



**HAL**  
open science

# Homogénéisation des composites élasto-viscoplastiques écrouissables par une double procédure variationnelle incrémentale

Antoine Lucchetta

► **To cite this version:**

Antoine Lucchetta. Homogénéisation des composites élasto-viscoplastiques écrouissables par une double procédure variationnelle incrémentale. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Sorbonne Université, 2019. Français. NNT: 2019SORUS627 . tel-03351330

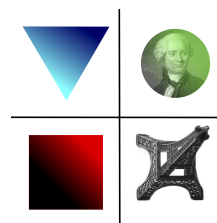
**HAL Id: tel-03351330**

**<https://theses.hal.science/tel-03351330v1>**

Submitted on 22 Sep 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse présentée pour obtenir le grade de

**Docteur de Sorbonne Université**

Spécialité Mécanique des solides

par

**Antoine Lucchetta**

**Homogénéisation des composites élasto-viscoplastiques  
écrouissables par une double procédure variationnelle  
incrémentale**

Soutenue le 11 Décembre 2019 devant le jury composé de :

M. Géry de Saxcé	<i>Président</i>
M. Noël Lahellec	<i>Rapporteur</i>
Mme Carole Nadot-Martin	<i>Rapporteuse</i>
M. Renald Brenner	<i>Examineur</i>
M. Issam Doghri	<i>Examineur</i>
M. Djimédo Kondo	<i>Directeur de thèse</i>
M. François Auslender	<i>Co-directeur de thèse</i>
M. Michel Bornert	<i>Co-directeur de thèse</i>



Je ne comprends pas ce que tu ne  
comprends pas !



---

# Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes que j'ai pu côtoyer pendant ces années de thèse, et qui ont, de près ou de loin, participé à leur bon déroulement.

En premier lieu, je tiens à exprimer toute ma gratitude à Djimédo Kondo, mon directeur de thèse, pour la confiance qu'il m'a accordé durant ces années, les conseils et discussions que l'ont a pu avoir ainsi que pour son goût de la recherche qu'il a su me transmettre. Je voudrais également adresser mes sincères remerciements à François Auslender et Michel Bornert, qui ont co-encadré ma thèse, pour leurs encouragements, leur soutien et l'aide précieuse qu'ils m'ont apporté.

Je tiens à remercier Noel Lahellec et Carole Nadot-Martin qui m'ont fait l'honneur d'accepter la lourde tâche d'être rapporteurs de ce mémoire et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. Je souhaite ensuite remercier Géry de Saxcé qui a accepté de présider mon jury ainsi qu'à Issam Doghri et Renald Brenner qui ont participé à l'évaluation de ce travail. Je tenais en particulier à remercier Noel Lahellec et Renald Brenner pour avoir accepté de participer à mes comités de suivi de thèse.

Je pense ensuite à mes collègues de travail pour la bonne ambiance au sein du laboratoire mais également au bar ou sur les quais ainsi que pour les différentes discussions scientifiques ou non que l'ont a pu avoir. Je remercie également le service administratif Catherine, Simona et surtout Sandrine pour les discussions que l'ont a eu ensemble.

Je remercie les membres de mon bureau, le 313b, et en particulier Valentin Gallican et Mathias Lebihain que j'ai dû supporter et qui m'ont supporté lors de la rédaction de thèse et de la préparation à l'oral. Leur soutien m'a été très précieux dans ces moments pas toujours évident. Merci à vous deux les gars.

Je tiens également à remercier La Chancla pour leurs soutiens et encouragements aussi bien dans les moments durs que dans les bons.

Je voulais aussi remercier Keuhn, Fishou, Torlk, Odemian, Vinz et Tars que j'ai suivi durant ces trois ans de thèse et qui m'ont permis de penser à autre chose lorsque je bloquais sur mes calculs ou mes problèmes de convergences numériques.

Je ne peux finir ces remerciements sans remercier ma famille pour leur soutien inconditionnel tout au long de mes études. Enfin, merci Alexandra pour m'avoir accompagné lors de la seconde partie de thèse et surtout de m'avoir supporté pendant les six derniers mois.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>13</b>
1.1	Contexte . . . . .	14
1.1.1	Méthodes d'homogénéisation non linéaire . . . . .	14
1.1.2	Quelques méthodes d'homogénéisation des composites à phases élasto-plastiques . . . . .	16
1.1.3	Méthodes basées sur une approche variationnelle incrémentale . . . . .	17
1.2	Cadre général de l'approche variationnelle incrémentale pour des matériaux composites . . . . .	21
1.2.1	Cadre des matériaux standards généralisés et formulation incrémentale des lois constitutives . . . . .	21
1.2.2	Matériaux composites non linéaires . . . . .	24
1.3	Objectifs et structure du travail de thèse . . . . .	26
<b>2</b>	<b>Composites visco-élastiques linéaires</b>	<b>31</b>
2.1	Brève présentation de la formulation EIV (Lahellec et Suquet [56, 57]) pour des composites visco-élastiques linéaires . . . . .	32
2.1.1	Procédure variationnelle . . . . .	32
2.1.2	Résolution des conditions de stationnarité . . . . .	33
2.2	Modèle proposé . . . . .	37
2.2.1	Obtention d'un Milieu Linéaire de Comparaison (MLC) à polarisation hétérogène intraphase . . . . .	37
2.2.2	Uniformisation du comportement local . . . . .	38
2.2.3	Cas d'une matrice visco-élastique renforcée par des particules élastiques	41



2.2.4	Mise en œuvre numérique . . . . .	44
2.3	Comparaison du modèle avec la formulation EIV . . . . .	45
2.3.1	Différences théoriques entre les deux formulations . . . . .	45
2.3.2	Comparaison des prédictions des deux formulations . . . . .	48
2.4	Comparaison du modèle à la formulation RVP (Lahellec et Suquet [59]) . . . . .	50
2.5	Conclusions . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Double procédure variationnelle incrémentale pour les composites élasto-viscoplastiques avec de l'écrouissage cinématique linéaire et/ou isotrope</b>	<b>55</b>
3.1	Comportement local et principes variationnels incrémentaux . . . . .	56
3.1.1	Comportement local . . . . .	56
3.1.2	Principes variationnels incrémentaux local et global . . . . .	57
3.2	Double application de la procédure variationnelle pour des composites élasto-viscoplastiques avec écrouissage . . . . .	58
3.2.1	Linéarisation du comportement local . . . . .	58
3.2.2	Homogénéisation du MLC à polarisation hétérogène intraphase . . . . .	66
3.2.3	Cas d'une matrice élasto-viscoplastique renforcée par des particules élastiques . . . . .	69
3.3	Conclusions . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Applications et validation du modèle proposé</b>	<b>75</b>
4.1	Mise en œuvre numérique . . . . .	76
4.1.1	Présentation de l'algorithme . . . . .	76
4.1.2	Précision numérique . . . . .	77
4.1.3	Difficultés numériques et résolution . . . . .	79
4.2	Validation du modèle pour les composites élasto-plastiques avec écrouissage . . . . .	84
4.2.1	Histoires de chargements . . . . .	84
4.2.2	Comparaison des prédictions de la formulation DIV à d'autres modèles . . . . .	86
4.2.3	Matériaux poreux avec et sans écrouissage . . . . .	101

4.2.4	Validation du modèle pour les composites élasto-viscoplastiques avec et sans seuil sans écrouissage . . . . .	104
4.3	Conclusions . . . . .	110
<b>5</b>	<b>Extension de la formulation DIV au cas de l'écrouissage cinématique non linéaire</b>	<b>113</b>
5.1	Introduction sur le modèle d'Armstrong-Frederick . . . . .	114
5.1.1	Présentation du modèle . . . . .	114
5.1.2	Formulation par la théorie du bipotentiel de la loi d'Armstrong-Frederick	116
5.1.3	Quelques modifications du modèle d'Armstrong-Frederick . . . . .	117
5.2	Formulation DIV proposée . . . . .	122
5.2.1	Comportement local et principes variationnels . . . . .	122
5.2.2	Linéarisation du comportement local . . . . .	126
5.2.3	Homogénéisation du MLC à polarisation hétérogène intraphase . . . . .	137
5.2.4	Application à une matrice élasto-plastique renforcée par des particules élastiques . . . . .	140
5.2.5	Cas particuliers des modèles de Ladevèze et de Chaboche modifié . . . . .	143
5.3	Conclusion . . . . .	146
<b>6</b>	<b>Application et validation des modèles DIV d'écrouissage cinématique non linéaire</b>	<b>147</b>
6.1	Mise en œuvre numérique . . . . .	148
6.1.1	Présentation de l'algorithme . . . . .	148
6.1.2	Problèmes numériques . . . . .	149
6.2	Evaluation et comparaison des deux modèles . . . . .	152
6.2.1	Effet de la variation des paramètres d'écrouissage et comparaison avec l'écrouissage cinématique linéaire . . . . .	152
6.2.2	Cas d'une matrice avec des écrouissages cinématique non linéaire et isotrope . . . . .	162
6.2.3	Chargement multi-cycles . . . . .	167
6.3	Conclusion . . . . .	170

<b>7</b>	<b>Extension aux composites élasto-plastiques avec une matrice compressible de type Green</b>	<b>173</b>
7.1	Comportement local et principes variationnels incrémentaux . . . . .	174
7.2	Double application de la procédure variationnelle incrémentale . . . . .	176
7.2.1	Linéarisation du comportement local . . . . .	176
7.2.2	Homogénéisation du MLC à polarisation hétérogène intraphase . . . . .	181
7.2.3	Application à une matrice élasto-plastique renforcée par des particules sphériques . . . . .	183
7.2.4	Mise en œuvre numérique . . . . .	186
7.2.5	Difficultés numériques et résolution . . . . .	187
7.3	Applications et discussions . . . . .	189
7.3.1	Prédiction de la formulation DIV dans le cas limite d'une matrice de Von-Mises . . . . .	190
7.3.2	Prédiction de la formulation DIV pour une matrice de type Green . . . . .	191
7.4	Conclusion . . . . .	193
<b>8</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>195</b>
8.1	Conclusions . . . . .	195
8.2	Perspectives de travail . . . . .	199
	<b>Bibliographie</b>	<b>201</b>
<b>A</b>	<b>Homogénéisation d'un composite thermo-élastique linéaire</b>	<b>209</b>
<b>B</b>	<b>Démonstration de l'équation (3.29)</b>	<b>211</b>
<b>C</b>	<b>Composites élasto-plastiques à matrice de Drucker-Prager</b>	<b>213</b>
C.1	Comportement local et principes variationnels incrémentaux . . . . .	213
C.2	Double application de la procédure variationnelle pour des composites élasto-plastique de type Drucker-Prager . . . . .	214

---

C.2.1	Linéarisation du comportement local . . . . .	214
C.2.2	Homogénéisation du MLC à polarisation hétérogène intraphase . . . . .	221
C.2.3	Application à une matrice élasto-plastique renforcée par des particules sphériques . . . . .	223
C.3	Conclusion . . . . .	225



# CHAPITRE 1

## Introduction

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Contexte</b>	<b>14</b>
1.1.1	Méthodes d'homogénéisation non linéaire	14
1.1.2	Quelques méthodes d'homogénéisation des composites à phases élasto-plastiques	16
1.1.3	Méthodes basées sur une approche variationnelle incrémentale	17
<b>1.2</b>	<b>Cadre général de l'approche variationnelle incrémentale pour des matériaux composites</b>	<b>21</b>
1.2.1	Cadre des matériaux standards généralisés et formulation incrémentale des lois constitutives	21
1.2.2	Matériaux composites non linéaires	24
<b>1.3</b>	<b>Objectifs et structure du travail de thèse</b>	<b>26</b>

---

La détermination du comportement effectif de composites non linéaires à phases élasto-(visco)plastiques reste encore une question ouverte en mécanique des solides. Une des méthodes permettant l'obtention de la réponse exacte du matériaux ainsi que de la réponse locale des phases est l'homogénéisation numérique qui repose sur des simulations en champs complets telles que la méthode des éléments finis (EF) [70] (voir également [106]) ou par transformée de Fourier rapide (FFT) [80, 81]. Néanmoins, bien que l'on dispose de méthodes de parallélisation, les simulations numériques de réponses de structures composites sont très coûteuses en temps. Afin de contourner ce coût numérique élevé, on fait généralement appel aux méthodes d'homogénéisation en champs moyens permettant l'obtention d'estimations semi-analytiques avec un coût numérique modéré. Ces méthodes, dites de transition d'échelles, permettant le passage du niveau microscopique au niveau macroscopique, et aident donc à mieux comprendre la réponse mécanique non linéaire des composites en lien avec leur microstructure. De plus, ces modèles en champs moyens peuvent être implémentées dans des codes EF comme loi de comportement à l'échelle du point d'intégration, permettant ainsi d'obtenir les réponses locales et globales d'une structure, e.g. Fritzen et Böhlke [34] ou Doghri et Ouair [27].

## 1.1 Contexte

L'objectif de cette thèse est de proposer une nouvelle formulation variationnelle incrémentale permettant de prévoir le comportement de composites constitués de phases supposées être élasto-viscoplastiques avec des écrouissages cinématique, linéaire ou non linéaire, et isotrope combinés. On considèrera de plus que le comportement des phases peut être décrit dans le cadre des matériaux standards généralisés (MSG) (Halphen et Nguyen [39]). De tels composites mobilisent à la fois des mécanismes conservatifs (élasticité et énergie bloquée) et dissipatifs lorsqu'ils sont déformés. Le cadre des MSG requiert en premier lieu le choix d'un potentiel d'état, en l'occurrence l'énergie libre  $w(\varepsilon, \alpha)$ , où  $\varepsilon$  est le tenseur des déformations et  $\alpha$  l'ensemble des variables internes. Les effets dissipatifs sont décrits par le potentiel de dissipation  $\varphi(\dot{\alpha})$  où  $\dot{\alpha}$  représente le flux des variables internes. La présence et le couplage de ces deux effets dans le comportement des phases sont à l'origine de certains phénomènes complexes, difficiles à reproduire, tels que l'effet Bauschinger. Dans le cas des matériaux composites, il s'agit, à partir du comportement local des constituants, de déterminer un comportement effectif pouvant être intégré dans un calcul de structures à des fins de dimensionnement. Ceci nécessite la connaissance du comportement des phases et de leur distribution spatiale au sein d'un Volume Élémentaire Représentatif (VER). Le problème de la détermination du comportement effectif à partir de ces informations, bien que très classique en mécanique et abordé par de nombreux auteurs, reste néanmoins très ouvert notamment pour de telles phases non linéaires.

### 1.1.1 Méthodes d'homogénéisation non linéaire

De nombreuses méthodologies et résultats ont été proposés dans le cas de composites à constituants élastiques linéaires pour lesquels des estimations ainsi que des bornes sont disponibles depuis les travaux d'Eshelby [32]. Parmi les différents schémas d'homogénéisation proposés dans ce cadre figure entre autres les schémas auto-cohérent (Kröner [49]) de Mori-Tanaka [79] ou les bornes de Hashin-Shtrikman [40] ou encore l'estimation de Ponte Castañeda et Willis [91]. Pour ces méthodes, le lecteur peut se référer à Milton [76] ou Zaoui [107]. On notera que le cadre de l'homogénéisation en élasticité linéaire peut être étendu au cas thermo-élastique linéaire dans lequel la déformation thermique peut être traitée comme une déformation libre (voir Laws [60] ou Willis [102]). Cette extension repose sur le fait que les équations sont linéaires, ce qui autorise l'utilisation d'un principe de superposition. Du fait de la linéarité du comportement, la loi de comportement s'applique également à la moyenne des champs sur les phases et les modélisations développées dans le cadre linéaire se contentent très souvent d'utiliser les moyennes par phase des champs locaux appelées moments d'ordre un.

Le cas des composites non linéaires induit des difficultés nouvelles car le principe de superposition n'est désormais plus applicable. Dans ce contexte, de nouvelles approches ont été proposées à partir des années 80 avec l'introduction des formulations variationnelles (pour une synthèse voir Ponte Castañeda et Suquet [90]). À l'exception des 12 dernières années, la plupart de ces

travaux ont porté sur des composites constitués de phases dont le comportement est régi par un unique potentiel non linéaire : l'énergie libre dans le cas de l'élasticité non linéaire, le potentiel de dissipation dans le cas de matériaux purement viscoplastiques sans seuil. Pour de tels matériaux composites, les théories d'homogénéisation non linéaire reposent en général sur deux étapes : une étape de linéarisation suivie d'une étape d'homogénéisation. La première étape consiste à approcher le composite non linéaire par un milieu linéaire de comparaison fictif (MLC) élastique ou thermo-élastique en linéarisant les lois de comportement locales autour d'une valeur de référence (Ponte Castañeda [86] [87], Suquet [96]). Ce MLC est dans une seconde étape traité à l'aide d'un schéma d'homogénéisation linéaire. On peut remarquer que lorsque ce dernier dérive d'un schéma de Hashin et Shtrikman le résultat s'apparente à celui obtenu par l'extension non linéaire de ce schéma (Talbot et Willis [98], Willis [103]).

Les premières approches s'inscrivant dans cette démarche, implicitement ou explicitement, choisissent comme valeur de référence autour de laquelle est faite la linéarisation la moyenne par phase (ou moment d'ordre un) du tenseur des déformations ou des contraintes. La méthode incrémentale de Hill [41], travail pionnier d'homogénéisation non linéaire en élasto-viscoplasticité, peut être vue comme une linéarisation incrémentale autour des états moyens des phases. Par la suite, la méthode sécante, dite classique (Berveiller et Zaoui [5]), construite comme une alternative à la formulation incrémentale de Hill pour l'élasto-plasticité adapté aux chargements proportionnels ainsi que l'approche affine pour l'élasto-viscoplasticité (Masson et Zaoui [66]), la visco-plasticité ou l'élasto-plasticité (Masson et al. [65]), repose sur un principe similaire. Néanmoins, d'une manière générale, on s'est aperçu que l'utilisation des moments d'ordre un comme représentant de l'état de déformation des phases conduit souvent à des prévisions trop raides du comportement macroscopique des composites (Gilormini [37]) et néglige de nombreux phénomènes non linéaires.

Sur la base des formulations variationnelles et d'arguments de nature physique, des auteurs ont montré l'importance de considérer des quantités qui ne négligent pas les hétérogénéités des champs au sein des phases parmi lesquelles les plus généralement utilisées sont les moments d'ordre deux (voir par exemple Ponte Castañeda [86], Suquet [97], Ponte Castañeda et Suquet [90]). Une manière alternative et complémentaire de prendre en compte ces fluctuations consiste à discrétiser le composite en sous-domaines (Bilger et al. [8] [9], Michel et Suquet [72]). Ces approches ont augmenté de manière significative la précision des modèles. Il a par ailleurs été montré [97] que le choix des moments d'ordre deux est optimal vis à vis de la formulation variationnelle proposée par Ponte-Castañeda [87]. A l'heure actuelle, les modèles les plus sophistiqués prennent en compte à la fois les moments d'ordre un et deux pour définir le MLC (Ponte Castañeda [89]). L'efficacité de tels modèles a été montrée par de nombreuses études théoriques et numériques (Idiart et al. [44], Idiart et Ponte Castañeda [45]) basées notamment sur la comparaison des prévisions de ces approches en champs moyens à des simulations numériques fournissant des solutions de références. Les comparaisons portent tant sur le comportement effectif qui les hétérogénéités inter et intraphases des champs locaux (i.e. les moments d'ordre un et deux). Dans ce contexte, il est préférable de procéder à des confrontations pour une même



microstructure (Rekik et al. [92]), pour éviter de combiner les approximations induites par le processus de linéarisation et celles associées au modèle utilisé pour approcher le comportement du MLC.

### 1.1.2 Quelques méthodes d'homogénéisation des composites à phases élasto-plastiques

Les modèles d'homogénéisation précédents sont limités à des comportements dérivant d'un seul potentiel. Ils sont inadaptés pour décrire des situations courantes dans lequel des constituants se déforment à la fois de manière élastique et plastique et pour lesquels il faut tenir compte de l'existence de deux potentiels. Dans ce travail, on se focalise en particulier sur l'homogénéisation de tels composites présentant de l'écroutissage cinématique, linéaire ou non linéaire, et éventuellement couplé avec de l'écroutissage isotrope. Le modèle de Hill [41] déjà évoqué brièvement dans le paragraphe précédent, initialement conçu pour aborder tout comportement élasto-plastique est en principe capable de décrire une telle situation. Toutefois, dans la littérature il existe peu de travaux traitant de composites élasto-plastiques avec de l'écroutissage cinématique notamment non linéaire. En particulier, Doghri et Ouaar [27] ont développé en 2003 des schémas d'homogénéisation et des algorithmes numériques pour des composites élasto-plastiques en se basant sur une formulation incrémentale initialement introduite par Hill. On remarquera que dans leur modèle, Doghri et Ouaar linéarisent autour des moments d'ordre un. Ces auteurs ont appliqué cette méthode, entre autre, au cas de composites constitués d'une matrice élasto-plastique avec des écroutissages cinématique non linéaire et isotrope combinés renforcée par des particules sphériques élastiques qu'ils ont soumis à une traction uni-axiale cyclique.

Plus récemment, Wu et al. [105] [104] ont développé un nouveau schéma d'homogénéisation incrémental, non dérivé de celui de Hill, pour des composites élasto-(visco)plastiques qui est basé sur des tenseurs sécants incrémentaux, homogènes par phase et évalués en prenant en compte la contrainte résiduelle et le champ des déformations. Dans leur version initiale [105] ces auteurs ont linéarisé le comportement autour des moments d'ordre un des champs locaux alors que dans leur seconde version [104] ils ont utilisé les seconds moments. Plus récemment, Mercier et al. [67] ont étendu leur procédure de linéarisation dite tangente (Molinari et al. [78]) disponible pour les composites élasto-viscoplastiques (Mercier et Molinari [68]) avec des écroutissages cinématique linéaire et isotrope combinés. A nouveau dans cette méthode, la linéarisation s'effectue autour des moments d'ordre un des champs locaux.

L'ensemble de ces modèles peut être classé parmi les méthodes dites classiques d'homogénéisation, c'est-à-dire résultant d'une linéarisation du comportement à l'échelle des phases autour de valeurs de références correspondant la plupart du temps à l'état moyen de déformation ou de contrainte dans les phases. Il est naturel de se poser la question d'une formulation variationnelle pour les composites dont le comportement dérive de deux potentiels et dont on peut espérer une

meilleure estimation du comportement effectif et de la réponse locale, notamment au travers de la prise en compte des fluctuations des champs locaux. De telles méthodes ont effectivement été introduites dans le cadre de l'homogénéisation de composites élasto-viscoplastiques il y a une quinzaine d'années et leur présentation fait l'objet de la partie suivante.

### 1.1.3 Méthodes basées sur une approche variationnelle incrémentale

En 1986, Mialon [69] est le premier à proposer un principe variationnel proche de ceux que l'on utilise dans cette thèse. Il applique ce principe aux cas de structures constituées de matériaux élasto-plastiques dont le comportement est régi par deux potentiels. Plus tard, Ortiz et Stainier [85] ont proposé un autre principe variationnel, similaire à celui de Mialon, mais dans le cadre des matériaux élasto-viscoplastiques. Ces principes ont été utilisés pour d'autres applications comme par exemple la modélisation de la formation de microstructure dans les matériaux élasto-plastiques par Ortiz et al. [84] ou des problèmes d'homogénéisation non linéaires par Miehe [76] et Miehe et al. [77]. Lahellec et Suquet, [57] et [59], ont développé deux schémas d'homogénéisation reposant sur ces principes variationnels qui seront présentés ci-après.

En 2007, Lahellec et Suquet [56, 57] ont ouvert une nouvelle voie de recherche en homogénéisation des comportements non linéaires régis par deux potentiels en proposant une approche variationnelle incrémentale pour des composites non linéaires. Le principe variationnel local de Lahellec et Suquet repose sur l'introduction d'un potentiel unique, le potentiel incrémental condensé, qui comprend les effets à la fois conservatifs et dissipatifs du comportement du composite. Ce potentiel est construit comme la somme des deux potentiels qui définissent le comportement local dans le cadre des MSG, à savoir l'énergie libre et le potentiel de dissipation. A partir de leur principe variationnel local, Lahellec et Suquet obtiennent un principe variationnel incrémental macroscopique permettant d'estimer les réponses de composites ayant un comportement héréditaire. Ce nouveau principe variationnel permet d'étendre la plupart des méthodes développées dans le cadre des composites régis par un seul potentiel aux composites dont les phases sont régies par deux potentiels. Partant de cette constatation, Lahellec et Suquet [56, 57] ont appliqué l'idée principale de la procédure variationnelle introduite par Ponte Castañeda [86] à leur nouveau principe variationnel incrémental macroscopique pour estimer le comportement de composites non linéaires constitués de phases élasto-viscoplastiques. Pour cela, ils ont utilisé deux approximations. Le comportement de chaque phase constitutive est linéarisé en introduisant une viscosité sécante uniforme par phase à travers la procédure variationnelle. De plus, les déformations plastiques hétérogènes au temps  $t_n$  sont approchées par une variable interne homogène effective dans chaque phase. Ces deux approximations conduisent à la définition d'un MLC thermo-élastique (Ponte Castañeda [86]) dont le comportement effectif peut ensuite être obtenu à l'aide de tout schéma d'homogénéisation linéaire approprié pour la microstructure considérée. Cette procédure, appelée *Effective Internal Variables* (EIV), a été appliquée pour la première fois aux composites élasto-viscoplastiques non linéaires sans seuil ni écrouissage et a conduit à

des estimations précises du comportement macroscopique dans le cas de comportements non linéaires. Pour le cas des composites visco-élastiques linéaires, on constate néanmoins que la formulation EIV sous-estime significativement la solution de référence obtenue par des calculs en champs complets.

La même année, Lahellec et Suquet [58] ont utilisé un autre schéma de linéarisation afin de traiter la non linéarité du composite. Ils ont proposé une version modifiée de la méthode du second ordre (Ponte Castañeda [88]) en l'appliquant au potentiel de dissipation, ce qui conduit à remplacer, à chaque pas de temps, le composite visco-élastique non linéaire par un composite visco-élastique linéaire. Cette méthode consiste à réaliser pour le potentiel de dissipation un développement de Taylor à l'ordre 3 (alors que la méthode du second-ordre de Ponte Castañeda s'arrête à l'ordre deux) et d'introduire un paramètre ajustable dans le terme d'ordre 3 de telle sorte que l'approximation finale soit toujours un polynôme d'ordre 2. On observe que cette méthode initialement développée dans le cadre de composites à un seul potentiel (Lahellec et Suquet [55]) fournit de meilleures prédictions du comportement macroscopique que la formulation EIV associée à la méthode variationnelle de Ponte Castañeda. Néanmoins, cette formulation n'arrive pas à reproduire le comportement de composites soumis à un chargement tournant.

Afin de résoudre ce problème, Lahellec et Suquet [59] ont introduit de nouveaux principes variationnels incrémentaux en taux de déformation afin d'obtenir des estimations des réponses locales et globales des composites constitués de phases élasto-viscoplastiques avec des écrouissages cinématique linéaire et isotrope combinés. Leur nouvelle approche, appelée *Rate Variational Procedure* (RVP), repose encore sur deux approximations. La première consiste toujours à utiliser la procédure variationnelle pour linéariser les lois de comportement et fournir une approximation sécante du comportement. Pour la seconde approximation, à la différence de Lahellec et de Suquet [57], c'est désormais le champ de contrainte hétérogène (et non le champ de déformation plastique hétérogène) qui est approximé au temps  $t_n$  par des variables internes homogènes effectives dans chaque phase. Pour cela, ces auteurs utilisent une méthode similaire à celle proposée en 2011 par Lahellec et al. [54], qui est également basée sur la procédure variationnelle de Ponte Castañeda [86], mais qui repose sur une nouvelle définition du MLC avec des coefficients uniformes par phase dépendant des premiers et seconds moments du champ des contraintes. Les prédictions du modèle ainsi obtenues sont évaluées en effectuant des simulations par transformée de Fourier rapide (FFT) sur un matériau hétérogène constitué d'une matrice élasto-(visco)plastique renforcée de 50 particules sphériques élastiques isotropes distribuées de manière aléatoire et uniforme [59]. Un bon accord est observé entre les prédictions du modèle RVP et les simulations FFT pour une matrice parfaitement plastique ou une matrice élasto-plastique avec de l'écrouissage cinématique linéaire ou isotrope sous des chargements radiaux et non radiaux.

Brassart et al. [20, 21] ont proposé une procédure variationnelle incrémentale basée sur le même potentiel incrémental condensé  $J$  que celui introduit par Lahellec et Suquet dans leur formulation EIV [57]. On note toutefois que le potentiel  $J$  est optimisé de manière différente. En effet, Lahellec et Suquet ont procédé à une optimisation par rapport aux variables d'état  $\alpha$  alors que Brassart et al. l'ont optimisé par rapport à  $\mathbf{N}$  et  $\Delta p = p - p_n$ , où  $\mathbf{N}$  représente la direction de l'écoulement plastique et  $p$  représente la déformation plastique cumulée caractérisant l'écrouissage isotrope. Comme dans dans Lahellec [53], « on observe que la méthode repose sur la résolution d'un

problème élastique avec précontraintes présentant des fluctuations intraphases qui est simplifié en remplaçant dans l'expression de cette précontrainte la déformation plastique par sa moyenne dans le VER. Les prédictions de cette méthode pour les composites élasto-viscoplastiques renforcés par des particules se sont avérées raisonnablement précises, mais une dépendance au pas de temps a été observée pour le cas particulier des phases parfaitement plastiques ».

Récemment, Idiart et Lahellec [43], ont développé dans le cas de composites élasto-viscoplastiques sans écrouissage une nouvelle méthode variationnelle incrémentale, dite Effective Polarisation (EP), qui repose sur une nouvelle écriture de la polarisation du MLC introduit au cours de la linéarisation. Cette dernière est à nouveau basée sur les principes variationnels incrémentaux utilisés par la formulation RVP [59]. Néanmoins, à la différence des formulations EIV [57] et RVP, qui considèrent un MLC thermo-élastique à polarisation homogène au sein des phases, Idiart et Lahellec ont considéré un MLC à polarisation hétérogène intraphase plus sophistiqué. Cette nouvelle introduction d'un champ de polarisation hétérogène intraphase a permis d'obtenir des estimations précises du comportement macroscopique, notamment pour ce qui concerne la transition élasto-plastique et l'effet Bauschinger.

Parallèlement, Boudet et al. [17], en s'appuyant sur les principes variationnels initiaux développés par Lahellec et Suquet [57], ont étendu la formulation EIV aux composites élasto-(visco)plastiques avec des écrouissages isotrope. Les résultats obtenus par leur approche sont très proches de ceux fournis par le modèle RVP de Lahellec et Suquet [59]. On note également que Tressou et al. [100] (voir également Tressou [99]) ont aussi étendu la formulation EIV [57] dans le cadre de composites visco-élastiques ayant un comportement de Maxwell généralisé et en présence de couplage thermo-mécanique.

Enfin, Agoras et al. [1] ont proposé une formulation alternative au modèle RVP de Lahellec et Suquet [59] pour les composites élasto-viscoplastiques sans écrouissage. Leur procédure appelé *Incremental Variational Procedure* (IVP) consiste en une double application de la procédure variationnelle (Ponte Castañeda [86]) sur le potentiel incrémental condensé écrit en contrainte. La première application a pour but de linéariser le comportement local et conduit à un MLC avec des propriétés hétérogènes par phase, à savoir une déformation libre hétérogène au sein des phases. La deuxième application traite de ces hétérogénéités intraphases. A cette fin, les auteurs utilisent la méthode développée par Lahellec et al. [54] pour approximer le MLC à propriétés hétérogènes au sein des phases par un MLC à propriétés homogènes par phase. On remarquera que la principale différence entre cette nouvelle approche proposée par Agoras et al. [1] et celles de Lahellec et Suquet [57, 59] réside dans le fait que les deux principales difficultés du problème d'homogénéisation à résoudre, qui sont, d'une part, la linéarisation du comportement local, et d'autre part, la prise en compte de l'hétérogénéité intraphase du MLC introduits par les champs locaux au temps  $t_n$  (le champ de déformation plastique [57] ou le champ de contraintes [59]) sont traités séquentiellement par Agoras et al. [1] au lieu d'être traitées simultanément par Lahellec et Suquet [57, 59]. Un tel traitement permet de définir plus clairement les deux problèmes à résoudre et de les aborder de manière plus efficace et systématique. Ces auteurs ont appliqué leur approche aux composites constitués d'une matrice polymère ou métallique parfaitement plastique renforcée (ou adoucie) par des particules élastiques sphériques. Dans le cas de la matrice métallique idéalement plastique renforcée élastiquement, le modèle d'Agoras et

al. est en bon accord avec les simulations FFT de Lahellec et Suquet. Néanmoins, les contraintes moyennes dans les inclusions, ainsi que les fluctuations des contraintes au sein de la matrice, sont significativement surestimées, comme cela est également le cas pour la formulation RVP de Lahellec et Suquet et le modèle de Boudet et al. [17]. On notera par ailleurs que la formulation d'Agoras et al. similairement au modèle de Boudet et al. prévoit des fluctuations des contraintes nulles dans la matrice au moment de la recharge plastique, contrairement à ce qui est observé sur les simulations numériques FFT et reproduit par le modèle RVP.

On note qu'en 1992 une autre voie de recherche pour l'homogénéisation des composites élasto-viscoplastiques a été ouverte par Dvorak [29] avec la présentation de la méthode TFA (transformation field analysis) utilisée également par d'autres auteurs (Dvorak et al. [31], Dvorak [30] ou Fish et Shek [33]). Le principe de cette méthode est de simplifier le problème d'homogénéisation non linéaire en remplaçant le champ de variables internes  $\alpha$  par sa moyenne par phases ou sous-domaines. Ce principe s'est révélé plus tard être un cas particulier de la formulation EIV comme l'ont montré Lahellec et Suquet [57] dans leur annexe A. De même, Brassart et al. [20] ont montré que la méthode TFA est également un cas particulier de leur méthode variationnelle incrémentale qui repose sur le principe variationnel d'Ortiz et Stainier [85]. Par la suite, Michel et Suquet [72] [73] [74] ont proposé la méthode NTFA (nonuniform transformation field analysis) qui est une généralisation de la méthode TFA. Cette nouvelle méthode repose sur une décomposition du champ local de déformation plastique sur une base finie de fonctions de forme appelées modes plastiques, ces dernières étant choisies de manière judicieuse. On remarquera (Michel et Suquet [75]) que la NTFA peut être formulée dans un cadre s'appuyant sur les principes variationnels incrémentaux proposés par Lahellec et Suquet [57]. En 2013, Fritzen et Leuschner [35] proposent une version hybride de la méthode NTFA en se basant sur un principe variationnel différents. En effet, ces derniers obtiennent une représentation alternative du potentiel de dissipation  $\varphi$  en considérant la transformée de Legendre-Fenchel du potentiel de dissipation dual  $\varphi^*$ . On remarquera que l'utilisation de la transformée de Legendre-Fenchel conduit à l'introduction de deux inconnues supplémentaires qui s'apparentent à des forces thermodynamiques. Michel et Suquet [75] ont comparé ces deux méthodes (NTFA et NTFA hybride) dans le cas de composites constitués d'une matrice élasto-plastique et renforcée par des fibres courtes. Ce travail est une des rares contributions dans le domaine de l'homogénéisation où un écrouissage cinématique non linéaire a été considéré. La mise en œuvre numérique de ces méthodes a permis de retrouver très précisément les réponses macroscopique. L'effet Bauschinger a notamment pu être reproduit. Cependant la méthode NTFA s'est révélée nettement plus efficace sur le plan numérique par rapport à la NTFA hybride en réduisant de manière très significative le temps de calcul.

Ces méthodes font appel à une forte composante de résolution numérique sur une microstructure explicite. Les variables internes liées aux modes plastiques ne sont pas directement associées à des phases constitutives. Ces formulations diffèrent donc des approches classiques en champs moyens pour lesquelles la microstructure n'est jamais décrite en détail, les variables internes sont associées aux phases constitutives et les champs locaux sont décrits par leurs états moyens

par phases et complétés éventuellement par des quantités décrivant leurs fluctuations. Le travail présenté dans ce mémoire adoptera le second point de vue.

## 1.2 Cadre général de l'approche variationnelle incrémentale pour des matériaux composites

Tout au long de ce mémoire de thèse, nous faisons appel au principe variationnelle incrémental introduit par Lahelec et Suquet [57] pour décrire à l'aide d'un seul potentiel le comportement d'un composite dont les phases sont élasto-viscoplastiques. Dans ce qui suit, nous décrivons ce principe, ainsi que le cadre des MSG sur lequel il repose, et son application aux matériaux composites.

### 1.2.1 Cadre des matériaux standards généralisés et formulation incrémentale des lois constitutives

#### Matériaux standards généralisés

Un cadre approprié pour le développement de lois de comportement élasto-viscoplastiques est celui des Matériaux Standards Généralisés (MSG)<sup>1</sup> introduit par Halphen et Nguyen [39] en prenant appui sur les travaux de Moreau [46] auquel on doit l'hypothèse de dissipativité normale. Ce cadre requiert le choix de deux potentiels convexes dépendant des variables d'état (déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , variable interne  $\boldsymbol{\alpha}$ ) qui sont supposées caractériser totalement l'état de l'élément de matière auquel on s'intéresse.

Le premier potentiel convexe correspond à l'énergie libre  $w(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha})$ , d'où découlent les lois d'état donnant les forces thermodynamiques réversibles associées aux variables  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\alpha}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^{rev} = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) \\ \mathcal{A}_{\boldsymbol{\alpha}}^{rev} = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}). \end{cases} \quad (1.1)$$

La dissipation intrinsèque est donnée par

$$\mathcal{D}_1 = \left( \boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\alpha}} : \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \quad (1.2)$$

et s'écrit alors

$$\mathcal{D}_1 = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{rev}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathcal{A}_{\boldsymbol{\alpha}}^{rev} : \dot{\boldsymbol{\alpha}}. \quad (1.3)$$

---

1. Dans cette présentation on se limitera à des conditions isothermes.

qui se met sous la forme

$$\mathcal{D}_1 = \boldsymbol{\sigma}^{irr} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathcal{A}_\alpha^{irr} : \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \quad (1.4)$$

avec

$$\boldsymbol{\sigma}^{irr} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{rev} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_\alpha^{irr} = -\mathcal{A}_\alpha^{rev} = -\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}). \quad (1.5)$$

Les quantités  $\boldsymbol{\sigma}^{irr}$  et  $\mathcal{A}_\alpha^{irr}$  sont les forces thermodynamiques irréversibles associées à  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\alpha}$ , qui quantifient la dissipation de l'élément de matière en cas d'évolution des variables d'état.

Si l'on suppose la variable  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  non dissipative (comme par exemple pour les comportement non visqueux), il vient  $\boldsymbol{\sigma}^{irr} = \mathbf{0}$ , d'où

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{rev} = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}). \quad (1.6)$$

La dissipation n'est alors due qu'à l'évolution des variables internes. En résumé, le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  et la force thermodynamique irréversible  $\mathcal{A}_\alpha^{irr}$ , que l'on notera désormais  $\mathcal{A}_\alpha$ , associée à la variable interne  $\boldsymbol{\alpha}$  s'écrivent

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) \\ \mathcal{A}_\alpha = -\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}). \end{cases} \quad (1.7)$$

L'énergie libre  $w$  ne fournit aucune information sur l'évolution des variables internes. L'introduction d'un second potentiel dit de dissipation dépendant des taux d'évolution des variables internes  $\varphi(\dot{\boldsymbol{\alpha}})$  permet de formuler l'évolution du système, en garantissant le respect du second principe, à la condition que ce potentiel soit convexe, à valeur scalaire positive et nulle en  $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{0}$ . Ce potentiel de dissipation permet de fournir les lois complémentaires qui s'écrivent sous la forme

$$\mathcal{A}_\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\boldsymbol{\alpha}}}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}). \quad (1.8)$$

Cette expression, combinée aux propriétés de  $\varphi$ , assure par construction la positivité de la dissipation intrinsèque (1.2) et donc l'admissibilité de toute évolution écrite sous cette forme. On notera que dans le cas où le potentiel  $\varphi$  n'est pas différentiable, il convient de se référer à la notion de sous différentiel  $\partial\varphi$ . La loi constitutive se présente alors sous la forme (on dit que  $\mathcal{A}_\alpha$  appartient au sous différentiel de  $\varphi$  au point considéré)

$$\mathcal{A}_\alpha \in \partial\varphi(\dot{\boldsymbol{\alpha}}). \quad (1.9)$$

Les équations constitutives des MSG (1.7) et (1.8) se résument à :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}), \quad \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\boldsymbol{\alpha}}}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = 0. \quad (1.10)$$

La seconde équation dans (1.10) est connue sous le nom d'équation de Biot [10] qui l'avait introduite précisément dans un contexte de visco-élasticité.

**Remarque 1.** *Il est possible d'inverser la relation constitutive qui vient d'être présentée en introduisant le potentiel dual  $\varphi^*$  obtenu par transformée de Legendre-Fenchel de  $\varphi$  :*

$$\varphi^*(\mathcal{A}_\alpha) = \sup_{\dot{\alpha}} \{ \mathcal{A}_\alpha : \dot{\alpha} - \varphi(\dot{\alpha}) \}. \quad (1.11)$$

*Ceci-ci s'exprime comme une fonction des forces thermodynamiques irréversibles  $\mathcal{A}_\alpha$ . Les lois d'évolution s'expriment alors comme :*

$$\dot{\alpha} \in \partial\varphi^*(\mathcal{A}_\alpha). \quad (1.12)$$

*Dans le cas des comportements indépendant du temps on vérifie que  $\varphi^*$  s'écrit comme*

$$\varphi^*(\mathcal{A}_\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } F(\mathcal{A}_\alpha) \leq 0 \\ \infty & \text{sinon,} \end{cases} \quad (1.13)$$

*c'est à dire, comme la fonction indicatrice d'un domaine convexe  $\mathcal{C}$  défini par*

$$\mathcal{C} = \{ \mathcal{A}_\alpha / F(\mathcal{A}_\alpha) \leq 0 \}. \quad (1.14)$$

*En pratique,  $F$  représente la fonction de charge convexe. Dans ce cadre de formulation duale, la loi d'évolution (1.12) se traduit par la règle dite de normalité*

$$\dot{\alpha} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \mathcal{A}_\alpha}(\mathcal{A}_\alpha), \quad \text{avec } \lambda \geq 0, \quad F(\mathcal{A}_\alpha) \leq 0, \quad \lambda F = 0. \quad (1.15)$$

*Bien entendu, on peut revenir à  $\varphi$  en partant de  $\varphi^*$  (défini par  $F$ ), par transformée de Legendre-Fenchel :*

$$\varphi(\dot{\alpha}) = \sup_{\mathcal{A}_\alpha \in \mathcal{C}} \{ \mathcal{A}_\alpha : \dot{\alpha} - \varphi^*(\mathcal{A}_\alpha) \}. \quad (1.16)$$

## Potentiel incrémental

Dans le contexte des approches que nous développerons, nous nous appuyerons sur une formulation sur la formulation incrémentale des lois constitutives qui passent par une discrétisation de l'intervalle de temps de l'étude  $[0, T]$  en  $N$  pas de temps qui ne sont pas nécessairement de la même durée et caractérisés par l'ensemble  $\{t_0 = 0, t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_N = T\}$ . L'état initial du matériau à l'instant  $t = 0$  est connu et on cherche à calculer sa réponse à une histoire de chargement imposée sur l'intervalle  $[0, T]$ . Afin de simplifier les notations, la valeur  $f(t_n)$  de la fonction  $f$  au temps  $t_n$  sera notée  $f_n$  et l'on omettra l'indice  $n + 1$  pour les variables calculées au temps  $t_{n+1}$  (i.e.  $\varepsilon \equiv \varepsilon_{n+1}$ ). De plus, on définit l'incrément de temps  $\Delta t$  comme  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ . La discrétisation en temps selon un schéma d'Euler implicite de l'équation (1.10) conduit à l'équation suivante

$$\sigma = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \alpha), \quad \frac{\partial w}{\partial \alpha}(\varepsilon, \alpha) + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\alpha}} \left( \frac{\alpha - \alpha_n}{\Delta t} \right) = 0. \quad (1.17)$$



En suivant Lahelec et Suquet [57], on introduit ensuite le potentiel incrémental condensé  $w_\Delta$  et le potentiel incrémental  $J$ , de telle sorte que l'équation (1.17)<sub>2</sub> corresponde aux équations d'Euler-Lagrange fournissant la solution du problème variationnel suivant

$$\begin{cases} w_\Delta(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \inf_{\boldsymbol{\alpha}} J(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) & \text{avec} \\ J(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) = w(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) + \Delta t \varphi\left(\frac{\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_n}{\Delta t}\right). \end{cases} \quad (1.18)$$

On note que  $J$  dépend de  $\underline{x}$  à travers  $\boldsymbol{\alpha}_n$ . De plus, en conséquence de la condition d'infimum sur  $\boldsymbol{\alpha}$ , la contrainte en  $\underline{x}$  définie par (1.17)<sub>1</sub> est aussi obtenue par la dérivation du potentiel unique condensé  $w_\Delta$  selon

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \frac{\partial w_\Delta}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}). \quad (1.19)$$

Le comportement local se résume ainsi en une loi quasi-hyperélastique donnée par  $w_\Delta$ .

## 1.2.2 Matériaux composites non linéaires

### Problème local

On considère un Volume Élémentaire Représentatif (VER)  $\Omega$  d'un matériau composite non linéaire de  $N$ -phases avec  $\Omega^{(r)}$  le volume de la phase  $r$  ( $r = 1, \dots, N$ ) tel que  $\Omega = \cup_{r=1}^N \Omega^{(r)}$ . La fraction volumique de la phase  $r$  est notée  $c^{(r)}$  avec  $c^{(r)} = |\Omega^{(r)}|/|\Omega|$ . La distribution des phases est caractérisée par la fonction indicatrice  $\chi^{(r)}$  tel que

$$\chi^{(r)}(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \underline{x} \in \Omega^{(r)} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.20)$$

Chaque phase  $r$ , supposées de type standards généralisées, est gouvernée par les équations (1.10) appliquées aux potentiels  $w^{(r)}$  et  $\varphi^{(r)}$ . L'énergie libre  $w$  et le potentiel de dissipation  $\varphi$  à chaque position  $\underline{x} \in \Omega$  sont donnés par

$$w(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{r=1}^N w^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) \chi^{(r)}(\underline{x}) \quad \text{et} \quad \varphi(\underline{x}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \sum_{r=1}^N \varphi^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}) \chi^{(r)}(\underline{x}). \quad (1.21)$$

Le VER  $\Omega$  est soumis à une histoire de chargement en déformation macroscopique  $\boldsymbol{E}(t)$  et le problème local qui détermine les champs locaux  $\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}, t)$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}, t)$  et  $\boldsymbol{\alpha}(\underline{x}, t)$  au sein du VER s'écrit

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}), & \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\boldsymbol{\alpha}}}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = 0 \quad \forall (\underline{x}, t) \in \Omega \times [0, T] \\ \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad \forall (\underline{x}, t) \in \Omega \times [0, T] \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon}(t) \rangle = \boldsymbol{E}(t) + \text{Conditions aux Limites sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.22)$$

Les champs  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\alpha}$  dépendent de  $\underline{x}$  et  $t$ . Les crochets  $\langle \cdot \rangle$  représentent la moyenne spatiale sur  $\Omega$ . En supposant des conditions aux limites macrohomogènes, nous n'avons pas besoin de spécifier le détail de ces dernières.

La réponse effective ou macroscopique du composite le long du chargement en déformation macroscopique  $\mathbf{E}(t)$  est fourni par la contrainte macroscopique  $\boldsymbol{\Sigma}(t)$ , où  $\boldsymbol{\Sigma}(t) = \langle \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}, t) \rangle$ .

### Potentiel incrémental effectif

Grâce au principe variationnel (1.18) qui induit la relation (1.19), le problème local discrétisé permettant de déterminer les champs de contraintes et de déformations locaux dans le VER en fonction des conditions de chargements macroscopiques se présente sous la forme

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) = 0 & \forall(\underline{x}) \in \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \frac{\partial w_{\Delta}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) & \forall(\underline{x}) \in \Omega \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \rangle = \mathbf{E}_{n+1} + \text{Conditions aux Limites sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.23)$$

où

$$\begin{cases} w_{\Delta}(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \inf_{\boldsymbol{\alpha}} J(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) & \text{avec} \\ J(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{r=1}^N J^{(r)}(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) \chi^r(\underline{x}) & \text{et} \\ J^{(r)}(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) = w^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) + \Delta t \varphi^{(r)}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_n}{\Delta t}\right). \end{cases} \quad (1.24)$$

Une caractérisation variationnelle du problème local peut être obtenue en remarquant que le champ de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est solution du problème de minimisation de l'énergie potentielle suivant pour le composite

$$\inf_{\boldsymbol{\varepsilon}/\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}} \langle w_{\Delta}(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle = \inf_{\boldsymbol{\varepsilon}/\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}} \langle \inf_{\boldsymbol{\alpha}} J(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) \rangle. \quad (1.25)$$

En définissant le potentiel incrémental condensé effectif par

$$\tilde{w}_{\Delta}(\mathbf{E}) = \inf_{\boldsymbol{\varepsilon}/\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}} \langle w_{\Delta}(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle, \quad (1.26)$$

Lahellec et Suquet [59] ont montré, grâce à la relation  $\boldsymbol{\sigma} = \partial w_{\Delta} / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$  (Eq. (1.23)<sub>2</sub>) et le lemme de Hill, que la contrainte macroscopique  $\boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$  satisfait

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial \tilde{w}_{\Delta}}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}). \quad (1.27)$$

**Remarque 2.** Dans la relation (1.27), en accord avec la simplification des notations que nous avons adopté précédemment,  $\boldsymbol{\Sigma} \equiv \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}$  et  $\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}_{n+1}$ .

### Statistique des champs : notations

L'objectif de la méthode est de déterminer la contrainte macroscopique  $\Sigma(t)$  ainsi que les statistiques des champs locaux à tout instant  $t$  du chargement. Ces statistiques, que nous tracerons et comparerons à d'autres modèles ainsi qu'à des simulations en champs complets (FFT et EF), sont les premiers et seconds moments ainsi que les moyennes des fluctuations des champs sur les phases  $r$ .

On considère un tenseur  $\mathbf{a}$  d'ordre deux de trace non nulle. On notera  $a_m = \frac{1}{3}\text{tr}(\mathbf{a})$  la partie sphérique du tenseur  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{a}_d = \mathbf{a} - a_m \mathbf{I}$  sa partie déviatorique, avec  $\mathbf{I}$ , le tenseur identité d'ordre deux. On précise que du chapitre 2 au chapitre 6, aucune différence ne sera faite entre les tenseurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{a}_d$  du fait que l'on considère des matériaux dont la linéarité du comportement porte uniquement sur la partie déviatorique. Nous distinguerons la partie déviatorique et la partie sphérique des champs dans le chapitre 7.

Le premier moment de ce tenseur sur la phase  $r$  représente la moyenne spatiale sur cette phase et se note  $\langle \mathbf{a} \rangle^{(r)} = \bar{\mathbf{a}}^{(r)}$ .

Dans les méthodes d'homogénéisation, afin de caractériser des statistiques les champs, on recourt souvent aux moments d'ordre deux (voir par exemple Ortiz et Molinari [83], Kreher [47], Kreher et Molinari [48]), qui pour le tenseur  $\mathbf{a}_d$  sur la phase  $r$  s'écrit

$$\overline{\overline{\mathbf{a}_d}}^{(r)} = \sqrt{\iota \langle \mathbf{a}_d : \mathbf{a}_d \rangle^{(r)}}, \quad (1.28)$$

avec  $\iota = \frac{2}{3}$  si  $\mathbf{a}$  est une variable de déformation et  $\iota = \frac{3}{2}$  si  $\mathbf{a}$  est une variable force. De même, le second moment de  $a_m$  sur la phase  $r$  s'écrit

$$\overline{\overline{a_m}}^{(r)} = \sqrt{\langle (a_m)^2 \rangle^{(r)}}. \quad (1.29)$$

La dernière statistique des champs que nous analyserons est la moyenne par phase des fluctuations des champs que l'on notera  $C^{(r)}(\mathbf{a})$  et qui est défini comme

$$C^{(r)}(\mathbf{a}) = \langle (\mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}}^{(r)}) \otimes (\mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}}^{(r)}) \rangle^{(r)} = \langle \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \rangle^{(r)} - \bar{\mathbf{a}}^{(r)} \otimes \bar{\mathbf{a}}^{(r)}. \quad (1.30)$$

Maintenant que nous avons présenté les lois constitutives des MSG, ainsi que les principes variationnels incrémentaux, nous allons, dans ce qui suit, exposer les objectifs de la thèse ainsi que la structure de cette dernière.

## 1.3 Objectifs et structure du travail de thèse

Bien que des progrès très significatifs ont été réalisés ces dernières années dans le cadre des modèles d'homogénéisation en champs moyens pour des composites élasto-(visco)plastiques

avec ou sans écrouissage cinématique linéaire et/ou isotrope, il reste un certain nombre de problèmes à résoudre. En effet, on remarquera que les différents modèles développés donnent de bonnes prédictions des contraintes macroscopiques et locales dans la matrice mais surestiment significativement les contraintes dans l'inclusion ainsi que les fluctuations des contraintes dans la matrice. De plus, l'écrouissage cinématique qui est considéré dans la formulation RVP (Lahellec et Suquet [59]) conduit à davantage de complexité dans la constitution du modèle. On remarque aussi que la plupart des modèles se placent dans le cadre de composites constitués de phases élasto-(visco)plastiques avec des variables internes purement déviatoriques.

Ce mémoire a pour objectif de présenter une nouvelle formulation variationnelle incrémentale susceptible de parer pour partie à ces inconvénients et d'intégrer l'écrouissage cinématique non linéaire. Cette dernière, que l'on appellera DIV (Double Incremental Variational procedure), s'appuie sur la démarche variationnelle incrémentale initialement proposée par Lahellec et Suquet [57]. Dans ce cadre, on tire profit des travaux récents d'Agoras et al. [1] qui permettent de traiter de façon séquentielle la linéarisation et l'uniformisation du comportement local. Pour des composites élasto-viscoplastiques sans écrouissage, ces derniers auteurs ont adopté une approche duale basée sur des potentiels en contraintes. Dans cette thèse, on adopte une formulation primale (en déformation) où le traitement de la linéarisation et de l'uniformisation du comportement local se fait en deux étapes distinctes. On propose une approche variationnelle incrémentale pour des composites élasto-viscoplastiques dont les phases présentent de l'écrouissage cinématique (linéaire ou non linéaire) combiné à de l'écrouissage isotrope.

La structure du manuscrit s'articule de la façon suivante :

- Dans le chapitre 2, nous étudions les composites à phases visco-élastiques linéaires de type Maxwell. Les potentiels permettant la description du comportement local sont l'énergie libre  $w^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^v)$  et le potentiel de dissipation  $\varphi^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^v)$  qui dépendent de la variable interne  $\boldsymbol{\varepsilon}^v$  représentant la déformation visqueuse. Après une brève présentation de la formulation EIV développée par Lahellec et Suquet [57], nous développons notre modèle pour les composites visco-élastiques. Les potentiels locaux dans ce cas étant quadratiques, il n'est pas nécessaire de linéariser le comportement local par l'introduction d'un potentiel incrémental linéarisé. Nous analysons ensuite les différences entre la formulation EIV et notre modèle sur le plan théorique et numérique. Enfin nous comparons les prédictions de la formulation proposée à la formulation RVP et à des simulations FFT pour des composites visco-élastiques soumis à différents chargement afin d'analyser ses limites de validité.
- Dans le chapitre 3, nous présentons la formulation que nous proposons (la formulation DIV) dans le cadre de matériaux élasto-viscoplastiques avec des écrouissages cinématique linéaire et isotrope combinés. Les potentiels régissant le comportement de cette classe de matériaux se présentent sous la forme  $w^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, p)$  et  $\varphi^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{p})$  et sont associés aux variables internes  $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\varepsilon}^p, p)$  représentant respectivement la déformation viscoplastique et la déformation plastique cumulée décrivant l'écrouissage isotrope. On notera que l'écrouissage cinématique linéaire sera décrit à l'aide de  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ .

- Le chapitre 4 présente la mise en œuvre numérique du modèle exposée au chapitre 3 ainsi que les problèmes numériques rencontrés et les méthodes développées en vue de les résoudre. Les prédictions de la formulation DIV sont comparées à la formulation RVP et à des données FFT pour des composites soumis à un chargement radial et non radial (voir Lahellec et Suquet [59]). Pour ces comparaisons, les composites considérés sont constitués d'une matrice parfaitement plastique ou d'une matrice élasto-plastique avec de l'écroutissage cinématique linéaire ou isotrope renforcée par des particules sphériques élastiques. Dans ce contexte, la formulation DIV est comparée à d'autres résultats de la littérature tels que ceux de Brassart et al. [21] qui ont considéré une matrice élasto-plastique avec de l'écroutissage isotrope soumis à une traction uni-axiale. De nouveaux résultats pour des composites élasto-plastiques avec de l'écroutissage isotrope soumis à un chargement multi-cycles et pour des composites élasto-plastiques avec des écroutissages cinématique linéaire et isotrope combinés sont obtenus. Dans le cas d'une matrice élasto-viscoplastique avec ou sans seuil et sans écroutissage, les prédictions de la formulation DIV sont également comparées aux formulations RVP et EIV ainsi qu'à des résultats de simulations en champs complets.
- Dans le chapitre 5, nous étendrons l'approche DIV développée dans le chapitre 3 à des composites élasto-plastiques avec des écroutissages cinématique non linéaire et isotrope combinés. Dans ce contexte, différentes lois constitutives des phases ont été considérées : modèle de Chaboche modifié [25] et de Ladevèze [51], qui constituent des modifications de la loi d'Armstrong-Frederick [2] (cf. également Chaboche [23][24]). Les potentiels régissant le comportement de tels matériaux sont  $w^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\beta}, p)$  et  $\varphi^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \boldsymbol{\beta}, \dot{p}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\beta})$  où les variables internes  $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\beta}, p)$  représentent respectivement la déformation plastique, le tenseur caractérisant l'écroutissage cinématique et la déformation plastique cumulée.
- Le chapitre 6 présente la mise en œuvre numérique du modèle développé dans le chapitre 5 ainsi que les problèmes numériques rencontrés et les méthodes développées afin de les résoudre. Les prédictions de la formulation DIV pour les modèles de Chaboche modifié et de Ladevèze sont comparées à des simulations EF que nous avons réalisées. Après une analyse des prédictions pour différentes valeurs des variables d'écroutissage, nous présenterons les réponses prédites pour un chargement cyclique dans le cas de composites constitués d'une matrice élasto-plastique avec de l'écroutissage cinématique non linéaire. De plus, la formulation DIV sera comparée aux simulations de Doghri et Ouaar [27] qui ont considéré une matrice élasto-plastique avec de l'écroutissage cinématique non linéaire soumis à une traction uni-axiale. Enfin, nous comparons les prédictions des modèles de Ladevèze et de Chaboche modifié pour une matrice avec des écroutissages cinématique non linéaire et isotrope combinés soumis à chargement constitué d'un ou plusieurs cycles.
- Au chapitre 7, et à la différence des précédents, nous nous intéressons à des composites dont les phases sont plastiquement compressibles ( $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^p) \neq 0$ ) et régies par un critère de Green. Dans ce contexte, le potentiel incrémental condensé rendant compte de la déformation plastique volumique est d'abord présenté puis le modèle développé selon l'approche DIV. Une première évaluation de ce modèle est exposée. Dans la lignée des

---

travaux décrits dans ce chapitre, on présentera en annexe C une autre extension de la formulation DIV pour des composites constitués d'une matrice élasto-plastique obéissant à un critère de plasticité de Drucker-Prager. Toutefois, en raison de certains problèmes numériques rencontrés, la mise en œuvre numérique de ce modèle n'a pas pu être encore achevée, ce qui justifie qu'il soit exposé en annexe.



## Composites visco-élastiques linéaires

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Brève présentation de la formulation EIV (Lahellec et Suquet [56, 57]) pour des composites visco-élastiques linéaires . . . . .</b>	<b>32</b>
2.1.1	Procédure variationnelle . . . . .	32
2.1.2	Résolution des conditions de stationnarité . . . . .	33
<b>2.2</b>	<b>Modèle proposé . . . . .</b>	<b>37</b>
2.2.1	Obtention d'un Milieu Linéaire de Comparaison (MLC) à polarisation hétérogène intraphase . . . . .	37
2.2.2	Uniformisation du comportement local . . . . .	38
2.2.3	Cas d'une matrice visco-élastique renforcée par des particules élastiques	41
2.2.4	Mise en œuvre numérique . . . . .	44
<b>2.3</b>	<b>Comparaison du modèle avec la formulation EIV . . . . .</b>	<b>45</b>
2.3.1	Différences théoriques entre les deux formulations . . . . .	45
2.3.2	Comparaison des prédictions des deux formulations . . . . .	48
<b>2.4</b>	<b>Comparaison du modèle à la formulation RVP (Lahellec et Suquet [59]) .</b>	<b>50</b>
<b>2.5</b>	<b>Conclusions . . . . .</b>	<b>53</b>

---

Dans ce chapitre, en s'appuyant sur la procédure EIV proposée par Lahellec et Suquet [56, 57], nous développons un modèle variationnel incrémental pour des composites linéaires dont les constituants obéissent à une loi de comportement local visco-élastique linéaire de type Maxwell. Après avoir introduit les lois locales ainsi que les principes variationnels incrémentaux local et global dans le cadre des MSG, nous effectuons une brève présentation de la formulation EIV. Dans un second temps, nous développons le modèle proposé dans le cadre de composites à phases visco-élastiques linéaires de type Maxwell. Après une résolution des conditions de stationnarité, nous obtenons un MLC  $w_{\Delta}$  à polarisation hétérogène intraphase. En faisant appel à la procédure de Lahellec et al. [54], nous avons approché ce MLC hétérogène par un MLC  $w_0$  à polarisation homogène par phase. Ce dernier peut alors être homogénéisé en tirant profit des bornes de Hashin et Shtrikman. Le modèle ainsi construit a d'abord été comparé sur le plan théorique à celui de la formulation EIV. En effet, bien que notre modèle s'appuie sur cette formulation, l'uniformisation



du comportement (c'est à dire l'obtention d'un MLC à polarisation homogène par phase) est traitée de façon différente entre les deux modèles. Alors que Lahellec et Suquet [57] ont traité l'uniformisation du comportement en introduisant des variables internes effectives (EIV) dans le potentiel homogène  $J_0$ , nous avons traité l'uniformisation du comportement en faisant appel à la procédure de Lahellec et al. [54]. Le chapitre s'achève sur une analyse comparative des prédictions numériques des deux modèles.

## 2.1 Brève présentation de la formulation EIV (Lahellec et Suquet [56, 57]) pour des composites visco-élastiques linéaires

On applique ici les principes variationnels présentés dans la partie 1.2 dans le cadre de matériaux visco-élastiques linéaires de type Maxwell. La variable interne est alors  $\varepsilon^v$  représentant la déformation visqueuse.  $\varepsilon^v$  est un tenseur d'ordre deux de trace nulle. On peut alors écrire l'énergie libre sous la forme

$$w^{(r)}(\varepsilon, \varepsilon^v) = \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon^v) : \mathbb{L}^{(r)} : (\varepsilon - \varepsilon^v), \quad (2.1)$$

ce qui permet d'obtenir les lois d'état associées

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\partial w^{(r)}}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \varepsilon^v) = \mathbb{L}^{(r)} : (\varepsilon - \varepsilon^v) \\ \mathcal{A}_{\varepsilon^v} = -\frac{\partial w^{(r)}}{\partial \varepsilon^v}(\varepsilon, \varepsilon^v) = \mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)} : (\varepsilon - \varepsilon^v) = \sigma_d, \end{cases} \quad (2.2)$$

où  $\sigma_d$  représente la partie déviatorique de  $\sigma$ . Le second potentiel, est le potentiel de dissipation qui s'écrit

$$\varphi^{(r)}(\dot{\varepsilon}^v) = \eta^{(r)} \dot{\varepsilon}^v : \dot{\varepsilon}^v, \quad (2.3)$$

où  $\eta^{(r)}$  est la viscosité de la phase  $r$ . La loi d'évolution (1.8) est alors donnée par

$$\mathcal{A}_{\varepsilon^v} = \frac{\partial \varphi^{(r)}}{\partial \dot{\varepsilon}^v}(\dot{\varepsilon}^v) = \eta^{(r)} \dot{\varepsilon}^v. \quad (2.4)$$

### 2.1.1 Procédure variationnelle

Afin d'évaluer le potentiel incrémental condensé effectif  $\tilde{w}_\Delta$ , Lahellec et Suquet se sont basés sur la procédure variationnelle introduite par Ponte Castañeda [86] pour les composites non linéaires. Pour cela, ils ont approché le potentiel incrémental  $J$  par un potentiel incrémental

quadratique  $J_0$  de la forme

$$\begin{cases} J_0(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^v) = \sum_{r=1}^N J_0^{(r)}(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^v) \chi^r(\underline{x}) & \text{et} \\ J_0^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^v) = w^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) + \frac{\eta_0^{(r)}}{\Delta t} (\boldsymbol{\varepsilon}^v - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{v(r)}) : (\boldsymbol{\varepsilon}^v - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{v(r)}), \end{cases} \quad (2.5)$$

où  $\eta_0^{(r)}$  est une viscosité uniforme par phase et  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^{v(r)}$  un tenseur d'ordre deux aussi uniforme par phase. L'idée principale de la procédure variationnelle consiste à ajouter et à soustraire au potentiel  $J$  le potentiel  $J_0$ , i.e.  $J = J_0 + J - J_0$ , de sorte que, d'une part, le premier terme  $J_0$  puisse être homogénéisé par les méthodes d'homogénéisation linéaires classiques du fait de sa forme quadratique, et d'autre part, la différence  $J - J_0$  soit toujours estimable de manière semis-analytique. La différence  $\Delta J = J - J_0$  des potentiels s'écrit alors

$$\begin{cases} \Delta J(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}^v) = \sum_{r=1}^N \Delta J^{(r)}(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}^v) \chi^r(\underline{x}) & \text{et} \\ \Delta J^{(r)}(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}^v) = \Delta t \varphi^{(r)} \left( \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^v - \boldsymbol{\varepsilon}_n^v}{\Delta t} \right) - \frac{\eta_0^{(r)}}{\Delta t} (\boldsymbol{\varepsilon}^v - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{v(r)}) : (\boldsymbol{\varepsilon}^v - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{v(r)}). \end{cases} \quad (2.6)$$

L'équation (1.26) peut alors se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} \tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) &= \inf_{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}} \left[ \inf_{\boldsymbol{\varepsilon}^v} \langle J_0(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^v) + \Delta J(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}^v) \rangle \right] \\ &\leq \inf_{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}} \left[ \inf_{\boldsymbol{\varepsilon}^v} \langle J_0(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^v) \rangle + \left\langle \sup_{\boldsymbol{\varepsilon}^v} \Delta J(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}^v) \right\rangle \right]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

La dernière expression de cette équation, où l'on considère le supremum sur  $\Delta J$  par rapport à  $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ , représente une borne supérieure de  $\tilde{w}_\Delta$ . Comme l'ont montré Lahellec et Suquet [56] [57], cette borne supérieure peut être trop forte dans certains cas. Ponte Castañeda et Willis [91] et Ponte Castañeda [89] ont observé pour des situations similaires, que cette condition de supériorité peut être relaxée en la remplaçant par une condition de stationnarité. L'équation (2.7) devient alors

$$\tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) \approx \inf_{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}} \left[ \inf_{\boldsymbol{\varepsilon}^v} \langle J_0(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^v) \rangle + \left\langle \text{stat} \Delta J(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}^v) \right\rangle \right]. \quad (2.8)$$

## 2.1.2 Résolution des conditions de stationnarité

Dans cette section, nous développons les différentes conditions de stationnarité présentes dans l'équation (2.8).

### Stationnarité de $\Delta J$ par rapport à $\varepsilon^v$

La condition de stationnarité de  $\Delta J$  (2.6) par rapport à  $\varepsilon^v$  pour  $\varphi^{(r)}$  quadratique donnée par l'équation (2.3) conduit à l'égalité

$$2\eta^{(r)}\frac{\varepsilon^v - \varepsilon_n^v}{\Delta t} = 2\eta_0^{(r)}\frac{\varepsilon^v - \varepsilon_n^{v(r)}}{\Delta t}. \quad (2.9)$$

On obtient alors une expression de  $\varepsilon^v$  sous la forme

$$\varepsilon^v = \frac{\eta^{(r)}\varepsilon_n^v - \eta_0^{(r)}\varepsilon_n^{v(r)}}{\eta^{(r)} - \eta_0^{(r)}}. \quad (2.10)$$

En reportant cette expression dans le dernier terme de (2.8), on peut alors réécrire  $\tilde{w}_\Delta$  sous la forme

$$\tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) \approx \inf_{\langle \varepsilon \rangle = \mathbf{E}} \left[ \inf_{\varepsilon^v} \langle J_0(\varepsilon, \varepsilon^v) \rangle \right] + \sum_{r=1}^N c^{(r)} \left\langle \frac{\eta^{(r)}\eta_0^{(r)}}{\Delta t (\eta_0^{(r)} - \eta^{(r)})} (\varepsilon_n^v - \varepsilon_n^{v(r)}) : (\varepsilon_n^v - \varepsilon_n^{v(r)}) \right\rangle^{(r)}. \quad (2.11)$$

On remarquera qu'à ce stade  $\eta_0^{(r)}$  et  $\varepsilon_n^{v(r)}$  sont toujours indéterminés. L'objectif maintenant est de développer les conditions de stationnarité par rapport à ces variables afin d'en obtenir leurs expressions.

### Détermination de $\eta_0^{(r)}$ et de $\varepsilon_n^{v(r)}$

On observe dans l'équation (2.5) que  $J_0$  dépend de  $\eta_0^{(r)}$  et de  $\varepsilon_n^{v(r)}$ . Ceci implique que pour obtenir les expressions de ces deux inconnues, on peut optimiser l'estimation (2.11) en fonction de ces dernières.

La stationnarité de (2.11) en fonction de  $\eta_0^{(r)}$ , conduit à

$$\frac{\eta_0^{(r)}}{\eta^{(r)}} = 1 \pm \sqrt{\frac{\left\langle (\varepsilon_n^v - \varepsilon_n^{v(r)}) : (\varepsilon_n^v - \varepsilon_n^{v(r)}) \right\rangle^{(r)}}{\left\langle (\varepsilon^v - \varepsilon_n^{v(r)}) : (\varepsilon^v - \varepsilon_n^{v(r)}) \right\rangle^{(r)}}}. \quad (2.12)$$

De plus, d'après l'expression de  $\varepsilon^v$  calculée précédemment (cf. Eq. (2.10)), on a

$$\varepsilon^v - \varepsilon_n^{v(r)} = \frac{\varepsilon_n^v - \varepsilon_n^{v(r)}}{1 - \eta_0^{(r)}/\eta^{(r)}}. \quad (2.13)$$

Ceci implique, en considérant la définition (1.30) de  $C^{(r)}$ , que

$$\mathbb{K} :: C^{(r)}(\varepsilon^v) = \frac{\left\langle (\varepsilon_n^v - \varepsilon_n^{v(r)}) : (\varepsilon_n^v - \varepsilon_n^{v(r)}) \right\rangle^{(r)}}{\left(1 - \eta_0^{(r)}/\eta^{(r)}\right)^2} = \frac{\mathbb{K} :: C^{(r)}(\varepsilon_n^v)}{\left(1 - \eta_0^{(r)}/\eta^{(r)}\right)^2}, \quad (2.14)$$

où  $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$  représente le projecteur déviatorique isotrope d'ordre quatre,  $\mathbb{I}$  étant le tenseur identité d'ordre quatre et  $\mathbb{J}$  le projecteur sphérique isotrope d'ordre quatre dont les expressions sont respectivement  $\mathbb{I}_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$  et  $\mathbb{J} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}$ .

La première égalité est obtenue en remplaçant  $\boldsymbol{\varepsilon}^v - \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{v(r)}$  dans la définition de  $C^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}^v)$  par son expression calculé en (2.13). Au final, d'après (2.14), (2.12) se réécrit sous la forme

$$\frac{\eta_0^{(r)}}{\eta^{(r)}} = 1 \pm \sqrt{\frac{\mathbb{K} :: C^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}_n^v)}{\mathbb{K} :: C^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}^v)}}. \quad (2.15)$$

De même, la condition de stationnarité de  $\tilde{w}_\Delta$  en fonction de  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^{v(r)}$  conduit à

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n^{v(r)} = \frac{\eta^{(r)} \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^{v(r)} + \left(\eta_0^{(r)} - \eta^{(r)}\right) \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{v(r)}}{\eta_0^{(r)}}. \quad (2.16)$$

Puisque  $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^v) = 0$ , la relation (2.16) montre que  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^{v(r)}$  est aussi de trace nulle. De part la relation

$$\mathbb{K} :: C^{(r)}(\mathbf{a}) = \left(\overline{\mathbf{a}}^{(r)}\right)^2 - \left(\overline{a_{eq}}^{(r)}\right)^2, \quad (2.17)$$

où  $\mathbf{a}$  est un tenseur d'ordre deux de trace nulle, les relations (2.15) et (2.16) montrent que les deux inconnues  $\eta_0^{(r)}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^{v(r)}$  dépendent uniquement des moments d'ordre un et deux de  $\boldsymbol{\varepsilon}^v$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^v$  sur les phases  $r$ .

### Minimisation de $J_0$

Une fois les variables  $\eta_0^{(r)}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^{v(r)}$  déterminées (cf. Eq. (2.15) et (2.16)), le potentiel incrémental  $J_0$  est complètement connu et peut être minimisé. La minimisation par rapport à  $\boldsymbol{\varepsilon}^v$  fournit une expression analytique du champ  $\boldsymbol{\varepsilon}^v$

$$\frac{\partial J_0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^v}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^v) = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^v = \left[ \mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)} + 2 \frac{\eta_0^{(r)}}{\Delta t} \mathbb{K} \right]^{-1} : \left[ \mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)} : \boldsymbol{\varepsilon} + 2 \frac{\eta_0^{(r)}}{\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_n^{v(r)} \right]. \quad (2.18)$$

En reportant cette expression de  $\boldsymbol{\varepsilon}^v$  dans l'expression (2.5) de  $J_0$ , on obtient un MLC thermo-élastique à propriétés homogènes par phase de la forme

$$w_0^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \inf_{\boldsymbol{\varepsilon}^v} J_0^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^v) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{L}_0^{(r)} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\tau}_0^{(r)} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} f_0^{(r)}, \quad (2.19)$$

avec

$$\begin{cases} \mathbb{L}_0^{(r)} = \mathbb{L}^{(r)} : \mathbb{J} + 2 \frac{\eta_0^{(r)}}{\Delta t} \left[ \mathbb{L}^{(r)} : \mathbb{K} + 2 \frac{\eta_0^{(r)}}{\Delta t} \mathbb{K} \right]^{-1} : \mathbb{L}^{(r)} \\ \boldsymbol{\tau}_0^{(r)} = -\mathbb{L}_0^{(r)} : \boldsymbol{\varepsilon}_n^{v(r)} \\ f_0^{(r)} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^{v(r)} : \mathbb{L}_0^{(r)} : \boldsymbol{\varepsilon}_n^{v(r)}. \end{cases} \quad (2.20)$$

L'approximation (2.11) s'exprime alors sous la forme

$$\tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) \approx \tilde{w}_0(\mathbf{E}) + \sum_{r=1}^N c^{(r)} \left\langle \frac{\eta^{(r)} \eta_0^{(r)}}{\Delta t (\eta_0^{(r)} - \eta^{(r)})} (\boldsymbol{\varepsilon}_n^v - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{v(r)}) : (\boldsymbol{\varepsilon}_n^v - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{v(r)}) \right\rangle^{(r)}, \quad (2.21)$$

où  $\tilde{w}_0$  est l'énergie libre effective du MLC homogène définie comme

$$\tilde{w}_0 = \inf_{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}} \langle w_0(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle. \quad (2.22)$$

On détermine alors, à partir de (2.21), la contrainte effective  $\boldsymbol{\Sigma}$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial \tilde{w}_\Delta}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}) \approx \frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}), \quad (2.23)$$

les autres termes de la dérivation s'annulant en raison des conditions de stationnarité sur  $\eta_0^{(r)}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^{v(r)}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ .

On déduit de l'expression (2.19) de  $w_0$ , l'expression de la contrainte locale au sein du MLC

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial w_0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbb{L}_0^{(r)} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\tau}_0^{(r)}. \quad (2.24)$$

On suppose par ailleurs que les phases sont isotropes, d'où  $\mathbb{L}^{(r)} = 3k^{(r)}\mathbb{J} + 2\mu^{(r)}\mathbb{K}$ . Comme nous le considèrerons dans la partie 2.2.2, du fait de l'isotropie du comportement des phases, les modules d'élasticités du MLC  $w_0$  sont eux aussi choisis isotropes (cf. (2.54)). La contrainte déviatorique  $\boldsymbol{\sigma}_d$  s'écrit alors

$$\boldsymbol{\sigma}_d = 2\mu_0^{(r)} \boldsymbol{\varepsilon}^d + \boldsymbol{\tau}_0^{(r)}, \quad (2.25)$$

avec

$$\mu_0^{(r)} = \frac{\mu^{(r)} \eta_0^{(r)}}{\mu^{(r)} \Delta t + \eta_0^{(r)}} \quad (2.26)$$

et

$$\boldsymbol{\tau}_0^{(r)} = -2\mu_0^{(r)} \boldsymbol{\varepsilon}_n^{v(r)}, \quad (2.27)$$

où, rappelons le,  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^{v(r)}$  est de trace nulle. Ces deux dernières expressions se déduisent respectivement des équations (2.20)<sub>1</sub> et (2.20)<sub>2</sub>. Sous la condition d'isotropie des phases, la déformation visqueuse (2.18) s'écrit

$$\boldsymbol{\varepsilon}^v = \frac{\mu^{(r)} \boldsymbol{\varepsilon}^d + \frac{\eta_0^{(r)}}{\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_n^{v(r)}}{\mu^{(r)} + \frac{\eta_0^{(r)}}{\Delta t}}. \quad (2.28)$$

**Remarque 3.** On remarquera qu'en visco-élasticité linéaire, du fait de l'équation (2.3) définissant le potentiel de dissipation, le potentiel  $J$  (cf. Eq. (1.24)<sub>2,3</sub>) est quadratique en  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\alpha}$ . Cependant, il dépend de plus de la variable  $\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\varepsilon}_n^v$  qui est hétérogène au sein des phases. Pour traiter cette hétérogénéité, Lahellec et Suquet ont introduit un potentiel quadratique  $J_0$  défini à partir de variables internes effectives  $\eta_0^{(r)}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^{v(r)}$  (cf. Eq. (2.5)). Dans ce qui suit, nous faisons le choix de travailler directement avec le potentiel quadratique  $J$  et de traiter l'hétérogénéité de ce dernier (introduit par le champ  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^v(\underline{x})$ ) en faisant appel à la procédure de Lahellec et al. [54].

## 2.2 Modèle proposé

### 2.2.1 Obtention d'un Milieu Linéaire de Comparaison (MLC) à polarisation hétérogène intraphase

Rappelons que le comportement du composite est déjà linéaire ( $w^{(r)}$  (Eq. (2.1)) et  $\varphi^{(r)}$  (Eq. (2.3)) sont quadratiques), ce qui rend possible l'homogénéisation du composite sans avoir à passer par une étape de linéarisation. Le potentiel incrémental condensé  $J$  (1.24)<sub>2,3</sub> se met sous la forme

$$J^{(r)}(\underline{x}, \underline{\varepsilon}, \underline{\varepsilon}^v) = \frac{1}{2}(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^v) : \mathbb{L}^{(r)} : (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^v) + \frac{\eta^{(r)}}{\Delta t}(\underline{\varepsilon}^v - \underline{\varepsilon}_n^v) : (\underline{\varepsilon}^v - \underline{\varepsilon}_n^v). \quad (2.29)$$

Le potentiel incrémental local  $w_\Delta$  s'écrit alors

$$w_\Delta(\underline{\varepsilon}) = \inf_{\underline{\varepsilon}^v} J(\underline{x}, \underline{\varepsilon}, \underline{\varepsilon}^v), \quad (2.30)$$

avec  $J$  donné par (1.24)<sub>2</sub> et (2.29). La condition d'infimum sur  $J$  en fonction de  $\underline{\varepsilon}^v$  (2.30) donne

$$\frac{\partial J}{\partial \underline{\varepsilon}^v}(\underline{x}, \underline{\varepsilon}, \underline{\varepsilon}^v) = \mathbf{0} \Rightarrow -\mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)} : (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^v) + 2\frac{\eta^{(r)}}{\Delta t}(\underline{\varepsilon}^v - \underline{\varepsilon}_n^v) = \mathbf{0}. \quad (2.31)$$

On obtient alors une expression de la déformation visqueuse  $\underline{\varepsilon}^v$  sous la forme

$$\underline{\varepsilon}^v = \left[ \mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)} + 2\frac{\eta^{(r)}}{\Delta t}\mathbb{K} \right]^{-1} : \left[ \mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)} : \underline{\varepsilon} + 2\frac{\eta^{(r)}}{\Delta t}\underline{\varepsilon}_n^v \right]. \quad (2.32)$$

On note, en considérant (2.2)<sub>1</sub> que la condition d'infimum de (2.31) de  $J^{(r)}$  conduit à

$$\underline{\sigma}_d = 2\eta^{(r)}\dot{\underline{\varepsilon}}^v. \quad (2.33)$$

En reportant l'expression (2.32) de  $\underline{\varepsilon}^v$  dans la définition (2.29) de  $J^{(r)}$ , on obtient un Milieu Linéaire de Comparaison (MLC) thermo-élastique défini par l'énergie libre par phase  $w_\Delta^{(r)}$  tel que

$$w_\Delta^{(r)}(\underline{x}, \underline{\varepsilon}) = \inf_{\underline{\varepsilon}^v} J(\underline{x}, \underline{\varepsilon}, \underline{\varepsilon}^v) = \frac{1}{2}\underline{\varepsilon} : \mathbb{L}_\Delta^{(r)} : \underline{\varepsilon} + \underline{\tau}_\Delta^{(r)}(\underline{x}) : \underline{\varepsilon} + \frac{1}{2}f_\Delta^{(r)}(\underline{x}), \quad (2.34)$$

avec

$$\begin{cases} \mathbb{L}_\Delta^{(r)} = \mathbb{L}^{(r)} : \mathbb{J} + 2\frac{\eta^{(r)}}{\Delta t} \left[ \mathbb{L}^{(r)} : \mathbb{K} + 2\frac{\eta^{(r)}}{\Delta t}\mathbb{K} \right]^{-1} : \mathbb{L}^{(r)} \\ \underline{\tau}_\Delta^{(r)}(\underline{x}) = -\mathbb{L}_\Delta^{(r)} : \underline{\varepsilon}_n^v(\underline{x}) \\ f_\Delta^{(r)}(\underline{x}) = \underline{\varepsilon}_n^v(\underline{x}) : \mathbb{L}_\Delta^{(r)} : \underline{\varepsilon}_n^v(\underline{x}). \end{cases} \quad (2.35)$$

Une telle énergie correspond à un MLC avec des champs hétérogènes par phase, la polarisation  $\underline{\tau}_\Delta^{(r)}(\underline{x})$  et le scalaire  $f_\Delta^{(r)}(\underline{x})$ , qui dépendent de  $\underline{x}$  à travers  $\underline{\varepsilon}_n^v(\underline{x})$ .

On déduit alors de l'équation locale (1.19) associée à (2.34) et (2.35)

$$\underline{\sigma} = \frac{\partial w_\Delta^{(r)}}{\partial \underline{\varepsilon}}(\underline{\varepsilon}) = \mathbb{L}_\Delta^{(r)} : \underline{\varepsilon} + \underline{\tau}_\Delta^{(r)}. \quad (2.36)$$

## 2.2.2 Uniformisation du comportement local

### Procédure générale

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, le MLC  $w_\Delta$  correspond à un composite thermo-élastique à polarisation hétérogène intraphase. Bien que son comportement effectif peut être déterminé à l'aide de calculs numériques en champs complets, il ne peut être obtenu avec les schémas d'homogénéisation linéaires classiques car ces derniers ne peuvent être appliqués qu'à des composites thermo-élastiques avec des polarisations homogènes par phase. Une façon d'homogénéiser le MLC thermo-élastique hétérogène consiste à recourir à la méthode utilisée pour la TFA de Dvorak [29] en remplaçant la polarisation hétérogène  $\tau_\Delta^{(r)}(\underline{x})$  par un champ constant par phase. Néanmoins, la méthode TFA fournit des estimations trop raides du comportement effectif. Afin de traiter les hétérogénéités des polarisations, Lahellec et al. [54] ont proposé une nouvelle méthode basée sur la procédure variationnelle de Ponte Castañeda [87]. Cette méthode approxime l'énergie  $w_\Delta$  par une énergie  $w_0$  associée à un MLC ayant des polarisations  $\tau_0^{(r)}$  homogènes par phase et des tenseurs d'élasticités  $\mathbb{L}_0^{(r)}$  différents de  $\mathbb{L}_\Delta^{(r)}$ . Il devient alors possible d'obtenir le comportement effectif ainsi que les moyennes des champs par phase en faisant appel aux schémas d'homogénéisation linéaires classiques.

En appliquant l'idée principale de la procédure variationnelle de Ponte Castañeda [87], l'énergie libre  $w_\Delta^{(r)}$  se réécrit sous la forme

$$w_\Delta^{(r)}(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) = w_0^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \left[ w_\Delta^{(r)}(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) - w_0^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}) \right] = w_0^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \Delta w^{(r)}(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}), \quad (2.37)$$

où  $w_0$  correspond à l'énergie libre d'un MLC à polarisation homogène intraphase et définie comme

$$w_0(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \sum_{r=1}^N w_0^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}) \chi^{(r)}(\underline{x}), \quad \text{avec } w_0^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{L}_0^{(r)} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\tau}_0^{(r)} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} f_0^{(r)}. \quad (2.38)$$

A ce stade, on introduit la fonction  $V^{(r)}$  définie par

$$V^{(r)}(\underline{x}, \mathbb{L}_0^{(r)}, \boldsymbol{\tau}_0^{(r)}, f_0^{(r)}) = \text{stat}_e \left[ w_\Delta^{(r)}(\underline{x}, \mathbf{e}) - w_0^{(r)}(\mathbf{e}) \right]. \quad (2.39)$$

La condition de stationnarité permet d'obtenir un champ  $\hat{\mathbf{e}}_0^{(r)}(\underline{x})$  qui s'exprime comme

$$\hat{\mathbf{e}}_0^{(r)}(\underline{x}) = -(\Delta \mathbb{L}^{(r)})^{-1} : \Delta \boldsymbol{\tau}^{(r)}(\underline{x}), \quad (2.40)$$

avec  $\Delta \mathbb{L}^{(r)} = \mathbb{L}_\Delta^{(r)} - \mathbb{L}_0^{(r)}$  et  $\Delta \boldsymbol{\tau}^{(r)}(\underline{x}) = \boldsymbol{\tau}_\Delta^{(r)}(\underline{x}) - \boldsymbol{\tau}_0^{(r)}$ . En reportant l'expression de  $\hat{\mathbf{e}}_0^{(r)}(\underline{x})$  dans (2.39),  $V^{(r)}$  se réécrit sous la forme

$$V^{(r)}(\underline{x}, \mathbb{L}_0^{(r)}, \boldsymbol{\tau}_0^{(r)}, f_0^{(r)}) = -\frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\tau}^{(r)}(\underline{x}) : (\Delta \mathbb{L}^{(r)})^{-1} : \Delta \boldsymbol{\tau}^{(r)}(\underline{x}) + \frac{1}{2} \Delta f^{(r)}(\underline{x}), \quad (2.41)$$

avec  $\Delta f^{(r)}(\underline{x}) = f_{\Delta}^{(r)}(\underline{x}) - f_0^{(r)}$ . L'expression de  $w_{\Delta}^{(r)}$  exprimée à l'équation (2.37) peut être alors approchée par

$$w_{\Delta}^{(r)}(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \approx w_0^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}) + V^{(r)}\left(\underline{x}, \mathbb{L}_0^{(r)}, \boldsymbol{\tau}_0^{(r)}, f_0^{(r)}\right). \quad (2.42)$$

On note que cette approximation est une borne inférieure (resp. supérieure) lorsque  $\mathbb{L}_0^{(r)}$  satisfait  $\Delta \mathbb{L}^{(r)} \geq 0$  (resp.  $\Delta \mathbb{L}^{(r)} \leq 0$ ) [54]. Le comportement effectif est alors approché par

$$\tilde{w}_{\Delta}(\mathbf{E}) \approx \tilde{w}_0(\mathbf{E}) + \sum_{r=1}^N c^{(r)} \left\langle V^{(r)}\left(\cdot, \mathbb{L}_0^{(r)}, \boldsymbol{\tau}_0^{(r)}, f_0^{(r)}\right) \right\rangle^{(r)}, \quad (2.43)$$

avec

$$\tilde{w}_0(\mathbf{E}) = \inf_{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}} \langle w_0(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle, \quad (2.44)$$

En reportant (2.41) dans (2.43), et en rendant stationnaire le potentiel effectif par rapport aux tenseurs  $\mathbb{L}_0^{(r)}$ ,  $\boldsymbol{\tau}_0^{(r)}$  et  $f_0^{(r)}$ , on obtient

$$\tilde{w}_{\Delta}(\mathbf{E}) \approx \underset{\mathbb{L}_0^{(r)}, \boldsymbol{\tau}_0^{(r)}, f_0^{(r)}}{\text{stat}} \left\{ \tilde{w}_0(\mathbf{E}) - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N c^{(r)} \left[ \left\langle \Delta \boldsymbol{\tau}^{(r)}(\cdot) : (\Delta \mathbb{L}^{(r)})^{-1} : \Delta \boldsymbol{\tau}^{(r)}(\cdot) - \Delta f^{(r)}(\cdot) \right\rangle^{(r)} \right] \right\}. \quad (2.45)$$

On montre aisément que la condition de stationnarité en fonction de  $f_0^{(r)}$  est toujours satisfaite et ne dépend pas de  $f_0^{(r)}$ . Sa valeur peut alors être fixée à zéro. Les conditions de stationnarité en fonction de  $\boldsymbol{\tau}_0^{(r)}$  et  $\mathbb{L}_0^{(r)}$  donnent respectivement

$$\begin{aligned} \underset{\boldsymbol{\tau}_0^{(r)}}{\text{stat}} &\Rightarrow \langle \boldsymbol{\varepsilon}_0(\cdot) \rangle^{(r)} = - (\Delta \mathbb{L}^{(r)})^{-1} : \langle \Delta \boldsymbol{\tau}^{(r)}(\cdot) \rangle^{(r)}, \\ \underset{\mathbb{L}_0^{(r)}}{\text{stat}} &\Rightarrow \langle \boldsymbol{\varepsilon}_0(\cdot) \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_0(\cdot) \rangle^{(r)} = \langle \Delta \boldsymbol{\tau}^{(r)}(\cdot) \otimes \Delta \boldsymbol{\tau}^{(r)}(\cdot) \rangle^{(r)} :: \frac{\partial \left( \mathbb{L}_{\Delta}^{(r)} - \mathbb{L}_0^{(r)} \right)^{-1}}{\partial \mathbb{L}_0^{(r)}}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

où  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  correspond au champ de déformations dans le MLC défini par  $w_0^{(r)}$ . Grâce à la relation  $\frac{\partial \mathbb{A}^{-1}}{\partial \mathbb{A}} = -(\mathbb{A}^{-1} \otimes \mathbb{A}^{-1})$  (voir Lahelec et al. [54]), l'équation (2.46) peut être réécrite sous la forme

$$\begin{aligned} \langle \Delta \mathbb{L}^{(r)} : \boldsymbol{\varepsilon}_0(\cdot) \rangle^{(r)} &= - \langle \Delta \boldsymbol{\tau}^{(r)}(\cdot) \rangle^{(r)} \\ \langle (\Delta \mathbb{L}^{(r)} : \boldsymbol{\varepsilon}_0(\cdot)) \otimes (\Delta \mathbb{L}^{(r)} : \boldsymbol{\varepsilon}_0(\cdot)) \rangle^{(r)} &= \langle \Delta \boldsymbol{\tau}^{(r)}(\cdot) \otimes \Delta \boldsymbol{\tau}^{(r)}(\cdot) \rangle^{(r)}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

**Remarque 4.** Si l'on considère le cas d'un comportement élastique isotrope des phases ( $\mathbb{L}^{(r)} = 3k^{(r)}\mathbb{J} + 2\mu^{(r)}\mathbb{K}$ ), d'après l'équation (2.35), le tenseur  $\boldsymbol{\tau}_{\Delta}^{(r)}$  est alors purement déviatorique. Dans ce qui suit, nous supposons que la polarisation du MLC homogène  $\boldsymbol{\tau}_0^{(r)}$  est purement déviatorique. En conséquence,  $\Delta \boldsymbol{\tau}^{(r)}$  ainsi que  $\Delta \mathbb{L}^{(r)} : \boldsymbol{\varepsilon}_0$  sont aussi purement déviatoriques.

