



**HAL**  
open science

# Modélisation électrothermique de composants électriques et électroniques automobiles et estimation des résistances de contact dans les connecteurs

Mathieu Chevrié

► **To cite this version:**

Mathieu Chevrié. Modélisation électrothermique de composants électriques et électroniques automobiles et estimation des résistances de contact dans les connecteurs. Automatique / Robotique. Université de Bordeaux, 2016. Français. NNT : 2016BORD0079 . tel-03336578

**HAL Id: tel-03336578**

**<https://theses.hal.science/tel-03336578>**

Submitted on 7 Sep 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE PRÉSENTÉE  
POUR OBTENIR LE GRADE DE  
**DOCTEUR DE**  
**L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX**

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR  
SPÉCIALITÉ AUTOMATIQUE, PRODUCTIQUE, SIGNAL ET IMAGE  
INGÉNIERIE COGNITIVE

Par Mathieu CHEVRIÉ

**MODÉLISATION ÉLECTROTHERMIQUE DE  
COMPOSANTS ÉLECTRIQUES ET ÉLECTRONIQUES  
AUTOMOBILES ET ESTIMATION DES RÉSISTANCES DE  
CONTACT DANS LES CONNECTEURS**

Sous la direction de : Jocelyn SABATIER  
et le co-encadrement : Christophe FARGES

Soutenue le 19/07/2016

Membres du jury :

Mme	D'ANDREA-NOVEL, Brigitte	Professeur	MINES ParisTech	Présidente
M.	BASSET, Michel	Professeur	Université de Haute Alsace	Rapporteur
M.	TESTÉ, Philippe	Chargé de Recherche	CNRS	Rapporteur
M.	MOREAU, Xavier	Professeur	Université de Bordeaux	Examineur
Mme	PRADERE, Laetitia	Ingénieur	Groupe PSA	Co-encadrant
M.	GUILLEMARD, Franck	Docteur Ingénieur	Groupe PSA	Co-encadrant
M.	SABATIER, Jocelyn	Professeur	Université de Bordeaux	Directeur
M.	FARGES, Christophe	Maître de Conférences	Université de Bordeaux	Co-encadrant

## Titre : Modélisation électrothermique de composants électriques et électroniques automobiles et estimation des résistances de contact dans les connecteurs

### Résumé

Un connecteur électrique automobile est le siège de points de contact électriques soumis à des échauffements supplémentaires par effet Joule provoqués par leurs résistances de contact. La dégradation d'une résistance de contact peut provoquer des échauffements critiques au niveau des points de contact. La présente étude propose deux approches pour détecter les variations anormales des résistances de contact. La première, appliquée à un connecteur de boîtier électronique automobile, repose sur un diagnostic à base de modèle afin de détecter les variations anormales de la résistance de contact par rapport à sa valeur nominale. La seconde approche, appliquée à un connecteur de recharge de véhicule électrique, consiste d'abord à estimer un flux de chaleur lié à l'effet Joule provoqué par la résistance de contact. La valeur de cette dernière est ensuite estimée grâce à la méthode des moindres carrés. Ces deux approches reposent sur des modèles électrothermiques des connecteurs considérés et de leurs environnements. Cette étude présente également le développement de ces modèles, et notamment l'optimisation du maillage d'un fil électrique basée sur la minimisation de la norme  $\mathcal{H}_2$  de l'erreur entre un modèle maillé d'ordre entier et un modèle analytique de référence d'ordre non entier.

**Mots clés :** résistance de contact ; modélisation électrothermique ; automobile ; modèle d'ordre non entier ; norme  $\mathcal{H}_2$  ; diagnostic ; méthode des moindres carrés.

---

## Title: Electrothermal modeling of automotive electrical and electronic components and estimation of contact resistance in connectors

**Abstract** An automotive electrical connector contains electrical contact points subject to additional temperature rises by Joule effect caused by their contact resistances. The deterioration of a contact resistance can cause critical overheating at the contact points. This study proposes two approaches to detect abnormal changes in contact resistance. The first one, applied to an automotive electric case connector, relies on a model-based diagnosis to detect an abnormal variation in the contact resistance with respect to its nominal value. The second one, applied to an electric vehicle charging connector, consists in estimating a heat flow related to the Joule effect caused by the contact resistance. The value of the latter is then estimated using the least squares. These approaches rely on electrothermal models considered connectors and their environments. This study also presents the development of these models, including the optimization of the mesh of an electrical wire based on the minimization of the  $\mathcal{H}_2$ -norm of the error between a meshed integer order model and a reference analytical fractional order model.

**Keywords :** contact resistance; electrothermal modeling; automotive; fractional order model;  $\mathcal{H}_2$ -norm; diagnosis; least squares.

---

### Unité de recherche

Laboratoire de l'Intégration du Matériau au Système (IMS) - UMR 5218 CNRS, Pôle P3S, 351 Cours de la Libération, 33405 TALENCE Cedex, France

« We're forever teetering on the brink of the unknowable, and trying to understand what can't be understood. »

*Isaac Asimov*

« The oldest and strongest emotion of mankind is fear, and the oldest and strongest kind of fear is fear of the unknown. »

*Howard Phillips Lovecraft*



# Remerciements

Ces travaux de thèse CIFRE se sont déroulés en collaboration entre le laboratoire IMS de Bordeaux et le groupe PSA dans le cadre de l'OpenLab « Electronics and Systems for Automotive ». Que Monsieur Alain Oustaloup, responsable de l'équipe CRONE au laboratoire IMS et que Monsieur Jean-Yves Marteau, responsable de l'entité SIEP de la Direction des Sciences et Technologies du Futur du groupe PSA, reçoivent mes remerciements pour l'excellent accueil qu'ils m'ont fait au sein de leur équipe respective.

Je tiens à remercier très sincèrement chacune des personnes ayant contribué à l'encadrement de la thèse et qui m'ont accordé leur confiance pour mener à bien l'ensemble de ces travaux.

Du côté du laboratoire, que Monsieur Jocelyn Sabatier, directeur de cette thèse, soit assuré de mon profond respect pour les nombreuses connaissances qu'il a su m'apporter tant sur le plan théorique qu'expérimental. Je remercie fortement Monsieur Christophe Farges, co-encadrant, pour toute l'aide, le soutien et les idées qu'il m'a apportés durant ces travaux.

Du côté du groupe PSA, que Madame Laetitia Pradere, responsable industrielle de la thèse, trouve ma sincère reconnaissance pour le savoir qu'elle a pu me transmettre au niveau des technologies de l'électronique embarquée. Qu'elle reçoive également mes remerciements et mes félicitations pour avoir assuré la responsabilité de la thèse après le départ de son prédécesseur à la fin de ma première année. Que Monsieur Franck Guillemard, co-encadrant PSA, reçoive également tout mon respect pour toute l'aide et toutes les connaissances qu'il m'a dispensées durant ces trois années, ainsi que pour ses nombreuses remarques et questions toujours très constructives qu'il a su proposer lors de nos points d'avancement ou à la relecture des travaux. Qu'il soit également assuré de ma gratitude pour son suivi assidu de la thèse malgré son changement de poste et les très nombreuses responsabilités qui lui sont incombées.

Je souhaiterai également remercier Monsieur Bernard Bavoux, premier responsable industriel de la thèse et prédécesseur de Madame Laetitia Pradere. Qu'il reçoive ma gratitude pour son aide précieuse, et pour avoir su contribuer à donner un cap aux travaux de thèse avant son changement de poste et son retrait de l'encadrement.

Je terminerai en remerciant chaleureusement Monsieur Mihai Socoliuc, responsable de la communauté des doctorants de PSA. Qu'il reçoive tout mon respect et mes meilleures

pensées pour le travail qu'il abat au quotidien pour animer cette communauté. Qu'il soit également remercié pour les nombreux événements (journées thématiques, journées posters, etc) qu'il a organisé, afin de permettre aux doctorants de PSA de présenter leurs travaux devant le personnel PSA dont de grands directeurs du groupe.

En plus de mes encadrants de thèse, je tiens à remercier également les autres membres qui ont composé le jury de soutenance. Je commencerai par remercier Messieurs Philippe Testé et Michel Basset, pour avoir accepté l'importante charge de rapporter les travaux de thèse, et pour les remarques pertinentes et constructives qu'ils ont su m'adresser. Je témoigne également tout mon respect à Madame Brigitte d'Andréa-Novel qui m'a fait l'honneur d'accepter le rôle de présidente du jury. Enfin, que Monsieur Xavier Moreau soit également chaleureusement remercié d'avoir accepté le rôle d'examineur lors de la soutenance, et surtout de m'avoir donné le goût d'approfondir mes connaissances en allant au bout d'un sujet et ainsi d'entamer une thèse.

Je poursuivrai en remerciant Messieurs Nacer Eddine Chelbi et Abdelmoumen Nouma qui, dans le cadre de leur stage de fin d'étude, m'ont aidé dans mes travaux de thèse. Je leur témoigne toute ma reconnaissance pour le travail qu'ils ont accompli.

Viennent à présent les remerciements moins solennels et plus personnels. Je sais que ce manuscrit est déjà conséquent en terme de volume, mais après tout je pense avoir mérité une petite page ou deux de plus.

Je continuerai donc ces remerciements par mes collègues de travail pour leur soutien, leur aide, leur convivialité et les bons moments passés au quotidien. Du côté du groupe PSA, je remercie profondément Vincent (le Capitaine, entre autre amateur de mangas et autres bandes dessinées et clarinettiste de renom), Maître Frédérique (qui m'a fait l'honneur de m'adouber chevalier Jedi lors de mon dernier jour), Metal Matt et Metal Caribou Mat (vive le hard-rock les gars), Gautam (City), Karima, Maître Karim, Nathalie, Huy Cuong (prédécesseur de mes travaux de thèse), Amar (incollable sur One Piece et bien d'autres mangas), Florian, Audrey, Junior (le gars le moins stressé de tout l'espace-temps), Matthias (gloire à Cthulhu et merci de m'avoir fait découvrir I. Asimov), Yda, Guillaume (merci encore pour toute ton aide au début de la thèse), Abderrahim (également grand connaisseur des mangas et du Japon), Brieg (père Fouras de PSA : grand poseur énigmes).

Du côté du laboratoire, en plus de son accueil dans l'équipe CRONE, je remercie Alain Oustaloup (le Chef) pour sa jovialité, son dynamisme et les bons moments partagés

autour d'une bonne assiette. Pour les permanents je remercie, Patrick (maître du fréquentiel, amateur de questions métaphysiques à l'heure du déjeuner et mégaphone naturel), Rachid (roi du calcul que je remercie vivement pour ses connaissances et son aide sur nos articles), André, Stéphane, Christophe (que je remercie pour son infinie gentillesse, son soutien et son amitié au quotidien et que j'ai l'honneur de compter dans le cercle restreint de mes meilleurs amis), Jocelyn (le MacGyver de l'équipe), Tudor (seigneur vampire), Pierre, Xavier, Ali (pour son accueil dans l'équipe ARIA et ses conseils lors de mon stage de fin d'étude), Jérôme et David H. (qui m'ont transmis le virus de la recherche scientifique lors de leur encadrement durant mon stage), David G., Franck et Loïc (le basque infernal mais avec qui on passe d'excellents moments de rigolade).

En ce qui concerne mes compagnons d'arme qui ont vécu ou qui sont encore dans l'indicible tourment de la thèse, mes pensées vont à Mathieu, Asma, Benjamin, le Petit Laminou mon meilleur ennemi (bientôt le décompte final des points Bro), Sergey (Badgeman), Elena (Reine de l'Enfer), Alex (fraîchement marié), Baptiste (Bato-sama ou Aragorn pour les intimes), Jean-Louis (JLeu, JleuB ou JBL pour les connaisseurs), Nolwenn (le Pichet de Carmélide) et Jean-Baptiste. Je remercie également Florian (roi des tacles verbaux et chanteur aguerri) ainsi qu'Antoine (Don Diego) compagnon de stage de fin d'étude et qui fut également mon premier collègue de bureau au début de ma thèse.

Je tiens à remercier également les secrétaires de l'équipe Valérie et Céline, pour leur aide notamment lors des demandes de mission faites un peu au dernier moment.

Je remercie également mes plus proches amis pour leur patience et leur compréhension durant ces trois années (quelques soirées et répétitions musicales ont été annulées ou reportées à ma demande), Jonathan mon frère de sang pour la vie (force et honneur petit), ses parents Marie et Benoît, Hervé (le Mike Portnoy des Landes), Florian (Père Tarain, a-i-n comme Pain), Aristide (maître du solo de gratte) et Mathieu (Monsieur I et roi de la basse).

Je terminerai mes remerciements par ma famille qui a toujours cru en moi et m'a toujours apporté un soutien indéfectible toute ma vie. Je ne serais probablement pas en train d'écrire ces lignes sans l'intervention de mon oncle et parrain Patrick, enseignant en physique-chimie, et que je remercie d'avoir attisé mon goût pour les sciences lors de mon enfance et même après. Bien que cela me semble un maigre témoignage de toute la reconnaissance que je leur dois, je dédie donc ce mémoire et ce travail à tous les membres de ma famille et plus particulièrement à mon Grand-Père Yves décédé, à ma Grand-Mère

Linette, ainsi qu'aux deux personnes qui ont toujours compté le plus pour moi, ceux qui m'ont donné la vie, ceux qui m'ont élevé, ceux de qui je suis le plus fier : mes parents.





# Table des matières

Table des figures	xi
Liste des tableaux	xix
Notations	xxi
Introduction générale	1
<b>1 Architecture électrique d'une automobile, et systèmes de raccordement entre un véhicule et une borne de recharge électrique</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction . . . . .	9
1.2 Vision globale de l'architecture électrique d'une automobile . . . . .	11
1.2.1 Architecture électrique et électronique d'une automobile . . . . .	11
1.2.1.1 Les sources d'énergie électrique . . . . .	13
1.2.1.2 Les distributeurs d'énergie électrique . . . . .	14
1.2.1.3 Les consommateurs d'énergie électrique . . . . .	18
1.2.2 Les chaînes de traction électriques . . . . .	19
1.2.2.1 Chaîne de traction électrique classique . . . . .	19
1.2.2.2 Le moteur-roue . . . . .	21
1.2.3 Les chaînes de traction hybrides . . . . .	21
1.2.3.1 Les différents niveaux d'hybridation d'un véhicule . . . . .	22
1.2.3.2 Chaînes de traction hybrides . . . . .	23
1.3 Raccordements d'un véhicule à une borne de recharge . . . . .	26
1.3.1 Les différents modes de recharge . . . . .	27
1.3.1.1 Le mode 1 : prise domestique classique . . . . .	28

1.3.1.2	Le mode 2 : prise domestique équipée d'un dispositif de protection . . . . .	29
1.3.1.3	Le mode 3 : prise spécifique sur un circuit dédié . . . . .	30
1.3.1.4	Le mode 4 : connexion à courant continu . . . . .	31
1.3.2	Les différentes prises de charge spécifiques . . . . .	32
1.3.2.1	Prise de type 1 . . . . .	32
1.3.2.2	Prise de type 2 . . . . .	33
1.3.2.3	Prise de type 3 . . . . .	34
1.3.2.4	Prise de type 4 . . . . .	35
1.3.2.5	Prises combo . . . . .	35
1.4	Protection des circuits électriques automobiles contre les courts-circuits . .	36
1.4.1	Sur la protection des boîtiers et des faisceaux dans une automobile	37
1.4.2	Sur la protection des systèmes de recharge des véhicules électriques ou hybrides . . . . .	39
1.5	Conclusion . . . . .	40
<b>2</b>	<b>Modélisation électrothermique d'un fil électrique par une méthode de maillage optimisée basée sur la norme <math>\mathcal{H}_2</math></b>	<b>43</b>
2.1	Présentation générale du type de modélisation utilisé . . . . .	45
2.2	Modélisation d'un fil électrique . . . . .	48
2.2.1	Modélisation d'un fil de longueur infinie . . . . .	51
2.2.2	Modélisation d'un fil de longueur finie . . . . .	52
2.2.2.1	Modélisation par maillage . . . . .	52
2.2.2.2	Modèle analytique de référence . . . . .	57
2.2.2.3	Linéarisation du modèle par maillage et mise sous forme de fonction de transfert . . . . .	58
2.2.2.4	Linéarisation du modèle analytique et mise sous forme de fonction de transfert . . . . .	60
2.2.2.5	Sur la distance d'oubli . . . . .	62
2.3	Optimisation du maillage d'un fil électrique basée sur la norme $\mathcal{H}_2$ . . . .	66
2.3.1	Rappels sur certaines normes des signaux et des systèmes . . . . .	67

2.3.2	Optimisation du maillage d'un fil grâce à un critère basé sur la norme $\mathcal{H}_2$ . . . . .	68
2.3.2.1	Expression analytique de $\ F(x, s)\ _2$ . . . . .	71
2.3.2.2	Expression analytique de $\ F_\Delta(x, s)\ _2$ . . . . .	74
2.3.2.3	Une méthode pour déterminer $N$ et $\zeta$ . . . . .	77
2.3.2.4	Application de la méthode de maillage à des fils de section différente . . . . .	79
2.4	Evaluation de la qualité du maillage . . . . .	80
2.4.1	Comparaison du diagramme de Bode du modèle analytique et du modèle maillé . . . . .	82
2.4.2	Confrontation du modèle non linéaire avec des mesures réelles . . . . .	84
2.4.3	Avantages par rapport à une autre méthode d'optimisation utilisant un critère basé sur la norme $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	86
2.5	Conclusion . . . . .	87
<b>3</b>	<b>Modélisation électrothermique d'une carte électronique et de sa connectique</b> . . . . .	<b>89</b>
3.1	Présentation de la chaîne électrothermique étudiée . . . . .	91
3.1.1	Chaîne de faible puissance . . . . .	91
3.2	Généralités sur la modélisation des composants . . . . .	92
3.3	Modélisation de la chaîne électrothermique de faible puissance . . . . .	94
3.3.1	Faisceau . . . . .	94
3.3.1.1	Fil électrique de longueur finie et infinie . . . . .	94
3.3.2	Connecteur . . . . .	96
3.3.2.1	Cellule de porte-clips . . . . .	96
3.3.2.2	Sertissage . . . . .	101
3.3.2.3	Clip . . . . .	102
3.3.2.4	Porte-clips . . . . .	103
3.3.2.5	Point de contact . . . . .	105
3.3.2.6	Languette . . . . .	108
3.3.2.7	Embase . . . . .	110
3.3.3	Carte électronique . . . . .	112

3.3.3.1	Piste de cuivre . . . . .	112
3.3.3.2	Carte électronique . . . . .	120
3.3.3.3	Composant de puissance . . . . .	122
3.4	Validation de la chaîne électrothermique de faible puissance . . . . .	123
3.4.1	Présentation du banc d’essais électrothermiques . . . . .	123
3.4.2	Essai de validation effectué . . . . .	125
3.4.3	Protocole de validation des modèles électrothermiques . . . . .	126
3.4.4	Validation du connecteur . . . . .	128
3.4.4.1	Sertissage . . . . .	128
3.4.4.2	Clip . . . . .	129
3.4.4.3	Air de la cellule du porte-clips . . . . .	131
3.4.4.4	Porte-clips . . . . .	132
3.4.4.5	Languette . . . . .	132
3.4.4.6	Embase . . . . .	134
3.4.4.7	Piste de cuivre . . . . .	134
3.4.4.8	Carte électronique . . . . .	136
3.4.5	Validation de la chaîne de faible puissance complète . . . . .	137
3.5	Conclusion . . . . .	138
<b>4</b>	<b>Modélisation électrothermique d’une prise de recharge véhicule et de son faisceau</b>	<b>139</b>
4.1	Présentation de la chaîne électrothermique étudiée . . . . .	141
4.2	Modélisation de la chaîne électrothermique forte puissance . . . . .	141
4.2.1	Chaîne de forte puissance . . . . .	141
4.2.2	Faisceau véhicule . . . . .	143
4.2.2.1	Toron de longueur finie et infinie . . . . .	143
4.2.3	Prise véhicule . . . . .	149
4.3	Validation de la chaîne électrothermique forte puissance . . . . .	157
4.3.1	Essai et protocole de validation utilisés . . . . .	158
4.3.2	Validation du faisceau véhicule . . . . .	159
4.3.2.1	Toron . . . . .	159

4.3.2.2	Fil électrique libre . . . . .	162
4.3.3	Validation de la prise véhicule . . . . .	165
4.3.3.1	Sertissage . . . . .	165
4.3.3.2	Languette (partie plate) . . . . .	166
4.3.3.3	Air de la cellule . . . . .	167
4.3.3.4	Languette (partie cylindrique) . . . . .	167
4.4	Validation de la chaîne de forte puissance complète . . . . .	169
4.5	Conclusion . . . . .	169
<b>5</b>	<b>Estimation des résistances de contact dans les connecteurs automobiles</b>	<b>171</b>
5.1	Introduction . . . . .	173
5.2	Classification des contacts électriques . . . . .	173
5.3	Caractérisation de la résistance électrique d'un point de contact . . . . .	175
5.3.1	Modélisation d'une surface de point de contact . . . . .	176
5.3.2	Techniques de mesure de la résistance électrique d'un point de contact	181
5.4	Détection des variations d'une résistance de contact via une méthode de diagnostic à base de modèle . . . . .	185
5.4.1	Principe général et classification des méthodes de diagnostic . . . . .	185
5.4.2	Problème considéré et choix d'une technique de diagnostic . . . . .	188
5.4.3	Diagnostic à base de modèle utilisant la méthode de l'espace de parité dynamique . . . . .	189
5.4.3.1	Génération de résidu à l'aide de la méthode de l'espace de parité dynamique . . . . .	189
5.4.3.2	Détermination de l'ordre de dérivation $q$ . . . . .	194
5.4.3.3	Générateur de dérivées des signaux d'entrée et des signaux de sortie . . . . .	195
5.4.3.4	Analyse des résidus et calcul de seuil . . . . .	196
5.4.4	Application au montage de faible puissance . . . . .	199
5.4.4.1	Détermination du modèle d'état du montage de faible puissance utilisé pour le diagnostic . . . . .	199
5.4.4.2	Génération et étude des sensibilités des résidus . . . . .	202
5.4.4.3	Analyse du résidu et résultats . . . . .	204

5.5	Estimation d'une résistance de contact basée sur la méthode des moindres carrés . . . . .	207
5.5.1	Modèle électrothermique de forte puissance et grandeurs inconnues	208
5.5.2	Étude des flux de chaleur non modélisés au niveau de la zone de contact . . . . .	210
5.5.3	Estimation du flux inconnu total de la zone de contact . . . . .	212
5.5.3.1	Principe de la méthode . . . . .	212
5.5.3.2	Choix d'un régulateur . . . . .	213
5.5.3.3	Résultats obtenus en simulation . . . . .	217
5.5.3.4	Résultats obtenus sur des données réelles . . . . .	218
5.5.4	Étude des fonctions de sensibilité du système . . . . .	219
5.5.4.1	Étude de l'effet du flux cordon sur l'estimation du flux par effet Joule . . . . .	219
5.5.4.2	Étude de la sensibilité aux bruits de mesure . . . . .	220
5.5.4.3	Étude de la sensibilité aux erreurs de modélisation . . . . .	222
5.5.4.4	Bilan . . . . .	224
5.5.5	Estimation de la résistance de contact basée sur la méthode des moindres carrés . . . . .	225
5.5.5.1	Nouveau choix de régulateur . . . . .	225
5.5.5.2	Utilisation de la méthode des moindres carrés pour estimer la résistance de contact . . . . .	228
5.5.6	À propos d'autres techniques d'estimation d'entrées inconnues . . .	232
5.6	Conclusion . . . . .	233
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>237</b>
	<b>A Modes de transfert thermique</b>	<b>251</b>
A.1	Introduction . . . . .	253
A.2	Conduction de la chaleur . . . . .	254
A.2.1	Modélisation de la conduction . . . . .	254
A.2.2	Analogie avec les systèmes électriques . . . . .	256

A.2.3	Simplification de la conduction multidirectionnelle grâce aux facteurs de forme . . . . .	257
A.3	Transfert de chaleur par convection . . . . .	258
A.3.1	Modélisation de la convection . . . . .	258
A.3.2	Expression du coefficient de convection . . . . .	259
A.3.2.1	Le nombre de Prandtl . . . . .	260
A.3.2.2	Le nombre de Grashof . . . . .	261
A.3.3	Expression du nombre de Nusselt en convection naturelle pour quelques configurations géométriques . . . . .	262
A.3.4	Analogie avec les systèmes électriques . . . . .	263
A.4	Transfert de chaleur par rayonnement thermique . . . . .	263
A.4.1	Modélisation du rayonnement thermique . . . . .	266
<b>B</b>	<b>Dérivation non entière et modèles non entiers</b>	<b>267</b>
B.1	Introduction . . . . .	269
B.2	Définitions . . . . .	270
B.2.1	Intégration non entière . . . . .	270
B.2.1.1	Définition . . . . .	270
B.2.1.2	Propriétés . . . . .	270
B.2.1.3	Interprétation de l'intégration non entière . . . . .	271
B.2.1.4	Transformée de Laplace de l'intégrale non entière d'une fonction . . . . .	272
B.2.2	Dérivation non entière . . . . .	273
B.2.2.1	Définition au sens de Riemann-Liouville . . . . .	273
B.2.2.2	Définition au sens de Caputo . . . . .	274
B.2.2.3	Définition au sens de Grünwald . . . . .	275
B.2.2.4	Condition d'existence . . . . .	276
B.2.2.5	Propriétés principales . . . . .	277
B.2.2.6	Transformée de Laplace de la dérivée non entière d'une fonction temporelle . . . . .	278
B.2.3	Caractérisation fréquentielle d'un dérivateur et d'un intégrateur d'ordre non entier réel . . . . .	279

B.3	Modèles non entiers . . . . .	281
B.3.1	Équations différentielles d'ordres non entiers . . . . .	281
B.3.2	Fonctions de transfert d'ordre non entier . . . . .	281
B.3.2.1	Fonctions de transfert non entières explicites . . . . .	281
B.3.2.2	Fonctions de transfert non entières implicites . . . . .	282
<b>C</b>	<b>Norme <math>\mathcal{H}_2</math> de fonctions de transfert non entières implicites</b>	<b>283</b>
C.1	Introduction . . . . .	285
C.2	Définition de la norme $\mathcal{H}_2$ des systèmes . . . . .	285
C.3	Présentation de la classe de fonctions de transfert considérée . . . . .	286
C.4	Expression analytique de la norme $\mathcal{H}_2$ de fonctions de transfert implicites de première espèce et de leur mise en série . . . . .	286
C.4.1	Cas général : ordre de dérivation non entier . . . . .	287
C.4.2	Cas particulier : ordre de dérivation entier . . . . .	288
C.4.3	Exemple . . . . .	288
C.4.4	Mise en série de deux fonctions de transfert implicites de première espèce . . . . .	289
C.5	Expression analytique de la norme $\mathcal{H}_2$ de fonctions de transfert implicites de seconde espèce et de leur mise en série . . . . .	290
C.5.1	Cas général : ordre de dérivation non entier . . . . .	291
C.5.2	Cas particulier : ordre de dérivation entier . . . . .	292
C.5.3	Exemple . . . . .	292
C.6	Définition des fonctions mathématiques utilisées . . . . .	292
C.6.1	Fonction Gamma d'Euler . . . . .	292
C.6.2	Fonction Beta d'Euler . . . . .	293
C.6.3	Fonctions de Bessel . . . . .	293
C.6.4	Fonction de Legendre . . . . .	294
C.6.5	Fonction hypergéométrique de Gauss . . . . .	294
<b>D</b>	<b>Retour d'expérience sur l'ajustement des paramètres des modèles de composants</b>	<b>295</b>
D.1	Introduction . . . . .	297

D.2	Retour d'expérience sur l'ajustement des paramètres des modèles de composants . . . . .	297
D.3	Récapitulatifs des changements effectués sur les paramètres des composants	300
D.3.1	Ajustement des paramètres de la chaîne de faible puissance . . . . .	301
D.3.2	Ajustement des paramètres de la chaîne de forte puissance . . . . .	304



# Table des figures

1.1	Le fardier de Cugnot de 1771 conservé au musée des Arts et Métiers de Paris	9
1.2	Une architecture électrique et électronique automobile . . . . .	11
1.3	Schéma simplifié d'une architecture électrique automobile . . . . .	12
1.4	Batterie classique, alternateur et batterie de traction d'un véhicule électrique	13
1.5	Un BPGA de Peugeot 308 implanté sur la batterie . . . . .	14
1.6	Un BSI et une carte électronique de boîtier électronique . . . . .	15
1.7	Connexions vissées (à gauche) et connexion clip – languette (à droite) . . .	16
1.8	Un exemple de connecteur automobile (connecteur 16 voies hybride) . . . .	16
1.9	Schéma d'un faisceau électrique automobile . . . . .	17
1.10	Des fils électriques de sections différentes . . . . .	18
1.11	Des exemples de consommateurs électriques automobiles . . . . .	18
1.12	Schéma d'une chaîne de traction électrique classique . . . . .	20
1.13	Exemple de moteur roue : l'Active Wheel de Michelin . . . . .	21
1.14	Schéma de l'architecture hybride série . . . . .	24
1.15	Schéma de l'architecture hybride parallèle . . . . .	24
1.16	Schéma de l'architecture hybride série-parallèle . . . . .	25
1.17	Schéma de l'architecture hybride complexe . . . . .	25
1.18	Une borne de recharge électrique avec deux prises (DBT-CEV Quick charger AC-DC) . . . . .	26
1.19	Répartition des prises de recharge en France en octobre 2015 (source ChargeMap.com) . . . . .	27
1.20	Système de recharge d'un véhicule en mode 1 . . . . .	28
1.21	Système de recharge d'un véhicule en mode 2 . . . . .	29
1.22	Système de recharge d'un véhicule en mode 3 . . . . .	30

1.23	Système de recharge d'un véhicule en mode 4 . . . . .	31
1.24	Image (DELPHI) et schéma de brochage d'une prise de type 1 . . . . .	33
1.25	Cordon de recharge avec deux prises de type 2 (infrastructure et véhicule) et schéma de brochage d'une prise de type 2 . . . . .	34
1.26	Image et schéma de brochage d'une prise de type 3 . . . . .	34
1.27	Image et schéma de brochage d'une prise de type 4 . . . . .	35
1.28	Un exemple de prise combo avec son socle véhicule . . . . .	35
1.29	Un exemple de courbes $t = f(I)$ pour différents calibres de fusible (source des données : <a href="http://www.sandc.com">www.sandc.com</a> ) . . . . .	38
2.1	Illustration des trois modes de transfert thermique . . . . .	46
2.2	Volume élémentaire $V_i$ (nœud $i$ ) d'un modèle nodal . . . . .	47
2.3	Fil électrique constitué de deux matériaux ramené à un fil constitué d'un unique matériau équivalent (vue en coupe) . . . . .	48
2.4	Fil électrique en vue longitudinale . . . . .	49
2.5	Principe de la discrétisation spatiale (maillage) d'un fil électrique . . . . .	53
2.6	Température longitudinale d'un fil simulée pour différents nombres de mailles $N$ . . . . .	55
2.7	Température longitudinale d'un fil simulée pour différents flux $\phi_e$ . . . . .	56
2.8	Application du premier principe de la thermodynamique à un tronçon élé- mentaire d'un fil de longueur finie . . . . .	57
2.9	Le concept de distance d'oubli . . . . .	63
2.10	Évolution de $k$ et de $h_{cr}$ en fonction de la section de fil . . . . .	64
2.11	Évolution du rapport $\sqrt{\frac{kr}{2h_{cr}}}$ en fonction de la section de fil . . . . .	65
2.12	Principe du maillage irrégulier . . . . .	66
2.13	Schéma fonctionnel pour le calcul de l'erreur entre le modèle analytique et le modèle maillé . . . . .	69
2.14	Un exemple de répartition de points d'évaluation . . . . .	70
2.15	Norme $\mathcal{H}_2$ de $F(x, s)$ en fonction de $x$ pour différentes valeurs de $\lambda$ . . . . .	73
2.16	Contour d'intégration $\Gamma$ . . . . .	76
2.17	Tracé du critère $\mathfrak{J}$ en fonction du ratio de maillage $\zeta$ et pour plusieurs nombres de mailles $N$ . . . . .	78

2.18	Passage d'un point d'intérêt d'une maille à une autre (haut : $N = 4$ et $\zeta = 10$ , bas : $N = 4$ et $\zeta = 11$ ) . . . . .	78
2.19	Tracé de $\mathfrak{J}_{\text{opt}}(N)$ en fonction de $N$ . . . . .	79
2.20	Application de la première étape de la méthode de détermination du nombre de mailles $N$ et du ratio $\zeta$ à des fils de différentes section . . . . .	80
2.21	Application de la deuxième étape à des fils de différentes section : valeur du critère $\mathfrak{J}_{\text{opt}}(N)$ . . . . .	81
2.22	Normalisation des courbes de la figure 2.21 . . . . .	81
2.23	Diagrammes de Bode du modèle analytique et du modèle maillé dans le pire cas pour différentes sections de fil . . . . .	82
2.24	Diagrammes de Bode du gain de l'erreur absolue entre le modèle analytique et maillé dans le pire cas pour différentes sections de fil . . . . .	83
2.25	Comparaison entre les températures du fil simulées et mesurées (haut) et signal de sollicitation en courant (bas) . . . . .	85
2.26	Répartition des mailles et des capteurs sur le fil électrique . . . . .	85
2.27	Comparaison entre les températures du fil simulées et mesurées en régime permanent . . . . .	86
3.1	Schématisation de la carte électronique (vue de dessus) et des éléments qui la compose . . . . .	91
3.2	Schématisation de la chaîne électrothermique de faible puissance . . . . .	92
3.3	Implantation sous MATLAB <sup>®</sup> -Simulink <sup>®</sup> de l'équation différentielle régissant la température d'un composant . . . . .	93
3.4	Schéma d'un clip avec son sertissage à l'intérieur d'une cellule du porte-clips . . . . .	97
3.5	Illustration d'un canal carré pour le calcul du facteur de forme de conduction . . . . .	98
3.6	Facteur de forme de l'équation (3.8) en fonction du rapport $\frac{W_{\text{ext}}}{W_{\text{int}}}$ . . . . .	99
3.7	Coupe transversale d'une cellule de porte-clips . . . . .	99
3.8	Illustration du principe du sertissage d'un fil dans un clip . . . . .	101
3.9	Schématisation du point de contact lorsque la languette est insérée dans le clip . . . . .	105
3.10	Principe de mesure de résistance à quatre fils . . . . .	106
3.11	Représentation des trois parties distinctes d'une languette . . . . .	108

3.12	Localisation de l’embase insérée dans un porte-clips . . . . .	111
3.13	Application du premier principe de la thermodynamique à un tronçon élémentaire d’une piste de cuivre . . . . .	116
3.14	Les deux cas de figure possibles pour le maillage d’une piste de cuivre . . .	118
3.15	Schématisation de la carte électronique sur son support . . . . .	121
3.16	Schématisation du banc de faible puissance . . . . .	123
3.17	Schéma électrique du banc de faible puissance . . . . .	124
3.18	Signal de sollicitation pour générer le courant électrique de l’essai de validation . . . . .	126
3.19	Un bloc MATLAB <sup>®</sup> –Simulink <sup>®</sup> à valider . . . . .	126
3.20	Température mesurée et simulée du sertissage . . . . .	129
3.21	Température mesurée et simulée du clip . . . . .	130
3.22	Température mesurée et simulée de l’air dans la cellule du porte-clips . . .	131
3.23	Température mesurée et simulée du porte-clips . . . . .	132
3.24	Température mesurée et simulée de la languette . . . . .	133
3.25	Température mesurée et simulée de l’embase . . . . .	134
3.26	Température mesurée et simulée de la piste de cuivre . . . . .	135
3.27	Température mesurée et simulée de la carte électronique . . . . .	136
4.1	Représentation d’une prise de recharge véhicule vue de face . . . . .	141
4.2	Illustration d’un faisceau de recharge du côté véhicule . . . . .	142
4.3	Schématisation de la chaîne électrothermique de forte puissance . . . . .	143
4.4	Principe de simplification d’un toron . . . . .	144
4.5	Coupe transversale d’une cellule de la prise véhicule . . . . .	150
4.6	Distinction des deux parties d’une languette du montage de forte puissance	153
4.7	Schématisation de la prise du cordon de recharge enfoncée dans la prise véhicule . . . . .	156
4.8	Schéma électrique du montage de forte puissance . . . . .	157
4.9	Exemple de répartition des thermocouples dans le toron à une position longitudinale $x$ quelconque . . . . .	159
4.10	Température mesurée et simulée du toron au-delà de sa distance d’oubli . .	160
4.11	Température mesurée et simulée du toron à 8,2 cm de son extrémité . . . .	161

4.12	Températures mesurées à l'extrémité des fils près du toron . . . . .	162
4.13	Position des thermocouples sur le fil libre . . . . .	163
4.14	Température mesurée et simulée du fil à la position $x_1$ . . . . .	163
4.15	Température mesurée et simulée du fil à la position $x_2$ . . . . .	164
4.16	Température mesurée et simulée du fil à la position $x_3$ . . . . .	164
4.17	Température mesurée et simulée du sertissage . . . . .	165
4.18	Température mesurée et simulée de la partie plate de la languette . . . . .	166
4.19	Température mesurée et simulée de l'air de la cellule . . . . .	167
4.20	Température mesurée et simulée de l'air de la cellule . . . . .	168
5.1	Classification des contacts électriques . . . . .	174
5.2	Exemple de contact entre deux métaux à l'échelle microscopique (à gauche) et représentation d'un a-spot (à droite) . . . . .	175
5.3	Simulation d'une surface de dimension fractale . . . . .	179
5.4	Exemple de schématique représentant la décomposition d'une surface par un empilement de quatre ondes sinusoïdales . . . . .	180
5.5	Schéma de principe de l'essai de fretting-corrosion développé par le LGEP	182
5.6	Description générale du banc d'essai développé dans [Grandvullemin, 2009]	184
5.7	Description schématique du diagnostic par redondance matérielle . . . . .	186
5.8	Description schématique du diagnostic par traitement du signal . . . . .	187
5.9	Description schématique du diagnostic par test de plausibilité . . . . .	187
5.10	Description schématique du diagnostic à base de modèle (redondance ana- lytique) . . . . .	188
5.11	Un algorithme simple pour déterminer $q$ . . . . .	195
5.12	Implantation du filtre de variables d'état . . . . .	196
5.13	Description schématique de l'analyse de résidu et du calcul de seuil . . . . .	197
5.14	Diagrammes de gains des transferts $F_{v \rightarrow r}(s)$ et $F_{f \rightarrow r}(s)$ . . . . .	205
5.15	Allure du résidu obtenu à partir d'un jeu de mesures dans un cas sans défaut (à gauche) et zoom après convergence (à droite) . . . . .	205
5.16	Allure de la valeur efficace du résidu (après son temps de convergence) évaluée sur une fenêtre temporelle de 1 s . . . . .	206

5.17	Résultats obtenus sur l'analyse du résidu pour un cas sans défaut (à gauche) et avec défaut (à droite) . . . . .	207
5.18	Profil de $\phi_J$ , $\phi_{cl\leftrightarrow zc}$ et $\phi_t$ en réponse à un échelon de courant (à gauche) et agrandissement aux premiers instants (à droite) . . . . .	210
5.19	Schéma fonctionnel en boucle fermée pour l'estimation du flux total inconnu au niveau de la zone de contact . . . . .	213
5.20	Position du thermocouple dans la partie cylindrique de la languette . . . . .	213
5.21	Diagrammes de Bode de $G(s)$ pour plusieurs points d'équilibre (à gauche) et grossissement autour des basses fréquences (à droite) . . . . .	214
5.22	Schéma fonctionnel de la boucle ouverte . . . . .	215
5.23	Boucle ouverte dans le plan de Black-Nichols avec un régulateur PIDF : $M_\varphi = 50^\circ$ et $\varphi_r = -15^\circ$ à $\omega_u = 10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ (à gauche) et zoom autour de $\omega_u$ (à droite) . . . . .	216
5.24	Schéma fonctionnel pour l'estimation du flux total inconnu au niveau de la zone de contact en simulation . . . . .	217
5.25	Flux total et son estimation en simulation (à gauche) avec grossissement sur les premiers instants (à droite) . . . . .	217
5.26	Flux total et son estimation en conditions réelles . . . . .	218
5.27	Schéma fonctionnel pour l'étude de la sensibilité du système aux bruits de mesure . . . . .	221
5.28	Diagrammes de gain de $\frac{B_{\max}}{ G(j\omega_u)  \sqrt{2 + 2 \cos \theta_u}}$ . . . . .	222
5.29	Schéma fonctionnel faisant apparaître une erreur de modèle multiplicative . . . . .	223
5.30	Boucle ouverte à comportement non entier dans le plan de Black-Nichols (à gauche) avec zoom autour de $\omega_u$ (à droite) . . . . .	227
5.31	Spectre du bruit de mesure de la température de la languette . . . . .	228
5.32	Flux total réel, flux total estimé et flux total reconstruit par la méthode des moindres carrés . . . . .	231
A.1	Illustration de la conduction . . . . .	255
A.2	Flux de chaleur dans un solide . . . . .	255
A.3	Illustration de la convection naturelle et forcée . . . . .	259
A.4	Evolution du nombre Prandtl de l'air en fonction de la température moyenne	261

A.5	Evolution de la viscosité de l'air en fonction de la température moyenne . .	262
B.1	Facteur d'oubli : $\mathcal{O}_\nu(t - \tau)$ pour $0 < \nu \leq 1$ . . . . .	272
B.2	Représentation de la coupure du plan complexe . . . . .	273
B.3	Variations des coefficients de pondération en fonction de $\nu$ pour $k = 8$ . . .	276
B.4	Diagrammes de Bode de dérivateurs non entiers réels . . . . .	280
C.1	La norme $\mathcal{H}_2$ (au carré) de $F_1(s)$ en fonction de $\nu$ pour différentes valeurs de $\lambda$ . . . . .	289
C.2	La norme $\mathcal{H}_2$ (au carré) de $F_2(s)$ en fonction de $\nu$ pour différentes valeurs de $\lambda$ . . . . .	293
D.1	Résultats obtenus lorsque les valeurs de la capacité thermique (en haut) et de la résistance thermique (en bas) sont trop grandes . . . . .	299
D.2	Résultats obtenus lorsque la valeur du facteur de forme entre le clip et le porte-clips est trop faible . . . . .	300
D.3	Zone de contact clip–languette à l'échelle microscopique . . . . .	306
D.4	Un exemple de jeu entre le clip et la languette du montage de forte puissance (coupe longitudinale) . . . . .	307



# Liste des tableaux

1.1	Récapitulatif des quatre modes de recharge . . . . .	32
1.2	Récapitulatif des quatre types de prise spécifique . . . . .	36
2.1	Distance d'oubli moyenne pour différents rayons de fil . . . . .	64
3.1	Récapitulatif des résultats obtenus pour la validation de la chaîne électro-thermique de faible puissance . . . . .	137
4.1	Récapitulatif des résultats obtenus pour la validation de la chaîne électro-thermique de forte puissance . . . . .	169
A.1	Quelques valeurs de conductivité thermique . . . . .	256
A.2	Formules empiriques du nombre de Nusselt pour des plaques . . . . .	264
A.3	Formules empiriques du nombre de Nusselt pour des cylindres . . . . .	265
D.1	Ajustement des paramètres de l'air de la cellule du porte-clips . . . . .	301
D.2	Ajustement des paramètres du porte-clips . . . . .	302
D.3	Ajustement des paramètres de la piste de cuivre . . . . .	303
D.4	Ajustement des paramètres de la carte électronique . . . . .	304
D.5	Ajustement des paramètres du toron . . . . .	304
D.6	Ajustement des paramètres du fil libre . . . . .	305
D.7	Ajustement des paramètres de l'air de la cellule de la prise véhicule . . . . .	305
D.8	Ajustement des paramètres de la partie cylindrique de la languette . . . . .	306



# Nomenclature

## NOMENCLATURE GÉNÉRALE

$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes
$\mathbb{N}$	Ensemble des nombres entiers naturels
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\lfloor \nu \rfloor$	Le plus grand entier minorant
$\lceil \nu \rceil$	Le plus grand entier majorant
*	Produit de convolution
$\mathcal{L}\{\bullet\}$	Transformation de Laplace
$I_n$	Matrice identité de taille $n \times n$
$A^T$	Matrice transposée de $A$
$A^{-1}$	Inverse de $A$
$A^+$	Pseudo-inverse de $A$
$\bar{A}$	Matrice conjuguée de $A$
$ A $	Module de $A$
$\ A\ _2$	Norme $\mathcal{H}_2$ de $A$
$\ A\ _\infty$	Norme $\mathcal{H}_\infty$ de $A$
$\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$	Matrice diagonale de taille $n \times n$
$\arg$	Argument d'un nombre complexe
$\text{Im}$	Partie imaginaire d'un nombre complexe
$\text{Re}$	Partie réelle d'un nombre complexe
$j$	Unité imaginaire telle que $j = \sqrt{-1}$
$(q)_k$	$q$ -symbole de Pochhammer
$n!$	Factorielle de l'entier $n$
$\omega$	Pulsation en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$

${}_2F_1(a, b; c; z)$	Fonction hypergéométrique de Gauss
$I_\nu$	Fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre $\nu$
$J_\alpha$	Fonction de Bessel de première espèce d'ordre $\alpha$
$K_\nu$	Fonction de Bessel modifiée de second espèce d'ordre $\nu$
$P_\alpha^\beta$	Fonction de Legendre de degré $\alpha$ et d'ordre $\beta$
B	Fonction Beta d'Euler
$\Gamma$	Fonction Gamma d'Euler
$\psi$	Fonction digamma

## NOMENCLATURE ÉLECTROTHERMIQUE

<b>Symbole</b>	<b>Description</b>	<b>Unité (SI)</b>
$A$	Aire	$m^2$
$C$	Capacité thermique	$J \cdot K^{-1}$
$\mathcal{C}$	Capacité thermique massique	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
$H$	Hauteur ou épaisseur	m
$I$	Courant	A
$L$	Longueur	m
$P$	Périmètre	m
$R$	Résistance thermique	$K \cdot W^{-1}$
$\mathcal{R}$	Résistance électrique	$\Omega$
$S$	Section	$m^2$
$T$	Température	K
$V$	Volume	$m^3$
$W$	Largeur	m
$h$	Coefficient de convection	$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$
$k$	Conductivité thermique	$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
$r$	Rayon	m
$\varepsilon$	Emissivité	–
$\mu$	Masse volumique	$kg \cdot m^{-3}$
$\rho$	Résistivité électrique	$\Omega \cdot m$
$\sigma$	Constante de Stefan-Boltzmann	$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$

# Introduction générale

## Contexte

De nos jours, presque toutes les nouvelles fonctions d'un véhicule automobile utilisent des composants électriques et électroniques (notamment des calculateurs, capteurs et actionneurs). Afin de distribuer l'énergie électrique et de transmettre l'information entre ces composants, les véhicules embarquent une quantité toujours croissante de câbles et de connecteurs électriques. Ainsi, en 2005 une automobile contenait en moyenne un kilomètre de fils électriques pour un poids allant de 14 à 26 kilogrammes [Leruste et Koechlin, 2005]. Pour certains véhicules haut de gamme, la longueur de câblage électrique pouvait atteindre deux kilomètres pour une masse de 40 kilogrammes. Ainsi, l'ensemble des composants et du câblage représente 30 % à 40 % du coût d'une automobile à cause notamment de la masse embarquée de cuivre. Cette tendance est renforcée pour les véhicules électriques ou hybrides qui nécessitent une architecture électrique et électronique particulière pour leur chaîne de traction.

Ce nombre toujours plus important de composants et de câblage accroît le risque de courts-circuits pouvant mener à la détérioration des composants, voire à l'embrasement de l'automobile. Afin d'éviter ces problèmes, il existe des moyens permettant de protéger le réseau électrique automobile contre les surintensités et les échauffements potentiellement dangereux. De plus, pour les véhicules électriques ou hybrides, des moyens spécifiques pour protéger les infrastructures et les cordons de recharge électriques sont mis en place.

Afin de rester compétitif, il devient de plus en plus important de dimensionner au plus juste les conducteurs électriques, ce qui nécessite aussi d'optimiser leur système de protection contre les surintensités. Ainsi, il sera possible d'intégrer les nouvelles fonctions attendues par le marché, tout en maîtrisant les coûts, la masse du véhicule et tout en

préservant un haut niveau de sécurité.

Il a été montré dans les travaux de thèse de H.C Nguyen [Nguyen, 2013] que le point critique, c'est-à-dire le point le plus proche de sa température maximale admissible, se trouve généralement au niveau des points de contact dans les connecteurs. Leur rôle est d'assurer la continuité électrique entre les boîtiers électriques/électroniques de l'automobile et les faisceaux les reliant à des charges ou à d'autres boîtiers.

Plus que les fils électriques, les points de contact sont les maillons faibles des circuits électriques. En effet, ces derniers sont soumis à des échauffements supplémentaires, générés par effet Joule au travers d'une résistance dite *de contact*. La valeur numérique de cette résistance dépasse généralement de plusieurs ordres de grandeur les résistances électriques propres des différents composants de l'architecture électrique et électronique d'une automobile. Au long des cycles d'utilisation, la chaleur ou d'autres facteurs peuvent altérer la résistance de contact et augmenter sa valeur. Ceci engendre une augmentation de la température au niveau du point de contact qui, au delà d'un certain seuil, peut devenir dangereuse pour la sécurité du matériel et des personnes.

Ainsi, l'objectif principal du présent mémoire est de proposer des méthodes pour étudier les variations ou estimer les résistances de contact au niveau des connecteurs.

Ce manuscrit se place dans la suite des travaux de thèse de Huy Cuong NGUYEN [Nguyen, 2013] ayant conduit à une meilleure connaissance du comportement électrothermique des systèmes électriques et électroniques dans une automobile. Il s'inscrit également dans le cadre de l'OpenLab « Electronics and Systems for Automotive » associant le laboratoire de l'Intégration du Matériau au Système (IMS) de Bordeaux et le groupe PSA.

## Objectifs de la thèse

Il existe de nombreuses méthodes de détermination des résistances de contact, par exemple :

- la détermination par modélisation des surfaces de contact [Wilson et al., 2010, Greenwood et Williamson, 1966, Singer et Kshonze, 1991];
- la détermination par mesures électriques [Tristani, 2000];
- la détermination par mesures thermiques [Grandvullemin, 2009];

- la détermination par mesures de la surface de contact [Woo et Thomas, 1980].

Ces approches sont toutefois mal adaptées pour des applications en temps réel ou à grande échelle.

Ainsi, l'idée proposée dans ce mémoire est d'utiliser les informations déjà disponibles dans le véhicule ainsi qu'un nombre minimal de capteurs supplémentaires pour estimer la valeur ou détecter les variations anormales des résistances de contact. Pour atteindre ce but, deux approches sont proposées. L'une est basée sur une méthode de diagnostic à base de modèle. L'autre s'appuie sur une estimation d'entrée inconnue et sur la méthode des moindres carrés. Toutes deux nécessitent des modèles électrothermiques compacts, capables d'être utilisés en temps réel. Dans ce cadre, des modèles électrothermiques de plusieurs composants ont été proposés dans [Nguyen, 2013].

Partant du constat que certains composants de l'architecture électrique et électronique du véhicule sont soumis à un gradient de température non négligeable dans une ou plusieurs direction(s) (par exemple les fils électriques de longueur suffisante), une modélisation par maillage (découpage du composant en éléments plus petits) peut être effectuée. H.C Nguyen a proposé dans ces travaux de déterminer un maillage optimal d'un fil électrique se basant sur un modèle de référence d'ordre non entier, c'est-à-dire décrit par des équations différentielles où l'ordre de dérivation est caractérisé par un nombre réel. L'optimalité recherchée pour cette approximation, est de minimiser la norme  $\mathcal{H}_\infty$  de l'erreur entre le modèle de référence en son approximation en un point particulier du fil localisé à son extrémité.

Un objectif complémentaire est donc d'améliorer la modélisation par maillage d'un fil électrique, notamment en optant pour un critère cherchant à minimiser la norme  $\mathcal{H}_2$  de la même erreur sur tout un ensemble de points couvrant une longueur particulière du fil électrique. D'autre part, il s'agit également de compléter les modèles existants avec la modélisation du comportement électrothermique d'une connectique de recharge implantée sur les véhicules électriques ou hybrides.

Enfin, les travaux menés dans ce mémoire reposent sur deux applications distinctes. La première se focalise sur un montage dit de « faible puissance », qui correspond à une carte électronique sur laquelle figurent des pistes de cuivre, un composant de puissance ainsi qu'un connecteur et des fils électriques. Ce montage se rapproche des cartes électroniques couramment rencontrées dans les boîtiers électroniques automobile. La seconde

application s'intéresse à un montage dit de « forte puissance » constitué d'un connecteur de recharge pour véhicule électrique ainsi que de son faisceau du côté du véhicule.

## Organisation du mémoire

Les travaux présentés dans ce manuscrit sont organisés selon cinq chapitres.

Le **chapitre 1** présente une vision globale de l'architecture électrique et électronique couramment rencontrée dans une automobile. Les différents composants de cette architecture, ainsi que leurs rôles sont abordés en premier lieu. Ensuite, le chapitre s'intéresse plus particulièrement aux véhicules à chaîne de traction hybride ou électrique. Les modes et les infrastructures de recharge électrique de ces véhicules y sont notamment détaillés. Ce chapitre se termine par un tour d'horizon des protections existantes des circuits électriques automobiles contre les courts-circuits et sur l'importance de prévenir le système contre les défaillances au niveau des points de contact.

Le **chapitre 2** se focalise sur la modélisation d'un fil électrique par une méthode de maillage optimal basée sur la norme  $\mathcal{H}_2$ . Ce chapitre s'ouvre par un bref aperçu des trois phénomènes physiques qui influencent la température d'un corps (conduction, convection et rayonnement), ainsi que par une description de la méthode de modélisation (méthode nodale) retenue dans ce manuscrit. Les hypothèses pour la modélisation d'un fil électrique sont ensuite présentées, suivies de l'introduction de deux modèles électrothermiques de ce composant. Un premier modèle par maillage non optimisé est d'abord donné, puis un modèle non entier de référence est présenté. Ensuite, une méthode de maillage basée sur la norme  $\mathcal{H}_2$  de l'erreur entre les deux modèles précédents est proposée. Enfin, le chapitre se termine par une étude de la qualité du modèle entier obtenu par maillage.

Le **chapitre 3** aborde la modélisation du montage de faible puissance. Une description de la chaîne électrothermique étudiée est d'abord présentée. La chaîne est fractionnée en unités élémentaires qui correspondent aux composants du montage (piste de cuivre, composant de puissance, fil électrique, etc). Les différentes interactions thermiques considérées entre les unités élémentaires ou avec l'environnement sont alors exposées. Dans la suite, les modèles électrothermiques de chacun des composants sont présentés. La dernière section du chapitre propose un protocole de validation des modèles ainsi que les résultats obtenus.

Le **chapitre 4** est consacré à la modélisation du montage de forte puissance. La structure de ce chapitre est relativement similaire à celle du chapitre 3. De ce fait, la constitution du montage ainsi que les différentes interactions thermiques prises en compte entre ses composants sont en premier lieu présentées. Le chapitre se poursuit en détaillant la construction des modèles des composants, et se termine par une section dédiée à leur validation.

Le **chapitre 5** propose des approches pour étudier les variations d'une résistance de contact ou pour estimer sa valeur. En particulier ces démarches utilisent les modèles développés dans les chapitres 3 et 4 ainsi que des mesures de températures à proximité des points de contact. Un tour d'horizon des techniques de détermination des résistances de contact qui existent est tout d'abord présenté. Dans la suite, un rappel théorique sur le diagnostic à base de modèle et plus précisément sur l'espace de parité dynamique à temps continu est abordé. Cette démarche est ensuite appliquée au montage de faible puissance dans le but de détecter les variations d'une résistance de contact. La seconde partie du chapitre propose une approche d'estimation d'une résistance de contact basée sur la méthode des moindres carrés et appliquée au montage de forte puissance.



# Chapitre 1

## Architecture électrique d'une automobile, et systèmes de raccordement entre un véhicule et une borne de recharge électrique

---

1.1	Introduction . . . . .	9
1.2	Vision globale de l'architecture électrique d'une automobile . . . . .	11
1.2.1	Architecture électrique et électronique d'une automobile . . . . .	11
1.2.2	Les chaînes de traction électriques . . . . .	19
1.2.3	Les chaînes de traction hybrides . . . . .	21
1.3	Raccordements d'un véhicule à une borne de recharge . . . . .	26
1.3.1	Les différents modes de recharge . . . . .	27
1.3.2	Les différentes prises de charge spécifiques . . . . .	32
1.4	Protection des circuits électriques automobiles contre les courts-circuits . . . . .	36
1.4.1	Sur la protection des boîtiers et des faisceaux dans une automobile . . . . .	37
1.4.2	Sur la protection des systèmes de recharge des véhicules électriques ou hybrides . . . . .	39
1.5	Conclusion . . . . .	40

---

« Les portes de l'avenir sont ouvertes à ceux qui savent les pousser. »

*Michel Colucci (Coluche)*

## 1.1 Introduction

L'invention du premier véhicule automobile est communément attribuée à Nicolas-Joseph Cugnot [Ickx, 1971]. Ce véhicule, connu sous le nom de fardier de Cugnot, fut conçu de 1769 à 1771 et se déplace grâce à une machine à vapeur (voir figure 1.1).



FIGURE 1.1 – Le fardier de Cugnot de 1771 conservé au musée des Arts et Métiers de Paris

Contrairement aux idées populaires, les premiers véhicules électriques ont fait leur apparition assez tôt dès les années 1830 [Shacket, 1981]. Les moteurs hybrides sont également plus anciens que ce qui est généralement pensé, puisque le premier d'entre eux – alliant déjà l'énergie thermique avec l'énergie électrique – fit son apparition entre la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle et le début du XX<sup>ème</sup> siècle [Bouchat et al., 2005]. Toutefois, les nombreuses améliorations apportées au moteur thermique depuis sa création en 1673 [Stern, 2005] et les prix des carburants devenant abordables, font que le moteur à combustion interne (moteur thermique) domine le marché automobile depuis les années 1920 jusqu'à aujourd'hui.

L'évolution de l'automobile ne s'est bien entendu pas restreinte à la seule amélioration des moteurs. En effet, bien des innovations sont apparues afin de perfectionner sans cesse les performances et la sécurité et le confort (accélération, vitesse, consommation, tenue de route, confort conducteur et passagers, ...) des automobiles. Parmi ces inventions et autres améliorations figurent par exemple :

- le pneumatique : invention du pneu par les frères Michelin ;
- les systèmes de freinage : freins à sabot, freins à disque ;
- les systèmes de transmission : boîtes de vitesses manuelles ou automatiques ;
- les suspensions : suspensions mécaniques, suspensions pneumatiques, suspensions

oléopneumatique ;

- les systèmes optiques : phares, rétroviseurs, écrans, Affichage Tête Haute (ATH <sup>(1)</sup>) ;
- les aides à la conduite : direction assistée, park assist, régulateur de vitesse, navigation GPS, détecteurs de proximité, assistants d'aide à la conduite ;
- les systèmes de sécurité : matériaux déformables, ceintures de sécurité, système anti-blocage des roues (ABS), électrostabilisateur programmé (ESP), airbag.

De nos jours, beaucoup de fonctions liées aux innovations précédemment citées sont supervisées par de l'électronique ou par du logiciel. Le logiciel occupe une position centrale dans le développement du véhicule puisqu'il dispose en moyenne d'une vingtaine de calculateurs (certains modèles haut de gamme en possèdent parfois plus de 60 !). En une trentaine d'années, la part du logiciel est passée de zéro à plusieurs dizaines de millions de lignes de code [Broy et al., 2007] pour certains véhicules. Le nombre de composants électriques et électroniques (calculateurs, capteurs, actionneurs, fusibles, fils électriques, etc) est toujours plus important puisqu'ils représentent de nos jours entre 30 % et 40 % du coût d'une automobile [Navet et Simonot-Lion, 2008]. Cette tendance est renforcée pour les véhicules électriques ou hybrides. En effet, ces véhicules ont besoin d'une architecture électrique et électronique particulière pour leur chaîne de traction. De plus, des infrastructures et des connectiques spéciales doivent être déployées pour permettre la recharge de leur batterie en toute sécurité.

Bien que la supervision électrique, électronique et logicielle de la plupart des fonctions d'un véhicule automobile présente des avantages notoires (reprogrammabilité, suppression de pièces physiques, ...), la nécessité de définir une architecture électrique est devenue indispensable et un métier à part entière. En effet, en 2005 une automobile embarquait en moyenne environ un kilomètre de fils électriques pour un poids allant de 14 à 26 kilogrammes [Leruste et Koechlin, 2005]. Pour certains véhicules haut de gamme la longueur de câblage électrique embarquée pouvait atteindre deux kilomètres pour une masse de 40 kilogrammes. Tout ce câblage doit être implanté dans le véhicule en tenant compte des contraintes spatiales, électromagnétiques, mécaniques, etc. D'autre part, le nombre croissant de fils électriques, de composants électriques et de composants électroniques accroît le risque de courts-circuits pouvant mener à la détérioration des composants, voire à l'embrasement de l'automobile. Afin d'éviter ces problèmes, il existe des moyens de protection permettant de protéger le réseau électrique automobile contre les surintensités et les échauffements potentiellement dangereux. Pour les véhicules disposant d'une chaîne

---

1. Le terme Vision Tête Haute (VTH) est plus particulièrement employé dans le groupe PSA.

de traction électrique ou hybride, la modification de la chaîne de traction par rapport à un véhicule thermique entraîne des changements plus ou moins importants de certaines parties de l'architecture électrique du véhicule. De plus, des moyens de protection spécifiques pour protéger les infrastructures et les cordons de recharge électriques sont mis en place.

L'objet de ce chapitre est tout d'abord de présenter les organes principaux et la structure générale d'une architecture électrique et électronique d'une automobile contemporaine. Une présentation sommaire des chaînes de traction électriques et hybrides est ensuite proposée. Les systèmes de raccordement des véhicules électriques ou hybrides à une infrastructure de recharge électrique sont ensuite décrits. Enfin, les moyens de protection du réseau électrique automobile et de la connectique de recharge des véhicules électriques ou hybrides contre les courts-circuits sont présentés.

## 1.2 Vision globale de l'architecture électrique d'une automobile

### 1.2.1 Architecture électrique et électronique d'une automobile

La figure 1.2 (source interne PSA), présente un exemple en 3D d'une architecture électrique et électronique de Peugeot 308. Son rôle est d'assurer la transmission de la puissance et des signaux d'information entre ses différents composants. Parmi ces composants (ou organes), certains fournissent l'énergie électrique, d'autres la distribuent ou la consomment.

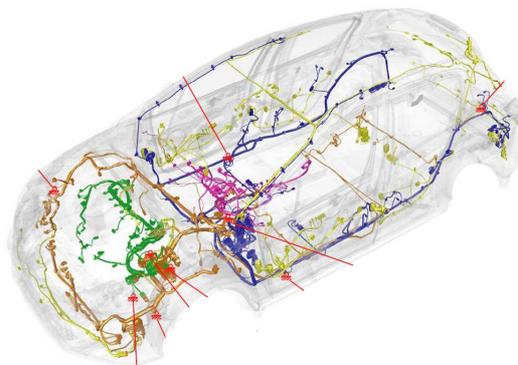


FIGURE 1.2 – Une architecture électrique et électronique automobile

## 1.2. VISION GLOBALE DE L'ARCHITECTURE ÉLECTRIQUE D'UNE AUTOMOBILE

---

La figure 1.3 est un schéma simplifié de l'architecture électrique et électronique d'un véhicule automobile du groupe PSA Peugeot Citroën. Les acronymes qui vont suivre sont ceux utilisés par le groupe PSA. Ils peuvent être différents pour un autre constructeur automobile. Le premier étage est la source d'énergie (batterie ou l'alternateur) qui délivre le courant à l'ensemble du réseau électrique de l'automobile. Le Boîtier de Protection et de Gestion des Alimentations (BPGA) distribue l'énergie dans le circuit électrique, protège les faisceaux en aval et gère les commutations à un niveau primaire. L'étage suivant est constitué du Boîtier de Servitude Intelligent (BSI) et du Boîtier de Servitude Moteur (BSM) dont les rôles sont présentés un peu plus loin dans ce chapitre. La Matrice de Fusibles et de Relais Habitacle (MFRH) et la Matrice de Fusibles et de Relais Moteur (MFRM) viennent respectivement en aval du BSI et sur le BSM pour protéger les faisceaux et gérer les commutations à un niveau secondaire. Enfin le dernier étage est constitué des consommateurs finaux. Un consommateur final (organe) est relié au BSI, au BSM/MFRM, au deux ou à la MFRH. Un organe peut être une charge (moteur électrique, résistance électrique, etc.), un capteur ou un boîtier électronique dans lequel sont implantés des fonctions du véhicule. Généralement ces boîtiers électroniques gèrent des fonctions spécialisées (Boîtier de Servitude Remorque (BSR), Boîtier d'État de Charge Batterie (BECB), Boîtier TELématique (BTEL)) grâce à un ou plusieurs calculateurs, capteurs et actionneurs.

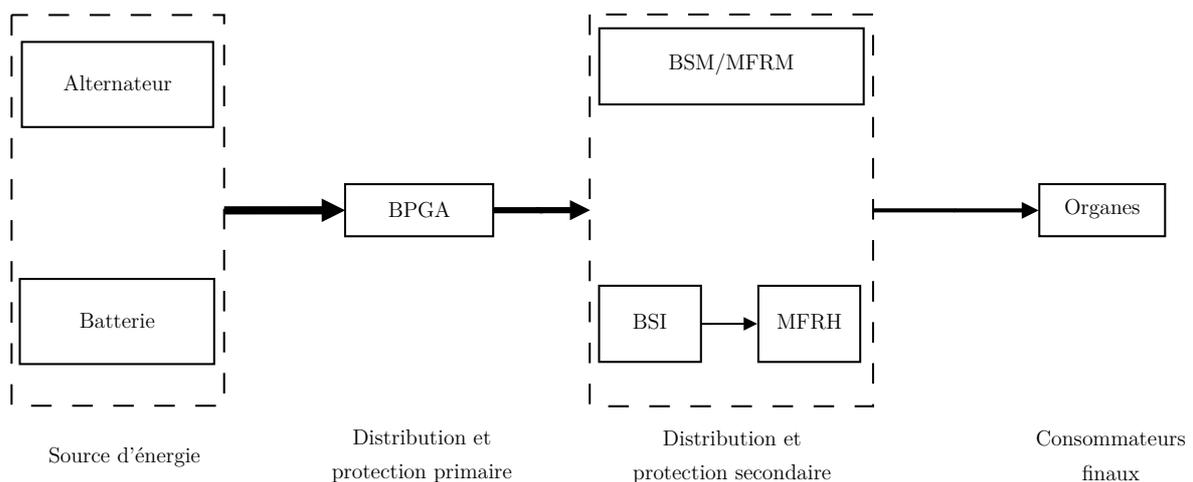


FIGURE 1.3 – Schéma simplifié d'une architecture électrique automobile

**Remarque 1** ([Gazeau, 2013]). *Après un palier à 6 V, le réseau électrique automobile est progressivement passé à 12 V entre 1940 et 1970 selon les continents. Dans un futur proche, les constructeurs automobiles souhaitent passer la tension du réseau électrique automobile à 48 V. En termes d'intérêts, un tel changement permettraient d'une part, de*

*réduire la section des fils électriques en faveur d'une réduction de la masse de cuivre et donc de coût. D'autre part, le passage au 48V permet de repousser les limitations en courant. Ainsi, la puissance électrique étant définie comme le produit de la tension et de l'intensité, il deviendrait possible d'utiliser des actionneurs de puissance supérieure.*

### 1.2.1.1 Les batteries et les alternateurs : sources d'énergie électrique

Pour une automobile thermique, la batterie est la source d'énergie lorsque le moteur est à l'arrêt, et c'est l'alternateur lorsque le moteur est en marche. Une batterie est un ensemble d'accumulateurs électriques reliés entre eux pour obtenir une tension (12V, cf. remarque précédente) et une capacité désirées. Elle est le siège de réactions électrochimiques qui permettent de créer un courant électrique continu entre deux électrodes. L'alternateur quant à lui est une machine synchrone en fonctionnement génératrice. Il transforme une partie de l'énergie mécanique issue du moteur thermique en énergie électrique et permet également de recharger la batterie.

Dans un véhicule électrique, il y a en plus une batterie « haute tension » de traction (en plus de la batterie traditionnelle 12V). La tension nominale d'une batterie de traction de véhicule électrique peut atteindre plusieurs centaines de volts, un montage abaisseur de tension permettant alors de fournir la bonne tension aux différents consommateurs. L'autonomie d'un véhicule électrique est liée à la capacité de sa batterie de traction qui est sensiblement plus élevée que celle d'un véhicule thermique.



FIGURE 1.4 – Batterie classique, alternateur et batterie de traction d'un véhicule électrique

La figure 1.4 présente les images d'une batterie d'un véhicule thermique (en haut à gauche), d'un alternateur automobile (en haut à droite) et d'une batterie de traction de

véhicule électrique (en bas).

### 1.2.1.2 Les boîtiers et les faisceaux : distributeurs d'énergie électrique

Le BPGA dispose d'une embase servant de support pour des barres conductrices, des fusibles de fort calibre, des relais de commutation et des connecteurs. Son rôle est de distribuer l'énergie électrique dans tout le réseau électrique de l'automobile, de gérer les commutations et d'assurer la protection *primaire* des circuits et des conducteurs en aval. Un exemple d'implantation d'un boîtier de protection et de gestion des alimentations est présenté sur la figure 1.5 (source interne PSA).

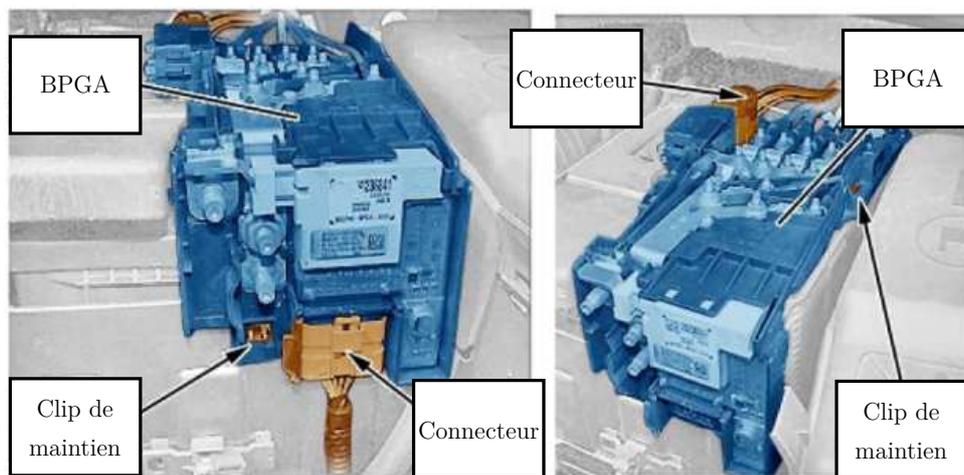


FIGURE 1.5 – Un BPGA de Peugeot 308 implanté sur la batterie

Le Boîtier de Servitude Intelligent ou BSI se situe au cœur de l'architecture électrique et électronique de la voiture. Il participe à des degrés plus ou moins importants à la plupart des fonctions pilotées du véhicule telles que l'éclairage intérieur, la signalisation, la climatisation, la gestion des ouvrants, le démarrage et l'anti-démarrage, les alarmes, l'horloge, etc. D'autre part, il assure également des fonctions de service liées :

- aux réseaux multiplexés (communication, supervision, passerelle, ...);
- à l'interface avec les outils de diagnostic (téléchargement, télécodage, identification, journal des défauts, lecture de codes défauts, pilotage d'actionneurs, protection des réseaux CAN connectés à la prise diagnostic, ...);
- à la gestion de l'énergie (gestion des phases de vie, gestion du bilan électrique);
- à l'interconnexion des faisceaux.

Enfin, le BSI gère aussi les commutations, la distribution et la protection électrique via

la MFRH des faisceaux.

Le Boîtier de Servitude Moteur ou BSM assure plus amplement les fonctions liées à l'éclairage, la visibilité, l'essuyage et le lavage des vitres. Il gère également des fonctions passerelles inter-réseaux et des fonctions de diagnostic. Enfin, le BSM assure les commutations, la distribution et la protection électrique des organes situés sous le capot grâce à la MFRM intégrée au BSM.

De manière générale, les boîtiers électroniques (BSI, BSM, BSR, BTEL, etc.) contiennent des cartes électroniques sur lesquelles se trouvent des composants de puissance (relais, fusibles, MOSFETs de puissance), des composants électroniques numériques (microcontrôleurs, mémoires) et analogiques (diodes, transistors, résistances, capacités). Un exemple de boîtier électronique et d'une carte électronique est donné sur la figure 1.6.

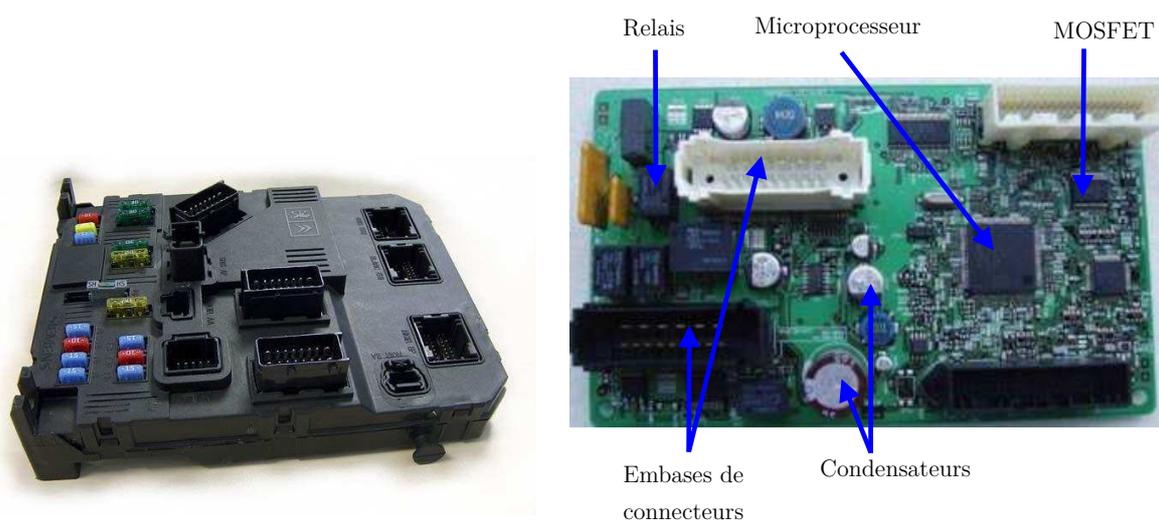


FIGURE 1.6 – Un BSI et une carte électronique de boîtier électronique

Les boîtiers électriques (BPGA) ou électroniques ont un point commun : ils disposent tous d'un ou plusieurs connecteurs assurant la continuité de la liaison électrique avec ses faisceaux. Il existe les connexions vissées (non abordées dans ce mémoire) pour les contacts de très forte puissance et les connexions clip – languette pour du signal et les plus faibles puissances (voir figure 1.7). Ainsi, un boîtier dispose d'une (ou plusieurs) embase pourvue de languettes (partie mâle). Un porte-clips pourvu de clips (partie femelle) à une extrémité d'un faisceau vient se verrouiller sur l'embase. Un exemple de connecteur est donné sur la figure 1.8, l'embase (en bas à gauche) s'insère dans le porte-clips (en haut à gauche) pour former le connecteur (à droite).

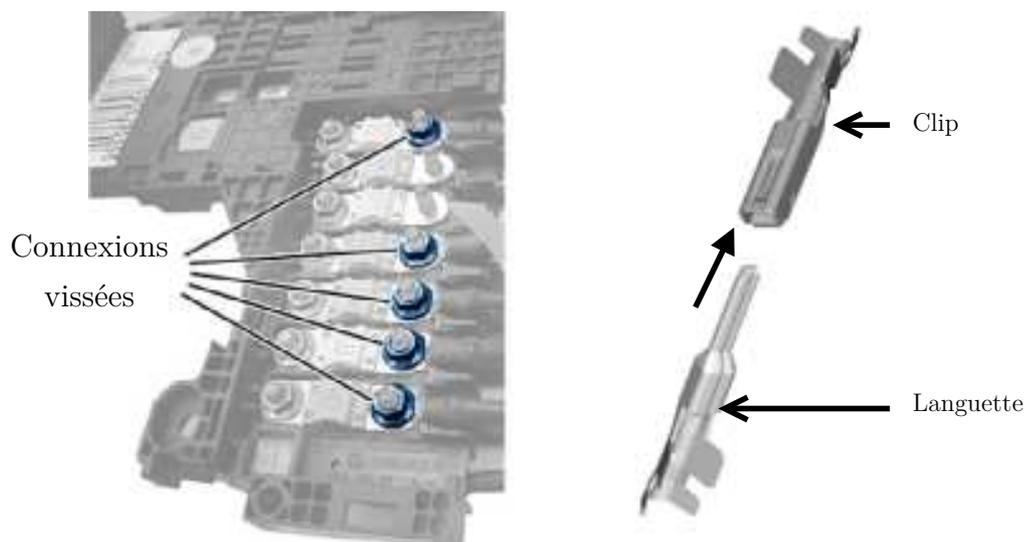


FIGURE 1.7 – Connexions vissées (à gauche) et connexion clip – languette (à droite)

Un connecteur est le siège de points de contacts électriques. Un point de contact se situe à l'interface entre une languette et un clip, et constitue une zone d'étranglement pour les lignes de courant faisant apparaître une résistance électrique supplémentaire appelée *résistance de contact*<sup>(2)</sup>.

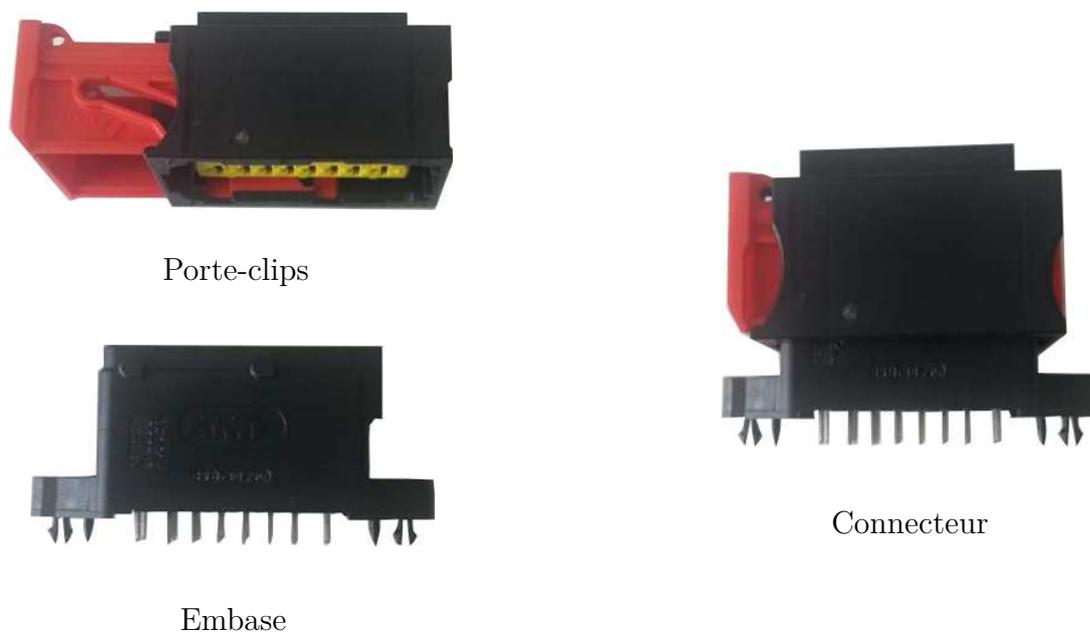


FIGURE 1.8 – Un exemple de connecteur automobile (connecteur 16 voies hybride)

---

2. Dans la littérature, l'emploi de *résistance de constriction* est généralement préféré

Les faisceaux assurent la distribution de l'énergie ou la transmission de données entre un boîtier et des charges, des actionneurs, des capteurs ou d'autres boîtiers. Un faisceau électrique est composé de fils regroupés ensemble pour former des torons. Un toron peut être entouré par diverses enveloppes (tubes, rubans adhésifs, gaines). Ces enveloppes servent à mettre le faisceau en forme et garantir son cheminement à travers le véhicule. Elles servent également à protéger le toron des agressions extérieures telles que l'humidité, les vibrations ou la température. Un schéma de faisceau électrique est présenté sur la figure 1.9.

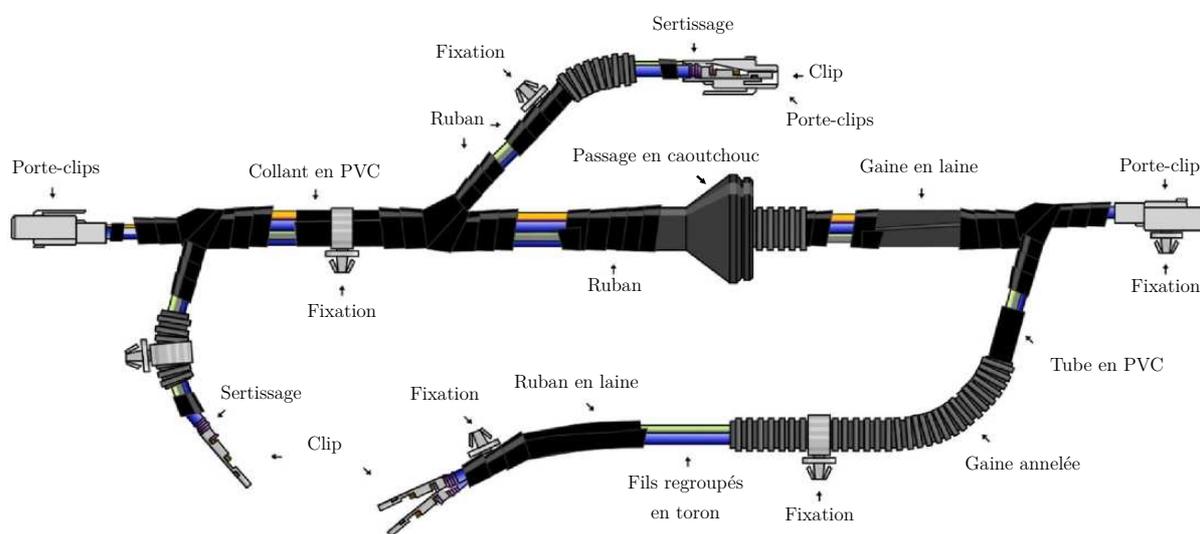


FIGURE 1.9 – Schéma d'un faisceau électrique automobile

Dans le secteur automobile, plusieurs sections de fils sont utilisées, celles-ci allant de  $0,13 \text{ mm}^2$  à  $70 \text{ mm}^2$ . Un fil électrique classique est constitué de deux cylindres concentriques mais de matériaux différents (voir figure 1.10). Le cylindre intérieur est appelé *âme* (généralement du cuivre ou de l'aluminium) et permet le transport des charges électriques. Le cylindre extérieur est appelé *isolant* (généralement fait de PVC ou de polyéthylène) et protège l'âme contre les agressions extérieures et l'isole électriquement du reste de son environnement. Les problèmes d'embrassement des fils électriques proviennent de la température maximale admissible par l'isolant. Cette température maximale est en général aux alentours d'une centaine de degrés Celsius et bien inférieure à celle d'un matériaux conducteur (par exemple  $660 \text{ }^\circ\text{C}$  pour de l'aluminium et  $1035 \text{ }^\circ\text{C}$  pour du cuivre).

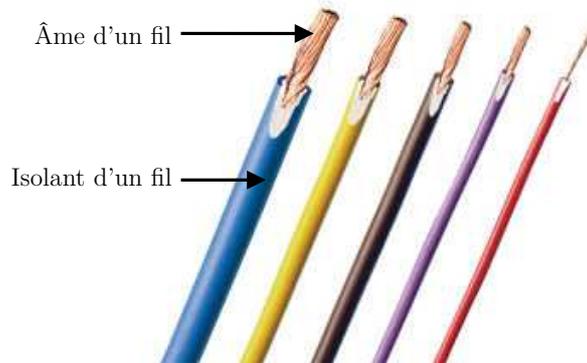


FIGURE 1.10 – Des fils électriques de sections différentes

### 1.2.1.3 Les composants électriques et électroniques : consommateurs d'énergie électrique

Les organes finaux de l'architecture électrique et électronique automobile sont appelés consommateurs. Ils se situent aux terminaisons des faisceaux et transforment l'énergie électrique qu'ils reçoivent en une autre forme d'énergie. Dans le domaine automobile, les trois types de consommateurs électriques les plus utilisés sont les résistances, les dispositifs d'éclairage et les moteurs électriques. Un exemple illustratif appartenant à chaque type de consommateur cité précédemment est donné sur la figure 1.11.



FIGURE 1.11 – Des exemples de consommateurs électriques automobiles

Les résistances en tant qu'organes finaux sont utilisées pour produire de la chaleur par effet Joule (manifestation thermique de la résistance électrique lors du passage d'un courant). Dans une automobile, de nombreuses résistances chauffantes sont placées à divers emplacements, par exemple les résistances de sièges chauffants (notamment dans

les pays nordiques), l'allume-cigare ou les bougies de préchauffage des moteurs Diesel.

Les dispositifs d'éclairage transforment l'énergie électrique en lumière. Ils permettent d'éclairer la route (feux de route, feux de croisement, feux de position), d'éclairer l'habitacle (plafonniers), de servir de rétroéclairage pour les appareils multimédias (écrans tactiles) ou encore d'émettre des signaux de signalisation pour le conducteur ou les autres usagers (tableau de bord, voyants, clignotants, feux de recul, anti-brouillard, feux de stop, feux de détresse). Ces dispositifs utilisent des sources lumineuses variées telles que des lampes à incandescence, des lampes à halogène, des lampes à décharge, des diodes électroluminescentes (LED), des lasers, etc.

Les actionneurs électromécaniques (moteurs électriques) sont également très nombreux dans les automobiles et transforment l'énergie électrique en énergie magnétique puis mécanique. Par exemple ces éléments sont utilisés pour déplacer les balais d'essuies-glaces, pour monter ou abaisser les vitres électriques, pour ajuster la position des rétroviseurs, pour mettre en rotation des ventilateurs, etc.

## 1.2.2 Les chaînes de traction électriques

Bien que le problème majeur des véhicules 100 % électriques reste leur batterie (coût de production encore élevé, faible autonomie) un regain d'intérêt pour le développement de véhicules électriques est apparu ces dernières années du fait des inquiétudes environnementales et de l'augmentation du prix du baril de pétrole.

Les éléments de base nécessaires pour mettre en mouvement le véhicule, en partant de la source d'énergie via la transmission mécanique jusqu'aux roues, constituent la chaîne de traction d'un véhicule. Le moteur étant électrique, des éléments spécifiques viennent s'ajouter à l'architecture électrique et électronique de l'automobile. De plus, les fortes puissances électriques en jeu dans une chaîne de traction électrique et dans certaines chaînes de traction hybride nécessitent des câbles de forte section (jusqu'à 70 mm<sup>2</sup> pour certains véhicules). Dans les deux paragraphes qui suivent, la chaîne de traction électrique classique est d'abord décrite, puis une chaîne de traction alternative appelée « moteur-roue » est présentée.

### 1.2.2.1 Chaîne de traction électrique classique

La figure 1.12 schématise la chaîne de traction électrique classique. Elle se compose d'un chargeur embarqué, de la batterie de traction, d'un onduleur transformant les gran-

## 1.2. VISION GLOBALE DE L'ARCHITECTURE ÉLECTRIQUE D'UNE AUTOMOBILE

---

deurs électriques continues en grandeurs électriques alternatives triphasées (convertisseur statique), du moteur électrique et de la transmission mécanique.

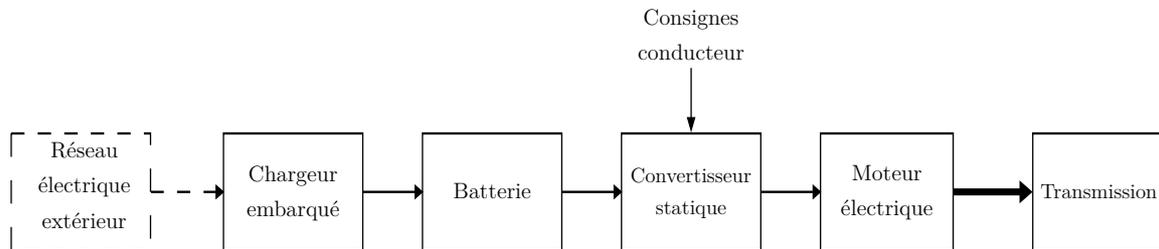


FIGURE 1.12 – Schéma d'une chaîne de traction électrique classique

Le réseau électrique extérieur délivre des tensions alternatives, par exemple 230 V à 50 Hz pour le réseau électrique monophasé basse tension en France. Le chargeur embarqué permet de recharger la batterie en raccordant le véhicule au réseau électrique extérieur. Son rôle est de redresser les tensions et les courants alternatifs afin d'en faire des grandeurs continues.

Le convertisseur statique assure la transformation nécessaire des tensions et des courants de la batterie selon le type de moteur électrique utilisé. De plus, le convertisseur permet de piloter le moteur à partir des consignes envoyées par le conducteur via les pédales. Un boîtier contenant un calculateur dédié au contrôle du moteur est intégré ou est placé prêt du convertisseur statique.

Les moteurs électriques peuvent dépasser un rendement de 90 % contre seulement 35% au mieux pour un moteur à combustion [Tesla, 2014]. Il y a trente ans, les moteurs de véhicules électriques majoritairement utilisés étaient des machines à courant continu. Ce choix s'explique notamment par la facilité de piloter en vitesse ce type de machine. Néanmoins, les moteurs à courant continu ont été peu à peu délaissés au profit des moteurs synchrones ou asynchrones. Ces derniers fonctionnent en courant alternatif et sont donc accompagnés d'un onduleur qui permet de transformer le courant continu de la batterie en courant alternatif. Dans ce cas, l'onduleur est donc le convertisseur statique entre la batterie et le moteur électrique.

Pour un véhicule 100 % électrique, la transmission mécanique est plus simple que celle d'un véhicule thermique. En effet, il n'y a pas besoin de boîte de vitesses ni de vilebrequin. La transmission se compose donc principalement d'un réducteur pour adapter la vitesse et accroître le couple transmis aux roues.

### 1.2.2.2 Le moteur-roue

La chaîne de traction électrique classique peut être encore simplifiée grâce à l'utilisation d'un moteur-roue. Il s'agit d'une roue dans laquelle est incorporé un moteur électrique. L'idée du moteur roue est assez ancienne puisque un brevet de ce concept existait déjà dès 1884 [Wellington, 1884] et sa première utilisation sur un véhicule automobile date de 1899 avec la Lohner-Porsche Electric Chaise de Ferdinand Porsche [Morin, 2010].

Un exemple de moteur-roue plus récent représenté sur la figure 1.13 est l'« Active Wheel » développé par Michelin (présenté en 2004). Cette configuration intègre à la fois un moteur électrique de traction avec un réducteur, un système de freinage et un système de suspension. Cette architecture est très compacte et ne pèse guère qu'une trentaine de kilogrammes.



FIGURE 1.13 – Exemple de moteur roue : l'Active Wheel de Michelin

### 1.2.3 Les chaînes de traction hybrides

Les véhicules hybrides offrent une transition entre les véhicules 100 % thermiques et les véhicules 100 % électriques, le temps que ces derniers gagnent en maturité et que leurs prix deviennent plus abordables. D'une manière générale, un véhicule hybride peut être défini comme un véhicule utilisant au moins deux sources d'énergie différentes, dont l'une au moins est réversible, pour être mis en mouvement. Ce type de véhicule peut se catégoriser selon trois critères différents : la nature des sources d'énergie, le niveau d'hybridation et l'architecture de la chaîne de traction.

Bien souvent, les véhicules hybrides combinent une source d'énergie thermique avec une source d'énergie électrique. Cependant, il existe des hybrides exploitant d'autres couples de sources d'énergie, par exemple l'hybride couplant moteur thermique et moteur à air-comprimé appelé « Hybrid Air » développé par PSA en partenariat avec Bosch.

Il existe quatre niveaux d'hybridation différents dont les deux plus faibles sont le *micro-hybrid* et le *mild-hybrid*, puis les deux plus élevés sont le *full-hybrid* et le *plug-in hybrid*. Les puissances électriques en jeu croient à mesure que le niveau d'hybridation augmente. Par conséquent, tout comme pour la chaîne de traction électrique, des câbles de forte section et des éléments spécifiques doivent être intégrés à l'architecture électrique du véhicule.

Enfin, quatre architectures principales existent pour la chaîne de traction d'un véhicule hybride. Ces architectures sont l'hybride *série*, l'hybride *parallèle*, la combinaison de ces deux dernières forme l'hybride *série-parallèle* et enfin l'hybride *complexe*.

Les différents niveaux d'hybridation et architectures hybrides sont présentés dans les paragraphes suivants.

### 1.2.3.1 Les différents niveaux d'hybridation d'un véhicule

**Le micro-hybrid** est le niveau le plus bas d'hybridation. Cette configuration est assimilée à la technologie « Start and Stop ». Un petit moteur électrique appelé alternodémarrreur est formé de la réunion d'un alternateur et d'un démarreur qui se trouvent classiquement dans un véhicule thermique. Le rôle de l'alternodémarrreur est d'assister le démarrage du moteur thermique et de recharger la batterie. Pour fonctionner, ce principe nécessite un calculateur spécifique ainsi qu'une batterie plus puissante que les batteries conventionnelles des véhicules 100% thermiques.

L'idée du micro-hybrid est de couper le moteur à combustion interne lorsque la vitesse du véhicule chute en dessous de 6 km/h. Quand le conducteur relâche la pédale de frein, le moteur thermique redémarre. Ceci permet de réduire la consommation d'une dizaine de pour cent, et de diminuer les nuisances sonores ainsi que les émissions de dioxyde de carbone en zones urbaines. Enfin, le moteur électrique peut également aider le moteur thermique à déplacer le véhicule sur de courtes périodes d'accélération.

**Le mild-hybrid** est une version améliorée du micro-hybrid mais avec un alternodémarrreur et une batterie plus puissants. Dans cette configuration, le moteur électrique

est relié au même arbre de transmission que le moteur thermique et l'assiste pour la traction. Bien qu'il dispose d'une puissance 20 à 40 chevaux vapeur, le moteur électrique n'est jamais utilisé seul. Il permet toutefois d'améliorer la réduction de la consommation de carburant (20 à 25 %) par rapport à un véhicule micro-hybrid. De plus, le moteur électrique est utilisé en génératrice lors des phases de freinage. Ainsi, lorsque le véhicule freine l'énergie mécanique est convertie en énergie électrique pour recharger la batterie.

**Le full-hybrid** présente un niveau d'hybridation plus complet que le micro-hybrid et le mild-hybrid. La batterie et le moteur électrique gagnent à nouveau en puissance et ce dernier devient capable d'entraîner les roues à lui tout seul. Ainsi, un système de gestion électronique dédié donnera la priorité au moteur électrique pour le démarrage et pour les déplacements à faibles vitesses si la batterie est chargée. Le moteur thermique prendra le relais pour couvrir les distances à grande vitesse ou lorsque la batterie est déchargée. Les distances qui peuvent être couvertes en tout électrique sont, tout au plus, de l'ordre de quelques dizaines de kilomètres. La recharge de la batterie peut s'effectuer en transformant l'énergie cinétique comme dans le cas du mild-hybrid, mais aussi grâce au moteur thermique qui peut entraîner une génératrice reliée à la batterie. Ce niveau d'hybridation permet une diminution de la consommation de carburant de près de 50 % par rapport à un véhicule thermique équivalent. En revanche, la gestion de ce niveau d'hybridation gagne à nouveau en complexité.

**Le plug-in hybrid ou hybride rechargeable** est une évolution du full-hybrid. La capacité de la batterie est améliorée et elle devient surtout rechargeable comme un véhicule 100 % électrique, grâce à une source d'énergie électrique extérieure. Ainsi, l'avantage par rapport au full-hybrid est de disposer d'une plus grande autonomie en tout électrique, ce qui permet de réduire encore un peu plus la consommation de carburant.

### 1.2.3.2 Chaînes de traction hybrides

**L'hybride série** est l'architecture la plus simple. Elle est représentée sur la figure 1.14. Seul le moteur électrique est utilisé pour entraîner les roues du véhicule. Le moteur thermique, plus petit que celui d'un véhicule à combustion interne, fournit de l'énergie mécanique à une génératrice. Un convertisseur approprié permet ensuite de recharger la batterie et d'alimenter le moteur électrique. De ce fait, le moteur électrique peut être alimenté par la batterie, la génératrice ou les deux via le convertisseur. De plus,

## 1.2. VISION GLOBALE DE L'ARCHITECTURE ÉLECTRIQUE D'UNE AUTOMOBILE

---

le moteur thermique est uniquement et directement relié à la génératrice ce qui limite les pertes par frottements et améliore le rendement global de la chaîne de traction. Les inconvénients de cette architecture sont, d'une part la nécessité d'effectuer une double conversion d'énergie : mécanique (moteur thermique) – électrique (génératrice) – mécanique (moteur électrique). D'autre part, l'utilisation de trois machines (au lieu de deux) avec la présence de la génératrice conduit à un encombrement plus important.

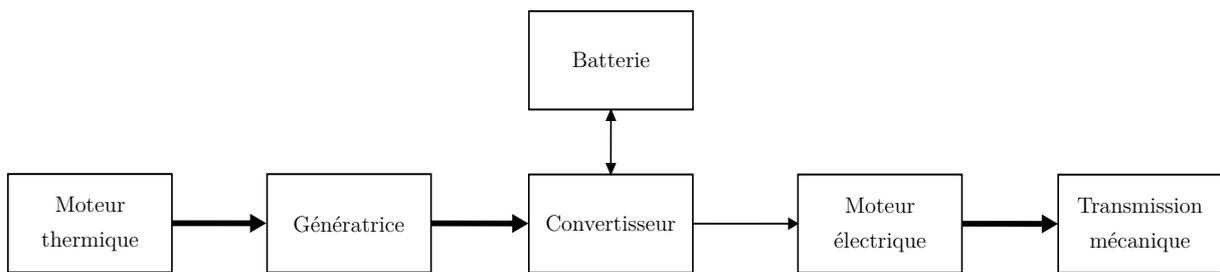


FIGURE 1.14 – Schéma de l'architecture hybride série

L'hybride parallèle est schématisé sur la figure 1.15. Dans cette configuration, le moteur thermique et le moteur électrique sont reliés au même arbre de transmission. Il est possible de mouvoir le véhicule en utilisant un seul des moteurs à la fois ou les deux en même temps. Le moteur électrique, entraîné par le moteur thermique, peut être utilisé en génératrice pour recharger la batterie. Ainsi, cette configuration est plus compacte que l'hybride série car il n'y a pas besoin d'une génératrice dédiée. En revanche, le contrôle de la chaîne de traction et la liaison mécanique entre les deux moteurs sont plus complexes.

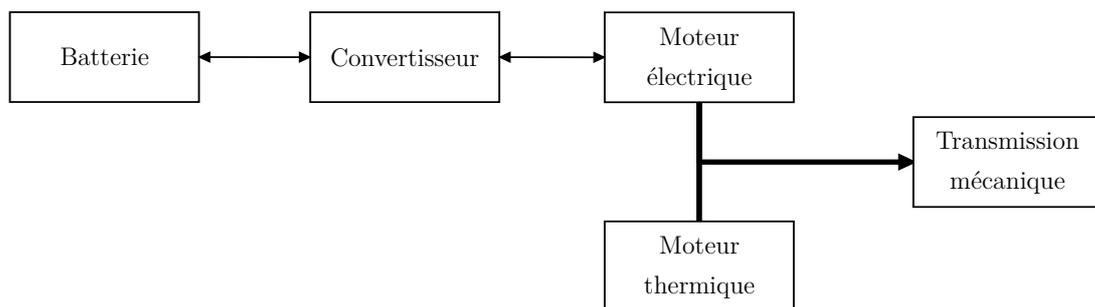


FIGURE 1.15 – Schéma de l'architecture hybride parallèle

L'hybride série-parallèle, illustré sur la figure 1.16, est un couplage de l'hybride série et de l'hybride parallèle. Cette solution permet de conserver les avantages des deux architectures hybrides précédemment citées. Ainsi, tout comme l'hybride parallèle, le véhicule peut être entraîné grâce à la puissance fournie par le moteur thermique et par le

moteur électrique de façon indépendante ou simultanée. De plus, comme pour l'hybride série, le moteur thermique peut entraîner la génératrice afin de recharger la batterie ou d'alimenter le moteur électrique via un convertisseur. Néanmoins, cette solution garde aussi les inconvénients de l'hybride série et parallèle, à savoir une liaison mécanique complexe et un encombrement plus important à cause de la génératrice. Dans ce cas, la gestion de la chaîne de traction devient encore plus complexe.

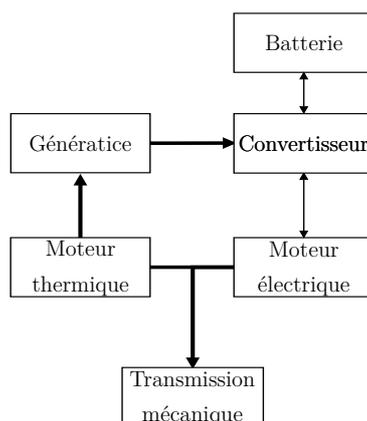


FIGURE 1.16 – Schéma de l'architecture hybride série-parallèle

L'**hybride complexe**, schématisée sur la figure 1.17, est une solution un peu différente par rapport aux configurations précédentes. L'hybride complexe se rapproche de l'hybride série-parallèle avec la différence importante que la génératrice peut être utilisée en moteur électrique. L'inconvénient de cette solution est son haut degré de complexité notamment au niveau de sa gestion.

