



HAL
open science

Contribution à la modélisation du comportement vibratoire non-linéaire d'un assemblage combustible

REP

Jérôme Rebelle

► To cite this version:

Jérôme Rebelle. Contribution à la modélisation du comportement vibratoire non-linéaire d'un assemblage combustible REP. Vibrations [physics.class-ph]. Aix Marseille Université, 1998. Français. NNT: . tel-03330223

HAL Id: tel-03330223

<https://theses.hal.science/tel-03330223>

Submitted on 31 Aug 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

2

30845

**UNIVERSITE DE LA MEDITERRANEE AIX-MARSEILLE II
ECOLE SUPERIEURE DE MECANIQUE DE MARSEILLE**

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE AIX-MARSEILLE II

Discipline : MECANIQUE

Option : Acoustique et Dynamique des Vibrations

présentée et soutenue publiquement

par : **Jérôme REBELLE**

le 24 Septembre 1998

titre :

**Contribution à la modélisation du comportement vibratoire
non-linéaire d'un assemblage combustible R.E.P.**

Directeur de thèse : Dominique HABAULT

Bibliothèque Interuniversitaire
d'Aix - Marseille
Section LUMINY

JURY

M. Pierre ORSERO, président

M. Jean SABOT

M. Emmanuel de LANGRE

M. Sergio BELLIZZI

M. Pascal BOULANGER

Mme Dominique HABAULT

M. Robert PELISSIER

A mes parents

Résumé

La connaissance du coefficient d'amortissement réduit du premier mode d'un assemblage combustible de R.E.P. (Réacteur à Eau Pressurisée) est un paramètre important dans un contexte de sûreté nucléaire. En effet, cette caractéristique est une donnée d'entrée dans les codes de calcul dédiés aux prédictions du comportement des assemblages soumis à une sollicitation sismique. Les méthodes expérimentales classiquement utilisées pour la détermination de ce coefficient sont basées sur un formalisme linéaire du comportement dynamique de l'assemblage. Il a été montré par ailleurs, et nous le confirmons dans notre analyse, que cette structure a un comportement non-linéaire. Nous proposons ici une méthodologie pour l'identification de l'amortissement et de la fréquence du premier mode de l'assemblage, tenant compte de cette caractéristique. Dans cette démarche, nous utilisons une large base de données d'essais constituée de réponses à des lâchers effectués en air ou en eau stagnante pour différentes amplitudes initiales. Des modèles non-linéaires paramétrés d'amortissement et de force élastique de rappel sont sélectionnés *a priori*. Ils dépendent du déplacement instantané de l'assemblage et, après optimisation des paramètres des modèles à partir des résultats expérimentaux, nous procurent une formulation pour l'amortissement et la fréquence adaptée au comportement non-linéaire de la structure. Les résultats obtenus permettent une représentation continue de ces deux grandeurs. Les tendances expérimentales observées auparavant sont retrouvées.

Dans une deuxième phase, le modèle non-linéaire d'amortissement est utilisé pour simuler le comportement dynamique de l'assemblage à l'aide du code aux éléments finis CEA, Castem2000. Les prédictions de réponses obtenues pour d'autres altitudes que celle du lâcher sont très encourageantes mais notre approche reste à valider pour le cas d'une excitation sismique et entretenue.

Abstract

The knowledge of PWR (Pressure Water Reactor) fuel assembly first mode damping is an important parameter as far as nuclear safety is concerned. Indeed, this characteristic is used as an input data for codes dedicated to predictions of the fuel behaviour under seismic excitation. Classic experimental methods used for the damping coefficient evaluation assume that the fuel assembly dynamical behaviour is linear. It has been shown elsewhere, and we confirm it in our analysis that this structure has a non-linear behaviour. Supposing this non-linear behaviour, we propose a methodology for the damping and frequency identification for the fuel assembly first mode. In this study an important test database consisting of fuel assembly responses to bending/release experiments in air or still water for different initial amplitude is used. Damping and stiffness non-linear models with parameters are selected *a priori*. They depend on fuel assembly instantaneous displacement and, after parameters optimization on experimental measurements, provide us for damping and frequency formulas, adapted to the structure non-linear behaviour. The obtained results allow for a continuous evolution of damping and frequency. The observed experimental tendencies are confirmed.

As a second step, the non-linear damping model is used to simulate fuel dynamic behaviour with FEM CEA code : Castem2000. The predicted responses obtained for other levels than the bending/release point are very encouraging but our approach needs to be validated for the case of a forced motion and seismic excitation.

Remerciements

Cette thèse a été réalisée sous la direction de Mme Dominique HABAULT, que je remercie très sincèrement pour m'avoir suivi, orienté et conseillé au cours de mes travaux. J'ai apprécié les rencontres que nous avons eues, sincères et constructives.

Je tiens à remercier M. Pascal BOULANGER qui a encadré ma thèse au sein du Laboratoire d'Hydraulique du Cœur (LHC), pour le temps qu'il m'a consacré tout au long de ces trois années de recherches, pour les moyens qu'il a mis à ma disposition afin de réaliser mes travaux et pour ses conseils avisés.

Je suis également très reconnaissant à M. Sergio BELLIZZI d'avoir participé à mes travaux de façon régulière. Ses explications, ses conseils et ses compétences m'ont été très précieuses et nos échanges forts agréables.

Je remercie M. Emmanuel DE LANGRE que j'admire tout particulièrement pour ses très nombreuses qualités, d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse et d'avoir contribué à l'amélioration de mon manuscrit.

J'exprime ma reconnaissance à M. Jean SABOT d'avoir accepté d'être rapporteur de ce travail et pour ses remarques constructives qui ont permis d'enrichir cet ouvrage.

Je remercie vivement M. Pierre ORSERO qui m'a fait l'honneur de bien vouloir présider le jury de ma thèse, ainsi que M. Robert PELISSIER pour sa participation au jury en tant qu'examineur.

Je remercie également M. Jean-Claude MAGUIN, Chef du LHC, de m'avoir accueilli dans son équipe et d'avoir mis à ma disposition l'ensemble des moyens disponibles au laboratoire. D'autre part, son expérience et ses critiques m'ont été profitables tout au long de mes travaux.

Je voudrais adresser à Annick TEKATLIAN mes chaleureux remerciements pour l'ensemble de ses conseils, notamment pour les préparations aux différentes réunions et à la soutenance. Je lui suis reconnaissant aussi pour ses petites paroles très encourageantes et justement adressées dans les moments difficiles, en particulier lors de la rédaction du manuscrit. J'ai aussi apprécié les nombreuses autres discussions que nous avons eues, très enrichissantes.

Je remercie aussi Pierrette FARDEAU, Joëlle VALLORY, Dominique BARBIER, Bruno COLLARD, Jean-Yves MALO et Frédérique WITTERS pour les nombreux échanges que nous avons eus, pour leurs conseils et les connaissances qu'ils m'ont fait partager.

J'adresse aussi mes remerciements à la SS2I du Laboratoire, alias Jean-François IVARS, Joëlle NAVATTE et Gilles GOBILLOT qui m'ont sorti de la panade à plusieurs reprises et ont contribué au bon déroulement de mes travaux.

Je suis aussi très reconnaissant à l'ensemble du personnel du LHC avec lesquels j'ai passé de bons moments au travail, aux repas, en VTT et devant les nombreuses galettes des rois ! J'exprime en particulier de profonds remerciements aux différentes secrétaires qui ont eu à me supporter, je pense à Jeanine MARTINEZ et à Michelle FOULQUIER.

Par ailleurs, je tiens à associer à mes travaux de thèse Mlle Florine PORAS, pour ses encouragements, son soutien, ses conseils et tout simplement sa présence. Je souhaite adresser mes remerciements à mes amis du Club de Badminton d'Aix en Provence, pour l'accueil qu'ils m'ont réservé, pour les parties de jeu et de bonnes rigolades. Je remercie aussi l'équipe du 2Bis de Meyrargues pour les moments sympa passés ensemble et pour leur correcteur orthographique ! Enfin je voudrais adresser un dernier mot envoyé en direction de Jean-Pascal HUDELOT avec lequel j'ai passé des moments bien agréables au sein de l'ASTHEC, au CEA et dans les environs d'Aix en Provence...

Pour finir, je remercie aussi Yann RAOULT, Fred LOUBEAU, ma sœur, mon bof, le petit Pablo, mes parents et mes grands-parents pour s'être déplacés jusqu'au Château de Cadarache le jour de la soutenance et, Franck PRUNUS, Yann CHATEL et ma grand mère pour y avoir songé !

I. INTRODUCTION GENERALE	6
I.1. Références bibliographiques	10
II. APPROCHE EXPERIMENTALE - DESCRIPTIF DU PROBLEME	11
II.1. Introduction	11
II.2. Description d'un assemblage combustible de R.E.P.	12
II.2.1. Les crayons combustibles	15
II.2.2. Le squelette	15
II.2.3. Les tubes guides	15
II.2.4. Les grilles	16
II.2.5. Les embouts	18
II.3. Réalisation expérimentale - Essais	19
II.3.1. Présentation de la boucle d'essai	19
II.3.2. Descriptif des essais réalisés	23
II.3.3. Récapitulatif des essais disponibles - Tracé de quelques acquisitions	27
II.4. Formulation du problème - Définitions	29
II.4.1. Définitions	29
II.4.2. Introduction au problème posé	32
II.4.3. Résultats des études précédents - Validité de l'hypothèse de comportement linéaire	33
II.4.4. Formulation du problème - Démarche envisagée	43
II.5. Conclusion	46
II.6. Références bibliographiques	47
III. ETAT DE L'ART : MODELES ET METHODES D'IDENTIFICATION	49
III.1. Introduction	49
III.2. Modèles d'amortissement et de force élastique de rappel	50
III.2.1. Modèles linéaires	50
III.2.2. Quelques modèles non-linéaires d'amortissement	54
III.2.3. Modèle non-linéaire de force élastique de rappel	59
III.3. Méthodes d'identification - Les outils de l'identification	60
III.3.1. Introduction - Définitions	60
III.3.2. Principales méthodes d'identification linéaires	61
III.3.3. Méthodes d'identification linéaire temporelle	63
III.3.4. Méthodes d'identification paramétriques non-linéaires	69
III.4. Conclusion	79
III.5. Références bibliographiques	80
IV. PROBLEME DIRECT - CALCUL DE $X(t)$	85
IV.1. Introduction	85
IV.2. Choix des modèles d'amortissement et de force élastique de rappel - Mise en équation	86
IV.2.1. Sélection des modèles d'amortissement en fonction des conditions environnementales	86
IV.2.2. Modèle de force élastique de rappel	87
IV.2.3. Mise en équation	88
IV.3. Calcul de la solution $x(t)$ en air - Force élastique de rappel linéaire	88
IV.3.1. Méthode de Krylov-Bogoliubov - "Averaging"	88
IV.3.2. Méthode Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky - "KBM"	90
IV.3.3. Intégration numérique de l'équation du mouvement - Validation	91
IV.3.4. Prise en compte de la variation de fréquence - Modèle semi-empirique de fréquence	93
IV.3.5. Justification analytique du modèle de fréquence - Lien avec la non-linéarité de force élastique de rappel	98
IV.3.6. Comparaison avec la solution à fréquence constante - Force élastique de rappel non-linéaire	118
IV.3.7. Autres modèles d'amortissement	121
IV.4. Calcul de la solution $x(t)$ en eau stagnante - Force élastique de rappel non-linéaire	122
IV.5. Conclusion	124
IV.6. Références bibliographiques	125
V. PROBLEME INVERSE - CALCUL DE L'AMORTISSEMENT ET DE LA FREQUENCE - RESULTATS ET INTERPRETATIONS - APPLICATIONS	126
V.1. Introduction	126

V.2. Identification des paramètres des modèles non-linéaires d'amortissement et force élastique de rappel	127
V.2.1. Organigramme du traitement d'un essai	127
V.2.2. Optimisation des paramètres d'un modèle - critères de qualité	128
V.2.3. Représentation de l'amortissement et de la fréquence	136
V.3. Dépouillement des essais et interprétations	138
V.3.1. Essais en air	138
V.3.2. Essais en eau stagnante	163
V.4. Implantation dans le code aux éléments finis CEA : CASTEM2000	175
V.4.1. Modélisation simplifiée d'un l'assemblage AFA-XL 1300 MW	176
V.4.2. Simulations de lâchers d'assemblage – Résultats	181
V.4.3. Discussions – Perspectives	184
V.5. Conclusion	186
V.6. Références bibliographiques	188
VI. CONCLUSION	190
VII. ANNEXES	192
VII.1. Annexe 1 : Solution établie par la méthode de "KBM"	192
VII.2. Annexe 2 : Calcul numérique de $\theta_1(t) = \int_0^t \Omega_1(A_1(s))ds$.	194
VII.3. Annexe 2bis : Calcul numérique de $\theta_2(t) = \int_0^t \Omega_2(A_2(s))ds$	195
VII.4. Annexe 3 : Calcul analytique de l'intégrale $\int_0^t \Omega_2(A_2(s))ds = \int_0^t \left(\tilde{f}_0 - \frac{\tilde{\lambda}_2}{2\pi} \mu_{\beta_2} A_2^{ap\beta_2}(s) \right) ds$	196
VII.5. Annexe 4 : Comparaisons des réponses mesurées et des réponses optimisées pour les lâchers en air (Modèle Air 1)	199
VII.6. Annexe 5 : Comparaison des réponses mesurées et des réponses optimisées pour les lâchers en eau stagnante (Modèle Air 1)	202
VII.7. Annexe 6: Taux d'amortissement obtenu en eau stagnante	205
VII.8. Annexe 7 : Fréquence obtenue en eau stagnante	209
VII.9. Annexe 8 : Caractéristiques des poutres équivalentes	213
VII.9.1. Masse volumique équivalente	213
VII.9.2. Moment d'inertie de flexion	214
VII.9.3. Raideurs additionnelles	215
VII.10. Annexe 9 : Modèle numérique simplifié d'assemblage AFA-XL 1300 MW - Calcul des modes propres dans CASTEM2000	216
VII.11. Annexe 10 : Simulation CASTEM2000 d'un lâcher d'assemblage AFA-XL 1300 MW – Modèle non-linéaire d'amortissement – Raideur linéaire.	221

TABLE DES ILLUSTRATIONS ET DES TABLEAUX

Figure II-1 : Cuve d'un Réacteur à Eau Pressurisée avec sa ligne d'assemblages.	12
Figure II-2 : Assemblage combustible.	13
Figure II-3 : Araignée.	16
Figure II-4 : Grille d'assemblage.	17
Figure II-5 : Crayon dans sa cellule de grille.	17
Figure II-6 : Embout supérieur d'assemblage.	19
Figure II-7 : Section d'essai.	21
Figure II-8 : Système de lâcher.	22
Figure II-9 : Mesure du déplacement.	23
Figure II-10 : Courbe de calibration de la caméra OPTRON.	24
Figure II-11 : Densité spectrale de puissance de l'ensemble des lâchers en air d'amplitude initiale de 4 à 16 mm.	26
Figure II-12 : Comparaison d'un lâcher sur 2 types d'assemblage.	28
Figure II-13 : Comparaison de lâchers pour 2 amplitudes initiales différentes.	28
Figure II-14 : Comparaison de lâchers pour deux vitesses d'écoulement.	29
Figure II-15 : Evolution de l'amortissement en fonction de la vitesse d'écoulement et de l'amplitude du lâcher. Maquette d'assemblage à échelle $\frac{1}{2}$ [II-8].	35
Figure II-16 : Evolution de l'amortissement en fonction de l'amplitude initiale du lâcher et de la vitesse d'écoulement - Maquette d'assemblage à échelle 1 [II-10].	36
Figure II-17 : Evolution de la fréquence propre en fonction de l'amplitude initiale du lâcher et des conditions environnementales (air, eau stagnante) - Maquette d'assemblage à échelle $\frac{1}{2}$ [II-8].	36
Figure II-18 : Evolution de la fréquence propre en fonction de l'amplitude initiale du lâcher et de la vitesse d'écoulement - Maquette d'assemblage à échelle 1 [II-10].	37
Figure II-19 : Tracé de la force de traction appliquée sur la grille n°4 en fonction du déplacement résultant - Assemblage 900 MW [II-11].	38
Figure II-20 : Tracé de la force de traction appliquée sur la grille n°6 en fonction du déplacement résultant - Assemblage 1300 MW [II-13].	39
Figure II-21 : Représentation dans le plan de phase des oscillations libres d'un système linéaire dissipatif à un seul degré de liberté. Oscillations libres simulées.	40
Figure II-22 : Représentation dans le plan de phase des oscillations libres d'un système dissipatif à un seul degré de liberté avec une non-linéarité de raideur de Duffing. Oscillations libres simulées.	40
Figure II-23 : Représentation dans le plan de phase des oscillations libres d'un système dissipatif à un degré de liberté avec une non-linéarité d'amortissement. Oscillations libres simulées.	41
Figure II-24 : Oscillations libres de l'assemblage à échelle 1. Lâcher 12 mm. Grille n°6.	42
Figure II-25 : D.S.P du lâcher de l'assemblage représenté sur la Figure II-24.	42
Figure II-26 : Représentation dans le plan de phase des oscillations libres de la grille n°6 d'un assemblage à échelle 1. Oscillations libres mesurées.	42
Figure II-27 : Schéma de la démarche envisagée - Résolution d'un problème inverse.	44
Figure III-1 : Enveloppe des oscillations libres d'une structure aérienne en fonction du nombre de cycles d'oscillations.	58
Figure IV-1 : Comparaison entre la solution analytique et la solution numérique pour un lâcher à 12.2 mm.	92
Figure IV-2 : Comparaison de la solution analytique à fréquence constante au lâcher expérimental. Lâcher d'amplitude initiale 12.2 mm - Assemblage à échelle 1.	93
Figure IV-3 : Evolution de la fréquence au cours des lâchers d'amplitude initiale 8 mm, 10 mm et 14 mm en air - Méthode de détermination des passages successifs par zéro.	94
Figure IV-4 : Comparaison de la fréquence moyenne du signal expérimental avec les modèles de fréquence (IV-27) ou (IV-28).	97
Figure IV-5 : Comparaison de la solution analytique à fréquence variable et du lâcher expérimental. Lâcher d'amplitude 12.2 mm - Assemblage à échelle 1.	98
Figure IV-6 : Comparaison entre la solution analytique exacte (IV-46) et la solution obtenue par intégration numérique de l'équation du mouvement (IV-47). $(\bar{\lambda}_1; \bar{\beta}_1)$ de "faible importance".	103
Figure IV-7 : Comparaison entre la solution analytique exacte (IV-46) et la solution obtenue par intégration numérique de l'équation du mouvement (IV-47). $(\bar{\lambda}_1; \bar{\beta}_1)$ caractéristique d'une évolution de la fréquence observée expérimentalement.	104

Figure IV-8 : Zoom sur les premiers instants des réponses numérique et analytique à la suite du lâcher.	105
Figure IV-9 : Comparaison entre la solution analytique approchée définie par (IV-51) et la solution analytique exacte (IV-46), $(\bar{\lambda}_1; \beta_1)$ de "faible importance".	107
Figure IV-10 : Comparaison entre la solution analytique approchée définie par (IV-51) et la solution analytique exacte (IV-46), $(\bar{\lambda}_1; \beta_1)$ caractéristique d'une évolution de la fréquence observée expérimentalement.	108
Figure IV-11 : Comparaison de l'enveloppe approchée et de la fréquence approchée avec leur expression analytique exacte.	109
Figure IV-12 : Comparaison entre la solution analytique exacte (IV-60) et la solution obtenue par intégration numérique de l'équation du mouvement (IV-61). $(\tilde{\lambda}_2; \beta_2)$ de "faible importance".	112
Figure IV-13 : Comparaison entre la solution analytique exacte (IV-60) et la solution obtenue par intégration numérique de l'équation du mouvement (IV-61). $(\tilde{\lambda}_2; \beta_2)$ caractéristique d'une évolution de la fréquence constatée expérimentalement.	113
Figure IV-14 : Comparaison entre la solution analytique approchée (IV-65) et la solution analytique exacte (IV-60). $(\tilde{\lambda}_2; \beta_2)$ de "faible importance".	115
Figure IV-15 : Comparaison entre la solution analytique approchée (IV-65) et la solution analytique exacte (IV-60). $(\tilde{\lambda}_2; \beta_2)$ caractéristique de l'évolution de la fréquence constatée expérimentalement.	116
Figure IV-16 : Comparaison de l'enveloppe approchée et de la fréquence approchée avec leur expression analytique exacte.	117
Figure IV-17 : Comparaison entre la solution numérique déterminée par la résolution de l'équation (IV-47) avec la solution (IV-71). $(\bar{\lambda}_1; \beta_1)$ de "faible importance".	119
Figure IV-18 : Comparaison entre la solution numérique déterminée par la résolution de l'équation (IV-47) avec la solution (IV-71). $(\bar{\lambda}_1; \beta_1)$ caractéristique d'une évolution de la fréquence observée expérimentalement.	120
Figure V-1 : Convergence d'optimisations en fonction de différents jeux de valeurs initiales des paramètres.	133
Figure V-2 : Comparaisons entre les réponses mesurées et les réponses optimisées (Modèle Air 1). Lâchers effectués l'assemblage AFA-XL 1300 MW (LHC).	140
Figure V-3 : Comparaisons entre les réponses mesurées et les réponses optimisées (Modèle Air 1). Lâchers effectués sur l'assemblage XL 1300 MW (EMSI).	141
Figure V-4 : Comparaisons entre les réponses mesurées et les réponses optimisées (Modèle Air 1). Lâchers effectués sur l'assemblage AFA 900 MW (EMSI).	142
Figure V-5 : Evolutions de l'erreur quadratique globale et du coefficient de corrélation en fonction de l'amplitude initiale du lâcher pour les trois séries d'essais en air.	143
Figure V-6 : Evolutions du taux d'amortissement en fonction de l'amplitude du mouvement. Résultats pour l'assemblage AFA-XL 1300 MW (LHC).	145
Figure V-7 : Evolutions du taux d'amortissement en fonction de l'amplitude du mouvement. Résultats pour l'assemblage XL 1300 MW (EMSI).	146
Figure V-8 : Evolutions du taux d'amortissement en fonction de l'amplitude du mouvement. Résultats pour l'assemblage AFA 900 MW (EMSI).	147
Figure V-9 : Evolutions de l'amortissement à amplitude nulle $\frac{C_0}{2\bar{\omega}}$ en air pour trois types d'assemblage.	148
Figure V-10 : Zoom sur 2 secondes du signal des oscillations libres en fin de mesure des lâchers effectués sur trois assemblages différents.	150
Figure V-11 : Evolution de la pente du taux d'amortissement en fonction de l'amplitude initiale de lâcher pour trois types d'assemblage.	151
Figure V-12 : Evolutions de la fréquence en fonction de l'amplitude du mouvement. Résultats pour l'assemblage AFA-XL 1300 MW (LHC).	153
Figure V-13 : Evolutions de la fréquence en fonction de l'amplitude du mouvement. Résultats pour l'assemblage XL 1300 MW (EMSI).	154
Figure V-14 : Evolutions de la fréquence en fonction de l'amplitude du mouvement. Résultats pour l'assemblage AFA 900 MW (EMSI).	155

Figure V-15 : Evolution de la fréquence propre f_0 des trois assemblages en fonction de l'amplitude initiale de lâcher.	156
Figure V-16 : Evolution du coefficient caractéristique de la non-linéarité de force de rappel en fonction de l'amplitude de lâcher pour les trois types d'assemblage.	157
Figure V-17 : Comparaisons des évolutions de l'erreur quadratique et du coefficient de corrélation obtenues lors d'optimisations sur cinq ou quatre paramètres. Valeur de C_0 fixée.	159
Figure V-18 : Comparaisons entre les réponses mesurées et les réponses optimisées du modèle Air 2. Lâchers effectués sur un assemblage AFA-XL 1300 MW (LHC).	162
Figure V-19 : Comparaisons entre les différents modèles de solution analytique à partir de l'erreur quadratique globale et du coefficient de corrélation.	165
Figure V-20 : Comparaisons entre les réponses mesurées et les réponses optimisées (Modèle Air 1). Lâchers effectués en eau stagnante sur l'assemblage AFA-XL 1300 MW (LHC).	166
Figure V-21 : Comparaisons entre les réponses mesurées et les réponses optimisées (Modèle Air 1). Lâchers effectués en eau stagnante sur l'assemblage XL 1300 MW (EMSI).	167
Figure V-22 : Comparaisons entre les réponses mesurées et les réponses optimisées (Modèle Air 1). Lâchers effectués en eau stagnante sur l'assemblage AFA 900 MW (EMSI).	168
Figure V-23 : Evolution de l'amortissement à amplitude nulle $\frac{C_0}{2\hat{\omega}}$ en eau stagnante pour trois types d'assemblage.	170
Figure V-24 : Evolution des paramètres C_1 (Modèle Air 1) et C_3 (Modèle Eau 1) en fonction de l'amplitude initiale de lâcher.	171
Figure V-25 : Evolutions comparées en air et en eau de l'amortissement à amplitude nulle et de la pente du taux d'amortissement pour trois séries de lâchers.	173
Figure V-26 : Evolutions de la fréquence propre et du coefficient caractéristique de la non-linéarité de force de rappel en fonction de l'amplitude initiale de lâcher. Comparaisons des résultats en air et en eau.	175
Figure V-27 : Géométrie du modèle d'assemblage 1300 MW.	177
Figure V-28 : Raideur de rotation additionnelle attachée à un élément poutre-tubes ou poutre-grille.	178
Figure V-29 : Méthode de résolution implantée dans CASTEM2000 pour simuler un lâcher d'assemblage.	182
Figure V-30 : Comparaison entre un signal de lâcher simulé et le signal expérimental associé (lâcher en air, amplitude initiale : 9.8 mm).	183
Figure V-31 : Comparaison entre un signal de lâcher simulé et le signal expérimental associé (lâcher en eau stagnante, amplitude initiale : 10.1 mm).	184
Tableau II-1 : Caractéristiques des composants d'assemblage	14
Tableau II-2 : Récapitulatif de tous les essais disponibles.	27
Tableau V-1 : Récapitulatif des modèles de solution analytique envisagés en air et des formulations associées.	138
Tableau V-2 : Récapitulatif des modèles de solution analytique envisagés en eau stagnante et des formulations associées.	164
Tableau V-3 : Valeurs mesurées/calculées des quatre premières fréquences propres d'un assemblage 1300 MW.	180
Tableau V-4 : Valeurs mesurées/calculées des quatre premières fréquences propres (recalées) d'un assemblage 1300 MW.	180

I. INTRODUCTION GENERALE

La détermination de l'amortissement d'un assemblage combustible de Réacteur nucléaire à Eau Pressurisée (R.E.P) est, depuis plusieurs années, à l'origine de nombreuses études. Que ce soit dans le cas de structures complexes telles que l'assemblage combustible ou pour d'autres structures mécaniques boulonnées, soudées, comportant de nombreuses liaisons et points de contacts, comme la plupart des structures actuelles, ce calcul est toujours une étape délicate.

L'estimation de la valeur de l'amortissement réduit du premier mode de l'assemblage est un élément essentiel dans le contexte de sûreté nucléaire. En effet, ce mode est prépondérant lorsque l'assemblage est soumis à une excitation de type sismique et responsable des amplitudes du déplacement les plus importantes. Selon sa position, l'assemblage peut alors venir choquer contre les parois de la cuve du réacteur ou contre un assemblage voisin. Les conséquences d'un tel événement peuvent être importantes, comme provoquer la perte d'intégrité mécanique des grilles de mélange qui sont des déformations irréversibles du squelette de la structure (l'écrasement des tubes guides qui bloque la chute des crayons absorbants). Pour l'étude de telle configuration d'accident, l'acquisition de réponses in situ est impossible et la prédiction du comportement de l'assemblage est alors effectuée selon les deux démarches suivantes : par simulations numériques ou par l'analyse de réponses obtenues sur maquettes d'assemblage. Cette dernière approche constitue d'ailleurs le seul moyen de valider les modèles utilisés dans les codes de calculs.

La première de ces deux démarches repose principalement sur un travail d'amélioration de la modélisation du comportement des assemblages. Les deux principales difficultés sont d'abord la discrétisation géométrique en éléments finis de l'assemblage et l'homogénéisation de leur caractéristique pour représenter correctement la structure, et ensuite, la prise en compte des lois de comportement des nombreuses sous-structures et liaisons. Aujourd'hui, la prédiction par les codes de calculs ne permettent de retrouver que partiellement les tendances observées expérimentalement. La dernière modélisation en cours de validation semble très prometteuse et donne des résultats intéressants. Elle reprend les acquis des modélisations non-linéaires de [I-1]* : modèle à trois poutres avec prise en compte d'un amortissement par frottement sec au niveau de la liaison crayons-grilles et d'une loi de pénalisation de la raideur par l'introduction d'une raideur tangentielle supplémentaire entre les nœuds de la grille et les nœuds correspondant du crayon. Cette modélisation s'est inspirée des résultats de [I-2] : modèle prenant en compte les

* Les références bibliographiques sont reportées en fin de chaque chapitre.

glissements successifs des crayons dans les cellules de grille selon leur éloignement par rapport à la fibre neutre et une représentation à 3, 5 ou 7 poutres. Enfin il a été introduit des liaisons non-linéaires de type rotule élastoplastique [I-3] aux contacts crayons-grilles. La confrontation avec des mesures effectuées en statique est très satisfaisante même si le modèle est un "peu plus raide" que dans la réalité. La comparaison dynamique, à partir de réponses obtenues par balayage sinus sur un assemblage 900 MW, montre que le modèle permet de retrouver les tendances concernant l'évolution de la fréquence et de l'amortissement en fonction du niveau de l'excitation. Cette modélisation permet de retrouver aussi les valeurs de la fréquence propre mais pas celles de l'amortissement. L'étude proposée dans ce mémoire est une contribution à la modélisation analytique des phénomènes dissipatifs qui se produisent lors du mouvement de l'assemblage.

La seconde approche utilise des essais effectués sur assemblages réels qui peuvent être d'échelle réduite ou d'échelle 1. Ces essais sont ensuite exploités comme données d'entrée à l'étape d'identification de l'amortissement et de la fréquence. Les méthodes qui sont appliquées aujourd'hui dans le calcul de ces caractéristiques sont basées sur une représentation linéaire de l'équation du mouvement. C'est principalement cette hypothèse qui est remise en cause dans ce mémoire. La modélisation proposée du comportement non-linéaire repose essentiellement sur la prise en compte d'un modèle non-linéaire d'amortissement. Cette approche pose deux types de problème : le premier est celui du choix du modèle d'amortissement sensé représenter les phénomènes physiques de dissipation qui sont d'origines multiples dans le cas des vibrations d'un assemblage. Le second est celui de la détermination des valeurs des paramètres de ce modèle. Le travail présenté dans cette thèse est une contribution à ces deux problèmes.

Concernant les réponses expérimentales traitées, on se limitera aux oscillations libres mesurées en un point à la suite du lâcher de l'assemblage. Ce point de mesure correspond au ventre du premier mode d'assemblage, ce qui limite l'étude à une approche simple degré de liberté. Même si des essais en air, en eau stagnante et en eau en écoulement ont pu être acquis, seuls quelques modèles d'amortissement non-linéaires pour l'air et l'eau stagnante ont pu être envisagés. En effet, une difficulté supplémentaire liée à la prise en compte et à la formulation d'une non-linéarité de force de rappel a retardé notablement la progression des travaux.

Le premier chapitre de ce rapport précise le contexte de l'étude et détaille le problème posé très généralement dans cette introduction. Les éléments qui constituent l'assemblage combustible sont détaillés afin de mieux comprendre l'origine des phénomènes dissipatifs à considérer. A cette occasion, on précise quelques notions importantes souvent employées dans ce mémoire. Le mode opératoire et la boucle expérimentale ayant permis d'acquérir les différents essais y sont décrits. Dans ce chapitre, les principaux résultats déjà

obtenus par des méthodes classiques d'identification linéaires sont rappelés et synthétisés. Ils concernent principalement les évolutions de l'amortissement et de la fréquence en fonction du niveau de l'excitation et l'influence d'un certain nombre d'autres paramètres expérimentaux et géométriques. Ces tendances sont précieuses pour justifier la nécessité de la modélisation non-linéaire proposée dans ce travail.

Le chapitre suivant concerne l'analyse des recherches et données bibliographiques. Elles sont principalement axées sur les modèles d'amortissement non-linéaires et leurs sens physiques ainsi que sur les méthodes d'identification. Les modèles d'amortissement linéaires couramment utilisés sont aussi présentés. Les principales méthodes expérimentales d'identification linéaires sont brièvement rappelées. Un regard plus précis est porté sur les méthodes d'identification non-linéaires et sur les outils nécessaires à cette identification, notamment les méthodes d'approximations.

Dans le chapitre IV, les modèles d'amortissement et de force de rappel adaptés à notre étude sont envisagés en fonction des conditions environnementales : air, eau et eau en écoulement. Les différentes solutions de l'équation non-linéaire du mouvement obtenues en fonction du choix des modèles sont calculées à l'aide des méthodes d'approximations développées dans le chapitre II. Dans une première phase, nous avons recherché ces solutions à fréquence constante. Par la suite, la formulation d'un modèle de fréquence à partir de l'analyse des essais a permis de tenir compte de son évolution au cours du lâcher. Ce modèle est ensuite relié à une non-linéarité de force de rappel qui peut être implantée directement dans l'équation du mouvement. Les formes des différentes solutions trouvées sont discutées et leur validation effectuée par comparaison avec les solutions calculées par résolution numérique de l'équation différentielle non-linéaire du mouvement, pour un jeu de paramètres fixé.

Dans le chapitre V, l'identification des paramètres des modèles d'amortissement et de force de rappel est menée à partir des essais réalisés. L'organigramme des étapes nécessaires à l'identification ainsi que les précautions prises sont détaillées. Les outils informatiques et les algorithmes utilisés pour l'optimisation des paramètres sont précisés. Les résultats ainsi obtenus sont interprétés et comparés à ceux trouvés par une approche linéaire. Les tendances observées entre les résultats en air et ceux en eau stagnante sont analysés. Dans le dernier paragraphe de ce chapitre, nous montrons comment est implanté le modèle non-linéaire d'amortissement dans le code aux éléments finis CASTEM2000 et comment sont utilisées les valeurs identifiées des paramètres de ce modèle. Quelques simulations du comportement de l'assemblage basée sur notre nouvelle modélisation sont présentées.

Dans le chapitre de conclusion, les extensions et perspectives liées aux développements à venir d'une telle approche sont énumérées. Le point est fait sur ce qui mérite encore quelques améliorations. Les perspectives à cours terme concernent essentiellement l'application de la démarche présentée aux essais de lâchers en eau sous écoulement. Le travail le plus important reste celui de l'application aux cas de l'excitation fluide aléatoire et de l'excitation sismique. Les méthodes d'identification basées sur une approche énergétique qui n'ont pu être mises en œuvre peuvent être envisagées.

Les récentes études concernant l'influence de la température sur les valeurs de l'amortissement ont montré une baisse d'environ 7% entre les valeurs calculées à 50 °C et 170 °C [I-4]. La prise en compte de ce paramètre n'a pas été introduite dans les travaux.

I.1. Références bibliographiques

[I-1] BEN JEDIDIA A.

Etude du comportement sismique d'un cœur de réacteur nucléaire de type R.E.P.
Thèse de Doctorat. Discipline : Mécanique. Paris. 1993. 443 p.

[I-2] GRIMEZ O., GUERIN A., DE LANGRE E.

"Modélisation du comportement vibratoire en air d'un assemblage combustible".
Rapport interne C.E.A./DMT/95/353.

[I-3] FONTAINE B.

"Modèle non-linéaire du comportement mécanique d'un assemblage combustible".
Rapport interne DMT/97/260.

[I-4] BARBIER D.

"MASSE : amortissement sous écoulement à 170 °C d'un assemblage AFA-XL à échelle 1".
Note Technique DEC/SECA/LHC/97/040.

II. APPROCHE EXPERIMENTALE - DESCRIPTIF DU PROBLEME

II.1. Introduction

La première partie de ce chapitre est consacrée à la description géométrique d'un assemblage combustible de type R.E.P. Les différents éléments de cette structure complexe sont détaillés afin de mieux cerner l'origine des phénomènes physiques prépondérants qui seront à prendre en compte dans l'étude analytique qui suit.

Ensuite, le mode opératoire d'obtention des réponses de l'assemblage qui serviront de support à l'identification est explicité. Les résultats des essais représentent essentiellement des lâchers de l'assemblage en air, en eau stagnante et en eau sous écoulement. Ces derniers ont été réalisés au Laboratoire d'Hydraulique du Cœur de Cadarache (DRN/DEC/SECA/LHC), sur une boucle expérimentale pouvant accueillir jusqu'à deux assemblages non irradiés à échelle 1 et par le Laboratoire d'Etude de Mécanique Sismique (DRN/DMT/SEMT/EMSI). Un soin particulier a été porté sur la réalisation du système de lâcher de l'assemblage afin d'effectuer un lâcher qui soit le plus franc possible pour n'exciter que le premier mode de structure.

Les définitions et principales notions employées tout au long ce mémoire sont précisées.

Le problème, évoqué globalement dans l'introduction générale, est alors formulé de manière plus précise et la démarche suivie pour parvenir à sa résolution présentée. L'hypothèse principale de cette démarche repose sur une modélisation non-linéaire de l'équation du mouvement de l'assemblage.

Ce chapitre inclut également une synthèse de l'ensemble des résultats obtenus par des méthodes de caractérisation linéaires, concernant les évolutions de l'amortissement et la fréquence en fonction de l'amplitude de l'excitation. Dans une certaine mesure, ceux-ci permettent de justifier l'approche non-linéaire qui est entreprise.

II.2. Description d'un assemblage combustible de R.E.P.

L'assemblage combustible est l'organe principal du cœur d'un Réacteur de centrale nucléaire à Eau Pressurisée (Figure II-1).

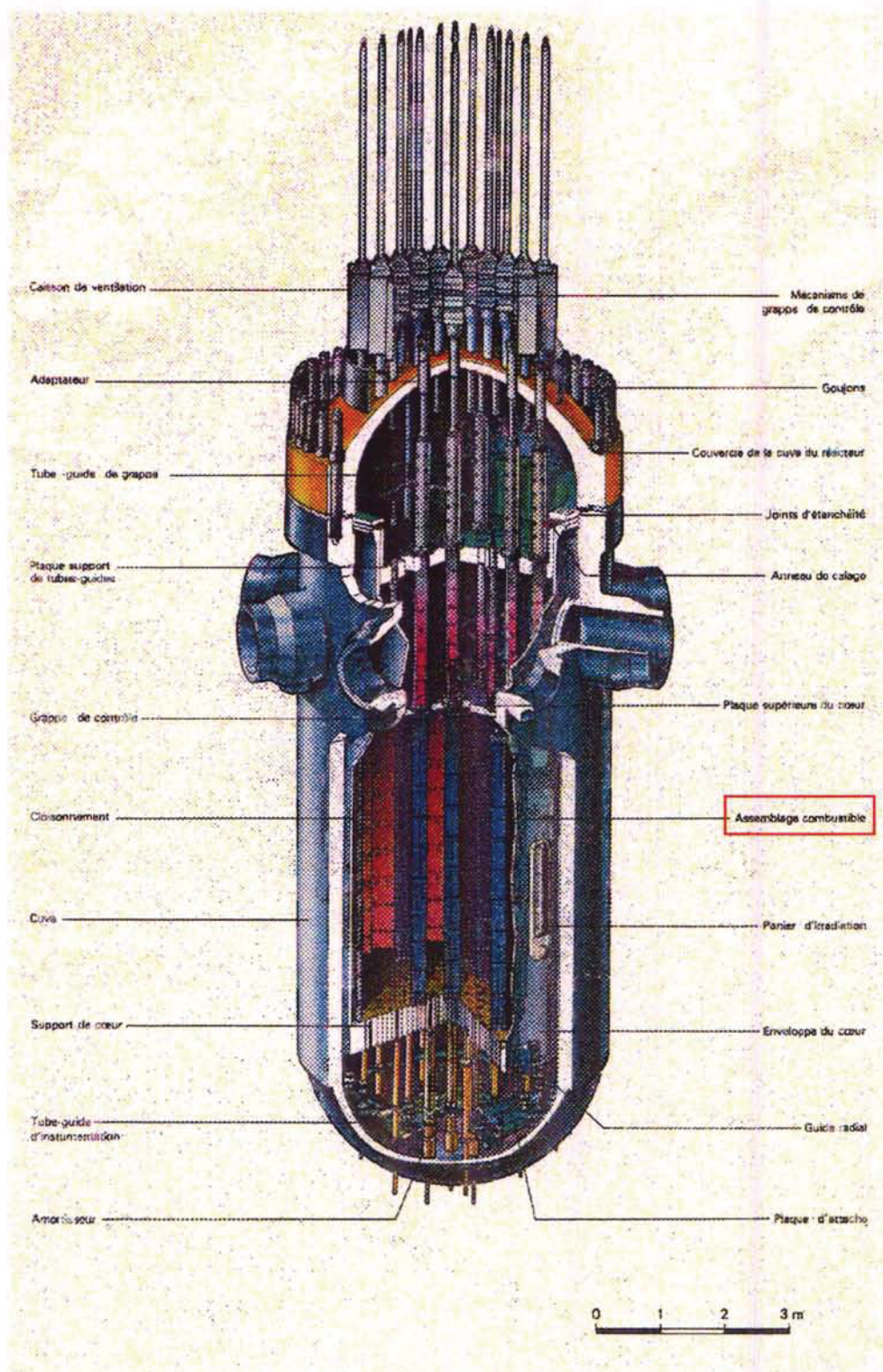


Figure II-1 : Cuve d'un Réacteur à Eau Pressurisée avec sa ligne d'assemblages.

On compte environ 157 assemblages dans une centrale R.E.P de 900 MW et 193 pour une centrale de 1300 MW. Ces assemblages sont baignés dans le fluide caloporteur (eau en écoulement du bas vers le haut de la cuve) et fixés à leurs extrémités par deux plaques raidées dites plaques de cœur. L'assemblage est une structure élancée multisupportée d'environ 5 mètres de haut pour une vingtaine de centimètres de large. Sa masse est de l'ordre de 800 kg environ. L'assemblage combustible le plus courant (Figure II-2) est constitué principalement d'un réseau carré de 17x17 crayons dont 264 éléments sont des crayons combustibles qui contiennent l'oxyde d'uranium et de leur structure de supportage appelé squelette. Celui-ci assure la rigidité de l'ensemble et est lui-même une structure relativement complexe composée de grilles de maintien, de tubes guides de deux embouts supérieur et inférieur. L'ensemble de ces constituants est décrit dans la suite de ce paragraphe.

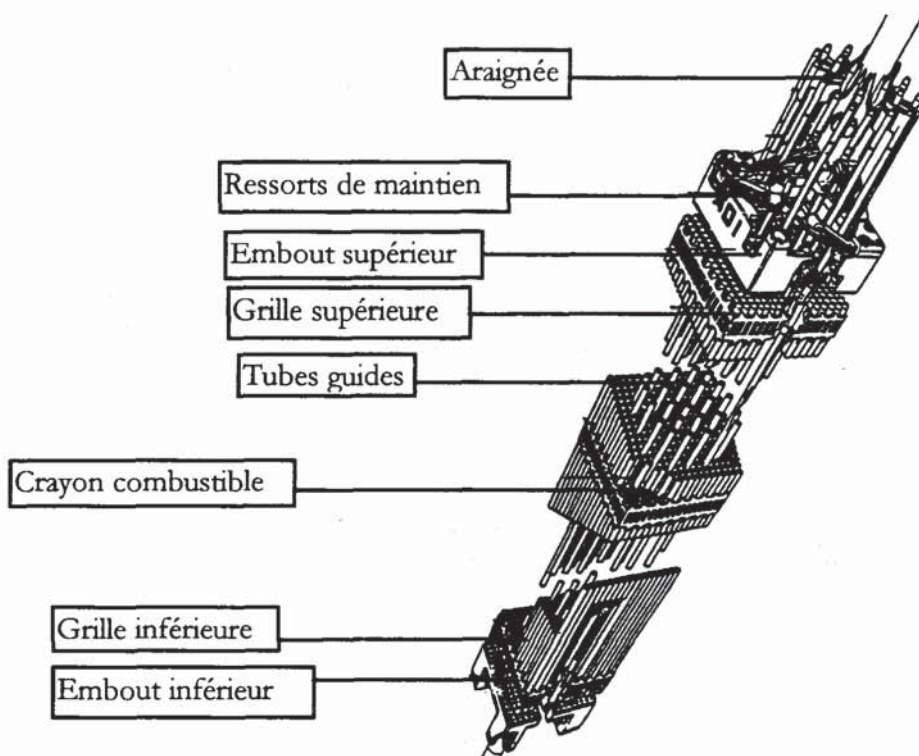


Figure II-2 : Assemblage combustible.

Parmi les crayons combustibles, au cœur de l'assemblage, peuvent monter et descendre les crayons absorbants. En couissant dans les tubes guides, ils jouent le rôle de régulateurs de la réaction nucléaire.

L'araignée permet le pilotage des crayons absorbants. Les embouts, les tubes guides et les grilles forment le squelette. Les grilles sont soudées aux tubes guides, eux mêmes soudés

aux embouts. Cet ensemble garantit la rigidité de l'assemblage. Les grilles ont pour rôle de maintenir les crayons combustibles et sont le mélangeur du fluide caloporteur en écoulement axial (du bas vers le haut de l'assemblage).

Les caractéristiques principales des composants de l'assemblage sont données dans le Tableau II-1 pour les deux types d'assemblages :

Type de composant	Assemblage AFA 900 MW	Assemblage AFA 1300 MW
<u>Grilles</u>		
Enveloppe (mm x mm)	213,38 x 213,38	213,38 x 213,38
Hauteur utile (mm)	43	33
Épaisseur des ressorts (mm)	0,27	0,27
<u>Embout supérieur</u>		
Dimensions (mm x mm x mm)	213,46 x 213,46 x 93,78	213,46 x 213,46 x 115
Nombre de lames par ressort de maintien	4	5
<u>Embout inférieur</u>		
Dimensions (mm x mm x mm)	213,97 x 213,97 x 69,55	213,97 x 213,97 x 142,24
<u> Tubes guides</u>		
Diamètre extérieur partie haute (mm)	12,05	12,05
Diamètre extérieur partie basse (mm)	10,9	10,9
Épaisseur (mm)	0,4	0,4
<u>Crayon combustible</u>		
Diamètre extérieur de gaine (mm)	9,5	9,5
Diamètre intérieur de gaine (mm)	8,36	8,36
Longueur de la colonne active (mm)	3660	4267,2
Densité nominale pastille (g/cm ³)	10,41	10,41
<u>Enveloppe de l'assemblage sans ses ressorts (mm)</u>	213,97 x 213,97 x 4058,6	213,97 x 213,97 x 4796,1

Tableau II-1 : Caractéristiques des composants d'assemblage

II.2.1. Les crayons combustibles

Pour un réseau carré de 17x17 éléments, on compte 264 crayons combustibles. Le reste des autres éléments est constitué de 25 tubes guides dont un tube est réservé à l'instrumentation (mesures neutroniques). Chaque crayon est constitué d'un tube, généralement en Zircalloy 4, qui contient les pastilles d'oxyde d'uranium sur une hauteur déterminée appelée colonne active. Le combustible est comprimé contre un bouchon inférieur par un ressort localisé en partie haute du tube.

II.2.2. Le squelette

Le squelette, dont le rôle est de maintenir l'écartement entre les crayons combustibles et d'assurer la rigidité de l'assemblage, est constitué :

- des tubes guides,
- des grilles de maintien et d'extrémités,
- des embouts inférieur et supérieur,
- d'un tube d'instrumentation.

II.2.3. Les tubes guides

Les tubes guides permettent l'insertion dans l'assemblage de grappes de contrôle constituées de 24 crayons absorbants. Ceux-ci sont tenus en leur extrémité supérieure par le bras d'une étoile multibranche appelée araignée (Figure II-3). En cas d'arrêt d'urgence du réacteur, ces crayons chutent dans les tubes guides et absorbent la majeure partie de la réaction. La réduction de diamètre opérée en partie basse du tube guide permet à celui-ci de jouer le rôle d'amortisseur hydraulique pour les crayons absorbants.

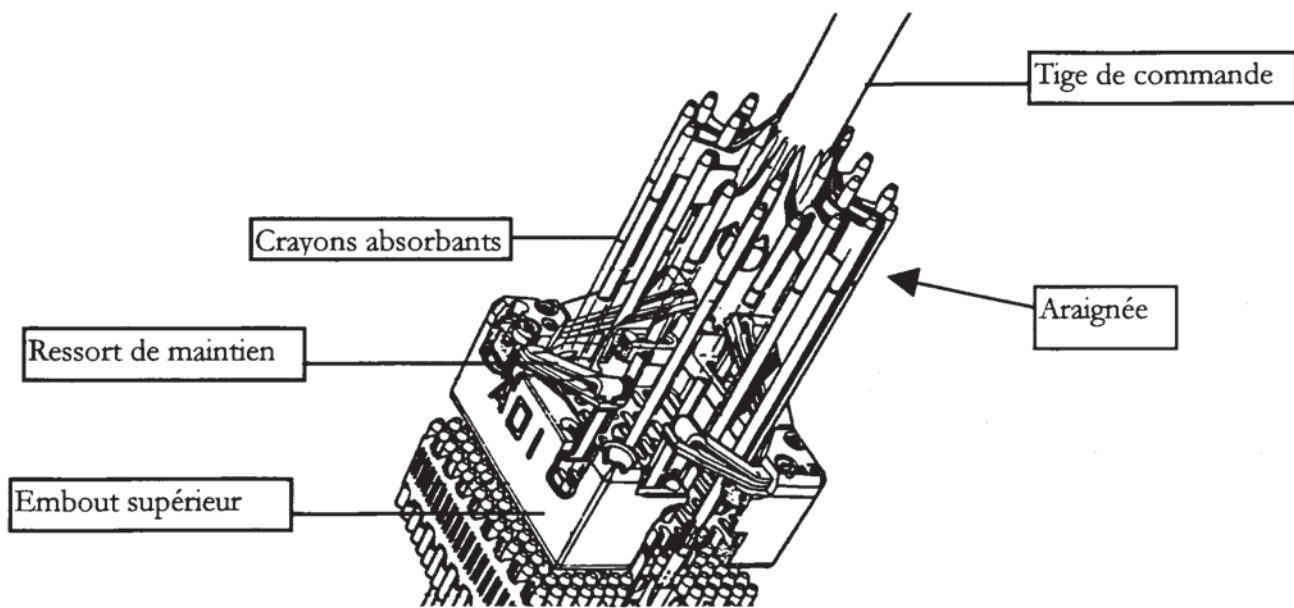


Figure II-3 : Araignée.

II.2.4. Les grilles

Ces grilles en Zirconium ou en Inconel, au nombre de 8 (assemblage 900 MW) ou 10 (assemblage 1300 MW), sont réparties sur toute la hauteur de l'assemblage (Figure II-4). Elles ont plusieurs fonctions importantes. La première, déjà évoquée, est celle d'assurer le maintien latéral des crayons combustibles grâce aux cellules de grilles en même temps qu'une fonction de résistance mécanique à l'écrasement latéral. Ce maintien est réalisé, selon le concept de grille, par deux ressorts à lame qui plaquent le crayon contre 4 bossettes opposées (Figure II-5). C'est ce qui équipe le modèle standard d'assemblage. Ce système d'appui assure un bon écartement des crayons dans les grilles ainsi que leur supportage axial par friction.

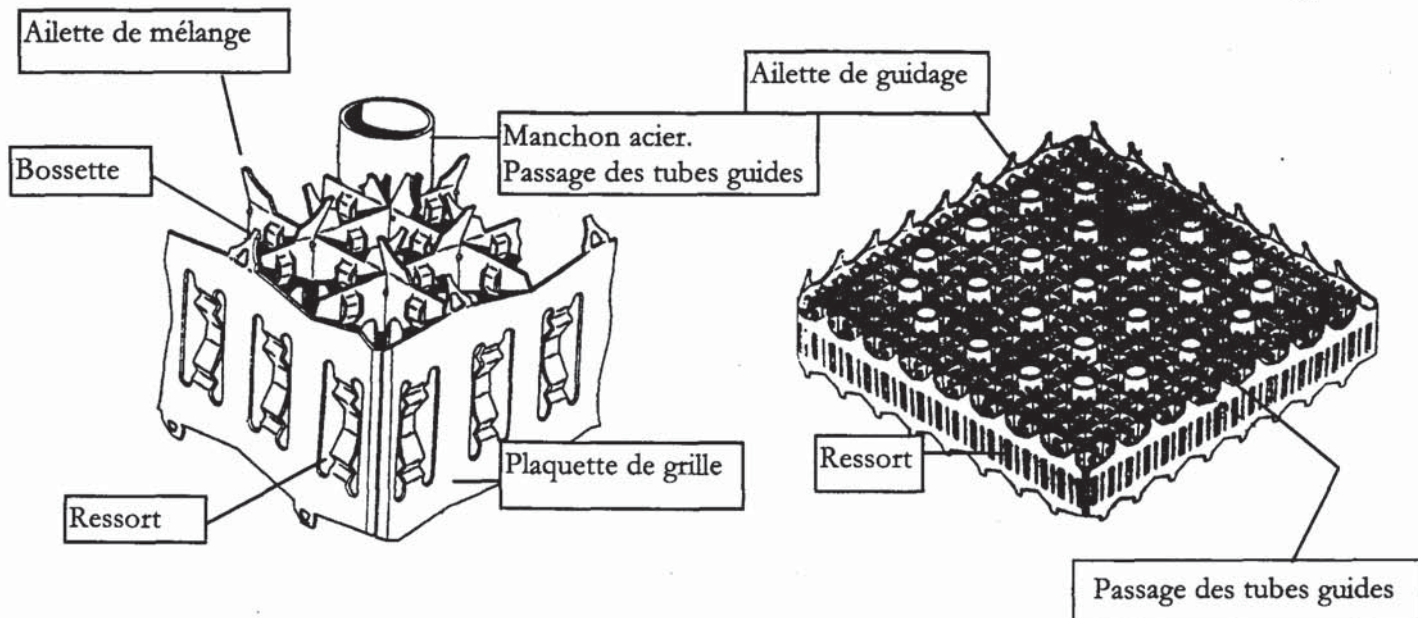


Figure a : Détail d'une cellule

Figure b : Vue générale

Figure II-4 : Grille d'assemblage.

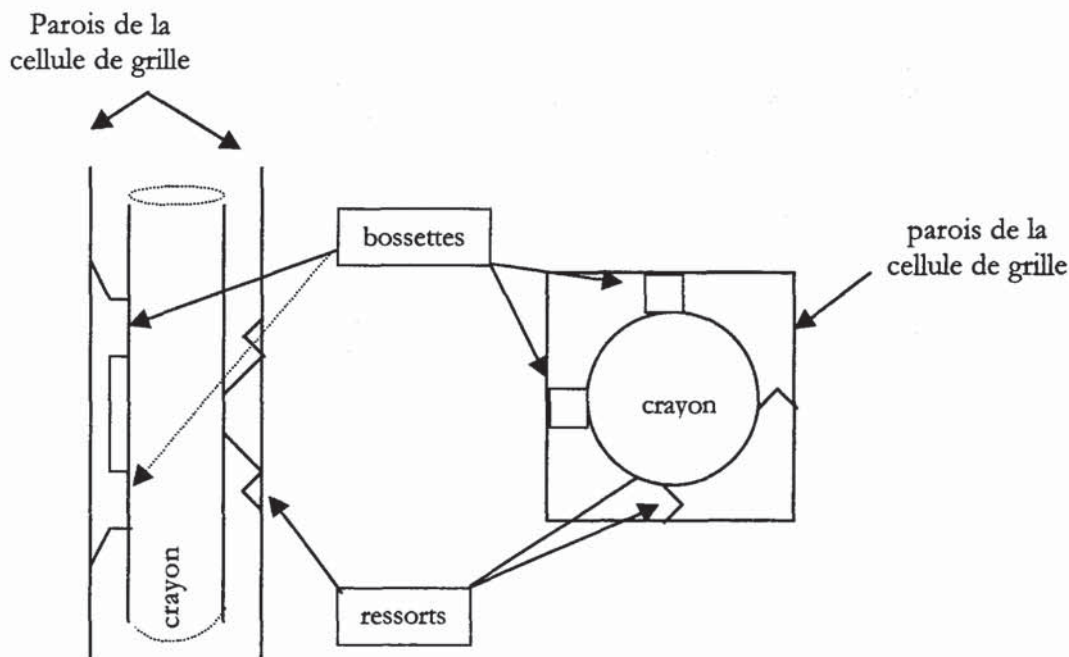


Figure II-5 : Crayon dans sa cellule de grille.

C'est au niveau de ces points de contacts crayon-grille (crayon-bossettes) que les phénomènes de dissipation et de variation non-linéaire de raideur sont les plus importants. Ces deux effets sont principalement dus aux modifications des conditions de liaison qui interviennent entre le crayon, les ressorts et les bossettes, lorsque l'assemblage est sollicité : adhérence, glissement, perte éventuelle du contact. L'effet d'adhérence recherché pour le maintien du crayon est transformé en frottement-glissement lorsque le

crayon est en mouvement dans sa cellule. C'est la principale source de dissipation d'énergie lors d'une sollicitation dynamique. Expérimentalement, ceci se traduit par une baisse de la fréquence (perte de rigidité) et une augmentation de l'amortissement. Il a été constaté que ces deux phénomènes sont d'autant plus marqués que le chargement axial est important et que les amplitudes de déplacement sont élevées. Ce sont ces deux phénomènes qui sont les principales sources de non-linéarité de la structure.

Le deuxième rôle joué par ces grilles d'assemblage est celui de mélangeur du fluide dans les différents canaux. En effet, les grilles intermédiaires sont équipées d'ailettes déflectrices en leur partie supérieure qui assurent un mélange du fluide caloporteur optimum pour le rendement thermique de la centrale. Ces grilles sont solidaires des tubes guides auxquels elles sont soudées. La turbulence provoquée au passage du fluide dans ces grilles est aussi une cause de non-linéarité ainsi que l'effet de la viscosité du fluide.

II.2.5. Les embouts

L'embout supérieur (Figure II-6) et l'embout inférieur garantissent le maintien et le positionnement axial de l'assemblage tout en permettant le bon écoulement du réfrigérant et le passage de l'araignée.

L'embout supérieur, zone de sortie du fluide caloporteur, est muni de 4 ressorts à lame qui s'opposent à la poussée hydraulique générée par l'écoulement et maintiennent ainsi l'assemblage appuyé sur la plaque inférieure de cœur. Le positionnement latéral est réalisé à l'aide de pions de centrage soudés à la plaque supérieure de cœur dans deux angles opposés.

L'embout inférieur assure la distribution du réfrigérant dans l'assemblage et supporte les charges verticales imposées à la structure. Il est constitué d'une plaque épaisse et de quatre pieds. La plaque d'embout est perforée d'orifices circulaires situés en regard des canaux inter-crayons. Elle comporte également des trous pour le passage des tubes guides et du tube d'instrumentation.

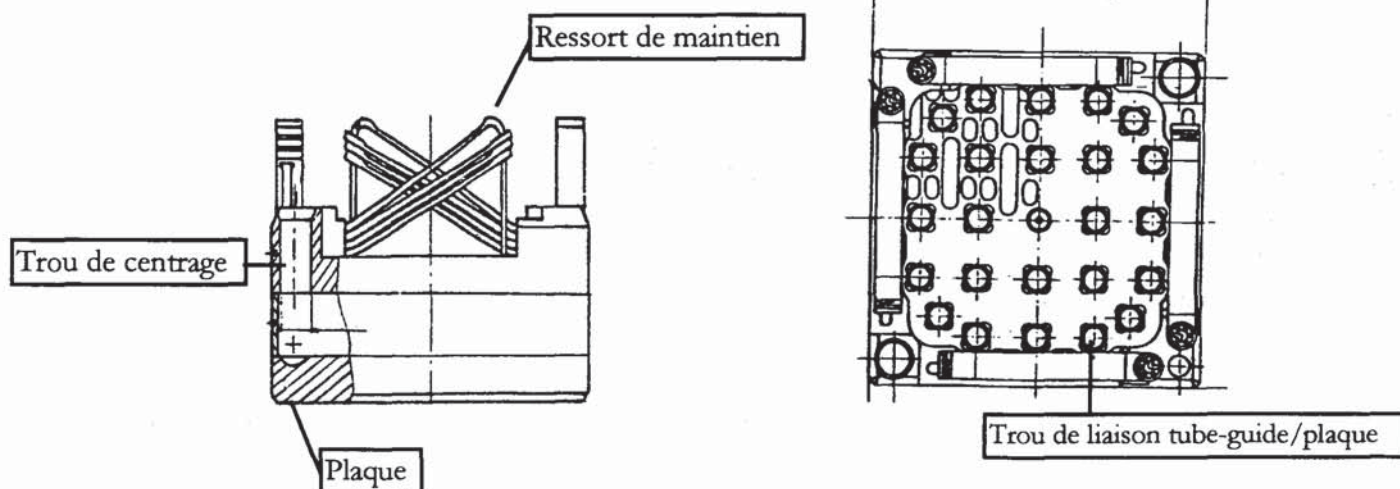


Figure a : Vue de face

Figure b : Vue en coupe

Figure II-6 : Embout supérieur d'assemblage.

Les liaisons entre l'embout inférieur et l'embout supérieur avec, respectivement la plaque inférieure de cœur et la plaque supérieure de cœur, sont bien connues mais leur comportement lorsque l'assemblage est sollicité, mal maîtrisé. Le plus souvent, les liaisons sont modélisées par un encastrement ou par une rotule, mais aucune étude n'a réellement validé l'une ou l'autre de ces hypothèses. Leur reproductibilité dans les essais est aussi très aléatoire.

II.3. Réalisation expérimentale - Essais

II.3.1. Présentation de la boucle d'essai

Les différents essais ont été réalisés sur la boucle expérimentale HERMES T [II-15], [II-16] du L.H.C qui peut accueillir deux assemblages à échelle 1 l'un à côté de l'autre (Figure II-7). Le ou les assemblages, sont placés dans une enceinte en inox, qu'une porte munie de hublots en Plexiglas vient fermer hermétiquement. Grâce à ces caractéristiques, la section d'essais permet de reproduire les conditions :

- de vitesse d'écoulement nominale établie en réacteur, soit 5 m.s^{-1} ,

- de température de 20°C à 170°C (conditions de température en réacteur : 320°C),
- de pression jusqu'à 30 bars (conditions pression en réacteur : 150 bars).

Dans le cadre de notre étude, la boucle expérimentale était équipée d'un seul assemblage de type AFA-XL destiné aux centrales 1300 MW. Cet assemblage contient donc 10 grilles, 264 crayons combustibles chargés en oxyde d'uranium appauvri, et de 25 tubes guides. La section d'essai est placée au centre d'un circuit hydraulique fermé qui permet de générer le débit axial dans l'enceinte qui accueille l'assemblage. Cette circulation est établie du bas de la section vers le haut, où le fluide caloporteur est évacué. Un hublot placé en face de chaque grille permet les mesures qui sont effectuées par des techniques non intrusives.

Le dispositif de lâcher est placé à hauteur de la grille n°5. Les grilles sont repérées par une numérotation croissante de 1 à 10 du bas vers le haut. Un confinement latéral de 20.5 mm dans le sens de la traction, en position centrée, permet des amplitudes de lâcher jusqu'à 16 mm. Ce confinement correspond à l'espace laissé libre entre la paroi interne de la section d'essai et une des plaquettes de grille. Le confinement est de 5 mm dans le sens perpendiculaire à la traction, correspondant à la distance plaquette - hublot de la porte avant de la section d'essai et plaquette – plaque de fond de la section d'essais.

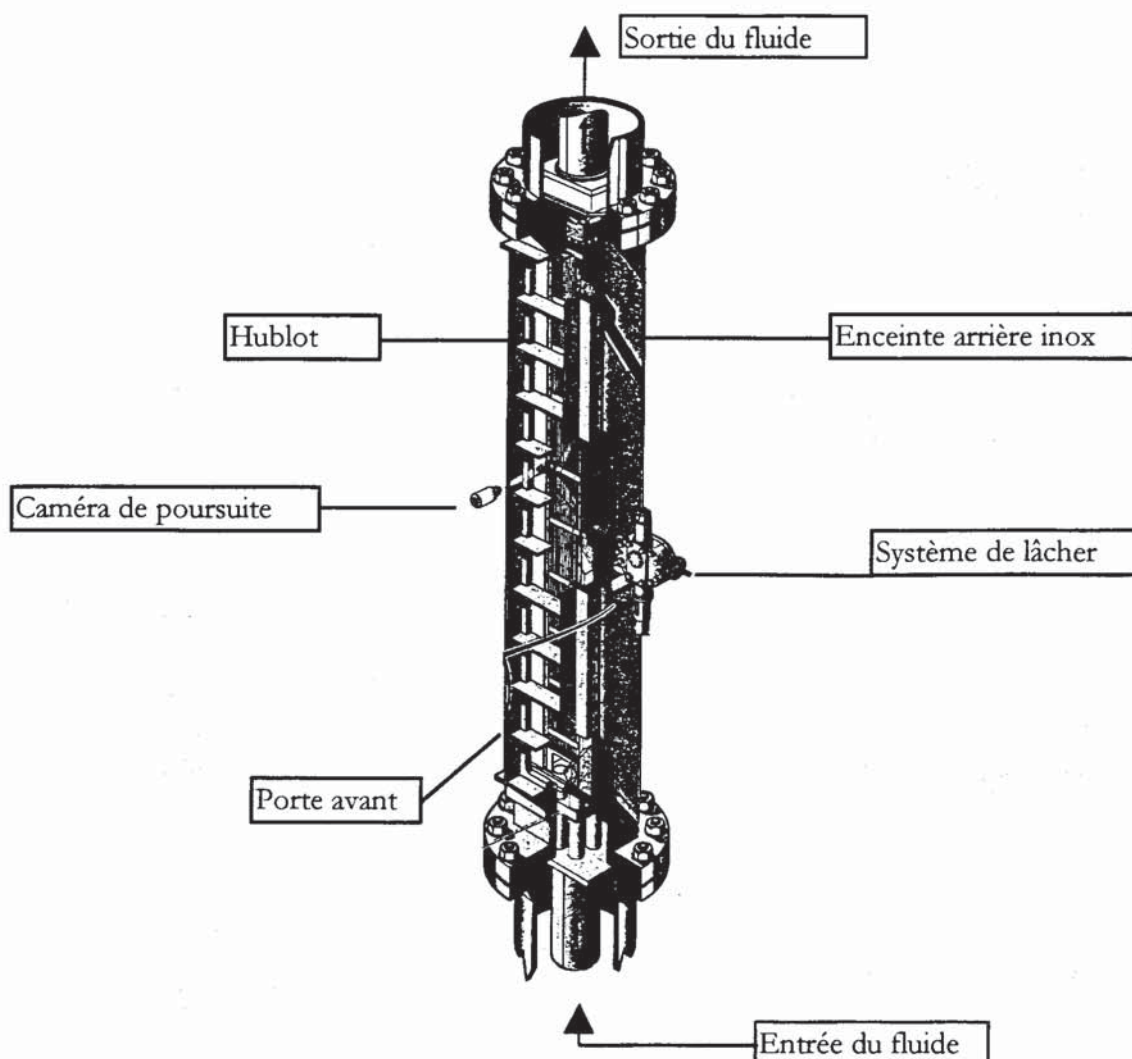


Figure II-7 : Section d'essai.

II.3.1.1. Description du système de lâcher

Le dispositif de lâcher (Figure II-8), conçu spécialement pour réaliser ces essais a nécessité une étude particulière pour répondre aux contraintes suivantes :

- le dispositif doit permettre un lâcher franc, l'axe de lâcher doit être parfaitement centré pour éviter d'exciter des modes de torsion,
- la liaison grille-système de lâcher ne doit pas introduire de frottements parasites qui fausseraient la mesure et donc la détermination de l'amortissement,
- le dispositif de lâcher doit permettre de reproduire simplement et assez rapidement plusieurs séries de lâcher.
- étanchéité,

Concernant le premier point, le choix s'est porté sur un système muni d'un vérin hydraulique. Ce dispositif de lâcher est relié à l'assemblage par l'intermédiaire d'une tige maintenue rotulée sur une plaque collée à la plaquette externe de la grille de l'assemblage. Un câble effectue la liaison entre la tige et le système de traction hydraulique. Une gâchette, perpendiculaire à l'axe du câble vient tirer celui-ci lorsqu'elle est déplacée. Le relâchement s'effectue à l'aide d'un choc qui est porté sur la gâchette de maintien du câble.

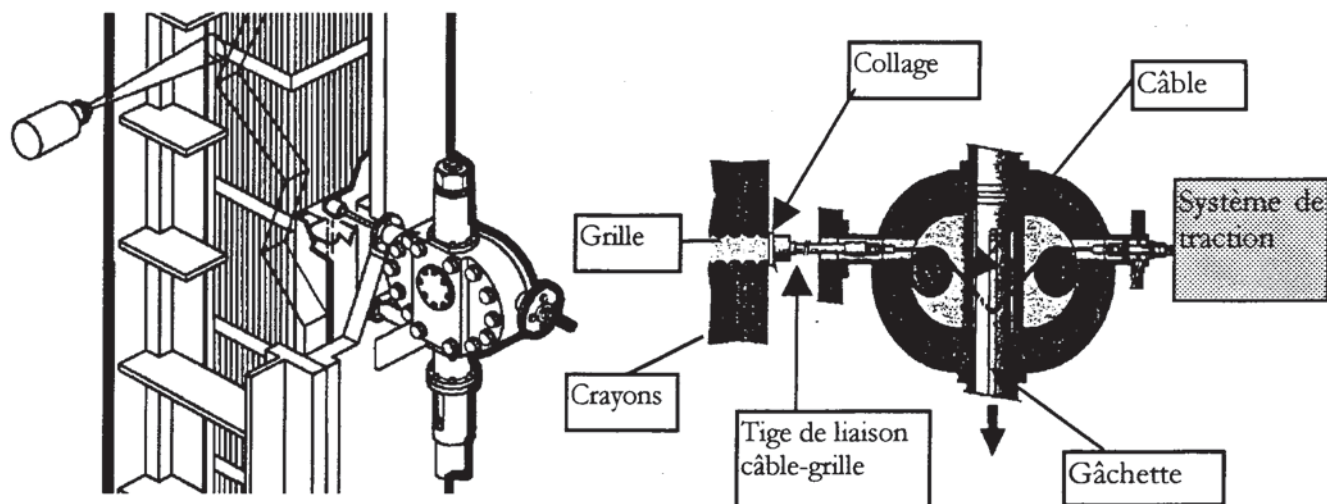


Figure II-8 : Système de lâcher.

II.3.1.2. Acquisitions - Mesure du déplacement

La mesure du déplacement de l'assemblage au cours du lâcher a été effectuée à l'aide d'une caméra suiveuse optoélectronique OPTRON. Cette mesure est prise sur la grille n°6 correspondant environ au milieu de la hauteur de l'assemblage. L'objectif de la caméra est focalisé sur l'interface claire-sombre que représente le coin de la plaquette externe de cette grille soumis à un éclairage diffus par un hublot arrière (Figure II-9).

Afin de mesurer précisément les amplitudes de lâcher, un faisceau laser, monté sur une table de déplacement, a été utilisé pour déterminer la distance séparant le confinement de la plaquette externe de la grille n°5. La précision de la table de déplacement de l'optique laser est de $50 \mu\text{m}$.

En bout extérieur du câble du système de lâcher, un capteur d'effort permet d'estimer la raideur de l'assemblage en air par traction directe. Il permet également de vérifier la netteté et d'identifier l'instant initial du lâcher. Le temps de relâchement de la structure est de quelques millisecondes.

Pour chaque essai réalisé, l'enchaînement des acquisitions est effectué comme suit :

- avant de tracter l'assemblage, l'opérateur relève à l'aide du faisceau laser la position de l'assemblage par rapport au confinement latéral fixe.
- une fois l'assemblage tracté à l'amplitude souhaitée, on enregistre, grâce à une centrale d'acquisition "HP 3497", les valeurs de contrôle dans la boucle d'essai (débit, température) et la position de l'assemblage ainsi déplacé avec le laser.
- une acquisition à l'aide d'une centrale "HP 3852" permet d'enregistrer durant 30 secondes avec un échantillonnage de 1 kHz, les valeurs du capteur de traction ainsi que les valeurs données par la caméra OPTRON pendant la phase de lâcher.
- l'assemblage ayant repris sa position de repos, on renouvelle une acquisition "HP 3497" avec notamment la nouvelle valeur de positionnement de l'assemblage par rapport au confinement, l'assemblage ne revenant pas exactement à la position repérée à l'étape 1. Ainsi l'amplitude effective de lâcher, différence entre la position tractée et la position en fin de lâcher, peut être déterminée.

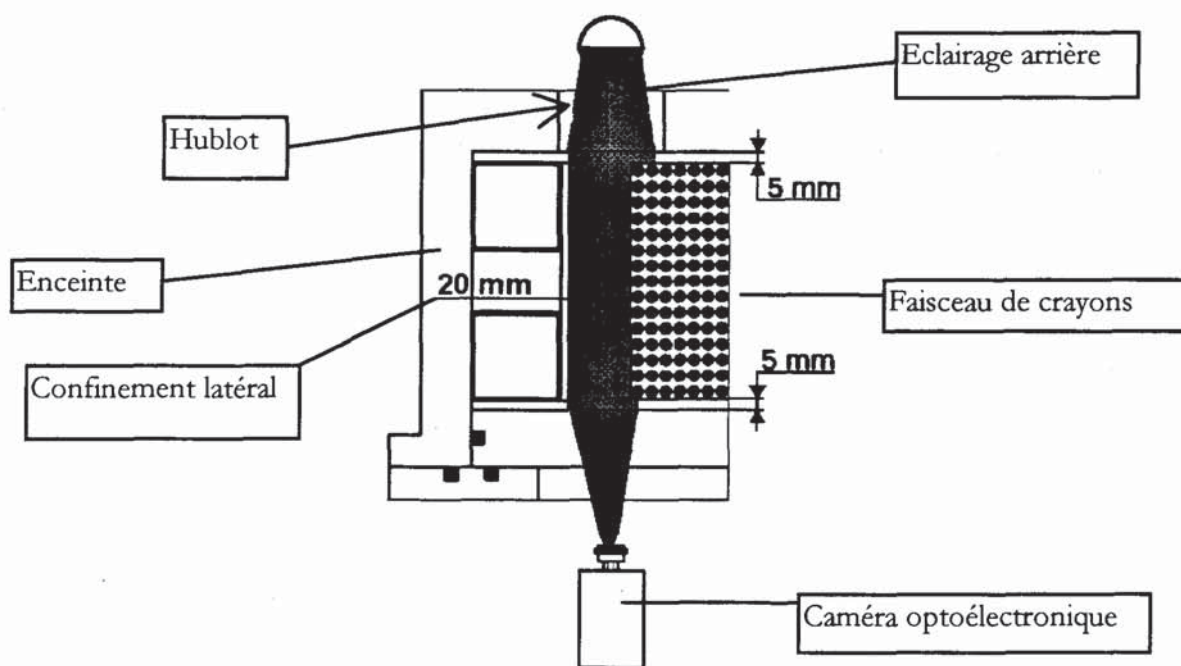


Figure II-9 : Mesure du déplacement.

II.3.2. Descriptif des essais réalisés

Dans cette partie, on décrit brièvement les essais des différentes campagnes réalisées en air, en eau stagnante et en écoulement. Les essais qui ont été réalisés dans notre

laboratoire sont précisés dans le premier paragraphe de cette partie. Un descriptif particulier est fait dans le paragraphe II.3.2.2 concernant des essais effectués par le Laboratoire EMSI du centre C.E.A de Saclay, sur des maquettes différentes de celles que nous avons utilisé.

II.3.2.1. Essais effectués sur la boucle expérimentale HERMES T

Les essais en air ont été réalisés à température ambiante (20°C) et ceux en eau stagnante et sous écoulement dans un fluide à 50°C. Plusieurs amplitudes de lâcher ont été effectuées ainsi que plusieurs vitesses d'écoulement. Pour chaque amplitude, deux lâchers consécutifs ont été accomplis. Tous ces essais sont récapitulés dans le Tableau II-2.

II.3.2.2. Erreur liée à la mesure - Critique des mesures

L'incertitude absolue dY concernant la mesure du déplacement à l'aide de la caméra OPTRON correspond à l'écart moyen de linéarité de la courbe de calibration, soit 0.12 mm (Figure II-10). Cet écart de linéarité a été déterminé en statique. Rien ne peut être avancé sur l'allure de la courbe de calibration lors des essais dynamiques. L'erreur liée au reste de la chaîne d'acquisition est négligeable.

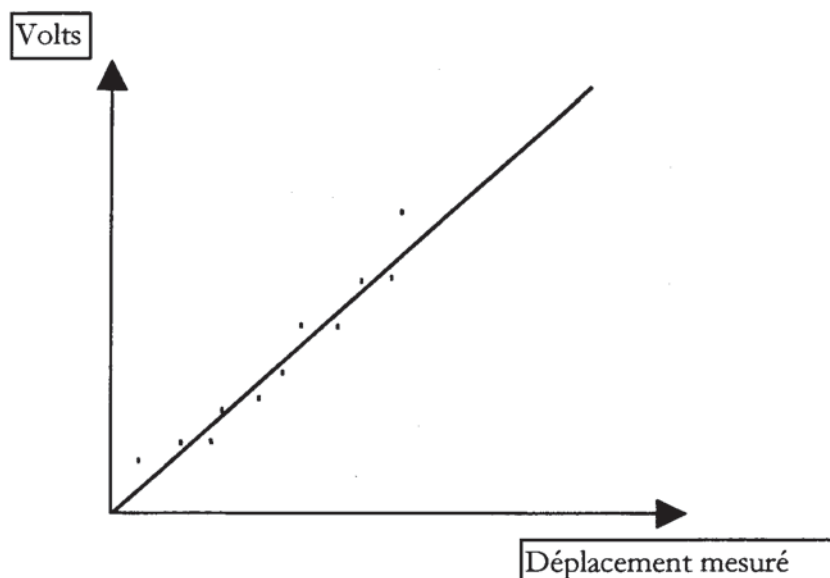
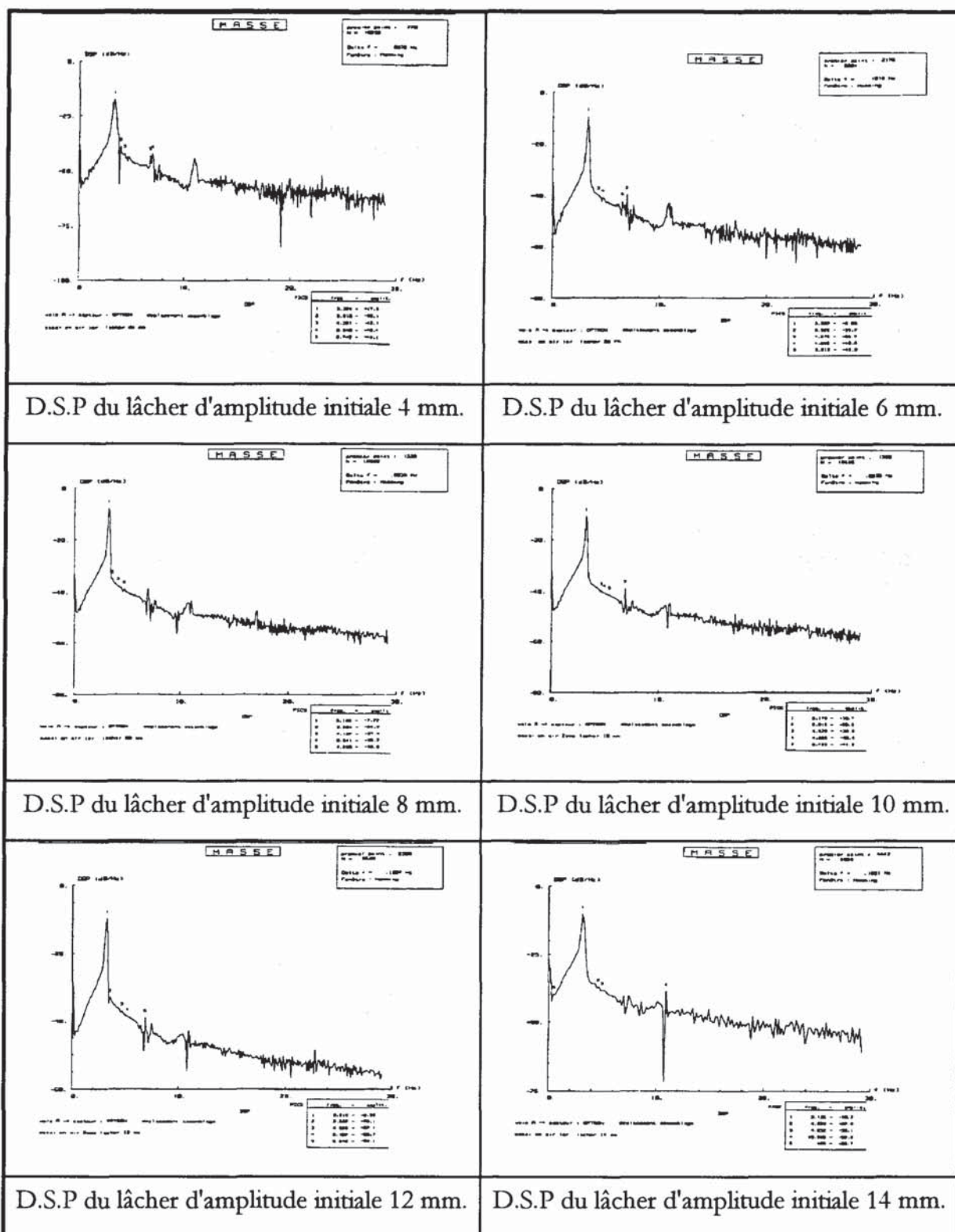


Figure II-10 : Courbe de calibration de la caméra OPTRON.

Pour des raisons liées au matériel de mesure utilisé, on a été obligé de faire la visée sur un coin de grille de l'assemblage. Ces grilles sont réparties sur la hauteur de l'assemblage de manière à optimiser le flux de l'écoulement du fluide caloporteur. Aucune grille n'est implantée à la mi-hauteur de l'assemblage. La mesure effectuée sur la grille n°5 ne correspond donc pas exactement à la localisation du ventre du premier mode de l'assemblage. Le système de lâcher, situé sur la grille n°6 n'est pas non plus idéalement

placé pour n'exciter que le premier mode. On vérifie, par le calcul des Densités Spectrales de Puissance (D.S.P) des premiers essais, que la participation d'autres modes est négligeable. La Figure II-11 présentent les D.S.P pour plusieurs lâchers :



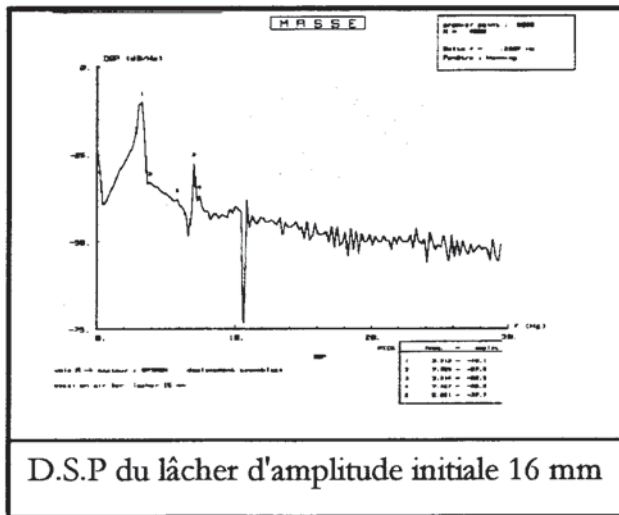


Figure II-11 : Densité spectrale de puissance de l'ensemble des lâchers en air d'amplitude initiale de 4 à 16 mm.

Une dernière remarque concerne le retour de l'assemblage à sa position d'équilibre après un lâcher. Il a été constaté que l'assemblage ne revenait jamais à sa position d'équilibre repérée avant le lâcher. Ce trait particulier du comportement de l'assemblage peut s'expliquer par :

- une organisation différente des crayons dans leur cellule de grille à la fin de chaque lâcher,
- une arcure résiduelle de l'assemblage due à l'application de nombreuses tractions consécutives qui finissent petit à petit par déformer la structure.

Ces deux explications sont à garder en mémoire pour la phase d'interprétation des résultats.

II.3.2.3. Autres essais

D'autres essais ont été effectués par l'équipe du Laboratoire EMSI sur deux types d'assemblage à échelle 1 : un assemblage AFA 900 MW et un assemblage AFA-XL 1300 MW.

II.3.2.3.1. Essais sur un assemblage AFA 900 MW

Concernant la maquette d'assemblage utilisée, par rapport aux données du Tableau II-1, seule la hauteur des grilles et de l'assemblage est différente. La maquette comporte 8 grilles de 33 mm de hauteur (au lieu de 43 mm). Lors de ces essais, une force verticale de compression égale à 500 daN est imposée en partie supérieure par un système vis-écrou permettant la mise en compression des ressorts de maintien de l'assemblage.

Seuls des essais en air et en eau stagnante ont été effectués pour des amplitudes de lâcher de 3 mm à 18 mm par pas de 3 mm. Par ailleurs, le déplacement de chacune des 6 grilles intermédiaires a été enregistré.

Ces déplacements ont été mesurés grâce à des capteurs à lame flexible.

Le système de lâcher est assuré par un treuil à câble équipé d'un électro-aimant alimenté en 24 Volts et permettant une force de traction de 6000 N. L'arrêt de l'alimentation de l'électro-aimant produit le lâcher franc. Ce système de lâcher est positionné sur la grille n°4 de l'assemblage, correspondant environ au milieu de la hauteur de l'assemblage.

L'acquisition est déclenchée par l'arrêt de l'alimentation. Les réponses des capteurs sont numérisées à 200 Hz pour l'ensemble des lâchers libres.

II.3.2.3.2. Essais sur assemblage AFA-XL 1300 MW

Les données du Tableau II-1 correspondent aux caractéristiques de l'assemblage utilisé pour les essais de lâcher libre. Les amplitudes de lâcher, le système de lâcher, le type de capteur utilisé et les acquisitions sont strictement identiques à celles décrites ci-dessus. Le système de lâcher est implanté sur la grille n°5 et 8 grilles intermédiaires ont été instrumentées.

