HAL
open science

Propriétés de récurrence des systèmes dynamiques équicontinus

Tarek Rejeiba

To cite this version:

Tarek Rejeiba. Propriétés de récurrence des systèmes dynamiques équicontinus. Systèmes dynamiques [math.DS]. Université de Toulon; Université de Sfax (Tunisie), 2020. Français. NNT : 2020TOUL0019 . tel-03330367

HAL Id: tel-03330367

https://theses.hal.science/tel-03330367v1

Submitted on 31 Aug 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

ECOLES DOCTORALES:

MER ET SCIENCES (Toulon)

Présenté par

Tarek REJEIBA

Pour obtenir le grade de

Docteur en Mathématiques

Propriétés de récurrence et systèmes dynamiques équicontinus

Soutenue le 17 Décembre 2020 devant le jury composé de :

M. Troubetzkoy Serge	*Université d'Aix Marseille France*	*Président*
M. Ben Mabrouk Anouar	*Université de Tabuk Saudi Arabia*	*Rapporteur*
M. Aloulou Walid	*Université de Kairouan Tunisie*	*Rapporteur*
M. Boudabbous Imed	*Université de Sfax Tunisie*	*Examinateur*
M. Leoncini Xavier	*Université d'Aix Marseille France*	*Examinateur*
M. Merlet Glenn	*Université d'Aix Marseille France*	*Examinateur*
M. Hattab Hawete	*Université de Sfax Tunisie*	*Directeur*
M. VAIENTI Sandro	*Université de Toulon France*	*Directeur*

Remerciements

Ce travail faisant l'objet de la présente thèse de doctorat s'inscrit dans le cadre d'une thèse en co-tutelle entre le laboratoire de recherche SDC (Laboratoire de Système Dynamique et Combinatoire) de la FSS (Faculté des Sciences de Sfax) et le Laboratoire CPT (Centre de Physique Théorique) de l'Université de Toulon et du CNRS (Centre National de Recherche Scientifique) de la France.

C'est un grand plaisir pour moi de remercier toutes les personnes qui ont permis à cette thèse de voir le jour.

D'abord, je tiens à exprimer mes remerciements les plus sincères à Monsieur **Sandro VAIENTI** mon Directeur de thèse, Professeur à l'Université de Toulon France, et à mon Directeur de thèse Monsieur **Hawete Hattab**, Professeur à l'université de Sfax Tunisie, pour la confiance qu'ils m'ont accordé en acceptant d'encadrer et diriger mes travaux, pour leurs conseils precieux, pour leurs aides et surtout pour le travail effectué durant mes années de thèse. Qu'ils trouvent ici un témoignage de ma profonde reconnaissance.

Je remercie particulieurement Monsieur **Serge Troubetzkoy**, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury.

Je voudrais également remercier Monsieur **Walid Aloulou**, Professeur à

l'Université de Kairouan Tunisie, et Monsieur **Anouar Ben Mabrouk** , Professeur à l'Université de Tabuk Arabi Saudi, d'avoir accepter la lourde tâche de rapporteur et d'avoir consacré un temps précieux à l'examen de ce rapport. Pour la même occasion, j'adresse mes remerciements à Monsieur **Imed Boudabbous**, Professeur à l'Université de Sfax Tunisie, à Monsieur **Xavier Leoncini**, Professeur à l'Université d'Aix Marseille, et Monsieur **Glenn Merlet**, Professeur à l'Université d'Aix Marseille d'avoir accepté d'examiner et juger cette thèse.

Pour les multiples discussions à caractère mathématique que j'ai pu tenir avec eux, je remercie **Sandro VAIENTI et Hattab Hawete**.

Mes remerciments vont aussi aux membres de l'équipe de recherche CPT ainsi qu'à tout le personnel administratif de CPT et de l'Université de Toulon pour leur aide ainsi que leurs disponibilité.

Finalement, j'exprimer toute ma gratitude à tous mes professeurs des Facultés des Sciences de (Gabés, Tunis, Sfax) ainsi mes enseignants au Lycée Secondaire de Ghannuch et mes Maîtres et Maîtraisse de l'école Ghannuch Ouest pour la formation qu'ils ont eu le soin de m'apporter tout au long de mes études universitaires, secondaires et primaires.

Pour finir, merci à toutes les personnes que j'ai malencontreusement oubliées de remercier.

Dédicace

Avec l'expression de ma reconnaissance, je dedie ce modeste travail à ceux qui, quels que soient les termes embrassés, je n'arriverais jamais à leur exprimer mon amour sincère.

A l'homme, à qui je dois ma vie, ma réussite, ce précieux cadeau de Dieu, mon cher père **Farah** .

A la femme qui a souffert sans me laisser souffrir, qui n'a jamais dit non à mes exigences et qui n'a èpargné aucun effort pour me rendre heureux, mon adorable mère **Hafsia**.

A mes chers frères **Bechir, Mabrouk, Mohsen et Ali** pour leur soutient moral et leurs encouragements.

A mes adorables soeurs **Fawzia, Wafa et Fatma** qui n'ont pas cessé, de me conseiller, encourager et soutenir.

Que dieu les protège et leur offre la chance et le bonheur.

Sans oublier tous mes amis.
Tarek.

Résumé

Propriétés de récurrence et systèmes dynamiques équicontinus

Résumé

Récemment, une attention particulière a été accordée à l'étude des systèmes dynamiques défini sur des espaces unidimensionnels, par exemple les arcs, les cercles, les graphes, les dendrites et les dendrites locales [26, 35, 37, 1, 44, 19]. L'intérêt d'étudier la dynamique des fonctions définies sur ces espaces est dû à: Premièrement, les dendrites sont des exemples de l'ensemble de Julia dans la dynamique complexe [12]. Deuxièmement, les dendrites (locales) sont des Péaniens continus (espace compact, connexe, localement connexe) dans la théorie du continus [35]. L'objectif de cette thèse est de trouver une caractérisation du système dynamique équicontinu défini sur un espace métrique compact. Comme application de ce résultat, on a démontré des conditions nécessaires et suffisantes à l'équicontinuité pour un système dynamique défini sur une dendrite locale particulière et donc c'est une généralisation du théorème 2.8 [19].

Mots-clefs

Systémes dynamiques topologique, dendrite, dendrite locale, ensemble ω-limite, récurrence, périodicité, équicontinuité.

Recurrence properties and equicontinuous dynamical system

Abstract

Recently, special attention has been given to the study of dynamical systems defined on one-dimensional spaces, for example arcs, circles, graphs, dendrites and local dendrites [26, 35, 37, 1, 44, 19]. The interest of studying the dynamics of functions defined on these spaces is due: Firstly, dendrites are examples of Julia sets in complex dynamics [12]. Second, (local) dendrites are continuous Peanians (connected, locally connected compact space) in continuum theory [35]. The objectif of this thesis is to find a characterization of dynamical equicontinuous systems defined on a compact metric space. As an application of this result we have proved necessary and sufficient conditions on equicontinuity for a dynamic system defined on a particular local dendrite and therefore it is a generalization of the theorem 2.8 [19].

Keywords

Topological dynamical systems, dendrite, local dendrite, ω -limite set, recurrence, periodicity , equicontinuity .

Table des matières

Introduction et Résultats principaux **1**

0.1 Introduction 2

0.2 Résultats Principaux 6

1 REVUE SUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES TOPOLOGIQUES **9**

1.1 Définitions et notations 10

1.2 Minimalité et Transitivité 12

1.3 Différents Types de Récurrence 21

2 ÉQUICONTINUITÉ SUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES TOPOLOGIQUES **29**

2.1 Équicontinuité sur les systèmes dynamiques topologiques 30

2.2 Équicontinuité sur un système dynamique topologique inversible . 40

3 ÉQUICONTINUITÉ SUR UN GRAPHE **45**

3.1 Propriétés topologiques et dynamiques d'un système dynamique topologique défini sur un graphe 46

3.2 Équicontinuité et structure topologique pour l'ensemble $\Omega(x, f)$. 52

4 ÉQUICONTINUITÉ SUR UNE DENDRITE **59**

4.1 Propiétés d'un système dynamique topologique sur une dendrite . 60

4.2 Équicontinuité et structure topologique de l'ensemble $\Omega(x, f)$ . . . 66

5 ÉQUICONTINUITÉ SUR UNE DENDRITE LOCALE **73**

5.1 Propriétés d'un système dynamique topologique sur une dendrite locale 74

5.2 Équicontinuité et structure topologique de l'ensemble $\Omega(x, f)$ . . . 82

Table des figures

3.1 Graphe 46
3.2 Arbre 47

4.1 Dendrite 60
4.2 Dendrite universelle de Wazewski 61
4.3 Dendrite de Gehman G3 62

5.1 Dendrite Locale 75
5.2 Sous-Dendrite Locale 77

Introduction et Résultats principaux

Sommaire

0.1 Introduction **2**

0.2 Résultats Principaux **6**

0.1 Introduction

Soit (X, d) un espace métrique compact et soit $f : X \to X$ une fonction continue. Une notion fondamentale dans la dynamique topologique est l'équicontinuité, i.e. la famille des itérés de f, $\{f^n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue. De point de vue topologique, si on fixe $x \in X$ les trajectoirs des points qui sont très proches de x restent proches de la trajectoire de x.

Une question intéressante dans la dynamique topologique est la caractérisation des systèmes dynamiques équicontinus. Akin et al [4] ont démontré que l'équicontinuté d'un système dynamique est équivalente à la continuité de la fonction orbite $Orb_f : X \to C(\mathbb{N}, X)$. Blanchard et al [12] ont caractérisé l'équicontinuité suivant une condition topologique (c'est la complexité topologique) et ont démontré que tout recouvrement des ouverts de X par f admet une complexité bornée. Récemment, Mai [30] a établi sous deux conditions, l'une dynamique et l'autre topologique, une équivalence de l'équicontinuté de (X, f).

Nous élaborons cette question et nous achevons à une autre équivalence de l'équicontinuté. Pour présenter ce rèsultat, nous introduisons les concepts crucials suivants :

1. $\omega_f(x) := \omega(f, x)$ l'ensemble de points $y \in X$ tel qu'il existe une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant $\lim_{k\to+\infty} f^{n_k}(x) = y$.

2. $\Omega(x, f)$ l'ensemble de points $y \in X$ tel qu'il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x et une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{N}$, satisfaisant $\lim_{k\to+\infty} f^{n_k}(x_k) = y$

Sous une condition dynamique, nous démontrons que le système (X, f) est équicontinu si et seulement si $\omega(x, f^n) = \Omega(x, f^n)$ pour tout $x \in X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La problématique de l'équicontinuité est abondamment étudié dans la dynamique unidimensionelle, c'est-à-dire l'espace X est de dimension un. Nous commençons par le premier exemple, c'est l'intervalle $[0, 1]$, Cano [20] a montré que, si $([0, 1], f)$ est équicontinu alors l'ensemble de points fixes $Fix(f)$ est connexe,

de plus, si $Fix(f)$ est non dégnéré, alors (X, f) n'admet d'orbites finies que les points fixes.

D'après [28] et [20], le système $([0,1], f)$ est équicontinu si et seulement si $\bigcap_{n=1}^{+\infty} f^n([0,1]) = Fix(f^2)$, ce résulat est redémontré par Blokh dans [14]. Les auteurs dans [17] ont presenté une équivalence entre équicontinuité de $([0,1], f)$ et la contuité de la fonction $\omega_f : X \to 2^{[0,1]},\ x \mapsto \omega_f(x)$.

Le deuxième exemple d'un espace de dimension un c'est le cercle. Valaristos [48] a decri l'équicontinuité sur le système (S^1, f) et a prouvé que cette condition est équivalente à l'une des asserstions suivantes :

1. f est topologiquement conjugée à une rotation ;
2. $Fix(f)$ contient exactement deux points et $Fix(f^2) = S^1$;
3. $Fix(f)$ contient exactement un point et $Fix(f^2) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} f^n(S^1)$;
4. $Fix(f) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} f^n(S^1)$.

Lorsqu'on travaille dans la dynamique topologique unidimensionelle, il est naturel d'éssayer d'etendre les résultats de l'intervalle et du cercle à d'autres espaces plus généraux. Cette extension est partagée en deux classes, l'une contient un nombre fini d'intervalles (arcs) et l'autre admet une infinité d'arcs.

Un exemple de la première classe est les graphes. Un graphe est un continuum qui s'écrit comme étant une réunion finie des arcs et des cercles. L'intérêt d'étudier les propriétés dynamiques d'un système défini sur un graphe est dû, premièrement, à la fonction quotient des variétés particulières qui est definie sur un graphe. Deuxièmement, la dynamique d'un homéomorphisme pseudo-Anasov peut être réduite à un système defini sur un graphe (voir [46, 30]).

Un exemple de la deuxième classe est la dendrite ; c'est un continuum, localement connexe qui ne contient pas de cercles. Il y a une abondonte liérature concernant les systèmes dynamiques definis sur les dendrites (voir [30, 19, 45]). L'intérêt d'étudier les fonctions continues definies sur les dendrites est dû à : d'une part, une dendrites est un Peano continuum avec une structure topologique complexe (théorie de continuum). D'autre part, une dendrite est un exemple de l'ensemble de Julia (dans la dynamique complexe).

Une classe plus générale que les gaphes et les dendrites est les dendrites locales. Pendant les dernières dizaine années, plusieurs chercheurs (Acosta, Alseda, Balibrea, Block, Mai, Naghmouchi, Oprocha, Kocan, Sun, Spitalsky, Shi, Hawete,...) se sont intéressés á l'étude des propriétés dynamiques et topologiques du système (X, f) où X est une dendrite locale. La deuxième parite de cette thèse est consacrée à l'étude de l'équicontinuité sur les dendrites locales, notamment, nous étendrons les résultats trouvés dans les cas graphes et dendrites.

On détaille maintenant les différents chapitres de ce manuscrit.

Dans le chapitre 1, nous introduisons la notion de système dynamique topologique, ainsi, nous rappelons quelques propriétés topologiques tels que minimalité, transitivité, ensemble ω-limite , puis nous rappelons les différents modes de récurrence et les relations entre eux.

Le chapitre2 contient deux parties, la première partie est consacré à l'équicontinuité sur les systèmes dynamiques topologiques. Dans la première sous partie, nous rappelons quelques définitions et propriétés concernant l'équicontinuité sur un espace métrique quelconque, puis dans une seconde sous partie nous donnons quelques définitions et rappelons quelques résultats caractérisant l'équicontinuité sur un système dynamique topologique à fin de montrer un résultat très important pour le reste de notre étude donné comme suit :

Soit (X, f) un système dynamique topologique. Considérons les assertions suivantes :

1. (X, f) est équicontinu ;

2. $\Omega(x, f^n) = \omega_{f^n}(x)$ pour tout $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}$.

Alors (1) implique (2) et, si $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X) = P(f)$, alors (2) implique (1).
Puis nous donnons deux exemples qui montrent que la condition $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X) = P(f)$ est essentielle pour l'équicontinuité.

Dans la deuxième partie de ce chapitre nous rappelons quelques résultats

concernant l'équicontinuité pour un système dynamique topologique inversible, sur un espace métrique compact puis sur une variété.

Le chapitre 3 contient deux parties. La première partie est consacrée à l'étude des proriétés topologiques et dynamiques pour un système dynamique topologique défini sur un intervalle, cercle, et sur un graphe. Puis, dans la deuxième partie, nous rappelons tout d'abord quelques résultats sur l'équicontinuité des systèmes dynamiques topologiques défini sur un intervalle, cercle, et graphe. Dans la suite de cette partie, nous déterminons une structure topologique pour l'ensemble $\Omega(x, f)$ en nous basant sur des résultats d'équicontinuité et sur des propriétés topologiques de l'ensemble ω-limite.

Le chapitre 4 contient deux parties. La première est consacrée à l'étude des proriétés topologiques et dynamiques pour un système dynamique topologique défini sur une dendrite. Puis dans la deuxième partie nous rappelons tout d'abord quelques résultats sur l'équicontinuité des systèmes dynamiques topologiques défini sur une dendrite. Dans la suite de cette partie, nous déterminons une structure topologique pour l'ensemble $\Omega(x, f)$ en nous basant sur des résultats d'équicontinuité et sur des propriétés topologiques de l'ensemble ω-limite.

Le chapitre 5 est consacré à l'étude de l'équicontinuité pour un système dynamique topologique défini sur une dendrite locale. Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la première partie, nous rappelons quelques définitions et propriétés topologiques puis dynamiques d'un système dynamique topologique défini sur une dendrite locale. La deuxième partie est consacré à l'étude de l'équicontinuité et stucture topologique de l'ensemble $\Omega(x, f)$. Nous commonçons tout d'abord par l'étude de l'équicontinuité pour un système dynamique topologique défini sur une dendrite locale dont nous montrons nos résultats principaux, la Proposition 5.1.6.6 et le Théorème 5.2.2.1.

Dans la Proposition 5.1.6.6, nous montrons que, pour un système dynamique topologique (L, f) défini sur une dendrite locale L, si $R(f) = L$ alors (L, f) est

équicontinu.

Puis nous montrons le Théorème 5.2.2.1 qui est une généralisation des résultats connus sur les graphes [46, 30] et sur les dendrites [19]. Nous montrons :

Pour un système dynamique topologique $((L, f)$ défini sur une dendrite locale L, avec un nombre dénombrable de points d'extrémités. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. (L, f) est équicontinu ;
2. $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(L) = R(f)$;
3. $f|\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(L)$ est équicontinu et surjectif ;
4. $f|\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(L)$ est un homéomorphisme périodique par point ou elle est topologiquement conjuguée à une rotation irrationnelle de S^1 ;
5. $\omega_f(x) = \Omega(x, f)$ pour tout $x \in L$.

.

Dans la suite de cette partie, nous déterminons une structure topologique pour l'ensemble $\Omega(x, f)$ en nous basant sur des résultats d'équicontinuité et sur des propriétés topologiques de l'ensemble ω-limite.

0.2 Résultats Principaux

Dans cette thèse, nous étudierons les propriétés de récurrence et les systèmes dynamiques topologiques équicontinus. Notre objectif est de trouver de nouvelles conditions et de décrire les systèmes équicontinus. Nos principaux résultats sont les suivants.

Théorème 0.2.0.1. *Soit (X, f) un système dynamique topologique. Considérons les assertions suivantes.*

1. *(X, f) est équicontinu.*

2. *$\Omega(x, f^n) = \omega_{f^n}(x)$ pour tout $x \in X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Alors (1) *implique* (2) *et, si* $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X) = P(f)$, *alors,* (2) *implique* (1).

Proposition 0.2.0.1. *Soit (L, f) un système dynamique topologique défini sur une dendrite locale L. Si $R(f) = L$, alors, (L, f) est équicontinu.*

Théorème 0.2.0.2. *Soit (L, f) un système dynamique topologique défini sur une dendrite locale L. Si $E(L)$ est dénombrable, alors, nous avons les équivalences suivantes.*

1. *(L, f) est équicontinu.*
2. *$\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(L) = R(f)$.*
3. *$f_{|\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(L)}$ est équicontinu et surjective.*
4. *$f_{|\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(L)}$ est un homéomorphisme périodique point par point ou topologiquement conjuguée à une rotation irrationnelle de S^1.*
5. *$\omega_f(x) = \Omega(x, f)$ pour tout $x \in L$.*

Chapitre 1

REVUE SUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES TOPOLOGIQUES

Sommaire

1.1 Définitions et notations **10**

1.2 Minimalité et Transitivité **12**

1.2.1 Minimalité 12

1.2.2 Transitivité 14

1.2.3 Ensemble ω-limite 17

1.3 Différents Types de Récurrence **21**

1.3.1 Récursivité 21

1.3.2 Non-errance 25

DAns ce chapitre nous introduisons quelques notions et propriétés de base pour les systèmes dynamiques topologiques.

1.1 Définitions et notations

Définition 1.1.1. *(Système Topologique) Soient X un espace métrique compact et $f : X \to X$ une transformation continue. Le couple (X, f) est appelé système dynamique topologique. Dans le cas où f est un homéomorphisme, on parle de système dynamique topologique inversible.*

Exemple 1.1.2. *Soit $X = \{0\ 1\}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites binaires infinies ;*

$$\{0\ 1\}^{\mathbb{N}} = \{x = (x_1 x_2 x_3 ...); x_i \in \{0\ 1\}\}.$$

La distance entre deux suites x et y dans $\{0\ 1\}^{\mathbb{N}}$ est donnée par

$$d(x, y) = 2^{-n}; \quad avec \ \ n = \min\{i >= 0\}; \quad x_i \neq y_i.$$

par exemple $d(0011..., 1000...) = 2^{-0} = 1$ et $d(0110..., 01110...) = 2^{-3} = 1/8$.

$\{0\ 1\}^{\mathbb{N}}$ est homéomorphe à l'ensemble de Cantor (c'est un espace métrique compact totalement discontinu et sans points isolés). On définit sur X la fonction $(f(x))_i = x_{i+1}$. Il est facile de remarquer que f admet une fonction réciproque définie par $(f^{-1}(x))_i = x_{i-1}$. Les fonctions f et f^{-1} sont continues, donc f est un homéomorphisme et donc (X, f) est un système dynamique topologique inversible. (X, f) est dit le système shift ou bien directement f est shift. Dans la suite de ce chaptire, nous rapplons les propriétés fondamentales de ce système. .

On définit les itérés de f par $f^n = f \circ f^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$ et pour $n = 0,\ f^0 = id$.

Définition 1.1.3. *Soit (X, f) un système dynamique topologique et $x \in X$, l'orbite de x est donnée par :*

$$Orb_f(x) = \{f^n(x), n \in \mathbb{N}\}.$$

Si (X, f) est un système dynamique topologique inversible, alors

$$Orb_f(x) = \{f^n(x), n \in \mathbb{Z}\}.$$

Définition 1.1.4. *Soient (X, f) et (Y, g) deux systèmes dynamiques topologiques.*

1. *(X, f) est semi-conjugué à (Y, g) s'il existe une application continue $\psi : (X, f) \to (Y, g)$ telle que $\psi \circ f = g \circ \psi$.*
2. *Si ψ est bijective, alors (X, f) est dit conjugué à (Y, g).*
3. *Si ψ est surjective, on dit alors que (X, f) est une extension de (Y, g) ou bien (Y, g) est un facteur de (X, f).*
4. *Si ψ est injective, on dit que (X, f) est un sous-système de (Y, g).*

Définition 1.1.5.

