



HAL
open science

Analyse par champs de transformation de matériaux élastoviscoplastiques multiphases. Application aux combustibles MOX

Sophie Roussette

► **To cite this version:**

Sophie Roussette. Analyse par champs de transformation de matériaux élastoviscoplastiques multiphases. Application aux combustibles MOX. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Aix-Marseille Université, 2005. Français. NNT: . tel-03330205

HAL Id: tel-03330205

<https://theses.hal.science/tel-03330205>

Submitted on 31 Aug 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

pour obtenir le grade de :

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE LA MEDITERRANEE
AIX-MARSEILLE II**

Discipline : MECANIQUE

Option : SOLIDES

Présentée et soutenue publiquement par

Sophie ROUSSETTE

le 13 mai 2005

**Analyse par champs de transformation
de matériaux élastoviscoplastiques multiphases -
Application aux combustibles MOX**

—————
Directeur de thèse : Jean-Claude Michel

Co-encadrant : Jean-Marie Gatt
—————

JURY

Président du jury :	M.	O. Débordes	Professeur, EGIM, Marseille
Rapporteurs :	Mme	E. Hervé	Professeur, Université de Versailles
	M.	M. Cherkaoui	Professeur, Georgia Institute of Technology, Atlanta, USA
Examineurs :	M.	U. Galvanetto	Professeur, Imperial College London
	M.	J.M. Gatt	Ingénieur-chercheur, CEA, Cadarache
	M.	J.C. Michel	Directeur de recherche, LMA, Marseille
Invité :	M.	R. Masson	Ingénieur-chercheur, EDF

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au Commissariat à l'Énergie Atomique de Cadarache au sein du Laboratoire des Lois de Comportement du Combustible en collaboration avec le Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille et avec le soutien financier d'EDF.

J'ai une pensée pour M. Thierry Petit qui m'a accueilli dans le laboratoire avec son immense gentillesse et ses précieux conseils. Je remercie Mme Carole Valot d'avoir pris la suite.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Jean-Claude Michel, mon directeur de thèse, et à Jean-Marie Gatt pour avoir encadré cette thèse, pour leurs conseils, leur patience et leur disponibilité tout au long de ce travail.

Je remercie M. Olivier Débordes d'avoir accepté de présider le jury de thèse.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Mme Eveline Hervé et à M. Mohammed Cherkaoui de l'intérêt porté à mon travail en acceptant d'en être les rapporteurs, et du temps qu'ils y ont consacré.

Je remercie M. Ugo Galvanetto d'avoir accepté d'être examinateur, malgré la barrière de la langue, ainsi que M. Renaud Masson.

Je tiens également à remercier tous mes collègues du LLCC, pour la bonne humeur au sein du labo : Gaëlle, Cathy, Fabienne, Marjorie, Philippe M., Michel F., Michel R., Philippe G., Jean-Christophe, mais également le personnel du SESC. Un merci particulier à Etienne pour ses conseils éclairés en LaTeX et à mes deux collègues thésards avec qui j'ai partagé le bureau pendant cette dernière année de thèse : Thomas pour m'avoir supporté durant plus de 2 ans et pour son aide efficace, notamment lors de la rédaction et Claire pour cette dernière année très sympathique de cohabitation.

Un grand merci à Martine, mais également à Régine et Martine pour leur efficacité et leur gentillesse.

Mes remerciements vont également au personnel du LMA, pour leur accueil lors de mes séjours à Marseille.

Enfin, je remercie mes amis, ma famille, et en particulier mes parents et mes sœurs pour leur soutien depuis tant d'années. Mes derniers remerciements vont à Hervé qui m'a supporté et qui a su me remonter le moral lorsque le doute s'installait. Merci.

Sommaire

Introduction générale	1
-----------------------	---

Partie I Revue bibliographique sur les combustibles et les méthodes d'homogénéisation

Chapitre 1 Les combustibles nucléaires	7
1.1 Les microstructures des combustibles MOX	8
1.1.1 Le MOX vierge	8
1.1.2 Microstructures irradiées, évolution en cours d'irradiation	10
1.2 Base expérimentale sur les combustibles	11
1.2.1 Les essais	11
1.2.2 Résultats des essais	12
1.3 Conclusion	13
Chapitre 2 Modèles Théoriques	15
2.1 Homogénéisation : Principe	17
2.1.1 Représentation	18
2.1.2 Localisation	18
2.1.3 Homogénéisation	19
2.2 Matériaux Standard Généralisés	20
2.3 Formulation variationnelle ; Bornes de Voigt et de Reuss	20
2.3.1 Problème élastique et formulation variationnelle	20
2.3.2 Bornes de Voigt et de Reuss	22

2.4	Problèmes d'inclusion	22
2.4.1	Problème d'Eshelby	22
2.4.2	Problèmes basés sur le problème de l'inclusion : schémas linéaires d'homogénéisation	23
2.5	Propriétés non linéaires des matériaux : Approches par champs moyens	28
2.5.1	Formulation incrémentale de Hill	29
2.5.2	Formulation sécante	30
2.5.3	Formulation tangente	30
2.5.4	Formulation affine	32
2.6	Propriétés non linéaires des matériaux : Approches variationnelles	33
2.6.1	Propriétés mécaniques macroscopiques de composites isotropes non linéaires	33
2.6.2	Estimations second ordre	35
2.7	Propriétés non linéaires des matériaux : Approches numériques	37
2.7.1	Analyse par champs de transformation	38
2.7.2	Analyse par champs de transformation « modifiés »	40
2.7.3	Analyse par champs de transformation non uniformes	41
2.8	Modélisation du comportement des matériaux poreux	45
2.8.1	Description du comportement des matériaux poreux	45
2.8.2	Evolution de la porosité	46
2.8.3	Détermination des paramètres du potentiel viscoplastique pour les matériaux poreux	46
2.9	Conclusion	48

Partie II NTFA : Viscoplasticité incompressible

Chapitre 3 Analyse par champs de transformation non uniformes - Matériaux élastoviscoplastiques 51

3.1	Introduction	52
3.2	Analyse par champs de transformation non uniformes : principe	52
3.2.1	Relations constitutives pour les constituants	52

3.2.2	Champs de transformation non-uniformes	53
3.2.3	Variables réduites et facteurs d'influence	54
3.2.4	Relations constitutives pour les variables réduites	55
3.3	Résultats et discussion	56
3.3.1	Configuration, propriétés matériaux	56
3.3.2	Chargement	57
3.3.3	Mise en œuvre de la TFA	57
3.3.4	Mise en œuvre de la NTFA : choix des modes plastiques	58
3.3.5	Discussion des résultats	60
3.4	Conclusion	64

Chapitre 4 Amélioration du choix des modes plastiques **67**

4.1	Introduction	68
4.2	Choix des modes plastiques : Transformation de Karhunen-Loève	69
4.3	Application de la NTFA avec un seul type de chargement	70
4.3.1	Cellule avec arrangement hexagonal de fibres, données matériaux	70
4.3.2	Mise en œuvre de la NTFA avec Karhunen-Loève	72
4.3.3	Résultats	73
4.4	Application de la NTFA avec plusieurs types de chargement	74
4.4.1	Cellule avec arrangement hexagonal des fibres, données matériaux	74
4.4.2	Choix des modes plastiques	76
4.4.3	Résultats	78
4.5	Conclusion	82

Partie III Prise en compte de la porosité dans l'analyse par champs de transformation non uniformes

Chapitre 5 Analyse par champs de transformation non uniformes dans le cas de matériaux poreux **87**

5.1	Introduction	88
5.2	Principe de la méthode	88
5.2.1	Relations constitutives pour les constituants	88

5.2.2	Champs de transformation non-uniformes	89
5.2.3	Variables réduites	90
5.2.4	Relations constitutives pour les variables réduites	91
5.3	Choix des modes plastiques - Transformation de Karhunen-Loève	93
5.4	Récapitulatif des équations du modèle NTFA pour la viscoplasticité compressible	95
Chapitre 6 Mise en oeuvre du modèle NTFA pour les matériaux poreux		97
6.1	Calcul des modes plastiques	98
6.2	Calculs des paramètres de la NTFA	99
6.3	Intégration de la loi de comportement	101
6.4	Conclusion	103
Chapitre 7 Résultats, arrangement hexagonal et répartition aléatoire de fibres		105
7.1	Arrangement hexagonal de fibres	106
7.1.1	Description de la cellule et des propriétés matériaux	106
7.1.2	Modes viscoplastiques	106
7.1.3	Résultats	109
7.2	Répartition aléatoire de fibres	111
7.2.1	Configuration	111
7.2.2	Résultats	112
7.3	Conclusion	112

Partie IV Application aux combustibles MOX

Chapitre 8 Analyse par champs de transformation et MOX vierge		117
8.1	Introduction	118
8.2	Analyse par champs de transformation (TFA)	118
8.3	Comportement des phases composant le MOX	120
8.3.1	Déformation élastique	120
8.3.2	Déformation viscoplastique	121
8.4	Identification des paramètres	122

8.4.1	Combustible UO_2	122
8.4.2	Phase uranifère du MOX	123
8.4.3	Phase plutonifère du MOX	124
8.5	Etudes de sensibilité	125
8.6	Conclusion	128
Chapitre 9 Analyse par champs de transformation non uniformes et MOX		129
9.1	Vérification de l'adéquation de la NTFA pour le MOX	130
9.2	Changement de l'exposant de viscosité du potentiel viscoplastique	130
9.3	Changement de la contrainte d'écoulement σ_0	131
9.4	Conclusion	133
Conclusion générale		135
Bibliographie		137

Introduction générale

La production d'électricité d'origine nucléaire a constamment augmenté depuis ces vingt-cinq dernières années. Cette augmentation a nécessité d'améliorer la conduite des centrales nucléaires afin de répondre à la demande du réseau en temps réel, ce qui implique de moduler la puissance fournie en fonction de la demande. Pour des raisons de rentabilité, un des objectifs de l'industrie nucléaire est d'augmenter le taux de combustion des combustibles (le taux de combustion est la quantité d'énergie thermique fournie par un combustible pendant sa durée de vie). Pour augmenter le taux de combustion des combustibles, il faut prendre en compte plusieurs paramètres limitant la durée de vie de ces combustibles, et notamment le phénomène d'Interaction Pastille-Gaine (IPG). Pour comprendre ce phénomène, quelques éléments sur le combustible en réacteur sont nécessaires. Le combustible standard utilisé est le dioxyde d'uranium (UO_2). Il se présente sous forme de pastilles cylindriques de 8.2 mm de diamètre et d'environ 13 mm de hauteur. Ces pastilles sont empilées dans un tube-gaine pour former un crayon combustible d'une hauteur d'environ 4 m. Avec ce type de configuration, la gaine a donc un rôle essentiel, puisque elle est la première barrière de protection, elle permet de confiner les produits radioactifs.

L'Interaction Pastille-Gaine est un phénomène se produisant lors de la première montée en puissance. En raison d'un fort gradient thermique, les pastilles se déforment pour prendre la forme d'un diabolo, ce qui a pour conséquence une fragmentation des pastilles. Quant à la gaine, son diamètre diminue sous l'effet de la pression du fluide caloporteur (supérieure à la pression interne du crayon). Ces déformations induisent un contact entre les pastilles et la gaine. Le point où les sollicitations sont les plus importantes se situe, du fait de la déformation en diabolo des pastilles, à l'extrémité des pastilles (plans inter-pastilles) au droit des fissures radiales. La zone de contact s'étend ensuite en direction du plan médian des pastilles. Dans les cas de montées en puissance rapides ou dans des situations incidentelles, ce contact pourrait entraîner la fissuration, voire la rupture de la gaine. Pour éviter ces accidents, des marges de fonctionnement pénalisantes pour la manœuvrabilité des réacteurs sont fixées. Une connaissance plus approfondie du comportement mécanique de la gaine et des combustibles permettrait d'améliorer la simulation du comportement mécanique avec des modèles permettant d'évaluer plus finement les champs de contraintes et de déformations. Le traitement IPG dans les codes de calculs crayons tels que ME-TEOR et TOUTATIS pour le CEA ou CYRANO3 pour EDF serait ainsi amélioré et permettrait de diminuer les marges de fonctionnement tout en garantissant la tenue de la gaine. C'est la né-

cessité de mieux connaître le comportement des pastilles de combustibles qui a motivé cette étude.

Différents types de combustibles existent. Les combustibles à microstructures avancées sont des combustibles développés au départ pour limiter le relâchement des gaz de fission. Pour cela, on a augmenté la taille de grains des pastilles en ajoutant à la poudre d' UO_2 des additifs permettant d'activer la croissance cristalline des grains. Le fait d'augmenter la taille des grains permet ainsi d'allonger le chemin de parcours des gaz de fission du cœur vers la périphérie des grains. Ainsi, ces gaz restent plus longtemps à l'intérieur de la pastille. Ces combustibles ont été testés pour vérifier si leurs propriétés mécaniques amélioreraient leur comportement en IPG, ce qui est effectivement le cas. Les combustibles à microstructures avancées ont donc un double intérêt, et notamment le fait d'être une solution remède à l'IPG. Cependant, ces combustibles ne sont pas encore utilisés dans les réacteurs. Les combustibles utilisés actuellement dans les réacteurs sont les pastilles d' UO_2 standard, mais aussi les pastilles de MOX. Le MOX est un combustible contenant une faible proportion de dioxyde de plutonium mélangé avec du dioxyde d'uranium. Ce type de combustible a été développé pour recycler le plutonium provenant de l'irradiation du combustible UO_2 standard, l'intérêt du plutonium étant sa capacité à se fissionner facilement. C'est ce combustible qui nous intéressera dans la suite.

Afin de modéliser le comportement de ce combustible, il a été nécessaire de faire appel à la théorie de l'homogénéisation. En effet, le MOX est un combustible hétérogène, constitué de plusieurs phases poreuses. Le comportement « macroscopique » du combustible dépend donc fortement du comportement de chacun des constituants qui, de plus, évolue en cours d'irradiation. Or, il serait beaucoup trop complexe de décrire les microstructures du combustible afin de réaliser des calculs de simulation de l'Interaction Pastille-Gaine (d'autant plus que d'autres phénomènes non mécaniques entrent en ligne de compte). L'objectif est donc de trouver un modèle homogène équivalent qui prenne en compte explicitement les paramètres décrivant la microstructure du matériau et qui aurait un comportement similaire au comportement du matériau hétérogène. Ce modèle homogène pourra être ainsi facilement introduit dans des codes de calculs classiques.

Ce mémoire se décompose en quatre parties :

La première partie a un caractère bibliographique. Dans le chapitre 1, on donne un aperçu des microstructures des combustibles MOX vierges (c'est-à-dire non irradiés), mais également des éléments sur leur évolution en cours d'irradiation qui devront être pris en compte dans la formulation des lois de comportement. Dans un deuxième temps, on donne quelques éléments sur les types d'essais mécaniques réalisés sur les pastilles, ainsi que les résultats obtenus à partir de ces essais. Le chapitre 2 est une revue des méthodes d'homogénéisation, d'abord linéaires, puis non-linéaires. Il existe différentes familles de méthodes d'homogénéisation non-linéaires. On aborde donc brièvement ces méthodes : les approches par champs moyens, les approches variationnelles et les approches numériques que sont les méthodes d'analyse par champs de transformation.

La deuxième partie s'attache plus particulièrement à décrire une méthode d'analyse par champs de transformation non-uniformes pour des matériaux élastoviscoplastiques incompressibles qui permet d'améliorer les résultats obtenus avec une méthode d'analyse par champs de transformation classique. Dans le chapitre 3, le principe de la méthode est décrit, puis nous présentons des calculs réalisés sur des composites biphasés à l'aide des deux types de méthodes : l'analyse par champs de transformation classique et l'analyse par champs de transformation non-uniformes. Ces calculs permettent de mettre en évidence l'importance du choix des sous-domaines dans l'analyse par champs de transformation classique et celle du choix des modes plastiques non-uniformes dans l'analyse par champs de transformation non-uniformes. La comparaison des résultats permet également de souligner les points forts de la méthode non-uniforme. Dans le chapitre 4, une méthode pour le choix des modes plastiques est décrite. Cette méthode est une méthode statistique d'analyse des données très puissante. Un ensemble de résultats est présenté pour montrer l'intérêt de coupler cette méthode d'analyse de données et la méthode d'analyse par champs de transformation non-uniformes.

Dans la troisième partie, on développe le modèle d'analyse par champs de transformation non uniformes pour prendre en compte la porosité de certains matériaux élastoviscoplastiques (notamment les combustibles nucléaires). Le chapitre 5 expose donc la méthode dans le cas de la viscoplasticité compressible (du fait de la porosité), ainsi que la méthode pour choisir les modes plastiques. Le chapitre 6 présente l'implémentation de la méthode, et donne donc les différentes étapes nécessaires à la mise en oeuvre du modèle, c'est-à-dire le calcul des modes plastiques, des paramètres du modèle d'analyse par champs de transformation non-uniformes, et l'intégration de la loi de comportement. Dans le chapitre 7, quelques résultats obtenus sur des matériaux biphasés poreux sont présentés afin de montrer l'efficacité de la méthode.

Enfin, la quatrième partie est une application des méthodes d'analyse par champs de transformation aux combustibles MOX. Le chapitre 8 présente une étude simple des combustibles MOX à partir de la méthode d'analyse par champs de transformation classique, très facile à mettre en oeuvre dans le cas de combustibles biphasés. L'identification des paramètres des potentiels viscoplastiques de chaque phase du combustible est réalisé à partir des paramètres identifiés pour le combustible UO_2 standard, mais également à partir d'essais expérimentaux sur pastille. A partir de ces potentiels, on réalise des études de sensibilité sur l'effet de certains paramètres de fabrication ,qui évoluent en cours d'irradiation, sur le comportement du combustible. Le chapitre 9 permet de mettre en évidence l'adéquation de la méthode aux combustibles dont les propriétés mécaniques évoluent au cours de l'irradiation. Pour cela, on montre que la méthode utilisée pour construire la loi de comportement n'est pas remise en cause si le comportement des constituants évolue.

Première partie

Revue bibliographique sur les
combustibles et les méthodes
d'homogénéisation

Chapitre 1

Les combustibles nucléaires

Sommaire

1.1	Les microstructures des combustibles MOX	8
1.1.1	Le MOX vierge	8
1.1.2	Microstructures irradiées, évolution en cours d'irradiation	10
1.2	Base expérimentale sur les combustibles	11
1.2.1	Les essais	11
1.2.2	Résultats des essais	12
1.3	Conclusion	13

Ce premier chapitre va nous permettre de faire un bref état des lieux sur les combustibles MOX, en particulier sur leurs microstructures, et sur les essais mécaniques sur pastille. Nous allons mettre en évidence les caractéristiques et les paramètres importants pour la suite de l'étude.

1.1 Les microstructures des combustibles MOX

1.1.1 Le MOX vierge

La fabrication des MOX (Mixed Oxide) industriels est actuellement réalisée selon le procédé MIMAS (MIcronization of a MASTer blend). Elle comprend 3 étapes essentielles [GIR01], [TOU01] :

- L'obtention d'un mélange homogène de dioxyde d'uranium et de plutonium (mélange mère) à teneur massique en plutonium de l'ordre de 25 à 30%,
- La dilution du mélange mère avec de la poudre de dioxyde d'uranium afin d'obtenir un mélange à teneur en plutonium de l'ordre de 3 à 10%, suivant la teneur désirée. On obtient alors un mélange constitué de deux types d'agglomérats,
- La mise en forme et le frittage des pastilles.

L'observation d'une image obtenue aux rayons X d'un échantillon de MOX MIMAS montre la présence de deux ou trois domaines distincts suivant le type de poudre d' UO_2 choisi pour la fabrication [TOU01], [GOT99], [GUE99].

Dans le cas du MOX MIMAS AUC (la poudre d' UO_2 est obtenue par précipitation d'Ammonium Urano-Carbonate), on observe deux phases (Figure 1.1) :

- Des inclusions riches en plutonium (la teneur en plutonium est de l'ordre de 20%, c'est à dire équivalent à la teneur en plutonium du mélange mère). La taille de ces amas varie de quelques microns à plusieurs dizaines de microns. On parlera de phase plutonifère,
- Une matrice pauvre en plutonium (la teneur en plutonium est inférieure à 3%), ou phase uranifère.



Figure 1.1 : *MOX MIMAS AUC*.

Dans le cas du MOX MIMAS TU2 (ou ADU, la poudre étant obtenue par précipitation d'Ammonium DiUranate), on observe trois phases (Figure 1.2) :

- Les mêmes phases que dans le MOX MIMAS AUC,
- Un réseau plus ou moins interconnecté où la teneur en plutonium est de l'ordre de 7%, appelé phase d'enrobage.

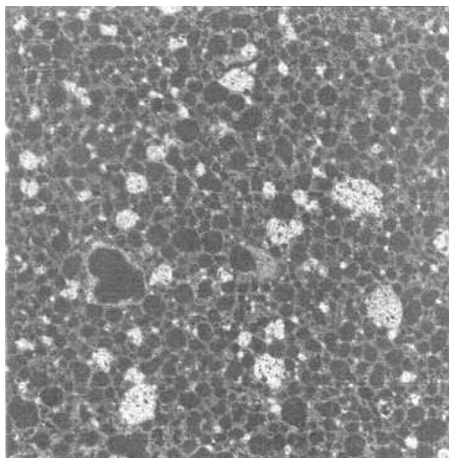


Figure 1.2 : *MOX MIMAS TU2*.

Les amas plutonifères [GUE02] ne contiennent que 50 % (au maximum) de la quantité globale de plutonium. Dans le MOX MIMAS TU2, la phase d'enrobage contient environ 50% du plutonium, soit plus que les amas plutonifères.

Le MOX COCA (CObroyage CAdarache) est un MOX homogène fabriqué suivant un procédé qui consiste au cobroyage en une seule opération d'un mélange de poudre d'oxyde d'uranium et d'oxyde de plutonium respectant la composition finale du combustible. Ce type de procédé n'est pas utilisé actuellement à l'échelle industrielle.

Les combustibles sont des matériaux poreux (le volume de porosité est imposé afin de contenir les gaz de fission, et par conséquent de limiter le gonflement de la pastille sous irradiation). Il existe deux types de porosité : la nano-porosité et la micro-porosité. La taille des micro-pores est de l'ordre de plusieurs dizaines de microns. La nano-porosité est essentiellement due aux méthodes de fabrication des pastilles (utilisation de poudres).

1.1.2 Microstructures irradiées, évolution en cours d'irradiation

Lors de l'irradiation d'un combustible en réacteur [GUE02], il y a apparition de fissures (Figure 1.3).

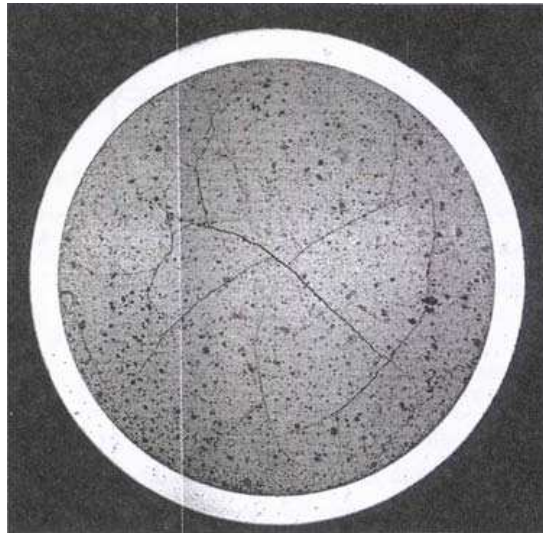


Figure 1.3 : *MOX irradié 5 cycles - Diamètre de la pastille : 8,2mm.*

Les amas plutonifères (Figure 1.4) ont leur microstructure qui se transforme totalement : les grains se fragmentent en très petits grains et il y a apparition de bulles de gaz de fission d'une densité très élevée. On voit également apparaître des précipités métalliques principalement dans les amas plutonifères. De plus, la teneur en plutonium dans les amas diminue : le plutonium est consommé par fission dans les amas. Une porosité importante apparaît après deux cycles dans

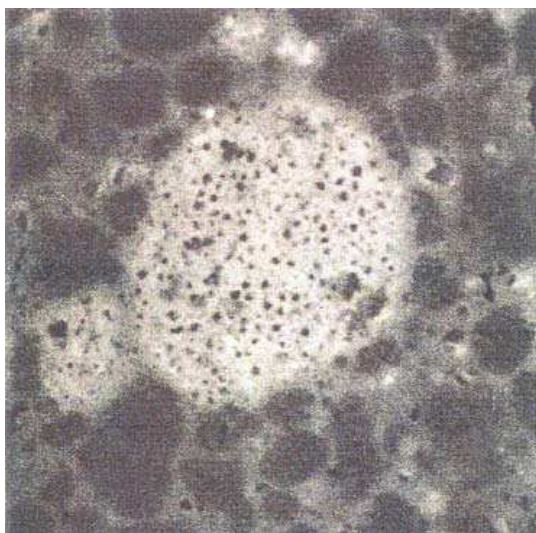


Figure 1.4 : $AMAS(U,Pu)O_2$ dans un MOX MIMAS TU2 irradié 3 cycles.

les amas plutonifères des combustibles [BAS02].

Ces observations nous amènent à construire des lois macroscopiques faisant intervenir explicitement le comportement de chaque phase car elles n'évoluent pas de la même façon en cours d'irradiation.

1.2 Base expérimentale sur les combustibles

1.2.1 Les essais

Deux types d'essais sont réalisés sur pastille, afin d'étudier les propriétés mécaniques du combustible MOX à haute température, et notamment ses déformations en régime stationnaire en fonction du procédé de fabrication, de sa teneur en plutonium (entre 0 et 10%) et de ses caractéristiques microstructurales (porosité, taille de grains, répartition du plutonium). A hautes températures, le MOX a un comportement viscoplastique.

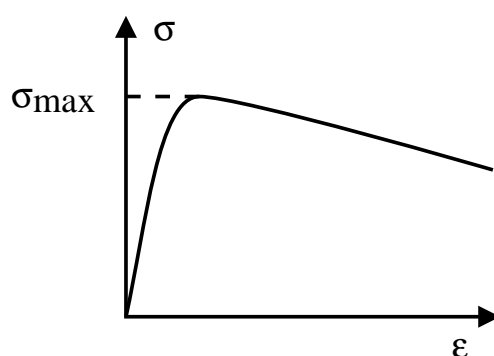
- Les essais à charge constante (essais de fluage) : les *déformations* sont mesurées *en fonction du temps* afin d'évaluer les phases primaires et secondaires du fluage,
- Les essais à vitesse de déformation imposée permettent, à partir de la mesure de la charge appliquée sur la pastille, de calculer la *contrainte* rationnelle *en fonction de la déformation*.

1.2.2 Résultats des essais

Le rôle de différents paramètres sur le comportement mécanique des MOX a été étudié dans [BAS02], [BAS02b], [BAS02c].

Rôle de la teneur en plutonium (Figure 1.5)

Les essais à vitesse de déformation imposée sur un MOX MIMAS ont montré que l'augmentation de la teneur en plutonium entraîne une diminution de la *contrainte maximale* σ_{max} du combustible (cependant, lorsque la teneur en plutonium dépasse 6%, il semble que l'effet du plutonium s'atténue). Un phénomène d'adoucissement est observé :



Les essais de fluage ont montré que, pour une contrainte imposée de 40 ou 50 MPa, l'augmentation de la teneur en plutonium implique une augmentation de la vitesse de fluage [BAS02b].

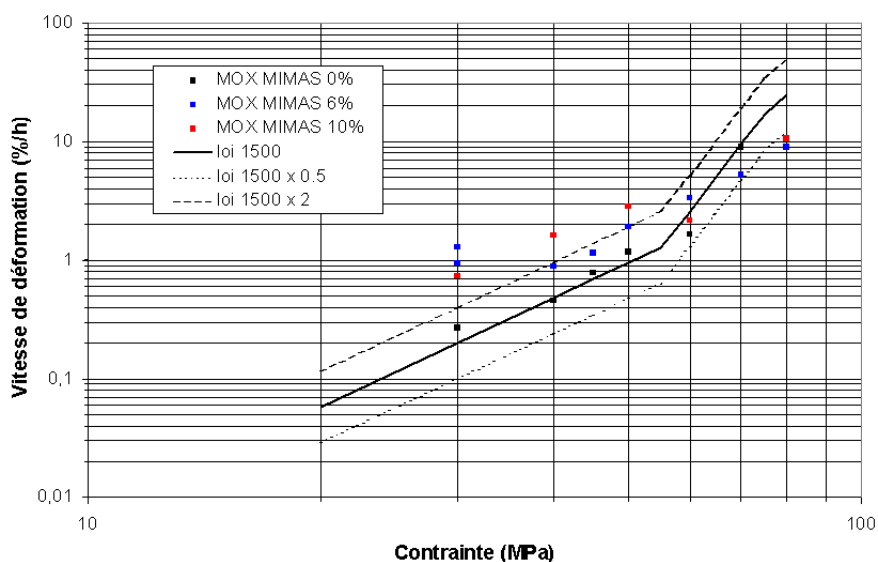


Figure 1.5 : Vitesse de fluage stationnaire des combustibles MOX MIMAS, [BAS02b].

Influence du *procédé de fabrication* :

On observe une plus grande vitesse de déformation de fluage dans le cas d'un MOX MIMAS que dans le cas d'un MOX COCA.

Influence de la *contrainte* pour le MOX MIMAS :

Sur la Figure 1.6, on constate que la part primaire du fluage diminue dès 40 MPa [BAS02b].

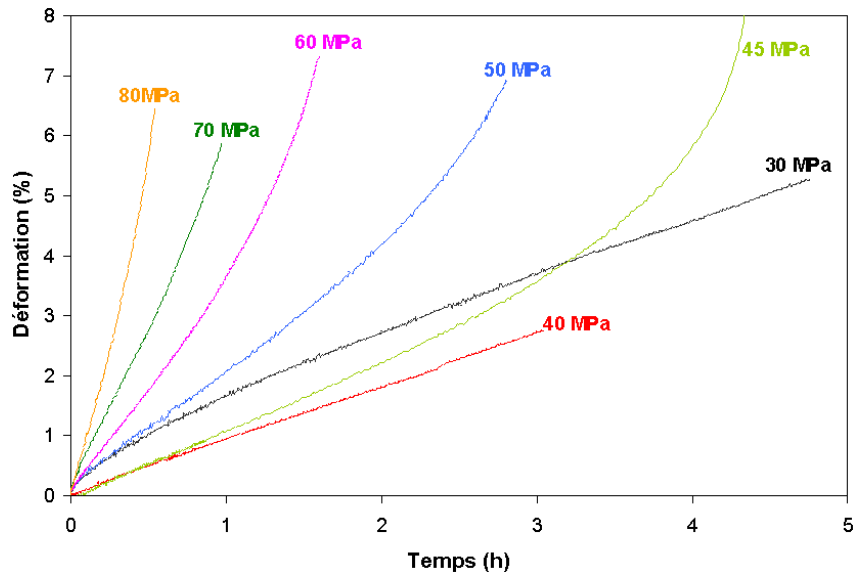


Figure 1.6 : *Influence de la contrainte sur la déformation de fluage du MOX MIMAS à 6% de Plutonium [BAS02b].*

Comme indiqué dans le paragraphe 1.1.2, l'irradiation modifie la microstructure du MOX, notamment la porosité dans les amas plutonifères qui devient plus importante. Une étude a donc été lancée sur l'influence d'amas poreux dans l' UO_2 ([BAS02]). Il a été constaté que la répartition hétérogène de la porosité (amas poreux) aurait tendance à accroître l'amplitude et la durée du fluage primaire de l' UO_2 , mais n'aurait aucune influence sur le fluage secondaire.

1.3 Conclusion

Nous avons donné succinctement dans ce chapitre les caractéristiques des combustibles nucléaires qui vont nous intéresser dans la suite : les MOX.

Le MOX étant un combustible multiphase, il va être nécessaire de mettre en oeuvre des méthodes d'homogénéisation pour obtenir son comportement global. Cependant, le comportement viscoplastique à hautes températures de ce matériau (c'est-à-dire aux températures auxquelles est soumis le MOX en réacteur) nous conduit vers un problème d'homogénéisation non-linéaire, ce qui va compliquer nettement la résolution. Enfin, le fait que le MOX soit un matériau poreux implique que, lors de la définition du comportement viscoplastique du MOX, on prenne en compte ce paramètre porosité, qui, de plus, évolue en cours d'irradiation.

Chapitre 2

Modèles Théoriques

Sommaire

2.1	Homogénéisation : Principe	17
2.1.1	Représentation	18
2.1.2	Localisation	18
2.1.3	Homogénéisation	19
2.2	Matériaux Standard Généralisés	20
2.3	Formulation variationnelle; Bornes de Voigt et de Reuss	20
2.3.1	Problème élastique et formulation variationnelle	20
2.3.2	Bornes de Voigt et de Reuss	22
2.4	Problèmes d'inclusion	22
2.4.1	Problème d'Eshelby	22
2.4.2	Problèmes basés sur le problème de l'inclusion : schémas linéaires d'homogénéisation	23
2.5	Propriétés non linéaires des matériaux : Approches par champs moyens	28
2.5.1	Formulation incrémentale de Hill	29
2.5.2	Formulation sécante	30
2.5.3	Formulation tangente	30
2.5.4	Formulation affine	32
2.6	Propriétés non linéaires des matériaux : Approches variationnelles 33	
2.6.1	Propriétés mécaniques macroscopiques de composites isotropes non linéaires	33
2.6.2	Estimations second ordre	35
2.7	Propriétés non linéaires des matériaux : Approches numériques 37	
2.7.1	Analyse par champs de transformation	38
2.7.2	Analyse par champs de transformation « modifiés »	40
2.7.3	Analyse par champs de transformation non uniformes	41
2.8	Modélisation du comportement des matériaux poreux	45

2.8.1	Description du comportement des matériaux poreux	45
2.8.2	Evolution de la porosité	46
2.8.3	Détermination des paramètres du potentiel viscoplastique pour les matériaux poreux	46
2.9	Conclusion	48

Le premier chapitre nous a permis de mettre en évidence les éléments qui vont être nécessaires pour obtenir le comportement des combustibles multiphasés : des méthodes de résolution de problèmes d'homogénéisation non-linéaire et la définition de lois de comportement viscoplastique avec prise en compte de la porosité.

Dans un premier temps, nous rappelons le principe de l'homogénéisation ainsi que le cadre utilisé pour définir le comportement des matériaux (concept thermodynamique de matériaux standard généralisés). Puis nous détaillons quelques méthodes permettant d'aboutir à des schémas d'homogénéisation linéaire. Ensuite, nous exposons les bases des techniques d'homogénéisation non-linéaire. Enfin, le potentiel viscoplastique d'un matériaux poreux sera défini.

2.1 Homogénéisation : Principe

La démarche d'homogénéisation [GEO00],[ZAO01], permet de relier la microstructure du combustible à sa loi de comportement macroscopique.

L'objectif est de déterminer des propriétés homogènes du matériau, en fonction des paramètres microstructuraux et des différentes phases qui le caractérisent. Il faut donc pouvoir passer de l'échelle des hétérogénéités (échelle microscopique) à l'échelle du matériau (échelle macroscopique). Pour cela, on établit des grandeurs caractéristiques.

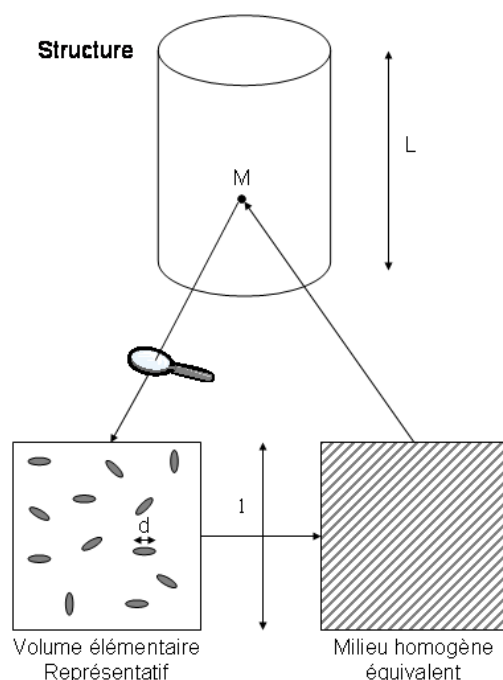


Figure 2.1 : Echelles d'analyse

La taille caractéristique de l'échelle microscopique, d , est celle des hétérogénéités. On doit veiller à ce que cette échelle soit pertinente : elle ne doit pas descendre inutilement à un niveau trop fin, et les outils de la mécanique des milieux continus doivent être encore applicables.

Il faut également déterminer ℓ , la taille du volume sur lequel les calculs vont être effectués, sachant que L est la dimension caractéristique de la structure :

- $\ell \ll L$: La structure de dimension L doit pouvoir être traitée comme un milieu continu, un volume de dimension ℓ doit pouvoir être considéré comme un point à l'échelle de la structure. De plus, les relations entre les moyennes doivent rester les mêmes dans tous les volumes de la structure de dimension supérieure à ℓ .
- $\ell \gg d$: Sans cette condition, le comportement global résultant d'un matériau à micro-structure aléatoire fluctuerait fortement d'une particule à l'autre.

On a maintenant la possibilité de définir un Volume Élémentaire Représentatif (VER) du matériau hétérogène considéré, qui reste suffisamment petit par rapport aux dimensions caractéristiques des structures macroscopiques. Le milieu réel hétérogène est remplacé par un milieu homogène équivalent (MHE).

On va à présent décrire les trois étapes nécessaires à la mise en œuvre de l'homogénéisation : l'étape de représentation, l'étape de localisation et enfin l'étape d'homogénéisation.

2.1.1 Représentation

C'est la phase de description du système à considérer à partir des échelles microscopique et macroscopique qu'on suppose fixées.

Dans le cas des milieux périodiques, le VER peut être réduit à une cellule de base de l'arrangement périodique. On a une description déterministe.

Dans le cas des milieux aléatoires (cas du combustible), la description mécanique et géométrique ne peut plus être déterministe. Deux VER voisins ne seront jamais superposables même si, macroscopiquement, leur comportement est le même. On ne peut donc en faire qu'une description statistique. Il faut donc identifier les différentes phases (caractéristiques mécaniques différentes) et leur comportement. Puis il faut extraire différents paramètres géométriques pertinents (c'est à dire qui peuvent influencer sur le comportement mécanique), notamment la fraction volumique de chaque phase.

2.1.2 Localisation

C'est la phase d'analyse de la réponse mécanique du VER à diverses sollicitations. On cherche les champs microscopiques de contraintes et de déformations.

Les chargements appliqués au VER doivent correspondre aux sollicitations (champs de contraintes ou de déformations macroscopiques) que le VER subirait au sein de la structure globale étudiée. Des conditions homogènes au contour ou des conditions aux limites périodiques sont donc utilisées afin de simuler ces chargements :

- **Contraintes homogènes sur le contour** : On impose la condition $\mathbf{t}^d = \boldsymbol{\Sigma}^0 \cdot \mathbf{n}$ sur ∂V où $\boldsymbol{\Sigma}^0$ est une contrainte macroscopique homogène, \mathbf{n} la normale extérieure au contour.

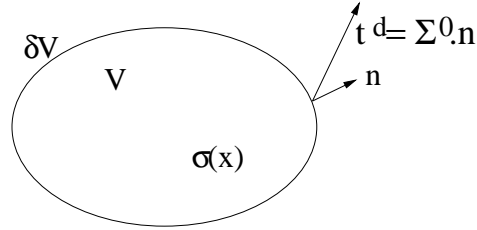


Figure 2.2 : Contraintes homogènes au contour

Il en résulte que $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \boldsymbol{\Sigma}^0$ où $\boldsymbol{\sigma}$ est le champ de contraintes microscopiques du VER.

- **Déformations homogènes sur le contour** : On impose la condition de déplacement $\mathbf{u}^d = \mathbf{E}^0 \cdot \mathbf{x}$ sur ∂V où \mathbf{E}^0 est une déformation macroscopique homogène.

Il en résulte que $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}^0$ où $\boldsymbol{\varepsilon}$ est le champ de déformations microscopiques du VER.

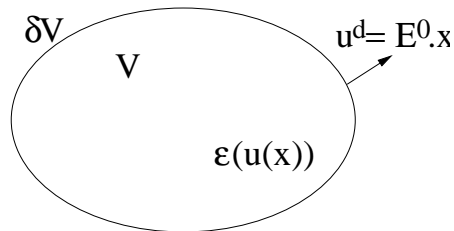


Figure 2.3 : Déformations homogènes au contour

- **Conditions aux limites périodiques** :

$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ doit être anti-périodique sur ∂V , $\boldsymbol{\sigma}$ étant la contrainte et \mathbf{n} la normale extérieure.

$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}^0 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}'(\mathbf{x})$ sur ∂V avec $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ le déplacement du point \mathbf{x} , \mathbf{E}^0 une déformation homogène et \mathbf{u}' un déplacement périodique.

A partir de ces sollicitations, il faut maintenant résoudre le problème de localisation. Or, en général, il est difficile d'obtenir une solution unique à cause de la description statistique du VER. On cherche donc un encadrement par des bornes ou une estimation de la solution.

2.1.3 Homogénéisation

Cette étape permet de faire la synthèse des résultats de localisation et de trouver le comportement global du matériau. On cherche en fait les propriétés permettant de relier les moyennes des grandeurs locales entre elles.

2.2 Matériaux Standard Généralisés

La théorie des matériaux standard généralisés [HAL75], [MIC00] est basée sur deux concepts :

- La notion de variables internes : ces variables $\boldsymbol{\alpha}$ sont supposées contenir, à l’instant t , toute l’information sur l’histoire du matériau avant le temps t . Le choix de ces variables dépend du matériau que l’on considère.
- La notion de potentiels thermodynamiques convexes : l’énergie libre et les potentiels de dissipation.

Les variables d’état du système sont la déformation microscopique $\boldsymbol{\varepsilon}$, et les variables internes $\boldsymbol{\alpha}$ qui décrivent les phénomènes irréversibles.

L’énergie libre, w , permet de définir, grâce aux lois d’état, la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ à partir de la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ et des forces thermodynamiques \mathbf{A} associées aux mécanismes dissipatifs $\boldsymbol{\alpha}$ du système. Le potentiel de dissipation, φ , relie les taux des mécanismes dissipatifs aux forces associées.

$$\text{Lois d'état : } \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}), \\ \mathbf{A} = -\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}). \end{cases}$$

$$\text{Lois complémentaires : } \mathbf{A} = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\boldsymbol{\alpha}}}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}).$$

Si on définit ψ comme étant le potentiel dual de φ , les lois complémentaires s’écrivent de la façon suivante : $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}}(\mathbf{A})$.

Dans le cas d’un composite où toutes les phases ont une structure de matériau standard généralisé, il est prouvé [SUQ87] que le composite a également un comportement standard généralisé. Le changement d’échelles conserve donc le caractère standard généralisé, mais avec un nombre infini de variables internes.

Dans la suite, on considère que tous les matériaux étudiés sont standard généralisés.

2.3 Formulation variationnelle ; Bornes de Voigt et de Reuss

2.3.1 Problème élastique et formulation variationnelle

Soit V le VER et ∂V sa surface de normale extérieure \mathbf{n} .

Le chargement mécanique est constitué de déplacements imposés \mathbf{u}^d sur une partie de sa surface

∂V^u , de contraintes imposées \mathbf{F}^d sur la partie complémentaire ∂V^F et de forces volumiques \mathbf{f} dans V .

La résolution du problème élastique ainsi défini consiste à trouver les champs \mathbf{u} , $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ sur V , tels que :

- \mathbf{u} et $\boldsymbol{\varepsilon}$ soient cinématiquement admissibles (CA) avec les conditions aux limites cinématiques,

$$\mathbf{u} \text{ et } \boldsymbol{\varepsilon} \text{ sont CA avec } \mathbf{u}^d : \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u}) & \text{dans } V, \\ \mathbf{u} \text{ continu dans } V, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}^d \text{ sur } \partial V^u. \end{cases}$$

- $\boldsymbol{\sigma}$ soit statiquement admissible (SA) avec les données statiques,

$$\boldsymbol{\sigma} \text{ est SA avec } \mathbf{F}^d \text{ et } \mathbf{f} : \begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 & \text{dans } V, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}^d \text{ sur } \partial V^F. \end{cases}$$

- $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ vérifient la loi de comportement en tout point de V :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) \text{ dans } V,$$

ou encore

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}), \mathbf{x}),$$

avec ϕ est le potentiel dual de w .