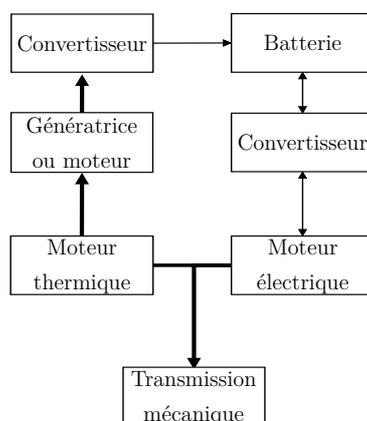


FIGURE 1.17 – Schéma de l'architecture hybride complexe

Quelle que soit l'architecture de la chaîne de traction d'un plug-in hybride ou d'un

véhicule électrique, il est nécessaire de définir des moyens de recharge pour leurs batteries. Ainsi, il existe divers modes de recharge d'un véhicule électrique ou hybride rechargeable, et plusieurs types de connectique pour relier ces véhicules à un réseau électrique extérieur. Ceux-ci sont présentés dans la section suivante.

## 1.3 Systèmes de raccordement entre un véhicule et une borne de recharge électrique

Pour un véhicule électrique ou hybride rechargeable, la recharge de la batterie se fait en raccordant le véhicule à une borne de recharge électrique extérieure. Des bornes de recharge privées peuvent être installées à domicile ou dans une entreprise. Toutefois, tout comme il existe des stations-services pour les véhicules thermiques, des stations (ou points) de recharge publiques pour les véhicules électriques ou hybrides ont été mises en place. Les stations de recharge disposent d'au moins une borne de recharge sur laquelle se trouve une ou plusieurs prises de recharge (voir figure 1.18).



FIGURE 1.18 – Une borne de recharge électrique avec deux prises (DBT-CEV Quick charger AC-DC)

Au mois de janvier 2016, près de 29 000 points de charge et plus de 84 000 prises publiques et semi-publiques ont été recensés dans le monde sur le site [ChargeMap.com, 2014]. Au moment de la rédaction de ce mémoire, plus de 5400 stations de recharge sont recensées en France, la plaçant ainsi en deuxième position mondiale (derrière les Pays-Bas avec près de 5900 stations). Cependant, elle prend la tête du classement si seul le nombre de prises (environ 23 600) est considéré. La figure 1.19 extraite de [ChargeMap.com, 2014] montre la répartition des prises de recharge publiques et semi-publiques en France en

janvier 2016.

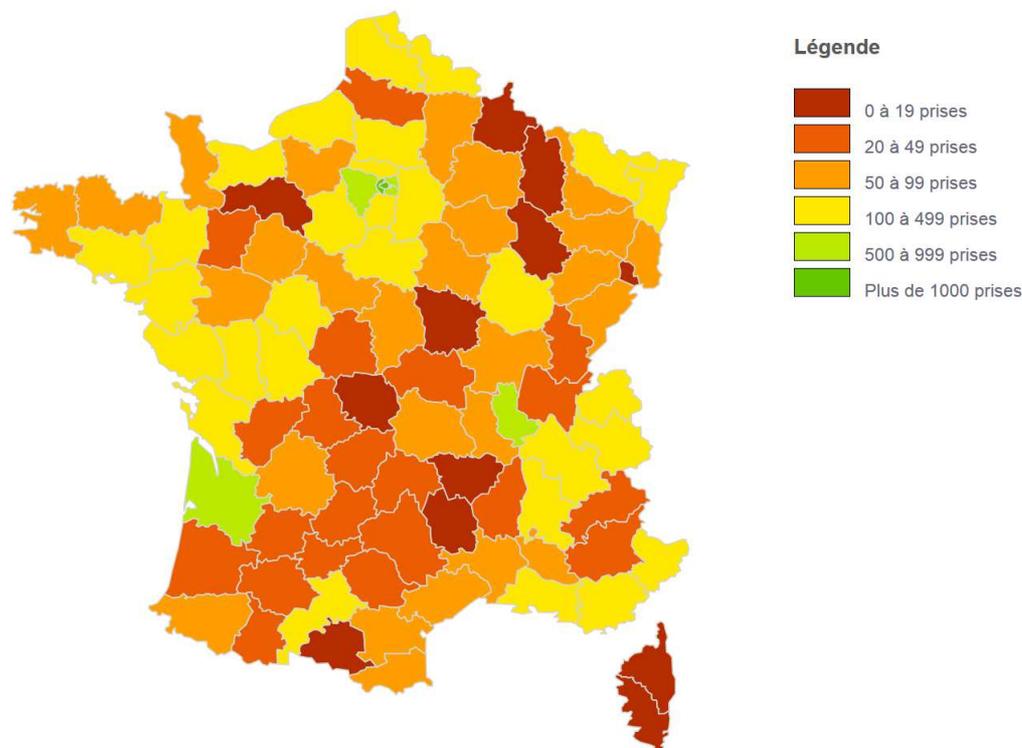


FIGURE 1.19 – Répartition des prises de recharge en France en octobre 2015 (source ChargeMap.com)

Que les bornes de recharge soient publiques ou privées, il existe différents modes de recharge qui sont plus ou moins rapides, sophistiqués et onéreux. Des prises spéciales ont été développées pour fonctionner avec ces différents modes de recharge. Cette section présente dans un premier temps les différents modes de recharge, puis dans un second temps, les différents types de prises spécifiques pour la recharge.

### 1.3.1 Les différents modes de recharge

Actuellement, il n'y a pas de norme sur une unique méthode de recharge pour la batterie des véhicules électriques ou hybrides via un réseau électrique extérieur. Dans le cas d'une utilisation classique, l'autonomie de ces véhicules nécessite généralement plusieurs recharges par semaine. Ainsi, il existe quatre modes de recharge qui se différencient avant tout selon leur type de connexion (classique ou spécifique), leur capacité à charger ou non la batterie à différentes vitesses, et leur niveau de protection.

**Remarque 2.** Les valeurs des tensions électriques et courants électriques données dans les paragraphes qui suivent sont spécifiquement précisées pour la France.

Les temps de recharge sont donnés pour un véhicule disposant d'une batterie dont la capacité est d'une vingtaine de kilowatt-heure.

#### 1.3.1.1 Le mode 1 : prise domestique classique

Le mode 1 illustré sur la figure 1.20 est le mode de recharge le plus simple à mettre en œuvre et le moins cher. Le véhicule est relié à une prise de courant classique du côté infrastructure (c'est-à-dire le côté du réseau électrique externe au véhicule) et est rechargé avec un courant électrique alternatif monophasé limité à 10 A sous 230 V soit une puissance égale à  $P = 10 \times 230 = 2,3 \text{ kW}$ . Pour un niveau de sécurité minimal, l'utilisation de ce mode nécessite que l'installation électrique soit conforme aux réglementations de sécurité et doit disposer d'une prise de terre, d'un disjoncteur contre la surcharge et d'une protection différentielle.

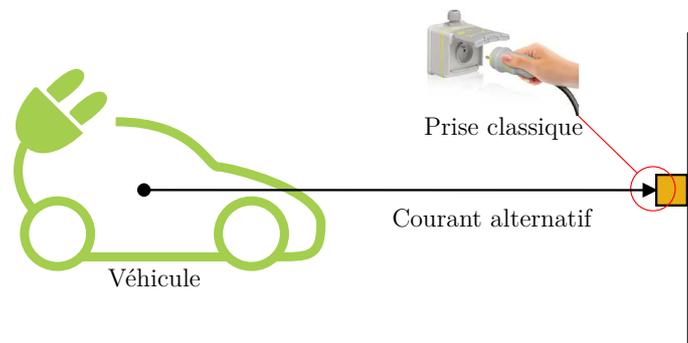


FIGURE 1.20 – Système de recharge d'un véhicule en mode 1

Bien que cette solution offre l'avantage d'être utilisable presque partout, il reste des limites contraignantes en terme de puissance et de sécurité qui rendent la disparition progressive de ce mode de recharge. En effet, le mode 1 permet seulement une charge dite *standard* (également appelée charge *normale*) car le temps nécessaire pour une recharge complète est de plus ou moins une dizaine d'heures.

La prise de recharge n'est pas sur un circuit dédié et a de fortes chances de se retrouver sur un circuit sur lequel d'autres appareils électriques sont connectés. De ce fait, la charge peut être interrompue de manière intempestive, car le disjoncteur se déclenchera si la somme des intensités des prises sur le circuit concerné dépasse la limite (généralement 16 A ou 20 A).

Il est également impossible d'augmenter l'intensité à cause du manque de dispositifs de protection dédiés en cas d'échauffements critiques des prises ou du cordon de recharge. De plus, la conformité de l'installation électrique ne peut pas être testée lors de l'utilisation de ce mode de recharge. Par conséquent, la vétusté de certaines installations électriques augmente le risque d'incidents lors de la charge de la batterie du véhicule.

#### 1.3.1.2 Le mode 2 : prise domestique équipée d'un dispositif de protection

La charge en mode 2, représentée sur la figure 1.21, reste similaire au mode 1 à la différence importante qu'un boîtier de contrôle est présent sur le câble de recharge. Une prise domestique classique n'est pas en mesure de communiquer avec le véhicule car elle ne dispose pas des contacts et de l'électronique nécessaires pour le faire. Ce boîtier est appelé CCID qui est l'acronyme anglais pour « Charging Circuit Interrupt Device » (Dispositif d'Interruption du Circuit de Charge en français). Pour des raisons purement mécaniques, le CCID se trouve généralement à environ 30 cm de la prise infrastructure. Les fonctions de ce boîtier sont multiples. Il permet de :

- détecter les courants de fuite ;
- s'assurer du passage du courant seulement dans les conditions appropriées en communiquant avec le véhicule (intensité maximale autorisée par le chargeur embarqué, prise du côté véhicule branchée ou débranchée) ;
- limiter ou empêcher le passage du courant en cas de dépassement de l'intensité limite autorisée (paramétrable par l'utilisateur) ;
- s'auto-protéger contre les échauffements ;
- s'assurer que la prise de terre et sa protection sont intactes.

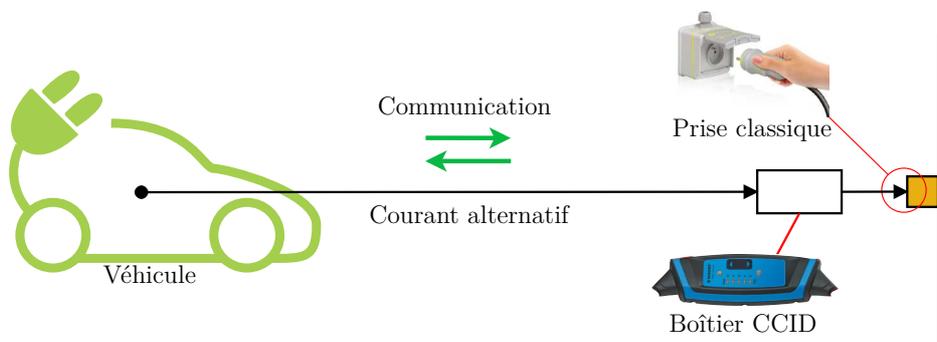


FIGURE 1.21 – Système de recharge d'un véhicule en mode 2

### 1.3. RACCORDEMENTS D'UN VÉHICULE À UNE BORNE DE RECHARGE

Ce type de boîtier limite généralement l'intensité du courant de recharge à 10 A. Ainsi, la recharge n'est pas plus rapide qu'en mode 1, par contre le boîtier permet un gain de sécurité en vérifiant la conformité de l'installation électrique et en communiquant avec le véhicule.

#### 1.3.1.3 Le mode 3 : prise spécifique sur un circuit dédié

La recharge en mode 3 est présentée sur la figure 1.22. Cette solution utilise une prise de charge spécifique (cf. sous-section 1.3.2) du côté infrastructure, et un circuit dédié uniquement pour la charge ce qui empêche d'utiliser d'autres appareils électriques sur ce circuit. Cependant, tout comme un tuyau d'essence est attaché à sa pompe, il se peut que le cordon de recharge soit lié à la borne de recharge. Dans cas, la prise du côté de la borne est dite *solidaire*.

La protection et le contrôle de la recharge sont directement intégrés dans l'installation murale du domicile (wallbox) ou sur la borne de recharge publique. La communication est renforcée puisque la borne (ou la wallbox) communique avec le véhicule (courant maximal admissible par le chargeur embarqué, prise branchée ou débranchée) mais aussi avec le cordon de recharge (courant maximal admissible).

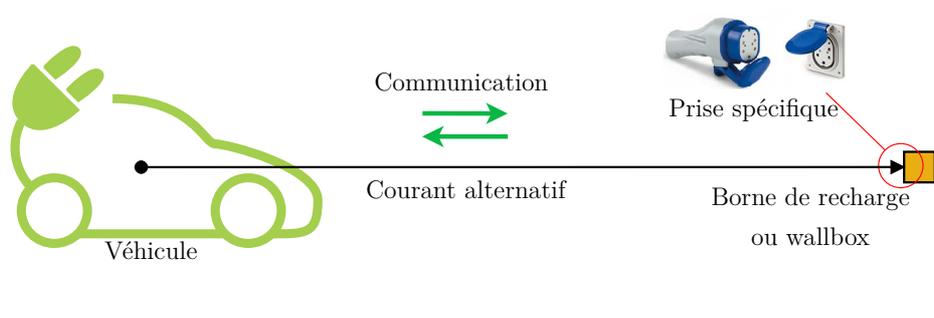


FIGURE 1.22 – Système de recharge d'un véhicule en mode 3

Si le chargeur intégré du véhicule, le cordon de recharge et la prise spécifique le permettent, la recharge peut s'effectuer plus rapidement. En effet, il est possible d'effectuer une charge complète en 8 heures grâce à une charge normale « améliorée » en monophasé avec 16 A sous 230 V, c'est-à-dire une puissance  $P_m = 230 \times 16 \approx 3,7 \text{ kW}$ . Il est également possible d'effectuer une charge partielle à 80 % en environ 1 heure grâce à une charge dite *accélérée* en courant triphasé de 32 A sous 400 V soit une puissance  $P_t = 400 \times 32 \times \sqrt{3} \approx 22,2 \text{ kW}$ . Enfin, il existe également la charge dite *rapide* qui utilise

du triphasé à une puissance d'environ 43,6 kW (63 A sous 400 V triphasés). Dans cette dernière configuration, la charge à 80 % du véhicule se fait en une trentaine de minutes seulement, mais au détriment de la durée de vie de la batterie qui s'use plus rapidement.

En résumé, le mode 3 permet d'effectuer de la charge normale, accélérée ou rapide à condition que les limites en puissance de chaque élément (prises, cordon, chargeur embarqué) soient respectées.

#### 1.3.1.4 Le mode 4 : connexion à courant continu

Le mode 4 est illustré sur la figure 1.23. Il permet essentiellement d'effectuer une charge rapide du véhicule. Tout comme le mode 3, la protection et le contrôle de la recharge sont intégrés à la borne de recharge à laquelle est attachée la prise côté infrastructure. La différence importante avec les trois autres modes présentés précédemment est que le courant alternatif du réseau est converti en courant continu à l'extérieur du véhicule. Ainsi, la borne de recharge assure la conversion du courant et il n'y a pas besoin d'utiliser le chargeur embarqué du véhicule. De ce fait, la puissance de charge est encore plus importante puisqu'elle atteint 50 kW avec des courants allant de 100 A à 125 A. Une telle puissance permet des recharges à 80 % en une quinzaine ou une vingtaine de minutes seulement mais dégrade également la durée de vie de la batterie.

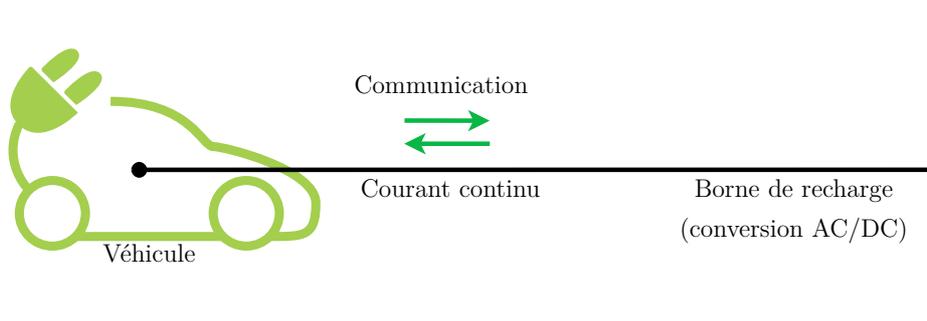


FIGURE 1.23 – Système de recharge d'un véhicule en mode 4

Le tableau 1.1 récapitule le type et l'intensité du courant, la nature de la charge et de la prise côté infrastructure, la puissance de charge, le temps de recharge (complet ou à 80 % selon la nature de la charge) et le niveau de sécurité associés à chaque mode de recharge.

### 1.3. RACCORDEMENTS D'UN VÉHICULE À UNE BORNE DE RECHARGE

---

	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
Type de courant	Alternatif	Alternatif	Alternatif	Continu
Nature de la charge	Normale	Normale	Normale, accélérée, rapide	Rapide
Prise infrastructure	Classique	Classique	Spécifique ou solidaire	Solidaire
Puissance	2,3 kW		3,7 kW à 43,6 kW	50 kW
Intensité du courant	10 A		16 A (monophasé) à 63 A (triphase)	100 A à 125 A
Temps de recharge	Environ 10 heures		30 minutes à 8 heures	15 à 20 minutes
Sécurité	Aucune	CCID	Protection et contrôle intégré dans l'infrastructure	

TABLE 1.1 – Récapitulatif des quatre modes de recharge

Dans cette sous-section, seule la nature classique ou spécifique des prises de recharge et uniquement du côté **infrastructure** a été précisée. Les différents types de prises spécifiques pour la recharge côté infrastructure et côté véhicule sont présentés plus en détail dans la sous-section suivante.

#### 1.3.2 Les différentes prises de charge spécifiques

La prise côté *infrastructure* est classique pour de la recharge en mode 1 ou en mode 2, et devient spécifique ou solidaire lors de l'utilisation du mode 3 ou du mode 4. En revanche, une prise spécifique est nécessairement employée du côté *véhicule* lors de la recharge en mode 2, 3 ou 4<sup>(3)</sup>. Ainsi, il existe quatre types de prises adaptées à un ou plusieurs modes de recharge, et adaptés soit au côté véhicule, soit au côté infrastructure soit aux deux. Ces prises se différencient également par leur puissance maximale admissible et leur nombre de broches. Cependant, il est important de noter que les prises de type 1, 2 et 3 fonctionnent selon une logique de communication identique. Il n'est donc pas rare de trouver des cordons de recharge dont chacune des deux extrémités ne se terminent pas par une prise du même type. Enfin, certains véhicules peuvent disposer de plusieurs socles de prise différents afin de pouvoir y brancher plusieurs types de prise. Par exemple, une Peugeot iOn dispose d'un socle de prise de type 1 et d'un socle de prise de type 4.

##### 1.3.2.1 Prise de type 1

La prise de type 1 (ou prise Yazaki du nom de son constructeur) est une prise spécifique spécialement prévue pour le côté véhicule et pour fonctionner en recharge monophasée. Elle dispose de 5 broches : un fil de Terre, un fil de phase (aller) et un neutre (retour), un fil pour la détection de présence (proximité) et un fil pour la communication

---

3. En effet, le mode 1 ne permet pas la communication entre le véhicule et l'infrastructure, de plus le cordon est attaché au véhicule.

entre le véhicule et l'infrastructure. La puissance maximale admissible est de 8 kW (courant de 32 A sous une tension de 250 V). De ce fait, les prises de type 1 sont utilisées pour de la recharge normale en mode 2 ou en mode 3. La figure 1.24 présente une image d'une prise de type 1 (à gauche) et un schéma du brochage (à droite).

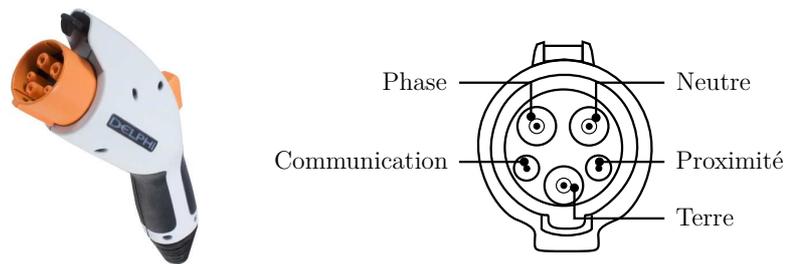


FIGURE 1.24 – Image (DELPHI) et schéma de brochage d'une prise de type 1

#### 1.3.2.2 Prise de type 2

Une prise de type 2 (ou prise Mennekes du nom de son constructeur) est prévue pour de la recharge en courant alternatif monophasé ou triphasé. C'est le seul type de prise pour lequel, il existe une version pour le côté infrastructure et une version pour le côté véhicule. La prise, que ce soit la version du côté véhicule ou celle du côté infrastructure, dispose de sept broches pour permettre l'utilisation du triphasé. Il y a donc un fil de Terre, trois fils de phases, un fil de neutre, un fil de détection de présence et un fil de communication. Ce type de prise est utilisé pour fonctionner en mode 3 avec une puissance maximale admissible de 35 kW en monophasé (70 A sous 500 V) et de 54,6 kW en triphasé (63 A sous 500 V). Il est donc possible d'effectuer de la charge normale, accélérée ou rapide avec une prise de type 2. La figure 1.25 présente une image (à gauche) d'un cordon de recharge sur lequel se trouvent deux prises de type 2 (une pour le côté infrastructure, l'autre pour le côté véhicule) et un schéma du brochage (à droite).

### 1.3. RACCORDEMENTS D'UN VÉHICULE À UNE BORNE DE RECHARGE

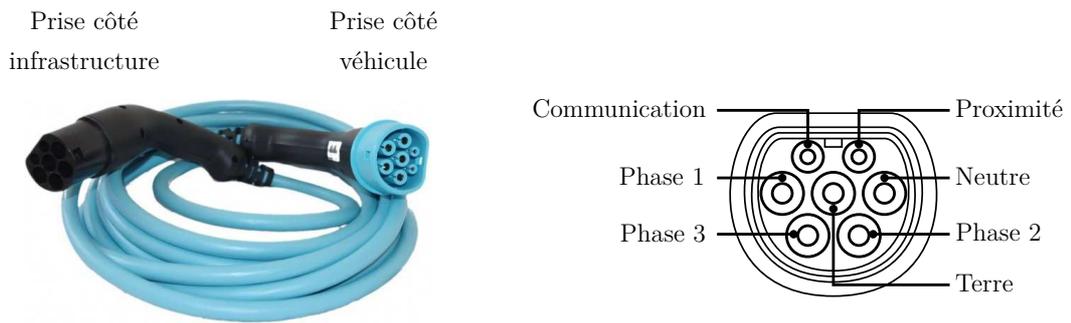


FIGURE 1.25 – Cordon de recharge avec deux prises de type 2 (infrastructure et véhicule) et schéma de brochage d'une prise de type 2

#### 1.3.2.3 Prise de type 3

Les prises de type 3 sont une proposition de l'association EVPlugAlliance<sup>(4)</sup> pour une recharge en mode 3 et ne sont dédiées qu'à l'infrastructure. Bien que la disposition soit différente, une prise de type 3 a les mêmes broches qu'une prise de type 2. Elle peut donc assurer une charge en monophasé ou en triphasé mais à plus faible puissance qu'une prise de type 2 : 16 kW en monophasé ou 26,7 kW en triphasé (32 A sous 500 V dans les deux cas). Une prise de type 3 permet donc la recharge normale ou accélérée du véhicule. La figure 1.26 présente une image d'une prise de type 3 (à gauche) et un schéma du brochage (à droite).

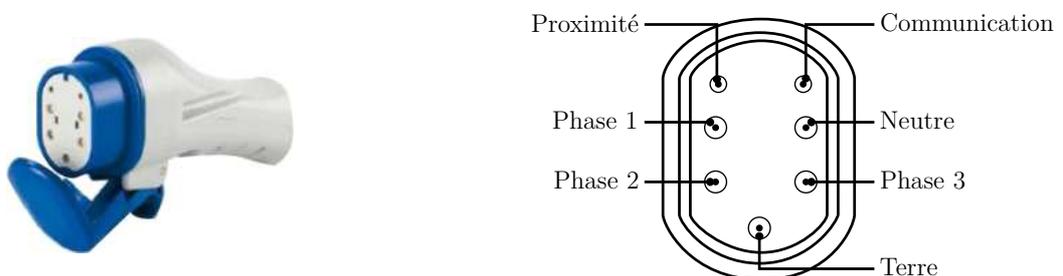


FIGURE 1.26 – Image et schéma de brochage d'une prise de type 3

4. L'EV Plug Alliance a été créée par Schneider Electric, Legrand et Scame afin de promouvoir l'usage d'une solution de branchement et d'une prise haute sécurité pour l'infrastructure de charge des véhicules électriques.

#### 1.3.2.4 Prise de type 4

Une prise de type 4 ou prise CHAdeMO<sup>(5)</sup> (CHArge de MOve : charger pour se déplacer en français) ne se trouve que du côté véhicule et dispose de 9 broches actives. Elle permet de recharger le véhicule en courant continu pour une charge rapide (donc en recharge mode 4) jusqu'à une puissance de 62,5 kW (125 A sous 500 V). La figure 1.27 présente une image d'une prise de type 4 (à gauche) et un schéma du brochage (à droite).

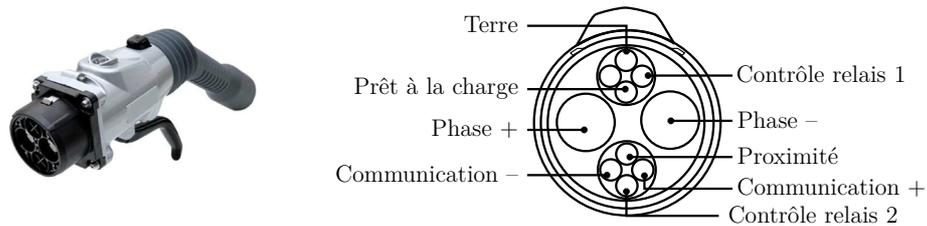


FIGURE 1.27 – Image et schéma de brochage d'une prise de type 4

#### 1.3.2.5 Prises combo

Il existe des prises combo destinées au côté véhicule et qui réunissent à la fois une prise de type 1 ou de type 2 avec une prise de type 4. Ces prises permettent d'effectuer une charge standard, accélérée ou rapide. Elles peuvent également assurer une recharge en courant alternatif ou en courant continu en utilisant qu'un seul socle de prise sur le véhicule. Un exemple de prise combo (à droite) avec son socle (à gauche) est donné sur la figure 1.28



FIGURE 1.28 – Un exemple de prise combo avec son socle véhicule

5. L'appellation est avant tout un jeu de mot japonais « O cha demo ikaga desuka » signifiant « Prenons un thé pendant qu'on charge »

## 1.4. PROTECTION DES CIRCUITS ÉLECTRIQUES AUTOMOBILES CONTRE LES COURTS-CIRCUITS

Le tableau 1.2 récapitule les modes de charge, la nature du courant, la nature de la charge, la puissance maximale de charge, l'intensité maximale du courant et le nombre de broches associés à chaque mode de recharge (hors prise combo puisqu'il s'agit d'une combinaison des types 1 ou 2 avec du type 4).

	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
<b>Mode de charge</b>	Mode 2 ou mode 3	Mode 3	Mode 3	Mode 4
<b>Nature du courant</b>	Alternatif monophasé	Alternatif monophasé ou triphasé	Alternatif monophasé ou triphasé	Continu
<b>Nature de la charge</b>	Normale	Normale, accélérée, rapide	Normale, accélérée	Rapide
<b>Puissance maximale</b>	8 kW	35 kW en monophasé 54,6 kW en triphasé	16 kW en monophasé 26,7 kW en triphasé	62,5 kW
<b>Courant maximal</b>	32 A	70 A en monophasé 63 A en triphasé	32 A en monophasé 32 A en triphasé	125 A
<b>Nombre de broches</b>	5	7	7	9

TABLE 1.2 – Récapitulatif des quatre types de prise spécifique

## 1.4 Protection des circuits électriques automobiles contre les courts-circuits

Un court-circuit se produit suite au contact direct (court-circuit franc) ou indirect (court-circuit impédant) de plusieurs conducteurs électriques soumis à des tensions différentes. Il génère une surintensité du courant dans les conducteurs électriques appelée courant de court-circuit. Tout conducteur électrique quel qu'il soit, dissipe de la puissance sous forme de chaleur dès lors qu'il est traversé par un courant électrique. Ce phénomène, appelé effet Joule est décrit par l'équation suivante :

$$P_J(t) = R \times I(t)^2, \quad (1.1)$$

où

- $P_J$  est la puissance thermique dissipée par effet Joule en W ;
- $R$  est la résistance électrique du conducteur en  $\Omega$  ;
- $I$  est l'intensité du courant électrique traversant le conducteur en A.

**Remarque 3.** *Par commodité dans ce manuscrit, « l'intensité d'un courant électrique » fera référence soit à sa valeur en régime de courant continu, soit à sa valeur efficace s'il s'agit d'un courant en régime périodique)*

Ainsi, lorsque un court-circuit survient, l'élévation du courant provoque une hausse de la température des conducteurs dont les conséquences peuvent être potentiellement dangereuses. En effet, les principaux risques encourus lorsqu'un court-circuit se déclare, sont : la détérioration des circuits électriques et du matériel environnant, le départ d'incendie, l'électrisation ou l'électrocution<sup>(6)</sup>. De manière générale, les causes d'un court-circuit sont nombreuses. En effet, une erreur de câblage, une rupture de conducteur, l'accumulation de poussières ou encore l'usure due à la chaleur, à des produits corrosifs ou à l'humidité sont quelques exemples susceptibles de provoquer des courts-circuits.

Il est impossible de prédire l'apparition d'un court-circuit du fait du grand nombre de paramètres en jeu, et de la quasi infinité de scénarii qui peuvent se produire. En revanche, il existe des moyens permettant de couper ou de limiter le courant dans un circuit qui se retrouverait en court-circuit.

Dans une automobile, la protection contre les courts-circuits se fait grâce à des fusibles ou également par logiciel [Nguyen, 2013] (protection d'un fil électrique contre les circuits impédants). Les protections des boîtiers et des faisceaux automobiles contre les courts-circuits et leurs limites sont abordées dans une première sous-section. Une seconde sous-section s'intéresse aux limites de la protection contre les courts-circuits lors de la recharge des véhicules électriques ou hybrides.

### 1.4.1 Sur la protection des boîtiers et des faisceaux dans une automobile

Un fusible permet d'ouvrir un circuit électrique, c'est à dire de couper son alimentation, lorsque l'intensité du courant électrique devient trop grande pendant une durée déterminée. Le principe du fusible est simple, il s'agit d'un filament conducteur qui se rompt physiquement (par fonte) à cause de l'augmentation de température due à une surintensité excessive. Les fusibles sont caractérisés par leur calibre et par leur courbe de temps  $t$  nécessaire à leur fusion en fonction de l'intensité  $I$  à température ambiante (précisée par le constructeur). Un exemple de courbes  $t = f(I)$  pour différents calibres de fusible est donné sur la figure 1.29<sup>(7)</sup>.

La protection dite par logiciel vise à remplacer un couple relais – fusible par un tran-

---

6. Un contact physique d'une seconde avec courant alternatif de 80 mA peut suffire pour provoquer la mort chez un être humain .

7. Les normes NEMA pour les fusibles moyenne tension évalués E (E3, E7, E10, etc) requièrent, qu'un fusible évalué 100E (ou moins) fonde dans les 300 secondes lorsqu'il est traversé par un courant 220 % à 240 % plus grand que son courant nominal.

#### 1.4. PROTECTION DES CIRCUITS ÉLECTRIQUES AUTOMOBILES CONTRE LES COURTS-CIRCUITS

sistor MOSFET intelligent (aussi appelé Smart Power) piloté par sa grille. La fonction d'un tel transistor est similaire à celle d'un relais mais avec une consommation électrique plus faible (jusqu'à sept fois moins de pertes de puissance) et de meilleures performances (environ cinq fois plus de cycles de commutation). Ce composant est dit intelligent, car il dispose d'un capteur de courant et d'une logique d'autoprotection contre la température ou les surintensités. Enfin, l'avantage principal d'un MOSFET intelligent est qu'il peut-être réamorçé après un court-circuit, tandis qu'un fusible devra nécessairement être remplacé. L'utilisation de ce composant à la place des fusibles allège en plus les contraintes de positionnement des matrices de protections, car elles peuvent être déplacées vers des zones du véhicule difficilement accessibles.

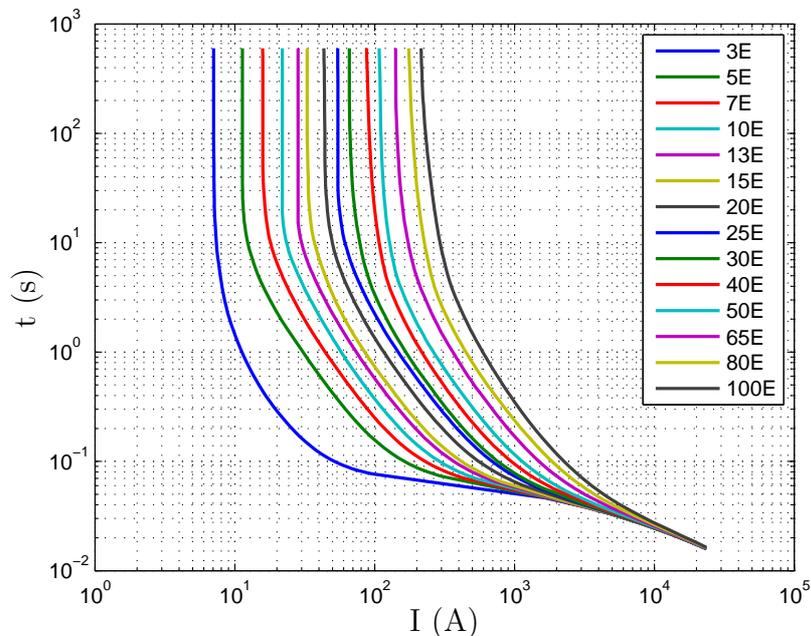


FIGURE 1.29 – Un exemple de courbes  $t = f(I)$  pour différents calibres de fusible (source des données : [www.sandc.com](http://www.sandc.com))

Il est généralement pensé que le rôle des fusibles est de protéger une charge contre les surintensités. En réalité il s'agit plutôt du contraire puisque, dans bien des cas, c'est la charge qui est responsable de la défaillance. Par conséquent, les fusibles (ou les MOSFET intelligents) sont notamment utilisés dans une automobile, pour protéger les fils électriques. Dans sa thèse [Nguyen, 2013], H.C Nguyen propose une loi de protection par logiciel d'un fil électrique contre la température. Sans rentrer pour le moment dans les détails, un des points faibles de cette loi de protection est la mise en œuvre d'un estima-

teur de température qui est en **boucle ouverte**. En effet, la température estimée du fil risque de dévier par rapport à sa vraie température. De plus, l'estimateur de température du fil est initialisé à la température ambiante, ce qui n'est pas forcément le cas. Dans le chapitre 5 de sa thèse, H.C Nguyen a également montré que le point critique, c'est-à-dire le point le plus proche de sa température maximale admissible, se trouve généralement au niveau des points de contact clip – languette (décrit plus en détails dans le chapitre 3 de ce mémoire) dans les connecteurs entre les boîtiers et leurs faisceaux, du fait de la résistance de contact.

Au long des cycles d'utilisation, la chaleur ou d'autres facteurs peuvent altérer la résistance de contact et augmenter sa valeur. D'après l'équation (1.1), ceci mène alors à un accroissement de l'effet Joule, et donc à une augmentation de la température au niveau du point de contact qui, au delà d'un certain seuil, peut devenir dangereuse pour la sécurité du matériel et des personnes.

De manière générale, les dispositifs de protection contre la température (MOSFET intelligent ou fusible) sont mal adaptés pour surveiller et protéger de façon optimale les points critiques. En effet, ils ne s'activent qu'en fonction de la température du point où ils sont implantés ou du courant qui les traverse. Hors, il est souvent impossible de les implanter directement sur les points à surveiller. Par exemple, ces dispositifs peuvent être sujets à de forts échauffements dus à leur proximité d'une source de chaleur importante sur un autre circuit, alors que le point à surveiller n'est lui-même pas en surchauffe et vice-versa. Ils ne sont donc pas pleinement efficaces car ils dépendent d'une température qui n'est pas celle du point à protéger. Ils ne sont pas non plus capables de déterminer à eux seuls l'origine des flux de chaleur excédentaires.

## 1.4.2 Sur la protection des systèmes de recharge des véhicules électriques ou hybrides

Les différents modes de recharge ont été présentés dans la sous-section 1.3.1. Mis à part le mode 1 qui ne dispose pas de sa propre protection, tous les autres modes embarquent une protection soit sur le cordon de recharge (mode 2) soit dans l'infrastructure (mode 3 et mode 4). Bien qu'il soit difficile de connaître en détail le rôle exact ou la structure de ces protections dans tous les cas, elles protègent surtout contre les surintensités et sont elles-même protégées des agressions de l'environnement (poussière, eau). Les boîtiers CCID, à la manière des MOSFET intelligents, ne font que s'auto-protéger contre

les échauffements. D'autre part, si une protection thermique devait exister en mode 3 et en mode 4, celle-ci ne concernerait que le côté infrastructure. En effet, il n'y a pas de capteur de température dans les prises du côté véhicule. Il n'est également pas possible d'estimer la température au niveau de la connectique du véhicule à partir des informations délivrées par un capteur de température qui serait placé dans l'infrastructure, à cause du concept de distance d'oubli qui sera présenté dans le chapitre 2. Au fur et à mesure des connexions – déconnexions de la prise de recharge, les contacts peuvent s'user et se détériorer, conduisant à un accroissement de la résistance de contact. Ceci peut conduire à des échauffements importants, d'autant plus que les courants en jeu sont très élevés. À ce jour, il n'existe pas de « réelles protections » contre les surintensités et les échauffements dangereux implantées du côté véhicule. En effet, pour éviter ces phénomènes, la connectique est surdimensionnée et donc coûteuse.

## 1.5 Conclusion

L'architecture électrique et électronique automobile est un vaste réseau de composants et de fils dont la longueur totale peut atteindre plus de deux kilomètres pour certains véhicules. Cette architecture, qui n'a cessé de s'étendre, est le reflet de la dépendance des véhicules à l'énergie électrique à cause du nombre toujours croissant de calculateurs, de capteurs et d'actionneurs embarqués. Les chaînes de traction électriques ou hybrides accentuent cette dépendance, et accentuent également l'importance de concevoir une architecture robuste, qui respecte un grand nombre de contraintes physiques.

Les véhicules 100 % électriques embarquent une source d'énergie électrique bien supérieure à celle d'un véhicule entièrement thermique. Les puissances électriques en jeu, notamment pour la recharge de la batterie et l'alimentation du moteur électrique, sont beaucoup plus importantes. Il en est de même pour un véhicule hybride, dès lors qu'il dispose d'une source d'énergie électrique et à mesure que son niveau d'hybridation augmente.

Concernant la recharge de la batterie d'un véhicule électrique ou d'un plug-in hybride, il est nécessaire d'utiliser des infrastructures et des systèmes de raccordement spécialisés pour recharger la batterie. Ces systèmes embarquent ou non des moyens de protection contre les surintensités.

L'électrification croissante des véhicules augmente le risque de courts-circuits qui peuvent potentiellement mener à la détérioration du matériel, voire à des départs d'incen-

dies et nuire à la sécurité des personnes. À défaut de pouvoir prédire le moment exact où surviendra un court-circuit, il existe des moyens d'en contrer les effets. Par exemple, les fusibles ou bien les MOSFET intelligents limitent ou annulent le courant électrique dans les lignes court-circuitées.

Cependant, les moyens de protection existant contre les échauffements sont limités, car ils ont tendance à se protéger eux-mêmes contre les échauffements critiques au lieu des points critiques à surveiller. D'autre part, ils ne sont pas en mesure de déterminer l'origine des flux de chaleur excédentaires. De récents travaux de thèse [Nguyen, 2013] ont permis de créer une loi de protection d'un fil électrique contre la surchauffe, mais elle reste limitée à cause de son estimateur de température utilisé en boucle ouverte. Il a également été montré dans cette même thèse, que les points critiques des circuits se situent au niveau des points de contact et que de petites variations de leur résistance de contact peut conduire à des échauffements dangereux.

Il est donc nécessaire de définir des estimateurs de température plus efficaces en passant en boucle fermée, et de définir des méthodes de diagnostic et d'estimation des résistances au niveau des points de contact. D'autre part, il existe peu (voire pas) de moyens techniques du côté véhicule, pour surveiller les surintensités ou les échauffements dangereux lors de la recharge des automobiles électriques ou hybrides.

Les méthodes de surveillance des points de contact proposées dans ce manuscrit s'appuient sur des modèles électrothermiques d'un certains nombres de composants de l'architecture électrique et électronique automobile. À cet effet, le chapitre suivant est notamment consacré à la modélisation d'un fil électrique par un maillage optimal.

## 1.5. CONCLUSION

---

# Chapitre 2

## Modélisation électrothermique d'un fil électrique par une méthode de maillage optimisée basée sur la norme $\mathcal{H}_2$

---

2.1	Présentation générale du type de modélisation utilisé . . . . .	45
2.2	Modélisation d'un fil électrique . . . . .	48
2.2.1	Modélisation d'un fil de longueur infinie . . . . .	51
2.2.2	Modélisation d'un fil de longueur finie . . . . .	52
2.3	Optimisation du maillage d'un fil électrique basée sur la norme $\mathcal{H}_2$ . . . . .	66
2.3.1	Rappels sur certaines normes des signaux et des systèmes . . . . .	67
2.3.2	Optimisation du maillage d'un fil grâce à un critère basé sur la norme $\mathcal{H}_2$ . . . . .	68
2.4	Evaluation de la qualité du maillage . . . . .	80
2.4.1	Comparaison du diagramme de Bode du modèle analytique et du modèle maillé . . . . .	82
2.4.2	Confrontation du modèle non linéaire avec des mesures réelles . . . . .	84
2.4.3	Avantages par rapport à une autre méthode d'optimisation utilisant un critère basé sur la norme $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	86
2.5	Conclusion . . . . .	87

---

« Cesse de croire et instruis-toi »

*André Gide*

## 2.1 Présentation générale du type de modélisation utilisé

Un modèle contient les informations qui permettent de prédire le comportement d'un système en fonction de ses entrées et de son état initial. Quels que soient les domaines physiques auxquels il appartient, un système peut être représenté par des modèles de nature différente : équations, tables, modèles réduits, cartes. Un modèle prend son sens selon ce qu'on veut en faire, et restera toujours une approximation du système qu'il représente. Ainsi, un modèle est en général limité sur un domaine de validité et plusieurs modèles peuvent être nécessaires pour décrire le fonctionnement complet d'un système.

Dans le domaine des systèmes physiques, les modèles employés sont majoritairement des modèles mathématiques de connaissance. Plus particulièrement pour les systèmes thermiques, les modèles sont établis en s'appuyant sur le premier principe de la thermodynamique énoncé en 1845 par Julius Robert von Mayer :

« *Au cours d'une transformation quelconque d'un système fermé, la variation de son énergie est égale à la quantité d'énergie échangée avec le milieu extérieur, sous forme de chaleur et sous forme de travail.* »

Il existe trois modes de transfert thermiques fondamentaux : la conduction, la convection et le rayonnement. Les lois mathématiques qui les décrivent ont été élaborées entre le début du XVIII<sup>ème</sup> siècle et la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle. La *conduction* intervient dans les solides ou les fluides au repos. Il s'agit d'un transfert de chaleur de proche en proche au niveau moléculaire et atomique au sein de la matière. La *convection* caractérise un échange de chaleur à la frontière entre un fluide en mouvement et une surface solide. Le *rayonnement* repose sur le transport de chaleur par ondes électromagnétiques, donc sans contact.

Pour mieux appréhender ces trois modes de transfert thermique, considérons un exemple simple illustré sur la figure 2.1. De la chaleur est délivrée par une source qui est un feu de bois et une certaine partie de celle-ci se propage de proche en proche par *conduction* dans le tison depuis son bout situé au dessus des flammes. L'air chauffé par les flammes remonte par changement de densité (fluide en mouvement), et vient échanger de la chaleur avec les mains et le bout du tison (solides) placés au dessus des flammes, ce qui illustre ainsi le phénomène de *convection*. Enfin, les ondes électromagnétiques émises par le feu chauffent par *rayonnement* l'objet placé à côté des flammes. Une description plus détaillée de chaque mode de transfert thermique et les équations qui les décrivent

## 2.1. PRÉSENTATION GÉNÉRALE DU TYPE DE MODÉLISATION UTILISÉ

sont données en annexe A. Un système thermique est dit électrothermique, lorsque de la chaleur est générée par effet Joule comme présenté au chapitre 1 et décrit par l'équation (1.1).

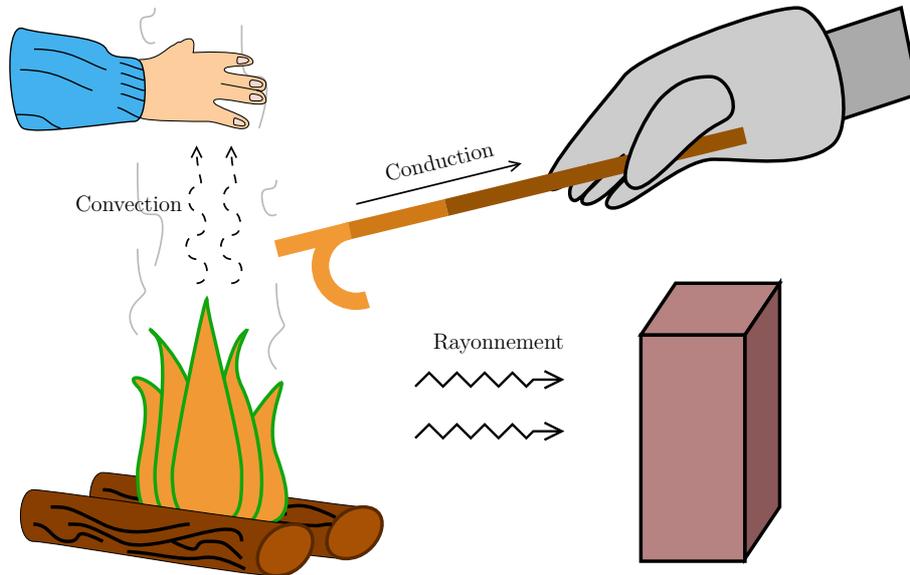


FIGURE 2.1 – Illustration des trois modes de transfert thermique

Dans ce mémoire l'enjeu est de disposer de modèles électrothermiques compacts, c'est-à-dire faciles à embarquer dans le véhicule et capables de tourner en temps réel. Ces modèles sont utilisés en vue de synthétiser des observateurs de température, des lois de diagnostic et de contrôle commande. Dans ce but, de nombreux modèles électrothermiques de composants de l'architecture électrique et électronique d'une automobile ont été établis dans la thèse de H.C Nguyen [Nguyen, 2013] en utilisant la méthode *nodale*. Parmi les composants modélisés se retrouvent les fils électriques et les torons, les connecteurs (porte-clips, clip, point de contact, languette, embase), les pistes de cuivre, les cartes électroniques, les composants de puissances. Ces modèles « élémentaires » sont ensuite agrégés pour former le système complet constitué d'un boîtier et de ses faisceaux.

La méthode nodale consiste à discrétiser un système thermique en plusieurs petits volumes élémentaires supposés isothermes<sup>(1)</sup>. Le nom de cette méthode provient de l'association d'un « nœud » au centre d'un volume dont le comportement thermique est à modéliser. Chaque volume peut éventuellement échanger de la chaleur par conduction, convection, rayonnement avec ses nœuds voisins ou l'environnement, ou générer de la

1. En d'autres termes, à un instant  $t$  donné, la température est la même pour tous les points contenus à l'intérieur d'un volume donné.

chaleur par effet Joule. La figure 2.2 donne un exemple d'un nœud  $i$  associé :

- à une capacité thermique  $C_i$  qui traduit la capacité de l'élément à stocker de la chaleur ;
- à une/des résistance(s) thermique(s) de conduction  $R_{i,j}$  le reliant à un ou plusieurs nœud(s) voisin(s) d'indice  $j = [1, 2, \dots, N]$  ;
- (éventuellement) à une résistance thermique de convection  $R_{ci}$  et de rayonnement  $R_{ri}$  le reliant à l'environnement (température ambiante  $T_a$ ) ;
- (éventuellement) à une source de chaleur  $J_i$  générée par effet Joule au passage d'un courant d'intensité  $I$ .

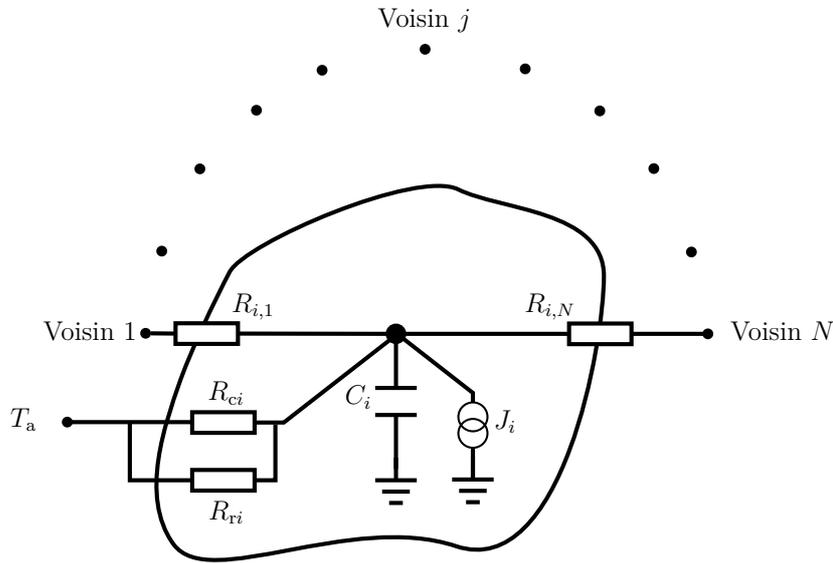


FIGURE 2.2 – Volume élémentaire  $V_i$  (nœud  $i$ ) d'un modèle nodal

L'idée est donc d'associer à un composant, dont le comportement thermique est à modéliser, à un volume supposé isotherme auquel un nœud est ensuite attribué. Ainsi, la température  $T_i$  calculée pour un nœud  $i$  donné sera régie par une équation différentielle du premier ordre de la forme :

$$C_i \frac{dT_i}{dt} = \underbrace{f_{cd}(T_i, T_{1\dots N})}_{\text{Conduction}} + \underbrace{f_{cv}(T_i, T_a)}_{\text{Convection}} + \underbrace{f_r(T_i, T_a)}_{\text{Rayonnement}} + \underbrace{f_J(T_i, I)}_{\text{Effet Joule}}, \quad (2.1)$$

où :

- $T_{1\dots N}$  représente les températures des nœuds voisins ;
- $f_{cd}$ ,  $f_{cv}$ ,  $f_r$  et  $f_J$  sont des fonctions mathématiques linéaires ou non linéaires selon le cas.

**Remarque 4.** Pour certains composants, le gradient de température est important dans une ou plusieurs direction(s) (c'est par exemple le cas dans le sens longitudinal pour un fil électrique dont la modélisation est présentée plus loin dans ce chapitre). Dans ce cas, ledit composant ne peut pas être représenté par un unique nœud (c'est-à-dire une seule température) et il est nécessaire de le discrétiser spatialement en plusieurs volumes suffisamment petits afin d'améliorer la précision des calculs.

## 2.2 Modélisation d'un fil électrique

Le rôle et la constitution d'un fil électrique classique ont été présentés en sous-section 1.2.1.2 du chapitre 1. L'objectif est de créer un modèle du comportement électrothermique d'un fil électrique suffisamment précis. En toute rigueur, il serait nécessaire de distinguer la partie conductrice de la partie isolante du fil pour établir son modèle électrothermique. Cependant, il est proposé dans [Nguyen, 2013] de « réunir » l'âme (conducteur) de rayon  $r_c$  et l'isolant (gaine) de rayon  $r_g$  pour former un matériau unique équivalent de rayon  $r = r_g$  (voir figure 2.3). Cette unification en un seul volume simplifie les calculs (une seule équation aux dérivées partielles au lieu de deux) et il a été prouvé qu'elle reste valide pour des fils de section inférieure ou égale à  $20 \text{ mm}^2$ .

Les propriétés physiques utiles à la modélisation électrothermique de ce fil équivalent sont calculées à partir des propriétés physiques du matériau de l'âme et celui de l'isolant, ainsi qu'à partir de la géométrie du fil. D'autre part, la section du fil est suffisamment petite pour considérer que les isothermes sont des disques de section  $S = S_g = \pi r_g^2$ . En d'autres termes, la conduction de chaleur dans le sens radial est négligée.

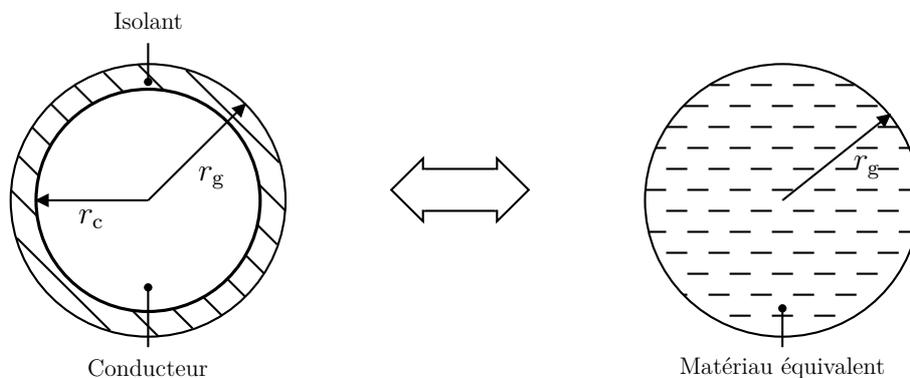


FIGURE 2.3 – Fil électrique constitué de deux matériaux ramené à un fil constitué d'un unique matériau équivalent (vue en coupe)

Les propriétés physiques du matériau équivalent sont les suivantes :

- sa conductivité thermique  $k$  ;
- sa capacité thermique  $C$  ;
- sa capacité massique  $\mathcal{C}$  ;
- sa masse volumique  $\mu$ .

Afin de déterminer la conductivité thermique du matériau équivalent, considérons la figure 2.4 représentant la vue longitudinale d'un fil de longueur  $L$ .

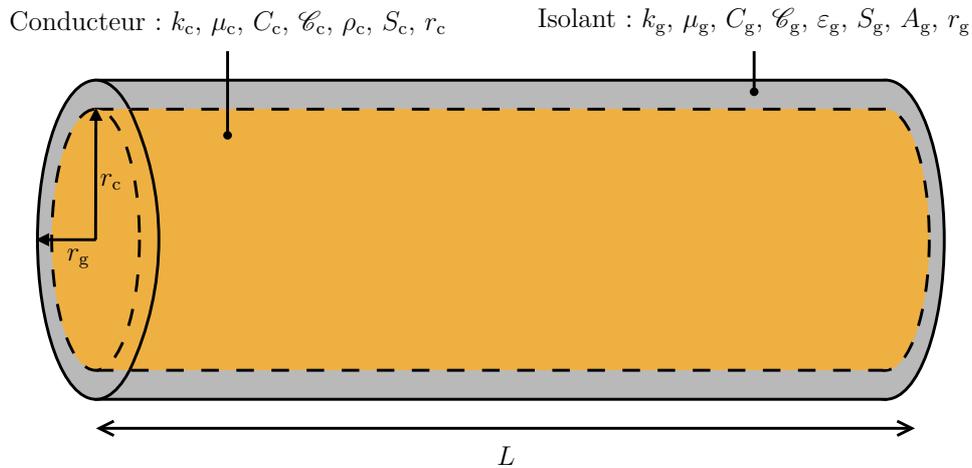


FIGURE 2.4 – Fil électrique en vue longitudinale

Le conducteur est caractérisé par

- sa conductivité thermique  $k_c$  ;
- sa masse volumique  $\mu_c$  ;
- sa capacité thermique  $C_c$  ;
- sa capacité massique  $\mathcal{C}_c$  ;
- sa résistivité électrique  $\rho_c$  ;
- sa section  $S_c = \pi r_c^2$  ;
- sa résistance thermique  $R_c = \frac{L}{k_c S_c}$ .

L'isolant est caractérisé par

- sa conductivité thermique  $k_g$  ;
- sa masse volumique  $\mu_g$  ;
- sa capacité thermique  $C_g$  ;
- sa capacité massique  $\mathcal{C}_g$  ;
- son émissivité  $\varepsilon_g$  ;
- sa section  $S_g = \pi r_g^2$  ;

## 2.2. MODÉLISATION D'UN FIL ÉLECTRIQUE

---

- sa surface en contact avec l'air ambiant  $A_g = 2\pi r_g L$  ;
- sa résistance thermique  $R_c = \frac{L}{k_g S_g}$ .

Il est rappelé que les isothermes sont des disques de section  $S_g$ . Par analogie avec les systèmes électriques, la résistance thermique  $R_{eq}$  entre deux points situés le long du fil est égale à la mise en parallèle des résistances thermiques du conducteur et de l'isolant :

$$R_{eq} = \frac{R_g R_c}{R_g + R_c}. \quad (2.2)$$

L'expression recherchée pour  $R_{eq}$  de la forme suivante :

$$R_{eq} = \frac{L}{k S_g}. \quad (2.3)$$

En égalant les expressions des équations (2.2) et (2.3) et en remplaçant  $R_g$  et  $R_c$  par leur expression respective il vient :

$$k = \frac{k_g(S_g - S_c) + k_c S_c}{S_g}. \quad (2.4)$$

En utilisant à nouveau l'analogie avec les systèmes électriques, la capacité équivalente du fil est égale à la somme des capacités du conducteur et de l'isolant, c'est-à-dire :

$$C = C_c + C_g. \quad (2.5)$$

La masse volumique  $\mu$  d'un objet constitué de plusieurs matériaux est donnée par :

$$\mu = \frac{\sum_k m_k}{\sum_k V_k} = \frac{\sum_k \mu_k V_k}{\sum_k V_k}, \quad (2.6)$$

où  $m_k$ ,  $V_k$  et  $\mu_k$  sont respectivement la masse, le volume et la masse volumique du matériau  $k$ . Ainsi, la masse volumique  $\mu$  du fil équivalent est donnée par :

$$\mu = \frac{\mu_c S_c L + \mu_g (S_g L - S_c L)}{S_c L + (S_g L - S_c L)} = \frac{\mu_c S_c + \mu_g (S_g - S_c)}{S_g}. \quad (2.7)$$

La capacité thermique  $C$  d'un corps de volume  $V$  et de masse volumique  $\mu$ , s'exprime en fonction de sa capacité massique  $\mathcal{C}$  par la relation  $C = \mathcal{C} \mu V$ . Ainsi, l'équation (2.5) s'écrit également :

$$C = \mathcal{C} \mu S L \quad (2.8)$$

d'où l'on tire :

$$\mathcal{C} = \frac{C}{\mu SL}. \quad (2.9)$$

Pour la suite de la modélisation du fil électrique, il est supposé qu'il baigne dans l'air ambiant et qu'il est protégé des rayons du Soleil.

### 2.2.1 Modélisation d'un fil de longueur infinie

Lorsque la conduction longitudinale de chaleur dans le fil est négligée (ou devient négligeable, ce qui sera abordé dans la sous-section suivante), il sera dit du fil qu'il est de longueur infinie. Cette hypothèse induit que la température est la même *en tout point du fil* à un instant  $t_0$  donné.

La conduction de chaleur étant négligée, trois phénomènes physiques sont en jeu : la convection, le rayonnement et l'effet Joule. L'application du premier principe de la thermodynamique sur le fil permet d'établir l'équation différentielle qui régit sa température  $T_{\text{inf}}$  en fonction du temps  $t$  :

$$C \frac{dT_{\text{inf}}(t)}{dt} = \underbrace{h_{\text{inf}} A (T_a(t) - T_{\text{inf}}(t))}_{\text{Convection}} + \underbrace{\varepsilon \sigma A (T_a(t)^4 - T_{\text{inf}}(t)^4)}_{\text{Rayonnement}} + \underbrace{\frac{\rho L}{S_c} I(t)^2}_{\text{Effet Joule}}, \quad (2.10)$$

où :

- $T_a$  est la température ambiante ;
- $A = A_g$  est la surface du fil en contact avec l'air ambiant ;
- $h_{\text{inf}}$  est le coefficient de convection <sup>(2)</sup> dont la valeur dépend non-linéairement de la température du fil et de la température ambiante (voir l'annexe A) ;
- $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}$  est la constante de Stefan-Boltzmann ;
- $\varepsilon = \varepsilon_g$  est l'émissivité du fil ;
- $\rho = \rho_c$  est la résistivité du fil ;
- $I$  est l'intensité du courant qui passe dans le conducteur.

En divisant l'équation différentielle (2.10) par  $L$  et sachant que  $C = \mathcal{C} \mu SL$ , celle-ci se réécrit :

$$\mathcal{C} \mu S \frac{dT_{\text{inf}}(t)}{dt} = h_{\text{inf}} P (T_a(t) - T_{\text{inf}}(t)) + \varepsilon \sigma P (T_a(t)^4 - T_{\text{inf}}(t)^4) + \frac{\rho}{S_c} I(t)^2, \quad (2.11)$$

---

2. Il serait plus rigoureux d'écrire  $h_{\text{inf}}(T_{\text{inf}}, T_a)$ , pour ne pas surcharger la notation  $h_{\text{inf}}$  est utilisé. Cette note reste valable pour tout autre coefficient de convection présent dans ce mémoire

avec  $P = 2\pi r = P_g = 2\pi r_g$  le périmètre du fil.

## 2.2.2 Modélisation d'un fil de longueur finie

### 2.2.2.1 Modélisation par maillage

Par opposition au fil de longueur infinie, la modélisation thermique d'un fil de longueur finie tient compte de la conduction longitudinale de chaleur. Dans le domaine automobile, une partie de la chaleur générée par un boîtier est dissipée grâce à ses faisceaux. Ainsi, un flux de chaleur a plutôt tendance à se diffuser d'un boîtier (plus chaud) vers l'extrémité d'un fil (plus froid) reliée via un connecteur. Une partie de ce flux de chaleur se diffuse alors longitudinalement dans le fil par conduction alors qu'une autre partie est dissipée dans l'environnement par convection ou rayonnement. Par conséquent, la température en un point du fil a tendance à être d'autant plus faible que ce point est éloigné de l'extrémité connectée au boîtier.

Le gradient longitudinal de température peut-être important notamment à proximité de l'extrémité du fil reliée au boîtier [Doerstling, 1998]. De ce fait, l'utilisation d'un seul nœud pour tout le fil électrique serait donc trop limitatif. Pour pallier ce problème, une discrétisation spatiale du fil en un nombre  $N$  de petits tronçons cylindriques, appelés mailles, est proposée. La figure 2.5 illustre le principe du « maillage » du fil électrique. La première maille est la plus proche de l'extrémité du fil connectée au boîtier et la maille  $N$  en est la plus éloignée. Un nœud est attribué à chaque maille disposant de sa propre capacité thermique, de sa propre source de chaleur (effet Joule) et va échanger de la chaleur avec ses mailles voisines (conduction) et l'environnement ambiant à la température  $T_a$  (convection, rayonnement). Le flux de chaleur provenant du boîtier et qui entre dans la première maille est noté  $\phi_e(t)$  <sup>(3)</sup>. Au delà de la dernière maille, le gradient de température  $\frac{\partial T(x, s)}{\partial x} \approx 0$  est supposé négligeable [Doerstling, 1998]. Dans ce cas, la température du fil devient indépendante de la distance  $x$  et est régie par l'équation différentielle (2.11) de la température  $T_{\text{inf}}(t)$  du fil de longueur infinie.

En utilisant à nouveau l'analogie avec les systèmes électriques, les échanges de chaleur par conduction entre les mailles sont représentés par des résistances thermiques. Soit  $R_i$  ( $i \in \{1 \ 2 \ \dots \ N\}$  est l'indice de la maille concernée) la *demi* résistance thermique de la maille  $i$  telle que :

$$R_i = \frac{L_i/2}{kS} = \frac{L_i}{2kS}, \quad (2.12)$$

---

3. L'expression de  $\phi_e(t)$  est explicitée plus loin dans le mémoire.

où  $L_i$  est la longueur de la maille  $i$ . Ainsi la résistance thermique équivalente entre deux nœuds de mailles *consécutives* s'écrit :

$$R_{i,i+1} = R_{i+1,i} = R_i + R_{i+1}. \quad (2.13)$$

La capacité thermique  $C_i$  d'une maille  $i$  est donnée par :

$$C_i = \mathcal{C} \mu S L_i. \quad (2.14)$$

La puissance générée par effet Joule par la maille  $i$  s'écrit :

$$J_i(t) = \frac{\rho L_i}{S_c} I(t)^2. \quad (2.15)$$

Enfin, pour chaque maille, de la chaleur est échangée par convection et rayonnement avec la température ambiante  $T_a$ . Ces échanges sont représentés sur la figure 2.5 par une résistance thermique de convection  $R_{ci}$  et une résistance thermique de rayonnement  $R_{ri}$  mises en parallèle.

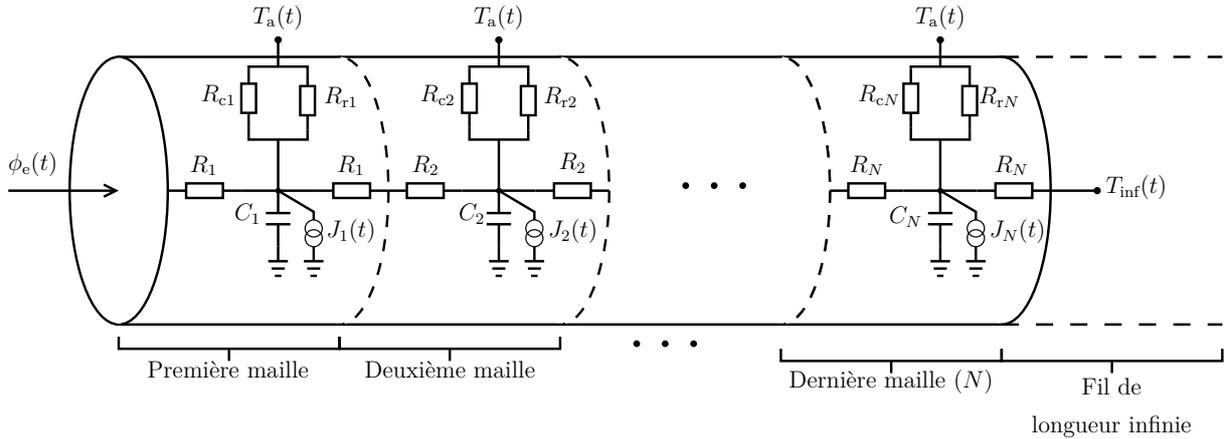


FIGURE 2.5 – Principe de la discrétisation spatiale (maillage) d'un fil électrique

L'application du premier principe de la thermodynamique à une maille conduit à une équation différentielle du premier ordre. Ainsi, la température  $T_i(t)$  d'une maille  $i$  est

régie par :

$$\begin{aligned}
 C_i \frac{dT_i(t)}{dt} = & \underbrace{\frac{T_{i-1}(t) - T_i(t)}{R_{i-1,i}} + \frac{T_{i+1}(t) - T_i(t)}{R_{i,i+1}}}_{\text{Conduction}} + \underbrace{h_i A_i (T_a(t) - T_i(t))}_{\text{Convection}} \\
 & + \underbrace{\varepsilon \sigma A_i (T_a(t)^4 - T_i(t)^4)}_{\text{Rayonnement}} + \underbrace{\frac{\rho L_i}{S_c} I(t)^2}_{\text{Effet Joule}}
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

où :

- $h_i$  est le coefficient de convection dont la valeur dépend non-linéairement de la température de la maille  $i$  et de la température ambiante ;
- $A_i = 2\pi r_g L_i$  est la surface de la maille  $i$  en contact avec l'air ambiant.

L'expression (2.16) est cependant légèrement différente pour la première et la dernière maille. En effet, l'équation de la première maille s'écrit :

$$\begin{aligned}
 C_1 \frac{dT_1(t)}{dt} = & \frac{T_2(t) - T_1(t)}{R_{1,2}} + h_1 A_1 (T_a(t) - T_1(t)) \\
 & + \varepsilon \sigma A_1 (T_a(t)^4 - T_1(t)^4) + \frac{\rho L_1}{S_c} I(t)^2 + \phi_e(t),
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

tandis que pour la dernière maille l'équation différentielle est donnée par :

$$\begin{aligned}
 C_N \frac{dT_N(t)}{dt} = & \frac{T_{N-1}(t) - T_N(t)}{R_{N-1,N}} + \frac{T_{\text{inf}}(t) - T_N(t)}{R_N} + h_N A_N (T_a(t) - T_N(t)) \\
 & + \varepsilon \sigma A_N (T_a(t)^4 - T_N(t)^4) + \frac{\rho L_N}{S_c} I(t)^2.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Le fil électrique est donc modélisé par un système composé de  $N$  équations différentielles non-linéaires du premier ordre. Soit  $G_{i,i+1} = \frac{1}{R_{i,i+1}}$  la conductance thermique entre deux mailles, le système d'équations différentielles peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\mathcal{C} \frac{d}{dt} \mathcal{T}(t) = \mathcal{G} \mathcal{T}(t) + \begin{bmatrix} h_1 A_1 (T_a(t) - T_1(t)) + \varepsilon \sigma A_1 (T_a(t)^4 - T_1(t)^4) \\ \vdots \\ h_i A_i (T_a(t) - T_i(t)) + \varepsilon \sigma A_i (T_a(t)^4 - T_i(t)^4) \\ \vdots \\ h_N A_N (T_a(t) - T_N(t)) + \varepsilon \sigma A_N (T_a(t)^4 - T_N(t)^4) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\rho L_1}{S_c} I(t)^2 + \phi_e(t) \\ \vdots \\ \frac{\rho L_i}{S_c} I(t)^2 \\ \vdots \\ \frac{\rho L_N}{S_c} I(t)^2 + \frac{T_{\text{inf}}(t)}{R_N} \end{bmatrix}, \tag{2.19}$$

où :

$$\begin{aligned}
 & - \mathcal{T} = [T_1 \cdots T_N]^T ; \\
 & - \mathcal{C} = \text{diag}(C_1, \cdots, C_i, \cdots, C_N) ; \\
 & - \mathcal{G} = \begin{bmatrix} -G_{1,2} & G_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ G_{1,2} & -(G_{1,2} + G_{2,3}) & G_{2,3} & \cdots & \vdots \\ 0 & G_{2,3} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & G_{N-1,N} \\ 0 & \cdots & \cdots & G_{N-1,N} & -G_{N-1,N-1} - \frac{1}{R_N} \end{bmatrix} .
 \end{aligned}$$

La figure 2.6 présente la température longitudinale en régime permanent obtenue après simulation sous Simulink<sup>®</sup> du modèle (2.19) d'un fil de longueur finie. Il s'agit d'un fil de  $1,5 \text{ mm}^2$  traversé par un courant d'intensité  $I = 10 \text{ A}$  pour un nombre de maille  $N$  égal à 5, 10, 20 et 400. Dans chaque cas, les mailles sont de longueur identiques (respectivement 10 cm, 5 cm, 2,5 cm et 0,125 cm) : le maillage est alors dit *régulier*. La température ambiante est constante  $T_a = 50^\circ \text{C}$ , ainsi que le flux de chaleur  $\phi_e = 0,5 \text{ W}$ . La variable  $x$  en abscisse désigne la distance d'un point du fil par rapport à l'extrémité ( $x = 0$ ) à laquelle le flux  $\phi_e(t)$  est appliqué. Il est clair que le choix du nombre de mailles influe sur la précision obtenue. Ainsi, plus le nombre de mailles sera grand, meilleure sera la précision mais au prix d'une charge de calculs plus élevée.

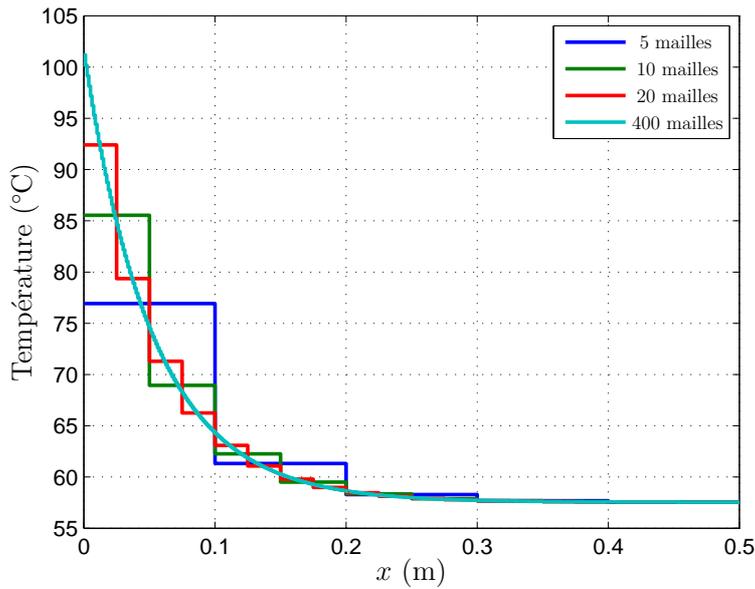


FIGURE 2.6 – Température longitudinale d'un fil simulée pour différents nombres de mailles  $N$

## 2.2. MODÉLISATION D'UN FIL ÉLECTRIQUE

La figure 2.7 présente la température longitudinale en régime permanent du même fil obtenue après simulation du même modèle. La température ambiante et le courant électrique sont les mêmes que précédemment. Le nombre de mailles est arbitrairement fixé à  $N = 100$ . La simulation a été répétée pour un flux  $\phi_e$  différent ( $-0,3\text{ W}$ ,  $-0,1\text{ W}$ ,  $0\text{ W}$ ,  $0,2\text{ W}$  et  $0,5\text{ W}$ ).

Il peut être constaté que si le flux  $\phi_e$  est *négatif*, c'est-à-dire si le fil évacue de la chaleur vers le boîtier, alors l'extrémité du fil reliée au boîtier ( $x = 0$ ) est son point le *plus froid*. Inversement si  $\phi_e$  est positif, c'est-à-dire si le boîtier évacue de la chaleur vers le fil, alors l'extrémité du fil est son point le *plus chaud*. Enfin, si  $\phi_e$  est nul (ce qui est un cas peu voire improbable si l'intensité du courant  $I$  est non nulle), la température du fil se comporte comme celle d'un fil de longueur infinie : sa température est indépendante de la distance  $x$ .

Conformément aux résultats présentés dans [Doerstling, 1998], il peut être également remarqué que la température du fil est constante (égale à celle du fil de longueur infinie :  $\phi_e=0$ ) au delà d'une certaine distance  $D$  et ceci indépendamment du flux  $\phi_e$ . Cette distance est appelée « distance d'oubli » et correspond à la distance où la température du fil est choisie égale à 1% de l'écart entre la température de l'extrémité du fil et celle du fil de longueur infinie.

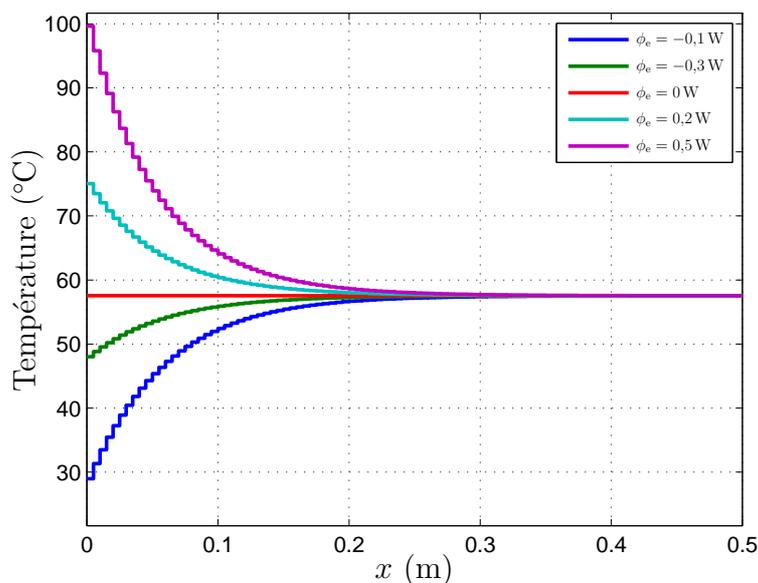


FIGURE 2.7 – Température longitudinale d'un fil simulée pour différents flux  $\phi_e$

Le maillage du fil électrique permet donc d'améliorer la précision sur sa tempéra-

ture longitudinale obtenue en simulation. Cette précision peut être affinée en augmentant le nombre de mailles mais augmentera aussi le temps de calcul. Une question se pose alors : *quel nombre de mailles faut-il choisir pour obtenir le meilleur compromis complexité-précision ?* Pour résoudre ce problème, la qualité du modèle de fil par maillage est comparée à un modèle analytique de référence établi dans le paragraphe qui suit.

### 2.2.2.2 Modèle analytique de référence

Afin d'établir une expression analytique du comportement thermique du fil, considérons la figure 2.8. Soit  $\phi(x, t)$  (respectivement  $\phi(x + dx, t)$ ) le flux de chaleur longitudinal entrant dans un (respectivement sortant d'un) tronçon de fil de longueur élémentaire  $dx$ .

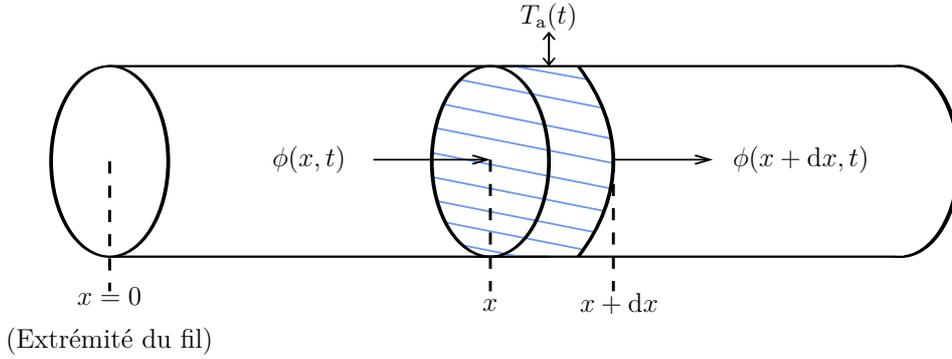


FIGURE 2.8 – Application du premier principe de la thermodynamique à un tronçon élémentaire d'un fil de longueur finie

Le premier principe de la thermodynamique est appliqué au tronçon élémentaire de longueur  $dx$  du fil, et conduit à :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \mu S \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} dx = & \underbrace{-(\phi(x + dx, t) - \phi(x, t))}_{\text{Conduction}} + \underbrace{hP(T_a(t) - T(x, t)) dx}_{\text{Convection}} \\ & + \underbrace{\varepsilon \sigma P (T_a(t)^4 - T(x, t)^4) dx}_{\text{Rayonnement}} + \underbrace{\frac{\rho}{S_c} I(t)^2 dx}_{\text{Effet Joule}}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

où

- $T$  est la température du fil ;
- $h$  est le coefficient convection dont la valeur dépend non-linéairement de la température du fil au point  $x$  et de la température ambiante.

En divisant l'équation (2.20) par  $dx$  et sachant que  $\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} = \lim_{\substack{dx \rightarrow 0 \\ dx \neq 0}} \frac{\phi(x + dx, t) - \phi(x, t)}{dx}$ ,

il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\mu S \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = & - \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} + hP(T_a(t) - T(x,t)) \\ & + \varepsilon\sigma P(T_a(t)^4 - T(x,t)^4) + \frac{\rho}{S_c} I(t)^2. \end{aligned} \quad (2.21)$$

D'après la loi de Fourier, le flux de chaleur  $\phi_{cd}$  (par conduction) est proportionnel au gradient de température  $\vec{\nabla}T$  (configuration tridimensionnelle) dans le matériau :

$$\vec{\phi}_{cd} = -kS\vec{\nabla}T, \quad (2.22)$$

et sa direction est normale à la section  $S$ .

Dans le cas du fil électrique, seule la conduction longitudinale (donc selon  $x$ ) est considérée (la conduction radiale étant négligée). Ainsi, l'équation (2.21) se réécrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\mu S \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = & kS \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + hP(T_a(t) - T(x,t)) \\ & + \varepsilon\sigma P(T_a(t)^4 - T(x,t)^4) + \frac{\rho}{S_c} I(t)^2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

L'évolution de la température d'un point du fil électrique (en fonction du temps et de la distance depuis l'extrémité) est décrite analytiquement par une équation aux dérivées partielles non linéaire d'ordre 2 (2.23). Afin de simplifier la comparaison entre ce dernier modèle et le modèle par maillage, les équations (2.23) et (2.19) sont tout d'abord linéarisées autour d'un point de fonctionnement puis mises sous forme de fonctions de transferts.

### 2.2.2.3 Linéarisation du modèle par maillage et mise sous forme de fonction de transfert

La « source » de non linéarité des équations (2.19) et (2.23) provient des termes de convection et de rayonnement. Une linéarisation des termes est ainsi effectuée autour d'une température ambiante  $T_a^e$  et d'une température de fil  $T^e$  nominales données. De plus, il est considéré pour des raisons de simplicité que  $T_a^e$  et  $T^e$  restent inchangées quelle que soit la distance  $x$  sur le fil<sup>(4)</sup>. Un coefficient de convection et de rayonnement équivalent

---

4. En toute rigueur il faudrait considérer un vecteur de température longitudinale d'équilibre. Toutefois, il est montré plus loin que le choix fait ici mène tout de même à des résultats tout à fait satisfaisants.

$h_{\text{cr}}$  est recherché et de la forme :

$$h_{\text{cr}}A(T_a^e - T^e) = h^e A(T_a^e - T^e) + \varepsilon\sigma A(T_a^{e4} - T^{e4}) \quad (2.24)$$

où  $h^e$  est le coefficient de convection à l'équilibre et  $A$  la surface de contact avec l'air. Sachant que  $(T_a^{e4} - T^{e4}) = (T_a^{e2} + T^{e2})(T_a^e + T^e)(T_a^e - T^e)$ , par identification des termes de (2.24) il est déduit que :

$$h_{\text{cr}} = h^e + \varepsilon\sigma(T_a^{e2} + T^{e2})(T_a^e + T^e). \quad (2.25)$$

En appliquant la relation (2.25) au modèle maillé donnée par l'équation (2.19), la température d'une maille  $i$  est régie par :

$$C_i \frac{dT_i(t)}{dt} = \underbrace{\frac{T_{i-1}(t) - T_i(t)}{R_{i-1,i}} + \frac{T_{i+1}(t) - T_i(t)}{R_{i,i+1}}}_{\text{Conduction}} + \underbrace{h_{\text{cr}}A_i(T_a(t) - T_i(t))}_{\text{Convection et rayonnement}} + \underbrace{\frac{\rho L_i}{S_c} I(t)^2}_{\text{Effet Joule}}. \quad (2.26)$$

Dans ce cas, la forme matricielle (2.19) du modèle du fil électrique maillé se réécrit :

$$\mathcal{C} \frac{d}{dt} \mathcal{T}(t) = (\mathcal{G} - \mathcal{H}) \mathcal{T}(t) + \mathcal{H}T_a(t) + \mathcal{R}I(t)^2 + \mathcal{E}\phi_e(t) + \mathcal{S}T_{\text{inf}}(t), \quad (2.27)$$

où :

- $\mathcal{H} = h_{\text{cr}} \text{diag}(A_1, \dots, A_N)$  ;
- $\mathcal{R} = \frac{\rho}{S_c} [L_1 \ \dots \ L_N]^T$  ;
- $\mathcal{E} = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$  ;
- $\mathcal{S} = [0 \ \dots \ 0 \ \frac{1}{R_N}]^T$ .

Si seul le transfert entre le flux rentrant  $\phi_e$  et la température des mailles  $T_i$  est considéré, une représentation d'état de (2.27) est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{T}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathcal{T}(t) + \mathbf{B}\phi_e(t) \\ T_i(t) = \mathbf{C}_i\mathcal{T}(t) \end{cases}, \quad (2.28)$$

où :

- $\mathbf{A} = \mathcal{C}^{-1}(\mathcal{G} - \mathcal{H})$  ;
- $\mathbf{B} = \mathcal{C}^{-1}\mathcal{E}$  ;

- $C_i$  est un vecteur ligne dont l'élément  $i$  vaut 1 et qui vaut 0 partout ailleurs.
- Si  $\mathcal{L}\{\bullet\}$  désigne la transformation de Laplace, alors :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = F(s) \quad (2.29)$$

où  $f(t)$  est une fonction d'une variable réelle  $t$  et où  $s$  désigne la variable de Laplace. De plus, à conditions initiales nulles, on a la relation :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} = sF(s). \quad (2.30)$$

En appliquant la transformée de Laplace à la relation (2.28) et pour des conditions initiales nulles, la fonction de transfert qui lie la température  $T_i$  de la maille  $i$  avec le flux entrant  $\phi_e$  est définie par :

$$F_i(s) = \frac{T_i(s)}{\phi_e(s)} = C_i (sI_N - A)^{-1} B. \quad (2.31)$$

Il s'agit d'une fonction de transfert strictement propre<sup>(5)</sup> où  $I_N$  la matrice identité de taille  $N \times N$ .

#### 2.2.2.4 Linéarisation du modèle analytique et mise sous forme de fonction de transfert

De même que pour la linéarisation du modèle maillé,  $h_{cr}$  désigne le coefficient de convection et de rayonnement équivalent obtenu conformément à la relation (2.25). Autour d'une température  $T_a^e$  et d'une température de fil  $T^e$  nominales données, l'équation aux dérivées partielles (2.23) se réécrit :

$$\mathcal{C} \mu S \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = kS \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + h_{cr} P (T_a(t) - T(x, t)) + \frac{\rho}{S_c} I(t)^2. \quad (2.32)$$

Il est supposé que la température du fil est nulle à l'état initial, c'est-à-dire :  $T(x, t = 0) = 0$ . l'application de la transformée de Laplace  $\mathcal{L}\{\bullet\}$  à l'équation (2.32), conduit à :

$$\mathcal{C} \mu S s T(x, s) = kS \frac{\partial^2 T(x, s)}{\partial x^2} + h_{cr} P (T_a(s) - T(x, s)) + \frac{\rho}{S_c} I(s)^2. \quad (2.33)$$

---

5. C'est-à-dire que le degré du numérateur de  $F_i(s)$  est strictement inférieur au degré de son dénominateur

La mise en facteur des termes dérivés de même degré par rapport à  $x$  conduit à :

$$-kS \frac{\partial^2 T(x, s)}{\partial x^2} + (\mathcal{C}\mu Ss + h_{\text{cr}}P) T(x, s) = h_{\text{cr}}PT_{\text{a}}(s) + \frac{\rho}{S_{\text{c}}} I(s)^2. \quad (2.34)$$

Afin d'obtenir une solution à l'équation aux dérivées partielles (2.34), il faut imposer deux conditions aux limites :

$$-kS \left. \frac{\partial T(x, s)}{\partial x} \right|_{x=0} = \phi(0, s) = \phi_{\text{e}}(s), \quad (2.35)$$

et

$$-kS \left. \frac{\partial T(x, s)}{\partial x} \right|_{x \rightarrow \infty} = 0. \quad (2.36)$$

Physiquement parlant, la première condition aux limites (2.35) est simplement le flux de chaleur  $\phi_{\text{e}}$  injecté à l'extrémité du fil. La seconde condition aux limites (2.36) signifie que l'influence du flux  $\phi_{\text{e}}$  est nulle à l'infini, pour rester ainsi en cohérence avec les résultats obtenus sur la figure 2.6 et sur la figure 2.7.

Les solutions générales de l'équation différentielle homogène<sup>(6)</sup> de (2.34) sont de la forme :

$$T_G(x, s) = K_1(s) e^{x\gamma(s)} + K_2(s) e^{-x\gamma(s)} \quad (2.37)$$

avec  $\gamma(s) = \sqrt{\frac{1}{kS} (\mathcal{C}\mu Ss + h_{\text{cr}}P)}$ ,  $K_1(s)$  et  $K_2(s)$  étant des fonctions à déterminer.

Les conditions aux limites (2.35) et (2.36) permettent d'écrire :

$$\begin{cases} -kS \left. \frac{\partial T(x, s)}{\partial x} \right|_{x=0} = -kS\gamma(s) (K_1(s) - K_2(s)) = \phi_{\text{e}}(s) \\ -kS \left. \frac{\partial T(x, s)}{\partial x} \right|_{x \rightarrow \infty} = -kS\gamma(s) K_1(s) e^{x\gamma(s)} = 0 \end{cases}, \quad (2.38)$$

d'où il est tiré que :

$$K_1(s) = 0 \text{ et } K_2(s) = \frac{1}{kS\gamma(s)} \phi_{\text{e}}(s). \quad (2.39)$$

Ainsi la solution générale s'écrit :

$$T_G(x, s) = \frac{1}{\sqrt{kS (\mathcal{C}\mu Ss + h_{\text{cr}}P)}} e^{-x\sqrt{\frac{1}{kS} (\mathcal{C}\mu Ss + h_{\text{cr}}P)}} \phi_{\text{e}}(s). \quad (2.40)$$

---

6. L'équation est homogène lorsque le second membre est nul, c'est-à-dire dans ce cas lorsque  $h_{\text{cr}}PT_{\text{a}}(s) + \frac{\rho}{S_{\text{c}}} I(t)^2 = 0$

Enfin, le théorème de superposition et les équations (2.34) et (2.40) permettent de déduire l'expression de la solution :

$$T(x, s) = \frac{e^{-x\sqrt{\frac{1}{kS}(\mathcal{C}\mu Ss+h_{cr}P)}}}{\sqrt{kS(\mathcal{C}\mu Ss+h_{cr}P)}}\phi_e(s) + \frac{h_{cr}P}{\mathcal{C}\mu Ss+h_{cr}P}T_a(s) + \frac{\rho}{S_c(\mathcal{C}\mu Ss+h_{cr}P)}I(s)^2. \quad (2.41)$$

Soit  $F(x, s)$  la fonction de transfert entre la température  $T(x, s)$  et le flux entrant  $\phi_e(s)$  :

$$F(x, s) = \frac{T(x, s)}{\phi_e(s)} = \frac{e^{-x\sqrt{\frac{1}{kS}(\mathcal{C}\mu Ss+h_{cr}P)}}}{\sqrt{kS(\mathcal{C}\mu Ss+h_{cr}P)}}. \quad (2.42)$$

**Remarque 5.** *Il s'agit d'une classe de fonction de transfert non entière implicite. En effet, elle est dite non entière car la variable de Laplace se trouve sous une racine carrée (qui correspond à un ordre non entier  $\nu = 0,5$ ). Elle est dite implicite car l'ordre non entier s'applique à un polynôme en  $s$ , contrairement à une fonction de transfert explicite où l'ordre s'applique directement à la variable  $s$ . Une vision générale de la dérivation non entière et des modèles non entiers est présentée dans l'annexe B. D'autre part, toute fonction de transfert non entière n'est pas implantable telle quelle dans un calculateur, il est d'abord nécessaire de l'approximer par une fonction de transfert d'ordre entier : ce qui est le cas de la fonction de transfert obtenue par maillage.*

### 2.2.2.5 Sur la distance d'oubli

Supposons que le flux entrant dans l'extrémité du fil, est un échelon d'amplitude  $\phi_0$  tel que  $\phi_e(s) = \frac{\phi_0}{s}$ . En appliquant le théorème de la valeur finale à (2.42), il vient :

$$T(x, t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{e^{-x\sqrt{\frac{1}{kS}(\mathcal{C}\mu Ss+h_{cr}P)}}}{\sqrt{kS(\mathcal{C}\mu Ss+h_{cr}P)}} \frac{\phi_0}{s} = \frac{e^{-x\sqrt{\frac{h_{cr}P}{kS}}}}{\sqrt{kSh_{cr}P}}\phi_0. \quad (2.43)$$

Soit  $T_{\text{norm}}(x)$  la valeur normalisée de  $T(x, t \rightarrow \infty)$  telle que :

$$T_{\text{norm}}(x) = \frac{\sqrt{kSh_{cr}P}}{\phi_0} T(x, t \rightarrow \infty) = e^{-x\sqrt{\frac{h_{cr}P}{kS}}}. \quad (2.44)$$

La figure 2.9 présente l'évolution de  $T_{\text{norm}}$  par rapport à  $x$  pour un fil de 1,5 mm<sup>2</sup>. Le coefficient de convection et de rayonnement équivalent  $h_{cr}$  est calculé pour une température ambiante  $T_a^e = 50^\circ\text{C}$  et une température du fil de  $T^e = 75^\circ\text{C}$  (ce qui correspond à la température médiane de la figure 2.6). La courbe bleue correspond aux valeurs nor-

malisées de la température longitudinale en régime permanent obtenue après simulation sous Simulink<sup>®</sup> du modèle (2.19) du même fil et dans les mêmes conditions (le nombre de mailles est volontairement et exagérément fixé à  $N = 400$  pour une meilleure précision). Les deux courbes sont quasiment confondues et par conséquent la même distance d'oubli  $D$  est retrouvée. Cette distance (ici à peu près 24,5 cm) est repérée au point de croisement de la courbe en pointillés rouge d'équation  $y = 0,01$  (1%) avec les deux autres courbes. Cette distance peut se calculer analytiquement grâce à la formule suivante :

$$D = -\ln(0.01) \sqrt{\frac{kS}{h_{cr}P}}, \quad (2.45)$$

ou encore, en rappelant que  $S = \pi r^2$  et  $P = 2\pi r$  :

$$D = -\ln(0.01) \sqrt{\frac{kr}{2h_{cr}}}. \quad (2.46)$$

L'application numérique de la formule (2.46) à l'exemple de la figure 2.9 donne  $D \approx 24,78$  cm conformément aux résultats observés.

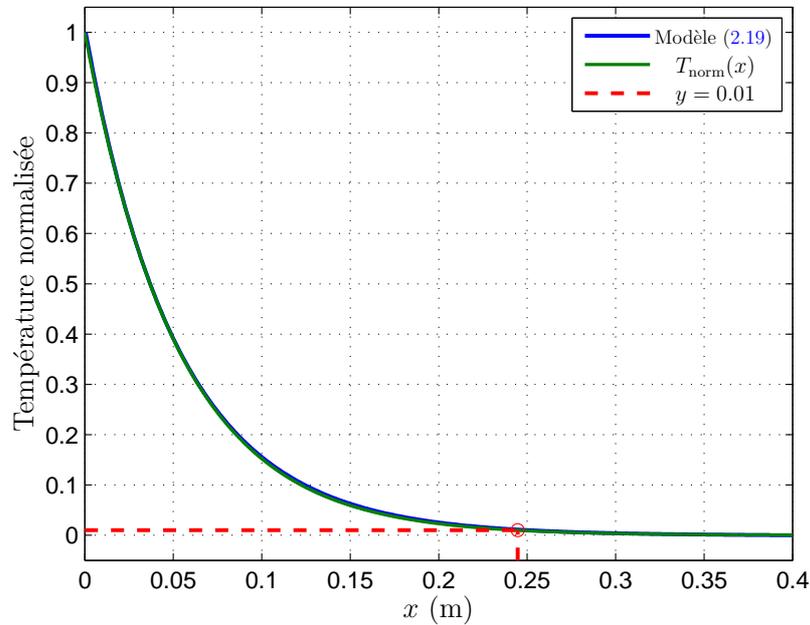


FIGURE 2.9 – Le concept de distance d'oubli

La formule (2.46) montre que la distance d'oubli varie en fonction de la conductivité thermique du fil équivalent, du rayon du fil et du coefficient de convection et de rayonne-

## 2.2. MODÉLISATION D'UN FIL ÉLECTRIQUE

ment (lui même dépendant des températures choisies pour sa linéarisation). Le tableau 2.1 présente la valeur moyenne  $D_{\text{moy}}$  de la distance d'oubli pour des sections de conducteur  $S_c$  différentes (et donc pour des rayons d'isolant  $r = r_g$  différents) couramment utilisées dans le milieu automobile. Cette distance moyenne a été calculée en fonction de  $h_{\text{cr}}$  sur une grille de température ambiante et de température du fil allant respectivement de  $-40^\circ\text{C}$  à  $100^\circ\text{C}$  et de  $-40^\circ\text{C}$  à  $250^\circ\text{C}$ . La conductivité thermique  $k$  du fil équivalent est calculée pour chaque section de fil à partir de l'équation (2.4) pour un conducteur en cuivre et un isolant en polyéthylène réticulé (PEX).

$S_c$ (mm <sup>2</sup> )	0,35	0,5	0,75	1	1,5	2	2,5	3	4	5	6	7	10	16
$r$ (mm)	0,68	0,8	0,9	0,98	1,13	1,25	1,45	1,6	1,85	1,95	2,15	2,3	2,88	3,45
$D_{\text{moy}}$ (cm)	18,6	21,2	25,1	28,4	33,3	37,2	39,7	42,1	46,4	51	54	57	62,9	74,4

TABLE 2.1 – Distance d'oubli moyenne pour différents rayons de fil

Il peut-être remarqué que plus la section du fil est importante, plus la distance d'oubli est grande. En effet, comme le montre la figure 2.10, plus la section du fil est importante plus la conductivité équivalente  $k$  du fil a tendance à augmenter tandis que le coefficient de convection et rayonnement équivalent  $h_{\text{cr}}$  (cf. formule (2.46)) tend à diminuer.

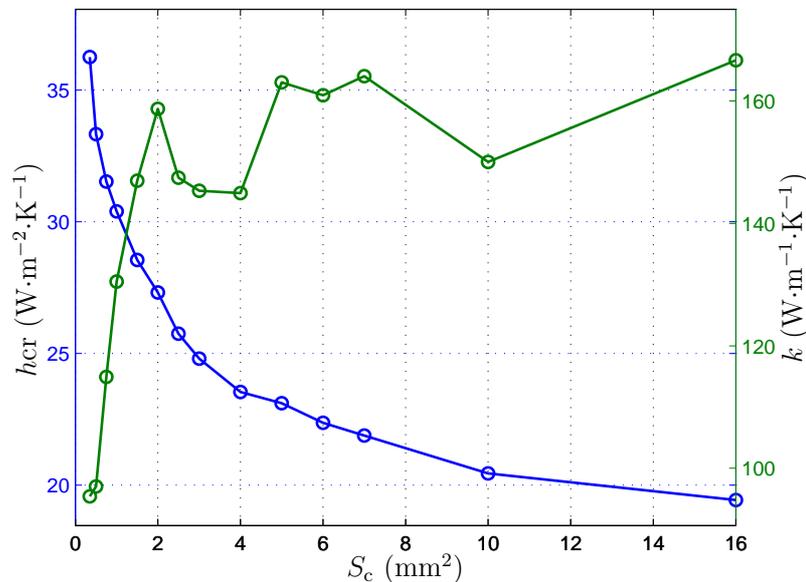


FIGURE 2.10 – Évolution de  $k$  et de  $h_{\text{cr}}$  en fonction de la section de fil

Le rapport  $\sqrt{\frac{kr}{2h_{\text{cr}}}}$  (cf. (2.46)) a donc tendance à augmenter en fonction de la section du fil comme le montre la figure 2.11. Ainsi, la conduction prédomine sur la convection et

le rayonnement. De ce fait, la chaleur a plutôt tendance à se diffuser dans le fil qu'à se dissiper dans l'environnement ce qui, par conséquent, augmente la distance d'oubli.

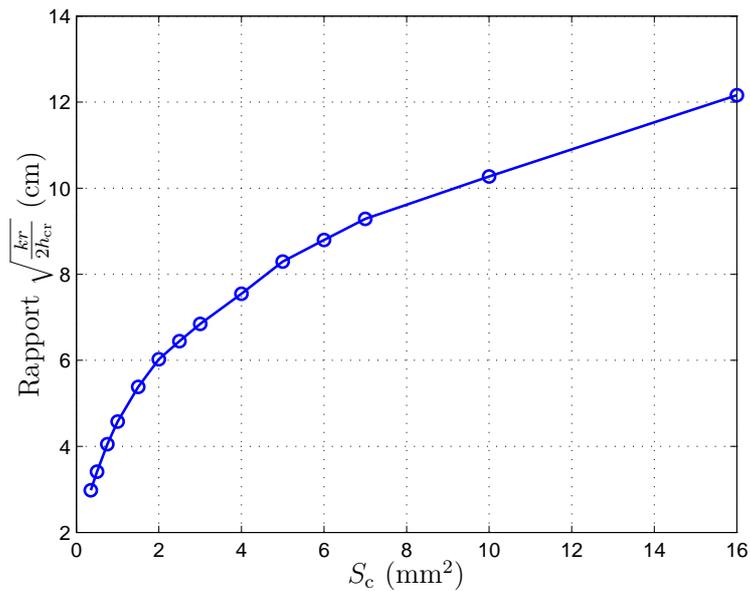


FIGURE 2.11 – Évolution du rapport  $\sqrt{\frac{kr}{2h_{cr}}}$  en fonction de la section de fil

La distance d'oubli est très importante dans la mesure où *elle indique quelle longueur de fil maximale il est nécessaire de mailler*. En effet, il est rappelé qu'au delà de cette distance, plus de 99 % du flux d'entrée  $\phi_e$  s'est diffusée dans le fil et dans l'environnement. Par conséquent, la température des points du fil qui se trouvent plus loin que  $D$  est (quasi) indépendante de la distance, donc (quasi) égale à la température du fil de longueur infinie. Comme la température ambiante et la température du fil sont susceptibles de varier sur d'assez larges plages de température, pour la suite la distance d'oubli moyenne  $D_{\text{moy}}$  sera retenue.