II.3.3. Récapitulatif des essais disponibles - Tracé de quelques acquisitions

Le Tableau II-2 récapitule l'ensemble des essais dont nous disposons pour plusieurs types d'assemblage à échelle 1 :

	Assemblage 1300 MW type AFA-XL (LHC)	Assemblage 1300 MW type AFA-XL (EMSI)	Assemblage 900 MW type AFA (EMSI)
<u>Essais en air :</u>			
Amplitudes de lâcher (mm)	4, 6, 8, 10, 12, 14, 16	3, 6, 9, 12, 15, 18	3, 6, 9, 12, 15, 18
<u>Essais en eau stagnante :</u>			
Amplitudes de lâcher (mm)	4, 6, 8, 10, 12, 14, 16	3, 6, 9, 12, 15, 18	3, 6, 9, 12, 15, 18
<u>Essais en écoulement :</u>			
Amplitudes de lâcher (mm)	4, 6, 8, 10, 12, 14, 16	-	-
Vitesses d'écoulement (m.s ⁻¹)	2.11, 3.15, 4.21, 5.26		

Tableau II-2 : Récapitulatif de tous les essais disponibles.

Afin de se rendre compte de l'allure des signaux acquis, quelques-uns de ces lâchers pour différentes conditions d'essais sont présentés. La Figure II-12a et la Figure II-12b représentent un lâcher à 12 mm en air pour deux types d'assemblage. La Figure II-13a et la Figure II-13b montrent des lâchers en eau calme pour 2 amplitudes initiales différentes, sur le même assemblage. Enfin, la Figure II-14a et la Figure II-14b illustrent l'influence de l'écoulement sur un lâcher à 8 mm.

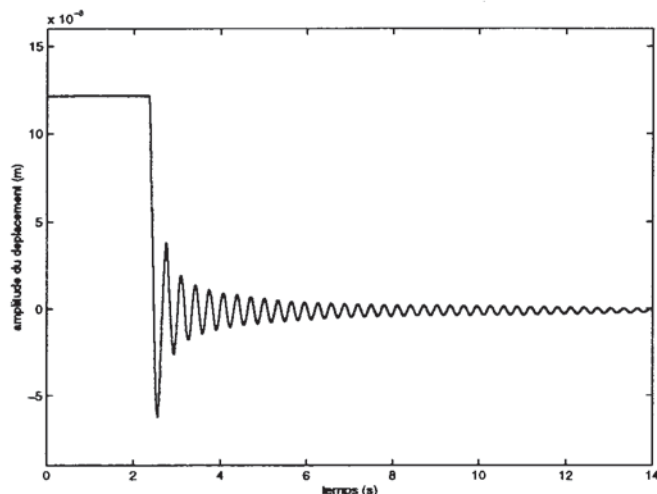


Figure a : Lâcher 12 mm en air - Assemblage AFA-XL 1300 MW (LHC).

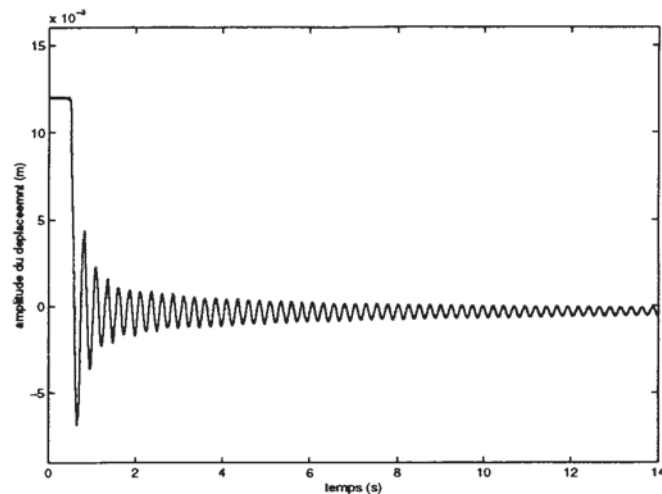


Figure b : Lâcher 12 mm en air - Assemblage AFA 900 MW (EMSI).

Figure II-12 : Comparaison d'un lâcher sur 2 types d'assemblage.

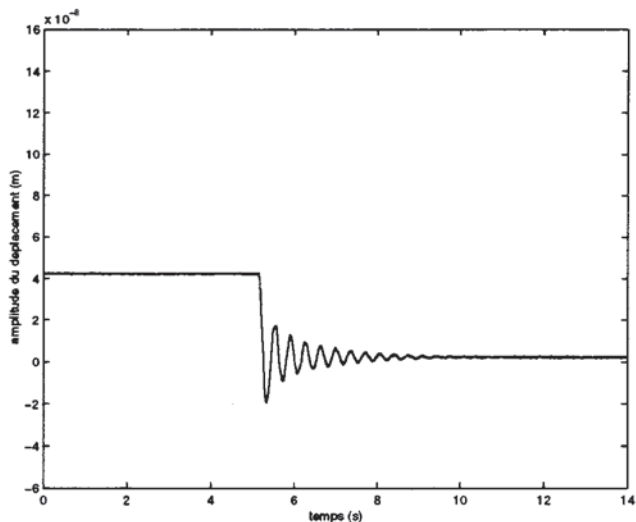


Figure a : Lâcher 4 mm en eau calme - Assemblage AFA-XL 1300 MW (LHC).

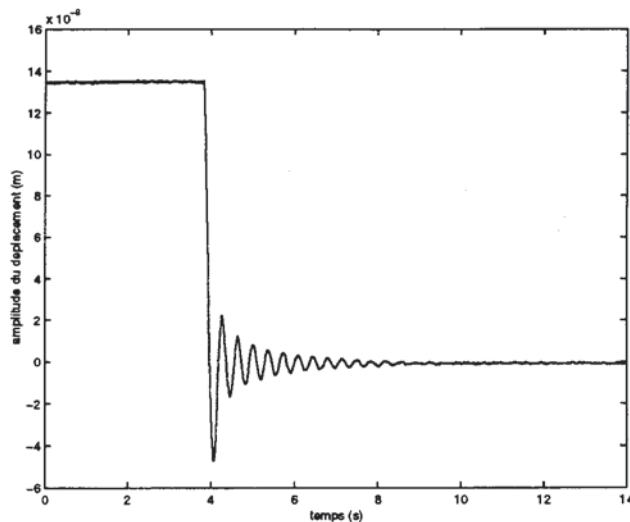


Figure b : Lâcher 16 mm en eau calme - Assemblage AFA-XL 1300 MW (LHC).

Figure II-13 : Comparaison de lâchers pour 2 amplitudes initiales différentes.

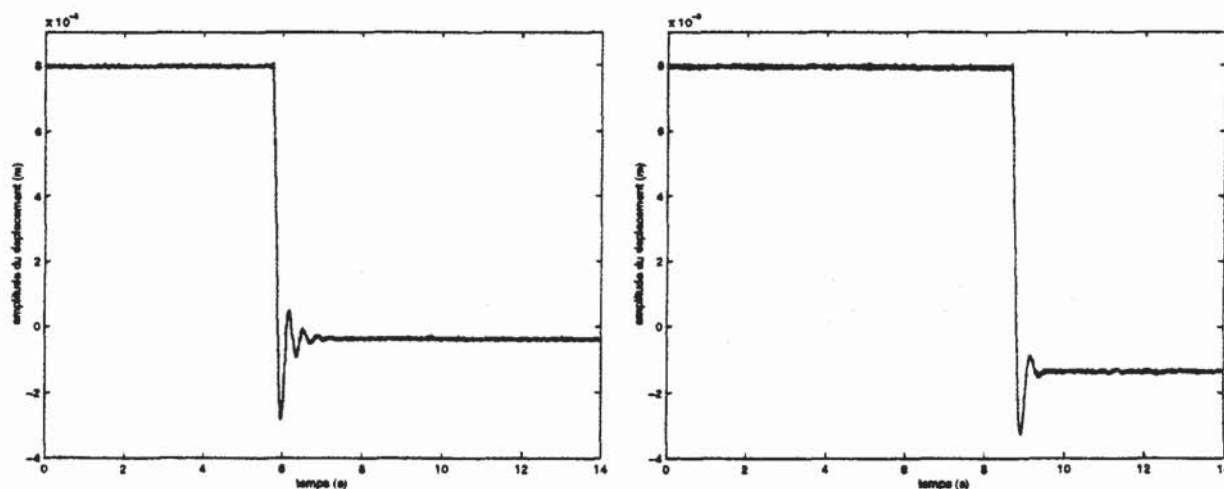


Figure a : Lâcher 8 mm en eau en écoulement (2.1 m.s^{-1}) - Assemblage AFA-XL 1300 MW (LHC).

Figure b : Lâcher 8 mm en eau en écoulement (5.3 m.s^{-1}) - Assemblage AFA-XL 1300 MW (LHC).

Figure II-14 : Comparaison de lâchers pour deux vitesses d'écoulement.

II.4. Formulation du problème - Définitions

II.4.1. Définitions

Afin qu'aucune confusion ne soit faite et pour être le plus clair possible, quelques notions et termes importants, souvent utilisés dans ce mémoire, sont précisés dans ce paragraphe. Pour des détails supplémentaires, on pourra se référer aux références bibliographiques qui sont à l'origine de ces définitions.

On appelle méthode d'identification toute méthode permettant la détermination d'une modélisation d'un système à partir de la donnée d'une réponse de celui-ci à une excitation connue ou non [II-1]. Elle est linéaire si elle consiste à identifier une ou plusieurs caractéristiques d'un système linéaire. Elle est non-linéaire si elle consiste à identifier une ou plusieurs caractéristiques d'un système dont le comportement est non-linéaire. Le chapitre "Etat de l'art : modèles et méthodes d'identifications" est consacré à ces méthodes. Celles que l'on utilise par la suite y sont détaillées.

L'amortissement a pour conséquence une dissipation d'énergie. En effet, il est l'image des phénomènes de dissipation d'énergie se produisant au sein d'une structure en mouvement. Ces phénomènes sont nombreux et sont dus à de la viscosité, de la plasticité, aux chocs et aux frottements entre surfaces ou au niveau de liaisons (échelle macroscopiques et microscopiques).

Dans un premier temps nous reprenons quelques définitions liées aux différentes formes de dissipation dans le cadre linéaire. Nous précisons ensuite la signification du terme "amortissement non-linéaire".

L'amortissement est dit visqueux lorsque la force de viscosité exercée par un fluide (air, eau,...) sur une masse est proportionnelle à la vitesse de cette masse, et de signe opposé [II-2], [II-4]. Cet amortissement est une représentation correcte de la dissipation de l'énergie de la structure tant que les effets (turbulence, traînée, ..) du déplacement de la structure dans le milieu environnant sont négligeables : par exemple en eau, la validité de ce modèle est limitée à de petites amplitudes de déplacement.

C'est ce modèle d'amortissement qui est le plus couramment utilisé, notamment dans la modélisation du mouvement d'un système linéaire à N degrés de liberté [II-4], [II-5], suivante :

$$(II-1) \quad M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t)$$

où $M, C, K \in \mathbf{R}^{N \times N}$ sont respectivement les opérateurs matriciels de masse, d'amortissement (matrice symétrique non négative) et de raideur. $\ddot{x}(t)$ représente l'accélération, $\dot{x}(t)$ la vitesse et $x(t)$ le déplacement du système étudié. $F(t)$ représente le vecteur des forces d'excitation qui s'appliquent au système.

Les solutions de l'équation (II-1) sont obtenues à l'aide d'une transformation modale. Deux types de projections peuvent être utilisées : soit l'équation (II-1) est projetée sur la base des n modes propres X_n du système conservatif associé, soit sur la base du système dissipatif. Dans le premier cas, l'intérêt est de pouvoir formuler le problème à l'aide d'une matrice d'amortissement diagonale lorsque le système vérifie l'hypothèse de Basile (pics de résonance des différents modes bien séparés) ce qui revient à résoudre un système de n équations découplées. Dans le second cas, la matrice d'amortissement est pleine et les équations sont couplées. C'est cette représentation qui est la plus utilisée par les méthodes d'identification modale. La transformation modale consiste en un changement de variable où les nouveaux degrés de liberté sont les $q_n(t)$ définis par :

$$(II-2) \quad x(t) = \sum_n q_n(t) X_n$$

En utilisant les propriétés d'orthogonalité de X_n , l'équation du mouvement se met sous la forme d'un système d'équations qui s'exprime comme suit :

$$(II-3) \quad \forall n \quad m_n \ddot{q}_n + \sum_m (X_n, CX_m) \dot{q}_m + k_n q_n = (X_n, F)$$

où $(.,.)$ désigne le produit scalaire de deux vecteurs et $(X_n, CX_m) = 2m_n \omega_n c_{nm}$ représente les termes de couplage de la matrice non diagonale d'amortissement. $k_n = m_n \omega_n^2$ est la raideur généralisée du mode n , ω_n étant la pulsation du mode n . Les c_{nm} sont les amortissements réduits modaux ou amortissements réduits généralisés.

Pour modéliser les systèmes dissipatifs ayant un amortissement hystérétique, dit aussi structural, on définit une matrice \mathbf{K} (équation (II-1)) complexe dont la partie imaginaire est liée à l'amortissement de la structure. Dans le cas d'un amortissement visqueux, \mathbf{K} est réel [II-5]. Ce type d'amortissement permet de prendre en compte le comportement la dissipation qui se produit entre les particules du matériau lorsque celui-ci se déforme [II-2].

D'une manière générale, l'amortissement dû à la plasticité est très faible. Il peut être négligé ou traduit en terme d'amortissement équivalent au modèle visqueux précédemment cité [II-4].

Lorsque le système est un oscillateur à un seul degré de liberté, (II-1) est simplifié par l'équation :

$$(II-4) \quad M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t)$$

où M représente la masse du système, C le coefficient d'amortissement et K la raideur. Le terme $C\dot{x}(t)$ est appelé force d'amortissement ou force dissipative. $Kx(t)$ est appelé la force de rappel.

Cette modélisation simplifiée nous permet d'introduire un autre modèle d'amortissement très souvent employé. Il s'agit de l'amortissement de Coulomb appelé aussi amortissement par frottement sec. Il est à considérer lorsque le système est en contact avec une surface. Deux forces s'exercent alors sur le système : la force F_N normale au sens du déplacement et la force F_T tangentielle au plan de contact $\left(\frac{F_T}{F_N} = \mu \text{ le coefficient de frottement - glissement} \right)$. L'amortissement s'exprime en remplaçant la force de dissipation visqueuse $C\dot{x}(t)$ par le modèle suivant [II-4] :

$$(II-5) \quad C\dot{x}(t) = \mu |F_N| \frac{\dot{x}(t)}{|\dot{x}(t)|}$$

Si les amplitudes de déplacement sont faibles, le modèle d'amortissement de Coulomb peut être remplacé par un modèle d'amortissement visqueux équivalent.

L'amortissement de radiation ou par rayonnement est à considérer lorsque les structures vibrent dans un fluide compressible visqueux ou non, ou proche d'une paroi libre. La

vibration induit alors une onde de pression ou de gravité qui provoque des différences de phase entre les particules fluides ce qui génère une force dissipative. L'amortissement de radiation est d'autant plus important que la structure offre une large surface au milieu dans lequel elle évolue, et une faible épaisseur, pour les plaques et les coques par exemple [II-6].

Modèle d'amortissement linéaire : on parle de modèle d'amortissement linéaire lorsqu'il est de la forme de ceux cités ci-dessus.

Modèle d'amortissement non-linéaire : c'est un abus de langage qui est très fréquemment utilisé pour spécifier que les forces de dissipation sont non-linéaires. En effet, les termes, "amortissement" et "non-linéaire", ne peuvent pas être associés puisque, par définition, l'amortissement est une caractéristique attribuée à un système linéaire. Cet abus de langage sera effectué dans ce mémoire car il est couramment utilisé dans la littérature. Un modèle d'amortissement est dit non-linéaire lorsque le coefficient C est dépendant de la vitesse ou du déplacement instantané du système. La force de dissipation s'exprime alors comme le propose la formulation suivante issue de [II-7] :

$$(II-6) \quad C\dot{x}(t) = C(x, \dot{x})\dot{x}(t)$$

$C(x, \dot{x})$ est souvent nommé modèle ou fonction non-linéaire d'amortissement.

La première partie du chapitre III sera consacrée à la description des modèles d'amortissement linéaires et non-linéaires de la littérature.

Modèle de force de rappel non-linéaire : de la même manière, on parle d'un modèle non-linéaire de force de rappel lorsque :

$$(II-7) \quad Kx(t) = K(x(t))x(t)$$

II.4.2. Introduction au problème posé

Comme cela a été évoqué dans l'introduction générale, la connaissance précise de la valeur de l'amortissement du premier mode de l'assemblage en conditions nominales de fonctionnement, en particulier sous écoulement, est importante pour deux raisons :

- **dans le contexte de sûreté nucléaire** : cette valeur permet d'estimer, pour un niveau d'excitation fixé, l'amplitude maximale du déplacement de l'assemblage. A partir de cette valeur qui est déterminée pour les conditions les plus défavorables, la géométrie du cœur peut être dimensionnée pour éviter que les assemblages ne viennent se choquer entre eux ou contre les parois du cœur.

- **dans le contexte prédictif** : les simulations de comportement dynamique de l'assemblage effectuées au moyen de codes éléments finis nécessitent des valeurs des amortissements modaux de la structure comme données d'entrées (opérateur DYNE dans CASTEM2000 par exemple). Le manque de maîtrise de cette donnée entraîne des erreurs qui peuvent être importantes lors de simulations d'impact de chocs entre assemblages ou lorsque l'assemblage est soumis à une excitation de type sismique.

Dans un souci de parvenir rapidement à une estimation de la valeur de cet amortissement, les premières investigations n'ont pu faire autrement que de simplifier au maximum les calculs et les études analytiques. Dans ce but, une des hypothèses imposées a été de considérer que l'assemblage avait un comportement de système linéaire. Cette hypothèse était la seule permettant la mise en œuvre d'un certain nombre de méthodes de calcul direct à partir de résultats d'essais le plus souvent acquis sur maquettes à échelle réduite. Ces méthodes sont parmi celles les plus utilisées encore aujourd'hui. Il s'agit de la méthode du décrement logarithmique et de la méthode de la "largeur de pic à mi-hauteur" ou méthode de "coupure à - 3dB". La première de ces méthodes est détaillée dans le chapitre suivant. Pour la seconde on peut se reporter aux références [II-2], [II-3], [II-4].

II.4.3. Résultats des études précédentes - Validité de l'hypothèse de comportement linéaire

Nous proposons dans ce paragraphe une synthèse des résultats qui ont été obtenus à l'aide des deux méthodes précédemment citées pour différentes configurations de maquettes d'assemblage. On dégagera ainsi les paramètres prépondérants responsables de l'évolution de l'amortissement et de la fréquence. Cette étape nous conduit principalement à remettre en cause la validité de l'hypothèse linéaire adoptée dans ces méthodes. D'autres résultats permettent de justifier la nécessité d'une modélisation non-linéaire du comportement de l'assemblage en prenant en compte un modèle d'amortissement non-linéaire.

Associées à la compréhension du comportement et au calcul de l'amortissement d'un assemblage combustible, plusieurs études ont cherché à quantifier l'influence de trois aspects importants inhérents à toute méthode de caractérisation expérimentale :

- l'influence des configurations et conditions expérimentales [II-8], [II-10], [II-13],
- l'influence de la méthode utilisée pour le calcul de l'amortissement et de la fréquence [II-8], [II-9],

- l'influence du type d'excitation appliquée [II-8], [II-9].

On ne s'intéresse dans ce paragraphe qu'aux résultats concernant les caractéristiques du premier mode de l'assemblage.

II.4.3.1. Influence des configurations et conditions expérimentales

Plusieurs études ont cherché à quantifier l'influence des paramètres :

- *de vitesse axiale de l'écoulement* : de 0 m/s à 5 m/s,
- *d'échelle* : 1/2 (faisceau 8x8 crayons) et 1 (faisceau 17x17 crayons),
- *d'amplitude de l'excitation* :
 - de 2 mm à 10 mm pour *les lâchers* de l'assemblage à échelle 1/2 , de 4 mm à 16 mm pour *les lâchers* de l'assemblage à échelle 1,
 - de 0.5 mm à 2 mm pour les amplitudes de la réponse à la résonance pour une excitation harmonique sur l'assemblage à échelle 1/2,
 - *du confinement latéral* de la maquette : 13/13, 5/13, 35/35, 65/65 (les couples x/y correspondent à l'espace latéral laissé libre en mm, entre le faisceau et le baffle gauche de la section d'essai pour la donnée x, et le baffle de droite pour y),
 - *de la géométrie interne du faisceau* : nombre de crayons dans le faisceau, physionomie de la répartition des crayons dans les grilles dans le sens de la traction,
 - *du prolongement de la hauteur des grilles* : plaquette interne, plaquette externe,
 - *du type de grille* : AFA ou XL,
 - *de la température* du fluide en écoulement : de 50°C à 170°C.

Globalement, les résultats montrent que l'influence de la température, du confinement de la maquette et du type de grille utilisée sont des paramètres peu influents sur les valeurs trouvées de l'amortissement, quelques pour cent d'écart.

Le prolongement de la hauteur des grilles et le nombre de crayons dans le faisceau ont confirmé la présomption de :

- l'augmentation de l'amortissement en fonction de l'augmentation de la surface en contact avec le fluide : l'effet de l'amortissement visqueux est augmenté,

- l'augmentation de l'amortissement en fonction du nombre de points de contact en frottement-glisserment entre crayons et bossettes : l'effet d'amortissement par frottement de Coulomb est augmenté.

Les évolutions les plus significatives de la valeur de l'amortissement ont été celles observées lors de l'augmentation de la vitesse d'écoulement axial du fluide et de celle de l'amplitude initiale du lâcher de l'assemblage. D'une part, l'amortissement calculé augmente fortement (plus de 50 %) lorsque la vitesse d'écoulement passe de 0 m/s à 5 m/s pour une amplitude de lâcher fixée. D'autre part, que ce soit en air, en eau stagnante ou sous écoulement, l'amortissement augmente fortement (environ 40 %) lorsque l'amplitude de lâcher varie de 2 mm (resp. 4 mm pour l'assemblage à échelle 1) à 10 mm (resp. 16 mm). Les évolutions suivantes retracent ces résultats pour l'assemblage à échelle $\frac{1}{2}$ et à échelle 1.

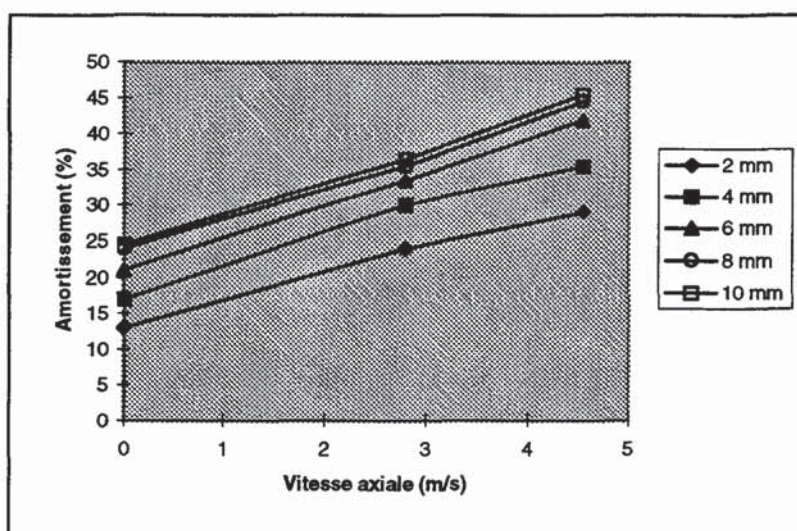


Figure II-15 : Evolution de l'amortissement en fonction de la vitesse d'écoulement et de l'amplitude du lâcher. Maquette d'assemblage à échelle $\frac{1}{2}$ [II-8].

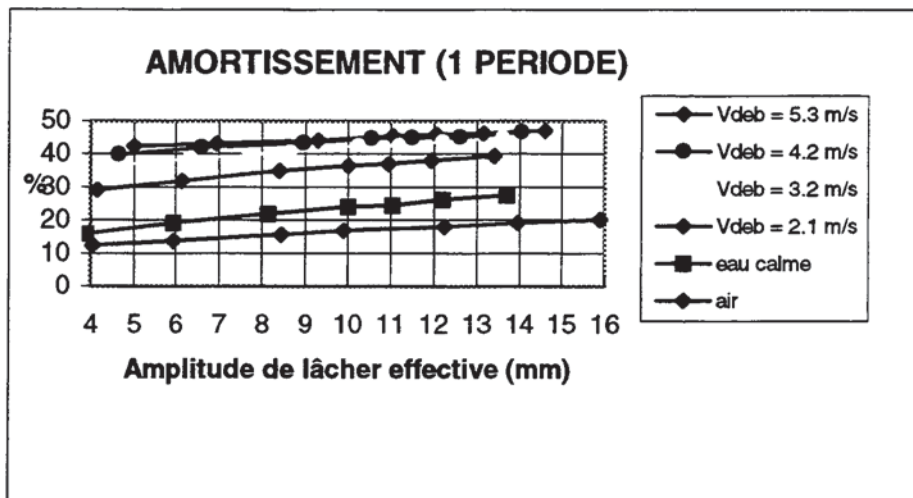


Figure II-16 : Evolution de l'amortissement en fonction de l'amplitude initiale du lâcher et de la vitesse d'écoulement - Maquette d'assemblage à échelle 1 [II-10].

Dans le même temps on constate une diminution de la fréquence lorsque la vitesse d'écoulement augmente et que l'amplitude initiale de lâcher augmente :

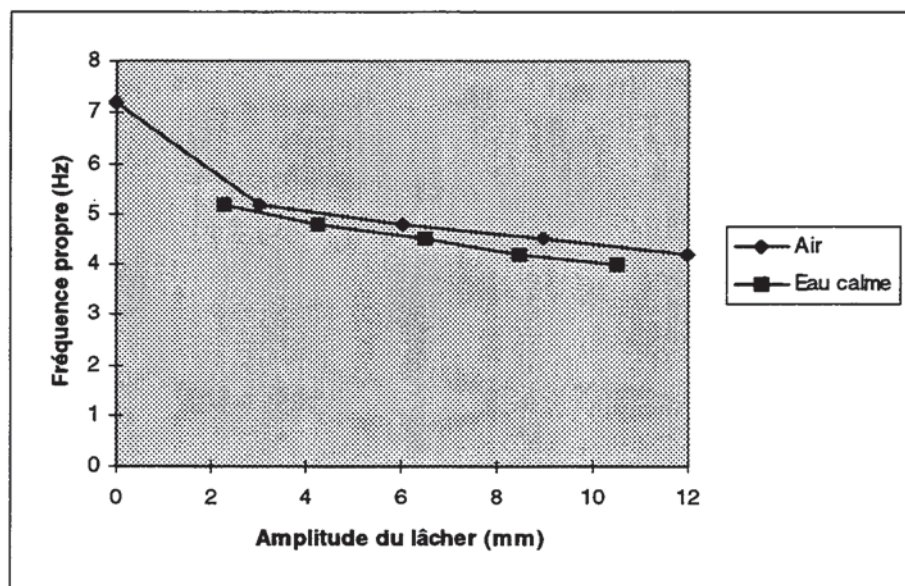


Figure II-17 : Evolution de la fréquence propre en fonction de l'amplitude initiale du lâcher et des conditions environnementales (air, eau stagnante) - Maquette d'assemblage à échelle $\frac{1}{2}$ [II-8].

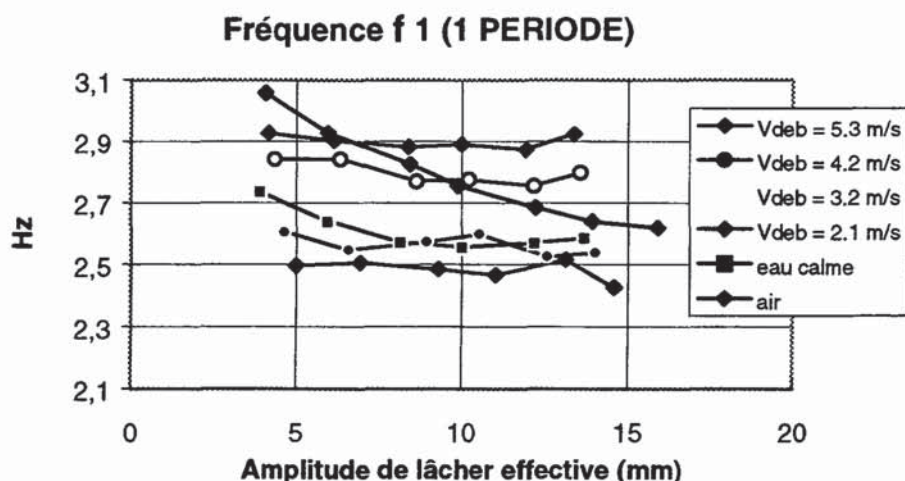


Figure II-18 : Evolution de la fréquence propre en fonction de l'amplitude initiale du lâcher et de la vitesse d'écoulement - Maquette d'assemblage à échelle 1 [II-10].

Sur ce deuxième graphe, on constate que cette baisse de la fréquence est très marquée pour les lâchers effectués en air et dans une moindre mesure en eau stagnante. Par contre, pour les lâchers effectués sous écoulement, la fréquence propre est quasiment constante.

II.4.3.2. Influence de la méthode de calcul et du type d'excitation

Il s'agissait de quantifier l'influence du type d'excitation appliquée à la structure sur la valeur de l'amortissement et de la fréquence calculés [II-8], [II-9]. Les excitations suivantes ont été comparées :

- lâcher,
- pot vibrant : excitation harmonique, excitation bruit blanc,
- marteau de choc : choc.

Dans la référence [II-8], les résultats montrent un écart pouvant aller jusqu'à 30 % entre la valeur de l'amortissement déterminée à partir de la réponse de l'assemblage à un lâcher en eau calme ou déterminée à partir de la réponse, de même amplitude maximale, à une excitation harmonique. De plus, il semble que ces écarts entre les valeurs d'amortissement calculées soient d'autant plus marqués que la structure est "raide".

Par contre, les valeurs de la fréquence obtenues sont indépendantes du type d'excitation.

II.4.3.3. Validité de l'hypothèse de comportement linéaire

Les évolutions constatées de l'amortissement et de la fréquence en fonction de l'amplitude initiale du lâcher et de la vitesse d'écoulement sont les signes qui évoquent un comportement non-linéaire. L'illustration du comportement non-linéaire de l'assemblage peut être renforcé par les considérations suivantes.

Il a été remarqué dans plusieurs études que la raideur statique de l'assemblage n'était pas linéaire [II-11], [II-12], [II-13]. Issues de ces références, les deux figures suivantes présentent le déplacement obtenu, pour deux types d'assemblage différents (900 MW et 1300 MW), à la suite d'un chargement de traction statique appliqué sur la grille intermédiaire. Le tracé de la force en fonction du déplacement résultant, permet de déterminer la raideur statique de la structure par la détermination de la pente de la courbe obtenue. La raideur est linéaire lorsque la pente est constante. On constate que ce n'est pas exactement le cas pour les amplitudes élevées du déplacement :

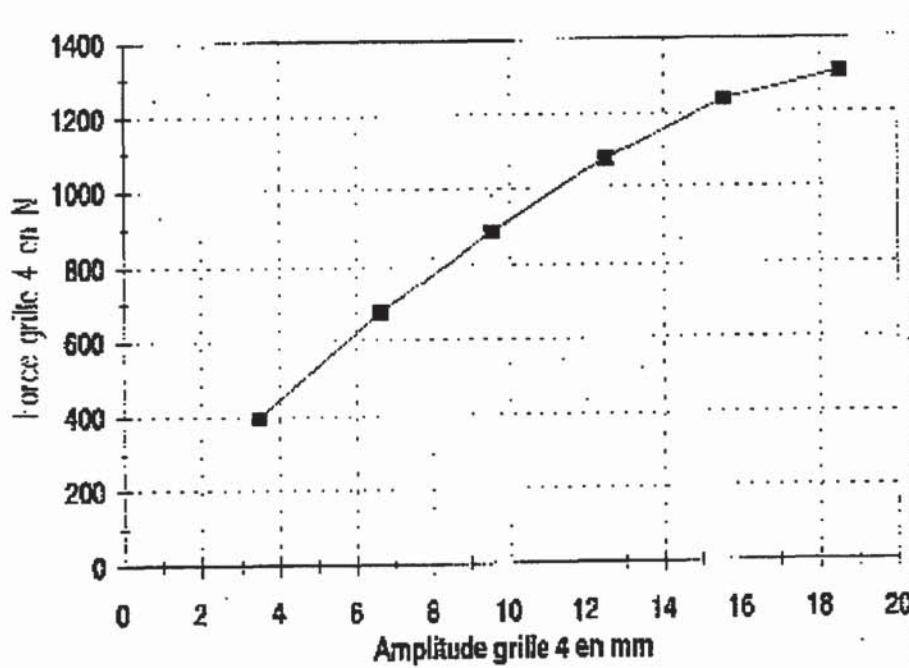


Figure II-19 : Tracé de la force de traction appliquée sur la grille n°4* en fonction du déplacement résultant - Assemblage 900 MW [II-11].

* Les grilles sont repérées par une numérotation croissante de 1 à 8 du bas vers le haut, la grille n°4 est environ située à mi-hauteur sur un assemblage 900 MW.

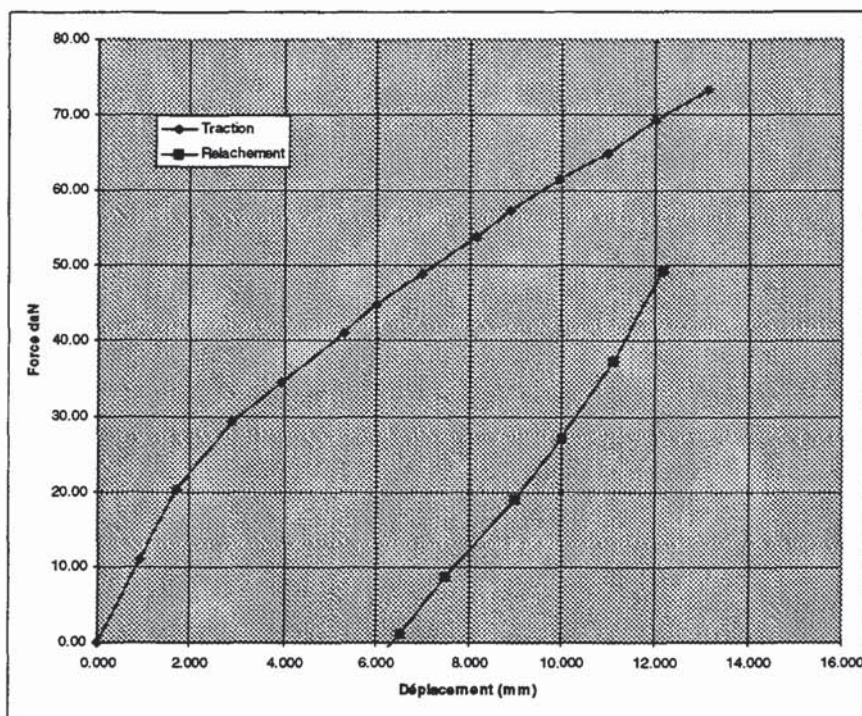


Figure II-20: Tracé de la force de traction appliquée sur la grille n°6* en fonction du déplacement résultant - Assemblage 1300 MW [II-13].

Il semble que la force de rappel évolue selon une fonction de la forme $f(x) \approx x^\beta$ avec $0 < \beta < 1$, dans le sens de la traction. La pente, donc la raideur, diminue avec l'amplitude du déplacement. C'est le signe d'un système mollissant. Dans le sens du "relâchement", la

montre le signe d'un comportement hystérétique qui prouve que l'assemblage a le comportement d'une structure non parfaitement élastique.

L'image du comportement non-linéaire de l'assemblage fournie par une représentation dans le plan de phase, est une donnée intéressante. En effet, cette représentation permet éventuellement (en fonction de la qualité des mesures), de préciser l'origine de la non-linéarité : amortissement ou de raideur. Elle consiste au tracé de la vitesse instantanée en fonction du déplacement instantané. La Figure II-21 présente le résultat de cette représentation dans le cas d'une simulation (numérique) des oscillations libres d'un système linéaire dissipatif à un seul degré de liberté. Elle correspond à une spirale convergente vers le point origine, qui est le point d'équilibre du système : $\dot{x}(t) = 0$ et $x(t) = 0$, appelé aussi point singulier [II-14].

* Les grilles sont repérées par une numérotation croissante de 1 à 10 du bas vers le haut, la grille n°6 est environ située à mi-hauteur sur un assemblage 1300 MW.

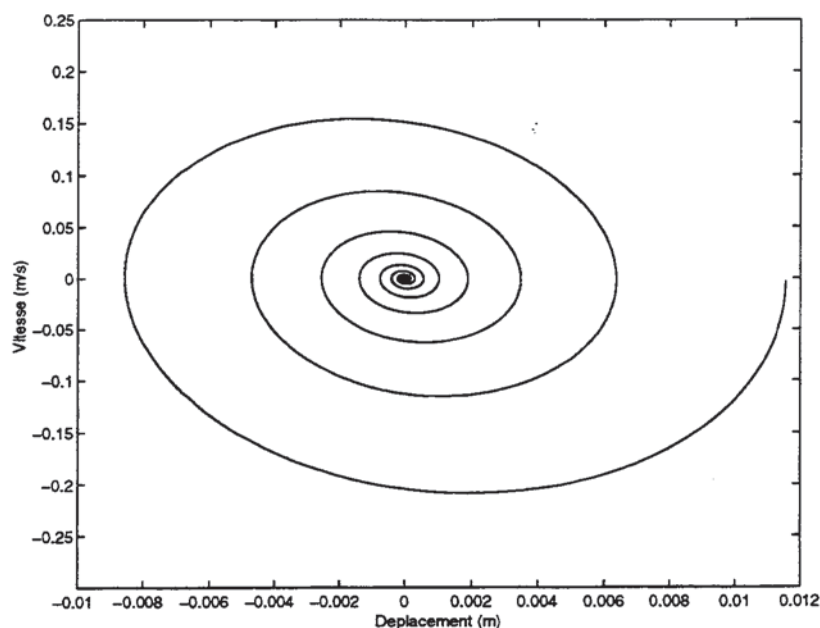


Figure II-21 : Représentation dans le plan de phase des oscillations libres d'un système linéaire dissipatif à un seul degré de liberté. Oscillations libres simulées.

$$\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + (2\pi f_0)^2 x(t) = 0 \quad x(0) = 11.6 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad C = 4 \text{ s}^{-1} \quad f_0 = 3.3 \text{ Hz}$$

La Figure II-22 illustre le cas des oscillations libres d'un système à un seul degré de liberté comportant une non-linéarité de raideur de type Duffing "mollissant" (définie dans le chapitre III) :

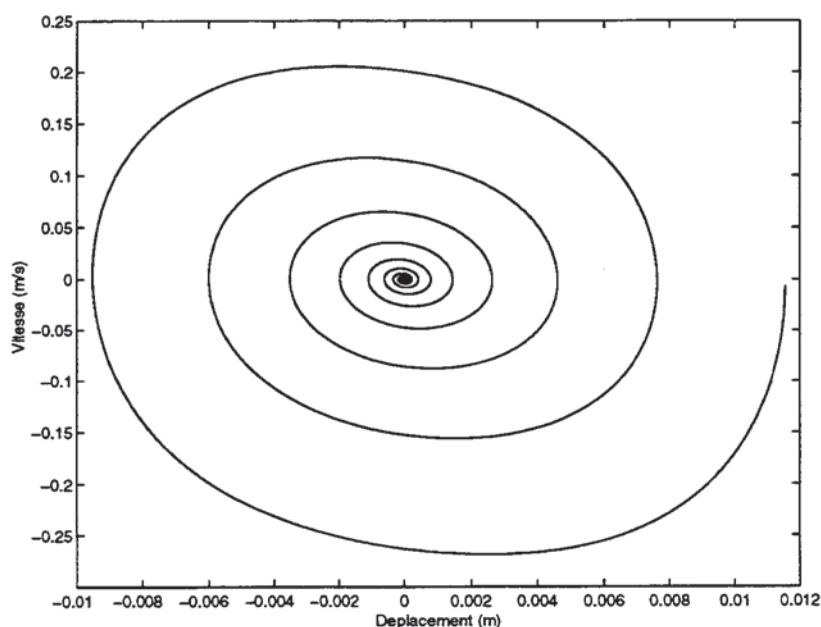


Figure II-22 : Représentation dans le plan de phase des oscillations libres d'un système dissipatif à un seul degré de liberté avec une non-linéarité de raideur de Duffing. Oscillations libres simulées.

$$\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + \left[(2\pi f_0)^2 - \lambda x^2(t) \right] x(t) = 0 \quad x(0) = 11.6 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad C = 4 \text{ s}^{-1} \quad f_0 = 3.3 \text{ Hz} \quad \lambda = 500 \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-4}$$

Enfin, la Figure II-23 est l'illustration du cas des oscillations libres d'un système à un seul degré de liberté comportant une non-linéarité d'amortissement :

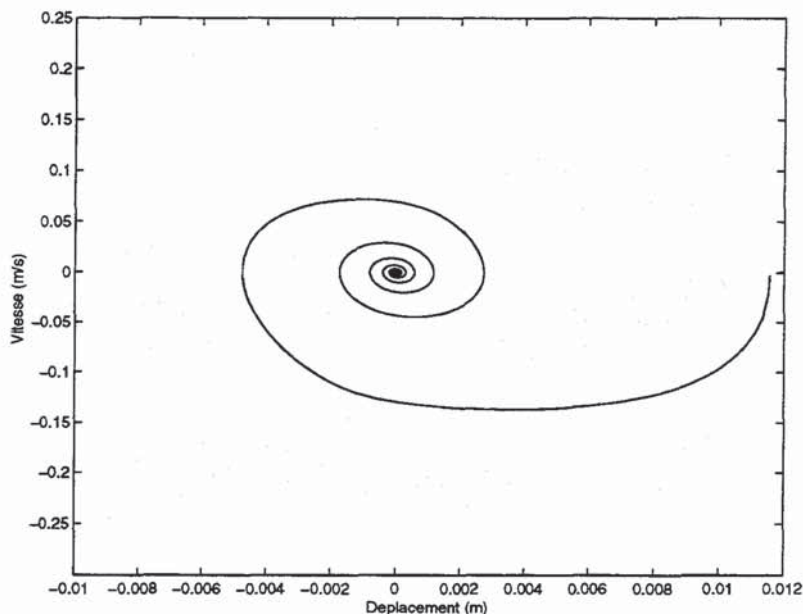


Figure II-23 : Représentation dans le plan de phase des oscillations libres d'un système dissipatif à un degré de liberté avec une non-linéarité d'amortissement. Oscillations libres simulées.

$$\ddot{x}(t) + [C_0 + C_1|x(t)|]\dot{x}(t) + (2\pi f_0)^2 x(t) = 0 \quad x(0) = 11.6 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad C_0 = 4 \text{ s}^{-1} \quad C_1 = 2000 \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1} \quad f_0 = 3.3 \text{ Hz}$$

En utilisant un des essais de lâcher en air effectué à 12 mm sur la grille n°6 d'un assemblage 1300 MW à échelle 1, on peut avoir une idée de l'origine de la non-linéarité prépondérante dans le comportement non-linéaire de l'assemblage par comparaison avec l'une des représentations fournies par les Figure II-21, Figure II-22 ou Figure II-23.

Avant de montrer la représentation de ce lâcher dans le plan de phase, la Figure II-24 présente la réponse mesurée au niveau de la grille n°6 à la suite d'un lâcher de l'assemblage. Le calcul de la D.S.P. de ce signal permet de s'assurer qu'au cours de ce lâcher, seul le premier mode de l'assemblage est prépondérant du point de vue de son énergie (Figure II-25). C'est uniquement à ce titre que cette représentation est utilisée. Elle nous permet simplement de conforter l'hypothèse d'une modélisation simple degré de liberté adoptée dans notre étude. Nous sommes bien conscient que ce type de réponse ne vérifie pas la propriété de stationnarité nécessaire à une interprétation plus complète de la D.S.P. de ce signal.

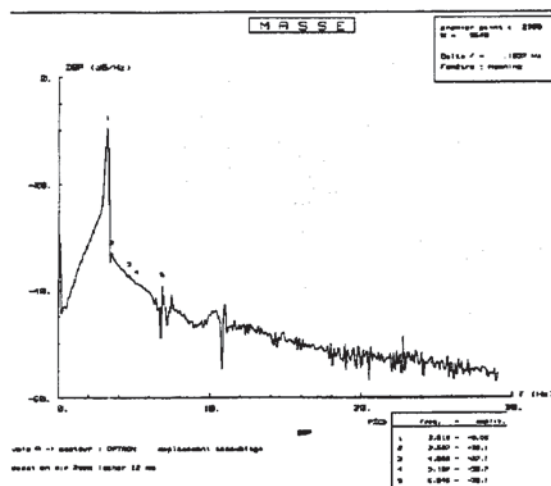
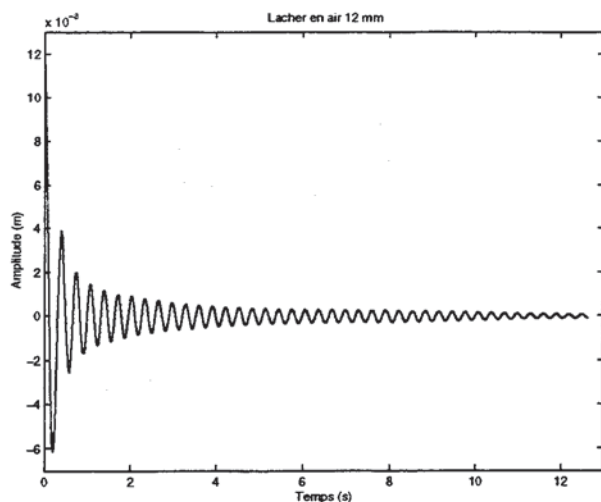


Figure II-24 : Oscillations libres de l'assemblage à échelle 1. Lâcher 12 mm. Grille n°6.

Figure II-25 : D.S.P du lâcher de l'assemblage représenté sur la Figure II-24.

L'image donnée par la représentation dans le plan de phase de ce lâcher est visualisée sur la Figure II-26 suivante :

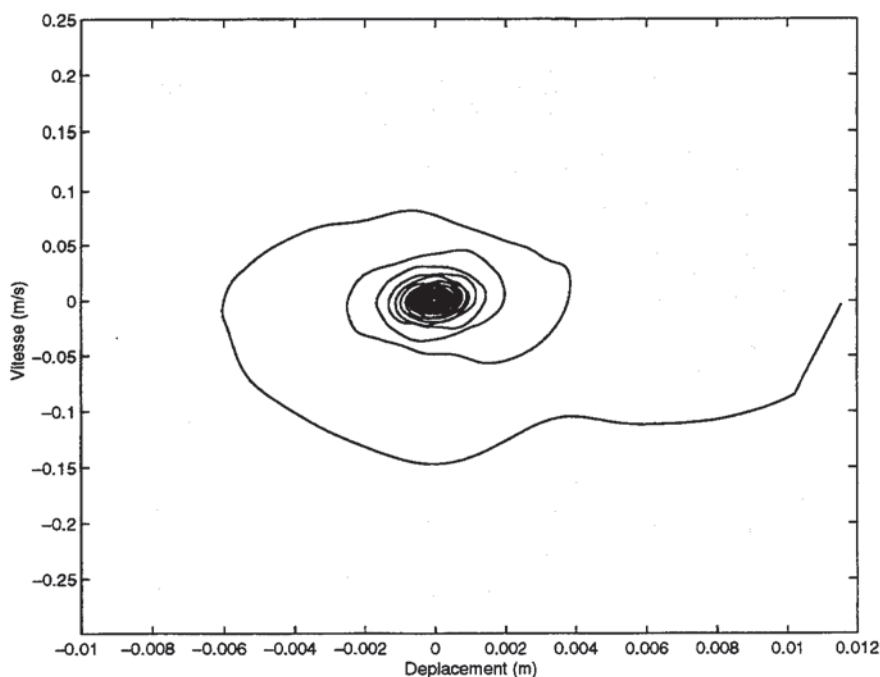


Figure II-26 : Représentation dans le plan de phase des oscillations libres de la grille n°6 d'un assemblage à échelle 1. Oscillations libres mesurées.

La forme de spirale convergente et "écrasée" obtenue semble se rapprocher de celle présentée par la Figure II-23. La prise en compte d'une non-linéarité d'amortissement

dans l'équation du mouvement de l'assemblage peut être une solution à envisager afin de modéliser le comportement non-linéaire de celui-ci. Dans la suite, nous allons tenter de valider cette hypothèse. Concernant la non-linéarité de force de rappel, aucune conclusion ne peut être tirée. Son influence est sans doute moins marquée et ne peut être visualisée clairement dans ce type de représentation.

Dans ce paragraphe, nous avons montré qu'une modélisation linéaire du comportement de l'assemblage ne semble pas traduire complètement le mouvement de celui-ci. Quelques arguments ont pu être avancés afin de préciser l'origine des non-linéarités responsables de ce comportement. Nous pensons qu'il s'agit d'une non-linéarité de force de rappel et d'une non-linéarité de force dissipative.

Dans le paragraphe suivant, le problème est reformulé mathématiquement et la démarche envisagée pour le résoudre est détaillée.

II.4.4. Formulation du problème - Démarche envisagée

Il s'agit de modéliser le comportement non-linéaire de l'assemblage comme celui d'un système à un degré de liberté dont l'amortissement et la raideur sont non-linéaires. L'amortissement est noté c et la force de rappel non-linéaire est exprimée par $K(x)x(t)$

L'équation du mouvement de flexion s'écrit alors :

$$(II-8) \quad M\ddot{x}(t) + C(x, \dot{x})\dot{x}(t) + K(x)x(t) = f(t)$$

Le but est alors d'identifier $C(x, \dot{x})$ et $K(x)$.

La démarche envisagée est celle d'une méthode d'identification à partir de données mesurées et résolution du problème inverse.

Cette démarche peut se schématiser de la façon suivante :

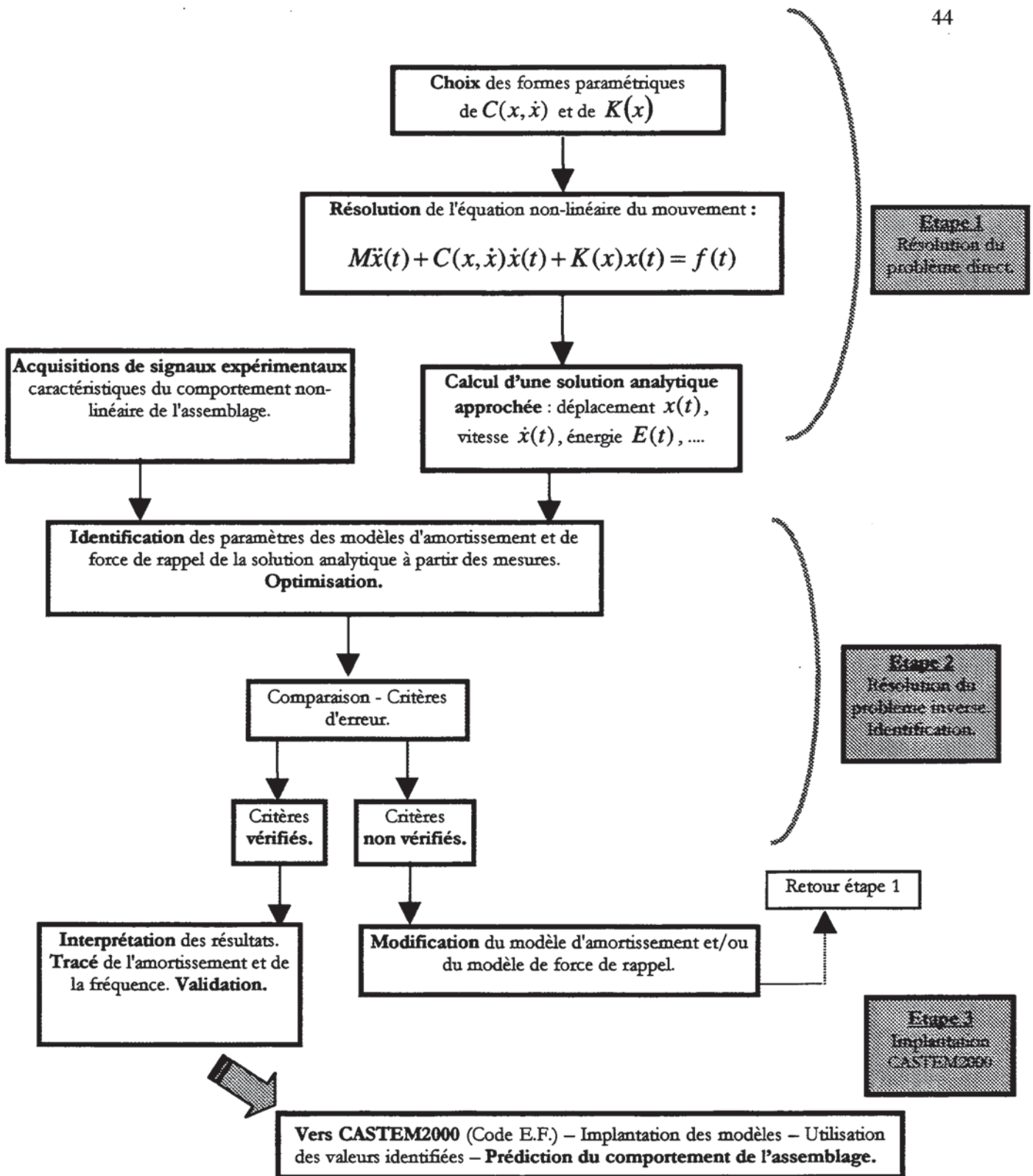


Figure II-27 : Schéma de la démarche envisagée - Résolution d'un problème inverse.

L'étape du choix du modèle d'amortissement et de la force de rappel est exposée dans le chapitre IV. Ces choix sont orientés en fonction de l'analyse des modèles issus de la littérature présentée dans le chapitre III et des résultats antécédents expérimentaux. Les

méthodes permettant la résolution de l'équation non-linéaire du mouvement sont présentées et détaillées dans la partie III. L'étape concernant la résolution du problème inverse, l'analyse et l'interprétation des résultats ainsi que l'implantation des modèles dans CASTEM2000 sont développés dans le chapitre V.

Dans cette première approche de la modélisation du comportement de l'assemblage, et dans un but de simplification du problème posé, seule l'analyse des réponses à un lâcher a pu être menée. Le choix de ce type d'excitation s'est justifié pour plusieurs raisons :

- par rapport aux différents moyens expérimentaux disponibles pour exciter un assemblage à échelle 1, le système de lâcher est sans doute le moins difficile à mettre en place et un des moins coûteux. De plus d'autres essais sont disponibles pour ce même type d'excitation dans le laboratoire et peuvent permettre des comparaisons,
- dans l'optique du calcul d'une solution analytique, celle de la réponse à un lâcher est sans doute la moins compliquée à déterminer,
- selon la localisation du point de mesure de la réponse au lâcher, on peut facilement privilégier un mode de vibration particulier,
- les conditions initiales sont connues précisément pour chaque lâcher et reproductibles pour différentes conditions environnementales : air, eau stagnante et en eau en écoulement.

II.5. Conclusion

Cette partie a précisé la structure d'un assemblage en détaillant les composants qui le constituent, ce qui a permis de mieux comprendre les traits particuliers de son comportement lorsqu'il est excité par un lâcher. Le problème a été exposé à la fois dans un contexte général et plus précisément en termes mathématiques. La nécessité d'une modélisation non-linéaire du comportement de l'assemblage a été justifiée. Enfin, le mode opératoire d'acquisition des données expérimentales nécessaires à l'identification a été détaillé.

Une synthèse des études préliminaires concernant la caractérisation expérimentale de l'amortissement et de la fréquence du premier mode de l'assemblage par des méthodes linéaires a permis d'isoler deux paramètres influents de leur évolution. Il s'agit de l'amplitude de l'excitation et de la vitesse axiale de l'écoulement fluide. L'examen de ces évolutions a remis en cause la validité d'une modélisation linéaire du comportement de l'assemblage combustible proposée dans la plupart de ces études.

Une analyse quantitative du comportement de l'assemblage dans le plan de phase a permis de préciser l'origine des non-linéarités. Une modélisation du comportement prenant en compte une non-linéarité de force de rappel et de force de dissipation est envisagée. L'identification de l'amortissement et de la fréquence est mesurée par résolution du problème inverse dont la démarche a été schématisée.

Le dispositif expérimental nécessaire à la réalisation des essais a été présenté ainsi que le mode opératoire. Grâce à la boucle d'essai du L.H.C et à celle du Laboratoire EMSI, un grand nombre de réponses à différentes amplitudes de lâcher et vitesses d'écoulement sont disponibles, fournissant ainsi des données conséquentes à notre étude.

Maintenant que le mode d'obtention des signaux expérimentaux a été détaillé et que le problème a été précisé, nous présentons dans la partie suivante, les modèles linéaires et non-linéaires d'amortissement et de force de rappel issus de la bibliographie ainsi que différentes méthodes d'identification. Une large étude bibliographique a été menée dans ce sens et le chapitre suivant présente une synthèse de ce travail.

II.6. Références bibliographiques

[II-1] SINHA N.K., KUSZTA B.

Modelling and identification of dynamic systems.
Van Nostran Reinhold Compagny. 1983. 334 p.

[II-2] SHABANA A. A.

Theory of vibration : An introduction.
Springer. Mechanical Engineering Series. New York. 1996. 337 p.

[II-3] VALLORY J.

"Détermination des paramètres : fréquence de résonance et amortissement".
Note Technique DEC/SECA/LHC/93/057.

[II-4] GIBERT R.J.

Vibrations des structures - Interaction avec les fluides - Sources d'excitation aléatoires.
Eyrolles. Paris. 1988, 677 p.

[II-5] PIRANDA J.

Analyse modale et recalage de modèle. Projet de mémoire d'habilitation à diriger des recherches. Université de Franche-Comté. Besançon. 1994.

[II-6] BLEVINS R.D.

Flow-induced vibration. Second edition.
Krieger Publishing Company. Malabar. Floride. 1994. 477 p.

[II-7] NAUDASCHER E., ROCKWELL D.

Flow-induced vibrations. An engineering guide.
Rotterdam/ Brookfield : A.A. Balkena. 1993, 413 p.

[II-8] FARDEAU P.

"Mesure d'amortissement sous écoulement. Analyse de l'ensemble des essais MALDIVE".
Note Technique DEC/SECA/LHC/94/057.

[II-9] TEKATLIAN A.

"Etude comparative de techniques de détermination des caractéristiques modales d'un crayon d'assemblage - Synthèse et analyse de l'action AMORE".
Note Technique DEC/SECA/LHC/97/047.

[II-10] BARBIER D.

"MASSE : rapport d'essais et d'interprétation des mesures d'amortissement sous écoulement à 50°C d'un assemblage AFA-XL à échelle 1".
Note Technique DEC/SECA/LHC 97/16.

[II-11] QUEVAL J.C., BOUVIER M., PORTIER J.L.

"Caractérisation dynamique d'un assemblage combustible de type XL".
Rapport DMT/95/455.

[II-12] PORTIER J.L.

"Caractérisation dynamique d'un assemblage combustible de type AFA".

Rapport DMT/96/418.

[II-13] BARBIER D.

"MASSE : amortissement sous écoulement à 170 °C d'un assemblage AFA-XL à échelle 1".

Note Technique DEC/SECA/LHC/97/040.

[II-14] SZEMPLINSKA-STUPNICKA W.

The behavior of non-linear vibrating systems. Volume I, Fundamental concepts methods : applications to single-degree-of-freedom systems.

Kluwer Academic Publishers. London. 1990. 253 p.

[II-15] VALLORY J., FARDEAU P., MAGUIN J.C.

"Grid to rod fretting evaluation: methodology of testing in the HERMES loops".

NUTHOS 5, 14-18 April 1997. Beijing, CHINA.

[II-16] BARBIER D., RIGAUDEAU J., VIALLET E.

"Damping from axial coolant flow in the response of PWR fuel assemblies to horizontal seismic loads".

ICONE 6, 11-15 May 1998, San diego, California, U.S.A.

III. ETAT DE L'ART : MODELES ET METHODES D'IDENTIFICATION

III.1. Introduction

Ce chapitre est consacré à l'analyse bibliographique de différents modèles d'amortissement et de force de rappel et à l'étude des différentes techniques d'identification disponibles dans la littérature.

Dans une première partie, les modèles d'amortissement et les modèles de force de rappel sont exposés. La description concernant les modèles d'amortissement est focalisée sur ceux traduisant une approche globale de la dissipation d'énergie. En effet, il ne s'agit pas de décrire localement les phénomènes physiques responsables des différentes non-linéarités de dissipation, ni même de distinguer les différents modèles qui y sont rattachés. On a d'abord cherché à dégager les limitations et les avantages du modèle d'amortissement linéaire. Ensuite on s'est attaché à décrire et commenter les modèles non-linéaires d'amortissement disponibles dans la littérature et susceptibles de traduire les tendances et évolutions précisées dans le chapitre II. Dans une moindre mesure, l'analyse de deux modèles de force de rappel est présentée.

Dans la seconde partie, quelques méthodes d'identification sont précisées. Ces méthodes peuvent être regroupées en deux catégories. La première comprend celles où l'identification est possible à partir d'un calcul direct sur le signal de réponse. La seconde concerne les méthodes basées sur une connaissance préalable d'une solution analytique (définie à partir des paramètres du modèle d'amortissement et/ou de force de rappel). L'identification consiste généralement, in fine, au calcul des paramètres optimum qui minimisent l'erreur quadratique entre la réponse analytique et la réponse mesurée.

Les méthodes qui semblent les plus intéressantes sont présentées en détail pour leur application dans les parties IV ou pour des applications futures.

Nous nous sommes attachés à présenter les hypothèses, les limitations, les avantages et inconvénients des différents modèles et méthodes d'identifications.

III.2. Modèles d'amortissement et de force élastique de rappel

Dans ce paragraphe, les modèles linéaires et non-linéaires d'amortissement $C(x, \dot{x})$ ($C(x, \dot{x}) > 0$) et de force élastique de rappel $K(x)x(t)$ ($K(x) > 0$) de l'équation de la dynamique non-linéaire (III-1) d'un oscillateur à un degré de liberté sont discutées :

$$(III-1) \quad M\ddot{x}(t) + C(x, \dot{x})\dot{x}(t) + K(x(t))x(t) = 0$$

Nous présentons d'abord le modèle d'amortissement linéaire pour lequel la littérature ayant trait au domaine des assemblages REP, propose plusieurs formulations. Ensuite, les modèles d'amortissement non-linéaires, provenant d'autres champs d'investigations (aérodynamique, hydrodynamique), sont détaillés.

III.2.1. Modèles linéaires

III.2.1.1. Modèles d'amortissement

Que ce soit dans le cadre des travaux concernant l'étude du comportement des assemblages ou dans celui plus général des vibrations de structures, le modèle d'amortissement visqueux constant $C(x, \dot{x}) = C$ [III-1] est le modèle le plus couramment utilisé. Le coefficient d'amortissement C intervient très souvent sous sa forme ε , adimensionnée par rapport à $C_c = 2\omega_0 M = 2\sqrt{KM}$, appelé amortissement critique (K est dans ce cas la raideur linéaire de la structure) :

$$\varepsilon = \frac{c}{C_c} = \frac{c}{2\omega_0 M} \quad 0 < \varepsilon < 1$$

ε représente l'amortissement réduit ou le taux d'amortissement [III-1], [III-2]. ω_0 représente la pulsation propre du système. Pour $0 < \varepsilon < 1$, le mouvement du système est oscillant. Lorsque $\varepsilon \geq 1$, le mouvement est simplement le retour à sa position d'équilibre par une exponentielle décroissante, sans osciller, lorsqu'il est soumis à un lâcher.

La prise en compte d'un amortissement constant linéaire offre au moins deux avantages :

- une estimation satisfaisante de la dissipation d'énergie, en première approximation,
- une extension possible aux études des systèmes à plusieurs degrés de libertés.

Depuis la fin des années 80, dans le but d'une meilleure compréhension du comportement des assemblages, de nombreuses études ont tenté de caractériser ce coefficient d'amortissement en air, en eau stagnante et sous écoulement.

Dans cette optique, deux démarches complémentaires se distinguent :

- soit le modèle est établi à partir d'une démarche empirique. C'est le cas par exemple des études [III-3], [III-4], [III-6] et c'est aussi l'objet de ce travail mais dans un cadre de comportement de structure non-linéaire,
- soit le modèle est élaboré en utilisant un descriptif précis des phénomènes mécaniques et physiques qui se produisent dans le faisceau de crayons et au niveau des grilles. C'est l'approche qui est faite dans [III-5], [III-8], [III-9].

Dans le cadre des études "MALDIVE" [III-3] et "MASSE" [III-6] réalisées au LHC, plusieurs formulations analytiques de l'amortissement réduit ont été établies empiriquement à partir de l'analyse des résultats de lâchers effectués en air, en eau stagnante et sous écoulement. Dans [III-3], l'amortissement réduit d'un assemblage d'échelle $1/2$ peut être traduit en fonction de x_0 , l'amplitude initiale du lâcher, par la formulation suivante:

$$(III-2) \quad \varepsilon = \underbrace{\varepsilon_0 + \varepsilon_1 x_0 + \varepsilon_2 x_0^2}_{\text{structure + eau calme}} + \underbrace{\alpha_1 U}_{\text{écoulement}}$$

où ε_0 , ε_1 , ε_2 et α_1 sont des coefficients déterminés empiriquement et U la vitesse d'écoulement du fluide.

(III-2) permet d'estimer l'amortissement linéaire d'une maquette réduite d'assemblage soumise à un écoulement axial ou non ($\alpha_1 = 0$). L'extrapolation à des amplitudes et à des vitesses quelconques est alors possible. Ce modèle n'est valable que pour l'assemblage utilisé dans l'étude empirique d'origine ou ayant exactement les mêmes caractéristiques. En effet, l'expression (III-2) doit être modifiée lorsqu'il s'agit d'un assemblage à échelle 1 [III-6]. Celle-ci s'écrit alors :

$$(III-3) \quad \varepsilon = \underbrace{\varepsilon_0 + \varepsilon_1 x_0}_{\text{structure + eau calme}} + \underbrace{(\alpha_2 U + \alpha_1) U}_{\text{écoulement}}$$

Ces deux formulations ont été établies pour des amplitudes de lâchers comprises entre 2 mm et 6 mm pour (III-2) et jusqu'à 16 mm pour (III-3) et pour des vitesses d'écoulement allant jusqu'à 5 m.s⁻¹. Elles sont en accord avec d'autres références de la littérature dont les auteurs ont montré qu'il existait entre l'amortissement et la vitesse de l'écoulement une dépendance linéaire [III-7] ou quadratique [III-27].

Les études menées par "Mitsubishi Atomic Power Industrie" [III-8] s'intéressent au même problème, appréhendé sous un autre angle. Leur approche s'est focalisée sur la recherche d'une formulation fine du modèle d'amortissement lié à l'écoulement, en

distinguant le rôle du faisceau de tubes de celui des grilles. Leur formulation est dépendante des caractéristiques géométriques de ces deux éléments, de manière à pouvoir transposer le calcul à n'importe quel type d'assemblage. Les travaux ont consisté à traduire en terme d'amortissement, la force de friction linéique F_f qui s'exerce sur le faisceau de crayons et sur les grilles lorsque le fluide est en écoulement axial avec une vitesse U . Les résultats obtenus sont une extension des travaux de [III-9] obtenus sur un tube unique. Dans ce cas, F_f s'exprime comme suit :

$$(III-4) \quad F_f = -\frac{1}{2} \rho D^2 \sigma C_f \frac{U}{D} \dot{x}(z)$$

où $\dot{x}(z)$ est la vitesse de déplacement latérale du crayon et z la position le long du crayon variant de 0 à L . C_f est un coefficient caractéristique de la traînée recalé par la suite sur des essais à échelle 1 par les auteurs de [III-8], ρ la masse volumique du fluide, D le diamètre du tube et σ un coefficient approché caractéristique du confinement de la structure.

Les résultats de cette dernière étude ont été alors interprétés et adaptés pour être enfin implantés dans le logiciel AMOK (AMOrtissement de Combustibles) qui permet le calcul de l'amortissement réduit d'un assemblage combustible sous écoulement connaissant ses caractéristiques géométriques, massique, son confinement, la vitesse d'écoulement axial du fluide caloporteur et sa densité [III-5].

L'assemblage est alors considéré, dans une représentation modale, comme un ensemble de cylindres vibrant en phase. L'amortissement réduit de l'assemblage, pour le mode i , s'exprime par la relation suivante [III-5], [III-6] :

$$(III-5) \quad \varepsilon_i = \frac{C_i^{s+e}}{4\pi f_i^{s+e} m_i^{s+e}} = \frac{C_{i_{fa}} + C_{i_{gr}}}{4\pi f_i^{s+e} m_i^{s+e}} = \varepsilon_{i_{fa}} + \varepsilon_{i_{gr}}$$

f_i^{s+e} (détaillé dans la section III.2.1.2) et m_i^{s+e} sont respectivement la fréquence et la masse modale généralisée de la structure en eau stagnante :

$$(III-6) \quad m_i^{s+e} = m_i^s + m_i^e = N_c \left(\frac{M}{N_c L} + \rho \sigma \pi D^2 \right) \int_0^L q_i^2 dz$$

m_i^s et m_i^e représentent la masse modale généralisée de la structure et la masse ajoutée par la présence du fluide confiné. N_c correspond au nombre de tubes (crayons et tubes guides), $\int_0^L q_i^2 dz$ la déformée modale du mode i , L la longueur de l'assemblage entre les

embouts inférieur et supérieur. c_i^{e+s} , c_{i_a} , c_{i_r} représentent respectivement l'amortissement pour le mode i de l'assemblage, du faisceau et des grilles sous écoulement. ε_{i_a} et ε_{i_r} sont les amortissements réduits associés.

Finalement, la contribution du faisceau et des N grilles à l'amortissement réduit global se décompose comme suit :

$$(III-7) \quad \varepsilon_{i_a} = \frac{1}{2} \frac{N_c D \sigma C_f \int_0^L q_i^2 dz}{4\pi m_i^{e+s}} \rho \frac{U}{f_i} \quad \varepsilon_{i_r} = \frac{1}{2} \frac{D_M H \sigma C_g \int_0^L q_i^2 dz}{4\pi m_i^{e+s}} \rho \frac{U}{f_i}$$

H est la hauteur des grilles, C_g est un coefficient caractéristique de la traînée, évalué par recalage sur des essais à échelle 1 par [III-8] et D_M représente le périmètre mouillé équivalent à la surface totale de la grille en contact avec le fluide : $D_M = \frac{N_{ce} \cdot 4 \cdot P}{\pi}$

où N_{ce} est le nombre de cellules par grille et P le pas de crayons (distance entre les axes de deux crayons combustibles).

Le modèle d'amortissement présenté ci-dessus fournit une valeur de l'amortissement visqueux linéaire équivalent à partir des données géométriques précises de l'assemblage. Tel qu'il est défini, il peut être calculé pour des géométries et/ou des échelles différentes. C'est là son principal intérêt par rapport aux formulations (III-2) et (III-3) qui sont dédiées à une géométrie et une échelle d'assemblage particulière.

L'application des formules (III-7) a été opérée pour le cas de l'assemblage AFA-XL 1300 MW (essais MASSE). La confrontation des valeurs obtenues avec celles déterminées par la méthode du décrétement logarithmique est présentée dans la référence [III-6]. Les résultats indiquent une bonne concordance calcul-mesure pour le cas d'un écoulement de 3 m.s^{-1} : écart relatif maximal de 5.5 % entre les valeurs. Pour une vitesse de 5 m.s^{-1} , le calcul surestime les valeurs obtenues avec le décrétement par un écart relatif de 18.8 % correspondant à l'amplitude de lâcher maximale (14.6 mm). Ces écarts peuvent être dus au choix de la valeur de la fréquence f_1 et à la détermination expérimentale de la valeur de la vitesse U . En effet, la fréquence f_1 a été imposée égale à la fréquence maximale obtenue pour les essais en eau calme. Or, il a été constaté que cette fréquence diminuait lorsque la vitesse d'écoulement augmentait.

III.2.1.2. Modèle de force élastique de rappel

Le modèle linéaire de force de rappel est celui correspondant à un terme $K(x)$ constant, soit $K(x)x(t) = kx(t)$, où k représente la raideur du système.

Dans une approche similaire à celle du paragraphe précédent, cette raideur peut être formulée plus précisément en fonction des caractéristiques de la structure et de la vitesse de l'écoulement axial du fluide caloporteur [III-6] :

$$(III-8) \quad \frac{k_i^{s+e}}{m_i^{s+e}} = \frac{k_i^s + k_i^e U^2}{m_i^{s+e}}$$

k_i^s est la raideur généralisée du mode i de la structure en air déterminée expérimentalement à la suite d'une analyse spectrale par exemple, ou numériquement à l'aide d'un calcul éléments finis. k_i^{s+e} correspond à la raideur de la structure en eau sous écoulement. $k_i^e U^2$ est une grandeur qui peut être calculée à posteriori lorsque l'on connaît k_i^{s+e} (déterminé à la suite d'une analyse spectrale) et correspond à la raideur (négative du point de vue de la structure) apportée par le fluide en écoulement.

La fréquence propre du mode i est alors [III-6] :

$$(III-9) \quad f_i^{s+e} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_i^s + k_i^e U^2}{m_i^{s+e}}}$$

La formulation classique permettant le calcul de la fréquence de vibration du mode i d'une structure immergée, en milieu fluide au repos confiné, est donnée par

$$f_i^s = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_i^s}{m_i^s}}. \text{ Cette expression traduit que la fréquence propre de vibration de la}$$

structure est diminuée par la présence du fluide qui intervient par le biais du terme de masse ajoutée m_i^e . Dans l'expression (III-9), le terme $k_i^e U^2$ est introduit pour tenir compte de la diminution de la fréquence de vibration du mode i lorsque la vitesse d'écoulement augmente.

III.2.2. Quelques modèles non-linéaires d'amortissement

Comme cela a été spécifié dans l'introduction à ce chapitre, la bibliographie ayant trait à l'étude du comportement dynamique des assemblages combustibles R.E.P ne mentionne pas l'utilisation de modèles globaux d'amortissement non-linéaires de structure, c'est-à-dire dépendant du déplacement ou de la vitesse instantanée. Ceux qui sont présentés dans cette partie sont issus d'études concernant les secteurs de l'aérospatial [III-10], [III-11], [III-16] et de l'aérodynamique [III-14], [III-15] qui proposent trois types de modèles : les modèles polynomiaux, le modèle factoriel de Balakrishnan et les modèles d'amortissement à mémoire [III-19]. Ces modèles ont été établis pour pallier au manque

de précision et de représentativité des phénomènes dissipatifs obtenus avec le modèle linéaire.

L'établissement de ces modèles est assez divers. Dans la plupart des cas, leur formulation résulte d'une démarche empirique. Ce peut être aussi le résultat d'une démarche mathématique sans réel support physique et qui ne trouve d'applications que par la suite. Dans certaines de ces études, ce sont parfois les outils mathématiques utilisés qui fixent la forme du modèle, de manière à surmonter certaines difficultés liées à la résolution de l'équation du mouvement [III-21].

III.2.2.1 Modèles polynomiaux

Les études concernant les oscillations libres des navires proposent un certain nombre de modèles d'amortissement de type polynomiaux. Les travaux de l'auteur de [III-22] sont à l'origine de cette famille de modèles. Ils ont introduit une dépendance de l'amortissement en fonction du mouvement du degré de liberté $\phi(t)$, correspondant à l'angle d'inclinaison d'une embarcation dans son mouvement de roulis, selon la formulation suivante :

$$(III-10) \quad C(\phi, \dot{\phi}) = (\epsilon_1 + \epsilon_2 |\dot{\phi}(t)|)$$

Ce modèle a ensuite été étendu aux formulations :

$$(III-11) \quad C(\phi, \dot{\phi}) = \sum_{i=1}^N \epsilon_i |\phi|^n |\dot{\phi}|^m \quad n = 0,1,2; m = 0,1,2; N \in \mathbb{N}$$

Les coefficients ϵ_i sont déterminés par identification à partir de mesures expérimentales du mouvement et sont petits devant 1.

L'expression (III-10) résulte principalement de la prise en compte de deux effets :

- un amortissement linéaire de radiation lié à l'émission de vagues,
- un amortissement visqueux quadratique résultant de la friction du liquide sur la carène et de l'émission de tourbillons.

(III-10) puis (III-11) ont été très largement repris par de nombreux auteurs : [III-14], [III-15], [III-21]. Dans [III-15], ceux sont 6 développements de (III-11) qui ont été étudiés et comparés dans le cadre de l'étude du mouvement du roulis de navires. En transposant à une grandeur de déplacement les formulations utilisées, le modèle de degré le plus élevé utilisé dans cette étude s'exprime comme suit :

$$(III-12) \quad C(x, \dot{x}) = 2\omega_0 \varepsilon (1 + \varepsilon_1 |x(t)| + \varepsilon_2 x^2(t) + \varepsilon_3 |\dot{x}(t)| + \varepsilon_4 \dot{x}^2(t))$$

où ω_0 est la pulsation propre du mouvement et $\varepsilon \ll 1$ l'amortissement réduit linéaire.

Ces modèles sont nommés couramment dans la littérature comme :

- amortissement linéaire + amortissement quadratique lorsque $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_4 = 0$ (W. Froude)
- amortissement linéaire + amortissement cubique lorsque $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$
- amortissement linéaire + amortissement quadratique + dépendance linéaire avec le déplacement lorsque $\varepsilon_2 = \varepsilon_4 = 0$
- amortissement linéaire + amortissement cubique + dépendance quadratique avec le déplacement lorsque $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0$
- amortissement linéaire + amortissement cubique + dépendance linéaire avec le déplacement lorsque $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$
- amortissement linéaire + amortissement quadratique + dépendance cubique avec le déplacement lorsque $\varepsilon_1 = \varepsilon_4 = 0$

On trouve des formulations similaires dans les études qui s'intéressent à la fatigue acoustique d'éléments-panneaux utilisés dans le fuselage des avions [III-23], [III-25]. Couplé à une non-linéarité de raideur de type Duffing (précisée dans le paragraphe 2.3 de cette partie), l'introduction d'une non-linéarité dissipative de la forme $C(x, \dot{x})\dot{x}(t) = (\varepsilon_1 \dot{x}(t) + \varepsilon_2 x^2 \dot{x}(t))$, a permis de traduire l'augmentation de la résistance au déplacement en fonction de l'amplitude de la réponse. En effet, lorsque $x(t)$ est faible, le poids du terme $\varepsilon_2 x^2(t)$ est faible et l'amortissement est proche de celui d'un système linéaire équivalent (amortissement constant). Lorsque l'amplitude de la réponse devient importante, le poids de $\varepsilon_2 x^2(t)$ n'est plus négligeable et l'amortissement augmente. C'est ce qui est observé expérimentalement.

On constate, dans le modèle (III-12), l'introduction de trois types de termes :

- des termes d'amortissement dépendant du déplacement de la structure : $(|x(t)|, x^2(t))$, qui permettent de tenir compte d'effets dissipatifs supplémentaires liés à la structure : frottements, déformations, rayonnement acoustique,
- des termes d'amortissement dépendant de la vitesse de la structure : $(\dot{x}(t), |\dot{x}(t)|, \dot{x}^2(t))$, qui permettent de tenir compte de l'interaction entre la structure et

le fluide au repos ou en mouvement : effets de la viscosité et effet de la turbulence de l'écoulement,

- d'autres termes que l'on peut qualifier "d'ajustement" qui permettront d'améliorer la qualité du modèle mais qui n'ont pas de réelle origine physique.

III.2.2.2. Modèle de Balakrishnan

Ce modèle est issu d'études relatives au contrôle et à la stabilisation des structures flexibles aériennes faiblement amorties comme les antennes spatiales ou les satellites. L'amortissement tel qu'il est formulé par [III-10], [III-11], [III-12] s'exprime sous la forme :

$$(III-13) \quad C(x, \dot{x}) = 2\omega_0 \varepsilon + \gamma x^{2n} |x|^\alpha |\dot{x}|^\beta \dot{x}^{2m}(t) \quad ; n, m \in \mathbb{N}^2$$

où les coefficients $\alpha, \beta, \varepsilon, \gamma$ doivent vérifier :

$$(III-14) \quad 0 \leq \alpha, \beta \quad 0 \leq \alpha + \beta < 1 \quad 0 < \varepsilon < 1 \quad 0 < \gamma < 1$$

afin de respecter la condition de décroissance de l'énergie totale $E(t)$ du système dissipatif en mouvement. Cette condition s'exprime par :

$$(III-15) \quad \frac{dE}{dt} = -C(x, \dot{x}) \dot{x} < 0$$

où $E(t)$ est la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique du système.

La formulation (III-13) a été proposée pour tenir compte d'une décroissance exponentielle particulière de l'enveloppe des oscillations libres caractéristiques des structures aériennes (voir Figure III-1 extraite de la référence [III-10]).

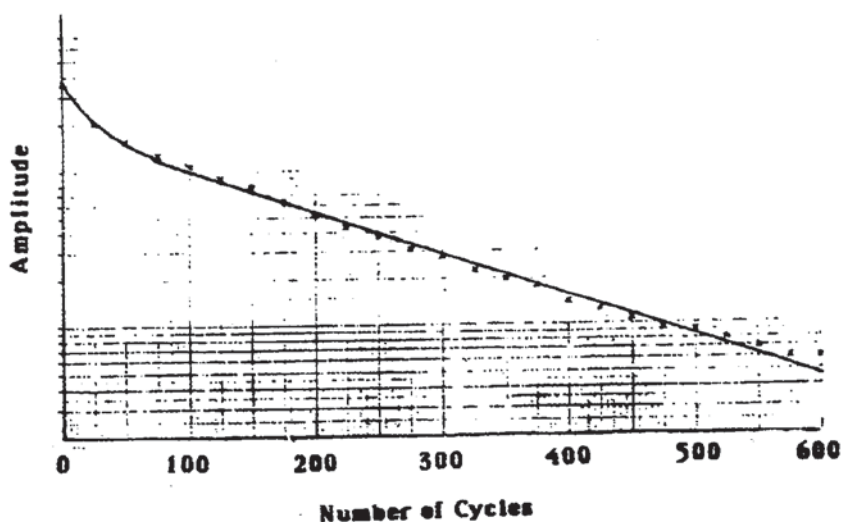


Figure III-1 : Enveloppe des oscillations libres d'une structure aérienne en fonction du nombre de cycles d'oscillations.

En effet, il a été observé expérimentalement que cette décroissance était différente de celle proposée par le modèle linéaire. Donnée ici en fonction de $k = \frac{t\omega_0}{2\pi}$ le nombre de cycles d'oscillation, cette décroissance, pour le système linéaire est représentée par la droite :

$$(III-16) \quad y(k) = -2\pi\epsilon k$$

Le modèle (III-13) permet de formuler cette décroissance de la manière suivante :

$$(III-17) \quad y(k) = -2\pi\epsilon k - \frac{2\pi\lambda A(0)^{\hat{c}}}{\hat{c}(1 - 2\pi k A(0)^{\hat{c}})}$$

avec $\hat{c} = 2m + 2n + \alpha + \beta$; $\lambda = \omega_0^{2n+\beta-1}\gamma\mu$, μ est une constante définie à partir de n, m, α et β et $A(0)$ l'amplitude initiale de lâcher. Cette enveloppe permet de retrouver et de suivre la courbure observée sur la Figure III-1 pour $k < 50$ cycles.

Par la suite, les recherches menées par les auteurs de [III-16] ont permis de généraliser le modèle (III-13) à une famille de modèles exprimés à partir de l'énergie totale E du système, c'est-à-dire que tout système dont le mouvement est modélisé par l'équation :

$$(III-18) \quad \ddot{x}(t) + D(x, \dot{x}) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

peut être approchée par :

$$(III-19) \quad \ddot{x}(t) + \mu(E)\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

où $E = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2)$ et où la fonction $\mu(E)$ minimise :

$$(III-20) \quad \int_0^{2\pi} \left[D \left(\frac{\sqrt{2E}}{\omega_0} \sin \phi; \sqrt{2E} \cos \phi \right) - \mu(E) \sqrt{2E} \cos \phi \right]^2 d\phi$$

et vaut : $\mu(E) = \frac{1}{\pi \sqrt{2E}} \int_0^{2\pi} D \left(\frac{\sqrt{2E}}{\omega_0} \sin \phi; \sqrt{2E} \cos \phi \right) \cos \phi d\phi$ lorsque E est considéré comme constante sur $[0, 2\pi]$.

Cette approche est particulièrement intéressante lorsque $D(x, \dot{x})$ est une fonction paire par rapport à $x(t)$ et impaire par rapport à $\dot{x}(t)$. Dans ce cas, les auteurs de [III-17] montrent que les équations (III-18) et (III-19) ont la même approximation de Krylov-Bogoliubov ($D(x, \dot{x})$ et $\mu(E)$ sont dits K-B équivalents), ce qui permet d'écrire $D(x, \dot{x}) = \mu(E)\dot{x}(t)$. De plus, une méthode permet d'exprimer, dans ce cas, à partir de la connaissance de quelques points expérimentaux (maxima de la courbe des oscillations libres) l'expression $\mu(E)$ et donc celle de $D(x, \dot{x})$. Par contre, le plus souvent il n'est pas évident de faire le lien avec une interprétation physique de la fonction déterminée.

III.2.2.3. Modèles d'amortissement à mémoire

Les modèles à mémoire ont été définis dans le cadre de la modélisation rhéologique des systèmes continus. Ils sont issus du modèle de relaxation qui correspond à la mise en parallèle du modèle de Maxwell et d'un ressort parfait [III-20]. La loi de comportement donnant la déformation $\sigma(t)$ en fonction de la contrainte $\Sigma(t)$ d'un tel système introduit un produit de convolution. On retrouve cette convolution dans l'équation du mouvement intégral-différentielle formulée dans [III-19] par :

$$(III-21) \quad M\ddot{x}(t) + \int_0^t c(\tau)\dot{x}(t-\tau)d\tau + \int_0^t d(\tau)z(t-\tau)d\tau + K(x(t)) = F(t)$$

où $c(\tau)$ est le terme d'amortissement linéaire à mémoire et $d(\tau)$ le terme d'amortissement non-linéaire à mémoire.

$z(t)$ est ici un terme d'amortissement non-linéaire visqueux ($z(t) = \dot{x}(t)|\dot{x}(t)|$) et $F(t)$ le terme de chargement.

L'amortissement formulé comme une convolution dans le domaine temporel implique une dépendance de celui-ci vis-à-vis de la fréquence de l'oscillateur. Cette dépendance est interprétée en terme d'effet retard ou d'effet mémoire dans [III-19].