Ces équations peuvent être réécrites sous une forme faible équivalente. On obtient la formulation variationnelle suivante :

$$-\Phi(\boldsymbol{\sigma}^*) \leq -\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = W(\mathbf{u}) \leq W(\mathbf{u}^*) \quad \forall \boldsymbol{\sigma}^* \text{ SA avec } \mathbf{F}^d \text{ et } \mathbf{f} \text{ et } \forall \mathbf{u}^* \text{ CA avec } \mathbf{u}^d, \quad (2.1)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{\sigma}^*) &= \int_V \phi(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{x}) dV - \int_{\partial V^u} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{u}^d dS, \\ W(\mathbf{u}^*) &= \int_V w(\boldsymbol{\varepsilon}^*, \mathbf{x}) dV - \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^* dV - \int_{\partial V^F} \mathbf{F}^d \cdot \mathbf{u}^* dS. \end{aligned}$$

W et Φ sont respectivement l'énergie potentielle et l'énergie complémentaire.

Dans le cas où $\mathbf{F}^d = 0$, $\mathbf{f} = 0$ et où $\mathbf{u} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x}$ sur ∂V^u , sachant que $\langle \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E} : \tilde{\mathbf{C}} : \mathbf{E}$ (lemme de Hill), on trouve l'encadrement suivant :

$$2 \langle \boldsymbol{\sigma}^* : \mathbf{E} - \langle \boldsymbol{\sigma}^* : \mathbf{s} : \boldsymbol{\sigma}^* \rangle \leq \mathbf{E} : \tilde{\mathbf{C}} : \mathbf{E} \leq \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* : \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle \quad (2.2)$$

où $\tilde{\mathbf{C}}$ est le tenseur des modules effectifs, \mathbf{c} est le tenseur des modules de rigidité locaux, \mathbf{s} le tenseur des modules de souplesse locaux, et \mathbf{E} la déformation macroscopique.

Le choix de champs d'essai de contraintes SA $\boldsymbol{\sigma}^*$ et de déformations CA $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ adéquats permet d'encadrer l'énergie W du système et conduit aux différentes bornes.

2.3.2 Bornes de Voigt et de Reuss

Ce sont des bornes d'ordre 1. Elles nécessitent uniquement la connaissance de la fraction volumique des constituants.

On considère des champs homogènes dans V :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{\varepsilon}^0, \\ \boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma}^0. \end{cases} \quad (2.3)$$

En choisissant $\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \mathbf{E}$ et $\boldsymbol{\sigma}^0 = \langle \mathbf{s} \rangle^{-1} : \mathbf{E}$, l'équation (2.2) donne :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{C}} \leq \langle \mathbf{c} \rangle \text{ (borne de Voigt),} \\ \tilde{\mathbf{C}} \geq \langle \mathbf{s} \rangle^{-1} \text{ (borne de Reuss).} \end{cases}$$

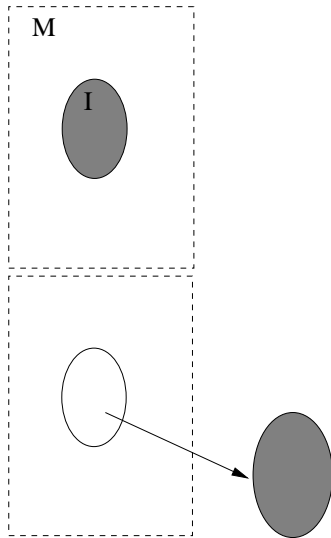
Ces bornes ne prennent pas en compte la distribution des déformations et des contraintes au niveau local. De plus, lorsque le contraste entre les phases est grand, les deux bornes donnent un encadrement très large. Elles n'ont qu'une utilité très restreinte.

2.4 Problèmes d'inclusion

2.4.1 Problème d'Eshelby

Le problème de l'inclusion est un problème de base en mécanique des milieux hétérogènes. Eshelby [ESH57] a traité le problème dans le cas d'une inclusion ellipsoïdale élastique dans une matrice infinie élastique.

Soit un milieu infini homogène élastique linéaire de modules \mathbf{C} , sans contrainte ni déformation résiduelle, et un domaine I de ce milieu infini qu'on appelle inclusion.

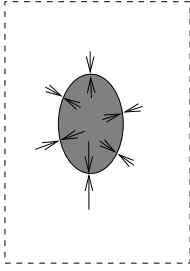


$$\begin{aligned} \text{Dans l'inclusion : } & \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^I = 0, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^I = 0. \end{cases} \\ \text{Dans la matrice : } & \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^M = 0, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^M = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

L'inclusion subit une transformation (changement de phase par exemple).

En l'absence de matrice, l'inclusion se déformerait librement sans contrainte :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^I = 0, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^I = \boldsymbol{\varepsilon}^L. \end{cases}$$



Or la matrice s'oppose à la déformation de l'inclusion. Un état d'équilibre s'installe : l'inclusion se trouve dans un état déformé différent de celui de déformation libre, mais la matrice se déforme également.

$$\text{On a donc : } \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^I = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}^I - \boldsymbol{\varepsilon}^L), \\ \boldsymbol{\sigma}^M = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^M. \end{cases}$$

Dans le cas d'une inclusion de forme ellipsoïdale, Eshelby [ESH57] a montré qu'il existait un tenseur \mathbf{S}^E tel que :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^I = \mathbf{S}^E : \boldsymbol{\varepsilon}^L. \quad (2.4)$$

\mathbf{S}^E est appelé le tenseur d'Eshelby, tenseur du 4^{ème} ordre qui dépend de \mathbf{C} et de la forme de l'inclusion.

L'équation de comportement dans l'inclusion peut se mettre sous la forme : $\boldsymbol{\sigma}^I = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^I + \mathbf{p}$ où \mathbf{p} est le tenseur de polarisation qui s'interprète comme la contrainte qui apparaîtrait dans l'inclusion après transformation si l'on bloquait totalement sa déformation :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^I = -\mathbf{S}^E : \mathbf{S} : \mathbf{p},$$

avec \mathbf{S} tenseur de souplesse. Et si l'on impose une déformation homogène \mathbf{E} , alors

$$\boldsymbol{\varepsilon}^I = \mathbf{E} - \mathbf{S}^E : \mathbf{S} : \mathbf{p} = \mathbf{E} - \mathbf{P}^E : \mathbf{p},$$

où \mathbf{P}^E est appelé tenseur de Hill.

Dans le cas où la matrice est chargée uniformément à l'infini (déformation homogène \mathbf{E} ou contrainte homogène $\boldsymbol{\Sigma}$), on peut donc écrire :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^I = \mathbf{E} + \mathbf{S}^E : \boldsymbol{\varepsilon}^L, \\ \boldsymbol{\sigma}^I = \boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{C} : (\mathbf{S}^E - \mathbf{I}) : (\mathbf{S}^E)^{-1} : (\boldsymbol{\varepsilon}^I - \mathbf{E}) = \boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{C}^* : (\mathbf{E} - \boldsymbol{\varepsilon}^I). \end{cases} \quad (2.5)$$

On note \mathbf{C}^* le tenseur d'influence de Hill : $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} : ((\mathbf{S}^E)^{-1} - \mathbf{I})$.

2.4.2 Problèmes basés sur le problème de l'inclusion : schémas linéaires d'homogénéisation

La résolution du problème de localisation peut utiliser la solution élémentaire de l'inclusion, en considérant que les grandeurs locales sont affectées à diverses configurations successives d'inclusions, la matrice jouant le rôle de l'ensemble des éléments autres que ceux individualisés en inclusions.

Formulation variationnelle de Hashin et Shtrikman

L'objectif est de construire des estimations et des encadrements des modules effectifs en cherchant à résoudre le problème de localisation, c'est à dire qu'on cherche à déterminer les

champs locaux $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ induits dans V par un chargement macrohomogène appliqué sur ∂V tel que la déformation macroscopique soit égale à \boldsymbol{E} .

On pose $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon} + (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}^0) : \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{p}$ où \boldsymbol{C}^0 est homogène et \boldsymbol{p} le champ de polarisation.

Or la construction de ces champs est en général difficile. La formulation de Hashin et Shtrikman [BOR01], [BOR96] permet de surmonter cette difficulté. Les champs d'essai admissibles $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ et $\boldsymbol{\sigma}^*$ sont construits par la résolution d'un problème auxiliaire défini à partir de la même géométrie que le problème initial, des mêmes chargements et conditions aux limites, mais sur un milieu homogène de référence arbitraire de tenseur des modules d'élasticité \boldsymbol{C}^0 , qui subit en plus des déformations de transformation hétérogènes caractérisées par un champ de polarisation \boldsymbol{p}^* :

$$\forall \boldsymbol{x} \in V, \boldsymbol{p}^*(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{C}^0) : \boldsymbol{\eta}^*(\boldsymbol{x}), \quad (2.6)$$

avec $\boldsymbol{\eta}^*$ tenseur d'ordre deux, ayant la dimension d'une déformation.

Les champs $(\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{\varepsilon}^*, \boldsymbol{\sigma}^*)$ tels que :

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}^* \text{ et } \boldsymbol{\varepsilon}^* \text{ sont CA avec } \boldsymbol{u}^d, \\ \boldsymbol{\sigma}^* \text{ est SA avec } \boldsymbol{F}^d \text{ et } \boldsymbol{f}, \\ \boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^* + (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}^0) : \boldsymbol{\eta}^*, \end{cases} \quad (2.7)$$

sont admissibles pour le problème initial. De plus, si $\boldsymbol{p}^* = (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}^0) : \boldsymbol{\varepsilon}^*$, alors ils sont uniques [BOR96].

Soient $(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{\Sigma})$ la solution du problème auxiliaire avec polarisation nulle :

$$\begin{cases} \boldsymbol{U} \text{ et } \boldsymbol{E} \text{ sont CA avec } \boldsymbol{u}^d, \\ \boldsymbol{\Sigma} \text{ est SA avec } \boldsymbol{F}^d \text{ et } \boldsymbol{f}, \\ \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{C}^0 : \boldsymbol{E}. \end{cases} \quad (2.8)$$

L'énergie potentielle et l'énergie complémentaire s'écrivent :

$$\begin{aligned} W^0(\boldsymbol{U}) &= \int_V \boldsymbol{E} : \boldsymbol{C}^0 : \boldsymbol{E} \, dV - \int_V \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{U} \, dV - \int_{\partial V^F} \boldsymbol{F}^d \cdot \boldsymbol{U} \, dS, \\ \Phi^0(\boldsymbol{\Sigma}) &= \int_V \boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{S}^0 : \boldsymbol{\Sigma} \, dV - \int_{\partial V^U} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{u}^d \, dS. \end{aligned} \quad (2.9)$$

On note $(\boldsymbol{u}^{*'}, \boldsymbol{\varepsilon}^{*'}, \boldsymbol{\sigma}^{*'})$ l'écart à la solution $(\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{\varepsilon}^*, \boldsymbol{\sigma}^*)$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{u}^{*'}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{\varepsilon}^{*'}, \\ \boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\sigma}^{*'} \end{cases} \quad (2.10)$$

On a :

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}^{*'} : \boldsymbol{\varepsilon}^{*'} \, dV = \int_V [\boldsymbol{C}^0 : (\boldsymbol{\varepsilon}^* - \boldsymbol{E}) + (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}^0) : \boldsymbol{\eta}^*] : [\boldsymbol{\varepsilon}^* - \boldsymbol{E}] \, dV = 0,$$

et par le principe des travaux virtuels :

$$\int_V \boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}' dV = \int_V \mathbf{E} : \mathbf{C}^0 : (\boldsymbol{\varepsilon}^* - \mathbf{E}) dV = \int_V \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u}^* - \mathbf{U}) dV + \int_{\partial V^F} \mathbf{F}^d \cdot (\mathbf{u}^* - \mathbf{U}) dS. \quad (2.11)$$

On obtient alors l'écart entre l'énergie potentielle du problème initial et celle du problème auxiliaire à polarisation nulle :

$$2 [W(\mathbf{u}^*) - W^0(\mathbf{U})] = \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^* : (\mathbf{C} - \mathbf{C}^0) : \boldsymbol{\varepsilon}^* dV - \int_V \boldsymbol{\varepsilon}' : (\mathbf{C} - \mathbf{C}^0) : \boldsymbol{\eta}^* dV. \quad (2.12)$$

On peut alors écrire l'énergie potentielle sous la forme :

$$W(\mathbf{u}^*) = HS^0(\boldsymbol{\eta}^*) + \frac{1}{2} \int_V (\boldsymbol{\eta}^* - \boldsymbol{\varepsilon}^*) : (\mathbf{C} - \mathbf{C}^0) : (\boldsymbol{\eta}^* - \boldsymbol{\varepsilon}^*) dV. \quad (2.13)$$

avec $HS^0(\boldsymbol{\eta}^*)$ la fonctionnelle de Hashin et Shtrikman associée au milieu de référence \mathbf{C}^0 , à la géométrie et au chargement considérés :

$$HS^0(\boldsymbol{\eta}^*) = W^0(\mathbf{U}) + \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\eta}^* : (\mathbf{C} - \mathbf{C}^0) : (\mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon}^* - \boldsymbol{\eta}^*) dV. \quad (2.14)$$

De la même façon, on obtient une relation pour l'énergie complémentaire :

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{\sigma}^*) &= \Phi^0(\boldsymbol{\Sigma}) + \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\eta}^* : \mathbf{C} : (\mathbf{S} - \mathbf{S}^0) : (\boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\sigma}^* - \mathbf{C} : \boldsymbol{\eta}^*) dV, \\ &+ \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{C} : \boldsymbol{\eta}^* - \boldsymbol{\sigma}^*) : (\mathbf{S} - \mathbf{S}^0) : (\mathbf{C} : \boldsymbol{\eta}^* - \boldsymbol{\sigma}^*) dV, \\ &= \Phi^0(\boldsymbol{\Sigma}) - \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\eta}^* : (\mathbf{C} - \mathbf{C}^0) : (\mathbf{E} - \boldsymbol{\varepsilon}^* - \boldsymbol{\eta}^*) dV, \\ &+ \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{C} : \boldsymbol{\eta}^* - \boldsymbol{\sigma}^*) : (\mathbf{S} - \mathbf{S}^0) : (\mathbf{C} : \boldsymbol{\eta}^* - \boldsymbol{\sigma}^*) dV. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Or comme $\Phi^0(\boldsymbol{\Sigma}) = -W^0(\mathbf{U})$, on a alors :

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}^*) = -HS^0(\boldsymbol{\eta}^*) + \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{C} : \boldsymbol{\eta}^* - \boldsymbol{\sigma}^*) : (\mathbf{S} - \mathbf{S}^0) : (\mathbf{C} : \boldsymbol{\eta}^* - \boldsymbol{\sigma}^*) dV. \quad (2.16)$$

On établit alors les inégalités suivantes pour tout champ $\boldsymbol{\eta}^*$ et pour tout milieu de référence \mathbf{C}^0 :

$$-\Delta_\phi^0(\boldsymbol{\eta}^*) + HS^0(\boldsymbol{\eta}^*) \leq -\Phi(\boldsymbol{\sigma}^*) = W = W(\mathbf{u}) \leq HS^0(\boldsymbol{\eta}^*) + \Delta_w^0(\boldsymbol{\eta}^*), \quad (2.17)$$

avec :

$$\begin{cases} \Delta_\phi^0(\boldsymbol{\eta}^*) &= \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{C} : \boldsymbol{\eta}^* - \boldsymbol{\sigma}^*) : (\mathbf{S} - \mathbf{S}^0) : (\mathbf{C} : \boldsymbol{\eta}^* - \boldsymbol{\sigma}^*) dV, \\ \Delta_w^0(\boldsymbol{\eta}^*) &= \frac{1}{2} \int_V (\boldsymbol{\eta}^* - \boldsymbol{\varepsilon}^*) : (\mathbf{C} - \mathbf{C}^0) : (\boldsymbol{\eta}^* - \boldsymbol{\varepsilon}^*) dV. \end{cases} \quad (2.18)$$

Les termes Δ_ϕ^0 et Δ_w^0 ne peuvent en général pas être calculés explicitement. Cependant, ce sont des formes quadratiques en $(\boldsymbol{\eta}^* - \boldsymbol{\varepsilon}^*)$ dont on peut contrôler le signe en choisissant

judicieusement le milieu de référence \mathbf{C}^0 . On peut alors préserver les inégalités sans avoir besoin de calculer ces deux termes :

$$\begin{cases} \text{Si } \mathbf{C}^0 \geq \mathbf{C}(\mathbf{x}) \text{ (notation utilisée par abus de langage)} \forall \mathbf{x} \in V, \text{ alors } HS^0(\eta^*) \geq W, \\ \text{Si } \mathbf{C}^0 \leq \mathbf{C}(\mathbf{x}) \text{ (notation utilisée par abus de langage)} \forall \mathbf{x} \in V, \text{ alors } HS^0(\eta^*) \leq W. \end{cases}$$

Dans le cas d'un problème élastique de la forme :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 & \text{dans } V \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) & \text{dans } V, \\ \mathbf{u} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} & \text{sur } \partial V^U, \end{cases}$$

le problème variationnel de Hashin et Shtrikman s'écrit :

$$-\Delta_\phi^0(\eta^*) + HS^0(\eta^*) \leq \frac{1}{2} \mathbf{E} : \tilde{\mathbf{C}} : \mathbf{E} \leq HS^0(\eta^*) + \Delta_w^0(\eta^*), \quad (2.19)$$

avec :

$$\begin{cases} HS^0(\eta^*) &= \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{C}^0 : \mathbf{E} + \frac{1}{2} \langle \eta^* : (\mathbf{C} - \mathbf{C}^0) : (\mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon}^* - \eta^*) \rangle, \\ \Delta_\phi^0(\eta^*) &= \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{C} : \eta^* - \boldsymbol{\sigma}^*) : (\mathbf{S} - \mathbf{S}^0) : (\mathbf{C} : \eta^* - \boldsymbol{\sigma}^*) dV, \\ \Delta_w^0(\eta^*) &= \frac{1}{2} \int_V (\eta^* - \boldsymbol{\varepsilon}^*) : (\mathbf{C} - \mathbf{C}^0) : (\eta^* - \boldsymbol{\varepsilon}^*) dV. \end{cases} \quad (2.20)$$

Choix de champs de polarisation optimaux

Les meilleures approximations sont obtenues lorsque la « polarisation d'essai » \mathbf{p}^* approche au mieux la « polarisation réelle » $\mathbf{p} = (\mathbf{C} - \mathbf{C}^0) : \boldsymbol{\varepsilon}$ ou, ici, lorsque le champ η^* approche au mieux le champ de déformation réel $\boldsymbol{\varepsilon}$.

L'optimisation de l'encadrement est assurée par une maximisation ou une minimisation de la fonctionnelle $HS^0(\eta^*)$ suivant que \mathbf{C}^0 est plus grand ou plus petit que les $\mathbf{C}(\mathbf{x})$.

Choix du milieu de référence \mathbf{C}^0

Le choix à faire dépend du type de résultat souhaité (borne ou estimation pour les modules effectifs), de la précision souhaitée, des possibilités de calcul.

Modèle autocohérent [FRA95]

On considère que chaque phase est, tour à tour, rassemblée dans une inclusion ellipsoïdale, et on assimile le milieu hétérogène qui l'entoure, le *milieu de référence*, au *milieu homogène équivalent cherché*.

Le modèle autocohérent peut s'appliquer à des matériaux multiphasés dans lesquels aucune des phases ne joue le rôle de matrice.

Le comportement du milieu homogène équivalent est identifié en faisant jouer successivement à chaque phase le rôle de l'inclusion, le comportement de la matrice restant le même, et en réalisant les opérations de moyenne adéquates entre les diverses configurations (avec comme poids relatifs la fraction volumique de chaque phase).

Si $\tilde{\mathbf{C}}$ est le tenseur des modules effectifs, alors :

$$\left. \begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\Sigma}) &= \mathbf{C}^* : (\mathbf{E} - \boldsymbol{\varepsilon}), \\ \boldsymbol{\Sigma} &= \tilde{\mathbf{C}} : \mathbf{E}, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon}, \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\mathbf{c} + \mathbf{C}^*) : \boldsymbol{\varepsilon} = (\tilde{\mathbf{C}} + \mathbf{C}^*) : \mathbf{E} \Leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{c} + \mathbf{C}^*)^{-1} : (\tilde{\mathbf{C}} + \mathbf{C}^*) : \mathbf{E}. \quad (2.21)$$

Le tenseur de localisation des déformations est alors défini par : $\mathbf{A} = (\mathbf{c} + \mathbf{C}^*)^{-1} : (\tilde{\mathbf{C}} + \mathbf{C}^*)$.

Comme $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A} : \mathbf{E}$, on a $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} : \mathbf{A} : \mathbf{E}$, d'où $\boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle \mathbf{c} : \mathbf{A} \rangle : \mathbf{E}$.

$\tilde{\mathbf{C}}$ est donc égal à :

$$\tilde{\mathbf{C}} = \langle \mathbf{c} : \mathbf{A} \rangle = \left\langle \mathbf{c} : (\mathbf{c} + \mathbf{C}^*)^{-1} : (\tilde{\mathbf{C}} + \mathbf{C}^*) \right\rangle.$$

Il s'agit en général d'une équation intégrale en $\tilde{\mathbf{C}}$.

Estimation de Mori-Tanaka [BOR01]

C'est le même principe que pour le modèle autocohérent, mais le *milieu de référence* choisi est la *matrice du matériau étudié*.

Le modèle de Mori-Tanaka s'applique en général à des matériaux où l'une des phases peut être considérée comme matrice.

Si \mathbf{C}^m est le tenseur des modules de la matrice, alors on obtient pour $\tilde{\mathbf{C}}$:

$$\tilde{\mathbf{C}} = \langle \mathbf{c} : \mathbf{A} \rangle = \left\langle \mathbf{c} : (\mathbf{c} + \mathbf{C}^*)^{-1} : (\mathbf{C}^m + \mathbf{C}^*) \right\rangle.$$

Dans ce cas, le calcul est moins difficile que dans le cas du modèle autocohérent car le milieu de référence est connu.

Bornes de Hashin et Shtrikman [FRA95]

On donne au milieu de référence des modules connus. On obtient des bornes supérieures \mathbf{C}^{max} ou inférieures \mathbf{C}^{min} suivant que le module choisi est plus raide ou plus souple que l'ensemble des modules des différentes phases constitutives :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}_+ : \mathbf{E},$$

$$\text{avec } \begin{cases} \mathbf{A}_+ = (\mathbf{c} + \mathbf{C}_+^*)^{-1} : (\mathbf{C}^{max} + \mathbf{C}_+^*), \\ \mathbf{C}_+^* = \mathbf{C}^{max} : ((\mathbf{S}_{max}^E)^{-1} - \mathbf{I}). \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle &= \langle \mathbf{A}_+ \rangle : \mathbf{E}, \\ \mathbf{E} &= \langle \mathbf{A}_+ \rangle^{-1} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle,\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}_+ : \langle \mathbf{A}_+ \rangle^{-1} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle.$$

L'expression de $\boldsymbol{\sigma}$ est alors la suivante :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon}, \\ &= \mathbf{c} : \mathbf{A}_+ : \mathbf{E}, \\ &= \mathbf{c} : \mathbf{A}_+ : \langle \mathbf{A}_+ \rangle^{-1} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle,\end{aligned}$$

ce qui aboutit pour \mathbf{C}_+ à :

$$\mathbf{C}_+ = \langle \mathbf{c} : \mathbf{A}_+ \rangle : \langle \mathbf{A}_+ \rangle^{-1}. \quad (2.22)$$

De la même façon, on trouve l'expression de \mathbf{C}_- :

$$\mathbf{C}_- = \langle \mathbf{c} : \mathbf{A}_- \rangle : \langle \mathbf{A}_- \rangle^{-1}, \quad (2.23)$$

avec
$$\begin{cases} \mathbf{A}_- = (\mathbf{c} + \mathbf{C}_-^*)^{-1} : (\mathbf{C}^{min} + \mathbf{C}_-^*), \\ \mathbf{C}_-^* = \mathbf{C}^{min} : ((\mathbf{S}_{min}^E)^{-1} - \mathbf{I}). \end{cases}$$

On peut alors établir des bornes pour $\tilde{\mathbf{C}}$, le tenseur des modules effectifs :

$$\mathbf{C}^{min} \leq \tilde{\mathbf{C}} \leq \mathbf{C}^{max}. \quad (2.24)$$

2.5 Propriétés non linéaires des matériaux : Approches par champs moyens

La résolution d'un problème d'homogénéisation non linéaire est un problème compliqué. L'objectif est ici de réussir à se ramener à un problème d'homogénéisation linéaire en linéarisant les lois de comportement locales. Pour cela, on introduit la notion de milieu hétérogène linéaire de comparaison [ZAO01b], formulée explicitement par Ponte Castañeda en 1991 [PON91]. Ce milieu de comparaison est obtenu à partir du milieu hétérogène non linéaire pris dans un état fixé auquel on attribue en tout point les caractéristiques linéarisées. À partir de cet instant, il est alors possible d'appliquer des **schémas d'homogénéisation linéaires**.

La première étape, qui consiste à linéariser les caractéristiques mécaniques, va être développée dans la suite. En effet, il existe différentes formulations possibles pour obtenir le milieu hétérogène linéaire de comparaison. Mais du fait de la non linéarité du comportement local et la non uniformité des champs mécaniques, on constate que les caractéristiques linéarisées varient à l'intérieur d'une même phase quelque soit la formulation choisie. Il est donc nécessaire de réduire le nombre de variables locales grâce à une approximation. Il semble logique de conserver des caractéristiques uniformes par phase (il existe différentes méthodes pour parvenir à ce résultat,

il est nécessaire de choisir convenablement l'état de déformation qui servira de référence pour déterminer les caractéristiques uniformes dans chaque phase).

Une fois l'étape de linéarisation effectuée, il ne reste plus qu'à résoudre un problème d'homogénéisation linéaire. Certains schémas ont été développés dans le paragraphe précédent. La encore, un choix devra être fait.

On va à présent exposer différentes formulations permettant de linéariser les caractéristiques mécaniques des matériaux. On se place dans le cadre de l'élasticité non linéaire [MAS98] (la procédure est la même dans le cadre de la viscosité non linéaire, en interprétant la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ comme une vitesse de déformation).

2.5.1 Formulation incrémentale de Hill

Hill [HIL65] a proposé cette formulation dans le cadre de l'élastoplasticité appliquée au polycristal. Il tente de se ramener dans le cadre de l'homogénéisation linéaire. Pour cela, il écrit la loi d'écoulement sous forme *incrémentale* :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{l}(\boldsymbol{x}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{x}),$$

où \boldsymbol{l} est le module tangent correspondant à l'état de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ au point \boldsymbol{x} . Il s'agit d'une loi « multibranche », son expression dépend des conditions de charge ou de décharge plastique appliquées au monocristal. Dans ce cas, il est nécessaire de suivre le trajet de chargement pour déterminer la réponse macroscopique. Cependant chaque branche est linéarisable. A chaque pas, on a donc affaire à un problème d'homogénéisation linéaire où l'on connaît l'état mécanique local et global au départ de chaque nouveau pas.

Masson [MAS98] en a rappelé son principe dans le cadre de l'élasticité non linéaire. On suppose connue la réponse du VER jusqu'à l'état actuel de déformation macroscopique \boldsymbol{E} , ainsi que les champs de déformations et de contraintes pour cet état de déformation. On cherche une estimation de la réponse globale et des vitesses de déformations locales pour une vitesse de déformations imposée $\dot{\boldsymbol{E}}$. Il suffit pour cela de résoudre un problème de localisation pour un matériau linéaire élastique :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{A} : \dot{\boldsymbol{E}},$$

où \boldsymbol{A} est le tenseur de localisation des déformations. La vitesse de contrainte macroscopique s'écrit :

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \tilde{\boldsymbol{L}} : \dot{\boldsymbol{E}},$$

et le module tangent effectif $\tilde{\boldsymbol{L}}$ est défini par :

$$\tilde{\boldsymbol{L}} = \langle \boldsymbol{l} : \boldsymbol{A} \rangle,$$

ou par :

$$\tilde{\boldsymbol{L}} = \langle {}^t \boldsymbol{A} : \boldsymbol{l} : \boldsymbol{A} \rangle.$$

Or la valeur du module tangent $\mathbf{l}(\mathbf{x})$ dépend de la phase en ce point, mais aussi de l'état de déformation au point \mathbf{x} . Hill propose alors l'utilisation des modules tangents associés à la déformation moyenne de chaque phase pour obtenir des caractéristiques uniformes dans chaque phase. La loi d'écoulement est approchée par :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_r : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \text{ appartenant à la phase } r,$$

\mathbf{l}_r étant le module tangent uniforme dans la phase r , évalué pour la déformation moyenne $\boldsymbol{\varepsilon}_r$.

2.5.2 Formulation sécante

Une formulation alternative à la formulation de Hill a été développée dans certains cas particuliers où il est possible d'obtenir une version intégrée de la loi linéarisée.

Berveiller et Zaoui [BER79] ont proposé une formulation sécante dans le cas de chargements proportionnels monotones en élastoplasticité.

Hutchinson a, quant à lui, étendu la formulation de Hill au cas de la viscoplasticité [HUT76]. En choisissant des comportements en loi puissance, pour un schéma d'homogénéisation linéaire autocohérent, il a montré que la formulation incrémentale conduit au même résultat que la formulation sécante. Dans [MAS98], ce résultat est redémontré en détail dans un cas plus général, en supposant que le tenseur de localisation des déformations du modèle d'homogénéisation linéaire choisi est une fonction homogène de degré zéro des modules des différentes phases.

La formulation sécante a l'intérêt de pouvoir estimer les déformations et les contraintes indépendamment du trajet de chargement. Cependant, contrairement à la formulation incrémentale où l'on connaît les états mécaniques microscopique et macroscopique au début de chaque nouveau pas, on recherche directement la réponse globale à une sollicitation macroscopique donnée, il faut donc déterminer les états mécaniques locaux qui sont solutions d'un système d'équations implicites.

2.5.3 Formulation tangente

Molinari et al. [MOL87] adopte une nouvelle formulation en se basant sur une linéarisation tangente des lois constitutives locales, tout en empruntant à la formulation sécante sa recherche directe du résultat. Dans la suite du paragraphe, on se limitera au cadre des petites déformations, contrairement à [MOL87] qui se place dans le cadre des grandes déformations.

La loi de comportement du matériau s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}), \mathbf{x}),$$

où w , le potentiel de déformation, est une fonction convexe de $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Linéarisation des lois constitutives locales

On suppose que $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ sont connus en tout point du VER. La relation entre les vitesses de déformation et de contrainte au point \boldsymbol{x} s'écrit donc :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{l}(\boldsymbol{x}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{x}).$$

Le tenseur \boldsymbol{l} est le module tangent correspondant à l'état de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ au point \boldsymbol{x} :

$$l_{ijkl}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 w}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}(\boldsymbol{\varepsilon}).$$

En chaque point du VER, on peut également intégrer la loi linéarisée précédente, de telle sorte qu'on obtient :

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{l}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\sigma}^0(\boldsymbol{x}),$$

avec

$$\boldsymbol{\sigma}^0(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})) - \boldsymbol{l}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}).$$

De la même façon que pour les formulations précédentes, il est nécessaire d'envisager une relation linéarisée constante par phase :

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{l}_r : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\sigma}_r^0,$$

\boldsymbol{l}_r et $\boldsymbol{\sigma}_r^0$ étant évalués pour un état de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_r$ convenablement choisi.

Modèle tangent

Molinari et al. [MOL87] se sont restreints à un comportement local en loi puissance avec le même exposant pour toutes les phases, car ils ont besoin de connaître à l'avance la forme de la loi macroscopique (définie par $\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{E}}(\boldsymbol{E})$). Grâce à cette restriction, la relation macroscopique est attendue en loi puissance avec le même exposant que toutes les phases et l'expression $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{L} : \boldsymbol{E} + \boldsymbol{\Sigma}_0$ constitue une linéarisation tangente de la loi macroscopique. \boldsymbol{L} et $\boldsymbol{\Sigma}_0$ vérifient donc les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \boldsymbol{L} = \frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{E}^2}(\boldsymbol{E}), \\ \boldsymbol{\Sigma}_0 = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{E}}(\boldsymbol{E}) - \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{E}. \end{cases}$$

C'est en cela que l'on peut qualifier cette formulation de « tangente ».

Les intérêts de la méthode sont qu'elle s'approche mieux des comportements réels que la formulation sécante et qu'elle se débarrasse du traitement pas à pas de la formulation incrémentale qui accumule les approximations tout au long du trajet de chargement.

Cependant, la formulation tangente n'est applicable qu'au cas des comportements en loi puissance. De plus, dans [MAS98], il est montré qu'en général, on n'obtient pas une linéarisation tangente de la loi macroscopique. Masson a donc défini une formulation affine basée sur les mêmes lois linéarisées locales que la formulation tangente mais qui ne présume pas de la forme de la loi globale. C'est ce qu'on va voir dans le paragraphe suivant.

2.5.4 Formulation affine

L'expression linéarisée de la loi de comportement définit un matériau de comparaison hétérogène linéaire dont l'état initial n'est pas naturel, le matériau est soumis à un champ de précontraintes σ_0 . On reconnaît un problème de type thermoélastique linéaire [MAS98].

Le module effectif du matériau linéaire de comparaison est défini par :

$$\mathbf{L} = \langle \mathbf{l} : \mathbf{A} \rangle,$$

où \mathbf{A} est le tenseur de localisation des déformations pour le problème linéaire sans précontraintes.

La réponse du milieu homogène équivalent s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{L} : \mathbf{E} + \boldsymbol{\Sigma}_0.$$

La précontrainte $\boldsymbol{\Sigma}_0$ est la contrainte macroscopique qui subsiste en l'absence de déformation appliquée au VER. Cette précontrainte macroscopique n'est généralement pas la moyenne des précontraintes locales, on a [ZAO00] :

$$\begin{cases} \mathbf{L} : \mathbf{E} = \langle {}^t \mathbf{A} : \mathbf{L} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle, \\ \boldsymbol{\Sigma}_0 = \langle {}^t \mathbf{A} : \boldsymbol{\sigma}^0 \rangle. \end{cases}$$

Le modèle affine, comme les autres modèles, est défini dès lors que le choix du schéma d'homogénéisation linéaire aura été fait.

L'inconvénient, comme pour la formulation sécante, est que la formulation affine nécessite la résolution de systèmes d'équations non linéaires implicites. Cependant la formulation affine donne des prévisions moins raides que les formulations incrémentale et sécante. Et contrairement aux autres formulations, la formulation affine peut être utilisée dans le cas de comportements dérivant de deux potentiels (comportements héréditaires) [MAS98], [MAS00]. Mais dans ce cas, des difficultés supplémentaires apparaissent pour la résolution du problème. Les états mécaniques locaux actuels sont déterminés en tenant compte des réponses globales et locales antérieures. La réponse globale actuelle dépend donc des états mécaniques locaux actuels (ce qui nécessite la résolution de systèmes d'équations non linéaires implicites), qui doivent eux-mêmes tenir compte des réponses globales et locales aux instants précédents. Ces réponses sont elles-mêmes liées par ce type de procédure implicite. La procédure d'ensemble doit donc être conduite pas à pas, ce qui permet à chaque pas d'utiliser les réponses obtenues aux pas antérieurs.

L'inconvénient majeur des approches par champs moyens apparaît dans le cas des « forts contrastes ». En effet, toutes ces approches font l'hypothèse que $\boldsymbol{\sigma}_r = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}_r)$. Or, dans le cas de forts contrastes, cette approximation n'est pas négligeable, l'utilisation de ces approches est donc peu pertinente dans ces situations.

2.6 Propriétés non linéaires des matériaux : Approches variationnelles

Les méthodes présentées ici sont basées sur des principes variationnels. Elles permettent d'obtenir des bornes et des estimations des paramètres mécaniques macroscopiques pour des matériaux ayant un comportement non linéaire.

2.6.1 Propriétés mécaniques macroscopiques de composites isotropes non linéaires

Ponte Castañeda [PON91] propose une structure variationnelle qui permet d'obtenir des bornes et des estimations pour les propriétés mécaniques effectives des composites non linéaires à partir des bornes et estimations disponibles pour les propriétés effectives des composites linéaires. Les potentiels d'énergie effectifs des composites non linéaires sont calculés en terme de potentiels d'énergie du composite linéaire possédant les mêmes distributions microstructurales.

Soit un matériau composite constitué de N phases, occupant le volume V avec $\phi^r(\boldsymbol{\sigma})$ le potentiel homogène de la phase r . Le potentiel de contrainte non linéaire s'écrit :

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}) = \sum_{r=1}^N \chi^r(\mathbf{x}) \phi^r(\boldsymbol{\sigma}),$$

où χ^r est la fonction caractéristique de la phase r définie par :

$$\chi^r = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ appartient à la phase } r, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On utilise le principe de l'énergie complémentaire minimum, formulation variationnelle du problème suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0, \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u}), \mathbf{u} \text{ le champ de déplacements,} \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}), \end{cases}$$

avec des conditions aux limites appropriées, et avec l'hypothèse de la stricte convexité du potentiel non-linéaire $\phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x})$.

L'énergie effective s'écrit donc :

$$\Phi(\boldsymbol{\Sigma}) = \inf_{\boldsymbol{\sigma} \in SA} \langle \phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}) \rangle, \quad (2.25)$$

avec $\langle \phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}) \rangle$ la moyenne de ϕ sur V .

On obtient une relation de comportement en fonction des variables macroscopiques, si on suppose $\Phi(\boldsymbol{\Sigma})$ différentiable :

$$E_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_{ij}}(\boldsymbol{\Sigma}). \quad (2.26)$$

Nouvelle structure variationnelle :

Le principe de cette structure variationnelle est d'utiliser un *matériau hétérogène linéaire de comparaison* dont les propriétés effectives peuvent être caractérisées par des bornes ou des estimations, afin d'obtenir des bornes et des estimations pour les propriétés effectives du matériau non linéaire.

Pour cela, on définit un potentiel quadratique :

$$\widehat{\phi}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}) = \sum_{r=1}^N \chi^r(\mathbf{x}) \widehat{\phi}^r(\boldsymbol{\sigma}). \quad (2.27)$$

Si la non-linéarité du potentiel du matériau d'origine a une croissance plus forte que celle du potentiel quadratique, on peut définir un ensemble de fonctions :

$$V^r(\widehat{\mu}_r, \widehat{\kappa}_r) = \sup_{\boldsymbol{\sigma}} \{ \widehat{\phi}^r(\boldsymbol{\sigma}) - \phi^r(\boldsymbol{\sigma}) \},$$

$$V(\widehat{\mu}, \widehat{\kappa}) = \sum_{r=1}^N \chi^r(\mathbf{x}) V^r(\widehat{\mu}_r, \widehat{\kappa}_r) = \sup_{\boldsymbol{\sigma}} \{ \widehat{\phi}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}) - \phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}) \},$$

avec $\widehat{\mu}_r$ et $\widehat{\kappa}_r$ les modules de cisaillement et de compressibilité correspondant au matériau linéaire avec la même microstructure que le matériau non linéaire.

On a donc pour tout $\widehat{\mu}_r, \widehat{\kappa}_r > 0$ et pour tout $\boldsymbol{\sigma}$ en tout point \mathbf{x} :

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}) \geq \widehat{\phi}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}) - V(\widehat{\mu}, \widehat{\kappa}),$$

ce qui donne en prenant la moyenne puis la borne inférieure de cette inéquation :

$$\Phi(\boldsymbol{\Sigma}) \geq \widehat{\Phi}(\boldsymbol{\Sigma}) - \langle V(\widehat{\mu}, \widehat{\kappa}) \rangle,$$

avec $\widehat{\Phi}(\boldsymbol{\Sigma}) = \inf_{\boldsymbol{\sigma} \in SA} \langle \widehat{\phi}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}) \rangle$ potentiel effectif du composite linéaire.

On obtient alors une famille de bornes pour le potentiel du matériau non-linéaire $\Phi(\boldsymbol{\Sigma})$:

$$\Phi_-(\boldsymbol{\Sigma}) = \sup_{\widehat{\mu}_r, \widehat{\kappa}_r > 0} \{ \widehat{\Phi}(\boldsymbol{\Sigma}) - \langle V(\widehat{\mu}, \widehat{\kappa}) \rangle \}. \quad (2.28)$$

Cependant, il est difficile de calculer explicitement $\widehat{\Phi}(\boldsymbol{\Sigma})$. On cherche donc des bornes et des estimations.

Si on a une borne inférieure $\widehat{\Phi}_-(\boldsymbol{\Sigma})$ pour $\widehat{\Phi}(\boldsymbol{\Sigma})$, en remplaçant $\widehat{\Phi}(\boldsymbol{\Sigma})$ par $\widehat{\Phi}_-(\boldsymbol{\Sigma})$ dans l'inéquation (2.28), alors on trouve une borne inférieure pour $\Phi(\boldsymbol{\Sigma})$.

Si on a une estimation $\widehat{\Phi}_e(\boldsymbol{\Sigma})$ pour $\widehat{\Phi}(\boldsymbol{\Sigma})$, alors

$$\Phi_e(\boldsymbol{\Sigma}) = \sup_{\widehat{\mu}_r, \widehat{\kappa}_r > 0} \{ \widehat{\Phi}_e(\boldsymbol{\Sigma}) - \langle V(\widehat{\mu}, \widehat{\kappa}) \rangle \},$$

et on trouve une estimation pour $\Phi(\boldsymbol{\Sigma})$.

Il est possible que la non-linéarité du potentiel du matériau d'origine ait une croissance plus faible que celle du potentiel quadratique. Dans ce cas, on trouve des bornes supérieures (on remplace les sup par des inf dans les équations).

Cette méthode a l'avantage d'être simple à mettre en œuvre. De plus elle est utilisable pour différents types de potentiels. Cependant, elle ne peut être utilisée que dans le cas de comportement ne dérivant que d'un seul potentiel. Des exemples sont présentés dans [PON91], la méthode est appliquée dans trois cas particuliers : un matériau poreux, un composite biphasé incompressible et un matériau renforcé par des inclusions rigides. Des bornes et estimations des propriétés effectives sont données.

2.6.2 Estimations second ordre

Une méthode d'estimation du comportement macroscopique de composites non-linéaires est proposée par Ponte Castañeda [PON96]. Un matériau de comparaison linéaire hétérogène est utilisé, comme dans [PON91], mais le choix du matériau de comparaison est différent, on utilise les tenseurs des modules tangents des différentes phases, ce qui assure que les estimations sont exactes au second ordre par rapport au contraste des hétérogénéités.

Le comportement microscopique est caractérisé par le potentiel $w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})$ tel que :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})).$$

Les matériaux composites étudiés possèdent N phases homogènes, de fonction caractéristique χ^r . Le potentiel microscopique s'écrit donc :

$$w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \sum_{r=1}^N \chi^r(\mathbf{x}) w^r(\boldsymbol{\varepsilon}),$$

où $w^r(\boldsymbol{\varepsilon})$ caractérise le comportement de la phase r .