Si la longueur minimale à mailler est maintenant connue, il reste à répondre à la question du maillage optimal à savoir : *quel nombre de mailles choisir ? Selon quel critère ? Existe-t-il une façon de mailler plus efficace qu'un maillage régulier ?*

## 2.3 Optimisation du maillage d'un fil électrique basée sur la norme $\mathcal{H}_2$

Avant de répondre à la question du choix d'un critère de maillage, il est possible d'abord de se demander s'il n'existe pas une méthode plus judicieuse que d'utiliser des mailles de même longueur (maillage régulier).

Dans la section précédente, il a été mis en évidence que le gradient de température longitudinale et donc que le flux de conduction sont d'autant plus importants pour les points du fil qui se situent près de son extrémité (cf. figures 2.6, 2.7 et 2.9). De plus, il est rappelé que la température d'une maille est supposée homogène dans tout son volume. Par conséquent, des mailles trop grandes à proximité de l'extrémité du fil risquent de ne pas être en mesure de restituer convenablement le gradient de température. La solution intuitive serait d'augmenter le nombre de mailles afin de les rendre assez petites mais cette démarche alourdirait considérablement la charge de calculs.

La solution proposée (voir figure 2.12) est d'utiliser un maillage irrégulier de telle sorte que la longueur d'une maille sera d'autant plus petite qu'elle se situe près de l'extrémité, et inversement lorsque celle-ci en est éloignée.

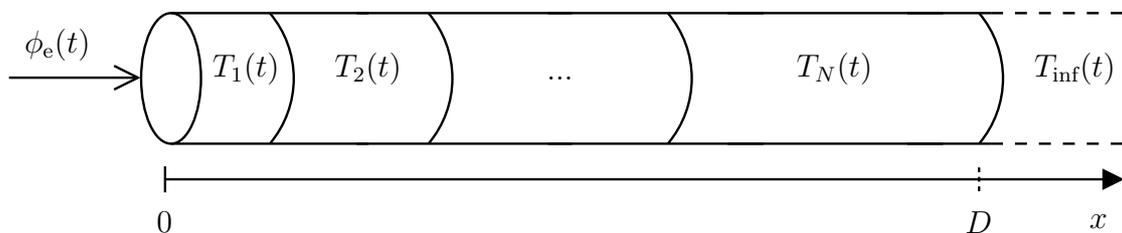


FIGURE 2.12 – Principe du maillage irrégulier

Une progression géométrique est donc proposée pour la longueur des mailles. De plus, un paramètre de réglage appelé ratio de maillage, est imposé entre la longueur de la première maille et de la dernière maille. Ainsi, la formule suivante est utilisée pour calculer la longueur  $L_i$  de chaque maille :

$$L_i = D_{\text{moy}} \times \zeta^{\frac{i-1}{N-1}} \times \frac{1 - \zeta^{\frac{1}{N-1}}}{1 - \zeta^{\frac{N}{N-1}}}, \quad (2.47)$$

où  $\zeta = L_N/L_1$  désigne le ratio de maillage.

Pour aider à la compréhension du critère de maillage introduit un peu plus loin dans

ce chapitre, des définitions et des rappels sur les normes  $\mathcal{L}_2/\mathcal{L}_\infty$  des signaux et sur les normes  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  des systèmes sont donnés dans la sous-section suivante.

### 2.3.1 Rappels sur certaines normes des signaux et des systèmes

Soit un signal scalaire  $v(t)$ . La norme  $\mathcal{L}_2$  de  $v(t)$  est définie comme la racine carrée de son énergie :

$$\|v\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |v(t)|^2 dt}. \quad (2.48)$$

La norme  $\mathcal{L}_\infty$  du signal  $v(t)$  est la borne supérieure (*supremum*) de sa valeur absolue :

$$\|v\|_\infty = \sup_t |v(t)|. \quad (2.49)$$

**Remarque 6.** *Il est important de souligner que l'énergie d'un signal n'a pas la même signification que la notion d'énergie conventionnellement utilisé en physique. L'énergie d'un signal est définie à un facteur près qui dépend de sa nature (par exemple la tension ou le courant pour un signal électrique).*

Soit  $\mathbf{G}$  un système quelconque d'entrée  $u(t)$  et de sortie  $y(t)$ . La norme  $\mathcal{H}_2$  du système  $\mathbf{G}$  (notée  $\|\mathbf{G}\|_2$ ) est la norme  $\mathcal{L}_2$  de sa réponse impulsionnelle  $g(t)$ , c'est-à-dire la racine carrée de l'énergie de sa sortie en réponse à une impulsion de Dirac. Dans le domaine temporel, la norme  $\mathcal{H}_2$  de  $\mathbf{G}$  est donnée par :

$$\|\mathbf{G}\|_2 = \|g\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt}. \quad (2.50)$$

Soit  $G(s = j\omega)$  la transformée de Laplace de  $g(t)$  telle que  $G(j\omega) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ . Si  $G(j\omega)$  est *stable*<sup>(7)</sup> et *strictement propre* alors la norme  $\mathcal{H}_2$  de  $\mathbf{G}$  peut se calculer dans le domaine fréquentiel grâce à l'égalité de Parseval :

$$\|\mathbf{G}\|_2 = \|G\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega}, \quad (2.51)$$

avec  $|G(j\omega)|^2 = G(j\omega)\overline{G(j\omega)}$  où  $\overline{G(j\omega)}$  désigne le conjugué de  $G(j\omega)$ . Ainsi, la norme  $\mathcal{H}_2$  d'un système peut également être interprété comme une mesure de la valeur moyenne que prend son gain sur l'ensemble des pulsations  $\omega$ .

---

7.  $G(j\omega)$  est stable si et seulement si tous ses pôles sont à partie réelle négative.

La norme  $\mathcal{H}_\infty$  de  $\mathbf{G}$  est définie comme la borne supérieure de son gain sur l'ensemble des pulsations  $\omega$  :

$$\|\mathbf{G}\|_\infty = \|G\|_\infty = \sup_{\omega} |G(j\omega)|. \quad (2.52)$$

Sachant que  $|G(j\omega)|$  est le gain du système par lequel l'amplitude d'une entrée sinusoïdale de pulsation  $\omega$  est amplifiée, la norme  $\mathcal{H}_\infty$  représente le plus grand gain par lequel toute sinusoïde est amplifiée par le système.

Enfin, il existe une relation intéressante entre la norme  $\mathcal{H}_2$  d'un système et la norme  $\mathcal{L}_\infty$  de sa sortie [Zhou et al., 1996] :

$$\sup_{\|u\|_2=1} \|y\|_\infty = \|\mathbf{G}\|_2. \quad (2.53)$$

En d'autres termes, la relation (2.53) dit que la norme  $\mathcal{H}_2$  du système  $\mathbf{G}$  est égale à la borne supérieure de la sortie  $y(t)$  en réponse à *n'importe quel* signal d'entrée  $u(t)$  d'énergie unitaire. La relation précédente peut également s'étendre pour tout signal d'entrée  $u(t)$  d'énergie  $a^2$  :

$$\sup_{\|u\|_2=a} \|y\|_\infty = a\|\mathbf{G}\|_2. \quad (2.54)$$

Dans la sous-section suivante, un critère basé sur la norme  $\mathcal{H}_2$  de l'écart entre les deux fonctions de transfert (2.31) et (2.42) est introduit.

### 2.3.2 Optimisation du maillage d'un fil grâce à un critère basé sur la norme $\mathcal{H}_2$

La norme  $\mathcal{H}_2$  a déjà trouvé son utilité en tant que critère pour diverses applications, par exemple :

- en commande optimale [Boyd et al., 1994, Chen, 2014] ;
- dans l'évaluation de performances en boucle fermée [Tavazoei, 2010] ;
- dans la synthèse de fonctions orthogonales utilisant la procédure de Gram-Schmidt [Aoun et al., 2007] ;
- pour l'évaluation de la qualité d'une approximation entière de fonctions de transfert non entières explicites [Xue et Chen, 2007] et implicites [Malti et al., 2015].

L'objectif est de choisir le nombre de mailles  $N$  et le ratio  $\zeta$  du maillage de la meilleure façon possible d'un point de vue compromis précision-complexité. Dans ce but, une méthode utilisant notamment un critère basé sur la norme  $\mathcal{H}_2$  est proposée. Ce choix

de critère permet ainsi de comparer deux modèles d'un point de vue énergétique (à une racine carrée près cf. sous-section 2.3.1) en prenant en compte l'ensemble de la réponse fréquentielle.

Soit  $\tilde{F}(x_0, s)$  la fonction de transfert de la maille (cf. équation (2.31)) qui contient le point du fil situé à la distance  $x = x_0$  de l'extrémité :

$$\tilde{F}(x_0, s) = F_{i(x_0)}(s) = \frac{T_{i(x_0)}(s)}{\phi_e(s)} \quad (2.55)$$

où  $i(x_0)$  désigne l'indice de la maille qui contient le point situé en  $x = x_0$ .

Considérons le schéma fonctionnel de la figure 2.13. L'entrée  $\phi_e(t)$  est la même pour  $F(x_0, s)$  et son approximation par maillage  $\tilde{F}(x_0, s)$ , qui donnent respectivement les réponses  $T(x_0, t)$  et  $T_{i(x_0)}(t)$ . Soit  $F_\Delta(x_0, s)$  la fonction de transfert de l'erreur entre  $F(x_0, s)$  et  $\tilde{F}(x_0, s)$  telle que :

$$F_\Delta(x_0, s) = \frac{\Delta T(x_0, s)}{\phi_e(s)} = F(x_0, s) - \tilde{F}(x_0, s). \quad (2.56)$$

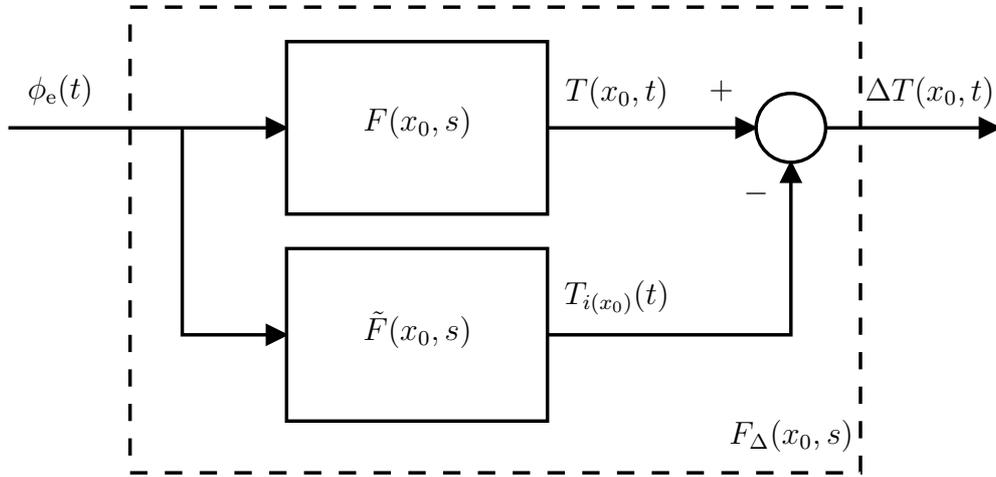


FIGURE 2.13 – Schéma fonctionnel pour le calcul de l'erreur entre le modèle analytique et le modèle maillé

L'idée est de calculer  $\|F_\Delta\|_2$  sur un très grand nombre  $N_{\text{eval}}$  de points d'évaluation notés  $x_n \in ]0, D]$  (il pourra être noté que la distance  $x = 0$  est exclue car il est montré plus loin dans cette section que la norme  $\mathcal{H}_2$  est théoriquement infinie en ce point précis). La qualité du maillage est évaluée à travers la valeur maximale de la norme  $\mathcal{H}_2$  de l'erreur parmi tous les points d'évaluation. Ainsi la qualité du maillage est appréciée grâce au

### 2.3. OPTIMISATION DU MAILLAGE D'UN FIL ÉLECTRIQUE BASÉE SUR LA NORME $\mathcal{H}_2$

---

critère suivant :

$$\mathfrak{J}(N, \zeta) = \max_{x_n} \|F_\Delta\|_2, \quad n \in [1, N_{\text{eval}}], \quad \text{avec } N_{\text{eval}} = 10\,000. \quad (2.57)$$

A la vue du gradient de température longitudinale dans le fil (cf. figure 2.6), les points d'évaluation sont repartis de façon exponentielle sur  $]0, D]$  conformément à la formule suivante :

$$x_n = e^{p(n-N_{\text{eval}}+1)} D_{\text{moy}}, \quad (2.58)$$

où :

- $p \in \mathbb{R}_+^*$  est un paramètre de réglage pour placer le premier point d'évaluation à la distance souhaitée;
- $n = 1, 2, \dots, N_{\text{eval}} - 1$ .

Cette répartition permet de limiter le nombre de calculs puisque la plupart des points d'évaluation seront condensés au voisinage de l'extrémité du fil car c'est à ces emplacements sur le fil que les erreurs risquent d'être les plus importantes. Un exemple de répartition de points d'évaluation (croix rouges) est donné sur la figure 2.14. Le nombre de points est volontairement faible (8 points) pour aider à la compréhension.

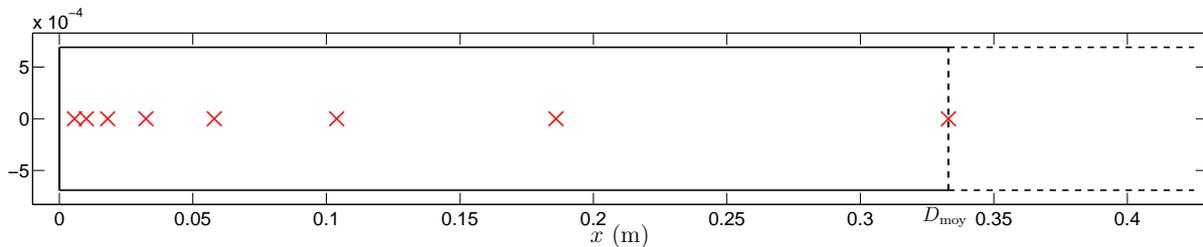


FIGURE 2.14 – Un exemple de répartition de points d'évaluation

D'une manière générale, à supposer que la réponse impulsionnelle (ou la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle) du système à étudier (ou de son modèle) est connue, alors sa norme  $\mathcal{H}_2$  peut se calculer numériquement en utilisant la relation (2.50) ou la relation (2.51). Toutefois, une intégration numérique présente des inconvénients sur le temps de calcul nécessaire par rapport à la précision souhaitée. Plus la précision demandée sera grande (augmentation de l'intervalle d'intégration, diminution du pas d'intégration) plus le temps de calcul sera long. De plus, l'intégration numérique ne donne qu'une approximation de la valeur exacte, il faudrait alors se demander comment quantifier l'erreur.

Pour résoudre ce problème, des solutions qui ne nécessitent pas de calcul d'intégrale peuvent être trouvées dans la littérature. Une méthode bien connue est basée sur la résolution d'une équation de Lyapunov [Toscano, 2013]. Cette méthode conduit à une inégalité matricielle linéaire (ou LMI : Linear Matrix Inequality) au moyen de puissants outils informatiques. Cependant, bien que cette approche soit très bien maîtrisée pour des modèles entiers, il n'existe au jour de la rédaction de ce mémoire, aucune extension de cette méthode aux modèles non entiers.

Une autre solution consiste à calculer l'intégrale de l'équation (2.50) ou (2.51) de façon analytique. Des travaux de recherche ont permis de calculer l'expression analytique de la norme  $\mathcal{H}_2$  de fonctions de transfert non entières explicites [Malti et al., 2011]. Ces travaux ont récemment été étendus aux fonctions de transfert implicites de première espèce et de seconde espèce [Malti et al., 2015]. La fonction de transfert  $F(x, s)$  donnée par l'équation (2.42) appartient à une classe spéciale de fonctions de transfert non entières implicites. Dans les deux paragraphes suivants, l'expression analytique de la norme  $\mathcal{H}_2$  de  $F(x, s)$  puis celle de  $F_\Delta(x, s)$  seront établies à partir de l'équation (2.51).

### 2.3.2.1 Expression analytique de $\|F(x, s)\|_2$

Des développements théoriques sur l'expression de la norme  $\mathcal{H}_2$  d'une classe de fonction de transfert implicite sont présentés dans ce paragraphe. Ces développements ont fait l'objet de publications dans une revue internationale [Chevrié et al., 2015a], ainsi que dans un congrès international [Chevrié et al., 2015b]. Pour plus de commodité, la fonction de transfert  $F(x, s)$  peut se mettre sous la forme :

$$F(x, s) = \frac{\alpha}{\sqrt{s + \lambda}} e^{-x\beta\sqrt{s+\lambda}} \quad (2.59)$$

avec  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{k\epsilon\mu S^2}}$ ,  $\beta = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{k}}$  et  $\lambda = \frac{h_{cr}P}{\epsilon\mu S}$ .

**Théorème 1.** *La norme  $\mathcal{H}_2$  (au carré) de la fonction de transfert stable  $F(x, s)$ , est donnée par :*

$$\|F\|_2^2 = \begin{cases} \infty & \text{si } x = 0 \\ \frac{2\alpha^2}{\pi} K_0(2\beta x\sqrt{\lambda}) & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad (2.60)$$

où  $K_0(z)$  est la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce d'ordre 0 et d'argument complexe  $z$  (voir l'équation (C.32) de C.6.3).

*Démonstration.* D'après la formule (2.51), on a :

$$\|F\|_2^2 = \frac{\alpha^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{j\omega + \lambda}} e^{-x\beta\sqrt{j\omega + \lambda}} \frac{1}{\sqrt{-j\omega + \lambda}} e^{-x\beta\sqrt{-j\omega + \lambda}} d\omega. \quad (2.61)$$

En remarquant que  $\sqrt{\pm j\omega + \lambda} = (\omega^2 + \lambda^2)^{\frac{1}{4}} e^{\pm \frac{j}{2} \arctan(\frac{\omega}{\lambda})}$ , alors :

$$\|F\|_2^2 = \frac{\alpha^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \lambda^2}} \exp \left[ -2x\beta(\omega^2 + \lambda^2)^{\frac{1}{4}} \cos \left( \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{\omega}{\lambda} \right) \right) \right] d\omega. \quad (2.62)$$

Sachant également que  $\cos \left( \frac{\theta}{2} \right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\cos \theta}{2}}$  et que  $\cos (\arctan (\varphi)) = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}$ , alors :

$$\cos \left( \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{\omega}{\lambda} \right) \right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\sqrt{\omega^2 + \lambda^2}}}. \quad (2.63)$$

En remplaçant (2.63) dans (2.62), après quelques simplifications triviales il vient :

$$\|F\|_2^2 = \frac{\alpha^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \lambda^2}} \exp \left( -\sqrt{2}x\beta\sqrt{\sqrt{\omega^2 + \lambda^2} + \lambda} \right) d\omega. \quad (2.64)$$

Soit le changement de variable :

$$\omega^2 = u^2(u^2 - 2\lambda) \rightarrow d\omega = 2\sqrt{\frac{\omega^2 + \lambda^2}{u^2 - 2\lambda}} du. \quad (2.65)$$

Ainsi, (2.64) se réécrit :

$$\|F\|_2^2 = \frac{2\alpha^2}{\pi} \int_{\sqrt{2\lambda}}^\infty \frac{\exp \left( -\sqrt{2}x\beta u \right)}{\sqrt{u^2 - 2\lambda}} du. \quad (2.66)$$

L'expression analytique de l'intégrale (2.66) est donnée par la formule 3.387.6 de [Gradshteyn et Ryshik, 2007]. Ainsi, si  $x > 0$ , le résultat donné par l'équation (2.60) du théorème 1 est obtenu. En revanche si  $x = 0$ , alors l'intégrale diverge.  $\square$

Un exemple d'illustration de l'évolution de  $\|F\|_2$  en fonction de  $x$  est donné sur la figure 2.15 pour différentes valeurs de  $\lambda$  (par commodité  $\alpha = \beta = 1$ ). La norme  $\mathcal{H}_2$  de  $F(x, s)$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers l'infini quel que soit  $\lambda > 0$ . Ceci est dû aux propriétés de la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce  $K_0(z)$  qui tend vers 0 lorsque  $|z|$  augmente.

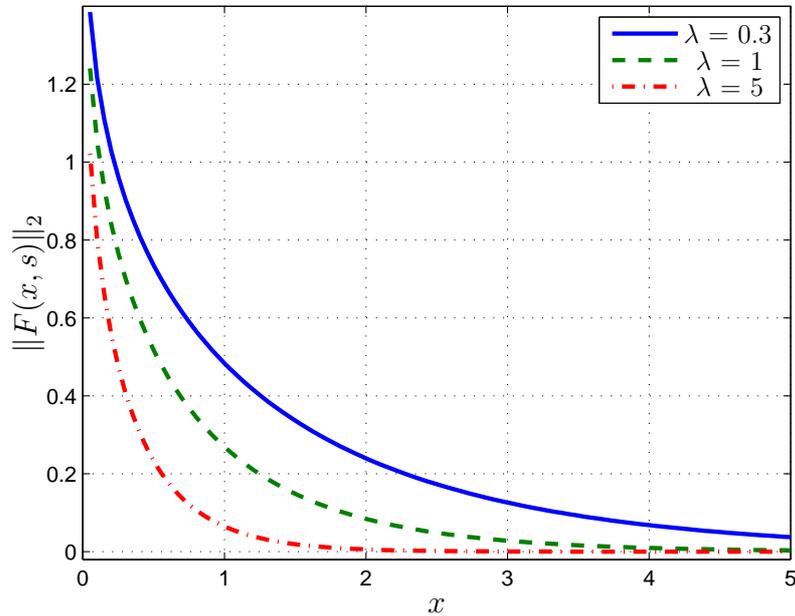


FIGURE 2.15 – Norme  $\mathcal{H}_2$  de  $F(x, s)$  en fonction de  $x$  pour différentes valeurs de  $\lambda$

Il est également intéressant de noter que si  $x = 0$ , alors la norme  $\mathcal{H}_2$  de  $F(x, s)$  est infinie. En effet, dans ce cas l'équation (2.59) devient :

$$F(0, s) = \frac{\alpha}{\sqrt{s + \lambda}}. \quad (2.67)$$

Soit  $F_1(s)$  une fonction de transfert implicite de première espèce :

$$F_1(s) = \frac{\alpha}{(s + \lambda)^\nu}, \quad \nu \in \mathbb{R}^+. \quad (2.68)$$

**Théorème 2.** La norme  $\mathcal{H}_2$  (au carré) de la fonction de transfert stable  $F_1(s)$  définie par l'équation(2.68), est donnée par

$$\|F_1\|_2^2 = \begin{cases} \infty & \text{si } \nu \leq \frac{1}{2} \\ \frac{\alpha^2}{2\pi\lambda^{2\nu-1}} \text{B}\left(\frac{1}{2}, \nu - \frac{1}{2}\right) & \text{si } \nu > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.69)$$

où B est la fonction fonction Beta d'Euler.

*Démonstration.* D'après (2.51) :

$$\|F_1\|_2^2 = \frac{\alpha^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega}{(\lambda^2 + \omega^2)^\nu}. \quad (2.70)$$

Soit le changement de variable :

$$\omega^2 = x \rightarrow d\omega = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \quad (2.71)$$

alors,

$$\|F_1\|_2^2 = \frac{\alpha^2}{2\pi\lambda^{2\nu}} \int_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{2}} dx}{(1 + \frac{x}{\lambda^2})^\nu}. \quad (2.72)$$

Une telle intégrale est reportée dans la formule 3.194.3 de [Gradshteyn et Ryzhik, 2007]. Ainsi, sachant que  $\nu > \frac{1}{2}$ , le résultat donné par l'équation (2.69) du théorème 2 est obtenu. Lorsque  $\nu \leq \frac{1}{2}$ , l'intégrale (2.72) diverge.  $\square$

Lorsque  $\nu = \frac{1}{2}$ , les fonctions de transfert  $F(x, s)$  et  $F_1(s)$  sont de la même forme. D'après le théorème 2, la norme  $\mathcal{H}_2$  de  $F_1(s)$  est infinie lorsque  $\nu \leq 0,5$ . Ce résultat coïncide avec celui présenté dans le théorème 1.

Ces résultats, ainsi que des résultats complémentaires sur la norme  $\mathcal{H}_2$  de fonctions de transfert implicites non entières sont présentés dans l'annexe C de ce mémoire.

### 2.3.2.2 Expression analytique de $\|F_\Delta(x, s)\|_2$

Il est rappelé que la fonction de transfert  $\tilde{F}(x, s)$  issue du maillage est entière et strictement propre. Grâce à la décomposition en éléments simples, elle pourra toujours se mettre sous la forme :

$$\tilde{F}(x, s) = \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{s + p_k} \quad (2.73)$$

où  $(a_k, p_k) \in \mathbb{R}^2$ .

Ainsi l'équation (2.56) se réécrit :

$$F_\Delta(x, s) = \frac{\alpha}{\sqrt{s + \lambda}} e^{-\beta x \sqrt{s + \lambda}} - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{s + p_k}. \quad (2.74)$$

**Théorème 3.** Si  $x > 0$ , la norme  $\mathcal{H}_2$  (au carré) de la fonction de transfert stable  $F_\Delta(x, s)$

définie par l'équation (2.74), est donnée par :

$$\|F_\Delta\|_2^2 = \|F\|_2^2 + \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{a_k a_l}{p_k + p_l} - 2\alpha \sum_{k=1}^N a_k \frac{e^{-\beta x \sqrt{p_k + \lambda}}}{\sqrt{p_k + \lambda}}. \quad (2.75)$$

*Démonstration.* D'après la définition fréquentielle de la norme  $\mathcal{H}_2$  donnée par l'équation (2.51), il faut résoudre l'intégrale suivante :

$$\|F_\Delta(x, s)\|_2^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty F_\Delta(x, j\omega) \overline{F_\Delta(x, j\omega)} d\omega, \quad (2.76)$$

En rappelant que l'intégrale d'une somme est égale à la somme des intégrales, alors l'équation (2.76) se réécrit :

$$\|F_\Delta(x, s)\|_2^2 = I_{\lambda, \lambda} + \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^N a_l a_k I_{p_l, p_k} - \alpha \sum_{k=1}^N a_k (I_{p_k, \lambda} + I_{\lambda, p_k}). \quad (2.77)$$

Il y a alors 3 types d'intégrales à résoudre, c'est-à-dire  $I_{\lambda, \lambda}$ ,  $I_{p_l, p_k}$  et  $I_{p_k, \lambda}$  (ou  $I_{\lambda, p_k}$ ), pour obtenir l'expression analytique complète de  $\|F_\Delta(x, s)\|_2^2$ .

Le premier type d'intégrale  $I_{\lambda, \lambda}$  est rigoureusement le même que (2.61). Par conséquent, l'expression analytique de  $I_{\lambda, \lambda}$  est donnée par l'équation (2.60) du théorème 1.

Le second type d'intégrale est donné par :

$$I_{p_l, p_k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(p_l + j\omega)(p_k - j\omega)} d\omega. \quad (2.78)$$

Soit  $G_{p_l, p_k}(j\omega) = \frac{1}{(p_l + j\omega)(p_k - j\omega)}$  l'intégrande de l'équation (2.78) avec 2 singularités : l'une pour  $\omega = jp_l$ , l'autre pour  $\omega = -jp_k$ . L'intégrale (2.78) peut être calculée par intégration dans le plan complexe en utilisant le théorème des résidus. En choisissant le contour d'intégration le long du demi-cercle supérieur, l'expression analytique de l'intégrale (2.78) est donnée par :

$$I_{p_l, p_k} = \frac{1}{2\pi} 2j\pi \operatorname{Res}(G_{p_l, p_k}(j\omega), \omega = jp_l) = \frac{1}{p_k + p_l}. \quad (2.79)$$

Le dernier type d'intégrale est défini par :

$$I_{p_k, \lambda} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\beta x \sqrt{\lambda - j\omega}}}{(p_k + j\omega) \sqrt{\lambda - j\omega}} d\omega \quad (2.80)$$

et

$$I_{\lambda,p_k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\beta x \sqrt{\lambda+j\omega}}}{(p_k - j\omega) \sqrt{\lambda + j\omega}} d\omega. \quad (2.81)$$

Le calcul des intégrales (2.80) et (2.81) est aussi basé sur le théorème des résidus par intégration dans le plan complexe. Comme la démonstration est la même pour les deux intégrales, seul le cas de l'intégrale (2.81) est abordé.

Soit  $G_{\lambda,p_k}(x, j\omega)$  l'intégrande de l'intégrale (2.81) qui possède 2 singularités : l'une pour  $\omega = j\lambda$ , l'autre pour  $\omega = -jp_k$ . L'intégrande  $G_{\lambda,p_k}(x, j\omega)$  a des points de branchement en  $\omega_0 = j\lambda$  et en l'infini ( $\infty$ ). De ce fait, une coupure est choisie entre  $j\lambda$  et  $\infty$  le long de l'axe des imaginaires. Comme l'illustre la figure 2.16, au lieu d'intégrer  $G_{\lambda,p_k}(x, j\omega)$  le long de l'axe des réels  $\omega \in ]-\infty, +\infty[$ , le contour d'intégration noté  $\Gamma$  est choisi le long du demi-cercle de rayon  $R_\Gamma \rightarrow \infty$  dans le plan complexe inférieur pour éviter la coupure. Les croix représentent l'emplacement des singularités.

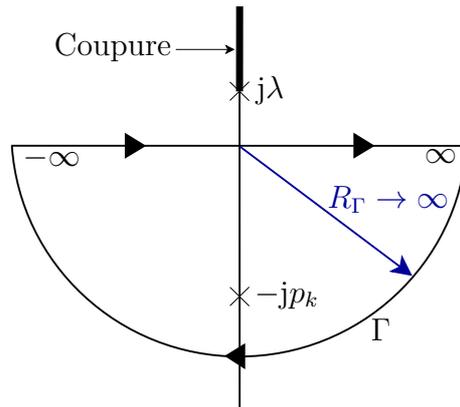


FIGURE 2.16 – Contour d'intégration  $\Gamma$

D'après le théorème des résidus :

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_{\lambda,p_k}(x, j\omega) d\omega = 2j\pi \text{Res}(G_{\lambda,p_k}(x, j\omega), \omega = jp_k) - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} G_{\lambda,p_k}(x, j\omega) d\omega. \quad (2.82)$$

Il peut être montré facilement que

$$\text{Res}(G_{\lambda,p_k}(x, j\omega), \omega = jp_k) = -j \frac{e^{-\beta x \sqrt{p_k + \lambda}}}{\sqrt{p_k + \lambda}}, \quad (2.83)$$

et que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} G_{\lambda,p_k}(x, j\omega) d\omega = 0. \quad (2.84)$$

Enfin, en utilisant les équations (2.83) et (2.84) dans (2.82) et en se rappelant que  $I_{\lambda,p_k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\lambda,p_k}(x, j\omega) d\omega$ , la solution analytique du troisième type d'intégrale est obtenue :

$$I_{\lambda,p_k} = \frac{e^{-\beta x \sqrt{p_k + \lambda}}}{\sqrt{p_k + \lambda}}, \quad (2.85)$$

d'où il est déduit que :

$$I_{p_k, \lambda} + I_{\lambda, p_k} = 2 \frac{e^{-\beta x \sqrt{p_k + \lambda}}}{\sqrt{p_k + \lambda}}. \quad (2.86)$$

À partir des équations (2.60), (2.79) et (2.86), l'expression analytique de  $\|F_{\Delta}(x, s)\|_2 = \|F(x, s) - F_N(x, s)\|_2$  peut être établie conformément à la formule (2.75).  $\square$

Grâce à la formule donnée par le théorème 3, il est possible de calculer rapidement et de façon exacte la norme  $\mathcal{H}_2$  de l'erreur et donc la valeur du critère. Le paragraphe suivant se consacre à détailler la méthode d'optimisation du maillage à partir du critère, c'est-à-dire à arrêter un choix sur les valeurs du nombre de mailles  $N$  et du ratio  $\zeta$ .

### 2.3.2.3 Une méthode pour déterminer $N$ et $\zeta$

La méthode pour déterminer les valeurs de  $N$  et  $\zeta$  à partir du critère donné par (2.57) consiste en deux étapes.

#### Première étape

Le ratio optimal et la valeur correspondante du critère sont déterminés pour différents nombres de mailles. L'ensemble des valeurs optimales du ratio en fonction de  $N$  est noté  $\zeta_{\text{opt}}(N)$  et l'ensemble des valeurs correspondantes du critère est donné par

$$\mathfrak{J}_{\text{opt}}(N) = \min_{\zeta} \mathfrak{J}(N, \zeta) = \mathfrak{J}(N, \zeta_{\text{opt}}(N)). \quad (2.87)$$

Un exemple illustratif de cette première étape pour un fil de  $1,5 \text{ mm}^2$  est donné sur la figure 2.17. Le critère est calculé pour  $N \in [2, 40]$ , et à partir duquel les ratios optimaux  $\zeta_{\text{opt}}(N)$  et les valeurs du critère correspondantes  $\mathfrak{J}_{\text{opt}}(N)$  sont déterminés. Pour un meilleur confort de lecture, seuls les cas qui correspondent à  $N = \{3, 4, 5, 8\}$  sont reportés sur la figure 2.17.

### 2.3. OPTIMISATION DU MAILLAGE D'UN FIL ÉLECTRIQUE BASÉE SUR LA NORME $\mathcal{H}_2$

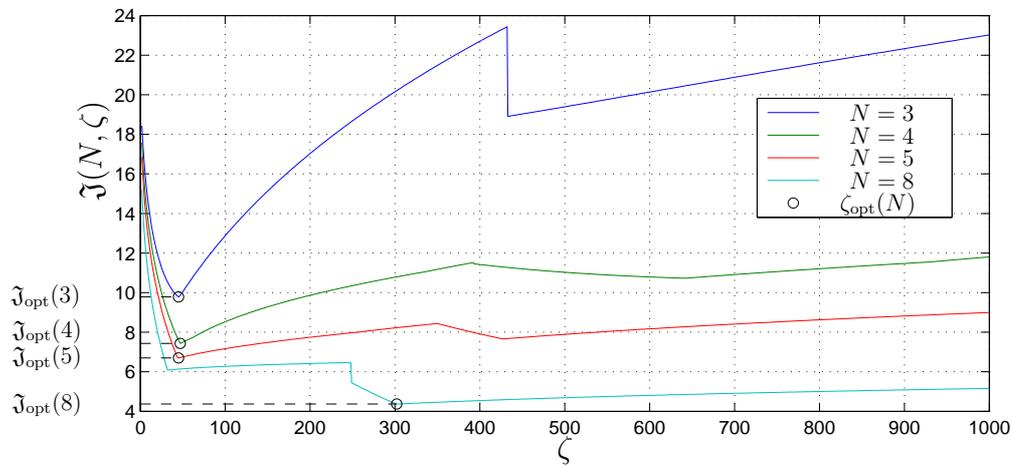


FIGURE 2.17 – Tracé du critère  $\mathfrak{J}$  en fonction du ratio de maillage  $\zeta$  et pour plusieurs nombres de mailles  $N$

Certains sauts dans les valeurs du critère peuvent être constatés. Ceci provient de la répartition des points d'évaluation par rapport aux mailles. En effet à mesure que le ratio augmente, la taille et les limites géométriques des mailles se déplacent. Ainsi, il se peut que le passage d'un (ou plusieurs) point(s) d'évaluation d'une maille à une autre produise des changements brutaux du critère. Un exemple de changement de maille d'un point d'évaluation est illustré sur la figure 2.18. Le nombre de maille est fixé à  $N = 4$  et le ratio vaut  $\zeta = 10$  (en haut) puis  $\zeta = 11$  (en bas). Cette figure démontre que le point d'intérêt a changé de maille.

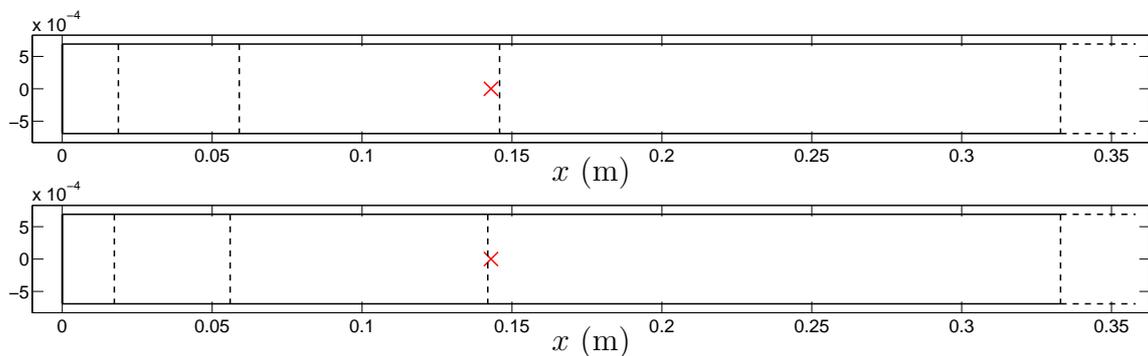


FIGURE 2.18 – Passage d'un point d'intérêt d'une maille à une autre (haut :  $N = 4$  et  $\zeta = 10$ , bas :  $N = 4$  et  $\zeta = 11$ )

Deuxième étape

Le nombre de mailles est choisi tel que :

$$\Delta\mathfrak{J}_{\text{opt}}(N) = \mathfrak{J}_{\text{opt}}(N) - \mathfrak{J}_{\text{opt}}(N + 1) \leq q \times \Delta\mathfrak{J}_{\text{opt}}(2) \quad (2.88)$$

où  $\Delta\mathfrak{J}_{\text{opt}}(2) = \mathfrak{J}_{\text{opt}}(2) - \mathfrak{J}_{\text{opt}}(3)$  et  $q$  est un paramètre de réglage tel que  $0 < q \leq 1$ .

Comme les valeurs de  $\mathfrak{J}_{\text{opt}}(N)$  sont strictement décroissantes selon  $N$  (voir figure 2.19), le paramètre  $q$  donne un critère d'arrêt pour choisir le nombre de mailles. Ainsi, en choisissant  $q = 0,1 = 10\%$ , le nombre de mailles requis est  $N = 8$  et le ratio optimal associé est  $\zeta = 302$ .

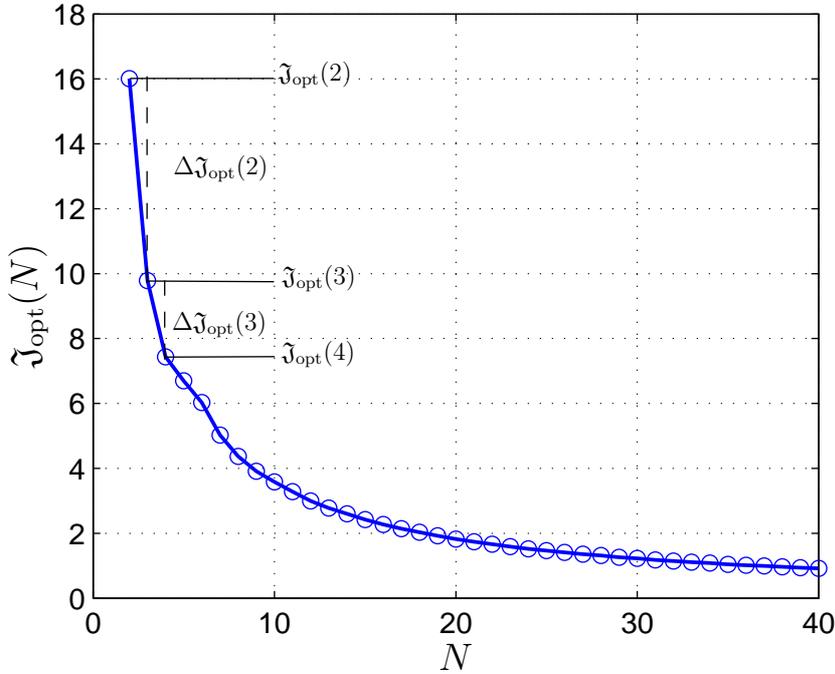


FIGURE 2.19 – Tracé de  $\mathfrak{J}_{\text{opt}}(N)$  en fonction de  $N$

#### 2.3.2.4 Application de la méthode de maillage à des fils de section différente

La méthode de maillage décrite précédemment est appliquée à l'ensemble des sections de fils à disposition (cf. 2.1). La première étape consiste à chercher le ratio optimal pour un nombre de mailles donné. La valeur du critère (en échelle logarithmique) en fonction du ratio  $\zeta$  pour un nombre de mailles fixé à  $N = 4$  est donnée sur la figure 2.20.

Il est constaté que les ratios optimaux (cercles noirs) ont la même valeur quelle que soit la section de fils. Ainsi, pour un nombre de mailles donné, le ratio optimal est unique

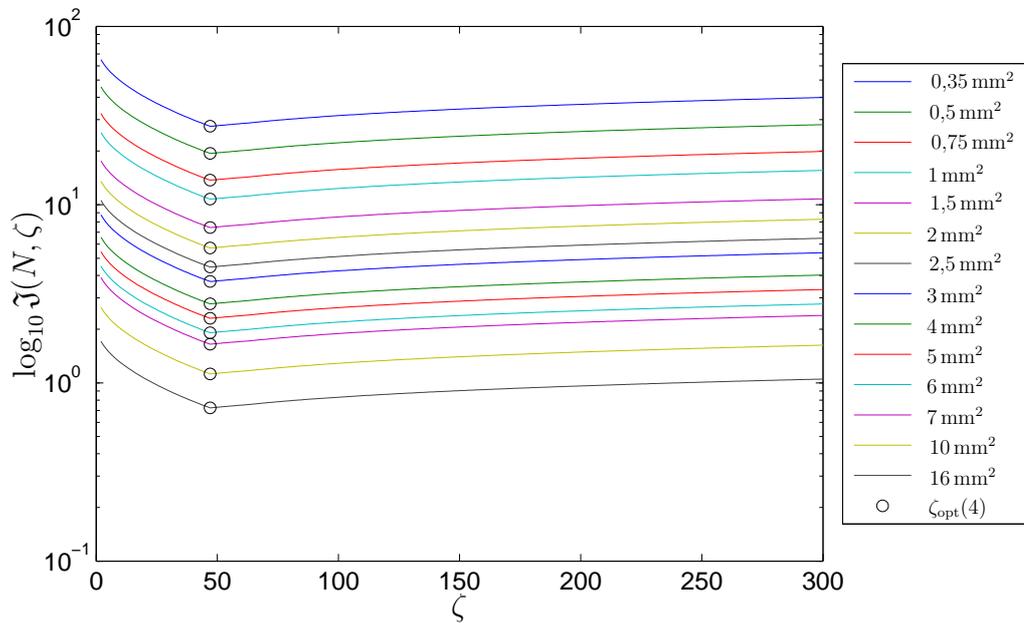


FIGURE 2.20 – Application de la première étape de la méthode de détermination du nombre de mailles  $N$  et du ratio  $\zeta$  à des fils de différentes section

pour toutes les sections de fils. Cette conclusion reste vraie pour des nombres de mailles allant de  $N = 2$  à  $N = 40$ . En revanche, les valeurs du critère (en échelle logarithmique) associées changent en fonction de la section de fil étudiée comme l'illustre la figure 2.21 en fonction du nombre de mailles et pour différentes section de fil.

Le profil du critère en fonction du nombre de mailles est similaire entre chaque section de mailles. Si chacune des courbes de la figure 2.21 est normalisée, un tracé unique donné sur figure 2.22 ainsi obtenu. Ceci veut dire que mailler un fil revient à mailler tous les fils de sections différentes traités dans ce mémoire. Ainsi, pour un critère d'arrêt  $q = 10\%$ , un maillage optimal avec  $N = 8$  et le ratio correspondant  $\zeta_{\text{opt}}(8) = 302$  est valable pour chaque section de fil.

## 2.4 Confirmation de la qualité du maillage obtenu et comparaison avec d'autres types de maillages

Dans cette section, la qualité de la méthode de maillage précédemment établie est d'abord confirmée par comparaison du diagramme de Bode du modèle analytique avec celui du modèle maillé. Une confrontation des résultats obtenus en simulation avec des don-

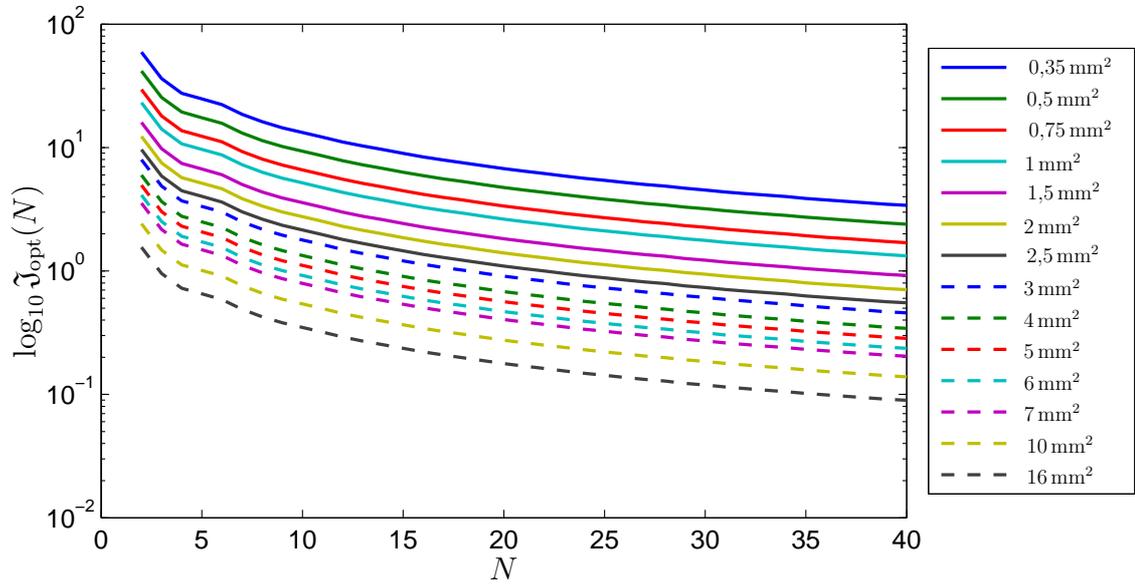


FIGURE 2.21 – Application de la deuxième étape à des fils de différentes section : valeur du critère  $\mathfrak{J}_{\text{opt}}(N)$

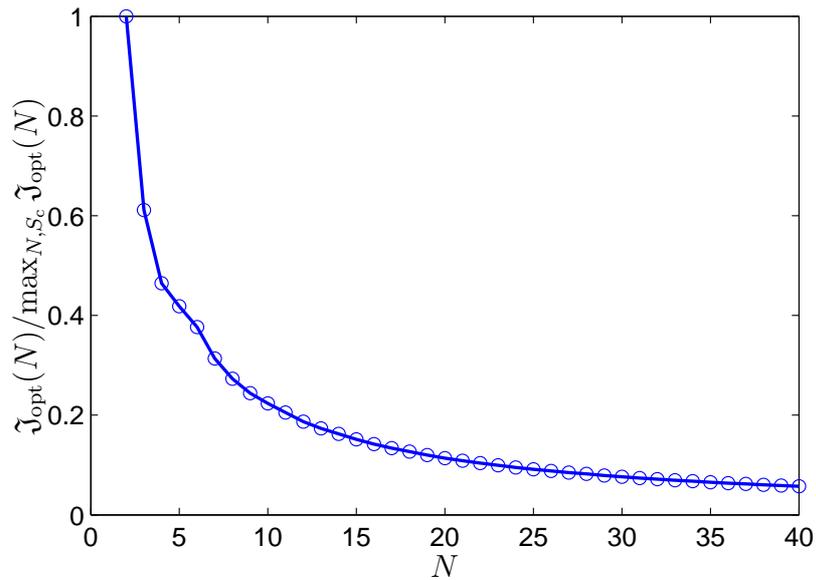


FIGURE 2.22 – Normalisation des courbes de la figure 2.21

nées expérimentales réelles est également présentée. Enfin, une comparaison du maillage obtenu avec un autre maillage irrégulier mais basé sur un critère utilisant la norme  $\mathcal{H}_\infty$  est également proposée.

### 2.4.1 Comparaison du diagramme de Bode du modèle analytique et du modèle maillé

Dans un premier temps la qualité du maillage est jugée en confrontant le diagramme de Bode du modèle maillé avec celui du modèle analytique pour 4 sections de fils différentes. Soit  $x_{pc}$  le point d'évaluation associé à la valeur du critère pour le maillage retenu ( $N = 8$ ,  $\zeta_{opt}(8) = 302$ ). En d'autres termes,  $x_{pc}$  est le point pour lequel la norme  $\mathcal{H}_2$  de l'erreur  $F_\Delta(x_{pc}, s)$  est maximale, c'est donc le pire cas. Le diagramme de Bode (en gain) du modèle analytique (2.42) en  $x = x_{pc}$  et celui de la maille contenant le point  $x_{pc}$  pour différentes sections de fil ( $0,35 \text{ mm}^2$ ,  $1,5 \text{ mm}^2$ ,  $3 \text{ mm}^2$  et  $16 \text{ mm}^2$ ) sont présentés sur la figure 2.23. Le point du pire cas se situe généralement près de l'extrémité du fil puisque les gradients de températures y sont plus importants. La valeur de  $x_{pc}$  est précisée entre parenthèse à côté de la section du fil pour chaque cas sur la figure 2.23.

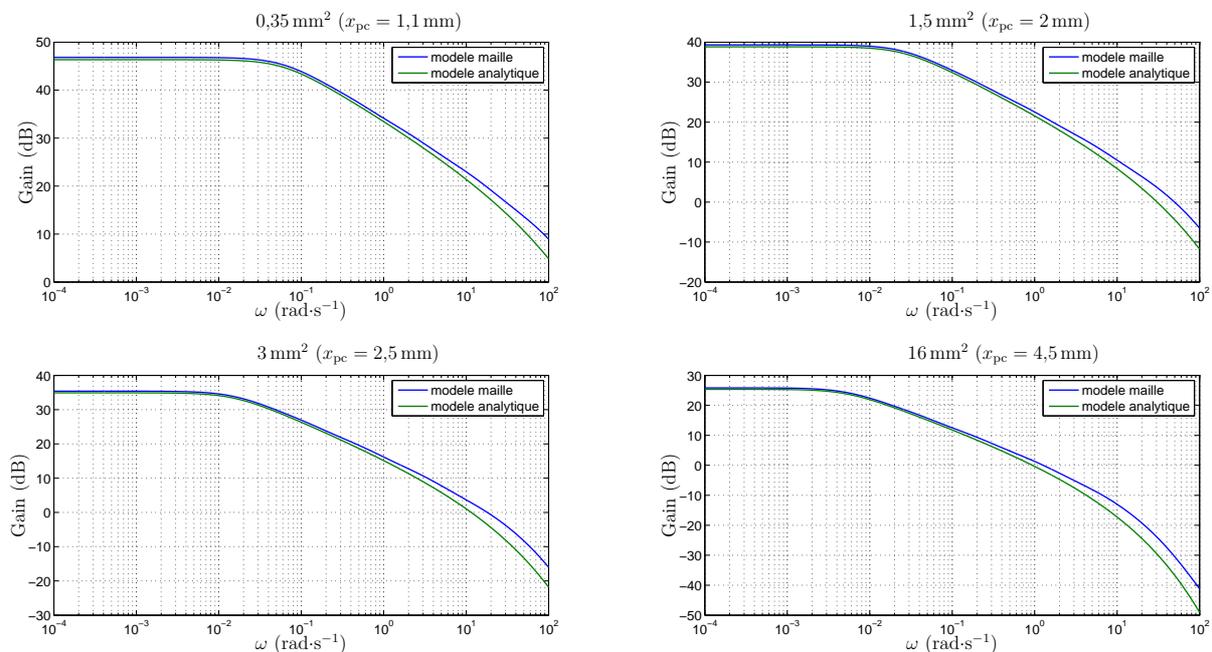


FIGURE 2.23 – Diagrammes de Bode du modèle analytique et du modèle maillé dans le pire cas pour différentes sections de fil

D'après l'équation (2.56), la réponse fréquentielle de l'erreur entre  $F(x, s)$  et  $\tilde{F}(x, s)$

au point  $x_{pc}$  est donnée par :

$$F_{\Delta}(x_{pc}, j\omega) = F(x_{pc}, j\omega) - \tilde{F}(x_{pc}, j\omega). \quad (2.89)$$

Les réponses fréquentielles en gain réel (pas en décibel)  $|F_{\Delta}(j\omega)|$  des erreurs pour les section de fils considérés pour la figure 2.23 sont données sur la figure 2.24.

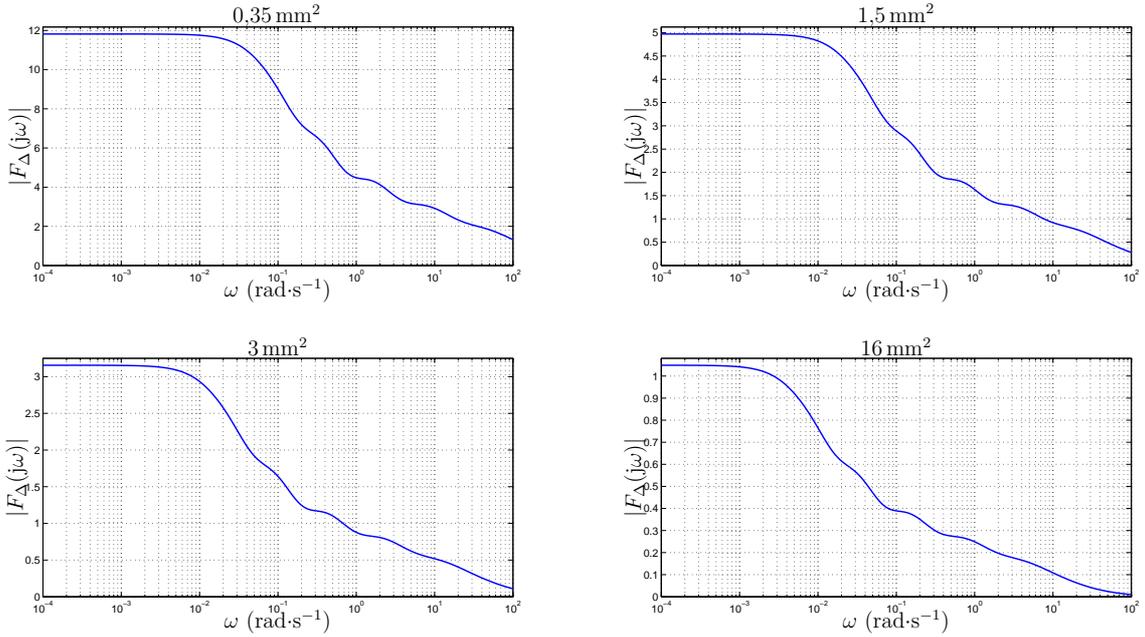


FIGURE 2.24 – Diagrammes de Bode du gain de l'erreur absolue entre le modèle analytique et maillé dans le pire cas pour différentes sections de fil

Sachant que :

$$F_{\Delta}(x_{pc}, s) = \frac{T(x_{pc}, s) - T_{i(x_{pc})}(x_{pc}, s)}{\phi_e(s)}, \quad (2.90)$$

si le flux  $\phi_e$  vaut 1 W, alors l'écart de température maximal entre le modèle analytique et maillé est donné par la norme  $\mathcal{H}_{\infty}$  (c'est-à-dire le gain maximal sur les fréquences) de  $F_{\Delta}(x_{pc}, s)$ . Par exemple, d'après la figure 2.24, l'écart maximal de température entre les deux modèles pour un fil de 0,35 mm<sup>2</sup> est de l'ordre de 12 °C si  $\phi_e = 1$  W. Cet écart est évidemment important, mais il faut surtout préciser qu'un tel flux est une valeur trop élevée dans le cas de boîtiers-faisceaux automobiles. L'ordre de grandeur du flux  $\phi_e$  est plutôt aux alentours de 0,05 W à 0,1 W, ce qui engendre dans ce dernier cas, une erreur maximale d'environ 1 °C (ce qui est bien plus acceptable). D'autre part, il est important de remarquer que le gain maximal de l'erreur a tendance à diminuer à mesure que la

section du fil augmente (environ  $1^\circ\text{C}$  d'erreur par watt pour un fil de  $16\text{ mm}^2$ ).

Le maillage obtenu est de qualité satisfaisante comparé au modèle analytique. Toutefois, il ne faut pas oublier que le modèle analytique n'a fait que servir de référence pour optimiser la qualité du maillage. En effet, ce modèle est linéarisé autour d'un point de fonctionnement. Il est donc nécessaire de s'assurer de la bonne qualité du maillage en confrontant les résultats issus de la simulation du modèle non-linéaire (2.19) avec des données expérimentales.

### 2.4.2 Confrontation du modèle non linéaire avec des mesures réelles

La qualité du maillage retenu, est maintenant évaluée à l'aide de mesures collectées sur un banc de tests dédié dont la constitution est donnée plus en détail dans la section 3.4 du chapitre 3 de manuscrit. Les mesures sont faites grâce à des thermocouples de type K collés à des distances différentes de l'extrémité du fil :  $x_1 = 2,5\text{ cm}$ ,  $x_2 = 5\text{ cm}$ ,  $x_3 = 20\text{ cm}$  et le courant traversant le fil est également mesuré. Le fil est suspendu à l'air libre et son extrémité est connectée à un composant électrique<sup>(8)</sup> dont la température  $T_{\text{comp}}(t)$  est mesurée et dont la résistance thermique  $R_{\text{comp}}$  est connue. Ainsi le flux de chaleur entrant dans le fil  $\phi_e$  est donné par :

$$\phi_e(t) = \frac{T_{\text{comp}}(t) - T_1(t)}{R_{\text{comp}} + R_1}. \quad (2.91)$$

Les températures mesurées en  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , les températures simulées des mailles correspondantes (voir figure 2.26) du modèle non linéaire (2.19) et l'intensité du courant électrique mesurée sont présentés sur la figure 2.25.

---

8. Il s'agit en réalité d'un clip. Son modèle électrothermique est traité plus loin dans ce mémoire.

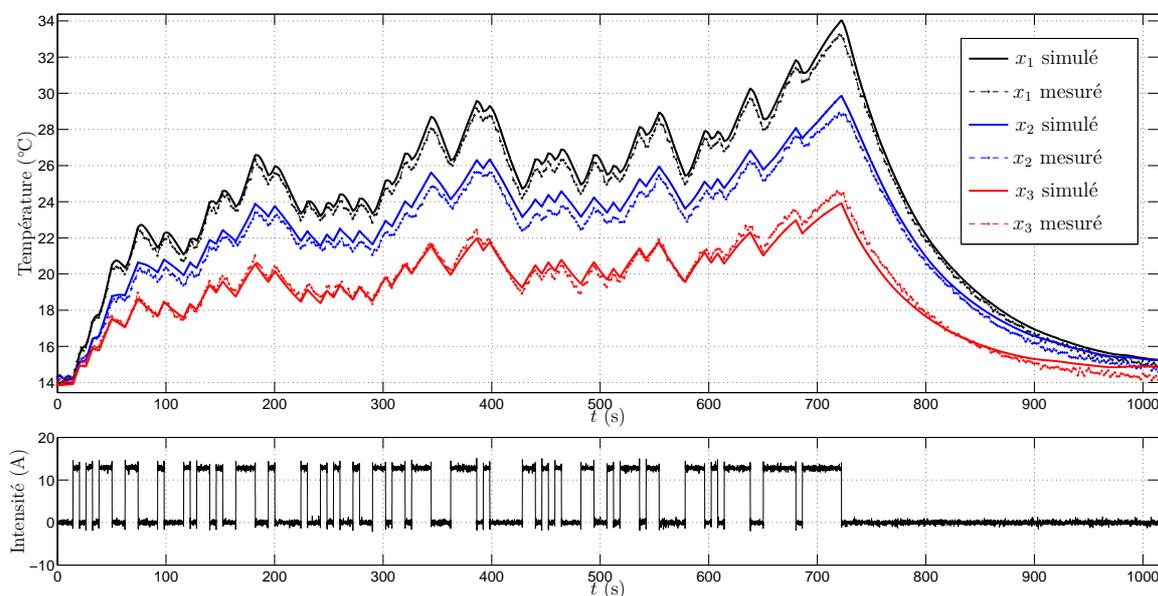


FIGURE 2.25 – Comparaison entre les températures du fil simulées et mesurées (haut) et signal de sollicitation en courant (bas)

La valeur maximum de l'erreur issue de la simulation du modèle (2.19) et des données de mesures est d'environ  $1\text{ }^{\circ}\text{C}$  tandis que la valeur moyenne de l'erreur est d'environ  $0,3\text{ }^{\circ}\text{C}$ . L'amplitude de l'erreur dépend principalement de la distance entre un point de mesure et le milieu de sa maille correspondante : plus cette distance est grande plus l'erreur l'est aussi.

La température longitudinale en régime permanent (échelon de courant de  $14\text{ A}$ ) a également été relevée. Pour cette expérience des thermocouples supplémentaires ont été placés en  $x_4 = 10\text{ cm}$  et en  $x_5 = 40\text{ cm}$  (voir figure 2.26).

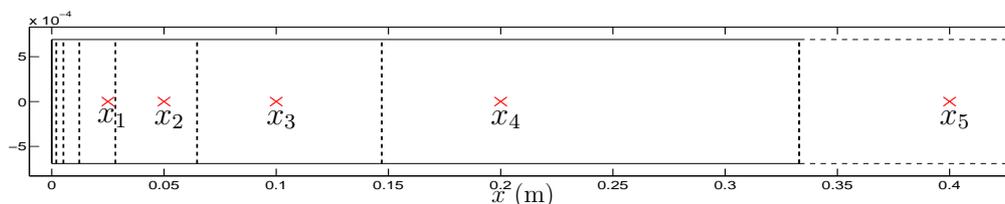


FIGURE 2.26 – Répartition des mailles et des capteurs sur le fil électrique

Le thermocouple placé en  $x_5$  est situé au-delà de la distance d'oubli moyenne du fil, la température simulée correspondante est celle du fil de longueur infinie. Les résultats

ainsi obtenus sont présentés sur la figure 2.27.

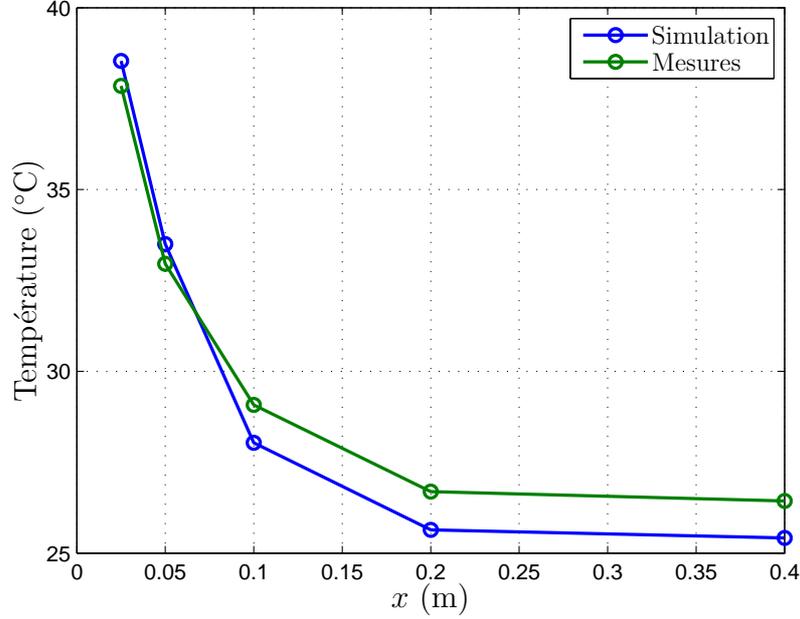


FIGURE 2.27 – Comparaison entre les températures du fil simulées et mesurées en régime permanent

L'erreur maximale est d'environ 1 °C et d'autre part, la distance d'oubli est bien retrouvée aux alentours d'une trentaine de centimètres. Ainsi, le modèle (2.19) associé au maillage obtenu donnent des résultats satisfaisants.

### 2.4.3 Avantages par rapport à une autre méthode d'optimisation utilisant un critère basé sur la norme $\mathcal{H}_\infty$

Une répartition irrégulière des mailles identique à celle donnée par l'équation (2.47) a déjà été utilisée par Huy Cuong NGUYEN dans sa thèse [Nguyen, 2013]. Cependant dans ses travaux, l'optimisation du nombre de mailles et du ratio utilise un critère basé sur la norme  $\mathcal{H}_\infty$ . Le critère utilisé par H.C NGUYEN est le suivant :

$$\mathfrak{J}_{\text{HCN}}(N, \zeta) = \left\| \frac{F(0, s \rightarrow 0) - \tilde{F}(0, s \rightarrow 0)}{F(0, s \rightarrow 0)} \right\|_\infty \leq 0,01, \quad (2.92)$$

où  $\tilde{F}(0, s)$  correspond alors à la fonction de transfert de la première maille  $F_1(s)$ .

Le premier inconvénient de ce critère est qu'il ne prend pas en compte l'ensemble

de la réponse fréquentielle. En effet, il minimise simplement l'erreur statique (c'est-à-dire pour les pulsations très faibles dans le domaine fréquentiel :  $s \rightarrow 0$ ), donc seulement l'erreur en régime permanent. De plus, seule la température au point  $x = 0$  est prise en compte. La couverture spatiale se limite donc à un seul point qui est l'extrémité du fil.

Le critère à base de norme  $\mathcal{H}_2$  (gain moyen sur toutes les fréquences) proposé dans ce mémoire tient compte de tout le domaine fréquentiel et de toute la longueur du fil jusqu'à sa distance d'oubli. En revanche, il est plus difficile de donner une interprétation physique au critère (2.57) et moins aisé de le relier à l'écart de température entre les deux modèles. En effet, ce critère est plus utile pour comparer des maillages entre eux et pour juger de la nécessité d'ajouter ou non des mailles supplémentaires.

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, la méthode de modélisation nodale a été exposée et appliquée à un fil de longueur infinie, puis à un fil de longueur finie. La modélisation du fil de longueur finie par un seul nœud étant trop limitative à cause du gradient de température longitudinale, un modèle par maillage a été présenté. Ce modèle consiste à diviser le fil électrique en petits tronçons cylindriques (dans un premier temps de même longueur) appelés mailles. Plus le nombre de mailles sera important et plus le modèle sera précis mais au détriment d'un temps de calcul de plus en plus long.

La simulation du modèle maillé permet de faire apparaître une distance d'oubli au-delà de laquelle la température du fil est indépendante de la distance et égale à la température du fil électrique de longueur infinie.

Afin de faire un choix quant au nombre de mailles à retenir, le modèle maillé est comparé à un modèle analytique de référence. Après linéarisation autour d'une température ambiante et d'une température de fil données, ce modèle conduit à une fonction de transfert non entière particulière. L'étude de cette fonction de transfert en régime permanent a permis de trouver une formule analytique pour calculer la distance d'oubli qui donne des résultats cohérents par rapport à ceux issus de la simulation du modèle maillé.

Dans le but de réduire au préalable le nombre de mailles à utiliser, un maillage irrégulier ajustable par un ratio a été proposé, puis une méthode d'optimisation utilisant un critère à base de norme  $\mathcal{H}_2$  a été introduite. Ceci a conduit à des développements théoriques sur l'expression analytique de la norme  $\mathcal{H}_2$  des fonctions de transfert non entières implicites. Le critère retenu cherche à minimiser, sur un très grand nombre de

points d'évaluation, la norme  $\mathcal{H}_2$  de l'erreur dans le pire cas entre le modèle analytique et le modèle maillé. L'application de la méthode d'optimisation à des sections de fils différentes conduit, dans chacun de ces cas, au même nombre de mailles et au même ratio optimaux.

La qualité du maillage obtenu (nombre de mailles et ratio optimal) a été confirmée par des comparaisons fréquentielles et temporelles. Les diagrammes de Bode du modèle analytique et maillé pour le pire cas ont été comparés pour différentes sections de fil. Une confrontation a également été faite entre les résultats issus de la simulation du modèle maillé en utilisant le maillage optimal obtenu avec des données de mesure.

Ces résultats ont fait l'objet d'une publication dans European Control Conference (ECC) 2016 : [Chevrié et al., 2016].

Enfin les avantages de la méthode par rapport à une autre approche déjà existante ont été présentés.

Dans le prochain chapitre, la méthode nodale est à nouveau utilisée pour modéliser des composants autre qu'un fil électrique. Ainsi, les modèles électrothermiques de divers composants sont présentés dans le chapitre qui suit. Ces modèles seront ensuite agrégés entre eux pour former des chaînes électrothermiques plus complexes.

# Chapitre 3

## Modélisation électrothermique d'une carte électronique et de sa connectique

---

3.1	Présentation de la chaîne électrothermique étudiée . . . . .	91
3.1.1	Chaîne de faible puissance . . . . .	91
3.2	Généralités sur la modélisation des composants . . . . .	92
3.3	Modélisation de la chaîne électrothermique de faible puissance . . . . .	94
3.3.1	Faisceau . . . . .	94
3.3.2	Connecteur . . . . .	96
3.3.3	Carte électronique . . . . .	112
3.4	Validation de la chaîne électrothermique de faible puissance . . . . .	123
3.4.1	Présentation du banc d'essais électrothermiques . . . . .	123
3.4.2	Essai de validation effectué . . . . .	125
3.4.3	Protocole de validation des modèles électrothermiques . . . . .	126
3.4.4	Validation du connecteur . . . . .	128
3.4.5	Validation de la chaîne de faible puissance complète . . . . .	137
3.5	Conclusion . . . . .	138

---

« La théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne... »

*Albert Einstein*

## 3.1 Présentation de la chaîne électrothermique étudiée

Deux chaînes électrothermiques, constituées de composants présentés dans la sous-section 1.2.1.2 du chapitre 1, sont étudiées dans ce mémoire. Ce chapitre se concentre sur la modélisation et la validation d'une première chaîne dite « de faible puissance ».

### 3.1.1 Chaîne de faible puissance

La chaîne de faible puissance consiste en une carte électronique, un connecteur et un faisceau. La carte électronique, représentée de dessus sur la figure 3.1, comprend :

- un transistor intelligent (MOSFET) ;
- quatre pistes de cuivre.

Le connecteur se compose :

- de languettes ;
- de clips ;
- d'une embase (non visible sur la figure 3.1 car sous le porte-clips) ;
- d'un porte-clips.

Enfin, le faisceau est constitué de fils électriques.

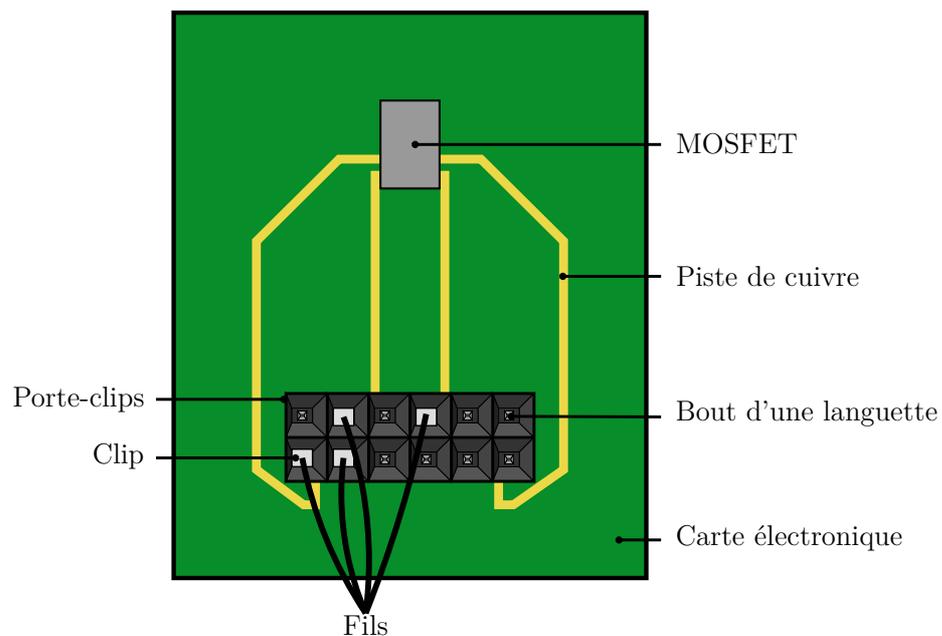


FIGURE 3.1 – Schématisation de la carte électronique (vue de dessus) et des éléments qui la compose

Le schéma de la figure 3.2 représente l'agencement des composants dans une ligne de la chaîne électrothermique de faible puissance. Chaque composant de la chaîne est représenté par un bloc rectangulaire. Les blocs partageant une frontière s'échangent de la chaleur. Les traits en pointillés désignent les zones d'échanges entre deux composants appartenant à des ensembles différents (carte électronique, connecteur, faisceau ou ambiance). Les blocs légèrement grisés désignent un composant électriquement conducteur. Le « sertissage » fait référence à la zone de la liaison électrique entre un fil et un clip. L'« air de la cellule » désigne une petite portion d'air piégé dans une cellule de porte-clips, et dans laquelle s'insère un clip. Le rôle de chaque composant et leur modèle électrothermique sont donnés dans la section 3.3 de ce chapitre.

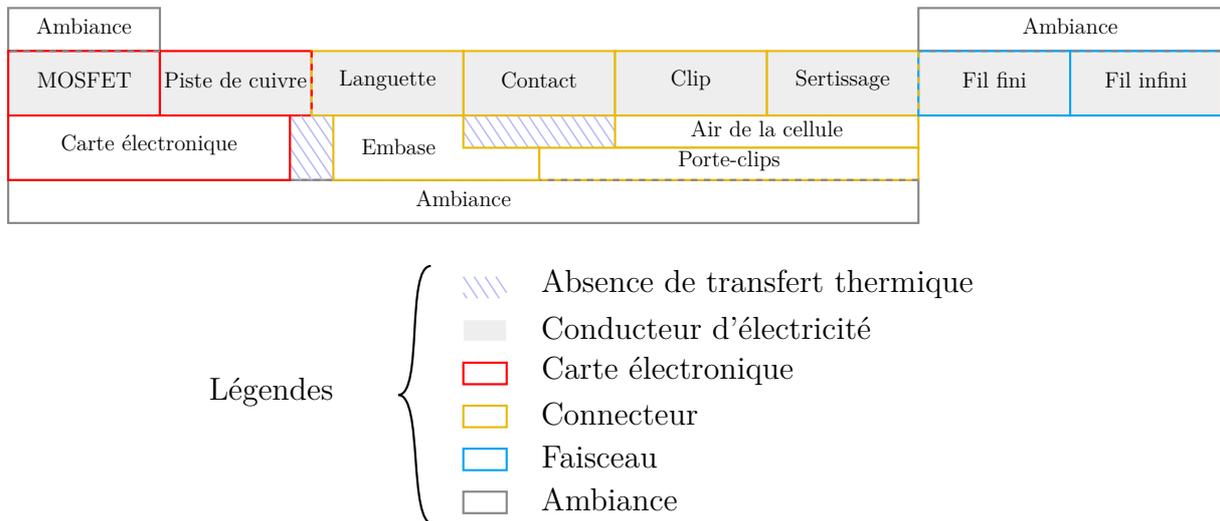


FIGURE 3.2 – Schématisation de la chaîne électrothermique de faible puissance

## 3.2 Généralités sur la modélisation des composants

Tous les modèles présentés dans la suite de ce mémoire sont basés sur la méthode nodale déjà décrite au début du chapitre 2. Il est rappelé que la température de chaque composant (ou maille de composant) est supposée uniforme dans tout son volume et qu'elle est régie par une équation différentielle de la forme :

$$C \frac{dT}{dt} = \underbrace{f_{cd}(T, T_{1...N})}_{\text{Conduction}} + \underbrace{f_{cv}(T, T_a)}_{\text{Convection}} + \underbrace{f_r(T, T_a)}_{\text{Rayonnement}} + \underbrace{f_J(T, I)}_{\text{Effet Joule}}, \quad (3.1)$$

où :

- $I$  désigne l'intensité du courant électrique ;
- $T_{1...N}$  représente les températures des composants voisins ;
- $T_a$  est la température ambiante ;
- $T$  est la température simulée du composant considéré ;
- $C$  est la capacité thermique du composant considéré ;
- $f_{cd}$ ,  $f_{cv}$ ,  $f_r$  et  $f_J$  sont des fonctions mathématiques linéaires, non linéaires ou nulles selon le cas.

Dans ce manuscrit, les diverses équations différentielles sont implantées sous MATLAB<sup>®</sup>–Simulink<sup>®</sup> sous leur forme causale conformément à la figure 3.3.

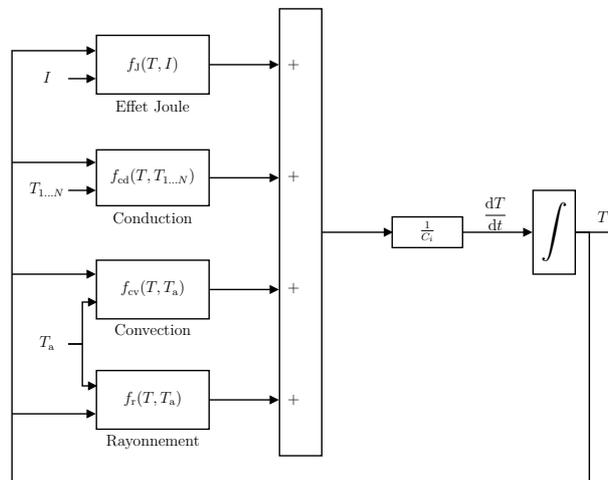


FIGURE 3.3 – Implantation sous MATLAB<sup>®</sup>–Simulink<sup>®</sup> de l'équation différentielle régissant la température d'un composant

Les modèles électrothermiques (tirés ou basés sur les travaux de [Nguyen, 2013]) des composants de la chaîne de faible est présentée dans la suite de ce chapitre.

Les données nécessaires à la modélisation sont les dimensions géométriques des composants et les propriétés du matériau dont ils sont principalement constitués. Les caractéristiques physiques des matériaux sont généralement disponibles sur internet. Par exemple, le site [Copperalliance.fr, 2015] recense un grand nombre de propriétés physiques du cuivre et de beaucoup de ses alliages. Pour certains matériaux, il faut parfois faire appel à la littérature spécialisée, par exemple [Mark, 2009] contient de vastes données sur les caractéristiques des polymères.

Les caractéristiques essentielles d'un matériau à connaître pour la modélisation thermique d'un composant sont :

- sa masse volumique  $\mu$  ;
- sa chaleur massique  $\mathcal{C}$  ;
- sa conductivité thermique  $k$ .

Si de plus le matériau est conducteur d'électricité et qu'il est susceptible d'être traversé par un courant, il sera nécessaire de connaître sa résistivité électrique  $\rho$ . Enfin, si des échanges par rayonnement sont en jeu, la connaissance de l'émissivité  $\varepsilon$  du matériau sera essentielle.

À partir des propriétés citées ci-dessus et des dimensions géométriques (longueur  $L$ , largeur  $W$ , hauteur  $H$ , section de conduction  $S$ , volume total  $V$ ) d'un composant (ou d'une maille de composant), il est possible de calculer sa capacité thermique :

$$C = \mathcal{C}\mu V, \quad (3.2)$$

et sa demi-résistance<sup>(1)</sup> thermique :

$$R = \frac{L/2}{kS} = \frac{L}{2kS}. \quad (3.3)$$

### 3.3 Modélisation de la chaîne électrothermique de faible puissance

Dans cette section, la modélisation nodale de chaque composant d'une ligne de la chaîne électrothermique de faible puissance est présentée. Ces différents modèles sont ensuite agrégés entre eux pour former la chaîne complète. Il est supposé que la mesure de température ambiante est accessible grâce à un capteur approprié. De même, la température du MOSFET intelligent est également supposée connue grâce à un capteur de température intégré au composant lui-même.

#### 3.3.1 Faisceau

##### 3.3.1.1 Fil électrique de longueur finie et infinie

Le modèle du fil électrique de longueur finie (conduction longitudinale non négligeable) et son modèle de longueur infinie (conduction longitudinale supposée nulle) ont

---

1. Par abus de langage, la demi-résistance thermique sera désignée simplement par résistance thermique dans la suite de ce mémoire.

déjà été présentés au chapitre 2. Pour rappel, l'équation différentielle régissant l'évolution de la température  $T_{\text{inf}}$  du fil de longueur infinie est donnée par :

$$\mathcal{C} \mu S \frac{dT_{\text{inf}}(t)}{dt} = h_{\text{inf}} P (T_a(t) - T_{\text{inf}}(t)) + \varepsilon \sigma P (T_a(t)^4 - T_{\text{inf}}(t)^4) + \frac{\rho}{S_c} I(t)^2, \quad (3.4)$$

où :

- $\mathcal{C}$  est la chaleur massique du fil ;
- $\mu$  est la masse volumique du fil ;
- $S$  est la section totale du fil (gaine + conducteur) ;
- $T_a$  est la température ambiante ;
- $P$  est le périmètre du fil ;
- $h_{\text{inf}}$  est le coefficient de convection entre le fil de longueur infinie et l'air ambiant ;
- $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$  est la constante de Stefan-Boltzmann ;
- $\varepsilon$  est l'émissivité du fil ;
- $\rho$  est la résistivité du fil ;
- $S_c$  est la section du conducteur du fil ;
- $I$  est l'intensité du courant.

De même, il est rappelé que le système d'équations différentielles décrivant les variations des températures  $T_i$  des mailles du fil de longueur finie, est donné par :

$$\begin{bmatrix} C_1 \frac{dT_1(t)}{dt} \\ \vdots \\ C_i \frac{dT_i(t)}{dt} \\ \vdots \\ C_N \frac{dT_N(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_e(t) + \frac{T_2(t) - T_1(t)}{R_1 + R_2} + h_1 A_1 (T_a(t) - T_1(t)) \\ \vdots \\ \frac{T_{i-1}(t) - T_i(t)}{R_{i-1} + R_i} + \frac{T_{i+1}(t) - T_i(t)}{R_{i+1} + R_i} + h_i A_i (T_a(t) - T_i(t)) \\ \vdots \\ \frac{T_{N-1}(t) - T_N(t)}{R_{N-1} + R_N} + \frac{T_{\text{inf}}(t) - T_N(t)}{R_N} + h_N A_N (T_a(t) - T_N(t)) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$+ \begin{bmatrix} \varepsilon \sigma A_1 (T_a(t)^4 - T_1(t)^4) + \frac{\rho L_1}{S_c} I(t)^2 \\ \vdots \\ \varepsilon \sigma A_i (T_a(t)^4 - T_i(t)^4) + \frac{\rho L_i}{S_c} I(t)^2 \\ \vdots \\ \varepsilon \sigma A_N (T_a(t)^4 - T_N(t)^4) + \frac{\rho L_N}{S_c} I(t)^2 \end{bmatrix},$$

où :

- $C_i$  est la capacité thermique de la maille  $i$  ;
- $h_i$  le coefficient de convection entre la maille  $i$  et l'air ambiant ;

- $A_i$  la surface d'échange de chaleur entre la maille  $i$  et l'air ambiant ;
- $L_i$  la longueur de la maille  $i$ .

Le flux de chaleur entrant dans le fil  $\phi_e(t)$  n'est autre que le flux de conduction entre la première maille du fil de longueur finie et son voisin en aval : le sertissage. Le flux  $\phi_e$  est alors donné par :

$$\phi_e(t) = \frac{T_s(t) - T_1(t)}{R_s + R_1}, \quad (3.6)$$

où :

- $T_s$  est la température du sertissage ;
- $R_s$  est la résistance thermique du sertissage.

Ainsi l'équation (3.5) se récrit :

$$\begin{bmatrix} C_1 \frac{dT_1(t)}{dt} \\ \vdots \\ C_i \frac{dT_i(t)}{dt} \\ \vdots \\ C_N \frac{dT_N(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T_s(t) - T_1(t)}{R_s + R_1} + \frac{T_2(t) - T_1(t)}{R_2 + R_1} + h_1 A_1 (T_a(t) - T_1(t)) \\ \vdots \\ \frac{T_{i-1}(t) - T_i(t)}{R_{i-1} + R_i} + \frac{T_{i+1}(t) - T_i(t)}{R_{i+1} + R_i} + h_i A_i (T_a(t) - T_i(t)) \\ \vdots \\ \frac{T_{N-1}(t) - T_N(t)}{R_{N-1} + R_N} + \frac{T_{\text{inf}}(t) - T_N(t)}{R_N} + h_N A_N (T_a(t) - T_N(t)) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$+ \begin{bmatrix} \varepsilon \sigma A_1 (T_a(t)^4 - T_1(t)^4) + \frac{\rho L_1}{S_c} I(t)^2 \\ \vdots \\ \varepsilon \sigma A_i (T_a(t)^4 - T_i(t)^4) + \frac{\rho L_i}{S_c} I(t)^2 \\ \vdots \\ \varepsilon \sigma A_N (T_a(t)^4 - T_N(t)^4) + \frac{\rho L_N}{S_c} I(t)^2 \end{bmatrix}.$$

### 3.3.2 Connecteur

#### 3.3.2.1 Cellule de porte-clips

Pour aider à la compréhension de ce qui va suivre, la figure 3.4 illustre un clip avec son sertissage insérés dans une cellule du porte-clips. Les dimensions de la cellule font qu'une petite portion d'air se trouve emprisonnée entre les parois de la cellule et les parois du clip (ou du sertissage). Cet air doit être traité comme un composant à part entière, car il agit comme un « tampon thermique » entre le clip (ou le sertissage) et le porte-clips.

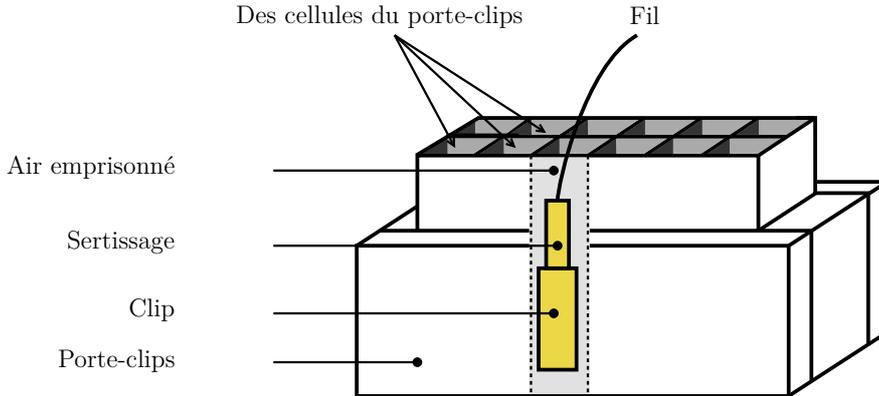


FIGURE 3.4 – Schéma d'un clip avec son sertissage à l'intérieur d'une cellule du porte-clips

L'air emprisonné dans la cellule échange de la chaleur avec le clip, le sertissage et le porte-clips. Cet échange se fait uniquement par conduction car, dans chacun des trois cas (échange clip–air, sertissage–air et porte-clips–air), le calcul du nombre de Rayleigh (se référer à la sous-section A.3.2 de l'annexe A) aboutit à une valeur inférieure à 2000. En d'autres termes, le nombre de Rayleigh est assez faible pour négliger la convection. C'est donc la conduction qui prédomine.

Pour obtenir la résistance thermique complète des échanges clip–air, sertissage–air et porte-clips–air, il faudrait calculer la distribution de température dans toutes les directions (c'est-à-dire, en toute rigueur, en deux ou trois dimensions). Toutefois, certains ouvrages permettent de ramener ou d'approximer la résistance thermique de certains cas géométriques à deux ou trois dimensions à des cas à une dimension. Ceci est possible grâce à l'introduction d'un facteur de forme dont le calcul dépend de la géométrie étudiée. Par exemple, [Bejan et Kraus, 2003, tableau 3.12] contient l'expression du facteur de forme pour une dizaine de cas géométriques en trois dimensions, dont notamment celui d'un canal carré de longueur  $L_{\text{canal}}$  comme illustré sur la figure 3.5. La paroi intérieure de largeur  $W_{\text{int}}$  est à la température  $T_{\text{int}}$ . La paroi extérieure de largeur  $W_{\text{ext}}$  est à la température  $T_{\text{ext}}$ .

Le facteur de forme de conduction est alors donné par la corrélation suivante :

$$f_{\text{canal}} = \begin{cases} \frac{2\pi L_{\text{canal}}}{0,785 \ln(W_{\text{ext}}/W_{\text{int}})} & \text{si } \frac{W_{\text{ext}}}{W_{\text{int}}} < 1,4 \\ \frac{2\pi L_{\text{canal}}}{0,93 (W_{\text{ext}}/W_{\text{int}}) - 0,05} & \text{si } \frac{W_{\text{ext}}}{W_{\text{int}}} > 1,4 \end{cases} . \quad (3.8)$$

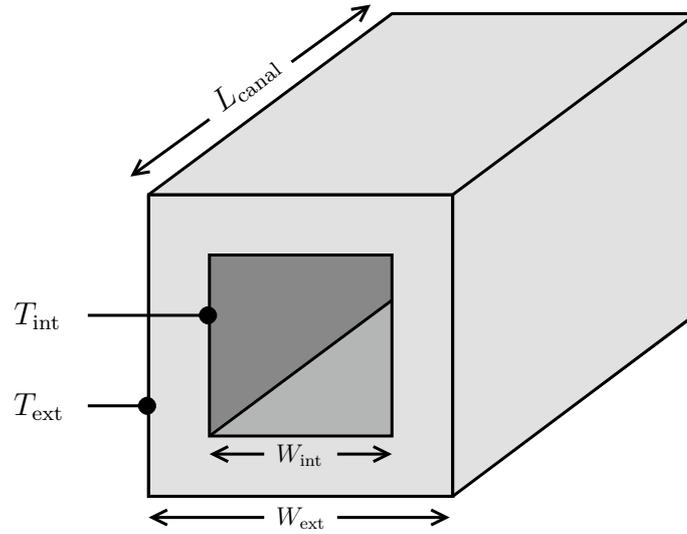


FIGURE 3.5 – Illustration d’un canal carré pour le calcul du facteur de forme de conduction

Connaissant l’expression du facteur de forme  $f_{\text{canal}}$ , il est alors possible d’en déduire la résistance thermique de conduction  $R_{\text{canal}}$  qui est donnée par [Bejan et Kraus, 2003, formule 3.262]<sup>(2)</sup> :

$$R_{\text{canal}} = \frac{1}{f_{\text{canal}} \times k_{\text{milieu}}}, \quad (3.9)$$

où  $k_{\text{milieu}}$  est la conductivité thermique du milieu dans lequel se fait la conduction.

**Remarque 7.** Pour des raisons géométriques précisées dans [Smith et al., 1958], il est nécessaire d’utiliser des formules différentes, données dans l’équation (3.8), pour le facteur de forme d’un canal carré. Ces formules dépendent bien de conditions strictes  $\frac{W_{\text{ext}}}{W_{\text{int}}} > 1,4$  ou  $\frac{W_{\text{ext}}}{W_{\text{int}}} < 1,4$ . Toutefois, elles ne donnent pas le même résultat pour le cas  $\frac{W_{\text{ext}}}{W_{\text{int}}} = 1,4$ . Comme le montre la figure 3.6 (pour  $L = 1$ ), une discontinuité entre les deux formules apparaît. Ainsi, pour le cas  $\frac{W_{\text{ext}}}{W_{\text{int}}} = 1,4$ , la valeur médiane de la discontinuité peut par exemple être choisie.

---

2. Il est à préciser que cette formule est valable pour n’importe quel facteur de forme.

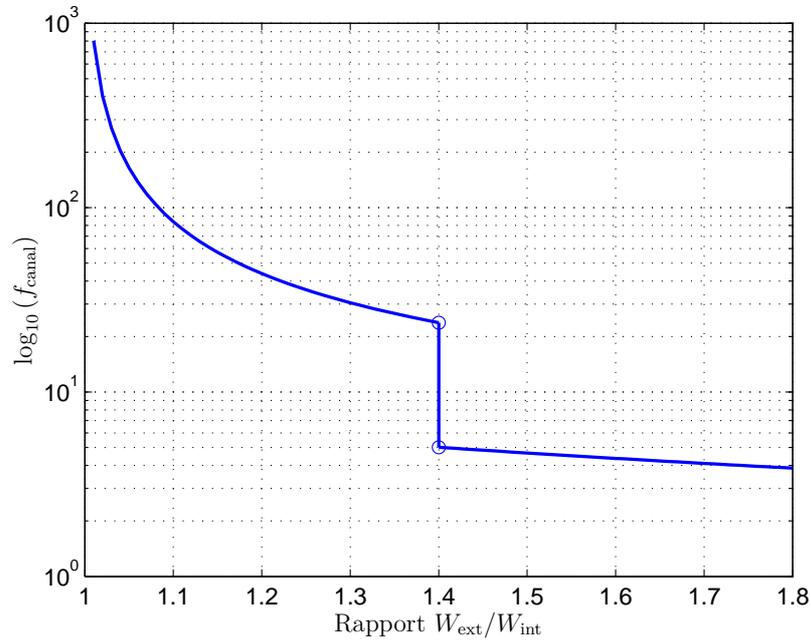


FIGURE 3.6 – Facteur de forme de l'équation (3.8) en fonction du rapport  $\frac{W_{\text{ext}}}{W_{\text{int}}}$

La figure 3.7 présente une coupe transversale d'une cellule de porte-clips. Le clip de largeur  $W_{\text{cl}}$  est totalement englobé par l'air prisonnier de la cellule, lui-même cerné par les parois du porte-clips de largeur  $W_{\text{pcl}}$ . L'air remplit tout l'espace entre le clip et le porte-clips. Les traits en pointillés représentent une paroi *fictive* de l'air, de largeur  $W_{\text{air}} = \frac{W_{\text{cl}} + W_{\text{pcl}}}{2}$ , placée au milieu de l'espace entre la paroi du clip et la paroi de la cellule de porte-clips. L'utilité de cette paroi fictive est expliquée dans ce qui suit.

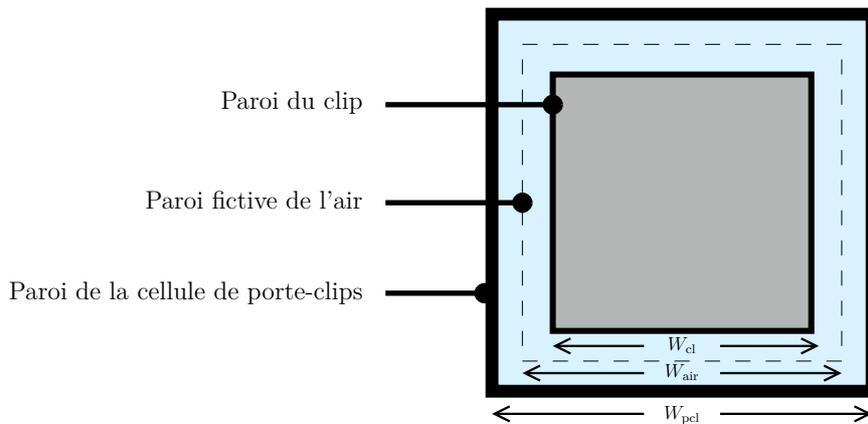


FIGURE 3.7 – Coupe transversale d'une cellule de porte-clips

Le cas du canal carré peut s'appliquer au cas de l'échange par conduction entre la

paroi fictive de l'air et la paroi du clip, et entre la paroi de la cellule et la paroi fictive de l'air. Pour le clip<sup>(3)</sup>, le facteur de forme avec l'air de la cellule est donné par :

$$f_{\text{cl}\leftrightarrow\text{air}} = \begin{cases} \frac{2\pi L_{\text{cl}}}{0,785 \ln(W_{\text{air}}/W_{\text{cl}})} & \text{si } \frac{W_{\text{air}}}{W_{\text{cl}}} < 1,4 \\ \frac{2\pi L_{\text{cl}}}{0,93 (W_{\text{air}}/W_{\text{cl}}) - 0,05} & \text{si } \frac{W_{\text{air}}}{W_{\text{cl}}} > 1,4 \end{cases}, \quad (3.10)$$

avec  $L_{\text{cl}}$  la longueur du clip.

Sachant que le milieu de conduction est l'air, la résistance thermique entre le clip et l'air de la cellule s'écrit :

$$R_{\text{cl}\leftrightarrow\text{air}} = \frac{1}{f_{\text{cl}\leftrightarrow\text{air}} \times k_{\text{air}}}, \quad (3.11)$$

où  $k_{\text{air}}$  est la conductivité de l'air.

De même pour le porte-clips, le facteur de forme avec l'air de la cellule est donné par :

$$f_{\text{pcl}\leftrightarrow\text{air}} = \begin{cases} \frac{2\pi L_{\text{air}}}{0,785 \ln(W_{\text{pcl}}/W_{\text{air}})} & \text{si } \frac{W_{\text{pcl}}}{W_{\text{air}}} < 1,4 \\ \frac{2\pi L_{\text{air}}}{0,93 (W_{\text{pcl}}/W_{\text{air}}) - 0,05} & \text{si } \frac{W_{\text{pcl}}}{W_{\text{air}}} > 1,4 \end{cases}, \quad (3.12)$$

avec  $L_{\text{air}}$  la longueur de la cellule du porte-clips.

Sachant que le milieu de conduction dans ce cas est également l'air, la résistance thermique entre le porte-clips et l'air de la cellule s'écrit :

$$R_{\text{pcl}\leftrightarrow\text{air}} = \frac{1}{f_{\text{pcl}\leftrightarrow\text{air}} \times k_{\text{air}}}. \quad (3.13)$$

En revanche, les formules du facteur de forme pour un canal carré ne donnent pas de résultats satisfaisants pour l'échange entre le sertissage et l'air de la cellule. Des cas se rapprochant d'un cylindre vertical (sertissage) contenu dans un parallélépipède (air de la cellule) existent également dans la littérature. Cependant, les expressions des facteurs de forme associées ne sont valables que sous certaines hypothèses (longueur du cylindre très grande par rapport à son diamètre, cylindre dans un milieu semi-infini), qui ne sont pas vérifiées dans la configuration étudiée dans ce mémoire. De ce fait, la valeur numérique du

---

3. Généralement la cellule ou le clip ne sont pas de section parfaitement carrée mais légèrement rectangulaire. Dans ce cas, il suffit de les ramener à des carrés de section équivalente, donc de largeur égale à la racine carré de leur section.

facteur de forme entre le sertissage et l'air  $f_{s \leftrightarrow \text{air}}$ , a été empiriquement ajustée afin d'obtenir la meilleure précision possible par comparaison des résultats issus de la simulation du modèle du sertissage et de la cellule d'air avec des données de mesure.

Finalement, l'équation différentielle régissant la température  $T_{\text{air}}$  de l'air d'une cellule de porte-clips est donnée par :

$$C_{\text{air}} \frac{dT_{\text{air}}(t)}{dt} = \frac{T_s(t) - T_{\text{air}}(t)}{R_{s \leftrightarrow \text{air}}} + \frac{T_{\text{cl}}(t) - T_{\text{air}}(t)}{R_{\text{cl} \leftrightarrow \text{air}}} + \frac{T_{\text{pcl}}(t) - T_{\text{air}}(t)}{R_{\text{pcl} \leftrightarrow \text{air}}}, \quad (3.14)$$

où :

- $C_{\text{air}}$  est la capacité thermique de l'air de la cellule ;
- $T_s$  est la température du sertissage ;
- $T_{\text{cl}}$  est la température du clip ;
- $T_{\text{pcl}}$  est la température du porte-clips.

### 3.3.2.2 Sertissage

Afin d'assurer la continuité du courant électrique, une petite portion du fil électrique est dénudée puis sertie à l'arrière du clip dont l'ensemble constitue alors le sertissage. Un exemple du principe du sertissage est illustré sur la figure 3.8.

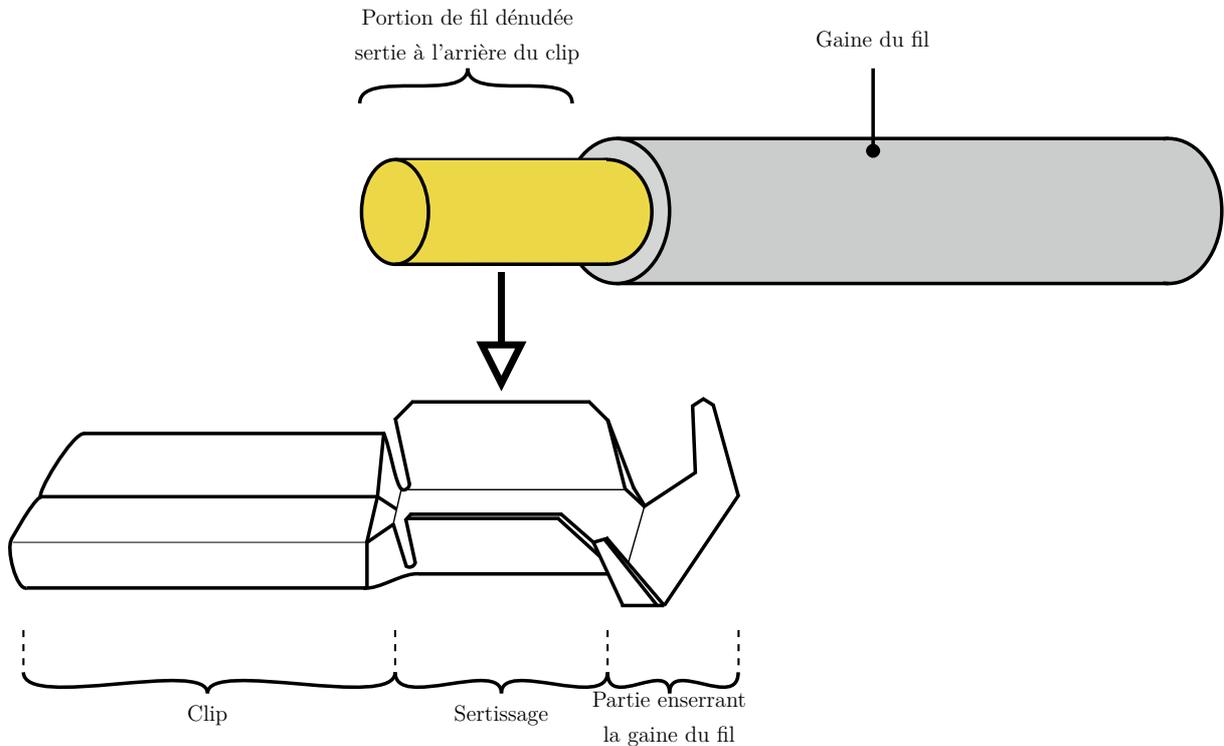


FIGURE 3.8 – Illustration du principe du sertissage d'un fil dans un clip

Étant donné la très faible épaisseur de la partie du clip repliée autour de la partie dénudée du fil, il est supposé que le matériau constituant le sertissage est principalement celui de l'âme du fil électrique. Ainsi, la conductivité thermique, la conductivité électrique et la masse volumique du sertissage sont égales à celles du cuivre.

