



HAL
open science

Modélisation microscopique et macroscopique du trafic routier

Rim Fayad

► **To cite this version:**

Rim Fayad. Modélisation microscopique et macroscopique du trafic routier. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Normandie Université, 2021. Français. NNT : 2021NORMIR02 . tel-03335436

HAL Id: tel-03335436

<https://theses.hal.science/tel-03335436>

Submitted on 6 Sep 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Normandie Université

THESE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité Mathématique

Préparée au sein de l'Institut National des Sciences Appliquées de Rouen

Modélisation microscopique et macroscopique du trafic routier

Présentée et soutenue par
Rim FAYAD

Thèse soutenue publiquement le 12 janvier 2021
devant le jury composé de

M. Antonio SICONOLFI	Professeur, Università di Roma, La Sapienza	Rapporteur
Mme Nicoletta TCHOU	Maître de conférence, Université de Rennes 1	Rapporteur
M. Nicolas FORCADEL	Professeur, INSA de Rouen	Directeur de thèse
M. Hassan IBRAHIM	Professeur, Université Libanaise	Codirecteur de thèse
Mme Ioana CIOTIR	Maître de conférence, INSA de Rouen	Co-encadrante
M. Pierre Cardaliaguet	Professeur, Université de Paris Dauphine	Examineur
M. Ahmad EL HAJJ	Professeur, Université de technologie de Compiègne	Examineur
Mme Adina Raela	Maître de conférence, Université Denis Diderot	Examineur

Thèse dirigée par M. Nicolas FORCADEL, Laboratoire de Mathématiques de l'INSA de Rouen Normandie- LMI (EA 3226)

Abstract

This thesis deals with the modeling of local and non local Hamilton-Jacobi equations, and their applications to traffic flow. We are concerned with periodic and stochastic Hamilton-Jacobi equations given at two different scales: microscopic and macroscopic. In fact, at the microscopic scale, we describe the dynamic of each vehicle individually and at the macroscopic scale, we describe the traffic in terms of density. From a modeling point of view, the periodic setting means that all the vehicles are identical. This assumption allows to get very interesting results and to justify macroscopic models but it is not very realistic. In contrast to the periodic setting, we also investigate the stochastic setting in which the type of drivers are randomly distributed. In this work we use the theory of viscosity solution, and we derive macroscopic models from microscopic models. We present the specified periodic and stochastic homogenization of first order evolutive Hamilton-Jacobi equations posed on a junction. The first part of this work contains a periodic homogenization of a Hamilton-Jacobi equation posed on junction. In the second part, we prove a specified stochastic homogenization of first order evolutive Hamilton-Jacobi equations on a very simple junction, i.e the real line with a junction at the origin. The main difficulty and novelty of this work comes from the fact that the hamiltonian is not stationary ergodic. Finally, in the last part, we propose a non-local Hamilton-Jacobi model for traffic flow and we prove the existence and uniqueness of the solution of this model. We also propose a numerical scheme and we prove an error estimate between the continuous solution of this problem and the numerical one.

Résumé

Cette thèse porte sur la modélisation des équations d'Hamilton-Jacobi, locales et non locales, et leurs applications en trafic routier. On considère dans ce travail des équations d'Hamilton-Jacobi périodiques et stochastiques données à deux échelles différentes: microscopique et macroscopique. À l'échelle microscopique, on décrit la vitesse de chaque véhicule individuellement alors qu'à l'échelle macroscopique, on décrit le trafic en termes de densité. D'un point de vue modélisation, le cadre périodique signifie que tous les véhicules sont identiques. Cette hypothèse permet d'obtenir des résultats très intéressants et de justifier des modèles macroscopiques mais elle n'est pas très réaliste. Contrairement au cadre périodique, nous étudions également le cadre stochastique dans lequel le type de conducteurs est reparti de façon aléatoire. Dans ce travail, nous utilisons la théorie des solutions de viscosité et nous dérivons des modèles macroscopiques à partir de problèmes microscopiques. Nous présentons des résultats d'homogénéisation précisée des équations d'Hamilton-Jacobi périodiques et stochastiques, de premier ordre posées sur une jonction. La première partie de ce travail contient un résultat d'homogénéisation périodique d'une équation d'Hamilton-Jacobi posée sur une jonction. Dans la deuxième partie, nous démontrons un résultat d'homogénéisation stochastique précisée des équations de Hamilton-Jacobi posées sur la ligne réelle avec une jonction à l'origine. La difficulté principale et la nouveauté de ce travail vient du fait que l'hamiltonien n'est pas stationnaire ergodique. Enfin, dans la dernière partie, nous proposons un modèle du type Hamilton-Jacobi non local pour le trafic routier et nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution de ce modèle. Nous proposons également un schéma numérique et nous

prouvons une estimation d'erreur entre la solution continue de ce problème et la solution numérique.

Remerciements

À travers ces quelques mots, je souhaite remercier l'ensemble des personnes qui ont participé à l'élaboration de cette thèse.

Je tiens à remercier Nicolas FORCADEL, Professeur à l'INSA Rouen, qui m'a encadré tout au long de cette thèse et qui m'a fait partager ses brillantes intuitions. Qu'il soit aussi remercié pour sa gentillesse, sa disponibilité permanente et pour les nombreux encouragements qu'il m'a prodigués. Ce fut un réel plaisir de travailler sous sa direction sur des sujets complexes et variés. Je tiens également à remercier mon co-directeur de thèse Hassan IBRAHIM, Professeur à l'Université Libanaise, et ma co-encadrante Ioana CIOTIR, Maître de conférence à l'INSA Rouen, pour toute leur aide. Je suis ravie d'avoir travaillé avec eux car, en plus de leur soutien scientifique, ils ont toujours été là pour me soutenir et me conseiller lors du développement de cette thèse.

J'adresse tous mes remerciements à Monsieur Antonio SICONOLFI, Professeur à Université di Roma, ainsi qu'à Madame Nicoletta TCHOU, Maître de conférence à l'université de Rennes 1, de l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être rapporteurs de cette thèse. Leurs précieux conseils ont permis d'améliorer ce manuscrit. Je remercie également les examinateurs qui m'ont fait l'honneur de participer à mon jury: M. Pierre CARDALIAGUET, qui nous a aidés avec sa participation scientifique, ainsi que le temps qu'il a consacré à mes travaux dans le cadre stochastique, M. Ahamad EL HAJJ et Mme Adina RAELA. Je suis reconnaissante aux M. Ahmad EL HAJJ et M. Olivier GUIBÉ qui m'ont fait l'honneur de participer à mon jury de comité de suivi.

J'adresse tous mes remerciements aux directeurs du laboratoire de mathématiques de l'INSA Rouen, Nicolas FORCADEL et Christian GOUT et à l'ensemble des membres du laboratoire pour leur accueil, leur disponibilité et leur soutien. Je voudrais remercier particulièrement Antoine TONNOIR qui m'a aidé dans la partie numérique de mon travail.

Par ailleurs, je tiens à remercier tous les membres du laboratoire de mathématiques de l'Université libanaise pour leur accueil chaleureux au sein du laboratoire.

D'un autre côté, je suis reconnaissante envers l'équipe pédagogique du premier cycle et de GM qui a rendu mon expérience d'enseignement très enrichissante.

Pour finir, je tiens à remercier ma famille, mes parents, mon frère, mes soeurs, mon mari et mon petit bébé pour leur soutien inconditionnel, leurs encouragements et leur positivité. Ils ont participé plus qu'ils ne le croient à l'aboutissement de cette thèse et pour cela je leur témoigne ma plus grande affection et toute ma reconnaissance.

Contents

Abstract	i
Remerciements	iii
1 Introduction, état de l'art et résultats de la thèse	1
1 Introduction générale	1
2 Modélisation du trafic routier	3
2.1 Diagramme fondamental	3
2.2 Passage des équations de type loi de conservation aux équations de type Hamilton-Jacobi sur des réseaux	4
3 Homogénéisation précisée sur des réseaux	7
3.1 Homogénéisation des équations de HJ sur une droite	9
3.2 Homogénéisation périodique sur une jonction	10
3.3 Généralisation du cadre périodique au cadre stochastique	16
3.4 Homogénéisation stochastique sur une droite	18
3.5 Problème métrique	19
3.6 Homogénéisation stochastique sur une jonction	20
4 Modèle non-local pour le trafic routier	29
4.1 Etude du modèle non-local et résultats d'homogénéisation	30
4.2 Schéma numérique	35
2 Pré-requis	37
1 Notations	37
2 Aperçu des équations de Hamilton-Jacobi et solutions de viscosité	38
3 Solutions de viscosité continues des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre	38
4 Solutions de viscosité discontinues	39
5 Existence de la solution de viscosité	40
3 A junction condition by homogenization on network and applications to traffic flow	43
1 Presentation of the problem and traffic flow motivations	43
1.1 Setting of the problem	45
1.2 Organization of the paper	48
2 Definition of viscosity solutions on junction and some useful properties	48

3	Comparison principle for (1.3)	50
4	Construction of the flux limiter \bar{A}	55
4.1	Truncated problem	56
5	Construction of a global corrector.	61
6	Convergence result of the rescaled problem (1.1)	63
4	Stochastic homogenization of Hamilton-Jacobi equations on a junction	67
1	General Introduction	67
2	Assumptions and main results	68
2.1	Main result	72
2.2	Organization of the paper	73
3	Metric problem far from the origin	74
4	Metric problem at the junction point	76
4.1	Definition of the metric problem at the junction and of the stochastic flux limiter	76
4.2	Properties of the solution of the metric problem	79
4.3	Deterministic flux limiter	84
5	Homogenization result of metric problems defined in half space	89
5.1	A discretization scheme	91
5.2	Proof of Theorem 5.3.	92
5.3	Proof of Theorems 5.1 and 5.2	96
5.4	Some properties of $m_\mu(x, y)$	100
6	Main results for the approximated corrector at the junction point	100
6.1	Existence of approximated correctors at the junction point	101
6.2	Control of slopes	107
6.3	Proof of Theorem 6.1	109
7	Convergence result of the rescaled problem (2.4)	110
7.1	A junction condition by stochastic homogenization on a junction	113
5	A non-local macroscopic model for traffic flow	117
1	Introduction	117
1.1	Description of the model and assumptions	118
1.2	Main results	119
2	Well-posedness of the microscopic problem	120
3	Well-posedness of the macroscopic model	124
4	Homogenization result	128
5	Numerical tests	131
5.1	Discretization aspects and numerical scheme	131
5.2	Analysis of the scheme	133
5.3	Some numerical illustrations	140
6	Conclusion et perspectives	143
1	Perspectives	143
	Bibliography	144

List of Figures

1.1	Les états fluide et congestionné sur le diagramme fondamental	5
1.2	Une jonction	5
1.3	Une jonction	11
1.4	H et H_α sous l'hypothèse \mathbf{H}_3 -(H-jun-WFL)	23
1.5	H et H_α sous l'hypothèse \mathbf{H}_3 -(H-jun-ε)	24
1.6	L'hamiltonien H	25
1.7	Les deux solutions de $H(Dv, y, \omega) = \mu$	25
1.8	La fonction vitesse V	30
3.1	A junction	45
5.1	Illustration of the integral approximation based on the spatial discretization x_i	132
5.2	Density ρ at time $t = 0.2$ for different value of η using Greenshield velocity (on the left) and Underwood velocity (on the right) using (5.28) initial density.	142
5.3	Density ρ at time $t = 0.2$ for different value of η using Greenshield velocity (on the left) and Underwood velocity (on the right) using (5.29) initial density.	142

Chapter 1

Introduction, état de l'art et résultats de la thèse

1 Introduction générale

Cette thèse porte sur la modélisation du trafic routier. Le but de la modélisation est de pouvoir reproduire la réalité physique à l'aide de modèles mathématiques qui permettent d'améliorer la compréhension du trafic routier. Ces modèles ont connu un développement important au cours des dernières décennies. Le trafic routier peut être modélisé à différentes échelles et on distinguera deux échelles dans cette thèse qui sont l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique. À l'échelle microscopique, on modélise la dynamique de chaque véhicule individuellement. L'avantage de l'approche microscopique est sa facilité et sa précision du point de vue modélisation. En effet, ces modèles décrivent le comportement de chaque véhicule avec une grande précision en fonction d'une situation donnée, comme par exemple les feux rouges, le ralentissement ou le changement de la vitesse maximale. Un des modèles les plus connus à l'échelle microscopique est le modèle de type "follow the leader". Ces modèles décrivent la vitesse de chaque véhicule en fonction des véhicules qui sont devant. De nombreux modèles à l'échelle microscopique ont été proposés, on cite par exemple [80, 21, 48, 63].

Les modèles macroscopiques consistent eux à décrire le comportement collectif des véhicules. On décrit par exemple l'évolution de la densité des véhicules. L'avantage principal de ces modèles est qu'il est possible de faire des simulations numériques sur une grande partie de la route. Le premier modèle à cette échelle est le modèle LWR proposé initialement par Lighthill Whitham en 1955 [70] et complété par Richards [82]. Ce modèle repose sur la loi de conservation de la masse. Il part du principe que la masse est transportée sans perte ni accumulation.

Le modèle LWR est exprimé en coordonnées eulériennes (l'inconnu de ce problème est la densité, et est donné en un point physique de la route à un temps précis). Plus récemment, d'autres approches ont été proposées. En utilisant les coordonnées lagrangiennes, le modèle LWR peut être reformulé pour décrire le flux des véhicules en termes d'espacement entre les véhicules (qui est l'inverse de la densité, voir [69]). Tous ces modèles peuvent également être reformulés à l'aide d'une équation d'Hamilton-Jacobi (HJ) (l'inconnu devient la position du véhicule tel que sa dérivée est l'espacement, voir

[76]). Le lien entre les lois de conservation et les équations HJ est donné dans [66, 79, 55] et très récemment pour la théorie du trafic routier dans [31, 32].

Dans cette thèse, nous nous intéressons aux modèles de trafic routier qui sont donnés par des équations de HJ locales, non locales, périodiques et stochastiques. Plusieurs modèles sont considérés dans cette thèse, où chacun décrit des situations particulières du trafic. Les modèles du trafic routier reposent sur des équations de Hamilton-Jacobi sur des réseaux, i.e des ensembles constitués de branches reliées entre elles par des points de jonction. On limite notre étude dans ce qui suit sur le cas d'un seul point de jonction. Sur la jonction qui est formée de plusieurs routes entrantes et d'autres sortantes, le comportement des véhicules sur chaque branche est différent, suivant les phénomènes locaux du trafic. Ainsi pour les modèles de trafic à l'échelle macroscopique, on doit étudier des équations d'Hamilton-Jacobi discontinues. Les solutions de ces modèles sont données au sens de viscosité. La difficulté vient du fait qu'au point de discontinuité la définition des solutions de viscosité n'est pas classique. Les notions qui sont proposées dans cette thèse sont associées à une motivation liée au trafic routier. Plus précisément, sur le point de discontinuité, noté point de jonction, on compare le flux demande et le flux offre du trafic. On renvoie, pour la notion classique des solutions de viscosité, à [14, 15, 27], à [52, 59] pour des premiers résultats pour des équations discontinues et à [1, 17, 56, 58, 73] pour les définitions sur une jonction. Dans ces travaux, plusieurs notions différentes de solutions discontinues d'équations HJ discontinues ont été proposées pour prouver l'existence, des résultats de comparaisons et d'unicité sous diverses hypothèses (par exemple, si l'hamiltonien est convexe ce qui est le cas du trafic routier).

Chaque échelle, microscopique ou macroscopique, a ses propres avantages et désavantages. Le principal inconvénient de l'échelle microscopique, est que pour modéliser le trafic routier à l'échelle d'une ville, il est difficile de prendre en compte tous les véhicules et toutes leurs interactions, et pour les simulations numériques, où l'on doit traiter un grand nombre de données, ceci peut être très coûteux, voire impossible. Dans ce cas il est plus judicieux de considérer un modèle macroscopique qui modélise le trafic grâce à des quantités macroscopiques. En revanche à l'échelle macroscopique, il est plus compliqué de décrire des phénomènes microscopiques, les phénomènes locaux sont négligés.

Alors d'ici vient l'importance de ce qu'on appelle l'homogénéisation précisée: cette homogénéisation nous permet de trouver des problèmes macroscopiques à partir des problèmes microscopiques en gardant en mémoire des phénomènes locaux. Dans ce cadre, on renvoie aux travaux d'Achdou et Tchou [2] et de Galise, Imbert et Monneau [45]. On renvoie également au travail de Forcadel, Salazar et Zaydan, [44] où ils ont obtenu des modèles macroscopiques de trafic routier à partir des modèles microscopiques contenant des perturbations locales. A l'échelle microscopique, ils ont considéré un modèle du second ordre de type follow the leader, ensuite ils considèrent une perturbation locale située à l'origine qui fait ralentir les voitures. Au niveau macroscopique, ils obtiennent une équation de HJ à gauche et à droite de la jonction et une condition de jonction à l'origine. Cette condition de jonction permet de voir l'influence de la perturbation microscopique au niveau macroscopique.

De plus, d'un point de vue modélisation on distingue deux approches pour décrire le flux, un périodique et l'autre stochastique. Des résultats d'homogénéisation précisée dans les deux cas sont présentés dans cette thèse. Plusieurs résultats d'homogénéisations

périodiques classiques et précisées ont été obtenus jusqu'à présent. Depuis le papier de Lions, Papanicolaou et Varadhan [72], les problèmes d'homogénéisation des équations de HJ ont été énormément étudiés. On renvoie à la section suivante pour plus de références. Dans ce cadre périodique tous les conducteurs sont supposés identiques (type des véhicules, vitesses, réactions...) ou distribués d'une façon périodique. D'un point de vue modélisation, ces modèles ne sont pas très réalistes. Pour cela, on considère également des modèles qui reproduisent mieux la réalité en tenant compte de la diversité des conducteurs (plusieurs types de véhicules sont pris en compte, comme des poids lourds et des voitures par exemple, vitesses différentes, ...). Le premier résultat d'homogénéisation stochastique a été obtenu par Souganidis [86] et on renvoie également à la section suivante pour des résultats plus récents. Dans notre travail nous traitons l'homogénéisation stochastique précisée, ce qui est à notre connaissance le premier résultat du genre.

Enfin, pour la dernière partie de la thèse, nous proposons un nouveau modèle non-local pour le trafic routier. Bien que plusieurs modèles non-locaux aient été proposés au niveau loi de conservation scalaire (voir par exemple Chiarello et Goatin [25]), il s'agit à notre connaissance du premier modèle non-local pour le trafic au niveau Hamilton-Jacobi. Ce modèle est obtenu à partir d'une remise à l'échelle rigoureuse d'un modèle microscopique qui décrit la vitesse de chaque véhicule comme une fonction dépendant de la position d'un grand nombre de voitures se trouvant devant.

Pour ce modèle macroscopique, nous démontrons un résultat d'existence et d'unicité. Nous proposons également un schéma numérique pour lequel nous montrons la convergence. Enfin, plusieurs simulations numériques sont effectuées.

2 Modélisation du trafic routier

Le trafic routier obéit à des lois de la physique qui permettent d'expliquer la plupart des phénomènes observés sur nos réseaux routiers. Pour comprendre le fonctionnement d'un réseau routier, une première approche consiste souvent à mesurer l'évolution de la vitesse du trafic en fonction du débit (relation débit-vitesse) qu'on le note par le diagramme fondamental, et d'en déduire des paramètres de fonctionnement du réseau, comme la vitesse libre ou la capacité.

2.1 Diagramme fondamental

- **Les variables du trafic:** les variables du trafic routier sont les suivants

1. le débit f (le flux) qui représente le nombre de véhicules N passés pendant une période Δt en un point donné: $f = \frac{N}{\Delta t}$,
2. la densité (concentration) ρ qui représente le nombre de véhicules N présents sur une section de longueur Δx à un instant donné: $\rho = \frac{N}{\Delta x}$,
3. La vitesse V qui représente la vitesse de déplacement du flux de véhicules (la vitesse moyenne). Cette vitesse peut être calculée à partir du débit et de la concentration: $V = \frac{f}{\rho}$.

Les variables de débit, de vitesse et de densité sont donc liées entre elles, et la relation $f = \rho \times V$ constitue le diagramme fondamental.

- **Loi de conservation:** si on observe une section routière de longueur dx pendant une période dt . Sur cette section de la route se trouvent des véhicules dont le numéro est décrit par la variable N (les véhicules sont indicés dans l'ordre croissant de leur entrée sur la portion de route). En considérant qu'aucun véhicule n'apparaît ni ne disparaît spontanément de cette section, alors l'équation de conservation des véhicules s'écrit

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{df}{dt} = 0$$

avec $f = f(\rho)$. C'est ce qu'on note le modèle LWR. Ce système hyperbolique confère au diagramme fondamental des propriétés mathématiques qui sont les suivantes:

1. Les valeurs de débit sont positives ou nulles.
2. Le diagramme fondamental est continu, sur une plage de densité bornée, comprise entre une densité nulle (en cas d'absence de véhicule) et une densité maximale (lorsque tous les véhicules sont à l'arrêt dans une file d'attente). Sur cette plage de densité, chaque valeur de densité correspond à une valeur de débit unique.
3. Le diagramme fondamental est concave.

La concavité de $f(\rho) = \rho \times V$ est justifiée est justifiée d'après les propriétés physiques suivantes.

- **Propriétés physiques:** l'écoulement du trafic peut se diviser en deux catégories de régimes
 1. **Régime fluide:** ce régime s'observe lorsque la demande de trafic est inférieure à la capacité (aussi appelée offre) de la section. Aucune contrainte ne s'exerce sur le trafic, et l'état de trafic mesuré correspond exactement à la demande. Le débit est alors proportionnel à la concentration et le coefficient de proportionnalité correspond à la vitesse libre de la section.
 2. **Régime congestionné:** ce régime s'observe lorsque la demande de trafic est supérieure à la capacité d'écoulement de la section. Seule l'offre disponible peut s'écouler, le débit est alors contraint et il décroît à mesure que le trafic se densifie.

L'état de trafic séparant les régimes fluide et congestionné est appelé "état critique" (voir figure 1.1).

2.2 Passage des équations de type loi de conservation aux équations de type Hamilton-Jacobi sur des réseaux

Dans cette section on présente une partie du travail de Imbert, Monneau et Zidani [58], qui montre le passage des équations de type LWR aux équations de type HJ en justifiant

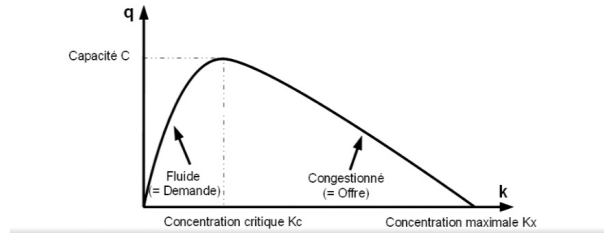


Figure 1.1: Les états fluide et congestionné sur le diagramme fondamental

la condition sur la jonction (voir la deuxième équation de (3.9)). Pour cette raison, dans cette partie on définit, pour $n, m \geq 1$, la jonction J comme m demi branches, isométriques à $(-\infty, 0]$ et engendré par un vecteur unitaire de \mathbb{R}^2 , entrantes à la jonction (le point zéro) et $n - m$ branches, isométriques à $[0, +\infty)$, sortantes de la jonction. Soit J l'union de ces n branches, notées par J_i (voir figure 1.2). On considère maintenant le modèle

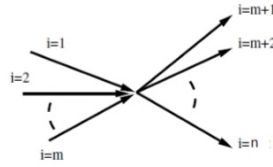


Figure 1.2: Une jonction

macroscopique de trafic routier sur la jonction, pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{cases} \rho_t^i + (f^i(\rho^i))_x = 0 & x \in J_i \setminus \{0\}, \\ \sum_{i=1}^m f^i(\rho^i(t, 0)) = \min \left(\min_{i=1, \dots, m} \frac{1}{\gamma^i} f_D^i(\rho^i(t, 0^-)), \min_{i=m+1, \dots, n} \frac{1}{\gamma^i} f_S^i(\rho^i(t, 0^+)) \right) & x = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

avec $\rho^i(t, x)$ représente la densité au temps t et à la position x sur la branche i , $f^i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction qui décrit le trafic sur la branche i de la jonction, telle qu'il existe une valeur critique ρ_c^i telle que f^i est croissante sur $(-\infty, \rho_c^i]$ et décroissante sur $[\rho_c^i, +\infty)$ et coercive, et f_D^i (resp. f_S^i) est la fonction demande définie par

$$f_D^i(p) \text{ (resp. } f_S^i(p)) = \begin{cases} f^i(p) \text{ (resp. } f^i(\rho_c^i)) & \text{si } p \leq \rho_c^i, \\ f^i(\rho_c^i) \text{ (resp. } f^i(p)) & \text{si } p \geq \rho_c^i. \end{cases}$$

De plus la suite $(\gamma^i)_i$, représente pour $i = 1, \dots, m$ la proportion des voitures qui entrent dans la jonction en venant de la branche i , et pour $i = m + 1, \dots, n$ celle des voitures qui sortent vers la branche i . La deuxième condition de (2.1) signifie que le flux qui passe par le point 0 est égal au minimum entre le flux qui arrive (qui correspond à la fonction demande) et celui qui sort (qui correspond à la fonction offre).

Obtention d'une équation de HJ à partir de (2.1)

Dans cette partie on montre comment on obtient l'équation de HJ (voir (3.9)) avec une condition sur la jonction qu'on l'étudie tout au long de cette thèse à partir de l'équation de type LWR. Pour cette raison on définit

$$\begin{cases} U^i(t, x) = g(t) - \frac{1}{\gamma^i} \int_x^0 \rho^i(t, y) dy & \text{si } x \in J^i \setminus \{0\}, i = 1, \dots, m \\ U^i(t, x) = g(t) + \frac{1}{\gamma^i} \int_0^x \rho^i(t, y) dy & \text{si } x \in J^i \setminus \{0\}, i = m + 1, \dots, n \end{cases} \quad (2.2)$$

avec $g(t) = -\int_0^t \sum_{j=1}^m f^j(\rho^j(s, 0^-)) ds$. D'après la définition de U^i , elle est interprétée comme une fonction qui labélise les voitures sur la branche i . En effet, soient x_1 et x_2 deux points de J_i , on remarque que

$$U^i(t, x_2) - U^i(t, x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \rho^i(t, y) dy.$$

Soit $i = 1, \dots, m$, l'équation (2.1) pour $x \neq 0$ implique que

$$\begin{aligned} U_t^i + \frac{1}{\gamma^i} f^i(\gamma^i U_x^i) &= g'(t) - \frac{1}{\gamma^i} \int_x^0 \rho_t^i(t, y) dy + \frac{1}{\gamma^i} f^i(\rho_t^i(t, x)) \\ &= g'(t) + \frac{1}{\gamma^i} \int_x^0 (f^i(\rho_t^i(t, y)))_y dy + \frac{1}{\gamma^i} f^i(\rho_t^i(t, x)) \\ &= g'(t) + \frac{1}{\gamma^i} f^i(\rho_t^i(t, 0^-)). \end{aligned}$$

De même pour $i = m + 1, \dots, n$, on a

$$U_t^i + \frac{1}{\gamma^i} f^i(\gamma^i U_x^i) = g'(t) + \frac{1}{\gamma^i} f^i(\rho_t^i(t, 0^+)).$$

Alors, par définition de γ^i qui est donnée, pour $i = 1, \dots, m$ (resp. $i = m + 1, \dots, n$) par

$$\gamma^i = \frac{f^i(\rho^i(t, 0^-))}{\sum_{j=1}^m f^j(\rho^j(t, 0^-))} \quad (\text{resp. } \gamma^i = \frac{f^i(\rho^i(t, 0^+))}{\sum_{j=m+1}^n f^j(\rho^j(t, 0^+))},$$

la définition de $g(\cdot)$ et le fait que

$$\sum_{j=1}^m f^j(\rho^j(t, 0^-)) = \sum_{j=m+1}^n f^j(\rho^j(t, 0^+))$$

(le flux entrant est égal au flux sortant), on aura

$$U_t^i + \frac{1}{\gamma^i} f^i(\gamma^i U_x^i) = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, n.$$

Pour définir l'équation de HJ, on définit pour $x \in J$

$$u(t, x) = -U^i(t, x) \text{ si } x \in J_i$$

alors on aura

$$u_t + H_i(u_x) = 0 \text{ si } x \in J_i \setminus \{0\}$$

avec $H_i(p) = -\frac{1}{\gamma^i} f^i(-\gamma^i p)$. Et pour la condition à la jonction, on aura, d'après la deuxième équation de (2.1) et la définition de g , que

$$u_t(t, 0) = \min \left(\min_{i=1, \dots, m} \frac{1}{\gamma^i} f_D^i(-\gamma^i \partial^i u(t, 0^-)), \min_{i=m+1, \dots, n} \frac{1}{\gamma^i} f_S^i(-\gamma^i \partial^i u(t, 0^+)) \right)$$

avec $\partial^i u(t, 0) = \lim_{x \rightarrow 0, x \in J_i} u_x(t, x)$. Et alors on déduit la condition à la jonction suivante

$$u_t(t, 0) + \max \left(\max_{i=1, \dots, m} H_i^+(\partial^i u(t, 0^-)), \max_{i=m+1, \dots, n} H_i^-(\partial^i u(t, 0^+)) \right) = 0.$$

La condition à la jonction de (2.1) peut être généralisée en ajoutant une constante $-A$ dans le minimum. Cette constante représente un limiteur du flux, qui implique de point de vue trafic routier, que le flux des voitures en zéro ne peut pas dépasser $-A$. En particulier, pour que la constante $-A$ limite effectivement le flux des voitures il faut supposer que

$$-A < \min_{i=1, \dots, n} \left(\max_{p \in \mathbb{R}} \frac{1}{\gamma^i} f^i(p) \right).$$

Et alors d'après ce passage de l'équation (2.1) on obtient l'équation (3.9).

3 Homogénéisation précisée sur des réseaux

L'homogénéisation des équations de HJ est largement étudiée depuis le premier papier de Lions, Papanicalaou et Varadhan [72]. Ensuite, l'article de Evans [37] a présenté une grande avancée à ce sujet, où il a introduit la méthode de la fonction test perturbée. Cette méthode nous permet de faire les passages à la limite dans les problèmes d'homogénéisation. On renvoie dans ce cadre à l'article de Evans [38] où il a utilisé cette méthode pour démontrer un résultat d'homogénéisation périodique pour des équations de HJ elliptiques, en introduisant des correcteurs. On renvoie également dans ce cadre au travail de Ishii [61]. Citons de plus les travaux de Forcadel, Imbert et Monneau [39, 40, 41] qui présentent des résultats d'homogénéisation pour des équations de HJ non locales. Ils homogénéisent des systèmes de particules en interactions. Ces résultats sont particulièrement importants pour cette thèse, car on a appliqué la même approche: injection d'un système d'EDOs dans une seule EDP, puis homogénéisation de cette EDP pour obtenir un nouveau modèle non local à l'échelle macroscopique (voir le troisième résultat de la thèse). On renvoie aussi, dans le cadre de l'homogénéisation pour des équations de HJ non locales, au travail de Imbert, Monneau et Rouy [57].

Plus récemment la théorie de l'homogénéisation précisée sur une jonction est apparue. En

fait, le but de l'homogénéisation précisée est de décrire des phénomènes locaux de manière précise à l'échelle macroscopique, au contraire de l'homogénéisation classique qui moyenne ces phénomènes. Ce qui nous concerne dans cette thèse est le trafic routier, donc un des phénomènes dont on parle est par exemple une perturbation localisée à l'origine à l'échelle microscopique. Un exemple de perturbation est la présence d'un ralentisseur ou d'une zone scolaire. A l'échelle macroscopique, on veut garder en mémoire cette perturbation et la décrire comme une condition de jonction. On renvoie aux travaux de Achdou et Tchou [2], ainsi qu'au cours de Lions [71] pour les premières résultats d'homogénéisation précisées. On renvoie également au travail de Galise, Imbert et Monneau [45] et aux travaux de Forcadel et Salazar [43, 42], et celui de Forcadel, Salazar et Zaydan [44], où ils démontrent des résultats d'homogénéisation pour des modèles de bifurcation et des modèles de second ordre respectivement. Tous ces travaux ont été faits dans un cadre périodique.

Le but de cette thèse est de démontrer des résultats d'homogénéisation précisée sur une jonction. Ces résultats sont présentés dans les deux cadres, périodiques et stochastiques. Pour cela dans un premier résultat on démontre dans le cadre périodique un résultat d'homogénéisation sur une vraie jonction, i.e une jonction formée de plusieurs branches. Ce travail est inspiré de celui de Galise, Imbert et Monneau [45] qui ne considère que le cas d'une droite. On étend par la suite ces résultats au cadre stochastique. On considère alors des équations de HJ qui dépendent d'une variable aléatoire et on démontre un résultat d'homogénéisation stochastique sur une jonction. A notre connaissance, c'est le premier résultat concernant l'homogénéisation précisée dans le cadre stochastique. La difficulté principale dans ce contexte vient du fait que l'hamiltonien n'est plus stationnaire ergodique, ce qui est une hypothèse essentielle dans le reste de la littérature. De nombreux résultats qualitatifs et quantitatifs ont été obtenus dans le cas stochastique, et nous renvoyons par exemple à Souganidis [86] où il présente un premier résultat d'homogénéisation stochastique, et à Armstrong et Souganidis [9] qui ont démontré ce résultat pour des équations de HJ quasiconvexes. Dans [46], Gao a démontré ce résultat dans un cas unidimensionnel pour des équations de HJ coercives et non convexes qui ont une forme particulière, ce qui est une généralisation du travail de Armstrong, Tran et Yu [11]. On renvoie également à l'article de Schwab [84] où il a étudié des équations de HJ convexes dans un environnement ergodique stationnaire spatio-temporel en utilisant la formule Hopf-Lax pour représenter les solutions. La théorie quantitative de l'homogénéisation stochastique a débuté dans le travail de Armstrong, Cardaliaguet et Souganidis [7] pour des équations de HJ de premier degré. Ensuite, Armstrong et Cardaliaguet [5] ont proposé une stratégie pour obtenir un résultat d'homogénéisation qualitatif, basée sur l'idée de surmonter la non convexité de l'hamiltonien par une approche quantitative. Ils ont, plutôt que d'utiliser des arguments classiques basés sur des théorèmes ergodiques (comme dans [9]), supposé une forte hypothèse "a finite range of dependence condition" et ils ont démontré une homogénéisation avec une estimation d'erreur explicite. L'idée de cet article est très importante dans notre travail, car on se basera sur la même idée pour surmonter le manque de stationnarité de l'hamiltonien par une approche quantitative.

Dans le but de distinguer la différence entre l'homogénéisation (classique) et l'homogénéisation précisée, on présente dans cette section un résultat d'homogénéisation sur une droite dans les deux cadres périodiques et stochastiques et on présentera ensuite

notre travail sur une jonction.

3.1 Homogénéisation des équations de HJ sur une droite

Dans cette section on présente les étapes de base de l'homogénéisation périodique sur la ligne réelle. On considère un hamiltonien

$$\begin{aligned} H &: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, p) &\mapsto H(t, x, p). \end{aligned}$$

La théorie de l'homogénéisation des équations de Hamilton-Jacobi a été développée depuis les travaux de Lions, Papanicolaou et Varadhan [72]. On renvoie aussi à [75, 61, 77, 83]. On suppose que H vérifie les hypothèses suivantes:

(H1) Regularité: H est continue par rapport à (t, x, p) .

(H2) Coercivité uniforme: H est coercive par rapport à p , uniformément en (t, x) , i.e

$$\lim_{|p| \rightarrow +\infty} \inf_{(t, x)} H(t, x, p) = +\infty.$$

(H3) Module de continuité uniforme: Il existe un module de continuité w tel que $\forall t, s, x, y, p \in \mathbb{R}$, on a

$$|H(s, y, p) - H(t, x, p)| \leq w((|t - s| + |x - y|)(1 + |p|)).$$

(H4) Convexité: Pour tout (t, x) , l'hamiltonien $p \rightarrow H(t, x, p)$ est convexe.

On note les hypothèses **(H1)**-**(H4)** par \mathbf{H}_1 . On suppose de plus que H est périodique en temps et en espace:

(H-per) Periodicité de H : Pour tout $(t, x, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $k, j \in \mathbb{Z}$, on a

$$H(t + k, x + j, p) = H(t, x, p).$$

On considère un hamiltonien H qui vérifie les hypothèses \mathbf{H}_1 et **(H-per)**. Le but est d'étudier le comportement, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, de la solution u^ε du problème

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon + H\left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}, Du^\varepsilon\right) = 0 & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u^\varepsilon(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.3)$$

avec u_0 une fonction Lipschitzienne. Pour obtenir le résultat d'homogénéisation il faut identifier l'hamiltonien effectif \bar{H} tel que u^ε converge vers u , l'unique solution du problème limite suivant

$$\begin{cases} u_t + \bar{H}(p) = 0 & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (3.4)$$

Formellement pour obtenir le résultat d'homogénéisation, on procède à l'inverse (voir [72]). Plus précisément, on suppose que u est une solution de (3.4), et on remplace u par

l'approximation suivante

$$u^\varepsilon(t, x) \approx u(t, x) + \varepsilon w\left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right),$$

en rajoutant un terme de correction. Formellement si on note $p = Du(t, x)$ qui n'oscille pas en ε , $u_t = \overline{H}(p)$, $y = \frac{x}{\varepsilon}$ et $s = \frac{t}{\varepsilon}$, alors pour que u^ε soit une solution de (3.3), il faut que w soit une solution du problème suivant

$$\begin{cases} w_t + H(s, y, Dw + p) = \overline{H}(p) & (s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ w \text{ est périodique en temps et en espace.} \end{cases} \quad (3.5)$$

La preuve de convergence repose donc sur la construction d'un correcteur qui sera utilisé dans la méthode de la fonction test perturbée introduite par Evans [37]. L'étude du problème du correcteur nous permet de définir \overline{H} (qui n'est pas défini pour l'instant). Dans ce cas périodique, on résume donc ce qu'il faudrait démontrer pour obtenir le résultat d'homogénéisation dans la théorème suivant

Théorème 3.1. [74, Theorem 1.1][Construction des correcteurs] *Supposons que H vérifie \mathbf{H}_1 et $(\mathbf{H-per})$. Alors pour tout $p \in \mathbb{R}$, il existe une unique constante $\overline{H}(p)$ telle qu'il existe une solution périodique w de (3.5).*

Ce qui est important dans le cas périodique est que $\lambda = \overline{H}(p)$ est unique (on obtient cette unicité immédiatement par une application directe d'un principe de comparaison) et comme w est borné, alors la propriété

$$\varepsilon w\left(\frac{s}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) \rightarrow 0$$

est garantie.

3.2 Homogénéisation périodique sur une jonction

Dans cette section on présente un résultat d'homogénéisation périodique sur une jonction. L'article de Imbert, Monneau et Galise [45] présente un résultat d'homogénéisation précisée sur \mathbb{R} qui est une jonction formée de deux branches coloniérales. Plus précisément, l'hamiltonien périodique en temps qu'ils considèrent est égal à l'infini à deux hamiltoniens différents, périodiques en espace et en temps. A la limite, ils obtiennent une équation de HJ discontinue avec une condition de jonction. Le premier résultat de cette thèse est une généralisation de ce résultat sur une vraie jonction i.e on considère une jonction avec plusieurs routes entrantes et sortantes. De plus le modèle de départ que l'on considère représente une condition particulière en zéro. En effet, sur une jonction le gradient en zéro est un vecteur de N composantes (voir [56]) et alors la solution doit vérifier une condition de jonction dans le sens des définitions de solutions de viscosité données dans [56]. Le but de cette section est d'introduire les techniques des démonstrations d'unicité, d'existence et d'homogénéisation qui sont plus compliquées que dans le cas d'un domaine régulier comme dans [14] par exemple, et que l'on utilise partout dans cette thèse.

On commence d'abord par définir la jonction. La jonction J est un réseau formé de N branches, chacune engendrée par un vecteur unitaire e_i de \mathbb{R}^2 et isométrique à $[0, +\infty)$ (on a des branches entrantes et d'autres sortantes mais par un changement de variables on se ramène à un domaine pour $x > 0$ sur chaque branche). Soit

$$J = \bigcup_{i=1}^N J_i = \bigcup_{i=1}^N \mathbb{R}^+ e_i$$

pour $N \geq 1$ et $i = 1, \dots, N$. Les N branches se rencontrent en zéro, que l'on appelle le point de jonction.

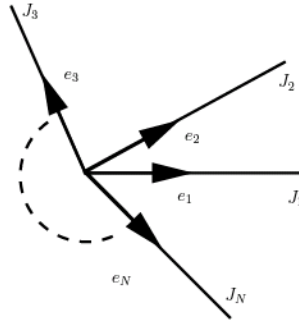


Figure 1.3: Une jonction

On considère un hamiltonien

$$\begin{aligned} H &: \mathbb{R} \times J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, p) &\mapsto H(t, x, p). \end{aligned}$$

On suppose que H satisfait \mathbf{H}_1 et on pose de plus les hypothèses suivantes

1. **Periodicité en temps:** Pour tout $(t, x, p) \in \mathbb{R} \times J \times \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$ on a

$$H(t + k, x, p) = H(t, x, p).$$

2. **Les hamiltoniens H_i :** Il existe N hamiltoniens H_i , $i = 1, \dots, N$ tels que

$$H(t, x + k, p) - H_i(x, p) \rightarrow 0 \text{ lorsque } k \in \mathbb{N} \text{ tend vers } +\infty, \quad (3.6)$$

uniformément par rapport à $(t, x, p) \in [0, 1] \times [0, 1]e_i \times \mathbb{R}$. L'hamiltonien H_i est périodique en espace i.e. pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(x, p) \in J_i \times \mathbb{R}$,

$$H_i(x + k, p) = H_i(x, p).$$

3. **Quasi-convexité des hamiltoniens H_i :** Il existe p_i^0 telle que

$$\begin{cases} H_i(x, \cdot) & \text{est décroissante sur } (-\infty, p_i^0), \\ H_i(x, \cdot) & \text{est croissante sur } (p_i^0, +\infty). \end{cases}$$

On note les hypothèses 1-3 par **(H-jun-per)**. La différence entre **(H-per)** et ces hypothèses est que les H_i vérifient la périodicité en temps et en espace alors que H n'est périodique qu'en temps et non en espace. On considère le problème suivant

$$\begin{cases} u_i^\epsilon(t, x) + H\left(\frac{t}{\epsilon}, \frac{x}{\epsilon}, \partial_i u^\epsilon(t, x)\right) = 0 & (t, x) \in J_T, x \neq 0; \\ u_i^\epsilon(t, x) + \max\left(H^+\left(\frac{t}{\epsilon}, 0, \partial_i u^\epsilon(t, 0^+)\right)\right) = 0 & (t, x) \in (0, T) \times \{0\}; \\ u^\epsilon(0, x) = u_0(x) & x \in J, \end{cases} \quad (3.7)$$

avec $u_0(\cdot)$ une fonction lipschitzienne et H^+ la partie décroissante de H par rapport à p . Le problème (3.7) décrit une réduction de la vitesse au voisinage de zéro pour arriver à la plus petite vitesse en zéro. Plus précisément, cette équation est obtenue par un passage d'un problème de type LWR, où l'inconnu est la densité, à un problème donné par les équations de HJ. Formellement, nous obtenons ce système en définissant l'inconnu $u(t, x)$ qui représente le label de la voiture située en x au temps t (la dérivée de u par rapport à x est la densité). Loin du point de la jonction, l'équation de HJ décrit ce qui se passe si nous avons une seule route simple et que nous ne voyons pas la jonction. Nous renvoyons à Imbert, Monneau et Zidani [58], pour une modélisation du trafic par des équations de HJ. Près de zéro, l'équation de HJ est modifiée pour tenir compte de certaines perturbations locales dues à l'intersection. C'est la raison pour laquelle nous introduisons l'hamiltonien H . Cet hamiltonien décrit le fait que les véhicules qui arrivent près de l'intersection ralentiront de plus en plus pour passer l'intersection.

Pour donner un exemple en trafic routier d'un hamiltonien H qui vérifie les hypothèses **H₁** et **(H-Jun-per)**, on considère $H_0, H_i, i \in \{1, \dots, N\}$, $N + 1$ hamiltoniens tels que $H_0 \geq H_i$ pour tout i . Soit $V_j : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, i \in \{0, \dots, N\}$, qui satisfait les hypothèses suivantes

- V_j est Lipschitz et positive.
- V_j est croissante et $\lim_{h \rightarrow +\infty} V_j(h) = V_{max}^j < +\infty$.
- Il existe h_0^j telle que $V_j(h) = 0$ pour tout $h \leq h_0^j$.
- Il existe $\tilde{p} \in [-1/h_0^j, 0)$ tel que la fonction $p \rightarrow pV_j(-\frac{1}{p})$ est décroissante sur $[-1/h_0^j; \tilde{p})$ et croissante sur $[\tilde{p}, 0)$.

Alors on définit H_0, H_i , par

$$H_j(t, y, p) = \begin{cases} (-p - k_0)\psi(t, y), & p < -k_0, \\ \left(-|p|V_j\left(-\frac{1}{p}\right)\right)\psi(t, y), & -k_0 \leq p \leq 0, \\ p \cdot \psi(t, y), & p > 0 \end{cases}$$

avec $j \in \{0, \dots, N\}$, $k_0 > 0$ (cette définition est classique en trafic routier) et

$$\psi : J \rightarrow \mathbb{R}$$

une fonction positive et périodique par rapport à (t, y) . Soit $\bar{\psi}$ une fonction de classe C^∞ telle que

$$\bar{\psi}(y) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |y| > 1 \\ 0 & \text{pour } 0 \leq |y| \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

On définit l'hamiltonien H par

$$H(t, y, p) = \bar{\psi}(|y|)H_i(t, y, p) + (1 - \bar{\psi}(|y|))H_0(t, y, p) \text{ si } y \in J_i.$$

Le ralentissement de vitesse pour passer l'intersection limite le flux et lorsque ϵ tend vers zéro on s'attend à obtenir une équation de HJ avec une condition de jonction de la forme

$$u_t(t, 0) + \max \left\{ \bar{A}, \max_{i \in \{1, \dots, N\}} \bar{H}_i^+(\partial_i u(t, 0^+)) \right\} = 0.$$

On renvoie à [58, 67] pour plus d'informations sur l'interprétation de cette condition. Cette condition en zéro implique, en trafic routier, que le flux qui passe par le point zéro est égal au minimum entre le flux demande (qui arrive) et le flux offre (celui qui sort). Le \bar{A} est le limiteur de flux, i.e le flux des voitures en zéro ne peut pas dépasser $-\bar{A}$ (l'hamiltonien H est égal à l'opposé de la fonction flux).

Pour définir la solution du problème (3.7), on définit l'espace des fonctions tests sur une jonction par

$$C^1(J_T) = \{\phi \in C(J_T), \phi(t, x) = \phi_i(t, x) \text{ pour } x \in J_i; \phi_i \in C^1((0, T) \times J_i) \forall i = 1, \dots, N\},$$

avec $C(J_T)$ est l'ensemble des fonctions continues sur J_T . La solution du problème (3.7) est donnée dans le sens suivant

Définition 3.2 (Définition des solutions de viscosité de (3.7)). *Soit $u : [0, T) \times J \rightarrow \mathbb{R} \in C(J_T)$. La fonction u est une sous-solution de viscosité (resp. sur-solution) de (3.7), si pour tout $\phi \in C^1(J_T)$, telle que (t_0, x_0) est un maximum (resp un minimum) de $u - \phi$, alors*

$$\begin{cases} \phi_t(t_0, x_0) + H(t_0, x_0, \partial_i \phi(t_0, x_0)) \leq 0 \text{ (resp. } \geq 0) & (t, x) \in (0, T) \times J_i^*, \text{ pour tout } i, \\ \phi_t(t_0, 0) + \max \left(H^+(t_0, 0, \partial_i \phi(t_0, 0^+)) \right) \leq 0 \text{ (resp. } \geq 0) & (t, x) \in (0, T) \times \{0\}, \\ u(0, x) \leq u_0(x) \text{ (resp. } \geq u_0(x)) & x \in J. \end{cases} \quad (3.8)$$

La fonction u est une solution de (3.7) si u est une sous- et sur-solution, en même temps, de (3.7).

Le résultat d'homogénéisation précisée périodique à la jonction est donnée par le résultat suivant

Théorème 3.3 (Homogénéisation du problème (3.7)). *Supposons que les hypothèses \mathbf{H}_1 et $(\mathbf{H}\text{-jun-per})$ sont vérifiées. Alors, il existe un unique \bar{A} et N hamiltoniens effectifs \bar{H}_i qui sont Lipschitziens, quasi-convexes et coercifs tels que la solution u^ϵ de (3.7) converge*

localement uniformément, lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, vers l'unique solution u du problème effectif suivant:

$$\begin{cases} u_t + \bar{H}_i(\partial_i u(t, x)) = 0, & x \in J_i^* = J \setminus \{0\}, t > 0, \\ u_t + \max \left\{ \bar{A}, \max_{i \in \{1, \dots, N\}} \bar{H}_i^+(\partial_i u(t, 0^+)) \right\} = 0, & x = 0, t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in J. \end{cases} \quad (3.9)$$

La preuve de ce théorème est divisée en plusieurs étapes. On commence par la construction de \bar{H}_i et \bar{A} . Comme on l'a déjà mentionné plus haut, il faut pour obtenir le résultat de convergence étudier le problème du correcteur. Pour une jonction, on définit $N + 1$ problèmes de correcteurs: N problèmes qui sont définis loin de la jonction avec les hamiltoniens H_i et qui nous donne la définition de \bar{H}_i et la convergence de u^ϵ loin de zéro, et le dernier donné avec H qui nous permet de définir \bar{A} et la convergence en zéro. Avant de détailler les différentes étapes de la preuve, on donne la définition de la solution du problème (3.9).

Définition 3.4 (Définition des solutions de viscosité de (3.9)). *On dit que u est une sous-solution (resp. sur-solution) de (3.9) ssi, pour tout $\phi \in C^1(J_T)$, tq (t_0, x_0) est un maximum (resp. minimum) de $u - \phi$ sur J_T alors*

$$\begin{cases} \phi_t(t_0, x_0) + \bar{H}_i(\partial_i \phi(t_0, x_0)) \leq 0 \text{ (resp. } \geq 0) & \text{si } x_0 \in J_i^*, \\ \phi_t(t_0, 0) + \max \left\{ \bar{A}, \max_{i \in \{1, \dots, N\}} \bar{H}_i^+(\partial_i \phi(t_0, 0^+)) \right\} \leq 0 \text{ (resp. } \geq 0) & \text{si } x_0 = 0, \end{cases}$$

et de plus on a

$$u(0, x) \leq u_0(x) \text{ (resp. } u(0, x) \geq u_0(x)) \text{ pour tout } x \in J.$$

Remarque 3.5. *On sait, d'après le Théorème 2.4 du Chapitre 3, qu'en $(t_0, 0)$ il suffit que la fonction test ait la forme suivante au voisinage de zéro*

$$\phi(t, x) = \Phi(t) + \sum_i \bar{p}_i \cdot x \mathbf{1}_{\{x \in J_i^*\}}$$

avec $\Phi \in C^1((0, \infty))$, $\bar{p}_i \in \mathbb{R}$ et $\bar{H}_i^-(\bar{p}_i) = \bar{H}_i(\bar{p}_i) = \bar{A}$, et \bar{H}_i^- la partie croissante de $\bar{H}_i(\cdot)$.

Etape 1: Construction de correcteurs loin de la jonction et à la jonction: La construction de v^i , correcteur loin du point de la jonction est classique (on renvoie à la section précédente) alors que la construction de w , le correcteur à la jonction est plus compliquée. En effet la difficulté principale entre le problème des correcteurs loin de zéro et à la jonction est le fait que l'on travaille dans un cadre non périodique et on demande qu'au voisinage de zéro, le correcteur vérifie les bonnes pentes. Pour surmonter la non périodicité et démontrer que w vérifie les bonnes pentes, on utilise les idées développées par Achdou et Tchou [2] et Galise, Imbert et Monneau [45] en passant à des domaines tronquées (les solutions du problème du correcteurs peuvent

être discontinues). Donc on construit des correcteurs à la jonction sur des domaines tronqués, puis par passage à la limite quand la taille du domaine tend vers $+\infty$, on définit les correcteurs sur tout le domaine.

Etape 1.1: Construction de v^i et \bar{H}_i : On commence par un résultat classique donnant v^i et \bar{H}_i loin de la jonction.

Proposition 3.6. *Supposons que H_1 et (**H-jun-per**) sont vérifiées. Pour tout $p \in \mathbb{R}$, $i \in 1, \dots, N$, il existe un unique λ noté par $\bar{H}_i(p)$, tel qu'il existe une solution bornée v^i du problème du correcteur*

$$\begin{cases} v_t^i + H_i(x, p + \partial_i v^i) = \lambda & (t, x) \in \mathbb{R} \times J_i, \\ v^i \text{ est 1-périodique en temps et en espace.} \end{cases} \quad (3.10)$$

De plus l'application, $p \rightarrow \bar{H}_i(p)$ est continue, coercive et quasi-convexe.

Etape 1.2: Construction de w et \bar{A} : Au voisinage de zéro la solution limite u , si elle est $C^1(J_T)$, est formellement donnée par (voir Chapitre 3 Théorème 2.4)

$$u(t, x) = u(t, 0) + \sum_i \partial_i u \cdot x \mathbf{1}_{\{x \in J_i^*\}} = -\bar{A}t + \sum_i \partial_i u \cdot x \mathbf{1}_{\{x \in J_i^*\}},$$

tel que

$$\bar{H}_i(\partial_i u) = \bar{H}_i^-(\partial_i u) = \bar{A}.$$

Sur ce voisinage, si on considère l'ansatz suivant

$$u^\varepsilon(t, x) = u(t, 0) + \varepsilon w(\varepsilon^{-1}t, \varepsilon^{-1}x),$$

et qu'on l'injecte dans l'équation vérifiée par u^ε (solution de (3.7)), on obtient

$$\begin{aligned} u_t^\varepsilon + H\left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}, \partial_i u^\varepsilon\right) &= u_t(t, 0) + w_t\left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) + H\left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}, \partial_i w\right) \\ &= -\bar{A} + w_t\left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) + H\left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}, \partial_i w\right). \end{aligned}$$

Si on note les variables rapides par $y = \frac{x}{\varepsilon}$ et $s = \frac{t}{\varepsilon}$, il faut donc construire w solution du problème du correcteur suivant

$$\begin{cases} \omega_t(t, x) + H(t, x, \partial_i \omega) = \bar{A} & (t, x) \in \mathbb{R} \times J^*, \\ \omega_t(t, 0) + \max\left(H^+(t, 0, \partial_i \omega(t, 0^+))\right) = \bar{A} & (t, x) \in \mathbb{R} \times \{0\}, \\ \omega \text{ est 1-périodique en temps,} \end{cases} \quad (3.11)$$

et telle que

$$\omega_\varepsilon(t, x) = \varepsilon w(\varepsilon^{-1}t, \varepsilon^{-1}x) \rightarrow \sum_i \partial_i u \cdot x \mathbf{1}_{\{x \in J_i^*\}}.$$

On a alors le résultat suivant:

Théorème 3.7. *Supposons que \mathbf{H}_1 et $(\mathbf{H}\text{-jun-per})$ sont vérifiées. Alors, il existe un unique \bar{A} tel qu'il existe une solution ω de (3.11) tels que $\omega_\varepsilon(t, x)$ converge localement uniformément, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, vers la fonction $W : J \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait*

$$\begin{cases} W(0) = 0 \\ \bar{p}_i x \leq W(x) \leq \hat{p}_i x \quad \text{pour tout } x \in J_i^*, \text{ pour tout } i, \end{cases}$$

avec

$$\hat{p}_i = \max\{p \in \mathbb{R}; \bar{H}_i(p) = \bar{H}_i^-(p) = \bar{A}\}$$

et

$$\bar{p}_i = \min\{p \in \mathbb{R}; \bar{H}_i(p) = \bar{H}_i^-(p) = \bar{A}\}.$$

Etape 2: Unicité de u : Il faut maintenant démontrer que si la solution u du problème (3.9) existe alors elle est unique. Pour obtenir cette unicité il faut démontrer le principe de comparaison suivant

Théorème 3.8 (Principe de comparaison pour (3.9)). *Supposons que \mathbf{H}_1 et $(\mathbf{H}\text{-jun-per})$ sont vérifiées et que $u : [0, T) \times J \rightarrow \mathbb{R}$ (resp. v) est une fonction bornée SCS (resp. SCI) et sous-solution (resp. sur-solution) de (3.9). Alors $u \leq v$ sur $[0, T) \times J$.*

Ce résultat est démontré dans [56] mais nous donnons dans le Chapitre 3 une preuve plus simple inspirée du travail de Barles, Briani, Chasseingne et Imbert dans [16].