Le comportement macroscopique se caractérise par :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}), \quad (2.29)$$

avec :

$$W(\mathbf{E}) = \min_{\boldsymbol{\varepsilon} \in CA} \langle w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \rangle.$$

L'idée principale est d'utiliser la formule de Taylor avec reste pour les potentiels de phases w^r , autour de la déformation de référence $\boldsymbol{\varepsilon}_r$:

$$w^r(\boldsymbol{\varepsilon}) = w^r(\boldsymbol{\varepsilon}_r) + \boldsymbol{\rho}_r : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_r) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_r) : \mathbf{L}_r : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_r), \quad (2.30)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\boldsymbol{\rho}_r)_{ij} = \frac{\partial w^r}{\partial \varepsilon_{ij}}(\boldsymbol{\varepsilon}_r), \text{ la contrainte de référence,} \\ (L_r)_{ijkl} = \frac{\partial^2 w^r}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}(\boldsymbol{\gamma}_r), \text{ le tenseur des modules tangents,} \\ \boldsymbol{\gamma}_r = \lambda_r \boldsymbol{\varepsilon}_r + (1 - \lambda_r) \boldsymbol{\varepsilon}, 0 < \lambda_r < 1. \end{array} \right.$$

Si on décompose $\boldsymbol{\varepsilon}$ en $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon}'$, le développement s'écrit :

$$w^r(\mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon}') = v_r(\mathbf{E}) + \boldsymbol{\tau}_r : \boldsymbol{\varepsilon}' + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}' : \mathbf{L}_r : \boldsymbol{\varepsilon}' \quad (2.31)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_r(\mathbf{E}) = w^r(\boldsymbol{\varepsilon}_r) + \boldsymbol{\rho}_r : (\mathbf{E} - \boldsymbol{\varepsilon}_r) + \frac{1}{2} (\mathbf{E} - \boldsymbol{\varepsilon}_r) : \mathbf{L}_r : (\mathbf{E} - \boldsymbol{\varepsilon}_r), \\ \boldsymbol{\tau}_r = \boldsymbol{\rho}_r + \mathbf{L}_r : (\mathbf{E} - \boldsymbol{\varepsilon}_r). \end{array} \right.$$

Le potentiel macroscopique du composite non-linéaire se met alors sous la forme :

$$W(\mathbf{E}) = \min_{\boldsymbol{\varepsilon}' \in K'} \left\langle v + \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon}' + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}' : \mathbf{L} : \boldsymbol{\varepsilon}' \right\rangle, \quad (2.32)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} v(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^N \chi^r(\mathbf{x}) v_r, \\ \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^N \chi^r(\mathbf{x}) \boldsymbol{\tau}_r, \\ \mathbf{L}(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^N \chi^r(\mathbf{x}) \mathbf{L}_r. \end{array} \right.$$

Soit K' l'ensemble des déformations cinématiquement admissibles avec des déplacements nuls sur la frontière :

$$K' = \left\{ \boldsymbol{\varepsilon} \mid \exists \mathbf{u} \text{ tel que } \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u}) \text{ dans } V \text{ et } \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \partial V \right\}.$$

Le problème du minimum en $\boldsymbol{\varepsilon}'$ est équivalent au problème du minimum initial, car le tenseur des modules tangents \mathbf{L}_r (impliquant $\boldsymbol{\gamma}_r$) dépend du champ local de déformation. En remplaçant les champs tensoriels $\boldsymbol{\gamma}_r$ par un tenseur constant $\bar{\boldsymbol{\gamma}}_r$ correctement choisi, \mathbf{L}_r , v_r , $\boldsymbol{\tau}_r$ sont constants et on se ramène à un problème linéaire :

$$P(\mathbf{E}) = \min_{\boldsymbol{\varepsilon}' \in K'} \left\langle \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon}' + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}' : \mathbf{L} : \boldsymbol{\varepsilon}' \right\rangle. \quad (2.33)$$

On obtient alors une approximation pour W en fonction de la solution pour $\boldsymbol{\varepsilon}'$, notée $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ et valable pour tout $\boldsymbol{\varepsilon}_r$ et tout $\bar{\boldsymbol{\gamma}}_r$:

$$W(\mathbf{E}) = \sum_{r=1}^N c_r(\mathbf{x}) v_r(\mathbf{E}) + \left\langle \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon}^* + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^* : \mathbf{L} : \boldsymbol{\varepsilon}^* \right\rangle. \quad (2.34)$$

On s'intéresse donc aux choix optimaux pour les déformations de référence $\boldsymbol{\varepsilon}_r$ et $\bar{\boldsymbol{\gamma}}^{(r)}$. $\boldsymbol{\varepsilon}_r = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_r = \mathbf{E} + \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle_r$ permet de minimiser la différence de moyenne entre le champ de déformations réel $\boldsymbol{\varepsilon}$ et la déformation de référence constante dans chaque phase.

Le choix pour $\bar{\boldsymbol{\gamma}}_r$ est plus difficile. Une des possibilités est de prendre la moyenne par phase de $\boldsymbol{\gamma}_r = \lambda_r \boldsymbol{\varepsilon}_r + (1 - \lambda_r) \boldsymbol{\varepsilon}$.

Et en prenant λ_r constant, on trouve $\bar{\boldsymbol{\gamma}}_r = \langle \lambda_r \boldsymbol{\varepsilon}_r + (1 - \lambda_r) \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_r = \boldsymbol{\varepsilon}_r = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_r$.

Cette méthode est donc capable de fournir des estimations exactes au second ordre dans le contraste des phases. Cependant dans ce cas on ne s'intéresse qu'au champ moyen des phases du matériau linéaire de comparaison. Dans le cas de grandes fluctuations à l'intérieur des phases, la méthode peut donner de mauvaises prédictions. Ponte Castañeda [PON02a] propose alors une nouvelle version de la méthode qui prend en compte les fluctuations des champs pour des matériaux composites non linéaires et présente dans [PON02b] des estimations pour des matériaux biphasés qui satisfont toujours des bornes rigoureuses.

Cependant, ces approches variationnelles ne peuvent être appliquées que pour des comportements ne dérivant que d'un seul potentiel.

2.7 Propriétés non linéaires des matériaux : Approches numériques

La plupart des méthodes présentées précédemment ne peuvent être appliquées qu'à des comportements non linéaires dont le comportement ne dérive que d'un seul potentiel (élasticité non linéaire ou viscoplasticité). La question des matériaux dérivant de deux potentiels correspondant aux aspects réversibles et irréversibles du comportement reste ouverte. Les méthodes d'analyse par champs de transformation initialement développées par Dvorak permettent d'aborder ce type de comportement. On va donc présenter dans ce paragraphe la méthode initiale développée dans [DVO92a] et [DVO92b], et les méthodes proposées pour améliorer les résultats obtenus avec la version initiale.

Les matériaux considérés ont une structure de matériaux standard généralisés, mais avec un nombre infini de variables internes qui sont les champs des variables internes locales. L'objectif est donc de réduire ce nombre de variables. On considère, dans la suite, que les seules variables internes sont les champs de déformations inélastiques.

Dans la suite, on suppose que le matériau hétérogène est composé de plusieurs phases distinctes (élastiques ou inélastiques) parfaitement collées aux interfaces et qu'il a un comportement homogène au niveau macroscopique. On admet donc que le choix d'un VER V de surface S a pu être fait. A l'échelle microscopique, V est découpé en M sous-domaines V_r ne contenant qu'une

seule phase, mais une phase peut être contenue par plusieurs sous-domaines.

On définit les notions de moyennes d'un champ f sur V et sur V_r :

$$\langle f \rangle = \frac{1}{V} \int_V f(x) dx, \langle f \rangle_r = \frac{1}{V_r} \int_{V_r} f(x) dx. \quad (2.35)$$

La moyenne sur V peut s'exprimer en fonction des moyennes sur V_r et de la fraction volumique de chaque phase ou sous-domaine, c_r :

$$\langle f \rangle = \sum_r c_r \langle f \rangle_r. \quad (2.36)$$

2.7.1 Analyse par champs de transformation

Dvorak [DVO92a], [DVO92b] a développé cette méthode qu'il appelle « Transformation Field Analysis ». On utilisera l'abréviation *TFA* dans la suite.

Les relations constitutives des constituants sont données par :

$$w(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}) : \mathbf{L} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}), \quad (2.37)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}) = \mathbf{L} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}), \quad (2.38)$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{vp}} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}). \quad (2.39)$$

Dans le cas où les variables d'état sont fixées (pas d'évolution du système), les champs de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et de déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ dans le VER vérifient le problème élastique linéaire (2.40) :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}(\mathbf{x}) : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}(\mathbf{x})), \quad \text{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) = 0, \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}, \quad (2.40)$$

avec des conditions de périodicité sur le VER. \mathbf{E} et $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}$ étant connus, le champ de déformations $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ peut s'écrire comme la somme des termes suivants, grâce au principe de superposition :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) : \mathbf{E} + \frac{1}{|V|} \int_V \mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') : \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \mathbf{A}(\mathbf{x}) : \mathbf{E} + \mathbf{D} * \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}(\mathbf{x}), \quad (2.41)$$

où $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ est le tenseur élastique de localisation de la déformation et $\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ l'opérateur non local qui donne, à déformation moyenne nulle, la déformation au point \mathbf{x} créée par la prédéformation $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}(\mathbf{x}')$ au point \mathbf{x}' .

Afin de réduire le nombre de variables internes, Dvorak [DVO92b] propose d'approcher les champs locaux réels par des distributions uniformes par morceaux. Le champ de déformation inélastique est donc approché par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^M \boldsymbol{\varepsilon}_s^{\text{vp}} \chi^s(\mathbf{x}), \quad (2.42)$$

où χ^s est la fonction caractéristique de la phase ou du sous-domaine V_s .

Avec l'approximation (2.42), l'équation (2.41) s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) : \mathbf{E} + \sum_{s=1}^M (\mathbf{D} * \chi^s)(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_s^{\text{vp}}, \quad (2.43)$$

avec $(\mathbf{D} * \chi^s)(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{D}(x, x') \chi^s(x') d\mathbf{x}'$.

La déformation moyenne dans le volume V_r est alors donnée par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r = \mathbf{A}_r : \mathbf{E} + \sum_{s=1}^M \mathbf{D}_{rs} : \boldsymbol{\varepsilon}_s^{\text{vp}}, \quad (2.44)$$

où \mathbf{A}_r est le tenseur de localisation moyen de la phase r , le tenseur \mathbf{D}_{rr} est le facteur d'influence de transformation auto-induite, tandis que les tenseurs \mathbf{D}_{rs} (lorsque $r \neq s$) sont les facteurs d'influence de transformation transmises.

\mathbf{A}_r est donné par :

$$\mathbf{A}_r = \frac{1}{c_r} \frac{1}{V} \int_V \mathbf{A}(\mathbf{x}) \chi^r(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \langle \mathbf{A} \rangle_r, \quad (2.45)$$

et les facteurs d'influence \mathbf{D}_{rs} ont l'expression suivante :

$$\mathbf{D}_{rs} = \frac{1}{c_r} \frac{1}{V} \frac{1}{V} \int_V \int_V \chi^r(\mathbf{x}) \mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \chi^s(\mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' = \langle \langle \mathbf{D} \rangle_s \rangle_r, \quad (2.46)$$

avec c_r la fraction volumique de la phase ou du sous-domaine r .

Par conséquent, la contrainte moyenne dans la phase ou le sous-domaine r est donnée par :

$$\boldsymbol{\sigma}_r = \mathbf{L}_r : (\boldsymbol{\varepsilon}_r - \boldsymbol{\varepsilon}_r^{\text{vp}}) = \mathbf{L}_r : \mathbf{A}_r : \mathbf{E} + \mathbf{L}_r \left(\sum_{s=1}^M \mathbf{D}_{rs} : \boldsymbol{\varepsilon}_s^{\text{vp}} - \boldsymbol{\varepsilon}_r^{\text{vp}} \right), \quad (2.47)$$

où \mathbf{L}_r est le tenseur d'élasticité uniforme sur chaque sous-volume r .

L'évolution de la déformation viscoplastique suit exactement les relations constitutives de la phase ou du sous-domaine r :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_r^{\text{vp}} = \frac{\partial \psi^r}{\partial \boldsymbol{\sigma}_r}(\boldsymbol{\sigma}_r), \quad (2.48)$$

et la contrainte macroscopique est estimée comme la moyenne des contraintes de chaque phase ou sous-domaine r :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \tilde{\mathbf{L}} : \mathbf{E} + \sum_{r=1}^M c_r \mathbf{L}_r \left(\sum_{s=1}^M (\mathbf{D}_{rs} - \delta_{rs}) : \boldsymbol{\varepsilon}_s^{\text{vp}} \right) \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{L}} = \left(\sum_{r=1}^M c_r \mathbf{L}_r : \mathbf{A}_r \right). \quad (2.49)$$

Les tenseurs \mathbf{D}_{rs} et \mathbf{A}_r sont calculés grâce à la résolution de problèmes élastiques.

Pour obtenir les tenseurs \mathbf{A}_r , on résout une série de problèmes élastiques en imposant un \mathbf{E} unitaire dans une direction donnée et $\boldsymbol{\varepsilon}_r^{\text{vp}}$ nul dans chaque phase. On trouve alors \mathbf{A}_r grâce à $\boldsymbol{\varepsilon}_r = \mathbf{A}_r : \mathbf{E}$ et \mathbf{E} unitaire. Pour obtenir les tenseurs \mathbf{D}_{rs} , on résout une série de problèmes élastiques sur la cellule en imposant \mathbf{E} nul et $\boldsymbol{\varepsilon}_r^{\text{vp}}$ unitaire dans la phase ou le sous-domaine r . On trouve alors \mathbf{D}_{rs} grâce à (2.44) avec $\mathbf{E} = 0$.

2.7.2 Analyse par champs de transformation « modifiés »

La TFA ne peut donner de bons résultats qu'à la condition d'avoir un nombre suffisant de sous-volumes. Chaboche et al. [CHA01] proposent une correction de la TFA et utilisent des valeurs corrigées, $\mathbf{K}_r : \boldsymbol{\varepsilon}_r^p$, pour les champs de transformation. L'équation (2.44) devient alors :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r = \mathbf{A}_r : \mathbf{E} + \sum_{s=1}^M \mathbf{D}_{rs} : \mathbf{K}_s : \boldsymbol{\varepsilon}_s^p. \quad (2.50)$$

Si on écrit le problème en contrainte, on obtient, en utilisant des valeurs corrigées $\mathbf{K}_r^* : \boldsymbol{\varepsilon}_r^p$:

$$\boldsymbol{\sigma}_r = \mathbf{B}_r : \boldsymbol{\Sigma} - \sum_{s=1}^M \mathbf{F}_{rs} : \mathbf{L}_s : \mathbf{K}_s^* : \boldsymbol{\varepsilon}_s^p. \quad (2.51)$$

\mathbf{B}_r est le tenseur moyen de concentration des contraintes de la phase r , le tenseur \mathbf{F}_{rr} est le facteur d'influence de transformation auto-induite, tandis que les tenseurs \mathbf{F}_{rs} (lorsque $r \neq s$) sont les facteurs d'influence de transformation transmises. \mathbf{L}_s est le tenseur d'élasticité uniforme sur chaque sous-volume s

Chaboche et al. [CHA01] supposent également que le module tangent asymptotique \mathcal{L}_r de l'équation constitutive locale suivante est connu :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_r = \mathcal{L}_r : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_r. \quad (2.52)$$

En pratique, ce module est donné à partir de la connaissance des lois d'écrouissage pour chaque phase. Dans de cas de la plasticité, on a la relation suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_r^p = (\mathcal{L}_r^{-1} - \mathbf{L}_r^{-1}) : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_r. \quad (2.53)$$

Les tenseurs \mathbf{D}_{rs} et \mathbf{A}_r sont connus. Quant aux correcteurs \mathbf{K}_s , [CHA01] les déterminent en identifiant la forme dérivée de l'équation (2.50) à la loi de localisation tangente élastique correspondante $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_r = \mathcal{A}_r : \dot{\mathbf{E}}$, en supposant que le tenseur de localisation asymptotique tangent est connu à partir d'une procédure élastique et en prenant en compte les équations (2.52) et (2.53). On trouve :

$$\sum_{s=1}^M \mathbf{D}_{rs} : \mathbf{K}_s : (\mathcal{L}_s^{-1} - \mathbf{L}_s^{-1}) : \mathcal{L}_s : \mathcal{A}_s = \mathcal{A}_r - \mathbf{A}_r.$$

En réalité, le système est indéterminé. Il faut fixer un \mathbf{K} . Si une phase notée q est élastique, on fixe $\mathbf{K}_q = \mathbf{I}$ et les autres correcteurs sont déterminés en résolvant le système. Si toutes les phases sont inélastiques, [CHA01] choisissent de ne pas corriger celle qui a la plus grande limite élastique.

Il existe cependant quelques inconvénients à cette méthode :

- La déformation inélastique macroscopique \mathbf{E}^p n'est pas égale à $\sum_r^M c_r \mathbf{B}_r^T : \mathbf{K}_r : \boldsymbol{\varepsilon}_r^p$. On trouve :

$$\mathbf{E}^p = \sum_{r=1}^M c_r \mathbf{B}_r^T : \mathbf{K}_r : \boldsymbol{\varepsilon}_r^p - \sum_{r=1}^M c_r \mathbf{L}^{-1} : \mathbf{L}_r : (\mathbf{I} - \mathbf{K}_r) : \boldsymbol{\varepsilon}_r^p,$$

- Cette méthode n'est pas « parfaitement symétrique ». La déformation inélastique macroscopique obtenue en résolvant le système en contrainte n'a pas la même forme que la déformation inélastique obtenue en résolvant le système en déformation :

$$\begin{cases} \mathbf{E}^p = \sum_r^M c_r \mathbf{B}_r^T : \mathbf{K}_r^* : \boldsymbol{\varepsilon}_r^p + \sum_r^M c_r (\mathbf{I} - \mathbf{K}_r^*) : \boldsymbol{\varepsilon}_r^p & \text{(obtenue en contrainte),} \\ \mathbf{E}^p = \sum_r^M c_r \mathbf{B}_r^T : \mathbf{K}_r : \boldsymbol{\varepsilon}_r^p + \sum_r^M c_r \mathbf{L}^{-1} : \mathbf{L}_r : (\mathbf{I} - \mathbf{K}_r) : \boldsymbol{\varepsilon}_r^p & \text{(obtenue en déformation).} \end{cases}$$

2.7.3 Analyse par champs de transformation non uniformes

L'analyse par champs de transformation non uniformes correspond à la traduction de l'expression anglaise « Nonuniform Transformation Field Analysis ». Dans la suite on utilisera l'abréviation de l'expression anglaise, *NTFA*.

Les relations constitutives des constituants sont données par les équations (2.37), (2.38) et (2.39) données dans le paragraphe 2.7.1.

Afin de réduire le nombre de variables internes, on considère, de la même façon que pour la TFA, que les champs locaux de déformations anélastiques dépendent d'un nombre fini M de fonctions de forme θ_k [MIC00] :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^M \boldsymbol{\varepsilon}_k^{\text{vp}} \theta^k(\mathbf{x}). \quad (2.54)$$

On a donc $M + 1$ variables d'état : \mathbf{E} et $\{\boldsymbol{\varepsilon}_k^{\text{vp}}\}_{k=1, \dots, M}$.

Or, contrairement à la TFA, où les fonctions de forme sont en fait les fonctions caractéristiques de chaque sous-volume, les fonctions de forme de la NTFA [MIC00] décrivent les variations des champs de déformations anélastiques locaux et prennent en compte la non-uniformité spatiale du champ de déformations anélastiques dans chaque sous-domaine.

Avec l'approximation (2.54), l'équation (2.41) s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) : \mathbf{E} + \sum_{\ell=1}^M (\mathbf{D} * \theta^\ell)(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_\ell^{\text{vp}}, \quad (2.55)$$

avec $(\mathbf{D} * \theta^\ell)(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{D}(x, x') \theta^\ell(x') dx'$.

En moyennant l'équation (2.55) multipliée par θ^k , puis en divisant le résultat par $\langle \theta^k \rangle$, on obtient :

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{a}_k : \mathbf{E} + \sum_{\ell=1}^M \mathbf{D}_{k\ell} : \boldsymbol{\varepsilon}_\ell^{\text{vp}}, \quad (2.56)$$

où la déformation généralisée \mathbf{e}_k , le tenseur de localisation généralisé \mathbf{a}_k et les facteurs d'influence $\mathbf{D}_{k\ell}$ sont définis par :

$$\mathbf{e}_k = \frac{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \theta^k \rangle}{\langle \theta^k \rangle}, \quad \mathbf{a}_k = \frac{\langle \mathbf{A} \theta^k \rangle}{\langle \theta^k \rangle}, \quad \mathbf{D}_{k\ell} = \frac{\langle \theta^k (\mathbf{D} * \theta^\ell) \rangle}{\langle \theta^k \rangle}. \quad (2.57)$$

On peut également définir la déformation anélastique généralisée \mathbf{e}_k^{vp} et la contrainte généralisée $\boldsymbol{\tau}_k$:

$$\mathbf{e}_k^{\text{vp}} = \frac{\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}} \theta^k \rangle}{\langle \theta^k \rangle}; \quad \boldsymbol{\tau}_k = \frac{\langle \boldsymbol{\sigma} \theta^k \rangle}{\langle \theta^k \rangle}. \quad (2.58)$$

On obtient alors :

$$\boldsymbol{\tau}_k = \mathbf{L}_k : (\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_k^{\text{vp}}), \quad (2.59)$$

avec \mathbf{L}_k le tenseur des modules dans la phase k .

De plus, on remarque que :

$$\mathbf{e}_k^{\text{vp}} = \sum_{\ell=1}^M g_{\ell k} \langle \theta^\ell \rangle^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_\ell^{\text{vp}}, \quad (2.60)$$

avec $g_{\ell k} = \langle \theta^\ell \theta^k \rangle$.

En résumé, les lois constitutives locales sont données par :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_k = \mathbf{a}_k : \mathbf{E} + \sum_{\ell=1}^M \mathbf{D}_{k\ell} : \boldsymbol{\varepsilon}_\ell^{\text{vp}}, \\ \mathbf{e}_k^{\text{vp}} = \sum_{\ell=1}^M g_{\ell k} \langle \theta^\ell \rangle^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_\ell^{\text{vp}}, \\ \boldsymbol{\tau}_k = \mathbf{L}_k : (\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_k^{\text{vp}}), \\ \dot{\mathbf{e}}_k^{\text{vp}} = \frac{\partial \psi_k}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\tau}_k). \end{cases}$$

La contrainte macroscopique est obtenue en moyennant le champ de contrainte résultant des équations (2.38), (2.54) et (2.55) :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \langle \mathbf{L} : \mathbf{A} \rangle : \mathbf{E} + \sum_{k=1}^M (\langle \mathbf{L} : \mathbf{D} * \theta^k \rangle - \mathbf{L}_k \langle \theta^k \rangle) : \boldsymbol{\varepsilon}_k^{\text{vp}}. \quad (2.61)$$

Comparaison entre la TFA et la NTFA

Un calcul 2D [MIC00] a été réalisé à partir d'une cellule carrée élastique plastique parfaite dans laquelle se trouve une inclusion carrée élastique qui occupe 25% de la fraction surfacique. Les caractéristiques élastiques de l'inclusion et de la matrice sont les mêmes et sont données dans le Tableau 2.1. La contrainte d'écoulement σ_0 de la matrice est égale à 100 MPa.

La cellule a été découpée en plusieurs sous-volumes, la Figure 2.4 donne les différents découpages du VER utilisés pour la mise en œuvre de la TFA. Un chargement en traction puis en

Module d'Young (GPa)	Coefficient de Poisson
100	0.25

Tableau 2.1 : Propriétés élastiques de l'inclusion et de la matrice.

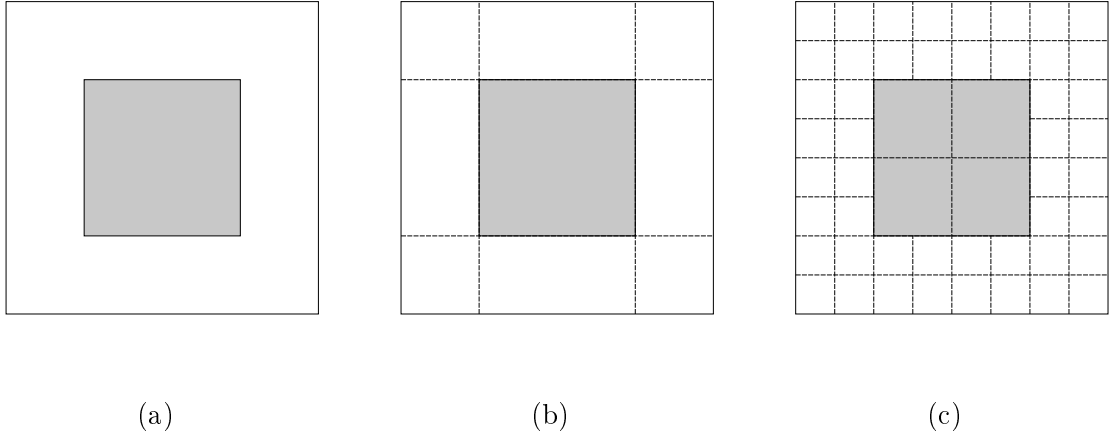


Figure 2.4 : Cellule unité, découpages utilisés pour la mise en oeuvre de la TFA : 2 sous-volumes dans le cas (a), 9 sous-volumes dans le cas (b), 52 sous-volumes dans le cas (c).
[MIC00]

cisaillement a été appliqué. Pour cela, la contrainte macroscopique appliquée au VER est imposée dans une direction fixée de l'espace des contraintes :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \Sigma(t)\boldsymbol{\Sigma}_0.$$

Le chargement est appliqué en augmentant de façon incrémentale le paramètre de contrôle \mathbf{E} : $\boldsymbol{\Sigma}_0$. En d'autres termes, la direction de contrainte macroscopique $\boldsymbol{\Sigma}_0$ est imposée, la valeur de la déformation macroscopique \mathbf{E} dans cette direction est le paramètre de contrôle. La valeur de la contrainte $\Sigma(t)$ et les composantes de la déformation macroscopique dans les directions perpendiculaires à $\boldsymbol{\Sigma}_0$ sont des sorties du calcul. Les résultats obtenus pour les relations contraintes-déformations sont tracés dans un graphe $(\Sigma, \mathbf{E} : \boldsymbol{\Sigma}_0)$.

La réponse exacte a été calculée grâce à la méthode des éléments finis à partir du maillage donné par la Figure 2.5(a). Trois fonctions de forme ont été utilisées pour la NTFA : θ_1 est la fonction caractéristique de l'inclusion, θ_2 sur la Figure 2.5(b) est la déformation plastique cumulée à $\boldsymbol{\Sigma}_0$: $E = 1\%$ en cisaillement et θ_3 sur la Figure 2.5(c) est la déformation plastique cumulée à $\boldsymbol{\Sigma}_0$: $E = 1\%$ en traction.

La Figure 2.6 donne les réponses du VER, soumis à du cisaillement et à de la traction, prédites par la TFA et la NTFA. Dans le cas de la traction, la TFA prédit un comportement trop rigide même en augmentant de manière significative le nombre de sous-domaines alors que la NTFA, avec seulement 3 fonctions de formes, donne de meilleurs résultats, plus proches de la solution attendue. Dans le cas du cisaillement, on est dans un cas particulier, où la solution, calculable analytiquement, est constante par morceaux. Hormis, pour la prédiction de la TFA

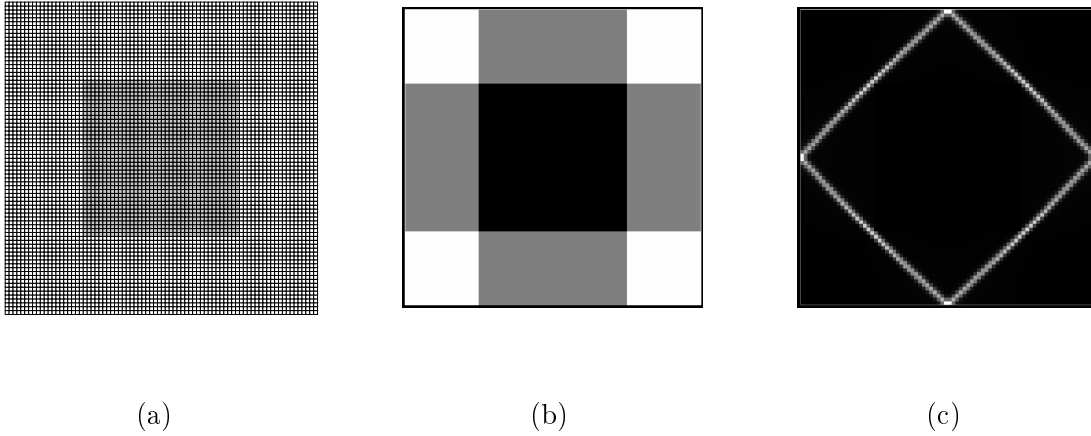


Figure 2.5 : Maillage éléments finis (a), fonction de forme en cisaillement (b) et fonction de forme en traction uniaxiale(c). [MIC00]

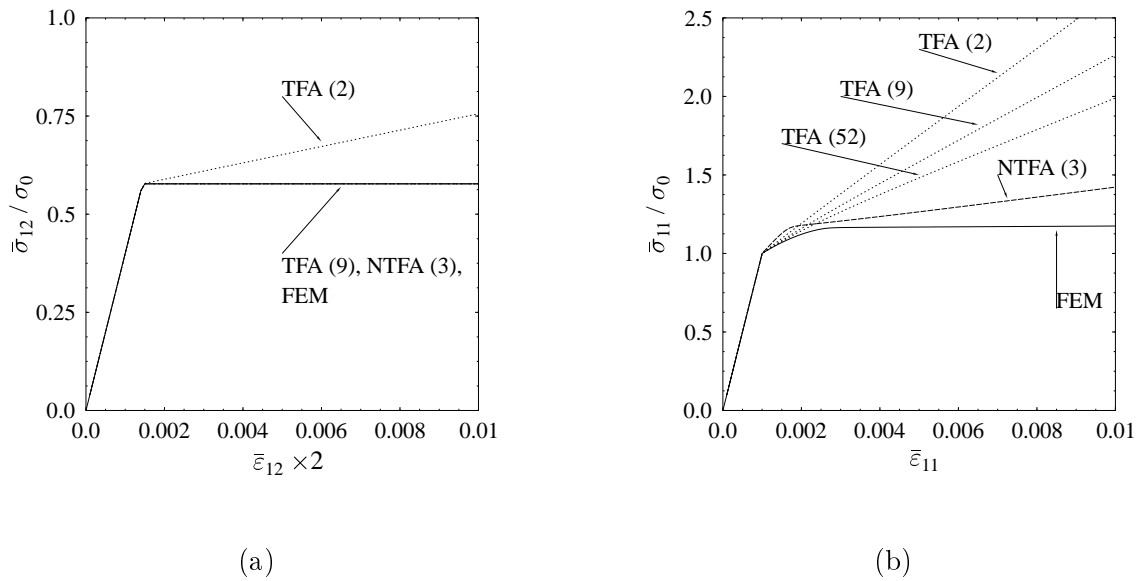


Figure 2.6 : Prédictions de la TFA et de la NTFA en cisaillement (a) et en traction uniaxiale(b). Le nombre entre parenthèses correspond au nombre de sous-domaines (en TFA) ou de fonctions de forme (en NTFA) utilisé pour la mise en oeuvre des différents modèles. [MIC00]

mise en œuvre avec 2 sous-domaines, la TFA et la NTFA donnent la réponse exacte.

Enfin, Michel et Suquet [MIC03] ont modifié le modèle NTFA en considérant des modes plastiques tensoriels, et non plus scalaires comme c'était le cas dans [MIC00]. On verra dans la partie suivante, le développement de cette méthode pour des matériaux élastoviscoplastiques.

2.8 Modélisation du comportement des matériaux poreux

La description du comportement de matériaux poreux viscoplastiques nécessite de connaître l'expression du potentiel viscoplastique. Après avoir donné une approximation de la forme de ce potentiel et fait un point sur l'évolution de la porosité, on verra que, pour exprimer les différents paramètres du potentiel, il est possible de mettre en œuvre certaines méthodes d'homogénéisation définies précédemment.

2.8.1 Description du comportement des matériaux poreux

On considère un matériau poreux avec une matrice dont le comportement est viscoplastique non linéaire et incompressible.

Le potentiel de la matrice viscoplastique non linéaire et incompressible est de type Norton-Hoff, pris égal à :

$$\psi(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\sigma_0 \dot{\epsilon}_0}{n+1} \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^{n+1}, \quad (2.62)$$

où n est l'exposant de la viscosité, σ_{eq} le deuxième invariant de la contrainte, $\sigma_{eq} = \left(\frac{3}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \right)^{1/2}$, et $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ le déviateur de la contrainte. Dans ce cas, la loi d'évolution de la déformation viscoplastique $\boldsymbol{\epsilon}^{vp}$ est donnée par l'équation :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{vp} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{3}{2} \dot{\epsilon}_0 \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^{n-1} \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_0}. \quad (2.63)$$

Au niveau macroscopique, le potentiel vérifie l'équation suivante :

$$\Psi(\boldsymbol{\Sigma}) = \langle \psi(\boldsymbol{\sigma}) \rangle,$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est solution du problème local.

Si l'on considère que la distribution des porosités dans la matrice est aléatoire en taille et en répartition, on peut considérer que le matériau poreux est isotrope, et que le paramètre scalaire f , fraction volumique des pores, est suffisant pour décrire la microstructure du matériau. Par conséquent, le potentiel Ψ dépend de f et des trois invariants de $\boldsymbol{\Sigma}$, c'est à dire $\Sigma_m = \frac{1}{3} tr \boldsymbol{\Sigma}$, $\Sigma_{eq} = \left(\frac{3}{2} \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} : \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \right)^{1/2}$ et $det \boldsymbol{\Sigma}$. Or, en général, la dépendance du potentiel au troisième invariant $det \boldsymbol{\Sigma}$ peut être négligée par rapport à la dépendance aux deux premiers invariants. On obtient ainsi :

$$\Psi(\boldsymbol{\Sigma}, f) = \Psi(\Sigma_m, \Sigma_{eq}, f).$$

L'hypothèse ci-dessus est vérifiée par Dupa et Hutchinson [DUV84] pour une faible porosité ($< 10\%$). Enfin, Ψ est une fonction convexe de $\boldsymbol{\Sigma}$, positivement homogène de degré $n+1$:

$$\Psi(\lambda \boldsymbol{\Sigma}, f) = |\lambda|^{n+1} \Psi(\boldsymbol{\Sigma}, f), \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Une approximation « elliptique » du potentiel macroscopique Ψ , vérifiant les deux dernières équations, prend la forme suivante :

$$\Psi(\Sigma_m, \Sigma_{eq}, f) = \frac{\sigma_0 \dot{\epsilon}_0}{n+1} \left[\frac{9}{4} A(f) \left(\frac{\Sigma_m}{\sigma_0} \right)^2 + B(f) \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^{2(n+1)/2} \right]. \quad (2.64)$$

2.8.2 Evolution de la porosité

Le taux de porosité f est défini comme la fraction volumique de pores. Le changement de volume des porosités est défini par \dot{f} :

$$\frac{\dot{f}}{f} = \frac{\dot{V}_{pores}}{V_{pores}} - \frac{\dot{V}}{V},$$

avec V_{pores} le volume de pores et V le volume total du VER.

Or dans le cas d'une matrice incompressible, la variation du volume total est égale à la variation du volume des pores. Donc l'équation précédente devient :

$$\frac{\dot{f}}{f} = \frac{\dot{V}}{V} \frac{1-f}{f}.$$

$\frac{\dot{V}}{V}$ étant donné par $tr(\dot{E})$, on obtient :

$$\dot{f} = (1-f)tr(\dot{E}).$$

En réalité, l'hypothèse d'incompressibilité de la matrice n'est plus vérifiée en prenant en compte la partie élastique de la déformation. En pratique, on utilise donc l'approximation suivante [CHA01] :

$$\dot{f} = (1-f)tr(\dot{E}^{vp}),$$

où \dot{E}^{vp} est la déformation inélastique macroscopique.

2.8.3 Détermination des paramètres du potentiel viscoplastique pour les matériaux poreux

Pour pouvoir utiliser le potentiel (2.64) défini pour les matériaux poreux, il faut pouvoir définir $A(f)$ et $B(f)$.

Tout d'abord, sans porosité, le potentiel macroscopique est égal au potentiel microscopique :

$$\Psi = \psi.$$

Donc, dans tous les cas, on a :

$$\lim_{f \rightarrow 0} A(f) = 0,$$

$$\lim_{f \rightarrow 0} B(f) = 1.$$

Cocks [COC89] a proposé en 1989 une approximation du potentiel grâce à des estimations variationnelles, ce qui nous donne l'expression de A et B :

$$A(f) = \frac{f}{f+1} \frac{2n}{n+1} (1-f)^{\frac{-2n}{n+1}}, \quad (2.65)$$

$$B(f) = \left(1 + \frac{2}{3}f\right) (1-f)^{\frac{-2n}{n+1}}. \quad (2.66)$$

Cependant, l'expression de B ci-dessus n'est pas l'expression exacte de B obtenue avec le principe variationnel. Cette expression a été ajustée pour se rapprocher des solutions analytiques connues.

A partir d'un nouveau principe variationnel, Ponte Castañeda [PON91] a obtenu des bornes rigoureuses établies initialement par Ponte Castañeda et Willis [PON88]. Michel et Suquet [MIC92] les ont retrouvées à partir d'une démonstration plus simple. Les paramètres A et B obtenus sont les suivants :

$$A(f) = f(1-f)^{\frac{-2n}{n+1}}, \quad (2.67)$$

$$B(f) = \left(1 + \frac{2}{3}f\right) (1-f)^{\frac{-2n}{n+1}}. \quad (2.68)$$

On constate que l'expression de B est la même que celle trouvée par Cocks, alors qu'elle avait été modifiée pour se rapprocher de solutions connues.

Mais Michel et Suquet [MIC92] soulignent le fait que ces modèles ne coïncident pas avec les solutions analytiques du cas simple d'une sphère creuse sous chargement hydrostatique. La solution proposée par Budiansky et al. [BUD82] et formalisée par Michel et Suquet [MIC92] permet d'obtenir l'expression suivante pour A :

$$A(f) = (n(f^{-1/n} - 1))^{\frac{-2n}{n+1}}. \quad (2.69)$$

Enfin, en posant

$$C = \frac{A(f)}{B(f)} \quad (2.70)$$

$$\widehat{C}(\mathbf{x}) = 1 + \frac{1}{xC}, \forall x \in \Re \quad (2.71)$$

Michel et Suquet [MIC92] ont montré que pour un schéma autocohérent, $\widehat{C}(\mathbf{x})$ vérifie :

$$\widehat{C}(n^2) \log(f) = -\widehat{C}(n) \log(\widehat{C}(n)) + \frac{n+1}{2n^2 C} \log(\widehat{C}(1)) + \frac{n-1}{n\sqrt{C}} \left(\arctan(\sqrt{C}) - \frac{\pi}{2} \right). \quad (2.72)$$

La résolution de cette équation nous donne l'expression de C , mais nécessite la connaissance de A ou B pour obtenir l'un ou l'autre des paramètres. Dans ce cas, B est supposé égal à :

$$B(f) = \left(1 + \frac{2}{3}f\right) (1-f)^{\frac{-2n}{n+1}}. \quad (2.73)$$

Par ailleurs, à partir d'une simplification du comportement non linéaire de la matrice, Michel [MIC94] a montré qu'il était possible d'obtenir également une estimation de $B(f)$ à l'aide du même schéma autocohérent non-linéaire. Les équations précédentes pour $C(f)$ sont complétées par une équation pour $B(f)$:

$$B(f) = \frac{1}{\tilde{\mu}} (1 - f)^{\frac{-2n}{n+1}}, \quad (2.74)$$

avec

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{1 - f} \frac{1 - f/\bar{f}(n)}{\left(1 - \frac{f}{3^n}\right)^{\frac{n+1}{2n}} \left(1 - \frac{n-1}{2n}f\right)}.$$

\bar{f} est la valeur de la porosité qui annule $\tilde{\mu}$, c'est une fonction décroissante de n . Des valeurs de \bar{f} sont données dans le Tableau 2.2 pour le cas particulier de porosités sphériques.

n	1	3	5	10	∞
$\bar{f}(n)$	0.5	0.448	0.430	0.414	0.392

Tableau 2.2 : Valeurs de \bar{f} pour différents exposants n dans le cas de porosités sphériques.

2.9 Conclusion

On a, tout d'abord, rappelé le principe de l'homogénéisation qui sera à la base du travail qu'on présentera dans la suite, ainsi que la théorie des matériaux standard généralisés, l'ensemble des matériaux présentés dans la suite vérifiant cette théorie. Nous nous sommes ensuite intéressés aux schémas d'homogénéisation. Dans un premier temps, ce sont les schémas linéaires qui ont été présentés. Puis nous avons présenté différents schémas non-linéaires, ces derniers étant nécessaires pour arriver à caractériser le comportement non-linéaire des combustibles. Après avoir présenté les approches par champs moyens et les approches variationnelles qui, pour la plupart, ne traitent que des comportements dérivant d'un seul potentiel, les méthodes d'analyses par champs de transformation ont été exposées, notamment la NTFA (analyse par champs de transformation non uniformes) qui sera la méthode utilisée et développée dans la suite pour des matériaux dont le comportement dérive de deux potentiels. Enfin, les combustibles étant des matériaux élastoviscoplastiques poreux, on a défini un type de potentiel viscoplastique qui permet de décrire le comportement de ces matériaux.

Deuxième partie

NTFA : Viscoplasticité incompressible

Chapitre 3

Analyse par champs de transformation non uniformes - Matériaux élastoviscoplastiques

Sommaire

3.1	Introduction	52
3.2	Analyse par champs de transformation non uniformes : principe	52
3.2.1	Relations constitutives pour les constituants	52
3.2.2	Champs de transformation non-uniformes	53
3.2.3	Variables réduites et facteurs d'influence	54
3.2.4	Relations constitutives pour les variables réduites	55
3.3	Résultats et discussion	56
3.3.1	Configuration, propriétés matériaux	56
3.3.2	Chargement	57
3.3.3	Mise en œuvre de la TFA	57
3.3.4	Mise en oeuvre de la NTFA : choix des modes plastiques	58
3.3.5	Discussion des résultats	60
3.4	Conclusion	64

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, l'analyse par champs de transformation non uniformes, ou NTFA, développée initialement par Michel et al. [MIC00], a été détaillée dans le cas des matériaux élastoplastiques avec des modes plastiques scalaires. En 2003, Michel et Suquet [MIC03] ont modifié la méthode en se basant, non plus sur des modes plastiques scalaires, mais sur des modes plastiques tensoriels. Dans ce cas, les variables internes ne sont plus tensorielles mais scalaires. Dans l'article de 2003, la méthode est appliquée à des matériaux biphasés composés de fibres élastiques linéaires et d'une matrice élastoplastique non linéaire.

L'objectif de ce chapitre est de développer la méthode NTFA pour des matériaux élastoviscoplastiques incompressibles, puis de l'appliquer à des matériaux biphasés, ce qui permettra de mettre en évidence les points forts de la méthode, ainsi que les points à améliorer. Dans le même temps, on comparera les prédictions du modèle NTFA aux prédictions de la TFA.

3.2 Analyse par champs de transformation non uniformes : principe

3.2.1 Relations constitutives pour les constituants

Les constituants considérés sont élastoviscoplastiques incompressibles. On suppose donc que leur comportement est standard généralisé [HAL75], les variables d'état étant le tenseur de déformation et des variables internes qui décrivent des phénomènes irréversibles en tout point matériel \mathbf{x} . Dans la suite, on ne considérera que les mécanismes dissipatifs décrits par la déformation viscoplastique $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}$. Le comportement standard généralisé de chaque constituant est défini par deux potentiels thermodynamiques, l'énergie libre w qui définit, à travers la loi d'état, la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$, et le potentiel de force ψ qui donne, grâce à la loi complémentaire, l'équation d'évolution de la déformation viscoplastique :

$$w(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}) : \mathbf{L} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}), \quad (3.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}) = \mathbf{L} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}), \quad (3.2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{vp}} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}). \quad (3.3)$$

Pour la simplicité, notre attention se limitera aux constituants isotropes. Le tenseur élastique \mathbf{L} est par conséquent caractérisé par un module de compressibilité k et un module de cisaillement G , tandis que le potentiel de force ψ dépend de la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ seulement par son second invariant σ_{eq} . Sous cette dernière hypothèse, l'équation d'évolution (3.3) se réduit à :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{vp}} = \frac{3}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{eq}}(\sigma_{eq}) \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}}, \quad (3.4)$$

où $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ est la partie déviatorique de $\boldsymbol{\sigma}$ et $\sigma_{eq} = (\frac{3}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}})^{1/2}$.

On considère un Volume Élémentaire Représentatif (VER) V composé de N constituants. Le caractère standard généralisé des lois locales considérées précédemment est conservé dans le changement d'échelles. Le comportement macroscopique du composite est donc standard généralisé, mais avec une infinité de variables internes. Les variables d'état du système sont la déformation macroscopique \mathbf{E} et les déformations viscoplastiques $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}(\mathbf{x})$ en tout point \mathbf{x} de V .