1. *Un point $x \in X$ est dit périodique de période $m \in \mathbb{N}$ si $f^m(x) = x$ et $f^i(x) \neq x$ pour $1 \leq i \leq m - 1$. On note par $P(f)$ l'ensemble de points périodiques de f.*
2. *Si $m = 1$, alors x est appelé point fixe de (X, f). On note par $Fix(f)$ l'ensemble de points fixes de f.*
3. *L'orbite d'un point périodique est dite orbite périodique.*

Exemple 1.1.6. *On Considère le système shift (X, f) dans Exemple 1.1.2. Un mot ou bien un block b dans $x \in X$ est une suite finie de la forme suivante : $b = x_r x_{r+1} x_{r+2} ... x_{r+n}$ pour certain $n \in \mathbb{N}$. Par définition de périodicité, on peut remarquer facilement que x est périodique dans (X, f) si et seulement s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $x_{i+p} = x_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. De plus l'ensemble $P(f)$ est dense dans X.*

Une caractérisation topologique d'une orbite périodique est donnée par le théorème suivant :

Proposition 1.1.6.1. *[22] Soit (X, f) un système dynamique topologique. Alors, $x \in X$ est périodique si et seulement si $Orb_f(x)$ est un compact.*

Démonstration il est facile de remarquer que, si x est périodique alors $Orb_f(x)$ est un compact, puisque $Orb_f(x)$ est finie. Réciproquement, comme $Orb_f(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f^n(x)\}$ est dénombrable, et $Orb_f(x)$ est un compact, donc c'est un espace

de Baire, et par suite $Orb_f(x)$ contient un point isolé. Alors on a tous les éléments de $Orb_f(x)$ sont isolés, par conséquent, $Orb_f(x)$ est finie, donc x est périodique.•

Définition 1.1.7. *Soient (X, f) un système dynamique topologique et $A \subset X$ un ensemble non vide.*

1. *A est dit f-invariant si et seulement si $f(A) \subset A$.*
2. *A est dit fortement f-invariant si et seulement si $f(A) = A$.*

Remarque 1.1.7.1. 1. *Une orbite est un ensemble invariant.*

2. *Si A est fortement f-invariant, alors A est la réunion de ces orbites .i.e $A = \bigcup_{x \in A} Orb_f(x)$.*

Lemme 1.1.8. *Soit (X, f) un système dynamique topologique et A une partie invariante de X. Alors $\overline{A}$ est un ensemble invariant.*

Démonstration Nous avons A est f-invariant, donc $f(A) \subset A$. Par conséquent $\overline{f(A)} \subset \overline{A}$. D'autre part, par continuité de f nous savons que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Donc $f(\overline{A}) \subset \overline{A}$. Ainsi, $\overline{A}$ est f-invariant.

Remarque 1.1.8.1. *Comme les orbites du système dynamique topologique (X, f) sont invariantes, alors X est construit par les adhérances de leur orbites.*

1.2 Minimalité et Transitivité

1.2.1 Minimalité

Définition 1.2.1. *Soit (X, f) un système dynamique topologique. Un sous-ensemble $M \subset X$ est appelé ensemble minimal de (X, f) s'il est fermé, non vide, f-invariant et ne contient pas un sous ensemble propre fermé, f-invariant de X.*

Remarque 1.2.1.1. 1. *Toute orbite finie est un ensemble minimal.*

2. *Deux ensembles minimaux sont soit disjoints, soit confondus.*

Exemple 1.2.2. *La rotation* $R_\alpha : S^1 \to S^1 : x \mapsto xe^{2i\pi\alpha}$.
Si α *est rationelle (i.e.* $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$*), alors toute orbite est périodique de période* q*. Si* α *est irrationnelle, alors toute orbite est dense. Donc le système* (S^1, R_α) *est minimal.*

X doit être compact pour la raison donnée par le théorème suivant.

Théorème 1.2.2.1. *[11] Soit* (X, f) *un système dynamique topologique. Alors il existe un ensemble minimal.*

Démonstration Soit $\mathcal{F} = \{F \subset X, F \text{ est non vide, } ferm \text{ et invariant}\}.(F, \supseteq)$ est partiellement ordonnée. Si $\{F_i\}$ est une famille totalement ordonnée de F, par compacité de X, nous avons $M = \cap_i F_i$ est non vide, fermé et invariant, donc $M \subset \mathcal{F}$, par lemme de Zorne $\mathcal{F}$ contient un élément minimal ce qui est à son tour un ensemble minimal de (X, f).

Remarque 1.2.2.1. *Comme l'adhérence d'une orbite forme un sous-système dynamique, alors il contient un ensemble minimal.*

Une caractérisation importante d'un ensemble minimal est la suivante :

Proposition 1.2.2.1. *[13] Soient* (X, f) *un système dynamique, topologique, et* M *un sous ensemble de* X*. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. M *est minimal,*
2. *Pour tout* $x \in M, \overline{Orb_f(x)} = M$

Corollaire 1.2.2.1. *Soit* (X, f) *un système dynamique topologique. Alors, tout ensemble minimal de* f *est fortement* f*-invariant.*

Un système dynamique topologique particulier est le système minimal .i.e X est un ensemble minimal. Une caractérisation d'un système minimal est la suivante :

Proposition 1.2.2.2. *Soit* (X, f) *un système dynamique topologique. Les assertions suivantes sont èquivalentes*

(i) (X, f) *est minimal,*

(ii) $\overline{Orb_f(x)} = X$, *pour tout* $x \in X$,

(iii) les seuls sous ensembles fermés invariants sont le $\emptyset$ *et* X,

(iv) pour tout ensemble ouvert non vide $U \subset X$, *on a* $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U) = X$,

(v) pour tout ensemble ouvert non vide $U \subset X$, *il existe un nombre fini d'entiers* $n_1, ..., n_k$ *tel que* $\bigcup_{j=1}^{k} f^{-n_j}(U) = X$.

Démonstration Par Théorème1.2.2.1, nous avons les équivalences suivantes $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$.
$(iii) \Rightarrow (iv)$. Supposons que $U \subseteq X$ est un ensemble ouvert non vide. Il en résulte que $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U)$ est aussi un ensemble ouvert non vide. Donc $F = X \backslash \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U)$ est un ensemble fermé. De plus, $f(F) \subset F$ est un ensemble fermé. Alors par hypothèse $F = \emptyset$, qui est équivalent à dire que $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U) = X$.
$(iv) \Rightarrow (v)$. Si U est un ensemble ouvert non vide avec $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U) = X$ alors par compacité de X, il existe $n_1, n_2, ..., n_k \in \mathbb{Z}_+$ tel que $\bigcup_{j=1}^{k} f^{-n_j}(U) = X$.
$(v) \Rightarrow (i)$. Supposons que X n'est pas minimal. Il existe un ensemble F fermé f-invariant de X. Soit $U = X \backslash F$. Alors, U est non vide et $\bigcup_{j=1}^{k} f^{-n_j}(U) \neq X$. Ce qui est absurde. •

1.2.2 Transitivité

Définition 1.2.3. *Soit* (X, f) *un système dynamique topologique.*

1. *On dit que* (X, f) *est topologiquement transitif, si, pour tout* U *et* V *deux ouverts non vides dans* X, *il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

2. *Un point* $x \in X$ *est dit transitif pour* f *si* $\overline{Orb_f(x)} = X$.

On note par $Tran(f)$ *: l'ensemble des points transitifs de* f.

Exemple 1.2.4. *Un système Shift* (X, f) *(Voir Exemple 1.1.2) est topologiquement transitif ([22]).*

Remarque 1.2.4.1. *1. Tout ouvert invariant non vide d'un système dynamique topologiquement transitif est dense.*

2. Si (X, f) admet un point transitif, alors f est surjectif.

3. Tout système dynamique topologique qui admet un point transitif est topologiquement transitif.

4. Tout système dynamique topologique minimal est topologiquement transitif.

Proposition 1.2.4.1. *[1] Soit (X, f) un système dynamique topologique. Alors, nous avons les équivalences suivantes*

(1) (X, f) est topologiquement transitif,

(2) pour tout ensemble ouvert non vide $W \subset X$, on a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^n(W)$ est dense dans X,

(3) pour toute paire d'ensembles ouverts non vides U et V dans X, il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^{-k}(U) \bigcap V \neq \emptyset$,

(4) Pour tout ensemble ouvert non vide W dans X, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(W)$ est dense dans X,

(5) Tout sous-ensemble fermé, invariant et propre de X est d'intérieur vide.

Démonstration

- "(1) $\Rightarrow$ (2)" Soient U, *et* V deux ouverts non vides de X. Comme (X, f) est topologiquement transitif, alors, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Donc $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^k(U)$ est dense dans X.

- "(2) $\Rightarrow$ (3)" Soit U un ouvert non vide de X tel que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^n(U)$ est dense dans X. Donc, pour tout ouvert V de X, il existe $k > 0$, tel que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Donc, il existe $x \in U$, tel que $f^k(x) \in V$ par suite $f^{-k}(V) \bigcap U \neq \emptyset$.

- "(3) $\Rightarrow$ (4)" même raisonnement que pour (1) $\Rightarrow$ (2).

- "(4) $\Rightarrow$ (5)" Supposons que pour tout U ouvert non vide de X nous avons, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^n(U)$ dense dans X. Soit D un ensemble non vide, fermé et f-invariant de X et supposons que $int(D) \neq \emptyset$. Alors, il existe un ouvert $V \subset D$ et $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $f^{-k}(X\backslash D) \cap V \neq \emptyset$, ce qui est contradictoire avec le faite que D est f-invariant. D'où $int(D) = \emptyset$.

- "(5) $\Rightarrow$ (1)" Supposons que tout sous-ensemble non-vide, fermé invariant de X est d'intérieur vide. Soient U et V deux ouverts non vides de X tel que pour tout $k \in \mathbb{N}, f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Alors $\overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^k(U)}$ est un sous-ensemble propre non vide, fermé invariant de X d'intérieur non vide, ce qui est absurde. •

Proposition 1.2.4.2. *[22] Soit (X, f) un système dynamique topologique. Alors nous avons les équivalences suivantes*

1. *(X, f) est topologiquement transitif,*
2. *$\{x \in X, \overline{Orb_f(x)} = X\}$ est G_δ-dense (i.e. l'intersection dénombrable de sous-ensemble ouverts denses dans X),*
3. *$\overline{Orb_f(x)} = X$ pour $x \in X$.*

Démonstration

1. (1) $\Rightarrow$ (2) Soit $\{V_1, V_2...\}$ une base dénombrable des ensembles ouverts non vides de X et soit $x \in X$ tel que $\overline{Orb_f(x)} = X$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ avec $f^k(x) \in V_n$, donc $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n$ où $W_n = \{f^{-k}(V_n), k \in \mathbb{Z}\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, W_n est un ouvert invariant nonvide. Donc, par hypothèse, W_n est un ensemble dense dans X. D'après le théorème de Baire, W_n est dense dans X.

2. (2) $\Rightarrow$ (3) découle de fait que tout ensemble dense est non vide.

3. (3) $\Rightarrow$ (1) Soit $x \in X$ tel que $\overline{Orb_f(x)} = X$, et soient U et V ouverts. Alors il existe $m, n \in \mathbb{N}$ avec $n > m$ tel que $f^m(x) \in U$ et $f^{n-m}(x) \in V$. D'où $U \cap f^{n-m}(V) \neq \emptyset$ •

Proposition 1.2.4.3. *Soient (X, f) et (Y, g) deux systèmes dynamiques topologiques. Si (Y, g) est un facteur de (X, f). Alors on a :*

1. *Si (X, f) est minimal alors (Y, g) est minimal.*
2. *Si (X, f) est topologiquement transitif, alors (Y, g) est topologiquement transitif.*

Démonstration

1. (Y, g) est un facteur de (X, f), donc, il existe une fonction continue surjective $\psi : X \to Y$ qui vérifie $\psi \circ f = g \circ \psi$. Soit A un ensemble propre, fermé, et invariant dans Y, alors, $\psi^{-1}(A)$ est fermé, invariant et propre dans X.
2. Soient U et V deux ouverts non vides de Y. Alors $\psi^{-1}(U)$ et $\psi^{-1}(V)$ sont deux ouverts non vide de X. Donc, il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que, $f^n(\psi^{-1}(U)) \cap \psi^{-1}(V) \neq \emptyset$.

1.2.3 Ensemble ω-limite

Une extension d'une orbite est donnée par l'ensemble $\omega_f(x)$. Elle est importante pour étudier les comportements asymptoriques d'une orbite.

Définition 1.2.5. *Soit (X, f) un système dynamique topologique. L'ensemble ω-limite d'un point $x \in X$ est :*

$$\begin{aligned} \omega_f(x) &= \{y \in X, \exists n_i \in \mathbb{N}, n_i \to \infty, \lim_{i\to\infty} d(f^{n_i}(x), y) = 0\} \\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{f^k(x) : k \geq n\}}. \end{aligned}$$

.

Exemple 1.2.6.

1. *L'ensemble ω-limite d'un point périodique est l'orbite de ce point.*
2. *Si $x \in X$ est un point transitif, alors $\omega_f(x) = X$.*

Nous avons les propriétés suivantes :

Proposition 1.2.6.1. *[13] Soit (X, f) un système dynamique topologique. Alors, l'ensemble $\omega_f(x)$ est non vide, fermé et fortement f-invariant pour tout $x \in X$.*

Démonstration D'après la compacité de X, $\omega_f(x)$ est un fermé non vide. Reste à montrer que $\omega_f(x)$ est fortement f-invariant. En effet, d'une part, par continuité de f, on a

$$f(\omega_f(x)) = f(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{f^k(x); k \geq n\}}) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{f^{k+1}(x); k \geq n\}} \subset \omega_f(x)$$

par suite $f(\omega_f(x)) \subset \omega_f(x)$. D'autre part, soit $y \in \omega_f(x)$; donc, il existe $n_k \to \infty$ telle que $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) = y$. Or X est compact ; donc, la suite $(f^{n_k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite $(f^{n_{k_j}-1})_{j\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un point $z \in \omega_f(x)$. Par continuité de $f, y = f(z)$ et donc $\omega_f(x) \subset f(\omega_f(x))$. •

Remarque 1.2.6.1.

1. *$\omega_f(x) \subset \overline{Orb_f(x)}$.*
2. *Si $y \in \omega_f(x)$, alors $\omega_f(y) \subset \omega_f(x)$.*
3. *D'après la définition de $\omega_f(x)$, nous avons $\omega_{f^n}(x) \subset \omega_f(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc si $\omega_f(x)$ est fini, alors $\omega_{f^n}(x)$ est fini.*

Proposition 1.2.6.2. *[13] Soient (X, f) un système dynamique topologique et $M \subset X$. Alors on a les équivalences suivantes :*

1. *M est un ensemble minimal ;*
2. *$M = \omega_f(x)$ pour tout $x \in M$.*

Démonstration "$\Rightarrow$" Si M est un ensemble minimal et $x \in M$, alors $\omega_f(x)$ est un sous-ensemble non vide, fermé et invariant, d'où $\omega_f(x) = M$.
"$\Leftarrow$" Si $M = \omega_f(x)$ pour tout $x \in M$, d'où, par minimalité, M est fermé et invariant. De plus, si N est un sous-ensemble invariant fermé de M et $y \in N$, alors $M = \omega_f(y) \in N$, donc $N = M$, d'où M est un ensemble minimal. •

Proposition 1.2.6.3. *Soit (X, f) un système dynamique topologique, et soit $p \in \mathbb{N}$. Alors on a :*

(a) $\omega_f(x) = \bigcup_{i=0}^{p-1} \omega_{f^p}(f^i(x))$;

(b) $f^i(\omega_{f^p}(x)) = \omega_{f^p}(f^i(x)), \forall i \in \mathbb{N}$;

(c) $\omega_f(x) = \omega_f(f^p(x))$.

Démonstration (a) On a pour tout $i \in \mathbb{N}; \omega_{f^p}(f^i x) \subset \omega_f(x)$. Inversement, soit $y \in \omega_f(x)$, donc il existe une sous suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $n_k \to \infty$ telle que $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) = y$. Soient $(m_k, r_k) \in \mathbb{N} \times \{0, 1, ..., p-1\}$ avec $n_k = pm_k + r_k$. Donc il existe un nombre infini de k tel que $r_k = r$ pour $0 \leq r < p$ et $\lim_{k\to\infty} m_k = +\infty$.

(b) Soit $y \in f^i(\omega_{f^p}(x))$, il existe une sous suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tels que

$$y = f^i(\lim_{k\to\infty} f^{pn_k}(x)) = \lim_{k\to\infty} f^{pn_k}(f^i x).$$

Inversement, si $z \in \omega_{f^p}(f^i(x))$, donc par continuité de f on a $z \in f^i(\omega_{f^p}(x))$. •

Proposition 1.2.6.4. *[13] Soient (X, f) un système dynamique topologique et $K = \omega_f(x)$. Alors, pour tout sous ensemble fermé propre non vide L de K nous avons :*

$$L \bigcap \overline{f(K \backslash L)} \neq \emptyset$$

Démonstration Supposons que pour certains sous-ensembles fermés non propres L de K nous avons $L \cap \overline{f(K\backslash L)} \neq \emptyset$. Puisque X est un compact, il existe deux sous-ensembles ouverts non vides U et V de X tels que $L \subset U$ et $\overline{f(K\backslash L)} \subset V$ avec $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Donc $K \subset f^{-1}(V) = W$ et W est ouvert. Comme $K = K\backslash L \cup L \subset W \cup U$,il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^n(x) \in W \cup U$ pour tout $n \geq p$. De plus, $f^n(x) \in W$ pour une infinité de $n \geq p$ et $f^m(x) \in U$ pour une infinité de $m \geq p$. Donc, il existe $n \geq p$ tel que $f^n(x) \in W$ et $f^{n+1}(x) \in U$. Il résulte que $f^{n+1}(x) \in U \cap f(W)$. Par contunuité de f, on a $f(y) \in \overline{U}$, alors $f(\overline{W}) \cap \overline{U} \neq \emptyset$, ce qui est contradictoire au faite que $U \cap V = \emptyset$. •

Lemme 1.2.7. *[36] Soient (X, f) un système dynamique topologique et $x \in X$. Si $\omega_{f^m}(x)$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, alors, c'est une orbite périodique.*

Lemme 1.2.8. *[36] Soient (X, f) un système dynamique topologique et $x \in X$. Si $\omega_{f^m}(x)$ est fini pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, alors, $\omega_f(x)$ est fini.*

Proposition 1.2.8.1. *Soit (X, f) un système dynamique topologique. Alors, on a les équivalences suivantes :*

1. *$\omega_f(x)$ est fini ;*

2. *$\omega_f(x)$ est réduit à une orbite périodique.*

Démonstration Immédiatement, si $\omega_f(x)$ est réduit à une orbite finie, alors il est fini. Réciproquement, supposons que $\omega_f(x)$ est fini. Notons $K = \omega_f(x)$ et soit $y \in K$. Donc $\{f^n(y); n \in \mathbb{Z}_+\} \subset K$. Il existe donc deux entiers $n \in \mathbb{Z}_+$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $f^n(y) = f^{n+m}(y)$, par conséquent $z = f^n(y)$ est un point périodique. Supposons que $Orb_f(z) \subsetneq K$. Alors $L = K \backslash Orb_f(z)$ est un sous ensemble non vide fermé de K. D'après Proposition 1.2.6.4, nous avons $L \cap \overline{f(K \backslash L)} = (K \backslash Orb_f(z)) \cap Orb_f(z) \neq \emptyset$, ce qui est absurde. •

Nous notons par :

- $\Lambda(f)$ la réunion de tous les $\omega_f(x)$.

- $X_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(X)$.

Proposition 1.2.8.2. *Soit (X, f) un système dynamique topologique, si f est non surjective. Alors $f(X_\infty) = X_\infty$ et $\Lambda(f) \subset X_\infty$.*

Démonstration Le fait que $(X_n = f^n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de sous-ensembles non vides et compacts de X, il en résulte que $f(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f(X_n) = X_\infty$.
Maintenant, soit $x \in \Lambda(f)$, alors $x \in \omega_f(y)$ pour $y \in X$, puisque $f^n(\omega_f(y)) = \omega_f(y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\Lambda(f) \subset X_\infty$. •

Proposition 1.2.8.3. *Soit (X, f) un système dynamique topologique. Alors, nous avons l'équivalence suivant*

(i) (X, f) est topologiquement transitif,

(ii) Il existe un point $x \in X$, tel que $\omega_f(x) = X$.