III.2.3. Modèle non-linéaire de force élastique de rappel

Le modèle non-linéaire de force élastique de rappel le plus répandu dans la littérature est, sans nul doute, le modèle de Duffing qui a suscité de nombreuses études [III-48], [III-49]. Il est employé dans de très nombreuses applications [III-14], [III-15], [III-21] et [III-23] et s'exprime de la manière suivante :

$$(III-22) \quad k(x(t)) = k(1 + \lambda x^2(t))x(t)$$

Lorsque le coefficient λ est négatif, le système est dit "mollissant" car la raideur du système mécanique diminue (la fréquence diminue) lorsque l'amplitude du mouvement croît. Le système est dit "durcissant" lorsque λ est positif, la raideur augmente (la fréquence augmente) lorsque l'amplitude du mouvement croît.

D'autres modèles permettent de traduire le comportement dynamique mollissant de structures. On trouvera notamment dans la référence [III-55] des précisions sur les contacts Hertiens qui génèrent une force de raideur non-linéaire.

Un autre modèle non-linéaire de force de rappel est proposé dans le cadre de l'étude dynamique d'une poutre soumise à l'impact d'une butée élastique [III-24]. La modélisation proposée du comportement de la poutre s'appuie sur la formulation de Hertz qui traduit l'impact de la butée comme une force de rappel qui s'exprime :

$$(III-23) \quad K(x)x(t) = \left(K + K_p x^{1/2} \right) x(t)$$

avec $K_p = \begin{cases} K_p & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ et K la raideur linéaire de la poutre. K_p est une constante déterminée

en fonction de la nature du contact qui n'intervient que lorsque le contact se produit ($x \geq 0$).

A la suite de la présentation de ces différents modèles d'amortissement et de force de rappel, la partie suivante est consacrée aux méthodes d'identification qui permettent de calculer les différents paramètres qui les définissent.

III.3. Méthodes d'identification - Les outils de l'identification

III.3.1. Introduction - Définitions

Si l'on reprend la définition donnée dans le chapitre II, on peut distinguer deux catégories de méthodes d'identification :

- les méthodes d'identification paramétriques où la connaissance d'une forme paramétrée ou analytique de la réponse est un prérequis.

- les méthodes d'identification où la forme de la caractéristique recherchée n'est pas connue, c'est-à-dire que l'on ne maîtrise pas la nature de la, ou des, non-linéarités (géométrique, de dissipation, de force de rappel,...). Ces méthodes permettent de préciser leur origine.

L'objet de cette partie ne concerne que les méthodes définies par le premier point.

Ces méthodes consistent à calculer les valeurs des paramètres introduits dans la réponse théorique (forme paramétrée) que l'on compare avec la réponse mesurée. Ceci est réalisé par la minimisation de l'erreur quadratique résiduelle entre les deux réponses, de manière à obtenir leur superposition. C'est l'étape d'optimisation ("Curve-Fitting").

Si on note $x(t_j)$ une réponse temporelle mesurée, échantillonnée sur p points dans le temps et $\hat{x}(t_j, \vec{\theta})$ la réponse théorique paramétrée par $\hat{\theta}_i$ paramètres à identifier, l'étape d'identification consiste à déterminer les $\hat{\theta}_i$ optimum de tel sorte que l'erreur quadratique $Errq(p, \vec{\theta})$ soit minimum pour les $\hat{\theta}_i$:

$$(III-24) \quad \underset{\vec{\theta}}{\text{Min}} \langle Errq(p, \vec{\theta}) \rangle = \underset{\vec{\theta}}{\text{Min}} \left\langle \sum_{j=1}^p \left(\frac{x(t_j) - \hat{x}(t_j, \vec{\theta})}{\sigma_j} \right)^2 \right\rangle$$

où p est le nombre de points expérimentaux disponibles et σ_j un poids correspondant à une incertitude que l'on peut attribuer à chaque point de la mesure. Cette minimisation est généralement effectuée à partir des algorithmes itératifs de Levenberg-Marquardt ou Gauss-Newton. Ceux-ci seront précisés ultérieurement dans la partie "Problème inverse".

Dans de rares cas linéaires, cette étape peut être simplifiée par le calcul direct sur la courbe expérimentale : méthode de la largeur de pic à mi-hauteur ou méthode du décrement logarithmique.

Dans le cadre de notre étude, le travail s'est surtout focalisé sur l'analyse et la critique des outils permettant d'obtenir une forme paramétrée de la solution de l'équation non-linéaire de la dynamique. Il s'agit des méthodes d'approximations qui permettent, moyennant un certain nombre d'hypothèses, de trouver une solution approchée de l'équation non-linéaire du mouvement. Les non-linéarités considérées sont celles d'amortissement et/ou de force de rappel.

Dans un premier temps, sont présentées très succinctement les principales méthodes d'identification modales qui trouvent leurs applications dans le cadre d'analyse de systèmes linéaires. Quelques unes de ces méthodes temporelles, utilisées dans le Laboratoire, sont détaillées. Ensuite les méthodes d'approximations seront présentées.

III.3.2.Principales méthodes d'identification linéaires

Ces méthodes se regroupent sous le nom d'analyse modale expérimentale. Deux domaines d'applications sont à séparer selon que la réponse est observée dans le domaine temporel (Fonction de Réponse Impulsionnelle (F.R.I.)) ou dans le domaine fréquentiel (Fonction de Réponse en Fréquence (F.R.F.)). Le passage d'un domaine à l'autre est effectué au moyen d'une transformée de Fourier. Ces méthodes sont différentes selon :

- la nature de l'excitation : lâcher, choc, forcée ou aléatoire, mesurable ou non,
- le nombre de degrés de liberté du système : simple ou multiple,
- le nombre de signaux de mesures : 1 capteur ou plusieurs capteurs, permettant la mise en œuvre des méthodes simples références SI/SO (Single Input/Single Output) ou multiréférences MI/MO (Multi Input/Multi Output).

Les méthodes ci-dessous sont citées à titre indicatif pour que le lecteur puisse se référer à la bibliographie correspondante. Elles ne font pas l'objet d'une description détaillée car elles sont toutes adaptées à l'étude de systèmes dont le comportement est linéaire. Nous avons démontré que ce n'était pas le cas pour l'assemblage combustible.

Toutefois, parmi ces méthodes d'identification linéaires, seules les méthodes temporelles, adaptées aux traitements de réponse libre d'une structure, couramment utilisées dans le Laboratoire seront détaillées. En effet, ces méthodes sont le seul moyen que l'on ait d'effectuer des comparaisons avec les résultats de la démarche qui est entreprise. C'est dans ce but qu'elles sont développées. Une seule méthode dérogera à cette règle, il s'agit de la méthode cepstrale qui a fait l'objet d'un intérêt particulier.

- **Principales méthodes temporelles :**
 - méthode de calcul direct : méthode du décrétement logarithmique [III-27],
 - méthode d'accumulation de signaux : méthode du décrétement aléatoire [III-28], [III-29], [III-30],
 - méthodes d'identification basées sur le principe de minimisation de l'erreur quadratique entre un modèle mécanique de F.R.I (ou des fonctions caractéristiques dérivées) et un signal expérimental :
 - méthode ITDM (Ibrahim Time Domaine Method) [III-31],
 - méthode de PRONY [III-32],
 - méthode LSCE (Least Square Complex Exponential) [III-33], [III-34],

- méthode du maximum de vraisemblance [III-35], [III-36],
- Principales méthodes fréquentielles :
 - méthode de calcul direct : méthode de la largeur de pic à mi-hauteur [III-1], [III-2].
 - méthode du "Circle Fit" [III-1], [III-2].
 - méthodes d'identification basées sur le principe de minimisation de l'erreur quadratique entre un modèle mécanique de F.R.F et une F.R.F expérimentale [III-37], [III-38], [III-39],
- Autres méthodes :
 - méthode cepstrale [III-41], [III-45],
 - méthode temps-fréquence [III-42], [III-43], [III-44].

III.3.3. Méthodes d'identification linéaire temporelle

III.3.3.1. Méthode du décrétement logarithmique

L'équation du mouvement d'un système linéaire à un seul degré de liberté, soumis à un lâcher s'écrit :

$$(III-25) \quad \ddot{x}(t) + 2\omega_0 \varepsilon \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

avec les conditions initiales :

$$x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = 0$$

La solution exacte de (III-25) peut se mettre sous la forme :

$$(III-26) \quad x(t) = x_0 e^{-\varepsilon \omega_0 t} \cos\left(\omega_0 \sqrt{1 - \varepsilon^2} t\right)$$

où $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ est la pulsation amortie du système et ω_0 la pulsation propre.

La fréquence apparente est alors :

$$(III-27) \quad f = f_0 \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

avec f_0 la fréquence propre du système.

La méthode du décrétement logarithmique consiste à relever sur la courbe expérimentale deux extrema (positifs ou négatifs) X_i et X_{i+k} , et les temps t_i et t_{i+k} associés. Le décrétement logarithmique δ se calcule alors à l'aide de la relation suivante [III-27], [III-1] :

$$(III-28) \quad \delta = \ln \frac{X_i}{X_{i+k}} = \frac{2\pi k \varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

En supposant que $\varepsilon \ll 1$, l'amortissement réduit s'exprime alors :

$$(III-29) \quad \varepsilon = \frac{1}{2\pi k} \ln \frac{X_i}{X_{i+k}}$$

où k est le nombre de périodes qui séparent les extrema X_{i+k} de X_i .

La fréquence propre peut être déterminée par relevé des instants t_j des passages successifs par zéros. La période propre est alors égale à : $\forall j \quad T_0 = 2(t_{j+1} - t_j)$ et la fréquence propre se calcule alors par la formule suivante :

$$(III-30) \quad \forall j \quad f_0 = \frac{1}{2(t_{j+1} - t_j)}$$

Les formules (III-29) et (III-30) permettent un calcul simple et pratique de l'amortissement et de la fréquence. C'est une des raisons qui fait qu'en première approximation, cette méthode est encore très utilisée dans le monde industriel. Les valeurs de l'amortissement et de la fréquence trouvées peuvent être considérées comme correctes si les calculs (III-29) et (III-30) donnent des valeurs constantes de ε quelque soit k et de f_0 quelque soit j .

Les auteurs de [III-26] ont étendu cette méthode de calcul au cas d'une réponse contenant deux modes. Pour qu'elle soit applicable il faut que des "battements" soient nettement visibles dans le signal. La méthode impose une hypothèse supplémentaire ajoutée à celle d'amortissement petit : les deux modes contenus dans le signal doivent être exactement en phase ou en opposition de phase. C'est très rarement le cas.

III.3.3.2.Méthode IMENE

La méthode IMENE (Identification Modale sous Excitation Non Evaluée) [III-35], [III-36] est une méthode développée par EDF/DER/TTA. Elle a été mise au point dans le but de caractériser les grandeurs modales de structures, considérées comme linéaires, telles que les aérorefrigérants, les générateurs de vapeur et les assemblages de centrales nucléaires. IMENE est une méthode multi-références prévue pour le traitement

des modes doubles (même fréquence, même amortissement, seule la déformée modale est différente) et des modes couplés. De plus, tous les types de chargement peuvent être considérés : excitation imposée mesurée (chocs, excitation harmonique), lâchers avec ou sans impact et excitation aléatoire non mesurée (écoulement fluide, vent, houle, ...etc.). L'identification est basée sur le principe du maximum de vraisemblance.

La méthode repose sur deux hypothèses fondamentales [III-35] :

- le système dynamique étudié admet une représentation modale sur la base du système dissipatif. La matrice d'amortissement est réelle, symétrique, définie positive.
- à partir des mesures réalisées sur le système, le calcul des fonctions caractéristiques $H_{j_0j}(t)$ peut être estimé entre une voie j_0 de référence (point d'excitation ou de mesure selon le type de caractéristique utilisée) et une voie j de réponse. $H_{j_0j}(t)$ peut s'écrire :

$$(III-31) \quad H_{j_0j}(t) = a_{j_0j}(t) + e_{j_0j}(t)$$

où, selon la première hypothèse, $a_{j_0j}(t)$ peut être exprimé comme dans la référence [III-38] :

$$(III-32) \quad a_{j_0j}(t) = \sum_{i=1}^N \left[W_{j_0i} V_{ji} e^{s_i t} + \overline{W_{j_0i} V_{ji}} e^{\bar{s}_i t} \right] \quad 1 \leq i \leq N \quad 1 \leq j \leq N_{bz} \quad 2 \leq j_0 \leq N_{rf}$$

où N_{rf} est le nombre de voies de référence (dans le cas du lâcher un seul point de référence pour une expérience donnée, le point où sont imposées les conditions initiales), N_{bz} le nombre de voies de réponse et N représente le nombre de modes permettant de caractériser le système dans la bande de fréquence étudiée, i étant l'indice du $i^{\text{ème}}$ mode. j_0 représente l'indice de la $j_0^{\text{ème}}$ voie de référence, N l'indice de la $j^{\text{ème}}$ voie de réponse.

$V_{ji} = u_{ji} + Jv_{ji}$ ($J^2 = -1$) est un nombre complexe représentant la valeur de la déformée modale du mode i au point de réponse j et $W_{j_0i} = \alpha_{j_0i} + J\kappa_{j_0i}$ est une grandeur complexe qui dépend de la référence j_0 et du mode i . Dans [III-35] cette grandeur est appelée participation modale. Cette participation modale dépend de $u_{j_0i}, v_{j_0i}, \varepsilon_i, \omega_i$. s_i est la valeur propre du mode i et s'exprime en fonction de la pulsation propre ω_i et du coefficient d'amortissement linéaire modal ε_i sous la forme : $s_i = -\varepsilon_i \omega_i + J\sqrt{1 - \varepsilon_i^2}$.

$e_{j_0j}(t)$ est un bruit aléatoire prenant en compte les bruits de mesure et d'estimation des fonctions $a_{j_0j}(t)$. Il est modélisé comme un bruit blanc Gaussien de moyenne nulle et de variance σ^2 .

A partir des fonctions caractéristiques $H_{j_0j}(n)$ échantillonnées dans le temps avec un pas Δt ($1 < n < N_s$, N_s le nombre d'échantillons temporels) qui sont donc les données d'entrées du logiciel IMENE, une méthode statistique d'estimation du vecteur $r = [\omega_1, \dots, \omega_N, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N, u_1^T, \dots, u_N^T, v_1^T, \dots, v_N^T, \alpha_1^T, \dots, \alpha_N^T, \kappa_1^T, \dots, \kappa_N^T]$ constitué des paramètres modaux globaux, est établie. Pour identifier r à partir de la mesure de h , vecteur des fonctions caractéristiques $H_{j_0j}(n)$, une méthode basée sur la recherche du maximum de la fonction de vraisemblance $l(r)$ est utilisée et fournit une estimée \hat{r} et un écart type σ_r . La "vraie" valeur d'un paramètre se situe alors dans l'intervalle $[\hat{r} - \bar{c}\sigma_r, \hat{r} + \bar{c}\sigma_r]$ où \bar{c} est un facteur de confiance.

La fonction de vraisemblance peut être exprimée comme suit :

$$(III-33) \quad l(r) = Ln(p(h/r)) = -\frac{\tilde{M}}{2} Ln(2\pi\sigma^2) - \frac{S(r)}{2\sigma^2}$$

où $p(h/r)$ représente la densité de probabilité conditionnelle de h connaissant r , $\tilde{M} = N_f \cdot N_{bz} \cdot N_s$ le nombre de composantes du vecteur r et $S(r) = e_{j_0j}^T e_{j_0j}$ avec $e_{j_0j}(n) = H_{j_0j}(n) - a_{j_0j}(n; r)$

$$\text{et } a_{j_0j}(n; r) = 2 \sum_{i=1}^N e^{-\varepsilon_i \omega_i (n-1) \Delta t} \left[A_{j_0i} \cos(\omega_i \sqrt{1 - \varepsilon_i^2} (n-1) \Delta t) - B_{j_0i} \sin(\omega_i \sqrt{1 - \varepsilon_i^2} (n-1) \Delta t) \right]$$

$$A_{j_0i} = u_{ji} \alpha_{j_0i} - v_{ji} \kappa_{j_0i}$$

$$B_{j_0i} = u_{ji} \kappa_{j_0i} + v_{ji} \alpha_{j_0i}$$

D'après (III-33) l'identification revient à minimiser l'erreur quadratique globale de la fonction $S(r)$. Cette tâche est réalisée par un processus itératif d'optimisation non-linéaire à l'aide d'un algorithme de type "Newton modifié" qui a été développé. Pour amorcer ce processus, un jeu de valeurs initiales est nécessaire. Cette initialisation est obtenue à l'aide d'une méthode de Prony étendue [III-35] qui permet d'obtenir une estimation des fréquences propres, amortissements modaux et participations modales. Cette étape établit aussi un certain nombre de critères qui permettent d'estimer le nombre de modes N optimum à prendre en compte.

A la suite de cette optimisation, les fonctions caractéristiques sont synthétisées et comparées graphiquement aux fonctions caractéristiques d'entrées. Cela permet notamment de vérifier si un (voire plusieurs) mode(s) n'a(ont) pas été oublié(s).

Cette méthode est très intéressante car très complète. Elle semble très performante par rapport aux autres méthodes notamment pour le traitement des modes couplés, des modes doubles et des réponses obtenues à la suite d'une excitation aléatoire. L'approche

multiréférences et les critères de détermination du nombre de modes optimal à prendre en compte améliore la précision de l'identification mais suppose d'avoir acquis plusieurs mesures simultanément. L'approche statistique permet une meilleure confiance dans les résultats et donc une meilleure analyse.

III.3.3.3. Méthode cepstrale

Le cepstre est un outil de déconvolution utilisé dans de nombreuses applications en traitement du signal : sonar, radar, détection d'échos..... [III-40]. Les propriétés du cepstre ont été utilisées dans [III-41] pour isoler la F.R.F. d'un système et permettre l'identification de ses pôles et ses zéros tout en limitant l'influence du bruit et de l'excitation. C'est le principal avantage de cette approche. Ces pôles et zéros sont directement reliés à la fréquence et à l'amortissement du système. Cette méthode est présentée ici car elle a suscité un intérêt particulier, mais sa transposition à l'étude des systèmes non-linéaires n'a pu aboutir. En effet, il n'a pas été possible d'extraire une solution analytique dans le cas où une non-linéarité d'amortissement est introduite dans l'équation du mouvement à cause des difficultés mathématiques liées aux transformations nécessaires pour le calcul du cepstre.

Les applications de la méthode proposée par [III-41] se limitent aux systèmes linéaires à phase minimum (pôles et zéros contenus dans le cercle unitaire du plan complexe) soumis à des excitations de type lâcher ou choc.

Le cepstre complexe $Cep(t)$, est défini comme la transformée de Fourier inverse du logarithme complexe du spectre complexe $S(z)$ de la réponse d'un système [III-47] :

$$(III-34) \quad Cep(t) = TF^{-1}[\text{Log}(S(z))]$$

où TF^{-1} désigne la transformée de Fourier inverse.

Si (III-34) est appliquée à un signal de réponse $x(t)$, défini comme le produit de convolution de la réponse impulsionnelle $h(t)$ avec une force d'excitation $f(t)$, le cepstre de $x(t)$ s'obtient par la démarche suivante :

$$(III-35) \quad x(t) = h(t) * f(t) \xrightarrow{TF(.)} X(z) = H(z) \cdot F(z) \xrightarrow{\text{Log}(.)} \hat{X}(z) = \hat{H}(z) + \hat{F}(z) \xrightarrow{TF^{-1}(.)} \hat{x}(t) = \hat{h}(t) + \hat{f}(t) = Cep(t)$$

Cette transformation est intéressante car non seulement elle permet de passer d'une convolution dans le domaine temporel à une somme dans le domaine des "quéfrences" (nom donné aux échantillons du domaine cepstral) [III-47], mais en plus, le cepstre de la réponse impulsionnelle et celui des forces sont séparés. Un "lifrage" (filtrage dans le

domaine cepstral) adapté permet d'isoler le cepstre de la réponse impulsionnelle du système.

Dans le plan complexe, la réponse impulsionnelle échantillonnée d'un système linéaire peut se mettre sous la forme d'une somme d'exponentielles complexes :

$$(III-36) \quad h(n) = \sum_{k=1}^{2N} A_k e^{s_k n \Delta t} = \sum_{k=1}^{2N} A_k z^n$$

où les A_k sont des constantes.

La transformée en Z de (III-36) peut se factoriser en une fonction polynomiale rationnelle définie à partir de ses pôles et de ses zéros [III-47] :

$$(III-37) \quad H(z) = \frac{B \prod_{k=1}^{m_i} (1 - a_k Z^{-1}) \prod_{k=1}^{m_o} (1 - b_k Z)}{\prod_{k=1}^{p_i} (1 - c_k Z^{-1}) \prod_{k=1}^{p_o} (1 - d_k Z)} \quad |a_k|, |b_k|, |c_k|, |d_k| < 1$$

où a_k et c_k sont respectivement les pôles et les zéros à l'intérieur du cercle unité, et b_k et d_k sont respectivement les pôles et les zéros à l'extérieur du cercle unité.

B est une constante représentative du déphasage entre (III-36) et (III-37). Il y a m_i zéros et p_i pôles à l'intérieur du cercle unité et, m_o zéros et p_o pôles à l'extérieur du cercle unité.

A partir de la formulation (III-37) le calcul du cepstre réel, pour un système à phase minimum, donne :

$$(III-38) \quad \begin{cases} Cep(n) = 2 \sum_{k=1}^{p_i/2} \frac{A_{ck}^n}{n} \cos(n\omega_{ck}) - \sum_{k=1}^{m_i/2} \frac{A_{ak}^n}{n} \cos(n\omega_{ak}) & \text{pour } n > 0 \\ Cep(n) = \ln|B| & \text{pour } n = 0 \end{cases}$$

où A_{ck} et A_{ak} représentent l'amortissement associé aux pôles et aux zéros et ω_{ck} , ω_{ak} les pulsations.

A l'aide d'une optimisation non-linéaire au sens de la minimisation de l'erreur quadratique, une identification des paramètres A_{ck} , A_{ak} , ω_{ck} et ω_{ak} est effectuée entre le cepstre analytique (III-38) et le cepstre de la réponse impulsionnelle obtenu par la démarche (III-35).

Cette méthode d'identification a fait ses preuves sur un système simple tel que celui constitué d'une poutre libre-libre maintenue par deux ressorts souples et excitée par un

choc simple impact ou un choc double impact [III-45]. Il s'avère que les résultats sont bons lorsque l'auto-spectre est relativement plat et/ou que le système est excité par une force périodique. Ces conditions rendent favorables la séparation du cepstre de l'excitation de celui de la réponse impulsionnelle du système et concentrent le premier dans les faibles "quéfrences". Les résultats obtenus par cette approche sont concluants en ce qui concerne la détermination de l'amortissement et de la fréquence. A ce titre une comparaison est faite dans [III-46] entre la méthode d'identification ITDM (Ibrahim Time Domain Method) et la méthode cepstrale et montre une bonne correspondance des valeurs obtenues.

III.3.4.Méthodes d'identification paramétriques non-linéaires

Les méthodes d'identification paramétriques de systèmes non-linéaires sont basées principalement sur la recherche d'une solution approchée de l'équation différentielle du mouvement donnée par l'équation (III-1) où $C(x, \dot{x})$ et $K(x)$ sont non-linéaires et sur un calage des paramètres de la solution calculée par une méthode des moindres carrés. Cette partie est consacrée à la première phase de l'identification, c'est-à-dire à la présentation de quelques unes des méthodes permettant le calcul d'une solution approchée de l'équation du mouvement. Deux de ces méthodes seront détaillées. Il s'agit de la méthode de Krilov-Bogoliubov "*Method of Averaging*" et de la méthode "*KBM*" (Krilov-Bogoliubov-Mitropolsky). Une autre possibilité consiste à rechercher une expression de l'énergie du système. Deux méthodes énergétiques proposées par les auteurs de [III-14], [III-15], [III-21] seront présentées.

III.3.4.1. Méthode "Averaging"

La méthode "*Averaging*" permet le calcul de la solution approchée $x(t)$ d'une équation différentielle non-linéaire du mouvement. Des non-linéarités de force de rappel et/ou de dissipation peuvent être présent en compte. Selon l'importance de celles-ci, deux formes de solution sont adoptées. La méthode "*Averaging*" repose essentiellement sur l'application du Principe de la moyenne appliqué aux équations différentielle de l'enveloppe $A(t)$ et $\varphi(t)$, qui sont les nouvelles inconnues du problème introduites par le changement de variables de Van Der Pol.

Avant de présenter les développements de la méthode, nous présentons les conditions fondamentales d'application de celle-ci qui garantissent la validité de la solution calculée. Ces conditions sont exprimées par le Premier Théorème de Bogoliubov [III-52] qui énonce :

si l'équation différentielle vérifiée par une fonction $y(t)$, dont on cherche une approximation, peut se mettre sous la forme :

$$(III-39) \quad \frac{dy}{dt} = \epsilon Y(y, t) \quad \epsilon \ll 1 ; \epsilon > 0$$

où $y(t)$ est lentement variable par rapport à t , alors la différence entre la solution exacte $y(t)$ et la solution moyennisée $\bar{y}(t)$, devient arbitrairement petite sur un intervalle arbitrairement grand mais fini, pour une valeur suffisamment petite du paramètre ϵ . C'est-à-dire que pour tout $\eta > 0$, il existe un $\mu = \mu(\eta)$ et un L , tels que :

$$(III-40) \quad \|y(t, \mu) - \bar{y}(t, \mu)\| < \eta \quad \text{dans l'intervalle } 0 < t < \frac{L}{\mu}$$

dans lequel $y(t)$ est la solution exacte de l'équation coïncidant avec $\bar{y}(t)$ à $t=0$: $y(0, \mu) = \bar{y}(0, \mu)$. Dès lors, le système (III-39) peut être remplacé par :

$$(III-41) \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = \epsilon Y_0(\bar{y}) \quad \text{où } Y_0(\bar{y}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T Y(y, t) dt$$

Nous précisons maintenant les développements de la méthode. Pour cela on distingue deux cas correspondant à deux types possibles de non-linéarité de force de rappel : non-linéarité "faible" ou non. La non-linéarité d'amortissement est toujours considérée comme "faible" : $\epsilon C(x, \dot{x})$.

Dans le premier cas ("faible"), l'équation du mouvement est exprimée sous la forme :

Cas ① :

$$(III-42) \quad \ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \epsilon C(x, \dot{x}) \dot{x}(t) + \epsilon K(x) x(t) = \epsilon f(x, \dot{x})$$

Dans un second cas, lorsque la non-linéarité de force de rappel n'est pas "faible", l'équation du mouvement s'exprime :

Cas ② :

$$(III-43) \quad \ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \epsilon C(\dot{x}, x) \dot{x} + \lambda K(x) x(t)$$

où $\epsilon \ll 1$ et λ une constante de l'ordre de 1 ou supérieur à 1.

Les modèles d'amortissement $C(x, \dot{x})$ et de force de rappel $K(x)x(t)$ étant connus, une solution de ces équations (III-42) et (III-43) est fournie par (x, \dot{x}) . Pour accéder à cette solution, on effectue un changement de variables de Van Der Pol : $(x, \dot{x}) \rightarrow (A, \varphi)$, $A(t)$

l'enveloppe du déplacement et $\varphi(t)$ la phase, deviennent les nouvelles inconnues du problème :

Cas ① :

$$(III-44) \quad \begin{cases} x(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) \\ \dot{x}(t) = -A(t)\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi(t)) \end{cases}$$

On posera $\Phi = \omega_0 t + \varphi(t)$. Dans (III-44) les termes $\dot{A} \cos \Phi$ et $-A\dot{\varphi} \sin \Phi$ de l'expression de $\dot{x}(t)$ sont négligés car sont supposés à variations lentes par rapport à t .

Cas ② :

$$(III-45) \quad \begin{cases} x(t) = A(t) \cos(\theta(t) + \varphi(t)) \\ \dot{x}(t) = -A(t)\Omega(A) \sin(\theta(t) + \varphi(t)) \end{cases}$$

où $\dot{\theta}(t) = \Omega(A)$ représente un terme de fréquence dépendant de l'enveloppe instantanée. La fonction $A \rightarrow \Omega(A)$ est une fonction à choisir dont l'expression sera précisée plus loin. On posera aussi dans le cas ② : $\Phi = \theta + \varphi(t)$. Pour des raisons similaires à celles déjà évoquées, les termes $\dot{A} \cos \Phi$ et $-A\dot{\varphi} \sin \Phi$ sont négligés dans l'expression de $\dot{x}(t)$ dans (III-45).

Dans chacun des cas ① et ②, deux équations indépendantes sont nécessaires pour les calculs de $A(t)$ et $\varphi(t)$. Une première équation est obtenue en dérivant l'expression de $x(t)$ dans (III-44) (resp. (III-45)) par rapport au temps et en égalant à $\dot{x}(t)$. On obtient dans les cas ① et ②, l'équation :

$$(III-46) \quad \dot{A}(t) \cos \Phi - A(t)\dot{\varphi}(t) \sin \Phi = 0$$

Dans le cas ①, une deuxième équation est obtenue en remplaçant respectivement $\ddot{x}(t)$ (dérivation de $\dot{x}(t)$ de (III-44)) par rapport au temps, $\dot{x}(t)$ et $x(t)$ (équation (III-44)) dans l'équation du mouvement (III-42), ce qui donne :

$$(III-47) \quad \dot{A}(t)\omega_0 \sin \Phi + A(t)\omega_0\dot{\varphi}(t) \cos \Phi = \epsilon f(A(t) \cos \Phi, -A(t)\omega_0 \sin \Phi)$$

La résolution du système d'équations formées par (III-46) et (III-47) fournit alors les équations différentielles pour $\dot{A}(t)$ et $\dot{\varphi}(t)$ suivantes :

$$(III-48) \quad \begin{cases} \dot{A}(t) = \frac{-\epsilon}{\omega_0} f(A \cos \Phi, -A\omega_0 \sin \Phi) \sin \Phi \\ \dot{\varphi}(t) = \frac{-\epsilon}{\omega_0 A} f(A \cos \Phi, -A\omega_0 \sin \Phi) \cos \Phi \end{cases}$$

Dans le cas ② [III-54], une deuxième équation est obtenue en développant les non-linéarités d'amortissement et de force de rappel en séries de Fourier. Lorsque $K(x)x(t)$ est impaire, ce développement est de la forme :

$$(III-49) \quad \begin{cases} K(x)x(t) = K_1(A) \cos \Phi + \sum_{n \geq 2} K_n(A) \cos n\Phi \\ \in C(x, \dot{x})\dot{x}(t) = \in C_1(A, \Omega) \sin \Phi + \in \sum_{n \geq 2} C_n(A, \Omega) \sin n\Phi \end{cases}$$

où les K_n et les C_n ($n=1, 2, \dots$) sont les coefficients de Fourier des fonctions $K(x)x(t)$ et $C(x, \dot{x})\dot{x}(t)$.

En procédant aux remplacements comme dans le cas ①, on obtient l'équation suivante :

$$(III-50) \quad \begin{aligned} \dot{A}(\Omega + A\Omega') \sin \Phi + A\Omega \dot{\varphi} \cos \Phi &= (\omega_0^2 - \Omega^2) A \cos \Phi + \in C_1(A, \Omega) \sin \Phi + \lambda K_1(A) \cos \Phi \\ &+ \in \sum_{n \geq 2} C_n(A, \Omega) \sin n\Phi + \lambda \sum_{n \geq 2} K_n(A) \cos n\Phi \end{aligned}$$

$$\text{où } \Omega' = \frac{d\Omega}{dA}$$

L'équation (III-50) permet de choisir $\Omega(A)$ tel que :

$$(III-51) \quad \Omega^2(A) = \omega_0^2 - \lambda \frac{K_1(A)}{A}$$

Ce qui revient à ne conserver que des termes à variations rapides ou des termes petits de (III-50). Il faut s'assurer, dans (III-51), que $\omega_0^2 - \lambda \frac{K_1(A)}{A}$ est bien positif. Une condition suffisante est que la non-linéarité de force de rappel soit non-décroissante, monotone et continûment différentiable sur \mathbf{R} (cette hypothèse peut aussi porter sur la raideur globale : $\omega_0^2 x + \lambda K(x)x$). Cette condition permet de vérifier que $\forall A$, $\frac{|K_n(A)|}{A} \leq \frac{K_1(A)}{A}$. Dans [III-54], il est démontré que cette propriété entraîne la relation suivante :

$$(III-52) \quad \left| \frac{\lambda}{A\Omega^2} \cos \Phi \sum_{n \geq 2} K_n(A) \cos n\Phi \right| \leq \in 1$$

La résolution du système des équations (III-46) et (III-50), tenant compte de (III-51) et de (III-52), permet d'exprimer les équations pour $\dot{A}(t)$ et $\dot{\varphi}(t)$ sous la forme :

$$(III-53) \left\{ \begin{array}{l} \dot{A} = \frac{\epsilon C_1(A, \Omega)}{H\Omega} \sin^2 \Phi + \underbrace{\frac{\epsilon \sum_{n \geq 2} K_n(A) \cos n\Phi + \epsilon \sum_{n \geq 2} C_n(A, \Omega) \sin n\Phi}{H\Omega}}_{\chi_1} \sin \Phi \\ \dot{\phi} = \frac{\epsilon C_1(A, \Omega)}{HA\Omega} \sin \Phi \cos \Phi + \underbrace{\frac{\epsilon \sum_{n \geq 2} K_n(A) \cos n\Phi + \epsilon \sum_{n \geq 2} C_n(A, \Omega) \sin n\Phi}{HA\Omega}}_{\chi_2} \cos \Phi \end{array} \right.$$

Avec $H(A, \Phi) = 1 + \frac{A\Omega'}{\Omega} \sin^2 \Phi$ et $AH\Omega \neq 0 \quad \forall A > 0$.

Principe de la moyenne (de l'"*Averaging*"): Application du Premier Théorème de Bogoliubov.

Ce principe est expliqué ici dans le cas bien spécifique des équations dérivées obtenues dans (III-48) et (III-53). Pour plus d'explications le lecteur peut se reporter aux références [III-53], [III-54] et pour les applications directes de la méthode Krylov-Bogoliubov: [III-10], [III-11], [III-12], [III-15], [III-16], [III-17], [III-18], [III-48], [III-49].

Ce principe énonce que dans un mouvement sinusoïdal amorti où les variations de l'enveloppe $A(t)$ et de la phase $\phi(t)$ sont petites devant les termes oscillants $\cos \Phi$ et $\sin \Phi$, alors les variations $\dot{A}(t)$ et $\dot{\phi}(t)$ sont constantes sur une période d'oscillation et considérées égales à leur valeur moyenne respective.

Dans le cas ①, ce principe est appliqué aux équations (III-48). $\dot{A}(t)$ et $\dot{\phi}(t)$ sont alors approchés par :

$$(III-54) \left\{ \begin{array}{l} \dot{A}(t) = \frac{-\epsilon}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} f(A \cos \Phi, -A\omega_0 \sin \Phi) \sin \Phi d\Phi \\ \dot{\phi}(t) = \frac{-\epsilon}{2\pi\omega_0 A} \int_0^{2\pi} f(A \cos \Phi, -A\omega_0 \sin \Phi) \cos \Phi d\Phi \end{array} \right.$$

Lorsque l'intégration des équations (III-54) est possible, les approximations de l'enveloppe $A(t)$ et de la phase $\phi(t)$ sont obtenues et donnent la solution en déplacement de l'équation non-linéaire de la dynamique définie par (III-42).

Dans le cas ②, le principe de la moyenne est appliqué aux équations (III-53) où $H(A, \Phi)$ est simplifié par son approximation :

$$(III-55) \quad \tilde{H} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(A, \Phi) d\Phi = 1 + \frac{A\Omega'}{2\Omega}$$

Les termes moyennés obtenus à partir des expressions de χ_1 et de χ_2 sont, par moyenne, nuls, du fait de l'hypothèse de parité effectuée sur la non-linéarité de force de rappel et sur la non-linéarité d'amortissement qui est "petite". Les équations (III-53) sont alors simplifiées et les expressions de l'enveloppe et de la phase sont finalement obtenues par l'intégration de :

$$(III-56) \quad \begin{cases} \dot{A} = \frac{\in C_1(A, \Omega)}{2\tilde{H}\Omega} \\ \dot{\phi} = 0 \end{cases}$$

Le terme $\theta(t)$ est déterminé à la suite de l'intégration de $\Omega(A)$, puisque $\dot{\theta}(t) = \Omega(A)$:

$$(III-57) \quad \theta(t) = \int_0^t \Omega(A(s)) ds$$

La solution formulée par l'expression $x(t)$ de (III-44) est alors complètement définie.

Cette méthode basée sur le principe de la moyenne amène plusieurs remarques :

concernant le cas ① :

- les développements sont relativement simples et la solution constitue généralement une bonne approximation dans les cas où effectivement la fréquence est constante.
- des difficultés peuvent contraindre à une résolution numérique des équations différentielle de (III-54). La méthode perd un peu de son intérêt s'il faut avoir recours à ce genre de résolution.
- la plupart des modèles d'amortissement non-linéaires rencontrés, ceux-ci impliquent une modification de l'enveloppe et non de la phase.
- une non-linéarité de raideur introduit une variation de la phase seulement.

concernant le cas ② :

- les développements et les hypothèses sont plus lourds que dans le cas ①. L'avantage est que l'on peut tenir compte de manière conjointe d'une évolution de la fréquence et de phase fonctions de l'enveloppe,
- les hypothèses imposées à la non-linéarité de force de rappel pour obtenir la validité de l'équation $x(t)$ de (III-45) peuvent être vérifiées à posteriori. Si celles-ci sont partiellement vérifiées, cela limite le domaine de validité de la solution.

- les formulations analytiques de l'enveloppe et du terme de fréquence $\theta(t)$ sont délicates à obtenir analytiquement. Dans de nombreux cas, il faut avoir recours comme dans ① à une résolution numérique ou faire une nouvelle approximation.

Une autre méthode d'approximation permet d'obtenir une solution en déplacement de l'équation du mouvement formulée comme (III-42) dans le cas de non-linéarités "petites". Il s'agit de la méthode "KBM".

III.3.4.2. Méthode de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky (Méthode "KBM")

Cette méthode [III-51] n'est pas basée sur le principe de la moyenne, comme la méthode de Krylov-Bogoliubov, et ne s'applique que dans les cas de "petites" non-linéarités. Dans ce cadre, l'équation du mouvement est régie par l'équation (III-42).

La solution de cette équation est maintenant approchée sous la forme suivante:

$$(III-58) \quad x(t) = A(t) \cos \Phi + \epsilon x_1(A, \Phi) + \epsilon^2 x_2(A, \Phi) + \dots$$

Les termes $\epsilon^i x_i(A, \Phi)$ sont des fonctions 2π -périodiques par rapport à Φ définies comme de petites perturbations du terme $A \cos \Phi$. A et Φ sont des fonctions du temps et peuvent être déterminées par les équations approchées :

$$(III-59) \quad \begin{cases} \dot{A}(t) = \epsilon A_1(A) + \epsilon^2 A_2(A) + \dots \\ \dot{\Phi}(t) = \omega_0 + \epsilon \omega_1(A) + \epsilon^2 \omega_2(A) + \dots \end{cases}$$

où les A_i et les ω_i sont des fonctions de l'enveloppe A , et sont à déterminer.

Les développements suivants sont utilisés :

$$(III-60) \quad \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial A} \dot{A} + \frac{\partial x}{\partial \Phi} \dot{\Phi} = -A \omega_0 \sin \Phi + \epsilon (A_1 A \cos \Phi - \omega_1 A \sin \Phi) + \omega_0 \frac{\partial x_1}{\partial \Phi} + \epsilon^2 (\dots) + \dots$$

et,

$$(III-61) \quad \begin{cases} \ddot{x} = \frac{\partial^2 x}{\partial A^2} \dot{A}^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial A \partial \Phi} \dot{A} \dot{\Phi} + \frac{\partial^2 x}{\partial \Phi^2} \dot{\Phi}^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial A} \frac{\partial \dot{A}}{\partial A} + \frac{\partial x}{\partial \Phi} \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial A} \right) \dot{A} \\ \ddot{x} = -\omega_0^2 A \cos \Phi + \epsilon \left(-2\omega_0 A_1 \sin \Phi - 2\omega_0 \omega_1 A \cos \Phi + \omega_0^2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \Phi^2} \right) + \epsilon^2 (\dots) + \dots \end{cases}$$

On introduit les notations suivantes, correspondant aux expressions du déplacement et de la vitesse à l'ordre 1 :

$$(III-62) \quad x_0 = A \cos \Phi \quad \dot{x}_0 = A \omega_0 \sin \Phi$$

La non-linéarité $f(x, \dot{x})$ est développée en puissance de ϵ , utilisant (III-58) et (III-60) :

(III-63)

$$f(x, \dot{x}) = f(x^0, \dot{x}^0) + \epsilon \left(x_1 \frac{\partial f(x^0, \dot{x}^0)}{\partial x} + \left(A_1 \cos \Phi - \omega_1 A \sin \Phi + \omega_0 \frac{\partial x_1}{\partial \Phi} \right) \frac{\partial f(x^0, \dot{x}^0)}{\partial \dot{x}} \right) + \epsilon^2 (\dots) + \dots$$

La solution (III-58) est calculée de manière récursive par résolution des équations aux dérivées partielles obtenues en introduisant (III-58), (III-61) et (III-63) dans l'équation du mouvement (III-42) et en égalant les quantités de même puissance de ϵ . On obtient les équations suivantes :

à l'ordre 1 :

(III-64)
$$\omega_0^2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial^2 \Phi} + \omega_0^2 x_1 = f(x^0, \dot{x}^0) + 2\omega_0 A_1 \sin \Phi + 2\omega_0 \omega_1 A \cos \Phi$$

à l'ordre 2 :

(III-65)
$$\left. \begin{aligned} \omega_0^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial^2 \Phi} + \omega_0^2 x_2 &= x_1 \frac{\partial f(x^0, \dot{x}^0)}{\partial x} + \left(A_1 \cos \Phi - \omega_1 A \sin \Phi + \omega_0 \frac{\partial x_1}{\partial \Phi} \right) \frac{\partial f(x^0, \dot{x}^0)}{\partial \dot{x}} \\ &+ \left(2(\omega_0 A_2 + \omega_1 A_1) + A_1 A \frac{d\omega_1}{dA} \right) \sin \Phi + \left((\omega_1^2 + 2\omega_0 \omega_2) A - A_1 \frac{dA_1}{dA} \right) \cos \Phi \\ &- 2\omega_0 A_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial A \partial \Phi} - 2\omega_0 \omega_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial^2 \Phi} \end{aligned} \right\}$$

À l'ordre 1, il peut arriver que la solution de l'équation (III-64) ne permette pas de vérifier la condition de conservation de l'énergie totale. Ceci est dû à la présence de termes dits séculaires qui font diverger la solution lorsque t tend vers l'infini. Pour que cette condition sur l'énergie soit respectée, ces termes séculaires sont à éliminer. Cela revient à imposer des coefficients nuls aux termes $\cos \Phi$ et $\sin \Phi$. L'élimination de ces termes fournit les équations nécessaires pour exprimer A_1 , ω_1 et la solution bornée $x_1(A, \Phi)$. Ces résultats sont alors utilisés pour résoudre le problème à l'ordre 2 où les mêmes précautions sont prises.

Comme cela été spécifié en introduction de ce paragraphe, cette méthode ne donne de bons résultats que lorsque les non-linéarités sont "faibles". D'une part, les développements mathématiques liés à la méthode "KBM" donnent des solutions qui sont, de manière générale, moins "maniabiles" que celles obtenues avec la méthode "Avearging" pour leur utilisation dans une phase d'optimisation par exemple. La solution devient quasiment inexploitable lorsque l'un des modèles de non-linéarité est dérivable par morceaux ($|x(t)|$ par exemple). Un exemple est donné lors de l'application de cette méthode dans le chapitre suivant. D'autre part, il n'est pas simple de maîtriser le gain en

terme de précision apporté par la prise en compte d'un terme supplémentaire d'ordre ϵ^{i+1} dans la solution.

III.3.4.3. Méthodes énergétiques

La première des deux méthodes énergétiques présentées aborde l'identification paramétrique à partir d'une détermination expérimentale et analytique de l'énergie $E(t)$ du système non-linéaire [III-14], [III-15], [III-21] :

$$(III-66) \quad E(t) = \frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) \quad U(x) = \int_0^x [\omega_0^2 \xi + K(\xi)\xi] d\xi$$

où $U(x)$ représente le terme d'énergie potentielle et $K(\xi)\xi$ la non-linéarité de force de rappel.

Une relation entre le modèle d'amortissement et la fonction de "perte d'énergie", définie dans [III-14], est obtenue en multipliant l'équation du mouvement (III-42) par $\dot{x}(t)$ et en dérivant (III-66) par rapport au temps. On obtient l'équation d'énergie suivante :

$$(III-67) \quad \frac{dE}{dt} = -C(x, \dot{x})\dot{x} = -L(E)$$

où $L(E)$ est la fonction de perte d'énergie.

Si $T(E)$ est la pseudo période du mouvement amorti dépendant de l'énergie E , l'équation (III-67) peut être approchée par sa valeur moyenne sur un cycle :

$$(III-68) \quad L(E) = \frac{1}{T(E)} \int_0^{T(E)} C(x, \dot{x})\dot{x} dt$$

L'identification est alors menée à partir du calcul de la fonction de perte d'énergie adimensionnelle $Q(E)$:

$$(III-69) \quad Q(E) = \frac{L(E)}{2\omega_0 E}$$

D'un point de vue pratique, la première étape de cette démarche est la détermination analytique de la fonction $L(E)$ pour un modèle d'amortissement donné. Les applications trouvées dans la littérature sont limitées aux modèles de la forme $C(x, \dot{x}) = C(\dot{x})$. Les premières de ces applications n'utilisaient que l'information donnée par l'enveloppe de la réponse obtenue par interpolation des maxima de la courbe des oscillations libres [III-15], [III-13]. L'avantage majeur de cette méthode est qu'elle permet de tenir compte de la non-linéarité de force de rappel sans connaître précisément sa forme.

L'inconvénient réside dans le fait qu'il faille interpoler $Q(E)$. En effet, pratiquement $Q(E)$ n'est déterminé qu'aux extrémités où $\dot{x} = 0$, ce qui fournit un nombre insuffisant de points. Une condition pour que $Q(E)$ soit déterminé correctement est que le signal soit peu bruité.

L'étude effectuée par les auteurs de [III-21] propose une approche similaire mais plus performante car l'identification est menée sur l'ensemble des points du signal. Cette technique offre la possibilité, parfois très précieuse, de mener l'identification sur des mesures de courte durée contrairement à la première approche.

Cette deuxième méthode reprend la formulation où l'expression de la non-linéarité de raideur doit être connue. L'expression (III-67) constitue la forme analytique de l'énergie. Elle est discrétisée dans le temps par :

$$(\text{III-70}) \quad E(t_i) - E(t_{i+1}) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} C(x, \dot{x}) \dot{x} dt = \sum_{j=1}^n B_j C_{ij}$$

avec n le nombre de paramètres à identifier caractéristiques du modèle non-linéaire d'amortissement, B_j les inconnues contenant les paramètres. Les C_{ij} ($j=1..n$) sont les différents termes $|x(t)|^k \dot{x}(t)$, $|\dot{x}(t)|^k \dot{x}(t)$ du modèle d'amortissement $C(x, \dot{x})\dot{x}$, intégrés entre t_i et t_{i+1} . $k = 0, 1, 2, \dots$ selon la définition du modèle d'amortissement.

Utilisant (III-66) on obtient une détermination expérimentale de $E(t)$ à l'aide de $\dot{x}(t)$, dérivée de $x(t)$, et de $x(t)$ où $x(t)$ est mesuré. $E(t)$ est un signal complet par rapport au signal enveloppe utilisé dans la méthode précédente. A l'aide d'une méthode des moindres carrés, on identifie les paramètres du modèle d'amortissement en utilisant (III-70).

Il existe encore de nombreuses méthodes d'identification telles que celles basées sur les polynômes de Hermite qui permettent aussi l'identification de l'excitation, d'autres méthodes basées sur les différences finies, les ondelettes, les transformées de Hilbert, mais elles ne sont pas évoquées dans ce rapport.

III.4. Conclusion

Cette analyse bibliographique a permis de faire l'état des différents modèles d'amortissement et de force de rappel linéaires utilisés dans l'étude du comportement vibratoire des assemblages R.E.P. On retiendra que ces modèles sont intéressants car ils permettent une approche multi-modale du comportement de l'assemblage prenant en compte la dépendance de la vitesse d'écoulement du fluide. Les modèles établis permettent une détermination de la valeur de l'amortissement réduit et de la fréquence à partir de données caractéristiques de la géométrie de l'assemblage.

Concernant les modèles d'amortissement non-linéaires de la littérature, deux types de modèles se dégagent :

- ceux qui dépendent du déplacement instantané du système permettent de tenir compte de déformations et de frottements supplémentaires au sein de la structure,
- ceux qui dépendent de la vitesse instantanée de la structure permettent de tenir compte des effets dissipatifs accrus liés à l'interaction avec un fluide.

Les méthodes d'identification paramétriques et plus particulièrement les méthodes d'approximation ont été détaillées. Ces méthodes permettent le calcul de solutions analytiques approchées et définies par les paramètres des modèles d'amortissement et de force de rappel sélectionnés. Deux types de méthodes ont pu être présentées : les méthodes fournissant une solution du déplacement du système et celles permettant le calcul de l'énergie totale du système. En cohérence avec les mesures qui ont été effectuées, la première catégorie de méthodes a été choisie pour les premières investigations. Le résultat de l'application de ces méthodes est présenté dans la suite de ce mémoire.

III.5. Références bibliographiques

[III-1] GIBERT R.J.

Vibrations des structures - Interaction avec les fluides - Sources d'excitation aléatoires.
Paris : Eyrolles. 1988, 677 p.

[III-2] EWINS D.J.

Modal testing : theory and practice.
Taunton : Research Studies Press LTD. 1995, 313 p.

[III-3] FARDEAU P.

"Mesure de l'amortissement sous écoulement. Analyse de l'ensemble des essais MALDIVE".
Note Technique DEC/SECA/LHC 94/57.

[III-4] FLAMAND J.C.

"Amortissement structural en air et en eau, avec ou sans débit d'une maquette d'assemblage 8 x 8 (confinement 4-35 mm) MALDIVE".
Note Technique DTE/SCOS/LHC 90/56.

[III-5] DE LANGRE E.

"Modélisation de l'effet de l'écoulement sur l'amortissement des assemblages combustibles REP".
Note Technique DMT/SEMTS LED 94/403.

[III-6] BARBIER D.

"MASSE : rapport d'essais et d'interprétation des mesures d'amortissement sous écoulement à 50°C d'un assemblage AFA-XL à échelle 1".
Note Technique DEC/SECA/LHC 97/16.

[III-7] BLEVINS R.D.

Flow-induced vibration. Second edition.
Krieger Publishing Company. Malabar. Floride. 1994. 477 p.

[III-8] HOTTA A., NIIBORI H., TANAKA M. and FUJITA K.

"Parametric study on parallel flow induced damping of PWR fuel assembly".
ASME-PVP Flow-structure Vibration and Sloshing. 1991, Vol 191, pp. 89-98.

[III-9] PAIDOUSSIS M.P.

"Dynamics of flexible slender cylinders in axial flow, Part. II : Experiment".
Journal Fluid Mechanics. 1966, Vol 26, pp. 737-751.

[III-10] BALAKRISHNAN A.V.

"Some nonlinear damping models in flexible structures".
Proceedings Fourth Annual NASA SCOLE Workshop. Colorado Springs. November 1987, pp. 54 - 66.

[III-11] BALAKRISHNAN A.V.

"A theory of nonlinear damping in flexible structures", Proceedings of the Common Workshop on stabilization of flexible structures. Montpellier. December 1987, pp. 1 - 12.

[III-12] HU A., TAYLOR L.W., SINGH R.P.

"Special class of nonlinear damping models in flexible space structures".
Journal Guidance Control Dynamic. JAN- FEB 1991, Vol 14, n°1, pp. 77 - 83.

[III-13] ROBERTS J.B.

"A stochastic theory of nonlinear ship rolling in irregular seas".
Journal of Ship Research. 1982, Vol 26, n°4, pp. 229 - 245.

[III-14] ROBERTS J.B.

"Estimation of nonlinear ship roll damping from free-decay data".
Journal of Ship Research. June 1985, Vol 29, n°2, pp. 127 - 138.

[III-15] BOUDGHENE-STAMBOULI M.

"Identification des coefficients d'amortissement du roulis des navires". 196 p.
Thèse de doctorat : Nantes. 1991, n°2025.

[III-16] ZHANG W.

"Nonlinear damping model : response to random excitation".
Proceedings Fifth NASA SCOLE Workshop. Lake Arrowhead, CA. November 1988, pp. 27 - 38.

[III-17] ZHANG W., ZHANG H.

"Modelling and analysis of nonlinear damping mechanisms in vibrating systems".
Int. J. Mech. Sci. 1994, Vol 36, n°9, pp. 829 - 848.

[III-18] ZHANG W.

"A Krylov-Bogoliubov-type approximation for continuous-oscillations systems with damping non-linearities".
International Journal of Non-Linear Mechanics. 1992, Vol 27, n°5, pp. 889 - 904.

[III-19] BENDAT J.S., PALO P.A.

"Identification of physical parameters with memory in nonlinear systems".
International Journal of Nonlinear Mechanics. 1995, Vol 30, n°6, pp. 841 - 860.

[III-20] GERMAIN P.

Mécanique - Tome II. Ecole Polytechnique. Ellipses. Paris 1986. 446 p.

[III-21] BASS D.W., HADDARA M.R.

"Nonlinear models of ship roll damping".
International Shipbuilding Progress. 1988, Vol 35, n°401, pp. 5 - 24.

[III-22] FROUDE W.

"The paper of W. Froude". Institution of Naval Architects. 1955.

[III-23] MEI C., PRASAD C.B.

"Effects of nonlinear damping on random response of beams to acoustic loading".
Journal of Sound and Vibration. 1987, Vol 117, n°1, pp. 173 - 186.

[III-24] VAN DE VORST E.L.B., VAN CAMPEN D.H., DE KRAKER A.

"Periodic solutions of a multi-dof beam system with impact".
Journal of Sound and Vibration. 1996, Vol 192, n°5, pp. 913 - 925.

[III-25] SMITH P.W., MALME C.I., GOGOS C.M.

"Nonlinear response of a simple clamped panel"
The Journal of the Acoustical Society of America. 1961, Vol 33, n°11, pp. 1476 - 1482.

[III-26] COOPER J.E.

"Extending the logarithmic decrement method to analyse two degree of freedom transient responses".
Mechanical Systems and Signal Processing. 1996, Vol 10, n°4, pp. 497 - 500.

[III-27] NAUDASCHER E., ROCKWELL D.

Flow-induced vibrations. An Engineering Guide.
Rotterdam/ Brookfield : A.A. Balkema. 1993, 413 p.

[III-28] COLE H.A.

"On-line failure detection and damping measurement of aerospace structure by random decrement signatures".
NASA CR 2205, March 1973. 75 p.

[III-29] KOPFF P.

"Renaissance d'une technique de l'analyse modale d'avant les transformées rapides : le décrétement aléatoire".
Revue Traitement du Signal. 1991, Vol 8, n°5, pp. 345 - 354.

[III-30] BERNARD P.

"Identification de grandes structures : une remarque sur la méthode du décrétement aléatoire".
Journal de Mécanique théorique et appliquée. 1988, Vol 7, n°3, pp. 269 - 280.

[III-31] IBRAHIM S.R., MILKULCIK E.C.

"A method for direct identification of vibration parameters from free response".
Shock and Vibration Bulletin. 1977, n°47, part 4, pp. 183 - 198.

[III-32] BRAUN S

Mechanical Signature Analysis. Theory and applications.
London : Academic press. 1986, 385 p.

[III-33] ANDRIAMBOLOLONA H., GUIHOT P.

"Recommandations pour l'utilisation des méthodes d'analyse modale et d'intensimétrie vibratoire".
Note EDF 93NB00066. 1992, 56 p.

[III-34] MERGEAY M.

"Least Squares Complex Exponential method and global systeme parameter estimation used by modal analysis".

Proceedings of ISMA 8. Leuven Belgium. September 1983.

[III-35] GRANGER S.

"Logiciel IMENE. Version 2.1".

Note de principe". EDF/DER/TTA HT-32/92-9 A. Décembre 1992. 51 p.

[III-36] GRANGER S.

"A new signal processing method for investigating fluidelastic phenomena".

Journal of Fluids and Structures. 1990, Vol 4, pp. 73 - 97.

[III-37] CHATELET E.

Amélioration des méthodes d'analyse modale par condensation de fonction de transfert et utilisation de polynômes orthogonaux.

Thèse de Doctorat. Besançon. 1994.

[III-38] PIRANDA J.

Analyse modale et recalage de modèle. Projet de mémoire d'habilitation à diriger des recherches.

Université de Franche-Comté. Besançon. 1994.

[III-39] BENDAT J.S., PIERSOL A.G.

Engineering applications of correlation and spectral analysis.

New York : Wiley-Interscience. 1993 Second Edition, 458 p.

[III-40] CHILDERS D.G., SKINNER D.P., KEMERAIT R.C.

"The cepstrum : a guide to proceeding".

Proceedings of the IEEE. October 1977, Vol 65, n°10, pp. 1428 - 1443.

[III-41] RANDALL R.B., GAO Y.

"Extraction of modal parameters from the response power cepstrum".

Journal of Sound and Vibration. 1994, Vol 17, n°2, pp. 179 - 193.

[III-42] STASZEWSKI W.J.

"Identification of damping in MODF systems using time scale decomposition".

Journal of Sound and Vibration. 1997, Vol 203, n°2, pp. 283 - 305.

[III-43] PICINBONO B.

"On instantaneous amplitude and phase of signals".

IEEE Transactions on Signal Processing. 1997. Vol 45, n°3.

[III-44] DAUBECHIES I.

"The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis".

IEEE Transactions on Information Theory. 1990. Vol 36, n°5.

[III-45] GAO Y., RANDALL R.B.

"Determination of frequency response functions from response measurements - I : Extraction of poles and zeros from response cepstra".
Mechanical Systems and Signal Processing. 1996, Vol 10, n°3, pp. 293 -317.

[III-46] RANDALL R.B., GAO Y.

"Adaptation of the ITD method to the extraction of poles and zeros from the response cepstrum". Proceeding of the Conference on Modern Practice in Stress and Vibration Analysis. Shaeffield. 1993, pp. 641 - 653.

[III-47] OPPENHEIM A.V., SCHAFER R.W.

Discrete Time Signal Processing.
Englewood Cliffs : NJ. Prentice-Hall. 1989., 879 p.

[III-48] NAYFEH A.H., MOOK D.T.

Nonlinear oscillations.
New York : John Wiley & Sons. 1979, 704 p.

[III-49] NAYFEH A.H.

Introduction to perturbation techniques.
New York : John Wiley & Sons. 1981, 519 p.

[III-50] BRANCH M.A., GRACE A.

MATLAB - Optimization Toolbox. User's Guide Version 1.5.
December 1996, 174 p.

[III-51] MEIROVITCH L.

Elements of vibration analysis.
New York : McGraw-Hill. 1975, 495 p.

[III-52] SZEMPLINSKA-STUPNICKA W.

The behavior of non-linear vibrating systems. Volume I, Fundamental concepts methods : applications to single-degree-of-freedom systems.
Kluwer Academic Publishers. London. 1990. 253 p.

[III-53] ARNOLD V.

Méthodes mathématiques de la mécanique classique.
Moscou : édition Mir. 1974. 470 p.

[III-54] BOUC R.

"The power spectral density of response for strongly non-linear random oscillator".
Journal of Sound and Vibration . 1994, Vol 175, n°3, pp. 317 - 331.

[III-55] JOHNSON K.L.

Contacts mécanics.
Cambridge University Press. 1985. 452 p.

IV. PROBLEME DIRECT - CALCUL DE $X(t)$

IV.1. Introduction

Ce chapitre précise quels sont les modèles d'amortissement non-linéaires envisagés susceptibles de modéliser correctement le comportement non-linéaire de l'assemblage. Le choix des modèles sélectionnés est établi à partir des résultats exposés dans les chapitres II et III.

A la suite du choix d'un ou de plusieurs modèles d'amortissement en fonction des conditions environnementales (air, eau stagnante et en écoulement), le mouvement de l'assemblage est déterminé par le calcul de la solution (déplacement) de l'équation non-linéaire de la dynamique. La résolution analytique de cette équation est effectuée à l'aide des méthodes d'approximations présentées dans le chapitre précédent. La comparaison des solutions obtenues par la méthode "*Averaging*" et par la méthode "*KBM*", dans le cas d'une raideur linéaire, permet de sélectionner la plus efficace pour l'étape d'optimisation des paramètres.

Une première étape montre que les résultats obtenus avec un modèle linéaire de force de rappel ne sont pas satisfaisants car l'évolution de la fréquence constatée dans le signal expérimental ne peut être prise en compte. Pour pallier ce défaut de modélisation, une démarche empirique permet d'établir une loi d'évolution de la fréquence qui enrichit la solution. Par la suite, un lien est trouvé entre ce modèle de fréquence et une expression de la non-linéarité de raideur dans l'équation du mouvement. Dans cette démarche, les propriétés de la méthode "*Averaging*" utilisant une solution à fréquence variable sont utilisées.

La formulation explicite de la non-linéarité de force de rappel permet notamment d'effectuer, à plusieurs reprises dans ce chapitre, une validation des solutions analytiques approchées par comparaison avec les solutions obtenues par intégration numérique de l'équation non-linéaire du mouvement.

IV.2. Choix des modèles d'amortissement et de force élastique de rappel - Mise en équation

IV.2.1. Sélection des modèles d'amortissement en fonction des conditions environnementales

Ce paragraphe propose de tirer partie des enseignements des chapitres II et III concernant respectivement les évolutions constatées de l'amortissement obtenues par une approche semi-empirique et des modèles non-linéaires extraient de la littérature. Le but est de proposer un modèle adapté susceptible de traduire convenablement le comportement non-linéaire de l'assemblage en air et en eau stagnante modélisé comme un système vibrant à un seul degré de liberté.

On propose d'abord les modèles d'amortissement à considérer pour modéliser le comportement de l'assemblage en air, puis en eau stagnante et enfin lorsque l'assemblage est soumis à un écoulement. Nous verrons qu'un unique modèle est retenu pour les cas en air et eau stagnante. On rappelle que les modèles proposés sous écoulement ne sont présentés qu'au titre de développements futurs et n'ont pu être utilisés dans le cadre de cette étude.

En air, on peut envisager les modèles suivants :

$$(IV-1) \quad C(x, \dot{x}) = \epsilon (C_0 + C_1|x|)$$

$$(IV-2) \quad C(x, \dot{x}) = \epsilon (C_0 + C_2x^2)$$

$$(IV-3) \quad C(x, \dot{x}) = \epsilon (C_0 + C_1|x| + C_2x^2)$$

Les modèles (IV-1), (IV-2) et (IV-3) sont caractérisés par la somme d'un terme d'amortissement visqueux linéaire C_0 et d'un amortissement non-linéaire $C_1|x|$ et/ou d'un terme quadratique C_2x^2 . Ces deux derniers termes doivent permettre de traduire les dissipations par frottement et déformations supplémentaires, proportionnelles à l'amplitude du déplacement (cf. paragraphe III.2.2.1). Les modèles (IV-1) et (IV-3) sont une généralisation au déplacement instantané des formulations proposées dans le chapitre III où l'amortissement réduit dépend de x_0 , de l'amplitude initiale du lâcher : $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1x_0$ et de $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1x_0 + \varepsilon_2x_0^2$ (cf. paragraphe III.2.1.1).

En eau stagnante, les modèles suivants sont proposés :

$$(IV-4) \quad C(x, \dot{x}) = \epsilon (C_0 + C_3|\dot{x}|)$$

$$(IV-5) \quad C(x, \dot{x}) = \epsilon (C_0 + C_3 |\dot{x}| + C_4 \dot{x}^2(t))$$

(IV-4) et (IV-5) prennent en compte un terme d'amortissement non-linéaire quadratique pour tenir compte des effets de la traînée et éventuellement un terme supplémentaire proportionnel à $\dot{x}^2(t)$ (cf. paragraphes II.4.1 et III.2.2.1). Pour coupler les effets non-linéaires de structure aux effets fluides, on peut envisager les modèles suivants :

$$(IV-6) \quad C(x, \dot{x}) = \epsilon (C_0 + C_1 |x| + C_3 |\dot{x}|)$$

$$(IV-7) \quad C(x, \dot{x}) = \epsilon (C_0 + C_1 |x| + C_2 x^2 + C_3 |\dot{x}|)$$

$$(IV-8) \quad C(x, \dot{x}) = \epsilon (C_0 + C_1 |x| + C_3 |\dot{x}| + C_4 \dot{x}^2(t))$$

$$(IV-9) \quad C(x, \dot{x}) = \epsilon (C_0 + C_1 |x| + C_2 x^2 + C_3 |\dot{x}| + C_4 \dot{x}^2(t))$$

Sous écoulement, ces différents modèles sont les modèles (IV-4) à (IV-9) auxquels on ajoute le terme de vitesse axiale moyenne d'écoulement du fluide, $\alpha_1 U$ ou $\alpha_2 U^2$, qui a été introduit dans les formulations semi-empiriques présentées dans le chapitre III : $\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_1 x_0 + \epsilon_2 x_0^2 + \alpha_1 U$ et $\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_1 x_0 + (\alpha_2 U + \alpha_1) U$ (cf. paragraphe III.2.1.1). Comme pour le cas des modèles proposés en air, quelques uns de ceux proposés sous écoulement peuvent être vus comme une généralisation au déplacement instantané de ces formules semi-empiriques.

L'étape suivante consiste alors à calculer les solutions de l'équation non-linéaire du mouvement pour chacun de ces modèles. Toutes ces solutions n'ont pu être calculées et testées. Seul le comportement en air a pu être précisé et validé correctement. En effet, le manque de connaissances concernant le modèle de force de rappel et donc la nécessité d'établir un tel modèle pour parvenir à une estimation correcte de l'amortissement n'ont pas permis de mener à bien l'ensemble des résolutions envisagées.

IV.2.2. Modèle de force élastique de rappel

Dans une première approche, le modèle de force de rappel linéaire a été adopté. Ensuite, la prise en compte d'un modèle non-linéaire de force de rappel a été envisagée pour tenir compte de l'évolution de la fréquence au cours du lâcher. Le modèle de Duffing mollissant (cf. paragraphe III.2.3) a donc été utilisé mais n'a pu permettre de traduire correctement les variations constatées de la fréquence. Par la suite nous nous sommes inspirés de ce modèle pour établir deux nouvelles formulations qui donnent des résultats satisfaisants. Ils sont présentés en détail dans la suite de cette partie.

IV.2.3. Mise en équation

Ce paragraphe présente la résolution de l'équation différentielle non-linéaire du mouvement prenant en compte le premier modèle d'amortissement (IV-1). La force de rappel est dans un premier temps considérée linéaire. La solution de l'équation du mouvement de l'assemblage est cherchée dans le cas d'un lâcher d'amplitude x_0 . La vitesse initiale est nulle à l'instant du lâcher. L'équation à résoudre est définie par :

$$(IV-10) \quad m\ddot{x}(t) + \epsilon C(x, \dot{x})\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = -\epsilon C(x, \dot{x})\dot{x}(t) = \epsilon f(x, \dot{x})$$

avec les conditions initiales suivantes : $x(0) = x_0$; $\dot{x}(0) = 0$.

où $C(x, \dot{x})$ est redéfini comme $C(x, \dot{x}) = \frac{C(x, \dot{x})}{m}$, pour la suite des développements pour une meilleure lisibilité des équations. $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ la pulsation propre et $\epsilon f(x, \dot{x})$ représente la non-linéarité "faible" d'amortissement.

IV.3. Calcul de la solution $x(t)$ en air - Force élastique de rappel linéaire

IV.3.1. Méthode de Krylov-Bogoliubov - "Averaging"

Le modèle d'amortissement non-linéaire est :

$$(IV-11) \quad C(x, \dot{x}) = \epsilon (C_0 + C_1|x|)$$

où donc $C_0 = \frac{C_0}{m}$, $C_1 = \frac{C_1}{m}$ et ϵ un paramètre petit devant 1. Les conditions d'application de la méthode "Averaging" sont alors vérifiées si la solution est recherchée sous la forme : $x(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$ où, $A(t)$ et $\varphi(t)$ à déterminer, sont à variations lentes par rapport à celles du temps t . La forme de la vitesse est imposée : $\dot{x}(t) = -A(t)\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi(t))$. On pose $\Phi = (\omega_0 t + \varphi(t))$ et $\epsilon f(x, \dot{x})$ s'écrit alors :

$$(IV-12) \quad \epsilon f(x, \dot{x}) = -(C_0 + C_1|x|)\dot{x} = \epsilon (A \cos \Phi, -A\omega_0 \sin \Phi) = (C_0 + C_1|A \cos \Phi|) A\omega_0 \sin \Phi$$

Pour alléger parfois les formules, nous écrirons A pour $A(t)$ et φ pour $\varphi(t)$.

A la suite de l'application du principe de la moyenne, les expressions de $\dot{A}(t)$ et de $\dot{\varphi}(t)$ sont obtenues sous la forme :

$$(IV-13) \quad \dot{A}(t) = - \left[\frac{AC_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \Phi d\Phi + \frac{C_1 A^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos \Phi| \sin^2 \Phi d\Phi \right]$$

$$(IV-14) \quad \dot{\varphi}(t) = - \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (C_0 + C_1 |A \cos \Phi|) \cos \Phi \sin \Phi d\Phi \right] = 0$$

On utilise les propriétés des fonctions Gamma et Bêta [IV-1] pour définir la constante $\mu(a, b)$ suivante :

$$(IV-15) \quad \mu(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin \Phi|^a |\cos \Phi|^{b+2} d\Phi = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{b+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b+4}{2}\right)} \quad \forall a > -1 \text{ et } \forall b > -3$$

Les équations (IV-13) et (IV-14), utilisant (IV-15) se simplifient et donnent :

$$(IV-16) \quad \dot{A}(t) = -\frac{C_0}{2} A(t) - C_1 \mu(2, -1) A^2(t)$$

$$(IV-17) \quad \dot{\varphi}(t) = 0$$

L'équation (IV-16) est une équation différentielle du premier ordre de Bernoulli qui s'intègre simplement. L'intégration de ces équations et la prise en compte des conditions initiales aboutissent à la solution suivante :

$$(IV-18) \quad x(t) = \frac{A_0}{e^{\frac{C_0}{2}t} - 2\mu(2, -1) \frac{C_1}{C_0} A_0} \cos(\omega_0 t) \quad \text{où} \quad A_0 = \frac{x_0}{1 + 2\mu(2, -1) \frac{C_1}{C_0} x_0}$$

avec $\mu(2, -1) = 0.2122$. Cette solution vérifie bien les conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$ si l'on considère les expressions de $x(t)$ et $\dot{x}(t)$ qui ont été imposées. On vérifie que $A(t)$ et $\varphi(t)$ sont à variations lentes par rapport à t .

On constate, pour $C_1 = 0$ et $C_0 = 2\omega_0 \varepsilon_0$ (ici $\varepsilon = \varepsilon_0 \ll 1$), que l'on retrouve la solution approchée du système linéaire : $x(t) = x_0 e^{-\omega_0 \varepsilon_0 t} \cos(\omega_0 t)$ avec $\omega_0 \approx \omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \varepsilon_0^2}$.

La solution obtenue par la méthode "Averaging" indique que la non-linéarité d'amortissement (IV-12) ne modifie que l'enveloppe de la réponse $x(t)$ et pas celle de la phase.

Cette solution est maintenant comparée avec celle déterminée par la méthode "KBM" pour une non-linéarité d'amortissement identique.

IV.3.2.Méthode Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky - "KBM"

La solution approchée par la méthode "KBM" (cf. paragraphe III.3.4.2) à l'ordre ϵ^1 s'exprime par la formulation suivante :

$$(IV-19) \quad x(t) = A \cos \Phi + \epsilon x_1(A, \Phi) = x^0 + \epsilon x_1(A, \Phi)$$

où $\dot{A}(t)$ et $\dot{\Phi}(t)$ sont approchées par les équations:

$$(IV-20) \quad \begin{cases} \dot{A}(t) = \epsilon A_1(A) \\ \dot{\Phi}(t) = \omega_0 + \epsilon \omega_1(A) \end{cases}$$

Reprenant l'expression (IV-12) et la définition donnée par (III-63), la non-linéarité d'amortissement s'exprime :

$$(IV-21) \quad f(x, \dot{x}) = f(x^0, \dot{x}^0) = (C_0 + C_1 |A \cos \Phi|) A \omega_0 \sin \Phi = C_0 \omega_0 A \cos \Phi + C_1 \omega_0 A^2 |\cos \Phi| \sin \Phi$$

où x^0 est le terme du développement (IV-19) d'ordre 0 et \dot{x}^0 sa dérivée par rapport au temps.

L'équation (IV-21) implique de considérer deux cas liés à la définition de la fonction $x \rightarrow |x|$, dérivable par morceaux. On distingue les cas $\cos \Phi \geq 0$ (solution "+") et $\cos \Phi < 0$ (solution "-"). Après calculs (étapes détaillées au paragraphe III.3.4.2) on obtient la solution suivante, pour $\cos \Phi \geq 0$:

$$(IV-22) \quad x^+(t) = A_0^+ e^{-\frac{c_0 t}{2}} \cos(\omega_0 t + \varphi_0^+) - \frac{C_1 A_0^{+2}}{6\omega_0} e^{-c_0 t} \sin(2(\omega_0 t + \varphi_0^+))$$

où les constantes d'intégration A_0^+ et φ_0^+ sont à déterminer à partir des conditions initiales. L'expression de ces conditions fournit le système d'équations suivant à résoudre :

$$(IV-23) \quad \begin{cases} A_0^+ \cos \varphi_0^+ - \frac{C_1 A_0^{+2}}{6\omega_0} \sin 2\varphi_0^+ = x_0 \\ -\frac{C_0}{2} \cos \varphi_0^+ - \omega_0 \sin \varphi_0^+ + \frac{C_1 C_0 A_0^{+2}}{6\omega_0} \sin 2\varphi_0^+ - \frac{C_1 A_0^+}{3} \cos 2\varphi_0^+ = 0 \end{cases}$$

Pour $\cos \Phi < 0$, la solution $x^-(t)$ est définie par :

$$(IV-24) \quad x^-(t) = A_0^- e^{-\frac{c_0 t}{2}} \cos(\omega_0 t + \varphi_0^-) + \frac{C_1 A_0^{-2}}{6\omega_0} e^{-c_0 t} \sin(2(\omega_0 t + \varphi_0^-))$$

Pour les développements relatifs à l'établissement de ces solutions on peut se reporter à l'Annexe 1.

La solution "complète" approchée ne peut être construite que par morceaux à partir de $x^+(t)$ et $x^-(t)$ dont les constantes A_0^+ , φ_0^+ , A_0^- et φ_0^- sont à déterminer sur chaque demi-période de la réponse. Les constantes A_0^+ , φ_0^+ de $x^+(t)$ correspondant à la première demi-période, juste après l'instant du lâcher sont déterminées par (IV-23). Ensuite, les constantes sont obtenues à l'aide des conditions de raccordement entre $x^+(t)$ et $x^-(t)$ aux instants T_i^0 correspondant aux passages successifs par zéros. Ces conditions de raccordement s'expriment par les équations suivantes :

$$(IV-25) \quad \begin{cases} x^+(T_i^0) = x^-(T_i^0) = 0 \\ \dot{x}^+(T_i^0) = \dot{x}^-(T_i^0) \end{cases}$$

Les contraintes liées à la définition "par morceaux", de la solution obtenue par la méthode "KBM" et les lourdeurs de calcul qu'elle implique nous ont conduit à conserver la solution formulée par la méthode "Averaging" pour la suite des investigations.

IV.3.3. Intégration numérique de l'équation du mouvement - Validation

Avant de poursuivre, nous avons souhaité vérifier et illustrer la validité de la solution (IV-18) conservée. Pour ce faire, nous comparons la solution (IV-18) avec celle obtenue par résolution numérique directe de l'équation du mouvement pour un jeu de paramètres C_0 , C_1 , $\omega_0 = 2\pi f_0$ fixé. Cette résolution est effectuée par différentiation numérique de l'équation du mouvement (opérateurs ODE15s ou ODE23s dans Matlab [IV-2]). Une comparaison entre différents algorithmes de résolution disponibles, montre une bonne concordance des résultats numériques obtenus. Dans un premier cas, les paramètres suivants sont imposés : $C_0 = 0.1 \text{ s}^{-1}$; $C_1 = 2000 \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-1}$; $f_0 = 3.5 \text{ Hz}$ et $x_0 = 12.2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. Ces valeurs sont de l'ordre de grandeur de celles obtenues à posteriori et permettent de retrouver l'allure des signaux expérimentaux. On compare sur la Figure IV-1 les tracés de la solution (IV-18) et de celle calculée par intégration numérique.

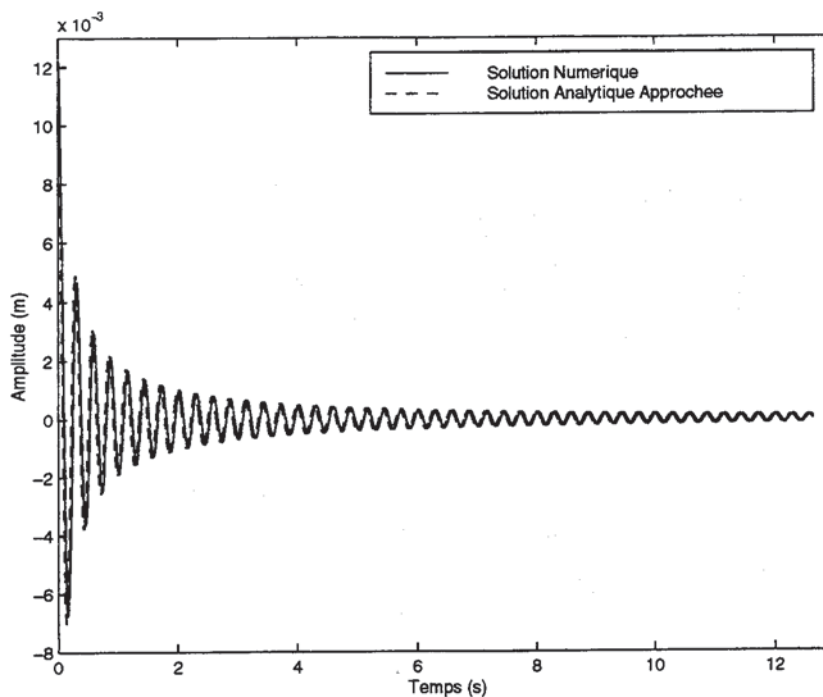


Figure IV-1 : Comparaison entre la solution analytique et la solution numérique pour un lâcher à 12.2 mm.

On constate un faible décalage de phase entre ces deux solutions et une erreur maximale de l'ordre de 3 % effectuée sur l'enveloppe. Cette comparaison montre que les approximations liées à la méthode employée ne sont pas pénalisantes et permettent de garder l'intégrité de la solution (pour les valeurs des paramètres choisies).

Si l'on compare maintenant la solution analytique à la réponse mesurée sur l'assemblage (lâcher 12.2 mm), on observe clairement un décalage en fréquence entre les deux signaux (Figure IV-2). Dans ce cas, les paramètres (C_0, C_1, f_0) sont fixés pour obtenir la superposition la meilleure possible en amplitude et en fréquence.

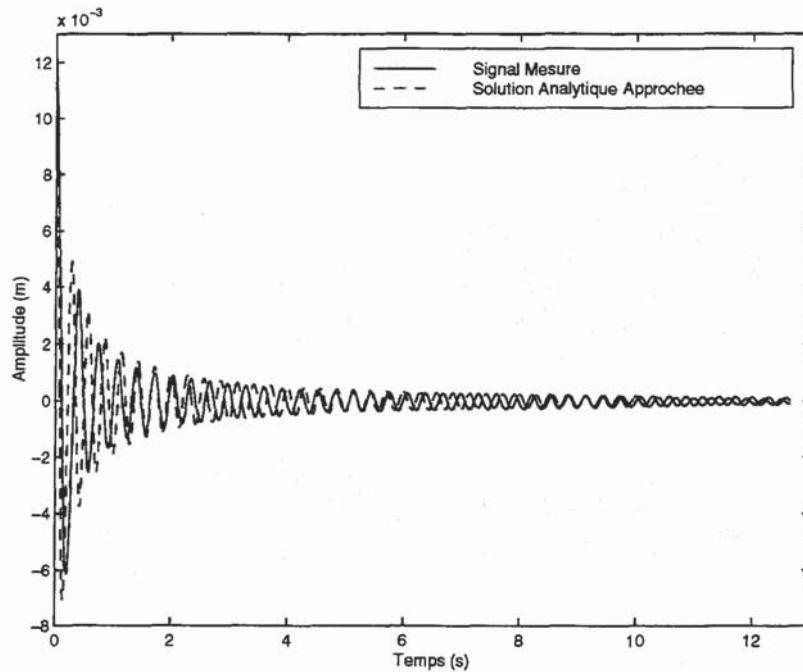


Figure IV-2 : Comparaison de la solution analytique à fréquence constante au lâcher expérimental. Lâcher d'amplitude initiale 12.2 mm - Assemblage à échelle 1.

La modélisation proposée fournit donc une solution analytique qui n'est pas suffisamment riche. Si un tel décalage en fréquence est conservé dans l'étape d'optimisation des paramètres de (IV-18), le critère de minimisation de l'erreur quadratique perd tout son intérêt. Il faut donc trouver une solution qui permette de traduire les variations de fréquences au cours du lâcher. Le paragraphe suivant précise la démarche envisagée pour obtenir une expression de la fréquence qui puisse traduire ce comportement de l'assemblage.

IV.3.4. Prise en compte de la variation de fréquence - Modèle semi-empirique de fréquence

Le but est d'introduire dans la solution (IV-18) une fréquence $f(t)$ ou $f(A(t))$ permettant de suivre les fluctuations observées dans le signal expérimental. Dans un premier temps, l'évolution de la fréquence est étudiée à partir de l'analyse des réponses mesurées à la suite de lâchers de l'assemblage. Pour cela, différentes méthodes peuvent être envisagées. La méthode classique de détermination des passages successifs par zéro à chaque demi-période semble fournir une approximation suffisante. Nous avons appliqué cette méthode à trois lâchers (8 mm, 10 mm et 14 mm) en air. Les résultats sont illustrés par la Figure IV-3 suivante.

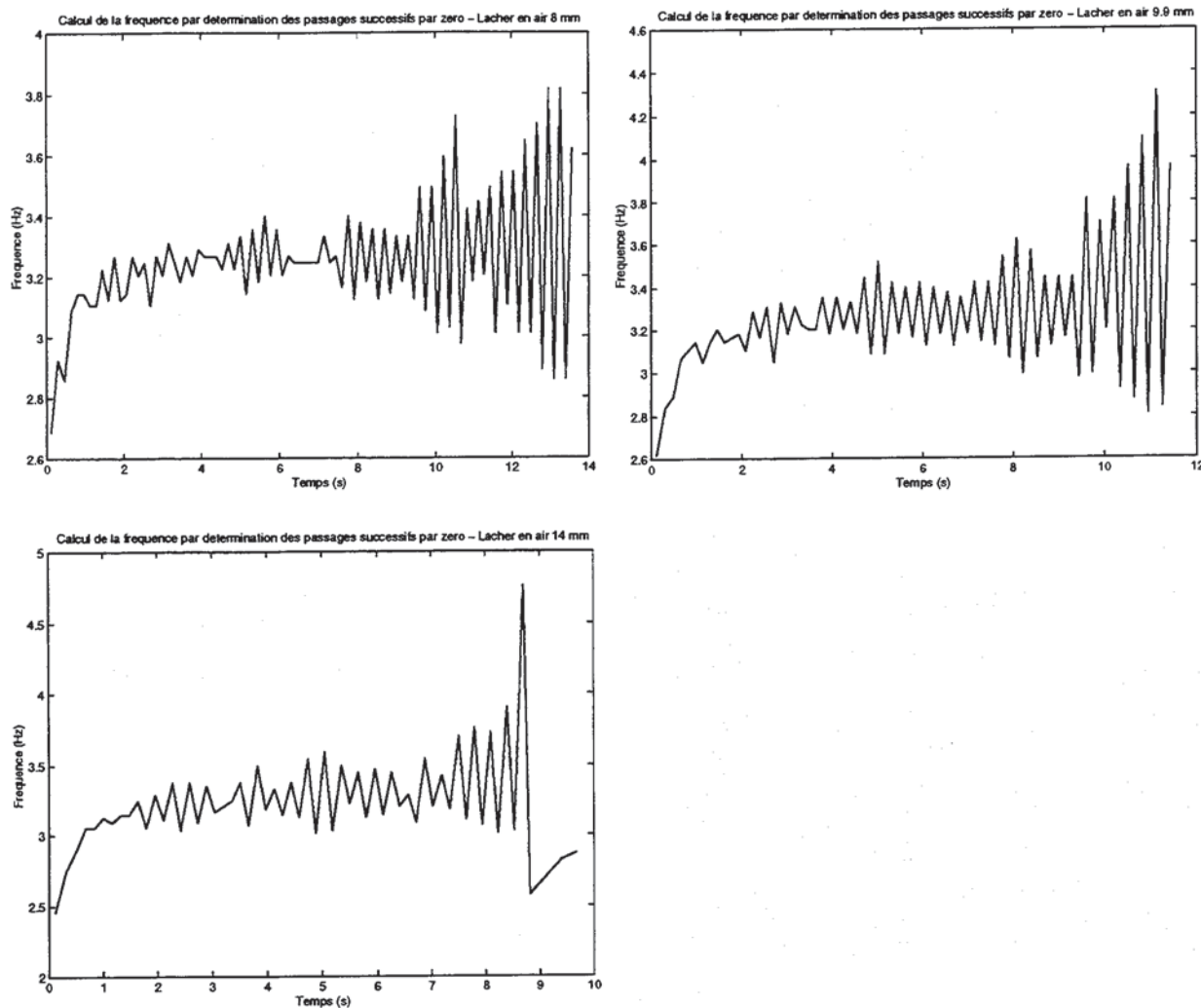


Figure IV-3 : Evolution de la fréquence au cours des lâchers d'amplitude initiale 8 mm, 10 mm et 14 mm en air - Méthode de détermination des passages successifs par zéro.

Le traitement des autres essais fournit des évolutions similaires. Ces évolutions montrent que la fréquence augmente d'abord rapidement au début du lâcher et ensuite semble osciller autour d'une valeur moyenne qui se situe aux environs de 3.3 Hz. Cette valeur correspond à la fréquence estimée (analyse spectrale ou code d'éléments finis) du premier mode d'un assemblage 1300 MW. Les oscillations observées des valeurs de la fréquence, sur ces évolutions, sont dues principalement :

- à l'échantillonnage du signal qui induit une erreur sur la détermination du passage exact par zéro,
- au bruit contenu dans la réponse mesurée .

