



**HAL**  
open science

# Modeling the effective behavior of heterogeneous, viscoelastic, nonlinear and aging media; application to the simulation of MOX fuel behavior

Mohamed El Bachir Seck

► **To cite this version:**

Mohamed El Bachir Seck. Modeling the effective behavior of heterogeneous, viscoelastic, nonlinear and aging media; application to the simulation of MOX fuel behavior. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Aix-Marseille Université, 2018. Français. NNT: . tel-03330154

**HAL Id: tel-03330154**

**<https://theses.hal.science/tel-03330154>**

Submitted on 31 Aug 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE présentée pour l'obtention du grade  
de DOCTEUR de l'Université d'Aix-Marseille  
Sciences pour l'ingénieur, spécialité mécanique des solides

**Modélisation du comportement effectif de milieux  
hétérogènes, viscoélastiques, non linéaires et vieillissants ;  
application à la simulation du comportement des  
combustibles MOX**

par

**Mohamed El Bachir SECK**

Soutenue le 11 Octobre 2018, devant le jury composé de

Amna REKIK	Université d'Orléans	Rapporteuse
Florence DINZART	Institut de sciences de l'ingénierie et des systèmes	Rapporteuse
Pierre GILORMINI	Arts et Métiers ParisTech - CER de Paris	Examineur
Martin LEVESQUE	Polytechnique de Montréal	Examineur
Mihai GĂRĂJEU	Université d'Aix-Marseille	Directeur de thèse
Renaud MASSON	CEA CADARACHE	Codirecteur de thèse
Rodrigue LARGENTON	EDF R&D	Membre invité

Recherches effectuées au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA), Marseille,  
et au Département d'étude des combustibles - CEA CADARACHE



---

# Remerciements

---

## Mes remerciements à :

Mes directeurs de thèse Mihail GĂRĂJEU et Renaud MASSON pour avoir bien voulu diriger ce travail. Je ne saurais trouver assez de mots forts pour vous exprimer toute ma profonde gratitude. Malgré vos multitudes charges sociales, scolaires et professionnelles, vous avez pu donner le meilleur de vous-même pour toujours m'accompagner dans mes recherches scientifiques. Vous êtes des personnes de conviction et vos conseils ont suscité en moi la persévérance et l'abnégation dans le travail. Vous avez été attentifs à mes différentes sollicitations. Je vous remercie de tout mon cœur pour vos soutiens.

Mesdames Amna REKIK et Florence DINZART pour avoir accepté d'être rapporteuses de mes travaux de recherche. J'en profite également pour remercier Messieurs Pierre GILORMINI des Arts et Métiers ParisTech, Martin LEVESQUE de l'école Polytechnique de Montréal et Rodrigues LARGENTON ingénieur chercheur à EDF, de l'honneur que vous me faites en acceptant de participer à ce jury.

A l'ensemble des membres du département d'étude des combustibles de Cadarache et du laboratoire LMA de Marseille, pour m'avoir accueilli et accompagné dans cette aventure. Je profite de cette occasion pour prononcer un mot de gratitude à l'égard de Pierre SUQUET, Hervé MOULINEC et Jean Claude MICHEL, pour leur disponibilité. Je tiens à remercier aussi tous ceux qui, de près ou de loin, m'ont soutenu dans la préparation de ce mémoire. Une vive dédicace à mes parents Mohamed El Hady SECK et Khoudia Ndaw DIOUF pour vos soutiens incommensurables, vos conseils ont été d'un grand secours au long de cette préparation de mémoire. Veuillez trouver dans ce modeste travail ma reconnaissance pour tous vos efforts et sacrifices.

A mes frères, plus particulièrement à Mohamed El Moctar SECK pour son soutien inconditionnel durant toutes ces années. Homme de grand cœur, qui est d'une générosité et d'une disponibilité remarquables et qui tient beaucoup aux grandes valeurs familiales. Mes remerciements s'étendent également à toute ma famille (oncles, tantes, cousins, cousines, etc).



---

## Résumé

---

La prévision du comportement mécanique macroscopique de matériaux hétérogènes à partir des propriétés de leurs constituants est possible pour diverses classes de comportement (élastique, viscoélastique, etc) et ce, grâce à la théorie de l'homogénéisation. Néanmoins l'extension de cette théorie pour des matériaux possédant un comportement viscoélastique non linéaire (ou élasto-viscoplastique) reste une question ouverte à laquelle nous nous attaquons dans ce travail afin de prédire le comportement macroscopique des combustibles oxydes mixtes Uranium-Plutonium (MOX) utilisés dans les réacteurs nucléaires à eau sous pression (REP) français. Ce combustible MOX ressemble à un composite à trois phases constitué d'une phase matricielle à teneur modérée en plutonium dans laquelle sont répartis des amas plutonifères et des amas uranifères. Le comportement mécanique de ces combustibles sous irradiation s'apparente à un comportement viscoélastique non linéaire avec des dilatations différentielles dans les phases induites par l'irradiation.

Dans un premier temps, une approche purement analytique, basée sur le modèle de la sphère composite, est proposée dans le but d'évaluer les champs locaux ainsi que les propriétés effectives de microstructures biphasées sous chargement isotrope caractérisées par de faibles fractions volumiques d'inclusions ( $\leq 30\%$ ). Ce chargement est représentatif des gonflements différentiels apparaissant avec l'irradiation dans les combustibles MOX. Les résultats obtenus avec ce modèle sont proches de ceux dérivant de calculs en champs complets et montre clairement que la distribution de la contrainte équivalente est le moteur des phénomènes de relaxation qui se produisent au sein de la microstructure. Cependant, le champ d'application de ce modèle reste limité à des chargements particuliers (isotropes).

Afin de construire un modèle à l'échelle macroscopique valable quel que soit le chargement, la méthodologie proposée consiste à linéariser la relation (non linéaire) liant la vitesse de déformation visqueuse à la contrainte. Les propriétés linéarisées sont choisies uniformes par phase et calculées pour des états de contrainte de référence attachés à chacune des phases de façon à obtenir un problème linéaire viscoélastique pour lequel on dispose de méthodes d'estimations (approche par variables internes équivalente aux résultats obtenus avec le principe de correspondance). En utilisant différentes méthodes de linéarisation (Sécante, Affine) ainsi que différentes quantités de référence par phase autour desquelles est effectuée cette linéarisation, on obtient différentes méthodes d'estimations. Pour un chargement de type gonflements différentiels (cas biphasé), ces différentes estimations sont systématiquement comparées aux solutions de référence établies précédemment. Ces comparaisons montrent que toutes les méthodes basées uniquement sur le premier moment des contraintes conduisent à des prédictions irréalistes. L'utilisation du second moment des contraintes dans la phase matricielle conduit à des estimations qualitativement correctes. Néanmoins, seule une nouvelle approche (appelée Affine améliorée) basée sur une linéarisation affine et l'utilisation des fluctuations des contraintes permet d'obtenir un bon accord quantitatif dans le cas considéré. Des comparaisons avec des calculs en champs complets menés pour des chargements plus généraux ont été également réalisées, études dans lesquelles l'approche sécante modifiée prédit les meilleures estimations comparées

à l'approche affine améliorée.

Enfinement le modèle d'homogénéisation construit avec l'approche sécante modifiée, retenu à l'issue de l'évaluation des différentes approches proposées, est étendu dans le cas de composites à trois phases à l'instar des combustibles MOX puis implémentée dans ALCYONE qui est une application de référence dédiée à la simulation du comportement thermo-mécanique et physico-chimique des crayons combustibles de la filière REP. Les résultats de la simulation numérique (éléments finis en 3D), obtenus avec la loi implémentée, sont par la suite évalués puis validés par comparaison à des données expérimentales obtenues sur combustibles irradiés.

**Mots-clés :** Homogénéisation, comportement effectif, milieux hétérogènes, viscoélasticité non linéaire, vieillissement, combustible MOX.

---

---

# Abstract

---

The prediction of the macroscopic mechanical behavior of heterogeneous materials based on the properties of their constituents is possible for different type of behaviors (elastic, viscoelastic, etc.) thanks to homogenization techniques. Nevertheless, the extension of the existing homogenization theories to nonlinear viscoelastic (or elasto-viscoplastic) behaviors remains an open question. In this work, we want to address this question in order to evaluate the macroscopic mechanical behavior of Mixed Oxides fuels (MOX) used in French nuclear reactors (PWRs). MOX fuels are three-phase composites consisting of high and low Plutonium concentration clusters surrounded by a continuous matrix with an intermediate Plutonium concentration. Under irradiation, the mechanical behavior of these fuels is similar to a nonlinear viscoelastic behavior with differential dilations in the phases.

Firstly, a purely analytical approach, based on the composite sphere model, is proposed in order to evaluate the local fields as well as the effective properties of two-phase microstructures under isotropic loading when the volume fraction of inclusions is low ( $\leq 30\%$ ). This loading is representative of the differential swellings appearing with irradiation in MOX fuels. This analytical model is in excellent agreement with full-field computations and shows that the distribution of the equivalent stress is the driving force of the relaxation phenomena in the microstructure. However, the scope of this model remains limited to specific (isotropic) loadings. To derive a macroscopic model regardless of the loading, the proposed methodology consists in linearizing the (nonlinear) relation between the viscous strain rate and the stress. To obtain a tractable problem, the linearized properties are chosen uniform per phase and are computed for reference stresses per phase in order to obtain a tractable linear viscoelastic problem for which classical homogenization theories are available (internal variables approach equivalent to the results obtained with the correspondence principle). Various methods associated to different choices of the linearization procedure (Secant, Affine) as well as the reference stresses per phases can be obtained. For the particular loading considered above (differential swelling), estimates as predicted by these different methods are systematically compared with the reference solutions (sphere composite model). These comparisons show that all methods based on the first moment of the stress field provides unrealistic estimates. The use of the second moment of the stress in the matrix phase leads to qualitatively correct estimates. Nevertheless, only a new method (called improved Affine) based on an affine linearization and the use of the fluctuations of the stress field yields a good quantitative agreement in the considered situation. Comparisons with full field computations conducted for more general loadings confirm the advantages of the proposed alternative.

Finally, this improved affine model is extended to three-phase composites (MOX fuels) and implemented in ALCYONE which is a reference application dedicated to the simulation of thermo-mechanical and physico-chemical behavior of PWR fuel rods. The results of the numerical simulation (finite elements in 3D), obtained with the implemented law, are then evaluated and validated by comparison with experimental results obtained on irradiated fuels.



**Keywords :** Homogenization, effective behaviour, heterogeneous materials, nonlinear viscoelasticity, aging materials, MOX fuel.

---

---

# Table des figures

---

1.1	Dimensions caractéristiques d'un crayon combustible utilisé dans les REP [1] . . .	29
1.2	Dimensions caractéristiques des pastilles combustible utilisées dans les REP [1]	29
1.3	Principaux phénomènes intervenant dans le crayon combustible sous irradiation [2] . . . . .	30
1.4	Schéma de calcul du couplage multi-physique [3] . . . . .	30
1.5	Schéma de calcul unidimensionnel (1D) du crayon combustible [4] . . . . .	35
1.6	Schéma de calcul tridimensionnelle (3D) du crayon combustible [4] . . . . .	36
1.7	Différentes échelles d'analyse ( $d \ll l \ll L$ ) . . . . .	42
1.8	Représentation d'une hétérogénéité de comportement élastique . . . . .	52
1.9	Linéarisation de type Sécante classique . . . . .	78
1.10	Linéarisation de type sécante modifié . . . . .	79
1.11	Linéarisation de type Affine classique . . . . .	79
1.12	Linéarisation de type second ordre . . . . .	81
1.13	Évolution temporelle de la contrainte moyenne hydrostatique dans l'inclusion . .	85
2.1	Représentation de la microstructure, assemblage des sphères composites de Hashin . . . . .	91
2.2	Sphère composite . . . . .	91
2.3	Modèle de la sphère composite . . . . .	92
2.4	Contrainte équivalente dans la phase matricielle : a) distribution de la contrainte équivalente dans la matrice à différents instants ; b) évolution temporelle de la contrainte équivalente dans la matrice pour différents valeurs de la variable $r$ . . .	107
2.5	Microstructures générées pour a) 1% b) 5% c) 10% et d) 30% avec $256^3$ voxels .	109
2.6	Sensibilité des résultats (second moment normalisé dans la matrice) par rapport à la résolution ( $n = 4$ , $c^{(2)} = 5\%$ ) pour trois microstructures et à différents instants : a) $t = 10^{-6}s$ , b) $t = 5s$ , c) $t = 10s$ , d) $t = 100s$ . . . . .	112
2.7	Évolution de la contrainte moyenne hydrostatique normalisée dans l'inclusion en fonction de $\hat{t}$ : sensibilité du gonflement dans l'inclusion ( $n = 8$ , $c^{(2)} = 10\%$ ). . .	113
2.8	Évolution des premiers et seconds moments normalisés des champs de contrainte par phase en fonction de $\hat{t}$ : comparaison des résultats de la sphère composite aux résultats en champs complets ( $n = 4$ , $c^{(2)} = 10\%$ ). . . . .	113
2.9	Évolution de la contrainte moyenne hydrostatique normalisée dans l'inclusion en fonction de $\hat{t}$ pour différentes fractions volumiques ( $1\% \leq c^{(2)} \leq 30\%$ ). . . . .	114
2.10	Évolution de la contrainte moyenne hydrostatique normalisée dans l'inclusion en fonction de $\hat{t}$ pour différentes non linéarités ( $2 \leq n \leq 8$ ). . . . .	115
2.11	Évolution de la contrainte moyenne hydrostatique normalisée dans l'inclusion et dans la matrice en fonction de $\hat{t}$ pour $n = 10$ , $c^{(2)} = 10\%$ , $c^{(2)} = 30\%$ ; . . . . .	115

2.12	Répartition spatiale de la contrainte équivalente dans la phase matricielle, dans la sphère composite (ligne continue) et autour de l'une des inclusions du VER (barres d'erreur), à différents instants ( $c_2 = 30\%$ , $n = 10$ ) . . . . .	116
3.1	Linéarisation de type Affine amélioré : illustration dans le cas où la contrainte de référence est $\hat{\sigma}_{eq}$ , relation (3.13) . . . . .	124
3.2	Les différentes méthodes de linéarisation dans le cas d'un chargement purement hydrostatique . . . . .	128
3.3	Évolutions temporelles du second moment dans la matrice et des moyennes par phase de la contrainte hydrostatique : comparaison des résultats de la sphère composite aux différentes approches de linéarisation . . . . .	130
3.4	Linéarisation de type Sécante améliorée . . . . .	131
3.5	Évolutions temporelles des premiers moments par phase et du second moment des champs de contrainte dans la matrice : comparaison des résultats issus de calculs FFT aux modèles Sécant modifié et Affine amélioré. . . . .	145
3.6	Évolutions temporelles des premiers moments par phase et du second moment des champs de contrainte dans la matrice pour un cisaillement pur : comparaison des résultats issus de calculs FFT aux approches Sécante modifié et Affine amélioré. . . . .	146
3.7	Évolutions temporelles des contraintes moyennes hydrostatiques par phase et du second moment des champs de contrainte dans la matrice à différentes triaxialités : comparaison des résultats issus de calculs FFT aux modèles Sécant modifié et Affine amélioré. . . . .	150
4.1	Profilométries extérieures de la gaine : comparaison des résultats issus de la simulation numérique aux données expérimentales. . . . .	167
4.2	Evolutions de la puissance linéique et de la température centrale de la pastille combustible en fonction du temps. . . . .	168
4.3	Profilométries des évidements au niveau du plan de symétrie : comparaison des résultats issus de la simulation numérique aux données expérimentales. . . . .	168
4.4	Comparaison des résultats relatifs aux plans de symétrie et de fracturation. . . . .	169

---

## Liste des tableaux

---

1.1	Transformées de Laplace-Carson usuelles . . . . .	65
2.1	Valeurs de $\alpha$ et $\mathcal{F}(t)$ pour différentes situations particulières . . . . .	103



---

# Table des matières

---

<b>Introduction générale</b>	<b>19</b>
<b>1 Rapport bibliographique relatif à la modélisation micro-mécanique du comportement viscoélastique non linéaire du combustible MOX en régime nominal et transitoire</b>	<b>23</b>
I. Introduction . . . . .	26
II. Présentation générale du cadre de l'étude . . . . .	27
1. Modélisation et simulation du crayon combustible . . . . .	28
1.1 Description des crayons combustibles . . . . .	28
1.1.1. La pastille combustible . . . . .	29
1.1.2. La gaine, première barrière de confinement . . . . .	29
1.2 Modélisation multi-physique du crayon combustible . . . . .	30
1.2.1. Outils de modélisation du crayon combustible . . . . .	31
1.2.2. Modélisation du couplage thermique, physico-chimique et mécanique du crayon combustible [5] . . . . .	31
a. Schéma de calcul 1D . . . . .	34
b. Schéma de calcul 3D . . . . .	35
1.2.3. Simulations sous irradiation des évidements des crayons UO <sub>2</sub> . . . . .	36
2. Le combustible MOX, un matériau hétérogène . . . . .	37
2.1 Microstructure du combustible MOX . . . . .	37
2.2 Comportement du combustible MOX sous irradiation . . . . .	38
2.2.1. Densification et gonflement . . . . .	38
2.2.2. Fluage . . . . .	39
2.3 Évolutions des évidements des crayons MOX avec l'irradiation . . . . .	40
3. Homogénéisation des matériaux hétérogènes, notions générales . . . . .	41
3.1 Méthodologie de l'homogénéisation . . . . .	42
3.2 Grandeurs macroscopiques . . . . .	42
3.3 Conditions aux limites . . . . .	42
3.3.1. Condition de chargement en déformations homogènes . . . . .	43
3.3.2. Condition de chargement en contraintes homogènes . . . . .	43
3.3.3. Lemme de Hill-Mandel . . . . .	43
3.4 Condition initiale . . . . .	43
4. Formulation du problème . . . . .	44
5. Conclusions . . . . .	45
III. Résultats en élasticité et thermo-élasticité . . . . .	47
1. Propriétés élastiques effectives . . . . .	48

1.1	Tenseurs de localisation . . . . .	48
1.1.1.	Déformations homogènes au contour . . . . .	48
1.1.2.	Contraintes homogènes au contour . . . . .	48
1.2	Tenseurs de rigidité et de souplesse effectifs . . . . .	49
1.3	Théorème de l'énergie . . . . .	49
1.3.1.	Théorème de l'énergie potentielle . . . . .	50
1.3.2.	Théorème de l'énergie complémentaire . . . . .	50
1.4	Bornes . . . . .	50
1.4.1.	Borne de Voigt . . . . .	50
1.4.2.	Borne de Reuss . . . . .	51
1.4.3.	Bornes de Hashin-Shtrikman . . . . .	51
1.5	Problème de l'inclusion . . . . .	52
1.5.1.	Cas isotrope . . . . .	52
1.5.2.	Extension du problème de l'inclusion dans le cas anisotrope . . . . .	53
1.5.3.	Conclusion . . . . .	54
1.6	Estimation de Mori-Tanaka . . . . .	54
2.	Résultats en Thermo-élasticité . . . . .	56
2.1	Tenseurs de localisation . . . . .	56
2.2	Comportement effectif . . . . .	57
2.3	Théorème de l'énergie . . . . .	57
2.4	Calcul du second moment du champ des contraintes . . . . .	57
2.5	Problème de l'inclusion . . . . .	58
2.6	Estimations de Mori-Tanaka . . . . .	58
2.6.1.	Calcul des champs moyens par phase . . . . .	58
a.	Composites biphasés . . . . .	58
b.	Composites à trois phases . . . . .	59
2.6.2.	Comportement macroscopique . . . . .	61
3.	Conclusions . . . . .	62
IV.	Résultats en thermo-viscoélasticité . . . . .	63
1.	Principe de correspondance de Mandel . . . . .	64
1.1	Transformée de Laplace-Carson . . . . .	64
1.2	Principe de correspondance . . . . .	66
2.	Applications à des composites 2 ou 3 phases représentatifs du combustible MOX (Mori-Tanaka) . . . . .	67
2.1	Comportement macroscopique . . . . .	67
2.1.1.	Principe de superposition de Boltzmann . . . . .	67
2.1.2.	Résultats en thermo-viscoélasticité linéaire . . . . .	67
2.1.3.	Conclusion . . . . .	70
2.2	Champs moyens par phase pour un composite biphasé . . . . .	70
2.2.1.	Moyennes sphériques : . . . . .	70
2.2.2.	Moyennes déviatoriques : . . . . .	71
2.3	Champs moyens par phase pour un composite à trois phases . . . . .	72
2.4	Évolution du second moment dans la matrice . . . . .	73
3.	Extension aux matériaux vieillissants . . . . .	74
4.	Conclusions . . . . .	75
V.	Extension au cas non linéaire . . . . .	76
1.	Comportement décrit par un potentiel . . . . .	77
1.1	Linéarisation sécante (classique et modifiée) . . . . .	77
1.1.1.	Linéarisation sécante classique . . . . .	77

1.1.2.	Linéarisation sécante modifiée . . . . .	78
1.2	Linéarisation affine et Méthode du second-ordre (variante 2002)	79
1.2.1.	Linéarisation affine . . . . .	79
1.2.2.	Méthode du second ordre (variante 2002) et méthode affine modifiée . . . . .	80
1.3	Conclusions . . . . .	82
2.	Comportement décrit par deux potentiels . . . . .	83
2.1	Construction de la loi de comportement viscoélastique linéarisée	83
2.2	Cas des approches sécantes classique et modifiée . . . . .	83
2.3	Comparaison dans un cas particulier de chargement (représentatif du MOX) . . . . .	84
3.	Conclusions . . . . .	85
VI.	Conclusion générale et perspectives . . . . .	86
<b>2</b>	<b>Solutions exactes pour le comportement effectif de composites particulières viscoélastique non linéaire sous chargement isotrope</b>	<b>89</b>
I.	Introduction . . . . .	91
II.	Modèle de la sphère composite . . . . .	92
1.	Comportement effectif . . . . .	94
2.	Rappels de quelques résultats obtenus sur la sphère . . . . .	94
2.1	Solutions purement élastiques . . . . .	94
2.2	Solutions purement visqueuses . . . . .	95
III.	Solutions générales du problème viscoélastique non linéaire . . . . .	97
1.	Équations locales . . . . .	97
2.	Champs mécaniques <b>locaux</b> dans l'inclusion . . . . .	98
3.	Champs mécaniques <b>locaux</b> dans la matrice . . . . .	99
4.	Comportement macroscopique . . . . .	100
5.	Premier et second moments du champ de contrainte . . . . .	101
IV.	Solutions exactes pour des cas particuliers . . . . .	103
1.	Sphère composite avec une compressibilité homogène . . . . .	104
2.	Sphère composite avec une matrice incompressible . . . . .	105
2.1	Essai de relaxation . . . . .	105
2.2	Essai de fluage . . . . .	106
V.	Simulations numériques en champs complets . . . . .	108
1.	Génération aléatoire 3D de VER . . . . .	108
2.	Calculs FFT . . . . .	109
3.	Comparaison des résultats analytiques et numériques . . . . .	110
3.1	Sensibilité à la résolution spatiale . . . . .	111
3.2	Sensibilité à l'intensité du gonflement dans l'inclusion . . . . .	112
3.3	Premiers et seconds moments du champ de contrainte . . . . .	113
3.4	Influence de la fraction volumique inclusionnaire . . . . .	114
3.5	Effet de la non linéarité dans la matrice . . . . .	114
VI.	Conclusion . . . . .	117
<b>3</b>	<b>Homogénéisation en viscoélasticité non linéaire : nouvelles méthodes d'estimation du comportement effectif de composites particulières</b>	<b>119</b>
I.	Introduction . . . . .	121
II.	Composites particulières viscoélastiques non linéaires sous chargement isotrope : améliorations des méthodes "Affine modifié" et "Sécant modifié" . . . . .	122
1.	Présentation du problème . . . . .	122

---



2.	Construction de différentes méthodes d'estimation . . . . .	123
2.1	Schémas considérés . . . . .	123
2.1.1.	Linéarisation sécante . . . . .	123
2.1.2.	Linéarisation affine amélioré . . . . .	124
2.2	Calcul des champs moyens par phase . . . . .	126
2.2.1.	Cas des matériaux non vieillissants . . . . .	126
a.	Cas des approches sécantes . . . . .	126
b.	Cas de l' affine amélioré . . . . .	127
2.2.2.	Extension aux matériaux vieillissants . . . . .	127
2.3	Synthèse . . . . .	128
3.	Comparaison des différentes approches . . . . .	128
3.1	Chargement considéré . . . . .	128
3.2	Déclinaisons des approches proposées pour ce cas de chargement	128
3.3	Résultats . . . . .	130
4.	Conclusion . . . . .	131
III.	Formulation générale de l'approche Affine amélioré . . . . .	132
1.	Cas des matériaux non vieillissants . . . . .	132
1.1	Estimations du comportement effectif . . . . .	132
1.2	Champs moyens par phase pour un composite biphasé . . . . .	135
1.3	Calcul des moyennes par phase pour un composite à trois phases	136
1.3.1.	Moyennes sphériques . . . . .	136
1.3.2.	Moyennes déviatoriques . . . . .	136
1.4	Évolution temporelle du second moment dans la matrice . . . . .	136
2.	Extension aux matériaux vieillissants . . . . .	137
3.	Conclusion . . . . .	137
IV.	Version isotrope de l'approche Affine amélioré . . . . .	138
1.	Cas des matériaux viscoélastiques linéaires non vieillissants (milieu li- néaire de comparaison) . . . . .	139
1.1	Comportement macroscopique . . . . .	139
1.2	Champs moyens par phase pour un composite biphasé . . . . .	141
1.3	Champs moyens par phase pour un composite à trois phases . . . . .	141
1.3.1.	Moyennes sphériques . . . . .	141
1.3.2.	Moyennes déviatoriques . . . . .	141
1.4	Évolution temporelle du second moment dans la matrice . . . . .	143
V.	Comparaisons des modèles par rapport aux simulations . . . . .	144
1.	Chargements purement mécaniques . . . . .	144
1.1	Essai de fluage uniaxial . . . . .	144
1.2	Essai de fluage à différentes triaxialités . . . . .	145
1.2.1.	Chargement purement hydrostatique ( $X = \infty$ ) . . . . .	146
1.2.2.	Cisaillement pur ( $X = 0$ ) . . . . .	146
1.2.3.	Triaxialités intermédiaires . . . . .	147
1.3	Conclusion . . . . .	148
2.	Couplage thermo-mécanique . . . . .	149
3.	Conclusion . . . . .	151
VI.	Conclusions . . . . .	152
4	<b>Simulation du comportement sous irradiation des crayons MOX en régime nominal</b>	<b>155</b>
I.	Introduction . . . . .	157

II.	Intégration numérique et implémentation des lois de comportement mécanique (approches affine améliorée et sécante modifiée) . . . . .	158
1.	Principe général d'intégration d'une loi de comportement dans MFRONT ( <a href="http://tfel.sourceforge.net/">http://tfel.sourceforge.net/</a> ) . . . . .	158
2.	Intégration implicite des systèmes différentiels représentatifs de l'approche Affine amélioré "isotrope" . . . . .	160
2.1	Écriture des équations sous forme incrémentale . . . . .	160
2.1.1.	Moyennes sphériques par phase . . . . .	160
2.1.2.	Moyennes déviatoriques par phase . . . . .	160
2.1.3.	Second moment dans la matrice . . . . .	162
2.2	Le problème non linéaire à résoudre . . . . .	163
2.3	Intégration MFRONT . . . . .	164
3.	Conclusions . . . . .	164
III.	Simulation numérique dans ALCYONE du comportement des crayons MOX en régime nominal . . . . .	165
1.	Objectifs des simulations . . . . .	165
2.	Version des logiciels utilisés . . . . .	165
3.	Comparaison des résultats issus de la simulation numérique aux données expérimentales . . . . .	166
3.1	Profilométries extérieures de la gaine . . . . .	166
3.2	Comblement des évidements . . . . .	167
IV.	Conclusion . . . . .	170
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>171</b>
A	<b>Compléments relatifs à la partie III. du chapitre 1 : Évolutions des moyennes par phase du champ de contrainte</b>	<b>183</b>
1.	Relations générales . . . . .	183
2.	Relations dans le cas isotrope . . . . .	184
B	<b>Compléments relatifs à la partie IV. du chapitre 1 : Évolution temporelle du second moment du champ de contrainte dans la matrice</b>	<b>187</b>
C	<b>Compléments à la partie V. du chapitre 1 : Nouvelle approche de linéarisation de Ponte Castañeda [6]</b>	<b>189</b>
1.	Formulation du problème . . . . .	189
2.	Conditions de stationnarité du potentiel effectif . . . . .	191
D	<b>Compléments relatifs à la partie III. du chapitre 2 : Expressions de <math>\alpha</math> et <math>\mathcal{F}(t)</math> pour les conditions de chargement en déformations et en contraintes</b>	<b>195</b>
E	<b>Compléments relatifs à la partie III. du chapitre 3 : Calcul du tenseur de Hill dans le cas anisotrope</b>	<b>197</b>
F	<b>Annexe F</b>	<b>199</b>
I.	Gonflement effectif déviatorique . . . . .	199
II.	Moyenne du déviateur des contraintes dans la phase matricielle . . . . .	200

---



---

# Introduction générale

---

Développé vers les années 1950, le nucléaire devient la source majoritaire de production d'énergie électrique en France avec 58 réacteurs qui sont répartis dans 18 centrales. Les réacteurs nucléaires utilisent des assemblages de combustibles, chaque assemblage combustible étant composé de crayons combustibles. Ces crayons combustibles qui constituent le cœur d'un réacteur nucléaire sont généralement composés de matériaux métalliques étanches (alliages de zirconium ou zircaloy) dans lesquels sont empilées des pastilles combustibles contenant des matières fissiles qui permettent de produire de l'énergie électrique. Les combustibles les plus répandus sont à base d'uranium plus particulièrement de l'uranium 235 dont la proportion dans l'uranium naturel est très faible (de l'ordre de 0.7%). Or, pour alimenter les réacteurs nucléaires, il faut disposer d'un combustible dont la teneur d'uranium 235 fissile se situe entre 3% et 5%. Pour obtenir cette teneur souhaitée, il faut avoir recours à des procédés d'enrichissement de l'isotope 235 qui sont des opérations techniques onéreuses.

Depuis 1987 un nouveau type de combustible, le MOX (acronyme de Mixed oxide), dont la structure du coût est différente de celle du combustible standard  $\text{UO}_2$ , est utilisé dans les réacteurs à eau pressurisée (REP) afin de produire de l'énergie électrique. L'utilisation de ce combustible est économique car elle permet de réduire le coût d'achat d'uranium et le procédé d'enrichissement en est absent. En effet, ce combustible est fabriqué à partir d'un mélange des poudres de dioxyde d'uranium ( $\text{UO}_2$ ) appauvri et dioxyde de plutonium ( $\text{PuO}_2$ ) provenant des combustibles usés. Il existe deux types de procédés de fabrication du combustible MOX : le procédé MIMAS (MIcronized MASTer blend) et le procédé COCA (CObroyage CAdarache). Les combustibles MOX les plus généralement utilisés en France sont les MIMAS dans lesquels on visualise des hétérogénéités de répartition et de teneur en plutonium différentes à l'échelle de leurs microstructures. Il s'agit d'une zone avec une teneur modérée en plutonium appelée enrobage dans laquelle sont distribuées des amas plutonifères (forte concentration en plutonium) et des amas uranifères (faible concentration en plutonium). Cependant, toutes ces performances remarquables du MOX (réduction du prix de l'uranium naturel, recyclage du plutonium issu du retraitement des combustibles usés, etc), qui sont à l'origine de solutions technologiques innovantes, requièrent une excellente maîtrise de ces matériaux, afin d'aboutir à une bonne conception mais aussi à une optimisation des matériaux utilisés dans les réacteurs nucléaires. Il s'agit donc de bien comprendre leur comportement et plus particulièrement les relations entre leurs propriétés micro-structurales et leurs propriétés à l'échelle macroscopique.

Dans le cadre de cette thèse nous souhaitons développer un modèle micro-mécanique basé sur des microstructures à trois phases de type matrice-inclusions à travers une démarche semi-analytique (approche champs moyen). Ces microstructures, représentatives du combustible MOX, ont un comportement viscoélastique linéaire avec déformations libres pour un fonctionnement en service (régime nominal caractérisé par de faibles niveaux de températures et de contraintes). Néanmoins, en situations incidentelles caractérisées par des niveaux de températures et de contraintes très élevés, le comportement de tels matériaux devient non linéaire. La modélisation du comportement des combustibles MOX en régime nominal étant déjà réalisée, nous cherchons ici à modéliser les effets des hétérogénéités sur les évolutions des contraintes internes mais aussi les effets du fluage thermique apparaissant en situations incidentelles sur le comportement sous irradiation des combustibles MOX.

Le choix de développement d'un modèle semi-analytique que nous privilégions dans cette étude résulte du fait qu'il est plus avantageux à intégrer dans un code de calcul industriel (modèle très rapide en temps de calcul) contrairement aux modèles numériques dont les coûts en temps peuvent s'avérer très exorbitants.

Ce manuscrit de thèse est essentiellement composé de quatre chapitres. Après une étude bibliographique sur les combustibles MOX et sur les méthodes d'homogénéisation mises en œuvre pour certaines classes de comportement (élasticité, viscoélasticité, etc.), les chapitres 2 et 3 sont respectivement dédiés à la résolution du problème viscoélastique non linéaire par une démarche purement analytique et une démarche semi-analytique. Le quatrième chapitre est consacré à la simulation du comportement des combustibles MOX irradiés en réacteur. Enfin, ce travail de thèse s'achève sur une conclusion suivie de quelques perspectives.

Au **chapitre 1**, nous faisons une brève présentation du cadre de l'étude, en commençant par dresser un état de l'art relatif à la modélisation et la simulation du comportement multi-physique du crayon combustible. Cette étape est suivie d'une description du combustible MOX à l'échelle microstructurale ainsi que les phénomènes physico-chimiques qui se produisent au sein d'une telle microstructure lorsqu'elle est irradiée. Puis, les notions générales de changement d'échelle sont abordées avant de passer à la formulation du problème mécanique à l'échelle microscopique. Dans la suite, quelques méthodes d'homogénéisation en élasticité et en thermo-élasticité linéaire sont exposées puis étendues dans le cas d'un comportement viscoélastique linéaire. Enfin, le problème d'homogénéisation en viscoélasticité non linéaire, auquel nous nous intéressons dans ce travail de thèse, est présenté avec différentes approches de linéarisation qui sont revisités dans la littérature.

Dans le **chapitre 2**, la microstructure du combustible MOX qui est un composite à trois phases est approchée à une microstructure biphasée sous chargement isotrope (gonflements différentiels dans les inclusions). Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés aux microstructures caractérisées par de faibles fractions volumiques d'inclusions, situation dans laquelle les interactions entre les inclusions sont faibles de sorte que ces dernières (microstructures) sont modélisées en utilisant le modèle de la sphère composite. Dans cette situation particulière, la résolution du problème local pour un chargement purement isotrope permet d'établir la distribution de la contrainte équivalente de la phase matricielle qui est solution d'une équation intégral-différentielle non linéaire qui ne peut être résolue qu'à travers une méthode numérique. Néanmoins, ce modèle simplifié fournit des solutions purement analytiques pour des microstructures ayant une compressibilité homogène et pour des microstructures avec une matrice incompressible. Par la suite des calculs en champs complets sont menés sur des microstructures plus réalistes afin d'évaluer la pertinence de ce modèle analytique dont le champ d'application reste limité à des chargements purement isotropes.

Dans le **chapitre 3**, nous proposons un modèle d'homogénéisation semi-analytique permettant de prédire les propriétés effectives de matériaux viscoélastiques non linéaires dans le cadre général (microstructures biphasées soumises à un chargement quelconque). Pour résoudre le problème dans ce cas non linéaire, les approches de linéarisation classiques ainsi qu'une nouvelle approche de linéarisation affine améliorée que nous avons développée sont employées afin de ramener le problème viscoélastique non linéaire à un problème viscoélastique linéaire dont des solutions sont déjà mises en œuvre. Les estimations des propriétés effectives, obtenues à travers ces différentes approches de linéarisation, sont évaluées en utilisant des solutions de référence (solution analytique de la sphère composite, calculs en champs complets) pour un chargement de type gonflements différentiels. Cette mise en œuvre des différentes approches proposées est par la suite étendue pour des chargements plus généraux.

Dans le **chapitre 4**, le modèle d'homogénéisation construit avec l'approche sécante modifié, qui s'avère pertinent pour la quasi-totalité des cas de chargement étudiés, est étendu au cas des matériaux à trois phases à l'exemple des combustibles MOX utilisés dans les centrales nucléaires français. La loi homogénéisée obtenue est par la suite implémentée dans ALCYONE au format MFRONT (outil développé au CEA pour définir des lois de comportement mécanique) afin de simuler le comportement des combustibles MOX irradiés en réacteur. L'application ALCYONE est un code de calcul destiné à l'analyse multidimensionnelle des crayons combustibles. Les résultats issus de la simulation numérique sont validés par comparaison à des données expérimentales relatives aux mesures de comblements d'évidements sur combustibles irradiés.



# CHAPITRE 1

---

## Rapport bibliographique relatif à la modélisation micro-mécanique du comportement viscoélastique non linéaire du combustible MOX en régime nominal et transitoire

---

### Résumé du chapitre :

Ce chapitre est une étude bibliographique relative à la modélisation par une démarche d'homogénéisation en champ moyen de milieux hétérogènes présentant un comportement viscoélastique non linéaire et vieillissant (propriétés mécaniques évoluent de manière significative dans le temps) à l'instar du combustible MOX utilisé dans les réacteurs nucléaires français.

Nous verrons (section II.) que le combustible MOX présente une microstructure de type matrice-inclusions constituée d'une phase d'enrobage à teneur modérée en plutonium dans laquelle sont répartis des amas plutonifères et des amas uranifères. Les phases inclusionnaires peuvent être le siège de contractions ou de gonflements différentiels (dilatations thermiques, évolutions physico-chimiques induites par l'irradiation, transformation de phase). Des mécanismes de fluage permettent de relaxer ces contraintes internes mais nous verrons que le fluage thermique reste peu caractérisé sur le MOX vierge. Qualitativement les effets de ce fluage sont en revanche bien « visibles » à l'issue de l'irradiation (comblements des évidements mis en évidence par des examens post-irradiatoires). Le choix porté sur le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka résulte du fait qu'il est bien adapté pour estimer les propriétés effectives de microstructures de type matrice-inclusions. Dans le cas vieillissant, une démarche incrémentale est employée pour prédire le comportement macroscopique du matériau d'étude (le combustible MOX) et les évolutions des premiers et seconds moments.



Des études sur la modélisation du combustible MOX ont été déjà menées dans le cas viscoélastique linéaire. Les lois homogénéisées (cas deux ou trois phases) ont été obtenues en utilisant des théories de l'homogénéisation développées pour des comportements thermoélastique linéaire et thermo-viscoélastique linéaire, théories dont les fondements et les principaux résultats sont rappelés dans les sections III. et IV. de ce rapport bibliographique.

Nous verrons dans la section IV. comment, en associant le principe de correspondance (viscoélasticité) au modèle de Mori-Tanaka (thermo-élasticité), ont été déterminées les propriétés effectives ainsi que les premiers et seconds moments du champ de contrainte dans un matériau hétérogène présentant un comportement thermo-viscoélastique linéaire. Cette loi obtenue par homogénéisation a été intégrée dans le code de simulation du comportement sous irradiation des crayons REP ALCYONE et nous souhaitons dans ce travail améliorer ces estimations pour des comportements non linéaires. Dans cette optique, cet état de l'art a été étendu dans le cas de comportements non linéaires (chapitre V.). Dans le cas où le comportement mécanique est défini par un seul potentiel (déformation élastique négligée), différentes méthodes de linéarisation (approches sécantes et affines) associées à des méthodes variationnelles ont été proposées. La relation entre la vitesse de déformation visqueuse et la contrainte est alors linéarisée autour de quantités de référence par phase qui sont choisies afin de minimiser les erreurs induites par cette linéarisation.

Ces résultats théoriques sont ensuite étendus au cas viscoélastique non linéaire, la linéarisation de la vitesse de déformation visqueuse conduisant à la définition d'un milieu viscoélastique linéaire, problème qui peut être résolu avec les méthodes développées dans le cas linéaire. On obtient ainsi des modèles par linéarisation sécante autour de quantités de référence par phase qui sont soit les moyennes par phase du champ de contrainte (modèle sécant classique), soit le moment d'ordre deux de ce même champ (modèle sécant modifié). Ces modèles sont comparés à une solution de référence obtenue par des calculs en champs complets (calculs éléments finis) dans le cas d'un chargement représentatif du combustible MOX. Seules les estimations obtenues avec le modèle sécant modifié présentent un bon accord qualitatif comparées à la solution de référence mais la cinétique de relaxation reste sous-estimée.

Dans le but d'améliorer les estimations prédites par le modèle sécant modifié, ce travail sera étendu en utilisant d'autres schémas de linéarisation qui ont été récemment proposés par la communauté scientifique sur le sujet. Les résultats seront de nouveau comparés à la solution de référence et à des calculs en champs complets afin d'évaluer la pertinence du modèle développé. Le modèle finalement retenu sera par la suite appliqué à d'autres cas de chargement tandis que les nouvelles lois 2 et 3-phases seront intégrées au format MFRONT dans ALCYONE pour simuler le comportement du combustible MOX (comparaisons calcul-mesure des compléments évidents).

## Sommaire

---

<b>I.</b>	<b>Introduction</b>	<b>26</b>
<b>II.</b>	<b>Présentation générale du cadre de l'étude</b>	<b>27</b>
1.	Modélisation et simulation du crayon combustible	28
2.	Le combustible MOX, un matériau hétérogène	37
3.	Homogénéisation des matériaux hétérogènes, notions générales	41
4.	Formulation du problème	44
5.	Conclusions	45
<b>III.</b>	<b>Résultats en élasticité et thermo-élasticité</b>	<b>47</b>
1.	Propriétés élastiques effectives	48

---

---

2.	Résultats en Thermo-élasticité . . . . .	56
3.	Conclusions . . . . .	62
<b>IV.</b>	<b>Résultats en thermo-viscoélasticité . . . . .</b>	<b>63</b>
1.	Principe de correspondance de Mandel . . . . .	64
2.	Applications à des composites 2 ou 3 phases représentatifs du combustible MOX (Mori-Tanaka) . . . . .	67
3.	Extension aux matériaux vieillissants . . . . .	74
4.	Conclusions . . . . .	75
<b>V.</b>	<b>Extension au cas non linéaire . . . . .</b>	<b>76</b>
1.	Comportement décrit par un potentiel . . . . .	77
2.	Comportement décrit par deux potentiels . . . . .	83
3.	Conclusions . . . . .	85
<b>VI.</b>	<b>Conclusion générale et perspectives . . . . .</b>	<b>86</b>

---

# I. Introduction

Les matériaux usuellement utilisés dans l'industrie (alliages métalliques, composites, céramiques, etc) sont hétérogènes et constitués de phases élémentaires diverses (cristallites, renforts, pores, etc). Leur comportement mécanique dépend des mécanismes se produisant au sein de ces phases (déformations élémentaires), de leur répartition spatiale ainsi que leur morphologie. La description du comportement macroscopique, à l'aide de ces informations, peut-être alors réalisée grâce aux méthodes de changement d'échelle. Ce changement d'échelle qui s'effectue par des opérations de moyenne permet d'estimer le comportement macroscopique des matériaux hétérogènes à partir des propriétés de leurs constituants.

Dans le cadre des études sur la modélisation du comportement des combustibles MOX, un modèle de comportement thermo-mécanique tenant compte de la nature hétérogène des combustibles MOX (interactions mécaniques, gonflements sous irradiation) a été proposé puis développé afin de représenter le comportement de ces combustibles dans les réacteurs à eau sous pression en régime nominal puis en situations transitoires. Les amas plutonifères du MOX étant susceptibles de gonfler nettement plus que les autres phases, on cherche à représenter avec ce modèle de type « champ moyen » (voir [7]) l'effet de ces gonflements différentiels sur les états de contrainte moyens par phase. Et comme ces états de contrainte pilotent (avec la température et l'épuisement) l'intensité du gonflement gazeux dans les différentes phases du matériau, on cherche ainsi à mieux estimer le gonflement de ces combustibles. Grâce à ce modèle, la simulation d'un crayon combustible en régime nominal est effectuée à trois échelles simultanément depuis la version 1.3 d'ALCYONE à savoir : l'échelle du crayon (mètres), l'échelle de quelques pastilles et de la gaine en regard (cm) et enfin l'échelle des phases constituant la microstructure des combustibles MOX (100 microns). Les travaux de thèse entamés en octobre 2015 en collaboration avec le Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA) et Aix-Marseille-Université (AMU) visent à consolider l'extension du modèle proposé dans [7] pour simuler le comportement du crayon combustible en rampes de puissance.

Ce document constitue le rapport bibliographique de la thèse. Dans la première partie de ce document nous faisons un bref état de l'art sur la modélisation et la simulation du comportement multi-physique du crayon combustible. Cet état de l'art sera suivi d'une présentation générale du matériau d'étude considéré (combustible MOX) à savoir la description de sa microstructure ainsi que son comportement sous irradiation. Ainsi nous verrons que la loi de comportement dans les différentes phases du matériau d'étude est de type viscoélastique non linéaire et vieillissante (propriétés mécaniques évoluent de manière significative dans le temps). Dans la deuxième partie de ce document nous passons en revue quelques méthodes d'homogénéisation développées en élasticité linéaire puis l'extension de celles-ci dans le cas thermo-élastique. La troisième partie est consacrée à la modélisation mécanique des matériaux qui ont des propriétés à la fois élastiques et visqueuses (matériaux viscoélastiques et thermo-viscoélastique). La modélisation micro-mécanique pour ces classes de comportement s'effectue sur la base du principe de correspondance de Mandel [8] qui permet de transformer le problème viscoélastique non vieillissant en un problème pseudo-élastique dans l'espace de Laplace-Carson. Pour obtenir les résultats du problème viscoélastique, il convient alors de procéder à l'inverse de la transformée. Dans la quatrième partie, nous présentons différents schémas de linéarisation permettant d'estimer les propriétés effectives du matériau lorsque le comportement des phases est viscoélastique non linéaire (comportement des combustibles MOX en rampe de puissance). Enfin, nous concluons sur les principaux enseignements tirés de cette étude bibliographique puis dégageons les perspectives de ce travail.

## II. Présentation générale du cadre de l'étude

L'industrie nucléaire est la source principale de production d'énergie électrique en France avec une production de 80% au niveau national. Cette production d'énergie, basée sur le principe de la fission nucléaire, s'effectue par l'utilisation de combustible qui peut être de différentes natures (l'oxyde d'uranium naturel enrichi, l'oxyde mixte uranium-plutonium (MOX pour Mixed OXyde fuel)). Le combustible à base d'oxyde d'uranium ( $\text{UO}_2$ ), obtenu à partir de l'uranium naturel issu directement de l'extraction minière, est le combustible le plus utilisé dans les réacteurs nucléaires en France. Les pastilles d'Oxyde d'uranium utilisés dans les réacteurs nucléaires sont empilées dans des tubes en alliage de zirconium (crayons combustibles d'environ quatre mètres) fermés aux deux extrémités. Dans la plupart des réacteurs à eau pressurisée (REP) utilisés dans le parc nucléaire français, la teneur en matière fissile (uranium 235) du combustible à base d'oxyde d'uranium se situe entre 3% et 5% alors que l'uranium naturel provenant de l'extraction minière n'en possède qu'une faible proportion (environ 0.7%). Il est donc nécessaire d'augmenter la concentration en uranium 235 (procédés d'enrichissement) pour obtenir une quantité de matière fissile nécessaire à l'alimentation des réacteurs. Cette opération d'enrichissement de l'uranium, dont le coût économique est important, produit de l'uranium appauvri. Lors de la fission nucléaire, les réacteurs électronucléaires produisent du plutonium en quantités relativement importantes (production annuelle d'une dizaine de tonnes de plutonium). Cette production de matière fissile, qui représente quelques millions de tonnes d'équivalent pétrole, constitue un débouché intéressant pour augmenter le potentiel de production d'énergie des réacteurs nucléaires. C'est pourquoi depuis une trentaine d'années, le combustible MOX est produit dans l'usine MELOX (AREVA) pour limiter la consommation d'uranium naturel en recyclant le plutonium extrait des combustibles usés et en exploitant l'uranium appauvri issu du procédé d'enrichissement. Le recyclage du plutonium présente l'avantage d'économiser les ressources d'uranium naturel (120 tonnes de MOX représentent environ 120 tonnes d'uranium enrichi). Les deux types de combustible peuvent ainsi être exploités simultanément au sein des réacteurs. L'utilisation du combustible MOX en réacteur permet en outre de réduire le volume de déchets radioactifs à long terme. Le parc nucléaire français comporte actuellement 58 réacteurs nucléaires avec 22 réacteurs qui sont autorisés à recevoir du combustible MOX. Depuis 1987, environ 3000 assemblages MOX correspondant à un recyclage d'environ 80 tonnes de plutonium ont été chargés en réacteur, ce qui a permis d'économiser près de 8000 tonnes d'uranium naturel. Par ailleurs, la gestion séparée des assemblages MOX et des assemblages standards (combustibles  $\text{UO}_2$ ) complique l'exploitation des réacteurs de 900 MWe en raison de la différence notable du nombre de cycles d'irradiation et du taux de combustion. En conséquence, une nouvelle gestion du combustible (parité MOX) qui consiste à optimiser l'utilisation du combustible MOX en réacteur avec une teneur en plutonium estimée à 8,65 % a été mise en œuvre par EDF dans le but d'assouplir les contraintes d'exploitation des réacteurs.

Cette section se compose de quatre parties. Tout d'abord, nous allons dresser un état de l'art relatif à la modélisation et la simulation du comportement multi-physique du crayon combustible. Ensuite, nous allons passer à la description de la microstructure du combustible MOX et les phénomènes physico-chimiques (densification, gonflement, fluage) qui apparaissent lors de l'irradiation. Dans la troisième partie, nous allons rappeler les notions générales de changement d'échelle (homogénéisation des matériaux hétérogènes) et nous allons terminer par la formulation du problème mécanique à l'échelle microscopique.

## 1. Modélisation et simulation du crayon combustible

Pour prédire le comportement sous irradiation des éléments combustibles utilisés en réacteur, des outils de simulations numériques (appelés applications au CEA), associés à différentes filières étudiées par le CEA et ses partenaires industriels, ont été développés au sein de la Plateforme Logicielle pour les Éléments Irradiés dans les Assemblages, en Démonstration, en Expérimentation, ou en Service [9] (PLEIADES). Le projet PLEIADES s'articule autour de trois objectifs principaux.

La plateforme PLEIADES fournit des outils génériques pour la modélisation multi-physique avec certaines des applications qui sont couplées à des bases de données (la base de donnée CRACO, par exemple, rassemble l'ensemble des résultats expérimentaux obtenus sur les crayons REP pour l'application ALCYONE). Elle fournit également des outils de prétraitement et de post-traitement (SALOME) avec des interfaces conviviales. La plateforme fournit également une bibliothèque de composants physiques pour la simulation du crayon combustible dans un environnement de développement intégré C++.

Actuellement, six schémas de calcul ont été développés au sein de la plateforme PLEIADES pour la modélisation multi-physique du comportement de l'élément combustible (ALCYONE, CYRANO, MAIA, ATLAS, CELAENO et GERMINAL V2). Ces schémas s'appuient sur une large base de données de validation partagée entre le CEA, EDF et AREVA. En outre, de nouveaux algorithmes de simulation multi-échelle sont en cours de développement pour perfectionner la description du crayon combustible à l'instar du schéma de calcul VER, consacré à la simulation à l'échelle d'un élément volumique pour les analyses des effets de microstructures sur le comportement du combustible.

L'application de référence ALCYONE, que nous allons utiliser dans ce travail de thèse, est dédiée à l'étude du comportement thermo-mécanique et physico-chimique des crayons de la filière des réacteurs à eau sous pression (REP) à travers une analyse multidimensionnelle. En effet, dans l'application ALCYONE, une modélisation unidimensionnelle ainsi qu'une modélisation tridimensionnelle ont été mises en œuvre afin de simuler le comportement d'un crayon combustible, tant du point de vue global que du point de vue local. Le développement du schéma de calcul 1D permet de modéliser le comportement global de l'ensemble d'un crayon combustible contrairement au schéma de calcul 3D qui permet d'estimer le comportement local d'un fragment de pastille.

Dans cette section, nous allons décrire brièvement le crayon combustible des REP. Dans la suite, nous allons aborder la simulation multi-physique du comportement des crayons  $\text{UO}_2$  sous irradiation. Dans cette simulation, la méthode des éléments finis (FEM), associée à différentes représentations spatiales du combustible, est employée. La dernière partie de l'étude est consacrée à la simulation sous irradiation de l'évolution des évidements des crayons  $\text{UO}_2$ .

### 1.1 Description des crayons combustibles

Le crayon combustible utilisé en réacteur est constitué d'un tube de gainage de longueur d'environ 4m (pour un diamètre voisin de 1cm) dans lequel sont empilées des pastilles combustibles. Le matériau de la gaine est un alliage de zirconium, préférentiellement choisi en raison de sa transparence aux neutrons et pour sa résistance à la corrosion. Les premières gaines utilisées en réacteur ont été réalisées en Zircaloy-4 qui est un alliage métallique à base de zirconium (98%), contenant de l'étain (1.5%), du fer (0.2%) et du chrome (0.1%). Cet alliage métallique est de nos jours remplacé par de nouveaux alliages plus résistants à la corrosion à savoir l'alliage Massif-5 comportant du niobium (2.5%).

Outre l'empilement et le tube de gainage, le crayon combustible est fermé hermétiquement par deux bouchons aux extrémités supérieure et inférieure. Il est également primordial de noter que les pastilles et la gaine sont séparés par un espace appelé jeu pastille-gaine. Les crayons combustibles sont regroupés pour former un « assemblage combustible » dans lequel ils sont arrangés en réseau à maille carrée dans une « structure » permettant d'assurer leur tenue mécanique.

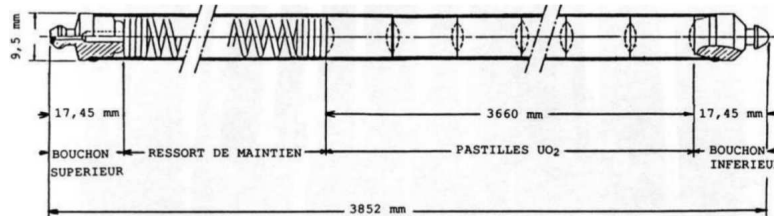


FIGURE 1.1 – Dimensions caractéristiques d'un crayon combustible utilisé dans les REP [1]

### 1.1.1. La pastille combustible

Les pastilles combustibles, empilées dans un crayon REP, ont une géométrie cylindrique de diamètre et de hauteur de l'ordre du centimètre. Cependant il est nécessaire de souligner qu'il ne s'agit pas de cylindres pleins en raison des évidements hémisphériques localisés aux extrémités. Ces évidements sont destinés à compenser la déformation axiale induite par la dilation thermique au centre du combustible, de sorte que les pastilles restent jointives tout le long de l'axe du crayon. En effet, à chaud et sans évidement, étant donné que le centre de la pastille gonfle plus que la périphérie en raison de la température qui est plus élevée à cet endroit, la déformation axiale conduirait à un contact inter-pastilles localisé sur les centres. Les pastilles combustibles sont également « chanfreinées » afin de faciliter leur introduction dans la gaine.

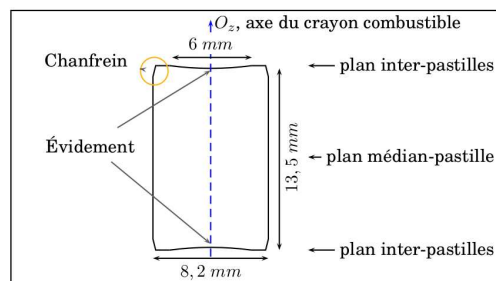


FIGURE 1.2 – Dimensions caractéristiques des pastilles combustible utilisées dans les REP [1]

### 1.1.2. La gaine, première barrière de confinement

La gaine du crayon combustible constitue la première barrière de protection destinée à confiner les produits de fission générés dans le combustible, au cours de son irradiation en réacteur. En effet, l'apparition de défauts d'étanchéité sur la gaine peut induire des conséquences néfastes sur le fonctionnement des réacteurs (transport des produits de fission dans le circuit primaire du réacteur, élévation du niveau général d'irradiation de ce circuit déjà causé par les produits d'activation tels que le cobalt, le chrome etc). Pour parer à d'éventuels risques, l'autorité de sûreté impose au concepteur et à l'exploitant de garantir l'intégrité de la gaine en fonctionnement normal (températures modérés, puissance linéique de l'ordre de 200 W/cm) ainsi que pour les transitoires incidentels (élévation de la température et du gradient thermique) et accidentels (endommagement massif des barrières et relâchement de produits radioactifs). La puissance linéique exprimée en W/cm désigne la puissance produite par le fission au sein du crayon combustible par unité de longueur de crayon. Toutefois, les situations accidentelles ne sont pas considérées dans cette étude.

## 1.2 Modélisation multi-physique du crayon combustible

Dans l'industrie nucléaire, le crayon combustible irradié en réacteur est le siège de nombreux phénomènes fortement couplés (neutroniques, thermiques, physico-chimiques, mécaniques etc). La figure ci-après explicite de façon synthétique et simplifiée les différents phénomènes intervenant dans le combustible lorsqu'il est irradié.

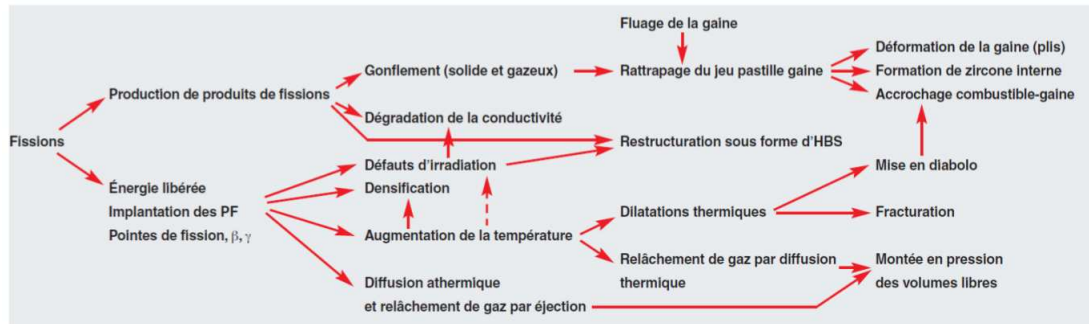


FIGURE 1.3 – Principaux phénomènes intervenant dans le crayon combustible sous irradiation [2]

Les principaux phénomènes à prendre en compte pour la simulation du comportement des crayons combustibles peuvent être classés en deux catégories :

La première catégorie est relative aux phénomènes physico-chimiques (densification, gonflement solide et gonflement gazeux) induits par les produits de fission libérés au sein de la pastille combustible. La deuxième catégorie concerne le phénomène de dilations thermiques induit par l'augmentation de la température. Ces principaux phénomènes de natures diverses, observés lors de l'irradiation, génèrent des contraintes au sein de la pastille combustible. De plus la gaine se contracte par fluage en raison de la différence de pression entre le fluide caloporteur et l'intérieur du combustible, suscitée par le relâchement des produits de fission gazeux dans les volumes libres.

Afin de décrire minutieusement le comportement du crayon combustible en mettant en exergue tous ces phénomènes apparaissant à l'échelle microscopique, une simulation multi-physique a été développée au sein de la plateforme PLEIADES. La résolution de ce problème multi-physique repose sur la méthode de point fixe de type Gauss-Seidel. Le couplage multi-physique s'effectue à travers une boucle de convergence entre les différents problèmes couplés (thermique, physico-chimique et mécanique).

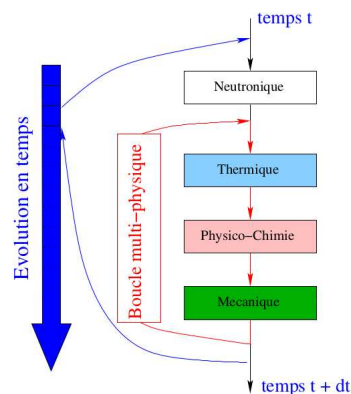


FIGURE 1.4 – Schéma de calcul du couplage multi-physique [3]

### 1.2.1. Outils de modélisation du crayon combustible

L'objectif d'un code de simulation du crayon combustible est de déterminer la température interne et l'état mécanique de la pastille combustible et de la gaine en conditions d'irradiations. Comme expliqué plus haut, le crayon combustible utilisé en réacteur subit plusieurs phénomènes souvent étroitement couplés (comportement multi-physique). Dans le but de simuler le comportement multi-physique du crayon combustible autrement dit de l'interaction mécanique entre la pastille et la gaine, plusieurs codes de calcul, associés à différentes représentations spatiales du crayon, ont été développés.

Les codes de calcul FRAPCON [10], TRANSURANUS [11] et ENIGMA [12] ont été initialement développés pour simuler le comportement du crayon combustible à travers une géométrie unidimensionnelle 1D et 1.5D (résolution radiale du problème axisymétrique dans lequel le crayon combustible est découpé en tranches axiales), en utilisant la méthode des différences finies. Par la suite, d'autres codes de calcul éléments finis comme FEMAX [13] et CYRANO [14] ont été mis en œuvre pour décrire le comportement des crayons combustibles dans une approche 1,5D.

Dans la modélisation bidimensionnelle (2D), le code de simulation FALCON basé sur la méthode des éléments finis a été développé aux US ([15],[16]) pour modéliser le comportement thermique, mécanique et chimique des crayons sous irradiation. Des codes de simulation 1D (METEOR) et 3D (TOUTATIS) ont été aussi développés et implémentés au sein de la plateforme PLEIADES. Cependant, ces applications sont de nos jours remplacées par l'application ALCYONE qui permet de réaliser une modélisation multidimensionnelle du crayon combustible (1D, 3D mais également 2D). A noter que le code BISON (US) permet également de simuler le comportement d'un crayon en 3D.

La démarche que nous allons utiliser dans la section suivante pour décrire le comportement du crayon combustible est inspirée de l'article Michel et al [5].

### 1.2.2. Modélisation du couplage thermique, physico-chimique et mécanique du crayon combustible [5]

En réacteur, la loi de comportement de la pastille combustible est de nature viscoélastique avec des déformations libres caractéristiques des dilatations thermiques sous l'effet de la température et des phénomènes physico-chimiques (densification, gonflement solide et gonflement gazeux). En régime nominal, le comportement en fluage de la pastille dépend linéairement de la contrainte alors qu'en régime transitoire les niveaux de contraintes et de températures induisent un comportement non linéaire de la pastille. Dans les conditions d'irradiation, la gaine du crayon combustible dont le comportement est viscoplastique est soumise à un chargement en pression (pression externe du circuit primaire et pression interne due au relâchement des produits de fission gazeux).

Ainsi, pour simuler le comportement sous irradiation du crayon combustible, les lois de comportement décrites précédemment doivent être couplées aux conditions de chargement (dilatations thermiques et phénomènes physico-chimiques affectant la pastille combustible et la gaine).

La répartition de la température (problème thermique) à travers l'élément combustible est calculée selon l'équation de la chaleur :

$$\rho \cdot c_p \frac{dT}{dt} = \text{div}(\lambda \text{grad}T) + P_v,$$

où  $\rho$  désigne la masse volumique,  $c_p$  la capacité thermique massique,  $\lambda$  la conductivité thermique et  $P_v$  la puissance thermique volumique (puissance produite par les réactions de fission par unité de volume de combustible). Le transfert de chaleur vers le fluide caloporteur est caractérisé par



une condition relative au flux de la chaleur  $\Phi = h.\Delta T$  où  $h$  est un coefficient constant.

En ce qui concerne le flux de chaleur à travers l'interface pastille-gaine, un coefficient d'échange équivalent est utilisé afin de prendre en compte le transfert de chaleur à travers cette interface. A jeu ouvert, ce transfert se fait par conduction dans la lame gazeuse et rayonnement entre les deux surfaces solides en regard.

Lorsque le jeu est fermé le transfert de chaleur par contact entre le combustible et la gaine est également pris en compte et dépend de la pression de contact pastille-gaine (contact imparfait). Le problème mécanique à résoudre à l'échelle d'une tranche axiale de crayon combustible est donné par le système suivant (jeu ouvert) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \rho g \mathbf{z} = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \quad \text{dans } \Omega \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \frac{1}{3\kappa_e^p(t)} \dot{\sigma}_m(t) \boldsymbol{\delta} + \frac{1}{2\mu_e^p(t)} \dot{\mathbf{s}}(t) + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^p(t) + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0^p(t) + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{fis}}(t) \quad \text{dans } \Omega_p \text{ (pastille)} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \frac{1}{3\kappa_e^g(t)} \dot{\sigma}_m(t) \boldsymbol{\delta} + \frac{1}{2\mu_e^g(t)} \dot{\mathbf{s}}(t) + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^g(t) + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0^g(t) \quad \text{dans } \Omega_g \text{ (gaine)} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{e}_r = p_i(t) \cdot \mathbf{e}_r \quad \text{sur } \partial\Omega_p \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{e}_r = p_e(t) \cdot \mathbf{e}_r \quad \text{sur la paroi externe de la gaine} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{e}_r = p_i(t) \cdot \mathbf{e}_r \quad \text{sur la paroi interne de la gaine} \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{e}_z = F_z^g(t) \cdot \mathbf{e}_z \quad \text{sur les faces supérieure et inférieure de la gaine} \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{e}_z = F_z^p(t) \cdot \mathbf{e}_z \quad \text{sur les faces supérieure et inférieure de la pastille combustible} \end{array} \right.$$

où  $\Omega = \Omega_p \cup \Omega_g$  désigne le domaine occupé par le crayon combustible,  $\boldsymbol{\varepsilon}_v^p$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}_v^g$  sont les déformations visqueuses de la pastille combustible et de la gaine et les scalaires  $(\kappa_e^p, \mu_e^p)$  et  $(\kappa_e^g, \mu_e^g)$  représentent respectivement leurs modules de compressibilité et de cisaillement élastiques. Les champs tensoriels  $\boldsymbol{\varepsilon}_0^p$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}_0^g$  sont des déformations libres caractéristiques des phénomènes physico-chimiques (gonflement et densification) et des dilations thermiques de la pastille combustible et de la gaine. Le terme  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{fis}}$  est une déformation inélastique caractéristique du phénomène de fissuration radiale et transversale de la pastille combustible, dû au fort gradient de température (élévation brusque de la température au centre de la pastille). Les scalaires  $p_e$  et  $p_i$  désignent respectivement les pressions externe (pression du circuit primaire) et interne de la gaine. La pression interne est fixée en début de vie (pressurisation initiale en Helium) puis augmente sous l'effet du relâchement des produits de fission gazeux. Les scalaires  $F_z^p$  et  $F_z^g$  représentent les forces axiales qui s'exercent sur les faces supérieure et inférieure de la pastille et de la gaine. Le problème mécanique relatif à l'interaction pastille-gaine (jeu fermé) est décrit plus loin.

Pour décrire le comportement viscoplastique de la pastille combustible, un modèle de fluage isotrope décomposé en deux termes a été utilisé : le premier terme représente le fluage viscoplastique athermique (fluage induit par l'irradiation) et le second terme caractérise le fluage viscoplastique thermique. Ce dernier est basé sur des tests effectués sur des échantillons non irradiés. La vitesse de fluage thermique est également divisée en deux termes décrivant le fluage primaire et le fluage secondaire. Le fluage secondaire est modélisé avec des contributions liées à deux mécanismes, la diffusion et la montée de dislocation, couplées par une fonction de répartition [17]. Le fluage par diffusion est plus important à faibles contraintes et à basses températures alors que le fluage par dislocation est prépondérant pour des contraintes et des températures élevées. Pour le combustible  $\text{UO}_2$  la loi de fluage caractéristique du comportement

viscoplastique est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_v^{\text{pastille}} &= \dot{\epsilon}_{\text{ath}}(\boldsymbol{\sigma}) + \dot{\epsilon}_{\text{th}}(\boldsymbol{\sigma}, T), \\ \dot{\epsilon}_{\text{th}}(\boldsymbol{\sigma}, T) &= \dot{\epsilon}_{\text{pr}}(\boldsymbol{\sigma}, T) + (1 - \theta) \dot{\epsilon}_{\text{diff}}(\boldsymbol{\sigma}, T) + \dot{\epsilon}_{\text{dislo}}(\boldsymbol{\sigma}, T), \\ \dot{\theta} &= \frac{(\theta - \theta_0)^2}{\tau \theta_0} \quad \text{avec} \quad \theta_0 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \tanh \left[ \frac{\bar{T}(\boldsymbol{\sigma}) - T}{h} \right] \right],\end{aligned}$$

où les champs tensoriels  $\dot{\epsilon}_{\text{pr}}$ ,  $\dot{\epsilon}_{\text{diff}}$  et  $\dot{\epsilon}_{\text{dislo}}$  désignent respectivement les taux de fluage primaire, de diffusion et de dislocation. Le scalaire  $\theta$  représente la fonction de répartition des deux mécanismes du fluage thermique secondaire, les paramètres  $\tau$ ,  $\theta_0$  et  $h$  sont des constantes caractéristiques de ce fluage et  $\bar{T}$  désigne une température de transition. L'évolution dans le temps du matériau, due à l'irradiation, est prise en compte dans le modèle à travers les paramètres du matériau qui évoluent sous l'effet des phénomènes physico-chimiques et de la porosité de la pastille combustible. L'impact de la porosité sur les propriétés mécaniques (propriétés élastiques) de la pastille combustible est pris en compte. A cet égard, la modélisation du comportement effectif de milieux poroviscoplastiques compressibles a été réalisée dans [18] à travers une approche d'homogénéisation. Pour le combustible MOX (REP), la loi de fluage est donnée au paragraphe 2.2.2. Le mécanisme de fissuration du combustible lors de l'irradiation, couplé au comportement viscoplastique, a été aussi modélisé à travers une formulation non unifiée (formulation dans laquelle la déformation inélastique caractéristique du comportement viscoplastique du combustible diffère de celle caractérisant le comportement plastique). Les équations constitutives du modèle de fissuration du combustible et sa validation sont détaillées dans [19].

Le comportement non linéaire de la gaine sous irradiation est également modélisé par une formulation non unifiée couplant différents mécanismes de fluage.

$$\dot{\epsilon}_v^g = A (J_2(\boldsymbol{\sigma}))^{n_p} \exp\left(-\frac{Q_p}{RT}\right) \exp(-B \cdot t) + C (J_2(\boldsymbol{\sigma}))^{n_s} \exp\left(-\frac{Q_s}{RT}\right) \Phi^p,$$

où  $J_2$  désigne le second invariant du tenseur des contraintes déviatoriques,  $\Phi^p$  représente le flux neutronique,  $R$  la constante des gaz parfaits et les paramètres  $A$ ,  $n_p$ ,  $Q_p$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $Q_s$ ,  $n_s$  et  $p$  sont des constantes caractéristiques du matériau. Pour un comportement purement plastique de la gaine, le second invariant obéit à la relation suivante :

$$J_2(\boldsymbol{\sigma} - X) - R_0 \leq 0 \quad \text{avec} \quad X = \frac{2}{3} h \boldsymbol{\epsilon}_p$$

où  $X$  est une contrainte interne associée à l'écroissage cinématique,  $R_0$  désigne la contrainte seuil (limite d'élasticité à partir de laquelle la gaine se déforme de manière plastique), le scalaire  $h$  est une constante du matériau et  $\boldsymbol{\epsilon}_p$  représente sa déformation plastique.

L'augmentation du taux de fluage due à l'effet du flux neutronique  $\Phi$  ( $E > 1\text{MeV}$ ) est prise en compte dans le second terme de la vitesse de déformation de la gaine, qui permet de modéliser le fluage stationnaire. Par contre, l'écroissage induit par l'irradiation est introduit dans le premier terme qui modélise le fluage primaire. Afin de bien évaluer le comportement de la gaine dans toute la plage de chargement simulé, deux ensembles de paramètres caractéristiques du fluage à un niveau de contraintes faibles (irradiation de base) et du fluage à un niveau de contraintes élevées (transitoire de puissance) sont utilisés. Le comportement anisotrope de la gaine, particulièrement significatif pour certains alliages, peut être également pris en compte en utilisant la contrainte équivalente de Hill [20] à la place de la contrainte équivalente de Von Mises  $J_2$ , dans les expressions de la vitesse de déformation de la pastille combustible et de la gaine.

Dans la pastille, la déformation libre  $\epsilon_0^p$  caractéristique des phénomènes physico-chimiques et des dilations thermiques se décompose selon :

$$\dot{\epsilon}_0^p = \dot{\epsilon}_{gs}^D + \dot{\epsilon}_{gg} + \dot{\epsilon}_{th}$$

La déformation  $\epsilon_{th}$  caractérise le phénomène de dilations thermiques sous l'effet de la température ( $\epsilon_{th} = \alpha (T - T_0)$ ),  $T_0$  étant la température à laquelle le matériau est dans son état de référence. Le taux de déformation  $\dot{\epsilon}_{gs}^D$ , relatif au gonflement solide et à la densification, dépend particulièrement du taux de combustion noté BU. Le gonflement solide est lié aux produits de fission solide qui tendent à modifier les dimensions cristallographiques du combustible alors que le processus de densification est le résultat de l'annihilation de petits pores causés par l'énergie d'activation des pics de fission. Le taux de déformation lié à ces phénomènes est supposé sphérique et son évolution temporelle est régie par la relation suivante.

$$\dot{\epsilon}_{gs}^D = f(\text{BU}, \dots) \delta$$

Le comportement des produits de fission gazeux libérés lors de l'irradiation est modélisé par différentes approches : un modèle semi-empirique consacré à la simulation de tests intégraux [21] et un modèle avancé pour l'interprétation détaillée des résultats de laboratoire [22]. Le modèle semi-empirique est actuellement remplacé par le modèle CARACAS dont l'objectif est de proposer une approche continue à la fois dans les conditions nominales que transitoires [23]. Les équations constitutives présentées ici sont simplifiées afin d'illustrer les principaux phénomènes pris en compte dans la simulation du comportement des produits de fission gazeux. Une description complète des équations constitutives utilisées dans le modèle avancé MARGARET de la plateforme PLEIADES peut être trouvée dans [22].

### a. Schéma de calcul 1D

Le schéma de calcul 1D, largement utilisé dans les codes de calcul industriels CYRANO3, est basé sur un découpage axial du crayon en plusieurs tranches dont chacune est susceptible de représenter le comportement moyen de quelques pastilles (un crayon d'environ 200 pastilles est généralement modélisé en 30 tranches). La modélisation unidimensionnelle des crayons combustibles repose sur certaines hypothèses simplificatrices. En effet, chaque tranche possède une symétrie de révolution et est modélisée en déformations planes généralisées, ce qui permet ainsi de simuler le crayon combustible en intégralité tout en déterminant les grandeurs caractéristiques du comportement global à savoir la pression interne, le relâchement des gaz de fission et l'interaction-pastille gaine. Le schéma de calcul 1D permet également de calculer la déformation moyenne du combustible et de la gaine sur une portion axiale considérée du crayon. Ces hypothèses cinématiques imposent des restrictions fortes sur les champ de déplacement admissibles :

$$u(r, \theta, z) \sim u(r) \mathbf{e}_r + \epsilon_{zz} \cdot z \mathbf{e}_z$$

Dans cette modélisation, le rayon externe de la pastille combustible est toujours inférieur au rayon interne de la gaine (condition de non-interprétation entre la pastille et la gaine). De plus, on suppose qu'il y'a une forte interaction lors du contact entre la pastille et la gaine et pour modéliser cette interaction on impose une condition supplémentaire dite de solidarisation.

$$\Delta \epsilon|_{\text{pastille}} = \Delta \epsilon|_{\text{gaine}}$$

où  $\Delta \epsilon|_{\text{pastille}}$  désigne la différence entre la valeur actuelle de la déformation axiale dans le combustible et celle correspondant à l'instant du contact entre la pastille et la gaine.

L'image à gauche représente le découpage du crayon en tranches axiales et celle de droite caractérise l'équivalence entre un élément fini unidimensionnel (1D) et une structure.

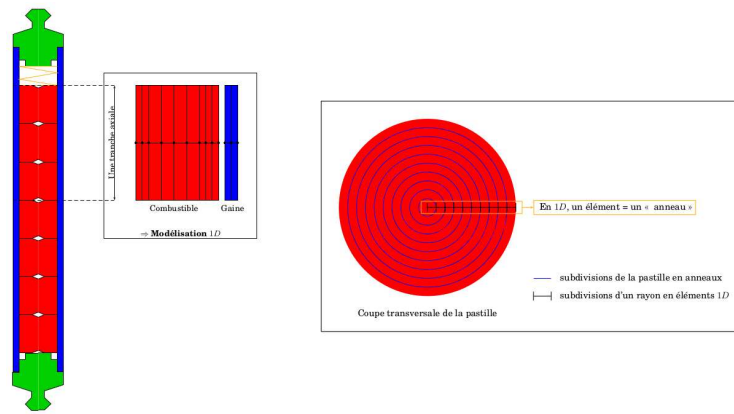


FIGURE 1.5 – Schéma de calcul unidimensionnel (1D) du crayon combustible [4]

### b. Schéma de calcul 3D

A l'inverse du schéma de calcul 1D qui permet de simuler l'ensemble d'un crayon combustible, le schéma de calcul 3D décrit le comportement d'un fragment correspondant à une partie d'une pastille combustible avec l'apparition d'une pré-fracturation lors de la première montée en puissance. La partie du fragment de pastille représenté possède deux plans de symétrie de sorte qu'on représente un quart d'un fragment de pastille combustible, enveloppé de la portion de gaine correspondante. La modélisation tridimensionnelle permet d'avoir accès au comportement local de la pastille. Le schéma de calcul 3D nécessite au préalable une simulation en 1D dans laquelle les valeurs de température, correspondant à la partie extérieure de la partie non oxydée de la gaine, sont extraites. Ces températures sont par la suite imposées sur la paroi externe de la gaine afin de définir les conditions aux limites à cet endroit. Par rapport à une modélisation unidimensionnelle, une modélisation tridimensionnelle doit décrire le comportement orthoradiale du fragment de la pastille combustible. Dans cette optique, deux plans particuliers sont identifiés :

Un plan de symétrie au centre du fragment sur lequel les champs de déplacements normaux sont non nuls, par contre le champ de déplacement orthoradial est pris nul (pas de mouvement) et un plan de symétrie entre le fragment considéré et le fragment adjacent (plan de fracturation) sur lequel une condition de non-interpénétration est imposée.

