \text{dans } M \\ \delta v = 0, & \text{dans } M \\ v = u_\Gamma^b, & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.5)$$

où  $\bar{p}$  désigne la pression dynamique donnée par

$$\bar{p} = p + \frac{1}{2} u^2$$

Comme pour le schéma standard de prédiction-corrrection, À chaque instant de temps  $t^{n+1}$ , une vitesse intermédiaire  $\tilde{v}$  est d'abord déterminée en résolvant le problème

$$\begin{cases} \frac{\tilde{v}^{n+1} - v^n}{\Delta t} - \nu (\delta \operatorname{d} + \operatorname{d} \delta) \tilde{v}^{n+1} = g_M^{n+1} - \left( \frac{3}{2} i_{u^n} \operatorname{d} v^n - \frac{1}{2} i_{u^{n-1}} \operatorname{d} v^{n-1} \right) - \frac{1}{\rho} \operatorname{d} \bar{p}^n, & \text{dans } M \\ \tilde{v}^{n+1} = u_\Gamma^{b, n+1}, & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.6)$$

Sachant que  $v^{n+1}$  est à divergence nulle, i.e,  $\delta v^{n+1} = 0$ , et que l'étape de correction en calcul extérieur consiste à imposer

$$\frac{v^{n+1} - \tilde{v}^{n+1}}{\Delta t} + \frac{1}{\rho} d \tilde{p}^{n+1} = 0, \quad (4.7)$$

l'équation de Poisson sur  $\tilde{p}^{n+1}$  à résoudre s'ensuit

$$\begin{cases} \delta d \tilde{p}^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \delta \tilde{v}^{n+1}, & \text{dans } M \\ \text{tr}(\star d \tilde{p}^{n+1}) = 0, & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.8)$$

où  $\delta d$  désigne l'opérateur du Laplacien de Beltrami appliqué sur les 0-formes,  $\text{tr}$  l'opérateur de trace sur le bord  $\Gamma$ , et la deuxième équation de (4.8) est l'expression de la condition de Neumann (4.3) en calcul extérieur comme sera montré dans la sous section 4.3. Une fois les variables prédites sont calculées, l'étape de correction consiste à mettre à jours  $v^{n+1}$  et  $p^{n+1}$  par les expressions

$$p^{n+1} = \tilde{p}^{n+1} + p^n \quad \text{et} \quad v^{n+1} = \tilde{v}^{n+1} - \frac{\Delta t}{\rho} d \tilde{p}^{n+1}$$

Dans les chapitres 1 et 3, on a décrit les opérateurs discrets qui interviennent dans les équations (4.6). En revanche, il nous faut étudier comment traiter la condition de Neumann dans l'équation (4.8) au niveau discret. C'est l'objet de la sous section suivante.

### 4.3 ÉQUATION DE POISSON AVEC UNE CONDITION DE NEUMANN EN DEC

Soit  $M$  un domaine lisse dans une variété Riemannienne orientable et  $\Gamma$  son bord. Notons  $N$  la normale extérieure à  $\Gamma$ ,  $dM$  la forme volume Riemannienne sur  $M$  et  $d\Gamma = \iota dM$  la forme volume induite par  $dM$  sur  $\Gamma$ . Considérons le problème de Poisson

$$\Delta p = -g_M, \quad \text{dans } M. \quad (4.9)$$

équipé de la condition aux limites

$$\nabla p \cdot N = g_\Gamma, \quad \text{sur } \Gamma \quad (4.10)$$

où  $g_\Gamma$  est une donnée vérifiant la condition de compatibilité

$$-\int_M f dM = \int_\Gamma g_\Gamma d\Gamma \quad (4.11)$$

La condition de Neumann (4.10) apparait naturellement lorsqu'on intègre cette équation sur  $M$ . En effet, en vertu du théorème de Stokes :

$$\int_M \Delta p dM = - \int_M \nabla p \cdot N d\Gamma \quad (4.12)$$

Reformulons maintenant la condition (4.10) en calcul extérieur. Comme on l'a déjà vu, l'opérateur Laplacien s'écrit

$$\Delta = \delta d + d \delta$$

comme  $p$  est une 0-forme,  $\delta p = 0$ . Ainsi,

$$\Delta p = \delta d p = (-1)^{n+1} \star d \star d p$$

En multipliant par la forme volume  $dM$  et en intégrant sur  $M$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_M \Delta p dM &= \int_M (-1)^{n+1} (\star d \star d p) dM \\ &= (-1)^{n+1} \int_M (d \star d p) \star dM \\ &= (-1)^{n+1} \int_M d \star d p \end{aligned}$$

Grâce au théorème de Stokes, on a

$$\int_M \Delta p dM = (-1)^{n+1} \int_\Gamma \iota^* (\star d p) \quad (4.13)$$

où  $\iota : \Gamma \rightarrow \overline{M}$  est l'injection canonique définie sur le bord de  $M$  à valeurs dans son adhérence, et  $\iota^*$  son pull-back qui n'est autre que la fonction trace sur  $\Gamma$ . En comparant l'équation (4.12) à l'équation (4.13), on voit que la condition de Neumann en calcul extérieur consiste à imposer la valeur de  $\iota^* (\star d p)$  égale à  $\text{tr}(\star d p)$ . Comme ce dernier est une  $(n-1)$ -forme sur le bord, imposer sa valeur équivaut à se donner une fonction scalaire  $g$  telle que

$$\text{tr}(\star d p) = g_\Gamma d\Gamma \quad (4.14)$$

La fonction  $g_\Gamma$  dans (4.14) est la même que celle dans (4.10) à un signe près qui est aussi assujettie à une condition du même type que (4.11).

### 4.3.1 Discrétisation DEC

On va maintenant voir comment imposer la condition (4.14) au niveau discret en DEC. Supposons, pour simplifier, que  $M$  est un domaine de  $\mathbb{R}^2$  (Le cas de  $\mathbb{R}^3$  ne pose pas de problème particulier et sera traité dans le chapitre 5.4) et qu'il est discrétisé par un complexe simplicial

$$K = K_0 \cup K_1 \cup K_2$$

où  $K_2$ ,  $K_1$  et  $K_0$  sont respectivement l'ensemble des triangles, l'ensemble des cotés et l'ensemble des sommets de la discrétisation. Soit  $p$  une 0-cochaîne, la condition de Neumann (4.14) s'interprète en DEC par

$$\langle \star d p, e \rangle = \langle g_\Gamma, e \rangle \quad \forall e \in K_1 \cap \Gamma. \quad (4.15)$$

Dans le cas particulier où l'opérateur  $\star$  correspond au Hodge diagonal, on a

$$\langle \star d p, e \rangle = \langle d p, \star e \rangle \frac{|e|}{|\star e|} = \langle p, \partial(\star e) \rangle \frac{|e|}{|\star e|}, \quad \forall e \in K_1 \cap \Gamma. \quad (4.16)$$



Comme  $e$  est sur le bord, son dual est  $*e = s_e^f[c(e), *f]$  où  $s_e^f$  désigne la fonction signe qui dépend de l'orientation entre le coté  $e$  de centre  $c(e)$  et le triangle de centre  $*f$  bordé par  $e$ . Ainsi

$$\partial(*e) = s_e^f(*f - c(e))$$

et

$$\langle *d p, e \rangle = s_e^f(p(*f) - p(c(e))) \frac{|e|}{|*e|}$$

Il s'ensuit que la condition de Neumann dans le cas du Hodge diagonal s'écrit

$$p(*f) - p(c(e)) = s_e^f \langle g_\Gamma, e \rangle \frac{|*e|}{|e|}, \quad \forall e \in K_1 \cap \Gamma \quad (4.17)$$

Prenons maintenant le cas d'un Hodge discret général. Supposons que l'opérateur de Hodge  $H_1$  est représenté localement, dans chaque triangle, par la matrice  $H(f)$  telle que

$$\begin{pmatrix} \langle *\omega, e \rangle \\ \langle *\omega, e' \rangle \\ \langle *\omega, e'' \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H(f)_e^e & H(f)_{e'}^e & H(f)_{e''}^e \\ H(f)_e^{e'} & H(f)_{e'}^{e'} & H(f)_{e''}^{e'} \\ H(f)_e^{e''} & H(f)_{e'}^{e''} & H(f)_{e''}^{e''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \omega, *e \rangle \\ \langle \omega, *e' \rangle \\ \langle \omega, *e'' \rangle \end{pmatrix}, \quad \forall \omega \in \Lambda^1$$

Par substitution de l'expression du Hodge dans l'équation (4.16) on obtient

$$\langle *d p, e \rangle = H(f)_e^e \langle d p, *e \rangle + H(f)_{e'}^e \langle d p, *e' \rangle + H(f)_{e''}^e \langle d p, *e'' \rangle.$$

Ainsi, l'équation des conditions aux limites de Neumann dans le cas d'un Hodge discret général s'écrit

$$H(f)_e^e \langle d p, *e \rangle + H(f)_{e'}^e \langle d p, *e' \rangle + H(f)_{e''}^e \langle d p, *e'' \rangle = \langle g_\Gamma, e \rangle, \quad \forall e \in K_1 \cap \partial K.$$

où  $*e = s_e^f[c(e), *f]$ ,  $*e' = s_{e'}^f[*f', *f]$  et  $*e'' = s_{e''}^f[*f'', *f]$ .  $*f$ ,  $*f'$  et  $*f''$  étant respectivement des points arbitraires appartenant aux triangles  $f$ ,  $f'$  et  $f''$  et  $c(e)$  un point arbitraire du coté  $e$  (voir la Figure 4.1 pour illustration). Typiquement, on peut choisir ces points comme étant les barycentres, les circoncentres, les incentres, ou autre.

Pour simplifier les notations, nous notons  $HS_\xi^e = H(f)_\xi^e s_\xi^f$  où  $\xi$  est égal à  $e$ ,  $e'$  ou  $e''$ . Nous avons donc

$$HS_e^e(\langle p, *f \rangle - \langle p, c(e) \rangle) + HS_{e'}^e(\langle p, *f \rangle - \langle p, *f' \rangle) + HS_{e''}^e(\langle p, *f \rangle - \langle p, *f'' \rangle) = \langle g_\Gamma, e \rangle, \quad \forall e \in K_1 \cap \Gamma$$

et la condition de Neumann générale s'écrit de manière compacte comme suit

$$[HS_e^e + HS_{e'}^e + HS_{e''}^e] \langle p, *f \rangle - HS_e^e \langle p, c(e) \rangle - HS_{e'}^e \langle p, *f' \rangle - HS_{e''}^e \langle p, *f'' \rangle = \langle g_\Gamma, e \rangle, \quad \forall e \in K_1 \cap \Gamma \quad (4.18)$$

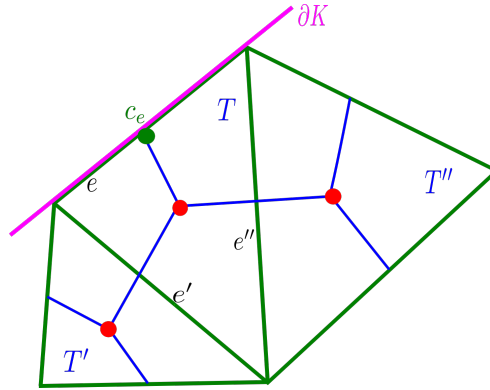


FIGURE 4.1 – Représentation d'un maillage 2D. Les nœuds duaux sont représentés en rouge et le nœud fictif en vert.

**Remarque 4.1** Dans le cas où  $H_1$  correspond à l'opérateur de Hodge diagonal, c'est à dire que  $HS_e^e = s_e^f \frac{|*e|}{|e|}$  et  $HS_\xi^e = 0$  pour  $\xi \in \{e', e''\}$ , l'équation générale des conditions aux limites de Neumann (4.18) se réduit à

$$p(*f) - p(c(e)) = s_e^f \langle g_\Gamma, e \rangle \frac{|*e|}{|e|}, \quad \forall e \in K_1 \cap \Gamma$$

et donc on retombe sur le cas particulier de la condition (4.17).

Rappelons que nous souhaitons résoudre par DEC le problème de Poisson avec conditions au limites de Neumann donné par

$$\begin{cases} \star d \star d p = g_M, & \text{dans } M \\ \text{tr}(\star d p) = g_\Gamma, & \text{sur } \partial M \end{cases} \quad (4.19)$$

Nous détaillons dans ce qui suit, la discrétisation de ce problème sur deux maillages, aigu et droit (voir la Figure 4.2), en distinguant deux cas. Le premier cas est lorsque  $p$  est discrétisée en une cochaîne primale et le second lorsque  $p$  est discrétisée en une forme duale.

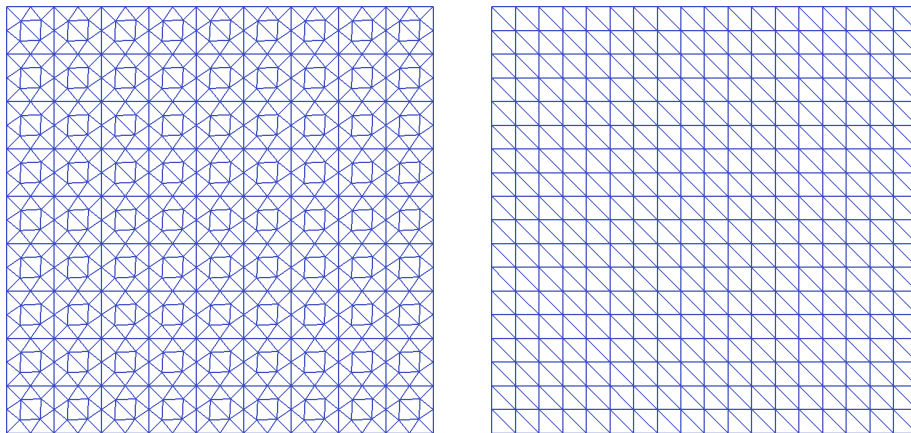


FIGURE 4.2 – Triangulation aiguë et droite d'un carré unitaire.

a) Cas où  $p$  est discrétisée en une cochaîne primale :

Si  $p$  est discrétisée en une forme primale, la variable discrète correspondante est le tableau  $P = (\langle p, v \rangle)_{v \in K_0}$ . En tenant compte du complément du bord intervenant dans les opérateurs de dérivations extérieurs sur des cochaînes duales, l'équation (4.19) prend la forme discrète suivante

$$\left( H_0^{-1}[-D_0^t]H_1D_0 + H_0^{-1}[D_b]H_1D_0 \right) P = G_M \quad (4.20)$$

où  $F$  est le tableau  $F = (\langle f, v \rangle)_{v \in K_0}$ . Étant donné que la condition de Neumann discrète est exprimée par  $tr(\star d)P = 0$  sur  $\Gamma$ . Or ce n'est autre que  $[D_b]H_1D_0P$  qui est comme mentionnée dans le chapitre 1 défini sur le bord de  $K$ . Ainsi le terme  $H_0^{-1}[D_b]H_1D_0P$  est nulle et l'équation (4.20) est simplement

$$H_0^{-1}[-D_0^t]H_1D_0P = G_M \quad (4.21)$$

Supposons que  $H_1$  correspond à l'opérateur de Hodge discret analytique, le domaine spatial  $M$  est le carré  $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$  et les données  $g_M$  et  $g_\Gamma$  sont choisies telles que la solution exacte soit

$$p = \cos(\pi x)\cos(\pi y)$$

Une série de tests a été effectuée sur deux maillages différents, un maillage formé de triangles droits et un autre maillage formé par des triangles aigus (voir Fig. 4.2). Dans la Figure 4.3, l'erreur entre la solution calculée et la solution exacte est tracée en fonction de la taille moyenne des cotés  $\Delta x_{mean}$ . On observe que le comportement de décroissance des erreurs est similaire pour les maillages duaux barycentrique et incentrique et légèrement meilleurs en considérant le maillage dual circoncentrique. Comme le montre la Table 4.1, les valeurs des taux de convergence sont environ d'ordre 1.7 pour les cas des maillages duaux barycentrique et incentrique, et environ d'ordre 1.9 pour le cas du maillage dual circoncentrique.

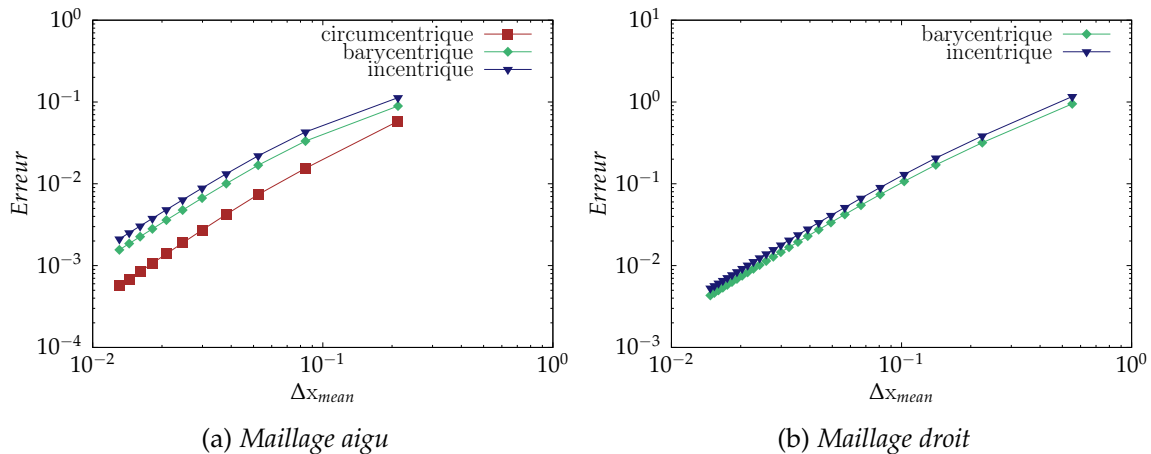


FIGURE 4.3 – Problème de Poisson avec  $p_{exacte} = \cos(\pi x)\cos(\pi y)$  discrétisée en cochaîne primale : évolution de l'erreur en utilisant deux types de maillages (aigu et droit) et en considérant l'opérateur de Hodge analytique construit en utilisant le barycentre, l'incentre et le circoncentre des triangles.

Maillage dual	Aigu	droit
circoncentrique	1.875	—
Barycentrique	1.743	1.684
Incentrique	1.715	1.679

TABLE 4.1 – Problème de Poisson :  $p_{exact} = \cos(\pi x)\cos(\pi y)$ . Taux de convergence dans le maillage aigu et le maillage droit en considérant le Hodge analytique.

b) Cas où  $p$  est discrétisée en une cochaîne duale :

Si  $p$  est discrétisé en une forme duale, l'inconnu est le tableau  $P = (\langle p, *f \rangle)_{T \in K_1}$ . En tenant compte du complément de bord (voir section 1.6 chapitre du chapitre 1), l'équation de Poisson discrète s'écrit

$$H_2 D_1 [-H_1^{-1}] D_1^t P + H_2 D_1 [-H_1^{-1}] D_b P' = G_M \quad (4.22)$$

où l'inconnue supplémentaire  $P'$  est le tableau  $P' = (\langle p, c(e) \rangle)_{e \in K_1 \cap \Gamma}$ . Dans le cas  $p$  est discrétisé en une forme duale, la condition de Neumann 4.18 vient comme un système d'équations supplémentaires pour compléter les équations (4.22). Ce système est de la forme

$$AP + BP' = G_\Gamma$$

où  $G_\Gamma$  est le tableau  $(\langle g_\Gamma, c(e) \rangle)_{e \in K_1 \cap \Gamma}$  et  $A$  et  $B$  sont des matrices formées en assemblant les systèmes locaux définis pour tout coté  $e$  appartenant au bord  $K_1 \cap \Gamma$ , par

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (HS_e^e + HS_{e'}^e + HS_{e''}^e) & HS_{e'}^e & HS_{e''}^e \end{bmatrix}}_{A(e)} \begin{bmatrix} \langle p, *f \rangle \\ \langle p, *f' \rangle \\ \langle p, *f'' \rangle \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -HS_e^e \end{bmatrix}}_{B(e)} \langle p, c(e) \rangle = \langle g_\Gamma, c(e) \rangle \quad (4.23)$$

En notant  $nbe$  le nombre des cotés  $e$  tels que  $e \in K_1 \cap \Gamma$ , l'équation matricielle complète du problème de poisson avec conditions aux limite de Neumann s'écrit

$$\left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} H_2 D_1 [-H_1^{-1}] D_1^t \\ \\ \\ A \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} H_2 D_1 [-H_1^{-1}] D_b \\ \\ \\ B \end{array} \right] \end{array} \right) \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ P_{\#K_2} \\ \text{---} \\ P'_1 \\ \vdots \\ P'_{nbe} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ F_{\#K_2} \\ \text{---} \\ G_1 \\ \vdots \\ G_{nbe} \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

Afin de valider cette construction, considérons le problème de Poisson 4.21 en discrétisant  $p$  en une cochaîne duale sur le domaine  $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$  où les données  $g_M$  et  $g_\Gamma$  sont

choisies de telle sorte à que la solution exacte soit

$$p = \frac{1}{4} (\cos(2x) + \cos(2y))$$

La figure 4.4 montre l'évolution de l'erreur en fonction du pas de discrétisation moyen  $\Delta x_{mean}$ . On conclut de ces résultats que sur le maillage aigu, le taux de convergence est au moins de second ordre en considérant les maillages duaux circoncentriques barycentrique ou incentriques. Le même ordre de convergence a été constaté sur le maillage droit en considérant le dual barycentrique ou le dual incentrique.

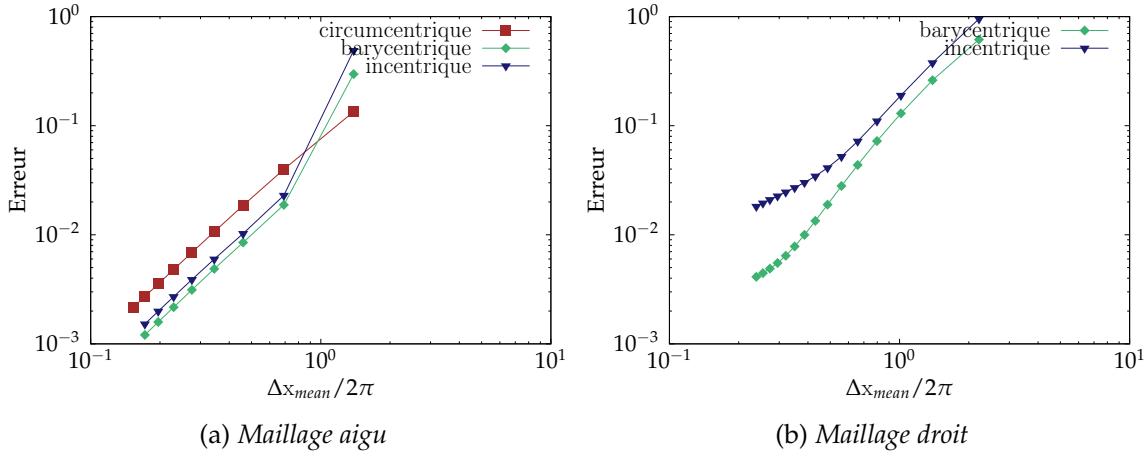


FIGURE 4.4 – Problème de Poisson pour  $p_{exact} = (\cos(2x) + \cos(2y))/4$  discrétisée en une cochaîne duale : évolution de l'erreur en utilisant deux types de maillages (aigu et droit) et en considérant l'opérateur de Hodge analytique construit en utilisant le barycentre, l'incentre et le circoncentre des triangles.

Dans la section suivante, la mise en œuvre de la formulation des conditions aux limites de Neumann est utilisée dans la dérivation d'un schéma de prédiction correction en DEC.

#### 4.4 SIMULATION DES ÉCOULEMENTS INCOMPRESSIBLES PAR LE SCHÉMA DE PRÉDICTION-CORRECTION EN DEC

Rappelons que le but de ce chapitre est de résoudre le problème de Navier-Stokes (4.1) en utilisant le schéma de prédiction en calcul extérieur défini par les étapes (4.2), (4.3) et (4.4). En considérant que la vitesse est discrétisée en une 1-forme duale et que la pression est discrétisée en une 0-forme duale, le schéma de prédiction-correction en DEC, à chaque instant de temps  $t^{n+1}$ , consiste aux étapes suivantes

étape 1 : Prédire une vitesse  $\tilde{V}^{n+1}$  en résolvant le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{V}^{n+1} - V^n}{\Delta t} - \nu \left( -H_1 D_0 H_0^{-1} [-D_0^t + D_b] - [D_1^t + D_b] H_2 D_1 H_1^{-1} \right) \tilde{V}^{n+1} = G_M^{n+1} \\ \quad \quad \quad - \frac{3}{2} \iota_{u^n} [D_0^t] V^n \\ \quad \quad \quad + \frac{1}{2} \iota_{u^{n-1}} [D_0^t] V^{n-1} - \frac{1}{\rho} [D_1^t] \tilde{P}^n \\ \tilde{V}^{n+1}|_{\Gamma} = V_{\Gamma}^{n+1} \end{array} \right.$$

étape 2 : Prédire une pression dynamique  $\tilde{P}^{n+1}$  en résolvant le système de Poisson avec conditions de Neumann homogènes

$$\begin{cases} H_2 D_1 [-H_1^{-1}] D_1^t \tilde{P}^{n+1} + H_2 D_1 [-H_1^{-1}] D_b \tilde{P}^{m+1} = -\frac{\rho}{\Delta t} H_2 D_1 [-H_1^{-1}] \tilde{V}^{n+1} \\ A \tilde{P}^{n+1} + B \tilde{P}^{m+1} = 0 \end{cases}$$

où  $\tilde{P}^{m+1}$  est le tableau contenant les valeurs de la pression dynamique prédite sur nœuds fictifs ajoutés au bord du domaine et  $A$  et  $B$  sont des matrices définies comme dans (4.23).

étape 3 : Corriger la vitesse et pression prédites

$$\bar{P}^{n+1} = \tilde{P}^{n+1} + \bar{P}^n \quad \text{et} \quad \tilde{V}^{n+1} - \frac{\Delta t}{\rho} [D_1^t + D_b] \tilde{P}^{n+1}$$

Dans ce qui suit, le schéma ci dessus mis en œuvre pour la prédiction des écoulements de Taylor-Green et l'écoulement de la cavité entraînée. Nous nous limitons aux opérateurs de Hodge discrets analytique et de Whitney.

#### 4.4.1 Écoulement des Vortex de Taylor-Green

Le problème des vortex de Taylor-Green régi par les équations de Navier-Stokes est résolu en utilisant le schéma de prédiction-correction DEC. La solution exacte du problème définie sur le domaine  $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$  est donnée par

$$\begin{cases} u = -\cos(x)\sin(y)e_x + \sin(x)\cos(y)e_y \\ p = -\frac{\rho}{4}(\cos(2x) + \cos(2y)) \end{cases}$$

La solution initiale est mise à zéro et la simulation est lancée jusqu'à ce que l'écoulement se stabilise.

Dans un premier temps, nous considérons le maillage aigu de la figure 4.2 et utilisons l'opérateur de Hodge analytique discret construit sur trois types de maillages duaux, barycentrique, incentrique et circoncentrique. L'évolution de l'erreur sur la vitesse par rapport à la longueur moyenne des côtés est représentée dans la Figure 4.5a. Une convergence quasiment de second ordre est observée pour toutes les configurations considérées du maillage dual. Néanmoins, le choix du circoncentre pour le maillage dual s'est avéré légèrement meilleur en terme de précision. Les erreurs pour la variable de pression sont représentées dans la figure 4.5b. On observe que la pression calculée sur un maillage dual circoncentrique est plus précise par rapport à celle calculée sur les maillages duaux barycentrique et incentrique. En outre, le taux de convergence du cas circoncentrique est presque de second ordre alors qu'il est du premier ordre pour les maillages duaux barycentriques et incentriques. La figure 4.6 montre les solutions de vitesse et de pression au régime établi de l'écoulement. Afin d'inspecter de plus près la qualité de ces solutions, les profils horizontaux et verticaux au centre du domaine sont comparés à leurs homologues

exactes. Les profils calculés sur le maillage aigu le long des axes  $x$  et  $y$  sont représentés sur les Figures 4.7a et 4.7b respectivement. On peut voir qu'il y a un très bon accord entre les profils des solutions calculées de vitesse et de pression dynamique avec leurs solutions exactes recherchées. L'erreur relative enregistrée pour ces solutions est de l'ordre de  $10^{-2}$  pour la vitesse et  $4.6 \cdot 10^{-2}$  pour la pression. De la même manière, nous avons effectué les mêmes tests en considérant cette fois-ci le maillage droit de la figure 4.2. Les Figures 4.8a et 4.8b montrent les solutions de vitesse et de pression le long des axes  $x$  et  $y$  respectivement. Comme pour le maillage aigu, une bonne précision est obtenue pour la vitesse et la pression sur le maillage droit avec une erreur relative de  $1.6 \cdot 10^{-2}$  pour la vitesse et  $5 \cdot 10^{-2}$  pour la pression.

