



HAL
open science

Formules combinatoires pour les invariants d'objets noués

Adrien Casejuane

► **To cite this version:**

Adrien Casejuane. Formules combinatoires pour les invariants d'objets noués. Combinatoire [math.CO]. Université Grenoble Alpes [2020-..], 2021. Français. NNT: 2021GRALM013. tel-03327714

HAL Id: tel-03327714

<https://theses.hal.science/tel-03327714v1>

Submitted on 27 Aug 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE GRENOBLE ALPES

Spécialité : **Mathématiques**

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

Adrien CASEJUANE

Thèse dirigée par **Jean-Baptiste MEILHAN**

préparée au sein du **Laboratoire Institut Fourier**
dans l'**École Doctorale Mathématiques, Sciences et**
technologie de l'information, Informatique

Formules combinatoires pour les invariants d'objets noués

Thèse soutenue publiquement le **21 mai 2021**,
devant le jury composé de :

M. Benjamin AUDOUX

Maître de conférences, Univ. Aix-Marseille (Membre)

M. Thomas FIEDLER

Professeur, Univ. Toulouse III (Rapporteur)

Mme. Christine LESCOP

Directrice de Recherche, CNRS, Univ. Grenoble Alpes (Membre)

M. Jean-Baptiste MEILHAN

Maître de conférences, Univ. Grenoble Alpes (Directeur de Thèse)

M. Bertrand PATUREAU-MIRAND

Maître de conférences, Univ. de Bretagne-Sud (Rapporteur)

M. Emmanuel WAGNER

Professeur, Université de Paris (Président)



Table des matières

1	Une formule de chirurgie pour l'invariant de Casson-Walker-Lescop via l'intégrale de Kontsevich	12
1.1	Préliminaires	14
1.1.1	Conventions et notations	14
1.1.2	Quelques invariants classiques	15
1.1.3	Deux invariants universels	18
1.2	Coefficients dans l'intégrale de Kontsevich	26
1.2.1	Quelques définitions et opérations sur les diagrammes de cordes	26
1.2.2	Identification des coefficients sur un petit nombre de composantes	34
1.2.3	Polynôme de Conway et intégrale de Kontsevich	44
1.2.4	Autres résultats de factorisation	46
1.3	Résultat principal	51
1.3.1	Préliminaires	51
1.3.2	Cas $n = 1, 2, 3$	54
1.3.3	Cas général	61
2	Calcul de flèches en petit degré	69
2.1	Objets soudés et calcul de flèches	71
2.1.1	Objets soudés	71
2.1.2	Le calcul de flèches pour les objets soudés	73
2.2	Invariants d'objets noués soudés	77
2.2.1	Le groupe d'un diagramme soudé	77
2.2.2	Polynôme d'Alexander normalisé	78
2.2.3	Invariants de Milnor	81
2.2.4	Invariants de clôture	90
2.3	w_k -équivalence et invariants de type fini	95
2.3.1	w_k -équivalence	95
2.3.2	Invariants de type fini	96
2.3.3	Quelques lemmes techniques	98
2.3.4	Le groupe $wSL(n)_k$	102
2.4	Résultats de classification	107
2.4.1	w_1 -équivalence	108
2.4.2	w_2 -équivalence	108
2.4.3	w_3 -équivalence	110
2.4.4	Et après?	124
2.5	Objets soudés et surfaces nouées de type ruban	138

Remerciements

Après 5 années marquées par des hauts et des bas, me voilà arrivé à la fin de ma thèse. Enfin serais-je tenté de dire, même si ces années ont avant tout été pour moi de belles années. Et si cela a été le cas, c'est fondamentalement grâce au soutien que j'ai eu de tous ceux qui m'ont entouré. De celui pour ainsi dire permanent de mes proches à celui plus ponctuel d'autres, qui ne soupçonnent d'ailleurs peut-être pas aujourd'hui combien cette discussion ou cette après-midi passée ensemble m'ont aidé au moment où elles ont eu lieu. Je vous dis donc dès à présent MERCI à tous. Il serait malheureusement trop long d'énumérer ici tous ceux qui devraient être remerciés. Je m'excuse de ne pas le faire, en sachant qu'ils et elles me pardonneront. Mais qu'il me soit toutefois permis d'en remercier particulièrement certains.

Je commencerai en remerciant Sébastien Gontard. Nos chemins se sont croisés depuis septembre 2009, et depuis nos parcours ont au final été assez similaires. Si je tiens à te remercier particulièrement maintenant, c'est pour toutes les journées passées ensemble à discuter, de maths et d'autres choses, quand l'envie ou l'énergie n'étaient pas forcément présentes pour se consacrer comme il se doit à la recherche ou la rédaction. Repas ensemble ou journées passées dans ton bureau, souvent en compagnie de Bruno, car n'ayant jamais aimé la solitude, je me suis bien souvent permis de passer en 111. C'est aussi grâce à toi que j'ai pu m'entourer d'autres doctorants que je côtoie encore aujourd'hui. C'est d'ailleurs l'occasion pour moi d'avoir un mot de remerciements pour mes collègues du laboratoire : les autres doctorants que j'ai rencontrés au cours de ces 5 années, les enseignants qui m'ont vu évoluer depuis mon arrivée en licence en septembre 2012, les personnels administratifs avec lesquels j'ai eu l'occasion de discuter surtout à l'occasion de la mobilisation contre la réforme des retraites. Tout ce monde a été d'un soutien appréciable quand j'ai été contraint de démissionner de mon agrégation pour continuer ma thèse, en bute à un rectorat de Versailles inflexible. Et comme souvent dans un projet aussi important qu'une thèse, même s'il n'y a au final qu'un seul nom en tête d'affiche, c'est en vérité un travail collectif où de nombreuses pierres ont été mises par d'autres mains que les miennes.

Je continuerai en remerciant Claire Wolfarth. Car si Sébastien a joué ce rôle de soutien quasi-quotidien dans la première partie de ma thèse, c'est ensuite toi qui a fait cela. Là aussi, repas et journées passées dans ton bureau m'ont permis de ne pas m'enfermer seul et de continuer à faire face quand j'étais au point mort dans mon travail. Tu as été également d'une aide précieuse au moment de la rédaction. C'est aussi grâce à toi que j'ai pu découvrir le monde de la recherche en Sciences humaines, de l'autre côté de la route, et que j'ai pu connaître des personnes que je n'aurai que difficilement rencontré autrement. J'ai l'impression que c'est un peu inhabituel, et je ne suis pas mécontent, bien au contraire, d'avoir vécu cela. C'est l'occasion pour moi de remercier les amis de Sancho Panza, avec qui j'ai passé de nombreux très bons moments, bien que je m'en sois un peu éloigné ces derniers temps. On a ri -beaucoup-, on a mangé -encore plus-, et on a bu -avec tempérance et modération-, et cela a été l'occasion de tisser des liens précieux que je compte bien garder. Ces liens m'ont permis de ne pas rester seul dans ma tour d'ivoire durant ma thèse, ce qui, comme je l'ai déjà mentionné, est une chose que j'ai toujours essayé de faire. C'est également l'occasion pour moi de remercier également mes amis, ceux que j'ai connu au

lycée et qui m'ont accompagné dans les différentes périodes qui m'ont amené jusqu'ici, les quelques-uns que je connais d'avant encore, avec qui j'ai grandi, et ceux de la fac avec qui j'ai passé plusieurs années en bonne compagnie.

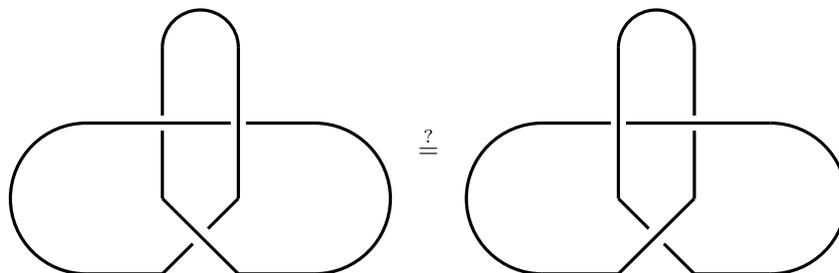
Enfin, je souhaiterais remercier Jean-Baptiste Meilhan, mon directeur de thèse. Celui qui a supporté mon caractère branché sur courant alternatif, celui qui a dû composer avec les périodes d'avancée comme avec les périodes de stagnation. Là où d'autres auraient peut-être baissé les bras, ou auraient été inflexibles, vous avez su vous appuyer sur mes bonnes périodes pour m'entraîner, pour me faire aller de l'avant, et vous avez su faire le dos rond quand c'était moins le cas. Je ne sais pas si ce travail aurait abouti avec une autre attitude de votre part, parfois j'ai des doutes, mais en tout cas il est évident pour moi que cette thèse est également la vôtre. Merci donc. Et j'en profite également pour remercier l'école doctorale MSTII à qui j'ai dû en faire voir de toutes les couleurs avec ma "phobie administrative", et qui malgré tout a pris mon parti et m'a permis de suivre mon calendrier de thèse, que seule l'épidémie de covid aura au final repoussé. Merci pour votre compréhension. Merci également aux membres de mon jury qui ont accepté de l'être, et particulièrement aux rapporteurs Thomas Fiedler et Bertrand Patureau-Mirand, eux aussi été victimes de cette phobie administrative leur imposant des délais raccourcis pour leurs rapports. Ils ont su les tenir, et je les en remercie.

J'aurai également un mot pour ma famille qui m'a permis de faire face, dans ma cinquième année de thèse notamment, aux problèmes financiers dûs à mon bras de fer avec le rectorat de Versailles. Il aurait été bien difficile, pour ne pas dire impossible, de terminer cette thèse sans leur soutien dans cette période critique. Je garde le mot de la fin pour mes camarades avec qui je partage l'objectif de changer ce monde pourri pour bâtir une société meilleure : merci à vous tous également pour votre soutien !

Introduction générale

Le sujet qui m'a intéressé durant ma thèse a été la topologie en basse dimension, un des plus vastes domaines des mathématiques, dans lequel j'ai été amené à travailler sur la théorie des nœuds, les surfaces nouées en dimension 4, ou encore les variétés de dimension 3. C'est une branche plutôt récente de l'histoire des mathématiques, puisqu'elle n'a "que" 2 siècles. Cela en fait une jeune pousse de l'histoire des sciences en général, et des mathématiques en particulier. Comme nombre d'autres sciences, cette branche a connu un essor particulièrement important au cours du 19-ème siècle. C'est en effet une époque où le développement technique accéléré permet à certains scientifiques de commencer à établir des modèles élaborés sur le monde qui les entoure. Et quoi de mieux pour le comprendre dans toute sa diversité que d'être capable de déterminer tous les éléments différents qui le constituent ? C'est cette question initiale qui va donner naissance à la théorie des nœuds. En effet, certains intellectuels de l'époque considéraient que le vide et l'atmosphère étaient constitués d'une matière homogène appelée éther, dans laquelle les atomes étaient constitués en petits tourbillons donnant des trajectoires circulaires nouées sur elles-mêmes. C'était par exemple la théorie soutenue par William Thompson, dit Lord Kelvin. On sait aujourd'hui que la réalité est tout autre - c'est Mendeleïev qui avait raison -, mais c'est un des points de départ de la théorie des nœuds.

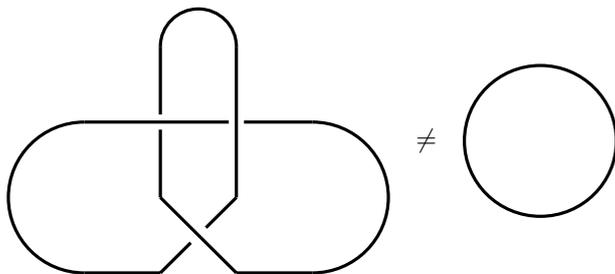
Ainsi, du point de vue historique, le problème fondamental des théoriciens des nœuds est de classer les différents nœuds possibles, autrement dit de classer les plongements de \mathbb{S}^1 dans un espace ambiant à 3 dimensions. Mais rien que cette phrase fait déjà émerger un certain nombre de questions : que signifie que 2 nœuds (ou même plus généralement 2 collections de nœuds, ce qu'on appelle des entrelacs) sont différents ? ou égaux ? Peut-on dire que 2 nœuds sont proches ? Concrètement, les deux nœuds suivants sont-ils égaux ?



Ces deux nœuds, dits nœud de trèfle gauche et nœud de trèfle droit, semblent très proches. C'est vrai, mais ils n'en sont pas moins différents. Pour essayer de différencier deux nœuds, les théoriciens des nœuds vont donc introduire des

outils appelés invariants. Un invariant est une grandeur mathématique qui mesure, au moins en partie, une propriété topologique, intrinsèque, du nœud étudié, qui ne dépend pas par exemple de sa représentation en 2 dimensions, ce qu'on appelle un diagramme et qu'on a sous les yeux ci-dessus. Vue sous cet angle, l'histoire de la théorie des nœuds est une sorte de course à la complexité avec la création d'invariants toujours plus complexes, mesurant toujours plus finement la topologie d'un nœud, mais au prix de complications théoriques toujours plus importantes, de définitions toujours plus complexes.

Parmi les invariants classiques de la théorie, les plus élémentaires pourrait-on dire, il y a par exemple le nombre de croisements. C'est un entier donnant le minimum parmi les nombres de croisements des différents diagrammes qui représentent un nœud donné. Cela définit un invariant, qui a été étudié en profondeur dans la littérature, et qui est encore utilisé aujourd'hui pour ranger les nœuds. Les diagrammes de nœuds de trèfle ci-dessus ayant 3 croisements, on en déduit que le nombre de croisements du nœud de trèfle est au plus 3. On peut montrer en fait que c'est 3 exactement, et donc que ce nœud ne peut pas être déformé en le nœud trivial à 0 croisements.



Parmi les autres invariants "élémentaires" de la théorie des nœuds, citons le fait d'être coloriable avec 3 couleurs ou encore ce qu'on appelle le genre du nœud. Tous les outils classiques de la topologie algébrique ont pendant longtemps été une source quasi-exclusive d'invariants. Mais les invariants de nœuds peuvent venir de différents mondes des mathématiques. D'ailleurs, cette perspective de bâtir des ponts avec d'autres pans des mathématiques, de sortir du cadre classique de la topologie, et y compris en construisant des ponts entre la théorie des nœuds et d'autres branches des mathématiques dont on ne soupçonnait pas qu'elles puissent avoir de lien avec la topologie (par exemple, la théorie de Lie) a été un pas en avant pour construire de nouveaux invariants de nœuds, et cela a également permis d'en éclairer certains sous un nouvel angle. Cette démarche a l'avantage d'enrichir en même temps notre compréhension de différentes branches des mathématiques. Pour organiser ces invariants venant de bien des mondes différents, on a également construit une théorie dite de type fini, qui permet justement de trier les invariants au delà de leurs constructions originelles. Et les résultats principaux que j'énonce dans cette thèse s'inscrivent dans ce genre de démarche.

Le premier chapitre de cette thèse est consacré à l'établissement d'une formule, le Théorème 1, reliant le monde de la théorie des nœuds à celui de la to-

pologie des variétés de dimension 3. Plus précisément, je donne une formule de chirurgie pour l'invariant de Casson-Walker-Lescop. Cet invariant de 3-variétés closes a été introduit par Andrew Casson en 1985 pour les sphères d'homologie entières comme une sorte de comptage de représentations du groupe fondamental. Il a ensuite été généralisé par Kevin Walker [43] puis par Christine Lescop [28] à des classes de variétés toujours plus larges. Le lien avec la théorie des nœuds est réalisé par le procédé de chirurgie (entière) de Dehn : étant donné un entrelacs parallélisé vivant dans \mathbb{S}^3 , autrement dit un entrelacs enrichi avec la donnée d'une copie parallèle s'enlaçant éventuellement avec lui, la chirurgie consiste à retirer un voisinage tubulaire de l'entrelacs et à recoller des tores solides par un procédé encodé par la copie parallèle, pour obtenir une nouvelle variété. William Lickorish et Andrew Wallace ont montré dans les années 60 qu'on pouvait ainsi construire toute 3-variété depuis \mathbb{S}^3 . En présentant ainsi une 3-variété, on espère calculer des invariants de celle-ci à l'aide d'invariants de l'entrelacs. C'est ce qu'on appelle une formule de chirurgie, et c'est d'ailleurs cette approche qui ont permis les généralisations de Kevin Walker [43] et Christine Lescop [28]. Au delà, il existe un certain nombre de formules de chirurgie, plus ou moins restrictives, pour cet invariant - maintenant dit de Casson-Walker-Lescop - comme les travaux [30, 23, 20, 31]. Mon approche a ceci d'originale qu'elle utilise la théorie des invariants de type fini, et les invariants dits universels qui ont été développés dans ce cadre pour les entrelacs et les 3-variétés. C'est cette diversité d'approches qui donne un intérêt propre à chaque formule.

La théorie des invariants de type fini est un cadre général pour essayer d'organiser les divers invariants d'entrelacs ou de variétés, en les triant selon une certaine grandeur appelée "degré". Pour les entrelacs, cette théorie a été développée indépendamment par Viktor Vassiliev [42] et Mikhail Goussarov [13] dans les années 90, et cela a donné lieu à quantité de travaux depuis. L'un des résultats les plus importants est la construction par Maxim Kontsevich d'un invariant "universel" appelé intégrale de Kontsevich [24]. Cet invariant est un outil très puissant qui prend ses valeurs dans un espace de diagrammes uni-trivalents, et il est universel dans le sens où tout invariant de type fini des entrelacs est encodé comme combinaison linéaire de coefficients de ces diagrammes. Il reste cependant encore très mal connu, et on n'a par exemple déterminé que très peu de formules closes. De plus, l'intégrale de Kontsevich est à la base de la construction d'un invariant de 3-variétés, l'invariant LMO , nommé ainsi en référence au trio qui en est à l'origine [26]. Ce second invariant se trouve être également universel pour les invariants de type fini des 3-variétés closes, au sens de la théorie de Goussarov-Habiro [10, 16]. Il prend ses valeurs dans un espace de diagrammes purement trivalents, et le terme de plus bas "degré" est un diagramme en Thêta. Son coefficient se trouve essentiellement être l'invariant de Casson-Walker-Lescop [14, 41].

Mon premier résultat peut ainsi être vu comme traduisant comment les coefficients initiaux de l'intégrale de Kontsevich se transposent en ce diagramme en Thêta. Cela me permet d'énoncer le résultat principal du premier chapitre de ma thèse :

Théorème 1. *Soit $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ un entrelacs parallélisé orienté à n composantes. Notons \mathbb{L} sa matrice d'enlacement. Notons M la 3-variété obtenue par chirurgie de \mathbb{S}^3 le long de L . Notons λ_L l'invariant de Casson-Walker-Lescop.*

L'égalité suivante est vérifiée :

$$(-1)^{\sigma_+(\mathbb{L})} \lambda_L(M) - \frac{(-1)^n \det(\mathbb{L})}{8} \sigma(\mathbb{L}) = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ |I|=k}} (-1)^{n-k} \det(\mathbb{L}_{\bar{I}}) \mu_k(L_I)$$

Il fait intervenir plusieurs invariants d'enlacement classiques, comme la matrice d'enlacement \mathbb{L} et ses sous-matrices $\mathbb{L}_{\bar{I}}$ construites en enlevant les lignes et colonnes indicées par des éléments de I , ou encore son nombre de valeurs propres positives σ_+ et sa signature σ . Un autre ingrédient de mon Théorème 1 est la famille d'invariants μ_k construits à l'aide d'invariants d'enlacement et des coefficients c_k de z^k du polynôme de Conway. Si je donne dans le manuscrit une formule close dans le cas général, je me contente ici de donner l'expression close de μ_1 et μ_2 , en notant respectivement fr et lk l'auto-enlacement et le nombre d'enlacement :

1. $\mu_1(K) = \frac{1}{24} fr(K)^2 - c_2(K) + \frac{1}{12}$.
2. si $L = K_1 \cup K_2$, alors

$$\begin{aligned} \mu_2(L) &= \frac{1}{12} lk(L)^3 + \frac{fr(K_1) + fr(K_2)}{12} lk(L)^2 \\ &\quad + lk(L) \left(c_2(K_1) + c_2(K_2) - \frac{1}{12} \right) - c_3(L). \end{aligned}$$

J'ai utilisé une approche purement combinatoire des coefficients de bas degré de l'intégrale de Kontsevich pour identifier certaines sommes de coefficients comme étant des invariants classiques de la théorie des nœuds, par exemple des puissances de l'enlacement, de l'auto-enlacement, ou encore des coefficients du polynôme de Conway. Cela permet donc de mieux comprendre la structure diagrammatique de l'intégrale de Kontsevich. Je mets également le doigt sur des résultats identifiant des "structures locales" au niveau des sommes de diagrammes apparaissant dans l'intégrale de Kontsevich avec des factorisations au niveau de l'invariant associé. Typiquement, la présence d'une unique corde mixte entre la i -ème et la j -ème composante de tous les diagrammes, de toutes les manières possibles, correspond à une factorisation par le nombre d'enlacement de ces deux mêmes composantes (Proposition 1.2.39). J'identifie en outre la combinaison linéaire de diagrammes donnant les coefficients de Conway dans l'intégrale de Kontsevich (Théorème 1.2.35).

Le Théorème 1 apparaît comme une généralisation du résultat de Sergei Matveev et Michael Polyak [30] à un nombre quelconque de composantes, où l'on voit apparaître un côté algorithmique. Le cas à $n + 1$ composantes découle du cas à n composantes grâce à des procédés de manipulation des diagrammes que j'introduis également dans ce premier chapitre, les gonflages et les inflations. Dans le cas général, on retombe, et c'est souvent le cas avec ce genre de formule, sur le cas des chirurgies à coefficients entiers de la troisième formule de chirurgie de Christine Lescop [28]. La démonstration proposée ici est toutefois complètement indépendante de celle de Christine Lescop, et le lecteur pourra les mettre côte à côte pour constater comment les outils combinatoires de ma preuve font naturellement introduire l'un des outils utilisés par Christine Lescop, les "produits en chaîne" d'enlacements.

Le deuxième chapitre de cette thèse se situe quant à lui au carrefour de la théorie des nœuds et de la topologie des surfaces nouées en dimension 4. Le lien se fait notamment à travers une application surjective, l'application Tube, définie par Shin Satoh dans [39] depuis l'espace des entrelacs longs soudés vers une certaine famille de surfaces, les surfaces de type ruban.

La théorie des objets soudés est un quotient de la théorie des objets virtuels. Ces derniers ont été indépendamment introduits au début des années 90 par Louis Kauffman [22] et Goussarov-Polyak-Viro [11] comme une généralisation des diagrammes d'entrelacs classiques, où on s'autorise un nouveau type de croisements : les croisements virtuels. Par rapport aux croisements réels, on perd dans ces croisements l'information des "positions relatives des brins". Ces diagrammes virtuels sont étudiés modulo une famille de mouvements locaux qui généralisent les mouvements de Reidemeister. Ces objets ont très vite constitué un terrain de jeu à part entière, et on a cherché à étendre les invariants de la théorie des nœuds classique (ainsi qu'à créer de nouveaux invariants pour étudier les entrelacs virtuels). Une théorie de type fini pour les invariants des objets virtuels a par exemple été mise en place. Malheureusement, ces outils n'ont produit dans les faits que très peu de résultats pour la théorie des nœuds classiques, bien que cela ait été la motivation principale pour la mise en place de cette théorie. Récemment cependant, une série de résultats sur la topologie de certaines surfaces nouées en dimension 4 a pu être établie en utilisant les objets soudés [1, 2, 32]. Un objet soudé est un objet virtuel étudié modulo un mouvement supplémentaire, et ces objets s'avèrent étroitement liés aux surfaces ruban en dimension 4 via l'application Tube.

Cette application consiste en substance à "épaissir" le diagramme pour construire une surface, avec un comportement particulier au niveau des croisements. Pour ce faire, Shin Satoh s'est basé sur les travaux antérieurs de Takeshi Yajima [45]. Les surfaces obtenues sont de type "ruban", qui sont l'analogue en dimension 4 de la notion classique de nœud ruban introduite par Ralph Fox dans les années 60 (Section 2.5). Cela permet au final d'utiliser la combinatoire des entrelacs longs soudés pour en déduire des résultats au niveau topologique.

En effet, on dispose de tout un appareil de calcul combinatoire pour représenter et étudier les entrelacs longs soudés à travers leurs diagrammes. Il s'agit du calcul de flèches, et il a été introduit par Jean-Baptiste Meilhan et Akira Yasuhara dans [32]. Cela consiste à encoder l'information des croisements d'un diagramme à l'aide de flèches et d'arbres. On munit ensuite cette structure d'un ensemble de mouvements permettant de réaliser les mouvements de Reidemeister, et donc de raisonner et d'effectuer des calculs au niveau de ces diagrammes de flèches. Cela a constitué le terrain de développement d'un analogue du calcul de clasper, introduit par Kazuo Habiro dans [17] dans le cadre des objets noués classiques. Je me suis penché sur les liens qui relient ce calcul de flèches au problème de la relation de w_k -équivalence pour des entrelacs longs soudés. Cette relation consiste en une filtration des entrelacs longs soudés selon le fait qu'ils diffèrent, ou non, d'une suite finie de mouvements "à la Reidemeister" et d'un nouveau type de chirurgies, et qui est étroitement liée à la théorie des invariants de type fini. Plus précisément, je me suis intéressé à ce problème de classification en petit degré, pour $k = 1, 2, 3$ exactement, et j'ai relié cela à l'évaluation de cer-

taines familles d'invariants bien connus, comme les coefficients α_k du polynôme d'Alexander normalisé ou les invariants de Milnor soudés μ_I , où I est une suite d'indices, et d'autres plus exotiques que j'ai introduits, les invariants de clôture $\mathcal{I}_{R,d}$, où R est une suite d'indices éventuellement surlignés et d un entier. Ces derniers sont issus de ce même polynôme d'Alexander normalisé et consistent à évaluer α_d sur des nœuds construits par "recollement" de sous-entrelacs bien choisis. Plus précisément, on recolle les composantes indicées par des éléments de I en modifiant éventuellement chaque orientation. Ce procédé est encodé par la rangée R de l'invariant de clôture. On aboutit avec ces différentes familles d'invariants à des résultats de la forme : deux entrelacs longs soudés sont w_k -équivalents si et seulement si une famille finie d'invariants de type k sont égaux. De plus, tous ces ingrédients (invariants, w_k -équivalence, théorie de type fini) sont compatibles avec l'application Tube et se transposent naturellement aux surfaces de type ruban. On a ainsi :

Théorème 2. *Les propositions suivantes sont équivalentes, pour $k \in \{2;3\}$:*

1. *Deux enlacements d'anneaux de type ruban L et L' sont RC_k -équivalents.*
2. *Tout invariant ν de type fini de degré $< k$ vérifie $\nu(L) = \nu(L')$.*
3. *Les invariants suivants coïncident pour L et L' :*
 - *Cas $k = 2$: les enlacements soudés μ_{ij} , pour tout couple d'entiers distincts (i, j) .*
 - *Cas $k = 3$: les invariants ci-dessus, ainsi que les invariants de clôture*
 - *$\mathcal{I}_{(j,i,k);2}$, pour i, j et k deux à deux distincts tels que $j < k$,*
 - *$\mathcal{I}_{(\bar{j},i);2}$, $\mathcal{I}_{(j,\bar{i});2}$, $\mathcal{I}_{(i,j);2}$, pour $i \neq j$,*
 - *$\mathcal{I}_{(i);2}$ pour tout i .*

Ici, la RC_k -équivalence est une relation d'équivalence introduite par Watanabe [44], qui est l'exact analogue de la relation de w_k -équivalence, et qui caractérise donc, d'après ce théorème, en bas degré les invariants de type fini. Ceci est à comparer avec le résultat de Watanabe, qui avait montré qu'une telle équivalence était vraie en tout degré pour les 2-nœuds ruban.

Mon second théorème principal est la conséquence de résultats de caractérisation pour les invariants de type fini des entrelacs longs soudés en bas degré (Corollaires 2.4.11 et 2.4.26). Ils sont eux-mêmes des corollaires de résultats de forme normale (Théorèmes 2.4.10 et 2.4.25) pour la w_k -équivalence que je donne. Autrement dit, on a

1. une série de critères pour vérifier la w_k -équivalence,
2. et une base de l'espace des invariants de type k .

Ces méthodes combinatoires en petit degré se heurtent cependant au problème de la généralisation en degré supérieur du fait qu'elles sont complètement faites à la main. Si elles éclairent la w_k -équivalence en petit degré, elles demanderaient un temps de calcul trop important a priori pour se généraliser. Nous en proposons un aperçu conséquent dans un travail exploratoire pour la w_4 -équivalence, où de nouveaux phénomènes apparaissent déjà par rapport aux cas précédents. Au cours de l'établissement de l'ensemble de ces résultats, je me penche sur la structure de groupe de l'ensemble des entrelacs longs soudés à w_k -équivalence près, et sur quelques-unes de ses propriétés (Sous-section 2.3.4). Par ailleurs, à l'aide des bases de l'espace des invariants de type k , je peux exprimer des invariants qui n'apparaissent pas en fonction des invariants de cette base, comme

par exemple μ_{123} dans le cas de la w_3 -équivalence (Proposition 2.4.30).

Le manuscrit est complété par une annexe, dans laquelle est démontré que les invariants de Milnor des entrelacs longs soudés sont des invariants de type fini. Bonne lecture à tous !

Chapitre 1

Une formule de chirurgie pour l'invariant de Casson-Walker-Lescop via l'intégrale de Kontsevich

Introduction

Ce chapitre se donne pour but d'établir une formule combinatoire de chirurgie pour l'invariant de Casson-Walker-Lescop par le biais des invariants universels de Kontsevich et LMO .

On commence par introduire le cadre de travail, l'ensemble des notations qui nous seront utiles tout au long du chapitre. On se penche particulièrement sur le polynôme de Conway et l'invariant U_n qui joue un rôle dans le résultat principal, puis sur l'invariant de Casson-Walker-Lescop. On termine en introduisant l'intégrale de Kontsevich et la partie de degré inférieur ou égal à 1 de l'invariant LMO et en donnant quelques résultats connus et quelques calculs les mettant en jeu.

La deuxième partie de ce chapitre est consacrée aux résultats diagrammatiques. Il y a tout d'abord des résultats "structurels" au niveau des diagrammes, puis on introduit les opérations de gonflage et prolifération en donnant des résultats associés à ces opérations. On introduit ensuite la notion de diagrammes plus et moins-essentiels, et on se penche sur ces diagrammes, leurs propriétés et leurs liens avec les opérations précédemment introduites. On se penche après sur les coefficients en bas degré et petit nombre de composantes dans l'intégrale de Kontsevich : quels diagrammes interviennent ? à quels invariants sont-ils liés ? On donne ensuite en toute généralité un lien entre le polynôme de Conway et l'intégrale de Kontsevich, ce qui fait intervenir les familles de diagrammes plus et moins-essentiels. On termine avec des résultats de factorisation d'invariants en fonction de "structures locales" particulières au niveau des sommes de diagrammes les représentant.

La dernière partie est l'énoncé et la démonstration du résultat principal. On commence avec un travail préparatoire visant à déblayer le chemin et à éclaircir la preuve d'une part, et à faire l'inventaire des ingrédients nécessaires d'autre part. Puis on énonce et on démontre le résultat dans les cas à 1, puis 2, puis 3 composantes, avant de s'attaquer au cas général.

1.1 Préliminaires

1.1.1 Conventions et notations

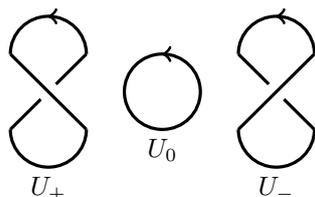
Dans ce chapitre, toutes les variétés de dimension 3 seront supposées compactes, connexes, sans bord et orientées. Tous les entrelacs vivent dans la sphère S^3 de dimension 3, et sont supposés orientés et ordonnés.

Dans la suite, nous considérons le plus souvent des entrelacs parallélisés, c'est-à-dire munis d'un champ de vecteur normal ne s'annulant jamais (ce champ de vecteur permettant de définir une copie parallèle de chaque composante). Dans les figures, nous utiliserons la convention usuelle dite 'du tableau' pour représenter la parallélisation, voir la figure ci-dessous.

Définition 1.1.1. *Soit K un nœud parallélisé orienté.*

On appelle auto-enlacement de K le nombre d'enlacement, noté $fr(K)$, de K avec sa copie parallèle.

Dans la suite, on désignera par U_+ le nœud trivial avec auto-enlacement 1, U_- celui avec auto-enlacement -1 , et U_0 celui avec auto-enlacement 0. Cela correspond aux nœuds suivants :



On va continuer avec quelques définitions usuelles sur les nœuds.

Définition 1.1.2. *Soit L un entrelacs.*

On appelle croisement interne de L tout croisement entre deux brins d'une même composante de L .

Lorsque L a au moins 2 composantes, on appelle croisement mixte de L tout croisement qui n'est pas un croisement interne. Autrement dit, c'est un croisement entre deux brins de composantes différentes de L .

Notation 1.1.3. *Soient L un entrelacs parallélisé à n composantes et I une sous-partie de $\{1, \dots, n\}$.*

On appelle L_I le sous-entrelacs de L constitué des composantes indexées par des éléments de I .

On appelle $L_{\bar{I}}$ le sous-entrelacs de L constitué des composantes indexées par des éléments du complémentaire de I dans $\{1, \dots, n\}$.

Remarque 1.1.4. *Dans la suite, on écrira abusivement $L_{\bar{i}}$ pour désigner $L_{\{i\}}$.*

On va maintenant se donner une notation plus ergonomique pour le nombre d'enlacement de deux composantes.

Notation 1.1.5. *Soit L un entrelacs parallélisé orienté à n composantes.*

Pour tout couple $(i, j) \in \{1, \dots, n\}$ d'entiers distincts, on appelle $l_{i,j}$ le nombre d'enlacement de la i -ème composante et de la j -ème composante de L .

Introduisons maintenant la matrice d'enlacement d'un entrelacs et quelques notions associées à celle-ci.

Définition 1.1.6. Soit $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ un entrelacs parallélisé orienté à n composantes.

On appelle matrice d'enlacement de L , la matrice $\mathbb{L} \in M_n(\mathbb{Z})$ dont le terme général est :

$$\begin{aligned}\mathbb{L}_{i,i} &= fr(K_i) \\ \mathbb{L}_{i,j} &= l_{i,j} \text{ pour } i \neq j\end{aligned}$$

Notation 1.1.7. Soit L un entrelacs parallélisé orienté.

On note $\sigma_+(L)$ le nombre de valeurs propres positives de la matrice d'enlacement de L , et $\sigma_-(L)$ son nombre de valeurs propres négatives.

On pose alors $\sigma(L) = \sigma_+(L) - \sigma_-(L)$, la signature de la matrice d'enlacement de L .

On va également introduire une notation pour les déterminants des sous-matrices d'une matrice d'enlacement.

Notation 1.1.8. Soit \mathbb{L} la matrice d'enlacement d'un entrelacs à n composantes.

Pour tout $I \subset \{1, \dots, n\}$, notons \mathbb{D}_I le déterminant de la sous-matrice de \mathbb{L} obtenue en enlevant les lignes et colonnes indexées par les éléments de I .

Autrement dit, D_I est la matrice d'enlacement de L_I .

1.1.2 Quelques invariants classiques

On va maintenant introduire les invariants d'entrelacs classiques que l'on va utiliser dans tout ce chapitre. On ne donnera pas nécessairement les démonstrations de tous les résultats mentionnés, le lecteur pourra se référer à par exemple à [8] ou [38] pour tous les détails des preuves.

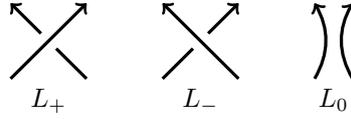
1.1.2.1 Polynôme de Conway et invariant U_n

Commençons avec le polynôme de Conway. Il s'agit d'une renormalisation introduite par John Conway à la fin des années 60 du polynôme d'Alexander. Ce dernier, défini dans les années 20 par James W. Alexander, est extrait de l'homologie du revêtement infini cyclique du complémentaire d'un entrelacs. Historiquement, il s'agit du premier invariant polynômial d'entrelacs introduit. Il fait maintenant partie des classiques de la théorie des nœuds.

Définition 1.1.9. On dit que trois entrelacs orientés L_+ , L_- et L_0 forment un triplet d'écheveau autour d'un croisement donné lorsqu'ils sont identiques à l'extérieur d'une 3-boule où

1. L_+ possède un unique croisement positif.
2. L_- possède un unique croisement négatif.
3. L_0 possède un unique croisement lissé.

Du point de vue des diagrammes, on est dans la configuration suivante :



Définition 1.1.10. Le polynôme de Conway, noté $\nabla \in \mathbb{Z}[z]$, est un invariant d'entrelacs orientés (non parallélisés) défini de la manière suivante. Pour un triplet d'écheveau (L_+, L_-, L_0) , on pose :

$$\nabla(L_+) - \nabla(L_-) = z\nabla(L_0).$$

De plus, on fixe la normalisation :

$$\nabla(U_0) = 1.$$

Ces deux données définissent bien un invariant, de manière unique.

Remarque 1.1.11. Lorsqu'on calcule le polynôme de Conway d'un entrelacs parallélisé, on oublie dans les faits la donnée de la parallélisation pour se concentrer sur l'entrelacs "sous-jacent".

En pratique, c'est ce qu'on fera à chaque calcul de la valeur d'un invariant d'entrelacs non parallélisés pour un entrelacs parallélisé.

Notation 1.1.12. On note c_k le coefficient de z^k dans le polynôme de Conway.

C'est un invariant d'entrelacs à valeurs dans \mathbb{Z} qui vérifie les propriétés suivantes.

Proposition 1.1.13. Soit $L = K_1 \cup K_2$ un entrelacs à 2 composantes.

On a alors :

$$c_1(L) = l_{1,2}.$$

Proposition 1.1.14. Soit (L_+, L_-, L_0) un triplet d'écheveau et k un entier.

On a :

$$c_{k+1}(L_+) - c_{k+1}(L_-) = c_k(L_0).$$

À partir de ces invariants c_k , nous allons introduire un nouvel invariant d'entrelacs orientés.

Définition 1.1.15. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On appelle U_{n+1} l'invariant d'entrelacs orientés à n composantes défini par

$$U_2(K) = c_2(K) - \frac{1}{24},$$

et la formule récursive, pour un entrelacs L à $n \geq 3$ composantes :

$$U_{n+1}(L) = c_n(L) - \sum_{i=1}^{n-1} U_{n-1}(L_i) \sum_{j \neq i} l_{i,j}.$$

Par exemple, on a

$$U_3(K_1 \cup K_2) = c_3(K_1 \cup K_2) - [c_2(K_1) + c_2(K_2) - \frac{1}{12}] \times l_{1,2}.$$

1.1.2.2 Invariant de Casson-Walker-Lescop

On va introduire maintenant un invariant de 3-variétés, qui a été introduit pour la première fois pour les sphères d'homologie entières par Andrew Casson en 1985.

Commençons par quelques rappels de base.

Définition 1.1.16. *On appelle 3-sphère d'homologie entière, respectivement rationnelle, une 3-variété dont les groupes d'homologie à coefficients dans \mathbb{R} , resp. dans \mathbb{Q} , sont isomorphes à ceux de \mathbb{S}^3 .*

On note IHS l'ensemble des 3-sphères d'homologie entière, à difféomorphisme préservant l'orientation près, et RHS celui des 3-sphères d'homologie rationnelle.

Notation 1.1.17. *Soient $\Sigma \in IHS$, L un entrelacs à n composantes et $q \in \mathbb{N}^n$. On note $M(\Sigma, L, q)$ la 3-variété obtenue par q -chirurgie de Σ le long de L .*

Une k -chirurgie, pour $k \in \mathbb{N}$, est dite entière. On peut encoder son information par la donnée d'un entrelacs parallélisé d'auto-enlacement k , et c'est ce que l'on fera en pratique. Rappelons le résultat clé suivant, donné indépendamment par William Lickorish et Andrew Wallace au début des années soixante :

Théorème 1.1.18. *Toute 3-variété peut être obtenue par chirurgie entière de \mathbb{S}^3 le long d'un entrelacs.*

Le résultat suivant est dû à Andrew Casson.

Définition-Théorème 1.1.19. *Il existe une unique application $\lambda : IHS \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que :*

1. $\lambda(\mathbb{S}^3) = 0$.
2. Pour tout $\Sigma \in IHS$, $\forall K \subset \Sigma$ nœud, $\forall m \in \mathbb{Z}$, on a

$$\lambda(M(\Sigma, K, \frac{1}{m+1})) - \lambda(M(\Sigma, K, \frac{1}{m})) = c_2(K).$$

3. λ est additif par somme connexe, et change de signe lorsqu'on renverse l'orientation.
4. La réduction modulo 2 de λ coïncide avec l'invariant de Rochlin.

On appelle invariant de Casson cette application.

L'existence d'un tel invariant est établie par une construction explicite, qui compte, dans un certain sens, le nombre de représentations irréductibles du groupe fondamental d'une sphère d'homologie entière dans $SU(2)$, voir [12, 40].

L'invariant de Casson a été généralisé en 1992 par Kevin Walker à un invariant λ_W des 3-sphères d'homologie rationnelle, à l'aide de formules de chirurgie [43].

Christine Lescop généralisa cette dernière approche à l'ensemble des 3-variétés en 1995, via une formule de chirurgie globale impliquant le polynôme d'Alexander à plusieurs variables [28]. C'est cet *invariant de Casson-Walker-Lescop* des 3 variétés qui nous intéressera dans la suite ; on le notera λ_L .

Notre convention est que, pour une sphère d'homologie rationnelle M , on a $\lambda_L(M) = \frac{1}{2}|H_1(M)|\lambda_W(M)$.

1.1.3 Deux invariants universels

On va maintenant s'intéresser à un invariant d'entrelacs particulier, l'intégrale de Kontsevich. C'est un invariant complexe et récent, qui a été introduit par Maxim Kontsevich en 1993 dans [24]. Il est universel dans un certain sens pour la théorie des invariants de type fini dite de Goussarov-Vassiliev. Par ailleurs, l'intégrale de Kontsevich est à la base de la construction d'un invariant de 3-variétés à l'aide du procédé de chirurgie, l'invariant LMO , introduit en 1998 par Thang Tu Quoc Le, Jun Murakami et Tomotada Ohtsuki dans [26] - en se fondant sur des travaux antérieurs avec Hitoshi Murakami [25, 41]. L'invariant LMO a également une propriété d'universalité parmi les invariants de type fini des 3-variétés, au sens de Goussarov-Habiro.

Nous allons maintenant rappeler la définition de ces deux invariants, ou du moins les ingrédients qui sont nécessaires au travail de ce chapitre. Commençons par décrire les espaces de diagrammes dans lesquels ces invariants prennent leurs valeurs.

1.1.3.1 Diagrammes de cordes et diagrammes de Jacobi

Les terminologies que nous allons introduire dans les prochaines définitions ne suivent pas la convention usuelle pour les diagrammes de cordes et de Jacobi. Ceci sera clarifié dans la remarque 1.1.27.

Définition 1.1.20. Soit X une variété orientée de dimension 1.

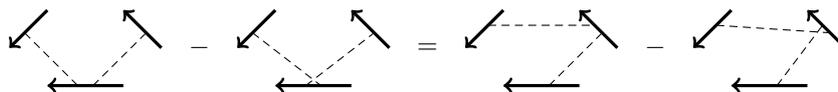
Un diagramme de cordes sur X est la donnée D d'une union disjointe d'intervalles, dont les extrémités sont des points distincts de X .

On appelle corde tout intervalle de D et patte tout sommet d'une corde ; X est appelé le squelette de D .

Une corde est dite mixte, resp. interne si ses deux pattes sont sur des composantes distinctes, resp. la même composante, du squelette.

Enfin, on appelle degré de D la quantité $\deg(D) = |\{\text{cordes de } D\}| = \frac{1}{2}|\{\text{sommets de } D\}|$.

Définition 1.1.21. On appelle $\mathcal{A}(X)$ le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par l'ensemble des diagrammes de cordes sur X modulo la relation $4T$:



Remarque 1.1.22. Une conséquence de la relation $4T$ est qu'une corde isolée (une corde dont les deux pattes sont consécutives sur le squelette) commute avec toute patte de toute autre corde, dans le sens où on a la relation suivante dans $\mathcal{A}(X)$:

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{---} \text{---} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{---} \text{---}$$

Dans la suite, nous travaillerons presque exclusivement avec des diagrammes de cordes sur n cercles, autrement dit dans le cas où $X = \bigcirc^n$ comporte n copies orientées et ordonnées de S^1 .

Remarque 1.1.23. Dans la littérature, il arrive qu'on introduise également une relation supplémentaire sur les diagrammes de cordes, dite $1T$, qui déclare qu'un diagramme contenant une corde isolée est égal à zéro. Nous ne le faisons

pas car on utilisera dans la suite des entrelacs parallélisés. Cette relation $1T$, qui correspond au mouvement de Reidemeister $R1$, tue justement la donnée de l'auto-enlacement d'un entrelacs.

Passons maintenant aux diagrammes de Jacobi.

Définition 1.1.24. Un diagramme de Jacobi D est un graphe trivalent dont les sommets sont munis d'un ordre cyclique sur les arêtes incidentes. On appelle degré de D la quantité $\deg(D) = \frac{1}{2}|\{\text{sommets de } D\}|$.

Définition 1.1.25. On appelle $\mathcal{A}(\emptyset)$ le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par l'ensemble des diagrammes de Jacobi modulo les relations AS et IHX :

$$AS : \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} = - \begin{array}{c} \diagdown \\ | \\ \diagup \end{array} \quad IHX : \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagup \end{array} - \begin{array}{c} \diagdown \\ | \\ \diagdown \end{array}$$

Notation 1.1.26. Étant donné un élément x de $\mathcal{A}(\emptyset)$ et un entier $k \geq 0$, on note respectivement $(x)_k$ et $(x)_{\leq k}$ l'image de x par les projection sur la partie $\mathcal{A}_k(\emptyset)$ de degré x et la partie $\mathcal{A}_{\leq k}(\emptyset)$ de degré $\leq k$.

Remarque 1.1.27. De manière plus classique dans la littérature, les diagrammes de Jacobi sont définis sur n'importe quelle 1-variété orientée, qui est appelée alors squelette du diagramme, et peuvent posséder des sommets univalents ET trivalents.

Une relation supplémentaire mettant en jeu les deux types de sommets, appelée relation STU , est alors nécessaire. On désigne donc ici diagrammes de Jacobi uniquement ce qu'on trouve de manière plus classique dans la littérature sous l'appellation de diagramme de Jacobi purement trivalent : ceci justifie la notation $\mathcal{A}(\emptyset)$.

Par ailleurs, il existe un isomorphisme entre le \mathbb{Q} -espace vectoriel des diagrammes uni-trivalents sur n cercles, modulo STU , et le \mathbb{Q} -espace vectoriel des diagrammes de cordes. Cela permet de ne s'intéresser qu'aux diagrammes de cordes lorsque, dans la suite, on cherchera à identifier des sommes de coefficients de diagrammes comme étant des invariants classiques.

Le lecteur pourra se référer à [8] ou [35] pour plus de détails.

Nos terminologies permettent dès la lecture de distinguer "à quel niveau" on se place lorsqu'on parlera de diagrammes. En effet, on parlera de diagrammes de cordes lorsqu'on travaillera sur les diagrammes qui apparaîtront dans l'intégrale de Kontsevich, et on parlera de diagrammes de Jacobi lorsqu'on travaillera sur les diagrammes qui apparaîtront dans le calcul de l'invariant LMO.

On termine ces définitions en introduisant une notation pour désigner les sous-diagrammes d'un diagramme donné.

Notation 1.1.28. Soient D un diagramme de cordes sur n cercles et I un sous-ensemble de $\{1, \dots, n\}$.

On appelle D_I le sous-diagramme de D constitué des cercles indexés par les éléments de I : on enlève les cercles indexés par des éléments du complémentaire de I dans $\{1, \dots, n\}$ et toutes les cordes ayant au moins une patte sur l'un d'entre eux.

Dans la suite de ce chapitre, lorsqu'on dessinera un diagramme de cordes, on suivra la convention usuelle : on représentera le squelette en traits pleins épais et le graphe en traits discontinus fins, et l'ordre cyclique à chaque sommet trivalent sera donné par l'ordre trigonométrique. De plus, lorsqu'on représentera un élément de $\mathcal{A}(\cup^n)$, les n cercles du squelette seront toujours par convention orientés dans le sens trigonométrique et ordonnés de la gauche vers la droite (sauf mention du contraire).

1.1.3.2 Intégrale de Kontsevich

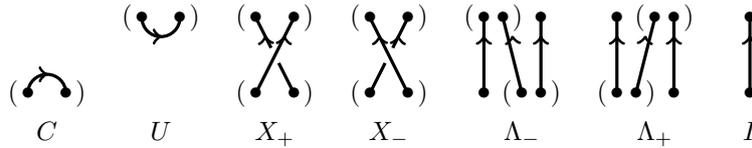
Nous allons maintenant donner brièvement la définition de l'intégrale de Kontsevich. Nous ne suivons pas ici la définition originale de Kontsevich dans [24], mais la définition combinatoire que donnèrent par la suite T.T.Q Le et J. Murakami dans [27]. De plus, nous ne donnerons explicitement que les termes de bas degré dans les définitions, dans la mesure où ceux-ci suffisent aux besoins de ce chapitre. Un survol complet est par exemple disponible dans [35, §6.4].

Nous devons tout d'abord introduire la notion de quasi-enchevêtrements parenthésés.

Définition 1.1.29. *On appelle quasi-enchevêtrement parenthésé l'image de tout plongement propre d'une variété de dimension 1 dans le cube $[0; 1]^3$ dont la frontière est décomposée en une union disjointe de deux familles de points. Ces familles sont contenues dans les segments $[0; 1] \times \frac{1}{2} \times \{\varepsilon\}$ ($\varepsilon = 0, 1$), chacune étant parenthésée de manière complète et cohérente.*

Un quasi-enchevêtrement parenthésé est parallélisé s'il est muni d'un champ de vecteur normal ne s'annulant pas. Comme pour les nœuds et entrelacs, un tel objet sera représenté par un diagramme, en utilisant la convention du tableau pour la parallélisation.

Exemple 1.1.30. *Voici quelques exemples de quasi-enchevêtrements parenthésés, que l'on appellera les enchevêtrements élémentaires.*



Un résultat clef est que tout quasi-enchevêtrement parenthésé peut être exprimé comme juxtapositions verticales et horizontales d'enchevêtrements élémentaires (et de ceux obtenus en renversant l'orientation d'une ou plusieurs composantes). Cette décomposition n'est pas unique, mais on dispose d'un résultat "à la Reidemeister", autrement dit un ensemble complet de relations diagrammatiques reliant toute paire de décompositions d'un même objet, voir [35]. L'intégrale de Kontsevich est un invariant compatible avec cette décomposition d'un entrelacs parallélisé, c'est-à-dire qu'il suffit de la définir sur ces enchevêtrements élémentaires - on montre ensuite que la valeur pour un entrelacs donné ne dépend pas de la décomposition choisie.

L'ensemble des relations sur les décompositions en enchevêtrements élémentaires contraint largement le choix de valeur que l'on peut assigner à ces enchevêtrements. En particulier, l'existence d'une valeur pour l'image de Λ_+ qui soit

compatible avec toutes les relations est un résultat hautement non trivial, qui avait été montré antérieurement par Vladimir Drinfeld, dans un contexte purement algébrique. Une telle valeur est appelée un *associateur*. Il s'avère que pour les entrelacs, l'intégrale de Kontsevich ne dépend pas du choix d'associateur.

Comme déjà dit plus haut, pour les besoins de ce chapitre nous n'avons pas besoin d'une définition complète de l'intégrale de Kontsevich, et nous nous contenterons donc de donner ici les termes de bas degré des images de chacun des enchevêtrements élémentaires, suffisants pour l'ensemble des calculs contenus dans ce chapitre.

D'une part, $\hat{Z}(I)$ est le diagramme de corde vide sur un brin. D'autre part, on a :

$$\hat{Z}\left(\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array}\right) = \uparrow\uparrow\uparrow - \frac{1}{24} \left(\begin{array}{c} \uparrow\uparrow\uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow\uparrow\uparrow \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow\uparrow\uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow\uparrow\uparrow \end{array} \right) + \text{termes de degré } > 2$$

$$\hat{Z}\left(\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array}\right) = \uparrow\uparrow\uparrow + \frac{1}{24} \left(\begin{array}{c} \uparrow\uparrow\uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow\uparrow\uparrow \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow\uparrow\uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow\uparrow\uparrow \end{array} \right) + \text{termes de degré } > 2$$

$$\hat{Z}\left(\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array}\right) = \begin{array}{c} \uparrow \\ \diagdown \\ \uparrow \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \uparrow \\ \diagup \\ \uparrow \end{array} + \frac{1}{8} \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow \end{array} + \frac{1}{48} \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \uparrow \end{array} + \text{termes de degré } > 3$$

$$\hat{Z}\left(\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array}\right) = \begin{array}{c} \uparrow \\ \diagdown \\ \uparrow \end{array} - \frac{1}{2} \begin{array}{c} \uparrow \\ \diagup \\ \uparrow \end{array} + \frac{1}{8} \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow \end{array} - \frac{1}{48} \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \uparrow \end{array} + \text{termes de degré } > 3$$

$$\hat{Z}\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \curvearrowright \\ \bullet \end{array}\right) = \begin{array}{c} \uparrow \\ \curvearrowright \\ \uparrow \end{array} - \frac{1}{48} \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow \end{array} \right) + \text{termes de degré } > 2$$

$$\hat{Z}\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \curvearrowleft \\ \bullet \end{array}\right) = \begin{array}{c} \uparrow \\ \curvearrowleft \\ \uparrow \end{array} - \frac{1}{48} \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow \end{array} \right) + \text{termes de degré } > 2$$

Notons que ces valeurs sont données pour un choix d'orientation spécifique des brins. Les valeurs pour d'autres choix d'orientations ne diffèrent que d'un signe, donné pour chaque diagramme par $(-1)^n$, où n est le nombre de pattes sur le brin dont l'orientation a été renversée. Une description complète de cet invariant peut être trouvée dans [35].