L'équation (2.47)<sub>1</sub> conduit à

$$\boldsymbol{\tau}_0^{(r)} = \left\langle \boldsymbol{\tau}_{\Delta}^{(r)}(\cdot) \right\rangle^{(r)} + \Delta \mathbb{L}^{(r)} : \langle \boldsymbol{\varepsilon}_0(\cdot) \rangle^{(r)} = \overline{\boldsymbol{\tau}}_{\Delta}^{(r)} + \left( \mathbb{L}_{\Delta}^{(r)} - \mathbb{L}_0^{(r)} \right) : \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_0^{(r)}, \quad (2.48)$$



où  $\bar{\mathbf{a}}^{(r)} = \langle \mathbf{a} \rangle^{(r)}$  représente la moyenne du champ  $\mathbf{a}(\underline{x})$  sur la phase  $r$ . On note que  $\overline{\tau_{\Delta}^{(r)}}$  peut facilement être obtenu à partir de  $\overline{\varepsilon_n^{(r)}}$ . En effet, l'équation (2.35) montre que la polarisation  $\tau_{\Delta}^{(r)}$  dépend linéairement de  $\varepsilon_n^v$ .

En faisant appel à (2.47)<sub>1</sub>, (2.47)<sub>2</sub> peut se réécrire comme

$$C^{(r)}(\Delta \mathbb{L}^{(r)} : \varepsilon_0) = C^{(r)}(\Delta \boldsymbol{\tau}^{(r)}), \quad (2.49)$$

où  $C^{(r)}(\mathbf{a})$  représente le tenseur des fluctuations du tenseur d'ordre deux  $\mathbf{a}$  sur la phase  $r$  défini par l'équation (1.30). L'équation (2.49) peut se réécrire sous la forme

$$\left(\mathbb{L}_{\Delta}^{(r)} - \mathbb{L}_0^{(r)}\right) : C^{(r)}(\varepsilon_0) : \left(\mathbb{L}_{\Delta}^{(r)} - \mathbb{L}_0^{(r)}\right) = C^{(r)}(\Delta \boldsymbol{\tau}^{(r)}) = C^{(r)}\left(\boldsymbol{\tau}_{\Delta}^{(r)}\right), \quad (2.50)$$

où la seconde égalité de l'équation (2.50) est obtenue en utilisant la propriété  $C^{(r)}\left(\boldsymbol{\tau}_{\Delta}^{(r)} - \boldsymbol{\tau}_0^{(r)}\right) = C^{(r)}\left(\boldsymbol{\tau}_{\Delta}^{(r)}\right)$  du fait de l'uniformité de  $\boldsymbol{\tau}_0^{(r)}$ .

Les équations (2.48) et (2.50) permettent de déterminer les expressions de  $\boldsymbol{\tau}_0^{(r)}$  et de  $\mathbb{L}_0^{(r)}$  une fois les moments d'ordre un et deux de  $\varepsilon_0$  connus. Ces deux moments, pour un composite thermo-élastique dont l'énergie libre par phase  $w_0^{(r)}$  est définie en (2.38), sont obtenus par les équations (A.3)<sub>1</sub> et (A.3)<sub>2</sub>.

Le comportement effectif du composite non linéaire peut être déterminé à partir de l'estimation (2.45) comme

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial \tilde{w}_{\Delta}}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}) \approx \frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}) = \tilde{\mathbb{L}}_0 : \mathbf{E} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_0. \quad (2.51)$$

Dans l'équation (2.51), l'approximation provient de la stationnarité de  $\tilde{w}_{\Delta}$  en fonction de  $\mathbb{L}_0^{(r)}$ ,  $\boldsymbol{\tau}_0^{(r)}$  et  $f_0^{(r)}$  (Eq. (2.45)) et la dernière égalité de l'expression (A.2) de l'énergie effective  $\tilde{w}_0$ . Les tenseurs  $\tilde{\mathbb{L}}_0$  et  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_0$  représentent respectivement le tenseur d'élasticité effectif et la polarisation effective du MLC  $w_0$ .

Du fait du principe variationnel local (1.24) et de la loi locale (1.19), les moments d'ordre un et deux des champs locaux du composite visco-élastique linéaire sont fournies par ceux du MLC à polarisation hétérogène intraphase  $w_{\Delta}$ . De plus, Lahellec et al. [54] ont montré que les moments d'ordre un et deux des champs locaux dans le MLC  $w_{\Delta}^{(r)}$  peuvent être approchés par ceux du MLC  $w_0^{(r)}$ . On a alors

$$\bar{\varepsilon}^{(r)} = \overline{\varepsilon_{\Delta}^{(r)}} \approx \overline{\varepsilon_0^{(r)}}, \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(r)} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{\Delta} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_{\Delta} \rangle^{(r)} \approx \langle \boldsymbol{\varepsilon}_0 \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_0 \rangle^{(r)}, \quad (2.52)$$

où  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\Delta}$  représentent respectivement les champs de déformations du composite non linéaire et du MLC  $w_{\Delta}$ . Les mêmes approximations sont considérées pour les moments d'ordre un et deux du champ de contraintes.

### Application à un composite visco-élastique linéaire à phases isotropes

On considère que le comportement des phases décrit dans la partie 1.2.1 est isotrope. En conséquence, le tenseur des modules élastiques s'écrit

$$\mathbb{L}^{(r)} = 3k^{(r)}\mathbb{J} + 2\mu^{(r)}\mathbb{K}. \quad (2.53)$$

Du fait de l'isotropie du comportement des phases et dans un souci de simplicité, les tenseurs des modules élastiques  $\mathbb{L}_0^{(r)}$  du MLC  $w_0^{(r)}$  sont choisis eux aussi isotropes

$$\mathbb{L}_0^{(r)} = 3k_0^{(r)}\mathbb{J} + 2\mu_0^{(r)}\mathbb{K}. \quad (2.54)$$

Comme expliqué dans la remarque 4, pour  $\tau_0^{(r)}$  choisi déviatorique,  $\Delta\mathbb{L}^{(r)} : \varepsilon_0$  est également purement déviatorique, ceci implique que  $k_{\Delta}^{(r)} = k_0^{(r)}$ . De plus, (2.35)<sub>1</sub> combinée à (2.53) conduit à  $k_{\Delta}^{(r)} = k^{(r)}$ . On a alors

$$k^{(r)} = k_{\Delta}^{(r)} = k_0^{(r)}. \quad (2.55)$$

Sous ces conditions, (2.35) se réécrit

$$\begin{cases} \mathbb{L}_{\Delta}^{(r)} = 3k_{\Delta}^{(r)}\mathbb{J} + 2\mu_{\Delta}^{(r)}\mathbb{K} = 3k^{(r)}\mathbb{J} + 2\frac{\mu^{(r)}\eta^{(r)}}{\mu^{(r)} + \frac{\eta^{(r)}}{\Delta t}}\mathbb{K} \\ \tau_{\Delta}^{(r)}(\underline{x}) = -2\mu_{\Delta}^{(r)}\varepsilon_n^v(\underline{x}) \\ f_{\Delta}^{(r)}(\underline{x}) = 2\mu_{\Delta}^{(r)}\varepsilon_n^v(\underline{x}) : \varepsilon_n^v(\underline{x}). \end{cases} \quad (2.56)$$

De la même manière, l'équation (2.32) devient

$$\varepsilon^v = \beta^{(r)}\varepsilon_d + \zeta^{(r)}\varepsilon_n^v \quad \text{avec} \quad \beta^{(r)} = \frac{\mu^{(r)}}{\mu^{(r)} + \eta^{(r)}/\Delta t} \quad \text{et} \quad \zeta^{(r)} = \frac{\eta^{(r)}/\Delta t}{\mu^{(r)} + \eta^{(r)}/\Delta t}, \quad (2.57)$$

où  $\varepsilon_d$  représente la partie déviatorique de  $\varepsilon$ . Du fait que les coefficients  $\mu^{(r)}$  et  $\eta^{(r)}$  sont connus et au vue des les équations (2.56) et (2.57), les paramètres  $\mathbb{L}_{\Delta}^{(r)}$ ,  $\tau_{\Delta}^{(r)}$ ,  $\beta^{(r)}$  et  $\zeta^{(r)}$  sont aussi connus.

### 2.2.3 Cas d'une matrice visco-élastique renforcée par des particules élastiques

On se propose maintenant d'appliquer le modèle développé au cas d'un composite biphasé composé d'une matrice visco-élastique linéaire de type Maxwell renforcée par des particules sphériques élastiques distribuées de manière aléatoire et isotrope. Les propriétés effectives du MLC ainsi que les moments des champs sont évalués via la borne inférieure de Hashin et Shtrikman (cf. annexe A). Cette dernière est connue pour fournir des résultats précis pour une telle microstructure dans le cas linéaire lorsque la fraction volumique est modérée. Dans tout le

reste du manuscrit, les indices (1) et (2) caractériseront respectivement la phase inclusionnaire et la phase matricielle.

Les moments d'ordre un des déformations  $\varepsilon_0$  sur les phases s'expriment comme

$$\overline{\varepsilon}_0^{(1)} = \mathbb{A}_0^{(1)} : \mathbf{E} + \mathbf{a}_0^{(1)}, \quad \overline{\varepsilon}_0^{(2)} = \frac{1}{c^{(2)}} (\mathbf{E} - c^{(1)} \overline{\varepsilon}_0^{(1)}), \quad (2.58)$$

où les tenseurs de localisations  $\mathbb{A}_0^{(1)}$  et  $\mathbf{a}_0^{(1)}$  sont donnés par les équations (A.4) et (A.6) (cf. annexe A). En faisant appel à l'équation (A.2) combinée aux équations (A.4) et (A.6),  $\overline{\varepsilon}_0^{(1)}$  peut s'écrire :

$$\overline{\varepsilon}_0^{(1)} = \left\{ \mathbb{I} + \mathbb{P}_0^{(2)} : \left[ \left( \mathbb{L}_\Delta^{(1)} - \mathbb{L}_0^{(2)} \right) - c^{(1)} \left( \mathbb{L}_\Delta^{(1)} - \mathbb{L}_\Delta^{(2)} \right) \right] \right\}^{-1} : \left\{ \left[ \mathbb{I} + \mathbb{P}_0^{(2)} : \left( \mathbb{L}_\Delta^{(2)} - \mathbb{L}_0^{(2)} \right) \right] : \mathbf{E} - c^{(2)} \mathbb{P}_0^{(2)} : \left( \overline{\boldsymbol{\tau}}_\Delta^{(1)} - \overline{\boldsymbol{\tau}}_\Delta^{(2)} \right) \right\}, \quad (2.59)$$

où  $\mathbb{P}_0^{(2)}$  est le tenseur de Hill associé à la phase matricielle du MLC homogénéisé pour une distribution isotrope de particules sphériques. Son expression sous ces conditions est donnée par l'équation (A.5). Afin de calculer complètement le moment d'ordre un de  $\overline{\varepsilon}_0^{(1)}$ , il faut déterminer les tenseurs  $\mathbb{L}_0^{(r)}$ ,  $\mathbb{L}_\Delta^{(r)}$  et  $\overline{\boldsymbol{\tau}}_\Delta^{(r)}$ . On remarquera que ces deux derniers sont déjà connus par (2.56)<sub>1</sub> pour  $\mathbb{L}_\Delta^{(r)}$  et par (2.56)<sub>2</sub> pour  $\overline{\boldsymbol{\tau}}_\Delta^{(r)}$ , sachant que les moments d'ordre un de la déformation visqueuse  $\varepsilon_n^v$  au temps  $t_n$  sont connus du pas précédent. La détermination de  $\overline{\varepsilon}_0^{(1)}$  revient donc à celle de  $\mathbb{L}_0^{(r)}$  (Eq. (2.59)). On observe d'après l'équation (2.57) que le moment d'ordre un de  $\varepsilon^v$  (donc calculé au temps  $t_{n+1}$ ) est facile à obtenir. Son second moment s'exprime comme

$$\overline{\overline{\varepsilon}}_v^{(r)} = \sqrt{(\beta^{(r)})^2 \left( \overline{\overline{\varepsilon}}_d^{(r)} \right)^2 + (\zeta^{(r)})^2 \left( \overline{\overline{\varepsilon}}_n^v \right)^2 + \frac{4}{3} \beta^{(r)} \zeta^{(r)} \langle \varepsilon_d(\underline{x}) : \varepsilon_n^v(\underline{x}) \rangle^{(r)}}. \quad (2.60)$$

L'équation (2.60) requiert donc de connaître  $\langle \varepsilon_d(\underline{x}) : \varepsilon_n^v(\underline{x}) \rangle^{(r)}$ . En considérant l'équation (2.36) combinée à (2.56)<sub>1,2</sub>, on obtient

$$\boldsymbol{\sigma}_d = 2 \mu_\Delta^{(r)} (\varepsilon_d(\underline{x}) - \varepsilon_n^v(\underline{x})), \quad (2.61)$$

ce qui permet d'obtenir après calcul du second moment de  $\boldsymbol{\sigma}_d$

$$\langle \varepsilon_d(\underline{x}) : \varepsilon_n^v(\underline{x}) \rangle^{(r)} = \frac{3}{4} \left[ \left( \overline{\overline{\varepsilon}}_d^{(r)} \right)^2 + \left( \overline{\overline{\varepsilon}}_n^v \right)^2 - \frac{1}{\left( 3 \mu_\Delta^{(r)} \right)^2} \left( \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_d^{(r)} \right)^2 \right]. \quad (2.62)$$

Comme indiqué précédemment (voir Eq. (2.52)), les seconds moments de  $\varepsilon_d$  et  $\boldsymbol{\sigma}_d$  sont respectivement approchés par ceux de  $\varepsilon_{0,d}$  et  $\boldsymbol{\sigma}_{0,d}$ . Le premier se déduit de l'équation (A.3)<sub>2</sub> et s'écrit

$$\overline{\overline{\varepsilon}}_{0,d}^{(r)} = \sqrt{\frac{2}{3} \langle \varepsilon_{0,d} : \varepsilon_{0,d} \rangle^{(r)}} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{1}{c^{(r)}} \frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial \mu_0^{(r)}}(\mathbf{E})}. \quad (2.63)$$

Le second est déterminé à partir de

$$\boldsymbol{\sigma}_{0,d} = \frac{\partial w_0^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{0,d}}(\boldsymbol{\varepsilon}_0) = 2\mu_0^{(r)} \boldsymbol{\varepsilon}_{0,d} + \boldsymbol{\tau}_0^{(r)}, \quad (2.64)$$

et s'écrit

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_{0,d}^{(r)} = \sqrt{\frac{3}{2} \left[ 6 \left( \mu_0^{(r)} \right)^2 \left( \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{0,d}^{(r)} \right)^2 + \boldsymbol{\tau}_0^{(r)} : \boldsymbol{\tau}_0^{(r)} + 4\mu_0^{(r)} \boldsymbol{\tau}_0^{(r)} : \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{0,d}^{(r)} \right]}. \quad (2.65)$$

Une fois que les premiers moments de  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  sont connus, la contrainte effective  $\boldsymbol{\Sigma}$  définie en (2.51) s'exprime comme

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sum_{r=1}^2 c^{(r)} \overline{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)} = \sum_{r=1}^2 c^{(r)} \left( \mathbb{L}_0^{(r)} : \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_0^{(r)} + \boldsymbol{\tau}_0^{(r)} \right). \quad (2.66)$$

L'utilisation de la borne inférieure de Hashin et Shtrikman pour calculer les moyennes des champs de déformations et de contraintes sur le composite assure que ces derniers sont uniformes dans les inclusions, de sorte que  $C^{(1)}(\boldsymbol{\varepsilon}_0) = \mathbf{0}$ . Ainsi, l'équation (2.50) pour  $r = 1$  conduit à

$$C^{(1)}(\boldsymbol{\tau}_\Delta^{(1)}) = \mathbf{0}. \quad (2.67)$$

Néanmoins, nous n'avons aucune information sur le tenseur d'élasticité  $\mathbb{L}_0^{(1)}$ . Ce tenseur est indéterminé. Afin de lever cette indétermination, on adopte l'hypothèse faite par Lahellec et al [54]

$$\mathbb{L}_\Delta^{(1)} = \mathbb{L}_0^{(1)}. \quad (2.68)$$

Par conséquent, l'équation (2.48) se réécrit sous la forme

$$\boldsymbol{\tau}_0^{(1)} = \overline{\boldsymbol{\tau}}_\Delta^{(1)} = \boldsymbol{\tau}_\Delta^{(1)}. \quad (2.69)$$

### Résumé du système non linéaire à résoudre

On se propose de résumer ici les équations du modèle développé. Commençons par rappeler qu'en raison de l'équation (2.55), la partie sphérique du comportement local des MLC définie par  $w_\Delta$  et  $w_0$  est identique à celle du composite non linéaire.

La phase inclusionnaire est purement élastique, ceci implique que  $\eta^{(1)} \rightarrow +\infty$ . L'équation (2.56)<sub>1</sub> conduit alors à  $\mu_\Delta^{(1)} = \mu^{(1)}$ . En faisant appel aux équations (2.68) et (2.69), le comportement dans la phase inclusionnaire des MLC  $w_\Delta$  et  $w_0$  est donné par

$$k^{(1)} = k_\Delta^{(1)} = k_0^{(1)}, \quad \mu^{(1)} = \mu_\Delta^{(1)} = \mu_0^{(1)}, \quad \boldsymbol{\tau}_0^{(1)} = \overline{\boldsymbol{\tau}}_\Delta^{(1)} = \mathbf{0}. \quad (2.70)$$

Dans la phase matricielle, les expressions de  $\mu_{\Delta}^{(2)}$ ,  $\tau_{\Delta}^{(2)}$ ,  $\mu_0^{(2)}$  and  $\tau_0^{(2)}$ , caractérisant les MLC  $w_{\Delta}$  et  $w_0$ , sont obtenues comme suit. Le module de cisaillement  $\mu_{\Delta}^{(2)}$  et la polarisation  $\tau_{\Delta}^{(2)}$  sont données par les équations (2.56)<sub>1</sub> et (2.56)<sub>2</sub>. L'expression de la polarisation  $\tau_0^{(2)}$  est déterminée à partir de (2.48) qui, dans le cas d'un composite à phases isotropes, s'écrit

$$\tau_0^{(2)} = \overline{\tau_{\Delta}}^{(2)} + 2 \left( \mu_{\Delta}^{(2)} - \mu_0^{(2)} \right) \overline{\varepsilon_{0,d}}^{(2)}. \quad (2.71)$$

De même, en considérant l'équation (2.50) sous la condition de MLC isotropes, on obtient l'expression suivant pour  $\mu_0^{(2)}$

$$\mu_0^{(2)} = \mu_{\Delta}^{(2)} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\langle \tau_{\Delta} : \tau_{\Delta} \rangle^{(2)} - \overline{\tau_{\Delta}}^{(2)} : \overline{\tau_{\Delta}}^{(2)}}{\langle \varepsilon_{0,d} : \varepsilon_{0,d} \rangle^{(2)} - \overline{\varepsilon_{0,d}}^{(2)} : \overline{\varepsilon_{0,d}}^{(2)}}}. \quad (2.72)$$

On note que le numérateur sous la racine est connu. En effet,  $\tau_{\Delta}$  dépend linéairement de  $\varepsilon_n^v$  dont les premier et second moments sont calculés au pas précédent. Pour le dénominateur, le premier moment  $\overline{\varepsilon_{0,d}}^{(2)}$  se détermine à partir des équations (2.58) et (2.59) et le second moment  $\langle \varepsilon_{0,d} : \varepsilon_{0,d} \rangle^{(2)}$  est donné par (2.63).

Le système non linéaire à résoudre est un système de deux fonctions (2.71) et (2.72) pour deux inconnues  $\tau_0^{(2)}$  et  $\mu_0^{(2)}$ . On observe que les équations (2.58) et (2.59) combinées avec l'expression (A.5) de  $\mathbb{P}_0^{(2)}$  dans le cas de composites isotropes, conduisent à une expression de  $\overline{\varepsilon_{0,d}}^{(2)}$  qui ne dépend que de  $\mu_0^{(2)}$ . En considérant cette dépendance, l'équation (2.71) montre que  $\tau_0^{(2)}$  ne dépend que de  $\mu_0^{(2)}$ .

Ainsi, le problème non linéaire à résoudre défini par les équations (2.71) et (2.72), se réduit à un système non linéaire d'une équation (2.72) à une inconnue  $\mu_0^{(2)}$  :

$$F_1 \left( \mu_0^{(2)} \right) \equiv \left( \mu_0^{(2)} - \mu_{\Delta}^{(2)} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\langle \tau_{\Delta} : \tau_{\Delta} \rangle^{(2)} - \overline{\tau_{\Delta}}^{(2)} : \overline{\tau_{\Delta}}^{(2)}}{\langle \varepsilon_{0,d} : \varepsilon_{0,d} \rangle^{(2)} - \overline{\varepsilon_{0,d}}^{(2)} : \overline{\varepsilon_{0,d}}^{(2)}} = 0. \quad (2.73)$$

Après résolution de ce système, il est alors possible de calculer  $\tau_0^{(2)}$  à partir de (2.71).

## 2.2.4 Mise en œuvre numérique

Nous avons développé un algorithme dont l'objectif est de déterminer, pour un chargement donné piloté pour tout temps  $t_n$  ( $n = \{0, \dots, N\}$ ) par les déformations macroscopiques  $\mathbf{E}_n$ , la contrainte effective  $\Sigma_n$ , les premiers et seconds moments des champs locaux  $\sigma_n$ ,  $\varepsilon_n$  et  $\varepsilon_n^v$  dans les phases. Ce problème est résolu itérativement en déterminant les solutions au temps  $t_{n+1}$  à partir des solutions calculées au temps  $t_n$ . Comme on l'a déjà précisé, l'indice  $n + 1$  ne sera pas noté pour définir les quantités calculés au temps  $t_{n+1}$ . L'algorithme mis en œuvre a la structure suivante :

- **Résolution du système non linéaire** : Une fois les paramètres du MLC à polarisation hétérogène  $w_\Delta$  calculés, on peut résoudre le système non linéaire (2.73) afin d'obtenir la valeur de  $\mu_0^{(2)}$ . A cette fin, on résout le système à l'aide de la fonction *f\_solve* du logiciel Matlab en faisant appel à l'algorithme de Levenberg-Marquardt.
- **Calcul des moyennes des champs par phase** : Une fois  $\mu_0^{(2)}$  obtenu, le MLC homogène  $w_0$  ainsi que l'énergie libre effective  $\tilde{w}_0$  peuvent être déterminés comme expliqué à la section 2.2.3. Il est alors possible de calculer les moments d'ordre un et deux des champs  $\varepsilon$  (cf. Eqs. (2.58), (2.59) et (2.63)),  $\sigma$  (cf. Eqs. (2.64) et (2.65)) et  $\varepsilon^v$  (cf. Eqs. (2.57), (2.60) et (2.62)). La contrainte macroscopique  $\Sigma$  est enfin obtenue par l'équation (2.66).

## 2.3 Comparaison du modèle avec la formulation EIV

L'objectif de cette section est de comparer le modèle développé dans le cadre de la visco-élasticité linéaire de type Maxwell (cf. partie 2.2) à la formulation EIV développée dans le même cadre par Lahellec et Suquet [57] (cf. partie 2.1). Après avoir comparé les deux modèles sur un plan théorique, nous comparerons leurs prédictions numériques.

### 2.3.1 Différences théoriques entre les deux formulations

Dans toute cette partie, on distinguera le module de cisaillement du MLC à polarisation homogène par phase  $\mu_0^{(r)}$  de la formulation EIV (qui sera noté  $\mu_0^{(r)E}$ ) et du modèle développé dans la partie 1.2 (qui sera noté  $\mu_0^{(r)D}$ ). On distinguera aussi les fluctuations des déformations déviatoriques sur les phases  $C^{(r)}(\varepsilon_d)$  pour les formulations EIV et pour le modèle proposé que l'on notera respectivement  $C^{(r)}(\varepsilon_d^E)$  et  $C^{(r)}(\varepsilon_d^D)$ . En effet, les fluctuations des déformations dépendent des premier et second moments des déformations dans les phases qui dépendent eux mêmes de  $\mu_0^{(r)}$  et de  $\tau_0^{(r)}$ . L'objectif ici est alors de voir si les expressions de  $\mu_0^{(r)}$  et  $\tau_0^{(r)}$  sont les mêmes pour les 2 formulations ou non.

#### Comparaison de l'expression de $\mu_0^{(r)}$

##### Formulation EIV

On déduit de l'expression de  $\mu_0^E$  Eq. (2.26)

$$\frac{\eta_0^{(r)}}{\eta^{(r)}} = \frac{\Delta t}{\eta^{(r)}} \frac{\mu^{(r)} \mu_0^{(r)E}}{\mu^{(r)} - \mu_0^{(r)E}} \Rightarrow \frac{\eta_0^{(r)}}{\eta^{(r)}} - 1 = \frac{\Delta t}{\eta^{(r)}} \frac{\mu^{(r)} \mu_0^{(r)E} - \frac{\eta^{(r)}}{\Delta t} \mu^{(r)} + \frac{\eta^{(r)}}{\Delta t} \mu_0^{(r)E}}{\mu^{(r)} - \mu_0^{(r)E}}. \quad (2.74)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_n^{v(r)}$  étant homogène par phase, l'équation (2.28) implique

$$C_{\mathbb{K}}^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}^v) = \langle (\boldsymbol{\varepsilon}^v - \overline{\boldsymbol{\varepsilon}^v}^{(r)}) : (\boldsymbol{\varepsilon}^v - \overline{\boldsymbol{\varepsilon}^v}^{(r)}) \rangle^{(r)} = \left( \frac{\mu^{(r)}}{\mu^{(r)} + \frac{\eta_0^{(r)}}{\Delta t}} \right)^2 C_{\mathbb{K}}^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}_d^E), \quad (2.75)$$

où

$$C_{\mathbb{K}}^{(r)}(\mathbf{a}) = \mathbb{K} :: C^{(r)}(\mathbf{a}). \quad (2.76)$$

De plus, (2.26), peut également se réécrire sous la forme

$$\mu^{(r)} - \mu_0^{(r)E} = \frac{(\mu^{(r)})^2}{\mu^{(r)} + \eta_0^{(r)}/\Delta t}. \quad (2.77)$$

On déduit alors des équations (2.14), (2.74), (2.75) et (2.77)

$$\left( \frac{\eta_0^{(r)}}{\eta^{(r)}} - 1 \right)^2 = \frac{\left( \mu^{(r)} \mu_0^{(r)E} - \frac{\eta^{(r)}}{\Delta t} \mu^{(r)} + \frac{\eta^{(r)}}{\Delta t} \mu_0^{(r)E} \right)^2}{\left( \frac{\eta^{(r)}}{\Delta t} \right)^2 \frac{(\mu^{(r)})^4}{\left( \mu^{(r)} + \frac{\eta_0^{(r)}}{\Delta t} \right)^2}} = \frac{1}{\left( \frac{\mu^{(r)}}{\mu^{(r)} + \frac{\eta_0^{(r)}}{\Delta t}} \right)^2} \frac{C_{\mathbb{K}}^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}_n^v)}{C_{\mathbb{K}}^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}_d^E)}. \quad (2.78)$$

Ce qui équivaut à écrire

$$\left( \frac{\mu^{(r)} \mu_0^{(r)E} - \frac{\eta^{(r)}}{\Delta t} \mu^{(r)} + \frac{\eta^{(r)}}{\Delta t} \mu_0^{(r)E}}{\frac{\eta^{(r)}}{\Delta t} \mu^{(r)}} \right)^2 = \frac{C_{\mathbb{K}}^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}_n^v)}{C_{\mathbb{K}}^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}_d^E)}. \quad (2.79)$$

## Modèle proposé dans la partie 2.2

On déduit de l'expression (2.56)<sub>1</sub> de  $\mu_{\Delta}^{(r)}$

$$\frac{\mu_0^{(r)D}}{\mu_{\Delta}^{(r)}} = \frac{\mu_0^{(r)D} (\mu^{(r)} + \eta^{(r)}/\Delta t)}{\mu^{(r)} \eta^{(r)}/\Delta t} \Rightarrow \frac{\mu_0^{(r)D}}{\mu_{\Delta}^{(r)}} - 1 = \frac{\mu^{(r)} \mu_0^{(r)D} - \frac{\eta^{(r)}}{\Delta t} \mu^{(r)} + \frac{\eta^{(r)}}{\Delta t} \mu_0^{(r)D}}{\frac{\eta^{(r)}}{\Delta t} \mu^{(r)}}. \quad (2.80)$$

Donc, d'après l'équation (2.72), on a directement

$$\left( \frac{\mu^{(r)} \mu_0^{(r)D} - \frac{\eta^{(r)}}{\Delta t} \mu^{(r)} + \frac{\eta^{(r)}}{\Delta t} \mu_0^{(r)D}}{\frac{\eta^{(r)}}{\Delta t} \mu^{(r)}} \right)^2 = \frac{C_{\mathbb{K}}^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}_n^v)}{C_{\mathbb{K}}^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}_d^D)}. \quad (2.81)$$

En effet, dans l'équation (2.72), le numérateur sous la racine  $C_{\mathbb{K}}^{(r)}(\boldsymbol{\tau}_{\Delta})$  est proportionnel à  $C_{\mathbb{K}}^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}_n^v)$ .

On observe que les expressions vérifiées par  $\mu_0^{(r)}$  pour la formulation EIV (cf. Eq.(2.79)) et pour la formulation développé dans la partie 2.2 (cf. Eq.(2.81)) ont la même forme. Cependant,  $C_{\mathbb{K}}^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}_d)$

dépend des premier et second moments de  $\varepsilon$  sur les phases qui dépendent eux mêmes de  $\mu_0^{(r)}$  et  $\tau_0^{(r)}$ . Donc pour vérifier si les deux formulations sont équivalentes, on doit évaluer l'expression de  $\tau_0^{(r)}$ . Dans le cas où  $\tau_0^{(r)E}$  et  $\tau_0^{(r)D}$  (respectivement la polarisation du MLC homogène pour la formulation EIV et pour la formulation développée dans la partie 2.2) sont égales, on aura directement  $\mu_0^{(r)E} = \mu_0^{(r)D}$ . Ceci implique alors que les deux formulations sont équivalentes. Au contraire, pour  $\mu_0^{(r)E} \neq \mu_0^{(r)D}$ , alors les deux formulations sont différentes.

### Comparaison de l'expression de $\tau_0^{(r)}$

En reportant l'expression (2.28) de la moyenne de  $\varepsilon^v$  sur la phase  $r$  dans l'équation (2.16), on obtient

$$\frac{\eta_0^{(r)}}{\eta^{(r)}} \varepsilon_n^{v(r)} = \overline{\varepsilon_n^{v(r)}} + \left( \frac{\eta_0^{(r)}}{\eta^{(r)}} - 1 \right) \frac{\mu^{(r)} \overline{\varepsilon_d^{(r)}} + \frac{\eta_0^{(r)}}{\Delta t} \varepsilon_n^{v(r)}}{\mu^{(r)} + \frac{\eta_0^{(r)}}{\Delta t}}. \quad (2.82)$$

On peut alors isoler  $\varepsilon_n^{v(r)}$  de telle sorte que

$$\frac{\eta_0^{(r)}}{\eta^{(r)}} \left( \mu^{(r)} + \frac{\eta^{(r)}}{\Delta t} \right) \varepsilon_n^{v(r)} = \left( \mu^{(r)} + \frac{\eta_0^{(r)}}{\Delta t} \right) \overline{\varepsilon_n^{v(r)}} + \mu^{(r)} \left( \frac{\eta_0^{(r)}}{\eta^{(r)}} - 1 \right) \overline{\varepsilon_d^{(r)}}. \quad (2.83)$$

En multipliant à gauche et à droite de l'égalité par

$$\frac{\mu^{(r)} \eta^{(r)} / \Delta t}{\left( \mu^{(r)} + \frac{\eta_0^{(r)}}{\Delta t} \right) \left( \mu^{(r)} + \frac{\eta^{(r)}}{\Delta t} \right)},$$

on obtient, en considérant l'équation (2.27)

$$\begin{aligned} \tau_0^{(r)E} &= -2 \mu_0^{(r)E} \varepsilon_n^{v(r)} \\ &= -2 \mu_\Delta^{(r)} \overline{\varepsilon_n^{v(r)}} - 2 \left( \mu_0^{(r)E} \frac{\mu^{(r)}}{\mu^{(r)} + \eta^{(r)} / \Delta t} - \mu_\Delta^{(r)} \frac{\mu^{(r)}}{\mu^{(r)} + \eta_0^{(r)} / \Delta t} \right) \overline{\varepsilon_d^{(r)}}, \end{aligned} \quad (2.84)$$

où  $\mu_\Delta^{(r)}$  est défini par l'équation (2.56)<sub>1</sub>. Par ailleurs, d'après l'équation (2.48) couplée à (2.56)<sub>2</sub>,  $\tau_0^{(r)D}$  s'exprime sous la forme

$$\tau_0^{(r)D} = -2 \mu_\Delta^{(r)} \overline{\varepsilon_n^{v(r)}} - 2 \left( \mu_0^{(r)D} - \mu_\Delta^{(r)} \right) \overline{\varepsilon_d^{(r)}} \quad (2.85)$$

On observe d'après les équations (2.84) et (2.85) que les expressions de  $\tau_0^{(r)E}$  et  $\tau_0^{(r)D}$  sont différentes. D'après ce que nous avons expliqué auparavant, ceci implique que les deux formulations sont différentes.



### 2.3.2 Comparaison des prédictions des deux formulations

Ayant montré que la formulation EIV et la formulation développée dans la partie 2.2 sont différentes sur le plan théorique, on se propose dans cette partie de comparer les prédictions numériques des réponses obtenues par les deux modèles.

A cette fin, nous considérons le matériau composite étudié dans Lahellec et Suquet [57] :

$$\begin{aligned} \text{Inclusion : } c^{(1)} &= 0.25, \quad E^{(1)} = 400 \text{ GPa}, \quad \nu^{(1)} = 0.2 \\ \text{Matrice : } E^{(2)} &= 70 \text{ GPa}, \quad \nu^{(2)} = 0.3, \quad \eta^{(2)} = 4.0825 \text{ GPa.s.} \end{aligned} \quad (2.86)$$

Nous avons comparé pour ce composite les prédictions du modèle proposé à la formulation EIV développée par Lahellec et Suquet [57] et à des simulations numériques par EF réalisées par ces mêmes auteurs. Ces simulations ont été réalisées sur un quart d'une cellule cylindrique constituée d'une inclusion sphérique élastique en son centre et entourée d'une matrice visco-élastique linéaire. Des conditions de symétries et de périodicités ont été pris en compte pour les simulations. Le composite a été soumis à une traction uni-axiale macroscopique de la forme

$$\boldsymbol{\Sigma}(t) = \Sigma_{33}(t) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \quad (2.87)$$

où la valeur de  $\Sigma_{33}$  est inconnue.

On remarquera que réaliser une traction uni-axiale nécessite d'adapter l'algorithme du modèle tel que présenté dans la partie 2.2.4 car ce dernier est basé sur un chargement piloté en déformation. Pour cela, nous avons adopté la méthode suivante. Du fait de l'isotropie du composite, le tenseur des déformations macroscopique associé au tenseur des contrainte macroscopique (2.87) s'écrit

$$\mathbf{E}(t) = (E_{33}(t) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 + \alpha E_{33}(t)(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2)), \quad (2.88)$$

où  $\alpha$  est un scalaire inconnu. La composante  $E_{33}(t)$  s'obtient en imposant une vitesse de déformation  $\dot{E}_{33}$  constante. Afin de déterminer  $\alpha$ , on applique la condition  $\Sigma_{11} = \Sigma_{22} = 0$  à l'équation (2.51)<sub>2</sub>. Il en ressort un système de deux équations pour deux inconnues  $\alpha$  et  $\Sigma_{33}$  de la forme

$$\begin{cases} 0 = \left( \alpha \left( \tilde{\mathbb{L}}_{0,1111} + \tilde{\mathbb{L}}_{0,1122} \right) + \tilde{\mathbb{L}}_{0,1133} \right) E_{33} + \tilde{\tau}_{0,11} \\ \Sigma_{33} = \left( \alpha \left( \tilde{\mathbb{L}}_{0,3311} + \tilde{\mathbb{L}}_{0,3322} \right) + \tilde{\mathbb{L}}_{0,3333} \right) E_{33} + \tilde{\tau}_{0,33}, \end{cases} \quad (2.89)$$

où  $\tilde{\mathbb{L}}_0$  et  $\tilde{\tau}_0$  sont définis par (A.2) et dépendent seulement de la variable  $\mu_0^{(2)}$ . On en déduit alors l'expression de  $\alpha$  sous la forme

$$\alpha = - \frac{\tilde{\mathbb{L}}_{0,1133} E_{33} + \tilde{\tau}_{0,11}}{E_{33} \left( \tilde{\mathbb{L}}_{0,1111} + \tilde{\mathbb{L}}_{0,1122} \right)}. \quad (2.90)$$

On remarquera que ce paramètre  $\alpha$  dépend seulement de  $\mu_0^{(2)}$  à travers  $\tilde{\mathbb{L}}_0$  et  $\tilde{\tau}_0$ . En reportant l'équation (2.90) dans l'équation (2.88), on observe que la déformation macroscopique  $\mathbf{E}$  dépend

seulement de l'inconnue du système non linéaire (2.73). De plus, les premier et second moments  $\overline{\varepsilon_{0,d}^{(2)}}$  et  $\langle \varepsilon_{0,d} : \varepsilon_{0,d} \rangle^{(2)}$  dépendent de  $\mathbf{E}$ , respectivement par les équations (2.58) et (2.59) et de l'équation (2.63). De ce fait, la fonction  $F(\mu_0^{(2)})$  définie par l'équation (2.73) dépend aussi de la déformation macroscopique. Ceci conduit alors au fait que la fonction  $F$  dépend seulement de l'inconnue  $\mu_0^{(2)}$  du problème non linéaire. Il est alors possible de déterminer la racine du système non linéaire à l'aide de la fonction  $f_{solve}$  et de calculer la contrainte macroscopique  $\Sigma_{33}$  (cf. Eq. (2.89)<sub>2</sub>) lorsque la déformation macroscopique  $E_{33}$  est imposée.

La vitesse de déformation imposée  $\dot{E}_{33}$  a la même valeur que celle choisit pas Lahellec et Suquet et vaut  $\dot{E}_{33} = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ .

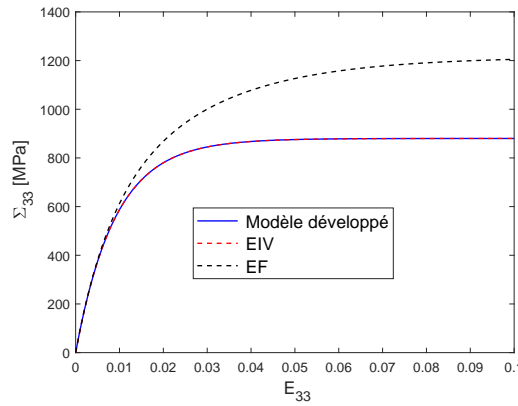


FIGURE 2.1: Composite à matrice visco-élastique linéaire de type Maxwell renforcée élastiquement et soumis à une traction uni-axiale.  $c^{(1)} = 0.25$ . Réponse effective du composite.

La figure 2.1 représente la prédiction de la réponse effective du composite pour le modèle proposé, la formulation EIV et les simulations numériques (EF) effectuées sur le quart d'une cellule cylindrique avec des conditions de symétries en ses bords. On observe tout d'abord que bien que les deux modèles soient différents sur le plan théorique (cf. partie 2.3), leurs prédictions sont confondues. Les deux modèles retrouvent les simulations EF dans la première partie de la courbe correspondant au régime purement élastique. Cette partie est dirigée par l'énergie libre et la réponse effective est obtenue en homogénéisant cet unique potentiel quadratique. Plus les déformations augmentent et plus les deux modèles sous-estiment les simulations EF. Ceci s'explique par le fait que cette partie de la réponse effective est de plus en plus dissipative avec l'augmentation des déformations et est dirigée par le potentiel de dissipation. On constate que le comportement effectif est fortement sous-estimé dans la partie de la courbe dominée par la dissipation. L'utilisation des bornes de Hashin et Shtrikman (qui correspondent à une microstructure aléatoire différente de celle périodique utilisée par les calculs EF) pour homogénéiser le MLC  $w_0$ , est probablement pour partie à l'origine de cette forte sous-estimation, accentuant vraisemblablement l'erreur introduite par la procédure d'uniformisation du comportement local. Cette comparaison ne nous permet donc pas de valider numériquement le modèle proposé. Elle

montre cependant que le modèle proposé et le modèle EIV, bien que théoriquement différents, conduisent numériquement aux mêmes résultats.

## 2.4 Comparaison du modèle à la formulation RVP (Lahellec et Suquet [59])

Dans cette partie nous comparons les prédictions de la formulation proposée en 2.2 à la formulation RVP développée par Lahellec et Suquet [59] dans le cas de composites ayant une matrice visco-élastique linéaire de type Maxwell. Lors du développement la formulation EIV [57], Lahellec et Suquet ont montré que cette formulation n'arrive pas à reproduire le comportement effectif de composites soumis à un chargement tournant. Afin de résoudre ce problème, Lahellec et Suquet ont développé la formulation RVP permettant de retrouver de manière satisfaisante le comportement effectif des composites étudiés et soumis à un tel chargement. Les prédictions de ces deux formulations seront comparées aux solutions exactes déterminées par Badulescu et al. [3]. Ces auteurs ont déterminé ces solutions à l'aide du principe de correspondance en considérant les estimations de Hashin et Shtrikman. Pour nos simulations, nous avons considéré les mêmes paramètres matériaux que ces auteurs

$$\begin{aligned} \text{Inclusion : } c^{(1)} &= 0.4, \quad \mu^{(1)} = 6 \text{ GPa}, \quad k^{(1)} = 20 \text{ GPa} \\ \text{Matrice : } \mu^{(2)} &= 3 \text{ GPa}, \quad k^{(2)} = 10 \text{ GPa}, \quad \eta^{(2)} = 3 \text{ ou } 30 \text{ GPa.s.} \end{aligned} \quad (2.91)$$

Le composite sera soumis à deux chargement différents. Le premier consiste en une extension isochore cyclique pilotée par un taux de déformation macroscopique constant au cours du temps mais qui change de signe entre la phase d'extension et la phase de compression. Il s'écrit sous la forme

$$\dot{\mathbf{E}}(t) = \pm \dot{\varepsilon}_0 \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - \frac{1}{2} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \quad \dot{\varepsilon}_0 = 5.10^{-2} \text{ s}^{-1}. \quad (2.92)$$

Le second chargement consiste en un chargement tournant de la forme

$$\mathbf{E}(t) = \varepsilon_1 (\sin(\omega t) \mathbf{E}_0 + (1 - \cos(\omega t)) \mathbf{E}_1), \quad (2.93)$$

où  $\mathbf{E}_0$  est défini par (2.92), avec

$$\varepsilon_1 = 5.10^{-2}, \quad \omega = \frac{\pi}{20} \text{ rad.s}^{-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1. \quad (2.94)$$

La figure 2.2 représente la réponse effective du composite soumis à un extension isochore macroscopique de la forme (2.92). On précise tout d'abord que les modules élastiques de compressibilité des phases considérées ne sont pas ceux présentés dans (2.91). En effet, comme on en discutera dans la partie 4.1.3, des problèmes de convergence interviennent lors de la résolution du système

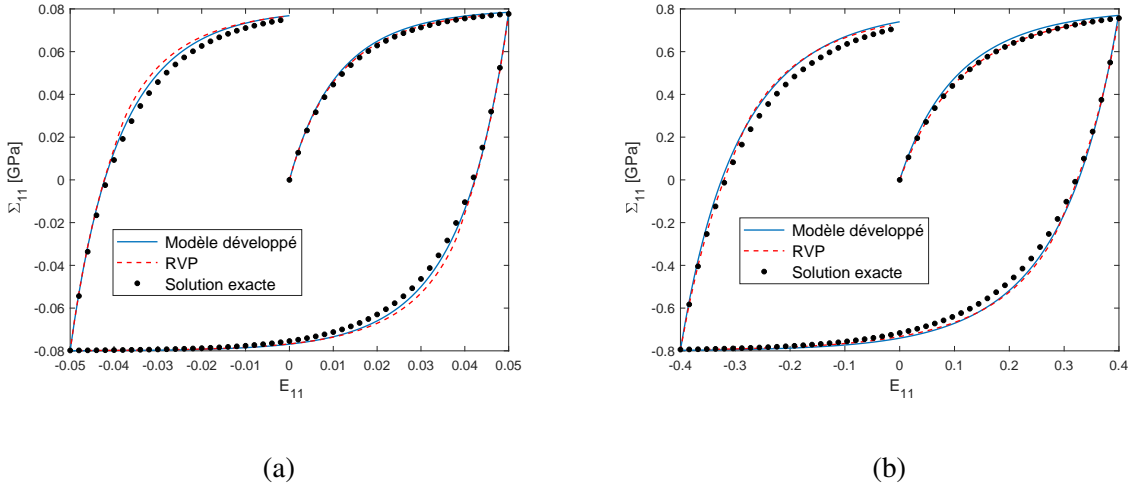


FIGURE 2.2: Composite à matrice visco-élastique linéaire de type Maxwell renforcée par des particules élastiques et soumis à une extension isochore macroscopique de la forme (2.92).  $c^{(1)} = 0.4$ . Réponse macroscopique pour (a)  $\eta^{(2)} = 3$  GPa.s, (b)  $\eta^{(2)} = 30$  GPa.s.

non linéaire du fait de la non unicité de sa solution. De plus, des problèmes de singularité apparaissent lorsque des phases compressibles sont considérées. C'est pourquoi nous avons considéré pour ce chargement uniquement le cas de phases incompressibles, i.e.  $k^{(1)} = k^{(2)} = +\infty$ . On observe sur cette figure que les prédictions du modèle développé sont proches de la formulation RVP. De plus les deux formulations arrivent à reproduire la solution exacte dans les régimes purement élastiques ainsi que dans les régimes purement visqueux. On note toutefois, que les modèles surestiment légèrement les zones de transitions entre ces deux régimes.

La figure 2.3 représente la réponse effective du composite défini par (2.91) soumis à un chargement tournant (2.93) et (2.94) pour  $\eta^{(2)} = 3$  GPa.s et  $\eta^{(2)} = 30$  GPa.s. L'objectif ici est de voir si notre formulation, différente sur le plan théorique de la formulation EIV, arrive à prédire de manière satisfaisante les solutions exactes pour un chargement tournant. On observe sur cette figure que le modèle arrive à reproduire les données de la formulation RVP et des solutions exactes sur le régime purement élastique. Sur la figure 2.3a, le modèle sous estime largement les solutions exactes et la formulation RVP lors du premier cycle et les retrouvent lors du deuxième cycle. De plus, pour une contrainte  $\Sigma_{13} = -0.025$  GPa, le modèle développé n'arrive plus à converger. On observe alors un saut non physique des contraintes. Sur la figure 2.3b, pour laquelle la viscosité  $\eta^{(2)}$  est plus importante, on remarque que le problème de saut n'existe plus. Par ailleurs, on observe que la formulation RVP surestime les solutions exactes alors que le modèle développé le sous-estime. Néanmoins, ce dernier semble être plus proche des solutions exactes que la formulation RVP. Similairement à la formulation RVP, le modèle proposé converge vers un cycle stabilisé dès le second cycle pour  $\eta^{(2)} = 3$  GPa.s et à partir du 3<sup>ème</sup> cycle pour  $\eta^{(2)} = 30$  GPa.s.

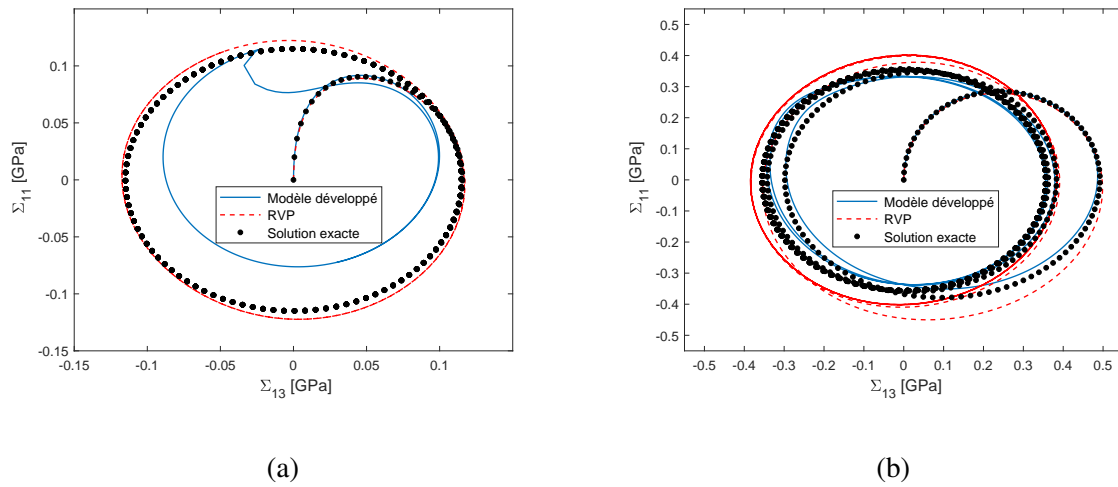


FIGURE 2.3: Composite à matrice visco-élastique linéaire de type Maxwell renforcée élastiquement et soumis à un chargement tournant de la forme (2.93), (2.94).  $c^{(1)} = 0.4$ . Réponse macroscopique pour (a)  $\eta^{(2)} = 3 \text{ GPa.s}$ , (b)  $\eta^{(2)} = 30 \text{ GPa.s}$ .

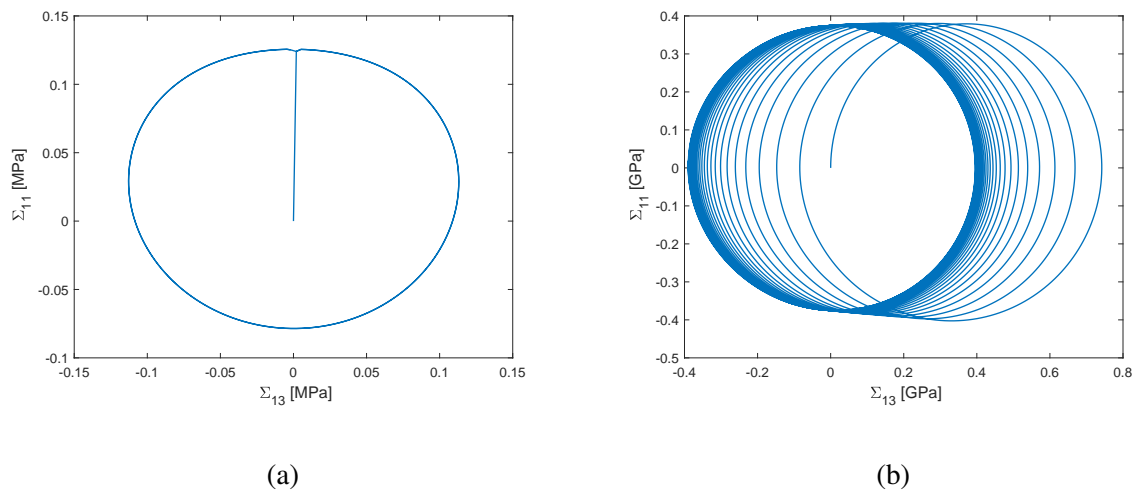


FIGURE 2.4: Composite à matrice visco-élastique linéaire de type Maxwell renforcée élastiquement et soumis à un chargement tournant de la forme (2.93), (2.94).  $c^{(1)} = 0.4$ . Réponse macroscopique pour (a)  $\eta^{(2)} = 3 \text{ MPa.s}$ , (b)  $\eta^{(2)} = 300 \text{ GPa.s}$ .

Après avoir analysé et comparé le comportement effectif de ces matériaux soumis à un chargement tournant, nous nous sommes intéressés aux cas limites. Nous avons pour cela considéré un matériau quasiment élastique  $\eta^{(2)} = 3 \text{ MPa.s}$  et quasiment visqueux  $\eta^{(2)} = 300 \text{ GPa.s}$  que nous avons soumis au même chargement tournant. On observe sur la figure 2.4a, pour une viscosité faible, que la contrainte macroscopique est stabilisée dès le premier cycle. On note que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de ce dernier. De plus, on observe un petit saut non physique

au point  $[\Sigma_{13} = -0.025 \text{ GPa}, \Sigma_{13} = 0.12 \text{ GPa}]$ . En observant les prédictions du modèle proposé des figures 2.3a et 2.4a, on en conclut que pour de petites viscosités, le modèle n'arrive pas à converger et prédit un saut non physique. On observe plus précisément que pour de très faibles viscosités (cf. Fig. 2.4a  $\eta^{(2)} = 3 \text{ MPa.s}$ ) le saut existe mais n'est pas très important. Toutefois, plus la viscosité du matériau augmente et plus ce saut est important (cf. Fig. 2.3a pour  $\eta^{(2)} = 3 \text{ GPa.s}$ ). Enfin à partir d'une certaine valeur de la viscosité, ce saut non physique disparaît et le modèle converge à chaque itération (cf. Figs. 2.3b et 2.4b pour  $\eta^{(2)} = 30 \text{ GPa.s}$  et  $\eta^{(2)} = 300 \text{ GPa.s}$ ). On remarque aussi en comparant les figures 2.3b et 2.4b que plus la viscosité est importante et plus la valeur maximale de  $\Sigma_{13}$  lors du premier cycle est importante. De plus, plus la viscosité est importante, plus le nombre de cycles à réaliser afin d'obtenir un cycle stabilisé augmente. En effet, pour une viscosité  $\eta^{(2)} = 30 \text{ GPa.s}$  (cf. fig. 2.3b) 3 cycles sont nécessaires pour obtenir un cycle stabilisé alors que pour  $\eta^{(2)} = 300 \text{ GPa.s}$  (cf. fig. 2.3b), le cycle stabilisé est obtenu à partir du 30<sup>ème</sup> cycle. Enfin comme on peut l'observer sur les deux figures, les cycles se stabilisent pour la formulation RVP et les solutions exactes autour de l'origine du repère (Fig. 2.3), alors que pour le modèle développé, le cycle se stabilise autour de l'axe des ordonnées pour de très faibles viscosités (Fig. 2.3a) et autour de l'origine du repère pour les fortes viscosités (Fig. 2.3b et Fig. 2.4b).

## 2.5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons développé une procédure variationnelle incrémentale pour des matériaux composites constitués de phases visco-élastiques linéaires de type Maxwell en nous basant sur les principes variationnels incrémentaux local et global introduits par Lahellec et Suquet [57] et présentés dans la partie 1.2. L'idée principale de ces principes est de ne travailler qu'avec un seul potentiel. Pour cela, un potentiel incrémental condensé  $J$  est introduit comme étant la somme des deux potentiels (l'énergie libre et le potentiel de dissipation). On obtient alors un MLC  $w_\Delta$  à polarisation hétérogène intraphase. Afin de pouvoir homogénéiser  $w_\Delta$ , on applique la procédure de Lahellec et al. [54]. Cette dernière consiste à approcher le MLC  $w_\Delta$  par un MLC à polarisation homogène par phase  $w_0$  que nous pouvons alors homogénéiser à l'aide des procédures classiques de l'homogénéisation linéaire, ici les bornes de Hashin et Shtrikman. Ce modèle étant basé sur les mêmes principes variationnels utilisés par la formulation EIV, nous avons cherché à comparer ces deux formulations. Nous avons montré que, bien que les deux formulations soient différentes sur le plan théorique, leurs prédictions numériques sont confondues.

Enfin, les prédictions du modèle présenté ont été comparées à la formulation RVP développée par Lahellec et Suquet [59]. On observe que le modèle développé arrive à reproduire les solutions exactes en champs complets lorsque le composite est soumis à un chargement cyclique isochore. Néanmoins, comme la formulation EIV, le modèle n'arrive pas à reproduire la réponse effective d'un matériau soumis à un chargement non proportionnel tournant.

Le chapitre présenté a traité le cas de potentiels quadratiques (énergie libre et potentiel de dissipation). Or, pour de nombreux autres comportements (ex. la visco-élasticité non linéaire, l'élasto-plasticité, l'élasto-viscoplasticité) le potentiel de dissipation n'est pas quadratique. Il s'avère nécessaire de développer d'autres types de modélisations. Cette problématique est l'objet du chapitre suivant.

# CHAPITRE 3

## Double procédure variationnelle incrémentale pour les composites élasto-viscoplastiques avec de l'écroutissage cinématique linéaire et/ou isotrope

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Comportement local et principes variationnels incrémentaux . . . . .</b>	<b>56</b>
3.1.1	Comportement local . . . . .	56
3.1.2	Principes variationnels incrémentaux local et global . . . . .	57
<b>3.2</b>	<b>Double application de la procédure variationnelle pour des composites élasto-viscoplastiques avec écroutissage . . . . .</b>	<b>58</b>
3.2.1	Linéarisation du comportement local . . . . .	58
3.2.2	Homogénéisation du MLC à polarisation hétérogène intraphase . . .	66
3.2.3	Cas d'une matrice élasto-viscoplastique renforcée par des particules élastiques . . . . .	69
<b>3.3</b>	<b>Conclusions . . . . .</b>	<b>72</b>

---

Dans cette partie nous allons développer une double procédure variationnelle incrémentale (DIV) pour des matériaux composites non linéaires. Pour ce faire, nous nous basons sur les principes variationnels incrémentaux développés par Lahellec et Suquet [57], appliqués au cas de la visco-élasticité non linéaire (ou élasto-viscoplasticité sans seuil), en prenant avantage de la procédure proposée par Agoras et al. [1] développée dans le cas de composites élasto-viscoplastiques sans écroutissage. Après la description du comportement local des phases élasto-viscoplastiques avec des écroutissages cinématique linéaire et isotrope combinés, nous linéariserons le comportement local en nous basant sur les travaux de Agoras et al. [1]. Pour cela, un potentiel incrémental linéarisé quadratique  $J_L$  est introduit, puis en résolvant les différentes conditions de stationnarité sous contraintes inégalités, on aboutit à l'obtention d'un MLC à polarisation hétérogène intraphase  $w_L$ . En suivant toujours les travaux de Agoras et al., ce MLC sera homogénéisé en



l'approchant par un MLC à polarisation homogène par phase  $w_0$ . Pour cela, nous ferons appel à la procédure développée par Lahellec et al. [54] (méthode qui a déjà été présentée dans la partie 2.2.2). Il sera alors possible d'homogénéiser ce MLC à l'aide des bornes de Hashin et Shtrikman et de particulariser la formulation DIV au cas d'un composite biphasé constitué d'une matrice élasto-viscoplastique avec écouissage renforcée par des particules sphériques élastiques distribuées de manière isotrope.

On notera que ce chapitre présente la procédure variationnelle incrémentale développée par Lucchetta et al. [63] dans le cas de matériaux élasto-plastiques avec des écouissage cinématique linéaire et isotrope combinés et l'étend au cas des matériaux élasto-**viscoplastiques** avec des écouissages cinématique linéaire et isotrope combinés.

## 3.1 Comportement local et principes variationnels incrémentaux

### 3.1.1 Comportement local

On considère un VER  $\Omega$  d'un matériau composite de  $N$ -phases avec  $\Omega^{(r)}$  le volume de la phase  $r$  ( $r = 1, \dots, N$ ) tel que  $\Omega = \cup_{r=1}^N \Omega^{(r)}$ . Les phases sont supposées être des MSG ayant un comportement local élasto-viscoplastique décrit par la théorie  $J_2$  de la plasticité combinée avec de l'écouissage cinématique linéaire et de l'écouissage isotrope. Cette classe de matériaux est décrite à l'aide de deux potentiels convexes associés aux variables internes  $\alpha = (\epsilon^p, p)$  décrivant les phénomènes irréversibles, où  $\epsilon^p$  est un tenseur d'ordre deux symétrique de trace nulle représentant les déformations viscoplastiques et  $p$  est un scalaire représentant la déformation plastique cumulée et permettant de décrire l'écouissage isotrope.

Le premier potentiel convexe est l'énergie libre

$$w^{(r)}(\epsilon, \epsilon^p, p) = \frac{1}{2}(\epsilon - \epsilon^p) : \mathbb{L}^{(r)} : (\epsilon - \epsilon^p) + \frac{1}{2} \epsilon^p : \mathbb{H}^{(r)} : \epsilon^p + \hat{w}^{(r)}(p), \quad (3.1)$$

avec  $\mathbb{H}^{(r)}$  le tenseur d'ordre quatre caractérisant l'écouissage cinématique et  $\hat{w}^{(r)}(p)$  représentant l'énergie stockée par l'écouissage isotrope. Cette dernière est une fonction scalaire dépendant de la déformation plastique cumulée  $p$  et définie par

$$\hat{w}^{(r)}(p) = \int_0^p R^{(r)}(q) dq, \quad (3.2)$$

où  $R^{(r)}(p)$  est une fonction scalaire caractérisant l'écouissage isotrope.

Du fait que la déformation  $\epsilon$  n'est pas visqueuse, donc dissipative, la contrainte  $\sigma$  et les forces thermodynamiques irréversibles  $\mathcal{A}_\alpha = (\mathcal{A}_{\epsilon^p}, \mathcal{A}_p)$  associées aux variables internes  $\alpha = (\epsilon^p, p)$

sont données par (voir partie 1.2.1)

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial w^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, p) = \mathbb{L}^{(r)} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \\ \mathcal{A}_{\boldsymbol{\varepsilon}^p} = -\frac{\partial w^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, p) = \mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) - \mathbb{H}^{(r)} : \boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\sigma}_d - \mathbf{X} \\ \mathcal{A}_p = -\frac{\partial w^{(r)}}{\partial p}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, p) = -R^{(r)}(p), \end{cases} \quad (3.3)$$

où  $\mathbf{X}$  est la contrainte de rappel.

Le second potentiel est le potentiel de dissipation  $\varphi^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\alpha}})$  dont l'expression est donnée par

$$\varphi^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{p}) = \phi^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^p) + \Phi_C(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{p}), \quad (3.4)$$

avec

$$\phi^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^p) = \sigma_y^{(r)} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^p + \frac{\eta^{(r)} \dot{\varepsilon}_0}{m+1} \left( \frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^p}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{m+1}, \quad (3.5)$$

où  $\sigma_y^{(r)}$  est la limite d'écoulement (qui peut être nulle dans le cas de l'élasto-viscoplasticité sans seuil),  $\eta^{(r)}$  le module visqueux de la phase  $r$ ,  $\dot{\varepsilon}_0$  un taux de déformation de référence et  $m$  un exposant caractérisant la sensibilité de la vitesse (avec  $0 \leq m \leq 1$ ), et

$$\Phi_C(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{p}) = \begin{cases} 0 & \text{si } (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{p}) \in \mathcal{C} \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.6)$$

la fonction indicatrice sur l'ensemble convexe  $\mathcal{C}$  défini par

$$\mathcal{C} = \{(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{p}) / g(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{p}) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^p - \dot{p} \leq 0\}. \quad (3.7)$$

Les lois d'évolution sont alors données par l'équation

$$\mathcal{A}_{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial \varphi^{(r)}}{\partial \dot{\boldsymbol{\alpha}}}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}). \quad (3.8)$$

On note qu'à partir de l'équation (3.5) il est possible de retrouver le potentiel de dissipation d'un matériau élasto-plastique si la viscosité  $\eta^{(r)} = 0$ , ce résultat ayant été établi par [52] et [22].

### 3.1.2 Principes variationnels incrémentaux local et global

Les principes variationnels incrémentaux local et global du problème ont déjà été présentés dans un cadre général au chapitre 1 (voir partie 1.2.2). Il suffit de remplacer  $\boldsymbol{\alpha}$  représentant l'ensemble des variables internes, par  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  et  $p$  qui sont les variables internes du modèle considéré dans le présent chapitre.

## 3.2 Double application de la procédure variationnelle pour des composites élasto-viscoplastiques avec érouissage

La procédure variationnelle incrémentale EIV, proposée par Lahellec et Suquet [57], conduit à la définition d'un MLC avec une polarisation homogène par phase, caractérisé par une énergie libre  $w_0$ . La procédure variationnelle est appliquée une seule fois pour traiter à la fois la non linéarité du comportement des phases et l'hétérogénéité intraphase du MLC. Dans ce contexte, après l'introduction du potentiel incrémental linéarisé  $J_0$ , la linéarisation et l'uniformisation du comportement sont réalisées en une seule et même étape. Récemment, Agoras et al. [1] ont introduit une méthode plus systématique dans laquelle la linéarisation et l'uniformisation sont étudiées en deux étapes distinctes. La première étape qui consiste à linéariser le comportement local fait appel à la procédure variationnelle de Ponte Castañeda [86] pour obtenir un MLC avec une polarisation hétérogène dans les phases. La seconde étape vise à traiter l'hétérogénéité de la polarisation. Elle repose aussi sur la procédure variationnelle et utilise la méthode proposée par Lahellec et al. [54] afin d'obtenir un MLC avec des propriétés homogènes intraphases. Dans ce chapitre, nous procédons à une extension de l'approche d'Agoras et al. [1] initialement appliquée à des phases élasto-viscoplastiques sans érouissage, au cas de matériaux composites constitués de phases élasto-viscoplastiques avec de l'érouissage cinématique linéaire et/ou isotrope.

Par souci de clarté, il est important de souligner que la formulation proposée ici, du fait qu'elle soit basée sur le principe variationnel incrémental initialement introduit par Lahellec et Suquet [57], est une formulation totale (i.e. basée sur  $\varepsilon$ ) et non en taux (i.e. basée sur  $\dot{\varepsilon}$ ) comme c'est le cas dans Agoras et al. [1]. De plus, notre modèle reposera sur une formulation primale (basée sur  $w^{(r)}(\varepsilon)$  et sur  $\varphi^{(r)}(\dot{\alpha})$ ), ce qui le distingue également du modèle proposé par Agoras et al. [1] qui ont fondé leur approche sur une formulation duale.

### 3.2.1 Linéarisation du comportement local

En raison du caractère non quadratique du potentiel de dissipation  $\varphi^{(r)}$  (cf. Eq. (3.4)), le potentiel incrémental  $J$  défini dans l'équation (1.24)<sub>2,3</sub> est difficile à homogénéiser. Pour surmonter cette difficulté, un potentiel incrémental linéarisé  $J_L^{(r)}$  est introduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_L(\underline{x}, \varepsilon, \varepsilon^p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) = \sum_{r=1}^N J_L^{(r)}(\underline{x}, \varepsilon, \varepsilon^p, \eta_{\varepsilon^p}^{(r)}) \chi^{(r)}(\underline{x}) \quad \text{avec} \\ J_L^{(r)}(\underline{x}, \varepsilon, \varepsilon^p, \eta_{\varepsilon^p}^{(r)}) = w^{(r)}(\varepsilon, \varepsilon^p, p) - \hat{w}^{(r)}(p) + \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} (\varepsilon^p - \varepsilon_n^p) : (\varepsilon^p - \varepsilon_n^p), \end{array} \right. \quad (3.9)$$

où la notation  $\{\eta_{\varepsilon^p}\}$  correspond à l'ensemble des viscosités des phases  $\{\eta_{\varepsilon^p}^{(1)}, \dots, \eta_{\varepsilon^p}^{(N)}\}$ . Une idée clé de la procédure variationnelle est d'additionner et de soustraire le potentiel  $J_L$  au potentiel  $J$ ,

i.e.  $J = J_L + J - J_L$ , tel que le premier terme  $J_L$  peut être homogénéisé grâce à son caractère quadratique, et la différence  $J - J_L$  peut être évaluée séparément.

### Approximation du potentiel incrémental condensé effectif

L'introduction du potentiel incrémental linéarisé conduit à définir

$$\Delta J^{(r)} = J^{(r)} - J_L^{(r)} = \Delta t \varphi^{(r)} \left( \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p}{\Delta t}, \frac{p - p_n}{\Delta t} \right) + \hat{w}^{(r)}(p) - \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) : (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p), \quad (3.10)$$

qui peut se réécrire, grâce à l'équation (3.4), sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \Delta J^{(r)}(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, p, \eta_{\varepsilon^p}^{(r)}) &= \Delta t \phi^{(r)} \left( \left( \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p}{\Delta t} \right)_{eq} \right) + \Delta t \Phi_C \left( \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p}{\Delta t}, \frac{p - p_n}{\Delta t} \right) \\ &+ \hat{w}^{(r)}(p) - \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) : (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p). \end{aligned} \quad (3.11)$$

En reportant (3.11) dans la formulation variationnelle (1.26), en considérant la définition (1.24) et en notant que les minimisations par rapport à  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  et  $p$  peuvent être réalisées séparément de sorte que la condition d'infimum peut être placée en dehors de la moyenne, on a alors

$$\tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) = \inf_{(\boldsymbol{\varepsilon})=\mathbf{E}} \left\{ \inf_{(\boldsymbol{\varepsilon}^p, p)} \langle J_L(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) + \Delta J(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}^p, p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \rangle \right\}. \quad (3.12)$$

On observe dans l'équation (3.6) que  $\Phi_C(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{p}) = +\infty$  lorsque  $g(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{p}) > 0$ . En conséquence, la condition d'infimum dans l'équation (3.12) est obtenue sous la contrainte  $g\left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p}{\Delta t}, \frac{p - p_n}{\Delta t}\right) \leq 0$ .

On introduit alors  $\Delta J_{bis}$  comme :

$$\begin{aligned} \Delta J_{bis}(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) &= \sum_{r=1}^N \Delta J_{bis}^{(r)}(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, p, \eta_{\varepsilon^p}^{(r)}) \chi^{(r)}(\underline{x}) \quad \text{avec} \\ \Delta J_{bis}^{(r)}(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, p, \eta_{\varepsilon^p}^{(r)}) &= \Delta t \phi^{(r)} \left( \left( \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p}{\Delta t} \right)_{eq} \right) + \hat{w}^{(r)} \left( p_n + \frac{p - p_n}{\Delta t} \Delta t \right) \\ &- \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) : (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p), \end{aligned} \quad (3.13)$$

de sorte que

$$\tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) = \inf_{(\boldsymbol{\varepsilon})=\mathbf{E}} \left\{ \inf_{(\boldsymbol{\varepsilon}^p, p) / g\left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p}{\Delta t}, \frac{p - p_n}{\Delta t}\right) \leq 0} \langle J_L(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) + \Delta J_{bis}(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}^p, p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \rangle \right\}. \quad (3.14)$$

Comme dans Lahellec et Suquet [57], une borne supérieure rigoureuse de  $\tilde{w}_\Delta$ , peut être obtenue en prenant une condition de supremum de  $\Delta J_{bis}$  par rapport à  $(\boldsymbol{\varepsilon}^p, p)$ , sous la contrainte  $g \leq 0$  :

$$\begin{aligned} \tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) &\leq \tilde{w}_\Delta^{VAR}(\mathbf{E}, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \\ &= \inf_{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}} \left\{ \inf_{(\boldsymbol{\varepsilon}^p, p)/g \leq 0} \langle J_L(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \rangle + \left\langle \sup_{(\boldsymbol{\varepsilon}^p, p)/g \leq 0} \Delta J_{bis}(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}^p, p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \right\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

La contrainte  $g(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{p}) \leq 0$  dans l'équation (3.14) avec la définition (3.7) peut se réécrire en formulation totale sous la forme

$$h(\boldsymbol{\varepsilon}^p, p) \leq 0 \quad \text{avec} \quad h(\boldsymbol{\varepsilon}^p, p) = (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) : (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) - \frac{3}{2}(p - p_n)^2. \quad (3.16)$$

De plus, à partir de l'équation (3.13),  $\Delta J_{bis}$  peut s'exprimer comme une fonction de  $(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{p})$ . Il s'en suit que l'équation (3.15) prend la forme

$$\begin{aligned} \tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) &\leq \tilde{w}_\Delta^{VAR}(\mathbf{E}, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \\ &= \inf_{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}} \left\{ \inf_{(\boldsymbol{\varepsilon}^p, p)/h(\boldsymbol{\varepsilon}^p, p) \leq 0} \langle J_L(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \rangle + \left\langle \sup_{(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{p})/g(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{p}) \leq 0} \Delta J_{bis}(\cdot, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{p}, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \right\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Comme l'ont montré Lahellec et Suquet en 2006 [56] et en 2007 [57], cette borne supérieure peut être trop forte dans certains cas. Ponte Castañeda et Willis en 1999 [91] et Ponte Castañeda en 2002 [89] ont observé que pour des situations similaires, cette borne supérieure peut être relaxée en remplaçant la condition de supremum par une condition de stationnarité. Sous cette condition de stationnarité, on obtient une estimation de  $\tilde{w}_\Delta$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) &\approx \tilde{w}_\Delta^{VAR}(\mathbf{E}, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \\ &= \inf_{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}} \left\{ \inf_{(\boldsymbol{\varepsilon}^p, p)/h(\boldsymbol{\varepsilon}^p, p) \leq 0} \langle J_L(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \rangle + \left\langle \text{stat}_{(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{p})/g(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{p}) \leq 0} \Delta J_{bis}(\cdot, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{p}, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \right\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Enfin, une dernière optimisation en fonction de l'ensemble  $\{\eta_{\varepsilon^p}\}$  est considérée. Celle-ci conduit à l'estimation finale de la formulation DIV de  $\tilde{w}_\Delta$  et est définie comme

$$\tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) \approx \tilde{w}_\Delta^{DIV}(\mathbf{E}) = \text{stat}_{\{\eta_{\varepsilon^p}\}} \tilde{w}_\Delta^{VAR}(\mathbf{E}, \{\eta_{\varepsilon^p}\}). \quad (3.19)$$

### Conditions de stationnarité

On se propose maintenant de développer toutes les conditions de stationnarité apparaissant dans (3.18) et (3.19). On procédera d'abord à l'écriture de la stationnarité de  $\Delta J_{bis}$  vis à vis de  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  et  $\dot{p}$  ce qui fournira une expression de la viscosité  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$ . Soulignons d'emblée que la stationnarité de  $\tilde{w}_\Delta$  par rapport à  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$  conduira à une égalité entre  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p^{(r)}$ , valeur de  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  calculée à la stationnarité

de  $\Delta J_{bis}$ , et  $\overline{\hat{\varepsilon}}^p{}^{(r)}$ , moment d'ordre deux de  $\dot{\varepsilon}^p$  dans la phase  $r$ . Enfin, la stationnarité de  $J_L$  en fonction de  $\varepsilon^p$  et  $p$  fournira une expression de  $\varepsilon^p$  qui dépendra linéairement de  $\varepsilon$  ainsi qu'une interprétation mécanique du module visqueux  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$  dans le cadre de la procédure variationnelle.

### Stationnarité de $\Delta J_{bis}$

La stationnarité de  $\Delta J_{bis}$  au point  $\underline{x}$  en fonction de  $\dot{\varepsilon}^p$  et  $\dot{p}$  sous la contrainte  $g(\dot{\varepsilon}^p, \dot{p}) \leq 0$  est réalisée en appliquant les conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

$$\begin{cases} \partial \Delta J_{bis} + \lambda \partial g = 0 \\ \lambda g = 0 \\ \lambda \geq 0, \quad g \leq 0, \end{cases} \quad (3.20)$$

où  $\partial$  représente la variation en  $\dot{\varepsilon}^p$  et  $\dot{p}$ . En considérant les définitions (3.7) et (3.13), on obtient pour tout  $\underline{x}$  dans la phase  $r$

$$\begin{cases} \Delta t \frac{\partial \phi^{(r)}}{\partial \dot{\varepsilon}_{eq}^p} (\dot{\varepsilon}_{eq}^p) - 3 \Delta t \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \dot{\varepsilon}_{eq}^p + \lambda = 0 \\ \Delta t R^{(r)} (p_n + \dot{p} \Delta t) - \lambda = 0 \\ \lambda (\dot{\varepsilon}_{eq}^p - \dot{p}) = 0 \\ \lambda \geq 0, \quad \dot{\varepsilon}_{eq}^p - \dot{p} \leq 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Dans ce système,  $\lambda$ ,  $\dot{\varepsilon}^p$  et  $\dot{p}$  sont à priori des champs inconnus qui dépendent de la position  $\underline{x}$  dans la phase  $r$ . Or,  $\phi^{(r)}$  et  $R^{(r)}$  gardent la même expression en chaque point  $\underline{x}$  de la phase  $r$ . De plus, le module visqueux  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$  est aussi uniforme dans la phase  $r$ . Si on suppose que  $p_n$  est uniforme dans la phase  $r$ , alors la solution du système (3.21) est uniforme par phase. Enfin, au début du chargement,  $p_0$  est uniformément égale à zéro. On montre alors par récurrence, en considérant l'égalité  $p = p_n + \Delta t \dot{p}$ , que tous ces champs sont uniformes par phase. En particulier,  $\dot{\varepsilon}_{eq}^p$  sera noté  $\widehat{\varepsilon}^p{}^{(r)}$ , de même  $p^{(r)} \equiv p$ ,  $p_n^{(r)} \equiv p_n$  et  $\lambda^{(r)} \equiv \lambda$ .

On doit maintenant analyser les deux cas possibles suivant pour le multiplicateur de Lagrange :

**Cas 1 :**  $\lambda^{(r)} = 0$ . D'après (3.21)<sub>2</sub>, cette hypothèse conduit à  $R^{(r)}(p) = 0$ , ce qui n'a pas de sens physique lorsque de l'écrouissage isotrope est considéré. Ce cas ne sera donc pas retenu.

**Cas 2 :**  $\lambda^{(r)} > 0$ . D'après (3.21)<sub>3</sub>, cette hypothèse conduit à  $\widehat{\varepsilon}^p{}^{(r)} - \dot{p}^{(r)} = 0$ . En combinant cette égalité avec les équations (3.21)<sub>1</sub> et (3.21)<sub>2</sub>, on obtient une expression du module visqueux

de la forme

$$\begin{aligned} \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} &= \frac{1}{3 \widehat{\varepsilon}^p} \left[ \frac{\partial \phi^{(r)}}{\partial \widehat{\varepsilon}^p} \left( \widehat{\varepsilon}^p \right) + R^{(r)} \left( p_n^{(r)} + \Delta t \widehat{\varepsilon}^p \right) \right] \\ &= \frac{\sigma_y^{(r)} + R^{(r)} \left( p_n^{(r)} + \Delta t \widehat{\varepsilon}^p \right) + \eta^{(r)} \left( \widehat{\varepsilon}^p / \dot{\varepsilon}_0 \right)^m}{3 \widehat{\varepsilon}^p}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Cette équation nous permet de calculer  $\Delta J_{bis}$  sous la condition de stationnarité. En effet, on observe dans (3.22) que le module visqueux  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$  est une fonction dépendant de  $\widehat{\varepsilon}^p$ . De plus,

$$\frac{\sigma_y^{(r)} + R^{(r)} \left( p_n^{(r)} + \Delta t \widehat{\varepsilon}^p \right)}{3 \widehat{\varepsilon}^p} \quad \text{et} \quad \frac{\eta^{(r)}}{3 \left( \dot{\varepsilon}_0 \right)^m} \left( \widehat{\varepsilon}^p \right)^{m-1}, \quad (3.23)$$

sont deux fonctions strictement décroissantes. En effet,  $R^{(r)}$  croit moins vite que  $\widehat{\varepsilon}^p$ , donc par croissance comparée (3.23)<sub>1</sub> est une fonction décroissante. De même, pour  $m$  satisfaisant  $0 \leq m \leq 1$ , la fonction (3.23)<sub>2</sub> est aussi strictement décroissante. Or, la somme de deux fonctions strictement décroissantes est aussi strictement décroissante, donc  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$  est une fonction strictement décroissante et donc bijective par rapport à  $\widehat{\varepsilon}^p$ . Cela conduit alors au fait que  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \left( \widehat{\varepsilon}^p \right)$  est inversible et on notera  $\widehat{\varepsilon}^p \left( \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \right)$  son inverse. On a alors

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\text{stat}}{(\dot{\varepsilon}^p, \dot{p}) / \dot{\varepsilon}^p - \dot{p} \leq 0} \Delta J_{bis} \right\rangle &= \Delta t \sum_{r=1}^N c^{(r)} f^{(r)} \left( \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \right) \quad \text{avec} \\ f^{(r)} \left( \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \right) &= \sigma_y^{(r)} \widehat{\varepsilon}^p \left( \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \right) + \frac{\eta^{(r)} \dot{\varepsilon}_0}{m+1} \left( \frac{\dot{\varepsilon}^p \left( \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \right)}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{m+1} - \frac{3}{2} \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \left( \widehat{\varepsilon}^p \left( \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \right) \right)^2 \\ &+ \frac{\widehat{w}^{(r)}}{\Delta t} \left( p_n^{(r)} + \Delta t \widehat{\varepsilon}^p \left( \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Cette expression sera utile pour l'équation (3.42).

### Stationnarité de $\tilde{w}_{\Delta}^{VAR}$ en fonction de $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$

En faisant appel aux équations (3.9), (3.13) et (3.18), la condition de stationnarité de  $\tilde{w}_{\Delta}^{VAR}$  en fonction de  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$  s'écrit

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{(\varepsilon^p - \varepsilon_n^p) : (\varepsilon^p - \varepsilon_n^p)}{\Delta t} \right\rangle^{(r)} - \frac{3}{2} \Delta t \left( \widehat{\varepsilon}^p \right)^2 \\ + \left[ \frac{\partial \phi^{(r)}}{\partial \widehat{\varepsilon}^p} \left( \widehat{\varepsilon}^p \right) + R^{(r)} \left( p_n^{(r)} + \Delta t \widehat{\varepsilon}^p \right) - 3 \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \widehat{\varepsilon}^p \right] \Delta t \frac{\partial \widehat{\varepsilon}^p}{\partial \eta_{\varepsilon^p}^{(r)}} \left( \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

En reportant (3.22) dans (3.25), le dernier terme de cette dernière disparaît. Il s'en suit la relation

$$\widehat{\varepsilon}^p{}^{(r)} = \overline{\overline{\varepsilon}}^p{}^{(r)} = \sqrt{\frac{2}{3} \langle \dot{\varepsilon}^p : \dot{\varepsilon}^p \rangle^{(r)}}. \quad (3.26)$$

L'équation (3.22) se réécrit alors

$$\eta_{\varepsilon^p}^{(r)} = \frac{\sigma_y^{(r)} + \eta^{(r)} \left( \frac{\overline{\overline{\varepsilon}}^p{}^{(r)}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^m + R^{(r)}(p^{(r)})}{3 \overline{\overline{\varepsilon}}^p{}^{(r)}} = \eta_{\phi, sct}^{(r)} \left( \frac{\overline{\overline{\varepsilon}}^p{}^{(r)}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) + \eta_h^{(r)} \left( \frac{\overline{\overline{\varepsilon}}^p{}^{(r)}}{\dot{\varepsilon}_0} \right), \quad (3.27)$$

avec

$$\eta_{\phi, sct}^{(r)} \left( \frac{\overline{\overline{\varepsilon}}^p{}^{(r)}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) = \frac{\sigma_y^{(r)} + \eta^{(r)} \left( \frac{\overline{\overline{\varepsilon}}^p{}^{(r)}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^m}{3 \overline{\overline{\varepsilon}}^p{}^{(r)}}, \quad \eta_h^{(r)} \left( \frac{\overline{\overline{\varepsilon}}^p{}^{(r)}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) = \frac{R^{(r)}(p^{(r)})}{3 \overline{\overline{\varepsilon}}^p{}^{(r)}} \quad \text{et} \quad p^{(r)} = \Delta t \overline{\overline{\varepsilon}}^p{}^{(r)} + p_n^{(r)}. \quad (3.28)$$

La viscosité  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$  ainsi écrite est alors la somme de deux viscosités qui sont respectivement associées au comportement élasto-viscoplastique  $\eta_{\phi, sct}^{(r)}$  et à l'écroutissage isotrope  $\eta_h^{(r)}$ .

### Stationnarité de $\langle J_L \rangle$ en fonction de $\varepsilon^p$ et $p$

La contrainte  $h(\varepsilon^p, p) \leq 0$ , avec  $h$  définie par l'équation (3.16), doit être satisfaite  $\forall \underline{x} \in \Omega^{(r)}$  car  $\varepsilon_n^p$  et  $p_n$  sont des champs hétérogènes. Afin de contourner cette difficulté, la contrainte  $h$  est relaxée en une condition de contrainte par phase, i.e.  $\langle h \rangle^{(r)} \leq 0, \forall r \in \{1, \dots, N\}$ . La stationnarité de  $\langle J_L \rangle$  en fonction de  $\varepsilon^p$  et  $p$  sous ces nouvelles contraintes est écrite en ayant recours aux conditions d'optimalité de KKT. On obtient alors (cf. annexe B)

$$\forall r \in \{1, \dots, N\} \begin{cases} \partial J_L^{(r)}(\underline{x}) + \lambda^{(r)} \partial h(\underline{x}) = 0 & \forall \underline{x} \in \Omega^{(r)} \\ \lambda^{(r)} \langle h \rangle^{(r)} = 0 \\ \lambda^{(r)} \geq 0, \quad \langle h \rangle^{(r)} \leq 0, \end{cases} \quad (3.29)$$

où,  $\lambda^{(r)}$  sont  $N$  scalaires et  $\partial$  représente la variation vis à vis de  $\varepsilon^p$  et  $p$ . En considérant les équations (3.9) et (3.16) avec (3.29), on aboutit à

$$\begin{cases} -\mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)} : (\varepsilon - \varepsilon^p) + \mathbb{H}^{(r)} : \varepsilon^p + 2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} (\varepsilon^p - \varepsilon_n^p) + 2\lambda^{(r)} (\varepsilon^p - \varepsilon_n^p) = 0 \\ -3\lambda^{(r)} (p - p_n) = 0 \\ \lambda^{(r)} \left\langle (\varepsilon^p - \varepsilon_n^p) : \left( \varepsilon^p - \varepsilon_n^p - \frac{3}{2} (p - p_n)^2 \right) \right\rangle^{(r)} = 0 \\ \lambda^{(r)} \geq 0, \quad \langle h \rangle^{(r)} \leq 0, \end{cases} \quad (3.30)$$

Afin d'obtenir l'ensemble des équations du modèle, on doit maintenant trouver une relation liant  $\varepsilon^p$  et  $\varepsilon$ . A cette fin, on doit considérer les deux cas possibles suivants pour le multiplicateur de Lagrange :



**Cas 1 :**  $\lambda^{(r)} > 0$ . Sous cette condition, on a d'après l'équation (3.30)<sub>2</sub> l'égalité  $p = p_n$  et  $\overline{\dot{\varepsilon}}^p = 0$  d'après l'équation (3.30)<sub>3</sub>. Ceci implique que  $\varepsilon^p = \varepsilon_n^p$  en chaque point  $\underline{x}$ . Une telle situation correspond au régime élastique.

**Cas 2 :**  $\lambda^{(r)} = 0$ . Cette situation correspond au régime plastique du fait que l'équation (3.30)<sub>2</sub> ne conduit pas à  $p - p_n = 0$ . Alors, l'équation (3.30)<sub>1</sub> avec  $\lambda^{(r)} = 0$  s'écrit

$$-\mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)} : (\varepsilon - \varepsilon^p) + \mathbb{H}^{(r)} : \varepsilon^p + 2 \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \left( \frac{\varepsilon^p - \varepsilon_n^p}{\Delta t} \right) = \mathbf{0}, \quad (3.31)$$

d'où on déduit une expression de la déformation plastique de la forme

$$\varepsilon^p = \left[ \mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)} + \mathbb{K} : \mathbb{H}^{(r)} + 2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} \mathbb{K} \right]^{-1} : \left[ \mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)} : \varepsilon + 2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} \varepsilon_n^p \right]. \quad (3.32)$$

De plus, à partir de (3.3)<sub>2</sub>, l'équation (3.31) se réécrit sous la forme

$$\sigma_d - \mathbf{X} = 2 \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \dot{\varepsilon}^p. \quad (3.33)$$

Ainsi, comme le montre les équations (3.27), (3.28) et (3.33)  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$  s'interprète comme le module visqueux sécant modifié associé au comportement élasto-viscoplastique avec de l'écrouissage isotrope dépendant du second moment de la déformation plastique  $\overline{\dot{\varepsilon}}^p$ . On déduit alors des équations (3.33) et (3.27)

$$\overline{\sigma - X}^{(r)} = \sigma_y^{(r)} + R^{(r)}(p^{(r)}) + \eta^{(r)} \left( \frac{\overline{\dot{\varepsilon}}^p}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^m. \quad (3.34)$$

D'où l'on déduit immédiatement

$$\overline{\dot{\varepsilon}}^p = \dot{\varepsilon}_0 \left( \frac{\overline{\sigma - X}^{(r)} - \sigma_y^{(r)} - R^{(r)}(p^{(r)})}{\eta^{(r)}} \right)^n, \quad (3.35)$$

avec  $n = 1/m$ . Les paramètres  $\eta^{(r)}$  et  $\dot{\varepsilon}_0$  étant positifs, et le second moment  $\overline{\dot{\varepsilon}}^p$  étant strictement positif en régime plastique, le numérateur de l'équation (3.35) doit être aussi strictement positif en régime plastique. Il en résulte

$$\overline{\sigma - X}^{(r)} > \sigma_y^{(r)} + R^{(r)}(p^{(r)}). \quad (3.36)$$

On retrouve alors le critère local  $F$  défini par

$$F(\sigma, \mathbf{X}, R) = (\sigma - X)_{eq} - \sigma_y^{(r)} - R^{(r)}(p), \quad (3.37)$$

en moment d'ordre deux sur la phase  $r$ , associée au potentiel de dissipation dual

$$\varphi^{*(r)}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R) = \frac{\dot{\varepsilon}_0 \eta^{(r)}}{n+1} \left( \frac{[(\boldsymbol{\sigma} - X)_{eq} - \sigma_y^{(r)} - R^{(r)}(p)]^+}{\eta^{(r)}} \right)^{n+1}, \quad (3.38)$$

avec  $[f]^+$  la partie positive de la fonction  $f$  et  $n = 1/m$ , qui est classiquement connu dans le cas de l'élasto-viscoplasticité avec des écroissages cinématique linéaire et isotrope combinés.