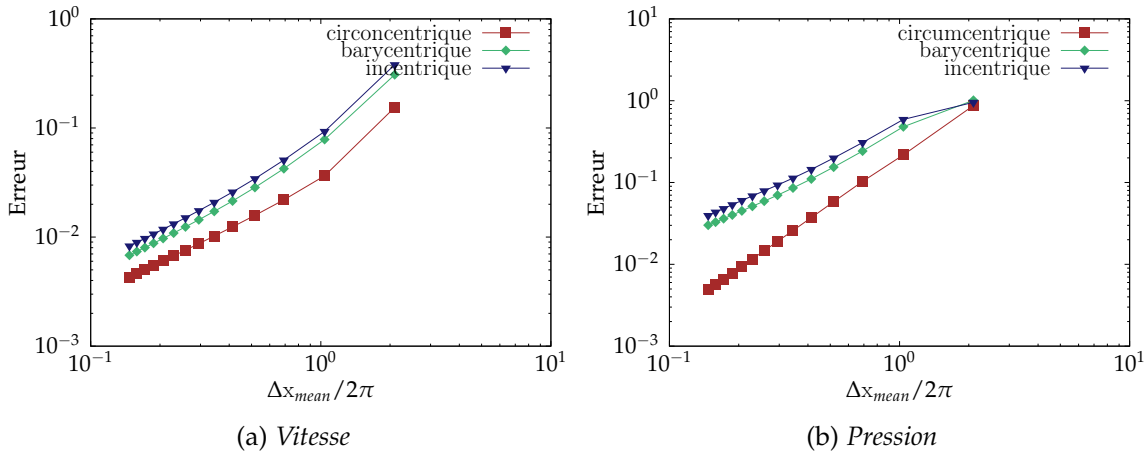


FIGURE 4.5 – Problème de Taylor-Green : évolution de l'erreur pour un maillage aigu en utilisant le schéma prédiction-corrrection DEC avec le Hodge analytique

#### 4.4.2 Écoulement de la cavité entraînée

Le schéma de prédiction correction en DEC est maintenant étudié sur le problème de l'écoulement d'un fluide anisotherme dans une cavité entraînée. Le domaine spatial de la cavité est un carré unitaire  $[0, L] \times [0, L]$  délimité par quatre parois. La vitesse sur les parois verticales et inférieure est nulle, tandis que la paroi supérieure se déplace à une vitesse tangentielle égale à  $U$ . Le nombre de Reynolds pour cet écoulement est donnée par  $Re = UL/\nu$ . La configuration de l'écoulement est illustrée dans la Figure 4.9. Les simulations numériques sont réalisées sur deux maillages différents (voir Figure 4.10) en fixant la vitesse caractéristique à  $U = 1$ , la longueur caractéristique à  $L = 1$  et la densité volumique du fluide à  $\rho = 1$ , puis en considérant deux valeurs de viscosité  $\nu = 0.01$  et  $\nu = 0.001$ , ce qui correspond respectivement à  $Re = 100$  et  $Re = 1000$ . Nous nous limitons aux opérateurs de Hodge analytique et de Whitney construits sur un maillage dual barycentrique et comparons les résultats obtenus avec ceux de Ghia et al. [78].

Comme décrit dans le chapitre 1 1.7.4, la reconstruction d'une cochaîne peut être accomplie en utilisant l'interpolation par les formes de Whitney. Cette reconstruction va être utilisée pour la discrétisation de l'opérateur de Hodge. La manœuvre peut être résumée

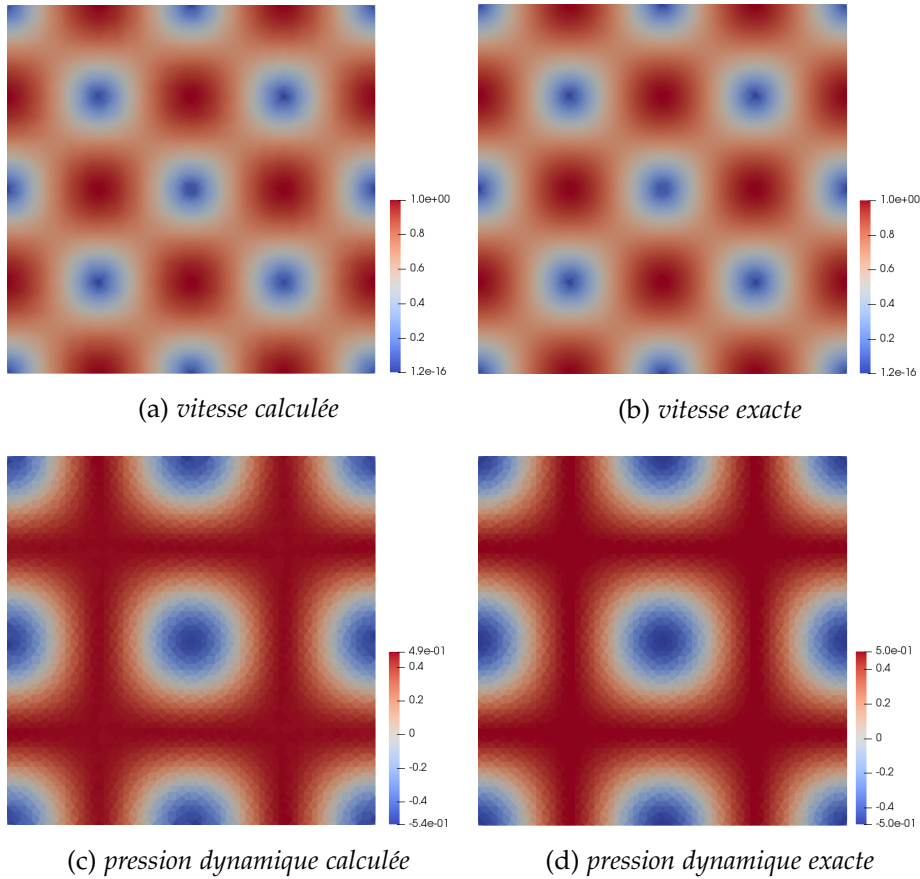


FIGURE 4.6 – Problème de Taylor-Green : Solutions exactes et approchées à  $T = 5$ , en considérant le Hodge analytique sur le maillage aigu.

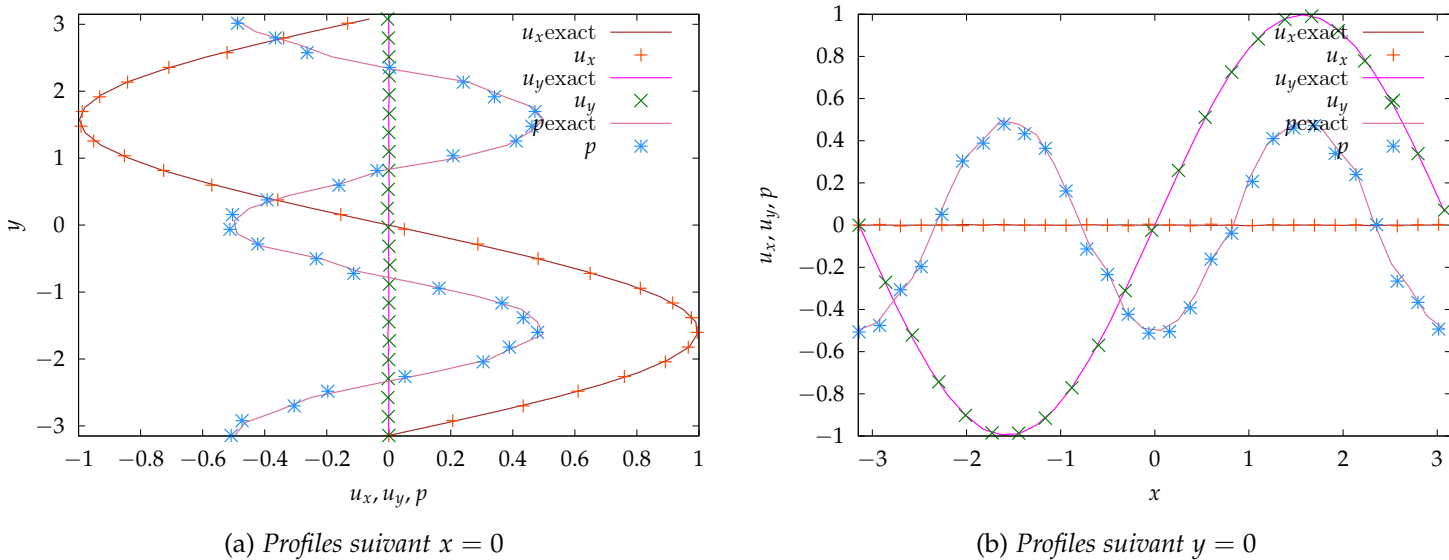
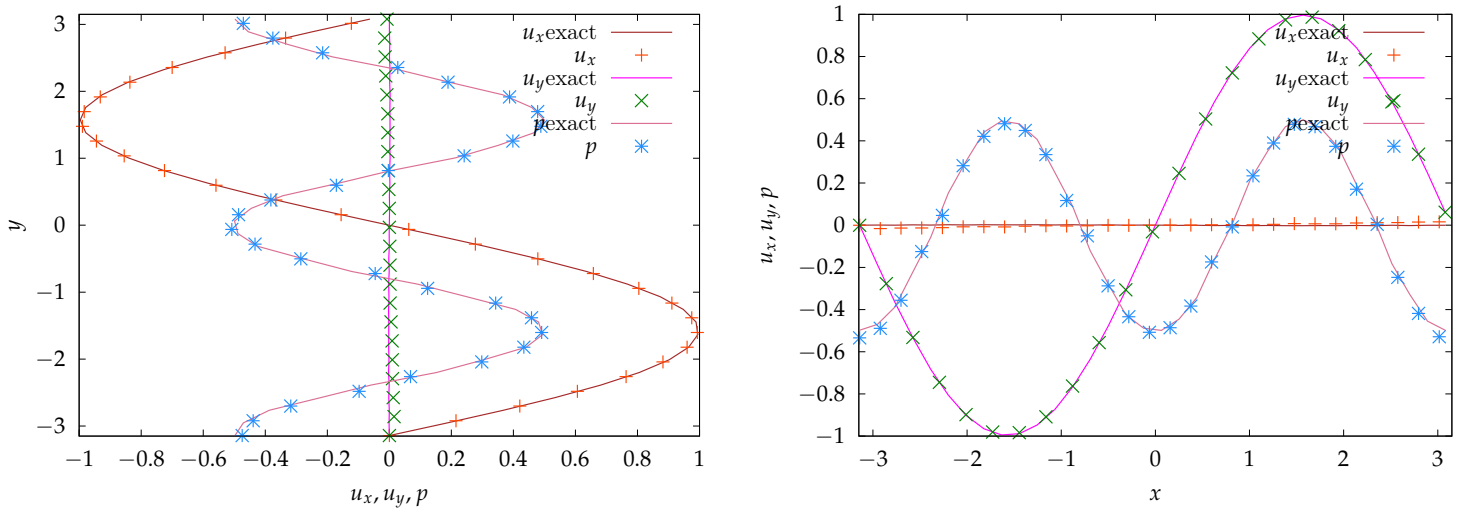


FIGURE 4.7 – Problème de Taylor-Green : Profils de vitesse et pression le long de la droite  $x = 0$  et  $y = 0$  au temps final, en considérant le maillage aigu et l'opérateur de Hodge analytique.

en trois étapes. Connaissant la  $k$ -cochaîne  $\omega$ , on reconstruit cette cochaîne afin d'obtenir une forme différentielle  $W\omega$  qui la représente. La deuxième étape consiste à appliquer





(a) Profils suivant  $x = 0$  (b) Profils suivant  $y = 0$

FIGURE 4.8 – Problème de Taylor-Green : Profils de vitesse et pression le long de la droite  $x = 0$  et  $y = 0$  au temps final, en considérant le maillage droit et l’opérateur de Hodge analytique.

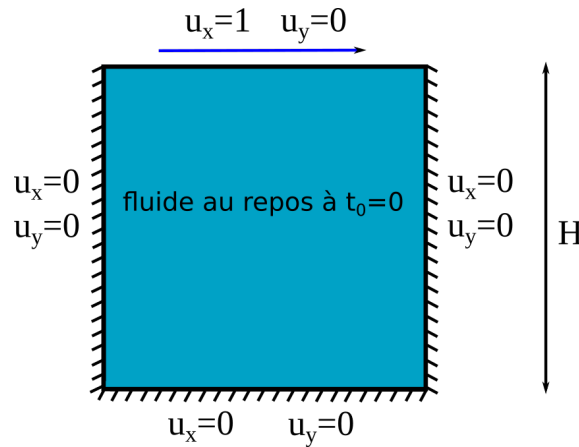


FIGURE 4.9 – Illustration du problèmes de la cavité entraînée.

l’opérateur de Hodge continue sur cette forme différentielle et on obtient  $\star W\omega$ . Et enfin, on effectue une intégration de  $\star W\omega$  sur les cellules duaux correspondants. Comme déjà mentionné dans le chapitre 1 1.7.4, la relation  $RW\omega = \omega$  est vérifiée pour toute cochaîne  $\omega \in \Lambda^k(K)$ , avec  $R$  la discrétisation via l’application de De Rham.

$$\langle W\omega, \sigma \rangle = \omega \tag{4.25}$$

D’autre part, on a aussi que dans le cas idéal l’opérateur étoile de Hodge vérifie la relation :

$$\star \langle \omega, \sigma \rangle = \langle \star\omega, \star\sigma \rangle \tag{4.26}$$

Ce que nous avons maintenant nous permet de définir une construction de la matrice de l’opérateur de Hodge de Whitney. La relation 4.26 nous permet d’écrire

$$\star \langle W\omega, \sigma \rangle = \langle \star W\omega, \star\sigma \rangle \tag{4.27}$$

Or d'après 4.25  $\star\langle W\omega, \sigma \rangle = \star\omega$ . La reconstruction d'une cochaîne  $\omega$  s'écrit en utilisant les formes de Whitney comme  $W\omega = \sum \omega_i \phi^i$ , avec  $\omega_i = \langle \omega, \sigma_i \rangle$  et  $\phi^i$  la forme de Whitney associée au simplexe  $\sigma_i$ . Alors (4.26) donne

$$\langle \star W\omega, \star\sigma \rangle = \int_{\star\sigma_i} \star W\omega = \sum_j \omega_j \int_{\star\sigma_i} \phi^j.$$

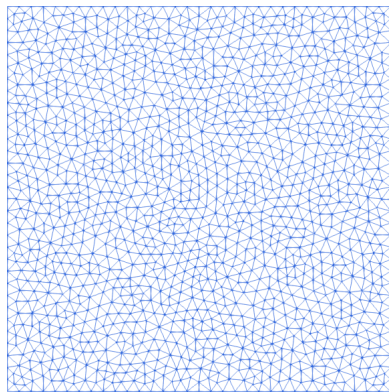
Soit  $\omega$  une 1-cochaîne primale. En notant  $\omega_j = \langle \omega, e_j \rangle$ , on définit la 1-cochaîne duale  $\star\omega$  par le Hodge de Whitney, par  $\langle \star\omega, \star e_i \rangle = \int_{\star e_i} \star W\omega = \sum_j \omega_j \int_{\star e_i} \star\phi^j$ . Ainsi le Hodge de Whitney sur les 1-cochaînes est l'application linéaire de  $\Lambda^1(K)$  dans  $\Lambda^2(K)$  représentée par la matrice  $H_1$  tel que

$$H_1(i, j) = \int_{\star e_i} \phi^j.$$

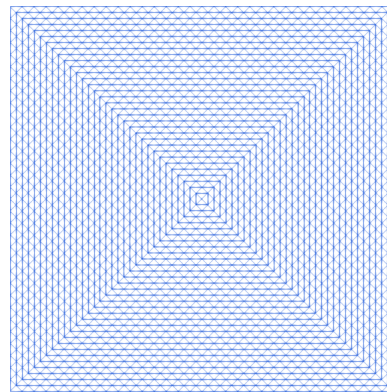
Par exemple, la matrice locale  $H_1$  construite par les formes de Whitney (voir la section 1.29 du chapitre 1) sur le triangle unitaire droit est de la forme

$$H_1 = \frac{1}{72} \begin{bmatrix} 25 & 1 & -11 \\ -2 & 10 & -2 \\ -11 & 1 & 25 \end{bmatrix}$$

Une fois les matrices locales sont calculées, la matrice globale sur tout le maillage est obtenue par assemblage. Étant donné le coût élevé du calcul de la matrice de l'opérateur de Hodge de Whitney  $H_1^{-1}$  (appliquée à une 1-cochaîne duale), nous optons pour une approche moins coûteuse utilisant l'assemblage des matrices locales inverses.



(a) Maillage non structuré



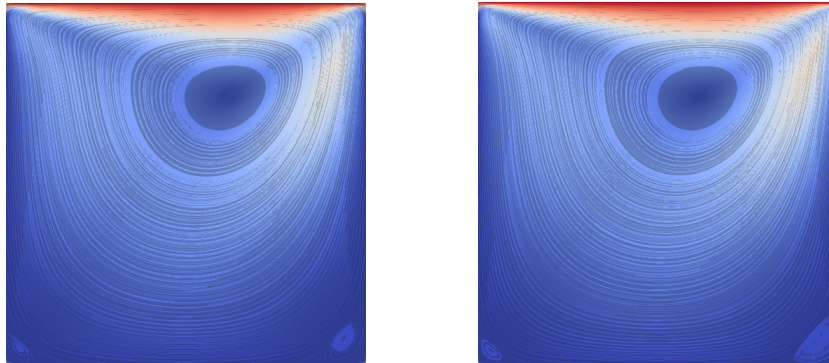
(b) Maillage structuré droit

FIGURE 4.10 – Triangulation non structurée (à gauche) et structurée droite (à droite) d'un carré unitaire obtenue par gmsh.

#### Cavité entraînée à $Re = 100$

Pour ce cas d'étude, les tests sont effectués en considérant les deux maillages de la Figure 4.10 et un pas de temps  $\Delta t = 0.1$ . Les champs de vitesses calculés sur le maillage

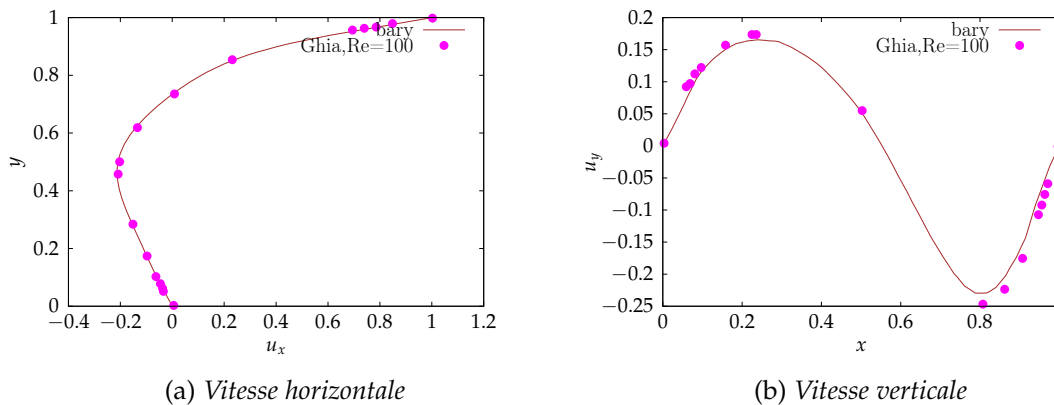
non structuré et le maillage droit, au régime établi, sont respectivement représentés sur les Figures 4.11. Les Figures 4.12 et 4.13 présentent les profils de vitesse suivant les axes  $x = 1/2$  et  $y = 1/2$  de la solution calculé vis-à-vis des profils de Ghia. En inspectant ces résultats, on constate que le schéma de prédiction-correction proposé réussit à fournir des solutions qui sont en bonne correspondance avec les résultats de Ghia.



(a) Maillage non structuré

(b) Maillage structuré droit

FIGURE 4.11 – Profils des fonctions de courants pour  $Re = 100$  dans un maillage à dual barycentrique en utilisant le Hodge analytique



(a) Vitesse horizontale

(b) Vitesse verticale

FIGURE 4.12 – Profils de vitesse verticales et horizontales sur les droites  $x = \frac{1}{2}$  et  $y = \frac{1}{2}$  pour  $Re = 100$  obtenus par le schéma de prédiction correction DEC un maillage non structuré à dual barycentrique en utilisant le Hodge analytique, comparés au profils des solutions de Ghia.

### Cavité entraînée à $Re=1000$

Maintenant, nous montons en nombre de Reynolds et testons le schéma de prédiction correction en DEC en se limitant sur un seul type de maillages (maillage droit), mais en utilisant deux discrétisations de l'opérateur de Hodge : analytique et Whitney. Les simulations sont faites avec un pas de temps fixé à  $\Delta t = 10^{-2}$ . Les solutions au régime établi sont représentés dans la Figure 4.14. Les figures 4.15 et 4.16 montrent la vitesse en coupe transversale et verticale aux droites centrales du domaine vis-à-vis des résultats de Ghia pour  $Re = 1000$ . Dans ce cas aussi, on constate que pour les deux choix de

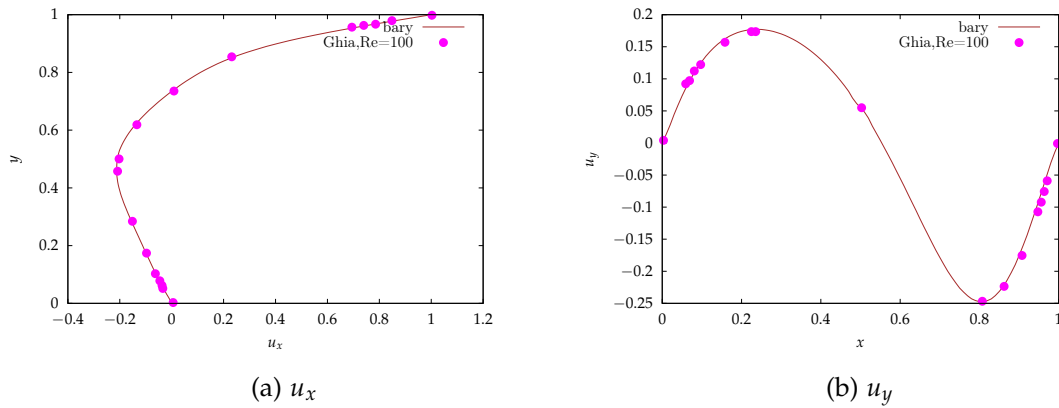


FIGURE 4.13 – Profils de vitesse verticale et horizontale passant par les droites  $x = \frac{1}{2}$  et  $y = \frac{1}{2}$  pour  $Re = 100$  obtenus par un schéma de prédiction correction dans un maillage droit à dual barycentrique en utilisant le Hodge analytique, comparés au solution de Ghia.

discrétisation de l'opérateur de Hodge, une fois la solution est arrivée au régime établi, les vitesses calculées correspondent parfaitement avec celle de Ghia.

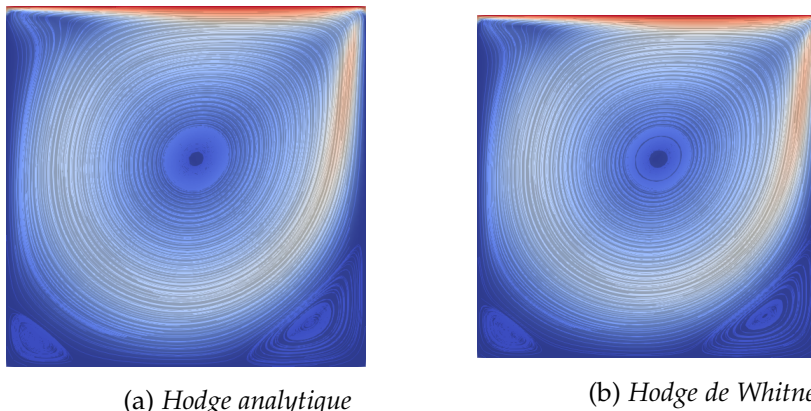


FIGURE 4.14 – Profils des fonctions de courants pour  $Re = 1000$  sur un maillage droit à dual barycentrique en utilisant le Hodge analytique et de whitney.

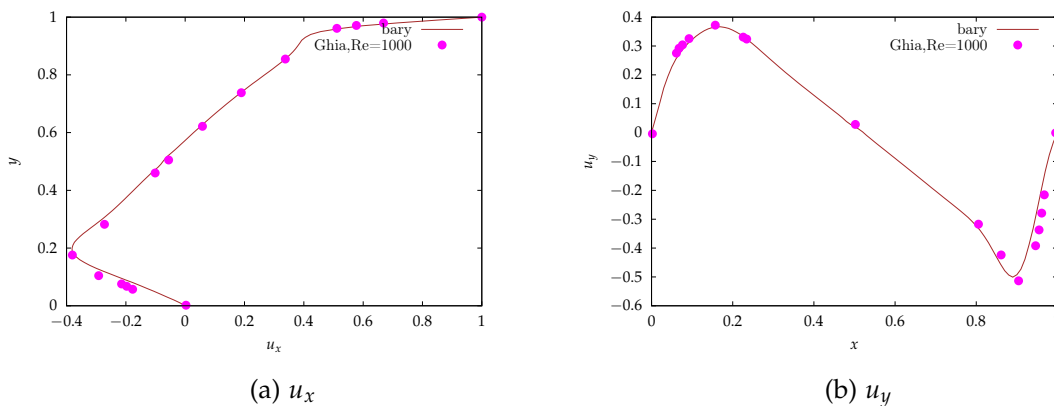


FIGURE 4.15 – Profils de vitesse verticale et horizontale passant par les droites  $x = \frac{1}{2}$  et  $y = \frac{1}{2}$  pour  $Re = 1000$  obtenus par un schéma de prédiction correction dans un maillage droit à dual barycentrique en utilisant le Hodge analytique, comparés au solution de Ghia.

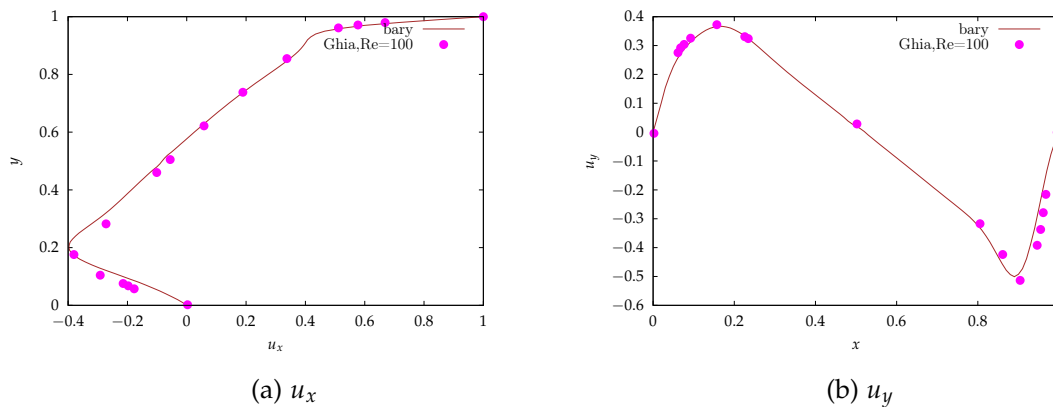


FIGURE 4.16 – Profils de vitesse vertical et horizontal passant par les droites  $x = \frac{1}{2}$  et  $y = \frac{1}{2}$  pour  $Re = 1000$  obtenus par un schéma de prédiction correction dans un maillage droit à dual barycentrique en utilisant le Hodge de Whitney, comparés au solution de Ghia.

## 4.5 CONCLUSION

Une version du schéma de prédiction-correction dans le cadre du DEC a été formulée. Dans cette formulation, l'étape de correction consistant à résoudre un problème de Poisson avec des conditions aux limites de type Neumann est adaptée au cadre du calcul extérieur discret. Cette condition a été exprimée dans le cadre général, indépendamment de la discrétisation du maillage dual et de l'opérateur de Hodge considéré. Une première validation des conditions de Neumann en DEC a été effectuée sur le problème de Poisson, et des résultats satisfaisants ont été obtenus. La partie suivante des tests numériques a été réalisée sur le problème des vortex de Taylor Green. Ce test a permis de valider le schéma proposé en montrant sa capacité à fournir une approximation de la solution sans passer par la fonction de courant. Enfin, le problème de l'écoulement dans une cavité entraînée a été traité pour  $Re = 100$  comme pour  $Re = 1000$ . On a montré que dans ce cas aussi, le schéma proposé reproduit de bonnes solutions qui sont en bon accord avec les résultats de la littérature.