Démonstration $(i) \Rightarrow (ii)$ Soit U un ouvert non vide de X et soit $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base dénombrable de sous ensembles ouverts non vides de X ; alors, par la transitivité de f, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(U_i)$ est dense dans X pour tout $i \in \mathbb{N}$; donc, $E := \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(U_i)$ est dense dans X. Prenons $x \in E$ et montrons que $\omega_f(x) = E$. Soit U un ouvert non vide de X. Alors, par continuité de f on aura $f^{-1}(U)$ est un ouvert non vide, et donc, par induction, pour tout $k \in \mathbb{N}, f^{-k}(U)$ l'est aussi. Comme $x \in E$, alors $\overline{Orb_f(x)} = X$. Donc, il existe $n_k \geq 0$ tel que $f^{n_k}(x) \in f^{-k}(U)$ par suite, $f^{n_k+k}(x) \in U$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme $\{n_k+k, k \in \mathbb{N}\}$ est infini, donc $\omega_f(x) = X$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Soit $x \in X$ tel que $\omega_f(x) = X$ et soient U et V deux sous ensembles ouverts non vides de X. Alors, il existe $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $f^m(x) \in U$ et $f^{m+n}(x) \in U$, donc $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. •

1.3 Différents Types de Récurrence

Par définition d'un point périodique, l'orbite revient à l'état initial d'une façon infinie, dans le cas où l'orbite revient très proche de l'état initial, on a les notions de récursivité suivantes

1.3.1 Récursivité

Définition 1.3.1. *Un point $x \in X$ est dit :*

- *quasipériodique, si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que $d(f^{kp}(x), x) < \epsilon$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.*
- *presque périodique, si, pour tout voisinage U de x il existe, $N \in \mathbb{N}$, tel que : $\{f^{n+i}(x), i = 0, 1, ...N\} \cap U \neq \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
- *récurrent, si $x \in \omega_f(x)$, et pour tout voisinage U de x, il existe $m \in \mathbb{N}$, tel que $f^m(x) \in U$.*

Remarque 1.3.1.1. *1. Si $x \in X$ est un point périodique, alors la période de retour est la même pour tous les voisinages.*

2. *Si $x \in X$ est un point quasipériodique, alors pour tout voisinage U de x, les points de retour à U sont exactement à la p-ième étape.*

3. *Si $x \in X$ est presque périodique, alors, pour tout voisinage U de x il existe une période p telle que la différence entre deux temps de retour consécutifs de x dans U est inférieure à p.*

4. *Si $x \in X$ est un point récurrent, alors, l'orbite de x révient à tous les voisinages de x, mais nous n'avons pas d'informations sur l'écart entre les temps de retours.*

Notations

Dans toute la suite nous admettons les notations suivantes :

- $R(f)$: L'ensemble des points récurrents.
- $QP(f)$: L'ensemble des points quasipériodiques.
- $AP(f)$: L'ensemble des points presque périodiques.

Remarque 1.3.1.2. 1. *Nous avons toujours les inclusions suivantes :*

$$Fix(f) \subset P(f) \subset QP(f) \subset AP(f) \subset \Lambda(f) \subset R(f).$$

2. *Les éléments d'une orbite d'un point presque périodiques (resp quasipériodique, récurrent) sont presque périodique (resp quasipériodique, récurrent).*

3. $Fix(f), P(f), R(f), AP(f), QP(f)$ *sont f-invariants.*

4. $Tran(f) \subset R(f)$.

Exemple 1.3.2. 1. *Soit (X, f) un système dynamique topologique transitif non minimal. Il existe donc un point récurrent qui n'est pas presque périodique car si non (X, f) devient minimal.*

2. *Soit (S^1, R_α) le système dynamique topologique défini par la rotation irrationnelle sur le cercle unité, alors, d'après Exemple 1.2.2, toutes les orbites sont denses, et par conséquent, tous les points sont presque périodiques mais non périodiques.*

Proposition 1.3.2.1. *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, nous avons les assertions suivantes*

(1) $AP(f^m) = AP(f)$.

(2) $R(f^m) = R(f)$.

(3) $Tran(f^m) = Tran(f)$.

Démonstration Nous démonstrons seulement (1) et de la même façon on prouve les autres. Il est évident que $AP(f^m) \subset AP(f)$. Pour montrer l'autre sens, soit $x \in AP(f)$, alors par Théorème 1.3.2.1 $M = \overline{Orb_f(x)}$ est un ensemble minimal pour f, puisque M est un ensemble fermé, f^m-invariant, elle contient donc un ensemble minimal L pour f^m. Soit $y \in L$. Nous avons donc

$$Orb_f(y) \subset L \cup f(L) \cup f^2(L) \cup ... \cup f^{m-1}(L) \subset M.$$

Maintenant le faite que $M = \overline{Orb_f(y)}$, entraine que

$$M = L \cup f(L) \cup f^2(L) \cup ... \cup f^{m-1}(L) \subset M.$$

Par Proposition 1.2.2.2, et Théorème 1.2.2.1, nous avons $f^k(L)$ est un ensemble minimal pour f^m car $f^k(L) = f^k(\omega_{f^m}(z)) = \omega_{f^m}(f^k(z))$ pour tout $z \in L$. Comme $x \in f^k(L)$ pour tout $0 \leq k \leq m-1$, alors $\overline{Orb_f(x)}$ est minimal pour f^m et donc par Théorème 1.3.2.1, nous avons $x \in AP(f^m)$. •

Le résultat suivant montre que la minimalité et la presque périodicité sont intimement leés.

Théorème 1.3.2.1. *[11] Soit (X, f) un système dynamique topologique et $x \in X$. Alors, on a l'équivalence suivat*

1. *x est presque périodique,*

2. *$\overline{Orb_f(x)}$ est un ensemble minimal.*

Démonstration "$\Rightarrow$" Soient x un point presque périodique et $y \in \overline{Orb_f(x)}$. Supposons que $x \in X \backslash \overline{Orb_f(y)}$, soit V un voisinage de x dans X tel que $\overline{V} \cap \overline{Orb_f(y)} = \emptyset$. Comme $x \in AP(f)$, il existe $m_1, ..., m_k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, Orb_f(x) \subset \bigcup_{l=1}^{k} f^{-m_l}(V)$. D'autre part, nous avons $y \in \overline{Orb_f(x)}$, donc $y \in \bigcup_{l=1}^{k} f^{-m_l}(\overline{V})$ pour certains $l \in \{l, ..., k\}$, ce qui est contradictoire avec le fait que $\overline{V} \cap \overline{Orb_f(y)} = \emptyset$.

"$\Leftarrow$" Soient $M = \overline{Orb_f(x)}$ un ensemble minimal et V un voisinage ouvert de x dans X. Comme l'application $f_{|M} : M \to M$ est minimale, alors, d'après la Proposition 1.2.2.2, il existe un nombre fini d'entiers $m_1, ..., m_k$, tel que $\bigcup_{l=1}^{k} f^{-m_l}(V \cap M) = M$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $l_n \in \{1, ..., k\}$ tel que $f^n(x) \in f^{-m_{l_n}}(V)$. Si on note par $N = \max\{m_1, ..., m_k\}$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $i \in \{1, ..., N\}$ tel que $f^{n+i}(x) \in V$. Par suite, x est un point presque périodique. •

Corollaire 1.3.2.1. *Soit (X, f) un système dynamique topologique. Alors, il existe un point presque-périodique.*

Corollaire 1.3.2.2. *Soit (X, f) un système dynamique topologique. Alors on a l'équivalence suivant*

1. *Tous les points sont presque périodiques,*
2. *X est une réunion disjointe des ensembles minimaux.*

Théorème 1.3.2.2. *([13]) Soit (X, f) un système topologique. Alors nous avons l'équivalence suivant*

(1) M est un ensemble minimal,

(2) Il existe un point presque périodique $x \in M$ tel que $M = \omega_f(x)$.

Définition 1.3.3. *Soit (X, f) un système dynamique topologique. Nous disons que $f : X \to X$ est*

- *périodique point par point si $X = P(f)$.*

- *récurrente point par point si* $X = R(f)$.
- *presque périodique point par point si* $AP(f) = X$.

1.3.2 Non-errance

Le comportement du voisinage d'un point peut également donner un aperçu à la dynamique à long terme.

Définition 1.3.4. *Soit* (X, f) *un système dynamique topologique. Un point* $x \in X$ *est dit errant s'il existe un voisinage* U *de* x *tel que* $f^{-n}(U) \cap U = \emptyset$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Si non, le point est dit non-errant.i.e. pour tout voisinage* U *de* x, *il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ $f^{-n_0}(U) \cap U \neq \emptyset$. *L'ensemble de points non-errants de* f *est noté par* $\Omega(f)$.

Remarque 1.3.4.1. *(1) Tout point récurrent est non-errant.*

(2) Nous avons les inclusions suivantes :

$$Fix(f) \subset P(f) \subset QP(f) \subset AP(f) \subset R(f) \subset \Omega(f).$$

(3) $x \in \Omega(f)$ *si et seulement s'il existe une suite de points* $x_k \in X$ *et une suite d'entiers positifs* $n_1 < n_2 < ...$ *tels que* $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ *et* $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x_k) = x$.

Exemple 1.3.5. *Nous savons que le système shift* (X, f) *(voir Exemple 1.2.2.2) est non-errant (Les proriétés dynamiques d'un système shift sont traitées dans [22]).*

Proposition 1.3.5.1. *Soit* (X, f) *un système dynamique topologique. Alors* $\Omega(f)$ *est un ensemble fermé* f*-invariant.*

Démonstration Si $x \in X \backslash \Omega(f)$, il existe un voisinage U de x tel que $f^{-n}(U) \cap U = \emptyset$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $U \cap \Omega(f) = \emptyset$. Ainsi, $X \backslash \Omega(f)$ est un ouvert. Il découle immédiatement de la définition

Proposition 1.3.5.2. *Soit (X, f) un système dynamique topologique. Alors, on a l'équivalence suivant*

1. $\Omega(f) = X$,
2. $\overline{R(f)} = X$.

Démonstration "$\Leftarrow$" On a $R(f) \subset \Omega(f)$ par passage à l'adhérence on obtient, $\overline{R(f)} \subset \overline{\Omega(f)} = \Omega(f)$, car $\Omega(f)$ est un fermé. Donc $X = \overline{R(f)} \subset \Omega(f)$. D'autre part $\Omega(f) \subset X$. D'où $\Omega(f) = X$.
"$\Rightarrow$" On a $\overline{R(f)} \subset X$. Soit maintenant $x \in X$. Montrons que $x \in \mathbb{R}(f)$. $x \in X = \Omega(f)$; donc, il existe une suite $x_k \in X$ et une suite $n_1 < n_2 < ...$ tel que $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ et $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x_k) = x$. Tout d'abord on va montrer que $x_k \in R(f)$. On a $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x_k) = x$, donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N_1 > 0$ tel que, pour tout $k > N_1, d(f^{n_k}(x_k), x) < \frac{\epsilon}{2}$. D'autre part, on a $\lim_{k\to\infty} x_k = x$, donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N_2 > 0$, tel que, pour tout $k > N_2, d(x_k, x) < \frac{\epsilon}{2}$.

$$d(f^{n_k}(x_k), x_k) \leq d(f^{n_k}(x_k), x) + d(x_k, x) < \epsilon.$$

Donc pour $n_k > N$ où $N > \max(N_1, N_2)$ on a $d(f^{n_k}(x_k), x_k) < \epsilon$. D'où $x_k \in R(f)$. Reste à montrer que $x \in R(f)$. En effet

$$d(f^{n_k}(x), x) \leq d(f^{n_k}(x), f^{n_k}(x_k)) + d(f^{n_k}(x_k), x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Donc pour $n_k > N$ on a $d(f^{n_k}(x), x) < \epsilon$, alors $x \in R(f)$. Ainsi $\overline{R(f)} = X$. •

Définition 1.3.6. *On dit qu'un espace topologique X est* **un espace de Baire** *si toute intersection dénombrable denses dans X est une partie dense.*

Définition 1.3.7. *On dit q'une partie A d'un espace de Baire X est* **résiduel** *si A contient une intersection dénombrable d'ouverts denses.*

Théorème 1.3.7.1. *Soit (X, f) un système dynamique topologique. Alors, on a l'équivalence suivant*

1. $\Omega(f) = X$,

2. *$R(f)$ est un ensemble résiduel.*

Pour démontrer ce théorème, nous rappelons la définition suivante

Définition 1.3.8. *Une fonction $f : U \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est dite sémi-continue supérieurement en $a \in U$ si*

$$\forall\, k > f(a), \exists \text{ un voisinage } V(a) \text{ tel que } \forall\, x \in V(a) \cap U, k > f(x).$$

Démonstration (Démonstration du Théorème 1.3.7.1) Supposons que $R(f)$ est résiduel. Puisque X est compact et $R(f) \subset \Omega(f)$, alors $\overline{R(f)} = X$ et donc $\Omega(f) = X$.

Inversement, supposons que $\Omega(f) = X$. Définissons $g(x) = \inf_{n>0}\{d(x, f^n(x))\}$. Nous avons g est une fonction semi-continue supérieurement : En effet, soient $x_0 \in X$ et $\epsilon > 0$. Il existe $n > 1$ tel que $d(f^n(x_0), x_0) < g(x_0) + \epsilon$. Par continuité de l'application $x \mapsto d(f^n(x), x)$, il existe un voisinage U de x_0 tel que pour tout $x \in U, d(f^n(x), x) < g(x_0) + \epsilon$, alors $g(x) < g(x_0) + \epsilon$. Donc g est semi-continue supérieurement en x_0. Notons par $C(g)$ l'ensemble des points de continuité de g. Nous allons montrer que $C(g) \subset \{x \in X; g(x) = 0\}$; autrement dit, il existe $x_0 \in C(g)$ tel que $g(x_0) > 0$. Alors, il existe un voisinage U de x_0 et $\epsilon > 0$ tel que $g(x) > \epsilon$ pour tout $x \in U$. On peut supposer donc que $diam(U) < \epsilon$. Comme $x_0 \in \Omega(f)$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Donc il existe $x \in U$ tel que $f^n(x) \in U$. Alors $d(f^n(x), x) < diam(U) < \epsilon$ et donc $g(x) < \epsilon$ ce qui est absurde.

Maintenant comme $\{x \in X : g(x) = 0\} = R(f)$ et $C(g)$ est résiduel (voir [24]), nous pouvons conclure que $R(f)$ est résiduel. •

Chapitre 2

ÉQUICONTINUITÉ SUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES TOPOLOGIQUES

Sommaire

2.1 Équicontinuité sur les systèmes dynamiques topologiques 30

2.1.1 Équicontinuité sur un espace métrique quelconque . . . 30

2.1.2 Équicontinuité sur un système dynamique topologique . 33

2.2 Équicontinuité sur un système dynamique topologique inversible 40

2.2.1 Cas d'un espace métrique compact 40

2.2.2 Cas d'une variété 43

Dans ce chapitre nous introduisons quelques notions et propriétés de l'équicontinuité sur les systèmes dynamiques topologiques, puis sur les systèmes dynamiques topologiques inversibles.

2.1 Équicontinuité sur les systèmes dynamiques topologiques

2.1.1 Équicontinuité sur un espace métrique quelconque

Définition 2.1.1. *Soit (X,d) un espace métrique pas forcément compact. Une application $f : X \to X$ est équicontinue en $x \in X$ si et seulement si la famille des itérés $\{f^n; n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue en $x \in X$.i.e*

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0; \forall y \in X, d(x,y) < \delta, \Rightarrow d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon.$$

Si f est équicontinue en tout point $x \in X$, alors f est dite équicontinue sur X.

Exemple 2.1.2. *Si $f : X \to X$ est une isométrie (i.e. $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$), alors f est équicontinue.*

Définition 2.1.3.

1. *Une paire (x,y) de X est dite distale $x \neq y$ si et seulement si*
$$\inf_{n\in\mathbb{N}} d(f^n(x), f^n(y)) > 0.$$
2. *Une paire (x,y) est dite proximale si et seulement si $x = y$ ou bien non distale, c'est-à-dire si $x \neq y$, alors il existe une suite $(n_k) \in \mathbb{N}$, tel que, $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) = \lim_{k\to\infty} f^{n_k}(y)$.*

Remarque 2.1.3.1. *L'équicontinuité implique toujours la distalité. Mais la réciproque est fausse.*

En effet, soit $X = \{re^{2i\pi\theta}; \frac{1}{2} \leq r \leq 1, \theta \in [0,1]\}$ et $\begin{array}{rcl} f : X \to & X \\ re^{2i\pi\theta} \mapsto & re^{i\pi(2\theta+r)} \end{array}$.

Remarquons que $f_{|S_r}$ est une rotation sur $S_r = \{re^{2i\pi\theta}; \theta \in [0,1)\}$ pour tout $r \in [\frac{1}{2}, 1]$ et donc S_r est un sous-ensemble invariante de X. Donc, f est distale

(si deux points sont dans deux cercles différents, alors leurs itérés par f restent sur ces cercles). Soit U un ouvert contenant les points $a = r_1 e^{2i\pi\theta}$ et $b = r_2 e^{2i\pi\theta}$. Supposons que $r_1 > r_2$, alors, il existe un entier n tel que $\frac{\pi}{2} \leq n\pi(r_1 - r_2) \leq \pi$ donc $d(f^n(a), f^n(b)) > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc, f n'est pas équicontinue.

Une notion réciproque de l'équicontinuité est la sensitivé.

Définition 2.1.4. *Une application $f : X \to X$ est dite sensitive si et seulement si*

$$\exists\, \epsilon > 0, \forall\, x \in X, \forall\, \delta > 0, \exists\, y \in B(a, \delta), \exists\, n \in \mathbb{N}, d(f^n(x), f^n(y)) > \epsilon.$$

Nous sommes maintenant en position de citer les propriétés dynamiques d'une fonction équicontinue.

Proposition 2.1.4.1. *[30] Soit $f : X \to X$ une application équicontinue. Alors $R(f) = \Omega(f)$.*

Démonstration Par définition, on a toujours, $R(f) \subset \Omega(f)$. Réciproquement, soit $x \in \Omega(f)$, alors, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ et une suite d'entiers $(k_n)_n \subset \mathbb{N}$ telles que $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f^{k_n}(x_n) = x$, alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que, pour tout $n > N$, $d(f^{k_n}(x_n), x) < \epsilon$. Supposons que $x \notin R(f)$, alors il existe $\delta > 0$ tel que $d(f^k(x), x) > \delta$, d'où,

$$\begin{aligned} d(f^{k_n}(x_n), f^{k_n}(x)) &> d(f^{k_n}(x), x) - d(f^{k_n}(x_n), x) \\ &> \delta - \epsilon,\ \forall\, n > N. \end{aligned}$$

Comme la suite $(x_n)_n$ converge vers x, alors f n'est pas équicontinue. Ce qui est absurde. Donc $x \in R(f)$. •

D'aprés la Proposition 2.1.4.1 et la Proposition 1.3.5.1 on a le résultat suivant.

Corollaire 2.1.4.1. *Soit X un espace métrique et $f : X \to X$ équicontinue. Alors l'ensemble $R(f)$ est fermé.*

Proposition 2.1.4.2. *Soit $f : X \to X$ une application équicontinue et $x \in X$. Supposons que $\omega_f(x) \neq \emptyset$, alors $\omega_f(x)$ est un ensemble minimal.*

Démonstration Nous savons que $\omega_f(x)$ est un ensemble fermé f-invariant. Si $\omega(x,f)$ n'est pas minimal, alors il existe v et $w \in \omega(x,f)$ tel que $w \notin \overline{Orb_f(v)}$. Soit $\epsilon = d(w, Orb_f(v))/2 = \inf_{a \in Orb_f(v)} /2d(w,a)$, d'après l'équicontinuité il existe $\delta > 0$. Soit $y \in Orb_f(x)$ tel que $d(y,v) < \eta(\epsilon)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $d(f^n(y), Orb_f(v)) \leq \epsilon$, ce qui implique que $d(f^n(y), w) \geq \epsilon$, et donc $w \notin \omega_f(y) = \omega_f(x)$. Ce qui est absurde. Ainsi $\omega_f(x)$ est un ensemble minimal. •

Corollaire 2.1.4.2. *Soit $f : X \to X$ une application équicontinue. Alors pour tout $x \in X$ $\overline{Orb_f(x)}$ est un ensemble minimal si et seulement si $x \in R(f)$.*

Démonstration Si $x \in R(f)$, alors $\omega_f(x) = \overline{Orb_f(x)}$. D'aprés Proposition 2.1.4.2 nous savons que f est équicontinue. Réciproquement, $\overline{Orb_f(x)}$ est minimal. De plus, comme $\omega_f(x) \subset \overline{Orb_f(x)}$ et $\omega_f(x)$ est un fermé invariant non vide, par minimalité $x \in \omega_f(x)$ donc, $x \in R(f)$. •

Une caractérisation des fonctions équicontinues par rapport à une métrique est donnée par Mai [30] basée sur les notions suivantes :

Définition 2.1.5. 1. *Soient (X,d) et (Y,ρ) deux espaces métriques. Une application $g : X \to Y$ est dite* ***non-expansible*** *si*

$$\rho(g(x), g(y)) < d(x,y),$$

pour tous $x, y \in X$.

2. *Soient (X,d) un espace métrique et $Y \subset X$. Une application continue $r_Y : X \to Y$ est appelée* ***rétraction*** *si $r_Y(y) = y$ pour tout $y \in Y$. Dans ce cas, Y est appelé rétraction de X.*

3. *On dit qu'une propriété topologique P conserve la rétraction si chaque rétract d'un espace topologique avec la propriété P admet également la propriété P.*

Proposition 2.1.5.1. *([30]) Soit $f : X \to X$ une application équicontinue. Si $R(f)$ est compact et $f_{|R(f)}$ est non expansible, alors $f_{|R(f)} : R(f) \to R(f)$ est un homéomorphisme isométrique.*

Proposition 2.1.5.2. *([30]) Soit (X, d) un espace métrique et $f; X \to X$ une application équicontinue. Supposons que $R(f)$ est compact et que $\omega_f(x) \neq \emptyset$ pour tout $x \in X$. Si X possède la propriété qui conserve la rétraction, alors $R(f)$ l'est aussi.*

Théorème 2.1.5.1. *([30]) Soit (X, d) un espace métrique, et $f : X \to X$ une application continue. Supposons que $R(f)$ est compact ; et $\omega_f(x) \neq \emptyset$ pour tout $x \in X$. Alors, on a l'équivalence suivante.*

1. *f est équicontinue.*
2. *il existe une unique rétraction $\gamma : X \to R(f)$ tel que $\gamma \circ f = f \circ \gamma$ et $\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n\gamma(x)) = 0$ pour tout $x \in X$, et il existe une distance d' sur X qui est uniformément équivalente à d telle que, f et γ sont non-expansibles par rapport à d' et $f_{|R(f)}$ est une isométrie.*

Lemme 2.1.6. *[30] Soit (X, d) et (Y, ρ) deux espaces métriques et $f : X \to X$ et $g : Y \to Y$ deux applications uniformément conjuguées. Alors f est équicontinu si et seulement si g est équicontinu. En particulier, supposons que d et d' soient deux métriques uniformément équivalentes sur un ensemble X. Alors une application $f : X \to X$ est équicontinu par rapport à d si et seulement s'il est équicontinu par rapport à d'.*

2.1.2 Équicontinuité sur un système dynamique topologique

On considère un système dynamique topologique (X, f) et $x \in X$. Le point x est équicontinu si pour tout point $y \in X$ très proches de x a une trajectoire (orbite) proche de la trajectoire de x. Si tous les points sont équicontinus on dit que f ou bien le système (X, f) est équicontinu. Plus précisément

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0;\ \forall\ \ y \in X\ \ d(x, y) < \delta,\ \ d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon\ \forall\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Nous classons les systèmes dynamiques topologiques selon la taille de l'ensemble des points équicontinus. Cette classification sera plus facile si on suppose de plus que le système (X, f) est transitif. Comme les systèmes dynamiques topologiques sensibles n'ont pas des points équicontinus, entre ces deux extrêmes

(La sensitivité et l'équicontinuité), il y a des systèmes **presque équicontinus**, dont l'ensemble de points équicontinus est résiduel. Une clasification des systèmes dynamiques topologiques bien déterminée est celle des systèmes équicontinus minimaux [8].