Etape 3: Convergence de u^ε : En utilisant la fonction test perturbée de Evans et les correcteurs qui vérifient les bonnes pentes on obtient le résultat de convergence.

3.3 Généralisation du cadre périodique au cadre stochastique

Il est important de distinguer la différence entre le cas périodique et le cas stochastique, et par la suite distinguer la différence entre le cas d'une droite et d'une jonction pour obtenir un résultat d'homogénéisation. Pour cette raison, dans cette section, on présente l'extension du cas périodique au cas stochastique en précisant les difficultés dans ce cas. Dans le cas stochastique on considère des équations de Hamilton-Jacobi qui dépendent d'une variable aléatoire. Le premier résultat d'homogénéisation stochastique est donné dans [86]. Par la suite des nombreux autres résultats quantitatifs et qualitatifs sont présentés dans différents cas, par exemple des équations de HJ convexes, quasiconvexes, du premier ordre ou second ordre et qui dépendent du temps et d'autres non. Pour les hamiltoniens convexes par rapport au gradient, un résultat d'homogénéisation stochastique a été prouvé par Souganidis [86] et Rezakhanlou et Tarver dans [81]. Ce résultat est étendu au cas des hamiltoniens qui dépendent du temps dans le travail de Schwab [84]. Pour les hamiltoniens quasi-convexes, Siconolfi et Davini [33] ont donné un résultat d'homogénéisation stochastique en 1d, et le cas dimensionnel général a été prouvé par Armstrong et Souganidis dans [9]. On trouve également des résultats pour des hamiltoniens non convexes dans [11].

On commence par définir l'espace de probabilité. On définit pour tout $V \in \mathbf{B}$, la σ -algèbre $\mathbf{F}(V)$ par

$$\mathbf{F}(V) := \{\sigma\text{-algèbre engendrée par les applications } \omega \rightarrow H(p, y, \omega), \forall y \in V, p \in \mathbb{R}\}.$$

Soit $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbb{R})$ et (Ω, \mathbf{F}, P) est l'espace de probabilité. L'hamiltonien $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable sur $\mathbf{B} \times \mathbf{B} \times \mathbf{F}$. Supposons que H vérifie les hypothèses suivantes

(H1) Regularité par rapport à p : H est Lipschitzienne par rapport à p uniformément en (y, ω) .

(H2) Borne de H en (p, y) : Il existe $c_0, C_0, \gamma > 0$, tels que pour tout $p, y \in \mathbb{R}$, et $\omega \in \Omega$ on a

$$-c_0|p + \gamma| \leq H(p, y, \omega) \leq C_0|p + \gamma|.$$

En particulier, on obtient pour tout $R > 0$, la famille des fonctions $\{H(\cdot, \cdot, \omega); \omega \in \Omega\}$ est bornée pour $(p, y) \in B_R \times \mathbb{R}$, avec B_R est une boule de \mathbb{R} de rayon R .

(H3) Coercivité uniforme: H est coercive par rapport à p , uniformément en (y, ω) , i.e

$$\lim_{|p| \rightarrow +\infty} \inf_{(y, \omega)} H(p, y, \omega) = +\infty.$$

(H4) Module de continuité uniforme: Il existe un module de continuité w tel que $\forall x, y, p \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \Omega$ on a

$$|H(p, y, \omega) - H(p, x, \omega)| \leq w(|x - y|(1 + |p|)).$$

(H5) Convexité: Pour tout (y, ω) , l'hamiltonien $p \rightarrow H(p, y, \omega)$ est convexe.

Les hypothèses **(H1)**-**(H5)** sont les mêmes que **H₁** dans le cas périodique sur une droite sauf que les équations de HJ dépendent d'une variable aléatoire ω .

(H6) Une borne inférieure unique pour H : Pour tout $y, p \in \mathbb{R}$, et $\omega \in \Omega$ on a

$$H(p, y, \omega) \geq H(0, y, \omega). \quad (3.12)$$

On définit, sur l'espace de probabilité (Ω, \mathbf{F}, P) , un groupe ergodique $(\tau_z)_{z \in \mathbb{R}}$, $\tau_z : \Omega \rightarrow \Omega$ tel que, pour tout $x, z \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathbf{F}$

$$\tau_{x+z} = \tau_x \circ \tau_z \text{ et } P(\tau_z(A)) = P(A),$$

et

$$\text{si } \tau_z(A) = A, \forall z \in \mathbb{R}, \text{ alors } P(A) = 0 \text{ ou } P(A) = 1.$$

(H7) Stationarité de H : L'hamiltonien H , est stationnaire en (y, ω) par rapport au groupe $(\tau_z)_{z \in \mathbb{R}}$, i.e pour tout $p, y, z \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \Omega$, on a

$$H(p, y + z, \omega) = H(p, y, \tau_z(\omega)).$$

L'hypothèse de stationnarité implique que les propriétés statistiques de l'environnement où on travaille sont indépendantes de l'endroit où on se trouve, i.e n'importe où on est dans l'espace on a statistiquement le même comportement.

(H8) Finite range dependence: La probabilité P satisfait

Pour tout $U, V \in \mathbf{B}$ tel que $d(U, V) \geq 1$, on a que $\mathbf{F}(U)$ et $\mathbf{F}(V)$ sont indépendantes.

On note **(H1)**-**(H8)** par **H₂**.

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon + H\left(Du^\varepsilon, \frac{y}{\varepsilon}, \omega\right) = 0 & (t, y) \in (0, T) \times \mathbb{R}, \\ u^\varepsilon(0, y, \omega) = u_0(y) & y \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.13)$$

Le but est de démontrer qu'il existe un événement Ω_0 de probabilité 1, tel que pour tout $\omega \in \Omega_0$, l'unique solution $u^\varepsilon(\cdot, \cdot, \omega)$ du problème (3.13) converge localement uniformément vers l'unique solution $u(\cdot, \cdot)$ du problème déterministe suivant

$$\begin{cases} u_t + \bar{H}(Du) = 0, & (t, y) \in (0, T) \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(y), & y \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.14)$$

La difficulté dans le cadre stochastique est de pouvoir construire des correcteurs. En effet, comme dans le cas périodique, il est possible de construire des correcteurs approchés mais par manque de compacité (puisque l'on travaille sur le domaine entier) il n'est en général pas possible de construire de vrais correcteurs, voir [34, 74]. Dans ce cas, l'homogénéisation repose sur la construction de quantités sous additives. On renvoie dans ce cadre à [5, 6, 9, 34, 85].

Ces quantités sous additives sont des solutions de ce qu'on appelle le problème métrique. De manière plus précise, on considère, pour $x \in \mathbb{R}$, le problème métrique suivant

$$\begin{cases} H(Dm_\mu(y, x, \omega), y, \omega) = \mu & y \in \mathbb{R} \setminus \{x\}, \\ m_\mu(x, x, \omega) = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

La solution m_μ est le coût pour passer de x à y . Par définition m_μ est sous additive. Donc le théorème ergodique sous additif implique que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{m_\mu(ty, tx, \omega)}{t} = \bar{m}_\mu(y, x) = \bar{m}_\mu(y - x).$$

Dans la section suivante on rappelle les résultats de [9], pour démontrer que la convergence de $\frac{m_\mu(ty, tx, \omega)}{t}$ implique le résultat d'homogénéisation stochastique qualitative.

3.4 Homogénéisation stochastique sur une droite

Pour démontrer un résultat d'homogénéisation, il faut définir l'hamiltonien effectif $\bar{H}(p)$ et démontrer la convergence de u^ε solution de (3.13) vers u solution de (3.14). On résume

ce résultat dans le théorème suivant

Théorème 3.9. [9, Theorem 1][Résultats d'homogénéisation stochastique] Supposons que H vérifie \mathbf{H}_2 . Il existe un hamiltonien déterministe \bar{H} tel que l'unique solution $u^\varepsilon(\cdot, \omega)$ de (3.13) converge presque sûrement en ω , et localement uniformément en (t, y) , quand $\varepsilon \rightarrow 0$, vers l'unique solution déterministe du problème (3.14).

Il est connu que ce résultat est une conséquence du résultat de convergence:

$$\varepsilon m_\mu \left(\frac{y}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}, \omega \right) \rightarrow \bar{m}_\mu(y - x).$$

Comme déjà évoqué, les correcteurs n'existent pas dans le cas stationnaire ergodique général. On considère donc le problème des correcteurs approchés donné par

$$\delta v^\delta + H(Dv^\delta + p, y, \omega) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}, \quad (3.16)$$

qui pour tout $p \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$ admet une unique solution bornée $v^\delta = v^\delta(y, \omega, p)$. On sait également, que démontrer l'homogénéisation du problème (3.13) est équivalent à trouver une unique constante déterministe $\bar{H}(p)$, telle que δv^δ converge presque sûrement en ω et uniformément en y , vers $\bar{H}(p)$ dans une boule de rayon $1/\delta$, lorsque $\delta \rightarrow 0$, i.e

$$\delta v^\delta(y, \omega, p) \rightarrow -\bar{H}(p) \text{ p.s en } \omega \text{ dans une boule de rayon } 1/\delta.$$

Dans un environnement aléatoire on ne peut pas obtenir cette convergence directement (comme v^δ est L^∞ , donc il existe une sous suite δ_j qui vérifie cette convergence, mais cela implique un résultat d'homogénéisation uniquement le long de cette sous suite). Pour cette raison on introduit le problème métrique, qui nous permet de démontrer cette convergence. En effet un argument de comparaison implique que m_μ contrôle le comportement de δv^δ .

3.5 Problème métrique

Soit μ^* la plus petite valeur déterministe (par ergodicité de $(\tau_x)_x$ car H est stationnaire) de μ telle que le problème $H(Dv, y, \omega) \leq \mu$ admet une sous-solution. Pour tout $\mu \geq \mu^*$, il existe une solution m_μ continue, positive et unique du problème métrique (3.15). La fonction m_μ est donnée par

$$m_\mu(y, x, \omega) := \sup \{w(y) - w(x), w \in \mathbf{Lip} \text{ et qui vérifie } H(Dw, y, \omega) \leq \mu \text{ sur } \mathbb{R}\}.$$

Par définition, m_μ est la sous-solution maximale de $H(Dv, y, \omega) \leq \mu$ sur \mathbb{R} telle que $v(x) = 0$. Ceci implique de plus que m_μ est sous-additive et stationnaire par stationnarité de H . Alors une simple application du théorème ergodique sous-additif implique l'existence d'une fonction déterministe (par ergodicité de τ_x) \bar{m}_μ telle qu'on a presque sûrement en ω la convergence suivante

$$\frac{m_\mu(ty, tx, \omega)}{t} \rightarrow \bar{m}_\mu(y, x) = \bar{m}_\mu(y - x) \quad \text{lorsque } t \rightarrow \infty. \quad (3.17)$$

La fonction $\bar{m}_\mu(\cdot, x)$ peut être identifiée comme l'unique solution positive de

$$\begin{cases} \bar{H}(D\bar{m}_\mu(y, x)) = \mu, & y \in \mathbb{R} \setminus \{x\}, \\ \bar{m}_\mu(x, x) = \bar{m}_\mu(0) = 0, \end{cases} \quad (3.18)$$

Ainsi, cela nous donne une autre façon pour identifier l'hamiltonien effectif \bar{H} . En effet, par définition, \bar{m}_μ est positivement homogène et sous-additive (m_μ est sous-additive). Ce qui implique que \bar{m}_μ est convexe. Et alors, \bar{m}_μ peut s'écrire comme le maximum des droites $y \rightarrow p \cdot (y - x)$, pour p appartenant à un ensemble convexe fermé. Or comme \bar{m}_μ vérifie l'équation (3.18), cet ensemble convexe est le sous niveau de \bar{H} , et alors on a

$$\bar{m}_\mu(y, x) = \bar{m}_\mu(y - x) = \max\{p(y - x); \bar{H}(p) \leq \mu\}. \quad (3.19)$$

On peut par la suite définir l'hamiltonien déterministe \bar{H} comme l'inverse de $\bar{m}_\mu(y, 0)$:

$$\bar{H}(p) = \inf\{\mu; \bar{m}_\mu \geq p \cdot y; \forall y\} \text{ et } \min_p \bar{H}(p) = \mu^*.$$

3.6 Homogénéisation stochastique sur une jonction

Comme déjà mentionné, un des résultat important de cette thèse est de démontrer un résultat d'homogénéisation stochastique précisée. Dans cette section, on considère une équation de HJ qui dépend d'une variable aléatoire. Récemment, il y a eu beaucoup d'attention sur l'homogénéisation des équations de HJ sur les réseaux dans lesquels l'équation est unidimensionnelle sauf aux jonctions ([17, 57] par exemple). La plupart de ces travaux reposent sur une hypothèse de périodicité. Dans notre travail on a pu démontré le cas stochastique sur une jonction simple. La difficulté dans notre cas par rapport aux résultats de la Section 3.4 est que l'on considère une perturbation au voisinage de zéro. Donc d'un point de vue trafic routier le flux est limité au voisinage de zéro. La présence de la jonction empêche la stationnarité de l'équation qui est une hypothèse essentielle dans les résultats obtenus précédemment. Cela empêche en particulier d'utiliser les arguments classiques utilisés pour prouver l'homogénéisation (i.e les arguments présentés dans la section précédente). Pour surmonter cette difficulté nous allons utiliser un argument quantitatif (on renvoie à [5] où ils ont démontré un résultat d'homogénéisation dans le cas où l'hamiltonien n'est pas convexe en utilisant des arguments quantitatifs).

Plus précisément, le problème que l'on considère est un cas où l'hamiltonien H est égale à H_L proche de $-\infty$ et à H_R proche de $+\infty$, H_L et H_R , étant deux hamiltoniens stationnaires ergodiques, avec une zone de transition (au voisinage de zéro) entre les deux. On étudie deux cas, le premier est celui où l'on passe de manière convexe de H_L à H_R . Dans ce cas, et au sens du trafic routier, le flux n'est pas limité et on obtient un limiteur de flux déterministe. Le second est le cas où on limite réellement le flux près de l'origine. Dans ce cas on est obligé d'avoir une zone de transition avec un rayon de l'ordre $1/\sqrt{\epsilon}$, c.à.d de plus en plus grande quand $\epsilon \rightarrow 0$. On arrive alors à montrer que le limiteur de flux est déterministe sur des ensembles de plus en plus grands (de probabilité < 1) et à la limite ($\epsilon \rightarrow 0$) sur un ensemble de probabilité 1. Un contre exemple est donné pour démontrer qu'on ne peut pas trouver à la limite un problème déterministe avec un limiteur de flux

déterministe si on prend une zone fixe avec une vraie limitation du flux. Ce résultat est détaillé ci-dessous.

Homogénéisation stochastique sur une jonction

On considère un hamiltonien H non stationnaire autour de zéro et "stationnaire loin de zéro". Pour surmonter cette difficulté, on va utiliser une approche quantitative. On pose sur H les hypothèses suivantes

(H-jun) Les hamiltoniens H_L, H_R et H_0 : Il existe deux hamiltoniens stochastiques H_L et H_R tels que

(H-jun-WFL): H est donné par

$$H(p, y, \omega) = \phi(y)H_L(p, y, \omega) + (1 - \phi(y))H_R(p, y, \omega), \quad (3.20)$$

avec $\phi(\cdot)$ une fonction $C^\infty(\mathbb{R})$ et décroissante donnée par

$$\phi(y) = \begin{cases} 1 & \text{if } y \leq -1, \\ 0 & \text{if } y \geq 1. \end{cases}$$

ou

(H-jun- ε): Il existe un hamiltonien $H_0 \geq H_R, H_L$ tel que H est donné, pour $\varepsilon > 0$, par

$$H(p, y, \omega) = \psi_1^\varepsilon(-y)H_L(p, y, \omega) + H_0(p, y, \omega)(1 - \psi_1^\varepsilon(-y))(1 - \psi_1^\varepsilon(y)) + \psi_1^\varepsilon(y)H_R(p, y, \omega), \quad (3.21)$$

avec $\psi_1^\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ qui satisfait

$$\psi_1^\varepsilon(y) = \begin{cases} 1 & y > \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \\ 0 & y < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}. \end{cases}$$

(H9) La probabilité d'atteindre le supremum est strictement positive: On suppose que, pour $\alpha = L, R, 0$,

$$P \left(\sup_{y \in [0,1[} H_\alpha(0, y, \omega) = \sup_{y \in \mathbb{R}} H_\alpha(0, y, \omega) \right) > 0$$

$$\text{ou } P \left(\sup_{y \in [1,2[} H_\alpha(0, y, \omega) = \sup_{y \in \mathbb{R}} H_\alpha(0, y, \omega) \right) > 0.$$

Dans les deux cas on a supposé que H est défini à l'infini par H_L et H_R . Par exemple, on suppose que l'hamiltonien H décrit dans le cas continue le flux des véhicules qui changent leur vitesse en passant d'une branche à une autre à cause d'une perturbation au voisinage de zéro. Plus précisément, soit ϕ la perturbation au voisinage de zéro donnée par l'hypothèse **(H-jun-WFL)** qui est de rayon 1. L'hamiltonien H est donnée par une combinaison convexe. En trafic routier, cette hypothèse décrit par exemple la présence

des panneaux de signalisation qui indiquent que sur la branche gauche la vitesse doit être 90km/h et devient 50km/h en passant à la branche droite. Alors les véhicules entrent dans la zone de perturbation en diminuant leur vitesse et sortent de cette zone avec une vitesse plus petite que celle sur l'autre branche. Dans ce cas le flux n'est pas limité. D'un point de vue mathématique, et dans ce cas $H_L \leq H_R$, le limiteur de flux est donc donné par $\min_p \bar{H}_R$ (avec \bar{H}_R l'hamiltonien effectif à droite).

Pour l'hypothèse **(H-jun- ε)** on considère une zone de perturbation de rayon $1/\sqrt{\varepsilon}$. Un exemple d'hamiltonien H dans ce cas est celui qui décrit une réduction de vitesse dans la zone de perturbation par exemple la présence d'un feu tricolore ou bien d'une école. D'un point de vue mathématique, on est dans le cas où $H > H_\alpha$, et donc on définit le flux limiteur qui vérifie $\bar{A} > \max(\min_p \bar{H}_L, \min_p \bar{H}_R)$. Après une remise à l'échelle (i.e en passant de y à y/ε), la zone de perturbation devient de rayon $\sqrt{\varepsilon}$ et quand $\varepsilon \rightarrow 0$, elle se réduit au point zéro. Comme loin de zéro on considère deux hamiltoniens différents, H_L et H_R , le problème déterministe limite est défini par les hamiltoniens effectifs à gauche et à droite et une condition sur le point de jonction zéro.

Les hypothèses **(H8)** et **(H9)** impliquent que la probabilité telle que le véhicule le plus lent soit dans un intervalle $[2k, 2k + 1[$ ou $[2k + 1, 2k + 2[$ est strictement positif pour $k \in \mathbb{N}$.

On suppose que l'hamiltonien H vérifie les hypothèses **(H-jun)**, **(H9)** et **H₂** mais l'hypothèse de stationnarité **(H7)** est uniquement vérifiée par H_α .

On note par **H₃** les hypothèses **H₂** telles que H_α vérifient **(H7)**, avec **(H-jun)** et **(H9)**.

On a alors le résultat suivant:

Théorème 3.10. [*Résultat d'homogénéisation stochastique précisée*] *Supposons que **H₃** est vérifiée, et que u_0 est une fonction Lipschitzienne. Pour $\varepsilon > 0$, soit u^ε la solution de (3.13). Alors il existe deux hamiltoniens déterministes, convexes et coercifs, \bar{H}_L et \bar{H}_R , un flux limiteur \bar{A} et un événement $\Omega_0 \subseteq \Omega$ de probabilité 1, tel que pour tout $\omega \in \Omega_0$, l'unique solution $u^\varepsilon(\cdot, \cdot, \omega)$ de (3.13) converge localement uniformément sur \mathbb{R} , quand $\varepsilon \rightarrow 0$, vers l'unique solution déterministe u du problème déterministe suivant*

$$\begin{cases} u_t + \bar{H}_L(Du) = 0, & y < 0, t \in (0, T), \\ u_t + \bar{H}_R(Du) = 0, & y > 0, t \in (0, T), \\ u_t + \max(\bar{A}, \bar{H}_L^+(Du(0^-)), \bar{H}_R^-(Du(0^+))) = 0, & y = 0, t \in (0, T), \\ u(0, x) = u_0(y), & y \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.22)$$

Comme déjà évoqué, pour obtenir le résultat, il faut étudier un problème intermédiaire appelée problème métrique. Dans le cas d'une jonction on considère trois problèmes métriques. Les deux premiers sont donnés avec H_α , $\alpha = L, R$ et nous permettent de définir \bar{H}_α (ce qui est classique, on renvoie à la Section 3.4) et le troisième est donné avec H qui nous permet de définir \bar{A} .

A la jonction, l'idée est de construire une quantité m_μ qui ressemble à un correcteur (sous-correcteur sur \mathbb{R} et sur-correcteur sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$) et qui vérifie les bonnes pentes à l'infini. Mais de plus cette quantité vérifie des propriétés sous additives et des propriétés de localisation (au contraire des correcteurs qui sont définies sur tout \mathbb{R}). Alors ces propriétés avec la forte hypothèse "finite range dependence", nous permet de démontrer

l'homogénéisation du problème métrique.

Par définition l'hamiltonien H est coercif et convexe et donné par (3.20) ou par (3.21). Si on définit \tilde{A} comme la plus petite valeur telle que $H(Dv, y, \omega) \leq \mu$ admet une solution alors on a

$$\min(\mu_L^*, \mu_R^*) \leq \tilde{A} = \tilde{A}_{WFL} \leq \max(\mu_L^*, \mu_R^*) \text{ sous l'hypothèse } (\mathbf{H-jun-WFL})$$

et

$$\tilde{A} = \tilde{A}_\varepsilon \geq \max(\mu_L^*, \mu_R^*) \text{ sous l'hypothèse } (\mathbf{H-jun-}\varepsilon),$$

avec μ_α^* la plus petite valeur de μ telle que $H_\alpha(Dv, y, \omega) \leq \mu$ admet une solution. Alors par définition de H dans les deux cas, il existe une sous-solution v de $H(Dv, y, \omega) = \mu$ presque pour tout $y \in \mathbb{R}$, si $\mu \geq \max(\mu_L^*, \mu_R^*)$ sous l'hypothèse $(\mathbf{H-jun-WFL})$ et pour tout $\mu \geq \tilde{A}_\varepsilon$ sous l'hypothèse $(\mathbf{H-jun-}\varepsilon)$.

Géométriquement, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$, $p \rightarrow H(p, y, \omega)$, respectivement $p \rightarrow H_\alpha(p, y, \omega)$, sous les hypothèses \mathbf{H}_3 avec $(\mathbf{H-jun-WFL})$, ont la forme suivante

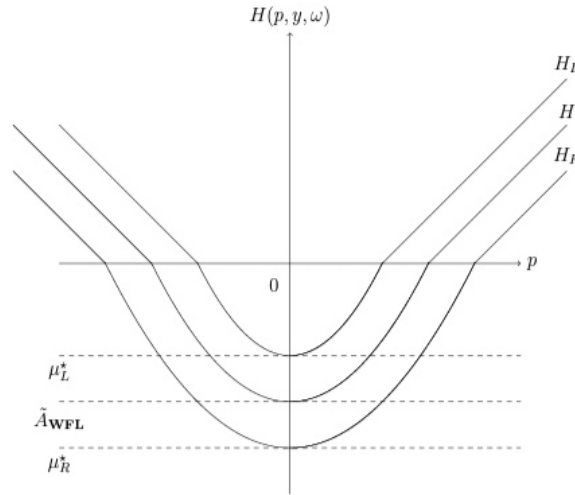


Figure 1.4: H et H_α sous l'hypothèse \mathbf{H}_3 -($\mathbf{H-jun-WFL}$)

Et on a respectivement sous l'hypothèse $(\mathbf{H-jun-}\varepsilon)$, $H(\cdot, y, \omega)$ et $H_\alpha(\cdot, y, \omega)$ sont données par

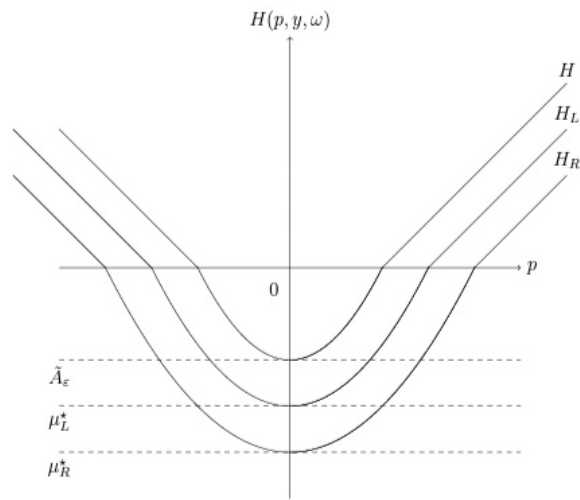


Figure 1.5: H et H_α sous l'hypothèse \mathbf{H}_3 -(\mathbf{H} -jun- ε)

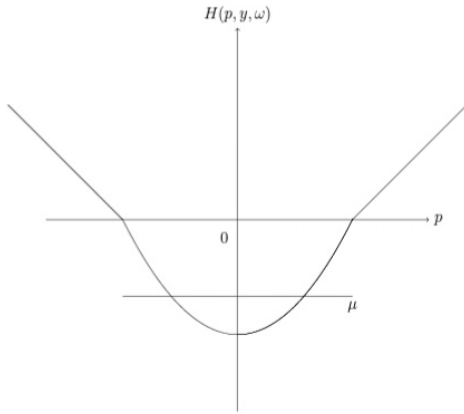
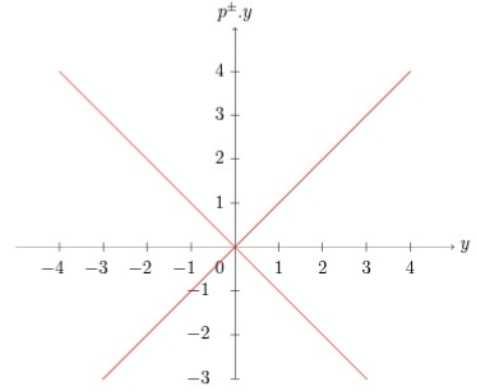
Alors, par construction de H , la solution m_μ existe et est l'unique solution positive de (3.15) pour tout $\mu > \bar{A}$ (voir la Figure 1.7, pour $p^+ > 0$ et $p^- < 0$ les deux solutions de (3.15) sont données par

$$\begin{cases} p^+ . y & y > 0, \\ p^- . y & y < 0 \end{cases}$$

et respectivement

$$\begin{cases} p^+ . y & y < 0, \\ p^- . y & y > 0 \end{cases}$$

).

Figure 1.6: L'hamiltonien H Figure 1.7: Les deux solutions de $H(Dv, y, \omega) = \mu$

La preuve du théorème 3.10 est divisée en plusieurs étapes.

Etape 1: Définition du limiteur de flux déterministe:

On commence par définir $\tilde{A}(\omega)$. Soit

$$\tilde{A}(\omega) = \inf\{\mu; \text{il existe } v \in \mathbf{Lip}; H(Dv, y, \omega) \leq \mu \text{ sur } \mathbb{R}\}.$$

Pour obtenir un problème limite déterministe il faut définir un limiteur de flux déterministe \bar{A} . Au contraire du cadre stationnaire-ergodique, les hypothèses **(H-jun)** et **(H8)** impliquent que \tilde{A} est déterministe.

Théorème 3.11 (Cas où H vérifie **(H-jun-WFL)**). *Supposons que **(H-jun-WFL)** est satisfaite. Alors, il existe un événement Ω_1 de probabilité 1 tel que, pour tout $\omega \in \Omega_1$, $\tilde{A}(\omega)$ est déterministe et donné par*

$$\tilde{A}(\omega) = \bar{A} := \max(\mu_L^*, \mu_R^*).$$

En effet, cette égalité est vérifiée car, d'une part l'hypothèse **(H-jun-WFL)** implique que

$$\min(H_L(p, y, \omega), H_R(p, y, \omega)) \leq H(p, y, \omega) \leq \max(H_L(p, y, \omega), H_R(p, y, \omega)),$$

et alors $\mu_\alpha^* \geq \tilde{A}$, pour $\alpha = L, R$. D'autre part l'hypothèse **(H₈)** nous permet de déduire l'égalité (par indépendance on pourra démontrer que μ_α^* est atteint loin de zéro ($|y| \geq 1$)).

Sous l'hypothèse **(H-jun- ε)** on démontre que $\tilde{A}(\omega)$ est constant sur un événement Ω_1^ε , pour $\varepsilon > 0$, de probabilité < 1 . De plus Ω_1^ε est décroissant en ε et $\Omega_0 = \bigcup_\varepsilon \Omega_1^\varepsilon$ est de probabilité 1. Ainsi, à la limite, on obtient que \tilde{A} est déterministe sur Ω_0 .

Pour faire cela, on définit, comme pour les hamiltoniens H_L et H_R , la plus petite valeur déterministe telle que $H_0(Dv, y, \omega) \leq \mu$ admet une solution sur \mathbb{R} , par

$$\mu_0^* = \inf\{\mu; \text{ tq il existe } v \in \mathbf{Lip} \text{ qui satisfait } H_0(Dv, y, \omega) \leq \mu \text{ sur } \mathbb{R}\} = \inf_p \bar{H}_0(p).$$

Théorème 3.12 (Cas où H vérifie **(H-jun- ε)**). *Supposons que **(H-jun- ε)** est satisfaite. Alors, il existe une suite décroissante d'événements Ω_1^ε , telle que $P(\Omega_1^\varepsilon) = 1 - \theta(\varepsilon)$ avec $\theta(\varepsilon) \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. De plus, pour tout $\omega \in \Omega_1^\varepsilon$, $\tilde{A}(\omega)$ est donné par*

$$\tilde{A}(\omega) = \bar{A} := \max(\min_p \bar{H}_0(p), \min_p \bar{H}_L(p), \min_p \bar{H}_R(p)) = \min_p \bar{H}_0(p) = \mu_0^*.$$

En effet, l'hypothèse **(H-jun- ε)** implique que

$$H_0(p, y, \omega) \geq H(p, y, \omega)$$

et alors $\mu_0^* \geq \tilde{A}$. Ensuite, l'hypothèse **(H₈)** nous permet de déduire l'égalité (par indépendance on pourra démontrer que μ_0^* est atteint au voisinage de zéro ($|y| \leq \sqrt{1/\varepsilon}$)).

Etape 2: On a alors démontré l'existence d'un unique limiteur de flux \bar{A} sur un événement Ω_1^ε de probabilité $1 - \theta(\varepsilon)$ sous l'hypothèse **(H-jun- ε)** et sur un événement Ω_1 , de probabilité 1 sous l'hypothèse **(H-jun-WFL)**. De plus, loin du point de la jonction, le résultat est classique alors le problème métrique et le problème des correcteurs approchés donnés avec H_α , pour $\alpha = L, R$ (voir Section 3.4), nous permettent de définir les hamiltoniens effectifs à droite et à gauche. Pour compléter le résultat d'homogénéisation, il reste à démontrer la convergence de u^ε solution de (3.13) vers la solution u du problème (3.22). Encore une fois, la solution u est bien la limite, presque sûrement en ω et localement uniformément en (t, y) , de la solution u^ε loin de la jonction (d'après le résultat de la Section 3.4). Il nous reste donc à démontrer que c'est vrai sur le point de la jonction. Pour cette raison, et comme dans le cas classique, on considère le problème des correcteurs approchés suivant

$$\delta v^\delta(y, \omega) + H(Dv^\delta, y, \omega) = 0 \quad y \in \mathbb{R}.$$

Ensuite on considère au voisinage de zéro l'ansatz suivant

$$u^\varepsilon(t, x) = u(t, 0) + \varepsilon v^\delta(\varepsilon^{-1}y, \omega),$$

pour $\delta \leq \varepsilon$ petite.

On sait, d'après le théorème 2.4 du Chapitre 3, que la solution limite du problème (3.22), a formellement la forme suivante au voisinage de zéro

$$u(t, y) = u(t, 0) + \bar{p}_L^- \cdot y \mathbf{1}_{y < 0} + \bar{p}_R^+ \cdot y \mathbf{1}_{y > 0},$$

avec \bar{p}_L^- et \bar{p}_R^+ vérifient

$$\begin{cases} \bar{H}_R(\bar{p}_R^+) = \bar{H}_R^+(\bar{p}_R^+) = \bar{A} \\ \bar{H}_L(\bar{p}_L^-) = \bar{H}_L^-(\bar{p}_L^-) = \bar{A}, \end{cases}$$

et $\bar{H}_R^+(\cdot)$, $\bar{H}_L^-(\cdot)$ les parties croissante de $\bar{H}_R(\cdot)$ et décroissante de $\bar{H}_L(\cdot)$ respectivement. Alors, si on injecte l'ansatz dans l'équation vérifiée par u^ε solution de (3.13), on obtient

$$u_t^\varepsilon + H(Du^\varepsilon, \frac{y}{\varepsilon}, \omega) = u_t(t, 0) - \delta v^\delta \left(\frac{y}{\varepsilon}, \omega \right) = \bar{A} - \delta v^\delta(z, \omega).$$

Pour obtenir alors le résultat de convergence il faut démontrer que

$$-\delta v^\delta(z, \omega) \rightarrow \bar{A}$$

dans une boule de rayon $1/\delta$, et que

$$\delta v^\delta \left(\frac{y}{\delta}, \omega \right) \rightarrow \bar{p}_L^- \cdot y \mathbf{1}_{y < 0} + \bar{p}_R^+ \cdot y \mathbf{1}_{y > 0}.$$

Plus précisément il faut démontrer le théorème suivant

Théorème 3.13. [*Le correcteur approché v^δ*] Supposons que \mathbf{H}_3 et $(\mathbf{H}\text{-jun-}\varepsilon)$ (resp. $(\mathbf{H}\text{-jun-WFL})$) sont vérifiées et soit $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit. Alors pour tout $0 < \delta \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $r > 0$, il existe une solution v^δ du problème des correcteurs approchés telle que, pour tout $\omega \in \Omega_0^{\varepsilon_0}$ (resp $\omega \in \Omega_0$), $\delta v^\delta(y, \omega)$ converge localement uniformément sur la boule $B_{r/\delta}$ vers $-\bar{A}$, i.e,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} |\delta v^\delta(y, \omega) + \bar{A}| = 0 \text{ pour tout } y \in B_{r/\delta}.$$

De plus, si on définit \bar{v}^δ par $\bar{v}^\delta(y, \omega) = \delta v^\delta(\delta^{-1}y, \omega)$, alors \bar{v}^δ converge localement uniformément, lorsque $\delta \rightarrow 0$, vers une fonction W qui satisfait $W(0) = 0$ et

$$\bar{p}_R^+ y \mathbf{1}_{\{y > 0\}} + \bar{p}_L^- y \mathbf{1}_{\{y < 0\}} \leq W(y) \leq \hat{p}_R^+ y \mathbf{1}_{\{y > 0\}} + \hat{p}_L^- y \mathbf{1}_{\{y < 0\}} \quad (3.23)$$

avec

$$\begin{cases} \bar{p}_L^- = \sup\{p, \bar{H}_L(p) = \bar{A}\} \\ \hat{p}_L^- = \inf\{p, \bar{H}_L(p) = \bar{A}\} \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \bar{p}_R^+ = \inf\{p, \bar{H}_R(p) = \bar{A}\} \\ \hat{p}_R^+ = \sup\{p, \bar{H}_R(p) = \bar{A}\}. \end{cases} \quad (3.24)$$

Ce résultat suffit pour démontrer la convergence de u^ε vers u par la méthode de la fonction test perturbée introduite par Evans.

Pour démontrer ce résultat il faudra démontrer l'homogénéisation du problème métrique, ensuite un argument de comparaison sur v^δ et m_μ solution de (3.15) implique le Théorème 3.13.

Etape 3: Le problème métrique: L'étape suivante est de démontrer l'homogénéisation du problème métrique, i.e la convergence de $\frac{m_\mu(ty, tx, \omega)}{t}$.

Etape 3.1: Par manque de stationnarité sur H , le résultat de convergence sur m_μ n'est pas classique. On démontre ce résultat par une approche quantitative en démontrant une estimation entre $\frac{m_\mu(ty, tx, \omega)}{t}$ et sa limite notée par \bar{m}_μ . Plus précisément, on démontre dans un premier temps une estimation entre $\frac{m_\mu(ty, tx, \omega)}{t}$ et son espérance donnée par

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega_1^\varepsilon, \frac{1}{t} |m_\mu(ty, tx, \omega) - E[m_\mu(ty, tx, \omega)]| > \lambda\right\}\right) \leq \exp\left(-\frac{t\lambda^2(\mu - \bar{A})}{C|y-x|}\right).$$

Cette estimation implique l'existence d'un événement $\Omega_0^\varepsilon \subset \Omega_1^\varepsilon$ tel que $P(\Omega_0^\varepsilon) = P(\Omega_1^\varepsilon) = 1 - \theta(\varepsilon)$ et

$$\frac{1}{t} |m_\mu(ty, tx, \omega) - E[m_\mu(ty, tx, \omega)]| \rightarrow 0 \text{ pour tout } \omega \in \Omega_0^\varepsilon.$$

D'autre part, Le lemme de Fekete implique la convergence de $\frac{E[m_\mu(ty, tx, \omega)]}{t}$. On conclut alors le résultat d'homogénéisation du problème métrique, i.e l'existence d'une fonction déterministe \bar{m}_μ telle que

$$\frac{m_\mu(ty, tx, \omega)}{t} \rightarrow \bar{m}_\mu(y, x) \text{ presque sûrement en } \omega.$$

Etape 3.2: Vérification des bonnes pentes à l'infini par la solution du problème métrique: Pour $\mu > \bar{A}$ la solution du problème métrique (3.15) vérifie à l'infini les bonnes pentes, plus précisément la solution \bar{m}_μ à une forme de V et elle est donnée, sur les demi-droites positive ($y > 0, x \geq 0$) et négative ($y < 0, x \leq 0$), par

$$\bar{m}_\mu(y, x) = \bar{m}_\mu^R(y - x) \text{ (resp. } = \bar{m}_\mu^L(y - x)),$$

avec $\bar{p}_\mu^{\alpha, \pm}$ pour $\alpha = R, L, \pm \bar{p}_\mu^{\alpha, \pm} \geq 0$ et

$$\bar{H}_\alpha(\bar{p}_\mu^{\alpha, \pm}) = \bar{H}_\alpha^\pm(\bar{p}_\mu^{\alpha, \pm}) = \mu,$$

et

$$\bar{m}_\mu^R(y, x) = \begin{cases} \bar{p}_\mu^{R,+}(y-x) & \text{for } y > x; \\ \bar{p}_\mu^{R,-}(y-x) & \text{for } y < x. \end{cases}$$

$$\left(\text{resp. } \bar{m}_\mu^L(y, x) = \begin{cases} \bar{p}_\mu^{L,+}(y-x) & \text{for } y > x; \\ \bar{p}_\mu^{L,-}(y-x) & \text{for } y < x. \end{cases}\right)$$

Contre exemple

Dans notre résultat, on a pu démontrer l'homogénéisation du problème (3.13) sous deux différentes hypothèses, une pour une perturbation de rayon fixe mais le flux est limité naturellement et l'autre pour une perturbation de rayon d'ordre $1/\sqrt{\varepsilon}$, telle que le flux est limité. On a démontré de plus qu'on n'arrive pas à définir

un problème limite déterministe (notamment un limiteur de flux déterministe) si ces deux hypothèses ne sont pas vérifiées. Plus précisément, pour un processus H qui ne vérifie pas $\min(H_L, H_R) \leq H \leq \max(H_L, H_R)$, et que la perturbation est indépendante de ε , le problème limite (s'il existe) est un problème stochastique. L'hamiltonien H qui représente un contre exemple est un processus de Bernoulli donné par

$$H(p, y, \omega) = H_L(p, y, \omega)(1 + \bar{\psi}(y)),$$

avec

$$\bar{\psi}(y) = \begin{cases} \psi_0 & |y| \leq 1/2, \\ 0 & |y| \geq 3/4, \end{cases}$$

$\bar{\psi} \in C^\infty$ et $-1 < \psi_0 < 0$ est une constante. Et l'hamiltonien H_L est définie par

$$H_L(p, y, \omega) = \begin{cases} (-p - \tilde{p} - k_0)\psi(\omega, y), & p < -k_0 - \tilde{p}, \\ -|p + \tilde{p}|V_L(-\frac{1}{p + \tilde{p}})\psi(\omega, y), & -k_0 - \tilde{p} \leq p \leq -\tilde{p}, \\ (p + \tilde{p})\psi(\omega, y), & p > -\tilde{p} \end{cases}$$

avec

$$\psi(y, \omega) = \bar{\psi}(y - 2k)X_k(\omega) + 1 \quad \text{si } y \in [2k - 1, 2k + 1].$$

4 **Modèle non-local pour le trafic routier**

Dans cette partie, nous proposons un modèle non-local pour modéliser le trafic routier à l'échelle macroscopique. D'autres problèmes non-locaux pour le trafic routier à l'échelle macroscopique sont données par des équations de lois de conservation. On renvoie à [18], où Blandin et Goatin ont étudié une équation de conservation de la masse non locale du trafic routier. Cette équation décrit l'adaptation de la vitesse du véhicule par le conducteur en fonction des véhicules qui sont devant lui, en donnant une plus grande importance à ceux qui sont proches. On renvoie aussi à [35] de De Filippis et Goatin.

Le modèle que nous proposons est justifié par un passage microscopique-macroscopique à partir d'un modèle microscopique faisant intervenir des vitesses non-locales (i.e dépendent d'un grand nombre de voitures devant). Le passage microscopique-macroscopique est réalisé dans plusieurs articles, on renvoie par exemple à [54] où Helbing a trouvé un problème à l'échelle macroscopique qui décrit le flux de trafic autoroutier, à partir d'un problème à l'échelle microscopique. On renvoie également aux travaux de Forcadel, Imbert et Monneau [40, 41] qui proposent deux méthodes qui consistent à injecter le système d'EDOs à l'échelle microscopique dans une EDP et ensuite obtenir le problème macroscopique par homogénéisation. La première, en passant des solutions discrètes aux solutions continues en posant $i = \lfloor x \rfloor$, comme dans [41], et comme on procèdera dans ce qui suit, pour obtenir le problème macroscopique. Dans ce cas le problème macroscopique sera donné en coordonnées Lagrangiennes. L'inconnu $u(t, x)$ représente la position de la x -ème voiture au temps t . La deuxième, en définissant la fonction de distribution cumulative comme dans [40], pour obtenir un problème à l'échelle macroscopique donné par les coordonnées Euleriennes. Pour cette méthode $u(t, x)$ représente le label de la voiture au

point physique de la route x à temps t (voir [58]). L'inconnu de la deuxième méthode est l'inverse en espace de la première méthode (voir [39] pour plus d'informations).

4.1 Etude du modèle non-local et résultats d'homogénéisation

Le modèle microscopique que nous considérons décrit la vitesse d'une voiture en fonction du comportement de toutes les voitures qui sont devant. Soit $\varepsilon > 0$, on considère l'EDO suivante

$$\dot{U}_i(t) = V \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} g^\varepsilon(k)} \sum_{j=1}^{\infty} g^\varepsilon(j) \frac{U_{i+j}(t) - U_i(t)}{j} \right) \quad (4.25)$$

avec U_i la position de la i -ème voiture, \dot{U}_i la vitesse et $g^\varepsilon(j) = g(\varepsilon j)$, avec g une fonction positive décroissante. La fonction vitesse V est donnée dans la figure 1.8.

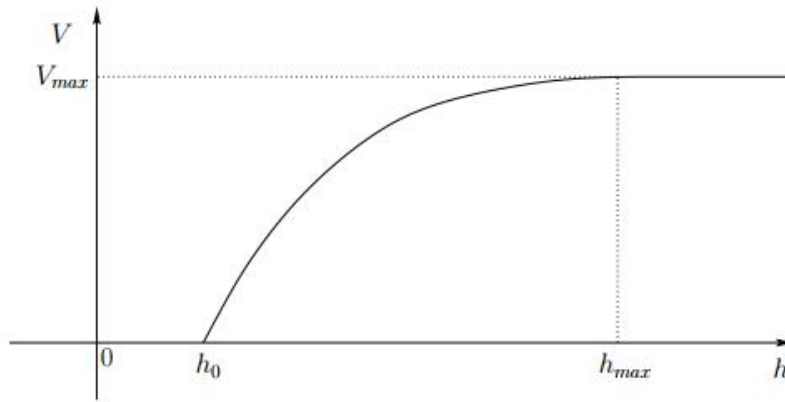


Figure 1.8: La fonction vitesse V

L'EDO décrit la vitesse de la i -ème voiture en fonction de toutes les voitures qui sont devant, en donnant une grande importance à celles qui sont proches. La voiture i roule à une vitesse maximale lorsque la distance entre la voiture i et toutes celles qui sont devant est très grande, et au contraire la voiture ne bouge pas lorsque la distance moyenne des voitures proches est petite ($\leq h_0$).

Pour obtenir le problème macroscopique, on introduit une fonction $\bar{u}(\cdot, \cdot) : (t, x) \rightarrow \bar{u}(t, x)$, avec des variables continues définie par

$$\bar{u}(t, x) := U_{\lfloor x \rfloor}(t), \quad (4.26)$$

pour $(t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}$, où $\lfloor \cdot \rfloor$ est la partie entière inférieure. On applique un changement de variable et on définit

$$\bar{u}^\varepsilon(t, x) := \varepsilon U_{\lfloor \frac{x}{\varepsilon} \rfloor} \left(\frac{t}{\varepsilon} \right),$$

solution de

$$\bar{u}_t^\varepsilon = V \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} g^\varepsilon(k)} \sum_{j=1}^{\infty} g^\varepsilon(j) \frac{\bar{u}^\varepsilon(t, x + \varepsilon j) - \bar{u}^\varepsilon(t, x)}{\varepsilon j} \right) \text{ sur }]0, T[\times \mathbb{R}.$$

Un exemple de la fonction g est le poids constant pour les voitures proches, soit, pour $\delta > 0$, $N > 0$,

$$g(j) = \begin{cases} 1/\delta & 0 \leq j \leq N, \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

Alors on aura

$$\bar{u}_t^\varepsilon = V \left(\frac{1}{N_\varepsilon} \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} \frac{\bar{u}^\varepsilon(t, x + \varepsilon j) - \bar{u}^\varepsilon(t, x)}{\varepsilon j} \right),$$

avec $N_\varepsilon = \lfloor \frac{N}{\varepsilon} \rfloor$. Cette équation décrit exactement la vitesse de la i -ème voiture en fonction de la moyenne des moyennes des distances avec les voitures devant i .

Le but est de définir le problème macroscopique tel que la fonction $\bar{u}^\varepsilon(\cdot, \cdot)$ converge localement uniformément sur $(0, T) \times \mathbb{R}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ (i.e lorsque le nombre de voitures par unité de longueur tend vers l'infini) vers u l'unique solution de

$$\begin{cases} u_t = V \left(\frac{1}{\int_0^{+\infty} g(z) dz} \int_0^\infty \left(\frac{u(t, x+z) - u(t, x)}{z} \right) g(z) dz \right) & \text{sur }]0, T[\times \mathbb{R}; \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{sur } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.27)$$

La fonction u_0 est une fonction lipschitzienne telle que pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$U_i(0) = \varepsilon^{-1} u_0(i\varepsilon).$$

Plus précisément, on suppose que les fonctions V et g vérifient les hypothèses suivantes

(H1) $V : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ est une fonction positive et lipschitzienne.

(H2) V est croissante sur \mathbb{R} .

(H3) Il existe $h_0 \in (0, +\infty)$ tel que pour tout $h \leq h_0$, $V(h) = 0$.

(H4) Il existe $h_{\max} \in (h_0, +\infty)$ tel que pour tout $h \geq h_{\max}$, $V(h) = V(h_{\max}) = V_{\max}$.

(H5) $g : [0; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[$ est $L^1([0, +\infty[)$.

(H6) Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [0, 1]$ on a

$$g(x) \geq \delta.$$

(H7) La fonction $z \mapsto z.g(z)$ est $L^1([0; +\infty[)$.

On note par \mathbf{H}_4 les hypothèses **(H1)** – **(H7)**.

On considère le problème microscopique suivant

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon = V \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} g^\varepsilon(k)} \sum_{j=1}^{\infty} g^\varepsilon(j) \frac{u^\varepsilon(t, x + \varepsilon j) - u^\varepsilon(t, x)}{\varepsilon j} \right) & \text{on }]0, T[\times \mathbb{R}; \\ u^\varepsilon(0, x) = u_0(x) & \text{on } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.28)$$

Le résultat d'homogénéisation dans le cas non local est le suivant

Théorème 4.1 (Résultat d'homogénéisation). *Supposons que \mathbf{H}_4 est vérifiée et soit u_0 une fonction lipschitzienne. Alors, l'unique solution u^ε de (4.28) converge lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, localement uniformément en (t, x) , vers l'unique solution u de (4.27).*

Le schéma de la preuve est décomposée en plusieurs étapes.

Etape 1: Le problème (4.28) est bien posé: On commence par le caractère bien posé du problème (4.28). Les solutions de ce problème sont données au sens de viscosité suivant

Définition 4.2. *Soit $u :]0, T[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction SCS (resp. SCI). Supposons qu'il existe une constante C_0 telle que*

$$|u(t, x) - u_0(x)| \leq C_0 t.$$

On dit que u est une sous-solution (une sur-solution) de viscosité de (4.28) si $u(0, \cdot) \leq u_0$ (resp. \geq) et si, pour tout $\phi \in C^1(]0, T[\times \mathbb{R})$ telle que $u - \phi$ atteint un maximum (resp. un minimum) en $(\bar{t}, \bar{x}) \in]0, T[\times \mathbb{R}$ on a

$$\phi_t(\bar{t}, \bar{x}) \leq V \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} g^\varepsilon(k)} \sum_{j=1}^{\infty} g^\varepsilon(j) \frac{u(\bar{t}, \bar{x} + \varepsilon j) - u(\bar{t}, \bar{x})}{\varepsilon j} \right) \quad (\text{resp. } \geq).$$

La solution u^ε de (4.28), si elle existe, est unique. En effet, il suffit de démontrer le principe de comparaison suivant

Théorème 4.3 (Principe de comparaison pour (4.28)). *Soient u et v une sous- et sur-solution respectivement de (4.28). On suppose de plus qu'il existe une constante C_0 telle que*

$$|u(t, x) - u_0(x)| \leq C_0 t \quad \text{et} \quad |v(t, x) - u_0(x)| \leq C_0 t.$$

Alors on a

$$u \leq v \quad \text{sur } [0, T] \times \mathbb{R}.$$

Enfin, la solution u^ε de (4.28) est construite par la méthode de Perron.

Théorème 4.4 (Existence de la solution de (4.28)). *Soit $u_0 \in Lip(\mathbb{R})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une unique solution u^ε de (4.28) tel qu'il existe une constante positive C_0 (qui dépend uniquement de la constante lipschitz de u_0) telle que*

$$|u^\varepsilon(t, x) - u_0(t, x)| \leq C_0 t, \quad \forall t, x \in [0, T[\times \mathbb{R}. \quad (4.29)$$

Le résultat d'existence est une conséquence directe du principe de comparaison, par la méthode de Perron. Il suffit de démontrer que $\pm C_0 t + u_0(t, x)$ sont respectivement une sous- et sur-solution de (4.28).

Etape 2: Le problème (4.27) est bien posé:

Pour que le terme non local soit bien défini on suppose que u vérifie

$$\exists C_0 > 0 \text{ such that } |u(t, x) - u_0(x)| \leq C_0 t. \quad (4.30)$$

La solution u de (4.27) est donnée au sens de viscosité suivant

Définition 4.5. [57, Définition 1] *Soit $\bar{\alpha} > 0$. La fonction SCS (resp. SCI) $u : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait (4.30) est une $\bar{\alpha}$ -sous- (resp. sur-) solution de (4.27) si $u(0, \cdot) \leq u_0$ (resp. $\geq u_0$) et si, pour tout $\phi \in C^1([0, T[\times \mathbb{R})$ telle que $u - \phi$ atteint un maximum (resp. un minimum) en $(\bar{t}, \bar{x}) \in]0, T[\times \mathbb{R}$, alors on a*

$$\phi_t(\bar{t}, \bar{x}) \leq V \left(\frac{1}{\int_{\mathbb{R}_+} g(z) dz} \left\{ \int_0^{\bar{\alpha}} \frac{\phi(\bar{t}, \bar{x} + z) - \phi(\bar{t}, \bar{x})}{z} g(z) dz + \int_{\bar{\alpha}}^{+\infty} \frac{u(\bar{t}, \bar{x} + z) - u(\bar{t}, \bar{x})}{z} g(z) dz \right\} \right) \text{ (resp. } \geq \text{)}.$$

On démontre de plus que cette définition est vraie pour tout $\bar{\alpha}$.

Théorème 4.6. [57, Proposition 1] *Soient $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. On a que u est α_1 -sous-solution (resp. α_1 -sur-solution) ssi u est α_2 -sous-solution (resp. α_2 -sur-solution).*

Pour $\bar{\alpha}$ très petite; comme ϕ est C^1 , on a $\frac{\phi(\bar{t}, \bar{x} + z) - \phi(\bar{t}, \bar{x})}{z}$ est l'approximation de $\phi'(\bar{x})$. Donc la définition précédente est semblable aux définitions des solutions de viscosité classiques pour lesquelles on remplace les dérivées de u au point de supremum par les dérivées des fonctions tests.

Pour démontrer que le problème (4.27) est bien posé on aura besoin du principe de comparaison suivant:

Théorème 4.7 (Principe de comparaison pour (4.27)). *Soient u une sous-solution et v une sur-solution de (4.27). On suppose de plus que u et v vérifient (4.30) (pour que l'intégrale soit bien définie). Alors*

$$u \leq v \text{ sur } [0, T[\times \mathbb{R}.$$

Ce principe de comparaison nous permet de construire la solution de (4.27) par la méthode de Perron (il suffit de démontrer que $u_0 \pm C_0 t$ sont sous- et sur-solution respectivement de (4.27)).

Etape 3: Résultat d'homogénéisation:

On est capable maintenant de démontrer le résultat d'homogénéisation. En effet, l'homogénéisation de l'équation non locale obtenue par injection du système d'EDOs dans une EDP en utilisant la formulation Lagrangienne, repose sur la construction des fonctions enveloppes (hull functions).