Ainsi, comme on l'observe dans l'équation (3.36), le critère de plasticité (3.37) dans le cas d'un comportement local élasto-viscoplastique pour la formulation DIV est obtenue en approximant la contrainte locale  $(\boldsymbol{\sigma} - X)_{eq}$  par  $\overline{\boldsymbol{\sigma} - X}^{(r)}$ , et la déformation plastique cumulée  $p$  par  $p^{(r)}$  dont l'évolution est donnée par le second moment du taux de déformation plastique  $\overline{\dot{\varepsilon}^p}^{(r)}$  (cf. Eq. (3.28)).

### Détermination du MLC à polarisation hétérogène par phase

En reportant l'expression (3.32) de  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  dans la définition (3.9) de  $J_L$ , on obtient un MLC thermo-élastique défini par l'énergie libre  $w_L^{(r)}$  donnée par

$$w_L^{(r)}(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \eta_{\varepsilon^p}^{(r)}) = \inf_{(\boldsymbol{\varepsilon}^p, p)/\langle h \rangle^{(r)} \leq 0} J_L^{(r)}(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \eta_{\varepsilon^p}^{(r)}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{L}_L^{(r)} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\tau}_L^{(r)}(\underline{x}) : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} f_L^{(r)}(\underline{x}), \quad (3.39)$$

avec

$$\begin{cases} \mathbb{L}_L^{(r)} = \mathbb{L}^{(r)} - [\mathbb{L}^{(r)} : \mathbb{K}] : \left[ 2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} \mathbb{K} + \mathbb{H}^{(r)} + \mathbb{L}^{(r)} : \mathbb{K} \right]^{-1} : [\mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)}] \\ \boldsymbol{\tau}_L^{(r)}(\underline{x}) = -2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} \left[ 2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} \mathbb{K} + \mathbb{H}^{(r)} + \mathbb{L}^{(r)} : \mathbb{K} \right]^{-1} : [\mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)} : \boldsymbol{\varepsilon}_n^p(\underline{x})] \\ f_L^{(r)}(\underline{x}) = \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_n^p(\underline{x}) : \left[ 2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} \mathbb{K} + \mathbb{H}^{(r)} + \mathbb{L}^{(r)} : \mathbb{K} \right]^{-1} : [\mathbb{H}^{(r)} + \mathbb{L}^{(r)} : \mathbb{K}] : \boldsymbol{\varepsilon}_n^p(\underline{x}). \end{cases} \quad (3.40)$$

Une telle énergie correspond à un MLC à polarisation hétérogène intraphase. La polarisation  $\boldsymbol{\tau}_L^{(r)}$  et le champ scalaire  $f_L^{(r)}$  dépendent de  $\underline{x}$  à travers  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p(\underline{x})$ . En conséquence, l'énergie libre effective de ce MLC est définie par

$$\tilde{w}_L(\mathbf{E}, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) = \inf_{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}} \langle w_L(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \rangle. \quad (3.41)$$

A partir des équations (3.18), (3.19), (3.24) et (3.26), il vient

$$\tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) \approx \tilde{w}_\Delta^{DIV}(\mathbf{E}) = \text{stat}_{\{\eta_{\varepsilon^p}\}} \tilde{w}_\Delta^{VAR}(\mathbf{E}, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) = \tilde{w}_L(\mathbf{E}, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) + \Delta t \sum_{r=1}^N c^{(r)} f^{(r)} \left( \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \right), \quad (3.42)$$

avec  $f^{(r)}$  défini par l'équation (3.24)<sub>2</sub>. En prenant en compte les conditions de stationnarité en fonction de  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$ , on obtient

$$\Sigma = \frac{\partial \tilde{w}_\Delta}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}) \approx \frac{\partial \tilde{w}_\Delta^{DIV}}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}) = \frac{\partial \tilde{w}_L}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}), \quad (3.43)$$

où  $\tilde{w}_L(\mathbf{E})$  représente la valeur de  $\tilde{w}_L(\mathbf{E}, \{\eta_{\varepsilon^p}\})$  calculée pour l'ensemble  $\{\eta_{\varepsilon^p}\}$  optimal.

### 3.2.2 Homogénéisation du MLC à polarisation hétérogène intraphase

#### Procédure générale

L'objectif de cette partie est d'homogénéiser le MLC  $w_L$  à polarisation hétérogène intraphase. A cette fin, nous ré-appliquons la même procédure que celle développée dans la partie 2.2.2. L'idée est de faire appel à la méthode développée par Lahellec et al. [54] qui consiste à approcher le MLC hétérogène  $w_L$  par un MLC à polarisation homogène intraphase défini par l'énergie libre  $w_0$  (cf. Eq. (2.38)). On note que cette méthode a été développée dans un cadre plus général que le notre. En effet, Lahellec et al. ont considéré des polarisations  $\tau_L^{(r)}$  mais aussi des tenseurs élastiques  $\mathbb{L}_L^{(r)}$  qui dépendent de  $\underline{x}$ . Dans ce qui suit, on rappellera les équations importantes de cette méthode qui a été présentée dans la partie 2.2.2. La seule différence entre la procédure développée dans le cas de la visco-élasticité linéaire de type Maxwell (cf. partie 2.2.2) et dans le cas présent de l'élasto-viscoplasticité avec écrouissage, vient des expressions des MLC à polarisation hétérogène intraphase (respectivement noté  $w_\Delta$  dans la partie 2.2.2 et  $w_L$  dans cette partie).

En suivant la procédure développée en 2.2.2, on obtient une approximation (2.45)<sup>1</sup> de  $\tilde{w}_L$  sous des conditions de stationnarité vis à vis de  $\mathbb{L}_0^{(r)}$ ,  $\tau_0^{(r)}$  et  $f_0^{(r)}$ . On note que pour un tenseur  $s^{(r)}$  d'ordre zéro, deux ou quatre,  $\Delta s^{(r)}(\underline{x}) = s_L^{(r)}(\underline{x}) - s_0^{(r)}$ . En résolvant ces conditions de stationnarité, on retrouve les équations (2.46) et (2.47). Ceci permet alors d'obtenir une expression de la polarisation  $\tau_0^{(r)}$  de la forme

$$\tau_0^{(r)} = \left\langle \tau_L^{(r)}(\cdot) \right\rangle^{(r)} + \Delta \mathbb{L}^{(r)} : \langle \varepsilon_0(\cdot) \rangle^{(r)} = \overline{\tau}_L^{(r)} + \left( \mathbb{L}_L^{(r)} - \mathbb{L}_0^{(r)} \right) : \overline{\varepsilon}_0^{(r)}, \quad (3.44)$$

ainsi qu'une relation entre les fluctuations du tenseur des déformations dans le MLC  $w_0$  et les fluctuations de la polarisation du MLC  $w_L$

$$\left( \mathbb{L}_L^{(r)} - \mathbb{L}_0^{(r)} \right) : C^{(r)}(\varepsilon_0) : \left( \mathbb{L}_L^{(r)} - \mathbb{L}_0^{(r)} \right) = C^{(r)}(\Delta \tau^{(r)}) = C^{(r)}\left(\tau_L^{(r)}\right), \quad (3.45)$$

où  $C^{(r)}$  est défini par l'équation (1.30). Dans l'équation (3.45), similairement au chapitre 2, la déformation dans le MLC  $w_0$  est notée  $\varepsilon_0$ . Les expressions de  $\tau_0^{(r)}$  et  $\mathbb{L}_0^{(r)}$  peuvent être déterminées à partir de (3.44) et (3.45) une fois les premiers et seconds moments de  $\varepsilon_0$  calculés. Le

1. L'indice  $L$  remplace désormais l'indice  $\Delta$ , ex.  $w_L, \mathbb{L}_L^{(r)}, \tau_L^{(r)}$  à la place de  $w_\Delta, \mathbb{L}_\Delta^{(r)}, \tau_\Delta^{(r)}$ .

comportement effectif du composite non linéaire est alors obtenu à partir de l'estimation (2.23) comme

$$\Sigma = \frac{\partial \tilde{w}_\Delta}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}) \approx \frac{\partial \tilde{w}_L}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}) = \frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}) = \tilde{\mathbb{L}}_0 : \mathbf{E} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_0. \quad (3.46)$$

Dans cette équation, l'approximation provient de l'Eq. (3.43), la troisième égalité de la stationnarité de  $\tilde{w}_L$  en fonction de  $\mathbb{L}_0^{(r)}$ ,  $\boldsymbol{\tau}_0^{(r)}$  et  $f_0^{(r)}$  et la dernière égalité de l'expression (A.2) de l'énergie effective  $\tilde{w}_0$  donnée dans l'annexe A. Les tenseurs  $\tilde{\mathbb{L}}_0$  et  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_0$  représentent respectivement le tenseur d'élasticité effectif et la polarisation effective du MLC homogène.

Comme l'ont montré Lahellec et al. [54], les premier et second moments des déformations dans le MLC à polarisation hétérogène intraphase peuvent être approchés par ceux du MLC à polarisation homogène intraphase. On a alors

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(r)} \approx \overline{\boldsymbol{\varepsilon}_L}^{(r)} \approx \overline{\boldsymbol{\varepsilon}_0}^{(r)}, \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(r)} \approx \langle \boldsymbol{\varepsilon}_L \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_L \rangle^{(r)} \approx \langle \boldsymbol{\varepsilon}_0 \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_0 \rangle^{(r)}, \quad (3.47)$$

où  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}_L$  représentent respectivement les champs de déformations du composite non linéaire et du MLC  $w_L$ . Les mêmes approximations ont été faites pour les moments d'ordre un et deux du tenseur des contraintes dans les phases.

### Composites élasto-viscoplastiques à phases isotropes

Comme dans la partie 2.2.2, on suppose que les phases du composite, décrites dans la partie 3.1.1, sont isotropes. Les tenseurs d'élasticité et les tenseurs d'écroutissage cinématique s'écrivent ainsi respectivement

$$\mathbb{L}^{(r)} = 3k^{(r)}\mathbb{J} + 2\mu^{(r)}\mathbb{K}, \quad \mathbb{H}^{(r)} = a^{(r)}\mathbb{K}. \quad (3.48)$$

On considère ici aussi que les tenseurs d'élasticités  $\mathbb{L}_0^{(r)}$  du MLC homogène sont également isotropes. On a alors

$$\mathbb{L}_0^{(r)} = 3k_0^{(r)}\mathbb{J} + 2\mu_0^{(r)}\mathbb{K}. \quad (3.49)$$

D'après l'expression (3.40)<sub>2</sub> de  $\boldsymbol{\tau}_L^{(r)}(\underline{x})$ , on observe que cette polarisation est purement déviatorique. De plus, comme le comportement non linéaire porte uniquement sur la partie déviatorique, on supposera une polarisation  $\boldsymbol{\tau}_0^{(r)}$  purement déviatorique. D'après l'équation (3.44), le tenseur  $\langle \Delta \mathbb{L}^{(r)} : \boldsymbol{\varepsilon}_0 \rangle^{(r)}$  l'est aussi. On a alors

$$k^{(r)} = k_L^{(r)} = k_0^{(r)}. \quad (3.50)$$

Sous ces conditions, (3.40) se réécrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{L}_L^{(r)} = 3 k_L^{(r)} \mathbb{J} + 2 \mu_L^{(r)} \mathbb{K} = 3 k^{(r)} \mathbb{J} + 2 \mu^{(r)} \frac{2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} + a^{(r)}}{2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} + a^{(r)} + 2 \mu^{(r)}} \mathbb{K} \\ \boldsymbol{\tau}_L^{(r)}(\underline{x}) = -2 \mu^{(r)} \frac{2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t}}{2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} + a^{(r)} + 2 \mu^{(r)}} \boldsymbol{\varepsilon}_n^p(\underline{x}) \\ f_L^{(r)}(\underline{x}) = \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} \frac{a^{(r)} + 2 \mu^{(r)}}{2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} + a^{(r)} + 2 \mu^{(r)}} \boldsymbol{\varepsilon}_n^p(\underline{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_n^p(\underline{x}). \end{array} \right. \quad (3.51)$$

De même, (3.32) devient

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^p &= \beta^{(r)} \boldsymbol{\varepsilon}_d + \zeta^{(r)} \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \quad \text{avec} \\ \beta^{(r)} &= \frac{2 \mu^{(r)}}{2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} + a^{(r)} + 2 \mu^{(r)}}, \quad \zeta^{(r)} = \frac{2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t}}{2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} + a^{(r)} + 2 \mu^{(r)}}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

A la différence du cas de la visco-élasticité linéaire de type Maxwell, où les paramètres  $\mathbb{L}_\Delta^{(r)}$  et  $\boldsymbol{\tau}_\Delta^{(r)}$  (cf. (2.56)<sub>1,2</sub>) étaient connus, dans le cas de l'élasto-viscoplasticité les paramètres  $\mathbb{L}_L^{(r)}$  et  $\boldsymbol{\tau}_L^{(r)}$  (cf. (3.51)<sub>1,2</sub>) nécessitent la connaissance de  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$  pour être complètement déterminés. Pour cela, comme on l'observe dans (3.27),  $\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}^p}}^{(r)}$  doit être calculé. En rappelant que  $\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p}{\Delta t}$ , on obtient à partir de (3.52)

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}^p}}^{(r)} = \frac{1}{\Delta t} \sqrt{(\beta^{(r)})^2 (\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}_d}}^{(r)})^2 + \frac{4}{3} (\zeta^{(r)} - 1) \beta^{(r)} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_d(\underline{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_n^p(\underline{x}) \rangle^{(r)} + (\zeta^{(r)} - 1)^2 (\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}_n^p}}^{(r)})^2}. \quad (3.53)$$

L'équation (3.53) nécessite de connaître  $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_d(\underline{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_n^p(\underline{x}) \rangle^{(r)}$ . Pour cela, nous partons de

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_d &= \mathbb{K} : \frac{\partial w_L^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 2 \mu_L^{(r)} \boldsymbol{\varepsilon}_d - \boldsymbol{\tau}_L^{(r)} = 2 \mu_L^{(r)} \boldsymbol{\varepsilon}_d - \delta_L^{(r)} \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \quad \text{avec} \\ \delta_L^{(r)} &= 2 \mu^{(r)} \frac{2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t}}{2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} + a^{(r)} + 2 \mu^{(r)}}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

Il est alors possible d'isoler  $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_d(\underline{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_n^p(\underline{x}) \rangle^{(r)}$ , de telle sorte que

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}_d(\underline{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_n^p(\underline{x}) \rangle^{(r)} = \frac{1}{6 \mu_L^{(r)} \delta_L^{(r)}} \left( \frac{9}{4} (2 \mu_L^{(r)})^2 (\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}_d}}^{(r)})^2 + \frac{9}{4} (\delta_L^{(r)})^2 (\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}_n^p}}^{(r)})^2 - (\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}_d}}^{(r)})^2 \right) \quad (3.55)$$

Comme nous l'avons précisé plus haut, les seconds moments  $\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}_d}}^{(r)}$  et  $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}_d}}^{(r)}$  sont approchés par  $\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}_{0,d}}}^{(r)}$  et  $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}_{0,d}}}^{(r)}$ . Ces derniers sont exprimés respectivement dans les équations (2.63) et (2.65).

### 3.2.3 Cas d'une matrice élasto-viscoplastique renforcée par des particules élastiques

On se propose ici de particulariser la formulation DIV proposée dans ce chapitre au cas d'un composite biphasé ( $N=2$  étant le nombre de phases) composé d'une matrice élasto-viscoplastique avec des écrouissages cinématique linéaire et isotrope combinés renforcée par des particules sphériques élastiques distribuées de manière aléatoire et isotrope. On rappelle que les indices (1) et (2) représentent respectivement la phase inclusionnaire et la phase matricielle.

Les moments d'ordre un sur les phases exprimés par les équations (2.58) et (2.59) se réécrivent ici avec  $\mathbb{L}_L^{(r)}$  et  $\boldsymbol{\tau}_L^{(r)}$  respectivement à la place de  $\mathbb{L}_\Delta^{(r)}$  et  $\boldsymbol{\tau}_\Delta^{(r)}$ . On a alors

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_0^{(1)} = \mathbb{A}_0^{(1)} : \mathbf{E} + \mathbf{a}_0^{(1)}, \quad \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_0^{(2)} = \frac{1}{c^{(2)}} (\mathbf{E} - c^{(1)} \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_0^{(1)}), \quad (3.56)$$

avec

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_0^{(1)} = \left\{ \mathbb{I} + \mathbb{P}_0^{(2)} : \left[ \left( \mathbb{L}_L^{(1)} - \mathbb{L}_0^{(2)} \right) - c^{(1)} \left( \mathbb{L}_L^{(1)} - \mathbb{L}_L^{(2)} \right) \right] \right\}^{-1} : \left\{ \left[ \mathbb{I} + \mathbb{P}_0^{(2)} : \left( \mathbb{L}_L^{(2)} - \mathbb{L}_0^{(2)} \right) \right] : \mathbf{E} - c^{(2)} \mathbb{P}_0^{(2)} : \left( \overline{\boldsymbol{\tau}}_L^{(1)} - \overline{\boldsymbol{\tau}}_L^{(2)} \right) \right\}. \quad (3.57)$$

On note, comme dans la partie 2.2.3, que les inclusions sont élastiques. Donc, l'utilisation des bornes de Hashin et Shtrikman pour calculer les moyennes des champs assurent que ces derniers sont uniforme sur la phase inclusionnaire. On retrouve ainsi l'équation (2.67) (avec  $\boldsymbol{\tau}_L^{(1)}$  à la place de  $\boldsymbol{\tau}_\Delta^{(1)}$ ). En faisant la même hypothèse que Lahellec et al. [54], l'équation (3.44) associée à (2.67) conduit à

$$\mathbb{L}_L^{(1)} = \mathbb{L}_0^{(1)} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\tau}_0^{(1)} = \overline{\boldsymbol{\tau}}_L^{(1)} = \boldsymbol{\tau}_L^{(1)}. \quad (3.58)$$

#### Résumé du système non linéaire

Dans cette partie, nous allons résumer les équations que doit satisfaire la formulation DIV proposée. On rappelle, comme nous l'avons montré dans l'équation (3.50), que les parties sphériques des tenseurs d'élasticité des MLC  $w_L$  et  $w_0$  sont identiques à celles du composite non linéaire.

Dans la phase inclusionnaire,  $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = 0$ , ceci implique d'après (3.27) que  $\eta_{\boldsymbol{\varepsilon}^p}^{(1)}$  tend vers  $+\infty$ . L'équation (3.51)<sub>1</sub> entraîne directement  $\mu_L^{(1)} = \mu^{(1)}$ . En faisant appel, d'une part, à l'équation (3.58), et d'autre part, à l'équation (3.51)<sub>2</sub> associée à  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p = \mathbf{0}$ , le comportement dans la phase inclusionnaire des MLC  $w_L$  et  $w_0$  est donné par

$$k^{(1)} = k_L^{(1)} = k_0^{(1)}, \quad \mu^{(1)} = \mu_L^{(1)} = \mu_0^{(1)}, \quad \boldsymbol{\tau}_0^{(1)} = \overline{\boldsymbol{\tau}}_L^{(1)} = \mathbf{0}. \quad (3.59)$$

Dans la phase matricielle, les expressions de  $\mu_0^{(2)}$ ,  $\boldsymbol{\tau}_0^{(2)}$ ,  $\mu_L^{(2)}$  et  $\boldsymbol{\tau}_L^{(2)}$  qui caractérisent les MLC  $w_0$  et  $w_L$  sont obtenues comme suit. Le module de cisaillement  $\mu_L^{(2)}$  et la polarisation  $\boldsymbol{\tau}_L^{(2)}$  sont

donnés respectivement par les équations (3.51)<sub>1</sub> et (3.51)<sub>2</sub>. L'expression de la polarisation  $\tau_0^{(2)}$  pour des composites à phases isotropes se détermine à partir de (3.44) et (3.50), de sorte que

$$\tau_0^{(2)} = \overline{\tau}_L^{(2)} + 2 \left( \mu_L^{(2)} - \mu_0^{(2)} \right) \overline{\varepsilon}_{0,d}^{(2)}. \quad (3.60)$$

De même, en considérant l'équation (3.45) pour des MLC à phases isotropes, on obtient une expression de  $\mu_0^{(2)}$  de la forme

$$\mu_0^{(2)} = \mu_L^{(2)} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\langle \tau_L : \tau_L \rangle^{(2)} - \overline{\tau}_L^{(2)} : \overline{\tau}_L^{(2)}}{\langle \varepsilon_{0,d} : \varepsilon_{0,d} \rangle^{(2)} - \overline{\varepsilon}_{0,d}^{(2)} : \overline{\varepsilon}_{0,d}^{(2)}}}. \quad (3.61)$$

On note qu'une fois  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  (ou  $\overline{\varepsilon}^{(2)}$  cf. (3.27)) connu, le numérateur sous la racine de l'équation (3.61) est aussi connu car  $\tau_L$  dépend linéairement de  $\varepsilon_n^p$  (cf. Eq. (3.51)<sub>2</sub>) dont les premier et second moments sont connus du pas précédent. Pour le dénominateur, le moment d'ordre un  $\overline{\varepsilon}_{0,d}^{(2)}$  est déterminé à partir de (3.56) et (3.57) et le second moment  $\langle \varepsilon_{0,d} : \varepsilon_{0,d} \rangle^{(2)}$  s'obtient par l'équation (2.63).

On remarquera que pour des composites isotropes, ces deux moments dépendent des paramètres  $\mu_0^{(2)}$  et  $\tau_0^{(2)}$  qui définissent le MLC homogène  $w_0$  dans la phase matricielle. En conséquence, le problème non linéaire à résoudre se résume aux trois équations (3.27), (3.60) et (3.61) avec les trois inconnues  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$ ,  $\tau_0^{(2)}$  et  $\mu_0^{(2)}$ . On observe d'après (3.51) que les expressions de  $\mu_L^{(2)}$  et  $\tau_L^{(2)}$  dépendent de la variable  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$ .

Comme nous l'avons vu plus haut, la détermination de  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  revient à déterminer  $\overline{\varepsilon}^{(2)}$  (cf. Eqs. (3.27) et (3.28)). Pour cela, on fait appel à l'équation (3.53) qui nécessite de connaître la moyenne  $\langle \varepsilon_d(\underline{x}) : \varepsilon_n^p(\underline{x}) \rangle^{(2)}$ . Cette dernière est obtenue à partir des équations (3.55) et (2.65) ainsi qu'à partir du calcul des premier et second moments  $\overline{\varepsilon}_{0,d}^{(2)}$  et  $\langle \varepsilon_{0,d} : \varepsilon_{0,d} \rangle^{(2)}$  qui sont déterminés à partir des équations (3.56), (3.57) et (2.63).

Enfin, on observe en considérant l'expression de  $\mathbb{P}_0^{(2)}$  pour un composite isotrope (cf. Eq. (A.5)) ainsi que les équations (3.56) et (3.57) que  $\overline{\varepsilon}_{0,d}^{(2)}$  dépend seulement de deux paramètres  $\mu_0^{(2)}$  et  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$ . En considérant cette dépendance et en mettant en relation l'équation (3.60) avec les définitions de  $\mu_L^{(2)}$  et  $\tau_L^{(2)}$  exposées dans (3.51), on obtient que la polarisation  $\tau_0^{(2)}$  ne dépend que de  $\mu_0^{(2)}$  et de  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$ .

En conclusion, le problème non linéaire à résoudre défini par les équations (3.27), (3.60) et (3.61)

se réduit à un problème de deux équations (3.27) et (3.61) pour deux inconnues  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  et  $\mu_0^{(2)}$  :

$$\begin{cases} F_1 \left( \mu_0^{(2)}, \eta_{\varepsilon^p}^{(2)} \right) \equiv \left( \mu_0^{(2)} - \mu_L^{(2)} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\langle \boldsymbol{\tau}_L : \boldsymbol{\tau}_L \rangle^{(2)} - \overline{\boldsymbol{\tau}_L}^{(2)} : \overline{\boldsymbol{\tau}_L}^{(2)}}{\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{0,d} : \boldsymbol{\varepsilon}_{0,d} \rangle^{(2)} - \overline{\boldsymbol{\varepsilon}_{0,d}}^{(2)} : \overline{\boldsymbol{\varepsilon}_{0,d}}^{(2)}} = 0 \\ F_2 \left( \mu_0^{(2)}, \eta_{\varepsilon^p}^{(2)} \right) \equiv \eta_{\varepsilon^p}^{(2)} - \frac{\sigma_y^{(2)} + R^{(2)}(p^{(2)}) + \eta^{(2)} \left( \overline{\overline{\varepsilon}}^{(2)} / \dot{\varepsilon}_0 \right)^m}{3 \overline{\overline{\varepsilon}}^{(2)}} = 0. \end{cases} \quad (3.62)$$

Après la résolution de ce système, il est alors possible de calculer les paramètres  $\mu_L^{(2)}$ ,  $\boldsymbol{\tau}_L^{(2)}$ ,  $\boldsymbol{\tau}_0^{(2)}$  et  $\overline{\overline{\varepsilon}}^{(2)}$  à partir des équations (3.51)<sub>1</sub>, (3.51)<sub>2</sub>, (3.60) et (3.53).

### Cas du régime élastique

Dans le cas du régime élastique,  $\boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p$  et  $\overline{\overline{\varepsilon}}^{(2)} = 0$ . La seconde équation du système (3.62) implique que  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  tend vers  $+\infty$ . Le système non linéaire (3.62) se réduit alors à un système d'une équation à une inconnue  $F_1 \left( \mu_0^{(2)}, +\infty \right) = 0$ . Pour obtenir la valeur des paramètres lors de la charge et la décharge élastique, la limite de  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  qui tend vers  $+\infty$  doit être prise en compte. On obtient en particulier,  $\mu_L^{(2)} = \mu^{(2)}$  et  $\boldsymbol{\tau}_L^{(r)} = -2\mu^{(2)} \boldsymbol{\varepsilon}_n^p$ . De plus, comme nous l'avons vu dans la partie 3.2.1, le composite est en régime plastique lorsque l'équation (3.36) est satisfaite dans la phase matricielle. En conséquence, pour vérifier que nous sommes bien en régime élastique, le second moment  $\overline{\overline{\sigma_d - X}}^{(2)}$  doit satisfaire l'inégalité suivante

$$\overline{\overline{\sigma_d - X}}^{(2)} \leq \sigma_y^{(2)} + R^{(2)}(p^{(2)}), \quad (3.63)$$

qui représente la surface de plasticité pour la matrice dans notre approche. Pour cela, il est nécessaire de calculer le second moment  $\overline{\overline{\sigma_d - X}}^{(2)}$ . Comme nous l'avons vu dans la partie 3.2.2, les premier et second moments des champs locaux dans le composite non linéaire et dans le MLC  $w_L$  sont évalués par leurs équivalents dans le MLC homogène  $w_0$  (cf. Eq. (3.47)). On a alors

$$\overline{\overline{\sigma_d - X}}^{(2)} = \sqrt{\left( \overline{\overline{\sigma_d}}^{(2)} \right)^2 + \left( \overline{\overline{X}}^{(2)} \right)^2} - 3 \langle \boldsymbol{\sigma}_d : \mathbf{X} \rangle^{(2)}, \quad (3.64)$$

où  $\overline{\overline{\sigma_d}}^{(2)}$  est donné par (2.65) et  $\overline{\overline{X}}^{(2)} = \frac{3}{2} a^{(2)} \overline{\overline{\varepsilon}}_n^p$  en raison de (3.48)<sub>2</sub> et du fait que  $\boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p$ . De plus, comme  $\boldsymbol{\sigma}_d = 2\mu_L^{(2)} \boldsymbol{\varepsilon}_d + \boldsymbol{\tau}_L^{(2)} = 2\mu^{(2)} (\boldsymbol{\varepsilon}_d - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p)$ , on a

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma}_d : \mathbf{X} \rangle^{(2)} &= \langle 2\mu^{(2)} (\boldsymbol{\varepsilon}_d - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) : a^{(2)} \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \rangle^{(2)} \\ &= \frac{3}{2} \mu^{(2)} a^{(2)} \left[ \left( \overline{\overline{\varepsilon}}_{0,d}^{(2)} \right)^2 - \left( \overline{\overline{\varepsilon}}_n^p \right)^2 \right] - \frac{a^{(2)}}{6\mu^{(2)}} \left( \overline{\overline{\sigma}}_{0,d}^{(2)} \right)^2, \end{aligned} \quad (3.65)$$



où la seconde égalité provient de l'expression (3.55) de  $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_d(\underline{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_n^p(\underline{x}) \rangle^{(2)}$  lorsque  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  tend vers  $+\infty$ . En reportant  $\langle \boldsymbol{\sigma}_d : \mathbf{X} \rangle^{(2)}$  dans (3.64), on obtient finalement

$$\overline{\overline{\sigma_d - \bar{X}}}^{(2)} = \sqrt{\left(1 + \frac{a^{(2)}}{2\mu^{(2)}}\right) \left(\overline{\overline{\sigma_{0,d}}}^{(2)}\right)^2 + \frac{9}{4}a^{(2)}(a^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \left(\overline{\overline{\varepsilon_n^p}}^{(2)}\right)^2 - \frac{9}{2}\mu^{(2)}a^{(2)} \left(\overline{\overline{\varepsilon_{0,d}}}^{(2)}\right)^2}. \quad (3.66)$$

**Remarque 5.** Comme nous l'avons montré au chapitre 2, la formulation DIV est différente de la formulation EIV dans le cas de la visco-élasticité linéaire. Par conséquent, pour les comportements visco-élastiques non linéaires en loi puissance (i.e. en élasto-viscoplasticité sans seuil décrit par la loi (3.5)), et comme ces derniers englobent le cas linéaire ( $m = 1$ ), la formulation DIV est également différente de l'approche EIV pour ce type de comportement.

### 3.3 Conclusions

Ce chapitre est basé sur la procédure variationnelle incrémentale initialement proposée par Lahellec et Suquet [57] afin de prédire le comportement effectif de composites non linéaires. Récemment, Agoras et al. [1] ont proposé une formulation alternative à la formulation variationnelle incrémentale de Lahellec et Suquet [59] dans le but de prédire le comportement effectif de composites élasto-viscoplastiques sans écrouissage. En prenant appui sur les principes variationnels introduits par Lahellec et Suquet [57] et en tirant profit de l'approche d'Agoras et al. [1], nous avons pu proposer un modèle d'homogénéisation de composites dont la matrice est de type élasto-viscoplastique avec des écrouissages cinématique linéaire et isotrope combinés.

En effet, après avoir défini les lois locales (énergie libre et potentiel de dissipation) et les principes variationnels local et global, nous avons, similairement au travail d'Agoras et al. appliqué deux fois la procédure variationnelle de Ponte Castañeda [86].

La première application de la procédure a permis de linéariser le comportement local. Du fait du caractère non quadratique du potentiel de dissipation, le potentiel linéarisé  $J_L$  (3.9) a été introduit. Ceci a permis d'approcher le potentiel incrémental effectif  $\tilde{w}_\Delta$  à l'aide de conditions de stationnarité sous contraintes inégalités. Après avoir développé ces conditions de stationnarité, nous avons pu obtenir des expressions des variables internes  $p^{(r)}$  (3.28)<sub>3</sub> et  $\varepsilon^p$  (3.32) ainsi que de la viscosité sécante  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$  (3.27). On a alors obtenu un MLC thermo-élastique  $w_L$  à polarisation hétérogène par phase en reportant l'expression (3.32) de  $\varepsilon^p$  dans la définition (3.9) de  $J_L$ .

Une seconde application de la procédure de Ponte Castañeda a consisté à approcher ce MLC à polarisation hétérogène intraphase par un MLC à polarisation homogène par phase  $w_0$ . Il a alors été possible d'homogénéiser ce MLC à l'aide d'un schéma d'homogénéisation linéaire classique, ici les bornes de Hashin et Shtrickman. Pour être complet, le modèle a été explicité dans le cas d'un composite biphasé constitué d'une matrice élasto-viscoplastique présentant des écrouissages cinématique linéaire et isotrope combinés, renforcée par des particules élastiques sphériques distribuées aléatoirement. Les phases ont été considérées isotropes.

Maintenant que la formulation DIV a été développée dans le cadre de composites constitués d'une matrice élasto-viscoplastique avec des érouissages cinématique linéaire et isotrope combinés et renforcée par des inclusions sphériques élastiques, nous allons, dans le prochain chapitre chercher à valider ce modèle. Pour cela, nous comparerons les prédictions de la formulation DIV à d'autres formulations variationnelles ainsi qu'à des simulations en champs complets pour différents composites soumis à différents chargements.



## Applications et validation du modèle proposé

### Sommaire

<b>4.1</b>	<b>Mise en œuvre numérique . . . . .</b>	<b>76</b>
4.1.1	Présentation de l'algorithme . . . . .	76
4.1.2	Précision numérique . . . . .	77
4.1.3	Difficultés numériques et résolution . . . . .	79
<b>4.2</b>	<b>Validation du modèle pour les composites élasto-plastiques avec écouissage</b>	<b>84</b>
4.2.1	Histoires de chargements . . . . .	84
4.2.2	Comparaison des prédictions de la formulation DIV à d'autres modèles	86
4.2.3	Matériaux poreux avec et sans écouissage . . . . .	101
4.2.4	Validation du modèle pour les composites élasto-viscoplastiques avec et sans seuil sans écouissage . . . . .	104
<b>4.3</b>	<b>Conclusions . . . . .</b>	<b>110</b>

On se propose dans ce chapitre d'évaluer la formulation DIV développée et décrite dans le chapitre 3. Dans un premier temps, la mise en œuvre numérique du modèle est explicité dans le cadre de matériaux composites élasto-plastiques ( $\eta^{(2)} = 0$  MPa.s) avec de l'écouissage cinématique linéaire et de l'écouissage isotrope, seul ou combiné. A cette occasion, nous présentons les difficultés numériques rencontrées et les moyens utilisés pour les résoudre. Nous procédons ensuite à l'évaluation du modèle développé, tout d'abord dans le cadre de composites composés d'une matrice élasto-plastique parfaitement plastique, avec de l'écouissage cinématique linéaire, avec de l'écouissage isotrope, puis avec ces deux écouissages combinés. Les composites étudiés sont soumis à différents chargements, extension macroscopique isochore cyclique, chargement non radial, chargement multi-cyclique et traction uni-axiale. Les prédictions du modèle sont comparées à d'autres modèles en champs moyens (modèle RVP) [59] et (modèle de Brassart et al.) [21] ainsi qu'à des données de simulations numériques en champs complets réalisées par FFT [59] ou par EF [21]. Ces données de simulations numériques sont complétées par d'autres simulations EF que nous avons réalisés à l'aide du logiciel Cast3M. Nous avons ensuite comparé les prédictions de la formulation DIV à des simulations par EF dans le cas de matériaux poreux constitués d'une matrice élasto-plastique avec de l'écouissage et soumis

à une extension macroscopique isochore cyclique. Enfin nous étudions le cas des matériaux à matrice élasto-viscoplastiques sans seuil ( $\sigma_y^{(2)} = 0$  MPa) puis avec seuil et sans écrouissage. Ces derniers ont été soumis à différents chargements tels qu'une traction uni-axiale, un cisaillement axisymétrique, un chargement tournant et une extension macroscopique isochore cyclique. Les prédictions du modèle sont comparées à des formulations en champs moyens [57, 59, 43] ainsi qu'à des simulations EF [57] et FFT [43, 59].

## 4.1 Mise en œuvre numérique

Dans cette section, nous présentons la mise en œuvre numérique de la formulation DIV décrite dans le chapitre 3. La structure de l'algorithme proposé est d'abord exposée, puis les difficultés numériques rencontrées sont discutées et résolues.

### 4.1.1 Présentation de l'algorithme

L'idée de l'algorithme consiste à déterminer, pour un chargement donné et défini en terme de déformation macroscopique  $\mathbf{E}_{n+1}$  pour tout temps  $t_{n+1}$  ( $n + 1 = \{0, \dots, N\}$ ), la contrainte macroscopique  $\Sigma_{n+1}$ , les premier et second moments des champs locaux  $\sigma_{n+1}$ ,  $\varepsilon_{n+1}$  et  $\varepsilon_{n+1}^p$  ainsi que la valeur de la déformation plastique cumulée  $p_{n+1}$ . Le problème est résolu de manière itérative en déterminant la solution au temps  $t_{n+1}$  à partir de la solution connue au temps  $t_n$ . Comme nous l'avons déjà précisé, l'indice  $n + 1$  sera omis pour les quantités calculées au temps  $t_{n+1}$ . Cet algorithme peut être appliqué pour une matrice élasto-plastique ( $\eta^{(r)} = 0$ ) qui peut être parfaitement plastique, avec de l'écrouissage cinématique linéaire, avec de l'écrouissage isotrope ou avec à la fois des écrouissages cinématique linéaire et isotrope combinés, renforcée par des particules élastiques sphériques ou des pores sphériques répartis de manière aléatoire et isotrope. On note également que ce dernier peut être aussi appliqué à une matrice élasto-viscoplastique avec seuil et sans seuil ( $\sigma_y^{(r)} = 0$ ). Pour tous ces cas (et à l'exception d'un comportement élasto-viscoplastique sans seuil pour la matrice), l'algorithme a la même structure :

- **Prédiction élastique :** On suppose dans un premier temps que la matrice est en régime élastique. Comme explicité dans la section 3.2.3, le paramètre  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  tend vers  $+\infty$  ce qui réduit le système non linéaire (3.62) à un système à une équation pour une inconnue  $F_1(\mu_0^{(2)}, +\infty) = 0$ . Comme pour l'algorithme présenté dans le cas d'une matrice visco-élastique linéaire de type Maxwell (cf. partie 2.2.4), ce système est résolu à l'aide de la fonction *f solve* du logiciel Matlab qui utilise l'algorithme de Levenberg Marquardt. Une fois que le paramètre  $\mu_0^{(2)}$  est obtenu, il est possible de calculer la polarisation  $\tau_0^{(2)}$  en faisant appel aux équations (3.56), (3.57) et (3.60) et ainsi déterminer l'énergie  $w_0^{(r)}$  du MLC à polarisation homogène par phase. Enfin, l'énergie effective  $\tilde{w}_0$  ainsi que les

premiers et seconds moments des champs locaux  $\varepsilon_d$  et  $\sigma_d$  sont calculés (cf. annexe A). Finalement, la contrainte macroscopique est obtenue à partir de l'équation (2.66).

- **Vérification du critère de plasticité :** Une fois que nous avons tous les coefficients du MLC  $w_0$  ainsi que les moyennes de champs locaux, il est possible de calculer  $\overline{\sigma - \bar{X}}^{(2)}$  en faisant appel à l'équation (3.66) et donc de vérifier si la condition (3.63) est satisfaite avec une inégalité stricte. Si cette dernière est satisfaite, alors la matrice est en régime élastique et on passe au pas de temps suivant. Si elle n'est pas satisfaite, alors la matrice est en régime plastique et on passe à l'étape suivante.
- **Régime plastique :** A la différence du régime élastique, le paramètre  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  a maintenant une valeur finie. Le problème non linéaire à résoudre est alors décrit par le système (3.62) dont les inconnues sont  $\mu_0^{(2)}$  et  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$ . La fonction *f\_solve* du logiciel Matlab est encore utilisée pour obtenir les racines de ce système. Une fois que les solutions du système non linéaire (3.62) sont obtenues, les MLC à polarisation hétérogène et homogène par phase ainsi que l'énergie libre effective  $\tilde{w}_0$  peuvent être déterminés comme cela a été expliqué dans la partie 3.2.3. Il est alors possible de calculer les premiers et seconds moments de  $\varepsilon_d$ ,  $\sigma_d$  et  $\varepsilon^p$ , ainsi que la déformation plastique cumulée  $p^{(2)}$  et la contrainte macroscopique  $\Sigma$ .

**Remarque 6.** *Cet algorithme est appliqué dans le cas d'une matrice élasto-plastique avec ou sans écrouissage et dans le cas d'une matrice élasto-viscoplastique avec seuil. Comme nous l'avons précisé, il ne peut pas être appliqué dans le cas d'une matrice élasto-viscoplastique sans seuil ( $\sigma_y^{(2)} = 0$ ), c'est à dire pour une matrice visco-élastique non linéaire. En effet, dans ce cas, il n'y a plus de domaine élastique et le comportement est constamment non linéaire. L'algorithme a alors la structure suivante.*

*Le paramètre  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  ayant une valeur finie : on résout alors le système non linéaire (3.62) à l'aide de la fonction *f\_solve* de Matlab ce qui permet d'obtenir les deux inconnues  $\mu_0^{(2)}$  et  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$ . Il est alors possible de calculer les deux MLC, l'énergie libre effective, les moyennes des champs locaux  $\varepsilon_d$ ,  $\sigma_d$  et  $\varepsilon^p$  et enfin la contrainte macroscopique.*

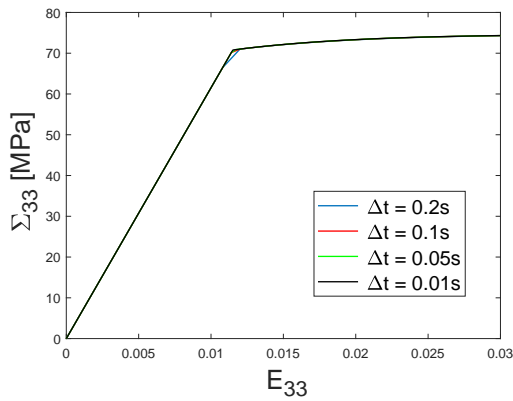
## 4.1.2 Précision numérique

On se propose maintenant d'analyser l'influence de la discrétisation du pas de temps sur les prédictions du modèle. A cette fin, nous avons réalisé des simulations sur le même composite que celui étudié par Lahellec et Suquet [59] pour différentes valeurs du pas de temps  $\Delta t$ . Ce composite est constitué d'une matrice parfaitement plastique renforcée par des particules sphériques élastiques. Les paramètres matériaux utilisés sont donnés dans la partie 4.2.2 (cf. (4.8)). Le composite est soumis à une déformation macroscopique isochore de la forme  $\mathbf{E}(t) = E_{33}(t) \left( -\frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \right)$ .

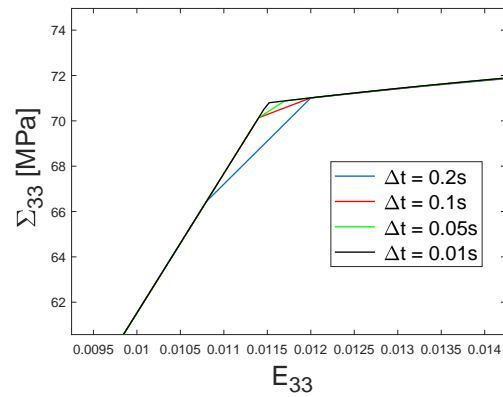
La figure 4.1a présente l'évolution de la contrainte axiale macroscopique en fonction de la dé-

formation macroscopique axiale pour différents pas de temps ( $\Delta t = 0.2s, 0.1s, 0.05s, 0.01s$ ). Les figures 4.1b et 4.1c fournissent respectivement des zooms sur la zone de transition entre le régime élastique et le régime plastique et sur la zone purement plastique. On voit sur ces figures que les quatre courbes, correspondant chacune à un pas de temps différent, sont pratiquement confondues, excepté pour le pas de temps le plus important où une différence plus ou moins marquée est observée dans la zone de transition.

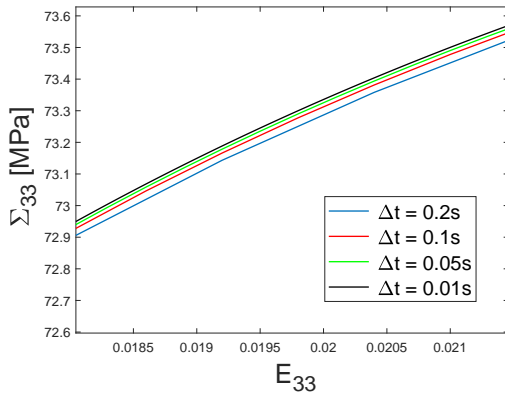
Pour être complet, l'évolution des fluctuations des contraintes dans la matrice, quantifiée par  $\sqrt{C^{(2)}(\sigma)} :: \mathbb{K}$ , avec  $C^{(2)}(\sigma)$  défini par l'équation (1.30), est représentée sur la figure 4.1d pour différents pas de temps. Ici aussi, les courbes sont quasiment confondues. En conséquence, dans toute la suite de ce mémoire, le pas de temps fixé pour toutes les simulations sera de  $\Delta t = 0.1s$ .



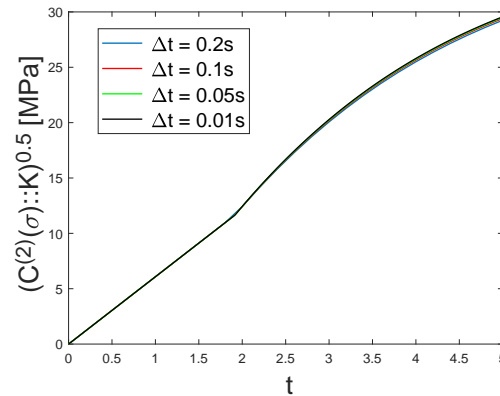
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE 4.1: Composite avec une matrice parfaitement plastique sous extension macroscopique.  $c^{(1)} = 0.17$  (a) Contrainte axiale macroscopique pour différentes valeurs de  $\Delta t$  ( $\Delta t = 0.2s, 0.1s, 0.05s, 0.01s$ ). (b) Zoom sur la transition élasto-plastique, (c) Zoom sur la zone plastique, (d) Fluctuations des contraintes sur la matrice.

### 4.1.3 Difficultés numériques et résolution

Comme nous l'avons vu dans la section 4.1.1, l'obtention du comportement macroscopique ainsi que les moyennes des champs locaux avec la formulation DIV nécessitent de résoudre le système non linéaire (3.62) à deux équations pour deux inconnues. Du fait de la forme de l'équation (3.62)<sub>1</sub>, il est évident que ce système a au moins deux racines. En effet, la fonction  $F_1$  du système non linéaire (3.62) peut se réécrire sous la forme

$$F_1^\pm \left( \mu_0^{(2)}, \eta_{\varepsilon^p}^{(2)} \right) \equiv \mu_0^{(2)} - \mu_L^{(2)} \pm \mu_L^{(2)} \sqrt{\frac{\langle \varepsilon_n^p : \varepsilon_n^p \rangle^{(2)} - \overline{\varepsilon_n^p} : \overline{\varepsilon_n^p}^{(2)}}{\langle \varepsilon_{0,d} : \varepsilon_{0,d} \rangle^{(2)} - \overline{\varepsilon_{0,d}} : \overline{\varepsilon_{0,d}}^{(2)}}} = 0, \quad (4.1)$$

où  $F_1^+$  et  $F_1^-$  représentent respectivement la fonction  $F_1^\pm$  associée au signe + et - avant la racine. Afin de bien comprendre et illustrer les conséquences générées par la non unicité de la solution et pour définir une stratégie permettant de converger vers la bonne racine, focalisons notre attention sur la situation relativement simple d'une matrice parfaitement plastique. On considère le même composite que celui de la partie 4.2.2 (décrit par l'Eq. (4.8)) et on le soumet à une extension cyclique isochore macroscopique.

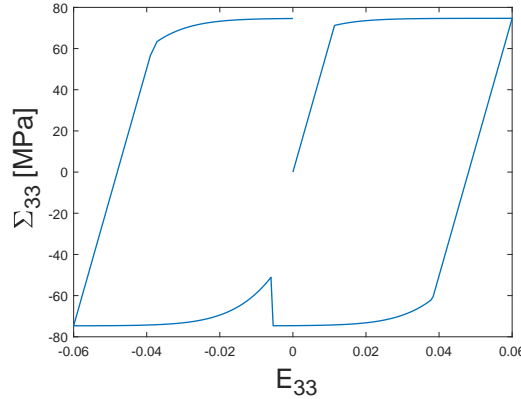


FIGURE 4.2: Composite à matrice parfaitement plastique renforcée élastiquement soumis à une extension isochore cyclique.  $c^{(1)} = 0.17$ . Evolution de la contrainte macroscopique axiale sans choisir la racine appropriée.

Sur la figure 4.2, qui représente le comportement macroscopique du composite, on observe un saut non physique autour de  $E_{33} \approx 0$ . Soulignons que le même saut apparaît pour les moments d'ordre un et deux des contraintes sur les phases ainsi que pour les fluctuations des contraintes sur la matrice. Ce saut est dû à la non unicité de la solution de l'équation  $F_1 \left( \mu_0^{(2)}, \eta_{\varepsilon^p}^{(2)} \right) = 0$  avec  $F_1$  défini par (3.62)<sub>1</sub>.

On observe numériquement à  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  fixé que la fonction  $F_1$  à plusieurs racines en fonction de  $\mu_0^{(2)}$  : deux pour des composites à phases incompressibles et quatre pour des composites compressibles.



### Cas des composites élastiquement incompressibles

Considérons tout d'abord le cas des composites à phases incompressibles. Pour ce type de matériaux, il a été observé numériquement que la fonction  $F_1$  a toujours deux solutions comme on peut le voir sur la figure 4.3 qui représente la variation de la fonction  $F_1$  en fonction de  $\mu_0^{(2)}$  pour un  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  fixé correspondant au saut observé sur la figure 4.2.

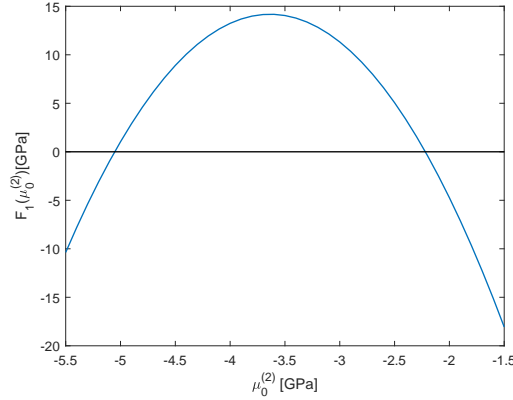


FIGURE 4.3: Composite à matrice parfaitement plastique renforcée élastiquement soumis à une extension isochore cyclique.  $c^{(1)} = 0.17$ . Variation de la fonction  $F_1$  en fonction de  $\mu_0^{(2)}$  au point correspondant au saut observé sur la figure 4.2.

Afin de supprimer ce saut, il s'est avéré nécessaire de sélectionner la racine appropriée. Pour cela, on adjoint à l'algorithme les contraintes suivantes

$$\frac{\Sigma_{33}(t_{n+1}) - \Sigma_{33}(t_n)}{E_{33}(t_{n+1}) - E_{33}(t_n)} \geq \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad \frac{\bar{\sigma}_{33}^{(1)}(t_{n+1}) - \bar{\sigma}_{33}^{(1)}(t_n)}{E_{33}(t_{n+1}) - E_{33}(t_n)} \geq \varepsilon_2, \quad (4.2)$$

où  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont deux scalaires choisis de manière particulière pour chaque cas traité. Ceci permet d'imposer la continuité de la contrainte macroscopique et de la moyenne des contraintes dans l'inclusion et donc de forcer la convergence de la fonction  $f_{solve}$  vers la bonne racine. Si les contraintes (4.2) sont satisfaites, on passe alors au pas de temps suivant. Sinon, on doit trouver une autre racine de la fonction  $F_1$ . Pour cela, il suffit de changer la valeur du point de départ de  $\mu_0^{(2)}$  dont a besoin la fonction  $f_{solve}$ .

Comme on le voit sur la figure 4.4, cette correction de l'algorithme conduit à de bons résultats dans le sens où la contrainte macroscopique est régulière et n'a plus de saut.

### Cas de composites élastiquement compressibles

On considère maintenant le cas de composites à phases compressibles. Pour cela, nous appliquons la formulation DIV au même composite qui vient d'être analysé à la différence que le

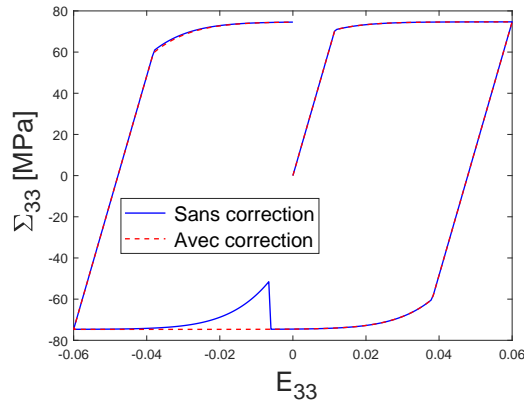


FIGURE 4.4: Composite à matrice parfaitement plastique renforcée élastiquement soumis à une extension isochore cyclique.  $c^{(1)} = 0.17$ . Variation de la contrainte axiale macroscopique avec et sans la correction de l'algorithme.

coefficient de Poisson des phases vaut  $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.3636$ . Le composite est toujours soumis à un chargement cyclique isochore. On observe numériquement que l'équation  $F_1(\mu_0^{(2)}, \eta_{\varepsilon^p}^{(2)}) = 0$  défini par (3.62)<sub>1</sub> admet quatre racines à chaque pas de temps. Ceci est illustré par la figure 4.5 qui présente la variation de la fonction  $F_1$  en fonction de  $\mu_0^{(2)}$  pour  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  fixé au temps  $t = 20s$ , ce qui correspond à  $E_{33} = 0$ .

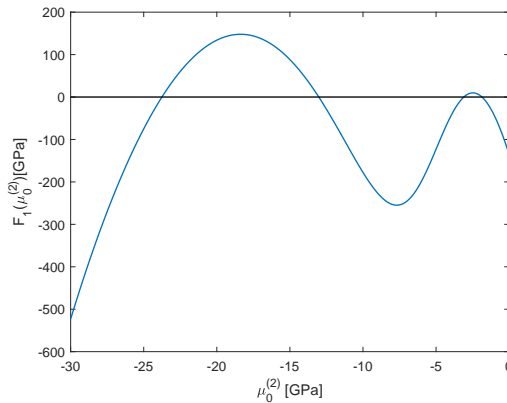


FIGURE 4.5: Composite à matrice parfaitement plastique renforcée élastiquement soumis à une extension isochore cyclique.  $c^{(1)} = 0.17$ . Variation de la fonction  $F_1$  en fonction de  $\mu_0^{(2)}$  pour  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  fixé au temps  $t = 20s$ .

La détermination de la racine appropriée devient plus difficile à cause du nombre de racines. Afin d'obtenir la racine appropriée, les mêmes contraintes (4.2) que celles considérées dans le cas

de phases incompressibles sont appliquées. Lorsque ces contraintes ne sont pas satisfaites pour la solution initiale trouvée par la fonction  $f_{solve}$ , on doit rechercher les trois autres racines et vérifier si elles satisfont les contraintes (4.2). Afin de déterminer les trois autres racines, on fait appel à une méthode de dichotomie qui, avec les contraintes (4.2), conduit la plupart du temps à la bonne racine. Néanmoins, pour certains cas, l'algorithme n'arrive pas à converger vers la bonne racine. Ceci est dû à la fonction  $F_2$  (cf. (3.62)<sub>2</sub>) qui présente pour des composites compressibles une singularité, comme le montre la figure 4.6 illustrant l'évolution de  $F_2$  en fonction de  $\mu_0^{(2)}$  pour une valeur de  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  fixée au temps  $t = 20s$ . L'expression analytique de  $F_2$  suggère que la singularité est probablement générée par un pôle. Toutes les tentatives de réécritures de la fonction  $F_2$  que nous avons réalisées afin de supprimer le pôle ont été vaines. C'est pourquoi, dans toute la suite de ce mémoire, nous ne considérerons pas le cas des composites élastiquement compressibles mais uniquement celui des composites élastiquement incompressibles.

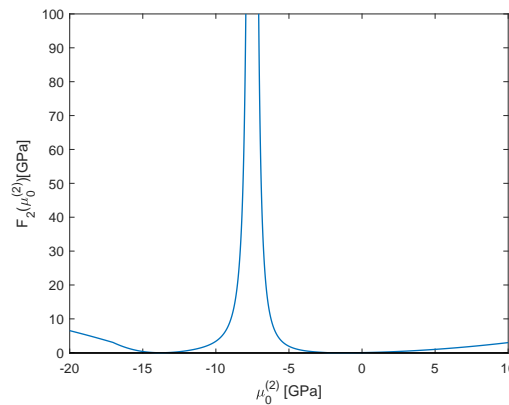


FIGURE 4.6: Composite à matrice parfaitement plastique renforcée élastiquement soumis à une extension isochore cyclique.  $c^{(1)} = 0.17$ . Variation de la fonction  $F_2$  en fonction de  $\mu_0^{(2)}$  pour  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  fixé au temps  $t = 20s$ .

En plus de ces problèmes de convergence, nous avons du faire face à un problème inattendu relatif au signe parfois négatif du module sécant  $\mu_0^{(2)}$ . Comme nous pouvons le voir sur les figures 4.3 et 4.5, on observe que les racines  $\mu_0^{(2)}$  de la fonction  $F_1$  à l'endroit du saut sont toutes négatives. Afin d'approfondir ce problème, nous avons reporté sur la figure 4.7 la variation<sup>1</sup> de  $\mu_0^{(2)}$  en fonction du temps dans le cas d'un composite avec une matrice parfaitement plastique renforcé par des particules élastiques et soumis à une extension cyclique isochore, les paramètres matériaux étant à nouveau donnés par (4.8). On observe que la valeur du module sécant  $\mu_0^{(2)}$  est quelquefois négative, notamment pour  $t \in [14.6s, 22s]$ .

Bien entendu, l'apparition de valeurs négatives pour le module sécant du MLC n'est pas conforme

1. On note que l'évolution de  $\mu_0^{(2)}$  dans la figure 4.7 a été obtenue lorsque l'algorithme a sélectionné la bonne racine à chaque pas de temps.

au cadre classique de la théorie de l'homogénéisation. Bien qu'une analyse théorique de la possibilité d'un module de cisaillement négatif associé à un MLC thermo-élastique linéaire fictif soit en dehors du cadre de la thèse, nous pouvons toutefois faire les remarques suivantes.

Tout d'abord, le MLC  $w_0$  pour lequel  $\mu_0^{(2)}$  est quelquefois négatif est un composite fictif et non réel. Ce dernier est déterminé par des conditions de stationnarité mathématiques qui n'ont aucune contrainte sur le signe de ce module.

Ensuite, dans la situation où  $\mu_0^{(2)}$  est négatif, l'équation (2.44) ne peut plus conduire en principe à la définition d'un composite thermo-élastique effectif dont les propriétés et la statistique des champs locaux pourraient être évaluées par les relations de Hashin et Shtrikman données en annexe A. Nous proposons néanmoins d'utiliser formellement ces relations même dans les situations où  $\mu_0^{(2)}$  est négatif. En procédant de la sorte, on observe que le système non linéaire (3.62) fournit une solution.

Enfin, malgré les réserves émises, et comme on le verra par la suite, il s'avère que la solution ainsi obtenue permet d'aboutir à de très bonnes prédictions de la réponse du composite, par comparaison aux données de simulations numériques EF ou par FFT. Ceci concerne aussi bien le comportement macroscopique que les moyennes des champs par phase, ainsi que les fluctuations (cf. parties 4.2, 4.2.3 et 4.2.4). Ce bon accord suggère que l'application de méthodes d'homogénéisation linéaire en champs moyens à des MLC thermo-élastiques isotropes, reste un outil pertinent même dans le cas de modules de cisaillement négatifs.

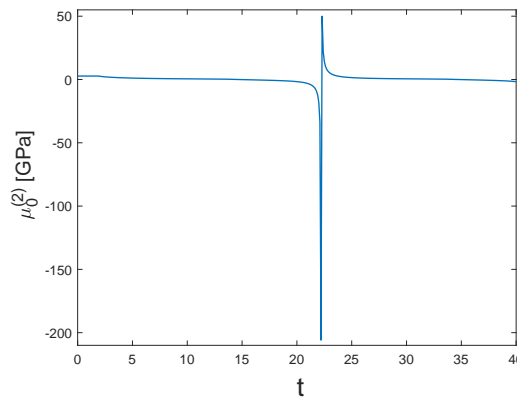


FIGURE 4.7: Composite à matrice parfaitement plastique renforcée élastiquement soumis à une extension isochore cyclique.  $c^{(1)} = 0.17$ . Variation de  $\mu_0^{(2)}$  en fonction du temps (cf Fig. 4.8a pour la correspondance entre le temps et la déformation axiale macroscopique).

## 4.2 Validation du modèle pour les composites élasto-plastiques avec écoulement

Cette partie a pour but de comparer les prédictions de la formulation DIV à d'autres formulations, basées sur des calculs en champs moyens, trouvées dans la littérature, et à des simulations numériques en champs complets comme la MEF ou la FFT. Nous avons appliqué la formulation DIV au cas de composites constitués d'une matrice élasto-viscoplastique avec et sans seuil, et avec et sans écoulement cinématique linéaire et/ou isotrope, renforcée par des particules sphériques élastiques distribuées de manière aléatoire et isotrope. Les phases sont considérées isotropes et incompressibles. Le composite est soumis aux différents chargements présentés ci-après.

### 4.2.1 Histoires de chargements

Dans toute cette partie, plusieurs types de chargements ont été considérés. Le premier (voir Lahellec et Suquet [59]) consiste à appliquer une déformation macroscopique  $\mathbf{E}(t)$  composée d'une extension isochore suivant la direction axiale 3 et une extension en cisaillement le long des deux plans parallèles à la direction axiale

$$\mathbf{E}(t) = E_{33}(t) \left( -\frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \right) + E_{13}(t) (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2). \quad (4.3)$$

En plus de (4.3), deux histoires de chargement sont considérées. Ces dernières sont présentées sur la figure 4.8. La première histoire de chargement correspond à une extension radiale cyclique tandis que la seconde correspond à un chargement totalement non radial car il implique une rotation des axes principaux de déformation, et donc de la contrainte macroscopique, en raison de l'isotropie globale du composite.

Le deuxième chargement considéré est une traction uni-axiale (voir Lahellec et Suquet [57] et Brassart et al. [21])

$$\boldsymbol{\Sigma}(t) = \Sigma_{11}(t) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1. \quad (4.4)$$

On remarquera que réaliser une traction uni-axiale nécessite d'adapter l'algorithme présenté dans la partie 4.1.1 car ce dernier est basé sur un chargement piloté en déformation (voir procédure développée dans la partie 2.3.2).

Les deux derniers chargements ont été appliqués par Idiart et Lahellec [43]. Le premier représente un cisaillement axisymétrique cyclique selon l'axe 1 (et non l'axe 3) qui s'écrit

$$\mathbf{E}(t) = E_{ss}(t)(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) + E_{as}(t) \left( \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \right), \quad (4.5)$$

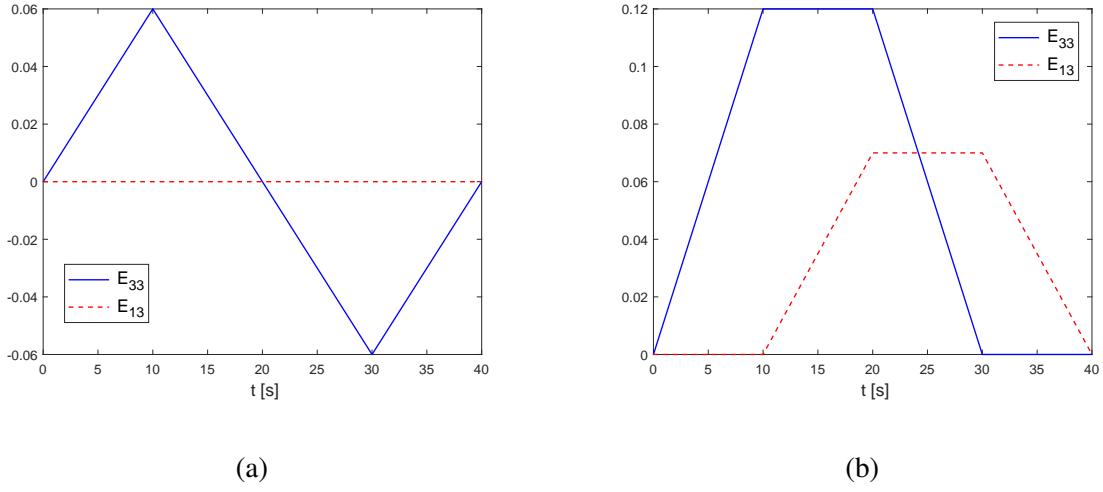


FIGURE 4.8: Deux différentes histoires de chargements : déformation macroscopique axiale  $E_{33}(t)$ , déformation macroscopique de cisaillement  $E_{13}(t)$ , (a) programme 1 : chargement radial, (b) programme 2 : chargement non radial.

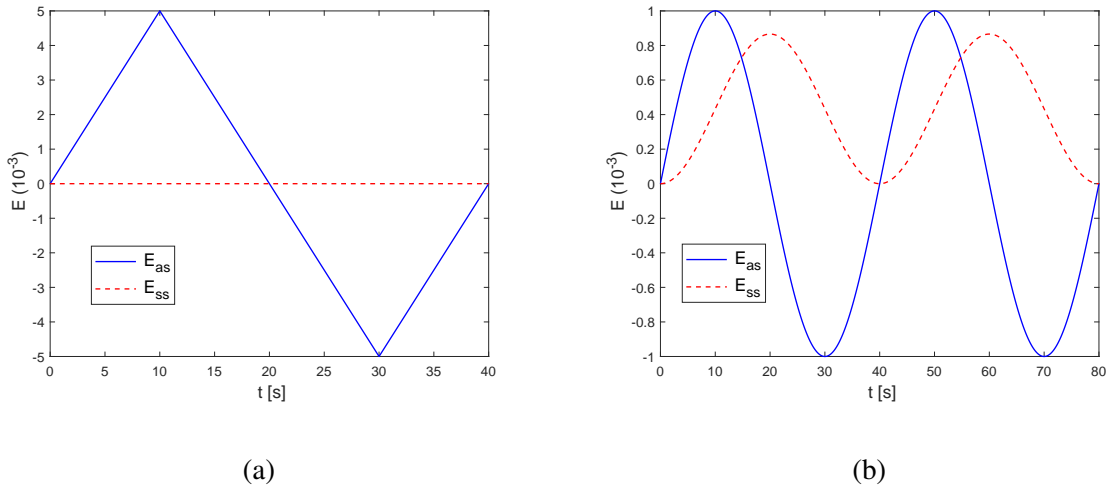


FIGURE 4.9: Histoires de chargements considérés : (a) programme 3 : déformation radiale consistant en un cisaillement axisymétrique cyclique, (b) programme 4 : chargement tournant.

avec

$$E_{ss}(t) = 0 \text{ et } E_{as}(t) = \frac{\dot{\gamma}}{T_0} \left( t - 2T_0 \left[ \frac{t}{2T_0} + \frac{1}{2} \right] \right) (-1)^{\lfloor \frac{t}{2T_0} + \frac{1}{2} \rfloor}, \quad (4.6)$$

où  $\lfloor \cdot \rfloor$  représente la fonction escalier.

Le second chargement est un chargement tournant de la forme

$$E_{ss}(t) = \frac{\sqrt{3}}{4} \gamma [1 - \cos(\omega t)] \text{ et } E_{as}(t) = \gamma \sin(\omega t). \quad (4.7)$$

Les constantes  $\gamma$ ,  $\dot{\gamma}$ ,  $T_0$  et  $\omega$  sont des paramètres qui seront spécifiés plus tard. Ces deux chargements sont respectivement représentés sur les figures 4.9a et 4.9b . Le premier correspond à une extension radiale cyclique tandis que le second est totalement non radial car il implique une rotation des axes principaux de déformation, et donc de la contrainte macroscopique, en raison de l'isotropie globale du composite.

## 4.2.2 Comparaison des prédictions de la formulation DIV à d'autres modèles

Dans cette partie, nous comparons les prédictions de la formulation DIV à d'autres formulations ainsi qu'à des simulations numériques en champs complets dans le cas de composites constitués d'une matrice élasto-plastique ( $\eta^{(2)} = 0$ ) avec de l'écrouissage cinématique linéaire et/ou isotrope renforcée par des particules sphériques élastiques distribuées de manière isotrope. Les phases sont considérées isotropes et incompressibles. Le composite est soumis aux différents chargements présentés précédemment.

### Cas d'une matrice parfaitement plastique

On considère ici un matériau composite constitué d'une matrice élasto-plastique parfaitement plastique renforcée par des particules sphériques élastiques. Les paramètres matériaux choisis sont les mêmes que ceux de Lahellec et Suquet [59] à la différence que les phases matricielle et inclusionnaire sont considérées incompressibles. On a alors <sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \text{Inclusion : } c^{(1)} &= 0.17, \quad E^{(1)} = 16.368 \text{ GPa}, \quad \nu^{(1)} = 0.4999 \\ \text{Matrice : } E^{(2)} &= 8.1846 \text{ GPa}, \quad \nu^{(2)} = 0.4999, \quad \sigma_y^{(2)} = 100 \text{ MPa}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Dans ce qui suit, les prédictions de la formulation DIV sont comparées aux prédictions de la formulation RVP développée par Lahellec et Suquet [59] et à des simulations de FFT en champs complets réalisées par les mêmes auteurs sur un VER composé de 50 inclusions sphériques distribuées de manière aléatoire et isotrope dans la matrice.

La figure 4.10a représente la réponse macroscopique du composite sous un chargement isochore cyclique. Quant aux figures 4.10b 4.10c, elles représentent respectivement l'évolution de la moyenne des contraintes dans la matrice et dans l'inclusion. Enfin la figure 4.10d illustre l'évolution de la moyenne des fluctuations des contraintes dans la matrice en fonction du temps. On observe tout d'abord un bon accord entre les prédictions des formulations DIV et RVP. On note que les prédictions des deux modèles arrivent à reproduire les simulations numériques en champs complets, pour la contrainte macroscopique et la moyenne des contraintes dans la matrice. Toutefois, ces modèles surestiment légèrement les données des simulations numériques. De plus,

2. Les simulations de Lahellec et Suquet ont été réalisées sur un composite constitués de phases élastiquement compressible  $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.3636$ .

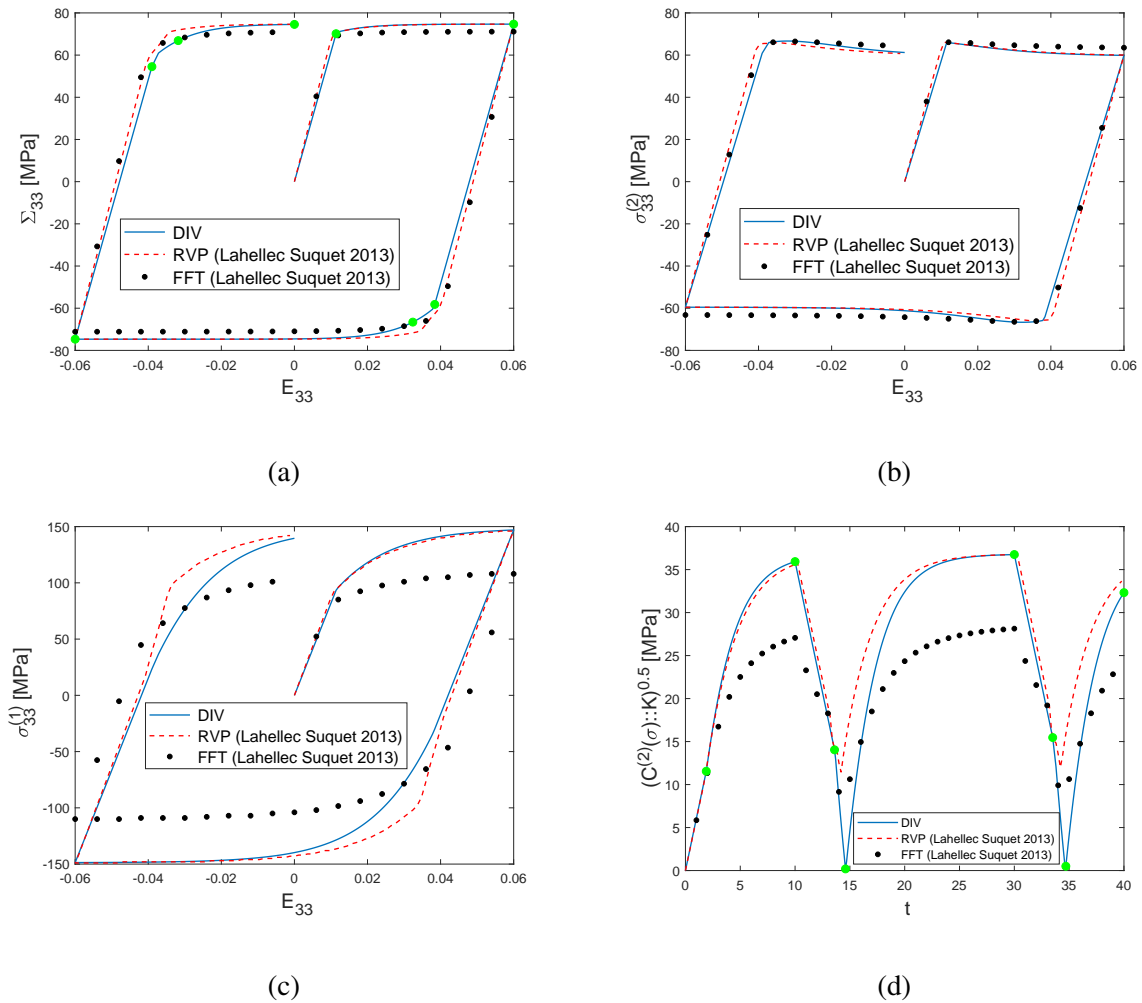


FIGURE 4.10: Composite composé d'une matrice parfaitement plastique renforcée élastiquement soumis à un chargement radial (programme 1, Fig 4.8).  $c^{(1)} = 0.17$ . (a) Contrainte macroscopique axiale, (b) Moyenne des contraintes axiales dans la matrice, (c) Moyenne des contraintes axiales dans l'inclusion, (d) Fluctuations des contraintes dans la matrice.

les deux formulations DIV et RVP prédisent correctement l'effet Bauschinger observé dans la réponse du composite malgré l'absence d'écroutissage cinématique dans le comportement de la matrice. On notera que l'effet Bauschinger correspond à une dissymétrie du domaine plastique. Dans le cas d'un milieu homogène, il n'est pas observé pour des comportements élasto-plastiques parfaits ou avec de l'écroutissage isotrope. Pour être complet, on remarquera que les formulations DIV et RVP reproduisent les tendances des simulations de FFT pour la moyenne des contraintes dans l'inclusion et des fluctuations des contraintes dans la matrice même si elles les surestiment largement. De plus, pour l'évolution de  $\bar{\sigma}_{33}^{(1)}$ , la formulation DIV s'avère plus en accord avec les données FFT que la formulation RVP lors de la recharge plastique. On fait l'observation



inverse si l'on s'intéresse à l'évolution des fluctuations des contraintes dans la matrice. En effet, la formulation RVP parvient à reproduire les valeurs minimales des fluctuations des contraintes au début des rechargements plastiques ( $t \sim 14,5$  s et  $t \sim 34,5$  s) contrairement à l'approche DIV qui prédit des fluctuations presque nulles. Les points verts sur les figures 4.10a et 4.10d nous renseignent sur les instants du chargement où les fluctuations évoluent et s'annulent. Plus particulièrement, les premier, troisième et sixième points représentent les instants où le composite passe du régime élastique au régime plastique. Pour les fluctuations, ces points représentent les instants où l'on observe une rupture de pente. Les quatrième et septième points représentent les moments où les fluctuations s'annulent. D'après la figure 4.10a cette rupture de pente entre les troisième et quatrième points et entre les sixième et septième points s'opère lors des transitions entre les régimes élastique et plastique. Enfin, comme on peut le voir sur les figures 4.10a et 4.10b, les pentes associées au régime élastique sont légèrement différentes entre les deux formulations. Ceci est dû à la différence de valeur des coefficients de Poisson utilisés lors des simulations,  $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.4999$  pour la formulation DIV alors  $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.3636$  pour la formulation RVP et la FFT.

Soulignons qu'excepté la pente élastique, la différence entre les simulations avec un matériau composite incompressible (DIV) ou compressible (RVP et FFT) sont supposées être négligeables. Afin de vérifier ce point, nous avons réalisé des simulations par EF, avec le logiciel Cast3M, sur un huitième d'une cellule cubique périodique composée d'une particule sphérique élastique en son centre entourée d'une matrice élasto-plastique sans écrouissage. Les propriétés matériaux considérées sont celles définies par (4.8). On notera que les simulations numériques ont été réalisées pour des matériaux compressibles  $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.3636$  et incompressibles  $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.4999$  soumis à un chargement cyclique isochore. A titre d'exemple, la figure 4.11 représente l'évolution des contraintes macroscopiques et moyennes par phases ainsi que les fluctuations des contraintes dans la matrice pour un composite élasto-plastique parfait. Comme nous l'espérons, les différences des contraintes axiales macroscopique et locales entre les matériaux compressible et incompressible pendant le régime plastique sont négligeables : moins de 2% pour les contraintes axiales macroscopique et local dans la matrice, et moins de 7% pour la contrainte axiale dans l'inclusion et les fluctuations des contraintes dans la matrice. Ces observations numériques permettent de justifier les comparaisons faites pour ces quantités macroscopique et locale entre la formulation DIV pour des matériaux incompressibles et la formulations RVP et les simulations numériques par FFT pour des matériaux compressibles.

Comme on l'a vu plus haut, les formulations DIV et RVP sont très proches l'un de l'autre. Une comparaison théorique succincte entre ces deux modèles peut aider à fournir des explications sur cette forte proximité. En effet, bien que ces derniers reposent sur des MLC différents, on observe facilement qu'ils ont les mêmes expressions pour la viscosité sécante (cf. Eq. (3.27)), la déformation plastique cumulée  $p^{(r)}$  (cf. Eq. (3.28)<sub>3</sub>) et qu'ils satisfont le même critère de plasticité en second moment  $\overline{\sigma - \bar{X}}^{(r)}$  (cf. Eq. (3.36)). Ces points communs sont principalement dûs au fait que les deux approches DIV et RVP font appels à la procédure variationnelle, deux fois pour la formulation DIV et une fois pour la formulation RVP. De plus, bien qu'ils reposent sur deux

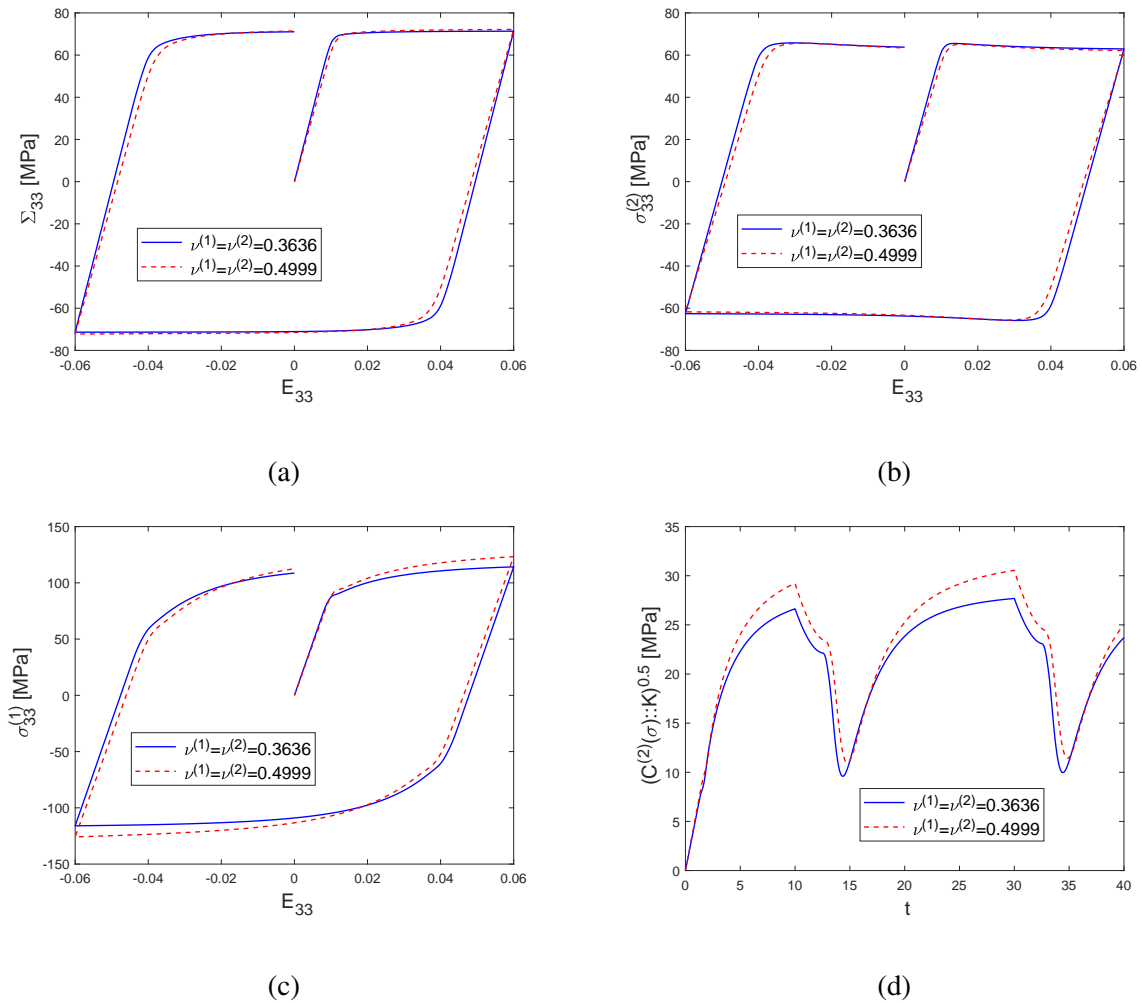


FIGURE 4.11: Comparaison numérique (EF) pour un composite renforcé élastiquement constitué d'une matrice parfaitement plastique élastiquement compressible et incompressible et soumis à une extension isochore cyclique (Programme 1, Fig 4.8).  $c^{(1)} = 0.17$ . (a) Contrainte macroscopique axiale, (b) Moyenne des contraintes axiales dans la matrice, (c) Moyenne des contraintes axiales dans l'inclusion, (d) Fluctuations des contraintes dans la matrice.

principes variationnels incrémentaux différents, ces principes sont proches. En effet, celui utilisé par la formulation RVP, initialement proposé par Lahellec et Suquet [59], peut être interprété en première approximation comme une formulation en taux de déformation ( $\dot{\varepsilon}$  au lieu de  $\varepsilon$ ) de celui utilisé par la formulation DIV et initialement proposé par Lahellec et Suquet [57].

On remarquera que les comparaisons montrées sur la figure 4.10 ont été réalisées pour un contraste élastique faible  $E^{(1)}/E^{(2)} = 2$ . Afin de voir l'influence du contraste élastique sur les contraintes macroscopiques et locales du composite, des simulations complémentaires ont été

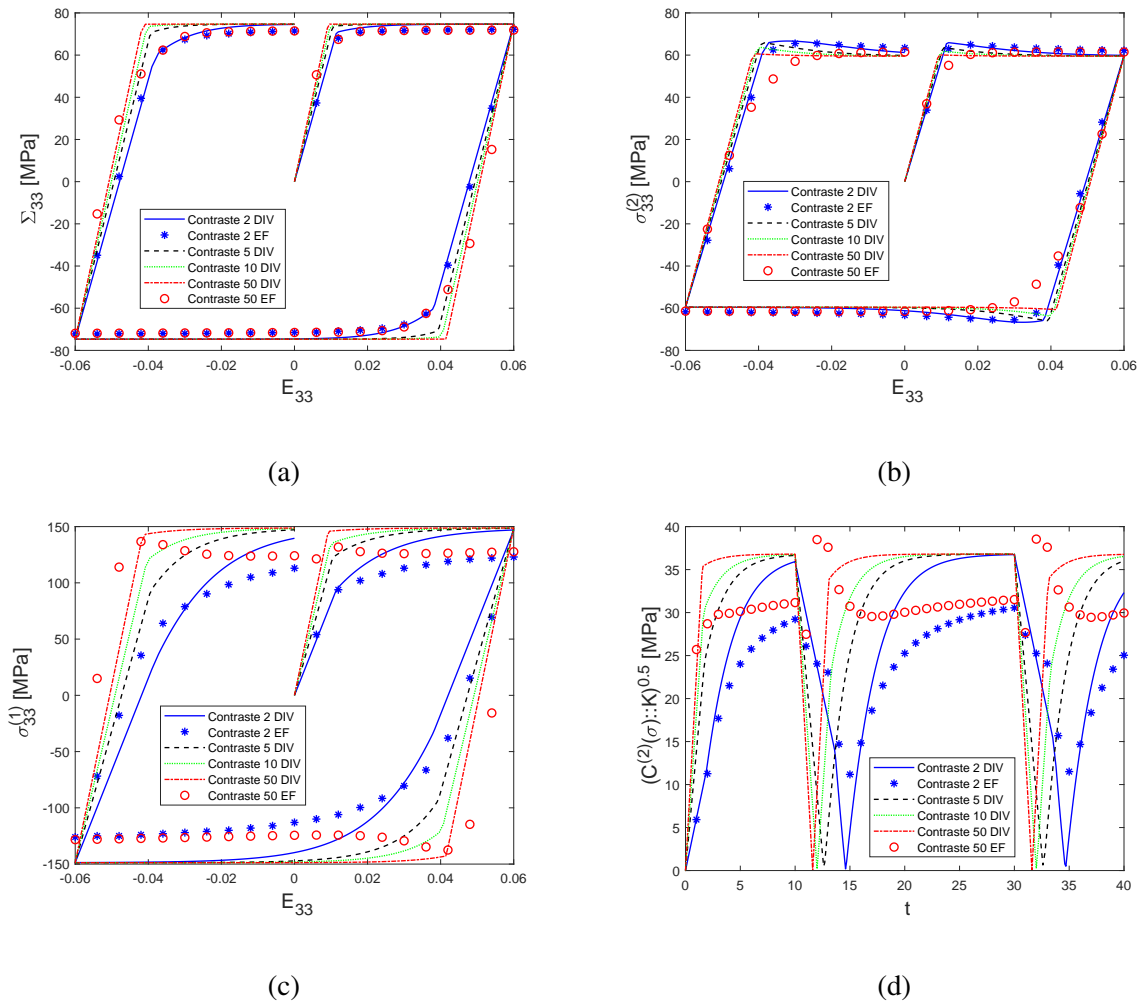


FIGURE 4.12: Composite composé d'une matrice parfaitement plastique renforcée élastiquement soumis à un chargement radial (Programme 1, Fig 4.8) pour différents contrastes élastiques  $E^{(1)}/E^{(2)} = 2, 5, 10, 50$ .  $c^{(1)} = 0.17$ . (a) Contrainte macroscopique axiale, (b) Moyenne des contraintes axiales dans la matrice, (c) Moyenne des contraintes axiales dans l'inclusion, (d) Fluctuations des contraintes dans la matrice.

réalisées avec la formulation DIV et comparées à des simulations numériques EF que nous avons réalisées sur la même cellule cubique périodique que celle présentée précédemment mais pour un contraste élastique de 5, 10 et 50. Les résultats numériques reportés sur la figure 4.12 montrent que la formulation DIV reproduit de manière satisfaisante les données EF pour la contrainte macroscopique et pour la contrainte locale dans la matrice. Toutefois, pour la contrainte locale dans l'inclusion, la formulation DIV surestime les données EF pour tous les contrastes et plus le contraste augmente, plus la formulation a du mal à reproduire la variation des simulations numériques EF. On remarque également que plus le contraste élastique augmente, plus le modèle

a du mal à reproduire l'effet Bauschinger. Afin de reproduire cet effet pour de forts contrastes, il faudrait probablement recourir à un autre choix de linéarisation. De plus, pour les grands contrastes élastiques, la formulation DIV n'arrive pas à reproduire qualitativement l'évolution des fluctuations des contraintes dans la matrice pendant le début de la recharge plastique.

Pour le chargement non radial associé au Programme 2, on reporte sur la figure 4.13 l'évolution des contraintes macroscopiques axiale et de cisaillement en fonction du temps. On observe que la formulation DIV arrive à reproduire de manière très satisfaisante les données de la formulation RVP et les simulations numériques FFT bien qu'elle surestime (resp. sous-estime) légèrement les données de FFT pour la contrainte macroscopique axiale (resp. de cisaillement).

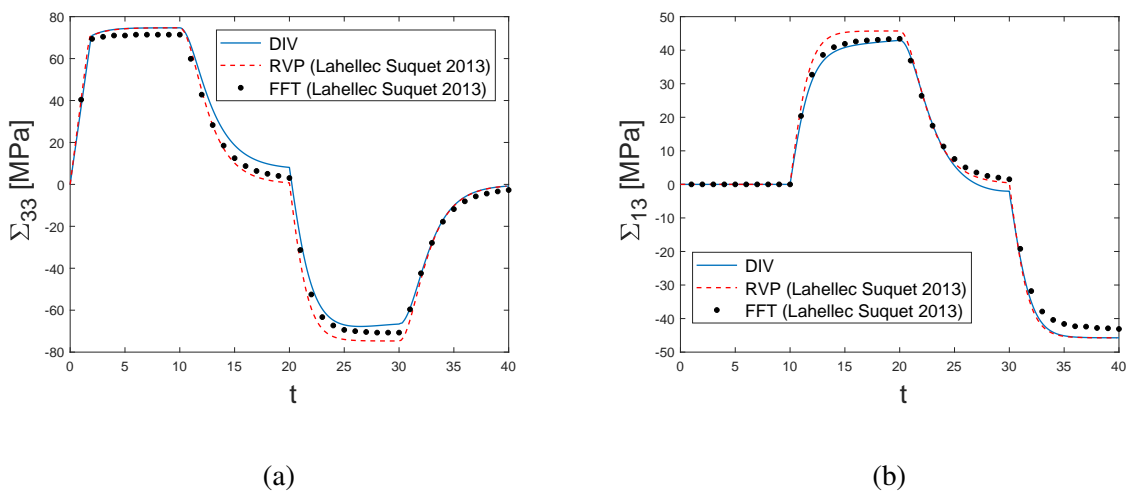


FIGURE 4.13: Composite renforcé élastiquement à matrice parfaitement plastique soumis à un chargement radial (Programme 2, Fig 4.8).  $c^{(1)} = 0.17$ ,  $E^{(1)}/E^{(2)} = 2$ . (a) Contrainte macroscopique axiale, (b) Contrainte macroscopique de cisaillement.