Le champ de déplacement orthoradial n'ayant pas été négligé dans la modélisation tridimensionnelle, le frottement entre le fragment et la gaine est modélisé à travers un modèle de COULOMB dans lequel l'influence du coefficient de frottement [24] a été analysé par Michel [25]. En effet, le frottement lors de l'interaction entre la pastille combustible et la gaine est d'une importance primordiale en ce qui concerne la concentration de contrainte ou de déformation au niveau de la gaine [26] [24] et sur la fissuration au sein du combustible. Les mesures du coefficient de frottement [27] [28] entre les matériaux combustibles non irradiés et les matériaux en zircaloy se situent généralement entre 0,4 et 0,7 et sont presque indépendantes de la pression de contact, de la température et de l'épaisseur de l'oxyde. L'irradiation peut améliorer le frottement [27] conduisant ainsi à une liaison chimique entre la pastille et la gaine [28], à fort taux de combustion. Dans les descriptions des schémas de calcul en 3D (ALCYONE), le contact unilatéral du système pastille-gaine est évalué par la méthode du multiplicateur lagrangien du code CAST3M, et un modèle Coulomb est introduit pour prendre en compte le phénomène de glissement ou d'adhérence, selon l'équation suivante :

$$v_t = \begin{cases} 0 & \text{si } |F_t| \leq \mu |F_n| \\ -c F_t & \text{si } |F_t| = \mu |F_n| \end{cases},$$

où  $F_t$  et  $F_n$  désignent respectivement les forces tangentielles et normales lors du contact entre la pastille et la gaine,  $v_t$  caractérise la vitesse de glissement,  $\mu$  représente le coefficient de frottement et le paramètre  $c$  est une constante.

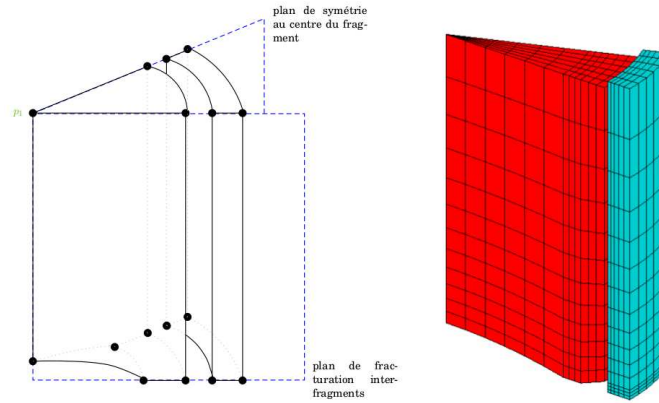


FIGURE 1.6 – Schéma de calcul tridimensionnel (3D) du crayon combustible [4]

La figure à gauche décrit le domaine représentatif du crayon combustible et la figure de droite correspond au maillage qui lui est associé.

### 1.2.3. Simulations sous irradiation des évidements des crayons $\text{UO}_2$

Des simulations numériques sur le comportement du crayon combustible  $\text{UO}_2$  dans des conditions normales ou incidentelles ont été réalisées afin de permettre une meilleure compréhension de l'interaction pastille-gaine [29]. L'objet de l'étude était de proposer une évolution du comportement viscoplastique de la pastille  $\text{UO}_2$  qui prend en compte l'effet du taux de combustion. De plus, des données expérimentales en transitoire de puissance (comblements d'évidement) ont été utilisées afin d'évaluer les résultats issus de la simulation numérique en 3D dans le code de calcul ALCYONE. Les données expérimentales sont des mesures des évidements entre deux pastilles sur une coupe axiale, coupe axiale qui présente l'avantage d'observer une pastille complète au niveau de son plan médian et aussi de pouvoir déterminer les différences de comportement entre les zones d'inter-pastille (IP) et à mi-pastille (MP). Ces mesures, issues des examens post-irradiatoires du combustible, ont permis pour la première fois d'ajuster les paramètres du modèle viscoplastique (fluage thermique).

Pour simuler le comblement des évidements le modèle 3D d'ALCYONE a été utilisé. Dans ce modèle, les évidements et la condition de surface libre associée sont naturellement représentés. Les lois d'évolution du fluage de la pastille combustible sont données par les équations de la sous section 1.2.2.(comportement viscoplastique).

Par ailleurs, des données expérimentales obtenues en transitoire de puissance ont été exploitées afin d'évaluer les résultats obtenus par les simulations numériques. Les crayons sont caractérisés par diverses histoires d'irradiation en régime nominal (nombres de cycles, longueur des cycles et puissance de ces cycles) et diverses caractéristiques de rampes de puissance (puissance imposée pendant une période donnée). De plus, les crayons sont répartis en groupes selon la durée du palier à forte puissance : crayons sans temps de maintien, crayons avec un court temps de maintien (moins de 16 mn) et crayons avec un long temps de maintien (plus de 16 mn). Les

données expérimentales obtenues à travers des mesures de la zone vide entre deux pastilles sur une coupe axiale du combustible (comblements d'évidements) ont permis de construire une loi de fluage de la pastille combustible. Ces caractérisations montrent que le comportement visco-plastique du combustible a un impact sur la déformation au niveau du plan inter-pastille et joue un rôle très important sur l'interaction mécanique entre la pastille combustible et la gaine. Ces mêmes crayons ont été simulés avec ALCYONE 3D et ont montré une surestimation par le calcul du comblement d'évidement mesuré expérimentalement. Comme c'est la loi de fluage du combustible vierge qui est utilisée dans ces calculs, on déduit de ces résultats que l'irradiation a un effet durcissant sur ce fluage. Cette diminution du fluage avec l'irradiation a été représentée empiriquement par un effet du taux de combustion. Dans cette modélisation, l'évolution du scalaire  $\theta$  (défini à la sous section 1.2.2.) en fonction du taux de combustion BU est donnée par l'équation suivante :

$$\theta = \theta_0 \exp(-\beta BU^2),$$

où  $\beta$  est un paramètre ajusté avec les données expérimentales.

## 2. Le combustible MOX, un matériau hétérogène

Dans cette section, nous nous intéressons particulièrement au comportement sous irradiation du combustible MOX. Pour cela, nous commençons par une brève description de la microstructure du combustible MOX et les principaux mécanismes qui apparaissent au cours de l'irradiation.

### 2.1 Microstructure du combustible MOX

Le combustible MOX (Mixed OXyde fuel), utilisé dans les centrales nucléaires, est constitué d'un mélange d'oxyde d'uranium appauvri et d'oxyde de plutonium provenant du traitement des combustibles usés. Le procédé de fabrication du combustible MOX est le procédé MIMAS (MIconization of a MASTer blend)[30], [31] qui comprend deux étapes. La première étape consiste à mélanger la poudre de l'oxyde d'uranium  $UO_2$  appauvri avec la poudre de dioxyde de plutonium  $PuO_2$  issue des combustibles usés pour former un mélange primaire appelé "**mélange mère**". La deuxième étape du procédé est de diluer le "**mélange mère**" obtenu dans de la poudre de dioxyde d'uranium appauvri de façon à obtenir la teneur en plutonium souhaitée. Lors de l'élaboration du combustible MOX, le mélange des poudres peut générer une répartition inhomogène de composés chimiques sous forme d'amas. Les pastilles MOX présentent ainsi une microstructure de type matrice-inclusions, constituée d'une phase d'enrobage à teneur modérée en plutonium (6% à 10% de Pu) dans laquelle sont distribuées des zones à différentes teneurs en plutonium. Ces dernières sont essentiellement composées d'amas plutonifères à forte concentration (25% à 30% de Pu) et d'amas uranifères à faible proportion en plutonium (inférieure à 1% de Pu). La fraction volumique des amas plutonifères est de l'ordre de 10% et celle des amas uranifères de l'ordre de 25% à 30%.

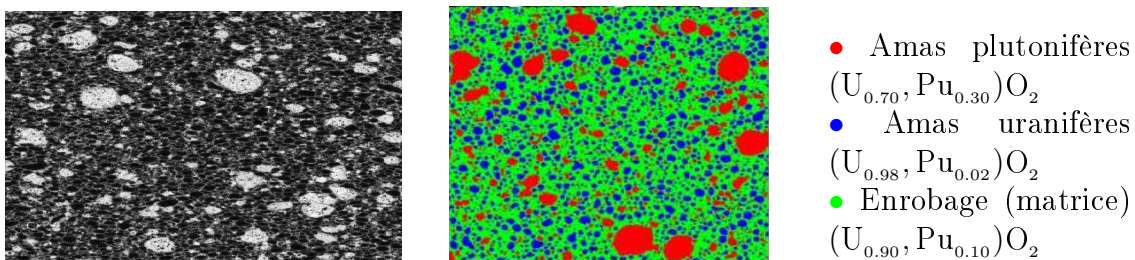


Figure 2 : Combustible MOX, cartographie X du plutonium à la microsonde (à gauche).

A droite : image obtenue par analyse d'images et segmentation en 3 phases (thèse Oudinet, 2003) [32]

L'image de droite est obtenue par traitement de la microstructure MOX, acquise à la microsonde (image de gauche). Ce traitement a été réalisé à travers des logiciels développés par Oudinet [32] comme le logiciel LANTINUM ou ANACONDA. Le logiciel ANACONDA par exemple a permis de détecter les différents constituants du combustible MOX par l'étude de compatibilité statistique en proportion des différentes zones de la cartographie.

## 2.2 Comportement du combustible MOX sous irradiation

Lors de l'irradiation en réacteur plusieurs phénomènes dépendant de la densité de fission locale et de la température se développent au sein des crayons combustibles. Ces phénomènes physico-chimiques et thermomécaniques liés à l'irradiation sont principalement la densification, le gonflement, le relâchement des gaz et produits de fission, le fluage etc. Ces phénomènes jouent sur l'intensité de l'interaction pastille-gaine. C'est pourquoi, afin de garantir l'étanchéité des gaines combustibles, des études doivent être menées afin de mieux appréhender ces phénomènes qui se produisent au sein des crayons combustibles.

### 2.2.1. Densification et gonflement

Lorsque le combustible n'est pas chargé en réacteur (hors irradiation), les propriétés mécaniques (élastiques) et physiques de ses différents constituants sont quasi-similaires et sont donc supposées homogènes [33]. En début d'irradiation, les pastilles combustibles subissent une densification plus ou moins importante due à la disparition progressive des porosités résiduelles créées lors de leur fabrication. Ce phénomène physique suscite une diminution du volume des pastilles et une augmentation temporaire du jeu pastille-gaine. Simultanément le combustible gonfle du fait de l'accumulation des produits de fission. En effet, la création de deux atomes à partir d'un seul noyau lourd induit un gonflement du combustible qui se poursuit tout au long de l'irradiation.

En régime nominal, le gonflement solide est prépondérant car les gaz de fission qui se forment dans ces conditions d'irradiation ne provoquent pas de gonflement significatif. Le gonflement dans ces conditions est de l'ordre de 0.06 à 0.07% par GWj/t. Le taux de combustion, mesuré en GigaWatts par jour par tonne de combustible, représente l'énergie thermique produite par les fissions nucléaires dans une masse de combustible. Le taux de relâchement des gaz de fission (nombre d'atomes relâchés dans le volume libre du crayon rapportée au nombre total d'atomes de gaz produits) à un taux de combustion de 60 GWj/t est d'environ 3% pour un combustible standard et de l'ordre de 6% pour le combustible MOX [2]. Les produits de fission gazeux (xénon et krypton) sont éjectés aux surfaces libres du combustible, par les cascades de déplacements causées par l'implantation d'un produit de fission. Ce mécanisme est en augmentation constante lors de l'irradiation en raison de l'élévation de la teneur en produits de fission gazeux et de l'évolution des surfaces libres. Au delà de 30 GWj/t le taux de relâchement des gaz, qui dépend nettement de la température, augmente plus vite. Les atomes de gaz insolubles se diffusent jusqu'aux joints de grains et leur accumulation donne naissance à des bulles de gaz qui font gonfler le combustible et qui contribuent au relâchement.

Lors d'un transitoire de puissance caractérisé par des niveaux de contraintes et de températures très élevés, le taux de combustion est quasiment constant. En revanche l'augmentation de puissance conduit à une élévation de température provoquant une recrudescence du taux de relâchement et du gonflement gazeux.

Par ailleurs, en raison de la différence de la pression entre le fluide caloporteur et l'intérieur du crayon combustible, la gaine se contracte diamétralement par fluage suscitant ainsi une fermeture progressive du jeu pastille-gaine. Ceci n'a aucune conséquence immédiate lorsque les déformations imposées à la gaine sont de faibles amplitudes. Cependant lors d'une variation de

puissance thermique, le contact entre la gaine et la pastille crée des contraintes mécaniques qui risquent de provoquer la fissuration ou même la rupture de la gaine.

A l'échelle microscopique, la densité de fission dans les amas plutonifères est plus élevée que dans les autres phases (2 à 3 fois supérieure), ce qui induit des phénomènes de densification et de gonflement plus intenses dans ces amas. A l'inverse, ces phénomènes sont ralentis dans les amas uranifères où la densité de fission est moins importante que dans l'enrobage. Avec ces effets, le combustible devient hétérogène vis à vis des champs de contraintes et de déformations au sein du matériau.

### 2.2.2. Fluage

Du point de vue des caractéristiques de fluage, on distingue le fluage d'irradiation qui intervient aux basses températures et sous faible contrainte et le fluage thermique qui apparaît lorsque les niveaux de contraintes et de températures sont plus élevés. Aux températures modérées (régime nominal), le combustible subit également une déformation sous irradiation qui dépend du taux de fission, de la contrainte et de la température [34]. A l'échelle microscopique le fluage induit par l'irradiation est hétérogène. Lors d'une élévation de température et du gradient thermique (régime transitoire), les niveaux de contraintes et de températures dans le cœur de la pastille combustible produisent une déformation supplémentaire appelée par la suite fluage thermique qui s'additionne à la déformation induite par l'irradiation. Le fluage thermique a été caractérisé à travers des essais de compression réalisés à haute température (entre 1300°C et 1700°C) sur des pastilles MOX vierges de type MIMAS (voir [35] et [36]), qui sont décrits ci-après :

- Essais de fluage à charge constante (comprise entre 30 et 80 MPa) dans lesquels les déformations sont mesurées en fonction du temps [37]. Ces essais ont permis d'identifier la loi de fluage thermique macroscopique du MOX MIMAS : (teneur moyenne en Pu égal à 7.2%)

$$\dot{\epsilon}_v^{(th)} = e_0 [\sigma_{eq}]^{(n-1)} \exp\left(-\frac{Q_{th}}{RT}\right) \mathbf{s}$$

où  $\dot{\epsilon}_v^{(th)}$  désigne le fluage thermique,  $\sigma_{eq}$  est la contrainte équivalente en MPa et  $\mathbf{s}$  le déviateur du champ de contrainte. Les valeurs des coefficients  $e_0$ ,  $Q_{th}$  et de la non linéarité  $n$  qui est assez proche de 4 sont données dans [37].

- Essais à vitesse de déformation imposée (vitesse de l'ordre de 9%/h) qui, à l'aide de la mesure de la charge exercée sur la pastille, permet de déterminer la contrainte rationnelle en fonction de la déformation.

Pour déterminer le comportement en fluage thermique des différentes phases du combustible MOX, des essais de compression sur des MOX MIMAS vierges de teneur en plutonium variable, effectués pour des températures comprises entre (1300°C et 1700°C) et des contraintes comprises entre (30 et 80MPa), ont été réalisés.

La loi de fluage thermique bien connue du combustible standard UO<sub>2</sub> [34] est adaptée pour la modélisation du fluage thermique de la phase uranifère du MOX caractérisée par une teneur en plutonium très faible. Les estimations obtenues avec la loi de fluage thermique du combustible standard UO<sub>2</sub>, comparées aux résultats obtenus expérimentalement sur des pastilles de MOX MIMAS 0%, présentent une différence notable pour différentes contraintes imposées. Le MOX MIMAS 0% est un combustible à base d'Oxyde d'uranium (taux de plutonium nul) qui ne diffère du combustible standard UO<sub>2</sub> que par le procédé de fabrication. Pour corriger ces écarts, des paramètres de la loi de fluage ont été ajustés (voir [38]) afin que les estimations soient plus proches des résultats expérimentaux. On obtient ainsi une loi UO<sub>2</sub> adaptée au MIMAS 0%.

La loi de fluage caractéristique de la phase plutonifère du MOX est construite à l'aide de la loi de fluage du MIMAS 0% et en utilisant les résultats expérimentaux obtenus sur les MOX MIMAS



vierges à teneur en plutonium **contrôlée**. Dans le cas des MOX MIMAS 6% et 10%, le comportement effectif du matériau, constitué d'une phase uranifère et d'une phase plutonifère, est obtenu avec le modèle **d'homogénéisation TFA que nous allons présenter à la section V.** (Transformation Field Analysis). En effet les essais de compression, réalisés sur les MOX MIMAS 6% [38], ont permis d'identifier par une méthode inverse la loi de fluage thermique de la phase plutonifère. Cette loi est la même que celle identifiée pour la phase uranifère (loi MIMAS 0%) à un facteur multiplicatif près. Ce résultat est dans un second temps validé en utilisant la loi obtenue sur la phase uranifère (MIMAS 0%) et celle recalée pour la phase plutonifère (MIMAS 6%) afin de simuler les résultats des essais de compression sur le lot MIMAS 10%. Cependant les limites de la méthode TFA utilisée pour prédire le comportement des lots MIMAS 6% et 10% rendent l'utilisation de la loi de fluage plutonifère délicate d'autant plus que la loi proposée ne dépend pas de la teneur en plutonium et semble difficilement extrapolable aux amas plutonifères des MOX industriels (teneur en plutonium nettement plus élevée). A noter pour la suite que cette démarche pourrait être reprise, une fois qu'un modèle plus robuste d'homogénéisation sera établie. C'est l'objet de ce travail de thèse.

Par ailleurs, à l'issue de l'irradiation en réacteur, des examens post-irradiatoires menés sur des crayons MOX ont mis en évidence un comblement partiel des évidements (voir ([39])). Ces évidements hémisphériques sont situés sur les faces inférieure et supérieure des pastilles combustibles avant irradiation et sont destinés à compenser les excès de dilatation du centre pastille lors de l'irradiation. Un comblement partiel de ces évidements résulte d'une déformation inélastique axiale se produisant lors de l'irradiation, déformation inélastique caractéristique du phénomène de fluage thermique. Sur crayons  $UO_2$ , la simulation 3D avec le code crayon REP ALCYONE de la plateforme PLEIADES [9] de ces comblements d'évidement et la comparaison à des données expérimentales ont permis de déterminer par une méthode inverse l'effet de l'irradiation sur le fluage thermique de l' $UO_2$  (voir ([40])). Pour déterminer au premier ordre l'effet de l'irradiation sur le fluage thermique des combustibles MOX, nous proposons donc d'utiliser une démarche similaire mais transposée à la simulation du comportement des crayons MOX et en lien avec les données de comblement d'évidement disponibles pour ce type de combustible.

### 2.3 Évolutions des évidements des crayons MOX avec l'irradiation

Des examens réalisés sur des crayons MOX irradiés en régime nominal montrent un comblement relatif des évidements à l'issue de l'irradiation, phénomène qui n'apparaît pas dans les crayons  $UO_2$  lorsqu'ils sont irradiés. L'apparition du comblement partiel des évidements dans les crayons MOX irradiés en régime nominal est due aux niveaux de températures qui sont significativement plus élevés que dans les combustibles  $UO_2$ .

Les résultats expérimentaux relatifs aux comblements d'évidement des crayons MOX irradiés sont disponibles dans la base de données CRACO. Ces résultats sont issus d'examens métallographiques dans lesquels, des déformations inélastiques caractéristiques du phénomène de fluage thermique ont été visualisées au niveau de chaque pastille. En effet, l'examen globale des zones d'inter-pastilles montre que la géométrie des évidements, des chanfreins et des épaulements entre les pastilles est peu affectée. Les évidements ne sont pas comblés et le **taux de comblement** est déterminé à partir du volume de l'évidement à la fabrication et celui de l'évidement après irradiation.

$$\text{Taux de comblement (3D)} = \frac{V_{\text{fabrication}} - V_{\text{irradiation}}}{V_{\text{fabrication}}}$$

Le taux de comblement des évidements hémisphériques situées sur les faces inférieure et supérieure des crayons décrits ci-dessus est récapitulé dans le tableau qui suit :

Échantillon	Évidement bas (%)	Évidement haut (%)	Comblement moyen 3D (%)
C13 - D3 Bis	12	9.7	10.9
P13 - D3 Bis	11.5	9.4	10.5

Table 1 : Comblement 3D des évidements des crayons C13 et P13

Comme nous l'avons expliqué dans la section précédente, les paramètres du modèle viscoplastique (loi de fluage thermique) du combustible standard  $\text{UO}_2$  ont été ajustés à partir de résultats expérimentaux (mesure de complements d'évidements entre deux pastilles sur une coupe axiale) issus d'examen post-irradiatoires du combustible  $\text{UO}_2$  irradié.

Les simulations numériques qui vont être réalisées dans cette étude sont relatives à la construction de la loi de fluage thermique des crayons MOX irradiés. Pour identifier cette loi de fluage, nous souhaitons ainsi adopter la même démarche que précédemment en utilisant la loi de fluage thermique caractérisée expérimentalement sur le MOX vierge. L'objectif de l'étude est donc de vérifier si la loi de fluage thermique du MOX vierge est bien adaptée pour décrire les déformations inélastiques représentatives des complements d'évidement des crayons MOX irradiés. Nous allons donc dans un premier temps réaliser des simulations numériques avec la loi de fluage thermique du MOX vierge et si les résultats présentent une bonne concordance avec ceux obtenus expérimentalement sur les MOX irradiés alors le modèle viscoplastique (fluage thermique) du combustible MOX vierge sera attribué au combustible MOX irradié. Dans le cas échéant, nous allons ajuster quelques paramètres caractéristiques du modèle viscoplastique du MOX vierge afin de pouvoir construire une loi de fluage thermique bien adaptée à la description du comportement sous irradiation des crayons combustibles MOX.

### 3. Homogénéisation des matériaux hétérogènes, notions générales

La micro-mécanique est une discipline de la mécanique dont l'objectif est de prédire le comportement effectif d'un matériau hétérogène à partir des propriétés de ses constituants. L'élaboration d'une approche micro-mécanique requiert la définition d'un Volume Élémentaire Représentatif (VER) dont la morphologie, la répartition et la taille de ses constituants peuvent influencer sur son comportement macroscopique. Dans cette étude nous supposons que les conditions relatives à la mise en œuvre de l'approche micro-mécanique sont bien satisfaites à savoir :

- La taille caractéristique du VER est suffisamment petite par rapport à la dimension de la structure, pour que l'on puisse considérer cette dernière comme un milieu continu.
- La taille caractéristique du VER est suffisamment grande par rapport aux dimensions des hétérogénéités pour négliger les fluctuations du comportement global d'une particule macroscopique à l'autre.

La taille de la structure considérée, plus précisément la pastille combustible, est de l'ordre de 8 mm de diamètre, ce qui conduit à des tailles de maille pour les analyses éléments finis de l'ordre de 250 microns. Donc  $L=8$  mm tandis que  $l = 250$  microns. La taille des hétérogénéités (amas) est de l'ordre de 50 microns de diamètre en moyenne avec certains amas qui peuvent atteindre une taille de 140 microns (voir [33]). Il y'a donc séparation d'échelle ( $d \ll l \ll L$ ) si on considère des amas de taille de 50 microns.

Néanmoins, le rapport d'échelle entre la dimension du volume élémentaire et la plus grande des inclusions (le diamètre du plus grand amas plutonifère est égal à 140 microns) reste relativement faible (rapport d'échelle de 2.14) et on sort ainsi du cadre de l'homogénéisation. Pour représenter les effets de ces gros amas, une solution adéquate serait de modéliser par éléments finis les gros

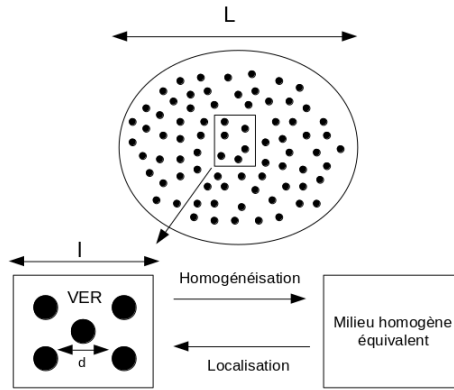


FIGURE 1.7 – Différentes échelles d’analyse ( $d \ll l \ll L$ )

amas à l’échelle de la pastille combustible.

### 3.1 Méthodologie de l’homogénéisation

On distingue généralement trois étapes dans toutes les démarches de modélisation des matériaux hétérogènes. La première étape est celle de la représentation, il s’agit de définir les phases et de décrire leur répartition spatiale et leur comportement. La deuxième étape, correspondant à la localisation, consiste à déterminer une relation entre les champs locaux et les grandeurs macroscopiques. Enfin vient la troisième étape du processus, celle de l’homogénéisation, qui a pour objectif d’estimer le comportement effectif du milieu homogène équivalent.

### 3.2 Grandeurs macroscopiques

Soient  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$  deux champs locaux d’ordre deux, symétriques et respectivement de contraintes équilibrées et de déformations compatibles. On appelle contrainte et déformation macroscopique les moyennes dans le volume  $\Omega$  des contraintes et déformations locales.

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \mathbf{n}) \otimes_s \mathbf{x} \, dS \quad , \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \otimes_s \mathbf{n} \, dS \quad (1.1)$$

où l’opérateur  $\otimes_s$  est un produit tensoriel symétrique défini par :

$$\mathbf{u} \otimes_s \mathbf{n} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_i \mathbf{n}_j + \mathbf{n}_j \mathbf{u}_i)$$

### 3.3 Conditions aux limites

La résolution de ce problème local nécessite la connaissance des conditions de chargement appliquées sur le contour  $\partial\Omega$ . On distingue généralement deux conditions aux limites classiques compatibles avec les moyennes des champs de déformation et de contrainte macroscopique. Ces conditions ne suffisent pas pour représenter l’état in situ du volume  $\Omega$  puisqu’elles ne correspondent pas aux vraies conditions sur la frontière du domaine  $\partial\Omega$ . Cependant elles sont nécessaires à la description complète du problème. Nous allons à présent définir ces deux types de conditions aux limites.

### 3.3.1. Condition de chargement en déformations homogènes

Lorsque le matériau est soumis à un chargement en déformations homogènes sur la frontière du domaine :  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{x}$  sur  $\partial\Omega$ , alors la valeur moyenne du champ de déformation satisfaisant à l'équation de compatibilité et les conditions aux limites cinématiques sur le bord s'exprime sous la forme ci-après

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{x}) \otimes_s \mathbf{n} \, d\Omega = \mathbf{E}(t), \quad (1.2)$$

$\mathbf{n}$  est la normale unitaire extérieure au contour  $\partial\Omega$  et le symbole  $\langle \bullet \rangle$  désigne la moyenne dans tout le volume  $\Omega$

### 3.3.2. Condition de chargement en contraintes homogènes

De manière duale, on impose une contrainte homogène sur le contour extérieur du domaine  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Sigma}(t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$  sur  $\partial\Omega$ . La moyenne du champ de contrainte statiquement admissible *ie* vérifiant l'équation d'équilibre en l'absence de forces volumiques et la condition sur la frontière  $\partial\Omega$  est donnée par

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\Sigma}(t) \cdot \mathbf{n}) \otimes_s \mathbf{x} \, d\Omega = \boldsymbol{\Sigma}(t) \quad (1.3)$$

Les résultats sur les calculs des moyennes des champs de déformation locaux ont été obtenus dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations dans laquelle la relation entre les champs de déformation et déplacement est linéaire.

### 3.3.3. Lemme de Hill-Mandel

Soient  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$  deux champs de contrainte et de déformation indépendants tels que  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  soit équilibré, et que  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$  soit compatible,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  étant le champ de déplacement. Si ces deux champs vérifient respectivement la condition en contraintes homogènes ou la condition en déformations homogènes sur la frontière  $\partial\Omega$ , alors on a :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \rangle : \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) \rangle = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \quad (1.4)$$

où le symbole ":" désigne le produit contracté d'ordre deux et  $\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) \rangle$  la moyenne spatiale du travail des forces internes à l'échelle microscopique. Cette relation établie à partir de l'admissibilité statique ou cinématique des champs de contrainte et de déformation est classiquement appelée "condition de macrohomogénéité de Hill" [41]

## 3.4 Condition initiale

A l'instant initial la réponse du matériau est purement élastique pour la même microstructure avec les conditions de chargement sur le bord données par  $\boldsymbol{\Sigma}(t=0) = \boldsymbol{\Sigma}_0$  ou  $\mathbf{E}(t=0) = \mathbf{E}_0$ . Dans ce cas, les champs de déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$  et de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  du problème quasi-statique à cet instant satisfont aux fonctions  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_0(\mathbf{x})$  et  $\boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{x})$  qui sont solutions du problème élastique.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t=0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad , \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t=0) = \boldsymbol{\varepsilon}_0(\mathbf{x}) \quad , \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t=0) = \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{x}) \quad (1.5)$$

## 4. Formulation du problème

Considérons à présent un volume élémentaire occupant un domaine  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$ . Le volume élémentaire  $\Omega$ , représentatif de la microstructure du combustible MOX, est constitué d'une matrice isotrope dans laquelle des inclusions proches d'une géométrie sphérique sont distribuées de manière isotrope et aléatoire. La loi de comportement des différentes phases constitutives du matériau hétérogène est viscoélastique non linéaire avec déformation libre entre les phases (gonflements différentiels induits par irradiation). Les propriétés mécaniques du matériau (modules élastiques et visqueux) dépendent de la température qui elle-même est une fonction du temps. La résolution du problème à l'échelle microscopique sur l'intervalle de temps  $[0, T]$  consiste à déterminer les champs mécaniques solutions du système suivant.

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0, T] \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right) \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0, T] \\ \dot{\varepsilon}_m(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{3\kappa_e^{(r)}(t)} \dot{\sigma}_m(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{3\kappa_v^{(r)}(t)} \sigma_m(\mathbf{x}, t) + \dot{\varepsilon}_{0m}^{(r)}(t) \quad , \quad r = 1, 2, \dots, N \\ \dot{\mathbf{e}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\mu_e^{(r)}(t)} \dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{e}}_v(\mathbf{x}, t) \quad , \quad r = 1, 2, \dots, N \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \cdot \mathbf{x} \\ \text{ou} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Les scalaires  $\kappa_e^{(r)}$  et  $\mu_e^{(r)}$  représentent respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement élastiques des différentes phases,  $\kappa_v^{(r)}$  caractérise le module de compressibilité visqueux et  $\dot{\varepsilon}_{0m}^{(r)}$  la vitesse de déformation libre par phase. Les propriétés mécaniques dépendent du temps par le biais des phénomènes induits par l'irradiation (dilations thermiques, réactions chimiques etc). Donc les chargements et les propriétés mécaniques évoluent de manière significative dans le temps (c'est pourquoi on qualifie le comportement de "vieillissant"). Les champs de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  et de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sont décomposés selon leurs parties sphériques ( $\varepsilon_m \boldsymbol{\delta}$ ,  $\sigma_m \boldsymbol{\delta}$ ) et déviatoriques ( $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{s}$ ).

$$\sigma_m = \frac{\operatorname{Tr}(\boldsymbol{\sigma})}{3} \quad , \quad \mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \boldsymbol{\delta} \quad , \quad \varepsilon_m = \frac{\operatorname{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})}{3} \quad , \quad \mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_m \boldsymbol{\delta}$$

où  $\boldsymbol{\delta}$  désigne le tenseur identité d'ordre deux et  $\operatorname{Tr}(\bullet)$  désigne la trace d'un champ tensoriel d'ordre deux :  $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sum_i \varepsilon_{ii}$ . La vitesse de déformation visqueuse  $\dot{\mathbf{e}}_v$  dérive d'un potentiel de dissipation non linéaire (en loi puissance).

$$\dot{\mathbf{e}}_v(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\mu_v^{(r)irr}} \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) + \sum_{r=1}^N \chi^{(r)}(\mathbf{x}) \frac{\partial U_v^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)) \quad , \quad U_v^{(r)}(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{cases} \frac{\sigma_0^{(r)} \varepsilon_0^{(r)}}{n^{(r)} + 1} \left( \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0^{(r)}} \right)^{n^{(r)} + 1} & \text{si } \operatorname{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $\mu_v^{(r)irr}$  représente le module de cisaillement visqueux par phase. Ce module est inversement proportionnel au taux de fission  $\Phi^{(r)}$ , dans chacune des phases ( $r$ ) considérée.

$$\mu_v^{(r)irr} = \frac{1}{2\eta\dot{\Phi}^{(r)}}, \quad (1.7)$$

où le coefficient  $\eta$  caractérise le fluage induit par l'irradiation. Les paramètres  $\dot{\epsilon}_0^{(r)}$ ,  $\sigma_0^{(r)}$  et  $n^{(r)}$  sont des constantes caractérisant le comportement visqueux non linéaire des phases.  $\sigma_{eq}$  désigne la contrainte équivalente de Von Mises donnée par :

$$\sigma_{eq}(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) : \mathbf{s}(\mathbf{x}, t)}. \quad (1.8)$$

$\chi^{(r)}$  représente la fonction caractéristique du domaine  $\Omega^{(r)}$  occupé par les phases ( $r$ ), définie par :

$$\chi^{(r)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^{(r)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.9)$$

Des méthodes de résolution du problème (1.6) qui reposent sur une description explicite du volume élémentaire représentatif (éléments finis, méthodes FFT etc) pourraient être utilisées afin de pouvoir déterminer les champs mécaniques locaux. Cependant dans le cadre de ce travail, nous ne cherchons pas à déterminer les champs en tout point du volume élémentaire mais nous nous intéressons plutôt à évaluer de façon analytique les moyennes par phase de ces champs locaux par une modélisation micro-mécanique en champs moyens.

## 5. Conclusions

Dans cette section nous avons dressé un état de l'art sur le comportement multiphysique du crayon combustible, décrit à travers des simulations numériques s'appuyant sur des calculs de structures (calculs 1D ou 3D). Dans la suite, nous avons fait une description de la microstructure du combustible MOX ainsi que les phénomènes physico-chimiques (densification, gonflement, fluage) qui apparaissent lorsqu'il est irradié en réacteur. La microstructure du combustible MOX est de type matrice-inclusions (phase d'enrobage dans laquelle sont distribués des amas plutonifères et des amas uranifères). Hors pile, le combustible MOX est un matériau homogène (les propriétés mécaniques étant les mêmes dans chacune des phases). Cependant, lorsque le combustible MOX est chargé en réacteur la cinétique d'apparition des phénomènes physico-chimiques diffère d'une phase à l'autre. Ce qui fait que le combustible MOX devient hétérogène et la loi de comportement dans chacune des phases est de nature viscoélastique non linéaire et vieillissante (propriétés mécaniques évoluent dans le temps sous l'effet des phénomènes physico-chimiques). Les différentes phases du matériau sont caractérisées par des déformations libres, représentatives des dilatations différentielles sous l'effet du taux de combustion et de la température. Le fluage thermique, apparaissant aux hautes températures, n'a été caractérisé que sur le combustible vierge (essais de compression) donc nous ne disposons pas de données sur le fluage thermique du combustible irradié. En revanche nous disposons de résultats d'examen réalisés après irradiation de crayons MOX, examens qui montrent un comblement des évidements des pastilles que l'on attribue à l'effet du fluage thermique. Nous proposons donc dans cette étude de simuler le comportement des crayons MOX sous irradiation et d'identifier l'intensité du fluage thermique par comparaison avec ces résultats expérimentaux. Compte tenu de sa nature hétérogène, nous souhaitons modéliser avec une approche en champs moyens le comportement macroscopique tout comme les moyennes des champs mécaniques locaux du MOX. La

démarche envisagée consiste à utiliser le principe de correspondance qui permet de transformer le problème viscoélastique linéaire non vieillissant en un problème élastique linéaire indépendant du temps. Les propriétés effectives peuvent dans ce cas être évaluées à travers une méthode de changement d'échelle. La réponse du composite à l'instant initial étant purement élastique, nous commençons par récapituler quelques résultats obtenus pour cette classe de comportement. Ces résultats seront par la suite étendus au cas d'un problème thermo-élastique.

### III. Résultats en élasticité et thermo-élasticité

Nous présentons ici des modèles d'homogénéisation développés en élasticité linéaire. Reuss et Voigt ont développé des modèles basés sur une méthode énergétique pour déterminer des bornes pour les modules effectifs de matériaux hétérogènes ayant un comportement élastique linéaire. D'autres estimations du comportement mécanique effectif de matériaux à caractères hétérogènes ont été ultérieurement obtenues. Les premières études, portant sur le problème de l'inclusion ont été réalisées par Eshelby [42] qui, par la résolution du problème de localisation, détermine les champs de déformation et de contrainte élastiques d'une inclusion ellipsoïdale entourée d'une matrice élastique infinie. Mori Tanaka [43] utilise ensuite les solutions analytiques d'Eshelby [42] pour estimer le comportement élastique homogénéisé de matériaux hétérogènes en mettant en exergue l'interaction entre les différentes phases. Hashin [44] a également estimé les propriétés élastiques effectives d'un assemblage de sphères composites par une analyse des champs de contraintes et de déformations locales. De ses travaux, il retrouve en toute rigueur le module de compressibilité homogénéisé établi dans le modèle de Mori Tanaka. Les approches de Voigt et Reuss ne permettent pas de fournir une bonne description du comportement mécanique effectif des matériaux poreux ou à compressibilités infinies. La réponse à cette question ouverte a été traitée par Hashin et Shtrikman [45] [46] [47] qui ont proposé des bornes plus réalistes afin de mieux représenter le comportement macroscopique de ces microstructures particulières.

Dans le problème élastique ou thermoélastique, la vitesse du champ de déformation visqueux  $\dot{\varepsilon}_v$  dans (1.6) est nulle. Dans ce cas les vitesses de déformations et de contraintes sont reliées linéairement à travers la loi de Hooke et les équations du système (1.6) peuvent être intégrées en temps. Nous cherchons ici à évaluer les moyennes hydrostatiques et déviatoriques par phase du champ de contrainte (réponse élastique ou thermoélastique à chaque instant) lorsque que la frontière du volume élémentaire est soumise à un chargement qui dépend explicitement du temps. Cependant, la réponse élastique et thermoélastique est instantanée et la dépendance explicite du temps pourrait être omise, mais nous la conservons pour une uniformité d'écriture avec le problème viscoélastique. Ainsi les équations d'équilibre et de comportement locales peuvent s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)) = 0 \text{ dans } \Omega \times [0, T] \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right) \text{ dans } \Omega \times [0, T] \\ \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \\ \text{ou} \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{S}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \end{array} \right. \text{ dans } \Omega \times [0, T] \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \cdot \mathbf{x} \\ \text{ou} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \end{array} \right. \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (1.10)$$

$\mathbf{C}(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{S}(\mathbf{x})$  sont des tenseurs du quatrième ordre caractérisant respectivement la distribution dans l'espace des tenseurs locaux des modules de rigidité et de souplesse du matériau hétérogène considéré.



## 1. Propriétés élastiques effectives

Dans ce paragraphe, nous passons brièvement en revue quelques résultats obtenus en homogénéisation linéaire. On rappelle pour chaque modèle les hypothèses mises en œuvre pour la détermination des propriétés homogénéisées. Ces propriétés homogénéisées peuvent, dans ce cas, être déterminées par des approches variationnelles en utilisant le principe de minimisation de l'énergie potentielle ou complémentaire.

### 1.1 Tenseurs de localisation

La prédiction des propriétés effectives des matériaux hétérogènes s'appuie sur l'acquisition des connaissances des tenseurs de localisation des contraintes ou des déformations. Ces relations combinées avec les relations de moyenne entre les grandeurs microscopiques et macroscopiques permettent d'évaluer le comportement mécanique effectif du composite.

#### 1.1.1. Déformations homogènes au contour

Le problème local (1.10) étant linéaire, le champ des déformations locales  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))$  peut-être relié de manière linéaire à la déformation macroscopique donnée  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$ . Cette correspondance linéaire dérive du principe de superposition.

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \quad \text{avec} \quad \langle \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rangle = \mathbf{I}, \quad (1.11)$$

où  $\mathbf{I}$  est un tenseur d'identité du quatrième ordre défini par :

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta}),$$

et  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  un tenseur du quatrième ordre appelé tenseur de localisation des déformations qui dépend de la position  $\mathbf{x}$ . Ce tenseur associé au problème local possède les propriétés de symétrie mineures en raison des symétries des champs de déformation microscopiques et macroscopiques.

$$\mathbf{A}_{ijkh}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_{jikh}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_{ijhk}(\mathbf{x}) \quad (1.12)$$

#### 1.1.2. Contraintes homogènes au contour

Lorsque le volume élémentaire représentatif est sollicité en contraintes homogènes sur son contour  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$  sur  $\partial\Omega$ , alors la correspondance linéaire entre le tenseur des contraintes locales  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  et la contrainte macroscopique  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t)$  est donnée par la relation

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) : \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t), \quad (1.13)$$

où  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  désigne le tenseur de localisation des contraintes dont les propriétés et l'interprétation de ses composantes sont similaires à celles du tenseur de localisation des déformations  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$

$$\mathbf{B}_{ijkh}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_{jikh}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_{ijhk}(\mathbf{x}) \quad , \quad \langle \mathbf{B}(\mathbf{x}) \rangle = \mathbf{I} \quad (1.14)$$

## 1.2 Tenseurs de rigidité et de souplesse effectifs

Les propriétés homogénéisées du problème élastique linéaire peuvent être déterminées en utilisant les équations disponibles à l'échelle microscopique. En employant la loi de comportement locale dans (1.10) et la relation de localisation en déformations homogènes (1.11), la moyenne dans le volume élémentaire du tenseur des contraintes est donnée par :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \tilde{\mathbf{C}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \quad , \quad \tilde{\mathbf{C}} = \langle \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rangle \quad (1.15)$$

Le tenseur de rigidité effectif  $\tilde{\mathbf{C}}$  du milieu homogène équivalent est donc la moyenne du tenseur d'élasticité des phases pondérée par le tenseur de localisation des déformations. Le tenseur  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$  étant homogène dans chaque phase, seule est nécessaire la connaissance de la moyenne par phase du tenseur de localisation des déformations  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  pour pouvoir estimer le module effectif  $\tilde{\mathbf{C}}$ .

La loi de comportement macroscopique peut-être également caractérisée par le tenseur de souplesse effectif dont l'expression analytique est déterminée en prenant la moyenne de la déformation microscopique et en utilisant la localisation en contraintes homogènes (1.13).

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \tilde{\mathbf{S}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) \quad , \quad \tilde{\mathbf{S}} = \langle \mathbf{S}(\mathbf{x}) : \mathbf{B}(\mathbf{x}) \rangle \quad (1.16)$$

Les expressions des tenseurs de rigidité et de souplesse homogénéisés peuvent être également retrouvées par une approche énergétique basée sur le lemme de Hill (voir relation (1.4)). En effet lorsque le matériau est sollicité en déformations homogènes sur son contour, alors on a :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) : \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) \rangle = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) : \tilde{\mathbf{C}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \quad (1.17)$$

avec le module homogénéisé  $\tilde{\mathbf{C}}$  qui est donné par :

$$\tilde{\mathbf{C}} = \langle \mathbf{A}^T(\mathbf{x}) : \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rangle \quad \text{ou} \quad \tilde{\mathbf{C}}_{pqmn} = \langle \mathbf{A}_{ijpq}(\mathbf{x}) \mathbf{C}_{ijkl}(\mathbf{x}) \mathbf{A}_{khmn}(\mathbf{x}) \rangle \quad (1.18)$$

Dans le cas d'un chargement en contraintes homogènes sur le bord du volume élémentaire, la souplesse effective est obtenue en utilisant de nouveau le lemme de Hill du fait de l'admissibilité statique du champ de contraintes et en tenant compte de l'équation locale (1.13) ; ainsi on obtient :

$$\tilde{\mathbf{S}} = \langle \mathbf{B}^T(\mathbf{x}) : \mathbf{S}(\mathbf{x}) : \mathbf{B}(\mathbf{x}) \rangle \quad \text{ou} \quad \tilde{\mathbf{S}}_{pqmn} = \langle \mathbf{B}_{ijpq}(\mathbf{x}) \mathbf{S}_{ikkh}(\mathbf{x}) \mathbf{B}_{khmn}(\mathbf{x}) \rangle \quad (1.19)$$

Cette caractérisation énergétique des tenseurs de rigidité et de souplesse homogénéisés met en évidence leurs propriétés de symétrie (symétries majeure et mineure). Il est important de noter que les modules effectifs  $\tilde{\mathbf{C}}$  et  $\tilde{\mathbf{S}}$ , établis dans les différents cas de chargement considérés (déformations homogènes et contraintes homogènes), ne sont pas réciproquement inverses et sont reliés par la relation suivante [48] :

$$\tilde{\mathbf{S}} : \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{I} + \mathbf{0}(d^3/l^3) \quad (1.20)$$

où  $d$  désigne la dimension des hétérogénéités et  $l$  la taille caractéristique du Volume Élémentaire Représentatif (VER). Cependant lorsque les dimensions des hétérogénéités sont suffisamment petites par rapport à la taille du VER (domaine infini), alors la relation de Hill-Mandel devient

$$\tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \quad (1.21)$$

## 1.3 Théorème de l'énergie

Les théorèmes de l'énergie potentielle et complémentaire sont utilisés en élasticité linéaire pour obtenir des bornes pour les modules homogénéisés. Ces bornes sont établies sur la base de certaines hypothèses simplificatrices (morphologie du matériau, choix des champs admissibles etc)

### 1.3.1. Théorème de l'énergie potentielle

Le principe du minimum de l'énergie potentielle stipule que, parmi tous les champs de déplacement  $\mathbf{u}^*$  qui vérifient les conditions aux limites cinématiques (champs admissibles), le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  solution du problème aux limites minimise l'énergie potentielle  $\mathcal{F}(\mathbf{u}) \leq \mathcal{F}(\mathbf{u}^*)$ , où la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  en l'absence de forces réparties est donnée par :

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} U(\boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega - \int_{\partial\Omega_{\mathbf{F}}} \mathbf{F}^d \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) dS \quad (1.22)$$

$U$  représente la densité d'énergie élastique de déformation dont l'expression analytique est de la forme suivante

$$U(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) : \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \quad (1.23)$$

$\partial\Omega = \partial\Omega_{\mathbf{F}} \cup \partial\Omega_{\mathbf{u}}$  où  $\partial\Omega_{\mathbf{F}}$  désigne la partie de la frontière du domaine  $\Omega$  où les forces surfaciques  $\mathbf{F}^d$  sont exercées et  $\partial\Omega_{\mathbf{u}}$  la surface complémentaire où le champ de déplacement  $\mathbf{u}^d$  est imposé.

### 1.3.2. Théorème de l'énergie complémentaire

Le théorème de l'énergie complémentaire est une formulation duale du théorème de l'énergie potentielle. Le principe du minimum de l'énergie complémentaire énonce que parmi tout champ de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}^*$  qui vérifie l'équation d'équilibre et les conditions aux limites statiques (champs statiquement admissibles), la solution en contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  minimise l'énergie complémentaire  $\mathcal{F}^*(\boldsymbol{\sigma}) \leq \mathcal{F}^*(\boldsymbol{\sigma}^*)$  avec la fonction  $\mathcal{F}^*$  qui est définie par :

$$\mathcal{F}^*(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) : \mathbf{S}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) d\Omega - \int_{\partial\Omega_{\mathbf{u}}} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}^d dS \quad (1.24)$$

## 1.4 Bornes

### 1.4.1. Borne de Voigt

Dans l'approche de Voigt, le champ des déformation microscopique  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))$  dans le volume élémentaire est supposé uniforme et égal au champ de déformation macroscopique  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$ . Ainsi le tenseur de localisation des déformations dans chaque phase se réduit au tenseur d'identité.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{I} \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T] \quad (1.25)$$

Enfin si nous considérons un champ de déplacement cinématiquement admissible défini par la relation  $\mathbf{u}^v(\mathbf{x}, t) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \cdot \mathbf{x}$ , en utilisant le théorème de l'énergie potentielle pour  $\mathbf{u}^v(\mathbf{x}, t)$  avec la condition de déformations homogènes on établit une borne pour le module élastique homogénéisé

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) : (\langle \mathbf{C}(\mathbf{x}) \rangle - \tilde{\mathbf{C}}) : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \geq 0 \quad \forall \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \quad (1.26)$$

Dans le cas où le milieu homogène équivalent et les différentes phases constitutives du matériau hétérogène ont un comportement isotrope, les modules de cisaillement et de compressibilité homogénéisés sont donnés par les relations suivantes :

$$\tilde{\mu} \leq \tilde{\mu}_v = \langle \mu \rangle = \sum_{r=1}^N c^{(r)} \mu^{(r)} \quad , \quad \tilde{\kappa} \leq \tilde{\kappa}_v = \langle \kappa \rangle = \sum_{r=1}^N c^{(r)} \kappa^{(r)} \quad (1.27)$$

### 1.4.2. Borne de Reuss

L'approximation de Reuss consiste à considérer que les contraintes  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  sont uniformes dans tout le volume élémentaire représentatif et sont égales au champ de contrainte macroscopique,  $\boldsymbol{\sigma}^R(\mathbf{x}, t) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t)$ . De cette hypothèse se déduit le tenseur de concentration des contraintes dans chaque phase qui est analogue au tenseur de localisation des déformations défini précédemment.

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{I} \quad \text{pour tout } (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T] \quad (1.28)$$

Un raisonnement similaire portant sur l'énergie complémentaire permet de borner le module de souplesse homogénéisé  $\tilde{\mathbf{S}}$ . En effet parmi tous les champs de contraintes statiquement admissibles, le champ de contrainte réel  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  solution du problème minimise l'énergie complémentaire :  $\mathcal{F}^*(\boldsymbol{\sigma}) \leq \mathcal{F}^*(\boldsymbol{\sigma}^R)$  de sorte qu'on obtient :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) : (\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}) \rangle - \tilde{\mathbf{S}}) : \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) \geq 0 \quad \forall \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) \quad (1.29)$$

Lorsque les constituants du composite ont une répartition localement isotrope, alors les modules de cisaillement et de compressibilité du milieu homogène équivalent supposé isotrope s'écrivent :

$$\tilde{\mu}^{-1} \leq \tilde{\mu}_R^{-1} = \langle \mu^{-1} \rangle = \sum_{r=1}^N \frac{c^{(r)}}{\mu^{(r)}} \quad , \quad \tilde{\kappa}^{-1} \leq \tilde{\kappa}_R^{-1} = \langle \kappa^{-1} \rangle = \sum_{r=1}^N \frac{c^{(r)}}{\kappa^{(r)}} \quad (1.30)$$

Ces bornes sont inutilisables dans le cas où une des phases est rigide ou vide. Cet inconvénient est corrigé par les bornes de Hashin-Shtrikman. Une classe particulière des milieux hétérogènes est celle dont la microstructure est de type matrice-inclusions (inclusions réparties dans une matrice). Pour cette classe des résultats spécifiques ont été obtenus.

### 1.4.3. Bornes de Hashin-Shtrikman

Hashin et Shtrikman [47] utilisent les principes variationnels énoncés en section 1.3 pour établir des bornes plus resserrées que celles de Voigt et Reuss. Ces bornes ont été obtenues dans le cas où les raideurs élastiques sont ordonnées (au sens des formes quadratiques associées). Pour un matériau hétérogène biphasé dont la phase (2) est plus raide que la phase (1),  $\boldsymbol{\varepsilon} : (\mathbf{C}^{(2)} - \mathbf{C}^{(1)}) : \boldsymbol{\varepsilon} > 0 \forall \boldsymbol{\varepsilon}$ , les bornes supérieures et inférieures de Hashin-Shtrikman s'écrivent formellement :

$$\mathbf{C}_{\text{HS}^-} \leq \tilde{\mathbf{C}} \leq \mathbf{C}_{\text{HS}^+} \quad (1.31)$$

avec les expressions analytiques de  $\mathbf{C}_{\text{HS}^+}$  et  $\mathbf{C}_{\text{HS}^-}$  qui sont données par la relation suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{C}_{\text{HS}^-} = \mathbf{C}^{(1)} + c^{(2)}(\mathbf{C}^{(2)} - \mathbf{C}^{(1)}) : \left[ \mathbf{I} + c^{(1)} \mathbf{P}_{\mathbf{E}}^{(1)} : (\mathbf{C}^{(2)} - \mathbf{C}^{(1)}) \right]^{-1} \\ \mathbf{C}_{\text{HS}^+} = \mathbf{C}^{(2)} + c^{(1)}(\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(2)}) : \left[ \mathbf{I} + c^{(2)} \mathbf{P}_{\mathbf{E}}^{(2)} : (\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(2)}) \right]^{-1} \end{array} \right. \quad (1.32)$$

où  $\mathbf{P}_{\mathbf{E}}^{(r)}$  désigne le tenseur de polarisation de Hill pour la phase ( $r$ ) dont l'expression analytique est explicitée dans la section suivante dédiée au problème de l'inclusion d'Eshelby [42] dans le cas d'un comportement isotrope des phases. Dans le cas d'une situation localement isotrope, les propriétés effectives du matériau homogène équivalent sont isotropes et elles sont encadrées par :

$$\kappa_{\text{HS}^-} \leq \tilde{\kappa} \leq \kappa_{\text{HS}^+} \quad , \quad \mu_{\text{HS}^-} \leq \tilde{\mu} \leq \mu_{\text{HS}^+} \quad (1.33)$$

où les bornes des modules de compressibilité et de cisaillement homogénéisés sont obtenues à partir de la relation (1.32).

## 1.5 Problème de l'inclusion

Un cas particulier de microstructure permettant l'estimation des tenseurs de localisation est celui d'un matériau présentant des inclusions distribuées dans un domaine jouant le rôle de la matrice. Les premiers résultats de ce problème de base en mécanique ont été obtenus par Eshelby [42] qui a déterminé le tenseur de localisation  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  d'une inclusion ellipsoïdale élastique soumise à une déformation libre homogène  $\boldsymbol{\varepsilon}_0^{(2)}$  et noyée dans une matrice élastique infinie de même module  $\mathbf{C}^{(1)}$ . La déformation dans l'inclusion est alors homogène et égale à :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \mathbf{S}_{\mathbf{E}}^{(1)} : \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(2)} \quad (1.34)$$

où  $\mathbf{S}_{\mathbf{E}}^{(1)}$  est le tenseur d'Eshelby. Si l'on applique une déformation homogène  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  à l'infini et si les propriétés élastiques de  $\mathbf{C}^{(2)}$  sont différentes de celles de la matrice, alors la déformation dans l'inclusion est homogène (problème de l'inclusion hétérogène).

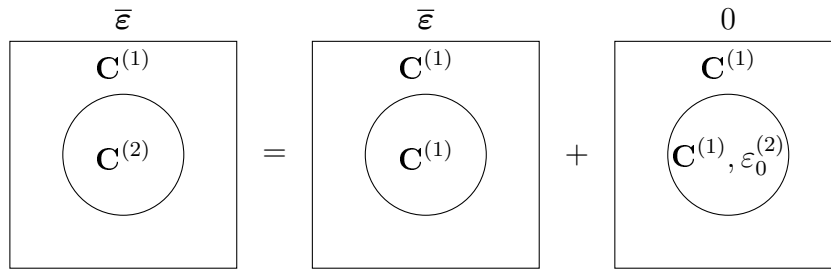


FIGURE 1.8 – Représentation d'une hétérogénéité de comportement élastique

La solution à ce problème est obtenue par superposition (voir figure 1.35) avec la déformation libre dans l'inclusion qui peut s'écrire comme suit :  $\boldsymbol{\varepsilon}_0^{(2)} = -\left(\mathbf{C}^{(1)}\right)^{-1} : (\mathbf{C}^{(2)} - \mathbf{C}^{(1)}) : \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{S}_{\mathbf{E}}^{(1)} : \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(2)}. \quad (1.35)$$

La relation (1.35) combinée avec celle de la déformation libre dans l'inclusion permet de déduire l'expression analytique du tenseur de localisation des déformations dans l'inclusion qui s'écrit :

$$\mathbf{A}^{(2)} = \left[ \mathbf{I} + \mathbf{P}_{\mathbf{E}}^{(1)} : (\mathbf{C}^{(2)} - \mathbf{C}^{(1)}) \right]^{-1}. \quad (1.36)$$

Le tenseur de polarisation de Hill  $\mathbf{P}_{\mathbf{E}}^{(1)}$  associé à la phase matricielle est défini par :

$$\mathbf{P}_{\mathbf{E}}^{(1)} = \mathbf{S}_{\mathbf{E}}^{(1)} : (\mathbf{C}^{(1)})^{-1}. \quad (1.37)$$

### 1.5.1. Cas isotrope

Pour des matériaux dont la matrice et les inclusions de forme sphérique ont un comportement isotrope, le tenseur de polarisation de Hill et le tenseur d'Eshelby sont donnés par les relations suivantes

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{\mathbf{E}}^{(1)} = \frac{1}{3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}} \mathbf{J} + \frac{3(\kappa^{(1)} + 2\mu^{(1)})}{5\mu^{(1)}(3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)})} \mathbf{K} \\ \mathbf{S}_{\mathbf{E}}^{(1)} = \frac{3\kappa^{(1)}}{3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}} \mathbf{J} + \frac{6(\kappa^{(1)} + 2\mu^{(1)})}{5(3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)})} \mathbf{K} \end{cases} \quad (1.38)$$

Les tenseurs standards de quatrième ordre  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{K}$  sont des projecteurs sur les sous espaces des tenseurs d'ordre deux sphériques et déviatoriques, respectivement. Ces tenseurs sont orthogonaux et possèdent les propriétés suivantes

$$\mathbf{J} : \mathbf{J} = \mathbf{J} \quad , \quad \mathbf{K} : \mathbf{K} = \mathbf{K} \quad , \quad \mathbf{J} : \mathbf{K} = 0 \quad (1.39)$$

La résolution du problème d'inclusion permet d'estimer les moyennes des tenseurs de localisations dans les différentes phases avec des modèles de complexité croissante. Dans le cas des milieux dilués par exemple (faible fraction volumique des inclusions), la moyenne des champs mécaniques est estimée par l'état mécanique d'une inclusion plongée dans un milieu infini. La relation entre le champ de déformation dans l'inclusion et la déformation macroscopique est exprimée par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \left[ \mathbf{I} + \mathbf{P}_{\mathbf{E}}^{(1)} : (\mathbf{C}^{(2)} - \mathbf{C}^{(1)}) \right]^{-1} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (1.40)$$

Dans le problème dual (conditions aux limites de contraintes homogènes sur le contour) le champ de contrainte moyen dans l'inclusion est relié à la contrainte macroscopique selon la relation

$$\boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \left[ \mathbf{I} + \mathbf{Q}_{\mathbf{E}}^{(1)} : (\mathbf{S}^{(2)} - \mathbf{S}^{(1)}) \right]^{-1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (1.41)$$

où  $\mathbf{Q}_{\mathbf{E}}^{(1)}$  représente le dual du tenseur de polarisation de Hill dans la matrice dont l'expression s'écrit :

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{E}}^{(1)} = \mathbf{C}^{(1)} : (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{\mathbf{E}}^{(1)}). \quad (1.42)$$

### 1.5.2. Extension du problème de l'inclusion dans le cas anisotrope

Pour les applications envisagées dans cette thèse, on s'intéresse aux expressions analytiques du tenseurs de localisation dans le cas où les phases ont un comportement anisotrope particulier (voir section V.). Dans cette situation, les tenseurs de rigidité dans les phases sont décomposés selon :

$$\mathbf{C}^{(r)} = 3\kappa^{(r)} \mathbf{J} + 2\mu^{(r)} \mathbf{F} + 2\lambda^{(r)} \mathbf{E}, \quad (1.43)$$

où les tenseurs de quatrième ordre  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$  sont des projecteurs orthogonaux dans le sous espace des tenseurs déviatoriques ( $\mathbf{J} : \mathbf{E} = 0$  ,  $\mathbf{J} : \mathbf{F} = 0$  ,  $\mathbf{K} = \mathbf{E} + \mathbf{F}$ ). Dans les théories d'homogénéisation le projecteur  $\mathbf{E}$  est défini à partir d'un tenseur d'ordre deux  $\boldsymbol{\alpha}$ , symétrique et déviatorique.

$$\mathbf{E} \sim \hat{\boldsymbol{\alpha}} \otimes \hat{\boldsymbol{\alpha}} \quad , \quad \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\alpha_{\text{eq}}} \quad (1.44)$$

Dans ce cas d'anisotropie une forme du tenseur de polarisation de Hill dans la matrice associée au tenseur de rigidité défini dans (1.43) a été proposée par Ponte Castañeda [49]. Dans cette théorie, le tenseur de Hill est donné par la relation suivante :

$$\mathbf{P}_{\mathbf{E}}^{(1)} = \frac{1}{3\kappa_{\text{P}}^{(1)}} \mathbf{J} + \frac{1}{2\mu_{\text{P}}^{(1)}} \mathbf{F} + \frac{1}{2\lambda_{\text{P}}^{(1)}} \mathbf{E} \quad (1.45)$$

Les composantes du tenseur de polarisation de Hill dans cette base ont pour expressions respectives

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3\kappa_{\text{P}}^{(1)}} = \frac{1}{3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}} \left[ 1 - \frac{1}{3\pi} \int_{|\xi|=1} \frac{(\lambda^{(1)} - \mu^{(1)}) (1 - a^{(1)}) (\xi \bullet (\hat{\alpha}\xi))^2 dS(\xi)}{\mu^{(1)} + \frac{4}{3}(\lambda^{(1)} - \mu^{(1)}) [|\hat{\alpha}\xi|^2 - a^{(1)} (\xi \bullet (\hat{\alpha}\xi))^2]} \right] \\ \frac{1}{2\mu_{\text{P}}^{(1)}} = b^{(1)} + \frac{1}{72\pi\mu^{(1)}} \left[ \int_{|\xi|=1} \frac{(\lambda^{(1)} - \mu^{(1)}) (1 - a^{(1)}) (4a^{(1)} - 1) (\xi \bullet (\hat{\alpha}\xi))^2 dS(\xi)}{\mu^{(1)} + \frac{4}{3}(\lambda^{(1)} - \mu^{(1)}) [|\hat{\alpha}\xi|^2 - a^{(1)} (\xi \bullet (\hat{\alpha}\xi))^2]} \right] \\ \frac{1}{2\lambda_{\text{P}}^{(1)}} = \frac{1}{6\pi} \int_{|\xi|=1} \frac{[|\hat{\alpha}\xi|^2 - a^{(1)} (\xi \bullet (\hat{\alpha}\xi))^2] dS(\xi)}{\mu^{(1)} + \frac{4}{3}(\lambda^{(1)} - \mu^{(1)}) [|\hat{\alpha}\xi|^2 - a^{(1)} (\xi \bullet (\hat{\alpha}\xi))^2]} \end{array} \right. \quad (1.46)$$

$a^{(1)}$  et  $b^{(1)}$  sont des constantes qui dépendent des propriétés élastiques du matériau, elles s'écrivent

$$a^{(1)} = \frac{3\kappa^{(1)} + \mu^{(1)}}{3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}} \quad , \quad b^{(1)} = \frac{5 - 2a^{(1)}}{12\mu^{(1)}} - \frac{\lambda^{(1)}}{8\mu^{(1)}\lambda_{\text{P}}^{(1)}} \quad (1.47)$$

Cependant cette expression du tenseur de polarisation de Hill suggérée par Ponte Castañeda n'est qu'une approximation (voir [50]).

### 1.5.3. Conclusion

La résolution analytique du problème de localisation par d'Eshelby [42] a permis d'estimer les propriétés à l'échelle macroscopique d'autres modèles de matériaux hétérogènes à base d'inclusions à savoir :

- Le modèle de Mori-Tanaka [43] pour des matériaux hétérogènes à phases inclusionnaires,
- Le modèle auto-cohérent [51] adapté aux microstructures semblables aux polycristaux.

Nous décrivons le modèle de Mori-Tanaka dans la section suivante.

## 1.6 Estimation de Mori-Tanaka

Le schéma de Mori-Tanaka, basé sur le problème d'inclusions inhomogènes, met en évidence l'influence de l'interaction des hétérogénéités sur le comportement élastique effectif. Pour cela, il suppose que la moyenne des déformations dans les inclusions est équivalente à celle d'une inclusion de mêmes propriétés élastiques, noyée dans une matrice soumise à l'infini à une déformation homogène dans la matrice. Ainsi en se servant du tenseur de localisation établi par Eshelby, la déformation moyenne dans les phases inclusionnaires **pour un composite biphasé** s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \left[ \mathbf{I} + \mathbf{P}_{\mathbf{E}}^{(1)} : (\mathbf{C}^{(2)} - \mathbf{C}^{(1)}) \right]^{-1} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(1)}, \quad (1.48)$$

où le tenseur  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(1)}$  désigne la déformation moyenne dans la matrice. En utilisant les relations de moyenne volumique relatives à la localisation (1.11) et aux champs de déformations, on obtient les expressions des tenseurs de localisation par phase qui sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}^{(1)} = \left[ c^{(1)}\mathbf{I} + c^{(2)} \left[ \mathbf{I} + \mathbf{P}_{\mathbf{E}}^{(1)} : (\mathbf{C}^{(2)} - \mathbf{C}^{(1)}) \right]^{-1} \right]^{-1} \\ \mathbf{A}^{(2)} = \left[ \mathbf{I} + c^{(1)} \mathbf{P}_{\mathbf{E}}^{(1)} : (\mathbf{C}^{(2)} - \mathbf{C}^{(1)}) \right]^{-1} \end{array} \right. \quad (1.49)$$

Ces relations permettent d'estimer le module d'élasticité effectif du milieu homogène équivalent selon l'équation classique :

$$\tilde{\mathbf{C}}_{\text{MT}} = \mathbf{C}^{(1)} + c^{(2)}(\mathbf{C}^{(2)} - \mathbf{C}^{(1)}) : \left[ \mathbf{I} + c^{(1)} \mathbf{P}_{\mathbf{E}}^{(1)} : (\mathbf{C}^{(2)} - \mathbf{C}^{(1)}) \right]^{-1} \quad (1.50)$$

Ce résultat montre que la borne inférieure de Hashin-Shtrikman est équivalente à l'estimation établie dans le modèle de Mori-Tanaka lorsque la matrice est plus souple que l'inclusion. Lorsque les différentes phases constitutives du matériau hétérogène sont isotropes et que les inclusions distribuées de manière isotrope sont sphériques, le milieu homogène équivalent présente une symétrie macroscopiquement isotrope et les modules de compressibilité et de cisaillement effectifs s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\kappa}_{\text{MT}} = \kappa^{(1)} + c^{(2)} \frac{\kappa^{(2)} - \kappa^{(1)}}{1 + c^{(1)} \frac{\kappa^{(2)} - \kappa^{(1)}}{\hat{\kappa} + \kappa^{(1)}}}, \quad \hat{\kappa} = \frac{4}{3} \mu^{(1)} \\ \tilde{\mu}_{\text{MT}} = \mu^{(1)} + c^{(2)} \frac{\mu^{(2)} - \mu^{(1)}}{1 + c^{(1)} \frac{\mu^{(2)} - \mu^{(1)}}{\hat{\mu} + \mu^{(1)}}}, \quad \hat{\mu} = \frac{\mu^{(1)} 9\kappa^{(1)} + 8\mu^{(1)}}{6 \kappa^{(1)} + 2\mu^{(1)}} \end{array} \right. \quad (1.51)$$

Si on étend le modèle de Mori-Tanaka dans le cas d'un matériau hétérogène à deux phases inclusionnaires de même forme (sphérique) alors l'expression analytique du module d'élasticité effectif est donnée par la relation

$$\tilde{\mathbf{C}}_{\text{MT}} = \mathbf{C}^{(1)} + \langle \mathbf{T} \rangle : \left[ c^{(1)} \mathbf{I} + \sum_{r=2}^3 c^{(r)} (\mathbf{C}^{(r)} - \mathbf{C}^{(1)})^{-1} : \mathbf{T}^{(r)} \right]^{-1}, \quad (1.52)$$

où  $\mathbf{T}$  est un tenseur du quatrième ordre dont l'expression de la moyenne est donnée par

$$\langle \mathbf{T} \rangle = \sum_{r=2}^3 c^{(r)} \mathbf{T}^{(r)} \quad \text{avec} \quad \mathbf{T}^{(r)} = \left[ \mathbf{P}_{\mathbf{E}}^{(1)} + (\mathbf{C}^{(r)} - \mathbf{C}^{(1)})^{-1} \right]^{-1}. \quad (1.53)$$

Dans le cas isotrope (distribution isotrope des phases et modules élastiques isotropes), les expressions générales des modules effectifs de compressibilité et de cisaillement du milieu homogène équivalent peuvent s'écrire comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\kappa}_{\text{MT}} = \kappa^{(1)} + \frac{\sum_{r=2}^3 c^{(r)} \frac{(\kappa^{(r)} - \kappa^{(1)})}{1 + 3\alpha(\kappa^{(r)} - \kappa^{(1)})}}{c^{(1)} + \sum_{r=2}^3 \frac{c^{(r)}}{1 + 3\alpha(\kappa^{(r)} - \kappa^{(1)})}}, \quad \alpha = \frac{1}{3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}} \\ \tilde{\mu}_{\text{MT}} = \mu^{(1)} + \frac{\sum_{r=2}^3 c^{(r)} \frac{(\mu^{(r)} - \mu^{(1)})}{1 + 2\beta(\kappa^{(r)} - \mu^{(1)})}}{c^{(1)} + \sum_{r=2}^3 \frac{c^{(r)}}{1 + 2\beta(\mu^{(r)} - \mu^{(1)})}}, \quad \beta = \frac{6(\kappa^{(1)} + 2\mu^{(1)})}{5\mu^{(1)}(3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)})} \end{array} \right. \quad (1.54)$$



## 2. Résultats en Thermo-élasticité

Le comportement des matériaux dans certains cas met en jeu, en plus de la réponse élastique, une déformation additionnelle n'évoluant pas sous sollicitations mécaniques. Il s'agit d'une déformation libre de nature différente (thermique, chimique etc). Dans les combustibles MOX la déformation libre est liée aux phénomènes de densification et de gonflement sous irradiation. Ces phénomènes qui se produisent au cœur de la pastille combustible ne sont pas homogènes à cause de la non-uniformité du taux de fission. On fait donc l'hypothèse dans notre modélisation que ces déformations sont homogènes par phase. Le problème local à résoudre s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)) = 0 \text{ dans } \Omega \times [0, T] \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right) \text{ dans } \Omega \times [0, T] \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{S}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \chi^{(r)}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(r)}(t) \text{ dans } \Omega \times [0, T] \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \cdot \mathbf{x} \\ \text{ou} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \end{array} \right. \text{ sur } \partial\Omega \times [0, T] \end{array} \right. \quad (1.55)$$

Les propriétés effectives du matériau thermoélastique peuvent être évaluées au moyen des modèles initialement conçus en élasticité linéaire (Reuss, Voigt, Hashin etc). Nous utilisons au cours de cette étude le modèle de Mori-Tanaka pour prédire le comportement macroscopique du composite ainsi que les moyennes par phase. Ce modèle s'avère effectivement pertinent pour décrire le comportement mécanique effectif des matériaux de type matrice-inclusions jusqu'à 20% de fractions volumiques d'inclusions.

### 2.1 Tenseurs de localisation

Les tenseurs de localisation des déformations et des contraintes définis dans les relations (1.11) et (1.13) permet d'établir le comportement élastique homogène équivalent de matériaux hétérogènes, au moyen des modèles d'homogénéisation conçus en élasticité linéaire. Néanmoins, lorsque les différentes phases constitutives du composite ont un comportement thermo-élastique, les relations de localisation deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) + \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad , \quad \langle \mathbf{a}(\mathbf{x}) \rangle = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) : \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \quad , \quad \langle \mathbf{b}(\mathbf{x}) \rangle = 0 \end{array} \right. \quad (1.56)$$

où  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  sont des champs tensoriels d'ordre deux représentant la solution du problème purement thermique ( $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0$  ou  $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = 0$ , respectivement). Le calcul des moyennes par phase de ces champs locaux, dans le cas particulier du modèle de Mori-Tanaka s'appuie sur la résolution du problème de l'inclusion. Les tenseurs de localisation  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{b}$  sont calculés en fonction des propriétés caractéristiques du matériau et des chargements (en annexe A).

## 2.2 Comportement effectif

La loi de comportement thermo-élastique macroscopique du matériau, identifiée en réalisant des opérations de moyenne adéquates sur les lois de comportements à l'échelle microscopique, est donnée par l'expression analytique suivante

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \tilde{\mathbf{S}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0(t) \quad (1.57)$$

$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0(t)$  représente le gonflement effectif dont l'évolution temporelle peut-être estimée à partir des modèles d'homogénéisation et en exploitant la relation générale établie dans [52].

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0(t) = \langle \mathbf{B}^T : \boldsymbol{\varepsilon}_0(t) \rangle = \sum_{r=1}^N c^{(r)} \langle \mathbf{B}^T \rangle^{(r)} : \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(r)}(t) \quad (1.58)$$

## 2.3 Théorème de l'énergie

Nous considérons ici le problème thermoélastique linéaire dans lequel le volume élémentaire représentatif  $\Omega$  est soumis à des dilatations différentielles dans les phases. La densité d'énergie de déformation dans ce cas a la forme quadratique suivante

$$U(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_0) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) : \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{x}) : \mathbf{S}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{x}) \quad (1.59)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}_0$  est une précontrainte dont l'origine peut provenir d'une sollicitation mécanique, thermique, de transformation de phase ou des procédés de fabrication. La relation qui lie la précontrainte à la déformation libre a la forme

$$\boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{x}) = -\mathbf{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_0(\mathbf{x}) \quad (1.60)$$

La densité d'énergie de déformation pour un champ de contrainte statiquement admissible est donnée par la relation suivante :

$$U^*(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}_0) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) : \mathbf{S}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\varepsilon}_0(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \quad (1.61)$$

## 2.4 Calcul du second moment du champ des contraintes

L'expression du second moment des contraintes en thermo-élasticité linéaire peut-être déterminée par évaluation de l'énergie effective du VER sous chargement macroscopique. En effet lorsque le volume élémentaire représentatif  $\Omega$  du matériau hétérogène thermo-élastique linéaire est soumis à la fois à un champ de contraintes homogènes  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t)$  au contour et à des déformations libres  $\boldsymbol{\varepsilon}_0^{(r)}$  dans les phases, alors nous avons vu que la densité d'énergie élastique locale a la forme :

$$U(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) : \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) : \boldsymbol{\varepsilon}_0(\mathbf{x}, t) \quad (1.62)$$

L'énergie effective  $\tilde{U}$  emmagasinée dans le volume élémentaire est alors obtenue en utilisant le lemme de Hill et en prenant la moyenne dans  $\Omega$  de la densité d'énergie de déformation  $U$ .

$$\tilde{U}(t) = \langle U(\boldsymbol{\sigma}) \rangle = \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) : \tilde{\mathbf{S}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0(t) : \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \text{cste} \quad , \quad \text{cste} = \sum_{r=1}^N c^{(r)} \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(r)}(t) : \mathbf{b}^{(r)} \quad (1.63)$$

Le second moment des contraintes sur la phase  $(r)$ , lorsque la déformation libre est homogène par phase, s'obtient en dérivant l'énergie effective  $\tilde{U}$  par rapport au tenseur des souplesses  $\mathbf{S}^{(r)}$  et en utilisant le lemme de Hill ( $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{S}^{(r)}}$  est statiquement admissible et de moyenne nulle). Ainsi on a :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \otimes \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \rangle^{(r)} = \frac{2}{c^{(r)}} \frac{\partial \tilde{U}(t)}{\partial \mathbf{S}^{(r)}} \quad (1.64)$$

Dans le cas des problèmes purement élastiques (déformation libre nulle dans les phases), le second moment du champ des contraintes se réduit à l'expression établie par Suquet [53]. Ces seconds moments du champ sont utilisées par les méthodes variationnelles (par exemple Castañeda [54]) d'estimation du comportement macroscopique dans le cas non linéaire (voir section V.).

## 2.5 Problème de l'inclusion

Dans le cas général où l'inclusion de module  $\mathbf{C}^{(2)}$ , soumise à une déformation libre homogène  $\boldsymbol{\varepsilon}_0^{(2)}$  d'origine thermique, est noyée dans une matrice infinie de module  $\mathbf{C}^{(1)}$  chargée uniformément à l'infini avec une déformation  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , alors la déformation homogène dans l'inclusion  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}$ , solution du problème est la superposition de la solution du problème purement mécanique (voir relation (1.40)) et d'un état de déformation homogène solution du problème thermique.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \left[ \mathbf{I} + \mathbf{P}_{\mathbf{E}}^{(1)} : (\mathbf{C}^{(2)} - \mathbf{C}^{(1)}) \right]^{-1} : \left[ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{P}_{\mathbf{E}}^{(1)} : \mathbf{C}^{(2)} : \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(2)} \right] \quad (1.65)$$

Dans le problème dual (matrice infinie uniformément chargée en contrainte) l'état de contrainte dans l'inclusion est également déterminé par le principe de superposition. Il s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \left[ \mathbf{I} + \mathbf{Q}_{\mathbf{E}}^{(1)} : (\mathbf{S}^{(2)} - \mathbf{S}^{(1)}) \right]^{-1} : \left[ \bar{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{Q}_{\mathbf{E}}^{(1)} : \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(2)} \right] \quad (1.66)$$

## 2.6 Estimations de Mori-Tanaka

### 2.6.1. Calcul des champs moyens par phase

Dans les théories d'homogénéisation adaptées aux comportements non linéaires, nous verrons que l'estimation des moyennes des champs de contraintes et de déformations par phase est nécessaire afin d'obtenir les propriétés effectives du matériau hétérogène considéré. Pour des composites biphasés et des composites à trois phases, nous étendons les résultats connus en élasticité linéaire dans le cas où la loi de comportement dans les phases est élastique linéaire avec précontrainte ou déformation libre (déformation libre d'origine thermique par exemple).

#### a. Composites biphasés

Les moyennes du champ de contrainte, dans le cas d'un matériau biphasé, sont déterminées en prenant les moyennes par phase de la loi de comportement dans (1.55) et en utilisant les relations de moyenne suivantes :

$$\begin{cases} c^{(1)} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}(t) + c^{(2)} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}(t) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) \\ c^{(1)} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(1)}(t) + c^{(2)} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(2)}(t) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \end{cases} \quad (1.67)$$

Pour une contrainte homogène  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  donnée, on dispose de quatre équations à cinq inconnues dont une des inconnues à savoir la déformation effective sera calculée par ailleurs en utilisant la loi de comportement macroscopique. Dans ce cas les évolutions dans l'espace temporelle des moyennes du champ de contrainte par phase ont la forme

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}(t) = \frac{1}{c^{(1)}} \left( \mathbf{S}^{(1)} - \mathbf{S}^{(2)} \right)^{-1} \left[ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) - \langle \boldsymbol{\varepsilon}_0(t) \rangle - \mathbf{S}^{(2)} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) \right] \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}(t) = \frac{1}{c^{(2)}} \left( \mathbf{S}^{(2)} - \mathbf{S}^{(1)} \right)^{-1} \left[ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) - \langle \boldsymbol{\varepsilon}_0(t) \rangle - \mathbf{S}^{(1)} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) \right] \end{cases} \quad (1.68)$$

où les paramètres  $c^{(1)}$  et  $c^{(2)}$  représentent respectivement les fractions volumiques dans la matrice et dans l'inclusion.  $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_0 \rangle$  caractérise la moyenne du champ de déformation libre dont l'évolution dans le temps est donnée par

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}_0(t) \rangle = c^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(1)}(t) + c^{(2)} \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(2)}(t) \quad (1.69)$$

Les moyennes hydrostatiques par phase du champ de contrainte sont déterminées en prenant la partie sphérique des moyennes par phase et des grandeurs macroscopiques dans la relation (1.68).