Les composants voisins du sertissage sont le fil électrique de longueur finie (pour être plus précis la première maille du fil), le clip et l'air de la cellule du porte-clips. Le flux de chaleur échangé par conduction avec la première maille du fil, n'est autre que l'opposé du flux  $\phi_e$  dont l'expression est donnée par l'équation (3.6). De même, le flux de conduction avec l'air de la cellule est l'opposé du terme associé dans l'équation (3.14). Enfin, la conduction de chaleur avec le clip se fait au travers de la résistance thermique du clip  $R_{cl}$  et de celle du sertissage  $R_s$ . Le sertissage, étant également traversé par le courant électrique, produit de la chaleur par effet Joule.

Ainsi l'équation différentielle régissant la température du sertissage est donnée par :

$$C_s \frac{dT_s(t)}{dt} = \frac{T_1(t) - T_s(t)}{R_1 + R_s} + \frac{T_{cl}(t) - T_s(t)}{R_{cl} + R_s} + \frac{T_{air}(t) - T_s(t)}{R_{s \leftrightarrow air}} + \frac{\rho_s L_s}{S_s} I(t)^2, \quad (3.15)$$

où :

- $C_s$  est la capacité thermique du sertissage ;
- $\rho_s$  est la conductivité électrique du sertissage ;
- $L_s$  est la longueur du sertissage ;
- $S_s$  est la section du sertissage.

### 3.3.2.3 Clip

Le clip est un élément charnière puisqu'il assure, d'une part la continuité du courant électrique entre le connecteur et le faisceau. D'autre part, le clip est la partie femelle du contact formé avec la languette (qui, par conséquent, en constitue la partie mâle). Un clip échange de la chaleur avec son sertissage, avec l'air prisonnier de la cellule du porte-clips et avec le point de contact.

**Remarque 8.** *En toute rigueur, le clip est tout de même en contact physique avec le porte-clips. En effet, le clip est maintenu en place dans sa cellule grâce à deux très petits ergots en plastique solidaire du porte-clips. Cependant, vu les dimensions extrêmement faibles de la surface d'échange, la conduction thermique entre ces deux composants est négligée.*

La conduction avec le sertissage et l'air de la cellule sont respectivement les oppo-

sés des termes associés dans l'équation (3.15) et dans l'équation (3.14). Les échanges de chaleur avec le point de contact se font également par conduction. En revanche, les dimensions du point de contact sont extrêmement faibles, sa résistance thermique est supposée négligeable devant celles du clip et de la languette. Ceci implique, par conséquent, que la résistance thermique entre le clip (la languette) et le point de contact est égale à la résistance thermique du clip (de la languette). Enfin, le clip produit de la chaleur par effet Joule, car il est conducteur d'électricité.

Finalement la température du clip est régie par l'équation différentielle suivante :

$$C_{cl} \frac{dT_{cl}(t)}{dt} = \frac{T_{pc}(t) - T_{cl}(t)}{R_{cl}} + \frac{T_s(t) - T_{cl}(t)}{R_s + R_{cl}} + \frac{T_{air}(t) - T_{cl}(t)}{R_{cl \leftrightarrow air}} + \rho_{cl} \frac{L_{cl}}{S_{cl}} I^2, \quad (3.16)$$

où :

- $C_{cl}$  est la capacité thermique du clip ;
- $T_{pc}$  est la température du point de contact ;
- $\rho_{cl}$  désigne la résistivité du clip ;
- $S_{cl}$  est la section du clip.

### 3.3.2.4 Porte-clips

Le porte-clips est constitué d'un matériau isolant et son rôle est de supporter les clips qui sont insérés dans les cellules prévues à cet effet.

Bien qu'il soit volumineux, le porte-clips n'est pas maillé. En effet, sa grande capacité thermique et sa faible conductivité thermique le dotent d'une importante inertie thermique, par rapport aux composants plus petits et thermiquement conducteurs. Par conséquent, une seule température sera associée au porte-clips.

Un porte-clips échange de la chaleur par conduction avec l'air contenu dans ses cellules, par conduction avec l'embase avec laquelle il est emboîté (cf. figure 1.8 du chapitre 1), et par convection et rayonnement avec la température ambiante. La chaleur échangée par conduction avec une cellule est l'opposée du terme associé dans l'équation (3.14).

En ce qui concerne l'échange par conduction avec l'embase, l'utilisation du facteur de forme pour un canal carré s'applique à condition de ramener la section  $S_{pcl}$  du porte-clips et la section  $S_{emb}$  de l'embase à des carrés respectivement de côté  $W_{pcl}^c = \sqrt{S_{pcl}}$  et

### 3.3. MODÉLISATION DE LA CHAÎNE ÉLECTROTHERMIQUE DE FAIBLE PUISSANCE

---

$W_{\text{emb}}^c = \sqrt{S_{\text{emb}}}$ . Ainsi, le facteur de forme entre le porte-clips et l'embase est donné par :

$$f_{\text{pcl} \leftrightarrow \text{emb}} = \begin{cases} \frac{2\pi L_{\text{pcl} \leftrightarrow \text{emb}}}{0,785 \ln \left( W_{\text{pcl}}^c / W_{\text{emb}}^c \right)} & \text{si } \frac{W_{\text{pcl}}^c}{W_{\text{emb}}^c} < 1,4 \\ \frac{2\pi L_{\text{pcl} \leftrightarrow \text{emb}}}{0,93 \left( W_{\text{pcl}}^c / W_{\text{emb}}^c \right) - 0,05} & \text{si } \frac{W_{\text{pcl}}^c}{W_{\text{emb}}^c} > 1,4 \end{cases}, \quad (3.17)$$

où  $L_{\text{pcl} \leftrightarrow \text{emb}}$  désigne la longueur d'embase insérée à l'intérieur du porte-clips.

La convection et le rayonnement avec l'air ambiant se font avec les parois extérieures du porte-clips. Les quatre parois sur les côtés du porte-clips ont une forme rectangulaire et une orientation verticale. La paroi supérieure est orientée horizontalement. Étant donné que l'embase est insérée dans le porte-clips, il n'y a pas de paroi inférieure. La surface verticale totale d'échange  $A_{\text{pcl}}^v$  correspond alors à la somme des surfaces d'échange de chaque paroi verticale et le coefficient de convection associé est noté  $h_{\text{pcl}}^v$ . La surface d'échange horizontale est notée  $A_{\text{pcl}}^h$  et le coefficient de convection associé est désigné par  $h_{\text{pcl}}^h$ .

**Remarque 9.** *Un raisonnement similaire pourrait se faire si le connecteur (donc notamment le porte-clips) est à l'horizontale. Il y aurait donc deux parois à l'horizontale et trois parois à la verticale.*

L'équation différentielle régissant la température du porte-clips est ainsi donnée par :

$$\begin{aligned} C_{\text{pcl}} \frac{dT_{\text{pcl}}(t)}{dt} = & \frac{T_{\text{air}}(t) - T_{\text{pcl}}(t)}{R_{\text{pcl} \leftrightarrow \text{air}}} + \frac{T_{\text{emb}}(t) - T_{\text{pcl}}(t)}{R_{\text{pcl} \leftrightarrow \text{emb}}} \\ & + \left( h_{\text{pcl}}^h A_{\text{pcl}}^h + h_{\text{pcl}}^v A_{\text{pcl}}^v \right) (T_{\text{a}}(t) - T_{\text{pcl}}(t)) \\ & + \sigma \varepsilon_{\text{pcl}} \left( A_{\text{pcl}}^v + A_{\text{pcl}}^h \right) \left( T_{\text{a}}(t)^4 - T_{\text{pcl}}(t)^4 \right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

où :

- $C_{\text{pcl}}$  est la capacité thermique du porte-clips ;
- $T_{\text{emb}}$  est la température de l'embase ;
- $\varepsilon_{\text{pcl}}$  est l'émissivité du porte-clips.

Lorsque  $N_c$  clips sont insérés dans le porte-clips l'équation (3.18) devient :

$$C_{\text{pcl}} \frac{dT_{\text{pcl}}(t)}{dt} = \sum_{n=1}^{N_c} \frac{T_{\text{air}}^n(t) - T_{\text{pcl}}(t)}{R_{\text{pcl} \leftrightarrow \text{air}}^n} + \frac{T_{\text{emb}}(t) - T_{\text{pcl}}(t)}{R_{\text{pcl} \leftrightarrow \text{emb}}} + \left( h_{\text{pcl}}^h A_{\text{pcl}}^h + h_{\text{pcl}}^v A_{\text{pcl}}^v \right) (T_a(t) - T_{\text{pcl}}(t)) + \sigma \varepsilon_{\text{pcl}} \left( A_{\text{pcl}}^v + A_{\text{pcl}}^h \right) \left( T_a(t)^4 - T_{\text{pcl}}(t)^4 \right), \quad (3.19)$$

où :

- $T_{\text{air}}^n$  est la température de l'air contenu dans la  $n$ -ième cellule de porte-clips ;
- $R_{\text{pcl} \leftrightarrow \text{air}}^n$  est la résistance thermique entre le porte-clips et l'air contenu dans la  $n$ -ième cellule.

### 3.3.2.5 Point de contact

Comme déjà indiqué au chapitre 1, un connecteur est le siège de points de contacts électriques. Un point de contact constitue une zone d'étranglement pour les lignes de courant électrique ce qui fait apparaître une résistance électrique de contact. Bien qu'il existe différents types de contact, seuls les contacts de type clip–languette seront abordés dans ce mémoire. Comme l'illustre la figure 3.9, la languette est insérée à l'intérieur du clip. Deux petites lamelles de métal sur le côté du clip entrent en contact avec la languette et forment ainsi des surfaces de contact.

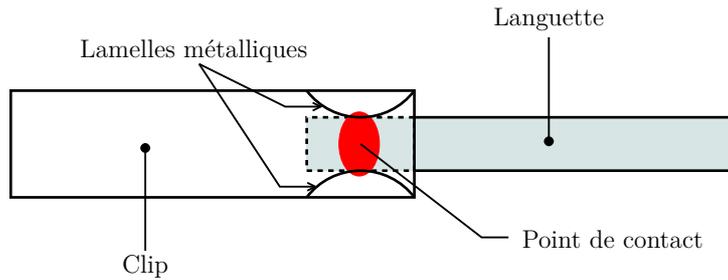


FIGURE 3.9 – Schématisation du point de contact lorsque la languette est insérée dans le clip

L'apparition de surintensités ou l'augmentation de la résistance de contact, peuvent provoquer des échauffements locaux importants à ce niveau. Il a d'ailleurs été montré dans [Nguyen, 2013, chapitre 5] que les points de contact, sont les zones pour lesquelles la température est la plus proche de la limite admissible (qui est fixée par les composants en jeu). En l'occurrence, pour un contact de type clip–languette dans une automobile, c'est

### 3.3. MODÉLISATION DE LA CHAÎNE ÉLECTROTHERMIQUE DE FAIBLE PUISSANCE

---

souvent le clip qui impose la température limite (par exemple 125 °C). En effet, une languette est généralement dimensionnée pour supporter des températures plus élevées (par exemple 200 °C ou 250 °C) que le clip, puisqu'elle se situe du côté de la carte électronique, cette dernière étant susceptible de beaucoup chauffer à cause des nombreux composants présents dessus.

Une solution simple à ce problème serait donc de surdimensionner les clips. Cependant cette solution serait désavantageuse car elle introduirait un encombrement supplémentaire et des surcoûts.

Dans le meilleur des cas, lorsque le clip et la languette sont faits du même matériau et fabriqués par le même constructeur, ce dernier garantira seulement une valeur maximale de résistance de contact à *neuf*. Dans les autres cas (constructeurs ou matériaux différents, contact usé), il existe plusieurs méthodes, présentées au chapitre 5, pour mesurer ou calculer une résistance de contact.

Dans ce manuscrit, la valeur de la résistance de contact est mesurée électriquement *via* la méthode des quatre fils. Comme illustré sur la figure 3.10, cette méthode utilise un ampèremètre en série avec l'échantillon considéré pour mesurer l'intensité  $I_e$  du courant qui le traverse. Un voltmètre est alors branché en dérivation pour mesurer la chute de tension  $\Delta V_e$  aux bornes de l'échantillon. La résistance (comprise entre les branches du voltmètre) est alors simplement déduite à partir de la loi d'Ohm :

$$\mathcal{R}_e = \frac{\Delta V_e}{I_e}. \quad (3.20)$$

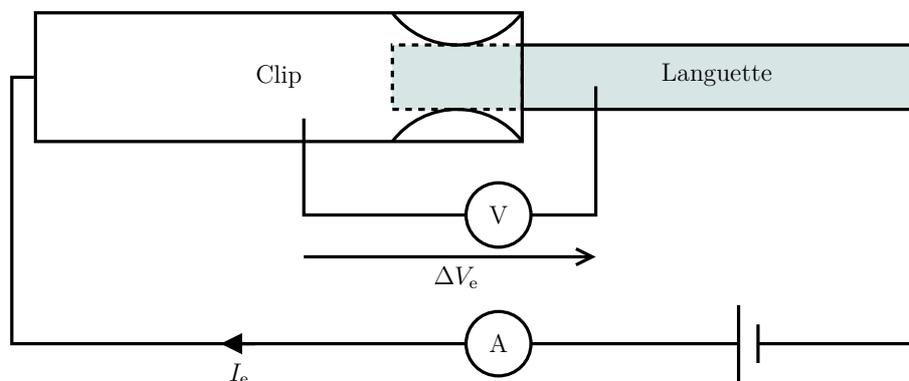


FIGURE 3.10 – Principe de mesure de résistance à quatre fils

Si le voltmètre est (quasi) idéal, sa résistance est infinie et aucun courant électrique

ne circule dans ses fils. Ceci offre l'avantage de s'affranchir de la résistance des fils utilisés pour la mesure de courant. Pour déterminer la résistance de contact, l'idée est alors de mesurer séparément la résistance du clip  $\mathcal{R}_c$ , celle de la languette  $\mathcal{R}_l$  et la résistance totale clip–languette  $\mathcal{R}_t$ . La résistance du contact est alors déduite grâce à la formule suivante :

$$\mathcal{R}_{pc} = \mathcal{R}_t - \mathcal{R}_c - \mathcal{R}_l. \quad (3.21)$$

Il est à noter que dans le dernier chapitre de ce mémoire, la résistance de contact sera considérée inconnue. Des méthodes seront proposées pour détecter les variations ou réaliser une estimation de sa valeur. Ceci qui permettra le cas échéant, de recalculer le modèle du point de contact.

Les composants voisins du contact sont uniquement le clip et la languette. Du fait de son extrême petite taille, il est très difficile de déterminer avec précision la forme, les dimensions, et les caractéristiques électriques ou thermiques d'un contact. Ceci nécessite des équipements adaptés et les équations associées appartiennent au domaine de la rhéologie<sup>(4)</sup>.

Vu les très faibles dimensions d'un point de contact, il est toutefois supposé que sa résistance thermique est négligeable par rapport à celle du clip et celle de la languette. En ce qui concerne sa capacité thermique, elle sera arbitrairement fixée très petite (voire nulle), de telle sorte qu'elle n'ait aucune influence sur la dynamique des températures des autres composants.

La température du point de contact est alors régie par l'équation différentielle :

$$C_{pc} \frac{dT_{pc}(t)}{dt} = \frac{T_1^1(t) - T_{pc}(t)}{R_1^1} + \frac{T_{cl}(t) - T_{pc}(t)}{R_{cl}} + \mathcal{R}_{pc} I(t)^2, \quad (3.22)$$

où :

- $C_{pc}$  est la capacité thermique ;
- $T_1^1$  est la température de la première maille de la languette ;
- $R_1^1$  est la résistance thermique de la première maille de la languette.

---

4. Science des lois du comportement des matériaux, liant, à un instant donné, les contraintes aux déformations.

### 3.3.2.6 Languette

La languette est une fine lame en métal qui constitue la partie mâle du contact formé avec le clip. Les languettes étudiées dans ce mémoire se divisent en trois parties distinctes. Ces parties sont illustrées sur la figure 3.11. La partie supérieure est insérée dans le clip pour former le point de contact. La partie centrale est enchâssée dans l’embase. Enfin, la partie inférieure se retrouve à l’air libre et assure la continuité du courant électrique avec la piste de cuivre.

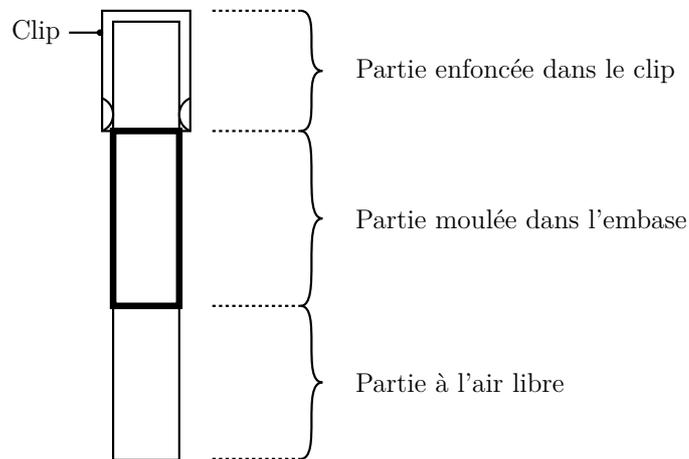


FIGURE 3.11 – Représentation des trois parties distinctes d’une languette

Dans certains cas, l’écart de température entre les deux extrémités de la languette (l’une au niveau du point de contact, l’autre près d’une piste de cuivre) est parfois important. Ceci induit potentiellement un gradient de température longitudinal non négligeable. Par conséquent, un maillage de la languette est nécessaire car l’utilisation d’un seul nœud peut s’avérer trop limitative. L’idée est d’associer une maille à chacune des trois parties de la languette présentées précédemment. Les équations régissant la température de chaque maille de la languette sont données dans ce qui suit.

La maille supérieure de la languette échange seulement de la chaleur par conduction avec le point de contact et avec la maille de la partie centrale enchâssée dans l’embase. Il est également rappelé que la languette conduit le courant électrique, donc qu’elle produit de la chaleur par effet Joule.

Ainsi, l’équation différentielle de la température  $T_1^1$  de la maille supérieure de la

languette s'écrit :

$$C_1^1 \frac{dT_1^1(t)}{dt} = \frac{T_{pc}(t) - T_1^1(t)}{R_1^1} + \frac{T_1^2(t) - T_1^1(t)}{R_1^2 + R_1^1} + \rho_1 \frac{L_1^1}{S_1} I(t)^2, \quad (3.23)$$

où :

- $C_1^1$  est la capacité thermique de la maille supérieure ;
- $R_1^1$  est la résistance thermique de la maille supérieure ;
- $T_1^2$  est la température de la maille centrale ;
- $R_1^2$  est la résistance thermique de la maille centrale ;
- $\rho_1$  est la résistivité électrique de la languette ;
- $L_1^1$  est la longueur de la maille supérieure de la languette ;
- $S_1$  est la section de la languette.

La maille centrale échange de la chaleur par conduction avec la maille supérieure et la maille inférieure, mais également avec l'embase. Comme cette maille correspond à la partie enchâssée dans l'embase (cas d'une conduction à trois dimensions), la géométrie est de nouveau ramenée à une dimension. L'expression du facteur de forme pour le cas d'un canal carré est utilisée derechef. Le facteur de forme entre la maille centrale de la languette et l'embase est donné par :

$$f_{l \leftrightarrow emb} = \begin{cases} \frac{2\pi L_1^2}{0,785 \ln(W_{cel}^c/W_1^c)} & \text{si } \frac{W_{cel}^c}{W_1^c} < 1,4 \\ \frac{2\pi L_1^2}{0,93 (W_{cel}^c/W_1^c) - 0,05} & \text{si } \frac{W_{cel}^c}{W_1^c} > 1,4 \end{cases}, \quad (3.24)$$

où :

- $L_1^2$  est la longueur de la partie de la languette enchâssée dans l'embase ;
- $W_1^c$  est la largeur du côté d'une languette équivalente de section carrée ;
- $W_{cel}^c$  est la largeur du côté d'une cellule d'embase équivalente de section carrée.

Le milieu de conduction de la chaleur est le matériau de l'embase de conductivité thermique  $k_{emb}$ . La résistance thermique entre l'embase et la maille centrale de la languette est alors donnée par :

$$R_{l \leftrightarrow emb} = \frac{1}{f_{l \leftrightarrow emb} \times k_{emb}}. \quad (3.25)$$

L'équation différentielle de la température de la maille centrale est alors donnée par :

$$C_1^2 \frac{dT_1^2(t)}{dt} = \frac{T_1^1(t) - T_1^2(t)}{R_1^1 + R_1^2} + \frac{T_1^3(t) - T_1^2(t)}{R_1^3 + R_1^2} + \frac{T_{\text{emb}}(t) - T_1^2(t)}{R_{1 \leftrightarrow \text{emb}}} + \rho_1 \frac{L_1^2}{S_1} I(t)^2, \quad (3.26)$$

où :

- $C_1^2$  est la capacité thermique de la maille centrale ;
- $R_1^3$  est la résistance thermique de la maille inférieure ;
- $L_1^2$  est la longueur de la maille centrale de la languette.

Enfin, la maille inférieure échange de la chaleur par conduction avec la maille centrale et avec (la première maille de) la piste de cuivre. Bien que cette dernière partie soit à l'air libre, le nombre de Rayleigh, la surface d'échange et l'émissivité de la languette sont suffisamment petits pour négliger la convection et le rayonnement. L'équation différentielle de la température de la maille inférieure s'écrit alors :

$$C_1^3 \frac{dT_1^3(t)}{dt} = \frac{T_1^2(t) - T_1^3(t)}{R_1^2 + R_1^3} + \frac{T_p^1(t) - T_1^3(t)}{R_p^1 + R_1^3} + \rho_1 \frac{L_1^3}{S_1} I(t)^2, \quad (3.27)$$

où :

- $C_1^3$  est la capacité thermique de la maille inférieure ;
- $T_p^1$  est la température de la première maille de la piste de cuivre ;
- $R_p^1$  est la résistance thermique de la première maille de la piste de cuivre ;
- $L_1^3$  est la longueur de la maille inférieure de la languette.

### 3.3.2.7 Embase

Les languettes sont enchâssées, dans une cellule prévue à cet effet, sur une certaine longueur dans l'embase qui les supporte. Ainsi, les languettes sont en contact direct avec l'embase, contrairement aux clips qui ne le sont pas avec le porte-clips à cause des portions d'air emprisonnées.

De même que le porte-clips, bien qu'elle soit également volumineuse, l'embase dispose d'une importante inertie thermique. Par conséquent, une seule température sera associée à l'embase.

Une embase échange donc de la chaleur par conduction avec la partie enchâssée de ses languettes et avec le porte-clips. Il est à noter que l'embase, étudiée dans ce mémoire (voir figure 3.12), n'est fixée que ponctuellement, par ses quatre coins sur la carte électronique. Par conséquent, vu la très faible surface de contact mise en jeu entre l'embase et la carte

électronique, la conduction entre ces deux composants est négligée. Enfin, la partie de l'embase qui n'est pas enfoncée dans le porte-clips échange également de la chaleur par convection et rayonnement avec l'air ambiant.

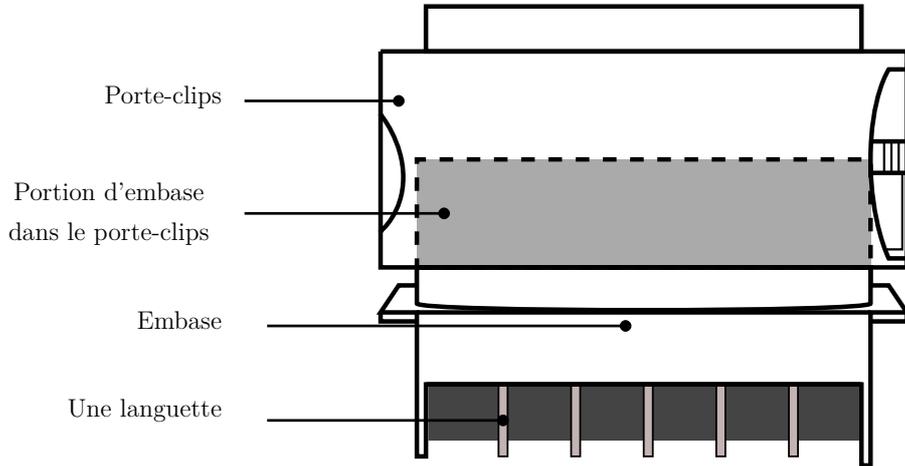


FIGURE 3.12 – Localisation de l'embase insérée dans un porte-clips

La conduction de chaleur avec le porte-clips et une languette sont les opposés des termes respectivement associés dans l'équation (3.18) et dans l'équation (3.26).

La convection et le rayonnement avec l'air ambiant se font au travers des quatre parois extérieures de la partie de l'embase qui n'est pas enfoncée dans le porte-clips. Ces parois sont rectangulaires et orientées verticalement. La surface totale d'échange  $A_{\text{emb}}$  correspond alors à la somme des surfaces d'échange de chaque paroi et le coefficient de convection  $h_{\text{emb}}$  est calculé pour une plaque verticale.

**Remarque 10.** De même que pour le porte-clips, un raisonnement similaire peut se faire si le connecteur est orienté à l'horizontale. Dans ce cas, deux parois de l'embase seraient à l'horizontale et les deux autres à la verticale.

La température de l'embase est donc régie par :

$$C_{\text{emb}} \frac{dT_{\text{emb}}(t)}{dt} = \frac{T_1^2(t) - T_{\text{emb}}(t)}{R_{l \leftrightarrow \text{emb}}} + \frac{T_{\text{pcl}}(t) - T_{\text{emb}}(t)}{R_{\text{pcl} \leftrightarrow \text{emb}}} + h_{\text{emb}} A_{\text{emb}} (T_a(t) - T_{\text{emb}}(t)) + \sigma \varepsilon_{\text{emb}} A_{\text{emb}} (T_a(t)^4 - T_{\text{emb}}(t)^4), \quad (3.28)$$

où :

- $C_{\text{emb}}$  est la capacité thermique de l'embase ;
- $\varepsilon_{\text{emb}}$  est l'émissivité de l'embase.

Lorsqu'un nombre  $N_l$  de languettes sont enchâssées dans l'embase, l'équation (3.28) devient :

$$C_{\text{emb}} \frac{dT_{\text{emb}}(t)}{dt} = \sum_{n=1}^{N_l} \frac{T_1^{2n}(t) - T_{\text{emb}}(t)}{R_{l \leftrightarrow \text{emb}}^n} + \frac{T_{\text{pcl}}(t) - T_{\text{emb}}(t)}{R_{\text{pcl} \leftrightarrow \text{emb}}} + h_{\text{emb}} A_{\text{emb}} (T_a(t) - T_{\text{emb}}(t)) + \sigma \varepsilon_{\text{emb}} A_{\text{emb}} (T_a(t)^4 - T_{\text{emb}}(t)^4), \quad (3.29)$$

où :

- $T_1^{2n}$  est la température de la maille centrale de la languette enchâssée dans la  $n$ -ième cellule de l'embase ;
- $R_{l \leftrightarrow \text{emb}}^n$  est la résistance thermique entre l'embase et la maille centrale de la languette de la  $n$ -ième cellule.

### 3.3.3 Carte électronique

#### 3.3.3.1 Piste de cuivre

Une piste de cuivre (pur) assure la continuité du courant entre un composant de puissance (par exemple, dans le cas de ce mémoire, un MOSFET intelligent) et une languette du connecteur.

Selon le type de carte électronique, une ou plusieurs fine(s) couche(s) de cuivre séparées par un matériaux isolant sont gravées par un procédé chimique. Par exemple, la carte électronique étudiée dans ce manuscrit est simple face, c'est-à-dire qu'elle ne dispose que d'une seule couche de cuivre gravée en surface. Il existe également les cartes électroniques double face qui disposent de deux couches conductrices isolées par une couche isolante reliées électriquement par des vias. Une carte électronique disposant de plus de deux couches conductrices elle est dite multicouches.

Conformément à la figure 3.2, une piste de cuivre échange de la chaleur par conduction avec sa languette, le MOSFET intelligent et la carte électronique. Les échanges avec l'air ambiant sont négligés. En effet, d'une part les pistes de cuivres étudiées ici ont des dimensions et une géométrie qui conduisent à un nombre de Rayleigh suffisamment faible pour négliger la convection avec l'air ambiant. D'autre part, vu la faible surface d'échange avec l'air et la très faible émissivité du cuivre ( $\varepsilon_{\text{cuivre}} \sim 0,03$ ), le rayonnement est également négligé.

La très bonne conductivité thermique du cuivre et la longueur des pistes étudiées dans ce manuscrit requièrent un maillage. En effet, le gradient de température ne peut

pas être considéré constant sur toute la longueur d'une piste de cuivre. Un modèle maillé d'une piste de cuivre est d'abord présenté, puis un modèle analytique de référence est établi. Enfin, une méthode pour un maillage optimal d'une piste de cuivre est proposée.

### Modélisation par maillage d'une piste de cuivre

Comme dans le cas du fil électrique et de la languette, les mailles d'une piste de cuivre s'échangent de la chaleur entre elles par conduction. La résistance thermique d'une maille  $i$  est donnée par :

$$R_p^i = \frac{L_p^i}{2k_p S_p} \quad (3.30)$$

où :

- $L_p^i$  est la longueur de la maille  $i$  ;
- $k_p$  est la conductivité thermique du cuivre pur ;
- $S_p$  est la section de la piste de cuivre.

Ainsi, la résistance thermique entre les nœuds de deux mailles consécutives est la somme des résistances thermiques de ces deux mailles.

Chaque maille de la piste de cuivre évacue de la chaleur vers la carte électronique. Ces échanges se font par conduction, dans une seule direction, au travers de la surface de contact entre une maille et la carte. La résistance thermique entre la  $i$ -ème maille d'une piste de cuivre et la carte électronique est donnée par :

$$R_{p \leftrightarrow ce}^i = \frac{H_{ce}}{2k_{ce} W_p L_p^i} \quad (3.31)$$

où :

- $H_{ce}$  est l'épaisseur de la carte électronique ;
- $k_{ce}$  est la conductivité thermique de la carte électronique ;
- $W_p$  est la largeur de la piste de cuivre.

Enfin, la piste de cuivre étant évidemment un conducteur électrique, chaque maille génère de la chaleur par effet Joule.

Dans un premier temps, une piste de cuivre de *grande longueur* gravée à la surface d'une carte électronique est considérée. D'une manière générale, un flux de chaleur  $\phi_e$  est injecté à l'une de ses extrémités. Le système d'équations différentielles qui régit la

### 3.3. MODÉLISATION DE LA CHAÎNE ÉLECTROTHERMIQUE DE FAIBLE PUISSANCE

---

température des mailles de cette piste de cuivre est donné par :

$$\begin{bmatrix} C_p^1 \frac{dT_p^1(t)}{dt} \\ \vdots \\ C_p^i \frac{dT_p^i(t)}{dt} \\ \vdots \\ C_p^N \frac{dT_p^N(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_e(t) + \frac{T_p^2(t) - T_p^1(t)}{R_p^2 + R_p^1} + \frac{T_{ce}(t) - T_p^1(t)}{R_{p \leftrightarrow ce}^1} + \frac{\rho_p L_p^1}{S_p} I(t)^2 \\ \vdots \\ \frac{T_p^{i-1}(t) - T_p^i(t)}{R_p^{i-1} + R_p^i} + \frac{T_p^{i+1}(t) - T_p^i(t)}{R_p^{i+1} + R_p^i} + \frac{T_{ce}(t) - T_p^i(t)}{R_{p \leftrightarrow ce}^i} + \frac{\rho_p L_p^i}{S_p} I(t)^2 \\ \vdots \\ \frac{T_p^{N-1}(t) - T_p^N(t)}{R_p^{N-1} + R_p^N} + \frac{T_p^{\text{inf}}(t) - T_p^N(t)}{R_p^N} + \frac{T_{ce}(t) - T_p^N(t)}{R_{p \leftrightarrow ce}^N} + \frac{\rho_p L_p^N}{S_p} I(t)^2 \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

où :

- $N$  est le nombre de mailles de la piste de cuivre ;
- $T_p^i$  est la température de la  $i$ -ème maille de la piste de cuivre ;
- $C_p^i$  est la capacité thermique de la  $i$ -ème maille de la piste de cuivre ;
- $T_{ce}$  est la température de la carte électronique ;
- $T_p^{\text{inf}}$  est la température de la piste au delà de sa distance d'oubli définie à la suite ;
- $\rho_p$  est la conductivité électrique du cuivre.

De manière similaire au fil électrique, la conduction de chaleur dans la piste de cuivre au delà de sa distance d'oubli est négligée. Dans ce cas, la température de la piste est donc régie par :

$$\mathcal{C}_p \mu_p S_p \frac{dT_p^{\text{inf}}(t)}{dt} = (T_{ce}(t) - T_p^{\text{inf}}(t)) \frac{k_{ce} W_p}{H_{ce}} + \frac{\rho_p}{S_p} I(t)^2, \quad (3.33)$$

où :

- $\mathcal{C}_p$  est la chaleur massique du cuivre ;
- $\mu_p$  est la masse volumique du cuivre.

Soit  $G_p^{i,i+1} = \frac{1}{R_p^i + R_p^{i+1}}$ , le système (3.32) peut se mettre sous la forme :

$$C_p \frac{d}{dt} \mathcal{T}_p(t) = (\mathcal{G}_p - \mathcal{G}_{p \leftrightarrow ce}) \mathcal{T}_p(t) + \mathcal{G}_{p \leftrightarrow ce} T_{ce}(t) + \mathcal{R}_p I(t)^2 + \mathcal{E}_p \phi_e(t) + \mathcal{S}_p T_p^{\text{inf}}(t), \quad (3.34)$$

où :

- $C_p = \text{diag}(C_p^1, \dots, C_p^N)$  ;
- $\mathcal{T}_p = [T_p^1, \dots, T_p^N]^T$  ;

$$\begin{aligned}
 - \mathcal{G}_p &= \begin{bmatrix} -G_p^{1,2} & G_p^{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ G_p^{1,2} & -(G_p^{1,2} + G_p^{2,3}) & G_p^{2,3} & \cdots & \vdots \\ 0 & G_p^{2,3} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & G_p^{N-1,N} \\ 0 & \cdots & \cdots & G_p^{N-1,N} & -G_p^{N-1,N-1} - \frac{1}{R_p^N} \end{bmatrix}; \\
 - \mathcal{G}_{p \leftrightarrow ce} &= \text{diag} \left( \frac{1}{R_{p \leftrightarrow ce}^1}, \dots, \frac{1}{R_{p \leftrightarrow ce}^N} \right); \\
 - \mathcal{R}_p &= \frac{\rho_p}{S_p} \begin{bmatrix} L_p^1 & \cdots & L_p^N \end{bmatrix}^T; \\
 - \mathcal{E}_p &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T; \\
 - \mathcal{S}_p &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{R_p^N} \end{bmatrix}^T.
 \end{aligned}$$

Si seul le transfert entre le flux rentrant  $\phi_e$  et la température des mailles  $T_p^i$  est considéré, une représentation d'état de (3.34) est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{dT_p(t)}{dt} = A_p T_p(t) + B_p \phi_e(t) \\ T_p^i(t) = C_p^i T_p(t) \end{cases}, \quad (3.35)$$

où :

- $A_p = C_p^{-1} (\mathcal{G}_p - \mathcal{G}_{p \leftrightarrow ce})$ ;
- $B_p = C_p^{-1} \mathcal{E}_p$ ;
- $C_p^i$  est un vecteur ligne dont l'élément  $i$  vaut 1 et qui vaut 0 partout ailleurs.

En appliquant la transformée de Laplace à la relation (3.35) et pour des conditions initiales nulles, la fonction de transfert qui lie la température  $T_p^i$  de la maille  $i$  avec le flux entrant  $\phi_e$  est définie par :

$$F_p^i(s) = \frac{T_p^i(s)}{\phi_e(s)} = C_p^i (sI_N - A_p)^{-1} B_p. \quad (3.36)$$

Pour les besoins du maillage optimal de la piste de cuivre, soit  $\tilde{F}_p(x_0, s)$  la fonction de transfert de la maille (cf. équation (3.36)) qui contient le point de la piste de cuivre situé à la distance  $x = x_0$  de l'extrémité considérée :

$$\tilde{F}_p(x_0, s) = F_p^{i(x_0)}(s) = \frac{T_p^{i(x_0)}(s)}{\phi_e(s)} \quad (3.37)$$

où  $i(x_0)$  désigne l'indice de la maille qui contient le point situé en  $x = x_0$ .

### Modèle analytique d'une piste de cuivre

De même que précédemment, soit une piste de cuivre de grande longueur gravée à la surface d'une carte électronique.

Comme illustré sur la figure 3.13, soit  $\phi_p(x, t)$  (respectivement  $\phi_p(x + dx, t)$ ) le flux de chaleur longitudinal entrant dans un (respectivement sortant d'un) tronçon de piste de cuivre de longueur élémentaire  $dx$ .

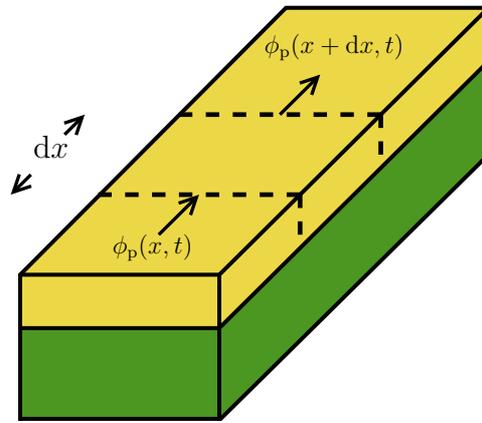


FIGURE 3.13 – Application du premier principe de la thermodynamique à un tronçon élémentaire d'une piste de cuivre

De façon très similaire au fil électrique, l'application du premier principe de la thermodynamique au tronçon élémentaire de longueur  $dx$  conduit à :

$$\mathcal{C}_p \mu_p S_p \frac{\partial T_p(x, t)}{\partial t} = k_p S_p \frac{\partial^2 T_p(x, t)}{\partial x^2} + \frac{2k_{ce} W_p}{H_{ce}} (T_{ce}(t) - T_p(t)) + \frac{\rho_p}{S_p} I(t)^2, \quad (3.38)$$

où  $x$  désigne la distance depuis l'extrémité de la piste considérée.

L'application de la transformée de Laplace à conditions initiales nulles, puis le regroupement des termes dérivés de même degré par rapport à  $x$  conduit à :

$$-k_p S_p \frac{\partial^2 T_p(x, s)}{\partial x^2} + \left( \mathcal{C}_p \mu_p S_p s + \frac{2k_{ce} W_p}{H_{ce}} T_p(x, s) \right) = \frac{2k_{ce} W_p}{H_{ce}} T_{ce}(s) + \frac{\rho_p}{S_p} I(s)^2. \quad (3.39)$$

Soient les conditions aux limites :

$$-k_p S_p \left. \frac{\partial T_p(x, s)}{\partial x} \right|_{x=0} = \phi_p(0, s) = \phi_e(s), \quad (3.40)$$

et

$$-k_p S_p \left. \frac{\partial T_p(x, s)}{\partial x} \right|_{x \rightarrow \infty} = 0. \quad (3.41)$$

La première condition aux limites indique qu'un flux de chaleur  $\phi_e$  est injecté à l'extrémité considérée de la piste de cuivre. La seconde condition suppose que le gradient de température est nul à l'infini, en d'autres termes le flux entrant  $\phi_e$  s'est entièrement diffusé le long de la piste et dans la carte électronique.

Grâce aux conditions aux limites (3.40) et (3.41), une solution à l'équation aux dérivées partielles (3.39) est donnée par :

$$\begin{aligned} T_p(x, s) = & \frac{e^{-x \sqrt{\frac{1}{k_p S_p} \left( \mathcal{C}_p \mu_p S_p s + \frac{2k_{ce} W_p}{H_{ce}} \right)}}}{\sqrt{k_p S_p \left( \mathcal{C}_p \mu_p S_p s + \frac{2k_{ce} W_p}{H_{ce}} \right)}} \phi_e(s) \\ & + \frac{\frac{2k_{ce} W_p}{H_{ce}}}{\mathcal{C}_p \mu_p S_p s + \frac{2k_{ce} W_p}{H_{ce}}} T_{ce}(s) + \frac{\rho_p}{S_p \left( \mathcal{C}_p \mu_p S_p s + \frac{2k_{ce} W_p}{H_{ce}} \right)} I(s)^2. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Il est à noter que le transfert entre  $T_p(x, s)$  et  $\phi_e$  :

$$F_p(x, s) = \frac{T_p(x, s)}{\phi_e(s)} = \frac{e^{-x \sqrt{\frac{1}{k_p S_p} \left( \mathcal{C}_p \mu_p S_p s + \frac{2k_{ce} W_p}{H_{ce}} \right)}}}{\sqrt{k_p S_p \left( \mathcal{C}_p \mu_p S_p s + \frac{2k_{ce} W_p}{H_{ce}} \right)}}, \quad (3.43)$$

est exactement de la même forme que le transfert analytique entre la température du fil  $T(x, s)$  et le flux rentrant dans le fil  $\phi_e$  donné par l'équation (2.42).

De la même manière que pour le fil, la distance d'oubli pour une piste de cuivre est donnée par :

$$D_p = -\ln(0, 01) \sqrt{\frac{k_p S_p H_{ce}}{2k_{ce} W_p}}. \quad (3.44)$$

En posant :

$$\begin{aligned} \alpha_p &= \frac{1}{\sqrt{k_p \mathcal{C}_p \mu_p S_p^2}}, \\ \lambda_p &= \frac{2k_{ce} W_p}{H_{ce} \mathcal{C}_p \mu_p S_p}, \\ \beta_p &= \sqrt{\frac{\mathcal{C}_p \mu_p}{k_p}}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

le transfert (3.43) peut également se mettre sous la forme donnée par l'équation (2.59),

c'est-à-dire :

$$F_p(x, s) = \frac{\alpha_p}{\sqrt{s + \lambda_p}} e^{-\beta_p x \sqrt{s + \lambda_p}}. \quad (3.46)$$

Ainsi, la méthode de maillage (maillage irrégulier, critère basé sur la norme  $\mathcal{H}_2$  et algorithme de détermination du maillage optimal en deux étapes) d'un fil électrique proposée dans le chapitre 2, peut être réutilisée dans le but de mailler la piste de cuivre en partant des modèles de piste donnés par les équations (3.37) et (3.46).

### Maillage optimal d'une piste de cuivre

À la différence d'un fil qui peut être très long, il se peut que la longueur d'une piste de cuivre soit assez courte pour qu'une partie des flux entrants aux extrémités (l'un provenant du MOSFET, l'autre de la languette) se rencontrent. Deux cas, illustrés sur la figure 3.14, sont alors à distinguer.

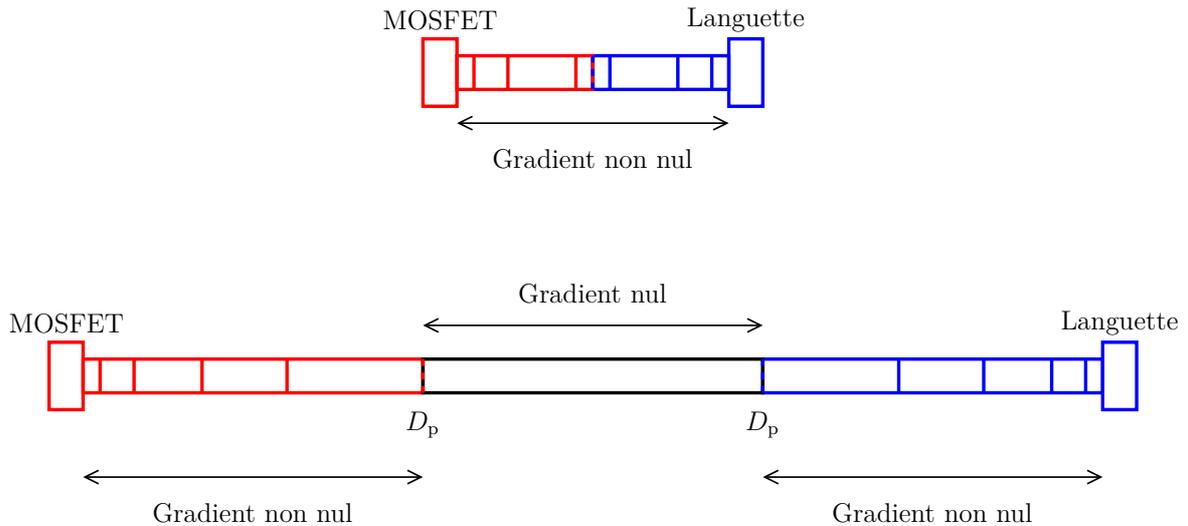


FIGURE 3.14 – Les deux cas de figure possibles pour le maillage d'une piste de cuivre

Soit la longueur de la piste de cuivre est inférieure ou égale à deux fois celle de sa distance d'oubli  $D_p$  (figure 3.14 en haut). Dans ce cas, le gradient longitudinal de température dans la piste n'est jamais nul. La méthode de maillage proposée est alors la suivante :

1. la piste de cuivre est maillée normalement, grâce à la méthode et au critère présentés dans le chapitre 2, depuis la languette jusqu'à sa distance d'oubli ;
2. le maillage obtenu est tronqué à partir du milieu de la longueur réelle de la piste de cuivre ;

3. le maillage ainsi tronqué est dupliqué de façon symétrique depuis le MOSFET sur l'autre moitié de la piste de cuivre.

Ainsi, ce maillage conduit au système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{bmatrix} C_p^1 \frac{dT_p^1(t)}{dt} \\ \vdots \\ C_p^i \frac{dT_p^i(t)}{dt} \\ \vdots \\ C_p^N \frac{dT_p^N(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T_1^3(t)-T_p^1(t)}{R_1^3+R_p^1} + \frac{T_p^2(t)-T_p^1(t)}{R_p^2+R_p^1} + \frac{T_{ce}(t)-T_p^1(t)}{R_{p \leftrightarrow ce}^1} + \frac{\rho_p L_p^1 I(t)^2}{S_p} \\ \vdots \\ \frac{T_p^{i-1}(t)-T_p^i(t)}{R_p^{i-1}+R_p^i} + \frac{T_p^{i+1}(t)-T_p^i(t)}{R_p^{i+1}+R_p^i} + \frac{T_{ce}(t)-T_p^i(t)}{R_{p \leftrightarrow ce}^i} + \frac{\rho_p L_p^i I(t)^2}{S_p} \\ \vdots \\ \frac{T_p^{N-1}(t)-T_p^N(t)}{R_p^{N-1}+R_p^N} + \frac{T_{MOS}(t)-T_p^N(t)}{R_p^N} + \frac{T_{ce}(t)-T_p^N(t)}{R_{p \leftrightarrow ce}^N} + \frac{\rho_p L_p^N I(t)^2}{S_p} \end{bmatrix}, \quad (3.47)$$

avec  $T_{MOS}$  la température du MOSFET intelligent.

**Remarque 11.** Ici, l'étape 2. (ou 1.) pourrait même être volontairement ignorée si la partie utile à modéliser est uniquement du côté de la languette (du côté du MOSFET). En effet, la longueur entre les deux distances d'oubli est indépendante des extrémités.

Soit la longueur de la piste de cuivre est strictement supérieure à deux fois celle de sa distance d'oubli  $D_p$  (figure 3.14 en bas). Dans ce cas le gradient longitudinal de température est non nul entre la languette (ou le MOSFET) et la distance d'oubli. En revanche, la conduction longitudinale devient négligeable sur une certaine longueur au centre de la piste (au delà de la distance d'oubli). Le gradient longitudinal de température est alors nul et la température est celle d'une piste de longueur infinie régie par l'équation (3.33). Dans ce cas, la méthode de maillage proposée est la suivante :

1. la piste de cuivre est maillée normalement, grâce à la méthode et au critère présentés dans le chapitre 2, depuis la languette jusqu'à sa distance d'oubli ;
2. la piste de cuivre est maillée normalement, grâce à la méthode et au critère présentés dans le chapitre 2, depuis le MOSFET jusqu'à sa distance d'oubli ;
3. la longueur située entre les deux distances d'oubli de la piste n'est plus maillée, sa température est alors régie par celle d'une piste de longueur infinie.

Ce maillage conduit alors à deux systèmes d'équations différentielles de température des

mailles, l'un du côté languette :

$$\begin{bmatrix} C_p^1 \frac{dT_p^{11}(t)}{dt} \\ \vdots \\ C_p^i \frac{dT_p^{1i}(t)}{dt} \\ \vdots \\ C_p^N \frac{dT_p^{1N}(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T_1^3(t)-T_p^{11}(t)}{R_1^3+R_p^1} + \frac{T_p^{12}(t)-T_p^{11}(t)}{R_p^2+R_p^1} + \frac{T_{ce}(t)-T_p^{11}(t)}{R_{p\leftrightarrow ce}^1} + \frac{\rho_p L_p^1}{S_p} I(t)^2 \\ \vdots \\ \frac{T_p^{1(i-1)}(t)-T_p^{1i}(t)}{R_p^{i-1}+R_p^i} + \frac{T_p^{1(i+1)}(t)-T_p^{1i}(t)}{R_p^{i+1}+R_p^i} + \frac{T_{ce}(t)-T_p^{1i}(t)}{R_{p\leftrightarrow ce}^i} + \frac{\rho_p L_p^i}{S_p} I(t)^2 \\ \vdots \\ \frac{T_p^{1(N-1)}(t)-T_p^{1N}(t)}{R_p^{N-1}+R_p^N} + \frac{T_p^{inf}(t)-T_p^{1N}(t)}{R_p^N} + \frac{T_{ce}(t)-T_p^{1N}(t)}{R_{p\leftrightarrow ce}^N} + \frac{\rho_p L_p^N}{S_p} I(t)^2 \end{bmatrix}, \quad (3.48)$$

où  $T_p^{1i}$  désigne la température de la  $i$ -ème maille côté languette, et l'autre du côté MOS-FET intelligent :

$$\begin{bmatrix} C_p^1 \frac{dT_p^{21}(t)}{dt} \\ \vdots \\ C_p^i \frac{dT_p^{2i}(t)}{dt} \\ \vdots \\ C_p^N \frac{dT_p^{2N}(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T_{MOS}(t)-T_p^{21}(t)}{R_p^1} + \frac{T_p^{22}(t)-T_p^{21}(t)}{R_p^2+R_p^1} + \frac{T_{ce}(t)-T_p^{21}(t)}{R_{p\leftrightarrow ce}^1} + \frac{\rho_p L_p^1}{S_p} I(t)^2 \\ \vdots \\ \frac{T_p^{2(i-1)}(t)-T_p^{2i}(t)}{R_p^{i-1}+R_p^i} + \frac{T_p^{2(i+1)}(t)-T_p^{2i}(t)}{R_p^{i+1}+R_p^i} + \frac{T_{ce}(t)-T_p^{2i}(t)}{R_{p\leftrightarrow ce}^i} + \frac{\rho_p L_p^i}{S_p} I(t)^2 \\ \vdots \\ \frac{T_p^{2(N-1)}(t)-T_p^{2N}(t)}{R_p^{N-1}+R_p^N} + \frac{T_p^{inf}(t)-T_p^{2N}(t)}{R_p^N} + \frac{T_{ce}(t)-T_p^{2N}(t)}{R_{p\leftrightarrow ce}^N} + \frac{\rho_p L_p^N}{S_p} I(t)^2 \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

où  $T_p^{2i}$  désigne la température de la  $i$ -ème maille côté MOSFET.

### 3.3.3.2 Carte électronique

La carte électronique est principalement constituée d'un substrat (la résine poly-époxyde ou « époxy » étant le plus souvent utilisée) et de composants électroniques.

La carte électronique étudiée est à l'air libre et surélevée grâce à des petits plots par rapport à son support (voir figure 3.15). Vu la faible conductivité du substrat (environ  $0,3 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  pour l'époxy contre  $389 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  pour du cuivre pur) et sachant de plus que le MOSFET, les pistes de cuivre et le connecteur sont localisés vers le centre de la carte électronique, sa température sera supposée homogène dans tout son volume. La carte électronique échange de la chaleur par conduction avec ses pistes de cuivre et le MOSFET, et par convection et rayonnement avec l'air ambiant.

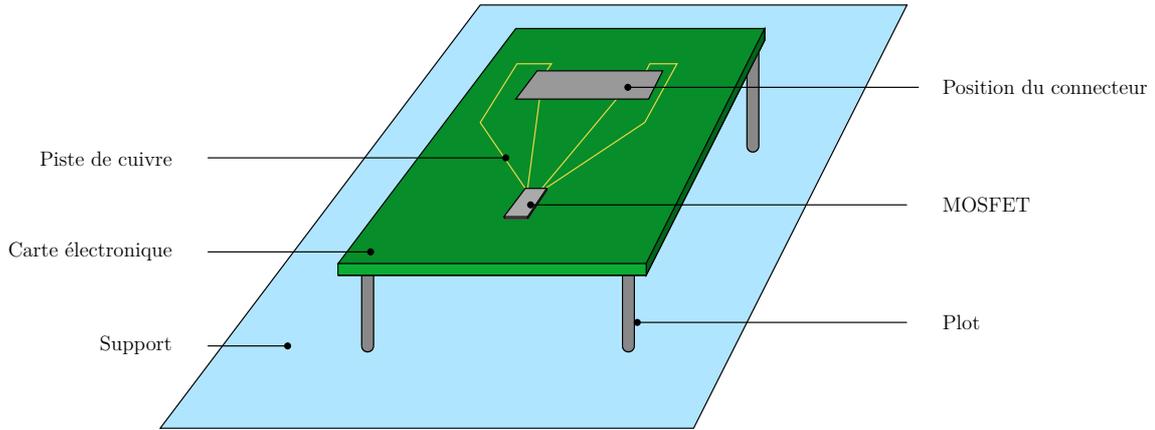


FIGURE 3.15 – Schématisation de la carte électronique sur son support

La conduction entre la carte électronique et les mailles d'une piste de cuivre se fait au travers de la résistance thermique déjà définie par l'équation (3.31). Pour la conduction avec le MOSFET, la résistance thermique entre ce dernier et la carte électronique est donnée par :

$$R_{\text{MOS} \leftrightarrow \text{ce}} = \frac{H_{\text{ce}}}{2k_{\text{ce}}L_{\text{MOS}}W_{\text{MOS}}} \quad (3.50)$$

où  $L_{\text{MOS}}$  et  $W_{\text{MOS}}$  désignent respectivement la longueur et la largeur du MOSFET.

La convection et le rayonnement se font au travers de deux surfaces supposées planes et horizontale (face supérieure et face inférieure de la carte électronique). Comme décrit dans le tableau A.2 de l'annexe A, l'expression du coefficient de convection (ou plus précisément l'expression du nombre de Nusselt) diffère selon le cas où la surface d'échange est orientée vers le haut ou vers le bas pour une plaque horizontale. D'autre part, la surface d'échange entre la face supérieure et inférieure de la carte n'est pas exactement la même. En effet, les surfaces des divers composants sont retranchées de la surface de la face concernée de la carte. Par conséquent, le coefficient de convection  $h_{\text{ce}}^{\text{sup}}$  et la surface d'échange avec l'air  $S_{\text{ce}}^{\text{sup}}$  seront associés à la face supérieure. De même, le coefficient de convection  $h_{\text{ce}}^{\text{inf}}$  et la surface d'échange avec l'air  $S_{\text{ce}}^{\text{inf}}$  seront associés à la face inférieure.

L'équation différentielle régissant la température de la carte avec une seule piste de cuivre est donnée par :

$$\begin{aligned} C_{\text{ce}} \frac{dT_{\text{ce}}(t)}{dt} &= \frac{T_{\text{MOS}}(t) - T_{\text{ce}}(t)}{R_{\text{MOS} \leftrightarrow \text{ce}}} + \sum_{i=1}^N \frac{T_{\text{p}}^i(t) - T_{\text{ce}}(t)}{R_{\text{p} \leftrightarrow \text{ce}}} \\ &+ h_{\text{ce}}^{\text{sup}} S_{\text{ce}}^{\text{sup}} (T_{\text{a}}(t) - T_{\text{ce}}(t)) + h_{\text{ce}}^{\text{inf}} S_{\text{ce}}^{\text{inf}} (T_{\text{a}}(t) - T_{\text{ce}}(t)) \\ &+ \sigma \varepsilon_{\text{ce}} S_{\text{ce}}^{\text{sup}} (T_{\text{a}}(t)^4 - T_{\text{ce}}(t)^4) + \sigma \varepsilon_{\text{ce}} S_{\text{ce}}^{\text{inf}} (T_{\text{a}}(t)^4 - T_{\text{ce}}(t)^4), \end{aligned} \quad (3.51)$$

avec  $C_{ce}$  la capacité thermique de la carte électronique.

Dans le cas plus général d'une carte sur laquelle se trouvent  $M$  pistes de cuivre, l'équation (3.51) devient :

$$\begin{aligned}
 C_{ce} \frac{dT_{ce}(t)}{dt} = & \frac{T_{MOS}(t) - T_{ce}(t)}{R_{MOS \leftrightarrow ce}} + \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{N_j} \frac{T_p^{ji}(t) - T_{ce}(t)}{R_{p \leftrightarrow ce}^{ji}} \\
 & + h_{ce}^{sup} S_{ce}^{sup} (T_a(t) - T_{ce}(t)) + h_{ce}^{inf} S_{ce}^{inf} (T_a(t) - T_{ce}(t)) \\
 & + \sigma \varepsilon_{ce} S_{ce}^{sup} (T_a(t)^4 - T_{ce}(t)^4) + \sigma \varepsilon_{ce} S_{ce}^{inf} (T_a(t)^4 - T_{ce}(t)^4),
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

où :

- $N_j$  est le nombre de mailles de la  $j$ -ème piste de cuivre ;
- $T_p^{ji}$  est la température de la  $i$ -ème maille de la  $j$ -ème piste de cuivre ;
- $R_{p \leftrightarrow ce}^{ji}$  est résistance thermique entre la  $i$ -ème maille de la  $j$ -ème piste de cuivre et la carte électronique.

### 3.3.3.3 Composant de puissance

Sur la carte électronique étudiée, le composant de puissance se situe à une extrémité d'une piste de cuivre. La nature et le rôle des composants de puissance sont variés [Bernot, 2010]. Des composants tels que des transistors, des thyristors, des diodes sont en effet susceptibles de se trouver sur des cartes électroniques. Ces composants peuvent parfois dissiper de fortes puissances par effet Joule en raison de leur résistance électrique de jonction (quelques milliohms à parfois plus d'une centaine de milliohms) et des fortes intensités électriques qui les traversent.

Le composant de puissance étudié dans ce mémoire, est un transistor MOSFET intelligent qui dispose d'un capteur de température intégré. De ce fait, la modélisation de ce composant n'est pas développée dans ce manuscrit puisque sa température est immédiatement accessible.

Toutefois, il existe divers modèles de composants électroniques dans la littérature et le lecteur intéressé pourra se référer à [Furmanczyk et al., 1998, Ammous et al., 2007, Nguyen, 2013].

## 3.4 Validation de la chaîne électrothermique de faible puissance

Dans cette section, la composition d'un banc d'essais électrothermiques dédié est d'abord présenté. Une méthode de validation des modèles de composants de la section précédente et du modèle complet de la chaîne de faible puissance est ensuite proposée. Enfin, la comparaison des résultats issus des mesures et issus de la simulation des modèles sous MATLAB<sup>®</sup>-Simulink<sup>®</sup> est examinée.

### 3.4.1 Présentation du banc d'essais électrothermiques

La figure 3.16 présente de façon schématisée les éléments du banc d'essais électrothermiques de faible puissance.

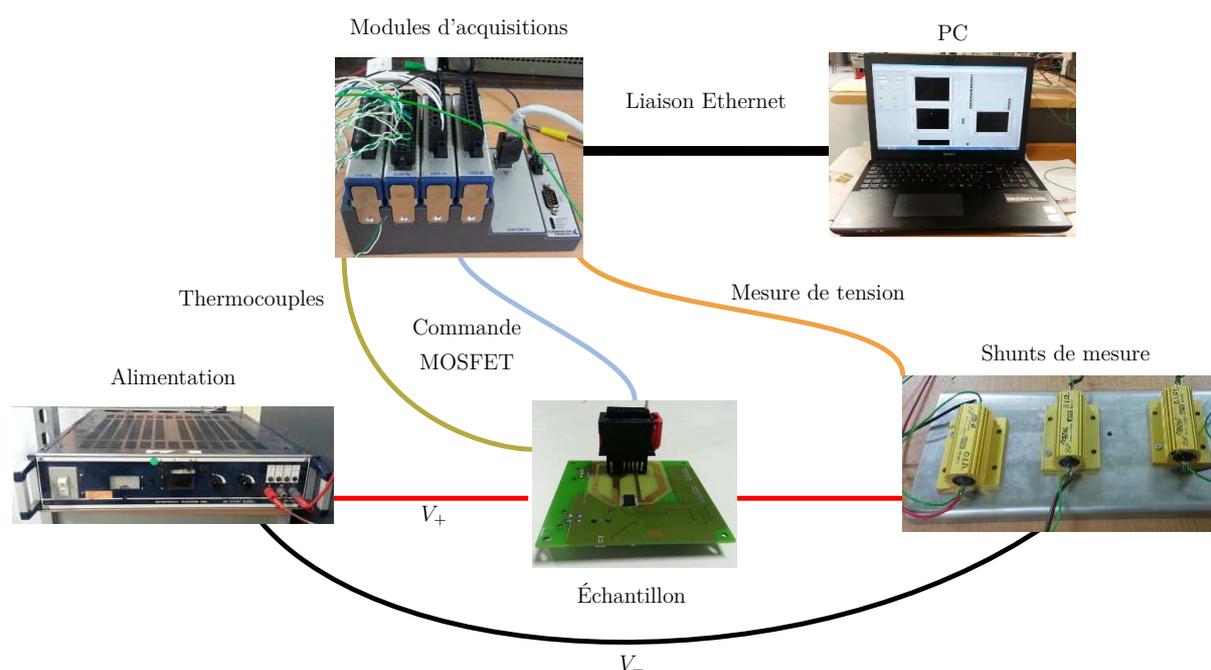


FIGURE 3.16 – Schématisation du banc de faible puissance

Le banc d'essais se compose d'un échantillon de test (carte électronique + connecteur + fil) recouvert par une cage en polyméthacrylate de méthyle : Plexiglas<sup>®</sup>. Cette cage sert à isoler les échantillons d'éventuels flux d'air parasites (déplacement d'une personne, ventilation, ...) qui pourraient fausser les échanges thermiques par convection (convection forcée au lieu de la convection naturelle).

### 3.4. VALIDATION DE LA CHAÎNE ÉLECTROTHERMIQUE DE FAIBLE PUISSANCE

---

La source d'alimentation électrique est un générateur de tension (ou de courant) réglable. Elle délivre une tension  $V_+$  au circuit et sa masse ( $V_-$ ) est reliée à la résistance shunt de mesure.

Les températures des composants et la température ambiante sont mesurées par des thermocouples de type K reliés à un module d'acquisition de type NI 9213 du fabricant National Instruments<sup>©</sup>. Les thermocouples sont collés sur les composants à l'aide d'une colle de bonne conductivité thermique.

Le schéma électrique du banc d'essai est illustré sur la figure 3.17.

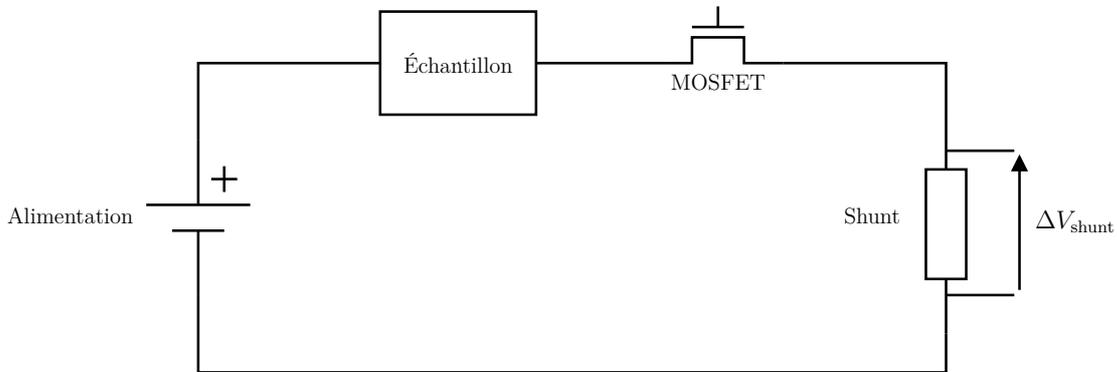


FIGURE 3.17 – Schéma électrique du banc de faible puissance

La mesure du courant électrique se fait au travers d'une résistance *shunt* de mesure. Une de ses bornes est reliée à un fil qui sort du connecteur, et l'autre borne est connectée à la masse de la source d'alimentation électrique pour fermer le circuit électrique. Il s'agit d'une résistance de puissance calibrée dont la valeur est parfaitement connue. La chute tension  $\Delta V_{shunt}$  est mesurée à ses bornes puis, la valeur de l'intensité du courant est déduite à partir de la loi d'Ohm. Cette chute de tension est mesurée grâce à une carte d'acquisition NI 9221 du fabricant National Instruments<sup>©</sup>. Ainsi, une résistance  $\mathcal{R}_{shunt} = 0,1 \Omega$  est utilisée. Cette valeur est volontairement choisie faible pour minimiser l'échauffement de la résistance par effet Joule, ce qui limite les variations de la résistance en fonction de sa température. D'après la loi d'Ohm, l'intensité du courant électrique est alors donnée par :

$$I = \frac{\Delta V_{shunt}}{\mathcal{R}_{shunt}} = \frac{\Delta V_{shunt}}{0,1} = 10 \times \Delta V_{shunt}. \quad (3.53)$$

Enfin, les modules d'acquisition de données (intensité et températures) sont connectés à un système de contrôle temps réel intégré NI cRIO-9075 de National Instruments<sup>©</sup>. Ce système de contrôle est relié à un PC d'enregistrement et de commande par une liaison

Ethernet.

Un programme, spécialement développé avec le logiciel LabVIEW<sup>TM</sup>, permet de sauvegarder les mesures d'un essai. De plus, il est possible grâce à ce programme, de commander le passage du courant électrique dans les pistes via un convertisseur numérique-analogique NI 9263 (National Instruments<sup>®</sup>) qui pilote la grille du transistor MOSFET. Il est précisé que les températures et l'intensité du courant sont relevées toutes les 0,1 s.

Le bruit généré par toute la chaîne d'acquisition (thermocouples, convertisseurs analogique-numérique) a été relevé pour l'ensemble des mesures. L'amplitude crête-à-crête du bruit sur les mesures de température est d'environ 0,2 °C. De même pour la mesure d'intensité du courant, le bruit crête-à-crête est d'environ 1 A.

### 3.4.2 Essai de validation effectué

L'essai de validation effectué concerne une seule ligne du banc d'essais électrothermiques de faible puissance. Ainsi, les composants en jeu à valider sont :

- un fil électrique de section de conducteur 1,5 mm<sup>2</sup> ;
- un clip en alliage cuivre-fer (CuFe2P) de 2,8 mm avec son sertissage associé ;
- l'air de la cellule concernée du porte-clips ;
- un porte-clips en polytéréphtalate de butylène chargé de fibre de verre (PBT\_GF 20) ;
- une languette en laiton (CuZn30) ;
- une embase également en polytéréphtalate de butylène chargé de fibre de verre (PBT\_GF 20) ;
- une piste de cuivre (cuivre pur) ;
- la carte électronique (époxy).

Le signal de sollicitation est un signal de type SBPA <sup>(5)</sup> converti en tension 0 V–5 V par le convertisseur numérique-analogique. La source électrique est réglée pour fournir un courant d'intensité de 10,5 A lorsque le MOSFET est passant. Ainsi, le signal de sollicitation utilisé pour générer le courant électrique de l'essai de validation est donné sur la figure 3.18.

---

5. SBPA : Séquence Binaire Pseudo-Aléatoire

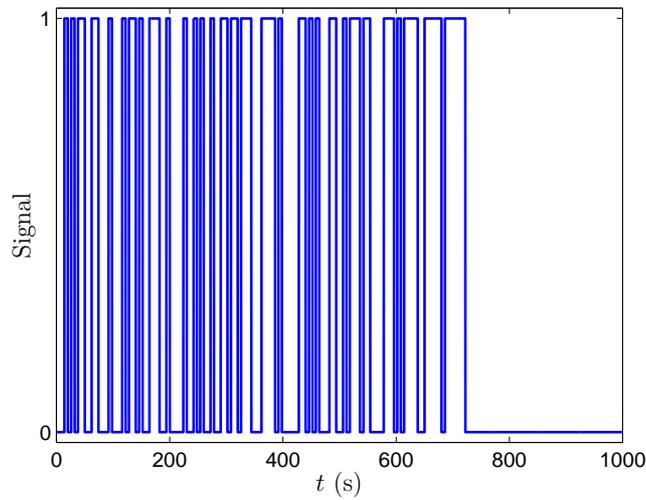


FIGURE 3.18 – Signal de sollicitation pour générer le courant électrique de l’essai de validation

### 3.4.3 Protocole de validation des modèles électrothermiques

Chaque composant (bloc) représenté sur la figure 3.2 est d’abord validé séparément. Le schéma d’implantation de l’équation différentielle d’un composant sous MATLAB<sup>®</sup>–Simulink<sup>®</sup> présenté sur la figure 3.3, peut se ramener à un bloc simple à plusieurs entrées et une sortie. Les entrées du blocs sont toujours les températures des composants voisins (sauf pour les composants de « longueur infinie »), éventuellement la température ambiante et éventuellement le courant électrique. La sortie du bloc est la température du composant (ou un vecteur composé des températures de ses mailles si c’est un composant maillé).

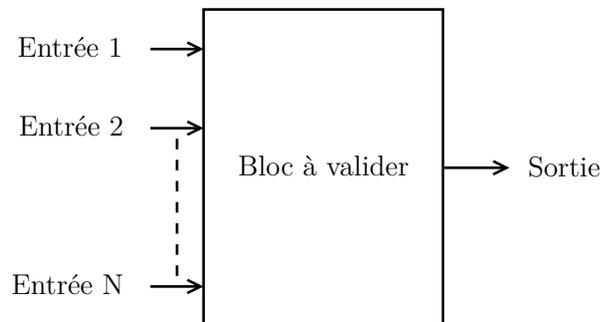


FIGURE 3.19 – Un bloc MATLAB<sup>®</sup>–Simulink<sup>®</sup> à valider

Le protocole de validation d’un bloc se déroule de la manière suivante :

1. seules les températures *mesurées* des composants voisins du bloc à valider sont injectées à ses entrées ;
2. les paramètres du bloc sont ajustés (dans la limite du raisonnable) pour obtenir l'erreur (voir (3.56)) la plus faible possible entre sa température simulée et mesurée ;
3. (a) les températures *simulées* des composants voisins déjà validés du bloc en cours de validation sont injectées à ses entrées ;  
 (b) la sortie du bloc en cours de validation est injectée aux entrées des blocs déjà validés ;
4. les paramètres du bloc sont ajustés à nouveau pour obtenir l'erreur la plus faible possible entre sa température simulée et mesurée.

Il est à noter que dans tous les cas, la température ambiante mesurée, la température du MOSFET mesurée et l'intensité mesurée du courant sont injectées aux entrées des blocs concernés.

**Remarque 12.** *Dans ce manuscrit, la validation des composants a été effectuée en remontant progressivement les blocs de la figure 3.2 de droite à gauche et de haut en bas jusqu'à compléter entièrement la chaîne de faible puissance (fil → sertissage → clip → air de la cellule → porte-clips → languette → embase → piste de cuivre → carte électronique). De plus, pour ne pas surcharger inutilement ce mémoire en figures, seuls les résultats finaux faisant suite à la quatrième étape sont présentés.*

La calibration des paramètres à la deuxième étape et à la quatrième étape est parfois nécessaire car ils ne sont pas toujours précisément connus (dispersion paramétrique lors de la fabrication, dégradation du composant, etc). Il est également rappelé que le facteur de forme entre le sertissage et l'air de la cellule du porte-clips est ajusté pour minimiser l'erreur relative définie à la suite entre la température mesurée et la température simulée du sertissage.

Les signaux mesurés sont échantillonnés à la période  $T_{\text{ech}} = 0,1$  s et soit  $T_{\text{mes}}(nT_{\text{ech}})$  la température mesurée d'un composant à l'instant  $t = n \times T_{\text{ech}} = n \times 0,1$  s. Si,

$$T_{\min} = \min_n T_{\text{mes}}(nT_{\text{ech}}) \quad \text{et} \quad T_{\max} = \max_n T_{\text{mes}}(nT_{\text{ech}}), \quad (3.54)$$

désignent respectivement la température mesurée minimale et la température mesurée maximale d'un composant lors d'un essai, alors la variation maximale de température est

donné par :

$$\Delta T = T_{\max} - T_{\min}. \quad (3.55)$$

Les critères pour juger de la qualité des modèles sont la moyenne et la valeur maximale de l'erreur (en valeur absolue) entre la température simulée d'un composant et sa température mesurée divisée par  $\Delta T$ . Ainsi, l'erreur relative par rapport à l'écart maximal de température est donnée par :

$$E(nT_{\text{ech}}) = \frac{T_{\text{mes}}(nT_{\text{ech}}) - T_{\text{sim}}(nT_{\text{ech}})}{\Delta T}, \quad (3.56)$$

où  $T_{\text{sim}}(nT_{\text{ech}})$  est la température simulée du bloc à valider.

La moyenne de l'erreur relative s'écrit alors :

$$E_{\text{moy}} = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=1}^{N_{\text{ech}}} \frac{T_{\text{mes}}(nT_{\text{ech}}) - T_{\text{sim}}(nT_{\text{ech}})}{N_{\text{ech}}}, \quad (3.57)$$

avec  $N_{\text{ech}}$  le nombre total d'échantillons de l'essai.

La valeur maximale de l'erreur relative est donc définie par :

$$E_{\max} = \max_n E(nT_{\text{ech}}). \quad (3.58)$$

**Remarque 13.** *Il est à noter que les bruits de mesure relevés sur la mesure de température et de courant génèrent respectivement une erreur de 0,057 °C et 0,26 A.*

Le modèle du fil électrique de longueur finie et infinie a déjà fait l'objet de comparaisons avec des mesures au chapitre 2 en utilisant le même banc d'essai (l'échantillon était donc le fil suspendu à l'air libre) et le même protocole de validation. Ce modèle est donc considéré comme validé et n'est volontairement pas présenté de nouveau dans ce qui suit.

### 3.4.4 Validation du connecteur

#### 3.4.4.1 Sertissage

La figure 3.20 présente la température mesurée du sertissage lors de l'essai et la température issue de la simulation de son modèle électrothermique. Les signaux injectés aux entrées du bloc « sertissage » sont :

- le courant mesuré ;

- la température mesurée du clip ;
- la température mesurée de l'air de la cellule du porte-clips ;
- la température simulée de la première maille du fil.

La sortie du bloc « sertissage » est injectée à l'entrée correspondante du bloc « fil de longueur finie ».

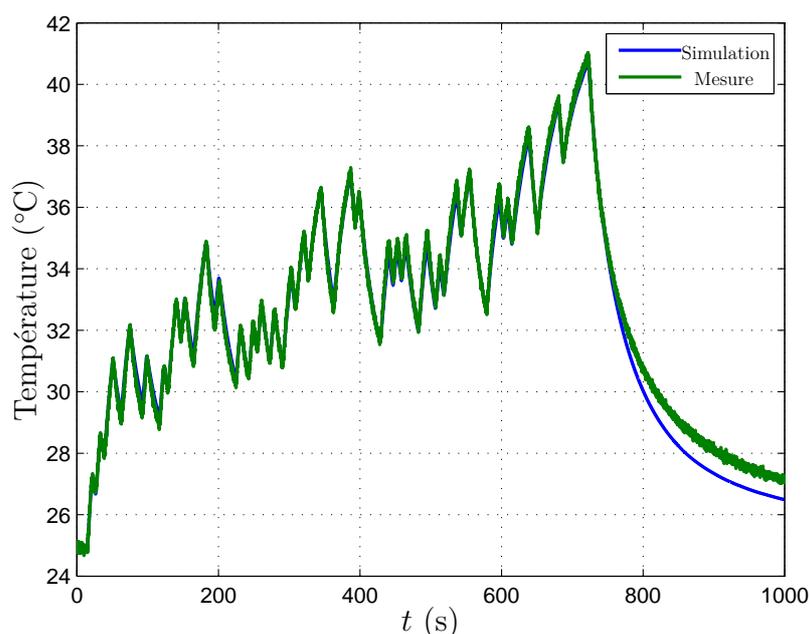


FIGURE 3.20 – Température mesurée et simulée du sertissage

La variation maximale de la température mesurée lors de l'essai est d'environ 16 °C, la moyenne de l'erreur relative relevée est de 1,89 % et la valeur maximale de l'erreur relative vaut 6,15 %. Ces résultats permettent de valider le modèle du sertissage.

#### 3.4.4.2 Clip

La validation du modèle du clip nécessite quelques aménagements car celui-ci échange de la chaleur avec le point de contact. Or, il est physiquement impossible de mesurer directement la température du point de contact. En effet, d'une part il serait irréalisable de « glisser » un thermocouple entre le clip et la languette utilisés. D'autre part, même si le placement d'un capteur était possible, celui-ci fausserait le comportement électrothermique du contact car les dimensions de ce dernier sont extrêmement petites. Dans ce mémoire, la résistance de contact a été déterminée par la mesure quatre fils présentée pré-

### 3.4. VALIDATION DE LA CHAÎNE ÉLECTROTHERMIQUE DE FAIBLE PUISSANCE

---

cédemment dans ce chapitre. La mesure a été effectuée avec un multimètre numérique de précision : modèle 3706A du fabricant Keithley<sup>®</sup>. La résistance de contact ainsi obtenue est d'environ  $2,7 \text{ m}\Omega$ .

La température mesurée du clip lors de l'essai et sa température issue de la simulation de son modèle électrothermique sont données sur la figure 3.21. Les signaux injectés aux entrées du bloc « clip » sont :

- le courant mesuré ;
- la température mesurée de l'air de la cellule du porte-clips ;
- la température simulée du sertissage ;
- la température simulée du point de contact.

La sortie du bloc « clip » est injectée à l'entrée correspondante du bloc sertissage et du bloc « point de contact ».

**Remarque 14.** Pour la validation du modèle du clip, la température mesurée de la languette et le courant mesuré sont injectés aux entrées du bloc « point de contact » .

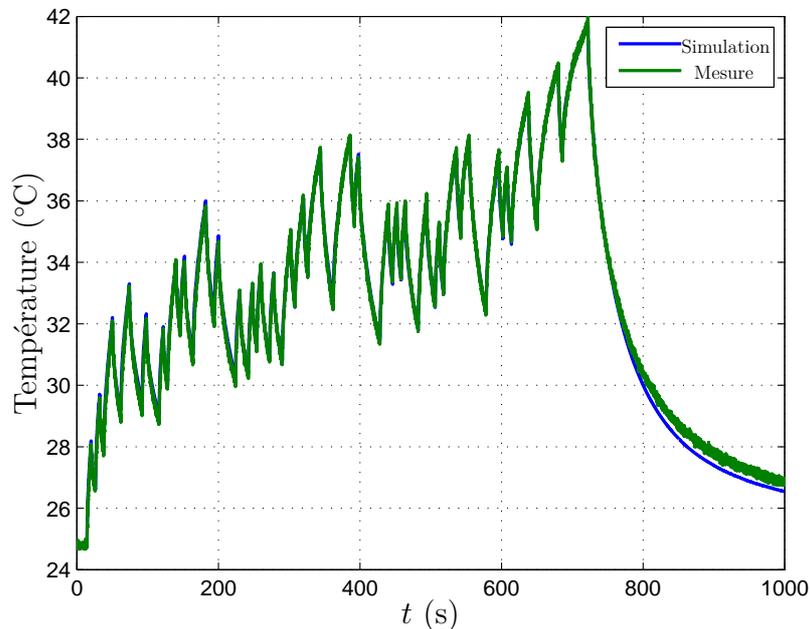


FIGURE 3.21 – Température mesurée et simulée du clip

La variation maximale de la température mesurée lors de l'essai est d'environ  $17^\circ\text{C}$ , la moyenne de l'erreur relative relevée est de  $1,16\%$  et la valeur maximale de l'erreur relative vaut  $3,76\%$ . Ces résultats permettent de valider le modèle du clip.

### 3.4.4.3 Air de la cellule du porte-clips

La température mesurée de l'air de la cellule du porte-clips lors de l'essai et sa température issue de la simulation de son modèle électrothermique sont données sur la figure 3.22. Les signaux injectés aux entrées du bloc « air de la cellule du porte-clips » sont :

- la température mesurée du porte-clips ;
- la température simulée du sertissage ;
- la température simulée du clip.

La sortie du bloc « air de la cellule du porte-clips » est injectée à l'entrée correspondante du bloc « sertissage » et du bloc « clip ».

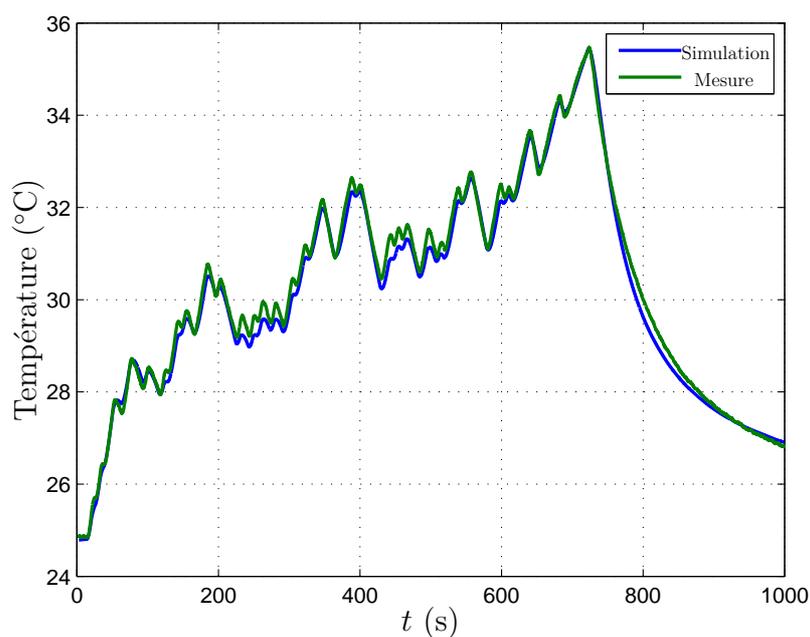


FIGURE 3.22 – Température mesurée et simulée de l'air dans la cellule du porte-clips

La variation maximale de la température mesurée lors de l'essai est d'environ 11 °C, la moyenne de l'erreur relative relevée est de 1,76 % et la valeur maximale de l'erreur relative vaut 8,06 %. Ces résultats permettent de valider le modèle de l'air de la cellule du porte-clips.

#### 3.4.4.4 Porte-clips

La température mesurée du porte-clips lors de l'essai et sa température issue de la simulation de son modèle électrothermique sont données sur la figure 3.23. Les signaux injectés aux entrées du bloc « porte-clips » sont :

- la mesure de température ambiante ;
- la température mesurée de l'embase ;
- la température simulée de l'air de la cellule du porte-clips.

La sortie du bloc « porte-clips » est injectée à l'entrée correspondante du bloc « air de la cellule du porte-clips ».

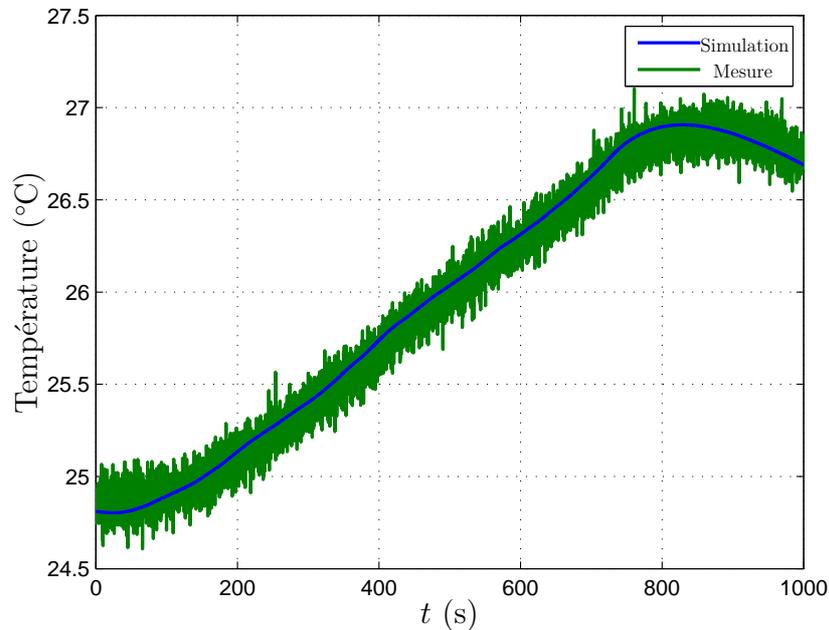


FIGURE 3.23 – Température mesurée et simulée du porte-clips

La variation maximale de la température mesurée lors de l'essai est d'environ 2,5 °C, la moyenne de l'erreur relative relevée est de 1,74 % et la valeur maximale de l'erreur relative vaut 3,76 %. Ces résultats permettent de valider le modèle du porte-clips.

#### 3.4.4.5 Languette

Comme pour le clip, la validation du modèle de la languette est également soumise à discussion. De nouveau, seule la température simulée (et non mesurée) du point de contact peut être utilisée pour l'entrée correspondante du bloc languette. D'autre part,

la languette est maillée en trois parties et seule celle à l'air libre (maille inférieure) est accessible pour placer un thermocouple.

Ainsi, la température simulée de la dernière maille de la languette est comparée à la mesure sur la figure 3.24. Les signaux injectés aux entrées du bloc « languette » sont :

- la mesure de courant ;
- la température mesurée de l'embase ;
- la température mesurée à l'extrémité (côté languette) de la piste de cuivre.
- la température simulée du point de contact.

La sortie du bloc « languette » est injectée à l'entrée correspondante du bloc « point de contact ».

**Remarque 15.** Pour la validation du modèle de la languette, la température simulée du clip et le courant mesuré sont injectés aux entrées du bloc « point de contact ».

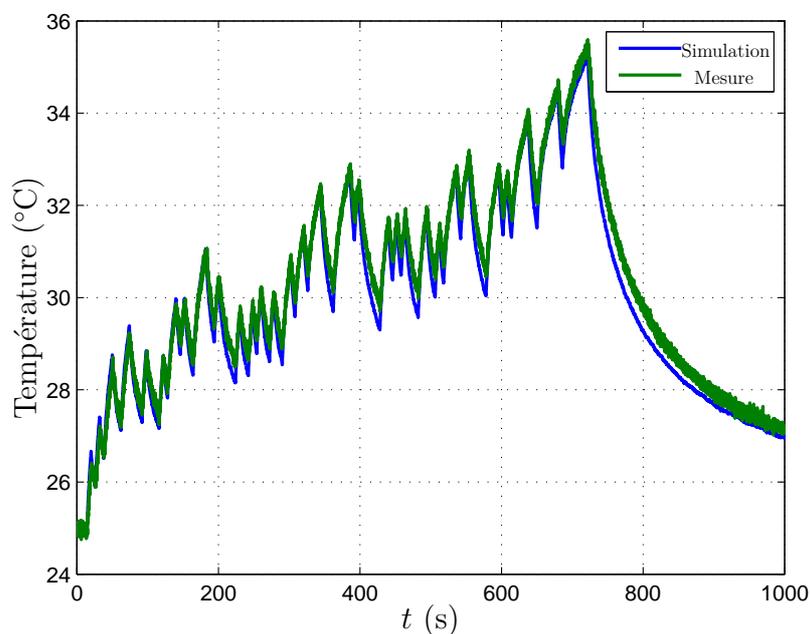


FIGURE 3.24 – Température mesurée et simulée de la languette

La variation maximale de la température mesurée lors de l'essai est d'environ 11 °C, la moyenne de l'erreur relative relevée est de 2,74 % et la valeur maximale de l'erreur relative vaut 9,4 %. Les résultats précédents permettent de valider le modèle de la languette.

### 3.4.4.6 Embase

La température mesurée de l'embase lors de l'essai et sa température issue de la simulation de son modèle électrothermique sont données sur la figure 3.25. Les signaux injectés aux entrées du bloc « embase » sont :

- la température ambiante ;
- la température simulée de la maille centrale de la languette ;
- la température simulée du porte-clips.

La sortie du bloc « embase » est injectée à l'entrée correspondante du bloc « languette » et du bloc « porte-clips ».

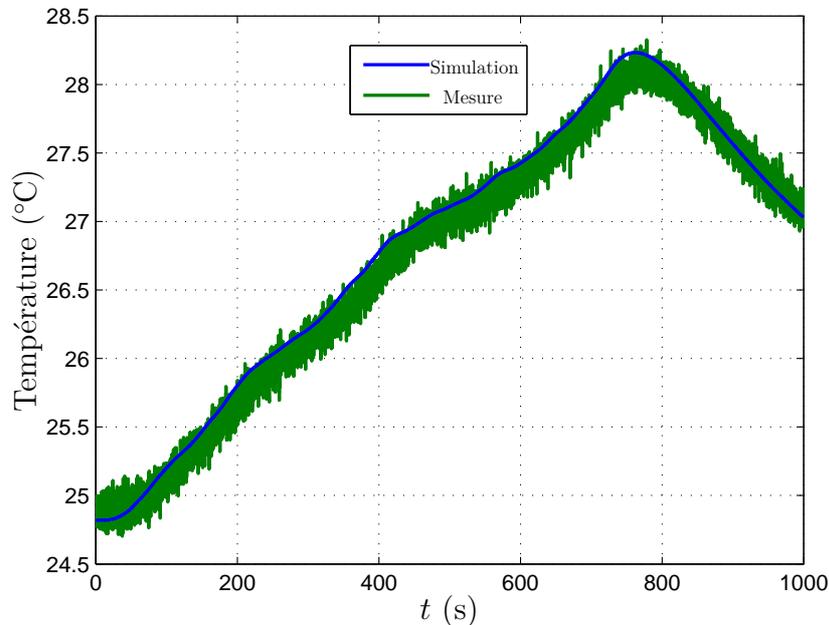


FIGURE 3.25 – Température mesurée et simulée de l'embase

La variation maximale de la température mesurée lors de l'essai est d'environ 3,6 °C, la moyenne de l'erreur relative relevée est de 2,75 % et la valeur maximale de l'erreur relative vaut 5,19 %. Ces résultats permettent de valider le modèle de l'embase.

### 3.4.4.7 Piste de cuivre

La piste à valider est une piste de 5 mm de largeur et de 3,85 cm de longueur. D'après l'étude menée dans la sous-section 3.3.3, le maillage optimal conduit à l'utilisation de 4 mailles avec un ratio optimal associé de 47. La distance d'oubli de cette piste est

de 4,81 cm, elle est donc maillée conformément à la première méthode illustrée par la figure 3.14 (en haut). Sachant que le milieu de la longueur de la piste (soit  $\frac{3,85 \times 10^{-2}}{2} \approx 1,93$  cm) est contenu dans la quatrième maille, le maillage final de la piste de cuivre est de 8 mailles (dédoublé du maillage du côté du MOSFET).

Un capteur de température est placé au milieu de la piste de cuivre. La maille correspondante choisie est la quatrième en partant de la languette (le choix de la quatrième maille à partir du MOSFET, qui est donc aussi la cinquième en partant de la languette, aurait été tout aussi justifié)

La température mesurée de la piste de cuivre lors de l'essai et la température simulée de la maille correspondante sont données sur la figure 3.26. Les signaux injectés aux entrées du bloc « piste de cuivre » sont :

- la température mesurée du MOSFET ;
- la température mesurée de la carte électronique ;
- la température simulée de la dernière maille de la languette.

La sortie du bloc « piste de cuivre » est injectée à l'entrée correspondante du bloc « languette ».

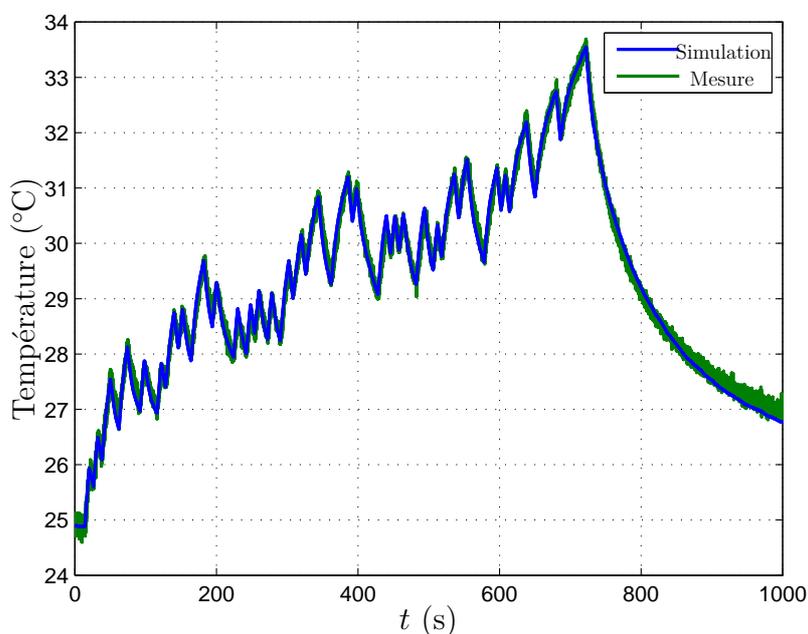


FIGURE 3.26 – Température mesurée et simulée de la piste de cuivre

La variation maximale de la température mesurée lors de l'essai est d'environ 9°C, la moyenne de l'erreur relative relevée est de 1,2% et la valeur maximale de l'erreur relative

vaut 5,6 %. Ces résultats permettent de valider le modèle de la piste de cuivre.

#### 3.4.4.8 Carte électronique

La température mesurée de la carte électronique lors de l'essai et sa température issue de la simulation de son modèle électrothermique sont donnés sur la figure 3.27. Les signaux injectés aux entrées du bloc « carte électronique » sont :

- la température ambiante ;
- la température mesurée du MOSFET ;
- la température simulée de la piste de cuivre.

La sortie du bloc « carte électronique » est injectée à l'entrée correspondante du bloc « piste de cuivre ».

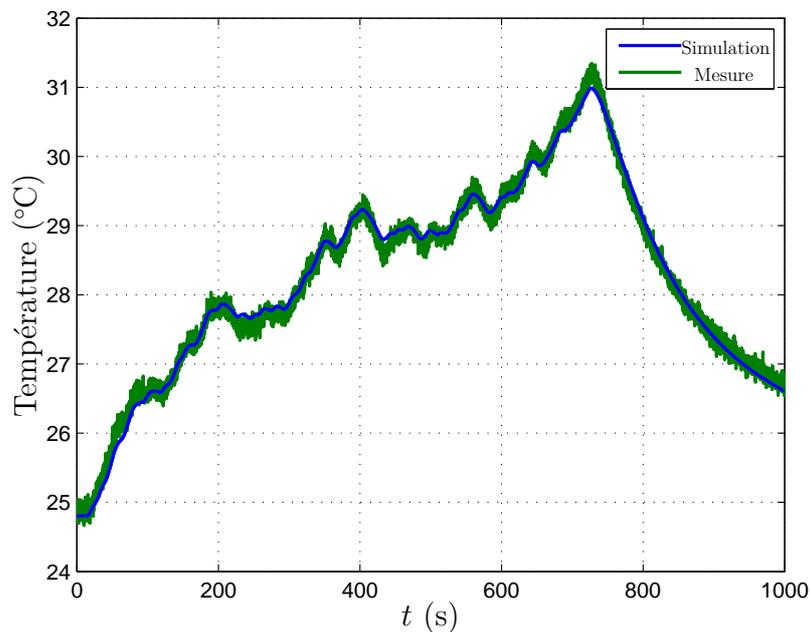


FIGURE 3.27 – Température mesurée et simulée de la carte électronique

La variation maximale de la température mesurée lors de l'essai est d'environ 7°C, la moyenne de l'erreur relative relevée est de 1,37 % et la valeur maximale de l'erreur relative vaut 6,64 %. Ces résultats permettent de valider le modèle de la carte électronique.

### 3.4.5 Validation de la chaîne de faible puissance complète

Plutôt que de présenter à nouveau les courbes de températures simulées et mesurées pour chaque composant lorsque la chaîne complète est formée, un tableau récapitulatif des nouvelles erreurs obtenues est proposé.

Le tableau 3.1 donne la variation de température maximale mesurée durant l'essai, la moyenne de l'erreur relative en pourcentage et la valeur maximale de l'erreur relative en pourcentage pour chaque composant validé précédemment.

Composant	$\Delta T$ (°C)	$E_{\text{moy}}$ (%)	$E_{\text{max}}$ (%)
Sertissage	16,37	2,39	8,22
Clip	17,33	1,82	5,78
Languette	10,84	3,74	12,31
Air de la cellule	10,87	2,67	8,24
Porte-clips	2,50	1,93	4,77
Embase	3,62	2,54	5,11
Piste de cuivre	9,02	1,75	7,9
Carte électronique	6,68	1,61	7,56

TABLE 3.1 – Récapitulatif des résultats obtenus pour la validation de la chaîne électrothermique de faible puissance

Les plus grandes valeurs maximales de la variation de température mesurée durant l'essai apparaissent pour le clip et le sertissage, en raison de leur proximité avec le point de contact qui produit une grosse quantité de chaleur en comparaison à ses dimensions.

D'une manière générale, la valeur maximale de l'erreur relative est inférieure à 10 % sauf pour la languette. En effet, il est rappelé que la température simulée d'un composant est supposée homogène dans tout son volume. La température calculée est celle se situant au centre du composant. Pour la languette, le capteur de température a été placé, pour des raisons de commodité, à l'extrémité de la maille inférieure avant d'entrer dans l'embase. Le capteur est donc éloigné du centre de la maille, ce qui augmente l'erreur entre la température issue du modèle et celle de la mesure. Un maillage plus fin de la languette pourrait résoudre le problème. Cependant, vu les résultats obtenus et pour ne pas alourdir l'ordre du modèle, le maillage avec trois mailles est tout de même conservé pour la languette.

De même, la valeur moyenne de l'erreur relative est inférieure à 4 % sur l'ensemble

des composants.

Ainsi, les résultats du tableau 3.1 permettent de valider le modèle du banc électrothermique de faible puissance.

## 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, la méthode nodale a été utilisée pour modéliser différents composants d'une chaîne électrothermique dite de faible puissance. Cette chaîne s'intéresse à une carte électronique de boîtier automobile sur laquelle est montée un connecteur relié à un fil électrique.

Lorsque certains composants sont trop grands, ou que leur gradient longitudinal de température est susceptible d'être important, un maillage est utilisé. Il a été montré que les modèles analytiques d'un fil électrique et d'une piste de cuivre peuvent se mettre sous une même forme de fonction de transfert. Il s'agit de la même classe de fonction de transfert présentée au chapitre 2. Ainsi, la même méthode de maillage optimale basée sur la norme  $\mathcal{H}_2$  a pu être appliquée pour mailler efficacement ces composants. De plus, deux formes dérivées de ce maillage optimal ont été proposées dans ce chapitre selon si la longueur du composant est strictement supérieure ou égale à deux fois sa distance d'oubli ou non.

Pour les languettes, le maillage s'est imposé de lui-même lorsque certaines de leurs parties sont soumises à des conditions différentes (contact local avec l'embase).

Un banc d'essais dédié a été mis en place, ce qui a permis de valider expérimentalement les modèles de composants présentés dans ce chapitre. Un protocole d'essai, qui consiste à envoyer une sollicitation en courant dans les circuits électriques a permis de faire varier la température des composants. Des thermocouples reliés à une chaîne d'acquisition spécialisée ont été utilisés pour mesurer la température desdits composants. Enfin, la comparaison des résultats obtenus expérimentalement et en simulation en réponse aux mêmes sollicitations a permis de valider les modèles électrothermiques proposés.

Ces modèles sont utilisés dans le dernier chapitre de ce mémoire dans le but d'estimer les résistances de contact dans les connecteurs de faible puissance.