Le calcul explicite de l'intégrale de Kontsevich du nœud trivial est l'un des seuls calculs complets connus. Il a été réalisé par Dror Bar-Natan, Stavros Garoufalidis, Lev Rozansky et Dylan Thurston dans [5].

Notation 1.1.31. On pose $\nu = \hat{Z}(U_0)$, l'intégrale de Kontsevich du nœud trivial avec parallélisation nulle.

Une décomposition d'un diagramme de U_0 en enchevêtrements élémentaires est simplement la juxtaposition verticale des enchevêtrements C et U . Il suit alors des valeurs ci-dessus que

$$\nu = \bigcirc + \frac{1}{24} \bigcirc \text{---} \bigcirc - \frac{1}{24} \bigcirc \text{---} \bigcirc + \text{degré} > 2 \quad (1.1)$$

Faisons maintenant le calcul des premiers termes de l'image de U_{\pm} .

Exemple 1.1.32. *Un diagramme de U_+ admet la décomposition suivante en enchevêtrements élémentaires :*

$$\hat{Z}(U_+) = \hat{Z} \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right)$$

On obtient¹ :

$$\hat{Z}(U_+) = \bigcirc + \frac{1}{2} \bigcirc \text{---} \bigcirc + \frac{1}{6} \bigcirc \text{---} \bigcirc - \frac{1}{24} \bigcirc \text{---} \bigcirc + \text{degré} > 2$$

Un calcul similaire donne que :

$$\hat{Z}(U_-) = \bigcirc - \frac{1}{2} \bigcirc \text{---} \bigcirc + \frac{1}{6} \bigcirc \text{---} \bigcirc - \frac{1}{24} \bigcirc \text{---} \bigcirc + \text{degré} > 2$$

1.1.3.3 Partie de degré ≤ 1 de l'invariant LMO

On peut maintenant donner la construction de l'invariant LMO des 3-variétés closes orientées. Cette construction part d'une présentation de chirurgie entière dans S^3 de la variété de départ. L'invariant LMO est extrait d'une normalisation \check{Z} de l'intégrale de Kontsevich de cet entrelacs, par une famille d'applications diagrammatiques sophistiquées notées ι_n .

Pour les besoins de ce chapitre, nous n'avons besoin que de la construction en degré inférieur ou égal à 1, et en particulier que de l'application ι_1 . Nous nous contenterons donc de donner ici cette définition partielle. Nous renvoyons le lecteur vers [41] ou [35] pour une définition complète de l'invariant LMO .

Définition 1.1.33. *Soit L un entrelacs parallélisé orienté à n composantes. On pose $\check{Z}(L) = \hat{Z}(L) \# \nu^{\otimes n}$. Autrement dit, on "ajoute" une copie de ν à chaque composante du squelette de $\hat{Z}(L)$.*

C'est une conséquence de la relation STU que cette somme connexe est bien définie, autrement dit que $\hat{Z}(L) \# \nu^{\otimes n} \in \mathcal{A}(\cup^n)$ ne dépend pas de l'endroit où on insère les copies de ν dans le squelette \cup^n .

Exemple 1.1.34. *En combinant l'exemple 1.1.32 et l'équation (1.1), on obtient*

$$\check{Z}(U_+) = \bigcirc + \frac{1}{2} \bigcirc \text{---} \bigcirc + \frac{5}{24} \bigcirc \text{---} \bigcirc - \frac{1}{12} \bigcirc \text{---} \bigcirc + \text{degré} > 2$$

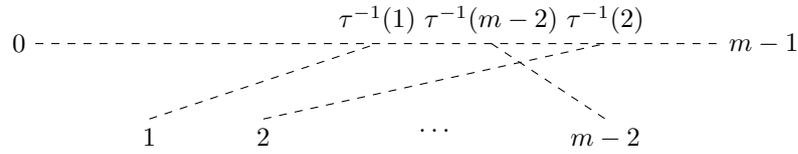
1. Noter le changement d'orientation sur l'un des brins du croisement, par rapport à l'enchevêtrement X_+ .

et

$$\check{Z}(U_-) = \text{Diagramme} - \frac{1}{2} \text{Diagramme} + \frac{5}{24} \text{Diagramme} - \frac{1}{12} \text{Diagramme} + \text{degré} > 2$$

Définition 1.1.35. Soit $m \in \mathbb{N}$. On définit T_m , une portion de diagramme de Jacobi, de la manière suivante :

1. $T_0 = T_1 = 0$.
2. $T_2 = \text{-----}$
3. Si $m \geq 3$, on associe à $\tau \in S_{m-2}$ le graphe uni-trivalent T_τ suivant :



On pose alors

$$T_m = \sum_{\tau \in S_{m-2}} \frac{(-1)^{i(\tau)}}{(m-1) \binom{m-2}{i(\tau)}} T_\tau,$$

où $i(\tau) = |\{k \in \{1, \dots, m-3\}, \tau(k) > \tau(k+1)\}|$.

Exemple 1.1.36. Plus concrètement, cela donne :

$$T_3 = \frac{1}{2} \text{Diagramme} + \frac{1}{6} \text{Diagramme} + \frac{1}{6} \text{Diagramme}$$

Définition 1.1.37. Soit D un diagramme de cordes dans $\mathcal{A}(\cup^n)$; on lui associe un élément de $\mathcal{A}(\emptyset)$ comme suit.

Prenons C une composante connexe du squelette. Elle est attaché à D avec k pattes : enlevons C et recollons une copie de T_k le long de ces k pattes. Appliquons ce procédé à chaque composante (cela peut être fait dans n'importe quel ordre). On définit O_1 la relation suivante :

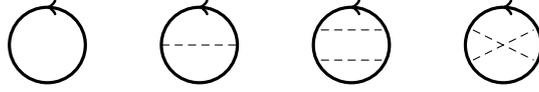
$$\text{Diagramme} \stackrel{O_1}{\sim} -2$$

Appliquons pour finir O_1 à chaque composante circulaire : le résultat est un élément de $\mathcal{A}(\emptyset)$, que l'on note $\iota_1(D)$.

Par linéarité, on définit ainsi une application

$$\iota_1 : \mathcal{A}(\cup^n) \rightarrow \mathcal{A}(\emptyset).$$

Exemple 1.1.38. En petit degré, on vérifie facilement que l'application ι_1 envoie les diagrammes suivants



sur 0, -2 , $\frac{1}{6} \times$ diagramme en Theta, et $-\frac{1}{3} \times$ diagramme en Theta, respectivement.

Définition 1.1.39. Soit $D_{>1}$ la relation suivante : chaque diagramme de Jacobi dont le degré est strictement supérieur ou égal à 1 est équivalent à 0.

Commençons avec des calculs pour U_+ et U_- . Ils interviendront de nouveau dans la suite.

Exemple 1.1.40. Modulo $D_{>1}$, on déduit l'expression suivante pour $\iota_1(\check{Z}(U_+))$:

$$\iota_1(\check{Z}(U_+)) \equiv -1 + \frac{1}{16} \text{ (diagramme à 2 lignes horizontales) } [D_{>1}]$$

De la même manière, on peut montrer que :

$$\iota_1(\check{Z}(U_-)) \equiv 1 + \frac{1}{16} \text{ (diagramme à 2 lignes horizontales) } [D_{>1}]$$

Cela nous permet maintenant de donner la formule pour la partie de degré 1 de l'invariant LMO.

Définition 1.1.41. Soient M une 3-variété fermée et L un entrelacs parallélisé tel que M est obtenue par chirurgie de \mathbb{S}^3 le long de L . Fixons une orientation pour L .

Le degré ≤ 1 de l'invariant LMO est défini par :

$$Z_1^{LMO}(M) = \left(\frac{\iota_1(\check{Z}(L))}{\iota_1(\check{Z}(U_+))^{\sigma_+(L)} \iota_1(\check{Z}(U_-))^{\sigma_-(L)}} \right)_{\leq 1} \in \mathcal{A}_{\leq 1}(\emptyset).$$

Cette quantité est bien un invariant de 3-variétés : elle est indépendante du choix d'orientation sur L , et invariante par mouvements de Kirby.

La propriété qui suit est un calcul classique et bien connu, qui explicite le dénominateur dans la définition de Z_1^{LMO} , voir [35].

Proposition 1.1.42. L'égalité suivante est vérifiée :

$$\iota_1(\check{Z}(U_+))^{-\sigma_+(L)} \times \iota_1(\check{Z}(U_-))^{-\sigma_-(L)} = (-1)^{\sigma_+(L)} + \frac{(-1)^{\sigma_+(L)\sigma(L)}}{16} \text{ (diagramme à 2 lignes horizontales) }$$

En outre, les parties de degré 0 et 1 de $Z_1^{LMO}(M)$ sont clairement identifiées :

Théorème 1.1.43 ([41, 14]). Soit M une 3-variété compacte orientée sans bord. On a

$$Z_1^{LMO}(M) = l_0 + l_1 \text{ (diagramme à 2 lignes horizontales) }$$

où

- $l_0 = \begin{cases} |H_1(M)| & \text{si } M \text{ est une sphère d'homologie rationnelle,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- $l_1 = \frac{(-1)^{\beta_1(M)}}{2} \lambda_L(M)$, où β_1 désigne le premier nombre de Betti.

En particulier, le second point du Théorème 1.1.43 est le résultat clef permettant d'établir notre formule de chirurgie pour l'invariant de Casson-Walker-Lescop, en utilisant les constructions combinatoires des invariants de Kontsevich et *LMO*.

1.2 Coefficients dans l'intégrale de Kontsevich

Dans cette partie, on va chercher à donner l'expression de (certaines sommes de) coefficients de diagrammes qui apparaissent dans l'intégrale de Kontsevich en fonction d'invariants classiques. On va tout d'abord établir un critère qui permet d'assurer que les dites sommes forment bien un invariant d'entrelacs, avant de déterminer à proprement parler de quel invariant il s'agit.

1.2.1 Quelques définitions et opérations sur les diagrammes de cordes

Avant de s'atteler au problème de l'identification des coefficients des diagrammes de l'intégrale de Kontsevich, on a besoin d'un certain nombre d'outils. Ce sont ces outils que l'on va introduire maintenant.

1.2.1.1 Résultats préliminaires

Notation 1.2.1. Soient S une somme de diagrammes de cordes sur n cercles et D un diagramme de cordes sur n cercles.

On appelle $C[D](S)$ le coefficient de D dans S .

On pose

$$C_L[D] = C[D](\hat{Z}(L)),$$

où L est un entrelacs parallélisé orienté.

Autrement dit, $C_L[D]$ est le coefficient de D dans l'intégrale de Kontsevich de L .

Remarque 1.2.2. Cette notation est en réalité un abus de langage. Elle désigne le coefficient de D dans l'intégrale de Kontsevich construite après un choix donné d'associateur. Mais, comme on l'a dit précédemment, le fait que cela soit un invariant ne dépend pas du choix de cet associateur dans les cas qui nous intéressent.

L'objectif est donc de donner maintenant un critère qui permette de vérifier si une somme de $C_L[D]$, pour D parcourant un certain ensemble de diagrammes de cordes, est un invariant.

Lemme 1.2.3. Soient D_1, \dots, D_k des diagrammes de cordes sur n cercles.

Pour un entrelacs parallélisé orienté L , posons $X(L) = C_L[D_1] + \dots + C_L[D_k]$.

Alors X est un invariant d'entrelacs parallélisés orientés à n composantes si et seulement si X s'annule sur toute combinaison linéaire de diagrammes issue d'une relation $4T$.

Ce résultat, anodin à première vue, permet cependant, lorsqu'on connaît la liste des diagrammes (de degré donné) sur n cercles, de connaître les combinaisons de coefficients de diagrammes de l'intégrale de Kontsevich qui forment des invariants d'entrelacs, et que l'on peut ensuite tenter d'identifier en termes d'invariants d'entrelacs classiques.

Remarque 1.2.4. Dans le Lemme 1.2.3, quand on veut vérifier si X est ou non un invariant, il suffit de savoir si X s'annule sur les relations $4T$ mettant en jeu l'un des D_i . Pour les autres relations $4T$, l'annulation de X est en effet automatique.

Par la suite, nous utiliserons toujours implicitement le Lemme 1.2.3 de cette manière.

On a le résultat suivant concernant les juxtapositions de diagrammes.

Proposition 1.2.5. *Soient D un diagramme de cordes sur n cercles et $I \cup J$ une partition de $\{1, \dots, n\}$.*

Supposons qu'il n'y ait pas de corde dans D entre un cercle indexé par un élément de I et un cercle indexé par un élément de J . On a :

$$C_L[D] = C_{L_I}[D_I] \times C_{L_J}[D_J].$$

Preuve. Il suffit de compter le nombre d'apparitions de D dans l'intégrale de Kontsevich de L .

Pour obtenir D , il suffit de considérer les diagrammes dans l'intégrale de Kontsevich de L qui n'ont aucune corde mixte entre un cercle indexé par un élément de I et un cercle indexé par un élément de J . Le sous-diagramme D_I provient alors de l'intégrale de Kontsevich de L_I tandis que le sous-diagramme D_J provient de l'intégrale de Kontsevich de L_J .

Réciproquement, à chaque apparition couplée de D_I dans le calcul de l'intégrale de Kontsevich de L_I et de D_J dans le calcul de l'intégrale de Kontsevich de L_J correspond une apparition de D dans le calcul de l'intégrale de Kontsevich de L . \square

Enfin, nous aurons très fréquemment recours au résultat élémentaire suivant, lorsque nous manipuleront des triplets d'écheveau. Nous serons en effet amené à manipuler, en bas degré, des quantités de la forme $C_{L_+}[D] - C_{L_-}[D]$, où L_+ et L_- sont les premiers membres d'un triplet d'écheveau.

Dans un soucis d'ergonomie (en réalité afin d'être en mesure d'écrire ces quantités), nous écrirons uniquement les parties de l'intégrale de Kontsevich qui diffèrent pour L_+ et L_- , qui sont des contributions locales données par le croisement où diffèrent L_+ et L_- .

Lemme 1.2.6. *Soient D un diagramme de cordes de degré au plus 4, et L_+ et L_- les premiers membres d'un triplet d'écheveau autour d'un croisement entre i -ème et j -ème composante (avec i et j éventuellement égaux).*

Alors la différence $C_{L_+}[D] - C_{L_-}[D]$ est égale à

$$\begin{aligned}
1. \quad & C[D] \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \times \\ \searrow \end{array} \right)_{i \quad j} \text{ lorsque } D \text{ contient } \leq 2 \text{ cordes entre } i \text{ et } j. \\
2. \quad & C[D] \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \times \\ \searrow \end{array} \right)_{i \quad j} + \frac{1}{24} \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \times \\ \searrow \end{array} \right)_{i \quad j} \text{ lorsque } D \text{ contient } \geq 3 \text{ cordes entre } i \text{ et } j.
\end{aligned}$$

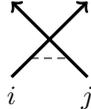
Preuve. Les contributions avec un nombre pair de cordes du croisement positif et du croisement négatif se simplifient, tandis que celles avec un nombre impair de cordes s'ajoutent. \square

1.2.1.2 Gonflages et proliférations

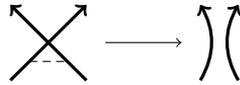
On introduit ici plusieurs opérations sur les diagrammes de cordes.

La première est bien connue :

Définition 1.2.7. Soit D un diagramme de cordes sur n cercles, qui est localement de la forme suivante (où i et j sont deux indices, éventuellement égaux, entre 1 et n) :



Un lissage de D le long de la corde est obtenu par l'opération suivante :



La figure 1.1 ci-dessous donne deux exemples de lissage sur des diagrammes de cordes sur un cercle (on a marqué d'un * la corde qui est lissée).



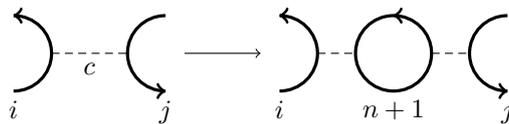
FIGURE 1.1 – Lissage de diagrammes de cordes sur un cercle

Si la corde en question est attachée à deux composantes distinctes i et j ($i < j$), alors ces deux cercles deviennent une même composante du squelette après lissage, numérotée i , et les composantes $k > j$ sont renumérotées par $(k - 1)$. Sinon, comme l'illustre la Figure 1.1, le squelette du lissage contient une composante supplémentaire, et on numérote par $(n + 1)$ l'un des deux cercles créés par le lissage.

On va maintenant introduire les opérations de gonflage et de proliférations, qui sont des procédés permettant de construire des diagrammes de cordes sur $(n + 1)$ cercles à partir de diagrammes de cordes sur n cercles.

Définition 1.2.8. Soient D un diagramme de cordes sur n composantes et c une corde de D .

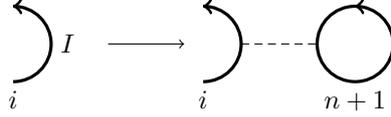
On appelle gonflage de D le long de c l'opération suivante :



Le nouveau diagramme est bien défini, dans le sens qu'il n'y a pas de problème pour définir l'orientation du $(n + 1)$ -ème cercle.

Définition 1.2.9. Soient D un diagramme de cordes sur n composantes et I un intervalle du squelette de D délimité par 2 pattes de cordes, et dont l'intérieur ne contient aucune patte.²

On appelle prolifération de D le long de I l'opération suivante :



Le nouveau diagramme est bien défini dans le sens qu'il n'y a pas de problème pour définir l'orientation du $(n + 1)$ -ème cercle. De plus, on peut attacher la corde à n'importe quel point de I .

Plus généralement, on peut proliférer sur tous les intervalles d'une composante connexe donnée du squelette d'un diagramme, ou encore sur tous les intervalles de toutes les composantes connexes du squelette du diagramme. On parlera de prolifération le long de la dite composante dans le premier cas, et de prolifération intensive dans le second.

Remarque 1.2.10. Soit D un diagramme de cordes.

Lisser la corde produite par une prolifération sur D , redonne D . De même, dans un gonflage de D , lisser une des deux cordes attachées aux $(n + 1)$ -ème cercle redonne le diagramme D .

Ces deux opérations joueront un rôle important dans le résultat principal de ce chapitre. Mais avant cela, nous allons donner quelques résultats élémentaires, et fondamentaux, qui les mettent en jeu.

Proposition 1.2.11. Soit \mathcal{D} un ensemble de diagrammes de cordes sur n cercles tel que $X = \sum_{D \in \mathcal{D}} C.[D]$ soit un invariant.

Considérons \mathcal{D}' l'ensemble des diagrammes de cordes obtenus par gonflage le long d'une corde entre les i -ème et j -ème composantes des diagrammes de \mathcal{D} ($i \neq j$).

Alors $X' = \sum_{D' \in \mathcal{D}'} C.[D']$ est encore un invariant.

Preuve. Considérons R' une relation $4T$ sur $(n + 1)$ cercles. Comme noté dans la remarque 1.2.4, il suffit de considérer la situation où R' implique au moins un diagramme dans \mathcal{D}' . On distingue trois cas :

1. Les deux cordes mises en jeu par R' sont apparues avec le gonflage. Alors R' implique trois composantes distinctes du squelette, dont la $(n+1)$ -ème. De plus, on peut supposer que R' s'écrit sous la forme $D'_1 - D'_2 = D'_3 - D'_4$ avec D'_1 et D'_2 ayant deux pattes sur le $(n + 1)$ -ème cercle. Ce cercle ne possède alors que ces deux seules pattes, et il vient facilement que $D'_1 = D'_2$. Par ailleurs, D'_3 et D'_4 n'ont qu'une seule patte sur le $(n + 1)$ -ème cercle, et ne sont donc pas contenus dans \mathcal{D}' . Il suit donc que X' vérifie bien R' .
2. Les deux cordes mises en jeu par R' ne sont pas apparues avec le gonflage. Dans ce cas, considérons les antécédents par l'opération de gonflage des quatre diagrammes de R' : puisqu'au moins un des diagrammes impliqué

² L'intervalle I peut aussi parcourir toute une composante du squelette, si cette dernière contient zéro ou une seule patte.

dans R' est dans \mathcal{D}' , un tel antécédent existe pour ce diagramme, et donc pour les 4 diagrammes de R' car tous ont 2 pattes sur le cercle $(n+1)$. On obtient ainsi une nouvelle relation $4T$, R , sur n cercles. Comme X est un invariant, il vérifie R . En regonflant à nouveau les diagrammes de cette relation R , on constate alors que X' vérifie R' . En effet, un diagramme impliqué dans R est dans \mathcal{D} si et seulement si le diagramme correspondant qui est impliqué dans R' , est dans \mathcal{D}' .

3. Une des cordes mises en jeu par R' est apparue avec le gonflage tandis que l'autre ne l'est pas. On va appliquer le même raisonnement que dans le cas précédent. Les diagrammes de R' peuvent de nouveau être vus comme des gonflages de diagrammes d'une relation $4T$, R , sur n cercles. De nouveau, X' vérifie R' .

Au final, d'après de Lemme 1.2.3, X' est bien un invariant. \square

Proposition 1.2.12. *Soit \mathcal{D} un ensemble de diagrammes de cordes sur n cercles tel que $X = \sum_{D \in \mathcal{D}} C.[D]$ soit un invariant.*

Considérons \mathcal{D}' l'ensemble des diagrammes de cordes obtenus par prolifération le long de la i -ème composante des diagrammes de \mathcal{D} ($i \in \{1, \dots, n\}$).

Alors, pour L un entrelacs parallélisé orienté à $(n+1)$ composantes, on a :

$$\sum_{D' \in \mathcal{D}'} C_L[D'] = X(L_{n+1})l_{i,n+1}.$$

Preuve. Posons $X' = \sum_{D' \in \mathcal{D}'} C.[D']$, et considérons une relation $4T$, R' , sur $n+1$ cercles. Il y a deux cas possibles :

1. Les deux cordes mises en jeu par R' ne sont pas apparues avec la prolifération. De manière similaire à la démonstration de la Proposition 1.2.11, on peut voir R' comme mettant en jeu quatre diagrammes obtenus par prolifération le long d'un intervalle bien choisi de la i -ème composante de diagrammes reliés entre eux par une relation $4T$ sur n cercles. Comme X est un invariant, il vérifie cette relation. Donc X' fait de même sur R' .
2. Sinon, on peut écrire R' sous la forme $D'_1 - D'_2 = D'_3 - D'_4$, avec D'_1 et D'_2 appartenant à \mathcal{D}' : tous deux sont en effet obtenus par prolifération d'un diagramme de \mathcal{D} le long de deux intervalles "voisins" du squelette. On a alors que X' s'annule sur $D'_1 - D'_2$. D'autre part, on peut voir que D'_3 and D'_4 appartiennent (ou non) de manière simultanée à \mathcal{D}' - cela dépend de la composante sur laquelle les cordes ont été déplacées par R' . Dans les deux cas, X' s'annule bien sur $D'_3 - D'_4$, et donc sur R' .

On a donc montré que X' était un invariant. Il reste à démontrer qu'il s'agit bien de celui annoncé.

Soient L_+ et L_- les premiers membres d'un triplet d'écheveau autour d'un croisement mixte entre i -ème et $(n+1)$ -ème composantes.

Notons \tilde{L} l'entrelacs L_{\pm} privé de la $(n+1)$ -ème composante.

On a :

$$\begin{aligned} & X'(\tilde{L}_+) - X'(\tilde{L}_-) \\ &= \sum_{D' \in \mathcal{D}'} C[D'] \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ i \quad \quad n+1 \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{D \in \mathcal{D}} C[D \cup \underset{n+1}{\circlearrowleft}] \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{array} \right) \\
&= X(\tilde{L})
\end{aligned}$$

Ici, la première égalité provient de la définition de l'intégrale de Kontsevich et du fait qu'un diagramme de \mathcal{D}' contient une seule corde attachée au $(n+1)$ -ème cercle. La seconde égalité suit directement de la définition de \mathcal{D}' , et la troisième suit de la définition de X . Par ailleurs, l'invariant défini par $\varphi(L) := X(L_{n+1})l_{i,n+1}$ satisfait la même relation d'écheveau $\varphi(\tilde{L}_+) - \varphi(\tilde{L}_-) = X(L)$. Ceci provient directement de la définition du nombre d'enlacement.

Par changements successifs de croisements mixtes entre les i -ème et $(n+1)$ -ème composantes, on peut relier n'importe quel entrelacs à $(n+1)$ composantes à un entrelacs où la $(n+1)$ -ème composante est géométriquement séparée, auquel cas les invariants X' et φ s'annulent.

Cela termine la démonstration. \square

Grâce aux gonflages et aux proliférations, on a un procédé algorithmique de construction d'invariants d'entrelacs à un nombre toujours plus important de composantes. Cela va nous permettre de mettre en évidence les familles d'invariants qui interviendront dans le résultat final de ce premier chapitre.

1.2.1.3 Diagrammes essentiels

On va maintenant introduire une famille de diagrammes, qu'on va appeler essentiels, qui vont jouer un rôle central dans la démonstration du résultat principal de ce premier chapitre.

Définition 1.2.13. Soient D un diagramme de cordes connexe, et D' un élément de $\mathcal{A}(\emptyset)$.

On dit que D se ferme en D' lorsque $\iota_1(D) \equiv D'[D_{>1}]$.

Notre attention se portera sur deux types de diagrammes. D'une part ceux qui se fermeront en une constante (numérique) non nulle, et d'autre part ceux qui se fermeront en un diagramme en thêta. Nous allons diviser ces derniers en deux familles.

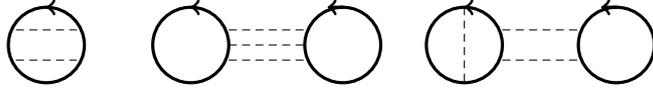
Définition 1.2.14. On appelle diagramme plus-essentiel tout diagramme de cordes qui se ferme en un diagramme en thêta avec un coefficient positif.

On appelle diagramme moins-essentiel tout diagramme de cordes qui se ferme en un diagramme en thêta avec un coefficient négatif.

On appelle diagramme essentiel tout diagramme plus- ou moins-essentiel.

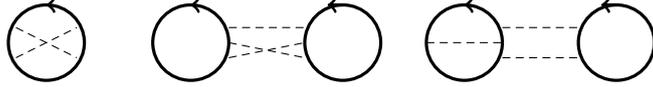
Exemple 1.2.15. En nous appuyant sur l'exemple 1.1.38, nous pouvons dresser une liste des diagrammes essentiels en petit degré.

Clairement, il n'existe pas de tels diagrammes en degré 0 ou 1 (car tout diagramme de degré < 2 se ferme en zéro). Ci-dessous on donne, à permutation des composantes près, la liste de tous les diagrammes plus-essentiels de degré ≤ 3 sur ≤ 2 cercles :



En effet, chacun de ces diagrammes se ferme en $\frac{1}{6} \times$ diagramme en thêta, voir Exemple 1.1.38.

Les diagrammes suivants sont quant à eux moins-essentiels, chacun d'eux se fermant en $-\frac{1}{3} \times$ diagramme en thêta :



Notation 1.2.16. Soit n un entier strictement positif.

On note $\mathcal{E}^+(n)$ l'ensemble des diagrammes plus-essentiels sur n cercles, et on note $\mathcal{E}^-(n)$ l'ensemble des diagrammes moins-essentiels sur n cercles. On pose enfin $\mathcal{E}(n) := \mathcal{E}^+(n) \cup \mathcal{E}^-(n)$.

Nous allons donner maintenant des contraintes combinatoires pour qu'un diagramme se ferme en un diagramme en thêta.

Lemme 1.2.17. Soit D un diagramme essentiel.

Alors chaque composante connexe du squelette doit avoir entre deux et quatre pattes. Plus précisément, il y a deux cas possibles :

1. Il y a exactement une composante connexe avec exactement quatre pattes, et toutes les autres en ont exactement deux.
2. Il y a exactement deux composantes connexes avec exactement trois pattes, et toutes les autres en ont exactement deux.

Preuve. Quand on regarde les diagrammes T_m de la Définition 1.1.35, on peut voir qu'un diagramme se ferme en 0 quand au moins une des composantes connexes du squelette possède une ou aucune patte. De plus, quand m est supérieur ou égal à 2, T_m ferme une composante avec m pattes en un diagramme qui possède $m - 2$ sommets trivalents. Ce qui donne que le degré total du diagramme obtenu est réduit de 1. Or le degré d'un diagramme en thêta est 1, donc chaque composante connexe du squelette ne peut avoir plus que quatre pattes.

Supposons maintenant qu'une composante connexe du squelette possède quatre pattes. T_4 la remplace par un diagramme avec 2 sommets trivalents. Comme un diagramme en thêta possède exactement 2 tels sommets, toutes les autres composantes connexes du squelette doivent se fermer en un diagramme avec 0 sommet trivalent. Ce qui ne peut arriver que quand toutes ces composantes connexes possèdent exactement deux pattes.

Supposons enfin qu'il n'y a pas de composante connexe avec quatre pattes. Une composante connexe avec trois pattes se ferme avec T_3 et donne donc 1 sommet trivalent. Il doit donc y avoir exactement deux telles composantes connexes pour obtenir au final un diagramme en thêta. \square

On obtient directement de ce résultat le corollaire suivant.

Corollaire 1.2.18. Le degré d'un diagramme essentiel sur n cercles est $n + 1$.

Le résultat qui suit établit des liens entre le fait d'être un diagramme essentiel et l'opération de gonflage qu'on a définie auparavant.

Proposition 1.2.19. *Le gonflage d'un diagramme plus-essentiel (respectivement moins-essentiel) de degré n donne un diagramme plus-essentiel (resp. moins-essentiel) de degré $n + 1$, pour tout entier n .*

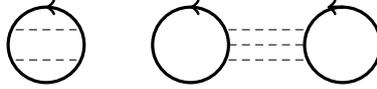
Réciproquement, pour $n \geq 3$, tout diagramme plus-essentiel (respectivement moins-essentiel) de degré $n + 1$ est le gonflage d'un diagramme plus-essentiel (resp. moins-essentiel) de degré n , à permutation des composantes près.

Preuve. Quand on applique ι_1 sur un diagramme obtenu par gonflage d'un autre diagramme D , choisissons de fermer en premier la $(n + 1)$ -ème composante avec T_2 . Il reste ensuite à fermer D . Ce dernier étant plus-essentiel (par exemple), on obtient un diagramme en thêta avec un coefficient positif, qui est préservé par T_2 . De plus, le caractère connexe de D est bien préservé par l'opération de gonflage.

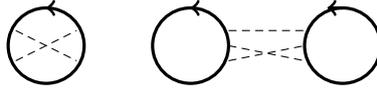
Réciproquement, puisque $n \geq 3$, le squelette d'un diagramme essentiel de degré $n + 1$ possède au moins trois composantes connexes, d'après le Corollaire 1.2.18. Le Lemme 1.2.17 donne alors que D possède au moins une composante, disons par exemple la 1-ère, avec exactement deux pattes. Comme le diagramme est connexe, ces deux pattes sont des pattes de deux cordes mixtes distinctes reliant la 1-ère composante à une ou deux autres composantes connexes de D . Cela permet ainsi de voir D comme un gonflage du diagramme qu'on obtiendrait en fermant D en commençant avec la 1-ère composante.

Ce qui conclut la démonstration. \square

Remarque 1.2.20. *En combinant la Proposition 1.2.19 et l'Exemple 1.2.15, on obtient que, à numérotation des composantes près, tout diagramme plus-essentiel est obtenu par gonflages itérés à partir des deux diagrammes suivants :*



et que tout diagramme moins-essentiel est obtenu par gonflages itérés à partir des deux diagrammes suivants :



Nous concluons cette section par un résultat technique sur les diagrammes moins-essentiels, qui nous permettra d'identifier tous les coefficients du polynôme de Conway en termes de diagrammes de l'intégrale de Kontsevich.

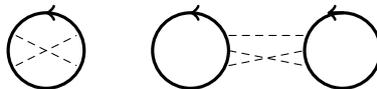
Proposition 1.2.21. *Soit $n \geq 3$ un entier.*

Pour tout diagramme moins-essentiel de degré n , le lissage le long d'une corde mixte produit un diagramme moins-essentiel de degré $(n - 1)$.

Réciproquement, tout diagramme moins-essentiel de degré $(n - 1)$ peut être obtenu par un tel lissage.

Preuve. Considérons un diagramme D moins-essentiel de degré n .

La remarque 1.2.20 ci-dessus nous dit que D est obtenu par gonflages itérées à partir de l'un des diagrammes suivants.



Clairement, comme noté dans la Remarque 1.2.10, le lissage d'une corde apparue lors de l'un de ces gonflages produit le diagramme avant gonflage, donc un diagramme moins-essentiel.

Il reste donc à observer que le lissage d'une corde mixte sur le diagramme de droite ci-dessus produit toujours le diagramme de gauche, donc un moins-essentiel. \square

Notons qu'un résultat analogue existe pour les diagrammes plus-essentiels, mais ne sera pas nécessaire dans ce chapitre.

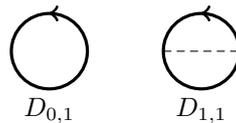
1.2.2 Identification des coefficients sur un petit nombre de composantes

On va maintenant s'attaquer aux premières identifications de coefficients de diagrammes dans l'intégrale de Kontsevich. Ceux qui nous intéressent particulièrement sont ceux qui se ferment en diagramme en thêta (identifiables par le Lemme 1.2.17) ou en constante. Pour déterminer l'invariant qui se cache derrière une somme de coefficients de diagrammes, nous allons utiliser à chaque fois la stratégie suivante, que nous avons en fait déjà utilisée précédemment : si deux invariants ont la même relation d'écheveau (par exemple par un changement de croisement mixte) et la même valeur sur la situation modèle correspondante (par ex. entrelacs géométriquement séparés), alors ces deux invariants sont égaux.

Nous traitons ce problème d'identification degré par degré. Les premiers résultats, en petit degré, sont en général bien connus et de l'ordre du "folklore", mais leurs démonstrations nous permettront de mettre en place et illustrer la stratégie générale, que nous utiliserons par la suite pour des résultats plus sophistiqués.

1.2.2.1 Degré 0 et degré 1

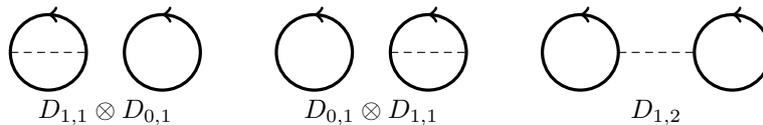
De manière évidente, il y a un unique diagramme de degré 0 sur un cercle, noté $D_{0,1}$, et il y a un unique diagramme de degré 1 sur un cercle, noté $D_{1,1}$.



Le lecteur peut facilement vérifier qu'il y a uniquement trois diagrammes de degré 1 sur deux cercles. Avant de donner la liste, on va juste introduire une notation plus ergonomique.

Notation 1.2.22. Soient D_1 et D_2 deux diagrammes de cordes. On appelle $D_1 \otimes D_2$ la juxtaposition de D_1 et D_2 , où les composantes connexes sont numérotées par la concaténation des numérotations de D_1 et D_2 .

La liste des diagrammes de degré 1 sur deux cercles est donc la suivante :



Commençons avec ce premier résultat d'identification, qui est une formule classique.

Proposition 1.2.23. *Soit K un nœud orienté parallélisé. L'égalité suivante est vérifiée :*

$$C_K[D_{1,1}] = \frac{1}{2}fr(K).$$

Preuve. Il n'y a pas de relation $4T$ qui mette en jeu $D_{1,1}$, de sorte que, d'après le Lemme 1.2.3, $C.[D_{1,1}]$ est un invariant.

Soient maintenant K_+ et K_- les premiers membres d'un triplet d'écheveau autour d'un croisement interne. D'après le Lemme 1.2.6, on a :

$$C_{K_+}[D_{1,1}] - C_{K_-}[D_{1,1}] = C[D_{1,1}]\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \text{---} \\ \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) = 1$$

La seconde égalité est obtenue en comptant le nombre de manières de compléter le diagramme local pour construire $D_{1,1}$ dans le calcul de l'intégrale de Kontsevich de K . Ce dernier ne peut s'obtenir qu'en prenant, dans tous les autres "blocs" de la décomposition en enchevêtrements élémentaires, la contribution sans corde, qui arrive avec un coefficient égal à 1. De sorte que $C.[D_{1,1}]$ et $\frac{1}{2}fr(\cdot)$ ont la même relation d'écheveau.

Par changements successifs de croisements internes, on peut relier n'importe quel nœud à U_+ ou U_0 , suivant la parité de l'auto-enlacement de K . Un calcul rapide montre que $C_{U_+}[D_{1,1}] = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}fr(U_+)$ et $C_{U_0}[D_{1,1}] = 0 = \frac{1}{2}fr(U_0)$. Ce qui conclut la démonstration. \square

Grâce à la Proposition 1.2.5, et en observant que $C.[D_{0,1}] = 1$, on obtient le résultat suivant :

Corollaire 1.2.24. *Soit $L = K_1 \cup K_2$ un entrelacs parallélisé orienté à 2 composantes :*

$$C_L[D_{1,1} \otimes D_{0,1}] = \frac{1}{2}fr(K_1) \quad \text{et} \quad C_L[D_{0,1} \otimes D_{1,1}] = \frac{1}{2}fr(K_2)$$

Le résultat suivant est aussi bien connu, mais cette fois pour 2 composantes.

Proposition 1.2.25. *Soit $L = K_1 \cup K_2$ un entrelacs parallélisé orienté à 2 composantes. L'égalité suivante est vérifiée :*

$$C_L[D_{1,2}] = l_{1,2}.$$

Preuve. Il n'y a pas de relation $4T$ qui mette en jeu $D_{1,2}$, de sorte que d'après le Lemme 1.2.3, $C.[D_{1,2}]$ est un invariant.

Soient maintenant L_+ et L_- les premiers membres d'un triplet d'écheveau autour d'un croisement mixte. D'après le Lemme 1.2.6, on a :

$$C_{L_+}[D_{1,2}] - C_{L_-}[D_{1,2}] = C[D_{1,2}]\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \text{---} \\ \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) = 1$$

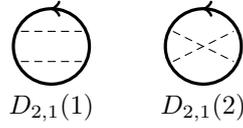
On obtient la seconde égalité par le même raisonnement que celui de la Proposition précédente. Ainsi, $C.[D_{1,2}]$ et le nombre d'enlacement entre les 1-ère et 2-ème composantes ont la même relation d'écheveau.

Par changements successifs de croisements mixtes, on peut relier n'importe quel entrelacs à un entrelacs géométriquement scindé. Pour de tels entrelacs, les deux invariants s'annulent. En effet, l'intégrale de Kontsevich ne contient alors pas de diagramme avec une corde mixte.

Ce qui termine la démonstration. \square

1.2.2.2 Degré 2

Passons maintenant au cas du degré 2. Il est bien connu, et facilement vérifiable, qu'il n'y a que deux diagrammes de degré 2 sur un cercle :



Proposition 1.2.26. *Soit K un nœud orienté parallélisé. Les égalités suivantes sont vérifiées :*

$$C_K[D_{2,1}(1)] = \frac{1}{8} fr(K)^2 + \frac{1}{24} - c_2(K),$$

$$C_K[D_{2,1}(2)] = c_2(K) - \frac{1}{24}.$$

Remarque 1.2.27. *Une conséquence immédiate est l'égalité :*

$$C_K[D_{2,1}(1)] + C_K[D_{2,1}(2)] = \frac{1}{8} fr(K)^2.$$

Remarque 1.2.28. *La seconde formule de Proposition 1.2.26 apparaît dans [36, Prop. 4.4]. La généralisation en degrés supérieurs donnée dans [36] est cependant éronnée, et sera corrigée dans la suite de ce chapitre - voir Remarque 1.2.32.*

Preuve de Proposition 1.2.26. Il y a une unique relation $4T$ qui mette en jeu $D_{2,1}(1)$ ou $D_{2,1}(2)$. Il s'agit de la suivante :

$$D_{2,1}(1) - D_{2,1}(2) = D_{2,1}(1) - D_{2,1}(2).$$

Le Lemme 1.2.3 donne alors que $C.[D_{2,1}(1)]$ et $C.[D_{2,1}(2)]$ sont des invariants. Soit maintenant K_+ , K_- et $L_0 = K_1 \cup K_2$ un triplet d'écheveau autour d'un croisement (interne). D'après le Lemme 1.2.6, on a :

$$\begin{aligned} & C_{K_+}[D_{2,1}(1)] - C_{K_-}[D_{2,1}(1)] \\ &= C[D_{2,1}(1)] \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \times \\ \searrow \end{array} \right) \\ &= C[D_{1,1} \otimes D_{0,1}] \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \\ \searrow \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \\ \searrow \end{array} \right) + C[D_{0,1} \otimes D_{1,1}] \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \\ \searrow \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \\ \searrow \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} fr(K_1) + \frac{1}{2} fr(K_2) \\
&= \frac{1}{2} (fr(K_-) + 1 - 2c_1(L_0))
\end{aligned}$$

La deuxième égalité est obtenue en lissant le long de la corde. Ce faisant, comme l'illustre la figure 1.1, $D_{2,1}(1)$ peut être changé en $D_{1,1} \otimes D_{0,1}$ ou $D_{0,1} \otimes D_{1,1}$. Réciproquement, ces deux diagrammes ne peuvent être obtenus par lissage d'un diagramme sur un cercle le long d'une corde interne uniquement depuis $D_{2,1}(1)$. La troisième égalité est une conséquence du Corollaire 1.2.24. La dernière égalité est aisément vérifiées d'après les définitions diagrammatiques de l'enlacement et de l'auto-enlacement (par comptage de croisements avec signe). Le même raisonnement, excepté que l'on utilise la Proposition 1.2.25 à la place du Corollaire 1.2.24, donne que :

$$\begin{aligned}
&C_{K_+}[D_{2,1}(2)] - C_{K_-}[D_{2,1}(2)] \\
&= C[D_{2,1}(2)] \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right) \\
&= C[D_{1,2}] \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \end{array} \right) \\
&= C_{L_0}[D_{1,2}] = l_{1,2} = c_1(L_0).
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{8} fr(K_+)^2 + \frac{1}{24} - c_2(K_+) \right) - \left(\frac{1}{8} fr(K_-)^2 + \frac{1}{24} - c_2(K_-) \right) \\
&= \frac{1}{8} \underbrace{(fr(K_+) - fr(K_-))}_{=2} \underbrace{(fr(K_+) + fr(K_-))}_{=2fr(K_-)+2} - c_1(L_0) \\
&= \frac{1}{4} (2fr(K_-) + 2) - c_1(L_0),
\end{aligned}$$

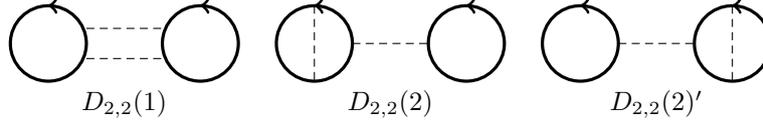
où la première égalité utilise la Proposition 1.1.14. Au final, les deux quantités $C[D_{2,1}(1)]$ et $\frac{1}{8} fr(\cdot)^2 + \frac{1}{24} - c_2(\cdot)$ ont la même relation d'écheveau. Et il en est de même pour $C[D_{2,1}(2)]$ et $c_2(\cdot) - \frac{1}{24}$ d'après la Proposition 1.1.14. Par changements successifs de croisements internes, on peut relier n'importe quel nœud à U_+ ou U_0 . En utilisant le calcul de $\hat{Z}(U_+)$ donné dans l'exemple 1.1.32, et la formule pour $\hat{Z}(U_0)$ donnée dans (1.1), on a :

$$\begin{aligned}
C_{U_+}[D_{2,1}(1)] &= \frac{1}{48} + \frac{1}{48} + \frac{1}{8} = \frac{1}{6} = \frac{1}{8} fr(U_+)^2 + \frac{1}{24} - c_2(U_+), \\
C_{U_0}[D_{2,1}(1)] &= \frac{1}{48} + \frac{1}{48} = \frac{1}{24} = \frac{1}{8} fr(U_0)^2 + \frac{1}{24} - c_2(U_0), \\
C_{U_+}[D_{2,1}(2)] &= -\frac{1}{48} - \frac{1}{48} = -\frac{1}{24} = c_2(U_+) - \frac{1}{24} \quad \text{et}
\end{aligned}$$

$$C_{U_0}[D_{2,1}(2)] = -\frac{1}{48} - \frac{1}{48} = -\frac{1}{24} = c_2(U_0) - \frac{1}{24}.$$

Ce qui donne les égalités annoncées. \square

Passons maintenant aux diagrammes de degré 2 sur deux cercles. Il suffit de considérer le cas des diagrammes connexes : les invariants associés aux diagrammes non connexes se déduisent de Lemme 1.2.5 et des égalités précédentes. Le lecteur pourra facilement montrer qu'il n'y a que trois tels diagrammes :



Proposition 1.2.29. *Soit $L = K_1 \cup K_2$ un entrelacs parallélisé orienté à 2 composantes. Les égalités suivantes sont vérifiées :*

$$C_L[D_{2,2}(1)] = \frac{1}{2}l_{1,2}^2,$$

$$C_L[D_{2,2}(2)] = \frac{1}{2}fr(K_1) \times l_{1,2} \quad \text{et} \quad C_L[D_{2,2}(2)'] = l_{1,2} \times \frac{1}{2}fr(K_2).$$

Preuve. Les deux dernières formules sont des applications directes de la Proposition 1.2.38, si bien que seule la première égalité reste à démontrer.

L'unique relation $4T$ qui mette en jeu $D_{2,2}(1)$ est triviale. De sorte que, d'après le Lemme 1.2.3, $C_L[D_{2,2}(1)]$ est un invariant.

Soit $L_+ = K_1^+ \cup K_2^+$, $L_- = K_1^- \cup K_2^-$ et L_0 un triplet d'écheveau autour d'un croisement mixte. D'après le Lemme 1.2.6, on a :

$$\begin{aligned} & C_{L_+}[D_{2,2}(1)] - C_{L_-}[D_{2,2}(1)] \\ &= C[D_{2,2}(1)] \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \times \\ \searrow \end{array} \right) \\ &= C[D_{1,1}] \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \uparrow \\ \searrow \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \uparrow \\ \searrow \end{array} \right) \\ &= C_{L_0}[D_{1,1}] = \frac{1}{2}fr(L_0). \end{aligned}$$

On obtient la deuxième égalité en lissant la corde mixte donnée par le croisement d'écheveau. Ce faisant, on construit $D_{1,1}$ à partir de $D_{2,2}(1)$ et, réciproquement, $D_{1,1}$ peut uniquement être obtenu depuis $D_{2,2}(1)$ grâce à cette opération. La Proposition 1.2.23 donne alors la quatrième égalité.

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}lk(K_1^+, K_2^+)^2 - \frac{1}{2}lk(K_1^-, K_2^-)^2 \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{(lk(K_1^+, K_2^+) + lk(K_1^-, K_2^-))}_{=fr(L_0)} \underbrace{(lk(K_1^+, K_2^+) - lk(K_1^-, K_2^-))}_{=1}, \end{aligned}$$

où l'identification des deux facteurs est une conséquence des définitions diagrammatiques de l'enlacement et de l'auto-enlacement (par comptage de croisements avec signe). Ainsi, $C.[D_{2,2}(1)]$ a la relation d'écheveau désirée.

Par changements successifs de croisements mixtes, on peut relier n'importe quel entrelacs à un entrelacs géométriquement séparé. Pour de tels entrelacs, les invariants en présence s'annulent.

Ce qui termine la démonstration. \square

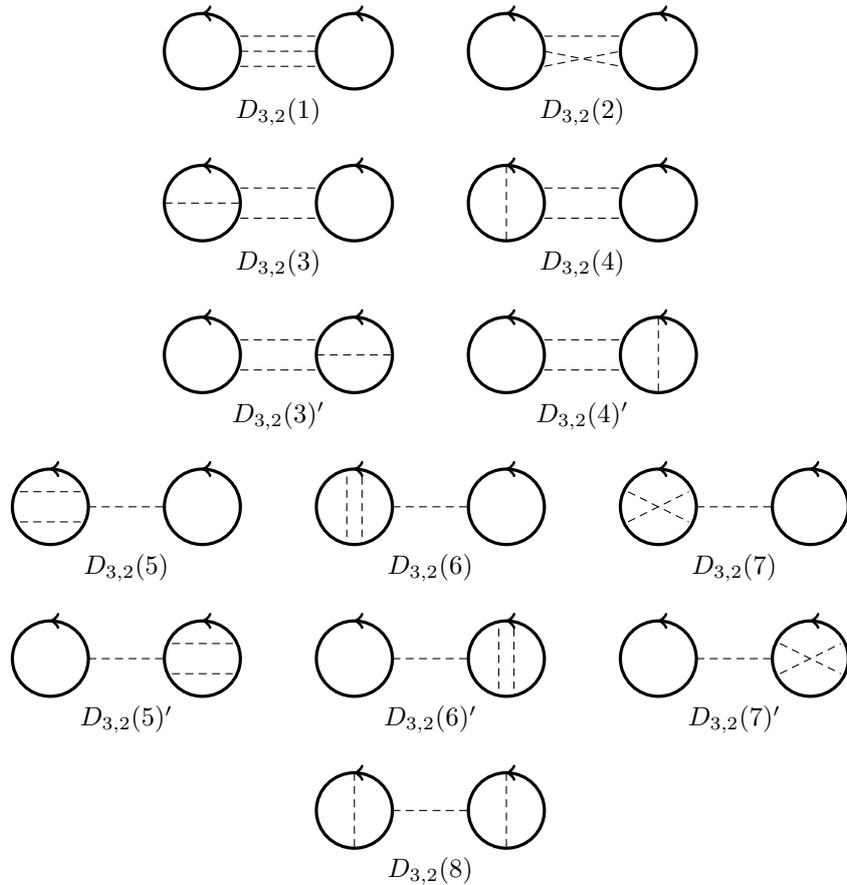
Remarque 1.2.30. *Il suit des calculs effectués dans la preuve précédente que, lors d'un changement de croisement mixte sur deux composantes, on a*

$$C[D_{2,2}(1)]\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \times \\ \searrow \end{array}\right) = lk(K_1^-, K_2^-) + \frac{1}{2}.$$

Nous ferons usage de ce résultat ultérieurement.

1.2.2.3 Degré 3 sur deux composantes

Tournons-nous maintenant vers les coefficients de diagrammes de degré 3. Il n'est pas difficile, bien que cela soit long à écrire, de vérifier qu'il y a exactement treize diagrammes connexes de degré 3 sur deux cercles :



Proposition 1.2.31. *Soit $L = K_1 \cup K_2$ un entrelacs parallélisé orienté à 2 composantes. Les égalités suivantes sont vérifiées :*

$$C_L[D_{3,2}(1)] + C_L[D_{3,2}(2)] = \frac{1}{6}l_{1,2}^3,$$

$$C_L[D_{3,2}(3)] + C_L[D_{3,2}(4)] = \frac{1}{4}fr(K_1)l_{1,2}^2,$$

$$C_L[D_{3,2}(3)'] + C_L[D_{3,2}(4)'] = \frac{1}{4}fr(K_2)l_{1,2}^2,$$

$$C_L[D_{3,2}(2)] + C_L[D_{3,2}(3)] + C_L[D_{3,2}(3)'] + C_L[D_{3,2}(7)] + C_L[D_{3,2}(7)'] = c_3(L).$$

On a en outre les égalités

$$C_L[D_{3,2}(5)] = \left(\frac{1}{8}fr(K_1)^2 + \frac{1}{24} - c_2(K) \right) l_{1,2},$$

$$C_L[D_{3,2}(5)'] = l_{1,2} \left(\frac{1}{8}fr(K_2)^2 + \frac{1}{24} - c_2(K) \right),$$

$$C_L[D_{3,2}(7)] = \left(c_2(K_1) - \frac{1}{24} \right) l_{1,2} \quad \text{et} \quad C_L[D_{3,2}(7)'] = l_{1,2} \left(c_2(K_2) - \frac{1}{24} \right).$$

Remarque 1.2.32. *La formule pour l'invariant c_3 donnée dans Proposition 1.2.31 corrige l'énoncé donné par Miyuki Okamoto dans [36, Prop. 4.6 (1)]. De même, la généralisation [36, Prop. 4.6 (2)] s'avère incorrecte, et est corrigée dans le Théorème 1.2.35.*

Preuve de Proposition 1.2.31. Les quatre dernières égalités, sur les coefficients de $D_{3,2}(5)$, $D_{3,2}(5)'$, $D_{3,2}(7)$ et $D_{3,2}(7)'$, sont des conséquences des Propositions 1.2.12 et 1.2.26.