# VERS LE DEC EN 3D

# 5

## SOMMAIRE

---

5.1	INTRODUCTION . . . . .	112
5.2	HODGE DISCRET 3D BASÉ SUR LES FORMES DE WHITNEY . . . . .	112
5.2.1	Les formes de Whitney 3D . . . . .	113
5.3	RÉSULTATS NUMÉRIQUES 3D . . . . .	116
5.3.1	Problème de Poisson avec conditions de Dirichlet au bords . . . . .	116
5.3.2	Problème de Poisson avec conditions de Neumann au bords . . . . .	118
5.3.3	Équations de Navier-Stokes . . . . .	120
5.3.4	Discrétisation tridimensionnelle du schéma de prédiction correction en DEC . . . . .	121
5.3.5	Taylor-Green 3D . . . . .	122
5.3.6	Écoulement de Beltrami instationnaire . . . . .	123
5.4	CONCLUSION . . . . .	125

---

## 5.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, une ouverture vers l'application du DEC à la simulation d'écoulement incompressibles tridimensionnels est présentée. Notons que dans la littérature, on ne trouve pas de simulation 3D. Cette situation est due au fait que l'opérateur de Hodge discret classique, le Hodge diagonal, nécessite un maillage bien centré, c-à-d le centre de tout simplexe du maillage se trouve strictement à l'intérieur de ce simplexe. Or, en 3D la construction d'un tel maillage s'avère compliquée. La condition pour un complexe simplicial 3D soit bien centré n'est pas aussi évidente comme dans le cas 2D. En effet un triangle est bien centré si et seulement s'il est aigu (tous ses angles sont aigus). Mais aucune caractéristique aussi simple n'est connue pour un tétraèdre bien centré. De plus, il se peut que tous les triangles formant un tétraèdre soient aigus mais que le tétraèdre lui-même ne l'est pas [79].

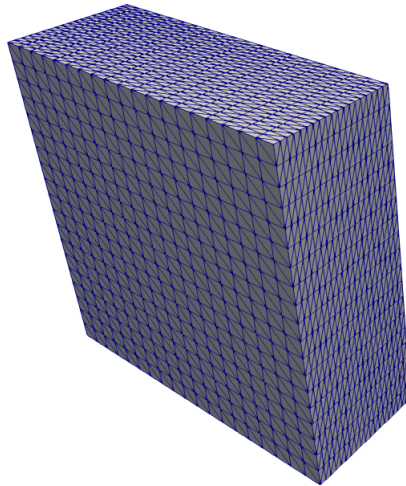
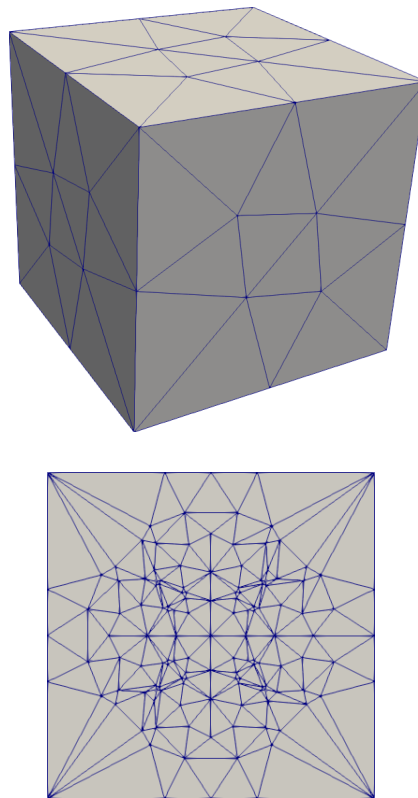
Quelques maillages 3D ont été proposés dans la littérature mais ils sont loin d'être pratiques. Par exemple, Vanderzee et al [80] ont proposé un maillage bien centré d'un parallélépipède penché comme sur la Figure 5.1, mais de telle géométrie n'est pas d'une grande utilité en mécanique des fluides. Ils ont également proposé un maillage bien centré d'un cube. Celui-ci est décrit sur la Figure 5.2. Ce maillage ne permet toutefois pas la résolution de nombreux problèmes de mécanique des fluides, notamment les problèmes aux limites. En effet, ce maillage est bien plus grossier proche du bord qu'il ne l'est au centre. Un algorithme de triangulation 3D est aussi présenté dans [81] mais le maillage résultant sur un cube souffre du même problème. Eppstein et al [79] quant à lui propose une tessellation de  $\mathbb{R}^3$  par des tétraèdres aigus, mais n'en propose pas pour un domaine borné simple.

Ces difficultés montrent que pour un problème tridimensionnel, le Hodge diagonal n'est pas bien adapté en mécanique des fluides. Ainsi dans le présent chapitre, on propose d'utiliser un opérateur de Hodge discret ne nécessitant pas un maillage bien centré. En attendant de développer l'extension tridimensionnelle du Hodge discret développé dans le chapitre 3, on va utiliser le Hodge de Whitney. Ce dernier sera décrit dans la section 5.2. On résoudra alors, par le DEC, des problèmes de Poissons.

La résolution des équations de Navier-Stokes 3D en formulation fonction de courant a été proposée par Mohamed dans [56]. Celui-ci n'a toutefois pas été mis en œuvre par les auteurs. Il se peut que le problème soit singulier. Dans ce chapitre, on propose d'appliquer le même schéma de prédiction-correction que dans le chapitre 4, permettant une résolution en variables primaires.

## 5.2 HODGE DISCRET 3D BASÉ SUR LES FORMES DE WHITNEY

Dans cette section, on va décrire le Hodge discret en 3D construit à partir des formes de Whitney. on va le faire dans un maillage constitué d'un seul tétraèdre.

FIGURE 5.1 – *Discrétisation bien centré d'un parallélépipède penché.*FIGURE 5.2 – *Représentation d'une discrétisation bien centré d'un cube et sa coupe transversale montrant les connexion interne.*

### 5.2.1 Les formes de Whitney 3D

Considérons le tétraèdre unitaire orienté  $\sigma = [v_0v_1v_2v_3]$  formé par les sommets  $v_0 = (1,0,0)$ ,  $v_1 = (0,1,0)$ ,  $v_2 = (0,0,1)$  et  $v_3 = (0,0,0)$ . Appelons et orientons les cotés du



tétraèdre comme suit

$$\begin{aligned} e_1 &= [v_3, v_0] & e_2 &= [v_3, v_1] \\ e_3 &= [v_3, v_2] & e_4 &= [v_0, v_1] \\ e_5 &= [v_0, v_2] & e_6 &= [v_1, v_2] \end{aligned}$$

De même, orientons les triangles constituant les 2-faces du tétraèdre comme suit. Les 2-simplexes orientés sont donnés par les triangles suivants

$$\begin{aligned} f_1 &= [v_0, v_2, v_1] & f_2 &= [v_0, v_1, v_3] \\ f_3 &= [v_0, v_3, v_2] & f_4 &= [v_1, v_2, v_3] \end{aligned}$$

On représente ce tétraèdre avec toutes les orientations considérées dans la Figure 5.3.

Soit  $\phi^{v_i}$  les 0-formes de Whitney liées aux sommets du tétraèdre  $\sigma$ . Comme  $\phi^{v_i}(v_j) = \delta_j^i$

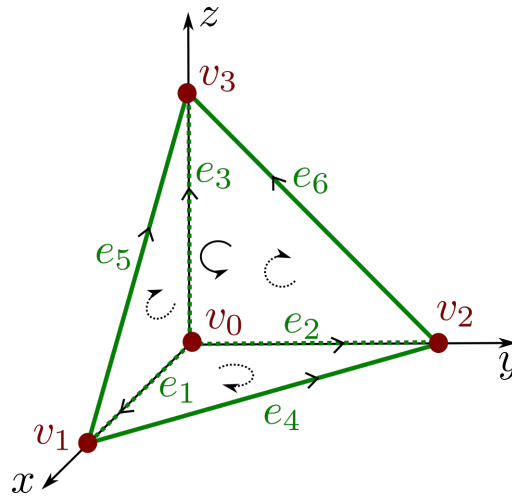


FIGURE 5.3 – illustration d'un tétraèdre unitaire orienté avec ses 2- et 1-faces orientées.

(voir définition (1.47) dans le chapitre 1), on a  $\phi^{v_0} = x$ ,  $\phi^{v_1} = y$ ,  $\phi^{v_2} = z$  et  $\phi^{v_3} = 1 - x - y - z$ . Les 1-formes de Whitney, liées aux cotés, s'obtiennent par les relations (comme décrit dans la section 1.7.4)

$$\phi^{[v_i v_j]} = \phi^{v_i} d\phi^{v_j} - \phi^{v_j} d\phi^{v_i}$$

Cette relation mène à

$$\begin{aligned} \phi^{e_1} &= \phi^{[v_0 v_1]} = (1 - y - z) dx + x dy + x dz \\ \phi^{e_2} &= \phi^{[v_0 v_2]} = y dx + (1 - x - z) dy + y dz \\ \phi^{e_3} &= \phi^{[v_0 v_3]} = z dx + z dy + (1 - x - y) dz \\ \phi^{e_4} &= \phi^{[v_1 v_2]} = -y dx + x dy \\ \phi^{e_5} &= \phi^{[v_1 v_3]} = -z dx + x dz \\ \phi^{e_6} &= \phi^{[v_2 v_3]} = -z dy + y dz \end{aligned}$$

Les 2-formes de Whitney, liées aux faces s'obtiennent par en adaptant la même relation au cas d'un 2-simplexe

$$\phi^{[v_i v_j v_k]} = 2(\phi^{v_i} d\phi^{v_j} \wedge d\phi^{v_k} - \phi^{v_j} d\phi^{v_i} \wedge d\phi^{v_k} + \phi^{v_k} d\phi^{v_i} \wedge d\phi^{v_j}).$$

En appliquant cette relation, on retrouve les 2-formes de Whitney comme suit :

$$\begin{aligned}\phi^{f_1} &= \phi^{[v_0 v_2 v_1]} = 2(x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + (z-1) dx \wedge dy) \\ \phi^{f_2} &= \phi^{[v_0 v_1 v_3]} = 2(x dy \wedge dz + (y-1) dz \wedge dx + z dx \wedge dy) \\ \phi^{f_3} &= \phi^{[v_0 v_3 v_2]} = 2((x-1) dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy) \\ \phi^{f_4} &= \phi^{[v_1 v_2 v_3]} = 2(x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dz)\end{aligned}$$

On va construire les matrices  $H_1$  et  $H_2$  du Hodge discret respectivement aux 1 et 2-cochaînes primales par intermédiaire des interpolations par les formes de Whitney. L'opérateur de Hodge discret aux 0- et 3-formes garde la discrétisation diagonale. En effet, le dual des 3-simplexes et des 0-simplexes n'est jamais dégénérés.

### Hodge de Whitney appliqué à une 1-forme discrète primale

Soit  $\omega$  une 1-cochaîne primale. Notons  $\omega_j = \langle \omega, e_j \rangle, j = 1, \dots, 6$ . On considère la 1-forme différentielle  $W\omega = \omega_j \phi^{e_j}$  reconstruite à partir de  $\omega$  (on a donc  $\int_{e_i} W\omega = \omega_i$ ). On définit la 2-cochaîne duale  $\star\omega$ , image de  $\omega$  par le Hodge de Whitney, par

$$\langle \star\omega, \star e_i \rangle = \int_{\star e_i} \star W\omega = \sum \omega_j \int_{\star e_i} \star \phi^{e_j}.$$

Le Hodge de Whitney sur les 1-cochaînes est donc l'application linéaire de  $\Lambda^1(K)$  dans  $\Lambda^2(\star K)$  représentée par la matrice  $H_1$  de composantes  $H_1(i, j) = \int_{\star e_i} \star \phi^{e_j}$ .

### Hodge de Whitney appliqué à une 2-forme discrète primale

De manière similaire, on construit la matrice locale dans un seule tétraèdre de l'opérateur de Hodge de Whitney appliqué à une 2-forme discrète primale. Soit  $\omega$  une 2-cochaîne primale. Notons  $\omega_j = \langle \omega, f_j \rangle, j = 1, \dots, 4$ . On considère la 2-forme différentielle  $W\omega = \omega_j \phi^{f_j}$  reconstruite à partir de  $\omega$  (on a donc  $\int_{f_i} W\omega = \omega_i$ ). On définit la 1-cochaîne duale  $\star\omega$ , image de  $\omega$  par le Hodge de Whitney, par

$$\langle \star\omega, \star f_i \rangle = \int_{\star f_i} \star W\omega = \sum \omega_j \int_{\star f_i} \star \phi^{f_j}.$$

Le Hodge de Whitney sur les 2-cochaînes est donc l'application linéaire de  $\Lambda^2(K)$  dans  $\Lambda^1(\star K)$  représentée par la matrice  $H_2$  de composantes  $H_2(i, j) = \int_{\star f_i} \star \phi^{f_j}$ . La matrice dans l'exemple d'un tétraèdre régulier comme présenté dans la Figure 5.3 et en considérant un

dual basé sur les barycentres est donnée par :

$$H_2 = \frac{1}{144} \begin{bmatrix} 77 & -19 & -19 & 5 \\ -19 & -77 & -19 & 5 \\ -19 & -19 & 77 & 5 \\ -3 & -3 & -3 & 21 \end{bmatrix}$$

L'obtention de la matrice entière de l'opérateur de Hodge sur un maillage plus général est assurée par assemblage des matrices locales.

### Hodge de Whitney appliqué à une 1- et une 2-forme duales

Bien naturellement, on définit le Hodge de Whitney

- sur les 1-cochaînes duales par l'inverse  $H_2^{-1} : \Lambda^1(*K) \rightarrow \Lambda^2(K)$ ,
- sur les 2-cochaînes duales par l'inverse  $H_1^{-1} : \Lambda^2(*K) \rightarrow \Lambda^1(K)$ .

Dans les simulations, les inversions seront effectuées localement, c'est à dire tétraèdre par tétraèdre.

Dans ce qui suit, des premiers tests seront présentés en DEC 3D. Pour le faire, les conditions de Neumann seront reformulés en utilisant les opérateurs du cadre tridimensionnel, ainsi que le schéma numérique prédiction correction.

## 5.3 RÉSULTATS NUMÉRIQUES 3D

### 5.3.1 Problème de Poisson avec conditions de Dirichlet au bords

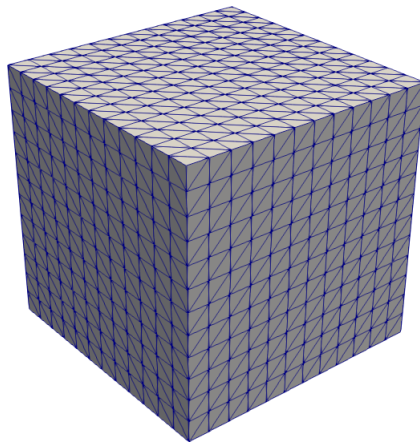


FIGURE 5.4 – Discrétisation d'un cube utilisant des tétraèdres droits

Considérons le problème de Poisson suivant :

$$\begin{cases} -\Delta p = g_M & \text{dans } M, \\ p = g_\Gamma & \text{sur } \partial M, \end{cases} \quad (5.1)$$

où  $g_M$  et  $g_\Gamma$  sont les données du problème. L'inconnu  $p$  est une 0-forme. On souhaite résoudre cette équation sur un cube unitaire  $M$ .  $M$  est discrétisé en des tétraèdres droits représenté dans la figure 5.4. Le maillage dual considéré est construit en considérant les barycentres des tétraèdres. On discrétise  $p$  en une cochaîne duale. L'inconnue est donc le tableau  $P = (\langle p, *T \rangle)_{T \in K_3}$ . L'équation discrétisée est

$$\begin{cases} -H_3 D_2 H_2^{-1} [-D_2^t] P - H_3 D_2 H_2^{-1} D_b P' = G_M & \text{dans } M, \\ P = G_\Gamma & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (5.2)$$

où  $G_M$  est le tableau  $G_M = (\langle g_M, *T \rangle)_{T \in K_3}$ .

Pour la simulation, on choisit les fonctions  $g_M$  et  $g_\Gamma$  telles que la solution exacte soit la fonction trigonométrique

$$\frac{-1}{3\pi^2} \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z).$$

Afin d'effectuer l'étude de convergence, on réalise plusieurs tests en considérant des valeurs différentes de  $\Delta x_{mean}$  allant de  $6 \cdot 10^{-1}$  à  $1 \cdot 10^{-1}$ . L'erreur entre la solution calculée numériquement et la solution exacte en fonction de la longueur moyenne des cotés du maillage primal  $\Delta x_{mean}$  est tracée dans la figure 5.5. Le taux de convergence est de second ordre (2.017) et la solution est obtenue avec une bonne précision avec une erreur relative de  $8.93 \cdot 10^{-4}$ .

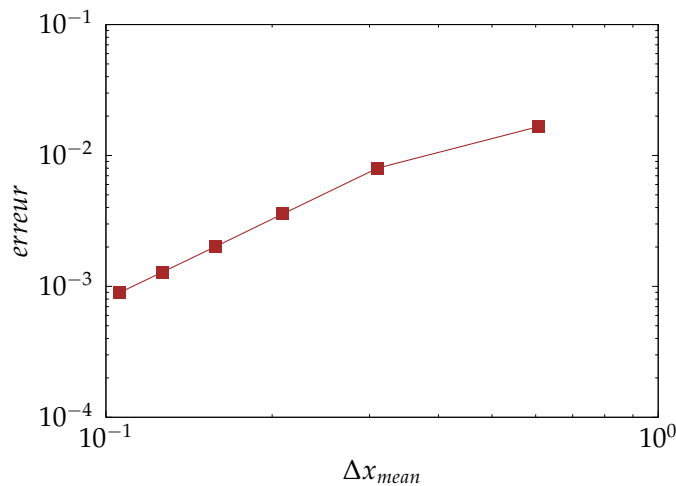


FIGURE 5.5 – Problème de Poisson : évolution de l'erreur sur un cube en utilisant le Hodge discret de Whitney avec  $u = \frac{-1}{3\pi^2} \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z)$

### 5.3.2 Problème de Poisson avec conditions de Neumann au bords

La gestion d'une condition au bord de Neumann en 3D se fait de la même manière qu'en 2D. Seulement, au lieu de discrétiser la condition

$$\text{tr}(*dp) = g_\Gamma \, d\Gamma$$

sur les cotés du bords  $e \in K_1 \cap \Gamma$ , on la discrétise sur les triangles  $f \in K_2 \cap \Gamma$  du bord. La condition de Neumann s'interprète

$$\langle *dp, f \rangle = \langle g_\Gamma, f \rangle, \quad f \in K_2 \cap \Gamma.$$

Comme dans le chapitre 4 section 4.3.1, on augmente le nombre d'inconnues. Plus précisément, en plus du tableau  $P = (\langle p, *T \rangle)_{T \in K_3}$ , constituant l'inconnue principale, on a le tableau  $P' = (\langle p, c(f) \rangle)_{f \in K_2 \cap \Gamma}$  comme inconnue auxiliaire, dont l'équation s'obtient en explicitant la relation 5.3.2.

Pour plus de détail, le développement des conditions de Neumann en 3D dans le cas d'un Hodge discret général est présenté comme suit. Le complexe simplicial orienté  $K$  discrétisant la variété riemannienne tridimensionnel  $M$  s'écrit comme

$$K = K_0 \cup K_1 \cup K_2 \cup K_3$$

où les  $K_i$  sont les ensembles des  $i$ -simplexes de  $K$ . Soit  $f \in K_2 \cap \partial K$  et  $T$  le tétraèdre qui le contient. On note par  $f', f''$  et  $f'''$  les trois autres triangles de  $T$ . Ceci veut dire que  $f, f', f''$  et  $f'''$  constituent le bord du tétraèdre  $T$ . Et  $T', T''$  et  $T'''$  les trois tétraèdres adjacents à  $T$  ( $T'$  et  $T$  ont  $f'$  comme face commune). Supposons que l'opérateur de Hodge  $H_1$  est représenté localement, dans ce tétraèdre  $T$ , par la matrice  $H(T)$  telle que

$$\begin{pmatrix} \langle *\omega, f \rangle \\ \langle *\omega, f' \rangle \\ \langle *\omega, f'' \rangle \\ \langle *\omega, f''' \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H(T)_f^f & H(T)_{f'}^f & H(T)_{f''}^f & H(T)_{f'''}^f \\ H(T)_f^{f'} & H(T)_{f'}^{f'} & H(T)_{f''}^{f'} & H(T)_{f'''}^{f'} \\ H(T)_f^{f''} & H(T)_{f'}^{f''} & H(T)_{f''}^{f''} & H(T)_{f'''}^{f''} \\ H(T)_f^{f'''} & H(T)_{f'}^{f'''} & H(T)_{f''}^{f'''} & H(T)_{f'''}^{f'''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \omega, *f \rangle \\ \langle \omega, *f' \rangle \\ \langle \omega, *f'' \rangle \\ \langle \omega, *f''' \rangle \end{pmatrix}, \quad \forall \omega \in \Lambda^1$$

En substituant  $\omega$  par  $dp$ , on a :

$$\langle *dp, f \rangle = H(T)_f^f \langle dp, *f \rangle + H(T)_{f'}^f \langle dp, *f' \rangle + H(T)_{f''}^f \langle dp, *f'' \rangle + H(T)_{f'''}^f \langle dp, *f''' \rangle.$$

Ainsi, l'équation des conditions aux limites de Neumann dans le cas 3D s'écrit

$$H(T)_f^f \langle dp, *f \rangle + H(T)_{f'}^f \langle dp, *f' \rangle + H(T)_{f''}^f \langle dp, *f'' \rangle + H(T)_{f'''}^f \langle dp, *f''' \rangle = \langle g_\Gamma, f \rangle, \\ \forall f \in K_2 \cap \partial K.$$

$*f, *f', *f''$ , et  $*f'''$  sont les cellules duales données par

$$*f = s_f^T[c(f), *T], \quad *f' = s_{f'}^T[*T', *T], \quad *f'' = s_{f''}^T[*T'', *T] \quad \text{et} \quad *f''' = s_{f'''}^T[*T''', *T].$$

$*T, *T', *T''$  et  $*T'''$  sont les duals (avec une liberté de choix) des 3-simplexes  $T, T', T''$  et  $T'''$  respectivement et  $c(f)$  le dual de la face  $f$  (voir Figure 5.6).

Pour simplifier les notations, nous notons  $HS_{\xi}^f = H(T)_{\xi}^f s_{\xi}^T$  où  $\xi$  est égal à  $f, f', f''$  ou  $f'''$ .

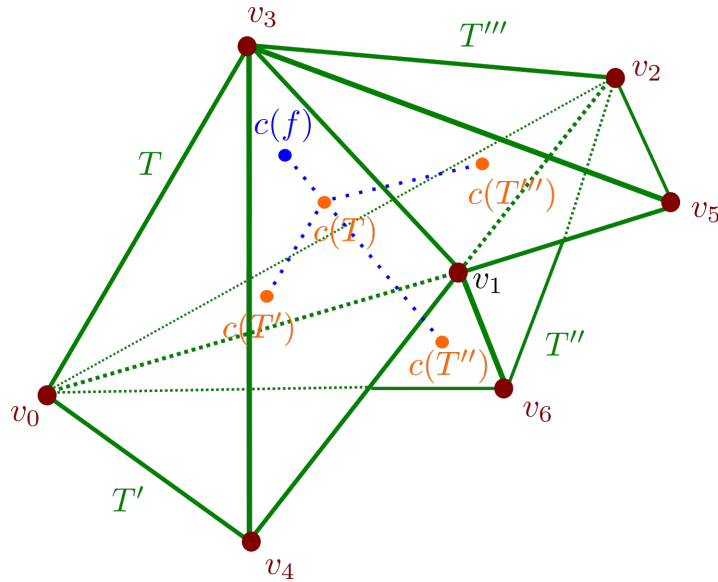


FIGURE 5.6 – Représentation d'un maillage 3D.  $T = \{v_0v_1v_2v_3\}$  le tétraèdre au bord avec  $f = \{v_0v_2v_3\}$ . Les tétraèdres adjacents à  $T$  sont :  $T' = \{v_0v_4v_1v_3\}$ ,  $T'' = \{v_0v_1v_2v_6\}$  et  $T''' = \{v_1v_2v_3v_5\}$ . Le nœud supplémentaire  $c(f)$  est représenté en bleu.

Nous avons

$$HS_f^f(\langle p, *(T) \rangle - \langle p, c(f) \rangle) + HS_{f'}^f(\langle p, *(T) \rangle - \langle p, *(T)' \rangle) + HS_{f''}^f(\langle p, *(T) \rangle - \langle p, *(T)'' \rangle) + HS_{f'''}^f(\langle p, *(T) \rangle - \langle p, *(T)''' \rangle) = \langle g_\Gamma, f \rangle.$$

Finalement, la condition de Neumann discrète en 3D s'écrit

$$[HS_f^f + HS_{f'}^f + HS_{f''}^f + HS_{f'''}^f] \langle p, *(T) \rangle - HS_f^f \langle p, c(f) \rangle - HS_{f'}^f \langle p, *(T)' \rangle - HS_{f''}^f \langle p, *(T)'' \rangle - HS_{f'''}^f \langle p, *(T)''' \rangle = \langle g_\Gamma, f \rangle. \quad (5.3)$$

La mise en œuvre et validation de cette condition est effectuée sur un exemple du Problème de Poisson. On a :

$$\begin{cases} -\Delta p = g_M & \text{dans } M, \\ \nabla p \cdot n|_\Gamma = g_\Gamma & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (5.4)$$

où le domaine spatial considéré est le cube  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . La discrétisation du domaine est formée par des tétraèdres de types trirectangle (un tétraèdre qui possède trois angles droits) et le maillage dual est construit en considérant leurs barycentres. La solution exacte du problème est

$$p = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z) \quad (5.5)$$







où  $\tilde{\bar{P}}^{n+1}$  est le tableau contenant les valeurs de la pression dynamique prédite sur nœuds fictifs ajoutés au bord du domaine et  $A$  et  $B$  sont des matrices définies comme dans (4.23).

étape 3 : Corriger la vitesse et pression prédites

$$\bar{P}^{n+1} = \tilde{\bar{P}}^{n+1} + \bar{P}^n \quad \text{et} \quad \tilde{V}^{n+1} = \frac{\Delta t}{\rho} [-D_2^t + D_b] \tilde{\bar{P}}^{n+1}$$

### 5.3.5 Taylor-Green 3D

Considérons le problème de Taylor Green en 3D définie sur un domaine périodique  $\Omega = \{-\pi L \leq x, y, z \leq \pi L\}$ . L'écoulement est régi par les équations de Navier-Stokes. Les solutions analytiques sont données par

$$\begin{aligned} u_x &= V_0 \sin\left(\frac{x}{L}\right) \cos\left(\frac{y}{L}\right) \sin\left(\frac{z}{L}\right) \\ u_y &= -V_0 \cos\left(\frac{x}{L}\right) \sin\left(\frac{y}{L}\right) \sin\left(\frac{z}{L}\right) \\ u_z &= 0 \\ p &= p_0 + \frac{\rho V_0^2}{16} \left( \cos\left(\frac{2x}{L}\right) + \cos\left(\frac{2y}{L}\right) \right) \left( \cos\left(\frac{2z}{L}\right) + 2 \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Le domaine  $M$  est discrétisé en un maillage structuré formé de tétraèdres droit 5.4. Pour simplifier, prenons  $L = 1$ ,  $\rho = 1$  et  $V_0 = 1$ . Le pas de temps est fixé à  $\Delta t = 10^{-2}$  et la vitesse initiale est fixée à  $(0, 0, 0)$ . La Figure 5.8 montre l'évolution de l'erreur en vitesse en fonction des itérations du temps. On constate que l'écoulement calculé se stabilise au bout de seulement quelques itérations. À la fin de la 10ème itération, l'erreur relative est de l'ordre de  $8 \cdot 10^{-2}$ , sachant que la taille de référence du maillage est  $\Delta x_{mean} = 0.105$ . Des coupes de la solution calculée à cette 10ème itération sur les plans  $(x = 0)$ ,  $(y = 0)$

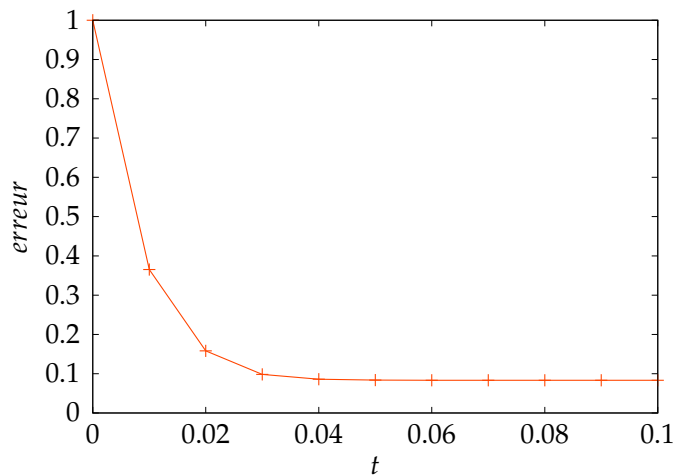


FIGURE 5.8 – Problème de Taylor-Green : évolution de l'erreur sur  $v$  en fonction du temps

et  $(z = 0)$  sont reproduites sur les Figures 5.9 5.10 et 5.11 respectivement. Les deux première colonnes montrent la reproduction de la solution exacte par nos simulations.