# Chapitre 4

## Modélisation électrothermique d'une prise de recharge véhicule et de son faisceau

---

4.1	Présentation de la chaîne électrothermique étudiée . . . . .	141
4.2	Modélisation de la chaîne électrothermique forte puissance . . . . .	141
4.2.1	Chaîne de forte puissance . . . . .	141
4.2.2	Faisceau véhicule . . . . .	143
4.2.3	Prise véhicule . . . . .	149
4.3	Validation de la chaîne électrothermique forte puissance . . . . .	157
4.3.1	Essai et protocole de validation utilisés . . . . .	158
4.3.2	Validation du faisceau véhicule . . . . .	159
4.3.3	Validation de la prise véhicule . . . . .	165
4.4	Validation de la chaîne de forte puissance complète . . . . .	169
4.5	Conclusion . . . . .	169

---

« ... La pratique, c'est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi. »

*Albert Einstein*

## 4.1 Présentation de la chaîne électrothermique étudiée

Deux chaînes électrothermiques, constituées de composants présentés dans la sous-section 1.2.1.2 du chapitre 1, sont étudiées dans ce mémoire. Ce chapitre se concentre sur la modélisation et la validation de la seconde chaîne dite « de forte puissance ».

## 4.2 Modélisation de la chaîne électrothermique forte puissance

### 4.2.1 Chaîne de forte puissance

La chaîne de forte puissance consiste en une prise de recharge de Peugeot iOn (prise de type 1) avec son faisceau. La prise véhicule, illustrée de face (c'est-à-dire telle que l'utilisateur la voit sur son véhicule) sur la figure 4.1, contient cinq contacts mâles (languettes) insérés dans des cellules prévues à cet effet. Ainsi, la prise supporte :

- une languette pour la phase (courant d'aller) ;
- une languette pour le neutre (courant de retour) ;
- une languette pour la Terre ;
- une languette pour le contrôle de présence (sert à vérifier que le cordon de recharge est bien branché) ;
- une languette pour la communication avec l'infrastructure.

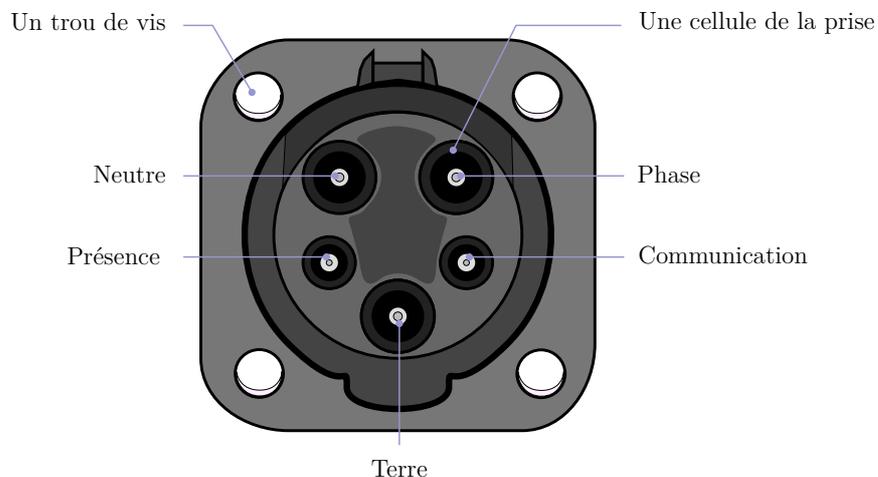


FIGURE 4.1 – Représentation d'une prise de recharge véhicule vue de face

La prise est fixée au véhicule grâce à quatre vis et permet de brancher le cordon de recharge lui même relié à une infrastructure de recharge (prise électrique domestique classique, wallbox, borne de recharge).

Le faisceau, représenté sans la prise sur la figure 4.2, relie les contacts de la prise véhicule au convertisseur qui assure ensuite la charge de la batterie de traction. Le faisceau se compose d'un toron et de six fils :

- un fil de  $2,5 \text{ mm}^2$  pour la phase ;
- un fil de  $2,5 \text{ mm}^2$  pour le neutre ;
- un fil de  $2,5 \text{ mm}^2$  pour la terre ;
- un fil de  $0,75 \text{ mm}^2$  pour le contrôle de présence ;
- deux fils de  $0,75 \text{ mm}^2$  pour la communication avec l'infrastructure.

Les fils sont reliés aux languettes de la prise et sont libres sur quelques centimètres avant d'être regroupés puis maintenus ensemble par du scotch noir. Le rassemblement de ces fils constitue alors le toron.

**Remarque 16.** *Le lecteur attentif aura remarqué qu'il y a six fils pour seulement cinq languettes (cf. figure 4.1). Cependant, comme illustré sur la figure 4.2, deux fils du faisceau véhicule sont reliés à la languette dédiée à la communication entre le véhicule et l'infrastructure.*

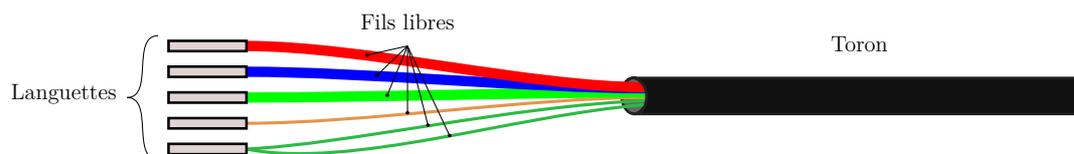


FIGURE 4.2 – Illustration d'un faisceau de recharge du côté véhicule

Le schéma de la figure 4.3 représente l'agencement des composants dans une ligne de la chaîne électrothermique de forte puissance. Le « sertissage » fait référence à la partie assurant la liaison électrique entre un fil et une languette. L'« air de la cellule » désigne une petite portion d'air piégée dans la cellule correspondante de la prise véhicule. La « zone de contact » désigne l'interface entre la partie de la languette insérée dans le clip du cordon de recharge. Le rôle de chaque composant de la chaîne de forte puissance et leur modèle électrothermique (obtenu par la méthode nodale déjà présentée aux chapitres 2 et 3) sont donnés dans la suite de ce chapitre. Les différents modèles de composants sont ensuite agrégés entre eux pour former la chaîne de forte puissance complète.

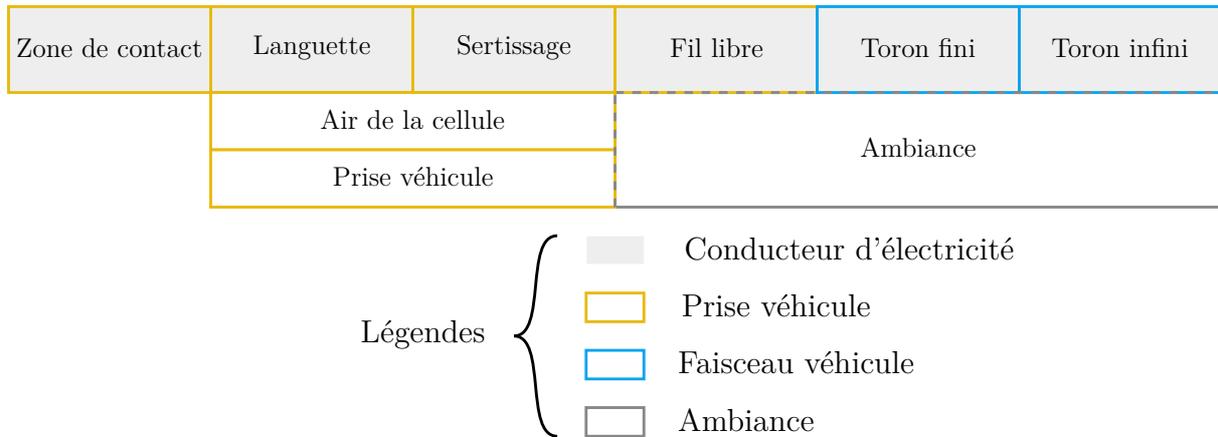


FIGURE 4.3 – Schématisation de la chaîne électrothermique de forte puissance

Avant de poursuivre, il est supposé que la mesure de température ambiante est accessible grâce à un capteur approprié.

Pour les besoins de ce mémoire, il est également supposé que la longueur du faisceau véhicule est supérieure à deux fois sa distance d'oubli. Ceci veut dire que le convertisseur de puissance et la batterie n'ont pas d'influence thermique sur la prise véhicule et ne sont donc pas modélisés. Dans la pratique, la longueur réelle du faisceau véhicule étudiée est d'environ 80 cm pour une distance d'oubli avoisinant 45 cm . Une étude plus poussée devrait peut-être tenir compte de l'influence thermique du convertisseur de puissance sur le faisceau véhicule.

Enfin, l'ensemble des composants du cordon de recharge n'est volontairement pas modélisé. Les raisons de cette omission sont données dans le dernier chapitre de ce manuscrit.

## 4.2.2 Faisceau véhicule

### 4.2.2.1 Toron de longueur finie et infinie

Le toron désigne le regroupement des six fils du faisceau véhicule dans une gaine (du scotch noir d'électricien dans le cadre de ce mémoire). Chaque fil électrique pourrait être modélisé indépendamment. Cependant, une telle modélisation s'avérerait compliquée puisque, d'une part, il faudrait distinguer la partie des fils libres de la partie des fils dans le toron. D'autre part, il est difficile de prévoir leurs positions respectives dans le toron. En effet, un fil situé au milieu du toron est soumis à des conditions thermiques plus sévères qu'un fil situé en périphérie. Il est également fort peu probable qu'un fil soit à la même

position (milieu ou périphérie du toron) sur toute sa longueur. De plus, les fils sont de différentes dimensions et ne sont pas forcément tous traversés par le même courant ce qui conduit localement à une non-uniformité du gradient radial.

Pour palier ce problème et pour simplifier le modèle, il est proposé de considérer le toron comme un composant unique. Cette solution, basée sur les travaux de [Ilgevcicius, 2004] puis repris dans [Nguyen, 2013], propose de calculer les caractéristiques physiques utiles du toron à partir des propriétés physiques des fils et des sections d'air emprisonnées.

La figure 4.4 présente une section donnée du vrai toron ramenée à une section cylindrique de même périmètre <sup>(1)</sup> composée d'un matériau équivalent. Ainsi, il est supposé que le gradient radial est uniforme (bien que ce ne soit pas rigoureusement le cas). Ceci implique que la température est identique en tout point de la section cylindrique équivalente. Cette température représente alors la valeur moyenne sur l'ensemble des points de la section du vrai toron.

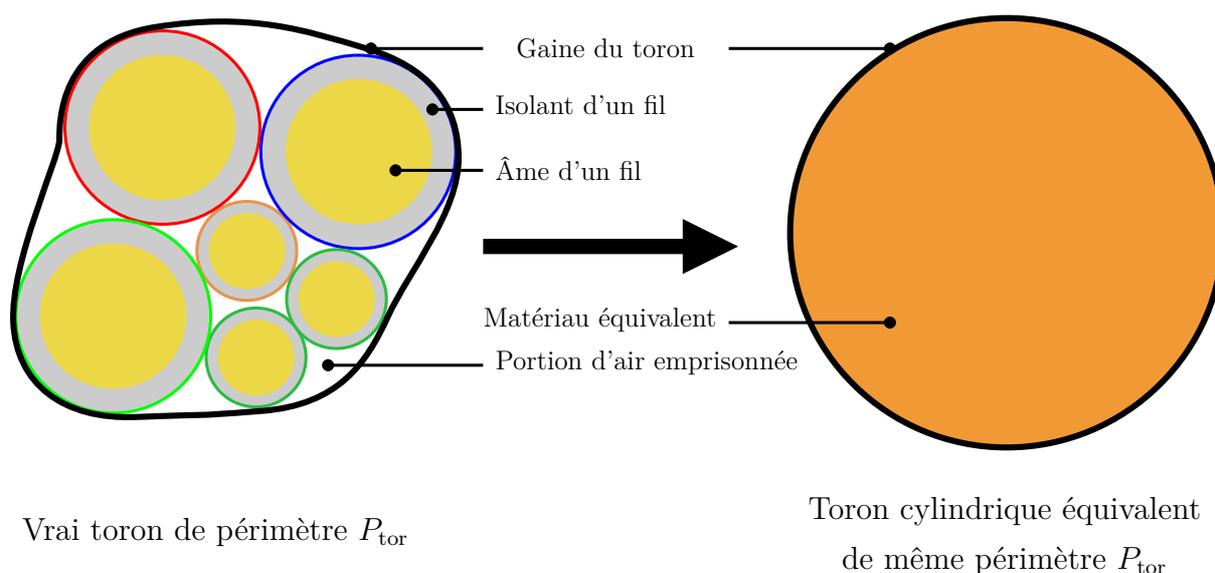


FIGURE 4.4 – Principe de simplification d'un toron

Le rayon du toron cylindrique équivalent est déterminé par la formule suivante :

$$r_{\text{tor}} = \frac{P_{\text{tor}}}{2\pi}, \quad (4.1)$$

ce qui permet d'en déduire sa section équivalente :

$$S_{\text{tor}} = \pi r_{\text{tor}}^2. \quad (4.2)$$

1. Il est supposé que le périmètre du vrai toron est connu, par exemple en le mesurant directement.

La section totale d'air emprisonnée dans le toron est donnée par :

$$S_{\text{air}} = S_{\text{tor}} - \sum_{i=1}^6 S_{\text{f}}^i, \quad (4.3)$$

où  $S_{\text{f}}^i$  désigne la section équivalente (âme + isolant) du  $i$ -ème fil électrique qui compose le toron.

La conductivité thermique équivalente du toron se calcule conformément à la relation :

$$k_{\text{tor}} = \frac{\sum_{i=1}^6 k_{\text{f}}^i S_{\text{f}}^i + k_{\text{air}} S_{\text{air}} + k_{\text{gaine}} (S_{\text{tor}} - \pi (r_{\text{tor}} - H_{\text{gaine}})^2)}{S_{\text{tor}}}, \quad (4.4)$$

où :

- $k_{\text{f}}^i$  est la conductivité thermique équivalente du  $i$ -ème fil électrique qui compose le toron ;
- $k_{\text{air}}$  est la conductivité thermique de l'air ;
- $k_{\text{gaine}}$  est la conductivité thermique de la gaine du toron ;
- $H_{\text{gaine}}$  est l'épaisseur de la gaine du toron.

La masse volumique équivalente est donnée par :

$$\mu_{\text{tor}} = \frac{\sum_{i=1}^6 \mu_{\text{f}}^i S_{\text{f}}^i + \mu_{\text{air}} S_{\text{air}} + \mu_{\text{gaine}} (S_{\text{tor}} - \pi (r_{\text{tor}} - H_{\text{gaine}})^2)}{S_{\text{tor}}}, \quad (4.5)$$

où :

- $\mu_{\text{f}}^i$  est la masse volumique équivalente du  $i$ -ème fil électrique qui compose le toron ;
- $\mu_{\text{air}}$  est la masse volumique de l'air ;
- $\mu_{\text{gaine}}$  est la masse volumique de la gaine du toron.

Enfin la chaleur massique du toron s'écrit :

$$\mathcal{C}_{\text{tor}} = \frac{\sum_{i=1}^6 \mathcal{C}_{\text{f}}^i \mu_{\text{f}}^i S_{\text{f}}^i + \mathcal{C}_{\text{air}} \mu_{\text{air}} S_{\text{air}} + \mathcal{C}_{\text{gaine}} \mu_{\text{gaine}} (S_{\text{tor}} - \pi (r_{\text{tor}} - H_{\text{gaine}})^2)}{\mu_{\text{tor}} S_{\text{tor}}}, \quad (4.6)$$

où :

- $\mathcal{C}_{\text{f}}^i$  est la chaleur massique équivalente du  $i$ -ème fil électrique qui compose le toron ;
- $\mathcal{C}_{\text{air}}$  est la chaleur massique de l'air ;
- $\mathcal{C}_{\text{gaine}}$  est la chaleur massique de la gaine.

Dans ce mémoire, le toron est supposé baigner dans l'air ambiant et protégé des rayons du Soleil. Il échange donc de la chaleur par convection et rayonnement avec le milieu ambiant.

### Toron de longueur infinie

Comme pour le fil électrique, le toron de longueur infinie n'est plus sujet à la conduction longitudinale de chaleur. Ainsi, la convection, le rayonnement et l'effet Joule affectent son comportement électrothermique. L'effet Joule produit par le toron n'est autre que la somme des effets Joule générés par les âmes respectives de chaque fil.

La température du toron de longueur infinie  $T_{\text{tor}}^{\text{inf}}$  est régie par l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\text{tor}} \mu_{\text{tor}} S_{\text{tor}} \frac{dT_{\text{tor}}^{\text{inf}}(t)}{dt} = & h_{\text{tor}}^{\text{inf}} P_{\text{tor}} (T_{\text{a}}(t) - T_{\text{tor}}^{\text{inf}}(t)) + \sigma \varepsilon_{\text{tor}} (T_{\text{a}}(t)^4 - T_{\text{tor}}^{\text{inf}}(t)^4) \\ & + \sum_{i=1}^6 \frac{\rho_{\text{c}}^i}{S_{\text{c}}^i} I^i(t)^2, \end{aligned} \quad (4.7)$$

où :

- $h_{\text{tor}}^{\text{inf}}$  est le coefficient d'échange par convection entre le toron infini et l'air ambiant ;
- $\varepsilon_{\text{tor}}$  est l'émissivité de la gaine du toron ;
- $\rho_{\text{c}}^i$  est la conductivité électrique de l'âme du  $i$ -ème fil qui compose le toron ;
- $S_{\text{c}}^i$  est section de l'âme du  $i$ -ème fil qui compose le toron ;
- $I^i$  est l'intensité du courant traversant le  $i$ -ème fil qui compose le toron.

### Toron de longueur finie

Une fois mis sous sa forme cylindrique équivalente le toron peut-être vu comme un gros fil électrique. Ainsi, le toron de longueur finie est modélisé par un maillage sur toute sa distance d'oubli.

Pour ne pas alourdir ce manuscrit, la démonstration du modèle par maillage et celle du modèle analytique du toron ne sont pas développées puisqu'elles sont en tout point similaires à celles du fil électrique et déjà présentées au chapitre 2. Par conséquent, la méthode d'optimisation du maillage du toron se déroule de façon analogue à celle d'un fil électrique.

Sachant que les mailles s'échangent de la chaleur par conduction et qu'elles en échangent également par convection et rayonnement avec l'air ambiant, le modèle de

toron par maillage est donné par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} C_{\text{tor}}^1 \frac{dT_{\text{tor}}^1(t)}{dt} \\ \vdots \\ C_{\text{tor}}^i \frac{dT_{\text{tor}}^i(t)}{dt} \\ \vdots \\ C_{\text{tor}}^N \frac{dT_{\text{tor}}^N(t)}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \phi_e(t) + \frac{T_{\text{tor}}^2(t) - T_{\text{tor}}^1(t)}{R_{\text{tor}}^1 + R_{\text{tor}}^2} + h_{\text{tor}}^1 A_{\text{tor}}^1 (T_a(t) - T_{\text{tor}}^1(t)) \\ \vdots \\ \frac{T_{\text{tor}}^{i-1}(t) - T_{\text{tor}}^i(t)}{R_{\text{tor}}^{i-1} + R_{\text{tor}}^i} + \frac{T_{\text{tor}}^{i+1}(t) - T_{\text{tor}}^i(t)}{R_{\text{tor}}^{i+1} + R_{\text{tor}}^i} + h_{\text{tor}}^i A_{\text{tor}}^i (T_a(t) - T_{\text{tor}}^i(t)) \\ \vdots \\ \frac{T_{\text{tor}}^{N-1}(t) - T_{\text{tor}}^N(t)}{R_{\text{tor}}^{N-1} + R_{\text{tor}}^N} + \frac{T_{\text{tor}}^{\text{inf}}(t) - T_{\text{tor}}^N(t)}{R_{\text{tor}}^N} + h_{\text{tor}}^N A_{\text{tor}}^N (T_a(t) - T_{\text{tor}}^N(t)) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} \sigma \varepsilon_{\text{tor}} A_{\text{tor}}^1 (T_{\text{tor}}^a(t)^4 - T_{\text{tor}}^1(t)^4) + L_{\text{tor}}^1 \sum_{i=1}^6 \frac{\rho_c^i}{S_c^i} I^i(t)^2 \\ \vdots \\ \sigma \varepsilon_{\text{tor}} A_{\text{tor}}^i (T_{\text{tor}}^a(t)^4 - T_{\text{tor}}^i(t)^4) + L_{\text{tor}}^i \sum_{i=1}^6 \frac{\rho_c^i}{S_c^i} I^i(t)^2 \\ \vdots \\ \sigma \varepsilon_{\text{tor}} A_{\text{tor}}^N (T_{\text{tor}}^a(t)^4 - T_{\text{tor}}^N(t)^4) + L_{\text{tor}}^N \sum_{i=1}^6 \frac{\rho_c^i}{S_c^i} I^i(t)^2 \end{bmatrix}, \tag{4.8}
 \end{aligned}$$

où :

- $L_{\text{tor}}^i$  est la longueur de la maille  $i$  ;
- $C_{\text{tor}}^i = \mathcal{C}_{\text{tor}} \mu_{\text{tor}} S_{\text{tor}} L_{\text{tor}}^i$  est la capacité thermique de la maille  $i$  ;
- $R_{\text{tor}}^i = \frac{L_{\text{tor}}^i}{2k_{\text{tor}} S_{\text{tor}}}$  est la résistance thermique de la maille  $i$  ;
- $A_{\text{tor}}^i = P_{\text{tor}} L_{\text{tor}}^i$  est la surface d'échange de chaleur entre la maille  $i$  et l'air ambiant ;
- $h_{\text{tor}}^i$  est le coefficient de convection entre la maille  $i$  et l'air ambiant.

Le flux de chaleur rentrant dans le toron correspond à la somme des échanges thermiques par conduction entre la première maille du toron et la dernière maille de chaque fil libre, soit :

$$\phi_e(t) = \sum_{i=1}^6 \frac{T_{\text{f}}^{Ni}(t) - T_{\text{tor}}^1(t)}{R_{\text{f}}^{Ni} + R_{\text{tor}}^1}, \tag{4.9}$$

où :

- $T_{\text{f}}^{Ni}$  est la température de la dernière maille du  $i$ -ème fil libre ;
- $R_{\text{f}}^{Ni}$  est la résistance thermique de la dernière maille du  $i$ -ème fil libre.

Pour établir le modèle analytique de référence nécessaire à l'optimisation du maillage, le choix des conditions aux limites :

$$-k_{\text{tor}} S_{\text{tor}} \left. \frac{\partial T_{\text{tor}}(x, s)}{\partial x} \right|_{x=0} = \phi(0, s) = \phi_e(s), \tag{4.10}$$

et

$$-k_{\text{tor}} S_{\text{tor}} \left. \frac{\partial T_{\text{tor}}(x, s)}{\partial x} \right|_{x \rightarrow \infty} = 0, \tag{4.11}$$

conduit à :

$$T_{\text{tor}}(x, s) = \frac{e^{-x\sqrt{\frac{1}{k_{\text{tor}}S_{\text{tor}}}(\mathcal{C}_{\text{tor}}\mu_{\text{tor}}S_{\text{tor}}s + h_{\text{tor}}^{\text{cr}}P_{\text{tor}})}}}{\sqrt{k_{\text{tor}}S_{\text{tor}}(\mathcal{C}_{\text{tor}}\mu_{\text{tor}}S_{\text{tor}}s + h_{\text{tor}}^{\text{cr}}P_{\text{tor}})}}\phi_e(s) + \frac{h_{\text{tor}}^{\text{cr}}P_{\text{tor}}T_a(s)}{\mathcal{C}_{\text{tor}}\mu_{\text{tor}}S_{\text{tor}}s + h_{\text{tor}}^{\text{cr}}P_{\text{tor}}} + \sum_{i=1}^6 \frac{\rho_c^i I^i(s)^2}{S_c^i (\mathcal{C}_{\text{tor}}\mu_{\text{tor}}S_{\text{tor}}s + h_{\text{tor}}^{\text{cr}}P_{\text{tor}})}, \quad (4.12)$$

avec  $h_{\text{tor}}^{\text{cr}}$  le coefficient de convection et rayonnement équivalent linéarisé autour d'un point de fonctionnement.

La distance d'oubli du toron est alors donnée par :

$$D_{\text{tor}} = -\ln(0.01) \sqrt{\frac{k_{\text{tor}}r_{\text{tor}}}{2h_{\text{tor}}^{\text{cr}}}}. \quad (4.13)$$

**Remarque 17.** La distance d'oubli pour le toron considéré dans ce manuscrit est d'environ 45 cm.

### Fil électriques libre

Un fil électrique libre est serti à l'une de ses extrémités avec une languette, puis est rassemblé avec les autres fils après quelques centimètres pour former le toron. Il est donc nécessaire d'utiliser un maillage pour modéliser le comportement thermique d'un fil électrique donné du faisceau véhicule. Le modèle analytique, le modèle maillé, ainsi que la méthode de maillage optimal d'un fil sur sa distance d'oubli sont rigoureusement identiques à ceux présentés dans le chapitre 2 de ce mémoire.

Il faut cependant souligner, que les fils du faisceau véhicule sont généralement libres sur une longueur de moins de 10 cm. Cette longueur est bien inférieure aux distances d'oubli moyennes des fils de 0,75 mm<sup>2</sup> et 2,5 mm<sup>2</sup> valant respectivement 25,1 cm et 39,7 cm ( cf. tableau 2.1 du chapitre 2). Par conséquent, le gradient longitudinal de température n'est jamais nul sur toute la longueur réelle d'un fil libre. La méthode de maillage à adopter est alors similaire à celle d'une piste de cuivre lorsque sa longueur réelle est inférieure ou égale à deux fois sa distance d'oubli. Il est rappelé que cette méthode, déjà illustrée par la figure 3.14 (en haut) du chapitre précédent, consiste dans un premier temps à mailler le composant (ici le fil) normalement avec la méthode et le critère présentés au chapitre 2. Le maillage ainsi obtenu, est ensuite tronqué à partir du milieu de la longueur réelle du composant puis dupliqué de façon symétrique sur sa seconde moitié.

Un fil électrique libre échange de la chaleur par conduction avec le toron et son sertissage. Des échanges de chaleur se font également par convection et rayonnement avec l'air ambiant. Par conséquent, le système d'équations différentielles qui régit la température des mailles d'un fil libre s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} C_f^1 \frac{dT_f^1(t)}{dt} \\ \vdots \\ C_f^i \frac{dT_f^i(t)}{dt} \\ \vdots \\ C_f^N \frac{dT_f^N(t)}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{T_s(t)-T_f^1(t)}{R_s+R_f^1} + \frac{T_f^2(t)-T_f^1(t)}{R_f^2+R_f^1} + h_f^1 A_f^1 (T_a(t) - T_f^1(t)) \\ \vdots \\ \frac{T_f^{i-1}(t)-T_f^i(t)}{R_f^{i-1}+R_f^i} + \frac{T_f^{i+1}(t)-T_f^i(t)}{R_f^{i+1}+R_f^i} + h_f^i A_f^i (T_a(t) - T_f^i(t)) \\ \vdots \\ \frac{T_f^{N-1}(t)-T_f^N(t)}{R_f^{N-1}+R_f^N} + \frac{T_{\text{tor}}(t)-T_f^N(t)}{R_{\text{tor}}^1+R_f^N} + h_f^N A_f^N (T_a(t) - T_f^N(t)) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} \sigma \varepsilon_f A_f^1 (T_a(t)^4 - T_f^1(t)^4) + \frac{\rho_c L_f^1}{S_c} I(t)^2 \\ \vdots \\ \sigma \varepsilon_f A_f^i (T_a(t)^4 - T_f^i(t)^4) + \frac{\rho_c L_f^i}{S_c} I(t)^2 \\ \vdots \\ \sigma \varepsilon_f A_f^N (T_a(t)^4 - T_f^N(t)^4) + \frac{\rho_c L_f^N}{S_c} I(t)^2 \end{bmatrix}, \tag{4.14}
 \end{aligned}$$

où

- $T_f^i$  est la température de la  $i$ -ème maille du fil considéré ;
- $C_f^i$  est la capacité thermique de la  $i$ -ème maille du fil considéré ;
- $R_f^i$  est la résistance thermique de la  $i$ -ème maille du fil considéré ;
- $A_f^i$  est la surface d'échange entre l'air ambiant et  $i$ -ème maille du fil considéré ;
- $L_f^i$  est longueur de la  $i$ -ème maille du fil considéré ;
- $\rho_c$  est résistivité du conducteur du fil considéré ;
- $S_c$  est la section du conducteur du fil considéré ;
- $T_s$  est la température du sertissage ;
- $R_s$  est la résistance thermique du sertissage ;
- $I$  est l'intensité du courant traversant le fil considéré.

### 4.2.3 Prise véhicule

#### Cellule d'air de la prise

L'air emprisonné dans une cellule de la prise véhicule est une zone de tampon thermique entre la partie plastique de la prise et le sertissage (ou la languette). Le nombre de

Rayleigh calculé est trop faible pour que la convection s'opère entre le sertissage (ou la languette) et l'air de la cellule de la prise. De même, la faible émissivité du sertissage (ou de la languette) et les faibles surfaces d'échanges mises en jeu permettent de négliger le rayonnement thermique. C'est donc la conduction qui prédomine. Le recours à un facteur de forme s'avère nécessaire pour établir la résistance thermique entre le sertissage (ou la languette) et l'air.

Il est à noter que le schéma de la figure 4.3 met également en jeu un échange entre l'air de la cellule et la température ambiante (ambiance). En effet, contrairement au montage de faible puissance, l'espace entre le sertissage (ou la languette) et les parois de la cellule n'est pas étroit, ce qui permet à la température ambiante d'influer sur la température de l'air de la cellule. Dans le cadre de cet échange, la convection et le rayonnement peuvent également être négligés au profit de la conduction.

La cellule de la prise étudiée dans ce mémoire a une forme cylindrique tout comme le sertissage. La figure 4.5 présente une coupe transversale d'une cellule de la prise. Le sertissage de rayon  $r_s$  est totalement englobé par l'air, lui-même cerné par les parois de la cellule de rayon  $r_{cel}$ . L'air remplit tout l'espace entre le sertissage et la cellule. Les traits en pointillés représentent une paroi fictive de l'air de rayon  $r_{air} = \frac{r_s + r_{cel}}{2}$ .

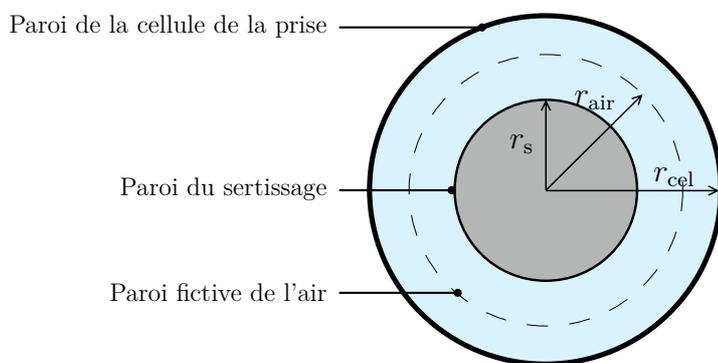


FIGURE 4.5 – Coupe transversale d'une cellule de la prise véhicule

Ainsi, le facteur de forme se calcule grâce à la formule suivante [Hahne et Grigull, 1975, tableau 2 : cas 1] :

$$f_{s \leftrightarrow \text{air}} = \frac{2\pi L_s}{\ln\left(\frac{r_{\text{air}}}{r_s}\right)}, \quad (4.15)$$

où  $L_s$  est la longueur du sertissage.

La résistance thermique entre le sertissage et l'air se déduit alors de la formule de

l'équation (3.9) du chapitre précédent :

$$R_{s\leftrightarrow\text{air}} = \frac{1}{f_{s\leftrightarrow\text{air}} \times k_{\text{air}}}. \quad (4.16)$$

De même le facteur de forme entre la prise véhicule et l'air d'une cellule s'écrit :

$$f_{pv\leftrightarrow\text{air}} = \frac{2\pi L_{\text{cel}}}{\ln\left(\frac{r_{\text{cel}}}{r_{\text{air}}}\right)}, \quad (4.17)$$

où  $L_{\text{cel}}$  est la longueur de la cellule.

La résistance thermique entre la prise véhicule et l'air d'une cellule est donc donnée par :

$$R_{pv\leftrightarrow\text{air}} = \frac{1}{f_{pv\leftrightarrow\text{air}} \times k_{\text{air}}}. \quad (4.18)$$

Comme présenté plus loin dans ce chapitre, deux mailles sont utilisées pour modéliser le comportement électrothermique de la languette. Cependant, une seule des deux mailles échange de la chaleur avec l'air de la cellule. Cette maille correspond à une partie de la languette qui n'est pas de forme cylindrique mais plutôt plate. Il s'agit donc d'une plaque contenu dans un cylindre, d'après [Hahne et Grigull, 1975, tableau 1 : cas 9], le facteur de forme est donné par :

$$f_{l\leftrightarrow\text{air}} \approx \frac{8L_1^1}{\pi} \ln\left(\frac{4}{1 - \frac{W_1}{2r_{\text{cel}}}}\right), \quad (4.19)$$

où  $W_1$  et  $L_1^1$  désignent respectivement la largeur et la longueur de la partie plate de la languette.

La résistance thermique entre la partie plate de la languette et l'air est donc donnée par :

$$R_{l\leftrightarrow\text{air}} = \frac{1}{f_{l\leftrightarrow\text{air}} \times k_{\text{air}}}. \quad (4.20)$$

L'échange de chaleur entre la température ambiante et l'air de la cellule se fait au travers de la résistance thermique donnée par :

$$R_{\text{amb}\leftrightarrow\text{air}} = \frac{1}{f_{\text{amb}\leftrightarrow\text{air}} \times k_{\text{air}}}, \quad (4.21)$$

où  $f_{\text{amb}}$  désigne le facteur de forme entre la température ambiante et l'air de la cellule. En revanche, aucune formule de calcul de ce facteur de forme (ou d'un cas s'en rapprochant)

n'est disponible dans la littérature. Ce dernier a donc été empiriquement ajusté pour garantir la meilleure précision possible entre les résultats issus de la simulation de la température de l'air de la cellule et sa mesure.

Ainsi, l'équation différentielle régissant la température de l'air dans une cellule de la prise s'écrit :

$$C_{\text{air}} \frac{dT_{\text{air}}(t)}{dt} = \frac{T_s(t) - T_{\text{air}}(t)}{R_{s \leftrightarrow \text{air}}} + \frac{T_1^1(t) - T_{\text{air}}(t)}{R_{1 \leftrightarrow \text{air}}} + \frac{T_{\text{pv}}(t) - T_{\text{air}}(t)}{R_{\text{pv} \leftrightarrow \text{air}}} + \frac{T_a(t) - T_{\text{air}}(t)}{R_{\text{amb} \leftrightarrow \text{air}}}, \quad (4.22)$$

où :

- $C_{\text{air}}$  est la capacité thermique de l'air de la cellule ;
- $T_1^1$  est la température de la partie plate de la languette ;
- $T_{\text{pv}}$  est la température de la prise véhicule.

### Sertissage

De façon analogue au montage de faible puissance, le sertissage assure ici la continuité du courant électrique entre un fil électrique et une languette. Une portion de fil est alors dénudée et sertie à l'arrière d'une languette.

Dans le cas du montage de forte puissance, l'épaisseur de la languette est non négligeable devant le diamètre du fil. De ce fait, les propriétés physiques d'un matériau équivalent constituant le sertissage sont déterminées. En rappelant que le sertissage est cylindrique, sa masse volumique  $\mu_s$ , sa conductivité thermique  $k_s$ , sa capacité thermique  $C_s$  et sa résistivité électrique  $\rho_s$  équivalentes sont données par :

$$\mu_s = \frac{\mu_c S_c L_s + \mu_1 (S_s - S_c) L_s}{S_s L_s} = \frac{\mu_c S_c + \mu_1 (S_s - S_c)}{S_s}, \quad (4.23)$$

$$k_s = \frac{k_c S_c + k_1 (S_s - S_c)}{S_s}, \quad (4.24)$$

$$C_s = \mu_c \mathcal{C}_c S_c L_s + \mu_1 \mathcal{C}_1 (S_s - S_c) L_s, \quad (4.25)$$

$$\rho_s = \frac{\rho_c \rho_1 S_s}{\rho_1 S_c + \rho_c (S_s - S_c)}, \quad (4.26)$$

où :

- $\mu_c$  est la masse volumique du conducteur du fil ;
- $k_c$  est la conductivité thermique de l'âme du fil ;
- $\mathcal{C}_c$  est la chaleur massique de l'âme du fil ;
- $\rho_c$  est la conductivité électrique de l'âme du fil ;

- $\mu_1$  est la masse volumique de la languette ;
- $k_1$  est la conductivité thermique de la languette ;
- $\mathcal{C}_1$  est la chaleur massique de la languette ;
- $\rho_1$  est la conductivité électrique de la languette ;
- $S_s$  est la section totale du sertissage.

Le sertissage échange de la chaleur par conduction avec la première maille du fil électrique, la languette et l’air prisonnier de la cellule. De plus, il est également soumis à l’effet Joule. L’équation différentielle régissant sa température s’écrit alors :

$$C_s \frac{dT_s(t)}{dt} = \frac{T_f^1(t) - T_s(t)}{R_f^1 + R_s} + \frac{T_1^1(t) - T_s(t)}{R_1^1 + R_s} + \frac{T_{\text{air}}(t) - T_s(t)}{R_{s \leftrightarrow \text{air}}} + \frac{\rho_s L_s}{S_s} I(t)^2, \quad (4.27)$$

avec  $R_1^1$  la résistance thermique de la partie plate de la languette.

### Languette

La languette s’insère dans une cellule et assure le contact (partie mâle) avec le cordon de recharge qui se branche dans la prise véhicule. En réalité, comme illustré sur la figure 4.6, la languette est plutôt plate près du sertissage puis devient un cylindre creux. C’est cette partie en forme de cylindre qui est insérée dans un clip du cordon de recharge. Ainsi, la languette est scindée en deux parties, ce qui donne naissance à deux mailles distinctes pour le modèle électrothermique de la languette.

La première maille de longueur  $L_1^1$  et de largeur  $W_1$  est associée à la partie plate de la languette. La seconde maille de longueur  $L_1^2$ , de rayon interne  $r_1^{\text{int}}$  et de rayon externe  $r_1^{\text{ext}}$  représente la partie cylindrique de la languette.

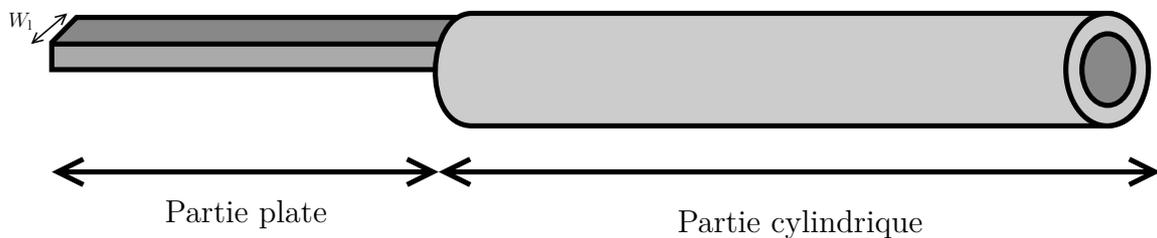


FIGURE 4.6 – Distinction des deux parties d’une languette du montage de forte puissance

La partie plate de la languette échange de la chaleur par conduction avec sa partie cylindrique, le sertissage et l’air de sa cellule. Sachant qu’elle génère également de la

chaleur par effet Joule, sa température est décrite par l'équation différentielle suivante :

$$C_1^1 \frac{dT_1^1(t)}{dt} = \frac{T_s(t) - T_1^1(t)}{R_s + R_1^1} + \frac{T_1^2(t) - T_1^1(t)}{R_1^2 + R_1^1} + \frac{T_{\text{air}}(t) - T_1^1(t)}{R_{1 \leftrightarrow \text{air}}} + \frac{\rho_1 L_1^1}{S_1^1} I(t)^2, \quad (4.28)$$

où :

- $T_1^2$  est la température de la partie cylindrique de la languette ;
- $R_1^2$  est la résistance thermique de la partie cylindrique de la languette ;
- $S_1^1$  est la section de la partie plate de la languette.

La partie cylindrique de la languette est insérée dans le clip du cordon de recharge pour former la zone de contact. Elle échange de la chaleur par conduction avec sa partie plate ainsi qu'avec la zone de contact. Il est supposé que la surface externe de la partie cylindrique de la languette est à la même température que la zone de contact. Ainsi, le facteur de forme entre la partie interne et externe du cylindre est aussi le facteur de forme entre la languette et la zone de contact. Ce facteur de forme est donné par :

$$f_{1 \leftrightarrow \text{zc}} = \frac{2\pi L_1^2}{\ln(r_1^{\text{ext}}/r_1^{\text{int}})}. \quad (4.29)$$

La résistance thermique entre la partie cylindrique de la languette et la zone de contact est alors donnée par :

$$R_{1 \leftrightarrow \text{zc}} = \frac{1}{f_{1 \leftrightarrow \text{zc}} \times k_1}. \quad (4.30)$$

Cette partie de la languette s'échauffant également par effet Joule, l'équation différentielle de la température de la seconde maille de la languette s'écrit donc :

$$C_1^2 \frac{dT_1^2(t)}{dt} = \frac{T_1^1(t) - T_1^2(t)}{R_1^1 + R_1^2} + \frac{T_{\text{zc}}(t) - T_1^2(t)}{R_{1 \leftrightarrow \text{zc}}} + \frac{\rho_1 L_1^2}{S_1^2} I(t)^2, \quad (4.31)$$

où :

- $T_{\text{zc}}$  est la température de la zone de contact ;
- $S_1^2$  est la section de la partie cylindrique de la languette.

### Zone de contact

La zone de contact se forme à l'interface du clip du cordon et de la partie cylindrique de la languette. De la même façon que pour le montage de faible puissance, il est supposé que les dimensions de la zone de contact sont très faibles par rapport à celles du clip et de la languette. Ainsi, la résistance thermique de la zone de contact est négligée devant

celle du clip et de la languette. De même, la capacité thermique de la zone de contact est considérée très faible (voir nulle).

Une résistance électrique de constriction se forme également au niveau du contact clip–languette. Cette résistance est déterminée par la méthode de mesure quatre fils déjà présentée au paragraphe 3.3.2.5 du chapitre 3.

Finalement, la zone de contact échange de la chaleur par conduction avec le clip et la languette et génère de la chaleur par effet Joule. L'équation différentielle en température de la zone de contact s'écrit :

$$C_{zc} \frac{dT_{zc}(t)}{dt} = \frac{T_1^2(t) - T_{zc}(t)}{R_{1 \leftrightarrow zc}} + \frac{T_{cl}(t) - T_{zc}(t)}{R_{cl \leftrightarrow zc}} + \mathcal{R}_{zc} I(t)^2, \quad (4.32)$$

où :

- $T_{zc}$  est la température de la zone de contact ;
- $C_{zc}$  est la capacité thermique de la zone de contact ;
- $T_{cl}$  est la température du clip ;
- $\mathcal{R}_{zc}$  est la résistance électrique de la zone de contact.

Le clip étant également un cylindre creux, la résistance thermique  $R_{c \leftrightarrow zc}$  entre le clip du cordon et la zone de contact est donnée par :

$$R_{zc \leftrightarrow cl} = \frac{1}{f_{zc \leftrightarrow cl} \times k_{cl}} \quad \text{avec} \quad f_{zc \leftrightarrow cl} = \frac{2\pi L_1^2}{\ln(r_{cl}^{ext}/r_{cl}^{int})}, \quad (4.33)$$

où :

- $k_{cl}$  est la conductivité du clip du cordon ;
- $r_{cl}^{ext}$  est le rayon externe du clip du cordon ;
- $r_{cl}^{int}$  est le rayon interne du clip du cordon.

### Prise véhicule

La prise véhicule désigne toute la partie plastique normalement encastrée dans le véhicule. Dans ce mémoire, la prise est entièrement à l'air libre et suspendue au dessus du sol.

Dans le cadre de ce manuscrit, les clips ont été volontairement extraits de la prise du cordon de recharge. Les clips sont ensuite directement enfoncés dans la prise véhicule sans la prise du cordon de recharge. Cette opération est faite pour des raisons pratiques, puisqu'il n'est pas possible de placer un capteur de température sur le clip lorsqu'il est à

sa place dans la prise du cordon de recharge.

Dans ce cas la prise véhicule échange donc de la chaleur par convection et rayonnement avec l'air ambiant et par conduction avec les portions d'air emprisonnées dans ses cellules. Du fait de son importante inertie thermique et de sa faible conductivité thermique, une seule température est associée à l'ensemble du volume de la prise véhicule.

L'évolution de la température de la prise est alors liée à l'équation différentielle suivante :

$$C_{pv} \frac{dT_{pv}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^6 \frac{T_{air}^i(t) - T_{pv}(t)}{R_{pv \leftrightarrow air}^i} + h_{pv} A_{pv} (T_a(t) - T_{pv}(t)) + \sigma \varepsilon_{pv} A_{pv} (T_a(t)^4 - T_{pv}(t)^4), \quad (4.34)$$

où :

- $C_{pv}$  est la capacité thermique de la prise ;
- $T_{air}^i$  est la température de l'air de la  $i$ -ème cellule de la prise ;
- $R_{pv \leftrightarrow air}^i$  est la résistance thermique entre la prise et l'air de sa  $i$ -ème cellule ;
- $h_{pv}$  est le coefficient de convection entre la prise et l'air ambiant ;
- $A_{pv}$  est la surface d'échange entre la prise et l'air ambiant ;
- $\varepsilon_{pv}$  est l'émissivité de la prise.

Dans la pratique, les clips sont maintenus en place dans la prise du cordon de recharge et cette dernière est enfoncée dans la prise véhicule lors de la recharge comme illustré sur la figure 4.7.

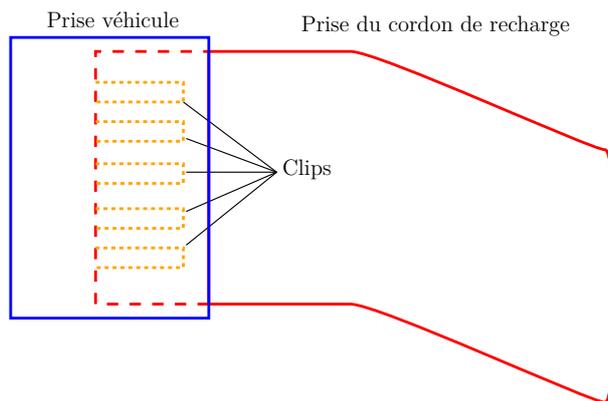


FIGURE 4.7 – Schématisation de la prise du cordon de recharge enfoncée dans la prise véhicule

Dans ce cas, la prise véhicule et la prise du cordon de recharge s'échangent de la chaleur par conduction au travers d'une résistance thermique  $R_{pv \leftrightarrow pcr}$  (non modélisée ici).

L'équation (4.34) devient alors :

$$C_{pv} \frac{dT_{pv}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^6 \frac{T_{air}^i(t) - T_{pv}(t)}{R_{pv \leftrightarrow air}^i} + \frac{T_{pcr}(t) - T_{pv}(t)}{R_{pv \leftrightarrow pcr}} + h_{pv} A_{pv} (T_a(t) - T_{pv}(t)) + \sigma \varepsilon_{pv} A_{pv} (T_a(t)^4 - T_{pv}(t)^4), \quad (4.35)$$

où  $T_{pcr}$  désigne la température de la prise du cordon de recharge.

### 4.3 Validation de la chaîne électrothermique forte puissance

Afin de valider les modèles du montage de forte puissance, un banc d'essais électrothermiques très similaire à celui présenté dans la section 3.4 du chapitre 3 est utilisé. Ainsi, la même alimentation et la même résistance shunt de mesure (l'intensité du courant étant déduite de la loi d'ohm à partir de la différence de potentiel  $\Delta V_{shunt}$  à ses bornes) sont employées. Un transistor de puissance est également utilisé comme interrupteur commandable (par pilotage de sa grille) afin de laisser passer ou non le courant électrique dans le banc d'essais. Toutefois, deux différences distinguent le montage du banc d'essais de faible puissance et celui de forte puissance. La première est que l'échantillon est évidemment remplacé par la prise de recharge véhicule et son faisceau. La deuxième, est que le courant électrique est acheminé de l'alimentation jusqu'à la prise véhicule par un cordon de recharge homologué (bien qu'il ne soit pas modélisé). Le schéma électrique du montage de forte puissance est donné sur la figure 4.8.

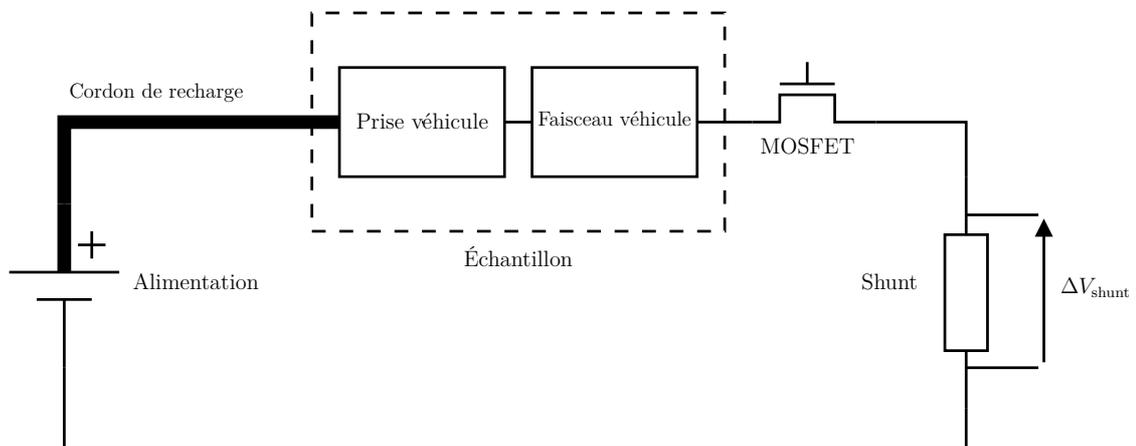


FIGURE 4.8 – Schéma électrique du montage de forte puissance

### 4.3.1 Essai et protocole de validation utilisés

Le nombre de mesures nécessaires pour valider l'ensemble des modèles de composant de la chaîne de forte puissance étant supérieur au nombre de voies disponibles sur le module d'acquisition de température, plusieurs essais ont été indépendamment réalisés. Toutefois, chacun de ces essais est similaire à celui décrit dans la sous-section 3.4.2 du chapitre 3 et utilise le même signal de sollicitation de type SBPA (cf. figure 3.18).

Il est précisé que seuls la phase (courant aller) et le neutre (courant retour) sont alimentés en courant électrique durant les essais sur le montage de forte puissance. Les raisons de ce choix sont les suivantes :

- lors de la recharge du véhicule c'est la phase et le neutre qui permettent d'acheminer la puissance électrique de l'infrastructure vers le véhicule ;
- par principe, le courant dans un fil de Terre est nul (sauf en cas de défaut) ;
- les fils de communication et de présence sont des fils de signal et non de puissance, donc de courant faible ou nul.

Le montage de forte puissance présentant globalement une importante inertie thermique, la source électrique est réglée pour fournir un courant continu d'environ 30 A sous une tension avoisinant 5 V lorsque le MOSFET est passant (signal de sollicitation à 1). La puissance électrique transmise est donc de  $5 \times 30 = 150$  W. Il est rappelé que dans le cas pratique, la charge lente s'effectue en courant alternatif de valeur efficace de 16 A sous une tension de 220 V et correspondant ainsi à une puissance transmise de  $220 \times 16 = 3,5$  kW . Toutefois, il est d'une part à noter que dans la pratique, le courant de charge alternatif est de basse fréquence (réseau 50 Hz en France par exemple) et permet de négliger l'effet de peau <sup>(2)</sup> . De plus, bien que la puissance transmise sur le banc d'essai soit très en deçà de la pratique, ceci n'entache en rien l'expérience puisque l'effet Joule est proportionnellement lié au carré du courant efficace (ou de la tension efficace) et non à la puissance électrique.

Le protocole de validation de chaque bloc de composant en quatre étapes est également rigoureusement identique à celui décrit dans la sous-section 3.4.3 du chapitre 3. Le toron de longueur finie et infinie est d'abord validé, puis par soucis de concision, la validation seulement des composants de la ligne de phase sera présentée. Les blocs de composant de la ligne de phase seront validés dans l'ordre suivant : toron → fil libre → sertissage → languette (partie plate) → air de la cellule → languette (partie cylindrique).

Enfin, l'erreur relative par rapport à l'écart maximal de température du composant

---

2. L'effet de peau est un phénomène électromagnétique qui fait que, à fréquence élevée, le courant a tendance à ne circuler qu'en surface des conducteurs.

lors de l'essai est de nouveau utilisée. Les critères pour évaluer la qualité des modèles sont également sa valeur moyenne et sa valeur maximale. Les expressions de cette erreur, de sa valeur moyenne et de sa valeur maximale sont respectivement données par les équations (3.56), (3.57) et (3.58) du chapitre 3.

**Remarque 18.** *Pour les besoins de ce mémoire, la température de la prise véhicule ne sera pas simulée mais mesurée. En effet, la prise est ici à l'air libre et suspendue au dessus du sol. Bien que sa géométrie semble simple sur la figure 4.1, elle est en réalité plus complexe ce qui rend difficile l'approximation de sa surface et de sa forme. Par conséquent, il est compliqué de déterminer rigoureusement les échanges de chaleur par convection avec l'air ambiant. Pour ce faire, il faudrait utiliser des logiciels de CFD (Computational Fluid Dynamics) spécialisés pour déterminer avec précision le coefficient de convection en fonction de la géométrie, de la température de la prise et de la température ambiante.*

## 4.3.2 Validation du faisceau véhicule

### 4.3.2.1 Toron

Il n'est pas envisageable de positionner un seul capteur pour mesurer la température à une distance quelconque  $x$  sur le toron. En effet, pour rappel, le modèle de toron donne la température moyenne d'une section donnée. Ainsi, pour rester cohérent avec le modèle, quatre thermocouples sont placés à l'intérieur du toron à une même position longitudinale  $x$  comme l'illustre la figure 4.9. Par conséquent, la mesure qui sera retenue pour la validation sera la valeur moyenne des quatre mesures.

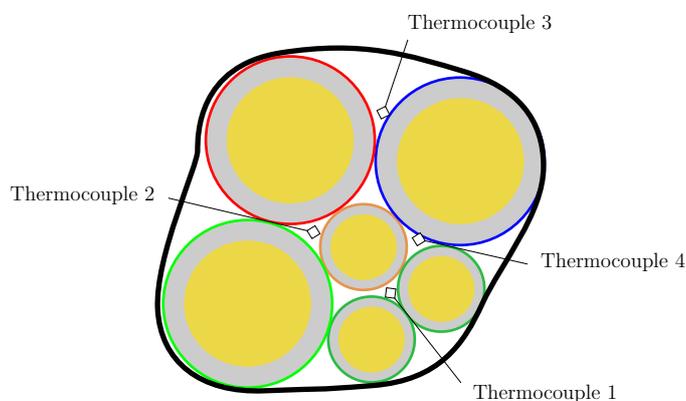


FIGURE 4.9 – Exemple de répartition des thermocouples dans le toron à une position longitudinale  $x$  quelconque

### 4.3. VALIDATION DE LA CHAÎNE ÉLECTROTHERMIQUE FORTE PUISSANCE

Ainsi, au cours d'un essai dédié au toron, huit thermocouples ont été répartis à deux positions longitudinales sur le toron. Quatre thermocouples sont placés à la même position au-delà de la distance d'oubli (environ 45 cm) et quatre autres thermocouples ont été arbitrairement placés à 8,2 cm de l'extrémité (côté prise véhicule) du toron.

La figure 4.10 présente la moyenne des mesures de température du toron au-delà de sa distance d'oubli et la température issue de la simulation de son modèle électrothermique. Les signaux injectés aux entrées du bloc « toron infini » sont :

- le courant mesuré dans la phase et le neutre ;
- la température ambiante mesurée.

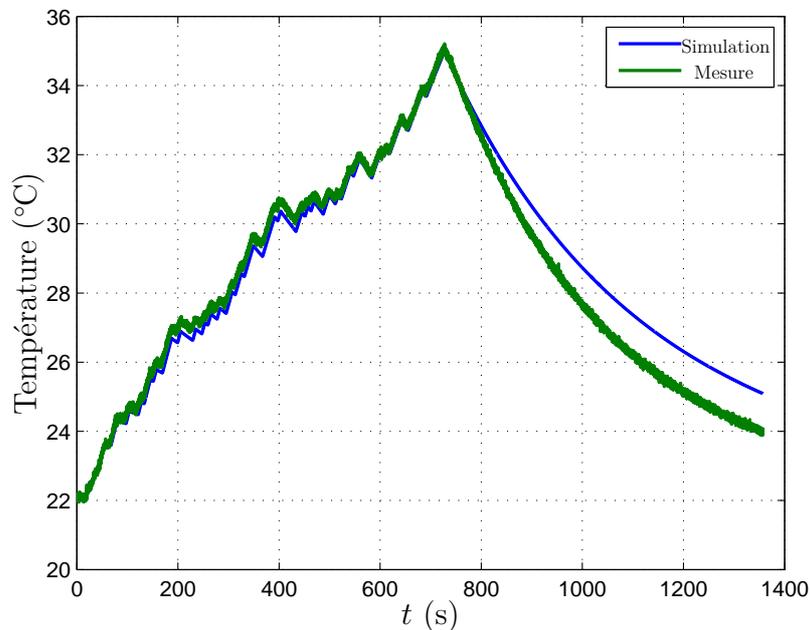


FIGURE 4.10 – Température mesurée et simulée du toron au-delà de sa distance d'oubli

La variation maximale de la température mesurée lors de l'essai est de 13,25 °C, la moyenne de l'erreur relative relevée est de 4 % et la valeur maximale de l'erreur relative vaut 10 %.

La figure 4.11 présente la moyenne des mesures de température du point positionné à 8,2 cm de son extrémité et la température simulée de la maille du toron contenant ce point. Les signaux injectés aux entrées du bloc « toron fini » sont :

- le courant mesuré dans la phase et le neutre ;
- les températures mesurées des six fils à leur extrémité proche du toron ;
- la température ambiante mesurée ;

- la température simulée du toron au-delà de sa distance d’oubli.

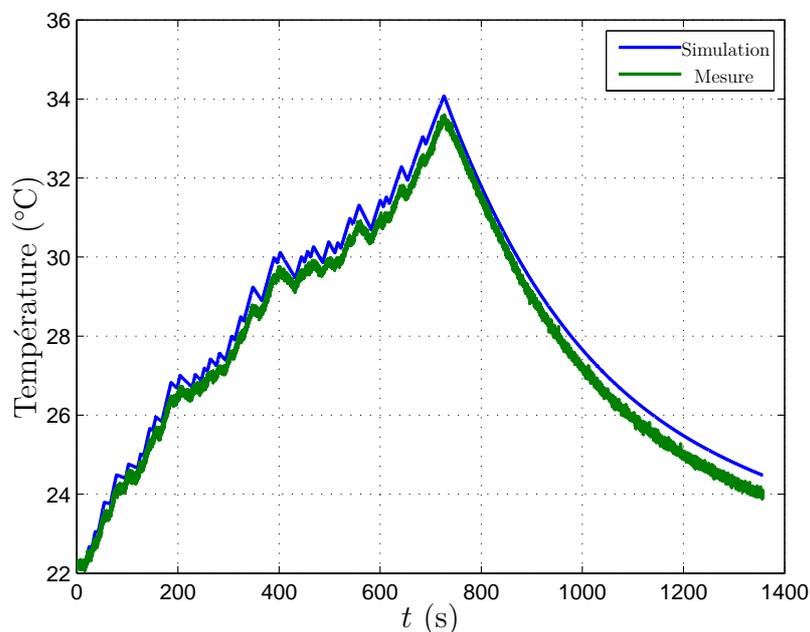


FIGURE 4.11 – Température mesurée et simulée du toron à 8,2 cm de son extrémité

La variation maximale de la température mesurée lors de l’essai est de 11,5 °C, la moyenne de l’erreur relative relevée est de 3,4 % et la valeur maximale de l’erreur relative vaut 6,1 %.

Il est à noter que les différences de températures observées sont principalement liées au gradient radial qui subsiste dans le toron. De plus, la forme réelle du toron n’est pas parfaitement cylindrique ce qui impacte sur les formules d’échanges par convection et rayonnement et contribue également aux écarts de températures entre la sortie des modèles et les mesures.

Toutefois, les résultats issus de la simulation suivent globalement les dynamiques de température du toron et les critères d’évaluation ne dépassent pas 10 % d’erreur. Le modèle du toron est donc considéré validé.

**Remarque 19.** *Il est également intéressant de remarquer que, dans ce cas de figure, la température du toron est plus élevée au-delà de sa distance d’oubli qu’à son extrémité. Ceci peut s’expliquer par le fait qu’ici, l’extrémité du toron peut évacuer de la chaleur vers les fils non alimentés par du courant électrique. En effet, comme le montre la figure 4.12 leur température est nettement inférieure à celle de la phase et celle du neutre. Lorsque*

### 4.3. VALIDATION DE LA CHAÎNE ÉLECTROTHERMIQUE FORTE PUISSANCE

les fils sont tous regroupés dans le toron ils s'échangent de la chaleur par conduction mais peinent à l'évacuer car ils ne baignent plus dans la température ambiante.

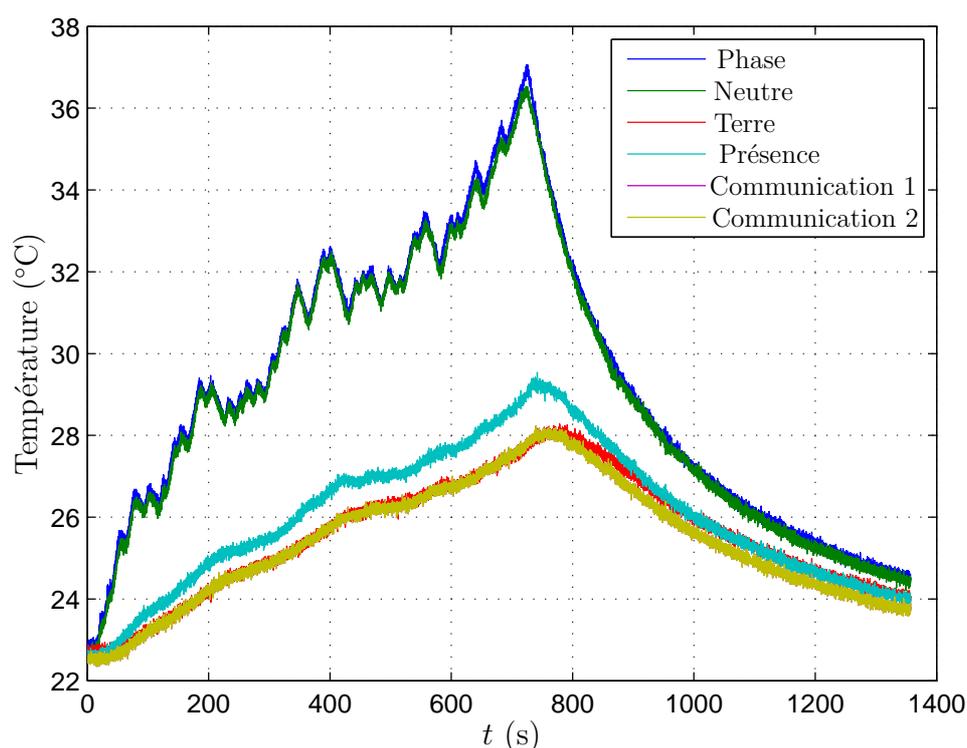


FIGURE 4.12 – Températures mesurées à l'extrémité des fils près du toron

#### 4.3.2.2 Fil électrique libre

Afin de valider le fil libre, trois thermocouples sont placés sur le fil. Lors de l'essai, la longueur de la portion de fil libre est de 10 cm. Ainsi, comme l'illustre la figure 4.13, un premier thermocouple est placé très près de l'extrémité du fil du côté du toron (position  $x_1 = 0,5$  cm), le second thermocouple est arbitrairement placé en  $x_2 = 5,5$  cm et le dernier thermocouple est positionné à proximité de l'extrémité du côté du sertissage ( $x_3 = 9,5$  cm).

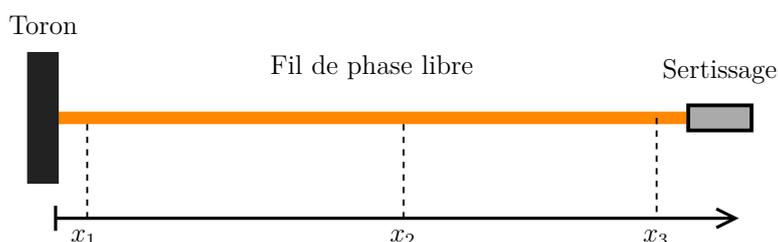


FIGURE 4.13 – Position des thermocouples sur le fil libre

Les figures 4.14, 4.15 et 4.16 présentent les températures mesurées sur le fil électrique respectivement aux positions  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  ainsi que les températures simulées des mailles correspondantes. Les signaux injectés aux entrées du bloc « fil électrique libre » sont :

- le courant mesuré ;
- la température simulée de la première maille du toron de longueur finie ;
- la température mesurée du sertissage ;
- la température ambiante mesurée.

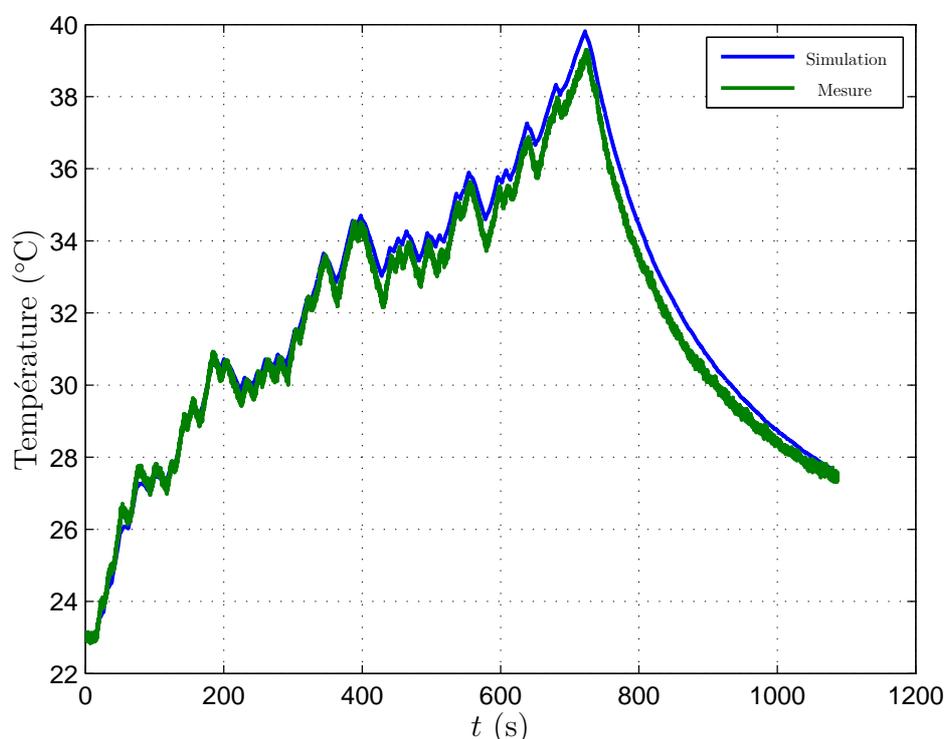


FIGURE 4.14 – Température mesurée et simulée du fil à la position  $x_1$

Pour l'essai de la figure 4.14, la variation maximale de la température mesurée est de 16,45 °C, la moyenne de l'erreur relative relevée est de 2,56 % et la valeur maximale de

### 4.3. VALIDATION DE LA CHAÎNE ÉLECTROTHERMIQUE FORTE PUISSANCE

l'erreur relative vaut 7,06 %.

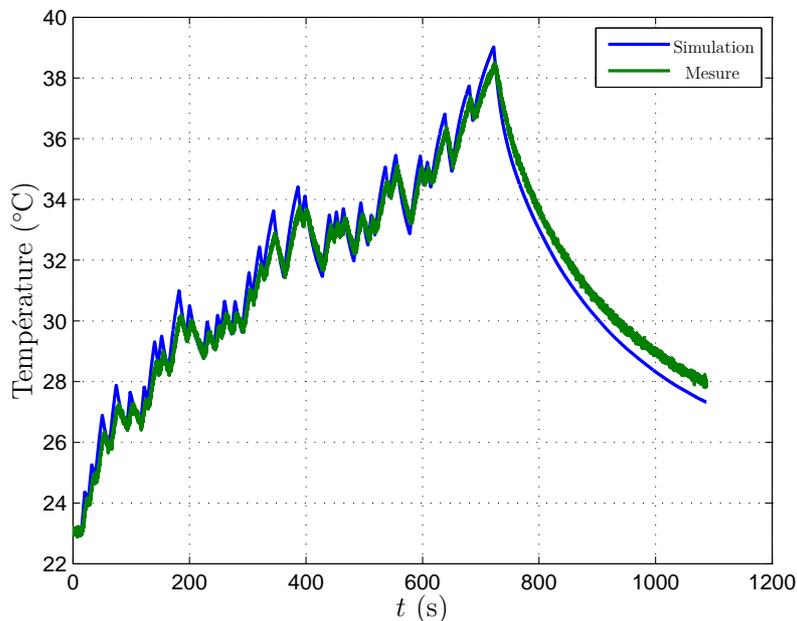


FIGURE 4.15 – Température mesurée et simulée du fil à la position  $x_2$

Pour l'essai de la figure 4.15, la variation maximale de la température mesurée est de 15,6°C, la moyenne de l'erreur relative relevée est de 3,05 % et la valeur maximale de l'erreur relative vaut 7,06 %.

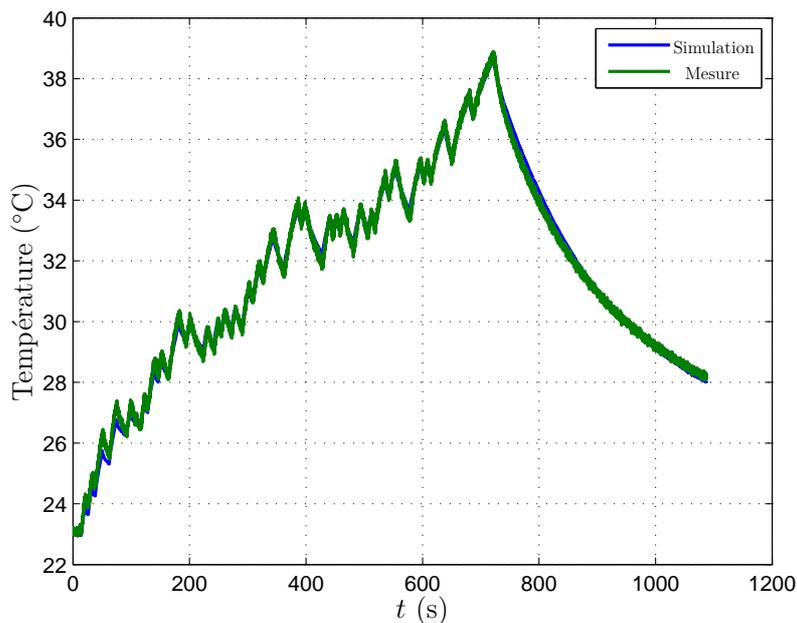


FIGURE 4.16 – Température mesurée et simulée du fil à la position  $x_3$

Pour l'essai de la figure 4.16, la variation maximale de la température mesurée est de 15,94 °C, la moyenne de l'erreur relative relevée est de 1,08 % et la valeur maximale de l'erreur relative vaut 5,18 %.

Les plus grands écarts observés se situent pour la position centrale ( $x = x_2$ ). Cette différence s'explique notamment par l'orientation du fil qui n'est pas rigoureusement à l'horizontale. En effet, le fil a tendance à légèrement se torsader au milieu de sa longueur modifiant ainsi localement les échanges par convection. De plus, les fils se rapprochent de plus en plus les uns des autres à proximité du toron et peuvent ponctuellement rentrer en contact et s'échanger un peu de chaleur. Ceci est à l'origine des écarts observés près de l'extrémité du toron ( $x = x_1$ ).

Toutefois, malgré les différences constatées, les valeurs moyennes et maximales de l'erreur restent tout à fait acceptables et permettent de valider le modèle de fil libre du montage de forte puissance.

### 4.3.3 Validation de la prise véhicule

#### 4.3.3.1 Sertissage

La figure 4.17 présente la température mesurée du sertissage lors de l'essai et la température issue de la simulation de son modèle électrothermique.

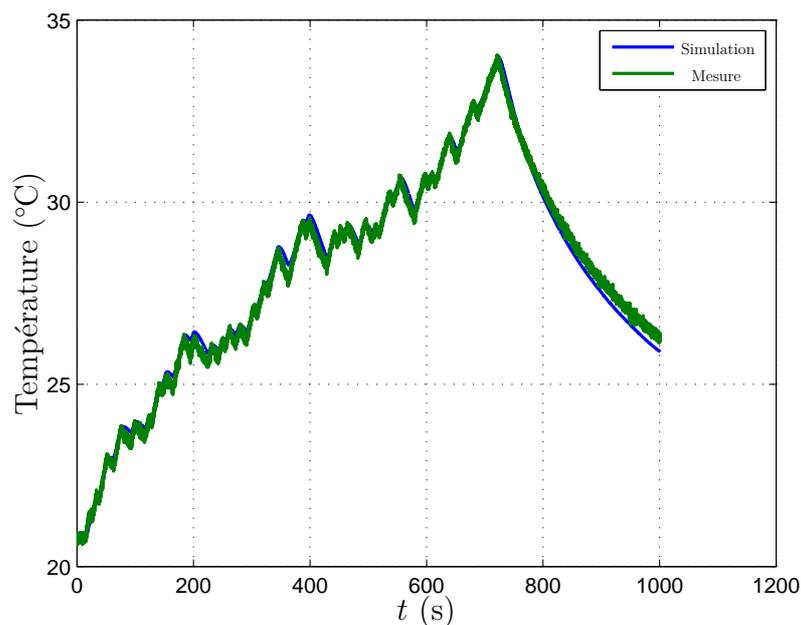


FIGURE 4.17 – Température mesurée et simulée du sertissage

### 4.3. VALIDATION DE LA CHAÎNE ÉLECTROTHERMIQUE FORTE PUISSANCE

Les signaux injectés aux entrées du bloc « sertissage » sont :

- le courant mesuré ;
- la température mesurée de la partie plate de la languette ;
- la température mesurée de l'air de la cellule ;
- la température simulée de la première maille du fil.

La variation maximale de la température mesurée lors de l'essai est de  $13,4^{\circ}\text{C}$ , la moyenne de l'erreur relative relevée est de  $1,45\%$  et la valeur maximale de l'erreur relative vaut  $4,76\%$ . Ces résultats permettent de valider le modèle du sertissage.

#### 4.3.3.2 Languette (partie plate)

La figure 4.18 présente la température mesurée de la partie plate de la languette lors de l'essai et la température issue de la simulation de son modèle électrothermique. Les signaux injectés aux entrées du bloc « languette (partie plate) » sont :

- le courant mesuré ;
- la température mesurée de la partie cylindrique de la languette ;
- la température mesurée de l'air de la cellule ;
- la température simulée du sertissage.

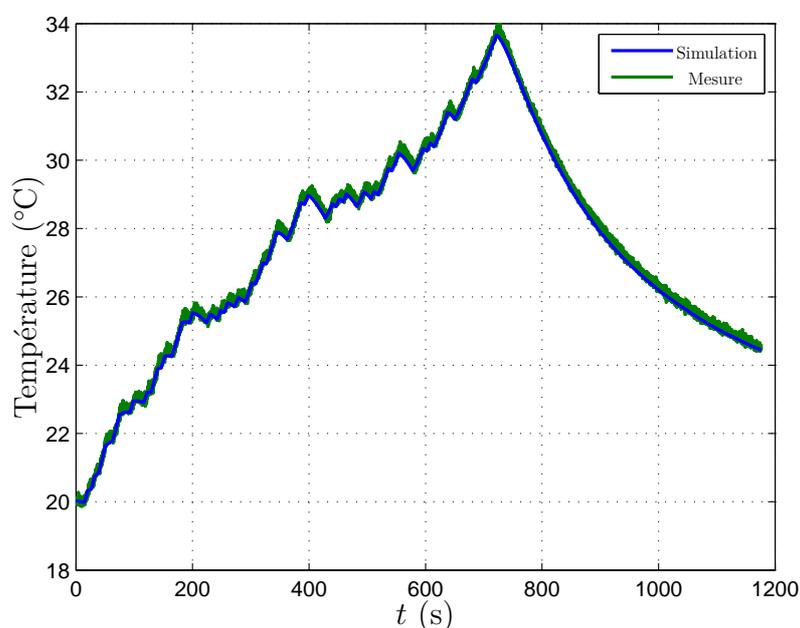


FIGURE 4.18 – Température mesurée et simulée de la partie plate de la languette

La variation maximale de la température mesurée lors de l'essai est de  $14,1^{\circ}\text{C}$ , la moyenne de l'erreur relative relevée est de  $0,77\%$  et la valeur maximale de l'erreur

relative vaut 3,08 %. Ces résultats permettent de valider le modèle de la partie plate de la languette.

#### 4.3.3.3 Air de la cellule

La figure 4.19 présente la température mesurée de l'air de la cellule lors de l'essai et la température issue de la simulation de son modèle électrothermique. Les signaux injectés aux entrées du bloc « air de la cellule » sont :

- la température ambiante mesurée ;
- la température simulée de la partie plate de la languette ;
- la température simulée du sertissage.

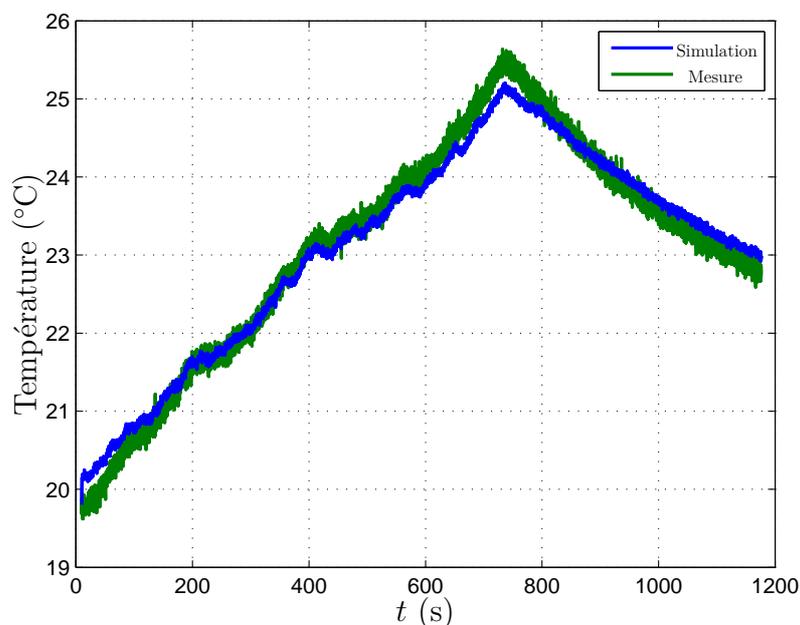


FIGURE 4.19 – Température mesurée et simulée de l'air de la cellule

La variation maximale de la température mesurée lors de l'essai est de 6,02°C, la moyenne de l'erreur relative relevée est de 2,53 % et la valeur maximale de l'erreur relative vaut 9,40 %. Ces résultats permettent de valider le modèle de l'air d'une cellule de la prise véhicule.

#### 4.3.3.4 Languette (partie cylindrique)

La validation du modèle de la partie plate de la languette nécessite quelques aménagements car celle-ci échange de la chaleur avec la zone de contact. Or, comme dans le cas

### 4.3. VALIDATION DE LA CHAÎNE ÉLECTROTHERMIQUE FORTE PUISSANCE

du montage de faible puissance, il est physiquement impossible de mesurer directement la température de la zone de contact. Il est rappelé que dans le cadre de ce manuscrit, la partie cylindrique de la languette est insérée dans un clip d'un cordon de recharge homologuée. La résistance de contact clip–languette a été mesurée par la méthode des quatre fils en utilisant le multimètre numérique : Keithley<sup>©</sup> 3706A.

La température mesurée de la partie cylindrique de la languette lors de l'essai et sa température issue de la simulation de son modèle électrothermique sont données sur la figure 4.20. Les signaux injectés aux entrées du bloc « partie cylindrique de la languette » sont :

- le courant mesuré ;
- la température simulée de la partie plate de la languette ;
- la température simulée de la zone de contact.

**Remarque 20.** *Comme la température de la zone de contact n'a pu qu'être simulée, les entrées de son modèle sont la température simulée de la partie cylindrique de la languette et la température mesurée du clip du cordon de recharge.*

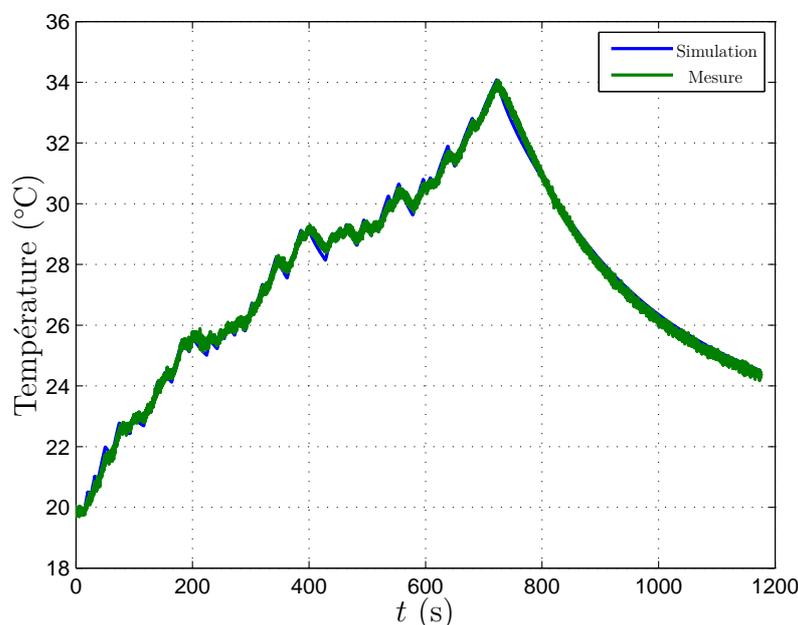


FIGURE 4.20 – Température mesurée et simulée de l'air de la cellule

La variation maximale de la température mesurée lors de l'essai est de 14,13°C, la moyenne de l'erreur relative relevée est de 1,12% et la valeur maximale de l'erreur relative vaut 4,35%. Ces résultats permettent de valider le modèle de la partie cylindrique de la languette.

## 4.4 Validation de la chaîne de forte puissance complète

Par soucis de concision, seul un tableau récapitulatif des nouvelles erreurs obtenues lors de la simulation de la chaîne de forte puissance complète est proposé.

Le tableau 4.1 donne la variation de température maximale mesurée durant l'essai, la moyenne de l'erreur relative en pourcentage et la valeur maximale de l'erreur relative en pourcentage pour chaque composant (sauf le toron par manque de voies disponibles) validé précédemment.

Composant	$\Delta T$ (°C)	$E_{\text{moy}}$ (%)	$E_{\text{max}}$ (%)
Fil (Extrémité toron)	13,85	4,03	9,33
Fil (Extrémité sertissage)	14,09	3,85	8,97
Sertissage	13,88	3,08	7,13
Languette (partie plate)	14,13	2,34	6,5
Air de la cellule	6,05	3,02	10,52
Languette (partie cylindrique)	14,38	1,12	4,27

TABLE 4.1 – Récapitulatif des résultats obtenus pour la validation de la chaîne électrothermique de forte puissance

Il est à noter que la partie cylindrique de la languette présente les erreurs les plus faibles. Ceci provient de la mesure de la température du clip du cordon qui vient, dans une certaine mesure, recalculer la température simulée de la partie cylindrique de la languette.

Toutefois, la valeur maximale et la valeur moyenne de l'erreur relative restent respectivement inférieures à 11 % et à 4 % pour l'ensemble des composants. Ainsi, les résultats du tableau 4.1 permettent de valider le modèle du banc électrothermique de forte puissance.

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, la méthode nodale a été utilisée pour modéliser différents composants d'une chaîne électrothermique dite de forte puissance. Cette chaîne représente une prise de recharge pour véhicule électrique et son faisceau.

Lorsque certains composants sont trop grands, ou que leur gradient longitudinal de température est susceptible d'être important, un maillage est utilisé. Il a été montré que

les modèles analytiques du fil électrique libre et du toron de fils peuvent être décrits à l'aide de fonctions de transfert de même forme. Il s'agit de la même classe de fonction de transfert présentée au chapitre 2. Ainsi, la même méthode de maillage optimale basée sur la norme  $\mathcal{H}_2$  a pu être appliquée pour mailler efficacement ces composants.

Pour la languette, le maillage s'est imposé de lui-même car elle présente des parties de formes différentes.

Un banc d'essais dédié a été mis en place, ce qui a permis de valider expérimentalement les modèles de composants présentés dans ce chapitre. Un protocole d'essai, qui consiste à envoyer une sollicitation en courant dans les circuits électriques a permis de faire varier la température des composants. Des thermocouples reliés à une chaîne d'acquisition spécialisée ont été utilisés pour mesurer la température desdits composants. Enfin, la comparaison des résultats obtenus expérimentalement et en simulation en réponse aux mêmes sollicitations a permis de valider les modèles électrothermiques proposés.

Ces modèles sont utilisés dans le dernier chapitre de ce mémoire dans le but d'estimer les résistances de contact dans les connecteurs de recharge des véhicules hybrides ou électriques.

# Chapitre 5

## Estimation des résistances de contact dans les connecteurs automobiles

---

5.1	Introduction . . . . .	173
5.2	Classification des contacts électriques . . . . .	173
5.3	Caractérisation de la résistance électrique d'un point de contact . . . . .	175
5.3.1	Modélisation d'une surface de point de contact . . . . .	176
5.3.2	Techniques de mesure de la résistance électrique d'un point de contact . . . . .	181
5.4	Détection des variations d'une résistance de contact via une méthode de diagnostic à base de modèle . . . . .	185
5.4.1	Principe général et classification des méthodes de diagnostic . . . . .	185
5.4.2	Problème considéré et choix d'une technique de diagnostic . . . . .	188
5.4.3	Diagnostic à base de modèle utilisant la méthode de l'espace de parité dynamique . . . . .	189
5.4.4	Application au montage de faible puissance . . . . .	199
5.5	Estimation d'une résistance de contact basée sur la méthode des moindres carrés	207
5.5.1	Modèle électrothermique de forte puissance et grandeurs inconnues . . . . .	208
5.5.2	Étude des flux de chaleur non modélisés au niveau de la zone de contact . . . . .	210
5.5.3	Estimation du flux inconnu total de la zone de contact . . . . .	212
5.5.4	Étude des fonctions de sensibilité du système . . . . .	219
5.5.5	Estimation de la résistance de contact basée sur la méthode des moindres carrés . . . . .	225
5.5.6	À propos d'autres techniques d'estimation d'entrées inconnues . . . . .	232
5.6	Conclusion . . . . .	233

---

« Il y a des découvertes qui montrent que finalement on n'en sait moins que ce que l'on croyait. Donc une découverte, ça n'augmente pas forcément nos connaissances, ça augmente notre conscience de notre ignorance. »

*Etienne Klein*

## 5.1 Introduction

Ce chapitre se consacre à la surveillance des résistances de contact dans les connecteurs. L'objectif est de proposer des méthodes capables de détecter les variations des résistances de contact, sous contrainte d'utiliser le moins de capteurs possible.

Une classification générale des contacts est d'abord présentée, suivie d'un bref état de l'art des méthodes de modélisation ou de mesure des résistances de contact.

Une première méthode pour détecter les variations anormales des résistances de contact est ensuite proposée. Elle s'appuie sur un modèle complet du connecteur et de son environnement ainsi que sur des mesures de températures à proximité du point de contact (en supposant que la température ambiante et que l'intensité du courant électrique sont connues). Cette approche est appliquée au montage de faible puissance présenté dans le chapitre 3.

Enfin, une deuxième méthode d'estimation des résistances de contact est proposée. À la différence de la première, elle ne nécessite qu'un modèle incomplet du connecteur et de son environnement et requiert une mesure de température près du point de contact (la température ambiante et l'intensité du courant électrique sont également connues). Comme déjà mentionné au chapitre 4, le connecteur de forte puissance n'est pas entièrement modélisé (pas de modélisation du cordon de recharge et de ses composants). Ainsi, cette dernière méthode est appliquée à la détermination des résistances de contact du montage de forte puissance.

## 5.2 Classification des contacts électriques

L'objectif principal d'une connexion électrique est de permettre le passage ininterrompu d'un courant électrique à travers l'interface de contact. Cela ne peut être atteint que si un bon contact entre les conducteurs est établi. Les processus qui se déroulent dans la zone de contact sont complexes. Bien que la nature de ces processus puisse être différente, ils sont tous soumis aux mêmes phénomènes fondamentaux, le plus important étant la dégradation de l'interface de contact et les changements associés à la résistance de contact, de la charge, de la température et de bien d'autres paramètres.

Les contacts électriques peuvent être classés en fonction de leur nature, de la géométrie de la surface, de la cinématique, de la conception et des technologies utilisées, du courant de charge, de l'application, etc. Globalement, les contacts électriques peuvent être

divisés en deux catégories de base : les contacts fixes et les contacts mobiles. La figure 5.1 représente la classification la plus générale des contacts électriques selon la cinématique, les fonctionnalités et les caractéristiques de conception.

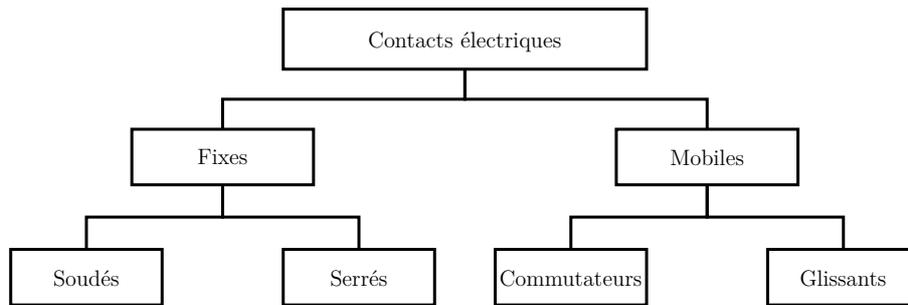


FIGURE 5.1 – Classification des contacts électriques

Dans les contacts fixes, les éléments de contact sont reliés de manière rigide ou élastique à l'unité fixe d'un dispositif pour fournir un joint permanent. Les contacts fixes sont divisés en contacts non séparables (soudés ou collés), et en contacts serrés (boulonné, vissé, et enveloppé). Les contacts non séparables ont une résistance mécanique élevée et fournissent un contact électrique stable avec une résistance de transition faible.

Les contacts serrés sont des jonctions mécaniques avec des boulons ou des vis ou utilisant des pièces intermédiaires, en particulier, des attaches. Ces contacts peuvent être assemblés ou démontés sans endommager l'intégrité des articulations. Le cas le plus simple d'un contact serré est l'articulation de deux conducteurs massifs avec des surfaces de contact planes, telles que les jeux de barres.

Dans les contacts mobiles, au moins un élément du contact est relié rigidement ou élastiquement à l'unité mobile d'un dispositif. En fonction de leurs conditions d'exploitation, ces contacts sont divisés en deux catégories : contacts commutateurs et contacts glissants. Les contacts commutateurs se répartissent en deux catégories : séparables et de rupture. Ces derniers sont utilisés pour une ouverture et une fermeture périodiques d'un circuit électrique (par exemple les interrupteurs, les contacteurs ou les relais).

Dans les contacts glissants, les pièces en contact glissent les unes sur les autres sans séparation. Le passage du courant à travers la zone de contact s'accompagne de phénomènes physiques (électriques, électromécaniques et thermiques) qui produisent des changements d'état (caractéristiques) des couches de surface.

### 5.3 Caractérisation de la résistance électrique d'un point de contact

Il a été établi que les surfaces de contact réelles ne sont pas planes, mais comportent de nombreuses aspérités. Par conséquent, lorsque le contact est établi entre deux métaux, la pénétration d'oxyde de fer naturel avec d'autres films de contaminants va conduire à l'établissement de contacts métalliques localisés donc à des « chemins » conducteurs. Lorsque la force  $F$  de contact augmente, le nombre et la surface de ces petits points de contact métal-métal vont augmenter.

Ces points de contacts, illustrés sur la figure 5.2, sont appelés *a-spots* (taches). Il s'agit de petites soudures froides de diamètre  $2r_{as}$ , qui fournissent les chemins conducteurs du courant électrique (en pointillés sur la figure 5.2). Ainsi la surface de contact réelle (à une échelle microscopique) n'est qu'une fraction de la surface apparente du contact (à une échelle macroscopique). Une conséquence directe de ceci est un contact poreux où l'infiltration d'oxygène et d'autres gaz corrosifs peut entrer en réaction avec le métal exposé et réduire les zones de contact. Ceci provoque la disparition du contact électrique, bien que le contact mécanique entre les surfaces oxydées soit préservé.

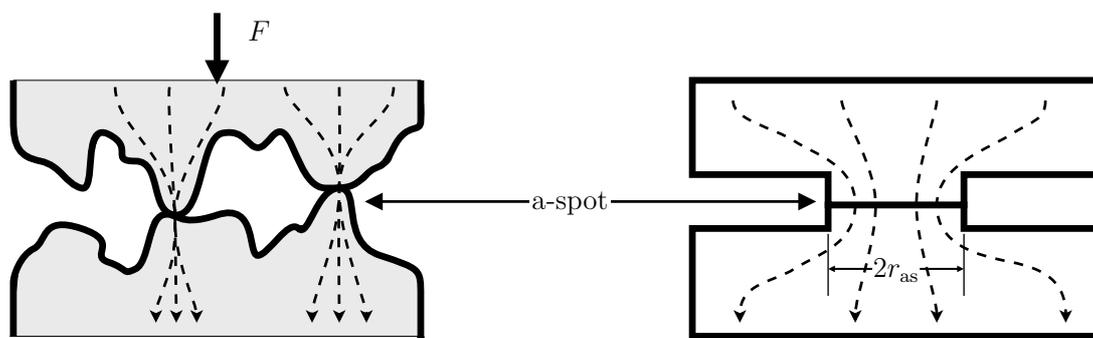


FIGURE 5.2 – Exemple de contact entre deux métaux à l'échelle microscopique (à gauche) et représentation d'un *a-spot* (à droite)

Il convient de souligner que le contact électrique d'un *a-spot* est bien différent d'un point de contact circulaire. La résistance électrique du contact en raison de la restriction du flux de courant étranglé est appelée *résistance de constriction* (ou *résistance de contact*) et est liée à la dureté et la résistivité électrique des métaux. Dans [Holm, 1967], il a été montré que la résistance électrique de contact d'un seul *a-spot* est exprimée par :

### 5.3. CARACTÉRISATION DE LA RÉSISTANCE ÉLECTRIQUE D'UN POINT DE CONTACT

---

$$\mathcal{R}_t = \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{4r_{as}}, \quad (5.1)$$

où  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont les résistivités des métaux en contact. S'il s'agit du même métal de résistivité  $\rho$ , alors la résistance d'étranglement devient :

$$\mathcal{R}_t = \frac{\rho}{2r_{as}}. \quad (5.2)$$

Étant donné que des impuretés contaminent les métaux, le passage du courant électrique peut être affecté par l'oxydation du fer, le sulfure, et d'autres films inorganiques présents habituellement sur les surfaces métalliques. Par conséquent, la résistance de contact totale  $\mathcal{R}$  d'une jonction est la somme de la résistance de constriction  $\mathcal{R}_t$  et de la résistance cumulée des films d'impuretés  $\mathcal{R}_f$  :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_t + \mathcal{R}_f. \quad (5.3)$$

Cependant, dans la plupart des applications pratiques, la contribution de ces films à la résistance totale est négligeable.

Comme déjà vu aux chapitres 1 et 3, l'apparition de surintensités ou l'augmentation de la résistance de contact, peuvent provoquer des échauffements locaux importants à ce niveau à cause de l'effet Joule. En effet, les surintensités pourraient se manifester à cause de l'apparition d'un court-circuit et la résistance de contact peut être dégradée sous l'effet de phénomènes mécaniques (vibrations, branchements-débranchements dans le cas de la connectique de recharge, déformations), chimiques (oxydation, corrosion, modifications électrochimiques), etc. Dès lors, les échauffements engendrés, s'ils sont trop importants, peuvent conduire à la détérioration voire à l'abrasion des composants.

Il est donc primordial de mesurer ou d'estimer la valeur des résistances de contact. Il existe à cet effet des méthodes de modélisation ou de mesure des résistances de contact dans la littérature spécialisée. Un rapide tour d'horizon de ces méthodes sont données dans la suite de cette section.

#### 5.3.1 Modélisation d'une surface de point de contact

Il existe plusieurs méthodes pour modéliser le contact entre deux surfaces rugueuses, par exemple la modélisation par méthode statistique, la modélisation fractale ou les modèles multi-échelles.

### Méthodes statistiques

Les techniques de modélisation statistique utilisent des paramètres mathématiques de la surface pour généraliser une probabilité statistique qui détermine la surface et la force de contact.

Les premiers pas en la matière reviennent à Heinrich Hertz [Hertz, 1882]. Utilisant les franges d'interférence entre deux lentilles de verre, il a caractérisé la surface de contact selon une distribution actuellement connu sous le nom de solution de contact de Hertz. Depuis cette découverte, de nombreux modèles ont été développés pour étendre la solution de contact hertzienne à partir d'une seule aspérité en un réseau d'aspérités connexes.

Dans [Greenwood et Williamson, 1966], l'interaction entre deux plans est prise en considération. L'un d'eux est un plan parfait tandis que l'autre est recouvert d'aspérités de forme sphérique. Les hypothèses de base de ce modèle sont que toutes les aspérités doivent avoir le même rayon de courbure, chaque aspérité se comporte indépendamment de ses voisines, et seules les aspérités sont autorisées à se déformer. Avec ces hypothèses, la zone de contact est déterminée par les mathématiques statistiques qui présument que les hauteurs des aspérités suivent une distribution gaussienne. Par conséquent, la distribution gaussienne donne le pourcentage de la surface en contact sous forme d'un écart type.

Par exemple, dans le cadre d'une modélisation statistique, la résistance de contact entre deux plans est donnée par [Greenwood et Williamson, 1966] :

$$\mathcal{R} = \left( \frac{2\eta A \sqrt{\beta\sigma}}{\rho} \int_d^\infty (z-d)^{1/2} \psi(z) dz \right)^{-1}, \quad (5.4)$$

où :

- $\psi$  est la probabilité qu'une aspérité ait une hauteur entre  $z$  et  $z + dz$  ;
- $\eta$  désigne la densité d'aspérités ;
- $A$  est la surface de contact nominale ;
- $\rho$  désigne la résistivité électrique ;
- $\beta$  est ici le rayon de l'aspérité ;
- $\sigma$  désigne ici la déviation standard de la distribution de la hauteur ;
- $d$  est la hauteur nominale d'une aspérité.

### Modélisation fractale d'une surface de contact

Les modèles statistiques ont montré leur fiabilité et leur facilité de mise en œuvre, mais aussi quelques lacunes. Par exemple, les hypothèses retenues conduisent à supposer

### 5.3. CARACTÉRISATION DE LA RÉSISTANCE ÉLECTRIQUE D'UN POINT DE CONTACT

---

qu'une surface rugueuse a essentiellement un seul rayon de courbure. Cela signifie, que les modèles statistiques négligent les effets des différentes échelles dans une surface. Un examen de toute surface montre que ceci est tout à fait inexact puisque la topographie d'une surface apparaît assez aléatoire. Cependant, il est très difficile de caractériser une surface réelle en raison de son caractère aléatoire. Ceci est la raison de l'avènement des techniques de modélisations fractales.

Selon ces techniques, une surface rugueuse est supposée de dimension fractale  $D$ , continue partout, non-différentiable à tous les points et auto-similaire. La fonction de Weirstrass-Mandelbrot a des propriétés similaires. Dans [Singer et Kshonze, 1991], elle est utilisée pour la simulation d'une surface de contact. Ainsi, le modèle d'une surface rugueuse peut-être décrit par les relations suivante :

$$z(x, y) = F(D)G^{D-1}\{\Sigma\}, \quad (5.5)$$

$$\Sigma = \sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{\cos 2\pi\omega_1^n(x + g(y)) \cos 2\pi\omega_1^n(y + g(x))}{\omega_1^{(2-D)n}}, \quad \begin{cases} 1 < D < 2 \\ \omega_1 = 1.5 \\ \omega_1^{n_1} = 1/L \\ \omega_1^{n_2} = 1/\lambda \end{cases}, \quad (5.6)$$

où  $L$  est la longueur apparente et  $\lambda$  la longueur la plus courte et où,

$$F(D) = \left[ \frac{2 \ln \omega_1 (5 - 2D)(7 - 2D) E(D)}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.7)$$

$$E(D) = \int_0^{\pi/2} (\cos^{(5-2D)} \theta - \cos^{(7-2D)} \theta) d\theta, \quad (5.8)$$

$$g(x) = C \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi\omega_1^n x}{\omega_1^{(2-D)n}}, \quad (5.9)$$

$$C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\omega_1^{(2-D)(n_1-1)}}{(\omega_1^{(4-2D)} - 1)^{1/2}}. \quad (5.10)$$

La dimension fractale  $D$  et le gain  $G$  sont obtenus en assimilant que le spectre de puissance d'une surface réelle  $S(\omega)$  est donné par :

$$S(\omega) = \frac{G^{2(D-1)}}{2 \ln \omega_1^k}, \quad (5.11)$$

où  $k = 5 - 2D$  est la pente du spectre de puissance dans une échelle logarithmique.

Un exemple de simulation d'une surface de dimension fractale est donné sur la figure 5.3.