Pour montrer les quatre premières égalités, nous allons procéder par changements de croisements mixtes. Par une suite de tels changements, on peut relier n'importe quel entrelacs à 2 composantes à un entrelacs géométriquement séparé. Pour chacune des égalités, il est clair que chaque membre de gauche s'annule car l'intégrale de Kontsevich d'un tel entrelacs ne contient pas de corde mixte. C'est également le cas de chaque membre de droite d'après les propriétés du nombre d'enlacement et de c_3 .

Il reste alors à montrer que chaque terme de gauche est bien un invariant, et ensuite que chacun a bien la formule d'écheveau souhaitée. Les relations $4T$ non-triviales qui mettent en jeu un des diagrammes ci-dessus sont les suivantes, ou en sont des conséquences :

$$D_{3,2}(1) - D_{3,2}(2) = D_{3,2}(4) - D_{3,2}(3) = D_{3,2}(4)' - D_{3,2}(3)',$$

$$D_{3,2}(5) - D_{3,2}(6) = D_{3,2}(5)' - D_{3,2}(6)' = 0.$$

Notons X_i ($i = 1, 2, 3$) et X'_i les quantités suivantes :

$$X_1(L) = C_L[D_{3,2}(1)] + C_L[D_{3,2}(2)],$$

$$X_2(L) = C_L[D_{3,2}(3)] + C_L[D_{3,2}(4)] \quad \text{et} \quad X'_2(L) = C_L[D_{3,2}(3)'] + C_L[D_{3,2}(4)'],$$

$$X_3(L) = C_L[D_{3,2}(2)] + C_L[D_{3,2}(3)] + C_L[D_{3,2}(3)'] + C_L[D_{3,2}(7)] + C_L[D_{3,2}(7)'].$$

Le Lemme 1.2.3 permet de vérifier sans difficulté que chacun d'entre eux est bien un invariant.

Considérons $L_+ = K_1^+ \cup K_2^+$ et $L_- = K_1^- \cup K_2^-$ les deux premiers éléments d'un triplet d'écheveau autour d'un croisement mixte.

Penchons nous d'abord sur l'invariant X_1 . D'après le Lemme 1.2.6, on a :

$$\begin{aligned} C_{L_+}[D_{3,2}(1)] - C_{L_-}[D_{3,2}(1)] &= C[D_{3,2}(1)] \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} + \frac{1}{24} \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \\ \hline \end{array} \right) \\ &= C[D_{3,2}(1)] \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} C_{L_+}[D_{3,2}(2)] - C_{L_-}[D_{3,2}(2)] &= C[D_{3,2}(2)] \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} + \frac{1}{24} \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \\ \hline \end{array} \right) \\ &= C[D_{3,2}(2)] \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right) + \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Dans les deux calculs précédents, la seconde égalité est obtenue en considérant les diagrammes que l'on peut obtenir à partir des contributions de degré 3 du croisement d'écheveau. Pour obtenir $D_{3,2}(1)$ ou $D_{3,2}(2)$, on doit prendre les contributions triviales pour tout le reste du diagramme, qui viennent avec un coefficient 1. En regardant l'ordre des pattes sur le squelette, on voit alors que le diagramme obtenu est $D_{3,2}(2)$. Il suit que

$$X_1(L_+) - X_1(L_-) = C[D_{3,1}(1)] \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right) + C[D_{3,2}(2)] \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right) + \frac{1}{24}.$$

Puisqu'on obtient toujours $D_{2,2}(1)$ en enlevant une corde mixte de $D_{3,2}(1)$ ou $D_{3,2}(2)$, et que ces derniers sont les seuls diagrammes que l'on peut construire en ajoutant une corde mixte à $D_{2,2}(1)$, on a :

$$X_1(L_+) - X_1(L_-) = C[D_{2,2}(1)] \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right) + \frac{1}{24}.$$

Or, par définition, on a que $C_{L_-}[D_{2,2}(1)]$ est donné par

$$C[D_{2,2}(1)] \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right) - \frac{1}{2} C[D_{2,2}(1)] \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \\ \hline \end{array} \right) + \frac{1}{8} C[D_{2,2}(1)] \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \\ \hline \hline \end{array} \right).$$

On obtient donc la formule d'écheveau suivante pour X_1 :

$$\begin{aligned} X_1(L_+) - X_1(L_-) &= \\ C_{L_-}[D_{2,2}(1)] &+ \frac{1}{2} C[D_{2,2}(1)] \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right) - \frac{1}{8} C[D_{2,2}(1)] \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \\ \hline \end{array} \right) + \frac{1}{24} \\ &= \frac{1}{2} lk(K_1^-, K_2^-)^2 + \frac{1}{2} (lk(K_1^-, K_2^-) + \frac{1}{2}) - \frac{1}{8} + \frac{1}{24}, \end{aligned}$$

où l'égalité est donnée par la Proposition 1.2.29 et la Remarque 1.2.30.
On a donc établi que

$$X_1(L_+) - X_1(L_-) = \frac{1}{2}lk(K_1^-, K_2^-)^2 + \frac{1}{2}lk(K_1^-, K_2^-) + \frac{1}{6}.$$

Par ailleurs, en utilisant simplement le fait que $lk(K_1^+, K_2^+) = lk(K_1^-, K_2^-) + 1$, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6}lk(K_1^+, K_2^+)^3 - \frac{1}{6}lk(K_1^-, K_2^-)^3 \\ &= \frac{1}{6} (lk(K_1^+, K_2^+) - lk(K_1^-, K_2^-)) \\ & \times (lk(K_1^+, K_2^+)^2 + lk(K_1^+, K_2^+)lk(K_1^-, K_2^-) + lk(K_1^-, K_2^-)^2) \\ &= \frac{1}{6} ((lk(K_1^-, K_2^-) + 1)^2 + (lk(K_1^-, K_2^-) + 1)lk(K_1^-, K_2^-) + lk(K_1^-, K_2^-)^2) \\ &= \frac{1}{6} (3 \times lk(K_1^-, K_2^-)^2 + 3 \times lk(K_1^-, K_2^-) + 1), \end{aligned}$$

Ainsi, X_1 et $\frac{1}{6} \times lk(\cdot)^3$ ont la même relation d'écheveau, ce qui conclut la preuve de la première égalité.

Considérons maintenant l'invariant X_2 (l'invariant X_2' est traité de manière totalement similaire). Le Lemme 1.2.6 donne :

$$C_{L_+}[D_{3,2}(3)] - C_{L_-}[D_{3,2}(3)] = C[D_{3,2}(3)] \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right)$$

et

$$C_{L_+}[D_{3,2}(4)] - C_{L_-}[D_{3,2}(4)] = C[D_{3,2}(4)] \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right),$$

d'où on obtient que

$$X_2(L_+) - X_2(L_-) = C[D_{3,2}(3)] \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right) + C[D_{3,2}(4)] \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right)$$

On observe que, en enlevant une corde mixte de $D_{3,2}(3)$ ou $D_{3,2}(4)$, on obtient toujours $D_{2,2}(2)$ et que, réciproquement, $D_{3,2}(3)$ ou $D_{3,2}(4)$ sont les seuls diagrammes que l'on peut construire en ajoutant une corde mixte à $D_{2,2}(2)$. Un raisonnement similaire à celui utilisé pour X_1 ci-dessus donne alors :

$$\begin{aligned} X_2(L_+) - X_2(L_-) &= C[D_{2,2}(2)] \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right) \\ &= C_{L_-}[D_{2,2}(2)] + \frac{1}{2}C[D_{2,2}(2)] \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}fr(K_1^-)lk(K_1^-, K_2^-) + \frac{1}{2}C[D_{1,1} \otimes D_{0,1}] \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \times \\ \searrow \end{array} \right) \\
&= \frac{1}{2}fr(K_1^-)lk(K_1^-, K_2^-) + \frac{1}{4}fr(K_1^-),
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la Proposition 1.2.29 pour la seconde égalité, et le Corollaire 1.2.24 pour la troisième.

Par ailleurs, puisque $K_1^+ = K_1^-$ on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}fr(K_1^+)lk(K_1^+, K_2^+)^2 - \frac{1}{4}fr(K_1^-)lk(K_1^-, K_2^-)^2 \\
&= \frac{1}{4}fr(K_1^-) \underbrace{(lk(K_1^+, K_2^+) - lk(K_1^-, K_2^-))}_{=1} (lk(K_1^+, K_2^+) + lk(K_1^-, K_2^-)) \\
&= \frac{1}{4}fr(K_1^-) (2lk(K_1^-, K_2^-) + 1),
\end{aligned}$$

de sorte que X_2 a la relation d'écheveau souhaitée. Cela conclut la preuve des deuxième et troisième égalités.

Penchons nous finalement sur l'invariant X_3 . Les calculs précédents donnent que

$$\begin{aligned}
X_3(L_+) - X_3(L_-) &= C[D_{3,2}(2)] \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \times \\ \searrow \end{array} \right) + \frac{1}{24} \\
&+ (C[D_{3,2}(3)] + C[D_{3,2}(3)'] + C[D_{3,2}(7)] + C[D_{3,2}(7)']) \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \times \\ \searrow \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Mais chacun des diagrammes intervenant dans cette formule a la propriété qu'il donne le diagramme $D_{2,1}(2)$ lorsque l'on lisse une corde mixte. Réciproquement, $D_{2,1}(2)$ ne peut être obtenu par lissage le long d'une corde mixte qu'à partir de l'un de ces diagrammes³. Ceci montre donc que

$$X_3(L_+) - X_3(L_-) = C[D_{2,1}(2)] \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \left(\right) \\ \searrow \end{array} \right) + \frac{1}{24}$$

La Proposition 1.2.26 donne alors que

$$X_3(L_+) - X_3(L_-) = c_2(L_0) = c_3(L_+) - c_3(L_-),$$

ce qui démontre l'égalité voulue. □

3. C'est à cette étape que [36] contient une erreur, en omettant les diagrammes $D_{2,2}(7)$ et $D_{2,2}(7)'$.

1.2.3 Polynôme de Conway et intégrale de Kontsevich

Nous allons maintenant donner des résultats concernant des diagrammes de cordes en degré arbitraire à l'aide de gonflages et de proliférations. Pour être plus précis, nous allons utiliser ces opérations pour exprimer le $(n+1)$ -ème coefficient du polynôme de Conway c_{n+1} d'un entrelacs à n composantes à partir de l'intégrale de Kontsevich.

On rappelle que l'on note $\mathcal{E}^-(n)$ l'ensemble des diagrammes moins-essentiels sur n cercles, qui sont nécessairement de degré $n+1$ (voir Section 1.2.1.3).

Proposition 1.2.33. *Soit n un entier supérieur ou égal à 2.*

La quantité $\sum_{D \in \mathcal{E}^-(n)} C.[D]$ est un invariant d'entrelacs orientés à n composantes.

Preuve. Appelons X_n la somme $\sum_{D \in \mathcal{E}^-(n)} C.[D]$. Nous montrons ce résultat par récurrence sur n .

D'après l'exemple 1.2.15, le seul diagramme moins-essentiel sur une composante est $D_{2,1}(2)$. La Proposition 1.2.26 donne alors que X_2 est un invariant.

Supposons maintenant que X_n est un invariant, pour un $n \geq 2$ donné. La Proposition 1.2.19 assure alors que $\mathcal{E}^-(n+1)$ est obtenu en prenant tous les gonflages possibles d'éléments de $\mathcal{E}^-(n)$ (à permutation des composantes près). Le fait que X_{n+1} est un invariant suit alors de la Proposition 1.2.11. \square

Pour un entier $n \geq 1$, appelons $\mathcal{S}(n+1)$ la collection de tous les diagrammes obtenus par proliférations intensives, i. e. par toutes les proliférations possibles, des diagrammes de $\mathcal{E}^-(n)$ et renumérotation des composantes du squelette.

Exemple 1.2.34. *Puisque $\mathcal{E}^-(1) = \{D_{2,1}(2)\}$, d'après l'Exemple 1.2.15, on a $\mathcal{S}(2) = \{D_{3,2}(7); D_{3,2}(7)'\}$.*

Théorème 1.2.35. *Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.*

Pour tout entrelacs parallélisé L à n composantes, on a :

$$\sum_{D \in \mathcal{E}^-(n) \cup \mathcal{S}(n)} C_L[D] = c_{n+1}(L).$$

Remarque 1.2.36. *Le cas $n = 1$ est un peu particulier car il fait intervenir un terme correctif.*

En effet, notons d'abord que $\mathcal{S}(1)$ est vide et que $\mathcal{E}^-(1) = \{D_{2,1}(2)\}$ (voir Exemple 1.2.15 et Section 1.2.2.3). Or par la Proposition 1.2.26, on a

$$C_K[D_{2,1}(2)] = c_2(K) - \frac{1}{24}.$$

Notons aussi que le cas $n = 2$ était donné par la Proposition 1.2.31. En effet, on a $\mathcal{E}^-(2) = \{D_{3,2}(2); D_{3,2}(3); D_{3,2}(3)'\}$, et d'après l'Exemple 1.2.34, on a $\mathcal{S}(2) = \{D_{3,2}(7); D_{3,2}(7)'\}$.

Preuve du Théorème 1.2.35. Appelons X_n le terme de gauche dans l'égalité, qui se décompose en

$$X_n = \sum_{D \in \mathcal{E}^-(n)} C.[D] + \sum_{D \in \mathcal{S}(n)} C.[D].$$

Commençons par montrer que X_n est un invariant. D'après la Proposition 1.2.33, il suffit de montrer que la somme $\sum_{D \in \mathcal{S}(n)} C.[D]$ définit un invariant, ce

que nous montrons par récurrence sur n .

D'après l'Exemple 1.2.34, on a $\mathcal{S}(2) = \{D_{3,2}(7); D_{3,2}(7)'\}$, et l'invariance de $\sum_{D \in \mathcal{S}(2)} C.[D]$ est donc donnée par la Proposition 1.2.31.

De plus, quand on prend les proliférations intensives d'une collection de diagrammes qui définit un invariant, la Proposition 1.2.12 donne qu'on obtient une collection de diagrammes qui définit un invariant. Et quand on prend toutes les indexations possibles d'une collection de diagrammes qui définit un invariant, on obtient encore un invariant.

On peut maintenant démontrer l'égalité annoncée, à nouveau par récurrence sur n . La Proposition 1.2.31 montre le cas $n = 2$, comme observé à la Remarque 1.2.36. Supposons maintenant que l'égalité est vérifiée pour un n donné.

Soit (L_+, L_-, L_0) un triplet d'écheveau le long d'un croisement mixte. Pour tout $D \in \mathcal{E}^-(n+1) \cup \mathcal{S}(n+1)$, la contribution du croisement modifié, à la différence $X(L_+) - X(L_-)$, est limitée au terme de degré 1. En effet, les termes de degré 2 venant de la contribution de L_+ se simplifient algébriquement avec ceux de la contribution de L_- . En outre, d'après la Proposition 1.2.19 pour $n \geq 3$, aucun diagramme essentiel ne possède ≥ 3 cordes mixtes entre 2 cercles donnés. Cela donne la première égalité dans la suite d'égalités ci-dessous :

$$\begin{aligned} X_{n+1}(L_+) - X_{n+1}(L_-) &= \sum_{D \in \mathcal{E}^-(n+1) \cup \mathcal{S}(n+1)} C[D] \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \times \\ \searrow \end{array} \right) \\ &= \sum_{D \in \mathcal{E}^-(n) \cup \mathcal{S}(n)} C[D] \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \uparrow \\ \searrow \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \end{array} \right) \\ &= c_{n+1}(L_0) = c_{n+2}(L_+) - c_{n+2}(L_-) \end{aligned}$$

La deuxième égalité est obtenue en effectuant un lissage le long de la corde mixte. Le fait que la deuxième somme porte sur $\mathcal{E}^-(n) \cup \mathcal{S}(n)$ est une conséquence de la Proposition 1.2.21 et la Remarque 1.2.10. La troisième égalité est donnée par l'hypothèse de récurrence, et la quatrième utilise simplement la formule d'écheveau du polynôme de Conway (Proposition 1.1.14). Ainsi, les invariants X_{n+1} et c_{n+2} ont bien la même formule d'écheveau pour un croisement mixte. Par changements successifs de croisements mixtes, on peut relier n'importe quel entrelacs à un entrelacs géométriquement scindé, auquel cas les deux invariants s'annulent. Ainsi, $X_{n+1} = c_{n+2}$, ce qui achève la récurrence. \square

Comme indiqué dans la Remarque 1.2.28, le Théorème 1.2.35 corrige une erreur dans [36, Prop. 4.6 (2)]. Plus précisément, [36, Prop. 4.6 (2)] traite le cas $n = 3$, mais en considérant seulement les diagrammes dans $\mathcal{E}^-(n)$, et oublie les termes correctifs provenant de $\mathcal{S}(n)$. Il s'avère que, si on ne considère que les diagrammes dans $\mathcal{E}^-(n)$ comme cela est fait dans [36], on obtient l'invariant U_n introduit dans la Définition 1.1.15 en termes du polynôme de Conway et des nombres d'enlacement :

Proposition 1.2.37. *Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout entrelacs parallélisé L à n composantes, on a :*

$$\sum_{D \in \mathcal{E}^-(n)} C_L[D] = U_{n+1}(L).$$

Preuve. Le fait que la somme $\sum_{D \in \mathcal{E}^-(n)} C_L[D]$ définit bien un invariant pour tout n a déjà été montré dans la preuve précédente. L'égalité se démontre alors encore par récurrence. Le cas $n = 2$ est donné par Proposition 1.2.26, et d'après le Théorème 1.2.35 on a

$$\begin{aligned} \sum_{D \in \mathcal{E}^-(n)} C[D] &= c_{n+1} - \sum_{D \in \mathcal{S}(n)} C[D] \\ &= c_{n+1} - \sum_{i=1}^n \sum_{D \in \mathcal{S}_i(n)} C[D], \end{aligned}$$

où $\mathcal{S}_i(n)$ désigne l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}(n)$ dont l'unique cercle avec une seule patte (provenant de la prolifération sur un diagramme de $\mathcal{E}^-(n-1)$) est étiqueté i . Alors par Proposition 1.2.12 et l'hypothèse de récurrence, on a $\sum_{D \in \mathcal{P}_i(n)} C[D] = \sum_{i \neq j} U_n^{i,j}$, ce qui conclut la preuve. \square

1.2.4 Autres résultats de factorisation

Enfin, nous allons donner certains résultats de factorisations d'invariants définis comme sommes de coefficients de diagrammes, à partir de la présence de certaines cordes particulières de ces diagrammes. Miyuki Okamoto a donné des résultats similaires dans le cas d'entrelacs non parallélisés et algébriquement séparés dans [36] et [37].

Proposition 1.2.38. *Soit \mathcal{D} une collection de diagrammes telle que la quantité*

$$X = \sum_{D \in \mathcal{D}} C.[D]$$

est un invariant.

Supposons qu'il existe i tel que tout diagramme D dans \mathcal{D} ne contient pas de corde interne à la i -ème composante. Considérons \mathcal{D}' , la collection de diagrammes obtenus depuis les diagrammes de \mathcal{D} en ajoutant une corde interne à la i -ème composante de toutes les manières possibles.

On a alors, pour tout entrelacs parallélisé L :

$$\sum_{D' \in \mathcal{D}'} C_L[D'] = \frac{1}{2} fr(K_i) \times X(L).$$

Preuve. Appelons Y la quantité $\sum_{D' \in \mathcal{D}'} C.[D']$, et considérons une relation $4T$, R' . Il y a deux cas possibles :

1. La corde interne à la i -ème composante n'est pas mise en jeu par R' . Rappelons tout d'abord que l'on peut supposer qu'au moins un des diagrammes mis en jeu dans R' appartient à \mathcal{D}' : c'est alors le cas des quatre diagrammes impliqués dans R' , au vu de la construction de \mathcal{D}' depuis \mathcal{D} . On peut donc voir ces quatre diagrammes comme obtenus depuis quatre diagrammes D_1, D_2, D_3 et D_4 de \mathcal{D} , auxquels on aurait ajouté une corde interne, reliée dans chaque cas au squelette par les "mêmes" points d'attache, et vérifiant une relation $4T$ $D_1 - D_2 = D_3 - D_4$. X étant un invariant, il vérifie cette relation. Et par conséquent, Y vérifie R' .

2. La corde interne à la i -ème composante est mise en jeu dans R' . Alors on peut écrire R' sous la forme $D'_1 - D'_2 = D'_3 - D'_4$, avec D'_1 et D'_2 possédant une corde interne à la i -ème composante. Ainsi D'_1 et D'_2 appartiennent ou non de manière simultanée à \mathcal{D}' , d'après la définition de cet ensemble, de telle sorte que Y s'annule sur le terme de gauche de la relation R' . Pour les diagrammes D'_3 et D'_4 , il y a deux possibilités : si D'_3 a aussi une corde interne à la i -ème composante, alors c'est aussi le cas de D'_4 et le même argument s'applique ; sinon ni D'_3 , ni D'_4 ne sont dans \mathcal{D}' . Dans les deux cas, on obtient que Y s'annule également sur le terme de droite de la relation R' .

On a ainsi montré que Y est un invariant, et il reste à établir la formule de factorisation.

Soient maintenant $L_+ = K_1^+ \cup \dots \cup K_n^+$ et $L_- = K_1^- \cup \dots \cup K_n^-$ les premiers membres d'un triplet d'écheveau autour d'un croisement interne à la i -ème composante. Notons que $\hat{Z}(L_+)$ et $\hat{Z}(L_-)$ ne diffèrent que par des cordes internes, si bien que $X(L_+) = X(L_-)$. On a :

$$\begin{aligned}
& Y(L_+) - Y(L_-) \\
&= \sum_{D' \in \mathcal{D}'} C[D'] \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \times \\ \searrow \end{array} \right) \\
&= \sum_{D \in \mathcal{D}} C[D] \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \times \\ \searrow \end{array} \right) \\
&= X(L_{\pm}) \\
&= \frac{1}{2} \times fr(K_i^+) \times X(L_+) - \frac{1}{2} \times fr(K_i^-) \times X(L_-)
\end{aligned}$$

Ici, la seconde égalité est une conséquence immédiate de la définition de \mathcal{D}' à partir de \mathcal{D} , tandis que la troisième égalité découle de la définition de X . La dernière égalité utilise simplement le fait que $X(L_+) = X(L_-)$ et $fr(K_i^+) - fr(K_i^-) = 2$. Ainsi, les deux invariants de l'énoncé ont la même formule de variation.

Par changements successifs de croisements internes à K_i , on peut relier n'importe quel entrelacs à un entrelacs où la i -ème composante est équivalente à U_0 , sans croisement interne, ou une copie de U_+ , avec une unique boucle positive isolée. Il suffit de vérifier la formule de factorisation dans ces deux cas. Si la i -ème composante de \tilde{L} est une copie de U_0 , alors $\hat{Z}(\tilde{L})$ ne contient pas de diagramme ayant une corde interne sur le i -ème cercle : l'invariant Y s'annule donc, et l'égalité est vérifiée. Si maintenant la i -ème composante de \tilde{L} est une copie de U_+ , alors la boucle positive isolée contribue à $\hat{Z}(\tilde{L})$ comme dans l'Exemple 1.1.32, et donne en particulier sur le i -ème cercle :

$$\text{---} \curvearrowright \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \curvearrowright \text{---} + \text{termes avec } > 1 \text{ cordes internes.}$$

Par la Remarque 1.1.22, il n'y a dans \mathcal{D}' qu'un seul diagramme ayant une corde isolée sur le i -ème cercle, ce qui montre que $Y(\tilde{L})$ est égal à $\frac{1}{2}X(\tilde{L})$ dans ce cas, démontrant ainsi l'égalité voulue. \square

Proposition 1.2.39. *Soit \mathcal{D} une collection de diagrammes telle que la quantité*

$$X = \sum_{D \in \mathcal{D}} C.[D]$$

est un invariant.

Supposons qu'il existe i et j distincts tels que tout diagramme D dans \mathcal{D} ne contient aucune corde mixte entre les i -ème et j -ème composantes du squelette. Considérons \mathcal{D}_{ij} la collection de diagrammes obtenus depuis les diagrammes de \mathcal{D} en ajoutant une corde mixte entre la i -ème et la j -ème composante de toutes les manières possibles. On a alors, pour tout entrelacs parallélisé L :

$$\sum_{D \in \mathcal{D}_1} C_L[D] = l_{i,j} \times X(L).$$

Preuve. Notons Y_{ij} la quantité $\sum_{D \in \mathcal{D}_{ij}} C.[D]$, et considérons une relation $4T$, notée R' . Il y a alors plusieurs cas possibles, suivant que la relation R' implique aucune, une seule ou deux corde(s) mixte(s) entre les composantes i et j du squelette. Des arguments strictement similaires à ceux donnés dans la preuve de la Proposition 1.2.38 ci-dessus, portant dans chaque cas sur l'appartenance à \mathcal{D}_{ij} des divers diagrammes impliqués dans R' , montrent alors que Y_{ij} vérifie R' , et est donc bien un invariant.

Soient maintenant L_+ et L_- les deux premiers termes d'un triplet d'écheveau autour d'un croisement (mixte) entre les i -ème et j -ème composantes. Notons que $\hat{Z}(L_+)$ et $\hat{Z}(L_-)$ ne diffèrent que par des cordes entre les composantes i et j du squelette, donc $X(L_+) = X(L_-)$. On a, d'après les définitions de \mathcal{D}_{ij} et de X :

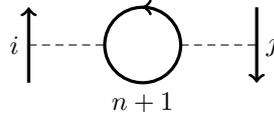
$$\begin{aligned} & Y_{ij}(L_+) - Y_{ij}(L_-) \\ &= \sum_{D \in \mathcal{D}_{ij}} C[D] \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \times \\ \searrow \end{array} \right) \\ &= \sum_{D \in \mathcal{D}_{ij}} C[D] \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \times \\ \searrow \end{array} \right) \\ &= X(L_{\pm}), \end{aligned}$$

qui coïncide bien avec la différence $l_{i,j}(L_+) \times X(L_+) - l_{i,j}(L_-) \times X(L_-)$ puisque $l_{i,j}(L_+) - l_{i,j}(L_-) = 1$.

D'autre part, par changements successifs de croisements entre les i -ème et j -ème composantes, on peut relier n'importe quel entrelacs où ces deux composantes sont géométriquement scindées. Un calcul simple montre que dans ce cas, les deux invariants sont égaux, ce qui conclut la preuve. \square

Proposition 1.2.40. *Soit \mathcal{D} une collection de diagrammes telle que la quantité $X = \sum_{D \in \mathcal{D}} C.[D]$ est un invariant.*

Considérons \mathcal{D}_g la collection des diagrammes obtenus depuis les diagrammes de \mathcal{D} en ajoutant de toutes les manières possibles le diagramme local suivant, que l'on appellera une corde gonflée, où i et j sont deux entiers (éventuellement égaux) compris entre 1 et n :



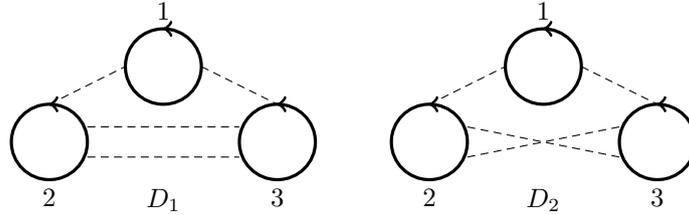
Pour tout entrelacs parallélisé L , on a :

$$\text{Si } i \neq j, \text{ alors } \sum_{D \in \mathcal{D}_g} C_L[D] = l_{i,n+1} \times l_{j,n+1} \times X(L_{n+1}).$$

$$\text{Si } i = j, \text{ alors } \sum_{D \in \mathcal{D}_g} C_L[D] = \frac{1}{2} l_{i,n+1}^2 \times X(L_{n+1}).$$

Avant d'en donner la preuve, on donne un exemple d'application de la Proposition 1.2.40, qui nous sera utile par la suite.

Exemple 1.2.41. *Considérons les diagrammes suivants :*



On observe qu'il s'agit de tous les diagrammes que l'on obtient à partir du diagramme $D_{2,2}(1)$ par insertion d'une corde gonflée mixte de toutes les façons possibles. Alors, d'après les Propositions 1.2.29 et 1.2.40, pour tout entrelacs parallélisé orienté L à 3 composantes, on a :

$$C_L[D_1] + C_L[D_2] = \frac{1}{2} \times l_{1,2} \times l_{1,3} \times l_{2,3}^2$$

Démonstration de la Proposition 1.2.40. Le cas $i \neq j$ est un corollaire assez immédiat de résultats précédents. Dans ce cas, on peut en effet voir les éléments de \mathcal{D}_g comme obtenus de ceux de \mathcal{D} en faisant, dans un premier temps, une prolifération sur la i -ème composante de toutes les façons possibles, puis en ajoutant de toutes les façons possibles une corde entre la j -ème et la $(n+1)$ -ème composante (cette dernière résultant de la prolifération). Le résultat suit alors des Propositions 1.2.39 et 1.2.12.

Montrons maintenant le cas $i = j$.

Le fait que la quantité $Y_g := \sum_{D \in \mathcal{D}_g} C_L[D]$ définisse bien un invariant se montre de manière complètement similaire aux résultats précédents, et la vérification en est laissée au lecteur ; cela peut aussi être vu comme un corollaire des Propositions 1.2.11 et 1.2.38. Vérifions que $Y_g(L)$ coïncide avec $\frac{1}{2} l_{i,n+1}^2 \times X(L_{n+1})$ en montrant que ces deux invariants ont la même formule de variation sous changement de croisement entre les i -ème et $(n+1)$ -ème composantes : puisque par définition tous deux s'annulent sur un entrelacs où ces deux composantes sont géométriquement séparées, on en déduit l'égalité désirée.

Notons donc (L_+, L_-, L_0) un triplet d'écheveau autour d'un croisement entre les i -ème et $(n+1)$ -ème composantes. D'une part, d'après la définition de \mathcal{D}_g et de X :

$$\begin{aligned}
& Y_g(L_+) - Y_g(L_-) \\
&= \sum_{D \in \mathcal{D}_g} C[D] \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \times \\ \searrow \end{array} \right) \\
&= \sum_{\tilde{D} \in \tilde{\mathcal{D}}} C[\tilde{D}] \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \times \\ \searrow \end{array} \right)
\end{aligned}$$

où $\tilde{\mathcal{D}}$ désigne l'ensemble des diagrammes obtenus de \mathcal{D} par une prolifération sur la i -ème composante, de toutes les façons possibles. La seconde égalité est alors due au fait que l'insertion d'une corde gonflée sur le i -ème cercle peut être décomposée en une prolifération sur le i -ème cercle, suivie de l'insertion d'une corde mixte entre le i -ème cercle et le cercle nouvellement créé. Mais d'après la définition de l'intégrale de Kontsevich, pour tout diagramme $\tilde{D} \in \tilde{\mathcal{D}}$, on a :

$$C_{L_-}[\tilde{D}] = C[\tilde{D}] \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \times \\ \searrow \end{array} \right) - \frac{1}{2} C[\tilde{D}] \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \times \\ \searrow \end{array} \right).$$

Ainsi, en substituant on obtient

$$\begin{aligned}
Y_g(L_+) - Y_g(L_-) &= \sum_{\tilde{D} \in \tilde{\mathcal{D}}} C_{L_-}[\tilde{D}] + \frac{1}{2} \sum_{\tilde{D} \in \tilde{\mathcal{D}}} C[\tilde{D}] \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \times \\ \searrow \end{array} \right) \\
&= l_{i,n+1}(L_-) \times X((L_{\pm})_{n\check{+}1}) + \frac{1}{2} X((L_{\pm})_{n\check{+}1}).
\end{aligned}$$

Ici, la dernière égalité utilise la définition de l'invariant X (et en particulier le fait que $X(L_+) = X(L_-)$), la Proposition 1.2.39, et le fait que $(L_+)_{n\check{+}1} = (L_-)_{n\check{+}1}$. D'autre part, en utilisant simplement le fait que $l_{i,n+1}(L_+) = l_{i,n+1}(L_-) + 1$, on a :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} l_{i,n+1}^2(L_+) \times X((L_+)_{n\check{+}1}) - \frac{1}{2} l_{i,n+1}^2(L_-) \times X((L_-)_{n\check{+}1}) \\
&= \frac{1}{2} X((L_{\pm})_{n\check{+}1}) (l_{i,n+1}^2(L_+) - l_{i,n+1}^2(L_-)) \\
&= \frac{1}{2} X((L_{\pm})_{n\check{+}1}) (2l_{i,n+1}(L_-) + 1).
\end{aligned}$$

Cela montre que les deux invariants vérifient bien la même formule d'écheveau, et achève donc la preuve. \square

1.3 Résultat principal

Nous allons maintenant passer à l'énoncé et la démonstration du résultat principal du premier chapitre de cette thèse. Nous commençons en traitant à part les cas en petit nombre de composantes, qui serviront d'une part d'échauffement et d'autre part de laboratoire pour comprendre la structure de la formule et les mécanismes de sa preuve, que l'on va établir ensuite en toute généralité.

1.3.1 Préliminaires

Avant d'énoncer le résultat à proprement parler, passons à "l'étape" invariant LMO . En effet, on a identifié certaines sommes de coefficients de diagrammes de cordes dans l'intégrale de Kontsevich en termes d'invariants classiques. Il faut voir maintenant comment ces tels diagrammes influent sur le calcul de la partie de degré 1 de l'invariant LMO . Commençons par rappeler que, si M est obtenue par chirurgie de \mathbb{S}^3 le long de L ,

$$Z_1^{LMO}(M) = \left(\frac{\iota_1(\check{Z}(L))}{\iota_1(\check{Z}(U_+))^{\sigma_+(L)} \iota_1(\check{Z}(U_-))^{\sigma_-(L)}} \right)_{\leq 1},$$

et que le coefficient du diagramme en thêta de $Z_1^{LMO}(M)$ est $\frac{(-1)^{\beta_1(M)}}{2} \lambda_L(M)$ (Théorème 1.1.43). D'après la Proposition 1.1.42, il y a deux types de contributions bien distinctes au coefficient du diagramme en thêta dans cette formule :

1. Le diagramme en thêta vient de $\iota_1(\check{Z}(L))$, et est multiplié par le coefficient $(-1)^{\sigma_+(L)}$ issu du dénominateur.
2. Le diagramme en thêta vient du dénominateur avec le coefficient $\frac{(-1)^{\sigma_+(L)\sigma(L)}}{16}$, et est multiplié par le terme constant venant de $\iota_1(\check{Z}(L))$.

En conséquence, on a

$$\frac{(-1)^{\beta_1(M)}}{2} \lambda_L(M) = \frac{(-1)^{\sigma_+(L)\sigma(L)}}{16} \left(\iota_1(\check{Z}(L)) \right)_0 + (-1)^{\sigma_+(L)} \times \left(\iota_1(\check{Z}(L)) \right)_1.$$

Rappelons que $\beta_1(M)$ est la nullité de la matrice \mathbb{L} , si bien qu'en multipliant par $2(-1)^{\beta_1(M)}$ l'égalité ci-dessus, on obtient la formule diagrammatique "abstraite", suivante pour l'invariant de Casson-Walker-Lescop :

$$\lambda_L(M) = \frac{(-1)^{n+\sigma_-(L)}}{8} \left(\iota_1(\check{Z}(L)) \right)_0 + (-1)^{n+\sigma_-(L)} \times 2 \left(\iota_1(\check{Z}(L)) \right)_1. \quad (*)$$

On doit donc identifier quels diagrammes de cordes, dans l'intégrale de Kontsevich de L , peuvent donner un terme constant et lesquels peuvent donner un diagramme en thêta.

Les Tables 1.1 à 1.3 données dans les deux pages suivantes répertorient ces diagrammes pour les cas à 1 ou 2 composantes. Ceci va nous permettre de commencer à traiter, dans la section suivante, les cas des petits nombres de composante. Plus précisément, ces tables, qui sont obtenues de manière directe, à partir du procédé de construction de l'invariant LMO , répertorient les diagrammes apparaissant dans l'intégrale de Kontsevich $\hat{Z}(L)$ d'un entrelacs parallélisé L , et la contribution $\iota_1(D\#\nu^{\otimes n})$ de ces diagrammes à l'invariant $Z_1^{LMO}(M)$.

Une remarque technique clef peut être faite à ce stade :

Remarque 1.3.1. La première ligne de la table 1.1 nous dit que le diagramme $D_{0,1}$ dans l'intégrale de Kontsevich $\hat{Z}(L)$ contribue à la partie en thêta de l'invariant $Z_1^{LMO}(S_L^3)$. Cette contribution provient de la renormalisation \hat{Z} de l'intégrale de Kontsevich, par ajout de copies de ν , dans la définition de $Z_1^{LMO}(S_L^3)$. Il faut souligner que ce type de contribution à la partie de degré 1 de l'invariant LMO, due à la renormalisation \hat{Z} , n'apparaît que par le diagramme $D_{0,1}$, et ne se retrouve en particulier pas sur des diagrammes de cordes avec > 1 cercles.

TABLE 1.1 – Diagrammes mis en jeu dans les cas $n = 1, 2$, partie 1

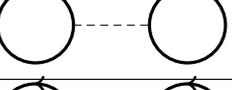
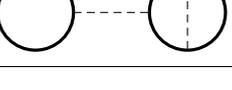
n	Diagramme D	Nom	$\iota_1(D\#\nu^{\otimes n})$
1		$D_{0,1}$	$\frac{1}{48} \times$ diagramme en thêta
1		$D_{1,1}$	-2
1		$D_{2,1}(1)$	$\frac{1}{6} \times$ diagramme en thêta
1		$D_{2,1}(2)$	$-\frac{1}{3} \times$ diagramme en thêta
2		$D_{1,2}$	0
2		$D_{2,2}(1)$	-2
2		$D_{2,2}(2)$	0
2		$D_{2,2}(2)'$	0

TABLE 1.2 – Diagrammes mis en jeu dans les cas $n = 2$, partie 2

n	Diagramme D	Nom	$\iota_1(D\#\nu^{\otimes n})$
2		$D_{3,2}(1)$	$\frac{1}{4} \times$ diagramme en thêta
2		$D_{3,2}(2)$	$-\frac{1}{4} \times$ diagramme en thêta
2		$D_{3,2}(3)$	$-\frac{1}{3} \times$ diagramme en thêta
2		$D_{3,2}(4)$	$\frac{1}{6} \times$ diagramme en thêta
2		$D_{3,2}(3)'$	$-\frac{1}{3} \times$ diagramme en thêta
2		$D_{3,2}(4)'$	$\frac{1}{6} \times$ diagramme en thêta

TABLE 1.3 – Diagrammes mis en jeu dans les cas $n = 2$, partie 3

n	Diagramme D	Nom	$\iota_1(D\#\nu^{\otimes n})$
2		$D_{3,2}(5)$	0
2		$D_{3,2}(6)$	0
2		$D_{3,2}(7)$	0
2		$D_{3,2}(5)'$	0
2		$D_{3,2}(6)'$	0
2		$D_{3,2}(7)'$	0
2		$D_{3,2}(8)$	0

1.3.2 Cas $n = 1, 2, 3$

On commence donc par traiter successivement les cas à 1, 2 et 3 composantes. Les cas $n = 1$ et $n = 2$ étaient déjà connus et avaient été démontrés par Sergei Matveev et Michael Polyak dans [30], par des techniques complètement différentes (utilisant des formules de diagrammes de Gauss) : voir la remarque 1.3.5.

1.3.2.1 Cas $n = 1$

Le cas $n = 1$ va nous servir d'échauffement, pour s'habituer aux outils qu'on utilisera dans le cas général.

Théorème 1.3.2. *Soit K un nœud orienté parallélisé d'auto-enlacement f . Notons M la 3-variété obtenue par chirurgie de \mathbb{S}^3 le long de K . On a*

$$\lambda_L(M) = \frac{|f|}{8} - (-1)^{\sigma-(L)} \left(\frac{1}{24}f^2 + \frac{1}{12} - c_2(K) \right).$$

Preuve. Partant de l'équation (*), il nous faut déterminer $\left(\iota_1(\check{Z}(K)) \right)_0$ et $\left(\iota_1(\check{Z}(K)) \right)_1$.

D'après la Table 1.1, $D_{1,1}$ est le seul diagramme qui contribue à $\left(\iota_1(\check{Z}(K)) \right)_0$.

De sorte qu'on a :

$$\left(\iota_1(\check{Z}(K)) \right)_0 = C_K[D_{1,1}] \times \iota_1(D_{1,1}\#\nu) = \frac{1}{2} \times f \times (-2) = -f,$$

où la deuxième égalité utilise la Proposition 1.2.23. Par ailleurs, $D_{0,1}$, $D_{2,1}(1)$ et $D_{2,1}(2)$ sont les seuls diagrammes qui contribuent à $\left(\iota_1(\check{Z}(K)) \right)_1$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \left(\iota_1(\check{Z}(K)) \right)_1 &= C_K[D_{0,1}] \times \iota_1(D_{0,1}\#\nu) \\ &\quad + C_K[D_{2,1}(1)] \times \iota_1(D_{2,1}(1)\#\nu) \\ &\quad + C_K[D_{2,1}(2)] \times \iota_1(D_{2,1}(2)\#\nu). \end{aligned}$$

On note que $C_K[D_{0,1}] = 1$ pour tout nœud K , par définition de l'intégrale de Kontsevich. On obtient donc, en combinant la Proposition 1.2.26 avec la dernière colonne de la Table 1.1 :

$$\begin{aligned} \left(\iota_1(\check{Z}(K)) \right)_1 &= \frac{1}{48} + \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{8}f^2 + \frac{1}{24} - c_2(K) \right) - \frac{1}{3}(c_2(K) - \frac{1}{24}) \\ &= \frac{1}{48}f^2 + \frac{1}{24} - \frac{1}{2}c_2(K). \end{aligned}$$

L'équation (*) donne alors :

$$\lambda_L(M) = \frac{(-1)^{\sigma-(L)}}{8}f - (-1)^{\sigma-(L)} \times 2 \left(\frac{1}{48}f^2 + \frac{1}{24} - \frac{1}{2}c_2(K) \right).$$

Il reste juste à observer que $(-1)^{\sigma-(L)}f = |f|$. □

Donnons un nom à l'un des protagonistes du résultat du théorème précédent. Rappelons de la Définition 1.1.15 que l'on note U_2 l'invariant $c_2 - \frac{1}{24}$.

Définition 1.3.3. Soit K un nœud parallélisé d'auto-enlacement a . On note

$$\mu_1(K) = \frac{1}{24}a^2 + \frac{1}{12} - c_2(K) = \frac{1}{24}a^2 + \frac{1}{24} - U_2(K).$$

C'est un invariant de nœuds orientés parallélisés.

De plus, d'après la preuve précédente, $\mu_1(K)$ est le double du coefficient du diagramme en thêta dans $\iota_1(\check{Z}(K))$.

1.3.2.2 Cas $n = 2$

Rappelons de la Définition 1.1.15 que l'on note U_3 l'invariant

$$U_3(K_1 \cup K_2) = c_3(K_1 \cup K_2) - \left(c_2(K_1) + c_2(K_2) - \frac{1}{12} \right) \times l_{1,2}.$$

Théorème 1.3.4. Soit $L = K_1 \cup K_2$ un entrelacs orienté parallélisé à 2 composantes.

Notons $\mathbb{L} = \begin{pmatrix} a & n \\ n & b \end{pmatrix}$ sa matrice d'enlacement. Notons M la 3-variété obtenue par chirurgie de \mathbb{S}^3 le long de L . L'égalité suivante est vérifiée :

$$(-1)^{\sigma-(L)} \lambda_L(M) = \frac{\det(\mathbb{L})}{8} \sigma(L) + \frac{1}{12} n^3 + \frac{a+b}{12} n^2 - U_3(L) - \left(b\mu_1(K_1) + a\mu_1(K_2) \right).$$

Remarque 1.3.5. Si l'on suppose que $\det(\mathbb{L}) \neq 0$, alors M est une sphère d'homologie rationnelle. Dans ce cas λ_L vérifie

$$\lambda_L(M) = \frac{1}{2} |H_1(M)| \lambda_W(M) = \frac{1}{2} \text{sign}(\mathbb{D}) \mathbb{D} \lambda_W(M),$$

où λ_W désigne l'invariant de Casson-Walker, et $\text{sign}(\mathbb{D})$ est le signe de \mathbb{D} . Dans notre cas où l'entrelacs L a 2 composantes, on vérifie de plus que $(-1)^{\sigma-(L)}$ coïncide avec le signe de $\det(\mathbb{L})$ (voir par exemple [30, §6]). On obtient ainsi, comme corollaire du Théorème 1.3.4, que

$$\begin{aligned} & \frac{\det(\mathbb{L})}{2} \left(\lambda_W(M) - \frac{1}{4} \sigma(L) \right) \\ &= \frac{1}{12} n^3 + \frac{a+b}{12} n^2 - U_3(L) - \left(b\mu_1(K_1) + a\mu_1(K_2) \right) \\ &= ac_2(L_2) + bc_2(L_1) + \frac{n^3 - n}{12} + \frac{(a+b)}{24} (2n^2 - ab - 2) - c_3(L) + n(c_2(L_1) + c_2(L_2)). \end{aligned}$$

On retrouve alors la formule donnée par Sergei Matveev et Michael Polyak dans [30, Thm. 6.3].

Preuve. À nouveau, par (*), on doit déterminer $\left(\iota_1(\check{Z}(K)) \right)_0$ et $\left(\iota_1(\check{Z}(K)) \right)_1$. D'après la Table 1.1, les seuls diagrammes qui contribuent à $\left(\iota_1(\check{Z}(L)) \right)_0$ sont $D_{1,1} \otimes D_{1,1}$ et $D_{2,2}(1)$. De sorte qu'on a :

$$\begin{aligned} \left(\iota_1(\check{Z}(L)) \right)_0 &= C_L[D_{1,1} \otimes D_{1,1}] \times \iota_1(D_{1,1} \otimes D_{1,1} \# \nu^{\otimes 2}) \\ &\quad + C_L[D_{2,2}(1)] \times \iota_1(D_{2,2}(1) \# \nu^{\otimes 2}) \\ &= (-2)^2 \times \frac{ab}{4} + (-2) \times \frac{1}{2} \times n^2 \\ &= \det(\mathbb{L}), \end{aligned}$$

où la deuxième égalité utilise le Lemme 1.2.5 et les Propositions 1.2.23 et 1.2.29, et la Table 1.1.

Par ailleurs, $D_{0,1} \otimes D_{1,1}$, $D_{1,1} \otimes D_{0,1}$, $D_{2,1}(1) \otimes D_{1,1}$, $D_{2,1}(2) \otimes D_{1,1}$, $D_{1,1} \otimes D_{2,1}(1)$, $D_{1,1} \otimes D_{2,1}(2)$, $D_{3,2}(1)$, $D_{3,2}(2)$, $D_{3,2}(3)$, $D_{3,2}(4)$, $D_{3,2}(3)'$ et $D_{3,2}(4)'$ sont les seuls diagrammes qui contribuent à $\left(\iota_1(\check{Z}(L))\right)_1$.

Si D désigne l'un de ces diagrammes, notons $\mathcal{C}_L[D]$ le coefficient tel que

$$\mathcal{C}_L[D] \times \iota_1(D \# \nu^{\otimes 2}) = \mathcal{C}_L[D] \times \text{diagramme en thêta.}$$

En utilisant le Corollaire 1.2.24 et la Table 1.1, on obtient d'une part,

$$\begin{aligned} & \mathcal{C}_L[D_{0,1} \otimes D_{1,1}] + \mathcal{C}_L[D_{1,1} \otimes D_{0,1}] \\ &= -\frac{1}{24} \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \right). \end{aligned}$$

Ensuite, d'après le Lemme 1.2.5 et les Propositions 1.2.26 et 1.2.23, ainsi que les coefficients donnés par la Table 1.1, on a

$$\begin{aligned} & \mathcal{C}_L[D_{2,1}(1) \otimes D_{1,1}] + \mathcal{C}_L[D_{2,1}(2) \otimes D_{1,1}] \\ &= \left(-\frac{1}{3} \left(\frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{24} - c_2(K_1) \right) + \frac{2}{3} \left(c_2(K_1) - \frac{1}{24} \right) \right) \times \frac{1}{2}b \\ &= \left(c_2(K_1) - \frac{1}{24} - \frac{1}{24}a^2 \right) \times \frac{1}{2}b \\ &= -\frac{1}{2}b \times \mu_1(K_1) + \frac{1}{48}b, \end{aligned}$$

et de même $\mathcal{C}_L[D_{1,1} \otimes D_{2,1}(1)] + \mathcal{C}_L[D_{1,1} \otimes D_{2,1}(2)] = -\frac{1}{2}a \times \mu_1(K_2) + \frac{1}{48}a$.

D'autre part, d'après la Table 1.2, on a

$$\begin{aligned} & \mathcal{C}_L[D_{3,2}(1)] + \mathcal{C}_L[D_{3,2}(2)] + \mathcal{C}_L[D_{3,2}(3)] + \mathcal{C}_L[D_{3,2}(4)] + \mathcal{C}_L[D_{3,2}(3)'] + \mathcal{C}_L[D_{3,2}(4)'] \\ &= \frac{1}{4} \times (\mathcal{C}_L[D_{3,2}(1)] + \mathcal{C}_L[D_{3,2}(2)]) + \frac{1}{6} \times (\mathcal{C}_L[D_{3,2}(3)] + \mathcal{C}_L[D_{3,2}(4)]) \\ &+ \frac{1}{6} \times (\mathcal{C}_L[D_{3,2}(3)'] + \mathcal{C}_L[D_{3,2}(4)']) - \frac{1}{2} \times (\mathcal{C}_L[D_{3,2}(2)] + \mathcal{C}_L[D_{3,2}(3)] + \mathcal{C}_L[D_{3,2}(3)']). \end{aligned}$$

Or, par la Proposition 1.2.31,

$$\mathcal{C}_L[D_{3,2}(1)] + \mathcal{C}_L[D_{3,2}(2)] = \frac{1}{6}n^3,$$

$$\mathcal{C}_L[D_{3,2}(3)] + \mathcal{C}_L[D_{3,2}(4)] = \frac{1}{4}an^2, \quad \mathcal{C}_L[D_{3,2}(3)'] + \mathcal{C}_L[D_{3,2}(4)'] = \frac{1}{4}bn^2,$$

et

$$\mathcal{C}_L[D_{3,2}(2)] + \mathcal{C}_L[D_{3,2}(3)] + \mathcal{C}_L[D_{3,2}(3)'] = \underbrace{c_3(L) - n \left(c_2(K_1) + c_2(K_2) - \frac{1}{12} \right)}_{=U_3(L)}.$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
\left(\iota_1(\check{Z}(L))\right)_1 &= \mathcal{C}_L[D_{0,1} \otimes D_{1,1}] + \mathcal{C}_L[D_{1,1} \otimes D_{0,1}] \\
&\quad + \mathcal{C}_L[D_{2,1}(1) \otimes D_{1,1}] + \mathcal{C}_L[D_{1,1} \otimes D_{2,1}(1)] \\
&\quad + \mathcal{C}_L[D_{2,1}(2) \otimes D_{1,1}] + \mathcal{C}_L[D_{1,1} \otimes D_{2,1}(2)] \\
&\quad + \mathcal{C}_L[D_{3,2}(1)] + \mathcal{C}_L[D_{3,2}(2)] \\
&\quad + \mathcal{C}_L[D_{3,2}(3)] + \mathcal{C}_L[D_{3,2}(4)] \\
&\quad + \mathcal{C}_L[D_{3,2}(3)'] + \mathcal{C}_L[D_{3,2}(4)'] \\
&= -\frac{1}{2}(b \times \mu_1(K_1) + a \times \mu_1(K_2)) + \frac{1}{24}n^3 + \frac{a+b}{24}n^2 - \frac{1}{2}U_3(L).
\end{aligned}$$

En regroupant ces calculs dans l'équation (*), on obtient donc

$$\begin{aligned}
\lambda_L(M) &= \frac{(-1)^{\sigma_-(L)} \mathbb{D}}{8} \sigma(L) \\
&\quad + (-1)^{\sigma_-(L)} \left(\frac{1}{12}n^3 + \frac{a+b}{12}n^2 - U_3(L) - (b \times \mu_1(K_1) + a \times \mu_1(K_2)) \right).
\end{aligned}$$

Il ne reste alors qu'à multiplier par $(-1)^{\sigma_-(L)}$ pour obtenir le résultat annoncé. \square

Définition 1.3.6. Soit $L = K_1 \cup K_2$ un entrelacs parallélisé orienté à 2 composantes. Notons respectivement a et b l'auto-enlacement de K_1 et K_2 , et notons n le nombre d'enlacement de L .