Nous commensons d'abord par une propriété simple d'un système dynamique topologique équicontinu.

Proposition 2.1.6.1. *([30]) Soit (X, f) un système dynamique topologique. Alors*

1. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f^k est équicontinue si et seulement si f est équicontinue.*

2. *Si $X_0 \subset X$ est un ensemble f-invariant pour lequel il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f^m(X) \subset X_0$, alors f est équicontinue si et seulement si $f_{|X_0}$ est équicontinue.*

Démonstration

1. Le sens directe est évident pour $k = 1$. Donc, nous allons montrer le sens inverse. Nous procédons par récurrence sur k. En effet, pour $k = 1$ le résultat est vraie car f équicontinue. On suppose que le résultat est vraie pour k, montrons qu'elle est vraie pour $k+1$. Nous avons f^k est équicontinue, donc, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que pour tout $x, y \in X$, $d(x, y) < \delta$, implique $d(f_n^k(x), f_n^k(y)) < \epsilon$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$d(f_n^{k+1}(x), f_n^{k+1}(y)) = d(f_n^k(f_n(x)), f_n^k(f_n(y))) < \epsilon \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Ainsi, f^{k+1} est équicontinue. Par suit f^k est équicontinue.

2. Le sens direct est évident. Donc, nous allons montrer le sens inverse. Nous avons $X_0 \subset X$ est un ensemble f-invariant, donc il s'écrit comme la réunion de ses orbites. $f : X_0 \to X_0$ est équicontinue et $f^m(X) \subset X_0$, donc f^m est équicontinue sur X. Alors d'après la prmière assertion, f est équicontinue sur X. •

Une condition nécessaire et suffisante de l'équicontinuité est donnée par le théorème suivant.

Théorème 2.1.6.1. *[4] Soit (X, f) un système dynamique topologique. Alors nous avons les équivalences suivantes.*

1. *x est un point équicontinu.*
2. *L'application $Orb_f : X \to C(\mathbb{N}, X)$ est continue en x.*

Où $C(\mathbb{N}, X)$ est l'ensemble de suites $x = (x_0, x_1, ...) \in X, x_i \in X$, muni de la métrique $D(x, y) = \sup_{i\in\mathbb{N}} d(x_i, y_i)$, $Orb_f(x) = \{x, f(x), f^2(x), ...\}$

Théorème 2.1.6.2. *[4] Un système dynamique topologique transitif est soit sensitif soit presque équicontinu (l'ensemble des points équicontinus est résiduel).*

Corollaire 2.1.6.1. *Un système dynamique topologique minimal est soit sensitif soit équicontinu.*

Akin et al [4] ont caractérisé les systèmes dynamiques topologiques transitifs équicontinus en se basant sur la notion suivante.

Définition 2.1.7. *Un système dynamique topologique est dit uniformément récurrent s'il existe une suite $n_k \to \infty$ telle que $(f^{n_k})_k$ converge uniformément vers l'identité.*

Théorème 2.1.7.1. *[4] Un système dynamique topologique transitif et presque équicontinu est un système dynamique topologique inversible uniformément récurrent. De plus les points équicontinus coïncident avec les points transitifs.*

Corollaire 2.1.7.1. *Un système dynamique topologique transitif équicontinu est minimal. Un système dynamique topologique presque équicontinu minimal est équicontinu.*

Il est bien connu que toute application équicontinue transitive d'un espace métrique compact (X, d) dans lui-même est uniformément conjuguée à un homéomorphisme isométrique (voir [4]). Cette propriété est également vraie pour les applications non transitives. En effet, nous avons le résultat suivant.

Proposition 2.1.7.1. *[30] Soit (X, f) un système dynamique topologique. Alors on a les équivalences suivantes.*

1. *(X, f) est équicontinu.*

2. *f est uniformément conjuguée à un homéomorphisme isométrique.*

Proposition 2.1.7.2. *Soit (X, f) un système dynamique topologique équicontinu. Alors $R(f) = AP(f)$.*

Démonstration Nous avons $AP(f) \subset R(f)$. Il nous reste à montrer l'autre inclusion. En effet, soit $x \in R(f)$, donc, d'après Proposition 2.1.4.2, $\overline{Orb_f(x)}$ est un ensemble minimal comme X est compact, alors $x \in AP(f)$. •

Proposition 2.1.7.3. *([19]) Soit (X, f) un système dynamique topologique équicontinu. Alors $\omega_{f^n}(x) = \Omega(x, f^n)$ pour tout $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}$.*

Proposition 2.1.7.4. *Soit (X, f) un système dynamique topologique équicontinu. Alors $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X) = R(f)$.*

Démonstration Le fait que X est un compact entraine que $f(R(f)) = R(f)$, ce qui implique que $R(f) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X)$. Inversement, pour tout $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X)$, il existent $y_1, y_2, ...$ de X tel que $f^n(y_n) = x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\epsilon > 0$. Puisque X est compact, il existe donc $0 < k_1 < k_2 < ...$ et $y_0 \in X$ tel que $d(y_k, y_0) \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui implique que $d(f^{k_n}(y_0), x_0) = d(f^{k_n}(y_0), f^{k_n}(y_{k_n})) \leq \frac{1}{n}$. Donc, par Proposition2.1.4.2, nous avons $x_0 \in \omega_f(y_0) \subset R(f)$. Ainsi, $R(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X)$. •

Théorème 2.1.7.2. *[47] Soit (X, f) un système dynamique topologique. Si (X, f) est équicontinu, alors, pour tout $x \in X$, $\omega_f(x) = \Omega(x, f)$.*

Démonstration Nous avons $\omega_f(x) \subset \Omega(x, f) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X)$. Supposons, au contraire, que $\Omega(x, f) \neq \omega_f(x)$ pour tout $x \in X$ et choisissons $a \in \Omega(x, f) \backslash \omega_f(x)$. Posons $2\epsilon_0 = d(a, \omega_f(x))$. Alors il existe $x_n \in X$ avec $x_n \to x$ et $k_n \to \infty$ tel que $d(f^{k_n}(x_n), f^{k_n}(x)) \to a \in \Omega(x, f) \backslash \omega_f(x)$ et $d(f^{k_n}(x_n), f^{k_n}(x)) > \epsilon_0$ pour tout n assez grand, ce qui implique que (X, f) n'est pas équicontinu. Contradiction. •

Maintenant nous rappelons la notion de distance de Hausdorff.

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a), a \in A\}.$$

Tout d'abord, si $A \subset X$ et $\epsilon > 0$ la boule ouverte autour de A et de rayon ϵ est notés par $\mathcal{V}(A, \epsilon)$. On note par 2^X l'ensemble de tous les sous-ensembles fermés non-vides de X. La distance de Hausdorff est définie comme suit. Pour tout $A, B \in 2^X$

$$\mathcal{H}(A, B) := \inf\{\epsilon > 0, A \in \mathcal{V}(B, \epsilon), B \in \mathcal{V}(A, \epsilon)\}.$$

Une condition nécessaire pour avoir l'équicontinuité de (X, f) est présentée dans le résultat suivant.

Théorème 2.1.7.3. *([19]) Soit (X, f) un système dynamique topologique. Si (X, f) est équicontinu, alors la fonction $x \mapsto \omega_f(x)$ est continue.*

Démonstration Soit $\epsilon > 0$. Comme (X, f) est équicontinu, il existe $\delta > 0$ tel que $d(f^n(x), f^n(y)) < \frac{\epsilon}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x, y \in X$ tel que $d(x, y) < \delta$. Soient $x, y \in X$ tel que $d(x, y) < \delta$ et $x_0 \in \omega_f(x)$. Il existe $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ tel que $d(f^{n_k}(x), x_0) < \frac{\epsilon}{3}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors $d(f^{n_k}(y), x_0) \leq d(f^{n_k}(y), f^{n_k}(x)) + d(f^{n_k}(x), x_0) \leq \frac{2}{3}\epsilon$. Donc par passage au sous suite convergente, il existe $y_0 \in \omega_f(y)$ tel que $d(x_0, y_0) < \epsilon$. Puisque $\omega_f(x) \subset B(\omega_f(x), \epsilon)$, et de même $\omega_f(y) \subset B(\omega_f(x), \epsilon)$. Ainsi, $\mathcal{H}(\omega_f(x), \omega_f(y)) < \epsilon$ pour tout x, y tel que $d(y, x) < \delta$. Donc ω_f est continue. •

Lemme 2.1.8. *[19] Soit (X, f) un système dynamique topologique. Si ω_f est continue et $\overline{P(f)} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(X)$, alors $\omega_f(x) = \Omega(x, f)$.*

La minimalité de ω-limite est satisfaite pour un sytème dynamique topologique. Comme l'équicontinuité implique la continuité de la fonction ω_f, alors il est logique de poser la question suivante : Est ce que la continuité de la fonction ω_f entraine la minimalité de $\omega_f(x)$ pour un système dynamique topologique. La réponse est donnée par la proposition suivante :

Proposition 2.1.8.1. *Soit (X, f) un système dynamique topologique. Si la fonction ω_f est continue, alors $\omega_f(x)$ est un ensemble minimal pour tout $x \in X$.*

Démonstration Soit $x \in X$. Comme $\omega_f(x)$ est un compact invariant, il contient un ensemble minimal M. Soit $a \in M$, il existe une suite $(N_k)_k \subset \mathbb{N}$ telle que la

limite de $(f^{n_k}(x))_k$ est égale à a. Puisque $\omega_{f^{n_k}}(f^{n_k}(x)) = \omega_f(x)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'après la continuité de ω_f, on en déduit que $M = \omega_f(a) = \omega_f(x)$. Donc, $\omega_f(x)$ est un ensemble minimal. •

Nous avons le résultat suivant pour un système dynamique topologique (X, f).

Lemme 2.1.9. *Soit (X, f) un système dynamique topologique. Alors, les deux assertions suivantes sont vérifiées.*

1. *Si $\Omega(x, f) = \omega_f(x)$ pour tout $x \in X$, alors $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(X) = R(f)$.*

2. *Si (X, f) est équicontinu, alors $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(X) = R(f)$.*

Démonstration Comme X est compact et $f(R(f)) = R(f)$, on aura $R(f) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(X)$.
Inversement, soit $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(X)$, il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ et $x_0 \in X$ avec $x_k \to x_0$ et $n_k \to \infty$ tel que $f^{n_k}(x_k) = x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Puisque $x \in \Omega(x_0, f) = \omega(x_0, f)$. considérons $p_k \in \mathbb{N}$ tel que $p_{k+1} - p_k > k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $f^{p_k}(x_0) \to x$. Donc, $x \in \Omega(x, f) = \omega(x, f)$. Ainsi $x \in R(f)$. •

Nous arrivons maintenant à montrer le résultat principal, dans cette section, qui caractérise l'équicontinuité pour les espaces métriques compacts.

Théorème 2.1.9.1. *Soit (X, f) un système dynamique topologique. Considérons les assertions suivantes.*

1. *(X, f) est équicontinu.*

2. *$\Omega(x, f^n) = \omega_{f^n}(x)$ pour tout $x \in X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Alors (1) *implique* (2) *et, si $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X) = P(f)$, alors,* (2) *implique* (1).

Démonstration D'après Lemme 2.1.7.3 nous avons (1) $\Rightarrow$ (2).

Pour montrer que (2) $\Rightarrow$ (1), supposons que $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X) = P(f)$. Puisque X est compact alors

$$\Omega(x, f^n) = \omega_{f^n}(x) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X) = P(f)$$

pour tout $x \in X$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Si (X, f) n'est pas équicontinu, alors, il existe $x \in X$, une suite $(x_n)_n$ dans X avec $x_n \to x$ et une suite $(p_n)_n$ dans $\mathbb{N}$, $p_n \to \infty$ tels que $f^{p_n}(x_n) \to a \in X$ et $f^{p_n}(x) \to b \in X$ avec $a \neq b$. Alors $a \in \Omega(x, f) \subset P(f)$ et $b \in \omega_f(x) \subset P(f)$. Puisque a et b sont dans $P(f)$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a, b \in Fix(f^k)$. On peut supposer, sans perte de généralité, que les modules k, p_n sont congrus congruent avec $r(p_n = kq_n + r)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Notons que $f^r(x_n) \to f^r(x)$, $kq_n \to \infty$ et $f^{kq_n}(f^r(x_n)) \to a$. Donc $a \in \Omega(f^r(x), f^k) = \omega_{f^k}(f^r(x))$. Par conséquent, il existe une suite $s_n \to \infty$ (en choisissant une sous-suite, on peut supposer $s_n - q_n > n$) telle que $(f^k)^{s_n}(f^r(x)) \to a$. Puisque $r = p_n - kq_n$, $f^{ks_n}(f^{p_n - kq_n}(x)) = f^{ks_n - kq_n}(f^{p_n}(x)) \to a$. Puisque $f^{p_n}(x) \to b$, $a \in \Omega(b, f^k) = \omega(b, f^k) = \{b\}$. Par conséquent, $a = b$, ce qui conduit à une contradiction. Alors (X, f) est équicontinu. •

Les exemples suivants montrent que la condition $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X) = P(f)$ du Théorème2.1.9.1 est essentielle.

Exemple 2.1.10. *Il existe un espace métrique compact X et un homéomorphisme $f : X \to X$ tel que $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X) \neq P(f)$, $\Omega(x, f^n) = \omega_{f^n}(x)$ pour tout $x \in X$ et tout $n \in \mathbb{N}$, et (X, f) n'est pas équicontinu.*

Soit $(y_n)_n \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ une suite qui converge vers $y_\infty \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le cercle unité, et $X = S^1 \times \{y_n : n \in \mathbb{N} \bigcup \{\infty\}\}$. Alors X est un espace métrique compact munit de la distance d induite de l'un des espaces euclidiens $\mathbb{R}^2$. Soit $f : X \to X$ définie par $f(x, y) = (x + y, y)$. Nous avons, f homéomorphisme. Donc, $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X) = X$. Comme $\{y_n : n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $P(f) = \emptyset$. Alors, $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X) \neq P(f)$. Soient $(x, y) \in X$ et $n \in \mathbb{N}$. Puisque $f^n(x, y) = (x + ny, y)$, dans S^1, $x \mapsto x + ny$ est une rotation irrationnelle. Alors, $\omega_{f^n}((x, y)) = S^1 \times \{y\}$ et $\Omega((x, y), f^n) = S^1 \times \{y\}$. Par conséquent, $\Omega((x, y), f^n) = \omega_{f^n}(x)$ pour tout $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}$. f n'est pas équicontinu. En effet, pour un petit $\epsilon > 0$ (par exemple $\varepsilon = \frac{1}{4}$) et $\delta > 0$ arbitraire, choisissons un couple $p = (x, y)$, $q = (x, y_\infty)$ avec $0 < |y - y_\infty| < \varepsilon$ et $d(q, p) < \delta$. Fixons un entier $N > 1$ tel que $k|y - y_\infty| < \varepsilon < N|y - y_\infty| < 1$ pour tout entier $k < N$. Alors $d(f^N(p), f^N(q)) > N|y - y_\infty| > \varepsilon$. Par conséquent, (X, f) n'est pas équicontinu.

Remarquons que le système dynamique topologique (X, f) est distale. En effet,

soient $(x, y) \neq (x', y')$ deux points de X. si $\lim_{i\to\infty} f^{k_i}(x, y) = \lim_{i\to\infty} f^{k_i}(x', y')$, alors $\lim_{i\to\infty}(x + k_i y, y) = \lim_{i\to\infty}(x' + k_i y', y')$, ce qui implique que $y = y'$ et $x = x'$, ce qui est impossible.

Exemple 2.1.11. *Il existe un espace métrique compact X et une application non surjective $f : X \to X$ tel que $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X) \neq P(f)$, $\Omega((x, y), f^n) = \omega_{f^n}(x)$ pour tout $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}$, et (X, f) n'est pas équicontinu.*

Comme dans Exemple 2.1.10, posons $X = S^1 \times \{y_n : n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\}$. Soit $f : X \to X$ définie par $f(x, y) = (x + y, y_\infty)$. Nous avons, f non surjective et $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X) = \mathbb{S}^1 \times \{y_\infty\}$. Puisque $\{y_n : n \in \mathbb{N} \bigcup \{\infty\}\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $P(f) = \emptyset$. Donc, $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X) \neq P(f)$. Soit $(x, y) \in X$ et $n \in \mathbb{N}$. Comme $f^n(x, y) = (x + ny, y_\infty)$, dans S^1, $x \mapsto x + ny$ est une rotation irrationnelle. Alors $\omega_{f^n}((x, y)) = S^1 \times \{y_\infty\}$ et $\Omega((x, y), f^n) = S^1 \times \{y_\infty\}$. Par conséquent, $\Omega((x, y), f^n) = \omega(x, f^n)$ pour tout $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}$.

Comme dans l'Exemple 2.1.10, (X, f) n'est pas équicontinu.

2.2 Équicontinuité sur un système dynamique topologique inversible

2.2.1 Cas d'un espace métrique compact

Le premier résultat fondamental concernant l'équicontinuité sur les systèmes dynamiques topologiques inversibles est basé sur la définition de presque périodicité uniforme.

Définition 2.2.1. *1. Soit (X, f) un système dynamique topologique inversible. On dit que (X, f) est uniformement presque périodique si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier $N > 0$ tel que, tout block formé par N entiers consécutifs contient un entier $n \in \mathbb{Z}$, tel que $d(x, f^n(x)) < \epsilon$ pour tout $x \in X$; c'est équivalent à dire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ensemble rélativement dense $I \subset \mathbb{Z}$ tel que $d(x, f^n(x)) < \epsilon$ pour tout $x \in X$ et pour certain $n \in I$.*

2. *Soit (X, f) un système dynamique topologique. On dit que (X, f) est uniformément quasi-périodique si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier positif p tel que $d(f^{np}(x), x) < \epsilon$, pour tout $x \in X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Remarque 2.2.1.1. 1. *Si le système est uniformément quasi-périodique, alors tous les points sont quasi-périodiques.*

2. *Si (X, f) est uniformément quasi-périodique, alors (X, f) est uniformément presque périodique.*

Si (X, f) est uniformément presque périodique, alors tous les points sont presque périodiques.

Théorème 2.2.1.1. *[8] Soit (X, f) un système dynamique topologique inversible. Alors, on a l'équivalence suivante.*

1. *(X, f) est équicontinu.*

2. *(X, f) est uniformément presque périodique.*

Remarque 2.2.1.2. *Même si X n'est pas compact, alors, toujours, l'uniforme presque périodicité implique l'équicontinuité du système (X, f). Mais la réciproque n'est pas vraie ; il suffit de considérer une rotation irrationelle définie sur le plan qui est équicontinu, mais qui n'est pas uniformément presque périodique.*

Proposition 2.2.1.1. *Soit (X, f) un système dynamique topologique inversible équicontinu. Alors (X, f) est presque périodique par point (i.e. tous les points sont presque périodiques).*

Démonstration Soit $x \in X$. Puisque X est compact, il suffit de montrer que $\overline{Orb_f(x)}$ est minimal. En effet, soit $y \in \overline{Orb_f(x)}$, alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N, d(f^n(x), y) < \epsilon$. D'après l'équicontinuité $d(f^{-n}(y), x) < \epsilon$, donc, $x \in \overline{Orb_f(y)}$. Ainsi $\overline{Orb_f(x)} \subset \overline{Orb_f(y)}$. D'où, l'égalité. Par conséquent, $\overline{Orb_f(x)}$ est minimal. •

Soit (X, f) un système dynamique topologique, un homéomorphisme est dit périodique s'il existe une période $p \geq 2$ tel que $f^p = id$ et $f^k \neq id$ pour $1 \leq k \leq p-1$.

Une question intéressante dans la dynamique topologique est la suivante : Si toutes les orbites sont finies (périodiques) a-t-on f est périodique ? H.Hawete [26] a répondu positivement à cette question sous une condition dynamique.

Théorème 2.2.1.2. *[25] Soit (X, f) un système dynamique topologique transitif. S'il existe un entier p tel que, pour tout $x \in X$, $card(Orb_f(x)) \leq p$ (les orbites sont uniformément bornées). Alors f est périodique.*

Comme conséquence de ce théorème on a le corollaire suivant.

Corollaire 2.2.1.1. *Soit (X, f) un système dynamique topologique transitif. S'il existe un entier p tel que, pour tout $x \in X$, $card(Orb_f(x)) \leq p$. Alors (X, f) est équicontinu.*

Soit X^X l'ensemble des fonctions continues de $X \to X$. Si X est compact, d'après le théorème de Tychonoff, X^X est compact. On note par $Homeo(X)$ l'ensemble des homéomorphismes de X dans X.
$Homeo(X)$ est un groupe topologique muni de la topologie τ compacte ouverte (si K compact et U un ouvert de X la topologie τ est engendrée par $\{f \in Homeo(X); f(K) \subset U\}$).