### Cas d'une matrice avec de l'érouissage cinématique linéaire

On considère maintenant une matrice élasto-plastique avec de l'érouissage cinématique linéaire caractérisé par le scalaire  $a^{(2)}$  introduit dans l'équation (3.48). Les paramètres du composite sont les mêmes que ceux considérés dans (4.8) et le paramètre d'érouissage cinématique est le même que celui considéré par Lahellec et Suquet [59]

$$a^{(2)} = 300 \text{ MPa}. \quad (4.9)$$

Les prédictions de la formulation DIV sont à nouveau comparées à la formulation RVP et aux simulations numériques de FFT de Lahellec et Suquet [59]. Pour le cas d'une extension isochore

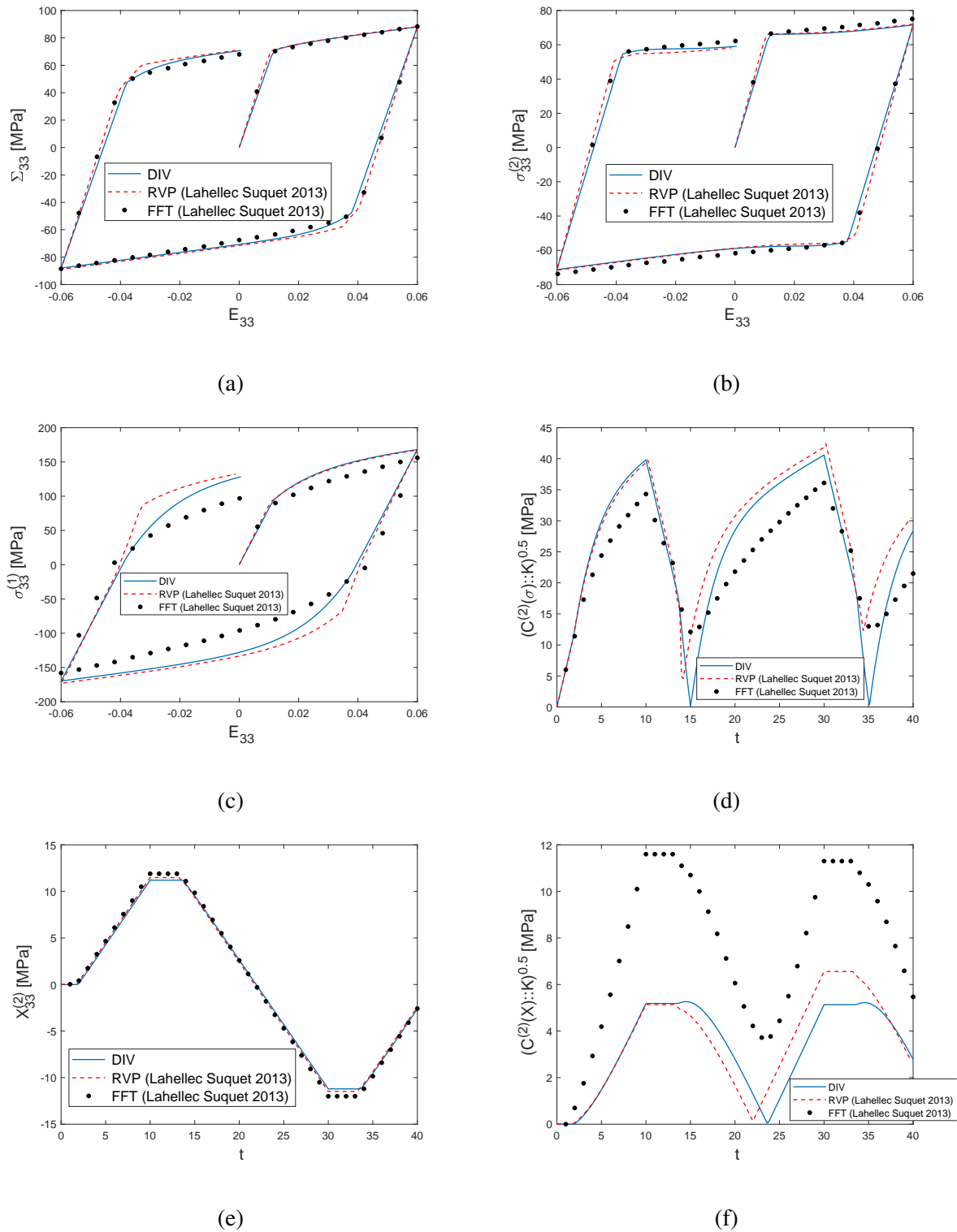


FIGURE 4.14: Composite renforcé élastiquement à matrice élasto-plastique avec de l'écroutissage cinématique linéaire soumis à un chargement radial (programme 1, Fig 4.8)  $c^{(1)} = 0.17$ . (a) Contrainte macroscopique axiale, (b) Moyenne des contraintes axiales dans la matrice, (c) Moyenne des contraintes axiales dans l'inclusion, (d) Fluctuations des contraintes dans la matrice (e) Moyenne de la contrainte de rappel dans la matrice, (f) Fluctuations de la contrainte de rappel dans la matrice.

(programme 1), la figure 4.14 représente l'évolution de la contrainte macroscopique axiale, de la moyenne des contraintes dans les phases et des fluctuations des contraintes dans la matrice. Tous les commentaires effectués dans la partie précédente, pour un composite avec une matrice parfaitement plastique, restent valables dans le cas l'écroutissage cinématique linéaire excepté pour la moyenne des contraintes dans l'inclusion et les fluctuations des contraintes dans la matrice où la formulation DIV fournit de meilleures prédictions.

La variation de la contrainte de rappel  $\mathbf{X}$  en fonction du temps, présentée dans la figure 4.14e, montre que sa moyenne dans la matrice est en bon accord avec les simulations FFT. Toutefois, bien que la formulation DIV reproduit de manière qualitative les variations des fluctuations de la contrainte de rappel dans la matrice (voir figure 4.14f), elle sous-estime fortement les données FFT d'environ 100%.

### Cas d'une matrice avec de l'écroutissage isotrope

On considère dans cette partie le cas d'une matrice élasto-plastique avec de l'écroutissage isotrope caractérisé par la loi puissance

$$R^{(2)}(p) = \beta^{(2)} p^{\gamma^{(2)}}. \quad (4.10)$$

Comme première illustration, on considère le matériau composite utilisé par Lahellec et Suquet [59] dont les paramètres élastiques des phases sont définis par (4.8) et où l'écroutissage isotrope est défini par les coefficients suivants

$$\beta^{(2)} = 100 \text{ MPa}, \quad \gamma^{(2)} = 0.4. \quad (4.11)$$

Tout d'abord, le composite est soumis à une extension cyclique isochore associée au programme 1 (cf. Fig. 4.8). Pour un tel chargement, la figure 4.15 illustre l'évolution de la contrainte axiale macroscopique, des moyennes des contraintes dans les phases ainsi que des fluctuations des contraintes dans la matrice. On compare les prédictions de la formulation DIV aux prédictions de la formulation RVP ainsi qu'aux données numériques de FFT réalisées par [59]. On observe les mêmes tendances que celles obtenues dans la figure 4.10 pour une matrice parfaitement plastique excepté que maintenant la moyenne des contraintes dans la matrice présente de l'écroutissage isotrope. Tous les commentaires effectués dans le cas d'une matrice parfaitement plastique restent valables dans ce cas.

Les figures 4.15e et 4.15f représentent l'évolution des contraintes axiale et de cisaillement macroscopiques obtenues pour un chargement non radial (cf. programme 2 Fig. 4.8). On observe que la formulation DIV est en bon accord avec les simulations numériques FFT. Néanmoins, on observe que le modèle surestime légèrement la contrainte axiale macroscopique et sous-estime légèrement la contrainte de cisaillement macroscopique.

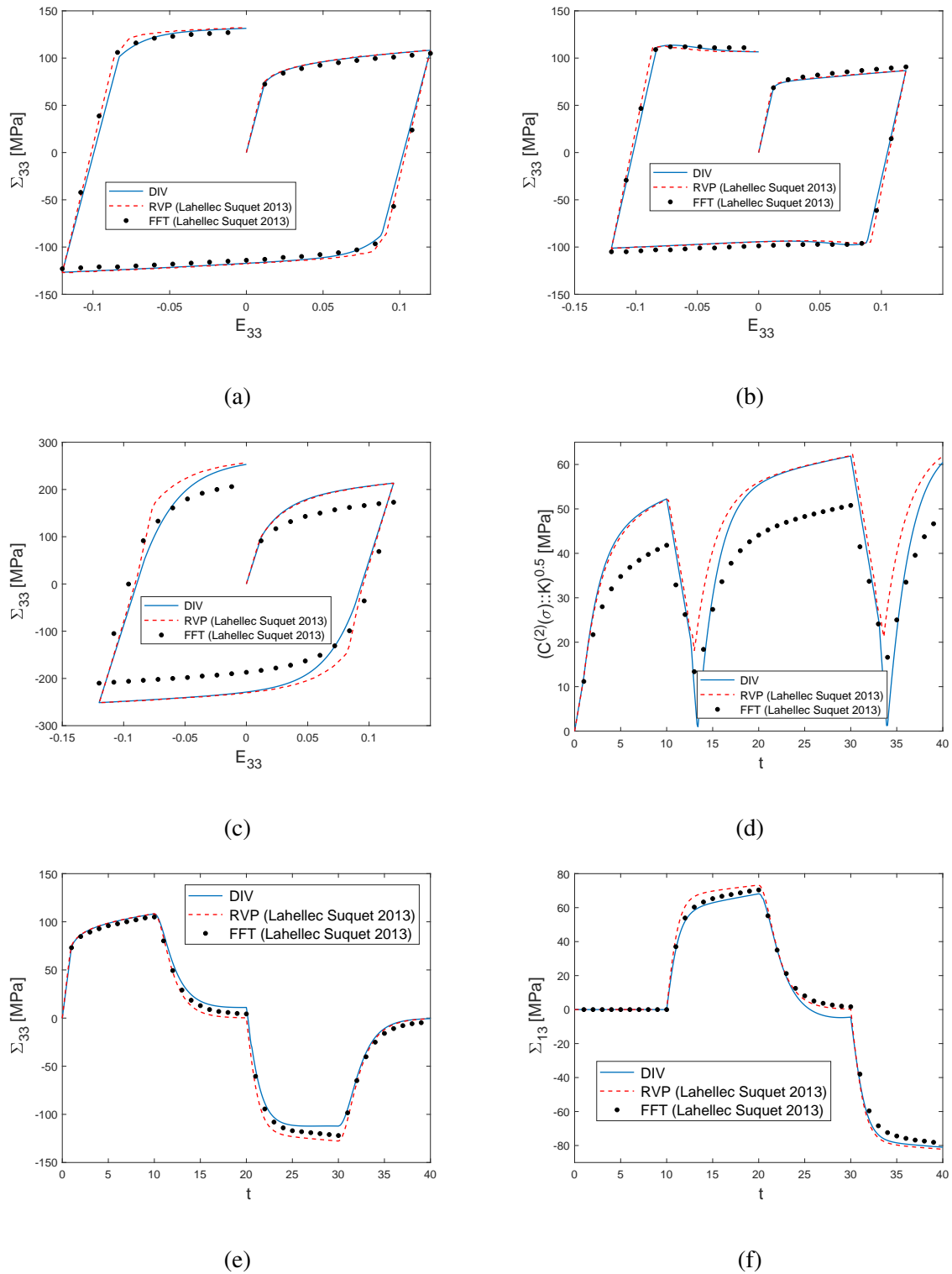


FIGURE 4.15: Composite renforcé élastiquement,  $c^{(1)} = 0.17$ , à matrice élasto-plastique avec de l'écroutissage isotrope soumis à un chargement radial (Programme 1, Fig. 4.8) : (a) Contrainte macroscopique axiale, (b) Moyenne des contraintes axiales dans la matrice, (c) Moyenne des contraintes axiales dans l'inclusion, (d) Fluctuations des contraintes dans la matrice. Soumis à un chargement non radial (Programme 2, Fig 4.8) : (e) Contrainte macroscopique axiale, (f) Contrainte macroscopique de cisaillement.

On considère maintenant le cas d'un composite à matrice métallique (MMC) de type Aluminium/carbone de Silicium traité par Brassart et al. [21] pour un chargement en traction uni-axial. On a comparé les prédictions de la formulation DIV à des simulations numériques par EF réalisées par ces mêmes auteurs sur un VER composé de 30 particules élastiques sphériques aléatoirement distribuées dans une matrice élasto-plastique avec de l'écroutissage isotrope. Les paramètres matériaux considérés lors de ces simulations sont les suivants<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \text{Inclusion : } c^{(1)} &= 0.25, \quad E^{(1)} = 200 \text{ GPa}, \quad \nu^{(1)} = 0.2 \\ \text{Matrice : } E^{(2)} &= 75 \text{ GPa}, \quad \nu^{(2)} = 0.3, \quad \sigma_0^{(2)} = 75 \text{ MPa} \\ \beta^{(2)} &= 400 \text{ MPa}, \quad \gamma^{(2)} = 0.4 \text{ ou } 0.05. \end{aligned} \quad (4.12)$$

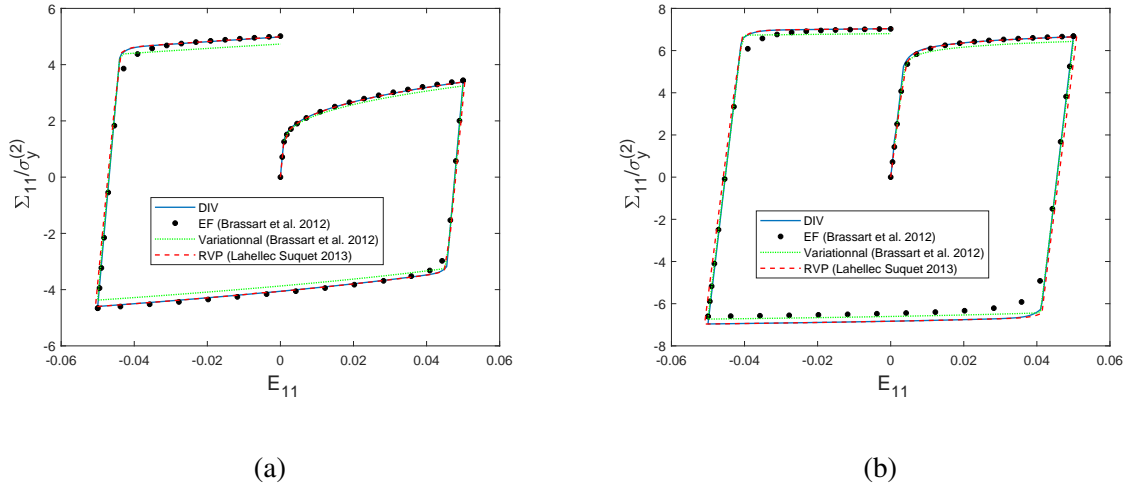


FIGURE 4.16: Composite renforcé à matrice métallique élasto-plastique avec de l'écroutissage isotrope soumis à une traction uni-axiale cyclique.  $c^{(1)} = 25\%$ . Evolution de la contrainte effective normalisée. (a)  $\gamma^{(2)} = 0.4$ , (b)  $\gamma^{(2)} = 0.05$ .

La figure 4.16 représente l'évolution de la contrainte effective normalisée  $\Sigma_{11}/\sigma_y^{(2)}$  en fonction de la déformation macroscopique  $E_{11}$  pour la formulation DIV et d'autres approches en champs moyens de la littérature : l'approche variationnelle de Brassart et al. [21] qui est basée sur un principe variationnel similaire à celui présenté dans la partie 1.2.1 (mais sur une linéarisation complètement différente) et le modèle RVP de Lahellec et Suquet [59]. Lors des comparaisons avec les EF, on observe que la formulation DIV ainsi que les autres formulations en champs moyens fournissent de bonnes prédictions de la réponse effective. Toutefois, aucun d'eux n'arrive à reproduire l'effet Bauschinger pour  $\gamma^{(2)} = 0.05$  contrairement à ce qui est observé pour les formulations DIV et RVP dans le cas des composites précédemment étudiés.

3. On précise qu'ici aussi les prédictions de la formulations DIV sont données pour des phases incompressibles, i.e.  $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.4999$ .



## Discussions

Comme on vient de le voir dans les parties précédentes, les deux formulations DIV et RVP fournissent des prédictions proches et précises des contraintes macroscopique et moyenne sur la matrice. Il serait intéressant d'essayer de déterminer les situations pour lesquelles il y a un avantage d'utiliser l'une ou l'autre formulation.

Pour une matrice compressible (cf. partie 4.1.3) la formulation DIV n'est pas totalement stable numériquement car elle rencontre, en certains points, des problèmes de convergence dus à une singularité de la fonction  $F_2$  (cf. Eq. (3.62)<sub>2</sub> et Fig. 4.6). Ceci n'est pas le cas de la formulation RVP. Pour une matrice incompressible, les formulations DIV et RVP sont numériquement stables et prédisent de bons résultats pour des composites élasto-plastiques avec ou sans écrouissage. Toutefois, il semble que lorsque la matrice présente de l'écrouissage cinématique linéaire, la formulation RVP est numériquement moins efficace que la procédure DIV. En effet, l'incorporation de l'écrouissage cinématique dans la formulation RVP est effectuée au prix de l'introduction de deux inconnues supplémentaires  $H_0^{(r)}$  et  $X_n^{(r)}$  (cf. [59]) qui augmentent le coût numérique de la méthode, contrairement à l'approche DIV pour laquelle aucune inconnue supplémentaire n'est requise pour gérer l'écrouissage cinématique linéaire.

## Chargement multi-cycliques

Dans cette partie, nous allons explorer les prédictions de la formulation DIV lorsque le composite est soumis à des chargements à plusieurs cycles (cf. programme 1, Fig. 4.8). Pour cela, nous avons calculé les réponses macroscopique et locale pour le composite considéré dans la partie précédente. Les paramètres matériaux utilisés sont ceux de l'Eq. (4.8) pour une matrice élasto-plastique plastiquement parfaite et ceux des Eq. (4.9) et (4.11) pour une matrice ayant respectivement de l'écrouissage cinématique linéaire et de l'écrouissage isotrope. Pour une matrice plastiquement parfaite ou avec de l'écrouissage cinématique linéaire, on a observé que le comportement macroscopique et local est stabilisé dès le premier cycle de chargement. Ceci n'est pas le cas pour une matrice avec de l'écrouissage isotrope comme on peut le voir sur les figures 4.17 et 4.18.

Ces figures représentent respectivement, les comportements macroscopique et moyens par phase ainsi que les fluctuations des contraintes dans la matrice pour un composite soumis, d'une part, à une extension isochore de 10 cycles avec une déformation d'amplitude 0.12, et d'autre part, à une extension isochore de 8 cycles avec 4 cycles de déformation d'amplitude 0.6 suivi de 4 cycles de déformation d'amplitude 0.12. Dans ces deux figures, on compare les prédictions du modèle DIV à des simulations numériques par EF que nous avons réalisées. Comme précisé dans les parties précédentes, les simulations EF ont été effectuées sur une cellule cubique périodique composée d'une inclusion sphérique élastique en son centre entourée d'une matrice élasto-plastique avec de l'écrouissage isotrope. Pour les deux figures, on observe un très bon accord entre les prédictions du modèle et les simulations par EF pour le comportement macroscopique et la moyenne des contraintes dans la matrice. Comme on peut l'observer pour la contrainte macroscopique axiale, la

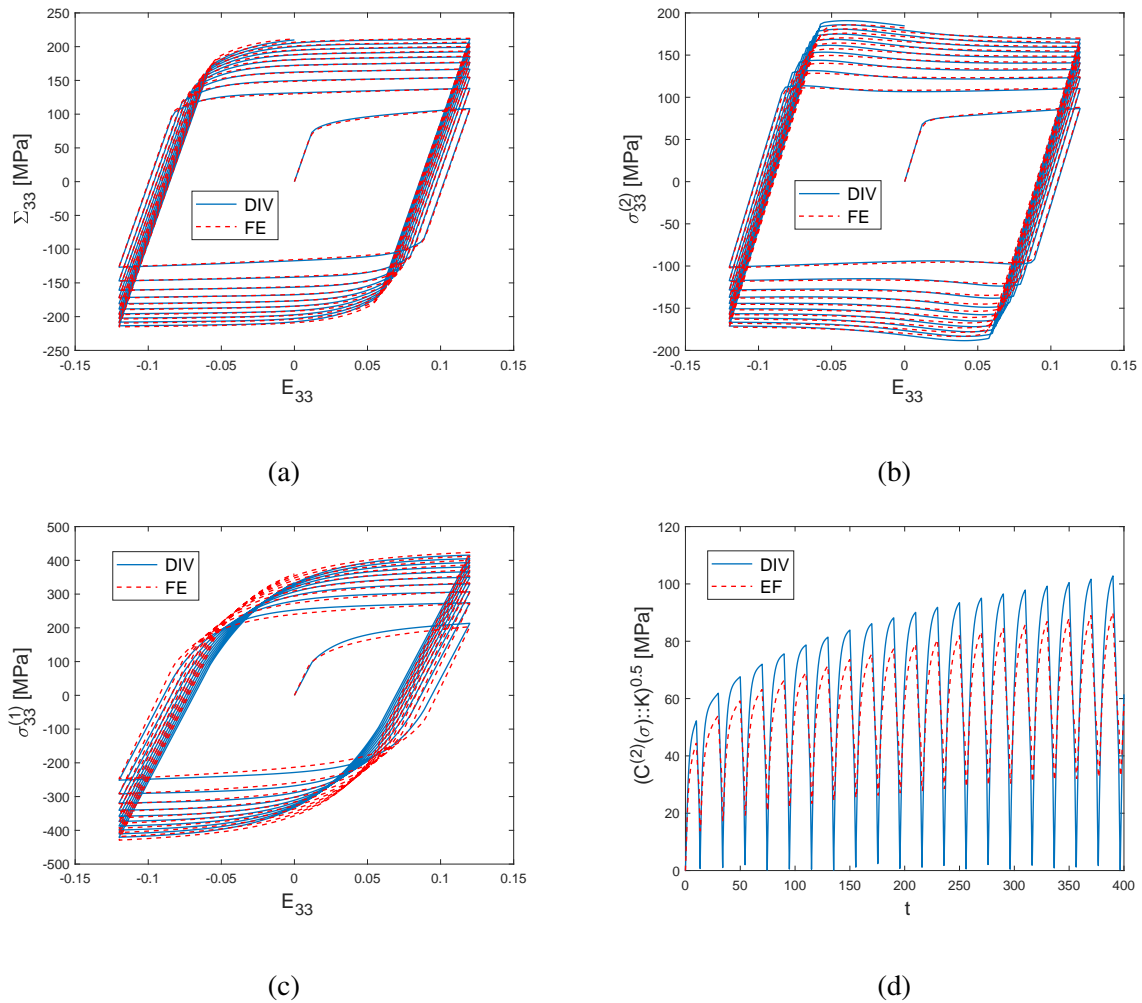


FIGURE 4.17: Composite renforcé élastiquement à matrice élasto-plastique avec de l'écroutissage isotrope soumis à un chargement radial de 10 cycles (Programme 1, Fig. 4.8)  $c^{(1)} = 0.17$ . (a) Contrainte macroscopique axiale, (b) Moyenne des contraintes axiales dans la matrice, (c) Moyenne des contraintes axiales dans l'inclusion, (d) Fluctuations des contraintes dans la matrice.

dissymétrie caractérisant l'effet Bauschinger augmente continuellement avec le nombre de cycles. Par exemple dans la figure 4.17, on passe d'une dissymétrie de 24.64MPa pour le premier cycle à 40.6MPa pour le dixième. Cette évolution de la dissymétrie caractérisant l'effet Bauschinger est très bien reproduite par la formulation DIV. On observe aussi que, pour les deux chargements, les prédictions du modèles surestiment, cette fois ci uniquement légèrement, les données numériques par EF pour la moyenne des contrainte dans l'inclusion. De plus, le modèle reproduit de manière qualitative les données des EF pour les fluctuations des contraintes dans la matrice tout en les surestimant de manière significative. Pour ces deux chargements, on remarquera que le modèle DIV prédit des fluctuations quasiment nulles au moment de la recharge plastique ce qui n'est

pas le cas des EF. Enfin, on observe sur la figure 4.17 que la contrainte axiale macroscopique et la moyenne des contraintes dans les phases tendent vers un cycle élasto-plastique limite. Ceci permet de montrer que la formulation DIV, en accord avec les simulations par EF, prédit une accommodation lorsque la matrice présente de l'écroutissage isotrope.

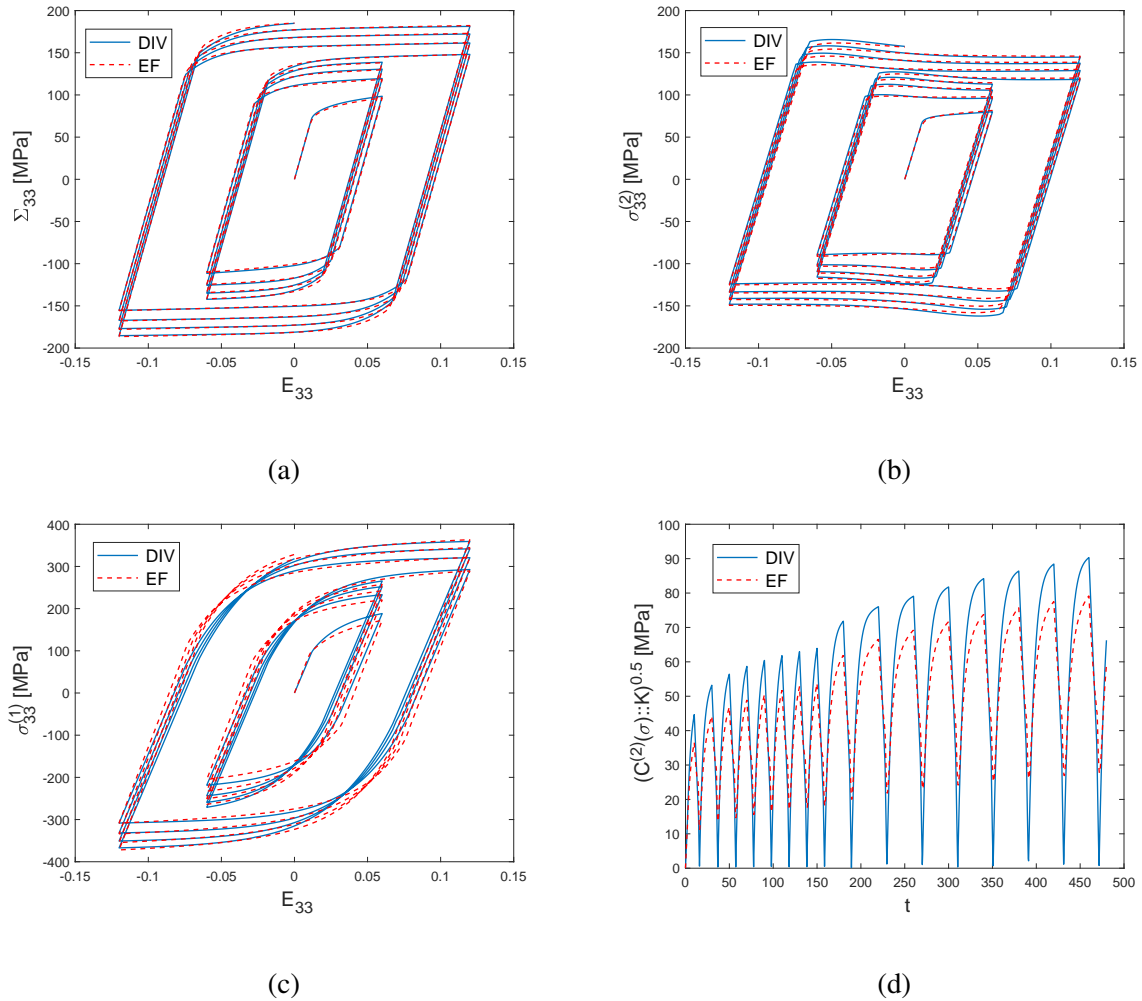


FIGURE 4.18: Composite renforcé élastiquement à matrice élasto-plastique avec de l'écroutissage isotrope soumis à un chargement radial de 8 cycles (Programme 1, Fig. 4.8)  $c^{(1)} = 0.17$ . (a) Contrainte macroscopique axiale, (b) Moyenne des contraintes axiales dans la matrice, (c) Moyenne des contraintes axiales dans l'inclusion, (d) Fluctuations des contraintes dans la matrice.

### Matrice présentant des écrouissages cinématique linéaire et isotrope combinés

Cette partie fournit de nouvelles données pour des composites constitués de particules sphériques élastiques distribuées aléatoirement dans une matrice élasto-plastique avec des écrouissages cinématique linéaire et isotrope combinés. Les prédictions de la formulation DIV sont comparées à des simulations numériques par EF. On considère à nouveau la même cellule cubique périodique que celle des parties précédentes mais où la loi puissance définissant l'écrouissage isotrope de la matrice s'exprime désormais sous la forme

$$R^{(2)}(p) = (R_{max} - \sigma_y^{(2)}) (1 - e^{-\beta p}). \quad (4.13)$$

Les paramètres matériaux utilisés sont les mêmes que ceux définis par (4.8) pour les propriétés élastiques et le seuil plastique ainsi que par l'équation suivante pour les propriétés des écrouissages cinématique et isotrope

$$R_{max} = 2.1 \text{ GPa}, \quad \beta = 0.26, \quad a^{(2)} = 100 \text{ MPa}. \quad (4.14)$$

Le composite est soumis à une extension macroscopique isochore cyclique (cf. programme 1 de la Fig. 4.3). Les résultats sont reportés sur la figure 4.19 qui montre l'évolution de la contrainte axiale macroscopique, des moyennes des contraintes axiales dans les phases et des fluctuations des contraintes dans la matrice. On observe que la réponse macroscopique de la formulation DIV est proche des simulations EF et arrive à reproduire l'effet Bauschinger. Toutefois, le modèle n'arrive pas à reproduire la pente caractérisant l'écrouissage et sous-estime les EF avec une erreur maximale de 3%. La moyenne des contraintes dans la matrice prédite par la formulation DIV est quasiment confondue avec les simulations EF excepté au début de la troisième recharge plastique ( $E_{33} \approx -0.075$ ) où le modèle ne reproduit pas l'effet Bauschinger. L'évolution de la moyenne des contraintes dans l'inclusion prédite par le modèle DIV reproduit de manière qualitative celle associée aux EF. Néanmoins, la différence entre les pentes caractérisant l'écrouissage entre le modèle DIV et les simulations EF devient beaucoup plus important pour la moyenne dans l'inclusion que pour la contrainte macroscopique. Ce dernier résultat était prévisible. En effet, la moyenne des contraintes dans la matrice est décrite avec exactitude par la formulation DIV. Au vu de la différence de pente observée par la contrainte macroscopique, cette dernière doit être plus accentuée dans l'inclusion pour une faible fraction volumique. Cette différence est peut être due à l'anisotropie du problème résolu par EF du fait de la géométrie cubique de la cellule étudiée alors que la microstructure considérée pour la formulation DIV est supposée être isotrope via l'utilisation des bornes de Hashin et Strickman. De plus, lors de nos simulations sur Cast3M, la seule loi de comportement permettant de simuler le comportement d'une phase élasto-plastique avec de l'écrouissage cinématique linéaire et de l'écrouissage isotrope est la loi de Chaboche1. Or ce modèle permet de simuler des écrouissages cinématique non linéaire et isotrope combinés. Dans nos simulations EF, nous avons fait tendre le plus qu'il était possible vers zéro les paramètres définissant la partie non linéaire du modèle, introduisant ainsi une nouvelle source d'approximation.

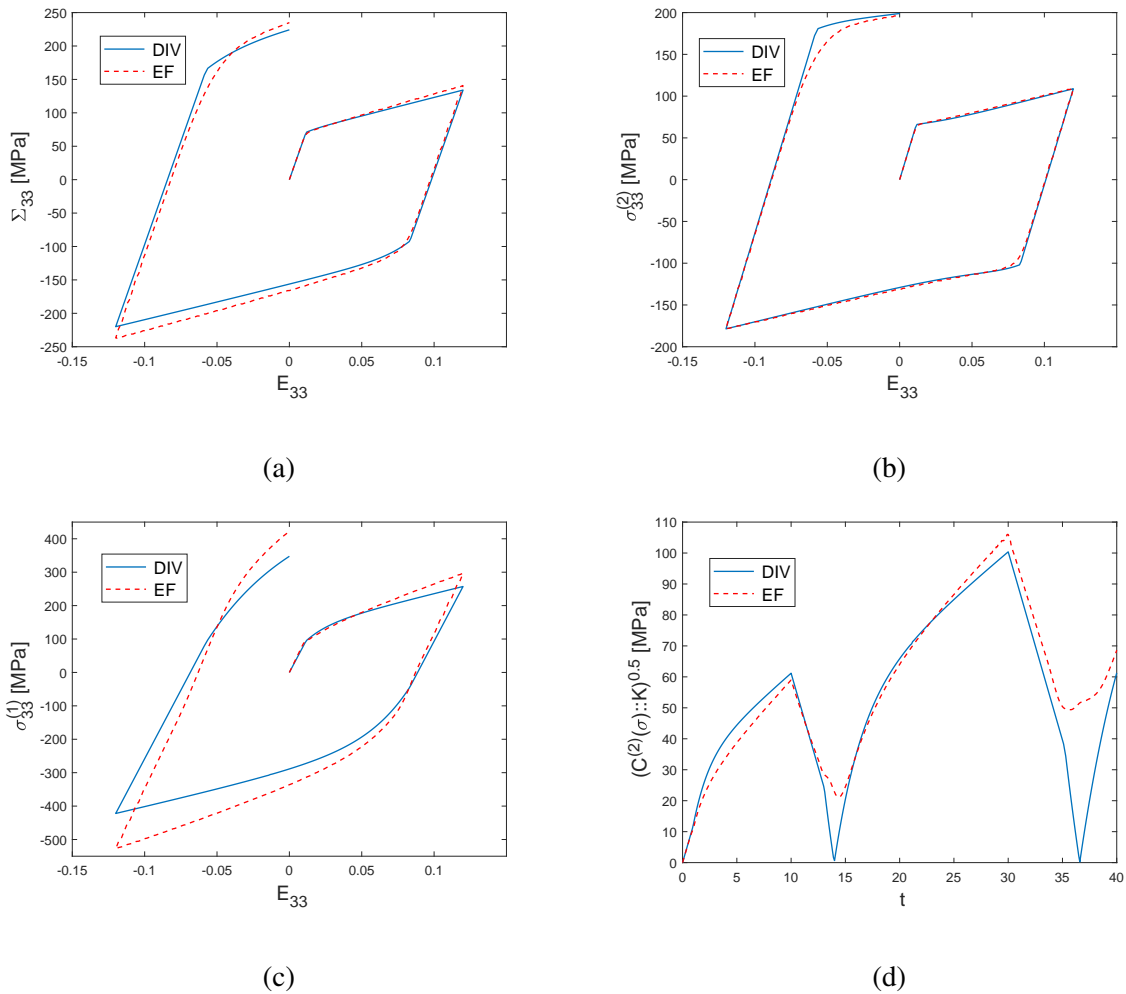


FIGURE 4.19: Composite renforcé élastiquement à matrice élasto-plastique avec des écrouissages cinématique linéaire et isotrope combinés.  $c^{(1)} = 0.17$ . Extension macroscopique isochore (programme 1, Fig 4.8). (a) Contrainte macroscopique axiale, (b) Moyenne des contraintes axiales dans la matrice, (c) Moyenne des contraintes axiales dans l'inclusion, (d) Fluctuations des contraintes dans la matrice.

Analysons maintenant l'évolution des fluctuations des contraintes dans la matrice. Nous constatons qu'elles sont en très bon accord avec les simulations EF, contrairement à ce qui était le cas pour les composites précédemment considérés (i.e. constitués soit d'une matrice parfaitement plastique, soit d'une matrice élasto-plastique avec de l'écrouissage cinématique linéaire ou isotrope) pour laquelle seules les tendances des simulations FFT étaient reproduites qualitativement mais non quantitativement par l'approche DIV. Cette affirmation est valable pour l'ensemble du chargement cyclique, à l'exception cependant du passage du régime élastique au régime plastique ( $t \approx 14$  s et  $t \approx 37$  s) pour lesquels les fluctuations des contraintes dans la matrice obtenues par l'approche DIV sont à nouveau proches de zéro.

### 4.2.3 Matériaux poreux avec et sans écoulement

Dans toute cette partie, nous considérons des matériaux poreux ayant une matrice élasto-plastique ( $\eta^{(2)} = 0$ ) avec et sans écoulement. Les prédictions du modèle DIV seront comparées à des simulations numériques en champs complets réalisées par EF sur le même huitième de cellule cubique présenté dans les parties précédentes. Les paramètres élastiques considérés pour la matrice (parfaitement plastique) sont les mêmes que ceux exposés dans l'Eq. (4.8). Les paramètres d'écoulement cinématique linéaires et d'écoulement isotrope sont respectivement données par les équations (4.9) et (4.11). Dans le cas d'une matrice avec des écoulements cinématique linéaire et isotrope combinés, on considèrera les coefficients définis par l'équation (4.14). Nous avons soumis nos différents composites à une extension macroscopique isochore définie par le programme 1 de la figure 4.8.

#### Difficultés numériques

Lors des différentes simulations réalisées, nous avons été confrontés à diverses difficultés numériques qu'il nous a fallu résoudre afin d'obtenir une solution du problème. Tout d'abord, comme nous l'avons vu dans la partie 4.1.3, l'équation  $F_1$  du système non linéaire définie en (3.62)<sub>1</sub> a au moins deux solutions. L'étude faite dans la partie 4.1.3 sur le nombre de racines de la fonction  $F_1$  en fonction de la compressibilité élastique des phases a été refaite dans le cas de matériaux poreux. On a observé que, pour les matériaux poreux, la fonction  $F_1$  présente également 2 racines dans le cas d'une matrice élastiquement incompressible et 4 dans le cas d'une matrice élastiquement compressible. La fonction  $F_2$  est toujours singulière dans le cas d'une matrice élastiquement compressible (cf. Fig. 4.6). Pour toutes ces raisons, nous avons considéré, ici également, seulement le cas de matrices incompressibles. De plus, le saut non physique observé sur la figure 4.2 existe toujours dans le cas des matériaux poreux. C'est pourquoi nous avons aussi inséré dans notre algorithme la contrainte (4.2)<sub>1</sub> portant sur la contrainte axiale macroscopique, nous permettant de supprimer le saut aux environ de  $t = 20$  s ( $E_{33} \approx 0$ ). Nous avons par ailleurs observé un autre saut non physique lors de la décharge et la recharge élastique comme cela est illustré sur la figure 4.20a. Ce saut est présent quelque soient les caractéristiques élastiques (compressible ou incompressible) et plastique (parfaitement plastique, avec de l'écoulement cinématique, de l'écoulement isotrope ou avec une combinaison des deux écoulements) de la matrice. Sur la figure 4.20a, on représente le saut observé dans le cas d'une matrice élasto-plastique incompressible parfaitement plastique. Comme expliqué dans la partie 4.1.3, ce saut provient de la non unicité de la racine de la fonction  $F_1$ . L'algorithme converge naturellement vers la mauvaise solution de  $\mu_0^{(2)}$ . Afin de corriger ce saut, nous avons ajouté dans l'algorithme la contrainte (4.2)<sub>1</sub> lors du calcul pendant la décharge et recharge élastique. En modifiant le point de départ de  $\mu_0^{(2)}$  la fonction  $f_{solve}$  converge vers la bonne racine du problème. Cette correction de l'algorithme conduit, comme on le voit sur la figure 4.20b, à de bons résultats dans le sens où la contrainte macroscopique est régulière et n'a plus de saut.

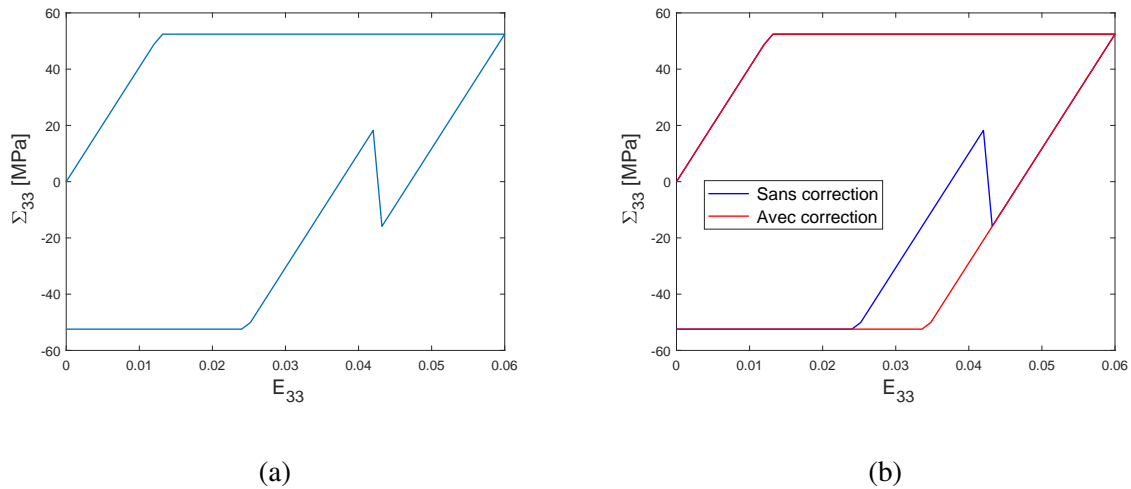
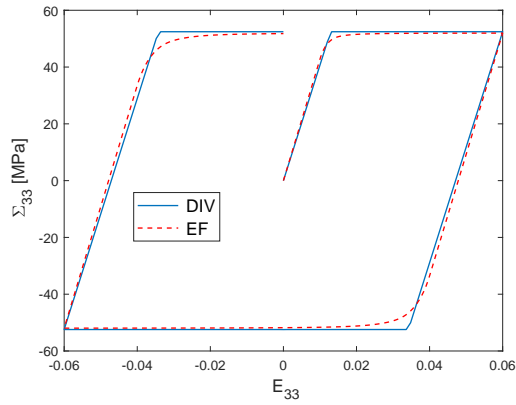


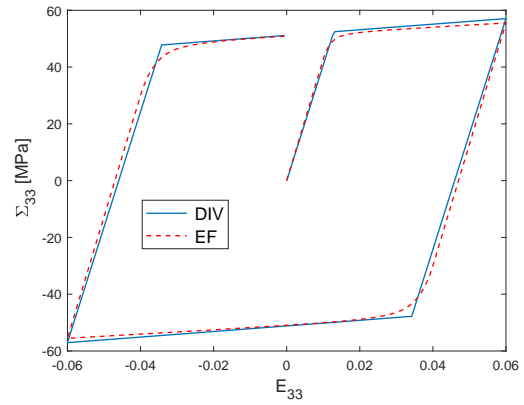
FIGURE 4.20: Matériau poreux à matrice élasto-plastique parfaitement plastique soumis à une extension isochore cyclique.  $c^{(1)} = 0.17$ . (a) Variation de la contrainte macroscopique axiale sans correction de l’algorithme, (b) Variation de la contrainte macroscopique axiale avec et sans correction de l’algorithme.

### Evaluation du modèle

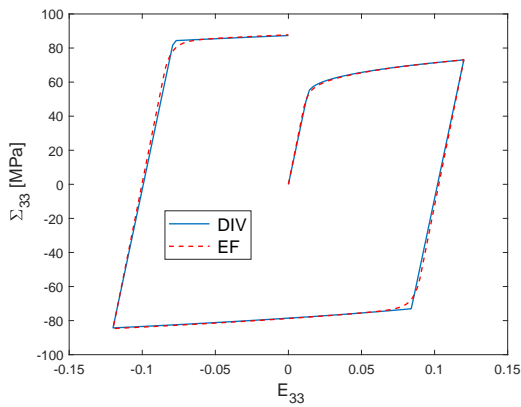
La figure 4.21 représente la variation de la contrainte axiale macroscopique pour un matériau poreux composé d’une matrice élasto-plastique parfaitement plastique, avec de l’écrouissage cinématique ou isotrope ou avec les deux écrouissages combinés. Ces matériaux ont été soumis à une extension macroscopique isochore cyclique. On observe sur cette figure un excellent accord entre les prédictions de la formulation DIV et les simulations EF. On note que dans le cas d’une matrice avec les écrouissages combinés le modèle surestime (sous-estime) légèrement respectivement la première et la troisième charge plastique. Néanmoins, bien que le modèle est quasiment confondu avec les simulations EF, il n’arrive pas à reproduire le faible effet Bauschinger observé. La figure 4.22 représente la variation des fluctuations des contraintes dans la matrice pour une matrice élasto-plastique parfaitement plastique, avec de l’écrouissage cinématique linéaire ou isotrope ou pour une matrice avec les deux écrouissages combinés. On observe, dans le cas d’une matrice parfaitement plastique, que le modèle surestime les prédictions EF mais arrive toutefois à retrouver les données numériques en champs complets avant les décharges et charges élastiques. Pour les autres cas, le modèle reproduit de manière qualitative les données des simulations EF tout en les surestimant significativement. On note aussi que la formulation DIV n’arrive pas à reproduire la variation lors des transitions entre le régime élastique et plastique (transitions où se produit l’effet Bauschinger). En effet à ces instants, le modèle prédit des fluctuations presque nulles ce qui n’est pas le cas des simulations EF. Ceci montre la limite du schéma de linéarisation utilisé dans le développement du modèle, en l’occurrence la procédure variationnelle. Une autre procédure de linéarisation permettrait peut-être d’améliorer la reproduction de l’effet Bauschinger.



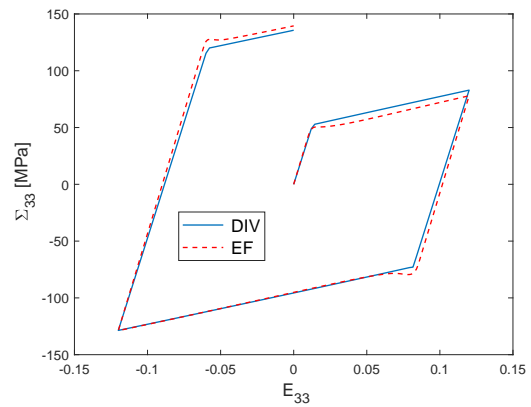
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE 4.21: Matériaux poreux constitué d'une matrice élasto-plastique soumis à une extension macroscopique isochore cyclique (programme 1, Fig 4.8).  $c^{(1)} = 0.17$ . Contrainte axiale macroscopique pour une (a) Matrice parfaitement plastique, (b) Matrice avec de l'écroutissage cinématique linéaire, (c) Matrice avec de l'écroutissage isotrope, (d) Matrice avec des écroutissages cinématique linéaire et isotrope combinés.



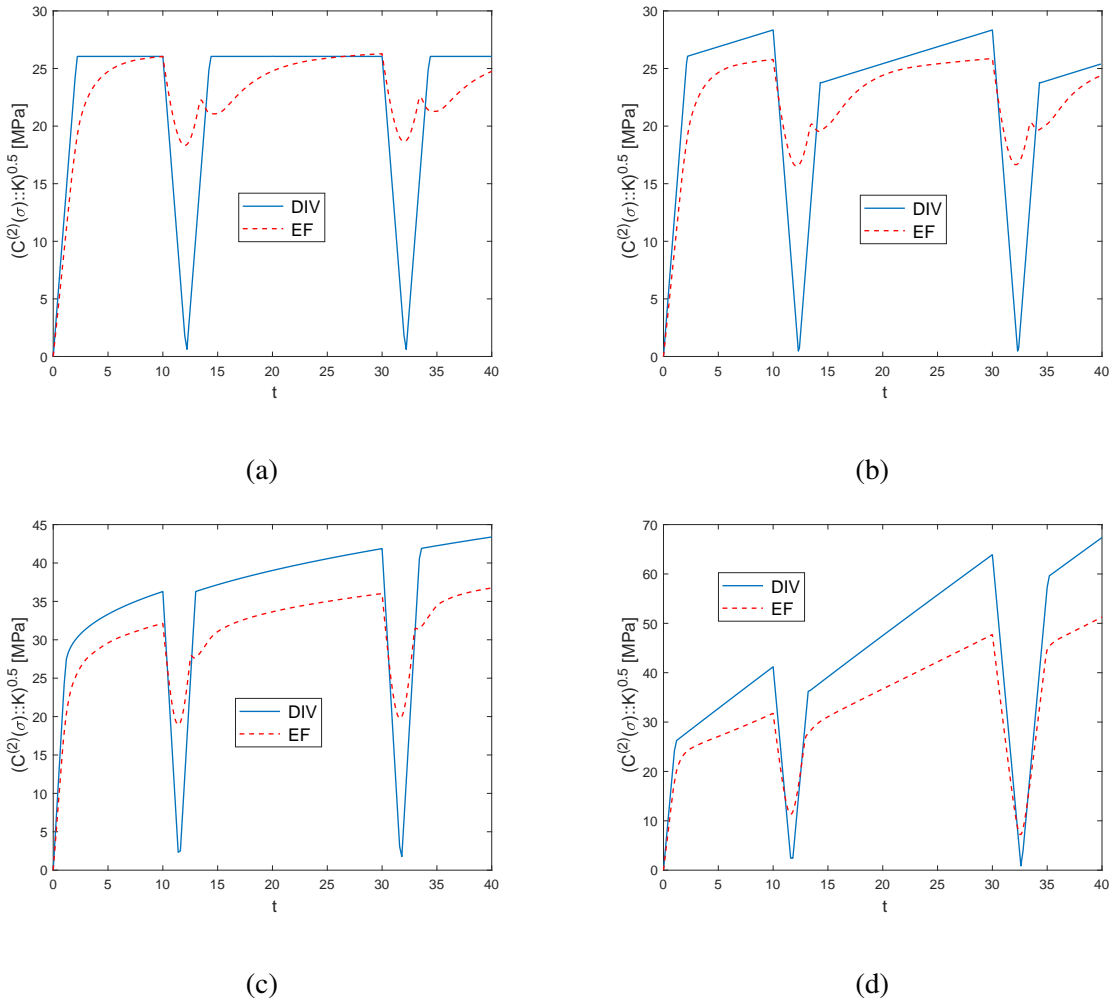


FIGURE 4.22: Matériaux poreux constitué d'une matrice élasto-plastique soumis à une extension macroscopique isochore cyclique (programme 1, Fig 4.8).  $c^{(1)} = 0.17$ . Fluctuations des contraintes dans la matrice pour une (a) Matrice parfaitement plastique, (b) Matrice avec de l'écroissage cinématique linéaire, (c) Matrice avec de l'écroissage isotrope, (d) Matrice avec des écroissages cinématique linéaire et isotrope combinés.

#### 4.2.4 Validation du modèle pour les composites élasto-viscoplastiques avec et sans seuil sans écroissage

Dans cette partie, nous comparons les prédictions de la formulation DIV à d'autres formulations elles aussi basées sur des calculs d'homogénéisation en champs moyens, ainsi qu'à des simulations numériques en champs complets tels que les EF ou la FFT. Nous avons appliqué la formulation DIV à des matériaux composites constitués d'une matrice élasto-viscoplastique sans seuil ( $\eta^{(2)} \neq 0$  MPa.s et  $\sigma_y^{(2)} = 0$  MPa) et avec seuil ( $\eta^{(2)} \neq 0$  MPa.s et  $\sigma_y^{(2)} \neq 0$  MPa) et sans

écrouissage, renforcée par des particules sphériques élastiques distribuées de manière aléatoire et isotrope.

### Composites élasto-viscoplastiques sans seuil

Nous allons tout d'abord nous intéresser au cas des composites renforcés élastiquement à matrice élasto-viscoplastique sans seuil. Les paramètres matériaux choisis sont les mêmes que ceux de Lahellec et Suquet [57] et explicités dans l'équation (2.86) avec  $m = 0.2$ .

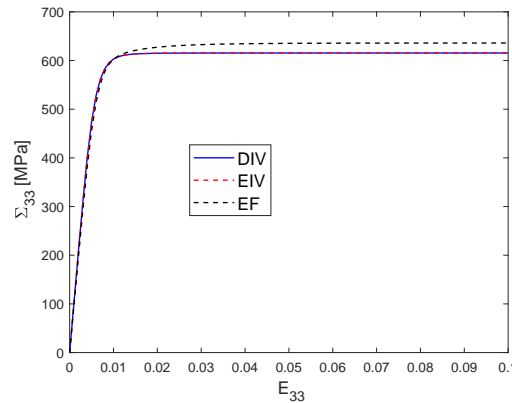


FIGURE 4.23: Composite renforcé élastiquement à matrice élasto-viscoplastique sans seuil ( $m = 0.2$ ) soumis à une traction uni-axiale.  $c^{(1)} = 0.25$ . Réponse effective du composite.

La figure 4.23 représente la réponse macroscopique du composite, soumis à une traction uni-axiale, issue de la formulation DIV, de la procédure EIV développée par Lahellec et Suquet [57] ainsi que des simulations numériques par EF réalisées par ces mêmes auteurs. On observe sur cette figure que les prédictions des deux formulations sont confondues. Bien que les deux modèles soient théoriquement différents (cf. partie 2.3 et remarque 5), ils fournissent les mêmes prédictions aussi bien pour un matériau composite avec une matrice visco-élastique linéaire de type Maxwell (cf. partie 2.3.2) que pour une matrice élasto-viscoplastique sans seuil soumis à une traction uni-axiale. On voit également que les deux formulations reproduisent les données EF tout en les sous-estimant légèrement. On note que les modèles DIV et EIV retrouvent parfaitement les données des simulations EF lors de la première partie de la courbe, i.e. la partie purement élastique.

On considère maintenant le composite utilisé par Idiart et Lahellec [43]. Ces auteurs ont considéré un composite renforcé élastiquement à matrice élasto-viscoplastique sans seuil ( $m =$

0.2). Les paramètres matériaux des phases sont les suivants

$$\begin{aligned} \text{Inclusion : } & c^{(1)} = 0.3, \quad \mu^{(1)} = R\mu^{(2)}, \quad k^{(1)} = +\infty \\ \text{Matrice : } & \mu^{(2)} = 10^3\sigma_y^{(2)}, \quad k^{(2)} = +\infty, \quad \eta^{(2)} = 100 \text{ MPa.s}, \quad m = 0.2, \quad \sigma_y^{(2)} = 1 \text{ MPa}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Nous avons tout d'abord soumis le matériau à un chargement de cisaillement axisymétrique défini par les équations (4.5) et (4.6) avec  $\dot{\gamma} = 5.10^{-3} \text{ s}^{-1}$  et  $T_0 = 10 \text{ s}$ .

La figure 4.24 représente la réponse effective du composite pour un contraste élastique  $R = 5$  soumis au chargement de cisaillement axisymétrique pour les deux taux de déformation de référence suivants :  $\dot{\varepsilon}_0 = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$  et  $\dot{\varepsilon}_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . Les prédictions de la formulation DIV sont comparées à la formulation EIV et à la formulation RVP ainsi qu'à des simulations numériques FFT réalisées par Idiart et Lahellec [43] sur une cellule cubique composée d'une matrice renforcée par 50 inclusions élastiques sphériques distribuées aléatoirement. On observe sur cette figure que les prédictions de la formulation DIV sont superposées aux prédictions des autres modèles en champs moyens (EIV et RVP). De plus, ces trois formulations retrouvent les données FFT tout en les surestimant légèrement. On remarque aussi que ces modèles sont tous capables de reproduire l'effet Bauschinger. On précise que sous ce chargement également, bien que les formulations EIV et DIV soient différentes théoriquement (cf. partie 2.3), leurs prédictions numériques sont les mêmes.

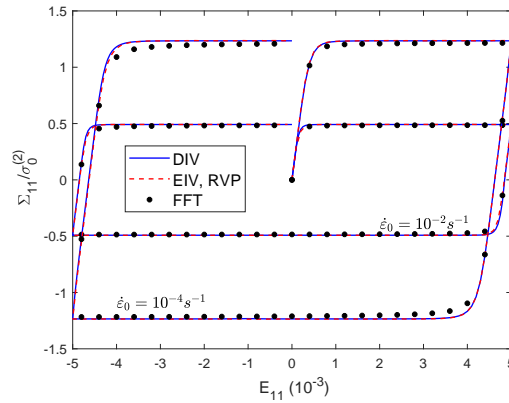


FIGURE 4.24: Comportement effectif d'un composite élastiquement incompressible à matrice élasto-viscoplastique sans seuil ( $m = 0.2$ ) renforcée élastiquement ( $c^{(1)} = 0.3$ ) pour un contraste élastique de  $R = 5$ , soumis à un chargement de cisaillement axisymétrique (Eqs. (4.5) et (4.6), programme 3, Fig. 4.9a) pour  $\dot{\varepsilon}_0 = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$  et  $\dot{\varepsilon}_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ .

Enfin, nous avons soumis ce composite au chargement tournant défini par les équations (4.5) et (4.7). Les paramètres de ce chargement sont  $\gamma = 10^{-3}$  et  $\omega = \pi/20 \text{ rad.s}^{-1}$ . Les paramètres élastiques des phases sont ceux présentés dans l'Eq. (4.15) avec un taux de déformation de référence de  $\dot{\varepsilon}_0 = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ . La figure 4.25 représente la variation des contraintes macroscopiques normalisées  $\Sigma_{11}$  en fonction de  $\Sigma_{13}$  pour un contraste élastique entre les modules de cisaillement

des phases de  $R = 0.2$  (Fig. 4.25a) et  $R = 5$  (Fig. 4.25b). On représente sur cette figure les prédictions des formulations DIV, EIV [57] et RVP [59] ainsi que les données de simulations FFT. Comme on l'a précisé précédemment, la formulation RVP a été développée par Lahellec et Suquet [59] en raison des limitations de la formulation EIV (développée par ces mêmes auteurs [57]) qui n'arrive pas à reproduire le comportement effectif de composites soumis à un chargement tournant. En effet, on observe sur la figure 4.25a ( $R = 0.2$ ) (resp. 4.25b ( $R = 5$ )) que la formulation EIV surestime (resp. sous-estime) les données FFT à la différence de la formulation RVP qui retrouve de manière très satisfaisante ces dernières. On a montré dans la partie 2.3.1 que les formulations DIV et EIV sont théoriquement différentes dans le cas de composites visco-élastiques linéaire et donc pour des composites visco-élastiques non linéaire (ou élasto-viscoplastiques sans seuil) sans écrouissage (voir remarque 5). On note toutefois, similairement à la traction uni-axiale (cf. Fig. 2.1 et 4.23), que la formulation DIV prédit le même comportement effectif que la formulation EIV pour un chargement tournant. Ceci nous permet alors de conclure que, comme la formulation EIV, la formulation DIV n'arrive pas à reproduire quantitativement le comportement effectif de composites élasto-viscoplastiques soumis à un chargement tournant.

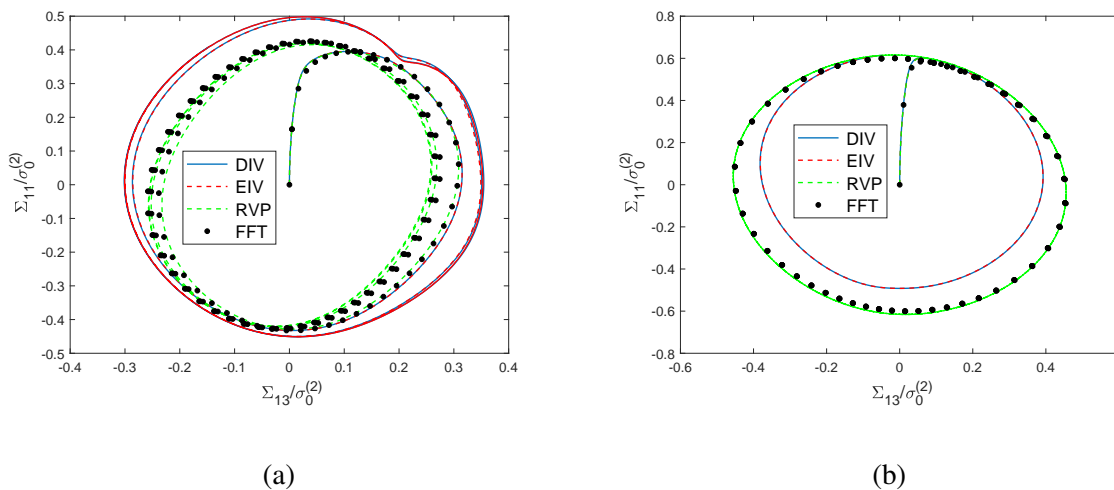


FIGURE 4.25: Composite incompressible renforcé à matrice élasto-viscoplastique sans seuil ( $m = 0.2$ ), pour différents contrastes élastiques, soumis à un chargement tournant (cf. (4.5) et (4.7)).  $c^{(1)} = 0.3$ . (a) Contraste élastique  $R = 0.2$ , (b) Contraste élastique  $R = 5$ .

### Composites élasto-viscoplastiques avec seuil

Cette partie traite des matériaux composites constitués d'une matrice élasto-viscoplastique avec seuil et sans écrouissage renforcée par des inclusions sphériques ayant un comportement élastique linéaire isotrope. Ces particules sont distribuées de manière aléatoire et isotrope dans la matrice. Les paramètres matériaux sont les mêmes que ceux issus de Lahellec et Suquet

[59] et données par (4.8). En addition de ces paramètres, et du fait que la matrice soit élasto-viscoplastique, on considère les mêmes paramètres matériaux de la matrice que ceux de Lahellec et Suquet [59]

$$\eta^{(2)} = 100 \text{ MPa.s}, \quad \dot{\varepsilon}_0 = 1 \text{ s}^{-1}, \quad m = 0.3. \quad (4.16)$$

Les composites étudiés sont soumis à l'extension isochore cyclique (4.3) et au programme 1 de la figure 4.8. Les prédictions du modèle sont comparées au modèle RVP et aux simulations FFT effectuées par Lahellec et Suquet [59].

La figure 4.26 présente la variation de la contrainte macroscopique axiale en fonction de la déformation macroscopique axiale. Le composite a été soumis à une extension isochore monotone pour différentes vitesses de chargement  $\dot{E}$ . Pour chacune de ces vitesses, on observe un bon accord entre les prédictions du modèle DIV et le modèle RVP. En effet, les deux modèles sont quasiment confondus. On note que plus la vitesse de chargement augmente plus les deux formulations sous-estiment légèrement les données FFT. En effet, pour des vitesses de chargement allant de  $12 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$  à  $12 \text{ s}^{-1}$ , les deux modèles surestiment légèrement les données de FFT. Pour une vitesse de  $12 \cdot 10^1 \text{ s}^{-1}$ , les deux modèles sont confondus avec les données FFT. Enfin, pour une vitesse de  $12 \cdot 10^2 \text{ s}^{-1}$  les deux modèles sous-estiment légèrement les simulations en champs complets.

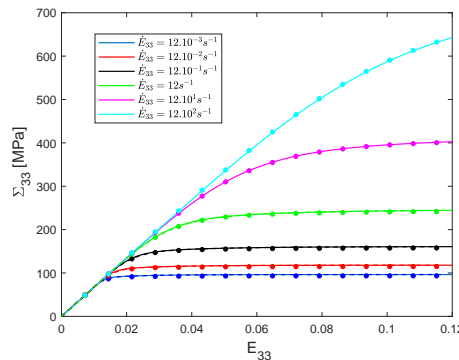


FIGURE 4.26: Composite renforcé à matrice élasto-viscoplastique sous extension isochore cyclique (programme 1, Fig 4.8) pour différentes vitesses de chargement. Comparaison entre le modèle DIV (trait continu), le modèle RVP [59] (ligne pointillée) et les simulations FFT en champs complets [59] (points).

La figure 4.27 décrit l'évolution des contraintes axiales macroscopiques et locales ainsi que les fluctuations des contraintes dans la matrice pour le composite soumis à une extension macroscopique isochore cyclique associée à une vitesse de chargement  $\dot{E} = 12 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ . Sur cette figure sont représentées, les prédictions des formulations DIV et RVP ainsi que les données FFT obtenues par Lahellec et Suquet [59]. On observe tout d'abord un bon accord entre les deux formulations. Les prédictions des deux modèles arrivent à reproduire, tout en surestimant (resp. sous-estimant) légèrement, les simulations numériques en champs complets pour la

contrainte macroscopique (resp. la moyenne de la contrainte dans la matrice). De plus, les deux formulations prédisent correctement l'effet Bauschinger. Ces dernières reproduisent également de manière qualitative la moyenne des contraintes dans l'inclusion ainsi que les fluctuations des contraintes dans la matrice. On observe enfin, que la formulation DIV, comme c'était déjà le cas pour l'élasto-plasticité parfaite (cf. Fig. 4.10d), prédit à tort des fluctuations des contraintes nulles au début des recharges plastiques.

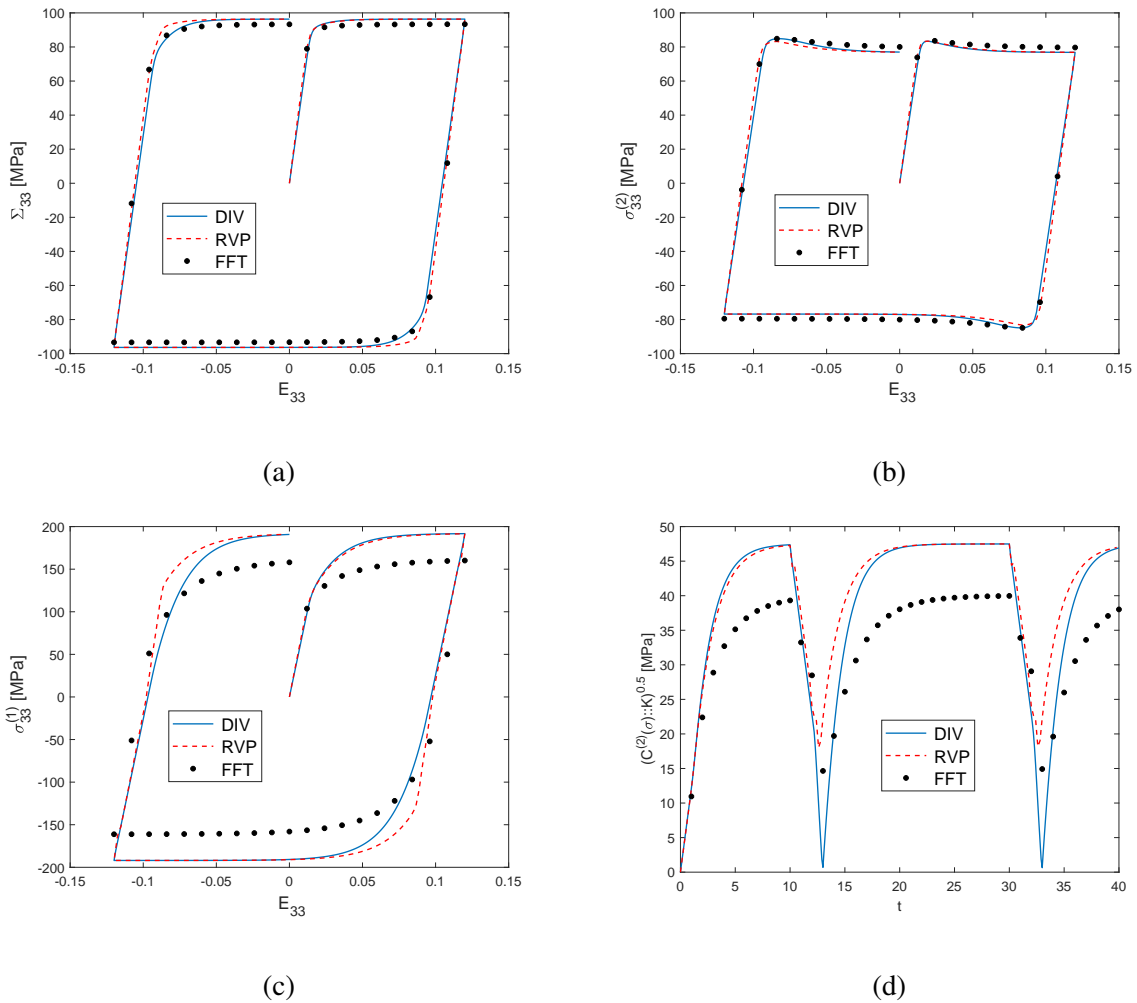


FIGURE 4.27: Composite renforcé à matrice élasto-viscoplastique avec seuil soumis à une extension isochore cyclique (programme 1, Fig 4.8) pour une vitesse de  $12 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ .  $c^{(1)} = 0.17$ . (a) Contrainte axiale macroscopique, (b) Moyenne de la contrainte axiale dans la matrice, (c) Moyenne de la contrainte axiale dans l'inclusion, (d) Fluctuations des contraintes dans la matrice.

### 4.3 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons réalisé plusieurs applications du modèle développé dans le chapitre 3. Après avoir exposé la mise en œuvre numérique du modèle pour des composites constitués d'une matrice élasto-(visco)plastique avec des écrouissages cinématique linéaire et isotrope combinés, nous avons mis en avant certains problèmes que nous avons résolu. En effet, nous avons observé numériquement la non unicité de la solution pour le système d'équations non linéaires (3.62). Comme on l'a vu sur les figures 4.3 et 4.5, ce système possède deux racines (resp. quatre racines) pour des phases élastiquement incompressibles (resp. compressibles). De plus, pour des phases élastiquement compressibles, la fonction  $F_2$  du système non linéaire (3.62) présente une singularité (cf. Fig. 4.6) que nous n'avons pas réussi à supprimer et qui engendre des problèmes de convergence. C'est pourquoi, nous avons travaillé dans ce chapitre uniquement avec des composites à phases élastiquement incompressibles. Afin de supprimer le saut non physique subsistant dans la réponse des composites incompressibles, deux contraintes de régularisation (cf. Eq. (4.2)) ont été rajoutées dans l'algorithme, permettant ainsi au schéma numérique de Levenberg Marquardt, sur lequel repose la fonction  $f_{solve}$  du logiciel Matlab, de converger vers la bonne racine.

La formulation DIV a tout d'abord été appliquée à trois composites différents, constitués d'une matrice élasto-plastique soit parfaitement plastique, soit avec de l'écrouissage cinématique linéaire ou de l'écrouissage isotrope. Ces composites ont été soumis à deux chargement différents correspondant à une extension macroscopique isochore cyclique et à un chargement non radial. Les prédictions de la formulation DIV ont été comparées à celles de la formulation RVP et à des simulations FFT [59]. On a observé pour les composites considérés un bon accord entre ces deux formulations et les simulations FFT aux échelles macroscopique et locale. En particulier, l'effet Bauschinger est très bien reproduit lorsque le contraste entre les modules élastiques des phases n'est pas trop important. Toutefois, la formulation DIV surestime la moyenne des contraintes dans l'inclusion et la moyenne des fluctuations des contraintes dans la matrice. De plus, il prédit à tort des fluctuations de contraintes quasiment nulles lors des recharges plastiques. Comme Brassart et al. [21], nous avons également réalisé des simulations de traction uni-axiale sur des composites à matrice métallique. On constate que le modèle DIV arrive à reproduire les simulations par EF ainsi que les réponses des modèles en champs moyens.

Ensuite, de nouvelles données numériques ont été produites pour des composites ayant une matrice avec de l'écrouissage cinématique linéaire et isotrope combinés soumis à un chargement cyclique ou avec de l'écrouissage isotrope et soumis à différents chargement multi-cycles. Afin de comparer les prédictions de la formulations DIV, nous avons réalisés des simulations numériques EF sur un huitième d'une cellule unitaire cubique avec une particule sphérique en son centre. D'une manière générale, un bon accord est observé entre les prédictions du modèle et les simulations EF. En effet, le schéma DIV reproduit l'effet Bauschinger de chaque cycle ainsi que l'accommodation du matériau après un certain nombre de cycles. Dans le cas des écrouissages cinématique linéaire et isotrope combinés, le modèle DIV arrive à reproduire les réponses macroscopique et locale dans la matrice mais échoue à reproduire la réponse locale

dans l'inclusion. Toutes ces simulations nous ont ainsi permis de valider le modèle dans le cas d'un composite constitué d'une matrice élasto-plastique avec ou sans écrouissage, renforcée par des particules sphériques élastiques.

Nous nous sommes ensuite intéressés au cas des matériaux poreux composés d'une matrice élasto-plastique avec ou sans écrouissage. Ces matériaux ont été soumis à une extension macroscopique isochore cyclique et les prédictions du modèle ont été comparées à des simulations EF. On constate que la formulation DIV reproduit qualitativement et quantitativement les données EF à l'exception du fait qu'elle n'arrive pas à reproduire le faible effet Bauschinger observé. On remarquera que dans le cas des composites renforcés par des particules élastiques, on avait déjà constaté pour de forts contrastes élastiques entre la matrice et les inclusions (ce qui est également le cas des matériaux poreux), que le modèle DIV n'arrivait pas à reproduire l'effet Bauschinger. Outre le fait que le modèle DIV n'arrive pas à prévoir de manière satisfaisante l'effet Bauschinger pour les forts contrastes élastiques, on constate également que dans le cas de matériaux poreux, il surestime significativement les fluctuations des contraintes et prévoit toujours à tort des fluctuations nulles lors des recharges plastiques. Afin d'améliorer ses prédictions, il serait probablement intéressant de proposer un autre schéma de linéarisation que la procédure variationnelle au sein du modèle DIV.

Nous avons enfin appliqué la formulation DIV à des matériaux composites constitués d'une matrice élasto-viscoplastique sans écrouissage, avec ou sans seuil renforcée par des particules sphériques élastiques. Ces matériaux ont été soumis à différents chargements : un chargement de traction uni-axiale, de cisaillement axisymétrique et un chargement tournant. Les prédictions du modèle ont été comparées à d'autres formulations en champs moyens telles que les formulations EIV [57] et RVP [59] ainsi qu'à des simulations en champs complets EF [57] et FFT [43, 59]. Dans ces différentes simulations, on observe, à l'exception des chargements tournants, que la formulation DIV est proche des autres formulations variationnelles. Ses prédictions arrivent à reproduire les données en champs complets pour la contrainte macroscopique et locales dans les phases. Néanmoins, elle surestime les contraintes locales dans l'inclusion ainsi que les fluctuations des contraintes dans les phases. On note toutefois que pour les chargements tournants, la formulation DIV, comme la formulation EIV, n'arrive pas à reproduire qualitativement les données des simulations numériques en champs complets. De plus, bien que les formulations EIV et DIV soient différentes sur le plan théorique (voir la partie 2.3.1 et la remarque 5), on observe que leurs prédictions numériques sont confondues.

Toutes ces simulations réalisées sur différents matériaux soumis à différents chargements nous ont permis de valider la formulation DIV, développée dans le chapitre 3, dans le cas de composites à matrice élasto-plastique avec ou sans écrouissage et renforcée par des particules sphériques élastiques ou adoucie par des pores sphériques. Elle a aussi été validée dans le cas des composites renforcés élastiquement à matrice élasto-viscoplastique sans écrouissage, avec ou sans seuil plastique. Néanmoins cette formulation n'a pu être validée pour les composites soumis à des chargements tournants montrant ainsi que le modèle nécessite des améliorations.



Dans ce chapitre, nous avons validé la formulation DIV, développée dans le chapitre 3, en particulier dans le cas de composites constitués d'une matrice élasto-plastique avec ou sans écrouissage cinématique linéaire et/ou isotrope renforcée par des inclusions élastiques sphériques. Une suite logique de ce travail serait de développer et de valider la formulation DIV dans le cadre de matériaux élasto-plastiques avec des écrouissages cinématique **non linéaire** et isotrope combinés. Cette étude est développée dans le chapitre suivant.

## Extension de la formulation DIV au cas de l'écroutissement cinématique non linéaire

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction sur le modèle d'Armstrong-Frederick . . . . .</b>	<b>114</b>
5.1.1	Présentation du modèle . . . . .	114
5.1.2	Formulation par la théorie du bipotentiel de la loi d'Armstrong-Frederick	116
5.1.3	Quelques modifications du modèle d'Armstrong-Frederick . . . . .	117
<b>5.2</b>	<b>Formulation DIV proposée . . . . .</b>	<b>122</b>
5.2.1	Comportement local et principes variationnels . . . . .	122
5.2.2	Linéarisation du comportement local . . . . .	126
5.2.3	Homogénéisation du MLC à polarisation hétérogène intraphase . . .	137
5.2.4	Application à une matrice élasto-plastique renforcée par des particules élastiques . . . . .	140
5.2.5	Cas particuliers des modèles de Ladevèze et de Chaboche modifié . .	143
<b>5.3</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>146</b>

---

Dans ce chapitre nous nous proposons d'étendre la formulation DIV présenté dans le chapitre 3 dans le cadre de composites élasto-(visco)plastique avec des écroutissements cinématique linéaire et isotrope combinés au cas de composites élasto-plastiques avec des écroutissements cinématique non linéaire et isotrope combinés. Dans un premier temps, nous introduisons le modèle d'élasto-plasticité de Chaboche [2][23][24], et soulignons son caractère non associé, ainsi que les modèles de Chaboche modifié [25][36][61] et de Ladevèze [51][52] qui consistent en des modifications de la loi constitutive du modèle de Chaboche, de sorte à se placer dans le cadre de matériaux dont le comportement est régit par deux potentiels. Nous développons ensuite une formulation DIV unifiée pour ces deux modèles en suivant la méthodologie utilisée au chapitre 3. Pour cela, les principes variationnels incrémentaux présentés dans la partie 1.2.2 seront adaptés au cas étudié. Une fois terminée l'homogénéisation du comportement pour les deux modèles, la formulation unifiée est particularisée au cas de chacun des deux modèles.

## 5.1 Introduction sur le modèle d'Armstrong-Frederick

### 5.1.1 Présentation du modèle

Dans les deux chapitres précédents, nous nous sommes intéressés à modéliser la formulation DIV dans le cas de matériaux composites constitués de phases élasto-viscoplastiques avec des érouissages cinématique linéaire et isotrope combinés et à la valider en comparant ses prédictions à des résultats de calculs en champs complets. Cette modélisation a pu être particularisée au cas de phases élasto-plastiques avec de l'érouissage cinématique linéaire et isotrope en annulant la viscosité des phases, i.e.  $\eta^{(r)} = 0$ . Malgré son grand intérêt, cette même modélisation ne suffit pas pour représenter le comportement de certains matériaux métalliques qui présentent de l'érouissage cinématique non linéaire.

Pour cette classe de matériaux présentant de l'érouissage non linéaire, Armstrong et Frederick [2] ont été les premiers à proposer une modélisation plus appropriée de la règle d'écoulement qui comme on le verra, situe clairement la loi résultante dans le cadre de la plasticité non associée. Le modèle a été formalisé et popularisé par Chaboche [23][24] dans le cadre non associé que nous résumons ci-dessous.

Le premier ingrédient du modèle est l'énergie libre  $w^{(r)}$  de la forme

$$w^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\beta}, p) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) : \mathbb{L}^{(r)} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \frac{1}{2} a^{(r)} \boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\beta} + \widehat{w}^{(r)}(p), \quad (5.1)$$

avec  $\boldsymbol{\varepsilon}$  le tenseur des déformations locales,  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  le tenseur des déformations plastiques,  $\boldsymbol{\beta}$  le tenseur représentant l'érouissage cinématique,  $p$  la déformation plastique cumulée représentant l'érouissage isotrope. Les tenseurs  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  et  $\boldsymbol{\beta}$  sont tous les deux de trace nulle.  $\mathbb{L}^{(r)}$  est le tenseur d'élasticité,  $a^{(r)}$  le paramètre d'érouissage cinématique linéaire et  $\widehat{w}^{(r)}$  l'énergie stockée par l'érouissage isotrope. Les lois d'état qui s'en déduisent ainsi que l'analyse de la dissipation intrinsèque fournissent la contrainte locale  $\boldsymbol{\sigma}$  et les forces thermodynamiques irréversibles  $\mathcal{A}_\alpha = (\mathcal{A}_{\boldsymbol{\varepsilon}^p}, \mathcal{A}_\beta, \mathcal{A}_p)$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial w^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\beta}, p) = \mathbb{L}^{(r)} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \\ \mathcal{A}_{\boldsymbol{\varepsilon}^p} = -\frac{\partial w^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\beta}, p) = \mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) = \boldsymbol{\sigma}_d \\ \mathcal{A}_\beta = -\frac{\partial w^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\beta}, p) = -a^{(r)} \boldsymbol{\beta} = -\mathbf{X} \\ \mathcal{A}_p = -\frac{\partial w^{(r)}}{\partial p}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\beta}, p) = -R^{(r)}(p), \end{cases} \quad (5.2)$$

avec  $\mathbf{X}$  la contrainte dite de rappel et  $\boldsymbol{\sigma}_d$  la partie déviatorique de  $\boldsymbol{\sigma}$ .

Le second ingrédient du modèle est la fonction de charge définissant le domaine plastique (domaine des forces admissibles). Elle est de la même forme que celle de Von-Mises :

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R) = (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})_{eq} - R(p) - \sigma_y^{(r)}. \quad (5.3)$$

On rappelle que, dans le cas de l'écrouissage cinématique linéaire,  $\beta = \varepsilon^p$  et la contrainte de rappel s'écrit donc  $\mathbf{X} = a^{(r)}\beta = a^{(r)}\varepsilon^p$  (cf. Eq. (3.3)). Il s'en suit que le taux de la contrainte de rappel  $\dot{\mathbf{X}}$  s'écrit

$$\dot{\mathbf{X}} = a^{(r)} \dot{\varepsilon}^p. \quad (5.4)$$

Sur la base d'observations expérimentales, Armstrong et Frederick [2] ont modifié l'expression du taux de la contrainte de rappel de telle sorte que

$$\dot{\mathbf{X}} = a^{(r)} \dot{\varepsilon}^p - \gamma^{(r)} \mathbf{X} \dot{\varepsilon}_{eq}^p, \quad (5.5)$$

avec  $\gamma^{(r)}$  un paramètre de la loi d'écrouissage. En utilisant le fait que  $\mathbf{X}$  est désormais donnée par (5.2)<sub>3</sub>, on obtient la loi d'évolution suivante pour  $\beta$

$$\dot{\beta} = \dot{\varepsilon}^p - \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} \mathbf{X} \dot{\varepsilon}_{eq}^p. \quad (5.6)$$

La loi d'évolution de la déformation plastique et la règle d'écrouissage (5.6) constituent le troisième ingrédient du modèle. On note que la loi d'évolution (5.6) ne peut pas être retrouvée en dérivant la fonction de charge  $F$  définie par (5.3) par rapport à sa variable force associée  $\mathbf{X}$ . Afin de retrouver les lois d'évolution, Chaboche [23][24] en se plaçant dans le cadre de la plasticité non associée, introduit un potentiel plastique  $G$  différent de la fonction de charge  $F$  :

$$G(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R) = (\sigma - X)_{eq} - \sigma_y^{(r)} - R^{(r)}(p) + \frac{1}{2} \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} \mathbf{X} : \mathbf{X}. \quad (5.7)$$

On vérifie en effet qu'à partir de ce potentiel plastique  $G$  (5.7) les lois d'évolution s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R) = \dot{\lambda} \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma}_d - \mathbf{X}}{(\sigma - X)_{eq}} \\ \dot{\beta} = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{X}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R) = \dot{\varepsilon}^p - \dot{\lambda} \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} \mathbf{X} \\ \dot{p} = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial (-R)}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R) = \dot{\lambda} = \dot{\varepsilon}_{eq}^p \end{array} \right. \quad \text{avec } \dot{\lambda} \geq 0, \quad F \leq 0 \quad \text{et} \quad \dot{\lambda} F = 0. \quad (5.8)$$

On note que la dernière égalité de (5.8)<sub>3</sub> se déduit directement de (5.8)<sub>1</sub>. De plus, en remplaçant  $\dot{\lambda}$  par  $\dot{\varepsilon}_{eq}^p$  dans (5.8)<sub>2</sub>, on retrouve bien la loi d'évolution de la règle d'écrouissage (5.6).

Le modèle proposé par Chaboche [23][24], sera indifféremment dénommé par la suite modèle d'Armstrong-Frederick ou modèle de Chaboche, pour ne pas le confondre avec un autre modèle développé par Chaboche [25] qui sera appelé modèle de Chaboche modifié dans cette thèse. Comme nous l'avons vu ci-dessus le modèle d'Armstrong-Frederick, est un modèle de plasticité non associée car sa fonction de charge  $F$  donnée par (5.3) est différente du potentiel plastique  $G$  introduit en (5.7). Il ne rentre donc pas dans le cadre des MSG.

### 5.1.2 Formulation par la théorie du bipotentiel de la loi d'Armstrong-Frederick

Un cadre de modélisation approprié des lois non associées, comme par exemple le modèle d'Armstrong-Frederick, est celui des Matériaux Standards Implicites (MSI) introduit par de Saxcé [26]. Le cadre des MSI a été développé par analogie avec celui des MSG (Halphen et Nguyen [39]). Il permet de retrouver, à l'aide d'une relation implicite, la règle de normalité. A cette fin, on introduit un bipotentiel élastique  $b_e$  et plastique  $b_p$  dépendant à la fois des vitesses et des forces <sup>1</sup>. Pour le modèle d'Armstrong-Frederick rappelé ci-dessus, et en considérant que le matériau présente de l'érouissage isotrope caractérisé par la variable  $R$ , on montre que ce bipotentiel plastique s'écrit sous la forme suivante (Bouby [13])

$$b_p(\dot{\epsilon}^p, \dot{\beta}, \dot{p}, \sigma, \mathbf{X}, R) = \Psi_K(\sigma - \mathbf{X}, R) + \Psi_{K^*}(\dot{\epsilon}^p, \dot{p}) + \Psi_{\{0\}}\left(\dot{\beta} - \dot{\epsilon}^p + \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} \mathbf{X} \dot{\epsilon}_{eq}^p\right) + \left(\sigma_y^{(r)} + R^{(r)}(p) + \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} \mathbf{X} : \mathbf{X}\right) \dot{\epsilon}_{eq}^p, \quad (5.9)$$

avec

$$\Psi_K(\sigma - \mathbf{X}, R) = \begin{cases} 0 & \text{si } (\sigma - \mathbf{X}, R) \in K \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.10)$$

la fonction indicatrice du domaine élastique  $K$  défini par

$$K = \{(\sigma - \mathbf{X}, R) / (\sigma - \mathbf{X})_{eq} - R(p) - \sigma_y^{(r)} \leq 0\}, \quad (5.11)$$

et

$$\Psi_{K^*}(\dot{\epsilon}^p, \dot{p}) = \begin{cases} 0 & \text{si } (\dot{\epsilon}^p, \dot{p}) \in K^* \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.12)$$

la fonction indicatrice sur  $K^*$ , le cône polaire de  $K$ , défini comme

$$K^* = \{(\dot{\epsilon}^p, \dot{p}) / \dot{\epsilon}_{eq}^p - \dot{p} \leq 0\}. \quad (5.13)$$

La fonction  $\Psi_{\{0\}}(\mathbf{Y})$ , où

$$\Psi_{\{0\}}(\mathbf{Y}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{Y} = \mathbf{0} \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.14)$$

permet de retrouver la loi d'évolution cinématique non linéaire

$$\dot{\beta} - \dot{\epsilon}^p + \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} \mathbf{X} \dot{\epsilon}_{eq}^p = 0 \Rightarrow \dot{\beta} = \dot{\epsilon}^p - \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} \mathbf{X} \dot{\epsilon}_{eq}^p. \quad (5.15)$$

Pour l'extension de la formulation DIV aux composites à phases régies par le modèle d'Armstrong-Frederick, une première piste explorée a été de travailler dans le cadre des MSI en considérant

1. Ces concepts de MSI et de bipotentiel ont permis une nouvelle compréhension de certaines lois non associées connues comme le modèle de Drucker-Prager (Hjiaj et al. [42], Bousshine et al. [18],[19]), le modèle d'endommagement de Lemaitre (Bodovillé [11]) ou le modèle d'Armstrong-Frederick (de Saxcé [26], Bouby et al. [14],[15], Bodovillé et de Saxcé [12], de Saxcé dans Maier et Weichert [64])

le bipotentiel défini par (5.9). Néanmoins, certains verrous mathématiques trop importants ne nous ont pas permis de mener à bien cette formulation. En effet, par analogie, le potentiel de dissipation qui dépend seulement des variables flux dans le cadre des MSG (cf. chapitre 3), est défini dans le cadre des MSI par le bipotentiel (5.9) qui dépend des variables flux et des variables forces. Or, le fait que ce potentiel dépende à la fois de ces deux types de variables requiert en premier d'étendre au cas des MSI la procédure variationnelle développée par Ponte Castañeda [86] puis les travaux de Lahellec et al. [54] sur lesquels repose le modèle DIV. Or, une telle extension nécessite une reformulation totale de la procédure de Ponte Castañeda qui est hors de portée compte tenu du temps imparti à cette thèse. Ces développements devant inclure :

1. une formulation variationnelle incrémentale pour les MSI, se substituant à celle de Mialon ou Lahellec et Suquet [57]
2. une extension de la procédure variationnelle de Ponte Castañeda [86] aux problèmes d'homogénéisation non linéaire de composites à constituants de type MSI.

De ce fait, la modélisation des comportements régis par les lois non associées avec la formulation DIV sera réalisée en **approchant** les lois constitutives présentées précédemment de telle sorte que l'on retrouve un cadre de modélisation plus simple, à savoir le cadre des MSG.

### 5.1.3 Quelques modifications du modèle d'Armstrong-Frederick

Comme indiqué précédemment, pour l'investigation de l'érouissage cinématique non linéaire, nous avons fait le choix de se placer dans le cadre des MSG. Pour cela, nous avons considéré les modèles approchés introduit par Chaboche [25] (voir aussi Germain et al. [36] et Lemaitre et Chaboche [61]) que nous appellerons modèle de Chaboche modifié et par Ladevèze [51][52] (voir aussi Besson et al. [6]) qui ont modifié les lois constitutives du modèle d'Armstrong-Frederick pour se placer dans le cadre de matériaux dont le comportement est régi par deux potentiels. Nous allons, dans ce qui suit, expliquer comment ces auteurs ont modifié la loi initiale pour se ramener dans ce cadre.

#### Modèle proposé par Ladevèze [51][52]

Afin d'approcher le modèle d'Armstrong-Frederick dans le cadre des MSG, Ladevèze [51]<sup>2</sup> (voir aussi Besson et al. [6]) a proposé de garder la même énergie libre (5.1) et de choisir la fonction seuil  $F$  égale au potentiel plastique  $G$  défini par (5.7) :

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R) = (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})_{eq} - \sigma_y^{(r)} - R^{(r)}(p) + \frac{1}{2} \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} \mathbf{X} : \mathbf{X}. \quad (5.16)$$

2. Ladevèze [52] a développé ce modèle dans le cas de l'élasto-(visco)plasticité avec des érouissages cinématique non linéaire et isotrope combinés

On retrouve alors les mêmes lois d'état (5.2) et équations d'évolutions (5.8) que celles associées au modèle d'Armstrong-Frederick pour une fonction de charge qui est désormais différente. C'est en ce sens qu'il s'agit d'une modification du modèle originel de Chaboche.