On appelle $\mu_2(L)$ la quantité

$$\mu_2(L) := \frac{1}{12}n^3 + \frac{a+b}{12}n^2 - U_3(L).$$

C'est un invariant d'entrelacs parallélisés orientés à 2 composantes.

D'après la preuve précédente, $\mu_2(L)$ est le double de la contribution à $\left(\iota_1(\check{Z}(L))\right)_1$, des diagrammes essentiels sur deux cercles (qui sont les 6 diagramme de la Table 1.2).

Avant de démontrer le résultat pour les entrelacs à 3 composantes, faisons quelques remarques.

Remarque 1.3.7. Le cas à deux composantes se reformule, avec la Notation 1.1.8 et la Définition 1.3.6, comme suit :

$$(-1)^{\sigma_+(L)} \lambda_L(M) - \frac{\mathbb{D}}{8} \sigma(L) = \mu_2(L) - \left(\mathbb{D}_1 \mu_1(K_1) + \mathbb{D}_2 \mu_1(K_2) \right)$$

On peut identifier une décomposition en 3 "blocs" :

1. Le premier bloc, constitué de l'invariant de Casson-Walker-Lescop λ_L , que l'on détermine à l'aide de résultats déjà connus sur l'invariant LMO.
2. Le deuxième bloc comprend le produit de la signature et du déterminant de la matrice d'enlacement. D'après la démonstration ci-dessus, ce bloc vient des diagrammes de cordes qui apparaissent dans $\check{Z}(L)$ qui se ferment en une constante. C'est un fait général qu'on observera plus tard : les diagrammes de cordes qui se ferment en une constante donnent ensemble une contribution égale au déterminant de la matrice d'enlacement.

3. Le troisième et dernier bloc constitue le terme de droite de l'égalité. Il est donné par la contribution des diagrammes essentiels, autrement dit ces diagrammes de cordes qui se ferment en un diagramme en thêta.

En observant attentivement la démonstration ci-dessus, on constate que ce troisième bloc est lui-même divisé en deux parties. La première met en jeu les invariants représentés par une combinaison de diagrammes dont un au moins un est un diagramme plus-essentiel : ces invariants font intervenir certains produits d'enlacements et d'auto-enlacements. La deuxième partie est l'invariant représenté par la somme des diagrammes moins-essentiels, qui est U_3 par la Proposition 1.2.37.

Là aussi, on verra apparaître dans le cas d'un nombre plus important de composantes ceci comme la manifestation d'un phénomène général.

La deuxième remarque concerne le côté itératif du résultat que l'on démontre.

Remarque 1.3.8. Le Théorème 1.3.2 peut être déduit du Théorème 1.3.4 en considérant l'union disjointe L du nœud K avec U_+ .

En effet, la 3-variété obtenue par chirurgie de \mathbb{S}^3 le long de L est la même que celle obtenue par chirurgie de \mathbb{S}^3 le long de K . Cela donne une méthode de vérification partielle du résultat, que l'on laisse au lecteur.

1.3.2.3 Cas $n = 3$

Attaquons maintenant le cas d'un entrelacs à 3 composantes. Rappelons la Définition 1.1.15 que l'on note U_4 l'invariant d'entrelacs à 3 composantes

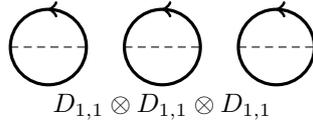
$$U_4(K_1 \cup K_2 \cup K_3) = c_4(K_1 \cup K_2 \cup K_3) - \sum_{\{i,j,k\}=\{1,2,3\}} c_3(K_i \cup K_j) l_{i,k} l_{j,k}.$$

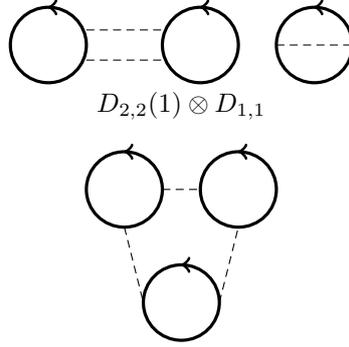
Théorème 1.3.9. Soit $L = K_1 \cup K_2 \cup K_3$ un entrelacs parallélisé orienté à 3 composantes.

Posons $\mathbb{L} = \begin{pmatrix} a & l_{1,2} & l_{1,3} \\ l_{1,2} & b & l_{2,3} \\ l_{1,3} & l_{2,3} & c \end{pmatrix}$ sa matrice d'enlacement. Notons M la 3-variété obtenue par chirurgie de \mathbb{S}^3 le long de L . On a

$$\begin{aligned} & (-1)^{\sigma-(L)} \lambda_L(M) - \frac{\det(\mathbb{L})}{8} \sigma(L) = \\ & -\frac{1}{12} \times (l_{1,2}^2 l_{1,3}^2 + l_{1,2}^2 l_{2,3}^2 + l_{1,3}^2 l_{2,3}^2) - \left(\frac{l_{1,2} + l_{1,3} + l_{2,3}}{4} + \frac{a + b + c}{6} \right) \times l_{1,2} l_{1,3} l_{2,3} \\ & + U_4(L) + \sum_{1 \leq i \neq j \leq 3} \mathbb{D}_{ij} \times \mu_2(K_i \cup K_j) - \sum_{1 \leq i \leq 3} \mathbb{D}_i \times \mu_1(K_i). \end{aligned}$$

Preuve. Nous allons suivre le même cheminement que dans les démonstrations précédentes. Les diagrammes sur trois cercles qui se ferment en une constante sont exactement les suivants (à permutation des composantes près) :





En effet, un diagramme se ferme en une constante lorsque, au cours du procédé de calcul de l'invariant LMO , on arrive à une union disjointe de cercles. Cela ne peut arriver que lorsque chaque composante connexe du diagramme possède deux pattes.

D'une part, la Table 1.1 indique que le premier des trois diagrammes ci-dessus se ferme en -8 , le second se ferme en 4 , et le troisième se ferme en -2 . D'autre part, le Lemme 1.2.5 et la Proposition 1.2.23 donnent que le premier diagramme apparaît dans $\check{Z}(L)$ avec un coefficient $\frac{1}{8}abc$; le Lemme 1.2.5 et la Proposition 1.2.29 donnent que le deuxième diagramme apparaît avec un coefficient $\frac{1}{4}l_{i,j}^2 fr(K_i)$, pour i, j et l deux à deux distincts; d'après la Proposition 1.2.39, le troisième diagramme apparaît avec un coefficient $l_{1,2}l_{1,3}l_{2,3}$. Mis ensemble, ces diagrammes donnent donc la contribution

$$\left(\iota_1(\check{Z}(L)) \right)_0 = -abc + a \times l_{2,3}^2 + b \times l_{1,3}^2 + c \times l_{1,2}^2 - 2l_{1,2}l_{1,3}l_{2,3} = -\mathbb{D}. \quad (1.2)$$

Regardons maintenant les diagrammes qui se ferment en un diagramme en thêta, et déterminons leur contribution à $\left(\iota_1(\check{Z}(L)) \right)_1$ en distinguant plusieurs cas.

Cas 1 : Considérons tout d'abord les diagrammes *non connexes* qui se ferment en un diagramme en thêta. Un tel diagramme est alors l'union disjointe de deux sous-diagramme, le premier se fermant en un diagramme en thêta, tandis que le second se ferme en une constante. Le sous-diagramme qui se ferme en une constante peut être un diagramme sur un ou deux cercles, et nous distinguons ces deux sous-cas.

Cas 1 – 1 : Si le sous-diagramme qui se ferme en une constante est un diagramme sur un cercle, la Table 1.1 assure qu'il ne peut s'agir que d'une copie du diagramme $D_{1,1}$. La Proposition 1.2.23 et la Table 1.1 indiquent que la contribution d'un tel diagramme est (-1) fois l'auto-enlacement de la composante correspondante. Le sous-diagramme se fermant en un diagramme en thêta est alors un diagramme essentiel sur deux cercles, et, comme relevé à la fin de la Définition 1.3.6, la contribution de ces diagrammes est donnée par la moitié de l'invariant μ_2 du sous-entrelacs correspondant. Ainsi, dans le premier cas, la contribution globale à $\left(\iota_1(\check{Z}(L)) \right)_1$ est

$$-\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq 3} \mathbb{D}_{ij} \times \mu_2(K_i \cup K_j),$$

en notant que les auto-enlacements s'écrivent sous la forme \mathbb{D}_{ij} .

Cas 1 – 2 : Si le sous-diagramme qui se ferme en une constante est un diagramme sur deux cercles, il s'agit d'après les Tables 1.2 et 1.3, des diagrammes $D_{1,1} \otimes D_{1,1}$ et $D_{2,2}(1)$. Comme on l'a déjà montré au début de la preuve du Théorème 1.3.4, la contribution de tels diagrammes est précisément le déterminant de la matrice d'enlacement du sous-entrelacs correspondant. Une telle quantité sera multipliée par la contribution à $\check{Z}(L)$ des diagrammes sur un cercle qui se ferment en un diagramme en thêta : comme dit dans la Définition 1.3.3, c'est précisément l'invariant $\frac{1}{2}\mu_1$ de la composante correspondante. Ainsi, dans ce second cas, la contribution à $\left(\iota_1(\check{Z}(L))\right)_1$ est donnée par

$$\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq 3} \mathbb{D}_i \times \mu_1(K_i)$$

Cas 2 : Reste le cas connexe, autrement dit le cas des diagrammes essentiels. À l'aide de la Proposition 1.2.19, on sait que l'on peut obtenir tous ces diagrammes à l'aide des gonflages des diagrammes essentiels sur deux cercles. Les Propositions 1.2.29 et 1.2.40 permettent de déterminer la contribution de certaines combinaisons de ces diagrammes à $\left(\iota_1(\check{Z}(L))\right)_1$:

Cas 2 – 1 : Gonflage de $D_{3,2}(1) + D_{3,2}(2)$.

Les diagrammes ainsi produits sont les diagrammes D_1 et D_2 de l'Exemple 1.2.41. Ces diagrammes ainsi produits sont ceux obtenus à partir de $D_{2,2}(1)$ par insertion d'une corde gonflée mixte de toutes les façons possibles. On obtient donc la contribution

$$C_L[D_1] + C_L[D_2] = \frac{l_{1,2} + l_{1,3} + l_{2,3}}{2} \times l_{1,2}l_{1,3}l_{2,3}.$$

Cas 2 – 2 : Gonflage de $D_{3,2}(3) + D_{3,2}(4)$ le long de leur corde interne.

On note respectivement D'_1 et D'_2 ces gonflages de $D_{3,2}(3)$ et $D_{3,2}(4)$. Ce sont les diagrammes obtenus à partir de $D_{2,2}(1)$ par insertion d'une corde gonflée interne de toutes les façons possibles. On obtient donc la contribution

$$C_L[D'_1] + C_L[D'_2] = \frac{1}{4}(l_{1,2}^2 l_{1,3}^2 + l_{1,2}^2 l_{2,3}^2 + l_{1,3}^2 l_{2,3}^2).$$

Cas 2 – 3 : Gonflage de $D_{3,2}(3) + D_{3,2}(4)$ le long d'une corde mixte.

On note respectivement D''_1 et D''_2 ces gonflages de $D_{3,2}(3)$ et $D_{3,2}(4)$. Ce sont les diagrammes obtenus à partir de $D_{2,2}(1)$, cette fois par insertion d'une corde gonflée mixte de toutes les façons possibles, et on obtient ainsi la contribution

$$C_L[D''_1] + C_L[D''_2] = \frac{a + b + c}{2} \times l_{1,2}l_{1,3}l_{2,3}.$$

Pour déterminer la contribution de l'ensemble des diagrammes essentiels, il reste ensuite à suivre le raisonnement de la démonstration du Théorème 1.3.4. En effet, dans les 3 cas ci-dessus, la somme considérée est composée d'un diagramme plus-essentiel (diagrammes D_1 , D'_1 et D''_1), et d'un moins-essentiel (diagrammes D_2 , D'_2 et D''_2), et ces deux types de diagrammes ne

contribuent pas à $\left(\iota_1(\check{Z}(L))\right)_1$ avec le même coefficient. Plus précisément, on a $\mathcal{E}^+(3) = \{D_1, D'_1, D''_1\}$ et $\mathcal{E}^-(3) = \{D_2, D'_2, D''_2\}$, et d'après la Table 1.2, on a

$$\begin{aligned} \sum_{D \in \mathcal{E}(3)} \mathcal{C}_L[D] &= \frac{1}{4} \times (C_L[D_1] + C_L[D_2]) + \frac{1}{6} \times (C_L[D'_1] + C_L[D'_2]) \\ &+ \frac{1}{6} \times (C_L[D''_1] + C_L[D''_2]) - \frac{1}{2} \times (C_L[D_2] + C_L[D'_2] + C_L[D''_2]). \end{aligned}$$

où l'on désigne, comme précédemment, par $\mathcal{C}_L[D]$, le coefficient tel que

$$C_L[D] \times \iota_1(D \# \nu^{\otimes 2}) = C_L[D] \times \text{diagramme en thêta.}$$

Dans la formule précédente, le dernier terme est donc la demi-somme des coefficients des diagrammes moins-essentiels

$$\frac{1}{2} \times (C_L[D_2] + C_L[D'_2] + C_L[D''_2]) = \frac{1}{2} \sum_{D \in \mathcal{E}^-(3)} C_L[D] = \frac{1}{2} U_4(L),$$

qui s'identifie à $U_4(L)$ par la Proposition 1.2.37.

En conclusion, on a montré que

$$\begin{aligned} \left(\iota_1(\check{Z}(L))\right)_1 &= -\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq 3} \mathbb{D}_{ij} \mu_2(K_i \cup K_j) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq 3} \mathbb{D}_i \mu_1(K_i) - \frac{1}{2} U_4(L) \\ &+ \frac{1}{24} (l_{1,2}^2 l_{1,3}^2 + l_{1,2}^2 l_{2,3}^2 + l_{1,3}^2 l_{2,3}^2) + \left(\frac{l_{1,2} + l_{1,3} + l_{2,3}}{8} + \frac{a + b + c}{12} \right) l_{1,2} l_{1,3} l_{2,3}. \end{aligned}$$

Il reste à combiner cette formule et (1.2) avec l'équation (*), puis à multiplier par $(-1)^{\sigma(L)}$, pour obtenir le résultat annoncé. \square

1.3.3 Cas général

Dans la suite de ce chapitre, nous utiliserons la notation suivante.

Notation 1.3.10. *Pour un diagramme de cordes D sur n cercles, on note $\iota_\Theta(D)$ le coefficient rationnel tel que*

$$\iota_1(D \# \nu^{\otimes 2}) = \iota_\Theta(D) \times \text{diagramme en thêta.}$$

Pour un entrelacs à n composantes L , on note

$$\mathcal{C}_L[D] := C_L[D] \times \iota_\Theta(D).$$

Autrement dit, $\mathcal{C}_L[D]$ désigne la contribution à $\left(\iota_1(\check{Z}(L))\right)_1$ d'un diagramme D dans l'intégrale de Kontsevich $\hat{Z}(L)$, et $\iota_\Theta(D)$ est la part de cette contribution provenant de l'application ι_1 (et la renormalisation par des copies de ν) sur ce diagramme, alors que $C_L[D]$ est la part de cette contribution venant de l'intégrale de Kontsevich elle-même.

1.3.3.1 Diagrammes essentiels et invariants μ_n

Définition 1.3.11. Soit $n \geq 3$ un entier.

On appelle μ_n l'invariant d'entrelacs à n composantes défini par

$$\mu_n(L) = 2 \sum_{D \in \mathcal{E}(n)} \mathcal{C}_L[D].$$

Remarque 1.3.12. Ceci généralise les Définitions 1.3.3 et 1.3.6. Plus précisément, on a vu dans la Section 1.3.2.2 que μ_2 coïncide précisément avec $2 \sum_{D \in \mathcal{E}(2)} \mathcal{C}[D]$. Le cas $n = 1$ est un peu particulier dû au fait que la normalisation \check{Z} sur le diagramme $D_{0,1}$ apporte une contribution "exceptionnelle", (voir la remarque 1.3.1) : on a de fait montré dans la Section 1.3.2.1 que l'on a précisément $\mu_1 = 2 \sum_{D \in \mathcal{E}(1) \cup \{D_{0,1}\}} \mathcal{C}_L[D]$.

Pour $n = 3$, nous verrons grâce au Théorème 1.3.19 que $\mu_3(L)$ est donné par

$$\frac{l_{1,2}^2 l_{1,3}^2 + l_{1,2}^2 l_{2,3}^2 + l_{1,3}^2 l_{2,3}^2}{12} + \left(\frac{l_{1,2} + l_{1,3} + l_{2,3}}{4} + \frac{a + b + c}{6} \right) l_{1,2} l_{1,3} l_{2,3} - U_4(L).$$

L'invariant μ_n joue un rôle central dans notre formule de chirurgie. Il est donc nécessaire d'en avoir une interprétation, en termes d'invariants classiques d'entrelacs. La Proposition 1.2.37 nous donne que l'invariant associé à la somme des diagrammes moins-essentiels sur n cercles est U_{n+1} . Il reste alors à identifier les invariants associés aux collections de diagrammes qui contiennent un diagramme plus-essentiel. Pour cela, il nous faut comprendre la structure de l'ensemble des diagrammes essentiels.

D'après la Proposition 1.2.19, les diagrammes essentiels sur n cercles sont exactement ceux qui sont obtenus par gonflages successifs de $D_{2,1}(1)$, $D_{2,1}(2)$, $D_{3,2}(1)$ et $D_{3,2}(2)$. Ces diagrammes et leurs gonflages donnent tous les diagrammes essentiels sur n cercles ; de plus, tous les diagrammes plus-essentiels proviennent de cette manière de $D_{2,1}(1)$ et $D_{3,2}(1)$, et tous les moins-essentiels, de $D_{2,1}(2)$ et $D_{3,2}(2)$.

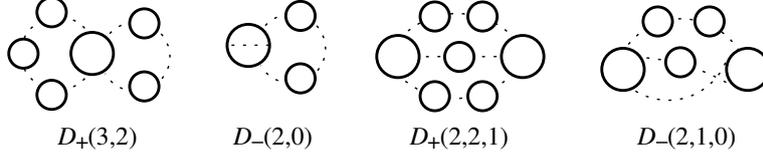
Notons que, dans chacun de ces quatre diagrammes, le rôle des cordes est complètement symétrique. On peut donc définir 4 familles de diagrammes *non ordonnés*⁴ $D_+(a, b)$, $D_-(a, b)$, $D_+(a, b, c)$, $D_-(a, b, c)$ ($a, b, c \in \mathbb{N}$), de la façon suivante.

Définition 1.3.13. Pour des entiers a, b, c tels que $a \geq b \geq c \geq 0$,

- $D_+(a, b)$ est le diagramme plus-essentiel non ordonné sur $a+b+1$ cercles obtenu à partir de $D_{2,1}(1)$ par a gonflages successifs sur l'une des deux cordes, et b gonflages sur l'autre corde,
- $D_-(a, b)$ est le diagramme moins-essentiel non ordonné sur $a+b+1$ cercles obtenu de la même manière à partir de $D_{2,1}(2)$,
- $D_+(a, b, c)$ est le diagramme plus-essentiel non ordonné sur $a+b+c+2$ cercles obtenu à partir de $D_{3,2}(1)$ par respectivement a , b et c gonflages successifs sur chaque corde,
- $D_-(a, b, c)$ est le diagramme moins-essentiel non ordonné sur $a+b+c+2$ cercles obtenu de la même manière à partir de $D_{3,2}(2)$.

⁴ Ici un diagramme est dit non ordonné si on ne tient pas compte de la numérotation des cercles.

Quelques exemples sont représentés ci-dessous :



Notation 1.3.14. On désignera respectivement par $\{D_+(a, b)\}$ et $\{D_-(a, b)\}$ l'ensemble des diagrammes de cordes obtenus en numérotant de 1 à $a + b + 1$ les cercles des diagrammes $D_+(a, b)$ et $D_-(a, b)$, de toutes les façons possibles. On introduit les ensembles $\{D_+(a, b, c)\}$ et $\{D_-(a, b, c)\}$ de la même manière. On pose enfin

$$\mathcal{D}(a, b) = \{D_+(a, b)\} \cup \{D_-(a, b)\} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}(a, b, c) = \{D_+(a, b, c)\} \cup \{D_-(a, b, c)\}.$$

La Remarque 1.2.20 nous dit alors que

$$\mathcal{E}^\pm(n+2) = \bigcup_{\substack{a+b=n+1 \\ a \geq b}} \mathcal{D}(a, b) \cup \bigcup_{\substack{a+b+c=n+2 \\ a \geq b \geq c}} \mathcal{D}(a, b, c). \quad (1.3)$$

On note que, d'après la définition de l'application ι_1 et la Table 1.2, on a

Lemme 1.3.15. Pour tout $a, b, c \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \iota_\Theta(D_+(a, b)) &= \frac{1}{6}, & \iota_\Theta(D_-(a, b)) &= -\frac{1}{3}, \\ \iota_\Theta(D_+(a, cb)) &= \frac{1}{4}, & \iota_\Theta(D_-(a, b, c)) &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, les techniques vues précédemment en bas degré peuvent se généraliser directement pour déterminer les coefficients de certaines sommes de diagrammes essentiels en termes d'invariants d'enlacement. Pour cela, on utilisera la notation suivante.

Notation 1.3.16. Soit deux entiers i et j , et un ensemble $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ de k entiers distincts deux à deux et tous différents de i et j . On pose

$$\mathcal{L}_{i,j,I} := \sum_{\sigma \in S_k} l_{i, i_{\sigma(1)}} \times l_{i_{\sigma(1)}, i_{\sigma(2)}} \times \dots \times l_{i_{\sigma(k-1)}, i_{\sigma(k)}} \times l_{i_{\sigma(k)}, j}.$$

On écrira $\mathcal{L}_{i,I} = \mathcal{L}_{i,i,I}$, et on prendra la convention $\mathcal{L}_{i,j,\emptyset} = l_{i,j}$ si $i \neq j$, et $\mathcal{L}_{i,\emptyset} = fr_i$.

Théorème 1.3.17. • Pour tous $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a > 0$ et $a \geq b$,

$$\sum_{D \in \mathcal{D}(a,b)} C_L[D] = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{\mathcal{I}_i(a,b)} \mathcal{L}_{i,I} \mathcal{L}_{i,J}$$

où la somme est sur l'ensemble $\mathcal{I}_i(a, b)$ des partitions $I \cup J = \{1, \dots, a + b + 1\} \setminus \{i\}$ telles que $|I| = a$ and $|J| = b$.

• Pour tous $a, b, c \in \mathbb{N}$ tels que $a > 0$ et $a \geq b \geq c$,

$$\sum_{D \in \mathcal{D}(a,b,c)} C_L[D] = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} l_{i,j}^2 \mathcal{L}_{i,j,\{1, \dots, a+2\} \setminus \{i,j\}} & \text{si } b = c = 0, \\ \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sum_{\mathcal{I}_{i,j}(a,b,c)} \mathcal{L}_{i,j,I} \mathcal{L}_{i,j,J} \mathcal{L}_{i,j,K} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où la dernière somme est sur l'ensemble $\mathcal{I}_{i,j}(a,b,c)$ des partitions $I \cup J \cup K = \{1, \dots, a+b+c+2\} \setminus \{i,j\}$ telles que $|I| = a$, $|J| = b$ et $|K| = c$.

Remarque 1.3.18. Le cas $a = 1$ et $b = c = 0$ coïncide avec l'Exemple 1.2.41 dont ce théorème peut être vu comme une généralisation.

Preuve. Dans cette preuve, on appelle "chaîne d'ordre k ", pour $k \geq 0$, le résultat de k gonflages successifs sur une corde. Les diagrammes introduits dans la Définition 1.3.13 sont obtenus en ajoutant des chaînes, de toutes les manières possibles, sur des diagrammes de petit degré, dont on connaît les coefficients dans l'intégrale de Kontsevich. En outre, l'effet sur ces coefficients de l'insertion d'une chaîne d'ordre 1 est donné par la Proposition 1.2.40, et peut être déduit facilement des Propositions 1.2.12 et 1.2.39 pour des chaînes d'ordre plus grand. Les formules du Théorème 1.3.17 découlent toutes de ce principe.

Montrons tout d'abord la première partie de l'énoncé. Traitons dans un premier temps le cas $a = n > 0$ et $b = 0$.

Les diagrammes $D_+(n, 0)$ et $D_-(n, 0)$ sont le résultat de l'insertion, de toutes les façons possibles, d'une chaîne d'ordre n dans le diagramme $D_{1,1}$. Cette insertion peut être réalisée en faisant, dans un premier temps, une prolifération de toutes les façons possibles, puis en proliférant $n - 1$ fois de façon itérée sur la nouvelle composante créée, et enfin en insérant une corde mixte entre la dernière composante créée et la composante initiale. Ces opérations munissent $D_+(n, 0)$ et $D_-(n, 0)$ d'une numérotation canonique, pour laquelle les Propositions 1.2.12 et 1.2.39 donnent :

$$C_L[D_+(n, 0)] + C_L[D_-(n, 0)] = \frac{1}{2} fr_1 l_{1,2} l_{2,3} \cdots l_{n-1,n} l_{n,1}.$$

La formule recherchée est alors obtenue en considérant toutes les numérotations possibles sur les diagrammes $D_+(n, 0)$ et $D_-(n, 0)$. Notons que le facteur $\frac{1}{2}$ est dû au fait que, pour des raisons de symétrie, chaque terme apparaît deux fois dans la somme définissant $\mathcal{L}_{i,j,\{1,\dots,n+1\} \setminus \{i,j\}}$ lorsque $i = j$.

Dans le cas $a > 0$ et $b > 0$, les diagrammes $D_{\pm}(a, b)$ sont le résultat de l'insertion, sur le diagramme sans corde $D_{0,1}$, d'une chaîne d'ordre a , suivie de l'insertion d'une chaîne d'ordre b de toutes les façons possibles. L'argument précédent s'applique alors de manière similaire.

La seconde moitié de l'énoncé se prouve par la même méthode. Le premier cas utilise le fait que les diagrammes $D_{\pm}(a, 0, 0)$ ($a \geq 1$) sont obtenus en insérant, de toutes les façons possibles, une chaîne d'ordre a au diagramme $D_{2,2}(1)$ (ce qui utilise le Lemme 1.2.29). De même, pour le second cas, $D_{\pm}(a, b, c)$ ($a, b \geq 1$) est obtenus par insertions de chaînes d'ordre a , b et c au diagramme de degré 0 sur deux cercles. \square

En utilisant le Théorème 1.3.17, on peut enfin donner une formule explicite pour les invariants μ_n , pour tout $n \geq 3$, en termes de la matrice d'enlacement et des coefficients de Conway.

Théorème 1.3.19. Pour tout $n \geq 1$, et pour tout entrelacs parallélisé et orienté

à $(n+2)$ composantes L , on a

$$\begin{aligned}\mu_{n+2}(L) &= \frac{1}{12} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ a+b=n+1 \\ a \geq b}} \sum_{\mathcal{I}_i(a,b)} \mathcal{L}_{i,I} \mathcal{L}_{i,J} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ a+b+c=n+2 \\ a \geq b \geq c}} \sum_{\mathcal{I}_{i,j}(a,b,c)} \mathcal{L}_{i,j,I} \mathcal{L}_{i,j,J} \mathcal{L}_{i,j,K} \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i < j \leq n} l_{i,j}^2 \mathcal{L}_{i,j,\{1, \dots, n+2\} \setminus \{i,j\}} - U_{n+3}(L).\end{aligned}$$

Preuve. D'après (1.3), on a

$$\mu_{n+2}(L) = 2 \sum_{\substack{a+b=n+1 \\ a \geq b}} \sum_{D \in \mathcal{D}(a,b)} C_L[D] + 2 \sum_{\substack{a+b+c=n+2 \\ a \geq b \geq c}} \sum_{D \in \mathcal{D}(a,b,c)} C_L[D].$$

On a vu au Lemme 1.3.15 que pour tout $a, b, c \geq 0$, on a $\iota_{\Theta}(D_+(a, b)) = \frac{1}{6}$, $\iota_{\Theta}(D_-(a, b)) = -\frac{1}{3}$, $\iota_{\Theta}(D_+(a, b, c)) = \frac{1}{4}$ et $\iota_{\Theta}(D_-(a, b, c)) = -\frac{1}{4}$. Donc, puisque $\mathcal{D}(a, b) = \{D_+(a, b)\} \cup \{D_-(a, b)\}$ et $\mathcal{D}(a, b, c) = \{D_+(a, b, c)\} \cup \{D_-(a, b, c)\}$, on a

$$\begin{aligned}\mu_{n+2}(L) &= 2 \sum_{\substack{a+b=n+1 \\ a \geq b}} \left(\frac{1}{6} \sum_{D \in \{D_+(a,b)\}} C_L[D] - \frac{1}{3} \sum_{D \in \{D_-(a,b)\}} C_L[D] \right) \\ &+ 2 \sum_{\substack{a+b+c=n+2 \\ a \geq b \geq c}} \left(\frac{1}{4} \sum_{D \in \{D_+(a,b,c)\}} C_L[D] - \frac{1}{4} \sum_{D \in \{D_-(a,b,c)\}} C_L[D] \right)\end{aligned}$$

Il suit que

$$\begin{aligned}\mu_{n+2}(L) &= \sum_{\substack{a+b=n+1 \\ a \geq b}} \left(\frac{1}{3} \sum_{D \in \mathcal{D}(a,b)} C_L[D] - \sum_{D \in \{D_-(a,b)\}} C_L[D] \right) \\ &+ \sum_{\substack{a+b+c=n+2 \\ a \geq b \geq c}} \left(\frac{1}{2} \sum_{D \in \mathcal{D}(a,b,c)} C_L[D] - \sum_{D \in \{D_-(a,b,c)\}} C_L[D] \right) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{\substack{a+b=n+1 \\ a \geq b}} \sum_{D \in \mathcal{D}(a,b)} C_L[D] + \frac{1}{2} \sum_{\substack{a+b+c=n+2 \\ a \geq b \geq c}} \sum_{D \in \mathcal{D}(a,b,c)} C_L[D] \\ &- \sum_{D \in \mathcal{E}^-(n+2)} C_L[D]\end{aligned}$$

où la dernière égalité utilise (1.3). Il ne reste alors plus qu'à utiliser le Théorème 1.3.17 pour exprimer les deux premières sommes en termes d'enlacement et auto-enlacement, et la Proposition 1.2.37 pour identifier la dernière somme avec U_{n+3} . \square

Introduisons une dernière classe de diagramme de cordes qui interviendra dans la suite.

Définition 1.3.20. Pour $m \geq 1$, on appelle chaîne de m cercles un diagramme de cordes connexe sur m cercles avec deux pattes sur chaque cercle.

Les cas $m = 1$ et 2 sont respectivement les diagrammes $D_{1,1}$ et $D_{2,2}(1)$. Clairement, une chaîne de m cercles a degré m , et se ferme toujours en la constante (-2) .

Les méthodes utilisées pour démontrer Théorème 1.3.17 permettent aussi de montrer le résultat technique suivant sur ces chaînes de cercles.

Lemme 1.3.21. Soit C_m une chaîne de m cercles, et soit $I = \{i_1, \dots, i_m\}$ un ensemble de m indices distincts deux à deux. Soit $\mathcal{D}(I)$ l'ensemble de tous les diagrammes de cordes obtenus en indexant les cercles de C_m par les éléments de I , de toutes les façons possibles. Alors, pour un entrelacs orienté et parallélisé L à m composantes, on a

$$\sum_{D \in \{\mathcal{D}(I)\}} C_L[D] = \begin{cases} \frac{1}{2} fr_{i_1} & \text{si } m = 1 \\ \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in S_{m-1}} l_{i_m, i_{\sigma(1)}} l_{i_{\sigma(1)}, i_{\sigma(2)}} \times \dots \times l_{i_{\sigma(m-1)}, i_m} & \text{si } m > 1 \end{cases}$$

Preuve. Si $m = 1$ ou 2 , il y a une seule façon d'indexer C_m et le résultat est donné par les Lemmes 1.2.23 et 1.2.29, respectivement. Si $m > 2$, un élément de $\mathcal{D}(I)$ peut être vu comme obtenu d'un cercle sans corde, indexé par i_m , en ajoutant une chaîne de cercles d'ordre $m - 1$, indexée par i_1, \dots, i_{m-1} de toutes les façons possibles. Les arguments de la preuve du Théorème 1.3.17 donnent alors la formule voulue. \square

1.3.3.2 Formule de chirurgie pour l'invariant de Casson-Walker-Lescop

Nous allons maintenant énoncer et démontrer le principal résultat de ce premier chapitre.

Rappelons de la Notation 1.1.8 que si \mathbb{L} est la matrice d'enlacement d'un entrelacs à n composantes, alors on note \mathbb{D} son déterminant, et pour tout $I \subset \{1, \dots, n\}$, on note $\mathbb{D}_{\bar{I}}$ le déterminant de la sous-matrice de \mathbb{L} obtenue en enlevant les lignes et colonnes indexées par les éléments de I .

Théorème 1.3.22. Soit $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ un entrelacs parallélisé orienté à n composantes et soit \mathbb{L} sa matrice d'enlacement.

Notons M la 3-variété obtenue par chirurgie de \mathbb{S}^3 le long de L . L'égalité suivante est vérifiée :

$$(-1)^{\sigma_+(L)} \lambda_L(M) - \frac{(-1)^n \mathbb{D}}{8} \sigma(L) = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ |I|=k}} (-1)^{n-k} \mathbb{D}_{\bar{I}} \mu_k(L_I)$$

Remarque 1.3.23. La formule que nous obtenons ici, en regardant l'invariant de Casson-Walker-Lescop comme le terme de degré 1 de l'invariant LMO, n'est rien d'autre qu'une reformulation de la troisième formule de chirurgie de Christine Lescop [28, Prop. 1.7.8] pour son extension de l'invariant de Casson-Walker (restreinte aux coefficients de chirurgie entiers). En particulier, les deux formules du Théorème 1.3.17, sur lesquelles repose l'invariant μ_k , sont précisément les produits d'enlacements Θ_b introduits dans [28, Nota. 1.7.5]. Plus précisément, selon la terminologie de [28, Fig. 1.2], la première formule correspond à Θ_b dans le cas d'un "Figure-eight graph", tandis que la seconde formule

correspond au cas d'un "beardless Θ ". Il semble très intéressant de voir comme ces formules combinatoires apparaissent naturellement à travers la combinatoire des diagrammes de cordes essentiels.

Le reste de cette section est dédié à la preuve du Théorème 1.3.22. Rappelons que l'équation (*) nous donne

$$\lambda_L(S_L^3) = \frac{(-1)^{\sigma-(L)}}{8} \left(\iota_1(\check{Z}(L)) \right)_0 + (-1)^{n+\sigma-(L)} \times 2 \left(\iota_1(\check{Z}(L)) \right)_1.$$

Le travail est donc réduit aux calculs explicites de $\left(\iota_1(\check{Z}(L)) \right)_0$ et $\left(\iota_1(\check{Z}(L)) \right)_1$: c'est l'objet des deux lemmes suivants.

Lemme 1.3.24.

$$\left(\iota_1(\check{Z}(L)) \right)_0 = (-1)^n \det \mathbb{L}.$$

Démonstration. Les diagrammes, dans l'intégrale de Kontsevich de L , qui contribuent à $\left(\iota_1(\check{Z}(L)) \right)_0$ sont ceux qui se ferment en une constante, autrement dit des unions disjointes de chaînes de cercles⁵. Comme noté dans la section 1.2.1.3, toute chaîne de cercles se ferme en la constante (-2) . Le coefficient d'une chaîne de k cercles dans l'intégrale de Kontsevich est donné en termes des coefficients de la matrice d'enlacement dans le Lemme 1.3.21, et nous donne la formule suivante :

$$\left(\iota_1(\check{Z}(L)) \right)_0 = \sum_{\{I_1, \dots, I_k\} \text{ partition de } \{1, \dots, n\}} (-1)^k \prod_{j=1}^k \mathcal{I}(I_j),$$

où $\mathcal{I}(I_j) = \mathcal{L}_{i_m, I_j \setminus \{i_m\}} = \sum_{\sigma \in S_{m-1}} l_{i_m, i_{\sigma(1)}} l_{i_{\sigma(1)}, i_{\sigma(2)}} \times \dots \times l_{i_{\sigma(m-1)}, i_m}$ si $I_j = \{i_1, \dots, i_m\}$ avec $m > 1$, et $\mathcal{I}(I_j) = fr_{i_1}$ sinon. Il n'est pas difficile de vérifier que cette quantité est précisément $(-1)^n \det \mathbb{L}$. \square

Lemme 1.3.25.

$$\left(\iota_1(\check{Z}(L)) \right)_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ |I|=k}} (-1)^{n-k} \det(\mathbb{L}_I) \mu_k(L_I).$$

Démonstration. Calculer $\left(\iota_1(\check{Z}(L)) \right)_1$ revient à compter les diagrammes dans $\check{Z}(L)$ qui se ferment en un diagramme en thêta. Comme observé dans la remarque 1.3.1, une copie du diagramme $D_{1,0}$ (le diagramme de degré 0 sur un cercle) dans $\check{Z}(L)$ produit un tel terme via la copie de ν rajoutée dans $\check{Z}(L)$, et c'est là l'unique contribution provenant de cette normalisation \check{Z} . Ainsi, un diagramme de $\check{Z}(L)$ contribuant à $\left(\iota_1(\check{Z}(L)) \right)_1$ est, pour un k tel que $1 \leq k \leq n$, une union disjointe de

- un diagramme de cordes sur $(n - k)$ cercles qui est une union de chaînes de cercles, qui produit une constante numérique,

⁵. En effet, la normalisation dans $\check{Z}(L)$, qui ajoute une copie de ν sur chaque cercle, n'affecte pas la partie de degré 0 de $\check{Z}(L)$.

— un élément de $\mathcal{E}(k)$ si $k > 1$, et soit un élément de $\mathcal{E}(1)$, soit une copie de $D_{1,0}$, dans le cas $k = 1$, qui produit un diagramme en thêta avec un certain coefficient.

Pour une partie I à $k > 1$ éléments de $\{1, \dots, n\}$, la contribution à $\left(\iota_1(\check{Z}(L))\right)_1$ de tous les diagrammes dans $\mathcal{E}(k)$, coloriés par I de toutes les façons possibles, est donnée par $\frac{1}{2}\mu_k(L_I)$ d'après la Définition 1.3.11 ; d'autre part, la preuve du Lemme 1.3.24 ci-dessus nous indique que la contribution de toutes les unions disjointes possibles de chaînes de cercles coloriées par $\{1, \dots, n\} \setminus I$, est précisément $(-1)^k \det(\mathbb{L}_{\check{I}})$. Ceci reste vrai dans le cas $k = 1$, en notant simplement le changement dans la formule pour μ_1 (Définition 1.3.11). La formule est alors obtenue en prenant la somme sur toutes les parties I possibles. \square

Chapitre 2

Calcul de flèches en petit degré

Introduction

L'idée de ce chapitre est d'établir un résultat de caractérisation des invariants de type fini en bas degré pour les enlacements d'intervalles soudés et les anneaux noués de type ruban.

La première partie consiste à présenter le cadre de travail de ce chapitre : objets virtuels et soudés, mouvements de Reidemeister généralisés dans un premier temps, calcul de flèches dans un second, avec les notions de flèches et d'arbres. On donne également un ensemble de résultats déjà connus sur la manipulation de ces objets.

La deuxième partie traite des invariants des objets soudés. Le but est d'y introduire le polynôme d'Alexander normalisé, les invariants de Milnor soudés et les invariants de clôture. Cela nécessite comme préliminaires d'introduire le groupe d'un diagramme soudé, le calcul de Fox ou encore le développement de Magnus. On y réalise un certain nombre de calculs qui servent à la fois d'illustration des définitions et de calculs préliminaires aux résultats ultérieurs.

La troisième partie se tourne sur les notions de w_k -équivalence et d'invariants de type fini. On donne les principales définitions et on se penche sur l'étude des invariants précédemment introduits : sont-ils de type fini ? si oui, quel est leur degré ? Cette partie regroupe ensuite quelques lemmes techniques calculatoires, rassemblés afin de clarifier les preuves suivantes. Et enfin, on se penche sur la structure de groupe de l'ensemble des entrelacs longs soudés à w_k -équivalence près.

La quatrième partie introduit une notion de diagrammes élémentaires, avant de donner les résultats de forme normale pour la w_k -équivalence et leurs corollaires, les théorèmes de caractérisation des invariants de type fini des enlacements d'intervalles soudés. On détermine donc l'ensemble des diagrammes élémentaires dans les cas étudiés, on réduit cette liste à l'aide de relations diagrammatiques, et on classe à l'aide d'invariants. Cette partie se termine avec un travail exploratoire sur la w_4 -équivalence en un nombre quelconque de composantes, bien déblayé mais pas satisfaisant au vu du résultat escompté.

La dernière partie fait le lien avec les surfaces nouées en dimension 4, ce qui donne aux travaux diagrammatiques précédents leur dimension topologique.

Mais avant cela, commençons avec 2 conventions.

Convention 1. Soit G un groupe.

Le commutateur de deux éléments a et b de G est la quantité $[a, b] = \bar{a}\bar{b}$.

Le conjugué de l'élément a par l'élément b de G est la quantité $a^b = \bar{b}ab$.

Convention 2. Lorsqu'on représentera des diagrammes avec différentes composantes numérotées, sauf mention explicite du contraire, on utilisera la convention de numérotation croissante, c'est-à-dire que la composante la "plus à gauche" sera numérotée 1, la suivante 2, et ainsi de suite jusqu'à la dernière.

2.1 Objets soudés et calcul de flèches

2.1.1 Objets soudés

Commençons par introduire les objets virtuels, qui généralisent les diagrammes d'objets noués classiques (nœuds, entrelacs, tresses et autres enchevêtrements).

Définition 2.1.1. *Un diagramme virtuel est une immersion dans le plan d'une variété orientée de dimension 1, dont l'ensemble des singularités est une collection finie de points doubles transverses. Ces points doubles sont décorés, soit comme un croisement classique (comme dans les diagrammes usuels de la théorie des nœuds), soit comme un croisement virtuel. Ces derniers sont représentés par un point double¹.*

Voir la figure 2.2 pour quelques exemples.

On considère trois types de mouvements locaux sur ces diagrammes virtuels :

- les trois mouvements de Reidemeister classiques,
- les trois *mouvements de Reidemeister virtuels*, qui sont des analogues des mouvements classiques, mais où tous les croisements sont remplacés pas des croisements virtuels,
- le *mouvement Mixte*, représenté dans la partie de gauche de la Figure 2.1.



FIGURE 2.1 – Les mouvements Mixte (gauche) et OC (droite)

Définition 2.1.2. *On appelle l'ensemble de ces mouvements les mouvements de Reidemeister généralisés.*

Un *objet noué virtuel* est la classe d'équivalence d'un diagramme virtuel modulo les isotopies planaires et les mouvements de Reidemeister généralisés. Cette notion a été introduite indépendamment au début des années 90 par Louis Kauffman dans [22], et Mikhail Goussarov, Michael Polyak et Oleg Viro dans [11].

L'objet d'étude dans ce chapitre est le suivant.

Définition 2.1.3. *Un objet noué soudé est la classe d'équivalence d'un diagramme virtuel modulo les isotopies planaires et les mouvements de Reidemeister généralisés, ainsi que le OC-mouvement représenté à droite de la figure 2.1.*

Et on peut commencer avec la remarque suivante.

Remarque 2.1.4. *Une conséquence bien connue des mouvements de Reidemeister généralisés est le "Detour Move" ([22, Fig. 3]). Ce mouvement déclare*

¹. Le plus souvent dans la littérature, ils sont représentés par un point double entouré d'un cercle.

que deux diagrammes qui ne diffèrent que d'un segment reliant deux mêmes points à l'aide d'un chemin composé uniquement de croisements virtuels sont équivalents.

Ces objets soudés s'avèrent pertinents du point de vue de la topologie, et ce pour plusieurs raisons.

D'une part, le groupe fondamental du complémentaire des entrelacs (longs) classiques (et plus généralement, le système périphérique) s'étend de manière naturelle aux soudés, et il en va donc de même pour les invariants classiques qui en sont extraits (polynôme d'Alexander, invariants de Milnor, ...); voir la Section 2.2.

D'autre part, l'ensemble des entrelacs (longs) classiques s'injecte dans les entrelacs (longs) soudés : deux entrelacs (longs) classiques dont les diagrammes sont reliés par une suite de mouvements soudés sont nécessairement isotopes; c'est en fait une conséquence du fait que le système périphérique est un invariant complet des entrelacs (longs) classiques, voir [11, Thm 1.B].

Enfin, les objets soudés sont intimement liés à la topologie des surfaces nouées en dimension 4, et plus spécifiquement à la classe des surfaces "ruban" – voir la Section 2.5.

Il est à noter pour terminer que les deux premiers points soulevés ci-dessus sont aussi valables pour les objets virtuels, alors que le dernier est spécifique aux soudés.

2.1.1.1 Entrelacs longs soudés

Nous nous intéresserons dans la suite à certaines classes spécifiques d'objets noués soudés :

- Un *nœud soudé* est la classe soudée d'un diagramme obtenu par l'immersion planaire d'un cercle, et un *entrelacs soudé* celle obtenue par l'immersion de plusieurs copies du cercle. Un exemple d'entrelacs soudé à trois composantes est donné à gauche de la Figure 2.2.
- Un *entrelacs long soudé*, ou *enlacement d'intervalles soudés*, à n composantes est la classe soudée d'un diagramme obtenu par l'immersion de n copies de l'intervalle unité dans le disque $[0, 1] \times [0, 1]$, équipé de n points fixés sur son bord $[0, 1] \times \{\varepsilon\}$ ($\varepsilon = 0, 1$), tels que la i -ème copie de l'intervalle relie le i -ème point fixé dans $[0, 1] \times \{0\}$ au i -ème point fixé dans $[0, 1] \times \{1\}$.

Un exemple d'entrelacs long soudé à deux composantes est donné à droite de la Figure 2.2.

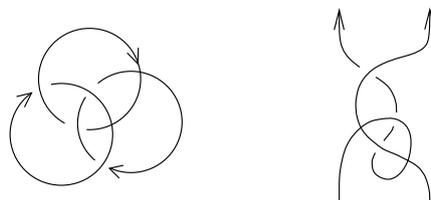


FIGURE 2.2 – Un entrelacs soudé et un entrelacs long soudé

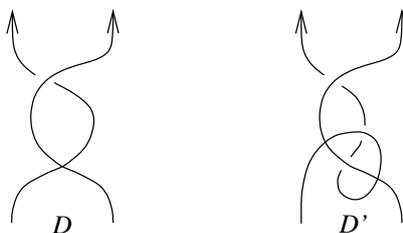
C'est ce dernier cas qui va principalement nous intéresser, et nous en développons quelques aspects ici.

Notation 2.1.5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

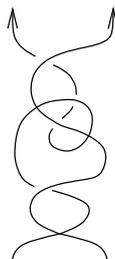
L'ensemble des entrelacs longs soudés à n composantes est noté $wSL(n)$. Il forme un monoïde pour la loi de concaténation, notée \cdot , qui consiste à "empiler" deux diagrammes l'un sur l'autre, suivant l'orientation.

L'élément neutre de cette loi, noté U , est le diagramme trivial à n composantes.

Exemple 2.1.6. Notons D et D' les diagrammes suivants :



Alors $D \cdot D'$ est le diagramme :



Remarque 2.1.7. En pratique, et ce comme pour un certain nombre de lois de monoïdes ou de groupes, on omettra souvent le symbole de la loi et on écrira DD' en lieu et place de $D \cdot D'$.

Remarque 2.1.8. Comme dans le cas classique, on parle aussi de nœuds longs soudés pour désigner les entrelacs longs soudés à 1 composante. Il est cependant important de noter que, contrairement au cas des objets noués classiques, l'opération de clôture qui referme un nœud long soudé en un nœud soudé n'est pas injective, dans le sens qu'il existe deux nœuds longs soudés distincts qui se referment en un même nœud soudé. Voir par exemple [11, Fig. 8].

2.1.2 Le calcul de flèches pour les objets soudés

Dans [32], Jean-Baptiste Meilhan et Akira Yasuhara ont développé un calcul diagrammatique pour les objets soudés (et donc en particulier les diagrammes d'objets classiques), qui est en un certain sens une théorie des diagrammes de Gauss "d'ordre supérieur". C'est en fait un analogue, pour la théorie soudée, du calcul de clasper développé par Kazuo Habiro pour les objets noués classiques [16] et, à ce titre, il est étroitement lié à la théorie des invariants de type fini de ces objets, voir Section 2.3.2.

Définition 2.1.9. Un w -arbre pour un diagramme soudé D est un graphe univalent simplement connexe T , immergé dans le plan du diagramme tel que

- les sommets trivalents sont équipés d'un ordre cyclique sur les côtés incidents, et sont deux à deux disjoints et disjointes de D ,
- les sommets univalents sont deux à deux disjoints et sont contenus dans $D \setminus \{\text{croisements de } D\}$,
- les côtés sont orientés, de telle sorte que chaque sommet trivalent implique exactement deux côtés "rentrants" et un côté "sortant",
- les côtés ne contiennent pas de croisements classiques (ni avec D , ni avec T), mais les croisements virtuels sont autorisés,
- chaque côté peut contenir un certain nombre de perles, qui sont des décorations \bullet sujettes à la règle d'involution suivante : "deux perles consécutives sur un même côté s'annulent".

Un w -arbre constitué d'un unique côté orienté est appelé w -flèche.

On utilisera les terminologies intuitives de *queues* et *têtes* pour désigner les sommets univalents d'un w -arbre, suivant l'orientation.

Définition 2.1.10. Le degré d'un w -arbre est son nombre de queues, autrement dit son nombre de sommets univalents moins 1.

Pour $k \geq 1$, on appelle w_k -arbre un w -arbre de degré k .

Un w -arbre pour un diagramme est une instruction de modification pour ce diagramme, que l'on appellera *chirurgie*.

Définition 2.1.11. Soit F une w -flèche pour un diagramme soudé D .

Le résultat de la chirurgie sur D le long de F est le diagramme soudé, noté D_F , obtenu par la règle :



Si F croise (virtuellement) le diagramme D ou un côté du w -arbre, alors les brins du diagrammes obtenus par chirurgie croisent virtuellement le même objet.

Pour définir plus généralement la chirurgie le long d'un w -arbre, on introduit l'opération suivante.

Définition 2.1.12. L'expansion d'un w -arbre est l'union de w -arbres (de plus petits degrés) obtenue par la règle :



Ici, la partie représentée en pointillés désigne des *sous-arbres parallèles*, qui sont des copies parallèles, se croisant virtuellement, de la partie non-représentée du w -arbre de départ, voir [32, Conv. 5.1] pour une explication détaillée.

Ainsi, la *chirurgie le long d'un w -arbre* est simplement définie comme la chirurgie le long de l'union de w -flèches obtenue par expansions successives. On notera D_T le résultat de la chirurgie de D le long d'un w -arbre T .

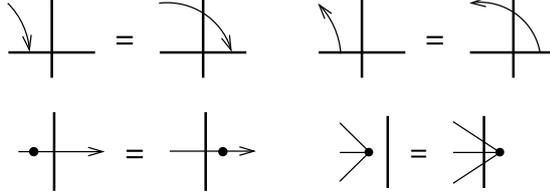
Tout diagramme soudé peut être représenté par l'union d'un diagramme *sans croisement* et de w -arbres, que l'on appelle *présentation de flèches*, et on dispose d'un ensemble *complet* de relations sur de telles présentations, au sens suivant :

Théorème 2.1.13. [32, Thm. 5.21]

Deux présentations de flèches donnent des diagrammes soudés équivalents si et seulement si elles sont reliées par une suite de mouvements de flèches.

Les-dits mouvements de flèches sont les suivants :

- (1) Tout mouvement de Reidemeister virtuel impliquant des côtés de w -arbres et/ou des brins de diagrammes soudés, ainsi que les mouvements :

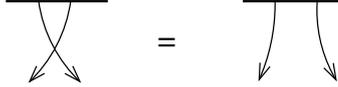


(le brin vertical peut appartenir à un diagramme soudé ou à un w -arbre.)

- (2) Renversement de tête et de queue :



- (3) Échange de queues (qui peuvent appartenir ou non au même w -arbre) :



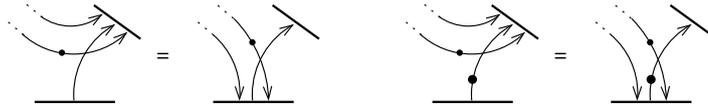
- (4) Flèche isolée :



- (5) Inversion :



- (6) Glissement :



Remarque 2.1.14. Si l'on ajoute l'opération d'expansion à cette liste, on peut restreindre tous ces mouvements à leur version pour les w -flèches dans l'énoncé.

On peut dériver de ces 6 mouvements une collection d'opérations supplémentaires sur les présentations de flèches, que l'on regroupe dans le résultat suivant.

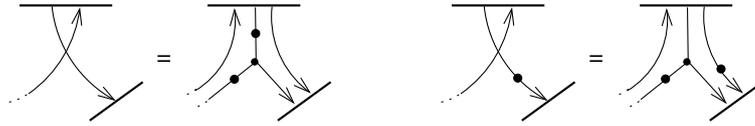
Proposition 2.1.15. [32, Lemmes 5.14 à 5.18]

Les mouvements suivants donnent des présentations de flèches équivalentes (i.e. donnent des diagrammes soudés équivalents).