Soit (X, f) un système dynamique topologique inversible, alors l'ensemble $\{...f, f^2, f^3...\} \subset Homeo(X)$. On note par $\mathfrak{F} = \overline{\{...f, f^2, f^3...\}}$.
Si (X, f) est équicontinu, d'aprés le théorème d'Ascoli $\mathfrak{F}$ est un compact de $Homeo(X)$. Par conséquent on peut étendre le système (X, f) à $(X, \mathfrak{F})$.

Hawete et al [23] ont demontré quelques propriétés d'une action équicontinue de groupe topologique G sur un espace métrique X. En particulier nous avons

Théorème 2.2.1.3. *Soit (X, f) un système dynamique topologique inversible équicontinu. On a les propriétés suivantes.*

1. *Si toute orbite est fermée l'espace des orbites X/f est séparé.*

2. *L'espace des classes des orbites* $X/\tilde{f}$ *est séparé.*

3. $\mathfrak{F}(x)$ *exactement égale* $\overline{Orb_f(x)}$, *pour tout* $x \in X$.

Où l'espace X/f (respectivement $X/\tilde{f}$) est l'espace quotient défini par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ (respectivement $\mathcal{R}'$) avec $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $Orb_f(x) = Orb_f(y)$ (respectivement $x\mathcal{R}'y$ si et seulement si $\overline{Orb_f(x)} = \overline{Orb_f(y)}$).

2.2.2 Cas d'une variété

Si on considère M une variété connexe, Montogomery et Zippin [33] ont montré le théorème suivant :

Théorème 2.2.1.4. *Soit* M *une variété connexe et* $h : M \to M$ *un homéomorphisme. Alors on a les équivalences suivantes.*

1. h *est périodique par point.*

2. h *est périodique.*

Rejeb et Salhi [41] ont caractérisé les propriétés dynamiques des orbites pour un homéomorphisme défini sur une variété connexe. Ils ont demontré la proposition suivante

Proposition 2.2.1.2. *Soient* M *une variété connexe et* $f : M \to M$ *un homéomorphisme. Alors on a*

1. $\overline{Orb_f(x)}$ *est un compact minimal pour tout* $x \in f$.

2. *L'espace des classes des orbites* $M/\tilde{f}$ *est séparé.*

3. *Toute orbite propre est finie..*

Si de plus M est compact d'aprés Théorème 2.2.1.1 et la Proposition 2.2.1.2 on obtient le résultat suivant

Proposition 2.2.1.3. *Soit* M *une variété connexe compacte. Alors on a les équivalences suivantes*

1. *Le système dynamique topologique inversible* (M, f) *est équicontinu.*

2. f *est périodique.*

Une étude plus générale de l'équicontinuité sur les variétés non compactes est traitée dans [40]. Précisément, on a le théorème suivant.

Théorème 2.2.1.5. *Soit* M *une variété connexe de dimension* 3*. Alors on a les équivalences suivantes.*

1. *L'homéomorphisme* $f : M \to M$ *est équicontinu et quasi-périodique par point (tous les points sont quasi périodiques).*

2. f *est périodique.*

Proposition 2.2.1.4. *[41] Soit* M *une variété compacte connexe de dimension* 3 *avec* $\partial M \neq \emptyset$*. Si le système dynamique topologique inversible* (M, f) *est équicontinu et* f *coïncide avec l'identité sur* ∂M*, alors* f *coïncide avec l'identité sur* M*.*

Comme conséquence de la Proposition 2.2.1.4 et Théorème 2.1 [41] on a

Corollaire 2.2.1.2. *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *un homéomorphisme. Alors on a les équivalences suivantes.*

1. f *est uniformément presque périodique.*

2. f *est périodique.*

Remarque 2.2.1.3. *L'équicontinuité et la presque périodicité par point n'entrainent pas la périodicité d'un homéomorphisme défini sur* $\mathbb{R}^3$*. Un contre exemple simple est la rotation irrationelle définie sur* $\mathbb{R}^3$*.*

Chapitre 3

ÉQUICONTINUITÉ SUR UN GRAPHE

Sommaire

3.1 Propriétés topologiques et dynamiques d'un système dynamique topologique défini sur un graphe 46

3.1.1 Graphes 46

3.1.2 Propriétés topologiques 47

3.1.3 Propriétés dynamiques 51

3.2 Équicontinuité et structure topologique pour l'ensemble $\Omega(x, f)$ 52

3.2.1 Équicontinuité 52

3.2.2 Structure topologique de $\Omega(x, f)$ 56

DAns ce chapitre nous rappelons les définitions ainsi que quelques propriétés topologiques et dynamiques pour un système dynamique topologique défini sur un intervalle, cercle et graphe. Puis une deuxième partie pour l'équicontinuité et structure topologique de l'ensemble $\Omega(x, f)$.

3.1 Propriétés topologiques et dynamiques d'un système dynamique topologique défini sur un graphe

Définition 3.1.1.

- *Un **arc** est tout espace homéomorphe à l'intervalle fermé* $[0, 1]$*, et c'est un continum.*
- *Une **cercle** est tout espace homéomorphe au cercle unité* $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.

3.1.1 Graphes

Définition 3.1.2. *Un **graphe** est un continum qui peut s'écrire comme l'union d'un nombre fini d'arcs et de cercles.*

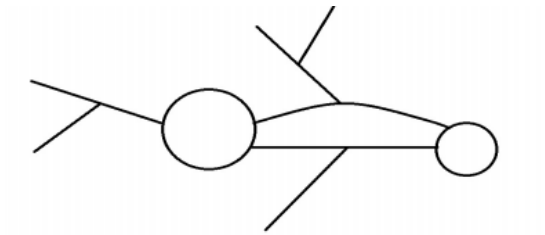

FIGURE 3.1 – Graphe

Définition 3.1.3. *Un graphe sans cercle s'appelle **arbre**.*

Lemme 3.1.4. *Soit G un graphe et $\emptyset \neq Y$ un sous-ensemble compact connexe de G. Alors Y est un graphe.*

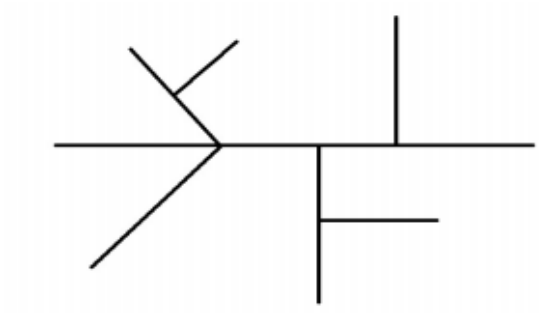

FIGURE 3.2 – Arbre

La distance entre deux points a, b dans le graphe est l'arc $[a, b]$. On écrit $(a, b) = [a, b] \backslash \{a, b\}$.

3.1.2 Propriétés topologiques

3.1.2.1 Minimalité

<u>**Cas d'intervalle**</u>

Théorème 3.1.4.1. *[3] Soient (I, f) un système dynamique topologique défini sur un intervalle I et $M \subset I$ un ensemble minimal de (I, f). Alors M est*

1. *un ensemble fini (en fait, une orbite périodique de f),*
2. *un ensemble de Cantor.*

Théorème 3.1.4.2. *[3] Soient (I, f) un système dynamique topologique inversible défini sur un intervalle I et $M \subset I$ un ensemble minimal de (I, f). Alors M est une orbite finie.*

<u>**Cas de Cercle**</u>

Théorème 3.1.4.3. *[3] Soient (S^1, f) un système dynamique topologique défini sur le cercle S^1 et $M \subset S^1$ un ensemble minimal de (S^1, f). Alors M est*

1. *un ensemble fini (en fait, une orbite périodique de f),*
2. *un ensemble de Cantor.*

Théorème 3.1.4.4. *[3] Soient (S^1, f) un système dynamique topologique inversible défini sur le cercle S^1 et $M \subset S^1$ un ensemble minimal de (S^1, f). Alors,*

1. *Si $P(f) \neq \emptyset$, alors M est une orbite finie.*
2. *Si $P(f) = \emptyset$, alors M est soit un ensemble de Cantor, soit $M = S^1$.*

Cas d'un graphe

Théorème 3.1.4.5. *[9] Soient (G, f) un système dynamique topologique défini sur un graphe $G \neq S^1$ et $M \subset G$ un ensemble minimal de (G, f). Alors M est*

1. *un ensemble fini (en fait, une orbite périodique de f),*
2. *un ensemble de Cantor,*
3. *la réunion d'un nombre fini de cercles deux à deux disjoints.*

Inversement, si $M \subset G$ vérifie l'une des trois assertions, il existe un système dynamique topologique (G, f) défini sur G tel que M est l'ensemble minimal de (G, f).

Théorème 3.1.4.6. *[3] Soient (G, f) un système dynamique topologique inversible défini sur un graphe $G \neq S^1$ et $M \subset G$ un ensemble minimal de (G, f). Alors M est un ensemble fini (en fait, une orbite périodique de f).*

3.1.2.2 Ensemble ω-limite

Cas d'intervalle

Proposition 3.1.4.1. *[36] Soit (I, f) un système dynamique topologique inversible défini sur un intervalle I, alors, pour tout $x \in I$, $\omega_f(x)$ soit un point fixe ou une orbite périodique de période 2*

Démonstration Par hypothèse, f soit croissante ou décroissante. Si f est croissante, alors, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq x$ (resp $f(x) \leq x$), $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp décroissante). Donc $\omega_f(x)$ est un point fixe de f. Si f est décroissante, alors

f^2 est croissant, donc $\omega_{f^2}(x)$ est un point fixe a de f^2. Par l'uniforme continuité de f, nous avons $\lim_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(a)| = 0$. Donc $\omega_f(x) = Orb_f(a) = \{a\}$ ou $\{a, f(a)\}$.

Théorème 3.1.4.7. *[18] Soit (I, f) un système dynamique topologique défini sur un intervalle I. Alors, pour tout $x \in I$, l'ensemble ω-limite $\omega_f(x)$ est*

1. *une orbite périodique,*
2. *un ensemble compact partout dense,*
3. *une réunion finie de sous-intervalles connexes qui forment une orbite périodique.*

Inversement, pour tout $A \subset I$ vérifiant l'une de trois assertions précédentes, il existe un système dynamique topologique (I, f) défini sur I, tel que A est l'ensemble ω-limite de f.

Théorème 3.1.4.8. *[16] Soit (I, f) un système dynamique topologique défini sur un intervalle I. Alors, la famille des ensembles ω-limite de f munie de distance de la Hausdorff H_d est un compact.*

Cas du Cercle

Proposition 3.1.4.2. *[36] Soit (S^1, f) un système dynamique topologique inversible défini sur le cercle S^1. Alors, nous avons l'équivalence suivant.*

1. *f admet un point périodique.*
2. *pour tout $x \in S^1$, $\omega_f(x)$ est une orbite périodique.*

Théorème 3.1.4.9. *[39] Soit (S^1, f) un système dynamique topologique défini sur le cercle S^1. Alors, on a l'équivalence suivante.*

1. *Un ensemble compact non vide $W \subset S^1$ est un ensemble ω-limite de f.*
2. *W est soit une collection infinie d'intervalles compactes ou une partie partout dense.*

Théorème 3.1.4.10. *[38] Soit (S^1, f) un système dynamique topologique défini sur le cercle S^1. Alors la famille des ensembles ω-limite de f munie de la distance de Hausdorff H_d est un compact.*

Cas d'un Graphe

Théorème 3.1.4.11. *([36], Théorème A) Soit (G, f) un système dynamique topologique inversible défini sur un graphe G tel que f soit surjective. Si $G \neq S^1$, alors, pour tout $x \in G, \omega_f(x)$ est une orbite périodique.*

Démonstration Soit $x \in G$. Si $x \in K$ ($K \subset G$ un arc), alors d'après Proposition 3.1.4.1 $\omega_{f^N}(x)$ est fini car f^N est monotone. Si $x \in C$ ($C \subset G$ un cercle), alors, f_C^N est une application monotone. D'après [Lemme 4.3,[36]] $f_{|C}^N$ admet un point fixe. Ainsi, par Proposition 3.1.4.2 $\omega_{f^N}(x)$ est fini. Donc par Lemme 1.2.7 et Lemme 1.2.8 pour tout $x \in G$, $\omega_f(x)$ est une orbite périodique.

Théorème 3.1.4.12. *([36], Théorème B) Soit (G, f) un système dynamique topologique inversible défini sur un graphe G. Alors on a l'équivalence suivante :*

(1) f admet un point périodique.

(2) Pour tout $x \in G$, $\omega_f(x)$ est une orbite périodique.

Démonstration "$(2) \Rightarrow (1)$" évident.
"$(1) \Rightarrow (2)$" Soit $G_\infty := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(G)$. Alors G_∞ soit un cercle ou un graphe différent de cercle et $f_{|G_\infty} : G_\infty \to G_\infty$ est une application monotone surjective.
Supposons que f admet un point périodique p, alors $p \in G_\infty$. Si G_∞ est un graphe différent de cercle, alors d'après Théorème 3.1.4.11, $\omega_f(x)$ est une orbite périodique pour tout $x \in G_\infty$. Si G_∞ est un cercle, alors $f_{|G_\infty} : G_\infty \to G_\infty$ est une application monotone de cercle avec un point périodique p, alors, d'après Proposition 3.1.4.2 $\omega_f(x)$ est une orbite périodique pour tout $x \in G_\infty$.
Maintenant, soit $x \in G$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}, f^n(x) \in G_\infty$, alors, $\omega_f(f^n(x))$ est une orbite périodique. Donc d'aprés Proposition 1.2.6.3 $\omega_f(x)$ est une orbite périodique.

Proposition 3.1.4.3. *[37] Soit (G, f) un système dynamique topologique défini sur un graphe G. Si $x \in \omega_f(x) \backslash \overline{P(f)}$, alors $Orb_f(x)$ est un ensemble infini.*

Théorème 3.1.4.13. *[27] Soient (G, f) un système dynamique topologique défini sur un graphe G et W l'ensemble ω-limite de f. Alors W est*

1. *un ensemble fini (en fait, c'est une orbite périodique),*
2. *un ensemble compact partout dense,*
3. *une réunion finie de sous-graphes (qui forment une orbite périodique).*

Inversement, chaque fois que W vérifie l'une des trois propriétés précedentes, il existe un système dynamique topologique (G, f) défini sur un graphe G tel que W est l'ensemble ω-limite de f.

3.1.3 Propriétés dynamiques

3.1.3.1 Relation entre récurrence et périodicité sur un graphe

Théorème 3.1.4.14. *[31] Soit (G, f) un système dynamique topologique inversible défini sur un graphe G. Alors, f est récurrente point par point si et seulement si l'une de ces deux assertions est vérifiée.*

1. *G est un cercle et f est un homéomrphisme topologiquement conjugué à une rotation irrationnelle du cercle unité S^1*
2. *f est un homéomorphisme périodique (i.e : f^m = l'identité pour certain $m \in \mathbb{N}$).*

Proposition 3.1.4.4. *[2] Soit (G, f) un système dynamique topologique inversible défini sur un graphe G. Supposons que $P(f) \neq \emptyset$. Alors,*

$$\Lambda(f) = R(f) = AP(f) = QP(f) = P(f).$$

3.1.3.2 Récurrence point par point sur un graphe

Mai [31] a montré le résultat suivant.

Théorème 3.1.4.15. *Soit (G, f), un système dynamique topologique défini sur un graphe G. Alors, $R(f) = G$ si et seulement si l'une des deux assertions suivantes est vérifiée :*

(a) $G = S^1$ et f est un homéomorphisme topologiquement conjugué à une rotation irrationnelle.

(b) f est un homéomorphisme périodique.

Une autre caractérisation est obtenue par Hattab [26]

Théorème 3.1.4.16. *Soit (G, f) un système dynamique topologique défini sur un graphe G. Alors $\overline{R(f)} = G$ si et seulement si, l'une des deux assertions suivantes est vérifiée.*

(a) $G = S^1$ et f est un homéomorphisme topologiquement conjugué à une rotation irrationnelle.

(b) $\overline{P(f)} = G$.

3.2 Équicontinuité et structure topologique pour l'ensemble $\Omega(x, f)$

3.2.1 Équicontinuité

3.2.1.1 Équicontinuité sur un intervalle

Dans [14, 17] les auteurs ont étudié l'équicontinuité des applications d'intervalles. Il ont obtenu le résultat suivant.

Théorème 3.2.0.17. *[14, 17] Soit (I, f) un système dynamique topologique défini sur un intervalle I. Alors, on a l'équivalence suivante.*

1. *(I, f) est équicontinu.*

2. *$\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(I) = Fix(f^2)$.*

Dans [20] Cano a montré les deux théorèmes suivants.

Théorème 3.2.0.18. *[20] Soit (I, f) un système dynamique topologique équicontinu défini sur un intervalle I. Alors,*

1. *$Fix(f)$ est connexe.*

2. *Si $Fix(f)$ n'est pas un singleton alors, $Fix(f) = P(f)$.*

Théorème 3.2.0.19. *[20] Soit (I, f) un système dynamique topologique équicontinu défini sur un intervalle I. Alors, $Fix(f)$ est connexe et si $Fix(f)$ est non dégénéré alors, $Fix(f) = P(f)$.*

3.2.1.2 Équicontinuité sur le cercle

Dans [48] Valaristos a étudié l'équicontinuité de la famille des itérés d'une application du cercle unité S^1 et a montré les résultats suivants.

Théorème 3.2.0.20. *[48] Soit (S^1, f) un système dynamique topologique équicontinu défini sur le cercle S^1. Supposons que $Fix(f) \neq \emptyset$. Alors, f admet un point périodique de période au plus 2 et $Fix(f^2)$ est connexe. De plus, $Fix(f)$ est soit connexe, soit composé exactement de deux points distincts, et tout autre point de S^1 est de période 2.*

Théorème 3.2.0.21. *[48] Soit (S^1, f) un système dynamique topologique équicontinu défini sur le cercle S^1. Supposons que la plus petite période des points périodiques de f dans S^1 est $n \geq 2$. Alors, tout point de S^1 est périodique de période n.*

Théorème 3.2.0.22. *[48] Soit (S^1, f) un système dynamique topologique équicontinu défini sur le cercle S^1. Alors, f est conjugué a une rotation irrationnelle R_α.*

Théorème 3.2.0.23. *[48] Soit (S^1, f) un système dynamique topologique défini sur le cercle S^1. Alors, (S^1, f) est équicontinu si et seulement si l'une des assertions suivantes est vérifiée.*

1. *f est conjugué à une rotation.*
2. *$Fix(f)$ se compose exactement de deux points distincts et tout autre point de S^1 est de période 2*
3. *$Fix(f)$ se compose d'un seul point et $Fix(f^2) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(S^1)$.*
4. *$Fix(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(S^1)$.*

3.2.1.3 Équicontinuité sur un graphe

Dans [46], Sun et al ont montré les résultats suivants :

Théorème 3.2.0.24. *[46] Soit (G, f) un système dynamique topologique défini sur un graphe G avec $P(f) \neq \emptyset$. Alors, on a l'équivalence suivante.*

1. *(G, f) est équicontinu.*
2. *Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(G) = Fix(f^N)$.*

Théorème 3.2.0.25. *[46] Soit (G, f) un système dynamique topologique défini sur un graphe G avec $P(f) \neq \emptyset$. Alors, si (G, f) est équicontinu on a $\omega_f(x) = \Omega(x, f)$ pour tout $x \in G$.*

Démonstration Soit $x \in G$ et prenons $y \in \Omega(x, f)$. Alors, il existe une suite $(x_k)_k$ et une suite $(n_k)_k$ tel que $n_k \to \infty$ et $x_k \to x$ tel que $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x_k) = y$. Soit $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$ correspond à $\frac{\epsilon}{2}$ dans la définition d'équicontinuité. Choisissons k si grand que $d(x, x_k) < \delta$ et $d(f^{n_k}(x_k), y) < \delta$. Le choix de δ nous donne $d(f^{n_k}(x_k), f^{n_k}(x) \leq \frac{\epsilon}{2}$. Alors

$$d(f^{n_k}(x), y) \leq d(f^{n_k}(x_k), f^{n_k}(x)) + d(f^{n_k}(x_k), y) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon.$$

Ainsi $y \in \omega_f(x)$.

Dans [30], Mai a montré les résultats suivants, qui caractérisent l'équicontinuité pour un système dynamique topologique défini sur un graphe G.

Théorème 3.2.0.26. *[30] Soit (G, f) un système dynamique topologique défini sur un graphe G. Alors, on a l'équivalence suivante.*

1. *$R(f) = G$.*
2. *f est un homéomorphisme périodique, ou G est un cercle et f est topologiquement conjuguée à une rotation irrationnelle du cercle unité S^1.*

Corollaire 3.2.0.1. *Soit (G, f) un système dynamique topologique défini sur un graphe G. Si $R(f) = G$, alors, (G, f) est équicontinu.*

Théorème 3.2.0.27. *[30] Soit (G, f) un système dynamique topologique défini sur un graphe G. Alors, on a les équivalences suivantes.*

1. *(G, f) est équicontinu.*
2. *$\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(G) = R(f)$.*
3. *$f_{|\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(G)}$ est équicontinu.*
4. *$f_{|\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(G)}$ est un homéomorphisme périodique ou topologiquement conjugué à une rotation irrationnelle du cercle unité S^1.*

Démonstration "(1) $\Rightarrow$ (2)" D'après Proposition 2.1.7.4.
"(3) $\Rightarrow$ (1)" Nous avons G est compact et connexe, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n(G)$ est compact et connexe. Soit $G_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(G)$. D'après $G_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(G) \subset ... \subset f(G) \subset G$ on a G_0 est un sous-graphe non vide et $f(G_0) = G_0$. Posons $V = G_0 \bigcap \overline{(G \backslash G_0)}$. Alors V est un ensemble fini. Evidement il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que $f^{n_k}(G) \subset G_0 \bigcup B(V, 2^{-k})$. Donc d'après [Théorème 5.1, [30]] si $f_{|G_0}$ est équicontinue alors f est équicontinue.
"(2) $\Rightarrow$ (3)" Soit $G_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(G)$. Si $G_0 = R(f)$, alors, $f_{|G_0} : G_0 \to G_0$ est point par point récurrent. Ainsi, d'après Corollaire 3.2.0.1 $f_{|G_0}$ est équicontinue.
"(2) $\Rightarrow$ (4)" D'après Théorème 3.2.0.26.