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_m^{(1)}(t) = \frac{3}{c^{(1)}} \left( \frac{1}{\kappa^{(1)}} - \frac{1}{\kappa^{(2)}} \right)^{-1} \left[ \bar{\varepsilon}_m(t) - \langle \varepsilon_{0m}(t) \rangle - \frac{1}{3\kappa^{(2)}} \bar{\sigma}_m(t) \right] \\ \bar{\sigma}_m^{(2)}(t) = \frac{3}{c^{(2)}} \left( \frac{1}{\kappa^{(2)}} - \frac{1}{\kappa^{(1)}} \right)^{-1} \left[ \bar{\varepsilon}_m(t) - \langle \varepsilon_{0m}(t) \rangle - \frac{1}{3\kappa^{(1)}} \bar{\sigma}_m(t) \right] \end{cases} \quad (1.70)$$

Cependant, en vue des applications envisagées (pour décrire le comportement du combustible MOX) on se limite au cas des déformations libres sphériques  $\boldsymbol{\varepsilon}_0(t) = \varepsilon_{0m}(t) \boldsymbol{\delta}$ , qui est un cas de chargement caractéristique pour le MOX. Les moyennes déviatoriques du champ de contrainte sont établies de manière similaire en considérant la partie déviatorique de ces grandeurs.

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t) = \frac{2}{c^{(1)}} \left( \frac{1}{\mu^{(1)}} - \frac{1}{\mu^{(2)}} \right)^{-1} \left[ \bar{\mathbf{e}}(t) - \frac{1}{2\mu^{(2)}} \bar{\mathbf{s}}(t) \right] \\ \bar{\mathbf{s}}^{(2)}(t) = \frac{2}{c^{(2)}} \left( \frac{1}{\mu^{(2)}} - \frac{1}{\mu^{(1)}} \right)^{-1} \left[ \bar{\mathbf{e}}(t) - \frac{1}{2\mu^{(1)}} \bar{\mathbf{s}}(t) \right] \end{cases} \quad (1.71)$$

Dans le cas particulier des matériaux hétérogènes dont les constituants ont le même module de compressibilité élastique, les lois d'évolution de la relation (1.70) conduisent à une indétermination. Pour lever cette indétermination il faut revenir à la résolution des problèmes de l'inclusion associés au modèle de Mori-Tanaka (voir l'annexe (A)). Dans cette démarche les contraintes moyennes hydrostatiques dans la matrice et dans l'inclusion s'écrivent :

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_m^{(1)}(t) = \bar{\sigma}_m(t) + \frac{12 c^{(2)} \kappa^{(1)} \mu^{(1)}}{3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}} \left( \varepsilon_{0m}^{(2)}(t) - \varepsilon_{0m}^{(1)}(t) \right) \\ \bar{\sigma}_m^{(2)}(t) = \bar{\sigma}_m(t) + \frac{12 c^{(1)} \kappa^{(1)} \mu^{(1)}}{3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}} \left( \varepsilon_{0m}^{(1)}(t) - \varepsilon_{0m}^{(2)}(t) \right) \end{cases} \quad (1.72)$$

## b. Composites à trois phases

Pour des matériaux constitués d'une matrice et de deux phases inclusionnaires, on a deux inconnues supplémentaires caractéristiques de la troisième phase. On dispose ainsi de cinq relations à sept inconnues. Comme dans le cas biphasé, la déformation effective se déduit de la loi de comportement macroscopique. Mais contrairement au cas biphasé, nous avons plus d'inconnus que d'équations. Nous allons donc exprimer les moyennes du champ de contrainte dans les inclusions en fonction d'une des inconnues, la moyenne dans la matrice. On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}(t) = \frac{1}{c^{(2)}} \left( \mathbf{S}^{(2)} - \mathbf{S}^{(3)} \right)^{-1} \left[ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) - \langle \boldsymbol{\varepsilon}_0(t) \rangle - c^{(1)} \left( \mathbf{S}^{(1)} - \mathbf{S}^{(3)} \right) : \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}(t) - \mathbf{S}^{(3)} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) \right] \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(3)}(t) = \frac{1}{c^{(3)}} \left( \mathbf{S}^{(3)} - \mathbf{S}^{(2)} \right)^{-1} \left[ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) - \langle \boldsymbol{\varepsilon}_0(t) \rangle - c^{(1)} \left( \mathbf{S}^{(1)} - \mathbf{S}^{(2)} \right) : \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}(t) - \mathbf{S}^{(2)} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) \right] \end{array} \right. \quad (1.73)$$

La moyenne du champ de contrainte dans la matrice  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}(t)$  est estimée à partir du tenseur de localisation des contraintes dans la matrice qui peut-être obtenu par différentes méthodes (milieu dilué, schéma différentiel, méthode de Mori-Tanaka, méthode auto-cohérente etc) :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}(t) = \mathbf{B}^{(1)} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) + \mathbf{b}^{(1)} \quad (1.74)$$

Dans le modèle de Mori-tanaka le tenseur de localisation des contraintes  $\mathbf{b}^{(1)}$  pour des phases inclusionnaires présentant des déformations libres homogènes s'écrit :

$$\mathbf{b}^{(1)} = \mathbf{B}^{(1)} : \sum_{r=2}^3 c^{(r)} \tilde{\mathbf{B}}^{(r)} : \mathbf{Q}_{\mathbf{E}}^{(1)} : (\boldsymbol{\varepsilon}_0^{(r)}(t) - \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(1)}(t)) \quad (1.75)$$

Les tenseurs  $\tilde{\mathbf{B}}^{(r)}$  ( $r = 2, 3$ ) sont définis dans l'annexe A, le tenseur de localisation des contraintes dans la matrice  $\mathbf{B}^{(1)}$  est donné par :

$$\mathbf{B}^{(1)} = \left[ c^{(1)} \mathbf{I} + \sum_{r=2}^3 c^{(r)} \left[ \mathbf{I} + \mathbf{Q}_{\mathbf{E}}^{(1)} : (\mathbf{S}^{(r)} - \mathbf{S}^{(1)}) \right]^{-1} \right]^{-1} \quad (1.76)$$

Lorsque le comportement des phases est isotope et que les inclusions ont une forme sphérique, les composantes sphériques et déviatoriques du tenseur de localisation des contraintes, solutions du problème thermo-mécanique, ont les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}_m^{(1)} = \frac{1}{c^{(1)} + (3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}) \sum_{r=2}^3 \frac{c^{(r)} \kappa^{(r)}}{\kappa^{(r)} (3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}) + 4\mu^{(1)} (\kappa^{(1)} - \kappa^{(r)})}} \\ \mathbf{B}_d^{(1)} = \frac{1}{c^{(1)} + 5(3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}) \sum_{r=2}^3 \frac{c^{(r)} \mu^{(r)}}{5\mu^{(r)} (3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}) + (9\kappa^{(1)} + 8\mu^{(1)}) (\mu^{(1)} - \mu^{(r)})}} \end{array} \right. \quad (1.77)$$

Pour le tenseur de localisation  $\mathbf{b}^{(1)}$  seule la partie sphérique apporte une contribution lorsque les déformations libres par phase sont purement sphériques.

$$\mathbf{b}_m^{(1)} = 12\kappa^{(1)} \mu^{(1)} \frac{\sum_{r=2}^3 \frac{c^{(r)} \kappa^{(r)} (\boldsymbol{\varepsilon}_{0m}^{(r)} - \boldsymbol{\varepsilon}_{0m}^{(1)})}{\kappa^{(r)} (3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}) + 4\mu^{(1)} (\kappa^{(1)} - \kappa^{(r)})}}{c^{(1)} + (3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}) \sum_{r=2}^3 \frac{c^{(r)} \kappa^{(r)}}{\kappa^{(r)} (3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}) + 4\mu^{(1)} (\kappa^{(1)} - \kappa^{(r)})}} \quad (1.78)$$

Dans ce cas, les moyennes hydrostatiques et déviatoriques dans les inclusions se déduisent de la relation générale (1.73). Quant aux moyennes dans la phase matricielle, elles s'obtiennent en utilisant la relation de localisation (1.74).

Si l'on considère de nouveau le cas des matériaux hétérogènes de même compressibilité élastique dans chacune des phases alors la moyenne sphérique du tenseur de localisation des contraintes dans la matrice  $B_m^{(1)}$  se réduit à l'unité et l'expression de la composante sphérique de  $\mathbf{b}^{(1)}$  est égale à :

$$\mathbf{b}_m^{(1)} = \frac{12\kappa^{(1)}\mu^{(1)}}{3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}} \sum_{r=2}^3 c^{(r)} \left( \varepsilon_{0m}^{(r)} - \varepsilon_{0m}^{(1)} \right) \quad (1.79)$$

Les expressions des contraintes moyennes hydrostatiques dans la matrice ainsi que dans les inclusions peuvent s'écrire dans ce cas particulier sous la forme suivante (voir annexe A).

$$\bar{\sigma}_m^{(r)}(t) = \bar{\sigma}_m(t) + \frac{12\kappa^{(1)}\mu^{(1)}}{3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}} \sum_{q \neq r} c^{(q)} \left( \varepsilon_{0m}^{(q)}(t) - \varepsilon_{0m}^{(r)}(t) \right) \quad , \quad r = 1, 2, 3 \quad (1.80)$$

## 2.6.2. Comportement macroscopique

Pour une distribution spatiale isotrope des phases, et si les déformations libres sont sphériques, la loi de comportement homogénéisée estimée avec le modèle de Mori-Tanaka s'écrit dans ces conditions :

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon}_m(t) = \frac{1}{3\tilde{\kappa}_{\text{MT}}} \bar{\sigma}_m(t) + \bar{\varepsilon}_{0m}(t) \\ \bar{\mathbf{e}}(t) = \frac{1}{2\tilde{\mu}_{\text{MT}}} \bar{\mathbf{s}}(t) \end{cases} \quad (1.81)$$

Si on se limite à l'étude des contraintes moyennes hydrostatiques par phase dans le cas biphasé, le tenseur de localisation des contraintes dans chacune des phases se réduit aux grandeurs scalaires  $B_m^{(r)}$  ( $r = 1, 2$ ) dont les expressions sont déterminées à partir de la relation (1.70) et en utilisant la loi de comportement macroscopique (1.51) relative à la partie sphérique. Ainsi la moyenne hydrostatique du tenseur de localisation des contraintes dans la matrice s'écrit :

$$B_m^{(1)} = \frac{1}{c^{(1)}} \left[ \frac{1}{\kappa^{(1)}} - \frac{1}{\kappa^{(2)}} \right]^{-1} \left( \frac{1}{\tilde{\kappa}_{\text{MT}}} - \frac{1}{\kappa^{(2)}} \right) \quad (1.82)$$

En se servant de la relation (1.14)  $c^{(1)}B_m^{(1)} + c^{(2)}B_m^{(2)} = 1$ , l'évolution dans le temps du gonflement effectif dans ce cas biphasé est donnée par :

$$\bar{\varepsilon}_{0m}(t) - \langle \varepsilon_{0m}(t) \rangle = \gamma \left( \varepsilon_{0m}^{(1)}(t) - \varepsilon_{0m}^{(2)}(t) \right) \quad (1.83)$$

où  $\gamma$  est une constante qui dépend des propriétés élastiques du matériau et de la fraction volumique de la matrice.

$$\gamma = \left[ \left( \frac{1}{\kappa^{(1)}} - \frac{1}{\kappa^{(2)}} \right)^{-1} \left( \frac{1}{\tilde{\kappa}_{\text{MT}}} - \frac{1}{\kappa^{(2)}} \right) - c^{(1)} \right] = \frac{4c^{(1)}(1 - c^{(1)})\mu^{(1)}(\kappa^{(1)} - \kappa^{(2)})}{3\kappa^{(1)}\kappa^{(2)} + 4\mu^{(1)} \sum_{r=1}^2 c^{(r)}\kappa^{(r)}} \quad (1.84)$$

Comme dans le cas biphasé, l'expression du gonflement effectif dans le cas d'un composite à trois phases est calculée au moyen du tenseur de localisation des contraintes. Son évolution

temporelle est donnée par

$$\bar{\varepsilon}_{0m}(t) - \langle \varepsilon_{0m}(t) \rangle = \sum_{r=2}^3 c^{(r)} (B_m^{(r)} - 1) (\varepsilon_{0m}^{(r)}(t) - \varepsilon_{0m}^{(1)}(t)) \quad (1.85)$$

Les moyennes hydrostatiques dans les phases inclusionnaires du tenseur de localisation des contraintes, évaluées avec le modèle de Mori-Tanaka ont pour expressions :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_m^{(2)} = \frac{3\kappa^{(1)}\kappa^{(2)} + 4\kappa^{(2)}\mu^{(1)}}{[3\kappa^{(1)}\kappa^{(2)} + 4\mu^{(1)}(2\kappa^{(2)} - \kappa^{(1)})]} \left[ c^{(1)} + (3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}) \sum_{r=2}^3 \frac{c^{(r)}\kappa^{(r)}}{\kappa^{(r)}(3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}) - (\kappa^{(1)} - \kappa^{(r)})} \right] \\ B_m^{(3)} = \frac{3\kappa^{(1)}\kappa^{(3)} + 4\kappa^{(3)}\mu^{(1)}}{[3\kappa^{(1)}\kappa^{(3)} + 4\mu^{(1)}(2\kappa^{(3)} - \kappa^{(1)})]} \left[ c^{(1)} + (3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}) \sum_{r=2}^3 \frac{c^{(r)}\kappa^{(r)}}{\kappa^{(r)}(3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}) - (\kappa^{(1)} - \kappa^{(r)})} \right] \end{array} \right. \quad (1.86)$$

Comme dans la matrice, les moyennes sphériques des tenseurs de localisation des contraintes dans les inclusions sont égales à l'unité pour un matériau dont les modules de compressibilité élastique sont identiques. Dans ce cas particulier l'expression du gonflement effectif hydrostatique se réduit au gonflement moyen.

$$\bar{\varepsilon}_{0m}(t) = \langle \varepsilon_{0m}(t) \rangle \quad (1.87)$$

### 3. Conclusions

Dans cette section, nous avons passé en revue différents modèles d'homogénéisation développés en élasticité linéaire. La démarche d'homogénéisation analytique qui repose sur le modèle de Mori-Tanaka a aussi été exposée pour estimer à l'échelle macroscopique le comportement thermo-élastique de matériaux hétérogènes. Néanmoins la formulation de Levin pourrait être aussi exploitée si l'on souhaite utiliser d'autres schémas d'homogénéisation. Le choix du modèle de Mori-Tanaka dans cette étude résulte du fait qu'il est bien adapté à la description de microstructures de type matrice-inclusions avec de très bonnes estimations pour des fractions volumiques des phases inclusionnaires raisonnables (inférieures à 20%), ce qui est notre cas. Les expressions des moyennes par phase du champ de contrainte peuvent être évaluées dans ce cas particulier. Par ailleurs, nous allons exploiter dans ce qui suit les résultats de la théorie de l'élasticité, le modèle de Mori-Tanaka et le principe de correspondance de Mandel pour étendre ces estimations aux matériaux thermo-viscoélastiques.

## IV. Résultats en thermo-viscoélasticité

Le principe de correspondance de Mandel [8] est généralement utilisé pour la résolution des problèmes d'homogénéisation en viscoélasticité et en thermo-viscoélasticité linéaire dans le cas vieillissant. Christensen [55] a élaboré à l'aide de ce principe et du module de cisaillement effectif obtenu par homogénéisation dans le cas d'un comportement élastique des phases, une méthode de prédiction des propriétés mécaniques effectives dont le comportement des phases est viscoélastique linéaire. Wang et Weng [56] ont développé un modèle qui repose sur le même principe et le modèle de Mori-Tanaka [43] pour étudier l'influence de la forme des inclusions sur le comportement viscoélastique linéaire effectif. Ces estimations ont par la suite été exprimées sous une formulation à variables internes (Ricaud et Masson) [57] dans le cas des matériaux vieillissants à deux phases isotropes puis étendues par Blanc et al [58] aux matériaux à trois phases. A noter que la formulation à variables internes obtenue dans [56] par inversion exacte de la transformée de Laplace-Carson ont plus récemment été obtenues directement dans l'espace temporel dans [59].

La loi de comportement en viscoélasticité linéaire est caractérisée par une combinaison des vitesses de déformations visqueuses et élastiques qui sont respectivement proportionnelles aux champs de contraintes et leurs dérivées par rapport au temps. L'évolution dans le temps du comportement visqueux dans ce cas est décrite par un potentiel de dissipation quadratique défini par

$$U_v^{(r)}(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{cases} \frac{\sigma_0^{(r)} \dot{\varepsilon}_0^{(r)}}{2} \left( \frac{\boldsymbol{\sigma}_{\text{eq}}}{\sigma_0^{(r)}} \right)^2 & \text{si } \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.88)$$

Ainsi la résolution du problème mécanique local (1.6) pour un comportement viscoélastique linéaire non vieillissant avec déformation libre s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right) \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ \dot{\varepsilon}_m(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{3\kappa_e^{(r)}} \dot{\sigma}_m(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{3\kappa_v^{(r)}} \sigma_m(\mathbf{x}, t) + \dot{\varepsilon}_{0m}^{(r)}(t) \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \quad , \quad r = 1, 2, \dots, N \\ \dot{\mathbf{e}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\mu_e^{(r)}} \dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2\mu_v^{(r)}} \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) \quad , \quad \frac{1}{2\mu_v^{(r)}} = \left( \frac{1}{2\mu_v^{(r)irr}} + \frac{3\dot{\varepsilon}_0^{(r)}}{2\sigma_0^{(r)}} \right) \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \quad , \quad r = 1, 2, \dots, N \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \cdot \mathbf{x} \\ \text{ou} \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (1.89)$$



# 1. Principe de correspondance de Mandel

## 1.1 Transformée de Laplace-Carson

La transformée de Laplace-Carson est une méthode classique utilisée pour transformer la loi de comportement thermo-viscoélastique ou viscoélastique linéaire des matériaux non vieillissants en une loi pseudo-élastique avec ou sans déformation libre dans l'espace de Laplace-Carson.

**Définition :** Soit  $F(t)$  une fonction continue et dérivable définie pour tout réel  $t \geq 0$  et nulle pour  $t < 0$ , sa transformée de Laplace-Carson notée  $f^*(p)$  est la transformée intégrale donnée par la formule

$$f^*(p) = \mathcal{L}\{F(t)\} = p \int_0^{\infty} F(t) e^{-pt} dt \quad (1.90)$$

Où  $p$  est une variable scalaire positive et définie dans l'espace de Laplace-Carson, la notation « $\mathcal{L}$ » désigne par la suite la transformation de Laplace-Carson.

**Conditions d'existence et propriétés élémentaires :** La transformée de Laplace-Carson  $f^*(p)$  n'existe que pour certaines fonctions  $F(t)$  qui doivent satisfaire aux propriétés suivantes :

- La fonction  $F(t)$  doit être continue par morceau sur l'intervalle d'étude.
- Elle doit être d'ordre exponentielle  $\eta > 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

Une fonction  $F(t)$  est d'ordre exponentielle  $\eta > 0$  s'il existe un nombre réel  $M > 0$  tel que :

$$|F(t)e^{-\eta t}| < M \quad \forall \quad t > t_0 \quad (1.91)$$

- Transformée de la dérivée : Soit  $F(t)$  une fonction continue et dérivable pour tout  $t \geq 0$ , la transformée de Laplace-Carson de la dérivée de  $F(t)$  par rapport au temps s'exprime en fonction de la transformée de Laplace de  $F(t)$ .

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = p \mathcal{L}\{F(t)\} - pF(0) \quad (1.92)$$

- Linéarité : Soient  $F(t)$  et  $G(t)$  deux fonctions de transformées de Laplace-Carson respectives  $\mathcal{L}\{F(t)\}$  et  $\mathcal{L}\{G(t)\}$  ; alors pour tout couple  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  nous avons la relation suivante

$$\mathcal{L}\{aF(t) + bG(t)\} = a \mathcal{L}\{F(t)\} + b \mathcal{L}\{G(t)\} \quad (1.93)$$

- Produit de convolution : La transformée de Laplace-Carson du produit de convolution de deux fonctions  $F(t)$  et  $G(t)$  est égale au produit de leurs transformées.

$$\mathcal{L}\{F(t) * G(t)\} = \mathcal{L}\{F(t)\} \mathcal{L}\{G(t)\} \quad (1.94)$$

où le symbole  $(*)$  désigne le produit de convolution défini par :  $(F * G)(\mathbf{x}) = \int_0^{\infty} F(\mathbf{x}-t) \times G(t) dt$ .

Nous avons rappelé ici les principales propriétés de la transformée de Laplace-Carson (voir [60] pour une description exhaustive). Dans le tableau suivant sont récapitulées les transformées de Laplace-Carson des fonctions rationnelles rencontrées dans les problèmes de thermo-viscoélasticité ou viscoélasticité linéaire abordés dans ce travail.

Fonction temporelle	Transformée de Laplace-Carson
$t$	$\frac{1}{p}$
$e^{-at}$	$\frac{p}{p+a}$
$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{p+a}$
$1 + at$	$\frac{p+a}{p}$

TABLE 1.1 – Transformées de Laplace-Carson usuelles

**Transformée de Laplace-Carson inverse :** L'utilisation de la transformée inverse de Laplace-Carson dans la résolution des problèmes d'homogénéisation en thermo-viscoélasticité ou viscoélasticité est une opération mathématique parfois très complexe à réaliser. Néanmoins pour les situations traitées plus loin, les résultats obtenus sont sous la forme de fractions rationnelles dans l'espace de Carson. Dans ce cas on peut retrouver les fonctions originales dans l'espace temporel à partir du tableau précédent.

Le calcul de transformée de Laplace-Carson inverse dans certains cas peut être effectué en identifiant des fonctions additionnelles solutions d'une équation différentielle du premier ordre. En effet, si  $q^*(p)$  est le produit de deux fonctions  $f^*(p)$  et  $g^*(p)$ ,  $f^*(p)$  étant une fraction rationnelle de la variable  $p$  dont la décomposition en éléments simples s'écrit :

$$f^*(p) = f_e \frac{p}{p + \frac{1}{\tau}} = f_e \left( 1 - \frac{\frac{1}{\tau}}{p + \frac{1}{\tau}} \right) \tag{1.95}$$

alors l'inverse de la transformée de Laplace-Carson de la fonctions  $q^*(p)$  est donnée par la relation suivante

$$q(t) = f_e(g(t) - r(t)) \tag{1.96}$$

avec  $r(t)$  satisfaisant à l'équation différentielle suivante :

$$\dot{r}(t) + \frac{1}{\tau} r(t) = \frac{1}{\tau} g(t) \quad , \quad r(0) = 0 \tag{1.97}$$

Ce résultat peut-être étendu à une fraction rationnelle possédant plusieurs pôles. En effet si la fonction  $f^*(p)$  est de la forme

$$f^*(p) = \sum_{j=1}^N f_j \frac{p}{p + \frac{1}{\tau_j}} \quad , \quad \sum_{j=1}^N f_j = f_e \tag{1.98}$$

l'expression de la fonction  $q(t)$  dans l'espace temporel, obtenue par la transformée inverse, devient

$$q(t) = f_e(g(t) - \sum_{j=1}^N r_j(t)), \quad (1.99)$$

où  $r(t)$  est solution de l'équation différentielle du premier ordre suivant

$$\dot{r}_j(t) + \frac{1}{\tau_j} r_j(t) = \frac{1}{\tau_j} \frac{f_j}{f_e} g(t) \quad , \quad r(0) = 0 \quad (1.100)$$

On remarque au passage que la fonction  $q(t)$  à l'instant initial est donnée par la relation  $q(0) = f_e g(0)$ .

## 1.2 Principe de correspondance

Ce principe, énoncé par Mandel [8], consiste à ramener le problème viscoélastique ou thermo-viscoélastique non-vieillissant en un problème pseudo-élastique avec ou sans déformation libre dans l'espace de Laplace-Carson. Ainsi ce principe appliqué au problème thermo-viscoélastique défini par (1.89) conduit à la résolution du problème pseudo-élastique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x}, p) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0, F] \\ \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x}, p) = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, p) + \nabla^T \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, p) \right) \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0, F] \\ \varepsilon_m^*(\mathbf{x}, p) = \frac{1}{3\kappa^{(r)*}} \sigma_m^*(\mathbf{x}, p) + \varepsilon_{0m}^{(r)*}(p) \quad , \quad r = 1, 2, \dots, N \\ \mathbf{e}^*(\mathbf{x}, p) = \frac{1}{2\mu^{(r)*}} \mathbf{s}^*(\mathbf{x}, p) \quad , \quad r = 1, 2, \dots, N \\ \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, p) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(p) \cdot \mathbf{x} \\ \text{ou} \\ \boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x}, p) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}^*(p) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \end{array} \right. \quad (1.101)$$

Les modules de compressibilité  $\kappa^{(r)*}$  et de cisaillement  $\mu^{(r)*}$  dans l'espace de Laplace-Carson dépendent du paramètre  $p$ , du module élastique  $\kappa_e$  et des propriétés visqueuses caractéristiques des différentes phases du matériau d'étude. Les expressions de ces modules sont exprimées par :

$$\frac{1}{\kappa^{(r)*}(p)} = \frac{1}{\kappa_e} + \frac{1}{p \kappa_v^{(r)}} \quad , \quad \frac{1}{\mu^{(r)*}(p)} = \frac{1}{\mu_e} + \frac{1}{p \mu_v^{(r)}} \quad (1.102)$$

Les équations algébriques établies dans cet espace sont donc formellement analogues aux équations traduisant la loi de comportement de l'élasticité ou thermo-élasticité linéaire. Le problème à résoudre devient plus simple, ce qui montre l'intérêt de l'utilisation de la transformée de Laplace-Carson en viscoélasticité linéaire. Les solutions du problème viscoélastique ou thermo-viscoélastique qui sont des fonctions temporelles sont alors obtenues en procédant à l'inversion de la transformée.

Le problème pseudo-élastique étant bien défini dans l'espace de Carson, nous allons dans ce qui suit utiliser les résultats obtenus en partie III. pour établir les solutions du problème thermo-viscoélastique pour une microstructure particulière (Combustible MOX).

## 2. Applications à des composites 2 ou 3 phases représentatifs du combustible MOX (Mori-Tanaka)

L'étude présentée dans la deuxième partie permet d'aborder la modélisation à l'échelle macroscopique des combustibles MOX lorsque la loi de comportement dans les phases est de type viscoélastique linéaire avec des déformations libres représentatives des gonflements différentiels dans les phases. Étant donné que les propriétés élastiques du combustible MOX sont quasi-identiques ( $\kappa^{(1)} \simeq \kappa^{(2)} = \kappa_e$  et  $\mu^{(1)} \simeq \mu^{(2)} = \mu_e$ ) [33], cela revient à résoudre un problème purement hétérogène du point de vue visqueux et thermique (les modules de cisaillement visqueux et le gonflement sont différents dans les phases). Cette particularité fait que le calcul de l'inverse de la transformée de Laplace-Carson des moyennes par phase, que nous présentons dans la section qui suit, devient plus simple.

### 2.1 Comportement macroscopique

#### 2.1.1. Principe de superposition de Boltzmann

Considérons un matériau viscoélastique linéaire et non vieillissant de domaine  $\Omega$ , soumis à une histoire de déformation définie par la fonction du temps  $\bar{\varepsilon}(\tau)$  sur sa frontière. La formulation intégrale de loi de comportement macroscopique est alors donnée par le principe de superposition de Boltzmann :

$$\bar{\sigma}(t) = \int_0^t \mathbf{E}(t - \tau) : d\bar{\varepsilon}(\tau) + \mathbf{E}(t) : \bar{\varepsilon}(0) \quad (1.103)$$

où  $\mathbf{E}$  désigne un tenseur d'ordre quatre caractéristique de la fonction de relaxation. La contrainte macroscopique à l'instant  $t$  est obtenue par superposition des effets de la déformation à l'instant initial  $t = 0$  et ceux des accroissements successifs  $d\bar{\varepsilon}(\tau)$ . La loi de comportement apparaît ainsi comme une correspondance fonctionnelle entre l'histoire de la sollicitation et celle de la réponse. Le comportement non vieillissant du matériau se traduit par l'invariance de ces propriétés mécaniques dans le temps.

#### 2.1.2. Résultats en thermo-viscoélasticité linéaire

Les propriétés effectives du matériau se déduisent directement des propriétés élastiques effectives établies dans l'espace de Carson avec la loi de comportement à l'échelle macroscopique qui est donnée par le modèle de Mori-Tanaka (relation(1.81)).

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon}_m^*(p) = \frac{1}{3\tilde{\kappa}_{\text{MT}}^*(p)} \bar{\sigma}_m^*(p) + \bar{\varepsilon}_{0m}^*(p) \\ \bar{\mathbf{e}}^*(p) = \frac{1}{2\tilde{\mu}_{\text{MT}}^*(p)} \bar{\mathbf{s}}^*(p) \end{cases} \quad (1.104)$$

Le calcul de l'inverse de la transformée de Laplace-Carson, dans la détermination des propriétés viscoélastiques macroscopiques est une opération mathématique très complexe à réaliser. La formule de Bromwich [61] permet certes de calculer la transformée inverse de Laplace d'une fonction à l'aide du théorème des résidus mais cette formule conduit dans le cas général à des développements analytiques non négligeables. Ce calcul est classiquement effectué en ayant recours à des méthodes numériques. On peut notamment citer la méthode de collocation introduite par Schapery [62]. Cependant dans les schémas d'homogénéisation de Mori-Tanaka (y

compris Voigt et Reuss) les propriétés viscoélastiques effectives ont été établies analytiquement par Ricaud et Masson [57]. En effet, lorsque les modules de compressibilité  $\tilde{\kappa}_{\text{MT}}^*(p)$  et de cisaillement  $\tilde{\mu}_{\text{MT}}^*(p)$ , qui dépendent du paramètre  $p$  dans l'espace de Carson, sont exprimés en une somme de fractions rationnelles simples de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\kappa}_{\text{MT}}^*(p) = \sum_{j=1}^{N_p^m} \kappa_{\bar{\tau}_j^m} \frac{p}{p + \frac{1}{\bar{\tau}_j^m}} \\ \tilde{\mu}_{\text{MT}}^*(p) = \sum_{j=1}^{N_p^d} \mu_{\bar{\tau}_j^d} \frac{p}{p + \frac{1}{\bar{\tau}_j^d}} \end{array} \right. \quad (1.105)$$

Par l'inverse de la transformée de Laplace-Carson (voir tableau 1.1), on obtient les modules de compressibilité et de cisaillement effectifs dans l'espace temporel.

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\kappa}_{\text{MT}}(t) = \kappa_e e^{-\frac{t}{\bar{\tau}_j^m}} \quad , \quad \kappa_e = \sum_{j=1}^{N_p^m} \kappa_{\bar{\tau}_j^m} \\ \tilde{\mu}_{\text{MT}}(t) = \mu_e e^{-\frac{t}{\bar{\tau}_j^d}} \quad , \quad \mu_e = \sum_{j=1}^{N_p^d} \mu_{\bar{\tau}_j^d} \end{array} \right. \quad (1.106)$$

On remarque que les modules de compressibilité et de cisaillement dans le domaine temporel sont décomposés en une somme de fonctions exponentielles appelée série de Prony-Dirichlet. Pour déterminer le comportement macroscopique du matériau dans l'espace réel, nous allons utiliser la relation (1.104) en remplaçant les modules de compressibilité et de cisaillement effectifs par leurs expressions respectives, ce qui nous permet de réécrire la loi de comportement homogénéisée sous la forme.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}_m^*(p) = 3 \sum_{j=1}^{N_p^m} \kappa_{\bar{\tau}_j^m} \frac{p}{p + \frac{1}{\bar{\tau}_j^m}} (\bar{\varepsilon}_m(p) - \bar{\varepsilon}_{0m}(p)) \\ \bar{s}^*(p) = 2 \sum_{j=1}^{N_p^d} \mu_{\bar{\tau}_j^d} \frac{p}{p + \frac{1}{\bar{\tau}_j^d}} \bar{e}^*(p) \end{array} \right. \quad (1.107)$$

Puis, par l'inverse de la transformée de Laplace-Carson en utilisant la propriété (1.99), on établit le comportement effectif qui s'exprime alors naturellement par une formulation à variables internes.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}_m(t) = 3\kappa_e \left( \bar{\varepsilon}_m(t) - \bar{\varepsilon}_{0m}(t) - \sum_{j=1}^{N_p^m} \bar{\alpha}_j^m(t) \right) \\ \bar{s}(t) = 2\mu_e \left( \bar{e}(t) - \sum_{j=1}^{N_p^d} \bar{\alpha}_j^d(t) \right) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{\varepsilon}_m(t) = \frac{1}{3\kappa_e} \bar{\sigma}_m(t) + \bar{\varepsilon}_{0m}(t) + \sum_{j=1}^{N_p^m} \bar{\alpha}_j^m(t) \\ \bar{e}(t) = \frac{1}{2\mu_e} \bar{s}(t) + \sum_{j=1}^{N_p^d} \bar{\alpha}_j^d(t) \end{array} \right. \quad (1.108)$$

Où  $\bar{\alpha}_j^m(t)$  et  $\bar{\alpha}_j^d(t)$  sont des variables internes sphériques et déviatoriques dont les évolutions temporelles sont solutions d'équations différentielles linéaires du premier ordre.

$$\begin{cases} \dot{\bar{\alpha}}_j^m(t) + \frac{1}{\bar{\tau}_j^m} \bar{\alpha}_j^m(t) = \frac{1}{\bar{\tau}_j^m} \frac{\kappa_{\bar{\tau}_j^m}}{\kappa_e} (\bar{\varepsilon}_m(t) - \bar{\varepsilon}_{0m}(t)) & , \quad 1 \leq j \leq N_p^m & , \quad \bar{\alpha}_j^m(0) = 0 \\ \dot{\bar{\alpha}}_j^d(t) + \frac{1}{\bar{\tau}_j^d} \bar{\alpha}_j^d(t) = \frac{1}{\bar{\tau}_j^d} \frac{\mu_{\bar{\tau}_j^d}}{\mu_e} \bar{\mathbf{e}}(t) & , \quad 1 \leq j \leq N_p^d & , \quad \bar{\alpha}_j^d(0) = 0 \end{cases} \quad (1.109)$$

Dans le cas biphasé, le nombre de variables internes pour la partie sphérique est  $N_p^m = 2$ , celui de la partie déviatorique est égal à  $N_p^d = 3$  (voir [57]). Quant à l'évolution du gonflement effectif dans l'espace temporel, elle se déduit de la relation (1.83) avec la constante  $\gamma$  dans l'espace de Carson qui s'écrit :

$$\gamma^*(p) = \frac{\alpha_\gamma}{\tau_\gamma} \frac{1}{p + \frac{1}{\tau_\gamma}} \quad , \quad \alpha_\gamma = - \frac{c^{(1)} c^{(2)} \left( \frac{1}{\kappa_v^{(2)}} - \frac{1}{\kappa_v^{(1)}} \right)}{\frac{c^{(1)}}{\kappa_v^{(2)}} + \frac{c^{(2)}}{\kappa_v^{(1)}} + \frac{3}{4\mu_v^{(1)}}} \quad \text{et} \quad \tau_\gamma = \frac{\frac{1}{\kappa_e} + \frac{3}{4\mu_e}}{\frac{c^{(1)}}{\kappa_v^{(2)}} + \frac{c^{(2)}}{\kappa_v^{(1)}} + \frac{3}{4\mu_v^{(1)}}} \quad (1.110)$$

Ce qui conduit, par inversion de la transformée de Carson en utilisant la relation (1.97), à l'équation différentielle suivante :

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{\tau_\gamma} y(t) = \frac{\alpha_\gamma}{\tau_\gamma} (\varepsilon_{0m}^{(1)}(t) - \varepsilon_{0m}^{(2)}(t)) \quad , \quad y(t) = \bar{\varepsilon}_{0m}(t) - \langle \varepsilon_{0m}(t) \rangle \quad , \quad y(0) = 0 \quad (1.111)$$

Dans le cas d'un composite à trois phases [58] la fonction de relaxation hydrostatique  $\tilde{\kappa}_{\text{MT}}(t)$  présente quatre termes ( $N_p^m = 4$ ) tandis que pour la partie déviatorique la fonction de relaxation  $\tilde{\mu}_{\text{MT}}(t)$  en possède six ( $N_p^d = 6$ ). Similairement au cas précédent (composite biphasé), le gonflement effectif dans l'espace réel est obtenu en procédant à la transformée inverse de la relation (1.85), solution du problème pseudo-élastique dans l'espace de Laplace-Carson.

$$y(t) = \frac{4\mu_e}{3\kappa_e + 4\mu_e} \left[ c^{(2)} \sum_{j=1}^4 y_j^{(1)}(t) + c^{(3)} \sum_{j=1}^4 y_j^{(2)}(t) \right], \quad (1.112)$$

où  $y_j^{(1)}$  et  $y_j^{(2)}$  sont des variables internes solutions des équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dot{y}_j^{(1)}(t) + \frac{1}{\tau_{1(j)}^\gamma} y_j^{(1)}(t) = \frac{\gamma_{1(j)}}{\tau_{1(j)}^\gamma} (\varepsilon_{0m}^{(2)}(t) - \varepsilon_{0m}^{(1)}(t)) & , \quad y_j^{(1)}(t) = 0 \\ \dot{y}_j^{(2)}(t) + \frac{1}{\tau_{2(j)}^\gamma} y_j^{(2)}(t) = \frac{\gamma_{2(j)}}{\tau_{2(j)}^\gamma} (\varepsilon_{0m}^{(3)}(t) - \varepsilon_{0m}^{(1)}(t)) & , \quad y_j^{(2)}(t) = 0 \end{cases} \quad (1.113)$$

$\gamma_{1(j)}$  et  $\tau_{1(j)}^\gamma$  ( $1 \leq j \leq 4$ ) sont des constantes dont les expressions sont bien explicitées dans [7].

Pour une compressibilité purement élastique ( $\kappa_v^{(r)} = \infty$ ), les temps de relaxation  $\bar{\tau}_j^m$  deviennent infinis et les variables internes purement hydrostatiques s'annulent ( $\bar{\alpha}_m(t) = 0$ ). De plus le gonflement effectif se réduit au gonflement moyen de sorte que l'expression analytique de la loi de comportement homogénéisée devient relativement simple.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\varepsilon}_m(t) = \frac{1}{3\kappa_e} \bar{\sigma}_m(t) + \langle \varepsilon_{0m}(t) \rangle \\ \bar{\mathbf{e}}(t) = \frac{1}{2\mu_e} \bar{\mathbf{s}}(t) + \sum_{j=1}^{N_p^d} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j^d(t) \\ \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j^d(t) + \frac{1}{\bar{\tau}_j^d} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j^d(t) = \frac{1}{\bar{\tau}_j^d} \frac{\mu_{\bar{\tau}_j^d}}{\mu_e} \bar{\mathbf{e}}(t) \quad , \quad 1 \leq j \leq N_p^d \quad , \quad \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j^d(0) = 0 \end{array} \right. \quad (1.114)$$

### 2.1.3. Conclusion

Le développement des fonctions de relaxations  $\tilde{\kappa}(t)$  et  $\tilde{\mu}(t)$  dans d'autres cas particuliers (modèles de Reuss et Voigt) est exact avec un nombre fini de termes. Dans ces deux modèles, les temps de relaxation définis dans les expressions des variables internes sont exprimés directement comme une fonction de la fraction volumique tandis que dans le modèle de Mori-Tanaka ils sont exprimés comme une fonction de quatre constantes supplémentaires (voir [57]). Donc le nombre de variables internes dépend du schéma d'homogénéisation. Reuss par exemple prédit un comportement global Maxwellien (un seul temps de relaxation dans les cas deux phases et trois phases,  $N_p^m = N_p^d = 1$ ) alors que dans le modèle de Voigt, on a deux temps de relaxations ( $N_p^m = N_p^d = 2$ ) dans le cas biphasé et trois temps de relaxation ( $N_p^m = N_p^d = 3$ ) dans le cas des composites à trois phases.

## 2.2 Champs moyens par phase pour un composite biphasé

### 2.2.1. Moyennes sphériques :

Dans ce cas biphasé (voir [57]), les contraintes moyennes sphériques dans la matrice  $\bar{\sigma}_m^{(1)}(t)$  et dans l'inclusion  $\bar{\sigma}_m^{(2)}(t)$  sont déterminées à partir de la relation (1.72) en remplaçant les modules élastiques par les modules définis dans la relation (1.102). Le module d'élasticité étant homogène ( $\kappa^{(1)} \simeq \kappa^{(2)} = \kappa_e$ ), les contraintes moyennes sphériques, solutions du problème pseudo-élastique s'écrivent plus simplement selon :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}_m^{(1)*}(p) = \frac{3}{c^{(1)}} \left( \frac{1}{\kappa_v^{(1)}} - \frac{1}{\kappa_v^{(2)}} \right)^{-1} \left[ p \bar{\varepsilon}_m^*(p) - \langle p \varepsilon_{0m}^*(p) \rangle - \frac{1}{3} \left( \frac{p \bar{\sigma}_m^*(t)}{\kappa_e} + \frac{\bar{\sigma}_m(p)}{\kappa_v^{(2)}} \right) \right] \\ \bar{\sigma}_m^{(2)*}(p) = \frac{3}{c^{(2)}} \left( \frac{1}{\kappa_v^{(2)}} - \frac{1}{\kappa_v^{(1)}} \right)^{-1} \left[ p \bar{\varepsilon}_m^*(p) - \langle p \varepsilon_{0m}^*(p) \rangle - \frac{1}{3} \left( \frac{p \bar{\sigma}_m^*(t)}{\kappa_e} + \frac{\bar{\sigma}_m(p)}{\kappa_v^{(1)}} \right) \right] \end{array} \right. \quad (1.115)$$

Les lois d'évolution des moyennes sphériques par phase sont alors obtenues par calcul de l'inverse de la transformée de Laplace-Carson (utilisation de la relation (1.92)).

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}_m^{(1)}(t) = \frac{3}{c^{(1)}} \left( \frac{1}{\kappa_v^{(1)}} - \frac{1}{\kappa_v^{(2)}} \right)^{-1} \left[ \dot{\bar{\varepsilon}}_m(t) - \langle \dot{\varepsilon}_{0m}(t) \rangle - \frac{1}{3} \left( \frac{\dot{\bar{\sigma}}_m(t)}{\kappa_e} + \frac{\bar{\sigma}_m(t)}{\kappa_v^{(2)}} \right) \right] \\ \bar{\sigma}_m^{(2)}(t) = \frac{3}{c^{(2)}} \left( \frac{1}{\kappa_v^{(2)}} - \frac{1}{\kappa_v^{(1)}} \right)^{-1} \left[ \dot{\bar{\varepsilon}}_m(t) - \langle \dot{\varepsilon}_{0m}(t) \rangle - \frac{1}{3} \left( \frac{\dot{\bar{\sigma}}_m(t)}{\kappa_e} + \frac{\bar{\sigma}_m(t)}{\kappa_v^{(1)}} \right) \right] \end{array} \right. \quad (1.116)$$

A ce stade, les expressions analytiques des moyennes hydrostatiques par phase sont parfaitement déterminées selon la condition de chargement appliquée sur le bord du volume élémentaire. Dans le cas d'un chargement en contraintes homogènes (respectivement en déformations homogènes), nous avons vu que la réponse macroscopique est décrite par une formulation à variables internes.

### 2.2.2. Moyennes déviatoriques :

Comme dans le cas précédent, on applique la transformée de Laplace-Carson inverse à la relation (1.71) et en tenant compte du fait que l'élasticité est homogène (même module de cisaillement élastique dans les phases). Ainsi on obtient :

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t) = \frac{2}{c^{(1)}} \left( \frac{1}{\mu_v^{(1)}} - \frac{1}{\mu_v^{(2)}} \right)^{-1} \left[ \dot{\bar{\mathbf{e}}}(t) - \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{\bar{\mathbf{s}}}(t)}{\mu_e} + \frac{\bar{\mathbf{s}}(t)}{\mu_v^{(2)}} \right) \right] \\ \bar{\mathbf{s}}^{(2)}(t) = \frac{2}{c^{(2)}} \left( \frac{1}{\mu_v^{(2)}} - \frac{1}{\mu_v^{(1)}} \right)^{-1} \left[ \dot{\bar{\mathbf{e}}}(t) - \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{\bar{\mathbf{s}}}(t)}{\mu_e} + \frac{\bar{\mathbf{s}}(t)}{\mu_v^{(1)}} \right) \right] \end{cases} \quad (1.117)$$

Dans le cas des matériaux à compressibilité purement élastique ( $\kappa_v^{(r)} = \infty$ ), les moyennes hydrostatiques par phase ne peuvent être établies aussi facilement en raison de la compressibilité élastique qui est uniforme. Pour déterminer les évolutions temporelles de ces moyennes hydrostatiques par phase, nous partons des résultats disponibles dans l'espace de Laplace-Carson en remplaçant les modules élastiques dans la relation (1.72) par ceux correspondant au problème pseudo-élastique dans l'espace de Carson.

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_m^{(1)*}(p) = \bar{\sigma}_m^*(p) + \frac{12 c^{(2)} \kappa^{(1)*} \mu^{(1)*}}{3\kappa^{(1)*} + 4\mu^{(1)*}} \left( \varepsilon_{0m}^{(2)*}(p) - \varepsilon_{0m}^{(1)*}(p) \right) \\ \bar{\sigma}_m^{(2)*}(p) = \bar{\sigma}_m^*(p) + \frac{12 c^{(1)} \kappa^{(1)*} \mu^{(1)*}}{3\kappa^{(1)*} + 4\mu^{(1)*}} \left( \varepsilon_{0m}^{(1)*}(p) - \varepsilon_{0m}^{(2)*}(p) \right) \end{cases} \quad (1.118)$$

A nouveau, nous utilisons la décomposition en fractions simples méthode appliquée ici aux termes  $\frac{12 c^{(2)} \kappa^{(1)*} \mu^{(1)*}}{3\kappa^{(1)*} + 4\mu^{(1)*}}$  et  $\frac{12 c^{(1)} \kappa^{(1)*} \mu^{(1)*}}{3\kappa^{(1)*} + 4\mu^{(1)*}}$ . Ainsi en utilisant cette décomposition on peut réécrire les moyennes hydrostatiques par phase sous la forme

$$\begin{cases} p \delta \bar{\sigma}_m^{(1)*}(p) + \frac{1}{\tau_\gamma} \delta \bar{\sigma}_m^{(1)*}(p) = \frac{12 c^{(2)} \kappa_e \mu_e}{3\kappa_e + 4\mu_e} (p \varepsilon_{0m}^{(2)*}(p) - p \varepsilon_{0m}^{(1)*}(p)) \\ p \delta \bar{\sigma}_m^{(2)*}(p) + \frac{1}{\tau_\gamma} \delta \bar{\sigma}_m^{(2)*}(p) = \frac{12 c^{(1)} \kappa_e \mu_e}{3\kappa_e + 4\mu_e} (p \varepsilon_{0m}^{(1)*}(p) - p \varepsilon_{0m}^{(2)*}(p)) \end{cases} \quad (1.119)$$

où  $\delta \bar{\sigma}_m^{(r)*}(r = 1, 2)$  désigne l'écart des moyennes des contraintes hydrostatiques par phase à la contrainte macroscopique ( $\delta \bar{\sigma}_m^{(r)*}(p) = \bar{\sigma}_m^{(r)*}(p) - \bar{\sigma}_m^*(p)$ ) et  $\tau_\gamma$  le temps caractéristique dans ce cas devient :

$$\tau_\gamma = \frac{\frac{1}{\kappa_e} + \frac{3}{4\mu_e}}{\frac{1}{4\mu_v^{(1)}}} \quad (1.120)$$

Par la transformée de Laplace-Carson inverse en utilisant la propriété (1.92) on en déduit facilement les évolutions temporelles des moyennes hydrostatiques dans la matrice ainsi que dans l'inclusion.



$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\delta\bar{\sigma}_m^{(1)}(t)) + \frac{1}{\tau_\gamma}(\delta\bar{\sigma}_m^{(1)}(t)) = \frac{12 c^{(2)} \kappa_e \mu_e}{3\kappa_e + 4\mu_e} (\dot{\varepsilon}_{0m}^{(2)}(t) - \dot{\varepsilon}_{0m}^{(1)}(t)) \\ \frac{d}{dt}(\delta\bar{\sigma}_m^{(2)}(t)) + \frac{1}{\tau_\gamma}(\delta\bar{\sigma}_m^{(2)}(t)) = \frac{12 c^{(1)} \kappa_e \mu_e}{3\kappa_e + 4\mu_e} (\dot{\varepsilon}_{0m}^{(1)}(t) - \dot{\varepsilon}_{0m}^{(2)}(t)) \end{cases} \quad (1.121)$$

### 2.3 Champs moyens par phase pour un composite à trois phases

Les expressions analytiques des moyennes hydrostatiques du champ de contrainte dans les inclusions s'obtiennent en adoptant la même démarche que dans le cas biphasé (calcul de l'inverse de la transformée de Laplace-Carson des moyennes déviatoriques par phase déterminées à partir de la relation (1.73)). Ainsi on obtient :

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_m^{(2)}(t) = \frac{3}{c^{(2)}} \left( \frac{1}{\kappa_v^{(2)}} - \frac{1}{\kappa_v^{(3)}} \right)^{-1} \left[ \dot{\bar{\varepsilon}}_m(t) - \langle \dot{\varepsilon}_{0m}(t) \rangle - \frac{c^{(1)}}{3} \left( \frac{1}{\kappa_v^{(1)}} - \frac{1}{\kappa_v^{(3)}} \right) \bar{\sigma}_m^{(1)}(t) - \frac{1}{3} \left( \frac{\dot{\bar{\sigma}}_m(t)}{\mu_e} + \frac{\bar{\sigma}_m(t)}{\kappa_v^{(3)}} \right) \right] \\ \bar{\sigma}_m^{(3)}(t) = \frac{3}{c^{(3)}} \left( \frac{1}{\kappa_v^{(3)}} - \frac{1}{\kappa_v^{(2)}} \right)^{-1} \left[ \dot{\bar{\varepsilon}}_m(t) - \langle \dot{\varepsilon}_{0m}(t) \rangle - \frac{c^{(1)}}{3} \left( \frac{1}{\kappa_v^{(1)}} - \frac{1}{\kappa_v^{(2)}} \right) \bar{\sigma}_m^{(1)}(t) - \frac{1}{3} \left( \frac{\dot{\bar{\sigma}}_m(t)}{\mu_e} + \frac{\bar{\sigma}_m(t)}{\kappa_v^{(2)}} \right) \right] \end{cases} \quad (1.122)$$

La loi d'évolution dans le temps de la moyenne hydrostatique du champ des contraintes dans la matrice  $\bar{\sigma}_m^{(1)}$  est donnée par une formulation à variables internes. En effet, en partant du problème pseudo-élastique relatif à la partie sphérique dans l'espace de Carson, la contrainte hydrostatique est reliée à la contrainte macroscopique par la relation (1.74). Par une décomposition en fractions simples de  $B_m^{(1)*}(p)$ , on obtient :

$$\bar{\sigma}_m^{(1)*}(p) = \sum_{j=1}^8 l_{\hat{\tau}_{1j}^m} \frac{p}{p + \frac{1}{\hat{\tau}_{1j}^m}} (\bar{\varepsilon}_m^*(p) - \bar{\varepsilon}_{0m}^*(p)) + b_m^{(1)*}(p). \quad (1.123)$$

Par l'inverse de la transformée de Carson et par une identification de variables internes (relation (1.99)) on obtient l'expression de la moyenne hydrostatique dans l'espace temporel.

$$\bar{\sigma}_m^{(1)}(t) = 3\kappa_e (\bar{\varepsilon}_m(t) - \bar{\varepsilon}_{0m}(t)) - \sum_{j=1}^5 \frac{l_{\hat{\tau}_{1j}^m}}{\kappa_{\hat{\tau}_j^m}} \bar{\alpha}_j^m(t) - \bar{\beta}_1^m(t) + b_m^{(1)}(t), \quad (1.124)$$

où  $b_m^{(1)}(t)$  représente la transformée de Laplace-Carson inverse de la relation (80), solution du problème dans l'espace de Carson et  $\bar{\beta}_1^m$  une variable interne scalaire solution de l'équation différentielle du premier ordre suivant.

$$\dot{\bar{\beta}}_1^m(t) + \frac{1}{\hat{\tau}_1^m} \bar{\beta}_1^m(t) = \frac{1}{\hat{\tau}_1^m} \frac{l_{\hat{\tau}_1^m}}{\mu_e} (\bar{\varepsilon}_m(t) - \bar{\varepsilon}_{0m}(t)) \quad , \quad \bar{\beta}_1^m(0) = 0 \quad (1.125)$$

Comme dans le cas précédent, les moyennes déviatoriques dans les inclusions sont déterminées à partir de la relation (1.73) en procédant à l'inverse de la transformée de Carson.

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{s}}^{(2)}(t) = \frac{2}{c^{(2)}} \left( \frac{1}{\mu_v^{(2)}} - \frac{1}{\mu_v^{(3)}} \right)^{-1} \left[ \dot{\bar{\mathbf{e}}}(t) - \frac{c^{(1)}}{2} \left( \frac{1}{\mu_v^{(1)}} - \frac{1}{\mu_v^{(3)}} \right) \bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t) - \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{\bar{\mathbf{s}}}(t)}{\mu_e} + \frac{\bar{\mathbf{s}}(t)}{\mu_v^{(3)}} \right) \right] \\ \bar{\mathbf{s}}^{(3)}(t) = \frac{2}{c^{(3)}} \left( \frac{1}{\mu_v^{(3)}} - \frac{1}{\mu_v^{(2)}} \right)^{-1} \left[ \dot{\bar{\mathbf{e}}}(t) - \frac{c^{(1)}}{2} \left( \frac{1}{\mu_v^{(1)}} - \frac{1}{\mu_v^{(2)}} \right) \bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t) - \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{\bar{\mathbf{s}}}(t)}{\mu_e} + \frac{\bar{\mathbf{s}}(t)}{\mu_v^{(2)}} \right) \right] \end{cases} \quad (1.126)$$

avec l'expression de la contrainte moyenne déviatorique dans la matrice qui, à l'aide de la transformée de Laplace-Carson du problème pseudo-élastique, est donnée par :

$$\bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t) = 2\mu_e(\bar{\mathbf{e}}(t) - \sum_{j=1}^8 \frac{l_{\hat{\tau}_{1j}^d}}{\mu_{\hat{\tau}_j^d}} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j^d(t) - \bar{\boldsymbol{\beta}}_{1a}^d(t) - \bar{\boldsymbol{\beta}}_{1b}^d(t)) \quad (1.127)$$

$\bar{\boldsymbol{\beta}}_{1a}^d$  et  $\bar{\boldsymbol{\beta}}_{1b}^d$  sont des variables internes tensorielles caractéristiques des déformations visqueuses déviatoriques. Ces variables internes vérifient les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\bar{\boldsymbol{\beta}}}_{1a}^d(t) + \frac{1}{\hat{\tau}_{1a}^d} \bar{\boldsymbol{\beta}}_{1a}^d(t) = \frac{1}{\hat{\tau}_{1a}^d} \frac{l_{\hat{\tau}_{1a}^d}}{\mu_e} \bar{\mathbf{e}}(t) & , \quad \bar{\boldsymbol{\beta}}_{1a}^d(t) = 0 \\ \dot{\bar{\boldsymbol{\beta}}}_{1b}^d(t) + \frac{1}{\hat{\tau}_{1b}^d} \bar{\boldsymbol{\beta}}_{1b}^d(t) = \frac{1}{\hat{\tau}_{1b}^d} \frac{l_{\hat{\tau}_{1b}^d}}{\mu_e} \bar{\mathbf{e}}(t) & , \quad \bar{\boldsymbol{\beta}}_{1b}^d(t) = 0 \end{cases} \quad (1.128)$$

Ces variables internes sont purement déviatoriques. Les coefficients  $\tau_{1a/b}^d$  et  $l_{\hat{\tau}_{1a/b}^d}$  dépendent des propriétés mécaniques des phases ainsi que de leurs fractions volumiques (voir [58] pour leurs expressions détaillées).

Lorsque le module de compressibilité visqueux par phase ( $\kappa_v^{(r)} = \infty$ ) devient infini, les moyennes hydrostatiques par phase dans ce cas se déduisent de la relation (1.80), solution du problème pseudo-élastique avec déformation dans l'espace de Carson. Comme dans le cas deux phases, le calcul de la transformée inverse conduit à :

$$\frac{d}{dt}(\delta\bar{\sigma}_m^{(r)}(t)) + \frac{1}{\tau_\gamma}(\delta\bar{\sigma}_m^{(r)}(t)) = \frac{12\kappa_e\mu_e}{3\kappa_e + 4\mu_e} \sum_{q \neq r} c^{(q)} \left( \dot{\varepsilon}_{0m}^{(q)}(t) - \dot{\varepsilon}_{0m}^{(r)}(t) \right) \quad , \quad r = 1, 2, 3 \quad (1.129)$$

## 2.4 Évolution du second moment dans la matrice

Nous verrons en section V. l'importance du second moment dans la matrice, quantité utilisée pour améliorer les estimations dans le cas non linéaire. De façon générale, le second moment des champs de contrainte dans la phase matricielle s'écrit

$$\left( \bar{\bar{\sigma}}_{\text{eq}}^{(1)}(t) \right)^2 = \frac{3}{2} S_1(t) \quad \text{avec} \quad S_1(t) = \langle \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) : \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) \rangle^{(1)} \quad (1.130)$$

Cette quantité ne peut pas être calculée par application du principe de correspondance. En effet le principe de correspondance permet de calculer à partir de la relation 1.64 :  $\langle \boldsymbol{\sigma}_{ij}^*(\mathbf{x}, p) \boldsymbol{\sigma}_{kl}^*(\mathbf{x}, p) \rangle^{(1)}$  qui n'est pas la transformée de Laplace-Carson de  $S_1(t)$ . C'est pourquoi, pour déterminer l'évolution temporelle du scalaire  $S_1(t)$ , nous reprenons la méthode proposée dans [63] dans le cas incompressible. Cette méthode consiste à utiliser le lemme de Hill [64] et la loi de comportement linéaire dans (1.89). Comme dans [63], nous remarquons que le modèle de Mori-Tanaka conduit à une contrainte déviatorique homogène dans les inclusions. Dans le cas compressible considéré ici, nous supposons en outre que les contraintes sphériques sont homogènes dans les deux phases de sorte que le lemme de Hill conduit à (voir annexe B) :

$$\frac{1}{4\mu_e} \dot{S}_1(t) + \frac{1}{2\mu_v^{(1)}} S_1(t) = M(t) \quad (1.131)$$

Le second membre  $M(t)$  de cette équation différentielle est une fonction donnée par :

$$M(t) = \frac{1}{c^{(1)}} \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}(t) : \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) - \sum_{r=2}^N \frac{c^{(r)}}{c^{(1)}} \left( \frac{1}{2\mu_e} \dot{\bar{\mathbf{s}}}^{(r)}(t) : \bar{\mathbf{s}}^{(r)}(t) + \frac{1}{2\mu_v^{(r)}} \bar{\mathbf{s}}^{(r)}(t) : \bar{\mathbf{s}}^{(r)}(t) \right) - \sum_{r=1}^N \frac{c^{(r)}}{c^{(1)}} \left( \frac{1}{\kappa_e} \dot{\bar{\sigma}}_m^{(r)}(t) \bar{\sigma}_m^{(r)}(t) + \frac{1}{\kappa_v^{(r)}} \bar{\sigma}_m^{(r)}(t) \bar{\sigma}_m^{(r)}(t) + 3\bar{\sigma}_m^{(r)}(t) \dot{\bar{\varepsilon}}_{0m}^{(r)}(t) \right) \quad (1.132)$$

### 3. Extension aux matériaux vieillissants

Dans le cas vieillissant, les propriétés élastiques et visqueuses dépendent du temps. Ainsi le problème mécanique local (1.6) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0, T] \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right) \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0, T] \\ \dot{\bar{\varepsilon}}_m(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{3\kappa_e^{(r)}(t)} \dot{\bar{\sigma}}_m(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{3\kappa_v^{(r)}(t)} \bar{\sigma}_m(\mathbf{x}, t) + \dot{\bar{\varepsilon}}_{0m}^{(r)}(t) \quad , \quad r = 1, 2, \dots, N \\ \dot{\bar{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\mu_e^{(r)}(t)} \dot{\bar{\mathbf{s}}}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2\mu_v^{(r)}(t)} \bar{\mathbf{s}}(t) \quad , \quad r = 1, 2, \dots, N \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \cdot \mathbf{x} \\ \text{ou} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \end{array} \right. \quad (1.133)$$

Le principe de correspondance permet d'établir des relations explicites des lois de fluage et de relaxation des matériaux hétérogènes non vieillissants composés de phases viscoélastiques avec ou sans déformation libre. La construction de ces lois de fluage et de relaxation est généralement réalisée lorsque l'inverse de la transformée de Laplace-Carson est explicite. Cependant dans le cas vieillissant, les propriétés mécaniques ne sont plus invariantes dans le temps autrement dit les modules de cisaillement et de compressibilité définis dans la loi de comportement viscoélastique ou thermo-viscoélastique sont des fonctions explicites du temps. Cela rend impossible le calcul de la transformée de Laplace-Carson des vitesses de déformations élastiques et visqueuses (produit de deux fonctions temporelles). La méthode suggérée par Ricaud et Masson [57] est de considérer à nouveau le problème viscoélastique ou thermo-viscoélastique linéaire mais avec les modules élastiques et visqueuses qui sont évalués à chaque pas de temps (méthode incrémentale). En effet, sur un incrément de temps suffisamment petit, sous l'hypothèse de l'uniformité des propriétés mécanique, le comportement dans chacune des phases du composite est de nature viscoélastique linéaire. Dans ce cas toute l'hérédité du comportement repose sur les variables internes dont les équations différentielles caractéristiques sont résolues à chaque incrément de temps avec les variables internes qui sont des fonctions continues du temps.

## 4. Conclusions

Cette section a porté sur la détermination des propriétés mécaniques effectives du combustible MOX qui est un matériau hétérogène (les modules de cisaillement visqueux et le gonflement sont différents dans les phases) dont le comportement des phases est viscoélastique linéaire avec déformation libre. Le principe de correspondance de Mandel et le modèle de Mori-Tanaka ont été employés pour évaluer explicitement le comportement macroscopique et les moyennes par phase dans le cas non vieillissant. Ces résultats sont ensuite étendus au cas où les propriétés élastiques et visqueuses évoluent avec le temps (comportement vieillissant). Dans cette modélisation les propriétés effectives du matériau sont décrites à travers une démarche itérative et incrémentale. Dans le cas non linéaire la résolution du problème (1.6) devient plus complexe, il est alors nécessaire de procéder à une linéarisation préalable de la loi de comportement (relation entre la vitesse de déformation visqueuse déviatorique  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_v$  et le champ de contrainte déviatorique  $\boldsymbol{s}$ ) autour de quantités homogènes par phase. Dans cette optique, différentes méthodes de linéarisation sont investiguées et présentées dans la section suivante.

---

## V. Extension au cas non linéaire

Les premières contributions à l'homogénéisation non linéaire des composites ont été réalisées par Bishop et Hill [65] qui, à partir de la théorie de l'analyse limite, ont estimé les propriétés effectives de matériaux polycristallins parfaitement plastiques.

Par la suite, plusieurs auteurs ont abordé le problème non linéaire sur des matériaux hétérogènes obéissant à des lois de comportement plastiques et élastoplastiques. Berveiller et Zaoui [66] ont adopté la méthode de linéarisation de type sécante associée à la théorie de la plasticité pour prédire le comportement effectif de matériaux polycristallins à travers une formulation variationnelle. Tandon et Weng [67] ont développé une méthode similaire pour des composites renforcés par des particules. Qiu et Weng [68] ont proposé une approche sécante basée sur le moment d'ordre deux pour mettre en évidence l'influence du chargement hydrostatique sur la réponse globale de milieux poreux.

La théorie variationnelle peut-être également appliquée pour estimer des bornes relatives aux propriétés effectives des matériaux hétérogènes. Talbot et Willis [69] étend la procédure variationnelle originale de Hashin-Shtrikman aux composites non linéaires en utilisant un milieu de comparaison linéaire homogène. Suquet utilise le même milieu de comparaison linéaire inhomogène pour prédire le comportement macroscopique de composites contenant des pores ou des inclusions rigides [70] et des matériaux en loi de puissance [71]. Ponte Castenada [72] introduit une nouvelle approche de linéarisation dite de second ordre améliorée. Cette approche, basée sur une formulation variationnelle, utilise une méthode de linéarisation affine faisant intervenir les moments d'ordre deux des fluctuations des champs. Le comportement macroscopique de milieux viscoplastiques [73] et inélastiques [74] a été également étudié par une approche variationnelle. La méthode variationnelle récemment proposée par Lahelec et Suquet [74] met en exergue le phénomène dissipatif associé à la plasticité.

Dans le cas des matériaux polycristallins ayant un comportement visco-élastique non linéaire Masson et Zaoui [75] ont proposé une approche dans laquelle la vitesse de déformation visqueuse est linéarisée en utilisant le module tangent qui est évalué autour du premier moment. Dans cette approche le comportement macroscopique est décrit à partir du module effectif. Dans le cas de matériaux composites, Lévesque et al. [76] proposent également une méthode de linéarisation du comportement de la matrice (comportement viscoélastique non linéaire) également autour du premier moment des contraintes.

La méthode TFA, proposée par Dvorak [77], est un modèle qui permet de prédire le comportement effectif de composites dont les phases obéissent à un comportement viscoélastique non linéaire. Le champ de déformation inélastique dans cette approche est assimilé à une déformation libre, ce qui permet d'utiliser les méthodes d'homogénéisation développées en thermo-élasticité linéaire (section III.). Bien qu'elle soit simple à mettre en œuvre notamment lorsque le champ de déformation inélastique est supposé homogène par phase comme dans [38], la méthode TFA prédit des estimations peu précises (voir [38]). Pour améliorer ces estimations, Michel et Suquet [78] ont proposé l'approche NTFA (Non-uniform Transformation Field Analysis) qui consiste à considérer des champs de déformations inélastiques non uniformes. L'approche NTFA, qui nécessite l'utilisation de calculs en champs complets, présente également l'avantage d'accéder directement aux champs locaux solutions du problème mécanique local.

Les approches que nous allons présenter dans cette étude étendent le modèle [57] au cas où les phases ont un comportement viscoélastique non linéaire. La loi de comportement non linéaire qui relie la vitesse de déformation visqueuse à la contrainte déviatorique est donnée par la relation

$$\dot{\epsilon}_v(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\mu_v^{(r)irr}} \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) + \sum_{r=1}^N \chi^{(r)}(\mathbf{x}) \frac{\partial U_v^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)) \quad (1.134)$$

Pour simplifier les développements qui suivent, nous négligeons le fluage d'irradiation par rapport au fluage thermique apparaissant aux hautes températures (voir partie II.). Ainsi le problème local à résoudre lorsque le matériau est soumis à un chargement en déformations homogènes (respectivement en contraintes homogènes) sur la frontière  $\partial\Omega$  est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0, T] \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right) \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0, T] \\ \dot{\varepsilon}_m(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{3\kappa_e} \dot{\sigma}_m(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{3\kappa_v^{(r)}} \sigma_m(\mathbf{x}, t) + \dot{\varepsilon}_{0m}^{(r)}(t) \quad , \quad r = 1, 2, \dots, N \\ \dot{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\mu_e} \dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial U_v^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)) \quad , \quad r = 1, 2, \dots, N \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \cdot \mathbf{x} \\ \text{ou} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \end{array} \right. \quad (1.135)$$

Pour estimer le comportement macroscopique ainsi que les moyennes par phase du problème, différentes méthodes de linéarisation (Sécant, Affine...) de la relation entre la vitesse de déformation visqueuse et la contrainte déviatorique ont été investiguées et proposées. Ces opérations de linéarisation qui s'effectuent autour d'états de contrainte homogènes par phase (premiers et/ou seconds moments des champs de contrainte) conduisent ainsi à la définition d'un Milieu Linéaire de Comparaison qui est viscoélastique linéaire.

## 1. Comportement décrit par un potentiel

Le comportement dans chaque phase est décrit par un seul potentiel supposé convexe (potentiel de dissipation  $U_v$ ), le potentiel élastique étant négligé, de sorte que la relation entre la vitesse de déformation déviatorique et la contrainte déviatorique s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) \sim \dot{\varepsilon}_v(\mathbf{x}, t) = \sum_{r=1}^N \chi^{(r)}(\mathbf{x}) \frac{\partial U_v^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)) \quad (1.136)$$

Nous disposons dans ce cas d'une formulation variationnelle du problème de l'équilibre. Ainsi en procédant à une linéarisation de la loi de comportement autour de quantités homogènes par phase, on obtient un milieu de type linéaire élastique ou thermo-élastique. On peut donc appliquer les résultats de la partie III. pour estimer le comportement effectif et les premiers et éventuellement les seconds moments du champ de contrainte.

### 1.1 Linéarisation sécante (classique et modifiée)

#### 1.1.1. Linéarisation sécante classique

La méthode de linéarisation sécante classique proposée par Berveiller et Zaoui [66] est une approche simplifiée du modèle incrémental de Hill [64]. Dans cette approche, la souplesse  $\mathbf{M}_v^{(r)}$  dans les phases est isotrope et la loi de comportement linéarisée s'écrit :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{x}, t) = \mathbf{M}_v^{(r)} : \boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}, t) \quad \text{avec} \quad \mathbf{M}_v^{(r)} = \frac{1}{2\mu_v^{(r)}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)})} \mathbf{K} \quad (1.137)$$

où  $\mathbf{K}$  désigne un projecteur isotrope sur l'espace des tenseurs déviatoriques. La contrainte de référence  $\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)}$  dans la matrice pour le calcul du module de cisaillement visqueux est le premier moment des champs de contrainte.

$$\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)} = \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)}(t) = \sqrt{\frac{3}{2} \langle \boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}, t) \rangle^{(r)} : \langle \boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}, t) \rangle^{(r)}} \quad (1.138)$$

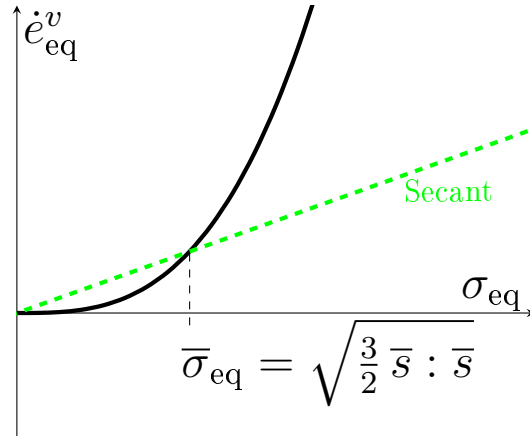


FIGURE 1.9 – Linéarisation de type Sécante classique

Les moyennes déviatoriques par phase dans le cas d'un biphasé et d'un composite à trois phases sont respectivement données par les relations (1.71) et (1.73), relations dans lesquelles les modules de cisaillement élastique sont remplacés par les modules de cisaillement visqueux et la déformation macroscopique déviatorique  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$  par la vitesse de déformation  $\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}(t)$ . Dans le cas de matériaux poreux ou rigides, cette linéarisation sécante classique conduit à des résultats non physiques [79]. En outre le premier moment du champ de contrainte est nul lorsque les moyennes déviatoriques sont nulles. Pour améliorer ces estimations, un autre choix pour la contrainte de référence  $\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}$  est proposé.

Pour toutes les approches considérées dans la suite, nous conservons le choix d'une linéarisation sécante classique basée sur le premier moment du champ de contrainte dans les inclusions et nous cherchons à améliorer cette linéarisation dans la matrice. Le module de cisaillement visqueux  $\mu_v^{(r)}$  ( $r = 2, \dots, N$ ) dans les inclusions est alors donné par :

$$\mu_v^{(r)}(\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)}) = \frac{\sigma_0^{(r)}}{3\varepsilon_0^{(r)}} \left( \frac{\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)}}{\sigma_0^{(r)}} \right)^{1-n(r)} \quad (1.139)$$

### 1.1.2. Linéarisation sécante modifiée

Dans cette méthode de linéarisation [53], le module de cisaillement visqueux dans la matrice est évalué autour du second moment des champs de contrainte afin de mettre en évidence les hétérogénéités intraphases.

$$\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)} = \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)} = \sqrt{\frac{3}{2} S_1(t)} \quad \text{avec} \quad S_1(t) = \langle \boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}, t) : \boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}, t) \rangle^{(1)} \quad (1.140)$$

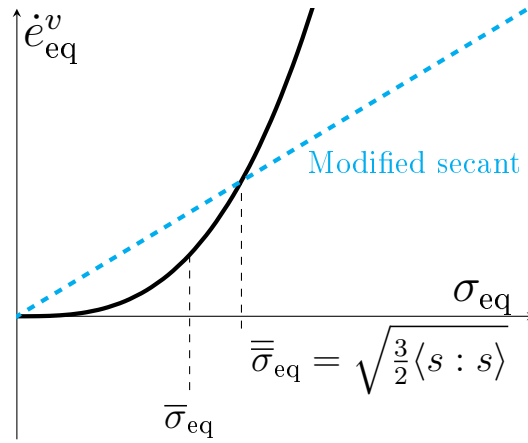


FIGURE 1.10 – Linéarisation de type sécante modifié

L'évolution dans le temps du second moment du champ de contrainte  $S_1(t)$  dans la matrice est déterminée à partir de la relation (1.64). Cette méthode sécante modifiée proposée dans [53] est équivalente à la formulation variationnelle proposée par Ponte Castañeda [54].

## 1.2 Linéarisation affine et Méthode du second-ordre (variante 2002)

### 1.2.1. Linéarisation affine

Cette méthode, proposée par Masson et Zaoui [75], repose sur une linéarisation tangente de la loi de comportement non linéaire. La loi de comportement linéarisée dans cette approche s'écrit :

$$\dot{\mathbf{e}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{M}_v^{(1)} : \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{e}}_0^{(1)} \quad (1.141)$$

La vitesse de déformation  $\dot{\mathbf{e}}_0^{(1)}$  dans la matrice est une quantité homogène dont l'expression analytique est donnée :

$$\dot{\mathbf{e}}_0^{(1)} = \frac{\partial U_v^{(1)}}{\partial \mathbf{s}}(\bar{\mathbf{s}}^{(1)}) - \mathbf{M}_v^{(1)} : \bar{\mathbf{s}}^{(1)} \quad (1.142)$$

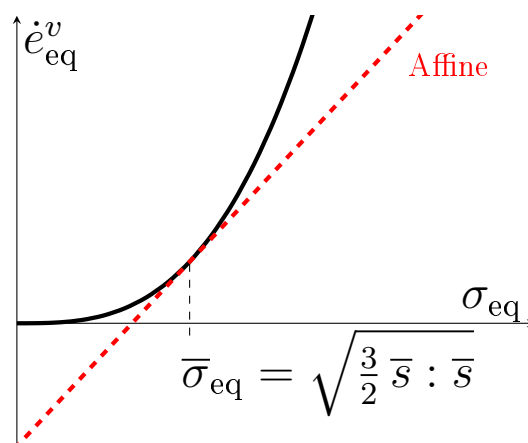


FIGURE 1.11 – Linéarisation de type Affine classique



Le tenseur des modules tangents  $\mathbf{M}_v^{(1)}$  pour une phase matricielle obéissant à une loi de type puissance peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{M}_v^{(1)}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}, \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}) = \frac{1}{2\mu_v^{(1)}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \mathbf{F}^{(1)} + \frac{n^{(1)}}{2\mu_v^{(1)}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \mathbf{E}^{(1)} \quad (1.143)$$

$$\mathbf{E}^{(1)} = \frac{3}{2} \frac{\bar{s}^{(1)}}{\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}} \otimes \frac{\bar{s}^{(1)}}{\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}}, \quad \mathbf{F}^{(1)} = \mathbf{K} - \mathbf{E}^{(1)} \quad (1.144)$$

$\mathbf{E}^{(1)}$  est un projecteur sur l'espace engendré par la contrainte moyenne déviatorique  $\bar{s}^{(1)}$  et  $\mathbf{F}^{(1)}$  un projecteur qui lui est orthogonal [49]. Dans ce modèle, la contrainte de référence  $\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}$  est le premier moment des champs de contrainte. Or, comme expliqué plus haut, le premier moment du champ de contrainte est nul lorsque les moyennes déviatoriques des contraintes dans les phases s'annulent. C'est pourquoi, comme le modèle sécant classique, le modèle affine présente des limitations. Afin de corriger ces estimations, Ponte Castañeda [72] propose une nouvelle approche s'appuyant sur une expression alternative de la souplesse ainsi que de la contrainte de référence.