Dans le cas où les variables d'état sont fixées (pas d'évolution du système), les champs de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et de déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ dans le VER vérifient le problème élastique linéaire (3.5) :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}(\mathbf{x}) : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}(\mathbf{x})), \quad \text{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) = 0, \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}, \quad (3.5)$$

avec des conditions aux limites appropriées (les conditions aux limites utilisées dans la suite sont des conditions de périodicité). En effet, \mathbf{E} et $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}$ étant connus, on peut obtenir le champ de déformations solution $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ en appliquant le principe de superposition. On considère dans un premier temps que le champ de déformations viscoplastique $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}$ est nul. La solution du problème élastique (3.5) est alors donné par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) : \mathbf{E}, \quad (3.6)$$

où $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ est le tenseur élastique de localisation de la déformation.

Dans un deuxième temps, on considère $\mathbf{E} = 0$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}(\mathbf{x})$ est arbitraire. Le problème élastique (3.5) s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}), \quad \text{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) = 0, \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = 0, \quad (3.7)$$

avec $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = -\mathbf{L}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}(\mathbf{x})$ une précontrainte. La solution du système (3.7) s'écrit alors à partir de l'opérateur de Green élastique non local $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ du milieu élastique hétérogène :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = -\langle \boldsymbol{\Gamma} * \boldsymbol{\tau} \rangle(\mathbf{x}), \quad (3.8)$$

avec par définition, $\boldsymbol{\Gamma} * \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|V|} \int_V \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') : \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$.

Grâce au principe de superposition, la solution du système d'équation (3.5) est donnée par (3.9) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) : \mathbf{E} + \frac{1}{|V|} \int_V \mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') : \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \mathbf{A}(\mathbf{x}) : \mathbf{E} + \mathbf{D} * \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}(\mathbf{x}) \quad (3.9)$$

où $\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') : \mathbf{L}(\mathbf{x}')$ est l'opérateur non local qui donne, à déformation moyenne nulle, la déformation au point \mathbf{x} créée par la prédéformation $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}(\mathbf{x}')$ au point \mathbf{x}' .

Dans les paragraphes suivants, on développe la NTFA qui permet de réduire le nombre de variables internes du modèle exact.

3.2.2 Champs de transformation non-uniformes

Afin de réduire le nombre de variables internes et d'améliorer la TFA, Michel et Suquet [MIC03] ont proposé de prendre en compte la non uniformité des champs locaux des variables

internes en considérant des champs de transformation non uniformes. Plus précisément, le champ de déformations viscoplastiques est décomposé en un ensemble de champs tensoriels appelés modes plastiques, $\boldsymbol{\mu}^k$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^M \varepsilon_k^{\text{vp}} \boldsymbol{\mu}^k(\boldsymbol{x}). \quad (3.10)$$

Les variables internes sont alors les variables scalaires $\varepsilon_k^{\text{vp}}, k = 1, \dots, M$. Avec cette approximation (3.10), on passe d'un nombre infini de variables internes qui étaient tensorielles à un nombre fini M de variables scalaires. Les modes plastiques $\boldsymbol{\mu}^k$ sont, eux, tensoriels, non uniformes (ils dépendent de la position \boldsymbol{x}). Leur nombre total M peut être différent du nombre de constituants N . D'autres hypothèses sont faites pour simplifier la théorie.

1. *Le support de chaque mode est entièrement contenu dans une seule phase du matériau.* Il suit de cette hypothèse que, pour un mode donné k , on peut définir sa fonction caractéristique χ^k , son énergie libre ω_k , son module élastique \mathbf{L}_k , son potentiel de force ψ_k comme ceux de la phase qui supporte ce mode.
2. *Pour la viscoplasticité incompressible, les modes sont des champs tensoriels à trace nulle.*
3. *Les modes sont orthogonaux*, c'est à dire que $\langle \boldsymbol{\mu}^k : \boldsymbol{\mu}^\ell \rangle = 0$ si $k \neq \ell$. Cette condition est évidemment vérifiée quand les modes ont leur support dans des phases différentes, mais doit être imposée pour les modes qui ont leur support dans la même phase.
4. Enfin, pour avoir les $\varepsilon_k^{\text{vp}}$ homogènes à une déformation viscoplastique, *les modes sont normalisés* : $\langle \boldsymbol{\mu}_{eq}^k \rangle = 1$ où $\boldsymbol{\mu}_{eq}^k = (\frac{2}{3} \boldsymbol{\mu}^k : \boldsymbol{\mu}^k)^{1/2}$.

Le choix des modes plastiques est un point-clé dans la précision de la méthode. Ce choix est laissé à l'appréciation de l'utilisateur. On verra dans le paragraphe 3.3.4 le choix que nous avons fait pour les modes plastiques dans le cas d'un matériau biphasé.

3.2.3 Variables réduites et facteurs d'influence

Avec l'approximation (3.10), (3.9) devient :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{A}(\boldsymbol{x}) : \mathbf{E} + \sum_{\ell=1}^M (\mathbf{D} * \boldsymbol{\mu}^\ell)(\boldsymbol{x}) \varepsilon_\ell^{\text{vp}}. \quad (3.11)$$

En contractant (3.11) par $\boldsymbol{\mu}^k$ et en moyennant sur le VER, on obtient :

$$e_k = \mathbf{a}_k : \mathbf{E} + \sum_{\ell=1}^M D_{k\ell} \varepsilon_\ell^{\text{vp}}, \quad (3.12)$$

où la déformation réduite e_k , le tenseur de localisation réduit \mathbf{a}_k et les facteurs d'influence $D_{k\ell}$ sont définis par :

$$e_k = \langle \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\mu}^k \rangle, \quad \mathbf{a}_k = \langle \boldsymbol{\mu}^k : \mathbf{A} \rangle, \quad D_{k\ell} = \langle \boldsymbol{\mu}^k : (\mathbf{D} * \boldsymbol{\mu}^\ell) \rangle. \quad (3.13)$$

Par analogie avec l'équation définissant la déformation réduite e_k dans (3.13), on peut définir la déformation viscoplastique réduite e_k^{vp} et la contrainte réduite τ_k :

$$e_k^{\text{vp}} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}} : \boldsymbol{\mu}^k \rangle, \quad \tau_k = \langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\mu}^k \rangle. \quad (3.14)$$

On remarque que l'ensemble $\{\varepsilon_k^{\text{vp}}\}_{k=1,\dots,M}$ peut être remplacé par l'ensemble $\{e_k^{\text{vp}}\}_{k=1,\dots,M}$ puisque :

$$e_k^{\text{vp}} = \langle \boldsymbol{\mu}^k : \boldsymbol{\mu}^k \rangle \varepsilon_k^{\text{vp}}. \quad (3.15)$$

3.2.4 Relations constitutives pour les variables réduites

Puisque les tenseurs élastiques des phases sont supposés isotropes et les modes incompressibles, la contrainte réduite τ_k , supportée par la phase r , est donnée par :

$$\tau_k = 2G^r(e_k - e_k^{\text{vp}}), \quad (3.16)$$

avec G^r le module de cisaillement de la phase r , support du mode k . Pour obtenir l'équation d'évolution des e_k^{vp} , l'équation (3.4) est multipliée par $\boldsymbol{\mu}^k$ et moyennée sur le VER :

$$\dot{e}_k^{\text{vp}} = \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{vp}} : \boldsymbol{\mu}^k \rangle = \frac{3}{2} \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{eq}}(\sigma_{eq}) \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\mu}^k}{\sigma_{eq}} \right\rangle. \quad (3.17)$$

Enfin, pour obtenir une relation entre les variables réduites e_k^{vp} et τ_k , il est nécessaire de faire une approximation de σ_{eq} afin de simplifier l'équation (3.17). Une approximation possible est donnée par Michel et Suquet [MIC03], qui estiment une « contrainte réduite globale » a_r pour la phase r et agissant sur l'ensemble des modes à support dans cette phase du fait qu'il soit attendu que l'ensemble des modes plastiques à support dans la phase r soient couplés. a_r est estimée de la façon suivante :

$$a_r = \left[\sum_{k=1}^{M(r)} (\tau_k)^2 \right]^{1/2},$$

où $M(r)$ est le nombre de modes à support dans la phase r .

On remplace alors dans le terme de droite de (3.17), σ_{eq} par a_r :

$$\dot{e}_k^{\text{vp}} = \frac{3}{2} \frac{\partial \psi^k}{\partial \sigma_{eq}}(a_r) \frac{\tau_k}{a_r}, \quad a_r = \left[\sum_{k=1}^{M(r)} (\tau_k)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.18)$$

Le système d'équations (3.12), (3.15), (3.16), (3.18) constitue les relations constitutives effectives du composite. Ce système est résolu le long d'un chemin imposé, soit dans l'espace des contraintes macroscopiques soit dans l'espace des déformations macroscopiques, ce qui donne les variables internes $\varepsilon_k^{\text{vp}}$. Enfin, la contrainte macroscopique est obtenue en moyennant le champ de contrainte qui résulte des équations (3.2), (3.10), (3.11) :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \tilde{\boldsymbol{L}} : \boldsymbol{E} + \sum_{k=1}^M \left(\langle \boldsymbol{L} : \boldsymbol{D} * \boldsymbol{\mu}^k \rangle - \langle \boldsymbol{L} : \boldsymbol{\mu}^k \rangle \right) \varepsilon_k^{\text{vp}}, \quad (3.19)$$

avec $\tilde{\mathbf{L}} = \langle \mathbf{L} : \mathbf{A} \rangle$.

Le tenseur $(\langle \mathbf{L} : \mathbf{D} * \boldsymbol{\mu}^k \rangle - \langle \mathbf{L} : \boldsymbol{\mu}^k \rangle)$ est calculé une fois pour toutes grâce à un calcul élastique sur le VER :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L}(\mathbf{x}) : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})), \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) = 0, \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = 0. \quad (3.20)$$

avec $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^k, k = 1, \dots, M$.

Soit $\boldsymbol{\sigma}^k$ le champ de contraintes solution de (3.20) avec $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^k$. Le coefficient $(\langle \mathbf{L} : \mathbf{D} * \boldsymbol{\mu}^k \rangle - \langle \mathbf{L} : \boldsymbol{\mu}^k \rangle)$ peut être calculé comme :

$$(\langle \mathbf{L} : \mathbf{D} * \boldsymbol{\mu}^k \rangle - \langle \mathbf{L} : \boldsymbol{\mu}^k \rangle) = \langle \boldsymbol{\sigma}^k \rangle. \quad (3.21)$$

3.3 Résultats et discussion

Nous allons à présent comparer les résultats obtenus sur des matériaux *élastoviscoplastiques* par application des différentes méthodes, la TFA et la NTFA. Cette étude, déjà réalisée pour les matériaux elastoplastiques ([MIC00]), va nous permettre de mettre en évidence l'importance du choix des modes plastiques dans la NTFA et l'importance du choix des sous-domaines dans la TFA.

3.3.1 Configuration, propriétés matériaux

Les résultats obtenus pour les matériaux élastoviscoplastiques concernent un matériau composite biphasé fibres-matrice. Le VER (Figure 3.1) est une cellule-unité carrée contenant une fibre circulaire située au centre de la cellule. La fraction volumique des fibres est de 0.25.

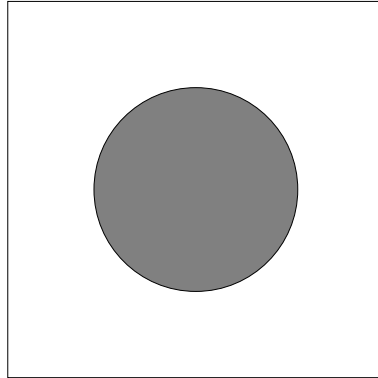


Figure 3.1 : Cellule de base.

La fibre a un comportement élastique linéaire alors que la matrice a un comportement élastoviscoplastique en loi puissance défini par le potentiel viscoplastique suivant :

$$\psi(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\sigma_0 \dot{\varepsilon}_0}{n+1} \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^{n+1}. \quad (3.22)$$

Les propriétés matériaux de la fibre élastique (E_f, ν_f) et de la matrice élastoviscoplastique $(E_m, \nu_m, \sigma_0, n, \dot{\epsilon}_0)$ sont les suivantes :

$$\begin{cases} E_f = 400 \text{ GPa}, & \nu_f = 0.2, \\ E_m = 70 \text{ GPa}, & \nu_m = 0.3, \quad \sigma_0 = 100 \text{ MPa}, \quad n = 2, \quad \dot{\epsilon}_0 = 10^{-2} s^{-1}. \end{cases}$$

3.3.2 Chargement

La contrainte macroscopique appliquée sur le VER est imposée dans une direction de contrainte fixée :

$$\Sigma = \Sigma(t) \Sigma_0.$$

Généralement, on contrôle plutôt la déformation. Le chargement est donc appliqué en augmentant le paramètre de contrôle $\mathbf{E} : \Sigma_0$. En fait, on impose la direction de contrainte macroscopique, et le paramètre de contrôle est la magnitude de la déformation macroscopique dans cette direction ([MIC99]). Les résultats obtenus pour les relations contrainte-déformation sont tracés dans le graphe $(\Sigma, \mathbf{E} : \Sigma_0)$.

3.3.3 Mise en œuvre de la TFA

La TFA a été mise en œuvre pour 2 types de découpage de la cellule unité.

Dans le premier cas (Figure 3.2), la cellule unité est découpée en 9 sous-domaines et en 49 sous-domaines. On appellera ce cas TFA(a). Dans le deuxième cas (Figure 3.3), la cellule de base est découpée en 9 et 57 sous-domaines. Ce cas est appelé TFA(b). Les deux types de découpages diffèrent l'un de l'autre par la forme de leurs sous-domaines. Le découpage de la TFA(a) est basé sur des carrés ou rectangles tandis que le découpage de la TFA(b) est basée sur des sous-domaines en forme de trapèzes.

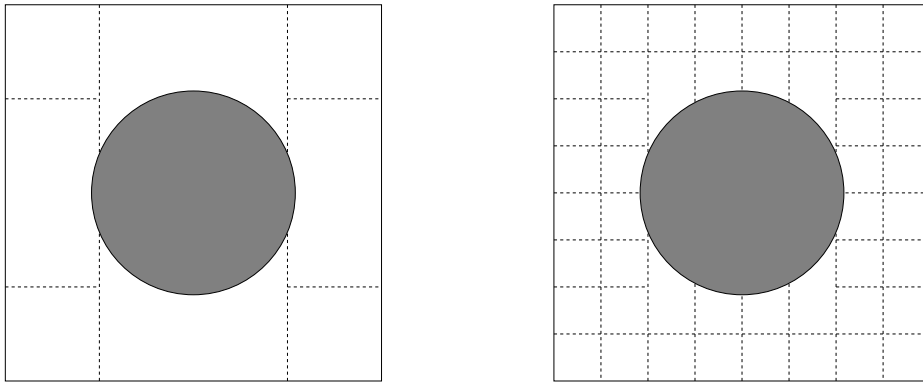


Figure 3.2 : Cellule carrée. Subdivisions utilisées pour la mise en oeuvre de la TFA(a) : 9 sous-domaines dont 8 sous-domaines dans la matrice ; 49 sous-domaines dont 48 sous-domaines dans la matrice.

Un calcul TFA a également été mis en œuvre en considérant la matrice et l'inclusion comme sous-domaines (noté TFA(2)).

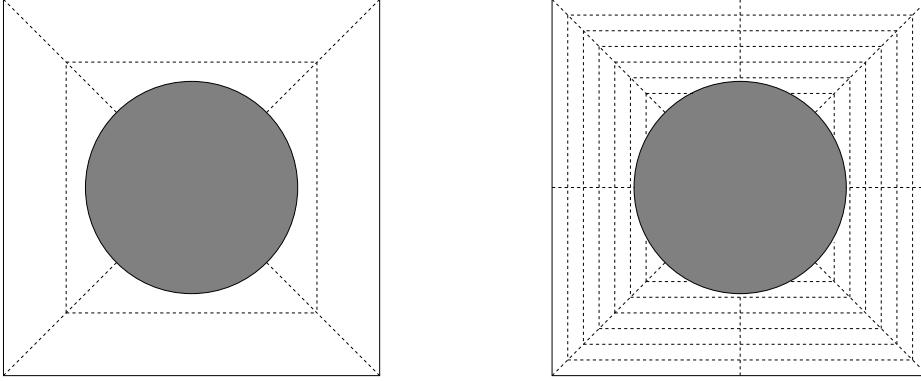


Figure 3.3 : Cellule carrée. Subdivisions utilisées pour la mise en oeuvre de la TFA(b) : 9 sous-domaines dont 8 sous-domaines dans la matrice ; 57 sous-domaines dont 56 sous-domaines dans la matrice.

3.3.4 Mise en oeuvre de la NTFA : choix des modes plastiques

Ici, les modes sont choisis comme les champs de déformations viscoplastiques réels sous différents chargements. Ils sont déterminés numériquement en simulant la réponse du composite le long de chemins de chargement radiaux dans l'espace des contraintes macroscopiques.

Les modes viscoplastiques $\boldsymbol{\mu}^k$ sont calculés pour \mathbf{E} : $\Sigma_0^k = 5\%$. La vitesse de chargement est fixée (ici, $\dot{\epsilon} = 10^{-2}s^{-1}$, on verra dans la suite, que le choix de la vitesse de chargement pour le calcul des modes influe peu sur le résultat final). Dans les cas présentés paragraphe 3.3.5, la contrainte d'écoulement est atteinte, le champ de déformations viscoplastiques est totalement développé.

On considérera dans la suite deux états de contraintes différents, la traction uniaxiale et le cisaillement pur :

$$\begin{aligned}\Sigma_0^1 &= \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \\ \Sigma_0^2 &= \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1\end{aligned}\tag{3.23}$$

Cependant, il peut être nécessaire d'ajouter des modes suivant le type de chargement appliqué à la structure (notamment un mode obtenu en traction uniaxiale dans la direction orthogonale à celle de la première traction). En effet, les résultats obtenus dépendent fortement du choix des directions de chargement pour calculer les modes plastiques. Dans le cas où la cellule unité est soumise à un chargement multiaxial, il est important que les directions de chargement choisies pour les modes plastiques correspondent aux composantes non nulles du chargement imposé.

Michel et Suquet [MIC04] ont observé que les trois modes proposés (obtenus à partir des chargements suivants : traction uniaxiale dans les deux directions du plan, et cisaillement pur) suffisent à reproduire correctement le comportement global et local de deux structures composites non linéaires (une barre composite de section carrée soumise à un essai d'écrasement sans glissement, et une plaque composite soumise à un essai de flexion 4 points).

En ne choisissant que 2 modes (pour des raisons de simplification), on n'obtient donc que 2

variables internes *scalaires*. Dans les cas bidimensionnels étudiés, on travaille sous hypothèse des déformations planes généralisées. Les modes, dont le support est contenu uniquement dans la matrice, ne possèdent donc que quatre composantes chacun. La Figure 3.4 montre les composantes du mode μ^1 , la Figure 3.5 montre les composantes du mode μ^2 .

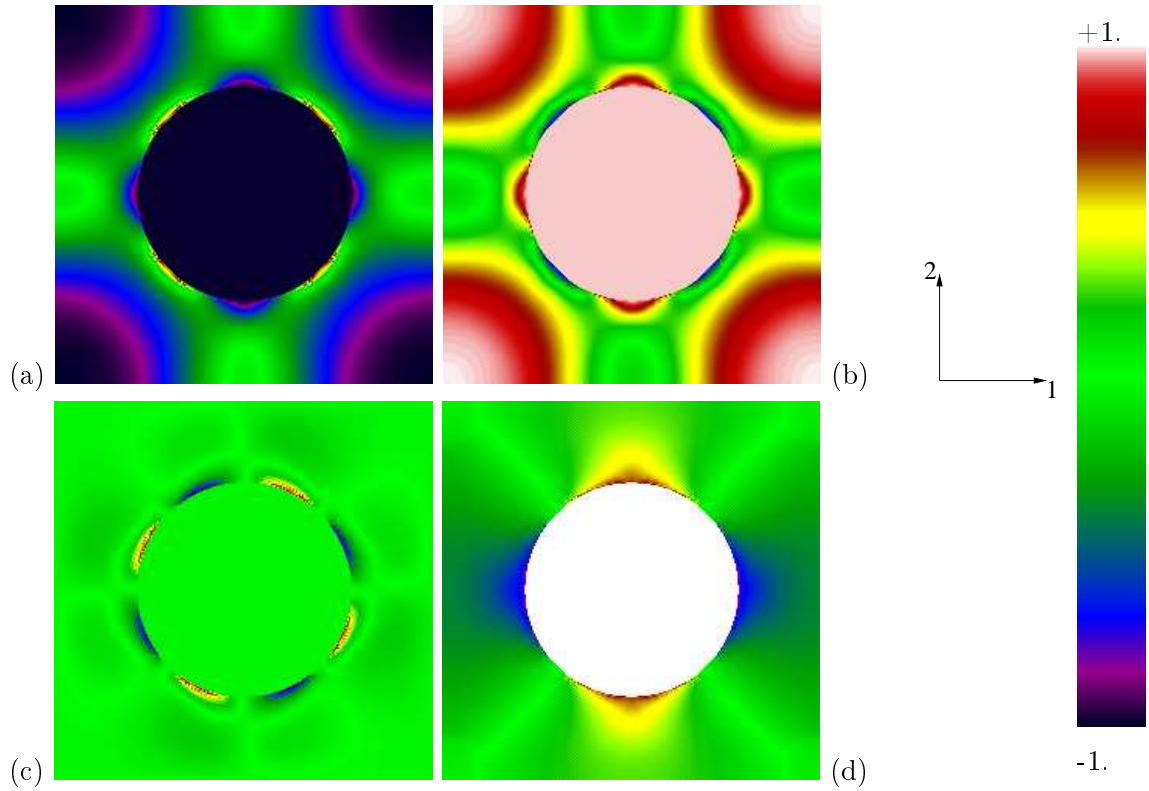


Figure 3.4 : Cellule carrée. Composantes (a) μ_{11} , (b) μ_{22} , (c) μ_{12} et (d) μ_{33} du mode en traction selon 1.

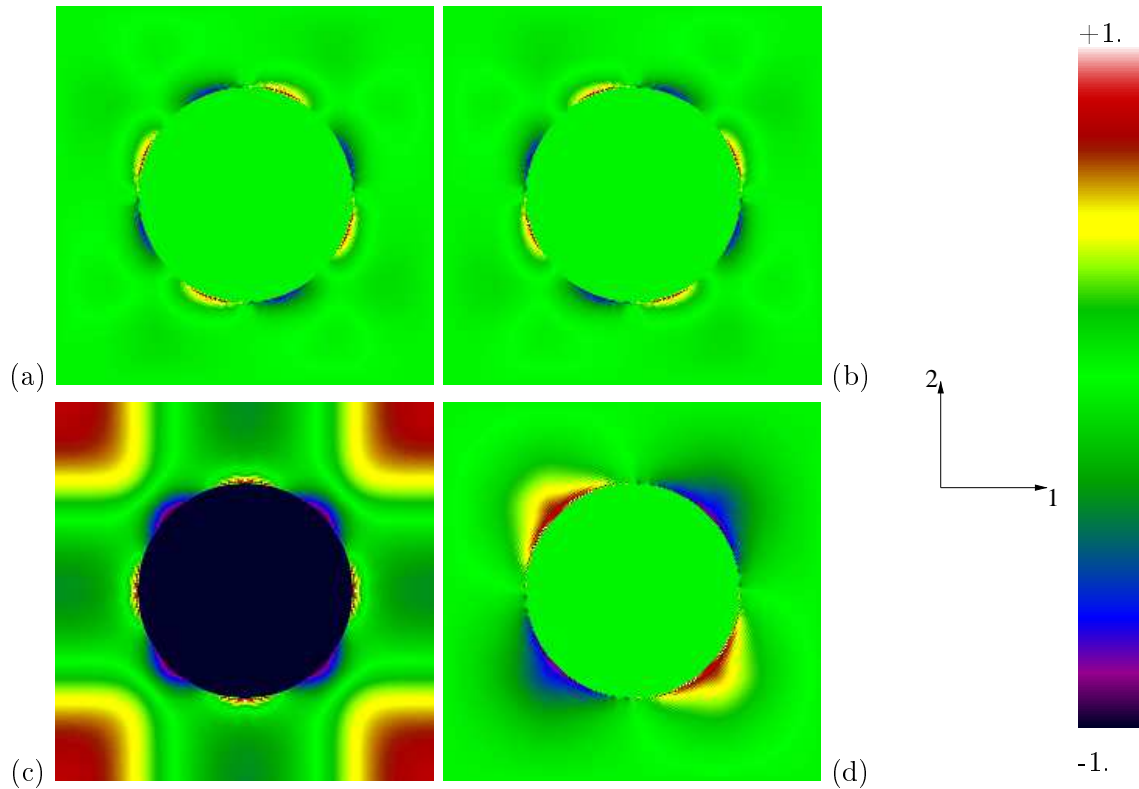


Figure 3.5 : Cellule carrée. Composantes (a) μ_{11} , (b) μ_{22} , (c) μ_{12} et (d) μ_{33} du mode en cisaillement.

La palette de couleurs, présentée ici pour les modes plastiques, ne sera plus reproduite dans la suite.

3.3.5 Discussion des résultats

Afin de pouvoir situer les différents résultats, la réponse du composite est par ailleurs été calculée exactement (à l'erreur numérique près) en résolvant le problème de localisation complet. Cette réponse est appelée dans la suite la *référence*. Le problème élastoviscoplastique complet a été résolu à l'aide d'une méthode à base de transformées de Fourier rapides ([MOU98]). D'autres méthodes numériques auraient également pu être utilisées.

Comparaison détaillée des différents modèles

Tout d'abord, on compare les résultats obtenus avec la méthode TFA par rapport aux résultats de référence, et on étudie notamment l'influence du choix du découpage de la cellule-unité sur les résultats de la TFA.

On constate sur la Figure 3.6 que le choix du découpage est primordial pour espérer avoir des résultats se rapprochant de la réalité. En effet, la mise en œuvre de la TFA avec le découpage en "trapèzes" (TFA(b)) donne des comportements beaucoup trop rigides quelque soit la direction

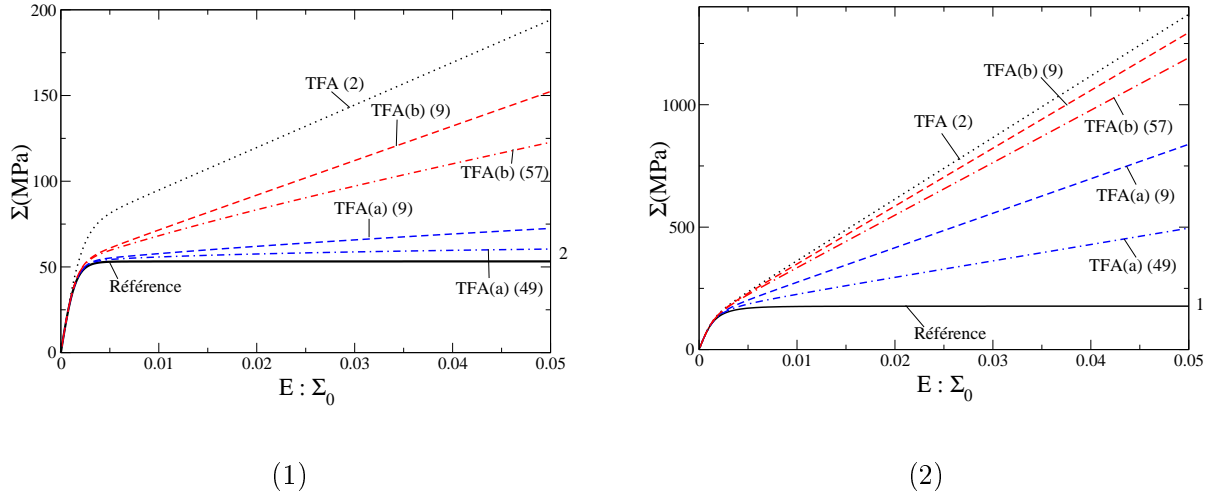


Figure 3.6 : Cellule carrée : prédiction de la TFA (a) et (b) pour un chargement en cisaillement (1) et un chargement en traction (2) et résultats de référence (ligne continue).

de chargement, et quelque soit le nombre de sous-domaines. Or, lorsque qu'on observe, sur la Figure 3.4, les composantes μ_{11} et μ_{22} du mode en traction et la composante μ_{12} du mode en cisaillement sur la Figure 3.5, on constate que, dans chaque sous-domaine défini sur la Figure 3.3, la variation de chaque composante est très importante, l'approximation de Dvorak qui considère que le champ de déformations viscoplastiques est uniforme sur chaque sous-domaine n'est donc pas très représentative de la réalité dans ce cas de chargement. Dans le cas du découpage en "carrés" (TFA(a)), le comportement obtenu est toujours plus proche de la réalité que dans le cas précédent de découpage. Or dans ce cas, la variation du champ de déformations viscoplastiques dans chaque sous-domaine est faible, le fait de supposer que le champ de déformations viscoplastiques est uniforme dans chaque sous-domaine est donc plus pertinent pour ce type de découpage. Cependant, notamment dans le cas de la traction, le comportement reste trop rigide, malgré un grand nombre de sous-domaines (49). Il faudrait augmenter de façon significative le nombre de sous-domaines pour espérer obtenir une réponse plus proche du comportement réel, mais cela augmenterait le nombre de variables internes du modèle, ce qui diminue donc l'intérêt de ce modèle.

On compare maintenant la TFA(a) et la NTFA. La Figure 3.7 donne la réponse en cisaillement des différentes méthodes ainsi que le calcul de référence, la Figure 3.8 donne la réponse de ces mêmes méthodes pour un chargement en traction.

La NTFA, contrairement à la TFA, donne de très bons résultats avec peu de modes par phase viscoplastique (dans l'exemple étudié, on a uniquement deux modes pour la matrice). Dans le cas du cisaillement (Figure 3.7), la NTFA est en excellent accord avec le calcul de référence. Dans le cas de la traction uniaxiale (Figure 3.8), la contrainte d'écoulement est bien calculée. Cependant, pour des déformations plus faibles, et notamment lorsqu'on n'a pas encore atteint la contrainte d'écoulement (entre 0.3% et 1% de déformation : zone d'écrouissage qu'on appellera le « coude »), le résultat est moins bon.

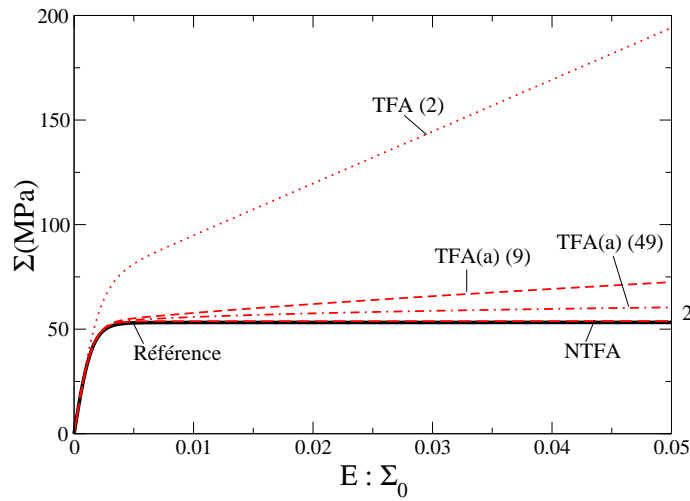


Figure 3.7 : Cellule carrée : prédiction de la TFA(a) (2, 9 et 49 sous domaines) et de la NTFA pour un chargement en cisaillement et résultats de référence (ligne continue).

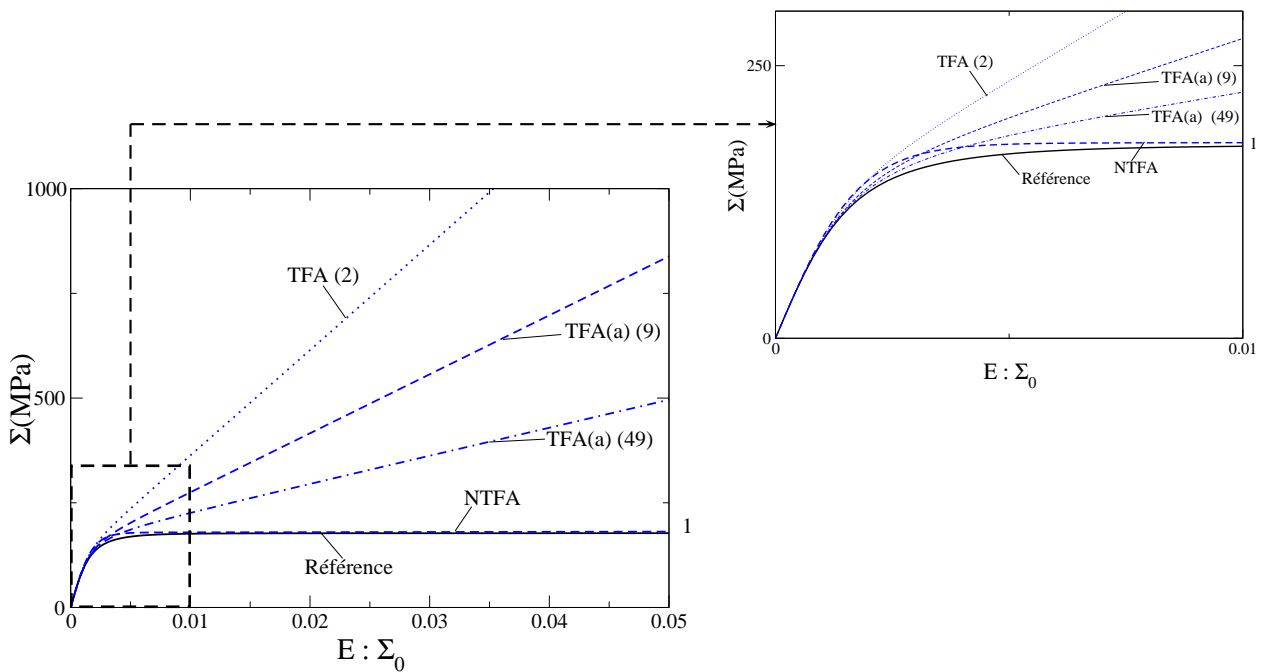


Figure 3.8 : Cellule carrée : prédiction de la TFA(a) (2, 9 et 49 sous domaines) et de la NTFA en traction et résultats de référence (ligne continue).

Avant de voir comment améliorer la modélisation du comportement du composite étudié, on regarde l'influence de la vitesse de chargement utilisée pour déterminer les modes plastiques sur le comportement obtenu par la NTFA à une vitesse fixée. Pour cela, on a calculé les modes plastiques et donc les facteurs d'influence pour $E : \Sigma_0 = 5\%$ et pour chacune des trois vitesses

de chargement : $10^{-2}s^{-1}$, $2.10^{-2}s^{-1}$ et $5.10^{-3}s^{-1}$. Puis on simule le comportement du composite soumis à une vitesse de chargement de $10^{-2}s^{-1}$ avec ces trois choix de modes plastiques.

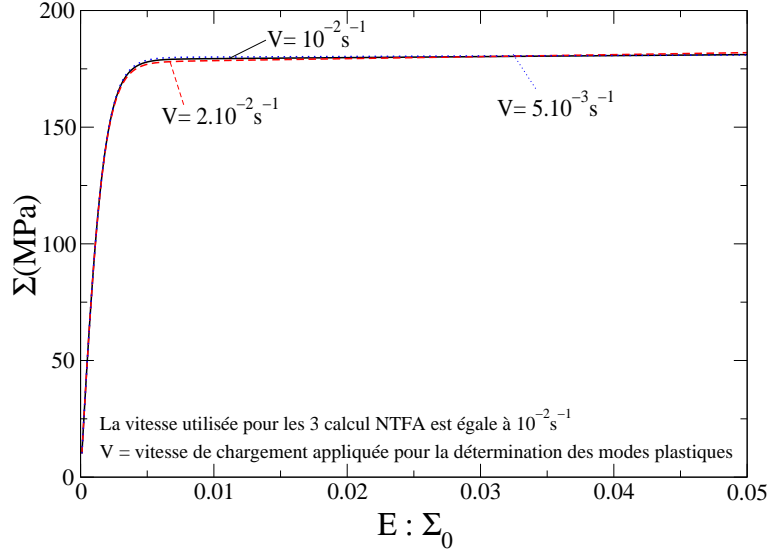


Figure 3.9 : Cellule carrée : prédictions de la NTFA en traction pour une vitesse de chargement de 10^{-2} avec des modes calculés à différentes vitesses de chargement $V = 10^{-2}$ (ligne continue), $V = 2.10^{-2}$ (ligne tirets), $V = 5.10^{-3}$ (ligne pointillée).

On constate sur la Figure 3.9 que ce paramètre n'a aucune influence sur le résultat obtenu par la méthode NTFA. Les facteurs d'influence peuvent donc être calculés pour une vitesse donnée tandis que le comportement du composite est modélisé pour une autre vitesse de chargement sans que cela ne pose de problème.

Application de la NTFA avec un choix différent de modes plastiques

Afin d'améliorer la NTFA, essentiellement pour la modélisation du « coude », on a choisi des modes plastiques évalués à différents niveaux de déformation, plus proche du coude que celui utilisée précédemment ($\mathbf{E} : \Sigma_0^k = 5\%$), c'est à dire pour $\mathbf{E} : \Sigma_0^k = 2.5\%$ et $\mathbf{E} : \Sigma_0^k = 0.5\%$. Les facteurs d'influence sont calculés dans ces deux cas, et on compare au résultat de référence.

Pour des modes plastiques établis à 2.5% de déformation, le résultat prédit par la NTFA (Figure 3.10) est légèrement meilleur au niveau du « coude » mais la contrainte d'écoulement prédite est moins bonne. Pour des modes plastiques établis à 0.5% de déformation (Figure 3.10), le comportement au niveau du « coude » est bien simulé mais la modélisation de la contrainte d'écoulement est catastrophique.

Le choix du niveau de déformation $\mathbf{E} : \Sigma_0^k$ considéré pour le calcul des modes plastiques est donc un paramètre déterminant de la méthode NTFA pour des constituants élastoviscoplastiques. Lorsque les modes plastiques sont déterminés pour un niveau de déformation proche de la zone d'écrouissage, on modélise correctement l'écrouissage, c'est-à-dire le coude. Dans le cas où les modes plastiques sont déterminés à partir de la zone où la contrainte d'écoulement est

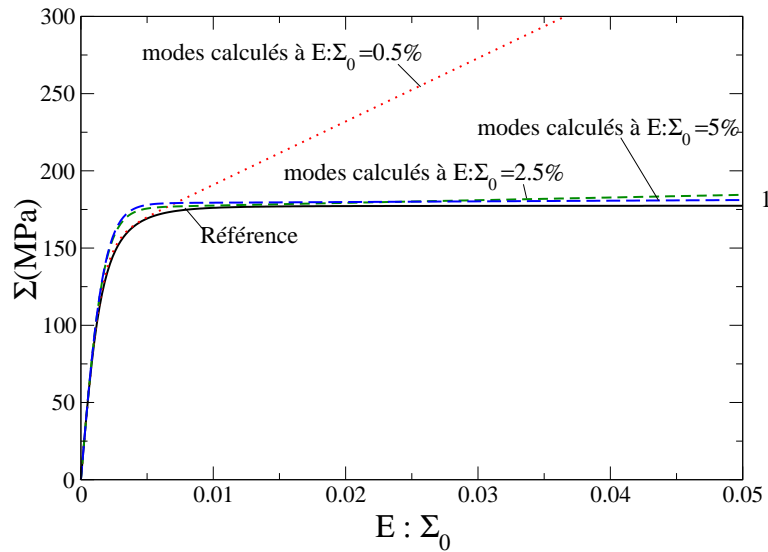


Figure 3.10 : Cellule carrée : prédictions de la NTFA en traction avec des modes calculés pour $E : \Sigma_0^1 = 0.5\%$ (courbe pointillée), $E : \Sigma_0^1 = 2.5\%$ (courbe tirets courts), $E : \Sigma_0^1 = 5\%$ (courbe tirets longs) et résultats de référence (courbe continue).

atteinte, c'est cette zone qui est bien modélisé tandis qu'au niveau de la zone d'écroutissage, le comportement prédit est trop raide.

3.4 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de définir l'analyse par champs de transformation non uniformes (NTFA) pour des matériaux élastoviscoplastiques. Le point-clé de la méthode est le choix des modes plastiques utilisés pour prendre en compte la non-uniformité des champs mécaniques, l'objectif étant d'améliorer les résultats obtenus avec la TFA.

On a donc comparé les résultats obtenus avec les deux méthodes, TFA et NTFA, afin de mettre en évidence les points forts de la méthode NTFA, mais également de souligner les points faibles existants, ainsi que les paramètres qui influencent le modèle et qui permettraient d'améliorer le modèle.

Les résultats obtenus avec la méthode TFA confirment ce qui était attendu, c'est à dire que les comportements prédits avec la TFA sont trop rigides, quelque soit le nombre de sous-domaines dans chaque phase, même si les résultats se rapprochent du comportement réel quand le nombre de sous-domaines augmente. De plus, le type de découpage de chaque phase du VER modifie le résultat attendu. En effet, suivant le découpage de la cellule-unité, le champ de déformations viscoplastiques peut varier de manière importante dans un sous-domaine, le fait de considérer un champ de déformations viscoplastiques constant dans chaque sous-domaine crée donc une erreur importante pour la prédiction du comportement.

Dans le cas de la méthode NTFA, les résultats sont excellents au niveau de la zone de déformation choisie pour la détermination des modes. Dans les gammes de déformations autres

3.4. Conclusion

que celle utilisée pour le calcul des modes, les prédictions ne concordent pas toujours avec le calcul de référence, il est donc important de pouvoir prendre en compte les informations des champs de déformations viscoplastiques pour différents niveaux de déformation afin de modéliser au mieux le comportement d'un matériau, mais sans que le nombre de variables internes soit trop élevé. Ceci fait l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 4

Amélioration du choix des modes plastiques

Sommaire

4.1	Introduction	68
4.2	Choix des modes plastiques : Transformation de Karhunen-Loève	69
4.3	Application de la NTFA avec un seul type de chargement . . .	70
4.3.1	Cellule avec arrangement hexagonal de fibres, données matériaux .	70
4.3.2	Mise en œuvre de la NTFA avec Karhunen-Loève	72
4.3.3	Résultats	73
4.4	Application de la NTFA avec plusieurs types de chargement . .	74
4.4.1	Cellule avec arrangement hexagonal des fibres, données matériaux .	74
4.4.2	Choix des modes plastiques	76
4.4.3	Résultats	78
4.5	Conclusion	82

4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons constaté que le modèle obtenu grâce à la méthode NTFA est généralement trop raide dans certaines zones qui varient suivant le choix fait pour les modes plastiques. Si les modes sont calculés pour un niveau de chargement pour lequel la contrainte d'écoulement est déjà atteinte, le comportement au niveau de la zone d'écrouissage est trop rigide alors que, lorsque les modes sont calculés pour un niveau de chargement appartenant à la zone d'écrouissage, c'est le comportement au niveau de la zone d'écoulement qui est trop rigide. Il faut donc réussir à modéliser le comportement à tous les niveaux de chargement.

Dans un premier temps, nous avons considéré les modes plastiques comme les champs de déformations viscoplastiques dans une même direction de chargement Σ_0^k , mais pour différents niveaux de chargement $\mathbf{E} : \Sigma_0^k$. Or, les modes plastiques « candidats » pour la méthode NTFA doivent être orthogonaux entre eux, ce que ne vérifie pas ce choix de modes. Il faut donc trouver un procédé qui prenne en compte l'essentiel des informations contenues dans ces champs de déformations viscoplastiques obtenus à différents instants de chargement, et qui fournisse des modes orthogonaux deux à deux. Le premier procédé qui vient à l'esprit dans ce cas, est le procédé d'orthogonalisation de Schmidt. L'inconvénient de ce procédé est que le nombre de modes et donc de variables internes peut être élevée puisqu'on prend plusieurs modes dans une même direction de chargement. De plus, avec ce procédé d'orthogonalisation, on « cumule » les informations des différents instants, alors qu'il faudrait pouvoir les utiliser les unes après les autres. Il faut donc trouver un autre procédé qui limite le nombre de variables internes tout en prenant toute l'information sur la déformation viscoplastique au cours d'un chargement, afin de mieux reproduire le comportement.