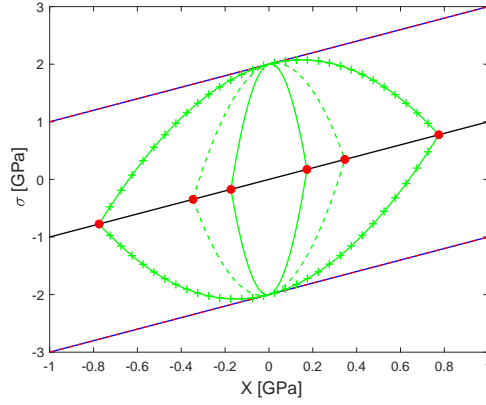


FIGURE 5.1: Comparaison entre les domaines d'admissibilités d'Armstrong-Frederick (5.3) (ligne bleue), de Chaboche modifié (5.20) (ligne avec des tirets rouges), et de Ladevèze (5.16) pour différentes valeurs de  $\gamma^{(r)}$  (ligne verte  $\gamma^{(r)} = 40$ , ligne avec des tirets verts  $\gamma^{(r)} = 10$ , ligne pleine avec des croix  $\gamma^{(r)} = 2$ ) et la courbe  $\sigma_d = X$  (ligne noire).

La figure 5.1 représente dans l'espace  $\sigma - X$  (1D) les domaines d'admissibilité des modèles d'Armstrong-Frederick (5.3), de Chaboche modifié (5.20) et de Ladevèze (5.16) pour différentes valeurs de  $\gamma^{(r)} = 40, 10$  et  $2$ . Comme on l'observe dans l'équation (5.16), plus la valeur de  $\gamma^{(r)}$  diminue, plus le domaine d'admissibilité du modèle de Ladevèze tend vers celui d'Armstrong-Frederick, ou dans le cadre des MSG tend vers le domaine de Von-Mises. On note que plus la valeur de  $\gamma^{(r)}$  diminue plus le modèle se dirige vers l'écoulement cinématique linéaire. Les points en rouges représentent les points où  $\sigma_d = X$ , ces points sont les points singuliers de la fonction seuil de Ladevèze.

Par ailleurs, comme le modèle de Ladevèze est construit dans le cadre des MSG, on peut définir le potentiel de dissipation associé à (5.16). Ce dernier a été déterminé par Bouby et al. [16] sous la forme :

$$\varphi^{(r)}(\dot{\epsilon}^p, \dot{\beta}, \dot{p}) = \phi^{(r)}(\dot{\epsilon}^p, \dot{\beta}) + \Phi_C(\dot{\epsilon}^p, \dot{p}), \quad (5.17)$$

avec

$$\phi^{(r)}(\dot{\epsilon}^p, \dot{\beta}) = \begin{cases} \phi_1^{(r)}(\dot{\epsilon}^p, \dot{\beta}) = \sigma_y^{(r)} \dot{\epsilon}_{eq}^p + \frac{3}{4} \frac{a^{(r)}}{\gamma^{(r)}} \frac{(\dot{\epsilon}^p - \dot{\beta})_{eq}^2}{\dot{\epsilon}_{eq}^p} & \text{si } (\dot{\epsilon}^p - \dot{\beta})_{eq} \leq \dot{\epsilon}_{eq} \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} \sigma_y^{(r)}} \\ \phi_2^{(r)}(\dot{\epsilon}^p, \dot{\beta}) = \sqrt{3 \frac{a^{(r)}}{\gamma^{(r)}} \sigma_y^{(r)}} (\dot{\epsilon}^p - \dot{\beta})_{eq} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.18)$$

et  $\Phi_C$  représente la fonction indicatrice sur l'ensemble convexe  $\mathcal{C}$  qui est défini par (3.6) et (3.7). On vérifie aisément à l'aide des lois d'évolution  $\mathcal{A}_\alpha = \frac{\partial \phi^{(r)}}{\partial \dot{\alpha}}$  que, si l'on se place sur la

première branche avec la condition  $\dot{\alpha} \neq \mathbf{0}$ , on retrouve les lois d'évolution (5.8)<sub>1,2</sub> du modèle d'Armstrong-Frederick et que de plus on se situe sur la fonction seuil  $F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R) = 0$  avec  $F$  donnée par (5.16).

Si l'on se place sur la seconde branche, on obtient toujours à partir des lois d'évolution  $\mathcal{A}_\alpha = \frac{\partial \phi^{(r)}}{\partial \dot{\alpha}}$  que

$$\boldsymbol{\sigma}_d = \mathbf{X} = \frac{2}{3} \sqrt{3 \frac{a^{(r)}}{\gamma^{(r)}} \sigma_y^{(r)}} \frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dot{\boldsymbol{\beta}}}{\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dot{\boldsymbol{\beta}}\right)_{eq}} \quad \text{pour } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \neq \dot{\boldsymbol{\beta}}. \quad (5.19)$$

Ces points correspondent aux points singuliers de la fonction seuil  $F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R) = 0$  (cf. Bouby et al. [16]). Ils sont représentés par les points rouges sur la figure 5.1.

Enfin, si l'on se place dans le cas de la première branche mais avec  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}$  ( $\dot{\alpha} = 0$ ), alors  $\mathcal{A}_\alpha \in \partial_{\dot{\alpha}} \phi_1(\dot{\alpha} = 0)$ , où cette dernière notation représente le sous différentiel de  $\phi_1$  par rapport à  $\dot{\alpha}$  pris en  $\dot{\alpha} = 0$ . Bouby et al. [16] ont montré que ce sous différentiel correspond au domaine élastique  $F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R) \leq 0$  donné par (5.16).

### Modèle de Chaboche modifié [25]

Dans son modèle, Chaboche [25] (voir aussi Germain et al. [36]) a considéré l'énergie libre (5.1). On note que dans l'ouvrage de Lemaitre et Chaboche [61][62] ce modèle a été développé dans le cas général de l'élasto-viscoplasticité avec des érouissages cinématique non linéaire et isotrope combinés. Afin d'approcher le modèle d'Armstrong-Frederick dans le cadre des matériaux dont le comportement dérive de deux potentiels, Chaboche [25] (voir aussi Lemaitre et Chaboche [61]) a modifié l'expression de la fonction de charge  $F$  définie par (5.3) de la façon suivante

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})_{eq} - \sigma_y^{(r)} - R^{(r)}(p) + \frac{1}{2} \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} \left( \mathbf{X} : \mathbf{X} - (a^{(r)})^2 \boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\beta} \right), \quad (5.20)$$

de sorte à retrouver la règle d'écoulement (5.8) à partir de cette fonction. L'expression (5.20) a été formulée en retranchant  $(a^{(r)})^2 \boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\beta}$  au potentiel plastique (5.7). La fonction seuil du modèle de Chaboche modifié correspond alors à une fonction des variables "forces",  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\mathbf{X}$  et  $R$  paramétrée par la valeur actuelle de  $\boldsymbol{\beta}$  (décrivant l'état). On notera que la prise en compte de la loi d'état  $\mathbf{X} = a^{(r)} \boldsymbol{\beta}$  (cf. Eq. (5.2)<sub>3</sub>), permet de supprimer le dernier terme de (5.20) et donc de retrouver le critère de plasticité (5.3).

Le modèle de Chaboche modifié est ainsi défini à partir de deux potentiels, l'énergie libre  $w^{(r)}$  donnée par (5.1) et un potentiel de dissipation dual  $\varphi^{*(r)}$  défini à partir de la fonction seuil (5.20) par

$$\varphi^{*(r)}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R, \boldsymbol{\beta}) = \Phi_{\mathcal{C}_F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R, \boldsymbol{\beta}), \quad (5.21)$$



où  $\Phi_{\mathcal{C}_F}$  représente la fonction indicatrice sur l'ensemble convexe  $\mathcal{C}_F$  défini par

$$\Phi_{\mathcal{C}_F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R, \boldsymbol{\beta}) = \begin{cases} 0 & \text{si } (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{C}_F \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.22)$$

avec

$$\mathcal{C}_F = \{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R, \boldsymbol{\beta}) / F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R, \boldsymbol{\beta}) \leq 0\}. \quad (5.23)$$

Le potentiel de dissipation primale  $\varphi^{(r)}$ , dual du potentiel  $\varphi^{*(r)}$ , peut être immédiatement obtenu en observant que la fonction  $F$  du modèle de Chaboche modifié est formellement équivalente à celle du modèle de Ladevèze si l'on remplace le seuil de plasticité parfaite  $\sigma_y^{(r)}$  intervenant dans Ladevèze (5.16) par un seuil de plasticité équivalent  $\tilde{\sigma}_y^{(r)} = \sigma_y^{(r)} + \frac{3}{4} a^{(r)} \gamma^{(r)} \beta_{eq}^2$ , avec  $\boldsymbol{\beta}$  comme paramètre d'état. En effet, avec ce changement de variable, la fonction seuil (5.16) du modèle de Ladevèze se transforme en la fonction seuil (5.20) du modèle de Chaboche modifié, les autres équations des deux modèles (lois d'état et lois d'évolution) étant les mêmes. On obtient alors,

$$\varphi^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \dot{p}, \boldsymbol{\beta}) = \phi^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\beta}) + \Phi_{\mathcal{C}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{p}), \quad (5.24)$$

avec

$$\phi^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\beta}) = \begin{cases} \phi_1^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\beta}) & \text{si } (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dot{\boldsymbol{\beta}})_{eq} \leq \dot{\varepsilon}_{eq} \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} \sigma_y^{(r)} + (\gamma^{(r)})^2 \beta_{eq}^2} \\ \phi_2^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\beta}) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.25)$$

où

$$\begin{aligned} \phi_1^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\beta}) &= \left( \sigma_y^{(r)} + \frac{3 a^{(r)} \gamma^{(r)}}{4} \beta_{eq}^2 \right) \dot{\varepsilon}_{eq}^p + \frac{3 a^{(r)}}{4 \gamma^{(r)}} \frac{(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dot{\boldsymbol{\beta}})_{eq}^2}{\dot{\varepsilon}_{eq}^p} \quad \text{et} \\ \phi_2^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\beta}) &= \sqrt{3 \frac{a^{(r)}}{\gamma^{(r)}} \sigma_y^{(r)} + \frac{9}{4} (a^{(r)})^2 \beta_{eq}^2} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dot{\boldsymbol{\beta}})_{eq}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Dans (5.24),  $\Phi_{\mathcal{C}}$  est la fonction indicatrice sur l'ensemble convexe  $\mathcal{C}$  qui est défini par (3.6) et (3.7).

Comme pour le modèle de Ladevèze, en calculant  $\mathcal{A}_\alpha = \frac{\partial \phi_1}{\partial \dot{\boldsymbol{\alpha}}}$  à partir de la première branche du potentiel de dissipation pour  $\dot{\boldsymbol{\alpha}} \neq 0$ , on retrouve les lois d'évolution associées au modèle d'Armstrong-Frederick et le fait que l'on se trouve sur le modèle de plasticité, c'est à dire  $F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R, \boldsymbol{\beta}) = (\sigma - X)_{eq} - \sigma_y^{(r)} - R^{(r)}(p) = 0$ . Le cas  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}$  correspond au régime élastique  $F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R, \boldsymbol{\beta}) \leq 0$  (voir Bouby et al. [16]).

Dans la seconde branche, les équations d'évolutions  $\mathcal{A}_\alpha = \frac{\partial \phi_2}{\partial \dot{\boldsymbol{\alpha}}}$  conduisent à

$$\boldsymbol{\sigma}_d = \mathbf{X} = \frac{2}{3} \sqrt{3 \frac{a^{(r)}}{\gamma^{(r)}} \sigma_y^{(r)} + \frac{9}{4} (a^{(r)})^2 \beta_{eq}^2} \frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dot{\boldsymbol{\beta}}}{(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dot{\boldsymbol{\beta}})_{eq}} \quad \text{pour } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \neq \dot{\boldsymbol{\beta}}. \quad (5.27)$$

Similairement à Bouby et al. [16], ces points correspondent aux points singuliers de la fonction seuil  $F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R, \boldsymbol{\beta}) = 0$ .

Si l'on se reporte à la figure 5.1 qui représente les domaines d'admissibilité des modèles d'Armstrong-Frederick (5.3), de Chaboche modifié (5.20) et de Ladevèze (5.16), on observe comme on l'a expliqué plus haut que les domaines d'Armstrong-Frederick et celui de Chaboche modifié sont confondus. En effet, en insérant la loi d'état  $\mathbf{X} = a^{(r)} \boldsymbol{\beta}$  dans la fonction de charge (5.20) de Chaboche modifié, on obtient la fonction de charge d'Armstrong-Frederick.

Enfin, il convient de remarquer que l'astuce technique employée et qui consiste à approcher le modèle d'Armstrong-Frederick par celui de Chaboche modifié constitue une modélisation artificielle. En effet, les deux modèles, rappelons le, conduisent aux mêmes lois d'état (5.2), aux mêmes lois d'évolution (5.8) et à la même fonction seuil (5.3). Cette astuce technique vise à recourir aux principes variationnels (1.24) et (1.25) introduit par Lhellec et Suquet [56][57]. En effet, ces derniers ne peuvent être utilisés que pour des matériaux dont le comportement dérive de deux potentiels, ce qui est désormais le cas du modèle de Chaboche modifié.

### Ecriture unifiée des modèles de Chaboche modifié [25] et de Ladevèze [51][52]

Comme on l'a vu, les modèles de Chaboche modifié[25] et de Ladevèze [51] ont réalisé des modifications de la loi d'Armstrong-Frederick pour se placer dans le cadre de matériaux dont le comportement est régi par deux potentiels. L'énergie libre considérée est la même, cf. (5.1). La fonction de charge  $F$  (5.20) pour le modèle de Chaboche modifié et (5.16) pour celui de Ladevèze peuvent s'écrire sous une forme unifiée

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})_{eq} - \sigma_y^{(r)} - R^{(r)}(p) + \frac{1}{2} \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} \mathbf{X} : \mathbf{X} - b^{(r)} \boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\beta}. \quad (5.28)$$

avec

$$\begin{aligned} b^{(r)} &= \frac{1}{2} a^{(r)} \gamma^{(r)} && \text{pour le modèle de Chaboche modifié} \\ b^{(r)} &= 0 && \text{pour le modèle de Ladevèze.} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Du fait que les deux modèles soient développés dans le cadre de matériaux dont le comportement est régi par deux potentiels, on a pu déterminer leur potentiel de dissipation. Comme pour la fonction de charge  $F$ , le potentiel  $\phi^{(r)}$  définissant le potentiel plastique  $\varphi^{(r)}$  (voir Eq. (5.24)) peut aussi s'écrire sous la forme unifiée

$$\phi^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\beta}) = \begin{cases} \phi_1^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\beta}) & \text{si } (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dot{\boldsymbol{\beta}})_{eq} \leq \dot{\varepsilon}_{eq} \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} \sigma_y^{(r)} + 2 \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} b^{(r)} \boldsymbol{\beta}_{eq}^2} \\ \phi_2^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\beta}) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.30)$$

avec

$$\begin{aligned}\phi_1^{(r)}(\dot{\varepsilon}^p, \dot{\beta}, \beta) &= \left( \sigma_y^{(r)} + \frac{3}{2} b^{(r)} \beta_{eq}^2 \right) \dot{\varepsilon}_{eq}^p + \frac{3}{4} \frac{a^{(r)}}{\gamma^{(r)}} \frac{(\dot{\varepsilon}^p - \dot{\beta})_{eq}^2}{\dot{\varepsilon}_{eq}^p} \quad \text{et} \\ \phi_2^{(r)}(\dot{\varepsilon}^p, \dot{\beta}, \beta) &= (\dot{\varepsilon}^p - \dot{\beta})_{eq} \sqrt{3 \frac{a^{(r)}}{\gamma^{(r)}} \sigma_y^{(r)} + \frac{9}{2} \frac{a^{(r)}}{\gamma^{(r)}} b^{(r)} \beta_{eq}^2}.\end{aligned}\tag{5.31}$$

où  $b^{(r)}$  est défini par (5.29) pour les deux modèles.

**Remarque 7.** On remarquera ainsi que la fonction  $\phi^{(r)}$  dépend des variables flux  $\dot{\varepsilon}^p$ ,  $\dot{\beta}$  ainsi que de la variable interne  $\beta$ .

Afin de construire le principe variationnel incrémental associé à la fonction  $\phi^{(r)}$  convexe, on fera l'hypothèse forte que l'on ne considèrera que la première branche  $\phi_1$  lorsque  $\dot{\varepsilon}^p \neq \dot{\beta}$ . Le comportement sur le seuil sera donc décrit uniquement par

$$\mathcal{A}_\alpha = -\frac{\partial w}{\partial \alpha}(\varepsilon, \alpha) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_\alpha = \frac{\partial \phi_1}{\partial \dot{\alpha}}(\dot{\alpha}, \beta) + \partial_{\dot{\alpha}} \Phi_C(\dot{\alpha}),\tag{5.32}$$

lorsque  $F(\sigma, \mathbf{X}, R, \beta) = 0$ .

Pour traiter le régime élastique (charge et décharge élastique) qui correspond au sous différentiel de la branche  $\phi_1$  pris en  $\dot{\alpha} = \mathbf{0}$ , on ne passera pas par le principe variationnel incrémental. On le traitera comme on traite classiquement l'élasticité (cf. partie 3.2.3) à partir de

$$\sigma = \mathbb{L}^{(r)} : (\varepsilon - \varepsilon^p), \quad \text{avec} \quad F(\sigma, \mathbf{X}, R, \beta) < 0.\tag{5.33}$$

Enfin, le fait d'abandonner la branche  $\phi_2$  revient à dire que l'on ne passera pas par les points singuliers ( $\sigma = \mathbf{X}$ ) de la fonction seuil (cf. Fig. 5.1).

## 5.2 Formulation DIV proposée

Dans la suite, nous développons la procédure DIV pour les modèles de Chaboche modifié et de Ladevèze dans le cadre général, puis nous particulariserons les équations finales pour chaque modèle.

### 5.2.1 Comportement local et principes variationnels

#### Comportement local

On considère à nouveau un VER  $\Omega$  d'un matériau composite de  $N$  phases avec  $\Omega^{(r)}$  le domaine de la phase  $r$  ( $r = 1, \dots, N$ ) tel que  $\Omega = \cup_{r=1}^N \Omega^{(r)}$ . Les phases sont supposées correspondre à des

matériaux ayant un comportement local élasto-plastique décrit par la théorie  $J_2$  de la plasticité combinées avec de l'écrouissage cinématique non linéaire et de l'écrouissage isotrope. Ceci correspond à un matériau décrit par deux potentiels convexes associés aux variables internes  $\alpha = (\varepsilon^p, \beta, p)$  décrivant les phénomènes irréversibles, où  $\varepsilon^p$  et  $\beta$  sont des tenseurs d'ordre deux symétriques, à trace nulle, représentant respectivement les déformations plastiques et la variable d'écrouissage cinématique. Comme précédemment (chapitre 3),  $p$  est la déformation plastique cumulée, destinée à décrire l'écrouissage isotrope. Le premier potentiel convexe est l'énergie libre  $w^{(r)}(\varepsilon, \varepsilon^p, \beta, p)$  définie par (5.1). On rappelle que la contrainte  $\sigma$  et les forces thermodynamiques irréversibles  $\mathcal{A}_\alpha = (\mathcal{A}_{\varepsilon^p}, \mathcal{A}_\beta, \mathcal{A}_p)$  associées aux variables internes  $\alpha = (\varepsilon^p, \beta, p)$  sont données par (5.2).

Au vu de la simplification indiquée en fin de section 5.1 et qui consiste à ne retenir que la première branche du potentiel de dissipation, le potentiel de dissipation s'écrit sous la forme

$$\varphi^{(r)}(\dot{\varepsilon}^p, \dot{\beta}, \dot{p}, \beta) = \phi^{(r)}(\dot{\varepsilon}^p, \dot{\beta}, \beta) + \Phi_C(\dot{\varepsilon}^p, \dot{p}), \quad (5.34)$$

avec pour le modèle de Chaboche modifié et le modèle proposé par Ladevèze une écriture unifiée :

$$\phi^{(r)}(\dot{\varepsilon}^p, \dot{\beta}, \beta) = \phi_1^{(r)}(\dot{\varepsilon}^p, \dot{\beta}, \beta) \quad \text{si} \quad (\dot{\varepsilon}^p - \dot{\beta})_{eq} \leq \dot{\varepsilon}_{eq} \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} \sigma_y^{(r)} + 2 \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} b^{(r)} \beta_{eq}^2}, \quad (5.35)$$

où

$$\phi_1^{(r)}(\dot{\varepsilon}^p, \dot{\beta}, \beta) = \left( \sigma_y^{(r)} + \frac{3}{2} b^{(r)} \beta_{eq}^2 \right) \dot{\varepsilon}_{eq}^p + \frac{3}{4} \frac{a^{(r)}}{\gamma^{(r)}} \frac{(\dot{\varepsilon}^p - \dot{\beta})_{eq}^2}{\dot{\varepsilon}_{eq}^p}, \quad (5.36)$$

avec  $\gamma^{(r)}$  une constante caractérisant l'écrouissage non linéaire et où la fonction  $\Phi_C$  (3.6) représente la fonction indicatrice sur l'ensemble convexe  $\mathcal{C}$  (3.7).

### Changement de variables

Afin de simplifier la présentation des calculs, on introduit le changement de variable suivant

$$\nu = \beta - \varepsilon^p. \quad (5.37)$$

Les variables internes du composite sont alors  $\alpha = (\varepsilon^p, \nu, p)$ . On peut réécrire la fonction de charge

$$F(\sigma, \mathbf{X}, R, \varepsilon^p, \nu) = (\sigma - X)_{eq} - \sigma_y^{(r)} - R^{(r)}(p) + \frac{1}{2} \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} \mathbf{X} : \mathbf{X} - b^{(r)} (\nu + \varepsilon^p) : (\nu + \varepsilon^p), \quad (5.38)$$

ainsi que les deux potentiels convexes en tenant compte de ce changement de variable :

— l'énergie libre (5.1) sous la forme

$$w^{(r)}(\varepsilon, \varepsilon^p, \nu, p) = \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon^p) : \mathbb{L}^{(r)} : (\varepsilon - \varepsilon^p) + \frac{1}{2} a^{(r)} (\nu + \varepsilon^p) : (\nu + \varepsilon^p) + \widehat{w}^{(r)}(p). \quad (5.39)$$

— le potentiel de dissipation (5.34) sous la forme

$$\varphi^{(r)}(\dot{\varepsilon}^p, \dot{\nu}, \dot{p}, \varepsilon^p, \nu) = \phi^{(r)}(\dot{\varepsilon}_{eq}^p, \dot{\nu}_{eq}, \varepsilon^p, \nu) + \Phi_C(\dot{\varepsilon}^p, \dot{p}), \quad (5.40)$$

avec

$$\phi^{(r)}(\dot{\varepsilon}_{eq}^p, \dot{\nu}_{eq}, \varepsilon^p, \nu) = \phi_1^{(r)}(\dot{\varepsilon}_{eq}^p, \dot{\nu}_{eq}, \varepsilon^p, \nu) \quad \text{si} \quad \dot{\nu}_{eq} \leq \dot{\varepsilon}_{eq} \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} \sigma_y^{(r)} + 2 \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} b^{(r)} (\varepsilon^p + \nu)_{eq}^2}, \quad (5.41)$$

où

$$\phi_1^{(r)}(\dot{\varepsilon}_{eq}^p, \dot{\nu}_{eq}, \varepsilon^p, \nu) = \left( \sigma_y^{(r)} + \frac{3}{2} b^{(r)} (\nu + \varepsilon^p)_{eq}^2 \right) \dot{\varepsilon}_{eq}^p + \frac{3}{4} \frac{a^{(r)}}{\gamma^{(r)}} \frac{\dot{\nu}_{eq}^2}{\dot{\varepsilon}_{eq}^p}, \quad (5.42)$$

La contrainte  $\sigma$  ainsi que les forces thermodynamiques irréversibles (5.2) peuvent aussi être réécrites sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \frac{\partial w^{(r)}}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \varepsilon^p, \nu, p) = \mathbb{L}^{(r)} : (\varepsilon - \varepsilon^p) \\ \mathbf{A}_\nu = -\frac{\partial w^{(r)}}{\partial \nu}(\varepsilon, \varepsilon^p, \nu, p) = -a^{(r)}(\nu + \varepsilon^p) = -\mathbf{X} \\ \mathbf{A}_{\varepsilon^p} = -\frac{\partial w^{(r)}}{\partial \varepsilon^p}(\varepsilon, \varepsilon^p, \nu, p) = \mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)} : (\varepsilon - \varepsilon^p) - a^{(r)}(\nu + \varepsilon^p) = \sigma_d - \mathbf{X} \\ A_p = -\frac{\partial w^{(r)}}{\partial p}(\varepsilon, \varepsilon^p, \nu, p) = -R^{(r)}(p). \end{array} \right. \quad (5.43)$$

Les lois d'évolution sont données pour  $\alpha = (\varepsilon^p, \nu, p)$  par

$$\mathbf{A}_\alpha = \frac{\partial \varphi^{(r)}}{\partial \dot{\alpha}}(\dot{\alpha}, \alpha). \quad (5.44)$$

On note que cette équation, présente une petite différence avec celle considérée dans les chapitres précédents et donnée par (3.8). En effet, ici, le potentiel de dissipation ne dépend plus uniquement des variables flux, mais est paramétré par les variables d'état  $\alpha$ .

### Principes variationnels incrémentaux

Du fait de la paramétrisation du potentiel de dissipation par la variable interne  $\alpha$ , nous allons réécrire les équations donnant ces principes variationnels incrémentaux aux échelles locale et globale.

Les équations de comportements ici sont obtenues à partir de (5.43) et (5.44) :

$$\sigma = \frac{\partial w^{(r)}}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \alpha), \quad \frac{\partial w^{(r)}}{\partial \alpha}(\varepsilon, \alpha) + \frac{\partial \varphi^{(r)}}{\partial \dot{\alpha}}(\dot{\alpha}, \alpha) = 0. \quad (5.45)$$

En considérant la même discrétisation de l'intervalle d'étude que celle utilisée dans la partie 1.2.2, les équations (5.45) au temps  $t_{n+1}$ , pour un schéma d'Euler implicite, se réécrivent sous la forme

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial w^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}), \quad \frac{\partial w^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) + \frac{\partial \varphi^{(r)}}{\partial \dot{\boldsymbol{\alpha}}} \left( \frac{\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_n}{\Delta t}, \boldsymbol{\alpha} \right) = 0. \quad (5.46)$$

Si maintenant, on définit le problème variationnel suivant

$$w_{\Delta}(\underline{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \inf_{\boldsymbol{\alpha}} J(\underline{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}), \quad (5.47)$$

avec

$$\begin{cases} J(\underline{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{r=1}^N J^{(r)}(\underline{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) \chi^{(r)}(\underline{\boldsymbol{x}}) & \text{et} \\ J^{(r)}(\underline{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) = w^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) + \Delta t \varphi^{(r)} \left( \frac{\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_n}{\Delta t}, \boldsymbol{\alpha}_n \right), \end{cases} \quad (5.48)$$

alors les équations d'Euler-Lagrange, qui fournissent la solution de ce problème variationnel, sont les suivantes :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial w^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}), \quad \frac{\partial w^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) + \frac{\partial \varphi^{(r)}}{\partial \dot{\boldsymbol{\alpha}}} \left( \frac{\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_n}{\Delta t}, \boldsymbol{\alpha}_n \right) = 0. \quad (5.49)$$

**Hypothèse 1.** On considère ainsi, pour toute la suite de ce chapitre, que la résolution des équations (5.46) sera approchée par celle des équations (5.49).

Comme auparavant, le champ  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , solution du problème local (1.23) où  $w_{\Delta}$  est désormais défini par (5.47), est solution du principe variationnel incrémental macroscopique suivant

$$\tilde{w}_{\Delta}(\mathbf{E}) = \inf_{\boldsymbol{\varepsilon}/\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}} \langle w_{\Delta}(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle = \inf_{\boldsymbol{\varepsilon}/\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}} \left\langle \inf_{\boldsymbol{\alpha}} J(\underline{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) \right\rangle, \quad (5.50)$$

avec  $J$  défini par (5.48). Du fait de la stationnarité de  $J$  par rapport à  $\boldsymbol{\alpha}$ , on obtient, similairement à la section 1.2.2, l'expression suivante de la contrainte locale

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial w_{\Delta}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}). \quad (5.51)$$

D'après cette relation et le lemme de Hill, en reprenant la démonstration de Lahellec et Suquet [57] (voir aussi sous section 1.2.2), on obtient le comportement macroscopique du composite non linéaire ayant une matrice obéissant à la règle d'écroutissage cinématique non linéaire

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial \tilde{w}_{\Delta}}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}). \quad (5.52)$$

### 5.2.2 Linéarisation du comportement local

On est en mesure de procéder à présent à la linéarisation du comportement local décrit par (5.48). A cette fin, on introduit un potentiel incrémental linéarisé  $J_L$  dans lequel on approche le potentiel de dissipation  $\varphi^{(r)}$  par une fonction quadratique de  $\underline{\varepsilon}^p$  et  $\underline{\nu}$  et dépendant de viscosités  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$  et  $\eta_{\nu}^{(r)}$  uniformes dans la phase  $r$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} J_L(\underline{x}, \underline{\varepsilon}, \underline{\varepsilon}^p, \underline{\nu}, \{\eta\}) = \sum_{r=1}^N J_L^{(r)}(\underline{x}, \underline{\varepsilon}, \underline{\varepsilon}^p, \underline{\nu}, \eta^{(r)}) \chi^{(r)}(\underline{x}) \quad \text{avec} \\ J_L^{(r)}(\underline{x}, \underline{\varepsilon}, \underline{\varepsilon}^p, \underline{\nu}, \eta^{(r)}) = w^{(r)}(\underline{\varepsilon}, \underline{\varepsilon}^p, \underline{\nu}, p) - \widehat{w}^{(r)}(p) + \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} (\underline{\varepsilon}^p - \underline{\varepsilon}_n^p) : (\underline{\varepsilon}^p - \underline{\varepsilon}_n^p) \\ \quad + \frac{\eta_{\nu}^{(r)}}{\Delta t} (\underline{\nu} - \underline{\nu}_n) : (\underline{\nu} - \underline{\nu}_n), \end{array} \right. \quad (5.53)$$

où  $\{\eta\} = \{\eta_{\varepsilon^p}\} \cup \{\eta_{\nu}\}$  avec  $\{\eta_{\varepsilon^p}\}$  et  $\{\eta_{\nu}\}$  représentant respectivement les ensembles  $\{\eta_{\varepsilon^p}^{(1)}, \dots, \eta_{\varepsilon^p}^{(N)}\}$  et  $\{\eta_{\nu}^{(1)}, \dots, \eta_{\nu}^{(N)}\}$  et  $\eta^{(r)} = (\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}, \eta_{\nu}^{(r)})$ . On remarquera que  $J_L^{(r)}$  ne dépend pas de la déformation plastique cumulée  $p$  en raison de la définition (5.1) de  $w^{(r)}$  retenue.

#### Forme générale de l'approximation du potentiel incrémental condensé effectif

En reprenant l'idée de la section 3.2.1, qui consiste à soustraire et additionner le potentiel  $J_L$  au potentiel  $J$ , on obtient en nous appuyant sur la définition (5.48) de  $J$  et sur l'expression (5.40) de  $\varphi^{(r)}$

$$J^{(r)}(\underline{x}, \underline{\varepsilon}, \underline{\varepsilon}^p, \underline{\nu}, p) = J_L^{(r)}(\underline{x}, \underline{\varepsilon}, \underline{\varepsilon}^p, \underline{\nu}, \eta^{(r)}) + \Delta J^{(r)}(\underline{x}, \underline{\varepsilon}^p, \underline{\nu}, p, \eta^{(r)}), \quad (5.54)$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta J^{(r)}(\underline{x}, \underline{\varepsilon}^p, \underline{\nu}, p, \eta^{(r)}) = & \Delta t \varphi^{(r)} \left( \frac{\underline{\varepsilon}^p - \underline{\varepsilon}_n^p}{\Delta t}, \frac{\underline{\nu} - \underline{\nu}_n}{\Delta t}, \frac{p - p_n}{\Delta t}, (\underline{\varepsilon}_n^p + \underline{\nu}_n)_{eq} \right) + \widehat{w}^{(r)}(p) \\ & - \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} (\underline{\varepsilon}^p - \underline{\varepsilon}_n^p) : (\underline{\varepsilon}^p - \underline{\varepsilon}_n^p) - \frac{\eta_{\nu}^{(r)}}{\Delta t} (\underline{\nu} - \underline{\nu}_n) : (\underline{\nu} - \underline{\nu}_n). \end{aligned} \quad (5.55)$$

L'expression (5.55) a été obtenu en tenant compte du fait, qu'en raison de la définition (5.48) de  $J^{(r)}$ , la fonction  $\varphi^{(r)}$  doit être évaluée en  $(\underline{\dot{\alpha}}, \underline{\alpha}_n)$  et non en  $(\underline{\dot{\alpha}}, \underline{\alpha})$ , d'où le terme  $(\underline{\varepsilon}_n^p + \underline{\nu}_n)_{eq}$  qui apparaît dans (5.55).

**Hypothèse 2.** *A partir de maintenant et dans toute la suite du chapitre, afin d'obtenir un modèle analytique, nous faisons l'hypothèse suivante qu'au sein du potentiel de dissipation  $\varphi^{(r)}$ , la variable  $(\underline{\varepsilon}_n^p + \underline{\nu}_n)_{eq}$  soit approchée par*

$$(\underline{\varepsilon}_n^p + \underline{\nu}_n)_{eq} \approx \overline{\overline{\underline{\varepsilon}_n^p + \underline{\nu}_n}}^{(r)}. \quad (5.56)$$

Au vu de 5.40, ceci implique que le potentiel  $\varphi^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\nu}}, \dot{p}, \boldsymbol{\varepsilon}_n^p, \boldsymbol{\nu}_n) \equiv \varphi^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\nu}}, \dot{p})$  car  $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \boldsymbol{\nu}_n}^{(r)}$  est connu du pas précédent. Par conséquent,  $\Delta J^{(r)}$  (5.55) se réécrit sous la forme

$$\begin{aligned} \Delta J^{(r)}(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\nu}, p, \eta^{(r)}) &= \Delta t \varphi^{(r)}\left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p}{\Delta t}, \frac{\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_n}{\Delta t}, \frac{p - p_n}{\Delta t}\right) + \hat{w}^{(r)}(p) \\ &\quad - \frac{\eta_{\boldsymbol{\varepsilon}^p}^{(r)}}{\Delta t} (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) : (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) - \frac{\eta_{\boldsymbol{\nu}}^{(r)}}{\Delta t} (\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_n) : (\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_n). \end{aligned} \quad (5.57)$$

En reportant la décomposition (5.54) de  $J$  dans la formulation variationnelle (5.50), et en notant que les minimisations par rapport à  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ ,  $\boldsymbol{\nu}$  et  $p$  dans (5.50) peuvent être réalisées séparément, ce qui implique que la condition d'infimum peut être placée en dehors de la moyenne, on obtient alors

$$\tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) = \inf_{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}} \left\{ \inf_{(\boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\nu}, p)} \langle J_L(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\nu}, \{\eta\}) + \Delta J(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\nu}, p, \{\eta\}) \rangle \right\}, \quad (5.58)$$

où  $J_L$  et  $\Delta J$  sont respectivement données par les équation (5.53) et (5.57). Dans la définition (5.40) du potentiel de dissipation  $\varphi^{(r)}$ , on observe, grâce à l'équation (3.6), que  $\Phi_c(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{p}) = +\infty$  lorsque  $g(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{p}) > 0$ . De plus comme on l'a vu dans la partie 5.1.3, on ne considère que la première branche  $\phi_1^{(r)}$  du potentiel de dissipation  $\varphi^{(r)}$  (Eqs. (5.40) et (5.41)). Cette première branche est associée à une condition d'inégalité  $h^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\nu}}) \leq 0$ , où la fonction  $h^{(r)}$  s'exprime sous la forme

$$h^{(r)}\left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p}{\Delta t}, \frac{\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_n}{\Delta t}\right) = \dot{\nu}_{eq} - \dot{\varepsilon}_{eq} \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} \sigma_y^{(r)} + 2 \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} b^{(r)} \left(\overline{\boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \boldsymbol{\nu}_n}^{(r)}\right)^2} \leq 0. \quad (5.59)$$

En conséquence, la condition d'infimum par rapport aux variables  $(\boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\nu}, p)$  dans l'équation (5.58) est obtenue sous les contraintes d'inégalité  $g\left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p}{\Delta t}, \frac{p - p_n}{\Delta t}\right) \leq 0$  et  $h^{(r)}\left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p}{\Delta t}, \frac{\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_n}{\Delta t}\right) \leq 0$ , où  $g$  et  $h^{(r)}$  sont respectivement définies par les équations (3.7) et (5.59).

On introduit alors la fonction

$$\begin{aligned} \Delta J_{bis}(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\nu}, p, \{\eta\}) &= \sum_{r=1}^N \Delta J_{bis}^{(r)}(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\nu}, p, \eta^{(r)}) \chi^{(r)}(\underline{x}) \quad \text{avec} \\ \Delta J_{bis}^{(r)}(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\nu}, p, \eta^{(r)}) &= \Delta t \phi_1^{(r)}\left(\left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p}{\Delta t}\right)_{eq}, \left(\frac{\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_n}{\Delta t}\right)_{eq}\right) + \hat{w}^{(r)}\left(p_n + \frac{p - p_n}{\Delta t} \Delta t\right) \\ &\quad - \frac{\eta_{\boldsymbol{\varepsilon}^p}^{(r)}}{\Delta t} (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) : (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) - \frac{\eta_{\boldsymbol{\nu}}^{(r)}}{\Delta t} (\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_n) : (\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_n), \end{aligned} \quad (5.60)$$

et

$$\phi_1^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^p, \dot{\nu}_{eq}) = \left(\sigma_y^{(r)} + \frac{3}{2} b^{(r)} \left(\overline{\boldsymbol{\nu}_n + \boldsymbol{\varepsilon}_n^p}\right)^2\right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^p + \frac{3}{4} \frac{a^{(r)}}{\gamma^{(r)}} \frac{\dot{\nu}_{eq}^2}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^p}, \quad (5.61)$$



de sorte que

$$\tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) = \inf_{\langle \varepsilon \rangle = \mathbf{E}} \left\{ \inf_{(\varepsilon^p, \nu, p)} \left/ \begin{array}{l} h^{(r)}\left(\frac{\varepsilon^p - \varepsilon_n^p}{\Delta t}, \frac{\nu - \nu_n}{\Delta t}\right) \leq 0 \\ g\left(\frac{\varepsilon^p - \varepsilon_n^p}{\Delta t}, \frac{p - p_n}{\Delta t}\right) \leq 0 \end{array} \right. \langle J_L(\cdot, \varepsilon, \varepsilon^p, \nu, \{\eta\}) + \Delta J_{bis}(\cdot, \varepsilon^p, \nu, p, \{\eta\}) \rangle \right\}. \quad (5.62)$$

On remarquera que le terme  $\left(\overline{\nu_n + \varepsilon_n^p}\right)^2$  dans (5.61) provient de l'hypothèse 2.

Comme on l'a expliqué dans la partie 3.2.1, en faisant appel aux travaux de Lahellec et Suquet [57],  $\tilde{w}_\Delta$  peut être estimé en prenant une conditions de suprémum sur  $\Delta J_{bis}$  par rapport à  $\varepsilon^p$ ,  $\nu$  et  $p$  sous les contraintes  $h^{(r)} \leq 0$  et  $g \leq 0$  (voir Eq. (5.63)).

De plus, à partir de (5.60), on observe que  $\Delta J_{bis}$  peut s'exprimer en fonction de  $\dot{\varepsilon}^p$ ,  $\dot{\nu}$  et  $\dot{p}$ . Il s'en suit que le potentiel  $\tilde{w}_\Delta$  est estimé par

$$\begin{aligned} \tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) &\approx \tilde{w}_\Delta^{VAR}(\mathbf{E}, \{\eta\}) \\ &= \inf_{\langle \varepsilon \rangle = \mathbf{E}} \left\{ \left\langle \begin{array}{l} \inf_{(\varepsilon^p, \nu, p)} \left/ \begin{array}{l} h_1^{(r)}(\varepsilon^p, \nu) \leq 0 \\ g_1(\varepsilon^p, p) \leq 0 \end{array} \right. \langle J_L(\cdot, \varepsilon, \varepsilon^p, \nu, \{\eta\}) \rangle + \\ \sup_{(\dot{\varepsilon}^p, \dot{\nu}, \dot{p})} \left/ \begin{array}{l} h^{(r)}(\dot{\varepsilon}^p, \dot{\nu}) \leq 0 \\ g(\dot{\varepsilon}^p, \dot{p}) \leq 0 \end{array} \right. \Delta J_{bis}(\cdot, \dot{\varepsilon}^p, \dot{\nu}, \dot{p}, \{\eta\}) \end{array} \right\rangle \right\}, \quad (5.63) \end{aligned}$$

où  $h_1^{(r)}$  et  $g_1$  sont respectivement des réécritures des fonctions  $h^{(r)}$  et  $g$  en formulation totale et s'expriment sous la forme

$$\begin{aligned} h_1^{(r)}(\varepsilon^p, \nu) &= (\nu - \nu_n) : (\nu - \nu_n) - (\varepsilon^p - \varepsilon_n^p) : (\varepsilon^p - \varepsilon_n^p) \left( \frac{4}{3} \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} \sigma_y^{(r)} + 2 \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} b^{(r)} \left( \overline{\varepsilon_n^p + \nu_n}^{(r)} \right)^2 \right) \\ g_1(\varepsilon^p, p) &= (\varepsilon^p - \varepsilon_n^p) : (\varepsilon^p - \varepsilon_n^p) - \frac{3}{2} (p - p_n)^2. \end{aligned} \quad (5.64)$$

**Remarque 8.** Du fait de l'hypothèse 2 on remarquera que, la condition de suprémum considérée sur  $\tilde{w}_\Delta$  ne représente plus une borne supérieure de ce potentiel comme c'était le cas dans la partie 3.2.1.

Comme au chapitre 3, Lahellec et Suquet [56, 57] ont montré que la condition de suprémum peut être trop raide dans certains cas. Afin de relaxer cette condition, la condition de suprémum peut être remplacée par une condition de stationnarité. On obtient alors une estimation de  $\tilde{w}_\Delta$  de

la forme

$$\begin{aligned} \tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) &\approx \tilde{w}_\Delta^{VAR}(\mathbf{E}, \{\eta\}) \\ &= \inf_{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}} \left\{ \begin{array}{l} \inf_{\substack{(\boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\nu}, p) / h_1^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\nu}) \leq 0 \\ g_1(\boldsymbol{\varepsilon}^p, p) \leq 0}} \langle J_L(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\nu}, \{\eta\}) \rangle + \\ \left\langle \begin{array}{l} \text{stat} \\ (\boldsymbol{\varepsilon}^p, \dot{\boldsymbol{\nu}}, \dot{p}) / h^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}^p, \dot{\boldsymbol{\nu}}) \leq 0 \\ g(\boldsymbol{\varepsilon}^p, \dot{p}) \leq 0 \end{array} \Delta J_{bis}(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \dot{\boldsymbol{\nu}}, \dot{p}, \{\eta\}) \right\rangle \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Enfin, une dernière optimisation en fonction de l'ensemble  $\{\eta\}$  est considérée. Cette dernière conduit à l'estimation finale de la formulation DIV de  $\tilde{w}_\Delta$  qui est définie comme

$$\tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) \approx \tilde{w}_\Delta^{DIV}(\mathbf{E}) = \text{stat}_{\{\eta\}} \tilde{w}_\Delta^{VAR}(\mathbf{E}, \{\eta\}). \quad (5.66)$$

### Conditions de stationnarité

Dans cette section, nous allons développer toutes les conditions de stationnarité apparaissant dans les expressions (5.65) et (5.66). Tout d'abord, nous calculerons la stationnarité de  $\Delta J_{bis}$  en fonction de  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ ,  $\dot{\boldsymbol{\nu}}$  et  $\dot{p}$  ce qui nous donnera une expression des viscosités  $\eta_{\boldsymbol{\varepsilon}^p}^{(r)}$  et  $\eta_{\dot{\boldsymbol{\nu}}}^{(r)}$ . Ensuite, nous considérerons la stationnarité de  $\tilde{w}_\Delta$  en fonction des viscosités  $\eta_{\boldsymbol{\varepsilon}^p}^{(r)}$  et  $\eta_{\dot{\boldsymbol{\nu}}}^{(r)}$  qui conduira à une égalité entre  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p{}^{(r)}$  (resp.  $\hat{\dot{\boldsymbol{\nu}}}^{(r)}$ ), la valeur de  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  (resp.  $\dot{\boldsymbol{\nu}}$ ) calculé à la stationnarité de  $\Delta J_{bis}$ , et  $\overline{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}{}^{(r)}$  (resp.  $\overline{\hat{\dot{\boldsymbol{\nu}}}}^{(r)}$ ), le moment d'ordre deux de  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  (resp.  $\dot{\boldsymbol{\nu}}$ ) sur la phase  $r$ . Enfin, la stationnarité de  $J_L$  par rapport à  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ ,  $\boldsymbol{\nu}$  et  $p$  fournira une expression des champs  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  et  $\boldsymbol{\nu}$  qui dépendront linéairement de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Ceci fournira également une interprétation des modules visqueux  $\eta_{\boldsymbol{\varepsilon}^p}^{(r)}$  et  $\eta_{\dot{\boldsymbol{\nu}}}^{(r)}$  en tant que modules visqueux sécants modifiés associés à la procédure variationnelle.

#### Stationnarité de $\Delta J_{bis}$

La stationnarité de  $\Delta J_{bis}$  au point  $\underline{x}$  par rapport à  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ ,  $\dot{\boldsymbol{\nu}}$  et  $\dot{p}$  sous les contraintes  $h^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}^p, \dot{\boldsymbol{\nu}}) \leq 0$  et  $g(\boldsymbol{\varepsilon}^p, \dot{p}) \leq 0$  est déterminée en appliquant les conditions d'optimalité de KKT

$$\begin{cases} \partial \Delta J_{bis} + \lambda_1 \partial g + \lambda_2 \partial h^{(r)} = 0 \\ \lambda_1 g = 0 \\ \lambda_2 h^{(r)} = 0 \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, g \leq 0, h^{(r)} \leq 0, \end{cases} \quad (5.67)$$

où  $\partial$  représente la variation par rapport à  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ ,  $\dot{\boldsymbol{\nu}}$  et  $\dot{p}$ . En considérant les définitions (3.7), (5.59) et

(5.60), on obtient pour tout  $\underline{x}$  dans la phase  $r$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta t \frac{\partial \phi_1^{(r)}}{\partial \dot{\varepsilon}_{eq}^p} (\dot{\varepsilon}_{eq}^p, \dot{\nu}_{eq}) - 3 \Delta t \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \dot{\varepsilon}_{eq}^p + \lambda_1 - \lambda_2 \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} \sigma_y^{(r)} + 2 \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} b^{(r)} \left( \frac{\varepsilon_n^p + \nu_n}{\varepsilon_n^p + \nu_n} \right)^2} = 0 \\ \Delta t \frac{\partial \phi_1^{(r)}}{\partial \dot{\nu}_{eq}} (\dot{\varepsilon}_{eq}^p, \dot{\nu}_{eq}) - 3 \Delta t \eta_{\nu}^{(r)} \dot{\nu}_{eq} + \lambda_2 = 0 \\ \Delta t R^{(r)}(p_n + \Delta t \dot{p}) - \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 (\dot{\varepsilon}_{eq}^p - \dot{p}) = 0 \\ \lambda_2 \left( \dot{\nu}_{eq} - \dot{\varepsilon}_{eq}^p \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} \sigma_y^{(r)} + 2 \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} b^{(r)} \left( \frac{\varepsilon_n^p + \nu_n}{\varepsilon_n^p + \nu_n} \right)^2} \right) = 0 \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, g \leq 0, h \leq 0. \end{array} \right. \quad (5.68)$$

Dans ce système,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\dot{\varepsilon}^p$ ,  $\dot{\nu}$  et  $\dot{p}$  sont des champs inconnus qui dépendent de la position  $\underline{x}$  dans la phase  $r$ . Or,  $\phi_1^{(r)}$  et  $R^{(r)}$  gardent la même expression en chaque point  $\underline{x}$  de la phase  $r$ . Au vu de notre définition de  $J_L^{(r)}$ , les modules visqueux  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$  et  $\eta_{\nu}^{(r)}$  sont uniformes par phase. De plus, si on suppose que  $p_n$  est uniforme dans la phase  $r$ , alors la solution du système (5.68) est uniforme par phase. Enfin, au début du chargement,  $p_0$  est uniformément égale à zéro. On montre alors par récurrence, en considérant l'égalité  $p = p_n + \Delta t \dot{p}$ , que tous les champs sont uniformes par phase. En particulier,  $\dot{\varepsilon}_{eq}^p$  (resp.  $\dot{\nu}_{eq}$ ) sera noté  $\widehat{\varepsilon}^p$  (resp.  $\widehat{\nu}$ ),  $p \equiv p^{(r)}$ ,  $p_n \equiv p_n^{(r)}$ ,  $\lambda_1 \equiv \lambda_1^{(r)}$  et  $\lambda_2 \equiv \lambda_2^{(r)}$ .

On doit maintenant étudier les quatre cas possibles pour les deux multiplicateurs de Lagrange :

**Cas 1 et 2 :**  $\lambda_1^{(r)} = 0$  et  $\lambda_2^{(r)} \geq 0$ . D'après (5.68)<sub>3</sub>, cette hypothèse conduit à  $R^{(r)}(p) = 0$ , ce qui n'a pas de sens physique lorsque l'on considère de l'érouissage isotrope. Ce cas ne sera donc pas pris en compte.

**Cas 3 :**  $\lambda_1^{(r)} > 0$  et  $\lambda_2^{(r)} > 0$ . L'hypothèse  $\lambda_1^{(r)} > 0$  conduit directement d'après (5.68)<sub>3</sub> à

$$\lambda_1^{(r)} = \Delta t R^{(r)}(p). \quad (5.69)$$

D'après (5.68)<sub>5</sub>,  $\lambda_2^{(r)} > 0$  implique

$$\widehat{\nu}^{(r)} = \widehat{\varepsilon}^p \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} \sigma_y^{(r)} + 2 \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} b^{(r)} \left( \frac{\varepsilon_n^p + \nu_n}{\varepsilon_n^p + \nu_n} \right)^2}. \quad (5.70)$$

En considérant l'expression (5.61) de  $\phi_1^{(r)}$ , et en remplaçant  $\dot{\nu}_{eq}$  par (5.70) dans l'équation (5.68)<sub>1</sub>, on obtient

$$\lambda_2^{(r)} = \frac{\Delta t R^{(r)}(p) - 3 \Delta t \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \widehat{\varepsilon}^p{}^{(r)}}{\sqrt{\frac{4}{3} \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} \sigma_y^{(r)} + 2 \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} b^{(r)} \left( \frac{\nu_n + \varepsilon_n^p}{\varepsilon_n^p + \nu_n} \right)^2}}. \quad (5.71)$$

On note que le dénominateur de l'équation (5.71) est toujours strictement positif. Le signe de  $\lambda_2^{(r)}$  est donc le même que celui du numérateur de (5.71). Or, dans une situation où il n'y a pas d'écoulement isotrope ( $R^{(r)}(p) = 0$ ) cette équation impliquerait que  $\lambda_2^{(r)} < 0$  ce qui n'est pas acceptable dans ce cas particulier. Dans le cas des deux écoulements combinés, la positivité de  $\lambda_2^{(r)}$  impliquerait que  $R^{(r)}(p) > 3 \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \widehat{\varepsilon}^p{}^{(r)}$ . Or cette égalité semble difficile à réaliser en tout début d'écoulement lorsque  $R^{(r)}(p)$  est très proche de zéro. Ces deux arguments nous amènent à faire le choix de ne pas étudier le cas  $\lambda_2^{(r)} > 0$ .

**Cas 4 :**  $\lambda_1^{(r)} > 0$  et  $\lambda_2^{(r)} = 0$ . D'après (5.68)<sub>4</sub>, la première hypothèse conduit à  $\widehat{\varepsilon}^p{}^{(r)} - \dot{p}^{(r)} = 0$ . En combinant cette égalité avec les équations (5.68)<sub>1</sub>, (5.68)<sub>3</sub> et (5.61), on obtient une expression du module visqueux  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$  de la forme

$$\begin{aligned} \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} &= \frac{1}{3 \widehat{\varepsilon}^p{}^{(r)}} \left[ \frac{\partial \phi_1^{(r)}}{\partial \widehat{\varepsilon}^p{}^{(r)}} \left( \widehat{\varepsilon}^p{}^{(r)}, \widehat{\nu}^{(r)} \right) + R^{(r)} \left( p_n^{(r)} + \Delta t \widehat{\varepsilon}^p{}^{(r)} \right) \right] \\ &= \frac{\sigma_y^{(r)} + R^{(r)} \left( p_n^{(r)} + \Delta t \widehat{\varepsilon}^p{}^{(r)} \right) - \frac{3 a^{(r)}}{4 \gamma^{(r)}} \left( \frac{\widehat{\nu}^{(r)}}{\widehat{\varepsilon}^p{}^{(r)}} \right)^2 + \frac{3}{2} b^{(r)} \left( \frac{\nu_n + \varepsilon_n^p}{\varepsilon_n^p + \nu_n} \right)^2}{3 \widehat{\varepsilon}^p{}^{(r)}}, \end{aligned} \quad (5.72)$$

et en considérant les équations (5.68)<sub>2</sub> et (5.61), on déduit une expression du module visqueux  $\eta_\nu^{(r)}$  de la forme

$$\eta_\nu^{(r)} = \frac{1}{3 \widehat{\nu}^{(r)}} \frac{\partial \phi_1^{(r)}}{\partial \widehat{\nu}^{(r)}} \left( \widehat{\varepsilon}^p{}^{(r)}, \widehat{\nu}^{(r)} \right) = \frac{a^{(r)}}{2 \gamma^{(r)} \widehat{\varepsilon}^p{}^{(r)}}. \quad (5.73)$$

D'après (5.72) et (5.73) il est possible de calculer  $\Delta J_{bis}$  sous la condition de stationnarité. En effet, on observe dans (5.72) (resp. (5.73)) que le module visqueux  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$  (resp.  $\eta_\nu^{(r)}$ ) est une fonction dépendant de  $\widehat{\varepsilon}^p{}^{(r)}$  et  $\widehat{\nu}^{(r)}$  (resp.  $\widehat{\varepsilon}^p{}^{(r)}$ ). En inversant ces relations, il vient aisément

$$\begin{aligned} \widehat{\varepsilon}^p{}^{(r)} &= \frac{a^{(r)}}{2 \gamma^{(r)} \eta_\nu^{(r)}} \\ \widehat{\nu}^{(r)} &= \sqrt{\frac{a^{(r)}}{3 \gamma^{(r)}} \frac{1}{\eta_\nu^{(r)}}} \sqrt{\sigma_y^{(r)} + R^{(r)} \left( p_n^{(r)} + \frac{a^{(r)} \Delta t}{2 \gamma^{(r)} \eta_\nu^{(r)}} \right) + \frac{3}{2} b^{(r)} \left( \frac{\nu_n + \varepsilon_n^p}{\varepsilon_n^p + \nu_n} \right)^2 - \frac{3 a^{(r)}}{2 \gamma^{(r)}} \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\eta_\nu^{(r)}}} \end{aligned} \quad (5.74)$$

Ainsi,  $\widehat{\varepsilon}^p$  et  $\widehat{\nu}$  sont respectivement des fonctions de  $\eta_\nu^{(r)}$ , et de  $\eta^{(r)} = (\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}, \eta_\nu^{(r)})$ , d'où  $\widehat{\varepsilon}^p = \widehat{\varepsilon}^p(\eta_\nu^{(r)})$  et  $\widehat{\nu} = \widehat{\nu}(\eta^{(r)})$ . On a alors

$$\left\langle \frac{\text{stat}}{(\widehat{\varepsilon}^p, \widehat{\nu}, \widehat{p})} \Big/ \frac{h^{(r)}(\widehat{\varepsilon}^p, \widehat{\nu}) \leq 0}{g(\widehat{\varepsilon}^p, \widehat{p}) \leq 0} \Delta J_{bis}(\cdot, \widehat{\varepsilon}^p, \widehat{\nu}, \widehat{p}, \{\eta\}) \right\rangle = \Delta t \sum_{r=1}^N c^{(r)} f^{(r)}(\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}, \eta_\nu^{(r)}) \quad \text{avec}$$

$$f^{(r)}(\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}, \eta_\nu^{(r)}) = \left( \sigma_y^{(r)} + \frac{3}{2} b^{(r)} \left( \overline{\nu_n + \varepsilon_n^p}^{(r)} \right)^2 \right) \widehat{\varepsilon}^p(\eta_\nu^{(r)}) + \frac{3}{4} \frac{a^{(r)} \left( \widehat{\nu}(\eta^{(r)}) \right)^2}{\gamma^{(r)} \widehat{\varepsilon}^p(\eta_\nu^{(r)})} \quad (5.75)$$

$$+ \frac{\widehat{w}^{(r)}}{\Delta t} \left( p_n^{(r)} + \Delta t \widehat{\varepsilon}^p(\eta_\nu^{(r)}) \right) - \frac{3}{2} \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \left( \widehat{\varepsilon}^p(\eta_\nu^{(r)}) \right)^2 - \frac{3}{2} \eta_\nu^{(r)} \left( \widehat{\nu}(\eta^{(r)}) \right)^2.$$

Cette expression sera utile pour l'équation (5.96) à venir.

### Stationnarité de $\tilde{w}_\Delta^{VAR}$ en fonction de $\eta^{(r)}$

En faisant appel aux équations (5.53), (5.60) et (5.65), la condition de stationnarité de  $\tilde{w}_\Delta^{VAR}$  en fonction de  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$  s'écrit

$$\left\langle \frac{(\varepsilon^p - \varepsilon_n^p) : (\varepsilon^p - \varepsilon_n^p)}{\Delta t} \right\rangle^{(r)} - \frac{3}{2} \Delta t \left( \widehat{\varepsilon}^p \right)^2$$

$$+ \left[ \frac{\partial \phi_1^{(r)}}{\partial \widehat{\varepsilon}^p} \left( \widehat{\varepsilon}^p, \widehat{\nu} \right) + R^{(r)} \left( p_n^{(r)} + \Delta t \widehat{\varepsilon}^p \right) - 3 \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \widehat{\varepsilon}^p \right] \Delta t \frac{\partial \widehat{\varepsilon}^p}{\partial \eta_{\varepsilon^p}^{(r)}} \left( \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \right) = 0. \quad (5.76)$$

En reportant l'expression (5.72) de  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$  dans (5.76), le dernier terme de cette dernière s'annule. Il s'en suit :

$$\widehat{\varepsilon}^p = \overline{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \langle \dot{\varepsilon}^p : \dot{\varepsilon}^p \rangle^{(r)}}. \quad (5.77)$$

De même, la condition de stationnarité de  $\tilde{w}_\Delta^{VAR}$  par rapport à  $\eta_\nu^{(r)}$  s'écrit

$$\left\langle \frac{(\nu - \nu_n) : (\nu - \nu_n)}{\Delta t} \right\rangle^{(r)} - \frac{3}{2} \Delta t \left( \widehat{\nu} \right)^2$$

$$+ \left[ \frac{\partial \phi_1^{(r)}}{\partial \widehat{\nu}} \left( \widehat{\varepsilon}^p, \widehat{\nu} \right) - 3 \eta_\nu^{(r)} \widehat{\nu} \right] \Delta t \frac{\partial \widehat{\nu}}{\partial \eta_\nu^{(r)}} \left( \eta_\nu^{(r)} \right) = 0. \quad (5.78)$$

En reportant l'expression (5.73) de  $\eta_\nu^{(r)}$  dans l'équation (5.78), on obtient

$$\widehat{\nu} = \overline{\nu} = \sqrt{\frac{2}{3} \langle \dot{\nu} : \dot{\nu} \rangle^{(r)}}. \quad (5.79)$$

Les équations (5.72) et (5.73) se réécrivent alors

$$\eta_{\varepsilon^p}^{(r)} = \frac{\sigma_y^{(r)} + R^{(r)} \left( p_n^{(r)} + \Delta t \overline{\dot{\varepsilon}}^p \right) - \frac{3a^{(r)}}{4\gamma^{(r)}} \left( \frac{\overline{\nu}^{(r)}}{\overline{\dot{\varepsilon}}^p} \right)^2 + \frac{3}{2} b^{(r)} \left( \overline{\nu}_n + \varepsilon_n^p \right)^2}{3 \overline{\dot{\varepsilon}}^p} \quad (5.80)$$

$$\eta_{\nu}^{(r)} = \frac{a^{(r)}}{2\gamma^{(r)} \overline{\dot{\varepsilon}}^p},$$

avec

$$p^{(r)} = p_n^{(r)} + \Delta t \overline{\dot{\varepsilon}}^p. \quad (5.81)$$

### Stationnarité de $\langle J_L \rangle$ en fonction de $\varepsilon^p$ , $\nu$ et $p$

Comme dans la partie 3.2.1 pour la stationnarité de  $\langle J_L \rangle$  en fonction de  $\varepsilon^p$  et  $p$ , les contraintes  $h_1^{(r)}(\varepsilon^p, \nu)$  et  $g_1(\varepsilon^p, p)$ , avec  $h_1^{(r)}$  et  $g_1$  définies par les équations (5.64), doivent être satisfaites  $\forall \underline{x} \in \Omega^{(r)}$  car  $\varepsilon_n^p$ ,  $\nu_n$  et  $p_n$  sont des champs hétérogènes. Comme au chapitre 3, afin de contourner cette difficulté, les contraintes  $h_1^{(r)}$  et  $g_1$  sont relaxées par des conditions de contraintes sur chaque phase, i.e.  $\langle h_1^{(r)} \rangle^{(r)} \leq 0$  et  $\langle g_1 \rangle^{(r)} \leq 0 \forall r \in \{1, \dots, N\}$ . La stationnarité de  $\langle J_L \rangle$  en fonction de  $\varepsilon^p$ ,  $\nu$  et  $p$  sous ces nouvelles contraintes est calculée en faisant appel aux conditions d'optimalité de KKT. Elle s'écrit (cf. annexe B)

$$\forall r \in \{1, \dots, N\} \begin{cases} \partial J_L^{(r)}(\underline{x}) + \lambda_1^{(r)} \partial g_1(\underline{x}) + \lambda_2^{(r)} \partial h_1^{(r)}(\underline{x}) = 0 & \forall \underline{x} \in \Omega^{(r)} \\ \lambda_1^{(r)} \langle g_1 \rangle^{(r)} = 0 \\ \lambda_2^{(r)} \langle h_1^{(r)} \rangle^{(r)} = 0 \\ \lambda_1^{(r)} \geq 0, \lambda_2^{(r)} \geq 0, \langle g_1 \rangle^{(r)} \leq 0, \langle h_1^{(r)} \rangle^{(r)} \leq 0, \end{cases} \quad (5.82)$$

où  $\lambda_1^{(r)}$ ,  $\lambda_2^{(r)}$  sont  $2N$  scalaires et  $\partial$  représente la variation par rapport à  $\varepsilon^p$ ,  $\nu$  et  $p$ . En considérant

les équations (5.39), (5.53), (5.64) et (5.82), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + a^{(r)}(\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\varepsilon}^p) + 2 \frac{\eta_{\boldsymbol{\varepsilon}^p}^{(r)}}{\Delta t} (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) + 2 \lambda_1^{(r)} (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) \\ - 2 \lambda_2^{(r)} (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) \left( \frac{4}{3} \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} \sigma_y^{(r)} + 2 \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} b^{(r)} \left( \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \boldsymbol{\nu}_n}}^{(r)} \right)^2 \right) = 0 \\ a^{(r)}(\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\varepsilon}^p) + 2 \frac{\eta_{\boldsymbol{\nu}}^{(r)}}{\Delta t} (\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_n) + 2 \lambda_2^{(r)} (\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_n) = 0 \\ - 3 \lambda_1^{(r)} (p - p_n) = 0 \\ \lambda_1^{(r)} \left\langle (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) : (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) - \frac{3}{2} (p - p_n)^2 \right\rangle^{(r)} = 0 \\ \lambda_2^{(r)} \left\langle (\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_n) : (\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_n) - (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) : (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) \left( \frac{4}{3} \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} \sigma_y^{(r)} + 2 \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} b^{(r)} \left( \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \boldsymbol{\nu}_n}}^{(r)} \right)^2 \right) \right\rangle^{(r)} = 0 \\ \lambda_1^{(r)} \geq 0, \lambda_2^{(r)} \geq 0, \langle g \rangle^{(r)} \leq 0, \langle h \rangle^{(r)} \leq 0. \end{array} \right. \quad (5.83)$$

Afin d'obtenir l'ensemble des équations du modèle, on doit maintenant trouver une relation liant  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  et  $\boldsymbol{\nu}$  à  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . A cette fin, considérons les quatre cas possibles pour les multiplicateurs de Lagrange :

**Cas 1 et 2 :**  $\lambda_1^{(r)} > 0$  et  $\lambda_2^{(r)} \geq 0$ . Sous cette condition, on a d'après l'équation (5.83)<sub>3</sub> l'égalité  $p = p_n$  et  $\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}_n^p}}^{(r)} = 0$  d'après l'équation (5.83)<sub>4</sub>. Ceci implique que  $\boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p$  en chaque point  $\underline{x}$ . Une telle situation correspond au régime élastique. Elle sera traitée plus tard dans la section 5.2.4.

**Cas 3 :**  $\lambda_1^{(r)} = 0$  et  $\lambda_2^{(r)} > 0$ . Montrons que cette condition est impossible. Pour cela nous allons raisonner par l'absurde.

*Démonstration.* Supposons que  $\lambda_2^{(r)} > 0$ , alors d'après (5.83)<sub>5</sub>  $\langle h_1 \rangle^{(r)} = 0$ , et donc

$$\left( \overline{\overline{\boldsymbol{\nu}}}^{(r)} \right)^2 = \left( \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}_n^p}}^{(r)} \right)^2 \left( \frac{4}{3} \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} \sigma_y^{(r)} + 2 \frac{\gamma^{(r)}}{a^{(r)}} b^{(r)} \left( \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \boldsymbol{\nu}_n}}^{(r)} \right)^2 \right). \quad (5.84)$$

Or, en reportant cette expression de  $\overline{\overline{\boldsymbol{\nu}}}^{(r)}$  dans l'expression (5.80)<sub>1</sub> de  $\eta_{\boldsymbol{\varepsilon}^p}^{(r)}$ , dans le cas où le matériau étudié est sans écoulement isotrope, i.e.  $R^{(r)}(p^{(r)}) = 0$ , on obtient directement

$$\eta_{\boldsymbol{\varepsilon}^p}^{(r)} = 0. \quad (5.85)$$

Cette égalité est impossible car la viscosité  $\eta_{\boldsymbol{\varepsilon}^p}^{(r)}$  est forcément strictement positive.

Par conséquent, il ne nous reste qu'à examiner le cas 4 suivant. □

**Cas 4 :**  $\lambda_1^{(r)} = 0$   $\lambda_2^{(r)} = 0$ . Ces deux conditions sur les multiplicateurs de Lagrange permettent de réécrire le système (5.83) sous la forme

$$\begin{cases} -\mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + a^{(r)}(\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\varepsilon}^p) + 2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) = 0 \\ a^{(r)}(\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\varepsilon}^p) + 2 \frac{\eta_{\nu}^{(r)}}{\Delta t} (\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_n) = 0. \end{cases} \quad (5.86)$$

L'équation (5.86) est un système à deux équations pour deux inconnues  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  et  $\boldsymbol{\nu}$ . En résolvant ce système, on obtient alors l'expression de ces deux inconnues qui s'expriment sous la forme

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \left[ \mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)} + \left( 2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} + a_{NL}^{(r)} \right) \mathbb{K} \right]^{-1} : \left[ \mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)} : \boldsymbol{\varepsilon} + 2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_n^p - a_{NL}^{(r)} \boldsymbol{\nu}_n \right], \quad (5.87)$$

et

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nu} = & - \frac{a_{NL}^{(r)} \Delta t}{2 \eta_{\nu}^{(r)}} \left[ \mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)} + \left( 2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} + a_{NL}^{(r)} \right) \mathbb{K} \right]^{-1} : \\ & \left[ \mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)} : \boldsymbol{\varepsilon} + 2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_n^p - 2 \frac{\eta_{\nu}^{(r)}}{\Delta t a^{(r)}} \left( \left( 2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} + a^{(r)} \right) \mathbb{K} + \mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)} \right) : \boldsymbol{\nu}_n \right], \end{aligned} \quad (5.88)$$

avec

$$a_{NL}^{(r)} = \frac{2 \frac{\eta_{\nu}^{(r)}}{\Delta t} a^{(r)}}{2 \frac{\eta_{\nu}^{(r)}}{\Delta t} + a^{(r)}}. \quad (5.89)$$

En partant de (5.43)<sub>2</sub> et (5.43)<sub>3</sub>, l'équation (5.86) peut se réécrire sous la forme

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_d - \mathbf{X} = 2 \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \\ -\mathbf{X} = 2 \eta_{\nu}^{(r)} \dot{\boldsymbol{\nu}}. \end{cases} \quad (5.90)$$

Comme le montre (5.90), les viscosités  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$  et  $\eta_{\nu}^{(r)}$  (données par (5.80)) peuvent être interprétées comme des modules visqueux sécants modifiés associés au comportement élasto-plastique avec des écoulements cinématique non linéaire et isotrope combinés et dépendant des seconds moments  $\overline{\overline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}}^{(r)}$  et  $\overline{\overline{\dot{\boldsymbol{\nu}}}}^{(r)}$ . On déduit alors des équations (5.80) et (5.90) que

$$\begin{cases} \overline{\overline{\sigma - \mathbf{X}}}^{(r)} = \sigma_y^{(r)} + R^{(r)}(p^{(r)}) - \frac{3 a^{(r)}}{4 \gamma^{(r)}} \left( \frac{\overline{\overline{\dot{\boldsymbol{\nu}}}}^{(r)}}{\overline{\overline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}}^{(r)}} \right)^2 + \frac{3}{2} b^{(r)} \left( \frac{\overline{\overline{\boldsymbol{\nu}_n + \boldsymbol{\varepsilon}_n^p}}^{(r)}}{\overline{\overline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}}^{(r)}} \right)^2 \\ \overline{\overline{\mathbf{X}}}^{(r)} = \frac{a^{(r)} \overline{\overline{\dot{\boldsymbol{\nu}}}}^{(r)}}{2 \gamma^{(r)} \overline{\overline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}}^{(r)}}. \end{cases} \quad (5.91)$$



En isolant  $\overline{\nu}^{(r)}/\overline{\varepsilon^p}^{(r)}$  dans (5.91)<sub>2</sub> et en le reportant dans (5.91)<sub>1</sub>, on obtient

$$\overline{\sigma - X}^{(r)} = \sigma_y^{(r)} + R^{(r)}(p^{(r)}) - \frac{\gamma^{(r)}}{3a^{(r)}} \left( \overline{X}^{(r)} \right)^2 + \frac{3}{2} b^{(r)} \left( \overline{\nu_n + \varepsilon_n^p}^{(r)} \right)^2. \quad (5.92)$$

Ainsi, le critère de plasticité d'un comportement local élasto-plastique (5.28) pour la formulation DIV est approché par les second moments des champs locaux. En effet, les contraintes locales  $(\sigma - X)_{eq}$  et  $X_{eq}$  sont approximées par  $\overline{\sigma - X}^{(r)}$  et  $\overline{X}^{(r)}$ , le paramètre  $\beta_{eq} = (\varepsilon^p + \nu)_{eq}$  est approché par  $\overline{\varepsilon_n^p + \nu_n}^{(r)}$  (en résultat des hypothèses 1 et 2) et la déformation plastique cumulée  $p$  est approchée par  $p^{(r)}$  dont l'évolution est donnée par le second moment du taux de déformation plastique  $\overline{\dot{\varepsilon}^p}^{(r)}$  (cf. Eq. (5.81)).

### Détermination du MLC à polarisation hétérogène intraphase

En reportant les expressions (5.87) et (5.88) de  $\varepsilon^p$  et  $\nu$  dans la définition (5.53) de  $J_L$ , on obtient un MLC thermo-élastique défini par l'énergie libre  $w_L^{(r)}$  donnée par

$$w_L^{(r)}(\underline{x}, \varepsilon, \eta^{(r)}) = \inf_{\varepsilon^p, \nu} J_L^{(r)}(\underline{x}, \varepsilon, \varepsilon^p, \nu, \eta^{(r)}) = \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbb{L}_L^{(r)} : \varepsilon + \boldsymbol{\tau}_L^{(r)}(\underline{x}) : \varepsilon + \frac{1}{2} f_L^{(r)}(\underline{x}), \quad (5.93)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{L}_L^{(r)} = \mathbb{L}^{(r)} - [\mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)}] : \left[ \mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)} + \left( 2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} + a_{NL}^{(r)} \right) \mathbb{K} \right]^{-1} : [\mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)}] \\ \boldsymbol{\tau}_L^{(r)}(\underline{x}) = - [\mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)}] : \left[ \mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)} + \left( 2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} + a_{NL}^{(r)} \right) \mathbb{K} \right]^{-1} : \left[ 2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_n^p(\underline{x}) - a_{NL}^{(r)} \boldsymbol{\nu}_n(\underline{x}) \right] \\ f_L^{(r)}(\underline{x}) = \left[ \mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)} + \left( 2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} + a_{NL}^{(r)} \right) \mathbb{K} \right]^{-1} : \\ \left[ \begin{array}{l} 2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_n^p(\underline{x}) : \left( \mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)} + a_{NL}^{(r)} \mathbb{K} \right) : \boldsymbol{\varepsilon}_n^p(\underline{x}) + a_{NL}^{(r)} \boldsymbol{\nu}_n(\underline{x}) : \left( \mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)} + 2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} \mathbb{K} \right) : \boldsymbol{\nu}_n(\underline{x}) \\ + 4 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} a_{NL}^{(r)} \boldsymbol{\varepsilon}_n^p(\underline{x}) : \mathbb{K} : \boldsymbol{\nu}_n(\underline{x}) \end{array} \right]. \end{array} \right. \quad (5.94)$$

Une telle énergie correspond à un MLC à polarisation hétérogène intraphase. La polarisation  $\boldsymbol{\tau}_L^{(r)}$  et le champ scalaire  $f_L^{(r)}$  dépendent de  $\underline{x}$  à travers les champs  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p(\underline{x})$  et  $\boldsymbol{\nu}_n(\underline{x})$ . L'énergie libre effective de ce MLC est définie par

$$\tilde{w}_L(\mathbf{E}, \{\eta\}) = \inf_{\{\varepsilon\}=\mathbf{E}} \langle w_L(\cdot, \varepsilon, \{\eta\}) \rangle. \quad (5.95)$$

A partir des équations (5.65), (5.66) et (5.75), il s'en suit

$$\tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) \approx \tilde{w}_\Delta^{DIV}(\mathbf{E}) = \text{stat}_{\{\eta\}} \tilde{w}_\Delta^{VAR}(\mathbf{E}, \{\eta\}) = \tilde{w}_L(\mathbf{E}, \{\eta\}) + \Delta t \sum_{r=1}^N c^{(r)} f^{(r)}(\eta^{(r)}), \quad (5.96)$$

avec  $f^{(r)}$  défini par l'équation (5.75)<sub>2</sub>. En prenant en compte les conditions de stationnarité par rapport aux viscosités  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$  et  $\eta_\nu^{(r)}$ , on obtient

$$\Sigma = \frac{\partial \tilde{w}_\Delta}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}) \approx \frac{\partial \tilde{w}_\Delta^{DIV}}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}) = \frac{\partial \tilde{w}_L}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}), \quad (5.97)$$

où  $\tilde{w}_L(\mathbf{E})$  représente la valeur de  $\tilde{w}_L(\mathbf{E}, \{\eta\})$  calculée pour l'ensemble  $\{\eta\}$  optimal.

### 5.2.3 Homogénéisation du MLC à polarisation hétérogène intraphase

L'objectif de cette partie est d'homogénéiser le MLC  $w_L$  à polarisation hétérogène intraphase  $\tau_L^{(r)}(\underline{x})$  développé dans la partie précédente. La procédure générale suivie est strictement identique à celle réalisée dans la partie 3.2.2. Elle permet d'aboutir au comportement effectif donnée à l'équation (3.46).

#### Composites élasto-plastiques à phases isotropes

Comme nous l'avons considéré dans les chapitres précédents, on suppose que les phases constituantes du composite décrites dans la partie 5.2.1 sont isotropes. De plus, on considère aussi que les tenseurs d'élasticités  $\mathbb{L}_0^{(r)}$  du MLC à propriétés homogènes par phase sont isotropes. On a alors

$$\mathbb{L}^{(r)} = 3k^{(r)}\mathbb{J} + 2\mu^{(r)}\mathbb{K}, \quad \mathbb{L}_0^{(r)} = 3k_0^{(r)}\mathbb{J} + 2\mu_0^{(r)}\mathbb{K}. \quad (5.98)$$

Dans l'expression (5.94)<sub>2</sub> de  $\tau_L^{(r)}(\underline{x})$ , on observe que la polarisation dépend des champs  $\varepsilon_n^p$  et  $\nu_n$  qui sont purement déviatoriques. La forme de l'expression (5.94)<sub>2</sub> montre que  $\tau_L^{(r)}(\underline{x})$  est aussi déviatorique. De plus, d'après la remarque 4, en supposant à nouveau  $\tau_0^{(r)}$  déviatorique, le tenseur  $\Delta\mathbb{L}^{(r)} : \varepsilon_0$  est aussi purement déviatorique, d'où  $k_L^{(r)} = k_0^{(r)}$ . De même, (5.94)<sub>1</sub> montre que  $k_L^{(r)} = k^{(r)}$ , d'où

$$k^{(r)} = k_L^{(r)} = k_0^{(r)}. \quad (5.99)$$

Sous ces conditions, (5.94) se réécrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{L}_L^{(r)} = 3k_L^{(r)}\mathbb{J} + 2\mu_L^{(r)}\mathbb{K} = 3k^{(r)}\mathbb{J} + 2\mu^{(r)} \frac{2\frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} + a_{NL}^{(r)}}{2\mu^{(r)} + 2\frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} + a_{NL}^{(r)}} \mathbb{K} \\ \boldsymbol{\tau}_L^{(r)}(\underline{x}) = -2\mu^{(r)} \frac{2\frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_n^p(\underline{x}) - a_{NL}^{(r)} \boldsymbol{\nu}_n(\underline{x})}{2\mu^{(r)} + 2\frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} + a_{NL}^{(r)}} \\ f_L^{(r)}(\underline{x}) = \frac{2\frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} \left(2\mu^{(r)} + a_{NL}^{(r)}\right) \boldsymbol{\varepsilon}_n^p : \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + a_{NL}^{(r)} \left(2\mu^{(r)} + 2\frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t}\right) \boldsymbol{\nu}_n : \boldsymbol{\nu}_n + 4a_{NL}^{(r)} \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_n^p : \boldsymbol{\nu}_n}{2\mu^{(r)} + 2\frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} + a_{NL}^{(r)}}. \end{array} \right. \quad (5.100)$$

De la même façon, (5.87) et (5.88) s'écrivent

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = A^{(r)} \boldsymbol{\varepsilon}_d + B^{(r)} \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + C^{(r)} \boldsymbol{\nu}_n \quad \text{avec} \\ A^{(r)} = \frac{2\mu^{(r)}}{2\mu^{(r)} + 2\frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} + a_{NL}^{(r)}}, \quad B^{(r)} = \frac{2\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}/\Delta t}{2\mu^{(r)} + 2\frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} + a_{NL}^{(r)}}, \quad C^{(r)} = \frac{-a_{NL}^{(r)}}{2\mu^{(r)} + 2\frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} + a_{NL}^{(r)}}, \quad (5.101)$$

et

$$\boldsymbol{\nu} = P^{(r)} \boldsymbol{\varepsilon}_d + Q^{(r)} \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + R^{(r)} \boldsymbol{\nu}_n \quad \text{avec} \\ P^{(r)} = -\frac{a_{NL}^{(r)} \Delta t}{2\eta_{\nu}^{(r)}} \frac{2\mu^{(r)}}{2\mu^{(r)} + 2\frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} + a_{NL}^{(r)}}, \quad Q^{(r)} = -\frac{a_{NL}^{(r)} \Delta t}{2\eta_{\nu}^{(r)}} \frac{2\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}/\Delta t}{2\mu^{(r)} + 2\frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} + a_{NL}^{(r)}}, \quad (5.102) \\ R^{(r)} = \frac{a_{NL}^{(r)}}{a^{(r)}} \frac{2\mu^{(r)} + 2\frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} + a_{NL}^{(r)}}{2\mu^{(r)} + 2\frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} + a_{NL}^{(r)}},$$

où  $\boldsymbol{\varepsilon}_d$  représente la partie déviatorique de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Afin de déterminer complètement les expressions (5.100)<sub>1,2</sub> des paramètres  $\mathbb{L}_L^{(r)}$  et  $\boldsymbol{\tau}_L^{(r)}$ , il est nécessaire de connaître les expressions des viscosités  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$  et  $\eta_{\nu}^{(r)}$ . Pour cela, il convient de déterminer  $\overline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}^{(r)}$  et  $\overline{\dot{\boldsymbol{\nu}}}^{(r)}$  (cf. (5.80)). En rappelant que  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p}{\Delta t}$  et  $\dot{\boldsymbol{\nu}} = \frac{\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_n}{\Delta t}$ , on obtient à partir de (5.101)

$$(\Delta t)^2 \left( \overline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}^{(r)} \right)^2 = (A^{(r)})^2 \left( \overline{\boldsymbol{\varepsilon}_d}^{(r)} \right)^2 + (B^{(r)} - 1)^2 \left( \overline{\boldsymbol{\varepsilon}_n^p}^{(r)} \right)^2 + (C^{(r)})^2 \left( \overline{\boldsymbol{\nu}_n}^{(r)} \right)^2 + \\ \frac{4}{3} A^{(r)} (B^{(r)} - 1) \langle \boldsymbol{\varepsilon}_d : \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \rangle^{(r)} + \frac{4}{3} A^{(r)} C^{(r)} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_d : \boldsymbol{\nu}_n \rangle^{(r)} + \frac{4}{3} C^{(r)} (B^{(r)} - 1) \langle \boldsymbol{\varepsilon}_n^p : \boldsymbol{\nu}_n \rangle^{(r)}, \quad (5.103)$$

et de (5.102)

$$\begin{aligned}
 (\Delta t)^2 \left( \overline{\dot{\nu}}^{(r)} \right)^2 &= (P^{(r)})^2 \left( \overline{\varepsilon_d}^{(r)} \right)^2 + (Q^{(r)})^2 \left( \overline{\varepsilon_n^p}^{(r)} \right)^2 + (R^{(r)} - 1)^2 \left( \overline{\nu_n}^{(r)} \right)^2 + \\
 &\frac{4}{3} P^{(r)} Q^{(r)} \langle \varepsilon_d : \varepsilon_n^p \rangle^{(r)} + \frac{4}{3} P^{(r)} (R^{(r)} - 1) \langle \varepsilon_d : \nu_n \rangle^{(r)} + \frac{4}{3} Q^{(r)} (R^{(r)} - 1) \langle \varepsilon_n^p : \nu_n \rangle^{(r)}.
 \end{aligned} \tag{5.104}$$

Les équations (5.103) et (5.104) nécessitent de connaître  $\langle \varepsilon_d : \varepsilon_n^p \rangle^{(r)}$  et  $\langle \varepsilon_d : \nu_n \rangle^{(r)}$ . Commençons tout d'abord par calculer  $\langle \varepsilon_d : \varepsilon_n^p \rangle^{(r)}$ . Pour ce faire, nous partons de

$$\begin{aligned}
 \sigma_d &= \mathbb{K} : \frac{\partial w_L^{(r)}}{\partial \varepsilon}(\varepsilon) = 2 \mu_L^{(r)} \varepsilon_d + \tau_L^{(r)} = 2 \mu_L^{(r)} \varepsilon_d - \delta_L^{(r)} \varepsilon_n^p + \zeta_L^{(r)} \nu_n \quad \text{avec} \\
 \delta_L^{(r)} &= 2 \mu^{(r)} \frac{2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t}}{2 \mu^{(r)} + 2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} + a_{NL}^{(r)}} \quad \text{et} \quad \zeta_L^{(r)} = 2 \mu^{(r)} \frac{a_{NL}^{(r)}}{2 \mu^{(r)} + 2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} + a_{NL}^{(r)}},
 \end{aligned} \tag{5.105}$$

Il est alors possible d'isoler  $\langle \varepsilon_d : \varepsilon_n^p \rangle^{(r)}$ , de telle sorte que

$$\langle \varepsilon_d : \varepsilon_n^p \rangle^{(r)} = \frac{1}{6 \mu_L^{(r)} \delta_L^{(r)}} \left\{ \begin{aligned} &\left( 3 \mu_L^{(r)} \right)^2 \left( \overline{\varepsilon_d}^{(r)} \right)^2 + \left( \frac{3}{2} \delta_L^{(r)} \right)^2 \left( \overline{\varepsilon_n^p}^{(r)} \right)^2 + \left( \frac{3}{2} \zeta_L^{(r)} \right)^2 \left( \overline{\nu_n}^{(r)} \right)^2 \\ &+ 6 \mu_L^{(r)} \zeta_L^{(r)} \langle \varepsilon_d : \nu_n \rangle^{(r)} - 3 \delta_L^{(r)} \zeta_L^{(r)} \langle \varepsilon_n^p : \nu_n \rangle^{(r)} - \left( \overline{\sigma_d}^{(r)} \right)^2 \end{aligned} \right\}. \tag{5.106}$$

Comme nous l'avons précisé plus haut, les second moments  $\overline{\varepsilon_d}^{(r)}$  et  $\overline{\sigma_d}^{(r)}$  sont approchés par  $\overline{\varepsilon_{0,d}}^{(r)}$  et  $\overline{\sigma_{0,d}}^{(r)}$ . Ces derniers sont obtenus respectivement par les équations (2.63) et (2.65).

Intéressons nous maintenant à la détermination  $\langle \varepsilon_d : \nu_n \rangle^{(r)}$ . Pour cela, deux pistes ont été explorées.

La première piste consiste à approximer  $\langle \varepsilon_d : \nu_n \rangle^{(r)}$ . Nous avons approché son expression par

$$\langle \varepsilon_d : \nu_n \rangle^{(r)} \approx \langle \varepsilon_{n,d} : \nu_n \rangle^{(r)}. \tag{5.107}$$

Cette approximation a permis d'obtenir des résultats numériques. Néanmoins, dans certains cas l'algorithme ne convergeait pas et de meilleurs résultats ont été obtenus en considérant une seconde piste.

Celle-ci consiste à supposer que les fluctuations de  $\dot{\nu}$  sont nulles dans la phase  $r$ , i.e.

$$C^{(r)}(\dot{\nu}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \overline{\dot{\nu}_{eq}}^{(r)} = \overline{\dot{\nu}}^{(r)}, \tag{5.108}$$

avec  $\overline{\dot{\nu}_{eq}}^{(r)} = \sqrt{\frac{2}{3} \overline{\dot{\nu}^{(r)} : \dot{\nu}^{(r)}}$ . En reportant (5.102), (5.104) et (5.106) dans (5.108), il est possible

d'isoler  $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_d : \boldsymbol{\nu}_n \rangle^{(r)}$  de telle sorte que

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}_d : \boldsymbol{\nu}_n \rangle^{(r)} = \frac{1}{\frac{4}{3}P^{(r)} \left( R^{(r)} - 1 + Q^{(r)} \frac{\zeta_L^{(r)}}{\delta_L^{(r)}} \right)} \times \left\{ \begin{aligned} & (P^{(r)})^2 \left( (\overline{\boldsymbol{\varepsilon}_{d,eq}}^{(r)})^2 - (\overline{\boldsymbol{\varepsilon}_d}^{(r)})^2 \right) + (Q^{(r)})^2 \left( (\overline{\boldsymbol{\varepsilon}_{n,eq}^p}^{(r)})^2 - (\overline{\boldsymbol{\varepsilon}_n^p}^{(r)})^2 \right) \\ & + (R^{(r)} - 1)^2 \left( (\overline{\boldsymbol{\nu}_{n,eq}}^{(r)})^2 - (\overline{\boldsymbol{\nu}_n}^{(r)})^2 \right) + \frac{4}{3}Q^{(r)} (R^{(r)} - 1) \left( \overline{\boldsymbol{\varepsilon}_n^p}^{(r)} : \overline{\boldsymbol{\nu}_n}^{(r)} - \langle \boldsymbol{\varepsilon}_n^p : \boldsymbol{\nu}_n \rangle^{(r)} \right) \\ & + \frac{4}{3}P^{(r)} (R^{(r)} - 1) \overline{\boldsymbol{\varepsilon}_d}^{(r)} : \overline{\boldsymbol{\nu}_n}^{(r)} + \frac{4}{3}P^{(r)}Q^{(r)} \overline{\boldsymbol{\varepsilon}_d}^{(r)} : \overline{\boldsymbol{\varepsilon}_n^p}^{(r)} \\ & - \frac{2}{9} \frac{P^{(r)}Q^{(r)}}{\mu_L^{(r)} \delta_L^{(r)}} \left[ \left( 3\mu_L^{(r)} \right)^2 (\overline{\boldsymbol{\varepsilon}_d}^{(r)})^2 + \left( \frac{3}{2}\delta_L^{(r)} \right)^2 (\overline{\boldsymbol{\varepsilon}_n^p}^{(r)})^2 + \left( \frac{3}{2}\zeta_L^{(r)} \right)^2 (\overline{\boldsymbol{\nu}_n}^{(r)})^2 \right] \\ & \left[ - 3\delta_L^{(r)}\zeta_L^{(r)} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_n^p : \boldsymbol{\nu}_n \rangle^{(r)} - (\overline{\boldsymbol{\sigma}_d}^{(r)})^2 \right] \end{aligned} \right\}. \quad (5.109)$$

A nouveau, les seconds moments  $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}_d}^{(r)}$  et  $\overline{\boldsymbol{\sigma}_d}^{(r)}$  sont approchés par  $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}_{0,d}}^{(r)}$  et  $\overline{\boldsymbol{\sigma}_{0,d}}^{(r)}$  qui sont obtenus à l'aide des équations (2.63) et (2.65).

## 5.2.4 Application à une matrice élasto-plastique renforcée par des particules élastiques

Dans cette partie, nous allons appliquer la formulation DIV proposée au cas d'un matériau composite biphasé constitué d'une matrice élasto-plastique obéissant à une loi d'écrouissage cinématique non linéaire et isotrope combinés, renforcée par des particules sphériques élastiques linéaires distribuées de manière isotrope. On rappelle que les indices (1) et (2) représentent respectivement la phase inclusionnaire et la phase matricielle.