### 1.2.2. Méthode du second ordre (variante 2002) et méthode affine modifiée

La méthode du second ordre proposée par Ponte Castañeda [72] permet de linéariser la loi de comportement non linéaire entre la vitesse de déformation visqueuse et la contrainte déviatorique en utilisant une approche variationnelle. Dans cette approche le potentiel visqueux linéarisé  $U_{vL}^{(1)}$  dans la matrice est développé au second ordre selon :

$$U_{vL}^{(1)}(\mathbf{s}) = U_v^{(1)}(\mathbf{s}^{(1)}) + \gamma^{(1)}(\mathbf{s}^{(1)}) : (\mathbf{s} - \mathbf{s}^{(1)}) + \frac{1}{2} (\mathbf{s} - \mathbf{s}^{(1)}) : \mathbf{M}_v^{(1)} : (\mathbf{s} - \mathbf{s}^{(1)}) \quad (1.145)$$

où  $\mathbf{s}^{(1)}$  est le premier moment des champs de contrainte ( $\mathbf{s}^{(1)} = \bar{s}^{(1)}$ ),  $\mathbf{M}_v^{(1)}$  est un tenseur d'ordre quatre défini positif et symétrique à spécifier et  $\gamma^{(1)}$  désigne la dérivée première du potentiel visqueux  $U_v^{(1)}$ .

$$\gamma^{(1)} = \frac{\partial U_v^{(1)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (1.146)$$

La vitesse de déformation visqueuse du Milieu Linéaire de Comparaison s'obtient par dérivation du potentiel  $U_{vL}^{(1)}$  par rapport au champ de contrainte. Ainsi la loi de comportement linéarisée dans la matrice s'écrit :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{M}_v^{(1)} : \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_0 \quad (1.147)$$

Dans cette approche l'estimation du potentiel de dissipation effectif  $\tilde{U}_v$  du composite non linéaire est donnée par

$$\tilde{U}_v(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \text{stat}_{\mathbf{M}_v^{(s)}, \boldsymbol{\sigma}^{(s)}} \left\{ \tilde{U}_{vL}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\sigma}^{(s)}, \mathbf{M}_v^{(s)}) + \sum_{r=1}^N c^{(r)} V^{(r)}(\boldsymbol{\sigma}^{(r)}, \mathbf{M}_v^{(r)}) \right\}, \quad (1.148)$$

où  $c^{(r)}$  caractérise la fraction volumique des phases,  $\tilde{U}_{vL}$  le potentiel effectif du milieu linéaire de comparaison et  $V^{(r)}$  la fonction d'erreur lorsque le potentiel effectif du composite non linéaire est approximé au potentiel effectif du milieu linéaire de comparaison équivalent. Cette fonction d'erreur est définie par une relation de stationnarité

$$V^{(r)}(\boldsymbol{\sigma}^{(r)}, \mathbf{M}_v^{(r)}) = \text{stat}_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)}} \left\{ U_v^{(r)}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)}) - U_{vL}^{(r)}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)}, \boldsymbol{\sigma}^{(r)}, \mathbf{M}_v^{(r)}) \right\} \quad (1.149)$$

La condition de stationnarité du potentiel dissipation effectif  $\tilde{U}_v$  par rapport à la souplesse  $\mathbf{M}_v^{(1)}$  de la phase matricielle conduit à :

$$\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}\right) \otimes \left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}\right) = \mathbf{C}_{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)} \quad (1.150)$$

Le champs tensoriel du second ordre  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}$  est une contrainte de référence à spécifier et le tenseur du quatrième ordre  $\mathbf{C}_{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}$  désigne la covariance (fluctuations) qui est définie par :

$$\mathbf{C}_{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)} = \langle (\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}) \otimes (\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}) \rangle^{(1)}. \quad (1.151)$$

La relation (1.150), qui résulte de l'optimisation du potentiel de dissipation effectif permet d'aboutir aux relations suivantes :

$$\hat{\sigma}_{\parallel}^{(1)} - \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{E}^{(1)} :: \mathbf{C}_{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}} \quad , \quad \hat{\sigma}_{\perp}^{(1)} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{F}^{(1)} :: \mathbf{C}_{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}} \quad (1.152)$$

avec  $\hat{\sigma}_{\parallel}^{(1)}$  et  $\hat{\sigma}_{\perp}^{(1)}$  qui représentent respectivement les composantes de la contrainte de référence  $\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}$  suivant les projecteurs  $\mathbf{E}^{(1)}$  et  $\mathbf{F}^{(1)}$  :

$$\hat{\sigma}_{\parallel}^{(1)} = \sqrt{\frac{3}{2} \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)} : \mathbf{E}^{(1)} : \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}} \quad , \quad \hat{\sigma}_{\perp}^{(1)} = \sqrt{\frac{3}{2} \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)} : \mathbf{F}^{(1)} : \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}} \quad (1.153)$$

Dans cette méthode de linéarisation, la contrainte de référence  $\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}$  est donc une fonction du premier moment du tenseur des contraintes et de la covariance (fluctuations) dont l'expression analytique, donnée dans [80], s'écrit selon :

$$\left(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}\right)^2 = \left( \left(\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}\right)^2 + 2\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)} \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{E}^{(1)} :: \mathbf{C}_{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}} \right) \quad (1.154)$$

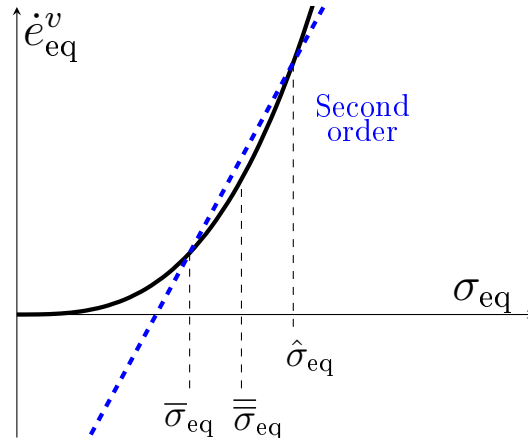


FIGURE 1.12 – Linéarisation de type second ordre

Par ailleurs, la souplesse de la phase matricielle dans cette approche de linéarisation a la forme :

$$\mathbf{M}_v^{(1)}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}, \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}) = \frac{1}{2\mu_v^{(1)}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \mathbf{F}^{(1)} + \frac{1}{2\lambda_v^{(1)}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}, \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \mathbf{E}^{(1)} \quad (1.155)$$

Les modules de cisaillement visqueux  $\mu_v^{(1)}$  et  $\lambda_v^{(1)}$  sont déterminés de manière équivalente en utilisant la condition de stationnarité de la fonction d'erreur  $V^{(1)}$  par rapport à la contrainte de référence  $\hat{\sigma}^{(1)}$  de la phase matricielle.

$$\begin{cases} \frac{1}{3\mu_v^{(1)}} = \frac{1}{\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}} \frac{\partial U_v^{(1)}}{\partial \sigma_{\text{eq}}^{(1)}}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}) \\ \frac{1}{3\lambda_v^{(1)}} (\hat{\sigma}_{\parallel}^{(1)} - \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}) = \frac{\hat{\sigma}_{\parallel}^{(1)}}{\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}} \frac{\partial U_v^{(1)}}{\partial \sigma_{\text{eq}}^{(1)}}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}) - \frac{\partial U_v^{(1)}}{\partial \sigma_{\text{eq}}^{(1)}}(\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}) \end{cases} \quad (1.156)$$

A ce stade, toutes les quantités de référence caractéristiques de la méthode du second ordre sont explicitées. Il est important de noter que ces quantités de référence peuvent être évaluées de manière exacte dans le cas des matériaux ayant un comportement élastique non linéaire ou un comportement purement viscoplastique. Comme expliqué dans [71] le comportement effectif dans la méthode du second ordre doit être calculé par dérivation du potentiel effectif. Néanmoins il peut également être calculé en utilisant la loi linéarisée entre la contrainte et la déformation macroscopique. On obtient alors un modèle différent appelé affine modifié dans [71]. A noter qu'un autre modèle affine modifié a été aussi proposé par Brenner et al [81] et consistant à remplacer le premier moment par le second moment dans le modèle affine classique (celui défini précédemment à la section 1.2.1.).

Toutefois, nous verrons plus loin au chapitre 3 que lorsque la loi de comportement est de nature viscoélastique non linéaire, la contrainte de référence  $\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}$  ne peut être déterminée explicitement à cause de la covariance  $\mathbf{C}_{\sigma}^{(1)}$  pour laquelle on ne dispose pas d'expression générale pour cette classe de comportement.

Lorsque les moyennes déviatoriques par phase s'annulent, le premier moment devient nul et la contrainte de référence  $\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}$  dans la matrice se réduit au second moment des champs de contrainte. Les modules de cisaillement visqueux  $\mu_v^{(1)}$  et  $\lambda_v^{(1)}$  dans ce cas sont égales et la souplesse  $\mathbf{M}_v^{(1)}$  dans la matrice devient isotrope. Ainsi cette approche de linéarisation dégénère en sécante modifiée.

Une nouvelle approche de linéarisation est récemment proposée par Ponte Castañeda [6], approche dans laquelle les quantités homogènes sont également déterminées à travers des conditions de stationnarités sur le potentiel effectif (voir annexe C). Néanmoins cette approche de linéarisation, lorsque les moyennes déviatoriques par phase sont nulles, dégénère en sécante modifiée comme dans l'approche variante 2002.

### 1.3 Conclusions

Dans cette section, nous avons vu les différentes méthodes de linéarisation proposées pour des comportements dérivant d'un seul potentiel. A noter que dans le cas de composites ayant un comportement élastique non linéaire ou purement visqueux, différentes combinaisons des schémas de linéarisation qui dérivent des approches sécantes et affines associées à des quantités de référence ont été également proposés dans [80] dans le but d'améliorer les estimations dans ce cas non linéaire. Dans le cadre de cette thèse, nous cherchons à étendre ces formulations pour des matériaux présentant un comportement de type viscoélastique non linéaire autrement dit pour des matériaux à double potentiel. C'est pourquoi, seules les méthodes s'appuyant sur une évaluation directe du comportement effectif seront employées avec la contrainte effective qui est reliée à la déformation effective par le tenseur des modules effectifs viscoélastiques (fonction de relaxation).

## 2. Comportement décrit par deux potentiels

Dans cette section nous nous intéressons essentiellement au comportement mécanique de composites constitués de mélanges de phases décrites par deux potentiels thermodynamiques convexes à savoir l'énergie libre et le potentiel de dissipation, ce qui est le cas des comportements viscoélastiques non linéaires considérés ici. Pour cela nous allons utiliser les résultats déjà développés dans le cas purement visqueux [73] ou élastique non linéaire [72] et le principe de correspondance pour traiter le problème viscoélastique non linéaire à l'instar de l'approche proposée dans [75].

Une autre méthode d'évaluation du comportement global de matériaux composites constitués de phases viscoélastiques a été également proposée dans [82]. Contrairement aux méthodes classiques basées sur la transformée de Laplace, cette méthode opère directement dans le domaine temporel avec la loi de comportement viscoélastique dans chacune des phases qui est transformée en une loi thermoélastique à travers un schéma implicite de discrétisation temporelle. Le problème viscoélastique étant ramené à un problème thermoélastique, la réponse macroscopique est alors estimée par une formulation variationnelle.

Dans ce travail de thèse, nous utilisons la première méthode car elle conduit à des solutions semi-analytiques tandis que la deuxième méthode fournit des solutions purement numériques.

### 2.1 Construction de la loi de comportement viscoélastique linéarisée

Dans le cas viscoélastique, les comportements des phases peuvent être décrits à partir de deux potentiels thermodynamiques que sont le potentiel élastique et le potentiel de dissipation. Ainsi la loi de comportement linéarisée dans la matrice pour toutes les approches considérées s'écrit :

$$\dot{\mathbf{e}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\mu_e} \dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{M}_v^{(1)}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}) : \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{e}}_0^{(1)} \quad (1.157)$$

Le module des soupleses  $\mathbf{M}_v^{(1)}$  et la déformation libre  $\mathbf{e}_0^{(1)}$  sont des quantités homogènes par phase dont différents choix ont été étudiés dans la section précédente et ce, pour un Milieu Linéaire de comparaison qui est visqueux. Dans l'approche affine classique par exemple [75] la souplesse  $\mathbf{M}_v^{(1)}$  est évaluée autour du premier moment du champ de contrainte.

### 2.2 Cas des approches sécantes classique et modifiée

Dans les approches sécantes classique et modifiée la vitesse de déformation libre dans la matrice est nulle et la loi de comportement linéarisée est donnée par :

$$\dot{\mathbf{e}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\mu_e} \dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{M}_v^{(1)}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}) : \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) \quad (1.158)$$

Pour un Milieu Linéaire de comparaison qui est viscoélastique linéaire, les champs moyens par phase (matériaux biphasé et matériaux à trois phases) dans les modèles sécant classique et modifié sont homologues aux expressions établies à la partie IV. avec les modules de cisaillement du "Milieu Linéarisé" qui dépendent des premiers et seconds moment du champ de contrainte. Dans l'approche sécante classique la contrainte de référence  $\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}$  dans la matrice est le premier moment du champ de contrainte (relation 1.138) tandis que dans l'approche sécante modifiée elle est égale au second moment des champs de contrainte (relation 1.140).

Dans le modèle sécant modifié l'évolution du second moment  $S_1$  dans la matrice est donnée par la relation (1.130) avec le module de cisaillement dans la matrice qui dépend du second moment  $S_1$  et celui dans les inclusions qui est une fonction de la contrainte moyenne déviatorique. Ainsi nous obtenons l'équation différentielle suivante (annexe B) :

$$\frac{1}{4\mu_e} \dot{S}_1(t) + \frac{1}{2\mu_v^{(1)}(S_1)} S_1(t) = M(t) \quad (1.159)$$

avec le second membre  $M(t)$  de l'équation différentielle dans ce cas qui s'écrit :

$$\begin{aligned} M(t) = & \frac{1}{c^{(1)}} \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}(t) : \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) - \sum_{r=2}^N \frac{c^{(r)}}{c^{(1)}} \left( \frac{1}{2\mu_e} \dot{\bar{\mathbf{s}}}^{(r)}(t) : \bar{\mathbf{s}}^{(r)}(t) + \frac{1}{2\mu_v^{(r)}(\bar{\mathbf{s}}^{(r)})} \bar{\mathbf{s}}^{(r)}(t) : \bar{\mathbf{s}}^{(r)}(t) \right) \\ & - \sum_{r=1}^N \frac{c^{(r)}}{c^{(1)}} \left( \frac{1}{\kappa_e} \dot{\bar{\sigma}}_m^{(r)}(t) \bar{\sigma}_m^{(r)}(t) + \frac{1}{\kappa_v^{(r)}} \bar{\sigma}_m^{(r)}(t) \bar{\sigma}_m^{(r)}(t) + 3\bar{\sigma}_m^{(r)}(t) \dot{\bar{\varepsilon}}_{0m}^{(r)}(t) \right) \quad (1.160) \end{aligned}$$

A noter que le comportement effectif (équations (1.108) et (1.114)) dépend des modules sécants dans les inclusions et donc des évolutions de la norme équivalente de la moyenne des contraintes ainsi que du moment d'ordre deux dans la matrice. A chaque instant, on doit donc résoudre un problème non linéaire dont les inconnus scalaires sont  $\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(2)}(t)$ ,  $\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}(t)$  ainsi que  $\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}(t)$ .

### 2.3 Comparaison dans un cas particulier de chargement (représentatif du MOX)

Nous avons vu dans la partie II., que sous irradiation, des gonflements différentiels apparaissent dans les combustibles MOX. Nous cherchons ici à construire un chargement représentatif des sollicitations affectant ces combustibles. C'est pourquoi, nous considérons par la suite que le bord extérieur du matériau est libre de contrainte ( $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) = 0$ ), ce chargement étant négligeable vis-à-vis du chargement induit par ces gonflements différentiels. Par ailleurs, comme les évolutions temporelles de ces gonflements sont relativement complexes, nous simplifions ici l'historique de la façon suivante : la déformation libre caractéristique des dilatations thermiques dans les inclusions est sphérique et celle dans la matrice est nulle. La déformation libre dans les inclusions est imposée instantanément (réponse élastique) puis maintenue constante. Lorsque la déformation imposée est positive les phases inclusionnaires sont mises en compression tandis que le phénomène opposé se produit (mise en traction) en cas de déformation libre négative. Dans ce cas de chargement, la déformation macroscopique est purement sphérique ( $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = 0$ ) car, dû à l'isotropie,  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t)$  et  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$  ont les mêmes espaces invariants. Les contraintes moyennes déviatoriques par phase sont également nulles à tout instant pour tous les modèles considérés. En effet, dans ce cas particulier de chargement, le premier moment du champ de contrainte dans les phases est nul. Du coup le module de cisaillement visqueux dans les modèles sécant classique et affine classique est infini et donc le temps caractéristique associé à l'évolution des contraintes moyennes définies dans les relations (1.121) et (1.129) est lui aussi infini : il n'y a pas de relaxation des contraintes hydrostatiques moyennes, ce qui est en contradiction avec les résultats de référence obtenus par éléments finis.

Ces estimations sont qualitativement améliorées en utilisant les modèles sécant modifié et la méthode du second ordre qui sont équivalents pour ce cas de chargement. En effet nous constatons que le second moment dans ces approches est non nul et du coup le module de cisaillement linéarisé est lui aussi non nul de sorte qu'on obtient une relaxation des contraintes hydrostatiques moyennes dans les phases.

Des calculs de microstructures représentatives de combustibles MOX, qui s'appuient sur des calculs en champ complet, ont été également réalisés à l'aide de l'application VER de la plateforme PLEIADES [83]. Ces calculs de structures reposent sur les mêmes hypothèses (phases inclusionnaires de forme sphérique, comportement élastique homogène, interfaces parfaites) que les approches deux et trois phases. Les simulations menées avec l'application VER constitueront donc dans cette section des résultats de référence. Pour les calculs VER, les microstructures ont été générées à partir d'images 2D de microstructures réelles (voir [84] pour plus de détails). Sur la Figure 3 suivante, les estimations obtenues avec les approches sécante classique et sécante modifiée détaillées ci-dessus sont comparées avec la solution de référence pour un module de compressibilité par phase purement élastique ( $\kappa_v^{(r)} = \infty$ ). Les données utilisées pour réaliser ces calculs sont les suivantes :

$$n^{(1)} = 3.67, c^{(2)} = 0.1, \mu_e = 70\text{GPa}, \kappa_e = 161\text{GPa}, \sigma_0^{(1)} = 1\text{GPa}, \varepsilon_{0m}^{(2)} = 333.10^{-6}.$$

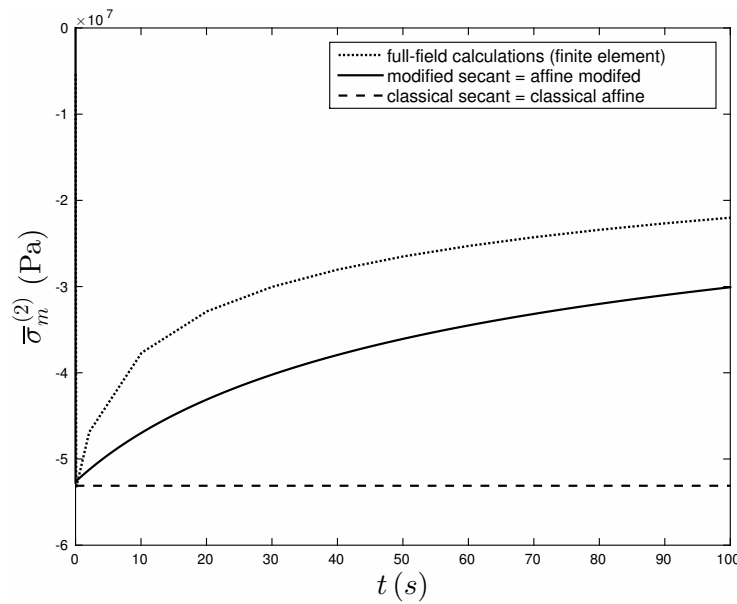


FIGURE 1.13 – Évolution temporelle de la contrainte moyenne hydrostatique dans l'inclusion

### 3. Conclusions

Le travail présenté dans cette section est relatif à la modélisation micro-mécanique du comportement effectif de composites dont les phases possèdent un comportement viscoélastique non linéaire. Pour estimer les propriétés effectives du composite non linéaire, nous avons défini un Milieu Linéaire de Comparaison dans lequel le comportement des phases est viscoélastique linéaire. Par la suite différentes méthodes de linéarisation proposées dans la littérature dans le but d'estimer les propriétés effectives de milieux purement visqueux (potentiel élastique négligé) sont présentées. L'extension de ces méthodes de linéarisation à des matériaux possédant un comportement viscoélastique non linéaire conduit à la définition de différentes familles d'estimation (Sécant, Affine et méthode du second ordre). Dans le cas d'un chargement particulier de type gonflements différentiels (chargement représentatif des combustibles MOX), les modèles sécant classique et affine conduisent à des estimations irréalistes. Ces estimations sont qualitativement améliorées en utilisant le modèle sécant modifié et la méthode du second ordre qui sont équivalents pour ce cas particulier de chargement considéré. Les cinétiques de relaxation estimées restent cependant trop faibles par comparaison à des résultats de référence obtenus par éléments finis.

## VI. Conclusion générale et perspectives

Cette étude a été consacrée à l'estimation du comportement effectif des combustibles MOX qui sont des matériaux hétérogènes (les modules de cisaillement visqueux et le gonflement sont différents dans les phases) présentant une microstructure de type matrice-inclusions. La loi de comportement dans chacune des phases est de nature viscoélastique non linéaire et vieillissante (propriétés mécaniques évoluant dans le temps) avec des déformations libres caractéristiques des gonflements différentiels. Le fluage thermique n'ayant pas été caractérisé sur le combustible irradié (pas de données), nous allons avoir recours à des données expérimentales sur le MOX vierge pour caractériser le fluage thermique puis utiliser des résultats d'examen post-irradiatoires sur crayons irradiés. Les données expérimentales sur crayons irradiés que nous allons exploiter sont des mesures de diamètre et de comblement d'évidements disponibles en régime nominal.

Après un bref état de l'art dressé sur le comportement multiphysique du crayon combustible sous irradiation, nous avons fait une présentation générale du matériau d'étude (combustible MOX) par une description de sa microstructure et des phénomènes physico-chimiques apparaissant au cours de l'irradiation. Ensuite nous avons présenté différentes approches micro-mécaniques qui reposent sur une description de la microstructure du matériau d'étude (combustible MOX) et qui permettent d'estimer le comportement effectif du composite pour diverses classes de comportement (élastique, thermo-élastique, viscoélastique et thermo-viscoélastique).

Dans le cas des matériaux élastiques linéaires, nous avons passé en revue les méthodes d'homogénéisation classiquement utilisées pour estimer les propriétés effectives de matériaux hétérogènes. Par la suite, le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka a été employé pour établir les moyennes par phase ainsi que le comportement macroscopique des matériaux ayant un comportement élastique avec des déformations libres dans chacune des phases (cas du combustible MOX). Nous avons choisi le modèle de Mori-Tanaka dans cette analyse car ce modèle s'avère pertinent pour modéliser les microstructures de type matrice-inclusions (bonnes estimations jusqu'à 20% de fractions volumiques d'inclusions).

Dans le cas des matériaux viscoélastiques et thermo-viscoélastiques linéaires le principe de correspondance de Mandel associé au modèle de Mori-Tanaka nous ont permis d'évaluer explicitement le comportement effectif tout comme les moyennes par phase dans le cas non vieillissant. Ces résultats sont ensuite étendus au cas où les propriétés élastiques et visqueuses dépendent explicitement du temps (comportement vieillissant). Dans cette modélisation (cas vieillissant), les propriétés effectives du matériau sont décrites à travers une démarche itérative et incrémentale. Le cas des matériaux à compressibilité purement élastique a été aussi étudié avec les moyennes des contraintes par phase qui sont calculées dans ce cas en utilisant le modèle de Mori-Tanaka.

Dans le cas non linéaire nous avons défini un Milieu Linéaire de Comparaison dans lequel la loi de comportement viscoélastique non linéaire dans chacune des phases devient linéarisée. Par la suite différentes méthodes de linéarisation (approches sécantes et affines) ont été proposées afin d'estimer les propriétés effectives du matériau dans le cas d'un seul potentiel (potentiel visqueux). Les estimations ont été ensuite étendues pour des milieux viscoélastiques linéarisés. Dans le cas d'un chargement représentatif des combustibles MOX (chargement de type gonflements différentiels) les modèles sécant classique et affine conduisent à des solutions purement élastiques (pas de relaxation des contraintes). Ces estimations sont par la suite corrigées en utilisant le modèle sécant modifié et la méthode du second ordre qui sont équivalents pour ce cas de chargement. La solution sécante modifiée est qualitativement satisfaisante mais pas quantitativement en raison de la cinétique de relaxation qui est assez faible dans le cas particulier considéré. C'est cette approche, intégrée au format MFRONT dans le cas deux ou trois phases [85] qui est utilisée dans le code ALCYONE pour simuler le comportement des combus-

tibles MOX [86]. Les travaux relatifs au modèle sécant modifié qui ont porté, d'une part, sur la recherche des solutions exactes (cas particulier d'un gonflement différentiel) et d'autre part sur la proposition d'une méthode d'estimation améliorée, ont fait l'objet de deux communications distinctes au Colloque Franco-Roumain [87] et au Congrès Français de Mécanique [88].

En perspectives, ce travail de comparaison pourrait être étendu à d'autres schémas de linéarisation proposés par exemple dans [80] dont l'objet est d'améliorer l'approche affine classique. Le modèle finalement retenu sera par la suite appliqué à d'autres cas de chargement. Ainsi la loi 2 et 3-phases déjà intégrée au format MFRONT dans ALCYONE sera corrigée avec l'approche retenue puis validée par les données expérimentales disponibles évoquées plus haut. Les résultats de ces calculs compléteront l'étude et feront l'objet dans le mémoire de thèse d'une section dédiée à la simulation du comportement des crayons combustibles.

---





## CHAPITRE 2

---

# Solutions exactes pour le comportement effectif de composites particulaires viscoélastique non linéaire sous chargement isotrope

---

### Résumé du chapitre :

**D**ans ce chapitre, une solution analytique du problème viscoélastique non linéaire qui repose sur une microstructure particulière : la sphère composite est proposée dans le but d'approximer les champs locaux dans un VER plus complexe soumis à un chargement purement isotrope. Lorsque le comportement visqueux est décrit par un potentiel en loi puissance, la résolution du problème mécanique local a permis d'établir la loi d'évolution dans le temps et dans l'espace de la contrainte de cisaillement dans la matrice (contrainte équivalente) qui est régie par une équation intégro-différentielle non linéaire. Néanmoins, dans certaines situations particulières cette dernière est déterminée analytiquement. A partir de cette expression analytique sont établis théoriquement les champs moyens par phase ainsi que le second moment des champs de contrainte dans la matrice. Afin d'évaluer la pertinence de la solution trouvée des simulations numériques relatives à des calculs en champs complets sur un VER périodique ont été réalisées pour un chargement de type gonflements différentiels dans la phase inclusionnaire avec le bord extérieur du VER qui est libre de contrainte. Pour une fraction volumique modérée d'inclusions ( $\leq 30\%$ ), le modèle de la sphère composite s'avère être en excellent accord avec les calculs en champs complets (calculs FFT).

---

## Sommaire

---

<b>I.</b>	<b>Introduction</b>	<b>91</b>
<b>II.</b>	<b>Modèle de la sphère composite</b>	<b>92</b>
1.	Comportement effectif	94
2.	Rappels de quelques résultats obtenus sur la sphère	94
<b>III.</b>	<b>Solutions générales du problème viscoélastique non linéaire</b>	<b>97</b>
1.	Équations locales	97
2.	Champs mécaniques <i>locaux</i> dans l'inclusion	98
3.	Champs mécaniques <i>locaux</i> dans la matrice	99
4.	Comportement macroscopique	100
5.	Premier et second moments du champ de contrainte	101
<b>IV.</b>	<b>Solutions exactes pour des cas particuliers</b>	<b>103</b>
1.	Sphère composite avec une compressibilité homogène	104
2.	Sphère composite avec une matrice incompressible	105
<b>V.</b>	<b>Simulations numériques en champs complets</b>	<b>108</b>
1.	Génération aléatoire 3D de VER	108
2.	Calculs FFT	109
3.	Comparaison des résultats analytiques et numériques	110
<b>VI.</b>	<b>Conclusion</b>	<b>117</b>

---

## I. Introduction

En principe, une approche par homogénéisation consiste à déterminer les champs de contrainte et de déformation en chaque point du Volume Élémentaire Représentatif (VER) et d'en déduire les propriétés effectives par des opérations de moyenne. Pour des microstructures particulières ayant une géométrie assez simple, des solutions exactes relatives aux champs de contrainte et de déformation peuvent être obtenues. Toutefois, pour des microstructures très complexes, les champs mécaniques locaux ne peuvent être déterminés et les propriétés homogénéisées dans ce cas sont évaluées qu'à travers des approches basées sur des hypothèses simplificatrices.

Dans ce chapitre une approche multi-échelle est proposée pour prédire les propriétés locales et effectives de microstructures biphasées sous chargement isotrope dont les phases ont un comportement viscoélastiques non linéaires. La microstructure est constituée d'un ensemble d'inclusions sphériques noyées dans une matrice (assemblage des sphères composites de Hashin [44]). Pour de faibles fractions volumiques d'inclusions, les interactions entre les inclusions sont faibles et la microstructure peut-être approchée par le modèle de la sphère composite. Pour ce VER simplifié les champs mécaniques locaux, solutions du problème local, peuvent être établis analytiquement et les propriétés effectives du composite s'obtiennent alors par une démarche d'homogénéisation analytique.

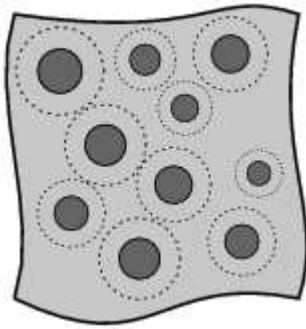


FIGURE 2.1 – Représentation de la microstructure, assemblage des sphères composites de Hashin

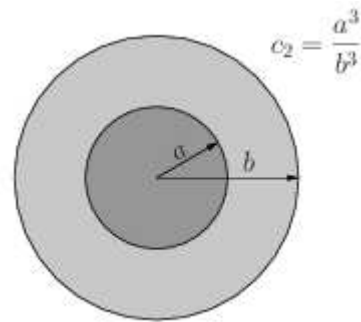


FIGURE 2.2 – Sphère composite

Le premier point que nous allons aborder dans la première section de ce chapitre concerne la description de la microstructure (sphère composite) ainsi que la formulation du problème à l'échelle microscopique (section II.). Dans la deuxième section de l'étude, nous allons employer les équations d'équilibre et de compatibilité, associées aux conditions à l'interface et au bord extérieur de la matrice, pour résoudre le problème local tout en déterminant les champs mécaniques locaux dans chacune des phases du composite. Dans la troisième section, nous allons présenter les solutions générales du problème viscoélastique non linéaire avec cette microstructure particulière (section III.). Dans la suite, nous allons exposer des solutions exactes obtenues dans des situations particulières (sphère composite avec une compressibilité homogène, sphère composite avec une matrice incompressible) et pour différents cas de chargement considérés (chargement hydrostatique en déformations ou contraintes homogènes, gonflement différentiel de la phase inclusionnaire) (section IV.). Enfin, la dernière partie de ce chapitre (section V.) est dédiée à des simulations numériques relatives à des calculs en champs complets sur un VER périodique afin d'évaluer la pertinence de la solution trouvée. Le chargement considéré dans cette section est de type gonflements différentiels dans la phase inclusionnaire avec le bord extérieur du VER qui est libre de contrainte.

## II. Modèle de la sphère composite

Nous considérons une sphère composite de domaine  $\Omega$  contenant en son centre une inclusion sphérique de rayon  $a$  dont le comportement est viscoélastique non linéaire (phase 2), entourée d'une couche sphérique de rayon extérieur  $b$  dont le comportement est également viscoélastique non linéaire (phase 1). Les fractions volumiques représentatives de la matrice et de l'inclusion notées  $c^{(1)}$  et  $c^{(2)}$  sont définies par :

$$c^{(1)} = \langle \chi^{(1)}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} \quad , \quad c^{(2)} = \langle \chi^{(2)}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = \left(\frac{a}{b}\right)^3 \quad \text{et} \quad c^{(1)} + c^{(2)} = 1, \quad (2.1)$$

où  $\chi^{(1)}(\mathbf{x})$  et  $\chi^{(2)}(\mathbf{x})$  désignent respectivement les fonctions caractéristiques des domaines occupés par la matrice et l'inclusion, l'opérateur  $\langle \bullet \rangle_{\Omega}$  représente la moyenne sur le volume élémentaire  $\Omega$ .

Plusieurs types de sollicitations, caractéristiques des essais de relaxation et de fluage, sont considérés.

- une déformation sphérique et uniforme appliquée au bord extérieur du volume élémentaire (essai de relaxation) :  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\varepsilon}_m(t) \mathbf{x}$  sur  $\partial\Omega$ .
- une contrainte sphérique et uniforme appliquée au bord extérieur du volume élémentaire (essai de fluage) :  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \bar{\sigma}_m(t) \mathbf{n}(\mathbf{x})$  sur  $\partial\Omega$ .

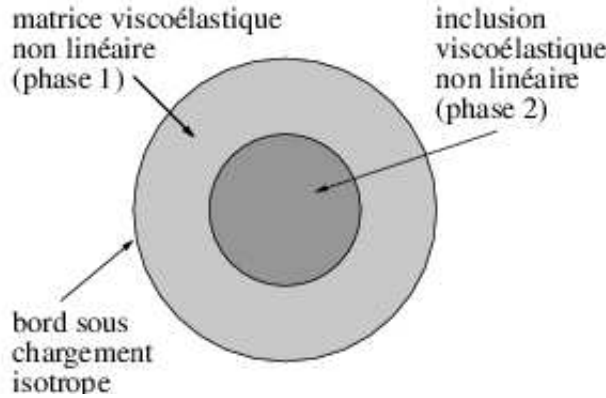


FIGURE 2.3 – Modèle de la sphère composite

Ces deux sollicitations, classiques en théorie d'homogénéisation, sont couplées avec une sollicitation de l'inclusion sous la forme d'une déformation libre  $\varepsilon_0^{(2)}$ , caractéristique de gonflements différentiels.

La déformation totale, en supposant l'hypothèse des petites déformations, se décompose sous forme additive :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\varepsilon}^v(\mathbf{x}, t) + \varepsilon_0^{(2)} \chi^{(2)} \boldsymbol{\delta}. \quad (2.2)$$

Les champs tensoriels  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}^v$  représentent respectivement les déformations élastiques et visqueuses. Le terme  $\varepsilon_0^{(2)} \boldsymbol{\delta}$  caractérise la déformation libre dans l'inclusion qui est supposée homogène et sphérique ( $\boldsymbol{\delta}$  est le tenseur identité d'ordre deux). Le comportement visqueux non linéaire considéré ici dérive d'un potentiel de dissipation  $U_v(\mathbf{x}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}})$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{eq}}^2$ .

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^v = \frac{\partial U_v}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \quad \text{avec} \quad U_v(\mathbf{x}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \chi^{(1)}(\mathbf{x}) U_v^{(1)}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) + \chi^{(2)}(\mathbf{x}) U_v^{(2)}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}), \quad (2.3)$$

où  $U_v^{(1)}$  et  $U_v^{(2)}$  désignent les potentiels de dissipation (fonctions convexes) associés respectivement à la matrice et à l'inclusion. Le comportement visqueux du matériau est régi par une relation non linéaire liant la vitesse de déformation visqueuse  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^v$  à la contrainte déviatorique  $\mathbf{s}$  et cette vitesse de déformation visqueuse peut-être obtenue par dérivation du potentiel de dissipation défini à la relation (2.3) selon :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^v(\mathbf{x}, t) = 3 \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial U_v}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}(\mathbf{x}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t)) \quad (2.4)$$

Ainsi la loi de comportement locale est donnée par :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^v(\mathbf{x}, t) = \frac{\dot{\sigma}_m(\mathbf{x}, t)}{3\kappa(\mathbf{x})} \boldsymbol{\delta} + \frac{\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, t)}{2\mu(\mathbf{x})} + 3 \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial U_v}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}(\mathbf{x}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t)) + \dot{\varepsilon}_0^{(2)}(t) \chi^{(2)}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\delta}, \quad (2.5)$$

où  $\kappa(\mathbf{x})$  et  $\mu(\mathbf{x})$  représentent les modules de compressibilité et de cisaillement élastiques, qui sont constants par phase.

$$\kappa(\mathbf{x}) = \kappa^{(1)} \chi^{(1)}(\mathbf{x}) + \kappa^{(2)} \chi^{(2)}(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \mu(\mathbf{x}) = \mu^{(1)} \chi^{(1)}(\mathbf{x}) + \mu^{(2)} \chi^{(2)}(\mathbf{x}) \quad (2.6)$$

Le volume élémentaire étudié, constitué de deux phases isotropes, est à symétrie sphérique. De plus les conditions de chargement appliquées sur le bord extérieur du volume élémentaire possèdent aussi la symétrie sphérique. Il est légitime donc de supposer que le champ de déplacement dans le système de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  est radial.

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{u}}(r, t) \mathbf{e}_r, \quad (2.7)$$

où  $\mathbf{e}_r$  désigne le vecteur unitaire radial. Lorsque le champ de déplacement est radial et ne dépend que des variables d'espace  $r$  et du temps  $t$  alors les tenseurs des déformations et des contraintes sont diagonaux dans le système de coordonnées sphériques et on a :  $\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}(r, t) = \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}(r, t)$  et  $\sigma_{\varphi\varphi}(r, t) = \sigma_{\theta\theta}(r, t)$ . Dans cette situation particulière, l'équation d'équilibre se simplifie davantage et est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial r} (\sigma_{rr}(r, t)) + \frac{2}{r} (\sigma_{rr}(r, t) - \sigma_{\theta\theta}(r, t)) = 0 \quad (2.8)$$

La partie déviatorique de la vitesse de déformation  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  et du champ de contrainte  $\mathbf{s}$  sont colinéaires avec le même tenseur déviatorique du second ordre noté  $\mathbf{d}$ .

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\dot{\varepsilon}_{rr} - \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}}{3} \mathbf{d}, \quad \mathbf{s} = \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{3} \mathbf{d} \quad \text{avec} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

La contrainte équivalente de Von Mises dans ce cas particulier de symétrie sphérique est donnée par la relation  $\sigma_{\text{eq}}(r, t) = |\sigma_{\theta\theta}(r, t) - \sigma_{rr}(r, t)|$ . Pour une écriture plus simple du déviateur du champ de contrainte  $\mathbf{s}$ , nous introduisons dans ce qui suit une contrainte notée  $\sigma_s(r, t) = \sigma_{\theta\theta}(r, t) - \sigma_{rr}(r, t)$ . Ainsi nous avons les relations suivantes :

$$\sigma_s^2 = \sigma_{\text{eq}}^2 = \tilde{\sigma} \quad \text{et} \quad \mathbf{s} = -\frac{\sigma_s}{3} \mathbf{d} \quad (2.10)$$

## 1. Comportement effectif

Les conditions de chargement en contraintes (respectivement en déformations) sont isotropes et par conséquent, en raison de l'isotropie macroscopique de la sphère composite, les tenseurs de contrainte et de déformation effectives sont sphériques :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \bar{\sigma}_m(t) \boldsymbol{\delta}, \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \bar{\varepsilon}_m(t) \boldsymbol{\delta} \quad (2.11)$$

La contrainte macroscopique tout comme la déformation macroscopique sont généralement définies par des relations de moyenne volumique, donc dans le cas d'un élément de volume sphérique, il est plus commode d'utiliser des définitions équivalentes.

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \mathbf{n} \otimes_s \mathbf{x} \, dS, \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}(t) \otimes_s \mathbf{n} \, dS \quad (2.12)$$

Pour un volume élémentaire sphérique la normale unitaire extérieure au contour  $\partial\Omega$  se réduit au vecteur unitaire radial ( $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$ ) et le vecteur position sur le bord de la sphère (en  $r = b$ ) est donnée par  $\mathbf{x} = b \mathbf{e}_r$ . Dans ce cas le champ de déplacement et la contrainte sur le bord extérieur  $\partial\Omega$  s'écrivent :

$$\mathbf{u}(t) = u(b, t) \mathbf{e}_r \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \mathbf{n} = \sigma_{rr}(b, t) \mathbf{e}_r \quad (2.13)$$

Finalement la contrainte macroscopique ainsi que la déformation macroscopique, dans tout le volume élémentaire, sont exprimées par :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \bar{\sigma}_m(t) \boldsymbol{\delta} = \sigma_{rr}(b, t) \boldsymbol{\delta} \quad \text{et} \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \bar{\varepsilon}_m(t) \boldsymbol{\delta} = \frac{u(b, t)}{b} \boldsymbol{\delta} \quad (2.14)$$

## 2. Rappels de quelques résultats obtenus sur la sphère

### 2.1 Solutions purement élastiques

Lorsque le volume élémentaire est soumis à un chargement à l'instant initial  $t = 0$  alors la réponse à cet instant est purement élastique. Le problème à résoudre est donc celui d'une sphère composite dont le comportement dans chacune des phases est élastique. Des solutions analytiques du problème élastique, pour des chargements isotropes, ont été obtenues dans [44]. Le module de compressibilité effectif dans cette étude est donné par la relation

$$\tilde{\kappa} = \frac{4\kappa^{(1)}\kappa^{(2)} + 4\mu^{(1)}(c^{(1)}\kappa^{(1)} + c^{(2)}\kappa^{(2)})}{3c^{(1)}\kappa^{(2)} + 3c^{(2)}\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}} \quad (2.15)$$

Les champs de déplacement et de contrainte, lorsque la sphère composite est simultanément soumise à une déformation macroscopique isotrope ( $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\varepsilon}_m \boldsymbol{\delta}$ ) et à une déformation libre dans l'inclusion  $\boldsymbol{\varepsilon}_0^{(2)}$ , sont également bien connus. Elles s'écrivent respectivement

- champ de déplacement dans la matrice et dans l'inclusion :

$$\begin{cases} u^{(1)}(r) = \frac{(3\kappa^{(2)} + 4\mu^{(1)})\bar{\varepsilon}_m - 3c^{(2)}\kappa^{(2)}\varepsilon_0^{(2)}}{3c^{(2)}\kappa^{(1)} + 3c^{(1)}\kappa^{(2)} + 4\mu^{(1)}} r + \frac{(\kappa^{(1)} - \kappa^{(2)})\bar{\varepsilon}_m + \kappa^{(2)}\varepsilon_0^{(2)}}{3c^{(2)}\kappa^{(1)} + 3c^{(1)}\kappa^{(2)} + 4\mu^{(1)}} \frac{3a^3}{r^2} \\ u^{(2)}(r) = \frac{(3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)})\bar{\varepsilon}_m + 3c^{(1)}\kappa^{(2)}\varepsilon_0^{(2)}}{3c^{(2)}\kappa^{(1)} + 3c^{(1)}\kappa^{(2)} + 4\mu^{(1)}} r \end{cases}$$

- contrainte radiale dans la matrice et dans l'inclusion :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^{(1)}(r) = 3\kappa^{(1)} \frac{(3\kappa^{(2)} + 4\mu^{(1)})\bar{\varepsilon}_m - 3c^{(2)}\kappa^{(2)}\varepsilon_0^{(2)}}{3c^{(2)}\kappa^{(1)} + 3c^{(1)}\kappa^{(2)} + 4\mu^{(1)}} - 12\mu^{(1)} \frac{(\kappa^{(1)} - \kappa^{(2)})\bar{\varepsilon}_m + \kappa^{(2)}\varepsilon_0^{(2)}}{3c^{(2)}\kappa^{(1)} + 3c^{(1)}\kappa^{(2)} + 4\mu^{(1)}} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \\ \sigma_{rr}^{(2)}(r) = 3\kappa^{(2)} \frac{(3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)})\bar{\varepsilon}_m - (3c^{(2)}\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)})\varepsilon_0^{(2)}}{3c^{(2)}\kappa^{(1)} + 3c^{(1)}\kappa^{(2)} + 4\mu^{(1)}} \end{cases}$$

- distribution de la contrainte équivalente dans la matrice :

$$\sigma_{\text{eq}}^{(1)}(r) = 18\mu^{(1)} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \frac{|(\kappa^{(1)} - \kappa^{(2)})\bar{\varepsilon}_m + \kappa^{(2)}\varepsilon_0^{(2)}|}{3c^{(2)}\kappa^{(1)} + 3c^{(1)}\kappa^{(2)} + 4\mu^{(1)}} \quad (2.16)$$

Pour déterminer l'expression de la déformation libre effective (gonflement effectif noté  $\bar{\varepsilon}_{0m}$ ), il faut considérer le problème purement thermique dans lequel la sphère composite est soumise à une déformation libre dans l'inclusion avec le bord extérieur qui est libre de contrainte.

$$\sigma_{rr}^{(1)}(b) = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{\varepsilon}_{0m} = \frac{c^{(2)}\kappa^{(2)}(3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)})}{3\kappa^{(1)}\kappa^{(2)} + 4\mu^{(1)}(c^{(1)}\kappa^{(1)} + c^{(2)}\kappa^{(2)})} \varepsilon_0^{(2)} \quad (2.17)$$

Lorsque l'inclusion est toujours soumise à une déformation libre  $\varepsilon_0^{(2)}$  mais qu'une contrainte macroscopique isotrope ( $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_m \delta$ ) est maintenant appliquée sur le bord extérieur de la sphère composite, les champs de déplacement et de contrainte sont alors obtenus en substituant la déformation macroscopique  $\bar{\varepsilon}_m$  dans les équations précédentes par :

$$\bar{\varepsilon}_m = \frac{\bar{\sigma}_m}{3\bar{\kappa}} + \bar{\varepsilon}_{0m} \quad (2.18)$$

Dans ce cas, l'expression de la distribution de la contrainte équivalente dans la matrice s'écrit :

$$\sigma_{\text{eq}}^{(1)}(r) = 6\mu^{(1)} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \frac{|3\kappa^{(1)}\kappa^{(2)}\varepsilon_0^{(2)} + \bar{\sigma}_m(\kappa^{(1)} - \kappa^{(2)})|}{3\kappa^{(1)}\kappa^{(2)} + 4\mu^{(1)}(c^{(1)}\kappa^{(1)} + c^{(2)}\kappa^{(2)})}. \quad (2.19)$$

## 2.2 Solutions purement visqueuses

Le modèle de la sphère creuse sous chargement isotrope a été utilisé par Michel et Suquet [78] en vue de déterminer le comportement effectif de milieux poreux à travers une formulation variationnelle. La loi de comportement dans la matrice, de nature viscoplastique non linéaire et incompressible, est caractérisée par un potentiel de dissipation  $U_v$  en loi puissance

$$U_v(\sigma) = \frac{\sigma_0 \dot{\varepsilon}_0}{(n+1)} \left(\frac{\sigma_{\text{eq}}}{\sigma_0}\right)^{n+1} \quad (2.20)$$

où les paramètres  $\dot{\varepsilon}_0$ ,  $\sigma_0$  et  $n$  sont des constantes caractéristiques du comportement visqueux non linéaire de la matrice. La sphère de porosité  $f = a^3/b^3$  est soumise à une contrainte hydrostatique positive  $\bar{\sigma}_m$  sur le bord extérieur ( $r = b$ ). Le problème ayant une symétrie sphérique, le champ de déplacement est radial et la résolution du problème à l'aide de l'équation d'équilibre associée aux conditions de chargement a permis d'établir les expressions analytiques des champs locaux, solutions du problème mécanique.



- cinétique du champ de déplacement dans la matrice :

$$\dot{u}(r) = \frac{\dot{\varepsilon}_0}{2} \left[ \frac{1}{n \left(1 - f^{\frac{1}{n}}\right)} \frac{3 \bar{\sigma}_m}{2 \sigma_0} \right]^n \frac{a^3}{r^2} \quad (2.21)$$

- contrainte radiale dans la matrice :

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{3}{n}}}{1 - f^{\frac{1}{n}}} \bar{\sigma}_m \quad (2.22)$$

- distribution de la contrainte équivalente dans la matrice :

$$\sigma_{\text{eq}}(r) = \frac{3}{2n} \frac{\left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{3}{n}}}{\left(1 - f^{\frac{1}{n}}\right)} \bar{\sigma}_m \quad (2.23)$$

Une approximation « elliptique » du potentiel de dissipation macroscopique, qui est supposé dépendre de la porosité et des deux premiers invariants (hypothèse validée par Duva et Hutchinson ([89])), est de la forme suivante :

$$\tilde{U}_v(\bar{\sigma}_m, \bar{\sigma}_{\text{eq}}, f) = \frac{\sigma_0 \dot{\varepsilon}_0}{n+1} \left[ \frac{9}{4} A(f) \left(\frac{\bar{\sigma}_m}{\sigma_0}\right)^2 + B(f) \left(\frac{\bar{\sigma}_{\text{eq}}}{\sigma_0}\right) \right]^{\frac{n+1}{2}} \quad (2.24)$$

Des expressions des coefficients  $A(f)$  et  $B(f)$  du potentiel de dissipation macroscopique ont été initialement établies par Cocks grâce à une estimation variationnelle dans laquelle l'expression de  $B(f)$  a été ajustée afin de se rapprocher de solutions de référence connues. Par la suite, Ponte Castenada a proposé des expressions des coefficients  $A(f)$  et  $B(f)$  en établissant des bornes rigoureuses du potentiel de dissipation effectif à travers une formulation variationnelle. Cependant les résultats qui dérivent de ces modèles ne correspondent pas aux solutions analytiques de la sphère creuse sous chargement hydrostatique. En effet Michel et Suquet, en utilisant respectivement une formulation variationnelle ainsi que les résultats exacts de la sphère creuse sous chargement isotrope, ont retrouvé l'expression du paramètre  $B(f)$  obtenu par Cocks et Castenada et ont également proposé une nouvelle expression du coefficient  $A(f)$ .

$$A(f) = \left[ n \left( f^{-\frac{1}{n}} - 1 \right) \right]^{-\frac{2n}{n+1}}, \quad B(f) = \left( 1 + \frac{2}{3} f \right) (1 - f)^{-\frac{2n}{n+1}} \quad (2.25)$$

### III. Solutions générales du problème viscoélastique non linéaire

#### 1. Équations locales

Pour déterminer les champs mécaniques locaux solutions du problème viscoélastique non linéaire, nous partons de la relation (2.5) dans laquelle la partie déviatorique dans le système de coordonnées sphériques est donnée par la relation suivante :

$$(\dot{\varepsilon}_{rr} - \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}) \mathbf{d} = \frac{\dot{\sigma}_s}{2\mu(r)} \mathbf{d} - 3\sigma_s \frac{\partial U_v}{\partial \tilde{\sigma}} \mathbf{d}, \quad (2.26)$$

où le module de cisaillement  $\mu$  est défini par :  $\mu(r) = \mu^{(2)}$  si  $r < a$  et  $\mu(r) = \mu^{(1)}$  si  $r > a$ . En utilisant la compatibilité du tenseur des vitesses de déformation dans la relation précédente, on obtient la loi d'évolution de la contrainte équivalente  $\sigma_s$  qui est régie par une équation différentielle non linéaire du premier ordre avec second membre.

$$\dot{\sigma}_s(r, t) + 6\mu(r) \sigma_s(r, t) \frac{\partial U_v}{\partial \tilde{\sigma}}(r, \sigma_s^2(r, t)) = -2\mu(r) \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\dot{u}(r, t)}{r} \right) \right]. \quad (2.27)$$

Lorsqu'on considère à présent la partie sphérique de la relation (2.5) alors on peut déterminer par une intégration temporelle l'expression de la déformation moyenne  $\varepsilon_m$  qui est une fonction affine de la contrainte moyenne  $\sigma_m$ .

$$\varepsilon_m(r, t) = \frac{1}{3\kappa(r)} \sigma_m(r, t) + \varepsilon_0^{(2)}(t) \chi^{(2)}(r), \quad (2.28)$$

où  $\kappa(r) = \kappa^{(2)}$  si  $r < a$  et  $\kappa(r) = \kappa^{(1)}$  si  $r > a$ . De même, la compatibilité du tenseur des vitesses de déformation, associée à l'équation d'équilibre, permet de relier la contrainte radiale au déplacement radial.

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^3 \sigma_{rr}(r, t) \right) = 3\kappa(r) \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 u(r, t) \right) - 3 r^2 \varepsilon_0^{(2)}(t) \chi^{(2)}(r) \right]. \quad (2.29)$$

Cette équation différentielle peut être intégrée et en tenant compte du fait que le champ de déplacement radial au centre de la sphère et pour tout instant est nul ( $u(0, t) = 0$ ), nous obtenons les relations suivantes.

$$\sigma_{rr}(r, t) = \begin{cases} 3\kappa^{(1)} \left( \frac{u(r, t)}{r} - \lambda(t) \frac{b^3}{r^3} \right), & \text{dans la matrice} \\ 3\kappa^{(2)} \left( \frac{u(r, t)}{r} - \varepsilon_0^{(2)}(t) \right), & \text{dans l'inclusion} \end{cases} \quad (2.30)$$

où  $\lambda(t)$  désigne une fonction temporelle dont l'expression analytique peut être établie en utilisant les conditions de chargement en contraintes homogènes ou en déformations homogènes appliquées sur le bord extérieur de la sphère (en  $r = b$ ).

$$\lambda(t) = \frac{u^{(1)}(b, t)}{b} - \frac{\sigma_{rr}^{(1)}(b, t)}{3\kappa^{(1)}}.$$

La fonction temporelle adimensionnelle  $\lambda$  désigne physiquement une déformation supplémentaire apparaissant lorsque la sphère composite est inhomogène ( $c^{(2)} \neq 0$ ), voir équation (2.36). En se servant de l'équation (2.30) combinée avec l'équation d'équilibre alors la distribution de la contrainte  $\sigma_s$  s'écrit :

$$\frac{2}{3}\sigma_s(r, t) - 3\kappa^{(1)}\lambda(t)\frac{b^3}{r^3}\chi_1(r) = \kappa(r) r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u(r, t)}{r} \right) \quad (2.31)$$

Par dérivation de la relation (2.31) par rapport au temps et en utilisant (2.27), nous obtenons finalement :

$$\left[ 1 + \frac{4\mu(r)}{3\kappa(r)} \right] \dot{\sigma}_s + 6\mu(r)\sigma_s \frac{\partial U_v}{\partial \tilde{\sigma}} = 6\mu(r)\dot{\lambda}(t) \frac{\kappa^{(1)}\chi^{(1)}(r)}{\kappa(r)} \left( \frac{b^3}{r^3} \right). \quad (2.32)$$

L'équation différentielle établie, caractéristique de l'évolution dans le temps et dans l'espace de la contrainte de cisaillement  $\sigma_s$ , est inhomogène dans la matrice et homogène dans l'inclusion. La résolution de l'équation dans chacune des phases du composte nécessite la connaissance des conditions initiales correspondant à la réponse du problème purement élastique. Pour tous les champs mécaniques solutions du problème purement élastique, leurs expressions analytiques sont données à la section 2.1

## 2. Champs mécaniques locaux dans l'inclusion

Dans l'inclusion, le second membre de l'équation générale (2.32) est nul (car  $\chi^{(1)}(r)$  est nulle dans l'inclusion) et on obtient une équation différentielle homogène du premier ordre qui s'écrit :

$$\left( 1 + \frac{4\mu^{(2)}}{3\kappa^{(2)}} \right) \dot{\sigma}_s^{(2)}(r, t) + 6\mu^{(2)}\sigma_s^{(2)}(r, t) \frac{\partial U_v^{(2)}}{\partial \tilde{\sigma}} (\tilde{\sigma}^{(2)}(r, t)) = 0, \quad (2.33)$$

avec la condition initiale  $\sigma_s^{(2)}(r, 0) = 0$  (étant donné que la contrainte équivalente élastique est nulle, ( $\sigma_{\text{eq}}^{(2)}(r, 0) = |\sigma_s^{(2)}(r, 0)| = 0$ )). De plus, comme le potentiel  $U_v^{(2)}$  ne dépend que  $\tilde{\sigma}$ , l'unique solution de l'équation différentielle vérifiant la condition initiale est  $\sigma_s^{(2)}(r, t) = 0$ . Donc la réponse dans l'inclusion est purement sphérique ( $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$ ) et le champ de déplacement varie linéairement en fonction de la variable  $r$  (relation 2.31). Finalement les champs mécaniques dans l'inclusion s'écrivent :

$$\begin{cases} u^{(2)}(r, t) = r C(t) \\ \sigma_{rr}^{(2)}(r, t) = \sigma_m^{(2)}(r, t) = 3\kappa^{(2)} \left( C(t) - \varepsilon_0^{(2)}(t) \right) \\ \sigma_s^{(2)}(r, t) = \sigma_{\text{eq}}^{(2)}(r, t) = 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

Il est important de noter que la non linéarité n'apparaît pas dans les expressions des champs mécaniques établis en raison de la nullité de la contrainte équivalente  $\sigma_s^{(2)}$  due aux chargements particuliers considérés dans cette étude qui sont tous de symétrie sphérique. En revanche la contrainte radiale dépend du scalaire  $C(t)$  qui peut être déterminé à partir des conditions de continuité à l'interface (en  $r = a$ ).

$$u^{(1)}(a, t) = a C(t), \quad 3\kappa^{(2)} \left( C(t) - \varepsilon_0^{(2)}(t) \right) = 3\kappa^{(1)} \left( \frac{u^{(1)}(a, t)}{a} - \frac{\lambda(t)}{c^{(2)}} \right). \quad (2.35)$$

En substituant l'expression du champ de déplacement de la matrice à l'interface dans l'autre équation alors on obtient l'expression du scalaire  $\lambda(t)$  qui dépend du scalaire  $C(t)$  et des propriétés du matériau.

$$\lambda(t) = -c^{(2)} \left[ \frac{\kappa^{(2)} - \kappa^{(1)}}{\kappa^{(1)}} C(t) - \frac{\kappa^{(2)}}{\kappa^{(1)}} \varepsilon_0^{(2)}(t) \right]. \quad (2.36)$$

### 3. Champs mécaniques locaux dans la matrice

Dans la matrice, l'évolution de la contrainte équivalente  $\sigma_s$ , obtenue à partir de l'équation générale (2.32), obéit à une équation différentielle non homogène selon :

$$\dot{\sigma}_s^{(1)}(r, t) + \frac{1}{\eta} \sigma_s^{(1)}(r, t) \frac{\partial U_v^{(1)}}{\partial \tilde{\sigma}}(\tilde{\sigma}^{(1)}(r, t)) = \frac{1}{\eta} \dot{\lambda}(t) \left( \frac{b^3}{r^3} \right) \quad , \quad \eta = \frac{3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}}{18\kappa^{(1)}\mu^{(1)}}, \quad (2.37)$$

avec la fonction  $\lambda(t)$  qui dépend des conditions de chargement appliquées sur le bord extérieur de la sphère et des propriétés mécaniques du matériau. Dans l'annexe D sont obtenues les expressions de  $\dot{\lambda}(t)$  pour les deux cas de chargement.

Lorsque la sphère est soumise à des conditions de chargement en contraintes homogènes, nous avons :

$$\frac{\dot{\lambda}(t)}{\eta} = \frac{18\kappa^{(1)}\mu^{(1)}c^{(2)}(\kappa^{(1)} - \kappa^{(2)})}{3\kappa^{(1)}\kappa^{(2)} + 4\mu^{(1)}(c^{(1)}\kappa^{(1)} + c^{(2)}\kappa^{(2)})} \left[ \frac{\dot{\tilde{\sigma}}_m(t)}{3\kappa^{(1)}} - \frac{\kappa^{(2)}}{\kappa^{(2)} - \kappa^{(1)}} \dot{\varepsilon}_0^{(2)}(t) + \frac{2}{3\eta\kappa^{(1)}} \int_a^b \frac{\sigma_s^{(1)}(u, t)}{u} \frac{\partial U_v^{(1)}}{\partial \tilde{\sigma}} du \right]. \quad (2.38)$$

Dans le cas où la sphère est sollicitée en déformations homogènes sur son bord extérieur, la fonction  $\dot{\lambda}(t)$  est donnée par :

$$\frac{\dot{\lambda}(t)}{\eta} = \frac{18\mu^{(1)}c^{(2)}(\kappa^{(1)} - \kappa^{(2)})}{3(c^{(1)}\kappa^{(2)} + c^{(2)}\kappa^{(1)}) + 4\mu^{(1)}} \left[ \dot{\tilde{\varepsilon}}_m(t) - \frac{\kappa^{(2)}}{\kappa^{(2)} - \kappa^{(1)}} \dot{\varepsilon}_0^{(2)}(t) + \frac{2}{3\kappa^{(1)}\eta} \int_a^b \frac{\sigma_s^{(1)}(u, t)}{u} \frac{\partial U_v^{(1)}}{\partial \tilde{\sigma}} du \right]. \quad (2.39)$$

Finalement, quelque soit les conditions de chargement appliquées sur le bord extérieur de la sphère, l'évolution de la contrainte  $\sigma_s^{(1)}$  dans la matrice est donnée par une équation intégral-différentielle de la forme :

$$\dot{\sigma}_s^{(1)}(r, t) + \frac{1}{\eta} \sigma_s^{(1)}(r, t) \frac{\partial U_v^{(1)}}{\partial \tilde{\sigma}}(\tilde{\sigma}^{(1)}(r, t)) = \left( \frac{b}{r} \right)^3 \left[ \frac{2\alpha}{\eta} \int_a^b \frac{\sigma_s^{(1)}(u, t)}{u} \frac{\partial U_v^{(1)}}{\partial \tilde{\sigma}}(\tilde{\sigma}^{(1)}(u, t)) du + \mathcal{F}(t) \right], \quad (2.40)$$

où  $\alpha$  désigne un coefficient adimensionnel qui dépend des modules élastiques des phases et  $\mathcal{F}(t)$  une fonction temporelle dépendant des conditions de chargements exercées. Une description complète des expressions de la fonction  $\mathcal{F}(t)$ , pour différents cas de chargement considérés, est détaillée dans l'annexe D.

## 4. Comportement macroscopique

En raison de l'isotropie macroscopique du matériau, la déformation (respectivement la contrainte) macroscopique, résultant des conditions de chargement en contraintes homogènes (respectivement en déformations homogènes) appliquées sur le bord extérieur de la sphère, est également isotrope (relation (2.14)). En conséquence, la relation qui relie la contrainte macroscopique à la déformation macroscopique est donnée par :

$$\bar{\sigma}_m(t) = \sigma_{rr}(b, t) = 3\kappa^{(1)} \left( \frac{u(b, t)}{b} - \lambda(t) \right) = 3\kappa^{(1)} (\bar{\varepsilon}_m(t) - \lambda(t)) \quad (2.41)$$

L'expression analytique de la fonction  $\lambda(t)$  dans la relation précédente est déterminée en partant de l'équation d'équilibre. En effet, par une intégration dans l'espace de l'équation d'équilibre locale, on obtient la relation suivante :

$$\sigma_{rr}^{(1)}(b, t) - \sigma_{rr}^{(1)}(a, t) = \int_a^b \frac{2}{r} \sigma_s^{(1)}(r, t) dr. \quad (2.42)$$

En utilisant la relation de continuité du champ de contrainte radiale à l'interface entre les phases ( $\sigma_{rr}^{(1)}(a, t) = \sigma_{rr}^{(2)}(a, t)$ ), alors la relation précédente conduit à :

$$3\kappa^{(1)} (\bar{\varepsilon}_m(t) - \lambda(t)) = 3\kappa^{(2)} (C(t) - \varepsilon_0^{(2)}(t)) + \int_a^b \frac{2}{r} \sigma_s^{(1)}(r, t) dr \quad (2.43)$$

Finalement, en résolvant le système d'équations algébriques relatif aux relations (2.36) et (2.43), on établit l'expression analytique de la fonction  $\lambda(t)$  qui s'écrit :

$$\lambda(t) = \frac{c^{(2)}(\kappa^{(2)} - \kappa^{(1)})}{c^{(2)}\kappa^{(1)} + c^{(1)}\kappa^{(2)}} \left\{ -\bar{\varepsilon}_m(t) + \frac{\kappa^{(2)}}{\kappa^{(2)} - \kappa^{(1)}} \varepsilon_0^{(2)}(t) + \frac{1}{3\kappa^{(1)}} \int_a^b \frac{2}{r} \sigma_s^{(1)}(r, t) dr \right\} \quad (2.44)$$

Enfin, en utilisant les relations (2.41) et (2.44) la contrainte macroscopique moyenne peut-être exprimée en fonction de la déformation macroscopique moyenne  $\bar{\varepsilon}_m(t)$ , de la déformation libre  $\varepsilon_0^{(2)}(t)$  prescrite dans l'inclusion et de la distribution de la contrainte de cisaillement  $\sigma_s^{(1)}$  dans la matrice :

$$\bar{\sigma}_m(t) = \frac{3\kappa^{(1)}\kappa^{(2)}}{c^{(2)}\kappa^{(1)} + c^{(1)}\kappa^{(2)}} (\bar{\varepsilon}_m(t) - c^{(2)}\varepsilon_0^{(2)}(t)) - \frac{c^{(2)}(\kappa^{(2)} - \kappa^{(1)})}{c^{(2)}\kappa^{(1)} + c^{(1)}\kappa^{(2)}} \int_a^b \frac{2}{r} \sigma_s^{(1)}(r, t) dr. \quad (2.45)$$

On peut, d'une manière alternative, introduire dans la relation précédente l'expression de la compressibilité élastique effective (relation (2.15)) ainsi que celle du gonflement effectif (relation (2.17)) de sorte que la relation entre la contrainte macroscopique et la déformation macroscopique s'écrit sous la forme suivante :

$$\bar{\sigma}_m = 3\tilde{\kappa} \left( \bar{\varepsilon}_m(t) - \bar{\varepsilon}_{0m}(t) - \bar{\varepsilon}_m^v(t) \right). \quad (2.46)$$

Dans ce cas, l'expression de la déformation macroscopique visqueuse  $\bar{\varepsilon}_m^v(t)$  se déduit des relations (2.45) et (2.46) qui sont équivalentes. Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_m^v(t) = & \frac{\frac{4}{3}c^{(2)}(\kappa^{(1)} - \kappa^{(2)})}{(\kappa^{(1)}\kappa^{(2)} + \frac{4}{3}\mu^{(1)}(c^{(1)}\kappa^{(1)} + c^{(2)}\kappa^{(2)}))(c^{(2)}\kappa^{(1)} + c^{(1)}\kappa^{(2)})} \left[ c^{(1)}\mu^{(1)} \left( (\kappa^{(1)} - \kappa^{(2)}) \bar{\varepsilon}_m(t) \right) \right. \\ & \left. + c^{(1)}\mu^{(1)}\kappa^{(2)}\varepsilon_0^{(2)}(t) - \left( c^{(2)}\kappa^{(1)} + c^{(1)}\kappa^{(2)} + \frac{4}{3}\mu^{(1)} \right) \int_a^b \frac{\sigma_s^{(1)}(r, t)}{2r} dr \right]. \quad (2.47) \end{aligned}$$

En substituant la distribution de la contrainte équivalente de Von Mises (2.16) solution du problème mécanique purement élastique, on peut facilement montrer que la déformation macroscopique visqueuse  $\bar{\varepsilon}_m^v$  s'annule pour cette classe de comportement. Cette remarque met en évidence la signification physique de la déformation macroscopique visqueuse qui est une déformation inélastique due au comportement visqueux de la phase matricielle.

Il est à noter que lorsque la phase matricielle et la phase inclusionnaire ont le même module de compressibilité ( $\kappa^{(1)} = \kappa^{(2)} = \tilde{\kappa}$ ) alors la déformation macroscopique visqueuse  $\bar{\varepsilon}_m^v(t)$  s'annule et la réponse effective devient purement élastique.

$$\bar{\sigma}_m(t) = 3 \tilde{\kappa} (\bar{\varepsilon}_m(t) - \bar{\varepsilon}_{0m}(t)). \quad (2.48)$$

L'expression du gonflement effectif dans ce cas particulier où les modules de compressibilité des phases sont identiques est donnée par :

$$\bar{\varepsilon}_{0m}(t) = c^{(2)} \varepsilon_0^{(2)}(t) \quad (2.49)$$

La fonction  $\lambda(t)$  est obtenue de deux manières différentes (relations (D.1) et (2.44)) cependant les deux expressions restent bien cohérentes. En effet, lorsqu'on divise la relation (2.37) par la variable  $r$  puis l'intègre de  $a$  à  $b$ , on obtient une nouvelle expression qui est identique à celle obtenue en dérivant la relation (2.44) par rapport au temps. Donc les relations (D.1) et (2.44) sont deux expressions équivalentes. Toutefois la relation (D.1) est plus appropriée pour être utilisée dans l'équation différentielle (2.37) tandis que la relation (2.44) est plus adaptée pour estimer la réponse effective du composite.

## 5. Premier et second moments du champ de contrainte

Comme présenté précédemment, la partie déviatorique des contraintes moyennes par phase est nulle dans ce cas particulier de chargement et la contrainte moyenne dans l'inclusion  $\sigma_m^{(2)}$  est homogène (relation (2.34)). Lorsqu'on substitue l'expression de  $C(t)$  en fonction de  $\lambda(t)$  (2.36) dans la relation (2.34), on obtient l'évolution temporelle de la pression (moyenne de la contrainte hydrostatique) dans l'inclusion qui est donnée par la relation suivante :

$$\bar{\sigma}_m^{(2)}(t) = \frac{3 \kappa^{(1)} \kappa^{(2)}}{\kappa^{(2)} - \kappa^{(1)}} \left( \varepsilon_0^{(2)}(t) - \frac{1}{c^{(2)}} \lambda(t) \right),$$

où la fonction  $\lambda(t)$  est donnée par la relation (2.44) lorsque la sphère composite est soumise à une déformation macroscopique homogène sur le bord extérieur  $\partial V$ . Finalement, nous obtenons :

$$\bar{\sigma}_m^{(2)}(t) = \frac{3 \kappa^{(1)} \kappa^{(2)}}{c^{(2)} \kappa^{(1)} + c^{(1)} \kappa^{(2)}} \left( \bar{\varepsilon}_m(t) - c^{(2)} \varepsilon_0^{(2)}(t) - \frac{1}{3 \kappa^{(1)}} \int_a^b \frac{2}{u} \sigma_s^{(1)}(u, t) du \right). \quad (2.50)$$

Lorsqu'on exerce une contrainte homogène sur la frontière externe de la sphère composite, l'évolution temporelle de la moyenne de la contrainte hydrostatique dans l'inclusion est obtenue en substituant l'expression de la déformation macroscopique  $\bar{\varepsilon}_m(t)$  dans la relation précédente à partir de l'équation (2.46).

Les premiers moments du champ de contrainte par phase dépendent de la distribution de la contrainte équivalente  $\sigma_s^{(1)}$  qui est la solution de l'équation différentielle (2.40). Il est important de souligner que de la déformation moyenne  $\varepsilon_m^{(2)}$  dans l'inclusion est également homogène (relation (2.28)) et s'écrit :

$$\varepsilon_m^{(2)}(r, t) = \bar{\varepsilon}_m^{(2)}(t) = \frac{1}{3 \kappa^{(2)}} \bar{\sigma}_m^{(2)}(t) + \varepsilon_0^{(2)}(t).$$

L'évolution temporelle de la moyenne de la contrainte hydrostatique dans la matrice ( $\bar{\sigma}_m^{(1)}$ ) est obtenue en utilisant les relations de moyenne volumique relatives à la partie sphérique du champ des contraintes ( $c^{(1)}\bar{\sigma}_m^{(1)} + c^{(2)}\bar{\sigma}_m^{(2)} = \bar{\sigma}_m$ ) :

$$\bar{\sigma}_m^{(1)}(t) = \frac{1}{c^{(1)}} \left( \bar{\sigma}_m(t) - c^{(2)} \bar{\sigma}_m^{(2)}(t) \right). \quad (2.51)$$

Une relation similaire peut être également établie pour la déformation moyenne  $\bar{\varepsilon}_m^{(1)}$  dans la matrice qui est exprimée par :

$$\bar{\varepsilon}_m^{(1)}(t) = \frac{1}{c^{(1)}} \left( \bar{\varepsilon}_m(t) - c^{(2)} \bar{\varepsilon}_m^{(2)}(t) \right). \quad (2.52)$$

Le second moment du champ de contrainte dans l'inclusion est nul en raison de la nullité de la distribution de la contrainte équivalente (relation (2.34)) due au chargement qui est purement sphérique. Cependant l'évolution temporelle du second moment dans la phase matricielle est non nulle et elle est donnée par la relation suivante :

$$\langle \sigma_{\text{eq}}^2(r, t) \rangle_1 = \frac{3}{(b^3 - a^3)} \int_a^b \left( \sigma_s^{(1)}(r, t) \right)^2 r^2 dr. \quad (2.53)$$

Dans la section suivante, des solutions exactes de l'équation (2.40) sont déterminées pour certains cas particuliers de chargement et dans le cas où le potentiel de dissipation  $U_v^{(1)}$  est en loi de puissance.

## IV. Solutions exactes pour des cas particuliers

Pour toutes les applications envisagées dans cette section, nous supposons que le comportement viscoplastique de la phase matricielle est décrit par un potentiel de dissipation  $U_v^{(1)}$  en loi puissance (loi de Norton) de la forme :

$$U_v^{(1)}(\tilde{\sigma}) = \frac{\dot{\varepsilon}_0 \sigma_0}{n+1} \left( \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_0^2} \right)^{\frac{n+1}{2}}, \quad (2.54)$$

où  $\tilde{\sigma} = \sigma_{\text{eq}}^2 = \sigma_s^2$  et les coefficients  $\dot{\varepsilon}_0, \sigma_0$  et  $n \geq 1$  qui caractérisent l'intensité du taux de fluage. La situation particulière  $n = 1$  correspond à un comportement viscoélastique linéaire. Dans ce cas, l'équation différentielle (2.40) s'écrit selon :

$$\dot{\sigma}_s^{(1)}(r, t) + \frac{\dot{\varepsilon}_0}{2\sigma_0\eta} \sigma_s^{(1)}(r, t) \left( \frac{|\sigma_s^{(1)}(r, t)|}{\sigma_0} \right)^{n-1} = \left( \frac{b}{r} \right)^3 \left[ \frac{\alpha \dot{\varepsilon}_0}{\eta \sigma_0} \int_a^b \frac{\sigma_s^{(1)}(u, t)}{u} \left( \frac{|\sigma_s^{(1)}(u, t)|}{\sigma_0} \right)^{n-1} du + \mathcal{F}(t) \right]. \quad (2.55)$$

Étant donné que  $|\sigma_s| = \sigma_{\text{eq}}$  et que le signe  $\xi$  de la contrainte équivalente  $\sigma_s^{(1)}$  est supposé indépendant de la variable d'espace  $r$  et du temps  $t$ , donc l'équation différentielle précédente devient une équation différentielle pour la contrainte équivalente  $\sigma_{\text{eq}}^{(1)}$ . Finalement, en introduisant le temps caractéristique  $\tau_\gamma = \frac{2\eta\sigma_0}{\dot{\varepsilon}_0}$  dans l'équation différentielle, on obtient :

$$\frac{\dot{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}(r, t)}{\sigma_0} + \frac{1}{\tau_\gamma} \left( \frac{\sigma_{\text{eq}}^{(1)}(r, t)}{\sigma_0} \right)^n = \left( \frac{b}{r} \right)^3 \left[ \frac{2\alpha}{\tau_\gamma} \int_a^b \frac{1}{u} \left[ \frac{\sigma_{\text{eq}}^{(1)}(r, t)}{\sigma_0} \right]^n du + \xi \frac{\mathcal{F}(t)}{\sigma_0} \right]. \quad (2.56)$$

Les solutions analytiques de l'équation différentielles (2.56) ne peuvent être obtenues que lorsque le second membre s'annule ou est constant par rapport au temps. Dans le cadre général, en raison du terme intégral dans le second membre de l'équation (2.56), seules des solutions numériques peuvent être obtenues. Le tableau qui suit résume explicitement les différentes expressions du coefficient  $\alpha$  et de la fonction  $\mathcal{F}(t)$  (définis dans les relations (D.4) et (D.3)) pour différentes hypothèses sur le comportement de la phase matricielle et de la phase inclusionnaire.

	$\alpha_p$	$\mathcal{F}_p(t)$	$\alpha_d$	$\mathcal{F}_d(t)$
$\kappa^{(1)} = \kappa^{(2)}$	0	$\frac{18c^{(2)}\kappa^{(1)}\mu^{(1)}\dot{\varepsilon}_0^{(2)}(t)}{3\kappa^{(1)}+4\mu^{(1)}}(t)$	0	$\frac{18c^{(2)}\kappa^{(1)}\mu^{(1)}\dot{\varepsilon}_0^{(2)}(t)}{3\kappa^{(1)}+4\mu^{(1)}}(t)$
$\kappa^{(1)} \rightarrow \infty$	$\frac{6\mu^{(1)}c^{(2)}}{3\kappa^{(2)}+4\mu^{(1)}c^{(1)}}$	$\alpha_p(\dot{\sigma}_m(t) + 3\kappa^{(2)}\dot{\varepsilon}_0^{(2)}(t))$	0	$6\mu^{(1)}\dot{\varepsilon}_m(t)$
$\kappa^{(2)} \rightarrow \infty$ $\mu^{(2)} \rightarrow \infty$	$-\frac{6\mu^{(1)}c^{(2)}}{3\kappa^{(1)}+4\mu^{(1)}c^{(2)}}$	$\alpha_p(\dot{\sigma}_m(t) - 3\kappa^{(1)}\dot{\varepsilon}_0^{(2)}(t))$	$-\frac{2c^{(2)}\mu^{(1)}}{c^{(1)}\kappa^{(1)}}$	$6\mu^{(1)}\frac{c^{(2)}}{c^{(1)}}(\dot{\varepsilon}_0^{(2)}(t) - \dot{\varepsilon}_m(t))$
$\kappa^{(2)} = 0$ $\mu^{(2)} = 0$	$\frac{3c^{(2)}}{2c^{(1)}}$	$\alpha_p\dot{\sigma}_m(t)$	$\frac{6\mu^{(1)}c^{(2)}}{3c^{(2)}\kappa^{(1)}+4\mu^{(1)}}$	$3\alpha_d\kappa^{(1)}\dot{\varepsilon}_m(t)$

TABLE 2.1 – Valeurs de  $\alpha$  et  $\mathcal{F}(t)$  pour différentes situations particulières

Les indices  $d$  et  $p$  sont utilisés pour faire référence à la dilatation et à la pression (déformation ou contrainte homogène appliquée sur le bords extérieur composite de la sphère, respectivement).



Dans ce qui suit, toutes les fonctions de chargement en déformations homogènes comme en contraintes homogènes ont la forme d'une fonction Heaviside,

$$\bar{\varepsilon}_m(t) = \bar{\varepsilon}_m H(t) \quad \text{ou} \quad \bar{\sigma}_m(t) = \bar{\sigma}_m H(t), \quad \varepsilon_0^{(2)}(t) = \varepsilon_0^{(2)} H(t),$$

où  $H(t)$  désigne la fonction Heaviside. A l'instant initial  $t = 0$ , la réponse est purement élastique et comme la déformation inélastique macroscopique à cet instant est nulle alors l'évolution temporelle de  $\bar{\varepsilon}_m^v(t)$  (relation (2.47)) peut s'écrire de la forme suivante.

$$\bar{\varepsilon}_m^v(t) = \frac{\frac{4}{3}c^{(2)}(\kappa^{(1)} - \kappa^{(2)})(c^{(2)}\kappa^{(1)} + c^{(1)}\kappa^{(2)} + \frac{4}{3}\mu^{(1)})}{(\kappa^{(1)}\kappa^{(2)} + \frac{4}{3}\mu^{(1)}(c^{(1)}\kappa^{(1)} + c^{(2)}\kappa^{(2)}))(c^{(2)}\kappa^{(1)} + c^{(1)}\kappa^{(2)})} \int_a^b \frac{(\sigma_s^{(1)}(r, 0) - \sigma_s^{(1)}(r, t))}{2r} dr, \quad (2.57)$$

avec la contrainte équivalente à l'instant initial  $\sigma_s^{(1)}(r, 0)$  qui est respectivement donnée par la relation (2.16) dans le cas où la sphère composite est sollicitée en déformations homogènes ou la relation (2.19) lorsque la sphère est soumise à une contrainte homogène sur le bord. De plus, les dérivées temporelles des fonctions de chargement sont nulles pour tout temps strictement positif ( $\dot{\bar{\varepsilon}}_m(t) = 0$  ou  $\dot{\bar{\sigma}}_m(t) = 0$ ,  $\dot{\varepsilon}_0^{(2)}(t) = 0$ ) et donc les fonctions du temps  $\mathcal{F}_d(t)$  and  $\mathcal{F}_p(t)$  s'annulent (voir tableau 2.1 (relations D.3 et D.4)). Des solutions exactes peuvent ainsi être obtenues dans le cas où les phases ont le même module de compressibilité ou dans le cas d'une matrice incompressible sous essai de relaxation, en raison du second membre de l'équation différentielle qui devient nul ou constant. Cependant, dans tous les autres cas une intégration numérique doit être réalisée.