La transformation de Karhunen-Loève, encore appelée décomposition orthogonale aux valeurs propres (Proper Orthogonal Decomposition, POD), permet ici d'atteindre cet objectif, en réalisant un changement de base pour obtenir de nouveaux modes où l'information contenue est distribuée de façon optimale. Elle a d'abord été utilisée en traitement de l'image comme un outil statistique d'analyse de données et de compression d'images. La méthode a été ensuite utilisée en mécanique des fluides, pour l'étude des turbulences [SIR87], et plus récemment en dynamique et vibrations des structures [FEE98]. L'un des avantages de la transformation de Karhunen-Loève (qu'on pourra noter, par la suite, KL) est qu'elle est utilisable dans les cas linéaires et non-linéaires puisque la méthode est basée uniquement sur du traitement de données obtenues soit expérimentalement soit numériquement ([WOL01b]).

C'est à la suite de discussions avec *Rubens Sampaio* (Département de Mécanique à l'Université de Rio, Brésil) en séjour au LMA (Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique) que nous avons décidé d'utiliser cette méthode pour essayer d'améliorer le choix des modes plastiques. Dans la suite, nous détaillons le principe de la transformation de Karhunen-Loève appliquée au choix des

modes plastiques, puis les résultats obtenus à partir de la NTFA en fonction des modes plastiques utilisés sont présentés afin de mettre en évidence l'intérêt de KL dans notre cas.

4.2 Choix des modes plastiques : Transformation de Karhunen-Loève

La transformation de Karhunen-Loève consiste à construire une matrice de corrélation à partir de données expérimentales ou numériques et à en extraire les vecteurs propres et les valeurs propres afin d'obtenir une nouvelle base de vecteurs appelés modes.

Afin d'améliorer les modes plastiques utilisés dans la méthode NTFA, on détermine numériquement $M_T(r)$ champs de déformations viscoplastiques normalisés pour chaque phase r du composite, déterminés à différents "instants" de déformation macroscopique en résolvant numériquement le problème local non-linéaire complet sur le VER. En pratique, la cellule-unité est soumise à des chemins de chargement donnés (par exemple, une traction uniaxiale ou un cisaillement pur). Les champs de déformations viscoplastiques sont extraits régulièrement durant le chargement.

Soit $\boldsymbol{\theta}^k(x)$, $k = 1, \dots, M_T(r)$, ces $M_T(r)$ champs de déformations viscoplastiques normalisés. A partir de ces champs, on calcule la matrice de corrélation, notée g :

$$g_{ij} = \langle \boldsymbol{\theta}^i(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\theta}^j(\mathbf{x}) \rangle, \quad i, j = 1, \dots, M_T(r) \quad (4.1)$$

On peut donc calculer les vecteurs propres \mathbf{v}^k et les valeurs propres λ_k avec $k = 1, \dots, M_T(r)$, et on a :

$$\sum_{j=1}^{M_T(r)} g_{ij} v_j^k = \lambda_k v_i^k, \quad i, k = 1, \dots, M_T(r) \quad (4.2)$$

A partir de ces vecteurs propres, on construit les vecteurs de la nouvelle base, les modes, qu'on appelle dans la NTFA les modes plastiques $\boldsymbol{\mu}^k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, M_T(r)$:

$$\boldsymbol{\mu}^k(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=1}^{M_T(r)} v_\ell^k \boldsymbol{\theta}^\ell(\mathbf{x}), \quad (4.3)$$

Une des propriétés majeures de la transformation de Karhunen-Loève est la totale décorrélation des nouvelles données. Il est donc facile de vérifier que les nouveaux modes $\boldsymbol{\mu}^k$ sont orthogonaux. Pour cela, on va montrer que $\langle \boldsymbol{\mu}^k : \boldsymbol{\mu}^r \rangle$ est nul quand $k \neq r$ et non nul sinon. Dans un premier temps, on calcule la moyenne du produit doublement contracté d'un mode plastique $\boldsymbol{\mu}^k$ avec un champ de déformation anélastique $\boldsymbol{\theta}^\ell$:

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\mu}^k : \boldsymbol{\theta}^\ell \rangle &= \sum_i v_i^k \langle \boldsymbol{\theta}^i : \boldsymbol{\theta}^\ell \rangle, \\ &= \sum_i g_{i\ell} v_i^k, \\ &= \lambda_k v_\ell^k. \end{aligned} \quad (4.4)$$

On calcule enfin le produit de deux modes plastiques :

$$\begin{aligned}
 \langle \boldsymbol{\mu}^k : \boldsymbol{\mu}^r \rangle &= \sum_{\ell} v_{\ell}^r \langle \boldsymbol{\mu}^k : \boldsymbol{\theta}^{\ell} \rangle, \\
 &= \lambda_k \sum_{\ell} v_{\ell}^k v_{\ell}^r, \\
 &= \begin{cases} \lambda_k & \text{si } k = r \\ 0 & \text{si } k \neq r \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Un autre intérêt de la transformation de Karhunen-Loève réside dans le fait que la magnitude d'une valeur propre correspond à la quantité d'information contenue dans le vecteur propre associé. En d'autres termes, plus le rapport $\lambda_{\ell} / \left(\sum_{k=1}^{M_T(r)} \lambda_k \right)$ est proche de 1, plus le vecteur propre \boldsymbol{v}_{ℓ} associé à λ_{ℓ} contient d'informations issues des données initiales (ici, les champs de déformations viscoplastiques $\boldsymbol{\theta}^k, k = 1, \dots, M_T(r)$). En supposant que les valeurs propres sont ordonnées de manière décroissante ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_{M_T(r)}$), et en prenant en compte la propriété précédente, seuls les $M(r)$ ($M(r) \leq M_T(r)$) premiers modes correspondant aux plus grandes valeurs propres et vérifiant le critère (4.6) peuvent être considérés :

$$\frac{\sum_{k=1}^{M(r)} \lambda_k}{\sum_{k=1}^{M_T(r)} \lambda_k} > \alpha. \tag{4.6}$$

La valeur du seuil α est laissé au choix de l'utilisateur et dépend de la précision désirée. Dans les exemples présentés, α est choisi égal à 0.9999.

Enfin, les modes plastiques dépendent fortement de la direction de chargement imposée pour les calculer ([WOL01a]). Le choix des directions de chargement doit donc être effectué en fonction du type de chargement auquel est soumis le composite étudié.

4.3 Application de la NTFA avec un seul type de chargement

4.3.1 Cellule avec arrangement hexagonal de fibres, données matériaux

Les matériaux élastoviscoplastiques étudiés sont des matériaux composites biphasés fibres-matrice. Le VER (Figure 4.1) est une cellule dont les fibres circulaires sont réparties de façon hexagonale. La fraction volumique des fibres est 0.25. Dans les cas étudiés, les deux phases ont un comportement élastoviscoplastique en loi-puissance défini par le potentiel suivant :

$$\psi(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\sigma_0 \dot{\epsilon}_0}{n+1} \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^{n+1}. \tag{4.7}$$

Les propriétés des fibres sont les mêmes pour tous les calculs, et sont regroupés dans le tableau 4.1.

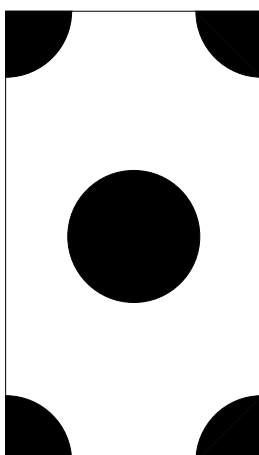


Figure 4.1 : cellule avec arrangement hexagonal des fibres.

Module d'Young (GPa)	Coefficient de Poisson	n	$\dot{\epsilon}_0$	σ_0 (MPa)
100	0.3	1	10^{-5}	250

Tableau 4.1 : Propriétés mécaniques des fibres.

Dans le cas de la matrice, différents cas sont étudiés. Deux types de viscosité sont utilisés, une viscosité linéaire dans le cas de l'exposant $n = 1$ et une viscosité fortement non linéaire dans le cas de l'exposant $n = 8$. Pour chacun des exposants de viscosité, seul σ_0 varie suivant les cas étudiés. Les propriétés matériaux fixés pour chacun des cas sont rassemblés dans le tableau 4.2. Les différents σ_0 utilisés dans le cas $n = 1$ sont récapitulés dans le tableau 4.3, ceux utilisés dans le cas $n = 8$ le sont dans le tableau 4.4.

Module d'Young (GPa)	Coefficient de Poisson	n	$\dot{\epsilon}_0$
180	0.3	1 ou 8	10^{-5}

Tableau 4.2 : Propriétés mécaniques de la matrice.

$n = 1$	1	2	3	4	5	6
σ_0 (MPa)	50	100	500	1000	5000	10000

Tableau 4.3 : Valeurs de σ_0 dans la matrice pour l'exposant de viscosité $n = 1$.

$n = 8$	1	2	3	4	5	6	7
σ_0 (MPa)	13.712	18.286	24.384	32.517	43.362	57.825	77.111

Tableau 4.4 : Valeurs de σ_0 dans la matrice pour l'exposant de viscosité $n = 8$.

Les propriétés utilisées dans ce chapitre ont été déterminées à partir des caractéristiques des phases du combustible MOX. Ces propriétés dépendent de plusieurs paramètres (température et

taille de grains notamment). On verra plus en détail l'effet de ces paramètres sur le comportement des combustibles dans la partie IV.

4.3.2 Mise en œuvre de la NTFA avec Karhunen-Loève

On applique la procédure définie au paragraphe 4.2 pour déterminer les modes plastiques. Dans un premier temps, pour simplifier l'étude, le VER n'est soumis qu'à un seul type de chargement monotone. Soit $\theta^k(x), k = 1, \dots, M_T(r)$ les champs de déformations viscoplastiques réels sous **traction uniaxiale** ($\Sigma_0^1 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$) dans la phase r . Nous avons décidé de prendre $M_T(r) = 25, r = 1, 2$. Dans chaque phase, les 25 champs de déformations viscoplastiques ont donc été déterminés pour $\mathbf{E} : \Sigma_0^k$ compris entre 0 et 5%. Les valeurs de $\mathbf{E} : \Sigma_0^k$ ont été choisies de façon régulière sur cet intervalle $[0, 5\%]$. En appliquant la décomposition de Karhunen-Loeve, on obtient les modes principaux dont les valeurs propres vérifient le critère (4.6).

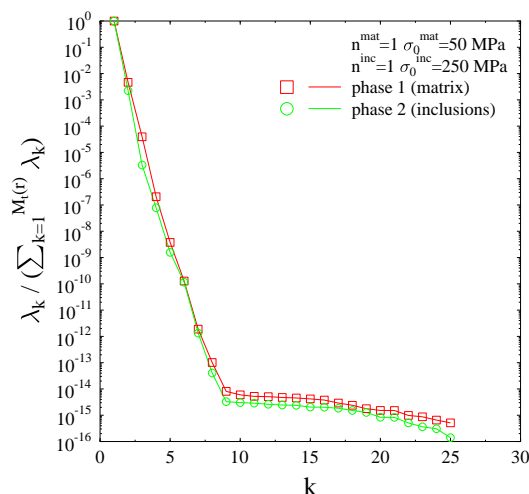


Figure 4.2 : Répartition hexagonale des fibres dans la cellule, $n = 1$ dans les deux phases : valeurs propres de la matrice de corrélation de la matrice (symbole carré) et de la fibre (symbole cercle).

La Figure 4.2 donne un exemple des valeurs propres associées à chaque phase, ordonnées de manière décroissante, dans le cas où la contrainte d'écoulement de la matrice est de 50MPa, et celle des fibres de 250MPa. Nous pouvons voir sur la Figure 4.2 la décroissance rapide des valeurs propres. En effet, le critère (4.6) est généralement satisfait avec seulement deux modes pour chaque phase, parfois avec trois modes dans la matrice selon les propriétés matériaux. En d'autres termes, pour chaque phase, les deux (ou trois) premiers modes concentrent 99.99% de l'information contenue dans les vingt-cinq champs de déformation viscoplastiques calculés initia-

lement pour déterminer les modes plastiques.

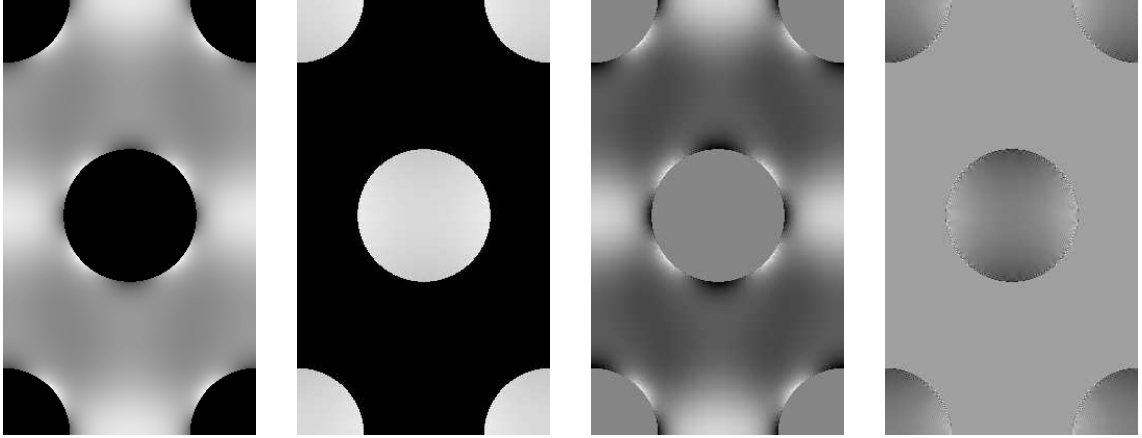


Figure 4.3 : Répartition hexagonale des fibres dans la cellule, $n = 1$: composantes μ_{11} des modes associés à la plus grande valeur propre λ_1 dans la matrice et dans la fibre et des modes suivants associés à la valeur propre λ_2 dans la matrice et dans la fibre.

La Figure 4.3 montre la composante μ_{11} des deux modes associés aux deux plus grandes valeurs propres dans la matrice et dans l'inclusion dans le cas où la contrainte d'écoulement de la matrice est de 50MPa et celle de la fibre de 250MPa.

4.3.3 Résultats

La Figure 4.4 présente les résultats dans deux cas, le premier cas pour la viscosité linéaire avec une contrainte d'écoulement de la matrice $\sigma_0 = 50$ MPa, le deuxième cas pour la viscosité fortement non-linéaire avec $\sigma_0 = 57.825$ MPa.

On appellera la prédiction obtenue avec les modes plastiques calculés pour $\mathbf{E} : \Sigma_0^k = 5\%$ et qui a été définie dans le chapitre 3, *prédiction NTFA sans Karhunen-Loève*. La prédiction obtenue avec des modes plastiques obtenus après application de la transformée de Karhunen-Loève sera appelée dans la suite *prédiction NTFA avec Karhunen-Loève*.

On peut voir sur cette Figure 4.4 que la NTFA avec des modes déterminés grâce à la décomposition de Karhunen-Loève donne d'excellents résultats et notamment au niveau de la zone d'écrouissage, zone qui était mal reproduite avec les modes plastiques définis au chapitre précédent, ces modes étant tout simplement les champs de déformations viscoplastiques dans une direction de chargement imposée Σ_0 et tel que $\mathbf{E} : \Sigma_0 = 5\%$. Ils ne prenaient donc pas en compte d'information liée à l'écrouissage du matériau. Dans ce cas simple, la transformation de Karhunen-Loève permet donc d'obtenir de très bon résultats avec la méthode NTFA. Dans la suite du chapitre, on va étudier la réponse du VER obtenue grâce à la NTFA avec des modes calculés à partir de plus d'un type de chargement.

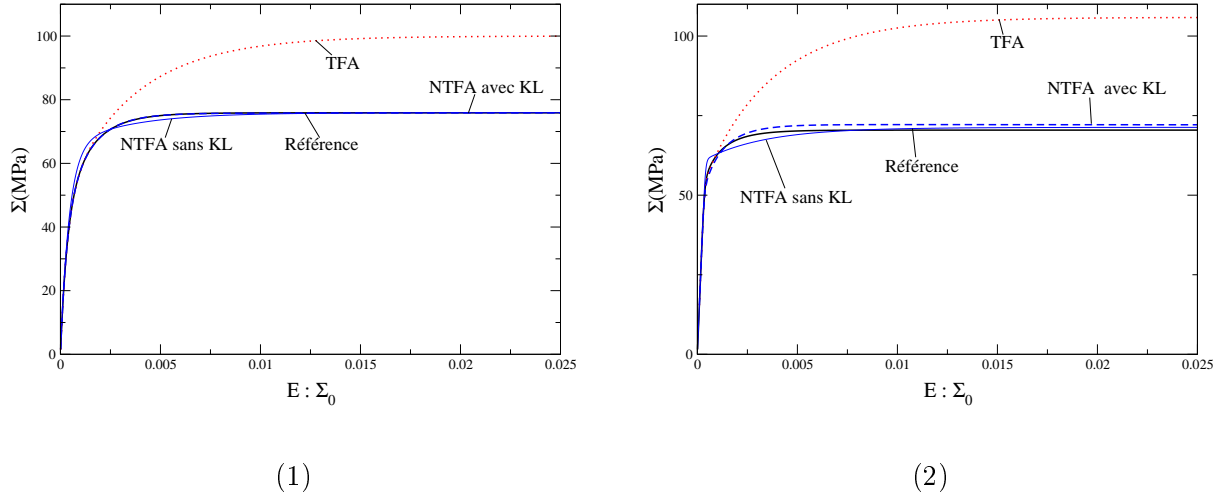


Figure 4.4 : Répartition hexagonale des fibres dans la cellule : prédiction de la TFA (ligne pointillée), de la NTFA sans Karhunen-Loève (ligne continue), de la NTFA avec Karhunen-Loève (ligne tirets) et résultats de référence : (1) cas $n=1$, $\sigma_0^{mat} = 50$ MPa ; (2) cas $n=8$, $\sigma_0^{mat} = 57.825$ MPa.

4.4 Application de la NTFA avec plusieurs types de chargement

On va maintenant appliquer la NTFA à des matériaux composites et pour laquelle les modes plastiques ont été déterminés à partir de deux chargements, la traction uniaxiale et le cisaillement pur.

4.4.1 Cellule avec arrangement hexagonal des fibres, données matériaux

La cellule utilisée est la même que dans le cas précédent (Figure 4.1). Cependant, l'étude d'un composite à fibres élastiques est ajoutée à celles de composites à fibres élastoviscoplastiques.

Fibre élastique

Les propriétés mécaniques de la fibre élastique sont rassemblées dans le Tableau 4.5, celle de la matrice élastoviscoplastique sont données dans le Tableau 4.6.

Module d'Young (GPa)	Coefficient de Poisson
400	0.2

Tableau 4.5 : Propriétés mécaniques de la fibre élastique.

Module d'Young (GPa)	Coefficient de Poisson	n	$\dot{\epsilon}_0$	σ_0 (MPa)
70	0.3	2	10^{-2}	100

Tableau 4.6 : Propriétés mécaniques de la matrice dans le cas de l'inclusion élastique.

Fibre viscoplastique, exposant de viscosité $n = 1$

Dans le cas où les deux phases de la cellule sont élastoviscoplastiques, le Tableau 4.7 donne les propriétés mécaniques de la fibre tandis que les Tableaux 4.8 et 4.9 rassemblent les données matériaux pour la matrice, respectivement dans le cas où l'exposant de viscosité n est égal à 1 et 8.

Module d'Young (GPa)	Coefficient de Poisson	n	$\dot{\epsilon}_0$	σ_0 (MPa)
100	0.3	1	10^{-5}	250

Tableau 4.7 : Propriétés mécaniques de la fibre élastoviscoplastique.

Module d'Young (GPa)	Coefficient de Poisson	n	$\dot{\epsilon}_0$	σ_0 (MPa)
180	0.3	1	10^{-5}	50

Tableau 4.8 : Propriétés mécaniques de la matrice pour un exposant de viscosité $n = 1$ dans le cas de l'inclusion élastoviscoplastique.

Module d'Young (GPa)	Coefficient de Poisson	n	$\dot{\epsilon}_0$	σ_0 (MPa)
180	0.3	8	10^{-5}	43.362

Tableau 4.9 : Propriétés mécaniques de la matrice pour un exposant de viscosité $n = 8$ dans le cas de l'inclusion élastoviscoplastique.

Fibre viscoplastique, exposant de viscosité $n = 8$

On a également réalisé des calculs sur une cellule unité pour laquelle les deux phases sont élastoviscoplastiques, mais au contraire des cas précédents, c'est la fibre qui a un exposant de viscosité égal à 8, et la matrice a un exposant $n = 1$. Les propriétés matériaux sont regroupés dans le Tableau 4.10 pour la fibre et dans le Tableau 4.11 pour la matrice.

Module d'Young (GPa)	Coefficient de Poisson	n	$\dot{\epsilon}_0$	σ_0 (MPa)
180	0.3	8	10^{-5}	43.362

Tableau 4.10 : Propriétés mécaniques de la fibre.

Module d'Young (GPa)	Coefficient de Poisson	n	$\dot{\epsilon}_0$	σ_0 (MPa)
100	0.3	1	10^{-5}	250

Tableau 4.11 : Propriétés mécaniques de la matrice.

4.4.2 Choix des modes plastiques

Afin de déterminer les modes plastiques utilisés dans la suite, on calcule dans un premier temps les champs de déformations viscoplastiques réels sous traction uniaxiale et sous cisaillement pur. De la même façon que dans le paragraphe 4.3.2, on prend 25 modes pour $\mathbf{E} : \boldsymbol{\Sigma}_0$ compris entre 0 et 5% pour chaque phase viscoplastique et chaque type de chargement, ce qui donne cinquante $\boldsymbol{\theta}^k(x)$ dans la matrice dans le cas de la cellule à fibre élastique, et cinquante $\boldsymbol{\theta}^k(x)$ dans chacune des deux phases de la cellule à fibres élastoviscoplastiques. Grâce à la décomposition de Karhunen-Loeve, on obtient les modes plastiques $\boldsymbol{\mu}^k$ pour chaque phase élastoviscoplastique et qu'on utilisera pour appliquer la méthode NTFA.

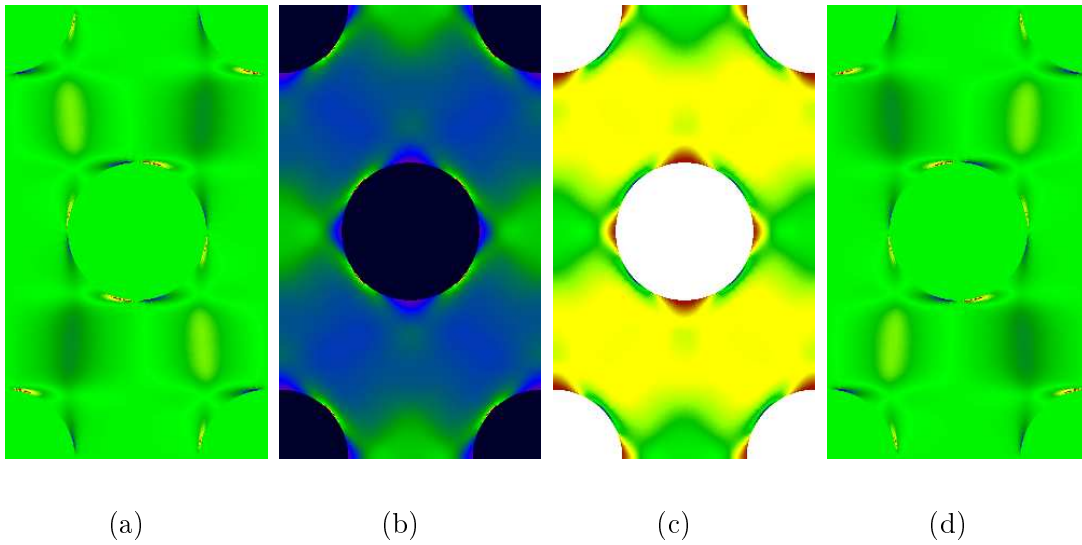


Figure 4.5 : Composante θ_{11} des champs de déformations viscoplastiques obtenus pour un chargement de cisaillement (a) et de traction (b) à $\mathbf{E} : \boldsymbol{\Sigma}_0 = 5\%$, composante μ_{11} des deux modes associés aux deux plus grandes valeurs propres (c) et (d) dans la matrice.

Tout d'abord, on montre un exemple des champs de déformations viscoplastiques de la matrice en traction et en cisaillement à 5% de déformation macroscopique et on les compare avec les deux modes associés aux deux plus grandes valeurs propres obtenus après application de la décomposition de Karhunen-Loève sur l'ensemble des champs de déformations viscoplastiques. Les valeurs propres λ_1 et λ_2 correspondant à ces deux modes sont quasiment les mêmes.

On constate que le mode associé à la plus grande valeur propre λ_1 correspond à un chargement de traction (Figure 4.5), alors que le mode suivant (associé à la valeur propre λ_2) correspond plutôt à un chargement de cisaillement (Figure 4.6), ce qui explique le fait que les deux premières valeurs propres sont presque égales, les modes étant très sensibles à la direction de chargement imposée afin de les déterminer, on retrouve ici dans les deux premiers modes les deux types de chargements qu'on a choisi d'imposer.

En ce qui concerne les modes plastiques de la fibre (Figures 4.7, 4.8), c'est le mode associé à

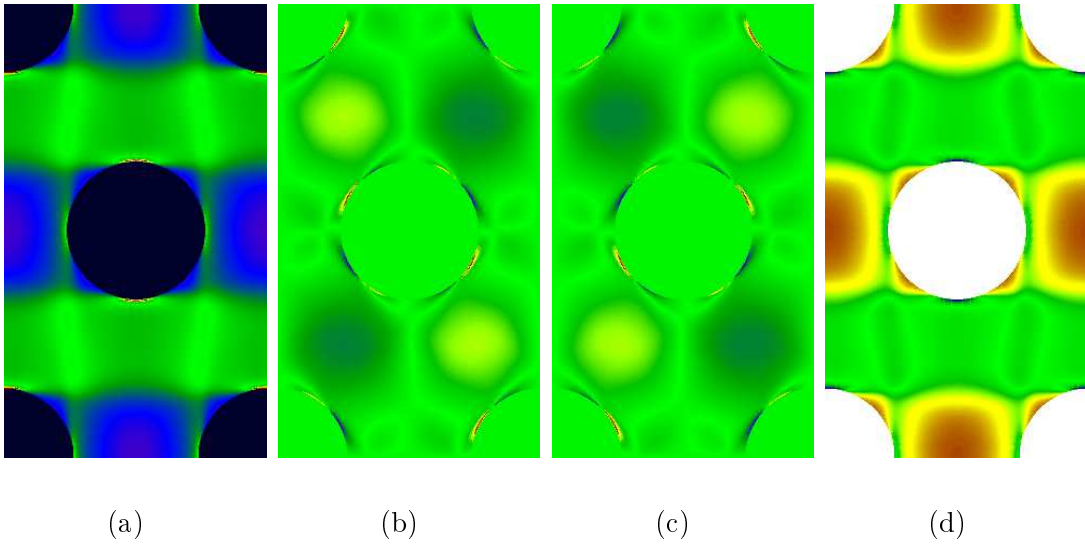


Figure 4.6 : Composante θ_{12} des champs de déformations viscoplastiques obtenus pour un chargement de cisaillement (a) et de traction (b) à $\mathbf{E} : \Sigma_0 = 5\%$, composante μ_{12} des deux modes associés aux deux plus grandes valeurs propres (c) et (d) dans la matrice.

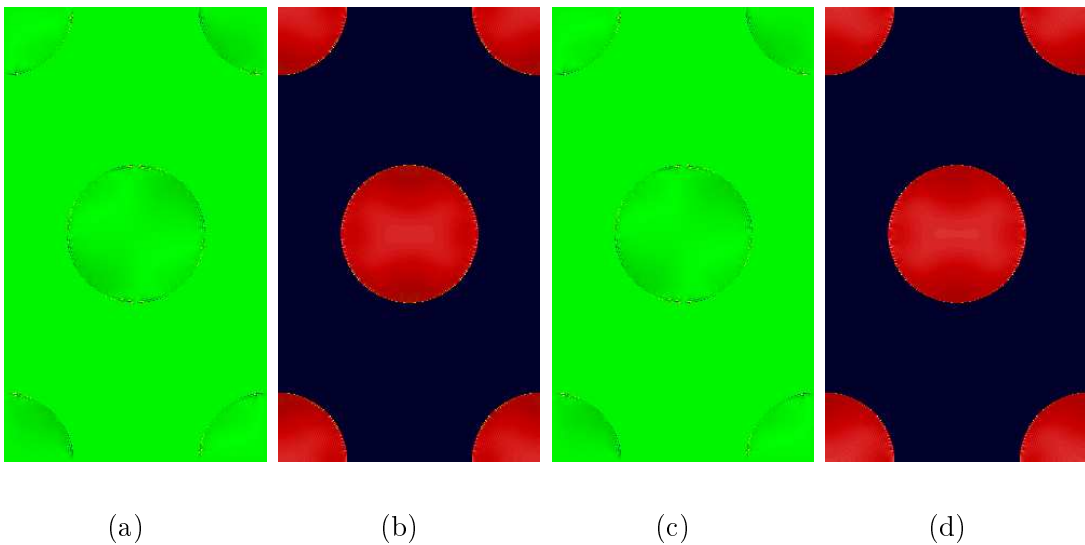


Figure 4.7 : Composante θ_{11} des champs de déformations viscoplastiques obtenus pour un chargement de cisaillement (a) et de traction (b) à $\mathbf{E} : \Sigma_0 = 5\%$, composante μ_{11} des deux modes associés aux deux plus grandes valeurs propres (c) et (d) dans la fibre.

la plus grande valeur propre qui correspond au cisaillement.

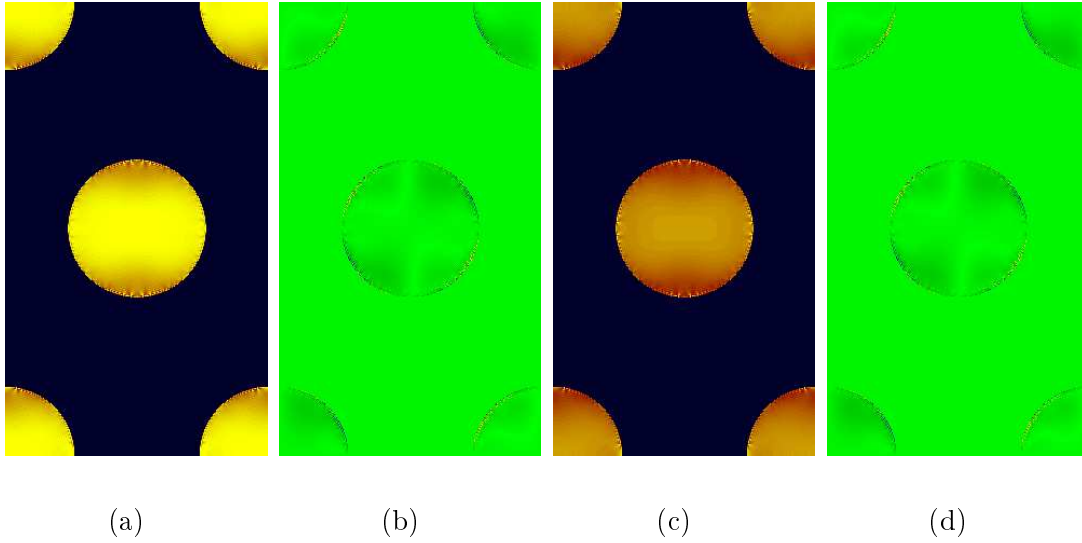


Figure 4.8 : Composante θ_{12} des champs de déformations viscoplastiques obtenus pour un chargement de cisaillement (a) et de traction (b) à $\mathbf{E} : \Sigma_0 = 5\%$, composante μ_{12} des deux modes associés aux deux plus grandes valeurs propres (c) et (d) dans la fibre.

4.4.3 Résultats

Réponse du VER soumis à du cisaillement ou de la traction

Dans un premier temps, on calcule la réponse du VER soumis aux mêmes chargements que ceux utilisés pour déterminer les modes plastiques, c'est à dire un chargement de cisaillement pur ou de traction uniaxiale, l'objectif étant de vérifier si l'utilisation de la transformation de Karhunen-Loève améliore les résultats obtenus précédemment grâce à la NTFA dans le chapitre 3.

Dans le cas de la fibre élastique (Figure 4.9), on constate que, grâce à la transformation de Karhunen-Loève, il y a une amélioration au niveau du coude pour la modélisation du comportement en traction. Pour le comportement en cisaillement, le résultat qui est déjà excellent dans l'étude sans la transformée de Karhunen-Loève, reproduit de manière très satisfaisante la zone d'écroutissage.

Dans le cas de la fibre viscoplastique et où l'exposant de viscosité de la matrice est $n = 1$ (Figure 4.10), on observe que la transformée de Karhunen-Loève permet d'obtenir une très bonne concordance entre le calcul exact et le résultat NTFA, à la fois pour le cas de la traction uniaxiale et celui du cisaillement pur.

Dans le cas de la fibre viscoplastique avec un exposant de viscosité de la matrice égal à 8 (Figure 4.11), on observe une amélioration dans le cas de la traction, mais dans le cas du cisaillement, le résultat avec l'utilisation de Karhunen-Loève n'est pas bon. On pourrait expliquer ce résultat par le fait que, dans le cas du cisaillement, les fibres ont peu d'effet sur le comportement global du composite. Or, les modes plastiques déterminés grâce à la transformation de Karhunen-

4.4. Application de la NTFA avec plusieurs types de chargement

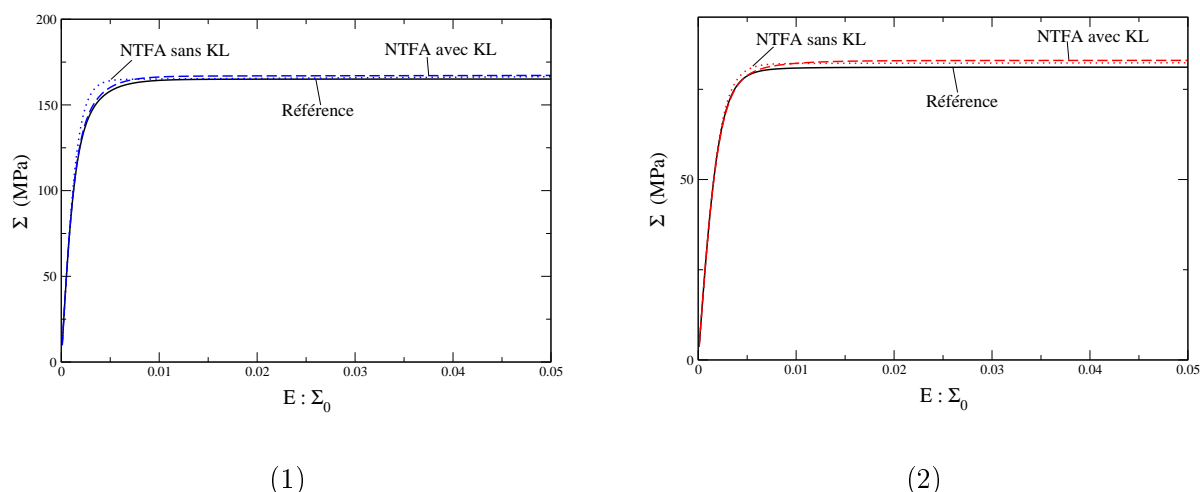


Figure 4.9 : Cas élastique, courbe de traction (1) et de cisaillement (2) : résultats de référence (ligne continue), prédiction NTFA sans Karhunen-Loève (ligne pointillée), prédiction NTFA avec Karhunen-Loève (ligne tirets).

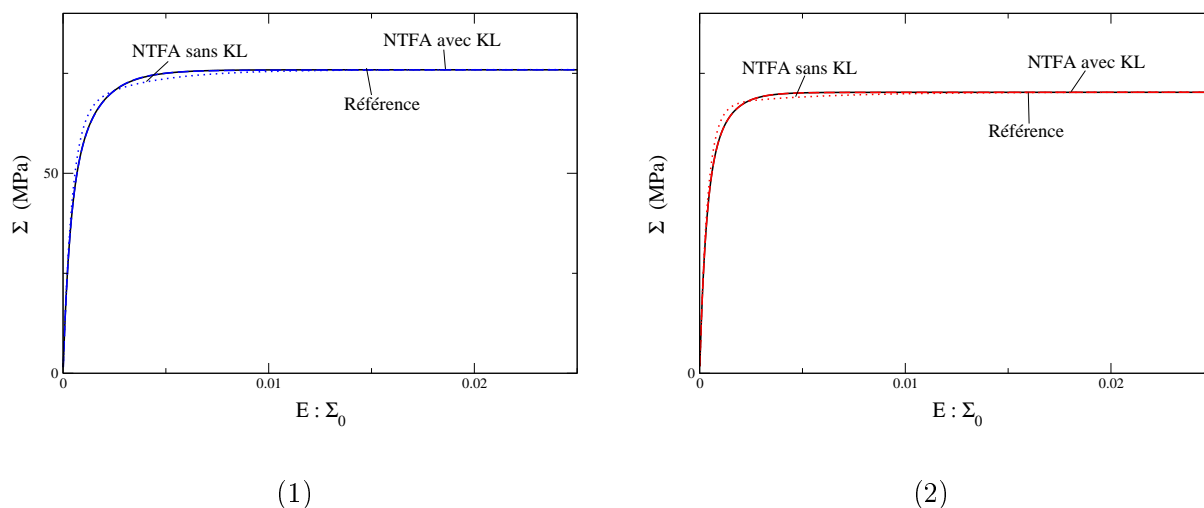


Figure 4.10 : Cas viscoplastique, $n = 1$ dans la matrice, courbe de traction (1) et de cisaillement (2) : résultat de référence (ligne continue), prédiction NTFA sans Karhunen-Loève (ligne pointillée), prédiction NTFA avec Karhunen-Loève (ligne tirets).

Loève prennent en compte l'information tout au long du chargement dans la fibre et dans la matrice, la zone d'écroutissement de la fibre étant plus importante que celle de la matrice, le résultat obtenu est « perturbé » par le mode prenant en compte le comportement en cisaillement de la fibre.

Dans le cas où l'on « inverse » les propriétés mécaniques des deux phases par rapport au cas précédent, on constate sur la Figure 4.12 que la NTFA donne d'excellents résultats, quelque soient les modes choisis (avec ou sans Karhunen-Loève).

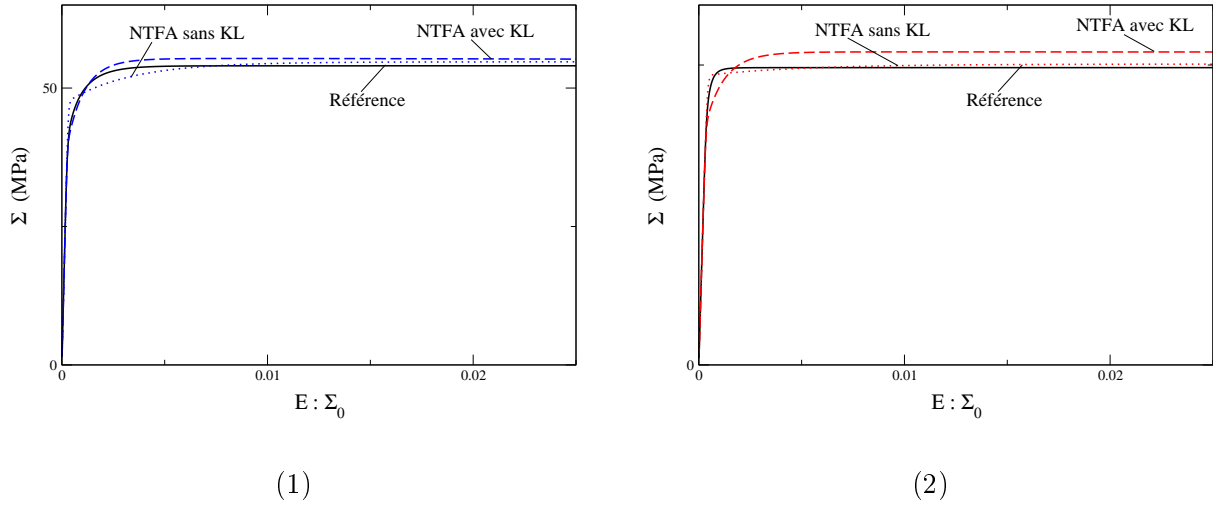


Figure 4.11 : Cas viscoplastique, $n = 8$ dans la matrice, courbe de traction (1) et de cisaillement (2) : résultats de référence (ligne continue), prédiction NTFA sans Karhunen-Loève (ligne pointillée), prédiction NTFA avec Karhunen-Loève (ligne tirets).

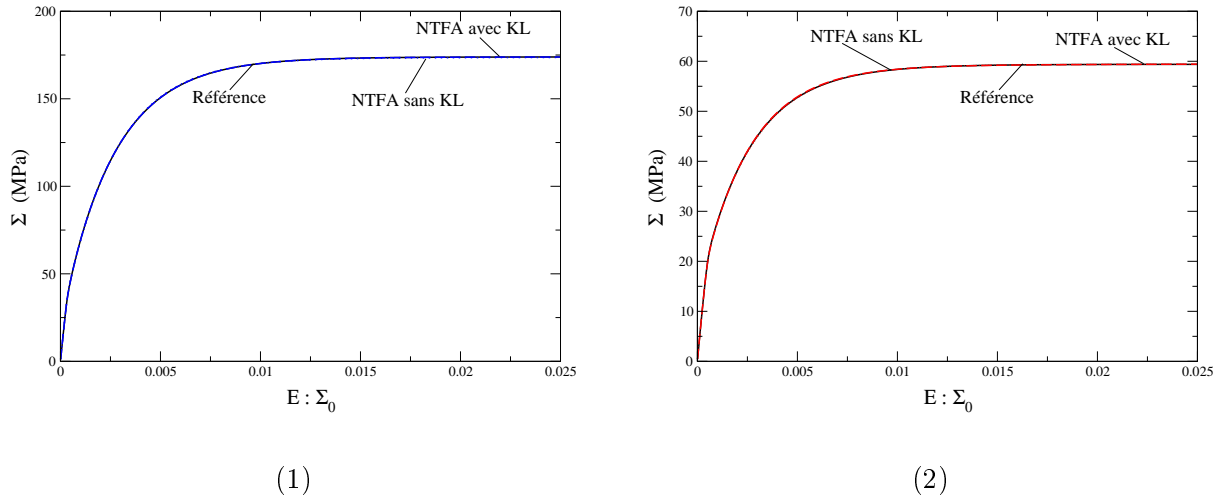


Figure 4.12 : Cas viscoplastique, $n = 8$ dans la fibre, courbe de traction (1) et de cisaillement (2) : résultats de référence (ligne continue), prédiction NTFA sans Karhunen-Loève (ligne pointillée), prédiction NTFA avec Karhunen-Loève (ligne tirets).

Hormis un cas particulier, la décomposition de Karhunen-Loève a permis d'améliorer les prédictions de la NTFA dans le cas des chargements utilisés pour déterminer les modes plastiques. La zone d'écrouissage est en général très bien modélisée, du fait de la prise en compte des informations contenues dans les champs de déformations viscoplastiques tout au long du trajet de chargement dans des directions de chargement fixées, ce qui n'était pas le cas lorsque les modes plastiques étaient déterminés à la fin d'un trajet de chargement, c'est-à-dire quand la contrainte d'écoulement était atteinte et que la déformation viscoplastique était totalement développée

4.4. Application de la NTFA avec plusieurs types de chargement

(chapitre 3).

On va à présent comparer les résultats dans le cas où le chargement imposé sur la cellule unité n'est pas un chargement utilisé pour déterminer les modes plastiques.

Réponses du VER soumis à un chargement différent de la traction uniaxiale ou du cisaillement pur

On impose un chargement tel que la direction de contrainte appliquée sur la cellule élémentaire soit égale à $\Sigma_0 = 2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 3(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)$.

Dans le cas de la fibre élastique (Figure 4.13), la NTFA avec application de Karhunen-Loève donne d'excellents résultats.