Remarque 4.8. *La fonction enveloppe est l'inverse en espace du correcteur. On utilise les correcteurs quand on injecte le système d'EDOs dans une EDP en utilisant la fonction de distribution cumulative ρ*

$$\rho(t, x) = \sum_{i \geq 0} H(x - U_i(t)) + \sum_{i < 0} (-1 + H(x - U_i(t))).$$

La fonction ρ n'est que l'inverse en espace de $y \rightarrow U_{\lfloor y \rfloor}(t)$. Pour plus d'informations, on renvoie à l'Appendix de [39] où il est expliqué la relation entre les fonctions enveloppes et les correcteurs.

La fonction enveloppe h est une fonction qui vérifie que $h(py + \lambda t)$ est une solution de (4.28), pour $\varepsilon = 1$. En fait, les fonctions enveloppes jouent le même rôle que les correcteurs, on les utilise pour définir l'équation limite et dans la fonction test perturbée pour démontrer la convergence de u^ε vers u .

Donc si on procède de la même manière (que dans [42]) en posant

$$u^\varepsilon(t, x) = \varepsilon h \left(\frac{u(t, x)}{\varepsilon} \right) = \varepsilon h \left(\frac{\lambda t + px}{\varepsilon} \right).$$

Alors on a

$$u_t^\varepsilon(t, x) = u_t(t, x) h' \left(\frac{u(t, x)}{\varepsilon} \right) = \lambda h' \left(\frac{\lambda t + px}{\varepsilon} \right).$$

Donc pour que u^ε soit une solution du problème (4.28), et si on pose $z = \frac{u(t, x)}{\varepsilon}$, il faut que h vérifie

$$\lambda h'(z) = V \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} g^\varepsilon(k)} \sum_{j=1}^{\infty} g^\varepsilon(j) \frac{h(z + pj) - h(z)}{j} \right). \quad (4.31)$$

Théorème 4.9. *Pour tout $p \in \mathbb{R}$ il existe une unique $\lambda \in \mathbb{R}$ telle qu'il existe une solution h de (4.31).*

En fait comme on connaît la forme explicite de l'équation limite (4.27) qui est indépendante de (t, x) , il suffit de démontrer le résultat pour $h = Id$ qui implique que $\lambda = V(p)$.

On résume le résultat d'homogénéisation suivant

Théorème 4.10 (Convergence de u^ε). *Supposons que \mathbf{H}_4 est vérifiée et soit u_0 une fonction lipschitzienne. Alors, la solution de viscosité u^ε de (4.28), converge lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, localement uniformément en (t, x) , vers l'unique solution u de (4.27).*

4.2 Schéma numérique

Pour le calcul de u on présente un schéma numérique pour trouver une solution discrète du problème macroscopique approché. En effet, on discrétise un interval $[a, b]$ par la méthode des différences finis. Soit $x_i = i\Delta x + a$, $i \in 0, \dots, N$ et $\Delta x = \frac{b-a}{N}$ avec $N \in \mathbb{N}^*$ le pas en espace. Pour le temps, on pose $t_n = n\Delta t$ avec $\Delta t = T/N_t$ le pas en temps et $N_t \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la formule de quadrature des trapèzes pour approcher l'intégral, on considère le schéma monotone suivant

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t V \left(\frac{\mathbb{I}(\tilde{u}^n)(x_i)}{I_g} \right) \quad \text{avec} \quad I_g = \int_0^{+\infty} g(z) dz, \quad (4.32)$$

et

$$\mathbb{I}(\tilde{u}^n)(x_i) = \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{u}_{i+N_A}^n - \tilde{u}_i^n}{N_A} g(N_A \Delta x) + \frac{\tilde{u}_{i+N_B}^n - \tilde{u}_i^n}{N_B} g(N_B \Delta x) \right) + \sum_{j=N_A+1}^{N_B-1} \frac{\tilde{u}_{i+j}^n - \tilde{u}_i^n}{j} g(j \Delta x) \quad (4.33)$$

tel que $N_A = \lfloor \frac{A}{\Delta x} \rfloor$, $N_B = \lfloor \frac{B}{\Delta x} \rfloor$, pour A un paramètre d'ordre $\sqrt{\Delta x}$, B très grand, et

$$\tilde{u}_k^n = \begin{cases} u_k^n & \text{if } k \leq N, \\ u_N^n + (k - N) \Delta x \frac{u_N^n - u_{N-1}^n}{\Delta x} & \text{if } k > N. \end{cases}$$

Le terme $\frac{\tilde{u}_k^n - u_N^n}{(k-N)\Delta x}$, pour $k > N$, décrit l'inverse du flux sortant de b (l'espacement) que l'on suppose constant (égal à l'inverse du flux au point b). On démontre de plus une estimation d'erreur entre la solution exacte et la solution approchée du problème macroscopique. Soient d'abord

$$Q_T^\Delta = \{(t_n, x_i), t_n = n\Delta t, x_i = a + i\Delta x, n \in \{0, \dots, N_T\}, i \in \{0, \dots, N\}\}$$

et

$$Q_0^\Delta = \{x_i = a + i\Delta x, i \in \{0, \dots, N\}\}.$$

Théorème 4.11 (Estimation d'erreur). *Supposons que $T \leq 1$ et $\Delta x + \Delta t \leq 1$. Supposons de plus que la condition CFL suivante est vérifiée*

$$\Delta t \leq \frac{I_g}{L\mathcal{I}} \quad \text{avec} \quad \mathcal{I} = \frac{1}{2N_A} g(N_A \Delta x) + \left[\sum_{j=N_A+1}^{N_B-1} \frac{g(j \Delta x)}{j} \right] + \frac{1}{2N_B} g(N_B \Delta x). \quad (4.34)$$

Alors, il existe une constante $K > 0$, qui ne dépend que de g et de la constante lipschitzienne de u_0 , telle que l'estimation d'erreur entre la solution continue u de (4.27) et la

solution discrète v de (4.32) (avec v_0 est la condition initiale) est donnée par

$$\sup_{Q_T^\Delta} |u - v| \leq K \left(\sqrt{\Delta t} + \frac{B}{A} \Delta x + R_B + \left(A + \frac{A^2}{\sqrt{\Delta t}} \right) \right) + \sup_{Q_0^\Delta} |u_0 - v_0|, \quad (4.35)$$

si $K \left(\sqrt{\Delta t} + \frac{B}{A} \Delta x + R_B + \left(A + \frac{A^2}{\sqrt{\Delta t}} \right) \right) \leq 1$ et $\sup_{Q_0^\Delta} |u_0 - v_0| \leq 1$ avec

$$R_B = \int_B^{+\infty} g(z) dz.$$

Remarque 4.12. On peut obtenir le même résultat pour tout T , en sommant les erreurs sur des intervalles de temps de longueur 1.

Chapter 2

Pré-requis

Comme cette thèse porte sur l'étude des équations de Hamilton-Jacobi, nous nous proposons de donner un aperçu simplifié des équations de Hamilton-Jacobi et des solutions de viscosité. Cette section permet au lecteur de se familiariser avec les équations de Hamilton-Jacobi définies sur un domaine régulier pour passer à un domaine singulier (une jonction). Le lecteur souhaitant approfondir certaines des notions évoquées dans ce qui suit, peut se référer à [14, 15, 73] présentant la classe des solutions faibles pour les équations de Hamilton-Jacobi, communément appelées solutions de viscosité.

1 Notations

Nous commençons par quelques notations qui seront utilisées tout au long de cette thèse.

- $\text{SCS}(U)$: l'ensemble des fonctions semi-continues supérieurement définies sur un ouvert U . On utilisera aussi la notation anglaise USC .
- $\text{SCI}(U)$: l'ensemble des fonctions semi-continues inférieurement définies sur un ouvert U . On utilise aussi la notation anglaise LSC .
- HJ : Hamilton-Jacobi.
- \mathbf{B} : la sigma algèbre Borélienne sur \mathbb{R} .
- \mathbb{E} : l'espérance mathématique d'une variable aléatoire.
- \mathbf{Lip} : l'ensemble des applications réelles Lipschitziennes.
- $C(\Omega)$: l'ensemble des fonctions continues sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$.
- $C^1(\Omega)$: l'ensemble des fonctions de classe 1 sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$.
- $S(N)$: l'ensemble des matrices symétriques $N \times N$.
- On note par u^* et u_* l'enveloppe semi-continue supérieure et inférieure respectivement de u et qui sont définies par

$$u^*(t, x) = \limsup_{(s,y) \rightarrow (t,x)} u(s, y) \quad \text{et} \quad u_*(t, x) = \liminf_{(s,y) \rightarrow (t,x)} u(s, y).$$

- Pour une famille $(z_\epsilon)_\epsilon$ de fonctions uniformément localement bornées, on pose

$$\limsup_\epsilon^* z_\epsilon(x) = \limsup_{y \rightarrow x, \epsilon \rightarrow 0} z_\epsilon(y),$$

et

$$\liminf_\epsilon^* z_\epsilon(x) = \liminf_{y \rightarrow x, \epsilon \rightarrow 0} z_\epsilon(y).$$

2 Aperçu des équations de Hamilton-Jacobi et solutions de viscosité

Les équations de Hamilton-Jacobi forment une classe d'équations aux dérivées partielles (EDP) complètement non linéaires. Les équations HJ en temps et en espace sont des équations de la forme

$$\begin{cases} H(x, u, \nabla u, D^2u) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u(x) = g(x) & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^N , u est l'inconnue, ∇u est son gradient, D^2u sa matrice Hessienne et $H : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times S(N) \rightarrow \mathbb{R}$ est l'hamiltonien (dans le cas stationnaire). L'hamiltonien H est supposée elliptique i.e H vérifie:

$$\text{si } X \geq Y \text{ dans } S(N) \text{ alors } H(\cdot, \cdot, \cdot, X) \leq H(\cdot, \cdot, \cdot, Y).$$

Dans cette thèse, on se restreindra au cas des équations de HJ du premier ordre, i.e au cas où H ne dépend pas de D^2u .

En générale il n'existe pas de solutions régulières pour ces équations. Prenons l'exemple de l'équation Eikonale avec conditions de Dirichlet

$$\begin{cases} |u'| = 1 & \text{sur } \Omega = (-1, 1) \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Si l'on cherche des solutions régulières $u \in C^1(\Omega)$, alors le théorème de Rolle nous donne qu'il existe un point x_0 tel que $u'(x_0) = 0$. Ainsi l'équation Eikonale n'est plus satisfaite au voisinage de x_0 . Une notion de solutions faibles ou solutions généralisées a donc été proposée au début des années 1980 par Crandall et Lions [29]. Elles sont appelées solutions de viscosité.

On présente maintenant les idées fondamentales et les principaux résultats de la théorie des solutions de viscosité continues et discontinues.

3 Solutions de viscosité continues des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre

Considérons l'équation de Hamilton-Jacobi suivante

$$H(x, u, Du) = 0 \quad x \in \Omega, \tag{3.1}$$

où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N .

Définition 3.1. *La fonction $u \in C(\Omega)$ est une solution de viscosité de (3.1) si et seulement si pour tout $\phi \in C^1(\Omega)$, telle que $x_0 \in \Omega$ est un point de maximum local de $u - \phi$ on a*

$$H(x_0, u(x_0), D\phi(x_0)) \leq 0, \quad (3.2)$$

et $\forall \phi \in C^1(\Omega)$, telle que $x_0 \in \Omega$ est un point de minimum local de $u - \phi$ on a

$$H(x_0, u(x_0), D\phi(x_0)) \geq 0. \quad (3.3)$$

Si u ne vérifie que (3.2) (respectivement (3.3)) on dira que u est une sous-solution de viscosité de (3.1) (respectivement une sur-solution de viscosité de (3.1)).

Théorème 3.2. [14, Theorem 2.3][Stabilité] *On suppose que pour $\varepsilon > 0$, $u_\varepsilon \in C(\Omega)$ est une sous-solution (resp. sur-solution) de l'équation*

$$H_\varepsilon(x, u_\varepsilon, Du_\varepsilon) = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

où $(H_\varepsilon)_\varepsilon$ est une famille de fonctions continues. Si $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $C(\Omega)$ et si $H_\varepsilon \rightarrow H$ dans $C(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ alors u est une sous-solution (resp. sur-solution) de l'équation (3.1).

4 Solutions de viscosité discontinues

Dans cette section on présente la notion des solutions de viscosité discontinues. L'étude de ces solutions est importante. En effet, les solutions discontinues sont solutions, par exemple des problèmes de contrôle optimal, et théorie des jeux différentiels. On renvoie à Barle [13] pour plus d'informations. On présente dans cette section un cas simple où la donnée aux bords est supposée continue et la variable de l'espace est sur un domaine borné Ω . On suppose de plus, que H vérifie les hypothèses suivantes

$$H(x, u, p) - H(x, v, p) \geq \gamma_R(u - v), \quad \gamma_R > 0, \quad (4.4)$$

pour tout $x \in \Omega$, $-R \leq v \leq u \leq R$ et $p \in \mathbb{R}^N$ ($\forall 0 < R < +\infty$),

$$|H(x, u, p) - H(y, u, p)| \leq m_R(|x - y|(1 + |p|)), \quad (4.5)$$

où $m_R(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$, pour tout $x, y \in \Omega$, $-R \leq u \leq R$ et $p \in \mathbb{R}^N$.

Définition 4.1 (Solutions de viscosité discontinues). *Une fonction u SCS sur Ω est une sous-solution de viscosité de (3.1) si et seulement si $\forall \phi \in C^1(\Omega)$, telle que $x_0 \in \Omega$ est un point de maximum local de $u - \phi$ on a*

$$H(x_0, u(x_0), D\phi(x_0)) \leq 0. \quad (4.6)$$

Une fonction v SCI sur Ω est une sur-solution de viscosité de (3.1) si et seulement si $\forall \phi \in C^1(\Omega)$, telle que $x_0 \in \Omega$ est un minimum local de $v - \phi$ on a

$$H(x_0, u(x_0), D\phi(x_0)) \geq 0. \quad (4.7)$$

Une solution u est une fonction localement bornée dont les enveloppes SCS et SCI vérifient respectivement (4.6) et (4.7).

Nous allons présenter maintenant un résultat d'unicité pour (3.1) dans ce cas.

Théorème 4.2. [14, Théorème 4.2][Principe de comparaison] *Supposons que les hypothèses (4.4) et (4.5) sont vérifiées. Soient u une sous-solution SCS et v une sur-solution SCI de (3.1). Si $u \leq g \leq v$ sur $\partial\Omega$, avec $g \in C(\partial\Omega)$ alors*

$$u \leq v \text{ dans } \overline{\Omega}.$$

Ce théorème implique qu'il existe au plus une solution de viscosité discontinue vérifiant $u = g$ sur $\partial\Omega$. De plus, elle est continue. En effet, ce théorème nous donne immédiatement l'unicité dans le cas où (3.1) est associée à des conditions aux limites de Dirichlet

$$u = g \text{ sur } \partial\Omega.$$

En effet, si u, v sont deux solutions de (3.1), alors u est une sous-solution et v est une sur-solution. D'après le principe de comparaison et comme $u = v = g$ sur $\partial\Omega$ on obtient que $u \leq v$. Puis on intervertit le rôle de u et de v , pour obtenir $u = v$.

5 Existence de la solution de viscosité

Nous expliquons dans cette section comment construire une solution de viscosité d'une équation lorsque l'on connaît une sur- et une sous-solution et que l'on sait que l'équation vérifie un principe de comparaison. Cette méthode est connue sous le nom de la méthode de Perron, et a été adaptée aux solutions de viscosité par Ishii [60]. Cette méthode a été introduite en 1923 par Oskar Perron dans le but de trouver des solutions pour l'équation de Laplace et consiste à construire une solution comme un supremum d'une famille de sous-solutions. La méthode de Perron est un procédé qui permet toujours de construire une solution de viscosité discontinue de

$$\begin{cases} H(x, u, Du) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.8)$$

Commençons d'abord par une proposition qui nous donne que le supremum d'une famille de sous-solutions est une sous-solution.

Proposition 5.1. [60][Supremum et Infimum des solutions de viscosité] *Soit \mathcal{F} une famille non vide de sous-solutions de viscosité localement bornée de (3.1). Si*

$$u = \left(\sup_{v \in \mathcal{F}} v \right)^*,$$

alors u est une sous-solution de (3.1). Un résultat analogue existe pour l'infimum des sur-solutions.

Ensuite, on passe à définir ce qu'on appelle les solutions barrières.

Définition 5.2 (Sous- et sur-solutions barrières). Une fonction SCI (resp. SCS) \tilde{u} (resp. \underline{u}) est une sur-solution (resp. sous-solution) barrière de (5.8) si

- \tilde{u} (resp. \underline{u}) est une sur-solution (resp. sous-solution) de (3.1) dans Ω .
- \tilde{u} (resp. \underline{u}) vérifie la condition aux bords continument sur $\partial\Omega$, i.e

$$\forall x \in \partial\Omega, \lim_{y \rightarrow x} \tilde{u}(y) = g(x) \quad (\text{resp. } \lim_{y \rightarrow x} \underline{u}(y) = g(x)).$$

On peut alors présenter la méthode de Perron. On réfère pour plus d'informations à [60].

Théorème 5.3. [60, Théorème 3.1][Méthode de Perron] On suppose qu'il existe une sur-solution barrière \tilde{u} et une sous-solution barrière \underline{u} telles que $\underline{u} \leq \tilde{u}$. Alors il existe une solution de viscosité discontinue u de (5.8). De plus,

$$\underline{u} \leq u \leq \tilde{u}.$$

Maintenant on présente un résultat de stabilité discontinue que l'on utilisera fréquemment dans cette thèse. On fixe $\varepsilon > 0$ et on considère le problème

$$H_\varepsilon(x, u_\varepsilon, Du_\varepsilon) = 0 \text{ dans } \Omega, \tag{5.9}$$

où pour tout $\varepsilon > 0$, H_ε est continu.

Théorème 5.4. [14, Theorem 4.1][Le résultat de stabilité]

- $H_\varepsilon \rightarrow H$ uniformément sur les compacts de $\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.
- u_ε est une sous-solution (resp. sur-solution) de (5.9).
- La famille $\{u_\varepsilon, 0 \leq \varepsilon \leq 1\}$ est uniformément bornée sur tous les compacts de $\bar{\Omega}$.

Alors, \bar{u} (resp. \underline{u}) définie par

$$\bar{u}(x) = \limsup_\varepsilon u_\varepsilon(x) \quad (\text{resp. } \underline{u}(x) = \liminf_\varepsilon u_\varepsilon(x)),$$

est une sous-solution (resp. sur-solution) de (3.1).

Donnons deux corollaires à ce théorème. On suppose de plus que l'on a

- Pour tout ε , l'équation (5.9) vérifie un principe de comparaison.
- L'équation (5.9) admet des barrières \tilde{u} et \underline{u} uniformes en ε .

Ces deux hypothèses impliquent que l'équation (5.9) admet une unique solution u_ε qui vérifie de plus $\underline{u} \leq u_\varepsilon \leq \tilde{u}$ (ce qui implique que u_ε est uniformément bornée sur les compacts).

Corollaire 5.5. *On suppose que $u_\varepsilon \rightarrow u$ uniformément sur les compacts de $\bar{\Omega}$, alors u est une solution de (3.1).*

Corollaire 5.6. *On suppose que (3.1) vérifie un principe de comparaison. Alors u_ε converge uniformément vers l'unique solution de (3.1).*

Chapter 3

A junction condition by homogenization on network and applications to traffic flow

Rim FAYAD.

Abstract

In this paper we consider a first order Hamilton-Jacobi equation posed on a junction, that is a union of a finite number of branches with a common point called the junction point. This type of problem is motivated by traffic flow applications. In a first part, we present the proof of the comparison principle which is inspired by a recent work of Barles, Briani, Chasseigne, Imbert in the stationary case ([16]). The second main result is a homogenization result. We consider a quasi-convex, coercive Hamiltonian with respect to the gradient variable and periodic far from the junction point, in space and time. This Hamiltonian describes a local perturbation located in a neighborhood of the junction point. We prove that the rescaled solution of the Cauchy problem converges towards a solution which preserves the memory of the local perturbation. The effective problem is given, on each branch by an effective Hamilton-Jacobi equation and by a junction condition at the junction point in the sense of [56].

AMS Classification: 35F21; 35Q93; 35R05; 35B51

Key words: Hamilton-Jacobi equations; viscosity solutions; traffic problems; junctions

1 Presentation of the problem and traffic flow motivations

This article deals with the analysis of partial differential equations with particular applications in road traffic. A traffic model is a mathematical model of real-world traffic,

¹Normandie Univ, INSA de Rouen, LMI (EA 3226 - FR CNRS 3335), 76000 Rouen, France, 685 Avenue de l'Université, 76801 St Etienne du Rouvray cedex. France

usually, but not limited to road traffic. Traffic modeling relies heavily on theoretical foundations such as network theory and some theories of physics. The interesting quantity modeled and measured is the traffic flow, i.e the flow of the mobile units (eg vehicles) by time and by the capacity of the means of transport (for example, the width of the road or of the way). The modeling of road traffic is particularly important and makes it possible to simulate how the traffic would react to a change in infrastructures or to optimize the flow of traffic.

The traffic can be modeled at different scales: the microscopic scale, which describes the dynamics of each vehicle and the macroscopic scale, which describes the vehicle densities or the average speed. In this article, we do not show the passage from the microscopic to the macroscopic scale, we simply use the results of the injection of the micro system in a PDE then we do a rescaling (homogenization) and we ask to find an effective Hamilton-Jacobi equation at the macro level. We refer for instance to [42] and [44] for micro-macro passage.

In this paper we are interested in first order evolutive Hamilton-Jacobi equations posed on a singular domain that we refer to as the junction. The junction is a union of a finite number of half-lines, each generated by a unit vector, which are glued at a point called the junction point. Our motivation is inspired by traffic flow problems which are particularly important. A simple setting of a traffic flow can be viewed as a group of roads intersecting at a cross point where different behavior could be happening at each road. If we think about the road as a branch of the junction and the cross point as the junction point, it is then natural to impose different hypothesis on each branch of the junction. Then, when the rescaling parameter goes to zero, the effective Hamiltonian is discontinuous at the junction point. In our case, we consider a Hamilton-Jacobi equation which represents a perturbation near the junction point and, at each branch, we impose different dynamics and then we define different Hamilton-Jacobi equations. We want to understand how this local perturbation influences the macroscopic flux. It is natural to get an effective problem with a junction condition at the junction point with an effective flux limiter.

The rescaled problem describes the traffic flow when the number of vehicles per unit length goes to infinity. This problem is given by a continuous Hamilton-Jacobi equation defined over the whole junction and, at the infinity of each branch, the Hamiltonian is periodic, in space and in time. The solution of this equation is given in the sense of viscosity solution with a particular condition at the junction point. This problem describes a reduction in speed near zero to arrive at the lowest speed at zero. When the term of heterogeneity converges to zero, we obtain the effective problem. This problem is given by a discontinuous Hamilton-Jacobi equation in space with a junction condition. This condition means that the flow through the junction point is equal to the minimum between the demand and supply flows. We refer to [56] and [58] for more details.

From a mathematical point of view, the question of Hamilton-Jacobi equation posed on junctions has been largely studied in the past few years, since the first papers of Achdou, Camilli, Cutri, and Tchou [2], [1] and Imbert, Monneau, Zidani [58]. In particular, existence and uniqueness of the solution for quasi-convex Hamiltonian have been proved using a PDE approach for the comparison principle in [56]. A simpler proof has also been proposed by Barles, Briani, Chasseigne, and Imbert [16] for the stationary case and in the case of a simple junction with two branches (in fact their results is made in a more general

setting of stratified domains). We will show that their proof can be generalized to the case of a general junction (with more than two branches) and for equations depending on time. We also would like to mention that Lions and Souganidis [71], [73] have generalized this theory to the non-convex case. We refer to [17] for an overview of Hamilton-Jacobi with discontinuities.

The main goal of this paper is to show a homogenization result on a junction. This work is inspired by [45] where the authors only work on a real line junction. There are other articles in which the authors obtain a homogenization result such as [38, 42, 44, 43]. More precisely, we consider a general junction with several branches and we assume that on each branch, the Hamiltonian H is closed to a given Hamiltonian H_i far from the junction point. The goal is to see what happens to this system when we look at the junction farer and farer. What we expect to recover is an effective equation on each branch and an effective junction condition at the origin.

1.1 Setting of the problem

In this subsection, the analytical problem is introduced in details. We start with the definition of the junction. The junction J is a network made of N edges generated by e_i and isometric to $[0, +\infty)$. For $N \geq 1$ and $i = 1, \dots, N$, we consider

$$J = \bigcup_{i=1}^N J_i = \bigcup_{i=1}^N \mathbb{R}^+ e_i$$

with e_i , a unit vector in \mathbb{R}^2 and $J_i \cap J_j = \{0\}$, 0 being the junction point. For $T > 0$, we consider the time-space domain J_T defined by $J_T = (0, T) \times J$.

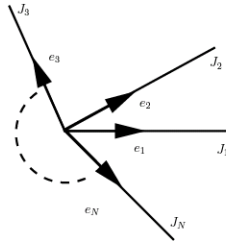


Figure 3.1: A junction

For $x, y \in J$, $d(x, y)$ denotes the geodesic distance on J defined by

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & \text{if } x, y \in J_i, \\ |x| + |y| & \text{if } x \in J_i, y \in J_j; j \neq i. \end{cases}$$

For a regular function u defined on J_T , $\partial_i u(t, x)$, for all i , denotes the derivative in space at $(t, x) \in (0, T) \times J_i$.

We are concerned with the homogenization of the following rescaled problem

$$\begin{cases} u_t^\epsilon(t, x) + H\left(\frac{t}{\epsilon}, \frac{x}{\epsilon}, \partial_i u^\epsilon(t, x)\right) = 0 & (t, x) \in J_T, x \neq 0; \\ u_t^\epsilon(t, x) + \max\left(H^+\left(\frac{t}{\epsilon}, 0, \partial_i u^\epsilon(t, 0^+)\right)\right) = 0 & (t, x) \in (0, T) \times \{0\}; \\ u^\epsilon(0, x) = u_0(x) & x \in J, \end{cases} \quad (1.1)$$

with $u_0 : J \rightarrow \mathbb{R}$ is a Lipschitz continuous function, and H^+ be the non-increasing part of H (see Definition 2.2). We make the following assumptions on H , where

$$\begin{aligned} H & : \mathbb{R} \times J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & (t, x, p) \mapsto H(t, x, p) \end{aligned}$$

1. **Continuity:** H is continuous with respect to t, x, p .
2. **Periodicity in time:** For all $(t, x, p) \in \mathbb{R} \times J \times \mathbb{R}$ and $k \in \mathbb{Z}$ we have

$$H(t + k, x, p) = H(t, x, p).$$

3. **Uniform modulus of continuity in time and in space:** There exists a modulus of continuity ω such that, for all $t, s \in \mathbb{R}$, $x, y \in J$, $p \in \mathbb{R}$ we have

$$|H(t, x, p) - H(s, y, p)| \leq \omega(|t - s| + |x - y|)(1 + |p|).$$

4. **Uniform coercivity:** H is coercive with respect to p , uniformly in (t, x) , i.e

$$\lim_{|p| \rightarrow +\infty} \inf_{(t, x)} H(t, x, p) = +\infty.$$

5. **The Hamiltonian H_i :** There exists N Hamiltonians H_i , $i = 1, \dots, N$ independent of t , such that

$$H(t, x + k, p) - H_i(x, p) \rightarrow 0 \text{ as } k \in \mathbb{N} \text{ goes to } +\infty, \quad (1.2)$$

uniformly with respect to $(t, x, p) \in [0, 1] \times [0, 1]e_i \times \mathbb{R}$. The Hamiltonian H_i is periodic in space i.e. for all $k \in \mathbb{N}$, $(x, p) \in J_i \times \mathbb{R}$,

$$H_i(x + k, p) = H_i(x, p).$$

6. **Quasi-convexity of the Hamiltonians H_i :** There exists p_i^0 (independent of $(t, x) \in \mathbb{R} \times J_i$) such that

$$\begin{cases} H_i(x, \cdot) \text{ is non-increasing on } (-\infty, p_i^0), \\ H_i(x, \cdot) \text{ is non-decreasing in } (p_i^0, +\infty). \end{cases}$$

The hypothesis 1-6 is denoted by (H_1) .

We show in this paper that the viscosity solution u^ϵ of (1.1) converges, as $\epsilon \rightarrow 0$, towards the unique \bar{A} -flux limited viscosity solution (see Definition 2.3) of the effective problem given by

$$\begin{cases} u_t + \bar{H}_i(\partial_i u(t, x)) = 0, & x \in J_i^* = J \setminus \{0\}, t > 0, \\ u_t + \max \left\{ \bar{A}, \max_{i \in \{1, \dots, N\}} \bar{H}_i^+(\partial_i u(t, 0^+)) \right\} = 0, & x = 0, t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in J, \end{cases} \quad (1.3)$$

for a given flux limiter $\bar{A} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ which is a constant to be determined (see Section 4). The effective Hamiltonian \bar{H}_i must also be determined. The second equation of (1.3) is called a junction condition.

The problem (1.1) is given by a Hamilton-Jacobi equation which verifies hypothesis 5 on each branch. This problem makes sense in road traffic. Indeed, according to the article [58, Section 2], this equation is obtained by a passage from a problem of LWR type, where the unknown is the density, to a problem given by Hamilton-Jacobi equations (which are the opposite of the flux functions). Formally we get this system by defining the unknown $u(t, x)$ which represents the “label” of the car located in x at time t (the derivative of u with respect to x is the density). Far from the junction point, the Hamilton-Jacobi equation describes what happens as if we have a single simple road and we do not see the junction. Near the junction point, the Hamilton-Jacobi equations are changed to take into account some local perturbation due to the intersection. This is the reason why we introduce the Hamiltonian H . This Hamiltonian describes the fact that the vehicles which arrive near the intersection will slow down to pass the intersection and then they will speed up in the new road. This reduction of speed will limit the flow. For the effective problem (1.3), we want to see this limitation of the flow as the following junction condition

$$u_t(t, 0) + \max \left\{ \bar{A}, \max_{i \in \{1, \dots, N\}} \bar{H}_i^+(\partial_i u(t, 0^+)) \right\} = 0,$$

where \bar{A} is the effective flux limiter and \bar{H}_i^+ the non-increasing part of \bar{H}_i (see Definition 2.2).

The homogenization of (1.1) allows to show the existence of a solution of the effective problem (1.3). However, for the uniqueness of the solution of (1.3), we first need to show a comparison principle. As explained before, we will give a new proof of the comparison principle which is inspired by [16].

Theorem 1.1 (Comparison principle). *Let $\bar{H}_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a Lipschitz continuous, quasi-convex and coercive function for every $i \in \{1, \dots, N\}$. Assume that $u : [0, T) \times J \rightarrow \mathbb{R}$ (resp. v) is an u.s.c (resp. l.s.c) bounded \bar{A} -flux limited sub-solution (resp. super-solution) of (1.3). Then $u \leq v$ in $[0, T) \times J$.*

The second result of this paper is a homogenization result on junction. This result is given by the following theorem

Theorem 1.2 (A homogenization result). *Assume (H_1) and that the initial condition u_0 is Lipschitz continuous. Then, there exists a constant \bar{A} and N effective Hamiltonians*

\bar{H}_i Lipschitz continuous, quasi-convex and coercive such that the solution u^ε of (1.1) converges locally uniformly, as $\varepsilon \rightarrow 0$, to the unique flux limited solution of (1.3).

1.2 Organization of the paper

This paper is organized as follows. In Section 2, we first give the definition of viscosity solutions for the system (1.1) and (1.3), then some useful properties. In Section 3, we give the proof of Theorem 1.1. In Section 4 we give a definition of the flux limiter \bar{A} . In Section 5, we construct an adapted corrector having good slopes at infinity. Finally Section 6 is devoted to the proof of Theorem 1.2.

2 Definition of viscosity solutions on junction and some useful properties

We start this section by the definition of the natural space of test functions on a junction,

$$C^1(J_T) = \{\phi \in C(J_T), \phi(t, x) = \phi_i(t, x) \text{ for } x \in J_i \text{ with } \phi_i \in C^1((0, T) \times J_i) \text{ for all } i = 1, \dots, N\},$$

with $C(J_T)$ is the space of continuous function.

Definition 2.1 (Definition of viscosity solution for (1.1)). *Let $u : [0, T) \times J \rightarrow \mathbb{R}$ be a function in $C(J_T)$. We say that u is a viscosity sub-solution (resp. super-solution) of (1.1), if for all $\phi \in C^1(J_T)$, such that (t_0, x_0) is a maximum point (resp. a minimum point) of $u - \phi$, then we have that*

$$\begin{cases} \phi_t(t_0, x_0) + H(t_0, x_0, \partial_i \phi(t_0, x_0)) \leq 0 \text{ (resp. } \geq 0) & (t, x) \in (0, T) \times J_i^*, \text{ for all } i, \\ \phi_t(t_0, 0) + \max(H^+(t_0, 0, \partial_i \phi(t_0, 0^+))) \leq 0 \text{ (resp. } \geq 0) & (t, x) \in (0, T) \times \{0\}, \\ u(0, x) \leq u_0(x) \text{ (resp. } \geq u_0(x)) & x \in J. \end{cases} \quad (2.4)$$

In order to give the definition of viscosity solutions of (1.3), we give the definition of non-increasing and non-decreasing part of \bar{H}_i . We suppose that \bar{H}_i satisfies, for all i , the following structure conditions

$$\bar{H}_i \text{ is continuous, quasi-convex and coercive on the gradient variable.} \quad (2.5)$$

Then there exists $p_i^0 \in \mathbb{R}$ such that

$$\begin{cases} \bar{H}_i \text{ is non-increasing in } & (-\infty, p_i^0] \\ \bar{H}_i \text{ is non-decreasing in } & [p_i^0, +\infty), \end{cases} \quad (2.6)$$

therefore we may write the following definitions.

Definition 2.2 (Definition of the increasing and decreasing part of \bar{H}_i). For $i = 1, \dots, N$, \bar{H}_i^- denotes the non-decreasing part of \bar{H}_i , defined by

$$\bar{H}_i^-(p) = \begin{cases} \bar{H}_i(p) & \text{if } p \geq p_i^0 \\ \underline{H}_i & \text{if } p \leq p_i^0. \end{cases}$$

And we define the non-increasing part of \bar{H}_i , \bar{H}_i^+ , by

$$\bar{H}_i^+(p) = \begin{cases} \bar{H}_i(p) & \text{if } p \leq p_i^0 \\ \underline{H}_i & \text{if } p \geq p_i^0, \end{cases}$$

with $\underline{H}_i = \min_p(\bar{H}_i(p))$.

Definition 2.3 (Definition of \bar{A} -flux limited viscosity solution for (1.3)). We say that u is a \bar{A} -flux limited viscosity sub-solution (resp. super-solution) of (1.3) if and only if, for all $\phi \in C^1(J_T)$, such that (t_0, x_0) is a maximum point (resp. minimum point) of $u - \phi$ in J_T we have

$$\begin{cases} \phi_t(t_0, x_0) + \bar{H}_i(\partial_i \phi(t_0, x_0)) \leq 0 \text{ (resp. } \geq 0) & \text{if } x_0 \in J_i^*, \\ \phi_t(t_0, 0) + \max \left\{ \bar{A}, \max_{i \in \{1, \dots, N\}} \bar{H}_i^+(\partial_i \phi(t_0, 0^+)) \right\} \leq 0 \text{ (resp. } \geq 0) & \text{if } x_0 = 0, \end{cases}$$

and we have

$$u(0, x) \leq u_0(x) \text{ (resp. } u(0, x) \geq u_0(x)) \text{ for all } x \in J.$$

We say that $u \in C(J_T)$ is a \bar{A} -flux limited viscosity solution of (1.3) if u is a \bar{A} -flux limited viscosity sub- and super-solution of (1.3).

We recall some useful results concerning problem (1.3). The following result shows that we can restrict the set of test function at the junction. Let $u : (0, T) \times J \rightarrow \mathbb{R}$ be a given function, which is a solution of

$$u_t + \bar{H}_i(\partial_i u) = 0 \text{ for } (t, x) \in (0, T) \times J_i^* \quad (2.7)$$

for all $i = 1, \dots, N$.

Theorem 2.4 ([56, Theorem 2.7]). Assume that \bar{H}_i satisfies (2.5) for all i . We consider $\bar{A} \in [A_0, +\infty)$ with $A_0 = \max_i(\min_p(\bar{H}_i(p)))$. Let $p_i^{\bar{A}} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, N$ a given arbitrary solution of

$$\bar{H}_i(p_i^{\bar{A}}) = \bar{H}_i^-(p_i^{\bar{A}}) = \bar{A},$$

and we fix a test function Φ_0 independent of t which satisfies

$$\partial_i \Phi_0(0) = p_i^{\bar{A}}.$$

Then the following properties are satisfied.

1. If, for all $i = 1, \dots, N$, the u.s.c function u is a sub-solution of (2.7) and satisfies

$$u(t, 0) = \limsup_{(s,y) \rightarrow (t,0); y \in J_i^*} u(s, y), \quad (2.8)$$

then u is a A_0 -flux-limited sub-solution of (1.3).

2. Let $\bar{A} > A_0$ and $t_0 \in (0, T)$. If, for all $i = 1, \dots, N$, the u.s.c function u is a sub-solution of (2.7), which satisfies (2.8) and for all test function ϕ that touches u from above at $(t_0, 0)$ with

$$\phi(t, x) = \psi(t) + \Phi_0(x)$$

for a function $\psi \in C^1(0, +\infty)$, we have

$$\phi_t + \max \left\{ \bar{A}, \max_{i \in \{1, \dots, N\}} \bar{H}_i^+(\partial_i \phi(t_0, 0^+)) \right\} \leq 0 \quad \text{at } (t_0, 0),$$

then u is a \bar{A} -flux limited sub-solution (1.3). We have the same result for super-solution.

Another result of [56] which we need in this article is the following proposition.

Proposition 2.5 ([56, Proposition 2.15]). *Let $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, for $(p, y) \rightarrow H(p, y)$, be a Lipschitz continuous, quasi-convex and coercive function with respect to p and let $a, b \in \mathbb{R}$. Let $u : (0, T) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. If u satisfies*

$$u_t(t, y) + H(Du, y) = 0 \quad \text{for } (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R},$$

then u satisfies

$$\begin{cases} u_t + H(Du, y) = 0 & \text{for } (t, x) \in (0, T) \times (a, b), \\ u_t + H^+(Du, y) = 0 & \text{for } (t, x) \in (0, T) \times \{a\}, \\ u_t + H^-(Du, y) = 0 & \text{for } (t, x) \in (0, T) \times \{b\}, \end{cases}$$

and

$$u(t, c) = \limsup_{(s,y) \rightarrow (t,c); y \in (a,b)} u(s, y) \quad \text{for } c = a, b.$$

3 Comparison principle for (1.3)

In this section we prove Theorem 1.1 and in particular if the solution of (1.3) exists then it is unique.

Proof of Theorem 1.1. This result can be found for example in [56]. Here, for the reader's convenience, we proposed a simpler proof based on the ideas developed by Barles, Briani, Chasseigne, Imbert in [16]. Let us also note that the proof proposed by Lions, Souganidis for the stationary case [73] can also be extended to our case. The goal is to show that

$u \leq v$ on $[0, T) \times J$. We argue by contradiction and we suppose that

$$M = \sup_{(t,x) \in [0,T) \times J} (u - v)(t, x) > 0.$$

For $\alpha, \eta > 0$ small enough, we define the function

$$(t, x) \in (0, T) \times J \rightarrow u(t, x) - v(t, x) - \alpha x^2 - \frac{\eta}{T - t}$$

which admits a maximum reached in (\bar{t}, \bar{x}) that we denote by M' . Since $M > 0$ and α, η are small enough, we have $M' > 0$. This supremum is attained on J_T (i.e for $t \neq 0$). Indeed if $\bar{t} = 0$, we have

$$u(0, x) \leq u_0(x) \leq v(0, x),$$

for all $x \in J$, which contradicts the fact that $M' > 0$. We distinguish two cases, $\bar{x} \neq 0$ or $\bar{x} = 0$.

Case 1: $\bar{x} \neq 0$. Then $\bar{x} \in J_i \setminus \{0\}$ for a certain i , then we are on a single branch without junction, which is the classical case of the comparison principle, so we skip it.

Case 2: $\bar{x} = 0$. We start by penalizing with respect to time, and we define the function

$$(t, s, x) \rightarrow u(t, x) - v(s, x) - \alpha x^2 - \frac{\eta}{T - t} - \frac{(t - s)^2}{2\delta} - (t - \bar{t})^2 - |x|^2. \quad (3.9)$$

This function have a maximum M_δ reached in $(t_\delta, s_\delta, x_\delta)$. In particular, we have $M_\delta > 0$. Moreover, according to the localization terms $(t - \bar{t})^2$ and $|x|^2$, we have $(t_\delta, s_\delta, x_\delta) \rightarrow (\bar{t}, \bar{t}, 0)$ as δ goes to 0.

We distinguish two cases according to the value of x_δ .

Sub-case 2.1: $x_\delta \in J_i \setminus \{0\}$ for a certain $i \in \{1, \dots, N\}$. In that case, the proof is standard, so we skip it.

Sub-case 2.2: $x_\delta = 0$. We define the following term

$$A = -\frac{\eta}{2(T - t_\delta)^2} - \frac{(t_\delta - s_\delta)}{\delta} - 2(t_\delta - \bar{t}).$$

According to this choice, A satisfies

$$-\left(\frac{\eta}{(T - t_\delta)^2} + \frac{(t_\delta - s_\delta)}{\delta} + 2(t_\delta - \bar{t})\right) < A < -\frac{(t_\delta - s_\delta)}{\delta} - 2(t_\delta - \bar{t}).$$

And then we have the following lemma

Lemma 3.1. *When $x_\delta = 0$, we have*

$$\frac{\eta}{(T - t_\delta)^2} + \frac{(t_\delta - s_\delta)}{\delta} + 2(t_\delta - \bar{t}) + \max_i(H_i) \leq 0,$$

with $\underline{H}_i := \min_{p \in \mathbb{R}} \overline{H}_i(p)$.

Proof. Since $(t_\delta, s_\delta, 0)$ is a maximum point of (3.9), then in particular, we have that t_δ is a maximum point of

$$t \rightarrow u(t, 0) - v(s_\delta, 0) - \frac{\eta}{T-t} - \frac{(t-s_\delta)^2}{2\delta} - (t-\bar{t})^2.$$

We introduce the function

$$(t, x) \rightarrow u(t, x) - v(s_\delta, 0) - \frac{\eta}{T-t} - \frac{(t-s_\delta)^2}{2\delta} - (t-\bar{t})^2 - (t-t_\delta)^2 - L|x| = u(t, x) - \phi(t, x),$$

with $L > 0$ large enough. Then $u - \phi$ reaches a maximum point in $(t_\delta, 0)$. In fact, let (\tilde{t}, \tilde{x}) the maximum point of $u - \phi$. If $|\tilde{x}| \neq 0$, then by definition of viscosity solution far from the junction point we obtain a contradiction since \overline{H}_i is coercive, L is large and ϕ is a regular function. Then $|\tilde{x}| = 0$, and the localisation term yields that $\tilde{t} = t_\delta$. The definition of sub-solution at zero yields that

$$\frac{\eta}{(T-t_\delta)^2} + \frac{(t_\delta - s_\delta)}{\delta} + 2(t_\delta - \bar{t}) + \max\{\overline{A}, \max_i(\overline{H}_i^+(L))\} \leq 0.$$

Then by definition of \underline{H}_i , we obtain

$$\frac{\eta}{(T-t_\delta)^2} + \frac{(t_\delta - s_\delta)}{\delta} + 2(t_\delta - \bar{t}) + \max_i(\underline{H}_i) \leq 0.$$

This ends the proof of the Lemma. □

This lemma implies that

$$A > - \left(\frac{\eta}{(T-t_\delta)^2} + \frac{t_\delta - s_\delta}{\delta} + 2(t_\delta - \bar{t}) \right) \geq \max_i(\underline{H}_i).$$

The Hamiltonian \overline{H}_i is a coercive and quasi-convex function which verifies (2.6), then for every $A > \max(\underline{H}_i)$, there exists $(\lambda_i)_{i=1, \dots, N}$, such that

$$\overline{H}_i^-(\lambda_i) = \overline{H}_i(\lambda_i) = A.$$

In order to duplicate the variables in space, we define the functions

$$h(x) = \lambda_i x \quad \text{for } x \in J_i,$$

and

$$\begin{aligned} (t, s, x, y) \rightarrow & u(x, t) - v(y, s) - \alpha x^2 - \frac{d^2(x, y)}{2\epsilon} - \frac{\eta}{T-t} - \frac{(t-s)^2}{2\delta} - (t-\bar{t})^2 \\ & - (h(x) - h(y)) - |x|^2 - (t-t_\delta)^2 - (s-s_\delta)^2. \end{aligned}$$

This function admits a maximum, denoted by M_ϵ , reached in $(t_\epsilon, s_\epsilon, x_\epsilon, y_\epsilon)$. Moreover $M_\epsilon > 0$ and according to the localization term, we obtain, as ϵ tends to 0, $(t_\epsilon, s_\epsilon, x_\epsilon, y_\epsilon) \rightarrow (t_\delta, s_\delta, 0, 0)$.

We distinguish several cases according to the position of x_ϵ and y_ϵ .

Subcase 2.2.1: $x_\epsilon, y_\epsilon \in J_i \setminus \{0\}$. In this case, the proof is standard, then we skip it.

Subcase 2.2.2: $x_\epsilon \in J_i \setminus \{0\}, y_\epsilon \in J_j$ for $i \neq j$. We define

$$\begin{aligned} \phi^1(t, x) = & v(s_\epsilon, y_\epsilon) + \alpha x^2 + \frac{d^2(x, y_\epsilon)}{2\epsilon} + \frac{\eta}{T-t} + \frac{(t-s_\epsilon)^2}{2\delta} + (t-\bar{t})^2 + (h(x) - \lambda_j y_\epsilon) \\ & + |x|^2 + (t-t_\delta)^2 + (s-s_\delta)^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Since $\phi^1 \in C^1(J_T)$, $u - \phi^1$ reaches a local maximum in (t_ϵ, x_ϵ) and u is a sub-solution, we get

$$\begin{aligned} & \frac{\eta}{(T-t_\epsilon)^2} + \frac{(t_\epsilon - s_\epsilon)}{\delta} + 2(t_\epsilon - \bar{t}) + 2(t_\epsilon - t_\delta) \\ & + \overline{H}_i \left(\frac{|x_\epsilon| + |y_\epsilon|}{\epsilon} + 2\alpha|x_\epsilon| + 2|x_\epsilon| + \lambda_i \right) \leq 0. \end{aligned}$$

Since $A > \max_i(\overline{H}_i)$, $\frac{|x_\epsilon| + |y_\epsilon|}{\epsilon} + 2\alpha|x_\epsilon| + 2|x_\epsilon| \geq 0$ and, by definition of $\lambda_i \geq p_i^0$, we get that

$$\overline{H}_i \left(2\alpha|x_\epsilon| + \frac{|x_\epsilon| + |y_\epsilon|}{\epsilon} + 2|x_\epsilon| + \lambda_i \right) = \overline{H}_i^- \left(2\alpha|x_\epsilon| + \frac{|x_\epsilon| + |y_\epsilon|}{\epsilon} + 2|x_\epsilon| + \lambda_i \right) \geq \overline{H}_i^-(\lambda_i).$$

Then we obtain that

$$\begin{aligned} 0 & \geq \frac{\eta}{T^2} + \frac{(t_\epsilon - s_\epsilon)}{\delta} + 2(t_\epsilon - \bar{t}) + (t_\epsilon - t_\delta) + \overline{H}_i^-(\lambda_i) \\ & = \frac{\eta}{T^2} + \frac{(t_\epsilon - s_\epsilon)}{\delta} + 2(t_\epsilon - \bar{t}) + (t_\epsilon - t_\delta) + A \\ & \geq \frac{\eta}{T^2} + \frac{(t_\delta - s_\delta)}{\delta} + 2(t_\delta - \bar{t}) + A + \theta_\epsilon(1) \\ & > 0 \end{aligned}$$

for ϵ small enough, which gives a contradiction.

Subcase 2.2.3: $x_\epsilon = 0, y_\epsilon \in J_j \setminus \{0\}$. On the one hand we have $(t_\epsilon, 0)$ is a maximum point of $u - \phi^1$ (with ϕ^1 defined in (3.10)), and u is a sub-solution of (1.3). Definition (2.3) yields that

$$\frac{\eta}{(T-t_\epsilon)^2} + \frac{(t_\epsilon - s_\epsilon)}{\delta} + 2(t_\epsilon - \bar{t}) + 2(t_\epsilon - t_\delta) + \overline{H}_j^+ \left(\lambda_j - \frac{|y_\epsilon|}{\epsilon} \right) \leq 0, \quad (3.11)$$

with

$$\begin{cases} \partial_i \phi^1 = \lambda_i - \frac{|y_\epsilon|}{\epsilon} & i = j, \\ \partial_i \phi^1 = \lambda_i + \frac{|y_\epsilon|}{\epsilon} & i \neq j. \end{cases}$$

On the other hand (s_ϵ, y_ϵ) is a minimal point of $v - \phi^2$ with

$$\phi^2(s, y) = u(t_\epsilon, 0) - \frac{|y|^2}{2\epsilon} - \frac{\eta}{T - t_\epsilon} - \frac{(t_\epsilon - s)^2}{2\delta} - (t_\epsilon - \bar{t})^2 + h(y) - (t_\epsilon - t_\delta)^2 - (s - s_\delta)^2.$$

Since v is a super-solution of (1.3), we have

$$\frac{(t_\epsilon - s_\epsilon)}{\delta} + 2(s_\epsilon - s_\delta) + \overline{H}_j \left(\lambda_j - \frac{|y_\epsilon|}{\epsilon} \right) \geq 0. \quad (3.12)$$

We claim that

$$\frac{(t_\epsilon - s_\epsilon)}{\delta} + 2(s_\epsilon - s_\delta) + \overline{H}_j^+ \left(\lambda_j - \frac{|y_\epsilon|}{\epsilon} \right) \geq 0. \quad (3.13)$$

In order to prove that, it suffice to prove

$$\frac{(t_\epsilon - s_\epsilon)}{\delta} + 2(s_\epsilon - s_\delta) + \overline{H}_j^- \left(\lambda_j - \frac{|y_\epsilon|}{\epsilon} \right) < 0.$$

Since $-\frac{|y_\epsilon|}{\epsilon} + \lambda_j \leq \lambda_j$, we have

$$\overline{H}_j^- \left(-\frac{|y_\epsilon|}{\epsilon} + \lambda_j \right) \leq \overline{H}_j^- (\lambda_j).$$

Consequently

$$\begin{aligned} & \frac{(t_\epsilon - s_\epsilon)}{\delta} + 2(s_\epsilon - s_\delta) + \overline{H}_j^- \left(-\frac{|y_\epsilon|}{\epsilon} + \lambda_j \right) \\ & \leq \overline{H}_j^- (\lambda_j) + \theta_\epsilon(1) + \frac{(t_\delta - s_\delta)}{\delta} \\ & = A + \theta_\epsilon(1) + \frac{(t_\delta - s_\delta)}{\delta} \\ & = -\frac{\eta}{2(T - t_\delta)^2} - 2(t_\delta - \bar{t}) + \theta_\epsilon(1) \\ & \leq -\frac{\eta}{2T^2} + \theta_\epsilon(1) - 2(t_\delta - \bar{t}) \\ & < 0, \end{aligned}$$

for ϵ and δ small enough. So the inequality $\frac{(t_\epsilon - s_\epsilon)}{\delta} + 2(s_\epsilon - s_\delta) + \overline{H}_j^+ \left(\lambda_j - \frac{|y_\epsilon|}{\epsilon} \right) \geq 0$

is satisfied. We now subtract the two inequalities (3.11) and (3.13), to get

$$\frac{\eta}{(T - t_\epsilon)^2} + 2(t_\epsilon - \bar{t}) + 2(t_\epsilon - t_\delta) - 2(s_\epsilon - s_\delta) + \bar{H}_j^+ \left(\lambda_j - \frac{|y_\epsilon|}{\epsilon} \right) - \bar{H}_j^- \left(\lambda_j - \frac{|y_\epsilon|}{\epsilon} \right) \leq 0.$$

We conclude by getting $\epsilon \rightarrow 0$ then $\delta \rightarrow 0$, we get $\eta < 0$, which gives us a contradiction with the definition of η .

Subcase 2.2.4: $x_\epsilon, y_\epsilon = 0$ The two Hamilton-Jacobi equations for u and v are the same and the proof is classical.

This ends the proof of the comparison principle. \square

4 Construction of the flux limiter \bar{A}

Under assumptions (H_1) and as ε goes to 0, we expect to obtain N Hamilton-Jacobi equations defined on each branch of J with a junction condition at zero. To define the N effective Hamiltonians \bar{H}_i , we consider the cell problems far away from the junction, which is rather classical.

Proposition 4.1 ([45, Proposition 1.2]). *Under assumptions (H_1) on H , for all $p \in \mathbb{R}$ and for all $i \in 1, \dots, N$, there exists a unique λ that we denoted by $\bar{H}_i(p)$, such that there exists a bounded solution v^i for*

$$\begin{cases} v_t^i + H_i(x, p + \partial_i v^i) = \lambda & (t, x) \in \mathbb{R} \times J_i, \\ v^i \text{ is 1-periodic in time and space.} \end{cases} \quad (4.14)$$

Moreover the map, $p \rightarrow \bar{H}_i(p)$ is continuous, coercive and quasi-convex.

To construct the effective flux limiter \bar{A} , we want to construct a corrector at the junction. In the neighborhood of zero the solution u of (1.3), if it is in $C^1(J_T)$, is formally given, using Theorem 2.4, by

$$u(t, x) = u(t, 0) + \sum_i \partial_i u \cdot x \mathbf{1}_{\{x \in J_i^*\}} = -\bar{A}t + \sum_i \partial_i u \cdot x \mathbf{1}_{\{x \in J_i^*\}},$$

such that

$$\bar{H}_i(\partial_i u) = \bar{H}_i^-(\partial_i u) = \bar{A},$$

$\bar{A} \in \mathbb{R}$ to be defined. On this neighborhood if we consider the following ansatz

$$u^\varepsilon(t, x) = u(t, 0) + \omega^\varepsilon(t, x)$$

with $\omega^\varepsilon(t, x) = \varepsilon \omega(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon})$. Then if we inject this ansatz in (1.1), w has to satisfy

$$\omega^\varepsilon(t, x) \rightarrow \sum_i \partial_i u \cdot x \mathbf{1}_{\{x \in J_i^*\}}$$

as $\varepsilon \rightarrow 0$ and the following cell problem

$$\begin{cases} \omega_t(t, x) + H(t, x, \partial_i \omega) = \bar{A} & (t, x) \in \mathbb{R} \times J^*, \\ \omega_t(t, 0) + \max(H^+(t, 0, \partial_i \omega(t, 0^+))) = \bar{A} & (t, x) \in \mathbb{R} \times \{0\}, \\ \omega \text{ is 1-periodic in time.} \end{cases} \quad (4.15)$$

The function ω is called a global corrector at the junction.