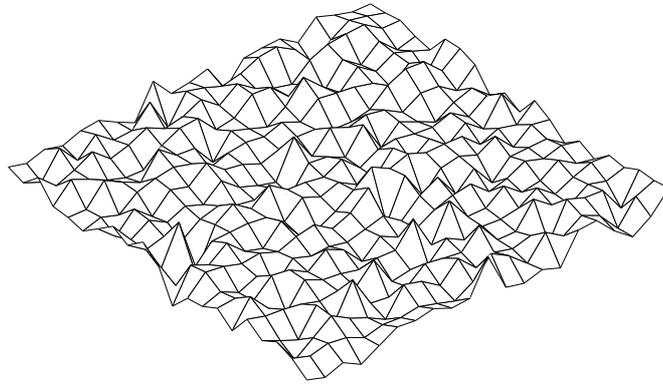


FIGURE 5.3 – Simulation d'une surface de dimension fractale

Ainsi, l'expression de la résistance électrique de la surface de contact est donnée par :

$$\mathcal{R} = \frac{\rho G^{(D-1)} b^q L^D}{L^D} \left( \frac{b^D}{b^D - 1} \right)^2 [1 - b^{(m_q - q)D}], \quad (5.12)$$

avec :

$$b^{(m_q - q)} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{1 - A_t}{A_t}}}, \quad (5.13)$$

et

$$A_t = \frac{D}{2 - D} a_L, \quad (5.14)$$

où :

- $a_L$  est la plus grande surface apparente ;
- $A_t$  est la surface de contact réelle d'un groupe d'aspérité.

#### Modèles multi-échelles

Bien que la modélisation fractale soit une technique de modélisation multi-échelle, car elle décrit la géométrie de la surface du contact pour toutes les échelles disponibles, les modèles obtenus n'ont pas de point d'arrêt (bien que le monde physique en ait).

De ce fait, les modèles multi-échelles ont été élaborées pour atténuer les hypothèses imposées par les mathématiques fractales et améliorer également la façon dont les mécanismes de déformation du matériau sont considérés.

Une technique de modélisation de base est donnée dans [Jackson et Streater, 2006]. Elle a été affinée dans [Wilson et al., 2010] tout en étant facile à adapter aux surfaces réelles. Cette amélioration repose sur l'utilisation d'un empilement d'ondes sinusoïdales tridimensionnelles pour décrire les aspérités des contacts à plusieurs échelles (voir figure 5.4 : chaque couleur représente une échelle de rugosité différente). Les hypothèses nécessaires à ce type de modèle exigent que les petites aspérités soient empilées sur les plus grandes. A ce niveau, la charge est répartie uniformément sur toutes les aspérités : tous les niveaux portent la même charge globale, et un niveau d'aspérité plus petit n'est pas capable d'étendre la zone de contact.

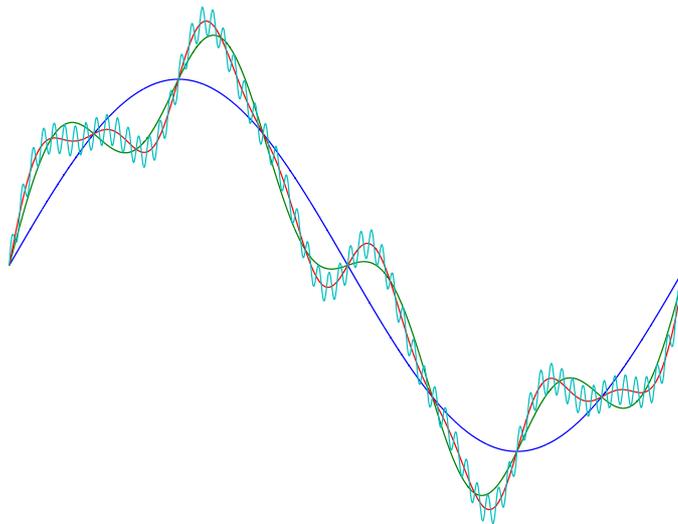


FIGURE 5.4 – Exemple de schématisation représentant la décomposition d'une surface par un empilement de quatre ondes sinusoïdales

Par exemple, la méthode multi-échelles présentée ci-dessous [Wilson, 2008] est une méthode itérative qui calcule à la fois la surface et la résistance électrique pour chaque fréquence de trois sinusoïdes empilées.

La première étape consiste à calculer la zone de contact pour chaque niveau de fréquence  $f_i$ . Cette zone est définie par la relation :

$$a_i = \sqrt{\frac{A_i}{2\pi A_{i-1} f_i^2}}, \quad (5.15)$$

où  $A_i$  est la surface de contact.

Lors de la deuxième étape, la résistance électrique pour chaque zone  $a_i$  est calculée :

$$R_i = \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{4a_i}, \quad (5.16)$$

avec  $\rho_1$  et  $\rho_2$  les résistivités électriques des surfaces en contact.

Enfin, la troisième et dernière étape permet de déterminer la résistance électrique totale pour toute la surface :

$$\mathcal{R}_{\text{totale}} = \sum_{i=1}^{i_{\max}} \Psi_i R_i \eta_i A_{i-1}, \quad (5.17)$$

où  $\eta_i$  est la densité d'aspérité surfacique et où  $\Psi_i$  est le facteur d'atténuation tel que :

$$\Psi_i = \left(1 - \sqrt{\frac{A_i}{A_{i-1}}}\right)^{1,5}. \quad (5.18)$$

Les différentes méthodes de modélisation de résistances de contact présentées précédemment, permettent de déduire une valeur numérique de celle-ci, à condition d'en maîtriser l'utilisation et toutes les hypothèses. Une alternative à la détermination de la résistance de contact par modélisation est d'essayer de la mesurer. À cet effet, des méthodes sont présentées dans la sous-section qui suit.

### 5.3.2 Techniques de mesure de la résistance électrique d'un point de contact

Un des nombreux problèmes dans le domaine de la connectique électrique est la validation des différents modèles de contact. Des problèmes se posent dans la validation

### 5.3. CARACTÉRISATION DE LA RÉSISTANCE ÉLECTRIQUE D'UN POINT DE CONTACT

---

expérimentale car les caractéristiques des surfaces et les comportements mentionnés dans la littérature sont souvent à très petites échelles.

Dans ce qui suit, un tour d'horizon est proposé sur les différentes techniques se trouvant dans la littérature concernant la mesure expérimentale de la résistance électrique d'un point de contact. Ces techniques forment trois groupes selon leur moyen de mesure : électrique, thermique ou mesure de la surface réelle de contact.

#### Techniques de validation basées sur les mesures électriques

Pour comparer les valeurs des résistances électriques de contact obtenues, la procédure d'essai doit être capable de modifier la charge placée sur les échantillons à tester et de mesurer le changement de la résistance à l'interface entre les surfaces de contact.

Un exemple d'équipement de mesure a été réalisé au Laboratoire de Génie Électrique de Paris (LGEP) [Tristani, 2000] pour mener des essais avec des contacts de type clip-languette, et pour enregistrer à la fois des informations de type électrique (résistance de contact, comptage de microcoupures) et mécanique (force de frottement). Le schéma de principe de cet équipement est présenté sur la figure figure 5.5.

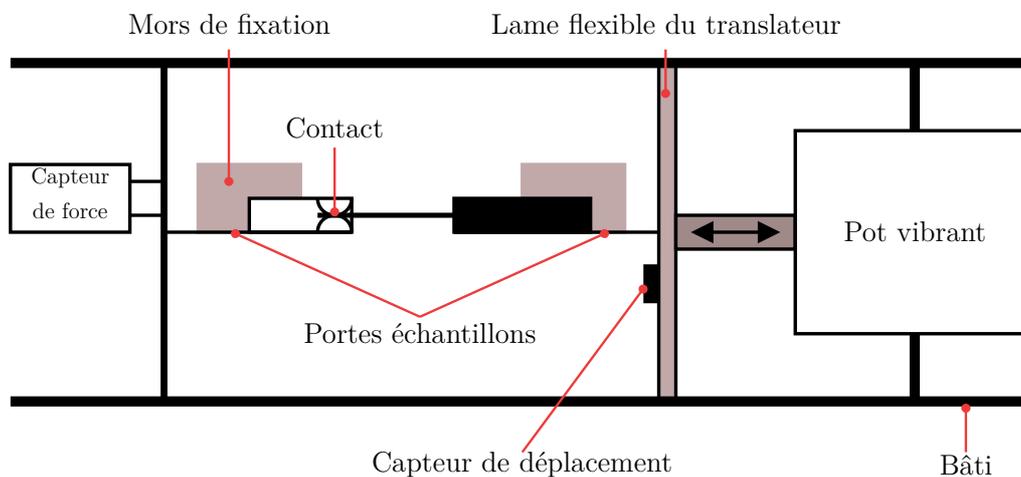


FIGURE 5.5 – Schéma de principe de l'essai de fretting-corrosion développé par le LGEP

L'équipement du LGEP permet d'enregistrer l'évolution de la résistance électrique de contact au cours de l'essai de fretting. Compte tenu de la géométrie des contacts clip-languette, la méthode des « barreaux croisés » ne peut pas être employée. La mesure est faite par la méthode classique dite « des quatre fils », déjà présentée au chapitre 3 de ce manuscrit.

### Techniques de validation basées sur les mesures thermiques

L'une des méthodes qui est encore largement répandue dans le monde industriel est connue sous le nom de la méthode nodale ou « méthode des réseaux RC ». Cette méthode consiste à faire l'analogie entre les phénomènes thermiques et électriques et donne la possibilité de valider ces phénomènes (électriques) en analysant le comportement thermique de ces derniers. Ainsi, un protocole expérimental issu de [Grandvuillemin, 2009] est présenté dans ce qui suit.

Les différentes expériences ont consisté à soumettre des échantillons de conducteurs à différentes contraintes thermiques et électriques :

- les températures ambiantes et atmosphériques peuvent être contrôlées par le biais d'une chambre climatique régulée en température ;
- le courant d'alimentation provient d'une source de puissance, régulée à courant constant ;
- le confinement des conducteurs cylindriques peut être représenté par l'utilisation de tubes cylindriques de tailles variables.

Les échantillons de conducteurs sont placés dans une chambre climatique et soumis à des profils de courants importants. Les montées en température sont mesurées et enregistrées par un dispositif d'acquisition approprié. Ces données expérimentales sont ensuite comparées aux valeurs théoriques de la température.

L'intensité des courants électriques étant de quelques centaines d'ampères, l'utilisation d'une charge résistive pour le contrôler est difficilement envisageable. Il est plus commode d'utiliser une source de puissance régulée à courant constant et de placer le conducteur testé en court-circuit aux bornes de cette source d'alimentation, comme l'illustre la figure 5.6.

Les différentes températures mesurées par une centrale d'acquisition sont comparées avec des valeurs théoriques en uniformisant les contraintes thermoélectriques. Afin d'harmoniser les comparaisons, un modèle qui utilise les données expérimentales comme entrées a été développé.

### Techniques de validation basées sur les mesures de la surface réelle de contact

Comme mentionné dans la sous-section précédente, il est possible de calculer la résistance électrique d'un contact si les valeurs exactes des surfaces de ce dernier sont disponibles. En réalité, les méthodes décrites ci-dessous sont généralement utilisées dans

### 5.3. CARACTÉRISATION DE LA RÉSISTANCE ÉLECTRIQUE D'UN POINT DE CONTACT

---

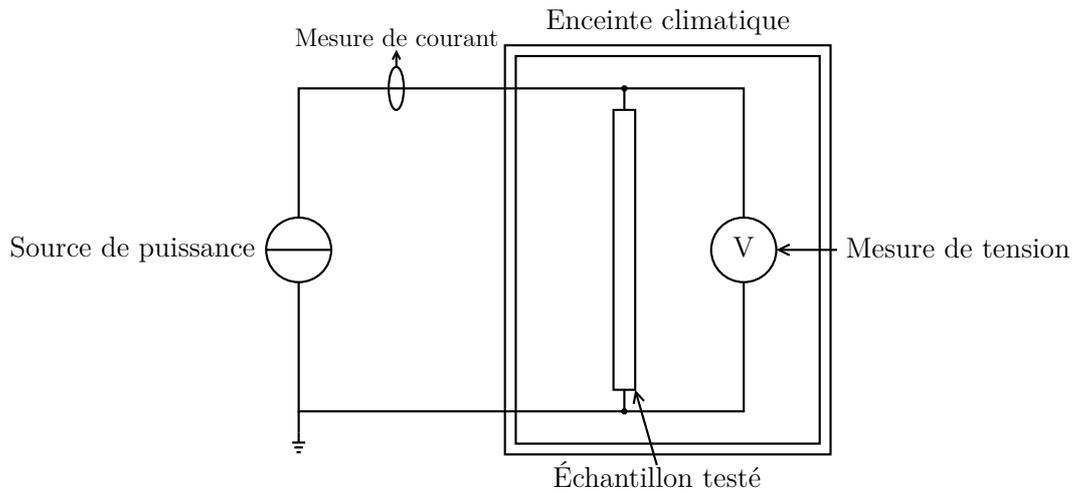


FIGURE 5.6 – Description générale du banc d'essai développé dans [Grandvillemin, 2009]

le domaine de la mécanique de contact.

Dès le début des années 1980, un état de l'art donné dans [Woo et Thomas, 1980] répertoriait déjà une dizaine de techniques expérimentales différentes pour la mesure de surfaces de contact telles que :

- les méthodes de stilet ;
- la méthode basée sur la profilométrie ;
- les méthodes optiques ;
- la méthode de Mechau ;
- la microscopie à contraste de phase ;
- l'interférométrie de Namarski ;
- la réfraction de la lumière
- la méthode neutrographique ;
- les peintures et les traces radioactives ;
- les méthodes de répliquations.

Les méthodes de détermination des résistances de contact existantes et brièvement présentées jusqu'ici sont toutefois mal adaptées pour des applications en temps réel ou à grande échelle. Ainsi, deux nouvelles méthodes pour étudier les variations ou directement estimer de la résistance de contact, basées sur l'utilisation de modèles électrothermiques et de capteurs de température, sont proposées dans la suite de ce chapitre.

## 5.4 Détection des variations d'une résistance de contact via une méthode de diagnostic à base de modèle

Dans cette section, une méthode de diagnostic à base de modèle est présentée afin de détecter les variations d'une résistance de contact. Cette approche ne sera présentée que pour le cas d'un seul point de contact sans perte de généralité. Cette méthode est appliquée au montage de faible puissance qui fait l'objet du chapitre 3 de ce mémoire.

### 5.4.1 Principe général et classification des méthodes de diagnostic

Le diagnostic consiste à détecter au plus tôt les défauts sur un système, à les localiser et enfin à en identifier leurs causes. Généralement, des stratégies de corrections des défauts sont également envisagées pour prévenir l'apparition de dégâts additionnels ou la perte de service sur le système considéré [Zolghadri et al., 2014, Isermann, 2006].

Les systèmes FD (*Fault Detection*) définissent la forme la plus simple des systèmes de diagnostic. Leur rôle est de détecter l'apparition de défauts dans les unités fonctionnelles du système conduisant à un comportement indésirable ou intolérable. Le problème de détection vise à comparer le fonctionnement réel du système avec celui qu'il devrait avoir sous l'hypothèse de fonctionnement normal. Les systèmes FDI (*Fault Detection and Isolation*) ont pour objectif supplémentaire de localiser les défauts, c'est-à-dire de circonscrire la défaillance à un élément ou sous-ensemble du système surveillé (capteurs, actionneurs, composants internes du système). Enfin les systèmes FDIA (*Fault Detection, Isolation and Analysis*) visent en plus à déterminer leur type, leur amplitude ainsi que leur(s) cause(s).

Des anomalies peuvent apparaître dans les unités individuelles qui composent le système (par exemple une pièce mécanique ou électrique fonctionnant mal ou qui cesserait totalement de fonctionner), au niveau des capteurs ou des actionneurs. Ces anomalies sont communément classées comme des défauts additifs ou multiplicatifs. Les défauts additifs affectent le système comme des entrées inconnues tandis que les défauts dit multiplicatifs agissent de façon importante sur la dynamique du système pouvant conduire jusqu'à son instabilité.

Certains défauts sont abrupts et provoquent de brusques changement dans le comportement du système, tandis que d'autres défauts peuvent être graduels avec une dérive

#### 5.4. DÉTECTION DES VARIATIONS D'UNE RÉSISTANCE DE CONTACT VIA UNE MÉTHODE DE DIAGNOSTIC À BASE DE MODÈLE

---

lente.

Enfin, les défauts permanents conduisent à une défaillance totale de l'équipement (une fois qu'ils se produisent, ils ne disparaissent pas). Les défauts transitoires provoquent des dysfonctionnement temporaires (ils apparaissent un cours moment puis disparaissent). Les défauts intermittents conduisent à une répétition de défaut transitoires (ils apparaissent puis disparaissent, apparaissent de nouveau, etc).

Il existe principalement quatre techniques de diagnostic de défauts :

- la redondance matérielle ;
- le traitement du signal ;
- les tests de plausibilité ;
- la redondance logicielle (ou redondance analytique).

La redondance matérielle, illustrée sur la figure 5.7, consiste à utiliser plusieurs exemplaires d'un même composant. Un défaut est alors détecté si les sorties du composant et de son homologue redondant sont différentes. Ceci permet une détection rapide et une isolation immédiate et fiable d'un défaut. Cependant la redondance des composants entraîne des surcoûts, introduit de la complexité et de l'encombrement dans le système.

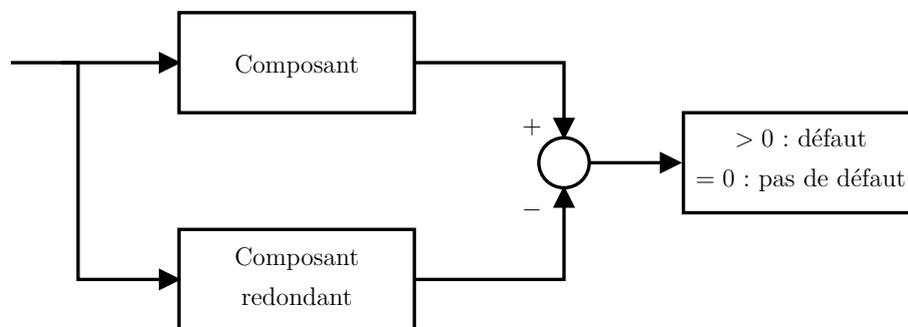


FIGURE 5.7 – Description schématique du diagnostic par redondance matérielle

Le diagnostic à base de traitement du signal de la figure 5.8 suppose que certains signaux du systèmes transportent de l'information sous forme de symptômes sur les défauts recherchés. Par exemple ces symptômes sont des gains, des valeurs moyennes (arithmétiques ou quadratiques), des valeurs limites, etc. Ainsi, un diagnostic peut-être effectué grâce à un traitement du signal adapté. Bien que ce type de technique soit efficace lors des régimes permanents, il montre tout de même des limites pour la détection pendant les régimes transitoires.

#### 5.4. DÉTECTION DES VARIATIONS D'UNE RÉSISTANCE DE CONTACT VIA UNE MÉTHODE DE DIAGNOSTIC À BASE DE MODÈLE

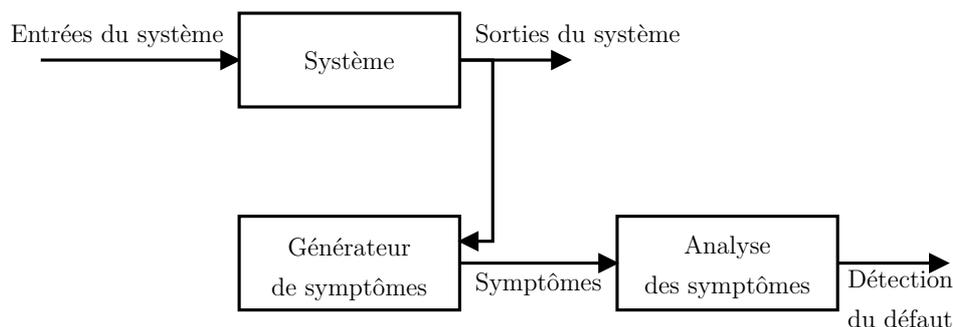


FIGURE 5.8 – Description schématique du diagnostic par traitement du signal

Les tests de plausibilité se basent sur la vérification de lois physiques simples sous lesquelles les composants du systèmes fonctionnent (voir figure 5.9). Dans l'hypothèse d'un défaut conduisant à une perte de plausibilité, la vérification de cette dernière fournit donc une information sur le défaut. Du fait de leur forme simple, les tests de plausibilité sont souvent limités pour détecter ou isoler efficacement les défauts dans des systèmes complexes.

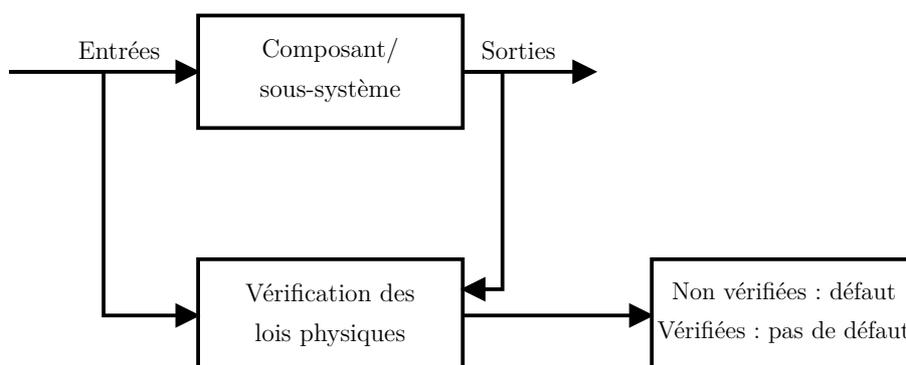


FIGURE 5.9 – Description schématique du diagnostic par test de plausibilité

La redondance analytique illustrée sur la figure 5.10, consiste à remplacer la redondance matérielle (capteurs physiques) par un modèle du système (capteurs virtuels) implanté dans un ordinateur, il s'agit alors de diagnostic à *base de modèle*. Le modèle utilisé donne une description quantitative ou qualitative du système aussi bien lors des phases transitoires qu'en régimes permanents. Ainsi, les informations issues des capteurs fictifs sont générées à partir de l'ensemble des signaux connus sur le systèmes (mesures et commandes) et à partir du modèle du système considéré. De façon similaire à la redondance matérielle, le modèle s'exécute en parallèle du vrai système et est sollicité par les mêmes signaux d'entrées (à supposer qu'il soient tous connus ou estimés s'il existe des

#### 5.4. DÉTECTION DES VARIATIONS D'UNE RÉSISTANCE DE CONTACT VIA UNE MÉTHODE DE DIAGNOSTIC À BASE DE MODÈLE

entrées inconnues). Les variables reconstruites par le modèle sont supposées correspondre aux vraies variables du système dans un cas dénué de défauts. Ainsi, une comparaison est faite entre les variables mesurées sur le système et leurs estimations délivrées par le modèle. Cette différence entre les variables mesurées et estimées est appelée *résidu*. Dès lors, le résidu comporte l'information la plus importante pour assurer un bon diagnostic : typiquement dans le cas idéal (pas de perturbations, pas de bruits de mesure), si le résidu est égal à zéro, le système ne comporte pas défaut. Le cas contraire (résidu non nul) signifie qu'un défaut est présent dans le système.

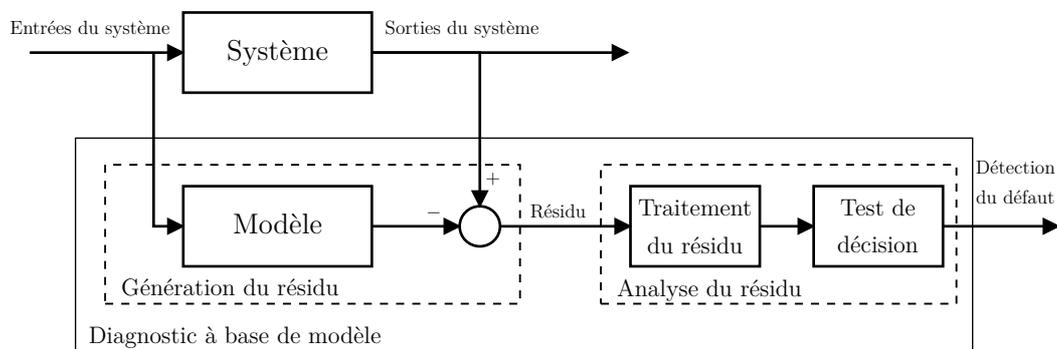


FIGURE 5.10 – Description schématique du diagnostic à base de modèle (redondance analytique)

Les avantages de la redondance logicielle sont :

- l'évitement des coûts supplémentaires par rapport à la redondance matérielle ;
- la simplicité d'implantation ;
- la possibilité de discriminer les effets des perturbations des effets des défauts.

#### 5.4.2 Problème considéré et choix d'une technique de diagnostic

L'objectif est de détecter des variations des résistances de contact pouvant être perçues comme des défauts multiplicatifs et permanents. De plus, aucun autre défaut ne sera considéré (pas de défauts sur les capteurs). Ainsi, la localisation et l'identification du défaut n'étant pas nécessaires dans ce cas, seule la détection du défaut (système FD) est considérée dans ce mémoire.

La technique de diagnostic retenue est la redondance logicielle, d'une part parce que des modèles électrothermiques des composants du système (montage de faible puissance) ont été développés et d'autre part du fait des différents avantages qu'elle présente (pas de surcoût, simplicité d'implantation).

Il est important de préciser qu'il existe principalement deux méthodes de génération de résidu pour le diagnostic à base de modèle : les espaces de parités (statique, dynamique) et les observateurs (approche numérique, approche analytique).

Dans ce manuscrit, l'espace de parité dynamique a été choisi pour sa simplicité de mise en œuvre et d'utilisation. Son fonctionnement est décrit dans la sous-section suivante.

**Remarque 21.** *Le lecteur désireux d'en apprendre plus au sujet des techniques de diagnostic ou des méthodes de génération de résidus pourra se référer à ces ouvrages : [Ding, 2013, Isermann, 2006].*

### 5.4.3 Diagnostic à base de modèle utilisant la méthode de l'espace de parité dynamique

Le résidu est un signal conçu pour indiquer la présence ou non d'anomalies dans le fonctionnement du système. La génération d'un (ou plusieurs) résidu(s) s'avère donc cruciale pour mener à bien les opérations de diagnostic souhaitées sur le système considéré.

L'espace de parité (qu'il soit statique ou dynamique) s'appuie sur la redondance analytique entre les entrées et les sorties d'un système indépendamment de ses états. Cette démarche a d'abord été développée pour les systèmes statiques [Potter et Suman, 1977] puis étendue aux systèmes dynamiques [Chow et Willsky, 1984].

#### 5.4.3.1 Génération de résidu à l'aide de la méthode de l'espace de parité dynamique

Soit un système dynamique décrit par un modèle linéaire  $\Sigma$  mis sous forme de représentation d'état :

$$\Sigma \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t) + E_v v(t) + E_f f(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + F_v v(t) + F_f f(t) \end{cases}, \quad (5.19)$$

où :

- $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état ;
- $u \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des entrées ;
- $y \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur des sorties ;
- $v \in \mathbb{R}^{m_v}$  est le vecteur des perturbations ;
- $f \in \mathbb{R}^{m_f}$  est le vecteur des défauts ;

#### 5.4. DÉTECTION DES VARIATIONS D'UNE RÉSISTANCE DE CONTACT VIA UNE MÉTHODE DE DIAGNOSTIC À BASE DE MODÈLE

---

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est la matrice dynamique ;
- $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  est la matrice de commande ;
- $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  est la matrice de mesure ;
- $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$  est la matrice d'action directe ;
- $E_v \in \mathbb{R}^{n \times m_v}$  est la matrice décrivant l'effet des perturbations sur l'état ;
- $E_f \in \mathbb{R}^{n \times m_f}$  est la matrice décrivant l'effet des défauts sur l'état ;
- $F_v \in \mathbb{R}^{p \times m_v}$  est la matrice décrivant l'effet des perturbations sur les sorties ;
- $F_f \in \mathbb{R}^{p \times m_f}$  est la matrice décrivant l'effet des défauts sur les sorties.

**Remarque 22.** *D'une manière générale, les variables internes (états) d'un modèle sont décrites par des équations différentielles non linéaires :*

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f_x(x(t), u(t), v(t), f(t)), \\ y(t) = g_y(x(t), u(t), v(t), f(t)) \end{cases} \quad (5.20)$$

où

$$\begin{aligned} & - x(t) = [x_1(t) \ \cdots \ x_n(t)]^T ; \\ & - u(t) = [u_1(t) \ \cdots \ u_m(t)]^T ; \\ & - v(t) = [v_1(t) \ \cdots \ v_{m_v}(t)]^T ; \\ & - f(t) = [f_1(t) \ \cdots \ f_{m_f}(t)]^T ; \\ & - f_x : \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \\ v(t) \\ f(t) \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f_{x_1}(x(t), u(t), v(t), f(t)) \\ \vdots \\ f_{x_n}(x(t), u(t), v(t), f(t)) \end{bmatrix} \text{ et } g_y : \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \\ v(t) \\ f(t) \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} g_{y_1}(x(t), u(t), v(t), f(t)) \\ \vdots \\ g_{y_n}(x(t), u(t), v(t), f(t)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

sont des champs de vecteurs.

Le comportement d'un modèle non linéaire de la forme (5.20) peut néanmoins être approximé au voisinage d'un point d'équilibre  $(x_e, u_e, v_e, f_e)$  par un modèle linéaire de la forme (5.19) où :

$$A = \begin{bmatrix} \left. \frac{df_{x_1}}{dx_1} \right|_{x_e, u_e, v_e, f_e} & \cdots & \left. \frac{df_{x_1}}{dx_n} \right|_{x_e, u_e, v_e, f_e} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \left. \frac{df_{x_n}}{dx_1} \right|_{x_e, u_e, v_e, f_e} & \cdots & \left. \frac{df_{x_n}}{dx_n} \right|_{x_e, u_e, v_e, f_e} \end{bmatrix}, \quad (5.21)$$

5.4. DÉTECTION DES VARIATIONS D'UNE RÉSISTANCE DE CONTACT VIA  
UNE MÉTHODE DE DIAGNOSTIC À BASE DE MODÈLE

---

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \left. \frac{df_{x_1}}{du_1} \right|_{x_e, u_e, v_e, f_e} & \dots & \left. \frac{df_{x_1}}{du_m} \right|_{x_e, u_e, v_e, f_e} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \left. \frac{df_{x_n}}{du_1} \right|_{x_e, u_e, v_e, f_e} & \dots & \left. \frac{df_{x_n}}{du_m} \right|_{x_e, u_e, v_e, f_e} \end{bmatrix}. \quad (5.22)$$

Les autres matrices de la représentation d'état (5.19) peuvent être déterminées de manière similaire.

La dérivée de l'équation de sortie du modèle  $\Sigma$  (5.19) s'écrit :

$$y^{(1)}(t) = \mathbf{C}x^{(1)}(t) + \mathbf{D}u^{(1)}(t) + \mathbf{F}_v v^{(1)}(t) + \mathbf{F}_f f^{(1)}(t), \quad (5.23)$$

où  $z^{(k)}(t)$  désigne la dérivée d'ordre  $k$  par rapport au temps de  $z$ .

En remplaçant  $x^{(1)}(t)$  dans (5.23) par son expression donnée dans (5.19), il vient :

$$\begin{aligned} y^{(1)}(t) &= \mathbf{C}(\mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{E}_v v(t) + \mathbf{E}_f f(t)) + \mathbf{D}u^{(1)}(t) + \mathbf{F}_v v^{(1)}(t) + \mathbf{F}_f f^{(1)}(t) \\ &= \mathbf{C}\mathbf{A}x(t) + \mathbf{C}\mathbf{B}u(t) + \mathbf{D}u^{(1)}(t) + \mathbf{C}\mathbf{E}_v v(t) + \mathbf{F}_v v^{(1)}(t) + \mathbf{C}\mathbf{E}_f f(t) + \mathbf{F}_f f^{(1)}(t). \end{aligned} \quad (5.24)$$

La dérivée d'ordre 2 de  $y(t)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} y^{(2)}(t) &= \mathbf{C}x^{(2)}(t) + \mathbf{D}u^{(2)}(t) + \mathbf{F}_v v^{(2)}(t) + \mathbf{F}_f f^{(2)}(t) \\ &= \mathbf{C}\mathbf{A}^2 x(t) + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}u(t) + \mathbf{C}\mathbf{B}u^{(1)}(t) + \mathbf{D}u^{(2)}(t) + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{E}_v v(t) + \mathbf{C}\mathbf{E}_v v^{(1)}(t) \\ &\quad + \mathbf{F}_v v^{(2)}(t) + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{E}_f f(t) + \mathbf{C}\mathbf{E}_f f(t) + \mathbf{D}u^{(1)}(t) + \mathbf{F}_f f^{(2)}(t). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Dériver  $y$  ainsi jusqu'à un ordre de dérivation  $q \leq n$ , conduit alors au système d'équations suivant :

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{H}_{o,q}x(t) + \mathbf{H}_{u,q}\mathbf{U}(t) + \mathbf{H}_{v,q}\mathbf{V}(t) + \mathbf{H}_{f,q}\mathbf{F}(t) \quad (5.26)$$

où :

$$\begin{aligned} - \mathbf{Y}(t) &= \begin{bmatrix} y(t) & y^{(1)}(t) & \dots & y^{(q)}(t) \end{bmatrix}^T; \\ - \mathbf{U}(t) &= \begin{bmatrix} u(t) & u^{(1)}(t) & \dots & u^{(q)}(t) \end{bmatrix}^T; \\ - \mathbf{V}(t) &= \begin{bmatrix} v(t) & v^{(1)}(t) & \dots & v^{(q)}(t) \end{bmatrix}^T; \\ - \mathbf{F}(t) &= \begin{bmatrix} f(t) & f^{(1)}(t) & \dots & f^{(q)}(t) \end{bmatrix}^T; \end{aligned}$$

5.4. DÉTECTION DES VARIATIONS D'UNE RÉSISTANCE DE CONTACT VIA UNE MÉTHODE DE DIAGNOSTIC À BASE DE MODÈLE

---

$$\begin{aligned}
 - H_{o,q} &= \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^q \end{bmatrix}; \\
 - H_{u,q} &= \begin{bmatrix} D & [0] & \cdots & [0] \\ CB & D & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & [0] \\ CA^{q-1}B & \cdots & CB & D \end{bmatrix}; \\
 - H_{v,q} &= \begin{bmatrix} F_d & [0] & \cdots & [0] \\ CE_d & F_d & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & [0] \\ CA^{q-1}E_d & \cdots & CE_d & F_d \end{bmatrix}; \\
 - H_{f,q} &= \begin{bmatrix} F_f & [0] & \cdots & [0] \\ CE_f & F_f & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & [0] \\ CA^{q-1}E_f & \cdots & CE_f & F_f \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

les  $[0]$  désignant des matrices nulles de dimensions appropriées.

L'équation (5.26) s'écrit aussi :

$$Y(t) - H_{u,q}U(t) = H_{o,q}x(t) + H_{v,q}V(t) + H_{f,q}F(t). \quad (5.27)$$

Les termes à gauche de l'égalité (5.27) étant connus seront utilisés pour générer le résidu selon :

$$r(t) = WY(t) - WH_{u,q}U(t), \quad (5.28)$$

où  $W$  est une matrice dont le rôle et la détermination sont expliqués dans la suite.

Le résidu est donc calculé comme une combinaison linéaire des signaux connus (entrées et sorties mesurées) et de leurs dérivées. L'équation (5.28) est appelée forme de calcul du résidu.

Le résidu peut également être exprimé en fonction des signaux inconnus à droite de l'inégalité (5.27) selon :

$$r(t) = WH_{o,q}x(t) + WH_{v,q}V(t) + WH_{f,q}F(t). \quad (5.29)$$

L'équation (5.29) est appelée forme d'évaluation du résidu.

Afin de rendre le résidu  $r$  insensible à l'état  $x$ , la matrice  $W$ , appelée matrice de parité, doit être choisie orthogonale à  $H_{o,q}$ , c'est-à-dire vérifier :

$$WH_{o,q} = [0]. \quad (5.30)$$

**Remarque 23.** *Comme il peut exister une infinité de solutions à l'équation (5.30), une contrainte supplémentaire est imposée afin d'avoir une solution unique. En effet, il est exigé que les lignes de  $W$  forment une base orthonormée. Le problème de trouver  $W$  vérifiant (5.30) devient alors :*

$$\text{trouver } W \text{ telle que } \begin{cases} WH_{o,q} = [0] \\ WW^T = I_{p_o} \end{cases}. \quad (5.31)$$

*De plus une solution existe si et seulement si*

$$p_o > \text{rang}(H_{o,q}), \quad (5.32)$$

où  $p_o = (q + 1)p$  est le nombre de lignes de  $H_{o,q}$ . La dimension de la matrice  $W$  est alors  $W \in \mathbb{R}^{(p_o - \text{rang}(H_{o,q})) \times p_o}$ .

Ainsi, la forme d'évaluation (5.29) devient :

$$r(t) = WH_{v,q}V(t) + WH_{f,q}F(t). \quad (5.33)$$

S'il n'y a aucune perturbation ( $V = 0$ ), l'équation (5.33) montre que le résidu calculé à l'aide de l'équation (5.27), est sensible uniquement aux défauts et est indépendant de l'évolution de l'état du système. Cependant, ce cas, bien qu'idéal, n'est pas possible dans la réalité. En effet, il y a toujours au moins des perturbations sur les sorties observées liées aux bruits de mesures. Une solution consisterait à trouver une matrice  $W$  qui soit à la fois orthogonale à  $H_{o,q}$  et à  $H_{v,q}$ . Dans la pratique, une telle matrice existe rarement. Toutefois, il est possible de générer un résidu scalaire  $\tilde{r}(t)$  à partir de  $r(t)$  de sorte qu'il soit le plus sensible aux défauts et le moins sensible aux perturbations. Ce résidu  $\tilde{r}$  est obtenu comme une combinaison linéaire des composantes de  $r$  décrite par un vecteur de  $Z$  selon :

$$\tilde{r}(t) = Z^T r(t) = Z^T W Y(t) - Z^T W H_{u,q} U(t), \quad (5.34)$$

et

$$\tilde{r}(t) = Z^T r(t) = Z^T W H_{v,q} V(t) + Z^T W H_{f,q} F(t). \quad (5.35)$$

Le critère à minimiser généralement utilisé pour choisir  $Z$  est le suivant :

$$\mathfrak{J}_Z = \frac{\|Z^T W H_{v,q}\|_2^2}{\|Z^T W H_{f,q}\|_2^2} = \frac{Z^T W H_{v,q} H_{v,q}^T W^T Z}{Z^T W H_{f,q} H_{f,q}^T W^T Z}. \quad (5.36)$$

Ainsi, le vecteur optimal qui minimise le critère  $\mathfrak{J}_Z$  est donné par :

$$Z_{\text{opt}} = \arg \min_Z \frac{Z^T W H_{v,q} H_{v,q}^T W^T Z}{Z^T W H_{f,q} H_{f,q}^T W^T Z}. \quad (5.37)$$

**Théorème 4** (Théorème de Gantmacher [Gantmacher, 1960]). *Le vecteur optimal  $Z_{\text{opt}} = \arg \min_Z \frac{Z^T M Z}{Z^T N Z}$  est le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre  $\lambda_{\min}$  du faisceau de matrices  $(M, N)$  et  $\min_Z \frac{Z^T M Z}{Z^T N Z} = \lambda_{\min}$ .*

Finalement, grâce au théorème précédent le vecteur optimal permettant d'obtenir un résidu  $\tilde{r}$  le plus sensible aux défauts et le moins sensible aux perturbations peut être déterminé en posant  $M = W H_{v,q} H_{v,q}^T W^T$  et  $N = W H_{f,q} H_{f,q}^T W^T$ .

#### 5.4.3.2 Détermination de l'ordre de dérivation $q$

En général, l'ordre de dérivation  $q$  intervenant dans les vecteurs  $U$  et  $Y$  le plus petit possible est retenu pour opérer l'espace de parité dynamique. Pour cela, il suffit de prendre la première valeur de  $q$  qui satisfait la condition (5.32). Par exemple, l'algorithme de la figure 5.11 peut être utilisé.

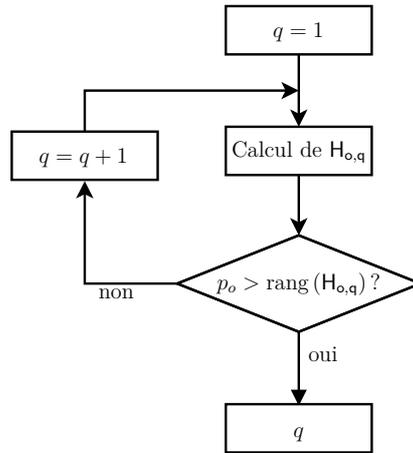


FIGURE 5.11 – Un algorithme simple pour déterminer  $q$

### 5.4.3.3 Générateur de dérivées des signaux d'entrée et des signaux de sortie

Dans la littérature associée au diagnostic et dans la pratique, ce sont très souvent des systèmes échantillonnés qui sont considérés. Dans ce sens, le modèle  $\Sigma$  de l'équation (5.19) n'est plus continu mais discret et fait intervenir des équations de récurrence à la place des équations différentielles. Ainsi, dans le cas discret, l'espace de parité dynamique nécessite non pas la connaissance des dérivées des signaux mais de leurs valeurs échantillonnées futures. Un simple décalage temporel des échantillons permet d'opérer l'espace de parité dynamique à partir des valeurs échantillonnées passées (facilement accessibles) pour le cas des systèmes discrets.

Pour les systèmes continus, l'obtention des dérivées des signaux d'intérêt est moins évidente puisqu'elles ne peuvent pas toujours être mesurées, la solution la plus simple étant alors de les calculer. Un moyen d'y parvenir est d'utiliser la dérivation numérique combinée avec une méthode d'interpolation (linéaire, cubique, polynomiale, méthode de Newton, etc). Cependant, ces méthodes restent efficaces pour des bruits extrêmement faibles.

Une autre solution proposée dans [Young, 1970], recourt à l'utilisation d'un filtre de variables d'état dont la fonction de transfert est donnée par :

$$F_{ve}(s, q) = \frac{y_{ve}(s, q)}{u_{ve}(s)} = \frac{1}{c_0 + c_1 s + \dots + c_{q-1} s^{q-1} + c_q s^q}, \quad (5.38)$$

où :

- $u_{ve}$  est le signal en entrée du filtre ;

#### 5.4. DÉTECTION DES VARIATIONS D'UNE RÉSISTANCE DE CONTACT VIA UNE MÉTHODE DE DIAGNOSTIC À BASE DE MODÈLE

–  $y_{ve}$  correspond à l'entrée  $u_{ve}$  filtrée.

Le choix des coefficients du filtre est relativement libre. Il est toutefois conseillé d'après [Isermann, 2006], de choisir ces coefficients à partir de la synthèse d'un filtre de Butterworth<sup>(1)</sup>. La bande passante du filtre est généralement choisie de sorte à correspondre à la dynamique la plus rapide du système (c'est-à-dire la plus grande valeur propre de la matrice  $A$ ).

L'avantage d'utiliser un filtre de variables d'état en plus de fournir les dérivées des signaux considérés, est de les filtrer grâce à son gabarit de type passe-bas. Ainsi, l'effet du bruit est atténué sur les signaux d'entrée et de sortie ainsi que sur leurs dérivées.

Le schéma de la figure 5.12 présente la forme d'implantation du filtre de variables d'état. La sortie du filtre est alors issue de la concaténation du signal  $y_{ve}$  avec ses dérivées filtrées d'ordre croissant pour former un vecteur. Par exemple, si l'entrée du filtre est le vecteur des entrées du modèle (5.19), c'est-à-dire  $u_{ve} = u$ , alors la sortie du filtre est le vecteur  $U$  de la relation (5.26).

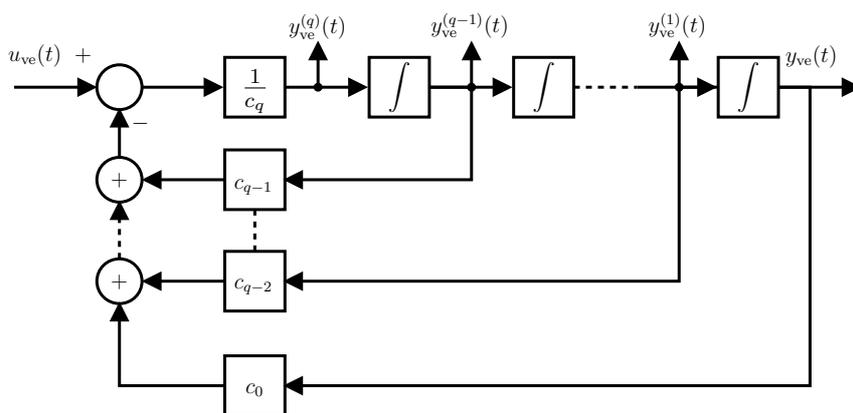


FIGURE 5.12 – Implantation du filtre de variables d'état

##### 5.4.3.4 Analyse des résidus et calcul de seuil

Quelle que soit la méthode utilisée, la génération de résidus n'est pas suffisante à elle seule pour discriminer un comportement sain du système d'un comportement présentant au moins un défaut. Ainsi, comme le montre la figure 5.13, le générateur de résidus s'accompagne toujours d'une unité d'analyse des résidus et d'une unité de calcul de seuil.

L'unité d'analyse a pour objectif de calculer une caractéristique particulière des résidus (par exemple une combinaison linéaire de moyennes ou une norme quelconque).

1. Un filtre de Butterworth est un filtre linéaire dont le gain est le plus constant possible dans bande passante [Kim, 2011].

#### 5.4. DÉTECTION DES VARIATIONS D'UNE RÉSISTANCE DE CONTACT VIA UNE MÉTHODE DE DIAGNOSTIC À BASE DE MODÈLE

L'unité de calcul de seuil, pouvant éventuellement nécessiter les signaux d'entrées du système, doit générer un seuil cohérent avec la caractéristique considérée par l'unité d'analyse. Dès lors, un test extrêmement simple qui consiste à calculer la différence entre la caractéristique des résidus souhaitée et le seuil correspondant, permet de conclure sur la présence ou non d'un défaut dans le système.

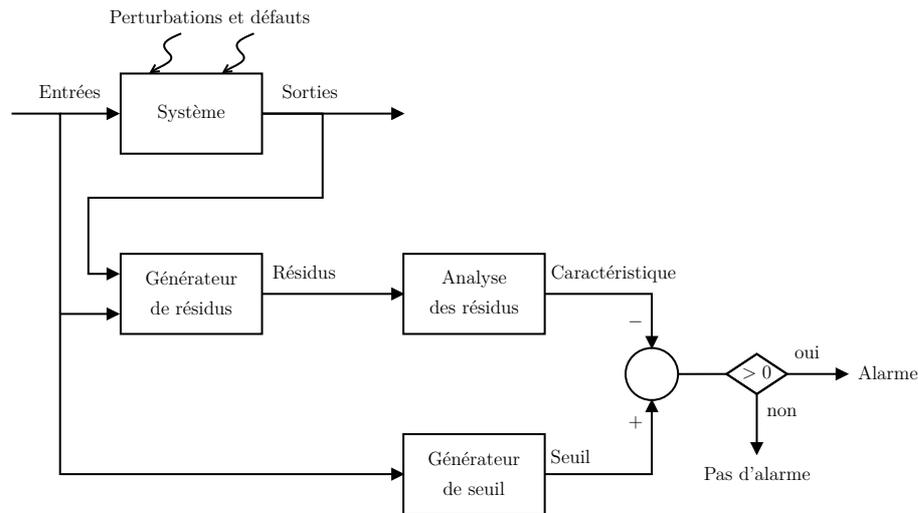


FIGURE 5.13 – Description schématique de l'analyse de résidu et du calcul de seuil

Par exemple, pour un résidu donné, le cas le plus basique consiste à générer une alarme lorsque sa valeur absolue (analyse) est non nulle (seuil fixe égal à 0). Cependant, dans la pratique le résidu sera toujours plus ou moins impacté par les incertitudes de modélisation et par diverses perturbations (notamment les bruits de mesures). Pour cela, des méthodes d'analyse et de génération de seuil plus ou moins sophistiquées ont fait l'objet de nombreuses recherches pour prendre en considération ces effets indésirables sur le résidu.

Sans aucune perte de généralité, il est supposé que des résidus sont générés par la méthode de l'espace de parité dynamique. Soit  $r_i(t)$  le  $i$ -ème résidu généré par la  $i$ -ème ligne de la matrice de parité  $W$ , et soit  $r(t) = [r_1(t) \ \dots \ r_i(t) \ \dots \ r_{p_W}(t)]^T$  le vecteur des résidus où  $p_W = p_o - \text{rang}(H_{o,q})$  désigne le nombre de lignes de  $W$ . Parmi les fonctions d'analyse des résidus les plus classiques, il existe la *valeur maximale* donnée par :

$$J_{\text{vm}} = \sup_{t \geq 0} \|r(t)\|_2, \quad \|r(t)\|_2 = \sqrt{\left( \sum_{i=1}^{r_{p_W}} r_i^2(t) \right)}, \quad (5.39)$$

#### 5.4. DÉTECTION DES VARIATIONS D'UNE RÉSISTANCE DE CONTACT VIA UNE MÉTHODE DE DIAGNOSTIC À BASE DE MODÈLE

---

la *tendance maximale* définie par :

$$J_{\text{tend}} = \sup_{t \geq 0} \|r^{(1)}(t)\|_2, \quad (5.40)$$

la *valeur moyenne* :

$$J_{\text{moy}} = \sup_{t \geq 0} \|\bar{r}(t)\|_2, \quad \bar{r}(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} r(\tau) d\tau, \quad (5.41)$$

ou encore la *valeur efficace* de  $r$  définie par :

$$J_{\text{eff}} = r_{\text{eff}}(t) = \sqrt{\left( \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \|r(\tau)\|_2^2 d\tau \right)}. \quad (5.42)$$

Trouver le bon seuil, c'est pouvoir déterminer la limite de tolérance du système vis-à-vis des perturbations et des incertitudes de modélisation en fonctionnement sain (sans défauts). Cette limite peut être influencée de façon significative par la dynamique du générateur de résidus et les incertitudes  $\Delta$  du modèle. Ainsi, les seuils typiquement associés aux caractéristiques présentées précédemment dans les équations (5.39) à (5.42) sont respectivement donnés par :

$$S_{\text{vm}} = \sup_{f=0,v,\Delta} \|r(t)\|_2, \quad (5.43)$$

$$S_{\text{tend}} = \sup_{f=0,v,\Delta} \|r^{(1)}(t)\|_2, \quad (5.44)$$

$$S_{\text{moy}} = \sup_{f=0,v,\Delta} \|\bar{r}(t)\|_2, \quad (5.45)$$

$$S_{\text{eff}} = \sup_{f=0,v,\Delta} \|r_{\text{eff}}(t)\|_2. \quad (5.46)$$

Ainsi, lorsque une caractéristique  $J$  dépasse son seuil  $S$ , une alarme est déclenchée conformément au schéma de la figure 5.13.

De nombreuses autres méthodes dédiées à l'analyse des résidus existent et peuvent se classer en trois catégories :

- les méthodes utilisant les normes telles que celles exprimées dans les équations (5.39) à (5.42) ;
- les méthodes statistiques (GLR : *Generalized Likelihood Ratio*, test de Student, test de Wald, test de CUSUM, etc) ;
- les approches basées sur l'intégration des normes et des méthodes statistiques.

De même, d'autres types de seuils peuvent s'employer tels que les seuils adaptatifs, les seuils basés sur le critère de Neyman–Pearson ou le critère de Baye, etc.

Plus de détails sur ces différentes méthodes consacrées à l'analyse de résidus et sur la génération de seuil se trouvent dans les chapitres 9, 10 et 11 de [Ding, 2013] ainsi que dans le chapitre 1 de [Fonod, 2014].

#### 5.4.4 Application au montage de faible puissance

A présent l'espace de parité dynamique est appliqué au montage de faible puissance faisant l'objet du chapitre 3 de ce mémoire. Un premier paragraphe introduit la représentation d'état modélisant le montage. La génération de résidus et l'étude de leur sensibilité vis-à-vis des défauts et des perturbations sont ensuite abordées dans un second paragraphe. Enfin, un dernier paragraphe présente les résultats obtenus sur de vrais jeux de mesures.

##### 5.4.4.1 Détermination du modèle d'état du montage de faible puissance utilisé pour le diagnostic

#### Choix des vecteurs d'entrée, de sortie et d'état du montage de faible puissance

Comme vu au chapitre 3, le montage de faible puissance comporte trois entrées connues :

- le courant électrique  $I$  ;
- la température ambiante  $T_a$  ;
- la température du MOSFET intelligent  $T_{\text{MOS}}$ .

**Remarque 24.** *Pour des raisons de commodité pour la suite, le courant électrique est plutôt remplacé par son carré :  $I^2$ .*

Le choix des sorties est contraint. En effet, pour des raisons de coût, il est souhaité que la méthode de diagnostic utilise le moins de capteurs possible. Ainsi, seule la température du clip  $T_{\text{cl}}$  a été choisie de par sa facilité d'accessibilité et surtout pour sa proximité avec le point de contact.

Pour les perturbations, seul le bruit sur la mesure de température du clip, noté  $v_{\text{cl}}$ , est considéré.

#### 5.4. DÉTECTION DES VARIATIONS D'UNE RÉSISTANCE DE CONTACT VIA UNE MÉTHODE DE DIAGNOSTIC À BASE DE MODÈLE

---

Il est rappelé que l'équation différentielle régissant la température du point de contact du montage de faible puissance dans *le cas nominal* est donnée par :

$$C_{pc} \frac{dT_{pc}(t)}{dt} = \frac{T_1^1(t) - T_{pc}(t)}{R_1^1} + \frac{T_{cl}(t) - T_{pc}(t)}{R_{cl}} + \mathcal{R}_{pc} I(t)^2. \quad (5.47)$$

Les variations paramétriques se manifestent comme des défauts multiplicatifs. Dans ce cas, la valeur de la résistance de contact  $\mathcal{R}_{pc}$  peut être perçue comme la somme de sa valeur nominale  $\mathcal{R}_{nom}$  avec une valeur d'écart notée  $\Delta\mathcal{R}$ , c'est-à-dire :

$$\mathcal{R}_{pc} = \mathcal{R}_{nom} + \Delta\mathcal{R}. \quad (5.48)$$

Ainsi, lorsque la valeur de  $\Delta\mathcal{R}$  est nulle, la résistance de contact est égale à sa valeur nominale et il n'y a pas de défaut. Dans le cas contraire, si  $\Delta\mathcal{R}$  est différent de zéro alors un terme d'effet Joule supplémentaire est ajouté à l'équation (5.47). Dès lors, le défaut est donc donné par le produit de  $\Delta\mathcal{R}$  avec le carré du courant conformément à l'équation suivante :

$$\frac{dT_{pc}(t)}{dt} = \frac{1}{C_{pc}} \left( \frac{T_1^1(t) - T_{pc}(t)}{R_1^1} + \frac{T_{cl}(t) - T_{pc}(t)}{R_{cl}} + \underbrace{\mathcal{R}_{nom} I(t)^2}_{\text{Effet Joule nominal}} + \underbrace{\Delta\mathcal{R} I(t)^2}_{\text{Effet Joule supplémentaire : défaut}} \right). \quad (5.49)$$

Le vecteur d'état est constitué de toutes les températures des composants (ou mailles de composants) du montage de faible puissance c'est-à-dire :

- la température du fil de longueur infinie  $T_{inf}$  ;
- les températures des mailles du fil de longueur finie (huit mailles)  $T_1$  à  $T_8$  ;
- la température du clip  $T_{cl}$  ;
- la température de l'air de la cellule du porte-clips  $T_{air}$  ;
- la température du point de contact  $T_{pc}$  ;
- les températures des mailles de la languette (trois mailles)  $T_1^1$ ,  $T_1^2$  et  $T_1^3$  ;
- la température de l'embase  $T_{emb}$  ;
- la température du porte-clips  $T_{pcl}$  ;
- les températures des mailles de la piste de cuivre (quatre mailles)  $T_p^1$  à  $T_p^4$  ;
- la température de la carte électronique  $T_{ce}$ ,

soit vingt-deux états au total.

En résumé, en respectant la notation de la représentation d'état (5.19), les différents vecteurs du système sont donnés par :

$$x(t) = \begin{bmatrix} T_{\text{inf}}(t) & T_1(t) & \cdots & T_8(t) & T_{\text{cl}}(t) & T_{\text{air}}(t) & T_{\text{pc}}(t) & T_1^1(t) \\ T_1^2(t) & T_1^3(t) & T_{\text{emb}}(t) & T_{\text{pcl}}(t) & T_{\text{p}}^1(t) & \cdots & T_{\text{p}}^4(t) & T_{\text{ce}}(t) \end{bmatrix}^T, \quad (5.50)$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} I^2(t) & T_{\text{amb}}(t) & T_{\text{MOS}}(t) \end{bmatrix}^T, \quad (5.51)$$

$$v(t) = v_{\text{cl}}(t), \quad (5.52)$$

$$f(t) = \Delta \mathcal{R} I^2(t). \quad (5.53)$$

### Définition des matrices du montage de faible puissance

En respectant la notation de la représentation d'état (5.19), les matrices **A** et **B** associées au montage de faible puissance sont obtenues par linéarisation du modèle non linéaire, soit analytiquement en se référant à la méthode donnée dans la remarque 22, soit numériquement par exemple grâce à la fonction `linmod` de MATLAB<sup>®</sup>-Simulink<sup>®</sup>. Cette linéarisation se fait autour d'un point d'équilibre, par exemple lorsque les températures des différents composants de la chaîne sont égales à la température ambiante. Comme l'état du système est relativement grand (vingt-deux états), les matrices **A**, **B** sont de dimensions élevées. Par soucis de lisibilité et de concision, les expressions analytiques (ou numériques par soucis de confidentialité) de ces matrices ne sont pas données dans ce manuscrit. Toutefois, il est rappelé que les non linéarités interviennent uniquement sur les composants soumis à la convection ou au rayonnement. Ces termes peuvent facilement se linéariser en utilisant par exemple la relation (2.25) présentée au chapitre 2 de ce mémoire.

Une seule sortie (température du clip :  $T_{\text{cl}}$ ) et une seule perturbation (bruit sur la mesure de la température du clip :  $v_{\text{cl}}$ ) sont considérées. Ceci implique d'une part, que la matrice **C** est un vecteur ligne rempli de zéros sauf le terme associé à la température du clip qui est égal à 1. D'autre part, il en résulte également que la matrice  $\mathbf{E}_v$  est une matrice remplie de zéros (pas de perturbations sur l'état) et que la matrice  $\mathbf{F}_v$  est un scalaire égal à 1.

Comme il n'existe pas d'action directe entre la sortie choisie et les entrées, et d'après ce qui précède, la matrice **D** est un vecteur ligne nul.

Enfin, un seul défaut est considéré et supposé agir sur la résistance de contact. Ceci implique que la matrice  $\mathbf{E}_f$  est un vecteur colonne qui ne contient que des zéros hormis le terme de sa ligne associée à la température du point de contact qui est non nul et,

#### 5.4. DÉTECTION DES VARIATIONS D'UNE RÉSISTANCE DE CONTACT VIA UNE MÉTHODE DE DIAGNOSTIC À BASE DE MODÈLE

---

d'après l'équation (5.49), ce terme est égal à  $\frac{1}{C_{pc}}$ . La matrice  $F_f$  est un scalaire nul car aucun défaut sur la sortie n'est pris en compte.

En résumé, à part les matrices  $A$  et  $B$ , les matrices de la représentation d'état associée au montage de faible puissance sont donnés par :

$$C = [0 \quad \dots \quad 0 \quad \underbrace{1}_{\text{Terme associé à } T_{c1}} \quad 0 \dots 0], \quad (5.54)$$

$$D = [0 \quad 0 \quad 0], \quad (5.55)$$

$$E_v = [0], \quad (5.56)$$

$$E_f = [0 \quad \dots \quad 0 \quad \underbrace{1/C_{pc}}_{\text{Terme associé à } T_{pc}} \quad 0 \dots 0]^T, \quad (5.57)$$

$$F_v = 1, \quad (5.58)$$

$$F_f = 0. \quad (5.59)$$

##### 5.4.4.2 Génération et étude des sensibilités des résidus

La connaissance des matrices associées à une représentation d'état du montage de faible puissance permet de construire les matrices  $H_{o,q}$ ,  $H_{u,q}$ ,  $H_{v,q}$  et  $H_{f,q}$  comme indiqué au paragraphe 5.4.3.1 de la sous-section précédente. Ceci permet ensuite de déterminer l'ordre de dérivation  $q$  minimum grâce à l'algorithme de la figure 5.11, ainsi que le filtre de variables d'état défini par l'équation (5.38). Finalement, la forme de calcul des résidus est déterminée à partir de l'équation (5.28) ou (5.34) si un vecteur de projection optimal  $Z_{opt}$  a été déterminé en utilisant la relation (5.37).

L'application de l'algorithme de la figure 5.11 sur ce système aboutit à la génération d'une matrice  $W$ . Cependant, une analyse plus attentive du produit  $WH_{o,q}$  laisse apparaître des termes de l'ordre de  $1 \times 10^{-4}$ , ce qui est en réalité numériquement très élevé pour un espace orthogonal. Dès lors, le résidu n'est pas suffisamment orthogonal à l'état, ce qui rend impossible toute discrimination d'une variation du résidu provoquée par l'état ou engendrée par un défaut.

Comme l'utilisation d'un seul capteur de température près du contact ne permet pas d'engendrer une matrice  $W$  suffisamment orthogonale à la matrice  $H_{o,q}$ , il est proposé de prendre une mesure de température supplémentaire. Les mesures ainsi retenues sont la température du clip  $T_{c1}$  et la température de la dernière maille de la languette  $T_1^3$ . De

5.4. DÉTECTION DES VARIATIONS D'UNE RÉSISTANCE DE CONTACT VIA  
UNE MÉTHODE DE DIAGNOSTIC À BASE DE MODÈLE

---

ce fait, un bruit de mesure sur la température de la languette  $v_1$  est considéré, et supposé indépendant de celui sur la mesure de température du clip. Dans ces conditions, il est nécessaire de modifier certains vecteurs et matrices de la représentation d'état associée au montage :

$$y(t) = [T_{cl}(t) \quad T_1^3(t)]^T, \quad (5.60)$$

$$v(t) = [v_{cl}(t) \quad v_1(t)]^T, \quad (5.61)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \underbrace{1}_{\text{Terme associé à } T_{cl}} & 0 \dots 0 \\ 0 & \dots & 0 & \underbrace{1}_{\text{Terme associé à } T_1} & 0 \dots 0 \end{bmatrix}, \quad (5.62)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.63)$$

$$F_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.64)$$

$$F_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.65)$$

L'application de la méthode de l'espace de parité à partir de ces nouvelles matrices aboutit à une matrice  $W$  telle que les termes les plus importants (en valeur absolue) du produit  $WH_{o,q}$  sont inférieurs à  $1 \times 10^{-16}$ . La matrice  $W$  obtenue est constituée d'une seule ligne (vecteur ligne) qui engendre alors un résidu scalaire. La méthode d'obtention d'un résidu optimal  $\tilde{r}$  décrit dans le paragraphe 5.4.3.1 ne peut donc être appliquée.

La forme d'évaluation du résidu donnée par l'équation (5.29) permet d'étudier sa sensibilité vis-à-vis des perturbations et des défauts. En effet, sachant qu'à conditions initiales nulles  $\mathcal{L} \left\{ \frac{d^q f(t)}{dt^q} \right\} = s^q F(s)$  et  $\mathcal{L} \left\{ \frac{d^q v(t)}{dt^q} \right\} = s^q V(s)$ , l'application de la transformée

de Laplace à l'équation (5.29) donne :

$$R(s) = \mathbf{W}\mathbf{H}_{v,q} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^q \end{bmatrix} V(s) + \mathbf{W}\mathbf{H}_{f,q} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^q \end{bmatrix} F(s), \quad (5.66)$$

où  $R(s)$ ,  $V(s)$  et  $F(s)$  désignent respectivement les transformées de Laplace du résidu  $r(t)$ , des perturbations  $v(t)$  et du défaut  $f(t)$ .

En posant  $\mathbf{S} = [1 \ s \ \dots \ s^q]^T$ , le transfert  $F_{v \rightarrow r}(s)$  entre le résidu et les perturbations est déduit, ainsi que le transfert  $F_{f \rightarrow r}(s)$  entre le résidu et le défaut :

$$F_{v \rightarrow r}(s) = \begin{bmatrix} F_{B_{cl} \rightarrow r}(s) \\ F_{B_l \rightarrow r}(s) \end{bmatrix} = \frac{R(s)}{V(s)} = \mathbf{W}\mathbf{H}_{v,q}\mathbf{S}, \quad (5.67)$$

$$F_{f \rightarrow r}(s) = \frac{R(s)}{F(s)} = \mathbf{W}\mathbf{H}_{f,q}\mathbf{S}, \quad (5.68)$$

où  $F_{B_{cl} \rightarrow r}(s)$  (respectivement  $F_{B_l \rightarrow r}(s)$ ) désigne la fonction de transfert entre le résidu et le bruit sur la mesure de température du clip (respectivement de la languette).

Les diagrammes de gains de ces transferts sont donnés sur la figure 5.14. En régime permanent (lorsque  $\omega \rightarrow 0$ ), le résidu est moins sensible au bruit sur la mesure de température du clip d'environ 10 dB par rapport à sa sensibilité par rapport au défaut. En revanche, le résidu est plus sensible au bruit sur la mesure de température de la languette d'environ 10 dB par rapport à sa sensibilité par rapport au défaut. En d'autres termes, le résidu est plus sensible au bruit sur la mesure de la température de la languette qu'au défaut. Il est toutefois rappelé, que le filtre de variables d'état utilisé pour obtenir les dérivées des vecteurs  $u$  et  $y$ , permet d'atténuer l'effet du bruit au préalable.

#### 5.4.4.3 Analyse du résidu et résultats

Il reste à analyser le résidu généré par l'espace de parité dynamique, c'est-à-dire choisir une de ses caractéristiques et la comparer à un seuil. Pour cela, l'allure du résidu est d'abord examinée pour un cas sans défaut lorsque de vrais jeux de mesure sont utilisés (figure 5.15). Ce résidu est obtenu à partir de mesures issues d'un essai où un échelon de courant d'intensité environ égale à 10 A a été envoyée dans le montage de faible puissance pendant 600 s.

5.4. DÉTECTION DES VARIATIONS D'UNE RÉSISTANCE DE CONTACT VIA  
UNE MÉTHODE DE DIAGNOSTIC À BASE DE MODÈLE

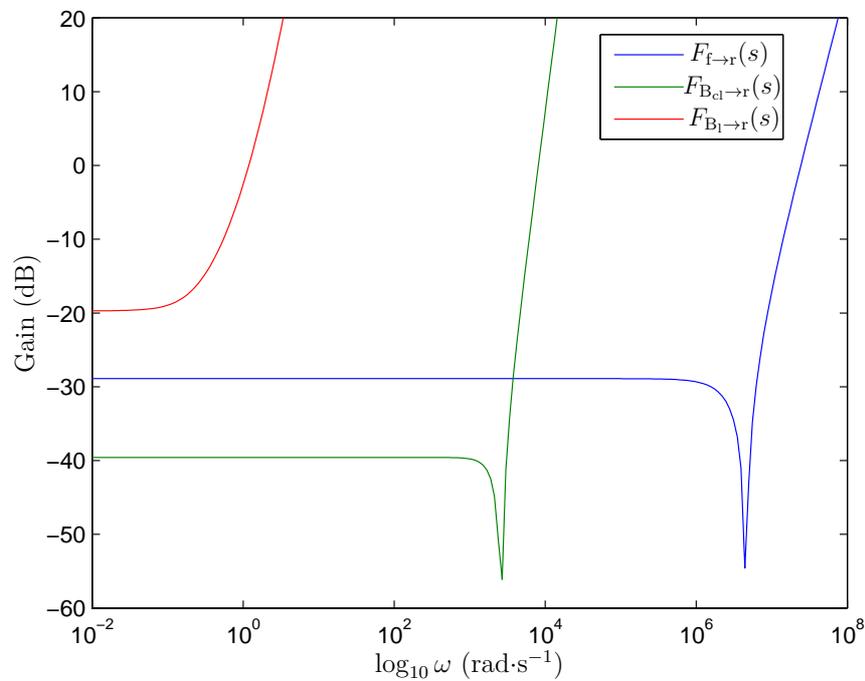


FIGURE 5.14 – Diagrammes de gains des transferts  $F_{v \rightarrow r}(s)$  et  $F_{f \rightarrow r}(s)$

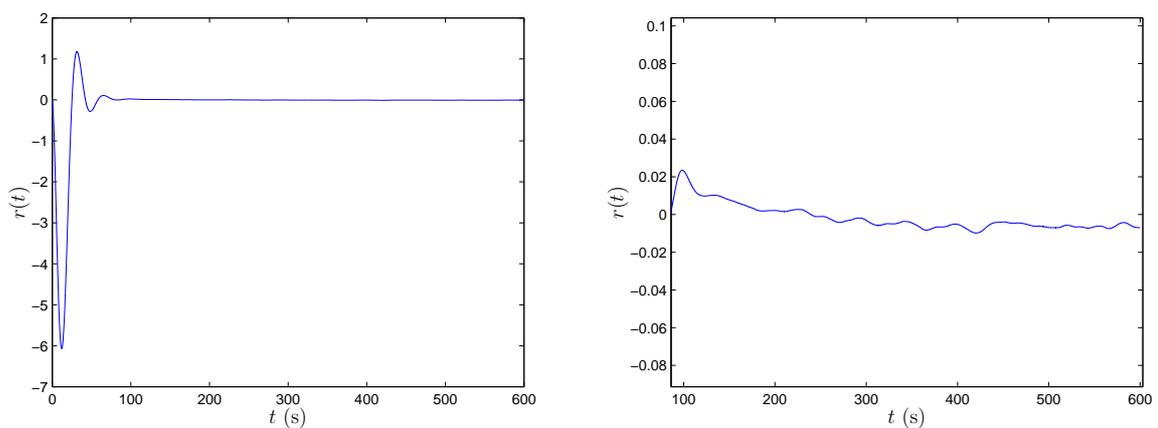


FIGURE 5.15 – Allure du résidu obtenu à partir d'un jeu de mesures dans un cas sans défaut (à gauche) et zoom après convergence (à droite)

#### 5.4. DÉTECTION DES VARIATIONS D'UNE RÉSISTANCE DE CONTACT VIA UNE MÉTHODE DE DIAGNOSTIC À BASE DE MODÈLE

---

Le résidu présente une phase transitoire (ici environ 150s) qui est due à l'utilisation du filtre de variables d'état. En effet, plus la bande passante du filtre est grande, plus le temps de convergence du résidu est petit mais au détriment de l'effet du bruit de mesure. Au contraire, si la bande passante du filtre est rendue petite, le temps de convergence du résidu s'allonge mais le bruit est mieux atténué. D'autre part, le résidu n'est pas parfaitement nul (même en valeur moyenne après son temps de convergence). Ceci est provoqué par les erreurs de modélisation, ainsi que par l'écart de précision entre le modèle linéarisé du montage et son comportement réel qui est non linéaire.

Le résidu a tendance à décroître et passe par 0. Un calcul de la moyenne n'est pas envisagé car certains termes positifs et négatifs pourraient éventuellement se compenser. Il a plutôt été retenu, de calculer la valeur efficace  $r_{\text{eff}}$  du résidu sur une fenêtre temporelle  $T$  égale à 1 seconde conformément à l'équation (5.42). Ceci, permet de s'affranchir du changement de signe du résidu puisque ses valeurs sont élevées au carré dans le calcul de  $r_{\text{eff}}$ .

La figure 5.16 présente l'allure de  $r_{\text{eff}}$  à partir du temps de convergence du résidu. La valeur efficace du résidu oscille autour d'une valeur proche de  $6 \times 10^{-3}$  tout en restant inférieure à  $1 \times 10^{-2}$ . Bien qu'il faille réaliser un grand nombre d'essais pour retenir une valeur de seuil adéquate, il est proposé de conserver un seuil fixe égal à  $1 \times 10^{-2}$ .

Finalement, la figure 5.17 présente la valeur efficace du résidu et son seuil dans le

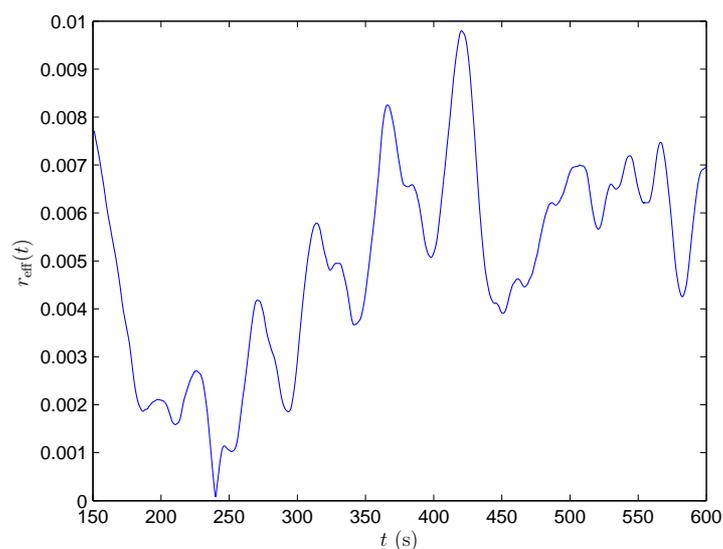


FIGURE 5.16 – Allure de la valeur efficace du résidu (après son temps de convergence) évaluée sur une fenêtre temporelle de 1 s

cas nominal sans défaut (à gauche), et dans un cas pour lequel la résistance de contact a été dégradée (à droite). La dégradation de la résistance de contact correspond à une valeur plus élevée d'environ 10% par rapport à sa valeur nominale. Lorsque la valeur de  $r_{\text{eff}}$  dépasse le seuil, et comme l'illustre la figure 5.17 du bas, un signal d'alarme logique est forcé à 1 signalant la présence d'un défaut sur la résistance de contact (ou du moins une certaine augmentation de sa valeur).

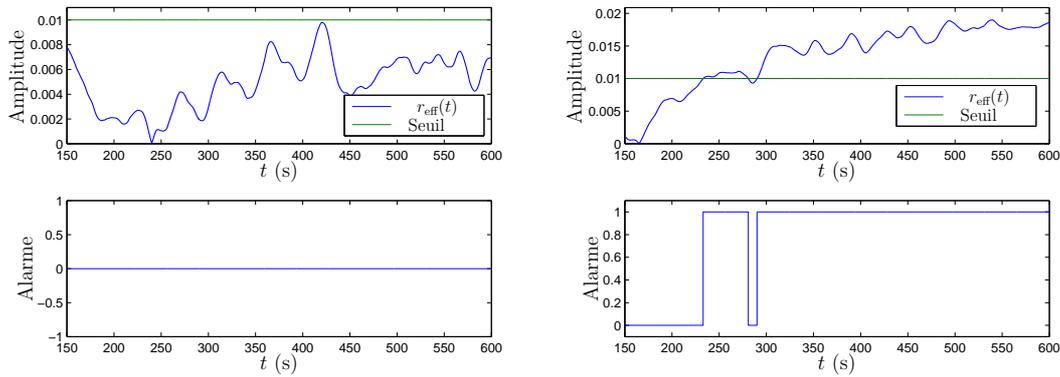


FIGURE 5.17 – Résultats obtenus sur l'analyse du résidu pour un cas sans défaut (à gauche) et avec défaut (à droite)

La détection de la variation de la résistance de contact a bien été détectée grâce au diagnostic à base de modèle mis en œuvre.

Des améliorations peuvent être apportées notamment dans l'analyse du résidu et plus précisément sur le seuillage. Par exemple, un seuil adaptatif pourrait être envisagé en fonction des signaux d'entrées du système. De plus, ce seuil pourrait être adapté à partir du comportement du résidu correspondant au cas d'un écart jugé dangereux de la résistance de contact par rapport à sa valeur nominale.

Une autre amélioration intéressante réside dans la génération d'un résidu robuste vis-à-vis des erreurs de modélisation.

## 5.5 Estimation d'une résistance de contact basée sur la méthode des moindres carrés

Dans cette section, une méthode pour estimer les résistances de contact d'un connecteur est introduite. Cette approche n'est présentée que pour le cas d'un seul point de

contact sans perte de généralité.

À supposer que la température ambiante et que l'intensité du courant électrique soient connues, la démarche requiert une mesure de température près du contact ainsi qu'un modèle incomplet du connecteur étudié. Cette méthode est appliquée au montage de forte puissance présenté et modélisé au chapitre 4 de ce manuscrit.

### 5.5.1 Modèle électrothermique de forte puissance et grandeurs inconnues

À titre de rappel, les composants qui constituent le montage de forte puissance sont les suivants :

- cinq zones de contact ;
- cinq languettes ;
- cinq sertissages ;
- cinq cellules d'air de la prise véhicule ;
- une prise véhicule ;
- six fils libres ( $3 \times 2,5 \text{ mm}^2$  et  $3 \times 0,75 \text{ mm}^2$ ) ;
- un toron des six fils précédents.

Les zones de contact, les languettes, les sertissages, les cellules d'air et la prise constituent la partie femelle du connecteur dénommée dans ce manuscrit « prise véhicule ». Les fils et le toron constituent « le faisceau véhicule », et sont également situés du côté femelle du connecteur de recharge. Pour un véhicule électrique (ou hybride) donné, ces composants sont connus et très peu enclins à être remplacés par des composants différents.

Le cordon de recharge et ses composants (clips, fils, prise du cordon, etc) forment la partie mâle du connecteur. À la différence de la partie femelle, ces composants peuvent être différents à chaque utilisation. En effet, selon le mode et l'infrastructure de recharge utilisés, le cordon employé n'est pas forcément le même d'un usage à l'autre. Ainsi, les composants de ce dernier ou ses caractéristiques physiques sont potentiellement différents d'une recharge à l'autre. Il n'est donc pas envisageable d'établir un modèle électrothermique de la partie mâle du connecteur, car il ne serait valable que pour une marque ou un modèle spécifique de cordons de recharge.

Le modèle électrothermique de forte puissance se limite donc à la partie femelle du connecteur. Si seulement une ligne est étudiée (toron, un fil, prise véhicule, une cellule d'air, un sertissage, une languette, une zone de contact), ce modèle s'arrête à la zone de

5.5. ESTIMATION D'UNE RÉSISTANCE DE CONTACT BASÉE SUR LA  
MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

---

point de contact dont la température est influencée par la résistance de contact (effet Joule), la température de la languette (conduction) et la température du clip du cordon (conduction). D'après la modélisation de la zone de contact au chapitre 4, sa température est régie par l'équation différentielle suivante :

$$C_{zc} \frac{dT_{zc}(t)}{dt} = \underbrace{\frac{T_1^2(t) - T_{zc}(t)}{R_{l \leftrightarrow zc}}}_{\text{Flux d'échange languette-contact}} + \underbrace{\phi_{cl \leftrightarrow zc}(t)}_{\text{Flux d'échange clip-contact}} + \underbrace{\mathcal{R}_{zc} I(t)^2}_{\text{Flux par effet Joule}}, \quad (5.69)$$

où :

- $T_{zc}$  est la température de la zone de contact ;
- $C_{zc}$  est la capacité thermique de la zone de contact ;
- $T_{cl}$  est la température du clip ;
- $T_1^2$  est la température de la partie cylindrique de la languette ;
- $R_{l \leftrightarrow zc}$  est la résistance thermique entre la languette et la zone de contact ;
- $\phi_{cl \leftrightarrow zc}$  est le flux de chaleur échangé entre le clip et la zone de contact ;
- $\mathcal{R}_{zc}$  est la résistance électrique de la zone de contact ;
- $I$  est l'intensité du courant.

Dans l'équation qui précède, la résistance de contact est supposée inconnue puisque l'objet de cette section est d'en estimer la valeur. De plus, le flux de chaleur  $\phi_{cl \leftrightarrow zc}$  est inconnu puisque aucune hypothèse n'est faite sur la marque et le modèle de cordon de recharge utilisé.

Comme le courant électrique dans la ligne et la température ambiante sont connus, l'entrée inconnue du modèle de forte puissance est la somme du flux de chaleur par conduction entre le clip et la zone de contact et le flux de chaleur produit par effet Joule au travers de la résistance de contact. Ainsi, le flux de chaleur inconnu total se note :

$$\phi_t(t) = \phi_{cl \leftrightarrow zc}(t) + \phi_J(t), \quad (5.70)$$

où

$$\phi_J(t) = \mathcal{R}_{zc} I(t)^2, \quad (5.71)$$

est le flux de chaleur généré par effet Joule par la résistance de contact.

Dans l'hypothèse où le flux total est connu, une question se pose alors : *comment distinguer le flux de chaleur produit par effet Joule du flux de chaleur d'échange entre le clip et la zone de contact ?*

## 5.5. ESTIMATION D'UNE RÉSISTANCE DE CONTACT BASÉE SUR LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

Une solution basée sur l'observation de la dynamique des flux de chaleur non connus au niveau de la zone de contact est proposée dans la sous-section qui suit.

### 5.5.2 Étude des flux de chaleur non modélisés au niveau de la zone de contact

La figure 5.18 (à gauche) présente les profils du flux (de chaleur) par effet Joule  $\phi_J$ , du flux (de chaleur par conduction) entre le clip et la zone de contact  $\phi_{cl \leftrightarrow zc}$  et du flux (de chaleur inconnu) total  $\phi_t$  lors d'un essai en réponse à un échelon de courant électrique.

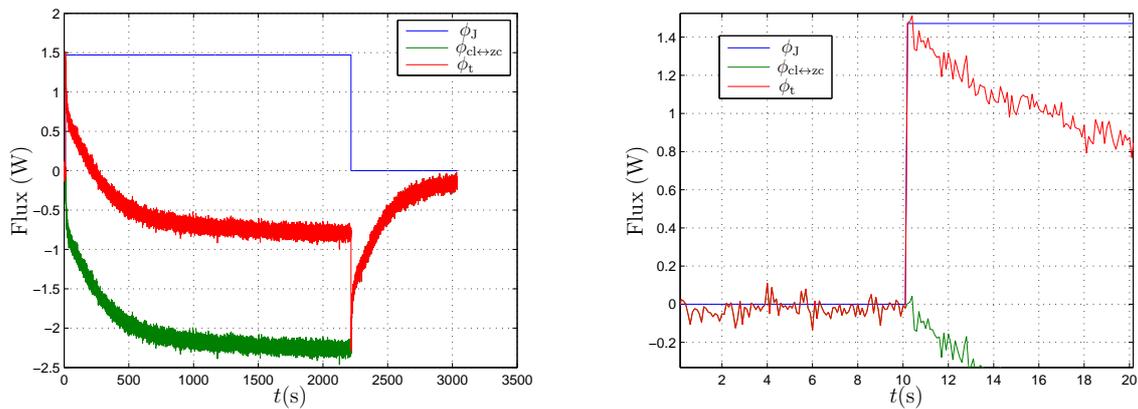


FIGURE 5.18 – Profil de  $\phi_J$ ,  $\phi_{cl \leftrightarrow zc}$  et  $\phi_t$  en réponse à un échelon de courant (à gauche) et agrandissement aux premiers instants (à droite)

Le système est initialement supposé au repos (tous les composants à température ambiante sans échanges de chaleur), le courant électrique passe d'une intensité nulle à 27 A à  $t = t_0 \approx 10$  s. Le courant est coupé après une phase en régime permanent à  $t = t_1 \approx 2200$  s. L'essai s'est déroulé dans les mêmes conditions qu'au chapitre 4, à savoir que la prise est entièrement à l'air libre et suspendue au dessus du sol (au lieu d'être encastrée dans le véhicule).

La résistance de contact est connue (mesurée par un multimètre numérique de précision) et l'intensité du courant a été mesurée durant l'essai. Ceci permet de déterminer le flux par effet Joule grâce à l'équation (5.71).

L'expression du flux entre le clip et la zone de contact n'est autre que la différence

de température entre ces deux composants divisée par la résistance thermique soit :

$$\phi_{\text{cl} \leftrightarrow \text{zc}}(t) = \frac{T_{\text{cl}}(t) - T_{\text{zc}}(t)}{R_{\text{cl} \leftrightarrow \text{zc}}}, \quad (5.72)$$

où  $T_{\text{cl}}$  est la température du clip du cordon de recharge et  $R_{\text{cl} \leftrightarrow \text{zc}}$  la résistance thermique entre le clip et la zone de contact.

Durant l'essai, la température du clip a été mesurée et la valeur de  $R_{\text{cl} \leftrightarrow \text{zc}}$  est connue (déterminée par la formule de l'équation (4.32)). La température de la zone de contact est quant à elle obtenue en utilisant son modèle établi au chapitre 4 (équation (4.33)). Dès lors, il est possible de calculer la valeur de  $\phi_{\text{cl} \leftrightarrow \text{zc}}$  à partir de l'équation (5.72). Finalement, le flux total se déduit aisément à partir des équations (5.70), (5.71) et (5.72).

Lorsque le courant est nul le flux par effet Joule l'est aussi, ce qui rend  $\phi_{\text{t}}$  et  $\phi_{\text{cl} \leftrightarrow \text{zc}}$  égaux d'après l'équation (5.70). Ceci s'observe également sur la figure 5.18 (à gauche) pour  $t > 2200$  s.

Il est cependant à noter sur la figure 5.18 (à droite), que le flux total et le flux par effet Joule sont presque égaux lors de la première seconde suite au passage du courant électrique. En effet, en considérant la résistance de contact constante durant l'essai, les équations de la physique conduisent à un flux par effet Joule statique et instantané<sup>(2)</sup>. En revanche, le flux d'échange clip–zone de contact possède fatalement une certaine dynamique (même si elle est rapide) liée à l'inertie des températures du clip et de la zone de contact. Ceci s'observe aisément sur la figure 5.18 (à gauche) puisque  $\phi_{\text{J}}$  est de la même forme que le courant électrique (ici un échelon), tandis que  $\phi_{\text{cl} \leftrightarrow \text{zc}}$  à une forme exponentielle correspondant à un système du premier ordre ou du second ordre bien amorti.

En résumé, il serait donc intéressant d'accéder à la première valeur du flux total, suite à l'échelon de courant électrique d'amplitude non nulle. Ainsi, si un tel échelon survient à  $t = t_0$ , il est supposé que :

$$\phi_{\text{t}}(t_0) \approx \phi_{\text{J}}(t_0) = \mathcal{R}_{\text{zc}} I(t_0)^2, \quad I(t_0) \neq 0, \quad (5.73)$$

d'où il est déduit que

$$\mathcal{R}_{\text{zc}} \approx \frac{\phi_{\text{t}}(t_0)}{I(t_0)^2}, \quad I(t_0) \neq 0. \quad (5.74)$$

**Remarque 25.** *Le flux d'échange entre le clip du cordon et la zone de contact observé sur la figure 5.18 est négatif. Ceci signifie, d'après l'équation (5.72), que la température*

---

2. Par « instantané » il est sous-entendu à « la vitesse de déplacement des porteurs de charges électriques dans un métal » qui est proche de la vitesse de la lumière dans le vide

## 5.5. ESTIMATION D'UNE RÉSISTANCE DE CONTACT BASÉE SUR LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

---

du clip est inférieure à celle de la zone de contact. Par conséquent, le flux de chaleur a tendance à se diriger de la zone de contact vers le cordon de recharge. En des termes plus pragmatiques, le cordon de recharge « refroidit » la zone de contact **dans ce cas-ci**.

Dans un autre cas d'utilisation (autre cordon de recharge, autre environnement, prise de recharge encastrée dans le véhicule, etc), il se pourrait très bien que la tendance soit inversée, à savoir que le cordon de recharge « chauffe » (flux cordon positif) la zone de contact.

Il est cependant important de souligner que l'idée pour estimer la résistance de contact précédant cette remarque reste valide dans tous les cas. En effet, même si le flux d'échange clip-zone de contact avait tendance à augmenter plutôt qu'à diminuer après un saut échelon de courant, la **première valeur** du flux total resterait (quasiment) égale au flux par effet Joule.

Il est donc possible de distinguer le flux par effet Joule et le flux d'échange cordon-zone de contact en tirant partie de leurs dynamiques respectives, en se focalisant sur les premiers instants suivant un échelon de courant d'amplitude non nulle. Toutefois, la question de la connaissance du flux total n'est pas résolue puisque, dans la pratique, le cordon de recharge est *a priori* inconnu. Comment connaître le flux total ou comment obtenir sa première valeur ?

Dans la sous-section suivante, une méthode d'estimation du flux inconnu de la zone de contact est présentée.

### 5.5.3 Estimation du flux inconnu total de la zone de contact

#### 5.5.3.1 Principe de la méthode

Afin d'estimer le flux inconnu total au niveau de la zone de contact, une méthode utilisant le modèle du montage de forte puissance est proposée. L'approche nécessite :

- le modèle électrothermique du montage de forte puissance faisant l'objet du chapitre 4 ;
- un capteur de température placé au plus près de la zone de contact ;
- une mesure de la température ambiante ;
- une mesure de l'intensité du courant électrique traversant la zone de contact ;
- un régulateur.

Le principe de la démarche repose sur le schéma fonctionnel de la figure 5.19. L'objectif est d'annuler la différence entre la température  $T_{\text{mes}}$  mesurée près de la zone de

contact et la température  $\hat{T}_{\text{mes}}$  calculée au même point par le modèle électrothermique (non linéaire) du montage de forte puissance  $\mathbf{G}$ . Les entrées du modèle sont l'intensité mesurée du courant électrique  $I$ , la température ambiante  $T_a$  mesurée et le flux total  $\hat{\phi}_t$  reconstruit par le régulateur  $C(s)$ . Le rôle de ce dernier est de calculer  $\hat{\phi}_t$  tel que  $\hat{T}_{\text{mes}}$  converge vers  $T_{\text{mes}}$ . Le régulateur peut ainsi être vu comme un estimateur d'entrée inconnue. En procédant de cette manière, le flux total estimé converge vers le flux total réel, à condition que le modèle  $\mathbf{G}$  représente assez finement le système.

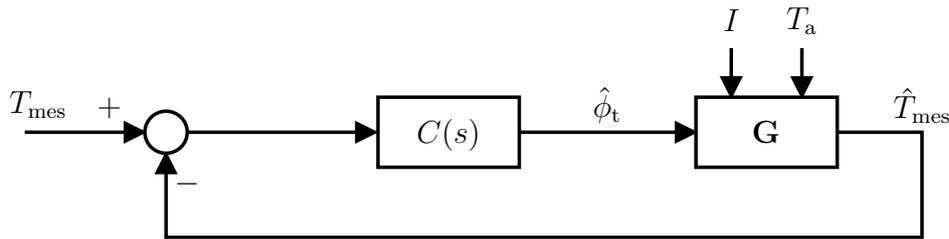


FIGURE 5.19 – Schéma fonctionnel en boucle fermée pour l'estimation du flux total inconnu au niveau de la zone de contact

Intuitivement, il est préférable d'effectuer la mesure de température au plus proche de la zone de contact. En effet, la température mesurée sera d'autant plus vite et fortement impactée par les variations du flux total, qu'elle sera située près de la zone de contact. Par conséquent, comme il est physiquement impossible de placer un capteur (dans le cadre de ce manuscrit, il s'agit d'un thermocouple de type K) sur la zone de contact, la position du capteur de température a été choisie à l'intérieur de la partie cylindrique de la languette au milieu de sa longueur comme illustré sur la figure 5.20.

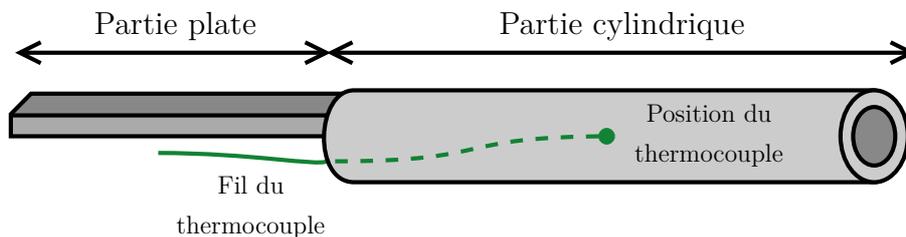


FIGURE 5.20 – Position du thermocouple dans la partie cylindrique de la languette

### 5.5.3.2 Choix d'un régulateur

Afin de synthétiser un régulateur, la fonction de transfert  $G(s)$  entre la température de (la partie cylindrique de) la languette  $T_1^2$  et le flux total  $\phi_t$  est établie. Pour cela, le modèle complet de la chaîne électrothermique de forte puissance est linéarisé autour d'un

## 5.5. ESTIMATION D'UNE RÉSISTANCE DE CONTACT BASÉE SUR LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

point d'équilibre. Celui-ci correspond à un état où les températures des différents composants de la chaîne sont égales à la température ambiante. En sélectionnant la sortie et l'entrée appropriées (respectivement  $T_1^2$  et  $\phi_t$ ) du modèle linéarisé, la fonction de transfert associée est finalement déterminée.

La figure 5.21 présente les diagrammes de Bode de  $G(s)$  obtenus après linéarisation du modèle de forte puissance autour de plusieurs températures ambiantes variant de  $-80^\circ\text{C}$  à  $80^\circ\text{C}$  par pas de  $10^\circ\text{C}$  et pour un courant nul. La linéarisation du modèle de forte puissance a été effectuée en utilisant la fonction `linmod` de MATLAB<sup>®</sup>-Simulink<sup>®</sup>.

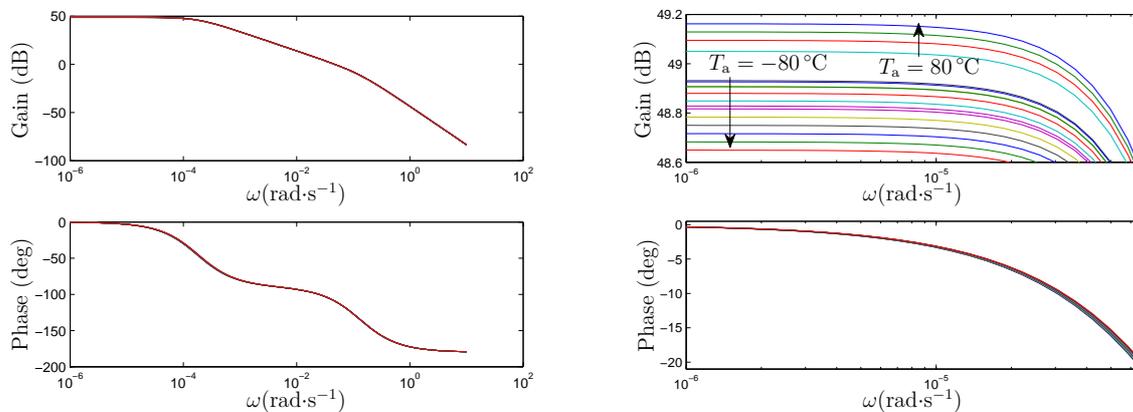


FIGURE 5.21 – Diagrammes de Bode de  $G(s)$  pour plusieurs points d'équilibre (à gauche) et grossissement autour des basses fréquences (à droite)

Il peut être remarqué sur la figure 5.21, que le modèle est relativement peu sensible au point d'équilibre choisi. En effet, l'agrandissement de la figure de droite montre que, pour une pulsation donnée, le gain et la phase ne varient respectivement pas plus de 0,5 dB et de  $1^\circ$ . Dès lors, il n'est pas nécessaire de synthétiser un régulateur qui soit robuste aux points d'équilibre.

Pour la suite, le modèle *linéaire*  $G(s)$  retenu *pour la synthèse du régulateur* correspond à celui obtenu après linéarisation autour d'une température ambiante de  $20^\circ\text{C}$ . Deux intégrateurs (l'un lié à la température de la zone de contact, l'autre à la température de la languette) séparent la température de la languette et le flux total. Le degré relatif de  $G(s)$  est égal à deux et conformément à la figure 5.21, ceci conduit à une fonction de transfert dont le comportement asymptotique est proche de celui d'un système du second ordre :  $-40\text{ dB}$  par décade et phase tendant vers  $-180^\circ$  aux hautes fréquences. Ainsi, le régulateur pour le moment choisi est un filtre Proportionnel Intégral et Dérivé Filtrée

(PIDF). La fonction de transfert d'un régulateur PIDF en architecture série s'écrit :

$$C(s) = C_0 \left( \frac{\tau_i s + 1}{\tau_i s} \right) \left( \frac{as/\omega_u + 1}{s/(a\omega_u) + 1} \right), \quad (5.75)$$

où :

- $C_0$  est le gain statique ;
- $\tau_i$  est la constante de temps de la partie intégrale ;
- $\frac{a}{\omega_u}$  est la pulsation transitionnelle de la partie dérivée ;
- $\frac{1}{a\omega_u}$  est la pulsation de coupure de l'action de filtrage de la partie dérivée.

Soit  $\beta(s) = C(s)G(s)$  la fonction de transfert en boucle ouverte (cf. figure 5.22).

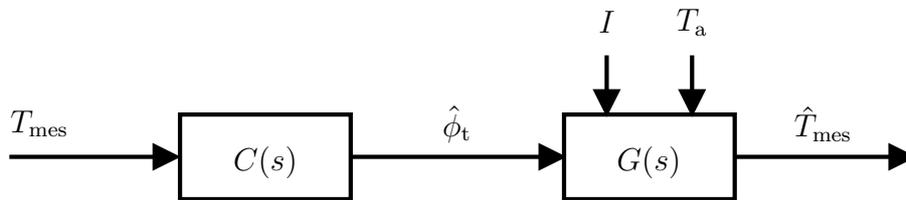


FIGURE 5.22 – Schéma fonctionnel de la boucle ouverte

Connaissant  $G(s)$ , il est possible de calculer les paramètres du régulateur pour obtenir une marge de phase  $M_\varphi$  <sup>(3)</sup> et un retard de phase  $\varphi_r$  apporté par l'action intégrale désirés à une pulsation au gain unité  $\omega_u$  <sup>(4)</sup> donnée. Les étapes de calcul des paramètres du régulateur sont les suivantes :

1. calcul de  $G_0 = |G(j\omega_u)|$  et  $\varphi_0 = \arg G(j\omega_u)$  ;
2. sachant que  $\arg \left\{ \frac{\tau_i j\omega_u + 1}{\tau_i j\omega_u} \right\} = \varphi_r$ , on a  $\tau_i = \frac{\tan(\varphi_r + 90^\circ)}{\omega_u}$  ;
3. sachant que :
 
$$\begin{aligned} M_\varphi &= 180^\circ + \arg \beta(j\omega_u) \\ &= 180^\circ + \arg C(j\omega_u) + \arg G(j\omega_u) \\ &= 180^\circ + \varphi_r + \arg \left\{ \frac{aj+1}{j/a+1} \right\} + \varphi_0 \end{aligned}$$
 on a :  $a = \tan \left( \frac{M_\varphi - \varphi_r - \varphi_0 - 90^\circ}{2} \right)$  ;
4. sachant que :

3. La marge de phase exprimée en degrés permet de chiffrer la marge de stabilité. Généralement, il est considéré qu'une marge de phase supérieure à  $45^\circ$  correspond à un bon degré de stabilité.

4. Il s'agit de la pulsation pour laquelle le gain de la boucle ouverte est égal à 1. La pulsation au gain unité fixe la bande passante de la boucle fermée : plus  $\omega_u$  est grand plus la boucle sera rapide.

## 5.5. ESTIMATION D'UNE RÉSISTANCE DE CONTACT BASÉE SUR LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

$$\begin{aligned}
 |C(j\omega_u)| |G(j\omega_u)| &= 1 \\
 \Leftrightarrow C_0 \frac{\sqrt{(\tau_i \omega_u)^2 + 1}}{\tau_i \omega_u} \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+1/a^2}} G_0 &= 1 \\
 \Leftrightarrow C_0 \frac{\sqrt{(\tau_i \omega_u)^2 + 1}}{\tau_i \omega_u} a G_0 &= 1 \\
 \text{on a : } C_0 &= \frac{1}{a G_0} \times \frac{\tau_i \omega_u}{\sqrt{(\tau_i \omega_u)^2 + 1}}.
 \end{aligned}$$

La figure 5.23 présente l'allure de la boucle ouverte dans le plan de Black-Nichols avec un régulateur PIDF  $C(s)$  calculé de sorte que  $\beta(s)$  soit stable (c'est-à-dire qu'elle n'a pas de pôle à partie réelle positive) et pour qu'elle garantisse une marge de phase  $M_\varphi$  de  $50^\circ$  à la pulsation au gain unité  $\omega_u = 10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ .

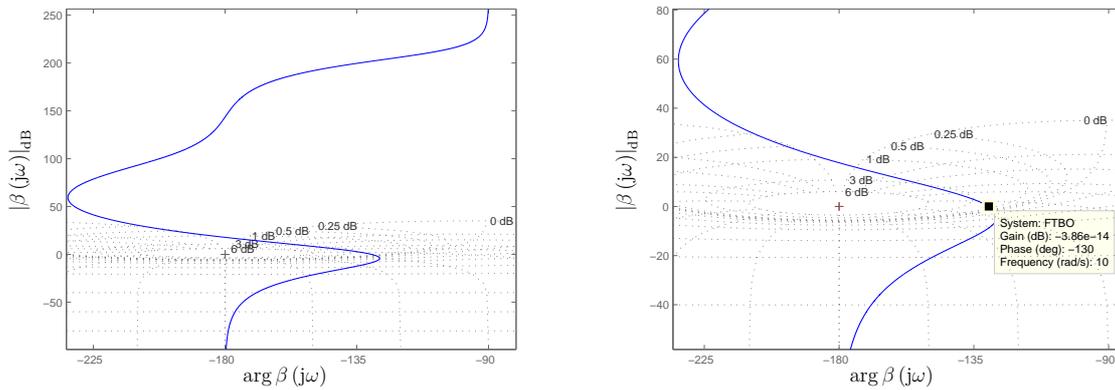


FIGURE 5.23 – Boucle ouverte dans le plan de Black-Nichols avec un régulateur PIDF :  $M_\varphi = 50^\circ$  et  $\varphi_r = -15^\circ$  à  $\omega_u = 10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  (à gauche) et zoom autour de  $\omega_u$  (à droite)

La boucle ouverte présente bien un gain unitaire (soit en décibel :  $|\beta(j\omega_u)|_{\text{dB}} = 0 \text{ dB}$ ) et une marge de phase de  $50^\circ$  ( $\arg \beta(j\omega_u) = -180^\circ + 50^\circ = -130^\circ$ ) à la pulsation  $\omega_u = 10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . De plus, sachant que les pulsations croissantes vont du haut vers le bas sur la figure 5.23, le critère du revers ci-dessous permet de conclure que le système est également stable en boucle fermée.