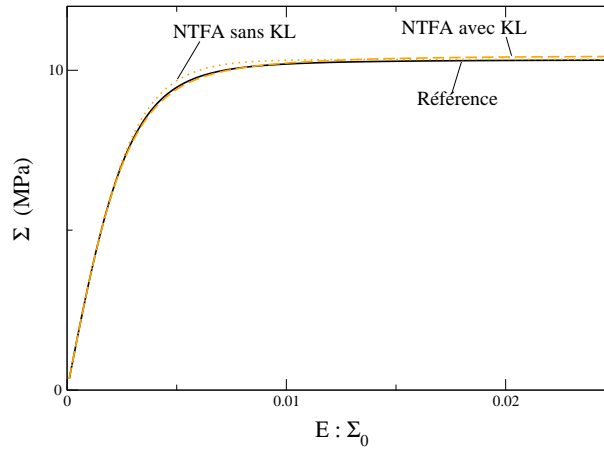
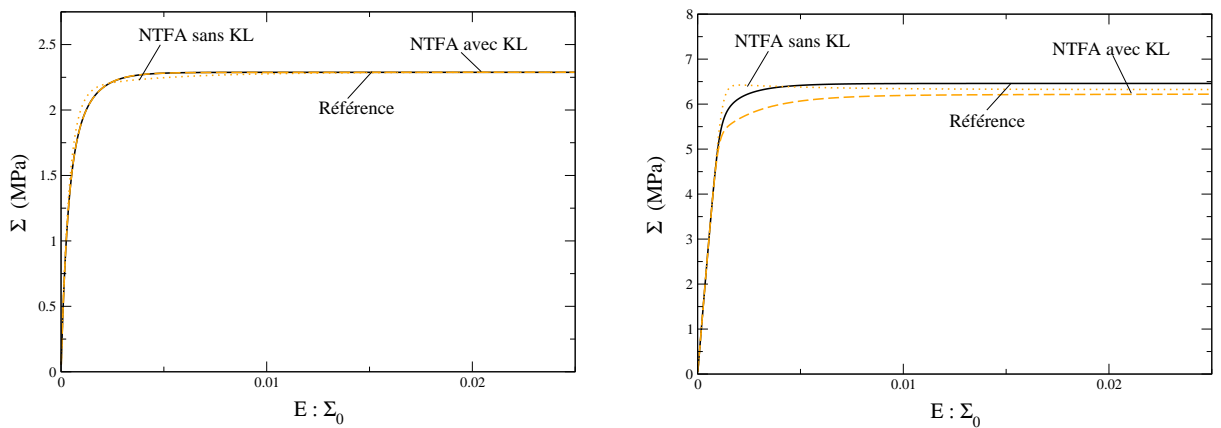


Figure 4.13 : Cas élastique, direction de chargement $\Sigma_0 = 2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 3(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)$.



(1)

(2)

Figure 4.14 : Cas viscoplastique, $n = 1$ (1) et $n = 8$ (2) dans la matrice, direction de chargement $\Sigma_0 = 2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 3(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)$.

Dans le cas de la fibre viscoplastique (Figure 4.14(1)) avec une viscosité linéaire dans la matrice ($n = 1$), le comportement prédit par la NTFA avec Karhunen-Loève est excellent. Les modes plastiques obtenus avec la transformation de Karhunen-Loève permettent, de la même façon que dans le cas des chargements utilisés pour la détermination des modes, d'améliorer le résultat obtenu pour la modélisation de la zone d'écroutissage.

Dans le cas où l'exposant de viscosité de la matrice est égal à 8 (Figure 4.14(2)), la contrainte d'écoulement est sous-estimée, or il est difficile d'obtenir un résultat correct alors que pour un chargement simple de cisaillement, utilisé pour calculer les modes, la NTFA donne des résultats inexacts.

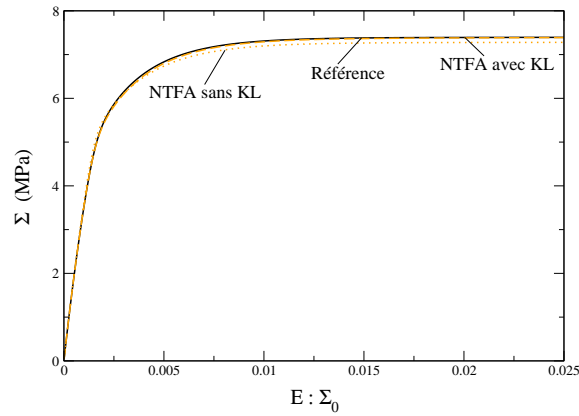


Figure 4.15 : Cas viscoplastique, exposant de viscosité $n = 8$ dans la fibre, direction de chargement $\Sigma_0 = 2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 3(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)$.

Dans le dernier cas étudié (Figure 4.15), où les propriétés des phases sont inversées par rapport à l'exemple précédent, on constate que la NTFA avec Karhunen-Loève prédit un comportement en parfaite concordance avec le calcul de référence, alors que la NTFA sans Karhunen-Loève sous-estime légèrement le comportement, alors que dans le cas des chargements utilisés pour la détermination des modes (Figure 4.12), les deux modèles NTFA avec et sans KL donnaient des résultats NTFA excellents.

Comme pour les chargements en traction uniaxiale et en cisaillement pur, la transformation de Karhunen-Loève permet au modèle NTFA de donner de meilleures prédictions dans toutes les gammes de déformations.

4.5 Conclusion

Le choix des modes plastiques est un point-clé dans la précision de la méthode NTFA. Or, dans le chapitre 3, nous avons constaté qu'avec le choix que nous avons fait, les prédictions de la NTFA n'étaient pas correctes pour certaines gammes de déformations (ces prédictions étaient toujours meilleures que les prédictions de la TFA). Ces erreurs étaient dues au fait que l'information contenue dans les modes ne concernait qu'une seule gamme de déformation (en

général, la zone d'écoulement qui servait pour déterminer les modes).

Dans ce chapitre, nous avons donc appliqué une méthode qui permet de prendre en considération les informations décrivant le comportement non-uniforme du matériau pour différentes gammes de déformation, afin de modéliser au mieux le comportement tout au long du chargement. Cette méthode, la transformation de Karhunen-Loève, a également l'avantage de limiter le nombre de modes, et donc le nombre de variables internes utilisées pour décrire le comportement des matériaux. Les résultats prédits par le modèle NTFA après application de cette transformation sont dans l'ensemble très satisfaisants quelque soit la zone de déformation modélisée.

Dans la partie suivante, on va donc traiter le cas des matériaux poreux, et voir ce que cela implique au niveau de la description du modèle NTFA, ainsi qu'au niveau du choix des modes plastiques, et plus particulièrement de l'application de la transformation de Karhunen-Loève.

Troisième partie

Prise en compte de la porosité dans l'analyse par champs de transformation non uniformes

Chapitre 5

Analyse par champs de transformation non uniformes dans le cas de matériaux poreux

Sommaire

5.1	Introduction	88
5.2	Principe de la méthode	88
5.2.1	Relations constitutives pour les constituants	88
5.2.2	Champs de transformation non-uniformes	89
5.2.3	Variables réduites	90
5.2.4	Relations constitutives pour les variables réduites	91
5.3	Choix des modes plastiques - Transformation de Karhunen-Loève	93
5.4	Récapitulatif des équations du modèle NTFA pour la viscoplas- ticit� compressible	95

5.1 Introduction

Jusqu'à présent, les problèmes abordés ne traitaient que de matériaux viscoplastiques incompressibles. Or, le MOX étant un matériau poreux, le modèle NTFA développé dans la partie II n'est plus applicable en l'état. En effet, du fait de la porosité, la viscoplasticité devient compressible, et une partie hydrostatique apparaît dans le potentiel viscoplastique. Les variables du problème peuvent donc toutes être décomposées en une partie « déviatorique » et une partie « sphérique ».

Pour pouvoir appliquer la méthode NTFA à ce type de matériaux, il faut donc redéfinir le modèle en prenant en compte par rapport au modèle précédent la partie « sphérique » de chaque variable. Les modes sont aussi affectés par ce changement dans le potentiel, la procédure de choix des modes plastiques grâce à la décomposition de Karhunen-Loève est donc redéfinie dans la deuxième partie de ce chapitre.

5.2 Principe de la méthode

5.2.1 Relations constitutives pour les constituants

Les constituants considérés dans ce chapitre sont élastoviscoplastiques poreux. Ils ont un comportement standard généralisé et seuls les mécanismes dissipatifs décrits par la déformation viscoplastique ε^{vp} sont décrits :

$$\omega(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}) : \mathbf{L} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}), \quad (5.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \omega}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}) = \mathbf{L} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}), \quad (5.2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}, f), \quad (5.3)$$

où f désigne la porosité. Dans la suite, pour simplifier les écritures, on omet la dépendance en f du potentiel viscoplastique ψ . De plus, on suppose que tous les constituants sont isotropes, le potentiel viscoplastique dépend alors de $\boldsymbol{\sigma}$ uniquement à travers ses trois invariants. Mais en pratique, comme cela est vérifié dans [DUV84], la dépendance au troisième invariant $det(\boldsymbol{\sigma})$ est négligeable par rapport à la dépendance à $\sigma_{eq} = \left(\frac{3}{2}\tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}\right)^{1/2}$ et à $\sigma_m = \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma})$. On peut donc écrire la loi d'évolution de la variable interne ε^{vp} de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} &= \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\sigma_{eq}, \sigma_m), \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{eq}}(\sigma_{eq}, \sigma_m) \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_m}(\sigma_{eq}, \sigma_m) \frac{\partial \sigma_m}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \\ &= \frac{3}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{eq}}(\sigma_{eq}, \sigma_m) \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}} + \frac{1}{3} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_m}(\sigma_{eq}, \sigma_m) \boldsymbol{\delta}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

où $\boldsymbol{\delta}$ désigne le symbole de Kronecker.

Dans le cas où les variables d'état sont fixées (pas d'évolution du système), les champs de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et de déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ dans le VER vérifient le problème élastique linéaire (5.5) :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}(\mathbf{x}) : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}(\mathbf{x})), \quad \text{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) = 0, \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}, \quad (5.5)$$

avec des conditions de périodicité sur le VER. \mathbf{E} et $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}$ étant connus, le champ de déformations $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ peut s'écrire comme la somme des termes suivants, grâce au principe de superposition :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) : \mathbf{E} + \frac{1}{|V|} \int_V \mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') : \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \mathbf{A}(\mathbf{x}) : \mathbf{E} + \mathbf{D} * \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}(\mathbf{x}), \quad (5.6)$$

où $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ est le tenseur élastique de localisation de la déformation et $\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ l'opérateur non local qui donne, à déformation moyenne nulle, la déformation au point \mathbf{x} créée par la prédéformation $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}(\mathbf{x}')$ au point \mathbf{x}' .

5.2.2 Champs de transformation non-uniformes

Dans le cas des constituants viscoplastiques poreux, la viscoplasticité est compressible. Le champ de déformations viscoplastiques se décompose alors en une partie déviatorique et une partie sphérique :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}(\mathbf{x}) &= \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{vp}}(\mathbf{x}) + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{vp}}(\mathbf{x})\boldsymbol{\delta}, \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{vp}}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (5.7)$$

On définit ainsi $\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{\text{vp}}$ et $\dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{\text{vp}}$ à partir de l'équation (5.4) :

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{\text{vp}} = \frac{3}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{eq}}(\sigma_{eq}, \sigma_m) \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}}, \quad (5.8)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{\text{vp}} = \frac{1}{3} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_m}(\sigma_{eq}, \sigma_m). \quad (5.9)$$

Pour réduire le nombre de variables internes, chaque partie de l'équation (5.7) est décomposée sur un ensemble de modes plastiques : un ensemble de champs tensoriels déviatoriques $\{\tilde{\boldsymbol{\mu}}_k\}$, $k = 1, \dots, M_1$ pour la partie déviatorique du champ de déformations viscoplastiques et un ensemble de champs scalaires $\{\hat{\mu}_\ell\}$, $\ell = 1, \dots, M_2$ pour la partie sphérique :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{M_1} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^{\text{vp}} \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k(\mathbf{x}) + \sum_{\ell=1}^{M_2} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\ell^{\text{vp}} \hat{\mu}^\ell(\mathbf{x})\boldsymbol{\delta}. \quad (5.10)$$

Comme pour les matériaux élastoviscoplastiques incompressibles, on définit certaines propriétés pour chaque ensemble de modes :

1. *Les modes sont non-uniformes.*
2. *Le support de chaque mode est entièrement contenu dans une seule phase du matériau.*
3. *Les modes sont orthogonaux.*

4. *Les modes sont normalisés.* Pour les modes déviatoriques, comme dans le cas incompressible, on prend : $\langle \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{eq}^k \rangle = 1$ où $\mu_{eq}^k = (\frac{2}{3} \boldsymbol{\mu}^k : \boldsymbol{\mu}^k)^{1/2}$. Dans le cas des modes sphériques, on prend : $\langle |\text{tr} \hat{\boldsymbol{\mu}}^l| \rangle = 1$.

Avec l'approximation (5.10), l'équation (5.6) devient :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} : \mathbf{E} + \sum_{k=1}^{M_1} \tilde{\varepsilon}_k^{\text{vp}} (\mathbf{D} * \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k) + \sum_{\ell=1}^{M_2} \tilde{\varepsilon}_\ell^{\text{vp}} (\mathbf{D} * \hat{\boldsymbol{\mu}}^\ell \boldsymbol{\delta}), \quad (5.11)$$

avec \mathbf{A} le tenseur de localisation des déformations et $(\mathbf{D} * \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k)$ et $(\mathbf{D} * \hat{\boldsymbol{\mu}}^\ell \boldsymbol{\delta})$ les facteurs d'influence.

Remarque : On notera dorénavant \tilde{X} toutes les variables qui se rapportent à la partie déviatorique des modes, et \hat{X} les variables qui se rapportent à la partie sphérique des modes.

5.2.3 Variables réduites

De la même façon que dans le cas de la viscoplasticité incompressible (paragraphe 3.2.3), on définit une déformation réduite déviatorique \tilde{e}_k mais aussi ici une déformation réduite sphérique \hat{e}_k . On multiplie l'équation (5.11) par $\tilde{\boldsymbol{\mu}}^k$ puis on prend la moyenne sur le VER pour obtenir \tilde{e}_k , tandis qu'on multiplie (5.11) par $\hat{\boldsymbol{\mu}}^k \boldsymbol{\delta}$ et on moyenne sur le VER pour obtenir \hat{e}_k :

$$\begin{aligned} \tilde{e}_k &= \langle \boldsymbol{\varepsilon} : \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k \rangle, \\ &= \langle \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k : \mathbf{A} \rangle : \mathbf{E} + \sum_{p=1}^{M_1} \langle \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k : (\mathbf{D} * \tilde{\boldsymbol{\mu}}^p) \rangle \tilde{\varepsilon}_p^{\text{vp}} + \sum_{\ell=1}^{M_2} \langle \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k : (\mathbf{D} * \hat{\boldsymbol{\mu}}^\ell \boldsymbol{\delta}) \rangle \tilde{\varepsilon}_\ell^{\text{vp}}, \\ &= \tilde{\mathbf{a}}_k : \mathbf{E} + \sum_{p=1}^{M_1} \tilde{D}_{kp} \tilde{\varepsilon}_p^{\text{vp}} + \sum_{\ell=1}^{M_2} \tilde{F}_{k\ell} \tilde{\varepsilon}_\ell^{\text{vp}}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

avec $\tilde{D}_{kp} = \langle \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k : (\mathbf{D} * \tilde{\boldsymbol{\mu}}^p) \rangle$ et $\tilde{F}_{k\ell} = \langle \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k : (\mathbf{D} * \hat{\boldsymbol{\mu}}^\ell \boldsymbol{\delta}) \rangle$ les facteurs d'influence « déviatoriques » réduits,

$$\begin{aligned} \hat{e}_k &= \langle \boldsymbol{\varepsilon} : \hat{\boldsymbol{\mu}}^k \boldsymbol{\delta} \rangle, \\ &= \langle \hat{\boldsymbol{\mu}}^k \boldsymbol{\delta} : \mathbf{A} \rangle : \mathbf{E} + \sum_{p=1}^{M_1} \langle \hat{\boldsymbol{\mu}}^k \boldsymbol{\delta} : (\mathbf{D} * \tilde{\boldsymbol{\mu}}^p) \rangle \tilde{\varepsilon}_p^{\text{vp}} + \sum_{\ell=1}^{M_2} \langle \hat{\boldsymbol{\mu}}^k \boldsymbol{\delta} : (\mathbf{D} * \hat{\boldsymbol{\mu}}^\ell \boldsymbol{\delta}) \rangle \tilde{\varepsilon}_\ell^{\text{vp}}, \\ &= \hat{\mathbf{a}}_k : \mathbf{E} + \sum_{p=1}^{M_1} \hat{F}_{kp} \tilde{\varepsilon}_p^{\text{vp}} + \sum_{\ell=1}^{M_2} \hat{D}_{k\ell} \tilde{\varepsilon}_\ell^{\text{vp}}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

avec $\hat{D}_{k\ell} = \langle \hat{\boldsymbol{\mu}}^k \boldsymbol{\delta} : (\mathbf{D} * \hat{\boldsymbol{\mu}}^\ell \boldsymbol{\delta}) \rangle$ et $\hat{F}_{kp} = \langle \hat{\boldsymbol{\mu}}^k \boldsymbol{\delta} : (\mathbf{D} * \tilde{\boldsymbol{\mu}}^p) \rangle$ les facteurs d'influence « sphériques » réduits.

Par analogie avec les déformations réduites \tilde{e}_k et \hat{e}_k , on définit les deux contraintes réduites $\tilde{\tau}_k$ et $\hat{\sigma}_k$ suivantes :

$$\tilde{\tau}_k = \langle \boldsymbol{\sigma} : \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k \rangle = \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k \rangle, \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_k &= \langle \boldsymbol{\sigma} : \hat{\boldsymbol{\mu}}^k \boldsymbol{\delta} \rangle = \langle \sigma_m \boldsymbol{\delta} : \hat{\boldsymbol{\mu}}^k \boldsymbol{\delta} \rangle, \\ &= 3 \langle \sigma_m \hat{\boldsymbol{\mu}}^k \rangle = \langle \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \hat{\boldsymbol{\mu}}^k \rangle, \end{aligned} \quad (5.15)$$

ainsi que les déformations viscoplastiques réduites :

$$\tilde{e}_k^{\text{vp}} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}} : \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k \rangle = \langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{vp}} : \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k \rangle, \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \hat{e}_k^{\text{vp}} &= \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}} : \hat{\boldsymbol{\mu}}^k \boldsymbol{\delta} \rangle, \\ &= \langle \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}} \hat{\boldsymbol{\mu}}^k \rangle. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Il est à noter que l'ensemble $\{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^{\text{vp}}\}$ peut être remplacé par $\{\tilde{e}_k^{\text{vp}}\}$ puisqu'on a :

$$\tilde{e}_k^{\text{vp}} = \langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{vp}} : \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k \rangle = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^{\text{vp}} \langle \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k : \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k \rangle, \quad (5.18)$$

tandis que l'ensemble $\{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^{\text{vp}}\}$ peut être remplacé par $\{\hat{e}_k^{\text{vp}}\}$ puisqu'on a :

$$\hat{e}_k^{\text{vp}} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}} : \hat{\boldsymbol{\mu}}^k \boldsymbol{\delta} \rangle = 3 \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^{\text{vp}} \langle (\hat{\boldsymbol{\mu}}^k)^2 \rangle. \quad (5.19)$$

5.2.4 Relations constitutives pour les variables réduites

Dans le cas où sa partie hydrostatique n'est pas nulle puisque la viscoplasticité est compressible et où les constituants sont isotropes, la contrainte microscopique s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2G (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{vp}}) + k \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}) \boldsymbol{\delta}, \quad (5.20)$$

avec k le module de compressibilité et G le module de cisaillement du matériau.

Les deux contraintes réduites $\tilde{\tau}_k$ et $\hat{\sigma}_k$ s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_k &= 2G^r (\tilde{e}_k - \tilde{e}_k^{\text{vp}}), \\ \hat{\sigma}_k &= 3k^r (\hat{e}_k - \hat{e}_k^{\text{vp}}), \end{aligned} \quad (5.21)$$

avec k^r et G^r les modules de compressibilité et de cisaillement de la phase r à laquelle est associé le mode k .

A partir des lois d'évolution (5.8) et (5.9), on obtient les lois d'évolution des variables internes

réduites :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{e}}_k^{\text{vp}} &= \left\langle \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{\text{vp}} : \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k \right\rangle, \\ &= \left\langle \frac{3}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{eq}}(\sigma_{eq}, \sigma_m) \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k}{\sigma_{eq}} \right\rangle,\end{aligned}\quad (5.22)$$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{e}}_k^{\text{vp}} &= \left\langle \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{\text{vp}} : \hat{\boldsymbol{\mu}}^k \boldsymbol{\delta} \right\rangle, \\ &= \left\langle \text{tr} \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{\text{vp}} \hat{\boldsymbol{\mu}}^k \right\rangle, \\ &= \left\langle \frac{1}{3} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_m}(\sigma_{eq}, \sigma_m) \frac{\boldsymbol{\sigma} : \hat{\boldsymbol{\mu}}^k \boldsymbol{\delta}}{\sigma_m} \right\rangle.\end{aligned}\quad (5.23)$$

Comme dans le cas incompressible (paragraphe 3.2.4), on ne peut calculer explicitement ces moyennes, il est donc nécessaire de faire des approximations. Une approximation possible est donnée par Michel et Suquet dans le cas de la viscoplasticité incompressible [MIC03], ils estiment une « contrainte réduite globale » a_r pour la phase r et agissant sur l'ensemble des modes à support dans cette phase du fait qu'il soit attendu que l'ensemble des modes plastiques à support dans la phase r soient couplés. Dans le cas où la porosité intervient, cette approximation peut être utilisée pour σ_{eq} , et a_r est définie comme « contrainte réduite globale déviatorique ». Une deuxième approximation est nécessaire pour σ_m . On définit une « contrainte réduite globale sphérique » b_r pour la phase r et agissant sur l'ensemble des modes « sphériques » à support dans cette phase. a_r et b_r sont estimées de la façon suivante :

$$\begin{aligned}a_r &= \left[\sum_{k=1}^{M_1(r)} (\tilde{\tau}_k)^2 \right]^{1/2}, \\ b_r &= \left[\sum_{\ell=1}^{M_2(r)} (\hat{\sigma}_\ell)^2 \right]^{1/2},\end{aligned}$$

où $M_1(r)$ et $M_2(r)$ sont respectivement le nombre de modes déviatoriques et sphériques à support dans la phase r . σ_{eq} est donc remplacé par a_r et σ_m par b_r . On obtient les lois d'évolution suivantes pour les variables internes réduites :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{e}}_k^{\text{vp}} &= \frac{3}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{eq}}(a_r, b_r) \frac{\left\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k \right\rangle}{a_r}, \\ &= \frac{3}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{eq}}(a_r, b_r) \frac{\tilde{\tau}_k}{a_r},\end{aligned}\quad (5.24)$$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{e}}_k^{\text{vp}} &= \frac{1}{3} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_m}(a_r, b_r) \frac{\left\langle \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \hat{\boldsymbol{\mu}}^k \right\rangle}{b_r}, \\ &= \frac{1}{3} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_m}(a_r, b_r) \frac{\hat{\sigma}_k}{b_r}.\end{aligned}\quad (5.25)$$

Enfin, on calcule la contrainte macroscopique en moyennant la contrainte microscopique résultant des équations (5.2), (5.10), (5.11) :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma} &= \langle \mathbf{L} : \mathbf{A} \rangle : \mathbf{E} + \sum_{k=1}^{M_1} \left\langle (\mathbf{L} : (\mathbf{D} * \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k)) - (\mathbf{L} : \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k) \right\rangle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^{\text{vp}} + \sum_{k=1}^{M_2} \left\langle (\mathbf{L} : (\mathbf{D} * \hat{\boldsymbol{\mu}}^k \boldsymbol{\delta})) - (\mathbf{L} : \hat{\boldsymbol{\mu}}^k \boldsymbol{\delta}) \right\rangle \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^{\text{vp}}, \\ &= \langle \mathbf{L} : \mathbf{A} \rangle : \mathbf{E} + \sum_{k=1}^{M_1} \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^{\text{vp}} + \sum_{k=1}^{M_2} \hat{\boldsymbol{\rho}}_k \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^{\text{vp}}.\end{aligned}\quad (5.26)$$

Les tenseurs $\tilde{\boldsymbol{\rho}}_k = \left\langle (\mathbf{L} : (\mathbf{D} * \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k)) - (\mathbf{L} : \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k) \right\rangle$ et $\hat{\boldsymbol{\rho}}_k = \left\langle (\mathbf{L} : (\mathbf{D} * \hat{\boldsymbol{\mu}}^k \boldsymbol{\delta})) - (\mathbf{L} : \hat{\boldsymbol{\mu}}^k \boldsymbol{\delta}) \right\rangle$ sont calculés une fois pour toutes. On verra dans le chapitre 6, la mise en oeuvre de la méthode pour des matériaux poreux élastoviscoplastiques dont le comportement est défini par un potentiel elliptique.

5.3 Choix des modes plastiques - Transformation de Karhunen-Loève

Dans le cas des matériaux poreux, les différents champs caractérisant le comportement des matériaux ne sont pas à trace nulle, c'est à dire qu'il existe une partie hydrostatique. La décomposition du champ de déformation viscoplastique donnée au chapitre précédent grâce à l'équation (5.10) nécessite la construction de deux ensembles de modes, $\{\tilde{\boldsymbol{\mu}}^k\}_{k=1, \dots, M_T(r)}$ et $\{\hat{\boldsymbol{\mu}}^k\}_{k=1, \dots, M_T(r)}$. On détermine tout d'abord les données numériques nécessaires à la construction de ces modes en résolvant le problème local non linéaire complet sur le VER étudié. De ces calculs et pour chaque phase r du VER, on extrait pour différents instants de chargement, $M_T(r)$ champs de déformation viscoplastiques normalisés ($\langle \boldsymbol{\theta}^\ell : \boldsymbol{\theta}^\ell \rangle = 1$) que l'on note $\boldsymbol{\theta}^\ell(\mathbf{x})$, $\ell = 1, \dots, M_T(r)$. Puis on décompose ces champs en une partie déviatorique qu'on notera $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x})$, et une partie sphérique notée $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x})\boldsymbol{\delta}$:

$$\boldsymbol{\theta}^\ell(\mathbf{x}) = \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\ell(\mathbf{x}) + \hat{\boldsymbol{\theta}}^\ell(\mathbf{x})\boldsymbol{\delta}.\quad (5.27)$$

On applique la transformation de Karhunen-Loève sur chaque partie afin de conserver les propriétés d'orthogonalité de la partie sphérique et de la partie déviatorique. On calcule donc deux matrices de corrélation $\tilde{\mathbf{g}}$ et $\hat{\mathbf{g}}$ telles que :

$$\tilde{g}_{ij} = \left\langle \tilde{\boldsymbol{\theta}}^i : \tilde{\boldsymbol{\theta}}^j \right\rangle, \quad \hat{g}_{ij} = 3 \left\langle \hat{\boldsymbol{\theta}}^i \hat{\boldsymbol{\theta}}^j \right\rangle.\quad (5.28)$$

Les vecteurs propres $\tilde{\mathbf{v}}^k$ et $\hat{\mathbf{v}}^k$ de chaque matrice de corrélation, ainsi que les valeurs propres associées $\tilde{\lambda}_k$ et $\hat{\lambda}_k$ sont alors calculés et vérifient la propriété suivante :

$$\sum_{j=1}^{M_T(r)} \tilde{g}_{ij} \tilde{v}_j^k = \tilde{\lambda}_k \tilde{v}_i^k, \quad \sum_{j=1}^{M_T(r)} \hat{g}_{ij} \hat{v}_j^k = \hat{\lambda}_k \hat{v}_i^k.\quad (5.29)$$

Les deux ensembles de modes déviatoriques et sphériques sont construits à partir de ces données :

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}^k(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=1}^{M_T(r)} \tilde{v}_\ell^k \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\ell(\mathbf{x}), \quad \hat{\boldsymbol{\mu}}^k(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=1}^{M_T(r)} \hat{v}_\ell^k \hat{\boldsymbol{\theta}}^\ell(\mathbf{x}).\quad (5.30)$$

On vérifie alors que ces modes sont totalement décorrélés. Pour cela, il faut montrer que $\langle \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k : \tilde{\boldsymbol{\mu}}^r \rangle = \tilde{\lambda}_k$ si $k = r$ et 0 sinon, et que $\langle \hat{\boldsymbol{\mu}}^k \boldsymbol{\delta} : \hat{\boldsymbol{\mu}}^r \boldsymbol{\delta} \rangle = \hat{\lambda}_k$ si $k = r$, 0 sinon. Dans un premier temps, on calcule la moyenne du produit doublement contracté d'un mode plastique avec un champ de déformation viscoplastique pour chaque ensemble :

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k : \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\ell \rangle &= \sum_{i=1}^{M_T(r)} \tilde{v}_i^k \langle \tilde{\boldsymbol{\theta}}^i : \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\ell \rangle, & \langle \hat{\boldsymbol{\mu}}^k \boldsymbol{\delta} : \hat{\boldsymbol{\theta}}^\ell \boldsymbol{\delta} \rangle &= \sum_{i=1}^{M_T(r)} \hat{v}_i^k \langle \hat{\boldsymbol{\theta}}^i \boldsymbol{\delta} : \hat{\boldsymbol{\theta}}^\ell \boldsymbol{\delta} \rangle, \\
 &= \sum_{i=1}^{M_T(r)} \tilde{g}_{il} v_i^k, & &= 3 \sum_{i=1}^{M_T(r)} \hat{v}_i^k \langle \hat{\boldsymbol{\theta}}^i \hat{\boldsymbol{\theta}}^\ell \rangle, \\
 &= \tilde{\lambda}_k \tilde{v}_\ell^k, & &= \sum_{i=1}^{M_T(r)} \hat{g}_{il} \hat{v}_i^k, \\
 & & &= \hat{\lambda}_k \hat{v}_\ell^k.
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

On calcule enfin le produit de deux modes plastiques :

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k : \tilde{\boldsymbol{\mu}}^r \rangle &= \sum_{\ell=1}^{M_T(r)} \tilde{v}_\ell^r \langle \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k : \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\ell \rangle, & \langle \hat{\boldsymbol{\mu}}^k \boldsymbol{\delta} : \hat{\boldsymbol{\mu}}^r \boldsymbol{\delta} \rangle &= \sum_{\ell=1}^{M_T(r)} \hat{v}_\ell^k \langle \hat{\boldsymbol{\mu}}^k \boldsymbol{\delta} : \hat{\boldsymbol{\theta}}^\ell \boldsymbol{\delta} \rangle, \\
 &= \tilde{\lambda}_k \sum_{\ell=1}^{M_T(r)} \tilde{v}_\ell^k \tilde{v}_\ell^r, & &= \hat{\lambda}_k \sum_{\ell=1}^{M_T(r)} \hat{v}_\ell^k \hat{v}_\ell^r, \\
 &= \begin{cases} \tilde{\lambda}_k & \text{si } k = r \\ 0 & \text{si } k \neq r \end{cases}, & &= \begin{cases} \hat{\lambda}_k & \text{si } k = r \\ 0 & \text{si } k \neq r \end{cases}
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Les modes plastiques sont donc bien orthogonaux.

De plus, on sait que, grâce à la transformation de Karhunen-Loève, la magnitude d'une valeur propre correspond à la quantité d'information contenue dans le vecteur propre associé. Dit autrement, plus le rapport $\tilde{\lambda}_\ell / \left(\sum_{k=1}^{M_T(r)} \tilde{\lambda}_k \right)$ est proche de 1, plus le vecteur propre $\tilde{\boldsymbol{v}}_\ell$ associé à $\tilde{\lambda}_\ell$ contient d'informations issues des données initiales (ici, les parties déviatoriques $\tilde{\boldsymbol{\theta}}^k, k = 1, \dots, M_T(r)$ des champs de déformations viscoplastiques $\boldsymbol{\theta}^k, k = 1, \dots, M_T(r)$). Cette propriété est également valable pour les valeurs propres « sphériques ». Donc en supposant que toutes les valeurs propres sont classées par ordre décroissant, c'est à dire que $\tilde{\lambda}_1 \geq \tilde{\lambda}_2 \geq \tilde{\lambda}_3 \geq \dots \geq \tilde{\lambda}_{M_T(r)}$ et que $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \hat{\lambda}_3 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_{M_T(r)}$, seuls les $N(r)$ ($N(r) \leq M_T(r)$) premiers modes déviatoriques et les $P(r)$ ($P(r) \leq M_T(r)$) premiers modes sphériques correspondant aux plus grandes valeurs propres peuvent être considérés. Nous retenons les $N(r)$ modes principaux déviatoriques et les $P(r)$ modes principaux sphériques dans chaque phase r tels que les critères

suivants soient satisfaits :

$$\frac{\sum_{k=1}^{N(r)} \tilde{\lambda}_k}{M_T(r)} > \alpha, \quad \frac{\sum_{k=1}^{P(r)} \hat{\lambda}_k}{M_T(r)} > \beta. \quad (5.33)$$

Les seuils α et β sont choisis en fonction de la précision voulue par l'utilisateur.

5.4 Récapitulatif des équations du modèle NTFA pour la viscoplasticité compressible

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\tau}_k = 2G^r (\tilde{e}_k - \tilde{e}_k^{\text{vp}}), \\ \hat{\sigma}_k = 3k^r (\hat{e}_k - \hat{e}_k^{\text{vp}}), \\ \\ \tilde{e}_k^{\text{vp}} = \frac{3}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{eq}}(a_r, b_r; f) \frac{\tilde{\tau}_k}{a_r}, \quad a_r = \left[\sum_{k=1}^{M_1(r)} (\tilde{\tau}_k)^2 \right]^{1/2}, \\ \hat{e}_k^{\text{vp}} = \frac{1}{3} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_m}(a_r, b_r; f) \frac{\hat{\sigma}_k}{b_r}, \quad b_r = \left[\sum_{k=1}^{M_2(r)} (\hat{\sigma}_k)^2 \right]^{1/2}, \\ \\ \tilde{\varepsilon}_k^{\text{vp}} = \tilde{e}_k^{\text{vp}} \langle \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k : \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k \rangle^{-1}, \\ \hat{\varepsilon}_k^{\text{vp}} = \frac{1}{3} \hat{e}_k^{\text{vp}} \langle (\hat{\boldsymbol{\mu}}^k)^2 \rangle^{-1}, \\ \\ \tilde{e}_k = \tilde{\mathbf{a}}_k : \mathbf{E} + \sum_{p=1}^{M_1} \tilde{D}_{kp} \tilde{\varepsilon}_p^{\text{vp}} + \sum_{\ell=1}^{M_2} \tilde{F}_{k\ell} \tilde{\varepsilon}_\ell^{\text{vp}}, \\ \hat{e}_k = \hat{\mathbf{a}}_k : \mathbf{E} + \sum_{p=1}^{M_1} \hat{F}_{kp} \hat{\varepsilon}_p^{\text{vp}} + \sum_{\ell=1}^{M_2} \hat{D}_{k\ell} \hat{\varepsilon}_\ell^{\text{vp}}, \\ \\ \boldsymbol{\Sigma} = \langle \mathbf{L} : \mathbf{A} \rangle : \mathbf{E} + \sum_{k=1}^{M_1} \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k \tilde{\varepsilon}_k^{\text{vp}} + \sum_{k=1}^{M_2} \hat{\boldsymbol{\rho}}_k \hat{\varepsilon}_k^{\text{vp}}, \\ \\ \dot{f} = (1 - f) \text{tr}(\dot{\varepsilon}^{\text{vp}}). \end{array} \right.$$

A partir de ces équations, nous allons consacrer le chapitre suivant à la mise en oeuvre de la NTFA dans le cas de matériaux poreux, ainsi qu'au détail du calcul des modes plastiques.

Chapitre 6

Mise en oeuvre du modèle NTFA pour les matériaux poreux

Sommaire

6.1	Calcul des modes plastiques	98
6.2	Calculs des paramètres de la NTFA	99
6.3	Intégration de la loi de comportement	101
6.4	Conclusion	103

Il existe différentes étapes pour mettre en oeuvre l'analyse par champs de transformation non uniformes :

- La première étape consiste à calculer les modes plastiques, les tenseurs de concentration des contraintes ou de localisation des déformations et les facteurs d'influence.
- La deuxième étape consiste en l'intégration de la loi de comportement récapitulée au paragraphe 5.4.

6.1 Calcul des modes plastiques

Pour calculer les modes plastiques, on applique la méthode développée au paragraphe 5.3 du chapitre précédent. En pratique, il existe 3 grandes étapes pour ce calcul :

1. La première étape consiste à calculer les données numériques indispensables à la détermination des modes et à l'application de la transformation de Karhunen-Loève. Le choix de ces données est très important puisque de ce choix dépend la pertinence des résultats de la méthode NTFA.

Notre choix s'est porté sur les champs de déformations viscoplastiques dans *chaque phase viscoplastique*, pour *différentes valeurs de \mathbf{E}* : Σ_0 , et pour *plusieurs directions de contraintes* Σ_0 . Dans la suite, plusieurs types de chargement seront utilisés, de la traction uniaxiale, du cisaillement pur, de la traction-compression et de la traction-traction :

$$\Sigma_0^1 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \Sigma_0^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1),$$

$$\Sigma_0^3 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \Sigma_0^4 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2.$$

La déformation macroscopique imposée pour déterminer ces différents champs de déformations viscoplastiques est comprise entre 0 et 5% ou entre 0 et 2.5%. Donc au total, pour chaque phase r , on calcule $M_T(r)$ champs de déformations viscoplastiques dans l'ensemble des directions de chargement choisies. On nomme les champs de la phase r , $\boldsymbol{\theta}^\ell(\mathbf{x})$, $\ell = 1, \dots, M_T(r)$. Par exemple, si l'on décide de choisir deux directions, on calcule $M_1(r)$ champs de déformations viscoplastiques pour la première direction et $M_2(r)$ autres dans la deuxième direction. $M_T(r)$ est donc égal à $M_1(r) + M_2(r)$. En pratique, on prendra $M_1(r) = M_2(r) = 25$.

Le choix des directions imposées est déterminé en fonction du type de chargement que le VER peut subir en réalité.

2. La deuxième étape consiste, dans le cas des matériaux poreux, à décomposer chaque champ $\boldsymbol{\theta}^\ell(\mathbf{x})$ en sa partie déviatorique $\tilde{\boldsymbol{\theta}}^\ell(\mathbf{x})$ et en sa partie sphérique $\hat{\boldsymbol{\theta}}^\ell(\mathbf{x})\boldsymbol{\delta}$. A partir de là, on applique la transformation de Karhunen-Loève définie au paragraphe 5.3 pour obtenir les deux ensembles de modes plastiques $\{\tilde{\boldsymbol{\mu}}^k\}_{k=1, \dots, M_T(r)}$ et $\{\hat{\boldsymbol{\mu}}^k\}_{k=1, \dots, M_T(r)}$

3. Enfin, on applique le critère défini par (6.1) aux deux ensembles de modes :

$$\frac{\sum_{k=1}^{N(r)} \tilde{\lambda}_k}{M_T(r)} > 0.9999, \quad \frac{\sum_{k=1}^{P(r)} \hat{\lambda}_k}{M_T(r)} > 0.9999. \quad (6.1)$$

On obtient les $N(r)$ modes déviatoriques $\tilde{\boldsymbol{\mu}}^k$ et les $P(r)$ modes sphériques $\hat{\boldsymbol{\mu}}^k$ qui contiennent respectivement l'information optimale de la partie déviatorique $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ et de la partie sphérique $\hat{\boldsymbol{\theta}}^k$ des champs de déformations viscoplastiques, $N(r)$ et $P(r)$ étant inférieurs à $M_T(r)$.

6.2 Calculs des paramètres de la NTFA

Avec l'approximation (5.10), on a vu que :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \mathbf{A} : \mathbf{E} + \sum_{k=1}^{M_1} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^{\text{vp}} (\mathbf{D} * \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k) + \sum_{\ell=1}^{M_2} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\ell^{\text{vp}} (\mathbf{D} * \hat{\boldsymbol{\mu}}^\ell \boldsymbol{\delta}). \quad (6.2)$$

Tenseurs de localisation des déformations Le tenseur de localisation des déformations est obtenu en résolvant successivement six problèmes d'élasticité linéaire :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} & = \mathbf{L}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x})), \\ \text{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) & = 0, \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle & = \mathbf{E}, \end{cases} \quad (6.3)$$

où $\mathbf{E} = \mathbf{i}^{(ij)}$ avec $i_{kh}^{(ij)} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk})$, et des conditions aux limites périodiques sur le VER.

Soit $\mathbf{u}^{(ij)}$ et $\boldsymbol{\sigma}^{(ij)}$ le champ de déplacements et le champ de contraintes solutions de (6.3) avec $\mathbf{E} = \mathbf{i}^{(ij)}$. Le tenseur de localisation des déformations \mathbf{A} est obtenu classiquement par :

$$A_{ijkh}(\mathbf{x}) = \varepsilon_{ij}(u^{(kh)}(\mathbf{x})) \quad (6.4)$$

On obtient également le tenseur de rigidité effectif $\tilde{\mathbf{L}} = \langle \mathbf{L} : \mathbf{A} \rangle$:

$$\tilde{L}_{ijkh} = \langle \sigma_{ij}^{(kh)} \rangle \quad (6.5)$$

Par conséquent, on peut calculer les tenseurs de localisation des déformations réduits :

$$\begin{aligned} (\tilde{a}_k)_{ij} &= \langle \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k : \boldsymbol{\varepsilon}(u^{(ij)}) \rangle, \\ (\hat{a}_k)_{ij} &= \langle \hat{\boldsymbol{\mu}}^k \boldsymbol{\delta} : \boldsymbol{\varepsilon}(u^{(ij)}) \rangle. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Facteurs d'influence Pour obtenir les facteurs d'influence, on doit résoudre les N problèmes d'élasticité linéaire suivants (N étant le nombre de modes viscoplastiques déviatoriques) :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{L}(\mathbf{x}) : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \tilde{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x})), \\ \text{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) &= 0, \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle &= 0, \end{cases} \quad (6.7)$$

et les P problèmes d'élasticité linéaire suivants (P étant le nombre de modes viscoplastiques sphériques) :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{L}(\mathbf{x}) : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x})\boldsymbol{\delta}), \\ \text{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) &= 0, \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle &= 0, \end{cases} \quad (6.8)$$

avec $\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k, k = 1, \dots, N, \hat{\boldsymbol{\mu}} = \hat{\boldsymbol{\mu}}^k, k = 1, \dots, P$ et toujours des conditions aux limites périodiques sur le VER.

Soit $\tilde{\mathbf{u}}^\ell$ et $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^\ell$ le champ de déplacements et le champ de contraintes solutions de (6.7) avec $\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \tilde{\boldsymbol{\mu}}^\ell$ et $\hat{\mathbf{u}}^\ell$ et $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^\ell$ le champ de déplacements et le champ de contraintes solutions de (6.8) avec $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \hat{\boldsymbol{\mu}}^k$.

Les tenseurs d'influence sont obtenus grâce à :

$$\begin{aligned} (\mathbf{D} * \tilde{\boldsymbol{\mu}}^\ell) &= \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}^\ell(\mathbf{x})), \\ (\mathbf{D} * \hat{\boldsymbol{\mu}}^\ell \boldsymbol{\delta}) &= \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{u}}^\ell(\mathbf{x})). \end{aligned} \quad (6.9)$$

On peut donc calculer les facteurs d'influence réduits $\tilde{D}, \tilde{F}, \hat{D}$ et \hat{F} :

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{k\ell} &= \langle \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k : (\mathbf{D} * \tilde{\boldsymbol{\mu}}^\ell) \rangle, \\ \tilde{F}_{k\ell} &= \langle \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k : (\mathbf{D} * \hat{\boldsymbol{\mu}}^\ell \boldsymbol{\delta}) \rangle, \\ \hat{D}_{k\ell} &= \langle \hat{\boldsymbol{\mu}}^k \boldsymbol{\delta} : (\mathbf{D} * \hat{\boldsymbol{\mu}}^\ell \boldsymbol{\delta}) \rangle, \\ \hat{F}_{k\ell} &= \langle \hat{\boldsymbol{\mu}}^k \boldsymbol{\delta} : (\mathbf{D} * \tilde{\boldsymbol{\mu}}^\ell) \rangle. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Les coefficients $\tilde{\boldsymbol{\rho}}_k$ et $\hat{\boldsymbol{\rho}}_\ell$ peuvent également être calculés :

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k &= \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^k \rangle, \\ \hat{\boldsymbol{\rho}}_\ell &= \langle \hat{\boldsymbol{\sigma}}^\ell \rangle. \end{aligned} \quad (6.11)$$

6.3 Intégration de la loi de comportement

Pas de temps $t + \Delta t$:

Au pas $t + \Delta t$, les variables $\tilde{e}_t, \hat{e}_t, \tilde{e}_t^{\text{vp}}, \hat{e}_t^{\text{vp}}, \tilde{\tau}_t, \hat{\sigma}_t$ et \mathbf{E}_t sont connues.