- (7) Échange de têtes :



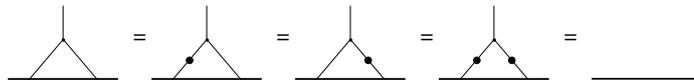
(8) *Échange tête/queue* :



(9) *Anti-symétrie (AS)* :

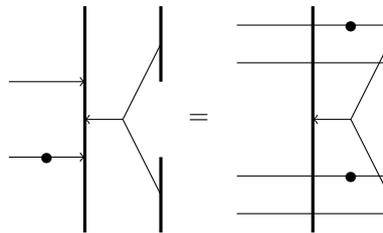


(10) *Trident* :



On peut également remarquer qu'il existe le mouvement de Glissement le long d'un arbre de degré 2 suivant. C'est une conséquence du mouvement de Glissement le long d'une flèche et de l'expansion. Il en existe même une version plus générale pour des arbres quelconques. Toutefois, ce sont des résultats dont on ne se servira pas dans ce chapitre et qu'on ne démontrera donc pas.

Remarque 2.1.16. *Le mouvement suivant donne des présentations de flèches équivalentes.*



Il faut juste faire attention ici au fait que les têtes de l'arbre et des flèches ne sont pas accrochées localement "du même côté" du diagramme.

Puisque, dans la suite de ce chapitre, nous nous intéresserons en premier lieu aux entrelacs long soudés, précisons dès maintenant qu'une présentation de flèches d'un tel objet sera toujours (par définition) la donnée d'une union de w -arbres pour le diagramme d'enlacement long trivial, qui consiste en copies parallèles de l'intervalle unité et orienté. Plus formellement, on a la définition suivante.

Définition 2.1.17. *Soit D un entrelacs (respectivement un entrelacs long) soudé.*

Une présentation de flèches (U, T) de D est la donnée d'une part de l'union U de n cercles (resp. n intervalles) et d'autre part d'un diagramme de flèches T dont les pattes sont sur U , tels que $D = U_T$.

Le diagramme trivial U est appelé le squelette du diagramme.

2.2 Invariants d'objets noués soudés

Nous présentons maintenant les invariants d'objets soudés qui sont impliqués dans les résultats principaux de ce chapitre. Ces invariants sont des extensions soudées d'invariants classiques extraits du groupe fondamental du complémentaire, et nous commençons donc par présenter l'extension soudée de ce dernier.

2.2.1 Le groupe d'un diagramme soudé

La généralisation virtuelle et soudée du groupe fondamental est due à Louis Kauffman dans [22, Section 8].

Définition 2.2.1. Soit D un entrelacs (long) virtuel.

On définit le groupe $G(D)$ de D par générateurs et relations comme suit.

On associe un générateur à chaque arc de D , c'est-à-dire à chaque morceau de composante délimité par une extrémité de composante et/ou un croisement classique². On associe ensuite une relation entre ces générateurs à chaque croisement classique selon la figure ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} c \swarrow \nearrow \\ a \quad b \\ a^{-1}bac^{-1} = 1 \end{array} & & \begin{array}{c} \swarrow \nearrow c \\ b \quad a \\ aba^{-1}c^{-1} = 1 \end{array}
 \end{array}$$

Le groupe d'un entrelacs (long) virtuel D est ainsi défini par une présentation, appelée présentation de Wirtinger. Il est bien connu qu'il est invariant par mouvements de Reidemeister. De plus, comme les croisements virtuels n'affectent pas les générateurs ni ne produisent de relations, le groupe de D est invariant par les mouvements de Reidemeister généralisés et par le OC -mouvement. Autrement dit, on a la proposition suivante.

Proposition 2.2.2. Le groupe d'un entrelacs (long) est un invariant soudé.

Par la suite on désignera simplement cet invariant par le terme de *groupe soudé*. Il s'agit clairement d'une extension virtuelle du groupe fondamental du complémentaire des entrelacs (longs) classiques.

Le groupe d'un entrelacs (long) soudé peut être déterminé en utilisant une présentation de flèches de cet entrelacs.

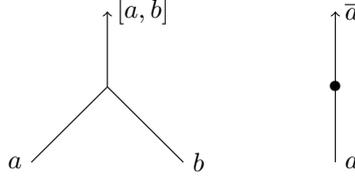
Concrètement, soient D un entrelacs (long) soudé et (U, T) une présentation de flèches de D .

Construisons un groupe par présentation de la manière suivante. Les têtes de T divisent U en une famille d'arcs : on associe un générateur à chacun de ces arcs. Pour chaque tête de w -arbre, on a une relation de la forme :

$$\begin{array}{c}
 b \xrightarrow{\quad} a = \overline{w}bw \\
 \uparrow w
 \end{array}$$

2. Un arc peut donc contenir des croisements virtuels.

où a et b sont les générateurs associés aux deux arcs séparés par la tête de l'arbre, tandis que w est un commutateur itéré en les générateurs associé au w -arbre à l'aide des relations découlant des deux figures ci-dessous.



Remarque 2.2.3. Dans le cas où une flèche est localement attachée au squelette par la gauche, on utilise le mouvement de renversement de tête pour se ramener à une flèche localement attachée au squelette par la droite.

Proposition 2.2.4. Le groupe ainsi construit est le groupe soudé $G(D)$.

Le lecteur pourra se référer à [32] pour les détails de la preuve. On trouvera dans les Exemples 2.2.12 et 2.2.13 des calculs explicites de présentations de Wirtinger à partir d'une présentation de flèches.

2.2.2 Polynôme d'Alexander normalisé

Le premier invariant, extrait du groupe soudé, que l'on va considérer, est le polynôme d'Alexander, que nous avons déjà croisé dans le Chapitre 1 sous la forme normalisée du polynôme de Conway.

Le polynôme d'Alexander a été généralisé aux entrelacs longs soudés dans [17]. En plus du groupe soudé, cette généralisation utilise la notion de calcul différentiel libre de Fox, introduite par Ralph Fox en 1953 dans [9]. Soit G un groupe libre engendré par une famille $(g_i)_i$. Les *différentielles de Fox* sont des applications $\frac{\partial}{\partial g_j} : G \rightarrow \mathbb{Z}[G]$ telles que :

1. $\frac{\partial g_i}{\partial g_j} = \delta_{ij}$.
2. $\frac{\partial 1}{\partial g_j} = 0$.
3. $\frac{\partial uv}{\partial g_j} = \frac{\partial u}{\partial g_j} + u \frac{\partial v}{\partial g_j}$, $\forall u, v \in G$.

Ces relations impliquent notamment que

$$\forall u \in G, \frac{\partial u^{-1}}{\partial g_j} = -u^{-1} \frac{\partial u}{\partial g_j}.$$

Définition 2.2.5. Soit D un nœud long soudé.

Supposons que le groupe de D admette une présentation

$$G(D) = \langle g_1, \dots, g_m \mid R_1, \dots, R_k \rangle.$$

Considérons la matrice $M = \left(\frac{\partial R_i}{\partial g_j} \right)_{i,j}$ dont le terme général est donné par la dérivée de Fox de la i -ème relation par rapport au j -ème générateur. Remplaçons dans cette matrice chaque générateur par une variable t et calculons le plus grand diviseur commun des $(m-1)$ -mineurs de M .

Cela définit, à un facteur inversible près, le polynôme d'Alexander de L , noté $\Delta_D(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$.

Choisissons le représentant de Δ_D en imposant que $\Delta_D(1) = 1$ et $\frac{d\Delta_D}{dt}(1) = 0$.

On obtient ainsi le polynôme d'Alexander normalisé, noté $\tilde{\Delta}_D$.

Remarque 2.2.6. Les deux conditions $\Delta_D(1) = 1$ et $\frac{d\Delta_D}{dt}(1) = 0$ déterminent bien $\tilde{\Delta}_D(t)$ de manière unique.

Définition 2.2.7. Reprenons les notations de la définition précédente. Développons $\tilde{\Delta}_D$ en une série en $1 - t$. On obtient alors

$$\tilde{\Delta}_D(t) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k(D)(1-t)^k.$$

On appelle $\alpha_k(D)$ le k -ème coefficient d'Alexander normalisé de D .

Ce sont ces coefficients d'Alexander qui vont nous intéresser dans nos problèmes de classification. On va donner quelques résultats les mettant en jeu. Commençons avec deux remarques élémentaires.

Convention 2.2.8. Pour tout nœud long soudé D , on a par convention que $\alpha_0(D) = 1$ et $\alpha_1(D) = 0$.

En outre, pour tout $k \geq 2$, on a également que $\alpha_k(D) \in \mathbb{N}$.

Maintenant donnons sans preuve un résultat sur l'invariance de $\tilde{\Delta}$. Le lecteur pourra se référer à [17] pour la démonstration.

Proposition 2.2.9. Le polynôme d'Alexander normalisé est un invariant d'entrelacs longs soudés. Il en est donc de même pour chacun des coefficients d'Alexander normalisés.

En outre, et on y reviendra plus tard, ces coefficients sont de type fini, voir Section 2.3.2.

On a également le résultat d'additivité suivant.

Proposition 2.2.10. [32, Coro. 6.6]

Soient K et K' deux nœuds longs soudés et l un entier.

Si $\alpha_l(K) = 0$ pour $l < k$, alors $\alpha_k(KK') = \alpha_k(K) + \alpha_k(K')$.

Remarque 2.2.11. Autrement dit, le premier coefficient non nul du polynôme d'Alexander normalisé est additif. On peut le voir comme une conséquence de la multiplicativité du polynôme d'Alexander normalisé.

Terminons avec deux calculs de coefficients d'Alexander normalisé qui interviendront explicitement plus tard.

Exemple 2.2.12. Calculons $\alpha_2(D_{\acute{e}l})$, pour le diagramme de flèches $D_{\acute{e}l}$ suivant :



La présentation de Wirtinger du groupe $G(D_{\acute{e}l})$ est

$$G(D_{\acute{e}l}) = \langle a, b \mid \overline{[a, b]}a[a, b]\bar{b} = 1 \rangle.$$

Posons $R = \overline{[a, b]}a[a, b]\bar{b} = \bar{b}a\bar{b}a\bar{a}a\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{b} = \bar{b}a\bar{b}a\bar{b}\bar{a}$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial a} &= \bar{b} \frac{\partial a\bar{b}a\bar{b}\bar{a}}{\partial a} \\ &= \bar{b} + \bar{b}a \frac{\partial \bar{b}a\bar{b}\bar{a}}{\partial a} \\ &= \bar{b} + \bar{b}a\bar{b} \frac{\partial \bar{a}}{\partial a} \\ &= \bar{b} + \bar{b}a\bar{b} + \bar{b}a\bar{b}a \frac{\partial \bar{a}}{\partial a} \\ &= \bar{b} + \bar{b}a\bar{b} + \bar{b}a\bar{b}a \frac{\partial \bar{a}}{\partial a} \\ &= \bar{b} + \bar{b}a\bar{b} - \bar{b}a\bar{b}a\bar{b}\bar{a}. \end{aligned}$$

De la même manière, on a :

$$\frac{\partial R}{\partial b} = -\bar{b} + \bar{b}a - \bar{b}a\bar{b}\bar{a}.$$

Remplaçons a et b par une variable t . On obtient alors la matrice

$$M = \begin{pmatrix} t^{-1} + t - 1 & -t^{-1} + 1 - t \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne $\Delta_{D_{\epsilon l}}(t) \equiv t - 1 + t^{-1}$ puis $\tilde{\Delta}_{D_{\epsilon l}}(t) = t - 1 + t^{-1}$. Développons $\tilde{\Delta}_{D_{\epsilon l}}$ en série en $1 - t$. On obtient :

$$\tilde{\Delta}_{D_{\epsilon l}}(t) = -(1 - t) + \frac{1}{1 - (1 - t)} = -(1 - t) + \sum_{k=0}^{\infty} (1 - t)^k = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} (1 - t)^k.$$

D'où $\alpha_2(D_{\epsilon l}) = 1$.

Ce procédé se transpose pour le calcul suivant.

Exemple 2.2.13. Calculons α_3 , pour les diagrammes de flèches E'_1 et F'_1 suivants :



Commençons avec E'_1 .

La présentation de Wirtinger du groupe $G(E'_1)$ est

$$G(E'_1) = \langle a, b \mid \overline{[a, [a, b]]}a[a, [a, b]]\bar{b} = 1 \rangle.$$

Posons $R = \overline{[a, [a, b]]}a[a, [a, b]]\bar{b} = \bar{b}a\bar{b}a\bar{b}a\bar{b}a\bar{b}a\bar{b}\bar{a}$. Il vient alors :

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \bar{b} + \bar{b}a\bar{b} - \bar{b}a\bar{b}a\bar{b}\bar{a} + \bar{b}a\bar{b}a\bar{b}\bar{a}\bar{b} + \bar{b}a\bar{b}a\bar{b}a\bar{b}\bar{a}\bar{b} - \bar{b}a\bar{b}a\bar{b}a\bar{b}a\bar{b}\bar{a}\bar{b} - \bar{b}a\bar{b}a\bar{b}a\bar{b}a\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}$$

et

$$\frac{\partial R}{\partial b} = -\bar{b} + \bar{b}a - \bar{b}a\bar{b} + \bar{b}a\bar{b}\bar{a} - \bar{b}a\bar{b}\bar{a}\bar{b} + \bar{b}a\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a} - \bar{b}a\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}.$$

Après remplacement de a et b par t , on obtient :

$$M = \begin{pmatrix} -t^2 + 3t - 2 + t^{-1} & t^2 - 3t + 2 - t^{-1} \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne $\tilde{\Delta}_L(t) = -t^2 + 3t - 2 + t^{-1}$. Puis :

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_L(t) &= -(1-t)^2 + t - 1 + t^{-1} \\ &= -(1-t)^2 - (1-t) + \frac{1}{1-(1-t)} \\ &= -(1-t)^2 - (1-t) + \sum_{k=0}^{\infty} (1-t)^k \\ &= 1 + \sum_{k=3}^{\infty} (1-t)^k. \end{aligned}$$

D'où $\alpha_3(E'_1) = 1$.

Un calcul similaire donne que $\alpha_3(F'_1) = -1$.

On retrouve là les cas $k = 4$ des calculs de Jean-Baptiste Meilhan et Akira Yasuhara dans [32, Lemme 6.4] pour leurs diagrammes L_k et \bar{L}_k .

2.2.3 Invariants de Milnor

Penchons nous maintenant sur les invariants de Milnor. Ils ont été introduits par John Milnor dans [33]. Ils sont extraits du groupe fondamental du complémentaire d'un entrelacs. Ces invariants ont été abondamment étudiés dans la littérature et sont maintenant bien connus. Nous allons nous intéresser à l'extension de ces invariants aux entrelacs longs soudés.

L'extension générale des invariants de Milnor aux entrelacs longs soudés est donnée dans [1, Sec. 6] par une approche topologique (via l'application Tube de la Section 2.5). Une version purement diagrammatique est donnée dans [34] : c'est cette dernière approche que nous suivrons ici.

Notation 2.2.14. Soit L un entrelacs long soudé à n composantes.

Considérons son diagramme virtuel $D = K_1 \cup \dots \cup K_n$.

Étiquetons chaque arc de chaque composante K_i en suivant son orientation et en commençant par la frontière basse : on a les arcs a_{ij} , pour j variant de 1 au nombre d'arcs de K_i , noté $N(i)$.

On appelle a_{i1} le méridien de K_i .

On rappelle que $G(L)$ possède une présentation (cf Définition 2.2.1) qui est de la forme :

$$\langle a_{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq N(i) \mid a_{ij+1}^{-1} a_{ij}^{-1} a_{ij} u_{ij} 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq N(i) - 1 \rangle.$$

Les relations sont obtenues à chaque croisement de D , elles font intervenir les générateurs ou leurs inverses suivant que le croisement soit positif ou négatif.

Définition 2.2.15. Pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq N(i) - 1$, posons $U_{ij} = u_{i1}u_{i2} \dots u_{ij}$. Cela représente le produit des générateurs correspondant aux arcs "sous lesquels" passe la i -ème composante, dans l'ordre dans lequel on les rencontre.

On appelle $U_{iN(i)-1}$ une longitude de K_i .

Plus précisément, on va s'intéresser à la notion de longitude préférée de chaque composante. Moralement, il s'agit de considérer une longitude bien choisie d'une présentation de Wirtinger où on tue la donnée de l'auto-enlacement de chaque composante.

Définition 2.2.16. On peut obtenir la longitude préférée de chaque composante en multipliant $U_{iN(i)-1}$ par $a_{i1}^{f_i}$, où f_i est la somme des signes des croisements (classiques) internes à la i -ème composante.

Proposition 2.2.17. [7]

Considérons $G(L)_k$ le k -ème terme de la suite centrale descendante³ de $G(L)$. Notons m_1, \dots, m_n les images des méridiens a_{i1} dans le quotient $G(L)/G(L)_k$. Elles engendrent ce quotient.

On peut donc exprimer la longitude préférée de chaque composante comme un mot, noté λ_i , en m_1, \dots, m_n .

Fixons maintenant k pour la suite de cette partie.

Définition-Proposition 2.2.18. Soit $\langle m_1, \dots, m_n \rangle$ le groupe libre engendré par les m_i , pour $1 \leq i \leq n$.

Notons $\mathbb{Z}\langle\langle X_1, \dots, X_n \rangle\rangle$ l'anneau des séries formelles à coefficients entiers en les variables non-commutatives X_1, \dots, X_n .

Le développement de Magnus est le morphisme

$$E : \langle m_1, \dots, m_n \rangle \longrightarrow \mathbb{Z}\langle\langle X_1, \dots, X_n \rangle\rangle$$

défini par $E(m_i) = 1 + X_i$ et $E(m_i^{-1}) = 1 - X_i + X_i^2 - X_i^{-3} + \dots$

Avant de continuer avec la définition des invariants de Milnor, regroupons ci-dessous plusieurs petits lemmes techniques sur le comportement du développement de Magnus vis-à-vis de la conjugaison. Ces résultats simplifieront les calculs ultérieurs d'invariants de Milnor.

Notation 2.2.19. Soient $A, B \in \mathbb{Z}\langle\langle X_1, \dots, X_n \rangle\rangle$.

On note $A \stackrel{m}{=} B$ lorsque A et B ne diffèrent que d'une somme de termes de degré au moins $m + 1$.

Lemme 2.2.20. Pour tous i, j compris entre 1 et n , on a

$$E([m_i, m_j]) \stackrel{3}{=} 1 - X_i X_j + X_j X_i + X_i X_j X_i - X_j X_i^2 + X_j X_i X_j - X_j^2 X_i.$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} E([m_i, m_j]) &\stackrel{3}{=} (1 + X_i)(1 - X_j + X_j^2 - X_j^3)(1 - X_i + X_i^2 - X_i^3)(1 + X_j) \\ &\stackrel{3}{=} 1 - X_i X_j + X_j X_i + (-1 + 1)X_i^2 X_j + (1)X_i X_j X_i \\ &\quad + (1 - 1)X_i X_j^2 + (-1)X_j X_i^2 + (1)X_j X_i X_j + (-1)X_j^2 X_i \\ &\stackrel{3}{=} 1 - X_i X_j + X_j X_i + X_i X_j X_i - X_j X_i^2 + X_j X_i X_j - X_j^2 X_i. \end{aligned}$$

3. On rappelle que la suite centrale descendante d'un groupe G est la famille de sous-groupes G_k définie inductivement par $G_1 = G$ et $G_{k+1} = [G, G_k]$.

□

Lemme 2.2.21. Soit α un élément du groupe libre engendré par les m_i . Si $E(\alpha) \stackrel{m+1}{=} 1 + \Omega_m + \Omega_{m+1}$, où Ω_k est une somme de termes de degré k , alors on a :

$$E(\bar{\alpha}) \stackrel{m+1}{=} 1 - \Omega_m - \Omega_{m+1}.$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} E(\alpha)(1 - \Omega_m - \Omega_{m+1}) &\stackrel{m+1}{=} (1 + \Omega_m + \Omega_{m+1})(1 - \Omega_m - \Omega_{m+1}) \\ &\stackrel{m+1}{=} 1 \\ &\stackrel{m+1}{=} E(\alpha\bar{\alpha}) \\ &\stackrel{m+1}{=} E(\alpha)E(\bar{\alpha}). \end{aligned}$$

□

Proposition 2.2.22. Soit α un élément du groupe libre engendré par les m_i , et tel que $E(\alpha) \stackrel{m+1}{=} 1 + \Omega_m + \Omega_{m+1}$, où Ω_k est une somme de termes de degré k et $m \geq 2$.

Alors $\forall i$, on a :

1. $E(m_i^\alpha) \stackrel{m+1}{=} E(m_i) - \Omega_m X_i + X_i \Omega_m$.
2. $E(\overline{m_i}^\alpha) \stackrel{m+1}{=} E(\overline{m_i}) + \Omega_m X_i - X_i \Omega_m$.
3. $E(m_i^{\bar{\alpha}}) \stackrel{m+1}{=} E(m_i) + \Omega_m X_i - X_i \Omega_m$.
4. $E(\overline{m_i}^{\bar{\alpha}}) \stackrel{m+1}{=} E(\overline{m_i}) - \Omega_m X_i + X_i \Omega_m$.

Autrement dit, les développements de Magnus de m_i ou de $\overline{m_i}$ et d'un de leurs conjugués commencent de la même manière.

Preuve. On va écrire la preuve pour le premier point. Le calcul est complètement similaire pour les autres. On a d'après les Lemmes 2.2.20 et 2.2.21 :

$$\begin{aligned} E(m_i^\alpha) &\stackrel{m+1}{=} (1 - \Omega_m - \Omega_{m+1})(1 + X_i)(1 + \Omega_m + \Omega_{m+1}) \\ &\stackrel{m+1}{=} 1 + X_i - \Omega_m X_i + X_i \Omega_m \\ &\stackrel{m+1}{=} E(m_i) - \Omega_m X_i + X_i \Omega_m. \end{aligned}$$

Les termes en Ω_m^2 , par exemple, n'apparaissent pas à cause de la condition $m \geq 2$. □

On en déduit le résultat suivant sur les développements de Magnus de commutateurs itérés. C'est une conséquence directe du fait que E est un morphisme. En pratique, c'est à ce genre de calculs qu'on devra faire face dans notre problème de classification.

Corollaire 2.2.23. Sous les mêmes hypothèses que précédemment, on a :

$$\begin{aligned} E([\alpha, m_i]) &\stackrel{m+1}{=} 1 - \Omega_m X_i + X_i \Omega_m, \\ E([m_i, \alpha]) &\stackrel{m+1}{=} 1 + \Omega_m X_i - X_i \Omega_m. \end{aligned}$$

Plus particulièrement, on a :

Corollaire 2.2.24.

$$E([m_1, m_2], m_3) \stackrel{\text{3}}{=} 1 + X_1 X_2 X_3 - X_2 X_1 X_3 - X_3 X_1 X_2 + X_3 X_2 X_1,$$

$$E(m_3, [m_1, m_2]) \stackrel{\text{3}}{=} 1 - X_1 X_2 X_3 + X_2 X_1 X_3 + X_3 X_1 X_2 - X_3 X_2 X_1.$$

Donnons maintenant la définition des invariants de Milnor.

Définition 2.2.25. Soit $I = j_1 j_2 \dots j_l i$ une suite d'entiers de $[[1; n]]$ telle que $l \leq k$.

L 'invariant de Milnor soudé $\mu_I(L)$ est le coefficient de $X_{j_1} \dots X_{j_l}$ dans le développement de Magnus de la i -ème longitude préférée $\lambda_i \in G(L)/G(L)_k$.

Le nombre $l + 1$ d'indices est appelé longueur de l'invariant de Milnor.

Remarque 2.2.26. Les invariants de Milnor soudés sont une extension des invariants de Milnor classiques dans le sens où ils coïncident avec ces derniers lorsqu'on les évalue sur un entrelacs (long) classique vu comme un entrelacs (long) soudé. Voir [1, Thm 6.4] pour davantage de détails.

Exemple 2.2.27. Les invariants de Milnor soudés de longueur 2 sont appelés dans la littérature les nombres d'enlacement virtuels [11]. En effet, μ_{ij} compte avec signe les croisements classiques où la i -ème composante passe "au dessus" de la j -ème.

On a enfin le résultat suivant sur les invariants de Milnor soudés.

Proposition 2.2.28. [32, Lemme 6.11]

Soient L et L' deux entrelacs longs soudés qui ont le même nombre de composantes.

Soient m et m' deux entiers tels que les invariants de Milnor soudés de L (respectivement L') de longueur au plus m (resp. m') soient nuls.

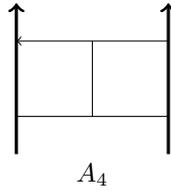
Alors, pour toute suite I de longueur au plus $m + m'$, on a :

$$\mu_I(LL') = \mu_I(L) + \mu_I(L').$$

En pratique, on voit qu'on a besoin d'être capable d'écrire chaque longitude préférée comme un mot en les méridiens m_i pour calculer les invariants de Milnor soudés. On va maintenant donner une telle méthode à partir d'un diagramme de flèches. En pratique en effet, on calculera les invariants de Milnor soudés à partir d'un diagramme de flèches (et dans la suite, on ne fera pas de différence entre un invariant de Milnor soudé d'un entrelacs et celui d'un diagramme de flèches le représentant).

Dans un diagramme soudé, on a vu à la Définition 2.2.15 que la i -ème longitude s'obtient en prenant le produit des éléments associés aux arcs qui passent "par dessus" la i -ème composante. En termes de diagrammes de flèches, il s'agit donc de prendre le produit des éléments associés aux têtes (comme indiqué dans la Proposition 2.2.4) de w -arbres accrochées à la i -ème composante du squelette. On va donner quelques exemples pour clarifier cela.

Exemple 2.2.29. Considérons le diagramme A_4 suivant :



A_4

Considérons la longueur λ_1 associée à la première composante. Elle est donnée par $[[m_1, m_2], m_2]$.

D'après le Corollaire 2.2.24, on obtient pour le développement de Magnus :

$$E(\lambda_1) \stackrel{3}{=} 1 + X_1 X_2^2 - 2X_2 X_1 X_2 + X_2^2 X_1.$$

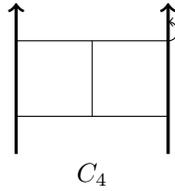
Soit au final :

$$\mu_{1121}(A_4) = 0, \mu_{1211}(A_4) = 0, \mu_{1221}(A_4) = 1, \mu_{2111}(A_4) = 0,$$

$$\mu_{2121}(A_4) = -2 \text{ et } \mu_{2211}(A_4) = 1.$$

La seconde longueur λ_2 est de son côté donnée par 1. On a donc $E(\lambda_2) = 1$, et par suite les différents invariants de Milnor dont la suite se termine par 2 sont tous nuls.

Considérons maintenant le diagramme C_4 suivant :



C_4

La longueur λ_1 est donnée par 1. On a donc $E(\lambda_1) = 1$, et par suite les différents invariants de Milnor dont la suite se termine par 1 sont tous nuls.

Considérons maintenant λ_2 . Elle est donnée par $[m_1, [m_1, m_2]]$.

Ce qui donne pour le développement de Magnus, toujours d'après le Corollaire 2.2.24 :

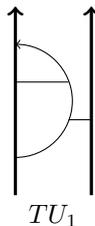
$$E(\lambda_2) \stackrel{3}{=} 1 - 2X_1 X_2 X_1 + X_1^2 X_2 + X_2 X_1^2.$$

Soit au final :

$$\mu_{1122}(C_4) = 1, \mu_{1212}(C_4) = -2, \mu_{1222}(C_4) = 0, \mu_{2112}(C_4) = 1,$$

$$\mu_{2122}(C_4) = 0 \text{ et } \mu_{2212}(C_4) = 0.$$

Exemple 2.2.30. Considérons le diagramme TU_1 suivant :



TU_1

Considérons la longitude λ_1 associée à la première composante. Elle est donnée par $[m_1, [m_1, m_2]]$. On retrouve donc les mêmes calculs que pour C_4 dans l'Exemple 2.2.29. On a donc :

$$\begin{aligned} \mu_{1121}(TU_1) = 1, \mu_{1211}(TU_1) = -2, \mu_{1221}(TU_1) = 0, \mu_{2111}(TU_1) = 1, \\ \mu_{2121}(TU_1) = 0 \text{ et } \mu_{2211}(TU_1) = 0. \end{aligned}$$

La longitude λ_2 est de son côté donnée par 1. On obtient donc que les différents invariants de Milnor dont la suite se termine par 2 sont tous nuls.

Considérons maintenant le diagramme UT_1 suivant :



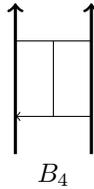
C'est à nouveau la longitude λ_1 qui est donnée par 1. Les différents invariants de Milnor dont la suite se termine par 1 sont donc tous nuls.

Considérons enfin la longitude λ_2 . Elle est donnée par $[[m_1, m_2], m_2]$. On retrouve là aussi des calculs déjà faits, mais cette fois que pour A_4 dans l'Exemple 2.2.29. On a donc :

$$\begin{aligned} \mu_{1122}(UT_1) = 0, \mu_{1212}(UT_1) = 0, \mu_{1222}(UT_1) = 1, \mu_{2112}(UT_1) = 0, \\ \mu_{2122}(UT_1) = -2 \text{ et } \mu_{2212}(UT_1) = 1. \end{aligned}$$

On va maintenant donner un exemple de calcul d'invariants de Milnor pour des diagrammes de flèches dont la tête n'est pas en dernière position, mais en première. Nous ne donnerons pas le calcul exact, mais on va donner les termes en petit degré. Ce sont des diagrammes qui interviendront également plus tard.

Exemple 2.2.31. Considérons le diagramme suivant B_4 :



On a encore que la longitude λ_2 est donnée par 1. Donc les invariants de Milnor dont la suite se termine par 2 sont tous nuls.

Penchons-nous maintenant sur la longitude λ_1 .

Elle est donnée par $[m_2, [m_2, m_1^\alpha]]$ pour un certain mot α en les générateurs m_i – qu'il n'est pas nécessaire de préciser pour le calcul des premiers invariants de Milnor : par la Proposition 2.2.22,

$$\begin{aligned} E(\lambda_1) &= E([m_2, [m_2, m_1^\alpha]]) \\ &\stackrel{3}{=} 1 + X_1 X_2^2 - 2X_2 X_1 X_2 + X_2^2 X_1. \end{aligned}$$

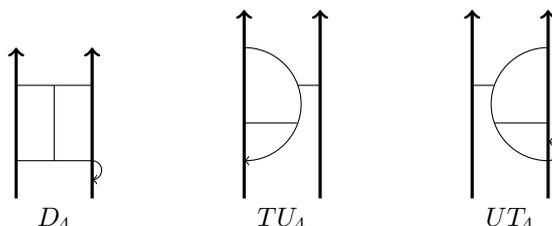
On a ainsi :

$$\mu_{1121}(B_4) = 0, \mu_{1211}(B_4) = 0, \mu_{1221}(B_4) = 1, \mu_{2111}(B_4) = 0,$$

$$\mu_{2121}(B_4) = -2 \text{ et } \mu_{2211}(B_4) = 1.$$

Le même procédé s'applique aux diagrammes suivants. On donne donc les résultats sans le détail des calculs, laissés au lecteur.

Exemple 2.2.32. *Considérons les diagrammes suivants :*

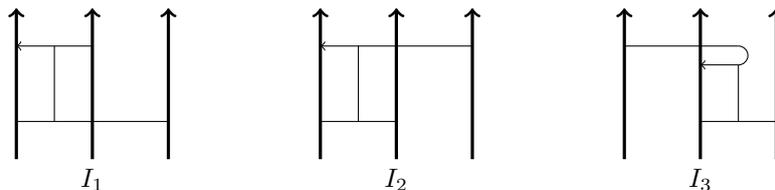


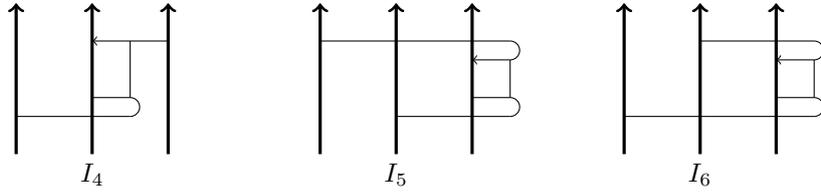
On obtient la liste des invariants de Milnor suivante :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \diagdown & D_4 & TU_4 & UT_4 \\ \mu_{1121} : & 0 & 1 & 0 \\ \mu_{1211} : & 0 & -2 & 0 \\ \mu_{1221} : & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{2111} : & 0 & 1 & 0 \\ \mu_{2121} : & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{2211} : & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{1122} : & 1 & 0 & 0 \\ \mu_{1212} : & -2 & 0 & 0 \\ \mu_{1222} : & 0 & 0 & 1 \\ \mu_{2112} : & 1 & 0 & 0 \\ \mu_{2122} : & 0 & 0 & -2 \\ \mu_{2212} : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Terminons enfin cette liste avec des calculs d'invariants de Milnor pour des diagrammes de flèches sur 3 composantes. On les écrit sous la forme plus concise des développements de Magnus des longitudes. Ils interviendront également plus tard.

Exemple 2.2.33. *Considérons les diagrammes suivants :*





Commençons avec I_1 . La longueur λ_1 associée à la première composante est donnée par $[[m_1, m_3], m_2]$.

D'après le Corollaire 2.2.24, on obtient pour le développement de Magnus :

$$E(\lambda_1) \stackrel{\cong}{=} 1 + X_1 X_3 X_2 - X_3 X_1 X_2 - X_2 X_1 X_3 + X_2 X_3 X_1.$$

Les longueurs associées aux autres composantes sont quant à elles égales à 1. Le calcul des développements de Magnus des autres diagrammes se déduit de celui-là par un procédé analogue.

Pour I_2 , la longueur λ_1 est donnée par $[[m_1, m_2], m_3]$.

Pour I_3 , la longueur λ_2 est donnée par $[[m_2, m_3], m_1]$.

Pour I_4 , la longueur λ_2 est donnée par $[[m_2, m_1], m_3]$.

Pour I_5 , la longueur λ_3 est donnée par $[[m_3, m_2], m_1]$.

Pour I_6 , la longueur λ_3 est donnée par $[[m_3, m_1], m_2]$.

On obtient ainsi, en mettant en indice de E le diagramme pour lequel on le calcule :

$$E_{I_2}(\lambda_1) \stackrel{\cong}{=} 1 + X_1 X_2 X_3 - X_2 X_1 X_3 - X_3 X_1 X_2 + X_3 X_2 X_1,$$

$$E_{I_3}(\lambda_2) \stackrel{\cong}{=} 1 + X_2 X_3 X_1 - X_3 X_2 X_1 - X_1 X_2 X_3 + X_1 X_3 X_2,$$

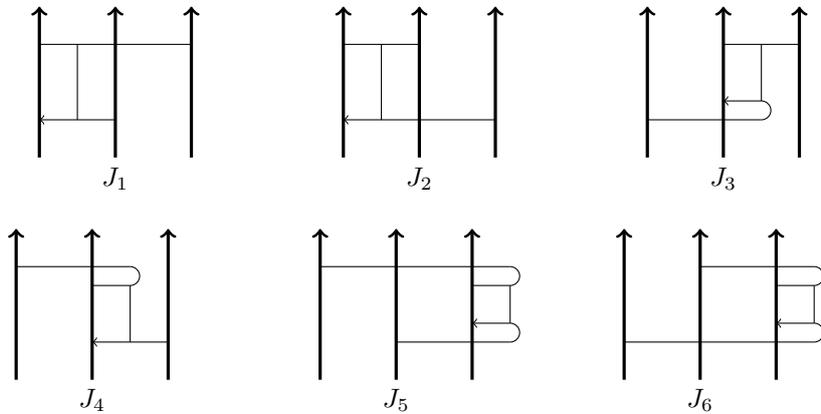
$$E_{I_4}(\lambda_2) \stackrel{\cong}{=} 1 + X_2 X_1 X_3 - X_1 X_2 X_3 - X_3 X_2 X_1 + X_3 X_1 X_2,$$

$$E_{I_5}(\lambda_3) \stackrel{\cong}{=} 1 + X_3 X_2 X_1 - X_2 X_3 X_1 - X_1 X_3 X_2 + X_1 X_2 X_3,$$

$$E_{I_6}(\lambda_3) \stackrel{\cong}{=} 1 + X_3 X_1 X_2 - X_1 X_3 X_2 - X_2 X_3 X_1 + X_2 X_1 X_3.$$

Les longueurs associées aux autres composantes sont quant à elles égales à 1.

Exemple 2.2.34. Considérons maintenant les diagrammes suivants :



Commençons avec J_1 . La longueur λ_1 associée à la première composante est donnée par $[m_2, [m_3, m_1]]$.

D'après le Corollaire 2.2.24, on obtient pour le développement de Magnus :

$$E(\lambda_1) \stackrel{\cong}{=} 1 - X_3X_1X_2 + X_1X_3X_2 + X_2X_3X_1 - X_2X_1X_3.$$

Les longueurs associées aux autres composantes sont quant à elles égales à 1. Le calcul des développements de Magnus des autres diagrammes se déduit de celui-là par un procédé analogue.

Pour J_2 , la longueur λ_1 est donnée par $[m_3, [m_2, m_1]]$.

Pour J_3 , la longueur λ_2 est donnée par $[m_1, [m_3, m_2]]$.

Pour J_4 , la longueur λ_2 est donnée par $[m_3, [m_1, m_2]]$.

Pour J_5 , la longueur λ_3 est donnée par $[m_2, [m_1, m_3]]$.

Pour J_6 , la longueur λ_3 est donnée par $[m_1, [m_2, m_3]]$.

On obtient ainsi, en mettant en indice de E le diagramme pour lequel on le calcule :

$$E_{J_2}(\lambda_1) \stackrel{\cong}{=} 1 - X_2X_1X_3 + X_1X_2X_3 + X_3X_2X_1 - X_3X_1X_2,$$

$$E_{J_3}(\lambda_2) \stackrel{\cong}{=} 1 - X_3X_2X_1 + X_2X_3X_1 + X_1X_3X_2 - X_1X_2X_3,$$

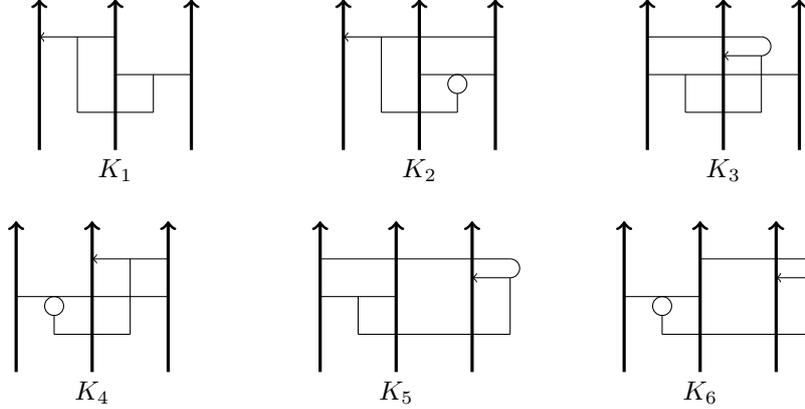
$$E_{J_4}(\lambda_2) \stackrel{\cong}{=} 1 - X_1X_2X_3 + X_2X_1X_3 + X_3X_1X_2 - X_3X_2X_1,$$

$$E_{J_5}(\lambda_3) \stackrel{\cong}{=} 1 - X_1X_3X_2 + X_3X_1X_2 + X_2X_1X_3 - X_2X_3X_1,$$

$$E_{J_6}(\lambda_3) \stackrel{\cong}{=} 1 - X_2X_3X_1 + X_3X_2X_1 + X_1X_2X_3 - X_1X_3X_2.$$

Les longueurs associées aux autres composantes sont quant à elles égales à 1.

Exemple 2.2.35. Terminons avec les diagrammes suivants :



Commençons avec K_1 . La longueur λ_1 associée à la première composante est donnée par $[[m_3, m_2], m_2]$.

D'après le Corollaire 2.2.24, on obtient pour le développement de Magnus :

$$E(\lambda_1) \stackrel{\cong}{=} 1 + X_3X_2^2 - 2X_2X_3X_2 + X_2^2X_3.$$

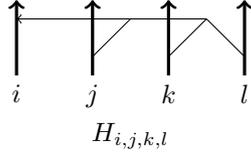
Les longueurs associées aux autres composantes sont quant à elles égales à 1. Le calcul des développements de Magnus des autres diagrammes se déduit de

celui-là par un procédé analogue. Pour K_2 , la longueur λ_1 est donnée par $[[m_2, m_3], m_3]$.
 Pour K_3 , la longueur λ_2 est donnée par $[[m_3, m_1], m_1]$.
 Pour K_4 , la longueur λ_2 est donnée par $[[m_1, m_3], m_3]$.
 Pour K_5 , la longueur λ_3 est donnée par $[[m_2, m_1], m_1]$.
 Pour K_6 , la longueur λ_3 est donnée par $[[m_1, m_2], m_2]$.
 On obtient ainsi, en mettant en indice de E le diagramme pour lequel on le calcule :

$$\begin{aligned} E_{K_2}(\lambda_1) &\stackrel{\text{3}}{=} 1 + X_2 X_3^2 - 2X_3 X_2 X_3 + X_3^2 X_2, \\ E_{K_3}(\lambda_2) &\stackrel{\text{3}}{=} 1 + X_3 X_1^2 - 2X_1 X_3 X_1 + X_1^2 X_3, \\ E_{K_4}(\lambda_2) &\stackrel{\text{3}}{=} 1 + X_1 X_3^2 - 2X_3 X_1 X_3 + X_3^2 X_1, \\ E_{K_5}(\lambda_3) &\stackrel{\text{3}}{=} 1 + X_2 X_1^2 - 2X_1 X_2 X_1 + X_1^2 X_2, \\ E_{K_6}(\lambda_3) &\stackrel{\text{3}}{=} 1 + X_1 X_2^2 - 2X_2 X_1 X_2 + X_2^2 X_1. \end{aligned}$$

Les longueurs associées aux autres composantes sont quant à elles égales à 1.

Considérons maintenant les diagrammes $H_{i,j,k,l}$ suivants :



Donnons sur certains diagrammes $H_{i,j,k,l}$ une autre série de calculs d'invariants de Milnor de longueur 4, cette fois invariant par invariant.

Exemple 2.2.36. Notons $H = H_{1,2,3,4}$, $H' = H_{1,3,2,4}$ et $H'' = H_{1,4,2,3}$.
 On a que :

$$\begin{aligned} \mu_{4321}(H) &= 1, \\ \mu_{4321}(H') &= 0, \\ \mu_{4321}(H'') &= -1, \\ \mu_{4231}(H) &= 0, \\ \mu_{4231}(H') &= 1, \\ \mu_{4231}(H'') &= 1, \\ \mu_{3421}(H) &= -1, \\ \mu_{3421}(H') &= -1 \text{ et} \\ \mu_{3421}(H'') &= 0. \end{aligned}$$

De la même manière que dans nombre d'exemples précédents, on peut en déduire des résultats analogues lorsqu'on permute l'ordre des composantes.

2.2.4 Invariants de clôture

On va maintenant définir une famille d'invariants d'entrelacs longs soudés, les invariants de clôture. L'idée est la suivante : étant donné un entrelacs long soudé L à n composantes, on va déterminer des coefficients d'Alexander normalisés

sur un nœud long soudé construit en recollant des copies non orientées des composantes de L . On ferme, on "clôt" l'entrelacs et on calcule le polynôme d'Alexander du nœud long obtenu.

Commençons avec une définition préliminaire.

Définition 2.2.37. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle rangée de longueur $k \leq n$ la donnée d'une liste ordonnée d'entiers deux à deux distincts compris entre 1 et n , chacun étant éventuellement surligné.

Exemple 2.2.38. Voici trois exemples de rangées :

$$(1, \bar{3}, 4) ; (2, \bar{3}, 4, 1) ; (5, 1)$$

Cette notion de rangée va nous servir à encoder l'information de l'ordre des composantes d'un entrelacs lorsqu'on va les mettre bout à bout, et de l'orientation selon laquelle on les recolle. Pour des questions de clarté de rédaction dans la suite, introduisons l'opération $|\cdot|$ qui à un entier éventuellement surligné n rend la valeur n .

Définition 2.2.39. Soient L un entrelacs long soudé à n composantes et $R = (r_1, \dots, r_k)$ une rangée de longueur $k \leq n$.

On appelle $Cl_R(L)$ le nœud long soudé obtenu de la manière suivante :

1. On remplace L par le sous-entrelacs long soudé constitué des composantes de L numérotées par des indices qui apparaissent, éventuellement en étant surlignés, dans R . On enlève les autres composantes.
2. On renverse l'orientation de chaque composante numérotée par un indice r_i qui est surligné dans R .
3. On recolle ensuite entre elles les composantes $|r_i|$ et $|r_{i+1}|$ de L à l'aide d'un chemin entre la tête de la $|r_i|$ -ème composante avec la queue de la $|r_{i+1}|$ -ème (avec les nouvelles orientations donc !) qui n'effectue que des croisements soudés avec le reste de l'entrelacs.

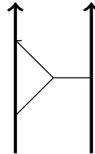
Remarque 2.2.40. La construction de la définition précédente dépend a priori du choix des chemins de recollement entre les composantes. En réalité ce n'est pas le cas, d'après le Detour Move (Remarque 2.1.4). La définition précédente a donc bien un sens.

Remarque 2.2.41. Cette définition s'étend naturellement aux présentations et aux diagrammes de flèches. En pratique, on parlera indifféremment de clôtures d'entrelacs ou de clôtures de diagrammes de flèches.

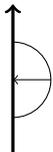
La première étape de l'opération de clôture consiste dans chaque cas à considérer le sous-diagramme obtenu en enlevant les composantes qui ne sont pas numérotées par des indices qui apparaissent, en étant éventuellement surlignés, dans la rangée, ainsi que toutes les parties du diagramme qui ont une patte attachée dessus.

On va donner maintenant deux exemples pour illustrer ces clôtures.

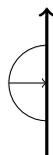
Exemple 2.2.42. Considérons le diagramme de flèches D suivant :



Alors $Cl_{(1,\bar{2})}(D)$ et $Cl_{1,2}(D)$ sont le diagramme de flèches :



$Cl_{(2,\bar{1})}(D)$ et $Cl_{\bar{2},1}(D)$ sont quant à eux le diagramme de flèches :



Les autres diagrammes obtenus par clôture sont le diagramme trivial d'après le mouvement Trident.

Remarque 2.2.43. Il s'avère que l'on peut établir une relation entre les deux diagrammes (non triviaux) obtenus dans cet exemple : voir Remarque 2.3.16.

On peut maintenant définir ce qu'est un invariant de clôture.

Définition 2.2.44. Soient R une rangée et k un entier supérieur ou égal à 2. L'invariant de clôture $\mathcal{I}_{R,k}$ est l'invariant défini par $\mathcal{I}_{R,k}(D) = \alpha_k(Cl_R(D))$.

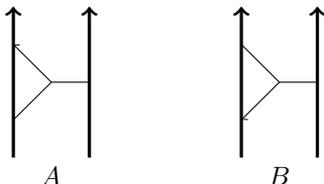
Remarque 2.2.45. On peut, et on le fera en pratique, calculer un invariant de clôture d'un entrelacs long soudé en le calculant sur un diagramme de flèches le représentant. Ainsi, dans la suite, on ne fera pas la distinction entre invariant de clôture d'un diagramme de flèches et invariant de clôture d'un entrelacs long soudé.

Étant donnée la définition des invariants de clôture, on a le résultat suivant :

Proposition 2.2.46. Les invariants de clôture sont bien des invariants d'entrelacs longs soudés.

Cela donne donc une méthode pour différencier des diagrammes de flèches. Affirmer que deux diagrammes sont différents est en réalité un problème complexe, et on utilisera les invariants de clôture et les invariants de Milnor pour y répondre plus tard.

Lemme 2.2.47. Considérons les diagrammes de flèches suivants :



Ces deux diagrammes sont distincts dans le sens où les entrelacs obtenus par chirurgie le long de chacun de ces diagrammes ne sont pas équivalents.

Preuve. Le diagramme $Cl_{(1,\bar{2})}(B)$ est le diagramme trivial d'après le mouvement Trident. Son deuxième coefficient d'Alexander normalisé est donc nul. D'après l'Exemple 2.2.12, $\mathcal{I}_{(1,\bar{2});2}(A)$ est égal à 1. On en déduit que $Cl_{(1,\bar{2})}(A)$ et $Cl_{(1,\bar{2})}(B)$ sont distincts. Il en est donc de même pour A et B . \square

Terminons avec une série de calculs d'invariants de clôture de degré 3 sur les diagrammes I_i , J_i et K_i des Exemples 2.2.33 à 2.2.35.

Exemple 2.2.48. *On a l'ensemble de valeurs suivantes :*

$$\begin{pmatrix}
\setminus & I_1 & I_2 & I_3 & I_4 & I_5 & I_6 & J_1 & J_2 & J_3 & J_4 & J_5 & J_6 & K_1 & K_2 & K_3 & K_4 & K_5 & K_6 \\
I_{(1,2,3);3} & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
I_{(1,3,2);3} & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
I_{(2,1,3);3} & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
I_{(2,3,1);3} & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
I_{(3,1,2);3} & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
I_{(3,2,1);3} & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

2.3 w_k -équivalence et invariants de type fini

On va maintenant se pencher sur la notion de w_k -équivalence. Cela a été introduit par Jean-Baptiste Meilhan et Akira Yasuhara dans [32]. Ils ont alors établi des premiers résultats de classification pour les nœuds et nœuds longs soudés en les reliant aux évaluations des invariants de type fini, dont nous rappelons également la définition ici.

2.3.1 w_k -équivalence

Pour les besoins de ce chapitre, on se contentera de définir la w_k -équivalence pour les entrelacs longs soudés. Cette définition peut toutefois s'appliquer dans le cadre plus général des objets soudés.

Définition 2.3.1. *Soit k un entier naturel non nul.*

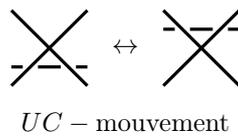
Deux entrelacs longs soudés L et L' sont dits w_k -équivalents lorsqu'il existe une suite finie d'entrelacs longs soudés $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que :

1. $L_0 = L$.
2. $L_n = L'$.
3. L_{i+1} est obtenu depuis L_i soit par un mouvement de Reidemeister généralisé soit par une chirurgie le long d'un w_l -arbre, avec $l \geq k$.

On notera le fait que L et L' sont w_k -équivalents $L \stackrel{w_k}{\sim} L'$.

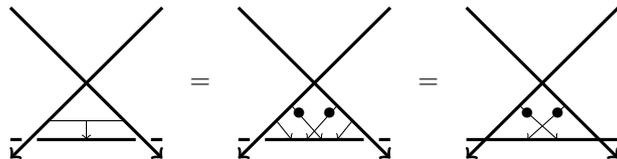
Une première remarque est que la relation de w_k -équivalence devient de plus en plus fine lorsque k augmente. Autrement dit, si deux entrelacs longs soudés sont w_{k+1} -équivalents, alors ils sont w_k -équivalents, et par suite ils sont w_l -équivalents pour $l \leq k$.

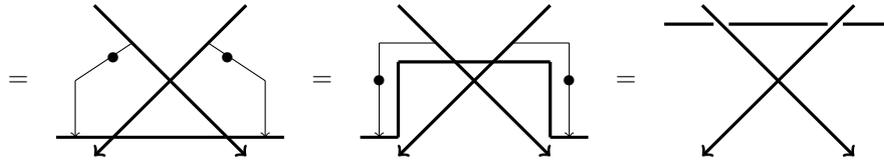
La relation de w_k -équivalence a déjà été étudiée en bas degré. Un premier résultat que je redonne ici en détaillant la preuve, est par exemple donné dans [32]. Il relie la w_2 -équivalence à un mouvement connu par ailleurs, mais sur lequel on ne s'étendra pas dans ce chapitre, le UC -mouvement. Il s'agit du mouvement suivant :



Proposition 2.3.2. *Un w_2 -mouvement est équivalent à un UC -mouvement.*

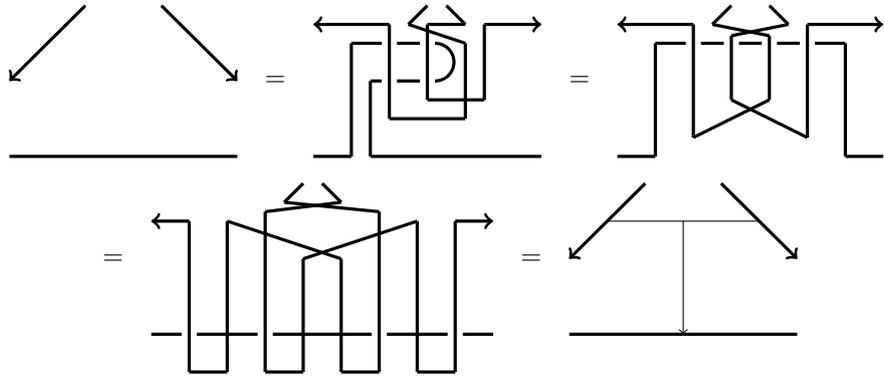
Preuve. Commençons par montrer qu'un UC -mouvement peut être réalisé par une chirurgie le long d'un w_2 -arbre.