Pour limiter l'influence de ces deux phénomènes liés à l'acquisition, il est possible, en réponse au premier point, de suréchantillonner le signal ou de procéder à une interpolation linéaire au voisinage des passages par zéro. Concernant le deuxième point, on peut envisager un lissage préalable de la mesure par moyenne glissante.

Plutôt que de procéder comme nous venons de le préciser, nous avons choisi de considérer les évolutions moyennes pour chacune des courbes de la Figure IV-3. Une moyenne glissante est effectuée sur un nombre choisi d'échantillons en prenant soin de conserver la dynamique du signal, particulièrement sur les premières secondes après l'instant initial du lâcher. En effet, c'est sur ce domaine réduit que le gradient de fréquence est le plus important. La Figure IV-5 précise l'évolution de la fréquence moyenne pour les trois lâchers en air précédemment cités.

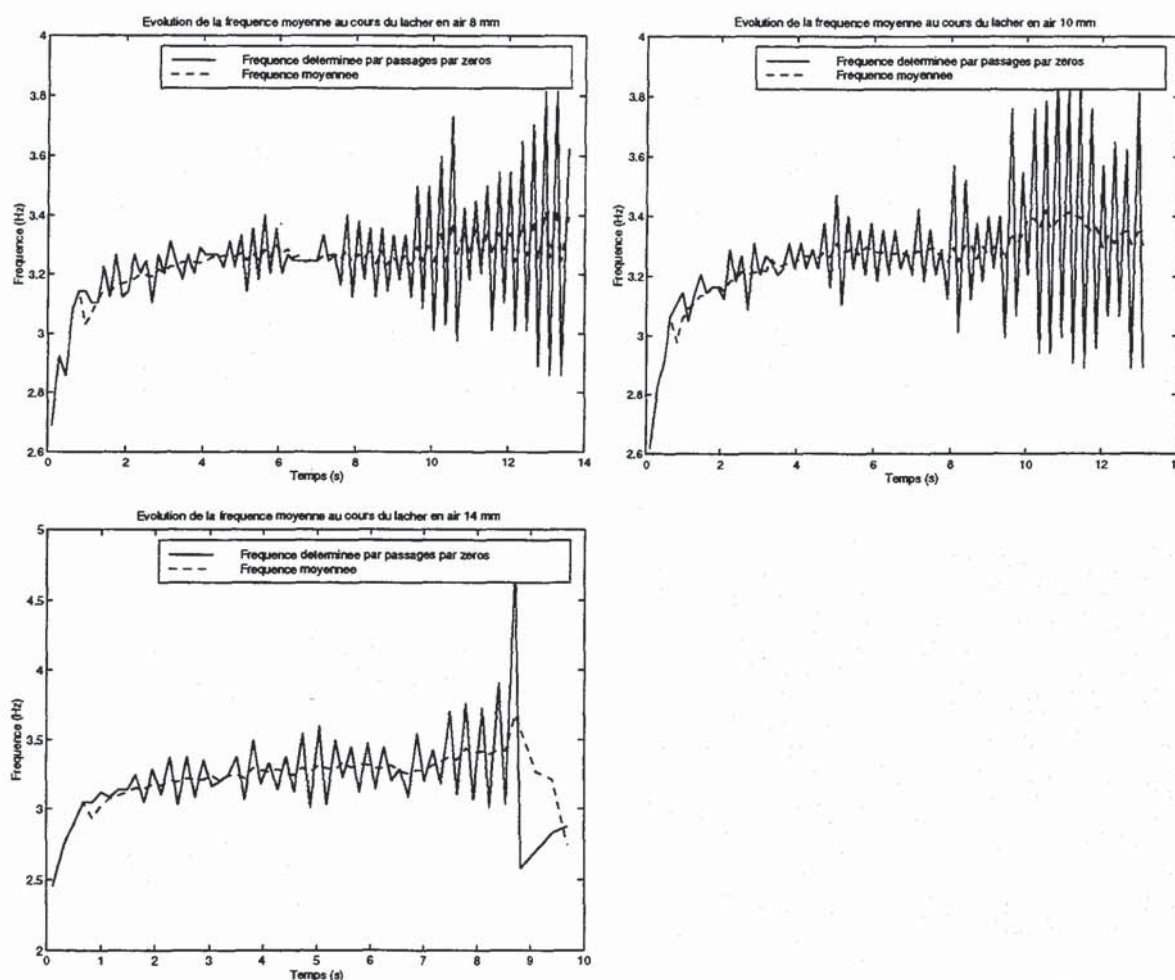


Figure IV-5 : Evolution de la fréquence moyenne au cours des lâchers d'amplitude initiale 8 mm, 10 mm et 14 mm en air.

Ce sont ces évolutions moyennes qui nous ont permis d'envisager un certain nombre de modèles de la forme $f = f(t)$, puis $f = f(A(t))$. Les modèles dépendant directement de l'amplitude $A(t)$ du mouvement sont beaucoup plus intéressants car ils permettent d'envisager une transposition pour d'autres cas d'excitation, ce qui n'est pas, a priori envisageable, avec des modèles dépendant explicitement du temps. Dans une première approche, nous avons envisagé le modèle de fréquence issu de la solution de l'équation

non-linéaire amortie de Duffing pour le cas d'un système mollissant : $\lambda < 0$ où la fréquence évolue selon l'expression :

$$(IV-26) \quad f(A(t)) = \sqrt{f_0^2 + \frac{3}{4\pi^2} \lambda A^2(t)}$$

avec $A(t)$ l'enveloppe du déplacement, f_0 la fréquence propre et λ un coefficient caractéristique de la non-linéarité de force de rappel de Duffing.

Ce modèle a été utilisé pour tenter de représenter les évolutions moyennes de la fréquence de la Figure IV-, mais aucun jeu de paramètres $(f_0; \lambda)$ n'a donné de résultats satisfaisant.

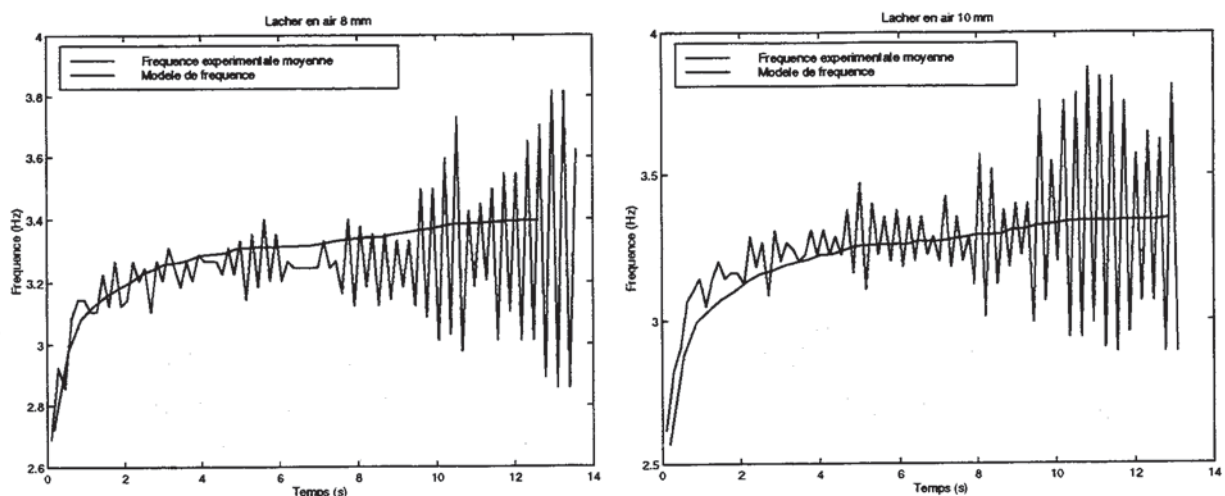
En s'inspirant de la formulation (IV-26) et en effectuant une analyse quantitative du gradient de l'enveloppe $A(t)$ à partir du signal mesuré et du gradient de la fréquence moyenne dont une illustration est donnée par la Figure IV-, on remarque que ceux-ci évoluent de manière similaire au signe près et à une constante près. A la suite de quelques tests, les deux formulations suivantes sont retenues :

$$(IV-27) \quad f(A(t)) = \sqrt{f_0^2 - \lambda_1 A^{\beta_1}(t)}$$

$$(IV-28) \quad f(A(t)) = f_0 - \lambda_2 A^{\beta_2}(t)$$

où $f_0, \lambda_i (> 0)$ et β_i réels ($i = 1, 2$) sont des coefficients à déterminer.

On vérifie sur la Figure IV-4 que ces deux modèles peuvent modéliser approximativement l'évolution de la fréquence au cours du lâcher. Il ne s'agit pas pour l'instant d'obtenir des valeurs précises pour f_0, λ_i et β_i . Ces dernières seront déterminées correctement dans l'étape d'optimisation.



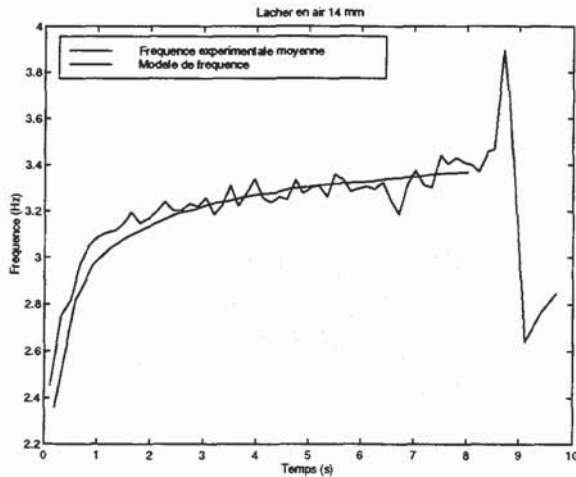


Figure IV-4 : Comparaison de la fréquence moyenne du signal expérimental avec les modèles de fréquence (IV-27) ou (IV-28).

Au regard des comparaisons présentées sur la Figure IV-4, on peut dire que les modèles (IV-27) et (IV-28) donnent, en première approximation, entière satisfaction. D'ores et déjà, la solution (IV-18) peut être enrichie par le résultat de cette analyse. Deux solutions sont donc maintenant envisagées:

$$(IV-29) \quad x(t) = \frac{A_0}{e^{\frac{C_0}{2}t} - 2\mu(2,-1)\frac{C_1}{C_0}A_0} \cos\left(2\pi\sqrt{f_0^2 - \lambda_1 A^A(t)}t\right) \quad A_0 = \frac{x_0}{1 + 2\mu(2,-1)\frac{C_1}{C_0}x_0}$$

ou avec (IV-28) :

$$(IV-30) \quad x(t) = \frac{A_0}{e^{\frac{C_0}{2}t} - 2\mu(2,-1)\frac{C_1}{C_0}A_0} \cos\left(2\pi(f_0 - \lambda_2 A^{A_2}(t))t\right) \quad A_0 = \frac{x_0}{1 + 2\mu(2,-1)\frac{C_1}{C_0}x_0}$$

Pour ces deux solutions, la Figure IV-5 présente le gain obtenu concernant l'évolution de la fréquence sur le signal complet. Si on compare la Figure IV-5 avec la Figure IV-2, où la fréquence est constante, ce gain apparaît clairement au début du lâcher. Il persiste un faible décalage sur la fin du signal qui pourra être encore réduit lors de l'optimisation.

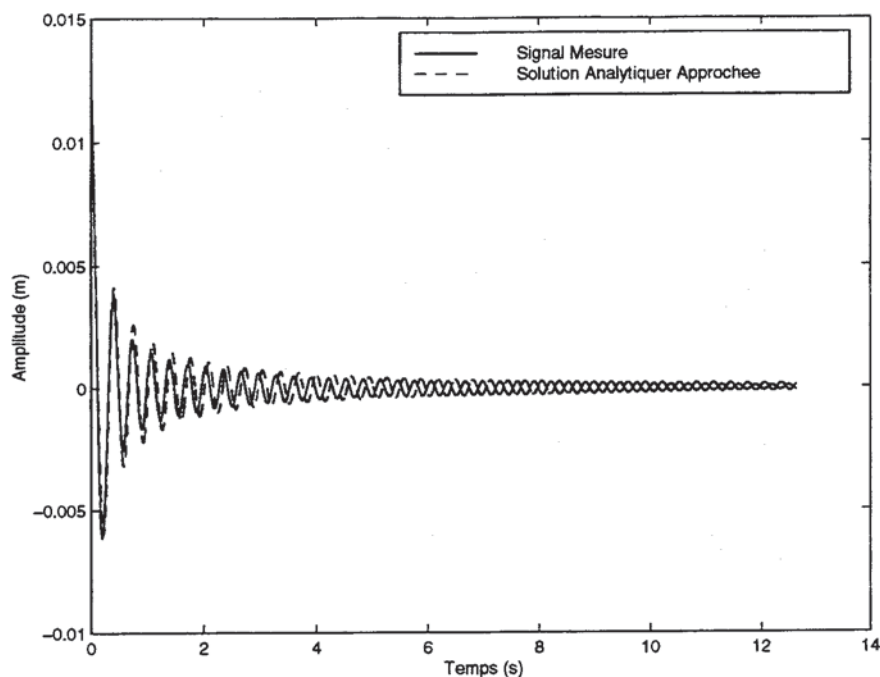


Figure IV-5 : Comparaison de la solution analytique à fréquence variable et du lâcher expérimental. Lâcher d'amplitude 12.2 mm - Assemblage à échelle 1.

IV.3.5. Justification analytique du modèle de fréquence - Lien avec la non-linéarité de force de rappel

Après avoir déterminé, par la démarche présentée ci-dessus, une solution qui traduit correctement à la fois les variations de l'enveloppe et de la fréquence, nous avons recherché un lien entre les deux modèles de fréquence proposés et l'expression de non-linéarités de force de rappel qui sont à l'origine de l'évolution de la fréquence constatée dans le signal de lâcher. On souhaite trouver l'expression de $\lambda K(x)x(t)$, dans l'équation du mouvement suivante :

$$(IV-31) \quad \ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \epsilon C(x, \dot{x})\dot{x} + \lambda K(x)x(t)$$

qui implique une solution traduisant les fluctuations de la fréquence constatées dans le signal mesuré. Cet objectif est poursuivi par application de la méthode "Averaging" (cf. paragraphe III.3.4.1). La solution recherchée est de la forme : $x(t) = A(t) \cos(\theta(t) + \varphi(t))$.

On rappelle les éléments essentiels de l'application de la méthode "Averaging" et notamment la forme de la vitesse : $\dot{x}(t) = -A(t)\Omega(A(t))\sin(\theta(t) + \varphi(t))$

L'enveloppe $A(t)$ et la phase $\varphi(t)$ sont à déterminer et $\dot{\theta}(t) = \Omega(A(t))$ représente un terme de fréquence dépendant de l'enveloppe instantanée. $\Omega(A)$ est une fonction choisie dont dépend alors $\theta(t)$, c'est pour cette raison que l'on distingue $\theta(t)$ (choisie) et $\varphi(t)$ (à déterminer). $\Omega(A)$ est défini à partir de $K_1(A)$ correspondant au premier terme du développement en série de Fourier de la non-linéarité de force de rappel :

$$K(x)x(t) = K_1(A)\cos\Phi + \sum_{n \geq 2} K_n(A)\cos n\Phi$$

Nous en avons déduit, au chapitre III, les relations :

$$(IV-32) \quad \Omega^2(A) = \omega_0^2 - \lambda \frac{K_1(A)}{A} \quad \text{où} \quad \lambda K_1(A) = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(A \cos\Phi) A \cos^2\Phi d\Phi$$

Puis, après application du Principe de la moyenne, les équations suivantes pour $\dot{A}(t)$ et $\dot{\varphi}(t)$:

$$(IV-33) \quad \begin{cases} \dot{A} = \frac{\in C_1(A, \Omega)}{2\tilde{H}\Omega} \\ \dot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

avec $\tilde{H} = 1 + \frac{A\Omega'}{2\Omega}$ et $C_1(A, \Omega)$ le premier terme du développement en séries de Fourier de la non-linéarité d'amortissement.

La démarche qui fournit les équations (IV-32) et (IV-33) est basée sur plusieurs hypothèses qu'il est nécessaire de vérifier à priori ou à posteriori :

- la non-linéarité d'amortissement doit être "petite",
- la non-linéarité de force de rappel est impaire, non-décroissante, monotone et continûment différentiable sur \mathbf{R} .

L'objectif est de trouver une non-linéarité de force de rappel $\lambda K(x)x(t)$ qui conduise à une expression du terme $\theta(t) + \varphi(t)$ la plus proche possible des expressions empiriques : $f(A(t)) = \sqrt{f_0^2 - \lambda_1 A^{\beta_1}(t)} t$ et $f(A(t)) = (f_0 - \lambda_2 A^{\beta_2}(t)) t$ à la suite de l'application de la méthode "Averaging". En même temps, il faut veiller à ce que l'expression de l'enveloppe ne soit pas dégradée par la prise en compte de cette non-linéarité supplémentaire dans l'équation du mouvement. En définitive, on cherche à déterminer $\lambda K(x)x(t)$ tel que $\theta_1(t)$, $\varphi_1(t)$, $\theta_2(t)$, $\varphi_2(t)$ permettent de vérifier les relations suivantes :

$$(IV-34) \quad x_1(t) = A_1(t) \cos\left(2\pi\sqrt{f_0^2 - \lambda_1 A_1^{\beta_1}(t)} t\right) = A_1(t) \cos(\theta_1(t) + \varphi_1(t))$$

ou bien, pour la deuxième forme du modèle empirique de fréquence :

$$(IV-35) \quad x_2(t) = A_2(t) \cos(2\pi(f_0 - \lambda_2 A_2^{\beta_2}(t))t) = A_2(t) \cos(\theta_2(t) + \varphi_2(t))$$

On recherche donc une non-linéarité $\lambda K^1(x)x(t)$ telle que :

$$(IV-36) \quad 2\pi \sqrt{f_0^2 - \lambda_1 A^{\beta_1}(t)} t \cong \theta_1(t) + \varphi_1(t) = \int_0^t \Omega_1(A_1(s)) ds + \varphi_1(t)$$

avec

$$(IV-37) \quad \Omega_1^2(A_1) = \bar{\omega}_0^2 - \bar{\lambda}_1 \frac{K_1^1(A_1)}{A_1} \quad \text{avec} \quad \bar{\lambda}_1 K_1^1(A_1) = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} K^1(A_1 \cos \Phi_1) A_1 \cos^2 \Phi_1 d\Phi_1$$

$$\text{où } \Phi_1 = (\theta_1(t) + \varphi_1(t))$$

ou bien une non-linéarité $\lambda K^2(x)x(t)$ telle que :

$$(IV-38) \quad 2\pi(f_0 - \lambda_2 A^{\beta_2}(t))t \cong \theta_2(t) + \varphi_2(t) = \int_0^t \Omega_2(A_2(s)) ds + \varphi_2(t)$$

avec

$$(IV-39) \quad \Omega_2^2(A_2) = \tilde{\omega}_0^2 - \tilde{\lambda}_2 \frac{K_1^2(A_2)}{A_2} \quad \text{avec} \quad \tilde{\lambda}_2 K_1^2(A_2) = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} K^2(A_2 \cos \Phi_2) A_2 \cos^2 \Phi_2 d\Phi_2$$

$$\text{où } \Phi_2 = (\theta_2(t) + \varphi_2(t)).$$

$$\text{On choisit } \lambda K^1(x)x(t) = -\bar{\lambda}_1 x|x|^\beta$$

On recherche la solution $x_1(t)$ analytique approchée de l'équation du mouvement prenant en compte la non-linéarité d'amortissement $(C_0 + C_1|x|)$ définie précédemment et la non-linéarité de raideur $\lambda K^1(x)x(t)$.

IV.3.5.1. Calcul de la solution théorique exacte

On vérifie que $K^1(-x)(-x) = -K^1(x)x$. Par contre la condition de non-décroissance de la fonction n'est pas toujours vérifiée. Nous nous placerons dans un domaine où la croissance est assurée.

Le calcul de $\bar{\lambda}_1 K_1^1(A_1)$ dans (IV-37) donne :

$$(IV-40) \quad \bar{\lambda}_1 K_1^1(A_1) = -\frac{\bar{\lambda}_1 A_1^{\beta_1+1}}{\pi} \int_0^{2\pi} |\cos \Phi_1|^{\beta_1} \cos^2 \Phi_1 d\Phi_1 = -\bar{\lambda}_1 A_1^{\beta_1+1} \mu_{\beta_1}$$

où la constante μ_{β_1} vaut :
$$\mu_{\beta_1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\cos \Phi_1|^{\beta_1} \cos^2 \Phi_1 d\Phi_1$$

On obtient pour $\Omega_1(A_1)$, l'expression :

$$(IV-41) \quad \Omega_1(A_1) = \sqrt{\bar{\omega}_0^2 - \bar{\lambda}_1 \mu_{\beta_1} A_1^{\beta_1}}$$

D'où :

$$(IV-42) \quad \theta_1(t) = \int_0^t \sqrt{\bar{\omega}_0^2 - \bar{\lambda}_1 \mu_{\beta_1} A_1^{\beta_1}(s)} ds$$

Telle qu'elle est définie, la fonction $\lambda K^1(x)x(t)$ est décroissante $\forall x > 0$ si $\bar{\lambda}_1$ est positif. Pour que $\Omega_1(A_1)$ soit défini sur \mathbf{R} , il faut vérifier que les paramètres $\bar{\omega}_0$, $\bar{\lambda}_1$ et β_1 vérifient la relation $\bar{\omega}_0^2 \geq \bar{\lambda}_1 \mu_{\beta_1} A_1^{\beta_1}$. Il sera important de valider cette condition d'application de la méthode "Averaging" dans l'étape d'identification des paramètres.

Le système d'équations (IV-33) donne, après calculs, les expressions de $\dot{A}(t)$ et de $\dot{\varphi}(t)$ en fonction des paramètres des modèles non-linéaires d'amortissement et de force de rappel suivants :

$$(IV-43) \quad \dot{A}_1(t) = \frac{-A_1 \left(\frac{C_0}{2} + \mu(2,-1)C_1 A_1 \right) (\bar{\omega}_0^2 - \bar{\lambda}_1 \mu_{\beta_1} A_1^{\beta_1})}{\bar{\omega}_0^2 - \bar{\lambda}_1 \mu_{\beta_1} \left(\frac{1}{4} \beta_1 + 1 \right) A_1^{\beta_1}}$$

L'équation pour la phase est :

$$(IV-44) \quad \dot{\varphi}_1(t) = \frac{\bar{\lambda}_1}{2\pi A_1 \Omega_1} \sum_{n \geq 2} \frac{K_n(A_1)}{\tilde{H}} \int_0^{2\pi} \cos n\Phi \cos \Phi d\Phi$$

L'équation (IV-44) est nulle suite au calcul de l'intégrale entre 0 et 2π . On choisit $\varphi_1(0) = 0$ pour respecter la condition initiale de vitesse nulle à l'instant initial du lâcher.

Finalement pour l'équation (IV-36) on obtient :

$$(IV-45) \quad 2\pi\sqrt{f_0^2 - \lambda_1 A^{\beta_1}(t)}t \cong \theta_1(t) = \int_0^t \Omega_1(A_1(s))ds$$

$$= \int_0^t \sqrt{\bar{\omega}_0^2 - \bar{\lambda}_1 \mu_{\beta_1} A_1^{\beta_1}(s)} ds = 2\pi \int_0^t \sqrt{\bar{f}_0^2 - \frac{\bar{\lambda}_1 \mu_{\beta_1}}{(2\pi)^2} A_1^{\beta_1}(s)} ds$$

avec $A_1^{\beta_1}(s)$ défini par la résolution de l'équation différentielle (IV-43).

La solution analytique théorique obtenue par la méthode "Averaging" en prenant une non-linéarité de force de rappel $\lambda K^1(x)x(t)$ est finalement :

$$(IV-46) \quad x_1(t) = A_1(t) \cos \left(2\pi \int_0^t \sqrt{\bar{f}_0^2 - \frac{\bar{\lambda}_1 \mu_{\beta_1}}{(2\pi)^2} A_1^{\beta_1}(s)} ds \right)$$

où $A_1(t)$ est déterminé par l'intégration numérique de l'équation (IV-43).

Avant d'établir que la solution (IV-46) permet de vérifier la relation (IV-34), on valide cette solution par comparaison avec la solution numérique de l'équation différentielle du mouvement intégrant les deux non-linéarités. C'est ce qui est effectué dans la suite des développements.

IV.3.5.2. Validation de la solution théorique exacte

La résolution numérique de l'équation du mouvement est réalisée par différentiation numérique de l'équation de mouvement (opérateur ODE15s dans Matlab). La comparaison est menée entre la solution analytique (IV-46) et la solution numérique $x_1^{num}(t)$, solution de l'équation du mouvement suivante :

$$(IV-47) \quad \ddot{x}_1^{num}(t) + \bar{\omega}_0^2 x_1^{num}(t) = -\left(C_0 + C_1 |x_1^{num}(t)|\right) \dot{x}_1^{num}(t) - \bar{\lambda}_1 x_1^{num}(t) |x_1^{num}(t)|^{\beta_1}$$

Les paramètres choisis $(C_0; C_1; f_0; \bar{\lambda}_1; \beta_1)$ vérifient la condition de positivité de $\Omega_1^2(A_1)$. Dans un premier test, on prend un couple de valeur $(\bar{\lambda}_1; \beta_1)$ d'une importance relative "faible" pour définir la non-linéarité de force de rappel. Nous considérerons que le couple $(\bar{\lambda}_1, \beta_1)$ (et par la suite $(\bar{\lambda}_2, \beta_2)$) est de faible importance lorsqu'il implique une fluctuation de $f(t)$ de l'ordre de 5%. Un couple de valeurs sera dit de forte importance, caractéristiques des variations de la fréquence constatées expérimentalement, si ces fluctuations sont de l'ordre de 50%. Le calcul du terme

$\theta_1(t) = \int_0^t \sqrt{\bar{f}_0^2 - \frac{\bar{\lambda}_1 \mu_{\beta_1}}{(2\pi)^2} A_1^{\beta_1}(s)} ds$ de la solution analytique n'a pas pu se faire simplement à partir des fonctions prédéfinies de Matlab. En effet, les fonctions

permettant le calcul formel n'ont pu aboutir à la détermination d'une primitive de cette intégrale. Par ailleurs, la fonction "Quad8" adaptée au calcul numérique approché d'intégrale ne peut être employée que pour l'estimation d'intégrale dont l'expression est explicite. Dans le cas présent, le terme A_1^A est le résultat d'une intégration numérique, ce qui rend impossible l'utilisation de cette fonction. Pour parvenir à une détermination de $\theta_1(t)$, nous avons transposé le problème en une résolution d'équation différentielle du deuxième ordre, établie entre $\ddot{\theta}_1(t)$ et $\dot{\theta}_1(t)$. La démarche suivie et les détails des calculs sont reportés en l'Annexe 2. Le résultat de la comparaison effectuée entre la solution numérique et la solution analytique est illustré par la Figure IV-6 pour le cas d'un lâcher à 12 mm d'amplitude initiale :

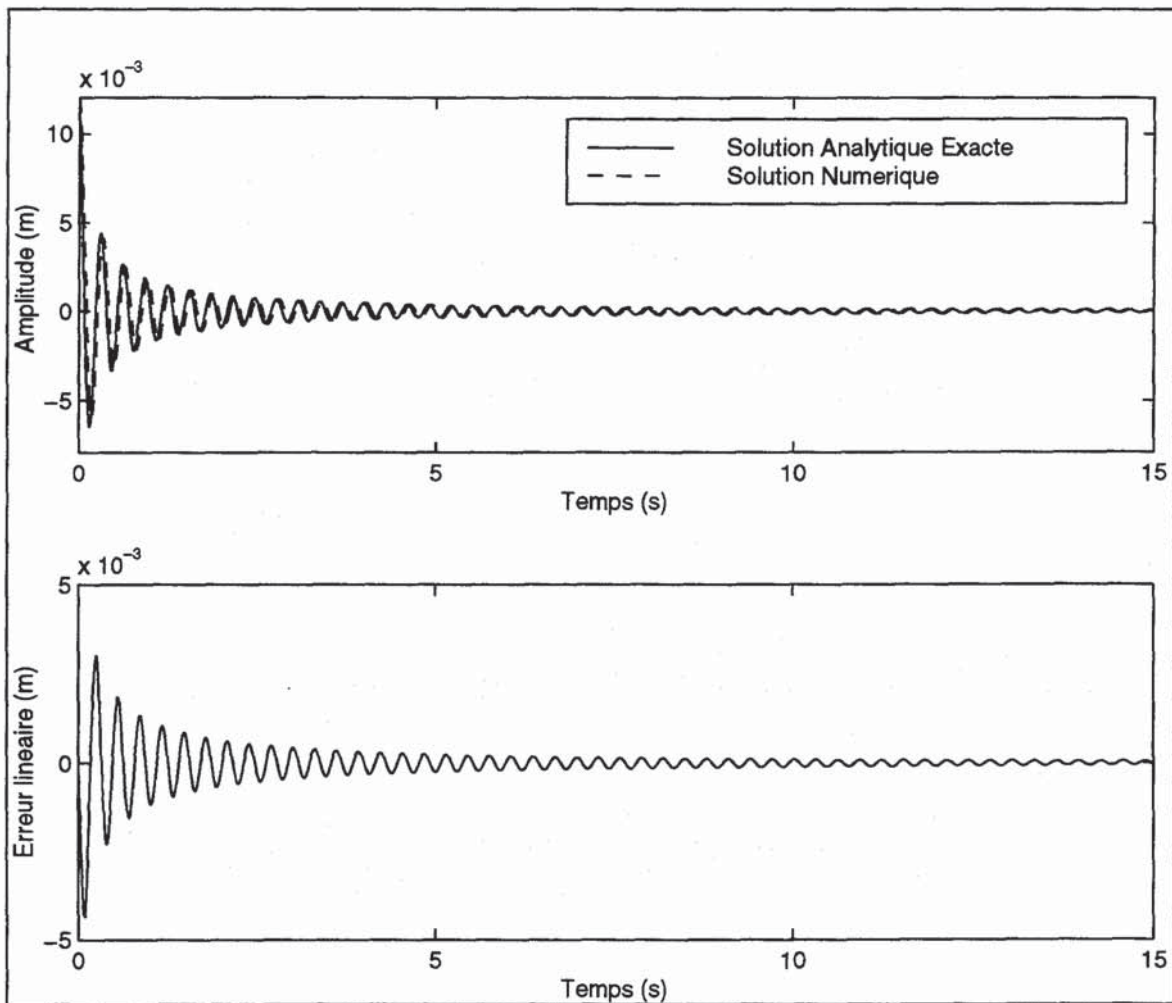


Figure IV-6 : Comparaison entre la solution analytique exacte (IV-46) et la solution obtenue par intégration numérique de l'équation du mouvement (IV-47). $(\bar{\lambda}_1; \beta_1)$ de "faible importance".

Valeur des paramètres : $C_0 = 0.15 \text{ s}^{-1}$; $C_1 = 2100 \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$; $\bar{f}_0 = 3.3 \text{ Hz}$; $\bar{\lambda}_1 = 500 \text{ m}^{-\beta_1} \text{ s}^{-2}$; $\beta_1 = 0.55$.

L'erreur linéaire représentée sur la Figure IV-6 correspond au tracé de la différence entre la solution analytique exacte et la solution numérique. Le résultat montre qu'il y a une très bonne concordance entre les solutions analytique et numérique lorsque la non-linéarité de force de rappel est "faible" et non-décroissante. Pour une valeur plus importante de $\bar{\lambda}_1$, caractéristique d'une évolution de la fréquence du même ordre de grandeur que celle observée dans le signal expérimental, une comparaison équivalente est établie. Le résultat de cette comparaison est illustré par la Figure IV-7 :

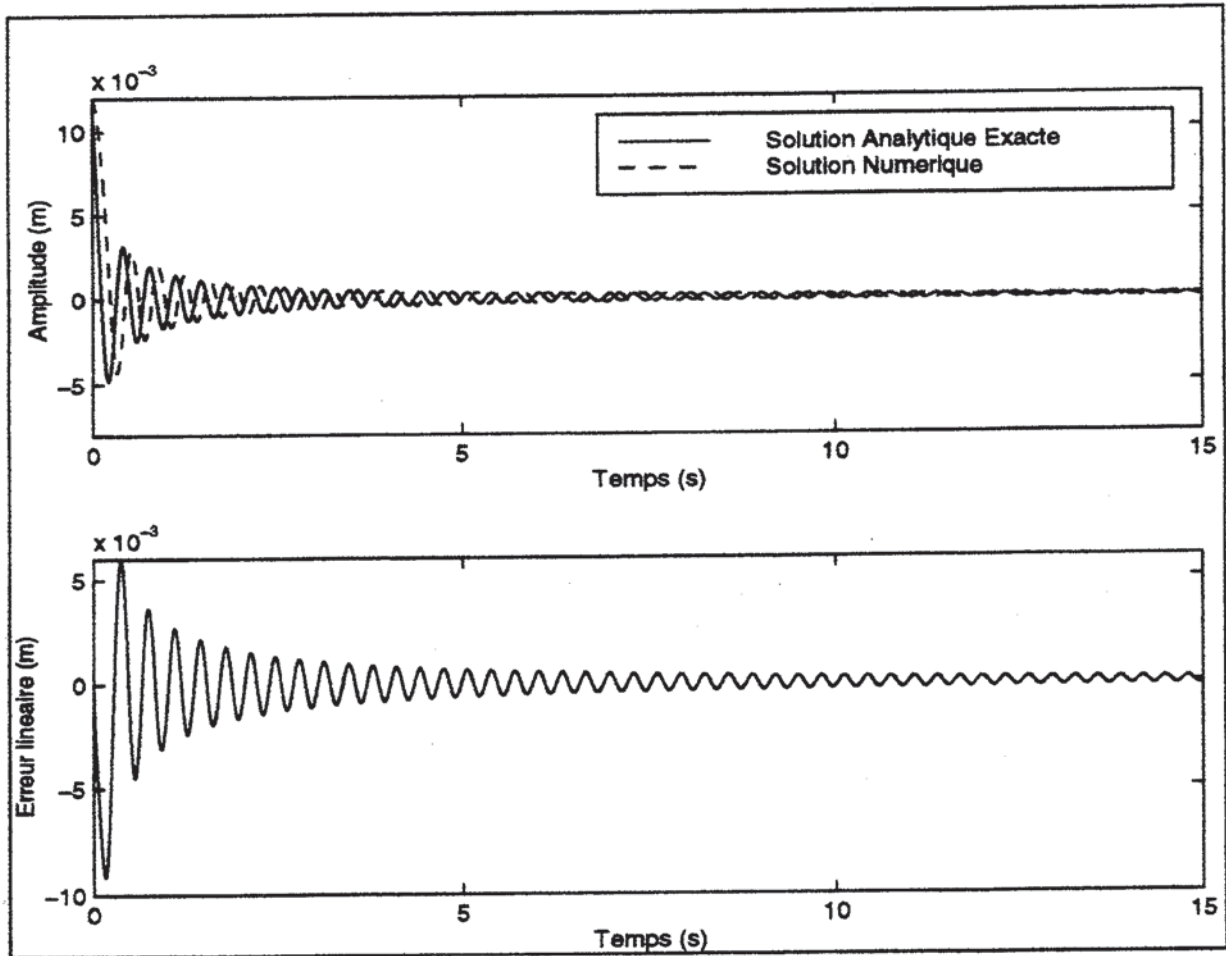


Figure IV-7 : Comparaison entre la solution analytique exacte (IV-46) et la solution obtenue par intégration numérique de l'équation du mouvement (IV-47). $(\bar{\lambda}_1; \beta_1)$ caractéristique d'une évolution de la fréquence observée expérimentalement.

Valeur des paramètres: $C_0 = 0.15 \text{ s}^{-1}$; $C_1 = 2100 \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$; $\bar{f}_0 = 3.3 \text{ Hz}$; $\bar{\lambda}_1 = 4000 \text{ m}^{-\beta_1} \text{ s}^{-2}$; $\beta_1 = 0.55$.

On constate sur ces deux figures une bonne correspondance de l'amplitude des signaux. Par contre, il apparaît un déphasage qui semble être fonction de l'importance de la non-linéarité de force de rappel. En effet, ce déphasage est moins prononcé sur la Figure IV-6 que sur la Figure IV-7 où il s'établit dès le début du lâcher (voir Figure IV-8 le zoom

effectué sur les premiers instants après le lâcher). Dans ce deuxième cas, la force de rappel est décroissante et donc la méthode de la moyenne (méthode "Averaging") n'est pas valide mais fournit pourtant une décroissance satisfaisante de l'enveloppe. Le déphasage provient aussi, dans une moindre mesure, de la forme approchée de la vitesse $\dot{x}(t)$ *. En effet, les conditions initiales vérifiées par la solution analytique ne sont pas celles imposées lors du calcul de la solution.

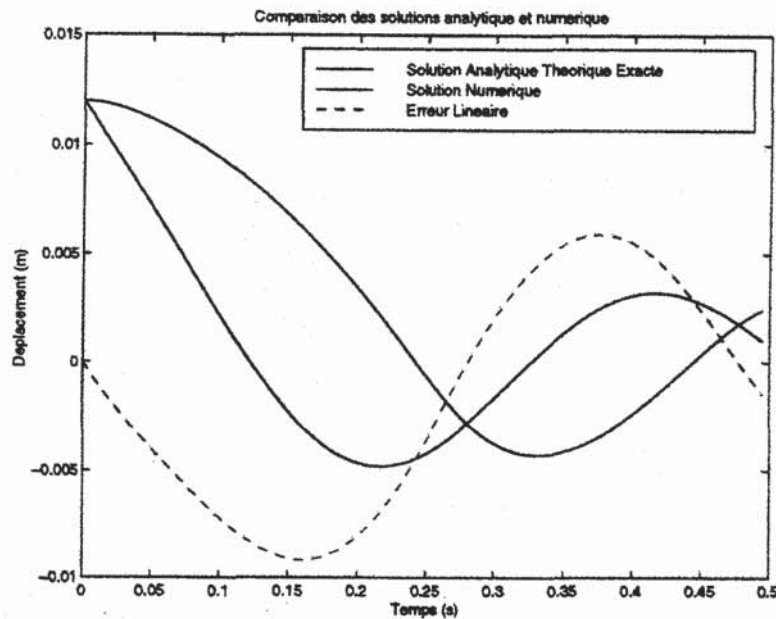


Figure IV-8 : Zoom sur les premiers instants des réponses numérique et analytique à la suite du lâcher.

La solution analytique $x_1(t)$ définie par (IV-43) et (IV-46), ne peut être calculée de manière plus explicite sans avoir recours à une résolution numérique. L'objectif fixé dans cette étude est avant tout d'obtenir des solutions facilement utilisables dans une étape d'identification et d'optimisation des paramètres, permettant des temps de calcul relativement courts. Pour respecter cet objectif, nous avons cherché une solution approchée de (IV-46) qui permette d'éviter l'intégration numérique de (IV-43) et celle de l'intégrale de (IV-46).

IV.3.5.3. Calcul d'une solution approchée

On vérifie a posteriori que les valeurs prises par β_1 sont faibles. On peut considérer, dans (IV-43) que $\left(\frac{1}{4}\beta_1 + 1\right) \approx 1 + \epsilon$. La validité de cette approximation est illustrée par la Figure IV-11. L'équation de l'enveloppe peut alors être approchée par l'expression :

$$* \dot{x}(t) = \dot{A}(t) \cos \Phi - A(t) (\Omega(A) + \dot{\phi}(t)) \sin \Phi \approx -A(t) \Omega(A) \sin \Phi$$

$$(IV-48) \quad \dot{A}_1(t) \cong -A_1 \left(\frac{C_0}{2} + \mu(2,-1)C_1 A_1 \right)$$

La solution de (IV-48) a déjà été explicitée précédemment. Le résultat de cette intégration donne l'expression de l'enveloppe approchée $A_1^{ap}(t)$ suivante :

$$(IV-49) \quad A_1^{ap}(t) = \frac{A_0}{e^{\frac{C_0}{2}t} - 2\mu(2,-1)\frac{C_1}{C_0}A_0} \quad \text{avec} \quad A_0 = \frac{x_0}{1 + 2\mu(2,-1)\frac{C_1}{C_0}x_0}$$

L'approximation effectuée dans (IV-48) revient à considérer que l'enveloppe n'est pas perturbée par la non-linéarité de force de rappel et donc que seule la non-linéarité d'amortissement participe à la décroissance de la réponse.

Une seconde approximation est effectuée pour simplifier le calcul de l'intégrale $\int_0^t \sqrt{\bar{f}_0^2 - \frac{\bar{\lambda}_1 \mu_{\beta_1}}{(2\pi)^2}} A_1^{\beta_1}(s) ds$ qui ne peut se faire que numériquement. Cette intégrale est approchée par :

$$(IV-50) \quad \int_0^t \sqrt{\bar{f}_0^2 - \frac{\bar{\lambda}_1 \mu_{\beta_1}}{(2\pi)^2}} A_1^{\beta_1}(s) ds \cong \sqrt{\bar{f}_0^2 - \frac{\bar{\lambda}_1 \mu_{\beta_1}}{(2\pi)^2}} A_1^{ap\beta_1}(t) t$$

Nous vérifions à posteriori (cf. Figure IV-11) que cette approximation est acceptable. Finalement, tenant compte de ces approximations, on obtient une solution analytique approchée $x_1^{ap}(t)$, qui s'écrit :

$$(IV-51) \quad x_1^{ap}(t) = A_1^{ap}(t) \cos \left(2\pi \sqrt{\bar{f}_0^2 - \frac{\bar{\lambda}_1 \mu_{\beta_1}}{(2\pi)^2}} A_1^{ap\beta_1}(t) t \right)$$

La solution (IV-51) obtenue nous permet de vérifier l'équation (IV-36), si on pose :

$$(IV-52) \quad \lambda_1 = \frac{\bar{\lambda}_1 \mu_{\beta_1}}{(2\pi)^2} \quad \text{et} \quad \bar{f}_0 = f_0$$

La non-linéarité de force de rappel $\lambda K^1(x)x(t)$ qui est à intégrer dans l'équation du mouvement (IV-31) s'exprime alors par :

$$(IV-53) \quad \lambda K^1(x)x(t) = -\lambda_1 x(t) |x(t)|^{\beta_1}$$

Les conséquences des approximations réalisées pour aboutir à une solution que nous pourrions utiliser dans une étape d'optimisation sont maintenant estimées. Pour quantifier l'importance de celles-ci, une comparaison est effectuée entre la solution analytique exacte et la solution analytique approchée (IV-51). On reprend le jeu de paramètres donné

précédemment. La Figure IV-9 présente le résultat de cette comparaison dans le cas où le couple de valeurs $(\bar{\lambda}_1; \beta_1)$ est de "faible importance" :

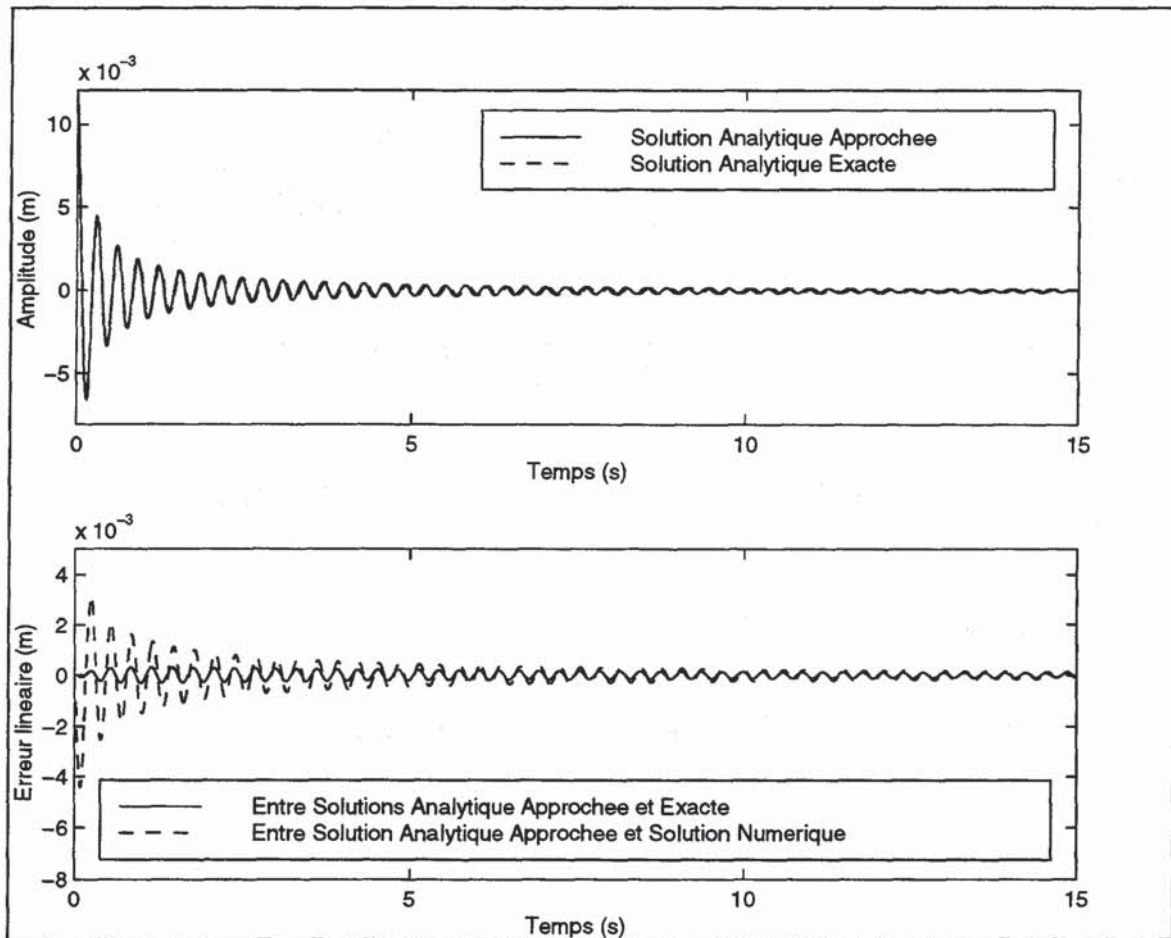


Figure IV-9 : Comparaison entre la solution analytique approchée définie par (IV-51) et la solution analytique exacte (IV-46), $(\bar{\lambda}_1; \beta_1)$ de "faible importance".

Valeur des paramètres : $C_0 = 0.15s^{-1}$; $C_1 = 2100m^{-1}s^{-1}$; $f_0 = 3.3Hz$; $\bar{\lambda}_1 = 500m^{-\beta_1}s^{-2}$; $\beta_1 = 0.55$.

Pour une valeur de $\bar{\lambda}_1$ donnant une non-linéarité de force de rappel "plus marquée", le même comparatif est effectué et illustré par la Figure IV-10 :

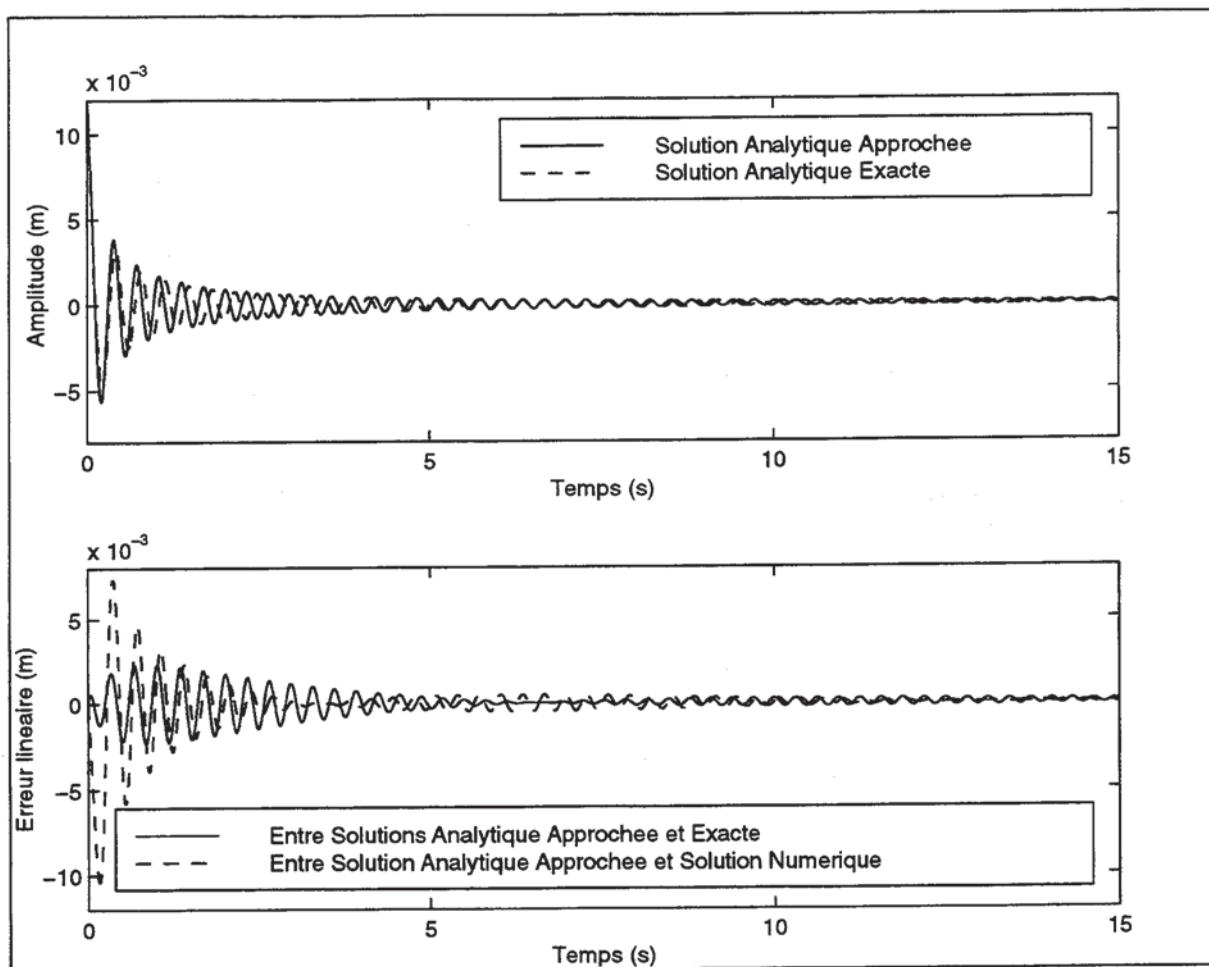


Figure IV-10 : Comparaison entre la solution analytique approchée définie par (IV-51) et la solution analytique exacte (IV-46), $(\bar{\lambda}_1; \beta_1)$ caractéristique d'une évolution de la fréquence observée expérimentalement.

Valeur des paramètres : $C_0 = 0.15s^{-1}$; $C_1 = 2100m^{-1}s^{-1}$; $f_0 = 3.3Hz$; $\bar{\lambda}_1 = 4000m^{-\beta_1}s^{-2}$; $\beta_1 = 0.55$.

Les Figure IV-9 et Figure IV-10 montrent ici aussi que la superposition de la solution analytique avec la solution analytique approchée dépend de l'importance de la non-linéarité de force de rappel. Le biais constaté entre les deux signaux provient essentiellement d'une vitesse d'évolution de la fréquence qui n'est pas traduite de la même manière par les deux solutions. La solution analytique conduit après l'instant de lâcher à une variation plus brusque de la fréquence que ne l'exprime la solution numérique. L'erreur sur l'enveloppe semble être de moindre importance. En prenant en compte le deuxième jeu de paramètres, on peut visualiser sur la Figure IV-11, les conséquences des approximations sur la détermination de l'enveloppe et sur celle de la fréquence par comparaison des tracés analytique et analytique approché :

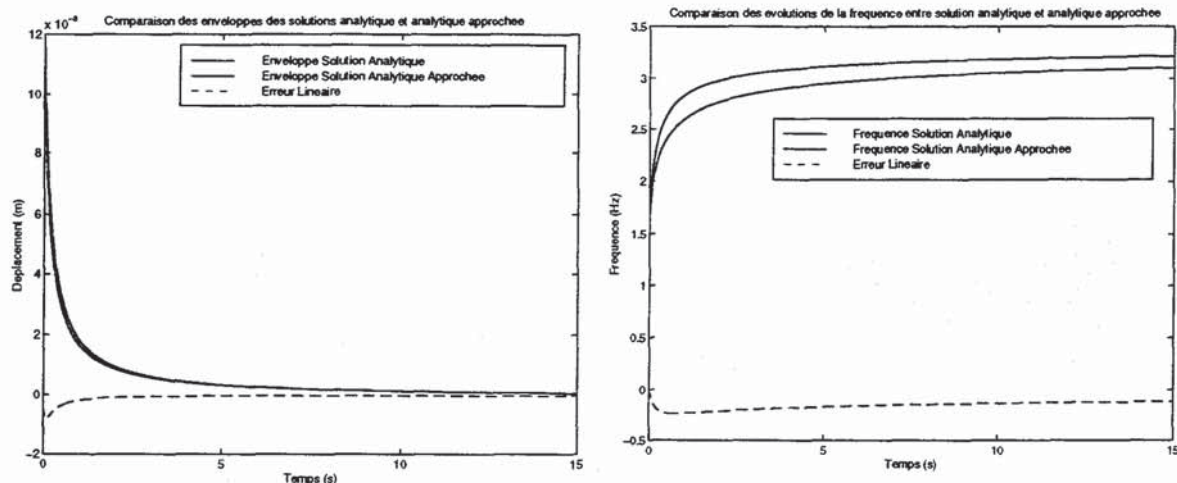


Figure IV-11 : Comparaison de l'enveloppe approchée et de la fréquence approchée avec leur expression analytique exacte.

Les deux graphes de la Figure IV-11 confirment que l'enveloppe est correctement reproduite à la suite de la simplification de l'expression de $\dot{A}(t)$. On observe que les conséquences sont plus marquées sur l'évolution de la fréquence (surestimation de l'ordre de 10 %). Pour la détermination finale de l'amortissement, il est préférable que l'intégrité de l'enveloppe soit conservée car les paramètres du modèle d'amortissement non-linéaire sont prépondérants dans l'expression de celle-ci.

Finalement, en introduisant une non-linéarité de force de rappel $\lambda K^1(x)x(t)$ nous obtenons, moyennant quelques approximations, une solution qui traduit à la fois les variations de l'enveloppe et de la fréquence. Le choix de la non-linéarité de force de rappel $\lambda K^1(x)x(t)$ a permis de retrouver le premier modèle de fréquence empirique proposé. La connaissance d'un tel modèle est précieuse d'abord car elle fournit le moyen d'effectuer des comparaisons entre une solution numérique et une solution analytique. D'autre part, la formulation d'un modèle de force de rappel donne une orientation qui peut s'avérer favorable à la compréhension des mécanismes physiques responsables de l'évolution de la fréquence au cours du lâcher. Une première difficulté à l'interprétation de ce modèle provient du fait qu'il peut exister d'autres expressions pour le modèle de force de rappel. En effet, le modèle suivant permet de retrouver le deuxième modèle empirique proposé.

$$\text{On choisit } \lambda K^2(x)x(t) = -2\tilde{\omega}_0 \tilde{\lambda}_2 x|x|^{\beta_2} + \tilde{\gamma}_2 x|x|^{2\beta_2}$$

Une démarche similaire à celle développée pour $\lambda K^1(x)x(t)$ est adoptée pour $\lambda K^2(x)x(t)$. On recherche la solution analytique $x_2(t)$ de l'équation du mouvement prenant en compte la non-linéarité $\lambda K^2(x)x(t)$.

IV.3.5.4. Calcul de la solution théorique exacte

On vérifie que $K^2(-x)(-x) = -K^2(x)x$ et que la fonction $K^2(x)x$ peut être décroissante. Nous nous placerons dans un domaine où la croissance est assurée.

Le calcul de $\tilde{\lambda}_2 K_1^2(A_2)$ de (IV-39), premier terme du développement en séries de Fourier de la non-linéarité, donne :

$$(IV-54) \quad \tilde{\lambda}_2 K_1^2(A_2) = -\frac{2\omega_0 \tilde{\lambda}_2 A_2^{\beta_2+1}}{\pi} \int_0^{2\pi} |\cos \Phi_2|^{\beta_2} \cos^2 \Phi_2 d\Phi_2 + \frac{\tilde{\gamma}_2 A_2^{2\beta_2+1}}{\pi} \int_0^{2\pi} |\cos \Phi_2|^{2\beta_2} \cos^2 \Phi_2 d\Phi_2$$

$$= -2\omega_0 \tilde{\lambda}_2 \mu_{\beta_2} A_2^{\beta_2+1} + \tilde{\gamma}_2 \mu_{2\beta_2} A_2^{2\beta_2+1}$$

où les constantes μ_{β_2} et $\mu_{2\beta_2}$ valent :

$$\begin{cases} \mu_{\beta_2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\cos \Phi_2|^{\beta_2} \cos^2 \Phi_2 d\Phi_2 \\ \mu_{2\beta_2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\cos \Phi_2|^{2\beta_2} \cos^2 \Phi_2 d\Phi_2 \end{cases}$$

On obtient pour $\Omega_2^2(A_2)$, l'expression :

$$(IV-55) \quad \Omega_2^2(A_2) = \left(\tilde{\omega}_0^2 - 2\tilde{\omega}_0 \tilde{\lambda}_2 \mu_{\beta_2} A_2^{\beta_2} + \tilde{\gamma}_2 \mu_{2\beta_2} A_2^{2\beta_2} \right)$$

Si on pose $\tilde{\gamma}_2 = \frac{\tilde{\lambda}_2^2 \mu_{\beta_2}^2}{\mu_{2\beta_2}}$; ($\mu_{2\beta_2} \neq 0$)

alors l'expression de droite de l'équation (IV-55) est un carré parfait, c'est à priori le principal intérêt de $\lambda K^2(x)x(t)$. Nous pouvons alors mettre $\Omega_2(A_2)$ sous la forme :

$$(IV-56) \quad \Omega_2(A_2) = \left(\tilde{\omega}_0 - \tilde{\lambda}_2 \mu_{\beta_2} A_2^{\beta_2} \right)$$

D'où :

$$(IV-57) \quad \theta_2(t) = \int_0^t \left(\tilde{\omega}_0 - \tilde{\lambda}_2 \mu_{\beta_2} A_2^{\beta_2}(s) \right) ds$$

Telle qu'elle est définie, la fonction $\lambda K^2(x)x(t)$ peut être décroissante. Pour que $\Omega_2^2(A_2)$ soit défini dans \mathbf{R} , il faut que les paramètres $\tilde{\lambda}_2$, β_2 et $\tilde{\omega}_0$ vérifient la relation $\tilde{\omega}_0 \geq \tilde{\lambda}_2 \mu_{\beta_2} A_2^{\beta_2}$. Pour des raisons similaires à celles invoquées précédemment dans le cas de la non-linéarité $\lambda K^1(x)x(t)$, il sera important de valider cette condition dans l'étape d'identification.

Le système d'équations (IV-33) fournit les équations pour l'enveloppe $\dot{A}(t)$ et pour la phase $\dot{\phi}(t)$. Après calculs on trouve :

$$(IV-58) \quad \dot{A}_2(t) = \frac{-A_2 \left(\frac{C_0}{2} + \mu(2,-1)C_1 A_2 \right) (\tilde{\omega}_0 - \tilde{\lambda}_2 \mu_{\beta_2} A_2^{\beta_2})}{\tilde{\omega}_0 - \tilde{\lambda}_2 \mu_{\beta_2} \left(\frac{\beta_2}{2} + 1 \right) A_2^{\beta_2}} ; \quad \phi_2(t) \neq 0$$

Comme dans le cas de la non-linéarité $\lambda K^1(x)x(t)$, nous imposons $\dot{\phi}_2(t) = 0 \Rightarrow \phi_2(t) = \phi_2(0) = 0$.

Finalement, l'équation (IV-38) donne l'expression suivante :

$$(IV-59) \quad 2\pi(f_0 - \lambda_2 A^{\beta_2}) \cong \theta_2(t) = \int_0^t \Omega_2(A_2(s)) ds$$

$$= \int_0^t (\tilde{\omega}_0 - \tilde{\lambda}_2 \mu_{\beta_2} A_2^{\beta_2}(s)) ds = 2\pi \int_0^t \left(\tilde{f}_0 - \frac{\tilde{\lambda}_2 \mu_{\beta_2}}{2\pi} A_2^{\beta_2}(s) \right) ds$$

avec $A_2^{\beta_2}(s)$ défini par la résolution de l'équation différentielle (IV-58).

La solution analytique théorique obtenue par la méthode "Averaging" en prenant une non-linéarité de force de rappel $\lambda K^2(x)x(t)$ est finalement :

$$(IV-60) \quad x_2(t) = A_2(t) \cos \left(2\pi \int_0^t \left(\tilde{f}_0 - \frac{\tilde{\lambda}_2 \mu_{\beta_2}}{2\pi} A_2^{\beta_2}(s) \right) ds \right)$$

où $A_2(t)$ est déterminé par l'intégration numérique de l'équation (IV-58).

L'étape suivante permet de valider la solution analytique (IV-60) par comparaison avec la solution numérique et de trouver la relation entre (f_0, λ_2) et $(\tilde{f}_0, \tilde{\lambda}_2)$.

IV.3.5.5. Validation de la solution théorique exacte

La solution numérique $x_2^{num}(t)$ est la solution de l'équation suivante :

$$(IV-61) \quad \dot{x}_2^{num}(t) + \tilde{\omega}_0^2 x_2^{num}(t) = - \left(C_0 + C_1 |x_2^{num}(t)| \right) \dot{x}_2^{num}(t) + 4\pi \tilde{f}_0 \tilde{\lambda}_2 x_2^{num}(t) |x_2^{num}(t)|^{\beta_2} - \frac{\tilde{\lambda}_2^2 \mu_{\beta_2}^2}{\mu_{2\beta_2}} x_2^{num}(t) |x_2^{num}(t)|^{2\beta_2}$$

Dans un premier test, on prend un couple de valeurs $(\tilde{\lambda}_2; \beta_2)$ d'une importance relative "faible", pour définir $\lambda K^2(x)x(t)$: fonction croissante vérifiant les conditions d'application de la méthode "Averaging". Les paramètres choisis vérifient la condition de positivité de $\Omega_2^2(A_2)$. Comme dans le cas de la non-linéarité $\lambda K^1(x)x(t)$, le calcul du

terme $\theta_2(t) = \int_0^t \left(\tilde{f}_0 - \frac{\tilde{\lambda}_2 \mu_{\beta_2}}{2\pi} A_2^{\beta_2}(s) \right) ds$ a été réalisé par résolution numérique d'une

équation différentielle du deuxième ordre établie entre $\dot{\theta}_2(t)$ et $\ddot{\theta}_2(t)$. Pour les détails de ce calcul, on peut se reporter à l'Annexe 2bis. Le résultat de la comparaison effectuée entre la solution numérique (IV-61) et la solution analytique (IV-60) est illustré par la Figure IV-12 pour le cas d'un lâcher à 12 mm d'amplitude initiale :

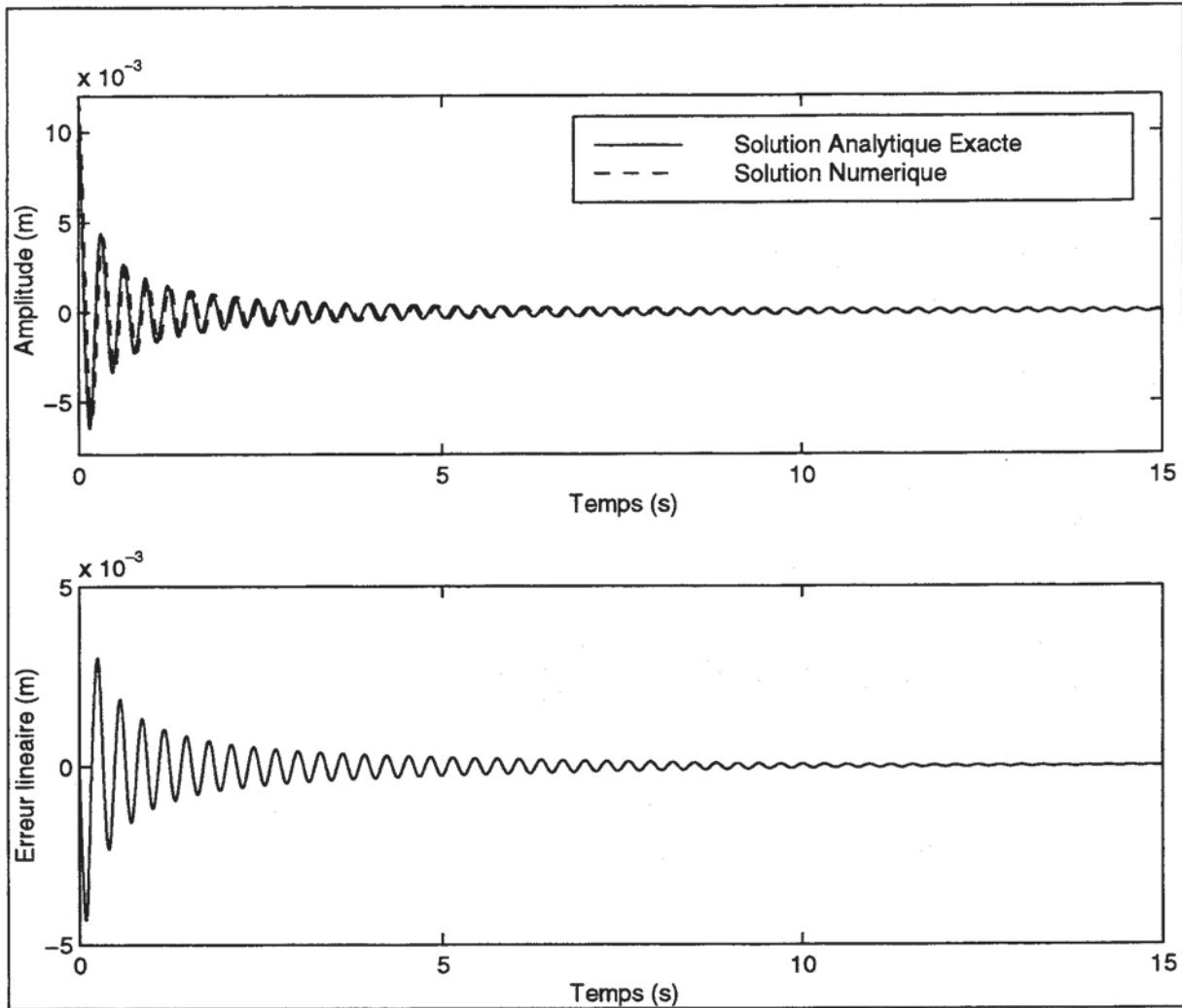


Figure IV-12 : Comparaison entre la solution analytique exacte (IV-60) et la solution obtenue par intégration numérique de l'équation du mouvement (IV-61). $(\tilde{\lambda}_2; \beta_2)$ de "faible importance".

Valeur des paramètres : $C_0 = 0.15 s^{-1}$; $C_1 = 2100 m^{-1} s^{-1}$; $f_0 = 3.3 Hz$; $\tilde{\lambda}_2 = 10 m^{-\beta_2} s^{-1}$; $\beta_2 = 0.55$.

Pour une valeur de $\tilde{\lambda}_2$ plus importante, le résultat de cette comparaison est illustré par la Figure IV-13 :

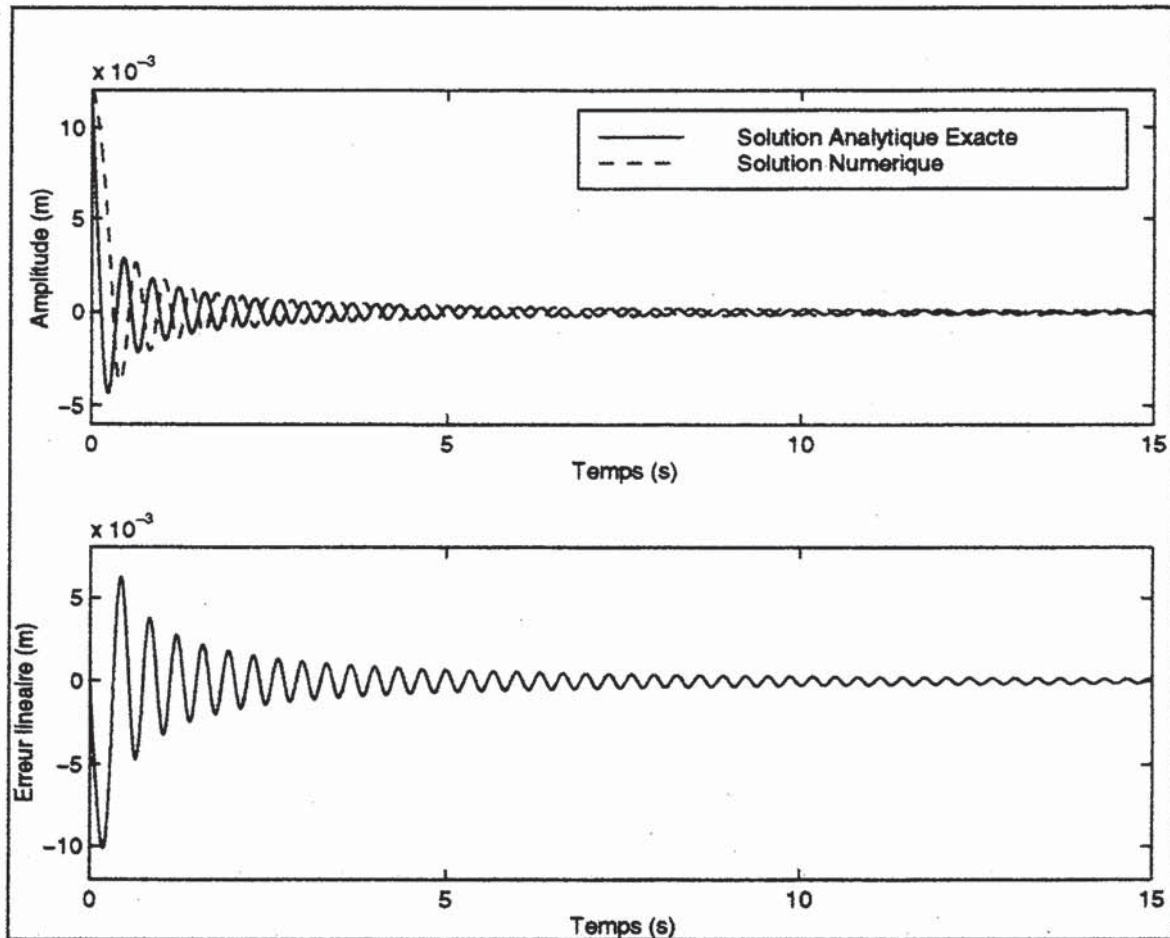


Figure IV-13 : Comparaison entre la solution analytique exacte (IV-60) et la solution obtenue par intégration numérique de l'équation du mouvement (IV-61). $(\tilde{\lambda}_2; \beta_2)$ caractéristique d'une évolution de la fréquence constatée expérimentalement.

Valeur des paramètres: $C_0 = 0.15 \text{ s}^{-1}$; $C_1 = 2100 \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$; $\tilde{f}_0 = 3.3 \text{ Hz}$; $\tilde{\lambda}_2 = 150 \text{ m}^{-\beta_2} \text{ s}^{-1}$; $\beta_2 = 0.55$.

On constate, comme dans le cas de la non-linéarité $\lambda K_1(x)x(t)$, un déphasage qui s'établit dès le début du lâcher entre les deux solutions. Ce déphasage est la conséquence conjointe des approximations effectuées concernant l'expression du terme de vitesse et d'une expression de la force de rappel décroissante.

La recherche d'une solution approchée est effectuée pour les mêmes raisons déjà évoquées dans le cas de la non-linéarité $\lambda K_1(x)x(t)$.

IV.3.5.6. Calcul d'une solution théorique approchée

En considérant que $\left(\frac{1}{2}\beta_2 + 1\right) \approx 1 + \epsilon$, l'équation (IV-58) est approchée par :

$$(IV-62) \quad \dot{A}_2(t) \cong -A_2 \left(\frac{C_0}{2} + \mu(2,-1)C_1 A_2 \right)$$

La solution approchée de l'enveloppe $A_2^{ap}(t)$ est alors :

$$(IV-63) \quad A_2^{ap}(t) = \frac{A_0}{e^{\frac{C_0}{2}t} - 2\mu(2,-1)\frac{C_1}{C_0}A_0} \quad A_0 = \frac{x_0}{1 + 2\mu(2,-1)\frac{C_1}{C_0}x_0}$$

Les conséquences de l'approximation (IV-62), permettent d'envisager une détermination analytique de $\theta_2(t)$, soit l'intégrale $\int_0^t \Omega_2(A_2^{ap}(s)) ds = 2\pi \int_0^t \left(\tilde{f}_0 - \frac{\tilde{\lambda}_2 \mu_{\beta_2}}{2\pi} A_2^{ap\beta_2}(s) \right) ds$. Les développements de ce calcul sont reportés en Annexe 3. Le résultat peut être défini à partir des fonctions hypergéométriques mais l'expression établie s'avère finalement inexploitable simplement dans l'étape d'identification. Pour cette raison, l'approximation suivante est réalisée :

$$(IV-64) \quad \int_0^t \left(\tilde{f}_0 - \frac{\tilde{\lambda}_2 \mu_{\beta_2}}{2\pi} A_2^{\beta_2}(s) \right) ds \cong \left(\tilde{f}_0 - \frac{\tilde{\lambda}_2 \mu_{\beta_2}}{2\pi} A_2^{ap\beta_2}(t) \right) t$$

Nous vérifions à posteriori (cf. Figure IV-16) que cette approximation est acceptable. Nous obtenons la solution analytique approchée (IV-65) :

$$(IV-65) \quad x_2^{ap}(t) = A_2^{ap}(t) \cos \left(2\pi \left(\tilde{f}_0 - \frac{\tilde{\lambda}_2 \mu_{\beta_2}}{2\pi} A_2^{ap\beta_2}(t) \right) t \right)$$

Cette solution nous permet de vérifier l'équation (IV-38), si on impose :

$$(IV-66) \quad \frac{\tilde{\lambda}_2 \mu_{\beta_2}}{2\pi} = \lambda_2 ; \quad \tilde{\gamma}_2 = \frac{\tilde{\lambda}_2^2 \mu_{\beta_2}^2}{\mu_{2\beta_2}} \quad \text{et} \quad \tilde{f}_0 = f_0$$

La non-linéarité de force de rappel $\lambda K^2(x)x(t)$ qui est à intégrer dans l'équation du mouvement (IV-1) s'exprime finalement par :

$$(IV-67) \quad \lambda K^2(x) = -4\pi f_0 \lambda_2 x(t) |x(t)|^{\beta_2} + \frac{\lambda_2^2 \mu_{\beta_2}^2}{\mu_{2\beta_2}} x(t) |x(t)|^{2\beta_2}$$

Les conséquences des approximations réalisées pour parvenir à une solution que l'on peut utiliser dans une étape d'optimisation sont maintenant estimées par comparaison avec la solution analytique exacte (IV-60). On reprend les jeux de paramètres utilisés précédemment. La Figure IV-14 suivante illustre cette comparaison dans le cas d'un lâcher effectué à 12 mm pour un couple de valeur $(\tilde{\lambda}_2; \beta_2)$ de "faible importance":

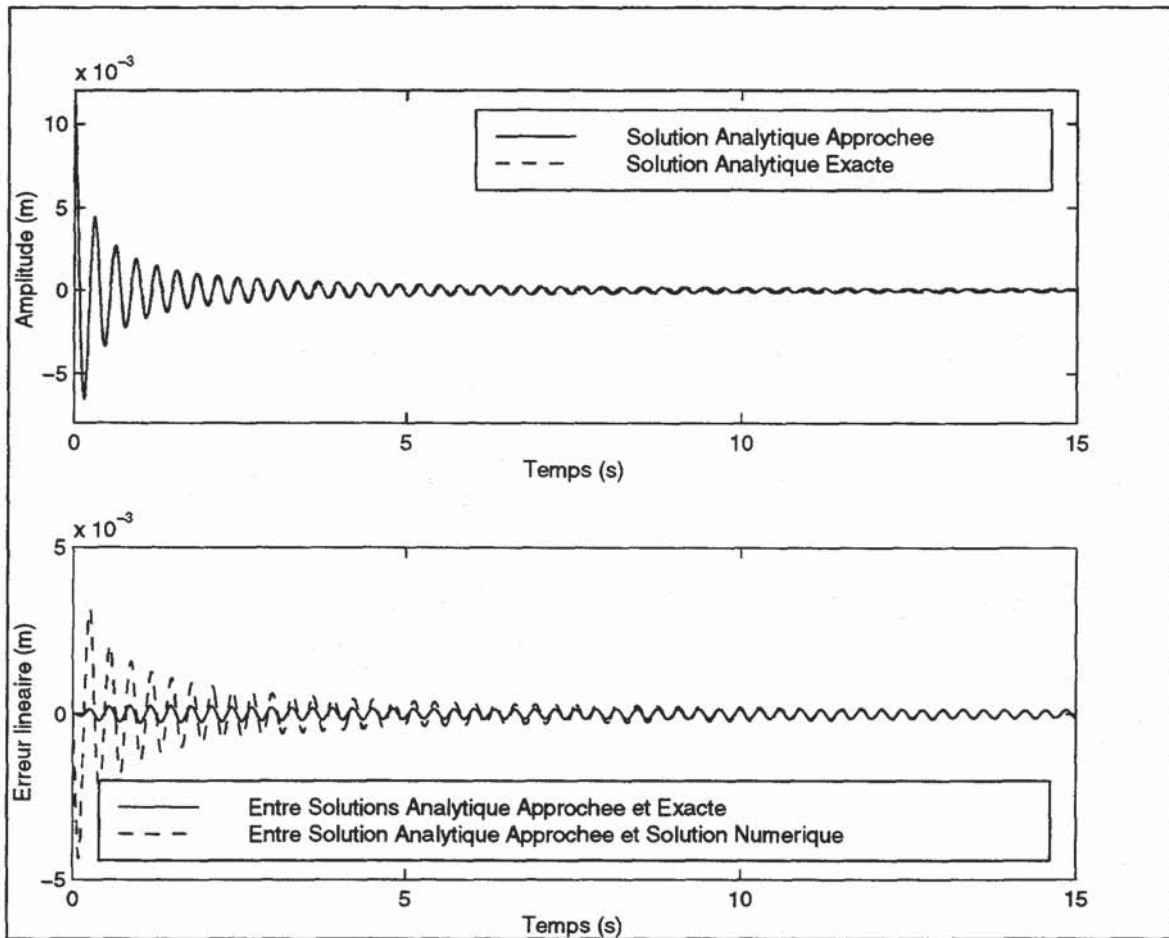


Figure IV-14 : Comparaison entre la solution analytique approchée (IV-65) et la solution analytique exacte (IV-60). ($\tilde{\lambda}_2; \beta_2$) de "faible importance".

Valeur des paramètres : $C_0 = 0.15 \text{ s}^{-1}$; $C_1 = 2100 \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$; $f_0 = 3.3 \text{ Hz}$; $\tilde{\lambda}_2 = 10 \text{ m}^{-\beta_2} \text{ s}^{-1}$; $\beta_2 = 0.55$.

Pour une valeur $\tilde{\lambda}_2$ caractéristique des fluctuations de la fréquence constatées dans le signal expérimental, le même comparatif est effectué et illustré par la Figure IV-15 :

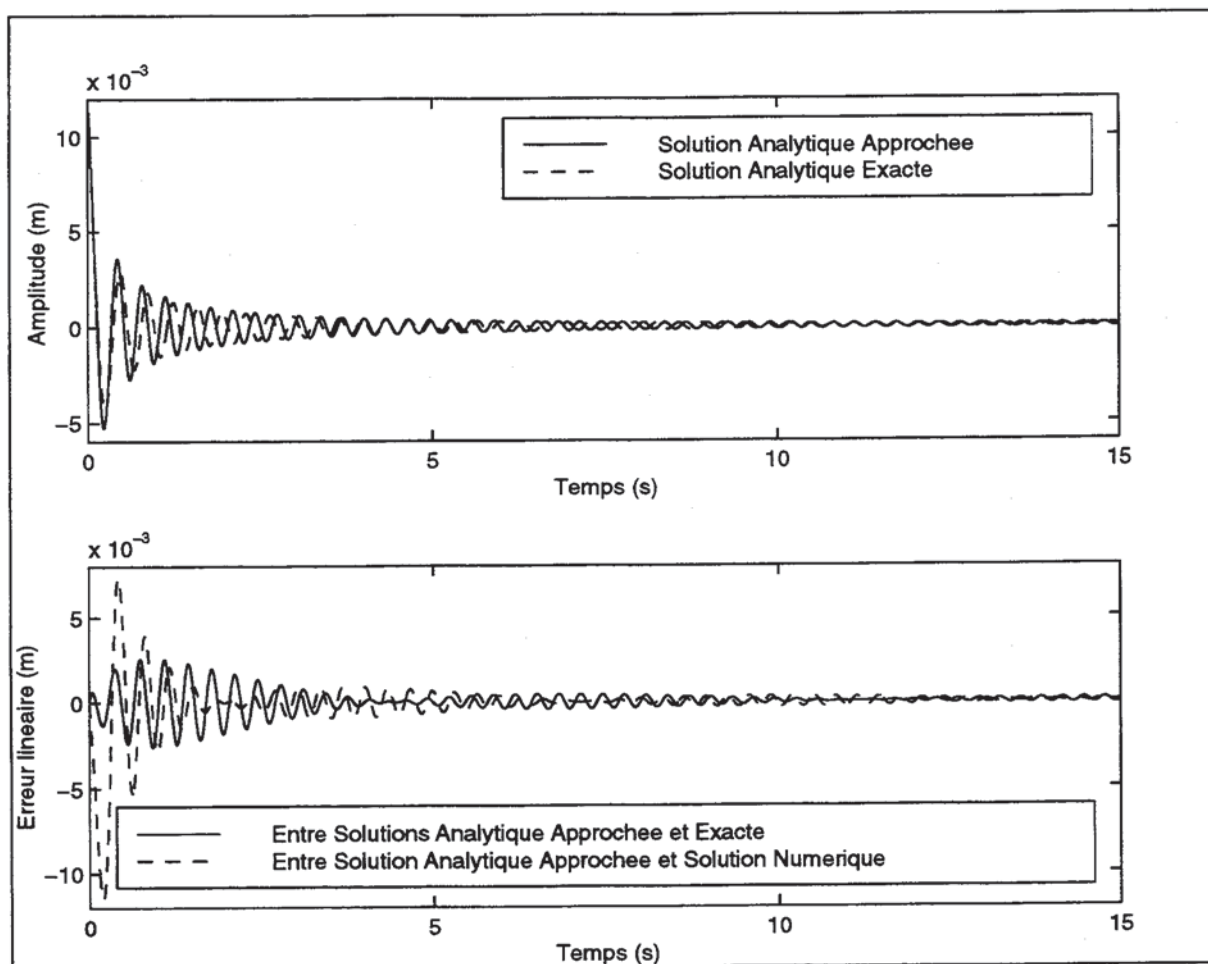


Figure IV-15 : Comparaison entre la solution analytique approchée (IV-65) et la solution analytique exacte (IV-60). $(\tilde{\lambda}_2; \beta_2)$ caractéristique de l'évolution de la fréquence constatée expérimentalement.

Valeur des paramètres : $C_0 = 0.15 \text{ s}^{-1}$; $C_1 = 2100 \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$; $f_0 = 3.3 \text{ Hz}$; $\tilde{\lambda}_2 = 150 \text{ m}^{-\beta_2} \text{ s}^{-1}$; $\beta_2 = 0.55$.

On observe sur la Figure IV-15 des conséquences similaires à celles évoquées pour le cas de la solution approchée, déterminée lorsqu'une non-linéarité de force de rappel $\lambda K^1(x)x(t)$ est prise en compte.

Pour ce deuxième jeu de paramètres, on illustre sur la Figure IV-16, les conséquences des approximations effectuées sur l'enveloppe et sur la fréquence par comparaison avec les expressions analytiques exactes :

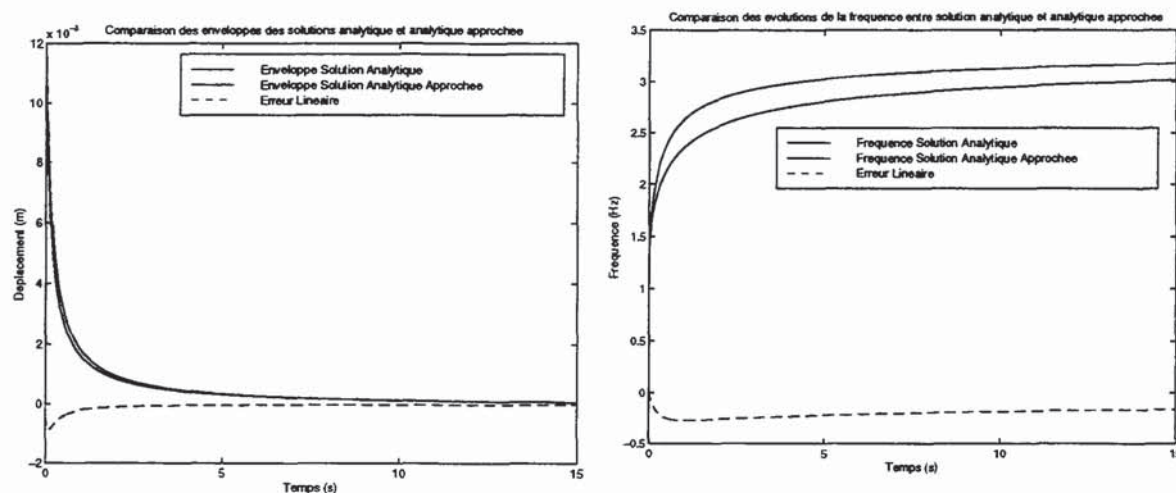


Figure IV-16 : Comparaison de l'enveloppe approchée et de la fréquence approchée avec leur expression analytique exacte.

On constate que l'approximation effectuée sur l'enveloppe de la réponse est de faible importance (erreur linéaire presque nulle). Par contre, l'approximation imposée au terme de fréquence, qui tient aussi compte de celle de l'enveloppe, entraîne une surestimation de la fréquence par rapport aux valeurs données par la formulation exacte.