Theorem 4.2 (Existence of a global corrector at the junction). *Assume (H_1) . There exists a unique \bar{A} and a solution ω of (4.15) such that $\omega^\varepsilon(t, x)$ converges locally uniformly, as $\varepsilon \rightarrow 0$, to a function $W : J \rightarrow \mathbb{R}$ which satisfies*

$$\begin{cases} W(0) = 0 \\ \bar{p}_i x \leq W(x) \leq \hat{p}_i x \quad \text{for all } x \in J_i^*, \text{ for all } i, \end{cases}$$

with

$$\hat{p}_i = \max\{p \in \mathbb{R}; \bar{H}_i(p) = \bar{H}_i^-(p) = \bar{A}\}$$

and

$$\bar{p}_i = \min\{p \in \mathbb{R}; \bar{H}_i(p) = \bar{H}_i^-(p) = \bar{A}\}.$$

In addition \bar{A} verifies

$$\bar{A} \geq \max_i \left(\min_p (\bar{H}_i(p)) \right) = A_0.$$

4.1 Truncated problem

To prove the existence of a global corrector, we first construct a corrector on a truncated domain, which verifies the good slopes at infinity. More precisely we consider, on a subset I of J given by $I = \bigcup_{i=1}^N I_i$ with $I_i = [0, \rho] \times e_i = [0, \rho_i]$, and $\rho_i \in J_i^*$, the truncated cell problem

$$\begin{cases} \omega_t + H(t, x, \partial_i \omega_\rho) = \lambda_\rho & (t, x) \in \mathbb{R} \times I \setminus \{0, \rho_i\}, \\ \omega_t + H^-(t, x, \partial_i \omega_\rho) = \lambda_\rho & (t, x) \in \mathbb{R} \times \{\rho_i\}, \\ \omega_t + \max(H^+(t, 0, \partial_i \omega_\rho(t, 0^+))) = \lambda_\rho & (t, x) \in \mathbb{R} \times \{0\}, \\ \omega \text{ is 1-periodic in time.} \end{cases} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \quad (4.16)$$

We start by a comparison principle for the truncated cell problem. The proof of this comparison principle is a particular case of the one given in Section 3.

Proposition 4.3 (Comparison principle on a subset of J). *Let $\rho^1, \rho^2 > 0$ and $\lambda \in \mathbb{R}$.*

We consider $\cup_i[\rho^1, \rho^2].e_i$ a subset of J . Let v be a super-solution of the following problem

$$\begin{cases} v_t + H(t, x, \partial_i v) \geq \lambda & (t, x) \in \mathbb{R} \times \bigcup_i (\rho_i^1, \rho_i^2), \\ v_t + H^-(t, x, \partial_i v) \geq \lambda & (t, x) \in \mathbb{R} \times \{\rho_i^2\}, \\ v(t, x) \geq g(t) & (t, x) \in \mathbb{R} \times \{\rho_i^1\}, \\ v \text{ is 1-periodic in } t, \end{cases} \quad (4.17)$$

and for a given $\epsilon_0 > 0$, let u be a sub-solution of

$$\begin{cases} u_t + H(t, x, \partial_i u) \leq \lambda - \epsilon_0 & (t, x) \in \mathbb{R} \times \bigcup_i (\rho_i^1, \rho_i^2), \\ u_t + H^-(t, x, \partial_i u) \leq \lambda - \epsilon_0 & (t, x) \in \mathbb{R} \times \{\rho_i^2\}, \\ u(t, x) \leq g(t) & (t, x) \in \mathbb{R} \times \{\rho_i^1\}, \\ u \text{ is 1-periodic in } t. \end{cases} \quad (4.18)$$

with g a continuous function. Then

$$u \leq v \text{ on } \mathbb{R} \times \bigcup_i [\rho_i^1, \rho_i^2].$$

We now give an existence result for problem (4.16).

Proposition 4.4 (Existence of global corrector on truncated domain). *Assume (H_1) and let $\rho > 0$. Then there exists a unique $\lambda_\rho \in \mathbb{R}$ such that the problem (4.16) has a solution ω_ρ . Moreover $\rho \rightarrow \lambda_\rho$ is bounded, i.e there exists a constant $C > 0$ independent of ρ such that*

$$|\lambda_\rho| \leq C.$$

Finally, there exists a function $m_\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$\begin{cases} |m_\rho(x) - m_\rho(y)| \leq Cd(x, y) & x, y \in I, \\ |\omega_\rho(t, x) - m_\rho(x)| \leq C & (t, x) \in \mathbb{R} \times I. \end{cases} \quad (4.19)$$

Proof. We classically consider an approximated cell problem for $\delta > 0$,

$$\begin{cases} \delta v^\delta + v_t^\delta + H(t, x, \partial_i v^\delta) = 0 & (t, x) \in \mathbb{R} \times I \setminus \{0, \rho_i\} \quad \forall i, \\ \delta v^\delta + v_t^\delta + H^-(t, x, \partial_i v^\delta) = 0 & (t, x) \in \mathbb{R} \times \{\rho_i\}; \quad \forall i = \{1, \dots, N\} \\ \delta v^\delta + v_t^\delta + \max(H^+(t, 0, \partial_i v^\delta(t, 0^+))) = 0 & (t, x) \in \mathbb{R} \times \{0\}, \\ v^\delta \text{ is 1 periodic in time.} \end{cases} \quad (4.20)$$

The solution of this problem is constructed by Perron's method. Indeed, let $C = \sup_{(t,x) \in \mathbb{R} \times J} |H(t, x, 0)|$ (which is finite by definition of H). Then $-\delta^{-1}C$ and $\delta^{-1}C$ are respectively sub- and super-solution of (4.20). Then by Perron's method, there exists a

discontinuous solution v^δ of the system (4.20) which satisfies

$$|v^\delta(t, x)| \leq \frac{C}{\delta} \text{ in } \mathbb{R} \times I.$$

In order to find the Lipschitz continuous function m_ρ which satisfies (4.19), we define the function m^δ by

$$m^\delta(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \{v^\delta(t, x)\}.$$

This supremum is attained since v^δ is periodic in time. We know that the supremum of a sub-solution is a sub-solution then m^δ is sub-solution of (4.20). Then m^δ is a sub-solution of

$$\begin{cases} H(t, x, \partial_i m^\delta) \leq C & x \in I \setminus \{0, \rho_i\}, \\ \max(H^+(t, 0, \partial_i m^\delta(0^+))) \leq C & x = 0. \end{cases} \quad (4.21)$$

Since H is coercive with respect to p , and m^δ is a sub-solution of (4.21), then m^δ is Lipschitz continuous and

$$|\partial_i m^\delta| \leq C \text{ almost everywhere,}$$

for some constant C . This implies that $v^\delta(t, \cdot)$ is Lipschitz continuous. Since H is coercive with respect to p and v^δ solution of (4.20), this implies that

$$v_t^\delta \leq C \text{ almost everywhere.}$$

Then we obtain for $h \geq 0$, for all $t \in \mathbb{R}$, $x \in I \setminus \{\rho_i\}$, that

$$v^\delta(t + h, x) \leq v^\delta(t, x) + Ch.$$

We conclude, since v^δ is 1-periodic in t , that for all $t \in \mathbb{R}$ and $x \in I \setminus \{\rho_i\}$,

$$|v^\delta(t, x) - m^\delta(x)| \leq C.$$

In particular we obtain

$$|v^\delta(t, x) - v^\delta(0, 0)| \leq C.$$

We now define

$$\bar{\omega} = \limsup_{\delta}^* (v^\delta - v^\delta(0, 0)) \quad \text{and} \quad \underline{\omega} = \liminf_{\delta}^* (v^\delta - v^\delta(0, 0)).$$

We have $|\partial_i m^\delta| \leq C$, then there exists a sub-sequence $\delta_n \rightarrow 0$ such that

$$m^{\delta_n} - m^{\delta_n}(0) \rightarrow m_\rho \text{ as } n \rightarrow +\infty, \text{ locally uniformly.}$$

In addition, we have that $\delta |v^\delta| \leq C$, then there exists a sub-sequence $\delta_n \rightarrow 0$ such that

$$\delta_n \omega^{\delta_n}(0, 0) \rightarrow -\lambda_\rho \text{ as } n \rightarrow +\infty. \quad (4.22)$$

In particular λ_ρ , $\bar{\omega}$, $\underline{\omega}$ and m_ρ satisfy

$$\begin{aligned} |\lambda_\rho| &\leq C, \\ |\bar{\omega} - m_\rho| &\leq C, \\ |\underline{\omega} - m_\rho| &\leq C, \\ |\partial_i m_\rho| &\leq C. \end{aligned}$$

The discontinuous stability of viscosity solution of Hamilton-Jacobi equations yields that $\underline{\omega}$ and $\bar{\omega} - 2C$ are respectively a super- and a sub-solution of (4.16). We also have that, since $|\bar{\omega} - m_\rho| \leq C$ and $|\underline{\omega} - m_\rho| \leq C$, then

$$\bar{\omega} - 2C \leq \underline{\omega}.$$

We construct the solution ω_ρ of (4.16), which is 1-periodic in time, by Perron's method. The estimations already obtained imply that λ_ρ , m_ρ and ω_ρ satisfy (4.19). Finally we have to prove that λ_ρ is unique. Indeed, let $(\omega_\rho^j, \lambda_\rho^j)$, $j = 1, 2$ two solutions of (4.16). Let $u^j(t, x) = \omega_\rho^j(t, x) - \lambda_\rho^j t$. We have that u^j is a solution of

$$\begin{cases} u_t^j(t, x) + H(t, x, \partial_i u^j) = 0 & (t, x) \in \mathbb{R} \times I \setminus \{0, \rho_i\}, \\ u_t^j + H^-(t, x, \partial_i u^j) = 0 & (t, x) \in \mathbb{R} \times \{\rho_i\}, \\ u_t^j + \max(H^+(t, 0, \partial_i u^j(t, 0^+))) = 0 & (t, x) \in \mathbb{R} \times \{0\}, \end{cases} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \quad (4.23)$$

with $u^1(0, x) \leq u^2(0, x) + C$ (using (4.19)). Then the comparison principle yields that

$$u^1(t, x) \leq u^2(t, x) + C$$

for all t , so we obtain $\lambda^1 \geq \lambda^2$. We exchange the role of u^1 and u^2 , we obtain the uniqueness of λ_ρ . This completes the proof. \square

Proposition 4.5 (Definition of the flux-limiter \bar{A}). *The map $\rho \rightarrow \lambda_\rho$ is increasing and bounded on $(0, \infty)$. In particular,*

$$\bar{A} = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \lambda_\rho$$

exists, is unique and satisfies $\bar{A} \geq \lambda_\rho$ for all $\rho > 0$.

Proof. It suffices to show that $\rho \rightarrow \lambda_\rho$ is increasing. Let $\rho' > \rho > 0$. Then Proposition 2.5 yields that the restriction of the solution v^δ of (4.20) on $\mathbb{R} \times \bigcup_{i=1}^N [0, \rho'_i]$, with $\rho'_i = \rho' e_i$, is a sub-solution of (4.20) on $\mathbb{R} \times \bigcup_{i=1}^N [0, \rho_i]$. Then the comparison principle, Proposition 4.3 and (4.22) yields that

$$\lambda_{\rho'} \geq \lambda_\rho.$$

\square

In order to prove that the solution u of (1.3) verifies the good slopes, we have to show

that the corrector satisfies these slopes. To get this we prove the following proposition

Proposition 4.6 (Control of slopes). *Assume (H_1) and $\bar{A} > \min \bar{H}_i$. Then, there exists $\delta_0 > 0$, $\rho \geq \rho_\delta > 0$ and $C_\delta > 0$ (independent of ρ) such that for all $\delta \in (0, \delta_0]$, and for all $x \geq \rho_\delta \cdot e_i$, $h \geq 0$, we have that*

$$\omega_\rho(t, x + h) - \omega_\rho(t, x) \geq (\bar{p}_i - \delta)h - C_\delta, \quad (4.24)$$

with $\bar{p}_i = \min\{p \in \mathbb{R}; \bar{H}_i(p) = \bar{H}_i^-(p) = \bar{A}\}$.

Proof. Let $\delta > 0$. Assumption 5 implies the existence of ρ_δ , such that

$$|H(t, x, p) - H_i(x, p)| \leq \delta \text{ for all } x \in J_i, \text{ and } x \geq \rho_\delta \cdot e_i, \quad i \in \{1, \dots, N\}. \quad (4.25)$$

We fix $\rho \geq \rho_\delta$ and let $x_0 \in [\rho_\delta, \rho] \cdot e_i$. We know that for $\lambda_\rho - \delta \in \mathbb{R}$ there exists a solution ω_ρ of (4.16). Let

$$v(t, x) = \omega_\rho(t, x) - \omega_\rho(0, x_0).$$

Proposition 2.5 yields that the restriction of v on $[\rho_\delta, \rho] \cdot e_i$ satisfies

$$\begin{cases} v_t + H(t, x, \partial_i v) \geq \lambda_\rho - \delta & \text{for } (t, x) \in \mathbb{R} \times (\rho_\delta, \rho) \cdot e_i, \\ v_t + H^-(t, x, \partial_i v) \geq \lambda_\rho - \delta & \text{for } (t, x) \in \mathbb{R} \times \{\rho_i\}. \end{cases}$$

We now construct a strict super solution of the same equation. Since $\bar{A} > \min_i \bar{H}_i$, then by definition of \bar{A} , there exists ρ_0 large enough and δ_0 small enough such that for all $\rho \geq \rho_0$ and $\delta \leq \delta_0$, we have that $\lambda_\rho - 2\delta > \min_p \bar{H}_i(p)$ for all i . Then Proposition 4.1 yields that there exists $p_i^\delta \in \mathbb{R}$ such that

$$\bar{H}_i(p_i^\delta) = \bar{H}_i^-(p_i^\delta) = \lambda_\rho - 2\delta.$$

And then there exists a corrector $v^i(\cdot, \cdot, p_i^\delta)$ solution of (4.14). The solution v^i is periodic in time and space, then it's bounded and $w^i(t, x) = p_i^\delta x + v^i(t, x)$ solves

$$(\omega^i)_t + H_i(x, \partial_i \omega^i) = \lambda_\rho - 2\delta \text{ for } (t, x) \in \mathbb{R} \times J_i.$$

According to Proposition 2.5, the restriction of w^i , on $[\rho_\delta, \rho] \cdot e_i \subset J_i$, satisfies

$$\begin{cases} (\omega^i)_t + H_i(x_i, \partial_i \omega^i) \leq \lambda_\rho - 2\delta & \text{for } (t, x) \in \mathbb{R} \times (\rho_\delta, \rho) \cdot e_i, \\ (\omega^i)_t + H_i^-(x_i, \partial_i \omega^i) \leq \lambda_\rho - 2\delta & \text{for } (t, x) \in \mathbb{R} \times \{\rho_i\}. \end{cases}$$

Then inequality (4.25) yields that w^i is a solution of

$$\begin{cases} w_t^i + H(t, x, \partial_i w^i) \leq \lambda_\rho - \delta & \text{for } (t, x) \in \mathbb{R} \times (\rho_\delta, \rho) \cdot e_i, \\ w_t^i + H^-(t, x, \partial_i w^i) \leq \lambda_\rho - \delta & \text{for } (t, x) \in \mathbb{R} \times \{\rho_i\}. \end{cases} \quad (4.26)$$

Let $u(t, x) = w^i(t, x) - w^i(0, x_0) - 2C - 2\|v^i\|_\infty$ with C given in (4.19). The functions u

and v satisfy

$$v(t, x_0) \geq -2C \geq u(t, x_0).$$

Indeed, we have

$$v(t, x_0) = \omega_\rho(t, x_0) - \omega_\rho(0, x_0) = \omega_\rho(t, x_0) - m_\rho(x_0) + m_\rho(x_0) - \omega_\rho(0, x_0) \geq -2C,$$

and

$$u(t, x_0) = w^i(t, x_0) - w^i(0, x_0) - 2C - 2\|v^i\|_\infty = v^i(t, x_0) - v^i(0, x_0) - 2C - 2\|v^i\|_\infty \leq -2C.$$

Then the comparison principle, Proposition 4.3, yields that for all $x \in [x_0, \rho].e_i$,

$$v(t, x) \geq u(t, x).$$

That is

$$\omega_\rho(t, x) - \omega_\rho(t, x^0) \geq p_i^\delta(x - x_0) - 2C_\delta.$$

Finally if we choose δ_0 , such that

$$\delta_0 < |p_i^0 - \bar{p}_i|,$$

(with $\min_p \bar{H}_i(p) = \bar{H}_i(p_i^0)$), then

$$\bar{H}_i(\bar{p}_i - \delta) = \bar{H}_i^-(\bar{p}_i - \delta).$$

To conclude we can choose

$$\bar{p}_i^\delta = \bar{p}_i - \delta.$$

This ends the proof. □

5 Construction of a global corrector.

In this section we give the proof of Theorem 4.2.

Theorem 5.1. *Assume that (H_1) is satisfied, then the following assertions hold true.*

1. *There exists $\bar{A} \geq \max_i(\min_p \bar{H}_i(p))$, and a solution ω of (4.15) such that, for all $(t, x) \in \mathbb{R} \times J$,*

$$|\omega(t, x) - m(x)| \leq C \tag{5.27}$$

for a Lipschitz continuous function m .

2. *If $\bar{A} > \max_i(\min_p H_i(p))$ then there exists $\delta_0 > 0$ and $\rho_\delta > 0$ such that, for all $\delta \in (0, \delta_0)$, $x \geq \rho_\delta.e_i$ and $h \geq 0$ such that ω satisfies*

$$\omega(t, x + h) - \omega(t, x) \geq (\bar{p}_i - \delta)h - C_\delta. \tag{5.28}$$

3. For $\epsilon > 0$, let

$$\omega^\epsilon(t, x) = \epsilon\omega(\epsilon^{-1}t, \epsilon^{-1}x).$$

Then we have that ω^ϵ converges locally uniformly (for a sub-sequence ϵ_n) to a function $W = W(x)$ which verifies

$$\begin{cases} |W(x) - W(y)| \leq C|x - y| & \text{for all } x, y \in J, \\ \overline{H}_i(\partial_i W) = \overline{A} \text{ and } \hat{p}_i \geq \partial_i W \geq \overline{p}_i & \text{almost everywhere } x \in J_i \setminus \{0\}. \end{cases}$$

In particular, we have $W(0) = 0$ and for all $x \in J_i^*$

$$\hat{p}_i x \geq W(x) \geq \overline{p}_i x, \tag{5.29}$$

with $\overline{p}_i = \min\{p; \overline{H}_i^-(p) = \overline{A}\}$ and $\hat{p}_i = \max\{p; \overline{H}_i^-(p) = \overline{A}\}$.

Proof. The proof of this theorem is a consequence of the results already obtained on a truncated domain. We consider

$$\overline{\omega} = \limsup_{\rho \rightarrow +\infty}^*(\omega_\rho - \omega_\rho(0, 0)), \quad \underline{\omega} = \liminf_{\rho \rightarrow +\infty}^*(\omega_\rho - \omega_\rho(0, 0)), \quad \text{et } m = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} (m_\rho - m_\rho(0)).$$

The inequalities obtained in (4.19) yields that $\overline{\omega}$ and $\underline{\omega}$ satisfy

$$m - C \leq \underline{\omega} \leq \overline{\omega} \leq m + C.$$

Then the stability of discontinuous viscosity solutions implies that $\overline{\omega} - 2C$ and $\underline{\omega}$ are respectively sub- and super-solutions of (4.15). And a discontinuous viscosity solution of (4.15), in the class of 1-periodic function in time, is construct by Perron's method and denoted by ω .

The inequality (5.27) is a consequence of (4.19) and (4.24) implies the inequality (5.28). Now we study the convergence of $\omega^\epsilon(t, x) = \epsilon\omega(\epsilon^{-1}t, \epsilon^{-1}x)$. First (4.19) yields that

$$\omega^\epsilon(t, x) = \epsilon m(\epsilon^{-1}x) + \theta(\epsilon); \quad \theta(\epsilon) \rightarrow 0 \text{ as } \epsilon \rightarrow 0.$$

Then we can find a sub-sequence $\epsilon_n \rightarrow 0$ such that

$$\omega^{\epsilon_n}(t, x) \rightarrow W(x) \text{ locally uniformly as } n \rightarrow +\infty,$$

with $W(0) = 0$. We follow the same steps as the proof of convergence (Theorem 1.2) in the case of x far away from zero (which is more classical), and we deduce that W satisfies

$$\overline{H}_i(\partial_i W) = \overline{A} \text{ for } x \in J_i \setminus \{0\}.$$

We also deduce from (5.28) that, for all $\delta > 0$ and $x \in J_i \setminus \{0\}$,

$$\partial_i W \geq \overline{p}_i - \delta,$$

where $\overline{A} > \min_p \overline{H}_i(p)$. If $\overline{A} = \min_p \overline{H}_i(p)$ then by definition of \overline{p}_i , \hat{p}_i , and since $\overline{H}_i(\partial_i W) =$

\bar{A} , we have that

$$\bar{p}_i \leq \partial_i W \leq \hat{p}_i.$$

This completes the proof. \square

6 Convergence result of the rescaled problem (1.1)

In this section we prove the homogenization result for the rescaled Hamilton-Jacobi equation (1.1) defined on a junction. This work is an extension of [45] to the case of several branches. The goal is to prove a convergence result for the solution of (1.1) to the unique solution of (1.3) with a junction condition.

We have defined the effective Hamiltonian \bar{H}_i (in Proposition 4.1) and the flux limiter \bar{A} , so to complete the proof of Theorem 1.2, we should prove the convergence result.

We start by the definition of the semi-relaxed limits, defined for all locally bounded family $\{u^\varepsilon\}_\varepsilon$, by

$$\begin{cases} \bar{u}(t, x) = \limsup_\varepsilon^* u^\varepsilon(t, x) = \limsup_{t \rightarrow s, y \rightarrow x, \varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon(s, x), \\ \underline{u}(t, x) = \liminf_\varepsilon^* u^\varepsilon(t, x) = \liminf_{s \rightarrow t, y \rightarrow x, \varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon(s, y). \end{cases}$$

To define these half-relaxed limits for the solution u^ε of (1.1), we must show that the function u^ε is locally bounded for all ε . For this reason we give the following lemma

Lemma 6.1 (Barriers). *Under Assumptions (H_1) , there exists a constant $C > 0$ such that, for all $\varepsilon > 0$, we have*

$$|u^\varepsilon(t, x) - u_0(x)| \leq Ct \text{ for all } (t, x) \in J_T.$$

Proof. Let C_0 be the Lipschitz constant of u_0 . We set $C = \sup_{\substack{(t,x) \in \mathbb{R} \times J, \\ |p| \leq C_0}} |H(t, x, p)|$. C is well

defined by continuity and periodicity of H_i . Then $u_0(x) \pm Ct$ are super- and sub-solutions of (1.1). So the result follows by the comparison principle. This ends the proof. \square

We are now able to give the proof of Theorem 1.2.

Proof of Theorem 1.2. To prove that u^ε converges to u on $[0, T] \times J$ it's enough to show that \bar{u} and \underline{u} are respectively super and sub-solution of (1.1). Then the comparison principle yields that, $\bar{u} \leq \underline{u}$ and by definition we have $\underline{u} \leq \bar{u}$, then $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon = u$.

We prove that \bar{u} is a sub-solution of (1.3). The proof of super-solution being similar. First note that the initial condition is satisfied by Lemma 6.1. Let $\phi \in C^1(J_T)$ be a test function with $\bar{u}(\bar{t}, \bar{x}) = \phi(\bar{t}, \bar{x})$ and

$$(\bar{u} - \phi)(t, x) < (\bar{u} - \phi)(\bar{t}, \bar{x}) = 0 \text{ for } (t, x) \in B_{\bar{r}}(\bar{t}, \bar{x}) \setminus \{(\bar{t}, \bar{x})\}, \quad (6.30)$$

(where B is the associated open balls on networks). Since the maximum is strict, we assume that

$$(\bar{u} - \phi)(t, x) \leq -2k_r \text{ for all } (t, x) \in \partial B_{\bar{r}}(\bar{t}, \bar{x}), \quad (6.31)$$

for some $k_r > 0$ small enough. We argue by contradiction by assuming that the test function ϕ verifies

$$\begin{cases} \phi_t(\bar{t}, \bar{x}) + \bar{H}_i(\partial_i \phi(\bar{t}, \bar{x})) = \theta > 0, & \text{if } \bar{x} \in J_i^*, \\ \phi_t(\bar{t}, 0) + \max \left\{ \bar{A}, \max_{i \in \{1, \dots, N\}} \bar{H}_i^+(\partial_i \phi(\bar{t}, 0^+)) \right\} = \theta > 0 & \text{if } \bar{x} = 0. \end{cases}$$

We distinguish two cases: $\bar{x} = 0$ or $\bar{x} \neq 0$.

Case 1: $\bar{x} = 0$. According to Theorem 2.4, the function ϕ should have the following form

$$\phi(t, x_i) = \psi(t) + \bar{p}_i x_i \text{ for } x_i \in J_i^* \text{ for all } i \in \{1, \dots, N\}$$

with $\psi \in C^1(0, +\infty)$. We then have

$$\psi'(\bar{t}) + \max \left\{ \bar{A}, \max_{i \in \{1, \dots, N\}} \bar{H}_i^+(\bar{p}_i) \right\} = \psi'(\bar{t}) + \bar{A} = \theta > 0.$$

Let ω be the global corrector given in Theorem 4.2. We define the Evans' perturbed test function [37] by

$$\phi^\epsilon(t, x) = \psi(t) + \omega^\epsilon(t, x),$$

with $\omega^\epsilon(t, x) = \epsilon \omega\left(\frac{t}{\epsilon}, \frac{x}{\epsilon}\right)$. We claim that ϕ^ϵ is a super-solution of

$$\begin{cases} \phi_t^\epsilon + H\left(\frac{t}{\epsilon}, \frac{x}{\epsilon}, \partial_i \phi^\epsilon\right) = \frac{\theta}{2} & \text{in }]\bar{t} - r, \bar{t} + r[\times \bigcup]0, r[.e_i, \\ \phi_t^\epsilon + \max\left(H^+\left(\frac{t}{\epsilon}, 0, \partial_i \phi^\epsilon\right)\right) = \frac{\theta}{2} & \text{in }]\bar{t} - r, \bar{t} + r[\times \{0\} \end{cases} \quad (6.32)$$

for r small enough. To prove this, let f be a test function, such that (t_1, x_1) is a minimum point of $\phi^\epsilon - f$ such that $\phi^\epsilon(t_1, x_1) = f(t_1, x_1)$. Since $\psi'(\bar{t}) + \bar{A} = \theta$, and by the continuity of ψ , we have that

$$\psi'(t) + \bar{A} \geq \frac{\theta}{2} \text{ for } t \in B_r(\bar{t}).$$

We have

$$\phi^\epsilon(t, x) \geq f(t, x),$$

i.e

$$\psi(t) + \omega^\epsilon(t, x) \geq f(t, x)$$

which implies

$$\omega\left(\frac{t}{\epsilon}, \frac{x}{\epsilon}\right) \geq \frac{1}{\epsilon} (f(t, x) - \psi(t)).$$

Using that

$$\omega(\tau_1, y_1) = \frac{1}{\epsilon} (f(\epsilon\tau_1, \epsilon y_1) - \psi(\epsilon\tau_1)),$$

with $\tau_1 = \frac{t_1}{\varepsilon}$, $y_1 = \frac{x_1}{\varepsilon}$. We deduce that

$$(\tau, y) \rightarrow \omega(\tau, y) - \left(\frac{1}{\varepsilon} (f(\varepsilon\tau, \varepsilon y) - \psi(\varepsilon\tau)) \right)$$

reaches a minimum in (τ_1, y_1) . So we have two cases: $x_1 \neq 0$ or $x_1 = 0$. For the case where $x_1 \neq 0$ and since ω is as super-solution of (4.15), we deduce that

$$f_t(t_1, x_1) - \psi'(t_1) + H\left(\frac{t_1}{\varepsilon}, \frac{x_1}{\varepsilon}, \partial_i f(t_1, x_1)\right) \geq \bar{A}.$$

Then

$$f_t(t_1, x_1) + H\left(\frac{t_1}{\varepsilon}, \frac{x_1}{\varepsilon}, \partial_i f(t_1, x_1)\right) \geq \psi'(t_1) + \bar{A} \geq \frac{\theta}{2}.$$

We have the same result for $x_1 = 0$, in fact the corrector ω verify

$$f_t(t_1, 0) - \psi'(t_1) + \max\left(H^+(t_1, 0, \partial_i f(t_1, 0^+))\right) \geq \bar{A}.$$

Then we obtain

$$f_t(t_1, 0) + \max\left(H^+(t_1, 0, \partial_i f(t_1, 0^+))\right) \geq \frac{\theta}{2}.$$

This implies that ϕ^ε is a super-solution of (6.32). Since

$$\phi^\varepsilon(t, x) \rightarrow \psi(t) + W(x)$$

with

$$\psi(t) + W(x) \geq \psi(t) + \bar{p}_i x e_i \mathbf{1}_{\{J_i \setminus \{0\}\}} = \phi(t, x), \quad (6.33)$$

we deduce from (6.31) that

$$u^\varepsilon + k_r \leq \phi^\varepsilon \quad \text{on } \partial B_r(\bar{t}, 0).$$

Moreover, u^ε a sub-solution of (1.1) then it's a sub-solution of (6.32) on $B_r(\bar{t}, 0)$, then we get by the comparison principle that

$$u^\varepsilon + k_r \leq \phi^\varepsilon \quad \text{on } B_r(\bar{t}, 0).$$

Taking the lim sup as $\varepsilon \rightarrow 0$ and let $(t, x) \rightarrow (\bar{t}, \bar{x})$, we conclude

$$\bar{u}(\bar{t}, 0) + k_r \leq \phi(\bar{t}, 0) = \bar{u}(\bar{t}, 0).$$

This is a contradiction with the definition of k_r .

Case 2 If $\bar{x} \neq 0$, then we are on a branch J_i of J and we use the corrector far from the junction, given by the Hamiltonian H_i . The proof is classical and we skip it.

This ends the proof. □

ACKNOWLEDGMENTS

This project was co-financed by the European Union with the European regional development fund (ERDF, 18P03390/18E01750/18P02733) and by the Haute-Normandie Regional Council via the M2SINUM project.

Chapter 4

Stochastic homogenization of Hamilton-Jacobi equations on a junction

FAYAD Rim¹, FORCADEL Nicolas¹, IBRAHIM Hassan ²

Abstract

We consider the specified stochastic homogenization of first order evolutive Hamilton-Jacobi equations on a very simple junction, i.e the real line with a junction at the origin. Far from the origin, we assume that the considered hamiltonian is closed to given stationary ergodic hamiltonians (which are different on the left and on the right). Near the origin, there is a perturbation zone which allows to pass from one hamiltonian to the other. The main result of this paper is a stochastic homogenization as the length of the transition zone goes to zero. More precisely, at the limit we get two deterministic right and left hamiltonians with a deterministic junction condition at the origin. The main difficulty and novelty of the paper come from the fact that the hamiltonian is not stationary ergodic. Up to our knowledge, this is the first specified stochastic homogenization result. This work is motivated by traffic flow applications.

AMS Classification: 35B27,35D40, 35F21, 35R60.

Keywords: traffic flow, macroscopic models, stochastic homogenization, junctions, viscosity solutions, Hamilton-Jacobi equations.

1 General Introduction

In this paper we are interested in the specified stochastic homogenization of first order evolutive stochastic Hamilton-Jacobi equations posed on the real line. Our work is motivated

¹Normandie Univ, INSA de Rouen, LMI (EA 3226 - FR CNRS 3335), 76000 Rouen, France, 685 Avenue de l'Université, 76801 St Etienne du Rouvray cedex. France

²Lebanese University, Faculty of Sciences-I Mathematics Department Hadath, Beyrouth, Lebanon

by the paper of Imbert, Galise and Monneau [45] which studies the specified (periodic) homogenization of an Hamilton-Jacobi equation with some applications in traffic flow. Many homogenization's results concerning the rescaling of traffic's dynamics have been obtained in the periodic setting. We refer for instance to [44, 42, 39, 40, 54] for micro-macro passage. In this setting, all the drivers are assumed to be identical (or if we have different types of drivers, they are periodically distributed). From a modeling point of view, this assumption allows to get very interesting results and to justify macroscopic models but it is not very realistic. In this paper, we investigate the stochastic setting in which the type of drivers are randomly distributed. A first result concerning the stochastic case were obtained recently in [20] and concerns the micro-macro passage in a single road with a stochastic distribution of the drivers. In this paper, we consider a stochastic hamiltonian describing the traffic on a single road (i.e the real line). The main difficulty and novelty come from the fact that, at the origin, we assume that there is a local perturbation. The typical examples we have in mind are a speed traffic sign, a slowdown near a school or due to a car crash near the road for example). Then we assume that far from the origin, the hamiltonian is closed to two given hamiltonian (one on the left and the other on the right) and near the origin, there is a perturbation and a transition zone which allows to pass from one hamiltonian to the other. The goal of our paper is to understand which is the limiting model as the length of the transition zone goes to zero. At the limit we will recover two (deterministic) hamiltonians on the left and on the right, with a (deterministic) junction condition in the origin.

The stochastic homogenization of Hamilton-Jacobi equations has been extensively studied since the pioneer work of Souganidis [86]. We refer for example to [7, 9, 46] for the case of first-order convex and quasiconvex Hamilton-Jacobi equation, to [8, 10, 6, 75, 19] for second order convex and non-convex Hamilton-Jacobi equation, and to [64, 84] for the case of hamiltonian depending on time. Concerning the specified homogenization in the periodic case, we refer to [2, 45, 71]. Nevertheless, up to our knowledge, this is the first result concerning specified stochastic homogenization. The main difficulty in this setting comes from the fact that the hamiltonian is no more stationary ergodic, which is an essential assumption in the rest of the literature. To overcome this difficulty, we will use some technics developed in [7] to obtain quantitative homogenization result's.

2 Assumptions and main results

We begin this section with several assumptions, on a hamiltonian $H = H(p, y, \omega)$, needed to prove our stochastic homogenization result. First we want to define the probability space, so we define for all $V \in \mathbf{B}$, where \mathbf{B} denoted the Borel σ -algebra on \mathbb{R} , the σ -algebra $\mathbf{F}(V)$ by

$$\mathbf{F}(V) := \{\sigma\text{- algebra generated by the maps: } \omega \rightarrow H(p, y, \omega), \forall y \in V, p \in \mathbb{R}\}.$$

Let $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbb{R})$ and (Ω, \mathbf{F}, P) be a probability space.

For all $\omega \in \Omega$, we consider the equation, for all $T > 0$,

$$u_t(t, y) + H(Du, y, \omega) = 0 \text{ in } (0, T) \times \mathbb{R},$$

where the hamiltonian $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ is measurable with respect to $\mathbf{B} \times \mathbf{B} \times \mathbf{F}$. We make the following assumptions on H .

(H1) Regularity with respect to p : H is Lipschitz continuous with respect to p uniformly in (y, ω) .

(H2) Boundedness of H in (p, y) : There exists $c_0, C_0, \gamma > 0$, such that for all $p, y \in \mathbb{R}$, and $\omega \in \Omega$ we have

$$-c_0|p + \gamma| \leq H(p, y, \omega) \leq C_0|p + \gamma|.$$

In particular, we obtain that for every $R > 0$, the family of functions $\{H(\cdot, \cdot, \omega); \omega \in \Omega\}$ is bounded for $(p, y) \in B_R \times \mathbb{R}$, with B_R a ball of radius R in \mathbb{R} .

(H3) Uniform coercivity: H is coercive with respect to p , uniformly in (y, ω) , i.e

$$\lim_{|p| \rightarrow +\infty} \inf_{(y, \omega)} H(p, y, \omega) = +\infty.$$

(H4) Uniform modulus of continuity in space: There exists a modulus of continuity w such that $\forall x, y, p \in \mathbb{R}$ and $\omega \in \Omega$ we have

$$|H(p, y, \omega) - H(p, x, \omega)| \leq w(|x - y|(1 + |p|)).$$

(H5) Convexity: For all (y, ω) , the hamiltonian $p \rightarrow H(p, y, \omega)$ is convex.

(H6) A unique lower bound for H : For all $y, p \in \mathbb{R}$, and $\omega \in \Omega$ we have

$$H(p, y, \omega) \geq H(0, y, \omega). \quad (2.1)$$

Remark 2.1. *We can consider a hamiltonian given by traffic flow modelling (see [56]) such that, there exists $p_0 \in \mathbb{R}$ such that for all $y \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega$ we have that*

$$H(p, y, \omega) \geq H(p_0, y, \omega).$$

We obtain the same results by defining a hamiltonian \tilde{H} given by

$$\tilde{H}(p, y, \omega) = H(p - p_0, y, \omega)$$

which verifies (H6).

(H7) Left and right hamiltonians: There exists two stochastic hamiltonians H_L and H_R such that H is equal to H_L near $-\infty$ and to H_R near $+\infty$. More precisely, we assume either:

(H7-WFL) The hamiltonian H can be written as follow

$$H(p, y, \omega) = \phi(y)H_L(p, y, \omega) + (1 - \phi(y))H_R(p, y, \omega), \quad (2.2)$$

where $\phi(\cdot)$ is a non-increasing function in $C^\infty(\mathbb{R})$, given by

$$\phi(y) = \begin{cases} 1 & \text{if } y \leq -1, \\ 0 & \text{if } y \geq 1. \end{cases}$$

or

(H7- ε) There exists an Hamiltonian $H_0 \geq H_R, H_L$ such that the Hamiltonian H is given, for $\varepsilon > 0$, by

$$H(p, y, \omega) = \psi_1^\varepsilon(-y)H_L(p, y, \omega) + H_0(p, y, \omega)(1 - \psi_1^\varepsilon(-y))(1 - \psi_1^\varepsilon(y)) + \psi_1^\varepsilon(y)H_R(p, y, \omega), \quad (2.3)$$

with $\psi_1^\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ satisfying

$$\psi_1^\varepsilon(y) = \begin{cases} 1 & y > \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \\ 0 & y < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}. \end{cases}$$

Remark 2.2. In **(H7- ε)**, the Hamiltonian H depends on ε . Nevertheless, to simplify the notation, we don't explicit this dependence. Note also that the power of ε ($-1/2$ here) is fixed to simplify the presentation, but one can replace $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ by $\varepsilon^{-\alpha}$, with $\alpha \in (0, 1)$, in the definition of ψ_1^ε and the homogenization result will still hold true.

Remark 2.3. Let us give some explanations on Assumptions **(H7-WFL)** and **(H7- ε)**. In fact, in Assumption **(H7-WFL)**, the hamiltonian pass in a convex way from H_L to H_R and we will see that in that case the flux is not limited. The typical example we have in mind is a speed reduction or increase near the origin. On the contrary, in Assumption **(H7- ε)**, the speed is reduced near the origin. The typical example we have in mind is $H_0 = CH_L$, with $C < 1$ (in traffic modelling, hamiltonians are negative) which represents a slowdown near the origin (near a school or due to a car crash near the road for example). In that case, we will see that the flux is limited by this slowdown. Let us point out that in the case where the flux is limited, we have to consider a perturbation zone of radius $1/\sqrt{\varepsilon}$. After the rescaling, we will see that the radius of the perturbation will be $\sqrt{\varepsilon}$. This radius is necessary to get the convergence of u^ε to a deterministic function. In particular, we will present a counter-example in Section 4.3 showing that if ψ_1^ε doesn't depend on ε then, the limit can't be deterministic.

The probability space (Ω, \mathbf{F}, P) is endowed with an ergodic group $(\tau_z)_{z \in \mathbb{R}}$ of \mathbf{F} -measurable, measure-preserving transformations $\tau_z : \Omega \rightarrow \Omega$. That is, we assume that for every $x, z \in \mathbb{R}$ and $A \in \mathbf{F}$

$$\tau_{x+z} = \tau_x \circ \tau_z \text{ and } P(\tau_z(A)) = P(A),$$

and

$$\text{if } \tau_z(A) = A, \forall z \in \mathbb{R}, \text{ then either } P(A) = 0 \text{ or } P(A) = 1.$$

(H8) Stationarity of H_α : The hamiltonians H_α , for $\alpha = L, R, 0$, are stationary in (y, ω) with respect to the group $(\tau_z)_{z \in \mathbb{R}}$, that is, for every $p, y, z \in \mathbb{R}$ and $\omega \in \Omega$,

$$H_\alpha(p, y + z, \omega) = H_\alpha(p, y, \tau_z(\omega)).$$

(H9) Finite range dependence: The probability P satisfies a unit range of dependence:

For all $U, V \in \mathbf{B}$ such that $d(U, V) \geq 1$, we have that $\mathbf{F}(U)$ and $\mathbf{F}(V)$ are independent.

(H10) Probability to reach the supremum are strictly positive: We suppose that, for $\alpha = L, R, 0$,

$$P \left(\sup_{y \in [0,1[} H_\alpha(0, y, \omega) = \sup_{y \in \mathbb{R}} H_\alpha(0, y, \omega) \right) > 0$$

$$\text{or } P \left(\sup_{y \in [1,2[} H_\alpha(0, y, \omega) = \sup_{y \in \mathbb{R}} H_\alpha(0, y, \omega) \right) > 0.$$

Hypothesis **(H9)** and **(H10)** yield that the probability such that the slowest vehicle is in a interval $[2k, 2k + 1[$ or in $[2k + 1, 2k + 2[$ is strictly positive for $k \in \mathbb{N}$. For simplicity of notation, we call **(H)** the set of assumptions **(H1)**-**(H10)**. If we want to specify which assumption is satisfied in **(H7)**, we denote it by **(H-WFL)** or **(H- ε)**.

Remark 2.4. *Let us note that, even if H_R, H_L, H_0 are stationary ergodic, due to its particular form (see (2.2) or (2.3)), H is no longer stationary ergodic.*

We now give an example of a Hamilton-Jacobi equation, inspired by traffic flow modelling, which verifies **(H)**. Let $V_\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\alpha = L, R, 0$, and $\psi : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ be four functions satisfying the following assumptions:

- V_α is Lipschitz continuous and positive.
- V_α is non-decreasing and $\lim_{h \rightarrow +\infty} V_\alpha(h) = V_{max}^\alpha < +\infty$.
- There exists h_0^α such that $V_\alpha(h) = 0$ for all $h \leq h_0^\alpha$.
- There exists $\tilde{p} \in [-1/h_0^\alpha, 0)$ such that the function $p \rightarrow pV_\alpha(-\frac{1}{p})$ is non-increasing in $[-1/h_0^\alpha; \tilde{p})$ and non-decreasing in $[\tilde{p}, 0)$.
- ψ is stationary in (y, ω) with respect to the translation group $(\tau_z)_z$, that is, we assume that, for every $y, z \in \mathbb{R}$ and $\omega \in \Omega$ we have

$$\psi(y, \tau_z \omega) = \psi(y + z, \omega).$$

- ψ is a positive, Lipschitz continuous function with respect to y .
- ψ is bounded for all y, ω .
- For each $U \in \mathbf{B}$, we denoted by $\mathbf{F}(U)$ the σ -algebra generated by the sets $\{\omega \rightarrow \psi(y, \omega); y \in U\}$. We have that for $U, V \in \mathbf{B}$ such that $d(U, V) \geq 1$, $\mathbf{F}(U)$ and $\mathbf{F}(V)$ are independent.

A typical hamiltonian for traffic flow is given by

$$H_\alpha^*(p) = \begin{cases} (-p - \tilde{p} - k_0), & p < -k_0 - \tilde{p}, \\ -|p + \tilde{p}|V_\alpha \left(-\frac{1}{p + \tilde{p}} \right), & -k_0 - \tilde{p} \leq p \leq -\tilde{p}, \\ (p + \tilde{p}), & p > -\tilde{p}, \end{cases}$$

where $k_0 = 1/h_0^\alpha$. We then add a stochastic perturbation by considering

$$H_\alpha(p, y, \omega) = H_\alpha^*(p)\psi(\omega, y)$$

which satisfied assumptions **(H)**. In this setting, the variable y represents a point on the road and so the perturbation ψ explains how the velocity of this vehicle is modified (for example a slow-down on the road).

2.1 Main result

The main result of this paper is a stochastic homogenization result. We consider the following rescaled problem, for $T > 0$,

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon + H \left(Du^\varepsilon, \frac{y}{\varepsilon}, \omega \right) = 0 & (t, y) \in (0, T) \times \mathbb{R}, \\ u^\varepsilon(0, y, \omega) = u_0(y) & y \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.4)$$

where the hamiltonian H satisfies assumptions **(H)**, and u_0 is a Lipschitz continuous function.

Remark 2.5. *Under Assumption **(H- ε)**, the radius of the perturbation zone becomes of order $\sqrt{\varepsilon}$ and will disappear as $\varepsilon \rightarrow 0$. Nevertheless, we will see that the macroscopic model we obtain below will keep into memory the presence of this perturbation via the flux limiter \bar{A} at the origin.*

We also consider the deterministic limit problem given by

$$\begin{cases} u_t + \bar{H}_L(Du) = 0, & y < 0, t \in (0, T), \\ u_t + \bar{H}_R(Du) = 0, & y > 0, t \in (0, T), \\ u_t + \max(\bar{A}, \bar{H}_L^+(Du(0^-), \bar{H}_R^-(Du(0^+))) = 0, & y = 0, t \in (0, T), \\ u(0, x) = u_0(y), & y \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.5)$$

where \bar{H}_α^\pm are the increasing and decreasing part of \bar{H}_α and given by the following definition

Definition 2.6 (Definition of the increasing and decreasing part of the hamiltonians \bar{H}_α). *For $\alpha \in \{R, L\}$, \bar{H}_α^+ denotes the non-decreasing part of \bar{H}_α , defined by*

$$\bar{H}_\alpha^+(p) = \begin{cases} \bar{H}_\alpha(p) & \text{if } p \geq 0 \\ \underline{H}_\alpha & \text{if } p \leq 0, \end{cases}$$

and \overline{H}_α^- denotes the non-increasing part of \overline{H}_α , defined by

$$\overline{H}_\alpha^-(p) = \begin{cases} \overline{H}_\alpha(p) & \text{if } p \leq 0 \\ \underline{H}_\alpha & \text{if } p \geq 0, \end{cases}$$

where $\underline{H}_\alpha = \min_p(\overline{H}_\alpha(p))$.

In model (2.5), the constant \overline{A} is called the flux limiter and explains how the flux is reduced at the origin (by the presence of the perturbation). We refer to [58] for more explanations on this flux limiter.

The goal of this paper is to prove that the solution of (2.4) converges to the solution of (2.5) as $\varepsilon \rightarrow 0$. The homogenization result is given in the following theorem

Theorem 2.7 (Stochastic homogenization result). *Assume that (H) is satisfied, u_0 is a Lipschitz continuous function and for $\varepsilon > 0$, let u^ε be the solution of (2.4). Then there exists two deterministic, convex and coercive hamiltonians \overline{H}_L and \overline{H}_R , a deterministic flux limiter \overline{A} and an event $\Omega_0 \subseteq \Omega$ of full probability, such that for each $\omega \in \Omega_0$, the unique solution $u^\varepsilon(\cdot, \cdot, \omega)$ of (2.4) converges locally uniformly in \mathbb{R} , as $\varepsilon \rightarrow 0$, to the unique deterministic solution u of (2.5).*

Remark 2.8. *If Assumption (H7-WFL) is satisfied, we will see that*

$$\overline{A} = \max(\min_p \overline{H}_R(p), \min_p \overline{H}_L(p)).$$

From a traffic point of view, this means that the flux is not limited by the perturbation. On the contrary if (H7- ε) is satisfied then

$$\overline{A} = \min_p \overline{H}_0(p) \geq \max(\min_p \overline{H}_R(p), \min_p \overline{H}_L(p))$$

and the flux can be limited.

It is well known that to obtain a homogenization result, one have to introduce the so-called correctors. In the periodic case, the corrector is defined on the cell domain (see [37, 38, 72]), whereas in the stochastic case, this corrector is defined on the wholedomain. Articles [34, 74] prove that, in the general stochastic framework, the corrector does not exist. To solve this problem, we will classically use a sub-additive quantity which is a solution of an intermediate problem called the metric problem, see [85]. To obtain the homogenization's result, it suffices to prove that the metric problem homogenizes.

In this article, the sequence $\Omega_0 \subseteq \Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \dots$ is a sequence of subsets of Ω of full probability used to keep track of almost sure statements.

2.2 Organization of the paper

This article is organized as follow. In Section 3, we introduce the metric problems far from the junction and we recall some classical results about stochastic homogenization. Section 4 is devoted to the main results for the metric problem at the junction and in particular to the definition of the deterministic flux limiter. The proof of the homogenization's result

for the metric problem at the junction is given in Section 5. In Section 6, we give the main result for the approximated correctors and we prove in particular that the rescaled approximated correctors have the good slopes at infinity. Finally, in Section 7 we conclude with the proof of the convergence result for the rescaled problem.

3 Metric problem far from the origin

In this section, we give some useful results obtained in [9, 7] for an ergodic stationary hamiltonian. To define the deterministic hamiltonians \overline{H}_L and \overline{H}_R , we consider two metric problems, defined by the left and right hamiltonians H_L and H_R , as follows

$$\begin{cases} H_\alpha(Dv(y, \omega) + p, y, \omega) = \mu, & y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ v(0, \omega) = 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

with $\alpha \in \{L, R\}$. Recent works in stochastic homogenization prove that the set of solutions of (3.6) is included in

$$S' = \{\phi; \text{ such that } \phi \in \mathbf{Lip} \text{ and strictly sub-linear}\},$$

where \mathbf{Lip} denotes the set of real-valued global Lipschitz functions on \mathbb{R} . This result is proven in [9, 46].

Proposition 3.1 (Existence of a solutions for the metric problems [9, Proposition 3.2]). *We set, for $\omega \in \Omega$,*

$$\mu_\alpha^*(\omega) = \inf\{\mu; \text{ s.t there exists a function } v \in \mathbf{Lip} \text{ which satisfies } H_\alpha(Dv, y, \omega) \leq \mu \text{ in } \mathbb{R}\}.$$

We have by stationarity and ergodicity, that $\mu_\alpha^(\omega) = \mu_\alpha^*$ almost surely on ω . For all $\mu \geq \mu_\alpha^*$, there exists a Lipschitz continuous solution m_μ^α of*

$$\begin{cases} H_\alpha(Dm_\mu^\alpha(y, 0, \omega), y, \omega) = \mu & y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ m_\mu^\alpha(0, 0, \omega) = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

For all $\mu > \inf_{v \in S'_+} \sup_{y \in \mathbb{R}} H_\alpha(Dv + p, y, \omega)$, the function $m_\mu^\alpha - py$ is the unique solution of (3.6) in S'_+ , where

$$S'_+ = \{\phi; \text{ such that } \phi \in \mathbf{Lip}; \liminf_{|y| \rightarrow +\infty} |y|^{-1} \phi(y) \geq 0\}.$$

Proposition 3.2 (Properties of m_μ^α [9, Proposition 3.2]). *The solution m_μ^α is the maximal sub-solution of (3.7) in the sense that, if v is a Lipschitz continuous function and is sub-solution of $H_\alpha(Dv, y, \omega) \leq \mu$ in \mathbb{R} then*

$$v(\cdot, \omega) - v(0, \omega) \leq m_\mu^\alpha(\cdot, 0, \omega) \text{ in } \mathbb{R}.$$

Moreover, m_μ^α is sub-additive i.e for every $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$m_\mu^\alpha(z, x, \omega) \leq m_\mu^\alpha(y, x, \omega) + m_\mu^\alpha(z, y, \omega).$$

Proposition 3.3 (Homogenization of the metric problem [9, Proposition 4.1]). *There exists an event $\Omega_3 \subseteq \Omega$ of full probability and a function \bar{m}_μ^α such that, for every $\omega \in \Omega_3$, $y \in \mathbb{R}$ and $\mu \geq \mu_\alpha^*$ we have*

$$\frac{m_\mu^\alpha(ty, 0, \omega)}{t} \rightarrow \bar{m}_\mu^\alpha(y) \quad \text{as } t \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

We can now define the deterministic hamiltonians \bar{H}_α .

Definition 3.4 (Definition of the effective hamiltonians far from the junction). *The deterministic hamiltonians are given by*

$$\bar{H}_\alpha(p) = \inf_{\phi \in S'} \sup_{y \in \mathbb{R}} [H_\alpha(D\phi + p, y, \omega)] = \inf\{\mu; \bar{m}_\mu^\alpha \geq p.y; \forall y\}.$$

It's immediate from this definition and Assumptions (H) that \bar{H}_α are continuous, coercive and convex in p .

We also have the following results, which will be useful in the rest of the paper

Lemma 3.5 (Representation formulae for \bar{m}_μ^α [9, Lemma 4.2]). *For every $\mu > \mu_\alpha^*$,*

$$\bar{m}_\mu^\alpha(y) = \max\{p.y; \bar{H}_\alpha(p) \leq \mu\}. \quad (3.9)$$

Corollary 3.6 (New definition of μ_α^* [9, Corollary 4.3]). *We have, under Assumptions (H)*

$$\mu_\alpha^* = \min_p \bar{H}_\alpha(p) = \bar{H}_\alpha(0).$$

Proposition 3.7 (Equation satisfied by \bar{m}_μ^α [9, Corollary 4.5]). *For all $\mu \geq \mu_\alpha^*$, the function \bar{m}_μ^α is the solution of the following problem*

$$\begin{cases} \bar{H}_\alpha(D\bar{m}_\mu^\alpha(y)) = \mu, & y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \bar{m}_\mu^\alpha(0) = 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

Proposition 3.8 (Approximated correctors far from the junction [9, Lemma 5.1]). *For all $\delta > 0$, $\omega \in \Omega$ and $p \in \mathbb{R}$, there exists a unique bounded solution $v_\alpha^\delta(\cdot, \omega, p)$ of*

$$\delta v_\alpha^\delta + H_\alpha(Dv_\alpha^\delta + p, y, \omega) = 0 \text{ in } \mathbb{R}.$$

In addition, there exists an event $\Omega_2 \subset \Omega$ of full probability such that for all $\omega \in \Omega_2$

$$\delta v_\alpha^\delta(y, \omega, p) \rightarrow -\bar{H}_\alpha(p) \text{ in a ball of radius } 1/\delta.$$

Remark 3.9. *Note that all the results presented in this section hold true for H_0 .*

4 Metric problem at the junction point

4.1 Definition of the metric problem at the junction and of the stochastic flux limiter

This subsection is devoted to the definition of the flux limiter. In this subsection, we define a stochastic flux limiter. We will show in sub-section 4.3 that, under assumption **(H7)**, this flux limiter is in fact deterministic. We begin by the definition of the metric problem at the junction point: for $\omega \in \Omega$, $\mu \in \mathbb{R}$, we consider

$$\begin{cases} H(Dm_\mu(y, 0, \omega), y, \omega) = \mu, & y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ m_\mu(0, 0, \omega) = 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

The main difficulty comes here from the fact that the hamiltonian H is not stationary ergodic. As in the classical case, we start by the definition of the smallest value such that the metric problem admits a sub-solution and we denote it by $\tilde{A}(\omega)$:

$$\tilde{A}(\omega) = \inf\{\mu; \text{there exists } v \in \mathbf{Lip}; H(Dv, y, \omega) \leq \mu \text{ in } \mathbb{R}\}.$$

Contrary to the classical case, this constant is a priori not deterministic. Nevertheless, using **(H7)**, we will prove that it's deterministic.

We begin by a new definition for $\tilde{A}(\omega)$.

Lemma 4.1 (New definition of $\tilde{A}(\omega)$). *Assume **(H1)**-**(H6)**, then, for all $\omega \in \Omega$, the stochastic flux limiter $\tilde{A}(\omega)$ is given by*

$$\tilde{A}(\omega) = \inf_{v \in \mathbf{Lip}} \sup_{y \in \mathbb{R}} H(Dv, y, \omega) = \sup_{y \in \mathbb{R}} H(0, y, \omega) < \infty.$$

Proof. Note first that Assumption **(H6)** implies that

$$\inf_{v \in \mathbf{Lip}} \sup_{y \in \mathbb{R}} H(Dv, y, \omega) = \sup_{y \in \mathbb{R}} H(0, y, \omega).$$

Let $\omega \in \Omega$. We first prove that

$$\tilde{A}(\omega) \geq \sup_{y \in \mathbb{R}} H(0, y, \omega).$$

By definition of $\tilde{A}(\omega)$, for $\eta > 0$, there exists $\mu_\eta \in \mathbb{R}$ and $v_\eta \in \mathbf{Lip}$ such that $\mu_\eta < \tilde{A}(\omega) + \eta$, and

$$H(Dv_\eta, y, \omega) \leq \mu_\eta < \tilde{A}(\omega) + \eta \text{ for all } y \in \mathbb{R}.$$

Assumption **(H6)**, yields that

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} H(0, y, \omega) < \tilde{A}(\omega) + \eta \text{ for all } \eta > 0.$$

Letting $\eta \rightarrow 0$, we obtain the result.