Ici, la première égalité est l'expansion d'un w_2 -arbre, la deuxième est la chirurgie sur deux des flèches, les troisième et quatrième égalités sont des isotopies, et la dernière est donnée par chirurgie. Le lecteur pourra vérifier que dans les autres cas, lorsque les orientations des composantes sont différentes, l'égalité analogue est encore vérifiée.

Réciproquement, montrons qu'une chirurgie le long d'un w_2 -arbre peut être réalisée par un UC -mouvement.



La première égalité est donnée par une suite de mouvements de Reidemeister généralisés, la deuxième par un UC -mouvement, la troisième à nouveau par des mouvements de Reidemeister généralisés, et la dernière par (l'inverse de) la chirurgie sur un w_2 -arbre.

Ce qui termine la preuve. \square

L'idée est d'examiner les classes d'équivalence d'entrelacs longs soudés pour cette relation. Et plus précisément, on va relier cela à une classification des invariants de type fini.

2.3.2 Invariants de type fini

On va maintenant donner la définition des invariants de type fini. Et on commence avec la définition suivante :

Définition 2.3.3. *On appelle mouvement de virtualisation le mouvement local sur un diagramme de flèches qui consiste à remplacer un croisement classique par un croisement virtuel.*

On appelle mouvement de dévirtualisation le mouvement local inverse, qui remplace donc un croisement virtuel par un croisement classique.

Avant d'introduire la notion d'invariant de type fini, introduisons la notation suivante.

Notation 2.3.4. Soient D un diagramme soudé et C un ensemble de croisements classiques de D .

On note D_C le diagramme obtenu depuis D en appliquant un mouvement de virtualisation à tous les croisements de C .

On peut maintenant définir ce qu'est un invariant de type fini.

Définition 2.3.5. Soit μ un invariant d'entrelacs longs soudés à valeurs dans un groupe abélien.

On dit que μ est de type fini au plus k lorsque pour tout diagramme soudé D et pour tout ensemble S de $k + 1$ croisements classiques, on a :

$$\sum_{S' \subset S} (-1)^{|S'|} \mu(D_{S'}) = 0.$$

Cet invariant est de type fini exactement k lorsqu'il est de type fini au plus k mais pas de type fini au plus $k - 1$.

Cette définition est apparue initialement dans le contexte des invariants d'objets virtuels dans [11, Sec. 2.3].

Remarque 2.3.6. Cette définition est l'analogue de celle des invariants de type fini pour des entrelacs (longs ou non) classiques, on a juste remplacé la notion de changement de croisement par celle de mouvement de virtualisation.

Et comme un changement de croisement peut être réalisé par la succession d'un mouvement de virtualisation et de dévirtualisation, on a que la restriction d'un invariant de type fini pour les entrelacs longs soudés à l'ensemble des entrelacs longs classiques est un invariant de type fini au sens invariant de Vassiliev.

Plus généralement dans [11], les auteurs identifient les premiers invariants non triviaux de la théorie.

Lemme 2.3.7. Pour tout $i, j \in [[1; n]]$, les enlacements virtuels μ_{ij} sont des invariants de type fini de degré 1 pour les entrelacs (longs) soudés à n composantes.

Il existe en fait des invariants de type k pour tout k . On a ainsi dit précédemment que les coefficients du polynôme d'Alexander étaient des invariants de type fini. Plus précisément, on a :

Lemme 2.3.8. [17]

Pour tout $k \geq 2$, α_k est de type k .

Remarque 2.3.9. Non seulement les α_k sont des invariants de type fini d'enlacement d'intervalle soudé à 1 composante, mais il s'avère que ce sont essentiellement les seuls ! Kazuo Habiro et Akiko Shima [17] ont en effet démontré que tout tel invariant de type fini s'écrit comme un polynôme en les α_k (voir [32] pour une preuve alternative). Ainsi, nous précisons dès maintenant que les résultats de caractérisation d'invariants de type fini démontrés dans ce chapitre retrouvent et généralisent ceux de [17] pour une composante.

Corollaire 2.3.10. Les invariants de clôture sont également des invariants de type fini. Plus précisément, $I_{R,k}$ est de type k pour toute rangée R .

Le Lemme 2.3.7 peut par ailleurs se généraliser à des suites de longueur quelconque. On a :

Théorème 2.3.11. [32]

Soit I une suite de longueur $k \geq 2$.

L'invariant de Milnor μ_I est de type $k - 1$.

Ce théorème apparaît dans [32], mais avec seulement une ébauche de preuve. On va donner en Annexe une preuve détaillée de ce résultat.

Il se trouve que les notions de w_k -équivalence et d'invariants de type fini sont en fait liées. C'est ce qui rend leur étude simultanée intéressante, et les résultats de classification que l'on donne ultérieurement sont exactement des résultats se reposant, et alimentant, ces liens. Mais avant de s'étendre là-dessus, commençons par mentionner certains résultats déjà connus dans la littérature.

Théorème 2.3.12. *Soient L et L' deux entrelacs longs soudés w_k -équivalents, pour $k \geq 2$.*

Alors pour tout invariant ν de type inférieur ou égal à $k - 1$, on a :

$$\nu(L) = \nu(L').$$

La question de la véracité de la réciproque se pose assez naturellement. J.-B. et A. Yasuhara ont montré dans [32] que la réciproque était vraie pour les nœuds soudés et les nœuds longs soudés. Pour les entrelacs longs soudés, la question demeure. Les résultats de classification énoncés dans la Section 2.4 y apportent une réponse en bas degré. Ils motivent la conjecture suivante.

Conjecture 2.3.13. *Deux entrelacs longs soudés sont w_k -équivalents si et seulement s'ils ne peuvent être distingués par un invariant de type fini de degré $< k$.*

2.3.3 Quelques lemmes techniques

Nous aurons recours à un certain nombre de résultats techniques sur les entrelacs longs soudés regardés à w_k -équivalence près, que l'on va maintenant donner. Ils se divisent essentiellement en deux types de résultats : d'une part il y a des résultats sur des opérations sur les diagrammes de flèches, et d'autre part il y a une batterie de résultats sur la structure algébrique des entrelacs longs soudés.

La notion de w_k -équivalence nous permet davantage de souplesse dans le calcul de flèches : certaines opérations qui ne sont pas possibles sur les w -arbres le deviennent *modulo des termes d'ordre supérieur*, autrement dit sont licites en termes de w_k -équivalence.

Commençons par illustrer cela avec trois lemmes, issus de [32, Sec. 7.4] (le lecteur pourra s'y référer pour le détail des preuves). Ces résultats mentionnés ici sont exprimés en des termes plus forts que la w_k -équivalence, comme suit :

Notation 2.3.14. *Soient (U, T) et (U, T') deux présentations de flèches d'un certain diagramme et $k \geq 1$ un entier.*

On note

$$(U, T) \xrightarrow{k} (U, T')$$

lorsqu'il existe une union T'' de w -arbres pour U de degré $\geq k$ telle que $(U, T) = (U, T' \cup T'')$.

Notons l'implication

$$\left((U, T) \xrightarrow{k} (U, T') \right) \Rightarrow \left(U_T \stackrel{w_k}{\sim} U_{T'} \right)$$

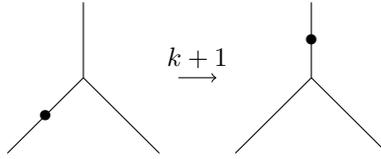
qui nous assure que les énoncés en les termes de la Notation 2.3.14 sont bien applicables à notre contexte.

Les lemmes techniques de cette section sont les suivants :

Lemme 2.3.15. [32, Lemme 7.7]

Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

On a, "à l'intérieur" d'un w_k -arbre :

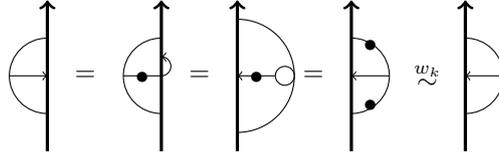


Idée de la preuve. On montre ce résultat par récurrence sur la distance qui sépare le sommet trivalent à la tête du diagramme auquel il appartient.

L'idée est de montrer qu'on peut rapprocher la perle d'un cran au prix de l'introduction comme terme correctif de w -arbres de degré strictement supérieurs à k . \square

Un exemple d'application du Lemme 2.3.15, qui nous sera utile plus tard, est la suivante :

Remarque 2.3.16. On a :



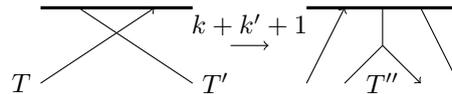
En effet, par on obtient la première égalité par les mouvements d'échange de tête et la deuxième par anti-symétrie, tandis que l'équivalence est une conséquence directe du Lemme 2.3.15 et de l'involutivité des perles.

Le deuxième lemme explicite les échanges de têtes et de queues.

Lemme 2.3.17. [32, Lemme 7.10]

Soient T un w_k -arbre et T' un $w_{k'}$ -arbre, pour k et k' deux entiers supérieurs ou égaux à 1.

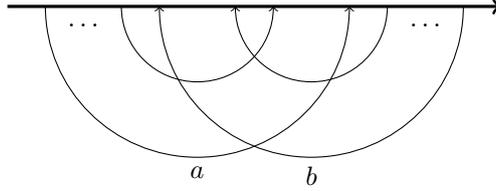
Alors on a :



où T'' est un $w_{k+k'}$ -arbre comme représenté ci-dessus.

Idée de la preuve. Cette démonstration se fait également par récurrence, cette fois sur la distance qui sépare la queue de T' à la tête du diagramme. L'idée est de montrer à nouveau que nous avons un contrôle sur le degré des termes correctifs qui apparaissent lors de l'opération d'échange. \square

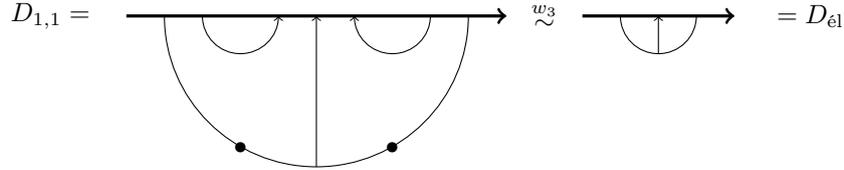
Lemme 2.3.18. *Soient a et b deux entiers supérieurs ou égaux à 1. On considère le diagramme $D_{a,b}$ suivant :*



où a et b désignent le nombre de copies parallèles de chaque flèche. Si a (respectivement b) est négatif, on pose par convention qu'il y a $(-a)$ flèches (resp. $-b$) avec une perle. Alors

$$\alpha_2(D_{a,b}) = ab.$$

Preuve. Commençons par observer que



La première égalité est une conséquence de la Proposition 2.1.15 tandis que l'équivalence est donnée par le Lemme 2.3.15 et le Mouvement de flèche isolée. On déduit de façon analogue du Lemme 2.3.17 que $D_{a,b} \stackrel{w_3}{\sim} (D_{\text{él}})^{ab}$. Comme α_2 est un invariant de w_3 -équivalence, la Proposition 2.2.10 donne l'égalité annoncée. \square

En combinant ce lemme aux résultats déjà vu dans la Section 2.1.2, on obtient l'énoncé général suivant :

Corollaire 2.3.19. [32, Coro. 7.13]

Soient T et T' deux w -arbres, de degrés respectifs k et k' .

On peut échanger la position relative de deux extrémités (tête ou queue) de T et T' adjacentes sur une composante du squelette au prix de w -arbres supplémentaires, qui sont tous de degré $\geq k + k'$.

En pratique, ceci va nous permettre de décomposer tout entrelacs long soudé en produit de "facteurs élémentaires". On pourra de plus ordonner les facteurs du produit en fonction du degré.

Lemme 2.3.20. *Soit k et l des entiers tels que $k \geq l \geq 1$.*

Soit W une union de w -arbres de degré $\geq l$ pour l'union U de n intervalles orientés.

Alors

$$U_W \stackrel{k+1}{\sim} U_{T_1} \cdots U_{T_m} \cdot U_{W'},$$

où T_1, \dots, T_m sont des w_l -arbres et W' est une union de w -arbres de degré compris entre $(l+1)$ et k .

Preuve. On considère l'ensemble $\widetilde{T}_1, \dots, \widetilde{T}_m$ des w -arbres de degré l dans W . D'après le Corollaire 2.3.19, on peut réarranger ces w -arbres en une union de w_l -arbres T_1, \dots, T_m qui vivent dans des disques disjoints D_i ($i = 1, \dots, m$), qui intersectent chaque composante de U le long d'un unique arc trivial. De sorte que $U_{\cup_i \widetilde{T}_i} \stackrel{w_{l+1}}{\sim} U_{T_1} \cdot \dots \cdot U_{T_m}$.

D'après le Corollaire 2.3.19, on peut accomplir ceci au prix de l'ajout de w -arbres de degré $\geq l+1$, qui peuvent intersecter ces disques.

Mais de futurs mouvements d'échanges nous autorisent à déplacer les w -arbres de degré supérieur *au dessus* de $\cup_i D_i$, en accord avec l'orientation de U , au prix maintenant de w -arbres additionnels de degré $\geq l+2$, qui peuvent éventuellement intersecter $\cup_i D_i$.

On peut répéter cette procédure jusqu'à ce que les seuls w -arbres qui intersectent $\cup_i D_i$ soient de degré $> k$.

Ce qui termine la preuve. \square

Remarque 2.3.21. *On peut sans nuire à la généralité imposer un ordre de lecture donné au sein de la famille de w -arbres T_i . Notamment, on peut choisir de rassembler à la suite les arbres T_i égaux.*

Cela permet entre autres d'établir une propriété d'additivité des invariants de clôture.

Proposition 2.3.22. *Soient R une rangée et k, k' deux entiers.*

Soit W (respectivement W') une union de w -arbres de degré $\geq k$ (resp. $\geq k'$) pour pour l'union U de n intervalles orientés.

Alors pour tout $d < k + k' - 1$, on a

$$\mathcal{I}_{R;d}(U_W \cdot U_{W'}) = \mathcal{I}_{R;d}(U_W) + \mathcal{I}_{R;d}(U_{W'}).$$

Démonstration. On appelle D_1 le diagramme de flèches obtenu par concaténation de $Cl_R(U_W)$ et $Cl_R(U_{W'})$ et D_2 le diagramme de flèches $Cl_R(U_W U_{W'})$.

D_2 consiste en l'interpénétration de $Cl_R(U_W)$ et $Cl_R(U_{W'})$. On sait qu'on peut séparer ces diagrammes (et donc obtenir D_1) au prix de l'introduction d'arbres de degré au moins $k + k' - 1$. En effet, on se contente de séparer un arbre issu de D_1 et un issu de D_2 . D'après le Corollaire 2.3.19, des termes correctifs apparaissent lors d'un échange d'extrémités faisant intervenir au moins une tête, et on a $D_1 \stackrel{w_{k+k'-1}}{\sim} D_2$.

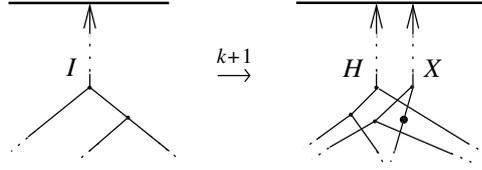
De plus, comme α_d est un invariant de type d d'après la Proposition 2.2.9, il ne lit pas ces termes correctifs. Et comme il est additif (Prop. 2.2.10), on en déduit que $\mathcal{I}_{R;d}(U_W \cdot U_{W'}) = \alpha_d(D_2) = \alpha_d(D_1) = \mathcal{I}_{R;d}(U_W) + \mathcal{I}_{R;d}(U_{W'})$. \square

Le troisième lemme technique est une version de la relation IHX rencontrée au Chapitre 1.

Lemme 2.3.23. [32, Lemme 7.16]

On a la propriété suivante :

Ici, I, H et X sont trois w_k -arbres, avec $k \geq 3$.



2.3.4 Le groupe $wSL(n)_k$

On va maintenant se pencher sur la structure algébrique de l'ensemble des entrelacs longs soudés à w_k -équivalence près. C'est dans ce cadre qu'on établira des résultats de classification.

Notation 2.3.24. Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$.

L'ensemble des entrelacs longs soudés à n composantes modulo la relation de w_k -équivalence est noté $wSL(n)_k$. Il forme un sous-monoïde de $wSL(n)$.

Structure de groupe

Les lemmes techniques énoncés plus haut permettent de montrer le résultat suivant. En langage courant, il s'exprimerait comme "Un w_l -arbre est w_k -inversible".

Proposition 2.3.25. Soient k, l deux entiers tels que $1 \leq l < k$ et T un w_l -arbre pour U .

Alors il existe $D \in wSL(n)$ tel que

$$U_T \cdot D \stackrel{w_k}{\approx} U.$$

Preuve. Considérons T' un w -arbre qui est une copie de T , à l'exception que l'on met une perle au niveau de la tête.

On sait que lorsque T et T' sont en configuration "copies parallèles", c'est-à-dire lorsque T' est disposé sur le même squelette que T , avec ses arêtes qui sont le long de celles de T , on obtient le diagramme trivial d'après le Mouvement (5) du Théorème 2.1.13. Il reste alors à séparer ces deux diagrammes en effectuant des échanges d'extrémités entre une de T et une de T' : T vit alors dans un disque D qui est *en dessous* et disjoint de T' .

Le lemme 2.3.20 permet alors d'affirmer que la séparation de ces deux arbres se fait au prix de l'ajout de termes correctifs de degré au moins $l + 1$. Notons W_1 l'union de ces termes correctifs : a priori, W_1 intersecte D . En utilisant le lemme 2.3.20, on peut ensuite déplacer W_1 au dessus du disque D , et donc ainsi isoler T : à nouveau, ceci se fait au prix de l'ajout d'une union W_2 de w -arbres de degré au moins $l + 2$, qui a priori intersecte D .

On itère ainsi le processus de séparation, le degré des termes correctifs induits par le lemme 2.3.20 augmentant à chaque itération. Au bout de $(k-l)$ itérations, on obtient ainsi un diagramme de flèches constitué du w -arbre T dans le disque D , une union W de w -arbres de degré $< k$ au dessus de D , et une union W_{k-l} de w -arbres de degré au moins k , qui a priori intersecte D . On a donc

$$U = U_{T \cup T'} \stackrel{w_k}{\approx} U_T \cdot U_W,$$

ce qui conclut en posant $D = U_W$. □

Remarque 2.3.26. En particulier, dans le cas $k = l + 1$, une conséquence de la preuve de cette proposition est le fait suivant : si T est un w_l -arbre pour U , alors $U_T.U_{T^\bullet} \stackrel{w_{l+1}}{\sim} U$, où T^\bullet est obtenu depuis T en mettant une perle au niveau de la tête.

Par la suite, on fera implicitement usage de ce résultat.

Donnons maintenant une version plus élaborée du Lemme 2.3.20, qui permettra d'établir que $wSL(n)_k$ est bien un groupe.

Lemme 2.3.27. Soient $L \in wSL(n)$ et $k \geq 1$.

Alors

$$L \stackrel{w_{k+1}}{\sim} \prod_{i=1}^k L_i,$$

où, pour $i \in \{1, \dots, k\}$, l'entrelacs long soudé L_i est un produit

$$L_i = U_{T_1} \dots U_{T_{N_i}}$$

pour un certain entier N_i , tel que chaque T_j un w_i -arbre ; $j \in \{1, \dots, N_i\}$.

Démonstration. En partant d'une présentation de flèches de L , on applique simplement le Lemme 2.3.20 récursivement pour l allant de 1 à k , pour séparer les diagrammes degré par degré. \square

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 2.3.28. Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$.

Alors $wSL(n)_k$ est un groupe.

Preuve. C'est une conséquence directe du Lemme 2.3.27 et de la Proposition 2.3.25. Partant d'une présentation de flèches quelconque, on la sépare en une concaténation de w -arbres, qu'on inverse chacun séparément et successivement. \square

En outre, on peut établir le fait suivant.

Proposition 2.3.29. Le groupe $wSL(n)_k$ est finiment engendré.

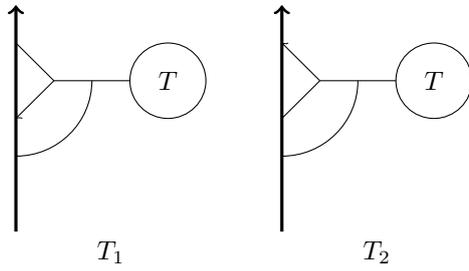
Preuve. C'est une conséquence du Lemme 2.3.27. En effet, ce résultat affirme que n'importe quelle présentation de flèches peut se décomposer comme concaténation de w -arbres de degré au plus k à w_{k+1} -équivalence.

Or les contraintes combinatoires font qu'il n'y a qu'un nombre fini de tels w -arbres. \square

La question naturelle qui en suit est celle du rang de ce groupe. C'est une question qui semble difficile en général pour au moins 2 raisons : d'une part le nombre d'arbres grandit de manière importante avec le degré de l'équivalence, et d'autre part il y a des relations qui interviennent. On y apportera une réponse dans la section suivante en petit degré à travers nos résultats de classification.

Parmi les relations que l'on observera, l'une est donnée par le lemme d'inversion suivant, qui est une conséquence de la relation IHX dans ce groupe.

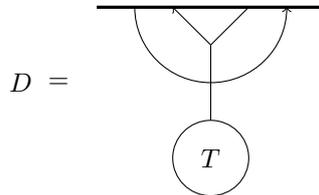
Proposition 2.3.30. Soient T_1 et T_2 les deux w_k -arbres suivants, pour le diagramme trivial U sur n intervalles :



On a :

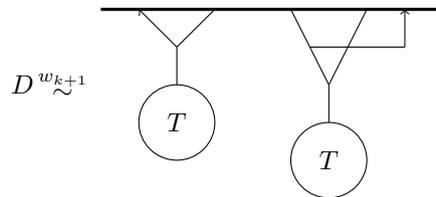
$$U_{T_1} U_{T_2} \stackrel{w_{k+1}}{\sim} U.$$

Démonstration. Partons de la configuration initiale suivante, formée d'une flèche et d'un w_{k-1} -arbre :

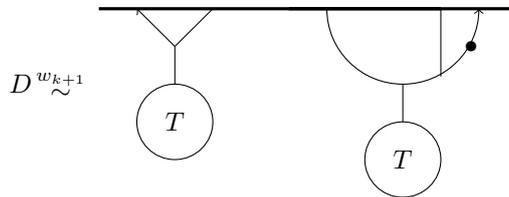


L'idée va être de faire "traverser" le diagramme par la flèche en raisonnant à w_{k+1} -équivalence près.

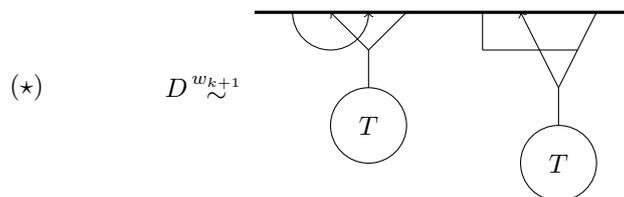
Si on échange la queue de la flèche et la tête du w_{k-1} -arbre par le Lemme 2.3.17, on peut isoler la flèche et l'enlever. Le terme correctif est un w_k -arbre, que l'on peut également isoler à w_{k+1} -équivalence près d'après le Corollaire 2.3.19. Plus précisément, on obtient :



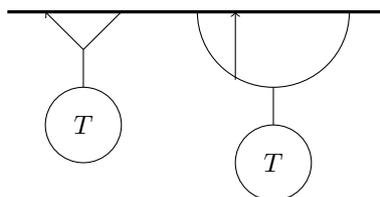
En échangeant les queues du diagramme de droite, en utilisant la relation d'antisymétrie, le Lemme 2.3.15 (et l'involativité des perles), on obtient que



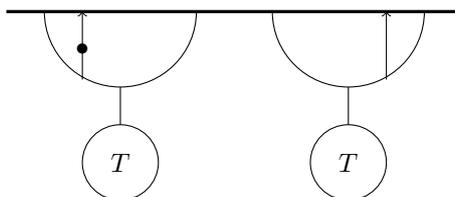
Revenons maintenant à la configuration initiale D , et échangeons la tête de la flèche avec la queue du w_{k-1} -arbre. Le terme correctif qui apparaît d'après le Lemme 2.3.17 peut être isolé d'après le Corollaire 2.3.19. On obtient alors :



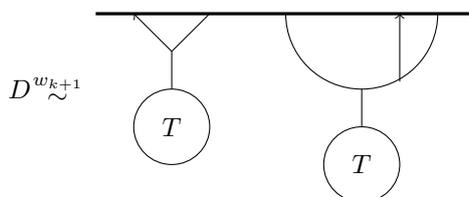
Penchons-nous tout d'abord sur le diagramme de gauche du terme de droite de (★). Procédons à l'échange des deux têtes. La flèche devient isolée, ce qui nous permet de l'enlever. Et de même que précédemment, on peut isoler le terme correctif. Si bien que ce diagramme de gauche est w_{k+1} -équivalent à



Regardons maintenant le diagramme de droite du terme de droite de (★). D'après la relation *IHX* (Lemme 2.3.23), on obtient que ce diagramme de droite est w_{k+1} -équivalent à



La concaténation de ces quatre diagrammes donne que

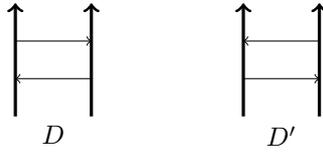


En multipliant par l'inverse dans $wSL(n)_{k+1}$ du diagramme de gauche, on obtient l'équivalence annoncée. \square

Caractère non abélien

Le groupe $wSL(n)_k$ n'a en général aucune raison d'être abélien. En pratique, on peut même montrer qu'il ne l'est pas facilement dès que le nombre de composantes et le degré de la relation d'équivalence sont suffisamment grands. C'est une conséquence directe du résultat suivant.

Lemme 2.3.31. *Soient D et D' les deux diagrammes suivants.*



Ce sont des diagrammes qui ne sont pas w_3 -équivalents.

Preuve. La seconde longitude λ_2 de D' est donnée par m_1 , tandis que la seconde longitude λ'_2 de D est donnée par $\overline{m_2}m_1m_2$.

De sorte que on a

$$\mu_{122}(D') = 0 \neq 1 = \mu_{122}(D).$$

Ce qui conclut. □

Cela donne l'énoncé formel suivant.

Corollaire 2.3.32. *Pour $n \geq 2$ et $k \geq 3$, $wSL(n)_k$ n'est pas abélien.*

L'étude du centre de ce groupe pourrait constituer une perspective d'approfondissement de notre compréhension de celui-ci. Commençons par énoncer la Proposition suivante, qui est une conséquence du Lemme 2.3.17.

Proposition 2.3.33. *Un w_k -arbre commute à w_{k+1} -équivalence près avec n'importe quel w -arbre. En particulier, deux w_k -arbres commutent à w_{k+1} -équivalence près.*

Penchons-nous maintenant sur le cas $k = 2$.

Proposition 2.3.34. *Pour $n \geq 1$, le groupe $wSL(n)_2$ est abélien.*

Preuve. À w_2 -équivalence près, d'après le Corollaire 2.3.17, les échanges d'extrémités de w -flèches, et plus généralement de w -arbres, se font sans apparition de termes correctifs, qui sont de degré supérieur ou égal à 2.

On peut donc librement échanger la position relative de 2 flèches. □

Notons pour finir que le cas $k = 1$ n'est pas intéressant, puisque le groupe obtenu est dans ce cas le groupe trivial.

2.4 Résultats de classification

On est maintenant équipé pour établir des résultats de classification. On l'a dit, les invariants de type fini établissent une filtration des invariants d'entrelacs longs soudés en fonction du degré. Cela permet de les ordonner. Au niveau des diagrammes, on dispose de la w_k -équivalence. Cela permet également d'ordonner les diagrammes de flèches. Une question qui se pose alors naturellement est celle de la correspondance entre ces deux filtrations. Peut-on lire le fait que deux diagrammes sont w_k -équivalents en terme d'invariants de type k ? C'est ce à quoi on va apporter des réponses maintenant.

Définition 2.4.1. *On appelle diagramme de flèches élémentaire de degré k sur n composantes un w_k -arbre (connexe) dont les extrémités sont attachées sur n intervalles exactement et dont la tête est localement attachée par la droite et sans perle.*

On appelle inverse de diagramme de flèches élémentaire un arbre obtenu depuis un diagramme de flèches élémentaire en mettant une perle au niveau de la tête.

En pratique, c'est ce genre de diagrammes qui va servir de socle à nos résultats de classification. En effet, lorsqu'on séparera un diagramme donné à l'aide du Lemme 2.3.27, on voit qu'on fait apparaître des diagrammes élémentaires ordonnés par leur degré.

Remarque 2.4.2. *D'après la preuve du Lemme 2.3.25, l'inverse d'un diagramme élémentaire au sens de la définition précédente est bien un inverse au sens algébrique du terme.*

Autrement dit, si T est un diagramme élémentaire de degré k et \bar{T} son inverse, alors :

$$U_T U_{\bar{T}} \stackrel{k+1}{\sim} U.$$

Convention 2.4.3. *Soient D un diagramme élémentaire et n un entier naturel non nul.*

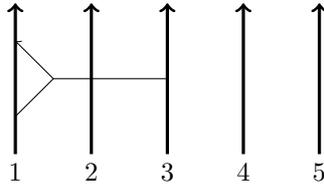
On désigne par D^{-n} la concaténation de n copies de l'inverse de D .

En pratique, on voudra pouvoir parler de diagrammes élémentaires faisant intervenir k composantes parmi un nombre supérieur n . On va donc utiliser les notations suivantes. Dans la suite, cela interviendra pour la première fois à la Définition 2.4.8.

Notation 2.4.4. *Dans toute cette partie, on ne représentera que les composantes "effectives" des diagrammes que l'on considère, dans le sens où chaque squelette possède en réalité un nombre n de composantes quelconque, mais les diagrammes de flèches élémentaires de degré k en font intervenir au plus k .*

Plus précisément, les composantes connexes du squelette non représentées sont supposées être des intervalles orientés de manière ascendante et numérotés avec tous les indices manquants. Tous les croisements qui mettent en jeu un brin de ces composantes sont virtuels.

Voici un petit exemple illustratif des conventions de notation pour plus de clarté. Sur 5 composantes, ce qu'on appellera $A_{1,3}$, et qui est en fait un tripode avec deux extrémités sur la première composante, dont la tête, qui est mise en dernière position, et une extrémité sur la troisième, est le diagramme suivant :



On va commencer par dresser le schéma général des raisonnements que l'on va mener dans les parties à venir. L'idée première est de chercher à établir une liste de diagrammes élémentaires en lesquels se décompose n'importe quel diagramme de flèches D quand on le regarde à w_k -équivalence près. Cela forme une famille de diagrammes qui engendre l'ensemble des diagrammes de flèches pour la w_k -équivalence. Mais il n'y a pas de raison pour que cette famille soit "libre" en général, dans le sens où il peut exister des relations entre des diagrammes qui la composent. Une telle relation permet d'enlever un diagramme, qui est en fait superflu pour le côté générateur. On va donc chercher à établir des relations diagrammatiques pour éliminer ces diagrammes superflus. Le problème auquel on se heurte est alors de pouvoir affirmer qu'il n'y a pas de relations diagrammatiques entre les diagrammes de notre famille réduite. Pour ce faire, on va évaluer une famille d'invariants sur notre famille de diagrammes. Cela nous donnera une matrice. Dire que notre famille de diagrammes est une famille génératrice minimale reviendra alors à dire que la matrice ainsi construite est inversible. C'est donc ce qu'on cherchera à vérifier. En outre, ce procédé nous donnera les coordonnées d'un diagramme, lorsqu'on le décomposera dans notre famille génératrice minimale en termes d'invariants idéalement bien connus. Cela permettra d'une part de connaître des formes normales pour les diagrammes de flèches à w_k -équivalence près, et d'autre part cela permettra de tisser des liens entre la w_k -équivalence et la théorie des invariants de type fini.

Les résultats sur les nœuds longs (Théorèmes 2.4.7 et 2.4.14) sont déjà connus dans la littérature [32]. On les redonne ici pour illustrer la procédure générale et se familiariser avec.

2.4.1 w_1 -équivalence

Commençons en disant quelques mots sur la w_1 -équivalence. Cette relation n'est pas du tout pertinente puisque tout diagramme de flèches sur n composantes est w_1 -équivalent au diagramme trivial sur n composantes.

Théorème 2.4.5. *Soient D et D' deux diagrammes de flèches. Alors D et D' sont w_1 -équivalents si et seulement s'ils ont le même nombre de composantes.*

2.4.2 w_2 -équivalence

Penchons-nous maintenant sur la w_2 -équivalence. Contrairement à la précédente, cette relation peut apporter des informations. C'est le cas lorsqu'on s'intéresse à des entrelacs longs soudés à au moins 2 composantes. Pour les nœuds longs, c'est une relation qui n'est pas encore suffisamment fine pour établir des discernements.

2.4.2.1 Sur 1 composante

Penchons-nous donc tout d'abord sur le problème des diagrammes de flèches élémentaires sur 1 composante à w_2 -équivalence près.

On va volontairement détailler la preuve de ce résultat, et des résultats analogues en plus haut degré et/ou nombre de composantes, pour se familiariser avec les manipulations de diagrammes de flèches, qui vont être légions dans cette partie.

Proposition 2.4.6. *À w_2 -équivalence près, il n'y a pas de diagramme de flèches élémentaire de flèches sur 1 composante.*

Preuve. Comme déjà observé dans la Proposition 2.3.34, à w_2 -équivalence près, les échanges de têtes et les échanges tête/queue se font gratuitement. En particulier, cela veut dire que l'on peut isoler chaque composante connexe d'un diagramme de flèches. Deux scénarios peuvent alors se produire. Les composantes connexes de degré supérieur ou égal à 2 peuvent être enlevées via la relation de w_2 -équivalence. Les composantes de degré 1, c'est-à-dire les flèches, étant isolées, elles peuvent également être enlevées.

Ce qui conclut. □

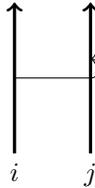
Une conséquence de ce résultat et du Lemme 2.3.27 est le théorème suivant, déjà connu dans la littérature [32].

Théorème 2.4.7. *Tous les nœuds longs soudés sont w_2 -équivalents.*

2.4.2.2 Pour un nombre supérieur de composantes

Introduisons pour commencer ce qui sera la famille des diagrammes de flèches élémentaires de degré 1 sur 2 composantes.

Définition 2.4.8. *Soient i et j deux entiers distincts. On appelle $Z_{i,j}$ le diagramme de flèches suivant :*



Dans la suite, fixons pour de bon le nombre de composantes des diagrammes de flèches que l'on regardera, égal à n .

Proposition 2.4.9. *À w_2 -équivalence près, il n'y a qu'une famille de diagrammes de flèches élémentaires sur n composantes : l'ensemble des $Z_{i,j}$, pour i et j distincts compris entre 1 et n .*

Preuve. La preuve de ce résultat repose sur les mêmes idées que celle de la Proposition 2.4.6.

On peut de nouveau isoler chaque composante connexe d'un diagramme de flèches par le Corollaire 2.3.27. Les w -arbres qui ne sont pas des flèches peuvent être enlevés (à w_2 -équivalence près). Les flèches qui sont internes à 1 composante

sont isolées, et peuvent donc être enlevées. Il ne reste donc que les flèches mixtes. Par rapport à un $Z_{i,j}$, il peut y avoir deux types de variations : d'une part certaines flèches peuvent avoir leurs têtes localement accrochées par la gauche, et d'autre part elles peuvent avoir un certain nombre de perles. Quitte à utiliser le Théorème 2.1.13, on peut toujours se ramener à un cas où la tête est localement attachée par la droite. Grâce à l'involutivité des perles, on peut alors se ramener à $Z_{i,j}$ ou $Z_{i,j}^{-1}$, suivant la parité du nombre de perles. Ce qui donne le résultat annoncé. \square

On obtient le théorème de forme normale suivant :

Théorème 2.4.10. *Soit L un entrelacs long soudé à n composantes. Alors :*

$$L \stackrel{w_2}{\approx} \prod_{i \neq j} Z_{i,j}^{\mu_{ij}(L)},$$

où le produit est pris selon l'ordre lexicographique des (i, j) .

Ce résultat permet d'obtenir la série d'équivalences suivantes au niveau des invariants de type 1.

Corollaire 2.4.11. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *Deux entrelacs longs soudés L et L' sont w_2 -équivalents.*
2. *Tout invariant ν de type 1 vérifie $\nu(L) = \nu(L')$.*
3. *Pour tout couple d'entiers distincts (i, j) , on a $\mu_{ij}(L) = \mu_{ij}(L')$.*

Preuve du Théorème 2.4.10. D'après le Lemme 2.3.27, L se décompose à w_2 -équivalence près en un produit de diagrammes de flèches de degré 1, produit pris dans l'ordre lexicographique, qui, d'après la Proposition 2.4.9, ne peuvent être à w_2 -équivalence près que des $Z_{i,j}$ (ou leurs inverses) :

$$L \stackrel{w_2}{\approx} \prod_{i \neq j} Z_{i,j}^{e_{i,j}(L)},$$

où les $e_{i,j}$ sont des entiers relatifs.

Pour déterminer $e_{i,j}$, appliquons μ_{ij} à l'équivalence. Or, on a :

$$\mu_{ij}(Z_{k,l}) = \delta_{ik}\delta_{jl},$$

où $\delta_{a,b}$ désigne le symbole de Kronecker.

La conclusion découle alors de l'additivité des μ_{ij} (Proposition 2.2.28). \square

2.4.3 w_3 -équivalence

Intéressons-nous dorénavant à la w_3 -équivalence. C'est une relation plus fine encore. Elle distingue notamment des nœuds les uns des autres. On va spécifier ici ce qui se passe pour le nombre de composantes 1 et 2. Le cas supérieur est un cas général.

2.4.3.1 Sur 1 composante

On va chercher à établir la liste des diagrammes de flèches élémentaires sur 1 composante à w_3 -équivalence près.

Proposition 2.4.12. *Il n'y a qu'un seul diagramme de flèches élémentaire de degré 2 sur 1 composante. Il s'agit du diagramme D_{el} déjà rencontré auparavant :*



Preuve. Il suffit de constater qu'un diagramme de flèches connexe de degré 2 est entièrement déterminé par la position de sa tête parmi ses extrémités. Le mouvement Trident impose à cette tête d'être comprise entre les deux queues. Ce qui conclut. \square

Remarque 2.4.13. *A priori il existerait également comme diagramme de flèches élémentaire de degré 2 sur 1 composante le diagramme obtenu depuis D_{el} en changeant l'ordre au sommet trivalent. Grâce à la relation d'anti-symétrie, on voit cependant que ce diagramme n'est rien d'autre que D_{el}^{-1} . On peut donc se contenter de considérer D_{el} dans notre liste de diagrammes de flèches élémentaires : c'est celui avec la "bonne" orientation au sommet trivalent. Dans les différentes listes de diagrammes élémentaires qu'on donnera par la suite, on fera implicitement de même.*

On aboutit au résultat suivant.

Théorème 2.4.14. *Soit L un nœud long soudé.*

Alors :

$$L \stackrel{w_3}{\sim} (D_{el})^{\alpha_2(L)}.$$

Et on obtient donc le résultat de classification suivant, voir [32] :

Corollaire 2.4.15. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *Deux nœuds longs soudés K et K' sont w_3 -équivalents.*
2. *Tout invariant ν de type 2 vérifie $\nu(K) = \nu(K')$.*
3. $\alpha_2(K) = \alpha_2(K')$.

Preuve du Théorème 2.4.14. D'après le Lemme 2.3.27, L se décompose à w_3 -équivalence près en un produit de diagrammes de flèches de degré au plus 2. D'après les Proposition 2.4.6 et 2.4.12, à w_3 -équivalence près, ces diagrammes ne peuvent être que D_{el} . Ce qui donne :

$$L \stackrel{w_3}{\sim} D_{el}^e,$$

où e est un entier naturel.

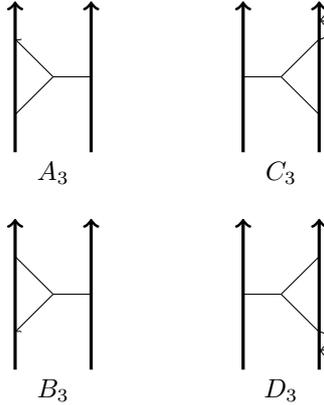
Pour déterminer ce dernier, appliquons α_2 à l'équivalence. L'Exemple 2.2.12 donne alors que $e = \alpha_2(K)$.

Ce qui conclut. \square

2.4.3.2 Sur 2 composantes

Penchons nous maintenant sur le cas des entrelacs longs soudés à 2 composantes. Il faut d'abord établir la liste des diagrammes de flèches élémentaires de degré 2 sur 2 composantes.

Proposition 2.4.16. *On appelle respectivement A_3 , B_3 , C_3 et D_3 les diagrammes de flèches suivants.*



À w_3 -équivalence près, ce sont les seuls diagrammes de flèches élémentaires de degré 2 sur 2 composantes.

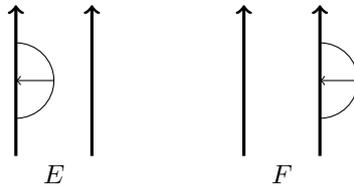
Preuve. Tout d'abord, remarquons que les diagrammes de cette liste sont bien du type annoncé. Il reste ensuite à démontrer que ceux sont les seuls.

Un diagramme de flèches élémentaire pour la w_3 -équivalence est la donnée d'un w -arbre de degré exactement 2. Autrement dit, il s'agit de la donnée de 3 extrémités reliées par un sommet trivalent. Par conséquent, un tel diagramme est entièrement caractérisé par la répartition des extrémités entre les 2 composantes et la localisation de la tête du diagramme.

On est dans une configuration où il y a 2 extrémités sur 1 première composante du squelette et 1 extrémité sur la seconde. Le mouvement Trident impose dans ce cas que la tête soit une des extrémités de la première composante. On se retrouve alors parmi A_3 , B_3 , C_3 ou D_3 .

Ce qui conclut. □

Ces diagrammes vont former, avec les diagrammes E et F suivants, les acteurs de notre prochain résultat de classification.

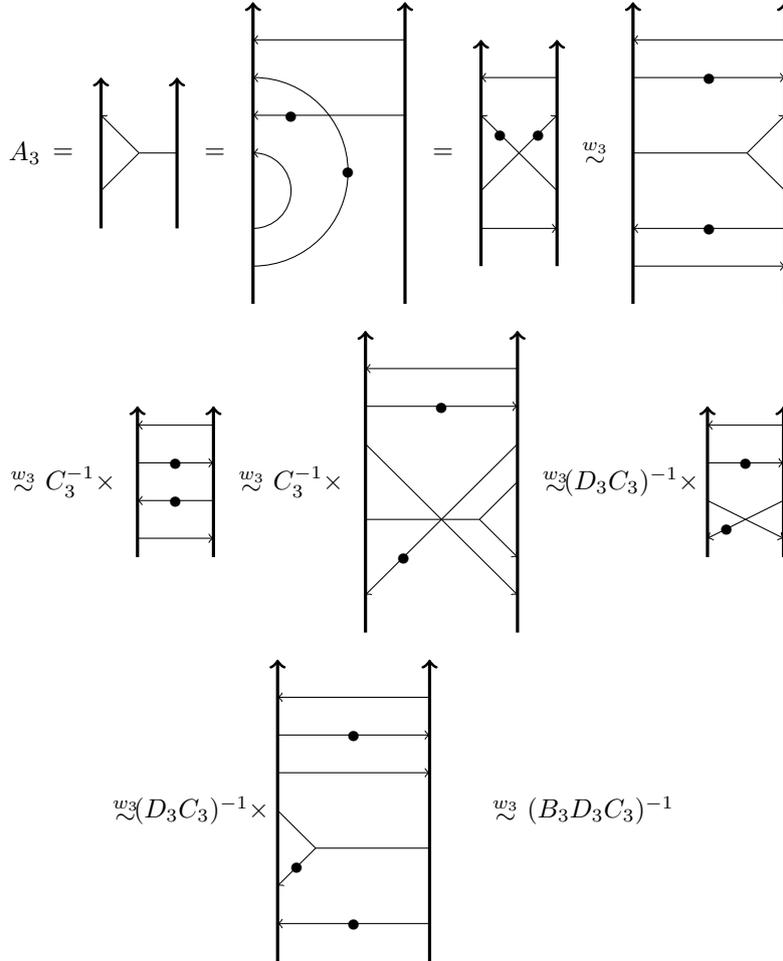


Il paraît assez intuitif que E et F ne sont pas liés entre eux, ni aux autres diagrammes par des relations diagrammatiques. C'est en revanche bien moins clair pour la famille des 4 autres diagrammes. Et c'est surtout faux ! C'est ce qu'on va démontrer maintenant.

Proposition 2.4.17. *On a :*

$$A_3 B_3 C_3 D_3 \stackrel{w_3}{\approx} U$$

Preuve. On a la suite d'égalités et d'équivalences suivantes :



La deuxième égalité est simplement l'expansion de A_3 . La troisième égalité s'obtient par le glissement le long de la flèche mixte décorée avec une perle. On obtient la première équivalence en échangeant sur la première composante la tête et la queue qui sont croisées (Proposition 2.1.15). Cela fait apparaître C_3^{-1} comme terme correctif, qui peut être isolé car il commute avec les flèches pour la w_3 -équivalence (Lemme 2.3.17). Cela donne la deuxième équivalence. Pour obtenir la troisième, on échange sur la première composante la tête et la queue en premières positions (Proposition 2.1.15). Cela fait apparaître D_3^{-1} comme terme correctif, que l'on peut de nouveau isoler (Lemme 2.3.17). C'est la quatrième équivalence. La cinquième s'obtient en échangeant sur la deuxième composante la tête et la queue qui sont à nouveau en premières positions (Proposition 2.1.15). Le terme correctif qui apparaît est B_3^{-1} , que l'on peut de nouveau isoler (Lemme 2.3.17). Les flèches mixtes restantes se simplifient alors deux à

deux, et on obtient la dernière équivalence. On obtient l'égalité annoncée en utilisant la commutativité des diagrammes pour la w_3 -équivalence (Corollaire 2.3.33).

Ce qui conclut. \square

On va maintenant donner le résultat de forme normale pour la w_3 -équivalence sur 2 composantes. Commençons en introduisant les notations qu'on utilisera.

Notation 2.4.18. *On pose :*

1. $\omega_1 = \mathcal{I}_{(1,\bar{2});2} + \mathcal{I}_{(\bar{1},2);2} - \mathcal{I}_{(2,1);2} - \mathcal{I}_{(1);1} - \mathcal{I}_{(2);2}$.
2. $\omega_2 = \mathcal{I}_{(\bar{1},2);2} - \mathcal{I}_{(1);1} - \mathcal{I}_{(2);2}$.
3. $\omega_3 = \mathcal{I}_{(\bar{1},2);2} - \mathcal{I}_{(2,1);2}$.

Théorème 2.4.19. *Soit L un entrelacs long soudé à 2 composantes. On a :*

$$L \stackrel{w_3}{\sim} L_1 \cdot L_2,$$

où $L_1 = Z_{1,2}^{\mu_{12}(L)} Z_{2,1}^{\mu_{21}(L)}$ et

$$L_2 = A_3^{\omega_1(L)} B_3^{\omega_2(L)} C_3^{\omega_3(L)} E^{\mathcal{I}_{(1);2}(L)} F^{\mathcal{I}_{(2);2}(L)}.$$

Une conséquence du Théorème 2.4.19 est le résultat de classification suivant.

Corollaire 2.4.20. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *Deux entrelacs longs soudés à 2 composantes L et L' sont w_3 -équivalents.*
2. *Tout invariant ν de type au plus 2 vérifie $\nu(L) = \nu(L')$.*
3. *Les valeurs des enlacements μ_{12} et μ_{21} et des invariants de clôture $\mathcal{I}_{(1,\bar{2});2}$, $\mathcal{I}_{(\bar{1},2);2}$, $\mathcal{I}_{(2,1);2}$, $\mathcal{I}_{(1);1}$ et $\mathcal{I}_{(2);2}$ sont les mêmes pour L et pour L' .*

Preuve du Théorème 2.4.19. D'après le Lemme 2.3.27, L se décompose à w_3 -équivalence près en un produit de diagrammes de flèches de degré 1 ou 2, qu'on peut ordonner selon le degré. D'après la Proposition 2.4.17, cela ne va faire intervenir que les diagrammes $Z_{1,2}$, $Z_{2,1}$, A_3 , B_3 , C_3 , E et F , et chacun apparaît avec un certain exposant qu'on va essayer de déterminer. Plus précisément, d'après la preuve du Théorème 2.4.10 et le Lemme 2.3.27, on a :

$$L \stackrel{w_3}{\sim} \underbrace{Z_{1,2}^{\mu_{12}(L)} Z_{2,1}^{\mu_{21}(L)}}_{L_1} A_3^a B_3^b C_3^c E^e F^f, \quad (2.1)$$

où a , b , c , e et f sont des entiers relatifs.

On veut donc construire une matrice 5×5 avec sur chaque ligne les valeurs d'un invariant donné, et sur chaque colonne un diagramme parmi A_3 , B_3 , C_3 , E et F fixé. On les mettra en pratique dans cet ordre là.

D'après l'Exemple 2.2.12, on a $\mathcal{I}_{(1);1}(E) = 1$ et $\mathcal{I}_{(2);1}(F) = 1$. Les autres évaluations de ces invariants donnent toutes 0 car le sous-diagramme est trivial. On obtient ainsi deux lignes de la matrice désirée :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces deux lignes différencient complètement E et F , entre eux d'une part, et des autres diagrammes d'autre part.

Pour différencier A_3 , B_3 et C_3 , on va utiliser les invariants $\mathcal{I}_{(1,\bar{2});2}$, $\mathcal{I}_{(\bar{1},2);2}$ et $\mathcal{I}_{(2,1);2}$. D'après l'Exemple 2.2.12, on a (pour A_3 , B_3 et C_3 dans cet ordre donc) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Cela différencie donc A_3 , B_3 et C_3 entre eux d'une part, et des autres diagrammes d'autre part. Cependant, ces trois invariants de clôture détectent également les diagrammes E et F : en effet, on a plus globalement la matrice

$$\mathcal{M}_2 = \begin{pmatrix} \setminus & A_3 & B_3 & C_3 & E & F \\ \mathcal{I}_{(1,\bar{2});2} : & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ \mathcal{I}_{(\bar{1},2);2} : & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \mathcal{I}_{(2,1);2} : & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ \mathcal{I}_{(1);1} : & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathcal{I}_{(2);1} : & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est cependant bien inversible, ce qui garantit de pouvoir déterminer quelle combinaison linéaire des invariants "lit" quel diagramme.

On peut maintenant calculer les exposants de chaque diagramme dans (2.1). Si on évalue $\mathcal{I}_{(1);1}$ sur (2.1), puisque c'est un invariant de w_3 -équivalence (Théorème 2.3.12) et par additivité (Proposition 2.3.22), on obtient que

$$e = \mathcal{I}_{(1);1}(L) - \mathcal{I}_{(1);1}(L_1) = \mathcal{I}_{(1);1}(L).$$

Cet invariant ne "lit" que la donnée de ce diagramme. Et il en est de même pour F , avec l'invariant $\mathcal{I}_{(2);1}$: on a $f = \mathcal{I}_{(2);1}(L)$.

Pour les autres diagrammes, les exposants sont un peu plus compliqués du fait que les invariants ne lisent plus un seul diagramme, mais plusieurs. Il faut donc combiner les différents invariants pour ne plus lire que le diagramme qui nous intéresse. C'est précisément ce que donnent les coefficients de la matrice \mathcal{M}_2^{-1} . Plus précisément, d'après le Théorème 2.3.12 et la Proposition 2.3.22, l'évaluation des invariants $\mathcal{I}_{(1,\bar{2});2}$, $\mathcal{I}_{(\bar{1},2);2}$ et $\mathcal{I}_{(2,1);2}$ sur (2.1) nous donne

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{(1,\bar{2});2}(L) - \mathcal{I}_{(1,\bar{2});2}(L_1) &= a - c + e + f, \\ \mathcal{I}_{(\bar{1},2);2}(L) - \mathcal{I}_{(\bar{1},2);2}(L_1) &= b + e + f, \\ \mathcal{I}_{(2,1);2}(L) - \mathcal{I}_{(2,1);2}(L_1) &= b - c + e + f. \end{aligned}$$

Or, le produit $Z_{1,2}^{\mu_{12}(L)} Z_{2,1}^{\mu_{21}(L)}$ est envoyé sur le diagramme trivial par les clôtures $Cl_{(1,\bar{2})}$, $Cl_{(\bar{1},2)}$ et $Cl_{(2,1)}$ par le mouvement de flèche isolée. On a donc $\mathcal{I}_{(1,\bar{2});2}(L_1) = \mathcal{I}_{(\bar{1},2);2}(L_1) = \mathcal{I}_{(2,1);2}(L_1) = 0$.
On obtient donc bien la formule annoncée. \square

Remarque 2.4.21. En pratique, c'est en calculant les valeurs des différents invariants sur la liste de diagrammes de la Définition-Proposition 2.4.16 qu'on a pu prévoir la relation qui existait entre les diagrammes A_3 , B_3 , C_3 et D_3 .