## 1. Sphère composite avec une compressibilité homogène

La déformation inélastique macroscopique  $\bar{\varepsilon}_m^v(t)$  (2.57) s'annule lorsque la compressibilité est homogène ( $\kappa^{(1)} = \kappa^{(2)}$ ), ce qui fait que la réponse à l'échelle macroscopique devient purement élastique (relation (2.48)). Il en résulte que lorsque les fonctions de chargement sont de type Heaviside, la déformation et la contrainte macroscopique sont constantes alors que les phénomènes de relaxation dépendant du temps sont relatifs aux champs moyens par phase. En effet, en utilisant l'équation d'équilibre, la contrainte moyenne hydrostatique (pression) dans l'inclusion peut être facilement exprimée en fonction de la contrainte macroscopique et de la distribution de la contrainte équivalente dans la matrice.

$$\bar{\sigma}_m^{(2)}(t) = \bar{\sigma}_m(t) - \int_a^b \frac{2}{u} \sigma_s^{(1)}(u, t) du$$

L'expression analytique de la distribution de la contrainte équivalente, pour une compressibilité homogène, peut être établie en résolvant l'équation différentielle du premier ordre (2.56), qui dans cette situation particulière se réduit à :

$$\frac{\dot{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}(r, t)}{\sigma_0} + \frac{1}{\tau_\gamma} \left( \frac{\sigma_{\text{eq}}^{(1)}(r, t)}{\sigma_0} \right)^n = 0 \quad (2.58)$$

A l'instant initial, la réponse du problème mécanique est purement élastique et l'expression analytique de la contrainte équivalente quel que soit le chargement appliqué sur le bord extérieur est donnée par :

$$\frac{\sigma_{\text{eq}}^{(1)}(r, 0)}{\sigma_0} = \frac{18\mu^{(1)}\kappa^{(1)}}{\sigma_0(3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)})} \frac{a^3}{r^3} \left| \varepsilon_0^{(2)} \right| = \frac{2 \left| \varepsilon_0^{(2)} \right| a^3}{\dot{\varepsilon}_0 \tau_\gamma r^3}.$$

La résolution de l'équation différentielle (2.58) permet d'établir l'expression analytique de la distribution de la contrainte équivalente dans la matrice pour un comportement viscoélastique linéaire et non linéaire dans chacune des phases, respectivement.

$$\frac{\sigma_{\text{eq}}^{(1)}(r, t)}{\sigma_0} = \begin{cases} \left[ (n-1) \frac{t}{\tau_\gamma} + \left( \frac{2 |\varepsilon_0^{(2)}|}{\dot{\varepsilon}_0 \tau_\gamma} \right)^{1-n} \left( \frac{a^3}{r^3} \right)^{1-n} \right]^{\frac{1}{1-n}}, & \text{si } n > 1 \\ \frac{2 |\varepsilon_0^{(2)}|}{\dot{\varepsilon}_0 \tau_\gamma} \frac{a^3}{r^3} \exp\left(-\frac{t}{\tau_\gamma}\right), & \text{si } n = 1 \end{cases}. \quad (2.59)$$

En résumé, lorsqu'un chargement en forme de fonction d'Heaviside est imposé sur le bord extérieur de la sphère, les champs de déformation et de contrainte sont uniformes dans chacune des phases de la sphère composite. Cependant lorsqu'un gonflement différentiel est de surcroît appliqué entre les deux phases, les champs mécaniques deviennent non uniformes et les phénomènes de relaxation sont relatifs à la distribution de la contrainte équivalente dans la matrice. Dans ce cas, la contrainte équivalente ne s'annule pas quelque soit le temps  $t$  et la variable  $r$  donc la contrainte de cisaillement  $\sigma_s^{(1)}$  garde un signe constant.

## 2. Sphère composite avec une matrice incompressible

Pour une matrice incompressible, le module de compressibilité devient infini ( $\kappa^{(1)} \rightarrow \infty$ ), la relation entre la contrainte macroscopique et la déformation macroscopique est toujours donnée par la relation (2.46) pendant les expressions du module de compressibilité effectif et du gonflement effectif se réduisent aux expressions suivantes.

$$\tilde{k} = \frac{1}{c^{(2)}} \left( \kappa^{(2)} + \frac{4}{3} \mu^{(1)} c^{(1)} \right) \quad \text{et} \quad \bar{\varepsilon}_{0m} = \frac{3 c^{(2)} \kappa^{(2)}}{3 \kappa^{(2)} + 4 \mu^{(1)} c^{(1)}} \varepsilon_0^{(2)}.$$

Par rapport à la situation précédente (compressibilité homogène), la déformation inélastique dans ce cas est non nulle et son évolution temporelle est toujours donnée par la relation (2.57) dans laquelle le pré-facteur du membre de droite devient relativement simple.

$$\bar{\varepsilon}_m^v(t) = \frac{4 c^{(2)}}{3 \kappa^{(2)} + 4 \mu^{(1)} c^{(1)}} \int_a^b \frac{\left( \sigma_s^{(1)}(r, 0) - \sigma_s^{(1)}(r, t) \right)}{2r} dr.$$

L'équation différentielle (2.56) dans laquelle  $\tau_\gamma$  se simplifie à :  $\tau_\gamma = \frac{\sigma_0}{3\mu^{(1)}\dot{\varepsilon}_0}$  devient homogène dans le cas où une déformation macroscopique est appliquée sur le bord extérieur de la sphère composite (essai de relaxation). En revanche lorsqu'on impose des contraintes homogènes (essai de fluage), on obtient une équation différentielle du premier ordre avec second membre (équation inhomogène). Il est donc plus approprié de considérer chaque type de chargement séparément.

### 2.1 Essai de relaxation

Dans le cas de l'essai de relaxation, la solution analytique de l'équation (2.56) peut être obtenue. A l'instant initial la réponse est purement élastique et l'expression de la distribution de la contrainte équivalente initiale dans la matrice s'écrit :

$$\frac{\sigma_{\text{eq}}^{(1)}(r, 0)}{\sigma_0} = \frac{6\mu^{(1)} a^3}{\sigma_0 c^{(2)} r^3} |\bar{\varepsilon}_m| = \frac{2 |\bar{\varepsilon}_m| b^3}{\tau_\gamma \dot{\varepsilon}_0 r^3}.$$

Dans ce cas l'équation différentielle (2.56) se réduit à l'équation (2.58) dont la solution analytique est de la même forme que (2.59) :

$$\frac{\sigma_{\text{eq}}^{(1)}(r, t)}{\sigma_0} = \begin{cases} \left[ (n-1) \frac{t}{\tau_\gamma} + \left( \frac{2|\bar{\varepsilon}_m|}{\dot{\varepsilon}_0 \tau_\gamma} \right)^{1-n} \left( \frac{b^3}{r^3} \right)^{1-n} \right]^{\frac{1}{1-n}}, & \text{si } n > 1 \\ \frac{2|\bar{\varepsilon}_m| b^3}{\dot{\varepsilon}_0 \tau_\gamma r^3} \exp\left(-\frac{t}{\tau_\gamma}\right), & \text{si } n = 1 \end{cases}. \quad (2.60)$$

On remarque que, en raison de l'incompressibilité de la matrice, la contrainte équivalente ne dépend pas de la déformation libre  $\varepsilon_0^{(2)}$  imposée dans l'inclusion. Encore une fois, la contrainte équivalente ne s'annule pas pour tout  $r$  et pour tout  $t$  et la contrainte de cisaillement  $\sigma_s^{(1)}$  garde un signe constant comme dans le cas de la sphère composite avec une compressibilité homogène.

## 2.2 Essai de fluage

Dans le cas de l'essai de fluage, le bord extérieur de la sphère est soumis à une contrainte homogène et uniforme,  $\sigma_{rr}^{(1)}(b, t) = \bar{\sigma}_m$ . Ce cas diffère significativement de l'essai de relaxation en raison de l'inhomogénéité de l'équation différentielle déduite de la relation (2.56) et qui s'écrit :

$$\frac{\dot{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}(r, t)}{\sigma_0} + \frac{1}{\tau_\gamma} \left( \frac{\sigma_{\text{eq}}^{(1)}(r, t)}{\sigma_0} \right)^n = \frac{b^3}{r^3} \frac{2\alpha_p}{\tau_\gamma} \int_a^b \frac{1}{u} \left[ \frac{\sigma_{\text{eq}}^{(1)}(u, t)}{\sigma_0} \right]^n du. \quad (2.61)$$

La distribution de la contrainte équivalente à l'instant initial (solution du problème purement élastique) est déterminée à partir de la relation (2.19) pour une matrice incompressible :

$$\frac{\sigma_{\text{eq}}^{(1)}(r, 0)}{\sigma_0} = \frac{6\mu^{(1)} a^3}{\sigma_0 r^3} \frac{|3\kappa^{(2)}\varepsilon_0^{(2)} + \bar{\sigma}_m|}{3\kappa^{(2)} + 4c^{(1)}\mu^{(1)}} = \frac{\alpha_p b^3}{\sigma_0 r^3} |3\kappa^{(2)}\varepsilon_0^{(2)} + \bar{\sigma}_m|. \quad (2.62)$$

En faisant le changement de variable suivant :  $\check{\sigma}(r, \tau) = \frac{\sigma_{\text{eq}}^{(1)}(r, \tau \tau_\gamma)}{\sigma_0} = \frac{\sigma_{\text{eq}}^{(1)}(r, t)}{\sigma_0}$ , l'équation différentielle (2.61) devient :

$$\frac{\partial \check{\sigma}}{\partial \tau}(r, \tau) + \check{\sigma}^n(r, \tau) = 2\alpha_p \frac{b^3}{r^3} \int_a^b \frac{1}{u} \check{\sigma}^n(u, \tau) du. \quad (2.63)$$

Cette équation intégro-différentielle n'a pas de solution analytique et doit être intégrée numériquement, ce qui nécessite une estimation numérique de l'intégrale couplée avec une méthode de résolution de l'équation différentielle obtenue. Pour calculer l'intégrale dans la relation (2.63), nous choisissons une discrétisation de l'intervalle  $[a, b]$ ,  $r_1 = a < r_2 < \dots < r_{N+1} = b$  et en utilisant une méthode numérique de type trapèze on obtient :

$$\int_a^b \frac{1}{u} \check{\sigma}^n(u, \tau) du = \sum_{k=1}^{N+1} w_k \frac{\sigma_k^n(\tau)}{r_k},$$

où  $\sigma_k(\tau) = \check{\sigma}(r_k, \tau)$ . Finalement, en écrivant la relation (2.63) pour  $r = r_i$ ,  $i = 1, \dots, N+1$  on obtient une équation différentielle du premier ordre pour  $\sigma_k(\tau)$  qui est donnée par :

$$\frac{d\sigma_i}{d\tau}(\tau) + \sigma_i^n(\tau) = 2\alpha_p \frac{b^3}{r_i^3} \sum_{k=1}^{N+1} w_k \frac{\sigma_k^n(\tau)}{r_k}. \quad (2.64)$$

Ce système d'équations différentielles non linéaires est résolu avec la méthode de Runge-Kutta dont la solution, représentée à la figure (2.4), est obtenue en utilisant une discrétisation régulière ( $w_i = \frac{b-a}{N}$ ,  $i = 2, \dots, N$  and  $w_1 = w_{N+1} = \frac{b-a}{2N}$ ). Les valeurs numériques des différentes constantes utilisées dans ces calculs sont les suivantes :

$c^{(2)} = 0.1$  ,  $\varepsilon_0^{(2)} = 0.01$  ,  $b = 1$  ,  $n = 4$ ,  $\frac{\kappa^{(2)}}{\sigma_0} = 166$ ,  $\frac{\mu^{(1)}}{\sigma_0} = 77$  et  $\bar{\sigma}_m = 0$ .

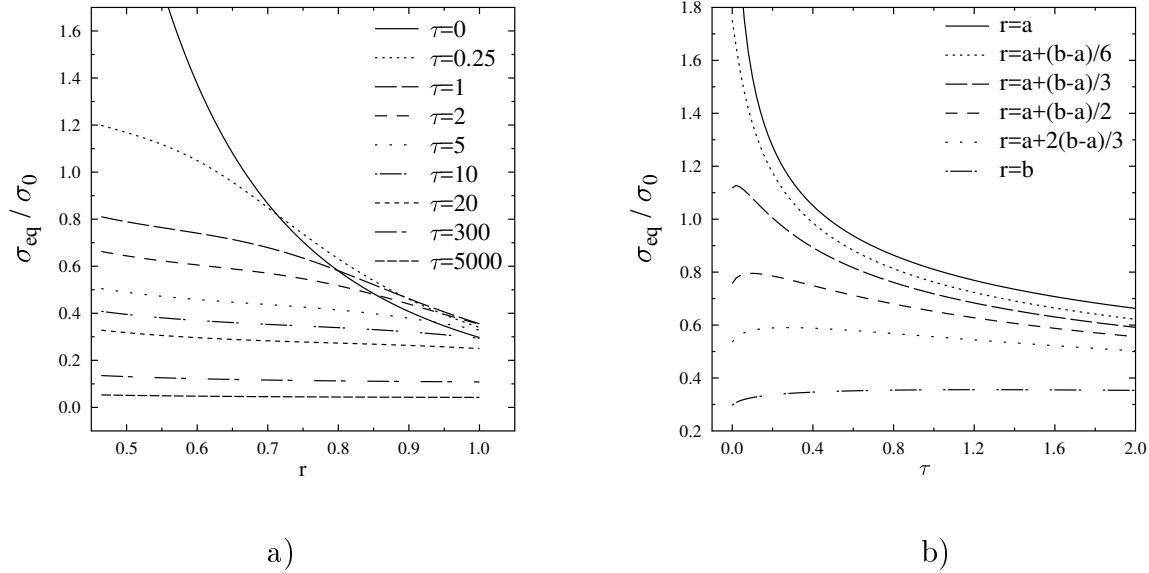


FIGURE 2.4 – Contrainte équivalente dans la phase matricielle : a) distribution de la contrainte équivalente dans la matrice à différents instants ; b) évolution temporelle de la contrainte équivalente dans la matrice pour différents valeurs de la variable  $r$ .

En imposant une déformation brusque dans l'inclusion maintenue par la suite, il en résulte une diminution progressive de la contrainte au cours du temps (figure b)). Cette relaxation de contrainte, précédée d'une élasticité initiale, est due au comportement visqueux de la matrice. De plus la contrainte équivalente à l'instant initial (figure a)) est une fonction décroissante du rayon ( $\propto r^{-3}$ ) qui atteint son maximum à l'interface entre les deux phases (en  $r = a$ ). Donc la cinétique de relaxation des contraintes est plus élevée sur la surface interne de la matrice.

## V. Simulations numériques en champs complets

Les méthodes d'homogénéisation périodique basées sur une analyse asymptotique multi-échelle peuvent être utilisées pour prédire les propriétés effectives des matériaux hétérogènes, au travers de calculs éléments finis [90] ou de calculs dans l'espace de Fourier [91] sur un Volume Élémentaire Représentatif (VER). La microstructure, dans ces approches par changement d'échelle, est représentée de manière déterministe par répétition périodique d'une cellule unité. La méthode des éléments, qui repose sur un maillage structuré de la microstructure, constitue une approche efficace pour estimer le comportement effectif de microstructures élémentaires à l'instar des microstructures périodiques et des composites présentant un nombre limité d'inclusions. Cependant elle est prohibitive en temps de calcul et constitue une tâche non triviale en raison des difficultés liées à un maillage qui soit conforme et compatible avec les conditions de chargement. Par ailleurs, la méthode FFT est plus facile à mettre en œuvre car elle ne nécessite pas de maillage de la microstructure. En effet, cette méthode qui repose sur des algorithmes relatifs aux transformées de Fourier rapide (FFT) des champs de déformations et de contraintes locaux, permet d'estimer le comportement effectif de matériaux hétérogènes à partir des images de microstructures obtenues à travers des outils de segmentation d'image (tomographie).

Le modèle analytique de la sphère composite développé dans cette étude est destiné à être appliqué aux composites particulières avec une fraction volumique modérée d'inclusions ( $\leq 10\%$ ), dont les microstructures peuvent être représentées par l'assemblage des sphères de Hashin. Dans cette perspective, des calculs en champs complets avec des conditions aux limites périodiques doivent être réalisés dans le but d'évaluer la pertinence du modèle de la sphère composite. Pour cela, nous allons considérer dans cette étude un élément de volume représentatif d'un composite particulière. Les particules, de forme sphérique et de même taille, sont réparties de manière isotrope dans le VER. Les conditions de chargement considérées sont les suivantes : le bord extérieur de la microstructure est libre de contrainte tandis que les particules sont soumises à un gonflement différentiel strictement positif. L'évolution temporelle du gonflement dans chacune des particules est décrite par une fonction Heaviside. En outre, la compressibilité élastique est supposée homogène ( $\kappa^{(1)} = \kappa^{(2)}$ ).

Le plan de cette section est le suivant : nous allons dans un premier temps rappeler brièvement la méthode numérique utilisée pour générer des microstructures aléatoires avec des inclusions de formes géométriques diverses (cylindriques, sphériques et sphéro-cylindres). Les microstructures générées seront par la suite utilisées pour estimer le comportement effectif de composites présentant un comportement viscoélastique non linéaire et ce, sur la base de calculs FFT. La dernière partie de cette section présente une comparaison des résultats issus de simulations numériques avec les solutions analytiques de la sphère composite, pour différentes fractions volumiques et pour différentes valeurs de la non linéarité.

### 1. Génération aléatoire 3D de VER

Il existe différentes techniques basées sur des méthodes numériques pour générer des VER avec des inclusions de formes géométriques diverses : sphères ([92], [93]) ellipsoïdes ([94], [95]), et sphéro-cylindres (cylindres constitués de deux extrémités hémisphériques ([96], [97])). Pour générer numériquement ces différents types de microstructures, il est primordial d'avoir un algorithme robuste, fiable et efficace. En particulier, nous nous intéressons dans cette étude au cas d'un mélange d'inclusions sphériques impénétrables.

Le premier algorithme historiquement mis en œuvre est la méthode RSA (Random sequential adsorption voir par exemple [98]). L'algorithme RSA permet de réaliser une distribution aléatoire de sphères avec la distance entre les particules qui doit être supérieure à une distance d'exclusion. En effet, le principe consiste à générer successivement les inclusions. Si la prochaine

inclusion simulée respecte la distance d'exclusion par rapport aux inclusions précédemment générées, alors elle est acceptée sinon elle est rejetée et une autre inclusion aléatoire est générée. La méthode RSA est une technique efficace pour des fractions volumiques d'inclusions relativement petites (fractions volumiques d'inclusions allant jusqu'à 30 %). Cependant, dans le cas échéant (fractions volumiques assez grandes), le processus de génération des particules peut rencontrer des difficultés conduisant à un temps de calcul long voire un blocage du processus. Dans ce cas, il existe une autre méthode numérique pour générer des microstructures à savoir la dynamique moléculaire (DM).

Dans ce qui suit, grâce à l'algorithme RSA, nous avons généré plusieurs microstructures avec une fraction volumique d'inclusions allant de 1% à 30% (valeurs intermédiaires : 5% et 10%). Quelques images de ces microstructures sont reportées sur la figure 2.5. Ces différentes microstructures serviront à réaliser des calculs FFT afin de prédire le comportement homogénéisé du matériau d'étude.

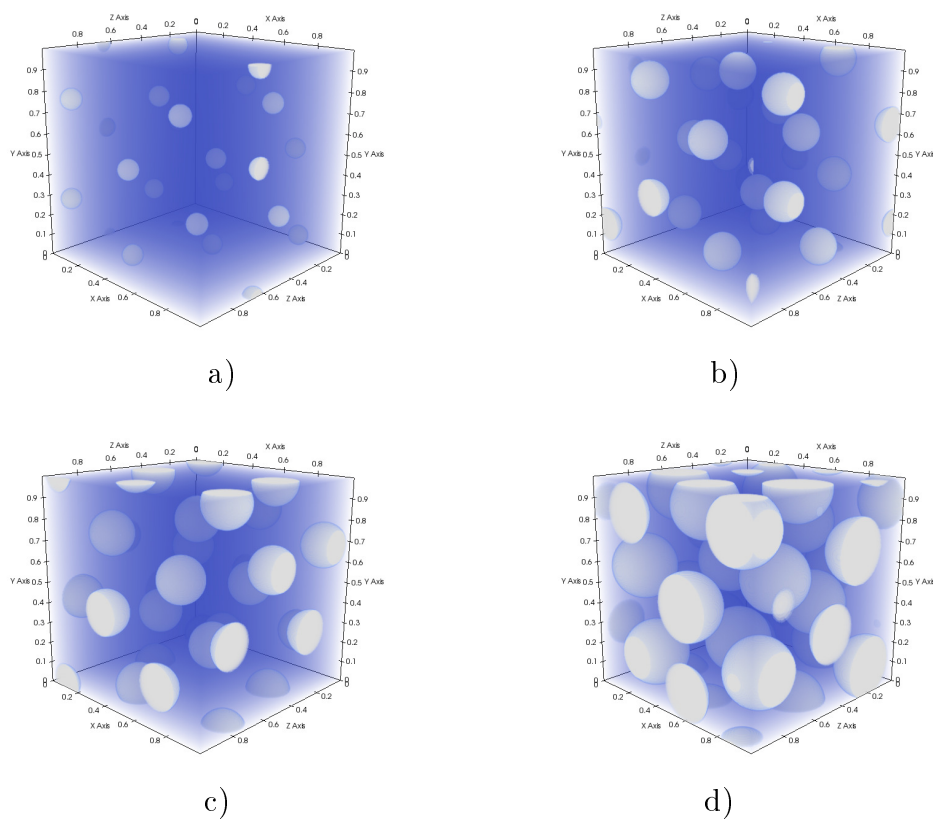


FIGURE 2.5 – Microstructures générées pour a) 1% b) 5% c) 10% et d) 30% avec  $256^3$  voxels

## 2. Calculs FFT

La méthode de calcul utilisée pour cette analyse est basée sur des transformées de Fourier rapides, proposées à l'origine par Moulinec et Suquet [91] pour estimer les propriétés effectives de matériaux hétérogènes à travers l'équation intégrale de type Lippmann-Schwinger. Nous rappelons brièvement dans ce qui suit l'algorithme basique FFT développé pour un comportement de nature viscoélastique non linéaire. Le problème mécanique local à résoudre sur la cellule périodique  $\Omega$  s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) = 0 \text{ dans } \Omega \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{x})) \text{ dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}_v(\mathbf{x})) \text{ dans } \Omega \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}^* \text{ dans } \Omega, \mathbf{u}^* \text{ p\u00e9riodique} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \text{ anti-p\u00e9riodique sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (2.65)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  d\u00e9signent respectivement les champs de contrainte et de d\u00e9formation locale, le tenseur du quatri\u00e8me ordre  $\mathbf{C}$  est le module d'\u00e9lasticit\u00e9 et  $\boldsymbol{\varepsilon}_v$  la d\u00e9formation caract\u00e9ristique du comportement visqueux. En introduisant un milieu de r\u00e9f\u00e9rence caract\u00e9ris\u00e9 par un module homog\u00e8ne  $\mathbf{C}^0$ , alors le champ de contrainte locale, solution du probl\u00e8me m\u00e9canique (2.65), peut se mettre selon :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \quad (2.66)$$

Le tenseur du second ordre  $\boldsymbol{\tau}$  d\u00e9signe le tenseur de polarisation des contraintes ou pr\u00e9contrainte d\u00e9fini par la relation suivante :

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = (\mathbf{C}(\mathbf{x}) - \mathbf{C}^0) : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}_v(\mathbf{x})) \quad (2.67)$$

En \u00e9crivant le champ de d\u00e9formation \u00e9lastique, solution du probl\u00e8me m\u00e9canique, sous la forme d'une \u00e9quation p\u00e9riodique de type Lippmann-Schwinger dans l'espace temporel, on obtient :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - (\boldsymbol{\Gamma}^0 * \boldsymbol{\tau})(\mathbf{x}) \quad (2.68)$$

o\u00f9  $\boldsymbol{\Gamma}^0$  est l'op\u00e9rateur de Green. Le sch\u00e9ma de base impl\u00e9ment\u00e9 dans CRAFT pour la r\u00e9solution de l'\u00e9quation pr\u00e9c\u00e9dente est un algorithme de point fixe qui \u00e9value \u00e0 chaque pas le champ de d\u00e9formation  $\boldsymbol{\varepsilon}$  pour un champ de contrainte donn\u00e9  $\boldsymbol{\sigma}$  en utilisant la transform\u00e9e de Fourier rapide.

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon}^{i+1} = \boldsymbol{\varepsilon}^i - \boldsymbol{\Gamma}^0 * \boldsymbol{\tau}^i \\ \boldsymbol{\sigma}^{i+1} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon}^{i+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_v), \end{array} \right. \quad (2.69)$$

avec les champs de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}^i$ , de d\u00e9formation  $\boldsymbol{\varepsilon}^i$  et les variables internes  $\boldsymbol{\varepsilon}_v$  qui sont bien connus \u00e0 chaque it\u00e9ration  $i$ . Cependant les inconnues du probl\u00e8me m\u00e9canique local  $\boldsymbol{\sigma}^{i+1}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}^{i+1}$  sont \u00e0 d\u00e9terminer avec la fonction  $\mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_v)$  qui fait r\u00e9f\u00e9rence \u00e0 une loi de comportement locale. Dans le cas de la visco\u00e9lasticit\u00e9 le comportement local s'exprime sous la forme d'un syst\u00e8me d'\u00e9quations diff\u00e9rentielles qui est int\u00e9gr\u00e9 num\u00e9riquement en CRAFT par une m\u00e9thode d'Euler implicite.

### 3. Comparaison des r\u00e9sultats analytiques et num\u00e9riques

Afin de valider le mod\u00e8le analytique de la sph\u00e8re composite, cette section est d\u00e9di\u00e9e \u00e0 une \u00e9tude comparative entre les pr\u00e9dictions du mod\u00e8le de la sph\u00e8re composite et des solutions de r\u00e9f\u00e9rence obtenues \u00e0 travers des calculs FFT. Pour cela, les m\u00eames hypoth\u00e8ses sur les propri\u00e9t\u00e9s \u00e9lastiques ( $\kappa^{(1)} = \kappa^{(2)}$ ) et le m\u00eame chargement (bord ext\u00e9rieur libre de contrainte et gonflement diff\u00e9rentiel dans l'inclusion donn\u00e9 par une fonction d'Heaviside) sont consid\u00e9r\u00e9es dans les deux approches. Dans ces conditions, pour la sph\u00e8re composite, la d\u00e9formation macroscopique devient relativement simple et s'écrit :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_m(t) = c^{(2)} \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(2)}(t)$$

Les expressions analytiques des contraintes moyennes hydrostatiques dans la matrice ainsi que dans l'inclusion se déduisent respectivement de l'équation d'équilibre et des relations de moyenne volumique. Elles s'écrivent :

$$\bar{\sigma}_m^{(2)}(t) = - \int_a^b \frac{2}{u} \sigma_s^{(1)}(u, t) du \quad , \quad \bar{\sigma}_m^{(1)}(t) = - \frac{c^{(2)}}{c^{(1)}} \bar{\sigma}_m^{(2)}(t)$$

En raison du gonflement instantané dans l'inclusion, la phase inclusionnaire est mise en compression alors que la matrice est mise en traction. L'intensité des contraintes hydrostatiques par phase dépend de l'évolution dans le temps de la distribution des contraintes de cisaillement dans la matrice. Ci-après, le temps et les contraintes sont normalisés comme suit :

$$\hat{t} = \frac{t}{\tau_r} \quad \text{avec} \quad \tau_r = \frac{\tau_\gamma}{n-1} \left( \frac{|\varepsilon_0^{(2)}|}{\eta \sigma_0} \right)^{1-n} \quad \text{et} \quad \hat{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_r} \quad \text{avec} \quad \sigma_r = \frac{|\varepsilon_0^{(2)}|}{\eta}$$

En substituant l'expression de la contrainte équivalente (2.59) dans la relation (2.50) et lorsqu'on adopte le changement de variable  $v = \frac{u}{a}$  dans l'intégrale du second membre de cette dernière relation, l'évolution en fonction de  $\hat{t}$  de la contrainte moyenne hydrostatique normalisée dans l'inclusion peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\hat{\sigma}_m^{(2)}(\hat{t}) = -2 \int_1^{\frac{b}{a}} [\hat{t} + v^{3(1-n)}]^{-\frac{1}{1-n}} \frac{dv}{v} \quad , \quad \frac{b}{a} = \sqrt[3]{c^{(2)}}. \quad (2.70)$$

Nous remarquons dans la relation précédente que la contrainte moyenne hydrostatique dans l'inclusion ne dépend que de l'exposant  $n$  et de la fraction volumique de l'inclusion. De même, une relation similaire du second moment dans la matrice peut être établie en utilisant les mêmes changements de variable.

$$\langle \hat{\sigma}_{\text{eq}}^2(r, \hat{t}) \rangle_1 = \frac{3c^{(2)}}{c^{(1)}} \int_1^{\frac{b}{a}} [\hat{t} + v^{3(1-n)}]^{-\frac{2}{1-n}} v^2 dv. \quad (2.71)$$

### 3.1 Sensibilité à la résolution spatiale

Afin de choisir une résolution pertinente du VER, des études de sensibilité, relatives à la résolution de différentes microstructures générées, ont été réalisées. Pour cela trois microstructures ont été générées pour des résolutions de  $64^3$ ,  $128^3$ ,  $256^3$  et  $512^3$  voxels. Les simulations numériques ont été réalisées pour une fraction volumique de  $c^2 = 5\%$  et une non linéarité de  $n = 4$ . Nous avons représenté l'évolution du second moment normalisé dans la matrice en fonction de la résolution et ce, à différents instants et les résultats des calculs présentés sur les figures 2.6.



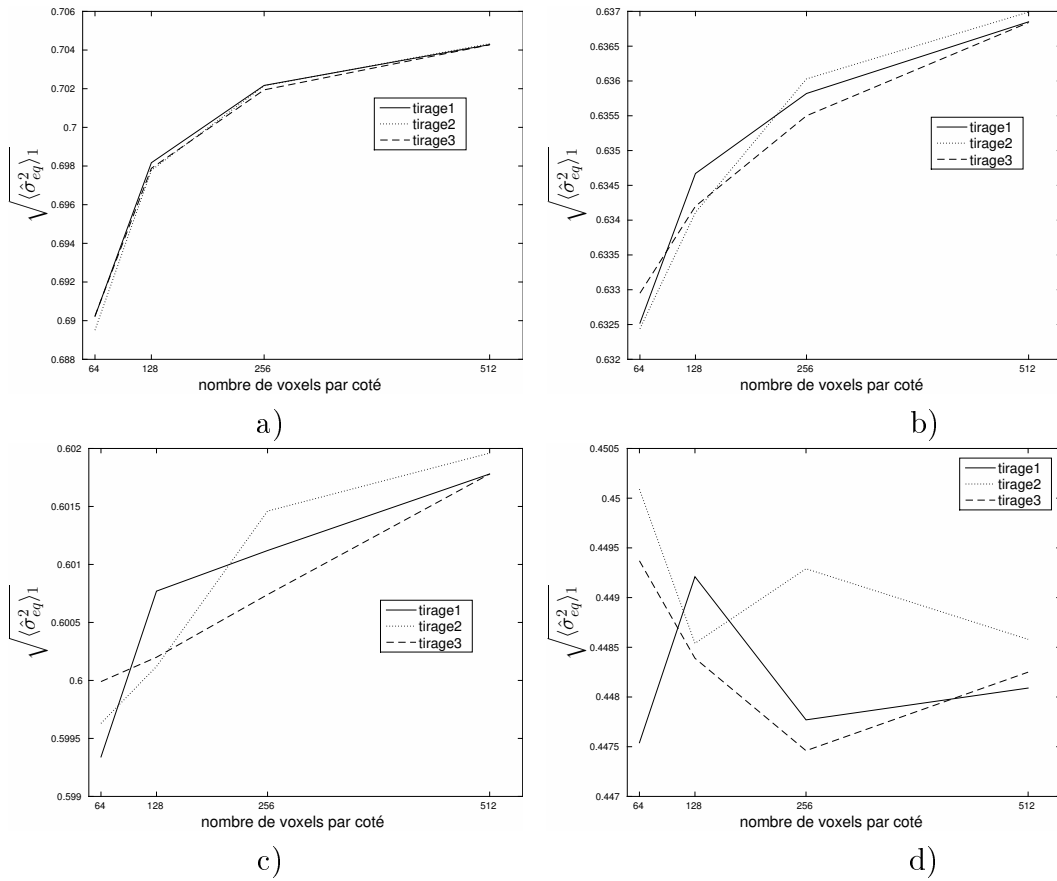


FIGURE 2.6 – Sensibilité des résultats (second moment normalisé dans la matrice) par rapport à la résolution ( $n = 4$ ,  $c^{(2)} = 5\%$ ) pour trois microstructures et à différents instants : a)  $t = 10^{-6}s$ , b)  $t = 5s$ , c)  $t = 10s$ , d)  $t = 100s$

On constate une faible dispersion des résultats entre les trois microstructures ce qui laisse à penser que les trois microstructures sont représentatives. On constate également que la différence entre les résultats obtenus pour toutes les résolutions est inférieure à 1.4% pour toute microstructure. Pour cette raison les simulations numériques ont été réalisées sur un VER discrétisé par  $256^3$  voxels.

### 3.2 Sensibilité à l'intensité du gonflement dans l'inclusion

Étant donné que la contrainte moyenne hydrostatique normalisée (équation (2.70)) dans l'inclusion est indépendante du gonflement  $\varepsilon_0^{(2)}$  dans le modèle de la sphère composite, nous allons vérifier ici si ce fait est conforme aux résultats prédits par les calculs en champs complets. Pour cela, nous avons étudié l'effet de l'intensité du gonflement sur l'évolution de la contrainte moyenne dans les inclusions pour une non-linéarité et une fraction volumique de l'inclusion données ( $n = 8$ ,  $c^{(2)} = 10\%$ ). Les résultats obtenus pour deux valeurs du gonflement dans l'inclusion sont rapportés sur la figure 2.7.

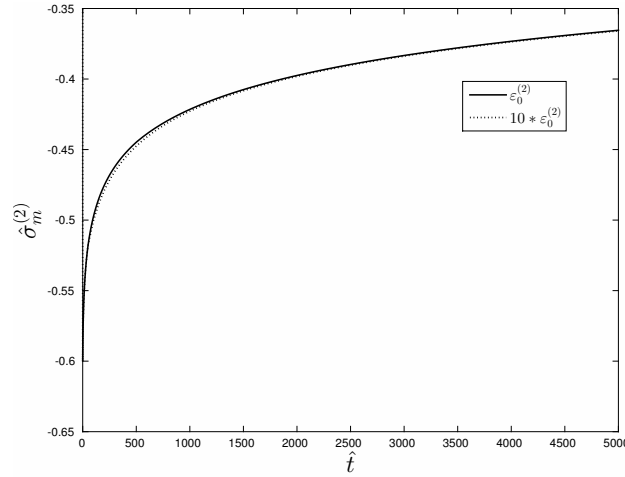


FIGURE 2.7 – Évolution de la contrainte moyenne hydrostatique normalisée dans l'inclusion en fonction de  $\hat{t}$  : sensibilité du gonflement dans l'inclusion ( $n = 8$ ,  $c^{(2)} = 10\%$ ).

Nous observons qu'en imposant un gonflement sous la forme d'échelon Heaviside, il en résulte une élasticité initiale suivie d'une relaxation ultérieure due au module de cisailment visqueux. Nous notons également que pour la fraction volumique de 10% les résultats numériques obtenus montrent que la contrainte moyenne hydrostatique normalisée dans l'inclusion ne dépend pas significativement de l'intensité du gonflement exercé dans la phase inclusionnaire.

### 3.3 Premiers et seconds moments du champ de contrainte

La figure (2.8) présente les évolutions des premiers et seconds moments normalisés des champs de contrainte par phase, prédites par le modèle analytique de la sphère composite et les calculs en champs complets (calculs FFT). Nous rappelons que le chargement considéré dans cette étude comparative est de type gonflement différentiel dans la phase inclusionnaire ( $\varepsilon_0^{(2)} = 3.310^{-4}$ ). Les paramètres utilisées dans ces calculs sont :  $n = 4$  et  $c^{(2)} = 10\%$ .

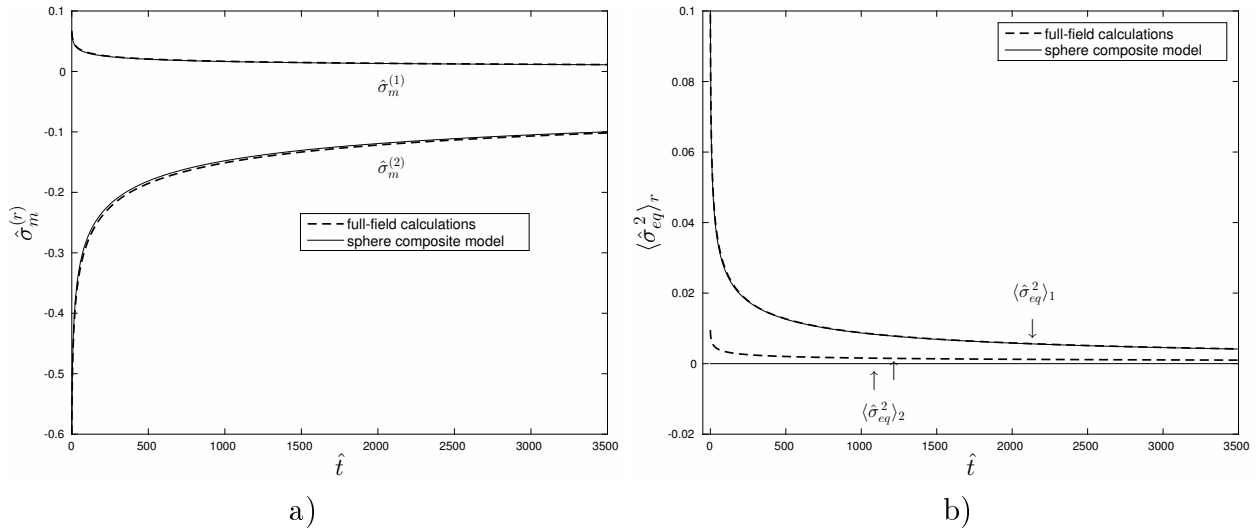


FIGURE 2.8 – Évolution des premiers et seconds moments normalisés des champs de contrainte par phase en fonction de  $\hat{t}$  : comparaison des résultats de la sphère composite aux résultats en champs complets ( $n = 4$ ,  $c^{(2)} = 10\%$ ).

Nous observons sur les figures que l'intensité des contraintes est maximale à l'instant initial (réponse élastique) puis elle diminue progressivement au cours du temps. En outre, nous constatons une très bonne prédiction des premiers moments des champs de contrainte par phase et notamment du second moment dans la matrice entre le modèle analytique de la sphère composite et les calculs FFT. Par contre, nous remarquons que le second moment des champs de contrainte, obtenu par les calculs en champs complets, est non nul dans l'inclusion (figure b)), cependant son intensité reste faible comparée au second moment dans la matrice.

### 3.4 Influence de la fraction volumique inclusionnaire

Pour étudier l'influence de la fraction volumique de l'inclusion, nous représentons sur la figure (2.9) l'évolution temporelle de la contrainte moyenne hydrostatique normalisée dans l'inclusion, prédite par le modèle de la sphère composite et les calculs FFT, pour différentes microstructures ( $1\% \leq c^{(2)} \leq 30\%$ ). Les paramètres utilisés pour les calculs sont :  $n = 8$  et  $\varepsilon_0^{(2)} = 3.310^{-4}$ .

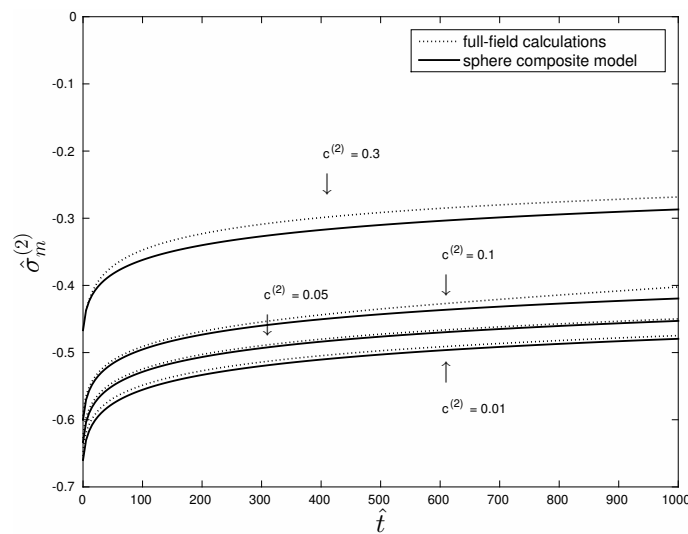


FIGURE 2.9 – Évolution de la contrainte moyenne hydrostatique normalisée dans l'inclusion en fonction de  $\hat{t}$  pour différentes fractions volumiques ( $1\% \leq c^{(2)} \leq 30\%$ ).

Comme le montre la figure (2.9), nous avons un bon accord sur l'évolution de la contrainte moyenne hydrostatique normalisée dans l'inclusion, prédite par les deux modèles et ce, pour de faibles fractions volumiques de l'inclusion ( $1\% \leq c^{(2)} \leq 10\%$ ). Cependant pour des fractions volumiques plus importantes ( $c^{(2)} = 30\%$ ), nous observons une différence notable des résultats prédits par les deux modèles. Cela est dû à l'interaction entre les inclusions lorsque la fraction volumique de l'inclusion devient plus importante. Dans ces situations, il est judicieux d'utiliser les modèles d'homogénéisation qui tiennent compte de cette interaction (Mori-Tanaka, autocohérent, Hashin et Shtrikman ...) pour pouvoir estimer qualitativement les propriétés effectives du composite.

### 3.5 Effet de la non linéarité dans la matrice

Pour évaluer l'effet de la non linéarité dans la matrice, nous représentons sur la figure (2.10) l'évolution dans le temps de la contrainte moyenne hydrostatique normalisée dans l'inclusion pour différentes valeurs de l'exposant ( $2 \leq n \leq 8$ ) et pour une fraction volumique de l'inclusion donnée ( $c^{(2)} = 10\%$ ,  $\varepsilon_0^{(2)} = 3.310^{-4}$ ).

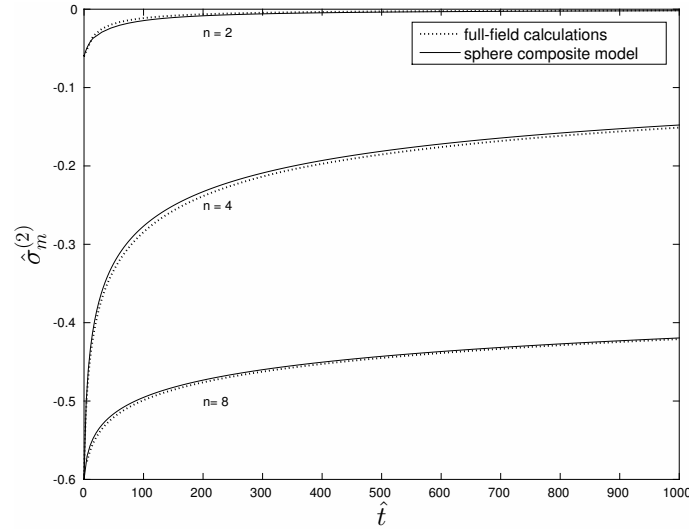


FIGURE 2.10 – Évolution de la contrainte moyenne hydrostatique normalisée dans l’inclusion en fonction de  $\hat{t}$  pour différentes non linéarités ( $2 \leq n \leq 8$ ).

Nous constatons sur la figure que l’intensité de la contrainte moyenne hydrostatique normalisée à l’instant initial (réponse élastique) diminue lorsque l’exposant  $n$  augmente. En effet l’augmentation de la non linéarité dans la matrice renforce la vitesse de la déformation de cisaillement (augmentation de la contrainte de cisaillement), ce qui a pour effet de décélérer le processus de relaxation de la contrainte moyenne hydrostatique (pression) dans l’inclusion (équilibre statique). Nous notons également que les résultats du modèle analytique de la sphère composite sont en bon accord avec les calculs en champs complets même pour une forte non linéarité (voir figure 2.11.a)). Cependant, pour une fraction volumique assez importante ( $c^{(2)} = 30\%$ ) les résultats des deux modèles (figure 2.11.b)) présentent une différence notable due à l’interaction des inclusions.

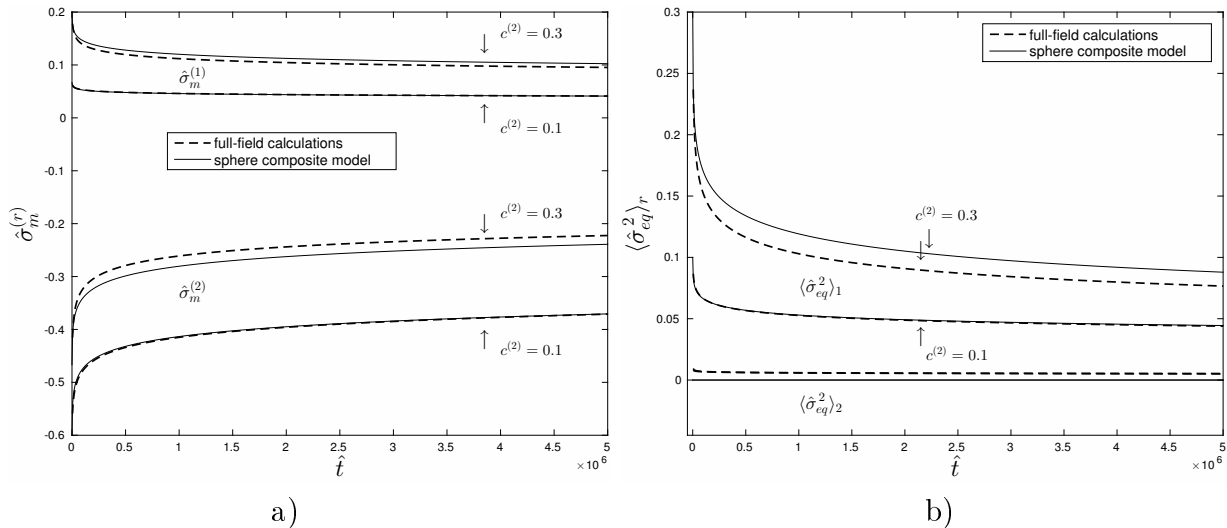


FIGURE 2.11 – Évolution de la contrainte moyenne hydrostatique normalisée dans l’inclusion et dans la matrice en fonction de  $\hat{t}$  pour  $n = 10$ ,  $c^{(2)} = 10\%$ ,  $c^{(2)} = 30\%$  ;

L'un des objectifs de ce chapitre est d'évaluer aussi la pertinence du modèle de sphère composite dans la description de la distribution spatiale du champ de contrainte autour des inclusions du VER. Sur la figure 2.12 la distribution de la contrainte équivalente dans la matrice (2.59) dans la sphère composite (courbe continue) est comparée à celle observée autour d'une des inclusions du VER (barres d'erreur). Nous avons observé que le choix de toute autre inclusion conduit à des résultats similaires puisque l'algorithme de génération VER donne une distribution suffisamment homogène des centres des inclusions. La fraction volumique des inclusions est de 30% et l'exposant de loi de puissance est de  $n = 10$ .

Les barres d'erreur ont été obtenues en considérant des coques sphériques concentriques d'épaisseur constante autour de l'inclusion. Pour chaque coque, le minimum et le maximum des valeurs de la contrainte équivalente associée aux voxels de la coque donnent les extrémités de la barre d'erreur correspondante. La moyenne de ces valeurs est donnée par le point sur la barre d'erreur. Ces valeurs sont associées à un rayon qui correspond à la moitié de l'épaisseur de la coque.

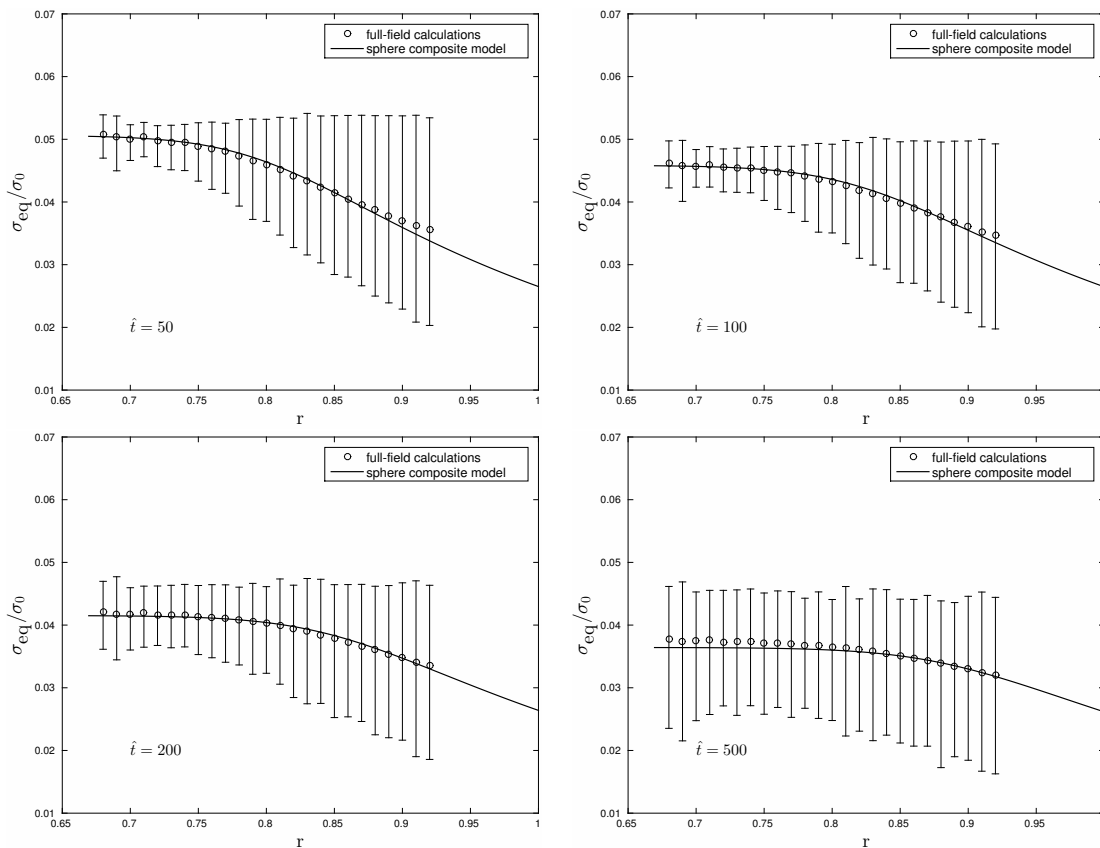


FIGURE 2.12 – Répartition spatiale de la contrainte équivalente dans la phase matricielle, dans la sphère composite (ligne continue) et autour de l'une des inclusions du VER (barres d'erreur), à différents instants ( $c_2 = 30\%$ ,  $n = 10$ )

Pour tous les instants, dans chaque coque sphérique, la dispersion (la différence entre valeurs maximale et minimale) de la contrainte équivalente est significative et semble augmenter avec le rayon. Comme les voxels situés à la limite de l'inclusion sont mal définis, les résultats calculés pour la couche limite correspondante ne sont pas reportés sur la figure 2.12. Cependant, les valeurs moyennes sont en très bon accord avec les résultats analytiques. Cela montre que le modèle de la sphère composite donne des estimations pertinentes du champ de contrainte à l'intérieur du composite particulière.

## VI. Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la résolution analytique du problème de la sphère composite sous chargement isotrope. La loi de comportement dans chacune des phases est de nature viscoélastique non linéaire avec une déformation libre dans l'inclusion (gonflement différentiel d'origine thermique par exemple). Les conditions de chargement en déformations et en contraintes homogènes, appliquées sur la surface externe de la sphère composite, sont des fonctions Heaviside. En désignant par  $\tilde{\varepsilon}_m^0(t)$  le gonflement macroscopique, le comportement macroscopique de la sphère composite est régi par la relation suivante :

$$\bar{\sigma}_m(t) = 3\tilde{\kappa} \left( \bar{\varepsilon}_m(t) - \tilde{\varepsilon}_m^0(t) - \bar{\varepsilon}_m^v(t) \right),$$

où la déformation macroscopique  $\bar{\varepsilon}_m^v(t)$  désigne une contrainte inélastique caractéristique du comportement visqueux de la phase matricielle. En effet, nous avons montré que l'évolution dans le temps de la déformation macroscopique inélastique dépend de la distribution de la contrainte de cisaillement dans la matrice. Cette distribution de contrainte est à l'origine des phénomènes de relaxation dans la sphère composite. Les expressions des premiers et seconds moments du champ des contraintes ont été également établies au travers de l'équation d'équilibre.

Pour des chargements dépendant du temps, la contrainte de cisaillement est la solution d'une équation intégral-différentielle non linéaire dont la résolution peut être effectuée au moyen d'une méthode numérique. Lorsque la loi de comportement visqueuse dans la matrice obéit à une loi de type Norton, des solutions analytiques sont obtenues pour certains cas particuliers (compressibilité homogène, matrice incompressible, etc). Ce modèle pourrait être facilement étendu au modèle du cylindre composite en deux dimensions (2D). Cependant, l'extension du modèle pour des chargements plus généraux (chargement de type cisaillement pur par exemple) reste une question ouverte.

Des calculs en champs complets effectués sur des microstructures aléatoires représentatives de composites particulières ont été également réalisés pour évaluer la pertinence du modèle de la sphère composite. Pour une fraction volumique d'inclusions ( $c^{(2)} = 10\%$ ) et un exposant de la loi puissance ( $n = 10$ ), le comportement effectif ainsi que les premiers et seconds moments du champ des contraintes se sont révélés en bon accord avec les prédictions du modèle de la sphère composite. En revanche pour des fractions volumiques plus élevées ( $c^{(2)} = 30\%$ ), les résultats dérivant du modèle de la sphère composite sont moins satisfaisants en raison de l'interaction entre les inclusions qui n'est plus négligeable.

En perspective, le modèle de la sphère composite pourrait être utilisé (comme solution de référence ou comme première estimation) pour des études d'ingénierie telles que les estimations des contraintes résiduelles induites par les procédés de fabrication tels que le soudage, le traitement mécanique de surface etc. Enfin l'étude de l'effet de la distance de sécurité sur les microstructures générées constitue également une perspective intéressante à l'issue de ce travail de thèse.



## CHAPITRE 3

---

# Homogénéisation en viscoélasticité non linéaire : nouvelles méthodes d'estimation du comportement effectif de composites particulières

---

### Résumé du chapitre :

**D**ans ce chapitre l'hypothèse de non interaction entre les inclusions est relâchée et l'étude est consacrée à la modélisation du comportement mécanique effectif d'un matériau hétérogène constitué d'une matrice isotrope dans laquelle sont distribuées de façon isotrope des inclusions de fractions volumiques assez importantes. Les différentes phases constitutives du composite ont un comportement viscoélastique non linéaire avec déformation libre. Pour estimer le comportement macroscopique ainsi que les moyennes par phase des champs, différentes méthodes de linéarisation proposées dans la littérature sont investiguées. Parmi celles-ci une nouvelle approche de linéarisation est proposée "Affine améliorée" qui améliore les méthodes classiques (Sécantes et Affines) pour certains cas de chargement étudiés.



---

## Sommaire

---

<b>I.</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>121</b>
<b>II.</b>	<b>Composites particulaires viscoélastiques non linéaires sous chargement isotrope : améliorations des méthodes "Affine modifié" et "Sécant modifié"</b> . . . . .	<b>122</b>
1.	Présentation du problème . . . . .	122
2.	Construction de différentes méthodes d'estimation . . . . .	123
3.	Comparaison des différentes approches . . . . .	128
4.	Conclusion . . . . .	131
<b>III.</b>	<b>Formulation générale de l'approche Affine amélioré</b> . . . . .	<b>132</b>
1.	Cas des matériaux non vieillissants . . . . .	132
2.	Extension aux matériaux vieillissants . . . . .	137
3.	Conclusion . . . . .	137
<b>IV.</b>	<b>Version isotrope de l'approche Affine amélioré</b> . . . . .	<b>138</b>
1.	Cas des matériaux viscoélastiques linéaires non vieillissants (milieu linéaire de comparaison) . . . . .	139
<b>V.</b>	<b>Comparaisons des modèles par rapport aux simulations</b> . . . . .	<b>144</b>
1.	Chargements purement mécaniques . . . . .	144
2.	Couplage thermo-mécanique . . . . .	149
3.	Conclusion . . . . .	151
<b>VI.</b>	<b>Conclusions</b> . . . . .	<b>152</b>

---

# I. Introduction

Dans ce chapitre nous cherchons à modéliser le comportement mécanique de matériaux hétérogènes sous chargement quelconque présentant une microstructure de type "matrice-inclusions" ayant un comportement viscoélastique non linéaire. Ces phases inclusionnaires qui peuvent être le siège de contractions ou de gonflements différentiels (dilatations thermiques, évolution physico-chimique, transformation de phase, effet de l'irradiation) sont caractérisées par des fractions volumiques assez importantes (fractions volumiques d'inclusions allant jusqu'à 30 %). Le modèle de la sphère composite ne pouvant être utilisé pour les raisons évoquées précédemment au chapitre 2 (section VI.), la méthode retenue dans ce chapitre pour aborder le problème est d'effectuer une linéarisation de la loi de comportement non linéaire (vitesse de déformation visqueuse) autour d'états de contrainte homogènes par phase afin de retrouver le cadre d'un problème viscoélastique linéarisé que l'on sait résoudre grâce au principe de correspondance de Mandel. Cette démarche générale est rappelée en section II.1. avec différentes méthodes de linéarisation qui sont investiguées et proposées dans la littérature (section II.2.). Pour en simplifier la présentation, cette démarche est formulée dans le cas d'un matériau biphasé soumis à un chargement particulier de type gonflements différentiels. Les capacités prédictives des différentes approches de linéarisation sont par la suite comparées à une solution de référence (solution exacte de la sphère composite) dans ce cas de chargement considéré (section II.3.), situation qui montre très clairement les avantages d'une nouvelle approche de linéarisation appelée par la suite "Affine amélioré" par rapport aux méthodes classiques (Sécant, Affine, ...). La méthode de linéarisation "Affine amélioré" est ensuite formulée dans le cadre général de matériaux hétérogènes sous chargement quelconque (section III.), formulation dans laquelle le modèle d'homogénéisation construit est implicite en raison du caractère anisotrope de la phase matricielle qui ne permet pas d'avoir des expressions explicites de la contrainte de référence et de l'évolution du second moment des champs de contrainte dans la matrice (expressions difficiles à déterminer dans cette situation particulière d'anisotropie).

Comme on est dans l'impossibilité de construire un modèle d'homogénéisation complet avec cette variante de l'approche "Affine amélioré", nous avons formulé une hypothèse conduisant à une **isotropisation** de la souplesse visqueuse dans la phase matricielle. Cette hypothèse a permis d'obtenir un modèle d'homogénéisation simplifié (version isotrope de l'approche Affine amélioré) dans lequel la contrainte de référence ainsi que l'évolution du second moment sont établis analytiquement dans la matrice (section IV.). De surcroît, le comportement macroscopique et les moyennes hydrostatiques par phase sont estimés de manière exacte à l'opposé de la version anisotrope où ces derniers ne peuvent être évalués qu'à travers une méthode numérique (méthode de collocation proposée par Schapery [62]). Il est important de noter que les moments d'ordre deux, excepté du premier moment, ne peuvent être calculés exactement pour un comportement viscoélastique, même linéaire. L'évolution du second moment des champs de contrainte de la phase matricielle est donc obtenue en ayant recours à des hypothèses.

Dans la dernière partie de ce chapitre (section V.) une évaluation rigoureuse du modèle d'homogénéisation construit avec la version isotrope de l'approche "Affine amélioré", s'appuyant sur une étude comparative des résultats issus de la modélisation par rapport à des calculs FFT et l'approche "Sécant modifié", est réalisée pour différents cas de chargement étudiés (essais de fluage uniaxial et à différentes triaxialités et le couplage thermo-mécanique).

## II. Composites particulières viscoélastiques non linéaires sous chargement isotrope : améliorations des méthodes "Affine modifié" et "Sécant modifié"

Dans cette section, une nouvelle approche de linéarisation pour résoudre des problèmes homogénéisation dans le cas non linéaire est présentée pour un cas de chargement particulier. Comme expliqué dans le chapitre introductif (section V.), la linéarisation de la loi de comportement non linéaire (vitesse de déformation visqueuse) en utilisant les approches "Sécant classique" [66] et "Affine classique" [75] conduit à des estimations irréalistes (réponse purement élastique) et ce, pour des chargements de type hydrostatique ou de type gonflements différentiels dans les phases inclusionnaires. Lorsque la linéarisation de la loi de comportement non linéaire s'effectue autour du second moment des contraintes (Sécant modifié [53]) ou de la fluctuation des champs (méthode du second ordre [72]), les estimations sont quantitativement améliorées mais sous estiment les résultats obtenus en champs complets (calculs FFT) pour un chargement de gonflements différentiels (voir chapitre 1 section V.2.2.3). Dans cette section, une nouvelle approche de linéarisation appelée "Affine amélioré" est proposée dans le but d'améliorer ces estimations dans le cas non linéaire.

### 1. Présentation du problème

On considère un matériau hétérogène occupant un domaine  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$  constitué d'une phase matricielle et de différentes phases inclusionnaires distribuées de manière aléatoire et isotrope. Les différentes phases du matériau ont un comportement viscoélastique non linéaire et vieillissant (propriétés mécaniques dépendent significativement du temps) avec des déformations libres entre les phases qui sont supposées sphériques et homogènes. Le composite, qui est homogène du point de vue élastique ( $\kappa^{(1)} = \kappa^{(2)} = \kappa_e$  et  $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \mu_e$ ), est soumis à des conditions de contraintes homogènes sur le bord extérieur du domaine. La résolution du problème à l'échelle microscopique sur l'intervalle de temps  $[0, T]$  consiste à déterminer les champs mécaniques solutions du système (1.6) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0, T] \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right) \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0, T] \\ \dot{\varepsilon}_m(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{3\kappa_e(t)} \dot{\sigma}_m(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{3\kappa_v^{(r)}(t)} \sigma_m(\mathbf{x}, t) + \chi^{(r)}(\mathbf{x}) \dot{\varepsilon}_{0m}^{(r)}(t) \quad , \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (3.1) \\ \dot{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\mu_e(t)} \dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, t) + \dot{\varepsilon}_v(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0, T] \end{array} \right.$$

Comme dans le chapitre 1 (section II.4.), le comportement visqueux considéré dans ce chapitre dérive d'un potentiel non linéaire en loi puissance (loi de Norton).

$$\dot{\mathbf{e}}_v(\mathbf{x}, t) = \sum_{r=1}^N \chi^{(r)}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{e}}_v^{(r)}(\mathbf{x}, t) \quad , \quad \dot{\mathbf{e}}_v^{(r)}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial U_v^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3\dot{\varepsilon}_0^{(r)}}{2\sigma_0^{(r)}} \left( \frac{\sigma_{\text{eq}}}{\sigma_0^{(r)}} \right)^{n^{(r)}-1} \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) \quad (3.2)$$

$$\text{où } U_v^{(r)}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\sigma_0^{(r)} \dot{\varepsilon}_0^{(r)}}{n^{(r)} + 1} \left( \frac{\sigma_{\text{eq}}}{\sigma_0^{(r)}} \right)^{n^{(r)}+1} \quad , \quad (3.3)$$

avec les paramètres  $\dot{\varepsilon}_0^{(r)}$ ,  $\sigma_0^{(r)}$  et  $n^{(r)}$  qui sont des constantes caractéristiques de l'intensité du taux de fluage dans chacune des phases.

Pour résoudre le problème mécanique local (3.1), nous proposons ici de linéariser la vitesse de déformation visqueuse selon un schéma affine :

$$\dot{\mathbf{e}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\mu_e^{(r)}(t)} \dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{M}_v^{(r)} : \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{e}}_0^{(r)} \quad (3.4)$$

La souplesse visqueuse  $\mathbf{M}_v^{(r)}$  et la déformation libre  $\mathbf{e}_0^{(r)}$  sont des quantités homogènes par phase dont différents choix sont étudiés dans la section qui va suivre. À chaque instant le comportement linéarisé (relation (3.4)) est celui d'un matériau linéaire viscoélastique avec déformations libres (celles associées au chargement et celles apparaissant avec la linéarisation).

## 2. Construction de différentes méthodes d'estimation

Dans cette section nous allons évaluer les différentes méthodes de linéarisation des lois de comportement non linéaire. Dans ces modèles, les opérations de linéarisation s'effectuent autour des premiers et/ou seconds moments des champs de contrainte. À noter que contrairement aux approches proposées dans [49] ou [72] et comme le comportement local ne dérive pas d'un seul potentiel (comportement élastique non linéaire ou purement viscoplastique dans ces références), la réponse effective est donnée par la réponse du Milieu Linéaire de Comparaison défini à chaque pas de temps par linéarisation.

Pour toutes les approches considérées ici, nous conservons le choix d'une linéarisation sécante classique basée sur le premier moment du champ de contrainte dans les inclusions et nous cherchons à améliorer cette linéarisation dans la matrice. Le module de cisaillement visqueux  $\mu_v^{(r)}$  ( $r = 2, \dots, N$ ) dans les inclusions est alors donné par :

$$\mu_v^{(r)}(\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)}) = \frac{\sigma_0^{(r)}}{3\dot{\varepsilon}_0^{(r)}} \left( \frac{\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)}}{\sigma_0^{(r)}} \right)^{1-n^{(r)}} \quad , \quad \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)}(t) = \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\mathbf{s}}^{(r)}(t) : \bar{\mathbf{s}}^{(r)}(t)} \quad \text{avec } \bar{\mathbf{s}}^{(r)}(t) = \langle \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) \rangle^{(r)} \quad (3.5)$$

### 2.1 Schémas considérés

#### 2.1.1. Linéarisation sécante

Dans l'approche "Sécante classique" la vitesse de déformation  $\dot{\mathbf{e}}_0$  est nulle et le tenseur des souplesses  $\mathbf{M}_v^{(1)}$  est isotrope. Ainsi la loi de comportement linéarisée (3.4) dans la matrice s'écrit :

$$\dot{\mathbf{e}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\mu_e^{(1)}(t)} \dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{M}_v^{(1)} : \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) \quad , \quad \mathbf{M}_v^{(1)} = \frac{1}{2\mu_v^{(1)}(\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \quad (3.6)$$

avec le module de cisaillement de la phase matricielle  $\mu_v^{(1)}$  qui s'écrit :

$$\mu_v^{(1)}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}) = \frac{\sigma_0^{(1)}}{3\check{\varepsilon}_0^{(1)}} \left( \frac{\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}}{\sigma_0^{(1)}} \right)^{1-n^{(1)}} \quad (3.7)$$

Dans cette approche, la linéarisation de la vitesse de déformation visqueuse s'appuie sur le moment d'ordre un des contraintes autrement dit la contrainte de référence  $\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}$  dans la matrice est le premier moment des champs de contrainte.

$$\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)} = \overline{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}(t) = \sqrt{\frac{3}{2} \langle \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) \rangle^{(1)} : \langle \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) \rangle^{(1)}} \quad (3.8)$$

Pour le cas de chargement de gonflements différentiels considéré en section 3., la moyenne du déviateur des contraintes est nulle alors que le cisaillement dans la matrice est non nul. La linéarisation sécante conduit donc à des réponses purement élastiques dans ce cas (module de cisaillement visqueux infini dans la matrice). Pour corriger ces écarts, une approche de linéarisation basée sur le moment d'ordre deux dans la matrice, proposée par Ponte Castañeda [54] et Suquet [53], peut être utilisée. Dans cette approche la contrainte de référence  $\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}$  dans la matrice est le second moment des champs de contrainte (modèle "Sécant modifié").

$$\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)} = \overline{\overline{\sigma}}_{\text{eq}}^{(1)} = \sqrt{\frac{3}{2} \langle \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) : \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) \rangle^{(1)}} \quad (3.9)$$

Nous verrons que cette quantité est non nulle pour le chargement considéré en section 3., ce qui conduit à un module de cisaillement visqueux fini.

### 2.1.2. Linéarisation affine amélioré

L'expression de la vitesse de déformation libre dans la matrice pour toutes les approches présentées dans ce paragraphe s'écrit :

$$\dot{\mathbf{e}}_0^{(1)} = \frac{\partial U_v^{(1)}}{\partial \mathbf{s}}(\overline{\mathbf{s}}^{(1)}) - \mathbf{M}_v^{(1)}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}) : \overline{\mathbf{s}}^{(1)} \quad (3.10)$$

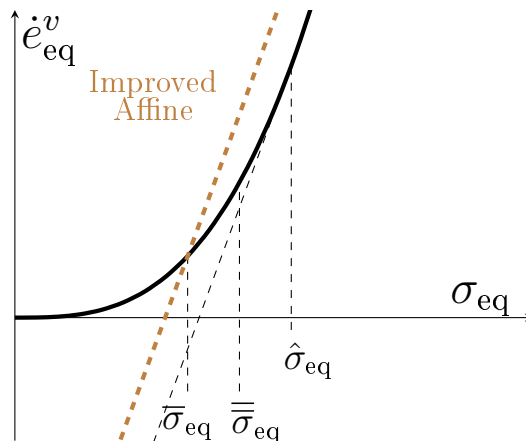


FIGURE 3.1 – Linéarisation de type Affine amélioré : illustration dans le cas où la contrainte de référence est  $\hat{\sigma}_{\text{eq}}$ , relation (3.13)

Le tenseur des souplesses  $\mathbf{M}_v^{(1)}$  est le tenseur des modules tangents (1.143) qui, pour une phase matricielle obéissant à une loi de type puissance, peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{M}_v^{(1)}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}, \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}) = \frac{1}{2\mu_v^{(1)}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \mathbf{F}^{(1)} + \frac{n^{(1)}}{2\mu_v^{(1)}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \mathbf{E}^{(1)} \quad (3.11)$$

$$\mu_v^{(1)}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}) = \frac{\sigma_0^{(1)}}{3\varepsilon_0^{(1)}} \left( \frac{\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}}{\sigma_0^{(1)}} \right)^{1-n^{(1)}}$$

Dans le modèle "Affine classique" [99], la contrainte de référence  $\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}$  est le premier moment des champs de contrainte. Dans le cas de chargement considéré en section 3. la moyenne déviatorique des contraintes dans la matrice est nulle. Ainsi comme le sécant classique, le modèle "Affine classique" donne des résultats purement élastiques dans ce cas de chargement particulier.

Afin de corriger ces estimations, une tentative consisterait à utiliser la méthode proposée par Castañeda [72], qui utilise une approche variationnelle pour déterminer une nouvelle expression de la souplesse visqueuse ainsi que la contrainte de référence. Comme nous l'avons vu au chapitre 1, la contrainte de référence  $\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}$  dans ce modèle est une fonction des premiers et seconds moments du tenseur des contraintes et de la covariance (fluctuations) définie par

$$\mathbf{C}_\sigma^{(1)} = \langle (\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}) \otimes (\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}) \rangle^{(1)} \quad , \quad (\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})^2 = \left( \left( \bar{\bar{\sigma}}_{\text{eq}}^{(1)} \right)^2 + 2\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)} \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{E}^{(1)} :: \mathbf{C}_\sigma^{(1)}} \right) \quad (3.12)$$

En effectuant le calcul du produit scalaire entre le projecteur  $\mathbf{E}^{(1)}$  et la covariance  $\mathbf{C}_\sigma^{(1)}$ , nous obtenons une expression plus explicite de la contrainte de référence  $\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}$  qui est exprimée par :

$$(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})^2 = \left( \left( \bar{\bar{\sigma}}_{\text{eq}}^{(1)} \right)^2 + 2\sqrt{\frac{9}{4} \langle (\mathbf{s} : \bar{\mathbf{s}}^{(1)})^2 \rangle^{(1)} - (\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})^4} \right), \quad (3.13)$$

Nous remarquons que dans le cas d'un comportement viscoélastique non linéaire la contrainte de référence  $\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}$  ne peut être évaluée de manière exacte en raison de la covariance  $\mathbf{C}_\sigma^{(1)}$  dont nous ne savons calculer qu'une trace.

$$\mathbf{C}_{\sigma_{ijij}}^{(1)} = S_1 - \bar{s}_{ij}^{(1)} \bar{s}_{ij}^{(1)}, \quad (3.14)$$

où  $S_1$  désigne le second moment des champs de contraintes dont l'évolution temporelle est donnée plus loin (relation (3.47)). Par ailleurs, la souplesse de la phase matricielle dans cette approche a la forme :

$$\mathbf{M}_v^{(1)}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}, \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}) = \frac{1}{2\mu_v^{(1)}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \mathbf{F}^{(1)} + \frac{1}{2\lambda_v^{(1)}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}, \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \mathbf{E}^{(1)}, \quad (3.15)$$

Les modules de cisaillement visqueux  $\mu_v^{(1)}$  et  $\lambda_v^{(1)}$  sont déterminés à partir des conditions de stationnarités sur le potentiel effectif dans le cas purement visqueux (voir chapitre 1 section V.1.2.2.). Cependant cette approche de linéarisation dégénère en sécant modifié dans le cas de contraintes déviatoriques moyennes nulles dans la matrice. Or nous verrons en section 3. que dans ce cas particulier le modèle sécant modifié ne conduit pas à des estimations quantitativement correctes.

Dans l'approche proposée dans cette étude, le tenseur des souplesses  $\mathbf{M}_v^{(1)}$  est celui du schéma de linéarisation affine (3.11) à la différence que le module de cisaillement visqueux dans la matrice  $\mu_v^{(1)}$  est calculé soit autour de la contrainte de référence (3.13) définie par Ponte Castañeda [72],  $\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)} = \hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}$  (voir figure 3.1) soit autour du second moment des contraintes  $\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)} = \overline{\overline{\sigma}}_{\text{eq}}^{(1)}$ . L'approche ainsi obtenue est appelée par la suite "Affine amélioré".

Le choix de linéarisation, s'effectuant autour de la fluctuation des contraintes, a été également défini dans [80] mais n'a pas été étudié. La méthode proposée dans [80], appelée AFF – ANI –  $F_{\text{cov}}$ , s'appuie sur une linéarisation similaire à celle de l'approche Affine amélioré (linéarisation de type tangente). En effet, dans l'approche AFF – ANI –  $F_{\text{cov}}$  le module tangent (coefficient du tenseur  $\mathbf{F}^{(1)}$  dans (3.11)) est évalué autour du premier moment des contraintes tandis que le module sécant (coefficient du tenseur  $\mathbf{E}^{(1)}$  dans (3.11)) est calculé autour de la fluctuation ou du second moment des contraintes. Dans le cas de milieux poreux il a été clairement montré dans [80] que pour des non linéarités modérés et fortes, les estimations résultant de cette alternative proposée se sont avérées pertinentes par rapport aux méthodes classiques (Sécant et Affine). Cependant l'extension de cette approche à des structures sous chargement purement hydrostatique reste une question ouverte (voir notre proposition plus loin).

## 2.2 Calcul des champs moyens par phase

Nous considérons dans ce paragraphe le cas d'un composite biphasé et nous utilisons le modèle de Mori-Tanaka [43] pour estimer le comportement effectif du Milieu Linéaire de Comparaison ainsi que les moyennes par phase.

### 2.2.1. Cas des matériaux non vieillissants

Pour un matériau viscoélastique linéaire non vieillissant les propriétés mécaniques sont invariantes dans le temps. Ainsi le principe de correspondance de Mandel peut-être utilisé pour la résolution du problème. Nous rappelons que le principe de correspondance consiste à ramener le problème viscoélastique linéaire non vieillissant à un problème d'élasticité homogène par phase en utilisant la transformée de Laplace-Carson. Ce qui permet d'établir les moyennes par phase dans l'espace de Laplace-Carson et d'en déduire leurs expressions dans l'espace temporel à travers l'inverse de la transformée de Carson. Cependant il est primordial de souligner que dans le cas d'un comportement non linéaire la transformée de Laplace-Carson de la vitesse de déformation visqueuse (produit de deux fonctions temporelles) ne peut être calculée de manière explicite. Nous allons donc employer ici la méthode d'homogénéisation incrémentale pour la résolution du problème autrement dit le module de cisaillement visqueux par phase ainsi que les projecteurs définis dans les relations (3.11) et (3.15) sont supposés constants à chaque pas de temps.

#### a. Cas des approches sécantes

Dans les modèles sécants classique et modifié les souplesses dans les phases sont isotropes tandis que les inclusions sont distribuées de façon isotrope (forme sphérique de l'inclusion dans le problème d'Eshelby). Dans ce cas et comme expliqué au chapitre 1 (section IV.2.1), le comportement effectif déduit du principe de correspondance et du modèle de Mori-Tanaka est exactement défini par une loi à variables internes (relations (1.108) à (1.111)). Les expressions des contraintes moyennes par phase ainsi que l'évolution du second moment des champs de contrainte dans la matrice sont respectivement données par les relations (1.116), (1.117) et (B.2), relations dans lesquelles le module de cisaillement visqueux de la matrice est soit évalué autour du second moment (Sécant modifié) soit autour du premier moment (Sécant classique).

Dans le cas d'un module de compressibilité par phase purement élastique ( $\kappa_v^{(r)} = \infty$ ), les évolutions temporelles du comportement effectif et des contraintes moyennes hydrostatiques sont régies par les équations (1.114) et (1.121).

### b. Cas de l'affine amélioré

Dans ce cas la souplesse visqueuse dans la matrice  $\mathbf{M}_v^{(1)}$  est anisotrope. Ainsi le comportement macroscopique du Milieu Linéaire de Comparaison est anisotrope ce qui alourdit la résolution, notamment l'inversion de la transformée de Laplace-Carson. De plus la forme générale des contraintes moyennes hydrostatiques ne peut être déterminée si simplement. En revanche, la moyenne la vitesse de déformation visqueuse de la matrice est liée à la moyenne des contraintes déviatoriques par un tenseur isotrope  $\mathbf{M}^{(1)}$  défini par

$$\mathbf{M}^{(1)} = \frac{1}{2\tilde{\mu}_v^{(1)}} \mathbf{K} \quad , \quad \frac{1}{2\tilde{\mu}_v^{(1)}} = \frac{n^{(1)}}{2\mu_v^{(1)}} \quad (3.16)$$

on peut également utiliser ici le principe de correspondance pour déterminer les évolutions des moyennes déviatoriques dans chacune des phases qui sont exprimées par :

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t) = \frac{2}{c^{(1)}} \left( \frac{1}{\tilde{\mu}_v^{(1)}} - \frac{1}{\mu_v^{(2)}} \right)^{-1} \left[ \dot{\tilde{\mathbf{e}}}(t) - c^{(1)} \dot{\mathbf{e}}_0^{(1)}(t) - \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{\bar{\mathbf{s}}}(t)}{\mu_e} + \frac{\bar{\mathbf{s}}(t)}{\mu_v^{(2)}} \right) \right] \\ \bar{\mathbf{s}}^{(2)}(t) = \frac{2}{c^{(2)}} \left( \frac{1}{\mu_v^{(2)}} - \frac{1}{\tilde{\mu}_v^{(1)}} \right)^{-1} \left[ \dot{\tilde{\mathbf{e}}}(t) - c^{(1)} \dot{\mathbf{e}}_0^{(1)}(t) - \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{\bar{\mathbf{s}}}(t)}{\mu_e} + \frac{\bar{\mathbf{s}}(t)}{\tilde{\mu}_v^{(1)}} \right) \right] \end{cases} \quad (3.17)$$

avec le module de cisaillement visqueux dans la matrice qui dépend de la fluctuations des champs de contrainte ( $\tilde{\mu}_v^{(1)} = \tilde{\mu}_v^{(1)}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})$ ) tandis que le module de cisaillement visqueux caractéristique de la phase inclusionnaire est une fonction du premier moment ( $\mu_v^{(2)} = \mu_v^{(2)}(\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(2)})$ ). Les expressions des moyennes déviatoriques dans l'approche "Affine amélioré" diffèrent de celles obtenues avec les approches sécantes classique et modifié en raison de la déformation libre déviatorique  $\mathbf{e}_0^{(1)}(t)$  qui apparaît dans la relation de localisation (3.4). Cette déformation libre est nulle dans les approches sécantes classique et modifié.