To prove the reverse inequality, we consider $\mu = \sup_{y \in \mathbb{R}} H(0, y, \omega) < \infty$. Then all constant

function v are solution of

$$H(Dv, y, \omega) = H(0, y, \omega) \leq \mu,$$

and so, we get $\tilde{A}(\omega) \leq \mu$. This implies that $\tilde{A}(\omega) = \sup_{y \in \mathbb{R}} H(0, y, \omega) < \infty$ and concludes the proof. \square

We now give an existence result for the metric problem.

Theorem 4.2 (Existence of solution for the metric problem). *Assume (H1)-(H6). For all $\omega \in \Omega$ and $\mu \geq \tilde{A}(\omega)$, there exists a solution $m_\mu(\cdot, 0, \omega) \in \mathbf{Lip}$ of (4.11).*

In order to prove Theorem 4.2, we need a comparison principle for equation (4.11).

Proposition 4.3 (Comparison principle for (4.11)). *Assume (H1)-(H6) and fix $\omega \in \Omega$ and $\mu > \tilde{A}(\omega)$. Assume that $u \in USC(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ and $v \in LSC(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ are respectively a sub- and a super-solution of (4.11). Assume also that $\liminf_{|y| \rightarrow +\infty} |y|^{-1}v(y, \omega) > 0$ then*

$$u(\cdot, \omega) \leq v(\cdot, \omega) \text{ in } \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Remark 4.4. *Note that if u is a solution of $H(Du, y, \omega) \leq \mu$ then by coercivity assumption (H3), u is Lipschitz continuous.*

Lemma 4.5. [9, Lemme 2.1] *Let $\nu \in \mathbb{R}$ fixed and $U \subseteq \mathbb{R}$ an open. Then $v \in SCS(U)$ is a viscosity solution of*

$$H(Dv, y) \leq \nu \text{ sur } U$$

iff v is locally Lipschitz in U and satisfies the equation almost everywhere in U .

Proof. We want to prove a comparison principle on an unbounded domain for unbounded functions. First, since u is a sub-solution of (4.11) then it's Lipschitz continuous and we have

$$L = \limsup_{|y| \rightarrow \infty} |y|^{-1}u(y) < \infty.$$

It's enough to prove this result for $L \geq 0$, since otherwise the result is immediate from the usual comparison principle on bounded domains (see [28]). We define

$$E = \{0 \leq \lambda \leq 1 : \liminf_{|y| \rightarrow +\infty} \frac{v(y, \omega) - \lambda u(y, \omega)}{|y|} \geq 0\},$$

and $\gamma = \sup E$. By assumptions, we have that $\gamma > 0$ and $[0, \gamma) \subseteq E$. We also have that, for any $0 < \eta < \gamma$,

$$\liminf_{|y| \rightarrow +\infty} \frac{v(y, \omega) - \gamma u(y, \omega)}{|y|} = \liminf_{|y| \rightarrow +\infty} \frac{v(y, \omega) - (\gamma - \eta)u(y, \omega)}{|y|} - \eta \limsup_{|y| \rightarrow +\infty} \frac{u(y, \omega)}{|y|} \geq -\eta L.$$

Hence letting $\eta \rightarrow 0$, we get $\gamma \in E$ and $E = [0, \gamma]$.

We now show that $\gamma = 1$. By contradiction, assume that $\gamma < 1$. Fix $0 < \lambda \leq \gamma < 1$, $R, \eta > 0$ (to be selected below) and $0 \leq \delta < \min(\frac{1}{2}(1-\lambda), \eta/2L)$. We define $\tilde{u} = (\lambda + \delta)u$. Using the convexity of H in p , we have

$$H(D\tilde{u}, y, \omega) \leq (\lambda + \delta)H(Du, y, \omega) + (1 - (\lambda + \delta))H(0, y, \omega) \leq (\lambda + \delta)\mu + (1 - (\lambda + \delta))\tilde{A}(\omega) \leq \mu - \alpha$$

for some $\alpha > 0$ depending only on λ . We also define $\tilde{v} = v + \eta((R^2 + |y|^2)^{1/2} - R) = v + \eta\phi_R(y)$. Since H is Lipschitz continuous in p , and for a suitable η , we have that

$$H(D\tilde{v}, y, \omega) \geq \mu - \alpha.$$

Since $\lambda \in E$ and by the choice of δ , we deduce that

$$\liminf_{|y| \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{v}(y, \omega) - \tilde{u}(y, \omega)}{|y|} \geq \eta/2 > 0.$$

Hence, we can apply the comparison principle for bounded domains to \tilde{u} and \tilde{v} in order to get

$$\tilde{u} - \tilde{v} \leq 0 \text{ in } \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Letting $R \rightarrow +\infty$, we deduce that, since $\phi_R \rightarrow 0$,

$$\tilde{u} - v \leq 0 \text{ in } \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

i.e.

$$(\lambda + \delta)u - v \leq 0. \tag{4.12}$$

Dividing by $|y|$ and taking the lim sup, we get

$$\limsup_{|y| \rightarrow \infty} |y|^{-1}((\lambda + \delta)u - v) \leq 0$$

and so $\lambda + \delta \in E$. Taking $\lambda = \gamma$, and $\delta > 0$, we get that $\lambda + \delta > \gamma$, which is a contradiction with the definition of γ . So we obtain that $E = [0, 1]$.

Using the same arguments and taking $\delta = 0$ and $\lambda \rightarrow 1$, we deduce the result using (4.12). \square

We now give the proof of Theorem 4.2

Proof of Theorem 4.2. Fix $\omega \in \Omega$ and let $\mu > \tilde{A}(\omega)$. We set

$$M = \{v \in \mathbf{Lip} \text{ such that } H(Dv, y, \omega) \leq \mu\},$$

and for each $y \in \mathbb{R}$,

$$m_\mu(y, 0, \omega) = \sup_{v \in M} \{v(y, \omega) - v(0, \omega)\}.$$

Since $\mu > \tilde{A}(\omega)$, we have $M \neq \emptyset$, so the previous supremum is well defined. We now want to show that m_μ is finite. To do that, we introduce a regular function ψ defined on \mathbb{R} , for

C_μ large enough, by

$$\psi(y) = C_\mu |y|.$$

The coercivity of H yields that ψ is a global super-solution of (4.11). Then the comparison principle Proposition 4.3, applied to $v(\cdot, \omega) - v(0, \omega)$ and ψ for each $v \in M$, yields that

$$v(y, \omega) - v(0, \omega) \leq \psi(y),$$

which implies that

$$m_\mu(y, 0, \omega) \leq \psi(y),$$

and so m_μ is finite. Using that, for all $v \in M$,

$$H(0, y, \omega) \leq H(Dv, y, \omega),$$

we deduce that $0 \in M$ and so $m_\mu(y, 0, \omega) \geq 0$. Moreover, by construction we have that m_μ is a solution of

$$H(Dv, y, \omega) \leq \mu \text{ for } y \in \mathbb{R},$$

and satisfies $m_\mu(0, 0, \omega) = 0$. In particular m_μ is a sub-solution of (4.11). The fact that m_μ is a viscosity super-solution follows directly from the definition of m_μ and the following lemma

Lemma 4.6 ([36, Lemma 2.1]). *If $v \in M$ is not a super-solution of (4.11) then there exists $u \in M$ such that*

$$v(y, \omega) < u(y, \omega) \text{ at some } y \in \mathbb{R}.$$

It remains to show that there exists a solution for $\mu = \tilde{A}(\omega)$. We have, by definition of m_μ , that the map

$$\mu \mapsto m_\mu(y, 0, \omega) \text{ is non-decreasing for } \mu > \tilde{A}(\omega).$$

We then define, for all $y \in \mathbb{R}$,

$$m_{\tilde{A}(\omega)}(y, 0, \omega) = \inf_{\mu(\omega) > \tilde{A}(\omega)} m_\mu(y, 0, \omega) = \lim_{\mu(\omega) \rightarrow \tilde{A}(\omega)} m_\mu(y, 0, \omega).$$

By stability, we deduce that $m_{\tilde{A}(\omega)}(\cdot, 0, \omega)$ is a solution of (4.11). \square

4.2 Properties of the solution of the metric problem

For all $\omega \in \Omega$, $\mu \geq \tilde{A}(\omega)$ and $x \in \mathbb{R}$, we consider

$$\begin{cases} H(Dm_\mu(y, x, \omega), y, \omega) = \mu, & y \in \mathbb{R} \setminus \{x\}, \\ m_\mu(x, x, \omega) = 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

As in Section 4.1, we can prove that there exists a solution $m_\mu(\cdot, x, \omega)$ of (4.13) given by

the following representation formulae

$$m_\mu(y, x, \omega) = \sup\{v(y, \omega) - v(x, \omega); v \in \mathbf{Lip} \text{ such that } H(Dv, y, \omega) \leq \mu \text{ in } \mathbb{R}\}. \quad (4.14)$$

Remark 4.7. *In the case of stationary ergodic hamiltonian, we have $m_\mu(y, x, \tau_{-x}\omega) = m_\mu(y - x, 0, \omega)$ (see [7] for example). In our case, this property is no longer true.*

We can extend this definition from $\{x\}$ to any arbitrary compact $K \subseteq \mathbb{R}$ and we define

$$m_\mu(y, K, \omega) = \inf_{x \in K} \sup\{v(y, \omega) - v(x, \omega); v \in \mathbf{Lip} \text{ such that } H(Dv, y, \omega) \leq \mu \text{ in } \mathbb{R}\}.$$

The function $m_\mu(\cdot, K, \omega)$ is then a solution of the following problem

$$\begin{cases} H(Dm_\mu(\cdot, K, \omega), y, \omega) = \mu & y \in \mathbb{R} \setminus K, \\ m_\mu(\cdot, K, \omega) = 0 & \text{in } K. \end{cases} \quad (4.15)$$

Proposition 4.8 ([7, Proof of Proposition 3.6]). *For every $\omega \in \Omega$ and $\mu > \tilde{A}(\omega)$, the function $m_\mu(\cdot, K, \omega)$ is the unique nonnegative solution of (4.15) and is also given by the following representation formulae, for all $y \in \mathbb{R} \setminus K$*

$$m_\mu(y, K, \omega) = \inf_{x \in K} \sup\{v(y, \omega) - v(x, \omega); v \in \mathbf{Lip} \text{ such that } H(Dv, y, \omega) \leq \mu \text{ in } \mathbb{R} \setminus K\}. \quad (4.16)$$

A direct consequence of the previous proposition is the following corollary.

Corollary 4.9. *The function $m_\mu(\cdot, K, \omega)$ is $\mathbf{F}(\mathbb{R} \setminus K)$ -measurable.*

The functions $m_\mu(\cdot, x, \omega)$ and $m_\mu(\cdot, K, \omega)$ satisfy several properties that are recalled in the following proposition.

Proposition 4.10 (Some properties of m_μ). *For all $\omega \in \Omega$ and $\mu > \tilde{A}(\omega)$, the functions $m_\mu(\cdot, x, \omega)$ and $m_\mu(\cdot, K, \omega)$ verify the following properties*

- *If $U \subseteq \mathbb{R}$ is open, $x \in \mathbb{R} \setminus U$ and u verifies*

$$H(Du, y, \omega) \leq \mu \text{ in } U,$$

then

$$u - m_\mu(\cdot, x, \omega) \leq \max_{y \in \partial U} (u(y) - m_\mu(y, x, \omega)) \text{ in } U. \quad (4.17)$$

- *For all $y, z \in \mathbb{R}$ we have*

$$m_\mu(y, x, \omega) \leq m_\mu(y, z, \omega) + m_\mu(z, x, \omega);$$

- *$m_\mu(\cdot, x, \omega)$ is equivalent to the euclidean metric, i.e, for $\omega \in \Omega$; there exists $l_\mu, L_\mu \geq 0$ satisfying, for some $C', c' > 0$, $c'(\mu - \tilde{A}(\omega)) \leq l_\mu \leq L_\mu \leq C'$ such that*

$$0 \leq l_\mu |y - x| \leq m_\mu(y, x, \omega) \leq L_\mu |y - x|; \quad (4.18)$$

- For all $z \in \mathbb{R} \setminus K$ and $y \in \mathbb{R} \setminus K'$ where K, K' two compacts in \mathbb{R} , we have

$$|m_\mu(z, K, \omega) - m_\mu(y, K', \omega)| \leq L_\mu(|z - y| + \text{dist}_{\mathcal{H}}(K, K')), \quad (4.19)$$

with $\text{dist}_{\mathcal{H}}$ is the Hausdorff distance given by

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}(E, F) = \max \left\{ \sup_{y \in F} \inf_{x \in E} |y - x|, \sup_{y \in E} \inf_{x \in F} |y - x| \right\}.$$

- For every open set $U \subseteq \mathbb{R}$, $x \in U$ and $y \in \mathbb{R} \setminus U$

$$m_\mu(y, x, \omega) = \min_{z \in \partial U} (m_\mu(y, z, \omega) + m_\mu(z, x, \omega)). \quad (4.20)$$

Proof. The proofs of these properties are based on the maximality of m_μ , assumptions **(H2)**, **(H3)** and the comparison principle Proposition 4.3. In particular, these properties don't use the stationarity of H .

Inequality (4.17) yields that the function $m_\mu(\cdot, x, \omega)$ is the maximal sub-solution in each open U . It's a comparison principle in an open U . In fact to prove this inequality we suppose that (4.17) is not satisfy, i.e there exists $y_0 \in U$ such that

$$u(y_0, \omega) - m_\mu(y_0, x, \omega) > \max_{y \in \partial U} (u(y, \omega) - m_\mu(y, x, \omega)).$$

It's enough to show that there exists a sub-solution in \mathbb{R} of (4.13) which is strictly greater than $m_\mu(\cdot, x, \omega)$, which contradicts the definition of $m_\mu(\cdot, x, \omega)$. For this reason we define in \mathbb{R} the following function

$$v(y, \omega) = \begin{cases} m_\mu(y, x, \omega) & \text{for } y \in \mathbb{R} \setminus U, \\ \max(m_\mu(y, x, \omega), u(y, \omega)) & \text{for } y \in U. \end{cases}$$

Then we have that $v(x, \omega) = 0$, since $x \notin U$. We also have that $m_\mu(\cdot, x, \omega) \leq v(\cdot, \omega)$. In fact it's immediate for $y \in \mathbb{R} \setminus U$, and in U it's true by definition of v . Moreover we have that $v(y_0, \omega) > m_\mu(y_0, x, \omega)$. Then we have a contradiction.

Now we want to prove that $m_\mu(\cdot, x, \omega)$ is sub-additive. We have that $y \rightarrow m_\mu(y, x, \omega) - m_\mu(z, x, \omega)$ is a sub-solution of $H(Dv, y, \omega) \leq \mu$ in \mathbb{R} . Inequality (4.17) with $U = \mathbb{R} \setminus \{z\}$ implies the result.

We now give the proof of inequality (4.18). Since the Hamiltonian H is coercive, convex and verifies **(H6)**, then for all $\mu > \tilde{A}(\omega)$ there exists $p_y^+ > 0$ and $p_y^- < 0$ such that $H(p_y^+, y, \omega) = H(p_y^-, y, \omega) = \mu$. Moreover, for all $p \in [p_y^-, p_y^+]$, we have that $H(p, y, \omega) \leq \mu$ and

$$\mu - \tilde{A}(\omega) \leq H(p_y^\pm, y, \omega) - H(0, y, \omega) \leq c|p_y^\pm|.$$

Then $|p_y^\pm| \geq \frac{1}{c}(\mu - \tilde{A}(\omega))$. Let $l_\mu = \frac{1}{c}(\mu - \tilde{A}(\omega)) \geq 0$. Then we have that $p_y^- \leq -l_\mu \leq l_\mu(y - x)/|y - x| \leq l_\mu \leq p_y^+$ for all y . Hence, the function $y \rightarrow l_\mu|y - x|$ satisfies

$$H(l_\mu(y - x)/|y - x|, y, \omega) \leq \mu.$$

So, by the maximality's property of $m_\mu(\cdot, x, \omega)$, we obtain the left side of (4.18). For the second inequality, we have that the function $y \rightarrow L_\mu|y - x|$ is, by coercivity of H , a super-solution of (4.13), for L_μ large enough. Then we obtain the right side of (4.18) by comparison.

Let $z \in \mathbb{R} \setminus K$ and $y \in \mathbb{R} \setminus K'$, we have to prove (4.19). We have, using (4.18), and the fact that $m_\mu(\cdot, x, \omega)$ is sub-additive, that

$$\begin{aligned} & |m_\mu(z, K, \omega) - m_\mu(y, K, \omega) + m_\mu(y, K, \omega) - m_\mu(y, K', \omega)| \\ & \leq L_\mu|z - y| + |m_\mu(y, K, \omega) - m_\mu(y, K', \omega)|. \end{aligned}$$

In order to prove inequality (4.19), we have to prove that

$$|m_\mu(y, K, \omega) - m_\mu(y, K', \omega)| \leq L_\mu(\text{dist}_{\mathcal{H}}(K, K')).$$

We prove

$$m_\mu(y, K, \omega) - m_\mu(y, K', \omega) \leq L_\mu(\text{dist}_{\mathcal{H}}(K, K')),$$

the second one is similar, so we skip it. We know that $m_\mu(\cdot, K')$ is the maximal sub-solution of (4.15). Then, let $v(y, \omega) = m_\mu(y, K, \omega) - L_\mu \text{dist}_{\mathcal{H}}(K, K')$. Since $v(\cdot, \omega)$ is a sub-solution of $H(Dv, y, \omega) \leq \mu$ in \mathbb{R} , and v verifies the boundary condition, then we obtain the result. In fact, let $y \in K'$. We have that $m_\mu(\cdot, K, \omega) \leq 0$ on K . Then we have that, for $z \in K$,

$$v(y, \omega) \leq L_\mu|y - z| + m_\mu(z, K, \omega) - L_\mu \text{dist}_{\mathcal{H}}(K, K') \leq 0 \text{ on } K'.$$

To prove (4.20) we define $\phi(y, \omega) = \min_{z \in \partial U} (m_\mu(y, z, \omega) + m_\mu(z, x, \omega))$. Since $m_\mu(\cdot, x, \omega)$ is sub-additive then we have

$$m_\mu(y, x, \omega) \leq \phi(y, \omega).$$

We also have that ϕ is a sub-solution of $H(Dv, y, \omega) \leq \mu$ in $\mathbb{R} \setminus \bar{U}$. For $y \in \partial U$, we have that, for $y = z$, $\phi(y, \omega) = \min_{z \in \partial U} m_\mu(z, x, \omega)$. Then on ∂U , we have that $\phi(y) \leq m_\mu(y, x, \omega)$. Then inequality (4.17) for $U' = \mathbb{R} \setminus \bar{U}$, yields that $\phi(y, \omega) \leq m_\mu(y, x, \omega)$ on $\mathbb{R} \setminus \bar{U}$, and we obtain the equality. \square

We now give some consequences of the properties given in Proposition 4.10. In particular, we will give a localization property of the solution $m_\mu(\cdot, x, \omega)$ of (4.13). We begin by the definition of the sub-level set of $m_\mu(\cdot, x, \omega)$.

Definition 4.11. For each $t > 0$, μ , we define the reachable set to x in time t by

$$\mathcal{R}_{\mu,t}(x) = \mathcal{R}_{\mu,t} = \{(y, \omega) \in \mathbb{R} \times \Omega; m_\mu(y, x, \omega) \leq t\},$$

and for $\omega \in \Omega$ and $\mu > \tilde{A}(\omega)$,

$$\mathcal{R}_{\mu,t}^\omega = \{y \in \mathbb{R}; (y, \omega) \in \mathcal{R}_{\mu,t}\}.$$

If we consider, for $x \in \mathbb{R}$, U as

$$U = \{y \in \mathbb{R}; m_\mu(y, x, \omega) < t\},$$

then (4.20) and Proposition 4.8 yields that, for every $t > 0$ and $y \in \mathbb{R}$ such that $m_\mu(y, x, \omega) \geq t$,

$$m_\mu(y, x, \omega) = t + \min_{z \in \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega} m_\mu(y, z, \omega) = t + m_\mu(y, \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega, \omega). \quad (4.21)$$

In fact, inequality (4.20) yields that for $y \in \mathbb{R} \setminus U$, $x \in U$, we have that

$$\begin{aligned} m_\mu(y, x, \omega) &= \min_{z \in \partial U} (m_\mu(y, z, \omega) + m_\mu(z, x, \omega)) \\ &= \min_{z \in \{y; m_\mu(y, x, \omega) = t\}} (m_\mu(y, z, \omega) + m_\mu(z, x, \omega)) \\ &= \min_{z \in \{y; m_\mu(y, x, \omega) = t\}} (m_\mu(y, z, \omega) + t). \end{aligned}$$

We also have that

$$\{y; m_\mu(y, x, \omega) = t\} \subseteq R_{\mu,t}^\omega.$$

Then

$$\min_{R_{\mu,t}^\omega} m_\mu(y, z, \omega) \leq \min_{\partial U} m_\mu(y, z, \omega).$$

We conclude that $m_\mu(y, x, \omega) \geq t + \min_{z \in R_{\mu,t}^\omega} m_\mu(y, z, \omega)$. In the other side we have, for all $z \in R_{\mu,t}^\omega$ (then $m_\mu(z, x, \omega) \leq t$) and since $m_\mu(\cdot, x, \omega)$ is sub-additive, that

$$m_\mu(y, x, \omega) \leq m_\mu(y, z, \omega) + m_\mu(z, x, \omega) \leq t + m_\mu(y, z, \omega).$$

And then we conclude the inequality.

Now using (4.18), we obtain that, for every t and ω ,

$$B_{t/L_\mu} \subseteq \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega \subseteq B_{t/l_\mu}, \quad (4.22)$$

where B_r , is a ball of radius r centred in x . Then, $\mathcal{R}_{\mu,t}^\omega$ is a compact set in \mathbb{R} . We now give the property of localization of $m_\mu(\cdot, x, \omega)$.

Lemma 4.12 ([7, Lemma 3.4]). *For every $\omega \in \Omega$, $\mu > \tilde{A}(\omega)$, $x \in \mathbb{R}$, and $u \in \mathbf{Lip}(R_{\mu,t}^\omega)$,*

$$H(Du, y, \omega) \leq \mu \text{ in } \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega \text{ implies that } u(\cdot, \omega) - u(x, \omega) \leq m_\mu(\cdot, x, \omega) \text{ in } \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega.$$

Then we deduce that we can represent the solution $m_\mu(\cdot, x, \omega)$ of (4.13) in $\mathcal{R}_{\mu,t}^\omega$ as

$$m_\mu(y, x, \omega) = \sup\{w(y, \omega) - w(x, \omega); w \in \mathbf{Lip}(\mathcal{R}_{\mu,t}^\omega), H(Dw, y, \omega) \leq \mu \text{ in } \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega\}.$$

Lemma 4.13. *For every $\omega \in \Omega$, $\mu > \tilde{A}(\omega)$ and $0 \leq t \leq s$, we have that*

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}(\mathcal{R}_{\mu,t}^\omega, \mathcal{R}_{\mu,s}^\omega) \leq \frac{1}{l_\mu}(s - t). \quad (4.23)$$

Proof. We have, for $t \leq s$, that $\mathcal{R}_{\mu,t}^\omega \subseteq \mathcal{R}_{\mu,s}^\omega$. So to obtain the result it's enough to prove that

$$\mathcal{R}_{\mu,s}^\omega \subseteq \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega + \frac{1}{l_\mu}(s-t)\bar{B}_1.$$

By (4.18) and (4.21), we have, for all y such that $m_\mu(y, x, t) \geq t$, that

$$t + l_\mu \text{dist}(y, \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega) \leq t + m_\mu(y, \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega, \omega) = m_\mu(y, x, \omega).$$

In particular, for $y \in \mathcal{R}_{\mu,s}^\omega$, we have that

$$t + l_\mu \text{dist}(y, \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega) \leq m_\mu(y, x, \omega) \leq s.$$

Thus for all $y \in \mathcal{R}_{\mu,s}^\omega \setminus \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega$, we have

$$\text{dist}(y, \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega) \leq \frac{s-t}{l_\mu}.$$

This completes the proof. \square

4.3 Deterministic flux limiter

In this subsection, we show that under Assumption **(H7)** (either **(H7-WFL)** or **(H7- ε)**), the stochastic flux limiter is in fact deterministic.

The case of Assumption **(H7-WFL)**

Theorem 4.14 (Definition of \bar{A}). *Assume **(H-WFL)**. Then, there exists Ω_1 of full probability such that, for all $\omega \in \Omega_1$, the stochastic flux limiter $\tilde{A}(\omega)$ is given by*

$$\tilde{A}(\omega) = \bar{A} := \max(\mu_L^*, \mu_R^*).$$

Proof. We begin to prove that

$$\tilde{A}(\omega) \geq \max(\mu_L^*, \mu_R^*). \quad (4.24)$$

To do that we need the following lemma

Lemma 4.15. *There exists Ω_1 of full probability such that for all $\omega \in \Omega_1$, we have*

$$\sup_{y \in [1, +\infty[} H_R(0, y, \omega) = \sup_{y \in \mathbb{R}} H_R(0, y, \omega) \quad \text{and} \quad \sup_{y \in]-\infty, -1]} H_L(0, y, \omega) = \sup_{y \in \mathbb{R}} H_L(0, y, \omega).$$

Proof. We have to prove that

$$P \left(\sup_{y \in [1, +\infty[} H_R(0, y, \omega) \neq \sup_{y \in \mathbb{R}} H_R(0, y, \omega) \right) = 0.$$

To simplify the presentation, we assume that $\sup_{y \in [2k, 2k+1[} H_R(0, y, \omega)$ and $\sup_{y \in [2k+1, 2k+2[} H_R(0, y, \omega)$

are $\mathbf{F}[2k, 2k+1]$ -measurable, and $\mathbf{F}[2k+1, 2k+2]$ -measurable respectively, otherwise, we have to approximate the sup by a sup on a countable set. More precisely we have that

$$\sup_{[n, n+1[} H_R(0, y, \omega) = \lim_{h_n \rightarrow 0} \sup_{\{n+kh_n; k \leq \lfloor \frac{1}{h_n} \rfloor\}} H_R(0, y, \omega).$$

By assumption **(H9)**, we have that either

$$P\left(\sup_{y \in [2k, 2k+1[} H_R(0, y, \omega) < \mu_R^*\right) < 1 \quad \text{or} \quad P\left(\sup_{y \in [2k+1, 2k+2[} H_R(0, y, \omega) < \mu_R^*\right) < 1.$$

We assume that $P\left(\sup_{y \in [2k, 2k+1[} H_R(0, y, \omega) < \mu_R^*\right) < 1$, the other case being similar. By assumption **(H9)** we then have

$$\begin{aligned} & P\left(\sup_{y \in [1, +\infty[} H_R(0, y, \omega) \neq \sup_{y \in \mathbb{R}} H_R(0, y, \omega)\right) \\ &= P\left(\bigcap_{n \geq 1} \left\{ \sup_{y \in [n, n+1[} H_R(0, y, \omega) < \sup_{y \in \mathbb{R}} H_R(0, y, \omega) \right\}\right) \\ &\leq P\left(\bigcap_{k \geq 1} \left\{ \sup_{y \in [2k, 2k+1[} H_R(0, y, \omega) < \sup_{y \in \mathbb{R}} H_R(0, y, \omega) \right\}\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^N P\left(\sup_{y \in [2k, 2k+1[} H_R(0, y, \omega) < \mu_R^*\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(P\left(\sup_{y \in [2k, 2k+1[} H_R(0, y, \omega) < \mu_R^*\right)\right)^N = 0. \end{aligned}$$

□

To prove that $\tilde{A}(\omega) \geq \max(\mu_L^*, \mu_R^*)$, we assume, by contradiction, that $\tilde{A}(\omega) < \mu_R^*$ (the case $\tilde{A}(\omega) < \mu_L^*$ being similar). For all $\omega \in \Omega_1$, we then have

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} H_R(0, y, \omega) > \tilde{A}(\omega) = \sup_{y \in \mathbb{R}} H(0, y, \omega) \geq \sup_{y \in [1, +\infty[} H(0, y, \omega) = \sup_{y \in [1, +\infty[} H_R(0, y, \omega),$$

which is absurd.

We now prove that

$$\tilde{A}(\omega) \leq \max(\mu_L^*, \mu_R^*).$$

Under assumptions **(H-WFL)**, we have that

$$\begin{aligned} & \{\mu; \text{s.t } \exists v \in \mathbf{Lip}; \max(H_L(Dv, y, \omega), H_R(Dv, y, \omega)) \leq \mu \text{ in } \mathbb{R}\} \\ & \subset \{\mu; \text{s.t } \exists v \in \mathbf{Lip}; H(Dv, y, \omega) \leq \mu \text{ in } \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

then we get

$$\max(\mu_L^*, \mu_R^*) \geq \tilde{A}(\omega).$$

We conclude that \tilde{A} is deterministic in Ω_1 . □

The case of Assumption (H7- ε)

As in Proposition 3.1, we denote μ_0^* by

$$\mu_0^* = \inf\{\mu; \text{ s.t there exists a function } v \in \mathbf{Lip} \text{ which satisfies } H_0(Dv, y, \omega) \leq \mu \text{ in } \mathbb{R}\}.$$

As in Corollary 3.6, $\mu_0^* = \inf_p \bar{H}_0(p)$.

Theorem 4.16 (Definition of \bar{A}). *Assume (H- ε). Then, there exists a decreasing sequence of set Ω_1^ε such that $P(\Omega_1^\varepsilon) = 1 - \theta(\varepsilon)$ with $\theta(\varepsilon) \rightarrow 0$ as $\varepsilon \rightarrow 0$ and such that, for all $\omega \in \Omega_1^\varepsilon$, the stochastic flux limiter $\tilde{A}(\omega)$ is given by*

$$\tilde{A}(\omega) = \bar{A} := \max\left(\min_p \bar{H}_0(p), \min_p \bar{H}_L(p), \min_p \bar{H}_R(p)\right) = \min_p \bar{H}_0(p) = \mu_0^*.$$

Proof. We begin to prove that

$$\tilde{A}(\omega) \geq \mu_0^*. \quad (4.25)$$

To do that we need the following lemma

Lemma 4.17. *There exists a decreasing sequence of set Ω_1^ε such that $P(\Omega_1^\varepsilon) = 1 - \theta(\varepsilon)$ with $\theta(\varepsilon) \rightarrow 0$ as $\varepsilon \rightarrow 0$ and such that, for all $\omega \in \Omega_1^\varepsilon$, we have*

$$\sup_{y \in [\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}]} H_0(0, y, \omega) = \sup_{y \in \mathbb{R}} H_0(0, y, \omega).$$

Proof. We have to prove that

$$P\left(\sup_{y \in [\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}]} H_0(0, y, \omega) \neq \sup_{y \in \mathbb{R}} H_0(0, y, \omega)\right) = \theta(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0.$$

To simplify the presentation, we assume that $\sup_{y \in [2k, 2k+1[} H_0(0, y, \omega)$ and $\sup_{y \in [2k+1, 2k+2[} H_0(0, y, \omega)$ are \mathbf{F} -measurable, otherwise, we have to approximate the sup by a sup on a countable set. By assumption (H9), we have that either

$$P\left(\sup_{y \in [2k, 2k+1[} H_0(0, y, \omega) < \mu_0^*\right) < 1 \quad \text{or} \quad P\left(\sup_{y \in [2k+1, 2k+2[} H_0(0, y, \omega) < \mu_0^*\right) < 1.$$

We assume that $P\left(\sup_{y \in [2k, 2k+1[} H_0(0, y, \omega) < \mu_0^*\right) < 1$, the other case being similar. By

assumption **(H9)** we then have

$$\begin{aligned}
& P \left(\sup_{y \in [\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}]} H_0(0, y, \omega) < \mu_0^* \right) \\
& \leq P \left(\bigcap_{n \in \left\{ \lfloor \frac{-1}{\sqrt{\varepsilon}} \rfloor + 1, \dots, \lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \rfloor - 1 \right\}} \left\{ \sup_{y \in [n, n+1[} H_0(0, y, \omega) < \mu_0^* \right\} \right) \\
& \leq P \left(\bigcap_{k \in \left\{ \frac{1}{2} \lfloor \frac{-1}{\sqrt{\varepsilon}} \rfloor + \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \rfloor - \frac{1}{2} \right\}} \left\{ \sup_{y \in [2k, 2k+1]} H_0(0, y, \omega) < \mu_0^* \right\} \right) \\
& = \prod_{k = \frac{1}{2} \lfloor \frac{-1}{\sqrt{\varepsilon}} \rfloor + \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} \lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \rfloor - \frac{1}{2}} P \left(\sup_{y \in [2k, 2k+1[} H_0(0, y, \omega) < \mu_0^* \right) \\
& = \left(P \left(\sup_{y \in [2k, 2k+1[} H_0(0, y, \omega) < \mu_0^* \right) \right)^{\frac{1}{2} \lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \rfloor - \frac{1}{2} \lfloor \frac{-1}{\sqrt{\varepsilon}} \rfloor} =: \theta(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

□

To prove (4.25), we assume by contradiction that $\tilde{A}(\omega) < \mu_0^*$ for all $\omega \in \Omega_1^\varepsilon$. We then have

$$\mu_0^* = \sup_{y \in \mathbb{R}} H_0(0, y, \omega) > \tilde{A}(\omega) = \sup_{y \in \mathbb{R}} H(0, y, \omega) \geq \sup_{y \in [\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}]} H(0, y, \omega) = \sup_{y \in [\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}]} H_0(0, y, \omega),$$

which is absurd.

We now prove that

$$\tilde{A}(\omega) \leq \mu_0^*.$$

Under assumptions **(H- ε)** (and using that $H \leq H_0$), we have that

$$\begin{aligned}
& \{ \mu; \text{ s.t } \exists v \in \mathbf{Lip}; H_0(Dv, y, \omega) \leq \mu \text{ in } \mathbb{R} \} \\
& \subset \{ \mu; \text{ s.t } \exists v \in \mathbf{Lip}; H(Dv, y, \omega) \leq \mu \text{ in } \mathbb{R} \}.
\end{aligned}$$

We then get

$$\mu_0^* \geq \tilde{A}(\omega)$$

and we conclude that \tilde{A} is deterministic in Ω_1^ε .

□

A counter example

In this subsection we present a counter-example showing that if the perturbation zone in **(H7- ε)** doesn't depend on ε , then, in general, we don't have the convergence result of u^ε

to a deterministic function. More precisely we cannot obtain a deterministic flux limiter and the supremum $\sup_{y \in \mathbb{R}} H(0, y, \omega)$ depends on ω since H is not stationary. In particular, the limit of u^ε (if it exists, which is not clear in that case) can't be deterministic. To show that, we give a counter example for a Bernoulli process.

Given a probability space (Ω, \mathbf{F}, P) , we define a Bernoulli process $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ such that, for $\omega \in \Omega$

$$X_i(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{with probability } p, \\ 1 & \text{with probability } 1 - p. \end{cases}$$

We then define a $C^\infty(\mathbb{R})$ function $\bar{\psi}$ such that

$$\bar{\psi}(y) = \begin{cases} \psi_0 & |y| \leq 1/2, \\ 0 & |y| \geq 3/4, \end{cases}$$

where $-1 < \psi_0 < 0$ is a constant. We now define a stationary ergodic function ψ by

$$\psi(y, \omega) = \bar{\psi}(y - 2k)X_k(\omega) + 1 \quad \text{if } y \in [2k - 1, 2k + 1].$$

and a stationary ergodic hamiltonian

$$H_L(p, y, \omega) = \begin{cases} (-p - \tilde{p} - k_0)\psi(\omega, y), & p < -k_0 - \tilde{p}, \\ -|p + \tilde{p}|V_L\left(-\frac{1}{p + \tilde{p}}\right)\psi(\omega, y), & -k_0 - \tilde{p} \leq p \leq -\tilde{p}, \\ (p + \tilde{p})\psi(\omega, y), & p > -\tilde{p}. \end{cases}$$

To define our Hamilton-Jacobi equation, we suppose that the right and left hamiltonians are equal, i.e $H_L = H_R$ and we consider $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, given by

$$H(p, y, \omega) = H_L(p, y, \omega)\bar{\psi}(y).$$

Hence $H_0 = H_L\psi_0$. The main difference with Assumptions **(H-WFL)** is that the hamiltonian is reduced near the origin (by the factor $\bar{\psi}$) and so H doesn't satisfies $\min(H_L, H_R) \leq H \leq \max(H_L, H_R)$. Moreover, contrary to the case of Assumption **(H- ε)**, the radius of the perturbation's zone is fixed. In that case, which have been treated in [45] in the periodic setting, we expect to have $\bar{A} > \max(\mu_L^*, \mu_R^*)$, which means that the flux is limited at the origin.

In the stochastic setting, we can define two sets

$$\tilde{\Omega}_0 = \{\omega \in \Omega; X_0(\omega) = 0\} \text{ and } \tilde{\Omega}_1 = \{\omega \in \Omega; X_0(\omega) = 1\}$$

with $P(\tilde{\Omega}_0) = p$ and $P(\tilde{\Omega}_1) = 1 - p$. For $\omega \in \tilde{\Omega}_0$, we have that

$$\tilde{A}(\omega) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \bar{\psi}(y)H_L(0, y, \omega) \right\} = -|\tilde{p}|V_L\left(-\frac{1}{\tilde{p}}\right)\psi_0,$$

and for $\omega \in \tilde{\Omega}_1$ we have that

$$\tilde{A}(\omega) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \bar{\psi}(y) H_L(0, y, \omega) \right\} = -|\tilde{p}| V_L \left(-\frac{1}{\tilde{p}} \right) (\psi_0^2 + \psi_0).$$

We then deduce that the flux limiter \tilde{A} is stochastic and that the limit of u^ε , if it exists, can't be deterministic.

5 Homogenization result of metric problems defined in half space

To prove the homogenization result for (2.4), it is necessary to prove a homogenization result for the metric problem (4.13). This result is given in the following theorem.

Theorem 5.1 (Homogenization of the metric problem (4.13)). *Assume (H- ε) (resp. (H-WFL)) and let $\mu > \bar{A}$. Then, there exists a decreasing sequence of set $\Omega_0^\varepsilon \subset \Omega_1^\varepsilon$ such that $P(\Omega_0^\varepsilon) = 1 - \theta(\varepsilon)$ with $\theta(\varepsilon) \rightarrow 0$ as $\varepsilon \rightarrow 0$ (resp. Ω_0 of full probability) and a function $\bar{m}_\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ such that, for every $\omega \in \Omega_0^\varepsilon$ (resp. $\omega \in \Omega_0$), we have*

$$\frac{m_\mu(ty, tx, \omega)}{t} \rightarrow \bar{m}_\mu(y, x) \text{ as } t \rightarrow \infty,$$

where $m_\mu(\cdot, x, \omega)$ is the solution of (4.13).

When the hamiltonian is stationary ergodic, it is well known that $\bar{m}_\mu(y, x)$ is in fact a function of $y - x$. This result is no longer true in our setting. Nevertheless, if $x \geq 0, y > 0$ or $x \leq 0, y < 0$, we recover this property. This is explained in the following theorem

Theorem 5.2. *Under the same assumptions as the previous theorem, if moreover $x \geq 0, y > 0$ (resp. $x \leq 0, y < 0$) then there exists $\bar{m}_\mu^R : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ (resp. $\bar{m}_\mu^L : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$) such that*

$$\bar{m}_\mu(y, x) = \bar{m}_\mu^R(y - x) \text{ (resp. } = \bar{m}_\mu^L(y - x)).$$

More precisely, if we define $\bar{p}_\mu^{\alpha, \pm}$ for $\alpha = R, L$ such that $\pm \bar{p}_\mu^{\alpha, \pm} \geq 0$ and

$$H_\alpha(\bar{p}_\mu^{\alpha, \pm}) = H_\alpha^\pm(\bar{p}_\mu^{\alpha, \pm}) = \mu,$$

then

$$\bar{m}_\mu^R(y, x) = \begin{cases} \bar{p}_\mu^{R,+}(y - x) & \text{for } y > x; \\ \bar{p}_\mu^{R,-}(y - x) & \text{for } y < x. \end{cases}$$

$$\left(\text{resp. } \bar{m}_\mu^L(y, x) = \begin{cases} \bar{p}_\mu^{L,+}(y - x) & \text{for } y > x; \\ \bar{p}_\mu^{L,-}(y - x) & \text{for } y < x. \end{cases} \right)$$

In the rest of this section, we will only treat the case of assumption (H- ε), the case of assumption (H-WFL) being similar and even simpler.

The hamiltonian H is not stationary and then m_μ and Dm_μ are not stationary. In particular, we can't apply the sub-additive ergodic theorem to prove the homogenization. To get the result, we will use the ideas introduced by Armstrong, Cardaliaguet and Souganidis [7]. The proof is decomposed into two steps. In a first time, we prove that, almost surely in ω , the random process $\frac{1}{t}m_\mu(ty, tx, \omega)$ is near to his mean for large t . Then, we prove that this mean converges to a quantity, that we denoted by \bar{m}_μ . The first part of the proof is given by the following theorem.

Theorem 5.3 (Estimate on the fluctuation of m_μ). *Assume $(\mathbf{H}-\varepsilon)$ and let $\varepsilon > 0$, $\mu > \bar{A}$ and m_μ be the solution of (4.13). Then, there exists $C > 0$ such that for all $\lambda > 0$, and $y, x \in \mathbb{R}$ such that $|y - x| > 1$, we have*

$$P(\{\omega \in \Omega_1^\varepsilon, |m_\mu(y, x, \omega) - E(m_\mu(y, x, \omega))| > \lambda\}) \leq \exp\left(\frac{-(\mu - \bar{A})\lambda^2}{C|y - x|}\right). \quad (5.26)$$

Here and below, the expectation E is taken over $\omega \in \Omega_1^\varepsilon$. To prove this result we use an argument inspired by the pioneering work of Kesten [62] in the theory of first-passage percolation, who introduced a martingale method based on Azuma's concentration inequality. This argument is used in several works and we adapt the one developed in [7]. We also use the ideas developed by Alexander about the level sets [3].

Definition of martingales

A martingale is a series $(M_n)_{n \geq 0}$ of random variables which verify

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|M_0, \dots, M_n] = M_n.$$

We have by induction, for all n , $E[M_n] = E[M_0]$.

Definition 5.4. *A filtration on (Ω, \mathbf{F}, P) is an increasing sequence $(\mathcal{F}_n)_n$ of σ -algebra included in \mathbf{F}*

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathbf{F}.$$

Definition 5.5. *Let $(\mathcal{F}_n)_n$ be a filtration. A sequence $(M_n)_n$ of random variables is a martingale with respect to the filtration $(\mathcal{F}_n)_n$, if for all $n \geq 0$,*

- M_n is \mathcal{F}_n -measurable (we say that $(M_n)_n$ is adapted to the filtration);
- $\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n$.

Most of the time, the filtration is actually defined by

$$\mathcal{F}_n = \sigma(M_0, \dots, M_n).$$

And the Azuma's inequality is given in the following proposition.

Proposition 5.6. *Let $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ be a discrete martingale with $X_0 = 0$. Assume that there exists a constant $B > 0$, such that, for each $k \in \mathbb{N}$,*

$$\sup_{\Omega} |X_{k+1} - X_k| \leq B.$$

Then, for each $\lambda > 0$ and $N \geq 1$,

$$P(|X_N| > \lambda) \leq \exp\left(\frac{-\lambda^2}{2B^2N}\right).$$

5.1 A discretization scheme

To obtain the inequality given in Theorem 5.3, we want to define a specific martingale and then use Azuma's inequality. To do that, we use the localization property of m_μ . For this reason, we start by introducing a discretization scheme, where we apply the result for

$$\mathcal{R}_{\mu,t}^\omega = \{y \in \mathbb{R}; m_\mu(y, x, \omega) \leq t\}$$

in order to use the independence hypothesis (H9).

We define, $\forall r > 0$,

$$\mathcal{K}_r = \{A \in \mathbf{B}; A = \bar{A} \subseteq [x - r, x + r]\}$$

the set of compact in \mathbb{R} . In particular, $(\mathcal{K}_r, dist_{\mathcal{H}})$, where $dist_{\mathcal{H}}$ is the Hausdorff distance, is compact (see Munkres [78]). We fix a small parameter $\delta > 0$. Then, there exists $l \in \mathbb{N}$ (depending only on δ and r) and a partition $\Gamma_1, \dots, \Gamma_l \subset \mathcal{K}_r$ of \mathcal{K}_r into Borel subsets, such that

$$diam_{\mathcal{H}}(\Gamma_i) \leq \delta.$$

Let $K_m = \overline{\bigcup_{k \in \Gamma_m} k}$. Then $\forall A \in \mathcal{K}_r$ there exists a unique $1 \leq m \leq l$ such that $A \in \Gamma_m$ and so $A \subset K_m$. We define $\tilde{K}_m = K_m +] - 1, 1[$ so that $d(K_m, \mathbb{R} \setminus \tilde{K}_m) = 1$ and so assumption (H9) implies that

$$\mathbf{F}(K_m) \text{ and } \mathbf{F}(\mathbb{R} \setminus \tilde{K}_m) \text{ are independent.}$$

Moreover, $\forall A \in \mathcal{K}_r$, if $A \in \Gamma_m$, then

$$A \subseteq K_m \subseteq \tilde{K}_m \subseteq A + B_{1+\delta}.$$

To define a martingale, we have to define a filtration. We define $\{\mathcal{F}_{\mu,t}\}_{t \geq 0}$ by $\mathcal{F}_{\mu,0} = \{\emptyset, \Omega\}$ and, for all $t > 0$,

$$\{\mathcal{F}_{\mu,t}\} = \sigma\text{-algebra generated by } \omega \rightarrow H(p, y, \omega) \mathbf{1}_{\{\omega; y \in \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega\}}, \quad y, p \in \mathbb{R}.$$

In particular, for all t, s such that $0 < t < s$ and $\omega \in \Omega$, we have: $\mathcal{R}_{\mu,t}^\omega \subset \mathcal{R}_{\mu,s}^\omega$ so $\mathcal{F}_{\mu,t} \subset \mathcal{F}_{\mu,s}$ and then $\{\mathcal{F}_{\mu,t}\}_{t \geq 0}$ is indeed a filtration. We also have for all $y \in \mathbb{R}$, that

$$\omega \rightarrow m_\mu(y, x, \omega) \mathbf{1}_{\{\omega; y \in \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega\}}(\omega) \text{ is } \mathcal{F}_{\mu,t} \text{ measurable.} \quad (5.27)$$

Indeed, this is a direct consequence of the fact that, using Lemma 4.12, we can restrict

the representation of m_μ in $\mathcal{R}_{\mu,t}^\omega$.

5.2 Proof of Theorem 5.3.

Proof. We fix x, y such that $|y - x| > 1$ and we define $T = L_\mu|y - x|$ and $r = \frac{T}{l_\mu}$ where l_μ and L_μ are given in Proposition 4.10. Then, using (4.22), we have

$$\mathcal{R}_{\mu,T}^\omega \subseteq [x - r, x + r]. \quad (5.28)$$

So, for every $\omega \in \Omega_1^\varepsilon$, we have that the T -sub level of $m_\mu(\cdot, x, \omega)$ is in \mathcal{K}_r . The idea of the proof is based on Azuma's inequality, which gives the estimation of the variance. We define the martingale adapted to $\{\mathcal{F}_{\mu,t}\}$, for every $t \geq 0$, by

$$X_t(\omega) = E[m_\mu(y, x, \omega) | \mathcal{F}_{\mu,t}] - E[m_\mu(y, x, \omega)].$$

Since, by (4.18)

$$m_\mu(y, x, \omega) \leq L_\mu|y - x| \leq T,$$

we deduce, for all $t \geq T$, that $y \in \mathcal{R}_{\mu,T}^\omega \subseteq \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega$ and so by (5.27)

$$m_\mu(y, x, \omega) = m_\mu(y, x, \omega) \mathbf{1}_{\{\omega; y \in \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega\}}(\omega) \text{ is } \mathcal{F}_{\mu,t} \text{ measurable.}$$

This implies that

$$X_0 = 0 \text{ and } X_t(\omega) = m_\mu(y, x, \omega) - E[m_\mu(y, x, \omega)] \text{ for all } t \geq T. \quad (5.29)$$

To apply Azuma's inequality, we need to bound $|X_t - X_s|$. This is done in the following lemma

Lemma 5.7. *We have the following inequality, for all $t, s > 0$,*

$$\sup_{\omega \in \Omega_1^\varepsilon} |X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq L_\mu + 2 \frac{L_\mu}{l_\mu} |s - t|.$$

Proof. In all the proof, ω is taken in Ω_1^ε (so that $\mu > \bar{A} = \tilde{A}(\omega)$). By (5.29), it suffices to show the result for $s, t \leq T$. For all $0 < t \leq s$, (5.27) yields that

$$E[m_\mu(y, x, \cdot) \mathbf{1}_{\{\omega; y \in \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega\}} | \mathcal{F}_{\mu,s}] = m_\mu(y, x, \cdot) \mathbf{1}_{\{\omega; y \in \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega\}}.$$

This implies that

$$\begin{aligned} X_s - X_t &= E[m_\mu(y, x, \cdot) | \mathcal{F}_{\mu,s}] - E[m_\mu(y, x, \cdot) | \mathcal{F}_{\mu,t}] \\ &= E[m_\mu(y, x, \cdot) \mathbf{1}_{\{\omega; y \in \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega\}} + m_\mu(y, x, \cdot) \mathbf{1}_{\{\omega; y \notin \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega\}} | \mathcal{F}_{\mu,s}] \\ &\quad - E[m_\mu(y, x, \cdot) \mathbf{1}_{\{\omega; y \in \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega\}} + m_\mu(y, x, \cdot) \mathbf{1}_{\{\omega; y \notin \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega\}} | \mathcal{F}_{\mu,t}] \\ &= E[m_\mu(y, x, \cdot) \mathbf{1}_{\{\omega; y \notin \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega\}} | \mathcal{F}_{\mu,s}] - E[m_\mu(y, x, \cdot) \mathbf{1}_{\{\omega; y \notin \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega\}} | \mathcal{F}_{\mu,t}]. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Moreover, by (4.21), we have

$$m_\mu(y, x, \cdot) \mathbf{1}_{\{\omega, y \notin \mathcal{R}_{\mu,t}\}}(\omega) = \left(t + m_\mu(y, \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega, \omega) \right) \mathbf{1}_{\{\omega, y \notin \mathcal{R}_{\mu,t}\}}(\omega) = t \cdot \mathbf{1}_{\{\omega, y \notin \mathcal{R}_{\mu,t}\}}(\omega) + m_\mu(y, \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega, \omega).$$

Injecting this in (5.30), and using that $t \cdot \mathbf{1}_{\{\omega, y \notin \mathcal{R}_{\mu,t}\}} \in \mathcal{F}_{\mu,t}$, we get

$$X_s - X_t = E[m_\mu(y, \mathcal{R}_{\mu,t}, \cdot) | \mathcal{F}_{\mu,s}] - E[m_\mu(y, \mathcal{R}_{\mu,t}, \cdot) | \mathcal{F}_{\mu,t}]. \quad (5.31)$$

Applying inequalities (4.19) and (4.23), we get

$$m_\mu(y, \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega, \omega) - m_\mu(y, \mathcal{R}_{\mu,s}^\omega, \omega) \leq L_\mu \text{dist}_{\mathcal{H}}(\mathcal{R}_{\mu,t}^\omega, \mathcal{R}_{\mu,s}^\omega) \leq \frac{L_\mu}{l_\mu} (s - t).$$

This implies that

$$X_s - X_t \leq \frac{L_\mu}{l_\mu} (s - t) + |E[m_\mu(y, \mathcal{R}_{\mu,s}, \cdot) | \mathcal{F}_{\mu,s}] - E[m_\mu(y, \mathcal{R}_{\mu,t}, \cdot) | \mathcal{F}_{\mu,t}]|.$$

We now want to use the discretisation scheme to estimate $E[m_\mu(y, \mathcal{R}_{\mu,t}, \cdot) | \mathcal{F}_{\mu,t}]$ by approximating the integral represented by the expectation as a sum of characteristic functions. Inequality (4.19) yields that

$$0 \leq m_\mu(y, \mathcal{R}_{\mu,t}, \cdot) - m_\mu(y, \tilde{K}_m, \cdot) \leq L_\mu \text{dist}_{\mathcal{H}}(\mathcal{R}_{\mu,t}^\omega, \tilde{K}_m). \quad (5.32)$$

Using that

$$\begin{aligned} \text{dist}_{\mathcal{H}}(\mathcal{R}_{\mu,t}^\omega, \tilde{K}_m) \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega \in \Gamma_m\}}(\omega) &\leq \text{dist}_{\mathcal{H}}(\mathcal{R}_{\mu,t}^\omega, \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega + B_{1+\delta}) \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega \in \Gamma_m\}}(\omega) \\ &\leq (1 + \delta) \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega \in \Gamma_m\}}(\omega), \end{aligned}$$

we deduce that

$$\begin{aligned} m_\mu(y, \tilde{K}_m, \cdot) \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega \in \Gamma_m\}}(\omega) &\leq m_\mu(y, \mathcal{R}_{\mu,t}, \cdot) \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega \in \Gamma_m\}}(\omega) \\ &\leq \left(L_\mu (1 + \delta) + m_\mu(y, \tilde{K}_m, \cdot) \right) \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega \in \Gamma_m\}}(\omega). \end{aligned}$$

We now want to apply the conditional expectation. We recall that the result of [7, Lemma 4.2], imply that for each $1 \leq m \leq l, t > 0$, and $A \in \mathcal{F}_{\mu,t}$, we have that

$$\mathbf{1}_{A \cap \{\omega; \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega \in \Gamma_m\}} \quad \text{is } \mathbf{F}(K_m)\text{-measurable}$$

and

$$E[m_\mu(y, \tilde{K}_m, \cdot) \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega \in \Gamma_m\}} | \mathcal{F}_{\mu,t}] = E[m_\mu(y, \tilde{K}_m, \cdot)] \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega \in \Gamma_m\}}.$$

We then have

$$\begin{aligned}
 & E \left[m_\mu(y, \tilde{K}_m, \cdot) \right] \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,t} \in \Gamma_m\}} \\
 &= E \left[m_\mu(y, \tilde{K}_m, \cdot) \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,t} \in \Gamma_m\}} \middle| \mathcal{F}_{\mu,t} \right] \\
 &\leq E \left[m_\mu(y, \mathcal{R}_{\mu,t}, \cdot) \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,t} \in \Gamma_m\}} \middle| \mathcal{F}_{\mu,t} \right] \\
 &\leq \left(L_\mu(1 + \delta) + E \left[m_\mu(y, \tilde{K}_m, \cdot) \right] \right) \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,t} \in \Gamma_m\}}.
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

The set $\{\Gamma_m\}$ is a partition of \mathcal{K}_r and $\mathcal{R}_{\mu,T}^\omega \in \mathcal{K}_r$ so for every $1 \leq t \leq s \leq T$ we have $\mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega \in \mathcal{K}_r\}} = \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,s}^\omega \in \mathcal{K}_r\}} = 1$ and so

$$\begin{aligned}
 E \left[m_\mu(y, \mathcal{R}_{\mu,t}, \cdot) \middle| \mathcal{F}_{\mu,t} \right] &= E \left[m_\mu(y, \mathcal{R}_{\mu,t}, \cdot) \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,t} \in \mathcal{K}_r\}} \middle| \mathcal{F}_{\mu,t} \right] \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,s} \in \mathcal{K}_r\}} \\
 &= \sum_{m,j=1}^l E \left[m_\mu(y, \mathcal{R}_{\mu,t}, \cdot) \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,t} \in \Gamma_m\}} \middle| \mathcal{F}_{\mu,t} \right] \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,s} \in \Gamma_j\}}.
 \end{aligned}$$

Multiplying inequality (5.33) by $\mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,s} \in \Gamma_j\}}$ and applying the summation on m, j we obtain

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m,j=1}^l E \left[m_\mu(y, \tilde{K}_m, \cdot) \right] \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,t} \in \Gamma_m\}} \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,s} \in \Gamma_j\}} \\
 &\leq \sum_{m,j=1}^l E \left[m_\mu(y, \mathcal{R}_{\mu,t}, \cdot) \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,t} \in \Gamma_m\}} \middle| \mathcal{F}_{\mu,t} \right] \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,s} \in \Gamma_j\}} = E \left[m_\mu(y, \mathcal{R}_{\mu,t}, \cdot) \middle| \mathcal{F}_{\mu,t} \right] \\
 &\leq L_\mu(1 + \delta) + \sum_{m,j=1}^l E \left[m_\mu(y, \tilde{K}_m, \cdot) \right] \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,t} \in \Gamma_m\}} \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,s} \in \Gamma_j\}}.
 \end{aligned}$$

Finally we conclude that

$$0 \leq E \left[m_\mu(y, \mathcal{R}_{\mu,t}, \cdot) \middle| \mathcal{F}_{\mu,t} \right] - \sum_{m,j=1}^l E \left[m_\mu(y, \tilde{K}_m, \omega) \right] \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,t} \in \Gamma_m\}} \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,s} \in \Gamma_j\}} \leq L_\mu(1 + \delta).$$

We repeat the same proof by interchanging the role of t and s to obtain

$$0 \leq E \left(m_\mu(y, \mathcal{R}_{\mu,s}, \cdot) \middle| \mathcal{F}_{\mu,s} \right) - \sum_{m,j=1}^l E \left(m_\mu(y, \tilde{K}_j, \omega) \right) \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,t} \in \Gamma_m\}} \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,s} \in \Gamma_j\}} \leq L_\mu(1 + \delta).$$

The last two inequalities yield that

$$\begin{aligned}
 & |E \left[m_\mu(y, \mathcal{R}_{\mu,s}, \cdot) \middle| \mathcal{F}_{\mu,s} \right] - E \left[m_\mu(y, \mathcal{R}_{\mu,t}, \cdot) \middle| \mathcal{F}_{\mu,t} \right]| \\
 &\leq L_\mu(1 + \delta) + \sum_{m,j=1}^l \left| E \left[m_\mu(y, \tilde{K}_m, \cdot) \right] - E \left[m_\mu(y, \tilde{K}_j, \cdot) \right] \right| \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,t} \in \Gamma_m\}} \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,s} \in \Gamma_j\}}
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

If for some $m, j = 1, \dots, l$, there exists ω such that $\mathcal{R}_{\mu,t}^\omega \in \Gamma_m$ and $\mathcal{R}_{\mu,s}^\omega \in \Gamma_j$ then

$$\mathcal{R}_{\mu,t}^\omega \subseteq K_m \subseteq \tilde{K}_m \subseteq \mathcal{R}_{\mu,t}^\omega + B_{1+\delta}$$

and

$$\mathcal{R}_{\mu,s}^\omega \subset K_j \subseteq \tilde{K}_j \subseteq \mathcal{R}_{\mu,s}^\omega + B_{1+\delta},$$

which implies

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}(\tilde{K}_m, \tilde{K}_j) \leq \text{dist}_{\mathcal{H}}(K_m, K_j) \leq \text{dist}_{\mathcal{H}}(\mathcal{R}_{\mu,t}^\omega, \mathcal{R}_{\mu,s}^\omega) + 2\delta \leq \frac{1}{l_\mu}(s-t) + 2\delta.$$

We then get that for all $m, j = 1, \dots, l$

$$\begin{aligned} & \left| E \left[m_\mu(y, \tilde{K}_m, \cdot) \right] - E \left[m_\mu(y, \tilde{K}_j, \cdot) \right] \right| \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,t} \in \Gamma_m\}} \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,s} \in \Gamma_j\}} \\ & \leq L_\mu \text{dist}_{\mathcal{H}}(\tilde{K}_m, \tilde{K}_j) \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,t} \in \Gamma_m\}} \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,s} \in \Gamma_j\}} \\ & \leq \left(\frac{L_\mu}{l_\mu}(s-t) + 2L_\mu\delta \right) \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,t} \in \Gamma_m\}} \mathbf{1}_{\{\omega; \mathcal{R}_{\mu,s} \in \Gamma_j\}}. \end{aligned}$$

Injecting this in (5.34), we conclude that, for every $\delta > 0$

$$\begin{aligned} & \left| E \left[m_\mu(y, \mathcal{R}_{\mu,s}, \cdot) \middle| \mathcal{F}_{\mu,s} \right] - E \left[m_\mu(y, \mathcal{R}_{\mu,t}, \cdot) \middle| \mathcal{F}_{\mu,t} \right] \right| \\ & \leq L_\mu(1+\delta) + \left(\frac{L_\mu}{l_\mu}(s-t) + 2L_\mu\delta \right). \end{aligned}$$

Using (5.31) and sending $\delta \rightarrow 0$, we finally get

$$|X_s - X_t| \leq L_\mu + 2 \frac{L_\mu}{l_\mu}(s-t). \quad (5.35)$$

□

The idea is now to apply Azuma's inequality. For this reason we define the following martingale

$$\tilde{X}_k = X_{hk} \text{ with } h = \frac{l_\mu}{2}.$$

Lemma 5.7 implies that

$$|\tilde{X}_{k+1} - \tilde{X}_k| \leq 2L_\mu.$$

Applying Azuma's inequality, Proposition 5.6, we obtain, for all $\lambda > 0$ and $N \in \mathbb{N}$,

$$P(\{\omega \in \Omega_1^\varepsilon, |\tilde{X}_N(\omega)| > \lambda\}) \leq \exp\left(\frac{-\lambda^2}{8L_\mu^2 N}\right).$$

Let $N \in \mathbb{N}$ such that $\frac{T}{h} \leq N < \frac{T}{h} + 1$. We have

$$\tilde{X}_N = X_T = m_\mu(y, x, \cdot) - E[m_\mu(y, x, \cdot)].$$

It follows that (recall that $T = L_\mu|y - x|$ and $|y - x| > 1$)

$$N \leq \frac{T}{h} + 1 \leq \frac{l_\mu + 2L_\mu}{l_\mu}|y - x|.$$

We then deduce that

$$\begin{aligned} P(\{\omega \in \Omega_1^\varepsilon, |m_\mu(y, x, \omega) - E[m_\mu(y, x, \omega)]| > \lambda\}) &\leq \exp\left(\frac{-\lambda^2 l_\mu}{8L_\mu^2(2L_\mu + l_\mu)|y - x|}\right) \\ &\leq \exp\left(\frac{-\lambda^2 c'(\mu - \bar{A})}{8L_\mu^2(2L_\mu + l_\mu)|y - x|}\right). \end{aligned}$$

This completes the proof of Theorem 5.3. \square

5.3 Proof of Theorems 5.1 and 5.2

Proof of Theorem 5.1. For all $\mu > \bar{A}$, $\bar{\lambda} = t\lambda > 0$ and $\bar{y} = ty$, $\bar{x} = tx$ such that $|y - x| \geq \frac{1}{t}$, Theorem (5.3) yields that

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega_1^\varepsilon, \frac{1}{t} |m_\mu(ty, tx, \omega) - E[m_\mu(ty, tx, \omega)]| > \lambda\right\}\right) \leq \exp\left(-\frac{t\lambda^2(\mu - \bar{A})}{C|y - x|}\right).$$

Then, using the following proposition

Proposition 5.8. [87, Proposition 8.4] *Let Y and $(Y_n)_{n \geq 1}$ real random variables defined on (Ω, \mathbf{F}, P) and verify for all $\varepsilon > 0$,*

$$\sum_{n \geq 1} P(|Y_n - Y| \geq \varepsilon) < +\infty.$$

Then $Y_n \rightarrow Y$ a.s.