Les deux modèles non-linéaires de force de rappel $\lambda K^1(x)x(t)$ et $\lambda K^2(x)x(t)$ définis pour prendre en compte l'évolution de la fréquence propre de l'assemblage au cours du lâcher ont permis de retrouver les modèles établis par une approche empirique moyennant quelques approximations supplémentaires. L'ensemble des approximations que l'on peut attribuer à la méthode "Averaging" et des simplifications de calcul se réduisent à un faible déphasage et à un écart de l'ordre de 10 % sur l'estimation de la fréquence entre les solutions analytiques approchées et les solutions numériques. Ces écarts constatés sont, de loin, plus faibles que ceux qui seraient obtenus si la solution était issue d'un formalisme linéaire de l'équation du mouvement. Nous avons montré, dans les cas où la non-linéarité de force de rappel est "faible", et donc a fortiori nulle, que la méthode "Averaging" donne des résultats similaires à une solution déterminée par intégration numérique de l'équation de mouvement.

Sur la base de comparaisons effectuées dans ce paragraphe, aucun élément ne permet d'orienter le choix pour l'un ou l'autre de ces deux modèles, si ce n'est que $\lambda K^1(x)x(t)$ est, d'un point de vue mathématique, plus simple que $\lambda K^2(x)x(t)$.

IV.3.6. Comparaison avec la solution à fréquence constante - Force élastique de rappel non-linéaire

On peut vérifier que la méthode "Averaging" appliquée lorsqu'une solution est recherchée sous la forme $x(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$, donne des solutions théoriques moins riches que celles calculées par la méthode précédente. On trouve, pour un modèle non-linéaire d'amortissement $C(x, \dot{x}) = (C_0 + C_1|x|)$ et une non-linéarité de force de rappel $\lambda K^1(x)x(t) = -\bar{\lambda}_1|x|^{\beta_1}$, une réponse dont l'enveloppe et la phase sont déterminées par les équations suivantes :

$$(IV-68) \quad \dot{A}(t) = - \left[\frac{AC_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \Phi d\Phi + \frac{C_1 A^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos \Phi| \sin^2 \Phi d\Phi \right] = -\frac{C_0}{2} A(t) - C_1 \mu(2,-1) A^2(t)$$

$$(IV-69) \quad \dot{\varphi}(t) = - \left[\frac{\bar{\lambda}_1 A^{\beta_1+1}}{2\pi \omega_0 A} \int_0^{2\pi} |\cos \Phi|^{\beta_1} \cos^2 \Phi d\Phi \right] = -\frac{\bar{\lambda}_1 \mu_{\beta_1} A^{\beta_1}(t)}{2\omega_0}$$

L'équation différentielle (IV-68) est équivalente à l'équation (IV-49) exprimée précédemment et correspond effectivement à une approximation de (IV-43) où les termes de la non-linéarité de force de rappel ont été négligés. Contrairement à ce que l'on a obtenu ou imposé précédemment, ici, le terme de phase n'est pas nul. Après résolution de (IV-69), on trouve la formulation suivante :

$$(IV-70) \quad \varphi(t) = -\frac{\bar{\lambda}_1 \mu_{\beta_1}}{2\omega_0} \int_0^t A^{\beta_1}(s) ds$$

$\varphi(t)$ peut être exprimé explicitement à partir des fonctions hypergéométriques. Pour les détails de ce calcul on peut se reporter à l'Annexe 3. On obtient alors la solution suivante :

$$(IV-71) \quad x(t) = A(t) \cos \left(\omega_0 t - \frac{\bar{\lambda}_1 \mu_{\beta_1}}{2\omega_0} \int_0^t A^{\beta_1}(s) ds \right)$$

où $A(t)$ est équivalent à la formulation (IV-49).

La solution (IV-71) est comparée à la solution numérique calculée dans le paragraphe précédent par résolution de l'équation (IV-47). Dans le cas d'un couple de valeurs $(\bar{\lambda}_1; \beta_1)$ de faible importance, le résultat de cette comparaison est reporté sur la Figure IV-17 :

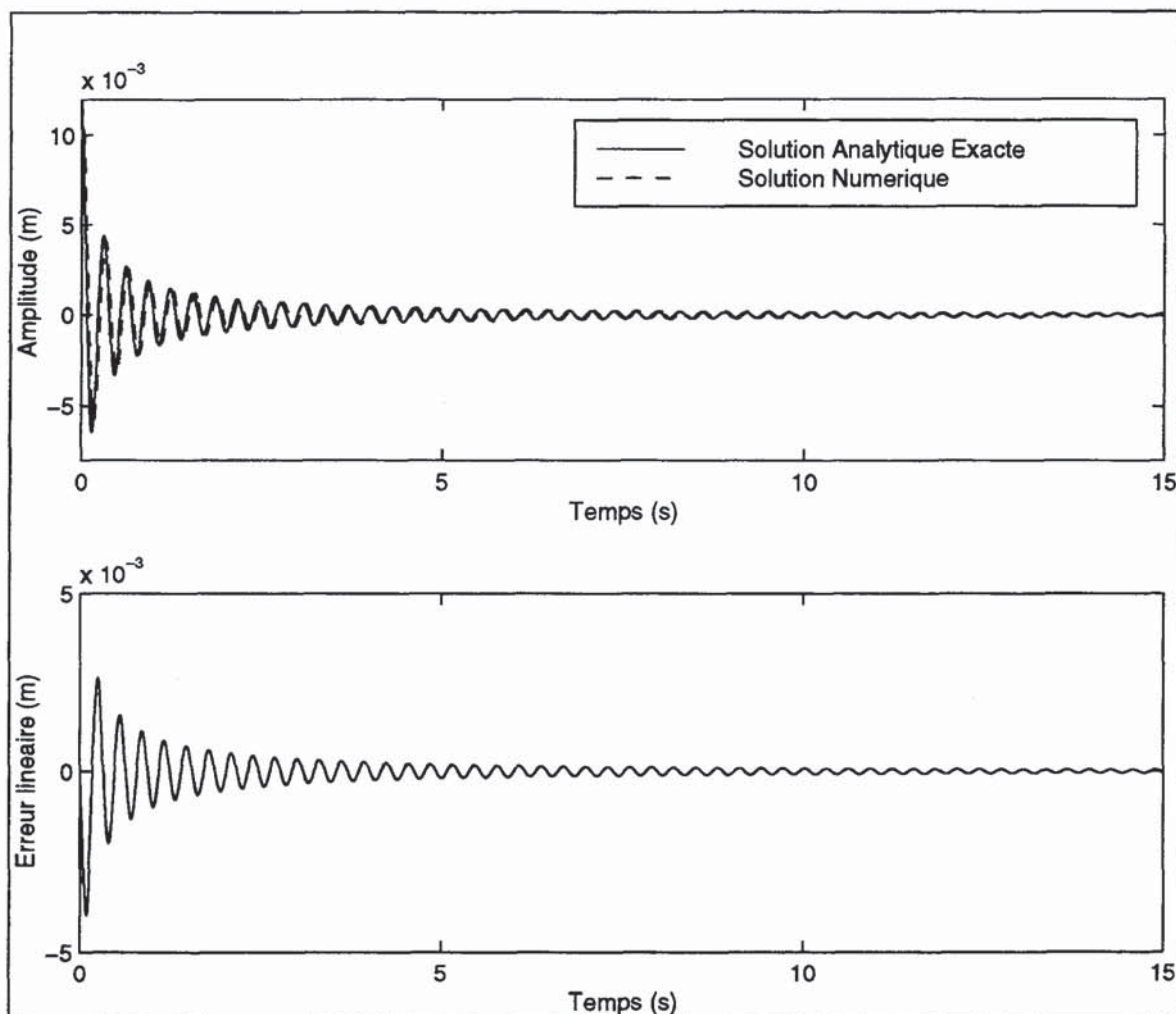


Figure IV-17 : Comparaison entre la solution numérique déterminée par la résolution de l'équation (IV-47) avec la solution (IV-71). $(\bar{\lambda}_1; \beta_1)$ de "faible importance".

Valeur des paramètres : $C_0 = 0.15 \text{ s}^{-1}$; $C_1 = 2100 \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$; $f_0 = 3.3 \text{ Hz}$; $\bar{\lambda}_1 = 500 \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-2}$; $\beta_1 = 0.55$.

Lorsque la valeur $\bar{\lambda}_1$ est représentative d'une évolution physique de la fréquence, on obtient le résultat présenté par la Figure IV-18 :

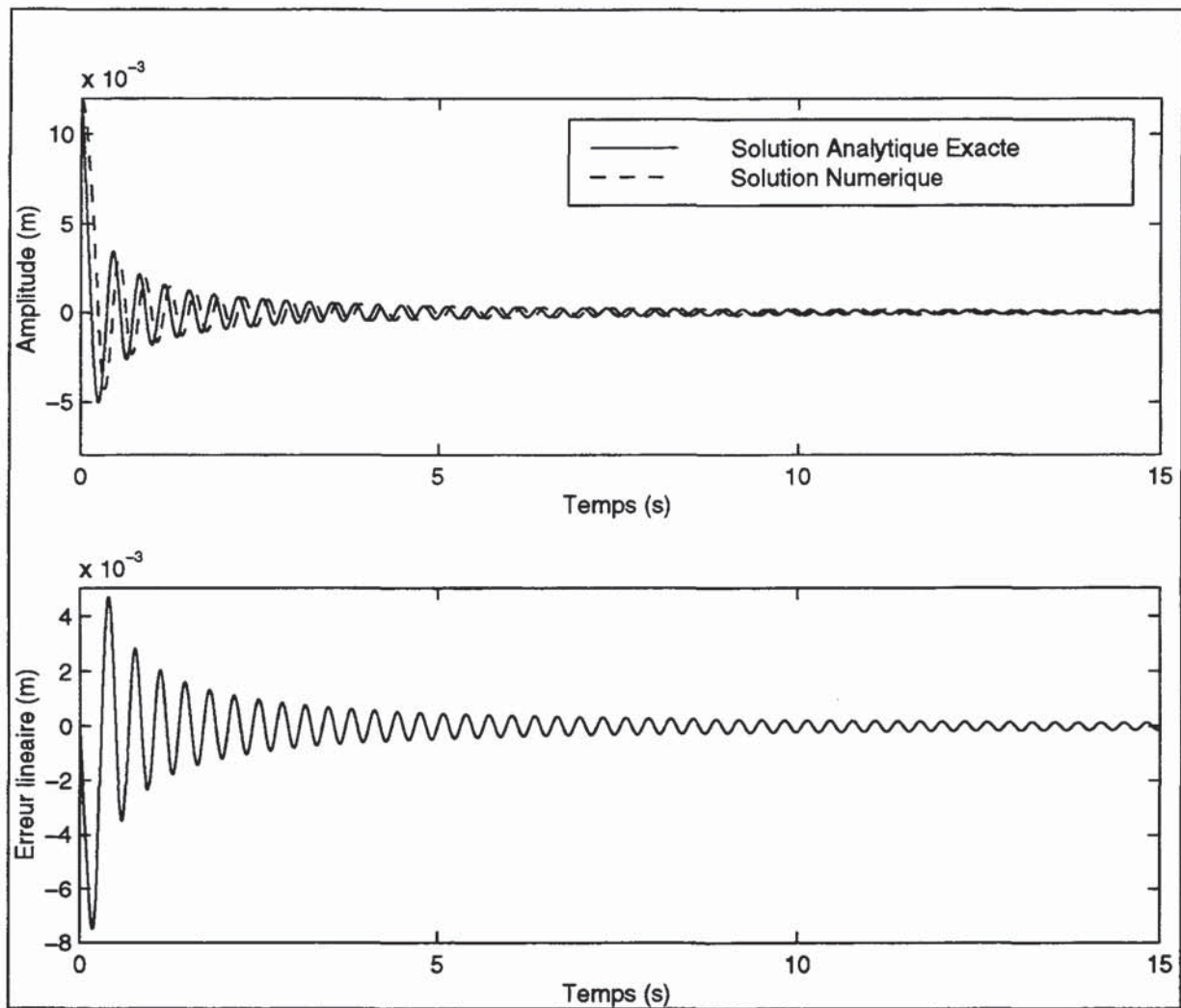


Figure IV-18 : Comparaison entre la solution numérique déterminée par la résolution de l'équation (IV-47) avec la solution (IV-71). $(\bar{\lambda}_1; \beta_1)$ caractéristique d'une évolution de la fréquence observée expérimentalement.

Valeur des paramètres : $C_0 = 0.15 \text{ s}^{-1}$; $C_1 = 2100 \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$; $f_0 = 3.3 \text{ Hz}$; $\bar{\lambda}_1 = 4000 \text{ m}^{-\beta_1} \text{ s}^{-2}$; $\beta_1 = 0.55$.

On observe, encore dans ce cas, une différence de phase qui s'établit dès le début du lâcher. Les évolutions de la fréquence et de l'enveloppe sont correctement traduites dans les deux cas. Un déphasage s'établit dès le début du lâcher entre les deux solutions. Il est aussi lié à la forme imposée de la vitesse $\dot{x}(t)$ qui ne permet pas de vérifier correctement la condition initiale de vitesse nulle à l'instant initial du lâcher. On constate que la solution obtenue par cette démarche donne directement la formulation approchée qui est finalement utilisée ; sauf pour le terme de fréquence qu'il faut approcher aussi dans ce cas.

IV.3.7. Autres modèles d'amortissement

On présente brièvement dans ce paragraphe, les solutions analytiques et analytiques approchées, calculées par la méthode "Averaging", pour les autres modèles d'amortissement envisagés en air.

Pour le modèle d'amortissement : $C(x, \dot{x}) = \epsilon (C_0 + C_1|x| + C_2x^2)$, nous proposons la solution obtenue dans le cas où la non-linéarité de force de rappel est $\lambda K^1(x)x(t)$. Cette solution s'exprime à partir de la résolution de l'équation différentielle de l'enveloppe suivante :

$$(IV-72) \quad \dot{A}(t) = \frac{-A \left(\frac{C_0}{2} + \mu(2, -1)C_1A + \frac{C_2}{8}A^2 \right) (\bar{\omega}_0^2 - \bar{\lambda}_1 \mu_{\beta_1} A^{\beta_1})}{\bar{\omega}_0^2 - \bar{\lambda}_1 \mu_{\beta_1} \left(\frac{1}{4} \beta_1 + 1 \right) A^{\beta_1}}$$

la phase $\varphi(t)$ est imposée constante et égale à 0, et $\theta(t)$ vaut :

$$(IV-73) \quad \theta(t) = \int_0^t \sqrt{\bar{\omega}_0^2 - \bar{\lambda}_1 \mu_{\beta_1} A^{\beta_1}(s)} ds$$

Même dans le cas où l'on néglige la participation de la force de rappel dans l'expression de l'enveloppe (IV-72), une expression analytique de celle-ci n'est pas accessible. Parce que nous avons choisi de conserver une démarche analytique sans avoir recours à l'intégration numérique, le modèle de solution défini à partir de (IV-72) et (IV-73) est laissé de côté et n'est pas exploité dans la suite de ce travail.

Pour le dernier modèle d'amortissement non-linéaire envisagé en air : $C(x, \dot{x}) = \epsilon (C_0 + C_2x^2)$ et lorsque l'on prend en compte une non-linéarité de raideur $\lambda K^2(x)x(t)$, l'enveloppe est déterminée à partir de l'expression :

$$(IV-74) \quad \dot{A}(t) = \frac{-A \left(\frac{C_0}{2} + \frac{C_2}{8}A^2 \right) (\tilde{\omega}_0 - \tilde{\lambda}_2 \mu_{\beta_2} A^{\beta_2})}{\tilde{\omega}_0 - \tilde{\lambda}_2 \mu_{\beta_2} \left(\frac{1}{2} \beta_2 + 1 \right) A^{\beta_2}}$$

et de $\theta(t)$ donné par :

$$(IV-75) \quad \theta(t) = \int_0^t (\tilde{\omega}_0 - \tilde{\lambda}_2 \mu_{\beta_2} A^{\beta_2}(s)) ds$$

La solution approchée qui sera utilisée dans l'étape d'optimisation s'exprime :

$$(IV-76) \quad x(t) = \frac{A_0}{\sqrt{e^{C_0 t} - \frac{C_2}{4C_0} A_0^2}} \cos\left(2\pi\left(f_0 - \frac{\lambda\mu_\beta}{2\pi} A^\beta\right)t\right) \quad ; \quad A_0 = \frac{x_0}{\sqrt{1 + \frac{C_2}{4C_0} x_0^2}}$$

Dans la mesure où les remarques et constatations faites à propos des deux types de non-linéarités de force de rappel et considérant que les résultats obtenus n'ont pas permis d'orienter le choix pour l'un ou pour l'autre de ces modèles, dans la suite, nous ne présenterons plus que les résultats concernant la non-linéarité $\lambda K^2(x)x(t)$.

IV.4. Calcul de la solution $x(t)$ en eau stagnante - Force élastique de rappel non-linéaire

Sans donner les détails des calculs car la démarche et les constatations seraient identiques à celles présentées en air, les solutions analytiques déterminées par la méthode "Averaging" pour quelques uns des modèles d'amortissement envisagés en eau stagnante sont maintenant présentées. Nous précisons aussi les solutions approchées qui seront finalement employées dans l'étape d'optimisation. Une analyse de l'évolution de la fréquence au cours des lâchers en eau stagnante par la méthode des passages successifs par zéro a montré des tendances similaires à celles observées en air. Le modèle non-linéaire de force de rappel $\lambda K^2(x)x(t)$ est conservé pour le calcul des solutions.

Pour le premier modèle envisagé en eau : $C(x, \dot{x}) = (C_0 + C_3|\dot{x}|)$ qui introduit le terme d'amortissement linéaire C_0 et un terme d'amortissement quadratique visqueux $C_3|\dot{x}|$, la solution approchée obtenue est :

$$(IV-77) \quad x(t) = \frac{A_0}{e^{\frac{C_0}{2}t} - \frac{16f_0}{3} \frac{C_3}{C_0} A_0} \cos\left(2\pi\left(f_0 - \frac{\lambda\mu_\beta}{2\pi} A^\beta\right)t\right) \quad ; \quad A_0 = \frac{x_0}{\left(1 + \frac{16f_0}{3} \frac{C_3}{C_0} x_0\right)}$$

Si le terme supplémentaire $C_1|x|$ est introduit en plus dans le modèle, terme vraisemblablement lié aux dissipations non-linéaires de structure, la solution s'exprime :

$$(IV-78) \quad \boxed{\begin{aligned} x(t) &= \frac{A_0}{e^{\frac{C_0}{2}t} - \left(2\mu(2,-1)\frac{C_1}{C_0} + \frac{16f_0}{3} \frac{C_3}{C_0}\right) A_0} \cos\left(2\pi\left(f_0 - \frac{\lambda\mu_\beta}{2\pi} A^\beta\right)t\right) \\ A_0 &= \frac{x_0}{\left(1 + \left(2\mu(2,-1)\frac{C_1}{C_0} + \frac{16f_0}{3} \frac{C_3}{C_0}\right) x_0\right)} \end{aligned}}$$

Si on considère un modèle dépendant uniquement de la vitesse, soit : $C(x, \dot{x}) = \epsilon (C_0 + C_3 \dot{x}^2)$, la solution s'écrit :

(IV-79)

$$x(t) = \frac{A_0}{\sqrt{e^{C_0 t} - \frac{3C_4}{4C_0} (2\pi f_0)^2 A_0^2}} \cos\left(2\pi\left(f_0 - \frac{\lambda\mu_\beta}{2\pi} A^\beta\right)t\right) ; \quad A_0 = \frac{x_0}{\sqrt{1 + \frac{3C_4}{4C_0} (2\pi f_0)^2 x_0^2}}$$

On constate que la prise en compte des termes de vitesse $C_3|\dot{x}|$ ou $C_4\dot{x}^2$ conduit à une expression d'une enveloppe, fonction de la fréquence propre f_0 . D'une part, la présence du terme f_0 dans l'expression de l'enveloppe peut permettre de distinguer des modèles avec ou sans effet fluide. D'autre part, la prise en compte uniquement de termes de vitesse n'entraîne aucune variation de la phase et ne peut donc représenter l'évolution de la fréquence. Nous sommes alors obligés de rajouter dans les deux cas (amortissement fonction du déplacement et/ou fonction de la vitesse) le terme non-linéaire de force de rappel $\lambda K^2(x)x(t)$.

IV.5. Conclusion

Dans ce chapitre, les modèles d'amortissement non-linéaires envisagés pour différentes conditions environnementales (air, eau stagnante, eau en écoulement) ont été proposés. Pour le cas de l'air et considérant le premier modèle d'amortissement, une solution analytique à fréquence constante déterminée par la méthode "*Averaging*" a été explicitée. L'importance de l'évolution de la fréquence au cours des lâchers d'assemblage a nécessité d'enrichir cette solution par la prise en compte de deux modèles possibles de fréquence déterminés par analyse des signaux de réponses mesurées.

Ensuite, deux modèles non-linéaires de force de rappel susceptibles de traduire les variations de la fréquence dans le mouvement de l'assemblage combustible ont été formulés. Les solutions analytiques déterminées par la méthode "*Averaging*", lorsque l'on considère simultanément une non-linéarité d'amortissement proportionnelle au déplacement et une non-linéarité de force de rappel, ont été calculées et validées par comparaison avec les solutions obtenues par intégration numérique de l'équation du mouvement. Il s'avère que les solutions analytiques sont difficiles à utiliser simplement dans une étape d'optimisation. En effet les expressions de l'enveloppe et de la phase doivent être déterminées par résolution numérique d'équations différentielles qui, lorsqu'elles sont couplées à une étape d'optimisation, conduisent à des temps de calcul prohibitifs. Pour que ces derniers restent raisonnables, des solutions approchées sont déterminées. Les conséquences des approximations effectuées se traduisent essentiellement par une fréquence qui évolue un peu plus vite que celle de la solution non approchée. On observe un écart qui est de l'ordre de 10%. Les conséquences des approximations sont négligeables sur l'enveloppe des solutions.

Enfin, les solutions calculées pour les autres modèles d'amortissement en air, en eau stagnante ou couplés sont présentées. Nous espérons ainsi pouvoir proposer une unique solution permettant de distinguer les effets du fluide de ceux de la structure.

Le chapitre suivant est consacré à l'utilisation des solutions approchées obtenues, en vue de l'évaluation du taux d'amortissement et de la fréquence du premier mode de l'assemblage. Les essais décrits dans le chapitre II sont utilisés dans une étape d'optimisation des paramètres des solutions présentées dans ce chapitre.

IV.6. Références bibliographiques

[IV-1] BRONSHTEIN I.N, SEMENDYAYEV K.A.

Handbook of mathematics.
Springer. New York. 1997. 973 p.

[IV-2]

MATLAB - The langage of technical computing. Using Matlab Version 5.
The Math Works Inc.1996.



V. PROBLEME INVERSE - CALCUL DE L'AMORTISSEMENT ET DE LA FREQUENCE - RESULTATS ET INTERPRETATIONS - APPLICATIONS

V.1. Introduction

Le but de ce chapitre est de présenter les résultats obtenus à la suite de l'exploitation des solutions qui ont été déterminées dans le chapitre précédent pour les modèles d'amortissement et de force de rappel proposés. L'optimisation des paramètres des solutions est effectuée à partir des essais disponibles en air et en eau stagnante. On détermine le taux d'amortissement et la fréquence du premier mode de l'assemblage pour l'ensemble des lâchers effectués.

La première partie de ce chapitre est consacrée au descriptif de la méthodologie employée pour le traitement des essais. Les outils informatiques et l'algorithme permettant l'optimisation des paramètres par minimisation de l'erreur résiduelle sont détaillés.

Avant de présenter les résultats, les critères permettant de juger de la qualité de l'optimisation utilisés comme outils de comparaison sont établis. Dans le même temps, on définit les formulations utilisées pour représenter les évolutions du taux d'amortissement et celles de la fréquence en fonction de l'amplitude du mouvement.

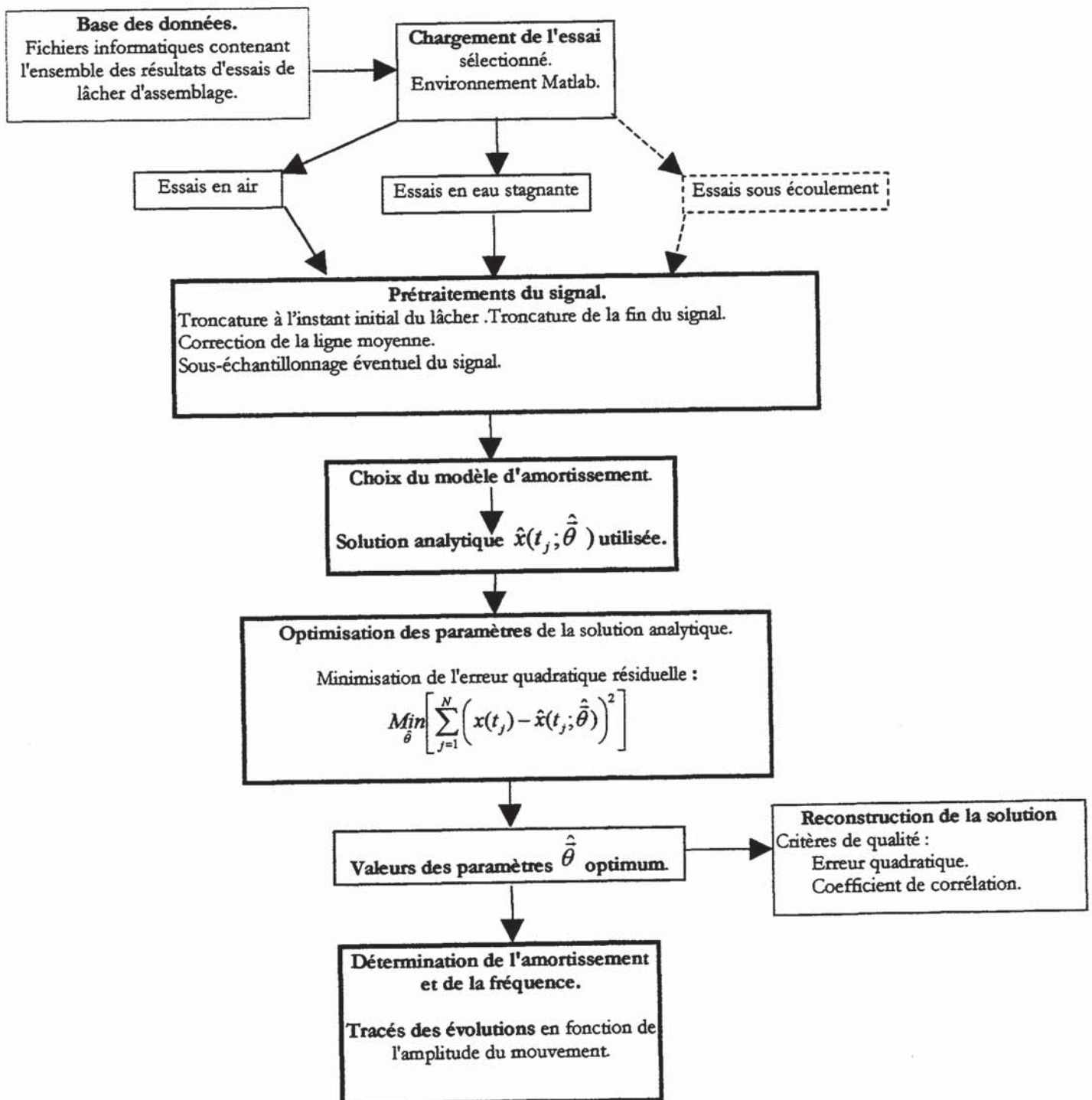
La partie suivante est consacrée à la présentation, la critique et à l'interprétation des résultats obtenus suite aux dépouillements des essais par notre approche. Nous discutons d'abord des résultats en air. Ces derniers sont ensuite comparés à ceux obtenus en eau stagnante. L'accent est porté sur l'analyse des évolutions des caractéristiques linéaires et non-linéaires des modèles d'amortissement et de force de rappel. Dans le même temps, quelques interprétations sont avancées pour expliquer les tendances et les principaux résultats dégagés.

La dernière partie est consacrée à l'utilisation des résultats obtenus dans les premiers paragraphes et consiste à l'implantation, dans le code aux éléments finis CASTEM2000, du modèle d'amortissement et des valeurs des paramètres optimisées. La démarche qui est développée permettra, à terme, de prédire le comportement de l'assemblage soumis à d'autres types d'excitation utilisant la nouvelle modélisation qui est validée ici sur des exemples simples.

V.2. Identification des paramètres des modèles non-linéaires d'amortissement et force élastique de rappel

Afin de déterminer l'amortissement et la fréquence de l'assemblage à partir des essais de lâchers, on réalise un certain nombre d'étapes et de prétraitements du signal. Le schéma suivant récapitule l'enchaînement de ces étapes. Celles-ci sont détaillées par la suite en fonction de leur importance dans le traitement d'un essai.

V.2.1. Organigramme du traitement d'un essai



Dans l'étape de prétraitement du signal, on tronque la mesure à l'instant où l'assemblage est effectivement lâcher. Le signal est recentré par rapport à la position d'équilibre de l'assemblage obtenue en fin de mesure. Dans le but de rendre raisonnable les temps de calcul de l'optimisation, on limite le nombre de points nécessaire pour définir correctement le signal expérimental. Pour cela, la fin de la mesure est supprimée si l'acquisition a duré plus longtemps après que l'assemblage ait retrouvé sa position de repos et un rééchantillonnage peut être effectué.

Ces différentes étapes du traitement sont regroupées dans un unique programme écrit en langage Matlab, logiciel de calcul scientifique disponible est utilisé classiquement dans le laboratoire. Ce logiciel contient un grand nombre de fonctions préprogrammées directement utilisables. Notamment, la fonction "Curvefit", disponible dans la "Toolbox Optimization". Cette fonction permet d'extraire le vecteur des valeurs des paramètres $\vec{\theta}$ qui rendent minimum l'erreur quadratique résiduelle entre la solution analytique et la mesure. L'algorithme implanté pour ce calcul peut être un algorithme itératif de Gauss-Newton ou de Levenberg-Marquardt. C'est ce dernier qui est utilisé car il offre les avantages de la méthode de Gauss-Newton lorsque l'on est proche du minimum recherché, et ceux de la "méthode de la plus grande pente" ("steepest-descent method"), efficace lorsque l'on est loin du minimum. L'algorithme retenu est détaillé dans le paragraphe suivant.

V.2.2. Optimisation des paramètres d'un modèle - critères de qualité

V.2.2.1. Algorithme de Levenberg-Marquardt

La méthode itérative de Levenberg-Marquardt [V-1], [V-2] est basée sur la recherche du minimum de la fonction d'erreur quadratique $\chi^2(\vec{\theta})$, appelée aussi fonction "mérit" ou encore fonction "chi-square". Cette fonction est définie par :

$$(V-1) \quad \chi^2(\vec{\theta}) = \sum_{i=1}^N \left(x(t_i) - \hat{x}(t_i; \vec{\theta}) \right)^2$$

où $x(t_i)$ représente l'ensemble des points correspondants aux données échantillonnées et $\hat{x}(t_i; \vec{\theta})$ l'ensemble des points du modèle de solution analytique défini par des paramètres $\hat{\theta}_i$.

Le principe de la méthode consiste à déterminer le vecteur des paramètres $\vec{\theta}$ de $\hat{x}(t_i; \vec{\theta})$ qui rendent minimum la fonction d'erreur $\chi^2(\vec{\theta})$. Pour converger vers ce minimum une démarche itérative est établie. Pour débiter ce processus, on fournit un vecteur de valeurs

initiales $\vec{\theta}_0$ afin de réaliser la première itération. A l'étape $k+1$ du calcul, la différence $\left| \chi^2(\vec{\theta})_{k+1} - \chi^2(\vec{\theta})_k \right|$ est estimée avec $\chi^2(\vec{\theta})_{k+1} = \chi^2(\vec{\theta} + \overline{\delta\vec{\theta}})_k$ pour un incrément $\overline{\delta\vec{\theta}}$ calculé. Le vecteur des paramètres $\vec{\theta}$ est optimum lorsque cette différence est inférieure à un résidu dont l'utilisateur fixe la valeur. L'intérêt de la méthode de Levenberg-Marquardt est de cumuler les avantages de la méthode de la plus grande pente, performante lorsque le vecteur des valeurs initiales est loin du minimum, et les avantages de la méthode de Gauss-Newton (méthode basée sur le développement en série de Taylor de la fonction d'erreur) qui, elle, est performante lorsque l'on est proche du minimum.

Pour la première de ces deux méthodes, le calcul du vecteur des incréments $\overline{\delta\vec{\theta}}$ à l'étape $k+1$ est obtenu par estimation du gradient $\vec{\nabla}\chi^2(\vec{\theta})_k$ selon la formule :

$$(V-2) \quad \vec{\theta}_{k+1} - \vec{\theta}_k = \overline{\delta\vec{\theta}} = -c \cdot \vec{\nabla}\chi^2(\vec{\theta})_k$$

où c est une constante.

La méthode de Gauss-Newton utilise une formule basée sur une estimation du gradient et de la matrice Hessienne \mathbf{H} , correspondant à la matrice formée par les dérivées partielles seconde de $\chi^2(\vec{\theta})_k$, on obtient alors l'incrément $\overline{\delta\vec{\theta}}$ par :

$$(V-3) \quad \vec{\theta}_{k+1} - \vec{\theta}_k = \overline{\delta\vec{\theta}} = \mathbf{H}^{-1} \cdot \left[\vec{\nabla}\chi^2(\vec{\theta})_k \right]$$

où \mathbf{H} est une forme approchée de la définition exacte, caractérisée par les éléments :

$$(V-4) \quad \mathbf{H}_{qp} = \frac{\partial^2 \chi^2(\vec{\theta})}{\partial \hat{\theta}_q \partial \hat{\theta}_p} \approx -2 \sum_{i=1}^N \left[\frac{\frac{\partial \hat{x}(t_i; \vec{\theta})}{\partial \hat{\theta}_q} \frac{\partial \hat{x}(t_i; \vec{\theta})}{\partial \hat{\theta}_p}}{\partial \hat{\theta}_q \partial \hat{\theta}_p} \right]$$

et où le gradient vaut :

$$(V-5) \quad \nabla_q \chi^2(\vec{\theta}) = G_q = \frac{\partial \chi^2(\vec{\theta})}{\partial \hat{\theta}_q} = -2 \sum_{i=1}^N \left[\left(x(t_i) - \hat{x}(t_i; \vec{\theta}) \right) \frac{\partial \hat{x}(t_i; \vec{\theta})}{\partial \hat{\theta}_q} \right]$$

La détermination de la matrice Hessienne et celle du gradient est effectuée par des méthodes de différentiation numériques. Les algorithmes correspondant à la mise en

œuvre de ces méthodes aux différences finies ne sont pas détaillés ici. On pourra se reporter à la référence [V-2] pour plus de détails.

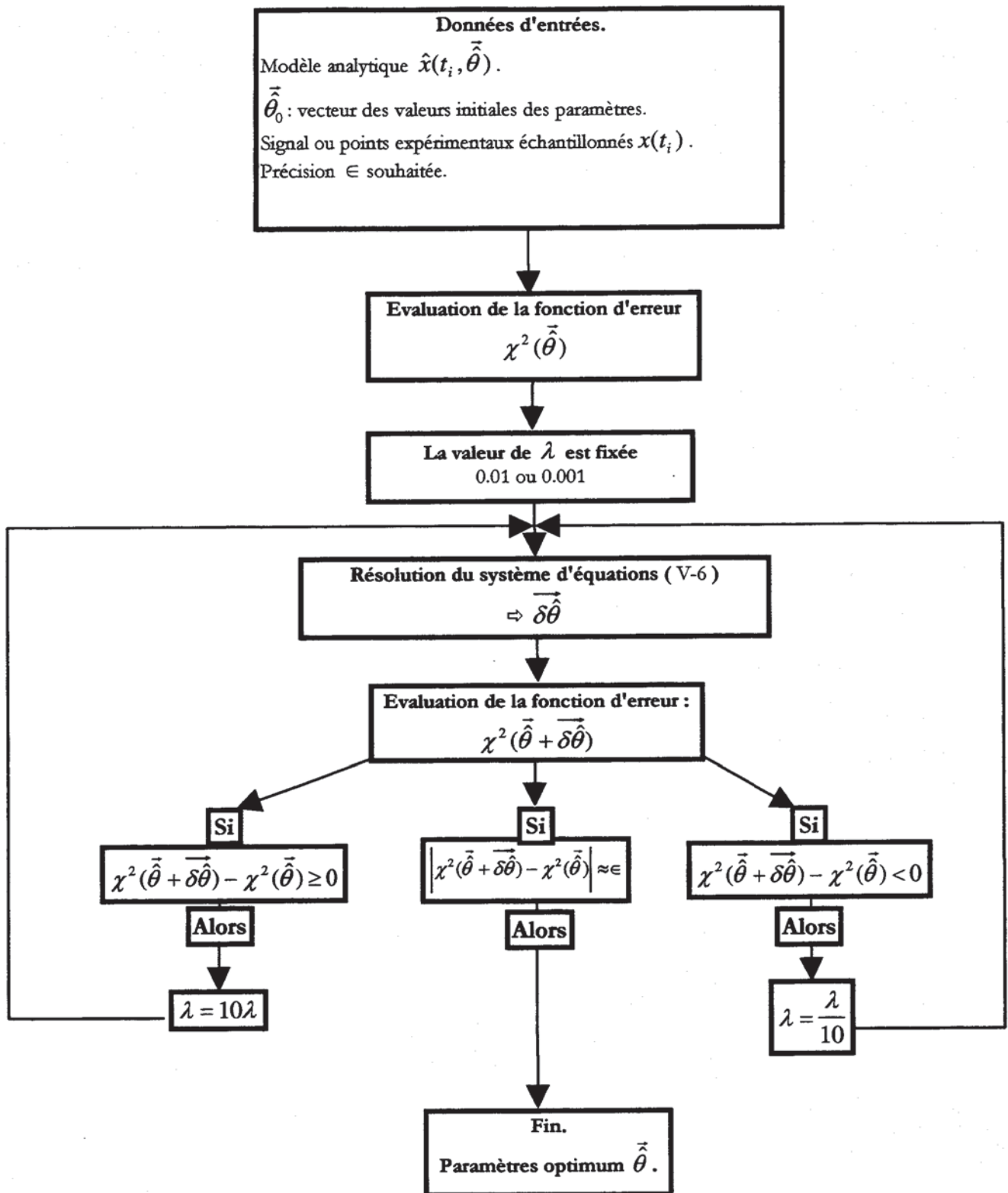
La méthode de Levenberg-Marquardt consiste à regrouper les équations (V-2) et (V-3) sous un seul système d'équations linéaires à résoudre. Celui-ci fournit alors les $\delta\hat{\theta}_i$ permettant d'incrémenter la valeur de chaque paramètre $\hat{\theta}_i$. Ce système d'équations s'écrit :

$$(V-6) \quad \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{M}_{ip} \delta\hat{\theta}_p = -\frac{1}{2} G_q$$

où N_p désigne le nombre de paramètres à optimiser et \mathbf{M} , une matrice définie par :

$$(V-7) \quad \begin{cases} \mathbf{M}_{ii} = -\frac{1}{2} \mathbf{H}_{ii} (1 + \lambda) \\ \mathbf{M}_{ij} = -\frac{1}{2} \mathbf{H}_{ij} \quad (i \neq j) \end{cases}$$

G_q représente la $q^{\text{ième}}$ composante du gradient donné par (V-5). λ est une constante réévaluée à chaque itération en fonction du signe du gradient G_q . La valeur de λ permet de privilégier l'une ou l'autre de la méthode de la plus grande pente ou de Gauss-Newton. En effet, si λ est grand, la matrice \mathbf{M} est principalement diagonale et c'est la méthode de la plus grande pente qui est implémentée. Si λ tend vers zéro c'est la méthode de Gauss-Newton qui est favorisée. Les différentes opérations nécessaires à la détermination du vecteur $\vec{\hat{\theta}}$ des paramètres optimum peuvent être résumées par le schéma suivant :



L'appel et l'utilisation de cet algorithme, disponible dans la "Toolbox" de Matlab, est relativement simple. Les données d'entrées spécifiées dans le schéma synoptique ci-dessus sont passées comme paramètres lors de l'appel de la fonction "Curvefit" ou sont fixées par défaut, comme la précision par exemple. Quelques précautions sont tout de même à prendre pour éviter des temps de calcul trop long ou des résultats biaisés. Ces mises en garde font l'objet du paragraphe suivant.

V.2.2.2. Paramètres influents de l'optimisation

Il y a essentiellement trois raisons pour lesquelles l'étape d'optimisation peut être perturbée et/ou peut engendrer des temps de calcul prohibitifs. Il s'agit du nombre de points qui constituent le signal de mesure, du bruit contenu dans le signal expérimental et du jeu de valeurs fournies pour débiter le processus itératif d'optimisation.

Le dernier point constitue une phase importante dans la démarche d'optimisation. En effet, si quelques précautions ne sont pas prises pour estimer un jeu de valeurs initiales $\bar{\theta}_0$ des paramètres, les résultats peuvent conduire à des valeurs optimisées fausses. Un exemple est donné dans le cas de l'optimisation des paramètres

$\left(\bar{\theta} = (C_0, C_1, f_0, \frac{\tilde{\lambda}_2 \mu \beta_2}{2\pi}, \beta_2) \right)$ de la solution (IV-65) à partir de la donnée du lâcher

9.9 mm en air. Lorsque chacune des valeurs initiales est tirée de manière aléatoire (loi normale) dans un domaine centré sur sa valeur optimale et borné par les valeurs égales à $\pm 100\%$ de cette valeur centrale. Seulement 34% des jeux de valeurs ainsi construits conduisent à la détermination des optimum des paramètres, 54% des cas convergent vers un minimum local et 12% vers une autre valeur. La Figure V-1 illustre les résultats obtenus pour 50 jeux de valeurs initiales différents. L'erreur quadratique résiduelle

minimum, $\sum_{i=1}^N \left(x(t_i) - \hat{x}(t_i; \bar{\theta}) \right)^2$, calculée pour les valeurs optimum des paramètres est

normalisée à 1 (Erreur de Référence, minimum global, repérée par les tirets ---). Pour un jeu de valeurs initiales donné, l'erreur quadratique résiduelle initiale normalisée est calculée

et repérée sur la Figure V-1 par le rapport : $\frac{\text{Erreur Initiale (non nomalisée)}}{\text{Erreur de Référence (non normalisée)}} = \text{Erreur Initiale (normalisée)}$ (points *). Ce

rapport permet de se représenter la "distance" entre le point initiale et le minimum globale de convergence. Les points "+" représentent la valeur de l'erreur finale obtenue après optimisation des paramètres. Une optimisation est correcte lorsque les points "+" sont superposés avec les points de l'erreur de référence (---).

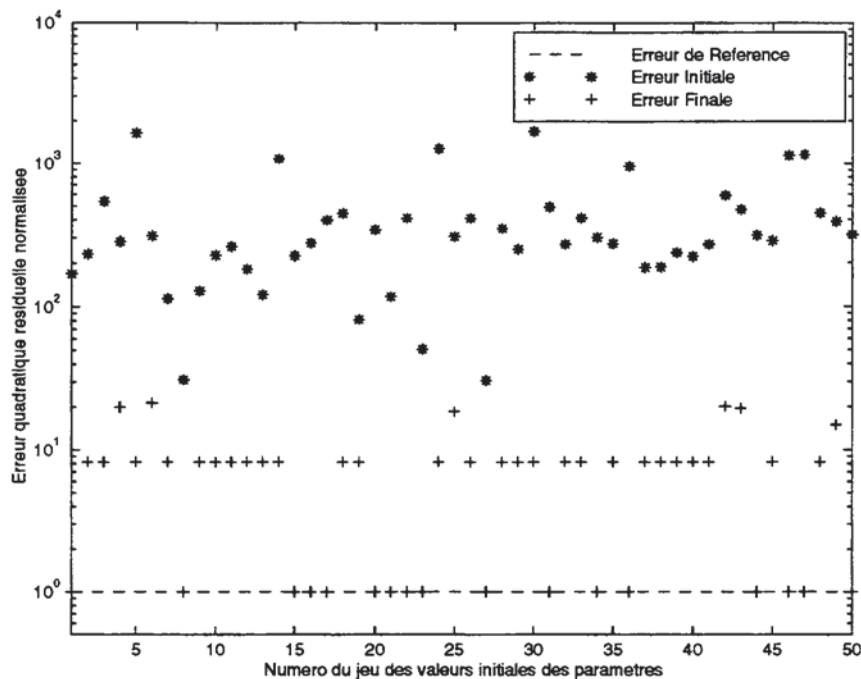


Figure V-1 : Convergence d'optimisations en fonction de différents jeux de valeurs initiales des paramètres.

Pour limiter les cas de convergence vers un minimum local, il faut donc autant que possible fournir un jeu de valeurs initiales le plus proche des valeurs optimum. Dans cette optique, la démarche adoptée consiste à l'exploiter les informations facilement accessibles à partir de la mesure puis à procéder par tâtonnement pour les autres paramètres. Pour l'ensemble des optimisations effectuées nous avons conservé les grandeurs physiques. Une estimation de la valeur du paramètre f_0 (fréquence propre du premier mode de l'assemblage) est déterminée par : $f_0 \approx \frac{1}{T_0}$; $T_0 = 2(t_{j+1} - t_j)$ où t_j et t_{j+1} sont les instants

associés à deux passages successifs par zéro. Les autres paramètres sont choisis et on construit la solution analytique. Cette solution est comparée visuellement au signal expérimental. Si la comparaison des deux fonctions est correcte (les deux courbes sont relativement proches), le jeu des paramètres estimés peut être conservé pour initier le processus d'optimisation. Sinon, une ou plusieurs valeurs sont modifiées jusqu'à obtenir une solution analytique proche du signal mesuré. Un jeu de valeurs initiales donné par $\vec{\theta}_0 = (0.1; 2100; f_0; 12; 0.5)$ avec $f_0 = 3.3$ pour un assemblage 1300 MW et $f_0 = 4.2$ pour un assemblage 900 MW permet d'initier correctement la plus part des optimisations.

L'influence du bruit contenu dans les mesures et ses conséquences sur la qualité du résultat de l'optimisation a donné lieu à une étude rapide. Celle-ci était nécessaire car le choix a été fait de conserver les mesures brutes, non lissées, non filtrées à la suite de leur acquisition. Nous rappelons que la précision estimée sur les mesures du LHC est de

± 0.12 mm. Cet écart correspond à une erreur de ± 3 % pour un lâcher effectué à 4 mm. Celle-ci est de ± 0.75 % pour un lâcher à 16 mm. Pour estimer l'influence du bruit sur la détermination des paramètres, on simule un signal de réponse à partir d'une des formulations analytiques déterminées dans le chapitre précédent, auquel on superpose un bruit généré numériquement. Ce signal bruité est sensé représenter une mesure réelle. On utilise ce signal comme référence dans l'étape d'optimisation et on détermine les paramètres qui rendent minimum l'erreur quadratique résiduelle entre cette référence et le modèle de solution analytique. L'influence du bruit sur la valeur de chaque paramètre est évaluée par comparaison entre les valeurs fixées qui ont servies pour générer le signal et celles obtenues après l'optimisation. Le biais constaté entre les valeurs des paramètres d'entrée et de sortie peut être tracé en fonction du rapport signal sur bruit. Dans notre cas, le bruit observé dans les mesures a pu être modélisé comme un bruit Gaussien, centré de moyenne nulle. On sait, par définition que ce type de bruit a une influence négligeable sur la détermination des valeurs de paramètres dans une étape d'optimisation, principalement lié au fait que ce bruit est de moyenne nulle. Nous avons donc simplement vérifié que pour un rapport signal sur bruit de l'ordre de 35 dB, la valeur des paramètres optimum calculée après optimisation correspondait à celle des paramètres ayant servi à simuler le signal. Visuellement, ce niveau de bruit représente un niveau bien supérieur à celui observé sur les différentes acquisitions en notre possession.

Enfin, pour obtenir une détermination correcte des paramètres optimum il n'est pas nécessaire de conserver tous les points qui constituent une mesure. Pour que les temps de calcul soient réduits sans altérer la valeur des paramètres, il est possible de sous-échantillonner le signal expérimental. Dans le cas de nos applications, les signaux ont été acquis soit avec une fréquence d'échantillonnage de 1 kHz pour un temps de mesure de 15 secondes, soit avec une fréquence de 200 Hz sur une durée de 20 secondes. Selon l'instant effectif de lâcher, le signal utile est représenté par un nombre de points qui varie entre 8000 et 13 500 points (resp. 2500 et 4000 points). Nous avons vérifié qu'un sous-échantillonnage de la mesure qui consiste à ne conserver qu'un point sur 10 (resp. 1 point sur 2) ne modifie pas la valeur des paramètres calculés (la nouvelle fréquence d'échantillonnage vérifie bien le critère de Shannon). C'est effectivement ce qui a été appliqué dans le traitement des essais dont les résultats sont présentés dans la suite de ce chapitre.

V.2.2.3. Critères de qualité

Pour comparer les résultats obtenus par l'optimisation et pour juger de la validité des solutions analytiques calculées, nous utilisons trois critères. Le premier est donné uniquement pour la comparaison visuelle entre le signal mesuré et la solution analytique

optimisée. Nous traçons l'erreur linéaire définie comme la différence entre les deux réponses. On peut ainsi constater d'un déphasage entre les deux signaux et localiser les zones où l'erreur sur l'amplitude est importante. Le second critère est celui de l'erreur quadratique globale résiduelle, adaptée pour comparer la validité de différents modèles à reproduire un même signal expérimental. Elle est définie comme la moyenne des erreurs quadratiques pour chaque couple d'échantillon mesure-modèle. Enfin, le calcul du coefficient de corrélation "Cor" (défini plus loin) ou coefficient ARS (Adjusted R-Squared) permet de juger de la qualité d'un modèle de solution analytique à reproduire un ensemble de signaux différents et présente l'avantage de tenir compte explicitement du nombre de degrés de liberté du problème (nombre de points du signal moins le nombre de paramètres à optimiser) ce qui rend possibles les comparaisons de résultats obtenus à partir de signaux définis par un nombre de points ou de paramètres différent. Ce coefficient est défini classiquement dans la littérature de la manière suivante :

$$(V-8) \quad Cor = 1 - \frac{(N-1)}{(N-N_p)} (1 - R^2)$$

où R^2 est le rapport :
$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\bar{x} - x(t_i))^2 - \sum_{i=1}^N (x(t_i) - \hat{x}(t_i; \vec{\theta}))^2}{\sum_{i=1}^N (\bar{x} - x(t_i))^2}$$

où \bar{x} correspond à la valeur moyenne du signal expérimental : $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(t_i)$, N est le nombre de points du signal et N_p , le nombre de paramètres utilisés dans le modèle de solution analytique.

Les deux derniers critères qui viennent d'être définis permettent de dire qu'un modèle est d'autant plus représentatif du comportement réel si le coefficient "Cor" est proche de 1 et l'erreur quadratique résiduelle proche de zéro. La littérature propose d'autres critères utilisés dans les problèmes d'identification. Dans [V-4], le critère employé pour dégager le meilleur modèle consiste à sélectionner celui qui fournit les paramètres les plus constants pour différentes conditions d'essais (différentes amplitudes de lâcher, différentes vitesses d'avancement,...). Dans [V-5], le critère de sélection est établi en deux phases :

- on sélectionne plusieurs modèles dont la précision est équivalente pour représenter le phénomène que l'on cherche à modéliser,
- on choisit le modèle dont la capacité est la meilleure pour simuler des réponses autres que celles qui ont servi à identifier les paramètres optimum.

Dans l'optique de prédictions du comportement de l'assemblage (utilisant CASTEM2000) soumis à d'autres types d'excitation, c'est cette démarche qui devra être adoptée pour définir quels sont les modèle d'amortissement et de force de rappel à implanter dans ce code de calculs.

V.2.3. Représentation de l'amortissement et de la fréquence

Une fois que les paramètres des modèles de solution analytique sont optimisés, l'objectif est de déterminer la valeur de l'amortissement et de la fréquence de l'assemblage. Deux types de résultats sont présentés dans la suite de ce chapitre. Ils concernent :

- l'amortissement linéaire C_0 et la fréquence propre f_0 ,
- les évolutions du taux d'amortissement et de la fréquence en fonction de l'amplitude du mouvement.

Le taux d'amortissement $\tau(A)$ est défini à partir de la référence [V-3]. $\tau(A)$ est l'image de la dissipation globale d'énergie vue par l'assemblage qui a lieu au cours du mouvement. Cette quantité est la généralisation au cas non-linéaire, du coefficient d'amortissement réduit linéaire.

Dans le cas linéaire, la résolution de l'équation du mouvement $\ddot{x}(t) + C_0\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = 0$ conduit à l'équation différentielle pour l'enveloppe suivante :

$$(V-9) \quad \dot{A} = -\frac{C_0}{2}A$$

(V-9) se reformule, après adimensionnalisation par rapport à ω_0 :

$$(V-10) \quad -\frac{\dot{A}}{A\omega_0} = \frac{C_0}{2\omega_0} = \varepsilon$$

Si on transpose la formulation (V-10) au cas d'un modèle d'amortissement non-linéaire, on obtient la définition du taux d'amortissement $\tau(A)$:

$$(V-11) \quad \tau(A) = -\frac{\dot{A}}{A\hat{\omega}}$$

où $\hat{\omega}$ correspond à la pulsation du système non amorti déterminée par résolution de l'équation :

$$(V-12) \quad \ddot{x}(t) + \omega_0^2x(t) + \lambda K(x)x(t) = 0$$

D'après la définition du taux d'amortissement (V-11), on constate que $\tau(A)$ est une fonction décroissante en fonction de l'amplitude du mouvement (cas de vibrations non entretenues).

A titre d'exemple, pour le modèle d'amortissement non-linéaire $C(x, \dot{x}) = (C_0 + C_1|x|)$, et pour une non-linéarité de force de rappel $\lambda K^2(x)x(t) = -2\omega_0\lambda_2|x|^{\beta_2} + \frac{\lambda_2^2\mu_{\beta_2}^2}{\mu_{2\beta_2}}|x|^{2\beta_2}$,

l'expression du taux d'amortissement $\tau(A)$ est :

$$(V-13) \quad \tau(A) = \frac{\left(\frac{C_0}{2} + \mu(2,-1)C_1A\right)}{\left(\omega_0 - \lambda_2\mu_{\beta_2}x_0^{\beta_2}\right)}$$

L'expression du taux d'amortissement donnée par (V-13) représente une approximation cohérente avec les approximations qui ont été effectuées lors de la détermination de l'enveloppe $A(t) \left(\left(\frac{\beta_2}{2} + 1 \right) \approx 1 + \epsilon \text{ cf. paragraphe IV.3.5.6} \right)$. Dans une démarche où l'expression de l'enveloppe n'est pas approchée, l'expression exacte de $\tau(A)$ serait :

$$(V-14) \quad \tau(A) = \frac{\left(\frac{C_0}{2} + \mu(2,-1)C_1A\right)\left(\omega_0 - \lambda_2\mu_{\beta_2}A^{\beta_2}\right)}{\left(\omega_0 - \lambda_2\mu_{\beta_2}x_0^{\beta_2}\right)\left(\omega_0 - \lambda_2\mu_{\beta_2}\left(\frac{\beta_2}{2} + 1\right)A^{\beta_2}\right)}$$

La fréquence est exprimée comme dans le chapitre précédent, par la formulation :

$$(V-15) \quad f(A) = f_0 - \frac{\lambda_2\mu_{\beta_2}}{2\pi}A^{\beta_2}$$

L'intérêt des formulations (V-13) et (V-15) est d'une part, de fournir une représentation continue de l'évolution du taux d'amortissement et de la fréquence, ce que ne permettent pas l'ensemble des autres techniques d'identification couramment utilisées (valeurs par morceaux ou en des points particuliers (passage par zéros - extremum)), et d'autre part, de distinguer les effets des caractéristiques linéaires $\frac{C_0}{2\hat{\omega}}$, f_0 de celles non-linéaires

$$\frac{\mu(2,-1)C_1A}{\hat{\omega}} \text{ et } \frac{\lambda_2\mu_{\beta_2}}{2\pi}A^{\beta_2}.$$

V.3. Dépouillement des essais et interprétations

V.3.1. Essais en air

L'ensemble des résultats présentés dans ce paragraphe sont ceux obtenus à partir des réponses aux lâchers de l'assemblage effectués en air. Nous rappelons dans le Tableau V-1 suivant les deux modèles de solution analytique utilisés pour l'optimisation des paramètres (cf. du paragraphe IV.3.5 au paragraphe IV.3.7 pour les détails des calculs) :

Modèles de solution analytique	Solution analytique	
	Modèle NL d'amortissement	Modèle NL de force de rappel
	Taux d'amortissement	
Air 1	$x(t) = \frac{A_0}{e^{\frac{C_0}{2}t} - 2\mu(2-1)\frac{C_1}{C_0}A_0} \cos\left(2\pi\left(f_0 - \frac{\lambda_2\mu\beta_2}{2\pi}A^{\beta_2}\right)t\right) ; \quad A_0 = \frac{x_0}{1 + 2\mu(2-1)\frac{C_1}{C_0}x_0}$ $C(x, \dot{x}) = \epsilon(C_0 + C_1 x)$ $\tau(A) = \frac{C_0}{2\hat{\omega}} + \frac{\mu(2-1)C_1}{\hat{\omega}}A$ <p style="text-align: center;"><u>Paramètres optimisés</u> : $C_0, C_1, f_0, \frac{\lambda_2\mu\beta_2}{2\pi}, \beta_2$</p>	$\lambda K^2(x)x(t) = -2\omega_0\lambda_2 x ^{\beta_2} + \frac{\lambda_2^2\mu^2\beta_2}{\mu_2\beta_2} x ^{2\beta_2}$
Air 2	$x(t) = \frac{A_0}{\sqrt{e^{C_0 t} - \frac{C_2}{4C_0}A_0^2}} \cos\left(2\pi\left(f_0 - \frac{\lambda_2\mu\beta_2}{2\pi}A^{\beta_2}\right)t\right) ; \quad A_0 = \frac{x_0}{\sqrt{1 + \frac{C_2}{4C_0}x_0^2}}$ $C(x, \dot{x}) = \epsilon(C_0 + C_2x^2)$ $\tau(A) = \frac{C_0}{2\hat{\omega}} + \frac{C_2}{8\hat{\omega}}A^2$ <p style="text-align: center;"><u>Paramètres optimisés</u> : $C_0, C_2, f_0, \frac{\lambda_2\mu\beta_2}{2\pi}, \beta_2$</p>	$\lambda K^2(x)x(t) = -2\omega_0\lambda_2 x ^{\beta_2} + \frac{\lambda_2^2\mu^2\beta_2}{\mu_2\beta_2} x ^{2\beta_2}$

Tableau V-1 : Récapitulatif des modèles de solution analytique envisagés en air et des formulations associées.

V.3.1.1. Résultats – Modèle Air 1

Nous présentons successivement les comparaisons de chacun des lâchers mesurés avec les solutions optimisées, le taux d'amortissement et la fréquence, tracés en fonction de l'amplitude instantanée $A(t)$. Sur ces tracés, un comparatif est fait avec respectivement les valeurs de l'amortissement obtenues par la méthode du décrétement logarithmique et avec les valeurs de la fréquence calculées par la méthode des passages successifs par zéro. Les valeurs de C_0 et f_0 qui correspondraient au modèle linéaire sont tracées en fonction de l'amplitude initiale de lâcher x_0 .

Afin de distinguer les deux assemblages XL 1300 MW de conception identique AFA qui ont été utilisés pour réaliser les essais, on nommera XL 1300 MW (EMSI) pour se référer à l'assemblage utilisé par le Laboratoire EMSI et AFA-XL 1300 MW (LHC) pour celui placé dans la boucle d'essais du LHC. Même s'ils sont géométriquement identiques, ces assemblages ont un passé expérimental différent. L'endommagement, l'usure et les déformations qu'ils ont subi peut entraîner des réponses différentes à des simulations identiques.

Nous présentons d'abord les résultats de la démarche d'optimisation au travers des superpositions des signaux de lâcher mesurés avec les signaux analytiques reconstitués. Pour ne pas surcharger les figures présentées, nous présentons les résultats pour deux essais parmi ceux de chaque série : résultats pour l'amplitude la plus faible et pour l'amplitude la plus élevée. Les autres résultats sont reportés dans les Annexes à la fin de ce manuscrit. La superposition des réponses mesurées sur l'assemblage AFA-XL 1300 MW (LHC) avec le modèle de solution Air 1 est illustrée par la Figure V-2, les autres résultats sont reportés en Annexe 4 :

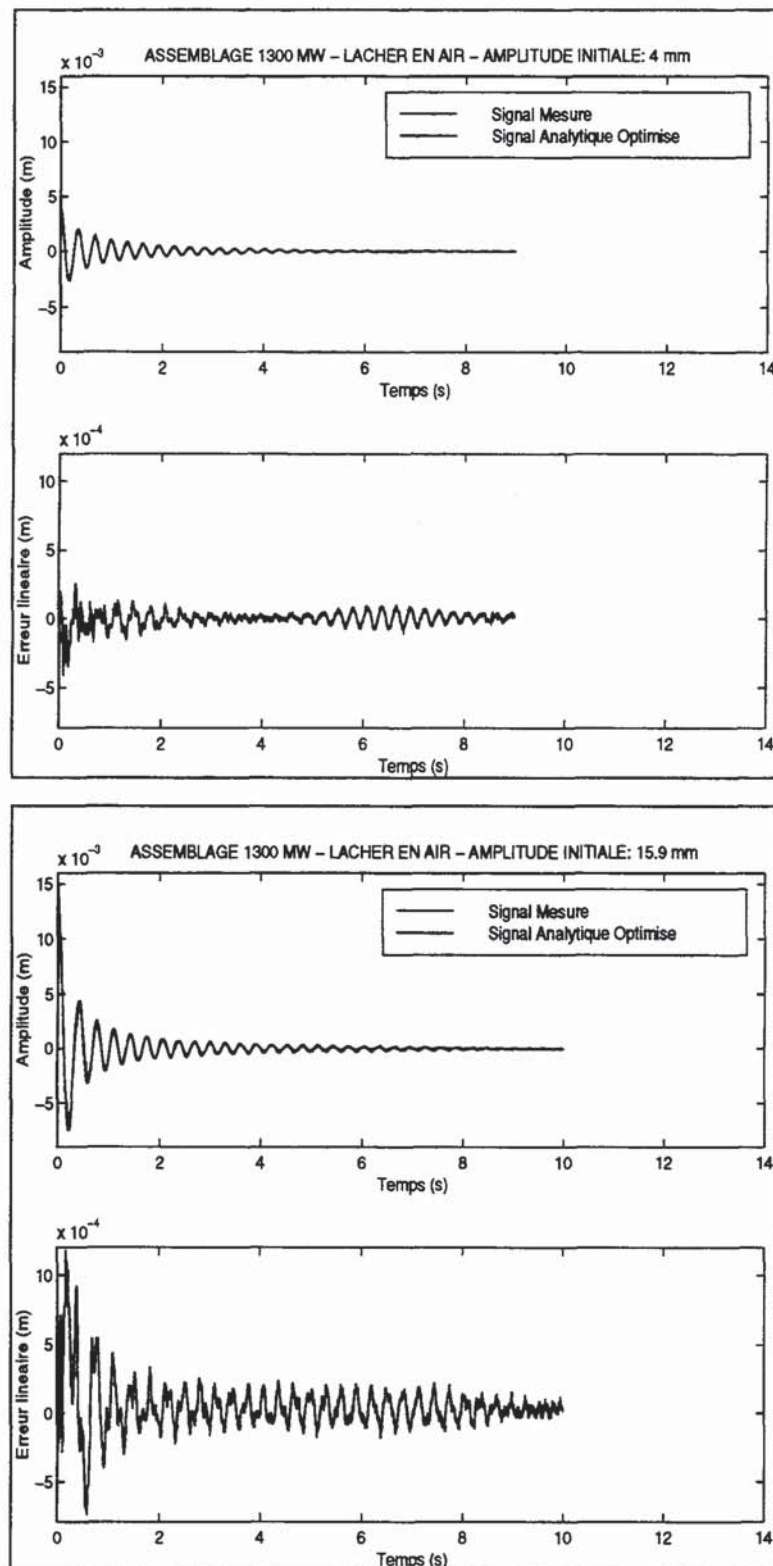


Figure V-2 : Comparaisons entre les réponses mesurées et les réponses optimisées (Modèle Air 1). Lâchers effectués l'assemblage AFA-XL 1300 MW (LHC).

Pour les lâchers effectués sur l'assemblage XL 1300 MW (EMSI), on obtient les résultats illustrés par la Figure V-3, les autres résultats sont reportés en Annexe 4 :

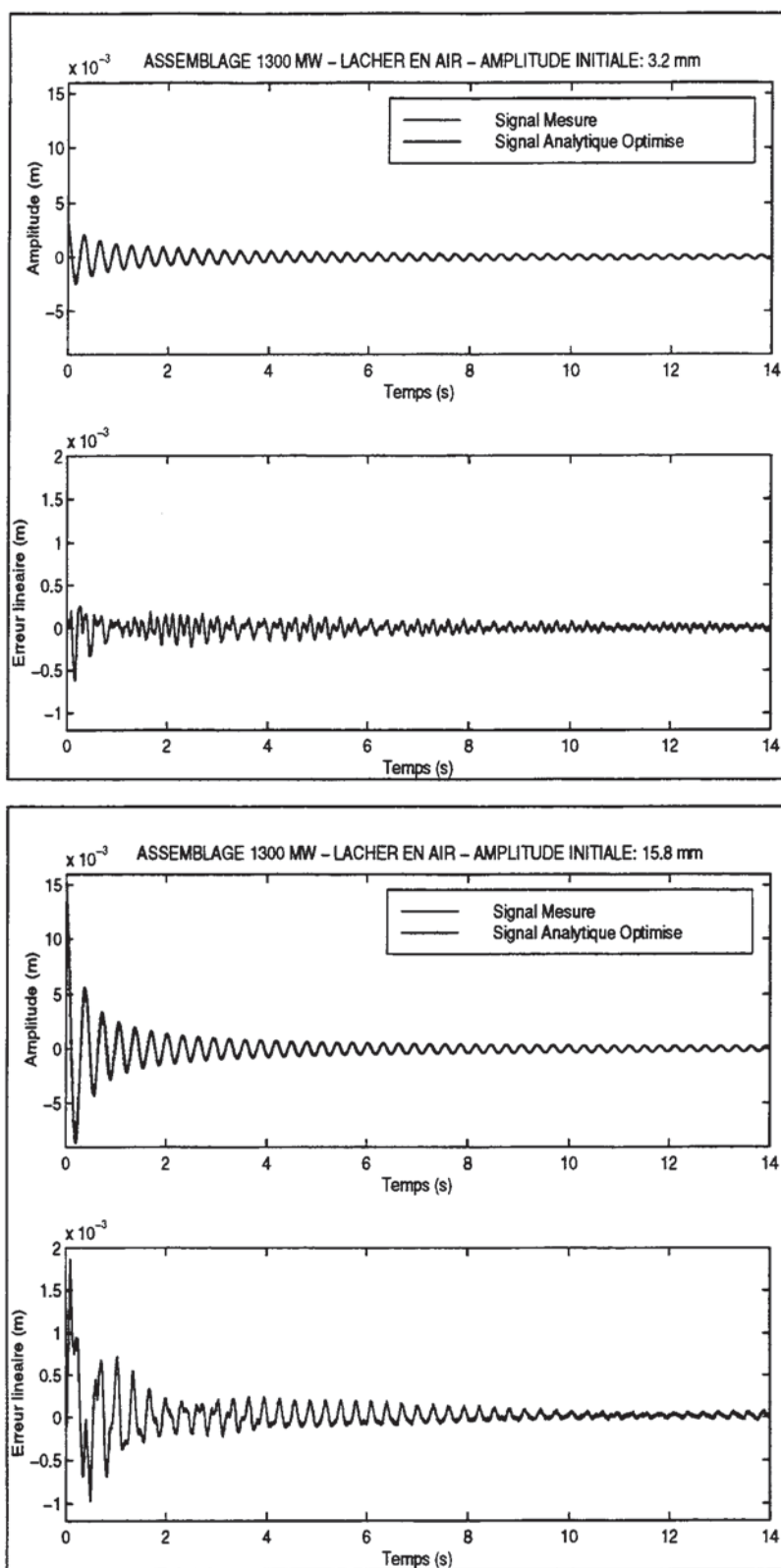


Figure V-3 : Comparaisons entre les réponses mesurées et les réponses optimisées (Modèle Air 1). Lâchers effectués sur l'assemblage XL 1300 MW (EMSI).

Pour les lâchers effectués sur l'assemblage AFA 900 MW (EMSI), les résultats sont présentés sur la Figure V-4, les autres résultats sont reportés en Annexe 4 :

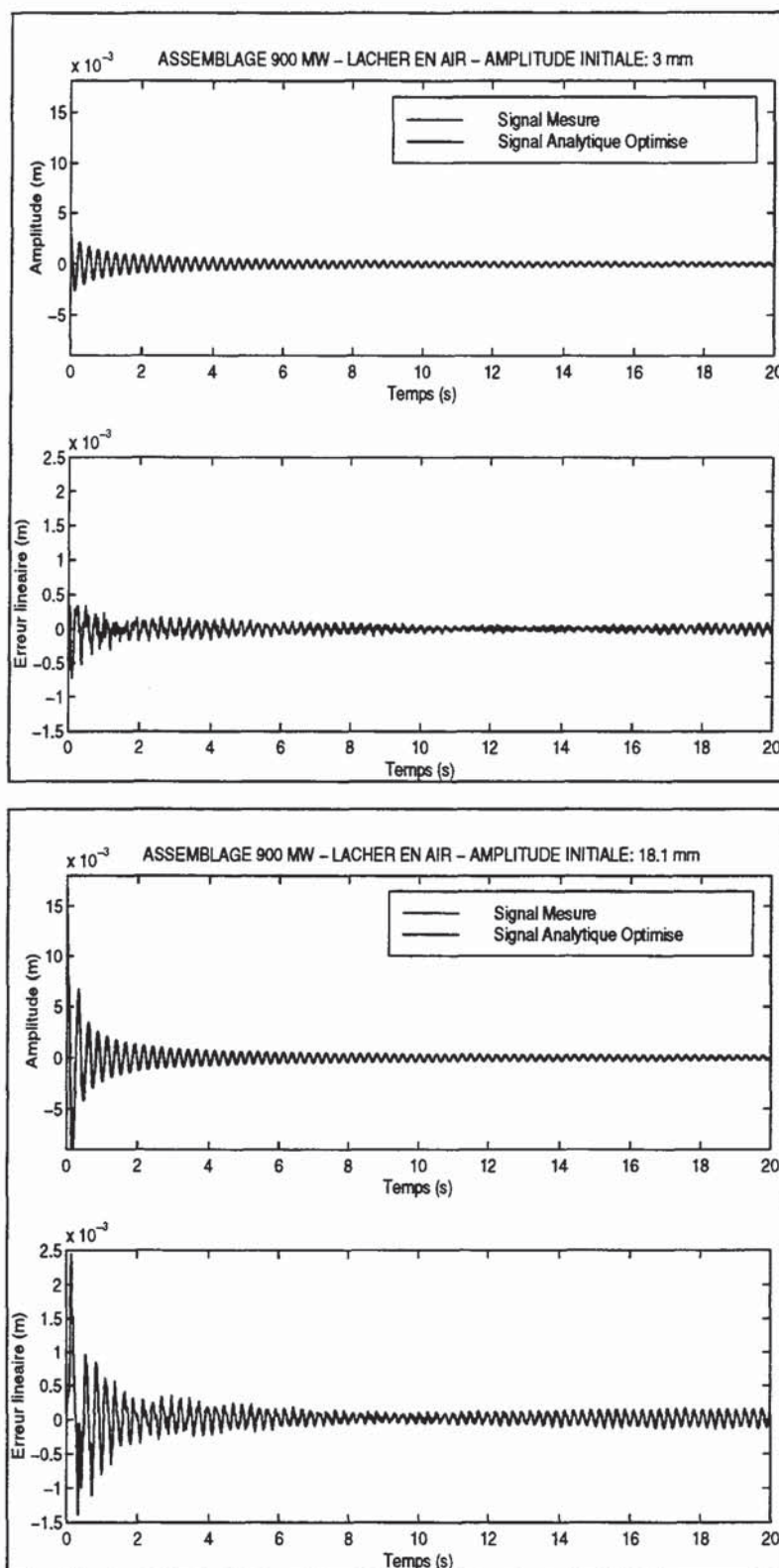


Figure V-4 : Comparaisons entre les réponses mesurées et les réponses optimisées (Modèle Air 1). Lâchers effectués sur l'assemblage AFA 900 MW (EMSI).

L'ensemble de ces comparaisons montre une bonne concordance entre les mesures et les réponses optimisées Air 1. En effet, l'erreur linéaire donnée pour chacune des courbes est

faible. Nous précisons qu'une erreur linéaire sera considérée comme faible si $\frac{Max|\Delta x|}{x_0} \leq 10^{-1}$. $Max|\Delta x|$ représente le maximum de la valeur absolue de l'erreur linéaire (différence entre la mesure et le signal analytique), x_0 l'amplitude initiale du lâcher. C'est effectivement le cas pour l'ensemble des lâchers. On constate que le maximum de l'erreur linéaire correspond plutôt à une erreur d'amplitude que de déphasage. Ce maximum apparaît le plus souvent sur la première alternance. Globalement le modèle de solution Air 1 permet une représentation correcte du comportement de l'assemblage pour des amplitudes de lâcher de 3 mm à 18 mm.

La Figure V-5 suivante présente les évolutions de l'erreur quadratique résiduelle globale et du coefficient de corrélation en fonction de l'amplitude initiale du lâcher :

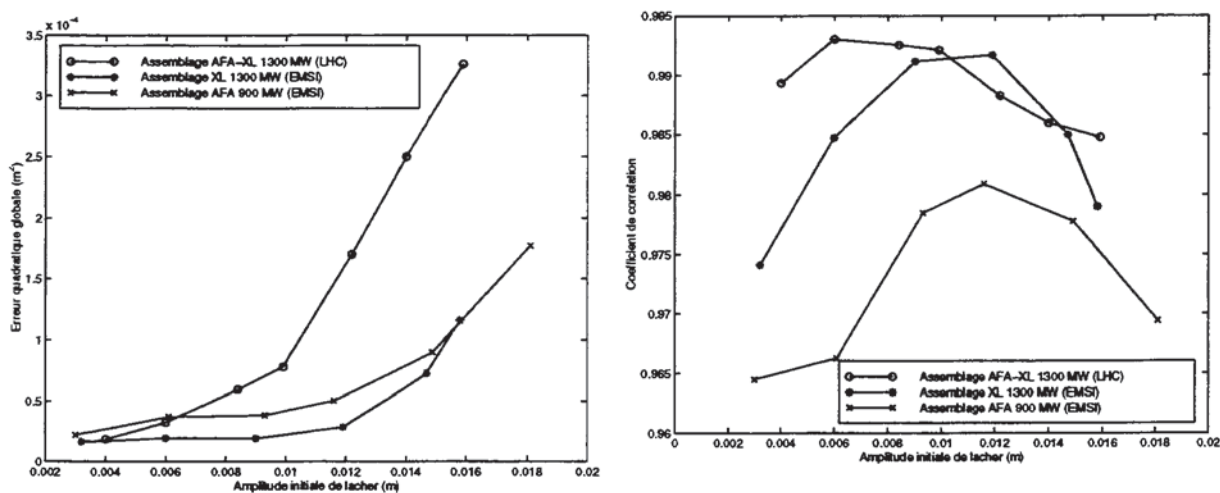


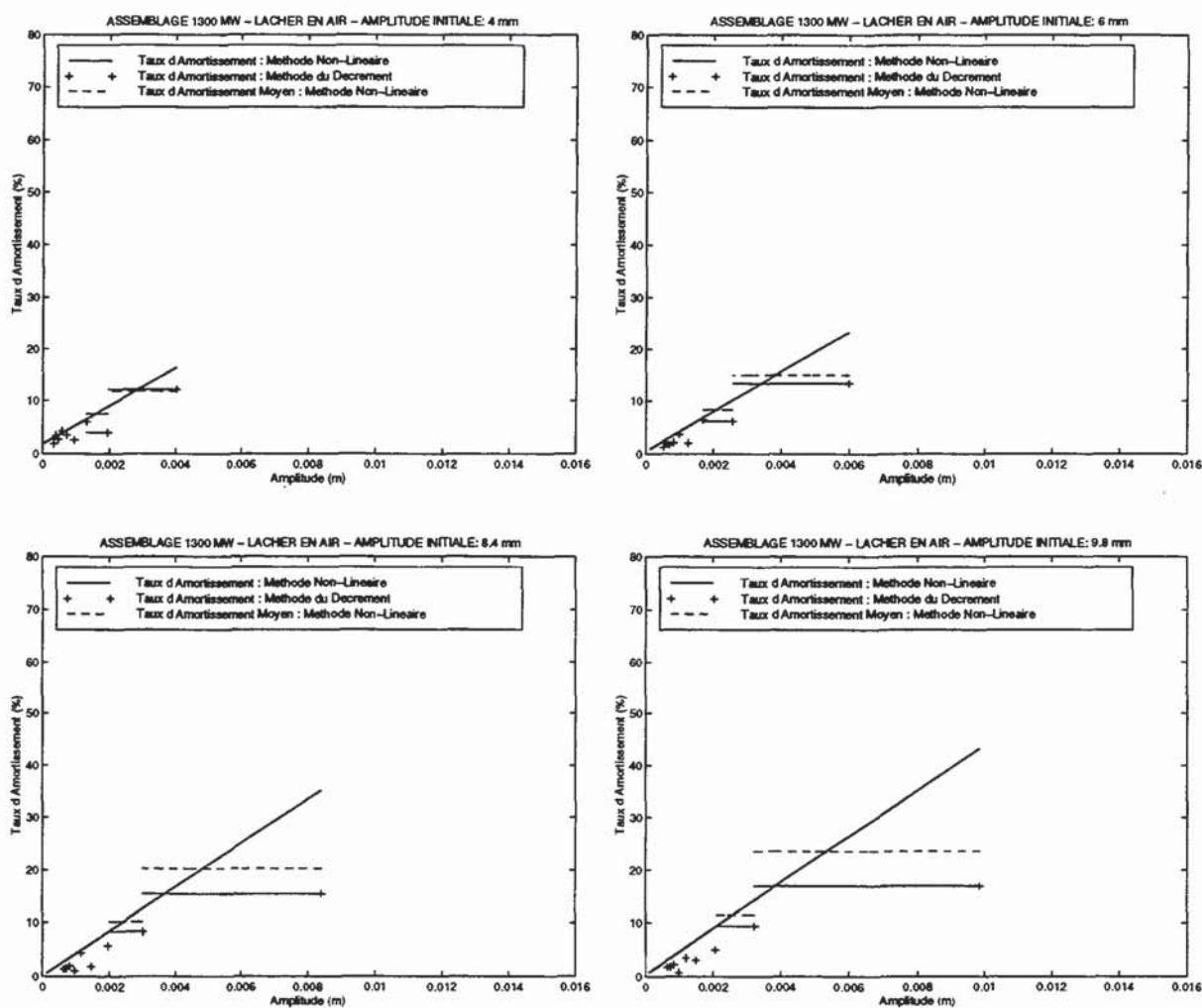
Figure V-5 : Evolutions de l'erreur quadratique globale et du coefficient de corrélation en fonction de l'amplitude initiale du lâcher pour les trois séries d'essais en air.

On peut remarquer que chacun des deux critères de qualité suit la même évolution quelque soit l'assemblage considéré. Concernant le coefficient de corrélation, nous observons des valeurs comprises entre 0.96 et 0.995, correspondant à une qualité de superposition des signaux mesurés et analytiques acceptable. Pour les trois séries d'essais on constate que chacun des coefficients de corrélation est le plus élevé pour des amplitudes comprises entre 8 et 12 mm, c'est-à-dire que la superposition est la meilleure pour ces amplitudes de lâcher.

L'erreur quadratique augmente avec l'amplitude de lâcher. Cette tendance provient conjointement de l'augmentation du nombre de points qui constituent le signal et de la diminution de la qualité de la superposition des signaux, confirmé par la baisse du coefficient de corrélation dans cette même zone (amplitude initiale > à 12 mm).

Les Figure V-6, Figure V-7 et la Figure V-8, présentent les évolutions du taux d'amortissement (expression (V-13)) en fonction de l'amplitude du mouvement. On rappelle que sur ces courbes les points les plus à droite correspondent au début du lâcher (maximum d'amplitude). Sur ces courbes sont aussi représentés :

- les 10 premières valeurs de l'amortissement réduit calculées par la méthode du décrétement logarithmique à partir des 10 premiers maxima de la courbe du déplacement mesuré. Ces valeurs sont repérées par des signes "+". Les deux premières valeurs "+" sont prolongées par un trait continu pour être comparées aux valeurs moyennes du taux d'amortissement sur les mêmes intervalles,
- les deux premières valeurs moyennes du taux d'amortissement (-----) calculées comme la moyenne des valeurs de $\tau(A)$ entre, l'amplitude initiale de lâcher et le premier maximum et, entre le premier maximum et le second maximum sur la courbe des oscillations libres.



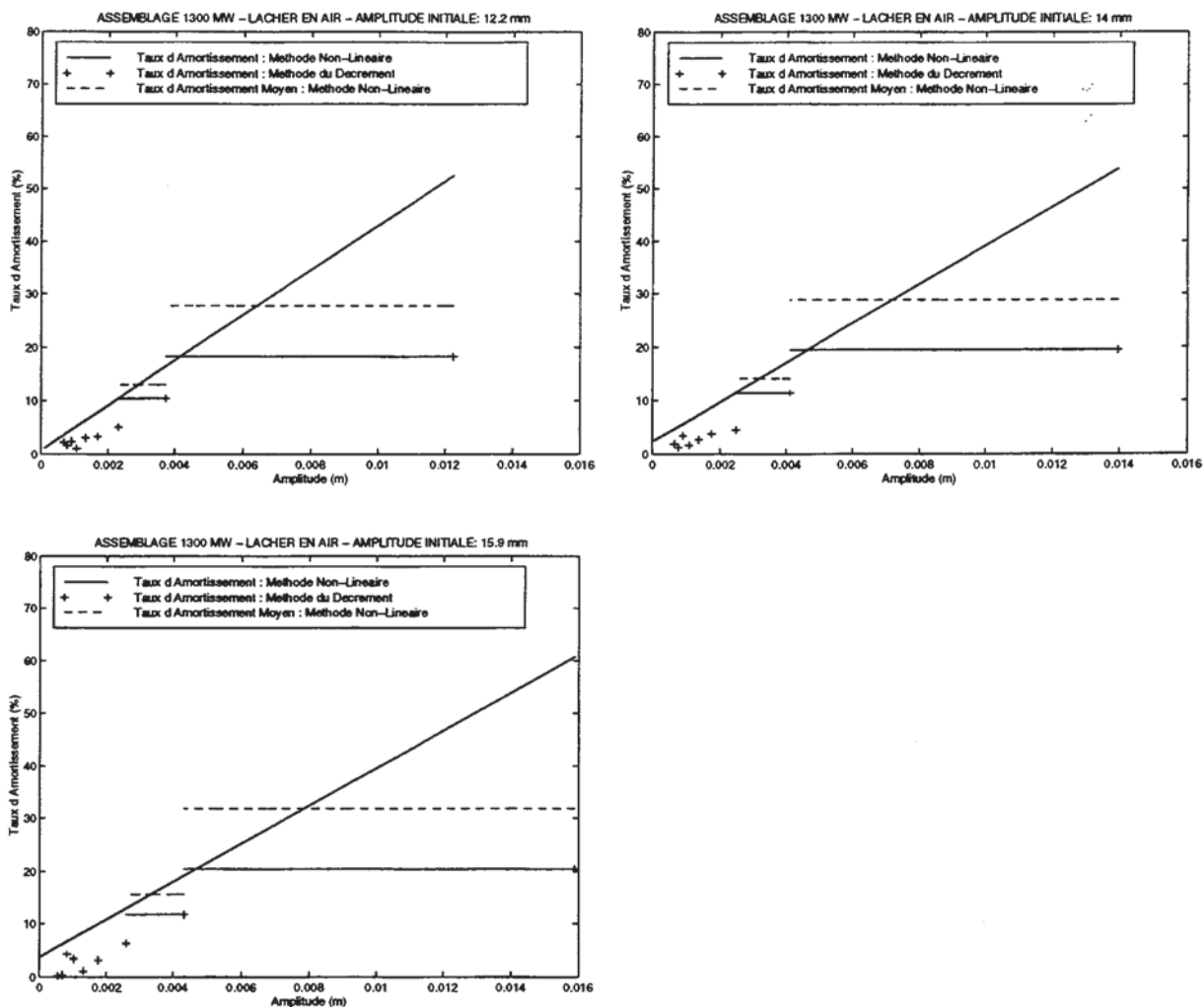
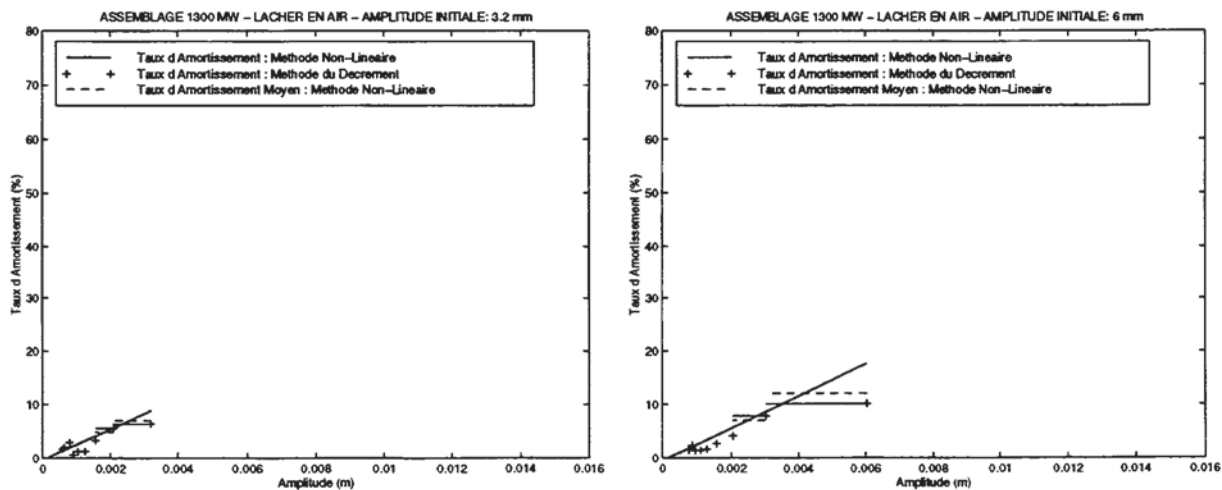


Figure V-6 : Evolutions du taux d'amortissement en fonction de l'amplitude du mouvement. Résultats pour l'assemblage AFA-XL 1300 MW (LHC).