**Théorème 5** (Critère du revers). *Si la fonction de transfert en boucle ouverte  $\beta(s)$  d'un système ne possède aucun pôle à partie réelle positive, alors ce système est stable en boucle fermée si, en parcourant le lieu de Black-Nichols de la fonction de transfert en boucle ouverte dans le sens des  $\omega$  croissants, on laisse toujours le point  $(-180^\circ, 0 \text{ dB})$  à gauche de la courbe.*

### 5.5.3.3 Résultats obtenus en simulation

L'efficacité du régulateur précédemment synthétisé est d'abord mise à l'épreuve en simulation. Pour ce faire, le schéma fonctionnel pour l'estimation du flux total est identique à celui de la figure 5.18 à une différence près. Comme illustrée sur la figure 5.24, la nuance est que la température mesurée  $T_{\text{mes}}$ , n'est pas issue du capteur mais du modèle non linéaire de référence  $\mathbf{G}_r$ . Le signal injecté à l'entrée de ce dernier est le flux total  $\phi_t$  relevé lors de l'essai de la figure 5.18 lorsque le courant est non nul.

**Remarque 26.** Les modèles non linéaires  $\mathbf{G}_r$  et  $\mathbf{G}$  sont ici exactement les mêmes et correspondent au modèle non linéaire de la chaîne électrothermique de forte puissance. Cependant pour les distinguer, le modèle générant la température de référence  $T_{\text{mes}}$  est noté  $\mathbf{G}_r$  tandis que le modèle  $\mathbf{G}$  génère la température estimée  $\hat{T}_{\text{mes}}$  à partir de l'estimation du flux total en sortie du régulateur  $C(s)$ .

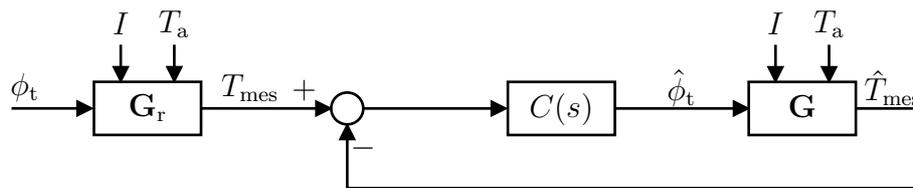


FIGURE 5.24 – Schéma fonctionnel pour l'estimation du flux total inconnu au niveau de la zone de contact en simulation

Le flux total attendu  $\phi_t$  et son estimation  $\hat{\phi}_t$  en sortie du régulateur sont tracés sur la figure 5.25.

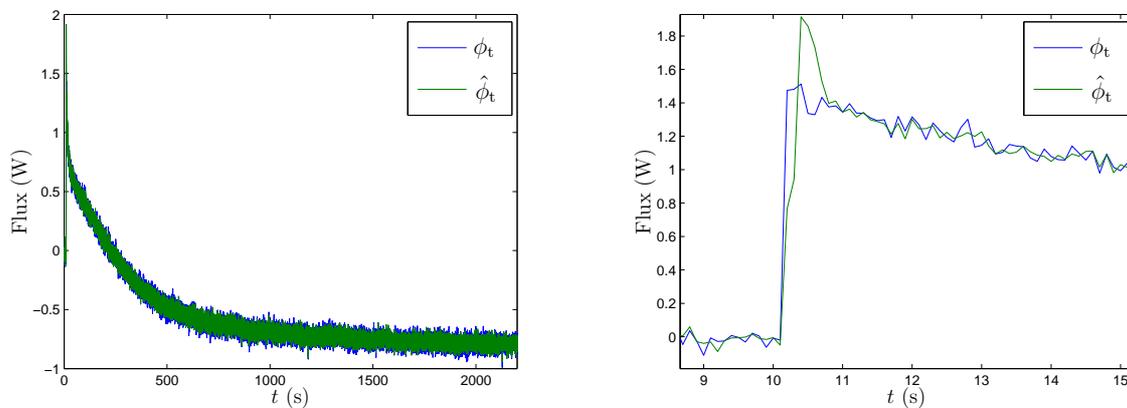


FIGURE 5.25 – Flux total et son estimation en simulation (à gauche) avec grossissement sur les premiers instants (à droite)

## 5.5. ESTIMATION D'UNE RÉSISTANCE DE CONTACT BASÉE SUR LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

Les valeurs du flux total semblent assez rapidement reconstruites (temps de convergence de l'ordre d'une seconde en se basant sur la figure de droite). Le flux total estimé présentant un niveau de bruit comparable à celui de la mesure, pourrait être filtré *a posteriori* mais ceci introduirait une distorsion de sa dynamique d'autant plus marquante que le filtrage serait important. Il sera donc intéressant d'étudier l'impact du bruit (qui n'a pas été pris en considération lors de la synthèse du régulateur) sur l'estimation.

Il est également important de noter que le signal bruité est ici le flux total qui, d'après le schéma de la figure 5.24, est injecté à l'entrée du modèle de la chaîne électrothermique de forte puissance. Le caractère passe-bas du modèle (voir diagrammes de Bode de la figure 5.21) filtre le flux total réduisant ainsi l'impact du bruit (qui est un phénomène hautes fréquences) sur la température de la languette  $T_{\text{mes}}$  en sortie du modèle de référence. Ceci veut dire que l'effet du bruit sera certainement bien plus important sur l'estimation du flux total lorsque la mesure de température de la languette sera directement utilisée.

### 5.5.3.4 Résultats obtenus sur des données réelles

La température de la languette issue du modèle de référence est à présent remplacée par sa température mesurée par le thermocouple. Le flux total attendu  $\phi_t$  et son estimation  $\hat{\phi}_t$  en sortie du régulateur sont tracés sur la figure 5.26.

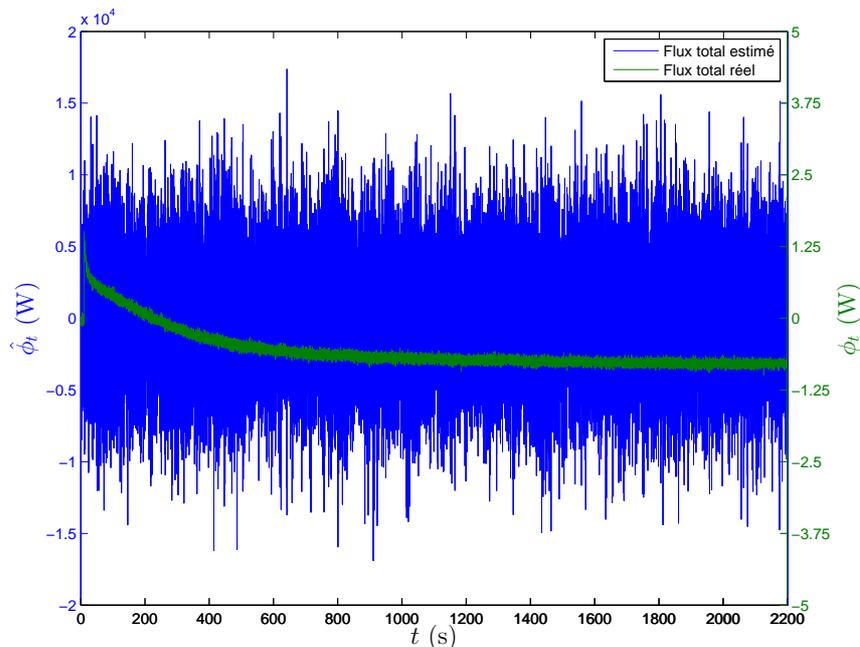


FIGURE 5.26 – Flux total et son estimation en conditions réelles

La figure est volontairement tracée avec deux axes distincts car les ordres de grandeurs sont totalement différents entre le vrai flux et son estimation. Comme prévu, le bruit de mesure est grandement amplifié et rend par conséquent les résultats inexploitable.

Une solution consisterait à diminuer la pulsation au gain unité qui aura pour effet de réduire l'amplification du bruit de mesure, voire même de l'atténuer. Cependant, ceci s'accompagnera d'une augmentation du temps de convergence du système en boucle fermée pouvant être pénalisante pour l'estimation de la résistance de contact. En effet, si le temps de convergence est trop grand, la première valeur exploitable de sa sortie ne sera plus suffisamment représentative du flux par effet Joule qui est prédominant aux tout premiers instants après un saut de courant d'intensité non nulle (comme mentionné à la sous-section 5.5.2 de ce chapitre).

Un autre problème, non mentionné jusqu'ici, est la présence d'erreurs de modélisation. Si des écarts surviennent entre la température mesurée  $T_{\text{mes}}$  et son estimation  $\hat{T}_{\text{mes}}$  issue du modèle à cause d'erreurs de modélisation, le régulateur les compensera sans distinction. Par conséquent, l'estimation du flux total sera faussée.

Il est donc nécessaire d'étudier la sensibilité du modèle aux perturbations (erreurs de modélisation, bruits de mesures) et d'en tirer la meilleure stratégie à adopter pour estimer le flux total. *Quelle bande passante est nécessaire pour estimer au mieux le flux par effet Joule sans que le flux du cordon ne deviennent trop prépondérant ? Quelles sont les limites atteignables en termes de rapidité et d'atténuation du bruit de mesure ? Quel est l'impact des erreurs de modélisation sur le schéma d'estimation proposé ? Sinon quelle stratégie adopter ?*

## 5.5.4 Étude des fonctions de sensibilité du système

### 5.5.4.1 Étude de l'effet du flux cordon sur l'estimation du flux par effet Joule

L'objectif est d'estimer le flux total le plus rapidement possible car il a été montré qu'il est quasiment égal au flux par effet Joule durant la première seconde qui suit un saut échelon de courant d'amplitude  $I_0$  non nulle.

D'un certain point de vue, le flux total pourrait être vu comme le flux par effet Joule entaché d'une erreur provoquée par le flux cordon  $\phi_{\text{cl} \leftrightarrow \text{zc}}$ . Il est donc intéressant de déterminer la bande passante minimale requise, qui garantit un temps de convergence suffisamment rapide de la boucle fermée. Ainsi, la première valeur du flux total estimé après le temps de convergence, sera suffisamment peu affectée par le flux cordon pour qu'il

puisse être considéré qu'elle corresponde au flux par effet Joule. Pour cela, un raisonnement sur le temps de montée des systèmes est proposé.

Le temps de montée d'un système désigne le temps au bout duquel le signal de sortie franchit pour la première fois son asymptote en régime permanent (bien évidemment dans le cas où ce phénomène se produit). Ceci se produit pour des systèmes ayant un comportement similaire à celui d'un second ordre.

Dans le domaine de l'automatique [Granjon, 2015], il est généralement admis que pour tout système linéaire d'ordre quelconque présentant un fonctionnement analogue à un deuxième ordre, que le temps de montée  $t_m$  du système en boucle fermée peut être estimé par la relation :

$$t_m \approx \frac{3}{\omega_u}. \quad (5.76)$$

**Remarque 27.** *Il s'agit d'une estimation et non pas d'un calcul précis du temps de montée, cette expression n'étant vraie que pour un gain statique grand devant 1. Toutefois, cette équation permet d'obtenir l'ordre de grandeur du temps de montée en boucle fermée et est souvent suffisante pour évaluer la rapidité du système.*

Ainsi, bien que le nouveau régulateur à synthétiser ne soit pas connu, il est supposé que la fonction de transfert en boucle ouverte est assimilable à un système linéaire du second ordre. En assimilant le temps de réponse à 95 % du système en boucle fermée à son temps de montée, s'il est souhaité que l'estimation du flux total (donc la boucle fermée) converge en moins d'une seconde, la relation (5.76) permet de déterminer la bande passante minimale requise, c'est-à-dire :

$$\omega_u \approx \frac{3}{t_m} \geq 3 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}. \quad (5.77)$$

#### 5.5.4.2 Étude de la sensibilité aux bruits de mesure

Le schéma fonctionnel de la figure 5.27 est considéré pour étudier la sensibilité du système aux bruits de mesure.

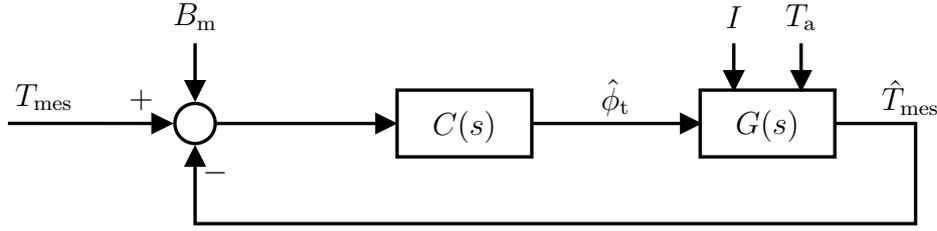


FIGURE 5.27 – Schéma fonctionnel pour l'étude de la sensibilité du système aux bruits de mesure

La mesure de température  $T_{\text{mes}}$  est supposée entachée d'un bruit blanc gaussien  $B_m$ . La fonction de transfert entre le flux estimé  $\hat{\phi}_t$  et le bruit de mesure  $B_m$  est donnée par :

$$\frac{\hat{\phi}_t(s)}{B_m(s)} = \frac{C(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{C(s)}{1 + \beta(s)}. \quad (5.78)$$

La boucle ouverte  $\beta(s) = C(s)G(s)$  peut se mettre sous forme exponentielle en fonction de son module (gain)  $r$  et de son argument (phase)  $\theta$ , c'est-à-dire :

$$\beta(s) = r e^{j\theta}. \quad (5.79)$$

Lorsque  $\omega = \omega_u$  le gain de la boucle ouverte  $\beta(j\omega_u) = C(j\omega_u)G(j\omega_u)$  est unitaire et sa phase vaut  $\theta_u = -180^\circ + M_\varphi$ . Ainsi, d'après ce qui précède et à partir de l'équation (5.78), le gain de  $\frac{\hat{\phi}_t(s)}{B_m(s)}$  à  $\omega = \omega_u$  est donné par :

$$\left| \frac{\hat{\phi}_t(j\omega_u)}{B_m(j\omega_u)} \right| = \left| \frac{C(j\omega_u)}{1 + e^{j\theta_u}} \right|. \quad (5.80)$$

Sachant que  $e^{j\theta_u} = \cos \theta_u + j \sin \theta_u$ , alors :

$$\left| \frac{\hat{\phi}_t(j\omega_u)}{B_m(j\omega_u)} \right| = \left| \frac{C(j\omega_u)}{1 + \cos \theta_u + j \sin \theta_u} \right| = \frac{|C(j\omega_u)|}{\sqrt{(1 + \cos \theta_u)^2 + \sin^2 \theta_u}}, \quad (5.81)$$

en rappelant de plus que  $\cos^2 \theta_u + \sin^2 \theta_u = 1$ , il vient :

$$\left| \frac{\hat{\phi}_t(j\omega_u)}{B_m(j\omega_u)} \right| = \frac{|C(j\omega_u)|}{\sqrt{2 + 2 \cos \theta_u}}. \quad (5.82)$$

## 5.5. ESTIMATION D'UNE RÉSISTANCE DE CONTACT BASÉE SUR LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

Finalement, sachant que  $|C(j\omega_u)| = \left| \frac{1}{G(j\omega_u)} \right|$ , l'équation (5.82) s'écrit :

$$\left| \frac{\hat{\phi}_t(j\omega_u)}{B_m(j\omega_u)} \right| = \frac{1}{|G(j\omega_u)| \sqrt{2 + 2 \cos \theta_u}}. \quad (5.83)$$

Partant de ces considérations, il est possible de définir une valeur maximale de la bande passante pour limiter l'effet du bruit sur l'estimation du flux total pour une marge de phase donnée. Par exemple, s'il est souhaité que l'effet d'un bruit de mesure d'amplitude maximale  $B_{\max} = 0,1 K$ , ne dépasse pas  $0,1 W$  (soit  $-20$  dB) sur le flux total estimé pour une marge de phase de  $30^\circ$  et  $60^\circ$  (c'est-à-dire  $\theta_u = -150^\circ$ , respectivement  $\theta_u = -120^\circ$ ), d'après l'équation (5.82) il faut que :

$$\left| \hat{\phi}_t(j\omega_u) \right| < \frac{B_{\max}}{|G(j\omega_u)| \sqrt{2 + 2 \cos \theta_u}}. \quad (5.84)$$

Il suffit alors de vérifier pour quelle pulsation maximale, la condition (5.84) est respectée. En se référant aux tracés de  $\frac{B_{\max}}{|G(j\omega_u)| \sqrt{2 + 2 \cos \theta_u}}$  donnés sur la figure 5.28, il faut que  $\omega_u < 2,54 \times 10^{-2} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  ( $\theta_u = -150^\circ$ ) ou  $\omega_u < 4,71 \times 10^{-2} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  ( $\theta_u = -120^\circ$ ).

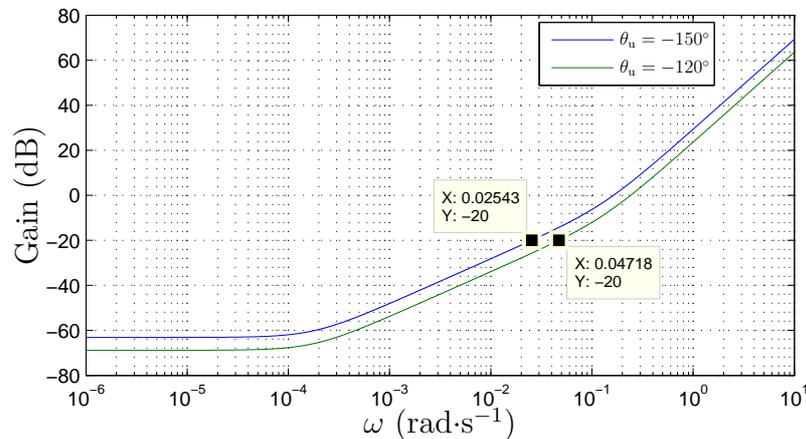


FIGURE 5.28 – Diagrammes de gain de  $\frac{B_{\max}}{|G(j\omega_u)| \sqrt{2 + 2 \cos \theta_u}}$

### 5.5.4.3 Étude de la sensibilité aux erreurs de modélisation

Le schéma de la figure 5.29 est considéré, afin d'étudier la sensibilité de la boucle aux erreurs de modélisation. Le type d'erreur de modèle considéré est représenté par une incertitude multiplicative directe en sortie. Le bloc d'incertitude  $\Delta(s)$  peut être vu comme

une perturbation interne. Ainsi, si le modèle n'est pas idéal alors  $\Delta(s) \neq 0$  et donc il vient :

$$\hat{T}_m(s) = G(s) (1 + \Delta(s)) \hat{\phi}_m(s). \quad (5.85)$$

Au contraire, si l'incertitude est nulle (modèle parfait) alors :

$$\hat{T}_m(s) = G(s) \hat{\phi}_m(s). \quad (5.86)$$

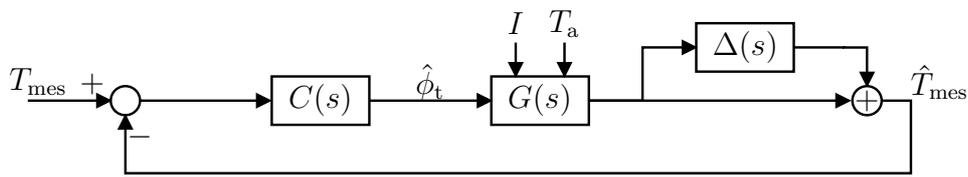


FIGURE 5.29 – Schéma fonctionnel faisant apparaître une erreur de modèle multiplicative

Soit l'erreur entre le flux total et son estimation :

$$\varepsilon_{\phi_t}(s) = \phi_t(s) - \hat{\phi}_t(s). \quad (5.87)$$

Sachant que :

$$\phi_t(s) = \frac{T_m(s)}{G(s)}, \quad (5.88)$$

et que d'après le schéma de la figure 5.29 :

$$\hat{\phi}_t(s) = \frac{C(s)}{1 + G(s)C(s)} T_m, \quad (5.89)$$

alors l'équation (5.87) se récrit :

$$\varepsilon_{\phi_t}(s) = \frac{T_m(s)}{G(s)} - \frac{C(s)}{1 + G(s)C(s)} T_m. \quad (5.90)$$

Si le régulateur est bien choisi alors  $|G(s)C(s)| \gg 1$  pour  $\omega \ll \omega_u$ . Ainsi aux basses fréquences, le comportement de  $\varepsilon_{\phi_t}(s)$  tend vers :

$$\varepsilon_{\phi_t}(s) = \frac{T_m(s)}{G(s)} - \frac{1}{1 + G(s)} T_m = \frac{T_m(s)}{G(s)} \left( \frac{\Delta(s)}{1 + \Delta(s)} \right). \quad (5.91)$$

L'équation (5.91) ne fait pas intervenir le régulateur  $C(s)$  dans son expression. Il

## 5.5. ESTIMATION D'UNE RÉSISTANCE DE CONTACT BASÉE SUR LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

---

n'est donc pas possible d'agir sur l'erreur de modélisation en utilisant cette architecture d'estimation. Cependant, il est possible de déterminer l'incertitude maximale admissible de telle sorte que l'erreur d'estimation soit inférieure à un seuil  $\varepsilon_{\phi_t}^{\max}$  (pour une température mesurée  $T_m$  donnée). En effet, dans ce cas l'équation (5.91) permet d'écrire :

$$\left| \frac{T_m(s)}{G(s)} \left( \frac{\Delta(s)}{1 + \Delta(s)} \right) \right| < |\varepsilon_{\phi_t}^{\max}|, \quad (5.92)$$

ce qui conduit à :

$$\left| \left( \frac{\Delta(s)}{1 + \Delta(s)} \right) \right| < \left| \frac{T_m(s) \varepsilon_{\phi_t}^{\max}}{G(s)} \right|. \quad (5.93)$$

Soit :

$$K_{\max} = \frac{T_m^{\max} \varepsilon_{\phi_t}^{\max}}{G_{\max}}, \quad (5.94)$$

le gain maximal de  $\left| \frac{T_m(s) \varepsilon_{\phi_t}^{\max}}{G(s)} \right|$  dans le pire cas, c'est-à-dire pour le plus grand gain de  $G(s)$  qui correspond à son gain statique  $|G(s \rightarrow 0)| = G_{\max}$  (comportement passe-bas), et pour la température maximale admissible par le composant mesurée  $T_m^{\max}$ .

Pour ce pire cas, l'équation (5.93) devient :

$$\left| \left( \frac{\Delta(s)}{1 + \Delta(s)} \right) \right| < K_{\max}, \quad (5.95)$$

ce qui, après quelques simplifications, permet de déduire :

$$|\Delta(s)| < \frac{K_{\max}}{1 - K_{\max}}. \quad (5.96)$$

Dès lors, sachant que  $G_{\max} = 276,47 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$  (soit 48,83 dB : cf. figure 5.21) et que  $T_m^{\max} = 398,15 \text{ K}$  (soit 125 °C), s'il est par exemple souhaité que l'erreur admise sur l'estimation du flux total soit inférieure à 0,01 W, il est nécessaire que l'incertitude de modèle soit inférieure à  $6,9 \times 10^{-3} \text{ K}$ .

### 5.5.4.4 Bilan

Pour commencer, il doit être noté que les objectifs souhaités sur la rapidité d'estimation du flux total et sur la limitation de l'effet du bruit aboutissent à des choix de la bande passante contradictoires. En effet, s'il est souhaité que l'estimation soit suffisamment rapide de sorte à reconstruire les premières valeurs du flux total peu entachées par

le flux du cordon, il faut que  $\omega_u > 3 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . D'un autre côté, pour limiter l'effet du bruit de mesure sur l'estimation il faut choisir  $\omega_u < 2,54 \times 10^{-2} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  ( $\theta_u = -150^\circ$ ). Ces deux conditions sont clairement en opposition, il faut donc faire un compromis au niveau de la rapidité et de l'amplification du bruit de mesure.

De plus, l'erreur de modélisation ne peut être que subie en basses fréquences puisque le régulateur n'y a aucun effet. Il faudrait donc, soit un modèle extrêmement précis, soit définir une nouvelle architecture d'estimation du flux total qui soit capable de limiter ou d'annuler l'effet des incertitudes de modélisation.

Pour la suite de ce mémoire, il a été choisi de conserver la structure actuelle d'estimation du flux total. Cependant la bande passante est volontairement choisie faible de sorte à limiter l'effet du bruit de mesure au détriment de la rapidité d'estimation. Toutefois, une méthode est proposée dans la sous-section suivante afin de reconstruire les valeurs du flux total aux instants qui précèdent le temps de convergence de la boucle, et ainsi d'assurer simultanément une bonne estimation et une bonne immunité aux bruits.

### 5.5.5 Estimation de la résistance de contact basée sur la méthode des moindres carrés

L'idée de la démarche est de reconstruire les valeurs du flux total à partir d'un nombre choisi de valeurs de son estimation. Ces valeurs sont prélevées à des instants postérieurs au temps de convergence de la boucle de la figure 5.19.

#### 5.5.5.1 Nouveau choix de régulateur

La méthode d'estimation de la résistance de contact présentée dans le paragraphe suivant ne nécessite pas obligatoirement un temps de convergence très rapide. Ainsi, un nouveau régulateur est volontairement synthétisé, pour obtenir une bande passante du système moins grande que celle obtenue avec le régulateur PID filtré présenté précédemment dans cette section du chapitre. Ceci permet notamment de limiter l'effet du bruit de mesure.

Pour la synthèse de ce nouveau régulateur, il est proposé de changer sa structure et d'utiliser une méthode de type *loop-shaping*<sup>(5)</sup>. Avec à cette démarche, un comportement d'ordre non entier est imposé à la fonction de transfert en boucle ouverte  $\beta(s)$ . Le choix

---

5. L'approche loop-shaping consiste en l'obtention d'une spécification relative à la boucle ouverte de l'asservissement à partir de spécifications relatives à divers transferts en boucle fermée.

## 5.5. ESTIMATION D'UNE RÉSISTANCE DE CONTACT BASÉE SUR LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

---

d'un ordre non entier permet de régler assez finement la forme de  $\beta(s)$  avec un nombre restreint de paramètres.

Le gabarit fréquentiel imposé pour la boucle ouverte est de la forme :

$$\beta(s) = \beta_0 \underbrace{\left( \frac{as/\omega_u + 1}{as/\omega_u} \right)^{n_b}}_{\mathbf{I}} \underbrace{\left( \frac{s/(b\omega_u) + 1}{as/\omega_u + 1} \right)^\nu}_{\mathbf{I}_{ne}^\nu} \underbrace{\left( \frac{1}{s/(b\omega_u) + 1} \right)^{n_h}}_{\mathbf{F}_{HF}}, \quad (5.97)$$

où :

- $\beta_0$  est le gain et permet d'agir sur la rapidité ;
- $\mathbf{I} = \frac{as/\omega_u + 1}{as/\omega_u}$  est un intégrateur limité en fréquence ;
- $\mathbf{I}_{ne}^\nu = \frac{s/(b\omega_u) + 1}{as/\omega_u + 1}$  est un intégrateur non entier borné en fréquence ;
- $\mathbf{F}_{HF} = \frac{1}{s/(b\omega_u) + 1}$  est un filtre passe bas pour limiter les perturbations en hautes fréquences ;
- $a$  est la pulsation transitionnelle de l'action intégrale ;
- $b$  est la pulsation transitionnelle du filtre passe bas ;
- $n_b \in \mathbb{N}_+$  permet d'agir sur la précision ;
- $n_h \in \mathbb{N}_+$  permet d'agir sur le rejet des perturbations en haute fréquence (par exemple les bruits de mesure) ;
- $\nu \in \mathbb{R}$  permet d'agir sur la marge de stabilité.

Les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $n_b$ ,  $n_h$  et  $\nu$  sont d'abord fixés puis les performances obtenues sont seulement vérifiées *a posteriori*. Le gain  $\beta_0$  permet de placer le gain unité de la boucle ouverte à la pulsation  $\omega_u$  souhaitée, il se détermine grâce à la formule suivante :

$$\beta_0 = \left| \frac{1}{\mathbf{I}^{n_b} \mathbf{I}_{ne}^\nu \mathbf{F}_{HF}^{n_h}} \right|_{\omega=\omega_u}. \quad (5.98)$$

**Remarque 28.** *Il est important de préciser que si la valeur de  $\nu$  n'est pas entière, il est nécessaire d'approximer  $\mathbf{I}_{ne}^\nu$  par une fonction de transfert entière. Il existe plusieurs méthodes pour réaliser ce type d'approximation par une fonction de transfert d'ordre entier bornée en fréquence. Dans ce mémoire, la méthode d'Oustaloup [Oustaloup, 1995] faisant intervenir une distribution de pôles et de zéros est utilisée.*

Sachant que  $\beta(s) = G(s)C(s)$ , il est aisé de déterminer le régulateur puisque le procédé  $G(s)$  est connu et que  $\beta(s)$  est choisie. Ainsi, la fonction de transfert du régulateur est donnée par :

$$C(s) = \frac{\beta(s)}{G(s)}. \quad (5.99)$$

## 5.5. ESTIMATION D'UNE RÉSISTANCE DE CONTACT BASÉE SUR LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

La figure 5.30 présente l'allure de la boucle ouverte définie par l'équation (5.97) dans le plan de Black-Nichols. Les valeurs numériques des paramètres de la boucle ouverte sont les suivantes :

- $\omega_u = 8,5 \times 10^{-2} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  ;
- $a = 10$  ;
- $b = 10$  ;
- $n_b = 1$  ;
- $n_h = 6$  ;
- $\nu = -1,3$ .

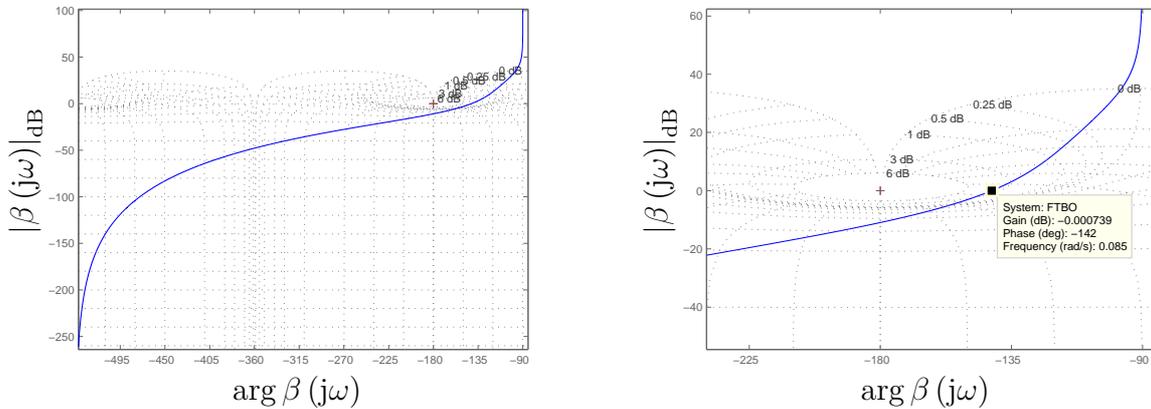


FIGURE 5.30 – Boucle ouverte à comportement non entier dans le plan de Black-Nichols (à gauche) avec zoom autour de  $\omega_u$  (à droite)

Le système en boucle ouverte présente une marge de phase de  $38^\circ$ , ce qui reste tout à fait acceptable en terme de degré de stabilité. De plus, sachant que les pulsations croissantes vont du haut vers le bas sur la figure 5.30, le système bouclé est stable d'après le critère du revers.

**Remarque 29.** Le choix de  $\omega_u$  est volontairement plus grand que la pulsation qui satisfait la condition (5.84) pour les cas de la figure figure 5.28. Il est rappelé que ces cas sont valables sous l'hypothèse que le bruit est blanc, ce qui implique que son spectre fréquentiel est constant pour toutes les fréquences. Dans la réalité, les bruits sont toujours toujours colorés, leurs spectres peuvent alors présenter des atténuations notamment pour les fréquences basses. En effet, comme le montre le spectre du bruit sur la figure 5.31, son gain est déjà atténué d'environ 20 dB à la pulsation  $\omega = 8,5 \times 10^{-2} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ .

## 5.5. ESTIMATION D'UNE RÉSISTANCE DE CONTACT BASÉE SUR LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

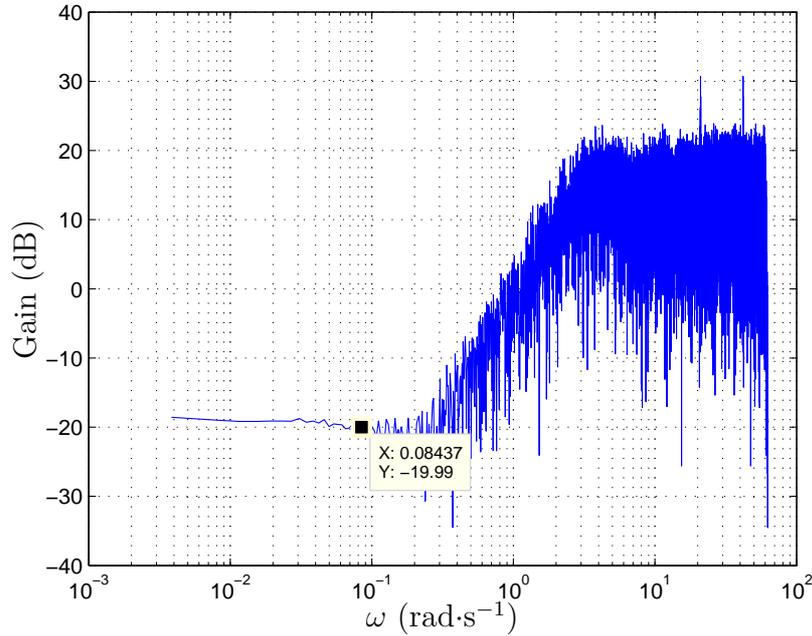


FIGURE 5.31 – Spectre du bruit de mesure de la température de la languette

### 5.5.5.2 Utilisation de la méthode des moindres carrés pour estimer la résistance de contact

D'après l'observation de la dynamique du flux inconnu total abordée à la sous-section 5.5.2 de ce chapitre, le flux du cordon  $\phi_{cl \leftrightarrow zc}$  présente un comportement proche d'un système du premier ordre ou du second ordre bien amorti. Toutefois, il est également possible d'approximer le comportement de  $\phi_{cl \leftrightarrow zc}$  par celui d'un système d'ordre non entier et plus précisément par un ordre un demi. En effet, le comportement entrée-sortie des systèmes diffusifs (par exemple les systèmes thermiques ou électrochimiques) est parfois modélisé par un des fonctions de transfert d'ordre un demi [Malti et al., 2009, Sabatier et al., 2011, Sabatier et al., 2006b]. Ainsi, il est supposé que la fonction de transfert entre  $\phi_{cl \leftrightarrow zc}$  et le courant électrique est de la forme :

$$\frac{\phi_{cl \leftrightarrow zc}(s)}{I(s)} = \frac{K}{(\tau s + 1)^{0,5}}, \quad (5.100)$$

où  $K$  désigne le gain statique,  $\tau$  est la constante de temps.

Si de plus le courant électrique est un échelon d'amplitude  $I_0$ , l'équation (5.100)

permet d'écrire :

$$\phi_{\text{cl} \leftrightarrow \text{zc}}(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)^{0,5}} \frac{I_0}{s}. \quad (5.101)$$

La transformée inverse de Laplace de l'équation (5.101) permet de déterminer l'expression temporelle  $\phi_{\text{cl} \leftrightarrow \text{zc}}$  en réponse à un échelon de courant :

$$\phi_{\text{cl} \leftrightarrow \text{zc}}(t) = K \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \sqrt{\frac{t}{\tau}} \right) \right) I_0, \quad (5.102)$$

où la fonction  $\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx$  est la fonction d'erreur ( $\operatorname{erf}(0) = 0$  et  $\operatorname{erf}(\infty) = 1$ ).

Ainsi, lorsque le courant est un échelon d'amplitude  $I_0$ , en remplaçant  $\phi_J$  et  $\phi_{\text{cl} \leftrightarrow \text{zc}}$  par leurs expressions respectives données par les équations (5.71) et (5.102) dans l'équation (5.70), il vient :

$$\phi_t(t) = \mathcal{R}_{\text{zc}} I_0^2 + K \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \sqrt{\frac{t}{\tau}} \right) \right) I_0. \quad (5.103)$$

Sachant que le développement en série entière de la fonction erreur est donné par :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)(k-1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (5.104)$$

l'équation (5.103) se récrit :

$$\phi_t(t) = \mathcal{R}_{\text{zc}} I_0^2 + K \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{\left( \sqrt{\frac{t}{\tau}} \right)^{2k-1}}{(2k-1)(k-1)!} \right) I_0. \quad (5.105)$$

En se limitant à un développement à l'ordre 4 de la fonction erreur, il vient alors :

$$\phi_t(t) \approx \mathcal{R}_{\text{zc}} I_0^2 + K \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{t^{0,5}}{\tau^{0,5}} - \frac{t^{1,5}}{3 \tau^{1,5}} + \frac{t^{2,5}}{10 \tau^{2,5}} - \frac{t^{3,5}}{42 \tau^{3,5}} \right) \right) I_0. \quad (5.106)$$

5.5. ESTIMATION D'UNE RÉSISTANCE DE CONTACT BASÉE SUR LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

---

En posant :

$$a_0 = KI_0, \quad (5.107)$$

$$a_1 = \frac{2K}{\sqrt{\pi}\tau^{0,5}}I_0, \quad (5.108)$$

$$a_2 = \frac{2K}{3\sqrt{\pi}\tau^{1,5}}I_0, \quad (5.109)$$

$$a_3 = \frac{2K}{10\sqrt{\pi}\tau^{2,5}}I_0, \quad (5.110)$$

$$a_4 = \frac{2K}{42\sqrt{\pi}\tau^{3,5}}I_0, \quad (5.111)$$

l'équation (5.106) devient finalement :

$$\phi_t(t) \approx \mathcal{R}_{zc}I_0^2 + a_0 - a_1t^{0,5} + a_2t^{1,5} - a_3t^{2,5} + a_4t^{3,5}. \quad (5.112)$$

Soit  $t_c$  le temps de convergence du régulateur et soient  $\hat{\phi}_t(t_i)$  la valeur à un instant  $t_i > t_c$  du flux total estimé. Si  $n$  valeurs de  $\hat{\phi}_t(t_i)$  sont prélevées à différents instants  $t_i$ , le système matriciel suivant peut être établi à partir de l'équation (5.112) :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_0^2 & 1 & -t_1^{0,5} & t_1^{1,5} & -t_1^{2,5} & t_1^{3,5} \\ I_0^2 & 1 & -t_2^{0,5} & t_2^{1,5} & -t_2^{2,5} & t_2^{3,5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ I_0^2 & 1 & -t_n^{0,5} & t_n^{1,5} & -t_n^{2,5} & t_n^{3,5} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{R}_{zc} \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\phi}_t(t_1) \\ \hat{\phi}_t(t_2) \\ \vdots \\ \hat{\phi}_t(t_n) \end{bmatrix}}_{\Phi}. \quad (5.113)$$

Le vecteur  $\mathbf{P}$  n'est pas connu mais peut être déterminé grâce à la pleine connaissance de la matrice  $\mathbf{M}$  et du vecteur  $\Phi$ . Ainsi, la multiplication des deux membres de l'équation (5.113) à gauche par la matrice  $\mathbf{M}^+$  (pseudo-inverse de  $\mathbf{M}$ ) conduit à :

$$\mathbf{P} = \mathbf{M}^+\Phi. \quad (5.114)$$

En outre, il peut être montré que la pseudo-inverse donne une solution à un système d'équations linéaires, équivalente à celle que donnerait la méthode des moindres carrés [Penrose, 1956].

L'extraction du premier élément du vecteur  $\mathbf{P}$  donne alors accès à une estimation de la valeur de la résistance de contact.

**Remarque 30.** *Il est à noter que la matrice  $\mathbf{M}$  est invariante car l'intensité du courant et les instants  $t_i$  restent fixés à chaque utilisation de la méthode. Ainsi, la pseudo-inverse de la matrice  $\mathbf{M}$  est déterminée avant son implantation, puis codée en dur dans un ordinateur.*

La figure 5.32 présente le flux total reconstruit par la méthode des moindres carrés, noté  $\hat{\phi}_t^{\text{mc}}$ , notamment pour les instants antérieurs au temps de convergence du régulateur. Le flux total réel  $\phi_t$  et le flux total estimé  $\hat{\phi}_t$  en sortie du régulateur sont également tracés.

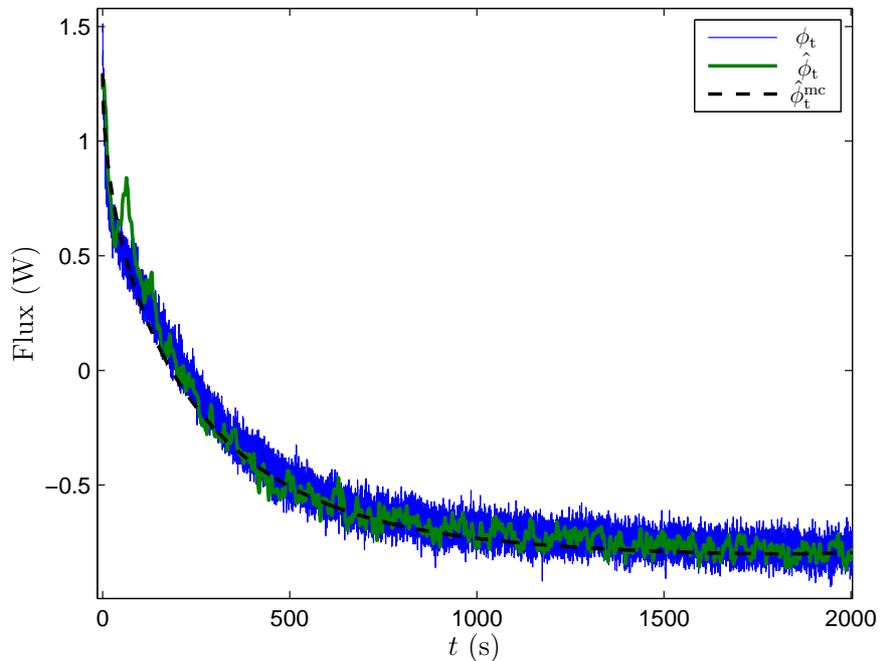


FIGURE 5.32 – Flux total réel, flux total estimé et flux total reconstruit par la méthode des moindres carrés

Afin de limiter l'effet du transitoire sur l'estimation et dès que l'intensité du courant  $I_0$  devient non nulle, la sortie du régulateur est initialisée à la valeur  $\mathcal{R}_{\text{nom}} I_0^2$  où  $\mathcal{R}_{\text{nom}}$  désigne la valeur nominale de la résistance de contact.

Le vecteur  $\Phi$  contient dix valeurs de  $\hat{\phi}_t$  prélevées toutes les 200 secondes entre 200 s et 2000 s. Ainsi, la valeur reconstruite de la résistance de contact est de 1,8 m $\Omega$  pour une valeur théorique attendue de 2 m $\Omega$  (mesurée par multimètre numérique de précision). La même méthode a également été testée sur deux autres jeux de mesures, dont un pour

lequel la résistance de contact a volontairement été dégradée. La démarche aboutit à une résistance de contact de  $1,9\text{ m}\Omega$  lorsque la résistance de la zone de contact est inchangée et à une résistance de  $3\text{ m}\Omega$  pour  $3\text{ m}\Omega$  attendu lorsqu'elle est dégradée.

Il est nécessaire de préciser que le résultat peut être sensible aux valeurs prélevées de  $\hat{\phi}_t$ . Un choix différent de la plage de prélèvement peut conduire à une estimation de la valeur résistance de contact comprise entre plus ou moins 50 % de sa valeur théorique. Des améliorations ou d'autres solution peuvent également être vues pour robustifier l'estimation vis-à-vis des erreurs de modélisation ainsi qu'au choix des valeurs à prélever du flux total estimé.

Finalement, dans tous les cas, même si l'estimation de la résistance de contact n'est pas tout à fait exacte, les variations de sa valeur sont bien détectées.

### 5.5.6 À propos d'autres techniques d'estimation d'entrées inconnues

Bien entendu, diverses méthodes existent pour estimer des entrées inconnues. Dans [De et Das, 2014], les auteurs proposent un tour d'horizon sur les techniques d'estimation d'entrées inconnues présentes dans la littérature. Ainsi, il existe diverses méthodes telles que :

- les observateurs à entrées inconnues [Stotsky et Kolmanovsky, 2001], à grand gain et modes glissants multiples [Veluvolu et Chai, 2009] ;
- l'approche par des moindres carrés récurrents pour les systèmes à temps discrets [Bessaoudi et al., 2011] ;
- les estimateurs retardés à entrées inconnues pour les systèmes discrets linéaires [Floquet et Barbot, 2006] ;
- une approche pour estimer à la fois l'état du système et les entrées inconnues pour une classe de modèles non linéaires [Ha et Trinh, 2004] ;
- ...

Par manque de temps ces méthodes n'ont pas toutes été testées dans le cadre de manuscrit. En revanche, les observateurs à grand gain font partie des méthodes les plus répandues et sont très faciles à mettre en œuvre. Ils nécessitent uniquement la mise en œuvre d'un filtre du premier ordre. Soit un système régi par l'équation différentielle :

$$\frac{dz(t)}{dt} = y(t) + x(t) \quad (5.115)$$

où les signaux  $z$  et  $y$  sont mesurés, mais le signal  $x$  est l'entrée inconnues à estimer.

Il peut être montré que  $x$  peut être correctement estimé par

$$\hat{x} = \gamma z - \frac{\gamma}{s + \gamma} (\gamma z + y), \quad (5.116)$$

où  $\gamma$  est un paramètre de réglage qui peut être choisi aussi grand que l'on veut pour réduire l'erreur et la rapidité de convergence de l'estimation.

En revanche cette méthode, bien que très simple, trouve ses limites en présence d'un bruit de mesure. Cette approche a été testée dans le cadre de ce mémoire pour reconstruire le flux total, mais elle n'a pas aboutit à des résultats suffisamment satisfaisants. En effet, cette démarche donne une estimation soit très (trop) lente avec un faible impact du bruit de mesure ( $\gamma$  petit), soit complètement noyée dans le bruit à cause de sa trop grande amplification ( $\gamma$  grand).

## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre deux méthodes différentes pour surveiller les variations des résistances de contact dans les connecteurs automobiles ont été présentées.

Une première méthode fait appel à du diagnostic à base de modèle. Dans ce cadre, l'espace de parité à temps continu a été utilisé afin de générer un signal de résidu porteur d'information sur le défaut considéré : variations paramétriques de la résistance de contact. Cette approche a été appliquée au montage de faible puissance. Il a été souligné que l'utilisation d'un seul capteur de température près du point de contact ne fournit pas assez d'information pour générer un résidu suffisamment insensible aux variations de l'état du système. Bien que cela soit peu raisonnable en pratique à cause du coût, le recours à deux capteurs de température (clip et languette) permet d'obtenir un bien meilleur conditionnement de cette matrice, conduisant ensuite à la génération d'un résidu scalaire présentant une bonne sensibilité aux défauts tout en étant insensible aux variations de l'état et suffisamment peu sensible aux perturbations.

Afin d'analyser le résidu obtenu et de prendre une décision sur le fonctionnement du système (avec ou sans défaut), la comparaison de sa valeur efficace à un seuil adapté a été effectuée. Les résultats obtenus ont montré que la méthode permet une détection d'un défaut correspondant à une variation d'au moins 10% de la valeur de la résistance de contact par rapport à sa valeur nominale.

Une autre méthode a été proposée dans le but de reconstruire la valeur d'une résistance de contact. Cette seconde approche a été appliquée au montage de forte puissance en utilisant un modèle incomplet, un estimateur d'entrée inconnue ainsi que la méthode des moindres carrés. Il a d'abord été montré que la première valeur de l'entrée inconnue (suite à un échelon de courant d'amplitude non nulle) correspond à la valeur du flux par effet Joule provoqué par la résistance de contact. Il a été souligné que la connaissance exacte de cette première valeur de l'entrée inconnue permet de déterminer immédiatement la résistance de contact car l'intensité du courant est connue. Il a toutefois été montré au travers d'études de sensibilité, que la stratégie choisie pour l'estimation de l'entrée inconnue (utilisation d'une boucle de régulation simple) ne permet pas de reconstruire fidèlement sa première valeur à cause d'un compromis entre rapidité de convergence de la boucle et amplification du bruit de mesure. Pour palier ce problème, il a été montré qu'une estimation plus lente de l'entrée inconnue (afin d'atténuer le bruit de mesure) couplée à la méthode des moindres carrés (pour reconstruire les valeurs manquantes à partir de valeurs succédant le temps de convergence de la boucle d'estimation), a aboutit, pour plusieurs jeux de mesure, à des évaluations satisfaisantes de la résistance de contact considérée.

Des propositions d'améliorations de ces méthodes ont respectivement été faites dans les sections correspondantes de ce chapitre.

Enfin, bien que des outils pour détecter l'évolution des résistances de contact ont été présentés dans ce chapitre, il serait intéressant de les accompagner de stratégies de commande tolérantes aux fautes dans le but de protéger ces points contre les échauffements critiques. Par exemple, une stratégie de commande du courant électrique pourrait être envisagée lorsque le cordon de recharge est mal adapté (cordon défaillant, cordon de contre-façon). Ainsi, la stratégie mise en place viserait à protéger la connectique de forte puissance contre des températures critiques.



## 5.6. CONCLUSION

---

# Conclusion générale et perspectives

## Conclusion générale

Un des objectifs de cette thèse a été d'améliorer le maillage d'un fil électrique d'un point de vue complexité-précision. En ce sens, une méthode reposant sur la minimisation d'un critère basé sur la norme  $\mathcal{H}_2$  des systèmes modélisés par des fonctions de transfert d'ordre non entier a été proposée.

Afin de choisir le nombre de mailles pour un fil électrique, une méthode d'optimisation a été introduite en se basant sur un critère qui vise à minimiser la norme  $\mathcal{H}_2$  de l'erreur dans le pire cas entre un modèle analytique non entier de référence et le modèle maillé sur un très grand nombre de points d'évaluation. Ceci a conduit au développement et à la démonstration de nouveaux résultats théoriques concernant l'expression analytique de la norme  $\mathcal{H}_2$  des fonctions de transfert non entières implicites, permettant ainsi un calcul exact et rapide du critère. La qualité du maillage obtenu a été confirmée par des comparaisons fréquentielles et temporelles. Cette méthode de maillage permet de considérer l'ensemble du domaine fréquentiel et tout le domaine spatial du fil électrique jusqu'à sa distance d'oubli. Elle apporte donc une amélioration significative par rapport à une autre approche de la littérature basée sur un critère visant à minimiser la norme  $\mathcal{H}_\infty$  de l'erreur pour un seul point du fil électrique localisé à son extrémité. Enfin, il a été montré que la méthode de maillage proposée dans cette thèse aboutit à un même nombre de mailles pour des fils de sections différentes. De plus, elle peut s'appliquer à d'autres composants nécessitant l'utilisation d'un maillage, tels que les pistes de cuivre ou les torons.

Le second objectif visé était d'étudier les variations ou d'estimer les résistances de contact dans les connecteurs automobiles sous la contrainte d'utiliser le moins de capteurs possible.

En ce sens, deux approches différentes ont été proposées dans ce manuscrit. L'une

d'elle a été appliquée au montage électrique de faible puissance (carte électronique et connecteur de boîtier automobile) et l'autre à un montage de forte puissance (connecteur de recharge d'un véhicule électrique avec son faisceau du côté véhicule). Chacune de ces méthodes nécessite un modèle du montage sur lequel elle est utilisée. Ainsi, les modèles des composants des deux montages considérés ont d'abord été présentés aux chapitres 3 et 4. Il a été montré lors des étapes de validation, que ces modèles conduisent à une erreur relative maximale de 10 % ou 11 % entre les données issues de leur simulation et les données de mesures des différents composants. De même, il a été montré que la valeur moyenne de cette erreur se situe autour de 4 %.

La première méthode présentée pour étudier les variations des résistances de contact, se base sur du diagnostic à base de modèle à temps continu. Cette approche a été appliquée au montage de faible puissance dans le but de détecter des variations paramétriques de la résistance de contact, qui se traduisent par des défauts multiplicatifs. Il a été montré par des études de sensibilité que l'utilisation d'un seul capteur de température près du point de contact n'est pas suffisante pour aboutir à une détection correcte des variations de la résistance de contact. Bien que cela soit plus onéreux, il a été montré que l'utilisation de deux capteurs de température près du contact permet d'obtenir des résultats satisfaisants sur de vrais jeux de mesure. L'approche a ainsi permis de détecter une variation de la résistance de contact de l'ordre de 10 % par rapport à sa valeur nominale.

Une seconde méthode, basée sur l'estimation d'une entrée inconnue et sur la méthode des moindres carrés, a visé à estimer la valeur des résistances de contact. Il a d'abord été montré que la première valeur de l'entrée inconnue (suite à un échelon de courant d'amplitude non nulle) correspond au flux par effet Joule provoqué par la résistance de contact. Il a été souligné que la connaissance exacte de cette première valeur de l'entrée inconnue permet de déterminer immédiatement la résistance de contact car l'intensité du courant est connue. Il a toutefois été montré au travers d'études de sensibilité que la stratégie choisie pour l'estimation de l'entrée inconnue (utilisation d'une boucle de régulation simple) ne permet pas de reconstruire fidèlement sa première valeur à cause d'un compromis entre la rapidité de convergence de la boucle et l'amplification du bruit de mesure. Pour palier ce problème, il a été montré qu'une estimation plus lente de l'entrée inconnue (afin d'atténuer le bruit de mesure) couplée à la méthode des moindres carrés (pour reconstruire les valeurs manquantes à partir de valeurs succédant le temps de convergence de la boucle d'estimation), a abouti à des évaluations satisfaisantes de la résistance de contact considérée pour plusieurs jeux de mesure.

## Perspectives

Cette thèse a permis d'élaborer deux approches dans le but de détecter des variations des résistances de contact. Ces méthodes ont permis de répondre à la problématique, mais elles comportent tout de même des perspectives d'améliorations.

Pour commencer, ces deux approches s'appuient sur des modèles des systèmes électrothermiques considérés. Aussi précis soit-il, un modèle ne pourra toujours fournir qu'une description imparfaite des phénomènes étudiés. Il a été montré que les modèles établis dans ce manuscrit présentent des erreurs relatives maximales de l'ordre d'une dizaine de points.

Dans le cas de la première approche par espace de parité dynamique, ces erreurs de modélisation peuvent biaiser la détection d'un défaut sur la variation de résistance de contact. En effet, elles peuvent conduire à de fausses détections (détection de défauts alors que le fonctionnement est normal) ou à des non détections (pas de détection alors que le système est en fonctionnement défaillant). Des méthodes de génération de résidus robustes vis-à-vis des incertitudes de modèle telles que la transformation des incertitudes en entrées inconnues, les stratégies à base de modèle de référence et la génération de résidus pour les systèmes à incertitudes polytopiques ou les systèmes stochastiquement incertains sont présentées dans [Ding, 2013]. Une perspective d'amélioration de la méthode serait d'évaluer ces incertitudes (donner leurs bornes par exemple) et d'étudier les techniques de génération de résidu mentionnées.

Pour la seconde méthode, les erreurs de modélisation conduisent à une mauvaise évaluation de l'entrée inconnue et donc à une mauvaise estimation de la résistance de contact. À la connaissance de l'auteur, il n'existe que peu de méthodes capables d'estimer des entrées inconnues pour des systèmes incertains. Toutefois, il est proposé dans [Akhenak et al., 2007] d'utiliser un observateur à modes glissants basé sur un modèle linéaire de Takagi-Sugeno incertain. Une autre solution propose de synthétiser un observateur robuste d'un système non linéaire à partir d'une optimisation d'inégalités matricielles linéaires (LMI) : [Nagy-Kiss et al., 2014]. Ces techniques sont autant de perspectives envisageables.

La méthode de reconstruction de la résistance de contact par la méthode des moindres carrés peut également être améliorée. Il a été souligné qu'un autre choix des échantillons postérieurs au temps de convergence de la boucle d'estimation peut conduire à un résultat différent sur l'évaluation de la résistance de contact. L'approximation de l'entrée inconnue par un polynôme pourrait être remplacée par une fonction non linéaire plus fidèle à sa

dynamique réelle. Par exemple, un algorithme basé sur la méthode des moindres carrés non linéaires pourrait être envisagé.

Une autre perspective faisant suite à la détection des variations des résistances de contact et à leur évaluation, serait d'étendre la stratégie de protection d'un fil contre les surchauffes, proposée dans [Nguyen, 2013], à la connectique. Cette stratégie vise à protéger les composants contre les températures critiques sans annuler définitivement le courant dans la ligne défectueuse, et tout en respectant les conditions de fonctionnement de la charge. Ceci pourrait être atteint par la commande de transistors (certains étant déjà présents dans les véhicules) pour contrôler l'intensité du courant électrique, donc la puissance générée par effet Joule. En d'autres termes, il serait intéressant d'étudier plus en profondeur les possibilités de commandes tolérantes aux fautes sur une application industrielle (boîtier de servitude, connecteur de recharge).

Bien que les résultats présentés dans ce mémoire fonctionnent sur des données prélevées sur des systèmes physiquement réels, il serait nécessaire d'implanter et de tester ces méthodes sur des calculateurs automobiles dans des conditions identiques à la réalité (carte électronique dans un boîtier situé à l'intérieur de l'automobile, connecteur de recharge encastré dans le véhicule).

Enfin, il serait intéressant de considérer d'autres défauts que les variations des résistances de contact (par exemple un composant défaillant proche du contact qui injecterait un flux de chaleur excédentaire). Dans le cadre de la connectique de recharge des véhicules électriques, ceci permettrait de détecter par exemple un cordon de recharge défectueux ou contrefait, et de définir la nature du défaut.

# Bibliographie

- [Akhenak et al., 2007] Akhenak, A., Chadli, M., Ragot, J. et Maquin, D. (2007). "Design of sliding mode unknown input observer for uncertain Takagi-Sugeno model". In *Control Automation, 2007. MED '07. Mediterranean Conference on*, pages 1–6.
- [Ammous et al., 2007] Ammous, K., Abid, S. et Ammous, A. (2007). "Thermal modeling of semiconductor devices in power modules". *Microelectronics International*, 24(3), pp. 46–54.
- [Aoun et al., 2007] Aoun, M., Malti, R., Levron, F. et A, O. (2007). "Synthesis of fractional Laguerre basis for system approximation". *Automatica*, 43, pp. 1640–1648.
- [Aström, 1970] Aström, K. (1970). *Introduction to stochastic control theory*. Academic press, New York, USA.
- [Battaglia et al., 2010] Battaglia, J., Andrzej, K. et Puiggali, J. (2010). *Introduction aux transferts thermiques*. Dunod, 1st edition.
- [Bejan et Kraus, 2003] Bejan, A. et Kraus, A. (2003). *Heat transfer handbook*. Wiley.
- [Bernot, 2010] Bernot, F. (2010). "Composants de l'électronique de puissance". *Techniques de l'ingénieur Alimentations et électronique de puissance*, base documentaire : TIB283DUO.(ref. article : e3960).
- [Bessaoudi et al., 2011] Bessaoudi, T., Khemiri, K., Ben Hmida, F. et Gossa, M. (2011). "Recursive least-squares estimation for the joint input-state estimation of linear discrete time systems with unknown input". In *Systems, Signals and Devices (SSD), 2011 8th International Multi-Conference on*, pages 1–6.
- [Boetcher, 2014] Boetcher, S. (2014). *Natural Convection from Circular Cylinders*. Springer.
- [Bouchat et al., 2005] Bouchat, C., Kupélian, J. et Kupélian, Y. (2005). "Les voitures hybrides dans l'histoire".

- [Boyd et al., 1994] Boyd, S., Ghaoui, L., Feron, E. et Balakrishnan, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*. SIAM studies in applied mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [Broy et al., 2007] Broy, M., Kruger, I., Pretschner, A. et Salzmann, C. (2007). "Engineering Automotive Software". *Proceedings of the IEEE*, 95(2), pp. 356–373.
- [Caputo, 1967] Caputo, M. (1967). "Linear models of dissipation whose  $Q$  is almost frequency independent". *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 2(13), pp. 529–539.
- [Çengel, 2003] Çengel, Y. (2003). *Heat Transfer : A Practical Approach*. McGraw-Hill series in mechanical engineering. McGraw-Hill.
- [ChargeMap.com, 2014] ChargeMap.com (2014). "Statistiques sur les bornes de recharge en France". <http://fr.chargemap.com>.
- [Chen, 2014] Chen, B. (2014). "H2 Optimal Control". In Baillieul, J. et Samad, T., editors, *Encyclopedia of Systems and Control*, pages 1–7. Springer London.
- [Chevrié et al., 2016] Chevrié, M., Farges, C., Sabatier, J., Guillemard, F., Pradere, L. et Airimitoiaie, T.-B. (2016). "Finite length wire dynamical modeling for automotive applications using H2-norm based approximation of a fractional model". In *accepted in European Control Conference*.
- [Chevrié et al., 2014] Chevrié, M., Malti, R., Farges, C. et Sabatier, J. (2014). "H2-norm of fractional transfer functions of implicit type of the first kind". In *19th IFAC World Congress*, pages 2022–2027, Cape Town, South Africa.
- [Chevrié et al., 2015a] Chevrié, M., Sabatier, J., Farges, C. et Malti, R. (2015a). "H2-norm computation of a class of implicit fractional transfer functions : application to approximation by integer order models". *International Journal of Dynamics and Control*, pages 1–7.
- [Chevrié et al., 2015b] Chevrié, M., Sabatier, J., Farges, C. et Malti, R. (2015b). "H2-norm of a class of fractional transfer functions suited for modeling diffusive phenomena". In *American Control Conference, ACC 2015, Chicago, IL, USA, July 1-3, 2015*, pages 2199–2204.
- [Chow et Willsky, 1984] Chow, E. et Willsky, A. (1984). "Analytical redundancy and the design of robust failure detection systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29(7), pp. 603–614.
- [Copperalliance.fr, 2015] Copperalliance.fr (2015). "Les propriétés du cuivre".

- [Davidson et Cole, 1951] Davidson, D. W. et Cole, R. H. (1951). "Dielectric Relaxation in Glycerol, Propylene Glycol, and n-Propanol". *The Journal of Chemical Physics*, 19(12), pp. 1484–1490.
- [De et Das, 2014] De, A. et Das, G. (2014). "Comparison between Unknown Input Estimation of a System Using Projection Operator Approach and Generalized Matrix Inverse Method". *International Journal of Engineering Research and Applications*, pages 260–265.
- [Ding, 2013] Ding, S. X. (2013). *Model Based Fault-Diagnosis Techniques Design Schemes, Algorithms and Tools*. Springer-Verlag London.
- [Doerstling, 1998] Doerstling, B. (1998). *Thermal-electrical Modeling of Electrical Subsystems*. SAE technical paper series. Society of Automotive Engineers.
- [Dugowson, 1994] Dugowson, S. (1994). *Les différentielles métaphysiques : histoire et philosophie de la généralisation de l'ordre de dérivation*. PhD thesis, Université Paris XIII.
- [Dzieliński et Sierociuk, 2010] Dzieliński, A. et Sierociuk, D. (2010). "Fractional Order Model of Beam Heating Process and Its Experimental Verification". In Baleanu, D., Guvenc, Z. B. et Machado, J. A. T., editors, *New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications*, pages 287–294. Springer Netherlands.
- [Fadiga, 2014] Fadiga, L. (2014). *Commande  $H$  infini à base de modèles non entiers*. PhD thesis, Université de Bordeaux. Thèse de doctorat dirigée par Sabatier, Jocelyn et Farges, Christophe Automatique, productique, signal et image, ingénierie cognitive Bordeaux 2014.
- [Farges et al., 2009] Farges, C., Moze, M. et Sabatier, J. (2009). "Pseudo state feedback stabilization of commensurate fractional order systems". In *European Control Conference 2009, ECC'09*, pages 3395–3400, Budapest, Hungary.
- [Floquet et Barbot, 2006] Floquet, T. et Barbot, J.-P. (2006). "State and unknown input estimation for linear discrete-time systems". *Automatica*, 42(11), pp. 1883 – 1889.
- [Fonod, 2014] Fonod, R. (2014). *Diagnostic de défaut à base de modèle et accommodation de défaut pour missions spatiales*. Theses, Université de Bordeaux.
- [Furmanczyk et al., 1998] Furmanczyk, M., Napieralski, A., Szaniawski, W. et Lara, A. (1998). "Reduced electro-thermal models for integrated circuits". In *Intl. Conf. on Modeling and Simulation of Microsystems*, pages 139–144, Santa Clara Marriott California U.S.A.

- [Gantmacher, 1960] Gantmacher, F. (1960). *The theory of matrices*. Number vol. 1 in The Theory of Matrices. Chelsea Pub. Co.
- [Gazeau, 2013] Gazeau, Y. (2013). "Le réseau 48 volts est imminent".
- [Gradshteyn et Ryshik, 2007] Gradshteyn, I. et Ryshik, I. (2007). *Table of integrals, series, and products*. Academic Press, 7th edition.
- [Grandvuillemin, 2009] Grandvuillemin, J. (2009). *Etudes des phénomènes électrothermiques régissant les lignes d'alimentation d'un réseau électrique automobile - Application au dimensionnement des faisceaux électriques et leurs protections*. PhD thesis, Université de Franche-Comté. Thèse de doctorat dirigée par Didier CHAMAGNE et Raynal GLISES, Sciences pour l'ingénieur, Université de Franche Comté.
- [Granjon, 2015] Granjon, Y. (2015). *Automatique Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'états, évènements discrets*. Dunod, 3ème édition.
- [Greenwood et Williamson, 1966] Greenwood, J. A. et Williamson, J. B. P. (1966). "Contact of Nominally Flat Surfaces". *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 295(1442), pp. 300–319.
- [Grünwald, 1867] Grünwald, A. (1867). "Ueber begrenzte derivationen und deren Anwendung". *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, pages 441–480.
- [Ha et Trinh, 2004] Ha, Q. P. et Trinh, H. (2004). "State and Input Simultaneous Estimation for a Class of Nonlinear Systems". *Automatica*, 40(10), pp. 1779–1785.
- [Hahne et Grigull, 1975] Hahne, E. et Grigull, U. (1975). "Formfaktor und formwiderstand der stationären mehrdimensionalen wärmeleitung". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 18(6), pp. 751 – 767.
- [Hartley et Lorenzo, 2002] Hartley, T. et Lorenzo, C. (2002). "Dynamics and Control of Initialized Fractional-Order Systems". *Nonlinear Dynamics*, 29(1-4), pp. 201–233.
- [Hertz, 1882] Hertz, H. (1882). "Ueber die Berührung fester elastischer Körper.". *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 92, pp. 156–171.
- [Holm, 1967] Holm, R. (1967). *Electric Contacts : Theory and Application*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 4th edition.
- [Ickx, 1971] Ickx, J. (1971). *Ainsi naquit l'automobile*. Edita.
- [Ilgevcicius, 2004] Ilgevcicius, A. (2004). *Analytical and numerical analysis and simulation of heat transfer in electrical conductors and fuses*. PhD thesis, Universität der Bundeswehr München Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik.

- 
- [Isermann, 2006] Isermann, R. (2006). *Fault-Diagnosis Systems An Introduction from Fault Detection to Fault Tolerance*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [Jackson et Streater, 2006] Jackson, R. L. et Streater, J. L. (2006). "A multi-scale model for contact between rough surfaces". *Wear*, 261(11–12), pp. 1337 – 1347.
- [Jeon et Grischkowsky, 1998] Jeon, T.-I. et Grischkowsky, D. (1998). "Observation of a Cole-Davidson type complex conductivity in the limit of very low carrier densities in doped silicon". *Applied Physics Letters*, 72(18), pp. 2259–2261.
- [Khamzin et Popov, 2012] Khamzin, R. et Popov, I. (2012). "Description of the anomalous dielectric relaxation in disordered systems in the frame of the Mori-Zwanzig formalism". *Journal of Physics : Conference Series*, 394(1).
- [Kim, 2011] Kim, V. (2011). "How to Design 10 kHz filter. (Using Butterworth filter design)".
- [Leruste et Koechlin, 2005] Leruste, A. et Koechlin, M. (2005). "Formation : découverte et conception des faisceaux (document interne PSA)".
- [Liouville, 1832] Liouville, J. (1832). "Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces équations". *l'école de polytechnique*, 13, pp. 71–162.
- [Malti et al., 2011] Malti, R., Aoun, M., Levron, F. et Oustaloup, A. (2011). "Analytical computation of the  $\mathcal{H}_2$ -norm of fractional commensurate transfer functions". *Automatica*, 47(11), pp. 2425–2432.
- [Malti et al., 2015] Malti, R., Chevrié, M., Farges, C. et Sabatier, J. (2015). " $\mathcal{H}_2$ -norm of fractional transfer functions of implicit type". *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 26(1–3), pp. 223 – 237.
- [Malti et al., 2014] Malti, R., Chevrié, M., Farges, C. et Sabatier, J. (2014). " $L_p$ -norm boundedness conditions of stable Davidson-Cole filters". In *International Conference on Fractional Differentiation and its Applications (ICFDA)*, Catania, Italy.
- [Malti et al., 2009] Malti, R. R., Sabatier, J. et Akçay, H. (2009). "Thermal modeling and identification of an aluminum rod using fractional calculus". In *15th IFAC Symposium on System Identification (SYSID)*, pages pp. 958–963, Saint-Malo, France.
- [Mark, 2009] Mark, J. E. (2009). *Polymer Data Handbook*. Oxford University Press.
- [Matignon, 1998] Matignon, D. (1998). "Stability properties for generalized fractional differential systems". *ESAIM : Proceedings*, 5, pp. 145–158.

- [Melchior et al., 2012] Melchior, P., Pellet, M., Abdelmoumen, Y. et Oustaloup, A. (2012). "System Identification of Thermal Transfers Inside the Lungs Using Fractional Models". In *7th Vienna Int. Conf. on Mathematical Modelling*, pages 571–576, Vienna, Austria.
- [Miller et Ross, 1993] Miller, K. et Ross, B. (1993). *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. A Wiley-Interscience Publication.
- [Montseny, 1998] Montseny, G. (1998). "Diffusive representation of pseudo-differential time operators". *ESAIM : Proceedings*, 5, pp. 159–175.
- [Morin, 2010] Morin, A. (2010). "Lohner Porsche, une hybride de 111 ans...". <http://www.guideautoweb.com>.
- [Nagy-Kiss et al., 2014] Nagy-Kiss, A. M., Schutz, G. et Ragot, J. (2014). "State, unknown input and uncertainty estimation for nonlinear systems using a Takagi-Sugeno model". In *Control Conference (ECC), 2014 European*, pages 1274–1280.
- [Navet et Simonot-Lion, 2008] Navet, N. et Simonot-Lion, F. (2008). *The Automotive Embedded Systems Handbook*. Industrial Information Technology Series. Taylor & Francis / CRC Press.
- [Nguyen, 2013] Nguyen, H. C. (2013). *Modélisation électrothermique de système électrique électronique automobile et pilotage de mosfet intelligents pour protéger les faisceaux, éviter les courts circuits aggravés et diminuer la masse de câblage*. PhD thesis, Université de Bordeaux 1. Thèse de doctorat dirigée par Moreau, Xavier et Sabatier, Jocelyn, Automatique et productique, signal et image Bordeaux 1.
- [Oldham et Spanier, 1974] Oldham, K. et Spanier, J. (1974). *The fractionnal calculus - Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. Academic Press, New-York and London.
- [Ortigueira et Trujillo, 2012] Ortigueira, M. D. et Trujillo, J. (2012). "A Relation Between the Fractional Derivative and the Hilbert Transform". In *7th Vienna International Conference on Mathematical Modelling*, pages 597–599, Vienna, Austria.
- [Oustaloup, 1995] Oustaloup, A. (1995). *La dérivation non-entière : théorie, synthèse et applications*. Hermès - Paris.
- [Pan et al., 2012] Pan, I., Korre, A., Das, S. et Durucan, S. (2012). "Chaos suppression in a fractional order financial system using intelligent regrouping PSO based fractional fuzzy control policy in the presence of fractional Gaussian noise". *Nonlinear Dynamics*, 70(4), pp. 2445–2461.

- [Penrose, 1956] Penrose, R. (1956). "On best approximate solutions of linear matrix equations.". *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 52, pp. 17–19.
- [Podlubny, 1998] Podlubny, I. (1998). *Fractional Differential Equations : An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. Mathematics in Science and Engineering. Elsevier Science.
- [Popiel et al., 2007] Popiel, C., Wojtkowiak, J. et Bober, K. (2007). "Laminar free convective heat transfer from isothermal vertical slender cylinder". *Experimental Thermal and Fluid Science*, 32(2), pp. 607 – 613.
- [Potter et Suman, 1977] Potter, J. E. et Suman, M. C. (1977). "Thresholdless Redundancy Management with Arrays of Skewed Instruments". *Integrity in Electronic Flight Control Systems, AGARDOGRAPH-224*, pages 15–1 à 15–25.
- [Riemann, 1876] Riemann, B. (1876). "Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation". *Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher*, pages 331–344.
- [Rohsenow et al., 1998] Rohsenow, W., Hartnett, J. et Cho, Y. (1998). *Handbook of heat transfer*. McGraw-Hill handbooks. McGraw-Hill.
- [Ross, 1977] Ross, B. (1977). "The development of fractional calculus 1695-1900". *Historia Mathematica*, 4(1), pp. 75 – 89.
- [Sabatier et al., 2006a] Sabatier, J., Aoun, M., Oustaloup, A., Grégoire, G., Ragot, F. et Roy, P. (2006a). "Fractional system identification for lead acid battery state charge estimation". *Signal Processing*, 86(10), pp. 2645–2657.
- [Sabatier et al., 2006b] Sabatier, J., Aoun, M., Oustaloup, A., Grégoire, G., Ragot, F. et Roy, P. (2006b). "Fractional system identification for lead acid battery state of charge estimation". *Signal Processing*, 86(10), pp. 2645 – 2657. Special Section : Fractional Calculus Applications in Signals and Systems.
- [Sabatier et Farges, 2014] Sabatier, J. et Farges, C. (2014). "Long memory models : a first solution to the infinite energy storage ability of linear time-invariant fractional models". In *19th IFAC World Congress*, pages 2884–2890, Cape Town, South Africa.
- [Sabatier et al., 2011] Sabatier, J., Farges, C., Nguyen, H., Moreau, X. et Deletage, J. (2011). "Transistor Thermal Fractional Modeling for Junction Temperature Estimation". In *18th IFAC World Congress*, pages 10806–10811, Milano, Italy.

- [Sabatier et al., 2013a] Sabatier, J., Farges, C. et Trigeassou, J.-C. (2013a). "Fractional systems state space description : some wrong ideas and proposed solutions". *Journal of Vibration and Control*.
- [Sabatier et al., 2013b] Sabatier, J., Merveillaut, M., Francisco, J., Guillemard, F. et Porcelatto, D. (2013b). "Fractional models for lithium-ion batteries". In *12th IEEE ECC*, pages 3458–3463, Zurich, Switzerland.
- [Sabatier et al., 2010] Sabatier, J., Merveillaut, M., Malti, R. et Oustaloup, A. (2010). "How to Impose Physically Coherent Initial Conditions to a Fractional System?". *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(5), pp. 1318–1326.
- [Samko et al., 1993] Samko, S., Kilbas, A. et Marichev, O. (1993). *Fractional integrals and derivatives : theory and applications*. Gordon and Breach Science.
- [Shacket, 1981] Shacket, S. R. (1981). *The complete book of electric vehicules*. Domus Books.
- [Shchigolev, 2013] Shchigolev, V. (2013). "Fractionnal Einstein Hilbert action cosmology". *Modern Physics Letters A*, 28(14).
- [Sierociuk et al., 2013] Sierociuk, D., Dzieliński, A., Sarwas, G., Petras, I., Podlubny, I. et Skovranek, T. (2013). "Modelling heat transfer in heterogeneous media using fractional calculus". *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 371(1990).
- [Singer et Kshonze, 1991] Singer, M. et Kshonze, K. (1991). "Electrical resistance of random rough contacting surfaces using fractal surface modeling". In *Electrical Contacts, 1991. Proceedings of the Thirty-Seventh IEEE Holm Conference on*, pages 73–82.
- [Smith et al., 1958] Smith, J. C., Lind, J. E. et Lermond, D. S. (1958). "Shape factors for conductive heat flow". *AIChE Journal*, 4, pp. 330–331.
- [Sommacal et al., 2008] Sommacal, L., Melchior, P., Oustaloup, A., Cabelguen, J.-M. et Ijspeert, A. J. (2008). "Fractional Multi-models of the Frog Gastrocnemius Muscle". *Journal of Vibration and Control*, 14(9-10), pp. 1415–1430.
- [Stern, 2005] Stern, D. (2005). "La g n se du moteur   explosion". *Centraliens*, 561, pp. 36–38.
- [Stotsky et Kolmanovsky, 2001] Stotsky, A. et Kolmanovsky, I. (2001). "Simple unknown input estimation techniques for automotive applications". In *American Control Conference, 2001. Proceedings of the 2001*, volume 5, pages 3312–3317 vol.5.

- 
- [Tarasov, 2005] Tarasov, V. (2005). "Fractional hydrodynamic equations for fractal media". *Annals of Physics*, 318, pp. 286–307.
- [Tavazoei, 2010] Tavazoei, M. S. (2010). "Notes on integral performance indices in fractional-order control systems". *Journal of Process Control*, 20, pp. 285–291.
- [Tesla, 2014] Tesla (2014). "Energy Efficiency of Tesla Electric Vehicles". <http://www.teslamotors.com>.
- [Toscano, 2013] Toscano, R. (2013). "Signal and System Norms". In *Structured Controllers for Uncertain Systems*, Advances in Industrial Control, pages 25–44. Springer London.
- [Tristani, 2000] Tristani, L. (2000). *Fiabilisation des connecteurs électriques soumis à des vibrations*. PhD thesis, Université de Paris Sud. Thèse de doctorat dirigée par BOYER, LIONEL Sciences et techniques Paris 11, Orsay.
- [Veluvolu et Chai, 2009] Veluvolu, K. et Chai, S. Y. (2009). "High gain observers with multiple sliding mode for state and unknown input estimations". In *Industrial Electronics and Applications, 2009. ICIEA 2009. 4th IEEE Conference on*, pages 1179–1186.
- [Wellington, 1884] Wellington, a. (1884). "Electric motor".
- [Wilson, 2008] Wilson, W. E. (2008). *Surface separation and contact resistance considering sinusoidal elastic-plastic multiscale rough surface contact*. PhD thesis, Auburn University.
- [Wilson et al., 2010] Wilson, W. E., Angadi, S. V. et Jackson, R. L. (2010). "Surface separation and contact resistance considering sinusoidal elastic-plastic multi-scale rough surface contact". *Wear*, 268(1–2), pp. 190 – 201.
- [Woo et Thomas, 1980] Woo, K. et Thomas, T. (1980). "Contact of rough surfaces : A review of experimental work". *Wear*, vol. 58, pp. 331–340.
- [Xue et Chen, 2007] Xue, D. et Chen, Y. (2007). "Suboptimum H2 Pseudo-rational Approximations to Fractional-order Linear Time Invariant Systems". In Sabatier, J., Agrawal, O. et Machado, J., editors, *Advances in Fractional Calculus*, pages 61–75. Springer Netherlands.
- [Young, 1970] Young, P. (1970). "An instrumental variable method for real-time identification of a noisy process". *Automatica*, 6(2), pp. 271 – 287.
- [Zhou et al., 1996] Zhou, K., Doyle, J. C. et Glover, K. (1996). *Robust and optimal control*. Prentice-Hall, Inc.

- [Zolghadri et al., 2014] Zolghadri, A., Henry, D., Cieslak, J., Efimov, D. et Goupil, P. (2014). *Fault Diagnosis and Fault-Tolerant Control and Guidance for Aerospace Vehicles*. Springer-Verlag London.

# Annexe A

## Modes de transfert thermique

---

A.1	Introduction . . . . .	253
A.2	Conduction de la chaleur . . . . .	254
A.2.1	Modélisation de la conduction . . . . .	254
A.2.2	Analogie avec les systèmes électriques . . . . .	256
A.2.3	Simplification de la conduction multidirectionnelle grâce aux facteurs de forme . . . . .	257
A.3	Transfert de chaleur par convection . . . . .	258
A.3.1	Modélisation de la convection . . . . .	258
A.3.2	Expression du coefficient de convection . . . . .	259
A.3.3	Expression du nombre de Nusselt en convection naturelle pour quelques configurations géométriques . . . . .	262
A.3.4	Analogie avec les systèmes électriques . . . . .	263
A.4	Transfert de chaleur par rayonnement thermique . . . . .	263
A.4.1	Modélisation du rayonnement thermique . . . . .	266

---

« Rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme »

*Antoine Laurent de Lavoisier*

## A.1 Introduction

Dans la vie courante, la notion de température est liée à la sensation de chaud ou de froid perçue au contact d'un objet. Plus objectivement, la température en tant que grandeur permet de rendre compte, de part son évolution, de variations d'autres grandeurs (par exemple la variation des dimensions d'un objet ou des propriétés physiques ou chimiques d'un corps en fonction de la température). Au niveau microscopique, l'ensemble des molécules se déplacent incessamment et de façon désordonnée. Ce mouvement (appelé mouvement Brownien) entraîne des chocs entre les molécules. Ainsi, plus les molécules sont agitées plus la température est importante.

Dans le monde, trois échelles de température sont couramment utilisées. L'échelle la plus communément employée est le degré Celsius (ou degré centigrade), mais il existe également les échelles Fahrenheit et Kelvin. Les échelles Celsius et Fahrenheit sont empiriques alors que l'échelle Kelvin est absolue, sa température la plus basse est celle du zéro absolu <sup>(1)</sup> c'est-à-dire 0 K (−273,15 °C). Le Kelvin est également utilisé par le système international d'unités. Par conséquent, les calculs effectués et les modèles développés dans ce mémoire se font avec des températures exprimées en kelvins [K]. Les résultats finaux présentés (courbes, tableaux) ont été convertis *a posteriori* en degrés Celsius [°C] grâce à la formule suivante :

$$[°C] = [K] + 273,15. \quad (\text{A.1})$$

La température d'un corps dépend des échanges de chaleur (transferts thermiques) qu'il effectue avec le milieu extérieur. Trois modes de transfert thermiques fondamentaux se distinguent : la conduction, la convection et le rayonnement. La conduction intervient dans les solides ou les fluides au repos. Il s'agit d'un transfert de chaleur de proche en proche au niveau moléculaire et atomique au sein de la matière. La convection caractérise un échange de chaleur à la frontière entre un fluide en mouvement et une surface solide. Le rayonnement repose sur le transport de chaleur par ondes électromagnétiques, donc sans contact.

---

1. Le zéro absolu est la température la plus basse qui puisse exister, mais elle est inaccessible du fait de propriétés quantiques.

## A.2 Conduction de la chaleur

La conduction résulte de chocs à l'échelle moléculaire et atomique. Il s'agit d'un transfert d'énergie depuis les particules d'une matière qui sont d'un plus haut niveau d'énergie vers les particules d'un niveau d'énergie plus bas. La conduction peut avoir lieu dans les solides et dans une moindre mesure dans les fluides (plus dans les liquides que dans les gaz). Il s'agit d'un transfert d'énergie à petite échelle, dans un corps localement au repos. C'est un phénomène très analogue à la conduction de l'électricité puisque, tout comme il est dit d'un matériau qu'il est conducteur ou isolant électrique, il est dit (de manière analogue) conducteur ou isolant thermique.

Le transfert de la chaleur par conduction dans un matériau solide (ou un fluide au repos) n'apparaît que si une perturbation thermique est générée en un point du matériau. Par exemple (voir figure A.1), si un matériau solide est chauffé, les ions les plus proches de la source de chaleur vibrent de façon intense et communiquent ces vibrations de proches en proches. Cette agitation déséquilibre le système et accroît la température dans le matériau et se diffuse en son sein, des températures les plus élevées vers les plus basses. Un flux de chaleur  $\vec{\phi}$  est alors associé à cette diffusion et qui représente la quantité d'énergie (chaleur) transportée par unité de temps, son unité est donc homogène à des watts. Enfin, la conduction thermique ne se fait que lorsque le gradient de température dans le matériau est non nul. Ainsi, si deux points de l'espace dans le matériau sont à la même température il n'y aura pas de diffusion de la chaleur donc pas de conduction entre ces deux points.

### A.2.1 Modélisation de la conduction

La conduction de la chaleur est décrite mathématiquement par la loi de Joseph Fourier. Considérons l'exemple de la figure A.2. Soit un solide de section  $S$  fait d'un matériau homogène et isotrope <sup>(2)</sup>. Les lignes de flux sont définies comme les lignes perpendiculaires aux isothermes dans le solide et se déplacent des températures les plus hautes ( $T_h$ ) vers les plus basses ( $T_b$ ).

Ainsi la loi de Fourier met en relation le flux de chaleur au gradient de température dans le solide :

$$\vec{\phi} = -kS \frac{dT}{dx} \vec{x}, \quad (\text{A.2})$$

---

2. Se dit d'un milieu dont les propriétés (macroscopiques) en un point ne dépendent pas de la direction.

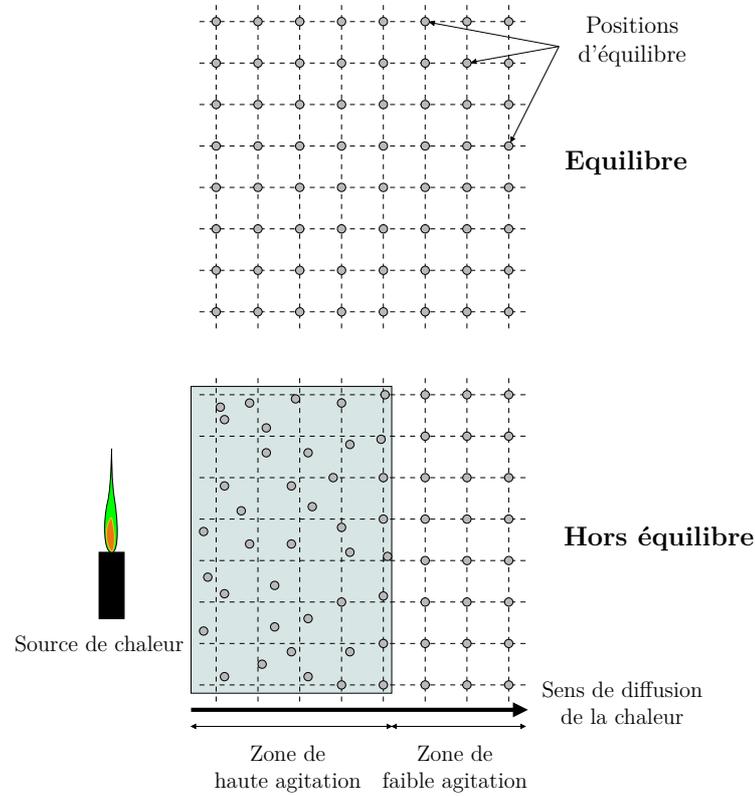


FIGURE A.1 – Illustration de la conduction

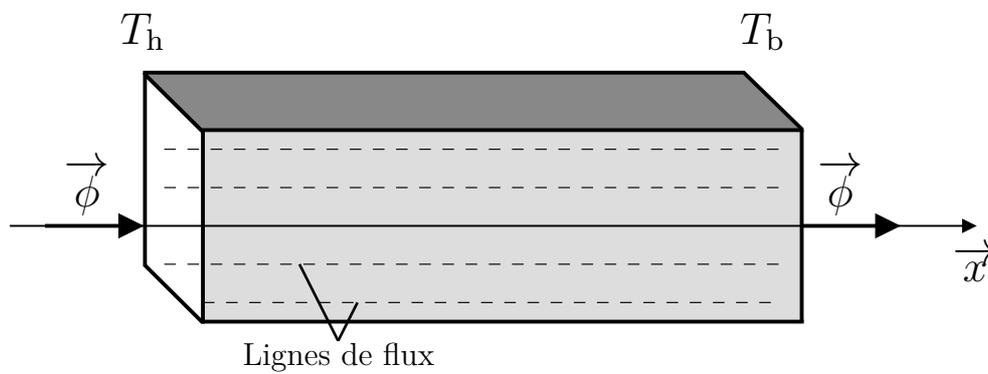


FIGURE A.2 – Flux de chaleur dans un solide

où  $k$  est la conductivité du matériau.

Cette loi se généralise également à un espace tridimensionnel  $(x,y,z)$  :

$$\vec{\phi} = -kS\vec{\nabla}T, \tag{A.3}$$

où  $\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  désigne le gradient.

La relation (A.3) (ou (A.2)) montre que la conductivité thermique  $k$  est le paramètre intrinsèque au matériau qui lie le gradient de température au flux de chaleur. Elle caractérise l'aptitude d'un matériau à conduire la chaleur tout comme la conductivité électrique caractérise la propension d'une matière à conduire le courant électrique. Ainsi, de même que pour le cas électrique, un matériau est qualifié de conducteur ou d'isolant thermique. Un matériau conducteur thermiquement facilitera le transfert de chaleur tandis qu'un matériau isolant aura tendance à s'y opposer. Le tableau A.1 (source : [Battaglia et al., 2010]) donne la valeur de la conductivité thermique à 20 °C de quelques éléments.

Matériau	$k$ (W·m <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup> )	Matière	$k$ (W·m <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup> )
Air	0,025	Fer	71,965
Aluminium	225,94	Plomb	34,309
Bronze	117,15	Nickel	87,864
Carbone, graphite (type k)	167,36	Silicium	125,52
Cuivre	397,48	Titane	20,92
Or	317,98	Zinc	111,71

TABLE A.1 – Quelques valeurs de conductivité thermique

La conductivité de certains matériaux (notamment les métaux) peut varier de façon significative en fonction de la température. En effet, pour des températures très basses de 1 K à 100 K (−272,15 K à −173,15 K) la conductivité thermique varie sur 3 ordres de grandeur (de 200 W·m<sup>-1</sup>·K<sup>-1</sup> à 20 000 W·m<sup>-1</sup>·K<sup>-1</sup>) . En revanche lorsque la température augmente (supérieure à 100 K c'est-à-dire −173,15 °C), la conductivité thermique est quasi constante.

### A.2.2 Analogie avec les systèmes électriques

Pour résoudre un problème de conduction thermique (cas unidirectionnel) en régime permanent, l'analogie avec les systèmes électriques peut être utilisée. Ainsi de la même

façon que la loi d'Ohm lie la différence de potentiel  $U_1 - U_2$  aux bornes d'une résistance  $\mathcal{R}$  à l'intensité  $I$  du courant électrique qui la traverse :

$$U_1 - U_2 = \mathcal{R}I, \quad (\text{A.4})$$

la différence de température  $T_1 - T_2$  dans un matériau de conductivité  $k$  peut être liée avec le flux de chaleur par conduction  $\phi$  qui le traverse :

$$T_1 - T_2 = \frac{e}{kS}\phi, \quad (\text{A.5})$$

où  $e$  désigne la distance entre  $T_1$  et  $T_2$ .

Par analogie entre les relations (A.4) et (A.5), la résistance thermique est donnée par :

$$R = \frac{e}{kS} \quad (\text{A.6})$$

L'intérêt de cette représentation est qu'elle permet d'utiliser les outils propres aux systèmes électriques tels que la loi des nœuds ou la loi des mailles, les températures étant assimilées à des tensions et les flux à des courants électriques.

### A.2.3 Simplification de la conduction multidirectionnelle grâce aux facteurs de forme

Dans certains cas géométriques, il faudrait calculer la distribution de température dans toutes les directions (c'est-à-dire, en toute rigueur, en deux ou trois dimensions) pour déterminer la résistance thermique complète de conduction. Toutefois, certains ouvrages permettent de ramener ou d'approximer la résistance thermique de certains cas géométriques à deux ou trois dimensions à des cas à une dimension. Ceci est possible grâce à l'introduction d'un facteur de forme  $f$  dont le calcul dépend de la géométrie étudiée. La résistance thermique est alors déduite grâce à la formule suivante :

$$R = \frac{1}{fk} \quad (\text{A.7})$$

où  $k$  est la conductivité du milieu de propagation.

Il faut cependant souligner que ces facteurs de forme sont normalement valables pour la conduction en *régime permanent*. De plus, leurs formules ne sont parfois valables que sous certaines conditions géométriques particulières. Elles peuvent être déterminées

empiriquement puis corrélées à une formule mathématique ou déterminées directement par un calcul d'intégrale. Le lecteur intéressé souhaitant approfondir les méthodes de détermination des facteurs de forme, ou désirant consulter les formules déjà établies pour de nombreux cas géométriques, pourra se référer à ces ouvrages : [Hahne et Grigull, 1975, Rohsenow et al., 1998, Bejan et Kraus, 2003]

## A.3 Transfert de chaleur par convection

Le transfert de chaleur par convection s'effectue entre une surface solide et un fluide (liquide ou gaz) adjacent qui est en mouvement. Ce mode de transfert est fortement lié à la géométrie de la surface d'échange et à la vitesse du fluide. Plus le fluide sera rapide, plus l'échange de chaleur par convection sera important. La convection dite naturelle est distinguée de la convection forcée.

### A.3.1 Modélisation de la convection

Dans le cas de la convection naturelle, le fluide est mis en mouvement par des mécanismes naturels notamment par le principe de flottabilité (une portion de fluide plus chaude s'élève tandis qu'une portion plus froide retombe). Un cas d'illustration simple est celui d'une casserole remplie d'eau et posée sur le feu. La différence de densité due aux variations spatiales de température met en mouvement spontanément l'eau de la casserole : l'eau plus chaude (moins dense) au fond de la casserole va remonter vers la surface, se refroidir et retomber vers le fond. Le mouvement des masses d'air ou les courants océaniques observables sur Terre provient également de phénomènes de convection naturelle.

La convection forcée se distingue de la convection naturelle lorsque le fluide est mis en mouvement par des forces extérieures. Pour ne citer qu'eux, le sèche-cheveux, les ventilateurs ou encore une personne qui souffle sur sa soupe chaude pour la refroidir, sont des exemples de convection forcée. Les deux types de convection sont illustrés sur la figure A.3.

La convection, qu'elle soit naturelle ou forcée, est modélisée de façon macroscopique grâce à la loi de Newton (1701). Cette loi lie le flux de chaleur convectif  $\phi$  à la différence de température entre la surface du solide  $T_{\text{so}}$  et le fluide en mouvement  $T_{\text{fl}}$  :

$$\phi = hA_{\text{so}}(T_{\text{so}} - T_{\text{fl}}), \quad (\text{A.8})$$

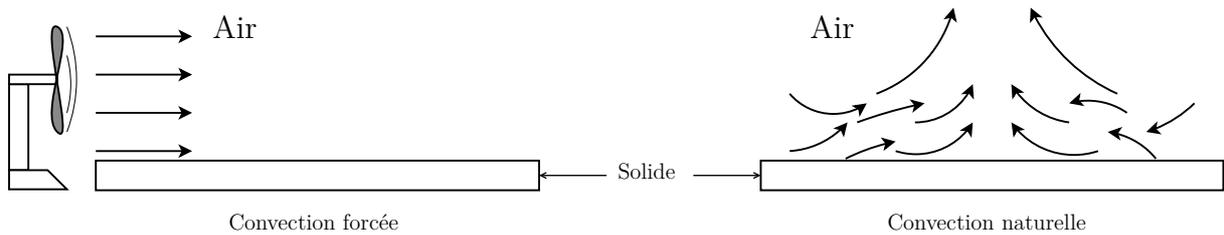


FIGURE A.3 – Illustration de la convection naturelle et forcée

où

- $h$  est le coefficient de convection qui dépend de la température et de la géométrie ;
- $A_{so}$  est la surface d'échange entre le fluide et le solide.

Pour une même géométrie de surface d'échange, les lois mathématiques (déterminées empiriquement) qui permettent de calculer le coefficient de convection  $h$  sont différentes selon le type de convection. Dans ce mémoire, seule la convection naturelle intervient. Les formules de calcul de  $h$  en convection naturelle dans les configurations géométriques pertinentes en relation à ce mémoire sont données dans la sous-section suivante.

### A.3.2 Expression du coefficient de convection

Les formes géométriques rencontrées dans le cadre de la modélisation électrothermique des conducteurs automobiles restent assez simples (cylindres ou plaques). De nombreux ouvrages [Çengel, 2003, Bejan et Kraus, 2003, Battaglia et al., 2010] regroupent les formules et les calculs liés à la détermination du coefficient  $h$  selon la géométrie de la surface.

La formule générale communément employée pour calculer le coefficient de convection est la suivante :

$$h = \frac{\text{Nu} \times k_{\text{fl}}}{L_c}, \quad (\text{A.9})$$

où :

- Nu est un nombre adimensionnel appelée nombre de Nusselt ;
- $k_{\text{fl}}$  est la conductivité thermique du fluide ;
- $L_c$  est la longueur caractéristique (différente selon la géométrie) de l'échange par convection.

Le nombre de Nusselt étant adimensionnel, le coefficient  $h$  est donc homogène à des  $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ .

En vérité c'est plus précisément la formule du nombre de Nusselt qui change en

fonction de la géométrie. Ce nombre compare le transfert thermique par convection devant le transfert par conduction dans le fluide (d'où la présence de  $k_{\text{fl}}$  dans la formule (A.9)). Ainsi, le nombre de Nusselt est proportionnel au coefficient  $h$  et il est d'autant plus élevé que le transfert par convection est important. Les nombreuses formules existantes ont été déterminées empiriquement, à la suite de nombreuses expériences. Les résultats obtenus sont plus ou moins corrélés avec des fonctions mathématiques parfois très complexes. Cependant, ces formules ont toutes un point commun car elles font intervenir deux autres nombres adimensionnels : le nombre de Prandtl  $Pr$  et le nombre de Grashof  $Gr$ . Enfin, ces corrélations expérimentales font souvent apparaître le produit des nombres de Prandtl et de Grashof. Ce produit est appelé nombre de Rayleigh  $Ra$  :

$$Ra = Pr \times Gr. \quad (\text{A.10})$$

Ce nombre est également d'une importance capitale, puisqu'il permet de comparer le transfert la quantité de chaleur échangée par conduction par rapport à celle échangée par la convection. Il existe une valeur critique pour le nombre de Rayleigh, généralement 1000 ou 2000, au-delà de laquelle la convection naturelle devient prépondérante par rapport à la conduction. En d'autres termes, pour une valeur de  $Ra$  inférieure à ce seuil le fluide n'est pas suffisamment en mouvement par rapport au solide. Dans ce cas, les échanges de chaleurs entre le fluide et le solide s'opèrent plutôt par conduction que par convection.

### A.3.2.1 Le nombre de Prandtl

Le nombre de Prandtl compare la diffusion de masse devant la diffusion thermique. Son expression est donnée par :

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad (\text{A.11})$$

où  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\alpha$  désigne la diffusivité thermique en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  également. Le nombre de Prandtl du fluide est donc bien adimensionnel.

En pratique la viscosité cinématique et la diffusivité thermique varient en fonction de la température. Pour qu'il y ait échange de chaleur entre le fluide en mouvement et la surface du solide il faut que leur température respective  $T_{\text{fl}}$  et  $T_{\text{so}}$  soient différentes. Les propriétés du fluide sont généralement prises pour la température du film de contact entre le fluide et le solide qui n'est autre que la température moyenne  $T_{\text{moy}}$ , c'est-à-dire :

$$T_{\text{moy}} = \frac{T_{\text{fl}} + T_{\text{so}}}{2}. \quad (\text{A.12})$$

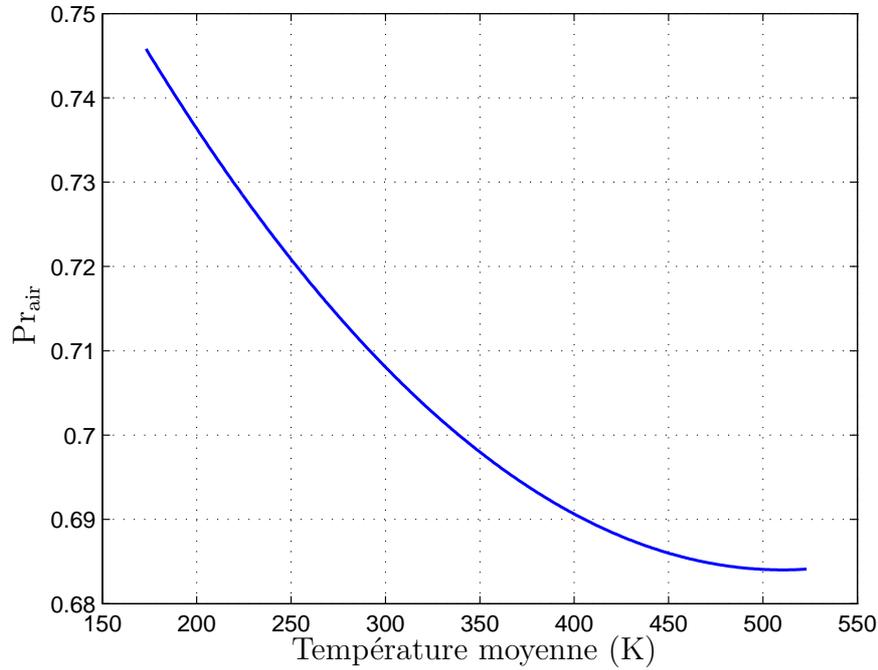


FIGURE A.4 – Evolution du nombre Prandtl de l’air en fonction de la température moyenne

Ainsi, la formule (A.11) est souvent approximée par une formule empirique la liant à la température du film de contact.