Nous verrons dans la section III. que sans hypothèses supplémentaires les calculs de la contrainte de référence (3.13) et du second moment dans la matrice ne peuvent pas être réalisés analytiquement sauf dans le cas du chargement particulier considéré en section 3. (chargement de gonflements différentiels). Cette question sera résolue de deux manières différentes dans la section IV. de ce chapitre.

### 2.2.2. Extension aux matériaux vieillissants

Lorsque le matériau est vieillissant, les propriétés mécaniques sont dépendantes du temps, ce qui rend impossible le calcul analytique de la transformée de Laplace-Carson des vitesses de déformations élastiques et visqueuses, qui sont des produits de deux fonctions temporelles. Donc nous utilisons de nouveau la méthode incrémentale pour estimer les propriétés effectives du composite avec les propriétés mécaniques élastiques et visqueuses et les projecteurs qui sont supposés constants à chaque pas de temps.



## 2.3 Synthèse

A ce stade nous disposons donc de six approches : celles s'appuyant sur une linéarisation sécante (classique ou modifié) ou encore celles basées sur une linéarisation tangente autour des moyennes par phase (Affine) et trois variantes construites à partir de la relation (3.10) : "Affine modifié" (3.10), (3.13), (3.15) et "Affine amélioré" (3.10), (3.11), (3.13) ou (3.9), (3.10), (3.11).

## 3. Comparaison des différentes approches

### 3.1 Chargement considéré

Nous considérons ici le chargement particulier d'un gonflement différentiel : à l'instant initial une déformation libre sphérique est imposée instantanément aux inclusions puis maintenue constante, le bord étant libre de contrainte ( $\bar{\sigma}(t) = 0$ ). Lorsque la déformation imposée est une dilatation, la phase inclusionnaire est mise en compression tandis que le phénomène opposé se produit (mise en traction) en cas d'une contraction. Dans ce cas de chargement la déformation macroscopique est purement sphérique ( $\bar{\epsilon}(t) = 0$ ) car, dû à l'isotropie,  $\bar{\sigma}(t)$  et  $\bar{\epsilon}(t)$  ont les mêmes espaces invariants. Les contraintes moyennes déviatorique par phase  $\bar{s}^{(1)}(t)$  et  $\bar{s}^{(2)}(t)$  sont également nulles à tout instant pour tous les modèles considérés (1.117) ou (3.17).

Pour de faibles fractions volumiques d'inclusions la microstructure peut être modélisée en utilisant le modèle de la sphère composite. Dans ce modèle (chapitre 2) des solutions exactes (section (IV.1.)) sont établies pour le même cas de chargement (gonflement dans l'inclusion et bord extérieur libre de contrainte). Dans cette section, nous utilisons ces résultats comme solution de référence afin d'évaluer la pertinence des différentes approches de linéarisation.

### 3.2 Déclinaisons des approches proposées pour ce cas de chargement

Parmi tous les modèles considérés en section 2., il n'en reste que trois qui sont indépendants lorsque les moyennes des déviateurs des contraintes sont nulles (voir figure 3.2). En effet dans ce cas particulier le modèle "Sécant classique" est équivalent au modèle "Affine classique", le modèle "Sécant modifié" est équivalent à la méthode du second ordre et les deux modèles représentatifs de l'approche "Affine amélioré" sont également équivalents dans ce cas particulier de chargement ( $\mathbf{M}_v^{(1)}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}) = \mathbf{M}_v^{(1)}(\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})$ ). Par ailleurs, la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}_0^{(1)}$  dans le modèle "Affine amélioré" devient nulle de sorte que la vitesse de déformation visqueuse dans la matrice varie de manière linéaire par rapport au déviateur des contraintes.

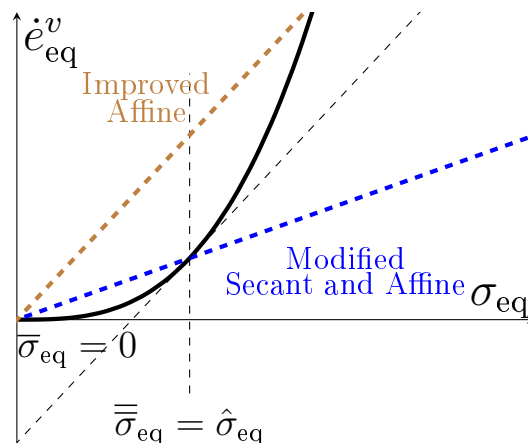


FIGURE 3.2 – Les différentes méthodes de linéarisation dans le cas d'un chargement purement hydrostatique

Pour le cas de chargement considéré ici la moyenne de la contrainte déviatorique dans la matrice  $\bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t)$  est nulle de sorte que la contrainte  $\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}$  (relation (3.13)) se réduit au second moment du champ de contrainte. Dans ce cas particulier de chargement l'évolution du second moment dans la matrice s'écrit (voir annexe B) :

$$\frac{1}{4\mu_e} \dot{S}_1(t) + \frac{1}{2\tilde{\mu}_v^{(1)}(S_1, \bar{\mathbf{s}}^{(1)})} S_1(t) = - \sum_{r=1}^2 \frac{c^{(r)}}{c^{(1)}} \left( \frac{1}{\kappa_e} \dot{\bar{\sigma}}_m^{(r)}(t) \bar{\sigma}_m^{(r)}(t) + \frac{1}{\kappa_v^{(r)}} \bar{\sigma}_m^{(r)}(t) \bar{\sigma}_m^{(r)}(t) + 3\bar{\sigma}_m^{(r)}(t) \dot{\varepsilon}_{0m}^{(r)}(t) \right) \quad (3.18)$$

En revanche le premier moment des champs de contrainte dans la matrice pour ce cas de chargement est nul et le tenseur  $\mathbf{E}^{(1)}$  défini dans la relation (3.11) devient indéterminé. Les propriétés effectives dans cette situation particulière ne peuvent être déterminées car la souplesse visqueuse  $\mathbf{M}_v^{(1)}$ , associée au Milieu Linéaire de Comparaison, est mal définie.

Or, comme la complaisance reliant la moyenne de la vitesse de déformation visqueuse à la moyenne des contraintes déviatoriques est elle, parfaitement définie (souplesse isotrope (relation (3.16))), nous adoptons cette complaisance pour caractériser le comportement visqueux linéarisé de la matrice.

$$\mathbf{M}_v^{(1)} = \mathbf{M}^{(1)} = \frac{1}{2\tilde{\mu}_v^{(1)}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \mathbf{K} \quad (3.19)$$

Ainsi, pour un comportement isotrope de la phase matricielle les propriétés à l'échelle macroscopique du composite peuvent être estimées de manière exacte en utilisant le modèle de Mori-Tanaka et la formulation à variables internes comme dans le cas des approches sécantes. Les contraintes moyennes hydrostatiques dans le cas d'un module de compressibilité purement élastique peuvent être ainsi estimées de manière exacte comme dans le cas des approches sécantes. Les équations différentielles, dont ces moyennes hydrostatiques par phase sont solutions, sont données par le système suivant.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\bar{\sigma}_m^{(1)}(t)) + \frac{1}{\tilde{\tau}_\gamma}(\bar{\sigma}_m^{(1)}(t)) = \frac{3c^{(2)}}{\left(\frac{1}{\kappa_e} + \frac{3}{4\mu_e}\right)} (\dot{\varepsilon}_{0m}^{(2)}(t) - \dot{\varepsilon}_{0m}^{(1)}(t)) \\ \frac{d}{dt}(\bar{\sigma}_m^{(2)}(t)) + \frac{1}{\tilde{\tau}_\gamma}(\bar{\sigma}_m^{(2)}(t)) = \frac{3c^{(1)}}{\left(\frac{1}{\kappa_e} + \frac{3}{4\mu_e}\right)} (\dot{\varepsilon}_{0m}^{(1)}(t) - \dot{\varepsilon}_{0m}^{(2)}(t)) \end{cases} \quad (3.20)$$

avec le temps de relaxation  $\tilde{\tau}_\gamma$  qui est donné par :

$$\tilde{\tau}_\gamma = \left( \frac{4}{3\kappa_e} + \frac{1}{\mu_e} \right) \tilde{\mu}_v^{(1)}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}) \quad , \quad \tilde{\mu}_v^{(1)}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}) = \frac{\mu_v^{(1)}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})}{n^{(1)}} \quad (3.21)$$

L'évolution temporelle du second moment dans la matrice (voir annexe B) dans ce cas est exprimée par :

$$\frac{1}{4\mu_e} \dot{S}_1(t) + \frac{1}{2\tilde{\mu}_v^{(1)}(S_1, \bar{\mathbf{s}}^{(1)})} S_1(t) = - \sum_{r=1}^2 \frac{c^{(r)}}{c^{(1)}} \left( \frac{1}{\kappa_e} \dot{\bar{\sigma}}_m^{(r)}(t) \bar{\sigma}_m^{(r)}(t) + \frac{1}{\kappa_v^{(r)}} \bar{\sigma}_m^{(r)}(t) \bar{\sigma}_m^{(r)}(t) + 3\bar{\sigma}_m^{(r)}(t) \dot{\varepsilon}_{0m}^{(r)}(t) \right) \quad (3.22)$$

Puisque le second moment des contraintes est identique pour toutes les approches proposées à  $t = 0$  (solution élastique) et que  $n^{(1)} > 1$ , la pente à l'origine dans les équations des moyennes hydrostatiques (3.20) et du second moment (3.22) est plus forte avec le modèle "Affine amélioré" qu'avec le modèle "Sécant modifié". Donc on s'attend à une relaxation de contrainte plus rapide dans l'approche "Affine amélioré".

### 3.3 Résultats

Dans cette section, nous proposons d'évaluer la pertinence de l'approche de linéarisation "Affine amélioré" appliquée à un composite biphasé non vieillissant (matrice renforcée par des particules sphériques) dont la loi de comportement dans chacune des phases est viscoélastique non linéaire avec déformation libre, le module de compressibilité par phase étant purement élastique ( $\kappa_v^{(r)} = \infty$ ). L'évaluation de l'approche développée repose sur une étude comparative des moments des champs des contraintes (évolutions du second moment des contraintes dans la matrice ainsi que les moyennes par phase de la contrainte hydrostatique) du modèle d'homogénéisation construit par rapport à des solutions de référence (solution exacte de la sphère composite), pour le cas de chargement considéré en section 3. (chargement de gonflements différentiels). La fraction volumique des inclusions est de 10% et les propriétés du matériau utilisés pour l'ensemble de ces calculs sont les suivantes :  $n^{(1)} = 4$ ,  $E = 200$  GPa,  $\nu = 0.3$ ,  $\sigma_0^{(1)} = 1$  GPa,  $\varepsilon_{0m}^{(2)} = 333.10^{-6}$ .

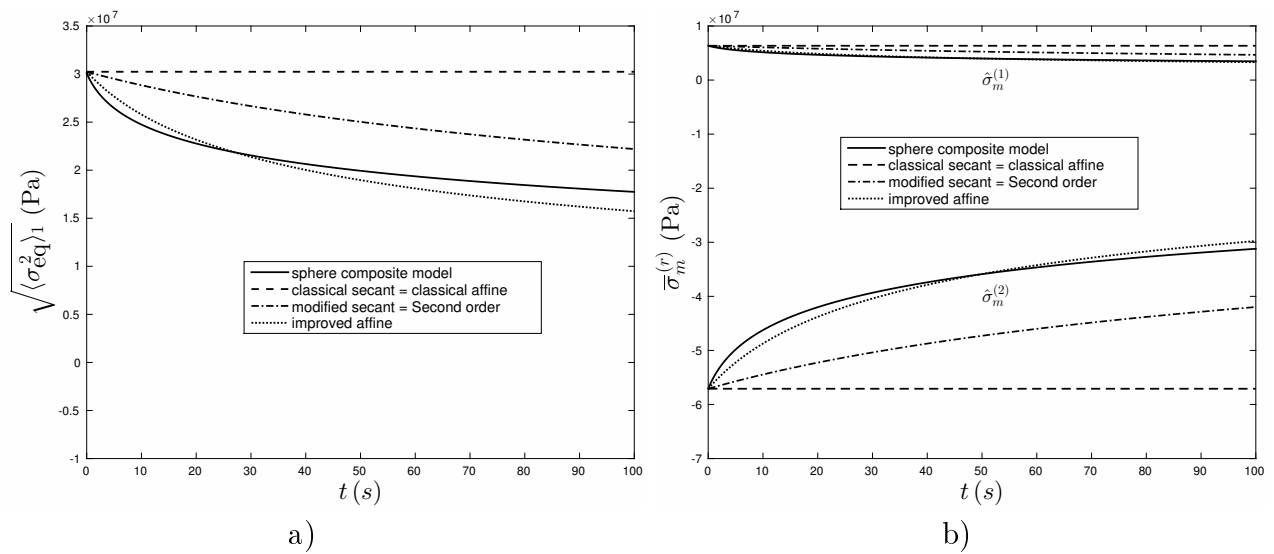


FIGURE 3.3 – Évolutions temporelles du second moment dans la matrice et des moyennes par phase de la contrainte hydrostatique : comparaison des résultats de la sphère composite aux différentes approches de linéarisation

Nous observons sur la figure 3.3 a) que les seconds moments estimés avec le modèle "Sécant modifié" ou le modèle "Affine amélioré" sont proches et relativement éloignés de la solution de référence. Comme attendu (préfacteur  $\frac{1}{n^{(1)}}$  sur le temps caractéristique (3.21)), les moyennes hydrostatiques relaxent plus rapidement que celles prédites par la méthode de linéarisation "Sécante modifié" (figure 3.3 b)).

Nous notons également que dans ce cas de chargement particulier (gonflement différentiel dans l'inclusion), la linéarisation sécante classique autour du premier moment mène à un résultat irréaliste (module de cisaillement visqueux infini). Les estimations de ce modèle sont nettement améliorées en utilisant la méthode de linéarisation s'appuyant sur le second moment des champs : il y'a bien relaxation des contraintes. Cependant la vitesse de relaxation reste trop faible par rapport à la solution de référence. Enfin, les estimations de la relaxation des moyennes par phase de la contrainte hydrostatique obtenues avec l'approche "Affine amélioré" sont en bon accord avec les résultats analytiques de la sphère composite.

**Remarque** : Nous notons pour la suite que dans le cas de chargement particulier considéré ici, une méthode sécante alternative peut être proposée de façon à conduire aux mêmes résultats que ceux obtenus avec la méthode "Affine améliorée". Cette méthode sécante de linéarisation diffère des approches Sécantes par le point de référence dont la définition est illustrée sur la figure suivante : c'est l'abscisse du point d'intersection entre la courbe non linéaire et la loi linéarisée associée à l'approche "Affine amélioré" (qui est dans ce cas de chargement particulier une droite linéaire donc sécante). Or nous avons vu que la pente associée à la linéarisation "Affine amélioré" est le module tangent à la courbe non linéaire évalué autour du second moment des contraintes. Ce point de fonctionnement (noté  $\tilde{\sigma}_{eq}$ ) est donc défini par la relation scalaire suivante :

$$\left( \frac{\partial^2 U_v^{(1)}}{\partial \sigma_{eq}^2} \right)_{\bar{\sigma}_{eq}} \tilde{\sigma}_{eq} = \left( \frac{\partial U_v^{(1)}}{\partial \sigma_{eq}} \right)_{\tilde{\sigma}_{eq}}. \quad (3.23)$$

Dans le cas d'une loi de Norton, cette relation définit clairement ce point de fonctionnement :

$$\tilde{\sigma}_{eq} = \left( n^{(1)} \right)^{\frac{1}{n^{(1)}-1}} \bar{\sigma}_{eq} \quad (3.24)$$

en fonction du second moment des contraintes ainsi que de l'exposant de la loi de Norton caractérisant le comportement visqueux de la matrice. Cette méthode, équivalente à l'approche "Affine amélioré" dans le cas de chargement particulier considéré ici, est appelée par la suite "**Sécant amélioré**".

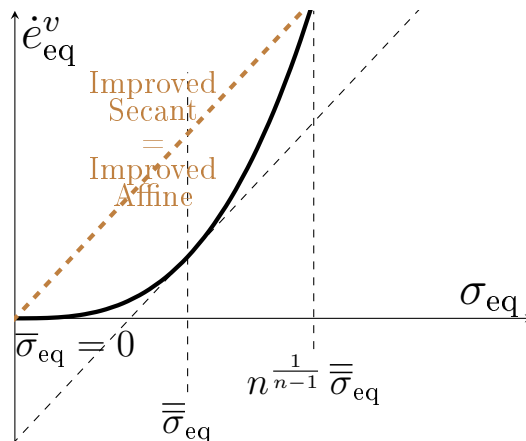


FIGURE 3.4 – Linéarisation de type Sécante améliorée

## 4. Conclusion

Pour un chargement de type gonflements différentiels, les modèles "Sécant classique" et "Affine classique" conduisent à des estimations irréalistes pour le cas particulier de chargement considéré (réponse purement élastique). Ces estimations sont qualitativement améliorées en utilisant le modèle "Sécant modifié" (ou avec la méthode du second ordre [72]) mais sous-estiment les cinétiques de relaxation obtenues avec le modèle de référence. Parmi les six approches étudiées, seul le modèle "Affine amélioré" s'avère quantitativement correct ; les estimations obtenues avec ce modèle étant en bon accord avec les résultats de référence (solution analytique- sphère composite). Nous avons également vu qu'une méthode "Sécante améliorée" conduisant aux mêmes résultats que l'approche "Affine amélioré" pour ce chargement particulier, peut être définie. Dans la section qui va suivre, nous allons étendre la formulation de l'approche Affine amélioré dans le cadre général afin de pouvoir prédire le comportement effectif de composites soumis à un chargement quelconque.

### III. Formulation générale de l'approche Affine amélioré

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, le comportement macroscopique dans le cas d'une souplesse anisotrope de la phase matricielle ne peut être établi de manière exacte, mais il peut être approché par une loi à variables internes en utilisant la méthode de collocation formulée par Schapery [62]. Nous allons employer ici cette méthode pour estimer le comportement macroscopique de matériaux hétérogènes viscoélastiques linéaires.

#### 1. Cas des matériaux non vieillissants

De la même manière que précédemment, nous utilisons systématiquement la méthode incrémentale (module de cisaillement visqueux par phase constant à chaque incrément de temps) et le principe de correspondance pour dériver les propriétés effectives du composite.

##### 1.1 Estimations du comportement effectif

Dans le cas d'une souplesse visqueuse anisotrope dans la matrice, la transformée de Laplace-Carson de la loi de comportement locale conduit à :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{x}, p) = \mathbf{M}^{(r)*}(p) : \boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{x}, p) + \chi^{(r)}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(r)*}(p). \quad (3.25)$$

La souplesse dans les inclusions est isotrope avec les modules de compressibilité et de cisaillement qui dépendent du paramètre  $p$  et des propriétés mécaniques du matériau (relation (1.102)). En revanche, la souplesse dans la matrice est anisotrope et son expression est donnée par :

$$\mathbf{M}^{(1)*}(p) = \frac{1}{3\kappa^{(1)*}(p)} \mathbf{J} + \frac{1}{2\mu^{(1)*}(p)} \mathbf{F}^{(1)} + \frac{1}{2\lambda^{(1)*}(p)} \mathbf{E}^{(1)}, \quad (3.26)$$

où le scalaire  $\lambda^{(1)*}$  est une fonction du paramètre  $p$  et des propriétés du matériau.

$$\frac{1}{2\lambda^{(1)*}(p)} = \frac{1}{2\mu_e} + \frac{1}{2p\tilde{\mu}_v^{(1)}} \quad , \quad \tilde{\mu}_v^{(1)} = \frac{\mu_v^{(1)}}{n^{(1)}} \quad (3.27)$$

La relation (3.25) reliant la déformation à la contrainte est une loi de comportement thermoélastique donc le comportement effectif du composite peut être estimé à travers un schéma d'homogénéisation. Comme dans le chapitre introductif, nous utilisons ici le modèle de Mori-Tanaka pour évaluer les propriétés effectives du VER avec la loi de comportement macroscopique qui est exprimée par :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*(p) = \tilde{\mathbf{C}}_{\text{MT}}^*(p) : \left( \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(*)}(p) - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0^{(*)}(p) \right) \quad , \quad \tilde{\mathbf{C}}_{\text{MT}}^*(p) = \sum_{r=1}^N c^{(r)} \mathbf{C}^{(r)*}(p) : \mathbf{A}^{(r)*}(p) \quad (3.28)$$

Les expressions analytiques du tenseur de localisation des déformations par phase, pour des composites biphasés par exemple, sont déterminées avec le modèle d'homogénéisation de Mori-Tanaka (voir chapitre 1 section III.1.6). Étant donné que le comportement de la phase matricielle est anisotrope, le tenseur de rigidité dans la matrice, qui est l'inverse de la souplesse définie dans (3.26), est anisotrope et son expression est donnée par :

$$\mathbf{C}^{(1)*}(p) = 3\kappa^{(1)*}(p) \mathbf{J} + 2\mu^{(1)*}(p) \mathbf{F}^{(1)} + 2\lambda^{(1)*}(p) \mathbf{E}^{(1)} \quad (3.29)$$

Le tenseur de Hill associé au tenseur de rigidité de la phase matricielle est également anisotrope. Différentes expressions de ce tenseur dans le cas anisotrope ont été proposées dans la littérature (chapitre 1 section III.1.5.2.). Nous établissons ici l'expression analytique exacte du tenseur de Hill anisotrope qui est exprimée en fonction du tenseur de Hill pour un comportement purement isotrope et une partie anisotrope (voir annexe E).

$$\mathbf{P}^{(1)*} = \mathbf{P}_{\mathbf{E}}^{(1)*} - \frac{1}{4\pi} \int_{|\xi|=1} \frac{4\mu^{(1)*} (\lambda^{(1)*} - \mu^{(1)*}) \mathbf{P}^*(\xi) dS(\xi)}{3\mu^{(1)*} + 4(\lambda^{(1)*} - \mu^{(1)*}) [|\hat{\boldsymbol{\alpha}}\xi|^2 - a^{(1)*} (\xi \bullet (\hat{\boldsymbol{\alpha}}\xi))^2]}, \quad \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\bar{\mathbf{s}}^{(1)}}{\bar{\sigma}_{\text{eq}}}. \quad (3.30)$$

Les expressions du tenseur de Hill isotrope  $\mathbf{P}_{\mathbf{E}}^{(1)*}$  et du scalaire  $a^{(1)*}$  sont données par les relations (1.38) et (1.47) avec les modules de compressibilité et de cisaillement qui sont remplacés par ceux caractérisant le problème pseudo-élastique dans l'espace de Carson. Le module  $\mathbf{P}^*$  est un tenseur du quatrième ordre défini par (voir annexe E) :

$$\mathbf{P}^*(\xi) = \xi \otimes \mathbf{N}_{\text{iso}}^* \cdot u \otimes \mathbf{N}_{\text{iso}}^* \cdot u \otimes \xi, \quad \mathbf{N}_{\text{iso}}^* = \frac{1}{\mu^{(1)*} |\xi|^2} \left[ \boldsymbol{\delta} - a^{(1)*} \frac{\xi \otimes \xi}{|\xi|^2} \right], \quad u = \xi \cdot \hat{\boldsymbol{\alpha}}. \quad (3.31)$$

Pour déterminer la loi de comportement macroscopique dans l'espace temporel, nous allons décomposer le module effectif défini dans l'espace de Carson en une série de Dirichlet. Le développement en série de Dirichlet peut dans certaines situations être exact. C'est par exemple le cas lorsque le comportement tout comme la distribution spatiale des phases sont isotropes et que le modèle de Mori-Tanaka est utilisé pour estimer le module effectif. Dans le cas général, le module effectif (relation (3.28)) pour tout  $p$  est approximé selon :

$$\tilde{\mathbf{C}}_{\text{MT}}^*(p) \approx \tilde{\mathbf{C}}_{\text{MT}}^{(a)*}(p) = \sum_{j=1}^{N_c} \bar{\mathbf{C}}_j^{(a)} \frac{p}{p + \frac{1}{\bar{\tau}_j^{(a)}}} \quad (3.32)$$

Les coefficients  $\bar{\mathbf{C}}_j^{(a)}$  et les temps de relaxation  $\bar{\tau}_j^{(a)}$  (qui peuvent être choisis de manière arbitraire) sont identifiés à travers la méthode de collocation proposée par Schapery [62], qui consiste à minimiser l'erreur quadratique  $E_r$  entre la fonction exacte et la fonction approchée. Cette erreur est définie par :

$$E_r = \int_0^\infty [\tilde{\mathbf{C}}_{\text{MT}_{ijkl}}(t) - \tilde{\mathbf{C}}_{\text{MT}_{ijkl}}^{(a)}(t)]^2 dt, \quad \tilde{\mathbf{C}}_{\text{MT}}^{(a)}(t) = \sum_{j=1}^{N_c} \bar{\mathbf{C}}_j^{(a)} \exp\left(-\frac{t}{\bar{\tau}_j^{(a)}}\right), \quad (3.33)$$

avec le module effectif  $\tilde{\mathbf{C}}_{\text{MT}}^{(a)}$  dans l'espace temporel qui est obtenu en effectuant l'inverse de la transformée de Laplace-Carson de la relation (3.32). La minimisation de l'erreur quadratique par rapport aux coefficients  $\bar{\mathbf{C}}_j^{(a)}$  et aux temps caractéristiques  $\bar{\tau}_j^{(a)}$  conduit respectivement aux relations de collocation obtenues dans [100].

$$\tilde{\mathbf{C}}_{\text{MT}}^* \left( \bar{\tau}_j^{(a)} \right) = \tilde{\mathbf{C}}_{\text{MT}}^{(a)*} \left( \bar{\tau}_j^{(a)} \right) \quad \text{et} \quad \left. \frac{d\tilde{\mathbf{C}}_{\text{MT}}^*(p)}{dp} \right|_{p=\bar{\tau}_j^{(a)}} = \left. \frac{d\tilde{\mathbf{C}}_{\text{MT}}^{(a)*}(p)}{dp} \right|_{p=\bar{\tau}_j^{(a)}} \quad (3.34)$$

En définitive, pour obtenir une meilleure approximation de la fonction de relaxation originale, il est donc nécessaire que les modules effectifs  $\tilde{\mathbf{C}}_{\text{MT}}^*$  et  $\tilde{\mathbf{C}}_{\text{MT}}^{(a)*}$  ainsi que leurs dérivées soient égales aux différents points choisis. De plus, l'approximation est plus précise avec un nombre important de termes dans la série de Dirichlet. Néanmoins, le choix du nombre de termes dans la série doit être réalisé de façon astucieuse afin d'éviter les phénomènes d'oscillations.

Finalement, en substituant l'expression analytique du module effectif (relation (3.32)) dans la loi de comportement macroscopique (3.28), la contrainte effective dans l'espace de Carson peut s'écrire de la forme suivante.

$$\bar{\sigma}^*(p) = \bar{\mathbf{C}}_e : \left[ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(p) - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0^*(p) - \underbrace{\sum_{j=1}^{N_c} \frac{1}{p + \frac{1}{\bar{\tau}_j^{(a)}}} \bar{\mathbf{C}}_e^{-1} : \bar{\mathbf{C}}_j^{(a)} : (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(p) - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0^*(p))}_{\bar{\boldsymbol{\alpha}}_j^*(p)} \right] \quad \text{avec} \quad \bar{\mathbf{C}}_e = \sum_{j=1}^{N_c} \bar{\mathbf{C}}_j^{(a)}, \quad (3.35)$$

où  $\bar{\mathbf{C}}_e$  désigne le module effectif élastique. L'inversion de la transformée de Laplace-Carson permet d'obtenir l'évolution dans le temps de la contrainte macroscopique qui est exprimée par une formulation à variables internes :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \bar{\mathbf{C}}_e : \left( \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0(t) - \sum_{j=1}^{N_c} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j(t) \right), \quad (3.36)$$

où les  $N_c$  variables internes tensorielles  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_j(t)$  sont définies par :

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\alpha}}}_j(t) + \frac{1}{\bar{\tau}_j^{(a)}} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j(t) = \frac{1}{\bar{\tau}_j^{(a)}} \bar{\mathbf{C}}_e^{-1} : \bar{\mathbf{C}}_j^{(a)} : (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0(t)) \quad , \quad \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j(0) = 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq j \leq N_c \quad (3.37)$$

L'évolution du gonflement effectif dans l'espace temporel se déduit de la relation générale (1.58) [52] dont l'expression analytique dans l'espace de Carson, pour un composite constitué de  $N$  phases, s'écrit :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0^*(p) - \langle \boldsymbol{\varepsilon}_0^*(p) \rangle = \sum_{r=2}^N c^{(r)} (\mathbf{B}^{\text{T}^{(r)*}}(p) - \mathbf{I}) : (\boldsymbol{\varepsilon}_0^{(r)*}(p) - \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(1)*}(p)), \quad (3.38)$$

avec les expressions analytiques du tenseur de localisation des contraintes par phase qui sont explicitées dans l'annexe A.

Comme précédemment, le gonflement effectif dans l'espace temporel ne peut être déterminé de manière exacte en raison de l'anisotropie du tenseur d'élasticité et du tenseur de Hill dans la phase matricielle. Pour estimer l'évolution temporelle du gonflement effectif dans le cas biphasé, nous utilisons de même la décomposition en série Dirichlet en approximant la relation générale (3.38) pour ( $N = 2$ ) par :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0^*(p) - \langle \boldsymbol{\varepsilon}_0^*(p) \rangle = \underbrace{\sum_{j=1}^{N_c^{(b)}} \frac{1}{\bar{\tau}_{(b)j}^{(a)}} \frac{1}{p + \frac{1}{\bar{\tau}_{(b)j}^{(a)}}} \bar{\mathbf{B}}_{(b)j}^{(a)} : (\boldsymbol{\varepsilon}_0^{(2)*}(p) - \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(1)*}(p))}_{\bar{\boldsymbol{\alpha}}_j^{(b)*}(p)} \quad (3.39)$$

avec les coefficients  $\bar{\mathbf{B}}_{(b)j}^{(a)}$  et  $\bar{\tau}_{(b)j}^{(a)}$  qui sont déterminés à partir des relations de collocation obtenues par minimisation de la fonction erreur. Finalement, en effectuant l'inverse de la transformée de Laplace-Carson de la relation (3.39), on obtient l'évolution temporelle du gonflement effectif qui est également donnée par une formulation à variables internes selon :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0(t) - \langle \boldsymbol{\varepsilon}_0(t) \rangle = \sum_{j=1}^{N_c^{(b)}} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j^{(b)}(t), \quad (3.40)$$

où les  $\bar{\alpha}_j^{(b)}(t)$  sont des variables internes tensorielles dont les évolutions dans le temps sont régies par les équations différentielles suivantes :

$$\dot{\bar{\alpha}}_j^{(b)}(t) + \frac{1}{\bar{\tau}_{(b)j}^{(a)}} \bar{\alpha}_j^{(b)}(t) = \frac{1}{\bar{\tau}_{(b)j}^{(a)}} \bar{\mathbf{B}}_{(b)j}^{(a)} : (\boldsymbol{\varepsilon}_0^{(2)}(t) - \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(1)}(t)) \quad , \quad \bar{\alpha}_j^{(b)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq j \leq N_c^{(b)} \quad (3.41)$$

Dans le cas d'un composite constitué d'une matrice et de deux phases inclusionnaires ( $N = 3$ ), le gonflement effectif dans l'espace Carson (relation (3.38)) en utilisant la décomposition en série Dirichlet s'écrit :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0^*(p) - \langle \boldsymbol{\varepsilon}_0^*(p) \rangle = \underbrace{\sum_{r=2}^3 \sum_{j=1}^{N_c^{(r)}} \frac{1}{\bar{\tau}_{(r)j}^{(a)}} \frac{1}{p + \frac{1}{\bar{\tau}_{(r)j}^{(a)}}} \bar{\mathbf{B}}_{(r)j}^{(a)} : (\boldsymbol{\varepsilon}_0^{(r)*}(p) - \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(1)*}(p))}_{\bar{\alpha}_j^{(r)*}(p)} \quad (3.42)$$

Similairement au cas biphasé, les coefficients  $\bar{\mathbf{B}}_{(r)j}^{(a)}$  et  $\bar{\tau}_{(r)j}^{(a)}$  sont évalués à travers les relations de collocation déduites par optimisation de l'erreur quadratique entre la fonction originale et son approximation. Par l'inverse de la transformée de Laplace-Carson de la relation (3.42) on obtient :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0(t) - \langle \boldsymbol{\varepsilon}_0(t) \rangle = \sum_{j=1}^{N_c^{(2)}} \bar{\alpha}_j^{(2)}(t) + \sum_{j=1}^{N_c^{(3)}} \bar{\alpha}_j^{(3)}(t), \quad (3.43)$$

avec les variables internes tensorielles  $\bar{\alpha}_j^{(2)}(t)$  et  $\bar{\alpha}_j^{(3)}(t)$  qui sont solutions des équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\bar{\alpha}}_j^{(2)}(t) + \frac{1}{\bar{\tau}_{(2)j}^{(a)}} \bar{\alpha}_j^{(2)}(t) = \frac{1}{\bar{\tau}_{(2)j}^{(a)}} \bar{\mathbf{B}}_{(2)j}^{(a)} : (\boldsymbol{\varepsilon}_0^{(2)}(t) - \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(1)}(t)) \quad , \quad \bar{\alpha}_j^{(2)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq j \leq N_c^{(2)} \\ \dot{\bar{\alpha}}_j^{(3)}(t) + \frac{1}{\bar{\tau}_{(3)j}^{(a)}} \bar{\alpha}_j^{(3)}(t) = \frac{1}{\bar{\tau}_{(3)j}^{(a)}} \bar{\mathbf{B}}_{(3)j}^{(a)} : (\boldsymbol{\varepsilon}_0^{(3)}(t) - \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(1)}(t)) \quad , \quad \bar{\alpha}_j^{(3)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq j \leq N_c^{(3)} \end{cases} \quad (3.44)$$

## 1.2 Champs moyens par phase pour un composite biphasé

Dans le cas d'un composite biphasé les évolutions des moyennes déviatoriques dans chacune des phases ont été établies au paragraphe 2.2.1. (relation (3.17)). Les contraintes moyennes sphériques, pour une compressibilité visqueuse finie dans chacune des phases, sont identiques aux expressions analytiques (1.116) (chapitre 1 section V.). Lorsque la compressibilité visqueuse par phase devient infinie, les moyennes hydrostatiques ne peuvent être établies de manière exacte en raison du caractère anisotrope de la phase matricielle. Pour estimer ces moyennes par phase, il faut avoir recours à la méthode numérique de Schapery que nous avons présentée dans la section précédente relative aux estimations du comportement effectif. Étant donné que le passage à la limite dans ce cas particulier (1.116) conduit à une indétermination, les moyennes hydrostatiques par phase pour une compressibilité purement élastique ( $\kappa_v^{(r)} = \infty$ ) sont estimées à partir de la relation de localistaion établie dans l'annexe A.



## 1.3 Calcul des moyennes par phase pour un composite à trois phases

### 1.3.1. Moyennes sphériques

Les évolutions temporelles des contraintes moyennes sphériques dans le cas d'un composite à trois phases et pour une compressibilité visqueuse finie sont également similaires à celles obtenues dans la relation (1.122). Pour des matériaux à compressibilité purement élastiques, il convient d'utiliser la méthode numérique de Schappery pour estimer les contraintes moyennes hydrostatiques comme dans le cas biphasé.

### 1.3.2. Moyennes déviatoriques

Comme dans le cas précédent pour un composite biphasé, les moyennes déviatoriques dans les inclusions sont déterminées en se servant du principe de correspondance de Mandel. Étant donné que la souplesse de la phase matricielle reliant la moyenne de la vitesse de déformation visqueuse à la moyenne des contraintes déviatoriques est isotrope (relation (3.16)), les expressions des moyennes déviatoriques dans les inclusions peuvent être déterminées explicitement selon :

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{s}}^{(2)}(t) = \frac{2}{c^{(2)}} \left( \frac{1}{\mu_v^{(2)}} - \frac{1}{\mu_v^{(3)}} \right)^{-1} \left[ \dot{\bar{\mathbf{e}}}(t) - c^{(1)} \dot{\mathbf{e}}_0^{(1)}(t) - \frac{c^{(1)}}{2} \left( \frac{1}{\tilde{\mu}_v^{(1)}} - \frac{1}{\mu_v^{(3)}} \right) \bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t) - \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{\bar{\mathbf{s}}}(t)}{\mu_e} + \frac{\bar{\mathbf{s}}(t)}{\mu_v^{(3)}} \right) \right] \\ \bar{\mathbf{s}}^{(3)}(t) = \frac{2}{c^{(3)}} \left( \frac{1}{\mu_v^{(3)}} - \frac{1}{\mu_v^{(2)}} \right)^{-1} \left[ \dot{\bar{\mathbf{e}}}(t) - c^{(1)} \dot{\mathbf{e}}_0^{(1)}(t) - \frac{c^{(1)}}{2} \left( \frac{1}{\tilde{\mu}_v^{(1)}} - \frac{1}{\mu_v^{(2)}} \right) \bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t) - \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{\bar{\mathbf{s}}}(t)}{\mu_e} + \frac{\bar{\mathbf{s}}(t)}{\mu_v^{(2)}} \right) \right] \end{cases} \quad (3.45)$$

Les modules de cisaillement visqueux dans la matrice et dans les inclusions sont respectivement évalués autour de la fluctuation des champs ( $\tilde{\mu}_v^{(1)} = \tilde{\mu}_v^{(1)}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})$ ) et du premier moment des champs de contrainte ( $\mu_v^{(r)} = \mu_v^{(r)}(\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)})$ ,  $r = 2, 3$ ). L'expression de la contrainte moyenne déviatorique dans la matrice  $\bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t)$  est déterminée à l'aide de la méthode de collocation proposée par Schapery en partant de la relation de localisation suivante.

$$\bar{\mathbf{s}}^{(1)*}(p) = \mathbf{B}_d^{(1)*}(p) : \bar{\mathbf{s}}^*(p) + \mathbf{b}_d^{(1)*}(p), \quad (3.46)$$

où  $\mathbf{B}_d^{(1)*}$  et  $\mathbf{b}_d^{(1)*}$  désignent les déviateurs des tenseurs de localisation des contraintes des problèmes mécanique et thermique.

## 1.4 Évolution temporelle du second moment dans la matrice

Nous utilisons de nouveau le lemme de Hill [64] et la loi de comportement linéarisée pour déterminer l'évolution temporelle du second moment dans la matrice et ce, sur la base de certaines hypothèses simplificatrices. En effet, lorsque la partie sphérique de la contrainte locale dans la matrice et le champ de contrainte local dans les inclusions sont supposés homogènes, la loi d'évolution du second moment des contraintes dans la matrice (voir annexe B) s'écrit :

$$\frac{1}{4\mu_e} \dot{S}_1(t) + \frac{1}{2\mu_v^{(1)}(S_1, \bar{\mathbf{s}}^{(1)})} S_1(t) + \frac{3(n^{(1)} - 1)}{4\mu_v^{(1)}(S_1, \bar{\mathbf{s}}^{(1)})} \frac{\langle (\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) : \bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t))^2 \rangle^{(1)}}{(\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})^2} = N(t) \quad (3.47)$$

avec le second membre  $N(t)$  de l'équation différentielle qui est donnée par :

$$N(t) = \frac{1}{c^{(1)}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) : \overline{\boldsymbol{\sigma}}(t) - \overline{\boldsymbol{s}}^{(1)}(t) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0^{(1)}(t) - \sum_{r=2}^N \frac{c^{(r)}}{c^{(1)}} \left( \frac{1}{2\mu_e} \dot{\overline{\boldsymbol{s}}}^{(r)}(t) : \overline{\boldsymbol{s}}^{(r)}(t) + \frac{1}{2\mu_v^{(r)}(\overline{\boldsymbol{s}}^{(r)})} \overline{\boldsymbol{s}}^{(r)}(t) : \overline{\boldsymbol{s}}^{(r)}(t) \right) - \sum_{r=1}^N \frac{c^{(r)}}{c^{(1)}} \left( \frac{1}{\kappa_e} \dot{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_m^{(r)}(t) \overline{\boldsymbol{\sigma}}_m^{(r)}(t) + \frac{1}{\kappa_v^{(r)}} \overline{\boldsymbol{\sigma}}_m^{(r)}(t) \overline{\boldsymbol{\sigma}}_m^{(r)}(t) + 3\overline{\boldsymbol{\sigma}}_m^{(r)}(t) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{0m}^{(r)}(t) \right) \quad (3.48)$$

Le terme  $\langle (\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}, t) : \overline{\boldsymbol{s}}^{(1)}(t))^2 \rangle^{(1)}$  dans l'évolution du second moment de la phase matricielle est difficile à calculer. Ainsi, pour pouvoir représenter l'évolution temporelle du second moment dans la matrice, il faut avoir recours à des approximations.

## 2. Extension aux matériaux vieillissants

L'aspect vieillissant se caractérisant par une dépendance explicite en temps des propriétés mécaniques (modules élastiques et visqueuses), le principe est donc de considérer à nouveau que les modules élastiques et visqueuses et les projecteurs sont constants par pas de temps (démarche incrémentale), afin de se ramener au problème précédent puis de construire les évaluations temporelles du comportement macroscopique ainsi des champs moyens.

## 3. Conclusion

En raison de l'anisotropie du tenseur de Hill (3.30) associé à la matrice dans cette nouvelle approche de linéarisation (Affine amélioré), les expressions analytiques du comportement effectif ne peuvent être déterminées exactement. De plus, la contrainte de référence  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{eq}}^{(1)}$  (3.13) et l'évolution du second moment des champs de contrainte dans la matrice restent indéterminés à cause du terme  $\langle (\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}, t) : \overline{\boldsymbol{s}}^{(1)}(t))^2 \rangle^{(1)}$  qui est difficile à calculer. La formulation générale de l'approche "Affine Amélioré" reste donc un problème ouvert à l'issue de ce travail de thèse. Enfin il est primordial de noter que dans la formulation affine améliorée les projecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$  dépendent explicitement du temps.

Dans la section qui va suivre, nous allons présenter différentes approximations qui consistent à **isotropiser** la souplesse visqueuse  $\mathbf{M}_v^{(1)}$  dans la matrice de sorte que les propriétés à l'échelle macroscopique du composite puissent être estimées de manière explicite en utilisant le modèle de Mori-Tanaka et la formulation à variables internes.

## IV. Version isotrope de l'approche Affine amélioré

Nous avons vu que dans le cas d'une souplesse visqueuse anisotrope de la phase matricielle l'approche Affine amélioré ne conduit pas à une expression analytique de la contrainte de référence (3.13) et de l'évolution du second moment des champs de contrainte dans la matrice (3.47). Néanmoins, lorsque la souplesse visqueuse dans la matrice est isotrope ces quantités peuvent être calculées de manière explicite. De plus le caractère isotrope conduit à des inversions exactes de la transformée de Laplace-Carson et permet plus généralement de retrouver l'essentiel des équations d'évolution du modèle d'homogénéisation. L'objectif de cette section est de proposer une variante de l'approche Affine amélioré dans laquelle le tenseur des souplesses soit isotrope. L'approche Affine amélioré "**isotrope**" peut être définie de deux manières différentes. Pour les approches que nous allons considérer dans cette section, l'expression générale de la vitesse de déformation visqueuse linéarisée est exprimée par :

$$\dot{\mathbf{e}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\mu_e} \dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, t) + \widetilde{\mathbf{M}}_v^{(1)} : \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{e}}_0^{(1)} \quad (3.49)$$

La première approche consiste à négliger la partie anisotrope de la souplesse  $\mathbf{M}_v^{(1)}$  dans la matrice. Dans cette approche, la souplesse de la matrice est la projection de  $\mathbf{M}_v^{(1)}$  sur l'espace des tenseurs déviatoriques isotropes et est donnée par :

$$\widetilde{\mathbf{M}}_v^{(1)} : (\mathbf{M}_v^{(1)} :: \mathbf{K}) \mathbf{K} = \frac{n^{(1)} + 4}{5} \frac{1}{2\tilde{\mu}_v^{(1)}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \mathbf{K} \quad (3.50)$$

La deuxième approche consiste à supposer qu'en tout point de la matrice et à chaque instant, le déviateur de la contrainte locale est proportionnel à un tenseur d'ordre deux supposé homogène dans la phase matricielle ( $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) = \lambda(\mathbf{x}, t) \mathbf{d}$ ). Avec cette hypothèse, la souplesse visqueuse dans la matrice devient isotrope selon :

$$\widetilde{\mathbf{M}}_v^{(1)} = \frac{1}{2\tilde{\mu}_v^{(1)}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \mathbf{K} \quad (3.51)$$

En effet, en utilisant la relation (3.11) la vitesse de déformation visqueuse de la phase matricielle dans ce cas s'écrit :

$$\dot{\mathbf{e}}_v(\mathbf{x}, t) \simeq \frac{1}{2\tilde{\mu}_v^{(1)}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, t) + \frac{(n^{(1)} - 1)}{2\tilde{\mu}_v^{(1)}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \underbrace{\mathbf{E}^{(1)} : \mathbf{s}(\mathbf{x}, t)}_{\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)} = \frac{1}{2\tilde{\mu}_v^{(1)}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, t) \quad (3.52)$$

Revenons à l'hypothèse de colinéarité ( $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) = \lambda(\mathbf{x}, t) \mathbf{d}$ ). De manière générale tout tenseur symétrique d'ordre deux déviatorique s'exprime, dans la base principale, sous la forme (voir [101])

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) = \frac{2}{3} \sigma_{\text{eq}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{d}(\theta(\mathbf{x}, t)) \quad (3.53)$$

où  $\theta(\mathbf{x}, t)$  désigne l'angle de Lode qui est exprimé par :

$$\mathbf{d}(\theta) = \begin{pmatrix} -\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

Dans la deuxième approche nous allons faire l'hypothèse que l'angle de Lode est homogène dans la matrice  $\theta(\mathbf{x}, t) = \theta^{(1)}(t)$ . Cela revient à dire que le troisième invariant du tenseur des contraintes est homogène dans la matrice. Dans ce cas on obtient :

$$\bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t) = \frac{2}{3} \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}(t) \mathbf{d}(\theta^{(1)}(t)) \quad (3.55)$$

Le choix de la deuxième approche est finalement retenu car il permet de retrouver la souplesse isotrope associée à la réponse entre la moyenne de la vitesse de déformation visqueuse et celle des contraintes déviatoriques (relation (3.17)). La même hypothèse de colinéarité entre le déviateur du champ de contrainte  $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$  et le champ tensoriel du second ordre  $\mathbf{d}(\theta^{(1)})$  permet d'établir explicitement l'expression analytique de la contrainte de référence dans la matrice  $\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}$ . En effet nous avons :

$$\langle (\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) : \bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t))^2 \rangle^{(1)} \simeq (\bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t) : \bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t)) (\langle \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) : \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) \rangle^{(1)}) = \left( \frac{2}{3} \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}(t) \right)^2 \langle \sigma_{\text{eq}}^2(t) \rangle^{(1)}, \quad (3.56)$$

alors l'expression analytique de la contrainte de référence  $\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}$  se simplifie davantage et s'écrit :

$$(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})^2 = \left( \left( \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)} \right)^2 + 2 \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)} \sqrt{\left( \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)} \right)^2 - \left( \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)} \right)^2} \right). \quad (3.57)$$

Ainsi, nous allons considérer la deuxième approche (expression de la complaisance (3.51)) dans ce qui suit pour estimer les propriétés effectives du composite.

## 1. Cas des matériaux viscoélastiques linéaires non vieillissants (milieu linéaire de comparaison)

### 1.1 Comportement macroscopique

Dans les modèles "Sécant classique" et "Sécant modifié" les souplesses dans les phases sont isotropes et les inclusions sont distribuées de façon isotrope (forme sphérique de l'inclusion dans le problème d'Eshelby). Alors, le comportement effectif déduit du principe de correspondance et du modèle de Mori-Tanaka est exactement défini par une loi à variables internes. Dans cette nouvelle approche de linéarisation (Affine amélioré "**isotrope**" (relations (3.49) à (3.51))) le comportement effectif est également décrit par une formulation à variables internes.

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon}_m(t) = \frac{1}{3\kappa_e} \bar{\sigma}_m(t) + \bar{\varepsilon}_{0m}(t) + \sum_{j=1}^{N_p^m} \bar{\alpha}_j^m(t) \\ \bar{\mathbf{e}}(t) = \frac{1}{2\mu_e} \bar{\mathbf{s}}(t) + \bar{\mathbf{e}}_0(t) + \sum_{j=1}^{N_p^d} \bar{\alpha}_j^d(t) \end{cases} \quad (3.58)$$

Dans les modèles sécants classique et modifié, la déformation libre effective purement déviatorique est nulle ( $\bar{\mathbf{e}}_0(t) = 0$ ) et les lois d'évolution des variables internes  $\bar{\alpha}_j^m(t)$  ainsi que le gonflement effectif sphérique  $\bar{\varepsilon}_{0m}(t)$  sont bien explicitées au chapitre 1 (relations 1.109 à 1.113). Les lois d'évolutions de ces variables internes restent inchangées dans cette nouvelle approche de linéarisation. En revanche le module de cisaillement visqueux de la matrice est donné dans la relation (3.16) ( $\tilde{\mu}_v^{(1)} = \mu_v^{(1)}/n^{(1)}$ ) et l'équation différentielle dont  $\bar{\alpha}_j^d(t)$  est solution devient :

$$\dot{\bar{\alpha}}_j^d(t) + \frac{1}{\bar{\tau}_j^d} \bar{\alpha}_j^d(t) = \frac{1}{\bar{\tau}_j^d} \frac{\mu_{\bar{\tau}_j^d}}{\mu_e} (\bar{\mathbf{e}}(t) - \bar{\mathbf{e}}_0(t)) \quad , \quad 1 \leq j \leq N_j^d \quad , \quad \bar{\alpha}_j^d(0) = 0 \quad (3.59)$$

Quant à l'évolution dans le temps du gonflement effectif  $\bar{e}_0(t)$  relatif à la partie déviatorique, elle se déduit de la relation générale (3.38) définie dans l'espace de Carson. En effet, si on considère un composite à trois phases alors on a :

$$\bar{e}_0^*(p) - c^{(1)} e_0^{(1)*}(p) = c^{(1)} \left( B_d^{(1)*}(p) - 1 \right) e_0^{(1)*}(p) = \sum_{j=1}^4 l_j^{(\gamma)} \frac{1}{p + \frac{1}{\bar{\tau}_j^{(\gamma)}}} e_0^{(1)*}(p) \quad (3.60)$$

avec le tenseur de localisation des contraintes  $B_d^{(1)*}(p)$  dans l'espace de Carson qui s'écrit en utilisant la relation (A.10) :

$$B_d^{(1)*}(p) = \frac{1}{c^{(1)} + 5(3\kappa_e + 4\tilde{\mu}^{(1)*}) \sum_{r=2}^3 \frac{c^{(r)} \mu^{(r)*}}{5\mu^{(r)*}(3\kappa_e + 4\tilde{\mu}^{(1)*}) + (9\kappa_e + 8\tilde{\mu}^{(1)*})(\tilde{\mu}^{(1)*} - \mu^{(r)*})}}$$

Les expressions des modules de cisaillement visqueux dans les inclusions sont identiques à celles obtenues dans les modèles Sécants classique et modifié (relation (1.102)). En revanche le module de cisaillement visqueux  $\tilde{\mu}_v^{(1)}$  associé à la matrice est donné à la relation (3.27). Ainsi la nouvelle expression du module de cisaillement de la phase matricielle dans l'espace de Carson s'écrit :

$$\frac{1}{\mu^{(1)*}(p)} = \frac{1}{\mu_e} + \frac{1}{p\tilde{\mu}_v^{(1)}}$$

La relation (3.60) étant décomposée en une somme de fractions rationnelles simples, le gonflement effectif dans l'espace temporel et pour un composite à trois phases est obtenu en procédant à la transformée inverse de Laplace-Carson.

$$\bar{e}_0(t) - c^{(1)} e_0^{(1)}(t) = \sum_{j=1}^4 \gamma_j^d(t), \quad (3.61)$$

avec les champs tensoriels  $\gamma_j^d(t)$  qui désignent des variables internes dont les lois d'évolution sont régies par une équation différentielle du premier ordre avec second membre.

$$\dot{\gamma}_j^d(t) + \frac{1}{\bar{\tau}_j^{(\gamma)}} \gamma_j^d(t) = l_j^{(\gamma)} e_0^{(1)}(t) \quad , \quad 1 \leq j \leq 4 \quad , \quad \gamma_j^d(0) = 0 \quad (3.62)$$

Les expressions analytiques des  $\bar{\tau}_j^{(\gamma)}$  et de  $l_j^{(\gamma)}$  sont données dans l'annexe F.

Dans le cas des matériaux à compressibilité purement élastiques caractérisés par un module de compressibilité visqueux infini ( $\kappa_v^{(r)} = \infty$ ), les variables internes purement sphériques deviennent nulles et le gonflement effectif sphérique se réduit au gonflement moyen. Ainsi la loi de comportement macroscopique dans l'approche Affine amélioré "isotrope" est donnée par la relation suivante.

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon}_m(t) = \frac{1}{3\kappa_e} \bar{\sigma}_m(t) + \langle \varepsilon_{0m}(t) \rangle \\ \bar{\mathbf{e}}(t) = \frac{1}{2\mu_e} \bar{\mathbf{s}}(t) + \bar{\mathbf{e}}_0(t) + \sum_{j=1}^{N_p^d} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j^d(t) \\ \dot{\bar{\boldsymbol{\alpha}}}_j^d(t) + \frac{1}{\bar{\tau}_j^d} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j^d(t) = \frac{1}{\bar{\tau}_j^d} \frac{\mu_{\bar{\tau}_j^d}}{\mu_e} \bar{\mathbf{e}}(t) \quad , \quad 1 \leq j \leq N_p^d \quad , \quad \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j^d(0) = 0 \end{cases} \quad (3.63)$$

## 1.2 Champs moyens par phase pour un composite biphasé

Pour un composite biphasé, les contraintes moyennes hydrostatiques par phase pour un Milieu Linéaire de Comparaison macroscopiquement isotrope sont similaires à celles établies dans le chapitre 1 (section IV. paragraphe 2.2.1.). Lorsque le module de compressibilité visqueux est infini (matériaux à compressibilité purement élastique), les moyennes hydrostatiques par phase sont estimées avec le modèle de Mori-Tanaka et sont données par :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\delta\bar{\sigma}_m^{(1)}(t)) + \frac{1}{\tilde{\tau}_\gamma}(\delta\bar{\sigma}_m^{(1)}(t)) = \frac{3c^{(2)}}{\left(\frac{1}{\kappa_e} + \frac{3}{4\mu_e}\right)}(\dot{\varepsilon}_{0m}^{(2)}(t) - \dot{\varepsilon}_{0m}^{(1)}(t)) \\ \frac{d}{dt}(\delta\bar{\sigma}_m^{(2)}(t)) + \frac{1}{\tilde{\tau}_\gamma}(\delta\bar{\sigma}_m^{(2)}(t)) = \frac{3c^{(1)}}{\left(\frac{1}{\kappa_e} + \frac{3}{4\mu_e}\right)}(\dot{\varepsilon}_{0m}^{(1)}(t) - \dot{\varepsilon}_{0m}^{(2)}(t)) \end{cases} \quad (3.64)$$

avec :  $\delta\bar{\sigma}_m^{(r)}(t) = \bar{\sigma}_m^{(r)}(t) - \bar{\sigma}_m(t)$ ,  $r = 1, 2$

Quant aux expressions analytiques des moyennes déviatoriques par phase, elles sont équivalentes à celles obtenues précédemment pour des milieux dont le comportement de la matrice est anisotrope (relation (3.17)).

## 1.3 Champs moyens par phase pour un composite à trois phases

### 1.3.1. Moyennes sphériques

Lorsque la compressibilité visqueuse est finie, les contraintes moyennes sphériques dans chacune des phases restent inchangées et sont données par les relations (1.122) et (1.124) (chapitre 1). Néanmoins pour une compressibilité purement élastique ( $\kappa_v^{(r)} = \infty$ ), les évolutions des moyennes hydrostatiques, estimées avec le modèle de Mori-Tanaka, s'écrivent :

$$\frac{d}{dt}(\delta\bar{\sigma}_m^{(r)}(t)) + \frac{1}{\tilde{\tau}_\gamma}(\delta\bar{\sigma}_m^{(r)}(t)) = \frac{12\kappa_e\mu_e}{3\kappa_e + 4\mu_e} \sum_{q \neq r} c^{(q)} \left( \dot{\varepsilon}_{0m}^{(q)}(t) - \dot{\varepsilon}_{0m}^{(r)}(t) \right) \quad , \quad r = 1, 2, 3 \quad (3.65)$$

avec le temps caractéristique qui est donné à la relation (3.21). Comme nous l'avons vu précédemment pour un composite biphasé, la pente dans le cas d'un composite à trois phases est également plus forte dans le modèle "Affine amélioré" donc les contraintes hydrostatiques seront plus relaxées dans cette approche que dans les approches sécantes classique et modifié.

### 1.3.2. Moyennes déviatoriques

Dans le cas d'un composite à trois phases, les contraintes moyennes déviatoriques dans les inclusions sont similaires aux expressions analytiques établies pour des matériaux ayant un comportement anisotrope dans la phase matricielle (relation (3.45)). En revanche, la contrainte moyenne déviatorique de la phase matricielle, dans ce cas isotrope, peut être déterminé de manière exacte en utilisant les tenseurs de localisations de contrainte, solutions du problème mécanique et thermique dans l'espace de Carson. En effet, la contrainte moyenne déviatorique de la phase matricielle dans l'espace de Carson est donnée par :

$$\bar{\mathbf{s}}^{(1)*}(p) = B_d^{(1)*}(p) \bar{\mathbf{s}}^*(p) + b_d^{(1)*}(p) \quad (3.66)$$

Les expressions analytiques des tenseurs de localisation des contraintes dans le cas isotrope sont bien explicitées dans l'annexe A. En raison de la déformation supplémentaire  $\mathbf{e}_0^{(1)*}$  dans la relation de localisation (3.49), la moyenne du déviateur des contraintes  $\bar{\mathbf{s}}^{(1)*}(p)$  solution du problème est la superposition de la solution du problème purement mécanique et de la solution du problème purement thermique. La solution du problème purement mécanique étant déjà établie dans le chapitre 1 (relation (1.127)), nous décomposons ici le tenseur de localisation des contraintes du problème thermique en une somme de fractions simples selon :

$$\mathbf{b}_d^{(1)*}(p) = \sum_{j=1}^4 l_j^{(\beta)} \frac{p}{p + \frac{1}{\bar{\tau}_j^{(\beta)}}} \mathbf{e}_0^{(1)*}(p) \quad (3.67)$$

Les coefficients  $l_j^\beta$  et les temps caractéristiques  $\bar{\tau}_j^\beta$  sont déterminés en utilisant l'expression analytique du tenseur de localisation  $\mathbf{b}_d^{(1)*}(p)$  dans l'espace de Carson (voir annexe A) qui est donnée par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_d^{(1)*}(p) &= - (c^{(2)} \alpha^{(2)*}(p) + c^{(3)} \alpha^{(3)*}(p)) \mathbf{e}_0^{(1)*}(p) \\ \alpha^{(2)*} &= \frac{2\mu^{(1)*} \mu^{(2)*} (1 - S^{(1)*})}{\left[ \mu^{(1)*} + S^{(1)*} (\mu^{(2)*} - \mu^{(1)*}) \right] \left[ c^{(1)} + \frac{c^{(3)} \mu^{(3)*}}{\mu^{(1)*} + S^{(1)*} (\mu^{(3)*} - \mu^{(1)*})} \right] + c^{(2)} \mu^{(2)*}} \\ \alpha^{(3)*} &= \frac{2\mu^{(1)*} \mu^{(3)*} (1 - S^{(1)*})}{\left[ \mu^{(1)*} + S^{(1)*} (\mu^{(3)*} - \mu^{(1)*}) \right] \left[ c^{(1)} + \frac{c^{(2)} \mu^{(2)*}}{\mu^{(1)*} + S^{(1)*} (\mu^{(2)*} - \mu^{(1)*})} \right] + c^{(3)} \mu^{(3)*}} \\ S^{(1)*} &= \frac{5 \kappa_e + 2\mu^{(1)*}}{6 \kappa_e + 4\mu^{(1)*}} \end{aligned}$$

Finalement, l'expression de la contrainte moyenne déviatorique  $\bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t)$  dans la phase matricielle s'obtient en procédant à l'inverse de la transformée de Laplace-Carson de la relation (3.66). Elle est exprimée par :

$$\bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t) = 2\mu_e \left[ \bar{\mathbf{e}}(t) - \bar{\mathbf{e}}_0(t) - \sum_{j=1}^8 \frac{l_{\hat{\tau}_{1j}}^d}{\mu_{\hat{\tau}_j^d}} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j^d(t) - \bar{\boldsymbol{\beta}}_{1a}^d(t) - \bar{\boldsymbol{\beta}}_{1b}^d(t) \right] + \sum_{j=1}^4 \bar{\boldsymbol{\beta}}_j^d(t) \quad (3.68)$$

Les lois d'évolution des variables internes  $\bar{\boldsymbol{\beta}}_{1a}^d(t)$  et  $\bar{\boldsymbol{\beta}}_{1b}^d(t)$  dans cette nouvelle approche de linéarisation s'écrivent :

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\beta}}}_{1a/b}^d(t) + \frac{1}{\hat{\tau}_{1a/b}^d} \bar{\boldsymbol{\beta}}_{1a/b}^d(t) = \frac{1}{\hat{\tau}_{1a/b}^d} \frac{l_{\hat{\tau}_{1a/b}}^d}{\mu_e} \left( \bar{\mathbf{e}}(t) - \bar{\mathbf{e}}_0(t) \right) \quad , \quad \bar{\boldsymbol{\beta}}_{1a/b}^d(t) = 0 \quad (3.69)$$

avec le gonflement effectif  $\bar{\mathbf{e}}_0(t)$  qui est donné à la relation (3.61). Les nouvelles variables internes  $\bar{\boldsymbol{\beta}}_j^d(t)$ , solutions du problème purement thermique, sont régies par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\beta}}}_j^d(t) + \frac{1}{\bar{\tau}_j^{(\beta)}} \bar{\boldsymbol{\beta}}_j^d(t) = l_j^{(\beta)} \dot{\mathbf{e}}_0^{(1)}(t) \quad , \quad 1 \leq j \leq 4 \quad , \quad \boldsymbol{\beta}_j^d(0) = 0 \quad (3.70)$$

Les expressions des temps de relaxation  $\bar{\tau}_j^{(\beta)}$  sont les mêmes que celles obtenues dans loi de comportement relative au gonflement effectif  $\bar{\epsilon}_0(t)$  ( $\bar{\tau}_j^{(\beta)} = \bar{\tau}_j^{(\gamma)}$ ) et les expressions des scalaires  $l_j^{(\beta)}$  sont reportées dans l'annexe F :

Dans cette nouvelle approche de linéarisation, la solution du problème mécanique est analogue à celle obtenue dans le modèle Sécant modifié avec le module de cisaillement de la matrice  $\mu_v^{(1)}$  qui est remplacé ici par  $\tilde{\mu}_v^{(1)}$ .

## 1.4 Évolution temporelle du second moment dans la matrice

Dans le cas d'un composite à  $N$  phases l'évolution du second moment des champs de contrainte dans la matrice, lorsque le comportement des phases est isotrope, est régie par l'équation différentielle non linéaire suivante.

$$\frac{1}{4\mu_e} \dot{S}_1(t) + \frac{1}{2\tilde{\mu}_v^{(1)}(S_1, \bar{\mathbf{s}}^{(1)})} S_1(t) = N(t) \quad (3.71)$$

avec le second membre  $N(t)$  de l'équation différentielle qui est donnée à la relation (3.48).

Tout comme les contraintes moyennes hydrostatiques par phase dans le cas d'un composite à trois phases (relation (3.65)), la pente à l'origine dans les équations du second moment (3.71) est plus forte dans le modèle "Affine amélioré" que dans le modèle Sécant modifié (pour un composite à trois phases,  $N = 3$ ). On s'attend aussi à une relaxation plus rapide du second moment dans la matrice avec le modèle "Affine amélioré".

La résolution du problème dans le cas des matériaux à compressibilité purement élastique, à travers une méthode implicite, est bien détaillée dans le chapitre suivant (section II.).



## V. Comparaisons des modèles par rapport aux simulations

Pour évaluer la pertinence de l'approche Affine amélioré dans le cadre général relatif à la version isotrope, nous comparons ici les résultats issus du modèle d'homogénéisation construit par rapport à des solutions de référence (calculs FFT) pour d'autres cas de chargement considérés (essais de fluage uniaxial et à différentes triaxialités, chargement thermo-mécanique). La fraction volumique des inclusions considérée dans cette étude comparative est de 15% et le module de compressibilité par phase est purement élastique ( $\kappa_v^{(r)} = \infty$ ) comme dans le cas de chargement de type gonflements différentiels. Les propriétés caractéristiques du matériau sont les mêmes que celles utilisées en section 3. pour le chargement de tye gonflements différentiels. En particulier, la non linéarité est modérée et égale à 4.

Enfin nous présentons pour chaque situation les deux variantes associées à l'approche "Affine amélioré" (contrainte de référence égale au second moment ou à la fluctuation des champs de contrainte)

### 1. Chargements purement mécaniques

L'étude du cas de chargement purement thermique (chargement de gonflements différentiels) étant déjà réalisée à la section II., étude dans laquelle l'approche "Affine amélioré" donne des résultats meilleurs par rapport aux autres approches, nous présentons dans ce paragraphe les résultats dérivant de ces différentes approches (Sécant modifié et Affine amélioré) pour des chargements purement mécaniques. Les chargements mécaniques considérés ici sont relatifs à un essai de fluage uniaxial puis à des essais de fluage à différentes triaxialités, la triaxialité étant le rapport entre la contrainte hydrostatique et la contrainte équivalente de Von Mises ( $X = \frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}$ ).

#### 1.1 Essai de fluage uniaxial

Dans cet essai, le volume élémentaire est soumis à une traction simple suivant la direction 3, le chargement étant maintenu constant ( $\bar{\sigma}_{33} = 100$  MPa). Dans ce cas de chargement la triaxialité des contraintes macroscopiques vaut :  $X = \frac{\bar{\sigma}_m}{\bar{\sigma}_{eq}} = \frac{1}{3}$  et la réponse relative à la partie sphérique est purement élastique et homogène en raison des propriétés élastiques qui sont homogènes. Ainsi les contraintes moyennes hydrostatiques par phase sont constantes et égales à la contrainte macroscopique hydrostatique imposée ( $\bar{\sigma}_m^{(1)}(t) = \bar{\sigma}_m^{(2)}(t) = \bar{\sigma}_m(t) = \frac{1}{3} \bar{\sigma}_{33}$ ).

Sur la figure 3.5, nous représentons les estimations des moyennes par phase de la contrainte équivalente et du second moment des champs de contraintes dans la matrice, obtenues avec les approches "Sécant modifié" et "Affine amélioré". Ces estimations sont comparées avec une solution de référence basée sur des calculs FFT réalisés sur des microstructures périodiques générées en utilisant l'algorithme RSA (voir chapitre 2).

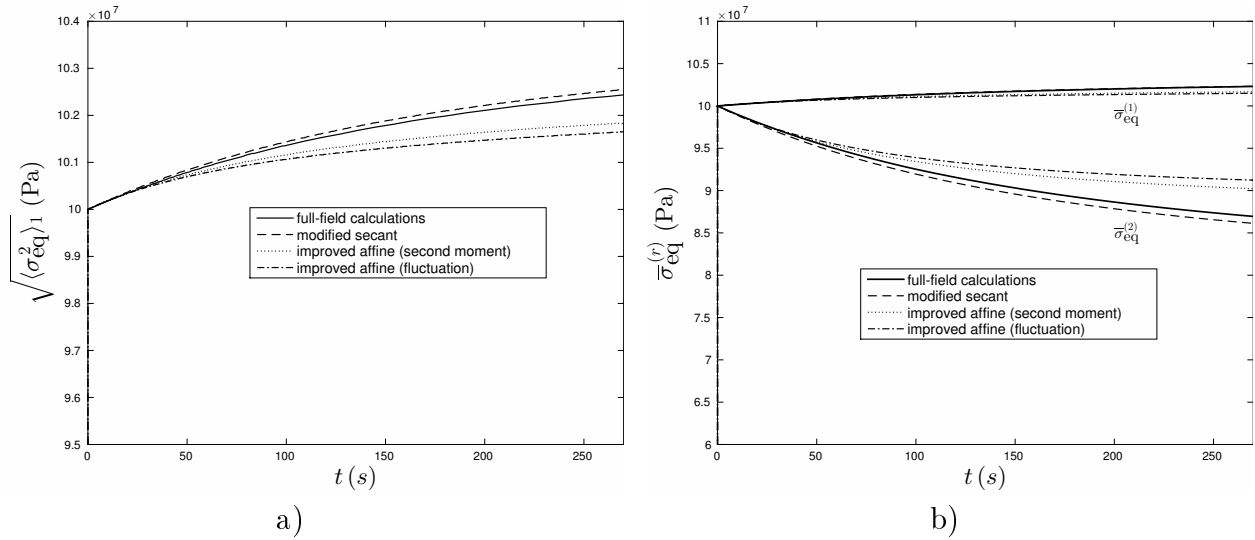


FIGURE 3.5 – Évolutions temporelles des premiers moments par phase et du second moment des champs de contrainte dans la matrice : comparaison des résultats issus de calculs FFT aux modèles Sécant modifié et Affine amélioré.

A l'instant initial la réponse est purement élastique et homogène. En effet, lorsque les propriétés élastiques par phase sont homogènes les contraintes locales déviatoriques deviennent homogènes ( $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{s}}$ ) et les moyennes par phase de la contrainte équivalente (figure 3.5 b)) dans ce cas sont égales ( $\sigma_{\text{eq}}^{(1)} = \sigma_{\text{eq}}^{(2)}$ ). L'homogénéité des propriétés élastiques fait aussi que le second moment des champs de contrainte de la phase matricielle (figure 3.5 a)) à l'instant initial se réduit au premier moment des champs de contrainte ( $\langle \mathbf{s}(\mathbf{x}) : \mathbf{s}(\mathbf{x}) \rangle^{(1)} = \langle \mathbf{s}(\mathbf{x}) \rangle^{(1)} : \langle \mathbf{s}(\mathbf{x}) \rangle^{(1)}$ ).

Nous notons aussi que les résultats dérivant de l'approche Sécant modifié sont en bon accord avec les calculs FFT comparés aux estimations obtenues avec l'approche Affine amélioré. En effet, dans l'approche Affine amélioré la souplesse visqueuse de la phase matricielle associée au Milieu Linéaire de Comparaison est très souple, ce qui conduit à une relaxation rapide des premiers et seconds moments des contraintes pour les différents choix de linéarisation proposés. Le choix d'une linéarisation s'appuyant sur la fluctuation des champs de contrainte fournit des estimations faibles, estimations qui peuvent être quantitativement améliorées lorsque la souplesse visqueuse de phase matricielle est évaluée autour du second moment des contraintes. En revanche, dans le modèle Sécant modifié les premiers moments par phase ainsi que le second moment de la phase matricielle relaxent moins vite mais restent assez proches de ceux résultant des calculs FFT. Nous retenons donc que dans le cas d'un essai de fluage uniaxial, l'approche "Sécant modifié" est plus pertinente car elle reproduit au mieux les résultats fournis par les calculs FFT.

## 1.2 Essai de fluage à différentes triaxialités

Nous évaluons ici les modèles de linéarisation Sécant modifié et Affine amélioré pour différents taux de triaxialités des contraintes macroscopiques ( $X = \frac{\bar{\sigma}_m}{\bar{\sigma}_{\text{eq}}}$ ), le chargement appliqué sur le bord du volume élémentaire étant de la forme suivante :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\bar{\sigma}_{\text{eq}}}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \bar{\sigma}_m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

La contrainte macroscopique équivalente est fixée quelque soit les valeurs de triaxialité prises et sa valeur numérique vaut :  $\bar{\sigma}_{\text{eq}} = 0.3 \text{ GPa}$ .

### 1.2.1. Chargement purement hydrostatique ( $X = \infty$ )

Dans ce cas particulier, la solution est triviale : le champ de contrainte est purement hydrostatique en tout point du VER. Il est de plus constant et égal à la contrainte hydrostatique macroscopique imposée tandis que le champ de déformation (et de déplacement) est le champ élastique associé à cet état de contrainte. Les différents modèles de linéarisation conduisent également à cette solution élastique (cisaillements nuls, modules de cisaillement visqueux par phase infinis :  $\mu_v^{(1)} = \mu_v^{(2)} = \infty$ ).

### 1.2.2. Cisaillement pur ( $X = 0$ )

Lorsque le chargement appliqué est de type cisaillement pur, les contraintes moyennes hydrostatiques par phase qui sont égales à la contrainte macroscopique hydrostatique s'annulent.

Sur la figure 3.6 nous représentons pour ce chargement de cisaillement pur ( $X = 0$ ) les évolutions temporelles des moyennes par phase de la contrainte équivalente et du second moment dans la matrice relatives aux approches "Sécant modifié" et "Affine amélioré", estimations qui sont comparées avec les résultats de calculs FFT.

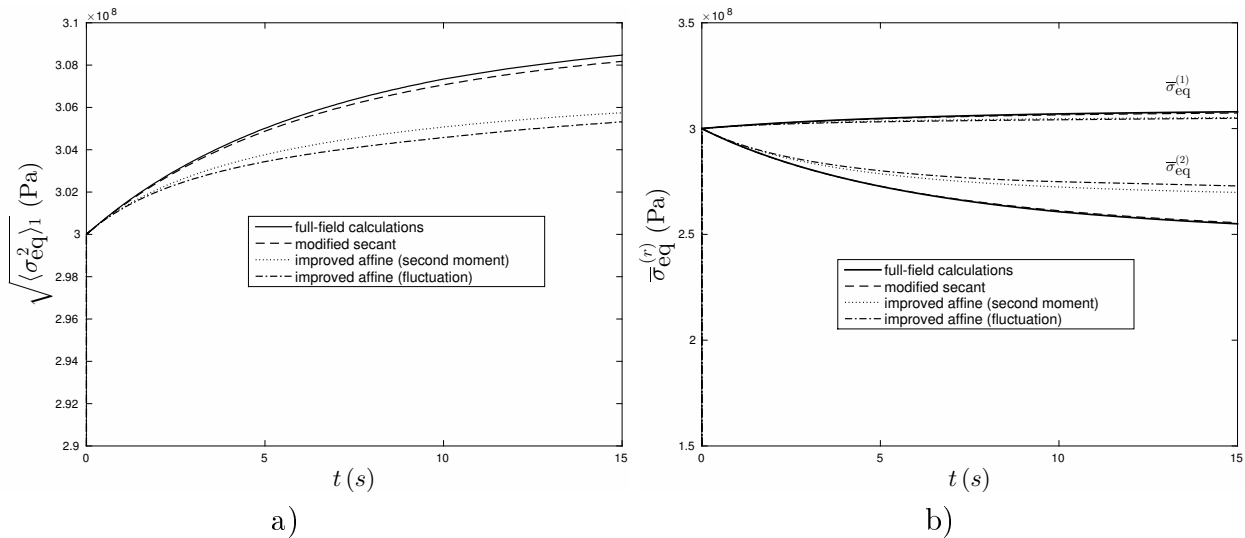


FIGURE 3.6 – Évolutions temporelles des premiers moments par phase et du second moment des champs de contrainte dans la matrice pour un cisaillement pur : comparaison des résultats issus de calculs FFT aux approches Sécante modifié et Affine amélioré.

Concernant les évolutions des premiers moments par phase et du second moment dans la matrice, nous constatons que le modèle Sécant modifié reproduit qualitativement les résultats obtenus à partir de calculs FFT. Cependant l'Approche Affine amélioré fournit des estimations moins satisfaisantes dues à la forte souplesse de la complaisance de la phase matricielle qui conduit à une relaxation très rapide des contraintes. Comme dans l'essai de fluage le choix de la linéarisation de la souplesse visqueuse dans la matrice, s'effectuant autour du second moment dans l'approche Affine amélioré, donne des résultats meilleurs par rapport au choix porté sur la fluctuation des champs de contrainte.

### 1.2.3. Triaxialités intermédiaires

Pour une contrainte équivalente macroscopique imposée  $\bar{\sigma}_{eq}$  et une triaxialité nulle, nous notons  $\hat{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  et  $\hat{u}(\mathbf{x}, t)$  les champs de contrainte et de déplacement solutions du problème (3.1). Pour cette même contrainte équivalente macroscopique imposée et un taux de triaxialité  $X$  donné, nous remarquons que le champ de contrainte défini en tout point du VER par :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) + X \bar{\sigma}_{eq} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

est statiquement admissible. Considérons par ailleurs le champ de déplacement défini par :

$$u(\mathbf{x}, t) = \hat{u}(\mathbf{x}, t) + \frac{X \bar{\sigma}_{eq}}{3\kappa_e} \mathbf{x} \quad (3.74)$$

A l'instant initial ( $t = 0$ ), le champ de contrainte et de déplacement constituent bien la solution élastique (superposition). Pour des instants ultérieurs, la dérivée temporelle du champ de déplacement est égale à celle du champ de déplacement  $\hat{u}$  solution du cas cisaillement pur. Ainsi donc la dérivée temporelle du champ de déformation associé à ce champ de déplacement satisfait bien la loi de comportement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon}_m(\mathbf{x}, t) = 0 = \frac{1}{3\kappa_e(t)} \dot{\sigma}_m(\mathbf{x}, t) \\ \dot{\epsilon}(\mathbf{x}, t) = \dot{\hat{\epsilon}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\mu_e(t)} \dot{\hat{\mathbf{s}}}(\mathbf{x}, t) + \dot{\epsilon}_v(\hat{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, t)) \\ \quad = \frac{1}{2\mu_e(t)} \dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, t) + \dot{\epsilon}_v(\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)) \end{array} \right. \quad (3.75)$$

Pour une contrainte équivalente macroscopique donnée, les champs solutions du cas  $X = 0$  permettent donc de déterminer les champs pour une triaxialité quelconque. Les deux champs de contrainte diffèrent d'un terme purement hydrostatique de sorte que les champs de cisaillement sont indépendants de  $X$ . Quel que soit cette triaxialité les évolutions temporelles des premiers et second moments de ces champs tels que calculés par FFT seront donc identiques à celles déterminées pour  $X = 0$  (voir les courbes résultats ci-dessus).

Qu'en est-il des estimations obtenues par les méthodes Sécantes modifiées ou Affine améliorées ? Prenons pas exemple la variante de l'approche Affine améliorée ayant comme contrainte de référence le moment d'ordre deux des contraintes. Notons  $\bar{\sigma}_{eq}^{(1)}(t)$ ,  $\bar{\sigma}_{eq}^{(1)}(t)$  et  $\bar{\sigma}_{eq}^{(2)}(t)$  les évolutions temporelles des cisaillements dans la matrice et dans les inclusions pour une triaxialité nulle. A  $t = 0$  (solution élastique), ces cisaillements sont identiques quel que soit la triaxialité. Seules les contraintes hydrostatiques moyennes par phase dépendent de la triaxialité. Elles sont même indépendantes du temps et égales à la contrainte hydrostatique macroscopique. Donc les caractéristiques visqueuses du milieu linéaire de comparaison (les modules de cisaillement visqueux de ce milieu viscoélastique linéaire) ne dépendent pas de la triaxialité à  $t = 0$ .