Les évolutions du taux d'amortissement obtenues à partir du dépouillement des d'essais réalisés sur l'assemblage XL 1300 MW (EMSI), nous donnent :



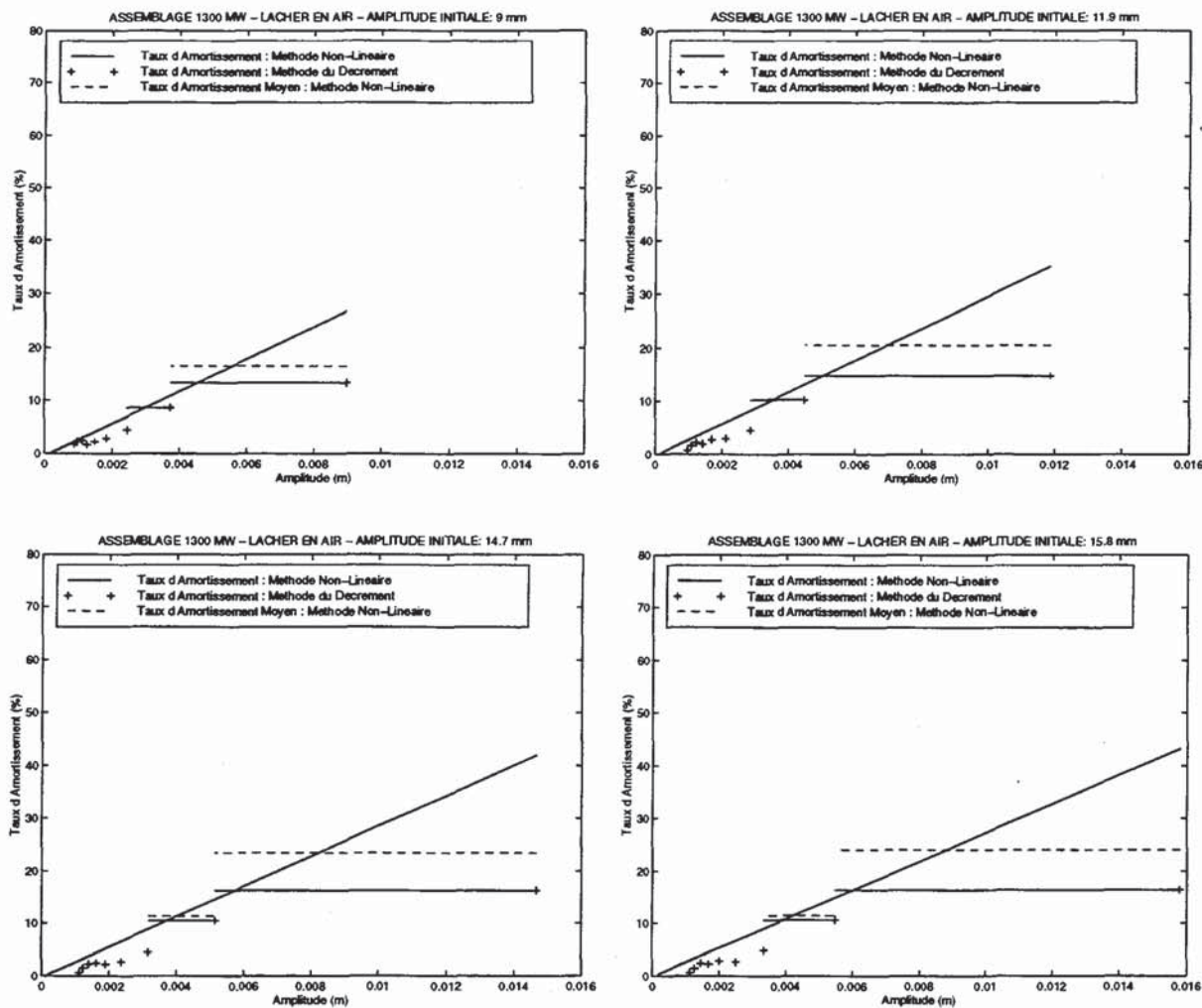
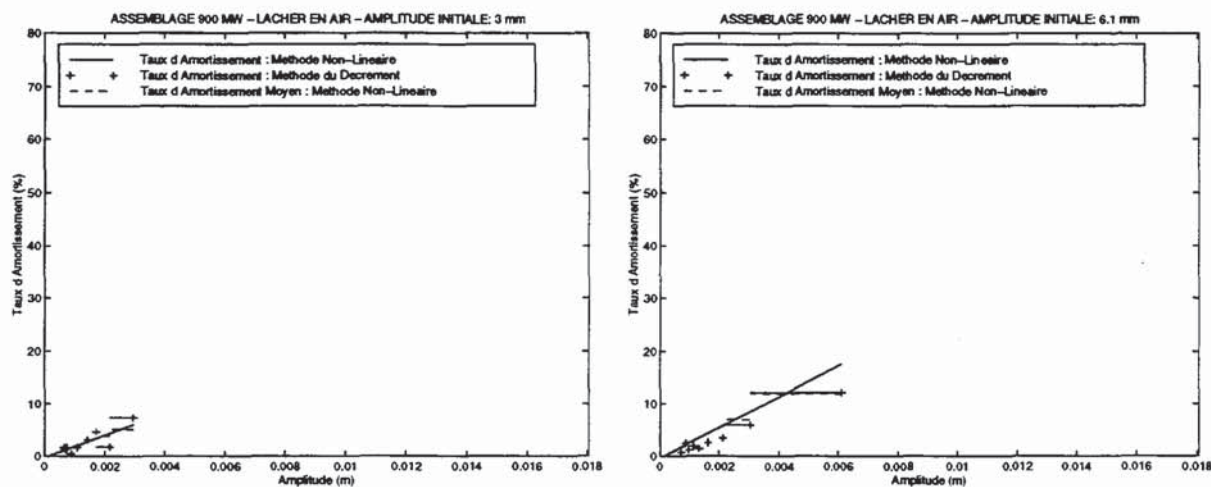


Figure V-7 : Evolutions du taux d'amortissement en fonction de l'amplitude du mouvement. Résultats pour l'assemblage XL 1300 MW (EMSI).

Et, pour l'assemblage AFA 900 MW (EMSI), on obtient :



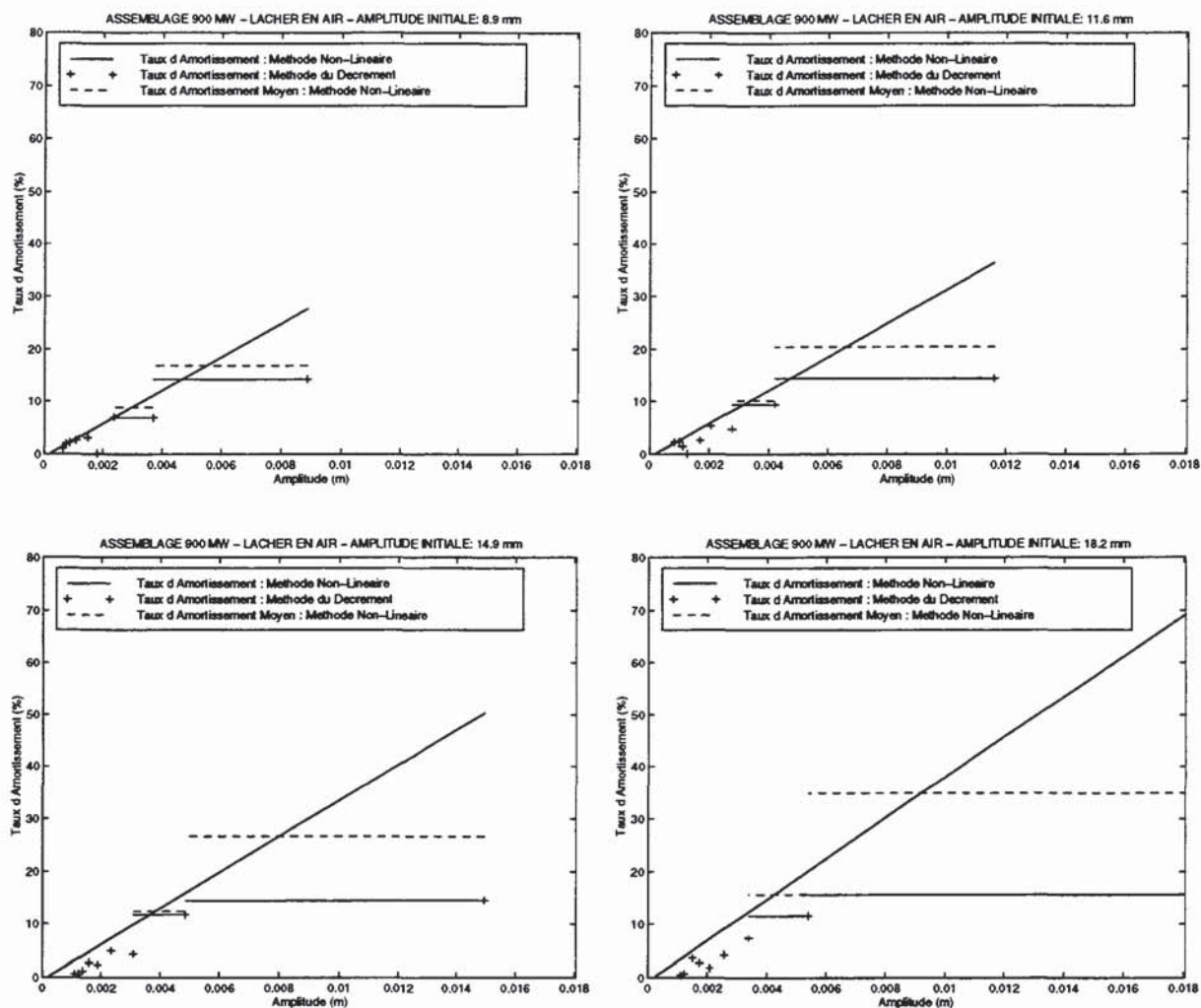


Figure V-8 : Evolutions du taux d'amortissement en fonction de l'amplitude du mouvement. Résultats pour l'assemblage AFA 900 MW (EMSI).

L'analyse des figures précédentes appelle un certain nombre de remarques :

- le taux d'amortissement décroît de l'amplitude initiale de lâcher à l'amplitude nulle. L'influence de la part non-linéaire du modèle d'amortissement (C_1) est donc relativement importante. En effet, si ce paramètre avait été nul ou de faible importance nous aurions observé un taux d'amortissement constant ou presque constant, comme dans le cas d'un système linéaire,
- la représentation adoptée ne permet pas de conclure de manière directe quant à l'augmentation de l'amortissement en fonction de l'amplitude de lâcher. Nous revenons sur ce point plus loin dans ce paragraphe en nous intéressant à la pente de $\tau(A)$,
- la comparaison faite entre les valeurs de l'amortissement réduit déterminé par la méthode du décrétement logarithmique avec les valeurs moyennes calculées à partir du

taux d'amortissement, montrent une bonne correspondance de celles-ci pour les faibles amplitudes de lâcher (3 mm – 6 mm). A mesure que l'amplitude de lâcher initiale augmente, l'écart se creuse entre ces valeurs. Pour l'ensemble des essais analysés, les valeurs de l'amortissement réduit calculées par la méthode du décrétement sont inférieures comparées aux valeurs moyennes calculées à partir du taux d'amortissement sur une période d'oscillation.

Une donnée intéressante est accessible directement à partir des évolutions du taux d'amortissement : il s'agit de l'amortissement à amplitude nulle. Il représente l'amortissement linéaire de l'assemblage et est théoriquement indépendant de l'amplitude initiale du lâcher. Cette valeur correspond au terme $\frac{C_0}{2\hat{\omega}}$ du taux d'amortissement. Pour l'ensemble des essais, on reporte sur la Figure V-9, le tracé de ces valeurs en fonction de x_0 :

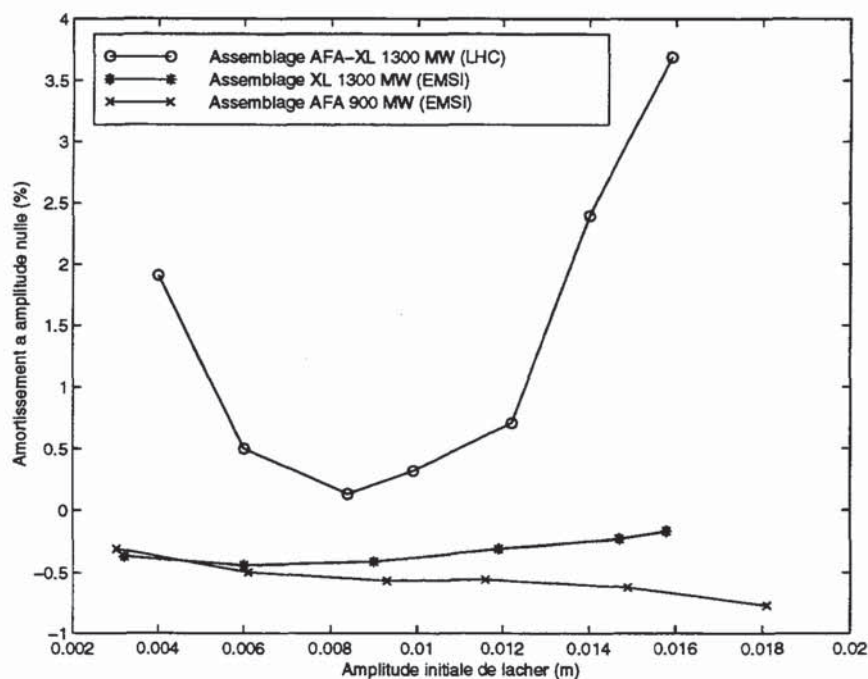


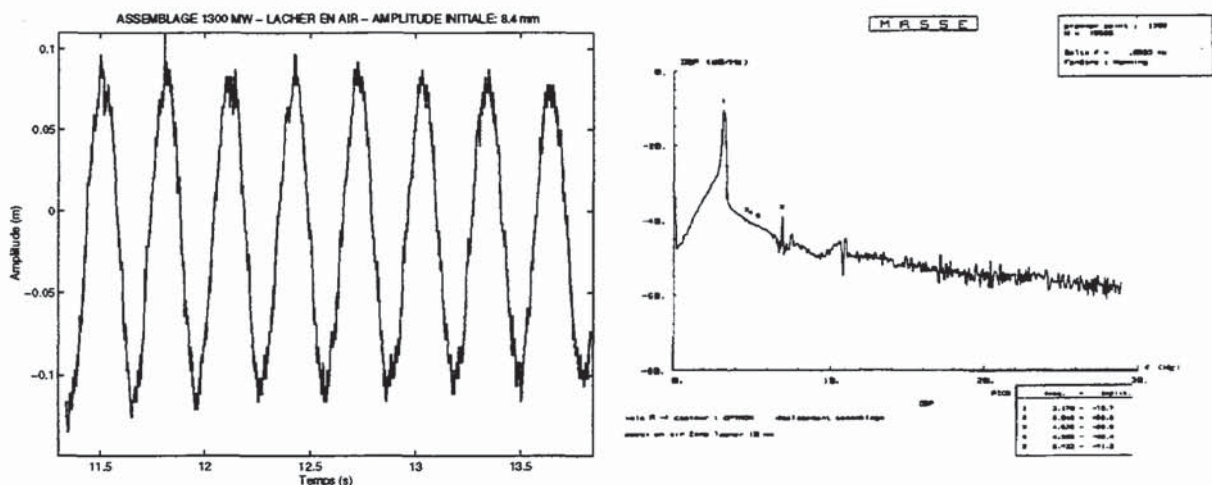
Figure V-9 : Evolutions de l'amortissement à amplitude nulle $\frac{C_0}{2\hat{\omega}}$ en air pour trois types d'assemblage.

Cette figure conduit aux remarques suivantes :

- les valeurs obtenues du terme $\frac{C_0}{2\hat{\omega}}$ ne sont pas trouvées constantes en fonction de l'amplitude de lâcher. Les essais pour lesquels cette dépendance est la plus marquée sont ceux réalisés sur l'assemblage AFA-XL 1300 MW (LHC). Le rapport entre le

minimum et le maximum est de l'ordre de 12. Pour les deux autres séries ce rapport n'est que de 2.6.

- Pour les séries d'essais AFA 900 MW (EMSI) et XL 1300 MW (EMSI), on trouve des valeurs sensiblement équivalentes mais ces valeurs sont négatives. Une valeur négative de $\frac{C_0}{2\omega}$ signifie que l'assemblage à amplitude nulle ne dissipe pas d'énergie mais qu'il en crée ! Ce résultat ne semble pas très physique mais correspond effectivement à un phénomène particulier remarquable sur la fin des oscillations de chaque essai des séries AFA 900 MW (EMSI) et XL 1300 MW (EMSI) et pour trois lâchers effectués sur l'assemblage AFA-XL 1300 MW (LHC) à 8.4 mm, 9.8 mm et 12.2 mm. Pour ces trois derniers essais, on constate effectivement que les oscillations se poursuivent plus longtemps, comparés aux autres lâchers réalisés sur ce même assemblage. On observe que celui-ci n'est pas encore revenu à sa position de repos après 14 secondes d'oscillations alors que pour les autres lâchers (essais LHC), l'équilibre est atteint entre 8 et 10 secondes. Pour les lâchers des deux autres séries (essais EMSI), on observe des réponses de durée équivalente pour chaque essai. Les amplitudes des oscillations diminuent très lentement d'une alternance à l'autre sur la fin des signaux de réponse. Les zooms présentés sur la Figure V-10, effectués sur 2 secondes à la fin d'un lâcher de chaque série d'essais, permettent de mieux visualiser le phénomène. Pour écarter l'hypothèse de l'influence d'un mode supplémentaire, on présente, en parallèle, la densité spectrale de puissance de l'essai correspondant. On constate effectivement que seul le premier mode est prépondérant et principalement excité.



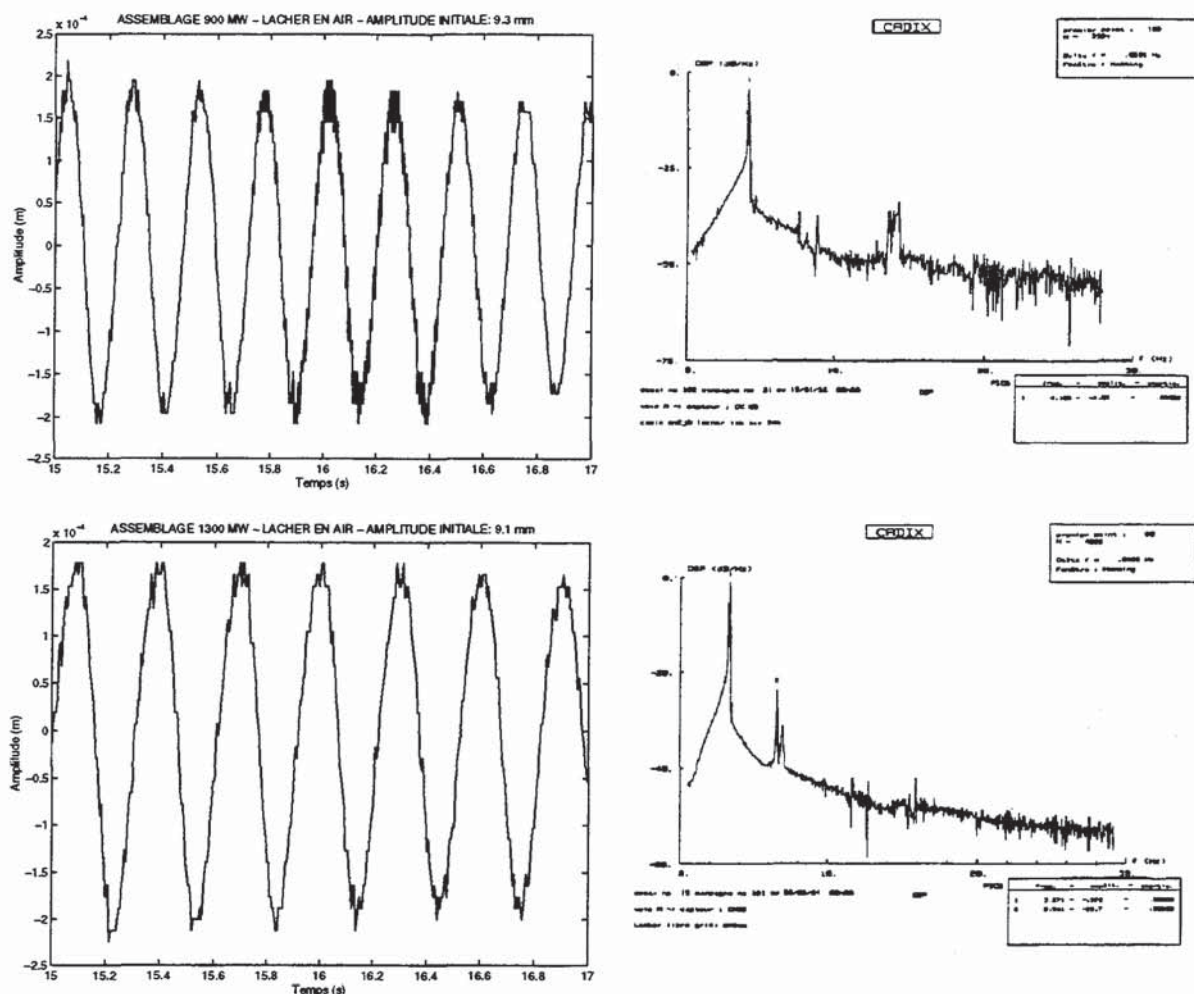


Figure V-10 : Zoom sur 2 secondes du signal des oscillations libres en fin de mesure des lâchers effectués sur trois assemblages différents.

L'origine des valeurs d'amortissement linéaire négatives pour une amplitude nulle et la disparité de celles-ci ($\frac{C_0}{2\hat{\omega}} < 0$ pour l'assemblage 1300 MW (EMSI); $\frac{C_0}{2\hat{\omega}} > 0$ pour l'assemblage 1300 MW (LHC)) n'ont pu être expliquées précisément. Néanmoins, les commentaires suivants peuvent être formulés :

- pour les lâchers effectués sur l'assemblage AFA-XL 1300 MW (LHC) à 4 mm, 14 mm et 16 mm, nous supposons qu'un frottement entre la tige de liaison câble-grille du système de lâcher (cf. Figure II.8) et la section d'essais ait pu intervenir. Ce frottement parasite qui intervient principalement en fin de lâcher serait donc responsable de la diminution plus marquée de l'amplitude des oscillations. Au début du lâcher, les dissipations liées à la structure sont prépondérantes devant le frottement parasite (s'il intervient tout au long du lâcher) et celui-ci n'a pas ou peu d'influence sur l'amplitude du mouvement.

- les conditions de maintien et l'historique des assemblages sont mal maîtrisés et peuvent expliquer la disparité des valeurs obtenues pour un type identique d'assemblage (AFA-XL 1300 MW).

Nous développons maintenant l'analyse de l'évolution de la pente du taux d'amortissement. On présente sur la Figure V-11, son évolution en fonction de l'amplitude de lâcher, c'est-à-dire l'évolution du coefficient $\frac{C_1 \mu(2,-1)}{\hat{\omega}}$, où C_1 est adimensionnalisé.

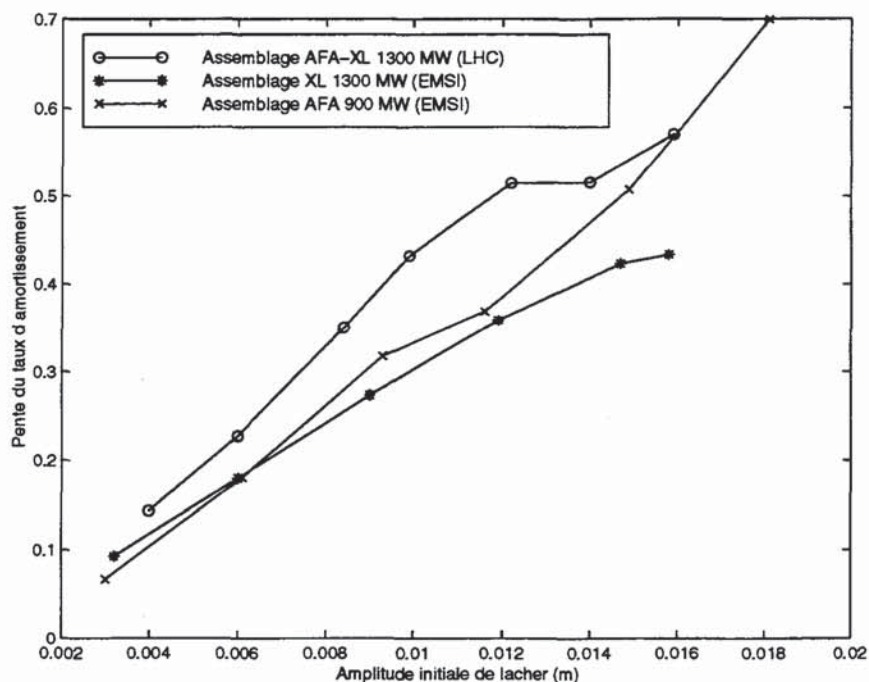


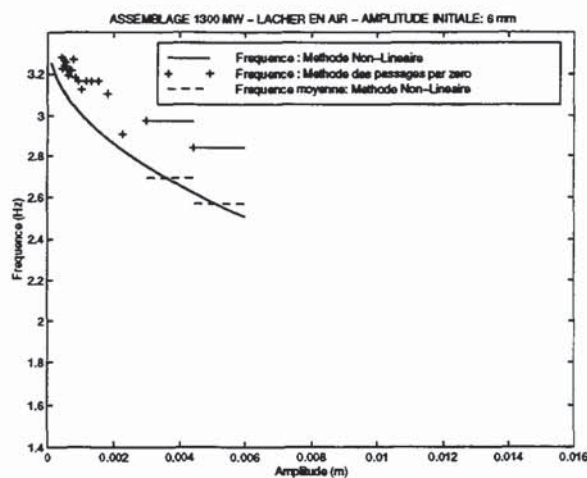
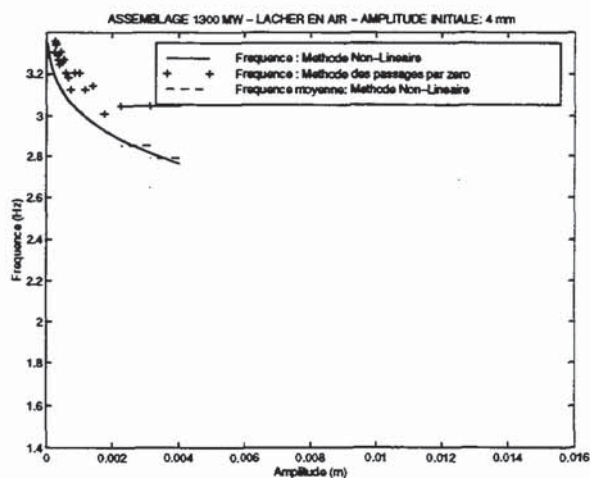
Figure V-11 : Evolution de la pente du taux d'amortissement en fonction de l'amplitude initiale de lâcher pour trois types d'assemblage.

Cette figure montre que la pente du taux d'amortissement augmente avec l'amplitude de l'excitation et que cette pente semble être relativement indépendante de l'assemblage considéré. En effet, les valeurs trouvées pour chaque série d'essais sont proches les unes des autres et suivent des évolutions linéaires en fonction de x_0 . Cette constatation est surprenante puisque un assemblage 900 MW comporte deux grilles en moins par rapport à un assemblage 1300 MW. Une évolution croissante de la pente du taux d'amortissement signifie que l'assemblage dissipe d'autant plus vite que celui-ci est loin de sa fibre neutre et donc que l'amortissement est d'autant plus important.

Plusieurs études ont relié la valeur de l'amortissement, calculée sur la période ou la demi-période (méthode du décrément), au nombre de crayons combustibles en mouvement de glissement aux contacts de leurs bossettes dans les cellules de grille [V-7], [V-9]. Le

départ en glissement d'un crayon est supposé être fonction de l'éloignement de celui-ci par rapport à la fibre neutre de l'assemblage et fonction du niveau de l'excitation auquel il est soumis. L'hypothèse qui est avancée indique que les crayons les plus externes dans le faisceau de crayons sont les premiers à être mis en glissement lors du mouvement pour de petites amplitudes de déplacement. Les rangées de crayons de même éloignement par rapport à la fibre neutre et leur départ en glissement se fait ensuite progressivement jusqu'à des amplitudes d'oscillation de l'ordre de 7 mm où tous les crayons sont alors en mouvement de glissement. Le résultat fourni par l'analyse de la Figure V-11 ne permet pas de vérifier cette hypothèse. Avec notre approche, nous montrons que la part non-linéaire de l'amortissement augmente progressivement avec l'amplitude de l'excitation.

On s'intéresse maintenant aux évolutions de la fréquence déterminées à partir de la formulation (V-15). On représente sur les Figure V-12, Figure V-13 et Figure V-14 pour chaque lâcher, l'évolution de la fréquence en fonction de l'amplitude du mouvement. A titre de comparaison, les valeurs calculées par la méthode des passages successifs par zéro sont reportées sur les différents graphes. Comme pour les représentations concernant l'amortissement, la valeur moyenne obtenue à partir du modèle non-linéaire de fréquence est calculée et représentée sur la demi-période par un trait discontinu (-----).



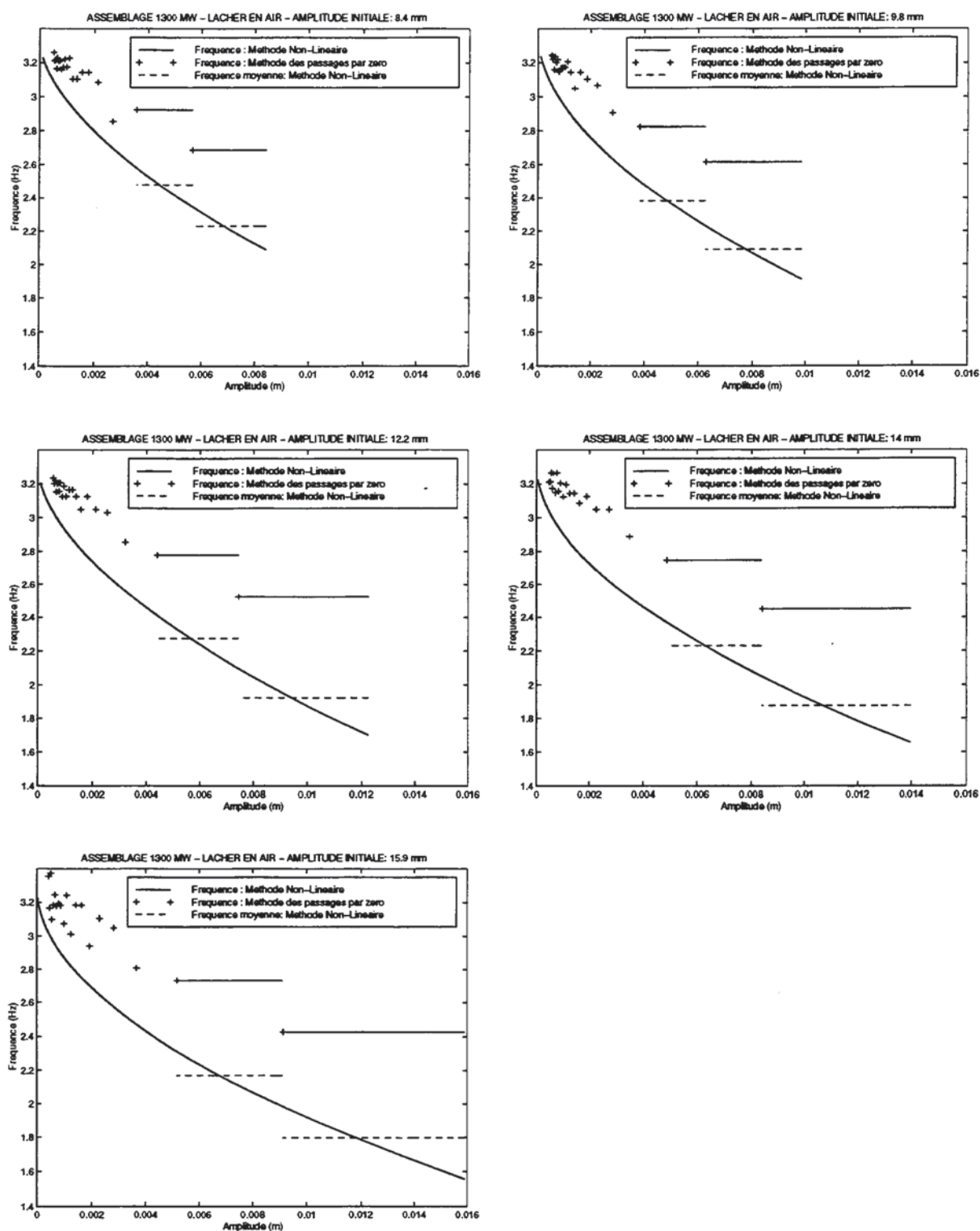


Figure V-12 : Evolutions de la fréquence en fonction de l'amplitude du mouvement. Résultats pour l'assemblage AFA-XL 1300 MW (LHC).

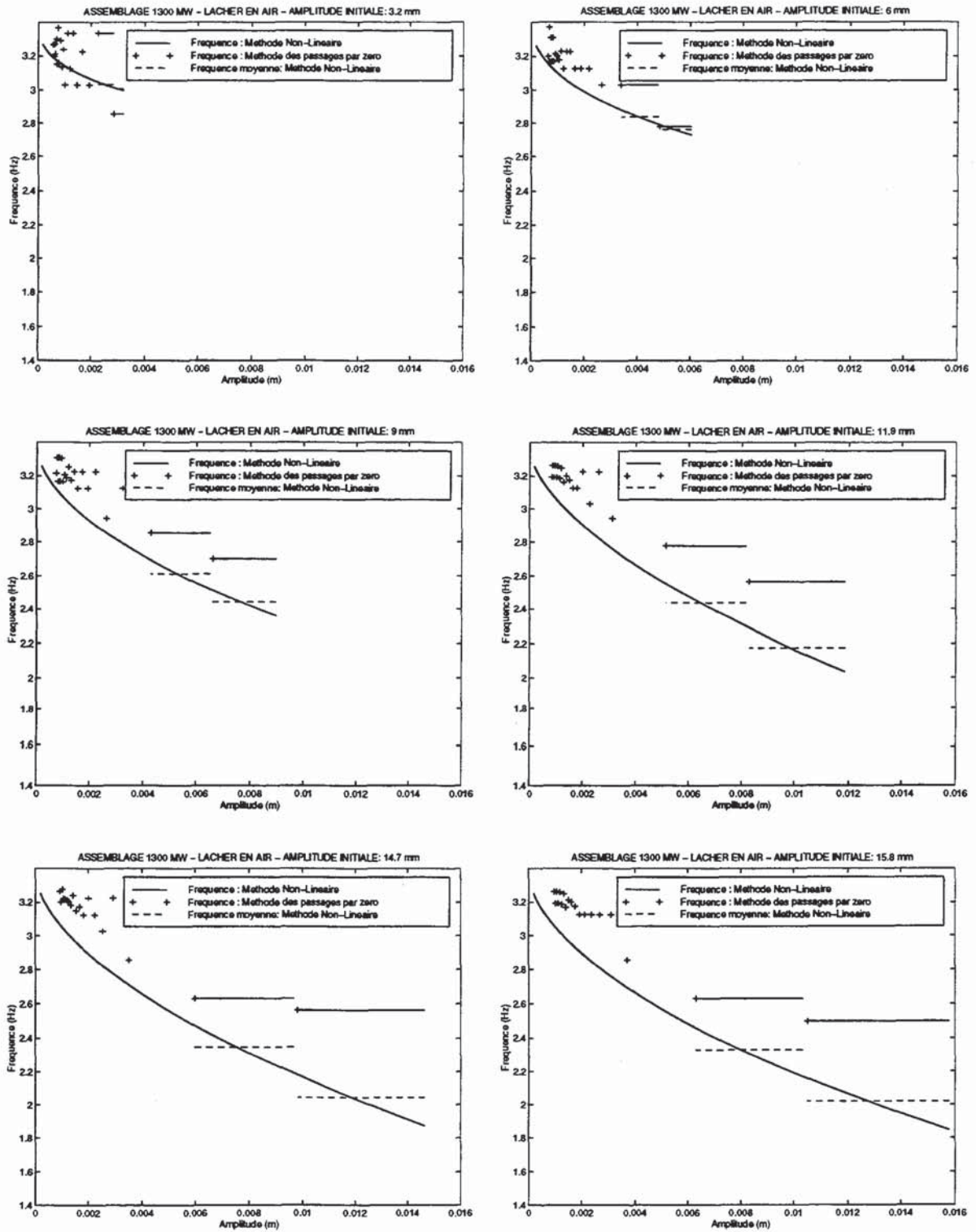


Figure V-13 : Evolutions de la fréquence en fonction de l'amplitude du mouvement. Résultats pour l'assemblage XL 1300 MW (EMSI).

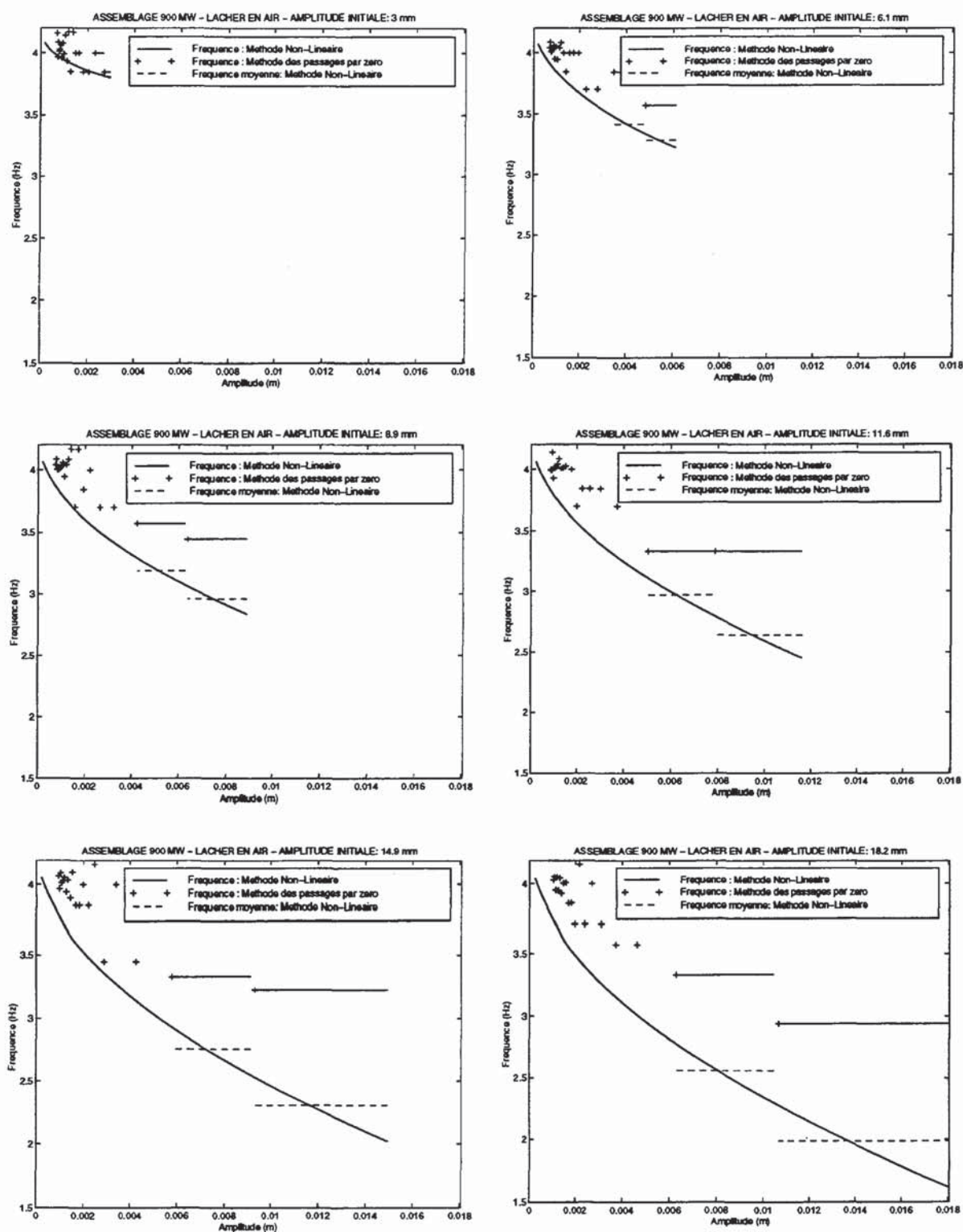


Figure V-14 : Evolutions de la fréquence en fonction de l'amplitude du mouvement. Résultats pour l'assemblage AFA 900 MW (EMSI).

Pour l'ensemble de ces évolutions, on constate que toutes les courbes convergent vers la valeur de la fréquence propre du premier mode de l'assemblage, valeur obtenue à amplitude nulle. Cette fréquence est égale à 3.3 Hz pour l'assemblage AFA-XL 1300 MW (LHC), égale à 3.4 Hz pour l'assemblage XL 1300 MW (EMSI) et à 4.2 Hz pour

l'assemblage AFA 900 MW (EMSI). Concernant ce dernier assemblage, d'autres études ont déterminée cette fréquence à 3.4 Hz [V-6] ou encore à 3.9 Hz [V-7]. Ce sont, la encore, les conditions de maintien de l'assemblage et la charge (compression) imposée par les ressorts de l'embout supérieur (cf paragraphe II.2.5) qui modifient la raideur de l'assemblage et donc la valeur de sa fréquence propre. La Figure V-15 nous fournit les évolutions du paramètre f_0 pour l'ensemble des lâchers effectués sur les trois assemblages :

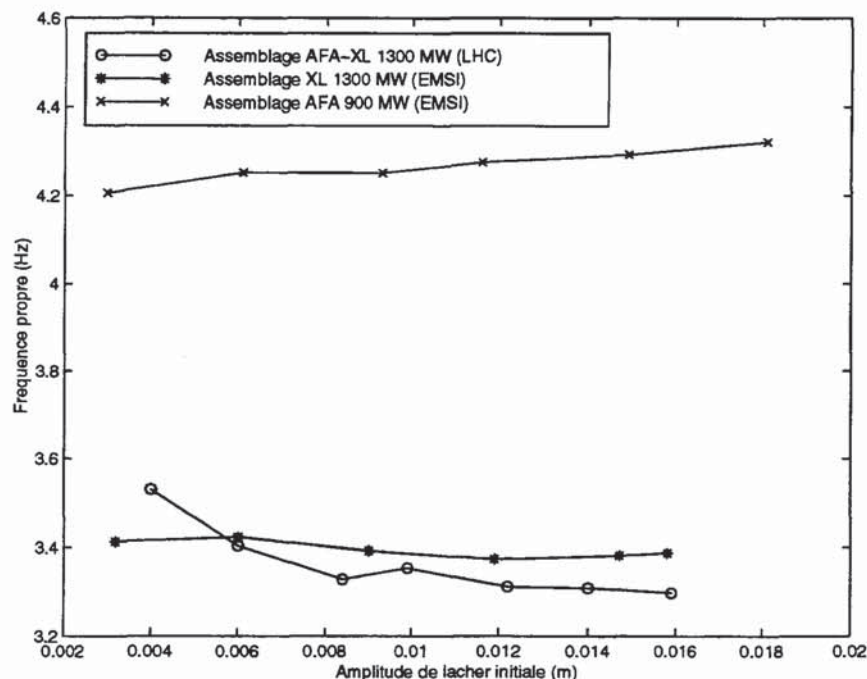


Figure V-15 : Evolution de la fréquence propre f_0 des trois assemblages en fonction de l'amplitude initiale de lâcher.

Le résultat important fourni par la Figure V-15 est que la fréquence propre de l'assemblage est indépendante de l'amplitude de l'excitation. On retrouve le caractère intrinsèque de la fréquence propre. C'est la fréquence de vibration de l'assemblage qui évolue au cours du lâcher, c'est-à-dire la fréquence sur laquelle s'exprime la réponse de l'assemblage.

On constate une différence importante entre les valeurs moyennes calculées sur la demi-période à partir du modèle de fréquence et celles déterminées par la méthode des passages successifs par zéro. Cette deuxième méthode surestime les valeurs de la fréquence de vibration. On remarque que la fréquence de vibration de l'assemblage, repérée juste après l'instant de lâcher ou déterminée sur la première demi-période, diminue avec l'amplitude initiale x_0 . En effet, la valeur de cette fréquence est de l'ordre de 3 Hz (resp. 2.8 Hz) pour un lâcher d'amplitude initiale 3.2 mm (resp. 4 mm) pour l'assemblage XL 1300 MW

(EMSI) (resp. AFA-XL(LHC)). Cette valeur est de 1.8 Hz (resp. 1.6 Hz) pour un lâcher d'amplitude initiale 15.8 mm (Resp. 15.9 mm). Cette diminution de la fréquence de vibration est fonction de l'importance de la non-linéarité de force de rappel, elle même liée à la non-linéarité d'amortissement. Cette caractéristique du comportement de l'assemblage est le signe d'une diminution de la raideur de celui-ci, fonction de l'amplitude du mouvement. Les changements des conditions de contact grille-crayon sont probablement à l'origine de cet assouplissement de l'assemblage. Pour illustrer l'importance de la non-linéarité de force de rappel liée directement à ce phénomène, on trace sur la Figure V-16 l'évolution du coefficient caractéristique λ_2 adimensionalisé.

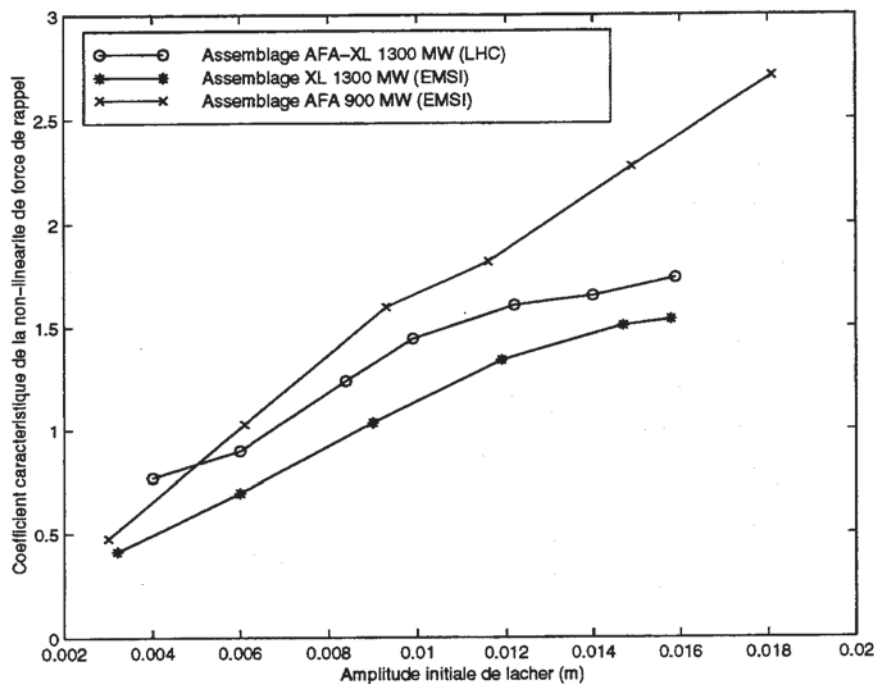


Figure V-16 : Evolution du coefficient caractéristique de la non-linéarité de force de rappel en fonction de l'amplitude de lâcher pour les trois types d'assemblage.

On observe des tendances similaires pour les trois types d'assemblage. La non-linéarité de force de rappel semble plus marquée pour l'assemblage 900 MW que pour les deux assemblages 1300 MW notamment pour les amplitudes les plus élevées. Ce résultat semble cohérent puisque la raideur d'un assemblage 900 MW est plus importante que celle d'un assemblage 1300 MW. Le coefficient caractéristique de la non-linéarité augmente de manière quasi linéaire avec l'amplitude de l'excitation.

L'ensemble des résultats obtenus relatifs aux trois paramètres du modèle non-linéaire de fréquence, a montré que :

- le modèle complet semble traduire correctement l'évolution de la fréquence au cours de tous les lâchers considérés,

- le paramètre f_0 , fréquence propre du premier mode de l'assemblage, est indépendant de l'amplitude initiale de lâcher. C'est rassurant car ce n'est pas le cas avec le terme linéaire C_0 du modèle d'amortissement,
- la méthode utilisant les passages par zéro pour la détermination de la fréquence de vibration de l'assemblage sur les deux premières demi-périodes surestime cette caractéristique avec un écart relatif pouvant aller jusqu'à 50 % de la valeur obtenue par calcul de la moyenne des valeurs du modèle de fréquence sur le même intervalle,
- l'influence de la non-linéarité de force de rappel est d'autant plus importante que l'amplitude de l'excitation est élevée.

Avant de présenter les résultats obtenus avec le modèle de solution Air 2, nous examinons les conséquences de la prise en compte d'une valeur moyenne fixée du coefficient C_0 dans l'étape d'optimisation. Les résultats présentés précédemment ont montré que ce paramètre dépendait de l'amplitude initiale x_0 . Le but est d'établir si cette dépendance ne provient pas d'une part du critère de minimisation utilisé dans l'étape d'optimisation et d'autre part de la nature des réponses mesurées : profils relativement différents selon l'amplitudes du lâcher et l'origine des essais (voir commentaires attachés à la Figure V-9). Dans cette démarche, nous analysons les évolutions des valeurs du coefficient de corrélation et de l'erreur quadratique lorsque l'optimisation est conduite sur les quatre paramètres C_1 , f_0 , λ_2 et β_2 pour une valeur fixe de C_0 .

Concernant le critère de minimisation de l'erreur quadratique, il se peut que des deux paramètres du modèle d'amortissement, C_1 soit celui dont l'influence est prépondérante dans le poids de l'erreur quadratique globale. Il est alors possible que la valeur de C_0 subisse un biais qui pourrait être à l'origine des écarts constatés. Il se peut aussi que le modèle d'amortissement ne soit pas complet et que la modélisation du comportement proposée ne prenne pas en compte l'ensemble des phénomènes. Dans le but de préciser la confiance à porter aux valeurs du paramètre C_0 , nous comparons les résultats d'optimisations effectuées lorsque C_0 à une valeur fixée dans le modèle de solution Air 1 (optimisation de C_1 , f_0 , λ_2 et β_2 - valeur fixée pour C_0) avec les résultats précédemment obtenus (optimisation de tous les paramètres : C_0 , C_1 , f_0 , λ_2 et β_2). La valeur fixée pour C_0 est égale à la moyenne des valeurs obtenues lors de l'optimisation effectuée sur cinq paramètres. Ces valeurs moyennes sont égales à : $C_0 = 0.33 \text{ s}^{-1}$ pour l'assemblage AFA-XL 1300 MW (LHC), $C_0 = -0.097 \text{ s}^{-1}$ pour l'assemblage XL 1300 MW (EMSI) et $C_0 = -0.17 \text{ s}^{-1}$ pour l'assemblage AFA 900 MW (EMSI). Pour ces deux démarches (4 ou 5 paramètres optimisés), on étudie comment évoluent les valeurs de l'erreur quadratique globale et du coefficient de corrélation. La Figure V-17 illustre ces comparaisons pour les trois séries de lâchers :

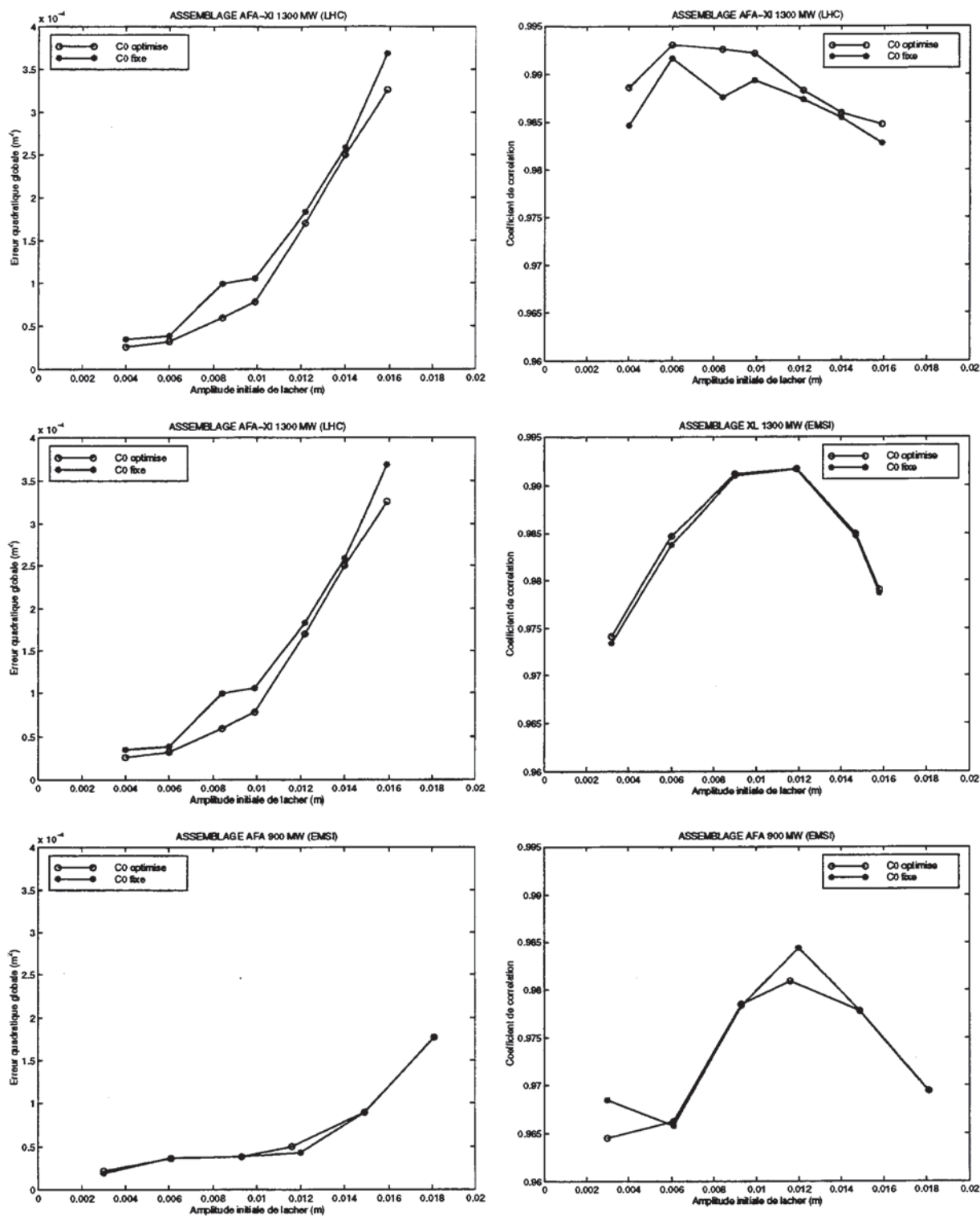


Figure V-17 : Comparaisons des évolutions de l'erreur quadratique et du coefficient de corrélation obtenues lors d'optimisations sur cinq ou quatre paramètres. Valeur de C_0 fixée.

Les résultats présentés sur la Figure V-17, montrent que la prise en compte d'une valeur moyenne pour le coefficient C_0 n'est pas trop pénalisante et permet de traduire correctement le comportement de l'assemblage. Pour le cas de l'assemblage AFA-XL 1300

MW (LHC) où les variations de C_0 sont les plus importantes (cf. Figure V-9; optimisation simultanée des cinq paramètres), on constate que le coefficient de corrélation et l'erreur quadratique résiduelle ne varient pas de manière significative et restent acceptables. Cette démarche indique que l'on peut s'attendre à une confiance relativement faible pour les valeurs déterminées de C_0 . Pour quantifier plus précisément cette confiance, une étude de sensibilité des différents paramètres doit être menée. Celle-ci n'a pu être effectuée mais nous pouvons indiquer la démarche à suivre. Cette étude ne peut être menée qu'en simulations. Elle doit permettre de quantifier l'erreur commise sur la fréquence, le taux d'amortissement et sur les réponses optimisées. Lorsqu'il s'agit d'un contexte non-linéaire, une telle analyse est effectuée en procédant à un grand nombre de calculs qui peuvent s'enchaîner selon les étapes suivantes :

création d'un signal de référence : obtenu à partir du modèle de solution analytique (modèle de solution Air 1 par exemple), pour un jeu de paramètres fixé,

détermination de l'erreur liée à l'étape d'optimisation :

- sur chaque paramètre : pour un jeu de valeurs initiales fixé des paramètres ($\vec{\theta}_0$), on calcule les paramètres optimum qui minimisent l'erreur quadratique résiduelle entre la référence et le modèle analytique. Le pourcentage d'erreur lié à l'optimisation est calculé par comparaison des paramètres de la référence avec ceux obtenus après l'optimisation. Cette étape est réalisée pour plusieurs jeux de valeurs initiales : loin des valeurs de référence, proche des valeurs de référence,
- on déduit les variations du coefficient de corrélation et de l'erreur quadratique.

on se fixe un niveau d'erreur seuil (erreur quadratique ou coefficient de corrélation) et **on détermine le pourcentage d'erreur qui peut être affecté à chaque paramètre**, pris indépendamment les uns des autres (c'est-à-dire qu'un seul paramètre varie, les autres gardent leur valeur de référence) pour atteindre ce seuil,

on détermine les variations de l'erreur quadratique et du coefficient de corrélation par comparaison avec la référence (étape 1) lorsque tous les paramètres sont affectés du pourcentage d'erreur déterminé dans l'étape 3,

on reprend à l'étape 2 jusqu'à obtenir un niveau acceptable des critères de l'étape 4.

A partir de l'étape 3, il est possible d'utiliser une référence, la plus représentative des signaux mesurés : réponses bruitées par exemple.

Dans le paragraphe suivant, on présente les résultats obtenus pour le deuxième modèle de solution analytique (Modèle de solution Air 2).

V.3.1.2. Résultats – Modèle Air 2

On rappelle que le modèle Air 2 est défini par :

$$x(t) = \frac{A_0}{\sqrt{e^{C_0 t} - \frac{C_2}{4C_0} A_0^2}} \cos\left(2\pi\left(f_0 - \frac{\lambda_2 \mu_{\beta_2}}{2\pi} A^{\beta_2}\right)t\right) ; \quad A_0 = \frac{x_0}{\sqrt{1 + \frac{C_2}{4C_0} x_0^2}}$$

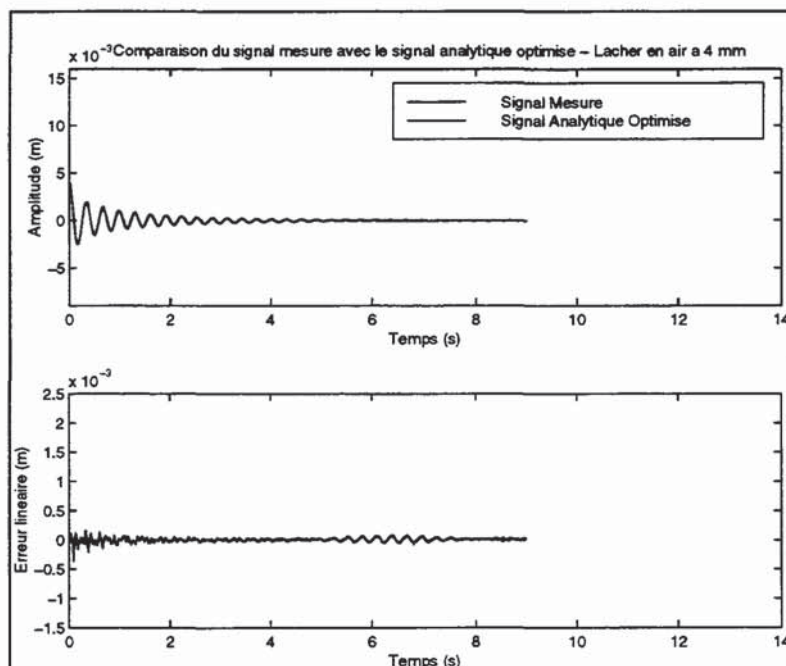
Solution calculée à partir de :

$$C(x, \dot{x}) = \epsilon(C_0 + C_2 x^2) \text{ et } \lambda K^2(x)x(t) = -2\omega_0 \lambda_2 x |x|^{\beta_2} + \frac{\lambda_2^2 \mu_{\beta_2}^2}{\mu_{2\beta_2}} x |x|^{2\beta_2}$$

Les paramètres optimisés simultanément sont : C_0 , C_2 , f_0 , $\frac{\lambda_2 \mu_{\beta_2}}{2\pi}$ et β_2 .

Le modèle d'amortissement à l'origine de la solution Air 2 est envisagé pour tenter de s'affranchir de la dépendance de C_0 et de C_1 en fonction de l'amplitude du lâcher constatée avec le modèle Air 1 (cf. Figure V-9) et pour vérifier si un terme non-linéaire $C_2 x^2$ n'êtré pas plus adaptée à traduire les effets dissipatifs de la structure en air.

La Figure V-18 illustre la comparaison entre trois mesures effectuées sur l'assemblage AFA-XL 1300 (LHC) pour l'amplitude initiale la plus faible, l'amplitude intermédiaire de 9.9 mm et l'amplitude la plus élevée avec les solutions analytiques optimisées de modèle Air 2.



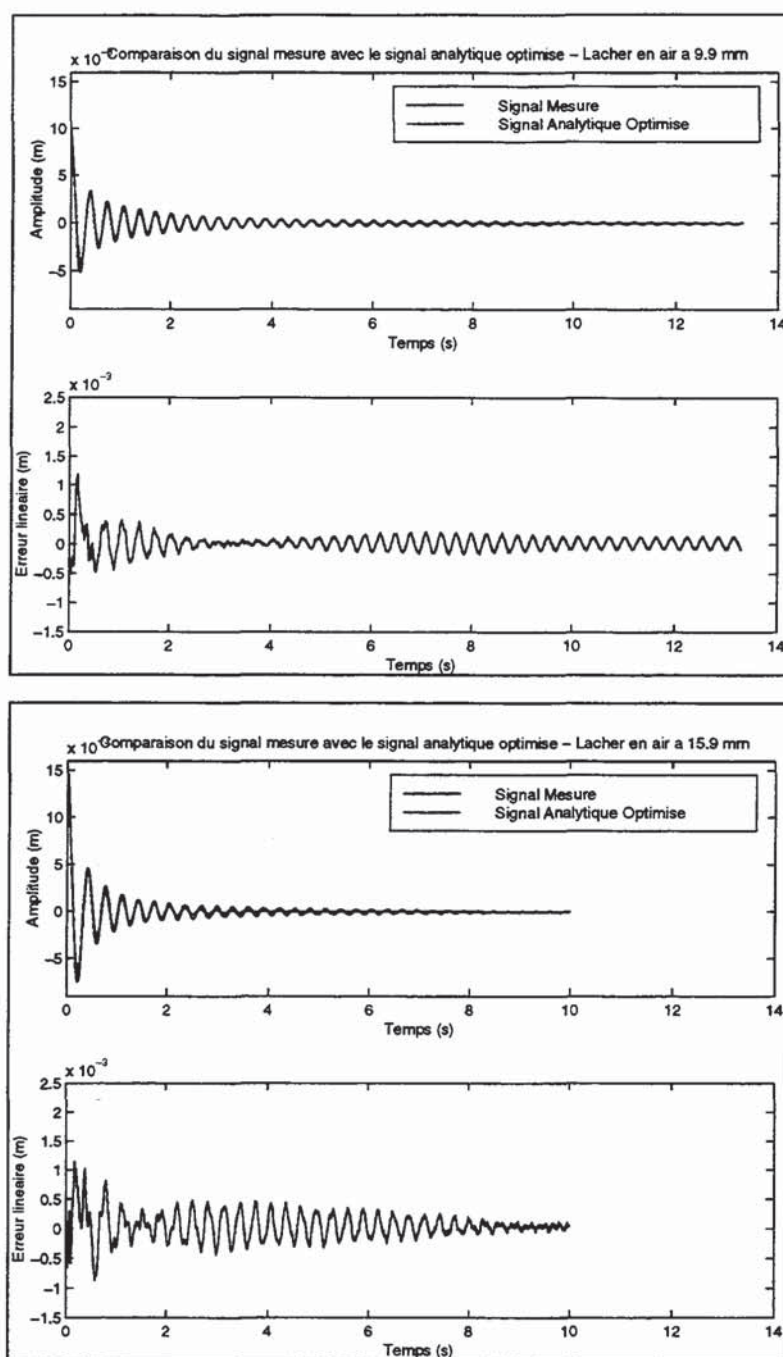


Figure V-18 : Comparaisons entre les réponses mesurées et les réponses optimisées du modèle Air 2. Lâchers effectués sur un assemblage AFA-XL 1300 MW (LHC).

On constate que la solution optimisée ne permet pas de traduire correctement le comportement de l'assemblage soumis à un lâcher. Le modèle est représentatif du mouvement pour les premières alternances mais une enveloppe trop amortie ne peut représenter les oscillations de faible amplitude. Les résultats pour les autres amplitudes de cette série d'essais et ceux obtenus pour les deux autres séries de lâchers sont équivalents à ceux présentés par Figure V-18. Le modèle de solution analytique Air 2 est abandonné ainsi que le modèle d'amortissement associé.

V.3.2. Essais en eau stagnante

Dans ce paragraphe, les résultats obtenus pour les lâchers effectués en eau calme sont présentés. Dans une première étape, nous effectuons une sélection parmi les modèles proposés et nous discutons des possibilités d'interprétations de chacun des paramètres des modèles d'amortissement. L'objectif est de déterminer quelle(s) solution(s) analytique(s) et donc, quel(s) modèle(s) d'amortissement, permet(tent) de modéliser au mieux le comportement de l'assemblage en eau stagnante. Le modèle sélectionné in fine doit aussi modéliser correctement le comportement en air et sera celui dont les paramètres permettent de distinguer les effets dissipatifs de structure de ceux du fluide. Enfin, les résultats obtenus en eau et en air sont comparés.

Nous rappelons tout d'abord dans le Tableau V-2 les solutions analytiques calculées au chapitre IV ainsi que les formulations de $C(x, \dot{x})$, $\lambda K^2(x)x(t)$ et du taux d'amortissement associées. Le modèle permettant les tracés de l'évolution de la fréquence en fonction de A est équivalent à celui utilisé en air : $f(A) = f_0 - \frac{\lambda_2 \mu_{\beta_2}}{2\pi} A^{\beta_2}$

<u>Modèles de solution analytique</u>	<u>Solution analytique</u>	
	<u>Modèle NL d'amortissement</u>	<u>Modèle NL de force de rappel</u>
	<u>Taux d'amortissement</u>	
Air 1	$x(t) = \frac{A_0}{e^{\frac{C_0 t}{2}} - 2\mu(2,-1)\frac{C_1}{C_0}A_0} \cos\left(2\pi\left(f_0 - \frac{\lambda_2 \mu_{\beta_2}}{2\pi} A^{\beta_2}\right)t\right) ; \quad A_0 = \frac{x_0}{1 + 2\mu(2,-1)\frac{C_1}{C_0}x_0}$ $C(x, \dot{x}) = \epsilon(C_0 + C_1 \dot{x})$ $\tau(A) = \frac{C_0}{2\bar{\omega}} + \frac{\mu(2,-1)C_1}{\bar{\omega}} A$	$\lambda K^2(x)x(t) = -2\omega_0 \lambda_2 \dot{x} ^{\beta_2} + \frac{\lambda_2^2 \mu_{\beta_2}^2}{\mu_{2\beta_2}} \dot{x} ^{2\beta_2}$
	<u>Paramètres optimisés</u> : $C_0, C_1, f_0, \frac{\lambda_2 \mu_{\beta_2}}{2\pi}, \beta_2$	
Eau 1	$x(t) = \frac{A_0}{e^{\frac{C_0 t}{2}} - \frac{16f_0 C_3}{3} \frac{C_0}{A_0}} \cos\left(2\pi\left(f_0 - \frac{\lambda_2 \mu_{\beta_2}}{2\pi} A^{\beta_2}\right)t\right) ; \quad A_0 = \frac{x_0}{\left(1 + \frac{16f_0 C_3}{3} \frac{C_0}{x_0}\right)}$ $C(x, \dot{x}) = \epsilon(C_0 + C_3 \dot{x})$ $\tau(A) = \frac{C_0}{2\bar{\omega}} + \frac{8f_0 C_3}{3\bar{\omega}} A$	$\lambda K^2(x) = -2\omega_0 \lambda_2 \dot{x} ^{\beta_2} + \frac{\lambda_2^2 \mu_{\beta_2}^2}{\mu_{2\beta_2}} \dot{x} ^{2\beta_2}$
	<u>Paramètres optimisés</u> : $C_0, C_3, f_0, \frac{\lambda_2 \mu_{\beta_2}}{2\pi}, \beta_2$	

<p style="text-align: center;">Eau 2</p>	$x(t) = \frac{A_0}{e^{\frac{C_0}{2}t} - \left(2\mu(2-1)\frac{C_1}{C_0} + \frac{16f_0 C_3}{3 C_0}\right) A_0} \cos\left(2\pi\left(f_0 - \frac{\lambda_2 \mu \beta_2}{2\pi} A^{\beta_2}\right)t\right); \quad A_0 = \frac{x_0}{\left(1 + \left(2\mu(2-1)\frac{C_1}{C_0} + \frac{16f_0 C_3}{3 C_0}\right)x_0\right)}$ $\alpha(x, \dot{x}) = \epsilon(C_0 + C_1 x + C_3 \dot{x}) \quad \lambda K^2(x)x(t) = -2\omega_0 \lambda_2 x \dot{x} ^{\beta_2} + \frac{\lambda_2^2 \mu^2}{\mu_2 \beta_2} x \dot{x} ^{2\beta_2}$ $\tau(A) = \frac{C_0}{2\hat{\omega}} + \frac{\left(\mu(2-1)C_1 + \frac{8f_0 C_3}{3}\right)A}{\hat{\omega}}$ <p style="text-align: center;"><u>Paramètres optimisés</u> : $C_0, C_1, C_3, f_0, \frac{\lambda_2 \mu \beta_2}{2\pi}, \beta_2$</p>
<p style="text-align: center;">Eau 3</p>	$x(t) = \frac{A_0}{\sqrt{e^{C_4 t} - \frac{3C_4}{4C_0}(2\pi f_0)^2 A_0^2}} \cos\left(2\pi\left(f_0 - \frac{\lambda_2 \mu \beta_2}{2\pi} A^{\beta_2}\right)t\right); \quad A_0 = \frac{x_0}{\sqrt{1 + \frac{3C_4}{4C_0}(2\pi f_0)^2 x_0^2}}$ $C(x, \dot{x}) = \epsilon(C_0 + C_4 \dot{x}^2) \quad \lambda K^2(x)x(t) = -2\omega_0 \lambda_2 x \dot{x} ^{\beta_2} + \frac{\lambda_2^2 \mu^2}{\mu_2 \beta_2} x \dot{x} ^{2\beta_2}$ $\tau(A) = \frac{C_0}{2\hat{\omega}} + \frac{3\pi^2 f_0^2 C_4}{2\hat{\omega}} A^2$ <p style="text-align: center;"><u>Paramètres optimisés</u> : $C_0, C_4, f_0, \frac{\lambda_2 \mu \beta_2}{2\pi}, \beta_2$</p>

Tableau V-2 : Récapitulatif des modèles de solution analytique envisagés en eau stagnante et des formulations associées.

V.3.2.1. Comparaison des modèles d'amortissement proposés - Sélection

Les quatre modèles de solution du Tableau V-2 ont été utilisés dans une étape d'optimisation des paramètres pour les trois séries de lâchers effectuées en eau stagnante. On rappelle que les enveloppes des solutions Eau 1, Eau 2 et Eau 3 se distinguent par la présence du terme de fréquence propre f_0 (puissance 1 ou 2). Ce terme f_0 est introduit par la prise en compte du terme de vitesse \dot{x} dans les modèles d'amortissement. C'est la présence de ce terme qui est susceptible de permettre la distinction des effets du fluide de ceux de la structure.

Une première étape permet de constater que le modèle de solution Eau 3 ne modélise pas convenablement le comportement de l'assemblage. En effet nous constatons sur la Figure V-19 que le modèle Eau 3 se distingue par des valeurs de son coefficient de corrélation plus faible et d'erreur quadratique résiduelle plus élevée que celles obtenues pour les autres modèles. Ce comparatif est effectué à partir des essais réalisés sur l'assemblage AFA-XL 1300 MW (LHC). Les résultats sont du même ordre à partir pour les autres séries d'essais. On peut conclure que le modèle Eau 3 est moins bien adapté que les autres modèles à

représenter le comportement de l'assemblage. Pour ces raisons ce modèle n'est pas conservé dans la suite des développements de ce chapitre.

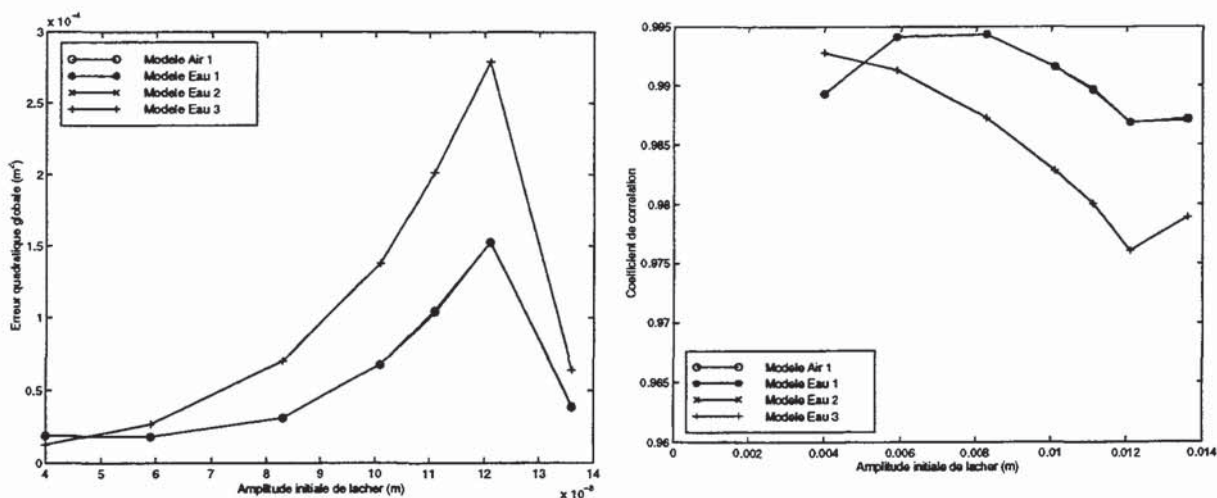


Figure V-19 : Comparaisons entre les différents modèles de solution analytique à partir de l'erreur quadratique globale et du coefficient de corrélation.

La Figure V-19 montre que les trois modèles (Air 1, Eau 1 et Eau 2) donnent des valeurs égales du coefficient de corrélation et de l'erreur quadratique résiduelle (courbes confondues). Les tracés du taux d'amortissement et de la fréquence en fonction de l'amplitude du mouvement sont alors équivalents quelque soit l'un de ces modèles. Ce résultat montre que la détermination des caractéristiques du taux d'amortissement et de la fréquence est indépendante du modèle de solution analytique employé, dans la mesure où celui-ci correspond à une modélisation correcte du mouvement de l'assemblage.

On compare sur les Figure V-20, Figure V-21 et Figure V-22, les réponses mesurées aux réponses optimisées issues du modèle de solution Air 1. Pour limiter le nombre de courbes, seules sont présentées celles correspondant à l'amplitude de lâcher la plus faible et la plus élevée pour chaque série d'essais. Les autres courbes sont reportées en Annexe 5.

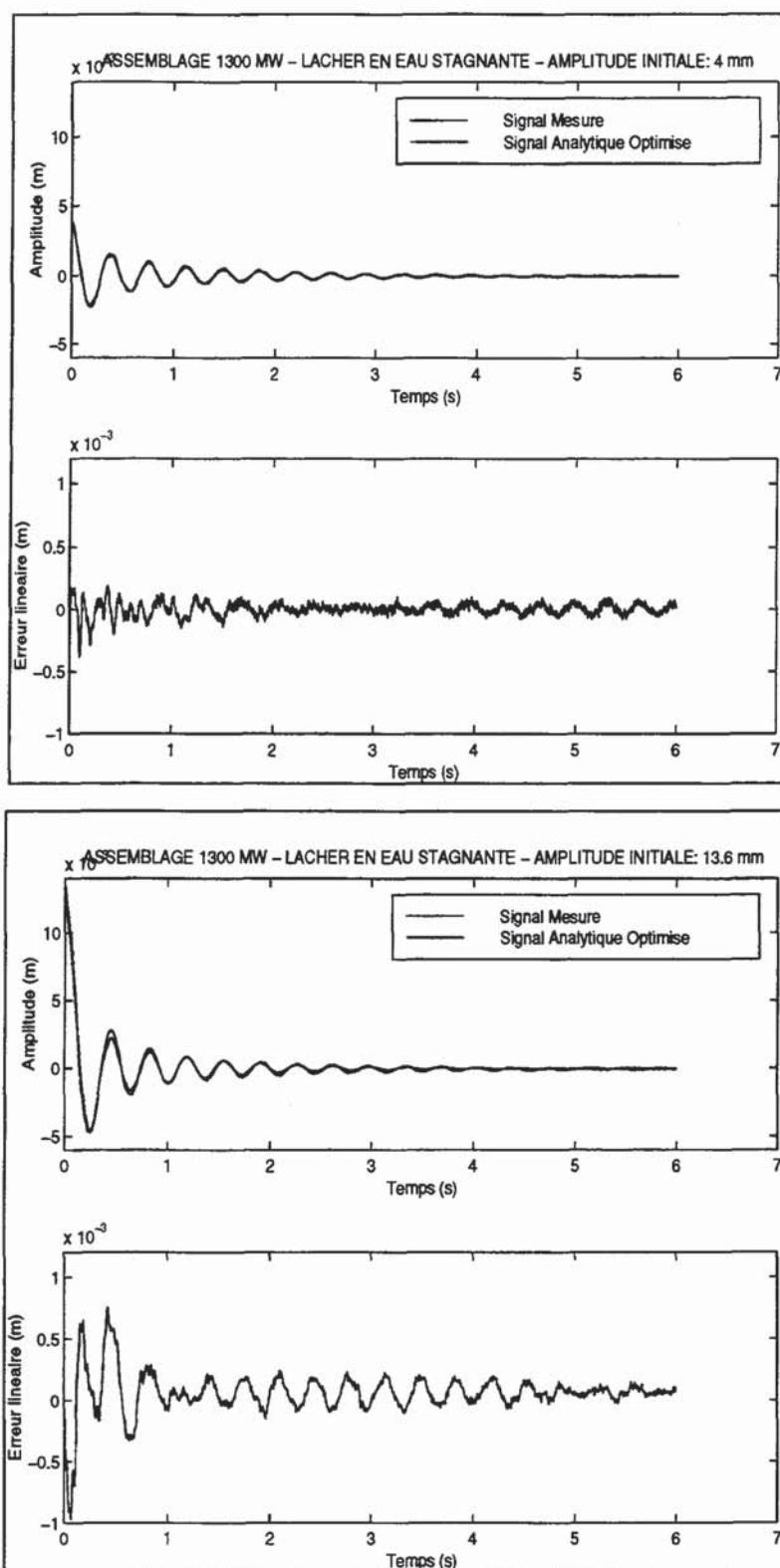


Figure V-20 : Comparaisons entre les réponses mesurées et les réponses optimisées (Modèle Air 1). Lâchers effectués en eau stagnante sur l'assemblage AFA-XL 1300 MW (LHC).

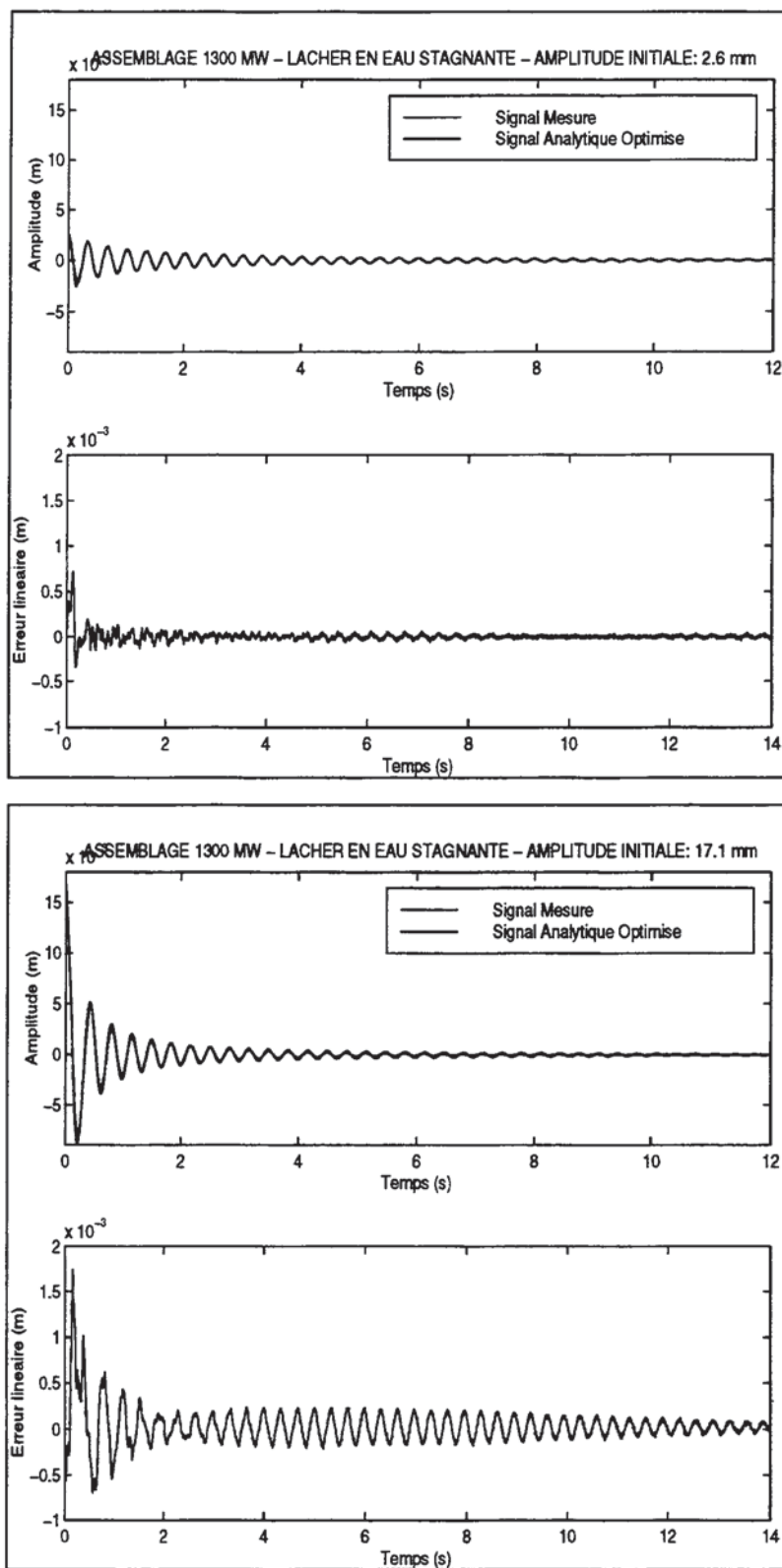


Figure V-21 : Comparaisons entre les réponses mesurées et les réponses optimisées (Modèle Air 1). Lâchers effectués en eau stagnante sur l'assemblage XL 1300 MW (EMSI).

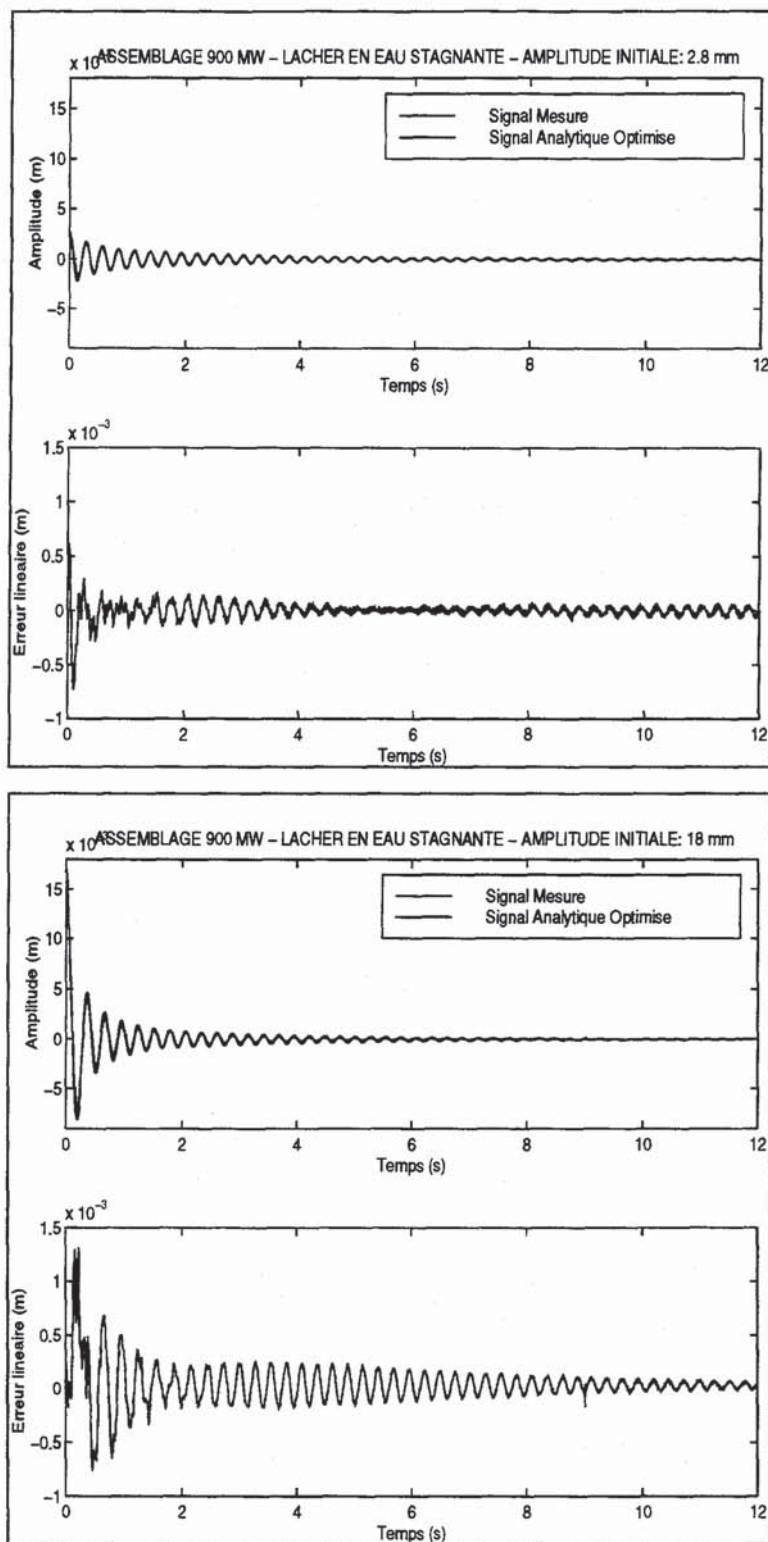


Figure V-22 : Comparaisons entre les réponses mesurées et les réponses optimisées (Modèle Air 1). Lâchers effectués en eau stagnante sur l'assemblage AFA 900 MW (EMSI).