On cherche les variables suivantes : $\tilde{e}_{t+\Delta t}, \hat{e}_{t+\Delta t}, \tilde{e}_{t+\Delta t}^{\text{vp}}, \hat{e}_{t+\Delta t}^{\text{vp}}, \tilde{\tau}_{t+\Delta t}, \hat{\sigma}_{t+\Delta t}, \mathbf{E}_{t+\Delta t}$ et $\Sigma_{t+\Delta t}$.

Itération $i + 1$:

Les variables $\tilde{e}_{t+\Delta t}^i, \hat{e}_{t+\Delta t}^i, \tilde{\tau}_{t+\Delta t}^i$ et $\hat{\sigma}_{t+\Delta t}^i$ sont connues.

Le chargement imposé est égal à $\mathbf{E}_{t+\Delta t}^i$ tel que $\Sigma_0: \mathbf{E}_{t+\Delta t}^i = c * (t + \Delta t)$ où c est la vitesse de déformation imposée.

1. Calcul des contraintes réduites : $(\tilde{\tau}_k)_{t+\Delta t}^{i+1}$ et $(\hat{\sigma}_k)_{t+\Delta t}^{i+1}$. Le calcul est détaillé dans la suite du paragraphe.
2. Calcul des déformations viscoplastiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\tilde{e}_k^{\text{vp}})_{t+\Delta t}^{i+1} = (\tilde{e}_k)_{t+\Delta t}^i - \frac{(\tilde{\tau}_k)_{t+\Delta t}^{i+1}}{2Gr} \quad , \quad (\tilde{\varepsilon}_k^{\text{vp}})_{t+\Delta t}^{i+1} = \frac{(\tilde{e}_k^{\text{vp}})_{t+\Delta t}^{i+1}}{\langle \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k : \tilde{\boldsymbol{\mu}}^k \rangle} \\ (\hat{e}_k^{\text{vp}})_{t+\Delta t}^{i+1} = (\hat{e}_k)_{t+\Delta t}^i - \frac{(\hat{\sigma}_k)_{t+\Delta t}^{i+1}}{3k^r} \quad , \quad (\hat{\varepsilon}_k^{\text{vp}})_{t+\Delta t}^{i+1} = \frac{(\hat{e}_k^{\text{vp}})_{t+\Delta t}^{i+1}}{3 \langle (\hat{\boldsymbol{\mu}}^k)^2 \rangle} \end{array} \right. \quad (6.12)$$

3. Calcul de la contrainte macroscopique :

$$\Sigma_{t+\Delta t}^{i+1} = \langle \mathbf{L} : \mathbf{A} \rangle : \mathbf{E}_{t+\Delta t}^i + \sum_{k=1}^N \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k (\tilde{\varepsilon}_k^{\text{vp}})_{t+\Delta t}^{i+1} + \sum_{k=1}^P \hat{\boldsymbol{\rho}}_k (\hat{\varepsilon}_k^{\text{vp}})_{t+\Delta t}^{i+1}. \quad (6.13)$$

4. Mise à jour des déformations $(\tilde{e}_k)_{t+\Delta t}^{i+1}$ et $(\hat{e}_k)_{t+\Delta t}^{i+1}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\tilde{e}_k)_{t+\Delta t}^{i+1} = \tilde{\mathbf{a}}_k : \mathbf{E}_{t+\Delta t}^i + \sum_{p=1}^N \tilde{D}_{kp} (\tilde{\varepsilon}_k^{\text{vp}})_{t+\Delta t}^{i+1} + \sum_{\ell=1}^P \tilde{F}_{k\ell} (\tilde{\varepsilon}_\ell^{\text{vp}})_{t+\Delta t}^{i+1} \\ (\hat{e}_k)_{t+\Delta t}^{i+1} = \hat{\mathbf{a}}_k : \mathbf{E}_{t+\Delta t}^i + \sum_{p=1}^N \hat{F}_{kp} (\hat{\varepsilon}_k^{\text{vp}})_{t+\Delta t}^{i+1} + \sum_{\ell=1}^P \hat{D}_{k\ell} (\hat{\varepsilon}_\ell^{\text{vp}})_{t+\Delta t}^{i+1} \end{array} \right. \quad (6.14)$$

5. Mise à jour de la déformation macroscopique.

On calcule le niveau de contrainte $\lambda_{t+\Delta t}^{i+1}$:

$$\lambda_{t+\Delta t}^{i+1} = \frac{\Sigma_0 : \tilde{\mathbf{L}}^{-1} : \Sigma_{t+\Delta t}^{i+1}}{\Sigma_0 : \tilde{\mathbf{L}}^{-1} : \Sigma_0}, \quad (6.15)$$

pour mettre à jour la déformation macroscopique :

$$\mathbf{E}_{t+\Delta t}^{i+1} = \mathbf{E}_{t+\Delta t}^i + \tilde{\mathbf{L}}^{-1} : [\lambda_{t+\Delta t}^{i+1} \Sigma_0 - \Sigma_{t+\Delta t}^{i+1}]. \quad (6.16)$$

6. Le test de convergence est le suivant :

$$\max \left[\max_{k=1,\dots,N} |(\tilde{e}_k)_{t+\Delta t}^{i+1} - (\tilde{e}_k)_t^i|, \max_{k=1,\dots,P} |(\hat{e}_k)_{t+\Delta t}^{i+1} - (\hat{e}_k)_t^i| \right] \leq \delta \Delta t, \quad (6.17)$$

et on vérifie également :

$$\frac{|\mathbf{E}_{t+\Delta t}^{i+1} - \mathbf{E}_{t+\Delta t}^i|}{\|\mathbf{E}_{t+\Delta t}^{i+1}\|} \leq \varepsilon, \quad (6.18)$$

avec typiquement $\delta = 10^{-6}$ et $\varepsilon = 10^{-6}$.

Développement de l'étape 1 :

1. Estimation des vitesses de déformations

$$(\dot{\tilde{e}}_k)_{t+\Delta t}^{i+1} = \frac{(\tilde{e}_k)_{t+\Delta t}^i - (\tilde{e}_k)_t^i}{\Delta t}, \quad (\dot{\hat{e}}_k)_{t+\Delta t}^{i+1} = \frac{(\hat{e}_k)_{t+\Delta t}^i - (\hat{e}_k)_t^i}{\Delta t}. \quad (6.19)$$

2. Calcul des vitesses des contraintes réduites

$$\begin{cases} (\dot{\tilde{\tau}}_k)_{t+\Delta t}^{i+1} = 2G^r \left[(\dot{\tilde{e}}_k)_{t+\Delta t}^{i+1} - (\dot{\tilde{e}}_k^{\text{vp}})_{t+\Delta t}^{i+1} \right] = \tilde{h}((\tilde{\tau}_k)_{t+\Delta t}^{i+1}, (\hat{\sigma}_k)_{t+\Delta t}^{i+1}) \\ (\dot{\hat{\sigma}}_k)_{t+\Delta t}^{i+1} = 3k^r \left[(\dot{\hat{e}}_k)_{t+\Delta t}^{i+1} - (\dot{\hat{e}}_k^{\text{vp}})_{t+\Delta t}^{i+1} \right] = \hat{h}((\hat{\sigma}_k)_{t+\Delta t}^{i+1}, (\tilde{\tau}_k)_{t+\Delta t}^{i+1}) \end{cases} \quad (6.20)$$

en résolvant sur l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$ de l'équation différentielle $\begin{cases} \dot{\tau} = h(\tau) \\ \tau(t) = \tau_t \end{cases}$

avec $h = \begin{Bmatrix} \tilde{h} \\ \hat{h} \end{Bmatrix}$ et $\tau = \begin{Bmatrix} \tilde{\tau} \\ \hat{\sigma} \end{Bmatrix}$ grâce à un schéma d'Euler semi-implicite à pas variable afin de trouver $\tau_{t+\Delta t}^{i+1}$.

Pour cela, on applique le schéma du point milieu pour discrétiser l'équation différentielle sur un sous-intervalle $[t_0, t_1]$ de $[t, t + \Delta t]$, et on calcule τ_1 à partir de $\tau_0 = \tau(t_0)$ en résolvant le problème

$$g(\tau_1) = \tau_1 - \tau_0 - (t_1 - t_0)h\left(\frac{\tau_1 + \tau_0}{2}\right) = 0$$

par la méthode de Newton-Raphson en partant de τ_0 :

On connaît $x^0 = \tau_0$. On pose $x^k = \tau_1^k$.

Tant que $\Delta x = x^{k+1} - x^k > \varepsilon$, on calcule x^{k+1} à partir de x^k avec :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x^k) \Delta x &= -g(x^k) \\ x^{k+1} &= x^k + \Delta x \end{aligned}$$

Si on converge, la solution τ_1 est le dernier x^{k+1} calculé.

Enfin, on calcule l'erreur commise sur τ_1 suivant Hornberger et Stamm [HOR89] :

$$err_{euler} = (t_1 - t_0) \left[\frac{\|h(\tau_1)\|}{4} - \frac{\|h(\frac{\tau_1 + \tau_0}{2})\|}{2} + \frac{\|h(\tau_0)\|}{4} \right]$$

- Si $err_{euler} > 10^{-3}$, la solution τ_1 est rejetée, et on recommence le calcul en divisant le sous-pas de temps par 4.
- Si $err_{euler} < 10^{-3}$, la solution τ_1 est acceptée, et le sous-pas de temps suivant est égal à $2(t_1 - t_0)$.

6.4 Conclusion

Nous avons présenté la mise en œuvre de la méthode NTFA pour des composites élastovisco-plastiques poreux. La première étape importante de la mise en œuvre est la détermination des modes plastiques. Cette étape permet ensuite de calculer l'ensemble des paramètres du modèle NTFA : les tenseurs de localisation réduits, les facteurs d'influence ainsi que les tenseurs entrant dans l'équation donnant la contrainte macroscopique. La deuxième étape importante est l'intégration des relations constitutives du modèle. Cette mise en œuvre va nous permettre, dans le chapitre suivant, d'appliquer la méthode NTFA à des matériaux biphasés dont au moins une des phases est élastoviscoplastique poreuse.

Chapitre 7

Résultats, arrangement hexagonal et répartition aléatoire de fibres

Sommaire

7.1	Arrangement hexagonal de fibres	106
7.1.1	Description de la cellule et des propriétés matériaux	106
7.1.2	Modes viscoplastiques	106
7.1.3	Résultats	109
7.2	Répartition aléatoire de fibres	111
7.2.1	Configuration	111
7.2.2	Résultats	112
7.3	Conclusion	112

Après avoir développé la méthode NTFA avec prise en compte de la porosité dans les chapitres précédents, on va maintenant l'appliquer à deux types d'arrangement de fibres. Pour chaque étude, seule la matrice est élastoviscoplastique poreuse, les fibres ont des propriétés élastiques. Dans un premier temps, la cellule unité est une cellule rectangulaire avec arrangement hexagonal de fibres, identique à celle utilisée dans le chapitre 4. Dans un second temps, le VER est une cellule carrée dans laquelle des fibres sont réparties aléatoirement. Tous les calculs sont effectués en déformations planes généralisées.

7.1 Arrangement hexagonal de fibres

7.1.1 Description de la cellule et des propriétés matériaux

La cellule est représentée dans le chapitre 4 par la Figure 4.1.

Les propriétés élastiques de la fibre sont rassemblées dans le Tableau 7.1.

Module d'Young (GPa)	Coefficient de Poisson	porosité (%)
400	0.2	0

Tableau 7.1 : Propriétés mécaniques de la fibre.

Les données matériaux pour la matrice sont résumées dans le Tableau 7.2, l'exposant de viscosité pouvant être soit égal à 1, soit égal à 8. Le numéro de schéma correspond à l'expression choisie pour $A(f)$ et $B(f)$, paramètres du potentiel viscoplastique (2.64) utilisé pour les matériaux poreux. Le schéma 1 correspond à l'expression (2.73) pour le paramètre B , et nécessite la résolution de l'équation (2.72) pour déterminer le paramètre A à l'aide du paramètre C défini par l'équation (2.70).

Module d'Young (GPa)	Coefficient de Poisson	n	$\dot{\varepsilon}_0$	σ_0 (MPa)	porosité (%)	schéma
70	0.3	1 ou 8	10^{-2}	100	7	1

Tableau 7.2 : Propriétés mécaniques de la matrice.

7.1.2 Modes viscoplastiques

Dans le cas où $n = 1$ dans la matrice, on a calculé les modes pour deux états de contraintes différents, la traction-compression Σ^1 et la traction-traction Σ^2 :

$$\Sigma^1 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2,$$

$$\Sigma^2 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2;$$

Dans le cas où $n = 8$ dans la matrice, on a d'abord réalisé des calculs avec les modes obtenus grâce à un chargement de traction-compression et de traction-traction. Les Figures 7.1 et 7.2

représentent les champs de déformations viscoplastiques dans la matrice en traction-compression et en traction-traction pour \mathbf{E} : $\Sigma_0 = 5\%$.

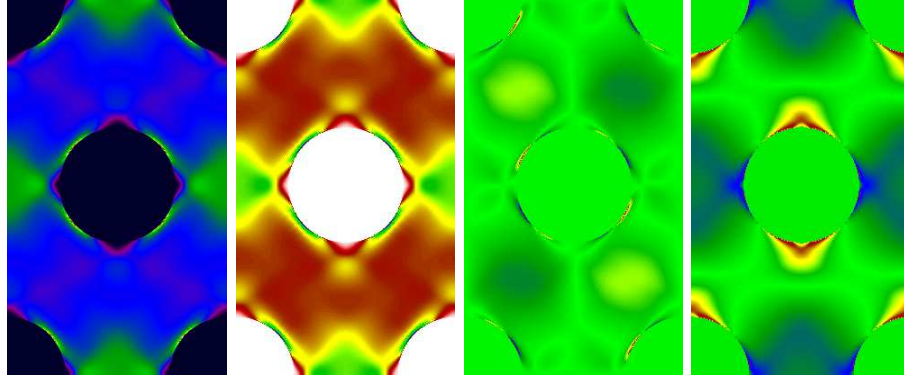


Figure 7.1 : Composantes θ_{11} , θ_{22} , θ_{12} et θ_{33} du champ de déformations viscoplastiques dans la matrice soumise à un chargement de traction-compression. $n = 8$ dans la matrice.

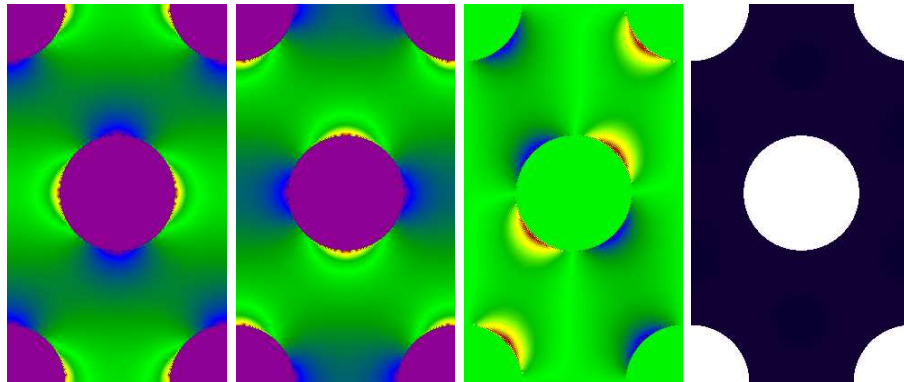


Figure 7.2 : Composantes θ_{11} , θ_{22} , θ_{12} et θ_{33} du champ de déformations viscoplastiques dans la matrice soumise à un chargement de traction-traction. $n = 8$ dans la matrice.

L'ensemble des 25 champs de déformations viscoplastiques de la matrice a donc été déterminé numériquement pour chacune des directions choisies. Les champs de déformations viscoplastiques ont été décomposés en partie sphérique et partie déviatorique, et la transformée de Karhunen-Loève a été appliquée sur chaque ensemble déviatorique et sphérique. Les Figures 7.3, 7.4 et 7.5 représentent les modes déviatoriques associés aux trois plus grandes valeurs propres déviatoriques tandis que la Figure 7.6 représente les modes sphériques associés aux trois plus grandes valeurs propres sphériques.

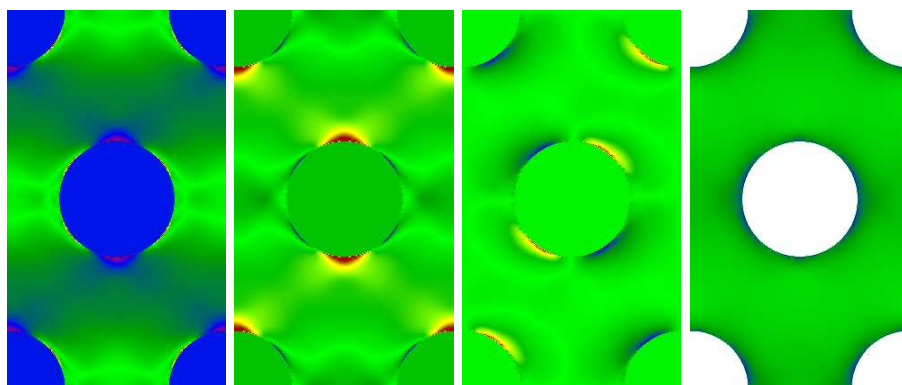


Figure 7.3 : Composantes $\tilde{\mu}_{11}$, $\tilde{\mu}_{22}$, $\tilde{\mu}_{12}$ et $\tilde{\mu}_{33}$ du mode déviatorique associé à la plus grande valeur propre $\tilde{\lambda}_1$ dans la matrice.

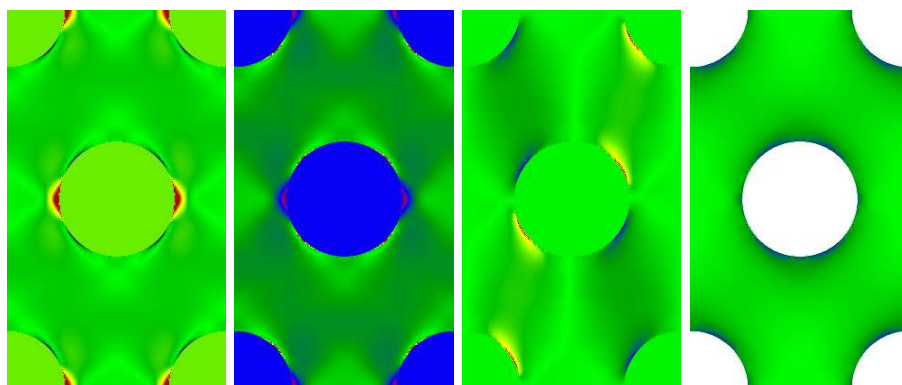


Figure 7.4 : Composantes $\tilde{\mu}_{11}$, $\tilde{\mu}_{22}$, $\tilde{\mu}_{12}$ et $\tilde{\mu}_{33}$ du mode déviatorique associé à la valeur propre $\tilde{\lambda}_2$ dans la matrice.

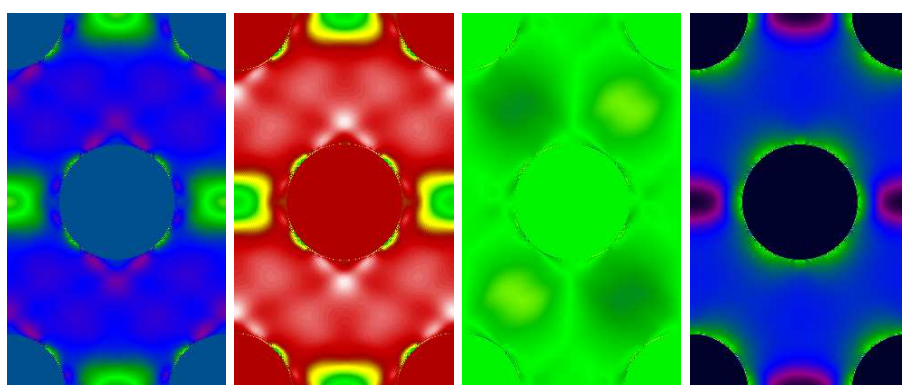


Figure 7.5 : Composantes $\tilde{\mu}_{11}$, $\tilde{\mu}_{22}$, $\tilde{\mu}_{12}$ et $\tilde{\mu}_{33}$ du mode déviatorique associé à la valeur propre $\tilde{\lambda}_3$ dans la matrice.

Enfin, le comportement du VER a été estimé en utilisant des modes déterminés à partir de

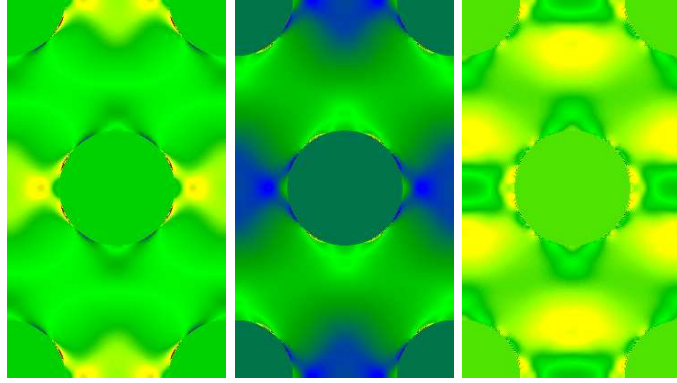


Figure 7.6 : Modes sphériques associés aux trois plus grandes valeurs propres dans la matrice.

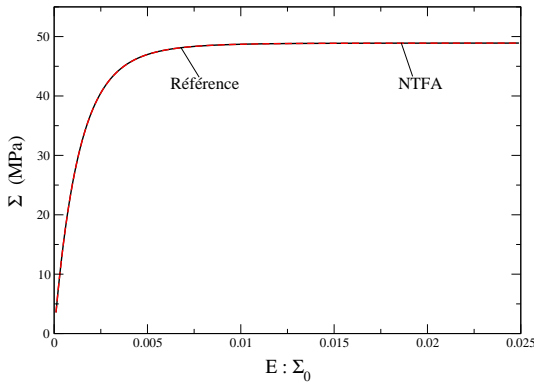
deux autres chargements, la traction uniaxiale Σ_0^3 et le cisaillement pur Σ_0^4 :

$$\begin{aligned}\Sigma_0^3 &= \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \\ \Sigma_0^4 &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1).\end{aligned}$$

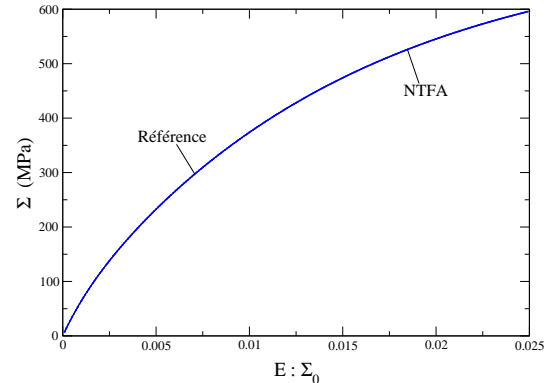
7.1.3 Résultats

A partir de ces différents modes, le modèle NTFA est appliqué pour prédire le comportement du VER dans les différentes directions de chargement utilisées pour déterminer les modes plastiques.

La Figure 7.7 donne la prédiction de la NTFA dans le cas où l'exposant de la viscosité de la matrice est égal à 1, et pour les directions de chargement en traction-compression et en traction-traction. Dans les deux cas de chargement, la prédiction de la NTFA est en parfaite concordance avec le résultat de référence.



(1)



(2)

Figure 7.7 : Arrangement hexagonal, exposant de viscosité de la matrice $n = 1$: prédiction de la NTFA avec Karhunen-Loève en traction-compression (1) et en traction-traction(2).

Dans le cas où l'exposant de viscosité de la matrice est égal à 8, la Figure 7.8 donne la prédiction de la NTFA pour la direction de chargement en traction-compression, la Figure 7.9 donne la prédiction de la NTFA pour les directions de chargement en traction et en cisaillement. Comme dans le cas où l'exposant de viscosité de la matrice est égal à 1, les prédictions de la NTFA sont très proches des résultats de référence.

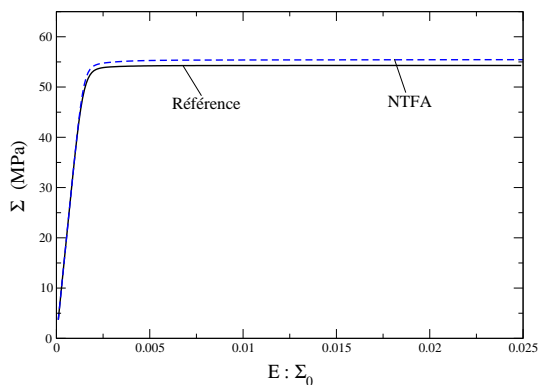
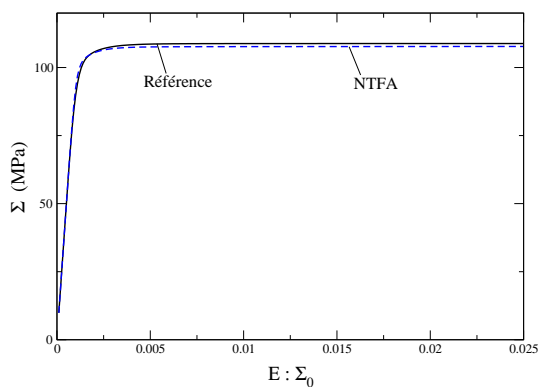
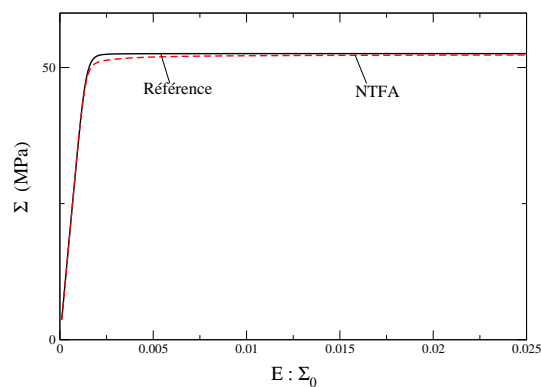


Figure 7.8 : Arrangement hexagonal, exposant de viscosité de la matrice $n = 8$: prédiction de la NTFA avec Karhunen-Loève en traction-compression.



(1)



(2)

Figure 7.9 : Arrangement hexagonal, exposant de viscosité de la matrice $n = 8$: prédiction de la NTFA avec Karhunen-Loève en traction (1) et en cisaillement (2).

7.2 Répartition aléatoire de fibres

7.2.1 Configuration

On a utilisé les mêmes propriétés mécaniques que pour l'arrangement hexagonal dans le cas où l'exposant de viscosité de la matrice est égal à 1. Seule la configuration de la cellule élémentaire change : les fibres sont ici réparties aléatoirement dans la matrice. Le chargement imposé pour calculer les modes est également le même que dans le cas de l'arrangement hexagonal, on a choisi deux directions de contrainte, la traction-compression et la traction-traction. Sur les Figures 7.10 et 7.11, on peut voir les modes déviatoriques et sphériques associés aux plus grandes valeurs propres $\tilde{\lambda}_1$ et $\hat{\lambda}_1$.

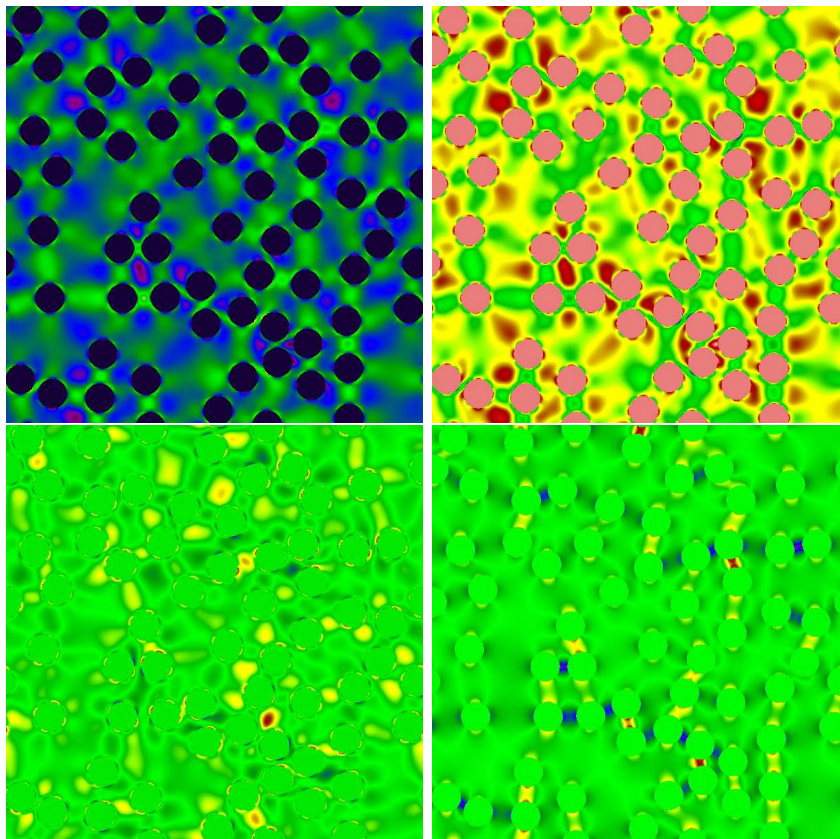


Figure 7.10 : Répartition aléatoire de fibres : composantes $\tilde{\mu}_{11}$, $\tilde{\mu}_{22}$, $\tilde{\mu}_{12}$, $\tilde{\mu}_{33}$ du mode déviatorique associé à la plus grande valeur propre en traction-compression.

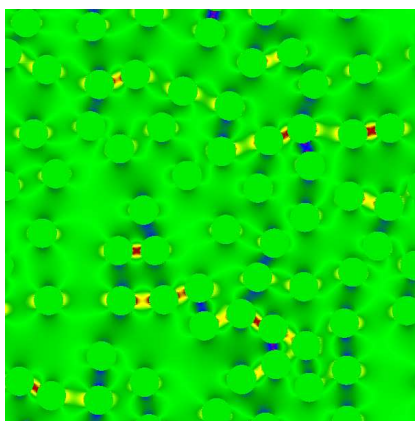


Figure 7.11 : Répartition aléatoire de fibres : mode sphérique associé à la plus grande valeur propre en traction-compression.

7.2.2 Résultats

Comme dans les cas précédents, les prédictions de la NTFA sur la Figure 7.12 pour des chargements identiques à ceux utilisés pour calculer les modes donnent d'excellents résultats.

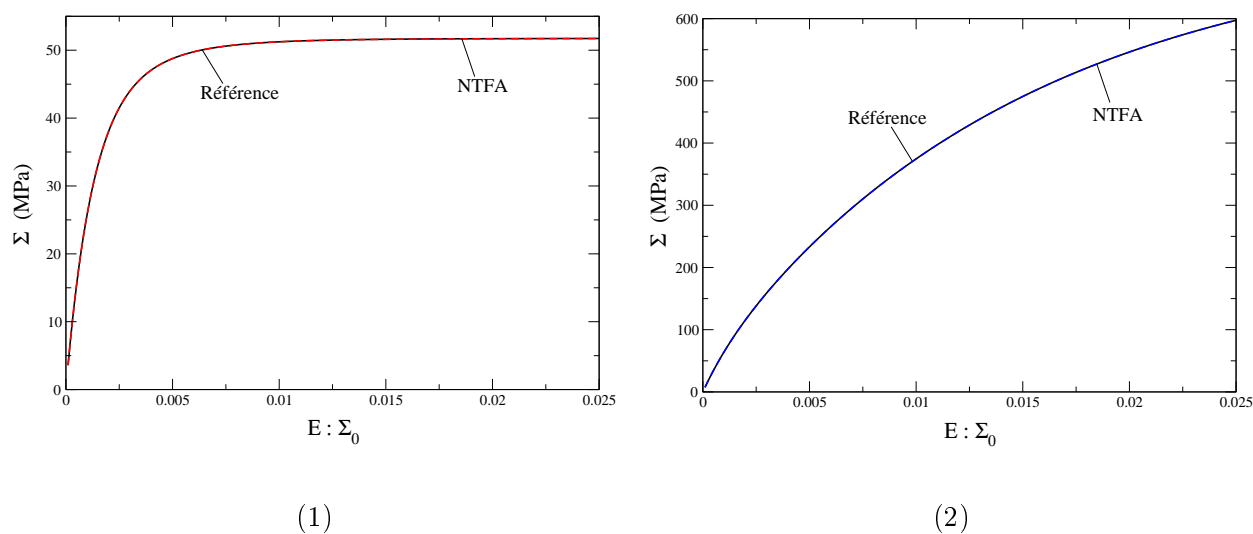


Figure 7.12 : Répartition aléatoire de fibres : prédiction de la NTFA avec Karhunen-Loève en traction-compression (1) et en traction-traction (2).

7.3 Conclusion

L'analyse par champs de transformations non uniformes avec prise en compte de la porosité donne des résultats très prometteurs. La transformation de Karhunen-Loève reste une très bonne méthode pour la détermination des modes, puisque, indépendamment de l'instant de chargement et de l'arrangement des fibres, le modèle NTFA pour les matériaux poreux prédit des

comportements très proches des comportements attendus.

Dans la partie suivante, on applique les méthodes d'analyse par champs de transformation aux combustibles MOX. Le modèle TFA est utilisé pour réaliser des études de sensibilité afin de connaître l'effet de certains paramètres de fabrication sur le comportement du MOX. En ce qui concerne le modèle NTFA, on vérifie son adéquation avec le MOX étant donné le changement de ses propriétés mécaniques en cours d'irradiation.

Quatrième partie

Application aux combustibles MOX

Chapitre 8

Analyse par champs de transformation et MOX vierge

Sommaire

8.1	Introduction	118
8.2	Analyse par champs de transformation (TFA)	118
8.3	Comportement des phases composant le MOX	120
8.3.1	Déformation élastique	120
8.3.2	Déformation viscoplastique	121
8.4	Identification des paramètres	122
8.4.1	Combustible UO_2	122
8.4.2	Phase uranifère du MOX	123
8.4.3	Phase plutonifère du MOX	124
8.5	Etudes de sensibilité	125
8.6	Conclusion	128

8.1 Introduction

On s'intéresse à présent à évaluer le comportement du combustible MOX. Pour cela, une démarche utilisant la méthode TFA est utilisée. Dans un premier temps, le modèle est explicité, et les différents tenseurs de localisation et d'influence du modèle sont calculés grâce à l'estimation de Mori-Tanaka. Dans un deuxième temps, le comportement élastoviscoplastique de chaque phase est décrit. Enfin, après identification des paramètres des potentiels viscoplastiques sur des essais de fluage en compression, des applications du modèle TFA aux combustibles nous permettent de réaliser des études de sensibilité afin de déterminer le rôle de certains paramètres microstructuraux sur le comportement des combustibles.

L'utilisation de la méthode NTFA, a priori plus performante, est en cours d'élaboration. Le travail de cette thèse permet de fournir tous les outils nécessaires pour atteindre cet objectif.

L'étude porte sur un MOX ne comportant que deux phases (les microstructures des MOX ont été détaillées dans le chapitre 1) :

- une phase pauvre en plutonium (phase uranifère) que l'on considérera comme la phase « matrice » dans la suite. Cette phase portera le numéro 1,
- une phase riche en plutonium (phase plutonifère) qui jouera le rôle des inclusions et portera le numéro 2.

8.2 Analyse par champs de transformation (TFA)

Le modèle TFA est détaillé dans le chapitre 2, paragraphe 2.7.1. On rappelle, ici la relation contrainte-déformation macroscopique obtenue pour le modèle TFA :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \tilde{\mathbf{L}} : \mathbf{E} + \sum_{r=1}^2 c_r \mathbf{L}_r \left(\sum_{s=1}^2 (\mathbf{D}_{rs} - \boldsymbol{\delta}_{rs}) : \boldsymbol{\varepsilon}_s^{\text{VP}} \right) \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{L}} = \left(\sum_{r=1}^N c_r \mathbf{L}_r : \mathbf{A}_r \right), \quad (8.1)$$

$\tilde{\mathbf{L}}$ étant le tenseur d'élasticité effectif, \mathbf{L}_r le tenseur d'élasticité de la phase r et c_r la fraction volumique de la phase r . Les tenseurs \mathbf{D}_{rs} sont les facteurs d'influence.

Le tenseur d'élasticité est calculé grâce à l'estimation de Mori-Tanaka [MOR73]. Pour cela, en introduisant la base orthogonale des tenseurs isotropes du quatrième ordre \mathbf{J}, \mathbf{K} [SUQ01], le tenseur d'élasticité de chaque phase r , supposé isotrope, s'écrit :

$$\mathbf{L}_r = 3k^r \mathbf{J} + 2G^r \mathbf{K} = \{3k^r, 2G^r\}. \quad (8.2)$$

Le tenseur d'élasticité effectif est calculé grâce à l'estimation de Mori-Tanaka en considérant la phase 2 comme des sphères élastiques réparties aléatoirement dans une matrice élastique :

$$\tilde{\mathbf{L}} = \{3k^{MT}, 2G^{MT}\}, \quad (8.3)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} k^{MT} = k^1 + c_2 \frac{k^2 - k^1}{1 + c_1 \frac{k^2 - k^1}{k^* + k^1}}, \\ G^{MT} = G^1 + c_2 \frac{G^2 - G^1}{1 + c_1 \frac{G^2 - G^1}{G^* + G^1}}, \end{array} \right.$$

les paramètres k^* et G^* étant définis par :

$$k^* = \frac{4}{3}G^1, \quad G^* = \frac{G^1}{6} \frac{9k^1 + 8G^1}{k^1 + 2G^1}.$$

Les tenseurs de localisation des déformations moyens par phase peuvent être déduits des tenseurs d'élasticité effectif et locaux. En effet, les tenseurs de localisation moyens par phase vérifient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^2 c_r \mathbf{A}_r &= \mathbf{I}, \\ \sum_{r=1}^2 c_r \mathbf{L}_r : \mathbf{A}_r &= \tilde{\mathbf{L}}, \end{aligned} \tag{8.4}$$

ce qui donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_1 = \frac{1}{c_1} (\mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_2)^{-1} : (\tilde{\mathbf{L}} - \mathbf{L}_2), \\ \mathbf{A}_2 = \frac{1}{c_2} (\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1)^{-1} : (\tilde{\mathbf{L}} - \mathbf{L}_1). \end{array} \right.$$

Enfin, pour calculer les facteurs d'influence, Dvorak et Benveniste [DVO92a] ont montré que les tenseurs d'influence vérifiaient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^2 c_r \mathbf{D}_{rs} &= 0, \\ \sum_{r=1}^2 c_r \mathbf{L}_r : \mathbf{D}_{rs} &= c_s (\mathbf{I} - \mathbf{A}_s) : \mathbf{L}_s, \quad s = 1, 2 \end{aligned} \tag{8.5}$$

On obtient ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D}_{11} = (\mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_2)^{-1} : (\mathbf{I} - \mathbf{A}_1) : \mathbf{L}_1, \\ \mathbf{D}_{22} = (\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1)^{-1} : (\mathbf{I} - \mathbf{A}_2) : \mathbf{L}_2, \\ \mathbf{D}_{12} = -\frac{c_2}{c_1} \mathbf{D}_{22}, \\ \mathbf{D}_{21} = -\frac{c_1}{c_2} \mathbf{D}_{11}. \end{array} \right.$$

8.3 Comportement des phases composant le MOX

Les phases du MOX ont un comportement poro-élastoviscoplastique. La déformation totale de chaque phase peut être décomposée en une partie élastique et une partie viscoplastique :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{el}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}},$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{el}}$ est la déformation élastique et $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}$ la déformation viscoplastique. Chaque partie de la déformation peut être décrite par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{el}} = \mathbf{L}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}, \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{vp}} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}, f). \end{cases}$$

Dans les paragraphes suivants, on donne les éléments nécessaires au calcul du tenseur d'élasticité \mathbf{L} , ainsi que la forme du potentiel viscoplastique ψ .

L'évolution de la porosité dans chaque phase est donnée par l'équation suivante :

$$\dot{f} = (1 - f) \text{tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{vp}}.$$

8.3.1 Déformation élastique

La déformation élastique est donnée par l'équation suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{el}} = \mathbf{L}^{-1} : \boldsymbol{\sigma},$$

où \mathbf{L} est le tenseur d'élasticité isotrope. Pour définir ce tenseur, il suffit de connaître le module d'Young E et le module de cisaillement G .

Gatt et al. [GAT05] ont montré que pour le combustible UO_2 , ces deux constantes dépendent de la température et de la porosité et vérifient les relations suivantes (où T est la température en Kelvin) :

– Module d'Young (MPa) :

$$E(T, f) = (226930 - 15.399T - 9.3597 \cdot 10^{-3}T^2)(1 - 2.5f).$$

– Module de cisaillement (MPa) :

$$G(T, f) = (85830 - 5.157T - 3.747 \cdot 10^{-3}T^2)(1 - 2.25f).$$

Pour définir les caractéristiques de chaque phase, on considère que la phase pauvre en plutonium a le même comportement que le combustible UO_2 . Pour la phase plutonifère, des résultats expérimentaux ont permis d'observer que ses propriétés élastiques vérifiaient les mêmes relations que le combustible UO_2 , et donc que la phase uranifère.

Le module de compressibilité est donné par la relation suivante :

$$k = \frac{E}{9 - 3\frac{E}{G}}.$$

On peut ainsi calculer tous les paramètres de la loi macroscopique pour le modèle TFA.

8.3.2 Déformation viscoplastique

Il faut maintenant détailler le comportement viscoplastique de chaque phase. A la fin du chapitre 2, un modèle de loi viscoplastique pour les matériaux poreux a été présenté. Son potentiel prend l'expression suivante :

$$\psi(\sigma_m, \sigma_{eq}, f) = \frac{\sigma_0 \dot{\varepsilon}_0}{n+1} \left[\frac{9}{4} A(f) \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_0} \right)^2 + B(f) \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^2 \right]^{(n+1)/2},$$

avec :

$$\begin{cases} A(f) = \left(n \left(f^{-\frac{1}{n}} - 1 \right) \right)^{-\frac{2n}{n+1}}, \\ B(f) = \left(1 + \frac{2}{3}f \right) (1 - f)^{-\frac{2n}{n+1}}. \end{cases}$$

Nous allons adapter ce potentiel pour chaque phase du combustible MOX, à partir du travail de Monerie et Gatt [MON01], [MON05] sur le combustible UO_2 .

Des essais de compression sur des pastilles d' UO_2 ont permis de mettre en évidence deux mécanismes de fluage à l'échelle microscopique : le fluage-diffusion et le fluage-dislocation. Ces deux mécanismes sont activés pour des gammes de températures et de contraintes différentes et dépendent de la taille de grains. Bohaboy et al. [BOH69] ont montré que, pour chaque mécanisme i , l'influence de la température et de la taille de grains peut être prise en compte par la loi suivante :

$$\dot{\varepsilon}_{0_i} = \tilde{\varepsilon}_{0_i} d^{m_i} e^{-\frac{Q_i}{RT}}, \quad i = 1, 2, \quad (8.6)$$

$\tilde{\varepsilon}_{0_i}$ étant une constante, d la taille de grains, m_i un exposant de la taille de grains associé au mécanisme i , Q_i une énergie d'activation thermique du mécanisme i , et R la constante des gaz parfaits.