Visuellement, une bonne correspondance entre les solutions calculées et la solution exacte est constatée, où plus particulièrement, la vitesse suivant l'axe  $z$  dans la Figure 5.11 a bien pu être approchée en restant nulle. Cela représente une indication qualitative de la fiabilité schéma de prédiction-corrrection proposé dans la simulation des écoulements en 3D. La troisième colonne dans les 3 Figures 5.9 5.10 et 5.11 représentent l'erreur absolue entre la solution calculée et la solution exactes sur les 3 plans. Cette erreur est plutôt satisfaisante avec une valeur d'ordre  $10^{-4}$  en majorité.

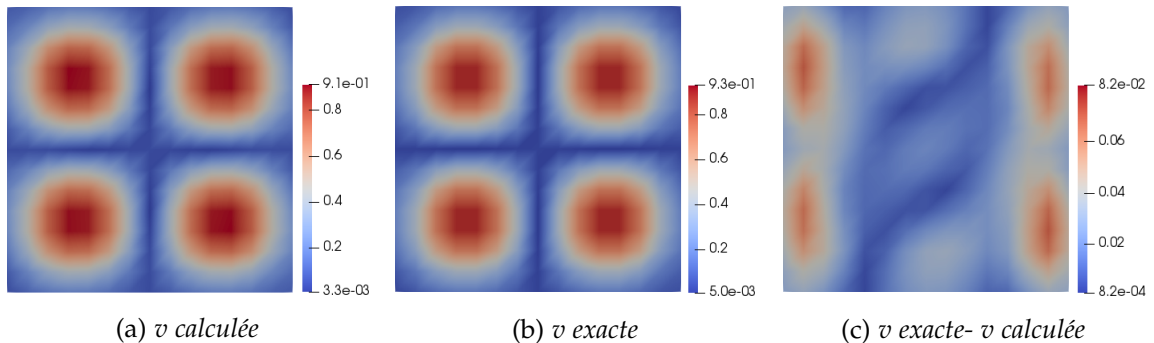


FIGURE 5.9 – Vortex de Taylor-Green : Profiles de la solution exacte et approchée , et l'erreur absolue sur le plan ( $x = 0$ ).

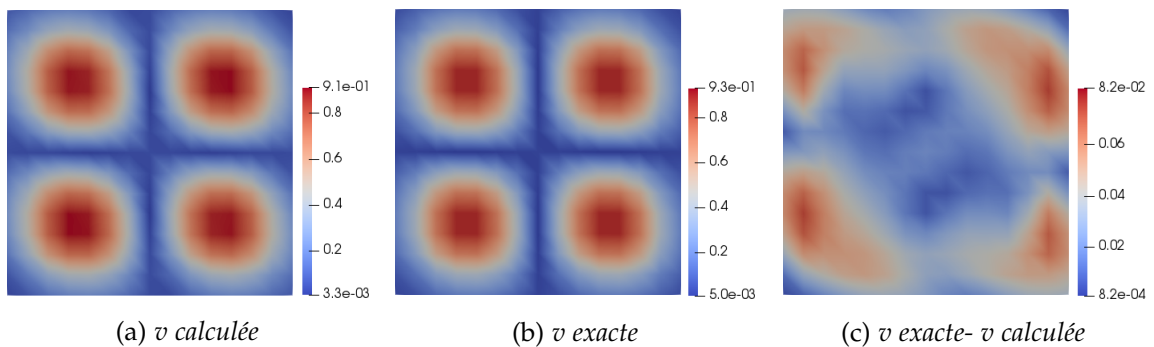


FIGURE 5.10 – Vortex de Taylor-Green : Profiles de la solution exacte et approchée, et l'erreur absolue sur le plan ( $y = 0$ ).

### 5.3.6 Écoulement de Beltrami instationnaire

Dans cet exemple on s'intéresse à l'écoulement transitoire de Beltrami [83] sur un cube unitaire de centre  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  discrétisé par des tétraèdres droits dont la longueur moyenne des cotés vaut  $\Delta x_{mean} = 0.126$ . Les solutions de ce problème sont variables en fonction du temps et dépendent de manière non-triviale des trois directions de coordonnées. Le

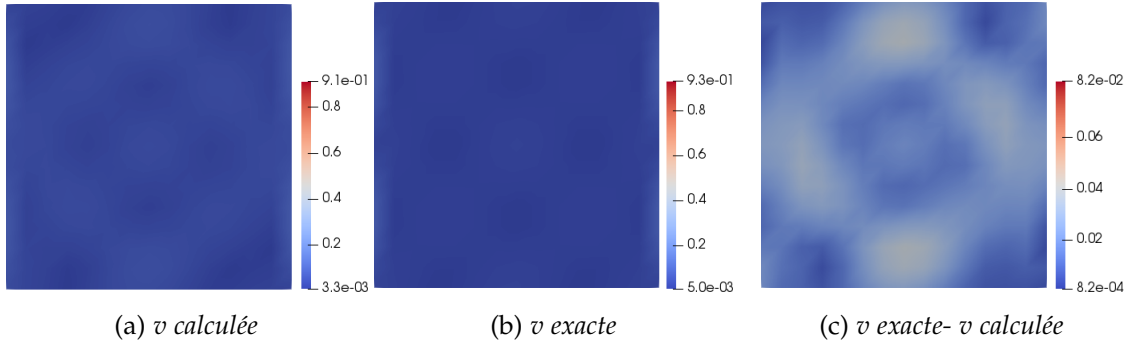


FIGURE 5.11 – Vortex de Taylor-Green : Profils de la solution exacte et approchée, et l'erreur absolue sur le plan ( $z = 0$ ).

champ de vitesse et de pression évoluent très rapidement en temps, et s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 u_x(x, y, z, t) &= (be^{a(x-z)+b(y-z)} - ae^{a(z-y)+b(x-y)})e^{[a^2+b^2+(a+b)^2]t} \\
 u_y(x, y, z, t) &= (be^{a(y-x)+b(z-x)} - ae^{a(x-z)+b(y-z)})e^{[a^2+b^2+(a+b)^2]t} \\
 u_z(x, y, z, t) &= (be^{a(z-y)+b(x-y)} - ae^{a(y-x)+b(z-x)})e^{[a^2+b^2+(a+b)^2]t} \\
 p(x, y, z, t) &= (a^2 + b^2 + ab) \left( e^{(a(x-y)+b(x-z))} + e^{(a(y-z)+b(y-x))} \right. \\
 &\quad \left. + e^{(a(z-x)+b(z-y))} \right) e^{2(a^2+b^2+(a+b)^2)t}
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Dans ces expressions  $a$  et  $b$  sont des constantes réelles vérifiant  $a + b = 0$ . Les simulations sont effectuées jusqu'à atteindre le temps finale  $T$  tel que  $T = \frac{1}{a^2+b^2+(a+b)^2}$ . Cette solution a été conçue, non pas pour modéliser un écoulement réel, mais pour la validation de code et pour des études comparatives (benchmarking).

Pour la simulation, les caractéristiques du fluides sont fixés à  $\rho = 1$  et  $\nu = 1$ . Pour la solution exacte, on prends  $a = 1$  et  $b = -1$ . Le domaine est discrétisé en 6000 tétraèdres et la taille du maillage dans ce cas est donnée par  $\Delta x_{mean} = 0.126$ . Les calculs sont menés jusqu'à un temps  $T$  tel que l'argument  $[a^2 + b^2 + (a + b)^2]T$  de l'exponentielle temporelle soit 1, c-à-d  $T = \frac{1}{2}$ . La Figure 5.12 montre le comportement de l'erreur de la vitesse calculée en fonction des itérations du temps. À chaque pas de temps, le schéma de prediction-correction proposé reproduit avec succès la solution exacte avec une erreur relative variant de  $2.4 \cdot 10^{-2}$  à  $3.8 \cdot 10^{-2}$ . L'allure des coupes dans les trois plan passant par le centre du domaine est représenté sur la Figure 5.13. Ces figures montrent une bonne correspondance en dynamique entre l'écoulement exact et l'écoulement prédit.

Dans un deuxième test, nous changeons les solutions exactes. Contrairement au cas précédant dont la solution croit de façon exponentielle en temps, nous considérons ici une

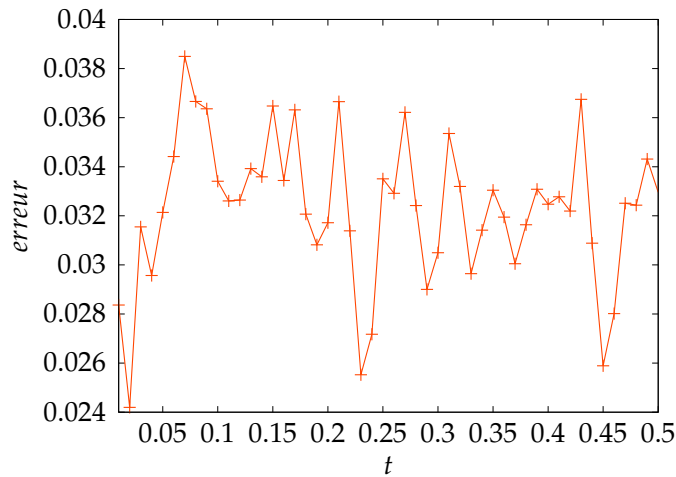


FIGURE 5.12 – Problème de Beltrami : évolution de l'erreur sur  $v$  en fonction du temps

solution décroissance en temps comme celle proposée dans [83], i.e,

$$u_x(x, y, z, t) = -a (e^{ax} \sin(ay + bz) + e^{az} \cos(ax + bz)) e^{-b^2 t}$$

$$u_y(x, y, z, t) = -a (e^{ay} \sin(az + bx) + e^{ax} \cos(ay + bz)) e^{-b^2 t}$$

$$u_z(x, y, z, t) = -a (e^{az} \sin(ax + dy) + e^{ay} \cos(az + dx)) e^{-b^2 t}$$

$$p(x, y, z, t) = -\frac{a^2}{2} \left[ e^{2ax} + e^{2ay} + e^{2az} + 2 \sin(ax + by) \cos(az + bx) e^{a(y+z)} \right. \\ \left. + 2 \sin(ay + bz) \cos(ax + by) e^{a(z+x)} \right. \\ \left. + 2 \sin(az + bx) \cos(ay + bz) e^{a(x+y)} \right] e^{-2b^2 t}$$

Dans les simulations de ce test, les constantes indépendantes dans les équations (5.11) ont été choisies comme  $a = \frac{\pi}{4}$  et  $b = \frac{\pi}{2}$ . Ces valeurs ont été choisies comme dans [83]. La valeur du temps final  $T$  est choisie tout en vérifiant la relation  $b^2 T = 1$ . Le champ de vitesse est comparé au champ analytique à chaque pas de temps. Cette comparaison est visualisée en terme d'erreur dans la Figure 5.14. Tout au long de l'intervalle de temps  $[0, T]$ , la vitesse calculée reproduit la solution analytique avec une erreur variant entre  $2.710^{-2}$  à  $4.910^{-2}$ . Les profils de vitesse sur le domaine sont représentés dans la Figure 5.15. Les solutions calculée et les solutions exactes sur les trois plans sont bonne correspondance avec ceux à ceux de la solution exacte.

## 5.4 CONCLUSION

Dans ce dernier chapitre du manuscrit, une introduction de la DEC pour la résolution des équation de Navier-Stokes en 3D via un schéma de prédiction a été présentée. Étant donné que l'opérateur de Hodge diagonal est limité sur des maillages bien centrés non facilement réalisable pour des géométries arbitraires, la discrétisation de l'opérateur de Hodge dans notre cas est effectuée en utilisant les formes de Whitney sur un dual barycentrique. Dans les tests numériques, le problème de Poisson en imposant soit les

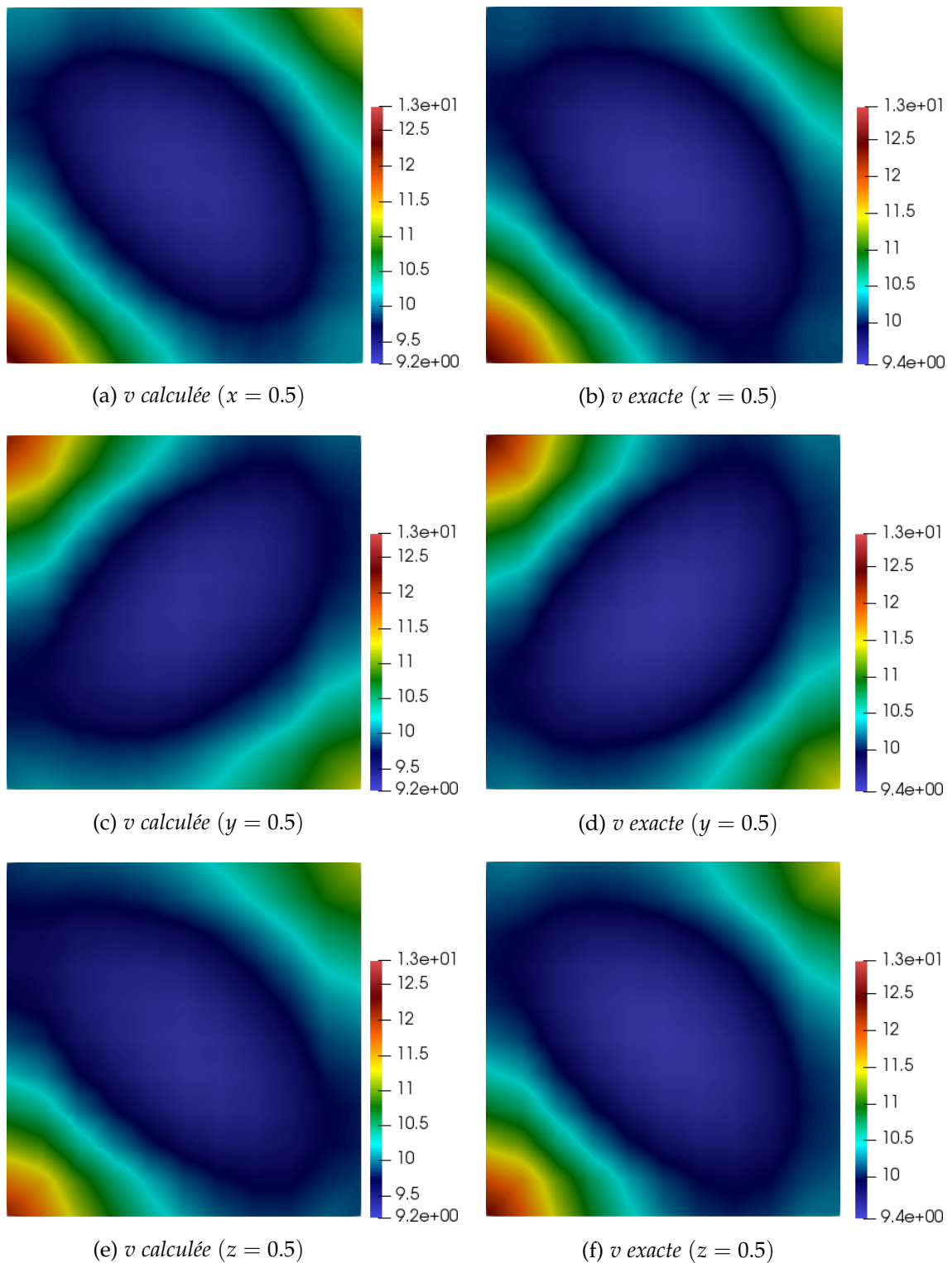


FIGURE 5.13 – Écoulement de Beltrami : Profils des solutions exactes et approchées à  $t = 5 \cdot 10^{-1}$ .

conditions de Dirichlet aux bords ou les conditions de Neumann en DEC ont montré un bon accord avec les solutions exactes. D'autre part, le schéma de prédiction-corrrection a

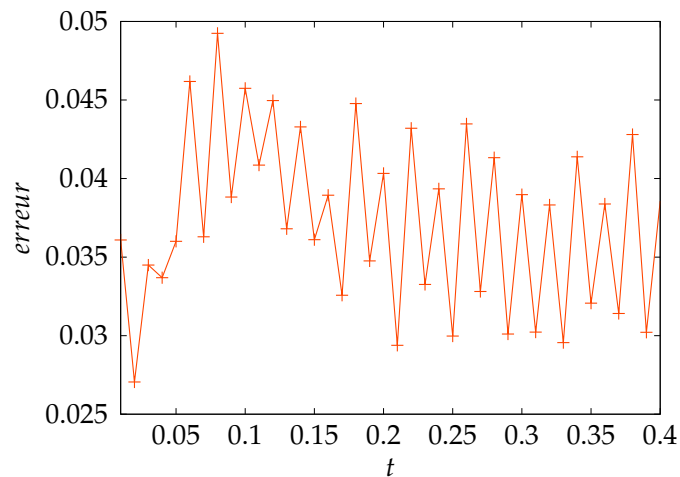


FIGURE 5.14 – Problème de Beltrami : évolution de l'erreur sur  $v$  en fonction du temps

été appliqué pour la résolution du problème des vortex de Taylor-Green ainsi que l'écoulement de Beltrami. Dans ces tests différents, on a toujours été capable par notre approche de reproduire les solutions analytiques données où l'erreur relative obtenue était au plus de l'ordre de 8%.

Ces tests en 3D ne sont pour l'instant que préliminaires (d'où le titre « Vers la 3D » du chapitre). En effet, le but du chapitre a été de démontrer l'applicabilité du DEC, et en particulier du schéma de prédiction-corrrection, au cas 3D. Des expériences sur des écoulements réalistes sont encore à prévoir.

Ces tests souffrent par ailleurs du manque de raffinement du maillage. Cela est dû à une limitation du matériel de calcul. Une parallélisation du code sera inévitable pour traiter des problèmes 3D réalistes.

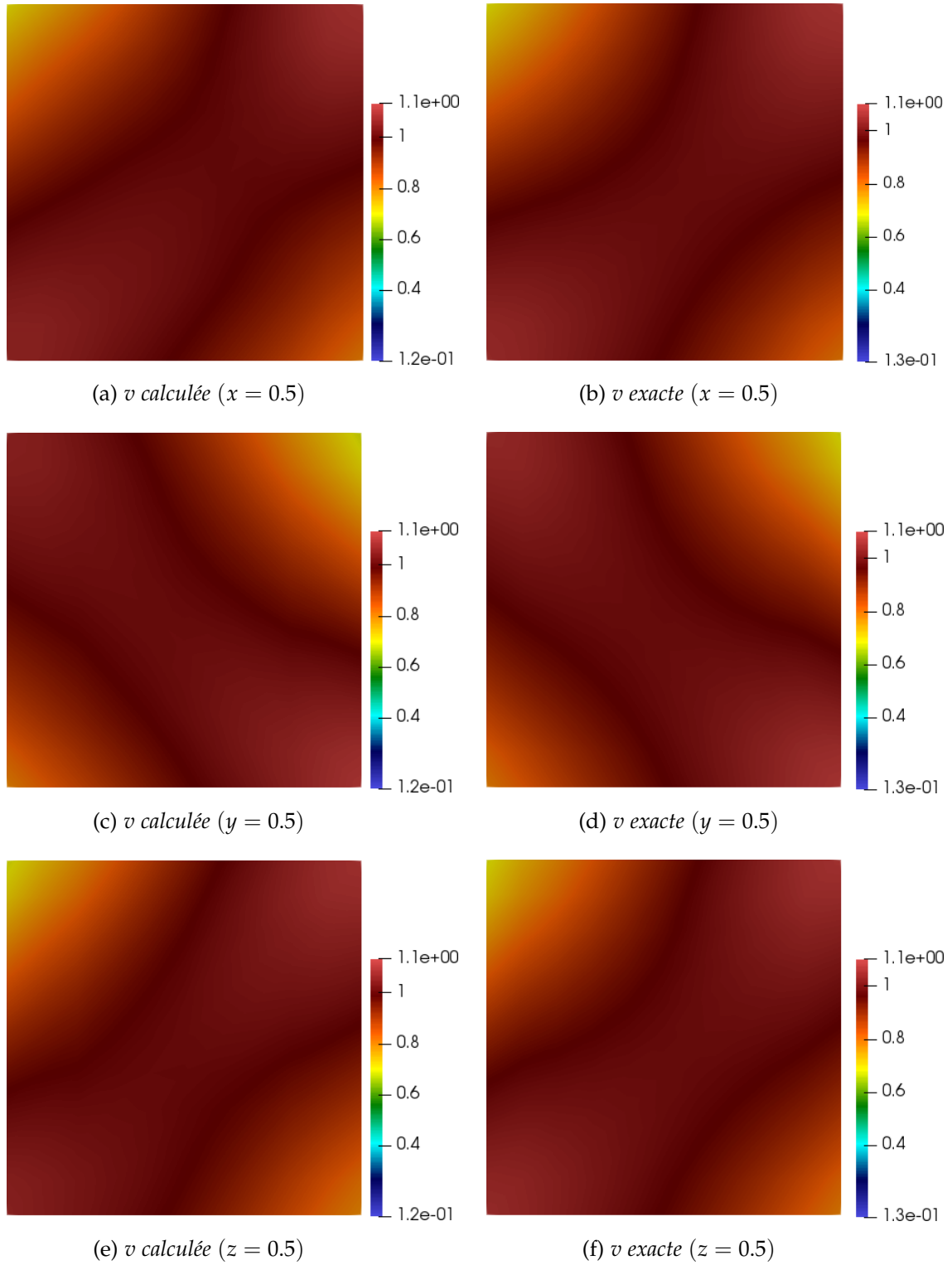


FIGURE 5.15 – Écoulement de Beltrami : Profils des solutions exactes et approchées à  $t = 4 \cdot 10^{-1}$ .

# CONCLUSION GÉNÉRALE

L'objectif de cette thèse est d'utiliser le DEC pour la résolution de problèmes physiques, en particulier les problèmes de mécanique des fluides. Afin d'assurer l'autonomie de cette thèse, des rappels et préliminaires sur le calcul extérieur et ses opérateurs en continu et en discret, ont été présentés dans le premier chapitre. Nos contributions dans cette thèse ont été présentées en quatre chapitres :

Le chapitre 2 de cette thèse, a été dédié à la mise en œuvre puis évaluation du DEC sur différents problèmes tests de la mécanique des fluides 2D. Dans ces cas on se restreint à un maillage bien centré pour la discrétisation spatiale et en utilisant la formulation fonction de courant dans la phase de résolution. L'intérêt de cette formulation est que la vitesse est à divergence nulle à la précision machine. La première série de tests a concerné les problèmes relativement simples de Poiseuille et Couette. Dans ces deux problèmes les résultats ont été très satisfaisants. Dans la deuxième série de tests on s'est intéressé aux problèmes de Taylor-Green et des ondes progressives. Une bonne précision des solutions prédites par le DEC a été obtenue. L'erreur relative sur toutes les variables (fonctions de courant, température et pression) était suffisamment petite. Dans le dernier test le problème de la cavité différentiellement chauffée a été étudié. Les résultats obtenus coïncident avec ceux de la littérature. Tous ces résultats montrent l'efficacité du DEC dans la résolution des problèmes de mécanique des fluides.

Dans le chapitre 3, nous avons proposé une nouvelle approche analytique de discrétisation de l'opérateur de Hodge en 2D. Cette discrétisation est avantageuse en donnant une liberté totale du choix des points constituant le maillage dual. Par exemple, pour construire le maillage dual, on peut considérer comme centre, le barycentre, l'incentre, le circoncentre ou n'importe quel autre point des top-simplexes. En particulier, en considérant le circoncentre, l'opérateur de Hodge analytique développé dans cette thèse coïncide exactement avec l'opérateur de Hodge classique (diagonal) développé par Bossavit [12, 13, 14, 15, 16] pour les maillages duaux non dégénérés. Afin de valider la discrétisation analytique de l'opérateur de Hodge, un premier test sur le problème de Poisson a été considéré. Sur cet exemple, les solutions ont été obtenues avec une bonne précision et la convergence par rapport au raffinement était d'un ordre quadratique.

Dans le contexte de la mécanique des fluides, l'opérateur de Hodge analytique a été testé sur les problèmes de l'écoulement de Poiseuille et l'écoulement des vortex de Taylor-



Green en utilisant la formulation par la fonction de courant. Sur les maillages aigus et droits, les solutions ont été obtenues avec une bonne précision et un taux de convergence quadratique. Nous avons aussi étudié l'efficacité du Hodge analytique construit sur des maillages non Delaunay. Plusieurs tests ont été donc effectués sur des maillages contenant des mailles non Delaunay à degrés progressifs allant de 15% à 50%. Les résultats sur les erreurs relatives ont été satisfaisants avec un taux de convergence entre linéaire et quadratique.

Dans le chapitre 4 de la thèse, on s'est intéressé à la résolution des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles en variables primaires (vitesse pression). À cet effet, nous avons formulé un schéma de prédiction-corrrection adapté au cadre du DEC. Dans cette formulation, l'expression équivalente de la condition de Neumann en DEC a été formulée. La condition de Neumann est dérivée indépendamment de l'opérateur de Hodge discret utilisé et du type du maillage dual sur lequel il est construit. En particulier, des tests numériques de validation sur les problèmes de l'écoulement des vortex de Taylor-Green ont été effectués. Des tests sur l'écoulement de la cavité entraînée lorsque  $Re = 100$  et  $Re = 1000$ , ont été aussi faits en considérant les opérateurs de Hodge analytique et de Whitney construits sur des maillages droits et aigus. Les résultats obtenus ont montré que le schéma de prédiction-corrrection en DEC a été capable de fournir des solutions avec une précision très satisfaisante.

Dans le dernier chapitre de ce manuscrit, on s'est intéressé à la résolution de problèmes physiques tridimensionnels par DEC. Nous avons souligné la difficulté de générer des maillages bien centrés en 3D et donc la limitation du Hodge diagonal en pratique. Pour s'affranchir de cette difficulté, nous avons utilisé le Hodge de Whitney construit sur un maillage dual barycentrique. Dans un premier temps, cette approche a été validée sur le problème de Poisson avec des conditions de Dirichlet aux bords puis avec des conditions de Neumann. Ensuite, une première tentative de résolution des équations de Navier-Stokes en 3D par DEC a été menée. Pour cela, le schéma de prédiction-corrrection proposé dans le chapitre 4 a été utilisé. On a montré sur les deux cas tests de l'écoulement des vortex de Taylor-Green et l'écoulement de Beltrami instationnaire que les solutions obtenues sont d'une précision satisfaisante.

En perspectives, les travaux effectués dans cette thèse nous permettront de s'ouvrir sur plusieurs problématiques de recherche. La première serait de combiner le DEC aux intégrateurs géométriques de temps afin de développer une version espace-temps du DEC. Une deuxième problématique serait d'appliquer le DEC sur des problèmes d'interaction fluide-structure. Il serait aussi intéressant d'étendre notre construction du Hodge analytique discret à la dimension 3. Dans cette thèse on s'est inspiré des travaux déjà effectués dans la littérature (discrétiser les équations de la mécanique en utilisant les opérateurs discrets), mais un projet intéressant sera de reformuler entièrement la mécanique des milieux continus en calcul extérieur avec les formes extérieures.