L'intérêt de proposer plusieurs modèles d'amortissement réside dans l'interprétation qu'il est possible de faire a posteriori des coefficients qui les définissent. En effet, on souhaite

associer aux paramètres C_i une valeur qui permette de caractériser l'amortissement et son origine : dissipations liées à la structure, dissipations liées à la présence du fluide et leur importance relative.

En se référant à la définition de chacun des termes des modèles d'amortissement ainsi qu'aux justifications de leur prise en compte, données dans la littérature (cf. Chapitre II et Chapitre III) on considère que :

- le terme d'amortissement C_0 est la contribution linéaire de l'amortissement, c'est-à-dire que ce terme est la somme des dissipations liées aux déformations élastiques de l'assemblage et de celle liée à la part linéaire des dissipations par effet visqueux du milieu environnant dans lequel se déplace l'assemblage. A priori, ce terme doit être constant quelle que soit le niveau de l'excitation mais nous avons déjà montré, pour le cas en air, la difficulté à trouver cette propriété,
- le terme d'amortissement $C_1|x(t)|$ est a priori, caractéristique des dissipations non-linéaires de structure, principalement liées dans notre étude aux frottements des crayons dans les cellules de grille,
- le terme d'amortissement $C_3|\dot{x}(t)|$ est a priori lié aux effets non-linéaires du fluide. Il peuvent être liés aux déplacements d'amplitude importante de l'assemblage dans le fluide au repos qui génère donc des effets de friction supplémentaires sur la structure et des effets liés à la traînée,

Les valeurs déterminées pour les paramètres des modèles de solution Air 1, Eau 1 et Eau 2, à la suite de l'optimisation, nous permettent de faire les constatations suivantes :

- l'amortissement à amplitude nulle $\frac{C_0}{2\hat{\omega}}$ est relativement constant pour les amplitudes de lâcher jusqu'à 8 mm ; ensuite la valeur de l'amortissement augmente de manière relativement importante (Figure V-23). Comme pour le cas en air, les valeurs de $\frac{C_0}{2\hat{\omega}}$ issues des essais effectués sur l'assemblage AFA-XL 1300 MW (LHC) sont plus importantes que celles calculées sur les assemblages XL 1300 MW (EMSI) et AFA 900 MW (EMSI). Les conditions de maintien de l'assemblage, la possibilité de la présence d'un frottement parasite et l'historique expérimentale de l'assemblage peuvent être à l'origine de ces disparités,
- le modèle Eau 2 ne permet pas de préciser l'origine des contributions respectives des dissipations liées au fluide de celles liées à la structure. En effet, les valeurs des paramètres C_1 et C_3 dépendent directement du jeu de valeurs initiales imposé pour débiter le processus d'optimisation. En considérant la solution $x(t)$ du modèle

Eau 2, on constate que se sont les quantités C_0 et $\left(2\mu(2,-1)\frac{C_1}{C_0} + \frac{16f_0}{3}\frac{C_3}{C_0}\right)$ qui sont optimisées et non pas C_0 , C_1 et C_3 pris indépendamment. Il en résulte que plusieurs couples de valeurs $(C_1; C_3)$ sont possibles et fournissent une valeur minimum de l'erreur quadratique.

En conclusion, les trois modèles Air 1, Eau 1 et Eau 2 fournissent des résultats équivalents en ce qui concerne l'amortissement à amplitude nulle et le taux d'amortissement $\tau(A)$. Les évolutions du taux d'amortissement et de la fréquence en eau stagnante sont reportées respectivement en Annexe 6 et en Annexe 7. Chacun de ces modèles convient pour modéliser convenablement les dissipations qui se produisent lorsque l'assemblage est en mouvement dans l'eau stagnante. Le modèle Eau 2 ne permet pas de distinguer l'origine des dissipations (fluide et/ou structure) et comporte un paramètre en plus par rapport aux modèles Air 1 et Eau 1. Il n'a donc pas d'intérêt particulier et génère des temps de calcul plus importants. Ce modèle n'est donc pas conservé pour la suite des développements.

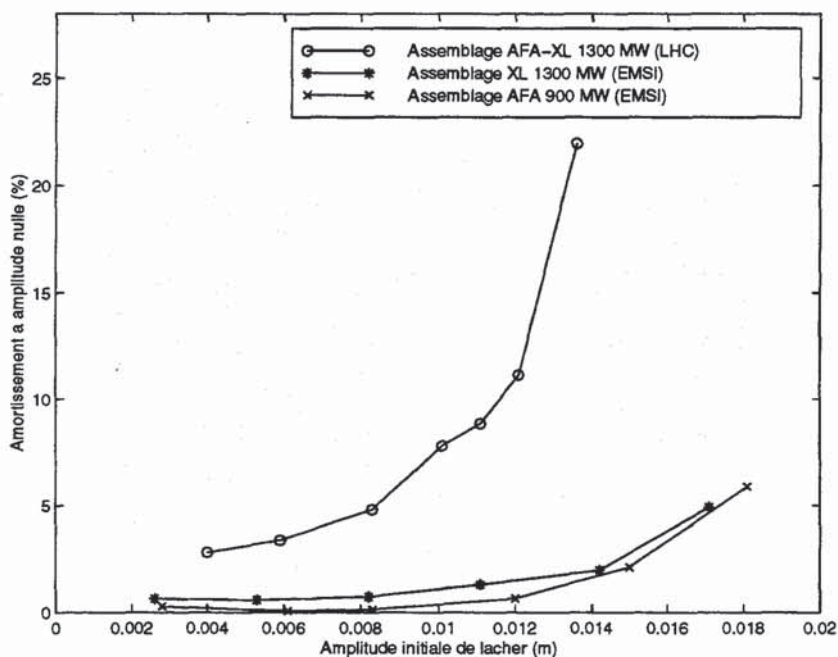


Figure V-23 : Evolution de l'amortissement à amplitude nulle $\frac{C_0}{2\hat{\omega}}$ en eau stagnante pour trois types d'assemblage.

La Figure V-24 montre l'évolution des valeurs optimisées de C_1 (Modèle Air 1) et de C_3 (Modèle Eau 1) en fonction de l'amplitude initiale x_0 pour les différents lâchers effectués en eau stagnante. On observe, comme pour les résultats obtenus en air, que chacune des

évolutions conserve une dépendance vis-à-vis de l'amplitude initiale. Il n'y a donc pas de raison particulière pour sélectionner l'un ou l'autre des deux modèles Air 1 ou Eau 1. Dans l'optique de prédictions du comportement de l'assemblage, il aurait été très intéressant de pouvoir disposer d'une valeur constante pour C_1 ou C_3 quelque soit le niveau de l'excitation. Les dépouillements des essais en air ont été effectués avec le modèle Air 1. Ce modèle est donc conservé pour le traitement des essais en eau stagnante afin d'effectuer des comparaisons de manière aisées.

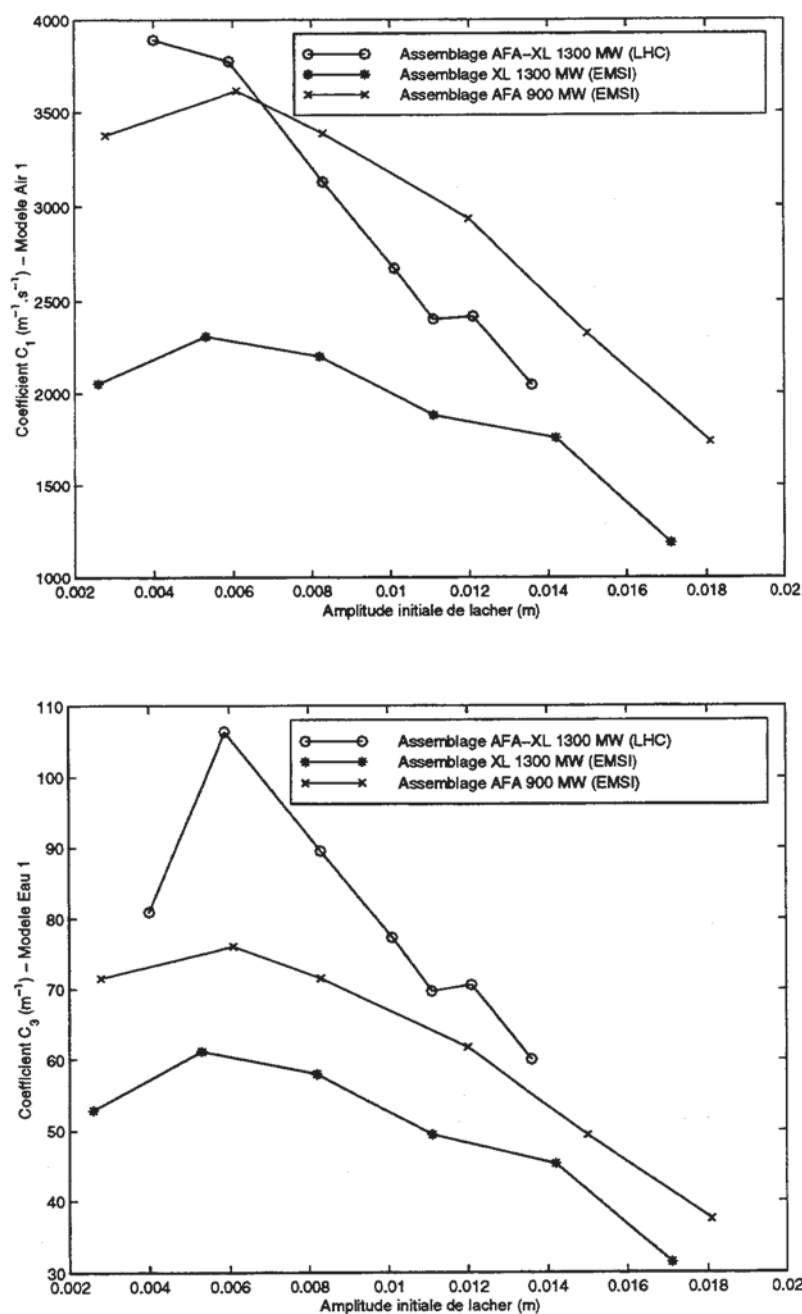


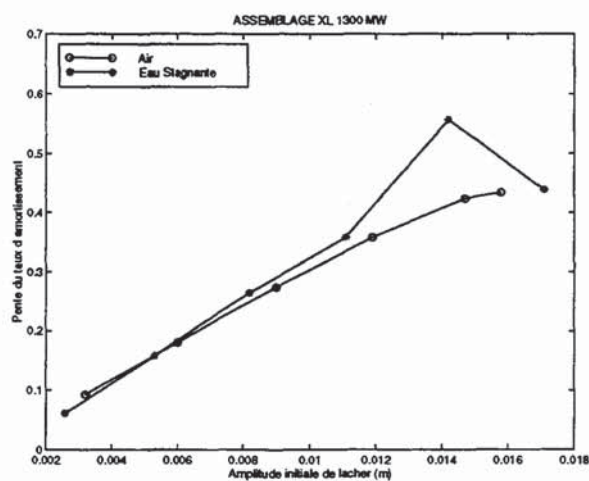
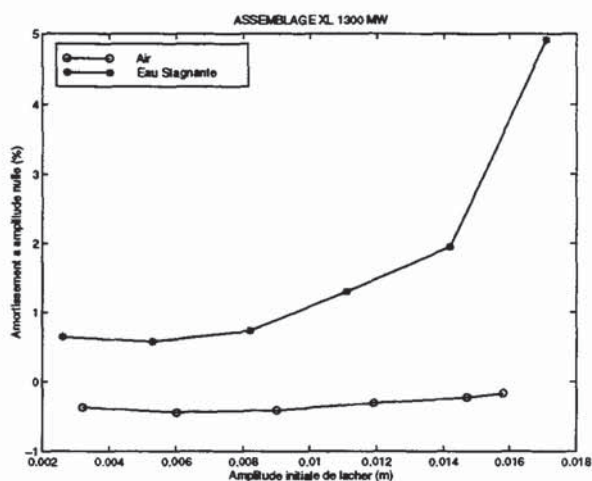
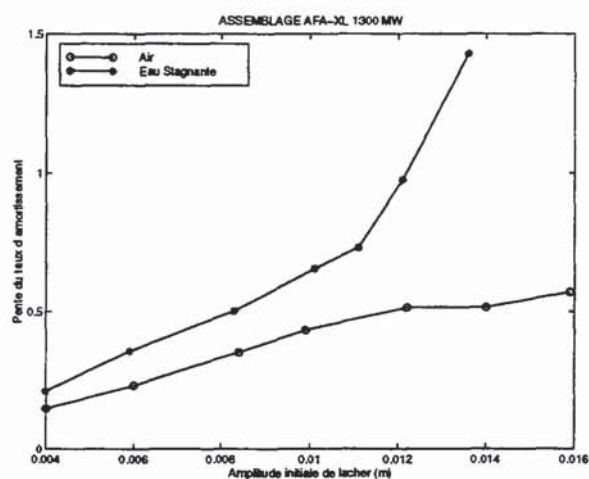
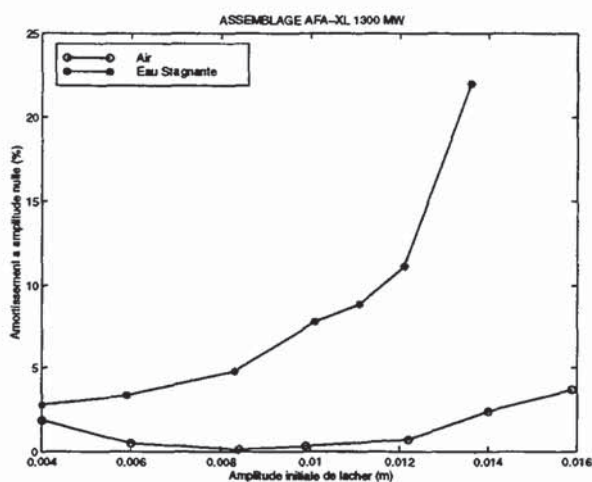
Figure V-24 : Evolution des paramètres C_1 (Modèle Air 1) et C_3 (Modèle Eau 1) en fonction de l'amplitude initiale de lâcher.

V.3.2.2. Comparaison des résultats en air et en eau stagnante

La comparaison des résultats concerne d'une part, le coefficient d'amortissement à amplitude nulle $\frac{C_0}{2\hat{\omega}}$ et la pente du taux d'amortissement caractéristique de l'importance des non-linéarités d'amortissement, et d'autre part, la fréquence propre f_0 et le coefficient caractéristique de la non-linéarité de force de rappel λ_2 . On rappelle que pour le modèle Air 1 retenu, la pente du taux d'amortissement s'exprime : $\frac{\mu(2,-1)C_1}{\hat{\omega}}$. La Figure V-25, présente pour chacune des séries d'essais, les évolutions de l'amortissement à amplitude nulle et de la pente du taux d'amortissement en air et en eau. Les tracés du taux d'amortissement pour ces séries sont reportés en Annexe 6.

Amortissement à amplitude nulle

Pente du taux d'amortissement



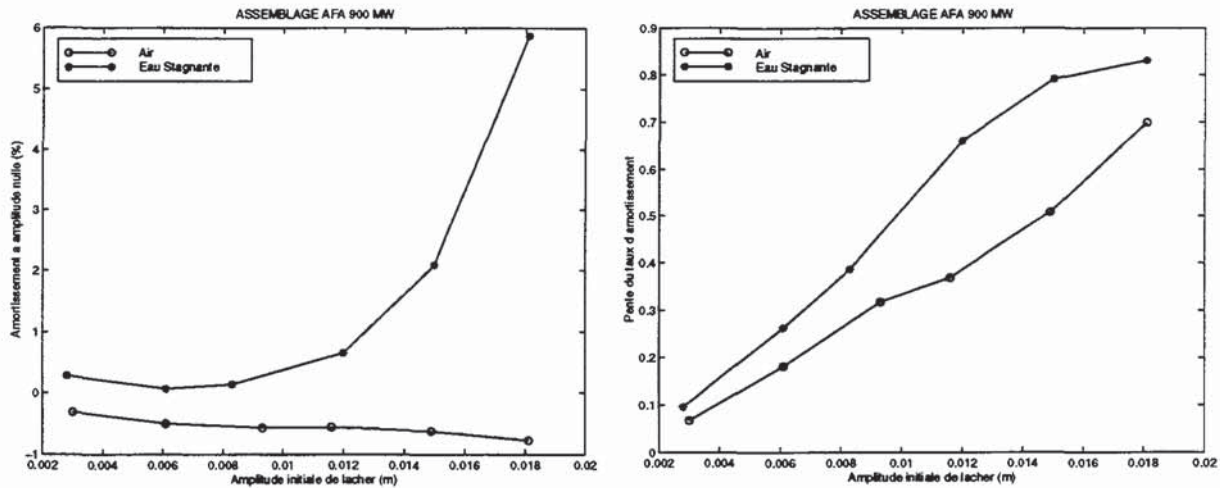


Figure V-25 : Evolutions comparées en air et en eau de l'amortissement à amplitude nulle et de la pente du taux d'amortissement pour trois séries de lâchers.

Les évolutions du terme $\frac{C_0}{2\hat{\omega}}$ en fonction de l'amplitude initiale de lâcher montrent que les valeurs en eau sont supérieures à celles déterminées en air. Ce trait est le signe le plus marquant de l'influence de l'eau sur le taux d'amortissement. Les tendances sont similaires pour les trois séries d'essais. Celles-ci montrent que le coefficient d'amortissement linéaire est relativement constant pour les faibles amplitudes, jusqu'à environ 8 mm. Ensuite on observe une augmentation de type exponentielle des valeurs de l'amortissement. Les valeurs obtenues pour les amplitudes les plus élevées sont sans doute surestimées. En effet, pour ces amplitudes on observe que l'erreur résiduelle globale est la plus élevée. Si on se reporte aux comparaisons faites entre les réponses mesurées et les réponses optimisées de l'Annexe 5, on s'aperçoit que pour chaque lâcher effectué à l'amplitude la plus élevée, les oscillations sont plus rapidement atténuées sur les réponses optimisées que sur les mesures. On aurait souhaité trouver une valeur constante du terme d'amortissement linéaire quelque soit le niveau de l'excitation. La Figure V-25 montre que la dépendance en fonction de l'amplitude initiale de lâcher est, en eau, plus marquée que celle en air. Celle-ci reste inexpliquée avec le modèle proposé.

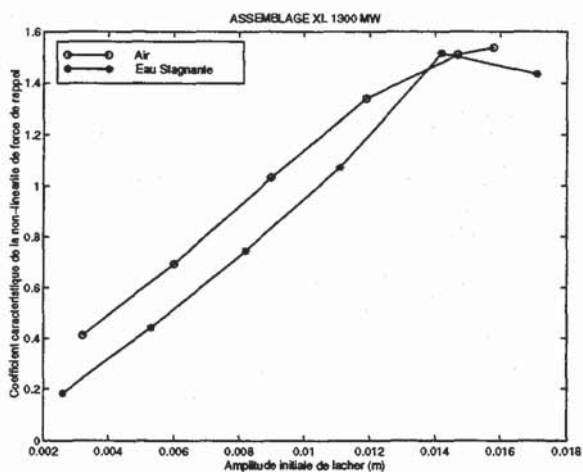
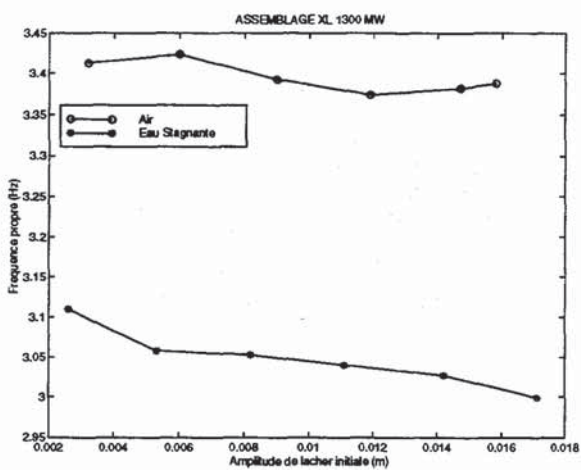
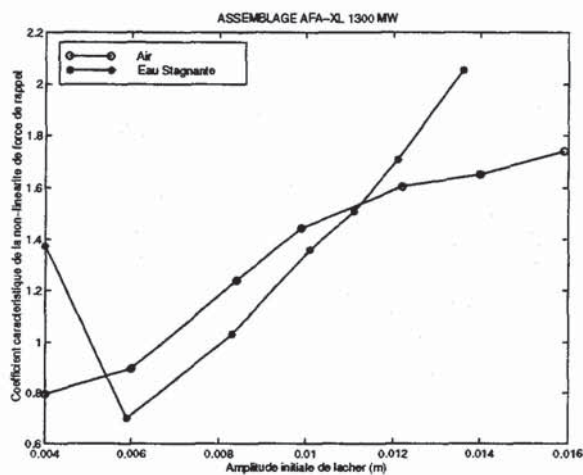
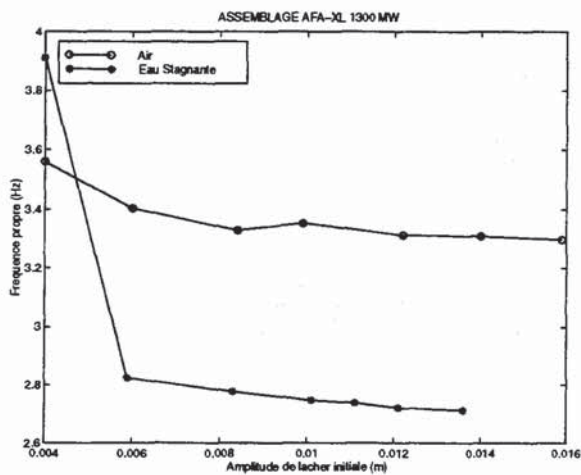
L'évolution de la pente du taux d'amortissement donne une information sur la vitesse de dissipation. Pour les trois assemblages, la Figure V-25 indique que cette pente augmente avec le niveau de l'excitation. La comparaison avec les résultats en air montre que ces valeurs sont très voisines de celles déterminées en eau. Pour l'assemblage XL 1300 MW (EMSI) on observe que les valeurs sont presque confondues pour toutes les amplitudes initiales de lâcher (sauf pour le point à 14.2 mm).

Pour les caractéristiques de la non-linéarité de force de rappel et concernant la fréquence, on présente sur la Figure V-26, les évolutions de la fréquence propre f_0 en air et en eau,

ainsi que celles du coefficient caractéristique de l'importance de la non-linéarité de force de rappel (λ_2 adimensionnalisé) en fonction de l'amplitude initiale de lâcher :

Fréquence propre

Coefficient caractéristique de la non-linéarité de force de rappel



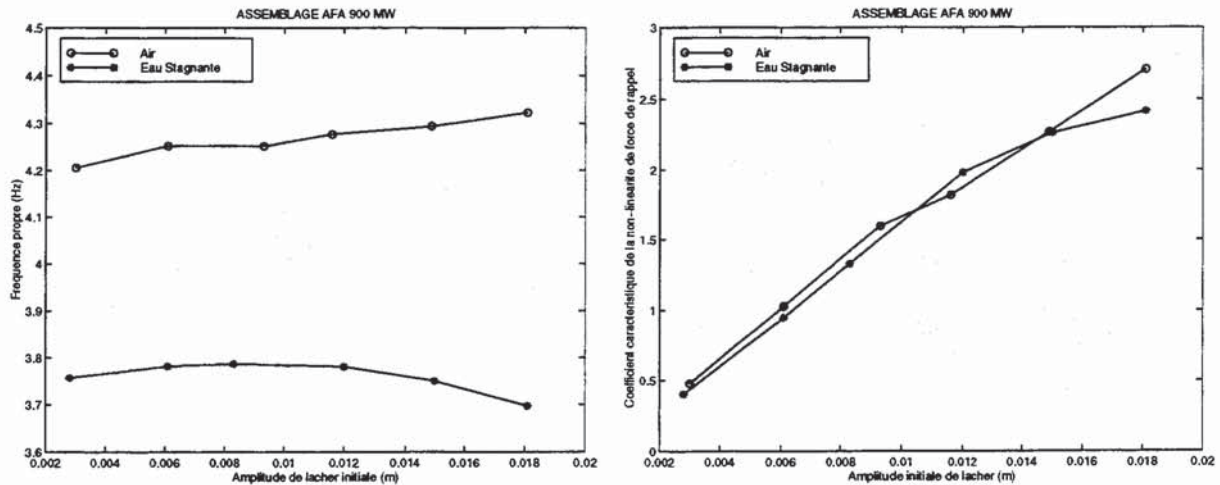


Figure V-26 : Evolutions de la fréquence propre et du coefficient caractéristique de la non-linéarité de force de rappel en fonction de l'amplitude initiale de lâcher. Comparaisons des résultats en air et en eau.

On observe que la valeur de la fréquence propre déterminée en eau est inférieure à celle obtenue en air. Cette diminution est due à l'effet de la masse ajoutée apportée par le fluide. En effet, la fréquence propre de l'assemblage en milieu fluide s'exprime :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m^s + m^e}} \quad \text{où } k \text{ est la raideur linéaire de l'assemblage, } m^s \text{ la masse de l'assemblage et } m^e \text{ le terme de masse ajoutée.}$$

Les valeurs de la fréquence propre sont trouvées constantes en fonction de l'amplitude du lâcher quelque soit l'assemblage considéré.

Le point correspondant au lâcher effectué à 4 mm sur l'assemblage AFA-XL 1300 MW (LHC) a vraisemblablement été mal déterminé lors de l'optimisation ; point que l'on retrouve sur le graphe de l'évolution du coefficient de la non-linéarité de force de rappel. Pour les évolutions de ce coefficient, les tendances sont conservées au passage de l'air à l'eau. Si on considère les évolutions obtenues pour l'assemblage XL 1300 MW (EMSI) et celle de l'assemblage AFA 900 MW (EMSI), on pourrait conclure à l'indépendance du coefficient λ_2 en fonction du milieu air et eau.

V.4. Implantation dans le code aux éléments finis CEA : CASTEM2000

Ce paragraphe a pour but de présenter les premiers travaux qui permettent de tirer profit, à court terme, d'un point vue pratique, des résultats des paragraphes précédents. On se place maintenant dans un contexte de prédiction et d'estimation du comportement de l'assemblage combustible. L'objectif est l'utilisation du modèle d'amortissement sélectionné et des valeurs des paramètres qui y sont attachées dans une modélisation à

l'aide du code aux éléments finis CASTEM2000 (code développé par le C.E.A.). L'intérêt serait de pouvoir utiliser les valeurs identifiées sur une série de lâchers pour estimer et prévoir le comportement de l'assemblage soumis à un autre type d'excitation (sinus, sismique, fluide, ...). Les développements et la modélisation présentés dans ce paragraphe sont restreints au cas du lâcher et concernent le premier mode de l'assemblage. Dans cette première étape, seule la prise en compte du modèle d'amortissement a pu être réalisée pour traduire les dissipations de l'assemblage en air et en eau stagnante ; l'implantation du modèle non-linéaire de force de rappel reste à établir.

Dans un premier paragraphe nous précisons le modèle numérique simplifié d'assemblage décrit dans le code CASTEM2000 et utilisé pour les simulations. Les caractéristiques des éléments employés sont définis puis recalées pour retrouver la première fréquence propre de l'assemblage. Ensuite, le second paragraphe décrit la démarche suivie pour simuler des lâchers en introduisant le modèle non-linéaire d'amortissement sélectionné (cf. V.3.1.1).

V.4.1. Modélisation simplifiée d'un l'assemblage AFA-XL 1300 MW

Il existe de nombreux modèles numériques d'assemblage plus ou moins évolués et plus ou moins complexes. Une bibliographie détaillée concernant ces modèles peut être consultée dans [V-10]. Dans notre étude un modèle simplifié d'assemblage est adopté. Il est représenté par une poutre non-homogène de section carrée (section d'une grille d'un assemblage 1300 MW ou 900 MW) constituée par deux types d'éléments :

- un élément que nous nommerons "poutre-tubes", équivalent aux caractéristiques de l'ensemble des crayons combustibles et des tubes guides,
- un élément que nous nommerons "poutre-grille", équivalent aux caractéristiques de l'ensemble constitué d'une grille, des crayons combustibles et des tubes guides.

Nous supposons que la poutre-assemblage définie à l'aide de ces éléments est encastree aux deux extrémités. Les embouts supérieur et inférieur sont considérés comme parfaitement rigides et ne sont donc pas modélisés. La Figure V-27 détaille ce modèle simplifié :

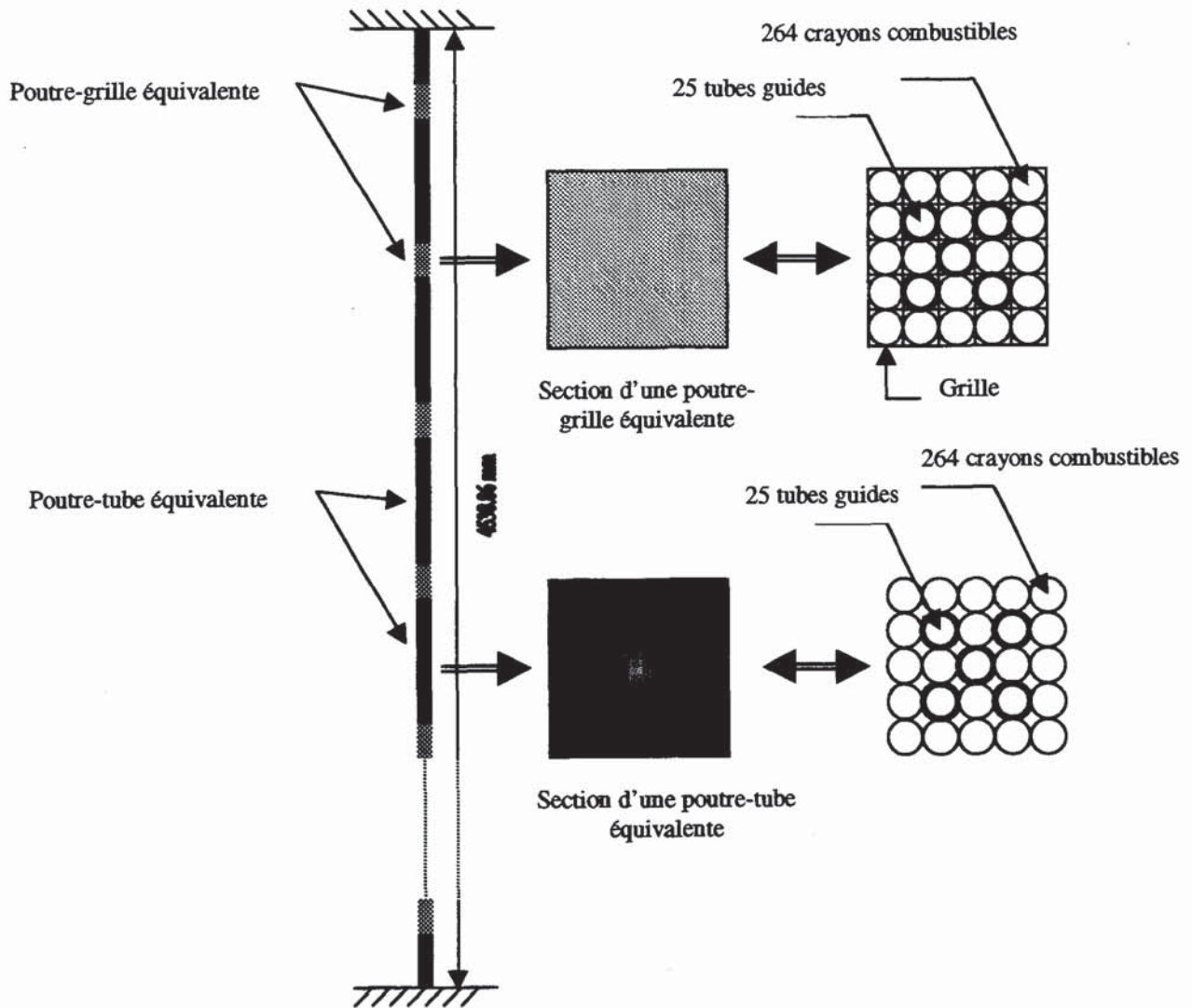


Figure V-27 : Géométrie du modèle d'assemblage 1300 MW.

Les caractéristiques équivalentes (moment d'inertie de flexion et de rotation, et masse volumique) des deux types d'élément sont définis en Annexe 8. Concernant le terme d'inertie de flexion équivalent, seul le premier terme ($N.I_{unitaire}$) de la formulation issue du théorème de Huygens a été prise en compte :

$$(V-16) \quad I = N.I_{unitaire} + \sum_{k=1}^N S_k l_k^2$$

où $I_{unitaire}$ représente l'inertie de flexion d'un tube (crayon combustible ou tube guide), N le nombre de tubes considérés, S_k la section du k ème tube et l_k la distance du k ème tube à la fibre neutre de l'assemblage (cf. schéma de l'Annexe 8, paragraphe VII.9.3).

En effet, si l'ensemble des termes de (V-16) est pris en compte (c'est-à-dire que l'on considère tous les crayons combustibles et les tubes guides comme parfaitement liés entre eux), la valeur de la raideur statique calculée (CASTEM2000) est nettement supérieure aux

valeurs déterminées expérimentalement [V-7], [V-8]. Le second terme $\left(\sum_{k=1}^N S_k l_k^2 \right)$ n'est donc pas introduit dans le calcul de l'inertie de flexion des poutres. Il est pris en compte par ailleurs à l'aide de raideurs de rotation ajoutées (K_i^{aj} associé à l'élément i) en parallèle de chaque élément (Figure V-28). Ces raideurs additionnelles constituent un paramètre de recalage du modèle [V-11], [V-12]. On tient ainsi compte du fait que les tubes guides sont soudés aux grilles et que les crayons combustibles sont libres de glisser dans leur cellule.

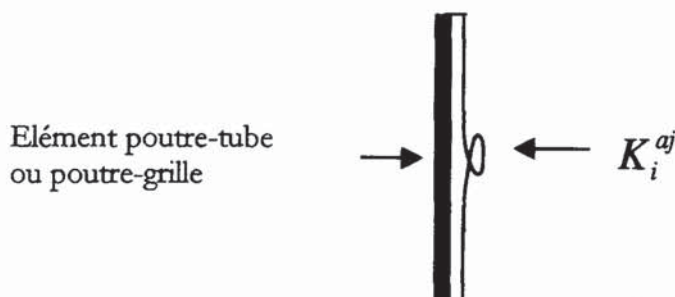


Figure V-28 : Raideur de rotation additionnelle attachée à un élément poutre-tubes ou poutre-grille.

Afin de valider la modélisation établie, plusieurs grandeurs caractéristiques sont comparées à leur valeur expérimentale. Ces comparaisons concernent :

- le poids de l'assemblage (sans ses embouts),
- la raideur statique déterminée au niveau des grilles n°4 et n°5,
- les premières fréquences propres de l'assemblage.

V.4.1.1. Poids de l'assemblage

Si nous utilisons les valeurs des masses volumiques équivalentes déterminées en Annexe 6, le poids calculé (CASTEM2000) est de 845.9 daN.

La pesée d'un assemblage avec ses embouts donne : $P_{ass} = 764.4$ daN [V-13]. Selon des données FBFC (Franco Belge de Fabrication de Combustibles), ce poids est de : $P_{ass} = 760.76$ daN ; le poids de l'embout supérieur est d'environ 100.062 N, celui de l'embout inférieur est de 75.537 N.

Le poids de l'assemblage sans ses embouts est donc estimé entre 743.21 daN et 746.84 daN.

Un recalage du modèle est alors effectué par rapport à ces données expérimentales. Il consiste à prendre une valeur plus faible pour la masse volumique (cf. Annexe 8) de la

poutre-tubes. Nous tenons ainsi compte du fait que le combustible n'occupe pas toute la hauteur du crayon mais seulement la zone de colonne active, soit 4267.2 mm pour un assemblage 1300 MW. La valeur retenue pour ρ_{pt}^{eq} (masse volumique équivalente pour la poutre-tubes) est de 3385 Kg/m³ (au lieu de 3919 Kg/m³). Pour ρ_{pg}^{eq} (masse volumique équivalente pour la poutre-grille) nous prenons 7400 Kg/m³ (au lieu de 7405 Kg/m³). Avec ces valeurs, le poids de l'assemblage est de 745.43 daN.

V.4.1.2. Raideur statique

Dans cette première approche la raideur statique est considérée comme linéaire. L'introduction d'un facteur de pénalisation (Q) dans le calcul des raideurs additionnelles dépendant de l'amplitude du déplacement [V-11], [V-12] ou la prise en compte d'une rotule élastoplastique pour modéliser la liaison crayon-grille [V-14], peut permettre de s'approcher des évolutions non-linéaires de la raideur constatées expérimentalement (cf. paragraphe II.4.3). Si nous intégrons les valeurs des raideurs additionnelles de rotation (Annexe 8) en parallèle de chaque élément poutre-tubes et poutre-grille, la raideur statique calculée (CASTEM2000) au niveau de la grille n°5 vaut 1195.77 daN/mm. Cette valeur est de 1344.29 daN/mm pour la grille n°4.

Les valeurs déterminées expérimentalement au niveau de ces mêmes grilles, sur la zone de traction du diagramme du cycle de charge de l'assemblage pour de faibles amplitudes (la raideur est linéaire, les amplitudes du déplacement sont inférieures à 10 mm), sont respectivement de 9.5 daN/mm [V-8] et de 10.7 daN/mm [V-7].

Les raideurs additionnelles sont utilisées pour se recalculer par rapport à la raideur statique calculée au niveau des grilles n°4 et n°5. Ce recalage est effectué à la main. En divisant par 200 chacune des valeurs des raideurs additionnelles calculées pour les poutre-tubes et par 2000 la valeur de celle de la poutre-grille, nous obtenons des résultats acceptables. La raideur statique déterminée au niveau de la grille n°5 est de 9.3 daN/mm. Celle pour la grille n°4 est de 11.06 daN/mm.

V.4.1.3. Premières fréquences propres

Tenant compte des modifications apportées au modèle défini ci-dessus, la résolution du problème aux valeurs propres est effectué par l'opérateur VIBR de CASTEM2000. Cet opérateur résout le système d'équations suivant :

$$(V-17) \quad (\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \vec{X} = 0$$

La dimension est fixée au préalable (nombre de modes souhaité). Les solutions sont les vecteurs propres \vec{X} et les pulsations propres associées ω_i^2 à chacun des modes.

Pour les quatre premiers modes, les résultats obtenus sont précisés dans le Tableau V-3. Celui-ci contient les valeurs obtenues par une analyse spectrale de signaux de réponses mesurés lorsque l'assemblage est soumis à un bruit blanc ou à un sinus [V-7] et les valeurs fournies par l'opérateur VIBR. Nous rappelons que les valeurs déterminées lors de l'identification du paramètre f_0 (fréquence à amplitude nulle) à partir des essais de lâchers sont $f_0 = 3.3$ Hz (Essais LHC) et $f_0 = 3.4$ Hz (Essais EMSI) (cf. Figure V-15).

Mode	Détermination expérimentale		Calcul
	Excitation bruit blanc	Excitation sinus	CASTEM2000
1	3.31 Hz	3.22 Hz	2.82 Hz
2	7.03 Hz	6.91 Hz	6.32 Hz
3	11.18 Hz	10.8 Hz	10.45 Hz
4	15.58 Hz	15 Hz	16.16 Hz

Tableau V-3 : Valeurs mesurées/calculées des quatre premières fréquences propres d'un assemblage 1300 MW.

On observe que le modèle conduit à une première fréquence propre inférieure à celles obtenues expérimentalement. Un nouveau recalage est effectué en modifiant les valeurs des raideurs additionnelles de manière à obtenir une première fréquence propre comprise entre 3.22 Hz et 3.31 Hz. Les valeurs des raideurs additionnelles sont divisées par 130 (au lieu de 200) pour les poutre-tubes et par 1600 (au lieu de 2000) pour la poutre-grille. Les nouvelles fréquences propres sont alors :

Mode	CASTEM2000
1	3.27 Hz
2	7.15 Hz
3	11.45 Hz
4	17.49 Hz

Tableau V-4 : Valeurs mesurées/calculées des quatre premières fréquences propres (recalées) d'un assemblage 1300 MW.

La modification apportée aux valeurs des raideurs additionnelles conduit à une raideur statique différente. La raideur statique vaut alors 12.41 daN/mm au niveau de la grille n°5 et 13.38 daN/mm au niveau de la grille n°4. Ces valeurs sont supérieures à celles déterminées expérimentalement. Dans les cas de modélisations simplifiées d'assemblages, cette constatation est relativement classique. Lorsqu'un recalage est effectué par rapport aux premières fréquences propres, la raideur de la structure a une valeur voisine de la valeur expérimentale, mais pas exacte. Lorsque le recalage est fait par rapport à la raideur statique, ce sont les valeurs des fréquences propres qui sont erronées. Dans le cas qui nous préoccupe, seule la valeur de la première fréquence propre est importante.

Le fichier CASTEM2000 [V-15] relatif au modèle décrit ci-dessus est reporté en Annexe 9.

V.4.2. Simulations de lâchers d'assemblage – Résultats

Le modèle numérique d'assemblage proposé est utilisé pour simuler des réponses à un lâcher. Dans cette première phase de calcul, seul le modèle non-linéaire d'amortissement sélectionné précédemment est introduit pour modéliser le comportement dynamique de l'assemblage ; la force de rappel est donc considérée comme linéaire. Les valeurs des paramètres sont celles identifiées dans l'étape d'optimisation.

La simulation d'un lâcher de l'assemblage s'effectue en deux phases :

- Chargement statique effectué au niveau de la grille n°5 : mise en flexion de l'assemblage à l'amplitude de lâcher initiale souhaitée.
- Calcul de la réponse (déplacement) de l'équation de la dynamique suite au lâcher de l'assemblage.

Cette seconde étape est réalisée par intégration en temps des équations du mouvement projetées sur la base des modes propres. Pour ce calcul un algorithme de Fu-de-Vogelaere implanté dans l'opérateur DYNE de CASTEM2000 [V-16] est utilisé. Il permet le calcul des forces généralisées lorsque celles-ci font intervenir des liaisons (exécutables) de type variées (chocs, frottements, ...etc) qui sont traduites au second membre. On peut ainsi traiter un grand nombre de problèmes non-linéaires.

L'opérateur DYNE utilise le résultat du calcul (V-17) : masses généralisées, raideurs généralisées, etc. et détermine les solutions de l'équation différentielle de la dynamique projetée sur la base des modes propres :

$$(V-18) \quad \begin{cases} M\ddot{Q} + C\dot{Q} = F(Q, t) & ; \quad F(Q, t) = KQ + F_L + F_e \\ Q(0) = Q_0 & \text{et} \quad \dot{Q}(0) = \dot{Q}_0 \end{cases}$$

Dans la formulation (V-18), M représente la matrice diagonale des masses généralisées, C la matrice des amortissements modaux, K la matrice des raideurs généralisées, Q le vecteur des contributions modales, F_L le vecteur des forces de liaison et F_e le vecteur des forces extérieurs. Les conditions initiales sont Q_0 le vecteur des contributions modales initiales et \dot{Q}_0 le vecteur des vitesses initiales.

Les termes de la matrice C sont rentrés "à la main" par l'utilisateur.

Dans notre cas, le terme d'amortissement est modifié au cours du calcul de manière itérative par appels successifs de l'opérateur DYNE. Le coefficient d'amortissement c (hypothèse 1 d.d.l; $C \Rightarrow c$) est calculé à l'étape $i+1$ en fonction de la position de l'assemblage à l'étape i selon la formulation issue du modèle d'amortissement $(C_0 + C_1|x|)$ et pour le premier mode :

$$(V-19) \quad c_1^{i+1} = c_0 + c_1 |q_1^{i+1}|$$

La démarche mise en œuvre dans CASTEM2000 peut être résumée par le schéma suivant (on ne considère que le premier mode) :

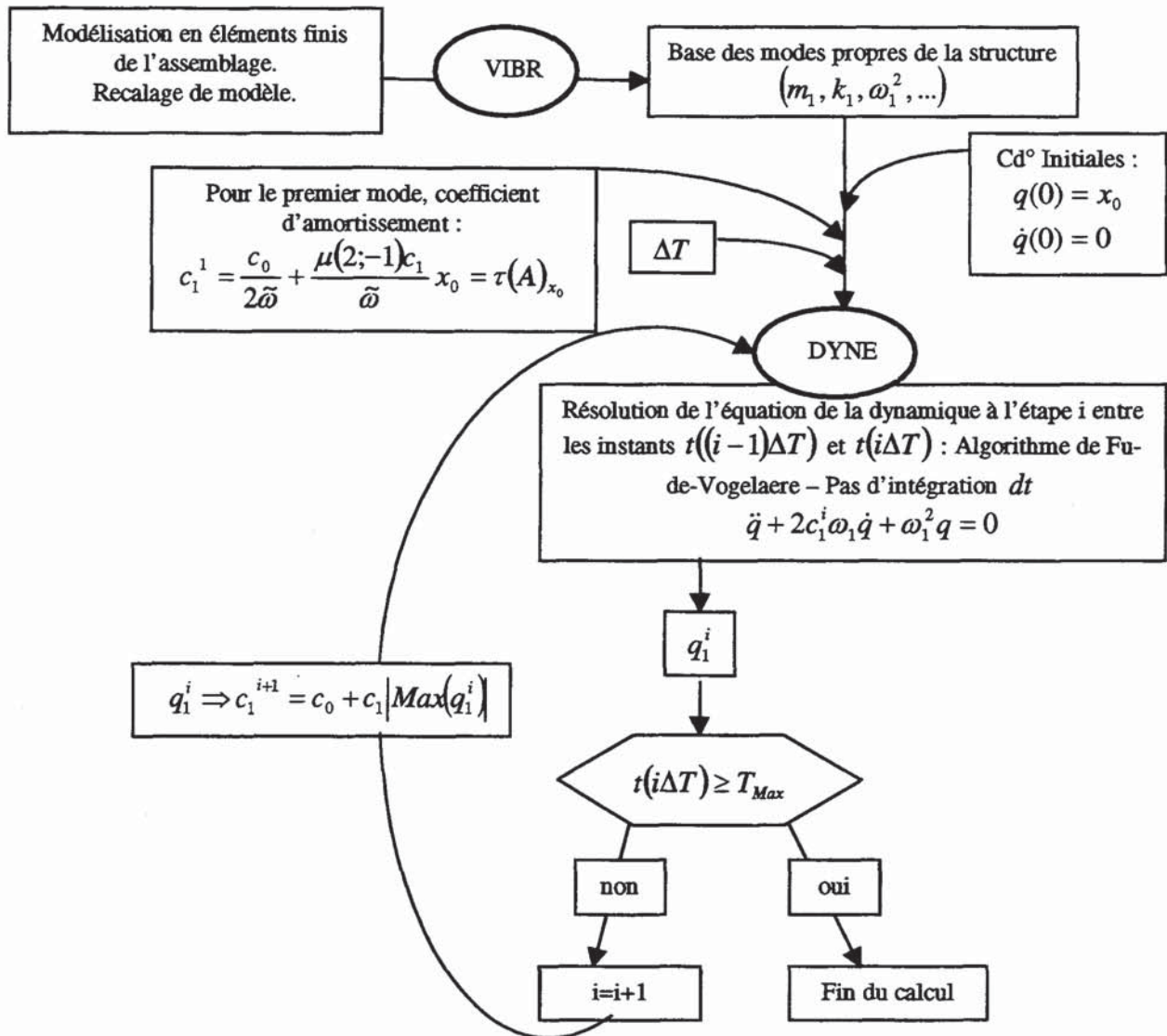


Figure V-29 : Méthode de résolution implantée dans CASTEM2000 pour simuler un lâcher d'assemblage.

Ce processus consiste à déterminer la solution (déplacement) de l'équation du mouvement sur de petits intervalles de temps (ΔT) sur lesquels l'amortissement est constant. La non-linéarité d'amortissement est traduite en prenant une valeur du coefficient d'amortissement variable d'un intervalle de résolution à l'autre. Le choix du temps d'intégration ΔT (différent du pas d'intégration dt utilisé par l'algorithme de Fu-de-Vogelaere) conditionne la modification de l'amortissement fourni à l'opérateur DYNE. En effet, ΔT fixe le temps pendant lequel le système est considéré comme linéaire. Plus ΔT est choisi petit plus on se rapprochera de la modélisation non-linéaire théorique. Il faut trouver un compromis entre les choix des valeurs de dt , qui conditionne la convergence de l'algorithme*, ΔT qui détermine la vitesse d'évolution du coefficient d'amortissement et le nombre d'itérations i nécessaires à simuler une réponse complète à un lâcher. Pour les exemples présentés par la suite, ΔT est fixé à 10^{-2} seconde, dt vaut 10^{-4} seconde. Le lâcher est généré sur 25 secondes. Le programme permettant la simulation d'un lâcher "non-linéaire" de l'assemblage est reporté en Annexe 10.

La Figure V-30 présente la comparaison entre un signal simulé (lâcher en air, amplitude initiale : 9.8 mm) et le signal expérimental mesuré associé (Essai LHC). Pour ce lâcher, les valeurs identifiées du modèle d'amortissement sont $c_0 = 0.076$ et $c_1 = 2468.5$ du modèle de solution Air 1.

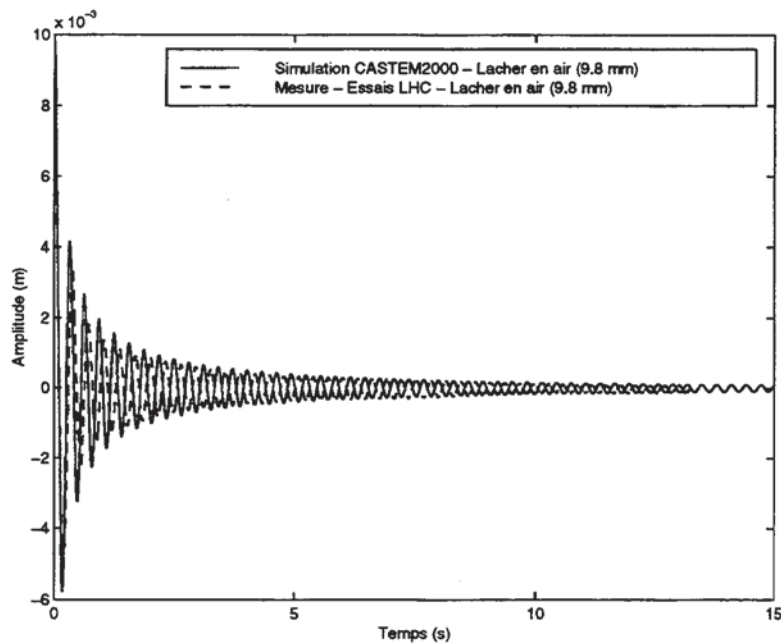


Figure V-30 : Comparaison entre un signal de lâcher simulé et le signal expérimental associé (lâcher en air, amplitude initiale : 9.8 mm).

* il est conseillé de prendre $dt = \frac{1}{10f_{\max}}$; f_{\max} est la fréquence la plus élevée des modes considérés.

La Figure V-31 présente une comparaison identique pour un cas de lâcher en eau stagnante (Essai LHC, amplitude initiale : 10.1 mm). Pour ce lâcher, les valeurs identifiées du modèle d'amortissement sont $c_0=1.36$ et $c_1=2671.3$ du modèle de solution Air 1.

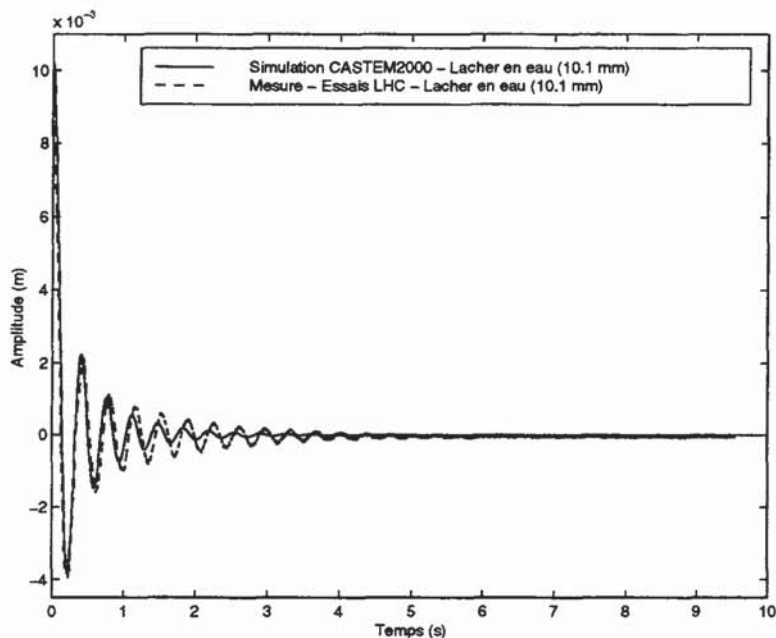


Figure V-31 : Comparaison entre un signal de lâcher simulé et le signal expérimental associé (lâcher en eau stagnante, amplitude initiale : 10.1 mm).

A partir de ces deux exemples, nous constatons que :

- l'allure des enveloppes des lâchers simulés correspond à celle des enveloppes des lâchers expérimentaux. Cela signifie que le modèle d'amortissement proposé permet de traduire plus justement les dissipations au cours du mouvement de l'assemblage que ne pourrait le faire la prise en compte d'un amortissement constant linéaire,
- l'enveloppe du lâcher simulé en air (resp. en eau) traduit des amplitudes plus importantes (resp. plus faibles) des extrêmes que celles du signal expérimentale. On en déduit que les valeurs de c_0 et c_1 ou de ΔT pourraient être mieux ajustées.
- les deux signaux ont un décalage important en fréquence. Celui-ci résulte de la prise en compte d'une raideur linéaire dans le calcul qui conduit à un signal de fréquence constante. Nous avons montré précédemment (cf. paragraphe IV.3.4) que le signal expérimental voit sa fréquence augmenter au cours du lâcher.

V.4.3. Discussions – Perspectives

Le paragraphe précédent a montré l'intérêt et la faisabilité de l'introduction du modèle d'amortissement dans le code CASTEM2000 pour simuler des réponses non-linéaires à

un lâcher. L'objectif à atteindre reste l'implantation de ce modèle pour traiter d'autres types d'excitation utilisant les valeurs des paramètres identifiées à partir de quelques signaux de lâchers. Pour parvenir à ce résultat, quelques étapes sont encore nécessaires. Pour améliorer les simulations à une excitation de type lâcher, nous proposons les phases suivantes :

- introduire la non-linéarité de force de rappel dans les simulations pour tenir compte de l'évolution de la fréquence au cours du lâcher. Pour cela l'introduction de la liaison POLYNOMIALE (exécutable) [V-15] disponible dans CASTEM2000 peut apporter une solution. En effet, cette liaison calcule une force appliquée à un mode i , constituée par un ensemble de contributions (déplacement et/ou vitesse) provenant d'autres modes (ce peut être le mode 1). On pourra aussi s'intéresser à la procédure PASAPAS (exécutable) [V-15] qui permet notamment de traduire le comportement de systèmes comportant une non-linéarité de type Duffing.
- trouver une relation entre ΔT , c_0 et c_1 pour permettre d'utiliser directement les valeurs identifiées de ces paramètres. Une passerelle sera ainsi jetée entre les valeurs déterminées par l'étape d'optimisation et les valeurs à introduire dans CASTEM2000.

Pour le cas d'autres types d'excitation, il faut avant tout disposer de signaux expérimentaux avec lesquels des comparaisons seront possibles. Une première difficulté peut alors intervenir dans la modélisation de l'excitation dans CASTEM2000. Il semble que les cas d'excitation par pot vibrant (sinus) ou par un choc soit un premier pas intéressant. Dans le cas du choc, comme dans celui d'excitations sismique ou fluide, la prise en compte de modes d'ordre supérieur est nécessaire. Pour ces modes, les valeurs forfaitaires d'amortissement classiquement admises (valeurs constantes : $10\% \leq \varepsilon \leq 15\%$) seront imposées.

Pour ces différents cas d'excitation, les valeurs prises par c_0 et c_1 seront les valeurs identifiées à partir de l'essai de lâcher correspondant au niveau maximum des amplitudes du déplacement envisagé pour la nouvelle excitation appliquée.

V.5. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les dépouillements pour l'identification de l'amortissement et de la fréquence adaptée au cadre non-linéaire de l'étude de l'assemblage combustible d'un R.E.P. Dans ce contexte, une représentation particulière de l'amortissement est proposée. Il s'agit du taux d'amortissement représenté en fonction de l'amplitude du mouvement, caractéristique de la dissipation d'énergie.

Nous avons pu comparer les performances de plusieurs modèles de solution analytique capables de modéliser correctement le comportement de l'assemblage soumis à un lâcher. Une solution analytique, issues de la prise en compte conjointe d'un modèle non-linéaire d'amortissement $C(x, \dot{x}) = (C_0 + C_1|x|)$ et d'un modèle non-linéaire de force de rappel

$$\lambda K^2(x)x(t) = -2\omega_0\lambda_2x|x|^{\beta_2} + \frac{\lambda_2^2\mu_{\beta_2}^2}{\mu_{2\beta_2}}x|x|^{2\beta_2} \quad \text{dans l'équation du mouvement a été}$$

sélectionnée, et nous donne des résultats satisfaisants en air et en eau stagnante, c'est-à-dire que les réponses reconstituées se superposent correctement avec les réponses mesurées pour presque toutes les amplitudes de lâcher.

L'analyse de l'ensemble des résultats obtenus pour les séries de lâchers effectuées sur trois assemblages (2 assemblages 1300 MW de même concept AFA et un assemblage AFA 900 MW) pour des amplitudes initiales comprises entre 3 et 18 mm nous a conduit aux remarques suivantes :

- le terme linéaire du modèle d'amortissement, correspondant à l'amortissement à amplitude nulle, ne peut être déterminé avec précision. De plus il persiste une dépendance de ce coefficient vis-à-vis de l'amplitude initiale de lâcher, ce qui prouve que le modèle d'amortissement ne tient pas compte de tous les phénomènes dissipatifs qui ont lieu au cours du mouvement de l'assemblage,
- la pente du taux d'amortissement dépend linéairement de l'amplitude du lâcher mais semble relativement indépendante du type d'assemblage considéré,
- en eau, nous observons une faible augmentation du taux d'amortissement par rapport aux valeurs déterminées en air. Cette faible augmentation est principalement due à celle du coefficient d'amortissement linéaire $\frac{C_0}{\omega}$. La pente du taux d'amortissement n'est presque pas modifiée,
- la fréquence propre est correctement déterminée par la méthode d'identification proposée,

- on observe que la part non-linéaire du modèle de force de rappel est dépendante du type d'assemblage mais faiblement dépendante du milieu, air ou eau stagnante. Celle-ci augmente avec l'amplitude de l'excitation.

L'ensemble des résultats indique parfois une disparité importante entre les résultats obtenus sur les deux assemblages de type AFA-XL 1300 MW. Le trait le plus marquant est celui des profils de la fin des signaux de réponse qui est franchement différente selon l'assemblage et l'amplitude initiale du lâcher.

Afin de conforter ce travail, une étude de sensibilité des différents paramètres s'impose. Elle permettra de juger de la confiance que l'on peut donner dans l'estimation du taux d'amortissement, de la fréquence et des réponses simulées.

V.6. Références bibliographiques

[V-1] BRANCH M.A., GRACE A.

MATLAB - Optimization Toolbox.
User's guide. Version 1.5.

[V-2] WALTER E., PRONZATO L.

Identification des modèles paramétriques à partir de données expérimentales.
Paris : Masson. 1994. 371 p.

[V-3] ROBERTS J.B., SPANOS P.D.

Random vibration and statistical linearization.
New York : John Wiley and Sons. 1990, 407 p.

[V-4] BOUDGHENE-STAMBOULI M.

"Identification des coefficients d'amortissement du roulis des navires". 196 p.
Thèse de doctorat : Nantes. 1991, n° 2025.

[V-5] BASS D.W., HADDARA M.R.

"Nonlinear models of ship roll damping".
International Shipbuilding Progress. 1988, Vol 35, n°401, pp. 5-24.

[V-6] BOULANGER P.

"Compte rendu d'essais ATACAMA – Caractérisation modale multipoint d'un assemblage AFA 900 MW en air".
Note Technique DEC/SECA/LHC 97/026.

[V-7] QUEVAL J.C., BOUVIER M., PORTIER J.L.

"Caractérisation dynamique d'un assemblage combustible de type XL".
Rapport DMT/95/455.

[V-8] BARBIER D.

"MASSE : rapport d'essais et interprétation des mesures d'amortissement sous écoulement à 50°C d'un assemblage AFA-XL à échelle 1".
Note Technique DEC/SECA/LHC 97/16.

[V-9] PORTIER J.L.

"Caractérisation dynamique d'un assemblage combustible de type AFA".
Rapport DMT/96/41.

[V-10] BOUVIER M.

"Synthèse bibliographique des modèles d'assemblages R.E.P."
rapport DMT/94/459.

[V-11] FLEURET J.S.

"Modélisation par éléments finis du comportement vibratoire d'une maquette d'assemblage de réacteur nucléaire".
Rapport de stage DEC/SECA/LHC – Septembre 1993.

[V-12] AUVILLE C.

"Modélisation par éléments finis du choc d'une maquette 8x8 d'assemblage combustible contre une butée rigide".

Rapport de stage DEC/SECA/LHC – Juin 1996.

[V-13] VALLORY J.

"Rapport d'interprétation des essais ENVOL".

Note Technique DEC/SECA/LHC 96/046.

[V-14] FONTAINE B.

"Modèle non-linéaire du comportement mécanique d'un assemblage combustible".

Rapport interne DMT/97/260.

[V-15]

"Notice d'utilisation de CASTEM2000".

[V-16] VIVAN L., de LANGRE E., BROCHARD D.

"Calcul non-linéaire dynamique – Description de l'opérateur DYNE de CASTEM2000".

Rapport DMT/90.218.

VI. CONCLUSION

Après l'illustration du caractère non-linéaire du comportement d'un assemblage combustible R.E.P., nous avons proposé dans ce travail de thèse, une méthodologie adaptée permettant l'identification de l'amortissement et la fréquence par la résolution d'un problème inverse. Un modèle non-linéaire d'amortissement et un modèle non-linéaire de force élastique de rappel ont ainsi été sélectionnés pour le traitement de lâchers en air et en eau stagnante. Une application directe de ce travail est la prédiction à l'aide du code aux éléments finis CASTEM2000 de réponses de l'assemblage pour d'autres configurations d'essais.

L'analyse de la bibliographie concernant les techniques utilisées à ce jour a montré que seules les méthodes basées sur un formalisme linéaire étaient utilisées. Leur intérêt réside dans une estimation simple et rapide de l'amortissement et de la fréquence à partir d'une réponse mesurée, et parce qu'elles permettent une approche multi-modale. En revanche la validité de ces estimations peut être remise en cause car les non-linéarités introduisent un biais sur ces résultats que l'on a alors du mal à quantifier.

Dans un contexte de sûreté nucléaire, sachant que seul le premier mode nous préoccupe, nous avons focalisé cette étude sur une amélioration de l'identification de l'amortissement et de la fréquence de celui-ci. La démarche a consisté à proposer un certain nombre de modèles non-linéaires d'amortissement et de force élastique de rappel.

Concernant le modèle d'amortissement, un unique modèle a été retenu pour traduire les phénomènes dissipatifs en air et en eau stagnante. Une représentation particulière de l'amortissement donnée par le tracé du taux d'amortissement en fonction de l'amplitude du mouvement nous a permis de retrouver un certain nombre de tendances et d'évolutions dont on maîtrise mieux les origines.

Pour le modèle de force élastique de rappel, aucun argument n'a permis de privilégier l'une ou l'autre des formulations proposées. Celles-ci sont caractéristiques d'un système mollissant et ont permis de traduire correctement l'évolution de la fréquence au cours des oscillations libres de l'assemblage. On montre que la non-linéarité de force de rappel est d'autant plus prononcée que l'amplitude de l'excitation est importante.

Pour parvenir à l'identification des caractéristiques recherchées, un certain nombre d'essais ont été réalisés sur une boucle expérimentale du Laboratoire. D'autres nous ont été fournis par le Laboratoire EMSI du CEA de Saclay. L'ensemble des réponses mesurées à la suite de lâchers d'amplitudes initiales comprises entre 3 et 18 mm nous a aussi permis de constater que les résultats pouvaient être assez disparates d'un assemblage à l'autre, sans doute fonction de l'historique expérimental de l'assemblage.

Un logiciel d'estimation du taux d'amortissement et de la fréquence de l'assemblage soumis à un lâcher a été réalisé. Il a été développé en utilisant les fonctionnalités de Matlab et permettra à ceux qui prendront en charge la poursuite de ce thème de recherche de poursuivre les investigations.

Ce travail est appelé à se poursuivre au sein du Laboratoire d'Hydraulique du Cœur. A court terme, il faut effectuer une analyse de sensibilité des différents paramètres du modèle proposé et d'établir un facteur de confiance pour chacune des quantités estimées.

En parallèle on peut, d'une part améliorer sensiblement la qualité de l'identification des valeurs des paramètres de chacun des modèles. Pour cela, la démarche d'optimisation sera menée en utilisant une solution numérique de l'équation différentielle non-linéaire du mouvement. On élimine ainsi un certain nombre d'approximations liées à l'utilisation de la méthode "*Averaging*", employée dans notre démarche. D'autre part on peut enrichir le modèle d'amortissement proposé pour établir une dépendance moins marquée des valeurs optimisées vis-à-vis de l'amplitude initiale de lâcher. Ce travail a déjà débuté au sein du Laboratoire à la fin des travaux de thèse et donne des résultats très prometteurs avec un modèle non-linéaire d'amortissement : $C(x, \dot{x}) = \epsilon (C_0 + C_1 |x|^\alpha)$. Avec ce modèle, les paramètres C_0 , C_1 et α sont indépendants de l'amplitude initiale du lâcher.

Dans notre première approche, les applications à la prédiction du comportement de l'assemblage à l'aide du code CASTEM2000 sont limitées aux cas où le niveau de l'amplitude maximale du mouvement est connu. La démarche qui a été décrite dans le chapitre V est d'ores et déjà très intéressante puisqu'elle permettrait de simuler des réponses à une excitation de type balayage sinus à déplacement imposé. Cette approche permet déjà d'estimer correctement la réponse à un lâcher pour tous les niveaux de grille, et uniquement à partir d'une mesure en un point de la grille intermédiaire n°6 ou n°5. Lorsqu'un jeu de paramètres constant sera disponible pour un assemblage et pour des conditions environnementales fixées, les prédictions du comportement de l'assemblage soumis à une excitation sismique ou de type fluide en écoulement pourront être envisagées proprement. Dans ces cas, il faudra alors prendre en compte les modes d'ordre supérieur de la structure.

Enfin, pour terminer, nous insistons sur le fait que nous avons voulu par cette étude, considérer le caractère non-linéaire du comportement de l'assemblage dans la caractérisation de l'amortissement. Habituellement cette détermination se restreint à l'utilisation de méthodes d'identification linéaires. Les modèles et les méthodes présentées dans ce rapport pourront permettre des avancées dans la prise en compte des phénomènes non-linéaires par une approche directe.

VII. ANNEXES

VII.1. Annexe 1 : Solution établie par la méthode de "KBM"

La solution approchée par la méthode "KBM" (cf. paragraphe III.3.4.2) à l'ordre ϵ^1 s'exprime par la formulation suivante :

$$(VII-1) \quad x(t) = A \cos \Phi + \epsilon x_1(A, \Phi) = x^0 + \epsilon x_1(A, \Phi)$$

où $\dot{A}(t)$ et $\dot{\Phi}(t)$ sont approchées par les équations :

$$(VII-2) \quad \begin{cases} \dot{A}(t) = \epsilon A_1(A) \\ \dot{\Phi}(t) = \omega_0 + \epsilon \omega_1(A) \end{cases}$$

Reprenant l'expression (IV-12) et la définition donnée par (III-63), la non-linéarité d'amortissement s'exprime :

$$(VII-3) \quad f(x, \dot{x}) = f(x^0, \dot{x}^0) = (C_0 + C_1 |A \cos \Phi|) A \omega_0 \sin \Phi = C_0 \omega_0 A \cos \Phi + C_1 \omega_0 A^2 |\cos \Phi| \sin \Phi$$

où x^0 est le terme du développement (VII-1) d'ordre 0 et \dot{x}^0 sa dérivée par rapport au temps.

L'équation (VII-3) implique de considérer deux cas liés à la définition de la fonction $x \rightarrow |x|$, dérivable par morceaux. On distingue les cas $\cos \Phi \geq 0$ (solution "+") et $\cos \Phi < 0$ (solution "-").

$$(VII-4) \quad \cos \Phi \geq 0 \quad f^+(x^0, \dot{x}^0) = C_0 \omega_0 A^+ \sin \Phi^+ + C_1 \omega_0 A^{+2} \cos \Phi^+ \sin \Phi^+$$

$$(VII-5) \quad \cos \Phi < 0 \quad f^-(x^0, \dot{x}^0) = C_0 \omega_0 A^- \sin \Phi^- - C_1 \omega_0 A^{-2} \cos \Phi^- \sin \Phi^-$$

qui donnent les dérivations partielles suivantes :

$$(VII-6) \quad \cos \Phi \geq 0 \quad \frac{\partial f^+(x^0, \dot{x}^0)}{\partial x^0} = C_1 \omega_0 A^+ \sin \Phi^+ \quad \frac{\partial f^+(x^0, \dot{x}^0)}{\partial \dot{x}^0} = -(C_0 + C_1 A^+ \cos \Phi^+)$$

$$(VII-7) \quad \cos \Phi < 0 \quad \frac{\partial f^-(x^0, \dot{x}^0)}{\partial x^0} = -C_1 \omega_0 A^- \sin \Phi^- \quad \frac{\partial f^-(x^0, \dot{x}^0)}{\partial \dot{x}^0} = -(C_0 + C_1 A^- \cos \Phi^-)$$

- L'équation différentielle pour $x_1(t)$ formulée par (III-64) s'écrit, lorsque $\cos \Phi \geq 0$:

(VII-8)

$$\omega_0^2 \frac{\partial^2 x_1^+}{\partial \Phi^2} + \omega_0^2 x_1^+ = \omega_0 (C_0 A^+ + 2A_1^+) \sin \Phi^+ + 2\omega_0 \omega_1^+ A^+ \cos \Phi^+ + \frac{C_1 \omega_0 A^{+2}}{2} \sin 2\Phi^+$$

L'élimination des termes séculaires (cf. paragraphe III.3.4.2) fournit les équations pour déterminer A_1^+ et ω_1^+ :

$$(VII-9) \quad \dot{A}^+ = -\frac{C_0}{2} A_1^+ \quad \dot{\Phi}^+ = 0$$

Il en découle l'équation différentielle pour $x_1^+(t)$ suivante :

$$(VII-10) \quad \cos \Phi \geq 0 \quad \omega_0^2 \frac{\partial^2 x_1^+}{\partial^2 \Phi} + \omega_0^2 x_1^+ = \frac{C_1 \omega_0 A^{+2}}{2} \sin 2\Phi^+$$

La solution de cette équation est :

$$(VII-11) \quad x_1^+ = -\frac{C_1 A^{+2}}{6\omega_0} \sin 2\Phi^+$$

L'intégration des équations (VII-9) donne finalement la solution suivante, pour $\cos \Phi \geq 0$:

$$(VII-12) \quad x^+(t) = A_0^+ e^{-\frac{C_0}{2}t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0^+) - \frac{C_1 A_0^{+2}}{6\omega_0} e^{-C_0 t} \sin(2(\omega_0 t + \varphi_0^+))$$

où les constantes d'intégration A_0^+ et φ_0^+ sont à déterminer à partir des conditions initiales. L'expression de ces conditions fournit le système d'équations suivant à résoudre :

$$(VII-13) \quad \begin{cases} A_0^+ \cos \varphi_0^+ - \frac{C_1 A_0^+}{6\omega_0} \sin 2\varphi_0^+ = x_0 \\ -\frac{C_0}{2} \cos \varphi_0^+ - \omega_0 \sin \varphi_0^+ + \frac{C_1 C_0 A_0^+}{6\omega_0} \sin 2\varphi_0^+ - \frac{C_1 A_0^+}{3} \cos 2\varphi_0^+ = 0 \end{cases}$$

▪ Lorsque $\cos \Phi < 0$, on obtient la solution $x^-(t)$ définie par :

$$(VII-14) \quad x^-(t) = A_0^- e^{-\frac{C_0}{2}t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0^-) + \frac{C_1 A_0^{-2}}{6\omega_0} e^{-C_0 t} \sin(2(\omega_0 t + \varphi_0^-))$$

Les conditions de raccordement entre $x^+(t)$ et $x^-(t)$ aux instants T_i^0 correspondants aux passages successifs par zéro, s'expriment par les équations suivantes :

$$(VII-15) \quad \begin{cases} x^+(T_i^0) = x^-(T_i^0) = 0 \\ \dot{x}^+(T_i^0) = \dot{x}^-(T_i^0) \end{cases}$$

VII.2. Annexe 2 : Calcul numérique de $\theta_1(t) = \int_0^t \Omega_1(A_1(s)) ds$.

Les fonctions disponibles dans Matlab ne permettent pas de calculer directement les intégrales dont une ou les deux bornes d'intégration sont variables. Pour réaliser le calcul de $\theta_1(t) = \int_0^t \Omega_1(A_1(s)) ds$, nous avons transposé le problème en une résolution d'une équation différentielle du deuxième ordre dont la résolution est bien maîtrisée.

On rappelle que $\Omega_1(A_1) = \sqrt{\bar{\omega}_0^2 - \bar{\lambda}_1 \mu_{\beta} A_1^{\beta}}$

D'où :

$$(VII-16) \quad -\bar{\lambda}_1 \mu_{\beta} A_1^{\beta} = \dot{\theta}_1^2 - \bar{\omega}_0^2$$

En dérivant l'expression de $\dot{\theta}_1^2(t)$ par rapport au temps nous obtenons :

$$(VII-17) \quad 2\dot{\theta}_1 \ddot{\theta}_1 = -\bar{\lambda}_1 \mu_{\beta} \beta A_1^{\beta-1} \dot{A}_1$$

Les développements de la méthode "Averaging" avaient donné pour $\dot{A}_1(t)$ (équation (IV-43)) :

$$(VII-18) \quad \dot{A}_1(t) = \frac{-A_1 \left(\frac{C_0}{2} + \mu(2,-1) C_1 A_1 \right) (\bar{\omega}_0^2 - \bar{\lambda}_1 \mu_{\beta} A_1^{\beta})}{\bar{\omega}_0^2 - \bar{\lambda}_1 \mu_{\beta} \left(\frac{1}{4} \beta_1 + 1 \right) A_1^{\beta}}$$

qu'il est possible d'exprimer, en utilisant (VII-16) et (VII-17), en fonction de $\dot{\theta}_1(t)$:

$$(VII-19) \quad \dot{A}_1(t) = \frac{-A_1 \left(\frac{C_0}{2} + \mu(2,-1) C_1 \left[\frac{\bar{\omega}_0^2 - \dot{\theta}_1^2}{\bar{\lambda}_1 \mu_{\beta}} \right]^{\frac{1}{\beta}} \right) \dot{\theta}_1^2}{\dot{\theta}_1^2 + \frac{\beta_1}{4} (\dot{\theta}_1^2 - \bar{\omega}_0^2)}$$

Si nous remplaçons (VII-19) dans (VII-17) nous obtenons finalement :

$$(VII-20) \quad \ddot{\theta}_1(t) = \frac{\beta_1 \dot{\theta}_1 (\bar{\omega}_0^2 - \dot{\theta}_1^2) \left(\frac{C_0}{2} + \mu(2,-1) C_1 \left[\frac{\bar{\omega}_0^2 - \dot{\theta}_1^2}{\bar{\lambda}_1 \mu_{\beta}} \right]^{\frac{1}{\beta}} \right)}{2\dot{\theta}_1^2 + \frac{\beta_1}{2} (\dot{\theta}_1^2 - \bar{\omega}_0^2)}$$

L'équation (VII-20) fournit l'équation différentielle recherchée qui est résolue par différentiation numérique dans Matlab. Les conditions initiales nécessaires à ce calcul sont :

$$(VII-21) \quad \theta_1(0) = \int_0^0 \Omega_1(A_1(s)) ds = 0$$

et

$$(VII-22) \quad \dot{\theta}_1(0) = \sqrt{\bar{\omega}_0^2 - \bar{\lambda}_1 \mu_{\beta_1} A_1^{\beta_1}(0)} = \sqrt{\bar{\omega}_0^2 - \bar{\lambda}_1 \mu_{\beta_1} x_0^{\beta_1}}$$

VII.3. Annexe 2bis : Calcul numérique de $\theta_2(t) = \int_0^t \Omega_2(A_2(s)) ds$

Une démarche similaire à celle développée pour le calcul de $\theta_1(t)$ est employée pour déterminer $\theta_2(t)$. Dans ce cas, nous obtenons l'équation différentielle suivante :

$$(VII-23) \quad \ddot{\theta}_2(t) = \frac{\beta_2 \dot{\theta}_2 (\tilde{\omega}_0 - \dot{\theta}_2) \left(\frac{C_0}{2} + \mu(2,-1) C_1 \left[\frac{\tilde{\omega}_0 - \dot{\theta}_2}{\tilde{\lambda}_2 \mu_{\beta_2}} \right]^{\frac{1}{\beta_2}} \right)}{\dot{\theta}_2 + \frac{\beta_2}{2} (\dot{\theta}_2 - \tilde{\omega}_0)}$$

Avec les conditions initiales suivantes :

$$(VII-24) \quad \theta_2(0) = 0$$

et

$$(VII-25) \quad \dot{\theta}_2(0) = \tilde{\omega}_0 - \tilde{\lambda}_2 \mu_{\beta_2} x_0^{\beta_2}$$

VII.4. Annexe 3 : Calcul analytique de l'intégrale

$$\int_0^t \Omega_2(A_2(s)) ds = \int_0^t \left(\tilde{f}_0 - \frac{\tilde{\lambda}_2}{2\pi} \mu_{\beta_2} A_2^{ap\beta_2}(s) \right) ds$$

On rappelle que :

$$\dot{A}_2(t) \equiv -A_2 \left(\frac{C_0}{2} + \mu(2,-1) C_1 A_2 \right) \Rightarrow A_2^{ap}(t) = \frac{A_0}{e^{\frac{C_0}{2}t} - 2\mu(2,-1) \frac{C_1}{C_0} A_0} \quad A_0 = \frac{x_0}{1 + 2\mu(2,-1) \frac{C_1}{C_0} x_0}$$

et $0 < \beta_2 \leq 1$,

Le calcul de $\theta_2(t) = \int_0^t \Omega_2(A_2^{ap}(s)) ds = \int_0^t \left(\tilde{f}_0 - \frac{\tilde{\lambda}_2}{2\pi} \mu_{\beta_2} A_2^{ap\beta_2}(s) \right) ds$ donne :

$$\int_0^t \left(\tilde{f}_0 - \frac{\tilde{\lambda}_2}{2\pi} \mu_{\beta_2} A_2^{ap\beta_2}(s) \right) ds = \tilde{f}_0 t - \frac{\tilde{\lambda}_2}{2\pi} \mu_{\beta_2} \int_0^t A_2^{ap\beta_2}(s) ds = \tilde{f}_0 t - \frac{\tilde{\lambda}_2}{2\pi} \mu_{\beta_2} \int_0^t \frac{A_0^{\beta_2}}{\left[e^{\frac{C_0}{2}s} - 2\mu(2,-1) \frac{C_1}{C_0} A_0 \right]^{\beta_2}} ds$$

On isole l'intégrale $I(t) = \int_0^t \frac{A_0^{\beta_2}}{\left[e^{\frac{C_0}{2}s} - 2\mu(2,-1) \frac{C_1}{C_0} A_0 \right]^{\beta_2}} ds$ et on effectue le changement de

variable suivant :

$u = e^{\frac{C_0}{2}s} - 2\mu(2,-1) \frac{C_1}{C_0} A_0$, ce qui implique pour $I(t)$:

$$I(t) = \frac{1}{C_0 \mu(2,-1) \frac{C_1}{C_0} A_0} \int_a^{b(t)} \frac{du}{u^{\beta_2} \left(\frac{u}{2\mu(2,-1) \frac{C_1}{C_0} A_0} + 1 \right)} \quad \text{où} \quad \begin{aligned} a &= 1 - 2\mu(2,-1) \frac{C_1}{C_0} A_0 \\ b(t) &= e^{\frac{C_0}{2}t} - 2\mu(2,-1) \frac{C_1}{C_0} A_0 \end{aligned}$$

Le changement de variable $z = \frac{u}{2\mu(2,-1) \frac{C_1}{C_0} A_0}$ est utilisé. $I(t)$ est alors transformée en

une intégrale qui peut s'exprimer à partir de fonctions hypergéométriques :

$$I(t) = \frac{2}{C_0 \left(2\mu(2, -1) \frac{C_1}{C_0} A_0 \right)^{\beta_2}} \int_c^{d(t)} \frac{dz}{z^{\beta_2} (z+1)} \quad \text{où} \quad c = \frac{1}{2\mu(2, -1) \frac{C_1}{C_0} A_0} - 1$$

$$d(t) = \frac{e^{\frac{C_0 r}{2}}}{2\mu(2, -1) \frac{C_1}{C_0} A_0} - 1$$

On pose J la primitive $J = \int \frac{dz}{z^{\beta_2} (z+1)}$ qui peut s'exprimer à partir de la fonction hypergéométrique $F(1, q; q; -z)$, soit :

$$J = \int \frac{dz}{z^{\beta_2} (z+1)} = \int z^{-\beta_2} F(1, q; q; -z) dz$$

Les fonctions hypergéométriques, dépendantes de x et des paramètres p, q, r réels, sont définies par :

$$F(p, q; r; z) = \frac{\Gamma(r)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+n)\Gamma(q+n)}{\Gamma(r+n)} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p)_n (q)_n}{(r)_n} \frac{z^n}{n!} \quad \text{où } \Gamma(\cdot) \text{ représente la fonction Gamma et où les termes } (*)_n \text{ sont égaux à } (*)_n = (*+1)(*+2)\dots(*+n-1).$$

Cette série est convergente dans le disque $|z| < 1$ si $r > 0$, pour $|z| = 1$ elle est absolument convergente si $r > p+q$ et divergente si $r \leq p+q$, pour $|z| > 1$ elle est toujours divergente. Pour $z = -1$ la série est conditionnellement convergente pour $p+q-1 < r \leq p+q$ et divergente pour $r \leq p+q-1$.

$F(1, p; p; -z)$ est une fonction hypergéométrique particulière qui vaut : $F(1, p; p; -z) = \frac{1}{z+1}$

Les propriétés de ces fonctions fournissent la relation suivante :

$$\frac{d^n}{dz^n} [z^{r-1} F(p, q; r; z)] = (r-n)_n z^{r-n-1} F(p, q; r-n; z)$$

Pour $n=1$, et en posant $p=1$, $r-2 = -\beta_2$ et $q=r-1 = 1-\beta_2$ cette relation donne :

$$\frac{d}{dz} [z^{1-\beta_2} F(1, 1-\beta_2; 2-\beta_2; z)] = (1-\beta_2)_1 z^{-\beta_2} F(1, 1-\beta_2; 1-\beta_2; z)$$

Cette dernière relation est intégrée et on effectue le changement de variable $z = -z$. On obtient :

$$(1-\beta_2)_1 \int z^{-\beta_2} F(1, 1-\beta_2; 1-\beta_2; -z) dz = -z^{1-\beta_2} F(1, 1-\beta_2; 2-\beta_2; -z)$$

C'est précisément la primitive J recherchée avec $q = 1 - \beta_2$.