Les moments d'ordre un sur les phases sont exprimés par les équations (3.56) et (3.57). Les inclusions étant élastiques, l'utilisation des bornes de Hashin et Shtrikman pour calculer les moyennes des champs du MLC  $w_0$  assurent que ces derniers sont uniformes sur la phase inclusionnaire de sorte que  $C^{(1)}(\boldsymbol{\varepsilon}_0) = \mathbf{0}$ . A partir de l'équation (3.45), on retrouve l'égalité de l'équation (2.67)<sup>3</sup>. De plus, en faisant la même hypothèse (2.68) que Lahellec et al. [54], l'équation (3.44) permet de retrouver l'équation (2.69).

3. L'indice  $\Delta$  de la partie 2.2.3 correspond à l'indice  $L$  de cette partie.

### Résumé du système non linéaire

Dans cette partie, nous allons résumer les équations que doit satisfaire la formulation DIV proposée. On rappelle, comme nous l'avons montré dans l'équation (5.99), que les parties sphériques des MLC  $w_L$  et  $w_0$  sont identiques à celles du composite non linéaire.

La phase inclusionnaire est élastique, on a alors  $\overline{\overline{\varepsilon^p}}^{(1)} = 0$  et  $\overline{\overline{\nu}}^{(1)} = 0$ . Ceci implique d'après (5.80) et (5.91)<sub>2</sub> que  $\eta_{\varepsilon^p}^{(1)}$  et  $\eta_{\nu}^{(1)}$  tendent vers  $+\infty$ . L'équation (5.100)<sub>1</sub> couplée à (5.89) conduit alors à l'égalité  $\mu^{(1)} = \mu_L^{(1)}$ . En faisant appel aux équations (2.68) et (2.69), le comportement dans la phase inclusionnaire des MLC  $w_L$  et  $w_0$  est donné par

$$k^{(1)} = k_L^{(1)} = k_0^{(1)}, \quad \mu^{(1)} = \mu_L^{(1)} = \mu_0^{(1)}, \quad \tau_0^{(1)} = \overline{\tau_L}^{(1)} = 0. \quad (5.110)$$

Dans la phase matricielle, les expressions de  $\mu_0^{(2)}$ ,  $\tau_0^{(2)}$ ,  $\mu_L^{(2)}$  et  $\tau_L^{(2)}$  qui caractérisent les MLC  $w_0$  et  $w_L$  sont obtenues de la façon suivante. Le module de cisaillement  $\mu_L^{(2)}$  et la polarisation  $\tau_L^{(2)}$  sont donnés respectivement par les équations (5.100)<sub>1</sub> et (5.100)<sub>2</sub>. L'expression de la polarisation  $\tau_0^{(2)}$  pour des composites à phases isotropes se détermine à partir de (3.44), de telle sorte que

$$\tau_0^{(2)} = \overline{\tau_L}^{(2)} + 2 \left( \mu_L^{(2)} - \mu_0^{(2)} \right) \overline{\varepsilon_{0,d}}^{(2)}. \quad (5.111)$$

De même, en considérant l'équation (3.45) pour des MLC à phases isotropes, on obtient une expression de  $\mu_0^{(2)}$  de la forme

$$\mu_0^{(2)} = \mu_L^{(2)} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\langle \tau_L : \tau_L \rangle^{(2)} - \overline{\tau_L}^{(2)} : \overline{\tau_L}^{(2)}}{\langle \varepsilon_{0,d} : \varepsilon_{0,d} \rangle^{(2)} - \overline{\varepsilon_{0,d}}^{(2)} : \overline{\varepsilon_{0,d}}^{(2)}}}. \quad (5.112)$$

On précise qu'une fois les viscosités  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  et  $\eta_{\nu}^{(2)}$  (ou de manière équivalente les seconds moments  $\overline{\overline{\varepsilon^p}}^{(2)}$  et  $\overline{\overline{\nu}}^{(2)}$  cf. (5.80)) sont connues, le numérateur sous la racine de l'équation (5.112) est aussi connu. En effet,  $\tau_L$  dépend linéairement de  $\varepsilon_n^p$  et de  $\nu_n$  (cf. Eq. (5.100)<sub>2</sub>) dont les premiers et seconds moments sont connus au pas précédent. Pour le dénominateur, le moment d'ordre un  $\overline{\varepsilon_{0,d}}^{(2)}$  est déterminé à partir de (3.56) et (3.57) et le second moment  $\langle \varepsilon_{0,d} : \varepsilon_{0,d} \rangle^{(2)}$  s'obtient par l'équation (2.63).

On note que pour des composites isotropes, ces deux moments dépendent des paramètres  $\mu_0^{(2)}$  et de  $\tau_0^{(2)}$  qui définissent le MLC homogène  $w_0$  dans la phase matricielle. En conséquence, le problème non linéaire à résoudre se résume aux quatre équations (5.80)<sub>1</sub>, (5.80)<sub>2</sub>, (5.111) et (5.112) avec les quatre inconnues  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$ ,  $\eta_{\nu}^{(2)}$ ,  $\tau_0^{(2)}$  et  $\mu_0^{(2)}$ . On observe d'après (5.100) que les expressions de  $\mu_L^{(2)}$  et  $\tau_L^{(2)}$  dépendent des variables  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  et  $\eta_{\nu}^{(2)}$ .

Comme nous l'avons vu plus haut, la détermination de  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  et  $\eta_{\nu}^{(2)}$  revient à déterminer  $\overline{\overline{\varepsilon^p}}^{(2)}$

et  $\overline{\overline{\nu}}^{(2)}$  (cf. Eq. (5.80)). Pour cela, on fait appel aux équations (5.103) et (5.104) qui requièrent de connaître les moyennes  $\langle \varepsilon_d : \varepsilon_n^p \rangle^{(2)}$  et  $\langle \varepsilon_d : \nu_n \rangle^{(2)}$ . Ces dernières sont obtenues à partir des équations (5.106), (5.109) et (2.65) ainsi qu'à partir du calcul des premier et second moments  $\overline{\overline{\varepsilon_{0,d}}}^{(2)}$  et  $\langle \varepsilon_{0,d} : \varepsilon_{0,d} \rangle^{(2)}$  fournis par les équations (3.56), (3.57) et (2.63).

Enfin, en considérant l'expression de  $\mathbb{P}_0^{(2)}$  pour un composite isotrope (cf. Eq. (A.5)) ainsi que les équations (3.56) et (3.57), on observe que  $\overline{\overline{\varepsilon_{0,d}}}^{(2)}$  ne dépend plus de  $\tau_0^{(2)}$  mais seulement de trois paramètres  $\mu_0^{(2)}$ ,  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  et  $\eta_\nu^{(2)}$ . En considérant cette dépendance et en mettant en relation l'équation (5.111) avec les définitions de  $\mu_L^{(2)}$  et  $\tau_L^{(2)}$  exposées dans (5.100), on montre ainsi que la polarisation  $\tau_0^{(2)}$  ne dépend également que de  $\mu_0^{(2)}$ ,  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  et  $\eta_\nu^{(2)}$ .

En conclusion, le problème non linéaire à résoudre défini par les équations (5.80)<sub>1</sub>, (5.80)<sub>2</sub>, (5.111) et (5.112) se réduit à un problème de trois équations (5.80)<sub>1</sub>, (5.80)<sub>2</sub> et (5.112) pour trois inconnues  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$ ,  $\eta_\nu^{(2)}$  et  $\mu_0^{(2)}$  :

$$\begin{cases} F_1(\mu_0^{(2)}, \eta^{(2)}) \equiv (\mu_0^{(2)} - \mu_L^{(2)})^2 - \frac{1}{4} \frac{\langle \tau_L : \tau_L \rangle^{(2)} - \overline{\overline{\tau_L}}^{(2)} : \overline{\overline{\tau_L}}^{(2)}}{\langle \varepsilon_{0,d} : \varepsilon_{0,d} \rangle^{(2)} - \overline{\overline{\varepsilon_{0,d}}}^{(2)} : \overline{\overline{\varepsilon_{0,d}}}^{(2)}} = 0 \\ F_2(\mu_0^{(2)}, \eta^{(2)}) \equiv \eta_{\varepsilon^p}^{(2)} - \frac{\sigma_y^{(2)} + R^{(2)} \left( p_n^{(2)} + \Delta t \overline{\overline{\dot{\varepsilon}^p}}^{(2)} \right) - \frac{3a^{(2)}}{4\gamma^{(2)}} \left( \frac{\overline{\overline{\nu}}^{(2)}}{\overline{\overline{\dot{\varepsilon}^p}}^{(2)}} \right)^2 + \frac{3}{2} b^{(2)} \left( \overline{\overline{\nu_n + \varepsilon_n^p}}^{(2)} \right)^2}{3 \overline{\overline{\dot{\varepsilon}^p}}^{(2)}} = 0 \\ F_3(\mu_0^{(2)}, \eta^{(2)}) \equiv \eta_\nu^{(2)} - \frac{a^{(2)}}{2\gamma^{(2)} \overline{\overline{\dot{\varepsilon}^p}}^{(2)}} = 0. \end{cases} \quad (5.113)$$

### Cas du régime élastique

Dans le cas du régime élastique,  $\varepsilon^p = \varepsilon_n^p$  et  $\nu = \nu_n$ , ce qui implique  $\overline{\overline{\dot{\varepsilon}^p}}^{(2)} = 0$  et  $\overline{\overline{\nu}}^{(2)} = 0$ . Les deux dernières équations du système (5.113) impliquent que  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  et  $\eta_\nu^{(2)}$  tendent vers  $+\infty$ . Le système non linéaire (5.113) se réduit alors à un système à une équation pour une inconnue  $F_1(\mu_0^{(2)}, +\infty) = 0$ . Pour obtenir la valeur des paramètres lors de la charge et la décharge élastique, les limites de  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  et de  $\eta_\nu^{(2)}$  tendant vers  $+\infty$  doivent être prises en compte. A partir de (5.100), on obtient en particulier,  $\mu_L^{(2)} = \mu^{(2)}$  et  $\tau_L^{(r)} = -2\mu^{(2)}\varepsilon_n^p$ . De plus, comme nous l'avons vu dans la partie 5.2.2, le composite se situe dans le régime plastique lorsque l'équation (5.92) est satisfaite dans la phase matricielle. En conséquence, pour vérifier que nous sommes bien dans le régime élastique, le terme en second moment  $\overline{\overline{\sigma_d - X}}^{(2)}$  doit satisfaire l'inégalité suivante

$$\overline{\overline{\sigma_d - X}}^{(2)} \leq \sigma_y^{(2)} + R^{(2)}(p^{(2)}) - \frac{\gamma^{(2)}}{3a^{(2)}} \left( \overline{\overline{X}}^{(2)} \right)^2 + \frac{3}{2} b^{(2)} \left( \overline{\overline{\nu_n + \varepsilon_n^p}}^{(2)} \right)^2, \quad (5.114)$$

qui représente la surface de plasticité pour la matrice dans notre approche. Pour cela, il est nécessaire de calculer les second moments  $\overline{\overline{\sigma_d - \overline{X}}^{(2)}}$ ,  $\overline{\overline{X}}^{(2)}$  et  $\overline{\overline{\nu_n + \varepsilon_n^p}}^{(2)}$ , ce dernier étant connu du pas précédent. Comme nous l'avons vu dans la partie 5.2.3, les premier et second moments des champs locaux dans le composite non linéaire et dans le MLC  $w_L$  sont évalués par leurs équivalents dans le MLC homogène  $w_0$  (cf. Eq. (3.47)). On a alors

$$\overline{\overline{\sigma_d - \overline{X}}^{(2)}} = \sqrt{\left(\overline{\overline{\sigma_d}}^{(2)}\right)^2 + \left(\overline{\overline{X}}^{(2)}\right)^2 - 3 \langle \sigma_d : \mathbf{X} \rangle^{(2)}}, \quad (5.115)$$

où  $\overline{\overline{\sigma_d}}^{(2)}$  est donné par (2.65). De plus, à partir de l'équation (5.43)<sub>2</sub> associée au fait que  $\varepsilon^p = \varepsilon_n^p$  et  $\nu = \nu_n$ , on obtient l'expression de  $\overline{\overline{X}}^{(2)}$  sous la forme  $\overline{\overline{X}}^{(2)} = \frac{3}{2}a^{(2)} \left(\overline{\overline{\varepsilon_n^p + \nu_n}}^{(2)}\right)$ .

Par ailleurs, l'hypothèse que l'on a faite pour obtenir l'expression de  $\langle \varepsilon^p : \nu_n \rangle^{(2)}$ , et qui consiste à considérer les fluctuations de  $\dot{\nu}$  nulles (cf. Eq. (5.108)) conduit, d'après l'équation (5.90)<sub>2</sub>, à

$$\overline{\overline{X_{eq}}}^{(2)} = \overline{\overline{X}}^{(2)}. \quad (5.116)$$

Cette dernière égalité, équivalente à  $C^{(2)}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ , implique que  $X = \overline{\overline{X}}^{(2)}$  est homogène par phase. L'équation (5.115) se réécrit alors sous la forme

$$\overline{\overline{\sigma_d - \overline{X}}^{(2)}} = \sqrt{\left(\overline{\overline{\sigma_d}}^{(2)}\right)^2 + \left(\overline{\overline{X}}^{(2)}\right)^2 - 3 \overline{\overline{\sigma_d}}^{(2)} : \overline{\overline{X}}^{(2)}}, \quad (5.117)$$

avec  $\overline{\overline{X}}^{(2)} = a^{(2)} \left(\overline{\overline{\varepsilon_n^p}}^{(2)} + \overline{\overline{\nu_n}}^{(2)}\right)$  connu du pas précédent et  $\overline{\overline{\sigma_d}}^{(2)} \approx \overline{\overline{\sigma_{0,d}}}^{(2)} = 2\mu_0^{(2)}\overline{\overline{\varepsilon_{0,d}}}^{(2)} + \tau_0^{(2)}$ , où  $\mu_0^{(2)}$  est solution de  $F_1(\mu_0^{(2)}, +\infty) = 0$  et  $\tau_0^{(2)}$  donnée par (5.111).

Toutes les quantités intervenant dans l'inégalité (5.114) sont ainsi déterminées permettant de voir si cette dernière est satisfaite (régime élastique) ou non (régime plastique).

## 5.2.5 Cas particuliers des modèles de Ladevèze et de Chaboche modifié

Dans cette partie, la formulation DIV développée précédemment dans le cadre de matériaux élasto-plastiques avec des écrouissages cinématique non linéaire et isotrope combinés est particularisée aux cas des modèles de Ladevèze [51][52] et de Chaboche modifié [25].

### Cas particulier du modèle proposé par Ladevèze [51][52]

Commençons tout d'abord avec le modèle proposé par Ladevèze [51][52]. Nous avons vu dans la partie 5.1.3 que l'on retrouve la fonction de charge ainsi que le potentiel de dissipation



de ce modèle lorsque le paramètre  $b^{(r)}$  est nul (cf. Eqs. (5.28),(5.29) et (5.30), vois aussi les équations (5.38) (5.40) (5.41) après le changement de variable (5.37)), l'énergie libre, étant quant à elle donnée par (5.39). Or le potentiel de dissipation n'intervient que dans l'expression de  $\Delta J_{bis}$  (cf. Eq. (5.60)). La condition de stationnarité de  $\Delta J_{bis}$  développée dans (5.68) a permis d'obtenir les expressions des viscosités  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$  et  $\eta_\nu^{(r)}$  (cf. Eq. (5.80)). Dans le cas du présent modèle, ces viscosités s'expriment alors sous la forme

$$\eta_{\varepsilon^p}^{(r)} = \frac{\sigma_y^{(r)} + R^{(r)} \left( p_n^{(r)} + \Delta t \overline{\varepsilon^p}^{(r)} \right) - \frac{3 a^{(r)}}{4 \gamma^{(r)}} \left( \frac{\overline{\nu}^{(r)}}{\overline{\varepsilon^p}^{(r)}} \right)^2}{3 \overline{\varepsilon^p}^{(r)}} \quad (5.118)$$

$$\eta_\nu^{(r)} = \frac{a^{(r)}}{2 \gamma^{(r)} \overline{\varepsilon^p}^{(r)}}, \quad \text{avec} \quad p^{(r)} = p_n^{(r)} + \Delta t \overline{\varepsilon^p}^{(r)}.$$

Ces expressions des viscosités permettent aussi de retrouver le critère de plasticité en moments d'ordre deux à partir de l'équation (5.90)<sub>1</sub>. Il s'en suit que (5.92) s'écrit

$$\overline{\overline{\sigma_d - X}}^{(r)} = \sigma_y^{(r)} + R^{(r)} (p^{(r)}) - \frac{\gamma^{(r)}}{3 a^{(r)}} \left( \overline{X}^{(r)} \right)^2, \quad (5.119)$$

qui n'est autre que le critère de plasticité (5.16) appliqué aux moments d'ordre deux des champs. Enfin, le composite se situe dans le régime plastique lorsque l'équation précédente est satisfaite dans la phase matricielle. En conséquence, pour vérifier que nous sommes bien dans le régime élastique, le terme en second moment  $\overline{\overline{\sigma - X}}^{(2)}$  doit satisfaire l'inégalité suivante

$$\overline{\overline{\sigma - X}}^{(2)} \leq \sigma_y^{(2)} + R^{(2)} (p^{(2)}) - \frac{\gamma^{(2)}}{3 a^{(2)}} \left( \overline{X}^{(2)} \right)^2. \quad (5.120)$$

### Cas particulier du modèle de Chaboche modifié [25]

Comme nous l'avons vu dans la partie 5.1.3, on retrouve le modèle de Chaboche modifié lorsque le paramètre  $b^{(r)} = \frac{1}{2} \gamma^{(r)} a^{(r)}$ . On observe dans (5.80) que  $\eta_\nu^{(r)}$  ne dépend pas de la variable  $b^{(r)}$ , donc son expression reste la même qu'en (5.118)<sub>2</sub>. On obtient alors en reportant (5.80)<sub>2</sub> et (5.43)<sub>2</sub> dans (5.90)<sub>2</sub> :

$$\left( \overline{X}^{(r)} \right)^2 = \frac{9}{4} (a^{(r)})^2 \left( \overline{\varepsilon^p + \nu}^{(r)} \right)^2 = \frac{9}{4} \left( \frac{a^{(r)}}{\gamma^{(r)}} \right)^2 \left( \frac{\overline{\nu}^{(r)}}{\overline{\varepsilon^p}^{(r)}} \right)^2. \quad (5.121)$$

La première égalité provient du calcul du second moment de  $X$  dans l'équation (5.43)<sub>2</sub> et la seconde égalité du calcul en second moment de l'équation (5.90)<sub>2</sub> couplée avec la définition

(5.80)<sub>2</sub> de  $\eta_\nu^{(r)}$ . En reportant la seconde égalité dans l'expression (5.80)<sub>1</sub> de  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$ , on obtient

$$\eta_{\varepsilon^p}^{(r)} = \frac{\sigma_y^{(r)} + R^{(r)} \left( p_n^{(r)} + \Delta t \overline{\dot{\varepsilon}^p}^{(r)} \right) + \frac{3}{2} b^{(r)} \left[ \left( \overline{\nu_n + \varepsilon_n^p}^{(r)} \right)^2 - \left( \overline{\nu + \varepsilon^p}^{(r)} \right)^2 \right]}{3 \overline{\dot{\varepsilon}^p}^{(r)}}. \quad (5.122)$$

Or,

$$\left( \overline{\nu + \varepsilon^p}^{(r)} \right)^2 = \left( \overline{\nu_n + \varepsilon_n^p}^{(r)} \right)^2 + \Delta t \left[ \frac{4}{3} \langle (\dot{\nu} + \dot{\varepsilon}^p) : (\dot{\nu} + \dot{\varepsilon}^p) \rangle^{(r)} + \Delta t \left( \overline{\dot{\nu} + \dot{\varepsilon}^p}^{(r)} \right)^2 \right]. \quad (5.123)$$

Pour un  $\Delta t$  suffisamment petit, le terme entre  $[\cdot]$  tend vers  $\frac{4}{3} \langle (\dot{\nu} + \dot{\varepsilon}^p) : (\dot{\nu} + \dot{\varepsilon}^p) \rangle^{(r)}$  qui est constant. On peut donc en déduire que

$$\frac{3}{2} b^{(r)} \left[ \left( \overline{\nu_n + \varepsilon_n^p}^{(r)} \right)^2 - \left( \overline{\nu + \varepsilon^p}^{(r)} \right)^2 \right] \ll \sigma_y^{(r)} + R^{(r)} \left( p_n^{(r)} + \Delta t \overline{\dot{\varepsilon}^p}^{(r)} \right), \quad (5.124)$$

où  $a \ll b$  signifie que le terme  $a$  est très petit devant  $b$ . Cette condition conduit alors à une expression de la viscosité  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$  pour le modèle de Chaboche modifié

$$\eta_{\varepsilon^p}^{(r)} = \frac{\sigma_y^{(r)} + R^{(r)} \left( p_n^{(r)} + \Delta t \overline{\dot{\varepsilon}^p}^{(r)} \right)}{3 \overline{\dot{\varepsilon}^p}^{(r)}}. \quad (5.125)$$

**Remarque 9.** On notera que cette expression de la viscosité sécante est la même que celle trouvée dans le cas du composite avec une matrice élasto-plastique obéissant à une loi d'écoulement cinématique linéaire et isotrope combinés (3.28).

**Remarque 10.** Afin de vérifier que l'inégalité (5.124) est cohérente, nous avons calculé numériquement le rapport entre le terme à gauche et le terme à droite de l'inégalité. Pour cela, nous avons considéré un composite constitué d'une matrice élasto-plastique  $\sigma_y^{(2)} = 100 \text{ MPa}$  avec de l'écoulement cinématique non linéaire ( $a^{(2)} = 500 \text{ MPa}$ , et  $\gamma^{(2)} = 40$ ) et de l'écoulement isotrope défini par la loi puissance (4.13) avec ( $R_{max} = 1 \text{ GPa}$  et  $\beta = 0.26$ ) renforcée par des inclusions élastiques sphériques. Ce composite a été soumis à un chargement isochore cyclique. Il a été numériquement observé que pour un pas de temps  $\Delta t = 0.1 \text{ s}$ , la valeur maximale du rapport est de  $8.15 \cdot 10^{-5}$ , permettant une première validation des développements théoriques.

L'expression (5.125) des viscosités permet aussi de retrouver le critère de plasticité (5.3) en moments d'ordre deux du modèle d'Armstrong-Frederick. En effet, en partant de l'équation (5.90)<sub>1</sub> associée à (5.125), on obtient

$$\overline{\sigma_d - X}^{(r)} = \sigma_y^{(r)} + R^{(r)} \left( p^{(r)} \right). \quad (5.126)$$

Cette équation peut également être obtenue en partant du critère de plasticité en second moment (5.91). En reportant l'équation (5.121)<sub>2</sub> associée à l'inégalité (5.124) pour  $b^{(r)} = \frac{a^{(r)} \gamma^{(r)}}{2}$ , on retrouve (5.126).

### 5.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes appliqués à développer la formulation DIV dans le cadre de composites à phases élasto-plastiques et obéissant à une loi d'érouissage cinématique non linéaire et isotrope combinés. Pour ce faire, nous avons travaillé sur le modèle d'Armstrong-Frederick basé sur la loi d'érouissage cinématique non linéaire donnée par (5.5). Ce modèle a été développé et popularisé par Chaboche [23][24] dans un cadre de plasticité non associé. Afin de rester dans le cadre de la procédure variationnelle incrémentale exposée dans la partie 1.2.2, nous avons travaillé avec deux modèles dont le premier a été proposé par Ladevèze [51] et le second une modification du modèle de Chaboche [25]. Ces modèles permettent d'approcher celui modèle d'Armstrong-Frederick, en modifiant les lois constitutives afin de se placer dans le cadre de matériaux dont le comportement est régi par deux potentiels. Il a alors été possible de déterminer le potentiel de dissipation primal  $\varphi^{(r)}$  de ces deux modèles en se basant sur les travaux de Bouby et al. [16]. A la différence des MSG introduit par Nguyen et Halphen [82], le potentiel de dissipation ne dépend pas que des variables flux  $\dot{\alpha}$ . Ici ce dernier dépend à la fois des variables flux et des variables d'état  $\alpha$ . Du fait de cette dépendance, nous avons dû légèrement modifier les principes variationnels incrémentaux développés dans la partie 1.2.2. Après avoir introduit un potentiel incrémental linéarisé  $J_L$ , nous avons alors pu appliquer deux fois la procédure variationnelle, afin, dans un premier temps de linéariser le comportement local et d'obtenir un MLC à polarisation hétérogène au sein des phases, puis dans un second temps, homogénéiser ce MLC en ayant recours à un MLC à polarisation homogène au sein des phases. Afin d'obtenir toutes les équations du problème, notamment pour déterminer les moments d'ordre deux des variables locales  $\varepsilon^p$ ,  $\nu$  et  $\dot{\varepsilon}^p$ , nous avons du recourir à une hypothèse forte qui consiste à considérer les fluctuations de  $\dot{\nu}$  comme nulles. On a alors appliqué le modèle au cas d'un composite à matrice élasto-plastique avec les deux types d'érouissages (isotrope et cinématique non linéaire) renforcée par des particules élastiques sphériques.

Maintenant que la formulation DIV a été développée dans le cadre de composites pour les modèles de Chaboche modifié et de Ladevèze, nous allons, dans le prochain chapitre chercher à valider ces modèles. Pour cela, nous comparerons les prédictions de la formulation DIV de ces deux modèles à des simulations en champs complets pour différents composites soumis à différents chargements.

## Application et validation des modèles DIV d'écroutissage cinématique non linéaire

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Mise en œuvre numérique</b> . . . . .	<b>148</b>
6.1.1	Présentation de l'algorithme . . . . .	148
6.1.2	Problèmes numériques . . . . .	149
<b>6.2</b>	<b>Evaluation et comparaison des deux modèles</b> . . . . .	<b>152</b>
6.2.1	Effet de la variation des paramètres d'écroutissage et comparaison avec l'écroutissage cinématique linéaire . . . . .	152
6.2.2	Cas d'une matrice avec des écroutissages cinématique non linéaire et isotrope . . . . .	162
6.2.3	Chargement multi-cycles . . . . .	167
<b>6.3</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>170</b>

---

On se propose dans ce chapitre d'évaluer la formulation DIV appliquée aux modèles de Chaboche modifié et de Ladevèze, développée dans le chapitre 5. Nous présentons tout d'abord la mise en œuvre numérique de la formulation DIV ainsi que les difficultés numériques rencontrées et les moyens utilisés pour les résoudre. Puis, nous réalisons une évaluation et une comparaison des prédictions des deux modèles sur différents composites. A cette fin, nous commençons par étudier l'influence des paramètres d'écroutissage cinématique sur les prédictions des deux modèles. Ensuite, nous considérons le cas d'une matrice élasto-plastique avec dans un premier temps de l'écroutissage cinématique non linéaire seul, puis avec des écroutissages cinématique non linéaire et isotrope combinés. Les prédictions obtenues pour ces deux composites sont comparées aux résultats de simulations numériques EF que nous avons réalisées. Enfin, nous considérons le cas d'un chargement multi-cycle (15 cycles et de 50 cycles) avec pour objectif d'analyser la réponse asymptotique du composite prédite par chacun des deux modèles.

## 6.1 Mise en œuvre numérique

### 6.1.1 Présentation de l'algorithme

Le principe de l'algorithme est le même que celui exposé dans la partie 4.1.1. L'objectif de ce dernier est de déterminer, pour un chargement donné et défini en terme de déformation macroscopique  $\mathbf{E}_{n+1}$  pour tout temps  $t_{n+1}$  ( $n + 1 = \{0, \dots, N\}$ ), la contrainte macroscopique  $\Sigma_{n+1}$ , les premiers et seconds moments des champs locaux  $\sigma_{n+1}$ ,  $\varepsilon_{n+1}$ ,  $\varepsilon_{n+1}^p$  et  $\nu_{n+1}$  ainsi que la valeur de la déformation plastique cumulée  $p_{n+1}$ . Cet algorithme peut être appliqué pour des composites constitués d'une matrice élasto-plastique avec des érouissages cinématique non linéaire et isotrope combinés. La structure de l'algorithme est exactement la même que celle de la partie 4.1.1. Nous en rappellerons ici les grandes étapes en lien avec les équations du chapitre 5.

- **Prédiction élastique :** On suppose dans un premier temps que la matrice est en régime élastique. Comme explicité dans la section 5.2.4 les paramètres  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  et  $\eta_\nu^{(2)}$  tendent vers  $+\infty$  ce qui réduit le système non linéaire (5.113) à un système à une équation pour une inconnue  $F_1(\mu_0^{(2)}, +\infty) = 0$ . Comme dans la partie 4.1.1, une fois la solution de cette équation obtenue, il est possible de déterminer les premier et second moments des champs locaux ainsi que la contrainte macroscopique (2.66).
- **Vérification du critère de plasticité :** Les coefficients du MLC  $w_0$  étant déterminés, il est possible de calculer  $\overline{\overline{\sigma - X}}^{(2)}$  en faisant appel à l'équation (5.117) et donc de vérifier si la condition (5.120) (resp. (5.126)) dans le cas du modèle de Ladevèze (resp. de Chaboche modifié) est satisfaite avec une inégalité stricte. Si cette dernière est satisfaite, alors la matrice est en régime élastique et on passe au pas de temps suivant. Si ce n'est pas le cas, alors la matrice est en régime plastique et on passe à l'étape suivante.
- **Régime plastique :** Dans ce cas, les viscosités  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  et  $\eta_\nu^{(2)}$  ont maintenant une valeur finie. Le problème non linéaire à résoudre est alors décrit par le système (5.113) dont les inconnues sont  $\mu_0^{(2)}$ ,  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  et  $\eta_\nu^{(2)}$ . Une fois le système résolu, il est possible de calculer les paramètres des MLC  $w_L$  et  $w_0$ , les premier et second moments des champs locaux, la déformation plastique cumulée ainsi que la contrainte macroscopique.

### 6.1.2 Problèmes numériques

Comme nous l'avons vu dans la partie 6.1.1, l'obtention du comportement macroscopique ainsi que les moyennes des champs locaux avec la formulation DIV nécessitent de résoudre le système non linéaire (5.113) de trois équations à trois inconnues. Ainsi que nous l'avons explicité dans la section 4.1.3, la forme de l'équation (5.113)<sub>1</sub> implique que ce système a au moins deux racines. En effet, (5.113)<sub>1</sub> peut se réécrire sous la forme (4.1), où  $F_1^+$  et  $F_1^-$  représentent respectivement la fonction  $F_1^\pm$  associée au signe + et - avant la racine. Ici aussi, afin de bien comprendre et illustrer les conséquences engendrées par la non unicité de la solution et pour définir une stratégie permettant de converger vers la bonne racine, nous allons focaliser notre attention sur la situation relativement simple d'une matrice avec seulement de l'écoulement cinématique non linéaire. On considère donc un composite renforcé élastiquement à matrice élasto-plastique avec écoulement cinématique non linéaire (décrit dans la partie 6.2.2) que l'on soumet à une extension cyclique isochore macroscopique. Les paramètres élastiques des phases sont définies par (4.8) et ceux de l'écoulement cinématique par (6.3).

On observe sur la figure 6.1a que la courbe de comportement macroscopique prédite par le modèle DIV présente également un saut non physique de la même forme et se produisant à peu près à la même valeur de déformation que celui observé dans le cas d'une matrice plastiquement parfaite (cf. Fig. 4.2). Ce saut est dû à la non unicité de la solution de l'équation  $F_1(\mu_0^{(2)}, \eta_{\varepsilon^p}^{(2)}, \eta_\nu^{(2)}) = 0$  avec  $F_1$  définie par (5.113)<sub>1</sub>.

On a remarqué numériquement, comme dans le cas de la plasticité parfaite, que la fonction  $F_1$  a toujours plusieurs racines en fonction de  $\mu_0^{(2)}$  : deux pour les composites à phases incompressibles (cf. Fig. 4.3) et quatre pour les composites compressibles (cf. Fig. 4.5). On a également remarqué que la fonction  $F_2$ , similairement à ce que l'on observe sur la figure 4.6, présente une singularité lorsque les phases sont élastiquement compressibles. Nous ne sommes pas parvenu à supprimer le pôle de la fonction  $F_2$ . C'est pourquoi, dans tout ce chapitre, nous allons présenter des simulations uniquement dans le cas de phases élastiquement incompressibles.

Afin de supprimer le saut observé sur la figure 6.1, il s'est avéré nécessaire de sélectionner à nouveau la racine appropriée. Pour cela, on adjoint à l'algorithme les contraintes (4.2) sur les contraintes macroscopiques et locales sur l'inclusion. Celles-ci permettent d'imposer la continuité de la contrainte macroscopique et de la moyenne des contraintes dans l'inclusion et donc de forcer la convergence de la fonction  $f_{solve}$  vers la bonne racine. Si les contraintes (4.2) sont satisfaites, on passe alors au pas de temps suivant, sinon, on doit trouver une autre racine de la fonction  $F_1$ . Pour cela, on procède à un changement de la valeur du point de départ de  $\mu_0^{(2)}$  dont a besoin la fonction  $f_{solve}$ .

**Remarque 11.** *Pour des raisons de convergence numérique, nous n'avons pas pu imposer ces contraintes sur tout le domaine de compression, c'est à dire entre  $t = 20$  s et  $t = 30$  s, comme nous l'avons fait dans le cas de l'élasto-viscoplasticité (cf. chapitre 4). Nous avons dû imposer ces contraintes sur une période plus courte, entre  $t = 20$  s et  $t = 24$  s. En effet, en imposant les*

contraintes pendant toute la partie de compression, l'algorithme ne convergeait plus à partir de l'instant  $t = 24$  s.

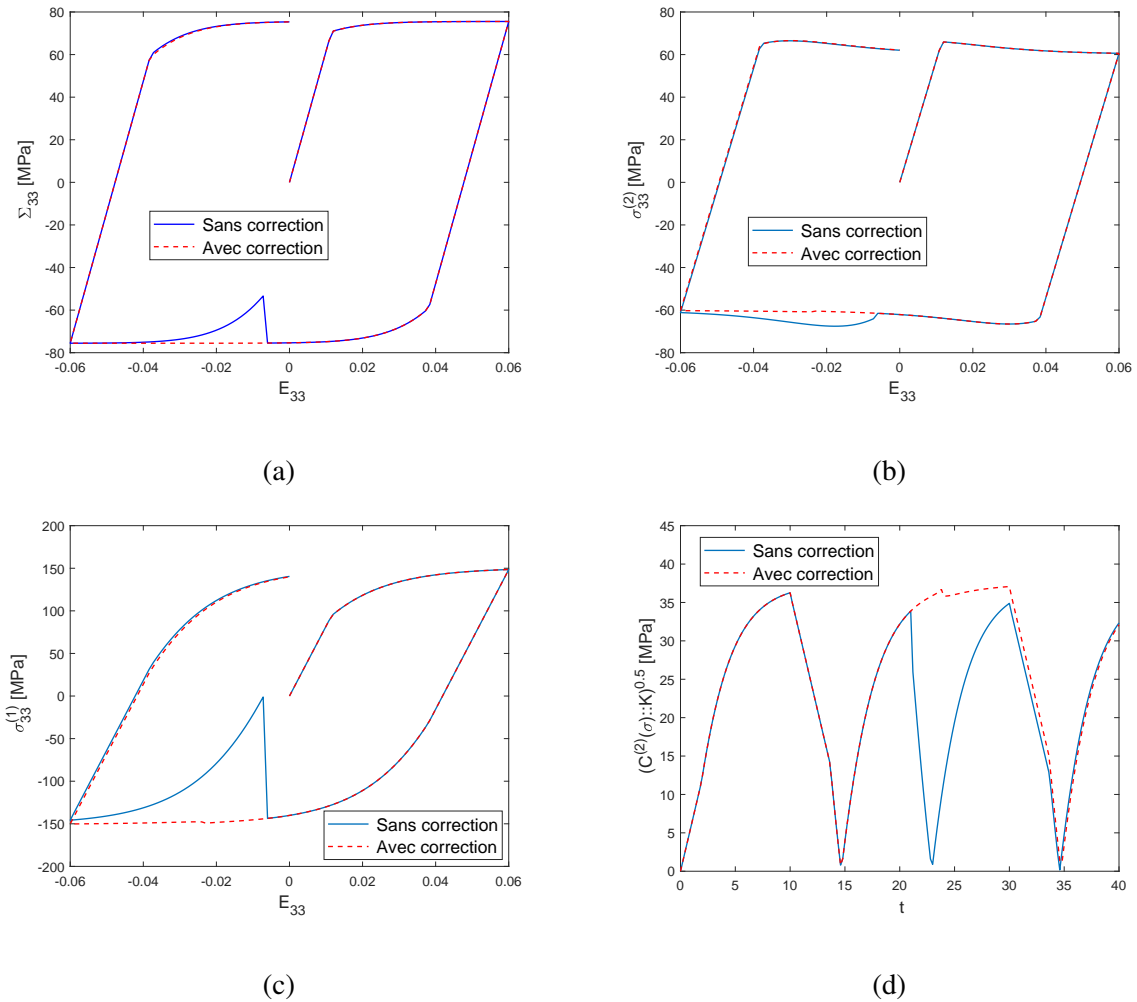


FIGURE 6.1: Composite renforcé élastiquement à matrice élasto-plastique avec de l'érouissage cinématique non linéaire soumis à une extension isochore cyclique.  $c^{(1)} = 0.17$ . (a) Contrainte macroscopique axiale, (b) Moyenne des contraintes axiales dans la matrice, (c) Moyenne des contraintes axiales dans l'inclusion, (d) Fluctuations des contraintes dans la matrice.

Comme expliqué dans la remarque 11, nous avons appliqué les contraintes entre les temps  $t = 20$  s et  $t = 24$  s. On observe sur la figure 6.1a que cette correction de l'algorithme conduit à de bons résultats dans le sens où la contrainte macroscopique est régulière et n'a plus de saut. On observe le même résultat pour les contraintes moyennes par phase. Toutefois, la figure 6.1d montre qu'il subsiste un second saut pour les fluctuations des contraintes dans la matrice. On remarquera que l'amplitude de ce saut est beaucoup plus faible que celle du premier. De plus, ce

dernier saut apparaît exactement à  $t = 24$  s, c'est à dire à l'instant  $t$  où l'on ne considère plus les contraintes (4.2) pour résoudre le problème.

Il n'est pas facile de savoir pourquoi, à la différence de l'érouissage cinématique linéaire, dans le cas de l'érouissage cinématique non linéaire l'algorithme n'arrive pas à converger vers la bonne racine entraînant ainsi l'existence d'un petit saut au niveau des fluctuations des contraintes dans la matrice. On peut éventuellement incriminer le fait que, l'algorithme étant itératif, l'hypothèse (5.108) qui consiste à considérer comme nulles les fluctuations de  $\dot{\nu}$ , et donc de  $\mathbf{X}$ , va entraîner de petites erreurs numériques qui conduisent avec le temps à une mauvaise valeur de  $\mu_0^{(2)}$ . Par ailleurs, on observe sur la figure 6.2, que l'hypothèse faite sur la nullité des fluctuations des contraintes de rappel est une hypothèse forte. En effet, cette figure montre que les fluctuations de  $\mathbf{X}$  régularisées qui sont supposées nulles dans notre modèle ne le sont pas en pratique dans les simulations EF et varient autour de 0.35 ce qui correspond à une erreur significative.

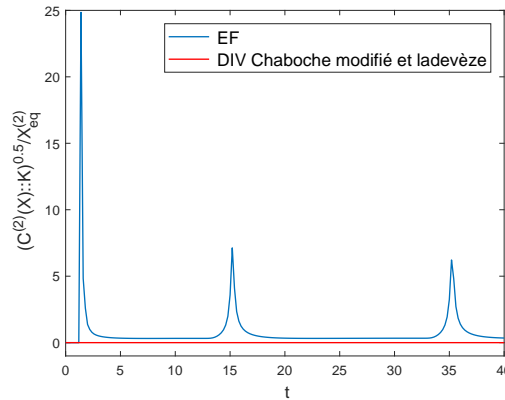


FIGURE 6.2: Variation des fluctuations de la contrainte de rappel  $\mathbf{X}$  régularisées dans la matrice pour un composite renforcée à matrice élasto-plastique avec de l'érouissage cinématique non linéaire soumis à une extension isochore cyclique.  $c^{(1)} = 0.17$ .

Bien qu'il ait été observé à  $t = 24$  s un léger saut non physique pour les fluctuations des contraintes dans la matrice, on remarquera que numériquement il a été possible de réaliser un cycle complet uniquement pour des valeurs du paramètre d'érouissage cinématique linéaire,  $a^{(2)} \leq 100$  MPa. Pour des valeurs plus grandes, l'algorithme ne convergeait plus à partir de l'instant  $t = 24$  s. C'est pourquoi dans la suite nous analyserons les prédictions de la formulation DIV pour un cycle complet classique, i.e.  $E_{33\ max} = -E_{33\ min}$ , (cf. programme 1, Fig 4.8) dans le cas où  $a^{(2)} = 100$  MPa et pour un cycle complet en déformation positive (cf. programme 5, Fig 6.3) pour les valeurs de  $a^{(2)}$  supérieures à 100 MPa.



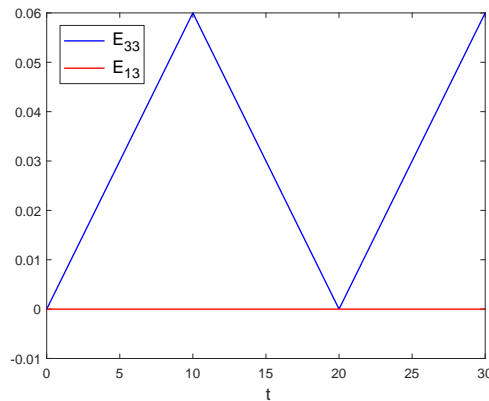


FIGURE 6.3: Déformation macroscopique axiale  $E_{33}(t)$  et de cisaillement  $E_{13}(t)$  (cf. Eq. (4.3)). Programme 5 : extension macroscopique isochore cyclique positive

## 6.2 Evaluation et comparaison des deux modèles

Maintenant que la formulation DIV a été étendue au cas de matrices élasto-plastiques avec des écrouissages cinématique non linéaire et isotrope combinés en faisant appel aux modèles de Ladevèze et de Chaboche modifié, nous allons pouvoir évaluer et comparer les prédictions numériques de ces deux modèles. Pour cela, nous allons comparer les prédictions de ces deux modèles entre eux ainsi qu'à des simulations numériques par EF réalisées sur Cast3M.

Dans les comparaisons avec les simulations EF, nous avons considéré un composite constitué d'une matrice élasto-plastique avec des écrouissages cinématique non linéaire et isotrope combinés et renforcée par des particules élastiques sphériques réparties de manière aléatoire et sphérique. Les paramètres élastiques des phases sont les mêmes que ceux utilisés dans le chapitre 4 et définis par l'équation (4.8). Pour les simulations par EF, les calculs numériques ont été réalisés à nouveau sur un huitième de cube composé d'une matrice élasto-plastique écrouissable avec en son centre une inclusion élastique sphérique. La loi de comportement considérée afin de réaliser les simulations EF est la loi de Chaboche (Armstrong-Frederick). Lors de toutes nos simulations, les composites considérés ont été soumis à une extension macroscopique isochore cyclique de la forme (4.3) (cf. Fig. 4.8 programme 1 et Fig. 6.3 programme 5).

### 6.2.1 Effet de la variation des paramètres d'écrouissage et comparaison avec l'écrouissage cinématique linéaire

Dans cette section, nous analysons les prédictions numériques de la formulation DIV pour les modèles de Ladevèze et de Chaboche modifié pour différentes valeurs des paramètres d'écrouissage cinématique linéaire  $a^{(2)}$  et non linéaire  $\gamma^{(2)}$ .

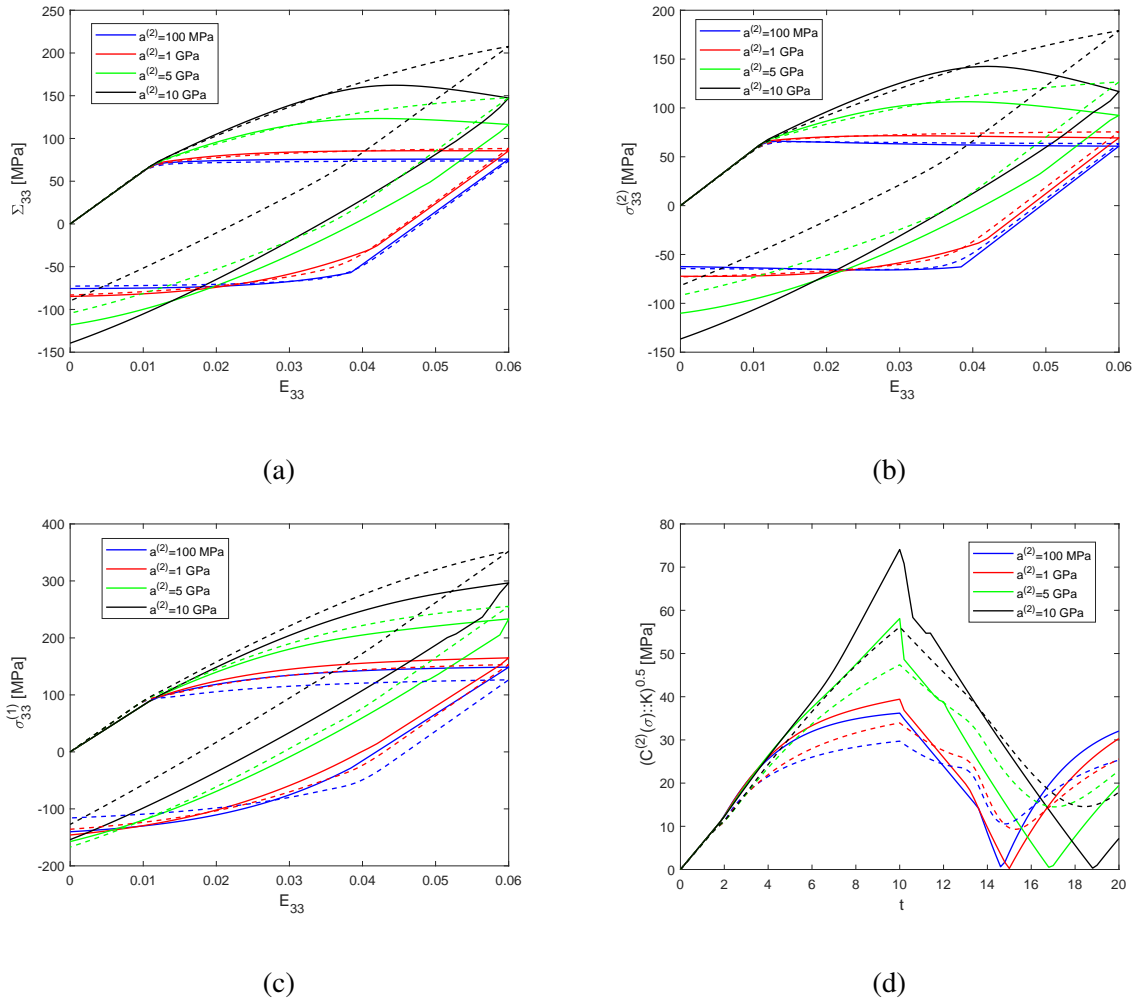
Variation du paramètre d'érouissage cinématique linéaire  $a^{(2)}$ 

FIGURE 6.4: Composite constitué d'une matrice élasto-plastique avec de l'érouissage cinématique non linéaire (avec  $a^{(2)} = 100$  MPa, 1 GPa, 5 GPa, 10 GPa et  $\gamma^{(2)} = 40$ ) renforcée élastiquement et soumis à une extension macroscopique isochore cyclique.  $c^{(1)} = 0.17$ . Comparaison des prédictions de la formulation DIV pour le modèle de Ladevèze (courbe pleine) avec les simulations EF (courbe pointillés). (a) Contrainte axiale macroscopique, (b) Moyenne des contraintes dans la matrice, (c) Moyenne des contraintes dans l'inclusion, (d) Fluctuations des contraintes dans la matrice.

Les figures 6.4 et 6.5 représentent respectivement les variations associées aux modèles de Ladevèze et de Chaboche modifié des contraintes axiales macroscopique et locale ainsi que les fluctuations des contraintes dans la matrice pour différentes valeurs du paramètre d'érouissage cinématique linéaire  $a^{(2)} = 100$  MPa, 1 GPa, 5 GPa, 10 GPa, et pour un paramètre d'érouissage cinématique non linéaire fixé à  $\gamma^{(2)} = 40$ . On observe sur ces deux figures, pour de faibles valeurs

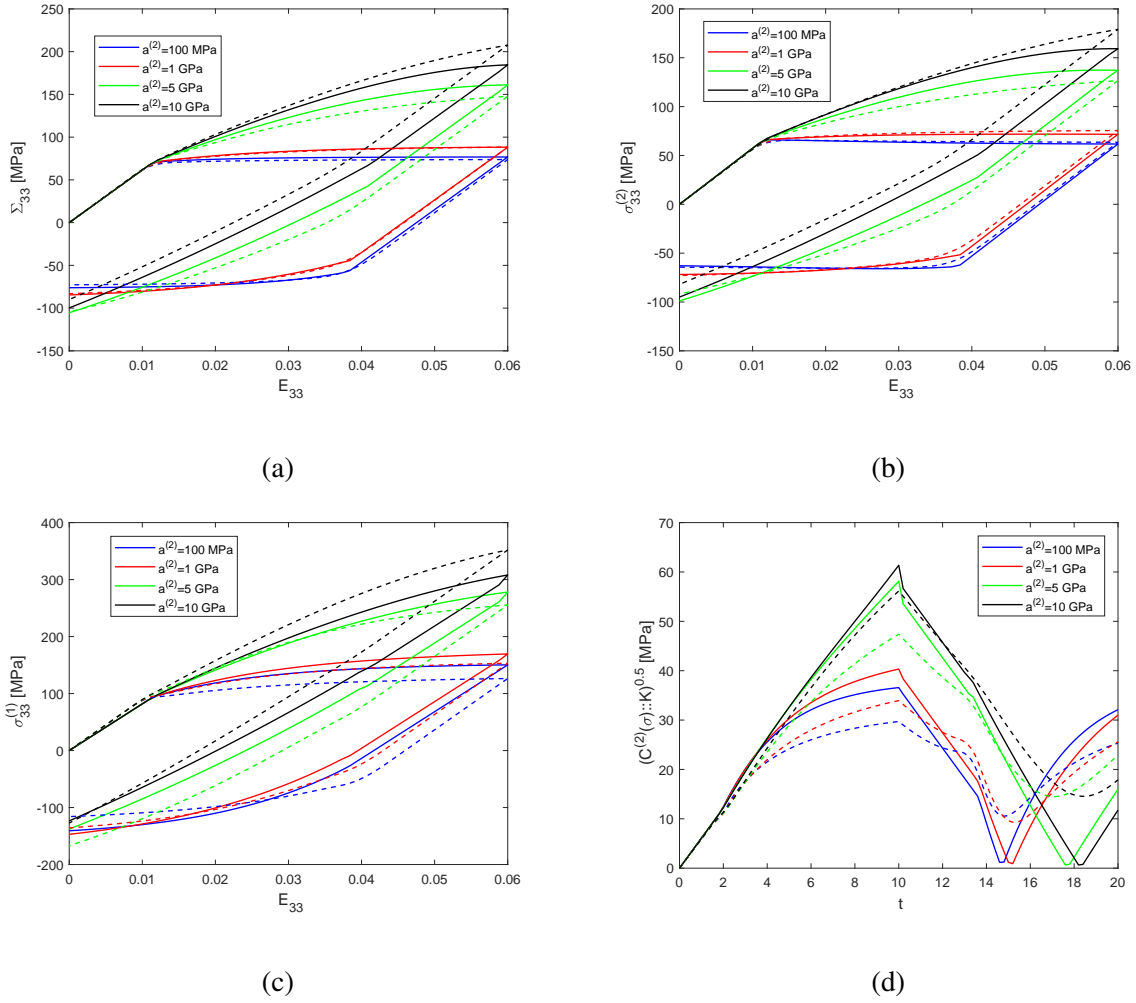


FIGURE 6.5: Composite constitué d'une matrice élasto-plastique avec de l'érouissage cinématique non linéaire (avec  $a^{(2)} = 100$  MPa, 1 GPa, 5 GPa, 10 GPa et  $\gamma^{(2)} = 40$ ) renforcée élastiquement et soumise à une extension macroscopique isochore cyclique.  $c^{(1)} = 0.17$ . Comparaison des prédictions de la formulation DIV pour le modèle de Chaboche modifié (courbe pleine) avec les simulations EF (courbe en pointillés). (a) Contrainte axiale macroscopique, (b) Moyenne des contraintes dans la matrice, (c) Moyenne des contraintes dans l'inclusion, (d) Fluctuations des contraintes dans la matrice.

de  $a^{(2)}$  ( $a^{(2)} = 100$  MPa et  $a^{(2)} = 1$  GPa), que les prédictions numériques de la formulation DIV pour les deux modèles reproduisent de manière très satisfaisante les données numériques EF pour la contrainte macroscopique et la moyenne des contraintes dans la matrice. On observe de plus, que les deux modèles arrivent à reproduire l'effet Bauschinger. Par ailleurs, on remarquera que le modèle de Chaboche modifié est plus proche des simulations EF que le modèle de Ladevèze. Similairement à ce que l'on observait au chapitre 4 dans le cas de l'érouissage cinématique

linéaire, les deux modèles surestiment les calculs EF pour les contraintes moyennes dans l'inclusion et les fluctuations des contraintes dans la matrice. De même, la formulation DIV prévoit à tort, pour les deux modèles, des fluctuations des contraintes nulles au moment de la recharge plastique.

Pour des valeurs de  $a^{(2)}$  plus élevées ( $a^{(2)} = 5$  GPa et  $a^{(2)} = 10$  GPa), on observe sur la figure 6.4 que le modèle de Ladevèze sous-estime fortement les données EF pour les contraintes macroscopique et moyenne dans la matrice. De plus, les prédictions de la formulation DIV pour ce modèle n'arrive pas à reproduire l'effet Bauschinger. On observe notamment que, le comportement macroscopique passe du régime élastique au régime plastique bien avant les EF. Ceci s'explique par le fait que le critère de plasticité  $F$  dans le modèle de Ladevèze Eq. (5.120) dépend aussi du terme  $-\frac{\gamma^{(2)}}{3a^{(2)}} \left( \overline{\overline{\mathbf{X}}}^{(2)} \right)^2$ , et d'après (5.43)<sub>2</sub>, la contrainte de rappel est proportionnelle à la variable  $\varepsilon^p + \nu$ . Donc le terme supplémentaire dans le critère s'écrit

$$-\frac{\gamma^{(2)} a^{(2)}}{2} \left( \overline{\overline{\varepsilon^p + \nu}}^{(2)} \right)^2. \quad (6.1)$$

Au vu de la figure 6.1 associée à l'équation (5.120), on remarque ainsi que pour une valeur de  $\gamma^{(2)}$  fixée, plus la valeur d'érouissage  $a^{(2)}$  est grande, plus la matrice plastifiera tôt. Ceci permet alors d'expliquer pourquoi pour de faibles valeurs de  $a^{(2)}$  ( $a^{(2)} = 100$  MPa et  $a^{(2)} = 1$  GPa) les prédictions de la formulation DIV pour le modèle de Ladevèze sont quasiment confondues avec les calculs EF qui utilisent le critère (5.3), c'est à dire (5.16) sans le terme

$$-\frac{\gamma^{(2)} a^{(2)}}{2} (\varepsilon^p + \nu)_{eq}^2 = -\frac{\gamma^{(2)}}{3a^{(2)}} \mathbf{X} : \mathbf{X}. \quad (6.2)$$

De même, pour de plus fortes valeurs de  $a^{(2)}$  (par exemple  $a^{(2)} = 5$  GPa et  $a^{(2)} = 10$  GPa), la formulation DIV prédit que la matrice et donc le composite plastifient plus tôt.

Contrairement à la formulation DIV pour le modèle de Ladevèze, on observe sur la figure 6.5 que les prédictions de la formulation DIV pour le modèle de Chaboche modifié fournissent de bonnes estimations de la contrainte macroscopique et de la contrainte moyenne dans la matrice même si elles les surestiment légèrement. De plus, elles reproduisent l'effet Bauschinger et plastifient en même temps que les EF. Ceci s'explique également par la forme du critère de plasticité  $F$  utilisé pour le modèle de Chaboche modifié (cf. Eq. (5.126)). On note qu'à la différence du critère de Ladevèze, ce dernier a la même écriture que celui d'Armstrong-Frederick (5.3) (aux moyennes par phase près), i.e. il n'a pas de terme supplémentaire dépendant linéairement du paramètre  $a^{(2)}$ . Enfin, on observe sur la figure 6.4 que la formulation DIV pour le modèle de Ladevèze prédit un adoucissement du comportement macroscopique et local dans la matrice. Cet adoucissement ne nous semble pas justifié. Cet effet n'est pas observé pour le modèle de Chaboche modifié (cf. Fig 6.5). Néanmoins, on a noté qu'un adoucissement est également prédit par ce dernier modèle si nous allions plus loin dans les déformations. Pour ce qui concerne l'évolution des contraintes moyennes dans l'inclusion, on observe que les deux modèles sous-estiment ces

dernières à l'exception du modèle de Chaboche modifié pour  $a^{(2)} = 5$  GPa. A la différence des EF, on observe une rupture de pente dans la décharge élastique. Cette rupture se retrouve également dans les fluctuations des contraintes au moment de la décharge élastique (i.e. à  $t = 10$  s). Enfin, la formulation DIV pour les deux modèles surestime les fluctuations des contraintes. Cependant, pour  $a^{(2)} = 10$  GPa, le modèle de Chaboche modifié les surestime moins. En résumé, le modèle de Chaboche modifié fournit d'une manière générale, de bien meilleures prévisions que le modèle de Ladevèze.

### Effet de la variation du paramètre d'écrouissage cinématique non linéaire $\gamma^{(2)}$

Maintenant que nous avons analysé les prédictions des deux modèles pour différentes valeurs du paramètre d'écrouissage linéaire  $a^{(2)}$ , nous allons réaliser ici le même type d'étude pour différentes valeurs du paramètre de non linéarité  $\gamma^{(2)} = 0.5, 10, 50$  et  $100$  à valeur fixé du paramètre d'écrouissage linéaire et égale à  $a^{(2)} = 1$  GPa. Nous avons considéré un composite renforcé élastiquement constitué d'une matrice élasto-plastique avec seulement de l'écrouissage cinématique non linéaire. Les propriétés élastiques des phases sont données par (4.8). Ce composite a été soumis à une extension macroscopique isochore cyclique.

Les figures 6.6 et 6.7 comparent les prédictions de la formulation DIV respectivement pour le modèle de Ladevèze et de Chaboche modifié aux données EF pour différentes valeurs de  $\gamma^{(2)}$ . On remarque tout d'abord, qu'en dehors de la valeur  $\gamma^{(2)} = 10$ , les prédictions des deux modèles sont quasiment confondues. On note que pour la valeur de  $\gamma^{(2)} = 10$ , le modèle de Ladevèze fournit de meilleures prédictions que le modèle de Chaboche modifié. D'une manière générale, on observe sur ces figures un bon accord entre les prédictions des modèles et les données EF pour les contraintes macroscopiques et locales dans la matrice. On observe aussi que les deux modèles reproduisent l'effet Bauschinger. Néanmoins, comme on l'a vu dans la partie précédente, le modèle de Ladevèze conduit à une plastification plus précoce que les EF à cause de la présence du terme  $-\frac{\gamma^{(2)} a^{(2)}}{2} \left( \overline{\varepsilon^p + \nu^{(2)}} \right)^2$  dans le critère de plasticité (5.120). Pour les contraintes locales dans l'inclusion, les deux modèles surestiment (resp. sous-estiment) les données EF pour  $\gamma^{(2)} = 50$  et  $100$  (resp.  $\gamma^{(2)} = 0.5$  et  $10$ ). Enfin, pour les fluctuations des contraintes dans la matrice, les deux modèles surestiment les données EF tout en reproduisant de manière qualitative leurs variations. On remarque également que les deux modèles prédisent à tort des fluctuations nulles au moment de la recharge plastique.

### Comparaison avec l'écrouissage cinématique linéaire

L'objectif de cette partie est de vérifier numériquement si la formulation DIV développée dans le cadre du modèle de Ladevèze et de Chaboche modifié arrive à reproduire, lorsque l'on fait tendre le paramètre d'écrouissage cinématique non linéaire vers zéro, les données de simulations FFT ou EF pour un composite élasto-plastique à écrouissage cinématique linéaire ou à écrouis-

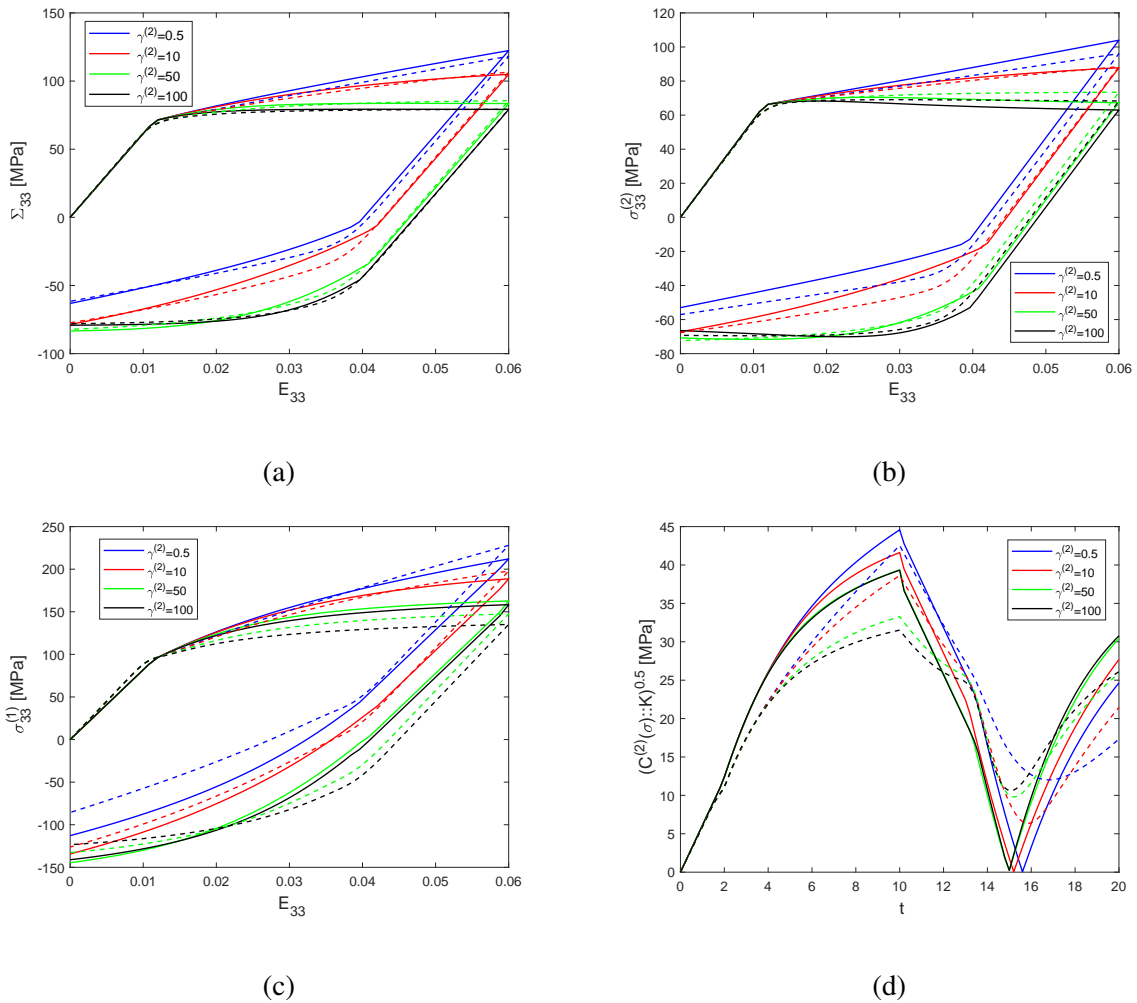


FIGURE 6.6: Composite constitué d'une matrice élasto-plastique avec de l'érouissage cinématique non linéaire (avec  $a^{(2)} = 1$  GPa et  $\gamma^{(2)} = 0.5, 10, 50$  et  $100$ ) renforcée élastiquement et soumis à une extension macroscopique isochore cyclique.  $c^{(1)} = 0.17$ . Comparaison des prédictions de la formulation DIV pour le modèle de Ladevèze (courbe pleine) avec les simulations EF (courbe en pointillés). (a) Contrainte axiale macroscopique, (b) Moyenne des contraintes dans la matrice, (c) Moyenne des contraintes dans l'inclusion, (d) Fluctuations des contraintes dans la matrice.

sages cinématique linéaire et isotrope combinés. On observe dans l'expression du critère de plasticité du modèle de Ladevèze (5.16) et de Chaboche modifié (5.20), que lorsque le paramètre de non linéarité  $\gamma^{(2)}$  tend vers zéro, on retrouve l'expression du critère de Von-Mises (3.36). Afin de vérifier que ces deux modèles arrivent à retrouver les données numériques de l'érouissage cinématique linéaire, nous avons comparé leurs prédictions aux figures 4.14 et 4.19 présentées dans la partie 4.2.2.

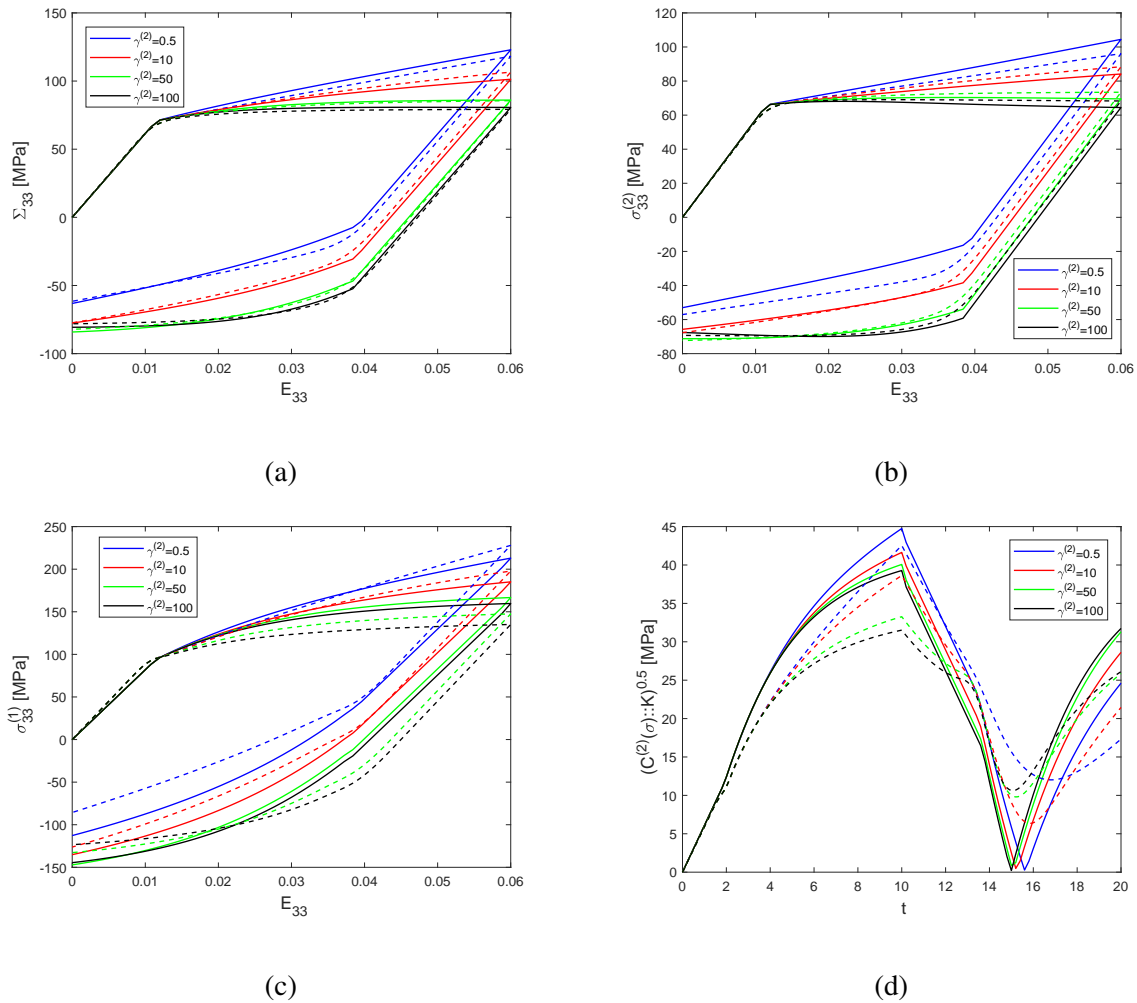


FIGURE 6.7: Composite constitué d'une matrice élasto-plastique avec de l'érouissage cinématique non linéaire (avec  $a^{(2)} = 1$  GPa et  $\gamma^{(2)} = 0.5, 10, 50$  et  $100$ ) renforcée élastiquement et soumis à une extension macroscopique isochore cyclique.  $c^{(1)} = 0.17$ . Comparaison des prédictions de la formulation DIV pour le modèle de Chaboche modifié (courbe pleine) avec les simulations EF (courbe en pointillés). (a) Contrainte axiale macroscopique, (b) Moyenne des contraintes dans la matrice, (c) Moyenne des contraintes dans l'inclusion, (d) Fluctuations des contraintes dans la matrice.

La figure 6.8 représente les prédictions de la formulation DIV pour les modèles de Ladevèze et de Chaboche modifié pour  $\gamma^{(2)}$  tendant vers zéro. On considère un composite constitué d'une matrice élasto-plastique présentant un érouissage cinématique non linéaire faible, renforcée par des particules sphériques élastiques. Les prédictions de ces deux modèles ont été comparées à celles de la formulation DIV dans le cas d'une matrice élasto-plastique avec de l'érouissage cinématique linéaire et aux données FFT réalisées par Lahellec et Suquet [59] (cf. Fig. 4.14). Le

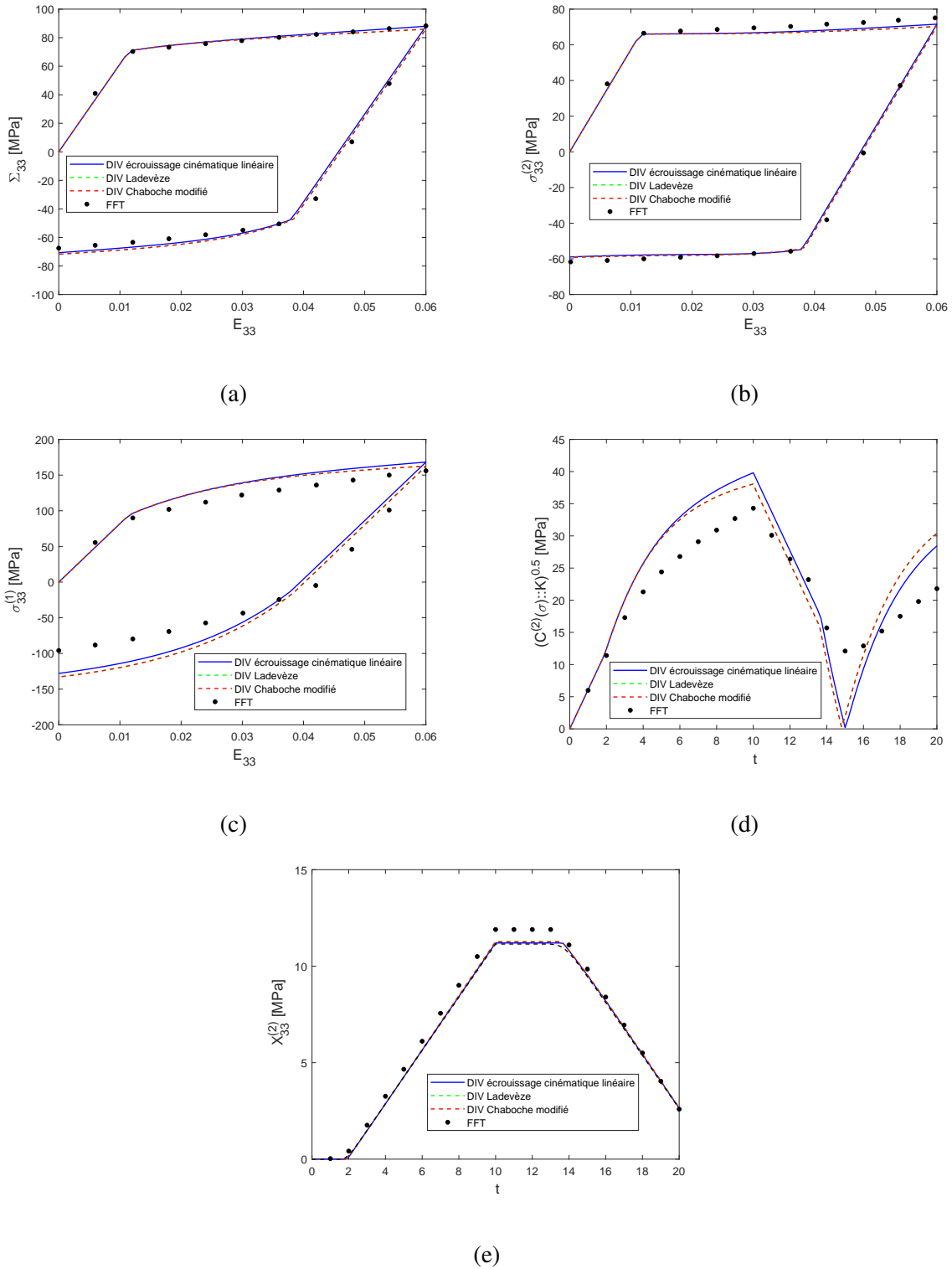


FIGURE 6.8: Composite constitué d'une matrice élasto-plastique avec de l'écrouissage cinématique non linéaire ( $a^{(2)} = 300$  MPa, et  $\gamma^{(2)} = 0.1$ ) renforcée élastiquement et soumis à une extension macroscopique isochore cyclique.  $c^{(1)} = 0.17$ . (a) Contrainte axiale macroscopique, (b) Moyenne des contraintes dans la matrice, (c) Moyenne des contraintes dans l'inclusion, (d) Fluctuations des contraintes dans la matrice, (e) Moyenne de la contrainte de rappel dans la matrice.



composite a été soumis à la même extension isochore cyclique macroscopique. Les paramètres élastiques des phases et le paramètre d'écrouissage cinématique linéaire  $a^{(2)}$  sont respectivement définis par (4.8) et (4.9). Afin de retrouver numériquement les données de l'écrouissage cinématique linéaire avec les modèles de Ladevèze et de Chaboche modifié, nous avons fixé le paramètre d'écrouissage non linéaire à  $\gamma^{(2)} = 0.1$ . Cette valeur de  $\gamma^{(2)}$  est la plus petite que nous avons pu considérer numériquement. En dessous, l'algorithme ne converge plus. On observe tout d'abord que les prédictions du modèle de Ladevèze et de Chaboche modifié pour  $\gamma^{(2)} = 0.1$  sont parfaitement confondues. On note de plus qu'elles sont très proches des données de la formulation DIV dans le cas d'une matrice avec de l'écrouissage cinématique linéaire pour la contrainte macroscopique, la contrainte locale dans la matrice et la moyenne des contraintes de rappel dans la matrice. Toutefois, la formulation sous estime légèrement la contrainte locale dans l'inclusion ainsi que les fluctuations des contraintes dans la matrice. Ceci peut s'expliquer par le fait que la valeur de  $\gamma^{(2)}$  n'est pas parfaitement nulle. Le fait que le modèle de Ladevèze ne plastifie pas plus tôt que le modèle de Chaboche modifié est dû, à la faible valeur de  $\gamma^{(2)}$  qui rend le terme (6.1) négligeable. On précise qu'ici, à la différence de la figure 4.14f associée au cas de l'écrouissage cinématique linéaire, il n'est pas possible de représenter la variation des fluctuations de la contrainte de rappel dans la matrice. En effet, l'hypothèse faite pour retrouver l'expression de  $\langle \varepsilon_d : \nu_n \rangle^{(r)}$  impose que les fluctuations de  $\dot{\nu}$ , et donc de  $\mathbf{X}$  d'après (5.90)<sub>2</sub>, soient nulles.

La figure 6.9 représente les prédictions de la formulation DIV pour les modèles de Ladevèze et de Chaboche modifié dans le cas d'un composite constitué d'une matrice élasto-plastique avec des écrouissages cinématique non linéaire et isotrope pour lequel  $\gamma^{(2)}$  tend vers zéro ( $\gamma^{(2)} = 0.1$ ). Comme pour la figure 6.8, nous avons comparé ces prédictions à celles de la formulation DIV dans le cas des écrouissages cinématique linéaire et isotrope combinés et à des données EF (cf. partie 4.2.2 Fig. 4.19). On observe ici aussi que la formulation DIV pour les modèles de Chaboche modifié et de Ladevèze retrouvent les simulation EF ainsi que les prédiction de la formulation DIV pour de l'écrouissage cinématique linéaire. On note toutefois un saut non physique dans la moyenne des contraintes dans l'inclusion ainsi que pour les fluctuations des contraintes dans la matrice. Ceci vient du fait, comme on l'a expliqué dans la partie 6.1.2 (cf. remarque 11), que les contraintes que nous avons imposées pour régulariser le comportement macroscopique et local ne sont appliquées qu'entre les temps  $t = 20$  s et  $t = 24$  s. Ce saut apparait exactement à l'instant  $t = 24$  s où l'on n'impose plus les contraintes pour régulariser le comportement.

## Discussions

Dans cette partie, nous avons étudié les prédictions de la formulation DIV pour les modèles de Ladevèze et de Chaboche modifié pour différentes valeurs des paramètres d'écrouissage cinématiques  $a^{(2)}$  et  $\gamma^{(2)}$ . On a observé qu'à la différence du modèle de Chaboche modifié, qui arrive à reproduire de manière satisfaisante les données EF pour les différentes valeurs de  $a^{(2)}$  et  $\gamma^{(2)}$  considérées, le modèle de Ladevèze plastifie plus tôt que les EF lors de la décharge élastique lorsque  $a^{(2)}$  est trop élevé et de ce fait n'est pas capable d'estimer correctement les réponses

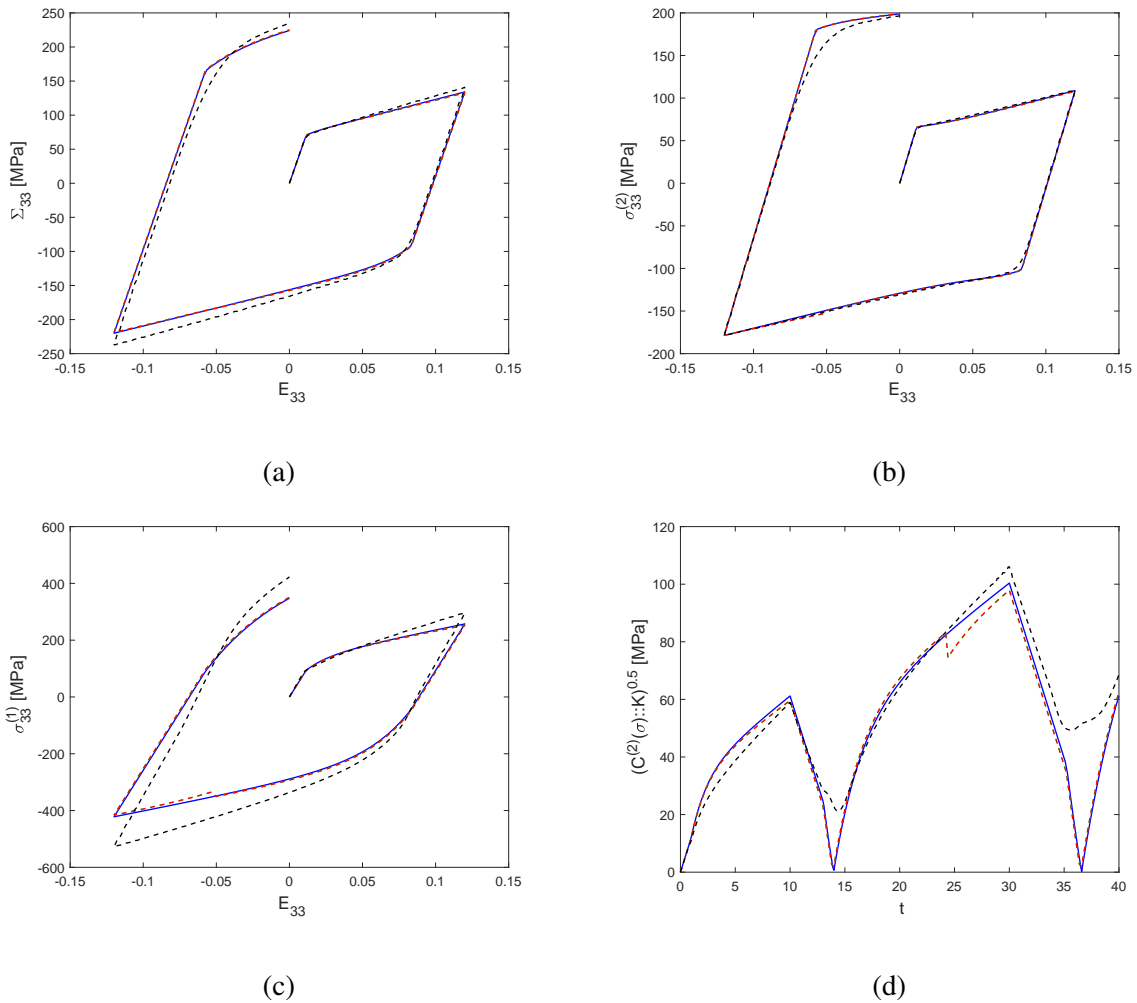


FIGURE 6.9: Prédiction de la formulation DIV pour une matrice élasto-plastique avec des érouissages cinématique linéaire et isotrope combinés (courbe pleine bleue) ainsi que pour les modèles de Ladevèze (tirets verts) et de Chaboche modifié (tirets rouges) et des simulations EF (tirets noirs) pour un composite constitué d'une matrice élasto-plastique avec des érouissages cinématique non linéaire ( $a^{(2)} = 100$  MPa, et  $\gamma^{(2)} = 0.1$ ) et isotrope combinés et renforcée élastiquement soumis à une extension macroscopique isochore cyclique.  $c^{(1)} = 0.17$ . (a) Contrainte axiale macroscopique, (b) Moyenne des contraintes dans la matrice, (c) Moyenne des contraintes dans l'inclusion, (d) Fluctuations des contraintes dans la matrice.

macroscopiques et locales du comportement dans cette situation. Par ailleurs, on constate que les deux modèles sont confondus et reproduisent de manière très satisfaisante les données EF, pour toutes valeurs de  $\gamma^{(2)}$  tant que la valeur de  $a^{(2)}$  est assez faible. Afin de conserver des prédictions satisfaisantes pour le modèle de Ladevèze, dans la suite de ce chapitre, nous allons considérer des valeurs de  $a^{(2)}$  pas trop élevées, i.e. comprises entre 100 MPa et 1 GPa.

## 6.2.2 Cas d'une matrice avec des érouissages cinématique non linéaire et isotrope

Dans cette partie, nous analysons les prédictions de la formulation DIV appliquée aux modèles de Ladevèze et de Chaboche modifié pour un composite ayant, tout d'abord une matrice élasto-plastique avec de l'érouissage cinématique non linéaire, puis une matrice avec des érouissages cinématique non linéaire et isotrope combinés et soumis à une extension macroscopique cyclique isochore. Les prédictions de la formulation DIV pour ces deux modèles seront comparées à des simulations EF que nous avons réalisées sur la même cellule cubique périodique avec une inclusion en son centre que celle présentée lors des chapitres précédents.

### Matrice avec de l'érouissage cinématique non linéaire seul

On considère ici un matériau composite constitué d'une matrice élasto-plastique avec de l'érouissage cinématique non linéaire renforcée par des particules sphériques élastiques. Les paramètres élastiques des phases sont les mêmes que celles de Lahellec et Suquet [59] et exposées dans (4.8). Les valeurs des paramètres caractérisant l'érouissage cinématique non linéaire sont définies par

$$a^{(2)} = 100 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad \gamma^{(2)} = 70. \quad (6.3)$$

La figure 6.10 illustre la variation des contraintes macroscopique et moyenne par phase ainsi que les fluctuations des contraintes dans la matrice. On représente sur cette figure la prédiction de la formulation DIV pour les modèles de Ladevèze et de Chaboche modifié ainsi que les données EF. On observe tout d'abord que les prédictions des deux modèles sont parfaitement confondues. On note également que ces deux modèles surestiment (resp. sous-estiment) légèrement les données EF pour la contrainte macroscopique (resp. la contrainte moyenne dans la matrice) et arrivent à reproduire qualitativement les données EF pour la contrainte moyenne dans l'inclusion et les fluctuations des contraintes dans la matrice. Les deux modèles reproduisent l'effet Bauschinger, et du fait de la faible valeur de  $a^{(2)}$ , ils prédisent une plastification au même moment. Néanmoins, bien que l'on note un accord avec les données EF, on observe un léger saut non physique pour les fluctuations dans la matrice. Ce saut non physique a été étudié dans la partie 6.1.2.

Sur la figure 6.10e, qui représente la variation de la moyenne axiale de la contrainte de rappel dans la matrice, on observe à nouveau que les prédictions des deux modèles sont toujours confondues. On remarque également sur cette même figure que la formulation DIV reproduit les données EF tout en les surestimant légèrement. On note par ailleurs qu'à la différence de la figure 6.8e qui illustre le cas d'une matrice à érouissage cinématique linéaire, la moyenne de la contrainte de rappel sur la matrice n'évolue pas de manière linéaire pendant le régime plastique.

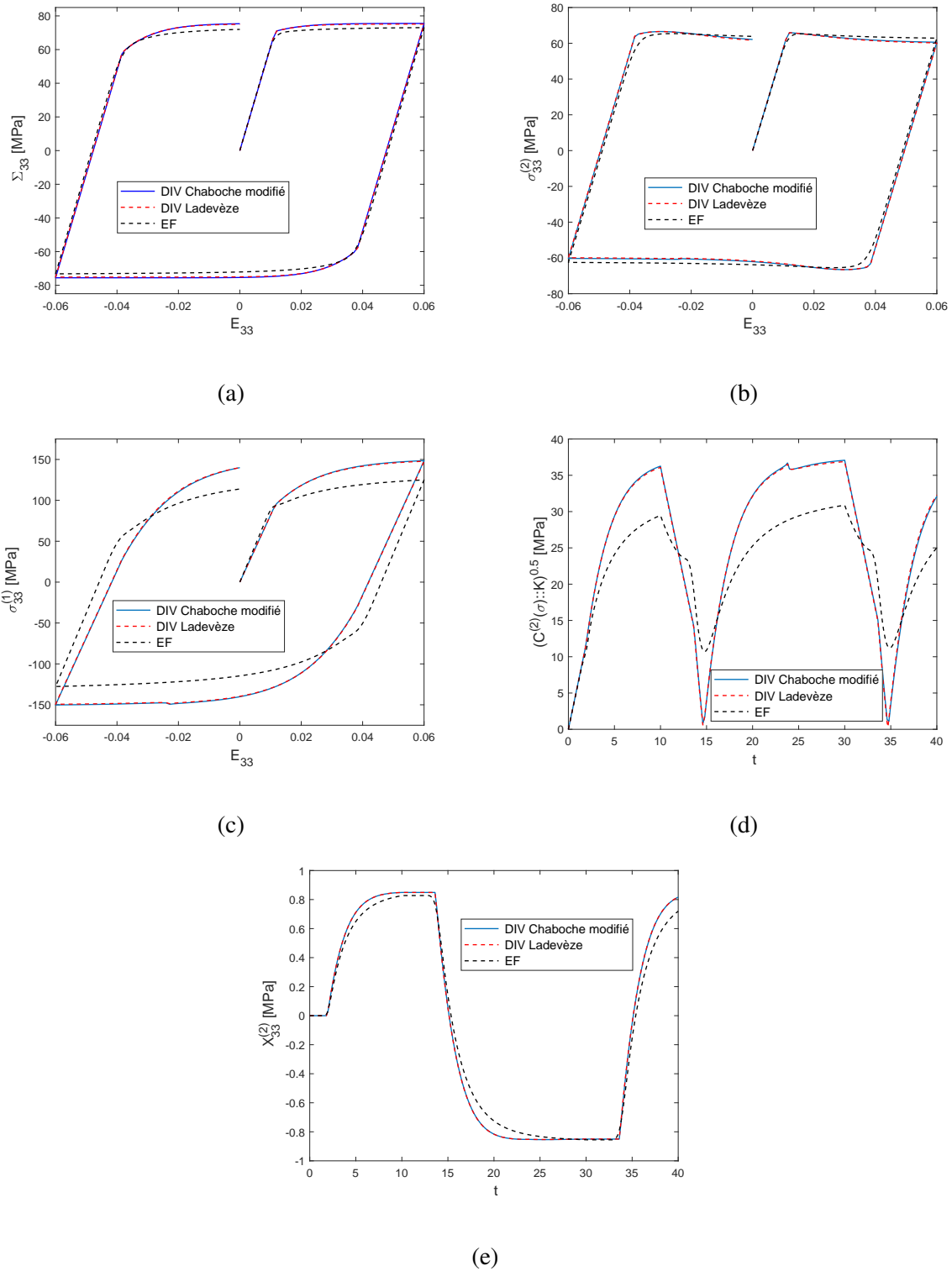


FIGURE 6.10: Composite constitué d'une matrice élasto-plastique avec de l'érouissage cinématique non linéaire ( $a^{(2)} = 100$  MPa, et  $\gamma^{(2)} = 70$ ) renforcée élastiquement et soumis à une extension macroscopique cyclique isochore (programme 1, Fig 4.8)  $c^{(1)} = 0.17$ . (a) Contrainte macroscopique axiale, (b) Moyenne des contraintes axiales dans la matrice, (c) Moyenne des contraintes axiales dans l'inclusion, (d) Fluctuations des contraintes dans la matrice, (e) Moyenne axiale de la contrainte de rappel dans la matrice.

### Matrice avec des érouissages cinématique non linéaire et isotrope combinés

On considère dans cette partie le cas d'un composite composé d'une matrice élasto-plastique avec des érouissages cinématique non linéaire et isotrope combinés renforcée par des particules sphériques élastiques. Les valeurs des paramètres d'érouissage cinématique non linéaire sont définies par

$$a^{(2)} = 500 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad \gamma^{(2)} = 40, \quad (6.4)$$

et la loi puissance caractérisant l'érouissage isotrope est définie par l'équation (4.13), avec

$$R_{max} = 1 \text{ GPa} \quad \text{et} \quad \beta = 0.26. \quad (6.5)$$

Les paramètres élastiques des phases sont explicités dans l'équation (4.8).