## ANNEXE A.

# A new Hodge operator in Discrete Exterior Calculus. Application to fluid mechanics

Rama Ayoub<sup>1</sup>, Aziz Hamdouni<sup>2</sup>, and Dina Razafindralandy<sup>\*3</sup>

<sup>1</sup>rama.ayoub@univ-lr.fr

<sup>2</sup>aziz.hamdouni@univ-lr.fr

<sup>3</sup>dina.razafindralandy@univ-lr.fr

Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur pour l'Environnement  
LaSIE, UMR-7356-CNRS, La Rochelle Université  
Avenue Michel Crépeau, 17042 La Rochelle Cedex 1, France

## Abstract

This article introduces a new and general construction of discrete Hodge operator in the context of Discrete Exterior Calculus (DEC). This discrete Hodge operator enables to circumvent the well-centeredness limitation on the mesh with the popular diagonal Hodge. It allows a dual mesh based on any interior point, such as the incenter or the barycenter. It opens the way towards mesh-optimized discrete Hodge operators. In the particular case of a well-centered triangulation, it reduces to the diagonal Hodge if the dual mesh is circumcentric. Based on an analytical development, this discrete Hodge does not make use of Whitney forms, and is exact on piecewise constant forms, whichever interior point is chosen for the construction of the dual mesh. Numerical tests oriented to the resolution of fluid mechanics problems and thermal transfer are carried out. Convergence on various types of mesh is investigated.

## 1 Introduction

The interest for (geometric) structure-preserving numerical integrators has grown in computing community [1–7]. This is due to the ability of these schemes in reproducing fundamental physical properties (conservation laws, ...) of the equations and their robustness in long-time integration. Discrete Exterior Calculus (DEC) belongs to this family of integrators. It aims at developing a discrete version of the theory of exterior calculus, and more generally the differential geometry theory, where most equations of physics are formulated.

---

\*Corresponding author

Initially developed by Bossavit for electromagnetism in a series of papers [8–16], DEC was used in fluid mechanics for the resolution of Darcy’s equation and the simulation of the dynamics of ideal and viscous fluid flows in basic configurations [17–19].

The primary calculus tools of the DEC are discrete differential forms or cochains. An important advantage of DEC is that the Stokes’ theorem is naturally verified at discrete level. This is due to the construction of the discrete exterior derivative operator  $d$  by duality with the boundary operator. A second advantage is that the DEC framework offers a naturally coherent discretization of derivative operators (divergence, gradient, curl in 2D and 3D) such that the usual relations

$$\text{curl grad} = 0, \quad \text{and} \quad \text{div curl} = 0$$

are verified at machine precision. This is due to the fact that these derivative operators are all represented by the exterior derivative  $d$  in exterior calculus framework and that in DEC, the discrete  $d$  obeys the relation

$$d^2 = 0, \tag{1}$$

just like the continuous  $d$ . These properties of DEC permitted for example Elcott et al. [17] to design a circulation-preserving numerical scheme for the simulation of ideal fluid flows. These properties also avoid the apparition of spurious quantities such as an artificial mass, potential or portance in the numerical solution.

When used as discretization method, DEC can be seen as a finite volume method in exterior calculus. Indeed, in this approach, cochains are differential forms integrated over the different elements of the mesh (vertices, edges, triangles, ...). Discrete exterior calculus has a finite element version, developed mainly by Arnold and his co-workers in [5, 20, 21].

A key operator in exterior calculus, needed to express constitutive laws for example, is the Hodge star operator. In a finite element approach, the discrete Hodge operator is built straightforwardly, by applying the continuous Hodge to the polynomial differential forms which constitute the basis. After a suitable inner product, this results in the mass matrix. In DEC, to which the present article is limited, defining a discrete Hodge is less natural because one has to deal with already integrated forms. In particular, in order to ensure the bijectivity of the discrete Hodge, a dual mesh is necessary in DEC, whereas such a notion is not required in the finite element approach. The circumcentric dual is a popular choice of dual mesh, due to the orthogonal nature of simplicial cells and their circumcentric duals. This orthogonality permits a simple construction of a discrete Hodge, having a diagonal matrix representation [13, 22]. The diagonal entries of this discrete Hodge, sometimes called circumcentric or diagonal Hodge, are simply the ratios of the volumes of dual cells and primal simplices.

The diagonal Hodge was initially designed for completely well-centered simplicial meshes, that are meshes where each simplex contains its circumcenter. In practice, it is difficult to generate this type of triangulation [23]. It can be

done for some specific simple geometries in  $\mathbb{R}^2$  [24–26]. For more complex geometries, VanderZee et al. propose a reprocessing algorithm making a 2D mesh well-centered but it is not very practical and may not work in 3D [27]. Hirani and his co-workers extended the use of the diagonal Hodge to Delaunay and to pairwise non-Delaunay meshes, by introducing signed elementary dual volumes [28, 29]. However, this approach may still lead to zero-volume dual edges and cells when positive contributions equalize negative ones. A reprocessing is then necessary. Mullen et al. [30] proposed an optimization of the triangulation to the diagonal Hodge. To this aim, they introduce weighted duals and weighted circumcenter, and construct the mesh by minimising the error of the diagonal Hodge. This technique generates a well-shaped mesh, but not well centered. Moreover, it may become expensive, especially for problems with time-varying domains such as fluid-structure interaction. Note also that all these discrete Hodge operators require that the dual mesh is based on the circumcenter.

Another existing discrete Hodge operator, studied by Bossavit from the beginning of DEC, is the Galerkin Hodge [16, 31]. It corresponds to a mass matrix, with the Whitney forms as shape functions [32, 33]. It is built within a finite element framework. A drawback of using the Galerkin Hodge in (the finite-volume flavoured) DEC is that, not only it introduces an inconsistency but also it is not exact even for constant forms. This can be shown straightforwardly in a right but not isosceles triangle. A more DEC- than finite element-flavoured discrete Hodge, but still based on Whitney forms, is proposed in [34]. It is defined through an interpolation with Whitney forms and an integration on dual simplices and is generally called Whitney Hodge. Another discrete Hodge operator which also uses Whitney forms is proposed in [35]. Called geometric Hodge, it does not need an interpolation nor integration concept. For symmetry reasons, it requires a dual mesh based on the barycenters. In fact, as noticed in [36] in 2D, the geometric Hodge is a symmetric approximation of the Galerkin Hodge where the integration is approximated by a one point quadrature with evaluation only at the barycenter. Like the usual Galerkin and the Whitney Hodge, the geometric Hodge is represented by a sparse but not diagonal matrix. However, numerical comparisons in [36] shows that the additional computational time induced by the lack of diagonal structure is not very high.

In the present article, we propose a new construction of a discrete Hodge operator which comply the following requirements. First, it does not need a reprocessing of the primal mesh. This condition is important since, in some situations, modifying the mesh may be harmful. It may for instance affect the shape of surfaces. Moreover, as mentioned, the induced cost increase may become important in time-varying domains. Second, the construction must be general enough such that the centers on which the dual mesh is based can be changed at convenience, as long as the dual mesh has no degenerate element. For example, the construction of the discrete Hodge must be valid for both a barycentric and an incentric duals. Neither the diagonal nor the geometric Hodge is appropriate for this task since with these operators, the dual mesh is imposed. Lastly, the Hodge must be exact on piecewise constant differential forms, whichever choice is made on the dual mesh.

By proposing such a construction, we intend to develop a discrete Hodge which adapts to the mesh in order to minimize some quantity (the global error, ...) or to comply to other physical requirements, by choosing algorithmically the most suitable center. These center may even vary from a simplex to another. This optimization process, which will be tackled in a future work, would contrast with that in [30] where it is the mesh which adapts to the (diagonal) Hodge operator.

In section 2, a brief reminder on DEC, on the continuous Hodge operator and on the diagonal Hodge is done. A deeper introduction to DEC can be found in the papers of Bossavit [8–16] and in [22, 37, 38] for instance. The development of the new discrete Hodge, followed by illustrative examples, a basic preliminary error analysis and a discussion, is presented in section 3. We end up with numerical experiments, carried out on Poisson equations and on isothermal and non-isothermal fluid dynamics problems, in section 4. Various types of mesh (well-centered mesh, right triangulation and non-Delaunay meshes) will be considered. Convergence analyses will be carried out. Although our goal is not to compare the new discrete Hodge to existing ones, results given by the diagonal Hodge are presented as reference, when available.

## 2 Review on DEC

DEC is a theory of exterior calculus on a discretized domain, which preserves Stokes' theorem and the exactness of relation (1). In what follows, we make a reminder on oriented simplicial discretization of a domain. Next, since the primary tools of exterior calculus are differential forms, we briefly present how to discretize them into cochains. Lastly, the Hodge star operator and its discretization into the diagonal Hodge is reminded.

### 2.1 Discretization of the domain

Consider a system of partial differential equations defined on an  $n$ -dimensional spatial domain  $M \subset \mathbb{R}^m$  for some  $m \in \mathbb{N}$ . The domain  $M$  is subdivided into  $n$ -dimensional simplices. Recall that a  $k$ -simplex is the convex hull of  $k+1$  points. For instance, if  $\dim M = 3$  then  $M$  is subdivided into tetrahedra. We denote  $K$  the set composed of these  $n$ -dimensional simplices, together with their faces, the faces of the faces, and so on until the vertices. For example, in 3D,  $K$  is composed of tetrahedra (3-simplices), triangles (2-simplices), edges (1-simplices) and vertices (0-simplices). In 2D meshes, the top-dimensional simplices are triangles. As an example, Figure 1 presents a simplicial discretization of a curved surface in  $\mathbb{R}^3$ . Some regularity conditions are also generally useful [22, 37, 39].

To each element of  $K$  is assigned an orientation, which can simply be defined from an ordering of its nodes. Each simplex has two possible orientations. Two adjacent top-dimensional simplices are required to have the same orientation. By contrast, the orientation of each lower dimensional simplex is arbitrary. A sample 2D oriented complex is presented in Figure 2. For simplicity, and since

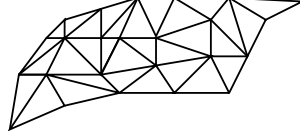


Figure 1: Example of 2D simplicial complex embedded in  $\mathbb{R}^3$

it is sufficient for our applications, we assume that all the vertices have the same (positive) orientation.

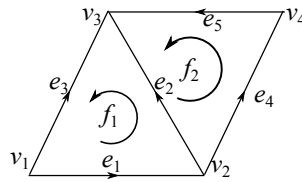


Figure 2: Example of a consistently oriented mesh. Arrows represent the orientation of edges and faces

We denote  $K_k$  the set of oriented  $k$ -dimensional simplices of  $K$

$$K_k = \{\sigma \in K, \sigma \text{ oriented, } \dim \sigma = k\}$$

and  $\Omega_k$  the vector space spanned by formal linear combination of elements of  $K_k$

$$\Omega_k = \text{span } K_k = \left\{ c = \sum_{\sigma_i \in K_k} c_i \sigma_i, c_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

An element  $c$  of  $\Omega_k$  is called a  $k$ -chain. In theory, the components  $c_i$  may take any real value but, in practice, only values in  $\{0, 1, -1\}$  have physical meaning. A value 0 means that the element  $\sigma_i$  does not belong to the chain, 1 means that it is present in  $c$ , and  $-1$  when it is present but with the opposite orientation. As an example, the chain

$$e_1 + e_4 + e_5 - e_3 \in \Omega_1 \quad (2)$$

in Figure 2 constitutes a closed loop.

## 2.2 Boundary operator

The boundary of a  $k$ -dimensional simplex is the sum of its oriented  $(k - 1)$ -dimensional faces. In this sum, each face is given a sign, depending on whether its orientation is consistent with that of the considered  $k$ -simplex. For example, the boundary of the face  $f_1$  in Figure 2 is

$$\partial f_1 = e_1 + e_2 - e_3.$$

The boundary of  $e_1$  is

$$\partial e_1 = v_2 - v_1.$$

The boundary operator  $\partial$  extends into a linear map from  $\Omega_k$  to  $\Omega_{k-1}$  by defining the boundary of a chain  $\sum_{i \in I} c_i \sigma_i$ , for some set  $I$  of indices, as follows:

$$\partial \left[ \sum_{i \in I} c_i \sigma_i \right] = \sum_{i \in I} c_i \partial \sigma_i. \quad (3)$$

The operator  $\partial$  can be represented by a (sparse) matrix. For instance, the non-zero boundary operators on the mesh in Figure 2 are

$$\partial_{|\Omega_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \partial_{|\Omega_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

In equation (4),  $\partial_{|\Omega_k}$  is the restriction of  $\partial$  to  $\Omega_k$ , which acts on  $k$ -simplices.

### 2.3 Discrete differential forms and exterior derivative

A discrete  $k$ -form, or a  $k$ -cochain, is an element of the algebraic dual  $\Omega^k(K)$  of  $\Omega_k$ . Since the elements of  $K_k$  form a basis of  $\Omega_k$ , a discrete  $k$ -form is simply a map which, to each element of  $K_k$ , assigns a real number:

$$\omega \in \Omega^k(K) : \begin{array}{ccc} K_k & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \sigma & \longmapsto & \langle \omega, \sigma \rangle. \end{array} \quad (5)$$

Computationally, a  $k$ -cochain is represented by an array  $(\langle \omega, \sigma_i \rangle)_{\sigma_i \in K_k}$ .

In DEC, a differential  $k$ -form  $\omega \in \Omega^k(M)$  on  $M$  is discretized into a  $k$ -cochain  $\omega_K \in \Omega^k(K)$  by taking the pairing  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  as an integration

$$\langle \omega_K, c \rangle = \int_c \omega, \quad \text{for all } c \in \Omega_k$$

if  $k \geq 1$ , and as a simple evaluation

$$\langle \omega_K, c \rangle = \omega(c)$$

if  $c \in \Omega_0$  is a point. In the sequel, the cochain  $\omega_K$  will also be denoted  $\omega$  when there is no confusion.

The discrete exterior derivative operator  $d$  is defined as the dual of the boundary operator  $\partial$ :

$$\langle d\omega, c \rangle = \langle \omega, \partial c \rangle, \quad \text{for all } \omega \in \Omega_k, c \in K_{k+1}. \quad (6)$$

It is a linear map from  $\Omega^k$  to  $\Omega^{k+1}$ . It can be remarked that relation (6) would simply be the expression of Stokes' theorem if the pairing  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  was an integration



and  $\omega$  a differential form. Computationally, the matrix  $d|_{\Omega^k(K)}$  of the restriction of  $d$  on the space of  $k$ -cochains is the transpose of the matrix of  $\partial|_{\Omega_{k+1}}$ :

$$d|_{\Omega^k(K)} = \partial|_{\Omega_{k+1}}^\top.$$

Since  $\partial^2 = 0$  (the boundary of a boundary is the empty set), it follows by the duality relation (6) that

$$d^2 = 0. \quad (7)$$

The following sequence is then, as in the continuous case, exact:

$$0 \xrightarrow{d} \Omega^0(K) \xrightarrow{d} \Omega^1(K) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^{n-1}(K) \xrightarrow{d} \Omega^n(K) \xrightarrow{d} 0. \quad (8)$$

## 2.4 The diagonal Hodge

Having applications in fluid mechanics domain in mind, we assume that  $M$  is a flat domain in  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 2$  or  $3$ , from now on, to simplify. It inherits the usual Euclidean metric and the induced right-hand oriented volume form of  $\mathbb{R}^n$ .

To express material laws in exterior calculus framework, the Hodge star operator  $\star$  is necessary. It realizes an isomorphism between  $\Omega^k(M)$  and  $\Omega^{n-k}(M)$ . Rather than giving its definition (which can be found for example in [40]), we simply recall that, if  $n = 2$ ,

$$\begin{aligned} \star 1 &= dx \wedge dy, \\ \star dx &= dy, & \star dy &= -dx, \\ \star(dx \wedge dy) &= 1. \end{aligned} \quad (9)$$

In fact, these relations completely characterize the operator  $\star$ . For  $n = 3$ , we have

$$\begin{aligned} \star 1 &= dx \wedge dy \wedge dz, \\ \star dx &= dy \wedge dz, & \star dy &= dz \wedge dx, & \star dz &= dx \wedge dy, \\ \star(dy \wedge dz) &= dx, & \star(dz \wedge dx) &= dy, & \star(dx \wedge dy) &= dz, \\ \star(dx \wedge dy \wedge dz) &= 1. \end{aligned}$$

It can be checked that

$$\star \star = -\text{Id} \quad (10)$$

in 2D and

$$\star \star = \text{Id}$$

in 3D, where  $\text{Id}$  is the identity map. Note also that the Hodge star verifies the relation

$$\omega(u_1, \dots, u_k) = \star \omega(u_{k+1}, \dots, u_n) \quad (11)$$

for any positively oriented orthonormal basis  $(u_1, \dots, u_n)$  of the tangent space and any differential  $k$ -form  $\omega \in \Omega^k(M)$ .

The discrete Hodge star operator should realize an isomorphism between  $\Omega^k(K)$  and  $\Omega^{n-k}(K)$ . This is not possible on the same grid  $K$  because, generally,

$$\dim \Omega^k(K) = \text{card } K_k \neq \dim \Omega^{n-k}(K) = \text{card } K_{n-k}.$$

For example, with the mesh on Figure 2,  $n$  equals 2 and if  $k = 0$ ,

$$\dim \Omega^k(K) = 4, \quad \dim \Omega^{n-k}(K) = 2.$$

In order to define a discrete Hodge star operator, a dual mesh  $\star K$  is needed. This dual mesh must be constituted by cells such that there is a one-to-one correspondance between  $k$ -simplices of  $K$  and  $(n-k)$ -dimensional cells of  $\star K$ . One possible dual mesh is the circumcentric dual. In a 2D mesh such as in Figure 3, the circumcentric dual is such that the dual of a triangle is its circumcenter; the dual of a primal edge is the edge connecting the circumcenters of two triangles which share this primal edge; and the dual of a vertex is the 2-cell formed by connecting the circumcenters of the primal triangles which share this vertex. Figure 4 presents an example of a mesh on a square and its circumcenter-based dual. Note that the choice of circumcenters as duals of triangles implies the orthogonality between edges and their duals.

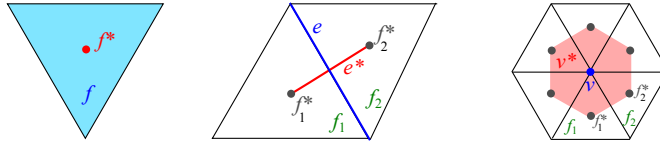


Figure 3: Primal simplices (in blue) of a triangle  $f$  (left), an edge  $e$  (middle) and a vertex  $v$  (right) and their duals  $f^*$ ,  $e^*$ ,  $v^*$  (in red) in a 2D mesh

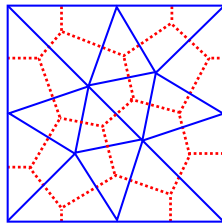


Figure 4: Sample 2D mesh (in blue) on a square and its circumcentric dual (in red)

The boundary and discrete exterior derivative can be transposed to the dual mesh. The orientation on the primal mesh  $K$  also induces an orientation on  $\star K$  (see [37])<sup>1</sup>. The space of  $k$ -cochains on the dual mesh is denoted  $\Omega^k(\star K)$ .

<sup>1</sup>To borrow the language of Bossavit [41], the (inner-)orientation of each primal simplex, as defined in section 2.1, constitutes the outer-orientation of its dual cell.

A discrete Hodge operator, realizing an isomorphism between  $\Omega^k(K)$  and  $\Omega^{n-k}(\star K)$ , can now be defined as:

$$\star : \Omega^k(K) \longrightarrow \Omega^{n-k}(\star K)$$

with

$$\frac{\langle \star \omega, c^* \rangle}{|c^*|} = \frac{\langle \omega, c \rangle}{|c|}, \quad \text{for any } c \in K_k, \quad (12)$$

where  $c^* \in K_{n-k}^*$  designates the dual of the  $k$ -simplex  $c$ . In equation (12),  $|c|$  is a measure of  $c$ , which is set to 1 if  $c$  is a point and to its Euclidean measure otherwise. Relation (12) can be understood as follows: the discrete forms  $\omega$  and  $\star \omega$ , normalized by the measure of the simplex/cell on which they are applied, represent the same density, but act in complementary-dimensional facets. Relation (12) can also be understood as a discretization of equality (11),  $c$  and  $c^*$  forming complementary geometric objects.

Definition (12) is a low-order approximation of the continuous Hodge star, which turns out to be exact in the particular case where  $\omega$  is piecewise constant and  $c$  and  $c^*$  are flat. It induces a representation of the discrete Hodge operator in each dimension as a diagonal matrix, having ratios of cell measures as entries. For example, in a one-triangle mesh as in Figure 5, where  $c_t$  and  $c_i$  are the circumcenters of the triangle and the edges respectively, the Hodge matrix acting on primal 1-cochains is

$$H_{diagonal} = \begin{bmatrix} \frac{|e_1^*|}{|e_1|} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{|e_2^*|}{|e_2|} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{|e_3^*|}{|e_3|} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Due to relation (10), the discrete Hodge matrix acting on dual 1-cochain is the inverse of matrix (13).

The diagonal structure of  $H_{diagonal}$  and the induced computational efficiency makes the diagonal Hodge a popular choice of discrete Hodge operator. However, to be correctly defined, it requires a well-centered mesh. This means that each  $k$ -dimensional simplex of the mesh, with  $k \geq 1$ , must strictly contain its circumcenter. In 2D, a well-centered mesh can contain only strictly acute triangles. To figure out the problem induced by the non well-centeredness, consider a 2D domain meshed with right triangles. The mesh is not well centered. Circumcenters lie on the boundary of the triangles and some dual edges degenerate into points (see Figure 7, left, as an example), making matrix (13) singular. If the mesh contains obtuse triangles then some circumcenters are located outside the triangles. In this case, an extension, introducing a sign convention to the elementary volumes of the dual cells, has been proposed in [29] to widen the range of applicability of the diagonal Hodge, but bringing no solution for the right-triangularized mesh for example (apart from altering the mesh). Moreover, the diagonal Hodge does not allow any choice than the circumcenters as

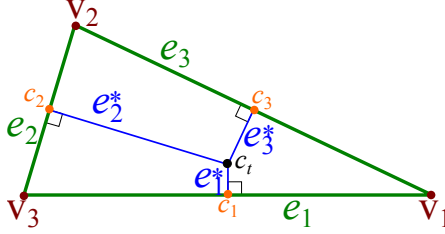


Figure 5: Primal simplices and their circumcentric dual cells in a 2D mesh composed of a single triangle.  $c_i$  is the circumcenter of the primal edge  $e_i$ , for  $i = 1, 2, 3$ , and  $c_t$  is the circumcenter of the triangle.  $e_i^*$  is perpendicular to  $e_i$ .

duals of top-simplices. Indeed it has been shown that if  $c_t$  and the  $c_i$  are not the circumcenters, the diagonal formula (13) does not lead to a convergent Hodge operator [36].

In the next section, we propose an alternative discrete Hodge operator.

### 3 Analytically constructed discrete Hodge

In the sequel, we restrict to the case of a bidimensional mesh in  $\mathbb{R}^2$ . We will fix a Cartesian orthonormal frame and denote  $v_x$  and  $v_y$  the components of a vector  $\vec{v}$  in this frame. In the next subsection, we present the construction of a discrete Hodge on 1-forms. We require that it is exact on locally constant forms.

#### 3.1 Construction in a one-triangle mesh

To simplify, consider an oriented bidimensional mesh composed of a single triangle  $T$ , as in Figure 6. In this figure, the center  $c_i$  of the edge  $e_i$  is an arbitrary point lying on the edge. The center  $c_t$  of the triangle  $T$  is also an arbitrary point inside  $T$ . In the particular case where  $c_i$  is the middle point of  $e_i$  and  $c_t$  is the barycenter (resp. circumcenter, incenter) of  $T$ , the dual mesh is said barycentric (resp. circumcentric, incentric).

Let us denote  $\vec{e}_i$  and  $\vec{e}_i^*$  the vectors representing the oriented edges  $e_i$  and  $e_i^*$  respectively, and

$$\vec{u}_i = \frac{\vec{e}_i}{\|\vec{e}_i\|} \quad \text{and} \quad \vec{u}_i^* = \frac{\vec{e}_i^*}{\|\vec{e}_i^*\|}$$

the corresponding unit vectors. These two vectors are related by a rotation:

$$\begin{pmatrix} u_{ix}^* \\ u_{iy}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \end{pmatrix}$$

where

$$\theta_i = \widehat{(\vec{u}_i, \vec{u}_i^*)} \quad (14)$$

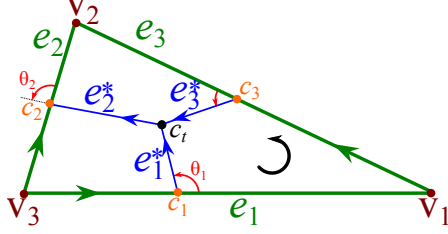


Figure 6: Primal simplices and their arbitrary-centered dual cells in a 2D mesh composed of a single triangle. The  $c_i$ 's and  $c_t$  are respectively arbitrary interior points of the edges  $e_i$ 's and of the triangle. The triangle is oriented counter-clockwise. Arrows indicate the orientations of the primal edges and the induced orientations of dual edges. The angles  $\theta_i$  defined in (14) are drawn in red.

is the angle that they form (see Figure 6).

Consider a differential 1-form

$$\omega = a dx + b dy$$

where  $a$  and  $b$  are scalar functions of the position. Its image by the continuous Hodge star is (see equation (9)):

$$\star\omega = -b dx + a dy.$$

We denote  $\omega_i = \langle \omega, e_i \rangle$  and  $\omega_i^* = \langle \star\omega, e_i^* \rangle$  the values of the corresponding primal and dual cochains. Assume that  $\omega$  is constant inside the triangle. Then

$$\begin{aligned} \omega_i^* &= \int_{e_i^*} \star\omega = \star\omega(u_i^*) |e_i^*| = (-bu_{ix}^* + au_{iy}^*) |e_i^*| \\ &= \left( (au_{ix} + bu_{iy}) \sin \theta_i + (-bu_{ix} + au_{iy}) \cos \theta_i \right) |e_i^*| \\ &= \left( \omega(\vec{u}_i) \sin \theta_i + \omega(-\mathbb{J}\vec{u}_i) \cos \theta_i \right) |e_i^*|, \\ &= \left( \frac{\omega(\vec{e}_i)}{|e_i|} \sin \theta_i + \frac{\omega(-\mathbb{J}\vec{e}_i)}{|\mathbb{J}\vec{e}_i|} \cos \theta_i \right) |e_i^*|, \end{aligned}$$

$\mathbb{J}$  being the skew-symmetric matrix

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Knowing that  $|\mathbb{J}\vec{e}_i| = |\vec{e}_i|$ , we have:

$$\omega_i^* = \frac{|e_i^*|}{|e_i|} \omega_i \sin \theta_i + \frac{|e_i^*|}{|e_i|} \omega(-\mathbb{J}\vec{e}_i) \cos \theta_i. \quad (15)$$

Let's take  $i = 1$ . As soon as the triangle is not degenerate, there exists reals  $a_1^2$  and  $a_1^3$  such that

$$-\mathbb{J}\vec{e}_1 = a_1^2 \vec{e}_2 + a_1^3 \vec{e}_3.$$

So,

$$\omega_1^* = \frac{|e_1^*|}{|e_1|} \omega_1 \sin \theta_1 + \frac{|e_1^*|}{|e_1|} a_1^2 \omega_2 \cos \theta_1 + \frac{|e_1^*|}{|e_1|} a_1^3 \omega_3 \cos \theta_1. \quad (16)$$

Using similar arguments for  $i = 2$  and  $3$ , we get:

$$\begin{bmatrix} \omega_1^* \\ \omega_2^* \\ \omega_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{|e_1^*|}{|e_1|} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{|e_2^*|}{|e_2|} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{|e_3^*|}{|e_3|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta_1 & a_1^2 \cos \theta_1 & a_1^3 \cos \theta_1 \\ a_2^1 \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & a_2^3 \cos \theta_2 \\ a_3^1 \cos \theta_3 & a_3^2 \cos \theta_3 & \sin \theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}.$$

This relation makes the discrete Hodge star operator appear as a product of two matrices. The first one contains ratios of dual and primal volumes. In case of circumcentric dual mesh, the second matrix reduces to the identity matrix and we retrieve the usual diagonal Hodge (13).