Finalement, l'intégration de $I(t)$ donne la solution suivante :

$$I(t) = \frac{2}{C_0 \left(2\mu(2,-1) \frac{C_1}{C_0} A_0 \right)^{\beta_2} (1-\beta_2)} \left[- \left(\frac{e^{\frac{C_0 t}{2}}}{2\mu(2,-1) \frac{C_1}{C_0} A_0} - 1 \right)^{1-\beta_2} F \left(1, 1-\beta_2; 2-\beta_2; 1 - \frac{e^{\frac{C_0 t}{2}}}{2\mu(2,-1) \frac{C_1}{C_0} A_0} \right) + \left(\frac{1}{2\mu(2,-1) \frac{C_1}{C_0} A_0} - 1 \right)^{1-\beta_2} F \left(1, 1-\beta_2; 2-\beta_2; 1 - \frac{1}{2\mu(2,-1) \frac{C_1}{C_0} A_0} \right) \right]$$

Les fonctions $F \left(1, 1-\beta_2; 2-\beta_2; 1 - \frac{e^{\frac{C_0 t}{2}}}{2\mu(2,-1) \frac{C_1}{C_0} A_0} \right)$ et $F \left(1, 1-\beta_2; 2-\beta_2; 1 - \frac{1}{2\mu(2,-1) \frac{C_1}{C_0} A_0} \right)$

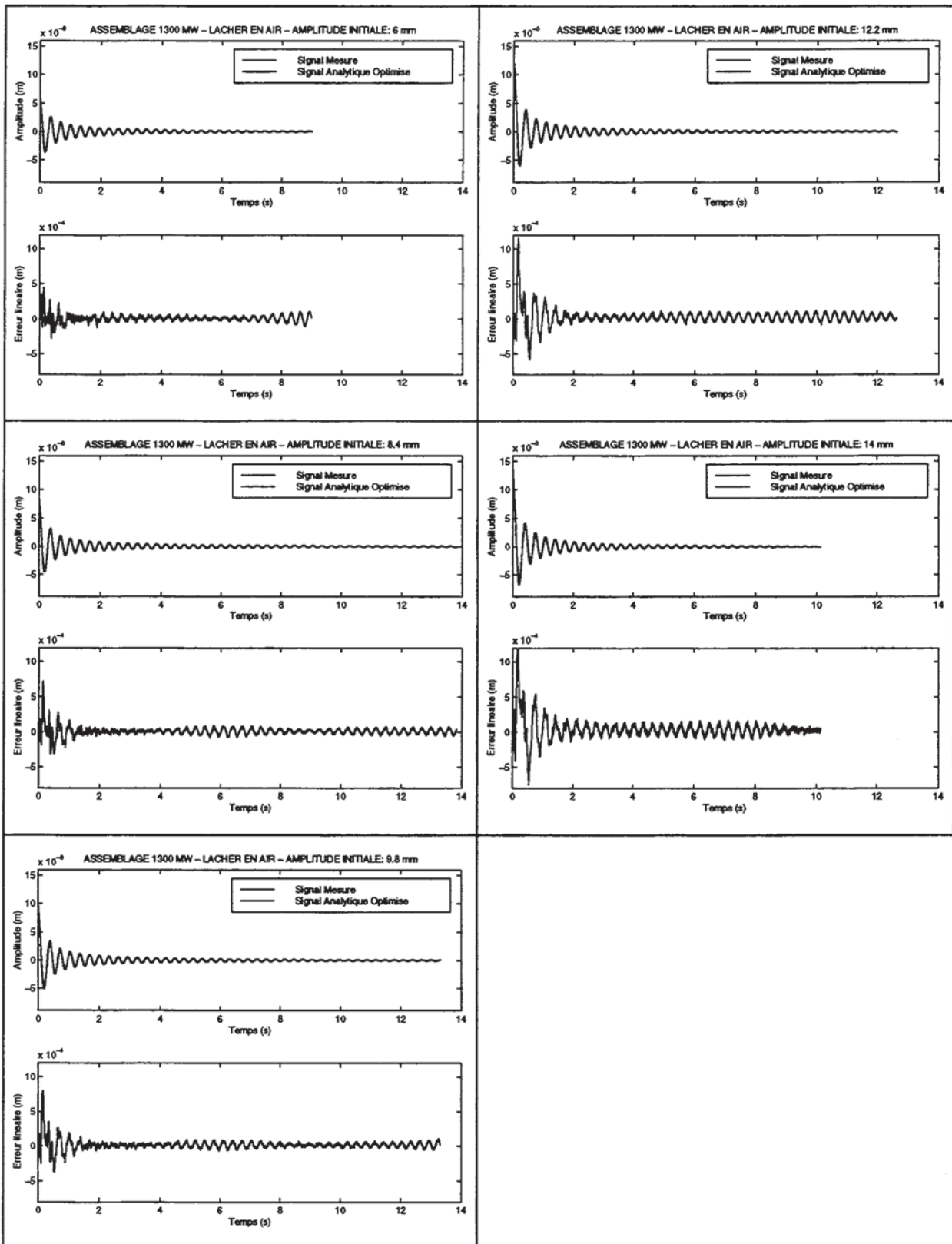
sont bien convergentes puisque $\forall C_0, C_1, A_0, t > 0$, on peut vérifier que :

$$\left| 1 - \frac{e^{\frac{C_0 t}{2}}}{2\mu(2,-1) \frac{C_1}{C_0} A_0} \right| < 1 \text{ et } \left| 1 - \frac{1}{2\mu(2,-1) \frac{C_1}{C_0} A_0} \right| < 1 \text{ et } r = 2 - \beta_2 > 0 \text{ puisque } 0 < \beta_2 \leq 1.$$

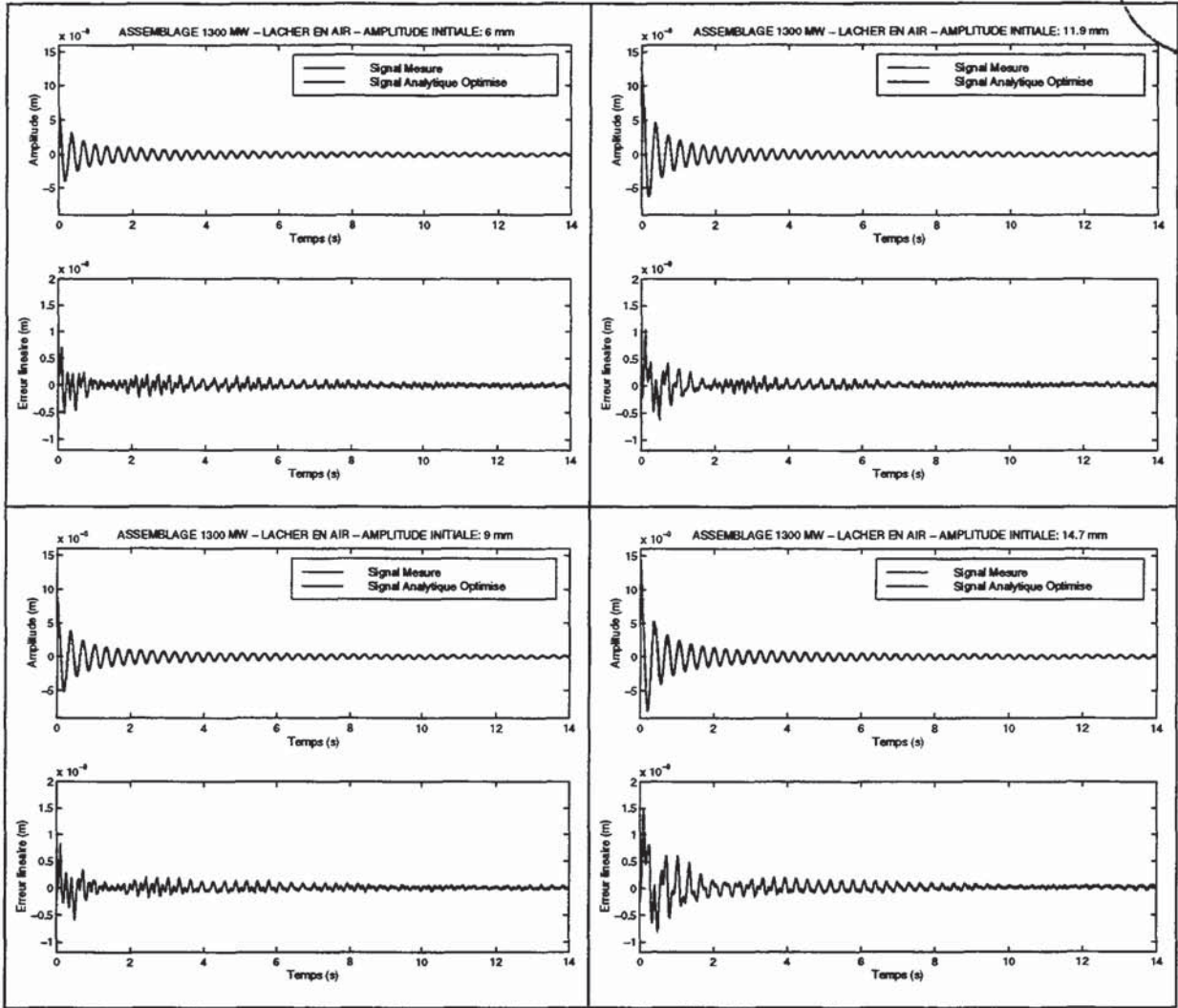
Le calcul de l'intégrale donne finalement :

$$\int_0^t (\tilde{f}_0 - \tilde{\lambda}_2 \mu_{\beta_2} A_2^{\beta_2}(s)) ds = \tilde{f}_0 t - \frac{\tilde{\lambda}_2}{2\pi} \mu_{\beta_2} \int_0^t A_2^{\beta_2}(s) ds = \tilde{f}_0 t - \frac{\tilde{\lambda}_2}{2\pi} \mu_{\beta_2} I(t)$$

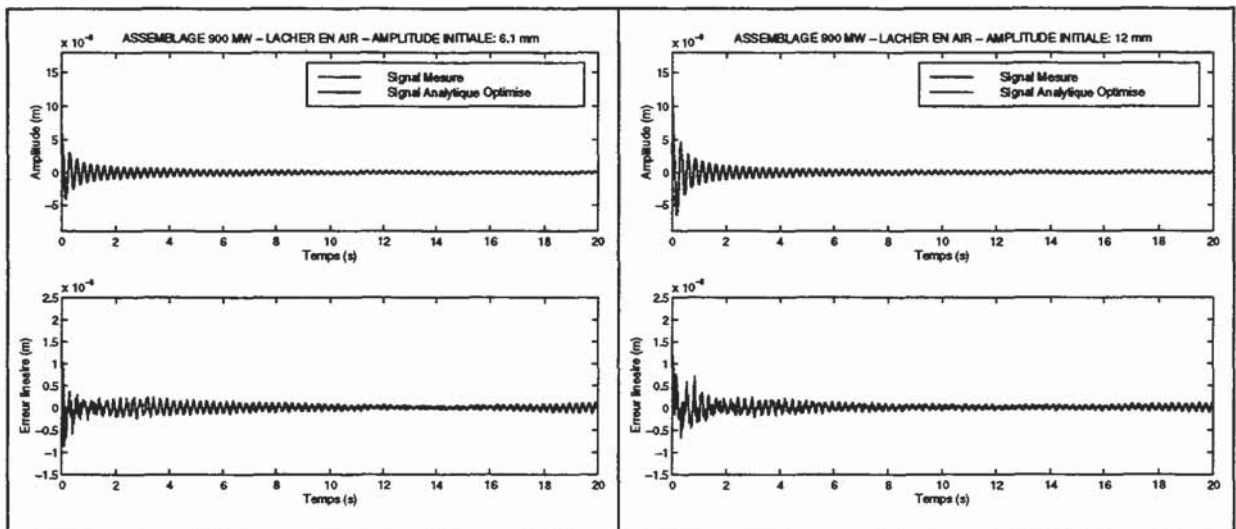
VII.5. Annexe 4 : Comparaisons des réponses mesurées et des réponses optimisées pour les lâchers en air (Modèle Air 1)

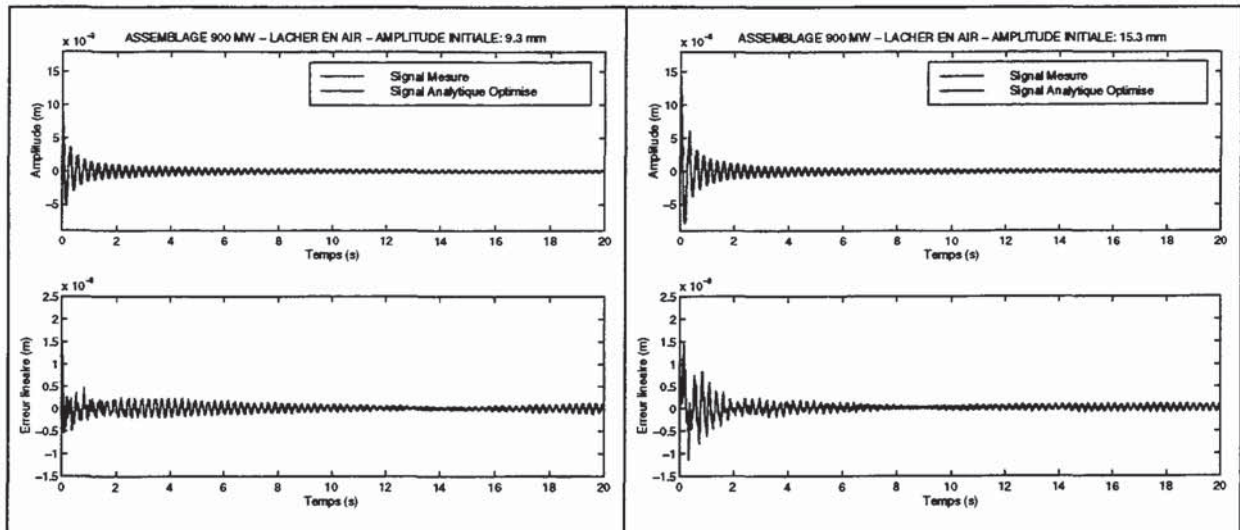


Comparaisons entre les réponses mesurées et les réponses optimisées (Modèle Air 1). Lâchers effectués en air sur un assemblage AFA-XL 1300 MW (LHC).



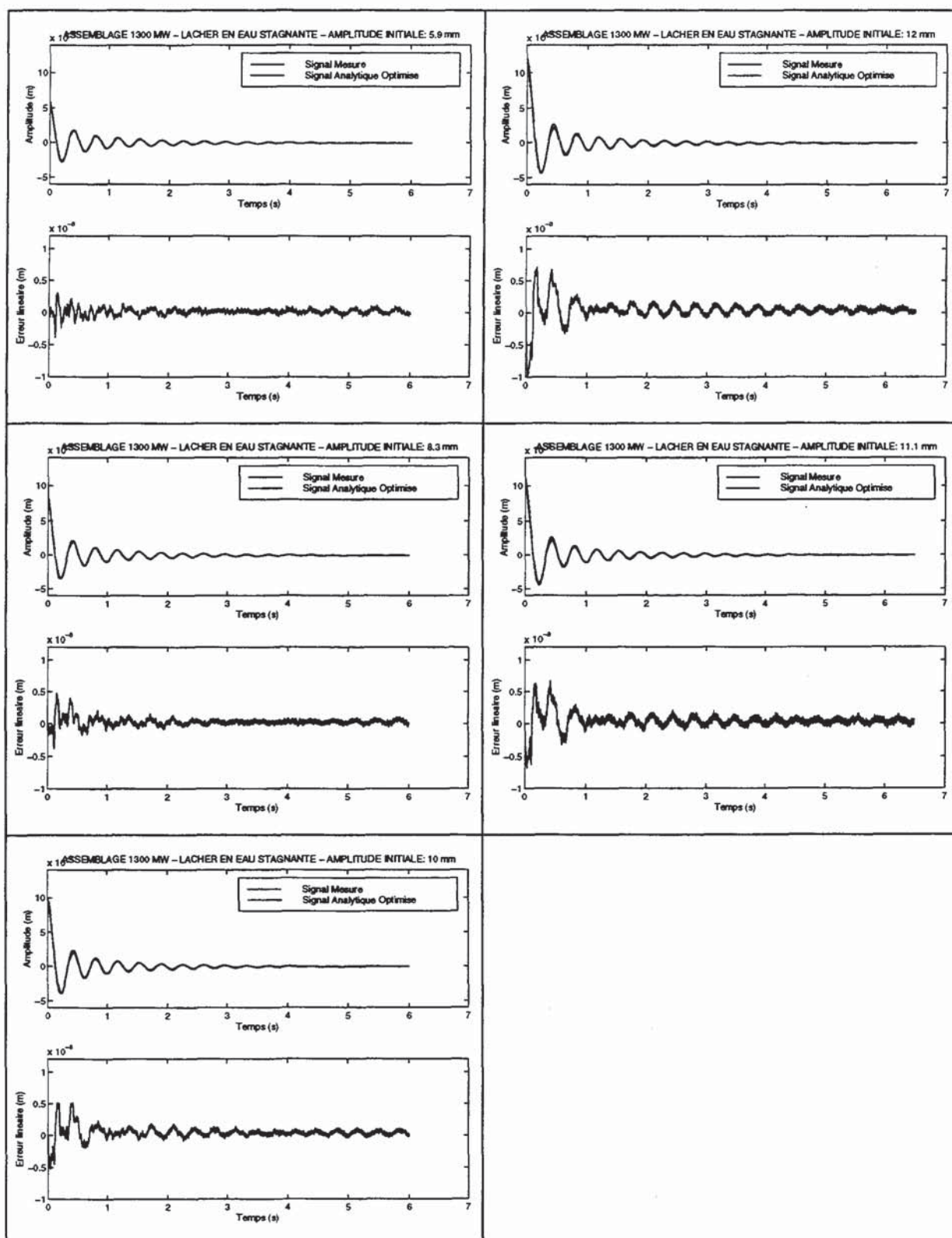
Comparaisons entre les réponses mesurées et les réponses optimisées (Modèle Air 1).
Lâchers effectués en air sur un assemblage AFA-XL 1300 MW (EMSI).



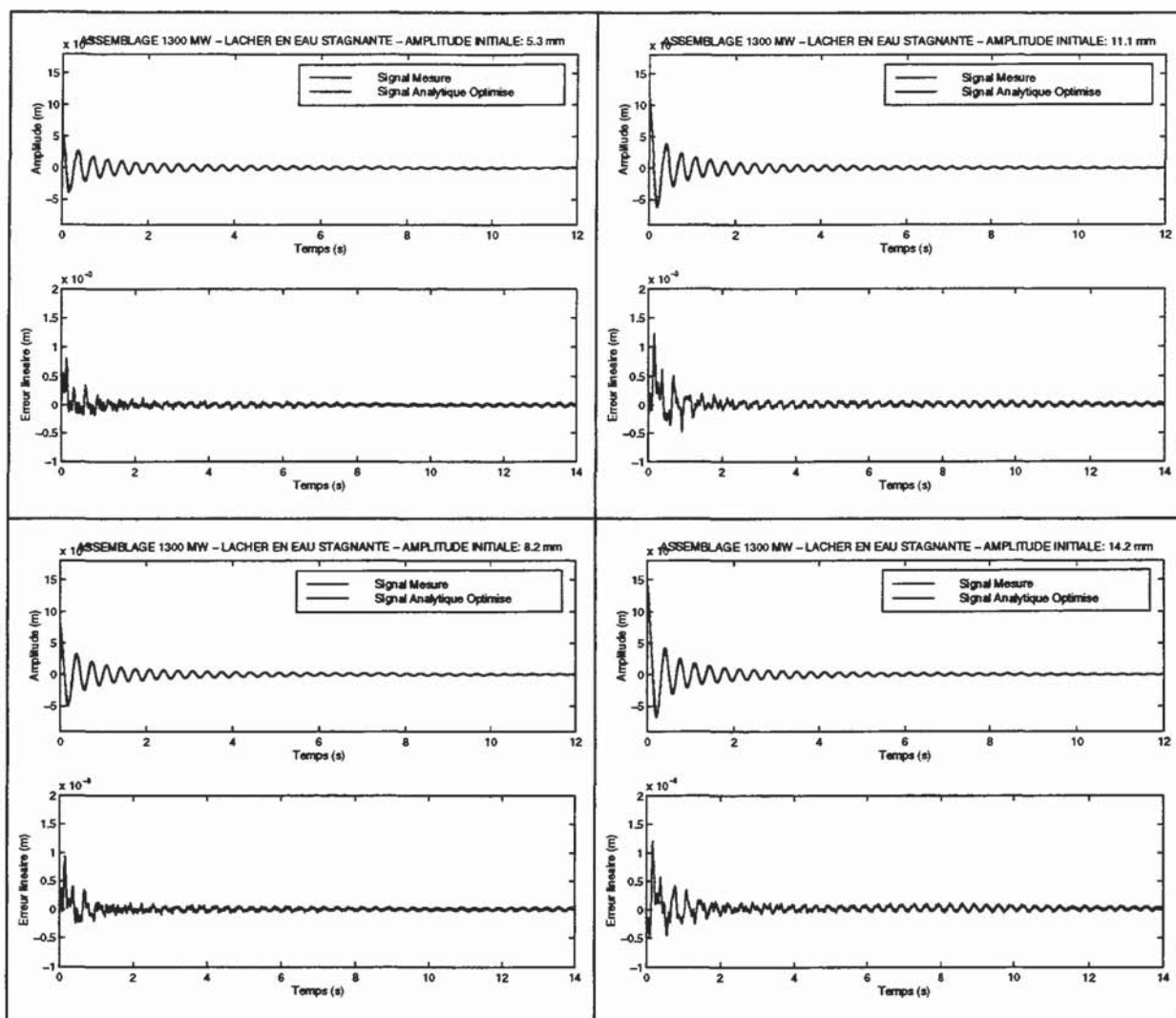


Comparaisons entre les réponses mesurées et les réponses optimisées (Modèle Air 1).
Lâchers effectués en air sur un assemblage AFA 900 MW (EMSI).

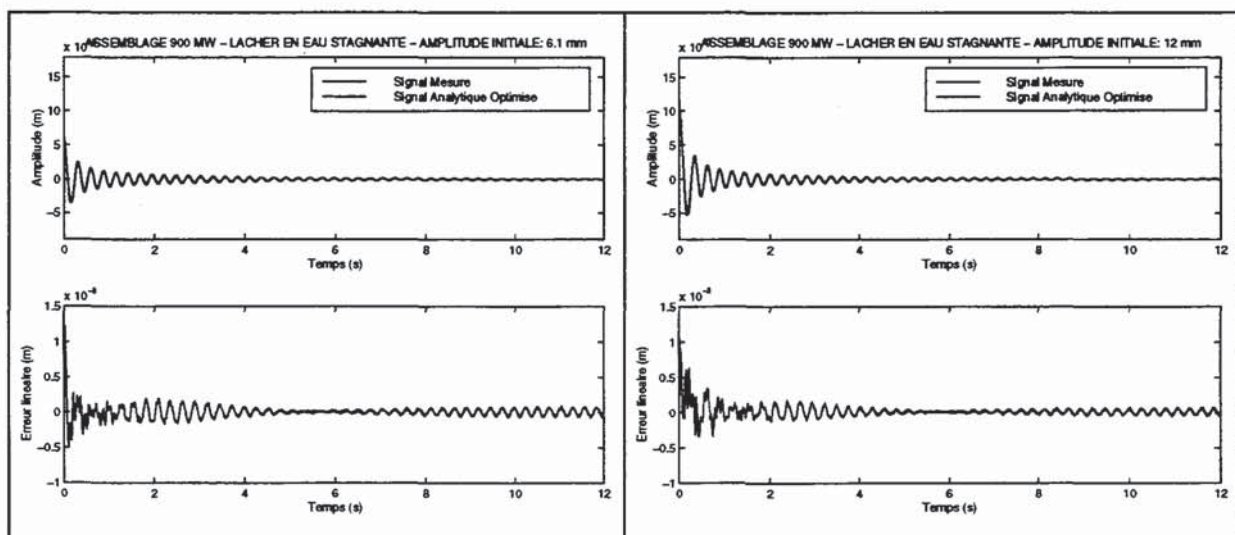
VII.6. Annexe 5 : Comparaison des réponses mesurées et des réponses optimisées pour les lâchers en eau stagnante (Modèle Air 1)

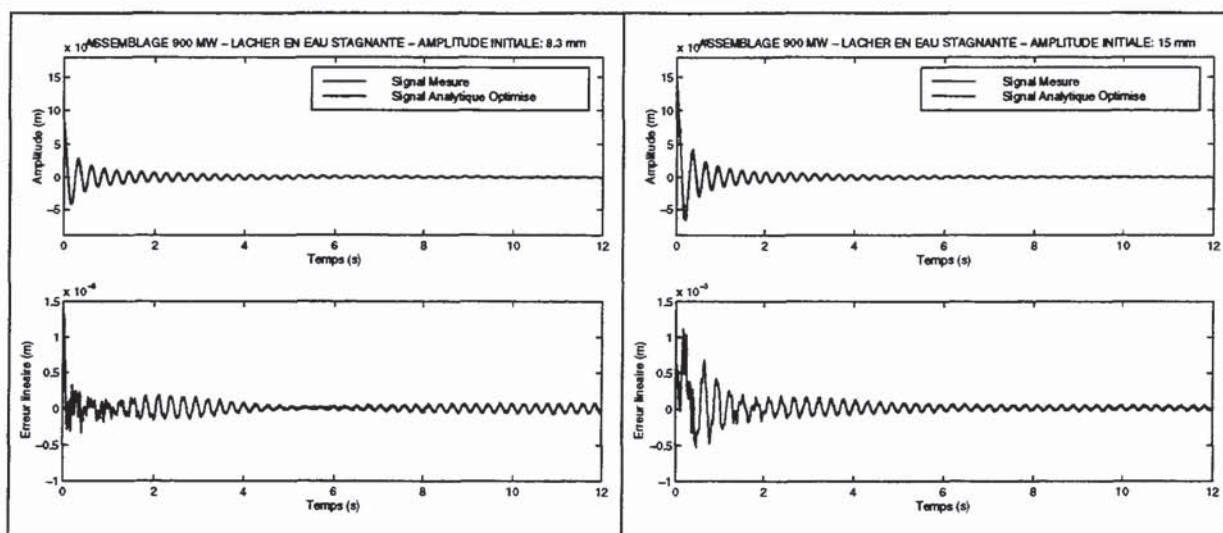


Comparaison entre les réponses mesurées et les réponses optimisées (Modèle Air 1). Lâchers effectués en eau stagnante sur un assemblage AFA-XL 1300 MW(LHC).



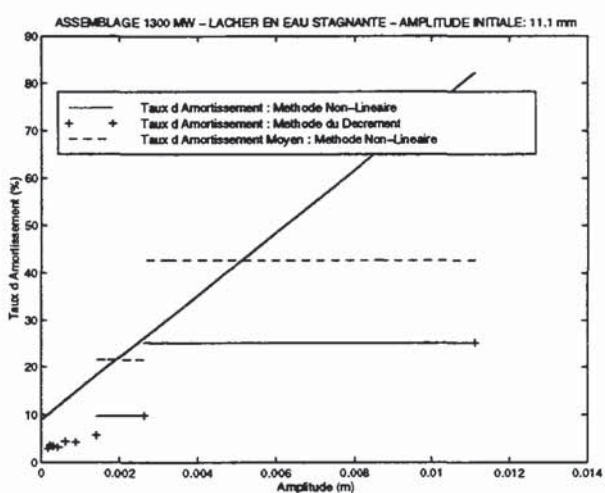
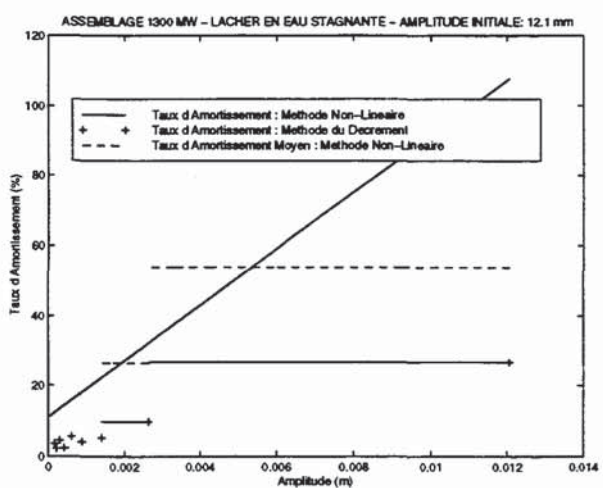
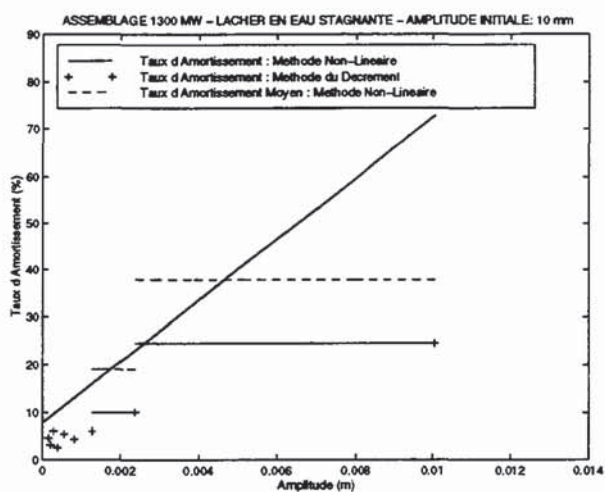
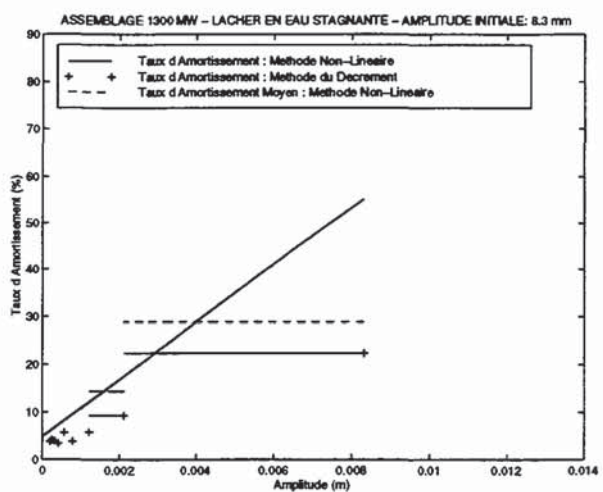
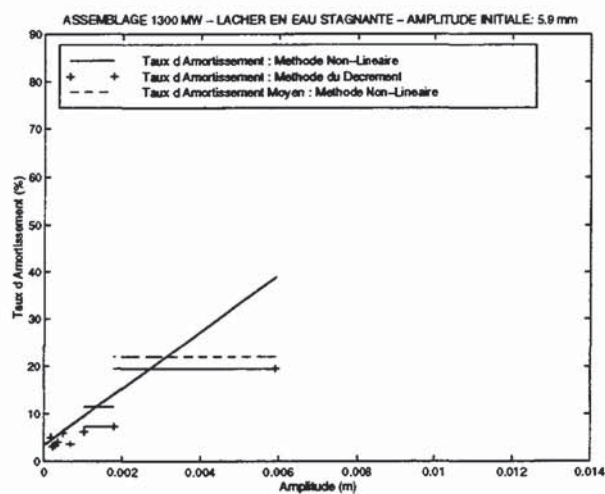
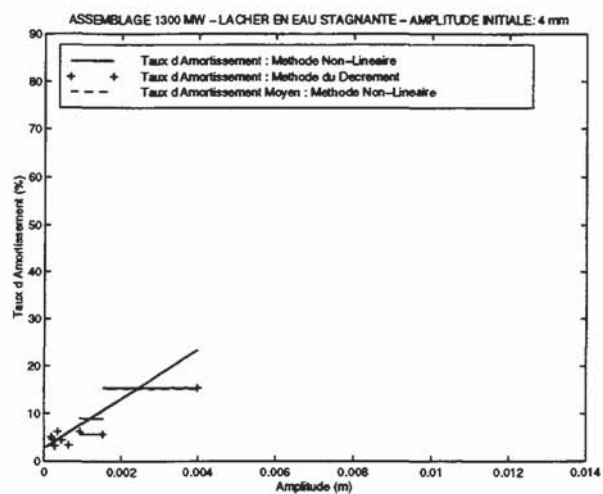
Comparaison entre les réponses mesurées et les réponses optimisées (Modèle Air 1). Lâchers effectués en eau stagnante sur un assemblage XL 1300 MW(EMSI).

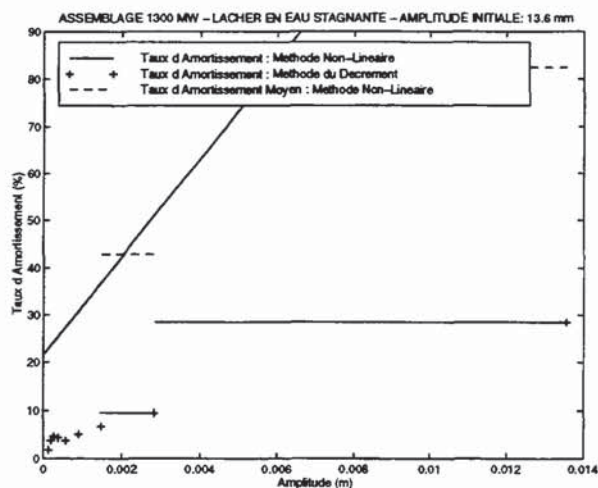




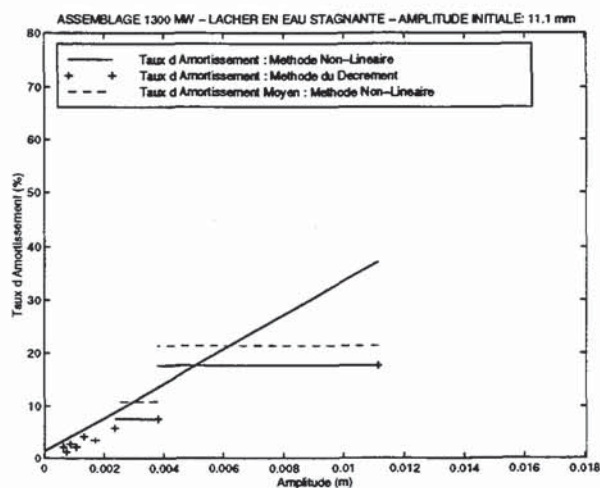
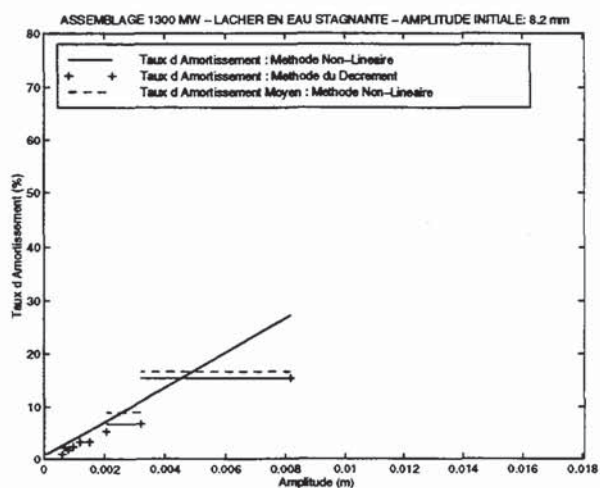
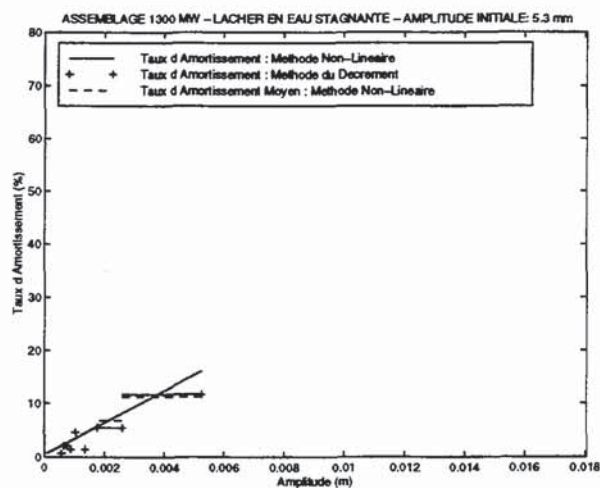
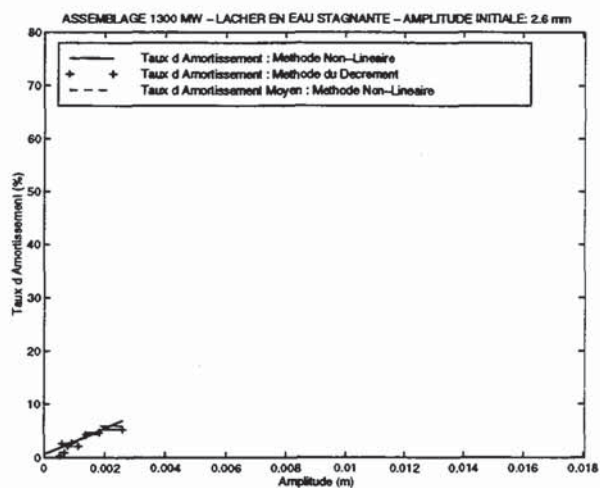
**Comparaison entre les réponses mesurées et les réponses optimisées (Modèle Air 1).
Lâchers effectués en eau stagnante sur un assemblage AFA 900 MW(EMSI).**

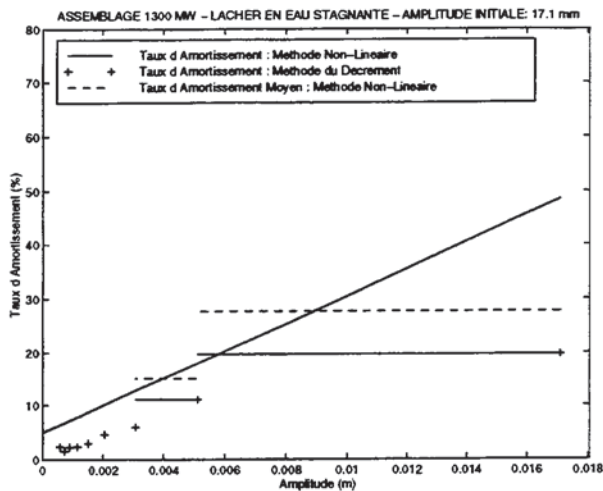
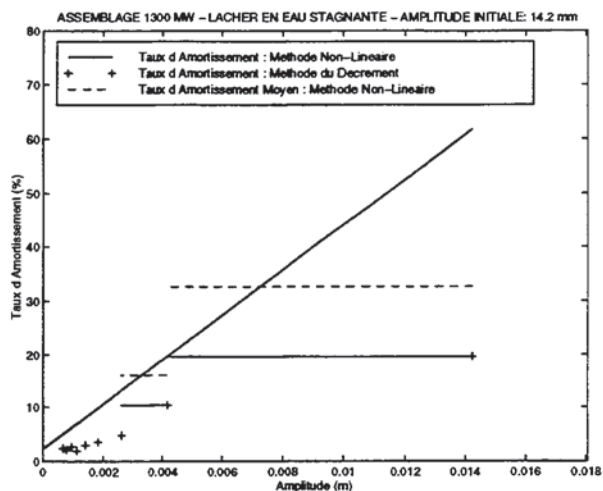
VII.7. Annexe 6: Taux d'amortissement obtenu en eau stagnante



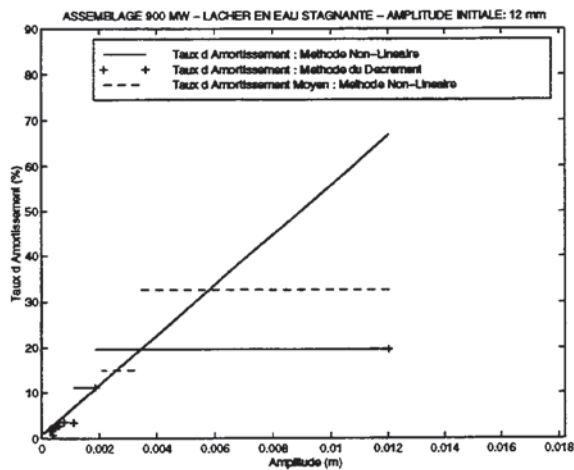
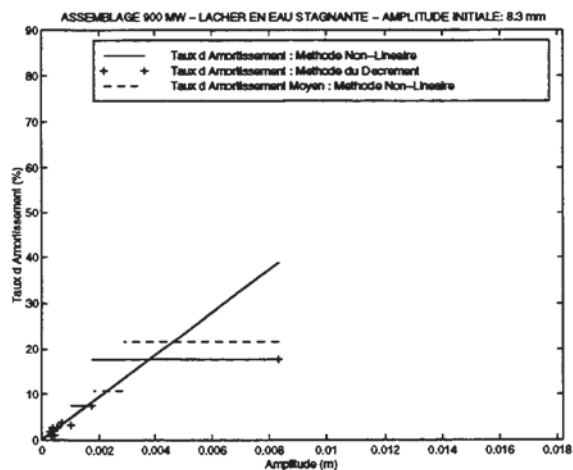
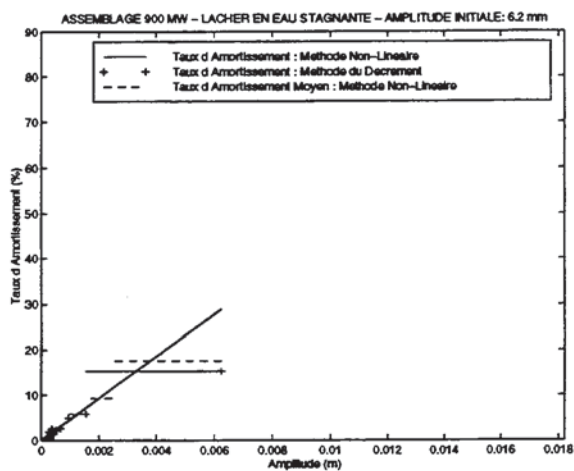
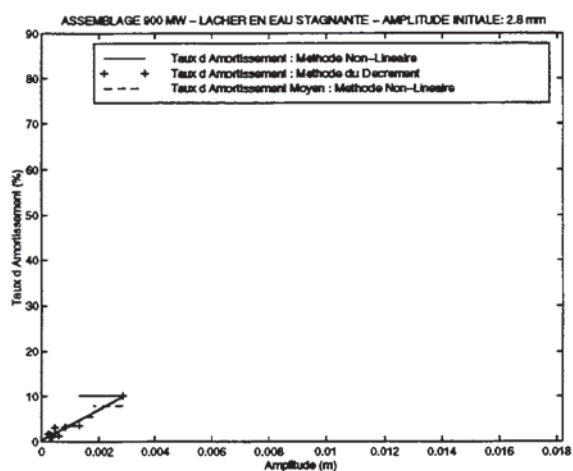


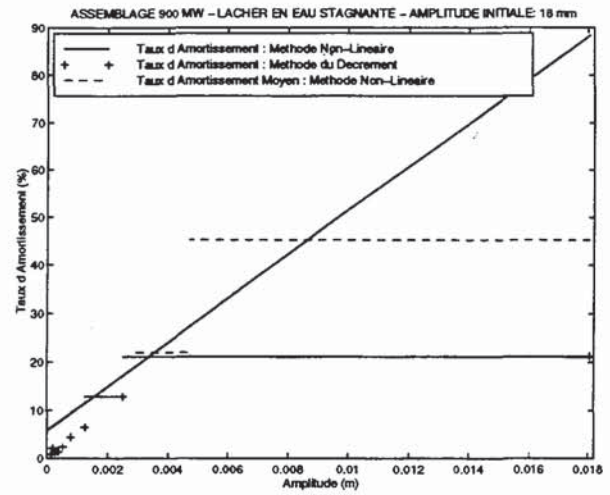
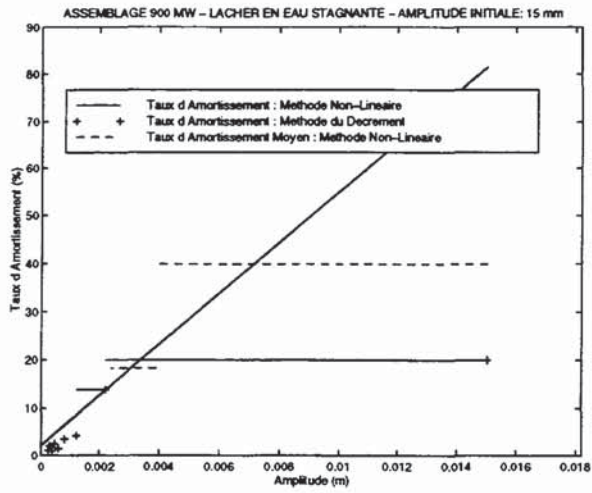
Evolution du taux d'amortissement en fonction de l'amplitude du mouvement. Résultats pour un assemblage AFA-XL 1300 MW(LHC).





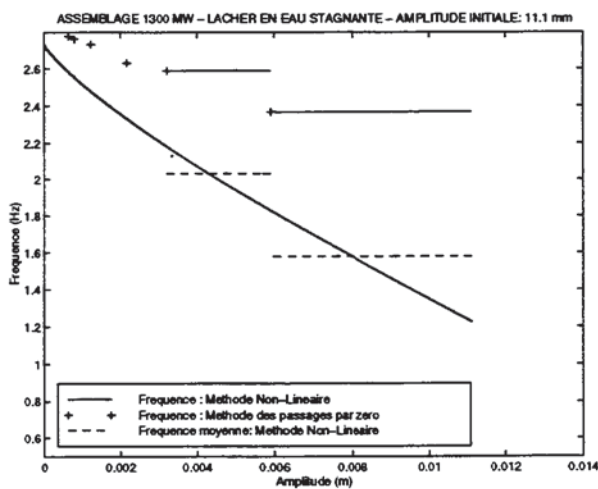
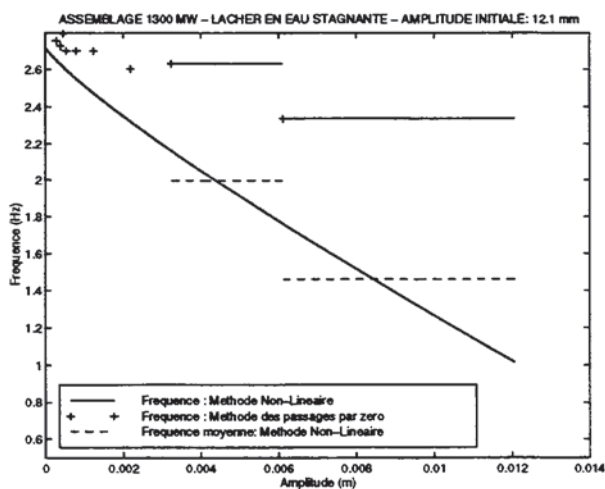
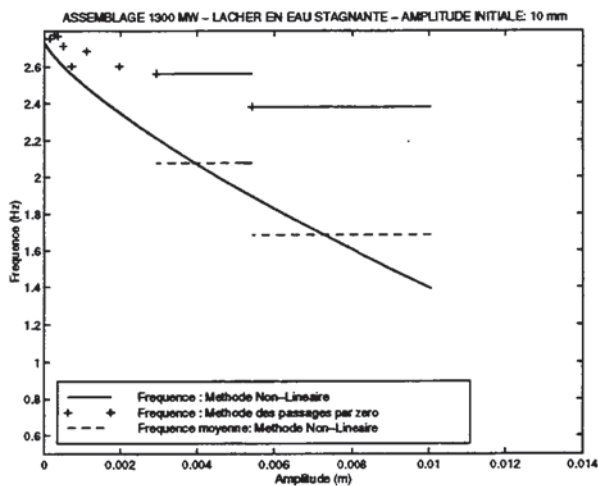
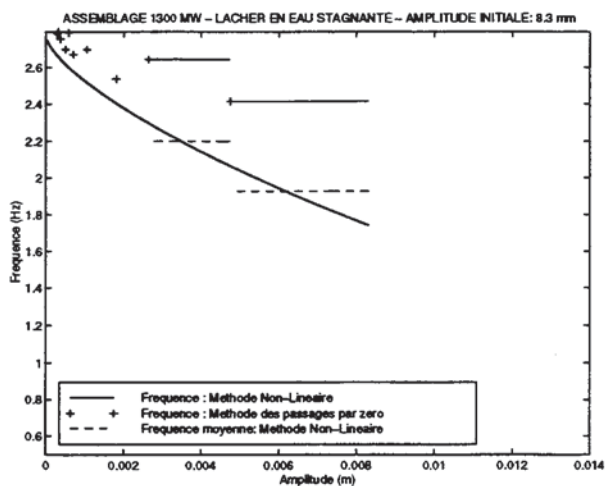
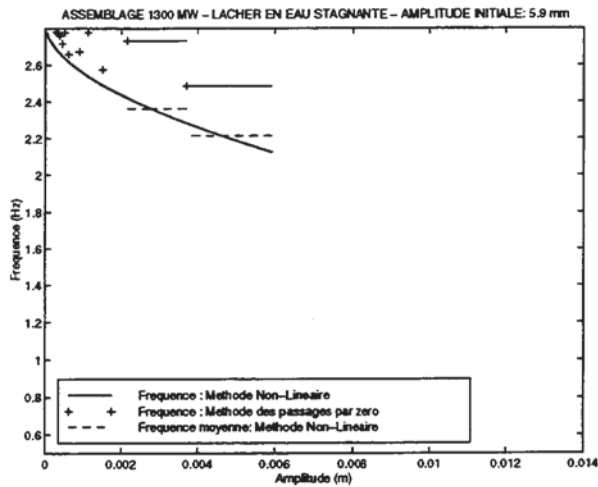
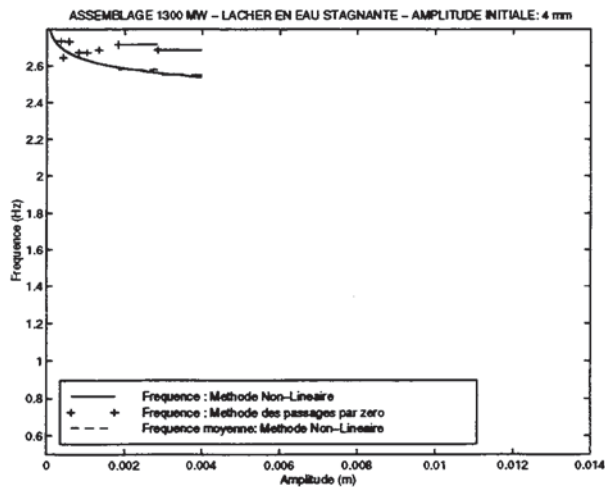
Evolution du taux d'amortissement en fonction de l'amplitude du mouvement. Résultats pour un assemblage XL 1300 MW (EMSI).

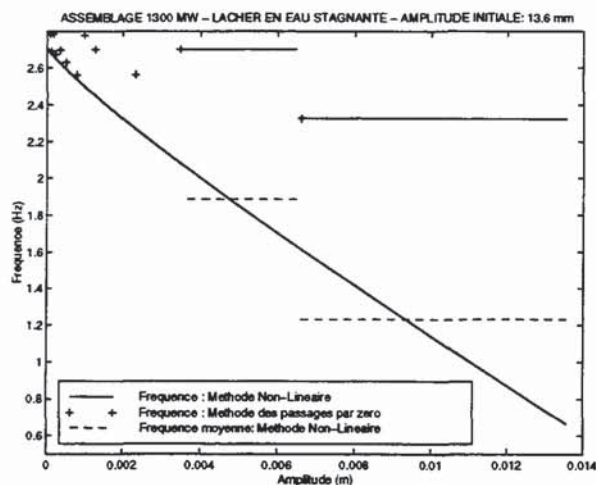




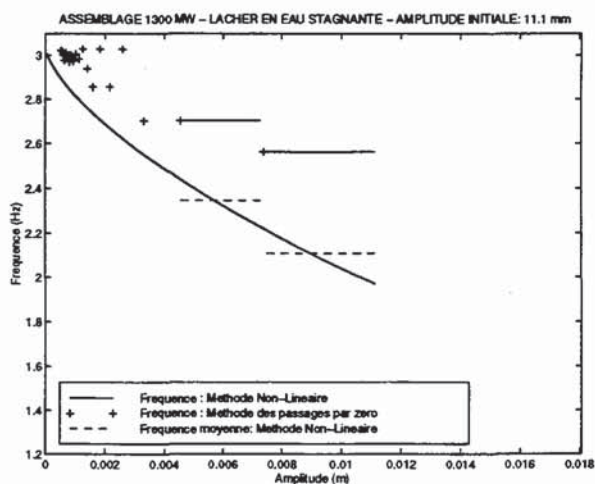
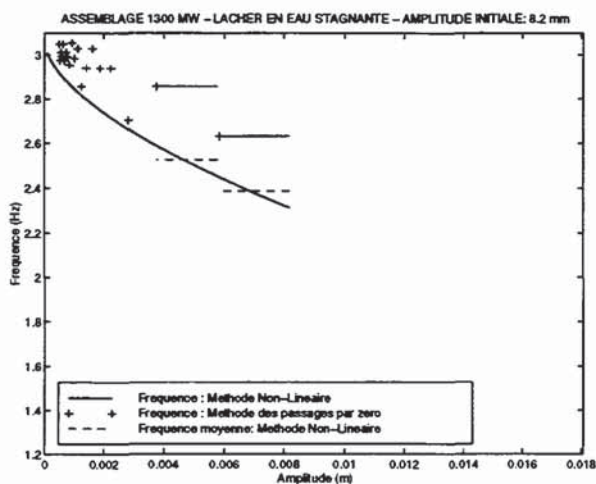
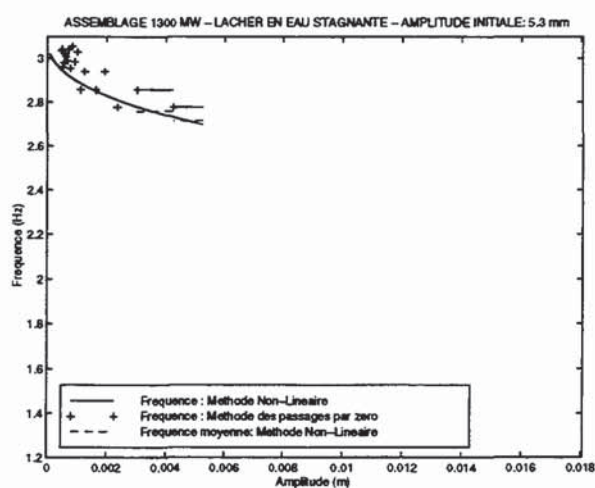
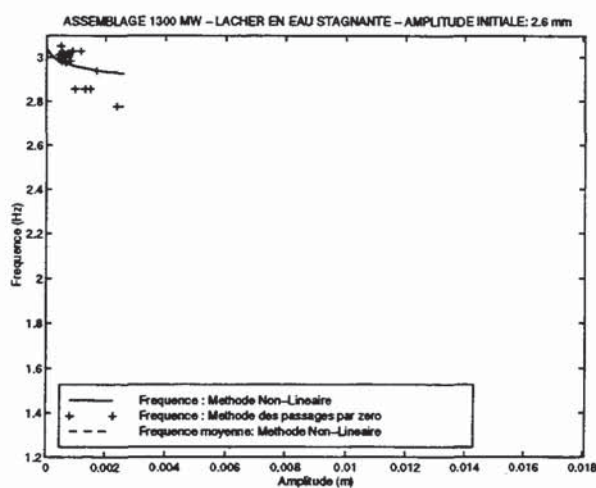
Evolution du taux d'amortissement en fonction de l'amplitude du mouvement. Résultats pour un assemblage AFA 900 MW (EMSI).

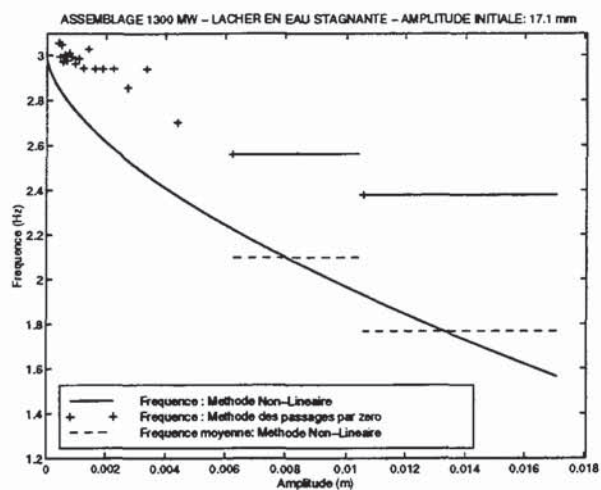
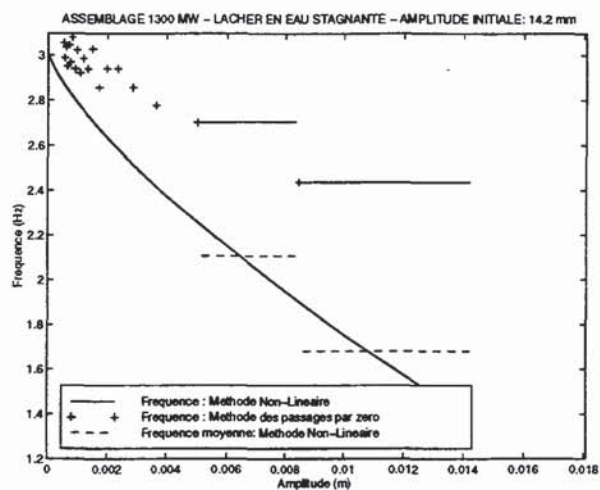
VII.8. Annexe 7 : Fréquence obtenue en eau stagnante



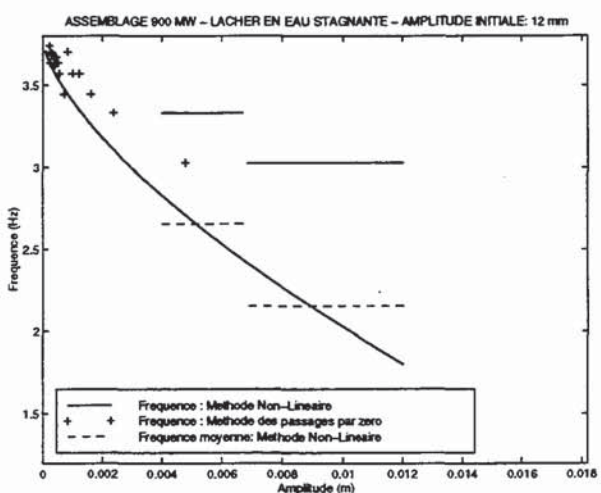
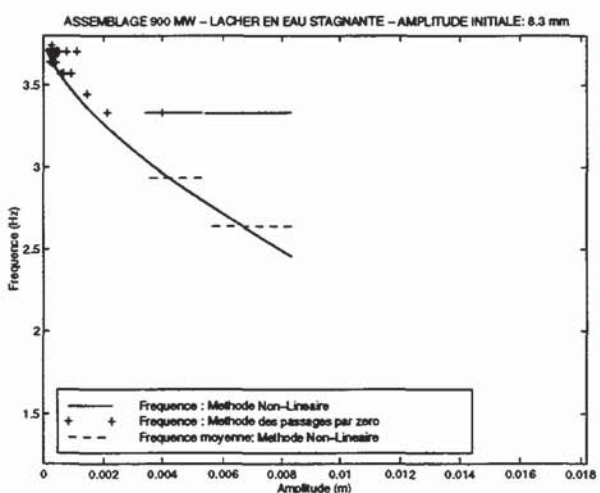
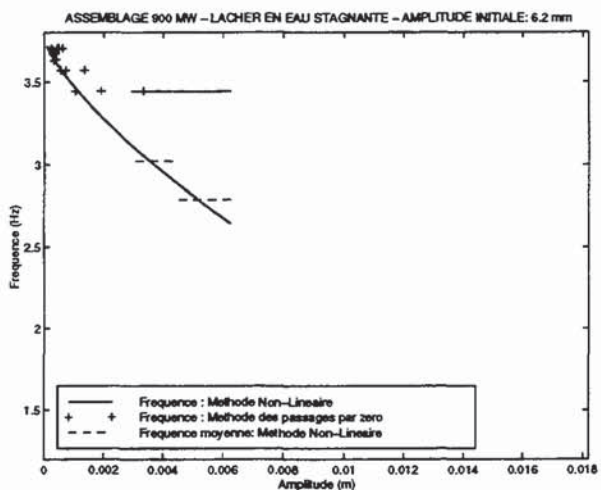
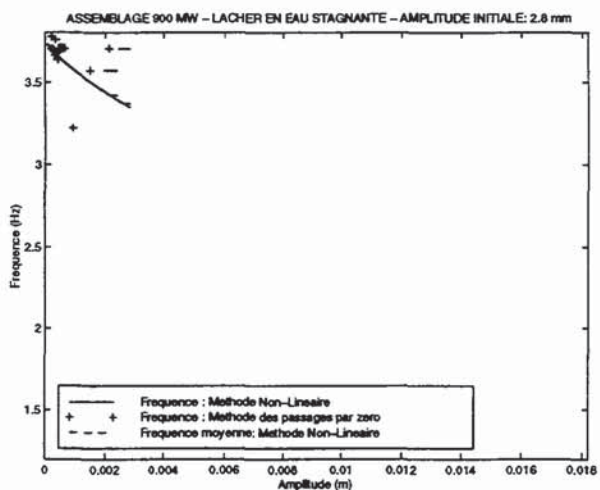


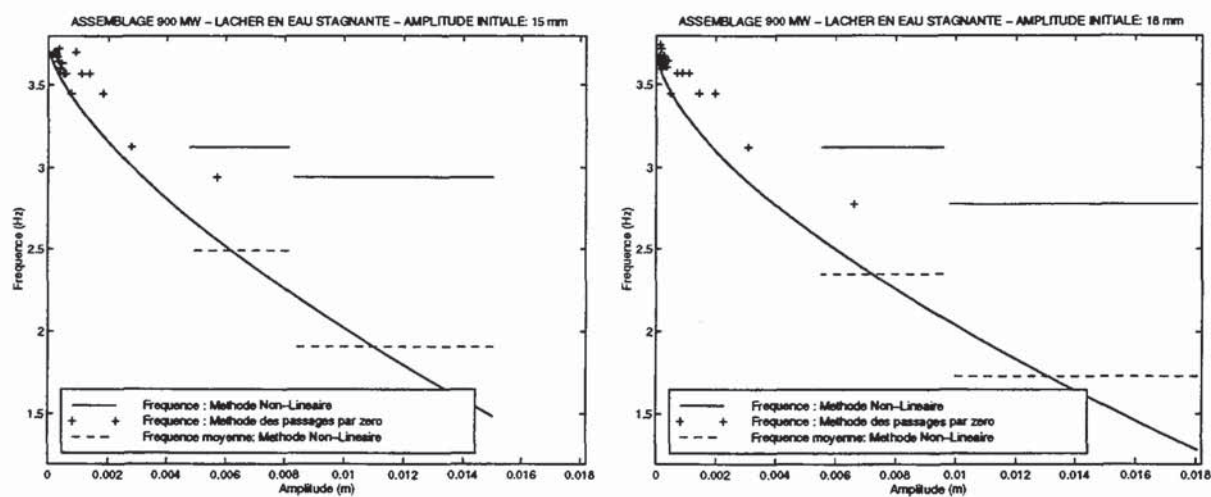
Evolution de la fréquence en fonction de l'amplitude du mouvement. Résultats pour un assemblage AFA-XL 1300 MW (LHC).





Evolution de la fréquence en fonction de l'amplitude du mouvement. Résultats pour un assemblage XL 1300 MW (EMSI).





Evolution de la fréquence en fonction de l'amplitude du mouvement. Résultats pour un assemblage AFA 900 MW (EMSI).

VII.9. Annexe 8 : Caractéristiques des poutres équivalentes*

VII.9.1. Masse volumique équivalente

VII.9.1.1. Poutre-tubes (pt)

Caractéristiques d'un crayon combustible (1300 MW) :

Diamètre extérieur : 9.5 mm

Diamètre intérieur : 8.36 mm

Masse volumique de la gaine (Zircaloy 4) : 6550 Kg/m³

Module d'Young du Zircaloy 4 : 0.984 e¹¹ Pa

Diamètre extérieur d'une pastille de combustible : 8.192 mm

Masse volumique des pastilles de combustible : 10 410 Kg/m³

Caractéristiques d'un tube guide (1300 MW) :

Diamètre extérieur – Partie haute : 12.05 mm

Diamètre extérieur – Partie basse : 10.9 mm

Épaisseur : 0.4 mm

Masse volumique (Zircaloy 4) : 6550 Kg/m³

Gaine du tube guide en Zircaloy 4.

La masse volumique équivalente est ramenée à la section de la grille : (213.38 mm)². Les crayons sont considérés comme remplis de pastilles de combustible sur toute leur hauteur. Les tubes guides sont des tubes creux. La grille est considérée comme entièrement en Zircaloy 4.

Le diamètre extérieur des tubes guides pris pour notre calcul correspond au diamètre moyen obtenu entre la valeur en partie haute et la valeur en partie basse, soit $D_{\text{moy}} = 11.475$ mm.

$$\rho_{pt}^{eq} = \frac{264 \left[\frac{\pi}{4} \left((9.5e^{-3})^2 - (8.36e^{-3})^2 \right) 6550 + \frac{\pi}{4} (8.192e^{-3})^2 10410 \right] + 25 \frac{\pi}{4} \left((11.475e^{-3})^2 - (11.075e^{-3})^2 \right) 6550}{(213.38e^{-3})^2}$$

$$\rho_{pt}^{eq} \approx 3919 \text{ Kg/m}^3$$

* Ref : BRUNEL L. : "Description comparée des assemblages combustibles R.E.P. actuels et futurs".
Note Technique DRE/STRE/LHC 87/860. Janvier 1988.

VII.9.1.2. Poutre-grille (pg)

Pour le calcul de la masse volumique de la poutre-grille nous considérons que toute la surface qui n'est occupée ni par les tubes guides ni par les crayons constitue les parois de la grille (plaquettes extérieures et cellules de la grille).

$$\text{Surface occupée par un crayon combustible : } S_c = \frac{\pi(9.5e^{-3})^2}{4} = 7.088e^{-5} m^2$$

$$\text{Surface occupée par un tube guide : } S_{tg} = \frac{\pi(11.475e^{-3})^2}{4} = 1.034e^{-4} m^2$$

$$\rho_{pg}^{eq} = \frac{\left[\left((213.38e^{-3})^2 - 264S_c - 25S_{tg} \right) 5550 \right] + 264 \left[\frac{\pi}{4} \left((9.5e^{-3})^2 - (8.36e^{-3})^2 \right) 5550 + \frac{\pi}{4} (8.192e^{-3})^2 10410 \right] + 25 \left[\frac{\pi}{4} \left((11.475e^{-3})^2 - (11.075e^{-3})^2 \right) 5550 \right]}{(213.38e^{-3})^2}$$

$$\rho_{pg}^{eq} \approx 7405 \text{ Kg/m}^3$$

VII.9.2. Moment d'inertie de flexion

VII.9.2.1. Poutre-tubes (pt)

Moment d'inertie de flexion d'un crayon combustible (section circulaire) :

$$I_c = \frac{\pi(9.5e^{-3})^4}{64} = 4e^{-10} m^4$$

Moment d'inertie de flexion d'un tube guide (section circulaire) :

$$I_{tg} = \frac{\pi \left[(11.475e^{-3})^4 - (11.075e^{-3})^4 \right]}{64} = 1.13e^{-10} m^4$$

$$I_{pt} = 264I_c + 25I_{tg} = 1.084e^{-7} m^4$$

VII.9.2.2. Poutre-grille (pg)

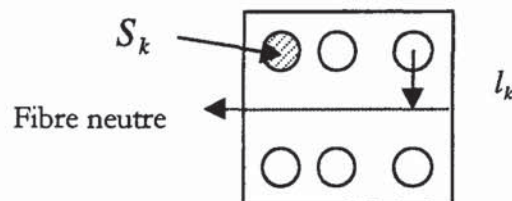
Moment d'inertie de flexion d'une grille (section carrée) :

$$I_{pg} = \frac{(213.38e^{-3})^4}{12} = 1.727e^{-4} m^4$$

VII.9.3. Raideurs additionnelles

Pour le calcul des raideurs additionnelles de rotation, ajoutées en parallèle de chacun des éléments poutre-tubes et poutre-grille, seul le terme concernant les tubes guides a été pris en compte. Ce terme de raideur additionnelle s'exprime comme suit :

$$K_i^{aj} = \frac{E \sum_{k=1}^N S_k l_k^2}{H_i}$$



S_k correspond à la surface d'un tube et N représente le nombre de tubes (25 tubes guides). E représente le module d'Young et H_i correspond à la hauteur de la poutre considérée.

Pour les tubes guides le terme $\sum_{k=1}^N S_k l_k^2$ vaut :

VII.9.3.1. Poutre-tubes

Les hauteurs des éléments poutre-tubes sont données de bas en haut de l'assemblage :

$H_1=60.96 \text{ mm}$	$K_1^{aj}=733.95e^3 \text{ Nm/rd}$	$H_6=392.6 \text{ mm}$	$K_6^{aj}=113.96e^3 \text{ Nm/rd}$
$H_2=411.5 \text{ mm}$	$K_2^{aj}=108.73e^3 \text{ Nm/rd}$	$H_7=536.2 \text{ mm}$	$K_7^{aj}=83.33e^3 \text{ Nm/rd}$
$H_3=472.6 \text{ mm}$	$K_3^{aj}=94.67e^3 \text{ Nm/rd}$	$H_8=446.9 \text{ mm}$	$K_8^{aj}=100.12e^3 \text{ Nm/rd}$
$H_4=472.5 \text{ mm}$	$K_4^{aj}=94.67e^3 \text{ Nm/rd}$	$H_9=411.5 \text{ mm}$	$K_9^{aj}=108.72e^3 \text{ Nm/rd}$
$H_5=472.5 \text{ mm}$	$K_5^{aj}=94.67e^3 \text{ Nm/rd}$	$H_{10}=60.9 \text{ mm}$	$K_{10}^{aj}=700.18e^3 \text{ Nm/rd}$

VII.9.3.2. Poutre-grille

La hauteur d'une grille est de 33 mm. La valeur de la raideur additionnelle est identique pour tous les éléments poutre-grille, soit :

$$H_g=33 \text{ mm} \quad K_g^{aj}=1.356e^6 \text{ Nm/r}$$

VII.10. Annexe 9 : Modèle numérique simplifié d'assemblage AFA-XL 1300 MW - Calcul des modes propres dans CASTEM2000

```
opti sauve '/usr/users/d8/rebelle/asbla/new/basel_air.sortgibi';
opti dime 3 mode trid elem seg2 ;
```

```
* Discrétisation de l assemblage
*****
```

```
p0 = 0. 0. 0. ;
p1 = 0. 0. 60.96e-3;
p2 = 0. 0. 93.96e-3 ;
p3 = 0. 0. 505.46e-3 ;
p4 = 0. 0. 538.46e-3 ;
p5 = 0. 0. 1011.06e-3 ;
p6 = 0. 0. 1044.06e-3 ;
p7 = 0. 0. 1516.56e-3 ;
p8 = 0. 0. 1549.56e-3 ;
p9 = 0. 0. 2022.16e-3 ;
p10 = 0. 0. 2055.16e-3 ;
p11 = 0. 0. 2447.76e-3 ;
p12 = 0. 0. 2480.76e-3 ;
p13 = 0. 0. 3017.66e-3 ;
p14 = 0. 0. 3050.66e-3 ;
p15 = 0. 0. 3507.56e-3 ;
p16 = 0. 0. 3540.56e-3 ;
p17 = 0. 0. 3997.46e-3 ;
p18 = 0. 0. 4030.46e-3 ;
p19 = 0. 0. 4441.96e-3 ;
p20 = 0. 0. 4474.96e-3 ;
p21 = 0. 0. 4538.86e-3 ;
```

```
* Définition des éléments
*****
```

```
l1 = p0 droit 30 p1 ;
l2 = p1 droit 10 p2 ;
l3 = p2 droit 50 p3 ;
l4 = p3 droit 10 p4 ;
l5 = p4 droit 50 p5 ;
l6 = p5 droit 10 p6 ;
l7 = p6 droit 50 p7 ;
l8 = p7 droit 10 p8 ;
l9 = p8 droit 50 p9 ;
l10 = p9 droit 10 p10 ;
l11 = p10 droit 50 p11 ;
l12 = p11 droit 12 p12 ;
l13 = p12 droit 50 p13 ;
l14 = p13 droit 10 p14 ;
l15 = p14 droit 50 p15 ;
l16 = p15 droit 10 p16 ;
l17 = p16 droit 50 p17 ;
l18 = p17 droit 10 p18 ;
l19 = p18 droit 50 p19 ;
l20 = p19 droit 10 p20 ;
l21 = p20 droit 30 p21 ;
```

```

* Assemblage des éléments
*****

crayon = 11 et 13 et 15 et 17 et 19 et 111 et 113
        et 115 et 117 et 119 et 121 ;
grille = 12 et 14 et 16 et 18 et 110 et 112 et 114
        et 116 et 118 et 120 ;
asbla = crayon et grille ;

* Modèle
*****

alc = modl crayon mecanique elastique pout ;
alg = modl grille mecanique elastique pout ;

alt = alc et alg ;

* Caractéristiques
*****

carc = cara alc sect 45.531e-3 inry 1.084e-7 inrz 1.084e-7
      tors 2.167e-7 ;

carg = cara alg sect 45.531e-3 inry 1.727e-4
      inrz 1.727e-4 tors 3.454e-4 ;

cart = carc et carg ;

* Matériaux
*****

matc = matr alc youn 0.984e11 nu 0.3 rho 3385;
matg = matr alg youn 0.984e11 nu 0.3 rho 7400 ;

matt = matc et matg ;

* Conditions limites
*****

cl1 = bloq depl rota p0 ;
cl2 = bloq depl rota p21 ;
bloz = bloq ux asbla ;

clt = cl1 et cl2 et bloz;

* Masse
*****

massc = mass alc ( matc et carc ) ;
massg = mass alg ( matg et carg ) ;

masst = massc et massg ;

* Rigidité
*****

rigc = rigi alc ( carc et matc ) ;
rigg = rigi alg ( carg et matg ) ;

rig = rigc et rigg et clt ;

```

*Raideurs additionnelles de rotation sur les poutre-tubes**

```

r1=733.95e3/130.;
rigc1 = rigi rx r1 l1 ;

r2=108.73e3/130.;
rigc3 = rigi rx r2 l3;

r3=94.67e3/130.;
rigc5 = rigi rx r3 l5 ;

r4=94.67e3/130.;
rigc7 = rigi rx r4 l7 ;

r5= 94.67e3/130.;
rigc9 = rigi rx r5 l9 ;

r6=113.96e3/130.;
rigc11 = rigi rx r6 l11 ;

r7=83.33e3/130.;
rigc13 = rigi rx r7 l13 ;

r8=100.12e3/130.;
rigc15 = rigi rx r8 l15;

r9=100.12e3/130.;
rigc17 = rigi rx r9 l17;

r10=108.72e3/130.;
rigc19 = rigi rx r10 l19 ;

r11=700.18e3/130.;
rigc21 = rigi rx r11 l21;

```

```

rigadc = rigc1 et rigc3 et rigc5 et rigc7 et rigc9 et
         rigc11 et rigc13 et rigc15 et rigc17 et rigc19
         et rigc21 ;

```

*Raideurs additionnelles de rotation sur les poutre-grille**

```

rg=1.356e6/1600;

rigg2 = rigi rx rg l2 ;

rigg4 = rigi rx rg l4;

rigg6 = rigi rx rg l6 ;

rigg8 = rigi rx rg l8 ;

rigg10 = rigi rx rg l10 ;

rigg12 = rigi rx rg l12 ;

rigg14 = rigi rx rg l14 ;

rigg16 = rigi rx rg l16;

```



```

rigg18 = rigi rx rg l18;
rigg20 = rigi rx rg l20 ;
rigadg = rigg2 et rigg4 et rigg6 et rigg8 et rigg10 et
        rigg12 et rigg14 et rigg16 et rigg18 et rigg20 ;

rigt = rig et rigadc et rigadg ;

*Prise en compte du poids propre
*****

chp2 = manu chpo asbla 1 uz 9.81 ;
poids = masst * chp2 ;
dept = reso ( rigt et clt ) poids ;

sigtt = sigm alt (matt et cart) dept;
ksigt1 = ksigm alt sigtt (matt et cart) ;

ksigt1 = ksigtt et rigt ;

* Vibrations suivant l'axe Y
*****

nbmod = 4 ;

taby = vibr intervalle 0.01 1500 basse nbmod
      (ksigt1) (masst) tbas ;

nnor (taby . modes) (mots ux uy uz) ;

j = 0 ;

repete boucle1 nbmod ;
j = j+1 ;

freq = taby . modes . j . frequence ;
m = taby . modes . j . masse_generalisee ;
def1 = taby . modes . j . deformee_modale ;
def11 = defo asbla def1 1. ;
def10 = defo asbla def1 0. ;
depg = taby . modes . j . deplacements_generalises ;

titre ' Frequence calculee CASTEM : ' freq 'Hz' ;
trac (1000 0 0) ( def11 et def10) ;

fin boucle1 ;

tabl = table base_de_modes ;
tbas = table base_modale ;
tbas . modes = tabl ;

j = 0 ;

```

```

repetier boucle2 nbmod ;

  j = j+1 ;
  tabl . j = taby . modes . j ;

fin boucle2 ;

* suppression des multiplicateurs de Lagrange
*****

j = 0 ;

repetier boucle3 nbmod ;

  j = j+1 ;
  def1 = tabl . j . deformee_modale ;
  tabl . j . deformee_modale = enleve def1 lx ;

fin boucle3 ;

j = 0 ;
masrelat = prog ;
massetot = 0 ;

repetier boucle4 nbmod ;
j = j+1 ;

mess frequence ;
freq = tabl . j . frequence ;
mess freq ;
mess masse generalisee ;
m = tabl . j . masse_generalisee ;
mess m ;
depg = tabl . j . deplacements_generalises . 2 ;
masrela = (depg**2)/( m ) ;
masrelap = prog 1*masrela ;
masrelat = masrelat et (masrelap) ;
massetot = massetot + masrela ;
k = (tabl . j . masse_generalisee)*((tabl . j . frequence)**2)
    *((2*pi)**2) ;
mess k ;
mess mode ;
mess j ;
mess '===== ' ;

fin boucle4 ;

*mstp = prog 1*massetot ;
part_mod = ((masrelat) / (massetot))*100 ;
list part_mod ;

sauver tbas tabl nbmod ksigt poi2;

fin ;

```

VII.11. Annexe 10 : Simulation CASTEM2000 d'un lâcher d'assemblage AFA-XL 1300 MW – Modèle non-linéaire d'amortissement – Raideur linéaire.

```

opti sauve '/usr/users/d8/rebelle/asbla/new/lacher_asbla10_eau.sortgibi';
opti rest '/usr/users/d8/rebelle/asbla/new/base1_eau.sortgibi';
restituer ;
opti dime 3 mode trid elem seg2 ;

```

```

amp_lach = 11.1 ;
amp_lach = amp_lach*1.e-3;

```

```

* Table d'amortissement (2 modes)
*****

```

```

a = 20 ;
amol = PROG nbmod*a ;
amor1 = AMOR tbas amol ;

```

```

tabamo = TABLE 'AMORTISSEMENT' ;
tabamo . 'AMORTISSEMENT' = amor1;

```

```

* Table des sorties
*****

```

```

tab_sor = TABLE 'SORTIE' ;
tab_sorv = TABLE 'VARIABLE' ;
  tab_sor . 'VARIABLE' = tab_sorv ;
  tab_sorv . 'DEPLACEMENT' = vrai ;
  tab_sorv . 'VITESSE' = faux ;
  tab_sorv . 'ACCELERATION' = faux ;

```

```

* Table de sortie des variables de liaison
*****

```

```

*tab_sor1 = TABLE 'LIAISON_B' ;
*   tab_sor1 . t11 = faux ;
*   tab_sor . 'LIAISON_B' = tab_sor1 ;

```

```

* Chargement de la force de lâcher
*****

```

```

** Calcul de la raideur statique *

```

```

effort = 1000. ;
forc_sta = FORCE ( 0. effort 0. ) p10 ;
dep = RESO ksigt forc_sta ;
depm = EXCO uy dep ;
maxdep = MAXI depm ;
list maxdep ;

```

```

kstat = effort / maxdep ;
list kstat ;

```



```

** calcul de la force nécessaire pour effectuer le lâcher demande

f = kstat*amp_lach*98 ;
forc_ini = force ( 0. f 0. ) p10 ;
dep_i = reso ksigt t forc_ini ;
dep_in = extr dep_i 'UY' p12;
list dep_in ;
*
** conditions initiales **

pj_forc1 = pjba tbas forc_ini ;
rig_b = rigi tbas.modes ;
dep_init = resou rig_b pj_forc1 ;

* Conditions initiales (déplacement initiale et vitesse nulle)
*****

condit_d = MANU chpo (asbla) 1 alfa 0. ;
condit_v = MANU chpo (asbla) 1 alfa 0. ;

    tab_init = TABLE 'INITIAL' ;
        tab_init . 'DEPLACEMENT' = condit_d ;
        tab_init . 'VITESSE' = condit_v ;

** chargement de l assemblage sur 0 3s avec pente 1 et stabilisation sur 3s

evo_stat = EVOL manu ( prog 0. 3 35 )
            ( prog 0. amp_lach amp_lach ) ;
char1 = CHAR evo_stat pj_forc1;

tab_char = TABLE 'CHARGEMENT' ;
tab_char . base_a = char1 ;

* Paramètres de calcul
*****

dt1 = 1e-4 ;
nb_pas1 = 1000 ;
nbbloc1 = 50 ;
nb_val1 = nbbloc1*nb_pas1 ;
sor_pas1 = 100 ;

dt2 = 1e-4 ;
nb_pas2 = 100 ;
nbbloc2 = 2500 ;
nb_val2 = nbbloc2*nb_pas2 ;
sor_pas2 = 100 ;

* Mise en flexion de l assemblage par l'application
* d'une force de flexion (y) en 1s et stabilisation
* du système pendant 1 seconde .
*****

t_1 = prog ;
depl0_1 = prog ;
j = 0 ;

```

***** Début boucle de chargement statique *****

repeter boucle1 nbblocl ;

j = j+1 ;
list j ;

tab_res1 = DYNE DE_VOGELAERE TBAS TABAMO
TAB_CHAR TAB_INIT nb_pas1
dt1 sor_pas1 TAB_SOR ;

tab_init . reprise = tab_res1 . reprise ;
temps1 = tab_res1 . 'TEMPS_DE_SORTIE';
t_1 = t_1 et (temps1) ;

dep_p10 = EVOL reco tab_res1 tbas depl p10 uy temps1 ;
tempo = EXTR dep_p10 ORDO ;
dep10_1 = dep10_1 et (tempo) ;

fin boucle1 ;

***** Fin boucle de chargement statique *****

*depla = EVOL jaun manu 'Temps (s)' t_1 'Déplacement ' dep10_1 ;
*dessin (depla);
*opti donn 5;

* Table d'amortissement (10 modes)

Co = 0.32 ;
*Co = 0.929 ;
C1 = 1882.3 ;
*C1=3156 ;
fo = 3. ;
lambda = 20.5 ;
beta = 0.655 ;
mul = 0.2122 ;

wo = 2*pi*fo ;
w1 = 2*pi*lambda*(amp_lach**beta) ;

w = wo - w1 ;

CCo = (Co / (2*w)) * 100 ;
CC1 = ((mul*C1) / w) * 100 ;

a = CCo + CC1*amp_lach ;

list a ;
*opti donn 5;

amol = PROG nbmod*a ;
amor1 = AMOR tbas amol ;

tabamo = TABLE 'AMORTISSEMENT' ;
tabamo . 'AMORTISSEMENT' = amor1;

```

* Lâcher après mise en flexion pour calcul
* dynamique.
*****

t_2 = prog ;
dep10_2 = prog ;
dep_t = prog ;
t_t = prog ;
amosauv = prog ;

j=0 ;
stok = 0. ;

***** Début boucle calcul dynamique *****

repetier boucle2 nbbloc2 ;

j = j+1 ;
list j ;

tab_res2 = DYNE DE_VOGELAERE TBAS TABAMO
          TAB_INIT nb_pas2 dt2 sor_pas2 TAB_SOR ;

tab_init . reprise = tab_res2 . reprise ;
temps2 = tab_res2 . 'TEMPS_DE_SORTIE' ;
t_2 = t_2 et (temps2) ;

depp10_2 = EVOL reco tab_res2 tbas dep1 p10 uy temps2 ;
tempo_2 = EXTR depp10_2 ORDO ;
dep10_2 = dep10_2 et (tempo_2) ;

* Table d'amortissement modifiée
*****

dmax = MAXI tempo_2 ;
dmaxx = abs dmax ;

a_nl = dmaxx * CC1;

amo_modi = CCo + a_nl ;
stok = stok + amo_modi ;
amo = PROG 1*amo_modi ;
*list amo ;
amosauv = amosauv et (amo) ;
amo = PROG nbmod*amo_modi ;
amor1 = AMOR tbas amo ;

tabamo = TABLE 'AMORTISSEMENT' ;
tabamo . 'AMORTISSEMENT' = amor1;

fin boucle2 ;

***** Fin boucle calcul dynamique *****

t_t = t_1 et t_2 ;
*t_t = t_2 ;
dep10_t = dep10_1 et dep10_2 ;

nbvall = (nb_vall)/(sor_pas1) ;

```



```
nbval2 = (nb_val2)/(sor_pas2) ;  
nbval = nbval1 + nbval2 + 1 ;  
nbval = nbval2 ;  
list nbval ;  
  
sauver t_t dep10_t nbval amosauv ;  
  
fin ;
```

Université Internationale
d'Alger - Marseille
Section LUMINÉ

Résumé

La connaissance du coefficient d'amortissement réduit du premier mode d'un assemblage combustible de R.E.P. (Réacteur à Eau Pressurisée) est un paramètre important dans un contexte de sûreté nucléaire. En effet, cette caractéristique est une donnée d'entrée dans les codes de calcul dédiés aux prédictions du comportement des assemblages soumis à une sollicitation sismique. Les méthodes expérimentales classiquement utilisées pour la détermination de ce coefficient sont basées sur un formalisme linéaire du comportement dynamique de l'assemblage. Il a été montré par ailleurs, et nous le confirmons dans notre analyse, que cette structure a un comportement non-linéaire. Nous proposons ici une méthodologie pour l'identification de l'amortissement et de la fréquence du premier mode de l'assemblage, tenant compte de cette caractéristique. Dans cette démarche, nous utilisons une large base de données d'essais constituée de réponses à des lâchers effectués en air ou en eau stagnante pour différentes amplitudes initiales. Des modèles non-linéaires paramétrés d'amortissement et de force élastique de rappel sont sélectionnés *a priori*. Ils dépendent du déplacement instantané de l'assemblage et, après optimisation des paramètres des modèles à partir des résultats expérimentaux, nous procurent une formulation pour l'amortissement et la fréquence adaptée au comportement non-linéaire de la structure. Les résultats obtenus permettent une représentation continue de ces deux grandeurs. Les tendances expérimentales observées auparavant sont retrouvées.

Dans une deuxième phase, le modèle non-linéaire d'amortissement est utilisé pour simuler le comportement dynamique de l'assemblage à l'aide du code aux éléments finis CEA, Castem2000. Les prédictions de réponses obtenues pour d'autres altitudes que celle du lâcher sont très encourageantes mais notre approche reste à valider pour le cas d'une excitation sismique et entretenue.

Abstract

The knowledge of PWR (Pressure Water Reactor) fuel assembly first mode damping is an important parameter as far as nuclear safety is concerned. Indeed, this characteristic is used as an input data for codes dedicated to predictions of the fuel behaviour under seismic excitation. Classic experimental methods used for the damping coefficient evaluation assume that the fuel assembly dynamical behaviour is linear. It has been shown elsewhere, and we confirm it in our analysis that this structure has a non-linear behaviour. Supposing this non-linear behaviour, we propose a methodology for the damping and frequency identification for the fuel assembly first mode. In this study an important test database consisting of fuel assembly responses to bending/release experiments in air or still water for different initial amplitude is used. Damping and stiffness non-linear models with parameters are selected *a priori*. They depend on fuel assembly instantaneous displacement and, after parameters optimization on experimental measurements, provide us for damping and frequency formulas, adapted to the structure non-linear behaviour. The obtained results allow for a continuous evolution of damping and frequency. The observed experimental tendencies are confirmed.

As a second step, the non-linear damping model is used to simulate fuel dynamic behaviour with FEM CEA code : Castem2000. The predicted responses obtained for other levels than the bending/release point are very encouraging but our approach needs to be validated for the case of a forced motion and seismic excitation.