On peut par ailleurs prendre n'importe quel trio de diagrammes parmi A_3 , B_3 , C_3 et D_3 pour la forme normale. Cela changera juste la matrice introduite, puisqu'on aura potentiellement envie d'utiliser d'autres invariants que ceux introduits ci-dessus. C'est un choix en partie arbitraire, en partie dû à la simplicité des calculs, qui nous a fait prendre cette famille là.

Cela vaut aussi pour le choix des invariants dans les exposants. On aurait pu introduire par exemple $\mathcal{I}_{(1,2);2}$: le résultat final est évidemment le même, mais sous une autre écriture.

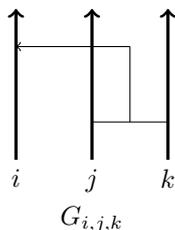
Remarque 2.4.22. On obtient une famille génératrice des invariants de type 2 constituée d'invariants de clôture de degré 2 et d'invariants de Milnor de longueur 2. Ces derniers sont un héritage de la w_2 -équivalence et de la nécessité de lire les flèches, ce dont sont incapables les invariants de clôture de degré 2. Ceci étant dit, "moralement", les invariants de clôture engendrent les invariants de type 2 dans le sens où ce sont eux qui classent un invariant donné en fonction de ses valeurs sur les w_2 -arbres.

2.4.3.3 Pour un nombre supérieur de composantes

On va maintenant généraliser le résultat précédent à un nombre supérieur de composantes quelconque. En effet, en établissant la liste des diagrammes de flèches élémentaires sur au moins 3 composantes à w_3 -équivalence près, on remarque qu'aucun nouveau type de diagrammes n'apparaît lorsqu'on passe de 3 à ≥ 4 composantes. Ceci est dû aux limitations sur le degré des w -arbres. Le nombre de composantes 2 a donc un statut spécial, il joue en quelque sorte un rôle de valeur frontière.

Commençons par donner (la liste de) diagrammes élémentaires de degré 2 sur 3 composantes.

Proposition 2.4.23. Il existe une unique famille de diagrammes de flèches élémentaires de degré 2 sur 3 composantes. Il s'agit des diagrammes suivants :

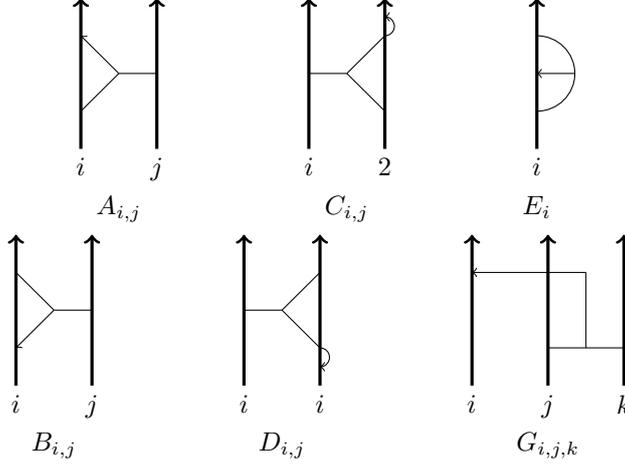


Preuve. Puisqu'on travaille à w_3 -équivalence près, un diagramme élémentaire sur 3 composantes a en réalité exactement une extrémité sur chacune des 3 composantes sur lesquelles il est attaché.

Il est donc entièrement déterminé par la position de l'unique tête et par l'ordre cyclique à son sommet trivalent. Il suffit alors de remarquer que le changement de cet ordre cyclique change $G_{i,j,k}$ en $G_{i,k,j}$.

Ce qui conclut. □

Les Propositions 2.4.16 et 2.4.23 permettent d'établir la liste des acteurs de notre prochain résultat de classification. On appelle respectivement $A_{i,j}$, $B_{i,j}$, $C_{i,j}$, $D_{i,j}$, E_i et $G_{i,j,k}$ les diagrammes de flèches suivants.



Il existe cependant des relations entre ces diagrammes. Tout d'abord, par la relation d'anti-symétrie, le Lemme 2.3.15 et l'involutivité des perles, on a que

$$\forall i, j \in [1; n], A_{i,j} C_{j,i} \stackrel{w_3}{\approx} U \text{ et } B_{i,j} D_{j,i}^{-1} \stackrel{w_3}{\approx} U.$$

Puis, d'après la Proposition 2.4.17, on a que

$$\forall i, j \in [1; n], A_{i,j} B_{i,j} C_{i,j} D_{i,j} \stackrel{w_3}{\approx} U.$$

Cet ensemble de relations suggère que la famille

$$\{A_{i,j}, B_{i,j}, C_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

est une famille sans relations parmi les diagrammes élémentaires supportés par 2 composantes.

Par ailleurs, nous avons :

$$\forall i, j, k \in [1; n] \text{ deux à deux distincts, } G_{i,k,j} = G_{i,j,k}^{-1}.$$

C'est une conséquence de la relation d'anti-symétrie et du Lemme 2.3.15 (et l'involutivité des perles). Ce résultat fait de la famille

$$\{G_{i,j,k} \mid 1 \leq i, j, k \leq n \text{ 2 à 2 distincts, } j < k\}$$

une candidate pour être une famille sans relations extraite de la famille $(G_{i,j,k})_{i,j,k}$. Passons maintenant au résultat de classification.

Notation 2.4.24. On pose :

1. $\phi_{i,j,k} = \mathcal{I}_{(\bar{j},i,k);2} + \mathcal{I}_{(\bar{i},j);2} - \mathcal{I}_{(i,\bar{k});2} - \mathcal{I}_{(k,i);2} - \mathcal{I}_{(\bar{k},i);2} + \mathcal{I}_{(\bar{j},k);2} + \mathcal{I}_{(i);2} - \mathcal{I}_{(j);2} - \mathcal{I}_{(k);2} - \mu_{ji}(L)\mu_{ki}$.
2. $\omega_{1,i,j} = \mathcal{I}_{(i,\bar{j});2} + \mathcal{I}_{(\bar{j},i);2} + \mathcal{I}_{(j,i);2} - \mathcal{I}_{(i);2} - \mathcal{I}_{(j);2}$.
3. $\omega_{2,i,j} = -\mathcal{I}_{(\bar{i},j);2} - \mathcal{I}_{(i);2} + \mathcal{I}_{(j);2}$.

$$4. \omega_{3,i,j} = \mathcal{I}_{(\bar{i},j);2} + \mathcal{I}_{(j,\bar{i});2} - 2\mathcal{I}_{(j);2}.$$

Théorème 2.4.25. *Soit L un entrelacs long soudé à n composantes.*

On a

$$L \stackrel{w_3}{\sim} L_1 \cdot L_2,$$

où

$$L_1 = \prod_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} Z_{i,j}^{\mu_{ij}(L)},$$

le produit étant pris selon l'ordre lexicographique des (i,j) , et

$$L_2 = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j < k \leq n \\ i \neq j, i \neq k}} G_{i,j,k}^{\phi_{i,j,k}(L)} \prod_{1 \leq i < j \leq n} A_{i,j}^{\omega_{1,i,j}(L)} B_{i,j}^{\omega_{2,i,j}(L)} C_{i,j}^{\omega_{3,i,j}(L)} \prod_{1 \leq i \leq n} E_i^{\mathcal{I}_{(i);2}(L)}.$$

On obtient le résultat de classification suivant.

Corollaire 2.4.26. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *Deux entrelacs longs soudés à n composantes L et L' sont w_3 -équivalents.*
2. *Tout invariant ν de type au plus 2 vérifie $\nu(L) = \nu(L')$.*
3. *Les valeurs des invariants $\mathcal{I}_{(j,i,k);2}$, pour i, j et k deux à deux distincts tels que $j < k$, $\mathcal{I}_{(\bar{j},i);2}$, $\mathcal{I}_{(j,\bar{i});2}$, $\mathcal{I}_{(i,j);2}$, $\mathcal{I}_{(i);2}$ et μ_{ij} , pour i et j distincts, sont les mêmes pour L et L' .*

Preuve du Théorème 2.4.25. D'après le Lemme 2.3.27, L se décompose à w_3 -équivalence près en un produit de diagrammes de flèches de degré 1 ou 2, qu'on peut ordonner selon le degré. De plus, on peut librement ordonner les diagrammes dans chaque "tranche" du produit composée de termes d'un degré fixé. Cela va donc faire intervenir les diagrammes $Z_{i,j}$, pour i et j distincts, $G_{i,j,k}$, pour i, j et k deux à deux distincts tels que $j < k$, $A_{i,j}$, $B_{i,j}$ et $C_{i,j}$, pour i et j deux à deux distincts tels que $i < j$ et E_i , pour i quelconque. Chacun apparaît avec un certain exposant qu'on va essayer de déterminer maintenant. Plus précisément, d'après le Lemme 2.3.27 et la preuve du Théorème 2.4.10, on a :

$$L \stackrel{w_3}{\sim} \prod_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} Z_{i,j}^{\mu_{ij}(L)} \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j < k \leq n \\ i \neq j, i \neq k}} G_{i,j,k}^{g_{i,j,k}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} A_{i,j}^{a_{i,j}} B_{i,j}^{b_{i,j}} C_{i,j}^{c_{i,j}} \prod_{1 \leq i \leq n} E_i^{e_i}, \quad (2.2)$$

où $g_{i,j,k}$, $a_{i,j}$, $b_{i,j}$, $c_{i,j}$ et e_i sont des entiers relatifs.

Le procédé est le même que celui du Théorème 2.4.19.

L'objectif ici est donc de nouveau de construire une matrice inversible (de grande taille) avec sur chaque ligne les valeurs des invariants de clôture impliqués dans la Notation 2.4.24, et sur chaque colonne un diagramme apparaissant dans (2.2). Faire cela se révèle en pratique assez fastidieux, puisque l'ordre de grandeur du nombre d'invariants est en n^3 avec le nombre de composantes, mais les axes de la preuve sont fondamentalement les mêmes que ceux de la preuve du Théorème 2.4.19. Le lecteur peut d'ailleurs mettre côte à côte les deux pour mieux appréhender celle-ci.

D'après l'Exemple 2.2.12, on a que $\mathcal{I}_{(i);2}$ s'annule pour tous les diagrammes de

la liste à l'exception de E_i , sur lequel il vaut 1.

On obtient ainsi n lignes, qui différencient complètement les E_i deux à deux d'une part, et qui les différencient complètement de tous les autres diagrammes de la liste, d'autre part.

On distingue les diagrammes $A_{i,j}$, $B_{i,j}$ et $C_{i,j}$, avec les évaluations suivantes, qui constituent $\frac{3n(n-1)}{2}$ lignes de notre matrice :

$$\begin{pmatrix} \backslash & A_{i,j} & B_{i,j} & C_{i,j} & E_i & E_j & \star \\ \mathcal{I}_{(\bar{i},\bar{j});2} : & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ \mathcal{I}_{(\bar{i},j);2} : & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \mathcal{I}_{(j,i);2} : & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les différents calculs pour les cinq premières colonnes sont les mêmes que dans la preuve du Théorème 2.4.19. L'augmentation du nombre de composantes ne modifie en effet pas les calculs quand on se restreint à des sous-diagrammes sur 2 composantes. La dernière colonne indexée par \star signifie quant à elle que les invariants donnés s'annulent lorsqu'on les évalue sur n'importe quel autre diagramme de (2.2). Cela peut se faire pour trois raisons différentes : soit le diagramme n'a pas de corde, soit le diagramme peut être rendu trivial car c'est une corde isolée, soit il peut être rendu trivial grâce au mouvement Trident.

On note que cette matrice est de rang 3, et que la sous-matrice constituée des trois premières lignes et colonnes est inversible. Cela différencie donc $A_{i,j}$, $B_{i,j}$ et $C_{i,j}$ entre eux d'une part, et des autres diagrammes d'autre part.

Terminons avec le cas des diagrammes $G_{i,j,k}$. Pour cela, on utilise les invariants de clôture $\mathcal{I}_{R;2}$ avec R de longueur 3. Un calcul direct donne que

1. $\mathcal{I}_{(\bar{j},i,k);2}(G_{i,j,k}) = 1$.
2. $\mathcal{I}_{(\bar{k},i,j);2}(G_{i,j,k}) = -1$.
3. $\mathcal{I}_{R;2}(G_{i,j,k}) = 0$, pour R une rangée de longueur 3 dont le premier entier, éventuellement surligné, est i .

Les invariants énumérés ci-dessus ne lisent toutefois pas *que* les diagrammes $G_{i,j,k}$ a priori. Il faut aussi déterminer les valeurs que peuvent prendre ces invariants sur les autres familles de diagrammes. On obtient les $\frac{n(n^2-2n-1)}{2}$ lignes suivantes de la matrice :

$$\begin{pmatrix} \backslash & G_{i,j,k} & A_{i,j} & B_{i,j} & C_{i,j} & A_{i,k} & B_{i,k} & C_{i,k} & A_{j,k} & B_{j,k} & C_{j,k} & E_i & E_j & E_k & \star \\ \mathcal{I}_{(\bar{j},i,k);2} : & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs se trouvent en utilisant l'Exemple 2.2.12 et les valeurs des invariants de clôture sur les diagrammes $G_{i,j,k}$. La colonne indexée par \star signifie à nouveau que les invariants donnés s'annulent sur n'importe quel autre diagramme.

Il reste à mettre ensemble ces nombreuses ($\frac{n(n-1)(n+4)}{2}$ exactement) lignes pour constater que la matrice obtenue, qu'on notera \mathcal{M}_n , est bien inversible. Cela permet de garantir qu'on peut trouver une combinaison linéaire des invariants introduits qui "lit" chaque diagramme. Cela se fera en utilisant leurs propriétés d'invariance et d'additivité.

Afin de clarifier les arguments, nous allons expliciter l'argument pour $n = 3$. La matrice obtenue, de taille 15×15 , est notée \mathcal{M}_3 et est donnée à la page suivante.

$$\mathcal{M}_3 = \begin{pmatrix}
\setminus & G_{1,2,3} & G_{2,1,3} & G_{3,1,2} & A_{1,2} & B_{1,2} & C_{1,2} & A_{1,3} & B_{1,3} & C_{1,3} & A_{2,3} & B_{2,3} & C_{2,3} & E_1 & E_2 & E_3 \\
\mathcal{I}_{(\overline{2},1,3);2} : & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\mathcal{I}_{(\overline{1},2,3);2} : & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\mathcal{I}_{(\overline{1},3,2);2} : & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
\mathcal{I}_{(\overline{1},\overline{2});2} : & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
\mathcal{I}_{(\overline{1},2);2} : & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
\mathcal{I}_{(2,1);2} : & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
\mathcal{I}_{(\overline{1},\overline{3});2} : & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\mathcal{I}_{(\overline{1},3);2} : & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\mathcal{I}_{(3,1);2} : & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\mathcal{I}_{(2,\overline{3});2} : & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
\mathcal{I}_{(\overline{2},3);2} : & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\mathcal{I}_{(3,2);2} : & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
\mathcal{I}_{(1);2} : & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\mathcal{I}_{(2);2} : & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\mathcal{I}_{(3);2} : & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Dans le cas général, la matrice va avoir un premier bloc de $\frac{n(n^2-2n-1)}{2}$ colonnes correspondant aux diagrammes du type $G_{i,j,k}$. Chaque colonne aura une seule coordonnée non-nulle, égale à 1. Un deuxième bloc de la matrice sera constitué des $\frac{3n(n-1)}{2}$ colonnes correspondant aux diagrammes du type $A_{i,j}$, $B_{i,j}$ et $C_{i,j}$. Ce bloc aura lui-même une structure par sous-blocs de taille 3×3 inversibles. Un dernier bloc de la matrice sera constitué des n colonnes correspondant aux diagrammes du type E_i .

On pourra donc aboutir au fait que \mathcal{M}_n est inversible. Il reste alors à déterminer les différents exposants qui apparaissent dans le terme de droite de (2.2), en évaluant chacun des invariants de notre matrice sur cette équation, de la même manière que nous l'avons fait dans la preuve du Théorème 2.4.19.

Pour les diagrammes $A_{i,j}$, $B_{i,j}$, $C_{i,j}$ et E_i , les choses se passent exactement comme dans la preuve du Théorème 2.4.19 (en effet, ce sont exactement les mêmes diagrammes). Plus précisément, on commence par évaluer $\mathcal{I}_{(i);2}$ sur (2.2). Puisque c'est un invariant de w_3 -équivalence (Théorème 2.3.12) et par additivité (Proposition 2.3.22), on obtient que

$$e_i = \mathcal{I}_{(i);2}(L).$$

Cet invariant ne "lit" donc que la donnée de ce diagramme.

Pour $A_{i,j}$, $B_{i,j}$, $C_{i,j}$, les exposants sont plus compliqués car les invariants "lisent" plusieurs diagrammes. En effet, d'après le Théorème 2.3.12 et la Proposition 2.3.22, l'évaluation de $\mathcal{I}_{(i,\bar{j});2}$, $\mathcal{I}_{(\bar{i},j);2}$ et $\mathcal{I}_{(j,i);2}$ donnent que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{(i,\bar{j});2}(L) - \mathcal{I}_{(i,\bar{j});2}(L_1) &= a_{i,j} - c_{i,j} + e_i - e_j, \\ \mathcal{I}_{(\bar{i},j);2}(L) - \mathcal{I}_{(\bar{i},j);2}(L_1) &= -b_{i,j} - e_i + e_j, \\ \mathcal{I}_{(j,i);2}(L) - \mathcal{I}_{(j,i);2}(L_1) &= b_{i,j} + c_{i,j} + e_i + e_j. \end{aligned}$$

Or, le produit $Z_{i,j}^{\mu_{1j}(L)} Z_{i,j}^{\mu_{j1}(L)}$ est envoyé sur le diagramme trivial par les clôtures $Cl_{(i,\bar{j})}$, $Cl_{(\bar{i},j)}$ et $Cl_{(j,i)}$ par le mouvement de flèche isolée. Les trois invariants de clôture ci-dessus s'annulent donc lorsqu'on les évalue sur L_1 .

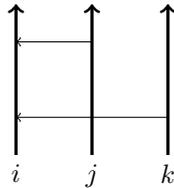
On en déduit :

1. $a_{i,j} = \mathcal{I}_{(i,\bar{j});2}(L) + \mathcal{I}_{(\bar{j},i);2}(L) + \mathcal{I}_{(j,i);2}(L) - \mathcal{I}_{(i);2}(L) - \mathcal{I}_{(j);2}(L)$.
2. $b_{i,j} = -\mathcal{I}_{(\bar{i},j);2}(L) - \mathcal{I}_{(i);2}(L) + \mathcal{I}_{(j);2}(L)$.
3. $c_{i,j} = \mathcal{I}_{(\bar{i},j);2}(L) + \mathcal{I}_{(j,i);2}(L) - 2\mathcal{I}_{(j);2}(L)$.

Tournons-nous enfin vers le calcul de l'exposant $g_{i,j,k}$ de $G_{i,j,k}$. Le Théorème 2.3.12 et la Proposition 2.3.22 donnent ici que

$$\mathcal{I}_{(\bar{j},i,k);2}(L) - \mathcal{I}_{(\bar{j},i,k);2}(L_1) = g_{i,j,k} + b_{i,j} + a_{i,k} + b_{j,k} + e_i + e_j + e_k.$$

Ici, contrairement à ce qui précède, il se passe le fait suivant : l'invariant $\mathcal{I}_{(\bar{j},i,k);2}$ détecte également certains termes de L_1 , et plus précisément les paires de flèches suivantes :



En effet, la clôture $Cl(\bar{j}, i, k)$ envoie un tel diagramme sur une paire de flèches en position "croisée", comme dans le Lemme 2.3.18, qui est détectée par α_2 d'après ce même lemme.

Plus précisément, d'après le Lemme 2.3.18, on a que

$$\mathcal{I}_{(\bar{j}, i, k); 2}(L_1) = \mu_{ji}(L)\mu_{ki}(L).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} g_{i,j,k} &= \mathcal{I}_{(\bar{j}, i, k); 2}(L) - \mu_{ji}(L)\mu_{ki}(L) + \mathcal{I}_{(\bar{i}, j); 2}(L) + \mathcal{I}_{(i); 2}(L) - \mathcal{I}_{(j); 2}(L) \\ &\quad - \mathcal{I}_{(i, \bar{k}); 2}(L) - \mathcal{I}_{(\bar{k}, i); 2}(L) - \mathcal{I}_{(k, i); 2}(L) + \mathcal{I}_{(i); 2}(L) + \mathcal{I}_{(k); 2}(L) + \mathcal{I}_{(\bar{j}, k); 2}(L) \\ &\quad + \mathcal{I}_{(j); 2}(L) - \mathcal{I}_{(k); 2}(L) - \mathcal{I}_{(i); 2}(L) - \mathcal{I}_{(j); 2}(L) - \mathcal{I}_{(k); 2}(L) \\ &= \mathcal{I}_{(\bar{j}, i, k); 2}(L) + \mathcal{I}_{(\bar{i}, j); 2}(L) - \mathcal{I}_{(i, \bar{k}); 2}(L) - \mathcal{I}_{(\bar{k}, i); 2}(L) - \mathcal{I}_{(k, i); 2}(L) \\ &\quad + \mathcal{I}_{(\bar{j}, k); 2}(L) + \mathcal{I}_{(i); 2}(L) - \mathcal{I}_{(j); 2}(L) - \mathcal{I}_{(k); 2}(L) - \mu_{ji}(L)\mu_{ki}(L). \end{aligned}$$

On obtient donc bien la formule annoncée. \square

Quelques remarques sur ces résultats.

Remarque 2.4.27. *Toute la discussion de la Remarque 2.4.21 (sur le choix de la famille) pour le cas de 2 composantes se transpose dans le cas général.*

Remarque 2.4.28. *On peut également donner une expression de $\phi_{i,j,k}$ en fonction des invariants $\omega_{p,q,r}$. En pratique, cette égalité permet "d'inverser" plus simplement la première ligne de la matrice précédente pour déterminer l'exposant de $G_{i,j,k}$ dans la forme normale. Cette égalité est la suivante :*

$$\begin{aligned} \phi_{i,j,k}(L) &= \mathcal{I}_{(\bar{j}, i, k); 2}(L) - \mu_{ji}(L)\mu_{ki}(L) \\ &\quad - \omega_{1,i,k}(L) - \omega_{2,i,j}(L) - \mathcal{I}_{(\bar{j}, k); 2}(L) - \mathcal{I}_{(i); 2}(L) - \mathcal{I}_{(j); 2}(L) - \mathcal{I}_{(k); 2}(L). \end{aligned}$$

On a de plus une autre conséquence assez remarquable de ce théorème.

Remarque 2.4.29. *La discussion de la Remarque 2.4.22 est également toujours d'actualité : les invariants de type 2 sont engendrés par la famille des invariants de clôture de degré 2 -et même par certaines sous-familles bien choisies-, dans le sens où chaque tel invariant peut s'écrire comme combinaison linéaire d'invariants de clôture -et même uniquement de ceux qui interviennent dans le Théorème 2.4.25.*

C'est en particulier le cas pour l'invariant de Milnor μ_{123} .

Proposition 2.4.30. *On a :*

$$\begin{aligned} \mu_{123} &= \mu_{21}\mu_{13} - \mu_{12}\mu_{23} - \mu_{13}\mu_{23} \\ &\quad + \mathcal{I}_{(\bar{1}, 3, 2); 2} + \mathcal{I}_{(\bar{3}, 1); 2} - \mathcal{I}_{(3, \bar{2}); 2} - \mathcal{I}_{(\bar{2}, 3); 2} - \mathcal{I}_{(2, 3); 2} \\ &\quad + \mathcal{I}_{(\bar{1}, 2); 2} + \mathcal{I}_{(3); 2} - \mathcal{I}_{(1); 2} - \mathcal{I}_{(2); 2} \end{aligned}$$

Preuve. Soit L un enlacement de 2 intervalles soudés.

Puisqu'il s'agit d'un invariant de w_3 -équivalence (Théorème 2.3.11), il suffit d'évaluer μ_{123} sur la forme normale de L comme dans l'énoncé du Théorème 2.4.25. Cela donnera "les coordonnées" de μ_{123} en fonction des exposants des

diagrammes sur lesquels μ_{123} est non-nul. Les propriétés d'invariance par w_3 -équivalence et d'additivité (Proposition 2.2.28) de μ_{123} donnent

$$\mu_{123}(L) = \mu_{123}(L_1) + \mu_{123}(L_2) = \mu_{123}(L_1) + \phi_{3,1,2}(L) \times \underbrace{\mu_{123}(G_{3,1,2})}_{=1}.$$

Reste à calculer $\mu_{123}(L_1)$. Des calculs analogues à ceux effectués dans la preuve du Théorème 2.4.25 donnent

$$\mu_{123}(L_1) = \mu_{21}(L)\mu_{13}(L) - \mu_{12}(L)\mu_{23}(L).$$

La formule provient alors de la définition de $\phi_{3,1,2}$. □

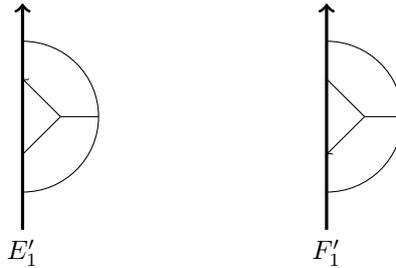
2.4.4 Et après ?

2.4.4.1 Exploration sur la w_4 -équivalence

Il est naturel de tenter de pousser notre étude à la w_4 -équivalence. On se propose de traiter ici les cas de 1 ou 2 composantes, qui constitue l'amorce d'une étude générale, sur le même modèle que l'étude faite en degré inférieur. Ceci nous permettra d'établir des résultats partiels, et de mettre en évidence des phénomènes nouveaux par rapport aux degrés inférieurs ; nous verrons aussi poindre des difficultés calculatoires qui se propagent (et s'empirent) pour un nombre plus grand de composantes.

2.4.4.1.1 Sur 1 composante On commence par établir la liste de diagrammes de flèches élémentaires sur 1 composante à w_4 -équivalence près.

Proposition 2.4.31. *Reprenons les diagrammes E'_1 et F'_1 les diagrammes de flèches de l'Exemple 2.2.13.*



Ce sont les seuls diagrammes de flèches élémentaires de degré 3 sur 1 composante.

Preuve. On peut définir un ordre sur les 4 pattes d'un w_4 -arbre sur 1 intervalle, en fonction de l'ordre dans lequel on les rencontre en suivant son orientation. Supposons pour commencer que la tête soit l'extrémité n°1 ou 4. Dans ce cas, il existe un sommet trivalent qui est relié à deux queues qui, quitte à les faire commuter entre elles et avec l'autre queue, font apparaître une configuration Trident. Le diagramme est par conséquent trivial. Supposons ensuite que la tête soit l'extrémité n°2 et intéressons-nous à la queue attachée directement au squelette depuis le premier sommet trivalent. Si cette

queue est l'extrémité n°1, alors les deux autres pattes sont consécutives. À une relation AS près, ces deux pattes se joignent au second sommet trivalent dans une configuration Trident. De sorte que D est trivial.

La queue directement attachée au squelette ne peut donc qu'être l'extrémité n°3 ou 4. À deux relations AS près, une à chaque sommet trivalent, et quitte à échanger les queues, le diagramme en question est donc E'_1 .

Un raisonnement similaire montre que dans le cas où la tête est l'extrémité n°3, le diagramme ne peut alors être que F'_1 . \square

Notons que

$$E'_1 F'_1 \stackrel{w_4}{\sim} U. \quad (2.3)$$

C'est une conséquence de la Proposition 2.3.30.

On peut maintenant obtenir un résultat de forme normale des nœuds pour la w_4 -équivalence (voir [32]).

Théorème 2.4.32. *Soit L un nœud long soudé.*

Alors :

$$L \stackrel{w_4}{\sim} (E'_1)^{\alpha_3(L)-\alpha_2(L)} (D_{\text{él}})^{\alpha_2(L)}$$

Ce qui donne le résultat de classification suivant :

Corollaire 2.4.33. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *Deux nœuds longs soudés K et K' sont w_4 -équivalents.*
2. *Tout invariant ν de type au plus 3 vérifie $\nu(K) = \nu(K')$.*
3. *$\alpha_2(K) = \alpha_2(K')$ et $\alpha_3(K) = \alpha_3(K')$.*

Preuve du Théorème 2.4.32. D'après le Lemme 2.3.27, L se décompose à w_4 -équivalence près en un produit de diagrammes de flèches de degré au plus 3. Donc, d'après (2.3), la Proposition 2.3.30, le Théorème 2.4.14 et la Proposition 2.4.31, les seuls diagrammes qui peuvent intervenir dans ce produit sont $D_{\text{él}}$ et E'_1 . On peut choisir de les ordonner selon le degré, et ils apparaissent avec des exposants respectifs e et e' . Autrement dit :

$$L \stackrel{w_4}{\sim} (E'_1)^{e'} D_{\text{él}}^e$$

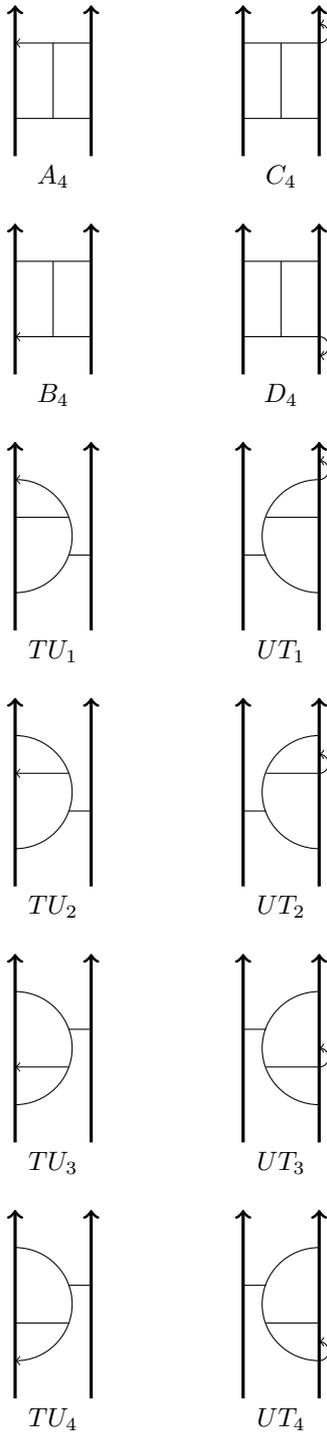
Comme la w_4 -équivalence implique la w_3 -équivalence, il vient que $e = \alpha_2(L)$. Pour déterminer e' , il suffit d'appliquer α_3 à l'équivalence et d'utiliser son additivité. On en déduit alors en utilisant les Exemples 2.2.12 (pour déterminer la valeur de $\alpha_3(D_{\text{él}})$) et 2.2.13 que

$$\alpha_3(L) = e' \alpha_3(E'_1) + \alpha_2(L) \alpha_3(D_{\text{él}}) = \alpha_2(L) + e'.$$

Ce qui conclut. \square

2.4.4.1.2 Sur 2 composantes Passons maintenant au cas des entrelacs longs soudés à 2 composantes. Annonçons dès à présent que le résultat qu'on énonce ici n'est pas entièrement satisfaisant dans la mesure où il fait intervenir un résultat intermédiaire que nous n'avons pas réussi à démontrer.

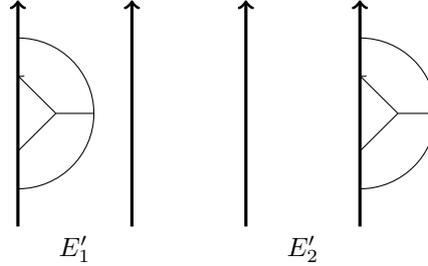
Proposition 2.4.34. *Les diagrammes élémentaires de degré 3 sur 2 composantes sont exactement les diagrammes suivants.*



Preuve. La preuve de ce résultat repose sur les mêmes éléments que la preuve de la Proposition 2.4.16.

Il suffit de raisonner sur la répartition des pattes sur les 2 composantes, puis sur leurs positions relatives les unes aux autres. On laisse le détail au lecteur. \square

Reprenons également la notation des diagrammes élémentaires issus de la liste sur 1 composante, et qui vont intervenir de nouveau dans le résultat de classification.



On va maintenant donner l'ensemble des relations qui existent entre ces différents diagrammes pour en extraire une sous-famille sans relations. Et commençons avec une relation qui reste de l'ordre de la conjecture.

Conjecture 2.4.35. *On a :*

$$A_4 D_4 \stackrel{w_4}{\sim} B_4 C_4$$

Je n'ai en effet pas réussi à démontrer cette w_4 -équivalence. J'ai cependant deux bonnes raisons de penser qu'elle est vraie. La première est que, lorsqu'on dressera une matrice diagrammes/invariants, on obtiendra une série de relations entre les lignes. Ce sont ces relations qui permettent de "prédire" les relations entre les diagrammes et, comme mentionné précédemment, c'est cela qui permet en pratique de déterminer les relations qu'on voulait établir entre les diagrammes. La deuxième raison est plus d'ordre moral puisqu'elle consiste à dire que cette relation serait d'une certaine manière l'analogue de la relation $A_3 B_3 C_3 D_3 \stackrel{w_3}{\sim} 1$.

Quoi qu'il en soit, cette relation reste ici donc de l'ordre de la conjecture. Et les résultats de forme normale Théorème 2.4.38 et son Corollaire 2.4.39 sont des résultats *modulo* la Conjecture 2.4.35.

Passons maintenant aux relations que nous savons démontrer.

Proposition 2.4.36. *On a :*

$$TU_1 \stackrel{w_4}{\sim} TU_2^{-1} \tag{2.4}$$

$$TU_3 \stackrel{w_4}{\sim} TU_4^{-1} \tag{2.5}$$

$$UT_1 \stackrel{w_4}{\sim} UT_2^{-1} \tag{2.6}$$

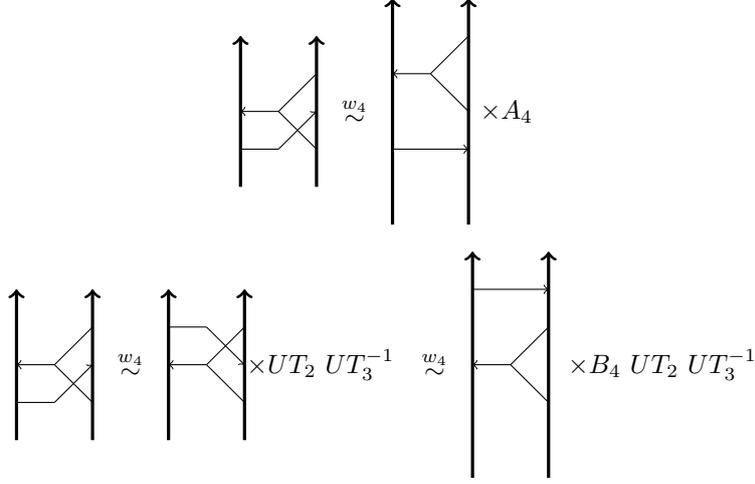
$$UT_3 \stackrel{w_4}{\sim} UT_4^{-1} \tag{2.7}$$

$$A_4 UT_3 \stackrel{w_4}{\sim} B_4 UT_2 \tag{2.8}$$

$$C_4 TU_3 \stackrel{w_4}{\sim} D_4 TU_2 \tag{2.9}$$

Preuve. Les équivalences (2.4), (2.5), (2.6) et (2.7) sont des conséquences de la Proposition 2.3.30, avec T réduit à une patte.

Montrons l'équivalence (2.8). On a les suites d'équivalences suivantes :



Ce qui donne donc :

$$A_4 \stackrel{w_4}{\sim} B_4 UT_2 UT_3^{-1}$$

La preuve de (2.9) suit le même schéma. □

Il reste maintenant à donner le résultat de forme normale pour la w_4 -équivalence sur 2 composantes. Commençons en introduisant les différents invariants qui interviendront.

Notation 2.4.37. *On pose :*

1. $\gamma_1 = -\mathcal{I}_{(1,2);3} + \mathcal{I}_{(1);3} + \mathcal{I}_{(2);3} + \mu_{1121}$.
2. $\gamma_2 = \mathcal{I}_{(\bar{2},1);3} - \mathcal{I}_{(1);3} - \mathcal{I}_{(2);3} + \mathcal{I}_{(1);2} + \mathcal{I}_{(2);2}$.
3. $\gamma_3 = -\mathcal{I}_{(2,1);3} + \mathcal{I}_{(\bar{2},1);3} + \mu_{2212}$.

Théorème 2.4.38. *Soit L un entrelacs long soudé à 2 composantes. On a*

$$L \stackrel{w_4}{\sim} L_1 \cdot L_2 \cdot L_3,$$

où $L_1 = Z_{1,2}^{\mu_{12}(L)} Z_{2,1}^{\mu_{21}(L)}$, $L_2 = A_3^{\omega_1(L)} B_3^{\omega_2(L)} C_3^{\omega_3(L)} E_1^{\mathcal{I}_{(1);2}(L)} E_2^{\mathcal{I}_{(2);2}(L)}$ et

$$\begin{aligned} L_3 = & (A_4)^{\gamma_1(L) - \gamma_1(L_1 \cdot L_2)} (B_4)^{\gamma_2(L) - \gamma_2(L_1 \cdot L_2)} (C_4)^{\gamma_3(L) - \gamma_3(L_1 \cdot L_2)} \\ & \cdot (TU_1)^{\mu_{1121}(L) - \mu_{1121}(L_1 \cdot L_2)} (UT_1)^{\mu_{2212}(L) - \mu_{2212}(L_1 \cdot L_2)} \\ & \cdot (E'_1)^{\mathcal{I}_{(1);3}(L) - \mathcal{I}_{(1);2}(L)} (E'_2)^{\mathcal{I}_{(2);3}(L) - \mathcal{I}_{(2);2}(L)} \end{aligned}$$

Ce qui nous donne le résultat de classification suivant.

Corollaire 2.4.39. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. Deux entrelacs longs soudés à 3 composantes L et L' sont w_4 -équivalents.
2. Tout invariant ν de type au plus 3 vérifie $\nu(L) = \nu(L')$.
3. Les valeurs des invariants de Milnor μ_{12} , μ_{21} , μ_{1121} et μ_{2212} et des invariants de clôture $\mathcal{I}_{(1,2);3}$, $\mathcal{I}_{(2,1);3}$, $\mathcal{I}_{(\bar{2},1);3}$, $\mathcal{I}_{(1);3}$, $\mathcal{I}_{(2);3}$, $\mathcal{I}_{(2,1);2}$, $\mathcal{I}_{(1,\bar{2});2}$, $\mathcal{I}_{(\bar{1},2);2}$, $\mathcal{I}_{(1);2}$, $\mathcal{I}_{(2);2}$ sont les mêmes pour L et L' .

Preuve du Théorème 2.4.38. D'après le Lemme 2.3.27, L se décompose à w_4 -équivalence près en un produit de diagrammes de flèches de degré au plus 3, qu'on peut ordonner selon le degré. Cela va alors faire intervenir les différents diagrammes de flèches élémentaires de degré au plus 3 sur au plus 2 composantes, et chacun apparaît avec un certain exposant qu'on va essayer de déterminer. Plus précisément, d'après la preuve du Théorème 2.4.25 et le Lemme 2.3.27, on a :

$$L \underset{\sim}{\sim}^{w_4} \underbrace{Z_{1,2}^{\mu_{12}(L)} Z_{2,1}^{\mu_{21}(L)}}_{L_1} \underbrace{A_{1,2}^{\omega_{1,1,2}(L)} B_{1,2}^{\omega_{2,1,2}(L)} C_{1,2}^{\omega_{3,1,2}(L)}}_{L_2} E_1^{\mathcal{I}_{(1);2}(L)} E_2^{\mathcal{I}_{(2);2}(L)}$$

$$\cdot (A_4)^a (B_4)^b (C_4)^c (TU_1)^t (UT_1)^u (E'_1)^{e_1} (E'_2)^{e_2}, \quad (2.10)$$

où a, b, c, t, u, e_1 et e_2 sont des entiers relatifs.

On va donc de nouveau construire une matrice avec sur chaque ligne les valeurs d'un entrelacs donné, et sur chaque colonne un diagramme élémentaire de degré 3 sur 2 composantes. On les mettra en pratique dans l'ordre du Théorème 2.4.38. D'après les Exemples 2.2.13, 2.2.29, 2.2.30, 2.2.31 et 2.2.32, ainsi que les relations (2.1) à (2.4) de la Proposition 2.4.36, on obtient la matrice suivante, qui est de rang 7.

$$\mathcal{M}_3 = \begin{pmatrix} \diagdown & A_4 & B_4 & C_4 & TU_1 & UT_1 & E'_1 & E'_2 \\ \mathcal{I}_{(\bar{2},1);3} : & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \mathcal{I}_{(2,1);3} : & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \mathcal{I}_{(1,2);3} : & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \mu_{1211} : & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{2122} : & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \mathcal{I}_{(1);3} : & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathcal{I}_{(2);3} : & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il reste maintenant à déterminer un invariant qui lit chaque diagramme apparaissant dans l'énoncé du Théorème 2.4.38. Commençons avec les diagrammes E'_i . D'après les Exemples 2.2.12 et 2.2.13, et par la Proposition 2.2.10, on obtient que

$$\mathcal{I}_{(i);3}(L) = \mathcal{I}_{(i);2}(L)\mathcal{I}_{(i);3}(E_i) + e_i\mathcal{I}_{(i);3}(E'_i) = \mathcal{I}_{(i);2}(E_1) + e_i.$$

Donc

$$e_i = \mathcal{I}_{(i);3}(L) - \mathcal{I}_{(i);2}(L).$$

Pour les autres diagrammes, il faut déterminer une combinaison linéaire qui ne "lit" qu'un diagramme. Plus précisément, d'après le Théorème 2.3.12 et les Propositions 2.2.10 et 2.2.28, on obtient en évaluant $\mathcal{I}_{(\bar{2},1);3}$, $\mathcal{I}_{(2,1);3}$, $\mathcal{I}_{(1,2);3}$,

μ_{1121} et μ_{2212} sur (2.10) que

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{(\bar{2},1);3}(L) - \mathcal{I}_{(\bar{2},1);3}(L_1 \cdot L_2) &= b + e_1 + e_2, \\ \mathcal{I}_{(2,1);3}(L) - \mathcal{I}_{(2,1);3}(L_1 \cdot L_2) &= b - c + u + e_1 + e_2, \\ \mathcal{I}_{(1,2);3}(L) - \mathcal{I}_{(1,2);3}(L_1 \cdot L_2) &= -a + t + e_1 + e_2, \\ \mu_{1121}(L) - \mu_{1121}(L_1 \cdot L_2) &= t, \\ \mu_{2212}(L) - \mu_{2212}(L_1 \cdot L_2) &= u.\end{aligned}$$

Ce qui donne donc

1. $t = \mu_{1121}(L) - \mu_{1121}(L_1 \cdot L_2)$.
2. $u = \mu_{2212}(L) - \mu_{2212}(L_1 \cdot L_2)$.
3. $b = \mathcal{I}_{(\bar{2},1);3}(L) - \mathcal{I}_{(1);3}(L) - \mathcal{I}_{(2);3}(L) + \mathcal{I}_{(1);2}(L) + \mathcal{I}_{(2);2}(L) - \mathcal{I}_{(\bar{2},1);3}(L_1 \cdot L_2)$.
4. $c = -\mathcal{I}_{(2,1);3}(L) + \mathcal{I}_{(\bar{2},1);3}(L) + \mu_{2212}(L) - \mathcal{I}_{(\bar{2},1);3}(L_1 \cdot L_2) + \mathcal{I}_{(2,1);3}(L_1 \cdot L_2) - \mu_{2212}(L_1 \cdot L_2)$.
5. $a = -\mathcal{I}_{(1,2);3}(L) + \mathcal{I}_{(1);3}(L) - \mathcal{I}_{(1);2}(L) + \mathcal{I}_{(2);3}(L) - \mathcal{I}_{(2);2}(L) + \mu_{1121}(L) + \mathcal{I}_{(1,2);3}(L_1 \cdot L_2) + \mu_{1121}(L_1 \cdot L_2)$.

□

Remarque 2.4.40. *On a utilisé la relation de la Conjecture 2.4.35 pour "éliminer" le diagramme D_4 , en l'exprimant comme combinaison des diagrammes A_4 , B_4 et C_4 .*

Comme expliqué précédemment, ceci se justifie notamment par le fait que l'on dispose de bien plus d'invariants que ceux impliqués dans le théorème, et que aucun d'entre eux ne permet de distinguer ces 4 diagrammes entre eux.

Ces calculs sont regroupés dans la matrice \mathcal{N}_3 donnée à la page suivante.

$$\mathcal{N}_3 = \begin{pmatrix} \setminus & A_4 & B_4 & C_4 & D_4 & TU_1 & TU_2 & TU_3 & TU_4 & UT_1 & UT_2 & UT_3 & UT_4 \\ \mathcal{I}_{(\bar{2},1),3} : & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \mathcal{I}_{(2,1),3} : & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \mathcal{I}_{(1,2),3} : & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \mathcal{I}_{(1,\bar{2}),3} : & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \mathcal{I}_{(2,\bar{1}),3} : & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \mathcal{I}_{(\bar{2},\bar{1}),3} : & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \mathcal{I}_{(\bar{1},\bar{2}),3} : & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \mathcal{I}_{(\bar{1},2),3} : & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \mu_{1121} : & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{1211} : & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{1221} : & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{2111} : & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{2121} : & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{2211} : & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{1122} : & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{1212} : & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{1222} : & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \mu_{2112} : & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{2122} : & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 2 & -2 \\ \mu_{2212} : & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{N}_3 =$

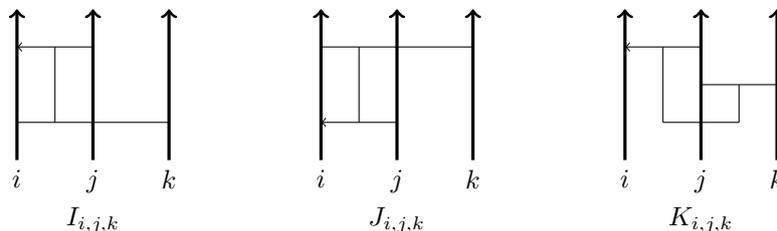
Remarque 2.4.41. Ici, on n'arrive plus à engendrer l'espace vectoriel des invariants de type 3 avec uniquement des invariants de clôture. On en est même plus loin dans le cas du Théorème 2.4.25, dans la mesure où on fait ici intervenir des invariants de Milnor de longueur 4, alors que précédemment on ne faisait intervenir que des produits d'invariants de Milnor de longueur 2. C'est une différence notable par rapport à ce qu'affirmait la Remarque 2.4.22.

Remarque 2.4.42. Ici, et contrairement à précédemment, on n'explique pas totalement les exposants qui interviennent dans l'énoncé du Théorème 2.4.38 (plus précisément la valeur des invariants sur $L_1 \cdot L_2$). La raison principale à cela est que ces théorèmes de forme normale ont pour but de caractériser la w_3 -équivalence et les invariants de type fini en petit degré : ce sont les corollaires qui suivent chacun des résultats de forme normale.

2.4.4.1.3 Pour un nombre supérieur de composantes ? La Conjecture 2.4.35 se propage naturellement lorsque l'on attaque l'étude de la w_4 -équivalence sur un nombre n quelconque de composantes, produisant $\binom{n}{2}$ relations indéterminées : nous sommes donc loin de pouvoir donner un résultat de caractérisation satisfaisant en toute généralité !

À vrai dire, les choses s'empirent, car une nouvelle (famille de) relation(s) indéterminée(s) apparaît avec les diagrammes élémentaires sur 3 brins. Nous esquissons ci-dessous les résultats partiels obtenus dans cette direction, et les questions qui restent à trancher dans l'optique d'une classification complète.

Proposition 2.4.43. Il existe trois familles de diagrammes de flèches élémentaires de degré 3 sur 3 composantes. Il s'agit des diagrammes suivants :



Preuve. Un tel diagramme élémentaire possède 4 pattes. Sur 3 composantes, il y en a donc une qui possède deux pattes attachées.

Supposons pour commencer que la tête soit la dernière des extrémités attachées (localement par la droite) sur cette composante particulière, la i -ème (comme dans le diagramme $I_{i,j,k}$). De deux choses l'une : soit la queue accrochée sur cette même composante et cette tête sont reliées au même sommet trivalent, soit elles ne le sont pas. Dans le deuxième cas, on voit rapidement qu'on est en présence de $I_{i,j,k}$ à AS près. Dans le premier cas, il suffit d'appliquer la relation IHX pour décomposer notre diagramme initial comme un produit de $I_{i,j,k}$ et $I_{i,k,j}$ (ou leurs inverses).

Au final, un tel diagramme s'exprime toujours comme un produit de diagrammes $I_{i,j,k}$ pour i, j et k bien choisis (ou leurs inverses).

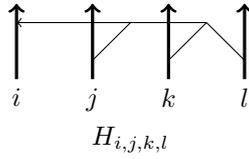
Le même raisonnement s'applique dans le cas où la tête est la première des 2 extrémités attachées sur la i -ème composante. On tombe alors sur la famille de diagrammes $J_{i,j,k}$.

Penchons-nous maintenant sur le cas où ce sont 2 queues qui sont accrochées

sur la même composante, disons la j -ème. La tête est alors accrochée sur une autre composante, qu'on peut supposer être la i -ème.

Les deux queues sur la j -ème composante ne peuvent pas être reliées au même sommet trivalent, sinon le diagramme s'annulerait d'après le mouvement Trident. Une est donc reliée directement à la tête par un sommet trivalent tandis que l'autre est reliée à la dernière queue par le deuxième sommet trivalent. À deux relations AS près, ce diagramme est donc nécessairement $K_{i,j,k}$. \square

Proposition 2.4.44. *Il existe une unique famille de diagrammes de flèches élémentaires de degré 3 sur 4 composantes. Il s'agit de la famille de diagrammes $H_{i,j,k,l}$:*



Preuve. En raisonnant sur la répartition des queues et de la tête du diagramme selon les deux seuls sommets trivalents d'un tel diagramme de flèches élémentaire, on voit qu'on peut toujours se ramener via la relation d'anti-symétrie à un diagramme du type $H_{i,j,k,l}$. \square

Il existe un certain nombre de relations sur ces diagrammes. Plus précisément, on a les résultats suivants.

Au sein de la famille de diagrammes $H_{i,j,k,l}$, tout d'abord, nous avons :

$$\forall i, j, k, l \in [1 : n] \text{ deux à deux distincts, } H_{i,j,k,l} \stackrel{w_4}{\sim} (H_{i,j,l,k})^{-1}.$$

Par ailleurs, la relation IHX donne que

$$H_{i,j,k,l} \stackrel{w_4}{\sim} H_{i,l,k,j} (H_{i,k,l,j})^{-1}.$$

Cela suggère que la famille

$$\{H_{i,j,k,l} \mid i, j, k, l \text{ deux à deux distincts tels que } l > j, k\}$$

est une famille sans relations parmi les diagrammes élémentaires sur 4 composantes.

De fait, les éléments de cette famille sont distingués deux à deux par les invariants de Milnor de longueur 4 indexés par quatre entiers distincts. En effet, il n'est pas difficile de vérifier que

$$\mu_{lkji}(H_{a,b,c,d}) = \delta_{i,a} \delta_{j,b} \delta_{k,c} \delta_{l,d},$$

où δ désigne le symbole de Kronecker. En outre, on observe que ces invariants s'annulent pour tout enlacement soudée sur < 4 composante - donc en particulier sur tous les autres diagrammes élémentaires impliqués dans la discussion.

Penchons-nous maintenant sur les familles de diagrammes élémentaires sur 3 composantes.