La figures 6.11 illustre, pour la formulation DIV associée aux modèles de Ladevèze et de Chaboche modifié, l'évolution des contraintes macroscopique et locale dans les phases, celles des fluctuations des contraintes dans la matrice et celles de la moyenne de la contrainte de rappel dans la matrice.

On observe sur la figure 6.11 que les prédictions des deux modèles sont quasiment confondues. On note que les deux modèles reproduisent de manière satisfaisante les données EF pour la contrainte macroscopique et la contrainte moyenne dans la matrice. On remarque cependant que le modèle de Chaboche modifié est légèrement plus proche des EF que le modèle de Ladevèze. De plus, les deux modèles arrivent à reproduire l'effet Bauschinger. On observe aussi sur la figure 6.11a, qu'après la décharge et recharge élastique, le modèle de Chaboche modifié plastifie au même moment que les EF, ce qui n'est pas le cas du modèle de Ladevèze qui plastifie plus tôt. Ceci est dû, comme on l'a vu dans la partie 6.2.1, à la valeur de  $a^{(2)}$  qui est suffisamment élevée pour que le terme (6.1) ne soit plus négligeable dans le critère de plasticité (5.120) du modèle de Ladevèze.

Le même phénomène de plastification précoce par le modèle de Ladevèze est observé sur la figure 6.11e qui décrit la variation de la moyenne de la contrainte de rappel dans la matrice. En effet, les paliers à  $t = 10 \text{ s}$  et  $t = 20 \text{ s}$  représentent respectivement la décharge et la recharge élastique. Or, les paliers pour le modèle de Ladevèze sont plus courts que ceux des EF et du modèle de Chaboche modifié. Sur cette même figure, on observe que les deux modèles DIV reproduisent l'évolution des simulations EF. Cependant, en dehors de la charge plastique et de la première décharge élastique, le modèle de Chaboche modifié est plus proche des EF.

Enfin, on observe sur les courbes 6.11c et 6.11d que les deux modèles reproduisent de manière qualitative et quantitative les données EF pour la moyenne des contraintes dans l'inclusion et uniquement de manière qualitative les fluctuations des contraintes dans la matrice tout en les surestimant significativement. On observe également ici que les fluctuations des contraintes associées aux modèles DIV s'annulent à tort au début des recharges plastiques.

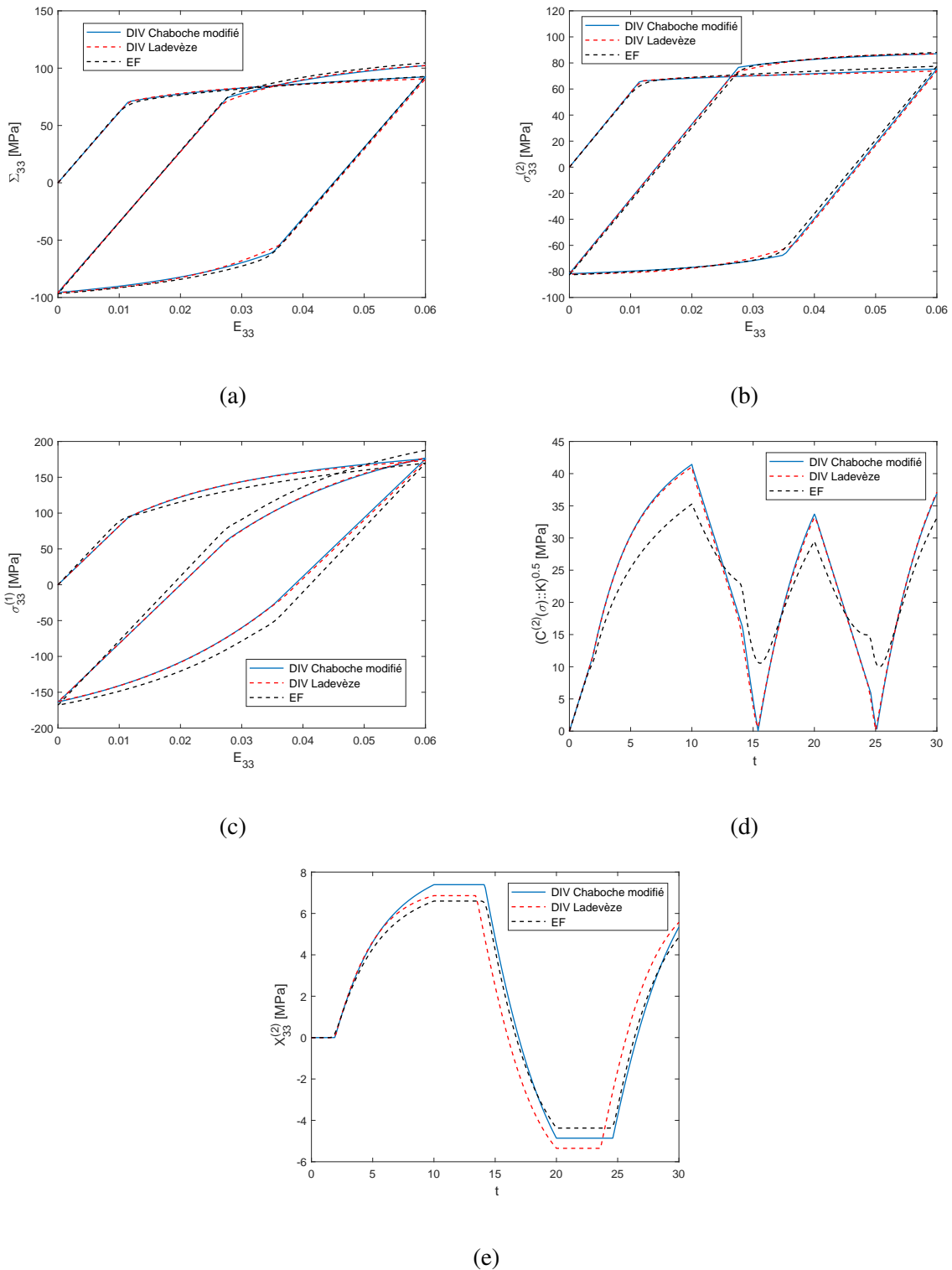


FIGURE 6.11: Composite composé d'une matrice élasto-plastique avec des érouissages cinématique non linéaire et isotrope combinés renforcée élastiquement soumis à une extension macroscopique cyclique isochore (programme 1, Fig 4.8)  $c^{(1)} = 0.17$ . (a) Contrainte macroscopique axiale, (b) Moyenne des contraintes axiales dans la matrice, (c) Moyenne des contraintes axiales dans l'inclusion, (d) Fluctuations des contraintes dans la matrice, (e) Moyenne axiale de la contrainte de rappel dans la matrice.

Nous venons de voir que le modèle de Chaboche modifié reproduit d'une manière légèrement plus précise le comportement macroscopique, pour un composite à matrice élasto-plastique présentant des érouissages cinématique non linéaire et isotrope combinés, que le modèle de Ladevèze. De plus, on a observé dans la partie 6.2.1, que le modèle de Ladevèze ne reproduit pas le comportement macroscopique et plastifie plus tôt que le modèle de Chaboche modifié et des simulations EF. C'est pourquoi, nous avons comparé les prédictions de la formulation DIV appliquée au modèle de Chaboche modifié seulement aux données obtenues par Doghri et Ouair [27]. Ces auteurs ont considéré un composite constitué d'une matrice (low-carbon steel) élasto-plastique avec des érouissages cinématique non linéaire et isotrope combinés et renforcée par des particules sphériques élastiques. Les paramètres d'érouissage cinématique non linéaire sont définis par

$$a^{(2)} = 17 \text{ GPa} \text{ et } \gamma^{(2)} = 21. \quad (6.6)$$

La loi puissance caractérisant l'érouissage isotrope est la même que celle présentée dans l'équation (4.13), avec

$$R_{max} = 2.1 \text{ GPa} \text{ et } \beta = 0.26. \quad (6.7)$$

Les propriétés élastiques des phases sont <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \text{Inclusion : } & c^{(1)} = 0.3, \quad E^{(1)} = 400 \text{ GPa}, \quad \nu^{(1)} = 0.4999 \\ \text{Matrice : } & E^{(2)} = 210 \text{ GPa}, \quad \nu^{(2)} = 0.4999, \quad \sigma_y^{(2)} = 200 \text{ MPa}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Ce matériau a été soumis à une traction uni-axiale de la forme (4.4).

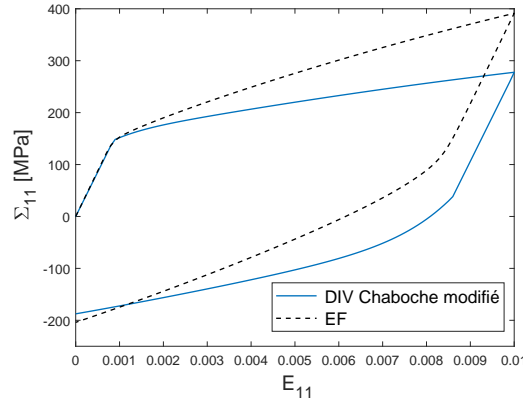


FIGURE 6.12: Comportement effectif d'un composite constitué d'une matrice élasto-plastique avec des érouissages cinématique non linéaire et isotrope combinés renforcée élastiquement et soumis à une traction uni-axiale.  $c^{(1)} = 0.17$ .

1. Les simulations de Doghri et Ouair ont été réalisées sur un composite constitué de phases élastiquement compressibles  $\nu^{(1)} = 0.2$  et  $\nu^{(2)} = 0.3$ .

La figure 6.12 représente les prédictions du comportement effectif pour ce composite soumis à une traction uni-axiale, pour la formulation DIV associée au modèle de Chaboche modifié. Nous avons également reportés les données EF obtenues sur le huitième de cellule périodique décrit précédemment. On observe sur cette figure que les prédictions du modèle sous-estiment largement les données EF. De plus il n'arrive pas à reproduire la pente caractérisant l'écrouissage lors du régime plastique. Ceci peut s'expliquer par la forte valeur de  $a^{(2)}$ . En effet, on a observé dans la partie 6.2.1 que plus la valeur de  $a^{(2)}$  augmentait, plus le modèle sous-estimait les simulations EF.

### 6.2.3 Chargement multi-cycles

Dans cette partie, nous explorons les prédictions de la formulation DIV lorsque le composite est soumis à une extension macroscopique isochore de 15 cycles (cf. programme 5, Fig. 6.3). Nous avons observé numériquement que pour une matrice présentant seulement de l'écrouissage cinématique non linéaire, les réponses macroscopiques et locales sont stabilisées dès le premier cycle de chargement. Ceci n'est pas le cas pour une matrice avec des écrouissages cinématique non linéaire et isotrope combinés. Nous avons alors considéré le même composite que celui étudié dans la 6.11 (i.e. avec des écrouissages cinématique non linéaire et isotrope combinés). Nous avons observé sur cette figure que les prédictions de la formulation DIV pour le modèle de Chaboche modifié étaient plus proches des données EF que celles du modèle de Ladevèze. C'est pourquoi, dans toute cette partie, nous allons seulement considérer les prédictions du modèle de Chaboche modifié.

La 6.13 illustre les variations de la contrainte macroscopique axiale, des contraintes moyennes par phase, des fluctuations des contraintes dans la matrice ainsi que la moyenne de la contrainte de rappel dans la matrice pour le composite étudié sur la figure 6.11. Nous avons par ailleurs soumis ce dernier à une extension macroscopique isochore de 15 cycles. Sur la figure 6.13, on compare les prédictions de la formulation DIV pour le modèle de Chaboche modifié aux données EF issues de la même cellule unitaire cubique présentée précédemment. Pour des raisons de lisibilité des courbes, nous avons reporté pour les contraintes moyennes dans l'inclusion (cf. Fig. 6.13c) les 15 cycles de la formulation DIV (courbe pleine en bleue), mais uniquement les 5 premiers cycles (courbe en tirets rouges) et le 15<sup>ème</sup> cycle (courbe en tirets noirs) des données EF. Sur les autres figures sont reportées l'intégralité des 15 cycles DIV et EF.

On observe un très bon accord entre les prédictions du modèle et les simulations par EF pour le comportement macroscopique et la moyenne des contraintes dans la matrice. Comme on l'observe pour la contrainte macroscopique axiale, la dissymétrie caractérisant l'effet Bauschinger diminue continuellement avec le nombre de cycles. En effet, on passe d'une dissymétrie de 31.4 MPa pour le premier cycle à 5.9 MPa pour le quinzième. Cette évolution est très bien reproduite par la formulation DIV. On observe aussi, qu'à l'exception du premier cycle, les prédictions du modèle



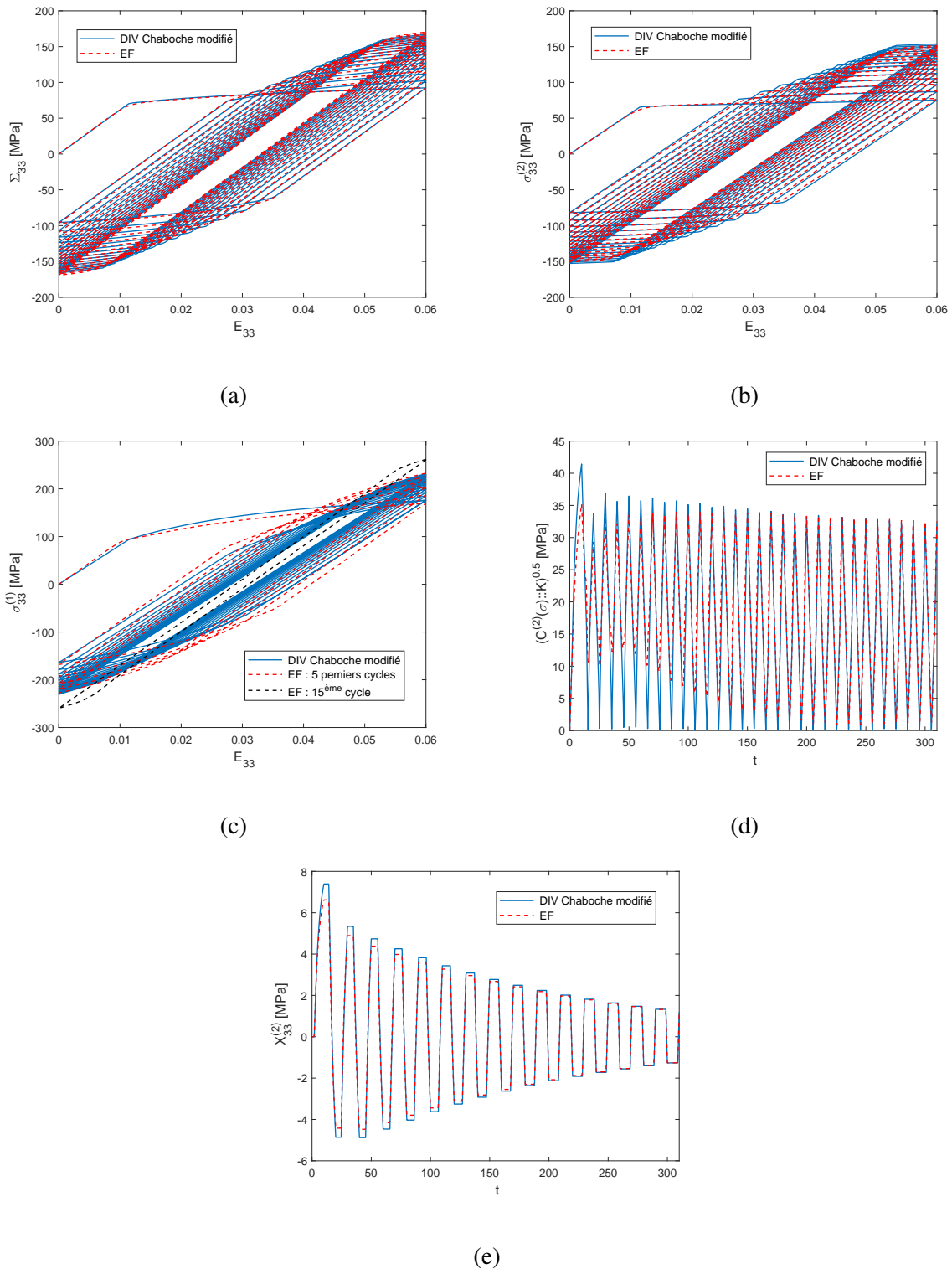


FIGURE 6.13: Composite composé d'une matrice élasto-plastique avec des érouissages cinématique non linéaire et isotrope combinés renforcée élastiquement soumis à un chargement radial de 15 cycles (Programme 5, Fig. 6.3),  $c^{(1)} = 0.17$ . (a) Contrainte macroscopique axiale, (b) Moyenne des contraintes axiales dans la matrice, (c) Moyenne des contraintes axiales dans l'inclusion, (d) Fluctuations des contraintes dans la matrice, (e) Moyenne axiale de la contrainte axiale de rappel dans la matrice.

surestiment les données numériques par EF pour la moyenne des contraintes dans l'inclusion. On remarque de plus, pour les fluctuations des contraintes, que les prédictions de la formulation DIV surestiment les données EF uniquement pendant les 7 premiers cycles (i.e. jusqu'à  $t = 150$  s). Pendant ces 7 premiers cycles, le modèle reproduit de manière assez satisfaisante les données EF mais prédit à tort des fluctuations nulles pendant les recharges plastiques. On observe pour les cycles suivants (cycles 8 à 15) que les données EF et les prédictions numériques sont confondues. On note aussi, que pour les derniers cycles, les simulations EF montrent cette fois-ci que les fluctuations des contraintes doivent s'annuler, en accord avec les prévisions du modèle DIV. Ceci s'explique par le fait que plus le nombre de cycles augmente, plus le domaine élastique augmente, et comme on le voit sur la figure 6.13a, plus le domaine plastique diminue. Donc, à la différence des premiers cycles, lorsque les EF annulent les fluctuations au cours des derniers cycles, le composite se trouve dans le régime élastique. On observe les mêmes effets sur la figure 6.13e représentant la moyenne de la contrainte de rappel dans la matrice. La formulation DIV surestime légèrement les données EF sur les 7 premiers cycles et est confondue avec les EF pour les 8 derniers. Le fait que l'écart entre les paliers élastiques diminue avec le nombre de cycles est dû, comme on vient de le mentionner, au fait que le composite entre de plus en plus tard dans le régime plastique.

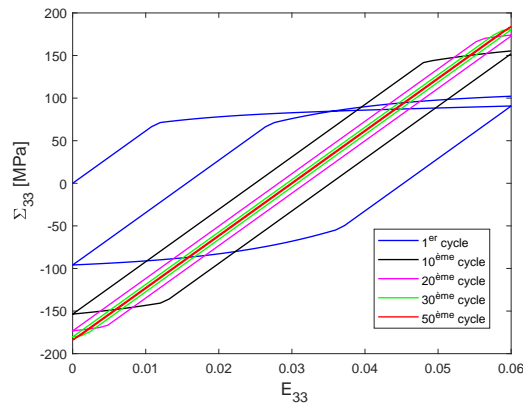


FIGURE 6.14: Contrainte macroscopique axiale d'un composite constitué d'une matrice élasto-plastique avec des érouissages cinématique non linéaire et isotrope combinés renforcée élastiquement soumis à un chargement radial de 50 cycles (Programme 5, Fig. 6.3),  $c^{(1)} = 0.17$ .

Nous avons vu sur la figure 6.13, que les prédictions de la formulation DIV sont en accord de manière très satisfaisant avec les données EF. Nous nous sommes interrogés sur l'état asymptotique des prédictions du modèle (accommodation, adaptation ou rochet). Pour cela, nous avons réalisé une simulation sur le même composite soumis à 50 cycles d'une extension macroscopique isochore. La figure 6.14 représente les prédictions de la formulation DIV. Pour analyser l'état asymptotique, nous n'avons pas comparé les prédictions DIV à des simulation EF. En effet, comme le modèle arrive à reproduire les données EF sur 15 cycles, nous avons considéré que

ses prédictions sur 50 cycles sont également bonnes. Pour une question de lisibilité, nous avons représenté sur cette figure uniquement les premier, 10<sup>ème</sup>, 20<sup>ème</sup>, 30<sup>ème</sup>, et 50<sup>ème</sup> cycles. On observe sur la figure 6.14 que plus le nombre de cycle augmente et plus le domaine élastique augmente. Pour le 50<sup>ème</sup> cycle, le modèle prédit une réponse asymptotique élastique. Ceci correspond donc à une adaptation.

### 6.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons cherché à évaluer la formulation DIV appliquée aux modèles de Chaboche modifié et de Ladevèze et développée au chapitre 5. Nous avons tout d'abord présenté la mise en œuvre numérique de ces deux modèles et les problèmes numériques rencontrés. Comme c'était déjà le cas en plasticité parfaite, on a à nouveau observé pour l'écrouissage cinématique non linéaire des sauts non physiques dans les courbes de comportements qui proviennent de la non unicité de la solution du système d'équations non linéaires. En appliquant des contraintes de régularisation dans l'algorithme développé, nous avons pu obtenir une contrainte macroscopique et des contraintes moyennes par phase continues, sans saut, ce qui n'est pas le cas des fluctuations des contraintes dans la matrice pour lesquelles subsiste un saut de faible intensité. De plus, à partir d'une certaine valeur de  $a^{(2)} = 100$  MPa, l'algorithme ne converge plus pour un cycle complet centré autour de  $E_{33} = 0$ . C'est pourquoi nous avons considéré dans les applications numériques uniquement des cycles en déformations positives pour des valeurs de  $a^{(2)} > 100$  MPa.

Une première étude a consisté à comparer les prédictions des deux modèles pour différentes variables d'écrouissage avec des données de simulations EF que nous avons réalisées. On a remarqué, pour de petites valeurs de  $a^{(2)}$ , que les deux modèles arrivent à retrouver les simulations EF. Par contre pour de fortes valeurs de  $a^{(2)}$ , le modèle de Ladevèze prédit un adoucissement du comportement macroscopique, ce qui n'a pas de justification physique. De plus, il sous-estime fortement les simulations EF. En revanche, le modèle de Chaboche modifié donne de bons résultats bien qu'il sous-estime un peu les EF. De plus, plus la valeur de  $a^{(2)}$  est importante, et plus le modèle de Ladevèze plastifie tôt, ce qui n'est pas le cas du modèle de Chaboche modifié qui va plastifier en même temps que les EF. On a aussi observé que, pour des valeurs de  $a^{(2)}$  faibles, les deux modèles prédisaient quasiment les mêmes comportements lorsque l'on faisait varier la valeur de  $\gamma^{(2)}$  et arrivaient à retrouver de manière satisfaisante les données EF. Enfin, les deux modèles, lorsque l'on fait tendre le paramètres d'écrouissage non linéaire  $\gamma^{(2)}$  vers zéro, fournissent des prédictions très proches des données de la formulation DIV pour une matrice avec de l'écrouissage cinématique linéaire avec ou sans écrouissage isotope.

Le modèle DIV a ensuite été appliqué à deux composites différents. Le premier composite est constitué d'une matrice élasto-plastique avec de l'écrouissage cinématique non linéaire et le second est constitué d'une matrice élasto-plastique avec des écrouissages cinématique non linéaire et isotrope combinés. On a observé que pour des valeurs de  $a^{(2)}$  faibles, i.e.  $a^{(2)} \leq 1$  GPa, les deux formulations DIV associées respectivement au modèle de Ladevèze et de Chaboche modifié, arrivent à reproduire les données EF de manière très satisfaisante avec une meilleure

reproduction de l'effet Bauschinger pour le modèle de Chaboche modifié. On remarque toutefois, que le modèle de Chaboche modifié n'arrive pas à reproduire les données des simulation EF pour le composite de Doghri et Ouair [27] pour lesquels la valeur de  $a^{(2)}$  est très élevée (17 GPa). Enfin, nous avons constaté que ce modèle arrive à reproduire les données EF pour un chargement de 15 cycles. Nous nous sommes alors intéressés aux prédictions de la réponse asymptotique du modèle en soumettant le composite à un chargement de 50 cycles. La réponse asymptotique prédite par le modèle est élastique, c'est à dire correspondant à une adaptation.

Dans les cinq premiers chapitres de ce mémoire, nous nous sommes intéressés à modéliser et valider la formulation DIV pour différents types de comportement de la matrice : visco-élasticité, élasto-plasticité avec des écrouissages cinématique linéaire et isotrope combinés, élasto-viscoplasticité sans écrouissage, élasto-plasticité avec des écrouissages cinématique non linéaire et isotrope combinés. Le point commun entre tous ces modèles réside dans le fait que les variables internes tensorielles  $\alpha$  considérées sont purement déviatoriques. Le prochain chapitre, sera consacré à la modélisation du comportement des composites ayant une matrice plastiquement compressible décrite à l'aide d'un critère de type Green.



## Extension aux composites élasto-plastiques avec une matrice compressible de type Green

### Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Comportement local et principes variationnels incrémentaux . . . . .</b>	<b>174</b>
<b>7.2</b>	<b>Double application de la procédure variationnelle incrémentale . . . . .</b>	<b>176</b>
7.2.1	Linéarisation du comportement local . . . . .	176
7.2.2	Homogénéisation du MLC à polarisation hétérogène intraphase . . .	181
7.2.3	Application à une matrice élasto-plastique renforcée par des particules sphériques . . . . .	183
7.2.4	Mise en œuvre numérique . . . . .	186
7.2.5	Difficultés numériques et résolution . . . . .	187
<b>7.3</b>	<b>Applications et discussions . . . . .</b>	<b>189</b>
7.3.1	Prédiction de la formulation DIV dans le cas limite d'une matrice de Von-Mises . . . . .	190
7.3.2	Prédiction de la formulation DIV pour une matrice de type Green . .	191
<b>7.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>193</b>

---

Dans ce chapitre, on se propose de faire une extension de la formulation DIV au cas de composites élasto-plastiques ayant une matrice de type Green. Le critère de plasticité de Green [38] [50] est un critère elliptique permettant de représenter le comportement de matériaux compressibles des matrices poreuses ou des poudres compactées [7] [94] [95]. Il dépend non seulement de la contrainte équivalente de Von-Mises mais également du premier invariant du tenseur des contraintes. Dans cette étude, après avoir présenté le comportement local régi par ce critère, nous allons le linéariser en introduisant un potentiel  $J_L$  rendant compte des spécificités de la matrice compressible. Après résolution des différentes conditions de stationnarité, on obtient un MLC à hétérogénéité intraphase qui sera homogénéisé en appliquant la procédure de Lahellec et al. [54]. Nous appliquerons ensuite la formulation établie au cas d'un composite constitué d'une matrice élasto-plastique de type Green renforcée par des particules sphériques élastiques. Nous obtenons alors un système non linéaire à résoudre numériquement. Puis, nous exposerons

la structure de l'algorithme et les problèmes numériques rencontrés. Enfin, nous présenterons quelques prédictions numériques de la formulation développée.

## 7.1 Comportement local et principes variationnels incrémentaux

### Comportement local

On considère un VER  $\Omega$  d'un matériau composite de  $N$ -phases avec  $\Omega^{(r)}$  le volume de la phase  $r$  ( $r = 1, \dots, N$ ) tel que  $\Omega = \cup_{r=1}^N \Omega^{(r)}$ . Les phases sont supposées de type MSG ayant un comportement local élasto-plastique avec un comportement de type Green sans écrouissage<sup>1</sup>. On rappelle que le critère de Green [38] (voir aussi [50]) est elliptique dans l'espace du 1<sup>er</sup> et 2<sup>nd</sup> invariant de  $\sigma$ . Il s'exprime comme une fonction quadratique du premier invariant des contraintes et de la contrainte équivalente de Von-Mises. Ce critère est adapté pour la description du comportement de poudres compactées ([7], [94] ou [95]) ou de matrices poreuses. Dans ce dernier cas, on notera qu'il peut être établi en appliquant des schémas d'homogénéisation non linéaire à des matériaux poreux ayant une matrice de Von-Mises ([71]). Cette classe de matériaux est décrite à l'aide de deux potentiels convexes associés à la variable d'état  $\alpha = \varepsilon^p$  décrivant la déformation plastique en général de trace non nulle.

Le premier potentiel convexe est l'énergie libre pour une phase notée  $r$

$$w^{(r)}(\varepsilon, \varepsilon^p) = \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon^p) : \mathbb{L}^{(r)} : (\varepsilon - \varepsilon^p). \quad (7.1)$$

Comme dans les chapitres précédents portant sur l'élasto-(visco)plasticité, la contrainte  $\sigma$  et la force thermodynamique irréversible  $\mathcal{A}_{\varepsilon^p}$  sont données par

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\partial w^{(r)}}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \varepsilon^p) = \mathbb{L}^{(r)} : (\varepsilon - \varepsilon^p) \\ \mathcal{A}_{\varepsilon^p} = -\frac{\partial w^{(r)}}{\partial \varepsilon^p}(\varepsilon, \varepsilon^p) = \mathbb{L}^{(r)} : (\varepsilon - \varepsilon^p) = \sigma. \end{cases} \quad (7.2)$$

Le second potentiel est le potentiel de dissipation noté  $\varphi^{(r)}(\dot{\varepsilon}^p)$  pour la phase notée  $r$ . L'expression de ce dernier est déterminée à partir de la fonction de charge elliptique

$$F(\sigma) = \frac{9}{2} \alpha^{(r)} (\sigma_m)^2 + (\sigma_{eq})^2 - (\sigma_y^{(r)})^2, \quad (7.3)$$

avec  $\alpha^{(r)}$  un scalaire positif ou nul caractérisant la compressibilité de la phase  $r$  et  $\sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma)$  la partie sphérique du tenseur des contraintes.

1. On notera que la prise en compte de l'écrouissage n'introduit pas d'énormes difficultés supplémentaires. La restriction volontaire ici à la plasticité parfaite se justifie par l'objectif visé qui est celui de rendre compte des effets de dilataance/contractance plastique volumétrique.

**Remarque 12.** La figure 7.1 représente la fonction de charge de Green pour différentes valeurs de  $\alpha^{(r)}$  incluant la valeur 0 correspondant à la fonction de charge de Von-Mises. On observe que plus la valeur de  $\alpha^{(r)}$  est petite et plus la fonction de charge du matériau de Green va tendre vers celle de Von-Mises.(7.3).

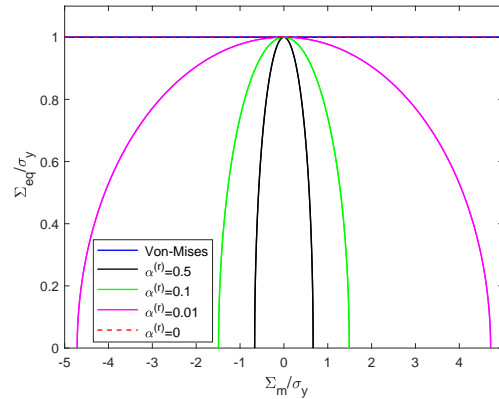


FIGURE 7.1: Fonction de charge de Green pour différentes valeur de  $\alpha^{(r)}$

Nous nous proposons de donner ici l'expression du potentiel de dissipation pour le critère de Green en nous inspirant de Dormieux et al. [28]. A cette fin, nous allons appliquer la transformée de Legendre-Fenchel

$$\varphi^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{C}} \{ \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \}, \quad (7.4)$$

avec  $\mathcal{C}$  l'ensemble convexe défini par

$$\mathcal{C} = \{ \boldsymbol{\sigma} / F(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 \}, \quad (7.5)$$

où  $F$  défini par l'équation (7.3). Dans toute la suite de ce chapitre, on notera  $a_m = \frac{1}{3}\text{tr}(a)$  et  $\mathbf{a}_d$  respectivement la partie sphérique et la partie déviatorique du tenseur  $\mathbf{a}$  tel que

$$\mathbf{a} = a_m \mathbf{I} + \mathbf{a}_d, \quad (7.6)$$

avec  $\mathbf{I}$  le tenseur identité d'ordre deux. L'équation (7.4) se réécrit

$$\begin{aligned} \varphi^{(r)} &= \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{C}} \{ 3 \sigma_m \dot{\varepsilon}_m^p + \boldsymbol{\sigma}_d : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^p \} \\ &= \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{C}} \left\{ 3 \sqrt{\frac{\alpha^{(r)}}{2}} \sigma_m \sqrt{\frac{2}{\alpha^{(r)}}} \dot{\varepsilon}_m^p + \sigma_{eq} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^p \right\}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

En appliquant la majoration de type Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\varphi^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{C}} \left\{ \sqrt{\frac{9 \alpha^{(r)}}{2} (\sigma_m)^2 + (\sigma_{eq})^2} \sqrt{\frac{2}{\alpha^{(r)}} (\dot{\varepsilon}_m^p)^2 + (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^p)^2} \right\}. \quad (7.8)$$



D'où, à partir du critère  $F(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0$ , on a :

$$\varphi^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \sigma_y^{(r)} \sqrt{\frac{2}{\alpha^{(r)}} (\dot{\varepsilon}_m^p)^2 + (\dot{\varepsilon}_{eq}^p)^2}, \quad (7.9)$$

que l'on peut réécrire

$$\varphi^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \sigma_y^{(r)} \sqrt{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \left( \frac{1}{\alpha^{(r)}} \mathbb{J} + \mathbb{K} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}. \quad (7.10)$$

On notera que le potentiel de dissipation  $\varphi$  n'est défini que pour  $\alpha^{(r)} \neq 0$ . De fait, le cas de la matrice plastique obéissant au critère de Von-Mises ne peut être atteint qu'asymptotiquement.

### Principes variationnels local et global

Les principes variationnels incrémentaux local et global du problème ont déjà été présentés dans un cadre général au chapitre 2 (voir sous section 1.2.2). Il suffit de réduire  $\alpha$  à la déformation plastique  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ , en se rappelant que pour le modèle associé au critère de Green,  $\frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^p) = \varepsilon_m^p \neq 0$ .

## 7.2 Double application de la procédure variationnelle incrémentale

La démarche suivie dans cette partie, similairement au chapitre 3 (cf. partie 3.2.1), consiste à appliquer deux fois la procédure variationnel conduisant au comportement effectif. Pour cela, on fait à nouveau appel à la démarche en deux étapes d'Agoras et al. [1]. La première étape utilise la procédure variationnelle de Ponte Castañeda [86] en vue de linéariser le comportement local et permet d'obtenir un MLC à polarisation hétérogène au sein des phases. La seconde application de la procédure variationnelle correspond à l'utilisation de la méthode développée par Lahellec et al. [54] et a pour objectif d'homogénéiser le MLC à propriétés hétérogènes en l'approchant par un MLC à polarisation homogène par phase.

### 7.2.1 Linéarisation du comportement local

En raison du caractère non quadratique du potentiel de dissipation  $\varphi^{(r)}$  (cf. Eq. (7.10)), le potentiel incrémental  $J$  défini dans l'équation (1.24)<sub>2,3</sub> est difficile à homogénéiser. Pour cette

raison, on introduit d'abord un potentiel incrémental linéarisé  $J_L^{(r)}$  sous la forme,

$$\begin{cases} J_L(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) = \sum_{r=1}^N J_L^{(r)}(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \eta_{\varepsilon^p}^{(r)}) \chi^{(r)}(\underline{x}) & \text{avec} \\ J_L^{(r)}(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \eta_{\varepsilon^p}^{(r)}) = w^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) : \left( \frac{1}{\alpha^{(r)}} \mathbb{J} + \mathbb{K} \right) : (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p), \end{cases} \quad (7.11)$$

où la notation  $\{\eta_{\varepsilon^p}\}$  correspond à l'ensemble des viscosités des phases  $\{\eta_{\varepsilon^p}^{(1)}, \dots, \eta_{\varepsilon^p}^{(N)}\}$ . L'introduction du tenseur  $\frac{1}{\alpha} \mathbb{J} + \mathbb{K}$ , permet de prendre en compte les déformations volumiques plastiques en plus des déformations équivalente au sens de Von-Mises.

On reprend maintenant l'idée la procédure variationnelle, déjà utilisée dans les chapitres précédents et qui consiste à additionner et à soustraire le potentiel  $J_L$  au potentiel  $J$ , i.e.  $J = J_L + J - J_L$ , tel que le premier terme  $J_L$  peut être homogénéisé grâce à son caractère quadratique, et la différence  $\Delta J = J - J_L$  peut être évaluée séparément.

### Approximation du potentiel incrémental condensé effectif

L'introduction du potentiel incrémental linéarisé conduit à définir

$$\Delta J^{(r)} = J^{(r)} - J_L^{(r)} = \Delta t \varphi^{(r)} \left( \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p}{\Delta t} \right) - \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) : \left( \frac{1}{\alpha^{(r)}} \mathbb{J} + \mathbb{K} \right) : (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p). \quad (7.12)$$

En reportant (7.12) dans la formulation variationnelle (1.26) et en considérant la définition (1.24) la condition d'infimum vis à vis de  $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\varepsilon}^p$  peut être placée en dehors de la moyenne. On obtient alors

$$\tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) = \inf_{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}} \left\{ \inf_{\boldsymbol{\varepsilon}^p} \langle J_L(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) + \Delta J(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \rangle \right\}. \quad (7.13)$$

Comme exposé dans le chapitre 3 (voir partie 3.2.1), il est possible d'approcher l'équation (7.13) du potentiel  $\tilde{w}_\Delta$  à l'aide de conditions de stationnarité. En suivant la même démarche que dans les chapitres précédents, on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) &\approx \tilde{w}_\Delta^{VAR}(\mathbf{E}, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \\ &= \inf_{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}} \left\{ \inf_{\boldsymbol{\varepsilon}^p} \langle J_L(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \rangle + \langle \text{stat}_{\boldsymbol{\varepsilon}^p} \Delta J(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Enfin, une dernière optimisation par rapport à l'ensemble  $\{\eta_{\varepsilon^p}\}$  est considérée. Celle-ci conduit à l'estimation finale de la formulation DIV de  $\tilde{w}_\Delta$  qui est définie par

$$\tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) \approx \tilde{w}_\Delta^{DIV}(\mathbf{E}) = \text{stat}_{\{\eta_{\varepsilon^p}\}} \tilde{w}_\Delta^{VAR}(\mathbf{E}, \{\eta_{\varepsilon^p}\}). \quad (7.15)$$

### Conditions de stationnarité

On se propose maintenant de développer toutes les conditions de stationnarité apparaissant dans (7.14) et (7.15). On procédera tout d'abord à l'écriture de la stationnarité de  $\Delta J$  vis à vis de  $\dot{\varepsilon}^p$ , ce qui fournira une expression de la viscosité  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$ . Puis le développement de la condition de stationnarité de  $\tilde{w}_\Delta$  par rapport à  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$  conduira à une égalité entre  $\widehat{\dot{\varepsilon}}_m^{p(r)}$  et  $\widehat{\dot{\varepsilon}}_d^{p(r)}$ , valeur de  $\dot{\varepsilon}_m^p$  et  $\dot{\varepsilon}_d^p$  calculée à la stationnarité de  $\Delta J$ , et  $\overline{\dot{\varepsilon}}_m^{p(r)}$  et  $\overline{\dot{\varepsilon}}_d^{p(r)}$ , moments d'ordre deux de  $\dot{\varepsilon}_m^p = \frac{1}{3}\text{tr}(\dot{\varepsilon}^p)$  et  $\dot{\varepsilon}_d^p = \dot{\varepsilon}^p - \dot{\varepsilon}_m^p \mathbf{I}$  dans la phase  $r$ . Enfin, la stationnarité de  $J_L$  en fonction de  $\varepsilon^p$  fournira une expression de  $\varepsilon^p$  ainsi qu'une interprétation mécanique du module visqueux  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$  dans le cadre de la procédure variationnelle.

### Stationnarité de $\Delta J$ par rapport à $\dot{\varepsilon}^p$

La condition de stationnarité en fonction de  $\dot{\varepsilon}^p$  conduit à

$$\partial \Delta J = \mathbf{0} \Rightarrow \Delta t \frac{\partial \phi^{(r)}}{\partial \dot{\varepsilon}^p}(\dot{\varepsilon}^p) - 2 \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \Delta t \left( \frac{1}{\alpha^{(r)}} \mathbb{J} + \mathbb{K} \right) : \dot{\varepsilon}^p = \mathbf{0}. \quad (7.16)$$

Dans ce système,  $\dot{\varepsilon}^p$  est a priori un champ inconnu qui dépend de la position  $\underline{x}$  dans la phase  $r$ . Or, le potentiel  $\phi^{(r)}$  garde la même forme en chaque point  $\underline{x}$  dans la phase  $r$  et le module visqueux  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$  est uniforme dans la phase  $r$ . Ceci implique que tous les champs sont uniformes par phase.

En particulier,  $\dot{\varepsilon}_{eq}^p$  sera noté  $\widehat{\dot{\varepsilon}}_{eq}^{p(r)}$  et  $\dot{\varepsilon}_m^p$  sera noté  $\widehat{\dot{\varepsilon}}_m^{p(r)}$ .

En considérant l'expression (7.9) du potentiel de dissipation  $\varphi^{(r)}$  et en le différentiant par rapport à  $\dot{\varepsilon}_m^p$  et  $\dot{\varepsilon}_{eq}^p$ , on obtient une expression du module visqueux de la forme

$$\eta_{\varepsilon^p}^{(r)} = \frac{\sigma_y^{(r)}}{3 \sqrt{\frac{2}{\alpha^{(r)}} \left( \widehat{\dot{\varepsilon}}_m^{p(r)} \right)^2 + \left( \widehat{\dot{\varepsilon}}_{eq}^{p(r)} \right)^2}}. \quad (7.17)$$

Cette équation nous permet de calculer  $\Delta J$  sous la condition de stationnarité. En effet, on observe dans (7.17) que le module visqueux  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$  est une fonction dépendant de  $\widehat{\dot{\varepsilon}}_m^{p(r)}$  et  $\widehat{\dot{\varepsilon}}_{eq}^{p(r)}$ . La relation (7.17) pouvant se réécrire

$$\sqrt{\frac{2}{\alpha^{(r)}} \left( \widehat{\dot{\varepsilon}}_m^{p(r)} \right)^2 + \left( \widehat{\dot{\varepsilon}}_{eq}^{p(r)} \right)^2} = \frac{\sigma_y^{(r)}}{3 \eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}, \quad (7.18)$$

la stationnarité de  $\Delta J$  (7.16) conduit à

$$\left\langle \text{stat}_{\varepsilon^p} \Delta J (\cdot, \varepsilon^p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \right\rangle = \Delta t \sum_{r=1}^N c^{(r)} f^{(r)} \left( \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \right) \quad \text{avec}$$

$$f^{(r)} \left( \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \right) = \sigma_y^{(r)} \sqrt{\frac{2}{\alpha^{(r)}} \left( \widehat{\dot{\varepsilon}}_m^p \right)^2 + \left( \widehat{\dot{\varepsilon}}_{eq}^p \right)^2} - \frac{3}{2} \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \left[ \frac{2}{\alpha^{(r)}} \left( \widehat{\dot{\varepsilon}}_m^p \right)^2 + \left( \widehat{\dot{\varepsilon}}_{eq}^p \right)^2 \right]. \quad (7.19)$$

En considérant l'équation (7.18) dans (7.19)<sub>2</sub>, il vient

$$f^{(r)} \left( \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \right) = \frac{\left( \sigma_y^{(r)} \right)}{3 \eta_{\varepsilon^p}^{(r)}} - \frac{3}{2} \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \left( \frac{\sigma_y^{(r)}}{3 \eta_{\varepsilon^p}^{(r)}} \right)^2 = \frac{\left( \sigma_y^{(r)} \right)}{6 \eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}. \quad (7.20)$$

Cette seconde expression de  $f^{(r)} \left( \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \right)$  sera utile dans l'établissement de l'équation (7.32).

### Stationnarité de $\tilde{w}_{\Delta}^{VAR}$ en fonction de $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$

En faisant appel aux équations (7.11), (7.12) et (7.14), la condition de stationnarité de  $\tilde{w}_{\Delta}^{VAR}$  en fonction de  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$  s'écrit

$$\frac{1}{\Delta t} \left\langle \left( \varepsilon^p - \varepsilon_n^p \right) : \left( \frac{1}{\alpha^{(r)}} \mathbb{J} + \mathbb{K} \right) : \left( \varepsilon^p - \varepsilon_n^p \right) \right\rangle^{(r)} - \Delta t \frac{3}{\alpha^{(r)}} \left( \widehat{\dot{\varepsilon}}_m^p \right)^2 - \Delta t \frac{3}{2} \left( \widehat{\dot{\varepsilon}}_{eq}^p \right)^2$$

$$+ \left[ \frac{\sigma_y^{(r)}}{\sqrt{\frac{2}{\alpha^{(r)}} \left( \widehat{\dot{\varepsilon}}_m^p \right)^2 + \left( \widehat{\dot{\varepsilon}}_{eq}^p \right)^2}} - 3 \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \right] \Delta t \frac{2}{\alpha^{(r)}} \widehat{\dot{\varepsilon}}_m^p \frac{\partial \widehat{\dot{\varepsilon}}_m^p}{\partial \eta_{\varepsilon^p}^{(r)}} \left( \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \right)$$

$$+ \left[ \frac{\sigma_y^{(r)}}{\sqrt{\frac{2}{\alpha^{(r)}} \left( \widehat{\dot{\varepsilon}}_m^p \right)^2 + \left( \widehat{\dot{\varepsilon}}_{eq}^p \right)^2}} - 3 \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \right] \Delta t \widehat{\dot{\varepsilon}}_{eq}^p \frac{\partial \widehat{\dot{\varepsilon}}_{eq}^p}{\partial \eta_{\varepsilon^p}^{(r)}} \left( \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \right) = 0, \quad (7.21)$$

dans laquelle, en reportant l'expression (7.17) de la viscosité  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$ , on vérifié que les termes entre crochets s'annulent. La projection de cette équation, respectivement sur  $\mathbb{J}$  et  $\mathbb{K}$ , conduit à

$$\widehat{\dot{\varepsilon}}_m^p = \overline{\overline{\dot{\varepsilon}}_m^p} = \sqrt{\langle (\dot{\varepsilon}_m^p)^2 \rangle^{(r)}} \quad \text{et} \quad \widehat{\dot{\varepsilon}}_{eq}^p = \overline{\overline{\dot{\varepsilon}}_{eq}^p} = \sqrt{\langle (\dot{\varepsilon}_{eq}^p)^2 \rangle^{(r)}}. \quad (7.22)$$

L'équation (7.17) se réécrit alors en fonction des moments d'ordre deux de  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  sous la forme

$$\eta_{\varepsilon^p}^{(r)} = \frac{\sigma_y^{(r)}}{3 \sqrt{\frac{2}{\alpha^{(r)}} \left( \overline{\dot{\varepsilon}_m^p}^{(r)} \right)^2 + \left( \overline{\dot{\varepsilon}_{eq}^p}^{(r)} \right)^2}}. \quad (7.23)$$

### Stationnarité de $\langle J_L \rangle$ en fonction de $\boldsymbol{\varepsilon}^p$

La condition de stationnarité sur  $J_L$  par rapport à  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  s'écrit

$$\frac{\partial J_L}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} = \mathbf{0} \Rightarrow -\mathbb{L}^{(r)} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + 2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} \left( \frac{1}{\alpha^{(r)}} \mathbb{J} + \mathbb{K} \right) : (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) = \mathbf{0}. \quad (7.24)$$

Cette équation permet d'obtenir une expression de la déformation plastique

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \left[ \mathbb{L}^{(r)} + 2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} \left( \frac{1}{\alpha^{(r)}} \mathbb{J} + \mathbb{K} \right) \right]^{-1} : \left[ \mathbb{L}^{(r)} : \boldsymbol{\varepsilon} + 2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} \left( \frac{1}{\alpha^{(r)}} \mathbb{J} + \mathbb{K} \right) : \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \right]. \quad (7.25)$$

A l'aide de (7.2), l'expression (7.24) se réécrit sous la forme

$$\boldsymbol{\sigma} = 2 \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \left( \frac{1}{\alpha^{(r)}} \mathbb{J} + \mathbb{K} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \quad (7.26)$$

pour laquelle on rappelle la notation  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p}{\Delta t}$ . Ainsi, comme le montrent les équations (7.23) et (7.26),  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$  s'interprète comme le module visqueux sécant modifié associé au comportement élasto-plastique sans écrouissage et dépendant des seconds moments de la déformation plastique,  $\overline{\dot{\varepsilon}_m^p}^{(r)}$  et  $\overline{\dot{\varepsilon}_{eq}^p}^{(r)}$ . A partir de la partie sphérique (resp. déviatorique) de (7.26), on déduit

$$\left( \overline{\sigma_m}^{(r)} \right)^2 = \left( \frac{2 \eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\alpha} \right)^2 \left( \overline{\dot{\varepsilon}_m^p}^{(r)} \right)^2 \quad \text{et} \quad \left( \overline{\sigma_d}^{(r)} \right)^2 = \left( 3 \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \right)^2 \left( \overline{\dot{\varepsilon}_{eq}^p}^{(r)} \right)^2. \quad (7.27)$$

En tenant compte de (7.23), on obtient alors

$$\frac{9}{2} \alpha^{(r)} \left( \overline{\sigma_m}^{(r)} \right)^2 + \left( \overline{\sigma_d}^{(r)} \right)^2 = \left( \sigma_y^{(r)} \right)^2. \quad (7.28)$$

On retrouve ainsi la surface de plasticité de type Green définie par la nullité de la fonction de charge définie par l'équation (7.3), mais appliquée ici aux moments d'ordre deux du champ de contraintes sur la phase  $r$ .

### Détermination du MLC à polarisation hétérogène intraphase

En reportant l'expression (7.25) de  $\varepsilon^p$  dans la définition (7.11) de  $J_L$ , on obtient un MLC thermo-élastique défini par l'énergie libre  $w_L^{(r)}$  suivante

$$w_L^{(r)}(\varepsilon) = \inf_{\varepsilon^p} J_L^{(r)}(\underline{x}, \varepsilon, \varepsilon^p, \eta_{\varepsilon^p}^{(r)}) = \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbb{L}_L^{(r)} : \varepsilon + \boldsymbol{\tau}_L^{(r)}(\underline{x}) : \varepsilon + \frac{1}{2} f_L^{(r)}(\underline{x}) \quad (7.29)$$

avec

$$\begin{cases} \mathbb{L}_L^{(r)} = 2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} \left[ \mathbb{L}^{(r)} + 2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} \left( \frac{1}{\alpha^{(r)}} \mathbb{J} + \mathbb{K} \right) \right]^{-1} : \left[ \frac{1}{\alpha^{(r)}} \mathbb{J} + \mathbb{K} \right] : \mathbb{L}^{(r)} \\ \boldsymbol{\tau}_L^{(r)}(\underline{x}) = -\mathbb{L}_L^{(r)} : \boldsymbol{\varepsilon}_n^p(\underline{x}) \\ f_L^{(r)}(\underline{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p(\underline{x}) : \mathbb{L}_L^{(r)} : \boldsymbol{\varepsilon}_n^p(\underline{x}). \end{cases} \quad (7.30)$$

Similairement aux comportements élasto-plastiques précédemment étudiés, une telle énergie correspond à un MLC à polarisation hétérogène intraphase. En effet, la polarisation  $\boldsymbol{\tau}_L^{(r)}$  et le champ scalaire  $f_L^{(r)}$  dépendent de  $\underline{x}$  à travers  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p(\underline{x})$ . En conséquence, l'énergie libre effective de ce MLC est définie par

$$\tilde{w}_L(\mathbf{E}, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) = \inf_{\langle \varepsilon \rangle = \mathbf{E}} \langle w_L(\cdot, \varepsilon, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \rangle. \quad (7.31)$$

A partir des équations (7.14), (7.15), (7.19), (7.20) et (7.22), il vient

$$\tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) \approx \tilde{w}_\Delta^{DIV}(\mathbf{E}) = \text{stat}_{\{\eta_{\varepsilon^p}\}} \tilde{w}_\Delta^{VAR}(\mathbf{E}, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) = \tilde{w}_L(\mathbf{E}, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) + \Delta t \sum_{r=1}^N c^{(r)} \frac{\langle \sigma_y^{(r)} \rangle}{6 \eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}. \quad (7.32)$$

En prenant en compte les conditions de stationnarité en fonction de  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$ , on obtient

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial \tilde{w}_\Delta}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}) \approx \frac{\partial \tilde{w}_\Delta^{DIV}}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}) = \frac{\partial \tilde{w}_L}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}), \quad (7.33)$$

où  $\tilde{w}_L(\mathbf{E})$  représente la valeur de  $\tilde{w}_L(\mathbf{E}, \{\eta_{\varepsilon^p}\})$  calculée pour l'ensemble  $\{\eta_{\varepsilon^p}\}$  optimal.

### 7.2.2 Homogénéisation du MLC à polarisation hétérogène intraphase

Du fait que le MLC  $w_L$  soit hétérogène intraphase, il n'est pas possible de déterminer ses réponses locale et globale par un schéma d'homogénéisation linéaire classique. A cette fin, nous allons uniformiser le comportement local en suivant la procédure de Lahellec et al. [54]. Le développement de cette procédure est strictement identique à celle réalisée dans la partie 3.2.2. Elle permet d'aboutir au comportement effectif donnée à l'équation (3.46).

**Composites élasto-plastiques de type Green à phases isotropes**

Comme nous l'avons considéré dans les chapitres précédents, on suppose que les phases constituantes du composite décrites dans la partie 5.2.1 ainsi que les tenseurs d'élasticités du MLC  $w_0$  sont isotropes (voir Eq. (5.98)).

A la différence des chapitres précédents, le champ  $\varepsilon_n^p$  dont dépend  $\tau_L^{(r)}(\underline{x})$  à travers l'expression (7.30)<sub>2</sub> n'est plus purement déviatorique. Par conséquent, la forme de l'expression (7.30)<sub>2</sub> montre que  $\tau_L^{(r)}(\underline{x})$  n'est pas non plus déviatorique. Ainsi, dans le présent cas étudié, on a

$$k^{(r)} \neq k_L^{(r)} \neq k_0^{(r)}, \quad (7.34)$$

contrairement à l'équation (3.50) qui était obtenue pour les autres cas de comportement traités lors des chapitres précédents. Sous ces conditions d'isotropie, (7.30) se réécrit

$$\begin{cases} \mathbb{L}_L^{(r)} = 3 k_L^{(r)} \mathbb{J} + 2 \mu_L^{(r)} \mathbb{K} \\ \tau_L^{(r)}(\underline{x}) = -3 k_L^{(r)} \varepsilon_{n,m}^p \mathbf{I} - 2 \mu_L^{(r)} \varepsilon_{n,d}^p \\ f_L^{(r)}(\underline{x}) = 9 k_L^{(r)} (\varepsilon_{n,m}^p)^2 + 2 \mu_L^{(r)} \varepsilon_{n,d}^p : \varepsilon_{n,d}^p \end{cases} \quad (7.35)$$

avec

$$k_L^{(r)} = \frac{2 \eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\alpha^{(r)} \Delta t} \frac{k^{(r)}}{3 k^{(r)} + 2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\alpha^{(r)} \Delta t}} \quad \text{et} \quad \mu_L^{(r)} = \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} \frac{\mu^{(r)}}{\mu^{(r)} + \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t}}. \quad (7.36)$$

De même, l'expression (7.25) de  $\varepsilon^p$  devient

$$\varepsilon^p = \left( \beta_m^{(r)} \mathbb{J} + \beta_d^{(r)} \mathbb{K} \right) : \varepsilon + \left( \gamma_m^{(r)} \mathbb{J} + \gamma_d^{(r)} \mathbb{K} \right) : \varepsilon_n^p, \quad (7.37)$$

avec

$$\begin{aligned} \beta_m^{(r)} &= \frac{3 k^{(r)}}{3 k^{(r)} + 2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\alpha^{(r)} \Delta t}}, & \beta_d^{(r)} &= \frac{\mu^{(r)}}{\mu^{(r)} + \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t}}, \\ \gamma_m^{(r)} &= \frac{2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\alpha^{(r)} \Delta t}}{3 k^{(r)} + 2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\alpha^{(r)} \Delta t}}, & \gamma_d^{(r)} &= \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)} / \Delta t}{\mu^{(r)} + \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t}}. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Afin de déterminer complètement les expressions de  $\mathbb{L}_L^{(r)}$  et  $\tau_L^{(r)}$ , il est nécessaire de déterminer celle de la viscosité sécante  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$ . Pour cela, il faut réussir à évaluer  $\overline{\overline{\varepsilon_m^p}}^{(r)}$  et  $\overline{\overline{\varepsilon_d^p}}^{(r)}$  (cf. (7.23)). A partir de (7.37) et (7.38), et en remarquant que  $\gamma_m^{(r)} - 1 = -\beta_m^{(r)}$  et que  $\gamma_d^{(r)} - 1 = -\beta_d^{(r)}$ , il vient

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\varepsilon_m^p}}^{(r)} &= \frac{\beta_m^{(r)}}{\Delta t} \sqrt{\left( \overline{\overline{\varepsilon_m}}^{(r)} \right)^2 + \left( \overline{\overline{\varepsilon_{n,m}^p}}^{(r)} \right)^2 - 2 \langle \varepsilon_m(\underline{x}) \varepsilon_{n,m}^p(\underline{x}) \rangle^{(r)}}, \\ \overline{\overline{\varepsilon_d^p}}^{(r)} &= \frac{\beta_d^{(r)}}{\Delta t} \sqrt{\left( \overline{\overline{\varepsilon_d}}^{(r)} \right)^2 + \left( \overline{\overline{\varepsilon_{n,d}^p}}^{(r)} \right)^2 - \frac{4}{3} \langle \varepsilon_d(\underline{x}) : \varepsilon_{n,d}^p(\underline{x}) \rangle^{(r)}}, \end{aligned} \quad (7.39)$$

pour lesquels il importe maintenant de déterminer  $\langle \varepsilon_m(\underline{x}) \varepsilon_{n,m}^p(\underline{x}) \rangle^{(r)}$  et  $\langle \varepsilon_d(\underline{x}) : \varepsilon_{n,d}^p(\underline{x}) \rangle^{(r)}$ . A cette fin, on part de (7.29) associé à  $\sigma = \frac{\partial w_L^{(r)}}{\partial \varepsilon}$

$$\sigma = \mathbb{L}_L^{(r)} : \varepsilon + \tau_L^{(r)} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_m = 3 k_L^{(r)} (\varepsilon_m - \varepsilon_{n,m}^p) \\ \sigma_d = 2 \mu_L^{(r)} (\varepsilon_d - \varepsilon_{n,d}^p). \end{cases} \quad (7.40)$$

Il est alors possible d'isoler  $\langle \varepsilon_m(\underline{x}) \varepsilon_{n,m}^p(\underline{x}) \rangle^{(r)}$  et  $\langle \varepsilon_d(\underline{x}) : \varepsilon_{n,d}^p(\underline{x}) \rangle^{(r)}$ , de sorte que

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_m(\underline{x}) \varepsilon_{n,m}^p(\underline{x}) \rangle^{(r)} &= \frac{1}{2} \left( \left( \overline{\overline{\varepsilon_m}}^{(r)} \right)^2 + \left( \overline{\overline{\varepsilon_{n,m}^p}}^{(r)} \right)^2 - \left( \frac{\overline{\overline{\sigma_m}}^{(r)}}{3 k_L^{(r)}} \right)^2 \right) \\ \langle \varepsilon_d(\underline{x}) : \varepsilon_{n,d}^p(\underline{x}) \rangle^{(r)} &= \frac{1}{2} \left( \left( \overline{\overline{\varepsilon_d}}^{(r)} \right)^2 + \left( \overline{\overline{\varepsilon_{n,d}^p}}^{(r)} \right)^2 - \left( \frac{\overline{\overline{\sigma_d}}^{(r)}}{3 \mu_L^{(r)}} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (7.41)$$

En reportant respectivement (7.41)<sub>1</sub> et (7.41)<sub>2</sub> dans (7.39)<sub>1</sub> et (7.39)<sub>2</sub>, les expressions (7.39) se réécrivent

$$\overline{\overline{\dot{\varepsilon}_m^p}}^{(r)} = \left( \frac{\beta_m^{(r)}}{3 k_L^{(r)} \Delta t} \right)^2 \left( \overline{\overline{\sigma_m}}^{(r)} \right)^2 \quad \text{et} \quad \overline{\overline{\dot{\varepsilon}_d^p}}^{(r)} = \left( \frac{\beta_d^{(r)}}{3 \mu_L^{(r)} \Delta t} \right)^2 \left( \overline{\overline{\sigma_d}}^{(r)} \right)^2. \quad (7.42)$$

Comme on a vu précédemment, les moments d'ordre deux de  $\varepsilon$  et  $\sigma$ , peuvent être approchés par les moments d'ordre deux de  $\varepsilon_0$  et  $\sigma_0$ , qui sont les déformations et les contraintes du MLC à polarisation homogène par phase. A partir de l'expression suivante de  $\sigma_0$ ,

$$\sigma_0 = \frac{\partial w_0^{(r)}}{\partial \varepsilon_0} (\varepsilon_0) = 3 k_0^{(r)} \varepsilon_{0,m} \mathbf{I} + 2 \mu_0^{(r)} \varepsilon_{0,d} + \tau_{0,m}^{(r)} \mathbf{I} + \tau_{0,d}^{(r)}, \quad (7.43)$$

on détermine les moments d'ordre deux des parties sphériques et déviatoriques de  $\sigma$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\sigma_{0,m}}}^{(r)} &= \sqrt{\left( 3 k_0^{(r)} \right)^2 \left( \overline{\overline{\varepsilon_{0,m}}}^{(r)} \right)^2 + \left( \tau_{0,m}^{(r)} \right)^2 + 6 k_0^{(r)} \overline{\overline{\varepsilon_{0,m}}}^{(r)} \tau_{0,m}^{(r)}} \\ \overline{\overline{\sigma_{0,d}}}^{(r)} &= \sqrt{\left( 2 \mu_0^{(r)} \right)^2 \left( \overline{\overline{\varepsilon_{0,d}}}^{(r)} \right)^2 + \frac{3}{2} \tau_{0,d}^{(r)} : \tau_{0,d}^{(r)} + 6 \mu_0^{(r)} \overline{\overline{\varepsilon_{0,d}}}^{(r)} : \tau_{0,d}^{(r)}}, \end{aligned} \quad (7.44)$$

ce qui fournit une estimation des deux quantités dans (7.42).

### 7.2.3 Application à une matrice élasto-plastique renforcée par des particules sphériques

Dans cette partie, nous allons appliquer la formulation DIV proposée au cas d'un matériau composite biphasé composé d'une matrice élasto-plastique de type Green sans écrouissage



renforcée par des particules sphériques élastiques distribuées de manière aléatoire et sphérique. On rappelle que dans ce contexte, les indices (1) et (2) représentent respectivement la phase inclusionnaire et la phase matricielle.

Les moments d'ordre un sur les phases sont obtenus à partir des équations (3.56) et (3.57). Les inclusions étant élastiques, l'utilisation des bornes de Hashin et Shtrikman pour calculer les moyennes des champs du MLC  $w_0$  assurent que ces derniers sont uniformes sur la phase inclusionnaire de sorte que  $C^{(1)}(\varepsilon_0) = 0$ . A partir de l'équation (3.45), on retrouve l'égalité de l'équation (2.67). De plus, en faisant la même hypothèse (2.68) que Lahellec et al. [54], l'équation (3.44) permet de retrouver (2.69).

### Résumé du système non linéaire

Dans cette partie, nous allons résumer les équations que doit satisfaire la formulation DIV proposée pour le composite à matrice élasto-plastique de Green.

La phase inclusionnaire étant élastique linéaire, et en suivant la démarche de la partie 3.2.3, on retrouve alors l'équation (3.59) fournissant des relations entre les paramètres des MLC dans l'inclusion.

Dans la phase matricielle, les modules  $k_0^{(2)}$ ,  $\mu_0^{(2)}$ ,  $\tau_0^{(2)}$ ,  $k_L^{(2)}$ ,  $\mu_L^{(2)}$  et  $\tau_L^{(2)}$  qui caractérisent les MLC  $w_0$  et  $w_L$  doivent être calculés. Les modules sécants  $k_L^{(2)}$  et  $\mu_L^{(2)}$  ainsi que la polarisation  $\tau_L^{(2)}$  sont donnés par les équations (7.36) et (7.35)<sub>2</sub>. L'expression de la polarisation  $\tau_0^{(2)}$  pour des composites à phases isotropes est déterminée à partir de (3.44), de sorte que

$$\tau_0^{(2)} = 3 \left( k_L^{(2)} - k_0^{(2)} \right) \overline{\varepsilon_{0,m}}^{(2)} \mathbf{I} + 2 \left( \mu_L^{(2)} - \mu_0^{(2)} \right) \overline{\varepsilon_{0,d}}^{(2)} + \overline{\tau_L}^{(2)}. \quad (7.45)$$

De même, en considérant l'équation (3.45) pour des MLC à phases isotropes, on obtient, en projetant cette équation sur  $\mathbb{J}$ , une expression de  $k_0^{(2)}$  ayant la forme suivante

$$k_0^{(2)} = k_L^{(2)} \pm k_L^{(2)} \sqrt{\frac{\langle (\varepsilon_{n,m}^p)^2 \rangle^{(2)} - \left( \overline{\varepsilon_{n,m}^p}^{(2)} \right)^2}{\langle (\varepsilon_{0,m})^2 \rangle^{(2)} - \left( \overline{\varepsilon_{0,m}}^{(2)} \right)^2}}. \quad (7.46)$$

Similairement, en projetant l'équation (3.45) sur  $\mathbb{K}$ , on obtient pour  $\mu_0^{(2)}$

$$\mu_0^{(2)} = \mu_L^{(2)} \pm \mu_L^{(2)} \sqrt{\frac{\langle \varepsilon_{n,d}^p : \varepsilon_{n,d}^p \rangle^{(2)} - \overline{\varepsilon_{n,d}^p}^{(2)} : \overline{\varepsilon_{n,d}^p}^{(2)}}{\langle \varepsilon_{0,d} : \varepsilon_{0,d} \rangle^{(2)} - \overline{\varepsilon_{0,d}}^{(2)} : \overline{\varepsilon_{0,d}}^{(2)}}}. \quad (7.47)$$

Il est important de remarquer qu'une fois la viscosité  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  (ou de manière équivalente les seconds moments  $\overline{\varepsilon_m^p}^{(2)}$  et  $\overline{\varepsilon_d^p}^{(2)}$  cf. (7.23)) est connue,  $k_L^{(2)}$  et  $\mu_L^{(2)}$  le sont aussi. Par ailleurs, les numérateurs

de (7.46) et (7.47) sont connus car les premier et second moments de  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$  sont connus du pas précédent. Pour les dénominateurs, les moments d'ordre un  $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}_{0,m}}^{(2)}$  et  $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}_{0,d}}^{(2)}$  sont déterminés à partir de (3.56) et (3.57) et les second moments  $\langle (\boldsymbol{\varepsilon}_{0,m})^2 \rangle^{(2)}$  et  $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{0,d} : \boldsymbol{\varepsilon}_{0,d} \rangle^{(2)}$  se déduisent par projection sur  $\mathbb{J}$  et  $\mathbb{K}$  de l'équation (A.3)<sub>2</sub>. Ils sont donnés respectivement par

$$\langle (\boldsymbol{\varepsilon}_{0,m})^2 \rangle^{(2)} = \frac{2}{9 c^{(2)}} \frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial k_0^{(2)}}(\mathbf{E}) \quad \text{et} \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{0,d} : \boldsymbol{\varepsilon}_{0,d} \rangle^{(2)} = \frac{1}{c^{(2)}} \frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial \mu_0^{(2)}}(\mathbf{E}). \quad (7.48)$$

On remarque que pour des composites isotropes, ces moments dépendent des paramètres  $k_0^{(2)}$ ,  $\mu_0^{(2)}$  et  $\tau_0^{(2)}$  qui définissent le MLC homogène  $w_0$  dans la phase matricielle. En conséquence, le problème non linéaire à résoudre se résume aux quatre équations (7.23), (7.46), (7.47) et (7.45) avec les quatre inconnues  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$ ,  $k_0^{(2)}$ ,  $\mu_0^{(2)}$  et  $\tau_0^{(2)}$ , sachant que les expressions de  $k_L^{(2)}$ ,  $\mu_L^{(2)}$  et  $\tau_L^{(2)}$  dépendent de la variable  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  (Eq. (7.35)).

Comme nous l'avons vu plus haut, la détermination de  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  revient à celle de  $\overline{\dot{\varepsilon}_m^p}^{(2)}$  et  $\overline{\dot{\varepsilon}_d^p}^{(2)}$  (cf. Eq. (7.23)). Pour cela, on fait appel aux équations (7.42) qui requièrent de connaître les moyennes  $\overline{\sigma_{0,m}}^{(r)}$  et  $\overline{\sigma_{0,d}}^{(r)}$  qui sont elles-mêmes données par (7.44). Ces dernières s'obtiennent à partir des premier et second moments de  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  qui sont eux mêmes déterminés à partir des équations (3.56), (3.57) et (7.48).

Enfin, en considérant l'expression de  $\mathbb{P}_0^{(2)}$  pour un composite isotrope (cf. Eq. (A.5)) ainsi que les équations (3.56) et (3.57), on observe que  $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}_{0,m}}^{(2)}$  et  $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}_{0,d}}^{(2)}$  ne dépendent plus de  $\tau_0^{(r)}$  mais seulement de trois paramètres  $k_0^{(2)}$ ,  $\mu_0^{(2)}$  et  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$ . En considérant cette dépendance et en mettant en relation l'équation (7.45) avec les définitions de  $k_L^{(2)}$ ,  $\mu_L^{(2)}$  et  $\tau_L^{(2)}$  exposées dans (7.36) et (7.35)<sub>2</sub>, on montre ainsi que la polarisation  $\tau_0^{(2)}$  ne dépend également que de  $k_0^{(2)}$ ,  $\mu_0^{(2)}$  et  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$ .

En conclusion, le problème non linéaire à résoudre défini par les équations (7.23), (7.45), (7.46) et (7.47) se réduit à celui d'un système de trois équations non linéaires (7.23), (7.46) et (7.47) à trois inconnues  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$ ,  $k_0^{(2)}$  et  $\mu_0^{(2)}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 \left( \mu_0^{(2)}, k_0^{(2)}, \eta_{\varepsilon^p}^{(2)} \right) \equiv \left( \mu_0^{(2)} - \mu_L^{(2)} \right)^2 - \left( \mu_L^{(2)} \right)^2 \frac{\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{n,d}^p : \boldsymbol{\varepsilon}_{n,d}^p \rangle^{(2)} - \overline{\boldsymbol{\varepsilon}_{n,d}^p}^{(2)} : \overline{\boldsymbol{\varepsilon}_{n,d}^p}^{(2)}}{\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{0,d} : \boldsymbol{\varepsilon}_{0,d} \rangle^{(2)} - \overline{\boldsymbol{\varepsilon}_{0,d}}^{(2)} : \overline{\boldsymbol{\varepsilon}_{0,d}}^{(2)}} = 0 \\ F_2 \left( \mu_0^{(2)}, k_0^{(2)}, \eta_{\varepsilon^p}^{(2)} \right) \equiv \left( k_0^{(2)} - k_L^{(2)} \right)^2 - \left( k_L^{(2)} \right)^2 \frac{\langle (\boldsymbol{\varepsilon}_{n,m}^p)^2 \rangle^{(2)} - \left( \overline{\boldsymbol{\varepsilon}_{n,m}^p}^{(2)} \right)^2}{\langle (\boldsymbol{\varepsilon}_{0,m})^2 \rangle^{(2)} - \left( \overline{\boldsymbol{\varepsilon}_{0,m}}^{(2)} \right)^2} = 0 \\ F_3 \left( \mu_0^{(2)}, k_0^{(2)}, \eta_{\varepsilon^p}^{(2)} \right) \equiv \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} - \frac{\sigma_y^{(2)}}{3 \sqrt{\frac{2}{\alpha^{(2)}} \left( \overline{\dot{\varepsilon}_m^p}^{(2)} \right)^2 + \left( \overline{\dot{\varepsilon}_{eq}^p}^{(2)} \right)^2}} = 0. \end{array} \right. \quad (7.49)$$

Après la résolution de ce système non linéaire, il est alors possible de calculer les paramètres  $k_L^{(2)}$ ,  $\mu_L^{(2)}$ ,  $\tau_L^{(2)}$ ,  $\tau_0^{(2)}$ ,  $\overline{\dot{\varepsilon}_m^p}^{(2)}$  et  $\overline{\dot{\varepsilon}_d^p}^{(2)}$  à partir des équations (7.36), (7.35)<sub>2</sub>, (7.45) et (7.42).

### Cas du régime élastique

Dans le cas du régime élastique,  $\varepsilon^p = \varepsilon_n^p$  et donc  $\overline{\varepsilon_m^p}^{(2)} = 0$  et  $\overline{\varepsilon_d^p}^{(2)} = 0$ . La troisième équation du système (7.49) implique que  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  tend vers  $+\infty$ . Le système non linéaire (7.49) se réduit alors à un système à deux équations pour deux inconnues  $F_1\left(\mu_0^{(2)}, k_0^{(2)}, +\infty\right) = 0$  et  $F_2\left(\mu_0^{(2)}, k_0^{(2)}, +\infty\right) = 0$ . Pour obtenir la valeur des paramètres lors de la charge et la décharge élastiques, la limite de  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  qui tend vers  $+\infty$  doit être prise en compte. On obtient en particulier,  $k_L^{(2)} = k^{(2)}$ ,  $\mu_L^{(2)} = \mu^{(2)}$  et  $\tau_L^{(r)} = -3k^{(2)}\varepsilon_{n,m}^p \mathbf{I} - 2\mu^{(2)}\varepsilon_{n,d}^p$ .

De plus, comme nous l'avons vu dans la partie 7.2.1, le composite est en régime plastique lorsque l'équation (7.28) est satisfaite dans la phase matricielle. En conséquence, pour vérifier que nous sommes bien en régime élastique, les seconds moments  $\overline{\sigma_m}^{(2)}$  et  $\overline{\sigma_d}^{(2)}$  doivent satisfaire l'inégalité suivante

$$\frac{9}{2}\alpha^{(2)}\left(\overline{\sigma_m}^{(2)}\right)^2 + \left(\overline{\sigma_d}^{(2)}\right)^2 \leq \left(\sigma_y^{(2)}\right)^2, \quad (7.50)$$

qui représente la surface de plasticité pour la matrice dans notre approche. Or, les moments d'ordre deux  $\overline{\sigma_m}^{(2)}$  et  $\overline{\sigma_d}^{(2)}$  sont déjà connus par l'équation (7.44).

### 7.2.4 Mise en œuvre numérique

L'objectif de l'algorithme est de déterminer, pour un chargement donné et défini en terme de déformation macroscopique  $\mathbf{E}_{n+1}$ , la contrainte macroscopique  $\Sigma_{n+1}$ , les premier et second moments des champs locaux  $\sigma_{n+1}$ ,  $\varepsilon_{n+1}$  et  $\varepsilon_{n+1}^p$ . Le problème est résolu de manière itérative en déterminant la solution au temps  $t_{n+1}$  à partir de la solution connue au temps  $t_n$ . Cet algorithme peut être appliqué pour une matrice élasto-plastique parfaitement plastique de type Green renforcée par des particules élastiques sphériques réparties de manière isotrope. On remarquera que la structure de l'algorithme est quasiment la même que celle présentée dans la partie 4.1.1 pour une matrice élasto-(visco)plastique avec écrouissage.

La seule différence entre ces deux algorithmes réside dans le fait que dans ce chapitre, nous devons résoudre le système non linéaire (7.49), qui dans le cas de la prédiction élastique se résume à un système à deux équations  $F_1\left(\mu_0^{(2)}, k_0^{(2)}, +\infty\right) = 0$  et  $F_2\left(\mu_0^{(2)}, k_0^{(2)}, +\infty\right) = 0$ . On obtient alors à l'aide de la fonction *fsolve* les valeurs de  $k_0^{(2)}$  et  $\mu_0^{(2)}$  afin de déterminer les paramètres du MLC ainsi que les moments des champs locaux  $\varepsilon$  et  $\sigma$  et la contrainte macroscopique.

La vérification du critère de plasticité est directe. En effet, les moments  $\overline{\sigma_{0,m}}^{(2)}$  et  $\overline{\sigma_{0,d}}^{(2)}$  sont calculés durant la prédiction élastique. Il suffit donc de vérifier si l'inégalité (7.50) est satisfaite.

Enfin, si cette inégalité n'est pas vérifiée, la matrice est en régime plastique. On doit alors résoudre le système non linéaire (7.49) à l'aide de la fonction  $f_{solve}$ . Une fois les valeurs de  $k_0^{(2)}$ ,  $\mu_0^{(2)}$  et  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  déterminées, on peut calculer les paramètres des MLC  $w_L$  et  $w_0$  ainsi que les moments des champs locaux  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^p$  et  $\sigma$ , puis déterminer la contrainte macroscopique  $\Sigma$ .

## 7.2.5 Difficultés numériques et résolution

Comme nous l'avons vu plus haut, l'obtention du comportement macroscopique ainsi que les moyennes et moments d'ordre deux des champs locaux avec la formulation DIV nécessitent de résoudre le système non linéaire (7.49) de trois équations pour trois inconnues. Du fait de la forme des équations (7.49)<sub>1</sub> et (7.49)<sub>2</sub>, il est évident que ce système a plusieurs racines. En effet, (7.49)<sub>1</sub> peut se réécrire sous la forme (4.1) avec où  $F_1^+$  et  $F_1^-$  représentent respectivement la fonction  $F_1^\pm$  associée au signe + et - avant la racine. De même, (7.49)<sub>2</sub> peut se réécrire sous la forme

$$F_2^\pm \left( \mu_0^{(2)}, \eta_{\varepsilon^p}^{(2)} \right) \equiv k_0^{(2)} - k_L^{(2)} \pm k_L^{(2)} \sqrt{\frac{\langle (\varepsilon_{n,m}^p)^2 \rangle^{(2)} - \left( \overline{\varepsilon_{n,m}^p}^{(2)} \right)^2}{\langle (\varepsilon_{0,m})^2 \rangle^{(2)} - \left( \overline{\varepsilon_{0,m}}^{(2)} \right)^2}} = 0, \quad (7.51)$$

avec où  $F_2^+$  et  $F_2^-$  représentent respectivement la fonction  $F_2^\pm$  associée au signe + et - avant la racine. Afin de bien comprendre et illustrer les conséquences engendrées par la non unicité de la solution et pour définir une stratégie permettant de converger vers la bonne racine, nous avons considéré un composite à phases élastiquement compressibles. On précise que lorsque nous avons considéré des phases élastiquement incompressibles, l'algorithme ne convergeait pas dès la première itération dans le régime plastique. En effet, si  $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.4999$ , alors les modules de compressibilités  $k^{(1)}$  et  $k^{(2)}$  tendent vers  $+\infty$ . Sous ces conditions, la fonction  $f_{solve}$  n'arrive pas à converger pour résoudre le système (7.49).

Le composite considéré est ainsi constitué de phases élastiquement compressibles et leurs paramètres élastiques sont définis par (4.8). Nous avons soumis ce composite à une extension macroscopique uni-axiale cyclique suivant l'axe 3 de la forme

$$\mathbf{E}(t) = E(t)(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3), \quad (7.52)$$

avec  $E(t)$  définie par le chargement 4.8a.

Sur la figure 7.2, qui représente le comportement macroscopique du composite, on observe un saut non physique autour de  $E_{33} \approx 0$ . Soulignons que le même saut apparaît pour les moments d'ordre un et deux des contraintes sur les phases ainsi que pour les fluctuations des contraintes sur la matrice. Ce saut est dû à la non unicité de la solution des équations  $F_1 \left( k_0^{(2)}, \mu_0^{(2)}, \eta_{\varepsilon^p}^{(2)} \right) = 0$  et  $F_2 \left( k_0^{(2)}, \mu_0^{(2)}, \eta_{\varepsilon^p}^{(2)} \right) = 0$  avec  $F_1$  et  $F_2$  définies par (7.49)<sub>1</sub> et (7.49)<sub>2</sub>. On a aussi observé que la

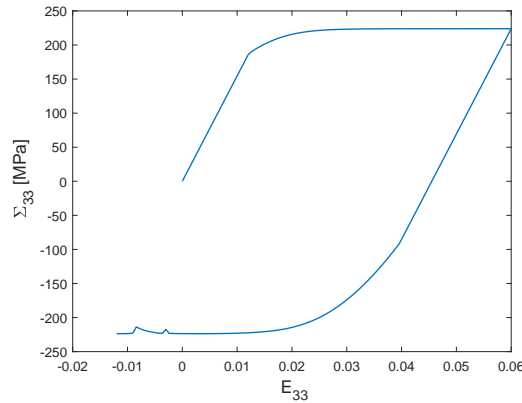


FIGURE 7.2: Composite à matrice parfaitement plastique de type Green renforcée élastiquement soumis à une extension uni-axiale cyclique.  $c^{(1)} = 0.17$ . Evolution de la contrainte macroscopique axiale sans choisir la racine appropriée.

fonction  $f_{solve}$  convergeait vers des racines complexes ce qui n'est physiquement pas acceptable. Par ailleurs, nous avons remarqué numériquement que, dans le cas étudié, les fonctions  $F_1$  et  $F_2$  ont chacune quatre racines. Afin de supprimer le saut observé sur la figure 7.2, il s'est avéré nécessaire de sélectionner la racine appropriée. Pour cela, nous avons adjoint à l'algorithme les contraintes de régularisation (4.2). Nous avons observé que, malgré l'ajout de ces contraintes, il a été impossible de converger vers la bonne racine.

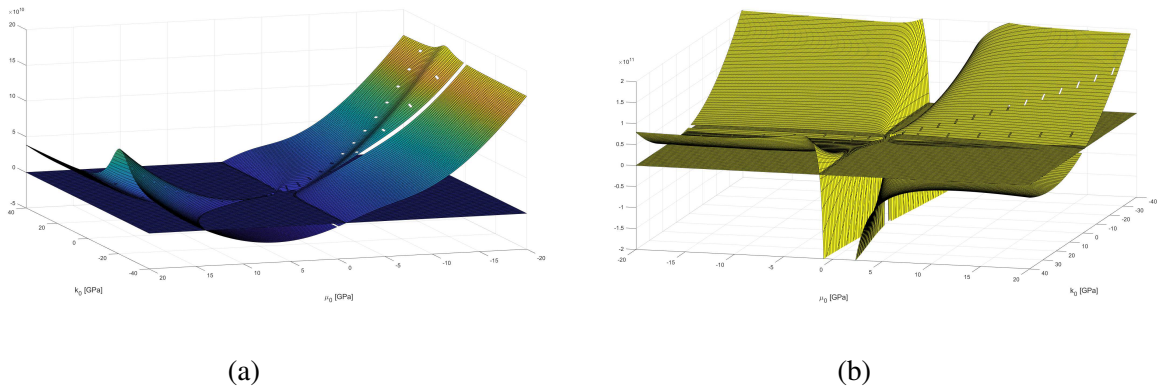


FIGURE 7.3: Variation des fonctions du système non linéaire (7.49) en fonction des variables  $k_0^{(2)}$  et  $\mu_0^{(2)}$  pour une valeur de  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  fixée : (a) Variation de la fonction  $F_1$ , (b) Variation de la fonction  $F_2$ .

On observe sur la figure 7.3 qui représente la variation des fonctions  $F_1$  et  $F_2$  en fonction de  $k_0^{(2)}$  et  $\mu_0^{(2)}$  pour une valeur de  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  fixée, que la fonction  $F_1$  semble être régulière, ce qui n'est pas le cas

de la fonction  $F_2$ . En effet, on observe une forte singularité autour de  $\mu_0^{(2)} = 0$  MPa. Probablement du fait de cette singularité, la procédure *f solve* n'arrive pas à converger vers la bonne racine. Nous n'avons pas réussi à supprimer cette singularité ni théoriquement ni numériquement.

Afin de contourner cette difficulté, nous avons considéré la même hypothèse que Lahellec et Suquet [59] qui consiste à supposer que les tenseurs d'élasticité  $\mathbb{L}_0^{(2)}$  et  $\mathbb{L}^{(2)}$  sont proportionnels

$$\mathbb{L}_0^{(2)} = \theta \mathbb{L}^{(2)}. \quad (7.53)$$

Ceci conduit à une réduction du système non linéaire (7.49) qui passe d'un système de trois équations à trois inconnues ( $\mu_0^{(2)}$ ,  $k_0^{(2)}$  et  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$ ) à un système de deux équations à deux inconnues ( $\theta$  et  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$ ). Le système non linéaire (7.49) se réécrit alors sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} F_4 \left( \theta, \eta_{\varepsilon^p}^{(2)} \right) \equiv 9 \left( \theta k^{(2)} - k_L^{(2)} \right)^2 \left( \langle (\varepsilon_{0,m})^2 \rangle^{(2)} - \overline{(\varepsilon_{0,m})^2}^{(2)} \right) + \\ \quad 4 \left( \theta \mu^{(2)} - \mu_L^{(2)} \right)^2 \left( \langle \varepsilon_{0,d} : \varepsilon_{0,d} \rangle^{(2)} - \overline{\varepsilon_{0,d} : \varepsilon_{0,d}}^{(2)} \right) + \\ \quad 9 \left( k_L^{(2)} \right)^2 \left( \langle (\varepsilon_{n,m}^p)^2 \rangle^{(2)} - \overline{(\varepsilon_{n,m}^p)^2}^{(2)} \right) + \\ \quad 4 \left( \mu_L^{(2)} \right)^2 \left( \langle \varepsilon_{n,d}^p : \varepsilon_{n,d}^p \rangle^{(2)} - \overline{\varepsilon_{n,d}^p : \varepsilon_{n,d}^p}^{(2)} \right) = 0 \\ F_3 \left( \theta, \eta_{\varepsilon^p}^{(2)} \right) \equiv \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} - \frac{\sigma_y^{(2)}}{3 \sqrt{\frac{2}{\alpha^{(2)}} \left( \overline{\varepsilon_m^p}^{(2)} \right)^2 + \left( \overline{\varepsilon_{eq}^p}^{(2)} \right)^2}} = 0. \end{array} \right. \quad (7.54)$$

Néanmoins, cette réduction du système non linéaire à deux inconnues n'a pas permis de réduire les problèmes numériques rencontrés. On observe que ces différents problèmes de convergence apparaissent lorsque les fluctuations de la déformation s'annulent. Une solution pour éviter ce problème est de soumettre le matériau considéré à des trajets de chargements durant lesquelles les fluctuations ne s'annulent pas. C'est pourquoi dans tout le reste de ce chapitre, nous avons considéré une extension macroscopique cyclique uni-axiale à déformation positive (cf. Fig 7.4, programme 6), pour laquelle  $E_{33}$  évolue de manière cyclique entre 0.02 et 0.12.

### 7.3 Applications et discussions

Dans cette section, nous allons donc chercher à évaluer la formulation DIV développée dans la partie 7.2. Nous nous proposons d'abord de traiter le cas asymptotique d'un critère de type Von-Mises, i.e.  $\alpha \rightarrow 0$  (cf. Fig. 4.10). Ensuite, nous présentons les prédictions de la formulation DIV pour une matrice de Green. Contrairement au chapitre précédents, ces prédictions ne sont pas comparées à des simulations EF car nous n'avons pas eu le temps de les réaliser.

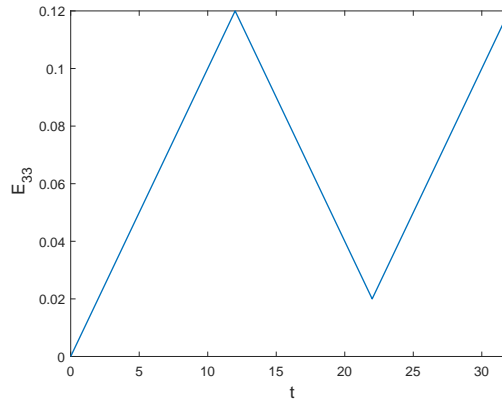


FIGURE 7.4: Programme 6 : extension macroscopique uni-axiale positive.

### 7.3.1 Prédiction de la formulation DIV dans le cas limite d'une matrice de Von-Mises

Nous avons tout d'abord cherché à retrouver les prédictions de la formulation DIV dans le cas d'une extension macroscopique isochore cyclique (cf. Fig. 4.10). Pour cela, nous avons considéré les paramètres matériaux définis par (4.8) mais avec des phases élastiquement compressibles (i.e.  $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.3636$ ). Afin de comparer les prédictions de la formulation DIV au cas présent de Green aux prédictions de la formulation DIV appliquée au cas de Von-Mises, nous avons considéré une valeur très faible du paramètre caractérisant la compressibilité de la matrice,  $\alpha^{(2)} = 10^{-10}$ . En se plaçant dans le cas d'une matrice parfaitement plastique, il a alors été possible de comparer ces prédictions à la formulation RVP et aux simulations numériques FFT de Lahellec et Suquet [59] effectuées également pour le critère de Von-Mises. Le composite considéré est soumis à un demi cycle d'une extension macroscopique isochore (programme 1). La figure 4.14 représente l'évolution de la contrainte macroscopique axiale, de la moyenne des contraintes dans les phases et des fluctuations des contraintes dans la matrice. En dehors du régime élastique, on observe que le modèle dans le cas d'une matrice de Green, prédit une réponse tendant parfaitement vers les données de la formulation DIV du chapitre 4 dans le cas d'une matrice de Von-Mises pour la contrainte effective et les contraintes moyennes dans les phases. Pour les fluctuations, la formulation DIV pour le critère de Green sous estime très légèrement les prédictions de la formulation DIV dans le cas du critère de Von-Mises. Lors du régime élastique, on remarque que les prédictions sont en parfait accord avec les prédictions de la formulation RVP ainsi que les données issues des simulations FFT. La différence avec le modèle DIV associée à Von-Mises vient du fait que les prédictions numériques de ce dernier ont été obtenues pour des phases élastiquement incompressibles ( $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.4999$ ) et non compressibles comme c'est la cas de la formulation DIV associée à Green.