Le potentiel viscoplastique pour chaque mécanisme prend alors la forme suivante :

$$\psi_i = \frac{1}{n_i + 1} \frac{\tilde{\varepsilon}_{0_i}}{\sigma_{0_i}^{n_i}} d^{m_i} e^{-\frac{Q_i}{RT}} \left(A_i(f) \left(\frac{3}{2} \sigma_m \right)^2 + B_i(f) (\sigma_{eq})^2 \right)^{\frac{n_i+1}{2}}, \quad i = 1, 2 \quad (8.7)$$

avec :

$$\begin{cases} A_i(f) = \left(n_i \left(f^{-\frac{1}{n_i}} - 1 \right) \right)^{-\frac{2n_i}{n_i+1}}, \\ B_i(f) = \left(1 + \frac{2}{3}f \right) (1 - f)^{-\frac{2n_i}{n_i+1}}, \end{cases} \quad i = 1, 2$$

et f la porosité de la phase étudiée.

Le mécanisme de fluage-diffusion étant activé à basses températures et à basses contraintes, le mécanisme de fluage-dislocation plutôt à hautes températures et hautes contraintes, le potentiel

global de chaque phase est défini grâce à une fonction de couplage θ qui dépend à la fois de la température et des contraintes, Ψ_1 correspondant au fluage-diffusion et Ψ_2 au fluage-dislocation :

$$\psi = (1 - \theta)\psi_1 + \theta\psi_2. \quad (8.8)$$

θ est donc égal à 0 quand le fluage-diffusion est activé, et égal à 1 quand c'est le fluage-dislocation qui agit. Le choix de la fonction de couplage est détaillé dans [MON05] :

$$\theta = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left(\frac{T - \omega \sigma_{eq}^q}{h} \right) \right), \quad (8.9)$$

h est une constante, et le terme $\omega \sigma_{eq}^q$ correspond à une température de transition.

Dans le paragraphe suivant, les paramètres identifiés et validés pour le combustible UO_2 sont donnés. A partir de ces paramètres, on détaillera la méthode utilisée pour déterminer les paramètres de chaque phase du MOX.

8.4 Identification des paramètres

8.4.1 Combustible UO_2

Monerie et Gatt [MON05] ont identifié certains paramètres du modèle pour le combustible UO_2 à partir de valeurs théoriques correspondant à des mécanismes physiques. Les autres paramètres ont été déterminés à partir d'essais de fluage en compression uniaxiale sur des pastilles d' UO_2 .

Le détail du choix fait pour déterminer les paramètres est donné dans [MON05]. Nous en rappelons ici les grandes lignes :

- Le mécanisme de fluage-diffusion est bien connu, et les paramètres n_1 , m_1 et Q_1 ont des valeurs standard acceptées par la plupart des auteurs. Le Tableau 8.1 résume les paramètres du mécanisme fluage-diffusion pour le combustible UO_2 .

n_1	$\frac{\dot{\varepsilon}_{01}}{\sigma_{01}^{n_1}}$	Q_1	m_1
1	$7.57.10^{-14} s^{-1} . N^{-n_1} . m^{2n_1 - m_1}$	$377000 J.mol^{-1}$	-2

Tableau 8.1 : Paramètres de la loi de comportement de l' UO_2 pour le mécanisme de fluage-diffusion (mécanisme 1).

- Pour le second mécanisme, tous les paramètres sont déterminés à partir d'essais sur pastille. Les valeurs trouvées pour n_2 et Q_2 sont comprises dans les intervalles définis par les différentes valeurs existant dans la littérature. Les paramètres du mécanisme fluage-dislocation sont résumés dans le Tableau 8.2.

8.4. Identification des paramètres

n_2	$\frac{\dot{\varepsilon}_{0_2}}{\sigma_{0_2}^{n_2}}$	Q_2	m_2
8	$2.54.10^{-44} s^{-1} . N^{-n_2} . m^{2n_2-m_2}$	$462000 J.mol^{-1}$	2

Tableau 8.2 : Paramètres de la loi de comportement de l' UO_2 pour le mécanisme de fluage-dislocation (mécanisme 2).

- Les paramètres de la fonction de couplage sont déterminés à partir d'une base de données expérimentales et sont récapitulés dans le Tableau 8.3.

ω	q	h
$47350.4K.N^q.m^{-2q}$	0.189	600 K

Tableau 8.3 : Paramètres de la loi de couplage des deux mécanismes pour l' UO_2 .

On va maintenant adapter ces paramètres aux deux phases du combustible MOX.

8.4.2 Phase uranifère du MOX

Le taux de dioxyde de plutonium étant faible dans la phase uranifère, on peut considérer que son comportement viscoplastique peut être décrit par les potentiels donnés dans les paragraphes précédents pour le combustible UO_2 . Afin de vérifier si la loi UO_2 utilisée pour le comportement de la phase uranifère est correcte, l'essai de fluage en compression uniaxiale d'une pastille d' UO_2 standard a été modélisé et on a comparé les résultats avec les résultats expérimentaux obtenus sur des pastilles de MOX MIMAS 0%. Le MOX MIMAS 0% est donc un combustible UO_2 puisque le taux de plutonium est nul. La seule différence avec un combustible UO_2 standard est le procédé de fabrication de la pastille.

Sur la Figure 8.1, sont tracées les vitesses de fluage calculées numériquement en fonction des vitesses de fluages obtenues expérimentalement pour différentes contraintes imposées. Les lignes discontinues représentent les vitesses de fluage expérimentales multipliées et divisées par deux. On constate que la loi de comportement de l' UO_2 standard (symboles losanges sur la figure) sous-estime le fluage d'un MOX MIMAS 0% pour les plus basses contraintes (30 40 et 45 MPa) tandis qu'il le sur-estime pour les plus hautes contraintes (60, 70 et 80 MPa). Les paramètres des lois de comportement dépendent donc du procédé de fabrication. On a donc ajusté le paramètre $\frac{\dot{\varepsilon}_{0_i}}{\sigma_{0_i}^{n_i}}$ de chaque mécanisme en le multipliant ou le divisant par un coefficient pour que les résultats numériques soient plus proches des vitesses de fluage expérimentales, le paramètre h de la fonction de couplage est également modifié. On constate sur la Figure 8.1 que ce changement de paramètre (symboles carrés) améliore les résultats obtenus numériquement. C'est donc cette loi MOX MIMAS 0% qu'on utilisera pour modéliser le comportement de la phase uranifère.

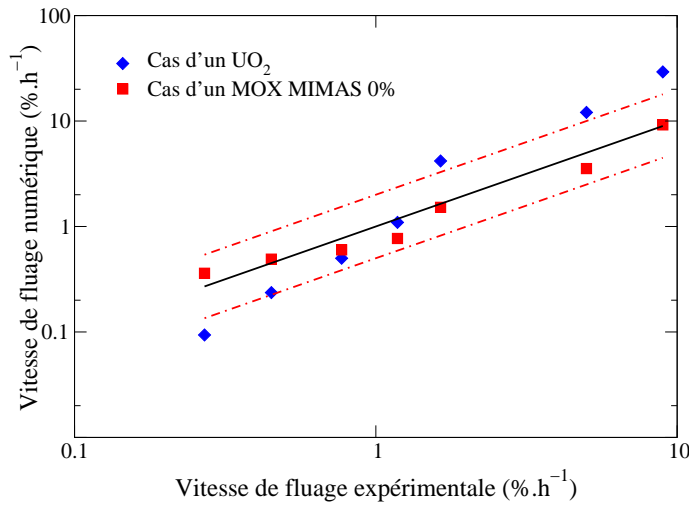


Figure 8.1 : Comparaison des vitesses de déformations calculées numériquement pour un UO_2 standard (losanges) et pour un MOX MIMAS 0% (carrés), pour différentes contraintes imposées (30, 40, 45, 50, 60, 70 et 80MPa), avec les vitesses obtenues expérimentalement sur le MOX MIMAS 0% (ligne continue).

8.4.3 Phase plutonifère du MOX

Les paramètres de la phase plutonifère sont déterminés à partir de résultats expérimentaux sur les MOX MIMAS 6% [BAS02b]. La modélisation des essais de fluage en compression uniaxiale est réalisé à l'aide du modèle TFA développé dans les premiers paragraphes de ce chapitre. Pour cela, la loi de comportement de la phase uranifère est fixée, c'est la loi MOX MIMAS 0% qui sera utilisée. Dans un premier temps, on donne au comportement de la phase plutonifère, le comportement d'un MOX MIMAS 0%. Sur la Figure 8.2, on constate dans ce cas (symboles losanges) que la vitesse de fluage calculée numériquement est toujours sous-estimée hormis pour les deux plus hautes contraintes imposées (70 et 80 MPa). On ajuste alors le paramètre $\frac{\dot{\varepsilon}_{0i}}{\sigma_{0i}^{n_i}}$ et le paramètre h de la fonction de couplage pour s'approcher au mieux des vitesses de fluage expérimentales. La Figure 8.2 montre l'amélioration des résultats (symboles carrés).

Dans un second temps, les résultats ont été validés sur des MOX MIMAS 10%. La seule différence avec la modélisation du comportement du MOX MIMAS 6% est la fraction volumique de dioxyde de plutonium. Seules les fractions volumiques des phases changent. On constate sur la Figure 8.3 que les résultats obtenus pour le MOX MIMAS 10% (symboles carrés) avec les paramètres identifiés sur le MOX MIMAS 6% sont corrects.

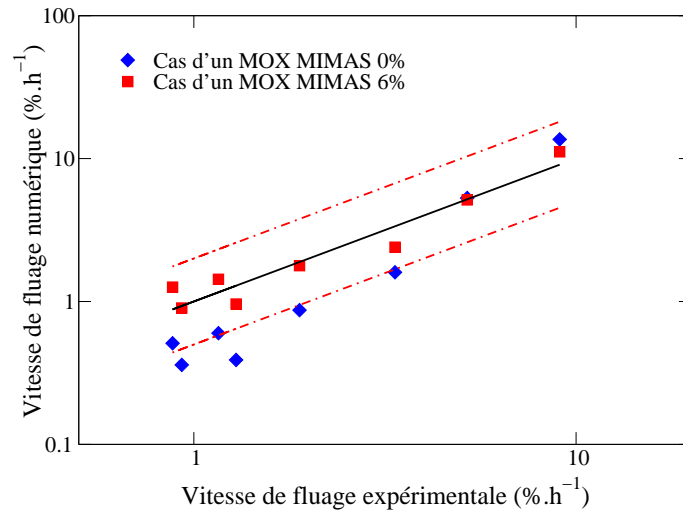


Figure 8.2 : Comparaison des vitesses de déformations calculées numériquement pour un MOX MIMAS 0%(losanges) et pour un MOX MIMAS 6% (carrés), pour différentes contraintes imposées(30 MPa pour deux taux de porosité différents, 40 45, 50, 60, 70, 80 MPa), avec les vitesses obtenues expérimentalement pour le MOX MIMAS 6% (ligne continue).

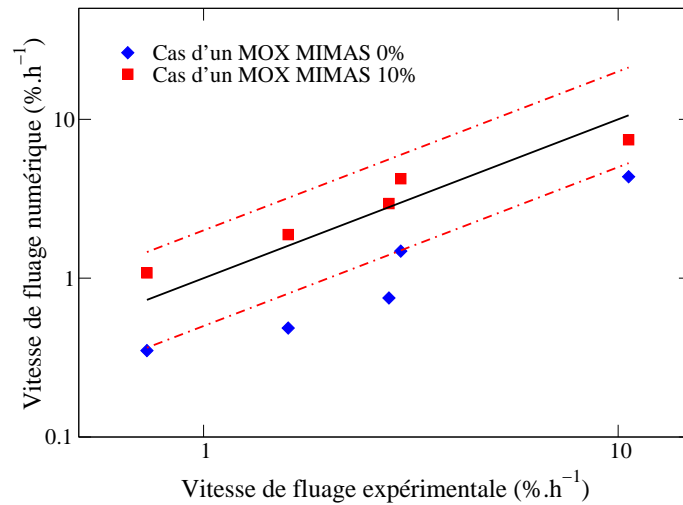


Figure 8.3 : Comparaison des vitesses de déformations calculées numériquement pour un MOX MIMAS 0%(losanges) et pour un MOX MIMAS 10% (carrés), pour différentes contraintes imposées (30, 40, 50, 60, 70 MPa), avec les vitesses obtenues expérimentalement sur le MOX MIMAS 10% (ligne continue).

8.5 Etudes de sensibilité

A partir des lois définies ci-dessus, des études de sensibilité sur différents paramètres sont réalisés afin de connaître l'influence de ces paramètres sur le comportement du combustible.

Le premier paramètre étudié est la porosité dans les phases du combustible. Dans un premier temps, on étudie l'influence de la porosité dans la phase plutonifère. On a observé qu'en cours d'irradiation, la porosité des amas plutonifères augmentait. On a donc calculé la vitesse de fluage d'un combustible MOX MIMAS 6%, pour lequel la porosité de la phase uranifère est fixée à 7,05%, en fonction de la porosité dans la phase plutonifère, et pour différentes contraintes imposées (30, 50 et 80 MPa). Les résultats obtenus sont représentés sur la Figure 8.4.

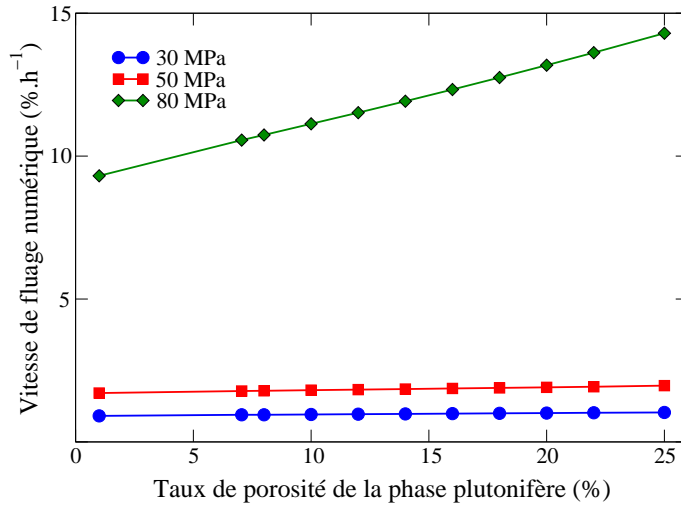


Figure 8.4 : *Effet de la porosité de la phase plutonifère sur la vitesse de fluage du MOX, le taux de porosité de la phase uranifère étant fixé à 7,05%.*

On constate que la porosité de la phase plutonifère a très peu d'influence à basses contraintes (30 et 50MPa). A hautes contraintes (80 MPa), la vitesse de fluage augmente quand la porosité de la phase plutonifère augmente.

Dans un second temps, on étudie l'effet du taux de porosité de chaque phase sur le fluage. Ce paramètre est important pour la fabrication des pastilles de combustibles. Pour cela, on fixe le taux de porosité moyen du combustible à 7,05%, le taux de porosité de chaque phase étant calculé de façon à vérifier ce taux de porosité moyen. La Figure 8.5 donne la vitesse de fluage calculée numériquement en fonction du taux de porosité de la phase plutonifère.

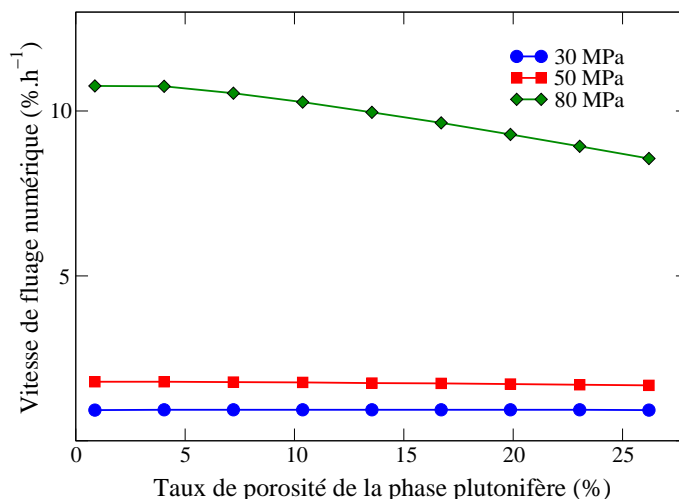


Figure 8.5 : *Effet de la répartition de la porosité des phases sur la vitesse de fluage du MOX, le taux de porosité moyen du combustible étant de 7,05%.*

On constate, comme dans le cas précédent, qu'à faibles contraintes, la répartition de la porosité n'a pas ou peu d'influence sur la vitesse de fluage. Au contraire, à hautes contraintes, la vitesse de fluage augmente quand le taux de porosité de la phase plutonifère augmente, et donc quand le taux de porosité de la phase uranifère diminue.

Le deuxième paramètre étudié est la fraction volumique des amas plutonifères (Figure 8.6). Ce paramètre, comme la répartition de la porosité dans les phases est un paramètre qu'on contrôle au cours de la fabrication. Pour un MOX MIMAS 6%, on fait varier la fraction volumique des amas plutonifères de 1 à 40%. A hautes contraintes, plus la fraction volumique des amas est grande, plus la vitesse de fluage du combustible est élevée.

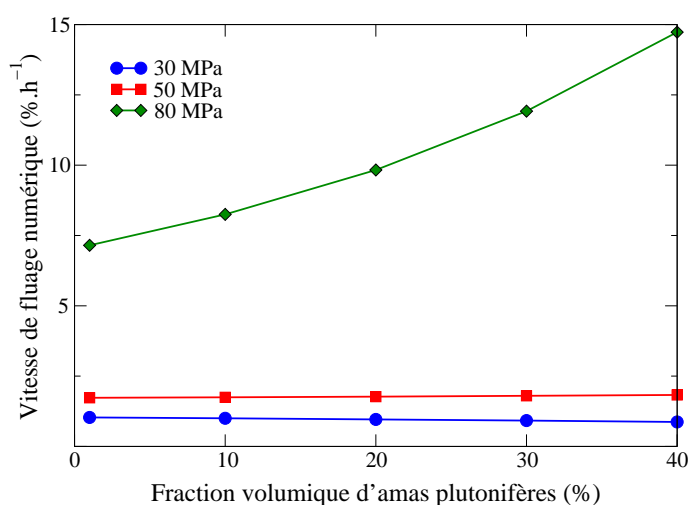


Figure 8.6 : Effet de la fraction volumique des amas plutonifères.

8.6 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de faire une première étude des combustibles MOX, à partir d'un modèle TFA, moins précis que le modèle NTFA, mais simple à mettre en oeuvre dans le cas de matériaux biphasés. De plus, l'identification des paramètres des potentiels viscoplastiques de chaque phase s'est faite de façon à ce que le comportement macroscopique du combustible concorde avec les résultats des essais expérimentaux. De ce fait, il est possible que certains paramètres des lois de chaque phase, en particulier ceux de la phase plutonifère, ne correspondent à la réalité qu'à un facteur multiplicatif près, puisque dans les parties précédentes, on a montré que la TFA donnait généralement, pour des matériaux dont on connaissait le comportement microscopique de chaque phase, des comportements trop rigides.

Cependant l'utilisation de ce modèle nous a permis d'étudier l'effet des paramètres de fabrication (la porosité et la fraction volumique des amas) qui évoluent en cours d'irradiation, sur le comportement des combustibles. Ces études pourraient permettre d'orienter certains choix de fabrication afin de trouver les conditions optimales pour une meilleure exploitation de ces combustibles.

Chapitre 9

Analyse par champs de transformation non uniformes et MOX

Sommaire

9.1	Vérification de l'adéquation de la NTFA pour le MOX	130
9.2	Changement de l'exposant de viscosité du potentiel viscoplastique	130
9.3	Changement de la contrainte d'écoulement σ_0	131
9.4	Conclusion	133

9.1 Vérification de l'adéquation de la NTFA pour le MOX

L'application de la NTFA aux combustibles MOX est en cours d'élaboration. Au cours du développement de la méthode NTFA pour les matériaux élastoviscoplastiques, s'est posé la question du changement des propriétés mécaniques des combustibles en cours d'irradiation.

On s'est alors proposé de regarder l'effet d'un changement dans les paramètres en cours d'irradiation sur les résultats prédits par la NTFA dont les modes ont été déterminés avec les propriétés mécaniques initiales. Cette brève étude est réalisée sur des cellules avec arrangement hexagonale des fibres. Le premier cas étudié est le changement d'exposant de viscosité du potentiel viscoplastique sur une cellule dont les fibres sont élastiques et la matrice élastoviscoplastique. Le deuxième cas est le changement de la contrainte d'écoulement σ_0 . Dans ce cas le VER utilisé est toujours une cellule avec répartition hexagonale des fibres mais pour laquelle les deux phases sont élastoviscoplastiques.

9.2 Changement de l'exposant de viscosité du potentiel viscoplastique

Les propriétés matériaux de la fibre élastique (E_f, ν_f) et de la matrice élastoviscoplastique ($E_m, \nu_m, \sigma_0, n, \dot{\epsilon}_0$) sont les suivantes :

$$\begin{cases} E_f = 400 \text{ GPa}, & \nu_f = 0.2, \\ E_m = 70 \text{ GPa}, & \nu_m = 0.3, \quad \sigma_0 = 100 \text{ MPa}, \quad n = 2, \quad \dot{\epsilon}_0 = 10^{-2} s^{-1}. \end{cases}$$

Dans un premier temps, on calcule plusieurs « jeux » de modes plastiques pour différents exposants de viscosité n (n prend les valeurs suivantes : 1, 2, 3, 5, 10), les autres paramètres caractérisant le potentiel viscoplastique étant identiques à ceux définies ci-dessus. Pour cela, on utilise la procédure décrite au chapitre 4.

Dans un second temps, on détermine la réponse du matériau dont les propriétés sont définies ci-dessus (c'est-à-dire pour $n = 2$) et soumis à un chargement de traction uniaxiale. La réponse est déterminée grâce à la méthode NTFA décrite au chapitre 3 avec les différents « jeux » de modes plastiques calculés précédemment. La Figure 9.1 présente les résultats obtenus. On constate que l'erreur commise est inférieure à 2% dans les cas où la réponse est obtenue à partir des modes de la NTFA calculés avec des exposants n inférieurs à 5. Dans le cas où l'exposant de viscosité utilisé pour le calcul des modes est égal à 10, l'erreur est légèrement supérieure à celles obtenues dans les autres cas, mais reste assez faible (3,5%).

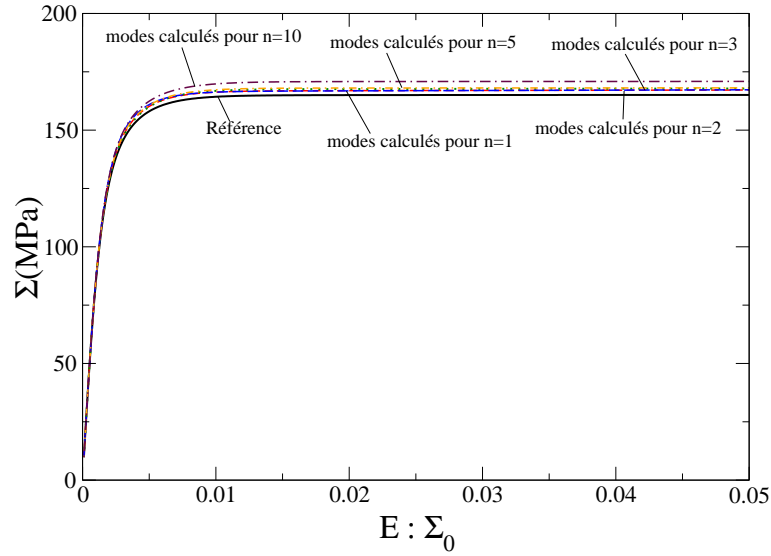


Figure 9.1 : Prédictions de la NTFA en traction uniaxiale pour un exposant de viscosité de la matrice $n = 2$ avec des modes calculés avec $n = 2, n = 1, n = 3, n = 5$ et $n = 10$ et courbe de référence (ligne continue).

9.3 Changement de la contrainte d'écoulement σ_0

On étudie à présent le cas où le paramètre σ_0 du potentiel viscoplastique n'est pas le même pour le calcul des modes plastiques et pour le matériau étudié.

Les propriétés de la fibre sont données dans le tableau 9.1, celles des différentes matrices sont résumées dans les Tableaux 9.2, 9.3 et 9.4.

Module d'Young (GPa)	Coefficient de Poisson	n	$\dot{\epsilon}_0 (s^{-1})$	$\sigma_0 (MPa)$
100	0.3	1	10^{-5}	250

Tableau 9.1 : Propriétés mécaniques des fibres.

Module d'Young (GPa)	Coefficient de Poisson	n	$\dot{\epsilon}_0 (s^{-1})$
180	0.3	1 ou 8	10^{-5}

Tableau 9.2 : Propriétés mécaniques de la matrice.

$n = 1$	1	2	3	4	5	6
$\sigma_0 (MPa)$	50	100	500	1000	5000	10000

Tableau 9.3 : Valeurs de σ_0 dans la matrice pour l'exposant de viscosité $n = 1$.

On calcule la contrainte d'écoulement homogène de chaque matériau biphasé défini ci-dessus, la seule différence entre ces différents matériaux étant la contrainte d'écoulement de la matrice.

Dans un premier temps, on détermine les modes plastiques calculés avec une contrainte

$n = 8$	1	2	3	4	5	6	7
σ_0 (MPa)	13.712	18.286	24.384	32.517	43.362	57.825	77.111

Tableau 9.4 : Valeurs de σ_0 dans la matrice pour l'exposant de viscosité $n = 8$.

d'écoulement de la matrice fixée, égale à 50MPa dans le cas $n = 1$, et à 13.712 dans le cas $n = 8$. On obtient ainsi tous les paramètres du modèle NTFA que l'on applique à l'ensemble des matériaux dont les propriétés de chaque phase sont résumées dans les tableaux ci-dessus. La contrainte d'écoulement de la matrice utilisée pour le calcul des modes ne correspond donc pas à la contrainte d'écoulement de la matrice du matériau considéré. La Figure 9.2 permet de comparer ces résultats avec les prédictions de la NTFA obtenues dans le cas où la contrainte d'écoulement de la matrice est la même pour le calcul des modes plastiques et la modélisation du comportement du matériau étudié à partir du modèle NTFA.

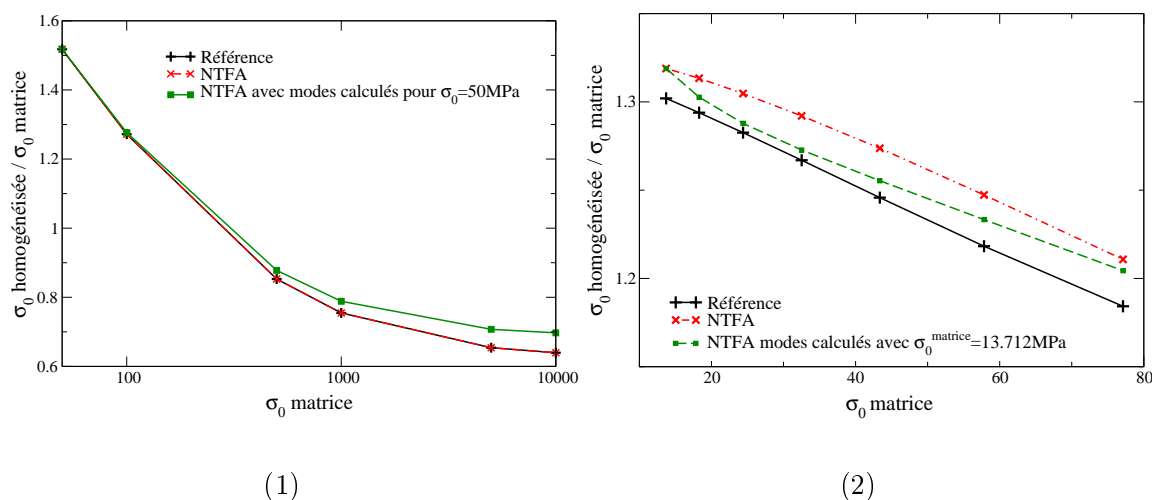


Figure 9.2 : Rapport contrainte d'écoulement homogénéisée / contrainte d'écoulement de la matrice en fonction de la contrainte d'écoulement de la matrice obtenu à partir du calcul de référence (symboles « plus »), du calcul NTFA (symboles « croix »), du calcul NTFA avec des modes plastiques déterminés pour une contrainte d'écoulement de la matrice fixée (symboles « carré ») : (1) exposant de viscosité de la matrice $n=1$; (2) exposant de viscosité de la matrice cas $n=8$.

On constate qu'il y a très peu de différence entre les résultats obtenus grâce au modèle NTFA dont les modes ont été déterminés avec les véritables propriétés des matériaux étudiés, et les résultats obtenus à partir du modèle NTFA pour lequel les modes ont été calculés avec une contrainte d'écoulement fixée ne correspondant pas à celle de la matrice du matériau étudié. Dans le cas $n = 1$, l'erreur atteint 8.9% dans le cas extrême où σ_0 est égale à 10000 MPa, alors que les modes ont été déterminés pour $\sigma_0 = 50$ MPa. Néanmoins l'erreur reste raisonnable dans l'ensemble des cas simulés. Dans le cas $n = 8$, l'erreur ne dépasse pas 2.4%. Compte tenu de la

forme du potentiel viscoplastique, si c'est $\dot{\epsilon}_0$ qui varie, on pourra également utiliser la NTFA.

On peut donc considérer que la loi de comportement obtenue avec la méthode NTFA et évaluée à partir des propriétés des combustibles vierges reste valable en cours d'irradiation alors que certains paramètres évoluent.

9.4 Conclusion

On a montré l'adéquation de la méthode NTFA avec la modélisation du comportement des combustibles. En effet, le calcul des paramètres du modèle NTFA nécessite la connaissance du comportement de chaque phase du matériau à étudier. Or les combustibles ont leurs propriétés qui évoluent en cours d'irradiation. On a donc vérifié qu'un changement de propriétés ne nécessite pas de recalculer les paramètres du modèle NTFA. L'erreur commise sur le comportement global des matériaux est en effet assez faible.

La méthode NTFA pourra donc être appliquée à la modélisation du comportement des combustibles, et notamment du MOX, en utilisant les propriétés des combustibles non irradiés.

Conclusion générale

Ce travail propose un schéma d'homogénéisation, appelé méthode d'analyse par champs de transformation non uniformes (NTFA). Ce modèle fournit un moyen d'obtenir les propriétés homogénéisées des matériaux à partir des propriétés mécaniques de chaque constituant, mais également en prenant en compte explicitement les paramètres décrivant leur microstructure.

La méthode d'analyse par champs de transformation non uniformes est une amélioration de la méthode d'analyse par champs de transformation (TFA) développée par Dvorak et qui permet de réduire le nombre de variables internes macroscopiques en supposant que les champs microscopiques des variables internes sont uniformes par morceaux. L'hypothèse de la NTFA consiste à décomposer ces champs de variables internes sur un ensemble fini de champs de transformation non uniformes, appelés « modes plastiques ». L'intérêt de ces approches par champs de transformation, contrairement à la plupart de schémas d'homogénéisation existants, est qu'elles peuvent être appliquées à des matériaux non linéaires dont le comportement dérive des deux potentiels décrivant respectivement les aspects réversibles et irréversibles du comportement.

Dans ce mémoire, on a développé la méthode NTFA pour des matériaux élastoviscoplastiques incompressibles, mais également pour des matériaux élastoviscoplastiques poreux. Pour ce type de matériaux, la seule variable interne utilisée a été la déformation viscoplastique. Nous avons tout d'abord mis en évidence l'importance du choix des modes plastiques qui est laissé à l'appréciation de l'utilisateur. On a donc proposé une méthode qui permet de capturer correctement la non-uniformité du champ de déformations viscoplastiques quel que soit l'instant de chargement. Cette méthode, initialement utilisée en analyse de données, est la transformation de Karhunen-Loève. Elle permet, à partir d'un ensemble de champs de déformations viscoplastiques obtenus pour différents instants de chargement et contenant les informations nécessaires sur la non-uniformité, d'obtenir un nombre réduit de modes plastiques où l'information contenue est distribuée de façon optimale.

On a également montré l'efficacité de la NTFA par rapport à la TFA. Pour obtenir une description correcte du comportement à l'aide de la TFA, il est nécessaire de diviser chaque phase du matériau en de nombreux sous-domaines, ceci afin de limiter l'erreur commise en supposant que le champ de déformations viscoplastiques est uniforme par morceaux. Le nombre de variables

internes peut alors être assez élevé pour le modèle TFA, alors qu'avec un nombre très limité de modes plastiques, le modèle NTFA donne des résultats très précis. De plus, on a constaté que le choix fait sur la façon de découper les phases en sous-domaines est essentiel dans la méthode TFA, puisque, suivant le type de découpage, la variation du champ de déformations viscoplastiques dans chaque sous-domaine peut être importante, ce qui fait que l'approximation uniforme faite par Dvorak peut être assez loin de la réalité.

On a ensuite développé la méthode NTFA pour des matériaux poreux. Du fait de la porosité, la viscoplasticité devient compressible et une partie hydrostatique apparaît dans le potentiel viscoplastique. Des termes supplémentaires sont donc nécessaires dans les équations du modèle NTFA. La mise en œuvre de la méthode avec prise en compte de la porosité a ensuite été détaillée. Les premiers résultats obtenus sur des matériaux biphasés poreux sont très prometteurs.

Enfin, une application des méthodes d'analyse par champs de transformation aux combustibles nucléaires a été réalisée. Les combustibles étudiés sont des MOX MIMAS constitués de deux phases. On a appliqué la TFA aux MOX. Les paramètres des lois microscopiques ont été identifiés de telle sorte que le comportement macroscopique corresponde aux comportements expérimentaux observés. Cette loi a permis de faire une première étude de sensibilité des différents paramètres intervenant dans le modèle.

Une perspective intéressante de ce travail est la mise en œuvre de la méthode NTFA en 3D, afin de pouvoir l'appliquer aux combustibles MOX. Ce modèle permettra d'avoir un lien plus précis entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique. Sa mise en œuvre va nécessiter de bien choisir les modes plastiques, notamment les directions de chargement à utiliser pour les calculer, afin de pouvoir modéliser le comportement des matériaux quel que soit le chargement imposé. D'autres perspectives peuvent être envisagées, telles que la validation de la méthode pour d'autres chargements (fluage, relaxation, chargement non radial) ou la validation des champs « microscopiques » obtenus à l'aide du modèle NTFA en comparaison aux calculs de référence. De plus il serait utile de développer un outil automatique de recherche des modes, et également d'étendre la méthode NTFA aux polycristaux.

Bibliographie

- [BAS02] BASINI, V., BRUGUIER, F., MATHERON, P. et BERTRAND, E. «Influence de la présence d'amas poreux sur le comportement mécanique du combustible UO_2 ». NT LMPC 2002-18, CEA, septembre 2002.
- [BAS02b] BASINI, V., MENARD, J. C., RICHAUD, J. C. et SLADKOFF, M. «Etudes des propriétés mécaniques du combustible MOX – Premiers résultats». NT LMPC 2002-11, CEA, février 2002.
- [BAS02c] BASINI, V., RICHAUD, J. C. et BRUGUIER, F. «Etudes des propriétés mécaniques d'un lot MOX industriel». NT LMPC 2002-09, CEA, avril 2002.
- [BER79] BERVEILLER, M. et ZAOUI, A. «An extension of the self-consistent scheme to plasticity-flowing polycrystals». *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 26 :325–344, 1979.
- [BOH69] BOHABOY, P., ASAMOTO, R. et CONTI, A. «Compressive creep caractéristiques of stoichiometric uranium dioxide». GEAP-10054, General Electric Company, Sunnyvale, 1969.
- [BOR96] BORNERT, M. «Morphologie microstructurale et comportement mécanique ; caractérisations expérimentales, approches par bornes et estimations autocohérentes généralisées». Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1996.
- [BOR01] BORNERT, M. «Homogénéisation des milieux aléatoires : bornes et estimations». Dans *Homogénéisation en mécanique des matériaux*, Bornert, M., Bretheau, T., Gilormini, P. (Eds), Hermes Science, tome 1, 133–222. 2001.
- [BUD82] BUDIANSKY, B., HUTCHINSON, J. W. et SLUTSKY, S. «Void growth and collapse in viscous solids». Dans *Mechanics of Solids - The Rodney Hill 60th Anniversary Volume*, H.G. Hopkins, M.J. Sewell (Eds.), 13–45. 1982.
- [CHA01] CHABOCHE, J. L., KRUCH, S., MAIRE, J. F. et POTTIER, T. «Towards a micro-mechanics based inelastic and damage modelling composites». *International Journal of Plasticity*, 17 :411–439, 2001.
- [COC89] COCKS, A. «Inelastic deformation of porous materials». *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 37 :693–715, 1989.
- [DUV84] DUVA, J. M. et HUTCHINSON, J. W. «Constitutive potentials for dilutely voided nonlinear materials». *Mechanics of Materials*, 3 :41–54, 1984.

-
- [DVO92b] DVORAK, G. J. «Transformation field analysis of inelastic composite materials». *Proceedings of the Royal Society of London A*, 437 :311–327, 1992.
- [DVO92a] DVORAK, G. J. et BENVENISTE, Y. «On transformation strains and uniform fields in multiphase elastic media». *Proceedings of the Royal Society of London A*, 437 :291–310, 1992.
- [ESH57] ESHELBY, J. D. «The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems». *Proceedings of the Royal Society of London A*, 241 :376–396, 1957.
- [FEE98] FEENY, L. et KAPPAGANTU, R. «On the physical interpretation of proper orthogonal modes in vibrations». *Journal of Sound and Vibration*, 211(4) :607–616, 1998.
- [FRA95] FRANCOIS, D., PINEAU, A. et ZAOUI, A. *Élasticité et Plasticité*. Comportement Mécanique des matériaux. Hermès, 1995.
- [GAT05] GATT, J. M., MONERIE, Y., LAUX, D. et BARON, D. «Elastic behavior of porous ceramics : application to nuclear fuel materials». *Journal of Nuclear Materials*, 336 :145–155, 2005.
- [GEO00] GEORGENTHUM, V. «Étude et modélisation du comportement thermomécanique des combustibles composites en réacteur». Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2000.
- [GIR01] GIRARD, E. «Frittage de l'UO₂ en présence de défauts structuraux : revue bibliographique, méthodologie, acquisition d'images». NT LCU 210, CEA, Décembre 2001.
- [GOT99] GOTTA, M. J. «Connaissance des MOX industriels : microstructure et densification». NT LCN 116, CEA, décembre 1999.
- [GUE99] GUERIN, Y. «Les microstructures des combustibles MOX – Connaissances actuelles et développements visés». NT LIPA 99-2008, CEA, septembre 1999.
- [GUE02] GUERIN, Y., NOIROT, J. et STRUZIK, C. «Synthèse sur le comportement en réacteur du combustible MOX MIMAS TU2». NT LIPA 02-011, CEA, septembre 2002.
- [HAL75] HALPHEN, B. et NGUYEN, Q. S. «Sur les matériaux standard généralisés». *Journal de Mécanique*, 14(1) :36–63, 1975.
- [HIL65] HILL, R. «Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals». *The Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13 :89–101, 1965.
- [HOR89] HORNBERGER, K. et STAMM, H. «An implicit integration algorithm with a projection method for viscoplastic constitutive equations». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28 :2397–2421, 1989.
- [HUT76] HUTCHINSON, J. W. «Bounds and self-consistent estimates for creep of polycrystalline materials». *Proceedings of the Royal Society of London A*, 348 :101–127, 1976.

-
- [MAS98] MASSON, R. «Estimations non linéaires du comportement global de matériaux hétérogènes en formulation affine». Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, juillet 1998.
- [MAS00] MASSON, R., BORNERT, M., SUQUET, P. et ZAOUI, A. «An affine formulation for the prediction of the effective properties of nonlinear composites and polycrystals». *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48 :1203–1227, 2000.
- [MIC94] MICHEL, J. C. «The constitutive law of nonlinear viscous and porous materials». *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences, Série IIB*, 319 :1439–1446, 1994.
- [MIC00] MICHEL, J. C., GALVANETTO, U. et SUQUET, P. «Constitutive relations involving internal variables based on a micromechanical analysis». Dans *Continuum Thermomechanics*, G.A Maugin, R. Drouot and F. Sidoroff (Eds.), Netherlands, 301–312. 2000.
- [MIC99] MICHEL, J. C., MOULINEC, H. et SUQUET, P. «Effective properties of composite materials with periodic microstructure : a computational approach». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 172 :109–143, 1999.
- [MIC92] MICHEL, J. C. et SUQUET, P. «The constitutive law of nonlinear viscous and porous materials». *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40 :783–812, 1992.
- [MIC03] MICHEL, J. C. et SUQUET, P. «Nonuniform Transformation Field Analysis». *International Journal of Solids and Structures*, 40 :6937–6955, 2003.
- [MIC04] MICHEL, J. C. et SUQUET, P. «Computational analysis of nonlinear composite structures using the nonuniform transformation field analysis». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193 :5477–5502, 2004.
- [MOL87] MOLINARI, A., CANOVA, G. R. et AHZI, S. «A self-consistent approach of the large deformation polycrystal viscoplasticity». *Acta Metallurgica*, 35(12) :2983–2994, 1987.
- [MON01] MONERIE, Y. et GATT, J. M. «Modèle de comportement viscoplastique de l'UO₂ vierge». NT LLCC 01-008, CEA, décembre 2001.
- [MON05] MONERIE, Y. et GATT, J. M. «Overall viscoplastic behavior of non irradiated porous nuclear ceramics». *Mechanics of Materials*, 2005. Soumis.
- [MOR73] MORI, T. et TANAKA, K. «Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions». *Acta Metallurgica*, 21, 1973.
- [MOU98] MOULINEC, H. et SUQUET, P. «A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complexes microstructures». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 157 :69–94, 1998.
- [PON91] PONTE-CASTAÑEDA, P. «The effective mechanical properties of nonlinear composite materials». *The Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39(1) :45–71, 1991.

-
- [PON96] PONTE-CASTAÑEDA, P. «Exact second-order estimates for the effective mechanical properties of nonlinear composite materials». *The Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44(6) :827–862, 1996.
- [PON02a] PONTE-CASTAÑEDA, P. «Second-order homogenization estimates for nonlinear composites incorporating field fluctuations : I-theory». *The Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50 :737–757, 2002.
- [PON02b] PONTE-CASTAÑEDA, P. «Second-order homogenization estimates for nonlinear composites incorporating field fluctuations : II-applications». *The Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50 :759–782, 2002.
- [PON88] PONTE-CASTAÑEDA, P. et WILLIS, J. «On the overall properties of nonlinearly viscous composites». *Proceedings of the Royal Society of London A*, 416 :217–244, 1988.
- [SIR87] SIROVICH, L. «Turbulence and the dynamics of coherent structures». *Quarterly of Applied Mathematics*, 45 :561–590, 1987.
- [SUQ87] SUQUET, P. «Elements of Homogenization for Inelastic Solid Mechanics». Dans *Homogenization Techniques for Composites Media*, E. Sanchez-Palencia et A. Zaoui (eds), Springer Verlag, New York, tome 272 de *Lecture Notes in Physics*, 193–278. 1987.
- [SUQ01] SUQUET, P. et BORNERT, M. «Rappels de calcul tensoriel et d'élasticité». Dans *Homogénéisation en mécanique des matériaux*, Bornert, M., Bretheau, T., Gilormini, P. (Eds), Hermes Science, tome 2, 171–202. 2001.
- [TOU01] TOURY, G. «Maîtrise des microstructures MOX de type céramique-céramique». Thèse de doctorat, Université de Limoges, juillet 2001.
- [WOL01a] WOLTER, C. et SAMPAIO, R. «A comparison between the use of Karhunen-Loève expansion and mode shapes in the model reduction of linear systems». *Proceedings of the IX Diname, Brasil*, 453–458, 2001.
- [WOL01b] WOLTER, C., TRINDADE, M. A. et SAMPAIO, R. «Obtaining mode shapes through the Karhunen-Loève expansion for distributed-parameter linear systems». *16th Brazilian Congress of Mechanical Engineering*, 2001.
- [ZAO00] ZAOUI, A. *Matériaux hétérogènes et composites*. Cours de l'Ecole Polytechnique, 2000.
- [ZAO01] ZAOUI, A. «Changement d'échelle : motivation et méthodologie». Dans *Homogénéisation en Mécanique des Matériaux*, Bornert, M., Bretheau, T., Gilormini, P. (Eds), Hermes Science, tome 1, 19–40. 2001.
- [ZAO01b] ZAOUI, A. «Plasticité : approches en champ moyen». Dans *Homogénéisation en Mécanique des Matériaux*, Bornert, M., Bretheau, T., Gilormini, P. (Eds), Hermes Science, tome 2, 17–44. 2001.