Of course, one can rewrite the angles  $\theta_i$  and the coefficients  $a_i^j$  as functions of the  $\vec{e}_i$  and  $\vec{e}_i^*$ . For example,

$$\cos \theta_i = \frac{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i^*}{|e_i| |e_i^*|}, \quad \sin \theta_i = \frac{\vec{e}_i \dot{\times} \vec{e}_i^*}{|e_i| |e_i^*|}, \quad \theta_i \in [0, \pi]$$

where  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  is the inner product of  $\vec{a}$  and  $\vec{b}$ . The dotted cross product is defined as the third component of the usual cross product of the extension of  $\vec{a}$  and  $\vec{b}$  to  $\mathbb{R}^3$ :

$$\vec{a} \dot{\times} \vec{b} = a_x b_y - a_y b_x$$

which can also be considered as the real-valued 2D cross product. Moreover, it is straightforward to show that, for  $i \neq j$ ,

$$a_j^i = \frac{\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k}{\vec{e}_i \dot{\times} \vec{e}_k},$$

where  $k \neq i, j$ . With these relations, the matrix of the Hodge operator acting on discrete primal 1-form is

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\vec{e}_1 \dot{\times} \vec{e}_1^*}{|e_1|^2} & \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1^*}{|e_1|^2} \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3}{\vec{e}_2 \dot{\times} \vec{e}_3} & \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1^*}{|e_1|} \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}{\vec{e}_3 \dot{\times} \vec{e}_2} \\ \frac{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2^*}{|e_2|^2} \frac{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3}{\vec{e}_1 \dot{\times} \vec{e}_3} & \frac{\vec{e}_2 \dot{\times} \vec{e}_2^*}{|e_2|^2} & \frac{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2^*}{|e_2|^2} \frac{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1}{\vec{e}_3 \dot{\times} \vec{e}_1} \\ \frac{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3^*}{|e_3|^2} \frac{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2}{\vec{e}_1 \dot{\times} \vec{e}_2} & \frac{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3^*}{|e_3|^2} \frac{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1}{\vec{e}_2 \dot{\times} \vec{e}_1} & \frac{\vec{e}_3 \dot{\times} \vec{e}_3^*}{|e_3|^2} \end{bmatrix}.$$

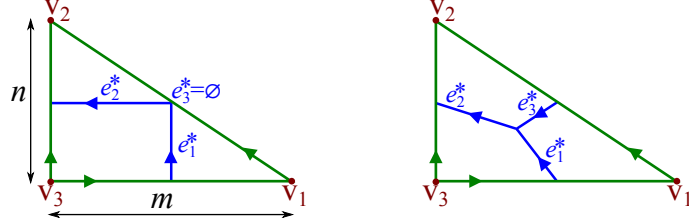


Figure 7: Right triangle with side lengths  $m$  and  $n$ . Left: with a circumcentric dual mesh ( $e_3^*$  has a zero length). Right: with a barycentric dual mesh.

### 3.2 Examples and remarks

As illustration, consider the right triangle presented in Figure 7. The circumcentric dual (left of the figure) is singular because the dual  $e_3^*$  of  $e_3$  is empty and its measure vanishes. This leads to a singular matrix  $H$ , as in the diagonal Hodge. With the barycentric dual (Figure 7, right),  $H$  reduces to the following non-singular matrix:

$$H_{barycenter} = \begin{bmatrix} \frac{n}{3m} & \frac{m}{6n} & 0 \\ \frac{n}{6m} & \frac{m}{3n} & 0 \\ \frac{n(m^2 - n^2)}{6m(m^2 + n^2)} & \frac{m(m^2 - n^2)}{6n(m^2 + n^2)} & \frac{mn}{3(m^2 + n^2)} \end{bmatrix}.$$

In an unit right triangle ( $m = n = 1$ ), with a barycentric and an incentric dual meshes,  $H$  writes:

$$H_{barycenter} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_{incenter} = \frac{1}{4 + 2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

The discrete Hodge operator for 0-forms and for 2-forms are composed of measure ratios as in the diagonal Hodge.

For a general mesh, composed of multiple triangles, an usual assembling permits to deduce the global Hodge matrix. This matrix is sparse. It takes a primal 1-cochain into a dual one. Again due to relation (10), the Hodge operator acting on dual cochains can simply be represented by the inverse of the assembled matrix. However, a full inversion of this matrix is in general expensive. To avoid this cost, an element-wise inversion will be carried out in numerical tests when needed. Moreover, the element-wise inversion maintains the sparsity of the matrix, contrarily to a full inversion. This may significantly reduce the simulation cost for realistic problems. Despite this approximation, we will see in section 4.1 that the newly defined Hodge provides competitive numerical results.

As can be remarked, the new discrete Hodge matrix is not necessarily symmetric. Yet, some authors claim that an Hodge matrix should be symmetric, since

$$\star \omega \wedge \theta = \star \theta \wedge \omega \quad (17)$$

for two arbitrary 1-differential forms  $\omega$  and  $\theta$ ,  $\wedge$  being the wedge product ([35, 42]). Combined to a choice of volume form, this relation represents an inner product. However, relation (17) does not imply that the discrete Hodge has to be symmetric. Likewise, a symmetry of the matrix of the Hodge operator does not help in verifying property (17). It is the combination of the discrete Hodge matrix with the discrete wedge operator between two discrete 1-forms which should be symmetric. It may also be advocated that a symmetric Hodge matrix would be more advantageous because it would result in a symmetric problem when discretizing a symmetric operator as in (17). This argument is however not convincing since the discrete wedge product may destroy the symmetry.

By definition, the symmetry of the Hodge operator matrix alone would mean, in a single-triangle mesh, that

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \cdot \left( H \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \right) = \left( H \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad (18)$$

for any pair  $\omega$  and  $\theta$  of primal 1-cochains, where the dot symbol  $(\cdot)$  designates the Euclidean scalar product of  $\mathbb{R}^3$ . Not only the scalar product between cochains has still to be given a sense but also there is no obvious reason to require condition (18).

In fact, the symmetry requirement may be justified in a finite element approach as proposed by Hiptmair in [42] but not in DEC. Indeed, in a finite element framework, it is the mass matrix which is called Hodge operator. Yet, this mass matrix represents, not the Hodge operator, but inner products such as (17) integrated over elements. Note also that, as recognized in [35, 43, 44], the symmetry restriction seems to be too strong in DEC context.

Which center gives more accurate results for non-constant 1-forms depends on the form. For instance, consider the differential 1-form

$$\omega = (x - y)(dx - dy).$$

Table 1 lists the error of the discrete Hodge operator  $H$  on  $\omega$ ,  $H$  being either the barycentric or the incentric Hodge. The error is defined as the  $\ell^2$ -norm of the dual cochain  $H(\omega_K) - (\star\omega)_{\star K}$ . Two computations are carried out. The first one is on a mesh made up of the single unit triangle, having a mean edge length 1.1381. The second computation is on a square meshed with 722 right and isosceles triangles (similar to Figure 8, right) where the mean edge length is  $5.6965 \cdot 10^{-2}$ . Table 1 shows that, with the considered form, the barycenter-based Hodge is more precise than the incentric-based one on the single-triangle mesh. The same conclusion can be drawn in the discretized square. However, in the latter case, the error difference is smaller. For the differential form

$$\omega = (x + y)(dx + dy),$$



the situation is reversed. Indeed, Table 1 shows that for this form, the incenter Hodge is about 1.94 times as accurate as the barycentric one, as well on the single-triangle mesh as in the right-triangularized mesh.

Differential form	Single triangle		Right mesh	
	Barycentric	Incenter	Barycentric	Incenter
$(x - y)(dx - dy)$	0.2946	0.3232	$1.5243 \cdot 10^{-2}$	$1.5715 \cdot 10^{-2}$
$(x + y)(dx + dy)$	0.0589	0.0303	$6.6882 \cdot 10^{-4}$	$3.4424 \cdot 10^{-4}$

Table 1:  $\ell^2$ -norm of the error of the discrete Hodge operators on the unit right triangle and on a right-triangularized square with 20 points in each direction

This very simple test shows that it is not easy to predict which center will give the best results, in terms of precision. Moreover, in more concrete problems, there may be other constraints than the accuracy to account for. The freedom to choose the center makes it conceivable to carry out an optimization of the discrete Hodge operator.

Lastly, let us remark that, in the previous development, there is no restriction on the position of the centers of the simplices, as long as the dual mesh is not degenerate. For example, the center  $c_t$  may be outside the triangle, or even outside the domain in the case of multiple-triangle mesh.

In the following section, numerical experiments on (linear) Poisson equation and applications to (non-linear) isothermal and anisothermal fluid flow problems are presented. We will in particular focus on the convergence with the circumcenter-, the barycenter- and the incenter-based Hodges on different types of mesh.

## 4 Numerical results

We begin with numerical tests on Poisson problem.

### 4.1 Poisson equation

In this section, we deal with Poisson equation with Dirichlet boundary conditions in a flat bidimensional domain  $M$ :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } M, \\ u = g & \text{on } \partial M, \end{cases} \quad (19)$$

where  $f$ ,  $g$  and the unknown  $u$  are scalar functions. In exterior calculus formulation, this equation writes

$$\begin{cases} \star d \star du = f & \text{in } M, \\ u = g & \text{on } \partial M. \end{cases} \quad (20)$$

In the tests,  $M$  is the unit square. Two meshes are considered. The first one is well-centered (see Figure 8, left) and based on a pattern proposed in [24]. It will be called “acute mesh”. On this mesh, the usual diagonal Hodge and the new Hodge operator based on barycentric and on incentric duals will be compared. The second mesh, called “right mesh” herein, is more natural and is made of right and isocèle triangles (see Figure 8, right). As the diagonal Hodge cannot be defined on it, the new Hodge operator with barycentric and incentric duals will be used.

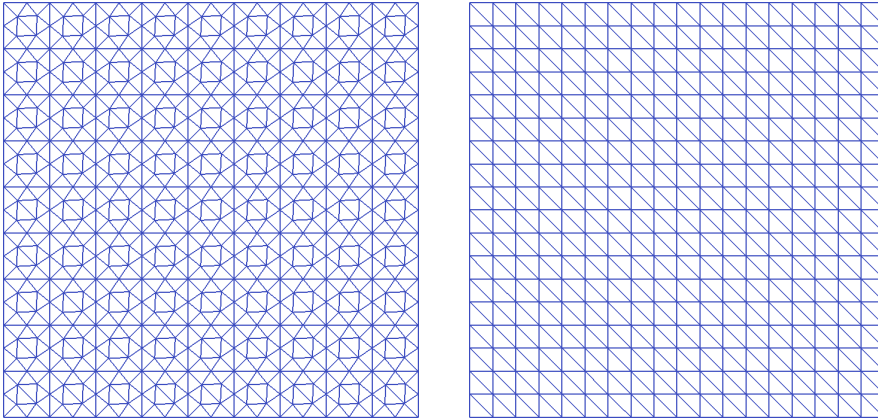


Figure 8: Typical acute and right triangulations of the unit square

The variable  $u$  is placed, as cochain, on dual vertices  $\sigma^* \in K_2^*$ . This means that the unknown is the array  $(\langle u, \sigma^* \rangle)_{\sigma^* \in K_2^*}$ . A consequence is that  $du$ , in equation (20), is discretized into a dual 1-cochain and the right-most  $\star$  operator in that equation is then represented by the inverse of the assembled Hodge matrix. As mentioned, the inversion is done element-wise numerically.

As precision indicator, we consider the relative error

$$E = \frac{\|u - u_{exact}\|_{K_2^*}}{\|u_{exact}\|_{K_2^*}} \quad (21)$$

where  $\|v\|_{K_2^*}$  designates a discrete norm of a dual 0-cochain  $v$ , defined as follows:

$$\|v\|_{K_2^*}^2 := \sum_{\sigma^* \in K_2^*} \langle v, \sigma^* \rangle^2 |\sigma^*|. \quad (22)$$

An object-oriented Fortran code was designed for the simulations. A direct LU solver is selected for the resolution. In a first test, the right-hand side functions  $f$  and  $g$  are chosen such that the exact solution is the quadratic function

$$u_{exact} = x^2 + y^2.$$

Figure 9 shows the evolution of the relative error  $E$  with the mean edge length  $\Delta x_{mean}$ . As can be seen in Figure 9a, barycentric and incentric dual meshes

provide better results than the diagonal Hodge, despite the element-wise inversion needed in the discretized Laplace operator. Note that many triangles are close to right. However, the convergence rates are almost the same with the three types of dual mesh. The left part of Table 2 reveals an almost quadratic convergence.

	Acute mesh	Right mesh
Circumcentric dual	1.995	–
Barycentric dual	1.985	1.923
Incentric dual	1.992	1.921

Table 2: Poisson equation with  $u_{exact} = x^2 + y^2$ : convergence rate

With the right mesh, the results are less accurate but are still very acceptable as can be observed in Figure 9b. With the barycentric dual, the relative error is about  $7.55 \cdot 10^{-5}$  when  $\Delta x_{mean} \simeq 2.3 \cdot 10^{-2}$  (whereas it was  $2.28 \cdot 10^{-5}$  with an acute mesh). The difference between the barycentric and the incentric duals are more pronounced. However, the convergence rates are similar, as can be stated in Table 2, right.

In a second test, the exact solution is

$$u_{exact} = \sin(\pi x) \sinh(\pi y),$$

such that the right-hand side  $f$  vanishes. Figure 10a shows that, with the acute mesh, the three types of dual present close precisions. The barycentric solution is a slightly more accurate with the right mesh whereas the incentric solution has clearly lost precision. They have however almost the same convergence rate, as can be seen in Table 3.

	Acute mesh	Right mesh
Circumcentric dual	1.975	–
Barycentric dual	1.979	1.809
Incentric dual	1.982	1.840

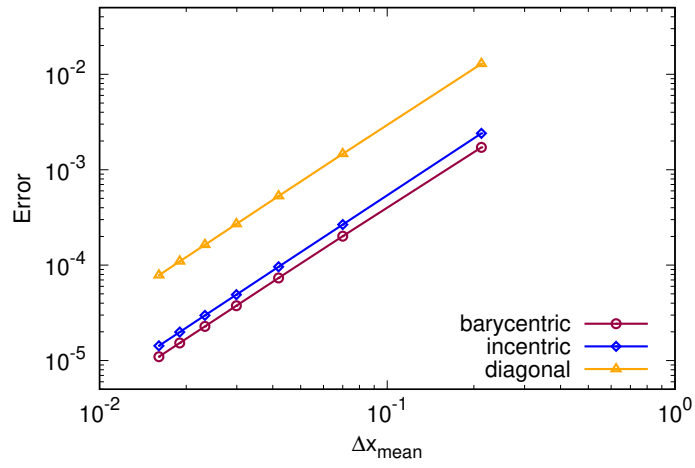
Table 3: Poisson equation with  $u_{exact} = \sin(\pi x) \sinh(\pi y)$ : convergence rate

From these two experiments, it is obvious that when the mesh is well-centered, one cannot predict if the diagonal Hodge is more precise than other discrete Hodge operators. It depends on the solution. By contrast, the barycentric dual gave better accuracy than the incentric dual.

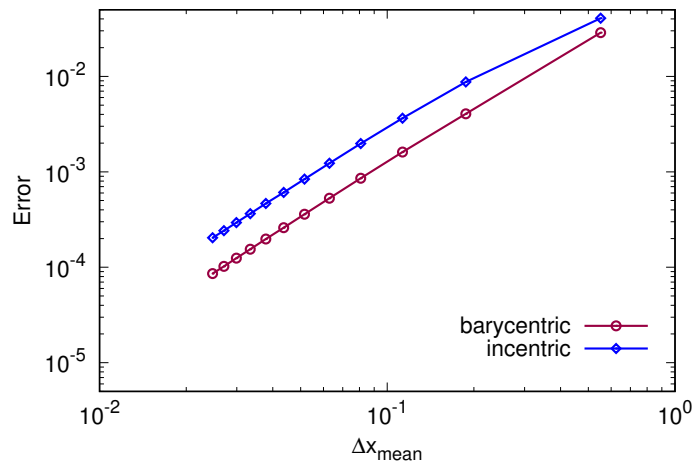
In the previous tests, the equation is linear. In the next subsections, tests on non-linear systems in fluid dynamics domain are presented.

## 4.2 Incompressible fluid flow

Consider an incompressible Newtonian fluid flow of density  $\rho$  and kinematic viscosity  $\nu$  in a bidimensional domain. The evolution of the velocity  $u$  and the

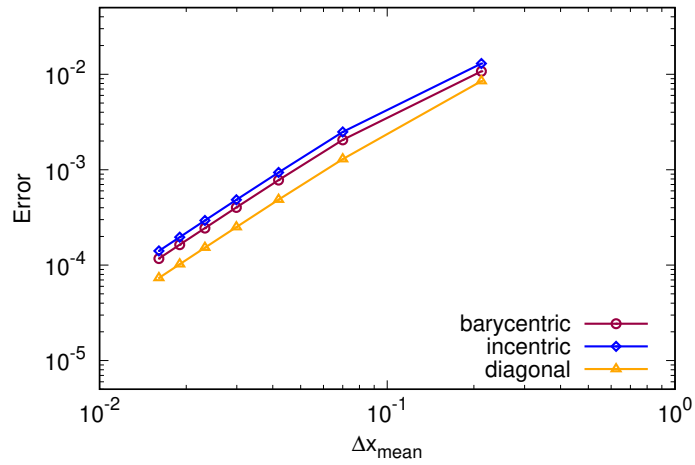


(a) Acute mesh

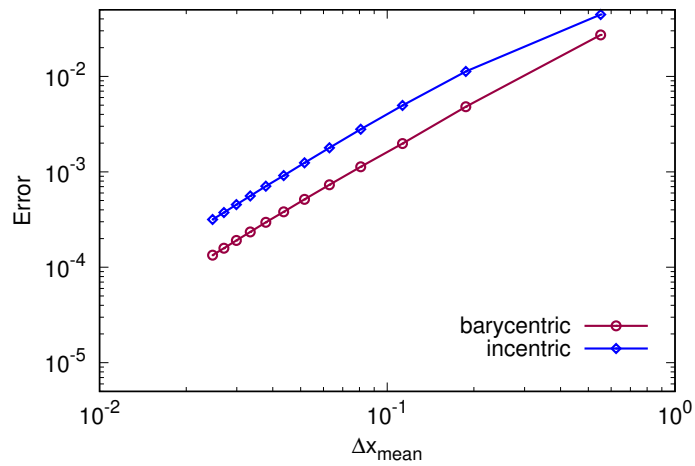


(b) Right mesh

Figure 9: Poisson equation with  $u_{\text{exact}} = x^2 + y^2$ : error evolution



(a) Acute mesh



(b) Right mesh

Figure 10: Poisson equation with  $u_{\text{exact}} = \sin(\pi x) \sinh(\pi x)$ : error evolution

pressure  $p$  is governed by the Navier-Stokes equations:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u + \frac{1}{\rho} \text{grad } p - \nu \Delta u = 0, \\ \text{div } u = 0 \end{cases} \quad (23)$$

To ensure a divergence-free velocity, a stream function formulation is used. Moreover, to get rid of the pressure, a curl is applied on the momentum equation. The resulting equation is rewritten in exterior calculus formulation and discretized as in [19], (see also equations (26)). The discretized stream function is placed on primal vertices and, consequently, velocity is discretized into a dual 1-cochain.

#### 4.2.1 Poiseuille flow

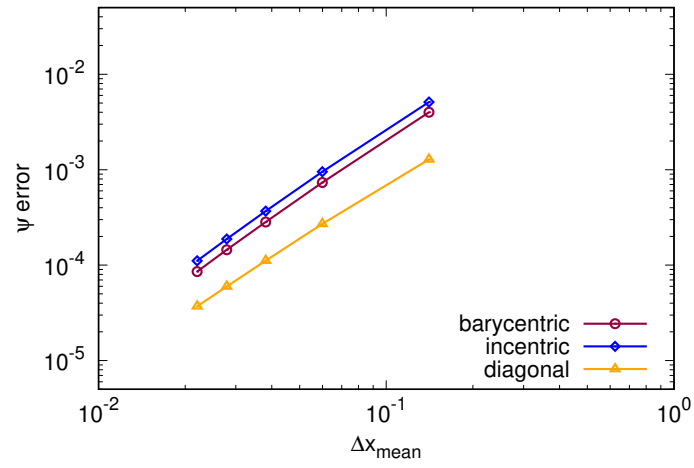
We consider a Dirichlet problem in the unit square with a Poiseuille flow as exact solution. The accuracy on the stream function  $\psi$  and on the velocity  $u$  is measured with the relative errors defined similarly as in (21)-(22) but with the appropriate simplex/cell set in place of  $K_2^*$ .

The numerical initial flow is set to zero. The simulation is run until the flow stabilizes. The convergence of the principal variable  $\psi$  with the mean edge length is presented in Figure 11. It shows a higher precision of the diagonal Hodge in the acute triangulation in the given range of  $\Delta x_{mean}$ , but a slightly higher speed of convergence with the new Hodge with barycentric and incentric duals. It is confirmed by the convergence rates in Table 4, second column. For the velocity however, the circumcentric dual has both a higher precision and a higher convergence speed, as can be observed in Figure 12a and in the third column of Table 4. Note that a first order interpolation is used for the reconstruction of the approximate velocity field from the discrete 1-form  $\star d\psi$ .

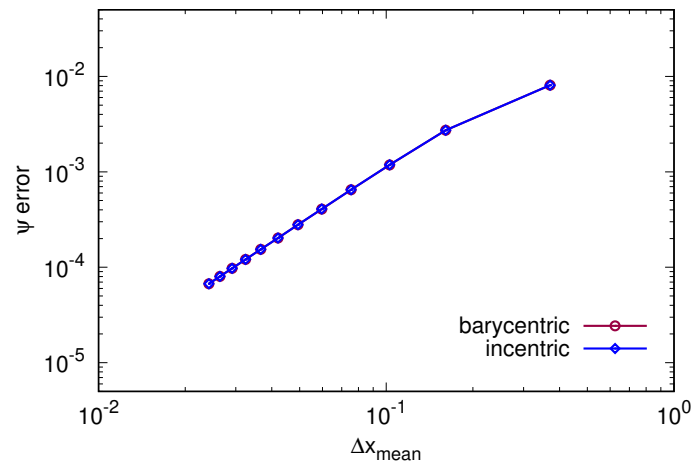
	Acute mesh		Right mesh	
	Stream function	Velocity	Stream function	Velocity
Circumcentric	2.006	1.421	–	–
Barycentric	2.184	1.106	1.989	1.553
Incentric	2.185	1.096	1.989	1.539

Table 4: Poiseuille flow: convergence rates

In the case of the right triangulation, the barycentric and the incentric duals provide similar precisions, as well for the stream function than for the velocity. For  $\psi$ , the errors are visually indistinguishable in Figure 11b. For the velocity, the convergence rate is about 1.5, which is higher than the convergence rate of the circumcentric dual in the acute triangulation case (see Table 4, last column).

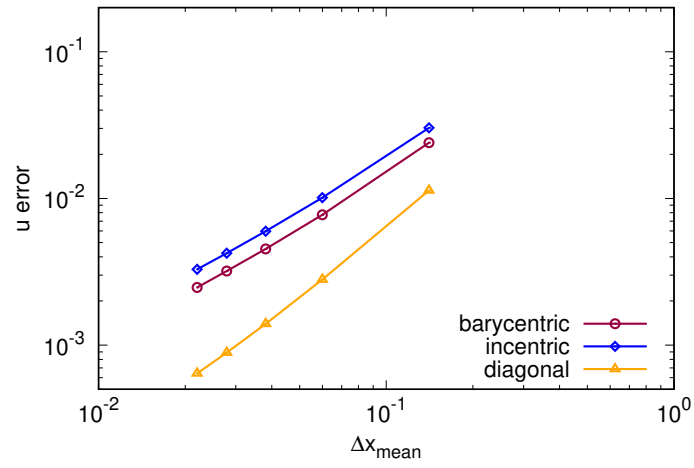


(a) Acute mesh

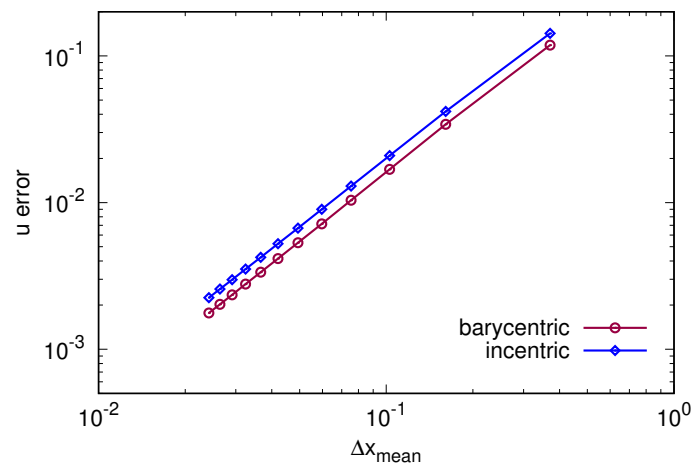


(b) Right mesh

Figure 11: Poiseuille flow: error on  $\psi$



(a) Acute mesh



(b) Right mesh

Figure 12: Poiseuille flow: error on  $u$



### 4.2.2 Taylor-Green vortex

We now simulate a steady Taylor-Green vortex corresponding to the vector field

$$u = \begin{pmatrix} -\cos x \sin y \\ \sin x \cos y \end{pmatrix} \quad (24)$$

in the domain  $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ . The kinematic viscosity and the density are set to 1. As previously, the numerical initial flow is set to zero and the simulation is run until the flow stabilizes.

The error on  $\psi$  is plotted in Figure 13 against the typical edge length. It shows that the decrease of the error is the same for the three types of dual mesh, as well in the acute mesh as in the right mesh. The convergence rate is close to 2.0 in all cases, as reported in Table 5.

	Acute mesh		Right mesh	
	Stream function	Velocity	Stream function	Velocity
Circumcentric	1.996	1.187	–	–
Barycentric	2.065	1.130	2.018	1.735
Incentric	2.088	1.118	2.067	1.736

Table 5: Taylor-Green vortex: convergence rates

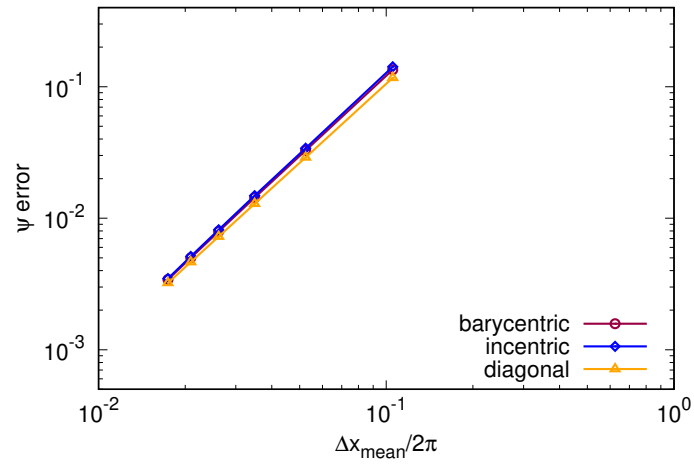
For the velocity, differences can be observed between the acute and the right meshes. Indeed, it can be seen in Figure 14 that the decrease is faster in the right mesh. The convergence rate is about 1.74 (for both barycentric and incentric duals) while it is close to 1.14 in the acute mesh (for the three dual types), as can be seen in Table 5.

In the next test, we deal with an anisothermal fluid flow.