3.2.2 Structure topologique de $\Omega(x, f)$

Dans cette partie, nous interprétons nos résultats en déterminant une structure topologique de l'ensemble $\Omega(x, f)$ dont nous basant sur les résultats d'équicontinuité et sur les propriétés topologiques de l'ensemble ω-limite pour un système dynamique topologique défini sur un intervalle, un cercle et graphe.

3.2.2.1 Cas d'intervalle

Proposition 3.2.0.5. *Soit (I, f) un système dynamique topologique équicontinu sur un intervalle I. Alors, pour tout $x \in I, \Omega(x, f)$ est soit*

1. *une orbite périodique.*
2. *un ensemble de Cantor.*

Démonstration Nous savons que (I, f) est équicontinu. Alors d'après Proposition 2.1.8.1, pour tout $x \in I$, l'ensemble $\omega_f(x)$ est minimal. D'après Théorème 2.1.9.1, pour tout $x \in I$, $\omega_f(x) = \Omega(x, f)$. Donc, par la minimalité sur l'intervalle Théorème 3.1.4.1, l'ensemble $\Omega(x, f)$ est soit une orbite périodique soit un ensemble de Cantor.

Proposition 3.2.0.6. *Soit (I, f) un système dynamique topologique inversible équicontinu sur un intervalle I. Alors, pour tout $x \in I, \Omega(x, f)$ est une orbite finie.*

Démonstration Nous savons que (I, f) est équicontinu. Alors d'après Proposition 2.1.8.1, pour tout $x \in I, \omega_f(x)$ est un ensemble minimal. D'après Théorème 2.1.9.1, pour tout $x \in I$ $\omega_f(x) = \Omega(x, f)$. Donc, par la minimalité sur l'intervalle Théorème 3.1.4.2 l'ensemble $\Omega(x, f)$ est une orbite finie.

3.2.2.2 Cas de Cerle

Proposition 3.2.0.7. *Soit (S^1, f) un système dynamique topologique équicontinu sur le cercle S^1. Alors, pour tout $x \in S^1, \Omega(x, f)$ est soit*

1. *une orbite périodique.*

2. *un ensemble de Cantor.*

Démonstration Nous savons que (S^1, f) est équicontinu. Alors, d'après Proposition 2.1.8.1, pour tout $x \in S^1$, $\omega_f(x)$ est un ensemble minimal. D'après Théorème 2.1.9.1, pour tout $x \in S^1$ $\omega_f(x) = \Omega(x, f)$. Donc, par la minimalité sur le cercle Théorème 3.1.4.3, l'ensemble $\Omega(x, f)$ est soit une orbite périodique soit un ensemble de Cantor.

Proposition 3.2.0.8. *Soit (S^1, f) un système dynamique topologique inversible équicontinu sur le cercle S^1. Alors, on a deux possibilités :*

1. *si $P(f) \neq \emptyset$, alors pour tout $x \in S^1, \Omega(x, f)$ est une orbite finie.*

2. *si $P(f) = \emptyset$, alors, pour tout $x \in S^1$, $\Omega(x, f)$ est soit un un ensemble de Cantor, soit égale à S^1.*

Démonstration Nous savons que (S^1, f) est équicontinu. Alors d'après Proposition 2.1.8.1, pour tout $x \in S^1$, $\omega_f(x)$ est un ensemble minimal. D'après Théorème 2.1.9.1, pour tout $x \in I$ $\omega_f(x) = \Omega(x, f)$. Donc, par la minimalité sur le cercle Théorème 3.1.4.4, on a deux cas à discuter. Si $P(f) \neq \emptyset, \Omega(x, f)$ est une orbite finie. Si $P(f) = \emptyset, \Omega(x, f)$ est un ensemble de Cantor ou $\Omega(x, f) = S^1$. •

3.2.2.3 Cas de Graphe

Proposition 3.2.0.9. *Soit (G, f) un système dynamique topologique équicontinu sur un graphe $G \neq S^1$. Alors, pour tout $x \in G$, $\Omega(x, f)$ est soit*

1. *un ensemble fini (en fait, une orbite périodique).*

2. *un ensemble de Cantor.*

3. *la réunion d'un nombre fini de cercles, deux à deux disjoints.*

Démonstration Nous savons que (G, f) est équicontinu. Alors d'après Proposition 2.1.8.1, pour tout $x \in G$, $\omega_f(x)$ est un ensemble minimal. D'après Théorème 2.1.9.1, pour tout $x \in G$ $\omega_f(x) = \Omega(x, f)$. Donc, par la minimalité sur le graphe Théorème 3.1.4.5, l'ensemble $\Omega(x, f)$ est un ensemble fini, un ensemble de Cantor ou la réunion d'un nombre fini de cercles deux à deux disjoints.

Proposition 3.2.0.10. *Soit (G, f) un système dynamique topologique inversible équicontinu sur un graphe $G \neq S^1$. Alors, pour tout $x \in G$, $\Omega(x, f)$ est un ensemble fini (en fait, une orbite périodique).*

Démonstration Nous savons que (G, f) est équicontinu. Alors d'après Proposition 2.1.8.1, pour tout $x \in G$, $\omega_f(x)$ est un ensemble minimal. D'après Théorème 2.1.9.1, pour tout $x \in G$ $\omega_f(x) = \Omega(x, f)$. Donc, par la minimalité sur le graphe Théorème 3.1.4.6, l'ensemble $\Omega(x, f)$ est un ensemble fini. •

Chapitre 4

ÉQUICONTINUITÉ SUR UNE DENDRITE

Sommaire

4.1 Propiétés d'un système dynamique topologique sur une dendrite 60

4.1.1 Dendrite 60

4.1.2 Propriétés topologiques 63

4.1.3 Propriétés dynamiques 65

4.2 Équicontinuité et structure topologique de l'ensemble $\Omega(x, f)$ 66

4.2.1 Équicontinuité 66

4.2.2 Structure topologique de l'ensemble $\Omega(x, f)$ 71

Dans ce chapitre, nous rappelons les définitions ainsi que quelques propriétés topologiques et dynamiques pour un système dynamique topologique défini sur une dendrite. Puis, une deuxième partie sera consacré à l'équicontinuité et la structure topologique de l'ensemble $\Omega(x, f)$.

4.1 Propiétés d'un système dynamique topologique sur une dendrite

4.1.1 Dendrite

Définition 4.1.1. *Une **Dendrite** est un continuum localement connexe qui ne contient pas de cercles.*

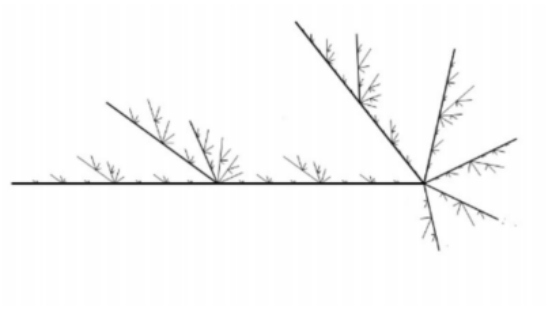

FIGURE 4.1 – Dendrite

Définition 4.1.2. *Soit D une dendrite et $x \in D$. Le nombre de composantes connexes de $D \backslash \{x\}$ est appelé ordre du point x dans D et est noté $ord(x, D)$.*

Définition 4.1.3. *Soient D une dendrite et x un point de D. Alors*

1. *Si $ord(x, D) = 1$, x est dit point d'extrémité. Nous notons par $E(D)$ l'ensemble des points d'extrémités de D.*

2. *Si $ord(x, D) = 2$, x est dit point de coupure.*

3. *Si $ord(x, D) \geq 3$, x est dit point de branchement. Nous notons par $B(D)$ l'ensemble des points de branchement de D.*

Deux points distincts x et y dans une dendrite D sont reliés par un unique arc qu'on note par $[x, y]$. Nous noterons aussi $[x, y) = [x, y]\backslash\{y\}, (x, y] = [x, y]\backslash\{x\}$ et $(x, y) = [x, y]\backslash\{x, y\}$.

Remarque 4.1.3.1.

- *Un arbre est une dendrite avec un ensemble de points d'extrémités fini (i.e $\sharp E(x, D) < \infty$).*
- *L'union de deux dendrites n'est pas une dendrite.*

Proposition 4.1.3.1. *[35] Tout sous-ensemble connexe d'une dendrite est connexe par arc. En particulier, toute dendrite est connexe par arc.*

Proposition 4.1.3.2. *Soient D une dendrite et Y un sous-ensemble non vide de D qui vérifie $Y \cap E(D) = \emptyset$. Alors, $D\backslash Y$ n'est pas connexe.*

Théorème 4.1.3.1. *([35], Dendrite universelle de Wazewski) Il existe une dendrite D_w de $\mathbb{R}^2$ qui contient une copie de l'homéomorphisme de n'importe quelle dendrite. En particulier tout dendrite de $\mathbb{R}$ est intégré.*

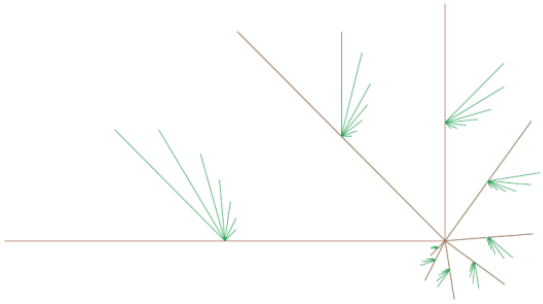

FIGURE 4.2 – Dendrite universelle de Wazewski

Pour la démonstration de Théorème 4.1.3.1, nous sommes besoin d'introduire le résultat de Charatonik [21] suivant

Lemme 4.1.4. *[21] Toutes deux images ouverts de dendrite de Wazewski sont homéomorphes.*

Démonstration (Démonstration de Théorème 4.1.3.1) L'existence de D_w est d'aprés la construction de Nadler dans [35]. Puis le Lemme 4.1.4 donne que

D_w contient une copie de l'homéomorphisme de n'importe quelle dendrite. Enfin puisque la construction se fait sur le plan, alors, D_w est intégré.

Théorème 4.1.4.1. *[35] Un continuum D est une dendrite si et seulement si pour tous Y, Z deux sous-ensembles connexes de D, $Y \cap Z$ est connexe.*

Corollaire 4.1.4.1. *[35] Toute dendrite est uniquement connexe par arc : c'est-à-dire, pour tous deux points distincts x, y d'une dendrite D il existe un unique arc A dans D qui relie x et y.*

Proposition 4.1.4.1. *[35] Tout sous continuum d'une dendrite D est une dendrite.*

Définition 4.1.5. *(Dendrite G_3) Une dendrite de Gehmann noté G_3 est l'unique dendrite dont l'ensemble $E(G_3)$ est homéomorphe à l'ensemble de Cantor et dont les points de branchement sont tous d'ordre 3.*

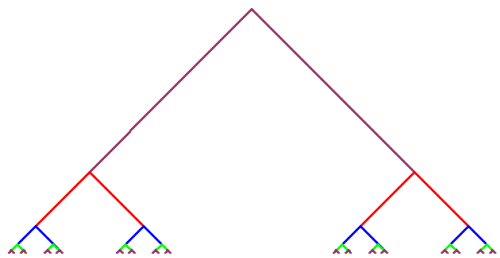

FIGURE 4.3 – Dendrite de Gehman G3

Dans une Dendrite, nous avons les propriétés suivantes.

Proposition 4.1.5.1. *([5]) Soit D une dendrite dont l'ensemble des points d'extrémités $E(D)$ n'est pas dénombrable. Alors D contient une sous dendrite homéomorphe a la dendrite de Gehman G_3.*

Théorème 4.1.5.1. *([35]) L'ensemble des points de branchement d'une dendrite est dénombrable.*

Proposition 4.1.5.2. *Soit D une dendrite. Si $E(D)$ est fermé, alors $B(D)$ est discret.*

Théorème 4.1.5.2. *([35]) Soit D une dendrite non dégénérée (i.e. non réduit à un point). Alors, D peut s'ecrire comme suit*

$$D = (\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cup (E(D))$$

où chaque A_n est un arc d'extrémités p_n et q_n tel que $A_{j+1} \bigcap (\bigcup_{n=1}^{j} A_n) = \{p_{j+1}\}$,pour tout $j = 1, 2, ...$ et $\lim_{n\to\infty} diam(A_n) = 0$.

Théorème 4.1.5.3. *([29]) Toute dendrite est une rétraction absolue.*

Proposition 4.1.5.3. *([35]) Soient D une dendrite et Y un sous continuum de D. Il existe une retraction $r_Y : Y \to D$ tels que, pour tout $x \in D\backslash Y$, il existe un unique point $r_Y(x) \in Y$ qui est un point de tout arc dans D de x vers tout point de Y.*

Corollaire 4.1.5.1. *[35] Soit D une dendrite. Alors pour tous $x \neq y \in D$, il existe $\epsilon > 0$ et un arc $A \subset (x, y)$ tel que pour tous $z_1 \in B(x, \epsilon), z_2 \in B(y, \epsilon)$ nous avons $A \subset [z_1, z_2]$.*

Proposition 4.1.5.4. *Soient D une dendrite et d une métrique sur D. Si $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de sous ensembles connexes deux à deux disjoints de D, alors nous avons*

$$\lim_{n\to\infty} diam(C_n) = 0.$$

Démonstration Supposons qu'il existe une suite infinie de sous ensembles connexes deux à deux disjoints $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\epsilon > 0$ tel que pour tout $n \geq 1, diam(C_n) > \epsilon$. C'est-à-dire que pour tout $n \geq 1$, il existent a_n, b_n dans C_n tel que $d(a_n, b_n) > \epsilon$. Nous avons X compact donc nous pouvons supposer que a_n converge vers a et b_n converge vers b avec $a \neq b$. D'aprés Corollaire 4.1.5.1, il existe $n_0 > 0$ et un arc $K \subset (a, b)$, tel que pour tout $n \geq n_0$ nous avons $K \subset [a_n, b_n]$. Or nous avons que $[a_n, b_n] \subset C_n$ alors $K \subset C_n$ ce qui est contradictoire. •

4.1.2 Propriétés topologiques

4.1.2.1 Minimalité

Théorème 4.1.5.4. *[32] Soient (D, f) un système dynamique topologique défini sur une dendrite D et $M \subset D$ un ensemble minimal. Alors, M est*

1. *une orbite finie si $E(D)$ est dénombrable,*

2. *une orbite finie ou un ensemble de Cantor contenu dans $E(D)$ si $E(D)$ est fermé.*

Théorème 4.1.5.5. *[10] Soient (D, f) un système dynamique topologique défini sur une dendrite D et $M \subset D$ un ensemble minimal. Alors M, est*

1. *un ensemble fini (en fait, c'est une orbite périodique de f),*

2. *un ensemble partout dense parfait avec un nombre non dénombrable de composantes, au plus un nombre dénombrable entre eux étant non dégénéré (c-à-d des dendrites).*

D'autre part si $M \subset D$ est un ensemble fini ou un ensemble de Cantor, alors, M est un ensemble minimal.

Théorème 4.1.5.6. *[37] Soient (D, f) un système dynamique topologique inversible défini sur une dendrite D et $M \subset D$ un ensemble minimal. Alors, M est*

1. *un ensemble fini,*

2. *un ensemble de Cantor,*

3. *un cercle.*

4.1.2.2 Ensemble ω-limite

Théorème 4.1.5.7. *([37]) Soit (D, f) un système dynamique topologique inversible. Alors, pour tout $x \in D$ on a*

(1) $\omega_f(x)$ est un ensemble minimal.

(2) $\omega_f(x) \subset \overline{P(f)}$.

Corollaire 4.1.5.2. *([37] Soit (D, f) un système dynamique topologique inversible. Alors, pour tout $x \in D, \omega_f(x)$ est soit un ensemble fini soit un ensemble de Cantor ou un cercle.*

Proposition 4.1.5.5. *([36]) Soit (D, f) un système dynamique topologique inversible. Soient $a \in Fix(f)$ et $x \in D \backslash Fix(f)$ tel que $\omega_f(x)$ contient a. Alors, $\omega_f(x) = \{a\}$.*

4.1.3 Propriétés dynamiques

4.1.3.1 Récurrence et périodicité

Théorème 4.1.5.8. *[6] Soit (D, f) un système dynamique topologique inversible défini sur une dendrite D. Alors,*

$$\Lambda(f) = R(f) = AP(f) = QP(f) = \overline{P(f)}.$$

En particulier, $\omega_f(x) \subset \overline{P(f)}$ est un ensemble minimal pour tout $x \in D$.

Comme conséquence, nous obtenons.

Théorème 4.1.5.9. *[6] Soit (D, f), un système dynamique topologique inversible défini sur une dendrite D. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) $R(f) = D$.

(ii) $\overline{R(f)} = D$.

(iii) Tout point de coupure est un point périodique, C'est-à-dire, $D \backslash B(D) \subset P(f)$.

4.1.3.2 Récurrence point par point

Théorème 4.1.5.10. *[7] Soit (D, f) un système dynamique topologique défini sur une dendrite D. Alors, on a l'équivalence suivante.*

1. $R(f) = D$.
2. *f est un homéomorphisme tel que tout point de coupure est périodique.*

Théorème 4.1.5.11. *[37] Soit (D, f) un système dynamique topologique défini sur une dendrite D. Alors, on a les équivalences suivantes.*

1. *$R(f) = D$.*

2. *f est quasi périodique.*

3. *tout point de coupure est un point périodique.*

4.2 Équicontinuité et structure topologique de l'ensemble $\Omega(x, f)$

4.2.1 Équicontinuité

Lemme 4.2.1. *[19] Soit (D, f) un système dynamique topologique défini sur une dendrite D. Si $\omega_f(x) = \Omega(x, f)$ pour tout $x \in D$, alors, (D, f) est équicontinu.*

Proposition 4.2.1.1. *[19] Soit (D, f) un système dynamique topologique défini sur une dendrite D. Si $\omega_f(x) = \Omega(x, f)$, pour tout $x \in D$, alors, $\overline{P(f)} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(D)$.*

Théorème 4.2.1.1. *[19] Soit (D, f) un système dynamique topologique défini sur une dendrite D. Alors on les équivalences suivantes.*

1. *ω_f est continue et $\overline{P(f)} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(D)$,*

2. *$\omega_f(x) = \Omega(x, f)$, pour tout $x \in D$,*

3. *(D, f) est équicontinu.*

Démonstration Par Proposition 2.1.7.3 et Lemme 4.2.1 nous obtenons l'équivalence (2) $\Leftrightarrow$ (3). Maintenant d'après Théorème 2.1.7.3 et Proposition 4.2.1.1 nous avons (2) $\Rightarrow$ (1). Et d'après Lemme 4.2.1 nous avons (1) $\Rightarrow$ (2). •

Le théorème suivant donne une condition nécessaire pour qu'on ait une équicontinuité sur un système dynamique topologique défini sur une dendrite.

Théorème 4.2.1.2. *([19]) Soit (D, f) un système dynamique topologique défini sur une dendrite D. Si $P(f) = D$ alors, (D, f) est équicontinu.*

Démonstration D'après Théorème 4.2.1.1, il suffit de montrer que $\omega_f(x) = \Omega(x, f)$, pour tout $x \in D$. Soit $x \in D$ et supposons que $\Omega(x, f)\backslash\omega_f(x)$, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ et une suite croissante $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ tel que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim_{n\to\infty} f^{k_n}(x_n) = y$.
Comme $x \in P(f)$, alors, $\omega_f(x) = Orb_f(x) = \{x, f(x), ..., f^{m-1}(x)\}$ pour $m \in \mathbb{N}$. Sans perte de généralité, nous supposons que $k_n \equiv 1 \ \ mod(m)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $c \in (f(x), y)$. Puisque D est une dendrite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $c \in [f(x), f^{k_n}(x_n)]$, pour tout $n \geq n_0$. Notons que $[f(x), f^{k_{n_0}}(x_{n_0})] \subset f^{k_{n_0}}([x, x_{n_0}]$. Donc, il existe $z_0 \in [x, x_{n_0}]$ tel que $f^{k_{n_0}}(z_0) = c$. En vue de $z_0 \neq x$, il existe $n_1 > n_0$ tel que $z_0 \notin [x, x_{n_1}]$. Maintenant, comme $[f(x), f^{k_{n_1}}(x_{n_1})] \subset f^{k_{n_1}}([x, x_{n_1}])$ et donc, il existe $z_1 \in [x, x_{n_1}]$ tel que $f^{k_{n_1}}(z_1) = c$. Par induction nous construisons un ensemble infini $\{z_i, i \in \mathbb{N}\}$ tel que $c \in Orb_f(z_i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Ceci contredit le faite que $z_i \in P(f)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Donc $\omega_f(x) = \Omega(x, f)$. •

Pour une dendrite D avec $Card(E(D)) < c$, Sun et al dans [45] ont montré les résultats suivants.