We deduce, for all $x, y \in \mathbb{R}$, that there exists $\Omega_0^\varepsilon \subset \Omega_1^\varepsilon$ with $P(\Omega_0^\varepsilon) = P(\Omega_1^\varepsilon) = 1 - \theta(\varepsilon)$ such that

$$\frac{1}{t} |m_\mu(ty, tx, \omega) - E[m_\mu(ty, tx, \omega)]| \rightarrow 0 \text{ for all } \omega \in \Omega_0^\varepsilon. \quad (5.36)$$

This means that the random process $\frac{1}{t}m_\mu(ty, tx, \omega)$ is very close to his average for large t . So to conclude the proof, it suffices to prove that this average converges to a deterministic quantity which we denoted by \bar{m}_μ . We know that the solution of the metric problem is sub-additive and then his average too. Moreover by (4.18), $m_\mu(y, x, \cdot) \geq 0$ and so $E(m_\mu(y, x, \cdot)) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

We now use the following lemma.

Lemma 5.9 (Fekete's Lemma). [51, Lemma 1.4] *Let $(u_n)_{n \geq 1}$ be a sub-additive sequence. Then the limit, when n goes to $+\infty$, of the sequence $(u_n/n)_{n \geq 1}$ exists and we have*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \inf_{n \geq 1} \frac{u_n}{n} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

This implies that the limit of $\frac{E(m_\mu(ty, tx, \omega))}{t}$ exists and we denoted it by $\bar{m}_\mu(y, x)$. Injecting this in (5.36), we get, for all $\mu > \bar{A}$ and $x, y \in \mathbb{R}$, that

$$\frac{m_\mu(ty, tx, \omega)}{t} \rightarrow \bar{m}_\mu(y, x) \text{ almost surely.}$$

This ends the proof of Theorem 5.1 □

Remark 5.10. *We have that the pointwise convergence combined with equicontinuity does imply convergence in this stronger sense.*

Proposition 5.11. *If X is a compact metric space, then any equicontinuous sequence of functions in $C(X)$ that is pointwise convergent is in fact uniformly convergent.*

Since for all y, z we have that

$$\frac{1}{t} |m_\mu(ty, \omega) - m_\mu(tz, \omega)| \leq C|y - z|.$$

Then the sequence $\left(\frac{m_\mu(ty, \omega)}{t}\right)_t$ is equicontinuous since C is independent of t . We conclude that the almost sure convergence yields a locally uniformly convergence.

In order to prove Theorem 5.2, we need to determine the equation satisfied by \bar{m} , when $x \geq 0, y > 0$ (resp. $x \leq 0, y < 0$).

Proposition 5.12. *For all $\mu > \bar{A}$, and $x \geq 0$ we have that $\bar{m}_\mu(\cdot, x) \in \mathbf{Lip}$ is a solution of*

$$\begin{cases} \bar{H}_R(D\bar{m}_\mu(y, x)) = \mu & \text{for } y \neq x, y > 0, \\ \bar{m}_\mu(x, x) = 0. \end{cases} \quad (5.37)$$

Proof. We prove that $\bar{m}_\mu(\cdot, x)$ is a sub-solution for (5.37). The proof of super-solution is similar so we skip it. Let ϕ be a test function such that $\bar{m}_\mu(\cdot, x) - \phi(\cdot)$ attains a strict maximum point at $\bar{y} \neq x$, i.e

$$(\bar{m}_\mu(\cdot, x) - \phi(\cdot))(y) < (\bar{m}_\mu(\cdot, x) - \phi(\cdot))(\bar{y}) = 0 \text{ for } y \in B_{\bar{r}}(\bar{y}) \setminus \{\bar{y}\}$$

for \bar{r} small enough such that $B_{\bar{r}}(\bar{y}) \subset]0, +\infty[\setminus \{x\}$. Since the maximum is strict, we assume that

$$(\bar{m}_\mu(\cdot, x) - \phi(\cdot))(y) \leq -k_r \text{ for all } y \in \partial B_{\bar{r}}(\bar{y}) \quad (5.38)$$

for some $k_r > 0$ small enough. We argue by contradiction, by assuming that

$$\bar{H}_R(\phi'(\bar{y})) - \mu = \theta > 0. \quad (5.39)$$

Let $p = \phi'(\bar{y})$ and $m_{\mu+\theta}^R(\cdot, x, \omega)$ be a solution of the metric problem, far away from the junction point (3.7), with $H_\alpha = H_R$ and $\{0\}$ replaced by $\{x\}$. We also know that $v^R(y, x, \omega) = m_{\mu+\theta}^R(y, x, \omega) - p(y - x)$ is a solution of (3.6). In particular it's a solution on $]0, +\infty[\setminus \{x\}$. We claim that, if $\eta > 0$ is small enough, then the perturbed test function

$$\phi_\eta(y, x) = \phi(y) + \eta v^R\left(\frac{y}{\eta}, \frac{x}{\eta}, \omega\right)$$

is a super-solution of

$$H\left(\phi'_\eta(y, x), \frac{y}{\eta}, \omega\right) - \mu \geq \frac{\theta}{2} \text{ in } B_{\bar{r}}(\bar{y}),$$

for $\bar{r} > 0$ small enough. To see this, let ψ be a test function touching ϕ_η from below at $y_1 \in B_{\bar{r}}(\bar{y})$. We have that $\psi(y_1) = \phi_\eta(y_1)$. So we obtain that the function

$$\zeta(y) = \frac{1}{\eta}(\psi(\eta y) - \phi(\eta y))$$

touches v^R from below at y_1 . Then we obtain that

$$H_R\left(\psi'(y_1) - \phi'(y_1) + p, \frac{y_1}{\eta}, \omega\right) \geq \bar{H}_R(p).$$

We deduce, using (5.39), the continuity of ϕ' and the fact that H_R is Lipschitz continuous, that for η and \bar{r} small enough (in particular such that $\frac{y_1}{\eta} > \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}$)

$$\begin{aligned} H\left(\psi'(y_1), \frac{y_1}{\eta}, \omega\right) - \mu &= H_R\left(\psi'(y_1), \frac{y_1}{\eta}, \omega\right) - \mu \\ &\geq H_R\left(\psi'(y_1), \frac{y_1}{\eta}, \omega\right) + \theta - H_R\left(\phi'(\bar{y}) + \psi'(y_1) - \phi'(y_1), \frac{y_1}{\eta}, \omega\right) \\ &\geq \theta/2. \end{aligned}$$

So the claim is proved. Using (5.38), we deduce, for η small enough, that

$$\eta m_\mu\left(\frac{y}{\eta}, \frac{x}{\eta}, \omega\right) + \frac{k_r}{2} \leq \phi_\eta \text{ for } y \in \partial B_{\bar{r}}(\bar{y}).$$

So by comparison principle we deduce that

$$\eta m_\mu\left(\frac{y}{\eta}, \frac{x}{\eta}, \omega\right) + \frac{k_r}{2} \leq \phi_\eta \text{ for } y \in B_r(\bar{y}).$$

Now passing to limit $\eta \rightarrow 0$ and taking $y = \bar{y}$ we obtain that

$$\bar{m}_\mu(\bar{y}, x) < \bar{m}_\mu(\bar{y}, x) + \frac{k_r}{2} \leq \phi(\bar{y}) = \bar{m}_\mu(\bar{y}, x).$$

This is a contradiction with the definition of $k_r > 0$. This ends the proof. \square

In the same way, we have the following proposition for $x \leq 0, y < 0$

Proposition 5.13. *For $x \leq 0$, and for all $\mu > \bar{A}$, we have that $\bar{m}_\mu(\cdot, x) \in \mathbf{Lip}$ is a solution of*

$$\begin{cases} \bar{H}_L(D\bar{m}_\mu(y, x)) = \mu & \text{for } y \neq x, y < 0 \\ \bar{m}_\mu(x, x) = 0 & \text{for } y = x. \end{cases} \quad (5.40)$$

We are now able to give the proof of Theorem 5.2

Proof of Theorem 5.2. We only prove the case $x, y \geq 0$, the other one being similar. To prove the result, it is enough to prove that

$$\bar{m}_\mu(y, x) = \sup \left\{ p(y - x); \bar{H}_R(p) \leq \mu \right\}. \quad (5.41)$$

Inequality (4.18) yields that

$$0 < l_\mu \leq \frac{\bar{m}_\mu(y, x)}{|y - x|} \leq L_\mu,$$

then $\liminf_{y \rightarrow +\infty} \frac{\bar{m}_\mu(y, x)}{|y - x|} > 0$ and so the comparison principle (Proposition 4.3 reformulated with $\{0\}$ replaced by $\{x\}$) holds. Since the right hand side of (5.41) is a sub-solution of (5.37) then Proposition 4.3 yields that

$$\bar{m}_\mu(y, x) \geq \sup \left\{ p(y - x); \bar{H}_R(p) \leq \mu \right\}.$$

If the reverse inequality doesn't hold, and since $\bar{m}_\mu(\cdot, x)$ is a Lipschitz continuous function, we can find $y > 0$; $y \neq x$ such that $\bar{m}_\mu(\cdot, x)$ is differentiable at y and

$$\bar{m}_\mu(y, x) > \sup \left\{ p(y - x); \bar{H}_R(p) \leq \mu \right\}.$$

We also have, immediately from the form of the limit of $\frac{m_\mu(ty, tx)}{t}$, that \bar{m}_μ must be positively homogeneous. The sub-additive property of m_μ easily translates into subadditivity property for \bar{m}_μ and therefore \bar{m}_μ is convex. The function $\bar{m}_\mu(\cdot, x)$ is differentiable at y then $D\bar{m}_\mu(y, x)$ is in the sub- and the super differential of a convex function, then

$$\bar{m}_\mu(y, x) = D\bar{m}_\mu(y, x)(y - x).$$

This follows that

$$\bar{H}_R(D\bar{m}_\mu(y, x)) > \mu.$$

This contradicts the fact that $\bar{m}_\mu(\cdot, x)$ is a solution of (5.37). This ends the proof. \square

Combining Theorem 5.1, Theorem 5.2, Proposition 5.12 and Proposition 5.13 for $x \leq 0$ and $x \geq 0$, we get the following result for $x = 0$.

Proposition 5.14. *For all $\mu > \bar{A}$, we have that*

$$\frac{m_\mu(ty, 0, \omega)}{t} \rightarrow \bar{m}_\mu(y, 0) = \bar{m}_\mu(y) \text{ for all } \omega \in \Omega_0^\varepsilon.$$

The function $\bar{m}_\mu(\cdot)$ is a solution of

$$\begin{cases} \bar{H}_R(D\bar{m}_\mu(y, 0)) = \mu & y > 0, \\ \bar{H}_L(D\bar{m}_\mu(y, 0)) = \mu & y < 0, \\ \bar{m}_\mu(0, 0) = 0, \end{cases} \quad (5.42)$$

and is given by

$$\bar{m}_\mu(y) = \begin{cases} \bar{p}_\mu^{R,+} \cdot y & y > 0; \\ \bar{p}_\mu^{L,-} \cdot y & y < 0. \end{cases}$$

5.4 Some properties of $m_\mu(x, y)$

In this subsection we give some properties of the function $m_\mu(x, y)$. To do this, we consider the hamiltonian $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ given by

$$G(p, y, \omega) = H(-p, y, \omega).$$

The function G verifies assumptions **(H)**, and the definition of \bar{A} is the same.

Proceeding in the same way, we can prove that there exists, for $x \in \mathbb{R}$, and for all $\mu \geq \bar{A}$ a solution $n_\mu(\cdot, x, \omega)$ solution of

$$\begin{cases} G(Dn_\mu(y, x, \omega), y, \omega) = \mu, & \text{for } y \neq x; \\ n_\mu(x, x) = 0. \end{cases} \quad (5.43)$$

Moreover, n_μ is given by

$$n_\mu(y, x) = \sup\{v(y, \omega) - v(x, \omega); v \in \mathbf{Lip}; G(Dv, y, \omega) \leq \mu \text{ in } \mathbb{R}\},$$

and so

$$n_\mu(y, x) = m_\mu(x, y).$$

We also have that, for $x \geq 0$, $y > 0$ (resp. $x \leq 0$, $y < 0$) that

$$\begin{aligned} \frac{n_\mu(ty, tx)}{t} &\rightarrow \bar{n}_\mu^R(y - x) = \bar{m}_\mu^R(x - y), \\ \left(\text{resp. } \frac{n_\mu(ty, tx)}{t} &\rightarrow \bar{n}_\mu^L(y - x) = \bar{m}_\mu^L(x - y) \right). \end{aligned}$$

In particular,

$$\bar{n}_\mu^R(y - x) = \bar{m}_\mu^R(x - y) = \begin{cases} -\bar{p}_\mu^{R,-}(y - x) & \text{for } y > x; \\ -\bar{p}_\mu^{R,+}(y - x) & \text{for } y < x. \end{cases}$$

6 Main results for the approximated corrector at the junction point

For stochastic homogenization, it is well known that correctors don't exist in general and one have to introduce approximated correctors. At the junction, using the particular form of the test function (see [56, Theorem 2.7]) and the ansatz

$$u^\varepsilon(t, x) = u(t, 0) + \varepsilon v^\delta(\varepsilon^{-1}y, \omega)$$

the approximated corrector v^δ has to satisfy

$$\delta v^\delta(y, \omega) + H(Dv^\delta, y, \omega) = 0 \quad y \in \mathbb{R}, \quad (6.44)$$

$\delta v^\delta(y, \omega)$ converges to $-\bar{A}$ in balls of radius $1/\delta$

and

$$\delta v^\delta\left(\frac{y}{\delta}, \omega\right) \rightarrow W(y)$$

where $W(0) = 0$ and

$$\bar{p}_R^+ y \mathbf{1}_{\{y>0\}} + \bar{p}_L^- y \mathbf{1}_{\{y<0\}} \leq W(y) \leq \hat{p}_R^+ y \mathbf{1}_{\{y>0\}} + \hat{p}_L^- y \mathbf{1}_{\{y<0\}} \quad (6.45)$$

with

$$\begin{cases} \bar{p}_L^- = \sup\{p, \bar{H}_L(p) = \bar{A}\} \\ \hat{p}_L^- = \inf\{p, \bar{H}_L(p) = \bar{A}\} \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \bar{p}_R^+ = \inf\{p, \bar{H}_R(p) = \bar{A}\} \\ \hat{p}_R^+ = \sup\{p, \bar{H}_R(p) = \bar{A}\}. \end{cases} \quad (6.46)$$

Note in particular that if $\bar{A} > \mu_R^*$, then, by convexity of \bar{H}_R , $\bar{p}_R^+ = \hat{p}_R^+ = \bar{p}_A^{R,+}$ and the same result holds for \bar{p}_L^- and \hat{p}_L^- . These results are made precise in the following theorem.

Theorem 6.1 (Approximated correctors). *Assume $(\mathbf{H}-\varepsilon)$ (resp. $(\mathbf{H}-\mathbf{WFL})$) and let $\varepsilon_0 > 0$ small enough. Then for all $0 < \delta \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $r > 0$, there exists a solution v^δ of (6.44) such that, for all $\omega \in \Omega_0^{\varepsilon_0}$ (resp $\omega \in \Omega_0$), $\delta v^\delta(y, \omega)$ converges locally uniformly in $y \in B_{r/\delta}$ to $-\bar{A}$, i.e, we have that*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} |\delta v^\delta(y, \omega) + \bar{A}| = 0 \quad \text{and for all } y \in B_{r/\delta}.$$

In addition, if we define \bar{v}^δ by $\bar{v}^\delta(y, \omega) = \delta v^\delta(\delta^{-1}y, \omega)$, then \bar{v}^δ converges locally uniformly, as $\delta \rightarrow 0$, to a function W which satisfies (6.45).

In the rest of this section, we will only treat the case of assumption $(\mathbf{H}-\varepsilon)$, the case of assumption $(\mathbf{H}-\mathbf{WFL})$ being similar and even simpler.

6.1 Existence of approximated correctors at the junction point

This sub-section is devoted to the existence of approximated correctors at the junction point. We will also prove that δv^δ converges to $-\bar{A}$ in balls of radius $1/\delta$. We begin by the existence result.

Proposition 6.2 (Existence of approximates correctors). *Assume $(\mathbf{H}-\varepsilon)$ and let $\varepsilon_0 > 0$. Then, for every $\omega \in \Omega_0^{\varepsilon_0}$ and $0 < \delta \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, the problem (6.44) has a unique bounded solution v^δ which satisfies*

$$|\delta v^\delta| \leq E \quad \text{in } \mathbb{R},$$

where $E \geq \sup_{y \in \mathbb{R}} |H(0, y, \omega)|$ (E is finite and independent of ω by assumption $(\mathbf{H}2)$).

Moreover, v^δ is Lipschitz continuous in \mathbb{R} uniformly in δ .

Proof. The solution is constructed by Perron's method. Indeed, $\pm E/\delta$ are super- and sub-solution of (6.44). Then by Perron's method, there exists a solution v^δ of (6.44) such that

$$|\delta v^\delta| \leq E \text{ in } \mathbb{R}.$$

In addition, by coercivity of H , we have that v^δ is Lipschitz continuous in \mathbb{R} uniformly in δ . □

To prove the convergence of δv^δ in balls of radius $1/\delta$, we first demonstrate that this convergence holds at zero. This result is given in the next proposition and the idea is to compare v^δ and $m_{\bar{A}+\alpha}$, for $\alpha > 0$ small enough.

Proposition 6.3. *For all $\omega \in \Omega_0^{\varepsilon_0}$, we have that*

$$\delta v^\delta(0, \omega) \rightarrow -\bar{A}.$$

In order to prove Proposition 6.3, we need the following result.

Proposition 6.4 ([56, Proposition 2.15]). *Let $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(p, y) \rightarrow H(p, y)$, be a Lipschitz continuous, quasi-convex and coercive function with respect to p and let $a, b \in \mathbb{R}$. Let $u : (0, T) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. If u satisfies*

$$u_t(t, y) + H(Du, y) = 0 \text{ for } (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R},$$

then u satisfies

$$\begin{cases} u_t + H(Du, y) = 0 & \text{for } (t, x) \in (0, T) \times (a, b), \\ u_t + H^-(Du, y) = 0 & \text{for } (t, x) \in (0, T) \times \{a\}, \\ u_t + H^+(Du, y) = 0 & \text{for } (t, x) \in (0, T) \times \{b\}, \end{cases}$$

and

$$u(t, c) = \limsup_{(s, y) \rightarrow (t, c), y \in (a, b)} u(s, y) \text{ for } c = a, b.$$

Proof of Proposition 6.3. To prove the convergence of $\delta v^\delta(0, \omega)$ to $-\bar{A}$, we prove, for α small enough, that

$$|\bar{A} + \delta v^\delta(0, \omega)| \leq C\alpha.$$

First, by Proposition 6.2, we have

$$-\bar{A} \leq \delta v^\delta(y, \omega).$$

Now we want to prove the reverse inequality. The idea of the proof is to compare $m_\mu(x, \cdot, \omega)$, for μ closed to \bar{A} , and v^δ . We set $\mu = \bar{A} + \alpha$, with $\alpha \leq \frac{1}{16}$ and $y_0 = 2r$, with $r > 0$ to be defined later. We then define the following function

$$\psi(x) = v^\delta(x, \omega) + m_\mu(-y_0, x, \omega) + \alpha x.$$

This function have a maximum in $[-r, 0]$ denoted by M and reached in \bar{x} . We now want to show that $\bar{x} \in [-\frac{r}{4}, 0]$. Since

$$\psi(\bar{x}) \geq \psi(0),$$

we have

$$-\alpha\bar{x} \leq v^\delta(\bar{x}, \omega) - v^\delta(0, \omega) + m_\mu(-y_0, \bar{x}, \omega) - m_\mu(-y_0, 0, \omega). \quad (6.47)$$

Now using the homogenization result of $m_\mu(-y_0, z, \omega)$ (Theorem 5.1), we have

$$\sup_{y \in [-r, 0]} \frac{1}{r} \left| m_\mu(-2r, y, \omega) + \bar{p}_\mu^{L,-} \cdot (y_0 + y) \right| = \sup_{z \in [-1, 0]} \left| \frac{m_\mu(-2r, z, r, \omega)}{r} + \bar{p}_\mu^{L,-} \cdot (2 + z) \right| \rightarrow 0,$$

as $r \rightarrow +\infty$. Then there exists C such that for all $r \geq C$, we have

$$\sup_{y \in [-r, 0]} \frac{1}{r} \left| m_\mu(-y_0, y, \omega) + \bar{p}_\mu^{L,-} \cdot (y + y_0) \right| \leq \alpha^2.$$

The constant $C > 1$ can be choose large enough, so we suppose that $C \geq 16E$, with $E = \sup_{y \in \mathbb{R}} |H(0, y, \omega)|$ and we consider $r = \frac{C}{\alpha\delta} \geq C > 1$. We then have

$$\sup_{y \in [-r, 0]} \left| m_\mu(-y_0, y, \omega) + \bar{p}_\mu^{L,-} \cdot (y + y_0) \right| \leq \alpha^2 r \leq \frac{C\alpha}{\delta}.$$

Injecting this in (6.47), we deduce that

$$\begin{aligned} -\alpha\bar{x} &\leq v^\delta(\bar{x}, \omega) - v^\delta(0, \omega) - \bar{p}_\mu^{L,-}(\bar{x} + y_0) + \bar{p}_\mu^{L,+}y_0 + 2\alpha^2r \\ &\leq v^\delta(\bar{x}, \omega) - v^\delta(0, \omega) + 2\alpha^2r \\ &\leq v^\delta(\bar{x}, \omega) - v^\delta(0, \omega) + \frac{2C\alpha}{\delta}. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Using that

$$v^\delta(\bar{x}, \omega) - v^\delta(0, \omega) \leq \frac{2E}{\delta}$$

we finally get

$$-\alpha\bar{x} \leq \frac{C}{4\delta},$$

and so

$$0 \geq \bar{x} \geq -\frac{r}{4}$$

We now duplicate the variables, by defining the following function

$$\Phi_\theta(x, y) = v^\delta(x, \omega) + m_\mu(-y_0, y, \omega) + \alpha x - |x - \bar{x}|^2 - \frac{|x - y|^2}{2\theta}.$$

This function have a maximum denoted by M_θ and reached in $(x_\theta, y_\theta) \in [-r, 0] \times [-r, 0]$. We first claim that $x_\theta \rightarrow \bar{x}$ as $\theta \rightarrow 0$. Indeed, using the maximality of (x_θ, y_θ) , we have

that

$$\begin{aligned}
 \psi(\bar{x}) + |x_\theta - \bar{x}|^2 &= \Phi_\theta(\bar{x}, \bar{x}) + |x_\theta - \bar{x}|^2 \\
 &\leq \Phi_\theta(x_\theta, y_\theta) + |x_\theta - \bar{x}|^2 \\
 &\leq v^\delta(x_\theta, \omega) + m_\mu(-y_0, x_\theta, \omega) + \alpha x_\theta + L_\mu |x_\theta - y_\theta| - \frac{|x_\theta - y_\theta|^2}{2\theta} \\
 &\leq \psi(\bar{x}) + L_\mu^2 \frac{\theta}{2}.
 \end{aligned}$$

This implies that $|x_\theta - \bar{x}|^2 \leq L_\mu^2 \frac{\theta}{2}$ and proves the claim. We now claim that $\frac{|x_\theta - y_\theta|^2}{\theta} \rightarrow 0$ as $\theta \rightarrow 0$. First, by passing to the limit $\theta \rightarrow 0$ in the previous inequality, we get that $\Phi_\theta(x_\theta, y_\theta) \rightarrow M = \psi(\bar{x})$. Moreover, using that

$$M_{2\theta} \geq \Phi_{2\theta}(x_\theta, y_\theta) \geq \Phi_\theta(x_\theta, y_\theta) = M_\theta,$$

we get

$$0 \leq \Phi_{2\theta}(x_\theta, y_\theta) - \Phi_\theta(x_\theta, y_\theta) = \frac{|x_\theta - y_\theta|^2}{4\theta} \leq M_{2\theta} - M_\theta \rightarrow 0.$$

This implies that $\frac{|x_\theta - y_\theta|^2}{\theta} \rightarrow 0$ and $(x_\theta, y_\theta) \rightarrow (\bar{x}, \bar{x})$. In particular, for θ small enough, $(x_\theta, y_\theta) \in]-\frac{\tau}{2}, 0] \times]-\frac{\tau}{2}, 0]$.

We now distinguish three cases

Case 1: $x_\theta, y_\theta < 0$. We can then use the inequalities satisfied by v^δ and $m_\mu(-y_0, \cdot, \omega)$. We have that $v^\delta(\cdot, \omega)$ is a solution of (6.44), and x_θ is a maximum point of $v^\delta(\cdot, \omega) - \phi_1(\cdot)$, where ϕ_1 is defined by

$$\phi_1(x) = -m_\mu(-y_0, y_\theta, \omega) - \alpha x + |x - \bar{x}|^2 + \frac{|x - y_\theta|^2}{2\theta}.$$

Hence

$$H\left(-\alpha + 2(x_\theta - \bar{x}) + \frac{x_\theta - y_\theta}{\theta}, x_\theta, \omega\right) \leq -\delta v^\delta(x_\theta, \omega).$$

We also have that $y \rightarrow n_\mu(y, -y_0, \omega) = m_\mu(-y_0, y, \omega)$ is a super-solution in $] -\frac{\tau}{2}, 0[$ of

$$H(D(-m_\mu(-y_0, y, \omega)), y, \omega) \geq \mu.$$

Since y_θ is a minimum point of $-m_\mu(-y_0, \cdot, \omega) - \phi_2$, with ϕ_2 defined by

$$\phi_2(y) = v^\delta(x_\theta, \omega) + \alpha x_\theta - |x_\theta - \bar{x}|^2 - \frac{|x_\theta - y|^2}{2\theta},$$

we obtain that

$$H\left(\frac{(x_\theta - y_\theta)}{\theta}, y_\theta, \omega\right) \geq \mu.$$

Subtracting the two inequalities we get

$$H\left(-\alpha + 2(x_\theta - \bar{x}) + \frac{(x_\theta - y_\theta)}{\theta}, x_\theta, \omega\right) - H\left(\frac{x_\theta - y_\theta}{\theta}, y_\theta, \omega\right) \leq -\mu - \delta v^\delta(x_\theta, \omega).$$

Adding and subtracting the term $H\left(\frac{(x_\theta - y_\theta)}{\theta}, x_\theta, \omega\right)$ and using the Lipschitz continuity of H with respect to p , we obtain

$$-c\alpha - 2c|x_\theta - \bar{x}| \leq -\mu - \delta v^\delta(x_\theta, \omega) + w\left(|x_\theta - y_\theta|\left(1 + \left|\frac{x_\theta - y_\theta}{\theta}\right|\right)\right),$$

with c the Lipschitz constant of H . Letting $\theta \rightarrow 0$, we get that

$$\mu + \delta v^\delta(\bar{x}, \omega) = \bar{A} + \alpha + \delta v^\delta(\bar{x}, \omega) \leq c\alpha$$

and so

$$\bar{A} + \delta v^\delta(\bar{x}, \omega) \leq C'\alpha.$$

To get this inequality in 0, we use (6.48) to get

$$\bar{A} + \delta v^\delta(0, \omega) \leq \bar{A} + \delta v^\delta(\bar{x}, \omega) + \frac{2C\alpha}{\delta} \leq \left(C' + \frac{2C}{\delta}\right)\alpha.$$

Case 2: $x_\theta = 0, y_\theta < 0$. We have that $v^\delta(\cdot, \omega)$ is a solution of (6.44), then using Proposition 6.4 and arguing in the same way as Case 1, we get

$$H^+\left(-\alpha - \frac{y_\theta}{\theta}, 0, \omega\right) \leq -\delta v^\delta(0, \omega).$$

As in the previous case, we also have

$$H\left(-\frac{y_\theta}{\theta}, y_\theta, \omega\right) \geq \mu.$$

Using that (recall that H^- is non-increasing)

$$H^-\left(-\frac{y_\theta}{\theta}, y_\theta, \omega\right) \leq H^-(0, y_\theta, \omega) \leq \bar{A} < \mu$$

and the fact that $H = \max(H^-, H^+)$, we get

$$H^+\left(-\frac{y_\theta}{\theta}, y_\theta, \omega\right) \geq \mu.$$

Arguing as in Case 1 (with H replaced by H^+), we get the result.

Case 3 $y_\theta = 0$. Using Proposition 6.4 and arguing in the same way as Case 1, we get

$$H^+\left(\frac{x_\theta}{\theta}, 0, \omega\right) \geq \mu.$$

Using that $\frac{x_\theta}{\theta} \leq 0$, we get

$$\mu \leq H^+ \left(\frac{x_\theta}{\theta}, 0, \omega \right) \leq H^+(0, 0, \omega) \leq H(0, 0, \omega) \leq \bar{A},$$

which contradicts the fact that $\mu > \bar{A}$ and so this case couldn't happen. This ends the proof. \square

Corollary 6.5. *Let ε_0 small enough. Then, for all $r > 0$, $0 < \delta \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ and $\omega \in \Omega_0^{\varepsilon_0}$, we have that*

$$\delta v^\delta(y, \omega) \rightarrow -\bar{A} \text{ uniformly in } B_{r/\delta}.$$

Proof. Let $\omega \in \Omega_0^{\varepsilon_0}$. Since δv^δ is uniformly Lipschitz continuous, it's enough to show the convergence pointwise. Moreover, for $y \in \left[\frac{-2}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \right]$, we have

$$|\delta v^\delta(y, \omega) - \bar{A}| \leq |\delta v^\delta(0, \omega) - \bar{A}| + |\delta v^\delta(y, \omega) - \delta v^\delta(0, \omega)| \leq |\delta v^\delta(0, \omega) - \bar{A}| + C\delta \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \rightarrow 0.$$

We now want to prove the convergence for $|y| > \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}$. We prove the convergence for $y > \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}$, the case $y < -\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}$ being similar. Since v^δ is solution of (6.44) and using Proposition 6.4, we get, for all $y \geq \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}$ and $z > 0$ that $v^z(y, \omega) = v^\delta(y + z, \omega)$ is solution of

$$\begin{cases} \delta w^\delta + H_R(Dw^\delta, y + z, \omega) = 0 & \text{in } \left(\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}, +\infty \right), \\ \delta w^\delta + H^-(Dw^\delta, y + z, \omega) = 0 & \text{for } y = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}. \end{cases}$$

In fact, for $y > \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}$ we have that $H = H_R$. Then for $y \geq \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}$ and $z > 0$, we have

$$\begin{aligned} \delta v^z(y, \omega) &= \delta v^\delta(y + z, \omega) = -H(Dv^\delta(y + z, \omega), y + z, \omega) \\ &= -H(Dv^z(y, \omega), y + z, \omega) \\ &= -H_R(Dv^z(y, \omega), y + z, \omega). \end{aligned}$$

Moreover, we have that $v^\delta(y, \tau_z \omega)$, for $y > \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}$, is solution of

$$\delta v^\delta(y, \tau_z \omega) + H_R(Dv^\delta(y, \tau_z \omega), y, \tau_z \omega) = 0.$$

Then, since H_R is stationary, and $z > 0$, we have that

$$\delta v^\delta(y, \tau_z \omega) + H_R(Dv^\delta(y, \tau_z \omega), y + z, \omega) = 0.$$

We deduce, by Proposition 6.4, that $v^\delta(y, \tau_z \omega)$ satisfies the same equation of $v^z(y, \omega)$. Hence, the comparison principle implies that

$$v^\delta(y + z, \omega) = v^\delta(y, \tau_z \omega) \quad \text{for } y \geq \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \text{ and } z > 0.$$

We now fix $\bar{\rho}_0 = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}$. For all $\omega \in \Omega_0^{\varepsilon_0}$, we have $\delta v^\delta(\bar{\rho}_0, \omega) \rightarrow -\bar{A}$. Let $y \in (\bar{\rho}_0, r/\delta]$. If $\tau_{y-\bar{\rho}_0}\omega \in \Omega_0^{\varepsilon_0}$, then by stationarity we have

$$\delta v^\delta(y, \omega) = \delta v^\delta(\bar{\rho}_0 + y - \bar{\rho}_0, \omega) = \delta v^\delta(\bar{\rho}_0, \tau_{y-\bar{\rho}_0}\omega) \rightarrow -\bar{A}.$$

On the contrary, if $\tau_{y-\bar{\rho}_0}\omega \notin \Omega_0^{\varepsilon_0}$, taking δ small enough, there exists $z \geq \bar{\rho}_0$ such that $|y - z| \leq \lambda \frac{r}{\delta}$, with $\lambda > 0$, such that $\tau_{z-\bar{\rho}_0}\omega \in \Omega_0^{\varepsilon_0}$. We then have

$$\delta v^\delta(y, \omega) = \delta v^\delta(y, \omega) - \delta v^\delta(z, \omega) + \delta v^\delta(\bar{\rho}_0, \tau_{z-\bar{\rho}_0}\omega).$$

Passing to the limit $\delta \rightarrow 0$, we get

$$|\delta v^\delta(y, \omega) - \bar{A}| \leq |\delta v^\delta(y, \omega) - \delta v^\delta(z, \omega)| + |\delta v^\delta(\bar{\rho}_0, \tau_{z-\bar{\rho}_0}\omega) - \bar{A}| \leq C\lambda r.$$

Taking $\lambda \rightarrow 0$, we get the result. □

6.2 Control of slopes

In this subsection, we prove that the rescaled approximated corrector verifies the good slopes at infinity (6.45).

Proposition 6.6 (Control of slopes). *Assume $(\mathbf{H}-\varepsilon)$ and $\bar{A} > \mu_R^*$ and let $\varepsilon_0 > 0$ and $r > 0$. Then there exists $\delta_0 > 0$, $\gamma_0 > 0$ such that there exists $C > 0$ such that for all $\delta \leq \delta_0$, $\delta \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\gamma \leq \gamma_0$, $y > \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}$, $h \geq 0$ with $y, y+h \in B_{1/\delta}$ and $\omega \in \Omega_0^{\varepsilon_0}$, we have that*

$$v^\delta(y+h, \omega) - v^\delta(y, \omega) \geq (\bar{p}_A^{R,+} - \gamma)h - C. \quad (6.49)$$

On the other side, if we assume that $\bar{A} > \mu_L^$, then there exists $\delta_0 > 0$, $\gamma_0 > 0$ such that there exists $C > 0$ such that for all $\delta \leq \delta_0$, $\delta \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\gamma \leq \gamma_0$, $y \leq \frac{-2}{\sqrt{\varepsilon}}$, $h \geq 0$ with $y, y-h \in B_{1/\delta}$ and $\omega \in \Omega_0^{\varepsilon_0}$, we have that*

$$v^\delta(y-h, \omega) - v^\delta(y, \omega) \geq (-\bar{p}_A^{L,-} - \gamma)h - C. \quad (6.50)$$

Before giving the proof of this proposition we need a comparison principle on bounded intervall. The proof of this comparison principle is given in [45, Proposition 4.1]

Proposition 6.7 (Comparison principle on bounded domain). *Assume $(\mathbf{H}-\varepsilon)$ and let $\rho_2 > \rho_1 > \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}$ (resp. $\rho_2 < \rho_1 < \frac{-2}{\sqrt{\varepsilon}}$) and $\lambda \in \mathbb{R}$. Let v be a super-solution of the following problem*

$$\begin{cases} H(Dv, y, \omega) \geq \lambda & y \in (\rho_1, \rho_2), \\ H^+(Dv, \rho_2, \omega) \geq \lambda \\ v(\rho_1, \omega) \geq 0, \end{cases}$$

and let u be a sub-solution, for some $\tilde{\varepsilon}_0 > 0$ of

$$\begin{cases} H(Du, y, \omega) \leq \lambda - \tilde{\varepsilon}_0 & y \in (\rho_1, \rho_2), \\ H^+(Du, \rho_2, \omega) \leq \lambda - \tilde{\varepsilon}_0 \\ u(\rho_1, \omega) \leq 0. \end{cases}$$

Then

$$u \leq v \text{ in } [\rho_1, \rho_2].$$

Proof of Proposition 6.6. We prove only the case $A > \mu_R^*$, the other one being similar. Let $y_0 \in [\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}, +\infty)$, $r > 0$ and $\tilde{\varepsilon}_0 > 0$ small enough be such that $\bar{A} - 2\tilde{\varepsilon}_0 > \mu_R^*$. For $\omega \in \Omega_0^{\varepsilon_0}$, by Corollary 6.5, there exists δ_0 such that for all $\delta \leq \delta_0$,

$$|\delta v^\delta(y, \omega) + \bar{A}| \leq \tilde{\varepsilon}_0 \text{ for all } y \in B_{r/\delta}.$$

Since $v^\delta(\cdot, \omega)$ is solution of (6.44) in \mathbb{R} , we then have

$$H(Dv^\delta, y, \omega) = -\delta v^\delta(y, \omega) \geq -\tilde{\varepsilon}_0 + \bar{A} \text{ in } B_{r/\delta}.$$

We set $v(y, \omega) = v^\delta(y, \omega) - v^\delta(y_0, \omega)$, then by Proposition 6.4 and using the fact that $H = H_R$ in $(\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}, +\infty)$, we have that v is solution of

$$\begin{cases} H_R(Dv, y, \omega) \geq \bar{A} - \tilde{\varepsilon}_0 & \text{in } (y_0, r/\delta), \\ H_R^+(Dv, r/\delta, \omega) \geq \bar{A} - \tilde{\varepsilon}_0 \\ v(y_0) \geq 0. \end{cases}$$

We now construct a strict super-solution of the same equation. We set $\mu = \bar{A} - 2\tilde{\varepsilon}_0 > \mu_R^*$ and $m(y, \omega) = m_\mu^R(y, 0, \omega) - m_\mu^R(y_0, 0, \omega)$, where m_μ^R is given in Proposition 3.1. Then by Proposition 6.4, m is solution of

$$\begin{cases} H_R(Dm, y, \omega) = \bar{A} - 2\tilde{\varepsilon}_0 & \text{in } (y_0, r/\delta), \\ H_R^+(Dm, r/\delta, \omega) = \bar{A} - 2\tilde{\varepsilon}_0 \\ m(y_0, \omega) = 0. \end{cases}$$

Then, the comparison principle, Proposition 6.7, yields that for all $y \in [y_0, r/\delta]$,

$$v(y, \omega) \geq m(y, \omega).$$

That is

$$v^\delta(y, \omega) - v^\delta(y_0, \omega) \geq m_\mu^R(y, 0, \omega) - m_\mu^R(y_0, 0, \omega). \quad (6.51)$$

Using that, by Proposition 3.3 (recall that Lemma 3.5 gives that $\bar{m}_\mu^R(y) = \bar{p}_\mu^{R,+} \cdot y$ for $y \geq 0$),

$$\sup_{B_{r/\delta}} \frac{1}{\delta} \left| m_\mu^R(y, 0, \omega) - \bar{p}_\mu^{R,+} \cdot y \right| = \sup_{B_r} \left| \frac{m_\mu^R\left(\frac{z}{\delta}, 0, \omega\right)}{\delta} - \bar{p}_\mu^{R,+} \cdot z \right| \rightarrow 0,$$

we get that there exists a constant C such that for all $\delta \leq \delta_0$, we have

$$\sup_{B_{r/\delta}} \left| m_\mu^R(y, 0, \omega) - \bar{p}_\mu^{R,+} \cdot y \right| \leq C\delta.$$

Injecting this in (6.51), we get

$$v^\delta(y, \omega) - v^\delta(y_0, \omega) \geq \bar{p}_\mu^{R,+}(y - y_0) - 2C\delta \quad \forall y, y_0 \in \left(\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}, r/\delta \right).$$

Finally if we choose γ_0 , such that $\bar{p}_A^{R,+} > \gamma_0 \geq 0$ ($\mu_R^* = \bar{H}_R(0)$), then for all $\gamma \leq \gamma_0$, we have that

$$\bar{H}_R(\bar{p}_A^{R,+} - \gamma) = \bar{H}_R^+(\bar{p}_A^{R,+} - \gamma),$$

and we can choose $\tilde{\varepsilon}_0 > 0$ such that

$$\bar{p}_\mu^{R,+} = \bar{p}_A^{R,+} - \gamma.$$

This ends the proof. □

6.3 Proof of Theorem 6.1

Proof of Theorem 6.1. The existence of the approximated correctors is given in Proposition 6.2 while the convergence of δv^δ to $-\bar{A}$ in balls of radius r/δ is given in Corollary 6.5. It just remains to show that \bar{v}^δ converges to W satisfying (6.45).

First, we have that \bar{v}^δ is Lipschitz continuous, uniformly in δ . Then, up to a subsequence, there exists W , with $W(0) = 0$, such that

$$\bar{v}^\delta \rightarrow W \quad \text{locally uniformly as } \delta \rightarrow 0.$$

Like in [45] and arguing as in the proof of convergence away from the junction point, we have that W satisfies

$$\begin{aligned} \bar{H}_R(W_y) &= \bar{A} \quad \text{for } y > 0 \\ \bar{H}_L(W_y) &= \bar{A} \quad \text{for } y < 0 \end{aligned}$$

In the case $\bar{A} = \mu_R^*$, this implies that

$$\bar{p}_R^+ \leq W_y \leq \hat{p}_R^+.$$

In the case $\bar{A} > \mu_R^*$, we also get, from (6.49), that

$$W_y \geq \bar{p}_R^+ - \gamma$$

and so the equation satisfied by W also implies that

$$\bar{p}_R^+ \leq W_y \leq \hat{p}_R^+$$

and gives the particular form (6.45) of W for $y > 0$. Similarly, we can prove for $y < 0$ that

$$\hat{p}_L^- \leq W_y \leq \bar{p}_L^-$$

which gives (6.45) for $y < 0$. This ends the proof. \square

7 Convergence result of the rescaled problem (2.4)

We have defined the right and left deterministic hamiltonians and the effective flux limiter \bar{A} , so to complete the proof of Theorem 2.7, we should prove the convergence result. This is the goal of this section. Under Assumption $(\mathbf{H}-\varepsilon)$, we define Ω_0 by

$$\Omega_0 = \bigcup_{\varepsilon} \Omega_0^\varepsilon.$$

We start by the definition of the relaxed half-limits, defined for all locally bounded family $\{u^\varepsilon\}_\varepsilon$, and for $\omega \in \Omega_0$, $x \in \mathbb{R}$, by

$$\begin{cases} \bar{u}(t, x, \omega) = \limsup_{s \rightarrow t, y \rightarrow x, \varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon(s, y, \omega), \\ \underline{u}(t, x, \omega) = \liminf_{s \rightarrow t, y \rightarrow x, \varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon(s, y, \omega). \end{cases}$$

To define these half-relaxed limits for the solution u^ε of (2.4), we have to get some bound.

Lemma 7.1 (Barriers). *Under Assumptions (\mathbf{H}) , and for all $\omega \in \Omega$, there exists a constant $C > 0$, independant of ω , such that for all $\varepsilon > 0$, we have*

$$|u^\varepsilon(t, x, \omega) - u_0(x)| \leq Ct \text{ for all } (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}.$$

Proof. Let C_0 be the Lipschitz constant of u_0 . We set $C = \sup_{\substack{y \in \mathbb{R}, \\ |p| \leq C_0}} |H(p, y, \omega)|$. C is well defined and independant of ω by hypothesis $(\mathbf{H2})$. Then $u_0(x) \pm Ct$ are super- and sub-solutions of (2.4). So the result follows by the comparison principle. This ends the proof of the lemma. \square

We are now able to give the proof of Theorem 2.7

Proof of Theorem 2.7. Let $\omega \in \Omega_0$. We give the proof in the case of assumption $(\mathbf{H}-\varepsilon)$. There exists $\varepsilon_0 > 0$ such that $\omega \in \Omega_0^{\varepsilon_0}$. In the sequel, we work with $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ (so that $\tilde{A}(\omega) = \bar{A}$ for all ε). To prove that $u^\varepsilon(\cdot, \cdot, \omega)$ converges locally uniformly to $u(\cdot, \cdot)$ on $(0, T) \times \mathbb{R}$, it's enough to show that \bar{u} and \underline{u} are respectively sub and super-solution of (2.5). Then the comparison principle yields that, $\bar{u} \leq \underline{u}$ and since, by definition, we have $\underline{u} \leq \bar{u}$, we will get

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(t, x, \omega) = u(t, x).$$

We show that \bar{u} is a sub-solution of (2.5), the proof for the super-solution being similar. First, note that the initial condition is satisfied by Lemma 7.1. We argue by contradiction by assuming that there exists a test function $\phi \in C^1((0, T) \times \mathbb{R})$ with $\bar{u}(\bar{t}, \bar{x}) = \phi(\bar{t}, \bar{x})$ and

$$(\bar{u} - \phi)(t, x) < (\bar{u} - \phi)(\bar{t}, \bar{x}) = 0 \quad \text{for all } (t, x) \in B_{\bar{r}}(\bar{t}, \bar{x}) \setminus \{(\bar{t}, \bar{x})\}, \quad (7.52)$$

such that

$$\begin{cases} \phi_t(\bar{t}, \bar{x}) + \bar{H}_L(D\phi(\bar{t}, \bar{x})) = \theta > 0, & \text{if } \bar{x} \in]-\infty, 0[, \\ \phi_t(\bar{t}, \bar{x}) + \bar{H}_R(D\phi(\bar{t}, \bar{x})) = \theta > 0, & \text{if } \bar{x} \in]0, +\infty[, \\ \phi_t(\bar{t}, 0) + \max\{\bar{A}, \bar{H}_L^+(D\phi(\bar{t}, 0^-), \bar{H}_R^-(D\phi(\bar{t}, 0^+))\} = \theta > 0 & \text{if } \bar{x} = 0. \end{cases}$$

We distinguish two cases: $\bar{x} = 0$ or $\bar{x} \neq 0$.

Case 1: $\bar{x} = 0$. According to [56], the function ϕ should have the following form

$$\phi(t, x) = \psi(t) + \bar{p}_L^- x \mathbf{1}_{\{x < 0\}} + \bar{p}_R^+ x \mathbf{1}_{\{x > 0\}}, \quad (7.53)$$

with $\psi \in C^1(0, +\infty)$.