Dans le cadre de la modélisation électrothermique étudié dans ce mémoire, le seul fluide intervenant est l’air. La figure A.4 donne l’allure du nombre de Prandtl de l’air pour une plage de température du film de contact comprise entre  $-173,15\text{ K}$  ( $-100\text{ °C}$ ) et  $523,15\text{ K}$  ( $250\text{ °C}$ ). Cette courbe est obtenue grâce à la formule (empirique) suivante :

$$\text{Pr}_{\text{air}} \approx 5,429 \times 10^{-7} T_{\text{moy}}^2 - 554,3 \times 10^{-6} T_{\text{moy}} + 0,8255. \quad (\text{A.13})$$

### A.3.2.2 Le nombre de Grashof

Le nombre de Grashof compare les forces visqueuses devant la force gravitationnelle. Il permet de caractériser les mouvements occasionnés dans le fluide par les gradients de température. L’expression du nombre de Grashof est la suivante :

$$\text{Gr} = \frac{g (T_{\text{so}} - T_{\text{fl}}) L_c^3}{T_{\text{moy}} \nu^2}, \quad (\text{A.14})$$

où  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  est la pesanteur terrestre.

Comme le seul fluide qui nous intéresse est l'air, l'évolution de sa viscosité cinématique  $\nu_{\text{air}}$  en fonction de la température moyenne est approximée par le polynôme :

$$\nu_{\text{air}} \approx 1,015 \times 10^{-10} T_{\text{moy}}^2 + 3,323 \times 10^{-8} T_{\text{moy}} - 3,2 \times 10^{-6}. \quad (\text{A.15})$$

L'évaluation de  $\nu_{\text{air}}$  est représenté par la figure A.5.

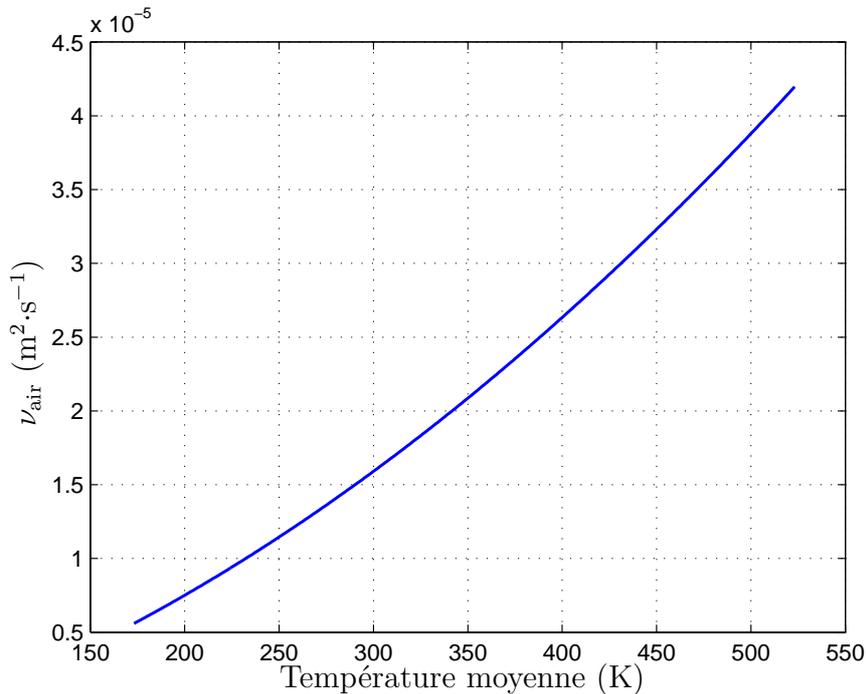


FIGURE A.5 – Evolution de la viscosité de l'air en fonction de la température moyenne

### A.3.3 Expression du nombre de Nusselt en convection naturelle pour quelques configurations géométriques

Quatre types de surfaces sont considérées pour la modélisation de la convection dans ce mémoire. Il s'agit essentiellement de plaques verticales, de plaques horizontales (le cas où la surface d'échange avec le fluide est orientée vers le haut doit être ici distingué du cas où elle est orientée vers le bas), de cylindres horizontaux et de cylindres verticaux. L'orientation (verticale ou horizontale) a une importance cruciale dans le choix de la formule à retenir pour le calcul du nombre de Nusselt. Parfois certaines formules ne sont valables que pour des plages de valeurs spécifiques pour les nombres de Grashof, Prandtl et

Rayleigh et ne sont valables que sous certaines conditions sur les grandeurs géométriques. En effet, pour des domaines de validité restreints, les formules sont généralement plus simples et inversement. Les tableaux A.2 et A.3 donnent l'expression de Nu dans les 4 configurations citées avec dans chaque cas, la longueur caractéristique  $L_c$  associée, le domaine de validité et un schéma d'illustration. Ces formules ne constituent pas une liste exhaustive qui est disponible dans la littérature associée. Le lecteur intéressé pourra se référer aux ouvrages suivant dans lesquels apparaissent les formules des tableaux A.2 et A.3 :

- formules (A.16) – (A.21), (A.24) : [Çengel, 2003] ;
- formules (A.22) et (A.23) : [Boetcher, 2014] ;
- formule (A.25) : [Popiel et al., 2007].

### A.3.4 Analogie avec les systèmes électriques

De la même façon qu'à la sous-section A.2.2, une expression de la résistance thermique de convection peut être établie. Reprenons la relation (A.8) entre le flux de convection et la différence de température entre un fluide et une surface solide, d'où il est tiré que :

$$(T_{so} - T_{fl}) = \frac{\phi}{h A_{so}}. \quad (\text{A.26})$$

Par analogie entre les relations (A.4) et (A.26), la résistance thermique de convection s'apparente à :

$$R = \frac{1}{h A_{so}}. \quad (\text{A.27})$$

## A.4 Transfert de chaleur par rayonnement thermique

Le rayonnement est l'énergie émise par la matière sous la forme d'ondes électromagnétiques (c'est-à-dire des photons) lors de changements de la configuration électronique des atomes ou des molécules. L'émission s'effectue en surface pour les solides et les liquides opaques et dans tout le volume d'un gaz ou d'un liquide transparent. Ce mode de transfert thermique se distingue fondamentalement de la conduction et de la convection car il ne nécessite pas de milieu pour se propager. C'est de cette façon qu'une partie de l'énergie émise par le Soleil est reçue sur la Terre.

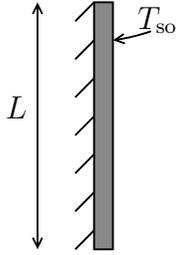
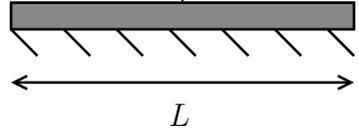
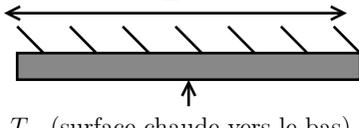
Géométrie	$L_c$	Domaine de validité	Nu	N°
<p>Plaque verticale</p> 	$L$	$10^4 \leq Ra \leq 10^9$ $10^9 \leq Ra \leq 10^{13}$	$Nu = 0,59Ra^{1/4}$ $Nu = 0,1Ra^{1/3}$	<p>(A.16)</p> <p>(A.17)</p>
<p>Plaque horizontale (a)</p> <p>(Surface <math>A</math> et périmètre <math>P</math>)  <math>T_{so}</math> (surface chaude vers le haut)</p> 	$A/P$	$10^4 \leq Ra \leq 10^7$ $10^7 \leq Ra \leq 10^{11}$	$Nu = 0,54Ra^{1/4}$ $Nu = 0,15Ra^{1/3}$	<p>(A.19)</p> <p>(A.20)</p>
<p>Plaque horizontale (b)</p> <p>(Surface <math>A</math> et périmètre <math>P</math>)  <math>T_{so}</math> (surface chaude vers le bas)</p> 	$A/P$	$10^5 \leq Ra \leq 10^{11}$	$Nu = 0,27Ra^{1/4}$	(A.21)
		Tout Ra	$Nu = \left( 0,825 + \frac{0,387 Ra^{1/6}}{[1 + (0,492/Pr)^{9/16}]^{8/27}} \right)^2$	(A.18)

TABLE A.2 – Formules empiriques du nombre de Nusselt pour des plaques

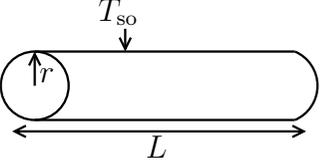
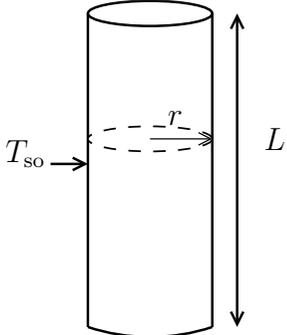
Géométrie	$L_c$	Domaine de validité	Nu	N°
<p>Cylindre horizontal</p> 	$2r$	$10^{-6} \leq Ra \leq 10^9$	$Nu = \left( 0,6 + \frac{0,387 Ra^{1/6}}{[1+(0,559/Pr)^9/16]^{8/27}} \right)^2$	(A.22)
		Tout Ra	$Nu = \frac{2}{\ln \left( 1 + \frac{2}{\left[ \left( 0,518 Ra^{1/4} \left[ 1 + \left( \frac{0,559}{Pr} \right)^{3/5} \right]^{-5/12} \right)^{15} + \left( 0,1 Ra^{1/3} \right)^{15} \right]^{1/15}} \right)}$	(A.23)
<p>Cylindre vertical</p> 	$L$	$\begin{cases} \frac{35}{Gr^{1/4}} \frac{L}{2r} \leq 1 \\ \text{Tout Ra} \end{cases}$	$Nu = \left( 0,825 + \frac{0,387 Ra^{1/6}}{[1+(0,492/Pr)^9/16]^{8/27}} \right)^2$	(A.24)
		$\begin{cases} Gr \leq 4 \times 10^9 \\ 0,01 \leq Pr \leq 100 \\ Ra \geq 1 \times 10^4 \\ \frac{\sqrt{32}}{Gr^{1/4}} \frac{L}{2r} < 5 \end{cases}$	$Nu = \left( 0,68 + \frac{0,67 Ra^{1/4}}{[1+(0,492/Pr)^9/16]^{4/9}} \right) \left( 1 + c_1 \left[ \frac{\sqrt{32}}{Gr^{1/4}} \frac{L}{2r} \right]^{c_2} \right)$ $c_1 = 0,0571322 + 0,20305 Pr^{-0,43}$ $c_2 = 0,9165 - 0,0043\sqrt{Pr} + 0,01333 \ln Pr + \frac{0,0004809}{Pr}$	(A.25)

TABLE A.3 – Formules empiriques du nombre de Nusselt pour des cylindres

### A.4.1 Modélisation du rayonnement thermique

Le rayonnement thermique est décrit par la loi de Stefan-Boltzmann (1879). La puissance émise par un corps réel de surface  $A_{\text{cr}}$  est toujours inférieure à celle d'un corps noir<sup>(3)</sup> à la même température  $T_{\text{cr}}$ . Elle est définie par :

$$\mathcal{P} = \varepsilon \sigma A_{\text{cr}} T_{\text{cr}}^4, \quad (\text{A.28})$$

où :

- $0 \leq \varepsilon \leq 1$  est l'émissivité de la surface ;
- $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$  est la constante de Stefan-Boltzmann.

Lorsque un corps d'émissivité  $\varepsilon$  et de surface  $A_{\text{cr}}$  à une température absolue  $T_{\text{cr}}$  est complètement enfermé par une surface plus large à une température absolue  $T_{\text{enc}}$ , le flux de chaleur par rayonnement entre les deux surfaces s'écrit :

$$\phi = \varepsilon \sigma A_{\text{cr}} (T_{\text{cr}}^4 - T_{\text{enc}}^4). \quad (\text{A.29})$$

Pour des raisons de simplicité et de commodité, un coefficient de convection équivalent  $h_{\text{cr}}$  incluant à la fois les effets de convection et de rayonnement est souvent défini. Ainsi, si en considérant une surface  $A_{\text{cr}}$  de température  $T_{\text{cr}}$  qui baigne dans un fluide à la température  $T_{\text{fl}}$ , le flux total (convection et rayonnement) s'écrit :

$$\phi_{\text{cr}} = h_{\text{cr}} A_{\text{cr}} (T_{\text{cr}} - T_{\text{fl}}). \quad (\text{A.30})$$

Il est important de noter que le coefficient de convection équivalent est essentiellement un coefficient de convection modifié pour inclure l'effet du rayonnement. De plus, les effets de rayonnement entre une surface peu émissive (notamment pour les métaux) et un fluide environnant (par exemple de l'air) sont souvent faibles, voire négligeables.

---

3. Un corps noir est une surface idéale qui absorbe intégralement tout le rayonnement qu'elle reçoit. À une température de surface équivalente, le rayonnement d'un corps noir est plus grand que celui de toute autre surface qui n'est pas un corps noir.

# Annexe B

## Dérivation non entière et modèles non entiers

---

B.1	Introduction . . . . .	269
B.2	Définitions . . . . .	270
B.2.1	Intégration non entière . . . . .	270
B.2.2	Dérivation non entière . . . . .	273
B.2.3	Caractérisation fréquentielle d'un dérivateur et d'un intégrateur d'ordre non entier réel . . . . .	279
B.3	Modèles non entiers . . . . .	281
B.3.1	Équations différentielles d'ordres non entiers . . . . .	281
B.3.2	Fonctions de transfert d'ordre non entier . . . . .	281

---

« La nature est remplie d'une infinité de raisons dont l'expérience n'a jamais vu la trace. »

*Leonardo da Vinci (Léonard de Vinci)*

## B.1 Introduction

Dès 1696, Leibniz évoque le concept de dérivée d'ordre non entier dans une lettre ouverte à Guillaume de l'Hospital. Mais ce n'est qu'au XIX<sup>ème</sup> siècle, avec les travaux de Liouville et Riemann [Liouville, 1832, Riemann, 1876], que la notion d'ordre de dérivation fut étendue au corps des réels et des complexes.

Le concept d'ordre de dérivation (ou intégration) non entière peut être utilisé, pour modéliser finement une large gamme de phénomènes physiques à l'aide d'un nombre de paramètres réduit. Ainsi, la description de systèmes par des modèles non entiers et le développement d'outils basés sur la dérivation (ou intégration) non entière ont gagné en intérêt durant les dernières décennies. L'utilisation de la dérivation non entière et des modèles non entiers est présente dans de nombreux domaines tels que :

- l'hydrodynamique pour la modélisation d'écoulements dans des milieux fractals [Tarasov, 2005];
- l'électrochimie pour modéliser le vieillissement de batteries plomb-acide et lithium-ion [Sabatier et al., 2006a, Sabatier et al., 2013b];
- la finance pour l'élimination de mouvements chaotiques de modèles économiques [Pan et al., 2012];
- la thermique pour modéliser les transferts de chaleur dans des milieux hétérogènes [Dzieliński et Sierociuk, 2010, Sierociuk et al., 2013];
- l'astronomie pour la modélisation de systèmes cosmologiques [Shchigolev, 2013];
- la bio-ingénierie, par exemple pour modéliser des muscles [Sommacal et al., 2008] ou encore pour la modélisation thermique des poumons [Melchior et al., 2012];
- le traitement du signal pour montrer le lien entre la dérivée non entière et la transformée de Hilbert [Ortigueira et Trujillo, 2012];
- l'automatique pour la définition de stratégies de commandes robustes [Oustaloup, 1995, Fadiga, 2014].

L'objet de cette annexe est tout d'abord de rappeler les définitions et les propriétés liées à la dérivation et à l'intégration non entière. Une caractérisation fréquentielle des opérateurs de dérivation et d'intégration non entière est ensuite proposée. Les modèles non entiers, décrits par des équations différentielles faisant intervenir des dérivées non entières de la sortie ou de l'entrée sont ensuite présentés. Enfin, la modélisation du comportement entrée-sortie d'un système par une fonction de transfert non entière est exposée.

## B.2 Définitions

### B.2.1 Intégration non entière

#### B.2.1.1 Définition

Soit  $f(t)$  une fonction temporelle de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  continue par morceaux sur  $]t_0, +\infty[$  et intégrable sur  $[t_0, t[$  pour tout  $t > t_0$ . La formule de Cauchy permet d'exprimer l'intégrale entière d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  de  $f(t)$  par :

$$\mathbf{I}_{t_0}^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \quad (\text{B.1})$$

En s'inspirant de la formule de Cauchy, Riemann a défini en 1847 l'expression générale de l'intégrale d'ordre  $\nu \in \mathbb{R}_+^*$  de  $f(t)$  sous la forme de l'expression suivante :

$$\mathbf{I}_{t_0}^\nu f(t) \triangleq \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\nu-1} f(\tau) d\tau, \quad (\text{B.2})$$

où  $\mathbf{I}_{t_0}^\nu$  est l'opérateur d'intégration non entière d'ordre  $\nu$  et  $\Gamma(\nu)$  est la fonction Gamma définie par :

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\nu-1} dx, \quad \nu > 0. \quad (\text{B.3})$$

**Remarque 31.** Pour  $\nu = n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Gamma(n) = (n-1)!$  et la définition de l'intégration à un ordre entier (B.1) devient un cas particulier de l'intégration à un ordre non entier (B.2).

Peu d'ouvrages retracent l'historique de l'établissement de cette définition issue de correspondances scientifiques entre plusieurs mathématiciens célèbres comme L'Hôpital, Leibnitz, Euler, Lacroix, Fourier, Abel, Liouville, Riemann, Sonin, Laurent, Grünwald ou Leitnikov. Pour une description détaillée de ces correspondances, le lecteur pourra se référer à ces ouvrages : [Ross, 1977, Oldham et Spanier, 1974, Miller et Ross, 1993, Samko et al., 1993, Dugowson, 1994].

#### B.2.1.2 Propriétés

Quelques propriétés de l'opérateur d'intégration non entière sont rappelées dans ce paragraphe. Pour une liste plus complète, le lecteur intéressé pourra se référer à [Oldham et Spanier, 1974, Samko et al., 1993, Podlubny, 1998].

L'opérateur d'intégration non entière vérifie la propriété de semi-groupe, soit :

$$\mathbf{I}^{\nu_1} \circ \mathbf{I}^{\nu_2} = \mathbf{I}^{\nu_1 + \nu_2}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \nu_1 \geq 0 \\ \nu_2 \geq 0 \end{cases} . \quad (\text{B.4})$$

La propriété de semi-groupe implique la propriété de commutativité, soit :

$$\mathbf{I}^{\nu_1} \circ \mathbf{I}^{\nu_2} = \mathbf{I}^{\nu_2} \circ \mathbf{I}^{\nu_1} \quad (\text{B.5})$$

et l'effet de l'opérateur  $\mathbf{I}^\nu$  sur les fonctions de puissance est [Samko et al., 1993] :

$$\mathbf{I}_{t_0}^\nu t^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - \nu)} t^{\alpha + \nu}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \nu > 0 \\ \alpha > -1 \\ t > t_0 \end{cases} . \quad (\text{B.6})$$

### B.2.1.3 Interprétation de l'intégration non entière

La difficulté d'attribuer un sens géométrique ou physique à l'opérateur d'intégration non entière n'est certainement pas étrangère au peu d'intérêt que les physiciens lui ont porté lorsqu'il a été initialement évoqué.

Néanmoins, la définition (B.2) peut être interprétée comme l'aire que définit la fonction  $f(t)$  pondérée par un facteur d'oubli représenté par la fonction  $\mathcal{O}_\nu$  sur l'intervalle  $[t_0, t]$  :

$$\mathbf{I}_{t_0}^t f(t) = \int_{t_0}^t \frac{(t - \tau)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} f(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \mathcal{O}_\nu(t - \tau) f(\tau) d\tau = (\mathcal{O}_\nu * f)(t), \quad (\text{B.7})$$

où :

$$\mathcal{O}_\nu(t - \tau) = \frac{(t - \tau)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}. \quad (\text{B.8})$$

D'après la remarque 31, dans le cas où  $\nu = 1$ , la fonction  $\mathcal{O}_\nu$  vaut 1 et  $\mathbf{I}_{t_0}^\nu f(t)$  est une intégrale classique (entière d'ordre 1), toutes les valeurs de  $f(t)$  ayant le même « poids » sur  $[t_0, t]$ . Si  $\nu$  est un réel compris entre 0 et 1, les valeurs les plus récentes ont plus de « poids » que les valeurs les plus anciennes. La figure B.1 représente les variations du facteur d'oubli pour des valeurs de  $\nu$  comprises entre 0,1 et 1.

A travers cette interprétation géométrique, les différentes pondérations obtenues en faisant varier l'ordre d'intégration  $\nu$  mettent en évidence l'aptitude de cet opérateur à décrire des phénomènes physiques à mémoire longue tels que les phénomènes de diffusion.

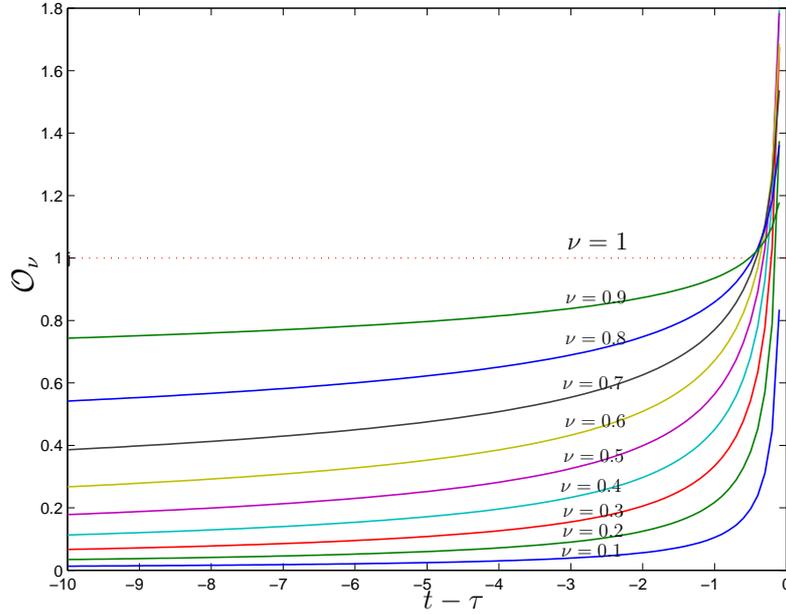


FIGURE B.1 – Facteur d’oubli :  $\mathcal{O}_\nu(t - \tau)$  pour  $0 < \nu \leq 1$

#### B.2.1.4 Transformée de Laplace de l’intégrale non entière d’une fonction

L’écriture de l’intégration non entière comme un produit de convolution (B.7) permet de calculer la transformée de Laplace de l’intégrale non entière d’une fonction temporelle causale, soit [Oldham et Spanier, 1974] :

$$\mathcal{L}\{\mathbf{I}_0^\nu f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{t^{\nu-1}u(t)}{\Gamma(\nu)} * f(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{t^{\nu-1}u(t)}{\Gamma(\nu)}\right\} \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^\nu}F(s), \quad (\text{B.9})$$

où  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ ,  $s = \sigma + j\omega$  désigne la variable de Laplace.

Cette relation traduit un résultat remarquable car elle généralise la formule bien connue dans le cas entier :

$$\mathcal{L}\{\mathbf{I}_{t_0}^n f(t)\} = \frac{1}{s^n}F(s), \quad (\text{B.10})$$

où  $n \in \mathbb{N}^*$  représente l’ordre d’intégration entier.

**Remarque 32.** Il est important de noter que  $s^\nu$  est une fonction multiforme de  $\mathbb{C}$ . En effet, en exprimant  $s = \rho e^{j\theta}$ , le développement de  $s^\nu$  conduit à :

$$s^\nu = (\rho e^{j\theta})^\nu = \rho^\nu e^{j\nu\theta}, \quad (\text{B.11})$$

relation dans laquelle la multiformité apparaît à travers le terme  $e^{j\nu\theta}$ . Il est donc nécessaire

de limiter à  $2\pi$  la plage de variation de l'argument de la variable  $s$  par une coupure du plan complexe comme indiqué sur la figure B.2. Cette coupure, définie par la demi-droite d'origine  $O(0,0)$  et d'angle orienté  $\varphi$  par rapport à l'axe des abscisses, doit être choisie de manière à respecter deux contraintes :

- $s^\nu$  doit garder son sens classique lorsque  $\nu$  est entier ;
- afin de pouvoir calculer la transformée inverse de Laplace d'une fonction, la coupure ne doit pas croiser la droite verticale du demi-plan droit définie par les bornes de l'intégrale de Mellin-Fourier.

Ainsi en définissant l'argument de  $s$  comme l'angle orienté  $\theta$  tel que  $\theta \in ]\varphi - 2\pi, \varphi[$ , l'angle  $\varphi$  de la coupure doit respecter l'inégalité suivante :

$$\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}. \quad (\text{B.12})$$

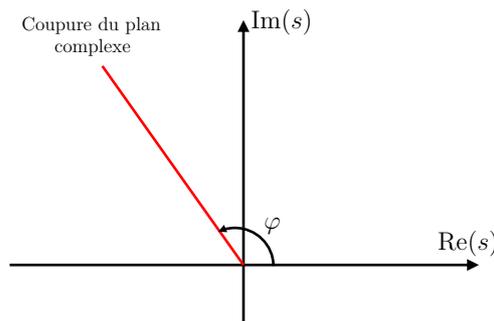


FIGURE B.2 – Représentation de la coupure du plan complexe

## B.2.2 Dérivation non entière

Pour définir la dérivée non entière d'une fonction temporelle, les notations suivantes sont adoptées :

$$\nu = [\nu] + \{\nu\}, \quad (\text{B.13})$$

où  $\nu \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $[\nu]$  est sa partie entière et  $\{\nu\}$  sa partie non entière telle que  $0 \leq \{\nu\} < 1$ .

### B.2.2.1 Définition au sens de Riemann-Liouville

La dérivée d'ordre non entier  $\nu \in \mathbb{R}_+$  d'une fonction  $f(t)$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  au sens de Riemann-Liouville est la dérivée d'ordre entier  $([\nu] + 1)$  de l'intégrale d'ordre non entier

$(\lfloor \nu \rfloor - \nu + 1)$ , soit [Riemann, 1876] :

$${}_r\mathbf{D}_{t_0}^\nu f(t) \triangleq \frac{d^{\lfloor \nu \rfloor + 1}}{dt^{\lfloor \nu \rfloor + 1}} \left( \mathbf{I}_{t_0}^{\lfloor \nu \rfloor - \nu + 1} f(t) \right). \quad (\text{B.14})$$

En utilisant la définition de l'intégrale non entière (B.2), l'équation (B.14) devient :

$${}_r\mathbf{D}_{t_0}^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma(\lfloor \nu \rfloor - \nu + 1)} \frac{d^{\lfloor \nu \rfloor + 1}}{dt^{\lfloor \nu \rfloor + 1}} \left( \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{\nu - \lfloor \nu \rfloor}} d\tau \right), \quad \text{avec} \quad \begin{cases} t > t_0 \\ \nu > 0 \end{cases}. \quad (\text{B.15})$$

de même que la dérivée d'ordre  $\nu$  est définie par :

$${}_r\mathbf{D}_{t_0}^\nu f(t) = \mathbf{I}_{t_0}^{-\nu} f(t). \quad (\text{B.16})$$

**Remarque 33.** Lorsque  $\nu < 0$ , l'intégrale d'ordre  $\nu$  est définie par :

$$\mathbf{I}_{t_0}^\nu f(t) = {}_r\mathbf{D}_{t_0}^{-\nu} f(t). \quad (\text{B.17})$$

Ces définitions permettent ainsi de parler indifféremment d'intégration ou de dérivation, seul le signe de la partie réelle de l'ordre étant déterminant.

### B.2.2.2 Définition au sens de Caputo

La dérivée non entière au sens de Caputo résulte de la permutation de la dérivée et de l'intégrale dans l'équation (B.14), soit [Caputo, 1967] :

$${}_c\mathbf{D}_{t_0}^\nu f(t) \triangleq \mathbf{I}_{t_0}^{\lfloor \nu \rfloor - \nu + 1} \left( \frac{d^{\lfloor \nu \rfloor + 1}}{dt^{\lfloor \nu \rfloor + 1}} f(t) \right). \quad (\text{B.18})$$

En tenant compte de la définition de l'intégrale non entière (B.2), l'équation (B.18) devient :

$${}_c\mathbf{D}_{t_0}^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma(\lfloor \nu \rfloor - \nu + 1)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(\lfloor \nu \rfloor + 1)}(\tau)}{(t - \tau)^{\nu - \lfloor \nu \rfloor}} d\tau. \quad (\text{B.19})$$

Cette définition introduite par Caputo a connu un succès certain, notamment car elle permet de prendre en compte simplement les conditions initiales. Il a cependant été démontré que l'utilisation de cette définition pour la modélisation des systèmes dynamiques et la prise en compte des conditions initiales conduit à des résultats incohérents [Sabatier et al., 2010].

### B.2.2.3 Définition au sens de Grünwald

La définition de la dérivée non entière au sens de Grünwald est issue de la généralisation de la définition de Cauchy de la dérivée entière. En effet, la dérivée d'ordre  $n \in \mathbb{N}$  d'une fonction réelle est définie par :

$$\mathbf{D}^n f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh), \quad (\text{B.20})$$

où  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  désigne le coefficient binomial de Newton.

L'extension de cette relation à l'ordre non entier, permet d'obtenir la définition de Grünwald [Grünwald, 1867], soit :

$${}_g\mathbf{D}^\nu f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\nu}{k} f(t - kh), \quad \nu \in \mathbb{R}^+, \quad (\text{B.21})$$

où  $\binom{\nu}{k} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{k!\Gamma(\nu-k+1)}$  désigne le coefficient binomial de Newton généralisé.

La dérivée non entière au sens de Grünwald tient compte des valeurs de la fonction  $f(t - kh)$ , avec  $k = \{0 \dots \infty\}$ , ce qui lui donne un caractère global. En effet, pour des ordres non entiers, les coefficients de pondération  $(-1)^k \binom{\nu}{k}$  ne s'annulent pas comme le montrent leurs variations en fonction de  $\nu$  sur la figure B.3 dans le cas  $k = 8$ .

Si la fonction  $f(t)$  est nulle pour tout  $t \leq t_0$ , la somme apparaissant dans l'équation (B.21) devient finie et s'écrit :

$${}_g\mathbf{D}^\nu f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\nu} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{\nu}{k} f(t - kh), \quad (\text{B.22})$$

où  $K = \left\lfloor \frac{t - t_0}{h} \right\rfloor$ .

Bien que l'équivalence des définitions de Riemann-Liouville (B.15) et de Grünwald (B.21) ne soit pas toujours vérifiée, il a été démontré dans [Oustaloup, 1995], que pour la plupart des fonctions, la définition de Grünwald converge vers celle de Riemann-Liouville.

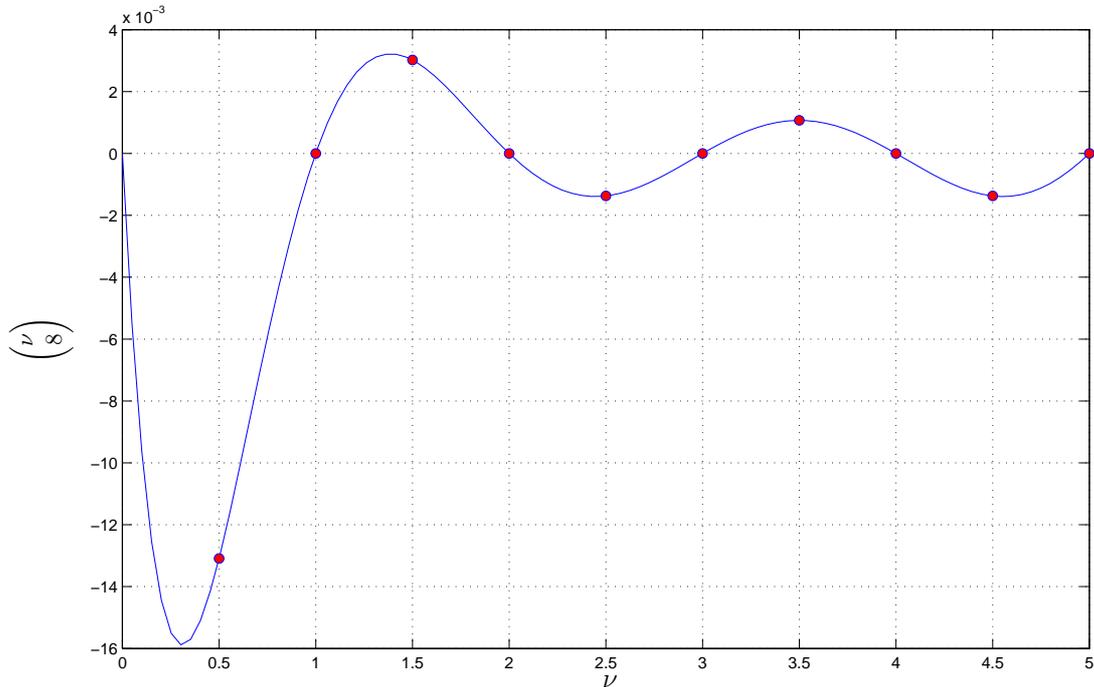


FIGURE B.3 – Variations des coefficients de pondération en fonction de  $\nu$  pour  $k = 8$

### B.2.2.4 Condition d’existence

La définition des conditions d’existence de la dérivée non entière d’une fonction temporelle  $f(t)$  passe par l’introduction d’une classe de fonctions particulières : les fonctions de classe  $C_\nu$ .

**Définition 1** (Classe  $C_\nu$ ). Une fonction  $f(t)$  ( $t > 0$ ) est dite de classe  $C_\nu$  ( $\nu \in \mathbb{R}$ ) si elle s’écrit sous la forme :

$$f(t) = t^\lambda g(t) \quad , \quad \lambda > \nu \tag{B.23}$$

où  $g(t)$  est continue dans  $[0, +\infty[$  et elle est de classe  $C_\nu^m$  si en plus  $f^{(m)} \in C_\nu$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

**Théorème 6** (Weilbeer, 2005). Les dérivées non entières au sens de Riemann-Liouville, au sens de Caputo et au sens de Grünwald existent si et seulement si  $f$  est  $(p - 1)$  fois différentiable au sens classique avec  $p = \lceil \nu \rceil$ . De plus, si les conditions initiales sont nulles (i.e.  $\forall t \leq 0, f^{(k)}(t) = 0, \forall k \in \{0, 1, \dots, p - 1\}$ ) alors les trois dérivées sont équivalentes.

**Remarque 34.** Compte tenu de l’équation B.19, une condition d’existence supplémentaire

est nécessaire pour la dérivée non entière au sens de Caputo : la fonction  $f^{(\lfloor \nu \rfloor + 1)}(t)$  doit être intégrable sur tout l'intervalle  $[0, t]$ .

### B.2.2.5 Propriétés principales

**Proposition 1.** *Indépendamment de la définition de la dérivée non entière utilisée, il est courant de parler indifféremment de l'intégration ou de la dérivation non entière, puisque seul le signe de l'ordre  $\nu$  est déterminant :*

$$\begin{cases} \mathbf{I}^\nu f(t) \triangleq \mathbf{D}^{-\nu} f(t) \\ \mathbf{I}^0 f(t) = \mathbf{D}^0 f(t) = f(t) \end{cases} . \quad (\text{B.24})$$

**Proposition 2.** *La dérivée non entière au sens de Riemann-Liouville vérifie :*

$${}_r\mathbf{D}^\nu \circ \mathbf{I}^\nu f(t) = f(t), \quad \nu > 0, \quad (\text{B.25})$$

$${}_r\mathbf{D}^{\nu_1} \circ \mathbf{I}^{\nu_2} f(t) = \mathbf{I}^{\nu_2 - \nu_1} f(t), \quad \nu_2 > \nu_1 > 0. \quad (\text{B.26})$$

**Proposition 3.** *Contrairement aux opérateurs d'intégration non entière, les opérateurs de dérivation non entière ne vérifient la propriété de semi-groupe que sous certaines conditions. Il peut en effet être démontré que si  $f(t)$  est de classe  $C_\nu$ , alors [Samko et al., 1993] :*

$${}_r\mathbf{D}^{\nu_1} \circ {}_r\mathbf{D}^{\nu_2} f(t) = \mathbf{D}^{\nu_1 + \nu_2} f(t), \quad \nu_2 < \nu_1 + 1, \quad \nu_1 > 0, \quad (\text{B.27})$$

$${}_r\mathbf{D}^n \circ {}_r\mathbf{D}^\nu f(t) = \mathbf{D}^{n+\nu} f(t), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (\text{B.28})$$

**Proposition 4.** *Pour  $0 < \nu \leq 1$  et  $f(t) \in C_\nu$ ,*

$$\left( \mathbf{I}_{t_0}^\nu \circ {}_c\mathbf{D}_{t_0}^\nu f \right) (t) = \int \frac{df}{dt} dt = f(t) - f(t_0). \quad (\text{B.29})$$

*Démonstration.*

$$\left( \mathbf{I}_{t_0}^\nu \circ {}_c\mathbf{D}_{t_0}^\nu f \right) (t) = \mathbf{I}_{t_0}^\nu \circ \mathbf{I}_{t_0}^{1-\nu} \frac{df}{dt} = \mathbf{I}_{t_0}^{\nu+1-\nu} \frac{df}{dt} = \int_{t_0}^t \frac{df}{d\tau} d\tau = f(t) - f(t_0). \quad (\text{B.30})$$

□

### B.2.2.6 Transformée de Laplace de la dérivée non entière d'une fonction temporelle

Du fait de la non unicité de la définition de la dérivée non entière, l'expression de sa transformée de Laplace n'est pas unique et fait apparaître des différences dans la manière de prendre en compte les conditions initiales.

La transformée de Laplace de la dérivée n-ième entière est donnée par :

$$\mathcal{L}\{\mathbf{D}^n f(t)\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \mathbf{D}^{n-k-1} f(t) \Big|_{t=0^+}. \quad (\text{B.31})$$

Cette formule peut être généralisée au cas d'une dérivée non entière d'ordre  $\nu$  au sens de Riemann-Liouville comme démontré dans [Oldham et Spanier, 1974] :

$$\mathcal{L}\{\mathbf{D}^\nu f(t)\} = s^\nu F(s) - \sum_{k=0}^{\lfloor \nu \rfloor} s^k \mathbf{D}^{\nu-k-1} f(t) \Big|_{t=0^+}. \quad (\text{B.32})$$

De la même manière, il est possible de démontrer que la transformée de Laplace de la dérivée non entière d'ordre  $\nu$  au sens de Caputo s'écrit :

$$\mathcal{L}\{\mathbf{D}^\nu f(t)\} = s^\nu F(s) - \sum_{k=0}^{\lfloor \nu \rfloor} s^{\nu-k-1} \mathbf{D}^k f(t) \Big|_{t=0^+}. \quad (\text{B.33})$$

Il convient de mentionner que les conditions initiales de la transformée de Laplace au sens de Riemann s'expriment en fonction des valeurs à l'origine des dérivées non entières alors que celles de la transformée de Laplace de la dérivée au sens de Caputo s'expriment en fonction des valeurs à l'origine des dérivées entières.

Les valeurs initiales des dérivées entières et non entières des systèmes relaxés à  $t = t_0$  sont nulles. En conséquence, les expressions des transformées de Laplace des dérivées au sens de Riemann et de Caputo sont identiques et se réduisent à :

$$\mathcal{L}\{\mathbf{D}^\nu f(t)\} = s^\nu \mathcal{L}(f(t)). \quad (\text{B.34})$$

### B.2.3 Caractérisation fréquentielle d'un dérivateur et d'un intégrateur d'ordre non entier réel

Un dérivateur non entier réel est tel que sa grandeur de sortie  $y(t)$  s'identifie à un facteur près, à la dérivée non entière de sa grandeur d'entrée  $u(t)$ , soit :

$$y(t) = \tau^\nu \mathbf{D}^\nu u(t), \quad (\text{B.35})$$

où  $\tau$  désigne la *constante de temps de différentiation* et  $\nu \in \mathbb{R}$  l'ordre de dérivation réel ( $\nu$  pouvant être positif ou négatif, l'opérateur considéré étant alors soit un dérivateur, soit un intégrateur).

A l'aide de la relation (B.34) et en supposant que *tout le passé de l'opérateur est nul*, la transformée de Laplace de la sortie  $y(t)$  s'écrit :

$$Y(s) = (\tau s)^\nu U(s), \quad (\text{B.36})$$

soit, en posant  $\omega_u = 1/\tau$ , appelée fréquence au gain unité ou fréquence de transition :

$$Y(s) = \left(\frac{s}{\omega_u}\right)^\nu U(s), \quad (\text{B.37})$$

qui permet de définir la transmittance :

$$\mathbf{D}(s) = \left(\frac{s}{\omega_u}\right)^\nu, \quad (\text{B.38})$$

dont la réponse en fréquence est déduite en remplaçant  $s$  par  $j\omega$ , soit :

$$\mathbf{D}(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{\omega_u}\right)^\nu. \quad (\text{B.39})$$

Définis comme le module et l'argument de  $\mathbf{D}(j\omega)$ , le gain et la phase du dérivateur admettent des expressions de la forme :

$$\begin{cases} |\mathbf{D}(j\omega)| = \left(\frac{\omega}{\omega_u}\right)^\nu \\ \arg(\mathbf{D}(j\omega)) = \nu \frac{\pi}{2} \end{cases}. \quad (\text{B.40})$$

Le système d'équation (B.40) révèle une propriété remarquable de ce type de dérivateur :

## B.2. DÉFINITIONS

- le diagramme de gain est caractérisé par une droite oblique de pente  $20\nu$  dB par décade ;
- le diagramme de phase est caractérisé par une droite horizontale d'ordonnée  $\varphi = \nu \frac{\pi}{2}$  rad.

La figure B.4 représente les diagrammes de Bode de dérivateurs non entiers réels pour des ordres de dérivation compris entre -1.5 et 1.5.

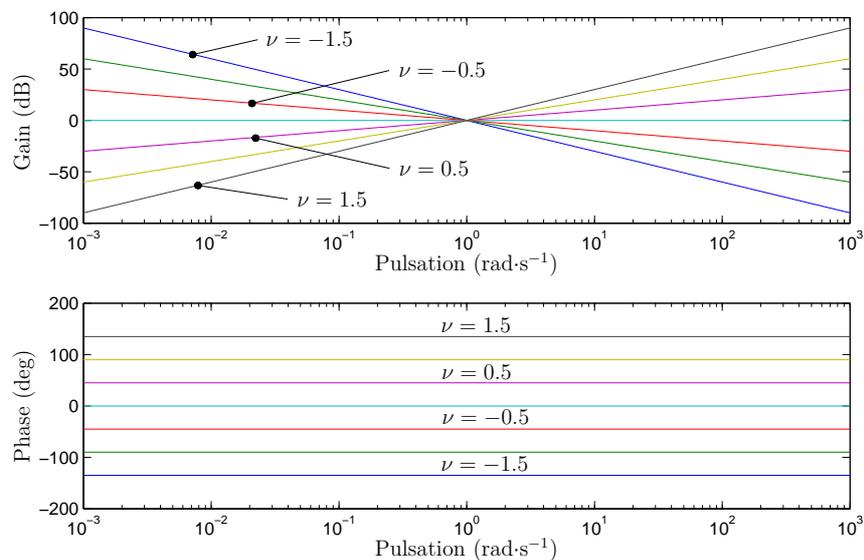


FIGURE B.4 – Diagrammes de Bode de dérivateurs non entiers réels

Le caractère non entier réel de l'ordre de dérivation  $\nu$ , permet ainsi d'assurer, tant au niveau du diagramme de gain que du diagramme de phase, une variation continue :

- de la pente de la droite de gain ;
- de l'ordonnée de la droite de phase.

Un certain nombre de systèmes physiques, tels que ceux cités en introduction de cette annexe, fait apparaître ce type de comportement sur une plage fréquentielle. Il apparaît donc judicieux d'utiliser l'opérateur de dérivation non entière pour modéliser le comportement entrée-sortie de ces systèmes. Toutefois, l'auteur tient à préciser que l'utilisation des modèles non-entiers n'est pas le plus souvent adaptée pour décrire le comportement interne des systèmes et pour l'analyse de leurs propriétés internes comme souligné dans [Sabatier et Farges, 2014].

## B.3 Modèles non entiers

Il existe différents types de modèles non entiers tels que les équations différentielles d'ordres non entiers, les pseudo-représentations d'états [Hartley et Lorenzo, 2002, Farges et al., 2009, Sabatier et al., 2013a], les fonctions ou matrices de transfert de modèles non entiers commensurables, ou encore les représentations diffusives [Matignon, 1998, Montseny, 1998]. Pour ne pas alourdir cette annexe, seuls les modèles de type équations différentielles et fonctions de transfert sont présentés. Le lecteur toutefois intéressé par les autres types de modèles pourra se référer aux ouvrages cités ci-dessus.

### B.3.1 Équations différentielles d'ordres non entiers

Un premier type de modèle faisant intervenir la dérivation non entière prend la forme d'un ensemble d'équations différentielles d'ordres non entiers de la forme :

$$\sum_{i=0}^p Q_i \mathbf{D}^{\nu_i} y(t) = \sum_{j=0}^m R_j \mathbf{D}^{\nu_j} u(t), \quad (\text{B.41})$$

avec  $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $R_j \in \mathbb{R}^{p \times m}$ .  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  et  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  désignent respectivement la sortie et l'entrée du modèle. Les ordres de dérivation sont des réels positifs tels que :

$$0 < \nu_0 < \dots < \nu_p \quad \text{et} \quad 0 < \nu_0 < \dots < \nu_m. \quad (\text{B.42})$$

De plus, le fait que le modèle soit propre implique que  $\nu_m < \nu_p$ .

### B.3.2 Fonctions de transfert d'ordre non entier

#### B.3.2.1 Fonctions de transfert non entières explicites

Pour des conditions initiales nulles, la transformée de Laplace de l'équation (B.41) s'écrit :

$$\sum_{i=0}^p Q_i s^{\nu_i} Y(s) = \sum_{j=0}^m R_j s^{\nu_j} U(s), \quad (\text{B.43})$$

où  $Y(s)$  et  $U(s)$  sont respectivement la transformée de Laplace de  $y(t)$  et de  $u(t)$ .

Ainsi la fonction de transfert entre  $Y(s)$  et  $U(s)$  s'écrit :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m R_j s^{\nu_j}}{\sum_{i=0}^p Q_i s^{\nu_i}}. \quad (\text{B.44})$$

Ce type de fonction de transfert est dit explicite car les ordres de dérivation  $\nu_i$  et  $\nu_j$  s'applique directement sur la variable de Laplace  $s$ .

### B.3.2.2 Fonctions de transfert non entières implicites

Il existe également des fonctions de transfert dites *implicites* afin de souligner que l'ordre non entier  $\nu$  est appliqué sur un polynôme de la variable de Laplace  $s$ . L'expression générale d'une fonction de transfert implicite est donnée par :

$$F(s) = K \frac{\prod_{i=0}^M (s + \lambda'_i)^{\nu'_i}}{\prod_{j=0}^N (s + \lambda_j)^{\nu_j}} \quad (\text{B.45})$$

où  $K \in \mathbb{R}$  est le gain, et où chaque  $-\lambda'_i \in \mathbb{C}$  au numérateur est un zéro de multiplicité  $\nu'_i \in \mathbb{R}_+^*$ . De même, chaque  $-\lambda_j \in \mathbb{C}$  au dénominateur est un pôle de multiplicité  $\nu_j \in \mathbb{R}_+^*$ . De plus, pour que le système soit strictement propre, le degré relatif doit satisfaire :

$$\sum_{j=0}^N \nu_j - \sum_{i=0}^M \nu'_i > 0. \quad (\text{B.46})$$

Les fonctions de transfert implicites ont été introduites dans la littérature par Davidson et Cole en 1951 [Davidson et Cole, 1951] pour modéliser la relaxation diélectrique dans le glycérol, le propylène glycol et le n-propanol. La fonction de transfert implicite utilisée dans leur travail, impliquant un seul pôle, est connue dans la littérature comme « fonction de transfert de Davidson-Cole » [Khamzin et Popov, 2012, Jeon et Grischkowsky, 1998]. Comme démontré dans ce manuscrit, ce type de fonction de transfert peut également apparaître suite à une résolution d'équations aux dérivées partielles (équations de diffusion) dans le domaine de Laplace.

# Annexe C

## Norme $\mathcal{H}_2$ de fonctions de transfert non entières implicites

---

C.1	Introduction . . . . .	285
C.2	Définition de la norme $\mathcal{H}_2$ des systèmes . . . . .	285
C.3	Présentation de la classe de fonctions de transfert considérée . . . . .	286
C.4	Expression analytique de la norme $\mathcal{H}_2$ de fonctions de transfert implicites de première espèce et de leur mise en série . . . . .	286
C.4.1	Cas général : ordre de dérivation non entier . . . . .	287
C.4.2	Cas particulier : ordre de dérivation entier . . . . .	288
C.4.3	Exemple . . . . .	288
C.4.4	Mise en série de deux fonctions de transfert implicites de première espèce	289
C.5	Expression analytique de la norme $\mathcal{H}_2$ de fonctions de transfert implicites de seconde espèce et de leur mise en série . . . . .	290
C.5.1	Cas général : ordre de dérivation non entier . . . . .	291
C.5.2	Cas particulier : ordre de dérivation entier . . . . .	292
C.5.3	Exemple . . . . .	292
C.6	Définition des fonctions mathématiques utilisées . . . . .	292
C.6.1	Fonction Gamma d'Euler . . . . .	292
C.6.2	Fonction Beta d'Euler . . . . .	293
C.6.3	Fonctions de Bessel . . . . .	293
C.6.4	Fonction de Legendre . . . . .	294
C.6.5	Fonction hypergéométrique de Gauss . . . . .	294

---

« À vaincre sans péril, on triomphe sans gloire. »

*Pierre Corneille*

## C.1 Introduction

Cette annexe présente des développements théoriques sur la norme  $\mathcal{H}_2$  de fonctions de transfert non entières implicites qui ont faits l'objet de plusieurs publications dans des revues internationales [Malti et al., 2014, Chevrié et al., 2014] ou des congrès internationaux [Malti et al., 2015]. Ces développements ont conduit à des résultats qui, progressivement étendus, ont permis d'aboutir à l'expression de la norme  $\mathcal{H}_2$  du modèle analytique d'un fil électrique présentée au chapitre 2. De plus, d'autres résultats intermédiaires sont présentés concernant la norme  $\mathcal{H}_2$  de la mise en série de fonctions de transfert implicites avec un intégrateur non entier pur ou avec d'autres fonctions de transfert implicites de même espèce.

Un bref rappel sur la norme  $\mathcal{H}_2$  des systèmes est d'abord présenté. Ensuite, une définition d'une fonction de transfert non entière implicite est donnée. Enfin, les expressions analytiques de la norme  $\mathcal{H}_2$  des cas étudiés sont développées.

## C.2 Définition de la norme $\mathcal{H}_2$ des systèmes

Soit  $\mathbf{G}$  un système quelconque d'entrée  $u(t)$  et de sortie  $y(t)$ . La norme  $\mathcal{H}_2$  du système  $\mathbf{G}$  (notée  $\|\mathbf{G}\|_2$ ) est la norme  $\mathcal{L}_2$  de sa réponse impulsionnelle  $g(t)$ , c'est-à-dire la racine carrée de l'énergie de sa sortie en réponse à une impulsion de Dirac. Dans le domaine temporel, la norme  $\mathcal{H}_2$  de  $\mathbf{G}$  est donnée par :

$$\|\mathbf{G}\|_2 = \|g\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt}. \quad (\text{C.1})$$

Soit  $G(s)$  la transformée de Laplace de  $g(t)$  telle que  $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ . Si  $G(s)$  est stable alors la norme  $\mathcal{H}_2$  de  $\mathbf{G}$  peut se calculer dans le domaine fréquentiel grâce à l'égalité de Parseval :

$$\|\mathbf{G}\|_2 = \|G\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega}, \quad (\text{C.2})$$

avec  $|G(j\omega)|^2 = G(j\omega)\overline{G(j\omega)}$  où  $\overline{G(j\omega)}$  désigne le conjugué de  $G(j\omega)$ .

### C.3 Présentation de la classe de fonctions de transfert considérée

Si la fonction de transfert implicite

$$F(s) = K \frac{\prod_{i=0}^M (s + \lambda'_i)^{\nu'_i}}{\prod_{j=0}^N (s + \lambda_j)^{\nu_j}} \quad (\text{C.3})$$

n'a pas de zéro, elle peut être réécrite comme une mise en série de fonctions de transfert implicites élémentaires de première espèce impliquant un seul pôle (en d'autres termes ce sont des fonctions de Davidson-Cole),  $-\lambda \in \mathbb{C}$ , de multiplicité  $\nu \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$F_1(s) = \frac{1}{(s + \lambda)^\nu}. \quad (\text{C.4})$$

Lorsque deux pôles complexes conjugués sont impliqués,  $(-\lambda, -\bar{\lambda}) \in \mathbb{C}^2$ , une représentation basée sur une fonction de transfert implicite de deuxième espèce est généralement préférée :

$$F_2(s) = \frac{1}{(s + \lambda)^\nu (s + \bar{\lambda})^\nu}. \quad (\text{C.5})$$

Dans la suite de cette annexe, l'expression analytique de la norme  $\mathcal{H}_2$  est calculée pour des fonctions de transfert implicites de première espèce et de seconde espèce, respectivement données par (C.4) et (C.5). Ces résultats sont étendus à la mises en séries de ces fonctions de transferts avec un intégrateur pur ou avec d'autres fonctions de transfert de même espèce.

### C.4 Expression analytique de la norme $\mathcal{H}_2$ de fonctions de transfert implicites de première espèce et de leur mise en série

Dans cette section, l'expression analytique de la norme  $\mathcal{H}_2$  d'une fonction de transfert implicite de première espèce mise en série avec un intégrateur non entier pur est d'abord calculée. Ensuite, l'expression obtenue est simplifiée pour le cas d'un ordre entier.

Un exemple est ensuite présenté où la norme  $\mathcal{H}_2$  est calculée en fonction de l'ordre de dérivation  $\nu$  pour plusieurs valeurs de  $\lambda$ . Enfin, l'expression analytique de la norme  $\mathcal{H}_2$  est étendue à la mise en série de deux fonctions de transfert de première espèce. Ces expressions font appel à des fonctions mathématiques particulières dont les définitions sont données dans la section C.6.

### C.4.1 Cas général : ordre de dérivation non entier

L'expression analytique de la norme  $\mathcal{H}_2$  d'une fonction de transfert non entière de première espèce en série avec un intégrateur non entier pur est présentée dans le théorème suivant.

**Théorème 7.** *La norme  $\mathcal{H}_2$  du système BIBO-stable<sup>(1)</sup>  $F_1(s)$  donné par (C.4), en série avec un intégrateur non entier pur d'ordre  $\mu > 0$ ,*

$$\tilde{F}_1(s) = \frac{F_1(s)}{s^\mu}, \quad (\text{C.6})$$

est donnée par :

$$\|\tilde{F}_1\|_2^2 = \begin{cases} \infty & \text{si } \nu + \mu \leq \frac{1}{2} \text{ ou } \mu \geq \frac{1}{2} \\ \frac{B\left(\frac{1}{2} - \mu, \nu + \mu - \frac{1}{2}\right)}{2\pi\lambda^{2\nu+2\mu-1}} & \text{si } \nu + \mu > \frac{1}{2} \text{ et } \mu < \frac{1}{2} \end{cases}, \quad (\text{C.7})$$

où  $B(x, y)$  est la fonction Beta d'Euler (voir C.6.2).

*Démonstration.* D'après (C.2) :

$$\|\tilde{F}_1\|_2^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega^{-2\mu}}{(\lambda^2 + \omega^2)^\nu} d\omega. \quad (\text{C.8})$$

Soit le changement de variable :

$$\omega^2 = x \rightarrow d\omega = \frac{dx}{2\sqrt{x}}, \quad (\text{C.9})$$

---

1. BIBO : Bounded Input Bounded Output. En d'autres termes un système est BIBO stable si et seulement si pour toute entrée bornée, la sortie est bornée.

alors,

$$\|\tilde{F}_1\|_2^2 = \frac{1}{2\pi\lambda^{2\nu}} \int_0^{+\infty} \frac{x^{-\mu-\frac{1}{2}}}{(1 + \frac{1}{\lambda^2}x)^\nu} dx. \quad (\text{C.10})$$

Cette intégrale figure dans [Gradshteyn et Ryzhik, 2007] par la relation 3.194.3. Ainsi, sachant que  $\nu + \mu > \frac{1}{2}$  et  $\mu < \frac{1}{2}$ , le résultat donné par (C.7) est obtenu. Dans les autres cas, lorsque  $\nu + \mu \leq \frac{1}{2}$  ou  $\mu \geq \frac{1}{2}$ , l'intégrale (C.10) diverge.  $\square$

Il est à noter que l'expression de la norme  $\mathcal{H}_2$  de  $F_1(s)$  se déduit immédiatement de (C.7) et reste valable en remplaçant  $\mu$  par 0. De plus, en se basant sur la formule de Stirling de la fonction Gamma (C.29), il peut être démontré que pour  $\mu = 0$  :

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \|\tilde{F}_1\|_2 = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \|F_1\|_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \geq 1 \\ \infty & \text{si } 0 < \lambda < 1 \end{cases}. \quad (\text{C.11})$$

### C.4.2 Cas particulier : ordre de dérivation entier

Il est rappelé que  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ . De plus, il peut être montré que :

$$\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = \frac{2^{1-2n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2n)}{\left(n - \frac{1}{2}\right)\Gamma(n)}. \quad (\text{C.12})$$

Ainsi, pour toute valeur entière  $\nu = n \in \mathbb{N}$  et lorsque  $\mu = 0$ , l'équation (C.7) se réduit à :

$$\|F_1\|_2^2 = \frac{2^{-2n}(2n-1)!}{\lambda^{2n-1}\left(n - \frac{1}{2}\right)((n-1)!)^2}. \quad (\text{C.13})$$

Cette équation coïncide avec les résultats mentionnés dans [Aström, 1970], plus particulièrement pour  $n = 1$  et  $n = 2$ , avec :

$$n = 1 \rightsquigarrow \|F_1\|_2^2 = \frac{1}{2\lambda}, \quad (\text{C.14})$$

$$n = 2 \rightsquigarrow \|F_1\|_2^2 = \frac{1}{4\lambda^3}. \quad (\text{C.15})$$

### C.4.3 Exemple

La norme  $\mathcal{H}_2$  de  $F_1(s)$  donnée par (C.4) pour différentes valeurs de  $\lambda$  est calculée avec le résultat du théorème 7 et est tracée sur la figure C.1. La norme  $\mathcal{H}_2$  de  $F_1(s)$  tend

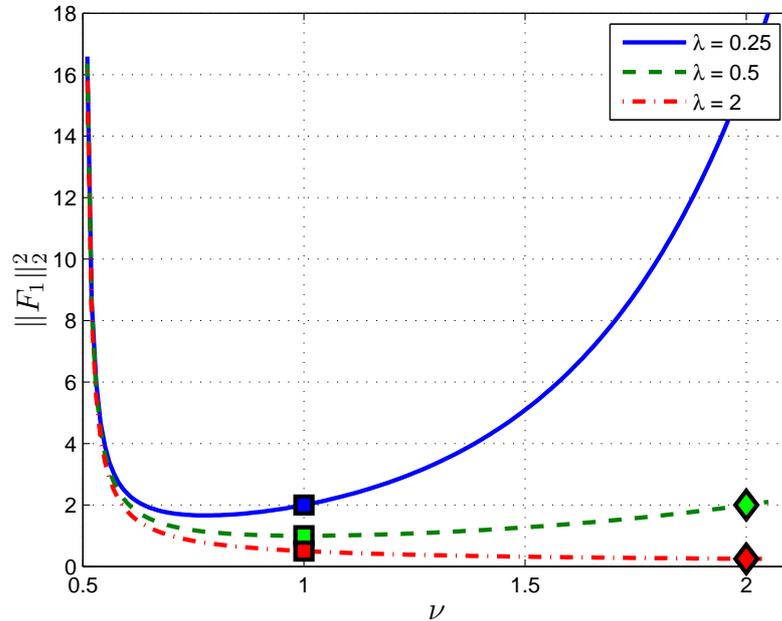


FIGURE C.1 – La norme  $\mathcal{H}_2$  (au carré) de  $F_1(s)$  en fonction de  $\nu$  pour différentes valeurs de  $\lambda$ .

vers  $+\infty$  lorsque  $\nu$  tend vers  $\frac{1}{2}$  conformément à (C.7). En outre, la limite de  $\|F_1\|_2$  quand  $\nu$  tend vers  $+\infty$  est conforme à (C.11).

Lorsque  $\nu$  est un nombre entier, la fonction de transfert (C.4) devient entière. Ainsi les formules analytiques (C.14) et (C.15) établies en premier lieu dans [Aström, 1970], et mises en œuvre dans la fonction `norm` du logiciel MATLAB<sup>®</sup>, sont appliquées pour calculer la norme  $\mathcal{H}_2$  lorsque  $\nu = 1$  et  $\nu = 2$  (respectivement représentées par les carrés et les losanges dans la figure C.1). Ces valeurs coïncident avec les résultats du théorème 7 et de l'équation (C.7).

#### C.4.4 Mise en série de deux fonctions de transfert implicites de première espèce

Les résultats précédents sont maintenant étendus au cas de la mise en série de deux fonctions de transfert implicites de première espèce.

**Théorème 8.** Soit  $F_{12}(s)$  un système résultant de la mise en série de deux fonctions de

**C.5. EXPRESSION ANALYTIQUE DE LA NORME  $\mathcal{H}_2$  DE FONCTIONS DE TRANSFERT IMPLICITES DE SECONDE ESPÈCE ET DE LEUR MISE EN SÉRIE**

transfert implicites de première espèce et d'un intégrateur non entier pur d'ordre  $\mu > 0$  :

$$F_{12}(s) = \frac{1}{s^\mu (s + \lambda_1)^{\nu_1} (s + \lambda_2)^{\nu_2}}. \quad (\text{C.16})$$

La norme  $\mathcal{H}_2$  de  $F_{12}$  est donnée par

$$\|F_{12}\|_2^2 = \begin{cases} \infty & \text{si } \mu \geq \frac{1}{2} \text{ ou } \nu_1 + \nu_2 + \mu \leq \frac{1}{2} \\ \frac{\beta\left(\frac{1}{2} - \mu, \nu_1 + \nu_2 + \mu - \frac{1}{2}\right) {}_2F_1\left(\nu_1, \frac{1}{2} - \mu; \nu_1 + \nu_2; 1 - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)}{2\pi \lambda_1^{2\nu_1} \lambda_2^{2\mu + 2\nu_2 - 1}} & \text{si } \mu < \frac{1}{2} \text{ et } \nu_1 + \nu_2 + \mu > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{C.17})$$

où  ${}_2F_1(a, b, c, z)$  est la fonction hypergéométrique de Gauss définie par (C.35).

*Démonstration.* D'après (C.2) :

$$\|F_{12}\|_2^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega^{-2\mu}}{(\omega^2 + \lambda_1^2)^{\nu_1} (\omega^2 + \lambda_2^2)^{\nu_2}} d\omega. \quad (\text{C.18})$$

En utilisant le changement de variable (C.9), il vient

$$\|F_{12}\|_2^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{x^{-\frac{1}{2} - \mu}}{(x + \lambda_1^2)^{\nu_1} (x + \lambda_2^2)^{\nu_2}} dx. \quad (\text{C.19})$$

Cette intégrale figure dans [Gradshteyn et Ryshik, 2007] par la relation 3.197.1 et permet d'aboutir au résultat de l'équation (C.17).  $\square$

## C.5 Expression analytique de la norme $\mathcal{H}_2$ de fonctions de transfert implicites de seconde espèce et de leur mise en série

Dans cette section, l'expression analytique de la norme  $\mathcal{H}_2$  d'une fonction de transfert implicite de seconde espèce en série avec un intégrateur non entier pur est d'abord calculée. Ensuite, l'expression obtenue est simplifiée pour un ordre de dérivation entier. Enfin, un exemple est présenté où la norme  $\mathcal{H}_2$  est calculée en fonction de l'ordre de dérivation et pour plusieurs valeurs des pôles  $(-\lambda, -\bar{\lambda})$ . Ces expressions font appel à des fonctions mathématiques particulières dont les définitions respectives sont données dans

la section C.6.

### C.5.1 Cas général : ordre de dérivation non entier

L'expression analytique de la norme  $\mathcal{H}_2$  d'une fonction de transfert implicite de seconde espèce est présentée dans le théorème suivant.

**Théorème 9.** *La norme  $\mathcal{H}_2$  du système BIBO-stable de fonction de transfert  $F_2(s)$  défini par (C.5), en série avec un intégrateur non entier pur d'ordre  $\mu > 0$ ,*

$$\tilde{F}_2(s) = \frac{F_2(s)}{s^\mu}, \quad (\text{C.20})$$

est donnée par :

$$\|\tilde{F}_2\|_2^2 = \begin{cases} \infty & \text{si } \mu \geq \frac{1}{2} \text{ ou } 2\nu + \mu \leq \frac{1}{2} \\ \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \nu) \text{B}(2\nu + \mu - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \mu) \text{P}_{\mu+\nu-1}^{\frac{1}{2}-\nu}(\frac{\lambda^2 + \bar{\lambda}^2}{2\lambda\bar{\lambda}})}{\pi 2^{\frac{3}{2}-\nu} (\lambda\bar{\lambda})^{\mu+2\nu-\frac{1}{2}} \left( \left( \frac{\lambda^2 + \bar{\lambda}^2}{2\lambda\bar{\lambda}} \right)^2 - 1 \right)^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}} & \text{si } \mu < \frac{1}{2} \text{ et } 2\nu + \mu > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{C.21})$$

où  $\text{P}_\alpha^\beta(z)$  est la fonction de Legendre de degré  $\alpha$  et d'ordre  $\beta$  (voir C.6.4).

*Démonstration.* D'après (C.2) :

$$\|\tilde{F}_2\|_2^2 = \frac{(\lambda\bar{\lambda})^{-2\nu}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega^{-2\mu}}{\left( \left( \frac{\omega^2}{\lambda\bar{\lambda}} \right)^2 + \omega^2 \frac{\lambda^2 + \bar{\lambda}^2}{(\lambda\bar{\lambda})^2} + 1 \right)^\nu} d\omega. \quad (\text{C.22})$$

Soit le changement de variable

$$x = \frac{\omega^2}{\lambda\bar{\lambda}} \Rightarrow dx = \frac{2\omega}{\lambda\bar{\lambda}} d\omega \Rightarrow d\omega = \frac{\sqrt{\lambda\bar{\lambda}}}{2\sqrt{x}} dx, \quad (\text{C.23})$$

qui permet de récrire (C.22) :

$$\|\tilde{F}_2\|_2^2 = \frac{(\lambda\bar{\lambda})^{\frac{1}{2}-\mu-2\nu}}{2\pi} \int_0^{+\infty} x^{-\mu-\frac{1}{2}} \left( x^2 + x \frac{\lambda^2 + \bar{\lambda}^2}{\lambda\bar{\lambda}} + 1 \right)^{-\nu} dx. \quad (\text{C.24})$$

Cette intégrale figure dans [Gradshteyn et Ryshik, 2007] à la formule 3.252.11, ce qui permet d'aboutir au résultat donné par (C.21).  $\square$

Il est à noter que l'expression de la norme  $\mathcal{H}_2$  de  $F_2(s)$  se déduit immédiatement de (C.21) et reste valable en remplaçant  $\mu$  par 0.

### C.5.2 Cas particulier : ordre de dérivation entier

Pour toute valeur entière  $\nu = n \in \mathbb{N}^*$  et lorsque  $\mu = 0$ , l'utilisation de (C.34) et (C.35) permet de réduire (C.21) à :

$$\|F_2\|_2^2 = \frac{(\lambda + \bar{\lambda})^{1-2n}}{(4\lambda\bar{\lambda})^n} \frac{(4n-2)!}{(2n-1)!(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{(\lambda - \bar{\lambda})^2}{\lambda\bar{\lambda}} \right)^k \frac{((n+k-1)!)^2}{(2n+2k-1)!(n-k-1)!k!}. \quad (\text{C.25})$$

Cette équation coïncide avec les résultats présentés dans [Aström, 1970], plus particulièrement pour les cas  $n = 1$  et  $n = 2$  :

$$n = 1 \rightsquigarrow \|F_2\|_2^2 = \frac{1}{2\lambda\bar{\lambda}(\lambda + \bar{\lambda})}, \quad (\text{C.26})$$

$$n = 2 \rightsquigarrow \|F_2\|_2^2 = \frac{5\lambda\bar{\lambda} + (\lambda - \bar{\lambda})^2}{4(\lambda\bar{\lambda}(\lambda + \bar{\lambda}))^3}. \quad (\text{C.27})$$

### C.5.3 Exemple

La norme  $\mathcal{H}_2$  de  $F_2(s)$  donnée par (C.5) pour différentes valeurs de  $\lambda$  est tracée sur la figure C.2. La norme  $\mathcal{H}_2$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $\nu$  tend vers  $\frac{1}{4}$ , conformément à (C.21).

De plus, quand  $\nu$  est entier, la fonction de transfert (C.5) devient entière. Ainsi les formules analytiques établies en premier lieu dans [Aström, 1970], et mises en œuvre dans la fonction `norm` du logiciel MATLAB<sup>®</sup>, sont appliquées pour calculer la norme  $\mathcal{H}_2$  lorsque  $\nu = 1$  et  $\nu = 2$  (respectivement représentées par les carrés et les losanges dans la figure C.2). Ces valeurs coïncident avec les résultats du théorème 9 et l'équation (C.21).

## C.6 Définition des fonctions mathématiques utilisées

### C.6.1 Fonction Gamma d'Euler

La forme intégrale de la fonction Gamma d'Euler  $\Gamma(\nu)$  est définie par la relation 8.310.1 de [Gradshteyn et Ryzhik, 2007] :

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\nu-1} dx, \quad \nu > 0. \quad (\text{C.28})$$

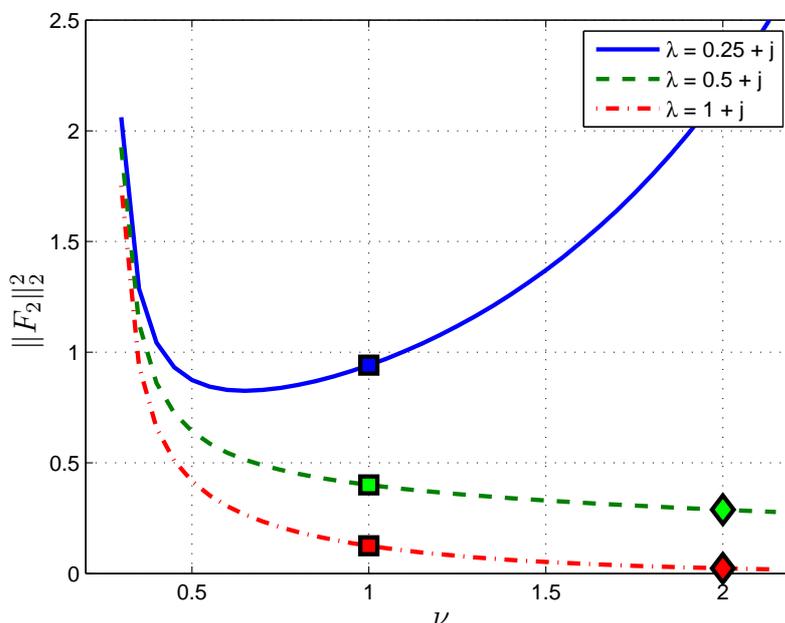


FIGURE C.2 – La norme  $\mathcal{H}_2$  (au carré) de  $F_2(s)$  en fonction de  $\nu$  pour différentes valeurs de  $\lambda$ .

De plus, pour  $\nu \gg 0$  la formule de Stirling donnée par la relation 8.327.2 de [Gradshteyn et Ryshik, 2007], permet d'écrire :

$$\Gamma(\nu + 1) \sim \sqrt{2\pi\nu} \left(\frac{\nu}{e}\right)^\nu. \quad (\text{C.29})$$

### C.6.2 Fonction Beta d'Euler

La fonction Beta d'Euler  $B(x, y)$  peut être exprimée à partir de la fonction Gamma. Elle est alors définie par la relation 8.384.1 de [Gradshteyn et Ryshik, 2007] :

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)}. \quad (\text{C.30})$$

### C.6.3 Fonctions de Bessel

D'après la relation 8.402 de [Gradshteyn et Ryshik, 2007], la fonction de Bessel  $J_\alpha(x)$  de première espèce et d'ordre  $\alpha$  est définie pour  $|\arg(x)| < \pi$  telle que :

$$J_\alpha(x) = \frac{x^\alpha}{2^\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(\alpha + k + 1)}. \quad (\text{C.31})$$

D'après la relation 8.447.3 de [Gradshteyn et Ryshik, 2007], la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce d'ordre  $\nu = 0$  notée  $K_0$ , est définie par :

$$K_0(z) = -\ln \frac{z}{2} I_0(z) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} \psi(k+1), \quad (\text{C.32})$$

où  $I_0(z)$  est la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre  $\nu = 0$  (voir (C.33)) et  $\psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x)$  est la fonction digamma.

D'après la relation 8.447.1 de [Gradshteyn et Ryshik, 2007], la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre  $\nu = 0$ , est définie par :

$$I_0(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z/2)^{2k}}{(k!)^2}. \quad (\text{C.33})$$

#### C.6.4 Fonction de Legendre

D'après la relation 8.702 de [Gradshteyn et Ryshik, 2007], la fonction de Legendre de degré  $\alpha$  et d'ordre  $\beta$  peut s'exprimer, pour tout  $|1 - z| < 2$ , par :

$$P_\alpha^\beta(z) = \frac{1}{\Gamma(1 - \beta)} \left( \frac{z+1}{z-1} \right)^{\frac{\beta}{2}} {}_2F_1 \left( -\alpha, \alpha + 1; 1 - \beta; \frac{1-z}{2} \right). \quad (\text{C.34})$$

#### C.6.5 Fonction hypergéométrique de Gauss

D'après la relation 8.14.1 de [Gradshteyn et Ryshik, 2007], la fonction  ${}_2F_1(a, b; c; z)$  est la fonction hypergéométrique de Gauss définie, pour  $|z| < 1$ , par :

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad (\text{C.35})$$

où  $(q)_k$  est le  $q$ -symbole de Pochhammer tel que :

$$(q)_k = \begin{cases} \frac{\Gamma(q+k)}{\Gamma(q)} & q > 0 \\ \frac{(-1)^k \Gamma(1-q)}{\Gamma(1-q-k)} & q \leq 0. \end{cases} \quad (\text{C.36})$$

# Annexe D

## Retour d'expérience sur l'ajustement des paramètres des modèles de composants

---

D.1	Introduction . . . . .	297
D.2	Retour d'expérience sur l'ajustement des paramètres des modèles de composants	297
D.3	Récapitulatifs des changements effectués sur les paramètres des composants . .	300
D.3.1	Ajustement des paramètres de la chaîne de faible puissance . . . . .	301
D.3.2	Ajustement des paramètres de la chaîne de forte puissance . . . . .	304

---

« On commence à vieillir quand on finit d'apprendre »

Proverbe Japonais

## D.1 Introduction

Dans cette annexe, un retour d'expérience sur le choix des paramètres à modifier, pour la calibration des modèles électrothermiques des composants établis dans ce manuscrit est d'abord proposé. Des tableaux récapitulatifs sur les changements apportés aux valeurs numériques de ces paramètres par rapport à leurs valeurs initiales<sup>(1)</sup>, pour les différents composants traités dans ce mémoire sont ensuite présentés.

## D.2 Retour d'expérience sur l'ajustement des paramètres des modèles de composants

Dans le cadre des travaux de ce mémoire, si les résultats ne concordent pas entre la température mesurée d'un composant et la réponse de son modèle, deux explications sont principalement possibles. La première est que la structure du modèle en elle même est potentiellement erronée ou insuffisamment complète. Dans ce cas, il faut s'assurer que les hypothèses de départ du modèle sont respectées. Par exemple : certains modes de transfert sont-ils réellement négligeables ? Dans quelle(s) direction(s) le gradient de température peut-il être considéré nul ? Les transferts avec d'autres composants ont-ils tous été clairement identifiés ?

La deuxième explication, qui fait l'objet de cette section, est le paramétrage du modèle. À supposer que la structure du modèle soit bonne, si des écarts trop importants persistent entre les résultats de simulation et de mesure, il est fortement probable que la valeur numérique d'un ou plusieurs paramètres du modèle soit fautive ou insuffisamment précise. En effet, une connaissance plus ou moins approximative des matériaux ou de la géométrie (par exemple due à la dispersion lors de la fabrication, à l'approximation des formes, à une connaissance imprécise des alliages, etc) peut conduire à des valeurs plus ou moins exactes des paramètres du modèle.

Dans ce manuscrit, le modèle final d'un composant s'exprime sous forme d'une équation différentielle (ou d'un système d'équations différentielles) du premier ordre dont les paramètres sont essentiellement sa capacité thermique et sa (demi) résistance thermique. Interviennent également d'autres résistances thermiques :

- les (demi) résistances thermiques des voisins du composant étudié ;

---

1. Par « valeurs initiales » il est sous-entendu les valeurs préalablement calculées grâce aux diverses formules données dans les chapitres 2, 3 et 4.

- des résistances thermiques de conduction obtenue à partir du calcul d'un facteur de forme.

Enfin, selon le composant étudié, les paramètres suivants peuvent apparaître dans son modèle :

- son émissivité, son coefficient de convection et sa surface d'échange avec l'air ambiant (rayonnement et convection) ;
- sa résistance électrique (composant conducteur d'électricité).

**Remarque 35.** *Il est important de rappeler que la capacité thermique et la résistance thermique, s'expriment en fonction de paramètres plus fondamentaux liés aux propriétés physiques du/des matériaux qui constituent un composant (chaleur massique, conductivité thermique, masse volumique) et de ses grandeurs géométriques (longueur, largeur, hauteur, section, volume).*

Afin de déterminer le ou les paramètres à modifier pour calibrer un modèle, il est préférable de les modifier un par un et de commencer par ceux pour lesquels l'incertitude est la plus grande. Si une grande confiance est accordée aux valeurs initiales des paramètres, il est judicieux de les modifier en commençant par ceux dont l'impact est le plus important sur la température simulée, pour de faibles variations de leurs valeurs.

De manière générale, de simples observations des résultats issus des simulations et des mesures peuvent permettre de déduire les paramètres à ajuster. Ainsi, lors de l'observation des résultats, si la mesure et la simulation ont des dynamiques différentes (formes des courbes différentes), il est fortement probable que la résistance thermique ou la capacité thermique du composant soient inexactes. Ceci peut donc provenir d'une méconnaissance du/des matériaux du composant (alliages particuliers, plaquage, vernissage, etc).

Par exemple, la figure [D.1](#) présente les résultats obtenus avec une valeur trop grande de la capacité thermique (en haut) et de la résistance thermique (en bas) du clip du montage de faible puissance dont le modèle est donné dans la sous-section [3.3.2](#) du chapitre [3](#).

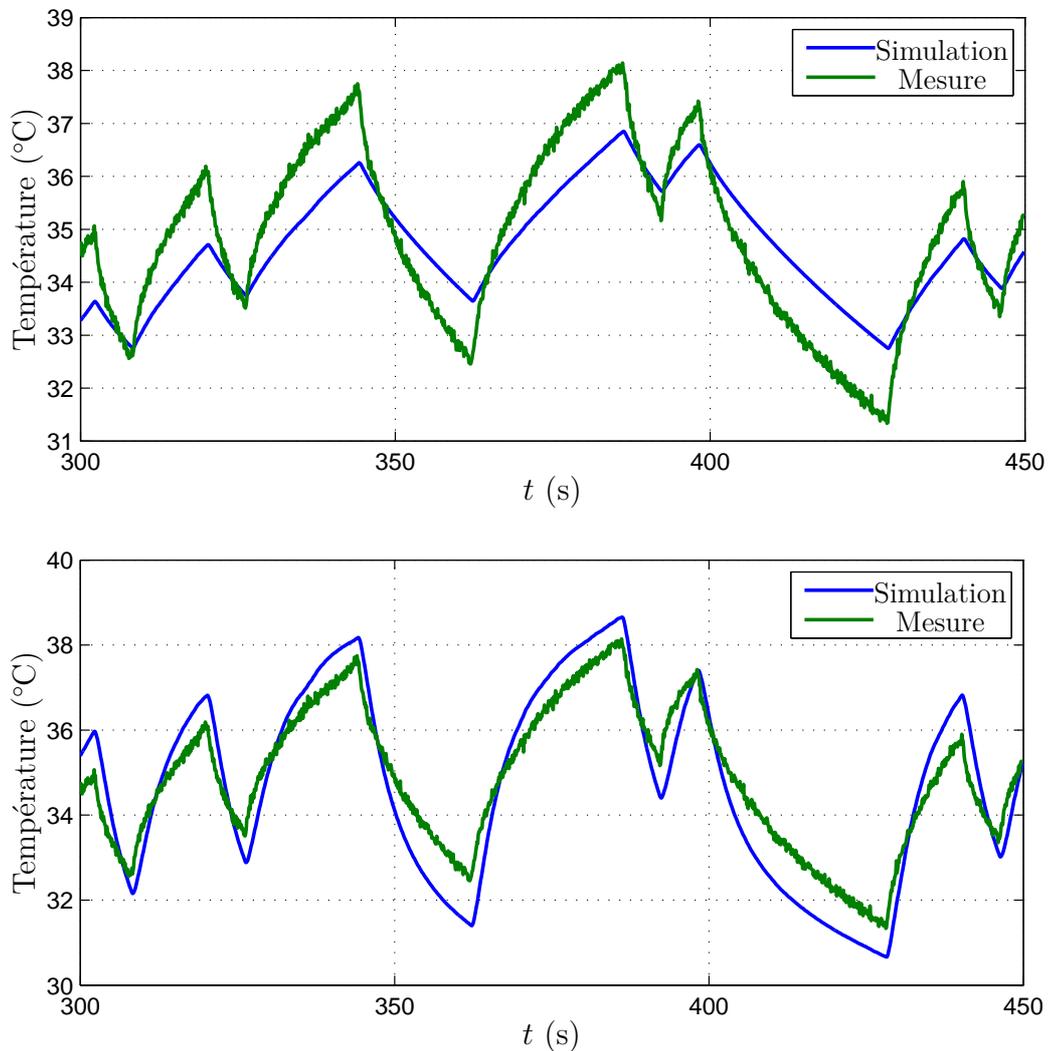


FIGURE D.1 – Résultats obtenus lorsque les valeurs de la capacité thermique (en haut) et de la résistance thermique (en bas) sont trop grandes

Si la mesure et la simulation ont des dynamiques similaires mais d'amplitudes différentes, il est fortement probable que l'émissivité, la résistance électrique, les facteurs de formes, le coefficient de convection ou la surface d'échange avec l'air ambiant soient erronés. Les deux premiers paramètres sont liés aux propriétés du/des matériaux du composant tandis que les deux derniers sont corrélés à la géométrie des surfaces d'échange. Par exemple, la figure D.2 présente les résultats obtenus avec une valeur trop faible du facteur de forme entre le clip et le porte-clips du montage de faible puissance (voir sous-section 3.3.2 du chapitre 3).

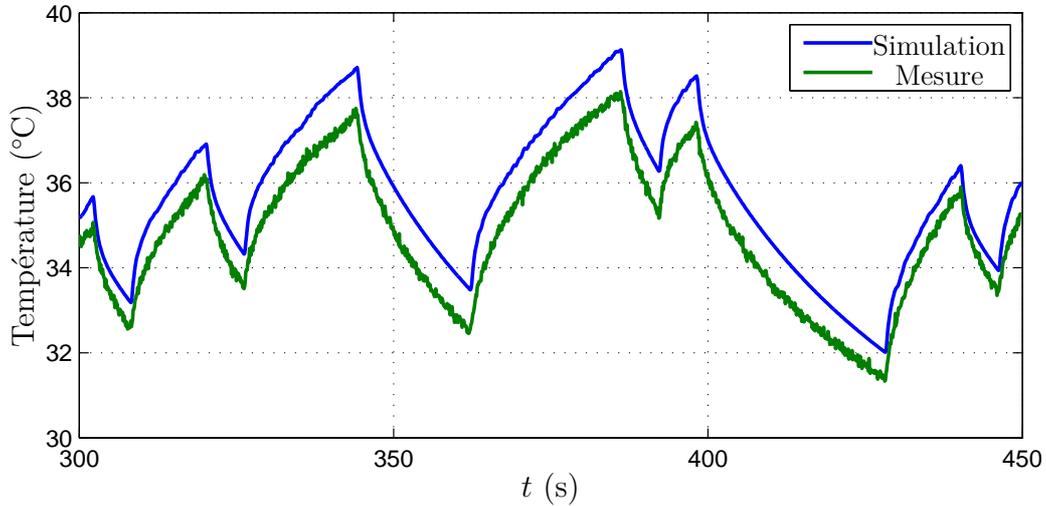


FIGURE D.2 – Résultats obtenus lorsque la valeur du facteur de forme entre le clip et le porte-clips est trop faible

### D.3 Récapitulatifs des changements effectués sur les paramètres des composants

Les tableaux présentés dans cette section recensent les différences en pourcentage entre les valeurs théoriques et les valeurs ajustées des paramètres des composants de la chaîne de faible puissance étudiée au chapitre 3 puis de ceux du montage de forte puissance étudié au chapitre 4. Pour un paramètre donné, la différence relative en pourcentage est calculée par la formule :

$$E_{\%} = 100 \times \frac{|\text{valeur théorique} - \text{valeur ajustée}|}{\text{valeur théorique}}. \quad (\text{D.1})$$

**Remarque 36.** *Pour des raisons de confidentialité, seules les valeurs des paramètres de haut niveau (capacités thermiques, résistances thermiques, facteurs de forme) sont données dans cette annexe. Les valeurs de bas niveau (chaleurs massiques, conductivités thermiques, masses volumiques et certaines dimensions) ne sont donc pas communiquées.*

### D.3.1 Ajustement des paramètres de la chaîne de faible puissance

Par soucis de concision, seuls les paramètres modifiés sont mentionnés dans ce qui suit. Si un composant n'est pas présent c'est qu'aucun de ses paramètres n'a subi de modification par rapport à leurs valeurs initiales calculées grâce aux formules données dans ce mémoire.

#### Air de la cellule du porte-clips

Comme indiqué dans le chapitre 3 le facteur de forme  $f_{s\leftrightarrow\text{air}}$  pour la conduction entre le sertissage et l'air de la cellule a été empiriquement ajusté car aucune formule pour ce cas géométrique n'a été trouvée dans la littérature. De ce fait, aucune valeur théorique fiable n'est donc disponible pour ce paramètre, la différence relative n'est donc pas calculée. En revanche, le facteur de forme  $f_{\text{cl}\leftrightarrow\text{air}}$  pour la conduction entre le clip et l'air de la cellule a été ajusté. De même pour le facteur de forme  $f_{\text{pcl}\leftrightarrow\text{air}}$  pour la conduction entre le porte-clips et l'air de la cellule. Les valeurs initiales, les valeurs ajustées et les différences relatives de ces deux facteurs de forme sont données dans le tableau D.1.

Paramètre	Valeur initiale	Valeur ajustée	$E\%$
Facteur de forme clip–air $f_{\text{cl}\leftrightarrow\text{air}}$ (m)	0,44	0,50	13 %
Facteur de forme porte-clips–air $f_{\text{pcl}\leftrightarrow\text{air}}$ (m)	0,68	0,42	38 %

TABLE D.1 – Ajustement des paramètres de l'air de la cellule du porte-clips

#### Sertissage

Voir paragraphe précédent.

#### Clip

Pour le clip, seul le facteur de forme  $f_{\text{cl}\leftrightarrow\text{air}}$  pour la conduction avec l'air de la cellule a été ajusté. La valeur initiale, la valeur ajustée et la différence relative de ce paramètre sont données dans le tableau D.1.

### Porte-clips

Pour le porte-clips, le facteur de forme  $f_{\text{pcl} \leftrightarrow \text{air}}$  pour la conduction avec l'air de la cellule a été ajusté. La valeur initiale, la valeur ajustée et la différence relative de ce paramètre sont données dans le tableau D.1.

La capacité thermique  $C_{\text{pcl}}$  du porte-clips et le facteur de forme  $f_{\text{pcl} \leftrightarrow \text{emb}}$  pour la conduction entre le porte-clips et l'embase ont également été ajustés. Les valeurs initiales, les valeurs ajustées et les différences relatives sont données dans le tableau D.2.

Paramètre	Valeur initiale	Valeur ajustée	$E\%$
Capacité thermique porte-clips $C_{\text{pcl}} \text{ (J}\cdot\text{K}^{-1}\text{)}$	17,80	24,14	36 %
Facteur de forme porte-clips–embase $f_{\text{pcl} \leftrightarrow \text{emb}} \text{ (m)}$	10,58	18,43	74 %

TABLE D.2 – Ajustement des paramètres du porte-clips

La nécessité d'ajuster la capacité thermique du porte-clips provient en grande partie du manque de précision sur la valeur exacte de son volume (il est rappelé que la capacité thermique d'un composant est le produit de sa chaleur massique, de sa masse volumique et de son volume).

### Embase

Voir paragraphe précédent.

### Piste de cuivre

Pour la piste de cuivre, la capacité thermique *totale* (c'est-à-dire la somme des capacités thermiques de chaque maille)  $C_p$ , la résistance thermique *totale* (somme des résistances thermiques)  $R_p$  et la résistance thermique  $R_{p \leftrightarrow ce}$  *totale* entre la piste et la carte électronique ont été ajustées. Les valeurs initiales, les valeurs ajustées et les différences relatives sont données dans le tableau D.3.

*D.3. RÉCAPITULATIFS DES CHANGEMENTS EFFECTUÉS SUR LES  
PARAMÈTRES DES COMPOSANTS*

---

Paramètre	Valeur initiale	Valeur ajustée	$E_{\%}$
Capacité thermique totale de la piste $C_p$ ( $J \cdot K^{-1}$ )	0,38	0,48	27 %
Résistance thermique totale de la piste $R_p$ ( $K \cdot W^{-1}$ )	51,41	28	46 %
Résistance thermique piste–carte $R_{p \leftrightarrow ce}$ ( $K \cdot W^{-1}$ )	9,23	6,04	34 %

TABLE D.3 – Ajustement des paramètres de la piste de cuivre

Pour la capacité et la résistance thermiques de la piste de cuivre, l’ajustement est dû principalement à la méconnaissance de son épaisseur (quelques dixièmes de micromètres).

En ce qui concerne la résistance thermique piste–carte, il est rappelé que la température de la carte électronique est considérée homogène dans tout son volume. En toute rigueur, la température est différente notamment près de la piste de cuivre. Ainsi, au lieu d’un ajustement fait à cause d’une méconnaissance des paramètres de la piste de cuivre ou de la carte, il s’agit plutôt d’un ajustement dû au manque de précision sur la température réelle de la carte électronique à proximité de la piste de cuivre.

Un maillage de la carte électronique aurait pu également fonctionner. Cependant, ceci aurait complexifié le modèle pour un gain en précision faible. En effet, en conservant le modèle de carte avec une maille et en conservant la valeur initiale de  $R_{p \leftrightarrow ce}$ , la valeur maximale de l’erreur relative entre la simulation de la température de la piste de cuivre et sa mesure est déjà inférieure à 10 %. Il a donc été jugé plus judicieux d’agir sur les valeurs de ces paramètres plutôt que de mailler la carte électronique.

### Carte électronique

Pour la carte électronique, la résistance thermique  $R_{p \leftrightarrow ce}$  totale avec la piste a été ajustée. La valeur initiale, la valeur ajustée et la différence relative de ce paramètre sont données dans le tableau D.3.

La capacité thermique de la carte  $C_{ce}$  a également été modifiée. La valeur initiale, la valeur ajustée et la différence relative de ce paramètre sont données dans le tableau D.4.

### D.3. RÉCAPITULATIFS DES CHANGEMENTS EFFECTUÉS SUR LES PARAMÈTRES DES COMPOSANTS

---

Paramètre	Valeur initiale	Valeur ajustée	$E\%$
Capacité thermique de la carte $C_{ce}$ ( $J \cdot K^{-1}$ )	40	28,5	28 %

TABLE D.4 – Ajustement des paramètres de la carte électronique

La modification de la capacité thermique de la carte électronique est également probablement due au manque de précision sur sa température près de la piste de cuivre comme expliqué dans le paragraphe précédent.

#### D.3.2 Ajustement des paramètres de la chaîne de forte puissance

Par soucis de concision seuls les paramètres modifiés sont mentionnés dans ce qui suit. Si un composant n'est pas présent c'est qu'aucun de ses paramètres n'a subi de modification par rapport à leurs valeurs initiales calculées grâce aux formules données dans ce mémoire.

##### Toron

Pour le toron, seule la surface d'échange  $A_{tor}$  totale avec l'air ambiant a été modifiée. La valeur initiale, la valeur ajustée et la différence relative de ce paramètre sont données dans le tableau D.5.

Paramètre	Valeur initiale	Valeur ajustée	$E\%$
Surface totale d'échange toron–ambiance $A_{tor}$ ( $m^2$ )	0,015	0,011	29 %

TABLE D.5 – Ajustement des paramètres du toron

Comme mentionné au chapitre 4, la forme réelle du toron n'est pas parfaitement cylindrique ce qui biaise les formules d'échanges par convection et rayonnement. Toutefois, l'ajustement de la surface d'échange permet de compenser les écarts engendrés par les formules utilisées.

*D.3. RÉCAPITULATIFS DES CHANGEMENTS EFFECTUÉS SUR LES  
PARAMÈTRES DES COMPOSANTS*

---

**Fil libre**

Pour le fil, seule la surface d'échange  $A_f$  totale avec l'air ambiant a été modifiée. La valeur initiale, la valeur ajustée et la différence relative de ce paramètre sont données dans le tableau D.6.

Paramètre	Valeur initiale	Valeur ajustée	$E\%$
Surface totale d'échange fil libre–ambiance $A_f$ (m <sup>2</sup> )	$1,2 \times 10^{-3}$	$2,1 \times 10^{-3}$	75 %

TABLE D.6 – Ajustement des paramètres du fil libre

Comme mentionné au chapitre 4, le fil a tendance à légèrement se torsader au milieu de sa longueur modifiant ainsi localement les échanges par convection. De plus, les fils se rapprochent de plus en plus les uns des autres à proximité du toron et peuvent ponctuellement rentrer en contact et s'échanger un peu de chaleur. L'ajustement de la surface d'échange avec l'air ambiant permet de compenser simplement ces phénomènes difficilement modélisables.

**Air de la cellule de la prise véhicule**

Pour l'air de la cellule, seul le facteur de forme  $f_{l \leftrightarrow \text{air}}$  avec la partie plate de la languette a été modifié. La valeur initiale, la valeur ajustée et la différence relative de ce paramètre sont données dans le tableau D.7.

Paramètre	Valeur initiale	Valeur ajustée	$E\%$
Facteur de forme languette–air $f_{l \leftrightarrow \text{air}}$ (m)	0,11	0,071	39 %

TABLE D.7 – Ajustement des paramètres de l'air de la cellule de la prise véhicule

**Partie plate de la languette**

Voir paragraphe précédent.

**Partie cylindrique de la languette**

Pour la partie cylindrique de la languette, la valeur de sa capacité thermique  $C_1^2$  et celle de la résistance thermique de conduction avec la zone de contact  $R_{l \leftrightarrow \text{zc}}$  ont été

### D.3. RÉCAPITULATIFS DES CHANGEMENTS EFFECTUÉS SUR LES PARAMÈTRES DES COMPOSANTS

ajustée.

Les valeurs initiales, les valeurs ajustées et les différences relatives de ces paramètres sont données dans le tableau D.8.

Paramètre	Valeur initiale	Valeur ajustée	$E\%$
Capacité thermique de la languette $C_1^2$ (J·K <sup>-1</sup> )	1,04	1,35	30 %
Résistance thermique languette–contact $R_{l\leftrightarrow zc}$ (K·W <sup>-1</sup> )	0,075	5,58	7300 %

TABLE D.8 – Ajustement des paramètres de la partie cylindrique de la languette

Il est constaté que l’erreur relative est très grande entre la valeur théorique et la valeur ajustée du paramètre  $R_{l\leftrightarrow zc}$ . En effet, l’ordre de grandeur du rapport entre ces deux valeurs est d’environ 100.

Un phénomène qui pourrait expliquer un tel écart est la présence, à l’échelle microscopique, d’aspérités au niveau de l’interface clip–languette. En effet, comme illustré sur la figure D.3 la surface du clip et de la languette ne sont pas parfaitement lisses. Ainsi, ces aspérités forment des creux et des bosses ne permettant de réels contacts physiques clip–languette répartis que ponctuellement. Dès lors, la résistance thermique perçue est beaucoup plus grande puisque le flux de chaleur est contraint de se diffuser par ces contacts physiques relativement étroits au lieu de se diffuser librement au travers de toute la surface de contact clip–languette.

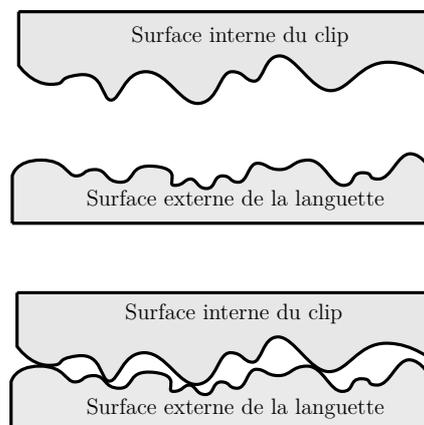


FIGURE D.3 – Zone de contact clip–languette à l’échelle microscopique

Une deuxième explication pourrait provenir d’un jeu dans l’encastrement clip–languette.

*D.3. RÉCAPITULATIFS DES CHANGEMENTS EFFECTUÉS SUR LES  
PARAMÈTRES DES COMPOSANTS*

---

Comme le montre la figure D.4, si l'insertion de la languette dans le clip n'est pas tout à fait parfaite, la surface de contact peut potentiellement être réduite ou se limiter à des points de contact.

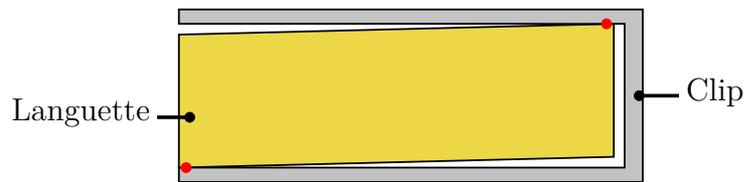


FIGURE D.4 – Un exemple de jeu entre le clip et la languette du montage de forte puissance (coupe longitudinale)

*D.3. RÉCAPITULATIFS DES CHANGEMENTS EFFECTUÉS SUR LES  
PARAMÈTRES DES COMPOSANTS*

---

# Bibliographie de l'auteur

## Publications dans des revues internationales

- [1] M. Chevrié, J. Sabatier, C. Farges, R. Malti,  $\mathcal{H}_2$ -norm computation of a class of fractional transfer functions : Application to approximation by integer order models, *International Journal of Dynamics and Control*, pages : 1–7, 2015.
- [2] R. Malti, M. Chevrié, C. Farges, J. Sabatier,  $\mathcal{H}_2$ -norm of fractional transfer functions of implicit type, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Volume 26, Issues 1-3, pages 223-237, Septembre 2015.

## Communications dans des congrès internationaux

- [1] R. Malti, M. Chevrié, C. Farges, J. Sabatier,  $\mathcal{L}_p$ -norm boundedness conditions of stable Davidson-Cole filters, pages : 1-6, *ICFDA 2014*, Catane, Italie, 23-25 juin 2014.
- [2] M. Chevrié, R. Malti, C. Farges, J. Sabatier,  $\mathcal{H}_2$ -norm of fractional transfer functions of implicit type of the first kind, pages : 2022-2027, *IFAC WC 2014*, Le Cap, Afrique du Sud, 24-29 juillet 2014.
- [3] M. Chevrié, J. Sabatier, C. Farges, R. Malti,  $\mathcal{H}_2$ -norm of a class of fractional transfer functions suited for modeling diffusive phenomena, pages : 2199-2204, *American Control Conference*, Chicago, IL, USA, 1-3 juillet 2015.
- [4] M. Chevrié, C. Farges, J. Sabatier, F. Guillemard, L. Pradere and T.B. Airimitoiaie, Finite length wire dynamical modeling for automotive applications using  $\mathcal{H}_2$ -norm based approximation of a fractional model, accepté dans *European Control Conference*, Aalborg, Danemark, 29 juin 2016 – 1er juillet 2016.

## **Brevets déposés**

[1] M. Chevrié, B. Bavoux, F. Guillemard, L. Pradere, J. Sabatier, C. Farges, Procédé de protection contre les sur-échauffements et/ou les surintensités d'un connecteur électrique, numéro de dossier : 2015P00170 FR, date de dépôt : 22 septembre 2015

[2] L. Pradere, F. Guillemard, J. Sabatier, C. Farges, M. Chevrié, Dispositif d'analyse pour une prise électrique propre à être connectée à une autre prise électrique, numéro de dossier : 2016P00123 FR, date de dépôt : 20 mai 2016