Proposition 4.2.1.2. *[45] Soit (D, f) un système dynamique topologique défini sur une dendrite D. Si $\bigcap_{k=1}^{\infty} f^k(D) = P(f)$ et $\omega_{f^n}(x) = \Omega(x, f^n)$ pour tout $x \in D$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors, (D, f) est équicontinu.*

Proposition 4.2.1.3. *[45] Soit (D, f) un système dynamique topologique défini sur une dendrite D avec $\omega_f(x) = \Omega(x, f)$ pour tout $x \in D$. Alors $\bigcap_{k=1}^{\infty} f^k(D) = R(f)$ et $\omega_f(x)$ est minimal pour tout $x \in D$. Si $Card(E(D)) < c$ et $\omega_{f^n}(x) = \Omega(x, f^n)$ pour tout $x \in D$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors, (D, f) est équicontinu.*

Théorème 4.2.1.3. *[45] Soit (D, d) un système dynamique topologique défini sur une dendrite D avec $Card(E(D)) < c$. Alors, on a l'équivalence suivante.*

1. *(D, f) est équicontinu.*

2. *$\omega_{f^n}(x) = \Omega(x, f^n)$ pour tout $x \in D$ et tout $n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration "(1) $\Rightarrow$ (2)" D'après Proposition 2.1.7.3.
"(2) $\Rightarrow$ (1)" D'après Proposition 4.2.1.2 et Proposition 4.2.1.3.

Dans [47], Sun et al. ont étudié l'équicontinuité pour un système dynamique topologique défini sur une dendrite D avec un nombre fini de points de branchement et ont montré les résultats suivants :

Proposition 4.2.1.4. *[47] Soit (D, f) un système dynamique topologique défini sur une dendrite D tel que $Card(B(D)) < \infty$.Si $\Omega(x, f) = \omega_f(x)$ pour tout $x \in D$ alors, (D, f) est équicontinu et $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(D) = P(f)$.*

Proposition 4.2.1.5. *[47] Soit (D, f) un système dynamique topologique défini sur une dendrite D. Si $\Omega(x, f)$ est une orbite périodique pour tout $x \in D$, alors, (D, f) est équicontinu.*

Théorème 4.2.1.4. *[47] Soit (D, f) un système dynamique topologique défini sur une dendrite D avec $Card(B(D)) < \infty$. Alors, on a les équivalences suivantes.*

1. *(D, f) est équicontinu.*
2. *$\omega_f(x) = \Omega(x, f)$ pour tout $x \in D$.*
3. *$\cap_{n=1}^{\infty} f^n(D) = P(f)$, et $\omega_f(x)$ est une orbite périodique pour tout $x \in D$ et l'application $h : x \mapsto \omega_f(x)$ est continue ;*
4. *$\Omega(x, f)$ est une orbite périodique pour tout $x \in D$.*

Démonstration

(1) $\Leftrightarrow$ (2) Par Théorème 2.1.7.2 et Proposition 4.2.1.4.

(2) $\Rightarrow$ (3) Si $\omega_f(x) = \Omega(x, f)$ pour tout $x \in D$, alors d'après Proposition 4.2.1.4 (D, f) est équicontinu et $\omega_f(x) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(D) = P(f)$. De plus, $\omega_f(x)$ est minimal pour tout $x \in D$. Donc $\omega_f(x)$ est une orbite périodique. Comme (D, f) est équicontinu, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $0 < \delta \leq \epsilon$ tel que $d(f^m(x), f^m(y)) < \frac{\epsilon}{3}$ pour tout $x, y \in D$ avec $d(x, y) < \delta$ et tout $m \in \mathbb{N}$.
Pour tout $a \in \omega_f(x)$, il existe $b \in \omega_f(y)$ et $r_k \to \infty$ satisfaisant $f^{r_k}(x) \to a$ et $f^{r_k}(y) \to b$. Donc, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$

$$d(f^{r_k}(x), a) < \frac{\epsilon}{3}, \qquad d(f^{r_k}(y), b) < \frac{\epsilon}{3} \qquad et \qquad d(f^{r_k}(x), f^{r_k}(y)) < \frac{\epsilon}{3}$$

D'où

$$d(a,b) < d(f^{r_k}(x),a) + d(f^{r_k}(y),b) + d(f^{r_k}(x),f^{r_k}(y)) < \epsilon.$$

Il s'ensuit que $\omega_f(x) \subset B_d(\epsilon, \omega_f(y))$. De même, nous pouvons montrer que $\omega_f(y) \subset B_d(\epsilon, \omega_f(x))$. Donc, $H_d(\omega_f(x), \omega_f(y)) < \epsilon$. Ainsi h est continue.

(3) $\Rightarrow$ (2) Supposons que (3) est vérifiée et supposons, au contraire, que $\omega_f(x) \neq \Omega(x,f)$ pour $x \in D$. Soit $a \in \Omega(x,f) \backslash \omega_f(x)$. Alors, il existe $x_n \in D$ avec $x_n \to x$ et $k_n \to \infty$ tel que $f^{k_n}(x_n) \to a \in \Omega(x,f)$ et $f^{k_n}(x) \to b \in \omega_f(x) \subset \Omega(x,f)$ avec $d(a,b) > 0$. Nous avons $a, b \in \Omega(x,f) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(D) = P(f)$ et $Orb_f(a) \bigcap Orb_f(b) = \emptyset$. Comme h est continue, pour $\epsilon = \frac{H_d(Orb_f(a), Orb_f(b))}{6}$, il existe $0 < \delta \leq \epsilon$ tel que, si $d(u,v) < \delta, H_d(\omega_f(u), \omega_f(v)) < \frac{\epsilon}{3}$. Donc, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$d(f^{k_n}(x_n), a) < \delta, \qquad d(f^{k_n}(x), b) < \delta, \qquad et \qquad d(x_n, x) < \delta.$$

Choisissons $n = N+1$, nous avons

$$H_d(\omega_f(f^{k_{N+1}}(x_{N+1}), \omega_f(a)) < \frac{\epsilon}{3}.$$

$$H_d(\omega(f^{k_{N+1}}(x_{N+1}), f), \omega_f(b)) < \frac{\epsilon}{3}.$$

$$H_d(\omega_f(x_{N+1}), \omega_f(x)) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Par suite,

$$H_d(\omega_f(a), \omega_f(b)) < \epsilon.$$

Ainsi

$$H_d(Orb_f(a), Orb_f(b)) = H_d(\omega_f(a), \omega_f(b)) < \epsilon = \frac{H_d(Orb_f(a), Orb_f(b))}{6}.$$

Ce qui est absurde.

(2) $\Rightarrow$ (4) Supposons que (2) est vérifiée. Il s'ensuit, d'après Proposition 4.2.1.4 que $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(D) = P(f)$ et $\omega_f(x) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(D)$ est minimal pour tout $x \in D$. Donc $\omega_f(x)$ est une orbite périodique. Ainsi, $\Omega(x,f)$ est une orbite périodique.

(4) $\Rightarrow$ (1) D'après Proposition 4.2.1.5. •

Dans [19], Camargo et al. ont étudié l'équicontinuité pour un système dynamique topologique défini sur une dendrite et ont montré les résultats suivants :

Proposition 4.2.1.6. *[19] Soit (D, f) un système dynamique topologique défini sur une dendrite D. Si pour tout $x \in D$, $\Omega(x, f)$ est totalement déconnecté, alors, (D, f) est équicontinu.*

Proposition 4.2.1.7. *[19] Soit (D, f) un système dynamique topologique défini sur une dendrite D. Si $\omega_f(x) = \Omega(x, f)$ alors, (D, f) est équicontinu.*

Théorème 4.2.1.5. *[19]Soit (D, f) un système dynamique topologique défini sur une dendrite D. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *(D, f) est équicontinu.*
2. *$x \mapsto \omega_f(x)$ est continue et $\overline{P(f)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(D)$.*
3. *$\omega_f(x) = \Omega(x, f)$ pour tout $x \in D$.*

Démonstration D'après Théorème 4.2.1.4, il suffit de montrer que $\omega_f(x) = \Omega(x, f)$ pour tout $x \in D$.
Soit $x \in D$ et supposons que $\Omega(x, f) \backslash \omega_f(x) \neq \emptyset$. Si $y \in \Omega(x, f) \backslash \omega_f(x)$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ et une suite décroissante $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ et $\lim_{n \to \infty} f^{k_n}(x_n) = y$. Comme $x \in P(f)$ alors, $\omega_f(x) = Orb_f(x) = \{x, f(x), ...f^{m-1}(x)\}$ pour $m \in \mathbb{N}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $k_n \equiv 1 \mod (n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $c \in (f(x), y)$. Comme D est une dendrite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $c \in [f(x), f^{k_n}(x_n)]$ pour tout $n \geq n_0$. Notons que $[f(x), f^{k_{n_0}}(x_{n_0})] \subset f^{k_{n_0}}([x, x_{n_0}]$. Donc, il existe $z_0 \in [x, x_{n_0}]$ tel que $f^{k_{n_0}}(z_0) = c$. Le fait que $z_0 \neq x$ entraine qu'il existe $n_1 > n_0$ tel que $z_0 \notin [x, x_{n_1}]$. Maintenant, comme $[f(x), f^{k_{n_1}}(x_{n_1})] \subset f^{k_{n_1}}([x, x_{n_1}])$, il existe $z_1 \in [x, x_{n_1}]$ tel que $f^{k_{n_1}}(z_1) = c$. Par récurrence, on peut construire un ensemble infini $\{z_i, i \in \mathbb{N}\}$ tel que $c \in Orb_f(z_i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Ce qui est contradictoire avec $z_i \in P(f)$. •

4.2.2 Structure topologique de l'ensemble $\Omega(x, f)$

Dans cette partie, nous interprétons nos résultats en déterminant une structure topologique de l'ensemble $\Omega(x, f)$ dont nous basant sur les résultats d'équicontinuité et sur les propriétés topologiques de l'ensemble ω-limite pour un système dynamique topologique défini sur une dendrite.

Théorème 4.2.1.6. *Soit (D, f) un système dynamique topologique équicontinu défini sur une dendrite D. Alors, pour tout $x \in D$ $\Omega(x, f)$ est soit*

1. *un ensemble fini (en fait c'est une orbite périodique de f),*
2. *un ensemble partout dense parfait avec un nombre non dénombrable de composantes, au plus un nombre dénombrable entre eux étant non dégénéré (c-à-d des dendrites).*

Démonstration Nous savons que (D, f) est équicontinu. Alors d'après Proposition 2.1.8.1, pour tout $x \in D$, $\omega_f(x)$ est un ensemble minimal. D'après Théorème 2.1.9.1, pour tout $x \in D$ $\omega_f(x) = \Omega(x, f)$. Donc, par la minimalité sur le dendrite Théorème 4.1.5.5, l'ensemble $\Omega(x, f)$ est soit un ensemble minimal (en fait une orbite périodique), ou un ensemble partout dense parfait avec un nombre non dénombrable de composantes, au plus un nombre dénombrable entre eux étant non dégénéré (c-à-d des dendrites). •

Théorème 4.2.1.7. *Soit (D, f) un système dynamique topologique équicontinu défini sur une dendrite D. Alors, pour tout $x \in D$, $\Omega(x, f)$ est soit*

1. *une orbite finie, si $E(D)$ est dénombrable,*
2. *une orbite finie ou un ensemble de Cantor contenu dans $E(D)$, si $E(D)$ fermé.*

Démonstration Nous savons que (D, f) est équicontinu. Alors d'après Proposition 2.1.8.1, pour tout $x \in D$, $\omega_f(x)$ est un ensemble minimal. D'après Théorème 2.1.9.1, pour tout $x \in D$ $\omega_f(x) = \Omega(x, f)$. Donc, par la minimalité sur la dendrite Théorème 4.1.5.4, l'ensemble $\Omega(x, f)$ est une orbite finie, si $E(D)$ est dénombrable. $\Omega(x, f)$ est une orbite finie ou un ensemble de Cantor, si $E(D)$ est fermé. •

Théorème 4.2.1.8. *Soit (D, f) un système dynamique topologique inversible équicontinu défini sur une dendrite D. Alors, pour tout $x \in D$ $\Omega(x, f)$ est*

1. *un ensemble fini,*
2. *un ensemble de Cantor,*
3. *un cercle.*

Démonstration Nous savons que (D, f) est équicontinu. Alors d'après Proposition 2.1.8.1, pour tout $x \in D$, $\omega_f(x)$ est un ensemble minimal. D'après Théorème 2.1.9.1, pour tout $x \in D$ $\omega_f(x) = \Omega(x, f)$. Donc, par la minimalité sur la dendrite Théorème 4.1.5.6, l'ensemble $\Omega(x, f)$ est un ensemble fini, ou un ensemble de Cantor ou un cercle.

Chapitre 5

ÉQUICONTINUITÉ SUR UNE DENDRITE LOCALE

Sommaire

5.1 Propriétés d'un système dynamique topologique sur une dendrite locale 74

5.1.1 Dendrite locale 74

5.1.2 Propriétés dynamiques 80

5.2 Équicontinuité et structure topologique de l'ensemble $\Omega(x, f)$ 82

5.2.1 Équicontinuité 82

5.2.2 Structure topologique de l'ensemble $\Omega(x, f)$ 84

Dans ce chapitre, nous rappelons les définitions ainsi que quelques propriétés topologiques et dynamiques pour un système dynamique topologique défini sur une dendrite locale. Puis, une deuxième partie pour l'équicontinuité et structure topologique de l'ensemble $\Omega(x, f)$.

5.1 Propriétés d'un système dynamique topologique sur une dendrite locale

5.1.1 Dendrite locale

Définition 5.1.1. *Un continuum X est dit* ***dendrite locale****, si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de x tel que $\overline{U} \cap X$ est une dendrite. D'autre part, une dendrite locale est un continuum localement connexe contenant un nombre fini de cercles.*

Remarque 5.1.1.1. *Par la Définition, nous remarquons que, chaque sous continuum d'une dendrite locale est une dendrite locale. Par suite, tout graphe et toute dendrite sont des dendrites locales.*

Définition 5.1.2. *Soit L une dendrite locale*

- *Un point $x \in L$ est appelé point de branchement de L s'il existe une dendrite U qui est un voisinage fermé de x tel que x est un point de branchement de U (i.e. $U \backslash \{x\}$ admet plus que deux composantes connexes).*
  $\hookrightarrow$ *Nous notons par $B(L)$ l'ensemble des points de branchement de L.*

- *Un point $y \in L$ est un point d'extrémité de L s'il existe un voisinage U de L tel que U est un arc et $U \backslash \{y\}$ est connexe.*
  $\hookrightarrow$*Nous notons par $E(L)$ l'ensemble des points d'extrémités de L.*

- *Tout point $x \in L \backslash E(L)$ est appelé point de coupure.*

Pour tout arc I de L, nous notons $\gamma(I)$ l'ensemble des points d'extremités de I.

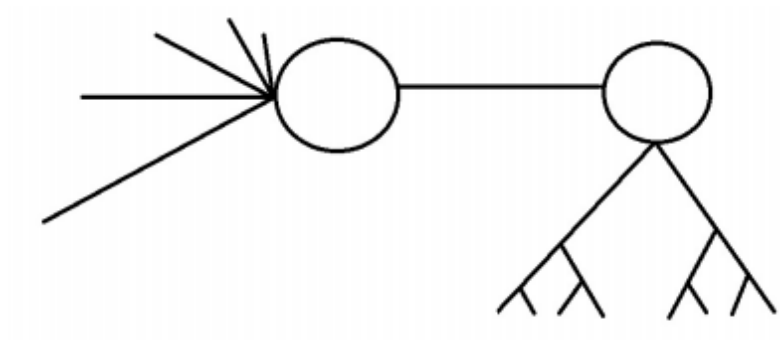

FIGURE 5.1 – Dendrite Locale

Notations

Soient L une dendrite locale et x, y deux points distincts de L. Alors x, y peuvent être joints par un nombre fini d'arcs $\gamma_i([x, y])$ pour tout $i \geq 1$. Ainsi nous avons

$$\gamma_i((x, y)) = \gamma_i([x, y]\backslash\{x, y\}, \gamma_i([x, y)) = \gamma_i([x, y]\backslash\{y\}), \gamma_i((x, y]) = \gamma_i([x, y]\backslash\{x\})$$

Proposition 5.1.2.1. *([2]) Soient L une dendrite locale et d une métrique sur L. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, tel que pour tous $x, y \in L$ avec $d(x, y) < \delta$ il existe un arc J d'éxtrémités x et y tel que $diam(J) < \epsilon$.*

Proposition 5.1.2.2. *([6]) Si $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de sous-ensembles connexes deux à deux disjoints dans une dendrite locale (L, d), alors,*

$$\lim_{n\to\infty} diam(C_n) = 0.$$

Lemme 5.1.3. *([1]) Soit Y un sous-continuum propre connexe par arc d'une dendrite locale L. Alors $\overline{C} \bigcap Y$ est réduit à un singleton, pour toute composante connexe C de $L\backslash Y$.*

Théorème 5.1.3.1. *([35]) Si L est une dendrite locale, il existe $\epsilon > 0$ tel que tout sous continuum Y avec $diam(Y) < \epsilon$ est une dendrite.*

Théorème 5.1.3.2. *([1]) Soit X un continuum localement connexe et ϵ la plus grande limite inférieure du diamètre des cercles contenus dans X. Si $\epsilon > 0$, alors, X est une dendrite locale.*

Théorème 5.1.3.3. *Soit (X, d) un espace métrique. Alors, nous avons les équivalences suivantes.*

(1) X est une dendrite locale.

(2) X est un continuum localement connexe qui contient au maximum un nombre fini des cercles.

(3) X est un continuum et est une réunion finie de dendrites : $X = \bigcup_{i=1}^{N} D_i$ et $D_i \cap D_j$ est fini pour tous $1 \leq i \neq j \leq N$.

Proposition 5.1.3.1. *Soient L une dendrite locale et A et B deux sous continuums de L, tel que $A \cap B$ est infini. Alors, $A \cap B$ contient un arc de L.*

Proposition 5.1.3.2. *Soient L une dendrite locale et Y un sous continuum de L disjoint de tout cercle. Soit Z une sous dendrite de Y. Si $Y \backslash Z$ est non connexe, alors, $L \backslash Z$ l'est.*

Proposition 5.1.3.3. *Soient L une dendrite locale et Y une sous dendrite locale de L contenant tout les cercles de L. Alors, tout arc I dans L d'extrémités $x, y \in Y$ est inclus dans Y.*

Proposition 5.1.3.4. *Soient L une dendrite locale et $a \neq b \in L$. Soient V, W respectivement deux voisinages disjoints connexes des points a et b. Alors pour tout $c \in V$, tout $d \in W$, et pour tout arc J reliant c et d, il existe un arc I reliant a et b tel que $I \cap J \neq \emptyset$.*

Proposition 5.1.3.5. *Soient L une dendrite locale et Y une sous-dendrite locale de L différente de L tel que tout arc J de L relie deux points distincts de Y. Alors, pour toute composante connexe C de $L \backslash Y$, $\overline{C} \cap Y$ est dégénéré (i.e réduit à un point).*

Lemme 5.1.4. *Si L est une dendrite locale avec $E(L)$ dénombrable, alors, chaque sous dendrite locale de L a un ensemble dénombrable de points d'extrémité.*

Proposition 5.1.4.1. *Soit L une dendrite locale. Alors, l'ensemble $B(L)$ est au plus dénombrable.*

Lemme 5.1.5. *Soit $f : L \to L$ une application sur une dendrite locale L. Si $L \neq S^1$, alors, f n'est pas minimale.*

Lemme 5.1.6. *Soit $f : L \to L$ une application monotone sur une dendrite locale L. Soit Y une sous-dendrite locale de L qui est strictement f-invariante ($f(Y) = Y$). Soient C_1, C_2 deux composantes connexes disjointes de $L \backslash Y$ telles que $\overline{C}_1 \cap Y = \{z_1\}$ et $\overline{C}_2 \cap Y = \{z_2\}$. Si $x \in C_1$ et $f^n(x) \in C_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $f^n(z_1) = z_2$.*

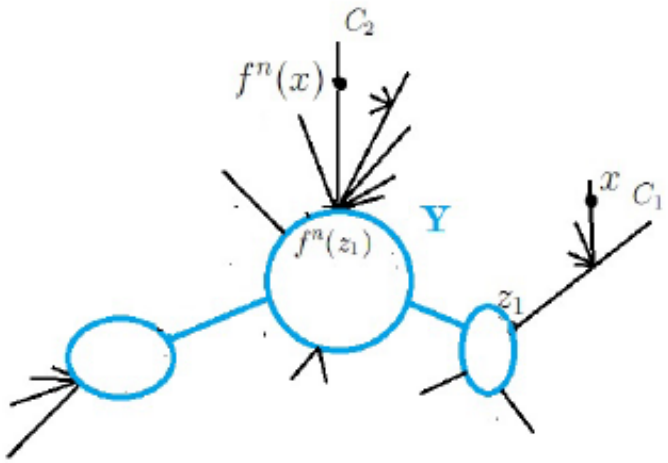

FIGURE 5.2 – Sous-Dendrite Locale

Dans toute la suite, nous admettons la construction suivante : Soient X une sous-dendrite locale et Y une sous-dendrite locale strictement f-invariante ($f(Y) = Y$) de X tel que tout arc J de X joignant deux points distincts de Y est inclus dans Y.
Soient $C_i,\ i \in \mathcal{A}$ des composantes connexes de $X \backslash Y$. Soit $X \backslash Y = \bigcup_{i \in \mathcal{A}} \overline{C}_i$, où $\mathcal{A}$ est un ensemble au plus dénombrable.
Nous avons pour tout $i \in \mathcal{A}, \overline{C}_i \cap Y$ est réduit à un point.
Maintenant, soit $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$. Pour tout $k \in \mathcal{A}'$, nous définissons le sou-ensemble C^k de X par $C^k = \bigcup_{i \in \mathcal{A}'_k} \overline{C}_i$, avec $\mathcal{A}'_k = \{i \in \mathcal{A}, \overline{C}_i \cap Y = \{z_k\}\}$.