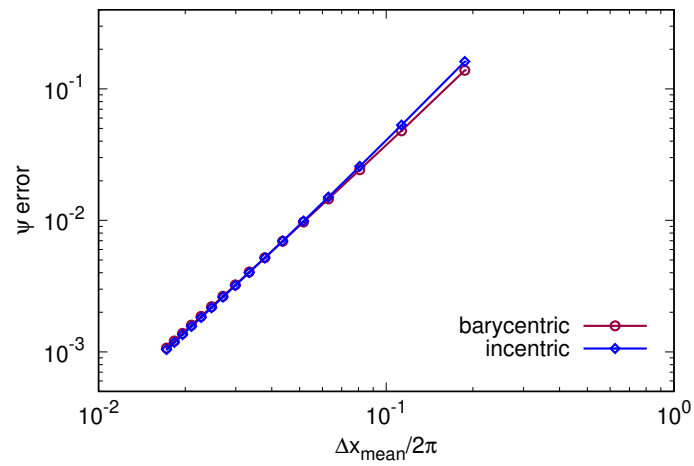
### 4.3 Anisothermal fluid flow

In the case of anisothermal fluid flow with thermal expansion coefficient  $\beta$  and thermal diffusivity  $\kappa$ , and in the limit of the Boussinesq approximation, the evolution of the velocity, pressure and temperature  $\theta$  is governed by the equations:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u \otimes u) + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - \nu \Delta u + \beta g \theta e_y = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \operatorname{div}(u \theta) - \kappa \Delta \theta = 0 \end{cases} \quad (25)$$

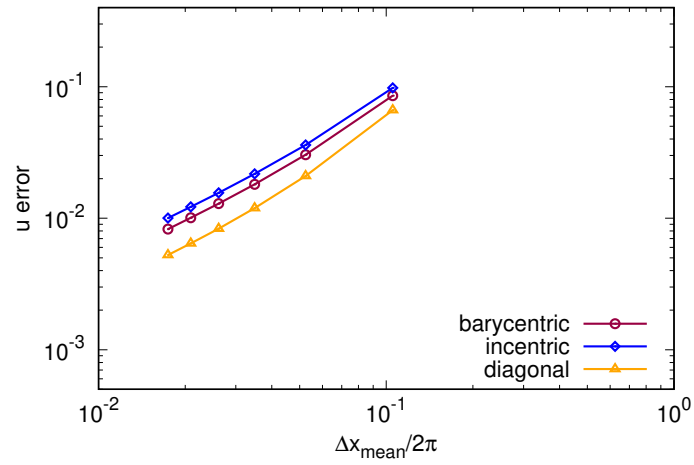


(a) Acute mesh

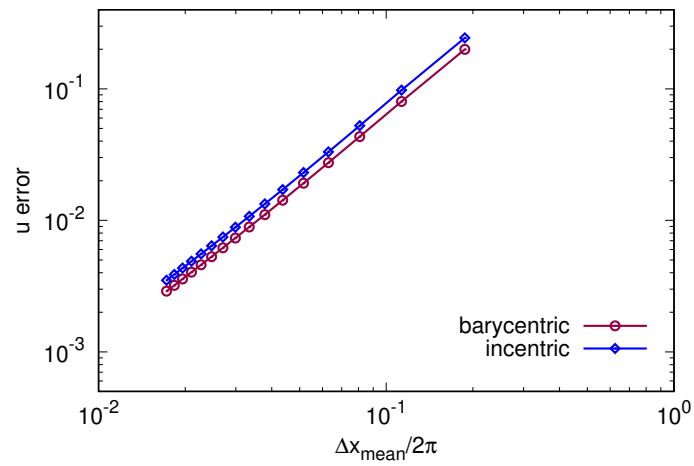


(b) Right mesh

Figure 13: Taylor-Green vortex: error on  $\psi$



(a) Acute mesh



(b) Right mesh

Figure 14: Taylor-Green vortex: error on  $u$

where  $-ge_y$  is the gravity acceleration vector. Let  $\omega = u^b$ . In exterior calculus framework, equation (25) writes

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \iota_u d\omega + \frac{1}{\rho} d\bar{p} + \nu \star d \star d\omega + \beta g \theta dy = 0, \\ \star d \star \omega = 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \star d \star (\theta \omega) - \kappa \star d \star d\theta = 0. \end{cases} \quad (26)$$

In (26),  $\iota$  is the interior product and  $\bar{p} = p + \frac{1}{2}\rho u^2$  is the dynamic pressure. The exterior derivative operator  $d$  is applied to the first equation of (26) to get rid of the dynamic pressure. A stream-function formulation is used. This means that the equations are solved in the stream function  $\psi$  such that  $\star \omega = d\psi$  instead of  $\omega$ , and in the temperature  $\theta$ . The time discretization scheme is similar to that in [3], page 55.

Assume that  $\nu \neq \kappa$ . We choose the following traveling wave solution as reference:

$$\begin{cases} u_x = u_1 e^{\lambda \xi / \nu} + \frac{\kappa^2 \beta a b g}{(c+w)^2 (\kappa - \nu)} \theta_1 e^{\lambda \xi / \kappa} \\ u_y = \frac{w - a u_x}{b}, \\ p = -\frac{\rho \beta b g \kappa \theta_1}{c+w} e^{\lambda \xi / \kappa} \\ \theta = \theta_1 e^{\lambda \xi / \kappa} \end{cases} \quad (27)$$

where the traveling wave variable is

$$\xi = ax + by + ct \quad (28)$$

and  $a, b, c, w, u_1, \lambda$  and  $\theta_1$  are constants such that  $b \neq 0, w \neq -c$  and  $\lambda = (c+w)/(a^2 + b^2)$ . The space domain is  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . The fluid is characterized by  $\rho = 1, \nu = 0.2, \kappa = 0.1$  and  $\beta = 1$ . The gravity acceleration is set to  $g = 10$ . The values of the different constants in the reference solution are set to  $a = b = 1, c = -1, w = 2, \theta_1 = e^{-5}$  and  $u_1 = 2e^{-5}$ . The domain is discretized with a right triangulation (Figure 8, right). The mean edge length is  $1.894 \cdot 10^{-2}$ . The numerical simulation is carried out until time  $T$  such that  $|\lambda c|T/\kappa = 1$ .

Figure 15 reproduces the relative errors on the stream function along  $x$ -axis. Even if this figure presents some weird plateaux due to lack of resolution (and some machine round-off), it clearly shows a good precision with both dual meshes. At worst, the error is 0.025 percent of the norm of the exact stream function along the axis. The mean error over the whole domain is still smaller.

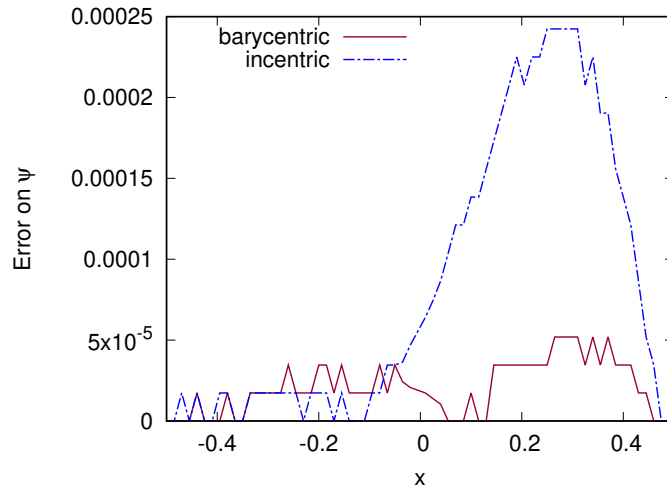


Figure 15: Traveling wave. Profile of the relative error on the stream function along  $y = 0$  and at  $t = T$

Indeed, as listed in Table 6, the overall (root mean square over the whole domain) error is only 0.008875 percent of the norm of the exact solution with the incentric dual and 3.3 times smaller with the barycentric one.

Dual mesh	Stream function	Velocity	Temperature
Barycentric	$2.651 \cdot 10^{-5}$	$7.270 \cdot 10^{-5}$	$5.529 \cdot 10^{-3}$
Incentric	$8.875 \cdot 10^{-5}$	$2.132 \cdot 10^{-4}$	$5.589 \cdot 10^{-3}$

Table 6: Traveling wave. Mean relative error

Since the velocity is computed a posteriori from the stream function, the same conclusion can be drawn on the error. Indeed, the barycentric dual is more precise along the  $x$ -axis as shown in Figure 16. It is also more precise in mean in the whole domain, as can be checked in Table 6.

By contrast, for the temperature, the two dual meshes have a similar precision. The error profiles along  $x$ -axis, presented in Figure 17, have the same trend. The overall errors are almost equal as can be seen in the last column of Table 6. In mean, the relative error is about 0.56 percent. These results reveals a good precision of the new discrete Hodge star on a heat transfer problem, with different choices of dual meshes. Convergence rates will be analyzed in the next section.

#### 4.4 Non-structured meshes

To ease the lecture of the article, only two types of primal mesh were considered in the above tests. The first ones were well-centered meshes such that the diago-

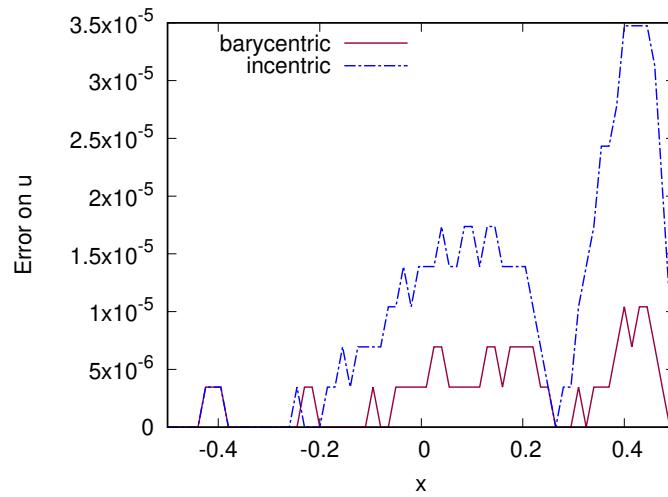


Figure 16: Traveling wave. Profile of the relative error on the horizontal velocity along  $y = 0$  and at  $t = T$

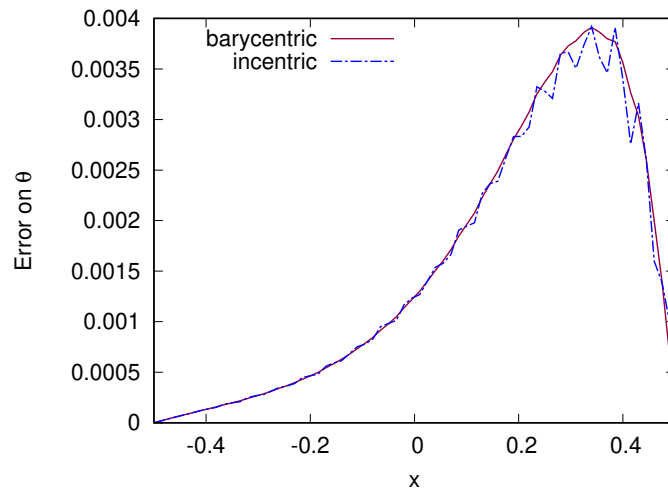


Figure 17: Traveling wave. Profile of the relative error on the temperature along  $y = 0$  and at  $t = T$

nal Hodge can be used. The second type of mesh was composed of right meshes. These meshes have structured patterns. In this following section, we show that the constructed Hodge gives also satisfactory results on various non-structured and non well-centered meshes. To simplify, only results on barycentric duals are presented.

We set  $\nu = \kappa$  and choose the following exact solution:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = \frac{\beta abg\theta_1}{(c+w)(a^2+b^2)}(x_0 - \xi)e^{\lambda\xi/\kappa} \\ u_y = \frac{w - au_1}{b}, \\ p = -\frac{\rho\beta bg\kappa\theta_1}{c+w}e^{\lambda\xi/\kappa} \\ \theta = \theta_1 e^{\lambda\xi/\kappa} \end{array} \right. \quad (29)$$

where, as before,  $\xi = ax + by + ct$  is the traveling wave variable. For the simulation, the fluid characteristics are  $\rho = 1$ ,  $g = 10$ ,  $\nu = \kappa = 0.1$ ,  $\beta = 1$ . We choose  $a = b = 1$ ,  $c = -1$ ,  $x_0 = \frac{1}{2}$  and  $w = 0$ . The spatial domain is  $[0, 1] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .

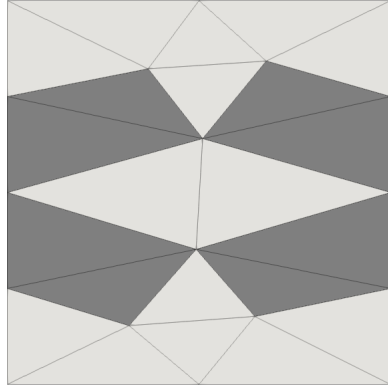
A first test is carried out on the five meshes shown in Figure 18. These meshes are increasingly fine, but are all unstructured, non well-centered and non-Delaunay. They have approximately 40 percent of non-Delaunay triangles. Here, a triangle is said non-Delaunay if its circumcircle contains other nodes than its vertices. They are darkened in the figures. Note that a non-Delaunay mesh is always non well-centered [27].

Figure 19 shows the relative overall errors on the stream function and on the temperature with the five meshes. As can be remarked, the error decreases with the mean edge length. The decrease rates, which are reported in Table 7, is about 1.3690 for  $\psi$  and 1.1430 for  $\theta$ .

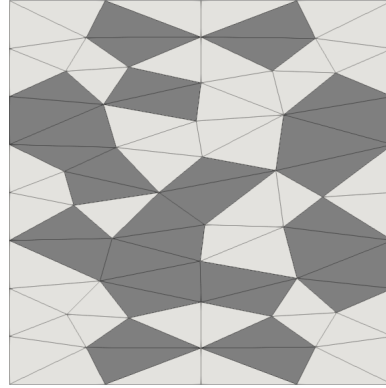
	Stream function	Temperature
Convergence rate	1.3690	1.1430

Table 7: Unstructured meshes. Convergence rates of the stream function and the temperature

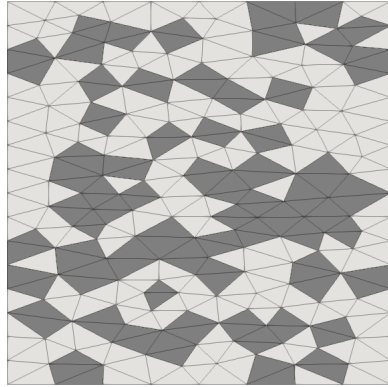
The relative error profiles on the horizontal velocity, the stream function and the temperature along the  $x$ -axis are plotted on Figure 20. For simplicity, only the results with the finest mesh, that is mesh (e) of Figure 18, are shown. The mean edge length in this mesh is  $\Delta x_{mean} = 2.285 \cdot 10^{-2}$ . Figure 20 shows that the errors along the axis remains very small compared to the norm of the exact solutions. The overall errors are recorded in Table 8. As can be stated, the error on the velocity is about 2.316 percent of the norm of the exact solution,



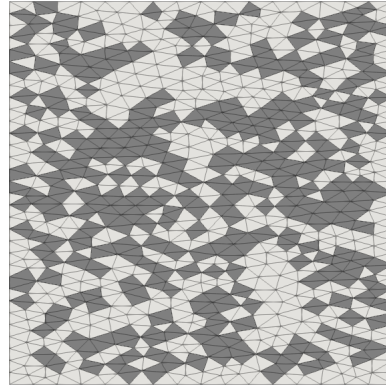
(a)  $\Delta x_{mean} = 0.35620$



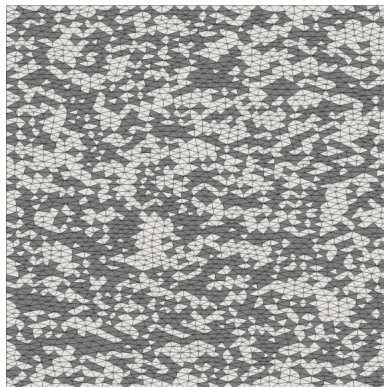
(b)  $\Delta x_{mean} = 0.18510$



(c)  $\Delta x_{mean} = 0.09093$



(d)  $\Delta x_{mean} = 0.04593$



(e)  $\Delta x_{mean} = 0.02285$

Figure 18: Unstructured meshes with respectively 36.36%, 40.69%, 39.41%, 43.46% and 44.20% of non-Delaunay triangles



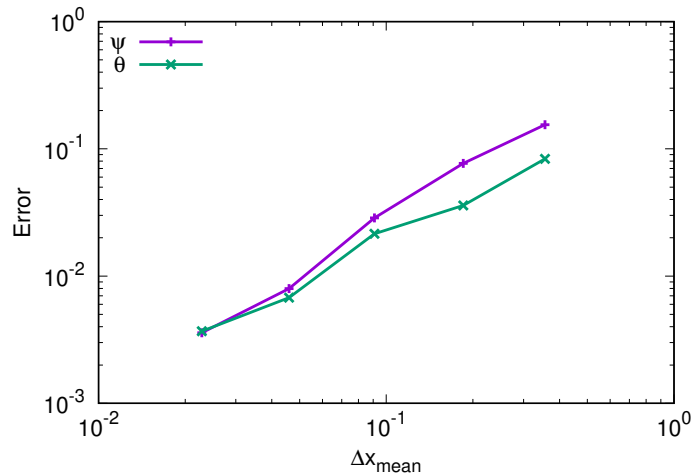


Figure 19: Unstructured meshes. Convergence of the stream function and the temperature

whereas the error on the stream function and on the temperature are less than 0.4 percent.

	Stream function	Temperature	Velocity
Relative error	$3.581 \cdot 10^{-3}$	$3.682 \cdot 10^{-3}$	$2.316 \cdot 10^{-2}$

Table 8: Relative errors on mesh (e) of Table 18

The meshes used for the previous results are unstructured and highly non-Delaunay. However, they are rather regular in the sense that the triangles have comparable areas and the edges have comparable lengths. In a last test, an analysis on non-Delaunay meshes with some very-badly-shaped triangles are carried out. These meshes are obtained from Delaunay meshes generated by Gmsh [45], of which some random vertices are moved, in order to obtain a prescribed ratio of non-Delaunay triangles. Contrarily to the distortion procedure in [29], the non-Delaunay triangles are not necessarily pairwise.

Three sets of four increasingly fine meshes are used. In each set, the meshes count respectively 40, 184, 676 and 2658 triangles. The four meshes in the first set comprise approximately 15 percent of non-Delaunay triangles. They are presented in Figure 21. In the second set, the ratio of non-Delaunay triangles is about 25 percent, whereas in the last set, 50 percent of the triangles are non-Delaunay. The meshes in the second set are plotted in Figure 22 and the third set can be seen in Figure 23. The mean edge lengths in the three sets range from  $2.546 \cdot 10^{-1}$  to  $3.066 \cdot 10^{-2}$ . It can be remarked in Figures 21 to 23 that the triangles have irregular shapes. Many of them have an angle close to

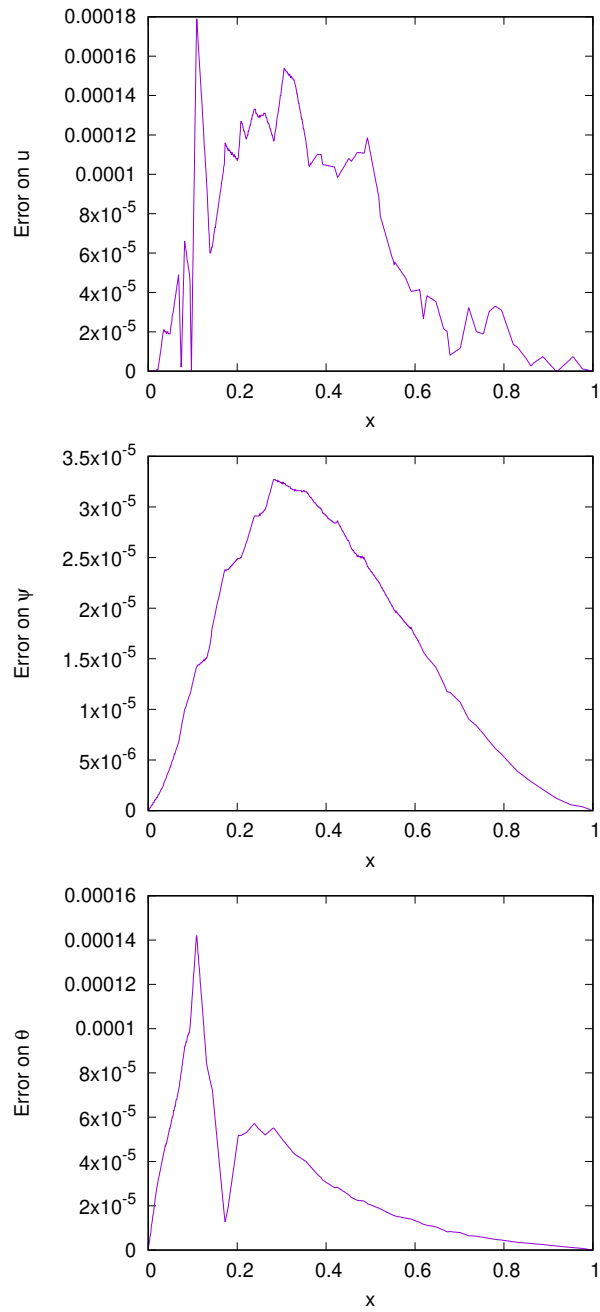


Figure 20: Relative error on mesh (e) of Table 18

180 degrees and the area of the triangles varies very significantly. For instance, the minimum triangle area of mesh (d) in Figure 22 is  $1.962 \cdot 10^{-7}$  whereas the maximum is  $2.228 \cdot 10^{-3}$ , that is more than  $10^4$  times as high.

For all of these meshes, the computation runs without any particular complication. The errors decrease with the mean edge length. Figure 24 reports the evolution of the error on the stream function and on the temperature with the three sets of meshes. They both show a good convergence. For the first set of meshes, the convergence is close to second order for  $\psi$  and is at a rate of 1.5159 for  $\theta$ , as listed on Table 9. For the 25% non-Delaunay meshes, the convergence rates are slightly smaller but remain very interesting. They are 1.6729 for  $\psi$  and 1.2154 for  $\theta$ . For the set of 50% non-Delaunay meshes,  $\psi$  has a similar convergence rate as in the second set. For the temperature, the result is less satisfying since the convergence rate is smaller than 1.

	Stream function	Temperature
15% non-Delaunay meshes	1.9005	1.5159
25% non-Delaunay meshes	1.6729	1.2154
50% non-Delaunay meshes	1.6591	0.8660

Table 9: Convergence rate

The values in Table 9 are plotted in Figure 25 which presents visually the evolution of the convergence rate with the mesh quality. This figure shows that the convergence rate decreases less rapidly than the rate of non-Delaunay triangles.

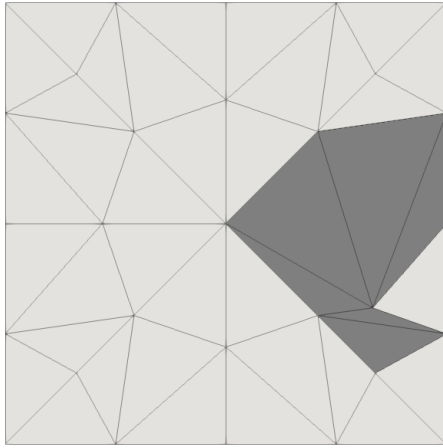
## 5 Conclusion

We proposed a new construction of discrete Hodge operator in the context of DEC. It requires neither a well-centered mesh nor a circumcentric dual as with the diagonal Hodge. It also does not require a barycentric dual as in the geometric Hodge. The new Hodge is exact for piecewise constant forms, whichever interior points are chosen as centers.

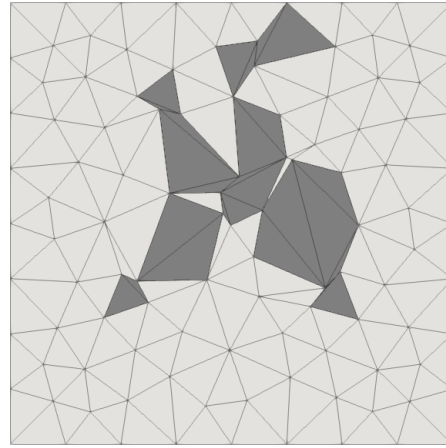
As shown by experiments with Poisson's equation, even in a well-centered mesh, the popular diagonal Hodge build on an orthogonal dual does not always give more accurate results than the new discrete Hodge. Anyway, the convergence rates are very close. Next, the new discrete Hodge competes well with the diagonal Hodge, in terms of convergence rate, in the resolution of the non-linear Navier-Stokes equations.

The numerical tests in sections 4.3 and 4.4 showed the ability of DEC, and of the new discrete Hodge in particular, to solve problems involving thermal transfer.

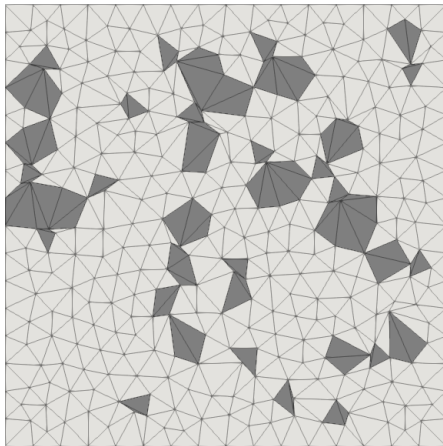
Tests on various type of meshes were carried out. Structured acute (well-centered) meshes and right meshes were chosen in sections 4.1 to 4.3. Unstructured but rather regular meshes, containing about 40 percent of non-Delaunay



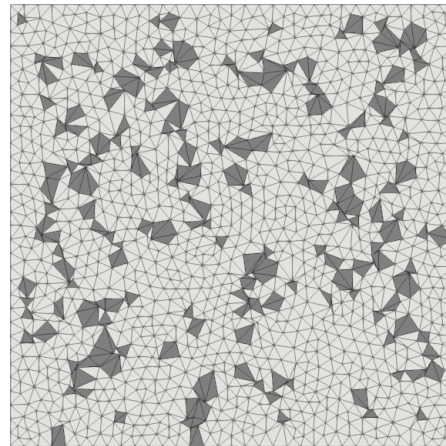
(a)  $\Delta x_{mean} = 0.2546$



(b)  $\Delta x_{mean} = 0.1167$

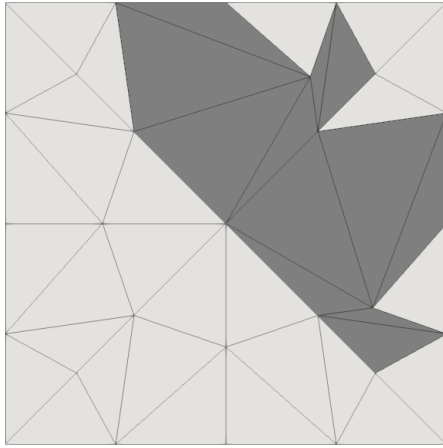


(c)  $\Delta x_{mean} = 0.0609$

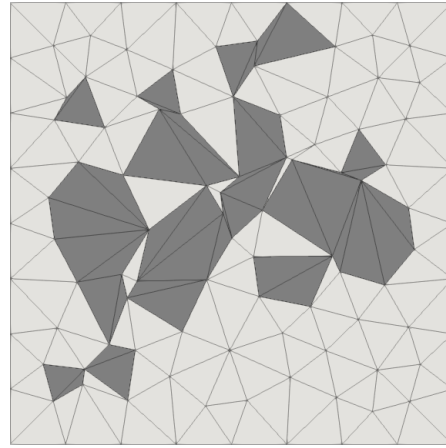


(d)  $\Delta x_{mean} = 0.0312$

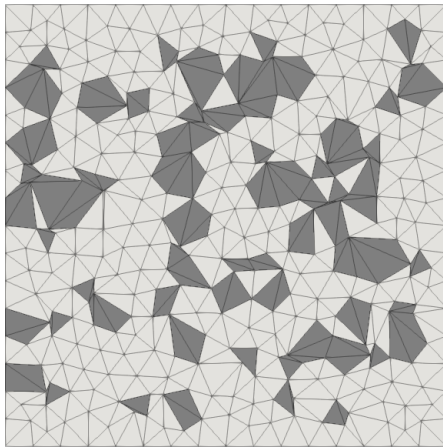
Figure 21: Set of meshes with 15% of non-Delaunay triangles



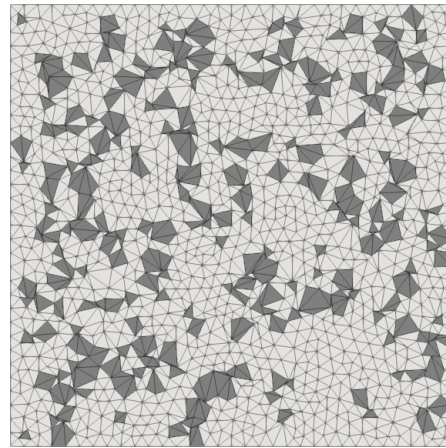
(a)  $\Delta x_{mean} = 0.2556$



(b)  $\Delta x_{mean} = 0.1186$



(c)  $\Delta x_{mean} = 0.0618$

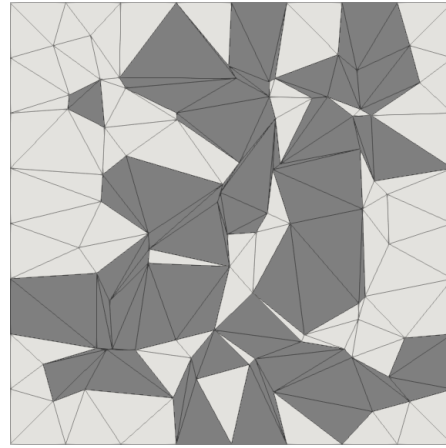


(d)  $\Delta x_{mean} = 0.0307$

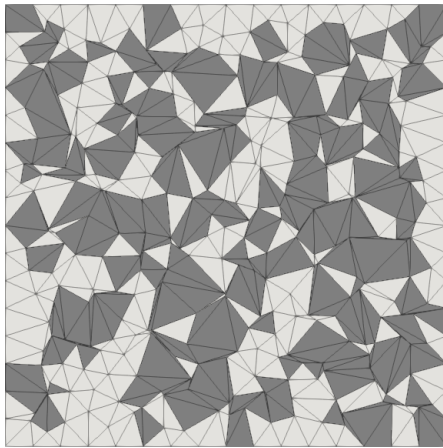
Figure 22: Set of meshes with 25% of non-Delaunay triangles