Les lois d'évolutions temporelles de ces trois variables scalaires sont données par les relations (3.17) (premiers moments dans chaque phase) et (3.71) (second moment dans la matrice). (3.17) définit l'évolution de la moyenne par phase du déviateur des contraintes dans la matrice et dans les inclusions. Ces deux relations ne dépendent que des déviateurs des déformations et contrainte macroscopiques ainsi que des propriétés du milieu linéaire de comparaison.

L'évolution temporelle du second moment des contraintes dans la matrice 3.71 dépend aussi des caractéristiques du milieu linéaire de comparaison ainsi que d'un second membre défini par la relation (3.48) qui se simplifie dans le cas considéré ici selon :

$$N(t) = \frac{1}{c^{(1)}} \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}(t) : \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) - \bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t) : \dot{\mathbf{e}}_0^{(1)}(t) - \frac{c^{(2)}}{c^{(1)}} \frac{1}{\kappa_e} \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_m^{(2)}(t) \bar{\boldsymbol{\sigma}}_m^{(2)}(t) - \frac{c^{(2)}}{c^{(1)}} \left( \frac{1}{2\mu_e} \dot{\bar{\mathbf{s}}}^{(2)}(t) : \bar{\mathbf{s}}^{(2)}(t) + \frac{1}{2\mu_v^{(r)}(\bar{\mathbf{s}}^{(2)})} \bar{\mathbf{s}}^{(2)}(t) : \bar{\mathbf{s}}^{(2)}(t) \right) \quad (3.76)$$

Pour un taux de triaxialité donné, la contrainte hydrostatique macroscopique est constante et égale à  $X\bar{\sigma}_{\text{eq}}$ . Donc la dilatation macroscopique associée est elle même constante et égale  $\frac{X\bar{\sigma}_{\text{eq}}}{3\kappa_e}$ . Donc dans l'expression précédente :  $\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}(t) : \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \dot{\bar{\mathbf{e}}}(t) : \bar{\mathbf{s}}(t)$ . De même, les contraintes hydrostatiques moyennes par phase sont constantes et égales à la contrainte hydrostatique moyenne de sorte que leurs dérivées temporelles sont nulles. L'expression précédente du second membre de l'équation différentiel (3.48) se simplifie pour donner :

$$N(t) = \frac{1}{c^{(1)}} \dot{\bar{\mathbf{e}}}(t) : \bar{\mathbf{s}}(t) - \bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t) : \dot{\mathbf{e}}_0^{(1)}(t) - \frac{c^{(2)}}{c^{(1)}} \left( \frac{1}{2\mu_e} \dot{\bar{\mathbf{s}}}^{(2)}(t) : \bar{\mathbf{s}}^{(2)}(t) + \frac{1}{2\mu_v^{(r)}(\bar{\mathbf{s}}^{(2)})} \bar{\mathbf{s}}^{(2)}(t) : \bar{\mathbf{s}}^{(2)}(t) \right) \quad (3.77)$$

expression qui montre clairement que ce scalaire  $N(t)$  ne dépend pas non plus du taux de triaxialité. Finalement, comme les inconnues associées au modèle Affine amélioré (moments d'ordre un et deux des cisaillements) ne dépendent pas de la triaxialité à  $t = 0$  et comme leurs lois d'évolutions temporelles n'en dépendent pas non plus, ces fonctions du temps ne dépendent pas du taux de triaxialité. Un raisonnement similaire conduit au même résultat pour l'autre variante de l'Affine amélioré ou encore le modèle Sécant modifié.

En conclusion, pour une contrainte équivalente macroscopique donnée, les écarts entre calcul champ complet et estimations reportées dans le paragraphe précédent ( $X = 0$ ) seront identiques pour des valeurs intermédiaires du taux de triaxialité. A noter que ces écarts dépendent en revanche bien de la valeur de la contrainte équivalente macroscopique retenue pour les simulations, ce qui explique les courbes différentes obtenues dans le cas d'un fluage uniaxial et d'un cisaillement pur (les contraintes équivalentes macroscopiques associées à ces deux simulations étant différentes).

### 1.3 Conclusion

Nous venons d'évaluer dans ce paragraphe les prédictions des modèles "Secant modifié" et "Affine amélioré" pour des chargements purement mécaniques en fluage pour différentes triaxialités. Pour ces deux types de chargement étudiés, le modèle Secant modifié prédit des résultats quantitativement corrects par comparaison aux calculs FFT. Par contre les deux variantes du modèle Affine amélioré prévoient des estimations cinétiques de relaxation des contraintes dans la matrice (premier et second moments) trop rapides dues au caractère trop souple de la complaisance associée à la phase matricielle.

Dans la section qui va suivre, nous allons étendre l'étude comparative des modèles Sécant modifié et Affine amélioré pour un chargement thermomécanique.

## 2. Couplage thermo-mécanique

Dans ce paragraphe nous évaluons les prédictions des approches "Sécant modifié" et "Affine amélioré" comparées à une solution de référence (calculs FFT) pour un chargement "thermo-mécanique". Le terme "thermo-mécanique" est utilisé pour désigner un chargement couplé de nature purement mécanique (contrainte axisymétrique déviatorique) avec un chargement purement thermique de type gonflements différentiels dans la phase inclusionnaire qui sont de type Heaviside (chargements imposés à  $t = 0$  puis maintenus constants). La contrainte macroscopique moyenne étant nulle pour ce chargement considéré, nous définissons ici la triaxialité des contraintes par rapport à la phase matricielle ( $X^{(1)} = \frac{\bar{\sigma}_m^{(1)}}{\bar{\sigma}_{eq}^{(1)}}$ ) à l'instant initial ( $t=0$ ).

A cet instant, étant donné que la microstructure est homogène du point de vue élastique, le champ de contrainte est homogène. Il est la superposition du champ axisymétrique déviatorique imposé sur le bord et du champ sphérique correspondant au gonflement dans les inclusions. La moyenne de la contrainte dans la matrice s'écrit.

$$\bar{\sigma}^{(1)} = \frac{\bar{\sigma}_{eq}^{(1)}}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \varepsilon_{0m}^{(2)} \eta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

Étant donné que la réponse relative à la partie déviatorique est purement élastique et homogène à l'instant initial, la moyenne de la contrainte équivalente dans la matrice est égale à la moyenne de la contrainte macroscopique équivalente ( $\bar{\sigma}_{eq}^{(1)} = \bar{\sigma}_{eq}$ ). Le scalaire  $\eta$  dépend des propriétés du matériau et son expression est donnée par :

$$\eta = \frac{12 c^{(2)} \kappa_e \mu_e}{3\kappa_e + 4\mu_e}$$

Nous avons vu précédemment que pour un taux de triaxialité nul l'approche "Sécant modifié" fournit les meilleurs estimations par rapport à l'approche "Affine amélioré". Le cas du chargement purement thermique ( $X = \infty$ ) a été également traité en section II. de ce chapitre, situation dans laquelle l'approche "Affine amélioré" présente les meilleures estimations comparées à celles dérivant de l'approche "Sécant modifié".

Dans cette section nous nous intéressons aux prédictions des deux modèles pour des niveaux de triaxialité modérés.

Sur la figure 3.7 nous comparons la prédiction des contraintes moyennes hydrostatiques par phase et du second moment des champs de contrainte entre les approches de linéarisation (Sécant modifié et Affine amélioré) et les calculs en champs complets (calculs FFT), pour une déformation libre dans la phase inclusionnaire de  $\varepsilon_{0m}^{(2)} = 2.10^{-3}$ .

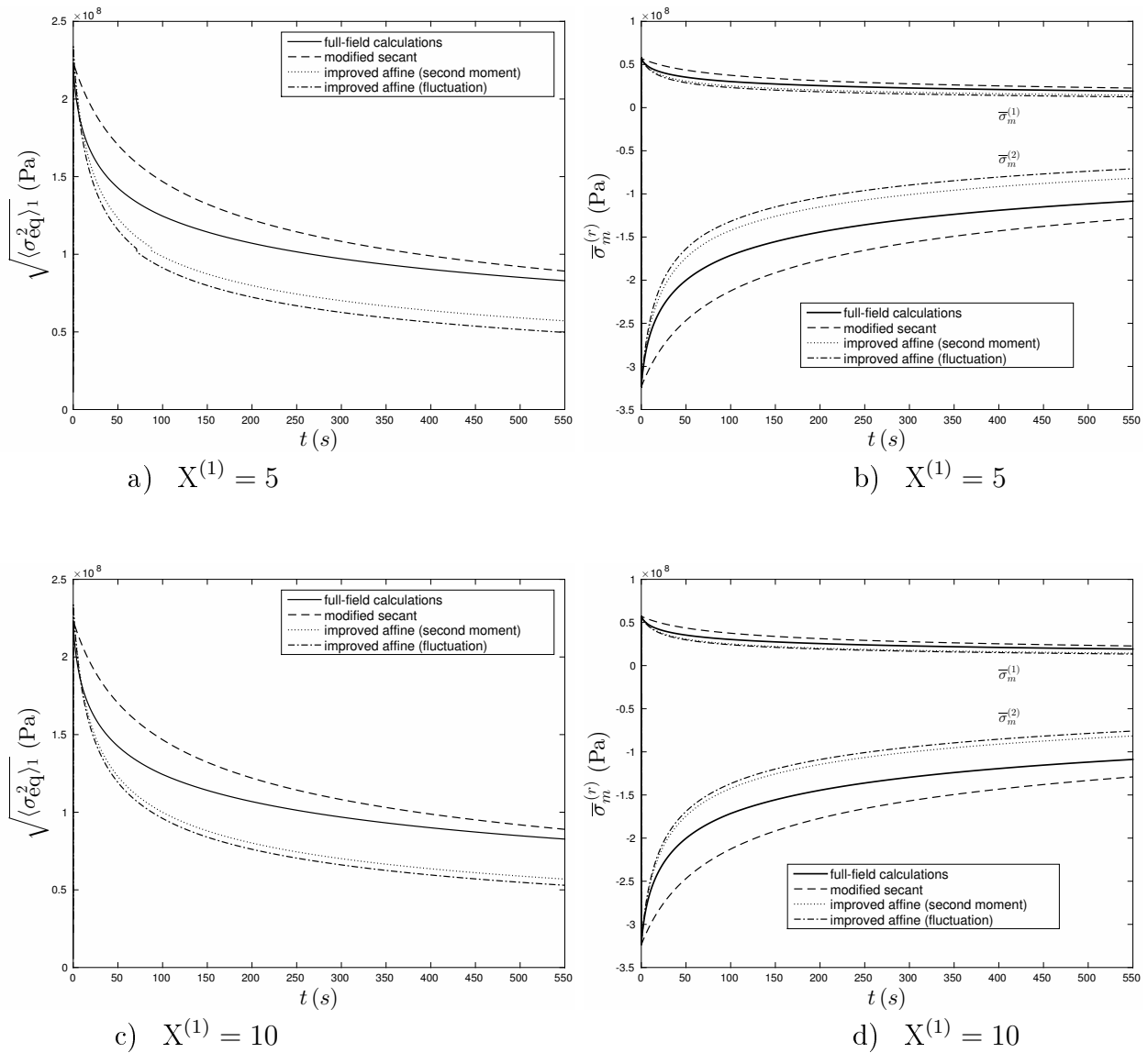


FIGURE 3.7 – Évolutions temporelles des contraintes moyennes hydrostatiques par phase et du second moment des champs de contrainte dans la matrice à différentes triaxialités : comparaison des résultats issus de calculs FFT aux modèles Sécant modifié et Affine amélioré.

Nous observons sur les figures que la réponse à l'instant initial est purement élastique et hétérogène alors que le matériau est homogène du point de vue élastique. Le caractère hétérogène des contraintes moyennes hydrostatiques par phase à cet instant résulte de l'hétérogénéité des gonflements différentiels qui ne sont prises en compte qu'au sein de la phase inclusionnaire.

Pour le cas de chargement considéré ici (taux de triaxialité modéré), l'approche "Sécant modifié" semble être la plus pertinente car les contraintes moyennes hydrostatiques par phase et le second moment des contraintes dans la matrice sont plus proches de ceux dérivant de calculs FFT comparés aux estimations prédites par l'approche "Affine amélioré".

Nous constatons aussi que plus la triaxialité des contraintes définie dans la matrice augmente plus les résultats obtenus par les deux modèles représentatifs de l'approche Affine amélioré se rapprochent davantage. ceci est dû au fait que les moyennes par phase de la contrainte équivalente, lorsque la triaxialité des contraintes dans la matrice augmente, diminuent de manière progressive jusqu'à s'annuler (pour un chargement purement thermique). Dans ce cas la contrainte de référence calculée autour de la fluctuation du champ de contrainte se réduit au second moment du champ de contrainte (voir figure 3.3).

### 3. Conclusion

Dans cette section une série de comparaisons avec des calculs en champs complets a été réalisée afin d'évaluer la pertinence des modèles Sécant modifié et Affine amélioré pour un composite biphasé. Les essais considérés comprennent des essais de fluage à différentes triaxialités et un essai couplant un chargement de type fluage à un chargement de type gonflements différentiels (essais "thermo-mécanique"). Les résultats obtenus à travers ces différents essais ont clairement montré que la réponse du composite dépend significativement de la triaxialité des contraintes. En effet, pour des taux de triaxialité faibles le modèle "Sécant modifié" s'avère être plus pertinent que l'approche "Affine amélioré" tandis que pour des taux de triaxialité assez élevés l'approche "Affine amélioré" présente les meilleures estimations. La principale conclusion tirée de cette étude est que les modèles de linéarisation présentés dans ce travail de thèse ne fournissent de bonnes estimations que pour certains cas de chargement.

Toutefois, une alternative pourrait être envisagée. Cette alternative s'appuie sur une linéarisation sécante (plus facile à implémenter dans un code de calcul) dont la contrainte de référence est le second moment des contraintes dans la matrice à un facteur correctif près qui dépend du taux de triaxialité macroscopique  $X$  et dans la matrice  $X^{(1)}$  selon :

$$\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)} = Z(X, X^{(1)}) \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}$$

où  $Z(X, X^{(1)})$  représente le facteur correctif. Dans le cas d'un chargement de fluage purement mécanique  $X = X^{(1)}$ , ce facteur correctif doit être égal à l'unité quelle que soit la valeur du taux de triaxialité  $X$  étant donné que la linéarisation s'appuyant sur le second moment des champs de contrainte fournit de bonnes estimations (modèle "Sécant modifié"). Lorsque le chargement est de nature purement thermique ( $X^{(1)}$  infiniment grand), la correction  $Z$  doit être égale à  $n^{\frac{1}{n-1}}$  de façon à retrouver le modèle "Sécant amélioré" défini précédemment. Cependant la détermination de la loi d'évolution de ce facteur correctif reste une question ouverte à l'issue de ce travail de thèse : il faudrait l'identifier sur la base des chargements investigués puis en élargissant les chargements (relaxation, ...) considérés.



## VI. Conclusions

Nous avons construit dans ce chapitre différentes méthodes d'estimation du comportement effectif pour des composites particulières dans le cas de comportement viscoélastiques non linéaires. La méthodologie proposée consiste à linéariser le comportement des phases permettant de ramener le problème viscoélastique non linéaire à un problème viscoélastique linéaire pour lequel on dispose de méthodes d'estimations (approche par variables internes équivalente aux résultats obtenus avec le principe de correspondance). En jouant sur la méthode de linéarisation (Sécante, Affine) ainsi que sur les quantités de référence par phase autour desquelles est effectuée cette linéarisation, on obtient différentes méthodes d'estimations.

Tout d'abord, pour un chargement particulier de type gonflements différentiels, situation représentative du chargement induit par l'irradiation dans les combustibles MOX, nous avons estimé les évolutions des contraintes internes (en moyenne) dans le cas d'un composite biphasé dont le comportement des phases est viscoélastique non linéaire. La déclinaison des différentes méthodes de linéarisation proposées dans des travaux antérieures à ce chargement de type gonflements différentiels conduit à de nombreuses estimations possibles mais qui conduisent (au mieux) aux mêmes prédictions que le Sécant modifié dans ce cas. Or si la réponse obtenue avec le modèle Sécant modifié améliore nettement celles (irréalistes) obtenues avec les approches "classiques", elle reste quantitativement éloignée de la solution de référence (solution analytique de la sphère composite définie dans le chapitre précédent). Nous avons donc proposé deux variantes du modèle Affine (appelées Affine amélioré), variantes qui conduisent à des prédictions quantitativement correctes dans le cas d'un gonflement différentiel. Nous avons également montré que ces deux approches sont également équivalentes à une approche sécante "améliorée" dont le point de fonctionnement s'exprime en fonction du second moment des contraintes et de la non linéarité du problème.

La formulation des approches "Affine amélioré" est par la suite étendue pour des matériaux hétérogènes sous chargement quelconque. Dans ce cadre général, le schéma d'homogénéisation construit avec ces nouvelles approches de linéarisation est implicite en raison de l'anisotropie de la souplesse visqueuse dans la matrice, ce qui suscite des difficultés liées à la détermination d'expressions explicites des évolutions temporelles de la contrainte de référence ainsi que du second moment des champs de contrainte dans la matrice. La formulation générale de ces approches de type "Affine amélioré" reste donc une question ouverte à l'issue de ce travail de thèse.

Afin de construire un modèle d'homogénéisation complet, une hypothèse conduisant à une souplesse visqueuse isotrope dans la matrice a été formulée (version isotrope de l'Affine amélioré) de manière à ce que les propriétés effectives puissent être établies explicitement, notamment les évolutions temporelles de la contrainte de référence et du second moment des champs de contrainte dans la phase matricielle.

Enfin, des résultats obtenus avec cette version isotrope, pour différents cas de chargement (essais de fluage uniaxial et à différentes triaxialités, chargement hydrostatique sans gonflements différentiels), ont été comparés à des calculs FFT pour évaluer la pertinence des différentes méthodes d'estimation élaborées. Ces comparaisons conduisent aux conclusions nuancées suivantes :

- Pour les propriétés matériaux retenus et notamment le niveau de non linéarité de la loi découlement viscoplastique ( $n=4$ ), l'approche Sécante modifiée conduit à des estimations quantitativement correctes, notamment en cisaillement pur mais incorrecte dès qu'un gonflement différentiel est ajouté au chargement imposé.

- Inversement, les prédictions des deux variantes du modèle Affine amélioré, variantes qui conduisent à des prédictions quantitativement correctes dans le cas d'un gonflement différentiel, se dégradent dès lors qu'un cisaillement macroscopique est imposé.

De ces résultats nous pouvons conclure que la version isotrope de l'approche Affine améliorée conduit à des prédictions décevantes pour la quasi-totalité des chargements étudiés.

Au final, pour obtenir des estimations quantitativement pertinentes pour les différents cas de chargement considérés, nous proposons une approche de type sécante autour d'une quantité dépendant du moment d'ordre deux dans la matrice, du taux de triaxialité et de la non linéarité. Cette approche est susceptible de conduire à un bon accord pour l'ensemble des chargements étudiés, mais elle reste à approfondir.

---



# CHAPITRE 4

---

## Simulation du comportement sous irradiation des crayons MOX en régime nominal

---

### Résumé du chapitre :

Nous étudions ici le comportement des crayons MOX irradiés en régime nominal à travers des simulations numériques qui reposent sur des calculs éléments finis 3D associés au modèle d'homogénéisation basé sur l'approche sécante modifiée. Au préalable, la méthode d'intégration temporelle retenue pour les modèles issus des approches sécante modifiée et affine améliorée est présentée. La méthode implicite adoptée conduit à la résolution d'un système non linéaire de dimension neuf (l'approche sécante modifiée ou améliorée) à quinze (Affine améliorée). Ce système non linéaire est résolu par une méthode de type quasi-Newton. L'implémentation informatique est réalisée avec l'outil MFRONT. Cet outil développé au CEA pour définir des lois de comportement mécanique présente l'intérêt d'utiliser le même code source pour les calculs d'éléments de volume (résultats présentés au chapitre 3) et pour des calculs de structure par éléments finis (résultats présentés dans ce chapitre).

Une fois intégré dans ALCYONE, le modèle sécant modifié est ainsi utilisé afin de simuler le comportement d'un crayon MOX irradié en réacteur. C'est un crayon irradié trois cycles qui a fait l'objet d'examens post-irradiatoires, notamment sa profilométrie (diamètre extérieur fonction de la côte axiale) ainsi que des céramographies sur des coupes axiales permettant de mesurer le comblement des évidements à l'issue de l'irradiation. Le calcul 3D réalisé pour la côte axiale du crayon correspondant à ces céramographies permet de comparer les prédictions du calcul (évolution du diamètre sur la hauteur de la pastille considérée, évolution de l'évidement) aux résultats expérimentaux. Ces simulations 3D multi-échelles et multi-physiques étant coûteuses en temps calculs, un maillage réduit est utilisé pour ces simulations. La sensibilité des résultats obtenus à l'intensité du fluage thermique est tout particulièrement étudiée montre clairement le rôle joué par le fluage thermique sur le comblement expérimental observé.

## Sommaire

---

<b>I.</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>157</b>
<b>II.</b>	<b>Intégration numérique et implémentation des lois de comportement mécanique (approches affine améliorée et sécante modifiée)</b> . . . . .	<b>158</b>
1.	Principe général d'intégration d'une loi de comportement dans MFRONT ( <a href="http://tfel.sourceforge.net/">http://tfel.sourceforge.net/</a> ) . . . . .	158
2.	Intégration implicite des systèmes différentiels représentatifs de l'approche Affine amélioré "isotrope" . . . . .	160
3.	Conclusions . . . . .	164
<b>III.</b>	<b>Simulation numérique dans ALCYONE du comportement des crayons MOX en régime nominal</b> . . . . .	<b>165</b>
1.	Objectifs des simulations . . . . .	165
2.	Version des logiciels utilisés . . . . .	165
3.	Comparaison des résultats issus de la simulation numérique aux données expérimentales . . . . .	166
<b>IV.</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>170</b>

---

# I. Introduction

Dans ce chapitre nous utilisons la loi de comportement homogénéisée dérivant du modèle sécant modifié pour simuler le comportement sous irradiation des crayons MOX en régime nominal (absence ou apparition de fluage thermique) à travers des calculs éléments finis en 3D. La modélisation 3D du crayon combustible décrit un fragment de pastille combustible dont la géométrie est représentée sur la figure (1.6).

A la base, les objectifs visés dans cette étude étaient de pouvoir évaluer la pertinence des approches sécante modifiée et affine améliorée en se référant sur les données expérimentales obtenues sur des crayons MOX irradiés. Néanmoins, nous avons vu dans le chapitre précédent que le modèle basé sur l'approche sécante modifiée conduit à une meilleure prédiction de l'évolution des moyennes du champ de contrainte que le modèle basé sur l'approche "Affine amélioré", pour la quasi-totalité des cas de chargement étudiés. C'est pour cette raison que nous avons retenu l'approche sécante modifiée pour réaliser les simulations numériques. Nous nous sommes intéressés particulièrement aux profilométries extérieures de la gaine après irradiation mais aussi à la simulation du comblement des évidements hémisphériques situés sur les faces inférieure et supérieure des pastilles combustibles (voir figure 1.2). Ce comblement des évidements, qui résulte d'une déformation inélastique, est particulièrement localisé au centre des pastilles combustibles en régime nominal lorsque la température centrale est suffisante pour activer le fluage thermique.

Dans la première section de ce chapitre nous présentons le logiciel MFRONT (section II.) qui est un outil de générateur de code développé au sein de la plate-forme PLEIADES, dont le but est de permettre aux utilisateurs de développer des lois de comportement. Cet outil nous a permis d'implémenter les modèles d'homogénéisation construits avec les approches sécante modifiée et affine améliorée. L'implémentation des modèles est suivie d'une intégration dans le code de calcul ALCYONE (section III.), code que nous avons présenté au chapitre introductif, à la section traitant "**la modélisation et la simulation du crayon combustible**" (section II. 1.). Les résultats de la simulation numérique issus du modèle sécant modifié et qui sont relatifs aux profilométries extérieures de la gaine et des évidements sont par la suite évalués par comparaison aux résultats expérimentaux disponibles. Les résultats issus de la simulation numérique sont par la suite évalués en utilisant des données expérimentales disponibles.

## II. Intégration numérique et implémentation des lois de comportement mécanique (approches affine améliorée et sécante modifiée)

Développé au sein de la plateforme PLEIADES du CEA, MFRONT est un outil qui vise à assurer une gestion pérenne des connaissances matériau utilisées dans les logiciels de simulation du Département d'Étude des Combustibles (DEC/SESC). MFRONT permet de développer aussi des lois de comportement de façon simple à travers des schémas temporels implicites et explicites, avec des algorithmes de résolution des équations efficaces en termes de performances assurées par l'utilisation du langage C++. C'est donc cet outil qui a été utilisé pour l'intégration des lois mécaniques (approche sécante modifiée par exemple) utilisées dans les chapitres 3 et 4.

### 1. Principe général d'intégration d'une loi de comportement dans MFRONT (<http://tfel.sourceforge.net/>)

Nous prenons ici comme exemple une loi de comportement simple de type Norton définie par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^v \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^v = \dot{p} \mathbf{n} \quad , \quad \dot{p} = A \sigma_{\text{eq}}^m \quad , \quad \mathbf{n} = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{s}}{\sigma_{\text{eq}}} \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}^v$  sont des variables tensorielles représentatives des déformations élastiques et visqueuses,  $\mathbf{n}$  est la direction d'écoulement,  $\mathbf{s}$  et  $\sigma_{\text{eq}}$  désignent respectivement le déviateur des contraintes et la contrainte équivalente. L'opérateur d'élasticité  $\mathbf{D}$  est calculé à partir du module de Young et du coefficient de Poisson.

En vue d'une meilleure stabilité d'intégration des équations, la méthode implicite est proposée dans ce qui suit pour la résolution du problème. Cette méthode, basée sur le schéma de Newton Raphson, permet de représenter convenablement la loi de comportement mécanique. Le problème d'évolution est discrétisé en pas de temps avec  $\Delta t$  qui représente le pas de temps courant. En notant  $X$  la fonction du temps à l'instant  $t$  début du pas de temps courant,  $X + \Delta X$  désigne la valeur prise par cette fonction à la fin du pas de temps  $t + \Delta t$ . Dans ce cas l'utilisation d'un schéma implicite consiste à écrire toutes les quantités à l'instant  $t_{i+1}$  et de remplacer les dérivées en temps par leurs incréments sur l'intervalle  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ . Ainsi, le système (4.1) se ramène au système suivant :

$$\begin{cases} f_{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e, \Delta p) = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e - \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \Delta p \mathbf{n} = 0 \\ f_{\Delta p}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e, \Delta p) = \Delta p - \Delta t A \sigma_{\text{eq}}^m = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

avec le champ de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  et le champ tensoriel  $\mathbf{n}$  qui sont définis à l'instant  $t_{i+1}$  par :

$$\boldsymbol{\sigma}(t_{i+1}) = \boldsymbol{\sigma}(t_i) + \mathbf{D} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad \text{et} \quad \mathbf{n} = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{s}(t_{i+1})}{\sigma_{\text{eq}}(t_{i+1})}. \quad (4.3)$$

La déformation totale étant une donnée (chargement), on obtient ainsi un système de 7 équations dont 6 équations relatives à la décomposition additive du tenseur des déformations (en 3D) et une équation caractéristique de l'écoulement visco-plastique. Les 7 inconnues sont les 6 composantes de  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e$  ainsi que le scalaire  $\Delta p$ .

La résolution implicite du système d'équations (4.17) de dimension 7 est effectuée par la méthode de Newton-Raphson dont l'algorithme est exprimé par

$$\begin{pmatrix} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}^e \\ \Delta p_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i^e \\ \Delta p_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i^e, \Delta p_i) & \frac{\partial f_{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e}}{\partial \Delta p}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i^e, \Delta p_i) \\ \frac{\partial f_{\Delta p}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i^e, \Delta p_i) & \frac{\partial f_{\Delta p}}{\partial \Delta p}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i^e, \Delta p_i) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i^e, \Delta p_i) \\ f_{\Delta p}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i^e, \Delta p_i) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Quelle que soit la loi de comportement considérée la déformation élastique est une inconnue du système non linéaire à résoudre.

L'intégration implicite de cette loi de comportement de Norton dans MFRONT est décrite ci-après.

### Implémentation de la loi de Norton

```

@ Parser Implicit ;                               % méthode d'intégration implicite
@ Behaviour Norton ;                               % nom de la loi
@ Algorithm NewtonRaphson Numerical Jacobian ;    % algorithme avec jacobienne numérique
@ RequireStiffnessTensor ;                       % calcul de la matrice d'élasticité
@ MaterialProperty real A ;                       % propriété matériau de la loi
@ MaterialProperty real m ;                       % propriété matériau de la loi
@ StateVariable real p ;                         % déclaration de la variable interne p

@ ComputeStress{                                  % calcul de la contrainte
sig = D * eel ;
}

@ Integrator {
real seq = sigmaeq (sig) ;                         % calcul de la norme de Von Mises
Stensor n = Stensor (0.) ;                       % calcul de la direction d'écoulement
if (seq > 1.-12){
n = 1.5*deviator (sig)/seq ;
}
feel + = dp*n - deto ;                            % définition de l'équation  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e - \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \Delta p \mathbf{n} = 0$ 
fp - = dt *A* pow (seq, m) ;                      % définition de l'équation  $\Delta p - \Delta t A \sigma_{eq}^m = 0$ 
}

@ TangentOperator {                               % calcul de l'inverse de la matrice Jacobienne
Stensor4 Je ;
getPartialJacobianInvert (Je) ;
Dt =D*Je ;
}

```



## 2. Intégration implicite des systèmes différentiels représentatifs de l'approche Affine amélioré "isotrope"

Nous faisons ici le choix de présenter l'intégration de la loi homogénéisée dans le cas triphasé, formulation qui peut être également utilisée dans le cas biphasé avec :  $c^{(3)} = 0$  et  $\mu_v^{(3)} = \tilde{\mu}_v^{(1)}$ .

### 2.1 Écriture des équations sous forme incrémentale

Comme dans la section précédente,  $X$  représente la fonction du temps à l'instant  $t$  et  $X + \Delta X$  celle correspondant à l'instant  $t + \Delta t$ .

#### 2.1.1. Moyennes sphériques par phase

Comme nous l'avons vu en section IV. (chapitre 3), les variables internes  $\bar{\alpha}_j^m$  s'annulent dans le cas des matériaux présentant une compressibilité purement élastique (les temps de relaxation  $\bar{\tau}_j^m$  sont infinis), le gonflement effectif sphérique se réduit au gonflement moyen ( $\Delta\bar{\varepsilon}_{0m} = c^{(1)}\Delta\varepsilon_{0m}^{(1)} + c^{(2)}\Delta\varepsilon_{0m}^{(2)} + c^{(3)}\Delta\varepsilon_{0m}^{(3)}$ ) et  $\Delta\bar{\varepsilon}_m = \Delta\bar{\sigma}_m/3\kappa_e$ . Finalement nous avons un problème à trois inconnues que sont les contraintes moyennes sphériques dans la matrice et dans les inclusions. Les évolutions en temps discret de ces moyennes par phases  $\bar{\sigma}_m^{(r)}(t)$ , ( $r = 1, 2, 3$ ) sont décrites par le système ci-après.

$$\delta\Delta\bar{\sigma}_m^{(r)} = -\frac{\Delta t}{\Delta t + \tilde{\tau}_\gamma} \delta\bar{\sigma}_m^{(r)} + \frac{3\kappa_e}{1 + \frac{3\kappa_e}{4\mu_e}} \frac{\tilde{\tau}_\gamma}{\Delta t + \tilde{\tau}_\gamma} \sum_{q=1}^3 c^{(q)} \left( \Delta\varepsilon_{0m}^{(q)} - \Delta\varepsilon_{0m}^{(r)} \right), \quad q \neq r \quad (4.5)$$

$$\delta\Delta\bar{\sigma}_m^{(r)} = \Delta\bar{\sigma}_m^{(r)} - \Delta\bar{\sigma}_m, \quad \tilde{\tau}_\gamma = \left( \frac{4}{3\kappa_e} + \frac{1}{\mu_e} \right) \tilde{\mu}_v^{(1)} (\hat{S}_1 + \Delta\hat{S}_1, \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)} + \Delta\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}) \quad (4.6)$$

$$\tilde{\mu}_v^{(1)} (\hat{S}_1 + \Delta\hat{S}_1, \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)} + \Delta\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}) = \frac{1}{n^{(1)}} \frac{\sigma_0^{(1)}}{3\varepsilon_0^{(1)}} \left( \frac{\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)} + \Delta\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}}{\sigma_0^{(1)}} \right)^{1-n^{(1)}}$$

$$(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)} + \Delta\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})^2 = \left( \frac{3}{2} (\hat{S}_1 + \Delta\hat{S}_1) + 2 (\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)} + \Delta\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}) \sqrt{\frac{3}{2} (\hat{S}_1 + \Delta\hat{S}_1) - (\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)} + \Delta\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})^2} \right).$$

où  $\hat{S}_1$  désigne un scalaire qui est défini plus loin. Si le chargement à l'instant initial est non nul (saut), les moyennes hydrostatiques par phase à l'instant initial  $\bar{\sigma}_m^{(r)}(t = 0^+)$  sont données par la réponse élastique et elles s'écrivent :

$$\bar{\sigma}_m^{(r)}(t = 0^+) = \bar{\sigma}_m + \frac{12\kappa_e\mu_e}{3\kappa_e + 4\mu_e} \sum_{q \neq r} c^{(q)} \left( \varepsilon_{0m}^{(q)} - \varepsilon_{0m}^{(r)} \right), \quad r = 1, 2, 3 \quad (4.7)$$

#### 2.1.2. Moyennes déviatoriques par phase

Nous avons ici un problème dont les inconnues sont les variables internes  $\bar{\alpha}_j^d(t)$ , les contraintes moyennes déviatoriques dans la matrice  $\bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t)$  et dans l'inclusion  $\bar{\mathbf{s}}^{(2)}(t)$  ainsi que le second moment du champ de contrainte dans la matrice. Les évolutions des moyennes déviatoriques par phase à chaque pas de temps sont données par le système qui suit :

$$\Delta\bar{\mathbf{s}}^{(1)} = 2\mu_e \left[ \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 - \sum_{j=1}^8 \frac{l_{\bar{\tau}_j^d}}{\mu_{\bar{\tau}_j^d}} \Delta\bar{\boldsymbol{\alpha}}_j^d - \Delta\bar{\boldsymbol{\beta}}_{1a}^d - \Delta\bar{\boldsymbol{\beta}}_{1b}^d \right] + \sum_{j=1}^4 \Delta\bar{\boldsymbol{\beta}}_j^d \quad (4.8)$$

$$\Delta \bar{\mathbf{s}}^{(2)} = \frac{2}{c^{(2)}} \left( \frac{1}{\mu_v^{(2)}} - \frac{1}{\mu_v^{(3)}} \right)^{-1} \left\{ \begin{array}{l} \left[ \sum_{j=1}^6 \frac{\mu_{\bar{\tau}_j^d}}{\mu_e} \frac{1}{\bar{\tau}_j^d} - \frac{\mu_e}{\mu_v^{(3)}} \right] (\Delta \bar{\mathbf{e}} - \Delta \bar{\mathbf{e}}_0) \\ + \\ \sum_{j=1}^6 \left( \frac{\mu_e}{\mu_v^{(3)}} - \frac{1}{\bar{\tau}_j^d} \right) \Delta \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j^d(t) - \frac{c^{(1)}}{2} \left( \frac{1}{\tilde{\mu}_v^{(1)}} - \frac{1}{\mu_v^{(3)}} \right) \Delta \bar{\mathbf{s}}^{(1)} \\ + \\ \sum_{j=1}^4 \left[ l_j^{(\gamma)} \Delta \mathbf{e}_0^{(1)} - \frac{1}{\bar{\tau}_j^d} \Delta \bar{\gamma}_j^d \right] \end{array} \right\} \quad (4.9)$$

$$\Delta \bar{\mathbf{s}}^{(3)} = \frac{2}{c^{(3)}} \left( \frac{1}{\mu_v^{(3)}} - \frac{1}{\mu_v^{(2)}} \right)^{-1} \left\{ \begin{array}{l} \left[ \sum_{j=1}^6 \frac{\mu_{\bar{\tau}_j^d}}{\mu_e} \frac{1}{\bar{\tau}_j^d} - \frac{\mu_e}{\mu_v^{(2)}} \right] (\Delta \bar{\mathbf{e}} - \Delta \bar{\mathbf{e}}_0) \\ + \\ \sum_{j=1}^6 \left( \frac{\mu_e}{\mu_v^{(2)}} - \frac{1}{\bar{\tau}_j^d} \right) \Delta \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j^d(t) - \frac{c^{(1)}}{2} \left( \frac{1}{\tilde{\mu}_v^{(1)}} - \frac{1}{\mu_v^{(2)}} \right) \Delta \bar{\mathbf{s}}^{(1)} \\ + \\ \sum_{j=1}^4 \left[ l_j^{(\gamma)} \Delta \mathbf{e}_0^{(1)} - \frac{1}{\bar{\tau}_j^d} \Delta \bar{\gamma}_j^d \right] \end{array} \right\} \quad (4.10)$$

Les modules de cisaillement dans les inclusions sont évalués autour du premier moment du champ de contrainte.

$$\mu_v^{(r)} (\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)} + \Delta \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)}) = \frac{\sigma_0^{(r)}}{3 \varepsilon_0^{(r)}} \left( \frac{\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)} + \Delta \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)}}{\sigma_0^{(r)}} \right)^{1-n(r)}, \quad r = 2, 3$$

L'incrément  $\Delta \mathbf{e}_0^{(1)}$  désigne l'incrément de la déformation libre dans la matrice, les expressions des contraintes moyennes déviatoriques à l'instant initial sont données par les relations (1.73) et (1.74) et les incréments des variables internes  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_j^d(t)$ ,  $\bar{\boldsymbol{\beta}}_{1a/b}^d(t)$  et  $\bar{\boldsymbol{\beta}}_j^d(t)$  s'écrivent :

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j^d = -\frac{\Delta t}{\Delta t + \bar{\tau}_j^d} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j^d + \frac{\Delta t}{\Delta t + \bar{\tau}_j^d} \frac{\mu_{\bar{\tau}_j^d}}{\mu_e} \left( \bar{\mathbf{e}} + \Delta \bar{\mathbf{e}} - \bar{\mathbf{e}}_0 - \Delta \bar{\mathbf{e}}_0 \right), \quad \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j^d(0) = 0, \quad j = 1, \dots, 6 \quad (4.11)$$

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\beta}}_{1a/b}^d = -\frac{\Delta t}{\Delta t + \hat{\tau}_{1a/b}^d} \bar{\boldsymbol{\beta}}_{1a/b}^d + \frac{\Delta t}{\Delta t + \hat{\tau}_{1a/b}^d} \frac{l_{\bar{\tau}_j^d}}{\mu_e} \left( \bar{\mathbf{e}} + \Delta \bar{\mathbf{e}} - \bar{\mathbf{e}}_0 - \Delta \bar{\mathbf{e}}_0 \right), \quad \bar{\boldsymbol{\beta}}_{1a/b}^d(0) = 0 \quad (4.12)$$

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\beta}}_j^d = -\frac{\Delta t}{\Delta t + \bar{\tau}_j^{(\beta)}} \bar{\boldsymbol{\beta}}_j^d + \frac{\bar{\tau}_j^{(\beta)}}{\Delta t + \bar{\tau}_j^{(\beta)}} l_j^{(\beta)} \Delta \mathbf{e}_0^{(1)}, \quad \bar{\boldsymbol{\beta}}_j^d(0) = 0, \quad j = 1, \dots, 4 \quad (4.13)$$

L'incrément de déformation macroscopique déviatorique étant une donnée de chargement tandis que l'évolution incrémentale du gonflement effectif qui est exprimée par

$$\Delta \bar{\mathbf{e}}_0 = \Delta \mathbf{e}_0^{(1)} + \sum_{j=1}^4 \Delta \bar{\gamma}_j^d, \quad \Delta \mathbf{e}_0^{(1)} = \Delta t \left( \frac{1}{2\mu_v^{(1)} (\bar{\mathbf{s}}^{(1)} + \Delta \bar{\mathbf{s}}^{(1)})} - \frac{1}{2\tilde{\mu}_v^{(1)} (\hat{S}_1 + \Delta \hat{S}_1, \bar{\mathbf{s}}^{(1)} + \Delta \bar{\mathbf{s}}^{(1)})} \right) (\bar{\mathbf{s}}^{(1)} + \Delta \bar{\mathbf{s}}^{(1)}) \quad (4.14)$$

$$\Delta\gamma_j^d = \frac{\Delta t \bar{\tau}_j^{(\gamma)}}{\Delta t + \bar{\tau}_j^{(\gamma)}} l_j^{(\gamma)} \left( \mathbf{e}_0^{(1)} + \Delta \mathbf{e}_0^{(1)} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta t + \bar{\tau}_j^{(\gamma)}} \bar{\gamma}_j^d, \quad \gamma_j^d(0) = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

Les expressions des constantes  $\bar{\tau}_j^d$ ,  $\hat{\tau}_{1a/b}$ ,  $l_{\bar{\tau}_j^d}$ ,  $\mu_{\bar{\tau}_j^d}$  sont bien explicitées dans [58]. Les expressions des temps de relaxation  $\bar{\tau}_j^{(\beta)}$  qui sont identiques aux  $\bar{\tau}_j^{(\gamma)}$  ( $\bar{\tau}_j^{(\beta)} = \bar{\tau}_j^{(\gamma)}$ ) ainsi que les expressions des scalaires  $l_j^{(\beta)}$  et  $l_j^{(\gamma)}$  sont reportées dans l'annexe F.

### 2.1.3. Second moment dans la matrice

En partant de l'équation différentielle (B.6), l'évolution par incrément de temps du second moment dans la matrice est régie par :

$$\Delta S_1 = \frac{\tau_v^{(1)}}{\tau_v^{(1)} + \Delta t} \left\{ \frac{4\mu_e}{c^{(1)}} \left( \begin{array}{l} \Delta \bar{\mathbf{e}} : (\bar{\mathbf{s}} + \Delta \bar{\mathbf{s}}) - \sum_{r=1}^3 c^{(r)} \Delta \bar{\mathbf{e}}^{(r)} : (\bar{\mathbf{s}}^{(r)} + \Delta \bar{\mathbf{s}}^{(r)}) \\ + \\ \frac{1}{\kappa_e} \left( \Delta \bar{\sigma}_m (\bar{\sigma}_m + \Delta \bar{\sigma}_m) - \sum_{r=1}^3 c^{(r)} \Delta \bar{\sigma}_m^{(r)} (\bar{\sigma}_m^{(r)} + \Delta \bar{\sigma}_m^{(r)}) \right) \\ + \\ 3 \sum_{r=1}^3 c^{(r)} \Delta \varepsilon_{0m}^{(r)} \left( \bar{\sigma}_m + \Delta \bar{\sigma}_m - \bar{\sigma}_m^{(r)} - \Delta \bar{\sigma}_m^{(r)} \right) \\ + \\ c^{(1)} \frac{1}{2\mu_e} \Delta \bar{\mathbf{s}}^{(1)} : (\bar{\mathbf{s}}^{(1)} + \Delta \bar{\mathbf{s}}^{(1)}) \\ + \\ c^{(1)} \frac{\Delta t}{2\tilde{\mu}_v^{(1)}} (\bar{\mathbf{s}}^{(1)} + \Delta \bar{\mathbf{s}}^{(1)}) : (\bar{\mathbf{s}}^{(1)} + \Delta \bar{\mathbf{s}}^{(1)}) \end{array} \right) - 2 \frac{\Delta t}{\tau_v^{(1)}} S_1(t) \right\} \quad (4.15)$$

Une expression alternative légèrement plus compacte peut être obtenue en faisant le changement de variable  $\hat{S}_1(t) = S_1(t) - \bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t) : \bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t)$ , ce qui conduit à :

$$\Delta \hat{S}_1 = \frac{\tau_v^{(1)}}{\tau_v^{(1)} + \Delta t} \left\{ \frac{4\mu_e}{c^{(1)}} \left( \begin{array}{l} \Delta \bar{\mathbf{e}} : (\bar{\mathbf{s}} + \Delta \bar{\mathbf{s}}) - \sum_{r=1}^3 c^{(r)} \Delta \bar{\mathbf{e}}^{(r)} : (\bar{\mathbf{s}}^{(r)} + \Delta \bar{\mathbf{s}}^{(r)}) \\ + \\ \frac{1}{\kappa_e} \left( \Delta \bar{\sigma}_m (\bar{\sigma}_m + \Delta \bar{\sigma}_m) - \sum_{r=1}^3 c^{(r)} \Delta \bar{\sigma}_m^{(r)} (\bar{\sigma}_m^{(r)} + \Delta \bar{\sigma}_m^{(r)}) \right) \\ + \\ 3 \sum_{r=1}^3 c^{(r)} \Delta \varepsilon_{0m}^{(r)} \left( \bar{\sigma}_m + \Delta \bar{\sigma}_m - \bar{\sigma}_m^{(r)} - \Delta \bar{\sigma}_m^{(r)} \right) \end{array} \right) - 2 \frac{\Delta t}{\tau_v^{(1)}} \hat{S}_1 \right\} \quad (4.16)$$

Le temps caractéristique  $\tau_v^{(1)}$  est égal à  $\tau_v^{(1)} = \tilde{\mu}_v^{(1)} / \mu_e$  et, comme à l'instant initial, la réponse est élastique homogène ( $S_1(0) = \bar{\mathbf{s}}^{(1)}(0) : \bar{\mathbf{s}}^{(1)}(0)$ ), la quantité  $\hat{S}_1$  à cet instant est nulle :  $\hat{S}_1(0) = \bar{\mathbf{s}}^{(1)}(0) : \bar{\mathbf{s}}^{(1)}(0) - \bar{\mathbf{s}}^{(1)}(0) : \bar{\mathbf{s}}^{(1)}(0) = 0$

## 2.2 Le problème non linéaire à résoudre

Au final les inconnues du système non linéaire à résoudre sont la déformation élastique macroscopique ainsi que les premiers et seconds moments du champ de contrainte ( $\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(2)}, \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(3)}, S_1$ ) et la déformation libre dans la matrice. En 3D, le problème est donc de dimension 15.

Les équations non linéaires dont sont solutions ces inconnues sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{\Delta\bar{\varepsilon}^e} = \Delta\bar{\varepsilon}^e - \Delta\bar{\varepsilon} + \sum_{j=1}^6 \Delta\bar{\alpha}_j^d + \Delta\bar{e}_0 + \Delta\bar{\varepsilon}_m \boldsymbol{\delta} = 0 \\ f_{\Delta\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)}} = \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)} + \Delta\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)} - \sqrt{\frac{3}{2} (\bar{\mathbf{s}}^{(r)} + \Delta\bar{\mathbf{s}}^{(r)}) : (\bar{\mathbf{s}}^{(r)} + \Delta\bar{\mathbf{s}}^{(r)})} = 0 \\ f_{\Delta S_1} = 0 \quad (\text{déduite de l'équation (4.15)}) \\ f_{\Delta e_0^{(1)}} = \Delta e_0^{(1)} - \Delta t \left( \frac{1}{2\mu_v^{(1)}(\bar{\mathbf{s}}^{(1)} + \Delta\bar{\mathbf{s}}^{(1)})} - \frac{1}{2\tilde{\mu}_v^{(1)}(\hat{S}_1 + \Delta\hat{S}_1, \bar{\mathbf{s}}^{(1)} + \Delta\bar{\mathbf{s}}^{(1)})} \right) (\bar{\mathbf{s}}^{(1)} + \Delta\bar{\mathbf{s}}^{(1)}) = 0 \end{array} \right. \quad (4.17)$$

où l'incrément  $\Delta\bar{\mathbf{s}}^{(1)}$  est calculé à partir de (4.8). Les incréments  $\Delta\bar{\alpha}_j^d$  sont calculés à partir de (4.11) tandis que  $\Delta\bar{e}_0$  est calculé à partir de (4.14). Étant donné que les équations précédentes sont couplées alors elles peuvent être regroupées en un système d'équations selon :

$$f_{k=\Delta\bar{\varepsilon}^e, \dots, \Delta e_0^{(1)}}(\Delta X) = 0 \quad , \quad \Delta X = \left( \Delta\bar{\varepsilon}^e, \Delta\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(2)}, \Delta\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(3)}, \Delta S_1, \Delta e_0^{(1)} \right) \quad (4.18)$$

La démarche pour résoudre les équations du modèle "Affine amélioré isotrope", en utilisant l'algorithme de Newton-Raphson, peut se schématiser de la manière suivante :

$$\Delta X_{k+1} = \Delta X_k + \mathcal{J}^{-1}(\Delta X_k) F(\Delta X_k) \quad , \quad F = (f_{\Delta\bar{\varepsilon}^e}, \dots, f_{\Delta e_0^{(1)}}) \quad (4.19)$$

où  $\mathcal{J}$  désigne la matrice jacobienne dont l'expression analytique est exprimée par :

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{\Delta\bar{\varepsilon}^e}}{\partial \Delta\bar{\varepsilon}^e} & \frac{\partial f_{\Delta\bar{\varepsilon}^e}}{\partial \Delta\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_{\Delta\bar{\varepsilon}^e}}{\partial \Delta e_0^{(1)}} \\ \frac{\partial f_{\Delta\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(2)}}}{\partial \Delta\bar{\varepsilon}^e} & \frac{\partial f_{\Delta\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(2)}}}{\partial \Delta\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_{\Delta\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(2)}}}{\partial \Delta e_0^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{\Delta e_0^{(1)}}}{\partial \Delta\bar{\varepsilon}^e} & \frac{\partial f_{\Delta e_0^{(1)}}}{\partial \Delta\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_{\Delta e_0^{(1)}}}{\partial \Delta e_0^{(1)}} \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

Dans les simulations numériques menées aux chapitres 3 et 4, seuls certains blocs de ce jacobien (par exemple  $\frac{\partial f_{\Delta\bar{\varepsilon}^e}}{\partial \Delta\bar{\varepsilon}^e}$ ) sont calculés (méthode quasi-Newton), certains blocs étant difficiles à calculer analytiquement.

A partir de la loi homogénéisée représentative de l'approche "Affine amélioré isotrope", on peut déduire celle caractéristique du modèle sécant modifié. En effet dans le modèle sécant modifié la déformation libre définie dans l'équation (4.14) est nulle et le module de cisaillement visqueux  $\tilde{\mu}_v^{(1)}$  dans la matrice est remplacée par  $\mu_v^{(1)}$  qui est évalué autour du second moment du champ de contrainte  $\mu_v^{(1)} = \mu_v^{(1)}(S_1)$ . La dimension du problème est alors égale à 9. Le modèle sécant amélioré peut très facilement être implanté à partir du modèle sécant modifié en calculant le module de cisaillement visqueux de la contrainte de référence corrigée selon  $\mu_v^{(1)} = \mu_v^{(1)}\left(n^{\frac{1}{n-1}}, S_1\right)$ .

Enfin à noter que :

- les premiers et seconds moments du champ de contrainte inconnus sont normalisés par le module de cisaillement élastique afin de rendre le système à résoudre homogène.
- les simulations combustibles nécessitent d'ajouter 3 inconnues tensorielles supplémentaires associées à la fissuration du combustible (voir chapitre 1)

## 2.3 Intégration MFRONT

L'ensemble des équations précédentes ont été codées au format MFRONT, une première version (approche sécante modifiée) étant écrite avant le début de ce travail de thèse. La nouvelle version représentative de l'approche "Affine amélioré", inspirée de la version sécante modifiée, a été développée au cours de ces travaux de thèse.

## 3. Conclusions

L'intégration numérique des différentes lois de comportement (affine améliorée, sécante modifiée et sécante améliorée) développées s'appuie sur une méthode d'intégration implicite. La taille du système non linéaire à résoudre varie de 9 (sécante modifiée ou sécante améliorée) à 15 ("Affine amélioré"). Ce système est résolu par une méthode de quasi-Newton. Ces modèles ont été codés au format MFRONT.

Le code source MFRONT est utilisé par MTEST qui est un outil permettant d'effectuer des simulations sur un élément de volume afin de prédire la réponse à des sollicitations en contraintes ou en déformations imposées (calculs réalisés au chapitre 3 (section V.)). Ce code source MFRONT est également utilisé par le solveur éléments finis CAST3M pour réaliser des calculs de comportement sous irradiation des crayons combustibles dans ALCYONE, calculs que nous allons aborder dans la section qui va suivre.

## III. Simulation numérique dans ALCYONE du comportement des crayons MOX en régime nominal

### 1. Objectifs des simulations

Les simulations réalisés ici ont pour objectif d'étudier les effets du fluage thermique pouvant apparaître en régime nominal sur le comportement des combustibles MOX. Pour cela nous allons utiliser le modèle d'homogénéisation construit avec l'approche sécante modifiée. Pour mettre en évidence les effets caractéristiques de ce phénomène nous allons tout d'abord nous baser sur les résultats relatifs aux profilométries extérieures de la gaine du crayon après irradiation. Ces résultats permettront d'évaluer dans un premier temps la pertinence du modèle construit. Dans la suite nous nous intéresserons au profil des évidements afin de procéder à une validation directe du modèle proposé. Les résultats expérimentaux sont obtenus à partir d'examen métallographiques réalisés sur des coupes axiales de crayons MOX à haute teneur en plutonium (crayons issus respectivement de la campagne FM07 de fabrication MOX-E (crayon P13)), irradiés pendant 3 cycles dans le réacteur Chinon B3 [39]. La coupe axiale présente l'avantage d'observer une pastille complète au niveau de son plan médian et aussi de pouvoir déterminer les différences de comportement entre les zones d'inter-pastille (IP) et à mi-pastille (MP). Les côtes de prélèvement des échantillons pour les examens métallographiques du crayon P13 sont de 1315 mm/bas crayon pour l'examen haute et 1294,5 mm/bas crayon pour l'examen basse.

Nous précisons aussi que la loi homogénéisée dérivant de l'approche sécante modifiée est obtenue à partir de la loi de fluage thermique caractérisée expérimentalement sur le MOX vierge car, comme expliqué dans le chapitre 1 (section II.), nous ne disposons pas de loi caractéristique du MOX irradié (pas de données).

### 2. Version des logiciels utilisés

A noter que ces simulations ont été menées avec une version de développement du logiciel ALCYONE de la plateforme PLEIADES (numéro de version 6258). La modélisation du comportement des gaz de fission est effectuée avec le logiciel CARACAS. L'intégration numérique de l'approche sécante modifiée est décrite dans la section précédente. Pour pouvoir réaliser ces calculs, deux modifications ont été apportées au logiciel ALCYONE 3D.

- pour des questions de temps de calcul, le maillage 3D a été réduit : diminution d'un facteur 2 de la discrétisation radiale, axiale et tangentielle. Le maillage réduit retenu pour cette étude compte seulement 220 nœuds avec des éléments linéaires. Avec ce maillage réduit, le calcul dure une journée sur un poste classique
  - pour des questions de convergence, l'intégration de l'approche sécante modifiée est effectuée à l'aide d'une méthode semi-implicite avec les modules de cisaillements  $\tilde{\mu}_v^{(1)}$ ,  $\mu_v^{(2)}$  et  $\mu_v^{(3)}$  qui ne sont mis en jour qu'en fin de pas de temps.
-

### 3. Comparaison des résultats issus de la simulation numérique aux données expérimentales

La modélisation 3D permet de décrire le comportement du crayon à savoir les déformations géométriques qui se produisent au niveau du plan inter-pastille et du plan médian-pastille sur la gaine. Le plan inter-pastille sur lequel se forment les plis primaires correspond à une côte axiale nulle tandis le plan médian-pastille, où se forment les plis secondaires, correspond à une côte axiale d'environ une demi-longueur de pastille (la hauteur initiale des pastilles est approximativement de 12 mm). La modélisation 3D permet également de prédire le comblement des évidements localisés aux extrémités hémisphériques des pastilles combustibles la profondeur maximale initiale de ces évidements est d'environ 300 micromètres.

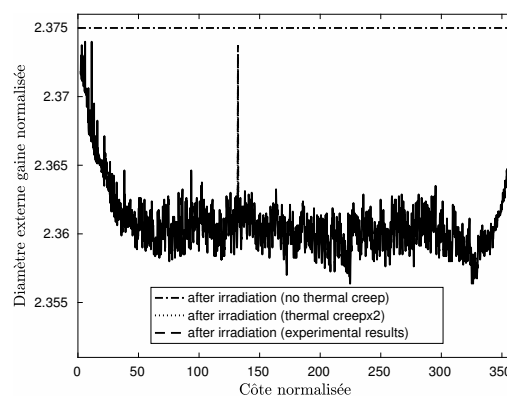
Pour des raisons de confidentialité, les résultats que nous allons présenter dans ce paragraphe (diamètre externe de la gaine en fonction de la côte axiale de la pastille, hauteur des évidements) seront normalisés.

#### 3.1 Profilométries extérieures de la gaine

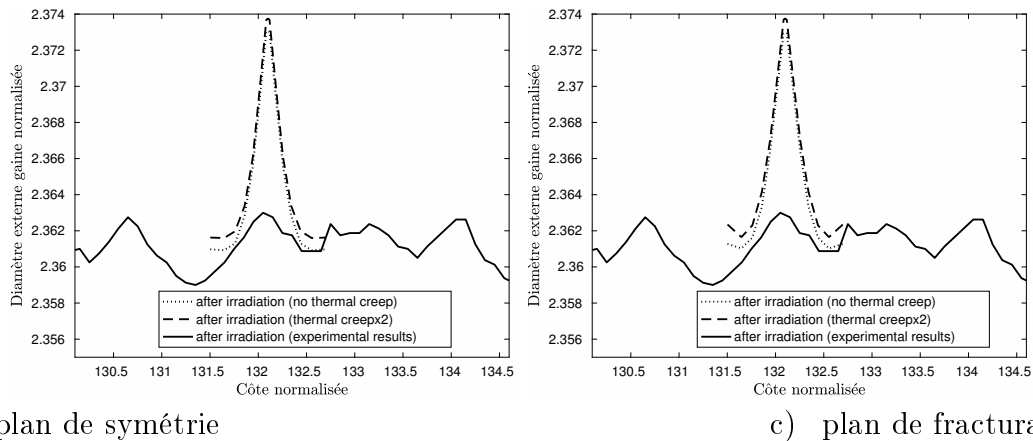
La figure 4.1 montre pour le crayon considéré sa profilométrie autrement dit l'évolution de son diamètre extérieur en fonction de la côte axiale après irradiation. Nous nous sommes limités à la partie courante du crayon combustible (effets de bords non étudiés). En moyenne le diamètre du crayon irradié est à peu près constant. Il est inférieur au diamètre initial (contraction environ égale à 0.5 %) et cette évolution résulte de phénomènes antagonistes : en début de vie le jeu pastille-gaine est non nul (de l'ordre de 80 micromètres à froid) et va même augmenter sous l'effet de la densification des pastilles (densité initiale environ égale à 0.95). Sous l'effet de la pression de l'eau du circuit primaire, le fluage de la gaine induit sa contraction diamétrale. A la fin du deuxième cycle d'irradiation, le contact pastille-gaine s'établit et, sous l'effet du gonflement des pastilles, plus rigides que la gaine, la gaine va fluer en traction et son diamètre va aussi augmenter avec l'irradiation. L'évolution du diamètre de la gaine est donc non monotone : une diminution puis une augmentation à partir de la fin du deuxième cycle.

Autour du diamètre moyen final mesuré, on observe des oscillations.

Ainsi sur les figures 4.1 b) et 4.1 c), nous avons effectué un zoom autour de la côte axiale pour laquelle les mesures de comblement d'évidement ont été effectuées. Sur ces mêmes figures 4.1 b) et 4.1 c), nous avons reporté l'évolution du diamètre externe de la gaine en fonction de la côte axiale de la pastille au cours de l'irradiation (calculs 3D).



a)



b) plan de symétrie

c) plan de fracturation

FIGURE 4.1 – Profilométries extérieures de la gaine : comparaison des résultats issus de la simulation numérique aux données expérimentales.

Les résultats de la simulation 3D sont obtenus sur une demi-pastille. Par symétrie, nous avons représenté le résultat obtenu sur une hauteur de pastille. L'évolution du diamètre extérieur de la gaine en fonction de la côte axiale dépend également de l'azimuth. Ici, nous avons représenté sur la figure 4.1 b) cette évolution de diamètre fonction de la côte axiale au niveau du plan de symétrie latéral de la pastille (plan bleu au second plan sur la figure 1.6). Sur la Figure 4.1 c) est représentée la même évolution au niveau du « plan de fracturation inter-fragments » (voir Figure 1.6).

Nous observons sur les figures 4.1 b) et 4.1 c) que l'effet du fluage thermique est faible au regard des écarts entre la simulation et l'expérience. Le diamètre calculé est globalement trop élevé tandis que la différence de diamètre entre la côte représentative associée à l'inter-pastille et celle associée au médian pastille (différence appelée pli primaire) est trois fois trop élevé par rapport à l'expérience.

Ces plis sont liés à la mise en diabolisme des fragments de pastille sous l'effet du gradient thermique : en tout début de vie, la température centrale du combustible est nettement plus forte que la température en peau externe. Ce gradient de température provoque la fracturation du combustible (modélisée par le fragment 3D, voir figure 1.6). Par ailleurs, ce gradient thermique induit une mise en diabolisme (déplacement plus fort des faces inférieures et supérieures des pastilles par rapport au plan médian pastille). Durant l'irradiation, le contact pastille-gaine s'effectue donc plus tôt au niveau de ces plans inter-pastilles de sorte que l'empreinte des déformations des pastilles (gonflement induit par l'irradiation) est plus marquée au niveau de ces plans inter-pastilles. Cet effet diabolisme a tendance à s'accroître lorsque la pastille est plus rigide. En effet, l'accroissement de cet effet conduit à un contact plus rapide entre la pastille combustible et la gaine suscitant ainsi une augmentation du pli primaire au niveau du plan inter-pastille sur la gaine.

Cette trop forte rigidité dans la simulation a tout d'abord pour origine le maillage trop grossier utilisé (nombre d'éléments selon  $(z)$  et maillage de l'évidement). Ce point devra être étudié ultérieurement.

### 3.2 Comblement des évidements

Tout d'abord, nous décrivons à la figure 4.2 à gauche l'historique de la puissance linéique qui est une donnée du problème. C'est cette puissance qui pilote au premier ordre l'évolution temporelle de la température centrale du combustible, évolution représentée sur la figure 4.2 à droite.



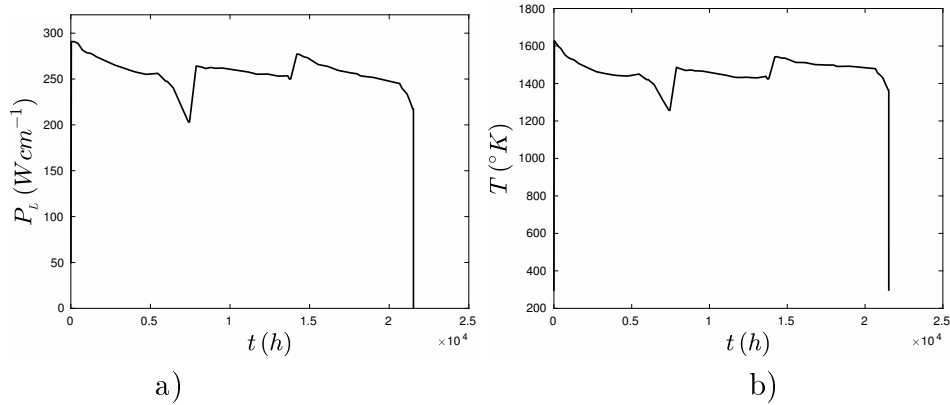


FIGURE 4.2 – Evolutions de la puissance linéique et de la température centrale de la pastille combustible en fonction du temps.

Afin de s'assurer de la pertinence du modèle d'homogénéisation proposé, basé sur l'approche sécante modifiée, nous représentons sur la figure 4.3 les évidements obtenus à travers les simulations numériques et des études expérimentales.

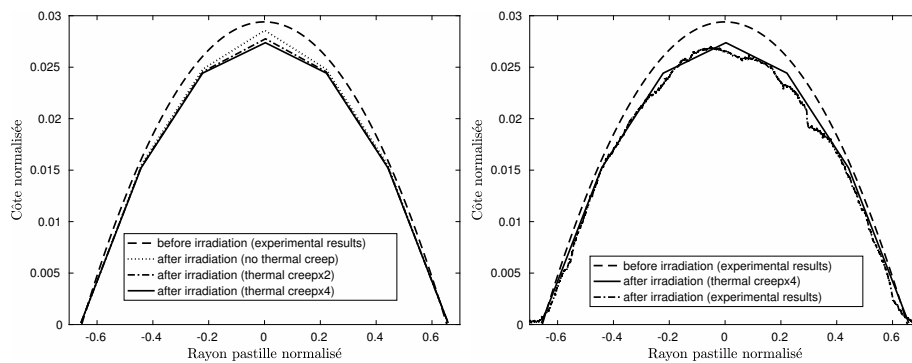


FIGURE 4.3 – Profilométries des évidements au niveau du plan de symétrie : comparaison des résultats issus de la simulation numérique aux données expérimentales.

Sur les figures 4.3 a) et 4.3 b) sont représentées la forme de l'évidement initial (en pointillé) puis les résultats des simulations avec différentes hypothèses :

- calcul sans fluage thermique
- calcul avec fluage thermique (loi définie au chapitre 1)
- calcul avec une intensité de ce fluage thermique multipliée par 2
- calcul avec une intensité de ce fluage thermique multipliée par 4

Nous constatons tout d'abord que même sans fluage thermique un comblement partiel de l'évidement est obtenu (effet du gonflement et du fluage induits par l'irradiation).

Nous notons aussi sur les figures 4.3 a) et 4.3 b) que l'augmentation du fluage thermique entraîne bien une augmentation progressive du comblement des évidements au centre de la pastille combustible. De plus, les résultats de la simulation numérique en présence de fluage thermique révèlent un bon accord avec les résultats expérimentaux (figures 4.3 c) et 4.3 d)) contrairement aux résultats obtenus sans fluage thermique qui sous-estiment le comblement. Cette étude comparative basée sur le comblement des évidements confirme l'effet non négligeable du fluage sur le comportement des crayons combustibles sous irradiation. Le modèle sécant modifié s'avère ainsi pertinent pour décrire le comportement sous irradiation des crayons combustibles MOX.

Sur la figure 4.4 nous comparons les résultats relatifs à l'évolution avec l'irradiation des évidements au niveau des plans de symétrie et de fracturation, pour différents niveaux de fluage thermique.

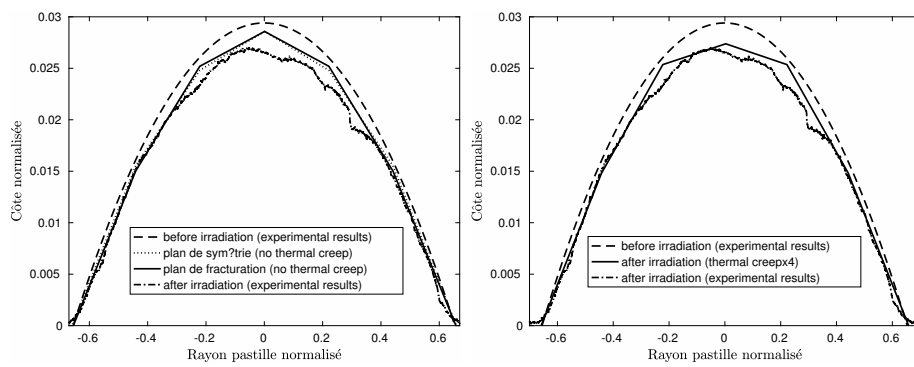


FIGURE 4.4 – Comparaison des résultats relatifs aux plans de symétrie et de fracturation.

Nous constatons sur la figure qu'au centre de la pastille les résultats pour différents niveaux de fluage thermique restent inchangés quel que soit le plan considéré (plan de symétrie ou plan de fracturation). Ce résultat s'explique du fait qu'en ce point les niveaux de contrainte induits par la dilatation thermique sont similaires au niveau des plans de symétrie et de fracturation. Cependant, lorsqu'on s'éloigne du centre de la pastille nous notons une différence des résultats avec le fluage thermique qui est moins élevé au niveau du plan de fracturation en raison de la faible interaction mécanique avec le plan de fracturation de la pastille voisine (les surfaces externes correspondant à ces plans de fracturation voisins sont quasi-libres de contrainte).

## IV. Conclusion

Dans cette étude nous avons utilisé la loi de comportement macroscopique relative au modèle sécant modifié pour simuler l'effet du fluage thermique des pastilles MOX sur leur comportement sous irradiation en régime nominal. Le code de calcul ALCYONE a été utilisé pour ces simulations 3D. A noter que le format MFRONT utilisé pour l'intégration du modèle sécant modifié permet d'utiliser les mêmes sources informatiques pour ces calculs de structure et ceux (élément de volume) reportés au chapitre 3. Cette intégration a été décrite dans ce chapitre (section II.). Ces simulations multi-physiques 3D (couplage thermique, mécanique, physique de l'irradiation) s'appuyant sur une analyse éléments finis et une loi de comportement pastille obtenue par homogénéisation conduisent à des temps calculs relativement élevés (quelques jours). C'est pourquoi un maillage 3D réduit a été adopté pour ces calculs. A l'avenir, ces temps calculs tout comme la convergence de la loi mécanique pastille associée au modèle sécant modifié ou "Affine amélioré" devront être optimisés.

A une côte axiale du crayon représentative de son comportement global, nous avons pu ainsi simuler la hauteur des plis primaires, empreintes des déformations en diabolos des pastilles sur le diamètre extérieur de la gaine. Les plis calculés sont trois fois plus élevés que ceux mesurés expérimentalement. Mais cet écart important est sans doute dû à un maillage de la pastille trop grossier. A cette même côte axiale, nous disposons de mesures post-irradiatoires du comblement partiel des évidements initiaux des pastilles. Les simulations montrent clairement que le gonflement des pastilles combustibles et le fluage induit par l'irradiation ne peuvent pas expliquer à eux seuls les observations expérimentales : sans fluage thermique, le calcul sous-prédit le comblement de ces évidements. En l'absence de données expérimentales sur le combustible irradié, nous avons adopté la loi de fluage thermique du combustible vierge. Ces simulations montrent qu'il faut multiplier par un facteur quatre l'intensité de ce fluage thermique pour obtenir un bon accord avec l'expérience au centre pastille. Cependant et même avec ce facteur quatre, le calcul sous-prédit le comblement de l'évidement à 1mm du centre pastille, ce qui laisse penser qu'il faudrait également « jouer » sur le coefficient d'activation thermique de la loi de fluage thermique pour obtenir un bon accord avec l'expérience.

En perspectives, il faudrait tout d'abord étudier la sensibilité à la finesse du maillage des résultats obtenus dans cette première étude et reprendre l'identification de la loi de fluage thermique en jouant à la fois sur l'intensité et la sensibilité à la température de la loi de fluage du combustible vierge. Il faudrait également étudier la sensibilité des résultats obtenus aux différentes méthodes d'homogénéisation étudiées dans le chapitre 3. Pour cela, nous proposons de reprendre la présente étude en utilisant l'approche sécante améliorée (ou le modèle "Affine amélioré") afin de voir si les résultats finaux (comblement d'évidement, hauteur des plis) sont (quantitativement) sensibles à cet ingrédient de la modélisation.

---

---

## Conclusion générale et perspectives

---

Le travail réalisé dans cette thèse a été consacré à la prédiction des propriétés mécaniques effectives de matériaux hétérogènes à partir des propriétés de leurs constituants. Les matériaux hétérogènes considérés présentent une microstructure de type matrice-inclusions, chaque constituant possédant un comportement viscoélastique non linéaire (ou élasto-viscoplastique) et vieillissant avec des déformations libres (de type dilatations thermiques). L'objectif visé a été de construire un modèle d'homogénéisation qui sera par la suite appliqué aux combustibles nucléaires mixtes Uranium - Plutonium (MOX) utilisés dans les réacteurs nucléaires français (réacteurs à eau sous pression – REP) dans le but de décrire minutieusement le comportement de ces combustibles lorsqu'ils sont irradiés en réacteur. Le combustible MOX est un composite à trois phases constitué d'une phase matricielle appelée enrobage dans laquelle sont distribués de manière aléatoire et isotrope des amas uranifères et des amas plutonifères. Le comportement de ces combustibles en situations de fluage thermique (niveaux de températures et de contraintes très élevés) est de nature viscoélastique non linéaire et vieillissante avec un chargement de type dilatations thermiques différentielles (densification et gonflements induits par l'irradiation).

Notre première contribution a consisté tout d'abord à dresser un état de l'art sur la modélisation et la simulation du comportement multi-physique du crayon combustible. Cet état de l'art est suivi d'une description des phénomènes physico-chimiques qui apparaissent au sein de la microstructure du combustible MOX irradié. La description de ces mécanismes microstructuraux a permis de formuler le problème mécanique à résoudre à l'échelle d'un élément de volume de ce combustible. Nous avons également passé en revue différents modèles d'homogénéisation existants dans le cas élastique linéaire, modèles qui ont été par la suite étendus au cas viscoélastique linéaire. Lorsque la loi de comportement dans chacune des phases est viscoélastique non linéaire, les approches de linéarisation sécantes et affines permettant de ramener le problème non linéaire à un problème linéarisé que l'on sait résoudre en utilisant le principe de correspondance, ont été aussi succinctement revisités.

Dans le deuxième chapitre de la thèse, une approche micro-mécanique reposant sur une description d'une microstructure particulière, la sphère composite, a été proposée dans le but d'estimer les champs mécaniques locaux ainsi que le comportement effectif de microstructures biphasées sous chargement isotrope caractérisées par de faibles fractions volumiques d'inclusions. Ce problème avait été résolu pour des comportements linéaires (élasticité linéaire, viscoélasticité linéaire) ou non linéaires (élastoplasticité, élasticité non linéaire etc) mais pas pour les comportements viscoélastiques non linéaires étudiés ici. Dans certains cas particuliers de comportement (élasticité homogène, matrice incompressible) et de chargement (dilatation libre de la sphère sous l'effet d'une dilatation de l'inclusion ...), une solution purement analytique a pu être établie. Dans le cas général, nous avons montré que la distribution radiale de contrainte équivalente dans la matrice, force motrice des phénomènes de fluage et de relaxation, est solution d'une équation intégro-différentielle non linéaire pour laquelle nous avons proposé une méthode de résolution numérique basée sur la méthode des trapèzes.

Enfin, des calculs en champs complets, réalisés sur des microstructures périodiques, ont été également menés et les résultats obtenus ont clairement montré la pertinence du modèle analytique proposé. Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'une communication à conférence en 2016 [87] puis d'une publication en 2018 dans *European Journal of Mechanics* [102].

Le troisième chapitre a été consacré à la définition d'un modèle d'homogénéisation semi-analytique plus général, le modèle analytique établi au chapitre précédent ne permettant de décrire le comportement local et macroscopique de microstructures complexes que dans certaines situations particulières (chargement isotrope et faibles fractions volumiques d'inclusions). La méthodologie proposée consiste à linéariser le comportement des phases permettant de ramener le problème viscoélastique non linéaire à un problème viscoélastique linéaire pour lequel on dispose de méthodes d'estimations (approche par variables internes équivalente aux résultats obtenus avec le principe de correspondance). En jouant sur la méthode de linéarisation (Sécante, Affine) ainsi que sur les quantités de référence par phase autour desquelles est effectuée cette linéarisation, on obtient différentes méthodes d'estimations. Pour un chargement de type gonflements différentiels (cas biphasé), ces différentes estimations sont systématiquement comparées aux solutions de référence établies dans le chapitre 2. Ces comparaisons montrent que toutes les méthodes basées uniquement sur le premier moment des contraintes conduisent à des prédictions irréalistes. L'utilisation du second moment des contraintes dans la phase matricielle associée à une linéarisation sécante conduit à des estimations qualitativement correctes. Néanmoins, seule une nouvelle méthode (appelée Affine améliorée) basée sur une linéarisation affine et l'utilisation des fluctuations des contraintes permet d'obtenir un bon accord quantitatif dans le cas considéré. Cette approche a été définie dans le cas de chargements plus généraux (chargement mécanique macroscopique et gonflements différentiels) puis comparée à des calculs en champs complets par FFT. Ces comparaisons montrent que pour la non linéarité retenue (exposant de la loi puissance égale à 4), l'approche affine améliorée proposée conduit à des prédictions trop souples, contrairement à l'approche sécante modifiée qui prédit des résultats très proches de ceux obtenus par calculs FFT. Ces résultats ont fait l'objet de deux publications à conférence ([88],[103]). En considérant le taux de triaxialité dans la matrice (calculé à partir du premier moment du champ de contrainte dans la matrice), les comparaisons menées montrent l'incapacité des différentes méthodes d'estimation disponibles à représenter des chargements caractérisés par un taux de triaxialité très petit ou très grand. Une solution consistant à corriger l'estimation sécante modifiée en fonction de ce taux de triaxialité est définie à l'issue de ce travail.

Dans le quatrième et dernier chapitre, nous avons étendu le modèle d'homogénéisation construit avec la nouvelle approche développée qui présente les meilleures estimations pour la quasi-totalité des chargements étudiés au cas des composites à trois phases. La loi homogénéisée obtenue est implémentée dans MFRONT qui est un outil développé au CEA pour définir des lois de comportement mécaniques. Le code source MFRONT est par la suite utilisé par le solveur éléments finis CAST3M pour réaliser des calculs de comportement sous irradiation des crayons combustibles dans ALCYONE en régime nominal. Les résultats issus de la simulation numérique ont été enfin validés par comparaison à des données expérimentales relatives aux profilométries extérieures de la gaine (évolution de son diamètre extérieur en fonction de la côte axiale après irradiation) et aux évolutions sous irradiation des évidements localisés aux extrémités hémisphériques des pastilles combustibles. La sensibilité des résultats obtenus à l'intensité du fluage thermique est tout particulièrement étudiée et montre clairement le rôle joué par le fluage thermique sur le comportement expérimental observé.

---

A l'avenir, ces calculs mériteraient d'être réalisés avec l'approche affine améliorée afin d'évaluer la pertinence des différents modèles d'homogénéisation construits. Une fois le modèle d'homogénéisation retenu, les calculs réalisés dans ALCYONE pourraient être alors étendus aux situations "incidentelles" de fonctionnement en réacteur, situations pour lesquelles les niveaux de température et de contrainte très élevés sont susceptibles d'activer fortement le comportement viscoélastique non linéaire de ces combustibles. Des données expérimentales permettant de caractériser l'effet de la teneur en Plutonium des phases constitutives des combustibles MOX sur leur comportement viscoplastique sont également indispensables.

Les combustibles MOX utilisés en réacteur sont des céramiques, donc ils sont très sensibles aux phénomènes de fissuration qui peuvent résulter de plusieurs facteurs externes, notamment la température ainsi que les sollicitations mécaniques. Or le modèle développé dans ce projet de thèse ne prend pas en compte les effets de ces mécanismes susceptibles d'apparaître à l'échelle micro-structurale. Donc l'extension de ce modèle à l'étude des effets de ces microfissures sur le comportement mécanique effectif des combustibles MOX constitue une perspective d'intérêt au terme de cette thèse, tout particulièrement pour les situations accidentelles.