Proposition 5.1.6.1. *[2] $(C^k)_{k\in\mathcal{A}'}$ sont des sous-dendrites locales deux à deux disjointes de X.*

Proposition 5.1.6.2. *[2] Soient L une dendrite locale et Y une sous-dendrite locale strictement f-invariante ($f(Y) = Y$) de X. Soit $f : L \to L$ monotone et soit $x \in L\backslash Y$ tel que $Orb_f(x) \cap C^k$ n'est pas réduite à un seul point pour $k \in \mathcal{A}'$. Nous avons les propriétés suivantes.*

1. *Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f^m(C^k) \subset C^k$.*
2. *Si C^k est disjoint avec tout cercle, alors $f^m_{|C^k}$ est une application de dendrite monotone.*

5.1.1.1 Minimalité

Théorème 5.1.6.1. *[42] Soit (L, f) un système dynamique topologique défini sur une dendrite L avec $E(L)$ dénombrable. Supposons que $R(f) = L$. Soit M un ensemble minimal de $L, f)$. Si $M \neq L$, alors, M est une orbite périodique.*

Théorème 5.1.6.2. *[42] Soit (L, f) un système dynamique topologique inversible défini sur une dendrite L. Soit M un ensemble minimal de (L, f). Alors, M vérifie l'une des assertions suivates.*

1. *un ensemble fini.*
2. *un ensemble de Cantor.*
3. *un cercle.*

5.1.1.2 Ensemble ω-limite d'une dendrite locale

Pour l'application monotone d'une dendrite locale Abdelli dans [1] a montré que pour L une dendrite locale, Y une sous dendrite locale et $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ un ensemble dénombrable le résultat suivant.

Proposition 5.1.6.3. *([1]) Soit (L, f) un système dynamique topologique inversible défini sur une dendrite locale L . Soit $x \in L\backslash Y$ tel que $Orb_f(x) \subset L\backslash Y$ et $\omega_f(x) \subset Y$. Alors, $\omega_f(x)$ est soit fini soit $\omega_f(x) = \omega_f(z_k)$ pour tout $k \in \mathcal{A}'$.*

Proposition 5.1.6.4. *([1]) Soit (L, f) un système dynamique topologique inversible défini sur une dendrite locale L. Si $P(f) \neq \emptyset$ alors $P(f) \bigcap \Gamma(L) \neq \emptyset$.*

Proposition 5.1.6.5. *Pour L une dendrite locale et Y une sous-dendrite locale de L, soit $f : L \to L$ monotone. Soit $x \in L \backslash Y$ tel que $Orb_f(x) \subset L \backslash Y$ et $\omega_f(x) \subset Y$. Alors $\omega_f(x)$ est soit fini, soit $\omega_f(x) = \omega_f(z_k)$ pour $k \in \mathcal{A}$. Avec $\mathcal{A}$ est un sous ensemble dénombrable.*

Théorème 5.1.6.3. *Soit (L, f) un système dynamique topologique inversible défini sur une dendrite locale L. Alors, pour tout $x \in L$, l'ensemble $\omega_f(x)$ est minimal et est soit*

1. *un ensemble fini.*
2. *un ensemble de Cantor.*
3. *un cercle.*

Démonstration Si $x \in X_\infty, \omega_f(x)$ est soit fini, soit un ensemble Cantor minimal, ou une cercle minimal.
Si $x \in L \backslash X_\infty$. Nous distinguons deux cas :
Cas1 $Orb_f(x) \cap X_\infty \neq \emptyset$. Donc, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n(x) \in X_\infty$. Et comme $\omega_f(f^n(x)) = \omega_f(x)$, nous avons donc notre résultat.
Cas2 Si $Orb_f(x) \cap X_\infty = \emptyset$. Comme $\omega_f(x) \subset X_\infty$, donc par Proposition 5.1.6.5, nous avons $\omega_f(x)$ est soit fini, soit $\omega_f(x) = \omega_f(z)$ pour certain $z \in X_\infty$. Or $\omega_f(z)$ est soit un ensemble Cantor minimal, soit une cercle minimale, alors nous avons de même pour $\omega_f(x)$. •

Corollaire 5.1.6.1. *Soit (L, f) un système dynamique topologique inversible défini sur une dendrite locale L avec f surjective. Supposons que $P(f) \neq \emptyset$. S'il existe $x \in L$ tel que $\omega_f(x) \bigcap \Gamma(L) \neq \emptyset$, alors, $\omega_f(x)$ est fini.*

Théorème 5.1.6.4. *([1]) Soit (L, f) un système dynamique topologique inversible défini sur une dendrite locale L. Alors, l'ensemble de tous les ω-limites muni de la distance de Hausdorff H_d est un compact.*

5.1.2 Propriétés dynamiques

5.1.2.1 Relation entre récurrence et périodicité

Théorème 5.1.6.5. *([2]) Soit (L, f) un système dynamique topologique inversible défini sur une dendrite locale L. Supposons que $P(f) \neq \emptyset$. Alors, pour tout $x \in L$, $\omega_f(x)$ est un ensemble minimal de f et $\omega_f(x) \subset \overline{P(f)}$.*

Théorème 5.1.6.6. *([2]) Soit (L, f) un système dynamique topologique inversible défini sur une dendrite locale L. Supposons que $P(f) \neq \emptyset$. Alors,*

$$\Lambda(f) = R(f) = AP(f) = RR(f) = \overline{P(f)}.$$

Théorème 5.1.6.7. *([2]) Soit (L, f) un système dynamique topologique inversible défini sur une dendrite locale L . Supposons que $P(f) = \emptyset$. Alors,*

$$\Lambda(f) = R(f) = AP(f).$$

5.1.2.2 Récurrence point par point

Théorème 5.1.6.8. *[2] Soit (L, f) un système dynamique topologique inversible défini sur une dendrite locale L. Supposons que $P(f) \neq \emptyset$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *$R(f) = L$.*
2. *f est quasipériodique.*
3. *tout point de contact est périodique.*

Théorème 5.1.6.9. *Soit (L, f) un système dynamique topologique inversible défini sur une dendrite locale L. Supposons que $P(f) = \emptyset$. Alors, nous avons les équivalences suivantes.*

(1) $R(f) = L$.

(2) f est quasipériodique.

(3) L est un cercle et f est topologiquement conjuguée à une rotation irrationnelle du cercle unité S^1.

Théorème 5.1.6.10. *[7] Soit (L, f) un système dynamique topologique défini sur une dendrite locale L. Alors, $R(f) = L$ si et seulement si f est un homéomorphisme tel que l'une de ces assertions est vérifiée :*

1. *Si f n'est pas minimale, alors tout point non extrèmité admet une orbite finie.*

2. *si f est minimale, alors $L = S^1$ et f est topologiquement conjuguée à une rotation irratinnelle.*

Proposition 5.1.6.6. *[7] Soit (L, f) un système dynamique topologique défini sur une dendrite locale L, avec $E(L)$ dénombrable. Alors, $R(f) = L$ si et seulement si l'une des assertions suivantes est vérifiée.*

1. *f est un homéomorphisme périodique point par point.*

2. *$L = S^1$ et f est topologiquement conjuguée à une rotation irrationnelle.*

Théorème 5.1.6.11. *[7] Soit (L, f) un système dynamique topologique défini sur une dendrite locale L. Alors, on a l'équivalence suivante.*

1. *$R(f) = L$.*

2. *L est un cercle et f est un homéomorphisme topologiquement conjugué à une rotation rationnelle du cercle unité S^1.*

Proposition 5.1.6.7. *[7] Soit (L, f) un système dynamique topologique défini sur une dendrite locale L. Si $R(f) = L$, alors, ω_f est une fonction continue.*

5.2 Équicontinuité et structure topologique de l'ensemble $\Omega(x, f)$

5.2.1 Équicontinuité

Dans cette partie, nous établissons quelques conditions équivalentes d'équicontinuité pour un système dynamique topologique défini sur une dendrite locale L, dont le comportement dynamique est à la fois important et intéressant dans l'étude des systèmes dynamiques discrets et de la théorie des continums.

Lemme 5.2.1. *Soient (L, f) un système dynamique topologique inversible défini sur une dendrite locale L et $p \in \mathbb{N}$. Alors, on a l'équivalence suivante.*

1. *(L, f) est équicontinu.*
2. *f^p est équicontinue.*

Proposition 5.2.1.1. *Soit (L, f) un système dynamique topologique défini sur une dendrite locale L. Si $R(f) = L$, alors, (L, f) est équicontinu.*

Pour la démonstration de cette proposition nous sommes besoin de lemme suivante

Lemme 5.2.2. *Soit (X, f) un système dynamique topologique. Considérons les assertions suivants*

1. *$R(f) = X$.*
2. *f est un homéomorphisme équicontinue.*

Alors (2) *implique* (1) *et si X est une dendrite, alors,* (1) *implique* (2).

Démonstration Par [[34], Lemma 2.4], un homéomorphisme d'un espace métrique compact est équicontinu si et seulement si elle est distale et localement presque périodique. La dernière condition implique que $R(f) = X$. Donc (2) implique (1).

D'après [[15], Théorème 1.18] on a f est un homéomorphisme et $X \backslash E(X) \subset P(f)$ donc, par l'équivalence entre les clauses (1) et (8) de [[43], Théorème 3.8], f est équicontinue .

Démonstration (Démonstration de Proposition 5.2.1.1) Supposons que $R(f) = L$. Par Corollaire 3.2.0.1 et Lemme 5.1.4 le résultat est vérifié quel que soit L un graphe ou une dendrite.

Supposons que L n'est ni un graphe ni une dendrite. Si f est minimale, alors, par Théorème 5.1.6.10, f est topologiquement conjuguée à une rotation irrationnelle. Or, toute rotation est une isometrie, donc elle est équicontinue. Ainsi, par Lemme 2.1.6 (L, f) est équicontinu.

Si f n'est pas minimale, alors, d'après Théorème 5.1.6.10, f est un homéomorphisme et chaque point non extrémité a une orbite finie. Par Lemme 5.1.5, $\Gamma(L)$ est invariant. Alors, par Corollaire 3.2.0.1, $f|_{\Gamma(L)}$ est équicontinue. Nous avons en outre $X \setminus \Gamma(L)$ est l'union des dendrites deux à deux disjointes (C^k) telles que $C^k \bigcap \Gamma(L) = \{z_k\}$. Comme $f^{n_0}(z_k) = z_k$, par Lemme 5.1.6 on a $f^{n_0}(C^k) = C^k$. Puisque $R(f) = R(f^{n_0}) = L$, alors, $f^{n_0} : C^k \to C^k$ est récurrent point par point. Ainsi, par Lemme 5.2.2 et Lemme 5.2.1, $f|_{C^k}$ est équicontinu pour chaque k. Ce qui implique que $f|_{L\backslash\Gamma(L)}$ est équicontinue ((C^k) sont des dendrites deux à deux disjointes). Par conséquent, (L, f) est équicontinu. •

Le théorème suivant est une généralisation du Théorème 3.2.0.27, du Théorème 3.2.0.25 et du Théorème 4.2.1.4.

Théorème 5.2.2.1. *Soit (L, f) un système dynamique topologique défini sur une dendrite locale L. Si $E(L)$ est dénombrable, alors, nous avons les équivalences suivantes.*

1. *(L, f) est équicontinu.*
2. *$\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(L) = R(f)$.*
3. *$f_{|\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(L)}$ est équicontinu et surjective.*
4. *$f_{|\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(L)}$ est un homéomorphisme périodique point par point ou topologiquement conjuguée à une rotation irrationnelle de S^1.*

5. $\omega_f(x) = \Omega(x, f)$ *pour tout* $x \in L$.

Démonstration Puisque L est compact et connexe, pour tout $n \in \mathbb{N}, f^n(L)$ est également compact et connexe. Soit $M(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(L)$. Il ressort de $L \supset f(L) \supset f^2(L) \supset \cdots$ que $M(f)$ est une sous-dendrite locale non vide de L. Par [19, Lemme 3.1], $f(M(f)) = M(f)$.
Puisque $M(f)$ est une sous-dendrite locale f-invariante, par Proposition 5.1.6.6, (2) est équivalent à (4).
Si $R(f) = M(f)$, alors, $f_{M(f)} : M(f) \to M(f)$ est récurrent point par point. Par conséquent, par Proposition 5.2.1.1, $f|_{M(f)}$ est équicontinu. D'où, (2) $\Rightarrow$ (3).
Par le Proposition 2.1.7.4, (1) implique (2).
(3) $\Rightarrow$ (1). Si $U = M(f) \cap \overline{L \setminus M(f)}$, alors, $U \subset E(M(f))$. Par Lemme 5.1.4, $E(M(f))$ est dénombrable. Puisque U est compact, il est fini. Evidemment, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, il existe $p_k \in \mathbb{N}$ tel que $f^{p_k}(L) \subset M(f) \cup B(U, 2^{-k})$. Puisque $f|_{M(f)}$ est équicontinu, par [30, Théorème 5.1], (L, f) est équicontinue.
Par Théorème 2.1.7.2, (1) $\Rightarrow$ (5).
Par Lemme 2.1.9, (5) $\Rightarrow$ (2). •

Par Théorème 5.2.2.1 et Lemme 5.1.5, nous obtenons le corollaire suivant.

Corollaire 5.2.2.1. *Sous les hypothèses du Théorème 5.2.2.1, si* $\omega_f(x) = \Omega(x, f)$ *pour tout* $x \in L$*, alors,* $\omega_{f^n}(x) = \Omega(x, f^n)$ *pour tout* $x \in L$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$.

L'exemple suivant montre que $E(L)$ est dénombrable et ne peut pas être retiré de l'hypothèse du Théorème 5.2.2.1.

Exemple 5.2.3. *Par [19, Exemple 5.4], il existe une dendrite* X *avec un ensemble non dénombrable de points d'extrémité et un homomorphisme* $f : X \to X$ *tel que* f *satisfait* (1) *et ne satisfait pas* (4).

5.2.2 Structure topologique de l'ensemble $\Omega(x, f)$

Dans cette partie, nous interprétons nos résultats en déterminant une structure topologique de l'ensemble $\Omega(x, f)$ dont nous basant sur les résultats d'équicontinuité et sur les propriétés topologiques de l'ensemble ω-limite pour un système dynamique topologique défini sur une dendrite locale.

Théorème 5.2.3.1. *Soit (L, f) un système dynamique topologique équicontinu défini sur une dendrite locale L. Alors, pour tout $x \in L$, l'ensemble $\Omega(x, f)$ est une orbite périodique.*

Démonstration Nous savons que (L, f) est équicontinu. Alors d'après la Proposition 2.1.8.1, pour tout $x \in L$, $\omega_f(x)$ est un ensemble minimal. D'après le Théorème 5.2.2.1, pour tout $x \in L$ on a $\omega_f(x) = \Omega(x, f)$. Donc, par la minimalité sur le dendrite locale, Théorème 5.1.6.1, l'ensemble $\Omega(x, f)$ est une orbite périodique. •

Théorème 5.2.3.2. *Soit (L, f) un système dynamique topologique inversible équicontinu défini sur une dendrite locale L. Alors, pour tout $x \in L$, l'ensemble $\Omega(x, f)$ vérifie l'une des trois propiétés suivantes.*

1. *un ensemble fini.*
2. *un ensemble de Cantor.*
3. *un cercle.*

Démonstration Nous savons que (L, f) est équicontinu. Alors d'après la Proposition 2.1.8.1, pour tout $x \in L$, $\omega_f(x)$ est un ensemble minimal. D'après le Théorème 5.2.2.1, pour tout $x \in L$ on a $\omega_f(x) = \Omega(x, f)$. Donc, par la minimalité sur le dendrite locale le Théorème 5.1.6.2, l'ensemble $\Omega(x, f)$ est un ensemble fini ou un ensemble de Cantor ou un cercle. •

Bibliographie

[1] H. Abdelli. ω-limit sets for monotone local dendrite maps. *Chaos, Solitons & Fractals*, 71 :66–72, 2015.

[2] H. Abdelli and H. Marzougui. Invariant sets for monotone local dendrite maps. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 26(09) :1650150, 2016.

[3] H. Abouda and I. Naghmouchi. Monotone maps on dendrites and their induced maps. *Topology and its Applications*, 204 :121–134, 2016.

[4] E. Akin, J. Auslander, and K. Berg. When is a transitive map chaotic. *Convergence in Ergodic Theory and Probability, Walter de Gruyter & Co*, pages 25–40, 1996.

[5] D. Arévalo, W. J. Charatonik, P. P. Covarrubias, and L. Simón. Dendrites with a closed set of end points. *Topology and its Applications*, 115(1) :1–17, 2001.

[6] G. Askri and I. Naghmouchi. Topological size of scrambled sets for local dendrite maps. *Topology and its Applications*, 164 :95–104, 2014.

[7] G. Askri and I. Naghmouchi. Pointwise recurrence on local dendrites. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, 19(1) :6, 2020.

[8] J. Auslander. *Minimal flows and their extensions*. Elsevier, 1988.

[9] F. Balibrea, R. Hric, and L. Snoha. Minimal sets on graphs and dendrites. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 13(07) :1721–1725, 2003.

[10] F. Balibrea, R. Hric, and L. Snoha. Minimal sets on graphs and dendrites. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 13(07) :1721–1725, 2003.

[11] D. Birkoff. Quelques théorèmes sur le mouvement des systèmes dynamiques. *Bulletin de la Société mathématique de France*, 40 :305–323, 1912.

[12] F. Blanchard, B. Host, and A. Maass. Topological complexity. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 20(3) :641–662, 2000.

[13] L. S. Block and W. A. Coppel. *Dynamics in one dimension.* Springer, 2006.

[14] A. Blokh. The set of all iterates is nowhere dense in c[0, 1],[0, 1]). *Transactions of the American Mathematical Society*, 333(2) :787–798, 1992.

[15] A. Blokh. Pointwise-recurrent maps on uniquely arcwise connected locally arcwise connected spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 143(9) :3985–4000, 2015.

[16] A. Blokh, A. Bruckner, P. Humke, and J. Smítal. The space of ω-limit sets of a continuous map of the interval. *Transactions of the American Mathematical Society*, 348(4) :1357–1372, 1996.

[17] A. Bruckner and T. Hu. Equicontinuity of iterates of an interval map. *Tamkang J. Math*, 21(3) :287–294, 1990.

[18] A. M. Bruckner and J. Smítal. The structure of ω-limit sets for continuous maps of the interval. *Mathematica Bohemica*, 117(1) :42–47, 1992.

[19] J. Camargo, M. Rincón, and C. Uzcátegui. Equicontinuity of maps on dendrites. *Chaos, Solitons & Fractals*, 126 :1–6, 2019.

[20] J. Cano. Common fixed points for a class of commuting mappings on an interval. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 86(2) :336–338, 1982.

[21] J. J. Charatonik. Open mappings of universal dendrites. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math*, 28 :9–10, 1980.

[22] J. De Vries. *Elements of topological dynamics*, volume 257. Springer Science & Business Media, 2013.

[23] A. El Kacimi, H. Hattab, and E. Salhi. Remarques sur certains groupes d'homéomorphismes d'espaces métriques. *JP J. Geom. Topol*, 4(3) :225–242, 2004.

[24] H. Furstenberg. *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*, volume 10. Princeton University Press, 2014.

[25] H. Hattab. Group of homeomorphisms of a metric space with finite orbits, jp. *Geo. Top*, 2 :115–128, 2004.

[26] H. Hawete. Relatively pointwise recurrent graph map. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 139(6) :2087–2092, 2011.

[27] R. Hric and M. Málek. ω-limit sets and distributional chaos on graphs. *Topology and its Applications*, 153(14) :2469–2475, 2006.

[28] J. Jachymski. Equivalent conditions involving common fixed points for maps on the unit interval. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 124(10) :3229–3233, 1996.

[29] K. Kuratowski. *Topology*, volume 2. Academic press, 1968.

[30] J.-H. Mai. The structure of equicontinuous maps. *Transactions of the American Mathematical Society*, 355(10) :4125–4136, 2003.

[31] J.-H. Mai. Pointwise-recurrent graph maps. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 25(2) :629–637, 2005.

[32] H. Marzougui and I. Naghmouchi. Minimal sets for group actions on dendrites. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 144(10) :4413–4425, 2016.

[33] D. Montgomery and L. Zippin. *Topological transformation groups*. Courier Dover Publications, 2018.

[34] C. Morales. Equicontinuity on semi-locally connected spaces. *Topology and its Applications*, 198 :101–106, 2016.

[35] S. Nadler. *Continuum theory : an introduction*. CRC Press, 1992.

[36] I. Naghmouchi. Dynamics of monotone graph, dendrite and dendroid maps. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 21(11) :3205–3215, 2011.

[37] I. Naghmouchi. Pointwise-recurrent dendrite maps. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 33(4) :1115–1123, 2013.

[38] D. Pokluda. Characterization of ω-limit sets of continuous maps of the circle. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 43(3) :575–581, 2002.

[39] D. Pokluda. On the transitive and ω -limit points of the continuous mappings of the circle. *Archivum Mathematicum*, 38(1) :49–52, 2002.

[40] K. B. Rejeb. Regular homeomorphisms of connected 3-manifolds. *Aequationes mathematicae*, 88(1-2) :39–48, 2014.

[41] K. B. Rejeb and E. Salhi. Characterizations of almost periodic homeomorphisms. *Topology and its Applications*, 158(16) :2094–2102, 2011.

[42] A. H. Salem and H. Hattab. Group action on local dendrites. *Topology and its Applications*, 247 :91–99, 2018.

[43] G. Su and B. Qin. Equicontinuous dendrite flows. *Journal of Difference Equations and Applications*, 25(12) :1744–1754, 2019.

[44] T. Sun. Equicontinuity of tree maps. *J. Math. Study*, 34 :125–130, 2001.

[45] T. Sun, Z. Chen, X. Liu, and H. Xi. Equicontinuity of dendrite maps. *Chaos, Solitons & Fractals*, 69 :10–13, 2014.

[46] T. Sun, Y. Zhang, and X. Zhang. Equicontinuity of a graph map. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 71(1) :61–67, 2005.

[47] T. X. Sun, G. W. Su, H. J. Xi, and X. Kong. Equicontinuity of maps on a dendrite with finite branch points. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 33(8) :1125–1130, 2017.

[48] A. Valaristos. Equicontinuity of iterates of circle maps. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 21, 1998.