Remark 7.2. For the super-solution, the test function has the following form:

$$\phi(t, x) = \psi(t) + \hat{p}_L^- x \mathbf{1}_{\{x < 0\}} + \hat{p}_R^+ x \mathbf{1}_{\{x > 0\}}.$$

We then have

$$\psi'(\bar{t}) + \max\{\bar{A}, \bar{H}_L^+(D\phi(\bar{t}, 0^-), \bar{H}_R^-(D\phi(\bar{t}, 0^+))\} = \psi'(\bar{t}) + \bar{A} = \theta > 0.$$

We define the perturbed test function (see [37]) by

$$\phi^\varepsilon(t, x) = \psi(t) + \varepsilon v^\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right).$$

We claim that ϕ^ε is a super-solution of

$$\phi_t^\varepsilon + H\left(D\phi^\varepsilon, \frac{x}{\varepsilon}, \omega\right) = \frac{\theta}{2} \quad \text{in } B_r(\bar{t}, 0), \quad (7.54)$$

for r small enough. To prove this, let η be a test function, such that (t_1, x_1) is a minimum point of $\phi^\varepsilon - \eta$ with $\phi^\varepsilon(t_1, x_1) = \eta(t_1, x_1)$. We have

$$\phi^\varepsilon(t, x) \geq \eta(t, x),$$

i.e

$$\psi(t) + \varepsilon v^\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right) \geq \eta(t, x)$$

which implies

$$v^\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right) \geq \frac{1}{\varepsilon}(\eta(t, x) - \psi(t)).$$

Using that

$$v^\varepsilon(y_1, \omega) = \frac{1}{\varepsilon} (\eta(t_1, \varepsilon y_1) - \psi(t_1)),$$

with $y_1 = \frac{x_1}{\varepsilon}$, we deduce that

$$(t, y) \rightarrow v^\varepsilon(y, \omega) - \left(\frac{1}{\varepsilon} (\eta(t, \varepsilon y) - \psi(t)) \right)$$

reaches a minimum at (t_1, y_1) . We then have $\eta_t(t_1, x_1) = \psi'(t_1)$. Moreover, since v^ε is as super-solution of (6.44), we have, for ε small enough,

$$H \left(D\eta(t_1, y_1), \frac{x_1}{\varepsilon}, \omega \right) \geq -\varepsilon v^\varepsilon \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \omega \right) \geq \bar{A} - \frac{\theta}{4},$$

where we have used that

$$\varepsilon v^\varepsilon(x, \omega) \rightarrow -\bar{A}$$

in balls of radius $\frac{r}{\varepsilon}$. We then get

$$\eta_t(t_1, x_1) + H \left(D\eta(t_1, x_1), \frac{x_1}{\varepsilon}, \omega \right) \geq \psi'(t_1) + \bar{A} - \frac{\theta}{4} \geq \frac{\theta}{2}$$

for r small enough. Combining (6.45) with (7.52) and (7.53), we can fix $\kappa_r > 0$ and ε small enough such that

$$u^\varepsilon + \kappa_r \leq \phi^\varepsilon \quad \text{on } \partial B_r(\bar{t}, 0).$$

By the comparison principle, the previous inequality holds in $B_r(\bar{t}, 0)$. Passing to the limit $\varepsilon \rightarrow 0$ and $(t, x) \rightarrow (\bar{t}, \bar{x})$, we get the following contradiction

$$\bar{u}(\bar{t}, 0) + \kappa_r \leq \phi(\bar{t}, 0) = \bar{u}(\bar{t}, 0).$$

Case 2 : $\bar{x} \neq 0$. We use the approximate corrector problem far from the junction i.e given by the right and left hamiltonian. The proof is classical and we skip it.

This ends the proof of the theorem. □

Remark 7.3. *In this work, we assumed that the minimum in the gradient variable is reached in 0 (see (H6)). This is not a restrictive hypothesis. In fact, let H be a general Hamiltonian which verifies assumption (H) such that the hypothesis (H6) is replaced by*

$$H(p, y, \omega) \geq H(p_0, y, \omega),$$

so that the minimum of H with respect to the gradient variable is reached in p_0 . The definition of \bar{A} with H does not change. If we define \tilde{H} by

$$\tilde{H}(p, y, \omega) = H(p - p_0)$$

then \tilde{H} verifies (H). Let also $\tilde{H}_\alpha, \alpha = R, L$ the right and left hamiltonians. The convergence result is verify for the problem (2.4) given with \tilde{H} . That is if \tilde{u}^ε is the solution then

\tilde{u}^ε converges almost surely in ω and locally uniformly in (t, y) to a function \tilde{u} solution of (2.5). Then if we define \tilde{H} by

$$\tilde{H}(p) = \overline{H}(p - p_0), \quad \tilde{H}_\alpha(p) = \overline{H}_\alpha(p - p_0) \quad \text{and} \quad u^\varepsilon(t, y, \omega) = \tilde{u}^\varepsilon(t, y, \omega) - p_0 \cdot y,$$

we obtain that u^ε solution of (2.4) given with H , and since

$$\tilde{u}^\varepsilon(t, y, \omega) = u^\varepsilon(t, y, \omega) + p_0 \cdot y \rightarrow \tilde{u}(t, y) \quad \text{a.s in } \omega,$$

then

$$u^\varepsilon(t, y, \omega) \rightarrow \tilde{u}(t, y) - p_0 \cdot y = u(t, y).$$

The function u verifies, far from the junction point

$$u_t + \overline{H}_\alpha(Du) = \tilde{u}_t + \overline{H}_\alpha(D\tilde{u} - p_0) = \tilde{u}_t + \overline{H}_\alpha(D\tilde{u}) = 0.$$

And at the junction point we have that

$$u_t + \max(\overline{A}, \overline{H}_L^+(Du(0^-), \overline{H}_R^-(Du(0^+))) = \tilde{u}_t + \max(\overline{A}, \overline{H}_L^+(Du(0^-), \overline{H}_R^-(Du(0^+))) = 0.$$

We conclude that u is the the unique solution of (2.5), and it's enough to prove the result for $p_0 = 0$.

7.1 A junction condition by stochastic homogenization on a junction

In the same way as the one of Chapter 3, we can generalize the result of stochastic homogenization on a line to a junction with more than two branches. More precisely, we define the junction J by

$$J = \bigcup_i J_i, \quad \text{with } J_i = [0, +\infty]e_i, \quad \text{and } e_i \in \mathbb{R}^2 \text{ a unit vector.}$$

We consider the following Hamilton-Jacobi equation

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon(t, y, \omega) + H\left(\partial_i u^\varepsilon(t, y), \frac{y}{\varepsilon}, \omega\right) = 0 & (t, y) \in J_T, \quad y \neq 0; \\ u_t^\varepsilon(t, y, \omega) + \max\left(H^-\left(\partial_i u^\varepsilon(t, 0^+), 0, \omega\right)\right) = 0 & (t, y) \in (0, T) \times \{0\}; \\ u^\varepsilon(0, y, \omega) = u_0(y) & y \in J, \end{cases} \quad (7.55)$$

with u_0 a Lipschitz continuous function and H^- the non-increasing part of $p \rightarrow H(p, y, \omega)$. We define now the deterministic distance d on J as following

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & \text{if } x, y \in J_i, \\ |x| + |y| & \text{if } x \in J_i, y \in J_j; j \neq i. \end{cases}$$

And then we define $B_r(x)$ the ball of radius r and center x as follow

$$B_r(x) = \begin{cases} \{y; |y - x| \leq r\} & \text{if } x, y \in J_i \\ \{y; |y| + |x| \leq r\} & \text{if } x \in J_i, y \in J_j \text{ and } i \neq j. \end{cases}$$

To define the probability space, we define a σ -algebra on J by

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(J) = \sigma \left(\omega \rightarrow \begin{cases} H(p_i, y, \omega) & \forall y \in J^*, p_i \in \mathbb{R}, \\ \max(H^-(p_i, 0, \omega)) & \text{for all } p_i \in \mathbb{R} \end{cases} \right).$$

Let $U \subseteq J$ be an open set (it can be a finite union of open intervals which contains 0 or not). If $0 \in U$, then let

$$\mathbf{F}(U) = \sigma \left(\omega \rightarrow \begin{cases} H(p_i, y, \omega) & \text{for all } y \in U \setminus \{0\}, p_i \in \mathbb{R}, \\ \max(H^-(p_i, 0, \omega)) & \text{for all } p_i \in \mathbb{R} \end{cases} \right).$$

If not then we define

$$\mathbf{F}(U) = \sigma(\omega \rightarrow H(p_i, y, \omega) \text{ for all } y \in U, p_i \in \mathbb{R}).$$

Let H_0 be a coercive convex Hamiltonian and H_i the stochastic hamiltonians such that H is equal to H_i near $+\infty$ at each branch, and $H_0 \geq H_i$ for all i . More precisely, the Hamiltonian H is given by

$$H(p, y, \omega) = \psi^\varepsilon(y)H_i(p, y, \omega) + (1 - \psi^\varepsilon(y))H_0(p, y, \omega)$$

with $\psi^\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ satisfying

$$\psi^\varepsilon(y) = \begin{cases} 1 & y \in \cup_i \left[\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}, +\infty \right[e_i \\ 0 & y \in \cup_i \left[0, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right[e_i. \end{cases}$$

We suppose that H verifies assumptions **(H)**, such that the Hamiltonians H_α , $\alpha = i, 0$ are stationary, i.e for all $y, z \in J_i$, for all i , we have that

$$H_\alpha(p, y, \tau_z \omega) = H_\alpha(p, y + z, \omega).$$

Our goal is to prove that u^ε converges to the unique solution u of the following problem

$$\begin{cases} u_t(t, y) + \bar{H}_i(\partial_i u(t, y)) = 0 & (t, y) \in J_T, y \neq 0; \\ u_t(t, y) + \max(\bar{H}_i^-(\partial_i u(t, 0^+))) = 0 & (t, y) \in (0, T) \times \{0\}; \\ u(0, y) = u_0(y) & y \in J. \end{cases}$$

To do that we have to prove a homogenization result for the metric problem. We now define the metric problem at the junction by

$$\begin{cases} H(\partial_i m_\mu, y, \omega) = \mu & y \in J^*; \\ m_\mu(0, 0) = 0 & \text{for } y = 0. \end{cases} \quad (7.56)$$

We next define the smallest value such that the problem (7.56) admits a sub-solution. Then let $\tilde{A}(\omega)$ defined by

$$\tilde{A}(\omega) = \inf \{ \mu; \text{ there exists } v \in \mathbf{Lip}; H(\partial_i v, y, \omega) \leq \mu, y \in J^* \}.$$

Remark 7.4. *Theorem 2.4 of Chapter 3, implies that, if m_μ is a sub-solution of (7.56), then m_μ verifies for $y = 0$ the following inequality*

$$\max \left(H^-(\partial_i m_\mu, 0, \omega) \right) \leq \mu.$$

That is, if there exists a solution m_μ of (7.56) then it's a (global) sub-solution on J of

$$\begin{cases} H(\partial_i m_\mu, y, \omega) \leq \mu & y \in J^*; \\ \max \left(H^-(\partial_i m_\mu, 0, \omega) \right) \leq \mu & \text{for } y = 0, \end{cases}$$

and it's a super-solution on J^* of

$$H(\partial_i m_\mu, y, \omega) \geq \mu \text{ for } y \in J^*.$$

If we proceed in the same way as in Chapter 4, we construct the solution of (7.56) by Perron's method. Indeed, we define $m_\mu(\cdot, 0, \omega)$ by

$$m_\mu(y, 0, \omega) = \max \{ v(y, \omega) - v(0, \omega); \text{ there exists } v \in \mathbf{Lip}; H(\partial_i m_\mu, y, \omega) \leq \mu \text{ for } y \in J^* \}.$$

Proposition 7.5. *The flux limiter \tilde{A} is also given by*

$$\tilde{A}(\omega) = \sup_{y \in J} H(0, y, \omega).$$

Proof. We have by definition

$$\tilde{A}(\omega) \leq \sup_{y \in J} H(0, y, \omega).$$

We also have that by definition of \tilde{A} , there exists $\mu_\eta < \tilde{A} + \eta$, and $v_\eta \in \mathbf{Lip}$ such that

$$\begin{cases} H(\partial_i v, y, \omega) \leq \mu_\eta & y \in J^*; \\ \max \left(H^-(\partial_i v, 0, \omega) \right) \leq \mu_\eta & \text{for } y = 0, \end{cases}$$

then by Hypothesis **(H6)** we have that

$$\begin{cases} H(0, y, \omega) < \tilde{A} + \eta, & \text{for all } y \in J^*, \\ H(0, 0, \omega) < \tilde{A} + \eta. \end{cases}$$

That is $H(0, y, \omega) < \tilde{A} + \eta$ for all $y \in J$. Taking η to zero, we obtain the result. \square

Proposition 7.6. *Under assumption **(H)**, the flux limiter $\tilde{A}(\cdot)$ is constant almost surely with respect to ω . We denote by \bar{A} . More precisely \bar{A} is given by*

$$\bar{A} = \mu_0^*.$$

In order to prove this proposition we have to prove that

$$\sup_{y \in J} H_0(0, y, \omega) = \sup_{y \in \bigcup_{i=1}^N [0, 1/\sqrt{\varepsilon}] \cdot e_i} H_0(0, y, \omega).$$

The prove is classical so we skip it.

Remark 7.7. *The solution $m_\mu(y, x, \omega)$, for $x \in J^*$, of the metric problem*

$$\begin{cases} H(\partial_i m_\mu, y, \omega) \leq \mu & y \in J^* \setminus \{x\}; \\ m_\mu(x, x) = 0 & \text{for } y = x. \end{cases}$$

verifies, for all $\mu > \bar{A}$

$$\begin{aligned} l_\mu |y - x| \leq m_\mu(y, x) \leq L_\mu |y - x| & \quad \text{if } y, x \in J_i^*; \\ l_\mu (|y| + |x|) \leq m_\mu(y, x) \leq L_\mu (|y| + |x|) & \quad \text{if } x \in J_i^*, y \in J_j^*, i \neq j, \end{aligned}$$

for $l_\mu, L_\mu > 0$ and $c', C' > 0$, such that $c'(\mu - \bar{A}) \leq l_\mu \leq L_\mu \leq C'$.

To obtain the result of the convergence, it suffices to proceed in the same way explained in Chapter 4, and by discussing several cases according to the value of the variable of space as the discussion in Chapter 3. For this reason, we skip it.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors would like to thanks P. Cardaliaguet and P. Calka for fruitful discussions in the preparation of this work. This project was co-financed by the European Union with the European regional development fund (ERDF,18P03390/18E01750/18P02733) and by the Normandie Regional Council via the M2SiNUM project and by ANR MFG (ANR-16-CE40-0015-01).

Chapter 5

A non-local macroscopic model for traffic flow

I. Ciotir¹ , R. Fayad¹ , N. Forcadel¹ , A. Tonnoir¹

Abstract

In this work we propose a non-local Hamilton-Jacobi model for traffic flow and we prove the existence and uniqueness of the solution of this model. This model is justified as the limit of a rescaled microscopic model. We also propose a numerical scheme and we prove an estimate error between the continuous solution of this problem and the numerical one. Finally, we provide some numerical illustrations.

AMS Classification: 76A30, 35B27, 35D40, 35F21 .

Keywords: Traffic flow, macroscopic models, non-local model, homogenization, viscosity solutions, Hamilton-Jacobi equations.

1 Introduction

Traffic flow modelling is an important challenge and has known an important development in the last decades. The goal of this paper is to propose a new non-local macroscopic model for traffic flow. Macroscopic models consider quantities that describe the collective behaviour of traffic flow. At the macroscopic scale, the most popular model is the LWR model (see Lighthill, Whitham [70] and Richards [82]). This model, expressed in the Eulerian coordinates, describes the dynamics of the density of vehicles. Since these pioneer works, a lot of models have been proposed and we refer to [47] for an overview of these models. More recently others approaches have been proposed. First, using the Lagrangian coordinates, the LWR model can be reformulated to described the dynamics of the spacing (see [69]). Moreover, all these models could be reformulated using a Hamilton-Jacobi

¹Normandie Univ, INSA de Rouen Normandie, LMI (EA 3226 - FR CNRS 3335), 76000 Rouen, France, 685 Avenue de l'Université, 76801 St Etienne du Rouvray cedex. France

equation. Indeed, the link between conservation laws and Hamilton-Jacobi equations has been known to mathematicians for decades [66, 79, 55], but was brought up to the attention of the traffic flow theory community just recently by [31, 32] (see also [65]). At the Hamilton-Jacobi level, the link between Eulerian and Lagrangian coordinates is given in [53] (see also [68]).

More recently, non-local LWR models have been proposed in order to take into account the action of drivers to the surrounding density of other vehicles, see [18]. We also refer to [22, 23, 24, 25, 26, 35, 49].

In the present paper, we propose a new non-local macroscopic model. This model is expressed in the lagrangian coordinates at the Hamilton-Jacobi level. It then describes the dynamics of the position of the vehicles. In our model, drivers will adapt their velocity to the downstream traffic, assigning a greater importance to close vehicles.

Our model is obtained by rescaling a microscopic model, which describes the dynamics of each vehicles individually. We recall in particular that the main advantage of microscopic models is that they are easily justifiable but, with these models, it is difficult to model the traffic at the scale of a road or a city since the number of vehicles becomes too large.

1.1 Description of the model and assumptions

The non-local macroscopic model we propose is the following:

$$\begin{cases} u_t = V \left(\frac{1}{\int_0^{+\infty} g(z) dz} \int_0^{\infty} \left(\frac{u(t, x+z) - u(t, x)}{z} \right) g(z) dz \right) & \text{on }]0, T[\times \mathbb{R}; \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{on } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.1)$$

In this model, expressed in the Lagrangian coordinates, u represents the position, at time t of the car x . The velocity of the car is given by u_t while the spacing is given by u_x . Moreover, using the link between Lagrangian and Eulerian coordinates, the density of cars is given by $1/u_x$. In this model, the function g , called the weight, is decreasing and takes into account the fact that drivers will adapt their velocity to the downstream traffic, assigning a greater importance to close vehicles. The non-local term $\frac{u(t, x+z) - u(t, x)}{z}$ represents the average spacing between vehicles x and $x+z$. Finally, the function V is called an optimal velocity function and is non-negative, non-decreasing and bounded. Precise assumptions on g and V are given below:

(H1) $V : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ is Lipschitz continuous and non-negative.

(H2) V is non-decreasing on \mathbb{R} .

(H3) There exists $h_0 \in (0, +\infty)$ such that for all $h \leq h_0$, $V(h) = 0$.

(H4) There exists $h_{\max} \in (h_0, +\infty)$ such that for all $h \geq h_{\max}$, $V(h) = V(h_{\max}) = V_{\max}$.

(H5) $g : [0; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[$ is $L^1(]0, +\infty[)$.

(H6) There exists $\delta > 0$ such that for all $x \in [0, 1]$ we have that

$$g(x) \geq \delta.$$

(H7) The function $z \mapsto z.g(z)$ is $L^1(]0; +\infty[)$.

We denote by (H) the set of assumptions (H1)-(H7).

1.2 Main results

The first main result of the paper is an existence and uniqueness result for the macroscopic non local model (1.1).

Theorem 1.1 (Existence and uniqueness for the macroscopic model). *Assume (H) and let u_0 be a Lipschitz continuous and non-decreasing function. Then Problem (1.1) admits a unique solution u which is Lipschitz continuous and non-decreasing.*

The second main result is a justification of the macroscopic model. In fact, we will show that our macroscopic model can be obtained by rescaling a microscopic model. More precisely, we consider the following microscopic model:

$$\dot{U}_i(t) = V \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} g^\varepsilon(k)} \sum_{j=1}^{\infty} g^\varepsilon(j) \frac{U_{i+j}(t) - U_i(t)}{j} \right) \quad (1.2)$$

where $g^\varepsilon(j) = g(\varepsilon j)$. The rescaling in the function g takes into account that the weight of the closer cars is more and more important as ε goes to zero. In this model, the term $\frac{U_{i+j}(t) - U_i(t)}{j}$ represents the average distance of two vehicles for vehicles comprised between vehicles i and $i + j$. Then the velocity of the vehicle i depends on the weighted average of these average distances.

Concerning the initial condition, let us assume that, at initial time, vehicles satisfy

$$U_i(0) = \varepsilon^{-1} u_0(i\varepsilon)$$

for some $\varepsilon > 0$ and where u_0 is a Lipschitz continuous function (we denote by L_0 its Lipschitz constant). From a traffic point of view, we also assume that u_0 is non-decreasing. Then, if we define \bar{u}^ε by

$$\bar{u}^\varepsilon(t, x) := \varepsilon U_{\lfloor \frac{x}{\varepsilon} \rfloor} \left(\frac{t}{\varepsilon} \right), \quad (1.3)$$

we have the following result

Theorem 1.2 (Micro-macro limit). *Under assumption (H), if moreover u_0 is Lipschitz continuous, then the function \bar{u}^ε defined in (1.3) converges to the unique solution u of (1.1).*

In fact, the idea of the proof of this theorem is inspired by [40, 41] and consists in injecting the microscopic models into a partial differential equation. More precisely, we have that the function \bar{u}^ε is solution of the following problem

$$\bar{u}_t^\varepsilon = V \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} g^\varepsilon(k)} \sum_{j=1}^{\infty} g^\varepsilon(j) \frac{\bar{u}^\varepsilon(t, x + \varepsilon j) - \bar{u}^\varepsilon(t, x)}{\varepsilon j} \right) \text{ on }]0, T[\times \mathbb{R};$$

The result is then obtained by homogenization of this non-local PDE. We refer to [72, 37] for homogenization results in the local case and to [57, 39, 41, 40, 57] for the non-local case.

In the last Section of the paper, we also consider the numerical analysis of the macroscopic model (1.1). We propose a finite difference numerical scheme and we prove an error estimate between the solution of the macroscopic model (1.1) and its numerical approximation. We also provide some numerical simulations.

Organization of the paper This article is organized as follow. In Section 2, we present the microscopic problem. The existence and uniqueness of the solution of this problem are proved. Section 3 is devoted to the study of the macroscopic problem where a comparison principle is proved. The proof of the homogenization result is given in Section 4. Finally in Section 5, we present a numerical scheme with an error estimate result. We also present some numerical simulations.

2 Well-posedness of the microscopic problem

The goal of this section is to give some preliminary results for the following problem

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon = V \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} g^\varepsilon(k)} \sum_{j=1}^{\infty} g^\varepsilon(j) \frac{u^\varepsilon(t, x + \varepsilon j) - u^\varepsilon(t, x)}{\varepsilon j} \right) & \text{on }]0, T[\times \mathbb{R}; \\ u^\varepsilon(0, x) = u_0(x) & \text{on } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.4)$$

We will show in particular a comparison principle as well as an existence result. We shall recall first the definition of a viscosity solution.

Definition 2.1. *Let $u : [0, T[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be an upper semi-continuous function and v be a lower semi-continuous function. We assume that there exists a constant C_0 such that*

$$|u(t, x) - u_0(x)| \leq C_0 t \quad \text{and} \quad |v(t, x) - v_0(x)| \leq C_0 t.$$

We say that u is a viscosity sub-solution of (2.4) if $u(0, \cdot) \leq u_0$ and if, for all $\phi \in C^1(]0, T[\times \mathbb{R})$ such that $u - \phi$ attains a maximum point in $(\bar{t}, \bar{x}) \in]0, T[\times \mathbb{R}$ we have that

$$\phi_t(\bar{t}, \bar{x}) \leq V \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} g^\varepsilon(k)} \sum_{j=1}^{\infty} g^\varepsilon(j) \frac{u(\bar{t}, \bar{x} + \varepsilon j) - u(\bar{t}, \bar{x})}{\varepsilon j} \right).$$

We say that v is a viscosity super-solution of equation (2.4) if $v(0, \cdot) \geq u_0$ and if, for all $\phi \in C^1(]0, T[\times \mathbb{R})$ such that $u - \phi$ attains a minimum point in $(\bar{t}, \bar{x}) \in]0, T[\times \mathbb{R}$ we have that

$$\phi_t(\bar{t}, \bar{x}) \geq V \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} g^\varepsilon(k)} \sum_{j=1}^{\infty} g^\varepsilon(j) \frac{u(\bar{t}, \bar{x} + \varepsilon j) - u(\bar{t}, \bar{x})}{\varepsilon j} \right).$$

Finally, we say that u is a solution of (2.4) if u^* is a sub-solution and u_* is a super-solution of (2.4).

Remark 2.2. We recall that u^* and u_* are respectively the upper and lower semi-continuous envelope of u defined by

$$u^*(t, x) = \limsup_{(s, y) \rightarrow (t, x)} u(s, y) \quad \text{and} \quad u_*(t, x) = \liminf_{(s, y) \rightarrow (t, x)} u(s, y).$$

We now give the comparison principle for (2.4).

Theorem 2.3 (Comparison principle for (2.4)). *Let u and v be respectively a sub- and a super-solution of (2.4). We assume that there exists a constant C_0 such that*

$$|u(t, x) - u_0(x)| \leq C_0 t \quad \text{and} \quad |v(t, x) - u_0(x)| \leq C_0 t.$$

Then

$$u \leq v \quad \text{on} \quad [0, T] \times \mathbb{R}.$$

Proof. For $\eta > 0$, let

$$M = \sup_{(t, x)} \left\{ u(t, x) - v(t, x) - \frac{\eta}{T - t} \right\}.$$

We assume, by contradiction, that $M > 0$. For $\alpha, \theta, \delta > 0$, we duplicate the variable by considering

$$M_{\theta, \delta} = \sup_{(t, s, x, y)} \left\{ u(t, x) - v(s, y) - \alpha x^2 - \frac{\eta}{T - t} - \frac{(t - s)^2}{2\delta} - \frac{(x - y)^2}{2\theta} \right\}.$$

Let $(\tilde{t}, \tilde{s}, \tilde{x}, \tilde{y})$ be a point of maximum of $M_{\theta, \delta}$. By assumption, we have, for α small enough, that $M_{\theta, \delta} > 0$. This implies in particular that

$$\begin{aligned} \alpha \tilde{x}^2 + \frac{(\tilde{t} - \tilde{s})^2}{2\delta} + \frac{(\tilde{x} - \tilde{y})^2}{4\theta} &\leq u(\tilde{t}, \tilde{x}) - v(\tilde{s}, \tilde{y}) - \frac{(\tilde{x} - \tilde{y})^2}{4\theta} \\ &\leq u_0(\tilde{x}) - u_0(\tilde{y}) + 2C_0 T - \frac{(\tilde{x} - \tilde{y})^2}{4\theta} \\ &\leq C, \end{aligned}$$

where C is a positive constant. We then deduce that

$$\alpha \tilde{x} \rightarrow 0, \quad |\tilde{t} - \tilde{s}| \rightarrow 0, \quad |\tilde{x} - \tilde{y}| \rightarrow 0$$

respectively as α , δ and θ go to zero. We now claim that $\tilde{t}, \tilde{s} > 0$ for δ and θ small enough. Indeed, by contradiction, assume that $\tilde{t} = 0$ (the proof for \tilde{s} is similar). We then have

$$-\frac{\eta}{T} \leq u(0, \tilde{x}) - v(\tilde{s}, \tilde{y}) \leq u_0(\tilde{x}) - u_0(\tilde{y}) + C_0 \tilde{s} \leq L_0 |\tilde{x} - \tilde{y}| + C_0 \tilde{s}.$$

Taking δ and θ small enough, we get a contradiction.

We are now able to use the equation satisfied by u and v . We consider

$$\Phi_1(t, x) = v(\tilde{s}, \tilde{y}) + \alpha x^2 + \frac{\eta}{T-t} + \frac{(t-\tilde{s})^2}{2\delta} + \frac{(x-\tilde{y})^2}{2\theta}$$

and

$$\Phi_2(s, y) = u(\tilde{t}, \tilde{x}) - \alpha \tilde{x}^2 - \frac{\eta}{T-\tilde{t}} - \frac{(\tilde{t}-s)^2}{2\delta} - \frac{(\tilde{x}-y)^2}{2\theta}.$$

We can easily see that Φ_1 and Φ_2 belong to $C^1(]0, T[\times \mathbb{R})$ and that $u - \Phi_1$ has a maximum point in $(\tilde{t}, \tilde{x}) \in]0, T[\times \mathbb{R}$ and $v - \Phi_2$ has a minimum point in $(\tilde{s}, \tilde{y}) \in]0, T[\times \mathbb{R}$. Hence, by definition of viscosity solutions, we get that

$$\frac{\eta}{(T-\tilde{t})^2} + \frac{(\tilde{t}-\tilde{s})}{\delta} \leq V \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} g^\varepsilon(k)} \sum_{j=1}^{\infty} g^\varepsilon(j) \frac{u(\tilde{t}, \tilde{x} + \varepsilon j) - u(\tilde{t}, \tilde{x})}{\varepsilon j} \right)$$

and

$$\frac{(\tilde{t}-\tilde{s})}{\delta} \geq V \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} g^\varepsilon(k)} \sum_{j=1}^{\infty} g^\varepsilon(j) \frac{v(\tilde{s}, \tilde{y} + \varepsilon j) - v(\tilde{s}, \tilde{y})}{\varepsilon j} \right).$$

We subtract the two previous inequalities and we get that

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{T^2} \leq \frac{\eta}{(T-\tilde{t})^2} &\leq V \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} g^\varepsilon(k)} \sum_{j=1}^{\infty} g^\varepsilon(j) \frac{u(\tilde{t}, \tilde{x} + \varepsilon j) - u(\tilde{t}, \tilde{x})}{\varepsilon j} \right) \\ &\quad - V \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} g^\varepsilon(k)} \sum_{j=1}^{\infty} g^\varepsilon(j) \frac{v(\tilde{s}, \tilde{y} + \varepsilon j) - v(\tilde{s}, \tilde{y})}{\varepsilon j} \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Using that $(\tilde{t}, \tilde{s}, \tilde{x}, \tilde{y})$ is a point of maximum of $M_{\theta, \delta}$, we have, for all (t, s, x, y) that

$$\begin{aligned} &u(t, x) - v(s, y) - \alpha x^2 - \frac{\eta}{T-t} - \frac{(t-s)^2}{2\delta} - \frac{(x-y)^2}{2\theta} \\ &\leq u(\tilde{t}, \tilde{x}) - v(\tilde{s}, \tilde{y}) - \alpha \tilde{x}^2 - \frac{\eta}{T-\tilde{t}} - \frac{(\tilde{t}-\tilde{s})^2}{2\delta} - \frac{(\tilde{x}-\tilde{y})^2}{2\theta}. \end{aligned}$$

Choosing $x = \tilde{x} + \varepsilon j$, $y = \tilde{y} + \varepsilon j$, $t = \tilde{t}$ and $s = \tilde{s}$, we get that

$$\begin{aligned} &u(\tilde{t}, \tilde{x} + \varepsilon j) - u(\tilde{t}, \tilde{x}) - (v(\tilde{s}, \tilde{y} + \varepsilon j) - v(\tilde{s}, \tilde{y})) \\ &\leq -\alpha \tilde{x}^2 + \alpha (\tilde{x} + \varepsilon j)^2 \\ &= \alpha (2\tilde{x}\varepsilon j + \varepsilon^2 j^2) \end{aligned}$$

which means that

$$\frac{u(\tilde{t}, \tilde{x} + \varepsilon j) - u(\tilde{t}, \tilde{x})}{\varepsilon j} \leq \frac{(v(\tilde{s}, \tilde{y} + \varepsilon j) - v(\tilde{s}, \tilde{y}))}{\varepsilon j} + \alpha(2\tilde{x} + \varepsilon j).$$

Injecting this in (2.5) and using the monotonicity of V , we get

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{T^2} &\leq V \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} g^\varepsilon(k)} \sum_{j=1}^{\infty} g^\varepsilon(j) \left(\frac{v(\tilde{s}, \tilde{y} + j\varepsilon) - v(\tilde{s}, \tilde{t})}{\varepsilon j} + \alpha(2\tilde{x} + \varepsilon j) \right) \right) \\ &\quad - V \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} g^\varepsilon(k)} \sum_{j=1}^{\infty} g^\varepsilon(j) \frac{v(\tilde{s}, \tilde{y} + j\varepsilon) - v(\tilde{s}, \tilde{y})}{\varepsilon j} \right) \\ &\leq C\alpha \sum_{j=1}^{\infty} g^\varepsilon(j)(2\tilde{x} + \varepsilon j). \end{aligned}$$

Using that g and $z \mapsto zg(z)$ are in L^1 , we get a contradiction for α small enough. \square

We also give a comparison principle in bounded set that will be useful later. The proof being similar of the previous one, we skip it.

Theorem 2.4 (Comparison in bounded set). *Let Ω be a subset of $[0, T] \times \mathbb{R}$ and u and v be respectively a sub-solution and a super-solution of (2.4) in Ω . We assume that there exists a constant C_0 such that*

$$|u(t, x) - u_0(x)| \leq C_0 t \quad \text{and} \quad |v(t, x) - u_0(x)| \leq C_0 t.$$

We also assume that $u \leq v$ outside Ω . Then

$$u \leq v \quad \text{on} \quad [0, T] \times \mathbb{R}.$$

We can now give the existence and uniqueness result for problem (2.4)

Theorem 2.5. *Let $u_0 \in Lip(\mathbb{R})$. For all $\varepsilon > 0$, there is a unique solution u_ε of (2.4) such that there is a positive constant C_0 (depending only on the Lipschitz constant of u_0) such that*

$$|u_\varepsilon(t, x) - u_0(t, x)| \leq C_0 t, \quad \forall t, x \in [0, T[\times \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Proof. We use Perron’s method to prove the existence of u_ε , the uniqueness being a direct consequence of Theorem 2.3. It is sufficient to show that $u_0 \pm C_0 t$ are respectively super- and sub-solution of (2.4) for a suitable choice of C_0 .

We start by verifying that $u_0 + C_0 t$ is a super-solution. Since u_0 is assumed to be Lipschitz continuous with Lipschitz constant L_0 , we have that

$$u_0(x + \varepsilon j) - u_0(x) \leq L_0 \varepsilon j.$$

Using that $\bar{g}_\varepsilon(j) = \frac{g^\varepsilon(j)}{\sum_{k=1}^{\infty} g^\varepsilon(k)}$ is positive, we obtain that

$$\sum_{j=1}^{\infty} \bar{g}^\varepsilon(j) \frac{u_0(t, x + j\varepsilon) - u_0(t, x)}{\varepsilon j} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \bar{g}^\varepsilon(j) L_0 = L_0.$$

Since V is non-decreasing we get

$$\begin{aligned} & V \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} g^\varepsilon(k)} \sum_{j=1}^{\infty} g^\varepsilon(j) \frac{u_0(t, x + j\varepsilon) + C_0 t - u_0(t, x) - C_0 t}{\varepsilon j} \right) \\ &= V \left(\sum_{j=1}^{\infty} \bar{g}^\varepsilon(j) \frac{u_0(t, x + j\varepsilon) - u_0(t, x)}{\varepsilon j} \right) \leq V(L_0). \end{aligned}$$

Choosing $C_0 = V(L_0)$, we get that $u_0 + C_0 t$ is a super-solution of (2.4).

Arguing in a similar way, we get that $u_0 - C_0 t$ is a sub-solution and the proof is complete. \square

3 Well-posedness of the macroscopic model

This section is devoted to useful results concerning Problem (1.1). We begin by the definition of the viscosity solution. This definition and the main properties of the solution are inspired from [12].

In order to have the non-local term well defined and as well as for equation (2.4), we will assume that all the sub- and super-solution (and hence solution) u satisfy the following property:

$$\exists C_0 > 0 \text{ such that } |u(t, x) - u_0(x)| \leq C_0 t \quad (3.7)$$

Definition 3.1 (Definition of $\bar{\alpha}$ -viscosity solution for (1.1)). *Let $\bar{\alpha}$ be a positive constant. We say that an upper semi-continuous function $u : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying (3.7) is a $\bar{\alpha}$ -sub-solution of (1.1) if $u(0, \cdot) \leq u_0$ and if, for all $\phi \in C^1([0, T[\times \mathbb{R})$ such that $u - \phi$ has a maximum point in $(\bar{t}, \bar{x}) \in]0, T[\times \mathbb{R}$, we have that*

$$\begin{aligned} \phi_t(\bar{t}, \bar{x}) \leq V \left(\frac{1}{\int_{\mathbb{R}_+} g(z) dz} \left\{ \int_0^{\bar{\alpha}} \frac{\phi(\bar{t}, \bar{x} + z) - \phi(\bar{t}, \bar{x})}{z} g(z) dz \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{\bar{\alpha}}^{+\infty} \frac{u(\bar{t}, \bar{x} + z) - u(\bar{t}, \bar{x})}{z} g(z) dz \right\} \right). \end{aligned}$$

We say that a lower semi-continuous function $v : [0, T[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying (3.7) is a $\bar{\alpha}$ -super-solution of (1.1) if $v(0, \cdot) \geq u_0$ and if, for all $\phi \in C^1([0, T[\times \mathbb{R})$ such that $v - \phi$

has a minimum point in $(\bar{t}, \bar{x}) \in]0, T[\times \mathbb{R}$, we have that

$$\phi_t(\bar{t}, \bar{x}) \geq V \left(\frac{1}{\int_{\mathbb{R}_+} g(z) dz} \left\{ \int_0^{\bar{\alpha}} \frac{\phi(\bar{t}, \bar{x} + z) - \phi(\bar{t}, \bar{x})}{z} g(z) dz + \int_{\bar{\alpha}}^{+\infty} \frac{v(\bar{t}, \bar{x} + z) - v(\bar{t}, \bar{x})}{z} g(z) dz \right\} \right).$$

We say that u is a $\bar{\alpha}$ -solution of (1.1) if it is a $\bar{\alpha}$ -sub- and super-solution.

Remark 3.2. For simplicity of presentation, given $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, we define

$$I^{1,\alpha}[\Phi](x) = \frac{1}{\int_0^{+\infty} g(z) dz} \int_0^\alpha (\Phi(x+z) - \Phi(x)) \frac{g(z)}{z} dz$$

and

$$I^{2,\alpha}[\Phi](x) = \frac{1}{\int_0^{+\infty} g(z) dz} \int_\alpha^{+\infty} (\Phi(x+z) - \Phi(x)) \frac{g(z)}{z} dz.$$

Theorem 3.3 (Equivalence of α -solutions). *Let $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. We have that u is a α_1 -sub-solution (resp. a α_1 -super-solution) if and only if it is a α_2 -sub-solution (resp. a α_2 -super-solution).*

Proof. We only prove the result for sub-solution, the super-solution case being similar. We assume that u is a α_1 -sub-solution and we want to show that it is a α_2 -sub-solution. Let $\psi \in C^1(]0, T[\times \mathbb{R})$ be such that $u - \psi$ reaches a global maximum in (t_0, x_0) . We suppose that $u(t_0, x_0) = \psi(t_0, x_0)$. For $\varepsilon_1 > 0$, there exists $\phi_1 \in C^1(]0, T[\times \mathbb{R})$ such that $\phi_1 \geq u$ and $\|u - \phi_1\|_{L^\infty} \leq \varepsilon_1$. We then define a test function $\phi \in C^1(]0, T[\times \mathbb{R})$, which will be used for the α_1 -sub-solution, by

$$\phi(t, x) = \begin{cases} \phi_1(t, x) & \text{if } x \geq x_0 + \alpha_2; \\ \psi(t, x) & \text{if } x \leq x_0 + \frac{\alpha_2}{2}. \end{cases}$$

Since u is α_1 -viscosity sub-solution of (1.1) and (t_0, x_0) is maximum point of $u - \phi$, we have

$$\phi_t(t_0, x_0) \leq V \left(I^{1,\alpha_1}[\phi(t_0, \cdot)](x_0) + I^{2,\alpha_1}[u(t_0, \cdot)](x_0) \right).$$

Using that $\phi_t(t_0, x_0) = \psi_t(t_0, x_0)$, we then deduce that

$$\begin{aligned}
\psi_t(t_0, x_0) &\leq V \left(I^{1,\alpha_1}[\phi(t_0, \cdot)](x_0) + I^{2,\alpha_1}[u(t_0, \cdot)](x_0) \right) \\
&\leq V \left(I^{1,\alpha_2}[\phi(t_0, \cdot)](x_0) + I^{2,\alpha_2}[u(t_0, \cdot)](x_0) \right. \\
&\quad + \frac{1}{\int_0^{+\infty} g(z) dz} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} (\phi(t_0, x_0 + z) - \phi(t_0, x_0)) \frac{g(z)}{z} dz \\
&\quad \left. - \frac{1}{\int_0^{+\infty} g(z) dz} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} (u(t_0, x_0 + z) - u(t_0, x_0)) \frac{g(z)}{z} dz \right) \\
&\leq V \left(I^{1,\alpha_2}[\phi(t_0, \cdot)](x_0) + I^{2,\alpha_2}[u(t_0, \cdot)](x_0) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\int_0^{+\infty} g(z) dz} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} (\phi(t_0, x_0 + z) - u(t_0, x_0 + z)) \frac{g(z)}{z} dz \right) \\
&\leq V \left(I^{1,\alpha_2}[\phi(t_0, \cdot)](x_0) + I^{2,\alpha_2}[u(t_0, \cdot)](x_0) + \frac{\varepsilon_1}{\int_0^{+\infty} g(z) dz} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{g(z)}{z} dz \right)
\end{aligned}$$

where for the last inequality, we have used the fact that V is non-decreasing. Sending $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ and using that g and $z \mapsto zg(z)$ are in L^1 , we get the result. \square

Theorem 3.4 (Comparison Principle for (1.1)). *Let u be a sub-solution and v be a super-solution of (1.1). We assume that u and v satisfy (3.7). Then*

$$u \leq v.$$

Proof. We assume by contradiction that

$$M = \sup_{(t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}} \{u(t,x) - v(t,x)\} > 0.$$

We then duplicate the variable, by considering, for $\eta, \alpha, \varepsilon, \delta > 0$,

$$M_{\varepsilon,\delta} = \sup_{(t,s,x,y)} \left\{ u(t,x) - v(s,y) - \frac{(t-s)^2}{2\delta} - \frac{(x-y)^2}{2\varepsilon} - \frac{\eta}{T-t} - \alpha x^2 \right\}.$$

We denote by $(\bar{t}, \bar{s}, \bar{x}, \bar{y})$ a point of maximum of $M_{\varepsilon,\delta}$. For η and α small enough, we have $M_{\varepsilon,\delta} > 0$ and we deduce as in the proof of Theorem 2.3 that

$$\alpha \bar{x} \rightarrow 0, \quad |\bar{t} - \bar{s}| \rightarrow 0, \quad |\bar{x} - \bar{y}| \rightarrow 0,$$

respectively as α , δ and ε go to zero, and that $\bar{t}, \bar{s} > 0$ for δ and ε small enough. We can then use the equations satisfied by u and v . We have that $u - \phi_1$ reaches a maximum in (\bar{t}, \bar{x}) , with ϕ_1 given by

$$\phi_1 = v(\bar{s}, \bar{y}) + \frac{(t - \bar{s})^2}{2\delta} + \frac{(x - \bar{y})^2}{2\varepsilon} + \frac{\eta}{T-t} + \alpha x^2.$$

So by definition of viscosity solution we obtain, for every $\bar{\alpha}$, that

$$\frac{(\bar{t} - \bar{s})}{\delta} + \frac{\eta}{(T - \bar{t})^2} \leq V \left(I^{1,\bar{\alpha}}[\phi_1(\bar{t}, \cdot)](\bar{x}) + I^{2,\bar{\alpha}}[u(\bar{t}, \cdot)](\bar{x}) \right).$$

Since $v - \phi_2$ reaches a minimum point in (\bar{s}, \bar{y}) , with ϕ_2 given by

$$\phi_2 = u(\bar{t}, \bar{x}) - \frac{(s - \bar{t})^2}{2\delta} - \frac{(y - \bar{x})^2}{2\varepsilon} - \frac{\eta}{T - \bar{t}} - \alpha \bar{x}^2,$$

we also have

$$\frac{(\bar{t} - \bar{s})}{\delta} \geq V \left(I^{1,\bar{\alpha}}[\phi_2(\bar{t}, \cdot)](\bar{x}) + I^{2,\bar{\alpha}}[v(\bar{t}, \cdot)](\bar{x}) \right).$$

We subtract the two viscosity inequalities, and we obtain

$$\frac{\eta}{T^2} \leq V \left(I^{1,\bar{\alpha}}[\phi_1(\bar{t}, \cdot)](\bar{x}) + I^{2,\bar{\alpha}}[u(\bar{t}, \cdot)](\bar{x}) \right) - V \left(I^{1,\bar{\alpha}}[\phi_2(\bar{s}, \cdot)](\bar{y}) + I^{2,\bar{\alpha}}[v(\bar{s}, \cdot)](\bar{y}) \right). \quad (3.8)$$

Using that $(\bar{t}, \bar{s}, \bar{x}, \bar{y})$ is a maximum point we obtain

$$u(\bar{t}, \bar{x} + z) - v(\bar{s}, \bar{y} + z) \leq u(\bar{t}, \bar{x}) - v(\bar{s}, \bar{y}) + \alpha(\bar{x} + z)^2 - \alpha \bar{x}^2$$

and so

$$\frac{u(\bar{t}, \bar{x} + z) - u(\bar{t}, \bar{x})}{z} \leq \frac{v(\bar{s}, \bar{y} + z) - v(\bar{s}, \bar{y})}{z} + \alpha(2\bar{x} + z).$$

We then deduce that

$$I^{2,\bar{\alpha}}[u(\bar{t}, \cdot)](\bar{x}) \leq I^{2,\bar{\alpha}}[v(\bar{s}, \cdot)](\bar{y}) + 2\alpha\bar{x}\|g\|_{L^1} + \alpha\|zg\|_{L^1} \leq I^{2,\bar{\alpha}}[v(\bar{s}, \cdot)](\bar{y}) + C\alpha(\bar{x} + 1). \quad (3.9)$$

We now compare $I^{1,\bar{\alpha}}[\phi_1(\bar{t}, \cdot)](\bar{x})$ and $I^{1,\bar{\alpha}}[\phi_2(\bar{s}, \cdot)](\bar{y})$. We have

$$\begin{aligned} & I^{1,\bar{\alpha}}[\phi_1(\bar{t}, \cdot)](\bar{x}) - I^{1,\bar{\alpha}}[\phi_2(\bar{s}, \cdot)](\bar{y}) \\ &= \frac{1}{\int_0^{+\infty} g(z) dz} \left(\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^{\bar{\alpha}} \frac{(\bar{x} - \bar{y} + z)^2 - (\bar{x} - \bar{y})^2}{z} g(z) dz \right. \\ & \quad - \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^{\bar{\alpha}} \frac{(\bar{y} - \bar{x})^2 - (\bar{y} - \bar{x} + z)^2}{z} g(z) dz \\ & \quad \left. + \alpha \int_0^{\bar{\alpha}} \frac{(\bar{x} + z)^2 - \bar{x}^2}{z} g(z) dz \right) \\ &= \frac{1}{\int_0^{+\infty} g(z) dz} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\bar{\alpha}} z g(z) dz + \alpha \int_0^{\bar{\alpha}} (2\bar{x} + z) g(z) dz \right) \\ &\leq C \left(\alpha(\bar{x} + 1) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\bar{\alpha}} z g(z) dz \right). \end{aligned}$$

Injecting the previous estimate and (3.9) in (3.8) and using the fact that V is non-

decreasing, we get

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{T^2} &\leq V \left(I^{1,\bar{\alpha}}[\phi_2(\bar{s}, \cdot)](\bar{y}) + I^{2,\bar{\alpha}}[v(\bar{s}, \cdot)](\bar{y}) + C \left(\alpha(\bar{x} + 1) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\bar{\alpha}} z g(z) dz \right) \right) \\ &\quad - V \left(I^{1,\bar{\alpha}}[\phi_2(\bar{s}, \cdot)](\bar{y}) + I^{2,\bar{\alpha}}[v(\bar{s}, \cdot)](\bar{y}) \right) \\ &\leq C \left(\alpha(\bar{x} + 1) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\bar{\alpha}} z g(z) dz \right) \end{aligned}$$

Sending $\alpha, \bar{\alpha} \rightarrow 0$, we get that

$$\frac{\eta}{T^2} \leq 0$$

and we obtain a contradiction since $\eta > 0$. This ends the proof. \square

We are now able to give the proof of Theorem 1.1

Proof of Theorem 1.1. As in the proof of Theorem 2.5, we have that $u_0 \pm C_0 t$ are respectively sub- and super-solution of (1.1), so the existence follows by Perron's method. The uniqueness is a direct consequence of Theorem 3.4. It just remains to show that u is Lipschitz continuous.

To do that, let us define u^h by $u^h(t, x) = u(t, x + h) - L_0 h$. In particular, we have

$$u^h(0, x) = u_0(x + h) - L_0 h \leq u_0(x).$$

Moreover, since equation (1.1) is invariant by translation in space and by addition of constant, we get that u^h is a sub-solution of (1.1). Hence, the comparison principle yields that

$$u(t, x + h) - L_0 h = u^h(t, x) \leq u(t, x),$$

i.e

$$\frac{u(t, x + h) - u(t, x)}{h} \leq L_0.$$

To show that u is non-decreasing, we argue in a similar way by using the fact that $u(t, x + h)$ (recall that u_0 is non decreasing) is a super-solution of (1.1). This show that u is Lipschitz continuous in space. The fact that u is also Lipschitz continuous in times is a direct consequence of the fact that V is bounded. \square

4 Homogenization result

This section is devoted to the proof of the following convergence result. We will see that Theorem 1.2 is a corollary of this result.

Theorem 4.1 (Homogenization result). *Assume (H) and let u_0 be a Lipschitz continuous function. Then, the viscosity solution u^ε of (2.4), given by Theorem 2.5, converges as $\varepsilon \rightarrow 0$, locally uniformly in (t, x) , to the unique solution u of (1.1).*

Proof. We define \bar{u} and \underline{u} by

$$\bar{u} = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0, (y,s) \rightarrow (t,x)} u^\varepsilon(y, s) \text{ and } \underline{u} = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0, (y,s) \rightarrow (t,x)} u^\varepsilon(y, s).$$

We are going to prove that \bar{u} is a sub-solution of (1.1) on $[0, T[\times \mathbb{R}$. Similarly, we can prove that \underline{u} is a super-solution of the same equation. Then, using the comparison principle Theorem 3.4, we will get $\bar{u} \leq \underline{u}$ and so $\bar{u} = \underline{u} = u$ which implies the convergence of u^ε to u .

First, by (2.6), we have that $\bar{u}(0, \cdot) = u_0$. We argue by contradiction by assuming that \bar{u} is not a sub-solution on $]0, T[\times \mathbb{R}$. Then there exists $(t_0, x_0) \in]0, T[\times \mathbb{R}$ and a test function $\Phi \in C^1$ such that $\bar{u} - \Phi$ reaches a strict maximum in (t_0, x_0) and such that

$$\Phi_t(t_0, x_0) - V\left(I^{1,+\infty}[\Phi(t_0, \cdot)](x_0)\right) = \theta > 0. \quad (4.10)$$

We also assume that $\bar{u}(t_0, x_0) = \Phi(t_0, x_0)$. We now apply the perturbed test function method introduced by Evans [37] in terms here of hull functions. We refer to [41, 39] for the use of hull functions as correctors. We recall that in those paper, the perturbed test function is essentially defined by

$$\Phi^\varepsilon(t, x) = \varepsilon h\left(\frac{\Phi(t, x)}{\varepsilon}\right),$$

where h is the hull function. In fact in our case, the hull function is simpler (since our Hamilton-Jacobi equation is independent of (t, x)) and is given by $h = Id$. So the perturbed test function reduces to

$$\Phi^\varepsilon(t, x) = \begin{cases} \Phi(t, x) - \eta_r & \text{if } (t, x) \in Q_{1,1}(t_0, x_0) \\ u^\varepsilon(t, x) & \text{if not} \end{cases}$$

where η_r is chosen later and $Q_{r,R}(t_0, x_0) = (t_0 - r, t_0 + r) \times (x_0 - R, x_0 + R)$. We want to prove that Φ^ε is solution in $Q_{r,r}(t_0, x_0)$, of

$$\Phi_t^\varepsilon - V\left(\frac{1}{\sum_{k \geq 1} g^\varepsilon(k)} \sum_{j \geq 1} g^\varepsilon(j) \frac{\Phi^\varepsilon(t, x + \varepsilon j) - \Phi^\varepsilon(t, x)}{\varepsilon j}\right) \geq 0$$

and that $\Phi^\varepsilon \geq u^\varepsilon$ outside $Q_{r,r}(t_0, x_0)$. In particular r is chosen smaller than 1 so that $Q_{r,r}(t_0, x_0) \subset Q_{1,1}(t_0, x_0)$.

Let us first focus on the "boundary conditions". Since $\bar{u} - \Phi$ reaches a strict maximum at (t_0, x_0) , we can ensure that

$$u^\varepsilon(t, x) \leq \Phi(t, x) - \eta_r \quad \text{for } (t, x) \in Q_{2,2}(t_0, x_0) \setminus Q_{r,r}(t_0, x_0)$$

for $\eta_r = o_r(1) > 0$. Hence we conclude that $\Phi^\varepsilon \geq u^\varepsilon$ outside $Q_{r,r}(t_0, x_0)$.

We now turn to the equation. Since Φ^ε is smooth, we can check this property pointwise.

Let $(\bar{t}, \bar{x}) \in Q_{r,r}(t_0, x_0)$. We have

$$\begin{aligned} & \Phi_t^\varepsilon(\bar{t}, \bar{x}) - V \left(\frac{1}{\sum_{k \geq 1} g^\varepsilon(k)} \sum_{j \geq 1} g^\varepsilon(j) \frac{\Phi^\varepsilon(\bar{t}, \bar{x} + \varepsilon j) - \Phi^\varepsilon(\bar{t}, \bar{x})}{\varepsilon j} \right) \\ &= \theta + \Phi_t(\bar{t}, \bar{x}) - \Phi_t(t_0, x_0) - V \left(\frac{1}{\sum_{k \geq 1} g^\varepsilon(k)} \sum_{j \geq 1} g^\varepsilon(j) \frac{\Phi(\bar{t}, \bar{x} + \varepsilon j) - \Phi(\bar{t}, \bar{x})}{\varepsilon j} \right) \\ & \quad + V \left(I^{1,+\infty}[\Phi(t_0, \cdot)](x_0) \right) \\ & \geq \frac{3}{4}\theta - C \left| \frac{1}{\sum_{k \geq 1} g^\varepsilon(k)} \sum_{j \geq 1} g^\varepsilon(j) \frac{\Phi(\bar{t}, \bar{x} + \varepsilon j) - \Phi(\bar{t}, \bar{x})}{\varepsilon j} - I^{1,+\infty}[\Phi(t_0, \cdot)](x_0) \right| \end{aligned}$$

for r small enough. Using that, by convergence of Riemann sum,

$$\frac{1}{\sum_{k \geq 1} g^\varepsilon(k)} \sum_{j \geq 1} g^\varepsilon(j) \frac{\Phi(t, x + \varepsilon j) - \Phi(t, x)}{\varepsilon j} \rightarrow I^{1,+\infty}[\Phi(\bar{t}, \cdot)](\bar{x})$$

we deduce, for r small enough, that

$$\Phi_t^\varepsilon(\bar{t}, \bar{x}) - V \left(\frac{1}{\sum_{k \geq 1} g^\varepsilon(k)} \sum_{j \geq 1} g^\varepsilon(j) \frac{\Phi^\varepsilon(\bar{t}, \bar{x} + \varepsilon j) - \Phi^\varepsilon(\bar{t}, \bar{x})}{\varepsilon j} \right) \geq \frac{\theta}{2}$$

and show that Φ^ε is a super-solution in $Q_{r,r}(t_0, x_0)$. Recalling that $u^\varepsilon \leq \Phi^\varepsilon$ outside $Q_{r,r}(t_0, x_0)$ and using the comparison principle on bounded set Theorem 2.4, we get that

$$u^\varepsilon(x, t) \leq \Phi^\varepsilon(x, t).$$

Passing to the limit as ε goes to zero, and as $(t, x) \rightarrow (t_0, x_0)$ we get that

$$\Phi(t_0, x_0) = \bar{u}(t_0, x_0) \leq \Phi(t_0, x_0) - \eta,$$

which gives a contradiction with $\eta > 0$. Therefore \bar{u} is a sub-solution of (1.1) on $[0, T] \times \mathbb{R}$ and this ends the proof of the theorem. \square

We are now able to give the proof of Theorem 1.2

Proof of Theorem 1.2. We recall that the initial condition of \bar{u}^ε is given by

$$\bar{u}^\varepsilon(0, x) = \varepsilon U_{\lfloor \frac{x}{\varepsilon} \rfloor}(0) = u_0 \left(\left\lfloor \frac{x}{\varepsilon} \right\rfloor \right).$$

Hence

$$u_0(x) - L_0\varepsilon \leq u_0(x - \varepsilon) \leq \bar{u}^\varepsilon(0, x) \leq u_0(x).$$

Using the comparison principle, we then get

$$u^\varepsilon(t, x) - L_0\varepsilon \leq \bar{u}^\varepsilon(t, x) \leq u^\varepsilon(t, x) \quad \text{on } [0, T] \times \mathbb{R}.$$

By convergence of u^ε to u given in Theorem 4.1, we deduce the convergence of \bar{u}^ε to u . This ends the proof of the theorem. \square

5 Numerical tests

In this section, we present a numerical scheme in order to compute the solution of the macroscopic model. In a first subsection, we present the scheme. Then, we give some properties of the solution of the scheme and we prove an error estimate between the numerical solution and the solution of the macroscopic model. We end the paper with some numerical results in Subsection 5.3.