Pour des situations accidentelles conduisant à de fortes températures dans le combustible (accident de réactivité, régime ductile), il existe dans la littérature des modèles d'endommagement micro-structuraux dont les premières contributions ont été apportées par Rice et Tracey [104] qui ont mis en oeuvre un modèle permettant de décrire l'évolution en fonction du chargement appliqué d'une cavité isolée dans une matrice infinie. Nous pouvons également citer le modèle micro-mécanique de Gurson [105] qui met en exergue l'effet de la croissance de cavités sur le comportement homogénéisé de matériaux ayant un comportement purement plastique, modèle qui a été par la suite amélioré par d'autres auteurs dont notamment Tvergaard et Needleman [106].

Pour des situations conduisant à des températures combustible plus modérées (régime fragile, accident par perte de réfrigérant primaire), on dispose également de méthodes proposées par le passé (voir, par exemple, Dormieux L., Kondo, D. "Stress-based estimates and bounds of effective elastic properties : The case of cracked media with unilateral effects" Computational Materials Science, 46(1), 173-179, 2009), méthodes inspirées de l'homogénéisation de matériaux hétérogènes dont les constituants possèdent un comportement élastoplastique.



---

## Bibliographie

---

- [1] JULIEN J. *Modélisation multi-échelle du couplage physico-chimie-mécanique du comportement du combustible à haute température des réacteurs à eau sous pression*. PhD thesis, Université de Provence - Aix-Marseille I., 2008.
- [2] GROUPE MONITEUR. Les combustibles nucléaires. Technical report, une monographie de la direction de l'énergie nucléaire, CEA, 2008.
- [3] RAMIÈRE I., MASSON R., MICHEL B., and BERNAUD S. Un schéma de calcul multi-échelles de type Éléments finis au carré pour la simulation de combustibles nucléaires hétérogènes. *13ème Colloque National en Calcul des Structures CSMA*, 2017.
- [4] HELFER T. *Etude de l'impact de la fissuration des combustibles nucléaires oxyde sur le comortement normal ey incidentel des crayons combustibles*. PhD thesis, Ecole Centrale Lyon., 2006.
- [5] MICHEL B., NONON C., SERCOMBE J., MICHEL F., and Marelle V. Simulation of pellet-cladding interaction with the pleiades fuel performance software environment. *Nuclear Technology.*, 182 :2 :124–137, 2013.
- [6] PONTE CASTAÑEDA P. Stationary variational estimates for the effective response and field fluctuations in nonlinear composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 96 :660–682, 2016.
- [7] MASSON R. and BLANC V. Dossier de spécifications physiques et numériques d'une loi de comportement hétérogène couplée Mécanique/Margaret pour les combustibles MOX. (DEC/SESC/LSC/08-44-indice 3), 2015.
- [8] MANDEL. J. Cours de mécanique des milieux continus. *Gauthier-Villars, Paris*, 1966.
- [9] MARELLE V. and al. Advanced simulation of fuel behavior under irradiation in the pleiades software environment. Technical Report IAEA TECDOC SERIES, CEA, 2015.
- [10] OLANDER D. R. Fundamental aspect of nuclear reactor fuel elements. *Technical Information Center - Energy Research and Development Administration, University of California, Berkeley.*, 1976.
- [11] UFFELEN V., P., and al. Analysis of reactor fuel rod behavior. *Handbook of Nuclear Engineering, D.G Cacuci, Editor, Springer Science + Business Media.*, 2010.
- [12] UFFELEN V. and SUZIKI M. Fuel performance modeling and simulations : Oxide fuel performance and simulation. *Comprehensive Nuclear Materials, R.J.M Konings.*, 2012.



- 
- [13] SUZIKI M., UETSUKA H., and SAITOU H. Analysis of mechanical load on cladding induced by fuel swelling during power ramp in high burn-up rod by fuel performance code FEMAXI-6. *Nuclear Engineering and Design.*, 229, 2004.
- [14] RASHID J. and al. Analysis of reactor fuel rod behavior modeling of LWR fuel as represented in the FALCON code. *Workshop on Materials Modelling and Simulations for Nuclear Fuel (MMSNF), New Orleans, US.*, 2003.
- [15] SERCOMBE J. and al. Multi-dimensional modeling of PCMI during base irradiation and ramp testing with ALCYONE v1.1. *Top Fuel 2009, European Nuclear Society, Paris, France.*, 2009.
- [16] STRUZIK C. and MARELLE V. Validation of the fuel performance CEA code ALCYONE, scheme 1D, on extensive data base. *Top Fuel 2009, European Nuclear Society, Manchester, UK.*, 2012.
- [17] GATT J. M. and MENARD J. C. Overall viscoplastic behaviour of uranium dioxide. *SMIRT19, Toronto.*, August, 2007.
- [18] MONERIE Y. and GATT J. M. Overall viscoplastic behavior of non-irradiated porous nuclear ceramics. *Mechanics of materials*, **38** :608–619, 2006.
- [19] MICHEL B. and al. 3D Fuel Cracking Modelling in Pellet Cladding Mechanical Interaction. *Eng. Fracture Mech.*, 75 :3581, 2008.
- [20] SONIAK A. and al. Irradiation Creep Behavior of Zr-Base Alloys. *Zirconium in the Nuclear Industry : 13th International Symposium.*, ASTM STP 1423 :837, G. D. MOAN and P. RUDLING, Eds., ASTM International, West Conshohocken, Pennsylvania, 2002.
- [21] GARCIA P., STRUZIK C., and AGARD M. The effect of fission gas swelling on cladding strains during power ramp tests. *Proc. Conf. Fuel Chemistry and Pellet Cladding Interaction Related to High Burn-Up Fuel, Nyköping, Sweden, September 7–10, 1998, IAEA TECDOC 1179, International Atomic Energy Agency.*, 1998.
- [22] NOIROT L. and MARGARET. An advanced mechanistic model of fission gas behaviour in nuclear fuel. *Nucl. Eng. Des.*, 241 :6,2099, 2011.
- [23] JOMARD G., STRUZIK C., BOULORE A., MAILHE P., AURET V., and LARGENTON R. CARACAS : An Industrial Model for the Description of Fission gas Behavior in LWR-UO<sub>2</sub> Fuel. *Proceedings of WRFPM 2014, endai, Japan, Sep. 14-17.*, Paper No. 100154, 2014.
- [24] BROCHARD J., BENTEJAC F., HOURDEQUIN N., SEROR S., VERDEAU C., and FANDEUR O. Modelling of pellet cladding interaction in PWR fuel. *Washington DC. SMIRT 16-C03/1.*, Aout, 2001.
- [25] MICHEL B., PLANCQ D., GARCIA P., and LANSIART S. Pellet cladding mechanical interaction assessment using 3D modelling. *Beijing, China. SMIRT 18-C03-4.*, Aout, 2005.
- [26] ROBERTS G. The Concentration of Stress in Cladding Produced by the Expansion of Cracked Fuel Pellets. *Nucl. Eng. Des.*, 47 :257, 1978.
- [27] SMITH E. The Fuel-Cladding Interfacial Friction Coefficient in Water-Cooled Reactor Fuel Rods. *Trans. SMIRT 5.*, 1979.
-

- 
- [28] WOOD J. C., SURETTE B. A., and AITCHISON I. Pellet Cladding Interaction Evaluation of Lubrication by Graphite. *J. Nucl. Mater.*, 88 :81, 1980.
- [29] JULIEN J., ZACHARIE-AUBRUN I., SERCOMBE J., RAVEU G., and GATT J. M. Adjustment of fuel creep behaviour based on post-ramp dish filling observations and 3D simulations. impact on clad ridges. *European Nuclear Society, Manchester, United Kingdom 2-6 September.*, 2012.
- [30] GOTTA and M. J. Évolution de la microstructure du mox en liaison avec le développement des procédés de fabrication. *Journal of nuclear materials (JNM).*, 2001.
- [31] WHITE, R.J., FISHER, S.B.and COOK, P. M. A., STRATTON, R., WALKER, C. T., PALMER, and I. D. Measurement and analysis of fission gaz release from bnff's sbr MOX fuel. *Communication interne.*, 228 :43–56, 2001.
- [32] OUDINET G. *Analyse d'images et modélisation 2D/3D de la microstructure du combustible MOX*. PhD thesis, Université Jean Monnet - Saint Étienne, 2003.
- [33] LARGENTON R. *Modélisation du comportement effectif du combustible MOX : par une analyse micro-mécanique en champs de transformation non uniformes*. PhD thesis, Université de Provence - Aix-Marseille I., 2012.
- [34] GATT J. M. Comportement thermomécanique du combustible sous irradiation. Technical Report DEC/SESC/LLCC 04-005 - indice 0., CEA, 2004.
- [35] BASINI V., RICHAUD J-C, and BRUGUIER F. Etudes des propriétés mécaniques d'un lot MOX industriel. Technical Report DEC/SPUA/LMPC 02-009., CEA, 2002.
- [36] BASINI V. and BRUGUIER F. Etudes des propriétés mécaniques du lot industriel MOX-E . Technical Report DEC/SPUA/LMPC 04-009., CEA, 2004.
- [37] BASINI V., MENARD, RICHAUD J-C, and BRUGUIER F. Etudes des propriétés mécaniques du combustible MOX-premiers résultats. Technical Report DEC/SPUA/LMPC 02-011, CEA, 2002.
- [38] ROUSSETTE S. Analyse par champs de transformation de matériaux élastoviscoplastiques multiphasés - application aux combustibles MOX. Technical report, Thèse de Doctorat de l'Université de la Méditerranée, CEA-EDF, 2005.
- [39] PUJOL X., HANIFI K., UNTRAU J.M., and BRUNAUD L. Programme MOX-E : Examens métallographiques des crayons c13 (fabrication fm07) et p13 MOX-E de l'assemblage fpx2c5 irradiés 3 cycles à chinon b3. Technical Report DEC/SA3C/L2EC 07-008, CEA, 2007.
- [40] JULIEN J., ZACHARIE-AUBRUN I., SERCOMBE J., RAVEU G., and GATT J.M. Adjustment of fuel creep behavior based on postramp dish filling observations and 3d simulations. impact on clad ridges. Manchester (UK), 2012. Water Reactor Fuel Performance Meeting.
- [41] HILL R. The essential of constitutive laws for metal composites and polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol 15 :79–95, 1967.
- [42] ESHELBY J. D. The elastic field outside an ellipsoidal inclusion. *Proc. R. Soc. London , Ser.A 252*, pages 561–569, 1959.
-

- 
- [43] MORI T. and TANAKA K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica.*, 21 :571–574, 1973.
- [44] HASHIN Z. The elastic moduli of heterogeneous materials. *Journal of Applied Mechanics*, **29** :143–150, 1962.
- [45] HASHIN Z. and SHTRIKMAN S. On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 10 :335–342, 1962.
- [46] HASHIN Z. and SHTRIKMAN S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* , vol.10, pages 343–352, 1962.
- [47] HASHIN Z. and SHTRIKMAN S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* , vol.11, pages 127–140, 1963.
- [48] ZAOUI A. Matériaux hétérogènes et composites. *Ecole polytechnique, Paris.*, 1997.
- [49] PONTE CASTAÑEDA P. Exact second-order estimates for the effective mechanical properties of nonlinear composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44(6) :827–862, 1996.
- [50] NEBOZHYN M. V. and PONTE CASTAÑEDA P. The second-order procedure : exact vs approximate results for isotropic, two-phase composites . *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 47 :2171–2185, 1998.
- [51] HILL R. A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13 :213–222, 1965.
- [52] PINEAU A. FRANÇOIS A. and ZAOUI A. Comportement mécanique des matériaux. *Hermès*, Volume I, Paris, 1991-1993.
- [53] SUQUET P. Overall properties of nonlinear composites : a modified secant moduli theory and its link with Ponte-Castañeda’s nonlinear variational procedure. *Compte Rendu de l’Académie des Sciences Paris II*, 317 :1512–1522, 1995.
- [54] PONTE CASTAÑEDA P. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39 :45–71, 1991.
- [55] CHRISTENSEN R. M. Viscoelastic properties of heterogeneous media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **17** :23–41, 1969.
- [56] WANG Y.M. and WENG G.J. The influence of inclusion shape on the overall viscoelastic behavior of composites. *J. Appl. Mech.*, **59** :510–518, 1992.
- [57] RICAUD J.-M. and MASSON R. Effective properties of linear viscoelastic heterogeneous media : Internal variables formulation and extension to ageing behaviours. *International Journal of Solids and Structures*, **46** :1599–1606, 2009.
- [58] BLANC V., BARBIE L., LARGENTON R., and MASSON R. Homogenization of linear viscoelastic three phase media : Internal variable formulation versus full-field computation. *Procedia Engineering*, 10 :1889–1894, 2011.
-

- [59] BERBENNI S., DINZART F., and SABAR H. A new internal variables homogenization scheme for linear viscoelastic materials based on an exact eshelby interaction law. *Mechanics of Materials*, 81 :110–124, 2015.
- [60] PAPIN D. Cours de calcul opérationnel. *Albin Michel*, 1960.
- [61] SPIEGEL M. R. Laplace transforms. *McGraw-Hill, New York*, 1991.
- [62] SCHAPERY R. Approximate methods of transform inversion for viscoelastic stress analysis. In : *US. Nat. Congr. Appl. Mech ASME 4th, 2* :, 1075–1085, 1962.
- [63] BADULESCU C., LAHELLEC N., and SUQUET P. Field statistics in linear viscoelastic composites and polycrystals. *European journal of Mechanics - A/Solids*, 49 :329–344, 2015.
- [64] HILL R. Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystal. *J. Mech. Phys. Solids*, 13 :89–101, 1965.
- [65] BISHOP J. F. W. and HILL R. A theory of the plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stresses. *Philosophical Magazine.*, 42 :414–427, 1951.
- [66] BERVEILLER. M and ZAOUI. A. An extension of the self-consistent scheme to plastically-flowing polycrystals. *J. Mech. Phys. Solid*, 26 :325–344, 1979.
- [67] TANDON G. P. and WENG G. J. A theory of particle-reinforced plasticity. *J. Appl Mech.*, 55 :126–135, 1988.
- [68] QIU Y. P. and WENG G. J. A theory of plasticity for porous materials and particle-reinforced composites. *J. Appl Mech.*, 59 :261–268, 1992.
- [69] TALBOT D. and WILLIS J. R. Variational principles for inhomogeneous non-linear media. *IMA J. Appl. Math* ., 35 :39–54, 1985.
- [70] SUQUET P. Sur le comportement mécanique macroscopique de composites non linéaires. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 315 :909 – 914, 1992.
- [71] SUQUET P. Overall potentials and extremal surfaces of power law or ideally plastic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41 :981–1002, 1993.
- [72] PONTE CASTAÑEDA P. Second-order homogenization estimates for nonlinear composites incorporating field fluctuations. I. Theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50 :737–757, 2002.
- [73] MICHEL J. C. and SUQUET P. The constitutive law of nonlinear viscous and porous materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40 :783–812, 1992.
- [74] LAHELLE. N and SUQUET. P. On the effective behavior of nonlinear inelastic composites : I. incremental variational principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55 :1932–1963, 2007.
- [75] MASSON R. and ZAOUI A. Self-consistent estimates for the rate-dependent elastoplastic behaviour of polycrystalline materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 47 :1543–1568, 1999.
-

- 
- [76] LEVESQUE M., DERRIEN M., MISHNAEVSKI JR L., BAPTISTE D., and GILCHRIST M. D. A micromechanical model for nonlinear viscoelastic particle reinforced polymeric composite materials undamaged state. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 35(7-8) :905–913, 2004.
- [77] DVORAK G. J. Transformation field analysis of inelastic composite materials. Technical report, 1992.
- [78] MICHEL J.C and SUQUET P. Nonuniform transformation field analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 40 :6937–6955, 2003.
- [79] PONTE CASTAÑEDA P. and SUQUET P. Nonlinear composites. *Advances in applied mechanics*, 34 :171–302, 1997.
- [80] REKIK A., AUSLENDER F., and BORNERT M. A set of enhanced formulations for existing nonlinear homogenization schemes and their evaluation. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2015.
- [81] BRENNER R., CASTELNAU O., and GILORMONI P. A modified affine theory for the overall properties of nonlinear composites. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics*, 329(9) :649–654, 2001.
- [82] LAHELLEC. N and SUQUET. P. Effective behavior of linear viscoelastic composites : a time integration approach. *International Journal of Solids and Structures*, 44 :507–529, 2007.
- [83] BLANC V. Notice d'utilisation de l'application ver v1.2. Technical Report DEC/SESC/LSC 12-023, CEA, 2017.
- [84] LARGENTON R., THEVENIN V., and BARON D. Simulation and modelling the heterogeneous effects of microstructure mox fuels on their effective properties in nominal pressure water reactor conditions. *Advances in Sciences and Technology*, pages 91–96, 2010.
- [85] SECK M. El B. and MASSON R. Lois de comportement mécanique hétérogène 2 et 3 phases pour les combustibles mox : intégration au format mfront, tests de vérification et capitalisation dans pleiades. Technical Report DEC/SESC/LIPA 17-001, CEA, 2017.
- [86] SECK M. El B., MASSON R., BOULORE A., BLANC V., LARGENTON L., and GARAJEU M. Three scales simulations of mox fuel rods behavior under irradiation. Montpellier (France), 2016. Nuclear Material Conference.
- [87] SECK M. El B., GARAJEU M., and MASSON R. Solutions exactes d'une sphère composite viscoélastique non linéaire sous chargement isotrope. IASI, 2016. XIII éme Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées.
- [88] SECK M. El B., GARAJEU M., and MASSON R. Homogénéisation en viscoélasticité non linéaire : estimations basées sur les premiers et seconds moments des champs. Lille (France), 2017. Congrès Français de Mécanique.
- [89] DUVA J. M. and HUTCHINSON J. W. Constitutive potentials for dilutely voided nonlinear materials. *Mechanics of Materials*, 3 :41–54, 1984.
- [90] DEBORDES O. Homogenization computations in the elastic or plastic range ; applications to unidirectional composite and perforated sheets, computational mechanics publications. *Springer-Verlag, Atlanta*, pages 453–458, 1986.
-

- 
- [91] MOULINEC H. and SUQUET P. A fast numerical method for computing the linear and nonlinear proprieties of composites. *Compte-Rendu de l'Académie des Sciences Paris II*, 318 :1417–1423, 1994.
- [92] SEGURADO J. and LLORCA J. A numerical approximation to the elastic properties of sphere-reinforced composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50 :2107–2121, 2002.
- [93] GHOSSEIN E. and LEVESQUE M. A fully automated numerical tool for a comprehensive validation of homogenization models and its application to spherical particles reinforced composites. *International Journal of Solids and Structures*, 49 :1387–1398, 2012.
- [94] MAN W., DONEV A., STILLINGER F., SULLIVAN M., RUSSEL W., HEEGER D., IN-ATI S., TORQUATO S., and CHAIKIN P. Experiments on random packings of ellipsoids. *Physical Review Letters*, 94 :198001, 2005.
- [95] GHOSSEIN E. and LEVESQUE M. Random generation of periodic hard ellipsoids based on molecular dynamics : A computationally-efficient algorithm. *Journal of Computational Physics*, 253 :471–490, 2013.
- [96] WILLIAMS S. and PHILIPSE A. Random packings of spheres and spherocylinders simulated by mechanical contraction. *Physical Review E*, 67 :051301, 2003.
- [97] ZHAO J., LI S., ZOU R., and YU A. Dense random packings of spherocylinders. *Soft Matter*, 8 :1003–1009, 2012.
- [98] RIVEST R., SHAMIR A., and ADLEMAN L. A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems. *Communications of the ACM*, 21 (2) :120–126, 1978.
- [99] MASSON R., BORNERT M., SUQUET P., and ZAOUI A. An affine formulation for the prediction of the effective properties of nonlinear composites and polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48 :1203–1227, 2000.
- [100] REKIK A. and BRENNER R. Optimization of the collocation inversion method for the linear viscoelastic homogenization. *Mechanics Research Communications.*, 38 :305–308, 2011.
- [101] JULIEN J., GARAJEU M., and MICHEL J.C. A semi-analytical model for the behavior of saturated viscoplastic materials containing two populations of voids of different sizes. *International Journal of Solids and Structures.*, 48 :1485–1498, 2011.
- [102] SECK M. El B., GARAJEU M., and MASSON R. Exact solutions for the effective nonlinear viscoelastic (or elasto- viscoplastic) behaviour of particulate composites under isotropic loading. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2018.
- [103] SECK M. El B., GARAJEU M., and MASSON R. Homogenization in nonlinear viscoelasticity : estimates based on the second moments and fluctuations of the fields. *European Conference in Solid Mechanics, Italy*, 2-6 July 2018.
- [104] RICE J. R. and TRACEY D. M. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 17 :201–217, 1969.
- [105] GURSON A. L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : Part I - yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 99 :2–15, 1977.
-

- [106] VAN DER GIESSEN E., VAN DER BURG M. W., NEEDLEMAN A., and TVERGAARD V. Void growth due to creep and grain boundary diffusion at high triaxialities. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 43 :123–165, 1995.
-

# ANNEXE A

---

## Compléments relatifs à la partie III. du chapitre 1 : Évolutions des moyennes par phase du champ de contrainte

---

### 1. Relations générales

Nous avons vu que la contrainte moyenne dans chacune des phases s'écrit de façon générale :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)}(t) = \mathbf{B}^{(r)} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) + \mathbf{b}^{(r)} \quad (\text{A.1})$$

Nous utilisons ici le modèle de Mori-Tanaka pour estimer les moyennes par phase du champ de contrainte d'un matériau triphasé constitué d'une phase matricielle élastique dans laquelle sont distribuées de manière aléatoire des inclusions de forme sphérique. Les phases inclusionnaires ont également un comportement élastique. Le matériau est soumis simultanément à une contrainte homogène  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t)$  sur le contour du VER et à des déformations libres supposées homogènes dans les phases. Les moyennes par phase du champ de contrainte peuvent être établies en résolvant trois problèmes d'inclusion dans lesquels le milieu infini possède les propriétés de la matrice tandis que le chargement à l'infini est une contrainte homogène notée  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_*(t)$ . Ces trois problèmes ne diffèrent que par le comportement mécanique de l'inclusion.

- problème 1 : Comportement de la matrice,  $\boldsymbol{\varepsilon}_0^{(1)}(t)$  imposé
- problème 2 : Comportement  $\mathbf{S}^{(2)}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_0^{(2)}(t)$  imposé
- problème 3 : Comportement  $\mathbf{S}^{(3)}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_0^{(3)}(t)$  imposé

En utilisant le résultat rappelé en section 2.5, les moyennes par phase du champ de contraintes sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}(t) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_*(t) - \mathbf{Q}_{\mathbf{E}}^{(1)} : \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(1)}(t) \\ \left[ \mathbf{I} + \mathbf{Q}_{\mathbf{E}}^{(1)} : (\mathbf{S}^{(2)} - \mathbf{S}^{(1)}) \right] : \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}(t) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_*(t) - \mathbf{Q}_{\mathbf{E}}^{(1)} : \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(2)}(t) \\ \left[ \mathbf{I} + \mathbf{Q}_{\mathbf{E}}^{(1)} : (\mathbf{S}^{(3)} - \mathbf{S}^{(1)}) \right] : \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(3)}(t) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_*(t) - \mathbf{Q}_{\mathbf{E}}^{(1)} : \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(3)}(t) \end{array} \right. \quad (\text{A.2})$$



Or  $\sum_r c^{(r)} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)}(t) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t)$ , ce qui permet d'éliminer  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_*(t)$  de la relation précédente selon l'équation.

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_*(t) = \mathbf{B}^{(1)} : \left[ \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) + c^{(1)} \mathbf{Q}_{\mathbf{E}}^{(1)} : \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(1)}(t) + \sum_{r=2}^3 c^{(r)} \tilde{\mathbf{B}}^{(r)} : \mathbf{Q}_{\mathbf{E}}^{(1)} : \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(r)}(t) \right] \quad (\text{A.3})$$

On obtient ainsi les tenseurs de localisation des contraintes et thermiques dans la matrice :

$$\mathbf{B}^{(1)} = \left[ c^{(1)} \mathbf{I} + \sum_{r=2}^3 c^{(r)} \tilde{\mathbf{B}}^{(r)} \right]^{-1}, \mathbf{b}^{(1)} = \mathbf{B}^{(1)} : \sum_{r=2}^3 c^{(r)} \tilde{\mathbf{B}}^{(r)} : \mathbf{Q}_{\mathbf{E}}^{(1)} : \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(r)}(t) + (c^{(1)} \mathbf{B}^{(1)} - \mathbf{I}) : \mathbf{Q}_{\mathbf{E}}^{(1)} : \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(1)}(t) \quad (\text{A.4})$$

avec

$$\tilde{\mathbf{B}}^{(r)} = \left[ \mathbf{I} + \mathbf{Q}_{\mathbf{E}}^{(1)} : (\mathbf{S}^{(r)} - \mathbf{S}^{(1)}) \right]^{-1}, \quad r = 2, 3 \quad (\text{A.5})$$

Les moyennes du champ de contrainte dans les phases inclusionnaires sont données par les expressions suivantes :

$$\mathbf{B}^{(r)} = \left[ \mathbf{I} + \mathbf{Q}_{\mathbf{E}}^{(1)} : (\mathbf{S}^{(r)} - \mathbf{S}^{(1)}) \right]^{-1} : \mathbf{B}^{(1)}, \quad r = 2, 3 \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{b}^{(r)} = \mathbf{B}^{(r)} : \left[ c^{(1)} \mathbf{Q}_{\mathbf{E}}^{(1)} : \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(1)}(t) + \sum_{q=2}^3 c^{(q)} \tilde{\mathbf{B}}^{(q)} : \mathbf{Q}_{\mathbf{E}}^{(1)} : \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(q)}(t) \right] - \tilde{\mathbf{B}}^{(r)} : \mathbf{Q}_{\mathbf{E}}^{(1)} : \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(r)}(t), \quad r = 2, 3 \quad (\text{A.7})$$

Si on considère à présent le cas d'un composite constitué d'une matrice et d'une seule phase inclusionnaire, alors les expressions se simplifient davantage et les moyennes du champ de contrainte par phase dans ce cas sont exprimées par les relations suivantes.

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}(t) = \mathbf{B}^{(1)} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) + c^{(2)} \left( \mathbf{B}^{(1)} : \tilde{\mathbf{B}}^{(2)} : \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(2)}(t) - \tilde{\mathbf{B}}^{(2)} : \mathbf{B}^{(1)} : \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(1)}(t) \right) : \mathbf{Q}_{\mathbf{E}}^{(1)} \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}(t) = \mathbf{B}^{(2)} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) + c^{(1)} \left( \tilde{\mathbf{B}}^{(2)} : \mathbf{B}^{(1)} : \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(1)}(t) - \mathbf{B}^{(1)} : \tilde{\mathbf{B}}^{(2)} : \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(2)}(t) \right) : \mathbf{Q}_{\mathbf{E}}^{(1)} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Avec le tenseur de localisation des contraintes dans la phase inclusionnaire qui est donné par

$$\mathbf{B}^{(2)} = \left[ \mathbf{I} + c^{(1)} \mathbf{Q}_{\mathbf{E}}^{(1)} : (\mathbf{S}^{(2)} - \mathbf{S}^{(1)}) \right]^{-1}, \mathbf{B}^{(1)} = \left[ c^{(1)} \mathbf{I} + c^{(2)} \left[ \mathbf{I} + \mathbf{Q}_{\mathbf{E}}^{(1)} : (\mathbf{S}^{(2)} - \mathbf{S}^{(1)}) \right]^{-1} \right]^{-1} \quad (\text{A.9})$$

## 2. Relations dans le cas isotrope

Dans le cas où les différentes phases constitutives du matériau hétérogène ont un comportement isotrope, les expressions des tenseurs de localisation dans la matrice s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathbf{B}_m^{(1)} = \frac{1}{c^{(1)} + (3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}) \sum_{r=2}^3 \frac{c^{(r)} \kappa^{(r)}}{\kappa^{(r)} (3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}) + 4\mu^{(1)} (\kappa^{(1)} - \kappa^{(r)})}} \\ \mathbf{B}_d^{(1)} = \frac{1}{c^{(1)} + 5(3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}) \sum_{r=2}^3 \frac{c^{(r)} \mu^{(r)}}{5\mu^{(r)} (3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}) + (9\kappa^{(1)} + 8\mu^{(1)}) (\mu^{(1)} - \mu^{(r)})}} \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Comme les déformations libres dans les phases sont supposées homogènes et sphériques donc le tenseur de localisation  $\mathbf{b}^{(1)}$  est sphérique. Ainsi on obtient :

$$\mathbf{b}_m^{(1)} = 12\kappa^{(1)}\mu^{(1)} \frac{\sum_{r=2}^3 \frac{c^{(r)}\kappa^{(r)} \left( \varepsilon_{0m}^{(r)}(t) - \varepsilon_{0m}^{(1)}(t) \right)}{\kappa^{(r)} (3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}) + 4\mu^{(1)} (\kappa^{(1)} - \kappa^{(r)})}}{c^{(1)} + (3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}) \sum_{r=2}^3 \frac{c^{(r)}\kappa^{(r)}}{\kappa^{(r)} (3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}) + 4\mu^{(1)} (\kappa^{(1)} - \kappa^{(r)})}} \quad (\text{A.11})$$

Les moyennes sphériques des tenseurs de localisation dans les inclusions ont pour expressions

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}_m^{(2)} = \frac{3\kappa^{(1)}\kappa^{(2)} + 4\kappa^{(2)}\mu^{(1)}}{[3\kappa^{(1)}\kappa^{(2)} + 4\mu^{(1)}(2\kappa^{(2)} - \kappa^{(1)})]} \left[ c^{(1)} + (3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}) \sum_{r=2}^3 \frac{c^{(r)}\kappa^{(r)}}{\kappa^{(r)} (3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}) - (\kappa^{(1)} - \kappa^{(r)})} \right] \\ \mathbf{B}_m^{(3)} = \frac{3\kappa^{(1)}\kappa^{(3)} + 4\kappa^{(3)}\mu^{(1)}}{[3\kappa^{(1)}\kappa^{(3)} + 4\mu^{(1)}(2\kappa^{(3)} - \kappa^{(1)})]} \left[ c^{(1)} + (3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}) \sum_{r=2}^3 \frac{c^{(r)}\kappa^{(r)}}{\kappa^{(r)} (3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}) - (\kappa^{(1)} - \kappa^{(r)})} \right] \end{array} \right. \quad (\text{A.12})$$

Dans le cas d'un matériau biphasé les moyennes hydrostatiques par phase du champ de contrainte, lorsque les déformations sont sphériques, s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}_m^{(1)}(t) = \frac{\kappa^{(1)} (3\kappa^{(2)} + 4\mu^{(1)})}{3\kappa^{(1)}\kappa^{(2)} + 4\mu^{(1)} \sum_{r=1}^2 c^{(r)}\kappa^{(r)}} \bar{\sigma}_m(t) + \frac{12c^{(2)}\kappa^{(1)}\kappa^{(2)}\mu^{(1)} \left( \varepsilon_{0m}^{(2)}(t) - \varepsilon_{0m}^{(1)}(t) \right)}{3\kappa^{(1)}\kappa^{(2)} + 4\mu^{(1)} \sum_{r=1}^2 c^{(r)}\kappa^{(r)}} \\ \bar{\sigma}_m^{(2)}(t) = \frac{\kappa^{(2)} (3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)})}{3\kappa^{(1)}\kappa^{(2)} + 4\mu^{(1)} \sum_{r=1}^2 c^{(r)}\kappa^{(r)}} \bar{\sigma}_m(t) + \frac{12c^{(1)}\kappa^{(1)}\kappa^{(2)}\mu^{(1)} \left( \varepsilon_{0m}^{(1)}(t) - \varepsilon_{0m}^{(2)}(t) \right)}{3\kappa^{(1)}\kappa^{(2)} + 4\mu^{(1)} \sum_{r=1}^2 c^{(r)}\kappa^{(r)}} \end{array} \right. \quad (\text{A.13})$$



# ANNEXE B

---

## Compléments relatifs à la partie IV. du chapitre 1 : Évolution temporelle du second moment du champ de contrainte dans la matrice

---

Pour un comportement viscoélastique linéaire avec déformation libre (loi de comportement dans (1.89)), l'évolution temporelle du second moment dans la matrice peut être déterminée en partant de la condition de macrohomogénéité de Hill ( $\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) \rangle = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) : \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}(t)$ ) et en ayant recours à des hypothèses simplificatrices. En effet, lorsque le comportement dans les différentes phases d'un composite ( $r = 1, 2, \dots, N$ ) est isotrope le lemme de Hill conduit à la relation

$$\sum_{r=1}^N c^{(r)} \left\langle \frac{1}{\kappa_e} \dot{\sigma}_m \sigma_m + \frac{1}{\kappa_v^{(r)}} \sigma_m \sigma_m + \frac{1}{2\mu_e} \dot{\mathbf{s}} : \mathbf{s} + \frac{1}{2\mu_v^{(r)}} \mathbf{s} : \mathbf{s} + 3\sigma_m^{(r)} \dot{\varepsilon}_{0m}^{(r)} \right\rangle^{(r)} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \quad (\text{B.1})$$

On obtient ainsi une équation à  $2N$  inconnues, qui ne peut être résolue que lorsque l'on dispose de  $2N - 1$  équations supplémentaires. Pour simplifier le problème, nous faisons recours aux hypothèses suivantes.

- les contraintes hydrostatiques et déviatoriques sont supposées homogènes dans les inclusions (hypothèse triviale avec la solution de la sphère composite sous chargement isotrope, voir chapitre 2 section III.).

- les contraintes hydrostatiques sont supposées homogènes dans la phase matricielle.

Avec ces hypothèses on obtient la loi d'évolution temporelle dans la matrice qui est régie par une équation différentielle du premier ordre suivant.

$$\frac{1}{4\mu_e} \dot{S}_1(t) + \frac{1}{2\mu_v^{(1)}} S_1(t) = M(t) \quad \text{avec} \quad S_1(t) = \langle \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) : \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) \rangle^{(1)} \quad (\text{B.2})$$

Le second membre  $M(t)$  de cette équation différentielle est une fonction donnée par :

$$M(t) = \frac{1}{c^{(1)}} \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}(t) : \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) - \sum_{r=2}^N \frac{c^{(r)}}{c^{(1)}} \left( \frac{1}{2\mu_e} \dot{\bar{\mathbf{s}}}^{(r)}(t) : \bar{\mathbf{s}}^{(r)}(t) + \frac{1}{2\mu_v^{(r)}} \bar{\mathbf{s}}^{(r)}(t) : \bar{\mathbf{s}}^{(r)}(t) \right) - \sum_{r=1}^N \frac{c^{(r)}}{c^{(1)}} \left( \frac{1}{\kappa_e} \dot{\bar{\sigma}}_m^{(r)}(t) \bar{\sigma}_m^{(r)}(t) + \frac{1}{\kappa_v^{(r)}} \bar{\sigma}_m^{(r)}(t) \bar{\sigma}_m^{(r)}(t) + 3\bar{\sigma}_m^{(r)}(t) \dot{\bar{\varepsilon}}_{0m}^{(r)}(t) \right) \quad (\text{B.3})$$

Lorsque la vitesse de déformation visqueuse dans la matrice est une fonction affine du déviateur des contraintes (équation (1.141)) avec la souplesse visqueuse qui est anisotrope (relation (1.143)), la même démarche conduit à l'équation suivante :

$$\frac{1}{4\mu_e} \dot{S}_1(t) + \frac{1}{2\mu_v^{(1)}(S_1, \bar{\mathbf{s}}^{(1)})} S_1(t) + \frac{3(n^{(1)} - 1)}{4\mu_v^{(1)}(S_1, \bar{\mathbf{s}}^{(1)})} \frac{\langle (\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) : \bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t))^2 \rangle^{(1)}}{(\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})^2} = N(t) \quad (\text{B.4})$$

avec le second membre  $N(t)$  de l'équation différentielle qui est donnée par :

$$N(t) = \frac{1}{c^{(1)}} \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}(t) : \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) - \bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t) : \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_0^{(1)}(t) - \sum_{r=2}^N \frac{c^{(r)}}{c^{(1)}} \left( \frac{1}{2\mu_e} \dot{\bar{\mathbf{s}}}^{(r)}(t) : \bar{\mathbf{s}}^{(r)}(t) + \frac{1}{2\mu_v^{(r)}(\bar{\mathbf{s}}^{(r)})} \bar{\mathbf{s}}^{(r)}(t) : \bar{\mathbf{s}}^{(r)}(t) \right) - \sum_{r=1}^N \frac{c^{(r)}}{c^{(1)}} \left( \frac{1}{\kappa_e} \dot{\bar{\sigma}}_m^{(r)}(t) \bar{\sigma}_m^{(r)}(t) + \frac{1}{\kappa_v^{(r)}} \bar{\sigma}_m^{(r)}(t) \bar{\sigma}_m^{(r)}(t) + 3\bar{\sigma}_m^{(r)}(t) \dot{\bar{\varepsilon}}_{0m}^{(r)}(t) \right) \quad (\text{B.5})$$

Dans la version "**isotrope**" de l'approche Affine amélioré où la souplesse visqueuse associée à la phase matricielle est "**isotropisée**" (relation (3.51)), l'évolution temporelle du second moment de la matrice s'écrit :

$$\frac{1}{4\mu_e} \dot{S}_1(t) + \frac{1}{2\tilde{\mu}_v^{(1)}(S_1, \bar{\mathbf{s}}^{(1)})} S_1(t) = N(t) \quad \tilde{\mu}_v^{(1)} = \frac{\mu_v^{(1)}}{n^{(1)}} \quad (\text{B.6})$$

# ANNEXE C

---

## Compléments relatifs à la partie V. du chapitre 1 : Nouvelle approche de linéarisation de Ponte Castañeda [6]

---

Cette étude est consacrée à l'estimation des propriétés effectives de composites dont la loi de comportement dans chacune des phases est non linéaire. La méthode proposée pour évaluer la réponse effective du composite repose sur le principe variationnel correspondant à celui d'un Milieu Linéaire de Comparaison dont la loi de comportement dans chacune des phases est de type thermo-élastique. Les résultats issus de cette approche de linéarisation sont par la suite utilisés pour estimer les propriétés effectives de notre matériau d'étude dont le comportement des phases est viscoélastique non linéaire.

### 1. Formulation du problème

Soit un matériau hétérogène occupant un domaine  $\Omega$  constitué de  $N$  phases distribuées de manière aléatoire. Soit  $u^{(r)}$  la densité d'énergie caractéristique de la loi de comportement dans chacune des phases. Le potentiel local supposé convexe est défini par :

$$u(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}) = \sum_{r=1}^N \chi^{(r)}(\mathbf{x}) u^{(r)}(\boldsymbol{\sigma}) \quad \text{où} \quad \chi^{(r)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^{(r)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Le problème à résoudre à l'échelle microscopique consiste à déterminer les champs mécaniques tels que  $\boldsymbol{\varepsilon}$  soit compatible et que  $\boldsymbol{\sigma}$  soit équilibré et vérifie les conditions aux limites statiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) = 0 \text{ dans } \Omega \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right) \text{ dans } \Omega \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}) \text{ dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (\text{C.2})$$

La résolution du problème est équivalente à la minimisation de l'énergie potentielle emmagasiné dans le volume lorsque le bord extérieur du domaine  $\Omega$  est soumis en contraintes homogènes. Soit  $\tilde{u}$  le potentiel effectif du composite non linéaire, alors on a :

$$\tilde{u}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \min_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}} \langle u(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}) \rangle \quad (\text{C.3})$$

où  $\mathcal{S}$  désigne l'ensemble des champs de contraintes statiquement admissibles.

Pour estimer les propriétés effectives du composite non linéaire, Ponte Castañeda introduit un Milieu Linéaire de Comparaison dans lequel le potentiel dans chaque phase est sous forme quadratique et est donné par :

$$u_L^{(r)}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{M}^{(r)} : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\gamma}^{(r)} : \boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{C.4})$$

où  $\mathbf{M}^{(r)}$  et  $\boldsymbol{\gamma}^{(r)}$  sont des quantités homogènes par phase. Ainsi la loi de comportement dans chaque phase du Milieu Linéaire de Comparaison est donnée par la relation suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{M}^{(r)} : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\gamma}^{(r)}. \quad (\text{C.5})$$

Par la suite, le potentiel local dans chaque phase du composite non linéaire est écrit sous la forme triviale suivante :

$$u^{(r)}(\boldsymbol{\sigma}) = u_L^{(r)}(\boldsymbol{\sigma}) + \alpha^{(r)} \left( u^{(r)}(\boldsymbol{\sigma}) - u_L^{(r)}(\boldsymbol{\sigma}) \right) + (1 - \alpha^{(r)}) \left( u^{(r)}(\boldsymbol{\sigma}) - u_L^{(r)}(\boldsymbol{\sigma}) \right), \quad (\text{C.6})$$

où  $\alpha^{(r)}$  est constant par phase :  $0 < \alpha^{(r)} < 1$ . Les potentiels  $u^{(r)}$  et  $u_L^{(r)}$  sont convexes, cependant la fonction définie par  $\Delta u^{(r)} = u^{(r)} - u_L^{(r)}$  n'est pas convexe et peut donc admettre plusieurs points stationnaires.

**Lemme :** Le potentiel non linéaire  $u^{(r)}$  est représenté sous la forme qui suit :

$$u^{(r)}(\boldsymbol{\sigma}) = \text{stat}_{\boldsymbol{\gamma}^{(r)}, \mathbf{M}^{(r)}} \left\{ u_L^{(r)}(\boldsymbol{\sigma}) + \alpha^{(r)} \text{stat}_{\check{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)}} \Delta u^{(r)}(\check{\boldsymbol{\sigma}}) + (1 - \alpha^{(r)}) \text{stat}_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)}} \Delta u^{(r)}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) \right\}, \quad (\text{C.7})$$

où  $\check{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)}$  et  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)}$  sont des points stationnaires de la fonction  $\Delta u^{(r)}$ .

$$\frac{\partial \Delta u^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\check{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)}) = \frac{\partial \Delta u^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)}) = 0. \quad (\text{C.8})$$

Ce qui conduit aux relations suivantes qui sont des équations pour  $\check{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)}$  et  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)}$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial u^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\check{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)}) - \mathbf{M}^{(r)} : \check{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)} = \boldsymbol{\gamma}^{(r)} \\ \frac{\partial u^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)}) - \mathbf{M}^{(r)} : \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)} = \boldsymbol{\gamma}^{(r)} \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

La condition stationnaire du potentiel par rapport à  $\boldsymbol{\gamma}^{(r)}$  conduit à la relation suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \alpha^{(r)} \check{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)} + (1 - \alpha^{(r)}) \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)}. \quad (\text{C.10})$$

La condition stationnaire par rapport à la souplesse  $\mathbf{M}^{(r)}$  conduit à :

$$\boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma} = \alpha^{(r)} \check{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)} \otimes \check{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)} + (1 - \alpha^{(r)}) \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)} \otimes \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)}. \quad (\text{C.11})$$

Les relations (C.10) et (C.11) conduisent à la relation  $(\check{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)}) \otimes (\check{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)}) = 0$ . Ainsi on obtient deux équations pour  $\mathbf{M}^{(r)}$  et  $\boldsymbol{\gamma}^{(r)}$ ,  $\check{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)}(\mathbf{M}^{(r)}, \boldsymbol{\gamma}^{(r)}) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)}(\mathbf{M}^{(r)}, \boldsymbol{\gamma}^{(r)}) = \boldsymbol{\sigma}$ . Donc la souplesse et la déformation libre dépendent du champ de contrainte, ce qui permet d'avoir la relation supplémentaire suivante :

$$\frac{\partial u^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial u_L^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{M}^{(r)}(\boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\sigma}). \quad (\text{C.12})$$

## 2. Conditions de stationnarité du potentiel effectif

En définissant l'erreur par  $V^{(r)} = \alpha^{(r)}\check{V}^{(r)} + (1 - \alpha^{(r)})\hat{V}^{(r)}$  avec les fonctions  $\check{V}^{(r)}$  et  $\hat{V}^{(r)}$  qui s'écrivent :  $\check{V}^{(r)} = -\text{stat}_{\check{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)}} \Delta u^{(r)}(\check{\boldsymbol{\sigma}})$  et  $\hat{V}^{(r)} = -\text{stat}_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)}} \Delta u^{(r)}(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$  alors le potentiel effectif du composite non linéaire s'écrit :

$$\tilde{u}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \text{stat}_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}} \text{stat}_{\boldsymbol{\gamma}^{(r)}, \mathbf{M}^{(r)}} \left\{ \sum_{r=1}^N c^{(r)} \left\langle \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{M}^{(r)} : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\gamma}^{(r)} : \boldsymbol{\sigma} - V^{(r)}(\mathbf{M}^{(r)}, \boldsymbol{\gamma}^{(r)}) \right\rangle^{(r)} \right\}. \quad (\text{C.13})$$

La souplesse  $\mathbf{M}^{(r)}$  et la déformation libre  $\boldsymbol{\gamma}^{(r)}$  sont supposés dépendre de la position  $\boldsymbol{x}$ . Pour un point stationnaire donné, l'ordre des conditions stationnaires peut-être permuté de sorte qu'on obtient :

$$\tilde{u}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \text{stat}_{\boldsymbol{\gamma}^{(r)}, \mathbf{M}^{(r)}} \text{stat}_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}} \left\{ \sum_{r=1}^N c^{(r)} \left\langle \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{M}^{(r)} : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\gamma}^{(r)} : \boldsymbol{\sigma} - V^{(r)}(\mathbf{M}^{(r)}, \boldsymbol{\gamma}^{(r)}) \right\rangle^{(r)} \right\}. \quad (\text{C.14})$$

Lorsque les propriétés du Milieu Linéaire de Comparaison ne sont pas uniformes alors le problème devient plus complexe car l'expression du potentiel effectif dans ce cas serait difficile à établir analytiquement. Pour surmonter cette difficulté Ponte Castañeda suppose que la souplesse et la déformation libre sont uniformes comme dans l'article 2002 [72]. Ainsi le potentiel effectif dans cette approximation est de la forme :

$$\tilde{u}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \text{stat}_{\boldsymbol{\gamma}^{(r)}, \mathbf{M}^{(r)}} \left\{ \tilde{u}_L(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) - \sum_{r=1}^N c^{(r)} V^{(r)}(\mathbf{M}^{(r)}, \boldsymbol{\gamma}^{(r)}) \right\}, \quad (\text{C.15})$$

où le potentiel effectif du Milieu Linéaire de Comparaison est donné par

$$\tilde{u}_L(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \widetilde{\mathbf{M}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \widetilde{\boldsymbol{\gamma}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{1}{2} \widetilde{g} \quad (\text{C.16})$$

Les grandeurs  $\widetilde{\mathbf{M}}$ ,  $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}$  et  $\widetilde{g}$  sont donnés par :

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \sum_{r=1}^N c^{(r)} \mathbf{M}^{(r)} : \mathbf{B}^{(r)} \quad , \quad \widetilde{\boldsymbol{\gamma}} = \sum_{r=1}^N c^{(r)} \left( \mathbf{B}^{(r)} \right)^T : \boldsymbol{\gamma}^{(r)} \quad , \quad \widetilde{g} = \sum_{r=1}^N c^{(r)} \left[ g^{(r)} + \boldsymbol{\gamma}^{(r)} : \mathbf{b}^{(r)} \right] \quad (\text{C.17})$$

La condition de stationnarité du potentiel effectif par rapport à  $\boldsymbol{\gamma}^{(r)}$  conduit à :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_L^{(r)} = \alpha^{(r)} \check{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)} + (1 - \alpha^{(r)}) \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)} \quad , \quad r = 1, \dots, N \quad (\text{C.18})$$

La condition stationnaire du potentiel effectif par rapport à la souplesse  $\mathbf{M}^{(r)}$  permet d'obtenir la relation :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma} \rangle_L^{(r)} = \alpha^{(r)} \check{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)} \otimes \check{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)} + (1 - \alpha^{(r)}) \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)} \otimes \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)} \quad , \quad r = 1, \dots, N \quad (\text{C.19})$$



De ces deux conditions de stationnarité du potentiel effectif se déduit l'expression de la covariance qui est donnée par :

$$\mathbf{C}_{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)} = \alpha^{(r)} (1 - \alpha^{(r)}) \left[ \left( \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)} - \check{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)} \right) \otimes \left( \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)} - \check{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)} \right) \right] , \quad r = 1, \dots, N \quad (\text{C.20})$$

Le terme de droite est un tenseur d'ordre quatre de rang 1 alors que la covariance est en général un tenseur d'ordre quatre de classe complète. Ainsi, une nouvelle expression du potentiel local du Milieu Linéaire de Comparaison est alors proposée par Ponte Castañeda. Dans cette modélisation l'expression du potentiel local est de la forme :

$$u_L^{(r)}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{M}^{(r)} : \boldsymbol{\sigma} + \sum_{p=1}^M \beta_{(p)}^{(r)} \boldsymbol{\gamma}_{(p)}^{(r)} : \boldsymbol{\sigma} \quad \text{avec} \quad 0 < \beta_{(p)}^{(r)} < 1 \quad \text{et} \quad \sum_{p=1}^M \beta_{(p)}^{(r)} = 1 \quad (\text{C.21})$$

Le potentiel effectif du composite non linéaire dans ce cas est donné par :

$$\tilde{u}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \underset{\boldsymbol{\gamma}^{(r)}, \mathbf{M}^{(r)}}{\text{stat}} \left\{ \tilde{u}_L(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) - \sum_{r=1}^N c^{(r)} \sum_{p=1}^M \beta_{(p)}^{(r)} V_{(p)}^{(r)}(\mathbf{M}^{(r)}, \boldsymbol{\gamma}_{(p)}^{(r)}) \right\}, \quad (\text{C.22})$$

où la fonction d'erreur  $V_{(p)}^{(r)}$  est définie par :  $V_{(p)}^{(r)} = \alpha^{(r)} \check{V}_{(p)}^{(r)} + (1 - \alpha^{(r)}) \hat{V}_{(p)}^{(r)}$ . Les conditions stationnaires associées aux fonctions  $\check{V}_{(p)}^{(r)}$  et  $\hat{V}_{(p)}^{(r)}$  sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\check{\boldsymbol{\sigma}}_{(p)}^{(r)}) - \mathbf{M}^{(r)} : \check{\boldsymbol{\sigma}}_{(p)}^{(r)} = \boldsymbol{\gamma}_{(p)}^{(r)} \\ \frac{\partial u^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{(p)}^{(r)}) - \mathbf{M}^{(r)} : \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{(p)}^{(r)} = \boldsymbol{\gamma}_{(p)}^{(r)} \end{array} \right. \implies \frac{\partial u^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{(p)}^{(r)}) - \frac{\partial u^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\check{\boldsymbol{\sigma}}_{(p)}^{(r)}) = \mathbf{M}^{(r)} : \left( \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{(p)}^{(r)} - \check{\boldsymbol{\sigma}}_{(p)}^{(r)} \right) \quad (\text{C.23})$$

Les conditions stationnaires du potentiel effectif par rapport à la la déformation libre  $\boldsymbol{\gamma}_{(p)}^{(r)}$  et la souplesse  $\mathbf{M}^{(r)}$  sont obtenues en procédant à la même démarche que précédemment. Elles s'écrivent respectivement :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_L^{(r)} = \alpha^{(r)} \check{\boldsymbol{\sigma}}_{(p)}^{(r)} + (1 - \alpha^{(r)}) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{(p)}^{(r)} \quad , \quad r = 1, \dots, N \quad (\text{C.24})$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma} \rangle_L^{(r)} = \sum_{p=1}^M \beta_{(p)}^{(r)} \left[ \alpha^{(r)} \check{\boldsymbol{\sigma}}_{(p)}^{(r)} \otimes \check{\boldsymbol{\sigma}}_{(p)}^{(r)} + (1 - \alpha^{(r)}) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{(p)}^{(r)} \otimes \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{(p)}^{(r)} \right] \quad , \quad r = 1, \dots, N \quad (\text{C.25})$$

En utilisant ces relations, l'expression de la covariance qui s'écrit dans ce cas :

$$\mathbf{C}_{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)} = \alpha^{(r)} (1 - \alpha^{(r)}) \sum_{p=1}^M \beta_{(p)}^{(r)} \left[ \left( \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{(p)}^{(r)} - \check{\boldsymbol{\sigma}}_{(p)}^{(r)} \right) \otimes \left( \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{(p)}^{(r)} - \check{\boldsymbol{\sigma}}_{(p)}^{(r)} \right) \right] \quad , \quad r = 1, \dots, N \quad (\text{C.26})$$

Nous remarquons à travers cette relation que le terme de droite est bien un tenseur d'ordre quatre de classe complète comme la covariance. En utilisant la relation (C.24) l'expression de la covariance peut-être réécrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{C}_{\sigma}^{(r)} = \frac{1 - \alpha^{(r)}}{\alpha^{(r)}} \sum_{p=1}^M \beta_{(p)}^{(r)} \left[ \left( \hat{\sigma}_{(p)}^{(r)} - \bar{\sigma}_L^{(r)} \right) \otimes \left( \hat{\sigma}_{(p)}^{(r)} - \bar{\sigma}_L^{(r)} \right) \right] \quad (\text{C.27})$$

où

$$\mathbf{C}_{\sigma}^{(r)} = \frac{\alpha^{(r)}}{1 - \alpha^{(r)}} \sum_{p=1}^M \beta_{(p)}^{(r)} \left[ \left( \check{\sigma}_{(p)}^{(r)} - \bar{\sigma}_L^{(r)} \right) \otimes \left( \check{\sigma}_{(p)}^{(r)} - \bar{\sigma}_L^{(r)} \right) \right] \quad (\text{C.28})$$

En prenant un potentiel  $u^{(r)} = u^{(r)}(\sigma_{\text{eq}})$  et une souplesse de la forme :

$\mathbf{M}^{(r)} = \frac{1}{2\mu^{(r)}} \mathbf{F}^{(r)} + \frac{1}{2\lambda^{(r)}} \mathbf{E}^{(r)}$  où le projecteur  $\mathbf{E}^{(r)}$  est calculé autour du premier moment alors les composantes de la souplesse dans chaque phase ( $r$ ) et pour tout paramètre  $p$  sont déterminées à partir de la relation (C.23) et s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\mu^{(r)}} = \frac{3}{2\hat{\sigma}_{(p)\text{eq}}^{(r)}} \frac{\partial u^{(r)}}{\partial \sigma_{\text{eq}}}(\hat{\sigma}_{(p)\text{eq}}^{(r)}) + \frac{3}{2\check{\sigma}_{(p)\text{eq}}^{(r)}} \frac{\partial u^{(r)}}{\partial \sigma_{\text{eq}}}(\check{\sigma}_{(p)\text{eq}}^{(r)}) \\ \left( \frac{\hat{\sigma}_{(p)\parallel}^{(r)}}{\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)}} - 1 \right) \frac{1}{\lambda^{(r)}} = \frac{3}{2\hat{\sigma}_{(p)\text{eq}}^{(r)}} \frac{\hat{\sigma}_{(p)\parallel}^{(r)}}{\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)}} \frac{\partial u^{(r)}}{\partial \sigma_{\text{eq}}}(\hat{\sigma}_{(p)\text{eq}}^{(r)}) - \frac{3}{2\check{\sigma}_{(p)\text{eq}}^{(r)}} \left( 2 - \frac{\hat{\sigma}_{(p)\parallel}^{(r)}}{\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)}} \right) \frac{\partial u^{(r)}}{\partial \sigma_{\text{eq}}}(\check{\sigma}_{(p)\text{eq}}^{(r)}) \end{array} \right. \quad (\text{C.29})$$

Le choix  $\alpha^{(r)} = \frac{1}{2}$  conduit à une distribution symétrique des points stationnaires par rapport au premier moment :  $\hat{\sigma}_{(p)}^{(r)} - \bar{\sigma}_L^{(r)} = \bar{\sigma}_L^{(r)} - \check{\sigma}_{(p)}^{(r)}$ . Cependant d'autres choix peuvent être portés sur le paramètre  $\alpha^{(r)}$ . Dans ce cas ( $\alpha^{(r)} = \frac{1}{2}$ ) la covariance se réduit à l'expression suivante :

$$\mathbf{C}_{\sigma}^{(r)} = \sum_{p=1}^M \beta_{(p)}^{(r)} \left[ \left( \hat{\sigma}_{(p)}^{(r)} - \bar{\sigma}_L^{(r)} \right) \otimes \left( \hat{\sigma}_{(p)}^{(r)} - \bar{\sigma}_L^{(r)} \right) \right] \quad (\text{C.30})$$

où

$$\mathbf{C}_{\sigma}^{(r)} = \sum_{p=1}^M \beta_{(p)}^{(r)} \left[ \left( \check{\sigma}_{(p)}^{(r)} - \bar{\sigma}_L^{(r)} \right) \otimes \left( \check{\sigma}_{(p)}^{(r)} - \bar{\sigma}_L^{(r)} \right) \right] \quad (\text{C.31})$$

En prenant deux valeurs de  $\beta_{(p)}^{(r)}$  dans chaque phase ( $M = 2$  et  $\beta_{(p)}^{(r)} = \frac{1}{2}$ ) alors on a les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2} \mathbf{C}_{\sigma}^{(r)} :: \mathbf{E}^{(r)} = \frac{1}{2} \left( \hat{\sigma}_{(1)\parallel}^{(r)} - \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \hat{\sigma}_{(2)\parallel}^{(r)} - \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)} \right)^2 \\ \frac{3}{2} \mathbf{C}_{\sigma}^{(r)} :: \mathbf{F}^{(r)} = \frac{1}{2} \left( \hat{\sigma}_{(1)\perp}^{(r)} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \hat{\sigma}_{(2)\perp}^{(r)} \right)^2 \end{array} \right. \quad (\text{C.32})$$

**En posant les hypothèses de symétrie suivante :**  $\hat{\sigma}_{(1)\parallel}^{(r)} = \hat{\sigma}_{(2)\parallel}^{(r)}$  et  $\hat{\sigma}_{(1)\perp}^{(r)} = -\hat{\sigma}_{(2)\perp}^{(r)}$ , la relation (C.32) se réduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2} \mathbf{C}_{\sigma}^{(r)} :: \mathbf{E}^{(r)} = \left( \hat{\sigma}_{(1)\parallel}^{(r)} - \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)} \right)^2 \\ \frac{3}{2} \mathbf{C}_{\sigma}^{(r)} :: \mathbf{F}^{(r)} = \left( \hat{\sigma}_{(1)\perp}^{(r)} \right)^2 \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \mathbf{C}_{\sigma}^{(r)} = \langle \sigma \otimes \sigma \rangle_L^{(r)} - \bar{\sigma}_L^{(r)} \otimes \bar{\sigma}_L^{(r)} \quad (\text{C.33})$$

Dans ce cas, les expressions de  $\hat{\sigma}_{(1)_{\text{eq}}}^{(r)}$  et  $\hat{\sigma}_{(1)_{\parallel}}^{(r)}$  s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \hat{\sigma}_{(1)_{\text{eq}}}^{(r)} \right)^2 = \left( \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)} \right)^2 + 2 \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)} \left( \hat{\sigma}_{(1)_{\parallel}}^{(r)} - \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)} \right) \\ \left( \hat{\sigma}_{(1)_{\parallel}}^{(r)} - \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)} \right)^2 = \frac{9}{4} \frac{\langle \left( \boldsymbol{\sigma}_L^{(r)\text{dev}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}_L^{(r)\text{dev}} \right)^2 \rangle_L^{(r)}}{\left( \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)} \right)^2} - \left( \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)} \right)^2 \end{array} \right. \quad (\text{C.34})$$

En adoptant la même démarche que précédemment, des expressions similaires sont obtenues pour  $\check{\sigma}_{(1)_{\text{eq}}}^{(r)}$  et  $\check{\sigma}_{(1)_{\parallel}}^{(r)}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \check{\sigma}_{(1)_{\text{eq}}}^{(r)} \right)^2 = \left( \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)} \right)^2 + 2 \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)} \left( \check{\sigma}_{(1)_{\parallel}}^{(r)} - \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)} \right) \\ \left( \check{\sigma}_{(1)_{\parallel}}^{(r)} - \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)} \right)^2 = \frac{9}{4} \frac{\langle \left( \boldsymbol{\sigma}_L^{(r)\text{dev}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}_L^{(r)\text{dev}} \right)^2 \rangle_L^{(r)}}{\left( \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)} \right)^2} - \left( \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(r)} \right)^2 \end{array} \right. \quad (\text{C.35})$$

De ces deux relations (relations (C.34) et (C.35)), se déduit la relation :  $\check{\sigma}_{(1)_{\text{eq}}}^{(r)} = \hat{\sigma}_{(1)_{\text{eq}}}^{(r)}$ . Lorsque les contraintes de référence  $\check{\sigma}_{(1)_{\text{eq}}}^{(r)}$  et  $\hat{\sigma}_{(1)_{\text{eq}}}^{(r)}$  sont égales, la déformation libre par phase  $\gamma^{(r)}$  s'annule et la souplesse  $\mathbf{M}^{(r)}$  dans chaque phase devient isotrope.

$$\mathbf{M}^{(r)}(\hat{\sigma}_{(1)_{\text{eq}}}^{(r)}) = \frac{1}{2\mu^{(r)}(\hat{\sigma}_{(1)_{\text{eq}}}^{(r)})} \mathbf{K} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{2\mu^{(r)}(\hat{\sigma}_{(1)_{\text{eq}}}^{(r)})} = \frac{3}{2\hat{\sigma}_{(1)_{\text{eq}}}^{(r)}} \frac{\partial u^{(r)}}{\partial \sigma_{\text{eq}}}(\hat{\sigma}_{(1)_{\text{eq}}}^{(r)}) \quad (\text{C.36})$$

Lorsque le premier moment dans la matrice s'annule alors la contrainte de référence  $\hat{\sigma}_{(1)_{\text{eq}}}^{(1)}$  se réduit au second moment du champ de contrainte comme dans l'approche variante 2002 [72]. Donc cette nouvelle approche de linéarisation proposée par Ponte Castañeda dégénère également en sécant modifié.

## ANNEXE D

---

# Compléments relatifs à la partie III. du chapitre 2 : Expressions de $\alpha$ et $\mathcal{F}(t)$ pour les conditions de chargement en déformations et en contraintes

---

Lorsque la sphère composite est sollicitée en déformations homogènes avec la phase inclusionnaire qui est soumise à une déformation libre homogène et sphérique, l'expression de  $\dot{\lambda}(t)$  est obtenu en dérivant la relation (2.44) par rapport au temps :

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{c^{(2)}(\kappa^{(2)} - \kappa^{(1)})}{c^{(2)}\kappa^{(1)} + c^{(1)}\kappa^{(2)}} \left\{ -\dot{\bar{\varepsilon}}_m(t) + \frac{\kappa^{(2)}}{\kappa^{(2)} - \kappa^{(1)}} \dot{\varepsilon}_0^{(2)}(t) + \frac{1}{3\kappa^{(1)}} \int_a^b \frac{2}{r} \dot{\sigma}_s^{(1)}(r, t) dr \right\}.$$

Une expression équivalente de  $\dot{\lambda}(t)$  peut être également déterminée à partir de la relation (2.37) et elle est donnée par :

$$\frac{\dot{\lambda}(t)}{\eta} = \frac{18\mu^{(1)}c^{(2)}(\kappa^{(1)} - \kappa^{(2)})}{3(c^{(1)}\kappa^{(2)} + c^{(2)}\kappa^{(1)}) + 4\mu^{(1)}} \left[ \dot{\bar{\varepsilon}}_m(t) - \frac{\kappa^{(2)}}{\kappa^{(2)} - \kappa^{(1)}} \dot{\varepsilon}_0^{(2)}(t) + \frac{2}{3\kappa^{(1)}\eta} \int_a^b \frac{\sigma_s^{(1)}(u, t)}{u} \frac{\partial U_v^{(1)}}{\partial \tilde{\sigma}}(\tilde{\sigma}^{(1)}(u, t)) du \right]. \quad (\text{D.1})$$

Les deux expressions de la fonction  $\dot{\lambda}$  sont équivalentes cependant la relation (D.1) est plus appropriée pour être utilisée dans l'équation différentielle (2.37).

Si nous considérons des conditions de chargement en contraintes homogènes, l'évolution dans le temps de  $\lambda$  peut être exprimée en fonction de  $\bar{\sigma}_m(t)$  en substituant l'expression de la déformation  $\bar{\varepsilon}_m(t)$  (relation 2.41) dans (D.1). Ainsi on obtient :

$$\frac{\dot{\lambda}(t)}{\eta} = \frac{18\kappa^{(1)}\mu^{(1)}c^{(2)}(\kappa^{(2)} - \kappa^{(1)})}{3\kappa^{(1)}\kappa^{(2)} + 4\mu^{(1)}(c^{(1)}\kappa^{(1)} + c^{(2)}\kappa_2)} \left( \dot{\bar{\sigma}}_m(t) - \frac{\kappa^{(2)}}{\kappa^{(2)} - \kappa^{(1)}} \dot{\varepsilon}_0^{(2)}(t) + \frac{2}{3\eta\kappa^{(1)}} \int_a^b \frac{\sigma_s^{(1)}(u, t)}{u} \frac{\partial U_v^{(1)}}{\partial \tilde{\sigma}}(\tilde{\sigma}) du \right). \quad (\text{D.2})$$

Lorsque la déformation macroscopique appliquée sur le bord de la sphère de la sphère composite est sphérique et homogène alors les expressions des coefficients  $\alpha$  et de  $\mathcal{F}(t)$  définis dans la relation (2.40) s'écrivent :

$$\alpha_d = \frac{1}{\kappa^{(1)}} \frac{6\mu^{(1)}c^{(2)}(\kappa^{(1)} - \kappa^{(2)})}{3(c^{(1)}\kappa^{(2)} + c^{(2)}\kappa^{(1)}) + 4\mu^{(1)}} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_d(t) = 3\alpha_d\kappa^{(1)} \left( \dot{\bar{\varepsilon}}_m(t) - \frac{\kappa^{(2)}}{\kappa^{(2)} - \kappa^{(1)}} \dot{\varepsilon}_0^{(2)}(t) \right) \quad (\text{D.3})$$

Dans le cas d'un chargement en contraintes homogènes et uniformes sur le bord extérieur de la sphère composite, les expressions de  $\alpha$  et de  $\mathcal{F}(t)$  sont données par :

$$\alpha_p = - \frac{6\mu^{(1)}c^{(2)}(\kappa^{(2)} - \kappa^{(1)})}{3\kappa^{(1)}\kappa^{(2)} + 4\mu^{(1)}(c^{(1)}\kappa_1 + c^{(2)}\kappa^{(2)})} \quad \text{and} \quad \mathcal{F}_p(t) = \alpha_p \left( \dot{\bar{\sigma}}_m(t) - \frac{3\kappa^{(1)}\kappa^{(2)}}{\kappa^{(2)} - \kappa^{(1)}} \dot{\bar{\varepsilon}}_0^{(2)}(t) \right) \quad (\text{D.4})$$

# ANNEXE E

---

## Compléments relatifs à la partie III. du chapitre 3 : Calcul du tenseur de Hill dans le cas anisotrope

---

Considérons un domaine infini, de comportement élastique linéaire et anisotrope, caractérisé par un tenseur des modules  $\mathbf{C}^{(1)}$ . Supposons qu'une inclusion sphérique de propriétés élastiques différentes de celles du milieu environnant est immergée au sein du domaine infini. Soit  $\mathbf{P}^{(1)}$  le tenseur de Hill associé à la matrice. Par définition :

$$\mathbf{P}^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \int_{|\xi|=1} \mathbf{H}(\xi) dS(\xi) \quad , \quad \mathbf{H}(\xi) = \xi \otimes \mathbf{N}(\xi) \otimes \xi \quad \text{où} \quad \mathbf{N}(\xi) = [\mathbf{K}(\xi)]^{-1} \quad (\text{E.1})$$

Le champ tensoriel d'ordre deux  $\mathbf{K}(\xi)$  désigne le tenseur d'acoustique dont l'expression analytique est exprimée par :

$$\mathbf{K}(\xi) = \xi \cdot \mathbf{C}^{(1)} \cdot \xi \quad (\text{E.2})$$

Lorsque le tenseur de rigidité anisotrope  $\mathbf{C}^{(1)}$  de la phase matricielle se décompose de la forme (3.29) alors le tenseur d'acoustique peut s'écrire de la forme suivante :

$$\mathbf{K}(\xi) = \mathbf{K}_{\text{iso}}(\xi) + \lambda \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \quad (\text{E.3})$$

où  $\mathbf{K}_{\text{iso}}$  désigne le tenseur d'acoustique dans le cas où le comportement de la matrice est isotrope et les expressions du scalaire  $\lambda$  et du champ vectoriel  $\mathbf{u}$  sont données par :

$$\lambda = \frac{4}{3} (\lambda^{(1)} - \mu^{(1)}) \quad , \quad \mathbf{u} = \xi \cdot \hat{\boldsymbol{\alpha}} \quad \text{où} \quad \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\bar{\mathbf{s}}^{(1)}}{\bar{\sigma}_{\text{eq}}} \quad (\text{E.4})$$

Un tenseur d'ordre deux de la forme (E.3) peut être inversé exactement et on trouve :

$$\mathbf{N}(\xi) = [\mathbf{K}(\xi)]^{-1} = [\mathbf{K}_{\text{iso}}(\xi) + \lambda \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}]^{-1} = \mathbf{N}_{\text{iso}}(\xi) - \lambda \frac{\mathbf{N}_{\text{iso}} \cdot \mathbf{u} \otimes \mathbf{N}_{\text{iso}} \cdot \mathbf{u}}{1 + \lambda \mathbf{u} \cdot \mathbf{N}_{\text{iso}} \cdot \mathbf{u}} \quad (\text{E.5})$$

En remplaçant la relation (E.5) dans la définition du tenseur de Hill (E.1), nous obtenons :

$$\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}_{\mathbf{E}}^{(1)} - \frac{1}{4\pi} \int_{|\xi|=1} \xi \otimes \lambda \frac{\mathbf{N}_{\text{iso}} \cdot \mathbf{u} \otimes \mathbf{N}_{\text{iso}} \cdot \mathbf{u}}{1 + \lambda \mathbf{u} \cdot \mathbf{N}_{\text{iso}} \cdot \mathbf{u}} \otimes \xi dS(\xi) \quad (\text{E.6})$$

où  $\mathbf{P}_{\mathbf{E}}^{(1)}$  désigne le tenseur de Hill lorsque la distribution tout comme le comportement des phases sont isotropes. En poussant les calculs, on obtient la relation générale du tenseur de Hill qui est exprimée par :

$$\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}_{\mathbf{E}}^{(1)} - \frac{1}{4\pi} \int_{|\xi|=1} \frac{4\mu^{(1)} (\lambda^{(1)} - \mu^{(1)}) \xi \otimes \mathbf{N}_{\text{iso}}^* \cdot u \otimes \mathbf{N}_{\text{iso}}^* \cdot u \otimes \xi dS(\xi)}{3\mu^{(1)} + 4(\lambda^{(1)} - \mu^{(1)}) [|\hat{\alpha}\xi|^2 - a^{(1)*} (\xi \bullet (\hat{\alpha}\xi))^2]} \quad (\text{E.7})$$

En posant :

$$\mathbf{P}(\xi) = \xi \otimes \mathbf{N}_{\text{iso}}^* \cdot u \otimes \mathbf{N}_{\text{iso}}^* \cdot u \otimes \xi$$

où

$$\mathbf{N}_{\text{iso}}^* = \frac{1}{\mu^{(1)*} |\xi|^2} \left[ \boldsymbol{\delta} - a^{(1)*} \frac{\xi \otimes \xi}{|\xi|^2} \right] \quad \text{et} \quad u = \xi \cdot \hat{\alpha},$$

le tenseur de Hill s'écrit plus simplement selon :

$$\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}_{\mathbf{E}}^{(1)} - \frac{1}{4\pi} \int_{|\xi|=1} \frac{4\mu^{(1)} (\lambda^{(1)} - \mu^{(1)}) \mathbf{P}(\xi) dS(\xi)}{3\mu^{(1)} + 4(\lambda^{(1)} - \mu^{(1)}) [|\hat{\alpha}\xi|^2 - a^{(1)*} (\xi \bullet (\hat{\alpha}\xi))^2]} \quad (\text{E.8})$$

# ANNEXE F

---

## Compléments relatifs à la partie IV. du chapitre 3 : Expressions des temps de relaxation et des magnitudes associés au gonflement effectif déviatorique et à la contrainte moyenne déviatorique de la phase matricielle dans l'approche Affine amélioré (version isotrope) pour un composite triphasé

---

### I. Gonflement effectif déviatorique

Dans le cas d'un composite triphasé où les inclusions de forme sphérique et distribuées de manière isotrope ont un comportement viscoélastique linéarisé isotrope, la loi d'évolution dans le temps du gonflement effectif déviatorique dans l'approche "Affine amélioré" (relation 3.61) est obtenue en utilisant le principe de correspondance. Les expressions des temps de relaxation  $\bar{\tau}_j^{(\gamma)}$  associées aux variables internes (3.62) apparaissant dans cette approche sont données par les relations suivantes.

$$\frac{1}{\bar{\tau}_{1/2}^{(\gamma)}} = \frac{1}{2} \left( -S_{(1)} \mp \sqrt{S_{(1)}^2 - 4P_{(1)}} \right) \quad , \quad \frac{1}{\bar{\tau}_{3/4}^{(\gamma)}} = \frac{1}{2} \left( -S_{(2)} \mp \sqrt{S_{(2)}^2 - 4P_{(2)}} \right)$$

Les expressions analytiques de  $S_{(1)}$ ,  $S_{(2)}$ ,  $P_{(1)}$  et  $P_{(2)}$  dépendent des propriétés du matériau et s'écrivent :



$$S_{(1)/(2)} = \frac{1}{10} \left\{ a_1(3c^{(1)} - 17) + 3a_2(c^{(2)} - 1) - 3a_3(c^{(1)} + c^{(2)}) + \frac{4\mu_e(a_2 - a_1(c^{(1)} - 9) - a_2c^{(2)} + a_3(c^{(1)} + c^{(2)}))}{3\kappa_e + 4\mu_e} \right. \\ \left. \frac{9\kappa_e + 8\mu_e}{3\kappa_e + 4\mu_e} \sqrt{\left[ (a_2 + a_1(c^{(1)} - 1) - a_3c^{(1)})^2 + 2c^{(2)}(a_2 - a_3)(a_1(1 + c^{(1)}) - a_2 - a_3c^{(1)}) + (c^{(2)}(a_2 - a_3))^2 \right]} \right\}$$

$$P_{(1)/(2)} = \frac{3}{10} a_1 \kappa_e \left\{ \frac{a_1(7 - 3c^{(1)}) + 3(a_2(1 - c^{(2)}) + a_3(c^{(1)} + c^{(2)}))}{3\kappa_e + 4\mu_e} \pm \right. \\ \left. \frac{3}{3\kappa_e + 4\mu_e} \sqrt{\left[ (a_2 + a_1(c^{(1)} - 1) - a_3c^{(1)})^2 + 2c^{(2)}(a_2 - a_3)(a_1(1 + c^{(1)}) - a_2 - a_3c^{(1)}) + (c^{(2)}(a_2 - a_3))^2 \right]} \right\}$$

Les scalaires  $a_r$  dépendent explicitement des propriétés élastiques et visqueuses du matériau et leurs expressions analytiques s'écrivent :

$$a_1 = \frac{\tilde{\mu}_e}{\mu_v^{(1)}} \quad \text{et} \quad a_r = \frac{\mu_e}{\mu_v^{(r)}}, \quad r = 2, 3$$

Les coefficients  $l_j^{(\gamma)}$  sont exprimés en fonction des temps caractéristiques  $\bar{\tau}_j^{(\gamma)}$  et des propriétés du matériau selon la relation suivante.

$$l_j^{(\gamma)} = \frac{P^* \left( -\frac{1}{\bar{\tau}_j^{(\gamma)}} \right)}{l_0^{(\gamma)} * \prod_{k \neq j} \left( \frac{1}{\bar{\tau}_k^{(\gamma)}} - \frac{1}{\bar{\tau}_j^{(\gamma)}} \right)}, \quad \{j, k\} = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{F.1})$$

$$P^*(p) = -c^{(1)} \left( 9a_1\kappa_e + 9\kappa_e p + 8\mu_e p \right) \left[ 5(a_3 + a_1(-1 + c^{(1)}) + a_2c^{(2)} - a_3(c^{(1)} + c^{(2)}))(3\kappa_e + 4\mu_e)p^2 \right. \\ \left. + \left( 3\kappa_e((7a_1 + 3a_2)(a_1 - a_3)(-1 + c^{(1)}) + 10a_1(a_2 - a_3)c^{(2)}) + 4\mu_e((3a_1 + 2a_2)(a_1 - a_3)(-1 + c^{(1)}) \right. \right. \\ \left. \left. + 5a_1(a_2 - a_3)c^{(2)}) \right) p + 3a_1\kappa_e \left( (2a_1 + 3a_2)(a_1 - a_3)(-1 + c^{(1)}) + 5a_1(a_2 - a_3)c^{(2)} \right) \right]$$

$$l_0^{(\gamma)} = -25(3\kappa_e + 4\mu_e)(3\kappa_e + 4\mu_e)$$

## II. Moyenne du déviateur des contraintes dans la phase matricielle

La contrainte moyenne déviatorique dans la matrice, solution du problème purement thermique (second terme apparaissant dans (3.68)), est établie de la même manière que le gonflement effectif avec les temps de relaxation  $\bar{\tau}_j^{(\beta)}$  caractéristiques des variables internes (3.70) qui sont

identiques aux temps de relaxations  $\bar{\tau}_j^{(\gamma)}$ . Les expressions des magnitudes  $l_j^{(\gamma)}$  associées à ces variables internes sont exprimées par :

$$l_j^{(\beta)} = - \frac{\bar{\tau}_j^{(\beta)} * Q^* \left( -\frac{1}{\bar{\tau}_j^{(\beta)}} \right)}{l_0^{(\beta)} * \prod_{k \neq j} \left( \frac{1}{\bar{\tau}_k^{(\beta)}} - \frac{1}{\bar{\tau}_j^{(\beta)}} \right)} \quad , \quad \{j, k\} = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{F.2})$$

$$Q^*(p) = 2\mu_e \left( 9a_1\kappa_e + 9\kappa_e p + 8\mu_e p \right) p \left[ 3a_1\kappa_e \left( 2a_1(-1 + c^{(1)}) - 3a_3c^{(2)} + 3a_2(-1 + c^{(1)} + c^{(2)}) \right) + \right. \\ \left. \left( 3a_1(-1 + c^{(1)})(7\kappa_e + 8\mu_e) + (-a_3c^{(2)} + a_2(-1 + c^{(1)} + c^{(2)}))(9\kappa_e + 8\mu_e) \right) p + 5(-1 + c^{(1)})(3\kappa_e + 4\mu_e)p^2 \right] \\ l_0^{(\beta)} = - \frac{25(3\kappa_e + 4\mu_e)^2 \left[ 5a_1(2a_1 + 3a_2)(1 - c^{(1)} - c^{(2)}) + (2a_1 + 3a_3)(2a_1c^{(1)} + 3a_2c^{(1)} + 5a_1c^{(2)}) \right]}{(2a_1 + 3a_2)(-3a_3c^{(1)} - 5a_1 + 3a_1c^{(1)}) + 15a_1c^{(2)}(a_2 - a_3)}$$