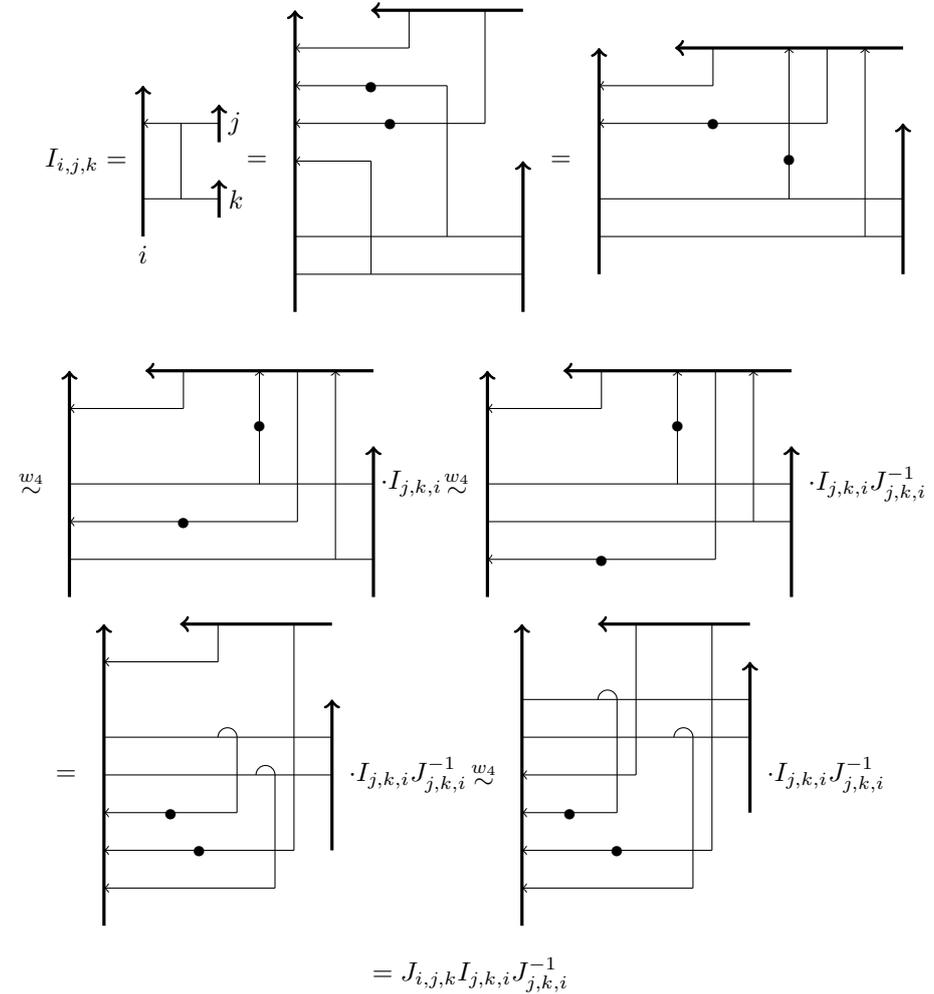
Proposition 2.4.45. *Il n'y a pas de relation au sein des diagrammes de flèches élémentaires $K_{i,j,k}$, pour i, j et k deux à deux distincts. De plus, il n'y a pas de relation faisant intervenir des diagrammes de cette famille et des diagrammes $I_{i,j,k}$ ou $J_{i,j,k}$ pour i, j et k deux à deux distincts.*

Preuve. On obtient cela en dressant la matrice M donnée à la page suivante. Elle est obtenue en utilisant les Exemples 2.2.33 à 2.2.35. \square

Proposition 2.4.46. *On a :*

$$\forall i, j, k \text{ deux à deux distincts, } I_{i,j,k} J_{j,k,i} = I_{j,k,i} J_{i,j,k}.$$

Preuve. On a :



La première égalité est juste l'expansion de $I_{i,j,k}$. La deuxième s'obtient en effectuant un glissement le long de la flèche décorée avec une perle (Proposition 2.1.13). Les deux équivalences qui suivent s'obtiennent en faisant descendre la tête de cette flèche décorée avec une perle le long de la i -ème composante (Lemme 2.3.17). L'égalité suivante est également obtenue par un glissement (Proposition 2.1.13). L'équivalence suivante s'obtient en faisant descendre la

$$\begin{pmatrix}
\setminus & I_{i,j,k} & I_{i,k,j} & I_{j,i,k} & I_{j,k,i} & I_{k,i,j} & I_{k,j,i} & J_{i,j,k} & J_{i,k,j} & J_{j,i,k} & J_{j,k,i} & J_{k,i,j} & J_{k,j,i} & K_{i,j,k} & K_{i,k,j} & K_{j,i,k} & K_{j,k,i} & K_{k,i,j} & K_{k,j,i} \\
\mu_{ijkji} : & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mu_{ijkkj} : & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mu_{jkkij} : & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mu_{jkkji} : & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mu_{kjjik} : & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mu_{kjjkj} : & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mu_{kkjji} : & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mu_{kkkji} : & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mu_{kkkkj} : & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\mu_{jjikk} : & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\mu_{ijjjk} : & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

$$M =$$

tête de la flèche sans perle le long de la i -ème composante. Les deux termes correctifs qui apparaissent sont de degré 4 et commutent donc avec les autres arbres. On peut donc les isoler et les mettre l'un à côté de l'autre, et on remarque alors qu'ils se compensent. Il suffit ensuite de remarquer qu'on est en présence d'une expansion de $J_{i,j,k}$.
Ce qui conclut. □

On déduit de cet ensemble de relations, 4 relations indépendantes. Ceci permet de réduire notre famille de diagrammes élémentaires sur 3 composantes à, par exemple :

$$\{I_{i,j,k}, J_{1,2,3}, J_{1,3,2} \mid \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}\}.$$

De fait, il est possible de montrer, grâce à une combinaison d'invariants de Milnor et d'invariants de clôture, que cette famille contient une sous famille de 7 diagrammes sans relation... mais, là encore, les invariants dont nous disposons ne semblent pas permettre pas d'aller plus loin, et une relation demeure de l'ordre de la conjecture :

Question 2.4.47. *A-t-on*

$$I_{1,2,3} J_{1,3,2} \stackrel{w_4}{\sim} I_{1,3,2} J_{1,2,3}, ?$$

De nouveaux outils semblent à ce point nécessaires avant d'espérer aller plus loin.

Plus généralement, nous discutons ci-dessous les perspectives ou idées que suggèrent ce travail exploratoire sur la w_4 -équivalence.

2.4.4.2 Pour aller plus loin ?

Plusieurs autres questions arrivent naturellement à la lecture de ces différents résultats de classification de ce second chapitre, et du travail exploratoire ci-dessus.

Tout d'abord, la question de la w_k -équivalence en tout degré, et de son lien avec une liste d'invariants de type fini (plus ou moins) courte, est la première qui arrive. La méthode proposée ici, de manière récursive et à l'aide des diagrammes élémentaires, est en théorie généralisable, mais, comme on l'a vu dans la section précédente, plusieurs relations restent indéterminées et doivent être tranchées avant d'aller plus loin. En outre, cette démarche se heurte très vite à un problème de complexité : établir la liste des diagrammes élémentaires, trouver de "bons" invariants qui les lisent, se révèle de plus en plus coûteux au fur et à mesure que grimpe le degré étudié. On remarque cependant que cela a un lien avec le nombre de composantes des diagrammes élémentaires qui interviennent dans les résultats de classification. Peut-être y-a-t-il quelque chose à exploiter ici ?

L'étude des familles de diagrammes élémentaires et de leur évolution avec l'augmentation du degré peut d'ailleurs constituer une piste pour progresser dans cette optique. Trouver des procédés algorithmiques pour les construire avec l'augmentation du degré pourrait permettre d'établir des résultats de classification plus généraux, à la manière de ce qu'on a fait dans le premier chapitre.

Toutefois, et là aussi cela fait écho au premier chapitre, je pense plus raisonnable de voir ces résultats d'un point de vue plus général à l'aide d'outils plus généraux, "universels" dans un certain sens, qui joueraient un rôle analogue à

l'intégrale de Kontsevitch.

En effet, la question que pose ce travail en petit degré est plus généralement de déterminer l'ensemble des invariants de type fini des entrelacs longs soudés. Ceci pose donc la question de la définition d'un invariant universel pour ces objets, et le lien d'un tel invariant avec les invariants "classiques" utilisés en bas degré, à savoir les invariants de Milnor soudés et les invariants de clôture extraits du polynôme d'Alexander.

De fait, un tel invariant universel existe pour le cas à 1 composante : c'est la construction de Dror Bar-Natan et Zsuzsanna Dancso dans [4]. Il est montré dans cet article que l'invariant en question est complètement déterminé par le polynôme d'Alexander, remontrant ainsi un résultat de Habiro et Shima [18]. Il serait donc très intéressant de généraliser (et au passage, simplifier) la construction de [4] à un nombre supérieur de composantes. La question qui se pose alors naturellement est de savoir comment "lire" dans un tel invariant les invariants de Milnor : on peut imaginer qu'ils sont contenus dans la partie "en arbres", comme dans le cas classique [15].

Enfin, un angle d'approche un peu inverse du notre serait d'essayer de raisonner au niveau des surfaces nouées de type ruban pour remonter ensuite au calcul de flèches. On va d'ailleurs maintenant se pencher sur ces objets pour traduire ces résultats de classification des diagrammes de flèches en résultats topologiques.

2.5 Objets soudés et surfaces nouées de type ruban

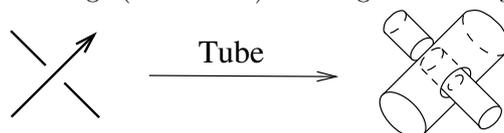
La théorie des objets soudés s'avère notamment intéressante du fait qu'elle permet l'étude topologique de certaines surfaces nouées en dimension 4.

Définition 2.5.1. Une immersion de type ruban d'une 3-variété M dans un espace de dimension 4 est une immersion de M n'admettant, pour seul type de singularités, qu'un nombre fini de singularités rubans : ce sont des disques de points doubles, tels que l'une des pré-images est plongée à l'intérieur de M tandis que l'autre pré-image est proprement plongée dans M .

Une surface nouée en dimension 4 est dite surface de type ruban si elle est le bord d'une immersion de type ruban.

Notons qu'une surface nouée de type ruban est bien un plongement, donc sans singularités, et que cette notion n'est rien d'autre que l'analogie strict, en dimension supérieure, de la notion de nœud ruban (en dimension 3) telle qu'introduite par Ralph Fox au début des années 60. Il est d'ailleurs notable que cette classe particulière de surfaces nouées a été considérée et étudiée de manière approfondie dès les années 60 (soit dès les débuts de l'étude systématique des nœuds en dimension supérieure), en particulier au Japon. En se fondant sur des travaux de Takeshi Yajima [45], Shin Satoh a défini une application surjective, appelée *Tube*, qui réalise les objets soudés comme des surfaces de type ruban [39].

Nous ne donnerons pas ici une définition détaillée de l'application *Tube*. Elle repose sur la diagrammatique des surfaces nouées et consiste essentiellement à assigner à chaque croisement classique d'un diagramme soudé le diagramme d'une configuration locale de deux cylindres noués en dimension 4, qu'il faut penser comme le voisinage (du bord d') une singularité de type ruban :



L'application *Tube* produit alors le diagramme d'une surface nouée de type ruban, en connectant les uns aux autres ces cylindres par des anneaux non-noués et non-enlacés, tel que prescrit combinatoirement par le diagramme soudé.

Shin Satoh montre que cette construction produit une application bien définie et surjective dans [39] (dans le cas des sphères nouées ruban, mais l'argument s'applique plus généralement aux surfaces de type ruban).

La surjectivité repose lourdement sur le fait, issu de travaux des années 60 de Takeshi Yajima [46], que toute surface nouée de type ruban admet un diagramme où les seuls "croisements" sont des paires de "cercles de points doubles" comme dans la figure locale ci-dessus.

La question de l'injectivité de l'application *Tube* est, en général, un problème ouvert. Tara Brendle et Allen Hatcher ont montré dans [6] l'injectivité dans le cas des tresses soudées, injectivité qui est aussi vérifiée pour les entrelacs longs soudés à *homotopie près* dans [1]. En revanche, des contre-exemples sont connus dans le cas des nœuds soudés par les travaux de Atsushi Ichimori et Taizo Kanenobu [19].

Dans le cas des entrelacs longs soudés, l'application *Tube* produit des *enlace-*

ments d'anneaux de type ruban (ou simplement enlacements d'anneaux rubans). Un enlacement d'anneaux est simplement l'analogue, en dimension 4, de la notion d'enlacement d'intervalles (*string links*) :

Définition 2.5.2. *Un enlacement d'anneaux à n composantes est l'image d'un plongement lisse*

$$\sqcup_{i=1}^n (S^1 \times [0, 1])_i \hookrightarrow B^4$$

de n copies disjointes de l'anneau orienté $S^1 \times [0, 1]$ dans $B^4 = B^3 \times [0, 1]$, tel que l'image du i -ème anneau est cobordé par $C_i \times \{0\}$ et $C_i \times \{1\}$, avec des orientations compatibles.

Le fait est que les définitions principales de ce chapitre sur les entrelacs longs soudés se transportent naturellement aux surfaces ruban via l'application Tube.

D'une part, l'application Tube agit "fidèlement" sur le groupe fondamental. En effet, étant donné un entrelacs (long) soudé L , on a un isomorphisme naturel $G(L) \cong \pi_1(\text{Tube}(L))$, où $\pi_1(\text{Tube}(L))$ désigne le groupe fondamental du complémentaire de la surface Tube(L) dans l'espace de dimension 4. De plus, cet isomorphisme préserve la structure périphérique : il envoie méridiens sur méridiens et longitudes (préférées) sur longitudes (préférées)⁴. Ainsi les présentations de Wirtinger de $G(L)$ et $\pi_1(\text{Tube}(L))$ sont en correspondance 1-1 ; voir [39, 45, 1].

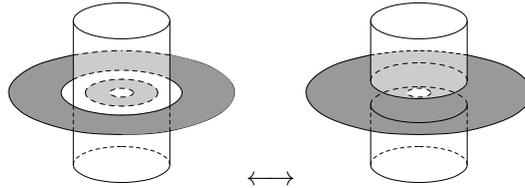
Il s'ensuit que les invariants d'objets soudés définis et utilisés dans ce chapitre sont tout aussi compatibles avec l'application Tube. De fait, ils peuvent être définis intrinsèquement pour les enlacements d'anneaux de type ruban : le polynôme d'Alexander (normalisé) des surfaces ruban est défini dans [17], tandis que les invariants de Milnor des enlacements d'anneaux sont définis dans [1, 2]. De même, la procédure de clôture - et donc la notion d'invariants de clôture - définie sur les entrelacs longs soudés, s'adapte naturellement aux enlacements d'anneaux de type ruban.

Dans la suite, nous emploierons les mêmes notations pour ces invariants que pour les entrelacs longs soudés. On a alors, pour tout entrelacs long soudé L , les égalités

$$\begin{aligned} \alpha_k(L) &= \alpha_k(\text{Tube}(L)) \quad , \quad \text{pour tout entier } k \geq 2, \\ \mu_I(L) &= \mu_I(\text{Tube}(L)) \quad , \quad \text{pour toute suite d'indices } I, \\ \mathcal{I}_{R;k}(L) &= \mathcal{I}_{R;k}(\text{Tube}(L)) \quad , \quad \text{pour toute rangée } R \text{ et tout entier } k \geq 2. \end{aligned}$$

D'autre part, l'application Tube est compatible avec la théorie des invariants de type fini.

La théorie d'invariants de type fini pour les surfaces nouées de type ruban a été développée par Kazuo Habiro, Taizo Kanenobu et Akiko Shima dans [17, 21] ; elle repose sur le mouvement local suivant, appelé "changement de croisement en un cercle de croisement" (*crossing change at crossing circles* dans [21]) :



4. Voir la Section 2.2.1 de [1] pour la structure périphérique de Tube(L).

Dans cette figure, deux portions de surface nouée (représentées en blanc et gris) se croisent au niveau d'un cercle de points doubles⁵, et le mouvement inverse la position relative "dessus-dessous" de ces deux portions de surface. Ce mouvement local est l'analogue du changement de croisement pour la théorie de Vassiliev, ou du mouvement de virtualisation pour la théorie soudée :

Définition 2.5.3. Soit $v^{(4)}$ un invariant d'enlacements d'anneaux (ou tout autre classe de surface nouée) de type ruban, à valeurs dans un groupe abélien.

On dit que $v^{(4)}$ est un invariant de type fini de degré au plus k si pour tout enlacement L et pour tout ensemble S de $k + 1$ cercles de croisements de L , on a

$$\sum_{S' \subset S} (-1)^{|S'|} v^{(4)}(L_{S'}) = 0,$$

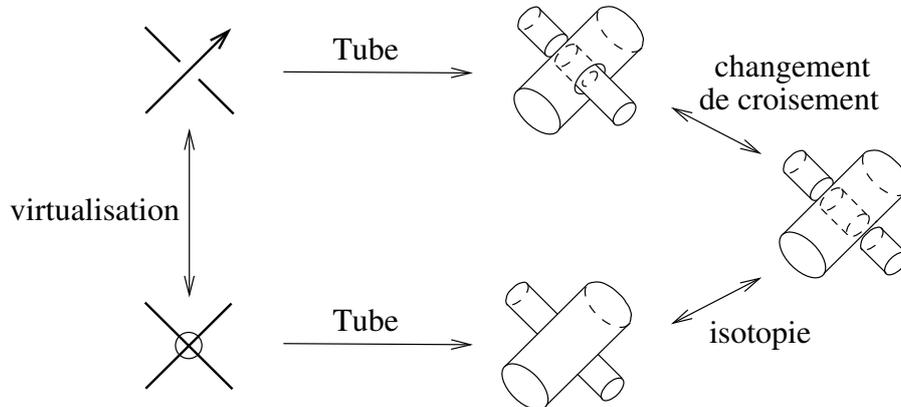
où $L_{S'}$ est la surface obtenue de L en changeant tous les cercles de croisements de S' .

Cet invariant est de type fini exactement k lorsqu'il est de type fini au plus k mais pas de type fini au plus $k - 1$.

Comme dit précédemment, cette notion est compatible avec celle donnée dans la section 2.3.2 pour les objets soudés, via l'application Tube.

En effet, supposons qu'un invariant v d'objets soudés s'étend à un invariant $v^{(4)}$ de surfaces de type ruban, dans le sens où $v^{(4)}(\text{Tube}(D)) = v(D)$ pour tout diagramme D – comme les invariants ci-dessus. Si v est un invariant de type fini de degré k , alors il en est de même pour $v^{(4)}$.

En effet, si deux diagrammes soudés diffèrent par un mouvement de virtualisation, alors leurs images par Tube diffèrent précisément par un changement de croisement en un cercle de croisements :



Enfin, nous avons un analogue de la w_k -équivalence pour les surfaces nouées de type ruban.

Tadayuki Watanabe a en effet introduit dans [44] la notion de RC_k -équivalence, et plus généralement un calcul topologique pour les surfaces nouées de type ruban. Ceci lui a permis de montrer que, d'une part, deux surfaces nouées de type ruban qui sont RC_k -équivalentes ont mêmes invariants de type fini de degré

5. Comme rappelé plus haut, une surface nouée de type ruban admet toujours un diagramme dont les seuls croisements sont de tels cercles de points doubles [46].

$< k$, et que la réciproque est vraie pour les sphères nouées de type ruban : deux sphères nouées de type ruban ont mêmes invariants de type fini de degré $< k$ si et seulement s'ils sont RC_k -équivalents.

C'est un analogue, en dimension supérieure, du théorème d'Habiro sur les invariants de Vassiliev des nœuds [16]. Ce résultat est reprouvé dans [32] grâce au calcul de flèches, qui permet aussi de traiter le cas des tores noués de type ruban : deux tores noués de type ruban sont RC_k -équivalents, pour tout $k \geq 1$, et il n'existe donc pas d'invariant de type fini non trivial pour ces objets.

Nous ne rappelons pas la définition (assez technique) de la RC_k -équivalence ici, mais rappelons simplement le fait suivant, facilement prouvé avec [44] : deux entrelacs longs soudés qui sont w_k -équivalents ont des images RC_k -équivalentes par l'application Tube.

Toutes ces propriétés de l'application Tube permettent de transposer directement nos résultats de classification sur les objets soudés à la dimension 4 :

Théorème 2.5.4. *Les propositions suivantes sont équivalentes, pour $k \in \{2; 3\}$:*

1. *Deux enlacements d'anneaux de type ruban L et L' sont RC_k -équivalents.*
2. *Tout invariant ν de type fini de degré $< k$ vérifie $\nu(L) = \nu(L')$.*
3. *Les invariants suivants coïncident pour L et L' :*
 - *Cas $k = 2$: les enlacements soudés μ_{ij} , pour tout couple d'entiers distincts (i, j) .*
 - *Cas $k = 3$: les invariants ci-dessus, ainsi que les invariants de clôture*
 - $\mathcal{I}_{(j,i,k);2}$, pour i, j et k deux à deux distincts tels que $j < k$,
 - $\mathcal{I}_{(\bar{j},i);2}$, $\mathcal{I}_{(j,\bar{i});2}$, $\mathcal{I}_{(i,j);2}$, pour i et j distincts,
 - $\mathcal{I}_{(i);2}$ pour tout i .

Bien entendu, on a également des résultats de forme normale pour la RC_k -équivalence, $k \in \{2; 3\}$, qui sont des analogues stricts des Théorèmes 2.4.10 et 2.4.25 (que nous n'énonceront pas ici).

En outre, *modulo la Conjecture 2.4.35* sur les enlacements soudés à 2 brins, nous avons également un analogue du Théorème 2.4.19, et un énoncé analogue au Corollaire 2.4.39, caractérisant les invariants de type fini de degré < 4 des enlacements de deux anneaux de type ruban par les invariants suivants :

- les invariants de Milnor soudés μ_{12} , μ_{21} , μ_{1121} et μ_{2212} ,
- les invariants de clôture $\mathcal{I}_{(1,2);3}$, $\mathcal{I}_{(2,1);3}$, $\mathcal{I}_{(\bar{2},1);3}$, $\mathcal{I}_{(1);3}$, $\mathcal{I}_{(2);3}$, $\mathcal{I}_{(2,1);2}$, $\mathcal{I}_{(1,\bar{2});2}$, $\mathcal{I}_{(\bar{1},2);2}$, $\mathcal{I}_{(1);2}$, $\mathcal{I}_{(2);2}$.

Annexe I : Les invariants de Milnor des entrelacs longs soudés sont de type fini

Il est connu que les invariants de Milnor des entrelacs longs "classiques" sont des invariants de type fini, au sens de Vassiliev. Ce résultat a été montré par Dror Bar-Natan dans [3]. Xiao Song Lin a montré également cela dans [29]. On va reprendre ici des idées de la démonstration de Dror Bar-Natan pour montrer que les invariants de Milnor des entrelacs longs soudés sont des invariants de type fini au sens de la Section 2.3.2. Concrètement, nous reprenons ici pas à pas les arguments de la section 4 de [3]. Certains détails formels de preuves ne seront pas reproduits, et nous tacherons davantage de mettre en évidence les idées centrales et les points nécessitant une adaptation pour s'appliquer à la théorie soudée.

Soit L un entrelacs long soudé.

La présentation de Wirtinger donne les relations qui existent entre les différents générateurs du groupe soudé $G(L)$. On a déjà vu à la Proposition 2.2.17 que, quitte à quotienter $G(L)$ par un terme de sa suite centrale descendante, on pouvait exprimer les longitudes préférées associées à chaque brin de L comme des mots finis en les images m_1, \dots, m_n des méridiens "du bas" de L . Plus précisément, on sait (voir [1]) que pour tout $k \geq 1$, le groupe $G(L)/G(L)_k$ est isomorphe à F/F_k , où F désigne le groupe libre engendré par m_1, \dots, m_n .

De plus, il est montré dans [1], en utilisant l'application Tube et le théorème de Stallings, que pour tout $k \geq 1$, on a un morphisme de monoïdes

$$\xi : wSL(n) \rightarrow \text{Aut}_C(F/F_k),$$

où $\text{Aut}_C(F/F_k)$ désigne le groupe des automorphismes qui envoient chaque m_i sur un conjugué de lui-même.

Notation 1. Pour tout méridien $m = m_i$ de L , notons $\xi_L(m) \in F/F_k$ l'image de m par l'automorphisme ξ_L .

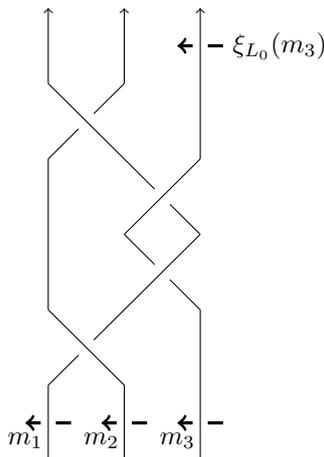
Moralement, si m désigne le méridien "en bas" du i -ème brin de L , alors $\xi_L(m)$ désigne le méridien "en haut" du même brin. Comme vu à la Section 2.2.3, ce $\xi_L(m)$ est le conjugué de m par la i -ème longitude préférée λ_i de L , et les invariants de Milnor sont extraits de cette dernière. L'argument de Dror Bar-Natan qu'on adapte ici consiste essentiellement à analyser ce méridien "en haut" $\xi_L(m)$ pour conclure sur la propriété de type fini des invariants de Milnor. Les premières notations introduites par Dror Bar-Natan dans [3] sont :

Notation 2. On définit sur F deux opérateurs \uparrow et \downarrow de la manière suivante. Pour α et β deux éléments de F , on a :

1. $\alpha \uparrow \beta = \beta^{-1} \alpha \beta$.
2. $\alpha \downarrow \beta = \alpha$.

On utilise la même notation pour les extensions linéaires à $\mathbb{Z}F \times \mathbb{Z}F$.

Exemple 3. Regardons l'entrelacs long L_0 suivant :

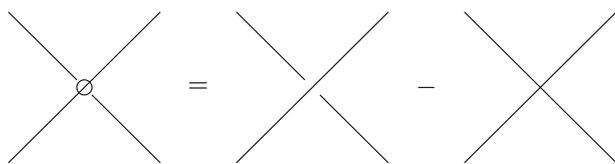


On a : $\xi_{L_0}(m_3) = m_3 \uparrow (m_1 \uparrow m_2^{-1})$.

De même, $\xi_{L_0}(m_1) = (m_1 \uparrow m_2^{-1}) \uparrow (m_3 \uparrow (m_1 \uparrow m_2^{-1}))$.

Être un invariant soudé de type fini signifie s'annuler sur une somme alternée de diagrammes qui diffèrent deux à deux par l'opération de virtualisation. Cela fait donc intervenir un nouveau type de croisement, déjà introduit dans [11], qui "matérialise" ce changement élémentaire.

Définition 4. On appelle croisement semi-virtuel un croisement défini de la manière suivante :



Autrement dit, un croisement semi-virtuel est la différence d'un croisement réel et d'un croisement virtuel.

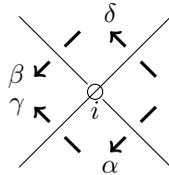
L'idée est la suivante : on veut montrer que les invariants de Milnor soudés sont des invariants soudés de type fini, disons de degré $m - 1$. Cela signifie qu'ils doivent s'annuler lorsqu'on les évalue sur tout entrelacs long soudé à m croisements semi-virtuels. Autrement dit, ils doivent s'annuler sur une "bonne" somme alternée d'entrelacs longs soudés qui diffèrent deux à deux à un croisement, suivant le mouvement de dévirtualisation. Pour cela, on va revenir aux expressions des longueurs préférées, "avant" le calcul du développement de Magnus E . Le fait que l'invariant s'annule sur une différence à un croisement semi-virtuel revient à dire que la différence de l'expression de la longueur préférée avec $\alpha \uparrow \beta$

et de l'expression avec $\alpha \downarrow \beta$ est divisible par α et β . Ce qui implique qu'il n'y a pas de terme de degré inférieur ou égal à 2 dans la partie de ξ_L qui conjugue chaque méridien. Moralement, avoir davantage de croisements semi-virtuels impliquerait ne pas avoir de termes de bas degré, pour un "bas" de plus en plus haut.

Supposons dans la suite que L possède m points semi-virtuels, qu'on numérote de 1 à m . On fixe également un $k > m$ pour toute la suite.

Notre problème est d'étendre la définition de ξ_L à des objets avec des croisements semi-virtuels. On le fait à l'aide de la définition suivante.

Définition 5. *Considérons le i -ème croisement semi-virtuel de L :*



On introduit l'opérateur formel C_i défini sur F associé à ce croisement semi-virtuel de la manière suivante :

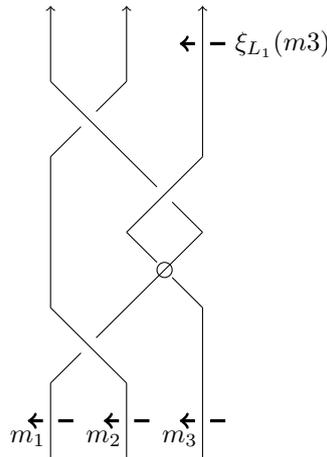
1. $\alpha = \beta C_i \gamma$ et $\beta = \alpha C_i \gamma^{-1}$.
2. $\gamma = \delta$.

On utilise la même notation pour son extension linéaire à $\mathbb{Z}F \times \mathbb{Z}F$.

Remarque 6. *L'idée est que lorsqu'on dévirtualise un croisement semi-virtuel, une des longitudes va être conjuguée et l'autre non. Cet opérateur C_i encode cette information d'une "dévirtualisation future".*

Regardons un exemple concret pour mieux comprendre cette définition.

Exemple 7. *Regardons l'entrelacs long L_1 suivant :*



On a : $\xi_{L_1}(m_3) = m_3 C_1 (m_1 \uparrow m_2^{-1})$.
 De même, $\xi_{L_1}(m_1) = (m_1 \uparrow m_2^{-1}) \uparrow (m_3 C_1 (m_1 \uparrow m_2^{-1}))$.

Lorsqu'on regarde $\xi_L(m)$, l'opérateur C_i apparaît un nombre n_i de fois. Ces opérateurs sont la trace de l'influence potentielle du i -ème croisement semi-virtuel dans la longitude préférée, influence qui apparaît à travers \uparrow et \downarrow . Pour clarifier cette influence, on a envie de trier les dévirtualisations des croisements semi-virtuels.

On va remplacer certaines occurrences de C_i par \uparrow et d'autres par \downarrow . Les premières encodent l'information "L'occurrence correspondante du i -ème croisement semi-virtuel donne une conjugaison (comprendre "a une importance)" tandis que les secondes encodent "L'occurrence correspondante ne donne pas de conjugaison". Pour cela, commençons par différencier les différentes influences de chaque croisement semi-virtuel.

Définition 8. On pose $\overline{\xi}_L(m)$ l'expression obtenue depuis $\xi_L(m)$ en remplaçant la j -ème occurrence de C_i par $C_{i,j}$, pour i entre 1 et m et j entre 1 et n_i .

Considérons maintenant l'hypercube $H = \prod_{i=1}^m [0; n_i[$.

Définition 9. Soit $p = (p_i)_i \in \mathbb{Z}^m \cap \overline{H}$.

On pose T_p l'expression obtenue depuis $\overline{\xi}_L(\lambda)$ en remplaçant $C_{i,j}$ par \uparrow si $j \leq p_i$ et \downarrow sinon.

On pose

$$T(p) = \sum_{\epsilon = (\epsilon_i)_i \in \{0;1\}^m} (-1)^{\sum \epsilon_i} T_{p+\epsilon}.$$

En quelque sorte, T_p correspond au fait, pour chaque croisement semi-virtuels de L , de voir ce dernier comme un croisement classique au niveau des p_i premières occurrences de ce croisement dans $\xi_L(m)$ (et ainsi agir par conjugaison), mais de le voir comme croisement virtuel sur les dernières occurrences.

Les coins de \overline{H} , qui sont les points $p = (p_i)_i \in \{0; n_i\}^m$, correspondent alors à la situation où toutes les occurrences du i croisement semi-virtuels sont vues, soit comme un croisement classique, soit comme un croisement virtuel. Autrement dit, les coins de \overline{H} correspondent au remplacement de chaque croisement semi-virtuel par un croisement classique ou virtuel, et la Définition 4 donne :

Proposition 10.

$$\xi_L(m) = \sum_{p=(p_i)_i \in \{0; n_i\}^m} (-1)^{\sum (1 - \frac{p_i}{n_i})} T_p.$$

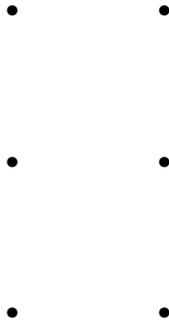
Par un argument de somme télescopique itérée et un raisonnement inductif sur le nombre de croisements semi-virtuels, on peut réécrire ceci comme une somme alternée sur l'ensemble des points entiers de l'hypercube H .

Proposition 11. On a :

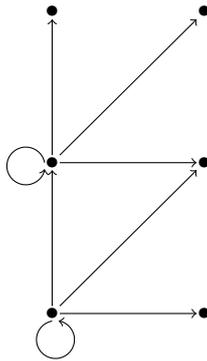
$$\xi_L(m) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^m \cap H} T(p) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^m \cap H} \sum_{\epsilon = (\epsilon_i)_i \in \{0;1\}^m} (-1)^{\sum \epsilon_i} T_{p+\epsilon}.$$

Cet argument de somme télescopique est élémentaire, mais lourd à formaliser, et un exemple très simple permet sans doute avantageusement d'en voir le mécanisme.

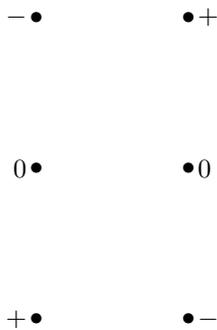
Exemple 12. Supposons $m = 2$, $n_1 = 1$ et $n_2 = 2$. $\overline{H} \cap \mathbb{Z}^2$ est ici de la forme :



Pour comprendre la formule de la Proposition 11, il faut, pour chaque point à coordonnées entières de l'hypercube (qui n'est ici qu'un rectangle), considérer tous les 'chemins autorisés' qui permettent d'y arriver. Et il faut observer que les points qui ne sont pas des coins auront des contributions qui s'annulent, si bien que ne restera que l'expression de $\xi_L(m)$ donnée par la Proposition 10. Le membre de droite de la Proposition 11 affirme que les-dits 'chemins autorisés' doivent, sur le schéma précédent, aller vers la droite, vers le haut ou faire une boucle, et être de longueur au plus 1 dans chaque direction. Cela donne :



Le signe associé à chaque chemin est donné par la longueur de ce chemin : si cette longueur est paire, la puissance de -1 l'est aussi, et le chemin est associé à un signe $+$. Ici, une boucle a longueur 0, une diagonale a longueur 2, et les autres chemins ont longueur 1. Dans le cas contraire, le chemin est associé à un signe $-$. Cela donne, pour chaque point à coordonnées entières de l'hypercube rectangle, les signes suivants :



On obtient bien que seuls les coins de l'hypercube contribuent au terme de droite, et les signes sont bien ceux de la Proposition 10.

On va maintenant proposer une écriture alternative de $T(p)$ qui nous permettra de conclure.

Définition 13. Considérons l'opérateur \star définie sur $F \times F$ de la manière suivante :

$$\lambda_1 \star \lambda_2 = \lambda_1 \uparrow \lambda_2 - \lambda_1.$$

On note encore \star son extension linéaire à $\mathbb{Z}F \times \mathbb{Z}F$.

Cette opération représente la différence de contribution entre le cas où on dévirtualise un croisement semi-virtuel donné de sorte qu'il contribue à la longueur préférée et le cas où il ne contribue pas.

Définition 14. Soit $p = (p_i)_i \in \mathbb{Z}^m \cap \overline{H}$.

On pose $T^\star(p)$ l'expression obtenue depuis $\overline{\xi}_L(m)$ en remplaçant $C_{i,j}$ par \uparrow si $j \leq p_i$, \star si $j = p_i + 1$ et \downarrow sinon.

$T^\star(p)$ représente une sorte de dévirtualisation partielle, où on est en train de se demander quelle résolution on va considérer à la $(p_i + 1)$ -ème occurrence du i -ème croisement semi-virtuel.

Il s'agit à nouveau d'un jeu de réécriture purement formel (mais fastidieux) que de faire l'observation suivante.

Proposition 15. On a :

$$T^\star(p) = T(p).$$

Terminons enfin avec un lemme de structure. On a juste besoin auparavant d'introduire une opération de projection.

Définition 16. Soit A une partie de $\{m_1, \dots, m_n\}$, l'ensemble des générateurs de F .

On pose Π_A l'opérateur linéaire sur $\mathbb{Z}F$ défini en envoyant les éléments de A sur 1.

Lemme 17. Soit M un mot en les lettres $\{m_1, \dots, m_n\}$ et les symboles $^{-1}$, \uparrow , \downarrow et \star , qui fait intervenir chaque générateur m_i au plus une fois et \star un nombre positif de fois, noté m .

Alors il existe $m + 1$ parties non-vides de $\{m_1, \dots, m_n\}$, notées A_i , deux à deux disjointes telles que $\Pi_{A_i}(M) = 0$.

Démonstration. Cela se montre par un raisonnement inductif sur la structure de M .

1. Si M est constitué d'une unique lettre m_i , alors $m = 0$ et on peut prendre $A_1 = \{m_i\}$.
2. Supposons maintenant que $M = (M')^{-1}$, avec M' un mot pour lequel le lemme est vrai (M vérifiant les hypothèses du lemme). Prenons donc les A'_i , pour i allant de 1 à $m' + 1$, obtenus par ce lemme. \star apparaît autant de fois dans M que dans M' . La famille $(A'_i)_i$ est donc une famille suffisamment nombreuse d'ensembles non-vides et deux à deux disjointes. On a $\Pi_{A'_i}(M) = \Pi_{A'_i}(M')^{-1} = 0$. Ce qui donne le résultat escompté.

3. Supposons maintenant que $M = M_1 \uparrow M_2$ ou $M = M_1 \downarrow M_2$, avec M_1 et M_2 deux mots pour lesquels le lemme est vrai. Notons e_j le nombre de \star qui apparaît dans M_j .

Si $e_1 = e_2 = 0$, alors \star n'apparaît pas dans M . On peut donc prendre $A = \{m_1, \dots, m_n\}$.

Sinon, prenons les A_i obtenus par le lemme pour M_1 et les B_i obtenus par le lemme pour M_2 . Posons $(C_i)_i$ la famille obtenue par concaténation des A_i et B_i . Cette famille est de cardinal $e_1 + e_2 + 2$. Les ensembles sont tous bien non-vides. Par linéarité, elle vérifie également le critère d'annulation ($\Pi_{C_i}(M) = 0$). Enfin, ces ensembles sont bien deux à deux disjoints, car sinon cela voudrait dire qu'un m_i au moins apparaît à la fois dans M_1 et M_2 . Un tel m_i apparaît alors 2 fois dans M , ce qui est impossible car M vérifie les hypothèses du lemme.

4. Supposons enfin que $M = M_1 \star M_2$, avec M_1 et M_2 deux mots pour lesquels le lemme est vrai. Notons encore e_j le nombre de \star qui apparaît dans M_j .

Si $e_1 = e_2 = 0$, alors \star apparaît une fois dans m . Prenons A_1 l'ensemble de tous les générateurs m_i qui apparaissent dans M_1 et A_2 celui de tous les générateurs qui apparaissent dans M_2 . Ces deux ensembles sont bien non-vides et disjoints, comme dans le point précédent. De plus, comme $1 \star \lambda = \lambda \star 1 = 0$ pour tout mot λ , cette famille vérifie bien le critère d'annulation.

Si $e_1 \neq 0 \neq e_2$, on peut effectuer la même construction que dans le point 3 précédent.

Enfin, si $e_1 \neq 0 = e_2$, prenons A_1 la famille d'ensembles donnée par le lemme pour M_1 . Ajoutons à cette famille l'ensemble des générateurs qui apparaissent dans M_2 . Cette nouvelle famille vérifie tous les critères.

Le procédé est le même dans le cas $e_2 \neq 0 = e_1$.

Ce qui conclut la récurrence. \square

On peut donc maintenant établir le résultat principal de cette annexe, à savoir le Théorème 2.3.11 du Chapitre 2 de cette thèse :

Théorème 18. *Les invariants de Milnor soudés sont des invariants d'entrelacs longs soudés de type fini.*

Plus précisément, pour toute suite I de $k \geq 2$ indices pris dans $\{1, \dots, n\}$, l'invariant de Milnor soudé μ_I est un invariant de type fini de degré $k - 1$.

Démonstration. Comme précédemment, on considère un entrelacs soudé L ayant m croisements semi-virtuels. On va d'abord montrer que, pour tout méridien $x \in \{m_1, \dots, m_n\}$, la partie de degré $\leq m$ de $E(\xi_L(x))$ est nulle.

D'après les Propositions 11 et 15, il suffit de montrer que la partie de degré m de $E(T^*(p))$ est nulle pour tout p . On observe que, par construction, l'opération \star apparaît m fois dans l'expression $T^*(p)$.

De deux choses l'une :

1. Supposons tout d'abord que chaque méridien m_i apparaît au plus 1 fois dans l'expression $T^*(p)$. D'après le Lemme 17, il existe $m + 1$ ensembles A_i non-vides et deux à deux disjoints, qui vérifient $\Pi_{A_i}(T^*(p)) = 0$. Chaque monôme de $E(T^*(p))$ contient alors au moins 1 fois un générateur donné de chaque A_i , et est par conséquent de degré au moins $m + 1$. La partie de degré $\leq m$ de $E(T^*(p))$ est donc nulle.

2. Sinon, l'expression $T^*(p)$ contient des répétitions, c'est-à-dire que certains méridiens m_i apparaissent plusieurs fois. Dans ce cas, remplaçons $E(T^*(p))$ par une nouvelle expression T obtenue de la façon suivante : on remplace chaque méridien par un nouveau générateur formel, de sorte que chaque générateur apparaisse exactement 1 fois dans l'expression T (étant entendu que l'on adjoit des relations d'égalité entre certains de ces nouveaux générateurs, correspondant aux répétitions dans $T^*(p)$). D'après le point précédent, la partie de degré $\leq m$ de $E(T)$ est nulle. Or cette propriété d'annulation reste vraie lorsqu'on applique les relations d'égalité entre les générateurs formels pour revenir à $E(T^*(p))$.

On a donc montré que, pour tout méridien m_i , la partie de degré $\leq m$ de $E(\xi_L(m_i))$ est nulle.

Maintenant, comme expliqué en début d'annexe, $\xi_L(m_i)$ désigne l'action de l'automorphisme $\xi(L)$ sur le méridien m_i , qui est la conjugaison par la i -ème longitude préférée λ_i de L . Cette définition est valide dans le cas d'un entrelacs long soudé L . Mais elle s'étend par linéarité dans le cas où L contient des croisements semi-virtuels, comme suit.

Si L contient m croisements semi-virtuels, alors par la définition même de ces croisements, L s'écrit comme une somme alternée formelle de 2^m entrelacs longs soudés, qui correspondent aux coins p de l'hypercube \overline{H} considéré dans cet annexe :

$$L = \sum_p (-1)^{\sigma(p)} L(p),$$

où $L(p)$ est l'entrelacs long soudé correspondant au coin $p = (p_i)_i$, vu comme un choix de résolution classique ou virtuel de chaque croisement semi-virtuel, et $\sigma(p)$ est la quantité $\sum_i 1 - \frac{p_i}{n_i}$ comme dans la Proposition 11.

De même, on définit la i -ème longitude préférée de L par la combinaison linéaire formelle :

$$\lambda_i = \sum_p (-1)^{\sigma(p)} \lambda_i(p) \in \mathbb{Z}F,$$

où $\lambda_i(p)$ est la i -ème longitude préférée de $L(p)$.

On définit $E(\lambda_i)$ en étendant linéairement le développement de Magnus.

Soit k le degré des premiers termes non nuls dans $E(\lambda_i)$. Avec la Notation 2.2.19, on a :

$$E(\lambda_i) = \sum_p (-1)^{\sigma(p)} E(\lambda_i(p)) \stackrel{k}{=} \Omega_k,$$

où Ω_k est une somme de monômes de degré k . De même, soit $k' \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\sum_p (-1)^{\sigma(p)} E(\lambda_i(p))^{-1} \stackrel{k'}{=} \Omega_{k'},$$

avec $\Omega_{k'}$ une somme de monômes de degré k' .

Or, puisque

$$\xi_L(m_i) = \sum_p (-1)^{\sigma(p)} \lambda_i(p)^{-1} m_i \lambda_i(p),$$

on a par un même argument que la Proposition 2.2.22 :

$$E(\xi_L(m_i)) \stackrel{\min(k,k')+1}{=} X_i \cdot \Omega_k + \Omega_{k'} \cdot X_i.$$

Ainsi, du fait que la partie de degré $\leq m$ de $E(\xi_L(m_i))$ est nulle, on déduit que la partie de degré $\leq m - 1$ de $E(\lambda_i)$ est nulle.

Supposons par l'absurde qu'il existe un terme non nul Ω_k de degré $k \leq m - 1$ dans $E(\lambda_i)$. Supposons ensuite dans un premier temps que $k < k'$. Dans ce cas, on a :

$$E(\xi_L(m_i)) \stackrel{k+1}{=} X_i \cdot \Omega_k.$$

Ceci implique que Ω_k est nul, ce qui n'est pas possible. Si $k' < k$, le même raisonnement permet d'aboutir à la même contradiction. Enfin, si $k = k'$, alors il suit que $\Omega_k X_i = -X_i \Omega_{k'}$, et il n'est pas difficile de voir que cette égalité implique que $\Omega_k = -\Omega_{k'} = X_i^k$. Mais un tel monôme ne peut pas apparaître dans le développement de Magnus d'une i -ème longitude préférée. En conclusion, tous les invariants de Milnor indexés par une suite de $\leq m$ indices sont nuls, ce qui est la propriété d'annulation désirée. \square

Bibliographie

- [1] B. Audoux, P. Bellingeri, J.-B. Meilhan, and E. Wagner. Homotopy classification of ribbon tubes and welded string links. *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5)*, Vol. XVII :713–761, 2017.
- [2] Benjamin Audoux, Jean-Baptiste Meilhan, and Emmanuel Wagner. On codimension two embeddings up to link-homotopy. *J. Topol.*, 10(4) :1107–1123, 2017.
- [3] Dror Bar-Natan. Vassiliev homotopy string link invariants. *J. Knot Theory Ramifications*, 4(1) :13–32, 1995.
- [4] Dror Bar-Natan and Zsuzsanna Dancso. Finite-type invariants of w -knotted objects. I : w -knots and the Alexander polynomial. *Algebr. Geom. Topol.*, 16(2) :1063–1133, 2016.
- [5] Dror Bar-Natan, Stavros Garoufalidis, Lev Rozansky, and Dylan P. Thurston. Wheels, wheeling, and the Kontsevich integral of the unknot. *Isr. J. Math.*, 119 :217–237, 2000.
- [6] Tara E. Brendle and Allen Hatcher. Configuration spaces of rings and wickets. *Comment. Math. Helv.*, 88(1) :131–162, 2013.
- [7] K. T. Chen, R. H. Fox, and R. C. Lyndon. Free differential calculus. IV : The quotient groups of the lower central series. *Ann. Math. (2)*, 68 :81–95, 1958.
- [8] S. Chmutov, S. Duzhin, and J. Mostovoy. *Introduction to Vassiliev knot invariants*. Cambridge : Cambridge University Press, 2012.
- [9] Ralph H. Fox. Free differential calculus. I : Derivation in the free group ring. *Ann. Math. (2)*, 57 :547–560, 1953.
- [10] Mikhail Goussarov. Finite type invariants and n -equivalence of 3-manifolds. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 329(6) :517–522, 1999.
- [11] Mikhail Goussarov, Michael Polyak, and Oleg Viro. Finite-type invariants of classical and virtual knots. *Topology*, 39(5) :1045–1068, 2000.
- [12] L. Guillou and A. Marin. Notes sur l’invariant de Casson des sphères d’homologie de dimension trois. *Enseign. Math. (2)*, 38(3-4) :233–290, 1992. With an appendix by Christine Lescop.
- [13] M. Gusarov. On n -equivalence of knots and invariants of finite degree. In *Topology of manifolds and varieties. Transl. ed. by A. B. Sossinsky*, pages 173–192. Providence, RI : American Mathematical Society, 1994.
- [14] Nathan Habegger and Anna Beliakova. The Casson-Walker-Lescop invariant as a quantum 3-manifold invariant. *J. Knot Theory Ramifications*, 9(4) :459–470, 2000.

- [15] Nathan Habegger and Gregor Masbaum. The Kontsevich integral and Milnor’s invariants. *Topology*, 39(6) :1253–1289, 2000.
- [16] Kazuo Habiro. Claspers and finite type invariants of links. *Geom. Topol.*, 4 :1–83 (electronic), 2000.
- [17] Kazuo Habiro, Taizo Kanenobu, and Akiko Shima. Finite type invariants of Ribbon 2-knots. In *Low dimensional topology. Proceedings of a conference, Funchal, Madeira, Portugal, January 12–17, 1998*, pages 187–196. Providence, RI : American Mathematical Society, 1999.
- [18] Kazuo Habiro and Akiko Shima. Finite type invariants of ribbon 2-knots. II. *Topology Appl.*, 111(3) :265–287, 2001.
- [19] Atsushi Ichimori and Taizo Kanenobu. Ribbon torus knots presented by virtual knots with up to four crossings. *J. Knot Theory Ramifications*, 21(13) :1240005, 30, 2012.
- [20] Jeff Johannes. The Casson-Walker-Lescop invariant and link invariants. *J. Knot Theory Ramifications*, 14(4) :425–433, 2005.
- [21] T. Kanenobu and A. Shima. Two filtrations of ribbon 2-knots. *Topology Appl.*, 121 :143–168, 2002.
- [22] Louis H. Kauffman. Virtual knot theory. *Eur. J. Comb.*, 20(7) :663–690, 1999.
- [23] Paul Kirk and Charles Livingston. Vassiliev invariants of two component links and the Casson-Walker invariant. *Topology*, 36(6) :1333–1353, 1997.
- [24] Maxim Kontsevich. Vassiliev’s knot invariants. In *I. M. Gelfand seminar. Part 2 : Papers of the Gelfand seminar in functional analysis held at Moscow University, Russia, September 1993*, pages 137–150. Providence, RI : American Mathematical Society, 1993.
- [25] Thang Q. T. Le, Hitoshi Murakami, Jun Murakami, and Tomotada Ohtsuki. A three-manifold invariant derived from the universal vassiliev-kontsevich invariant. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 71(6) :125–127, 1995.
- [26] Thang T. Q. Le, Jun Murakami, and Tomotada Ohtsuki. On a universal perturbative invariant of 3-manifolds. *Topology*, 37(3) :539–574, 1998.
- [27] Tu Quoc Thang Le and Jun Murakami. The universal Vassiliev-Kontsevich invariant for framed oriented links. *Compos. Math.*, 102(1) :41–64, 1996.
- [28] Christine Lescop. *Global surgery formula for the Casson-Walker invariant*. Princeton, NJ : Princeton Univ. Press, 1996.
- [29] Xiao-Song Lin. Power series expansions and invariants of links. In *Geometric topology (Athens, GA, 1993)*, volume 2 of *AMS/IP Stud. Adv. Math.*, pages 184–202. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [30] Sergei Matveev and Michael Polyak. A simple formula for the Casson-Walker invariant. *J. Knot Theory Ramifications*, 18(6) :841–864, 2009.
- [31] Jean-Baptiste Meilhan. Borromean surgery formula for the Casson invariant. *Algebr. Geom. Topol.*, 8(2) :787–801, 2008.
- [32] Jean-Baptiste Meilhan and Akira Yasuhara. Arrow calculus for welded and classical links. *Algebr. Geom. Topol.*, 19(1) :397–456, 2019.
- [33] John W. Milnor. Link groups. *Ann. Math. (2)*, 59 :177–195, 1954.

- [34] Haruko A. MIYAZAWA, Kodai WADA, and Akira YASUHARA. Milnor invariants, $2n$ -moves and v^n -moves for welded string links. *Tokyo Journal of Mathematics*, Jul 2020.
- [35] Tomotada Ohtsuki. *Quantum invariants. A study of knots, 3-manifolds, and their sets*. Singapore : World Scientific, 2002.
- [36] Miyuki Okamoto. Vassiliev invariants of type 4 for algebraically split links. *Kobe J. Math.*, 14(2) :145–196, 1997.
- [37] Miyuki Okamoto. On Vassiliev invariants for algebraically split links. *J. Knot Theory Ramifications*, 7(6) :807–835, 1998.
- [38] Dale Rolfsen. *Knots and links*. Mathematical Lecture Series. 7. Berkeley, Ca. : Publish or Perish, Inc. 439 p. \$ 15.75 (1976)., 1976.
- [39] Shin Satoh. Virtual knot presentation of ribbon torus-knots. *J. Knot Theory Ramifications*, 9(4) :531–542, 2000.
- [40] N. Saveliev. *Lectures on the topology of 3-manifolds. An introduction to the Casson invariant*. Berlin : Walter de Gruyter, 1999.
- [41] Thang Tu Quoc Le, Hitoshi Murakami, Jun Murakami, and Tomotada Ohtsuki. A three-manifold invariant via the Kontsevich integral. *Osaka J. Math.*, 36(2) :365–395, 1999.
- [42] V. A. Vassiliev. Cohomology of knot spaces. In *Theory of singularities and its applications*, volume 1 of *Adv. Soviet Math.*, pages 23–69. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.
- [43] Kevin Walker. An extension of Casson’s invariant to rational homology spheres. *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.*, 22(2) :261–267, 1990.
- [44] Tadayuki Watanabe. Clasper-moves among ribbon 2-knots characterizing their finite type invariants. *J. Knot Theory Ramifications*, 15(9) :1163–1199, 2006.
- [45] T. Yajima. On the fundamental groups of knotted 2-manifolds in the 4-space. *J. Math. Osaka City Univ.*, 13 :63–71, 1962.
- [46] Takeshi Yajima. On simply knotted spheres in R^4 . *Osaka J. Math.*, 1 :133–152, 1964.