5.1 Discretization aspects and numerical scheme

Since problem (1.1) is defined on the unbounded line \mathbb{R} , we need to consider a bounded computational domain $[a, b]$ with $a < b$ two real parameters. The treatment of the boundary condition on the right side, on $x = b$, will be detailed below. To implement this problem, we consider the spatial discretization $x_i = i\Delta x + a$, $i \in 0, \dots, N$ and $\Delta x = \frac{(b-a)}{N}$ with $N \in \mathbb{N}^*$ a parameter, so that $x_0 = a$ and $x_N = b$. For the time variable, we set $t_n = n\Delta t$ with $\Delta t = T/N_t$ and $N_t \in \mathbb{N}^*$ a second parameter. We will denote by u_i^n the approximation of $u(t^n, x_i)$.

Then, the main point is to handle the non-local integral term. To do so, the idea is to decompose the integral as follows :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(\frac{u(t^n, x_i + z) - u(t^n, x_i)}{z} \right) g(z) dz &= \underbrace{\int_0^A \left(\frac{u(t^n, x_i + z) - u(t^n, x_i)}{z} \right) g(z) dz}_{=I_A(u(t^n, \cdot))(x_i)} \\ &+ \underbrace{\int_A^B \left(\frac{u(t^n, x_i + z) - u(t^n, x_i)}{z} \right) g(z) dz}_{=I(u(t^n, \cdot))(x_i)} \\ &+ \underbrace{\int_B^{+\infty} \left(\frac{u(t^n, x_i + z) - u(t^n, x_i)}{z} \right) g(z) dz}_{=I_\infty(u(t^n, \cdot))(x_i)} \end{aligned}$$

where $A \geq \Delta x$ is a small parameter (of order $\sqrt{\Delta x}$) and B is a big one. In the numerical implementation, we simply neglect the terms $I_A(u(t^n, \cdot))(x_i)$ to avoid the treatment of the division by 0, which, as we will see in the analysis of the scheme, induces an error of order A , and the last term $I_\infty(u(t^n, \cdot))(x_i)$ taking $B > b$ sufficiently large, which introduce a (small) consistency error. In particular, if the weight function g is compactly supported, this term is exactly 0 by choosing properly B .

For the remaining integral $I(u(t^n, \cdot))(x_i)$, we use a simple trapezoidal quadrature rule based on the discretization points x_i , see Figure 5.1, in order to involve directly the

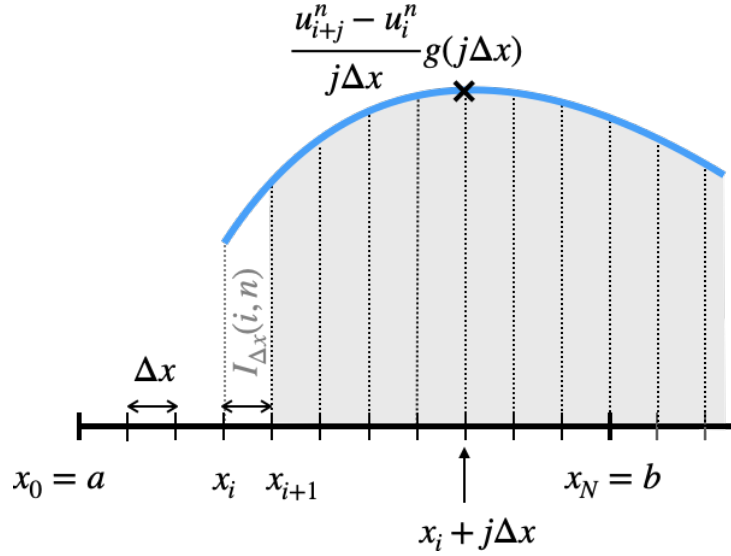


Figure 5.1: Illustration of the integral approximation based on the spatial discretization x_i .

quantity u_i^n . Yet, as we can see, $x_i + z$ can be greater than b , so it involves also values of u outside the computational domain $[a, b]$. To get these values, we will assume that we have a constant "outgoing" flux so that

$$u(t, b + \tilde{z}) = u(t, b) + \frac{\tilde{z}}{\rho_\infty} \quad \forall \tilde{z} \geq 0 \quad (5.11)$$

where $1/\rho_\infty = \partial_x u(t, b) > 0$ represents the constant density in the outgoing direction $x > b$. Thus, we obtain the following approximation :

$$I(u(t^n, \cdot))(x_i) \simeq \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\tilde{u}_{i+N_A}^n - \tilde{u}_i^n}{N_A} g(N_A \Delta x) + \frac{\tilde{u}_{i+N_B}^n - \tilde{u}_i^n}{N_B} g(N_B \Delta x) \right)}_{:=\mathbb{I}(\tilde{u}^n)(x_i)} + \sum_{j=N_A+1}^{N_B-1} \frac{\tilde{u}_{i+j}^n - \tilde{u}_i^n}{j} g(j \Delta x) \quad (5.12)$$

where $N_A = \lfloor \frac{A}{\Delta x} \rfloor$, $N_B = \lfloor \frac{B}{\Delta x} \rfloor$ and

$$\tilde{u}_k^n = \begin{cases} u_k^n & \text{if } k \leq N, \\ u_N^n + (k - N) \Delta x \frac{u_N^n - u_{N-1}^n}{\Delta x} & \text{if } k > N. \end{cases}$$

Note that we approximate $\partial_x u(t, b) = \frac{u_N^n - u_{N-1}^n}{\Delta x}$. To sum up, the numerical scheme is then given by :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t V \left(\frac{\mathbb{I}(\tilde{u}^n)(x_i)}{I_g} \right) \quad \text{where} \quad I_g = \int_0^{+\infty} g(z) dz, \quad (5.13)$$

and $\mathbb{I}(\tilde{u}^n)(x_i)$ is given by (5.12).

5.2 Analysis of the scheme

This approximation of the integral term is justified by the following lemma

Lemma 5.1. *There exists a constant $K \geq 0$ such that*

$$|I(u(t, \cdot))(x) - \mathbb{I}(u(t, \cdot))(x)| \leq \frac{KB}{A} \Delta x. \quad (5.14)$$

Proof. Using that the trapezoidal quadrature error for a Lipschitz function f is of order $LB\Delta x$, where L is the Lipschitz constant of f , it suffices to show that the function

$$z \mapsto \frac{u(t, x+z) - u(t, x)}{z} g(z)$$

is Lipschitz continuous in $[A, B]$, with a Lipschitz constant given by $\frac{K}{A}$. Since $z \mapsto \frac{u(t, x+z) - u(t, x)}{z}$ and g are bounded and g is Lipschitz continuous, it suffices to show that $z \mapsto \frac{u(t, x+z) - u(t, x)}{z}$ is Lipschitz continuous. Let $z_1, z_2 \in [A, B]$. We have

$$\begin{aligned} & \left| \frac{u(t, x+z_1) - u(t, x)}{z_1} - \frac{u(t, x+z_2) - u(t, x)}{z_2} \right| \\ & \leq \left| \frac{1}{z_1} (u(t, x+z_1) - u(t, x+z_2)) \right| + \left| \frac{u(t, x+z_2) - u(t, x)}{z_2} \cdot \frac{z_2 - z_1}{z_1} \right| \\ & \leq \frac{2L_0}{A} |z_1 - z_2| \end{aligned}$$

□

We now prove, under the following CFL condition

$$\Delta t \leq \frac{I_g}{L\mathcal{I}} \quad \text{where} \quad \mathcal{I} = \frac{1}{2N_A} g(N_A \Delta x) + \left[\sum_{j=N_A+1}^{N_B-1} \frac{g(j\Delta x)}{j} \right] + \frac{1}{2N_B} g(N_B \Delta x) \quad (5.15)$$

and L is the Lipschitz constant associated to V , that the scheme is monotone.

Remark 5.2. *We can notice that the CFL condition does not explicitly depend on the space step Δx . Indeed, we can remark that the term \mathcal{I} corresponds to the trapezoidal quadrature rule applied to the function $\frac{g(z)}{z}$ on the interval (A, B) . Also, it is worth recalling that for the “local” equation $u_t = V(u_x)$ discretized with the simple scheme*

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t V \left(\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} \right)$$

the CFL condition is $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{L}$. This condition is usually worse than the one obtained in the non local case if $g(N_A \Delta x)$ is small.

Theorem 5.3 (Monotonicity of the scheme). *Assume that (5.15) holds and let u and v*

be respectively a sub and a super-solution of the scheme, i.e. such that

$$u_i^{n+1} \leq u_i^n + \Delta t V \left(\frac{\mathbb{I}(\tilde{u}^n)(x_i)}{I_g} \right) \quad \text{and} \quad v_i^{n+1} \geq v_i^n + \Delta t V \left(\frac{\mathbb{I}(\tilde{v}^n)(x_i)}{I_g} \right).$$

Assume also that $u_i^0 \leq v_i^0$ for all $i \in \{0, \dots, N\}$. Then

$$u_i^n \leq v_i^n \quad \forall i \in \{0, \dots, N\}, n \in \{0, \dots, N_T\}.$$

Proof. The proof is made by induction. The initialization is true by hypothesis. Assume that for a certain n , we have

$$u_i^n \leq v_i^n \quad \forall i \in \{0, \dots, N\}.$$

We have

$$u_i^{n+1} - v_i^{n+1} \leq u_i^n - v_i^n + \Delta t \left(V \left(\frac{\mathbb{I}(\tilde{u}^n)(x_i)}{I_g} \right) - V \left(\frac{\mathbb{I}(\tilde{v}^n)(x_i)}{I_g} \right) \right)$$

Using that

$$\mathbb{I}(\tilde{u}^n)(x_i) \leq \mathbb{I}(\tilde{v}^n)(x_i) - (u_i^n - v_i^n)\mathcal{I}$$

and since V is monotone, we deduce that

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} - v_i^{n+1} &\leq u_i^n - v_i^n + \Delta t \left(V \left(\frac{\mathbb{I}(\tilde{v}^n)(x_i) - (u_i^n - v_i^n)\mathcal{I}}{I_g} \right) - V \left(\frac{\mathbb{I}(\tilde{v}^n)(x_i)}{I_g} \right) \right) \\ &\leq (u_i^n - v_i^n) \left(1 - \frac{\Delta t}{I_g} L\mathcal{I} \right) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

This ends the proof. □

We now show that $(u_i^n)_i$ is non decreasing and "Lipschitz continuous".

Theorem 5.4 (Monotonicity and Lipschitz bounds on the numerical solution). *For all $i \in \{0, \dots, N\}$ and $n \in \{0, \dots, N_T - 1\}$, we have*

$$0 \leq \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \leq V_{\max}. \quad (5.16)$$

Moreover, if we assume that (5.15) holds and that

$$0 \leq \frac{u_{i+1}^0 - u_i^0}{\Delta x} \leq L_0$$

for all $i \in \{0, \dots, N - 1\}$, then, for all $i \in \{0, \dots, N - 1\}$ and $n \in \{0, \dots, N_T\}$, we have

$$0 \leq \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} \leq L_0.$$

Proof. Estimate (5.16) is a direct consequence of the definition of the scheme and the fact that $0 \leq V \leq V_{\max}$. Let us show the second result by induction. The initialization is true by hypothesis. Assume that, for a given n , we have

$$0 \leq \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} \leq L_0 \quad \forall i \in \{0, \dots, N-1\}.$$

We set $\bar{u}_i^n = u_{i+1}^n$ and

$$\bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^n + \Delta t V \left(\frac{\mathbb{I}(\bar{u}^n)(x_i)}{I_g} \right).$$

In particular, we have $\bar{u}_i^{n+1} = u_{i+1}^{n+1}$ for all $i = 0, \dots, N-1$. By monotonicity of the scheme, since $\bar{u}_i^n \geq u_i^n$, we deduce that

$$u_{i+1}^{n+1} = \bar{u}_i^{n+1} \geq u_i^{n+1} \quad \forall i = 0, \dots, N-1.$$

In the same way, if we define $\underline{u}_i^n = u_{i+1}^n - L_0 \Delta x$ and

$$\underline{u}_i^{n+1} = \underline{u}_i^n + \Delta t V \left(\frac{\mathbb{I}(\underline{u}^n)(x_i)}{I_g} \right),$$

then we have $\underline{u}_i^{n+1} = u_{i+1}^{n+1} - L_0 \Delta x$ for all $i = 0, \dots, N-1$ and $\underline{u}_i^n \leq u_i^n$. By monotonicity of the scheme, we then get

$$u_{i+1}^{n+1} - L_0 \Delta x = \underline{u}_i^{n+1} \leq u_i^{n+1}.$$

This ends the proof of the theorem. □

We now give the convergence result, with the estimate of convergence. We first define

$$Q_T^\Delta = \{(t_n, x_i), t_n = n\Delta t, x_i = a + i\Delta x, n \in \{0, \dots, N_T\}, i \in \{0, \dots, N\}\}$$

and

$$Q_0^\Delta = \{x_i = a + i\Delta x, i \in \{0, \dots, N\}\}.$$

Theorem 5.5 (Discrete-continuous error estimate for (1.1)). *Assume that $T \leq 1$ and $\Delta x + \Delta t \leq 1$. Assume also that the CFL condition (5.15) is satisfied. Then, there exists a constant $K > 0$, depending only on the Lipschitz constant of u_0 and on g , such that the error estimate between the continuous solution u of (1.1) and the discrete solution v of (5.13) (with initial condition given by v_0) is given by*

$$\sup_{Q_T^\Delta} |u - v| \leq K \left(\sqrt{\Delta t} + \frac{B}{A} \Delta x + R_B + \left(A + \frac{A^2}{\sqrt{\Delta t}} \right) \right) + \sup_{Q_0^\Delta} |u_0 - v_0|, \quad (5.17)$$

if $K \left(\sqrt{\Delta t} + \frac{B}{A} \Delta x + R_B + \left(A + \frac{A^2}{\sqrt{\Delta t}} \right) \right) \leq 1$ and $\sup_{Q_0^\Delta} |u_0 - v_0| \leq 1$ and where

$$R_B = \int_B^{+\infty} g(z) dz.$$

Remark 5.6. For example, if g has a compact support, B can be choose large enough so that $R_B = 0$ and we can take A of the order of $\sqrt{\Delta x}$. In that case, we recover a estimate of order $\sqrt{\Delta x + \Delta t}$. If, we take $g(z) = e^{-z}$, then we can take $B = -\ln(\Delta x)$ and $A = \sqrt{\Delta x}$ and we get an estimate of order $-\ln(\Delta x)\sqrt{\Delta x + \Delta t}$.

Proof. The proof is inspired by the one of Crandall Lions [30], revisited by Alvarez *et al.* [4] and is an adaptation of the comparison principle.

We define μ by

$$\mu = \sup_{Q_T^\Delta} |u(t_n, x_i) - v_i^n|.$$

We want to prove that μ is bounded by $f(\Delta x, \Delta t)$, f being defined later. We first assume that $u_0(x_i) \geq v_i^0$ and we set

$$\mu_0 = \sup_{Q_0^\Delta} |u_0(x_i) - v_i^0| \geq 0.$$

We define for $0 < \alpha, \varepsilon \leq 1$ and $\sigma > 0$, the function

$$\begin{aligned} \psi &: [0, T] \times \mathbb{R} \times Q_T^\Delta \rightarrow \mathbb{R} \\ &(t, x, t_n, x_i) \mapsto \psi(t, x, t_n, x_i) \end{aligned}$$

by

$$\psi(t, x, t_n, x_i) = u(t, x) - v(t_n, x_i) - \frac{|t - t_n|^2}{2\varepsilon} - \frac{|x - x_i|^2}{2\varepsilon} - \sigma t - \alpha|x|^2 - \alpha|x_i|^2.$$

This function have a maximum denoted by $M_{\varepsilon, \alpha}^\sigma$. Indeed, u is Lipschitz continuous then

$$|u(t, x) - u(t, 0)| \leq L_0|x|,$$

and since, $T \leq 1$,

$$|u(t, x)| \leq L_0|x| + Ct + |u_0(0)| \leq K(1 + |x|). \quad (5.18)$$

In the same way, using Theorem 5.4, we also have that

$$|v(t_n, x_i)| \leq K(1 + |x_i|). \quad (5.19)$$

Let us underline that the constant K is not necessarily the same on each estimation. This implies that the maximum $M_{\varepsilon, \alpha}^\sigma$ is reached in a point denoted by (t^*, x^*, t_n^*, x_i^*) . We now give some estimate on the maximum point. We have

$$\alpha|x^*| + \alpha|x_i^*| \leq K \quad (5.20)$$

and

$$|x^* - x_i^*| \leq K\varepsilon \text{ and } |t^* - t_n^*| \leq (K + 2\sigma)\varepsilon. \quad (5.21)$$

Indeed, since (t^*, x^*, t_n^*, x_i^*) is a maximum point of ψ , we have

$$\psi(t^*, x^*, t_n^*, x_i^*) \geq \psi(0, 0, 0, 0) \geq 0.$$

Then we obtain, by (5.18) and (5.19), and using Young's inequality that

$$\begin{aligned} \alpha|x^*|^2 + \alpha|x_i^*|^2 &\leq u(t^*, x^*) - u(0, 0) - v(t_n^*, x_i^*) + v(0, 0) \\ &\leq K(1 + |x^*| + |x_i^*|) \leq K + \frac{K^2}{\alpha} + \frac{\alpha}{2}|x^*|^2 + \frac{\alpha}{2}|x_i^*|^2. \end{aligned}$$

This implies (5.20) since $\alpha \leq 1$.

Using that $\psi(t^*, x^*, t_n^*, x_i^*) \geq \psi(t^*, x_i^*, t_n^*, x_i^*)$, (5.20) and the fact that u is Lipschitz continuous, we get

$$\begin{aligned} \frac{|x^* - x_i^*|^2}{2\varepsilon} &\leq u(t^*, x^*) - u(t^*, x_i^*) - \alpha|x^*|^2 + \alpha|x_i^*|^2 \\ &\leq K|x^* - x_i^*| + \alpha \underbrace{(|x_i^*| - |x^*|)}_{\leq |x^* - x_i^*|} (|x^*| + |x_i^*|) \leq K|x^* - x_i^*|. \end{aligned}$$

This implies the first inequality of (5.21). We obtain the second one in the same way, using that $\psi(t^*, x^*, t_n^*, x_i^*) \geq \psi(t_n^*, x^*, t_n^*, x_i^*)$ and the fact that u is Lipschitz continuous with respect to t . Inequality (5.20) can be strengthened to

$$\alpha|x^*|^2 + \alpha|x_i^*|^2 \leq K. \quad (5.22)$$

Indeed, using (5.16) and (5.21), the facts that $\psi(t^*, x^*, t_n^*, x_i^*) \geq \psi(0, 0, 0, 0)$, $u_0(x_i) \geq v_i^0$, and that u is Lipschitz continuous with respect to x and t , we obtain

$$\alpha|x^*|^2 + \alpha|x_i^*|^2 \leq u(t^*, x^*) - u(0, x_i^*) + u(0, x_i^*) - v(t_n^*, x_i^*) \leq K(|x^* - x_i^*| + t^*) + Kt_n^* \leq K.$$

We assume now that for σ large enough, we have either $t^* = 0$ or $t_n^* = 0$. We argue by contradiction and we suppose that t^* and t_n^* are positive. Since u is a sub-solution of (1.1), and $u - \phi_1$ reaches a maximum point in (t^*, x^*) , with ϕ_1 given by

$$\phi_1(t, x) = v(t_n^*, x_i^*) + \frac{|t - t_n^*|^2}{2\varepsilon} + \frac{|x - x_i^*|^2}{2\varepsilon} + \sigma t + \alpha|x|^2 + \alpha|x_i^*|^2.$$

Then by definition of A -viscosity solution of (1.1), we have that,

$$\begin{aligned} \sigma + \frac{t^* - t_n^*}{\varepsilon} &\leq V \left(\frac{1}{I_g} \left(\int_0^A \frac{\phi_1(t^*, x^* + z) - \phi_1(t^*, x^*)}{z} g(z) dz + \int_A^{+\infty} \frac{u(t^*, x^* + z) - u(t^*, x^*)}{z} g(z) dz \right) \right) \\ &\leq V \left(\frac{1}{I_g} \left(\int_0^A \left(\frac{x^* - x_i^*}{\varepsilon} + \frac{z}{2\varepsilon} + \alpha(2x^* + z) \right) g(z) dz \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_A^{+\infty} \frac{u(t^*, x^* + z) - u(t^*, x^*)}{z} g(z) dz \right) \right). \end{aligned} \quad (5.23)$$

On the other hand, since $t_n^* > 0$, and (t^*, x^*, t_n^*, x_i^*) is a maximum point of ψ , we have that for all $x_i \in Q^\Delta$,

$$\psi(t^*, x^*, t_n^*, x_i^*) \geq \psi(t^*, x^*, t_n^* - \Delta t, x_i).$$

Then, for all $x_i \in Q^\Delta$, we obtain that,

$$v(t_n^* - \Delta t, x_i) - v(t_n^*, x_i^*) \geq \phi_2(t_n^* - \Delta t, x_i) - \phi_2(t_n^*, x_i^*).$$

where $\phi_2(t, x) = -\left(\frac{|t^* - t|^2}{2\varepsilon} + \frac{|x^* - x|^2}{2\varepsilon} + \alpha|x^*|^2\right)$. Since v_i^n is a solution of the discrete problem (5.13), then we obtain, for $x_i = x_i^*$

$$\begin{aligned} & \frac{\phi_2(t_n^*, x_i^*) - \phi_2(t_n^* - \Delta t, x_i^*)}{\Delta t} \\ & \geq \frac{v(t_n^*, x_i^*) - v(t_n^* - \Delta t, x_i^*)}{\Delta t} \\ & \geq V \left(\frac{1}{I_g} \mathbb{I}(v^{n-1})(x_i^*) \right). \end{aligned}$$

That is

$$\frac{t^* - t_n^*}{\varepsilon} + \frac{\Delta t}{2\varepsilon} \geq V \left(\frac{1}{I_g} \mathbb{I}(v^{n-1})(x_i^*) \right).$$

Moreover, by (5.16), we have

$$v(t_n^* - \Delta t, x_i) - v(t_n^* - \Delta t, x_i^*) \geq -V_{\max} \Delta t + v(t_n^*, x_i) - v(t_n^*, x_i^*).$$

This implies that (with \mathcal{I} defined in (5.15))

$$\mathbb{I}(v^{n-1})(x_i^*) \geq \mathbb{I}(v^n)(x_i^*) - \mathcal{I}V_{\max} \Delta t$$

and so

$$\frac{t^* - t_n^*}{\varepsilon} + \frac{\Delta t}{2\varepsilon} \geq V \left(\frac{1}{I_g} \mathbb{I}(v^n)(x_i^*) \right) - K \Delta t. \quad (5.24)$$

Subtracting inequality (5.24) to (5.23) and using the fact that V is a Lipschitz continuous, we get

$$\begin{aligned} \sigma \leq & K \left(\int_0^A \left| \frac{x^* - x_i^*}{\varepsilon} + \frac{z}{2\varepsilon} + \alpha(2x^* + z) \right| g(z) dz + \int_B^{+\infty} \left| \frac{u(t^*, x^* + z) - u(t^*, x^*)}{z} g(z) \right| dz \right) \\ & + V \left(\frac{1}{I_g} \int_A^B \frac{u(t^*, x^* + z) - u(t^*, x^*)}{z} g(z) dz \right) - V \left(\frac{\mathbb{I}(v^n)(x_i^*)}{I_g} \right) + \frac{\Delta t}{2\varepsilon} + K \Delta t. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Note that, by (5.20) and (5.21), we have

$$\int_0^A \left| \frac{x^* - x_i^*}{\varepsilon} + \frac{z}{2\varepsilon} + \alpha(2x^* + z) \right| g(z) dz \leq K \left(A + \frac{A^2}{\varepsilon} \right)$$

and

$$\int_B^{+\infty} \left| \frac{u(t^*, x^* + z) - u(t^*, x^*)}{z} g(z) \right| dz \leq L_0 R_B.$$

Hence inequality (5.25) becomes

$$\sigma \leq V \left(\frac{1}{I_g} \int_A^B \frac{u(t^*, x^* + z) - u(t^*, x^*)}{z} g(z) dz \right) - V \left(\frac{\mathbb{I}(v^n)(x_i^*)}{I_g} \right) + K \frac{\Delta t}{\varepsilon} + K R_B + K \left(A + \frac{A^2}{\varepsilon} \right). \quad (5.26)$$

Moreover, by (5.14), we have

$$\left| \int_A^B \frac{u(t^*, x^* + z) - u(t^*, x^*)}{z} g(z) dz - \mathbb{I}(u(t^*, \cdot))(x^*) \right| \leq \frac{KB}{A} \Delta x,$$

hence

$$V \left(\frac{1}{I_g} \int_A^B \frac{u(t^*, x^* + z) - u(t^*, x^*)}{z} g(z) dz \right) \leq V \left(\frac{\mathbb{I}(u(t^*, \cdot))(x^*)}{I_g} \right) + \frac{KB}{A} \Delta x. \quad (5.27)$$

We now want to bound

$$V \left(\frac{\mathbb{I}(u(t^*, \cdot))(x^*)}{I_g} \right) - V \left(\frac{\mathbb{I}(v^n)(x_i^*)}{I_g} \right).$$

Since $\psi(t^*, x^*, t_n^*, x_i^*) \geq \psi(t^*, x^* + z, t_n^*, x_i^* + z)$, we get that

$$\frac{u(t^*, x^* + z) - u(t^*, x^*)}{z} \leq \frac{v(t_n^*, x_i^* + z) - v(t_n^*, x_i^*)}{z} + 2\alpha(x^* + x_i^* + z).$$

This implies that

$$\begin{aligned} \mathbb{I}(u(t^*, \cdot))(x^*) &\leq \mathbb{I}(v^n)(x_i^*) + 2\alpha(x^* + x_i^*)\Delta x \left(\frac{1}{2}g(N_A\Delta x) + \frac{1}{2}g(N_B\Delta x) + \sum_{j=N_A+1}^{N_B-1} g(j\Delta x) \right) \\ &\quad + 2\alpha\Delta x \left(\frac{1}{2}N_A\Delta x.g(N_A\Delta x) + \frac{1}{2}N_B\Delta x.g(N_B\Delta x) + \sum_{j=N_A+1}^{N_B-1} j\Delta x.g(j\Delta x) \right) \\ &\leq \mathbb{I}(v^n)(x_i^*) + K\sqrt{\alpha} \int_A^B g(z)dz + K\alpha \int_A^B zg(z)dz + B(\sqrt{\alpha} + \alpha)\Delta x \\ &\leq \mathbb{I}(v^n)(x_i^*) + K(\sqrt{\alpha} + \alpha)(1 + B\Delta x). \end{aligned}$$

We then get

$$\begin{aligned} &V \left(\frac{\mathbb{I}(u(t^*, \cdot))(x^*)}{I_g} \right) - V \left(\frac{\mathbb{I}(v^n)(x_i^*)}{I_g} \right) \\ &\leq V \left(\frac{\mathbb{I}(v^n)(x_i^*)}{I_g} + K(\sqrt{\alpha} + \alpha)(1 + B\Delta x) \right) - V \left(\frac{\mathbb{I}(v^n)(x_i^*)}{I_g} \right) \\ &\leq K(\sqrt{\alpha} + \alpha)(1 + B\Delta x) \\ &\leq K\sqrt{\alpha}(1 + B\Delta x). \end{aligned}$$

Injecting this in (5.26) and using (5.27), we get

$$\sigma \leq K\sqrt{\alpha}(1 + B\Delta x) + \frac{KB}{A}\Delta x + K\frac{\Delta t}{\varepsilon} + KR_B + K\left(A + \frac{A^2}{\varepsilon}\right).$$

Let $\sigma^* = K\sqrt{\alpha}(1 + B\Delta x) + \frac{KB}{A}\Delta x + K\frac{\Delta t}{\varepsilon} + KR_B + K\left(A + \frac{A^2}{\varepsilon}\right)$, then we have a contradiction for all $\sigma \geq \sigma^*$, and then $t^* = 0$ or $t_n^* = 0$ for all σ such that $\sigma \geq \sigma^*$.

If $t^* = 0$, using (5.16), (5.21) and the fact that u_0 is Lipschitz continuous, we obtain that

$$M_{\varepsilon,\alpha}^\sigma \leq u(0, x^*) - v(t_n^*, x_i^*) \leq u_0(x^*) - u_0(x_i^*) + Kt_n^* + \mu_0 \leq K(|x^* - x_i^*| + t_n^*) + \mu_0 \leq K(1 + \sigma)\varepsilon + \mu_0.$$

In the same way, if $t_n^* = 0$, we get

$$M_{\varepsilon,\alpha}^\sigma \leq u(t^*, x^*) - v(0, x_i^*) \leq u(t^*, x^*) - u_0(x_i^*) + \mu_0 \leq K(|x^* - x_i^*| + t^*) + \mu_0 \leq K(1 + \sigma)\varepsilon + \mu_0.$$

We conclude that for all $\sigma^* \leq \sigma$, we have

$$M_{\varepsilon,\alpha}^\sigma \leq K(1 + \sigma)\varepsilon + \mu_0.$$

We then deduce that, for every $(t_n, x_i) \in Q_T^\Delta$, and for $\sigma = \sigma^* \leq 1$, we have that

$$u(t_n, x_i) - v(t_n, x_i) - \left(K\sqrt{\alpha}(1 + B\Delta x) + \frac{KB}{A}\Delta x + K\frac{\Delta t}{\varepsilon} + KR_B + K\left(A + \frac{A^2}{\varepsilon}\right) \right) T \leq K\varepsilon + \mu_0.$$

Sending $\alpha, \eta \rightarrow 0$, and choosing $\varepsilon = \sqrt{\Delta t}$, we obtain that

$$\mu \leq K\left(\sqrt{\Delta t} + \frac{B}{A}\Delta x + R_B + \left(A + \frac{A^2}{\sqrt{\Delta t}}\right)\right) + \mu_0,$$

provided that $\mu_0 \leq 1$ and $\Delta x, \Delta t$ small enough (so that $\sigma^* \leq 1$).

Using the same arguments of Alvarez *et al.* [4, Theorem 2], we easily deduce the result in the general case ($u_0(x_i) \not\geq v_i^0$). This ends the proof. \square

Remark 5.7. *If $T \geq 1$, then since we have the estimation in each time interval of length 1, we then obtain that*

$$\mu \leq K.T\left(\sqrt{\Delta t} + \frac{B}{A}\Delta x + R_B + \left(A + \frac{A^2}{\sqrt{\Delta t}}\right)\right) + \mu_0.$$

5.3 Some numerical illustrations

In the numerical experiments below, we take the following discretization parameters $\Delta t = 0.005$, $T = 0.5$, $\Delta x = 0.05$, $b = -a = 3$ and $B = 10$. For the velocity V , inspired by [50]

we consider the two following cases:

$$\begin{aligned} \text{(Greenshield): } V(x) &= \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq x_0 \\ V_{max} \left(1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^p\right) & \text{if } x \in (x_0, x_{max}) \\ V_{max} \left(1 - \left(\frac{x_0}{x_{max}}\right)^p\right) & \text{if } x \geq x_{max} \end{cases} \\ \text{(Underwood): } V(x) &= \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq x_0 \\ V_{max} \left(1 - e^{-(x-x_0)^p}\right) & \text{if } x \in (x_0, x_{max}) \\ V_{max} \left(1 - e^{-(x_{max}-x_0)^p}\right) & \text{if } x \geq x_{max} \end{cases} \end{aligned}$$

where $x_0 > 0$, $x_{max} > x_0$ and V_{max} are real parameters and $p \in \mathbb{N}^*$. For the interpretation, we recall that x_0 corresponds to the minimal distance between two successive cars and x_{max} the distance up to which a driver will not increase his speed. One can easily check that this two examples satisfy assumptions **(H)**. In the sequel, we take $x_0 = 0.2$, $x_{max} = 10$, $p = 1$ and $V_{max} = 90$.

For the weighting function g , we take $g(z) = \eta e^{-\eta z}$ with $\eta > 0$ so that $I_g = 1$, see equation (5.13). It can be also verified that it satisfies assumptions **(H)**.

Riemann initial data The initial data is given by

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{x}{\rho_L} & \text{if } x < 0 \\ \frac{x}{\rho_R} & \text{if } x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \rho_0(x) = \begin{cases} \rho_L & \text{if } x < 0 \\ \rho_R & \text{if } x \geq 0 \end{cases} \quad (5.28)$$

where $\rho_L > 0$ and $\rho_R > 0$ are the initial density on left and on the right respectively. On Figure 5.2, we represent the density $\rho = \frac{1}{u_x}$ at time $t = 0.2$ for different values of $\eta \in \{0.2, 1, 1.8\}$ taking $\rho_L = 0.2$ and $\rho_R = 0.8$. We also represent in dotted line the “local” case corresponding to the situation where we solve $u_t = V(u_x)$ (meaning that the driver at position x take only into account the car directly in front of him to adapt his speed). As we can see, and as we can expect, taking into account downstream traffic on a wider distance (meaning small η) leads to a smoother repartition of the density and somehow delays the progression of the front.

Oscillating initial data Let us consider a second situation with an oscillating initial density:

$$\rho_0(x) = \begin{cases} \rho_L = 0.5 & \text{if } x < -2 \\ 0.4 \sin((x+2)\pi) + 0.5 & \text{if } x \in (-2, 2) \\ \rho_R = 0.5 & \text{if } x \geq 2 \end{cases} \quad (5.29)$$

The associated initial state u_0 is recovered by simple integration. On Figure 5.3, we represent the density profile also at time $t = 0.2$ for $\eta \in \{0.2, 1, 1.8\}$ and in dotted line the “local” case. Once again, we can remark that the smaller η is, the “smoother” the density is.

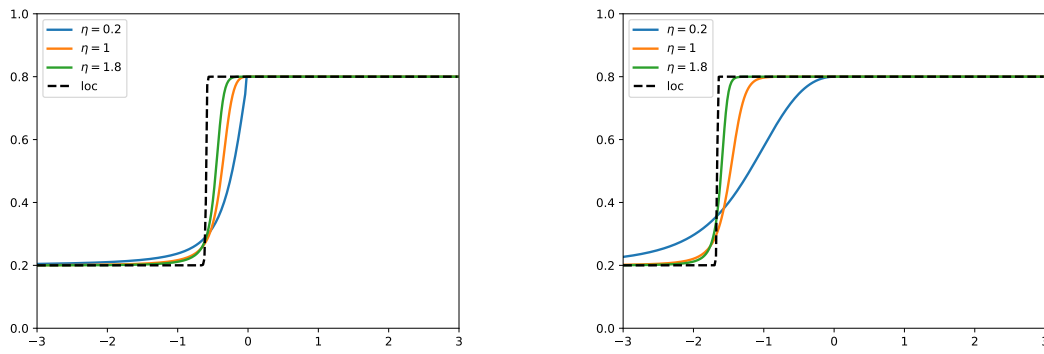


Figure 5.2: Density ρ at time $t = 0.2$ for different value of η using Greenshield velocity (on the left) and Underwood velocity (on the right) using (5.28) initial density.

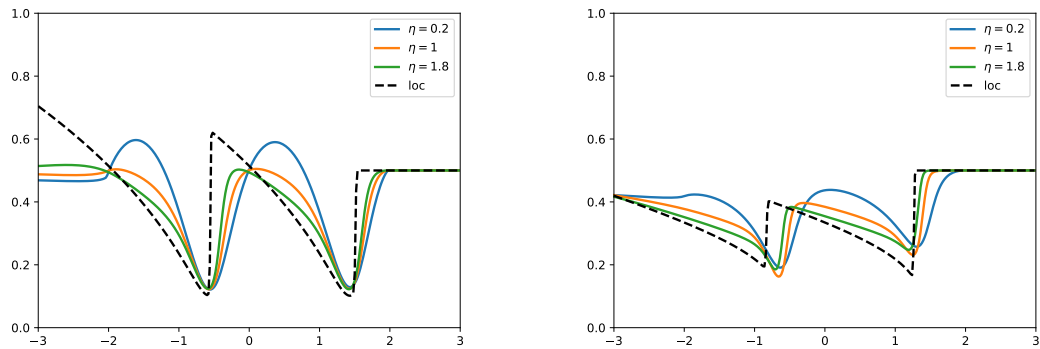


Figure 5.3: Density ρ at time $t = 0.2$ for different value of η using Greenshield velocity (on the left) and Underwood velocity (on the right) using (5.29) initial density.

ACKNOWLEDGMENTS

This project was co-financed by the European Union with the European regional development fund (ERDF,18P03390/18E01750/18P02733) and by the Normandie Regional Council via the M2SiNUM project.

Chapter 6

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse on a obtenu des modèles macroscopiques qui décrivent le trafic routier grâce à des résultats d'homogénéisation périodique et stochastique sur une jonction. Le résultat d'homogénéisation stochastique sur une jonction est en particulier, à notre connaissance, le premier résultat dans un cadre non stationnaire ergodique. Enfin, nous avons présenté un modèle non-local pour le trafic routier qui est obtenu par remise à l'échelle d'un modèle microscopique. Pour ce modèle, une étude complète a été réalisée (existence et unicité, convergence d'un schéma numérique, simulations numériques).

1 Perspectives

Les résultats obtenus dans cette thèse ouvrent plusieurs perspectives:

- Pour le résultat stochastique, on a obtenu un résultat d'homogénéisation sur une jonction, en considérant un hamiltonien général H donné avec des variables rapides (y/ε , i.e à l'échelle macroscopique) c.à.d le passage microscopique-macroscopique n'est pas abordé dans notre travail. Un résultat plus intéressant encore serait de traiter des problèmes de passage microscopique-macroscopique dans un cadre stochastique. Plus précisément, si on considère à l'échelle microscopique une situation particulière aléatoire du trafic routier (qui sont nombreuses, diversité des véhicules, des vitesses, ...), qui sera décrite par un système d'EDOs qui dépend d'une variable aléatoire, le but serait de dériver un problème macroscopique à partir de ce système microscopique. Un exemple d'une situation à l'échelle microscopique est traité par Forcadel et Cardaliaguet où ils ont considéré un modèle stochastique de type follow the leader avec différent type des conducteurs et véhicules qui sont distribués d'une manière aléatoire sur la route. Le cas d'une jonction n'est par contre pas abordé dans leur travail.
- Une deuxième extension du résultat stochastique est de supposer que la donnée initiale $u_0(\cdot)$ dépend d'une variable aléatoire. Tous les travaux effectués dans le cadre des problèmes d'homogénéisation stochastique, la donnée initiale était supposé déterministe. Alors, il sera possible d'étudier un tel problème avec une donnée initiale donnée par un processus stochastique et obtenir un résultat d'homogénéisation.

- Dans le troisième travail, on a considéré une équation de HJ non-locale sur la ligne réelle, alors il est judicieux de généraliser ce résultat sur une jonction. Il faut d'abord passer des coordonnées Lagrangiennes aux coordonnées Euleriennes pour qu'on puisse trouver la condition à la jonction en un point physique de la route. Pour faire cela il faut définir ce qu'on appelle la fonction de distribution cumulative ρ et définir ensuite l'EDP non-locale telle que ρ soit sa solution. Il faudra vérifier que cette EDP est bien l'injection du système d'EDO et ensuite définir le problème limite avec une condition sur la jonction. La difficulté nouvelle dans ce cadre sera de définir la condition de jonction pour des hamiltoniens non-locaux.

Bibliography

- [1] Y. ACHDOU, F. CAMILLI, A. CUTRÌ, AND N. TCHOU, *Hamilton-Jacobi equations constrained on networks*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl., 20 (2013), pp. 413–445.
- [2] Y. ACHDOU AND N. TCHOU, *Hamilton-Jacobi equations on networks as limits of singularly perturbed problems in optimal control: dimension reduction*, Comm. Partial Differential Equations, 40 (2015), pp. 652–693.
- [3] K. S. ALEXANDER, *A note on some rates of convergence in first-passage percolation*, Ann. Appl. Probab., 3 (1993), pp. 81–90.
- [4] O. ALVAREZ, E. CARLINI, R. MONNEAU, AND E. ROUY, *Convergence of a first order scheme for a non local eikonal equation*, IMACS Journal "Applied Numerical Mathematics", 56 (2006), pp. 1136–1146.
- [5] S. ARMSTRONG AND P. CARDALIAGUET, *Stochastic homogenization of quasilinear Hamilton-Jacobi equations and geometric motions*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 20 (2018), pp. 797–864.
- [6] S. N. ARMSTRONG AND P. CARDALIAGUET, *Quantitative stochastic homogenization of viscous Hamilton-Jacobi equations*, Comm. Partial Differential Equations, 40 (2015), pp. 540–600.
- [7] S. N. ARMSTRONG, P. CARDALIAGUET, AND P. E. SOUGANIDIS, *Error estimates and convergence rates for the stochastic homogenization of Hamilton-Jacobi equations*, J. Amer. Math. Soc., 27 (2014), pp. 479–540.
- [8] S. N. ARMSTRONG AND P. E. SOUGANIDIS, *Stochastic homogenization of Hamilton-Jacobi and degenerate Bellman equations in unbounded environments*, J. Math. Pures Appl. (9), 97 (2012), pp. 460–504.
- [9] —, *Stochastic homogenization of level-set convex Hamilton-Jacobi equations*, Int. Math. Res. Not. IMRN, (2013), pp. 3420–3449.
- [10] S. N. ARMSTRONG AND H. V. TRAN, *Stochastic homogenization of viscous Hamilton-Jacobi equations and applications*, Anal. PDE, 7 (2014), pp. 1969–2007.
- [11] S. N. ARMSTRONG, H. V. TRAN, AND Y. YU, *Stochastic homogenization of non-convex Hamilton-Jacobi equations in one space dimension*, J. Differential Equations, 261 (2016), pp. 2702–2737.

- [12] S. AWATIF, *Equations d'hamilton-jacobi du premier ordre avec termes intégrodifférentiels*, Communications in Partial Differential Equations, 16 (1991), pp. 1057–1074.
- [13] G. BARLES, *Discontinuous viscosity solutions of first-order Hamilton-Jacobi equations: a guided visit*, Nonlinear Anal., 20 (1993), pp. 1123–1134.
- [14] —, *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, vol. 17 of Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications], Springer-Verlag, Paris, 1994.
- [15] —, *An introduction to the theory of viscosity solutions for first-order Hamilton-Jacobi equations and applications*, in Hamilton-Jacobi equations: approximations, numerical analysis and applications, vol. 2074 of Lecture Notes in Math., Springer, Heidelberg, 2013, pp. 49–109.
- [16] G. BARLES, A. BRIANI, E. CHASSEIGNE, AND C. IMBERT, *Flux-limited and classical viscosity solutions for regional control problems*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 24 (2018), pp. 1881–1906.
- [17] G. BARLES AND E. CHASSEIGNE, *An illustrated guide of the modern approaches of hamilton-jacobi equations and control problems with discontinuities*, Preprint.
- [18] S. BLANDIN AND P. GOATIN, *Well-posedness of a conservation law with non-local flux arising in traffic flow modeling*, Numer. Math., 132 (2016), pp. 217–241.
- [19] L. A. CAFFARELLI, P. E. SOUGANIDIS, AND L. WANG, *Homogenization of fully nonlinear, uniformly elliptic and parabolic partial differential equations in stationary ergodic media*, Comm. Pure Appl. Math., 58 (2005), pp. 319–361.
- [20] P. CARDALIAGUET AND N. FORCADEL, *From heterogeneous microscopic traffic flow models to macroscopic models*, Preprint.
- [21] R. E. CHANDLER, R. HERMAN, AND E. W. MONTROLL, *Traffic dynamics: studies in car following*, Operations Res., 6 (1958), pp. 165–184.
- [22] F. A. CHIARELLO, *An overview of non-local traffic flow models*. Preprint, Dec. 2019.
- [23] F. A. CHIARELLO, J. FRIEDRICH, P. GOATIN, AND S. GÖTTLICH, *Micro-Macro limit of a non-local generalized Aw-Rascle type model*. Preprint, Jan. 2020.
- [24] F. A. CHIARELLO AND P. GOATIN, *Global entropy weak solutions for general non-local traffic flow models with anisotropic kernel*, ESAIM Math. Model. Numer. Anal., 52 (2018), pp. 163–180.
- [25] —, *Non-local multi-class traffic flow models*, Netw. Heterog. Media, 14 (2019), pp. 371–387.

- [26] F. A. A. CHIARELLO, J. FRIEDRICH, P. GOATIN, S. GÖTTLICH, AND O. KOLB, *A non-local traffic flow model for 1-to-1 junctions*, European Journal of Applied Mathematics, (2019).
- [27] M. G. CRANDALL, H. ISHII, AND P.-L. LIONS, *Uniqueness of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations revisited*, J. Math. Soc. Japan, 39 (1987), pp. 581–596.
- [28] —, *User’s guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 27 (1992), pp. 1–67.
- [29] M. G. CRANDALL AND P.-L. LIONS, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 277 (1983), pp. 1–42.
- [30] M. G. CRANDALL AND P.-L. LIONS, *Two approximations of solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Math. Comp., 43 (1984), pp. 1–19.
- [31] C. F. DAGANZO, *A variational formulation of kinematic waves: basic theory and complex boundary conditions*, Transportation Research Part B: Methodological, 39 (2005), pp. 187–196.
- [32] —, *On the variational theory of traffic flow: well-posedness, duality and applications*, Networks and Heterogeneous Media, 1 (2006), pp. 601–619.
- [33] A. DAVINI AND A. SICONOLFI, *Exact and approximate correctors for stochastic Hamiltonians: the 1-dimensional case*, Math. Ann., 345 (2009), pp. 749–782.
- [34] —, *Weak KAM Theory topics in the stationary ergodic setting*, Calc. Var. Partial Differential Equations, 44 (2012), pp. 319–350.
- [35] C. DE FILIPPIS AND P. GOATIN, *The initial-boundary value problem for general non-local scalar conservation laws in one space dimension*, Nonlinear Anal., 161 (2017), pp. 131–156.
- [36] F. DRAGONI, *Introduction to viscosity solution for non linear pdes, lecture notes*, (2018).
- [37] L. C. EVANS, *The perturbed test function method for viscosity solutions of nonlinear PDE*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 111 (1989), pp. 359–375.
- [38] —, *Periodic homogenisation of certain fully nonlinear partial differential equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 120 (1992), pp. 245–265.
- [39] N. FORCADEL, C. IMBERT, AND R. MONNEAU, *Homogenization of fully overdamped Frenkel-Kontorova models*, J. Differential Equations, 246 (2009), pp. 1057–1097.
- [40] N. FORCADEL, C. IMBERT, AND R. MONNEAU, *Homogenization of some particle systems with two-body interactions and of the dislocation dynamics*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 23 (2009), pp. 785–826.

- [41] N. FORCADEL, C. IMBERT, AND R. MONNEAU, *Homogenization of accelerated frenkel-kontorova models with n types of particles*, Transactions of the American Mathematical Society, 364 (2012), pp. 6187–6227.
- [42] N. FORCADEL AND W. SALAZAR, *Homogenization of second order discrete model and application to traffic flow*, Differential Integral Equations, 28 (2015), pp. 1039–1068.
- [43] N. FORCADEL AND W. SALAZAR, *Homogenization of a discrete model for a bifurcation and application to traffic flow*, J. Math. Pures Appl. (9), 136 (2020), pp. 356–414.
- [44] N. FORCADEL, W. SALAZAR, AND M. ZAYDAN, *Homogenization of second order discrete model with local perturbation and application to traffic flow*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 37 (2017), pp. 1437–1487.
- [45] G. GALISE, C. IMBERT, AND R. MONNEAU, *A junction condition by specified homogenization and application to traffic lights*, Anal. PDE, 8 (2015), pp. 1891–1929.
- [46] H. GAO, *Random homogenization of coercive Hamilton-Jacobi equations in 1d*, Calc. Var. Partial Differential Equations, 55 (2016), pp. Art. 30, 39.
- [47] M. GARAVELLO AND B. PICCOLI, *Traffic flow on networks*, vol. 1 of AIMS Series on Applied Mathematics, American Institute of Mathematical Sciences (AIMS), Springfield, MO, 2006. Conservation laws models.
- [48] D. C. GAZIS, R. HERMAN, AND R. W. ROTHERY, *Nonlinear follow-the-leader models of traffic flow*, Operations Res., 9 (1961), pp. 545–567.
- [49] P. GOATIN AND E. ROSSI, *Well-posedness of IBVP for 1D scalar non-local conservation laws*, Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 99 (2019).
- [50] P. GOATIN AND S. SCIALANGA, *Well-posedness and finite volume approximations of the LWR traffic flow model with non-local velocity*, Netw. Heterog. Media, 11 (2016), pp. 107–121.
- [51] S. GOUËZEL, *Cocycles sous-additifs et horofonctions*, in Actes du premier Congrès National de la SMF—Tours, 2016, vol. 31 of Sémin. Congr., Soc. Math. France, Paris, 2017, pp. 17–35.
- [52] J. GUERAND, *Équations de Hamilton-Jacobi discontinues et régularité parabolique à la De Giorgi*, theses, Université Paris sciences et lettres, June 2018.
- [53] K. HAN, T. YAO, AND T. L. FRIESZ, *Lagrangian-based hydrodynamic model: Freeway traffic estimation*, 2012.
- [54] D. HELBING, *From microscopic to macroscopic traffic models*, in A perspective look at nonlinear media, vol. 503 of Lecture Notes in Phys., Springer, Berlin, 1998, pp. 122–139.

- [55] E. HOPF, *On the right weak solution of the Cauchy problem for a quasilinear equation of first order*, J. Math. Mech., 19 (1969/1970), pp. 483–487.
- [56] C. IMBERT AND R. MONNEAU, *Flux-limited solutions for quasi-convex Hamilton-Jacobi equations on networks*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4), 50 (2017), pp. 357–448.
- [57] C. IMBERT, R. MONNEAU, AND E. ROUY, *Homogenization of first order equations with (u/ϵ) -periodic Hamiltonians. II. Application to dislocations dynamics*, Comm. Partial Differential Equations, 33 (2008), pp. 479–516.
- [58] C. IMBERT, R. MONNEAU, AND H. ZIDANI, *A Hamilton-Jacobi approach to junction problems and application to traffic flows*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 19 (2013), pp. 129–166.
- [59] H. ISHII, *Hamilton-Jacobi equations with discontinuous Hamiltonians on arbitrary open sets*, Bull. Fac. Sci. Engrg. Chuo Univ., 28 (1985), pp. 33–77.
- [60] —, *Perron’s method for Hamilton-Jacobi equations*, Duke Math. J., 55 (1987), pp. 369–384.
- [61] —, *Homogenization of the Cauchy problem for Hamilton-Jacobi equations*, in Stochastic analysis, control, optimization and applications, Systems Control Found. Appl., Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1999, pp. 305–324.
- [62] H. KESTEN, *On the speed of convergence in first-passage percolation*, Ann. Appl. Probab., 3 (1993), pp. 296–338.
- [63] E. KOMETANI AND T. SASAKI, *A safety index for traffic with linear spacings*, Mem. Fac. Engrg. Kyoto Univ., 21 (1959), pp. 229–246; also published as Operations Res. 7 (1959), 704–720.
- [64] E. KOSYGINA AND S. R. S. VARADHAN, *Homogenization of Hamilton-Jacobi-Bellman equations with respect to time-space shifts in a stationary ergodic medium*, Comm. Pure Appl. Math., 61 (2008), pp. 816–847.
- [65] J. A. LAVAL AND L. LECLERCQ, *The Hamilton–Jacobi partial differential equation and the three representations of traffic flow*, Transportation Research Part B: Methodological, (2013), pp. pp. 17–30.
- [66] P. D. LAX, *Hyperbolic systems of conservation laws. II*, Comm. Pure Appl. Math., 10 (1957), pp. 537–566.
- [67] J. P. LEBACQUE AND M. M. KHOSHYARAN, *Modelling vehicular traffic flow on networks using macroscopic models*, in Finite volumes for complex applications II, Hermes Sci. Publ., Paris, 1999, pp. 551–558.
- [68] J. P. LEBACQUE AND M. M. KHOSHYARAN, *A variational formulation for higher order macroscopic traffic flow models of the GSOM family*, Transportation Research Part B: Methodological, 57 (2013), pp. pp 245–255.

- [69] L. LECLERCQ, J. A. LAVAL, AND E. CHEVALLIER, *The lagrangian coordinates and what it means for first order traffic flow models*, in Proc. of the 17th International Symposium on Transportation and Traffic Theory, Elsevier, ed., 2007, pp. 735–753.
- [70] M. J. LIGHTHILL AND G. B. WHITHAM, *On kinematic waves. II. A theory of traffic flow on long crowded roads*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A, 229 (1955), pp. 317–345.
- [71] P. LIONS, *Lectures at collège de france*.
- [72] P.-L. LIONS, G. C. PAPANICOLAOU, AND S. R. S. VARADHAN, *Homogeneization of hamilton-jacobi equations*. unpublished, 1986.
- [73] P.-L. LIONS AND P. SOUGANIDIS, *Viscosity solutions for junctions: well posedness and stability*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl., 27 (2016), pp. 535–545.
- [74] P.-L. LIONS AND P. E. SOUGANIDIS, *Correctors for the homogenization of Hamilton-Jacobi equations in the stationary ergodic setting*, Comm. Pure Appl. Math., 56 (2003), pp. 1501–1524.
- [75] ———, *Homogenization of “viscous” Hamilton-Jacobi equations in stationary ergodic media*, Comm. Partial Differential Equations, 30 (2005), pp. 335–375.
- [76] L. LUDOVIC, C. ESTELLE, AND L. JORGE, *The Lagrangian coordinates applied to the LWR model*, in Hyperbolic problems: theory, numerics, applications, Springer, Berlin, 2008, pp. 671–678.
- [77] S. MÜLLER, *Homogenization of nonconvex integral functionals and cellular elastic materials*, Arch. Rational Mech. Anal., 99 (1987), pp. 189–212.
- [78] J. R. MUNKRES, *Topology: a first course*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.
- [79] O. A. OLEĬNIK, *Discontinuous solutions of non-linear differential equations*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), 26 (1963), pp. 95–172.
- [80] L. A. PIPES, *An operational analysis of traffic dynamics*, J. Appl. Phys., 24 (1953), pp. 274–281.
- [81] F. REZAKHANLOU AND J. E. TARVER, *Homogenization for stochastic Hamilton-Jacobi equations*, Arch. Ration. Mech. Anal., 151 (2000), pp. 277–309.
- [82] P. I. RICHARDS, *Shock waves on the highway*, Operations research, 4 (1956), pp. 42–51.
- [83] J.-M. ROQUEJOFFRE, *Comportement asymptotique des solutions d’équations de Hamilton-Jacobi monodimensionnelles*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 326 (1998), pp. 185–189.

-
- [84] R. W. SCHWAB, *Stochastic homogenization of Hamilton-Jacobi equations in stationary ergodic spatio-temporal media*, Indiana Univ. Math. J., 58 (2009), pp. 537–581.
- [85] A. SICONOLFI, *Metric character of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 355 (2003), pp. 1987–2009.
- [86] P. E. SOUGANIDIS, *Stochastic homogenization of Hamilton-Jacobi equations and some applications*, Asymptot. Anal., 20 (1999), pp. 1–11.
- [87] C. SUQUET, chapitre 8, Cours I.F.P, (2003-2004).