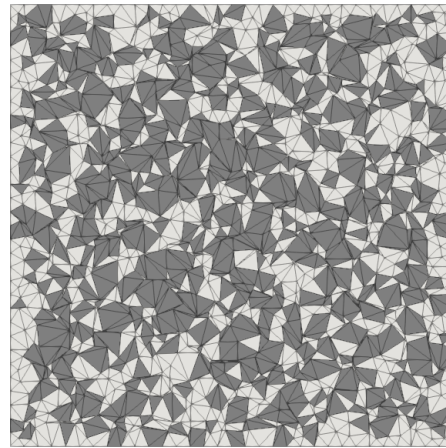
(a)  $\Delta x_{mean} = 0.2682$



(b)  $\Delta x_{mean} = 0.1265$



(c)  $\Delta x_{mean} = 0.0650$



(d)  $\Delta x_{mean} = 0.0328$

Figure 23: Set of meshes with 50% of non-Delaunay triangles

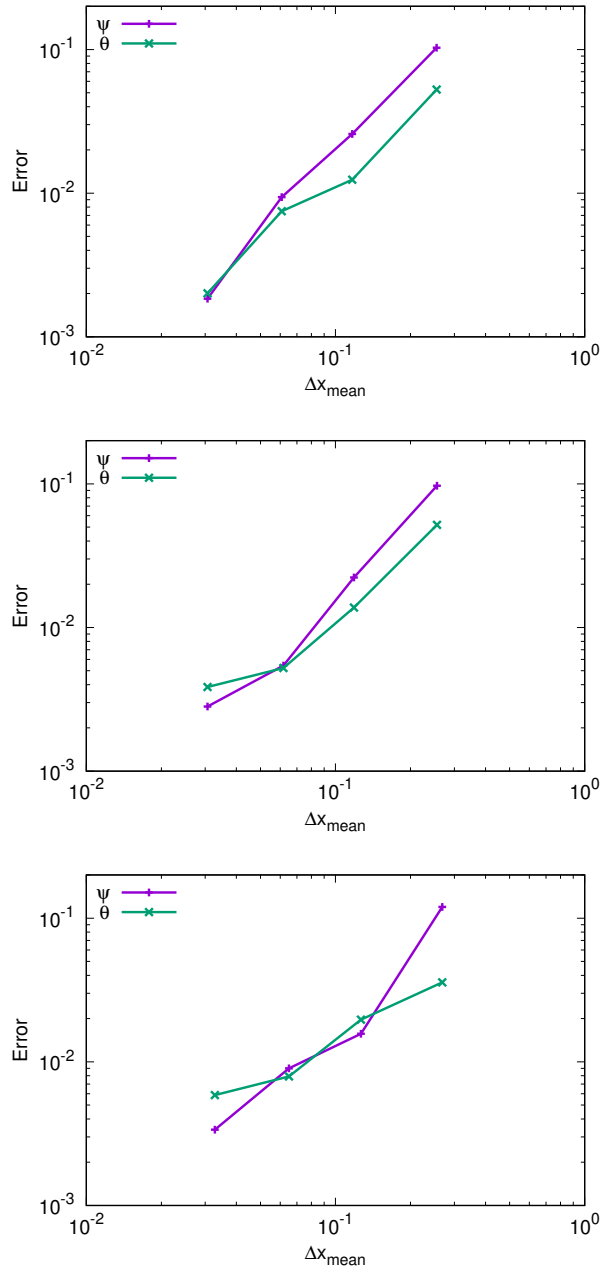


Figure 24: Convergence of the stream function and of the temperature. From top to bottom: with the first set (Figure 21), the second set (Figure 22) and the third set (Figure 23) of meshes

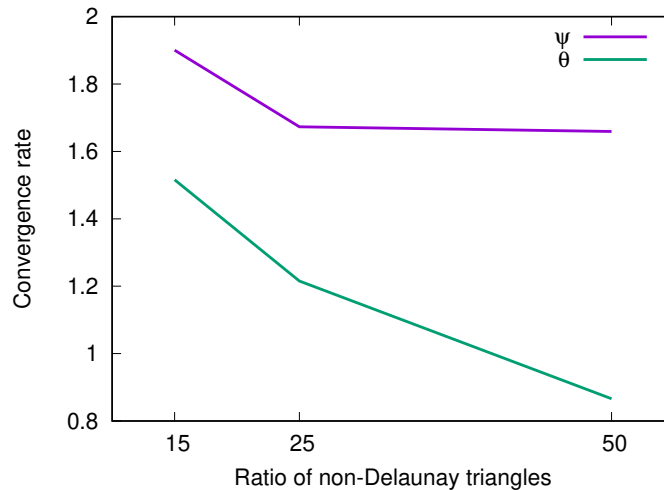


Figure 25: Evolution of the convergence rate with the ratio of non-Delaunay triangles

triangles were considered in section 4.4. Sets of unstructured meshes with very irregular triangle shape, and comprising 15%, 25% or 50% of non-Delaunay triangles were also used. In all of these configurations, the new Hodge star operator converges well.

Experiments in sections 4.1 to 4.3 tend to show that a barycentric dual provides as precise as, or better results than an incentric dual. However, this should not be considered as the general case. Indeed, as shown in section 3.2, the incentric dual may be much more precise than the barycentric one in some cases. Moreover, in other types of problem, there may be other criteria than the error to take into consideration.

Barycenter and incenter were chosen as centers of the dual meshes because of their simplicity. With our general construction, other interior points may also be considered, without breaking the exactness of the discrete Hodge on piecewise constant differential forms. The choice of the interior points may be done algorithmically to minimize some error indicator (for example, the overall error of the discrete Hodge operator on some class of differential forms). The development of such optimization process is currently under study by the authors.

Lastly, extension of the new discrete Hodge operator to the three-dimensional case is under construction.

## References

- [1] W. Hairer, G. Wanner, and C. Lubich, *Geometric Numerical Integration. Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*.



Springer Series in Computational Mathematics, Springer, 2nd ed., 2006.

- [2] C. Blanes, S.; Fernando, *A Concise Introduction to Geometric Numerical Integration*. Monographs and Research Notes in Mathematics, CRC Press, 2016.
- [3] D. Razafindralandy, A. Hamdouni, and M. Chhay, “A review of some geometric integrators,” *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, vol. 5, no. 1, p. 16, 2018.
- [4] P. Bochev and J. Hyman, *Compatible Spatial Discretizations*, vol. 142 of *The IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, ch. Principles of Mimetic Discretizations of Differential Operators, pp. 89–119. Springer, 2006.
- [5] D. Arnold, R. Falk, and R. Winther, “Finite element exterior calculus: from Hodge theory to numerical stability,” *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 47, pp. 281–354, 2010.
- [6] D. Razafindralandy, V. Salnikov, A. Hamdouni, and A. Deeb, “Some robust integrators for large time dynamics,” *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, vol. 6, no. 1, p. 5, 2019.
- [7] V. Salnikov and A. Hamdouni, “From modelling of systems with constraints to generalized geometry and back to numerics,” *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 99, no. 6, p. e201800218, 2019.
- [8] A. Bossavit, “On the geometry of electromagnetism: (1) Affine space,” *Journal of the Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics*, vol. 6, pp. 17–28, 1998.
- [9] A. Bossavit, “On the geometry of electromagnetism: (2) Geometrical objects,” *Journal of the Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics*, vol. 6, pp. 114–123, 1998.
- [10] A. Bossavit, “On the geometry of electromagnetism: (3) Integration, Stokes, Faraday’s law,” *Journal of the Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics*, vol. 6, pp. 233–240, 1998.
- [11] A. Bossavit, “On the geometry of electromagnetism: (4) Maxwell’s house,” *Journal of the Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics*, vol. 6, pp. 318–326, 1998.
- [12] A. Bossavit, “Computational electromagnetism and geometry: (1) Network equations,” *Journal of the Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics*, vol. 7, no. 2, pp. 150–159, 1999.
- [13] A. Bossavit, “Computational electromagnetism and geometry: (2) Network constitutive laws,” *Journal of the Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics*, vol. 7, no. 3, pp. 204–301, 1999.

- [14] A. Bossavit, “Computational electromagnetism and geometry : (3): Convergence,” *Journal of the Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics*, vol. 7, no. 4, pp. 401–408, 1999.
- [15] A. Bossavit, “Computational electromagnetism and geometry : (4): From degrees of freedom to fields,” *Journal of the Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics*, vol. 8, no. 1, pp. 102–109, 2000.
- [16] A. Bossavit, “Computational electromagnetism and geometry : (5): The Galerkin Hodge,” *Journal of the Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics*, vol. 8, no. 2, pp. 203–209, 2000.
- [17] S. Elcott, Y. Tong, E. Kanso, P. Schröder, and M. Desbrun, “Stable, circulation-preserving, simplicial fluids,” *ACM Transactions on Graphics*, vol. 26, no. 1, 2007.
- [18] A. Hirani, K. Nakshatrala, and J. Chaudhry, “Numerical method for Darcy flow derived using discrete exterior calculus,” *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, vol. 16, pp. 151–169, 2015.
- [19] M. Mohamed, A. Hirani, and R. Samtaney, “Discrete exterior calculus discretization of incompressible Navier–Stokes equations over surface simplicial meshes,” *Journal of Computational Physics*, vol. 312, pp. 175 – 191, 2016.
- [20] D. Arnold, R. Falk, and R. Winther, “Finite element exterior calculus, homological techniques, and applications,” *Acta Numerica*, vol. 15, p. 1–155, 2006.
- [21] D. Arnold, *Finite Element Exterior Calculus*. SIAM-Society for Industrial and Applied Mathematics, 2018.
- [22] A. Hirani, *Discrete Exterior Calculus*. Phd thesis, California Institute of Technology, Pasadena, CA, USA, 2003.
- [23] V. Rajan, “Optimality of the Delaunay triangulation in  $\mathbb{R}^d$ ,” *Discrete & Computational Geometry*, vol. 12, pp. 189–202, 12 1994.
- [24] C. Cassidy and G. Lord, “A square acutely triangulated,” *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 13, no. 4, 1981.
- [25] L. Yuan, “Acute triangulations of trapezoids,” *Discrete Applied Mathematics*, vol. 158, no. 10, pp. 1121 – 1125, 2010.
- [26] C. T. Zamfirescu, “Survey of two-dimensional acute triangulations,” *Discrete Mathematics*, vol. 313, no. 1, pp. 35 – 49, 2013.
- [27] E. VanderZee, A. Hirani, D. Guoy, and E. Ramos, “Well-centered triangulation,” *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 31, 02 2010.

- [28] A. Hirani, K. Kalyanaraman, and E. VanderZee, “Delaunay Hodge star,” *Computer-Aided Design*, vol. 45, no. 2, pp. 540–544, 2013.
- [29] M. Mohamed, A. Hirani, and R. Samtaney, “Numerical convergence of discrete exterior calculus on arbitrary surface meshes,” *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, vol. 19, no. 3, pp. 194–206, 2018.
- [30] P. Mullen, P. Memari, F. Goes, and M. Desbrun, “HOT: Hodge-optimized triangulations,” *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 2011.
- [31] A. Bossavit, *Computational electromagnetism. Variational formulations, complementarity, edge elements*. Academic Press, 1998.
- [32] H. Whitney, *Geometric integration theory*. Princeton University Press, 1957.
- [33] A. Bossavit, “Whitney forms: A class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism,” *Science, Measurement and Technology, IEE Proceedings A*, vol. 135, no. 8, pp. 493–500, 1988.
- [34] T. Tarhasaari, L. Kettunen, and A. Bossavit, “Some realizations of a discrete Hodge operator: a reinterpretation of finite element techniques,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 35, no. 3, pp. 1494–1497, 1999.
- [35] B. Auchmann and S. Kurz, “A geometrically defined discrete Hodge operator on simplicial cells,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 42, pp. 643–646, 2006.
- [36] M. Mohamed, A. Hirani, and R. Samtaney, “Comparison of discrete Hodge star operators for surfaces,” *Computer-Aided Design*, vol. 78, pp. 118 – 125, 2016.
- [37] M. Desbrun, A. Hirani, M. Leok, and J. Marsden, “Discrete exterior calculus,” *arXiv:math/0508341*, 2005.
- [38] K. Crane, F. de Goes, M. Desbrun, and P. Schröder, “Digital geometry processing with discrete exterior calculus,” in *ACM SIGGRAPH 2013 courses*, SIGGRAPH ’13, ACM, 2013.
- [39] A. Gillette, “Notes on discrete exterior calculus,” tech. rep., University of Texas at Austin, 2009.
- [40] J. Marsden and T. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry. A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems*, vol. 17 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer Verlag, 2nd ed., 1999.
- [41] A. Bossavit, “Discretization of electromagnetic problems: The “generalized finite differences” approach,” in *Numerical Methods in Electromagnetics*, vol. 13 of *Handbook of Numerical Analysis*, pp. 105 – 197, Elsevier, 2005.

- [42] R. Hiptmair, “Discrete Hodge operators,” *Numerische Mathematik*, vol. 90, no. 2, pp. 265–289, 2001.
- [43] P. Alotto and I. Perugia, “Matrix properties of a vector potential cell method for magnetostatics,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 40, no. 2, pp. 1045–1048, 2004.
- [44] M. Cinalli, F. Edelvik, R. Schuhmann, and T. Weiland, “Consistent material operators for tetrahedral grids based on geometrical principles,” *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, vol. 17, pp. 487 – 507, 09 2004.
- [45] C. Geuzaine and J.-F. Remacle, “Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 79, no. 11, pp. 1309–1331, 2009.



# BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Blanes and F. Casas, *A concise introduction to geometric numerical integration*. 01 2017.
- [2] E. Hairer, C. Lubich, and G. Wanner, *Geometric numerical integration. Structure-preserving algorithms for ordinary differential equations. 2nd ed*, vol. 31. 01 2006.
- [3] D. Razafindralandy, V. Salnikov, A. Hamdouni, and A. Deeb, "Some robust integrators for large time dynamics," *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, vol. 6, 12 2019.
- [4] E. Hairer and C. Lubich, "The life-span of backward error analysis for numerical integrators," *Numerische Mathematik*, vol. 76, pp. 441–462, 1997.
- [5] T. J. Bridges and S. Reich, "Multi-symplectic spectral discretizations for the Zakharov–Kuznetsov and shallow water equations," *Physica D : Nonlinear Phenomena*, vol. 152-153, pp. 491 – 504, 2001. Advances in Nonlinear Mathematics and Science : A Special Issue to Honor Vladimir Zakharov.
- [6] D. Razafindralandy, A. Hamdouni, and M. Chhay, "A review of some geometric integrators," *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, vol. 5, 12 2018.
- [7] P. Bochev and J. Hyman, *Compatible Spatial Discretizations*, vol. 142 of *The IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, ch. Principles of Mimetic Discretizations of Differential Operators, pp. 89–119. Springer, 2006.
- [8] D. Arnold, R. Falk, and R. Winther, "Finite element exterior calculus : from Hodge theory to numerical stability," *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 47, pp. 281–354, 2010.
- [9] P. Griffiths, R. Bryant, and L. Hsu, "Hyperbolic exterior differential systems and their conservation laws. I," *Selecta Mathematica. New Series*, vol. 1, no. 1, pp. 21–112, 1995.
- [10] P. Griffiths, R. Bryant, and L. Hsu, "Hyperbolic exterior differential systems and their conservation laws. II," *Selecta Mathematica. New Series*, vol. 1, no. 2, pp. 265–323, 1995.
- [11] E. Tonti, "Why starting from differential equations for computational physics?," *Journal of Computational Physics*, vol. 257, no. Part B, pp. 1260 – 1290, 2014.
- [12] B. A., *Computational electromagnetism : Variational formulations, complementarity, edge elements*. Academic Press, 1998.
- [13] A. Bossavit, "On the geometry of electromagnetism : (1) Affine space," *Journal of the Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics*, vol. 6, pp. 17–28, 1998.

- [14] A. Bossavit, "On the geometry of electromagnetism : (2) Geometrical objects," *Journal of the Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics*, vol. 6, pp. 114–123, 1998.
- [15] A. Bossavit, "On the geometry of electromagnetism : (3) Integration, Stokes, Faraday's law," *Journal of the Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics*, vol. 6, pp. 233–240, 1998.
- [16] A. Bossavit, "On the geometry of electromagnetism : (4) Maxwell's house," *Journal of the Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics*, vol. 6, pp. 318–326, 1998.
- [17] M. Desbrun, A. Hirani, M. Leok, and J. Marsden, "Discrete exterior calculus," *arXiv :math/0508341*, 2005.
- [18] S. Elcott, Y. Tong, E. Kanso, P. Schröder, and M. Desbrun, "Stable, circulation-preserving, simplicial fluids," *ACM Transactions on Graphics*, vol. 26, no. 1, 2007.
- [19] E. Tonti, "The reason for analogies between physical theories," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 1, no. 1, pp. 37 – 50, 1976.
- [20] E. Tonti, *The mathematical structure of classical and relativistic physics : a general classification diagram*. Birkhäuser, 2013.
- [21] J. Hyman and J. Scovel, "Deriving mimetic difference approximations to differential operators using algebraic topology," tech. rep., Los Alamos National Laboratory, 1990. Technical Report.
- [22] D. Adams, "R-torsion and linking numbers from simplicial Abelian gauge theories," *arXiv :hep-th/9612009*, 1996.
- [23] S. Sen, S. Sen, J. C. Sexton, and D. H. Adams, "Geometric discretization scheme applied to the Abelian Chern-Simons theory," *Physical Review E*, vol. 61, p. 3174–3185, Mar 2000.
- [24] A. Bossavit, "On "generalized finite differences" : Discretization of electromagnetic problems," *preprint*, 2002.
- [25] J. M. Hyman and M. Shashkov, "Natural discretizations for the divergence, gradient, and curl on logically rectangular grids," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 33, no. 4, pp. 81–104, 1997.
- [26] J. Chard and V. Shapiro, "A multivector data structure for differential forms and equations," *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 54, pp. 33–64, 11 2000.
- [27] A. Bossavit, "Computational electromagnetism and geometry : (1) Network equations," *Journal of the Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics*, vol. 7, no. 2, pp. 150–159, 1999.
- [28] A. Bossavit, "Computational electromagnetism and geometry : (2) Network constitutive laws," *Journal of the Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics*, vol. 7, no. 3, pp. 204–301, 1999.
- [29] A. Bossavit, "Computational electromagnetism and geometry : (3) : Convergence," *Journal of the Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics*, vol. 7, no. 4, pp. 401–408, 1999.

- [30] A. Bossavit, "Computational electromagnetism and geometry : (4) : From degrees of freedom to fields," *Journal of the Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics*, vol. 8, no. 1, pp. 102–109, 2000.
- [31] A. Bossavit, "Computational electromagnetism and geometry : (5) : The Galerkin Hodge," *Journal of the Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics*, vol. 8, no. 2, pp. 203–209, 2000.
- [32] A. Bossavit, "Discretization of electromagnetic problems : The "generalized finite differences" approach," in *Numerical Methods in Electromagnetics*, vol. 13 of *Handbook of Numerical Analysis*, pp. 105 – 197, Elsevier, 2005.
- [33] S. Chen and W. Chew, "Numerical electromagnetic frequency domain analysis with discrete exterior calculus," *Journal of Computational Physics*, vol. 350, no. Supplement C, pp. 668–689, 2017.
- [34] J. Rabinä, S. Mönkölä, T. Rossi, A. Penttilä, and K. Muinonen, "Comparison of discrete exterior calculus and discrete-dipole approximation for electromagnetic scattering," *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, vol. 146, no. Supplement C, pp. 417 – 423, 2014.
- [35] Z. Xie, Z. Ye, and Y.-J. Ma, "Numerical simulation of antennae by Discrete Exterior Calculus," *Communications in Theoretical Physics*, vol. 52, no. 6, p. 1067, 2009.
- [36] Z. Ye, Z. Xie, and Y.-J. Ma, "Numerical simulation of electromagnetic waves scattering by Discrete Exterior Calculus," *Chinese Physical Letters*, vol. 26, no. 8, p. 084102, 2009.
- [37] A. Hirani, K. Nakshatrala, and J. Chaudhry, "Numerical method for Darcy flow derived using Discrete Exterior Calculus," *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, vol. 16, pp. 151–169, 2015.
- [38] A. Hirani, *Discrete Exterior Calculus*. Phd thesis, California Institute of Technology, Pasadena, CA, USA, 2003.
- [39] V. Rajan, "Optimality of the delaunay triangulation in  $\mathbb{R}$ ," *Discrete & Computational Geometry*, vol. 12, pp. 189–202, 12 1994.
- [40] C. Cassidy and G. Lord, "A square acutely triangulated," *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 13, 01 1980.
- [41] L. Yuan, "Acute triangulations of trapezoids," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 158, pp. 1121–1125, 05 2010.
- [42] C. Zamfirescu, "Survey of two-dimensional acute triangulations," *Discrete Mathematics*, vol. 313, p. 35–49, 01 2013.
- [43] E. VanderZee, A. Hirani, D. Guoy, and E. Ramos, "Well-centered triangulation," *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 31, 02 2008.
- [44] A. N. Hirani, K. Kalyanaraman, and E. VanderZee, "Delaunay hodge star," *Computer-Aided Design*, vol. abs/1204.0747, 2012.



- [45] M. S. Mohamed, A. N. Hirani, and R. Samtaney, "Numerical convergence of discrete exterior calculus on arbitrary surface meshes," 2018.
- [46] P. Mullen, P. Memari, F. Goes, and M. Desbrun, "Hot : Hodge-optimized triangulations," *ACM Transactions on Graphics (SIGGRAPH)*, 2011.
- [47] A. Bossavit, "Computational electromagnetism and geometry : (5) the "Galerkin Hodge"," *Journal of the Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics*, vol. 8, pp. 203–209, 01 2000.
- [48] H. Whitney, *Geometric integration theory*. Princeton University Press, 1957.
- [49] A. Bossavit, "Whitney forms : A class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism," *Physical Science, Measurement and Instrumentation, Management and Education - Reviews, IEE Proceedings A*, vol. 135, pp. 493 – 500, 12 1988.
- [50] T. Tarhasaari, L. Kettunen, and A. Bossavit, "Some realizations of a discrete hodge operator : A reinterpretation of finite element techniques," *Ieee Transactions On Magnetism*, vol. 35, pp. 1494–1497, 01 1999.
- [51] B. Auchmann and S. Kurz, "A geometrically defined discrete hodge operator on simplicial cells," *IEEE Transactions on Magnetism*, vol. 42, pp. 643–646, 2006.
- [52] M. Mohamed, A. Hirani, and R. Samtaney, "Comparison of discrete Hodge star operators for surfaces," *Computer-Aided Design*, 05 2016.
- [53] R. Hiptmair, "Discrete hodge operators," *Numerische Mathematik*, vol. 90, no. 2, pp. 265–289, 2001.
- [54] P. Alotto and I. Perugia, "Matrix Properties of a Vector Potential Cell Method for Magnetostatics," *IEEE Transactions on Magnetism*, vol. 40, pp. 1045–1048, Mar. 2004.
- [55] M. Cinalli, F. Edelvik, R. Schuhmann, and T. Weiland, "Consistent material operators for tetrahedral grids based on geometrical principles," *International Journal of Numerical Modelling : Electronic Networks, Devices and Fields*, vol. 17, pp. 487 – 507, 09 2004.
- [56] M. S. Mohamed, A. N. Hirani, and R. Samtaney, "Discrete exterior calculus discretization of incompressible Navier–Stokes equations over surface simplicial meshes," *Journal of Computational Physics*, vol. 312, p. 175–191, May 2016.
- [57] M. S. Mohamed, A. N. Hirani, and R. Samtaney, "Numerical convergence of Discrete Exterior Calculus on arbitrary surface meshes," *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, vol. 19, no. 3, pp. 194–206, 2018.
- [58] F. Gallissot, "Les formes extérieures et la mécanique des milieux continus," *Annales de l'Institut Fourier*, vol. 8, pp. 291–335, 1958.
- [59] M. Armstrong, *Basic Topology*. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1983.
- [60] A. Hatcher, *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 1 ed., 2001.
- [61] H. Whitney, *Geometric Integration Theory*, vol. 43. 01 1957.
- [62] J. Kreeft, A. Palha, and M. Gerritsma, "Mimetic framework on curvilinear quadrilaterals of arbitrary order," *arXiv :1111.4304*, 2011.

- [63] E. Schulz and G. Tsogtgerel, "Convergence of Discrete Exterior Calculus approximations for Poisson problems," *arXiv :1611.03955 [math.NA]*, 2016.
- [64] R. Hiptmair, "Higher order Whitney forms," *Progress In Electromagnetics Research*, vol. 32, pp. 271–299, 2001.
- [65] F. Rapetti and A. Bossavit, "Whitney forms of higher degree," *SIAM Journal of Numerical Analysis*, vol. 47, no. 3, p. 2369–2386., 2009.
- [66] A. Bossavit, "Extrusion, contraction : Their discretization via Whitney forms," *International Journal of Computations and Mathematics in Electrical*, vol. 22, no. 3, pp. 470–80, 2003.
- [67] P. Mullen, A. McKenzie, D. Pavlov, L. Durant, Y. Tong, E. Kanso, J. Marsden, and M. Desbrun, "Discrete Lie advection of differential forms," *Foundations of Computational Mathematics*, vol. 11, no. 2, pp. 131–149, 2011.
- [68] R. Abraham, J. E. Marsden, and R. Ratiu, *Manifolds, tensor analysis, and applications*. Springer-Verlag New York, Inc., 1988.
- [69] C. Cassidy and G. Lord *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 13, no. 4, 1981.
- [70] G. De Vahl Davis, "Natural convection of air in a square cavity : A bench mark numerical solution," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 3, no. 3, pp. 249–264, 1983.
- [71] B. Adrian, *Convection heat transfer*. Hoboken (N. J.) : J. Wiley and Sons, 3rd edition ed.
- [72] P. L. Quéré, "Accurate solutions to the square thermally driven cavity at high Rayleigh number," *Computers & Fluids*, vol. 20, no. 1, pp. 29 – 41, 1991.
- [73] E. VanderZee, A. N. Hirani, D. Guoy, and E. A. Ramos, "Well-centered triangulation," *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 31, p. 4497–4523, Jan 2010.
- [74] C. Geuzaine and J.-F. Remacle, "Gmsh : A 3-d finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 79, pp. 1309 – 1331, 09 2009.
- [75] A. J. Chorin, "The numerical solution of the Navier-Stokes equations for an incompressible fluid," *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 73, pp. 928–931, 11 1967.
- [76] R. Témam, "Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires (i)," *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 32, pp. 135–153, Jan 1969.
- [77] J. Guermond, P. Mineev, and J. Shen, "An overview of projection methods for incompressible flows," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, pp. 6011–6045, 09 2006.
- [78] U. Ghia, K. N. Ghia, and C. T. Shin, "High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method," 1982.
- [79] D. Eppstein, J. M. Sullivan, and A. Üngör, "Tiling space and slabs with acute tetrahedra," *Computational Geometry*, vol. 27, no. 3, pp. 237 – 255, 2004.

- 
- [80] E. VanderZee, A. N. Hirani, V. Zharnitsky, and D. Guoy, "A dihedral acute triangulation of the cube," *Computational Geometry*, vol. 43, no. 5, pp. 445 – 452, 2010.
- [81] X. Meng and G. Mei, "Robust triangulation algorithm for geometry with acute angle features," *International Journal of Machine Learning and Computing*, pp. 156–161, 01 2012.
- [82] A. Lemoine, *Décomposition de Hodge-Helmholtz discrète*. PhD thesis, 11 2014.
- [83] C. R. Ethier and D. A. Steinman, "Exact fully 3d Navier-Stokes solutions for benchmarking," 1994.