En conclusion, ces résultats montrent que le modèle DIV associé à une matrice de Green, pour

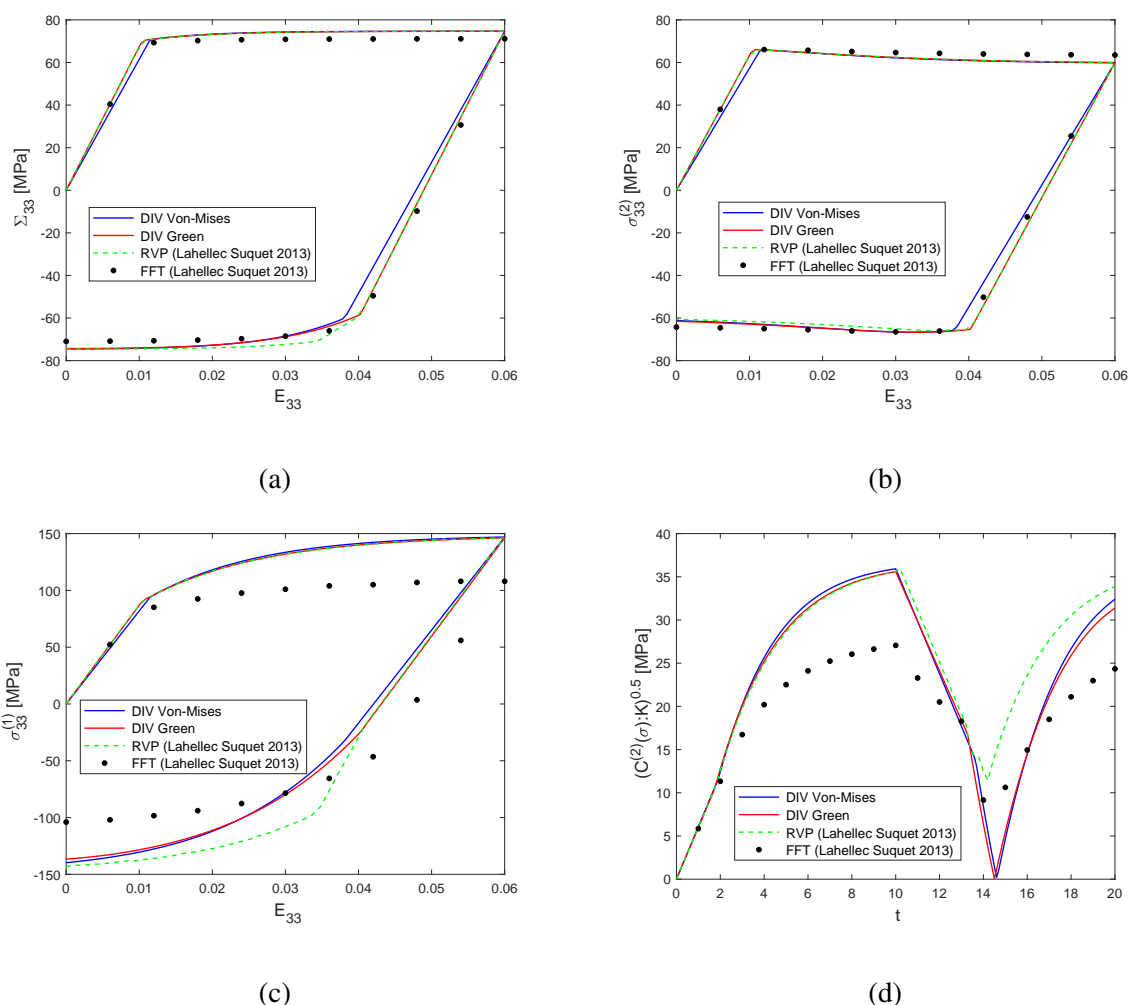


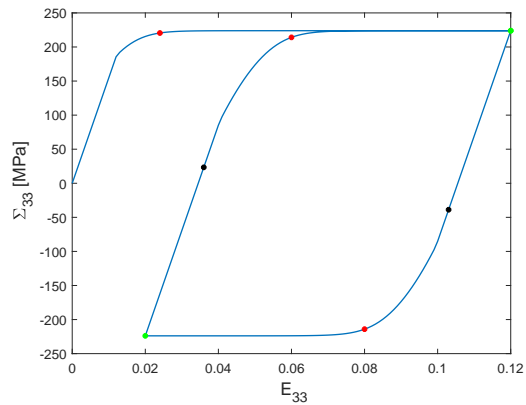
FIGURE 7.5: Composite composé d'une matrice de type Green renforcée élastiquement soumis à un chargement radial (programme 1, Fig 4.8).  $c^{(1)} = 0.17$ . (a) Contrainte macroscopique axiale, (b) Moyenne des contraintes axiales dans la matrice, (c) Moyenne des contraintes axiales dans l'inclusion, (d) Fluctuations des contraintes dans la matrice.

une valeur de  $\alpha$  très faible, prédit une réponse qui tend bien vers celle du modèle DIV associé à une matrice de Von-Mises. Ceci nous permet d'être confiant dans l'algorithme développé pour la matrice de type Green.

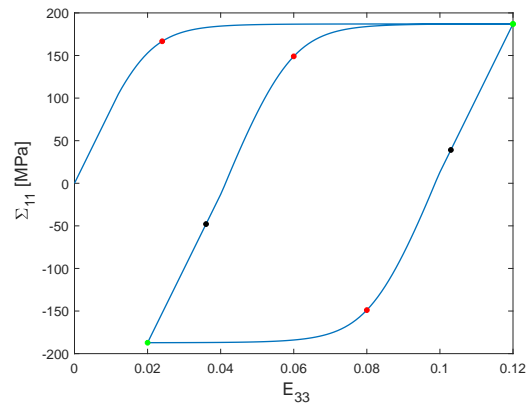
### 7.3.2 Prédiction de la formulation DIV pour une matrice de type Green

Dans cette partie, nous présentons les prédictions de la formulation DIV dans le cas d'un composite constitué d'une matrice de Green et renforcée par des particules sphériques élastiques.

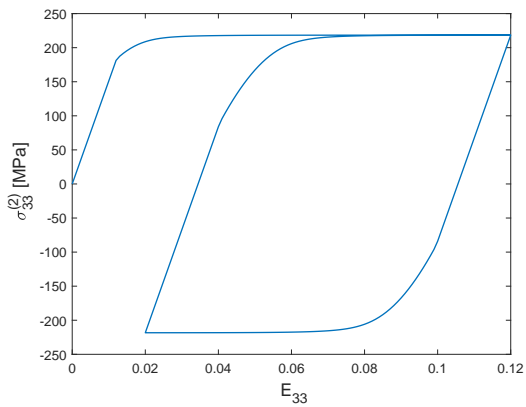




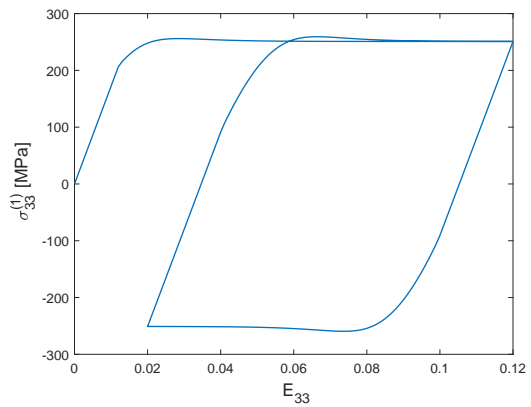
(a)



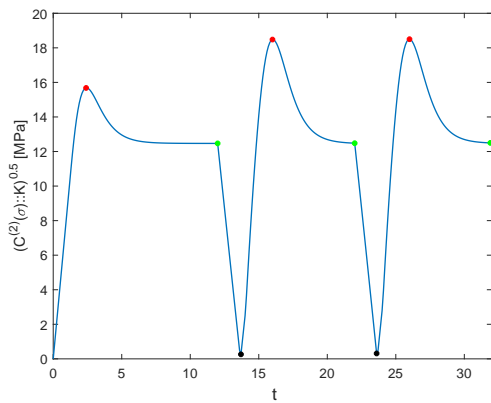
(b)



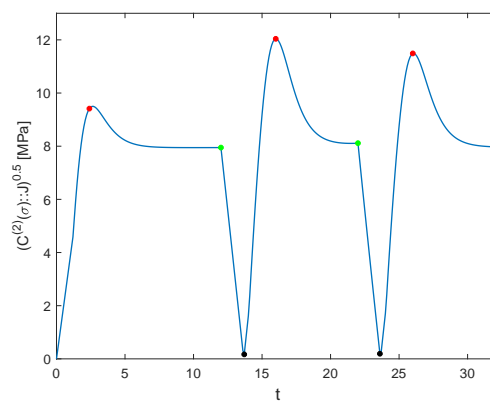
(c)



(d)



(e)



(f)

FIGURE 7.6: Composite constitué d'une matrice parfaitement plastique de type Green renforcée élastiquement et soumis à une extension macroscopique uni-axiale (programme 6, Fig 7.4).  $c^{(1)} = 0.17$ . (a) Contrainte macroscopique axiale, (b) Contrainte macroscopique non axiale.

Les paramètres matériaux considérés sont définis par l'équation (4.8), avec  $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.3636$ , et le paramètre de compressibilité de la matrice est fixée à

$$\alpha^{(2)} = 0.05. \quad (7.55)$$

Le composite est soumis à une extension uni-axiale cyclique de la forme (7.52) (cf. Fig. 7.4 programme 6).

La figure 7.6 représente les variations de la contrainte axiale  $\Sigma_{33}$ , de la contrainte  $\Sigma_{11}$ , des moyennes des contraintes  $\sigma_{33}$  dans les phases ainsi que fluctuations moyennes des contraintes déviatoriques et sphériques dans la matrice pour la formulation DIV. Pour ces simulations, nous avons soumis un composite élasto-plastique avec une matrice de Green à une extension uni-axiale. On observe sur les figures 7.6a et 7.6b que le modèle prédit, un plateau plastique pour les deux composantes ce qui est cohérent avec le fait que la matrice ne présente pas d'écroutissage. On observe aussi que le modèle prédit un effet Bauschinger. De plus, on constate, comme dans le cas d'une matrice parfaitement plastique (cf. partie 4.2.2), que le comportement est stabilisé dès le premier cycle.

La contrainte moyenne dans la matrice (Fig. 7.6c) a une variation très similaire à celle du comportement effectif. On observe de plus, que la contrainte moyenne dans l'inclusion (Fig. 7.6d) est plus élevée après la recharge élastique pour ensuite venir se stabiliser sur la contrainte de la première charge plastique.

On observe tout d'abord que les fluctuations des contraintes sphériques (Fig. 7.6f) et déviatoriques (Fig. 7.6e) dans la matrice présentent une allure similaire. Les points sur les figures 7.6a et 7.6b, nous renseignent sur les moments du chargement où les fluctuations passent par un maximum ou s'annulent. On remarque tout d'abord que les fluctuations atteignent leurs maximums (points rouges) lorsque le comportement du composite se situe dans la transition entre le régime élastique et le régime plastique. On remarque également que les fluctuations s'annulent (points noirs) lorsque le composite se situe dans le domaine élastique, à la différence d'un chargement isochore où, pour le même matériau, les fluctuations s'annulaient lors de la transition élasto-plastique (voir Fig. 4.10).

## 7.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étendu la formulation DIV aux comportements élasto-plastiques régis par un critère de type Green. Ce critère elliptique permet de représenter le comportement des poudres compactées ou des matrices poreuses. A la différence des autres modèles développés, dans le cas du critère de Green, la matrice est plastiquement compressible ( $\text{tr}(\varepsilon^p) \neq 0$ ). Du fait de la forme non quadratique du potentiel de dissipation  $\varphi^{(r)}$  (Eq. (7.9)), il a été nécessaire d'introduire un potentiel incrémental linéarisé  $J_L$  permettant l'homogénéisation du composite.

L'application des conditions de stationnarité nous a conduit à une expression de la viscosité  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  (Eq. (7.23)) qui dépend des moments d'ordre deux des taux de déformation plastique sphérique et déviatorique. En reportant cette dernière dans la définition de  $J_L$ , nous avons obtenu un MLC à polarisation hétérogène au sein des phases qui a pu être homogénéisé en faisant appel à la procédure de Lahelec et al. [54]. Ceci a conduit à un système de trois équations à trois inconnues (Eq. (7.49)) qui doit être résolu numériquement. On remarquera que ce système a une inconnue supplémentaire, correspondant au module de compressibilité  $k_0^{(2)}$ , par rapport au cas où  $\text{tr}(\varepsilon^p) = 0$ . Des singularités des fonctions définissant le système non linéaire ne nous ont pas permis d'obtenir le comportement d'un composite soumis à une extension cyclique uni-axiale centrée en  $E_{33} = 0$ . De plus, en raison d'un manque de temps, nous n'avons pas pu valider les prédictions du modèle DIV dans le cas d'une extension uni-axiale cyclique positive. On remarque cependant, que pour une extension isochore cyclique associée à une valeur tendant vers 0 de  $\alpha^{(2)}$ , nous avons pu retrouver les prédictions de la formulation DIV dans le cas du critère de Mises avec une matrice parfaitement plastique, ce qui semble attester de la crédibilité des résultats numériques obtenus par le modèle DIV dans la situation où  $\alpha$  est non nul.

Bien qu'il reste à valider le modèle DIV numériquement en le comparant à des simulations EF, il est également intéressant d'envisager d'autres critères de plasticité qui prennent en compte les déformations plastiques volumiques survenant dans d'autres types de matériaux (par exemple les roches, les bétons...). Dans cet esprit, nous avons cherché à réaliser une extension de la formulation DIV au cas d'un composite constitué de phases élasto-plastiques de type Drucker-Prager (cf. annexe C). Malheureusement, cette extension n'a pas abouti. En effet, bien que la modélisation que nous avons proposée ait conduit à un système d'équations non linéaires de quatre équations pour quatre inconnues, nous n'avons pas pour l'instant réussi à résoudre numériquement ce dernier, l'algorithme utilisé ne convergeant pas.

## Conclusions et perspectives

L'objectif de cette thèse a consisté à proposer une formulation variationnelle incrémentale qui a été appliquée à différents types de comportements. Cette formulation, appelée DIV (Double Incremental Variationnal), est basée sur le principe variationnel incrémental de Lahellec et Suquet [57] tout en s'inspirant de la formulation récemment développée par Agoras et al. [1]. L'approche consiste à introduire un potentiel incrémental condensé  $J$  qui prend en compte à la fois les effets conservatifs et dissipatifs. Sur la base de ce potentiel unique, il est possible d'appliquer la procédure variationnelle introduite par Ponte Castañeda [86]. Similairement à la formulation développée par Agoras et al. [1], les étapes de linéarisation du comportement local et de traitement de l'hétérogénéité intraphase du MLC résultant sont réalisées en deux étapes séparées. La linéarisation du comportement local, s'effectue en introduisant un potentiel quadratique et conduit à un MLC à polarisation hétérogène intraphase. La deuxième étape permet d'homogénéiser le MLC à polarisation hétérogène intraphase en appliquant la procédure développée par Lahellec et al. [54] qui consiste à l'approcher par un MLC à polarisation constante par phase. Il est alors possible d'obtenir le comportement macroscopique en appliquant les schémas d'homogénéisation linéaires classiques en champs moyens.

Cette démarche générale a été développée et mise en œuvre pour formuler des lois de comportements dissipatives correspondant à différentes situations dont nous résumons ci-dessous les conclusions générales.

### 8.1 Conclusions

Comme Lahellec et Suquet [57], nous nous sommes tout d'abord intéressés à des composites à phases visco-élastiques linéaires de type Maxwell. Du fait du caractère quadratique des potentiels locaux, il n'a pas été nécessaire de linéariser le potentiel incrémental condensé  $J$ . Après avoir résolu les différentes conditions de stationnarité, nous avons obtenu un MLC thermo-élastique hétérogène au sein des phases que nous avons homogénéisé en faisant appel à la procédure de Lahellec et al. [54]. Le MLC résultant étant homogène par phase, il a alors été possible d'obtenir ses propriétés macroscopiques et locales en appliquant un schéma d'homogénéisation linéaire

classique, ici les bornes de Hashin-Shtrikman. Nous avons enfin appliqué le modèle dans le cas d'un composite constitué d'une matrice visco-élastique linéaire de type Maxwell renforcée par des particules sphériques élastiques. Comme notre procédure repose également sur le principe variationnel incrémental qu'utilise la formulation EIV développée par Lahellec et Suquet, nous avons comparé nos résultats à ceux de la formulation EIV. Nous avons tout d'abord montré que ces deux formulations présentent quelques différences sur le plan théorique. En effet, nous avons montré que les expressions du module de cisaillement dans la matrice  $\mu_0^{(2)}$  (resp. la polarisation  $\tau_0^{(2)}$ ) du MLC  $w_0$  entre les deux modèles ont une expression équivalente (resp. différente). En dépit de ce fait, nous avons observé que leurs prédictions numériques sont très proches. D'une manière générale, on observe qu'à l'exception des chargements tournants, les prédictions du modèle DIV sont proches des simulations FFT. On remarque cependant qu'en dehors du cas des fortes viscosités, le modèle DIV proposé n'arrive pas à reproduire le comportement effectif des composites soumis à un chargement tournant. En revanche, lorsque la viscosité est élevée, les prédictions du modèle reproduisent bien celles de la FFT et sont plus proches de ces simulations<sup>1</sup> que les prédictions du modèle RVP [59] [3]. Ces différentes comparaisons nous ont permis globalement de valider le modèle DIV dans le cas de composites visco-élastiques linéaires de type Maxwell à l'exception des chargements tournants quand les valeurs des viscosités sont relativement faibles.

Suite à cette première étude, nous nous sommes intéressés à des composites constitués de phases dont le comportement est régi par des potentiels de dissipation non quadratiques. Plus exactement, nous avons tout d'abord étudié le cas de composites élasto-viscoplastiques avec des écrouissages cinématique linéaire et isotrope combinés (voir chapitre 3). Puis, ce dernier a été étendu aux composites élasto-plastiques avec des écrouissages cinématique non linéaire et isotrope combinés (voir chapitre 5). Pour cette formulation, afin de rester dans le cadre d'application des principes variationnels de Lahellec et Suquet [57], à savoir les matériaux dont le comportement est régi par deux potentiels, nous avons considéré les modèles de Chaboche modifié et de Ladevèze. On remarquera que les différents comportements mentionnés ne considèrent que des variables internes  $\alpha$  purement déviatoriques. C'est pourquoi, nous nous sommes également intéressés au cas des composites élasto-plastiques constitués d'une matrice de type Green (voir chapitre 7) pour laquelle il est nécessaire de considérer des déformations plastiques volumiques ( $\text{tr}(\epsilon^p) \neq 0$ ).

Dans tous les cas mentionnés ci-dessus, le comportement des phases est gouverné par deux potentiels, l'énergie libre  $w$  et le potentiel de dissipation  $\varphi$ . Du fait du caractère non quadratique du potentiel de dissipation, le potentiel incrémental condensé  $J$  a été approché par un potentiel incrémental linéarisé  $J_L$  qui dépend d'une ou de deux (dans le cas de l'écrouissage cinématique non linéaire) viscosités homogènes par phase et des déformations plastiques volumiques (dans le cas d'une matrice de Green). Ceci a permis d'approximer le potentiel incrémental effectif

1. On aurait aimé comparer nos prédictions à celles de l'EIV mais ces résultats ne sont pas disponibles. Ceci explique pourquoi nous avons comparé notre modèle principalement à la formulation RVP qui améliore la formulation EIV.

$\tilde{w}_\Delta$  par une expression incluant des conditions de stationnarité sous contraintes d'inégalité. Le développement de ces conditions de stationnarité a permis d'obtenir les expressions des viscosités ainsi que des variables internes et nous a conduit à l'obtention d'un MLC à polarisation hétérogène intraphase. Ce dernier a ensuite été approché par un MLC à polarisation uniforme par phase en faisant appel à la procédure de Lahellec et al. [54]. Il a alors été possible d'appliquer un schéma classique d'homogénéisation linéaire (les bornes de Hashin-Shtrikman) pour obtenir les propriétés effectives du composite ainsi que la statistique des champs locaux. Après avoir appliqué la formulation DIV au cas particulier d'un composite constitué de phases isotropes, une matrice élasto-(visco)plastique renforcée par des particules sphériques élastiques, on obtient un système non linéaire que nous résolvons numériquement.

Dans le cas des chargements cycliques, il a été observé de façon générale un saut non physique sur la courbe du comportement effectif ainsi que sur les moyennes par phase et fluctuations des champs de contraintes locaux. Ce dernier provient du fait qu'il n'y a pas unicité de la solution du système d'équations non linéaires à résoudre. On observe de plus une singularité d'une des fonctions du système non linéaire lorsque les phases constituantes du composite sont élastiquement compressibles. Pour cette raison, à l'exception cependant des comportements élasto-plastiques de type Green, nous n'avons considéré que des composites constitués de phases élastiquement incompressibles. Les composites étudiés ont été soumis à différentes histoires de chargement : chargement macroscopique isochore cyclique (Fig. 4.8a), chargement non proportionnel (Fig. 4.8b), chargement tournant (Fig. 4.9b), traction uni-axiale, et extension uni-axiale cyclique positive (Figs. 6.3 et 7.4).

Dans le cas d'une matrice élasto-viscoplastique pour lequel la formulation du modèle a été formulée au chapitre 3, les prévisions obtenues ont fait l'objet du chapitre 4. Dans le cas particulier de l'élasto-plasticité, nous avons comparé les prédictions de la formulation DIV à d'autres modèles en champs moyens tels que la formulation RVP proposée par Lahellec et Suquet [59], la formulation variationnelle de Brassart et al. [21], ainsi qu'à des simulations EF et FFT réalisées par ces mêmes auteurs.

Pour des composites à matrice élasto-plastique avec ou sans écrouissage (cinématique linéaire ou isotrope), ayant un faible contraste élastique  $R = E^{(1)}/E^{(2)}$  entre les phases ( $R \approx 2$ ) ou n'étant pas soumis à un chargement tournant, nous avons observé que les prévisions (comportement macroscopique, moyennes des contraintes dans les phases, fluctuations des contraintes dans la matrice) de la formulation DIV sont très proches de celles des autres modèles en champs moyens précédemment évoqués. Pour le comportement macroscopique et la contrainte moyenne dans la matrice, bien que le modèle DIV surestime légèrement les données EF et FFT, il reproduit de manière satisfaisante les données de simulations numériques. De plus, la formulation DIV reproduit bien l'effet Bauschinger. Toutefois, il prédit seulement de manière qualitative l'évolution de la contrainte moyenne dans l'inclusion et la surestime de façon significative. Pour ce qui concerne les moyennes des fluctuations des contraintes dans la matrice, qui est la grandeur locale la plus difficile à estimer, le modèle DIV se comporte bien en reproduisant les tendances

des simulations en champs complets même si parfois il les surestime significativement. Il prédit cependant à tort des fluctuations nulles au moment des recharges plastiques.

Dans le cas des écrouissages cinématique et isotrope combinés ainsi que pour certains cas de chargements (par exemple multi-cycles), en raison du manque de données disponibles, les prédictions du modèle DIV ont aussi été comparées à des simulations EF périodiques que nous avons réalisées à l'aide du logiciel Cast3M. Les conclusions sont similaires à celles précédemment indiquées. De plus, pour les chargements multi-cycles considérés (en écrouissage isotrope), en accord avec les résultats de simulations numériques, le modèle prédit bien l'état asymptotique de la réponse macroscopique qui est une accommodation.

Dans le cas d'un contraste élastique infini ou nul, c'est à dire lorsque les inclusions sont rigides ou sont des pores, le modèle reproduit assez précisément nos données numériques en champs complets pour le comportement macroscopique. Néanmoins, il n'arrive pas à reproduire l'effet Bauschinger. De plus, bien qu'en accord qualitatif avec les fluctuations des contraintes dans la matrice, la formulation DIV les surestime significativement et prédit des fluctuations des contraintes nulles au moment de la recharge plastique. Dans le cas de composites renforcés par des particules rigides, on a remarqué que le modèle DIV surestime toujours les contraintes moyennes dans les phases mais n'arrive plus à reproduire les tendances de leurs évolutions.

Pour ce qui concerne les composites élasto-viscoplastiques sans seuil, on observe pour des chargements cycliques que les prédictions de la formulation DIV sont en parfait accord avec les formulations EIV et RVP ainsi qu'avec les données FFT. Néanmoins, pour un chargement tournant, on remarque que la formulation DIV conduit aux mêmes prévisions que le modèle EIV et n'arrive pas à reproduire les données FFT. En effet, lorsque le contraste élastique est faible  $R = 0.2$  (reps. élevé  $R = 5$ ), la formulation DIV surestime (resp. sous-estime) les données FFT ainsi que les prédictions du modèles RVP.

S'agissant de l'écrouissage cinématique non linéaire, la formulation DIV a été développée de manière unifiée pour les modèle de Ladevèze et de Chaboche modifié au chapitre 5. Puis nous avons réalisé au chapitre 6 une comparaison entre les prédictions de cette formulation et nos simulations numériques. Lorsque le paramètre d'écrouissage cinématique linéaire n'est pas trop élevé ( $a^{(2)} \leq 1$  GPa), un bon accord a été observé entre les deux modèles et les simulations EF. Toutefois, après la décharge et recharge élastique, le modèle de Ladevèze prédit une plastification plus précoce que le modèle de Chaboche modifié et les EF. De plus, toutes les observations faites dans ce cas sont similaires à celles présentées au chapitre 4 dans le cas de composites élasto-plastiques avec des écrouissages cinématiques linéaire et isotrope combinés.

Il a été observé que pour des valeurs de  $a^{(2)}$  supérieures à 1 GPa, le modèle de Chaboche modifié reproduit de manière qualitative les données EF tout en les sous-estimant alors que le modèle de Ladevèze prédit à tort un adoucissement du comportement macroscopique et de la contrainte moyenne dans la matrice. Pour le cas du composite étudié par Doghri et Ouair [27] et soumis à une traction uni-axiale, nous avons constaté que la formulation DIV pour le modèle de Chaboche modifié n'arrive pas à retrouver la pente caractérisant l'écrouissage et sous estime significativement les données EF.

Enfin, dans le cas des écrouissages cinématique non linéaire et isotrope combinés soumis à un chargement multi-cycles, la formulation DIV pour le modèle de Chaboche modifié est en accord avec les données EF. De plus, le modèle prédit aussi l'état asymptotique de la réponse macroscopique qui est ici une adaptation.

Dans le chapitre 7, la formulation DIV a été étendue aux comportements élasto-plastiques régis par un critère de type Green. Dans ce cas, la matrice étant plastiquement compressible ( $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^p) \neq 0$ ), il est nécessaire de considérer ces déformations dans le potentiel incrémental linéarisé  $J_L$ . La procédure reste la même que celle présentée précédemment. On note toutefois, que du fait de la compressibilité plastique et à la différence des autres cas étudiés, le système d'équations non linéaires a une inconnue supplémentaire correspondant au module de compressibilité  $k_0^{(2)}$ . Par manque de temps, il n'a malheureusement pas été possible de valider les prédictions du modèle. On remarque cependant, lorsque  $\alpha^{(2)} \rightarrow 0$ , que l'on retrouve les prédictions de la formulation DIV dans le cas du critère de Von-Mises à matrice plastiquement parfaite.

## 8.2 Perspectives de travail

Bien que la formulation DIV développée au cours de ce travail de thèse fournit d'une manière générale de bonnes estimations des réponses globales et locales pour les composites renforcés à matrice élasto-(visco)plastique à écrouissage cinématique et isotrope, les simulations numériques ont montré à maintes reprises que cette formulation pouvait être encore améliorée.

Tout d'abord, pour des raisons numériques, nous n'avons pu considérer que des phases élastiquement incompressibles. De plus, même dans le cas où les phases sont élastiquement incompressibles, quand l'écrouissage est non linéaire, il arrive que l'algorithme de résolution ne converge plus lorsque le paramètre d'écrouissage cinématique linéaire devient trop élevé. La non unicité des solutions du système non linéaire à résoudre est principalement à l'origine de ces difficultés numériques. Une piste d'amélioration consisterait à améliorer l'algorithme de résolution utilisé.

Nous avons vu également que l'évolution de la contrainte moyenne dans les inclusions est souvent surestimée de façon significative. Ce point reste donc à améliorer. Une piste consisterait à changer de méthode de linéarisation, par exemple appliquer une méthode du second ordre à la place de la procédure variationnelle dans l'étape de linéarisation. Cette idée résulte d'un constat déjà fait sur les composites à un seul potentiel pour lesquels la méthode sécante modifiée est plus raide que les méthodes dites du second ordre conformément à son statut de borne supérieure dans ce genre de situation.



Une extension du travail présenté, serait de considérer des composites biphasés dont les deux phases, et non seulement la matrice, sont élasto-(visco)plastiques. Pour ce faire, il est nécessaire de modifier l'algorithme présenté. En effet, du fait que l'inclusion ait un comportement élasto-(visco)plastique, la taille du système non linéaire à résoudre numériquement va augmenter. La résolution de ce système sera probablement plus complexe que celles des systèmes auxquels nous avons été confronté dans le cas d'une inclusion élastique.

Une autre piste consisterait à évaluer plus rigoureusement le modèle DIV qui repose sur trois approximations successives différentes : la linéarisation du comportement, le traitement de l'hétérogénéité intraphase du MLC et l'homogénéisation du MLC. Pour ce qui concerne la part relative de la formulation DIV, i.e. les deux premières étapes, et de l'homogénéisation du MLC, on pourra s'inspirer de la démarche déjà mise en œuvre par Rekik et al. [92] dans le cas de comportements dérivant d'un seul potentiel. Pour la comparaison des approximations relatives induites par les deux étapes de la méthode DIV, une méthodologie spécifique devra être développée.

Au cours de ce travail de thèse, nous n'avons malheureusement pas eu le temps d'effectuer des simulations EF pour les composites à matrice élasto-plastique suivant le critère de Green. Une perspective naturelle à ce travail serait de procéder à ces simulations afin de valider numériquement la formulation DIV établie dans ce cas.

Comme autre extension du travail présenté dans ce mémoire de thèse, il serait également intéressant de retravailler la formulation DIV dans le contexte d'une matrice de Drucker-Prager en corrigeant l'algorithme proposé afin qu'il converge et de comparer ses prédictions à des simulations en champs complets. De plus, il est probable qu'une formulation de type RVP (Rate Variational Procedure) s'avère plus appropriée. Cette dernière piste mériterait d'être explorée.

Enfin, en vu d'étendre la démarche d'homogénéisation au cadre des matériaux standards implicites évoqué dans la partie 5.1.2 s'appliquant à des modèles de plasticité non associée, il conviendrait d'abord d'étendre le cadre variationnel incrémental déjà proposé pour ces matériaux par Berga [4], à la situation de matériaux hétérogènes présentant une séparation d'échelle en vue de construire la loi de comportement effective sous la forme d'un bipotentiel homogénéisé. Dans ce contexte, on pourrait ensuite s'inspirer de la procédure variationnelle développée par Ponte Castañeda [87] dans le cas de matériaux dépendant d'un seul potentiel, pour construire des estimations en champs moyens de ce bipotentiel effectif. On aurait ainsi un cadre rigoureux pour construire des estimations du comportement de composites dont les phases suivent des lois de comportement non associées.

# Bibliographie

- [1] M. Agoras, R. Avazmohammadi, and P. Ponte Castañeda. Incremental variational procedure for elasto-viscoplastic composites and application to polymer- and metal-matrix composites reinforced by spheroidal elastic particles. *International Journal of Solids and Structures*, 97-98 :668–686, 2016.
- [2] P. J. Armstrong and C. O. Frederick. A mathematical representation of the multiaxial bauschinger effect. *CEGB Report RD/B/N731*, 1966.
- [3] C. Badulescu, N. Lahellec, and P. Suquet. Field statistics in linear viscoelastic composites and polycrystals. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 49 :329–344, 2015.
- [4] A. Berga. Mathematical and numerical modeling of the non-associated plasticity of soils—part 1 : The boundary value problem. 2012.
- [5] M. Berveiller and A. Zaoui. An extension of the self-consistent scheme to plastically-flowing polycrystals. 1979.
- [6] J. Besson, G. Cailletaud, J.-L. Chaboche, and S. Forest. *Mécanique non linéaire des matériaux*. Hermès-Lavoisier, 2001.
- [7] J. Besson and C. Guillemer-Neel. An extension of the green and gurson models to kinematic hardening. *Mechanics of materials*, 35 :1–18, 2003.
- [8] N. Bilger, F. Auslender, M. Bornert, and R. Masson. New bounds and estimates for porous media with rigid perfectly plastic matrix. *Comptes Rendus Mécanique*, 330 :127–132, 2002.
- [9] N. Bilger, F. Auslender, M. Bornert, H. Moulinec, and A. Zaoui. Bounds and estimates for the effective yield surface of porous media with a uniform or a nonuniform distribution of voids. *European Journal of Mechanics*, 47 :836–836, 2007.
- [10] M. A. Biot. *Mechanics of incremental deformations : Theory of elasticity and viscoelasticity of initially stressed solids and fluids, including thermodynamic foundations and applications to finite strain*. John Wiley & Sons , Inc., New York, 1985.
- [11] G. Bodovillé. Sur l’endommagement et les matériaux standards implicites. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences II B-Mécanique*, 327 :715–720, 2009.
- [12] G. Bodovillé and G. de Saxcé. Plasticity with non linear kinematic hardening : modelling and shakedown analysis by the bipotential approach. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 20 :99–112, 2001.

- [13] C. Bouby. *Adaptation élastoplastique de structures sous chargements variables avec règle d'écroutissage cinématique non linéaire et non associée*. PhD thesis, Jean-Bernard Mécanique Lille 1, 2006.
- [14] C. Bouby, G. de Saxcé, and J-B. Tritsch. A comparison between analytical calculations of the shakedown load by the bipotential approach and step-by-step computations for elastoplastic materials with nonlinear kinematic hardening. *International Journal of Solids and Structures*, 43 :2670–2692, 2006.
- [15] C. Bouby, G. de Saxcé, and J-B. Tritsch. Shakedown analysis : Comparison between models with the linear unlimited, linear limited and non-linear kinematic hardening. *Mechanics Research Communications*, 36 :556–562, 2009.
- [16] C. Bouby, D. Kondo, and G. de Saxcé. A comparative analysis of two formulations for non linear hardening plasticity models : Application to shakedown analysis. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 53 :48–61, 2015.
- [17] J. Boudet, F. Auslender, M. Bornert, and Y. Lapusta. An incremental variational formulation for the prediction of the effective work-hardening behavior and field statistics of elasto-(visco)plastic composites. *International Journal of Solids and Structures*, 83 :90–133, 2016.
- [18] L. Boussine, A. Chaaba, and G. de Saxcé. Softening in stress-strain curve for drucker-prager non-associated plasticity. *International Journal of Plasticity*, 17(1) :21–46, 2001.
- [19] L. Boussine, A. Chaaba, and G. de Saxcé. A new approach to shakedown analysis for non standard elastoplastic material by the bipotential. *International Journal of Plasticity*, 19(5) :583–598, 2003.
- [20] L. Brassart, L. Stainier, I. Doghri, and L. Delannay. A variational formulation for the incremental homogenization of elasto-plastic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59 :2455–2475, 2011.
- [21] L. Brassart, L. Stainier, I. Doghri, and L. Delannay. Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle. *International Journal of Plasticity*, 36 :86–112, 2012.
- [22] C. Carstensen. Numerical analysis of the primal problem of elastoplasticity with hardening. *Numer. Math.*, 82 :577–597, 1999.
- [23] J.-L. Chaboche. Sur l'utilisation des variables d'état interne pour la description de la viscoplasticité cyclique avec endommagement. In *Problème Non Linéaire de Mécanique*. Symposium Franco-Polonais de Rhéologie et Mécanique, Cracovie, 1977.
- [24] J.-L. Chaboche. *Description phénoménologique de la viscoplasticité cyclique avec endommagement*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1978.
- [25] J.-L. Chaboche. Constitutive equations in creep-fracture damage. In Wilshire and Owen, editors, *Engineering Approaches to High Temperature Design*. Pineridge-Press, Swansea, 1983.

- [26] G. de Saxcé. Une généralisation de l'inégalité de fenchel et ses applications aux lois constitutives. *Compte Rendu de l'Académie des sciences*, 314 :125–129, 1992.
- [27] I. Doghri and A. Ouaar. Homogenization of two-phase elasto-plastic composite materials and structures. study of tangent operators, cyclic plasticity and numerical algorithms. *International journal of solids and structures*, 40 :1681–1712, 2003.
- [28] L. Dormieux, E. Lemarchand, and D. Kondo. *Mécanique des milieux continus*. Ellipses, 2017.
- [29] G. J. Dvorak. Transformation field analysis of inelastic composites materials. *Proceedings of the Royal Society A*, 241 :376–396, 1992.
- [30] G. J. Dvorak. Inelastic composite materials : transformation analysis and experiments. In P. Suquet, editor, *Continuum Micromechanics*, pages 1–60. Springer, 1998.
- [31] G. J. Dvorak, Y. A. Bahein-El-Din, and A. M. Wafa. The modeling of inelastic composite materials with the transformation field analysis. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 2 :571–586, 1994.
- [32] J. D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society A*, 437 :311–327, 1957.
- [33] J. Fish and K. Shek. Computational plasticity and viscoplasticity for composite materials and structures. *Composites Part B : Engineering*, 29 :613–619, 1998.
- [34] F. Fritzen and T. Böhlke. Three-dimensional finite element implementation of thenonuniform transformation field analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84 :803–829, 2010.
- [35] F. Fritzen and M Leuschner. Reduced basis hybrid computational homogenization based on a mixed incremental formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 260 :143–154, 2013.
- [36] P. Germain, Q. S. Nguyen, and P. Suquet. Continuum thermodynamics. *Journal of Applied Mechanics*, 50 :1010–1020, 1983.
- [37] P. Gilormini. Insuffisance de l'extension classique du modèle auto-cohérent au comportement non linéaire. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Paris (Série IIb)*, 320 :115–122, 1995.
- [38] R. J. Green. A plasticity theory for porous solids. *International Journal of Mechanical Sciences*, 14 :215–224, 1972.
- [39] B. Halphen and Q. Nguyen. Sur les matériaux standard généralisés. *Journal de Mécanique*, 14 :39–63, 1975.
- [40] Z. Hashin and S. Shtrikman. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11 :127–140, 1963.
- [41] R. Hill. Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13 :89–101, 1965.

- [42] M. Hjiiaj, J. Fortin, and G. de Saxcé. A complete stress update algorithm for the non-associated drucker-prager model including treatment of the apex. *International Journal of Engineering Science*, 41 :1109–1143, 2003.
- [43] M. Idiart and N. Lahellec. Estimates for the overall linear properties of pointwise heterogeneous solids with application to elasto-viscoplasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 97 :317–332, 2016.
- [44] M. Idiart, H. Moulinec, P. Ponte Castañeda, and P. Suquet. Macroscopic behavior and field fluctuations in viscoplastic composites : second-order estimates versus full-field simulations. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54 :1029–1063, 2006.
- [45] M. Idiart and P. Ponte Castañeda. Field statistics in nonlinear composites I. *Proceeding of the Royal Society A*, 348 :101–127, 2007.
- [46] Moreau J. J. Sur les lois de frottement, de viscosité et de plasticité. *Compte Rendus de l'Académie des Sciences*, 271 :608–611, 1970.
- [47] W. Kreher. Residual stresses and stored elastic energy of composites and polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 38 :115–128, 1990.
- [48] W. Kreher and A. Molinari. Residual stresses in polycrystals as influenced by grain shape and texture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41 :1955–1977, 1993.
- [49] E. Kröner. Berechnung der elastischen konstanten des vielkristalls aus den konstanten des einkristalls. *Zeitschrift für Physik*, 151 :504–518, 1958.
- [50] A. Kuhn and C. L. Downey. Deformation characteristics and plasticity theory of sintered powder materials. *International Journal of Powder Metallurgy*, 7 :15–25, 1971.
- [51] P. Ladevèze. On the role of creep continuum damage in structural mechanics. In Ladevèze. P and Zienkiewicz. O., editors, *New Advances in Computational Structural Mechanics*, pages 3–22. Elsevier, Oxford, 1992.
- [52] P. Ladevèze. *Mécanique non linéaire des structures : nouvelle approche et méthodes de calcul non incrémentales*. Hermès, 1996.
- [53] N. Lahellec. *Contributions à la modélisation du comportement des composites dans le domaine non linéaire*. Habilitation à diriger des recherches, Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, 2017.
- [54] N. Lahellec, P. Ponte Castañeda, and P. Suquet. Variational estimates for the effective response and field statistics in thermoelastic composites with intra-phase property fluctuations. *Proceeding of the Royal Society A*, 447 :2224–2246, 2011.
- [55] N. Lahellec and P. Suquet. Nonlinear composites : a linearization procedure, exact to second-order in contrast and for which the strain-energy and affine formulations coincide. *Comptes Rendus Mécanique*, 332 :693–700, 2004.
- [56] N. Lahellec and P. Suquet. Effective behavior of linear viscoelastic composites : a time-integration approach. *International Journal of Solids and Structures*, 44 :507–529, 2006.

- [57] N. Lahellec and P. Suquet. On the effective behavior of nonlinear inelastic composites : I. Incremental variational principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55 :1932–1963, 2007.
- [58] N. Lahellec and P. Suquet. On the effective behavior of nonlinear inelastic composites : II A second-order procedure. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55 :1964–1992, 2007.
- [59] N. Lahellec and P. Suquet. Effective response and field statistics in elast-plastic and elasto-viscoplastic composites under radial and non radial loading. *International Journal of Plasticity*, 42 :1–30, 2013.
- [60] N. Laws. On the thermostatics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 21 :9–17, 1973.
- [61] J. Lemaître and J. Chaboche. *Mechanics des matériaux solides*. Dunod, Paris, 1985.
- [62] J. Lemaître and J. Chaboche. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, 1990.
- [63] A. Lucchetta, F. Auslender, M. Bornert, and D. Kondo. A double incremental variational procedure for elastoplastic composites with combined isotropic and linear kinematic hardening. *International Journal of Solids and Structures*, 158 :243–267, 2019.
- [64] G. Maier and D. Weichert. *Inelastic Behaviour of Structures under Variable Repeated Loads*. CISM Courses and Lectures, No 432, Springer Wien, New-York., 2002.
- [65] R. Masson, M. Bornert, P. Suquet, and A. Zaoui. An affine formulation for the prediction of the effective properties of nonlinear composites and polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48 :1203–1227, 2000.
- [66] R. Masson and A. Zaoui. Self-consistent estimates for the rate-dependent elastoplastic behaviour of polycrystalline materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 47 :1543–1568, 1999.
- [67] S. Mercier, K. Kowalczyk-Gajewska, and C. Czarnota. Effective behavior of composites with combined kinematic and isotropic hardening based on additive tangent mori–tanaka scheme. *Composites Part B*, 2019.
- [68] S. Mercier and A. Molinari. Validation of an interaction law for the eshelby inclusion problem in elasto-viscoplasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 42 :1923–1941, 2009.
- [69] P. Mialon. Eléments d’analyse et de résolution numérique des relations de l’élasto-plasticité. *EDF : Bulletin de la Direction des études et recherches. Série C, Mathématiques, informatique*, 3 :57–89, 1986.
- [70] J. C. Michel, H. Moulinec, and P. Suquet. Effective properties of composite materials with periodic microstructure : a computational approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 172 :109–143, 1999.
- [71] J. C. Michel and P. Suquet. The constitutive law of nonlinear viscous and porous materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40 :783–812, 1992.

- [72] J. C. Michel and P. Suquet. Nonuniform transformation field analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 40 :6937–6955, 2003.
- [73] J. C. Michel and P. Suquet. Computational analysis of nonlinear composite structures using the nonuniform transformation field analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193 :5477–5502, 2004.
- [74] J. C. Michel and P. Suquet. Nonuniform transformation field analysis : a reduced model for multiscale nonlinear problems in solid mechanics. In U. Galvanetto and F. Aliabadi, editors, *Multiscale Modelling in Solid Mechanics - Computational Approaches*, pages 159–206. Imperial College Press, London., 2009.
- [75] J. C. Michel and P. Suquet. A model-reduction approach in micromechanics of materials preserving the variational structure of constitutive relations. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 90 :254–285, 2016.
- [76] C. Miehe. Strain-driven homogenization of inelastic micro-structures and composites based on an incremental variational procedure. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55 :1282–1322, 2002.
- [77] C. Miehe, J. Schotte, and M. Lambrecht. Homogenization of inelastic solid materials at finite strains based on incremental minimization principles. application to the texture analysis of polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50 :2123–2167, 2002.
- [78] A. Molinari, G. R. Canova, and S. Ahzi. A self consistent approach of the large deformation polycrystal viscoplasticity. *Acta Metallurgica*, 35 :2983–2994, 1987.
- [79] T. Mori and K. Tanaka. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21 :571–574, 1973.
- [80] H. Moulinec and P. Suquet. A fast numerical method for computing the linear and nonlinear properties of composites. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris II*, 318 :1417–1423, 1994.
- [81] H. Moulinec and P. Suquet. A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 157 :69–94, 1998.
- [82] Q. S. Nguyen. Mechanical modelling of anelasticity. *Revue de Physique Appliquée*, 1988 :325–330, 1988.
- [83] M. Ortiz and A. Molinari. Microstructural thermal stresses in ceramic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 36 :385–400, 1988.
- [84] M. Ortiz, E. A. Repetto, and L. Stainier. A theory of subgrain dislocation structures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48 :2077–2114, 2000.
- [85] M. Ortiz and L. Stainier. The variational formulation of viscoplastic constitutive updates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 171 :419–444, 1999.
- [86] P. Ponte Castañeda. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39 :45–71, 1991.

- [87] P. Ponte Castañeda. New variational principles in plasticity and their application to composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40 :1757–1788, 1992.
- [88] P. Ponte Castañeda. Exact second-order estimates for the effective mechanical properties of nonlinear composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44 :827–862, 1996.
- [89] P. Ponte Castañeda. Second-order homogenization estimates for nonlinear composites incorporating field fluctuations : I-theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50 :737–757, 2002.
- [90] P. Ponte Castañeda and P. Suquet. Nonlinear composites. *Advances in Applied Mechanics*, 34 :171–302, 1998.
- [91] P. Ponte Castañeda and J. R. Willis. Variational second-order estimates for nonlinear composites. *Proceeding of the Royal Society A*, 445 :1799–1811, 1999.
- [92] A. Rezik, F. Auslender, M. Bornert, and A. Zaoui. Objective evaluation of linearization procedures in nonlinear homogenization : A methodology and some implications on the accuracy of micromechanical schemes. *International Journal of Solids and Structures*, 44 :3468–3496, 2007.
- [93] J. Salençon. *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses de l’Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1983.
- [94] W. Q. Shen, F. Pastor, and D. Kondo. Improved criteria for ductile porous materials having a green type matrix by using eshelby-like velocity fields. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 67-68 :14–21, 2013.
- [95] W. Q. Shen, J. F. Shao, L. Dormieux, and D. Kondo. Approximate criteria for ductile porous materials having a green type matrix : Application to double porous media. *Computational Materials Science*, 62 :189–194, 2012.
- [96] P. Suquet. Overall potentials and extremal surfaces of power law or ideally plastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41 :981–1002, 1993.
- [97] P. Suquet. Overall properties of nonlinear composites : a modified secant moduli theory and its link with ponte castañeda’s nonlinear variational procedure. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences de Paris, série IIB*, 320 :563–571, 1995.
- [98] D. R. S. Talbot and J. R. Willis. Some explicit bounds for the overall behavior of nonlinear composites. *International Journal of Solids and Structures*, 29 :1981–1987, 1992.
- [99] B. Tressou. *Contribution à l’homogénéisation des milieux viscoélastiques et introduction du couplage avec la température par extensions d’une approche incrémentale directe*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d’Aérotechnique, 2016.
- [100] B. Tressou, R. Varizi, and C. Nadot-Martin. Application of the incremental variational approach (eiv model) to the linear viscoelastic homogenization of different types of microstructures : long fiber-, particle-reinforced and strand-based composites. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 68 :104–116, 2018.



- 
- [101] J. R. Willis. Variational and related methods for the overall properties of composites. *Advanced in Applied Mechanics*, 21 :1–78, 1981.
- [102] J. R. Willis. Bounds and self-consistent estimates for the overall moduli of anisotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 25 :185–202, 1989.
- [103] J. R. Willis. The structure of overall constitutive relations for a class of nonlinear composites. *Journal Applied Mathematics*, 43 :231–242, 1989.
- [104] L. Wu, L. Adam, I. Doghri, and L. Noels. An incremental-secant mean-field homogenization method with second statistical moments for elasto-visco-plastic composite materials. *Mechanics of Materials*, 114 :180–200, 2017.
- [105] L. Wu, L. Noels, L. Adam, and I. Doghri. A combined incremental-secant mean-field homogenization scheme with per-phase residual strains for elasto-plastic composites. *International Journal of Plasticity*, 51 :80–102, 2013.
- [106] J. Yvonnet. *Computational homogenization of heterogeneous materials with finite elements*. Springer, 2019.
- [107] A. Zaoui. Continuum micromechanics : survey. *Journal of Engineering Mechanics, American Society of Civil Engineers*, 128 :808–816, 2002.

## Homogénéisation d'un composite thermo-élastique linéaire

On considère un composite thermo-élastique à N phases dont l'énergie intraphase est donnée par

$$w_0^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{L}_0^{(r)} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\tau}_0^{(r)} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} f_0^{(r)}. \quad (\text{A.1})$$

D'après Willis [101], l'énergie effective du composite s'écrit

$$\tilde{w}_0(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \tilde{\mathbb{L}}_0 : \mathbf{E} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_0 : \mathbf{E} + \frac{1}{2} \tilde{f}_0, \quad \text{où} \quad \begin{cases} \tilde{\mathbb{L}}_0 = \langle \mathbb{L}_0 \rangle + \sum_{r=1}^{N-1} c^{(r)} \left( \mathbb{L}_0^{(r)} - \mathbb{L}_0^{(N)} \right) : \left( \mathbb{A}_0^{(r)} - \mathbb{I} \right) \\ \tilde{\boldsymbol{\tau}}_0 = \langle \boldsymbol{\tau}_0 \rangle + \sum_{r=1}^{N-1} c^{(r)} \left( \mathbb{A}_0^{(r)} - \mathbb{I} \right)^T : \left( \boldsymbol{\tau}_0^{(r)} - \boldsymbol{\tau}_0^{(N)} \right) \\ \tilde{f}_0 = \langle f_0 \rangle + \sum_{r=1}^{N-1} c^{(r)} \left( \boldsymbol{\tau}_0^{(r)} - \boldsymbol{\tau}_0^{(N)} \right) : \mathbf{a}_0^{(r)}. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Dans l'équation (A.2),  $\mathbb{A}_0^{(r)}$  est un tenseur d'ordre quatre qui correspond au tenseur de localisation des déformations dans la phase  $r$ . Ce dernier possède les symétries mineures mais pas forcément les symétries majeures.  $\mathbf{a}_0^{(r)}$  est un tenseur d'ordre deux symétrique représentant la déformation thermique de la phase  $r$  et  $\mathbb{I}$  représente le tenseur identité symétrique d'ordre quatre. Comme l'ont montré [90], les moments d'ordre un et deux des déformations sur la phase  $r$  peuvent être obtenus par les formules suivantes

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(r)} = \mathbb{A}_0^{(r)} : \mathbf{E} + \mathbf{a}_0^{(r)}, \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(r)} = \frac{2}{c^{(r)}} \frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial \mathbb{L}_0^{(r)}}. \quad (\text{A.3})$$

Pour un composite biphasés (N=2), les tenseurs de localisation des déformations associé aux estimations de Hashin et Shtrikman, utilisés lors de l'application numérique, sont donnés par

$$\mathbb{A}_0^{(1)} = \left( I + c^{(2)} \mathbb{P}_0^{(2)} : \Delta \mathbb{L}_0 \right)^{-1}, \quad \mathbb{A}_0^{(2)} = \frac{1}{c^{(2)}} \left( I - c^{(1)} \mathbb{A}_0^{(1)} \right), \quad (\text{A.4})$$

où les indices (1) et (2) représentent respectivement l'inclusion et la matrice et  $\Delta\mathbb{L}_0 = \mathbb{L}_0^{(1)} - \mathbb{L}_0^{(2)}$ . Le tenseur d'ordre quatre  $\mathbb{P}_0^{(2)}$  correspond au tenseur de Hill du milieu de référence. Ce dernier prend en compte à la fois les caractéristiques du milieu de référence (ici la matrice) et la géométrie ainsi que la répartition des inclusions. Dans toutes les applications réalisées, le MLC considéré est isotrope, i.e.  $\mathbb{L}_0^{(r)} = 3k_0^{(r)}\mathbb{J} + 2\mu_0^{(r)}\mathbb{K}$ , et les inclusions sont considérées sphériques et réparties de manière isotrope. Sous ces conditions, le tenseur  $\mathbb{P}_0^{(2)}$  s'écrit sous la forme

$$\mathbb{P}_0^{(2)} = \frac{\alpha_0^{(2)}}{3k_0^{(2)}}\mathbb{J} + \frac{\beta_0^{(2)}}{2\mu_0^{(2)}}\mathbb{K}, \quad \text{with} \quad \alpha_0^{(2)} = \frac{3k_0^{(2)}}{3k_0^{(2)} + 4\mu_0^{(2)}}, \quad \beta_0^{(2)} = \frac{6(k_0^{(2)} + 2\mu_0^{(2)})}{5(3k_0^{(2)} + 4\mu_0^{(2)})}. \quad (\text{A.5})$$

Les tenseurs correspondant à la déformation thermique sont déterminés par les relations de Levin

$$\mathbf{a}_0^{(1)} = \frac{1}{c^{(1)}}\Delta\mathbb{L}_0^{-1} : \left( \tilde{\mathbb{L}}_0 - \langle \mathbb{L}_0 \rangle \right) : \Delta\mathbb{L}_0^{-1} : \left( \boldsymbol{\tau}_0^{(1)} - \boldsymbol{\tau}_0^{(2)} \right), \quad \mathbf{a}_0^{(2)} = -\frac{c^{(1)}}{c^{(2)}}\mathbf{a}_0^{(1)}. \quad (\text{A.6})$$

## Démonstration de l'équation (3.29)

On exprime ici les conditions de stationnarité de  $\langle J_L \rangle$  en fonction de  $\alpha = (\varepsilon^p, p)$  sous les  $N$  contraintes  $\langle h(\alpha) \rangle^{(r)} \leq 0$  pour  $r \in \{1, \dots, N\}$ . Pour cela, on explore la variation du champ  $\alpha$  à partir d'un point de départ  $\alpha_0$  choisi arbitrairement

$$\tilde{\alpha}(\tau) - \alpha_0 = \dot{\alpha}\tau, \quad (\text{B.1})$$

où  $\dot{\alpha}$  est un champ arbitraire et  $\tau$  un scalaire. La stationnarité de  $\langle J_L(\alpha) \rangle$  en fonction du champ  $\alpha$  requiert la stationnarité de  $\langle J_L(\tilde{\alpha}(\tau)) \rangle$  en fonction du scalaire  $\tau$ , sous les mêmes  $N$  contraintes, qui s'écrit

$$\text{stat}_{\tau / \langle h(\tilde{\alpha}(\tau)) \rangle^{(r)} \leq 0} \langle J_L(\tilde{\alpha}(\tau)) \rangle. \quad (\text{B.2})$$

La quantité  $\tau$  étant un scalaire, il est possible de faire appel aux conditions d'optimalité de KKT afin de résoudre le problème d'optimisation (B.2). On obtient alors

$$\forall r \in \{1, \dots, N\} \begin{cases} \frac{d}{d\tau} \langle J_L(\tilde{\alpha}(\tau)) \rangle + \sum_{r=1}^N \lambda^{(r)} \frac{d}{d\tau} \langle h(\tilde{\alpha}(\tau)) \rangle^{(r)} = 0 \\ \lambda^{(r)} \langle h(\tilde{\alpha}(\tau)) \rangle^{(r)} = 0 \\ \lambda^{(r)} \geq 0, \quad \langle h(\tilde{\alpha}(\tau)) \rangle^{(r)} \leq 0, \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

En prenant en compte le fait que les domaines  $\Omega$  et  $\Omega^{(r)}$  sont fixés (et que la dérivée partielle et l'intégrale peuvent permuter) et en utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées, l'équation (B.3)<sub>1</sub> se réécrit sous la forme

$$\sum_{r=1}^N \langle (c^{(r)} \partial J_L(\tilde{\alpha}) + \lambda^{(r)} \partial h(\tilde{\alpha})) : \dot{\alpha} \rangle^{(r)} = 0, \quad (\text{B.4})$$

où  $\partial$  représente la variation en fonction de  $\alpha = (\varepsilon^p, p)$ . De plus, l'équation (B.4) étant valable pour une valeur arbitraire de  $\dot{\alpha}$ , on a alors

$$\forall r \in \{1, \dots, N\}, \quad c^{(r)} \partial J_L(\tilde{\alpha}(\underline{x})) + \lambda^{(r)} \partial h(\tilde{\alpha}(\underline{x})) = 0, \quad \forall \underline{x} \in \Omega^{(r)}. \quad (\text{B.5})$$

En considérant le changement de variable  $\lambda^{(r)} = c^{(r)} \lambda^{(r)'}$  et en choisissant  $\tilde{\alpha} = \alpha$ , on obtient les conditions de stationnarité (3.29).



## Composites élasto-plastiques à matrice de Drücker-Prager

Dans cette annexe, nous allons présenter notre proposition de la formulation DIV dans le cas de composites élasto-plastiques constitués d'une matrice de Drücker-Prager. Nous allons tout d'abord présenter les potentiels locaux (énergie libre et potentiel de dissipation). Du fait du caractère non quadratique du potentiel de dissipation, nous introduisons un potentiel linéarisé  $J_L$  nous permettant, après résolution des conditions de stationnarité, obtenir un MLC à polarisation hétérogène intraphase. Nous homogénéiserons enfin ce dernier en faisant appel à la procédure de Lahellec et al. [54] ce qui nous permettra d'obtenir un système non linéaire à résoudre. Pour des raisons qui seront explicitées à la fin de cette annexe, nous ne présenterons pas de validation de ce développement.

### C.1 Comportement local et principes variationnels incrémentaux

#### Comportement local

On considère un VER  $\Omega$  d'un matériau composite de  $N$ -phases avec  $\Omega^{(r)}$  le volume de la phase  $r$  ( $r = 1, \dots, N$ ) tel que  $\Omega = \cup_{r=1}^N \Omega^{(r)}$ . Les phases sont supposées être des MSG ayant un comportement local élasto-plastique avec un critère de plasticité de Drücker-Prager sans écrouissage. Cette classe de matériaux est décrite à l'aide de deux potentiels convexes associés à la variable interne  $\alpha = (\varepsilon^p)$  décrivant les phénomènes irréversibles, où  $\varepsilon^p$  est un tenseur d'ordre deux symétrique, de trace non nulle, représentant les déformations plastiques. Le premier potentiel convexe est l'énergie libre

$$w^{(r)}(\varepsilon, \varepsilon^p) = \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon^p) : \mathbb{L}^{(r)} : (\varepsilon - \varepsilon^p). \quad (\text{C.1})$$

On peut alors déterminer la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  ainsi la force thermodynamique irréversible  $\mathcal{A}_\alpha = (\mathcal{A}_{\boldsymbol{\varepsilon}^p})$  associées à la variable interne  $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\varepsilon}^p)$  qui sont données par les lois d'état

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial w^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, p) = \mathbb{L}^{(r)} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \\ \mathcal{A}_{\boldsymbol{\varepsilon}^p} = -\frac{\partial w^{(r)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, p) = \mathbb{L}^{(r)} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) = \boldsymbol{\sigma}. \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Le second potentiel est le potentiel de dissipation  $\varphi^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\alpha}})$  dont l'expression, (voir par exemple Salençon [93]), est donnée par

$$\varphi^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \phi^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) + \Phi_{\mathcal{C}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p), \quad (\text{C.3})$$

avec

$$\phi^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \frac{\sigma_y^{(r)} \dot{\varepsilon}_m^p}{\alpha^{(r)}}, \quad \text{avec } \dot{\varepsilon}_m^p = \frac{1}{3} \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p), \quad (\text{C.4})$$

où  $\sigma_y^{(r)}$  représente la limite d'élasticité de la phase  $r$ , et  $\alpha^{(r)}$  un scalaire sans dimension, et où

$$\Phi_{\mathcal{C}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \begin{cases} 0 & \text{si } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \in \mathcal{C} \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

représente la fonction indicatrice sur l'ensemble convexe  $\mathcal{C}$  défini par

$$\mathcal{C} = \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p / g^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \alpha^{(r)} \dot{\varepsilon}_{eq}^p - \dot{\varepsilon}_m^p \leq 0\}. \quad (\text{C.6})$$

## Principes variationnels local et global

Les principes variationnels incrémentaux local et global du problème ont déjà été présentés dans un cadre général au chapitre 2 (voir sous section 1.2.2). Il suffit de remplacer  $\boldsymbol{\alpha}$  représentant l'ensemble des variables internes, par  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  qui est la variable interne du modèle considéré dans le présent chapitre.

## C.2 Double application de la procédure variationnelle pour des composites élasto-plastique de type Drucker-Prager

### C.2.1 Linéarisation du comportement local

En raison du caractère non quadratique du potentiel de dissipation  $\varphi^{(r)}$  (cf. Eq. (C.3)), le potentiel incrémental  $J$  défini dans l'équation (1.24)<sub>2,3</sub> est difficile à homogénéiser. Pour surmonter

cette difficulté, un potentiel incrémental linéarisé  $J_L^{(r)}$  est introduit sous la forme

$$\begin{cases} J_L(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) = \sum_{r=1}^N J_L^{(r)}(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \eta_{\varepsilon^p}^{(r)}) \chi^{(r)}(\underline{x}) & \text{avec} \\ J_L^{(r)}(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \eta_{\varepsilon^p}^{(r)}) = w^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{2 \Delta t (\alpha^{(r)})^2} (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) : \mathbb{J} : (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p), \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

où la notation  $\{\eta_{\varepsilon^p}\}$  correspond à l'ensemble des viscosités des phases  $\{\eta_{\varepsilon^p}^{(1)}, \dots, \eta_{\varepsilon^p}^{(N)}\}$ . On applique toujours l'idée clé de la procédure variationnelle qui est d'additionner et de soustraire le potentiel  $J_L$  au potentiel  $J$ .

### Approximation du potentiel incrémental condensé effectif

L'application de la procédure variationnelle au potentiel incrémental condensé  $J$  conduit à définir

$$\Delta J^{(r)} = J^{(r)} - J_L^{(r)} = \Delta t \varphi^{(r)} \left( \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p}{\Delta t} \right) - \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{2 \Delta t (\alpha^{(r)})^2} (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) : \mathbb{J} : (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p). \quad (\text{C.8})$$

En reportant (C.8) dans la formulation variationnelle (1.26) et en considérant la définition (1.24), on obtient

$$\tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) = \inf_{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}} \left\{ \inf_{\boldsymbol{\varepsilon}^p} \langle J_L(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) + \Delta J(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \rangle \right\}. \quad (\text{C.9})$$

On observe dans l'équation (C.5) que  $\Phi_C(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = +\infty$  lorsque  $g^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) > 0$ . En conséquence, la condition d'infimum dans l'équation (C.9) est obtenue sous la contrainte  $g^{(r)}\left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p}{\Delta t}\right) \leq 0$ . On introduit alors  $\Delta J_{bis}$  comme :

$$\begin{aligned} \Delta J_{bis}(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) &= \sum_{r=1}^N \Delta J_{bis}^{(r)}(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \eta_{\varepsilon^p}^{(r)}) \chi^{(r)}(\underline{x}) & \text{avec} \\ \Delta J_{bis}^{(r)}(\underline{x}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \eta_{\varepsilon^p}^{(r)}) &= \Delta t \phi^{(r)} \left( \left( \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p}{\Delta t} \right)_m \right) - \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{2 \Delta t (\alpha^{(r)})^2} (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) : \mathbb{J} : (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p), \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

de sorte que

$$\tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) = \inf_{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}} \left\{ \inf_{\boldsymbol{\varepsilon}^p / g^{(r)}\left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p}{\Delta t}\right) \leq 0} \langle J_L(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) + \Delta J_{bis}(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \rangle \right\}. \quad (\text{C.11})$$



Comme dans Lahellec et Suquet [57], une borne supérieure rigoureuse de  $\tilde{w}_\Delta$ , peut être obtenue en moyennant  $\Delta J_{bis}$  par son suprémum par rapport à  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ , sous la contrainte  $g^{(r)} \leq 0$  :

$$\begin{aligned} \tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) &\leq \tilde{w}_\Delta^{VAR}(\mathbf{E}, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \\ &= \inf_{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}} \left\{ \inf_{\boldsymbol{\varepsilon}^p / g^{(r)} \leq 0} \langle J_L(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \rangle + \left\langle \sup_{\boldsymbol{\varepsilon}^p / g^{(r)} \leq 0} \Delta J_{bis}(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \right\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

La contrainte  $g^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \leq 0$  dans l'équation (C.11) avec la définition (C.6) peut se réécrire en formulation totale sous la forme

$$h^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}^p) \leq 0 \quad \text{avec} \quad h(\boldsymbol{\varepsilon}^p) = (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) : \left( (\alpha^{(r)})^2 \mathbb{K} - \frac{1}{2} \mathbb{J} \right) : (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p). \quad (\text{C.13})$$

De plus, à partir de l'équation (C.10),  $\Delta J_{bis}$  peut s'exprimer comme une fonction de  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ . Il s'en suit que l'équation (C.12) prend la forme

$$\begin{aligned} \tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) &\leq \tilde{w}_\Delta^{VAR}(\mathbf{E}, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \\ &= \inf_{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}} \left\{ \inf_{\boldsymbol{\varepsilon}^p / h^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}^p) \leq 0} \langle J_L(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \rangle + \left\langle \sup_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p / g^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \leq 0} \Delta J_{bis}(\cdot, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \right\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Or, comme l'ont montré plusieurs auteurs, cette borne supérieure peut être trop forte dans certains cas, c'est pourquoi cette dernière est relaxée en la remplaçant par une condition de stationnarité. On obtient une estimation de  $\tilde{w}_\Delta$  de la forme

$$\begin{aligned} \tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) &\approx \tilde{w}_\Delta^{VAR}(\mathbf{E}, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \\ &= \inf_{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}} \left\{ \inf_{\boldsymbol{\varepsilon}^p / h^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}^p) \leq 0} \langle J_L(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \rangle + \left\langle \text{stat}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p / g^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \leq 0} \Delta J_{bis}(\cdot, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \right\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

De plus, d'après les expressions (C.4) et (C.10) de  $\phi^{(r)}$  et de  $\Delta J_{bis}$ , on note que  $\Delta J_{bis}$  ne dépend que de la variable  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^p$ , donc on a

$$\text{stat}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p / g^{(r)} \leq 0} \Delta J_{bis}(\cdot, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) = \text{stat}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^p \geq \alpha^{(r)} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^p \geq 0} \Delta J_{bis}(\cdot, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) = \text{stat}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^p \geq 0} \Delta J_{bis}(\cdot, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}), \quad (\text{C.16})$$

ce qui implique que l'équation (C.15) se réécrit sous la forme

$$\begin{aligned} \tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) &\approx \tilde{w}_\Delta^{VAR}(\mathbf{E}, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \\ &= \inf_{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}} \left\{ \inf_{\boldsymbol{\varepsilon}^p / h^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}^p) \leq 0} \langle J_L(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \rangle + \left\langle \text{stat}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^p \geq 0} \Delta J_{bis}(\cdot, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \right\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Enfin, une dernière optimisation en fonction de l'ensemble  $\{\eta_{\varepsilon^p}\}$  est considérée. Celle-ci conduit à l'estimation finale de la formulation DIV de  $\tilde{w}_\Delta$  et est définie comme

$$\tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) \approx \tilde{w}_\Delta^{DIV}(\mathbf{E}) = \text{stat}_{\{\eta_{\varepsilon^p}\}} \tilde{w}_\Delta^{VAR}(\mathbf{E}, \{\eta_{\varepsilon^p}\}). \quad (\text{C.18})$$

### Conditions de stationnarité

On se propose maintenant de développer toutes les conditions de stationnarité apparaissant dans (C.17) et (C.18). On procédera d'abord à l'écriture de la stationnarité de  $\Delta J_{bis}$  vis à vis de  $\dot{\varepsilon}^p$  ce qui fournira une expression de la viscosité  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$ . Après avoir calculé la stationnarité de  $\tilde{w}_\Delta$  par rapport à  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$ , nous nous pencherons enfin sur la stationnarité de  $J_L$  en fonction de  $\varepsilon^p$  qui fournira une expression de  $\varepsilon^p$  qui dépendra de  $\varepsilon$ .

### Stationnarité de $\Delta J_{bis}$

La condition de stationnarité en fonction de  $\dot{\varepsilon}_m^p$  conduit à

$$\partial \Delta J_{bis} = \mathbf{0} \Rightarrow \Delta t \frac{\partial \phi^{(r)}}{\partial \dot{\varepsilon}_m^p}(\dot{\varepsilon}_m^p) - \frac{3 \Delta t}{(\alpha^{(r)})^2} \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \dot{\varepsilon}_m^p = \mathbf{0}. \quad (\text{C.19})$$

Dans cette équation,  $\dot{\varepsilon}_m^p$  est à priori un champ inconnu qui dépend de la position  $\underline{x}$  dans la phase  $r$ . Or, le potentiel  $\phi^{(r)}$  et le module visqueux  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$  sont homogènes par phase. Ceci implique que tous les champs sont uniformes par phase. En particulier,  $\dot{\varepsilon}_m^p$  sera noté  $\widehat{\dot{\varepsilon}_m^p}^{(r)}$ . Donc, en considérant l'expression (C.4) du potentiel de dissipation  $\phi^{(r)}$ , on obtient une expression du module visqueux de la forme

$$\eta_{\varepsilon^p}^{(r)} = \frac{\partial \phi^{(r)}}{\partial \widehat{\dot{\varepsilon}_m^p}^{(r)}} \left( \widehat{\dot{\varepsilon}_m^p}^{(r)} \right) \frac{(\alpha^{(r)})^2}{3 \widehat{\dot{\varepsilon}_m^p}^{(r)}} = \frac{\sigma_y^{(r)} \alpha^{(r)}}{3 \widehat{\dot{\varepsilon}_m^p}^{(r)}}. \quad (\text{C.20})$$

Cette équation nous permet de calculer  $\Delta J_{bis}$  sous la condition de stationnarité. En effet, on observe dans (C.20) que le module visqueux  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$  est une fonction inversible de  $\widehat{\dot{\varepsilon}_m^p}^{(r)}$  dont l'inverse s'écrit

$$\widehat{\dot{\varepsilon}_m^p}^{(r)} \left( \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \right) = \frac{\sigma_y^{(r)} \alpha^{(r)}}{3 \eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}. \quad (\text{C.21})$$

On a alors

$$\left\langle \text{stat}_{\dot{\varepsilon}_m^p} \Delta J_{bis}(\cdot, \dot{\varepsilon}_m^p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \right\rangle = \Delta t \sum_{r=1}^N c^{(r)} f^{(r)} \left( \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \right) \quad \text{avec} \quad (\text{C.22})$$

$$f^{(r)} \left( \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \right) = \frac{\sigma_y^{(r)}}{\alpha^{(r)}} \widehat{\dot{\varepsilon}_m^p}^{(r)} \left( \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \right) - \frac{3}{2 (\alpha^{(r)})^2} \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \left( \widehat{\dot{\varepsilon}_m^p}^{(r)} \left( \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \right) \right)^2 = \frac{(\sigma_y^{(r)})^2}{6 \eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}.$$

Cette expression sera utile dans l'équation (C.44).

### Stationnarité de $\tilde{w}_{\Delta}^{VAR}$ en fonction de $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$

En faisant appel aux équations (C.7), (C.10) et (C.17), la condition de stationnarité de  $\tilde{w}_{\Delta}^{VAR}$  en fonction de  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$  s'écrit

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2 \Delta t (\alpha^{(r)})^2} \langle (\varepsilon^p - \varepsilon_n^p) : \mathbb{J} : (\varepsilon^p - \varepsilon_n^p) \rangle^{(r)} - \Delta t \frac{3}{2 (\alpha^{(r)})^2} \left( \widehat{\dot{\varepsilon}}_m^{(r)} \right)^2 \\ & + \left[ \frac{\sigma_y^{(r)}}{\alpha^{(r)}} - \frac{3}{(\alpha^{(r)})^2} \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \widehat{\dot{\varepsilon}}_m^{(r)} \right] \Delta t \frac{\partial \widehat{\dot{\varepsilon}}_m^{(r)}}{\partial \eta_{\varepsilon^p}^{(r)}} \left( \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \right) = 0 \end{aligned} \quad (C.23)$$

En reportant l'expression (C.20) de la viscosité  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$ , les termes entre crochet s'annulent. Il s'en suit alors

$$\widehat{\dot{\varepsilon}}_m^{(r)} = \overline{\dot{\varepsilon}}_m^{(r)} = \sqrt{\langle (\dot{\varepsilon}_m^p)^2 \rangle^{(r)}} \quad (C.24)$$

et (C.20) se réécrit sous la forme

$$\eta_{\varepsilon^p}^{(r)} = \frac{\sigma_y^{(r)} \alpha^{(r)}}{3 \overline{\dot{\varepsilon}}_m^{(r)}}. \quad (C.25)$$

### Stationnarité de $\langle J_L \rangle$ en fonction de $\varepsilon^p$

La contrainte  $h^{(r)}(\varepsilon^p) \leq 0$ , avec  $h^{(r)}$  définie par l'équation (C.13), doit être satisfaite  $\forall \underline{x} \in \Omega^{(r)}$  car  $\varepsilon_n^p$  est un champ hétérogène. Afin de contourner cette difficulté, la contrainte  $h^{(r)}$  est relaxée en une condition de contrainte moyenne par phase, i.e.  $\langle h^{(r)} \rangle^{(r)} \leq 0, \forall r \in \{1, \dots, N\}$ . La stationnarité de  $\langle J_L \rangle$  en fonction de  $\varepsilon^p$  sous ces nouvelles contraintes s'écrit en ayant recours aux conditions d'optimalité de KKT. On obtient alors (cf. annexe B)

$$\forall r \in \{1, \dots, N\} \begin{cases} \partial J_L^{(r)}(\underline{x}) + \lambda^{(r)} \partial h^{(r)}(\underline{x}) = 0 & \forall \underline{x} \in \Omega^{(r)} \\ \lambda^{(r)} \langle h^{(r)} \rangle^{(r)} = 0 \\ \lambda^{(r)} \geq 0, \quad \langle h^{(r)} \rangle^{(r)} \leq 0, \end{cases} \quad (C.26)$$

où,  $\lambda^{(r)}$  sont  $N$  scalaires et  $\partial$  représente la variation vis à vis de  $\varepsilon^p$ . En considérant les équations (C.7) et (C.13) avec (C.26), on aboutit à

$$\begin{cases} -\mathbb{L}^{(r)} : (\varepsilon - \varepsilon^p) + \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t (\alpha^{(r)})^2} \mathbb{J} : (\varepsilon^p - \varepsilon_n^p) + 2 \lambda^{(r)} \left( (\alpha^{(r)})^2 \mathbb{K} - \frac{1}{2} \mathbb{J} \right) : (\varepsilon^p - \varepsilon_n^p) = 0 \\ \lambda^{(r)} \left\langle (\varepsilon^p - \varepsilon_n^p) : \left( (\alpha^{(r)})^2 \mathbb{K} - \frac{1}{2} \mathbb{J} \right) : (\varepsilon^p - \varepsilon_n^p) \right\rangle^{(r)} = 0 \\ \lambda^{(r)} \geq 0, \quad \langle h \rangle^{(r)} \leq 0, \end{cases} \quad (C.27)$$

Afin d'obtenir l'ensemble des équations du modèle, on doit maintenant trouver une relation liant  $\varepsilon^p$  et  $\varepsilon$ . A cette fin, on doit considérer les deux cas possibles suivants pour le multiplicateur de Lagrange :

**Cas 1 :**  $\lambda^{(r)} = 0$ . Cette condition conduit directement en projetant (C.27)<sub>1</sub> sur  $\mathbb{K}$  à  $\varepsilon_d = \varepsilon_d^p$ . Ceci implique qu'il n'y a pas de déformation élastique déviatorique, ce qui n'a pas de sens. Ce cas ne peut donc se produire.

**Cas 2 :**  $\lambda^{(r)} > 0$ . Cette hypothèse implique, d'après l'équation (C.27)<sub>2</sub>, que  $\langle h^{(r)} \rangle^{(r)} = 0$  et donc que

$$\overline{\overline{\varepsilon}}_m^{(r)} = \alpha^{(r)} \overline{\overline{\varepsilon}}_d^{(r)}. \quad (\text{C.28})$$

De plus, d'après (C.27)<sub>1</sub>, on a

$$\varepsilon^p = \left[ \mathbb{L}^{(r)} + \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t (\alpha^{(r)})^2} \mathbb{J} + 2 \lambda^{(r)} \left( (\alpha^{(r)})^2 \mathbb{K} - \frac{1}{2} \mathbb{J} \right) \right]^{-1} : \left[ \mathbb{L}^{(r)} : \varepsilon + \left( \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t (\alpha^{(r)})^2} \mathbb{J} + 2 \lambda^{(r)} \left( (\alpha^{(r)})^2 \mathbb{K} - \frac{1}{2} \mathbb{J} \right) \right) : \varepsilon_n^p \right]. \quad (\text{C.29})$$

Il nous reste alors à déterminer l'expression de  $\lambda^{(r)}$ . Pour cela, nous allons partir de l'équation (C.27)<sub>1</sub>. En prenant en compte (C.2)<sub>1</sub>, cette dernière peut se réécrire sous la forme

$$\sigma = \left[ \left( \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{(\alpha^{(r)})^2} - \lambda^{(r)} \Delta t \right) \mathbb{J} + 2 \lambda^{(r)} \Delta t (\alpha^{(r)})^2 \mathbb{K} \right] : \varepsilon^p. \quad (\text{C.30})$$

En projetant l'équation (C.30) sur  $\mathbb{J}$  et  $\mathbb{K}$ , on obtient respectivement

$$\sigma_m = \left( \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{(\alpha^{(r)})^2} - \lambda^{(r)} \Delta t \right) \varepsilon_m^p \quad \text{et} \quad \sigma_d = 2 \lambda^{(r)} \Delta t (\alpha^{(r)})^2 \varepsilon_d^p. \quad (\text{C.31})$$

Il est alors possible de calculer les second moments de  $\sigma$ . On a alors

$$\overline{\overline{\sigma}}_m^{(r)} = \left| \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{(\alpha^{(r)})^2} - \lambda^{(r)} \Delta t \right| \overline{\overline{\varepsilon}}_m^{(r)} \quad \text{et} \quad \overline{\overline{\sigma}}_d^{(r)} = 3 \lambda^{(r)} \Delta t (\alpha^{(r)})^2 \overline{\overline{\varepsilon}}_d^{(r)}. \quad (\text{C.32})$$

Or, d'après l'équation (C.28), (C.32) s'écrit sous la forme

$$\overline{\overline{\varepsilon}}_m^{(r)} = \frac{\overline{\overline{\sigma}}_m^{(r)}}{\left| \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{(\alpha^{(r)})^2} - \lambda^{(r)} \Delta t \right|} = \frac{\overline{\overline{\sigma}}_d^{(r)}}{3 \lambda^{(r)} \Delta t \alpha^{(r)}}. \quad (\text{C.33})$$

Afin de déterminer la bonne expression de  $\lambda^{(r)}$ , nous devons analyser les deux cas possibles pour le terme sous la valeur absolue.

**1<sup>ère</sup> possibilité :**  $\left| \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{(\alpha^{(r)})^2} - \lambda^{(r)} \Delta t \right| = \lambda^{(r)} \Delta t - \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{(\alpha^{(r)})^2} \geq 0$ . En considérant ce cas, on déduit des équations (C.33) et (C.25) que

$$\lambda^{(r)} \Delta t = \frac{\overline{\overline{\sigma_d}}^{(r)}}{3 \alpha^{(r)} \overline{\overline{\varepsilon_m^p}}^{(r)}} = \frac{\sigma_y^{(r)}}{3 \alpha^{(r)} \overline{\overline{\varepsilon_m^p}}^{(r)}} + \frac{\overline{\overline{\sigma_m}}^{(r)}}{\overline{\overline{\varepsilon_m^p}}^{(r)}}. \quad (\text{C.34})$$

La seconde égalité de cette équation conduit directement à

$$\sigma_y^{(r)} = \overline{\overline{\sigma_d}}^{(r)} - 3 \alpha^{(r)} \overline{\overline{\sigma_m}}^{(r)}. \quad (\text{C.35})$$

On observe que cette hypothèse n'est pas capable de retrouver le critère de plasticité  $F$  en moment d'ordre deux défini par

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{eq} + 3 \alpha^{(r)} \sigma_m - \sigma_y^{(r)}. \quad (\text{C.36})$$

Ceci nous permet alors de conclure que le cas considéré ici n'est pas possible.

**2<sup>nde</sup> possibilité :**  $\left| \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{(\alpha^{(r)})^2} - \lambda^{(r)} \Delta t \right| = \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{(\alpha^{(r)})^2} - \lambda^{(r)} \Delta t \geq 0$ . On déduit alors des équations (C.33) et (C.25) l'expression du multiplicateur de Lagrange

$$\lambda^{(r)} \Delta t = \frac{\overline{\overline{\sigma_d}}^{(r)}}{3 \alpha^{(r)} \overline{\overline{\varepsilon_m^p}}^{(r)}} = \frac{\sigma_y^{(r)}}{3 \alpha^{(r)} \overline{\overline{\varepsilon_m^p}}^{(r)}} - \frac{\overline{\overline{\sigma_m}}^{(r)}}{\overline{\overline{\varepsilon_m^p}}^{(r)}}. \quad (\text{C.37})$$

La seconde égalité de cette équation conduit directement à

$$\sigma_y^{(r)} = \overline{\overline{\sigma_d}}^{(r)} + 3 \alpha^{(r)} \overline{\overline{\sigma_m}}^{(r)}. \quad (\text{C.38})$$

On note que sous cette hypothèse, il est possible de retrouver le critère (C.36) en moment d'ordre deux.

On déduit alors des équations (C.33) et (C.25) que

$$\lambda^{(r)} = \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \overline{\overline{\sigma_d}}^{(r)}}{(\alpha^{(r)})^2 \Delta t \left( 3 \alpha^{(r)} \overline{\overline{\sigma_m}}^{(r)} + \overline{\overline{\sigma_d}}^{(r)} \right)} = \frac{\sigma_y^{(r)}}{3 \alpha^{(r)} \overline{\overline{\sigma_m}}^{(r)} + \overline{\overline{\sigma_d}}^{(r)}} \frac{\overline{\overline{\sigma_d}}^{(r)}}{3 \alpha^{(r)} \Delta t \overline{\overline{\varepsilon_m^p}}^{(r)}}. \quad (\text{C.39})$$

Or, d'après l'expression (C.38) du critère local exprimé avec les second moments, le premier rapport de (C.39)<sub>1</sub> est égale à 1. Sous cette condition, on obtient une expression du multiplicateur de lagrange  $\lambda^{(r)}$  de la forme

$$\lambda^{(r)} = \frac{\overline{\overline{\sigma_d}}^{(r)}}{3 \alpha^{(r)} \Delta t \overline{\overline{\varepsilon_m^p}}^{(r)}}. \quad (\text{C.40})$$

### Détermination du MLC à polarisation hétérogène par phase

En reportant l'expression (C.29) de  $\varepsilon^p$  dans la définition (C.7) de  $J_L$ , on obtient un MLC thermo-élastique dont l'énergie libre  $w_L^{(r)}$  est donnée par

$$w_L^{(r)}(\underline{x}, \underline{\varepsilon}, \eta_{\varepsilon^p}^{(r)}) = \inf_{\varepsilon^p} J_L^{(r)}(\underline{x}, \underline{\varepsilon}, \varepsilon^p, \eta_{\varepsilon^p}^{(r)}) = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} : \mathbb{L}_L^{(r)} : \underline{\varepsilon} + \tau_L^{(r)}(\underline{x}) : \underline{\varepsilon} + \frac{1}{2} f_L^{(r)}(\underline{x}), \quad (\text{C.41})$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{L}_L^{(r)} = \left[ \mathbb{L}^{(r)} + \left( \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{(\alpha^{(r)})^2 \Delta t} - \lambda^{(r)} \right) \mathbb{J} + 2 \lambda^{(r)} (\alpha^{(r)})^2 \mathbb{K} \right]^{-2} : \\ \left[ \left( \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{(\alpha^{(r)})^2 \Delta t} - \lambda^{(r)} \right)^2 \mathbb{J} + \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{(\alpha^{(r)})^2 \Delta t} \mathbb{L}^{(r)} : \mathbb{J} + \left( 2 \lambda^{(r)} (\alpha^{(r)})^2 \right)^2 \mathbb{K} \right] : \mathbb{L}^{(r)} \\ \tau_L^{(r)}(\underline{x}) = -\mathbb{L}_L^{(r)} : \underline{\varepsilon}_n^p(\underline{x}) \\ f_L^{(r)}(\underline{x}) = \underline{\varepsilon}_n^p(\underline{x}) : \mathbb{L}_L^{(r)} : \underline{\varepsilon}_n^p(\underline{x}). \end{array} \right. \quad (\text{C.42})$$

Une telle énergie correspond à un MLC à polarisation hétérogène intraphase. La polarisation  $\tau_L^{(r)}$  et le champ scalaire  $f_L^{(r)}$  dépendent de  $\underline{x}$  à travers  $\underline{\varepsilon}_n^p(\underline{x})$ . En conséquence, l'énergie libre effective de ce MLC est définie par

$$\tilde{w}_L(\mathbf{E}, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) = \inf_{\langle \varepsilon \rangle = \mathbf{E}} \langle w_L(\cdot, \varepsilon, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \rangle. \quad (\text{C.43})$$

A partir des équations (C.17), (C.18) et (C.22), il vient

$$\tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) \approx \tilde{w}_\Delta^{DIV}(\mathbf{E}) = \text{stat}_{\{\eta_{\varepsilon^p}\}} \tilde{w}_\Delta^{VAR}(\mathbf{E}, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) = \tilde{w}_L(\mathbf{E}, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) + \Delta t \sum_{r=1}^N c^{(r)} f^{(r)} \left( \eta_{\varepsilon^p}^{(r)} \right), \quad (\text{C.44})$$

avec  $f^{(r)}$  défini par l'équation (C.22)<sub>2</sub>. En prenant en compte les conditions de stationnarité en fonction de  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$ , on obtient

$$\Sigma = \frac{\partial \tilde{w}_\Delta}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}) \approx \frac{\partial \tilde{w}_\Delta^{DIV}}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}) = \frac{\partial \tilde{w}_L}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}), \quad (\text{C.45})$$

où  $\tilde{w}_L(\mathbf{E})$  représente la valeur de  $\tilde{w}_L(\mathbf{E}, \{\eta_{\varepsilon^p}\})$  calculée pour l'ensemble  $\{\eta_{\varepsilon^p}\}$  optimal.

### C.2.2 Homogénéisation du MLC à polarisation hétérogène intraphase

Comme dans les chapitre précédent, il est nécessaire d'uniformiser le comportement local afin de pouvoir homogénéiser le composite. pour cela, nous allons approcher le MLC  $w_L$  par un MLC  $w_0$  à propriétés homogènes par phase. Pour cela nous appliquerons la procédure de Lahellec et al. [54]. Ce développement est strictement identique à celle réalisée dans la partie 3.2.2. Elle permet d'aboutir au comportement effectif donnée à l'équation (3.46).

### Composites élasto-plastiques de type Drucker-Prager à phases isotropes

Comme nous l'avons considéré dans les chapitres précédents, on suppose que les phases constituantes du composite décrites dans la partie 5.2.1 ainsi que les tenseurs d'élasticités du MLC  $w_0$  sont isotropes (voir Eq. (5.98)). De plus, comme c'était le cas pour le modèle DIV associée à une matrice de Green (cf. chapitre 7), l'expression (C.42)<sub>2</sub> de  $\tau_L^{(r)}(\underline{x})$  dépend du champ  $\varepsilon_n^p$  qui n'est plus forcément déviatorique. On obtient alors ici aussi une équation du type équation (7.34).

Sous ces conditions d'isotropie, (C.42) se réécrit sous la forme

$$\begin{cases} \mathbb{L}_L^{(r)} = 3 k_L^{(r)} \mathbb{J} + 2 \mu_L^{(r)} \mathbb{K} \\ \tau_L^{(r)}(\underline{x}) = -3 k_L^{(r)} \varepsilon_{n,m}^p(\underline{x}) \mathbf{1} - 2 \mu_L^{(r)} \varepsilon_{n,d}^p(\underline{x}) \\ f_L^{(r)}(\underline{x}) = 9 k_L^{(r)} (\varepsilon_{n,m}^p(\underline{x}))^2 + 2 \mu_L^{(r)} \varepsilon_{n,d}^p(\underline{x}) : \varepsilon_{n,d}^p(\underline{x}) \end{cases} \quad (\text{C.46})$$

avec

$$k_L^{(r)} = k^{(r)} \frac{\left( \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{(\alpha^{(r)})^2 \Delta t} - \lambda^{(r)} \right)^2 + 3 k^{(r)} \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{(\alpha^{(r)})^2 \Delta t}}{\left( 3 k^{(r)} - \lambda^{(r)} + \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{(\alpha^{(r)})^2 \Delta t} \right)^2} \quad \text{et} \quad \mu_L^{(r)} = \mu^{(r)} \left( \frac{\lambda^{(r)} (\alpha^{(r)})^2}{\mu^{(r)} + \lambda^{(r)} (\alpha^{(r)})^2} \right)^2. \quad (\text{C.47})$$

De même, l'expression (C.29) de  $\varepsilon^p$  devient

$$\varepsilon^p = \beta^{(r)} : \varepsilon + \gamma^{(r)} : \varepsilon_n^p, \quad \text{avec} \quad \beta^{(r)} = \beta_m^{(r)} \mathbb{J} + \beta_d^{(r)} \mathbb{K} \quad \text{et} \quad \gamma^{(r)} = \gamma_m^{(r)} \mathbb{J} + \gamma_d^{(r)} \mathbb{K} \quad (\text{C.48})$$

et

$$\begin{aligned} \beta_m^{(r)} &= \frac{3 k^{(r)}}{3 k^{(r)} - \lambda^{(r)} + \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{(\alpha^{(r)})^2 \Delta t}}, & \beta_d^{(r)} &= \frac{\mu^{(r)}}{\mu^{(r)} + \lambda^{(r)} (\alpha^{(r)})^2}, \\ \gamma_m^{(r)} &= \frac{\frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{(\alpha^{(r)})^2 \Delta t} - \lambda^{(r)}}{3 k^{(r)} - \lambda^{(r)} + \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{(\alpha^{(r)})^2 \Delta t}}, & \gamma_d^{(r)} &= \frac{\lambda^{(r)} (\alpha^{(r)})^2}{\mu^{(r)} + \lambda^{(r)} (\alpha^{(r)})^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.49})$$

Afin de déterminer complètement les expressions de  $\mathbb{L}_L^{(r)}$  et  $\tau_L^{(r)}$ , il est nécessaire de déterminer l'expression de la viscosité sécante  $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$ . Pour cela,  $\overline{\varepsilon}_m^{(r)}$  et  $\overline{\sigma}_d^{(r)}$  doivent être déterminés (cf. (C.25) et (C.37)<sub>1</sub>). A partir de (C.48) et (C.49), et en remarquant que  $\gamma_m^{(r)} - 1 = -\beta_m^{(r)}$  et que  $\gamma_d^{(r)} - 1 = -\beta_d^{(r)}$ , on obtient après calcul (voir partie 7.2.2) une expression des moments d'ordre deux  $\overline{\varepsilon}_m^p$  Eq. (7.42)<sub>1</sub> et  $\overline{\varepsilon}_d^p$  Eq. (7.42)<sub>2</sub>.

Comme on a vu précédemment, les moments d'ordre deux de  $\varepsilon$  et  $\sigma$ , sont approchés par les

moments d'ordre deux de  $\varepsilon_0$  et  $\sigma_0$ , qui sont les déformations et les contraintes du MLC  $w_0$  à polarisation homogène par phase. Similairement au cas d'une matrice de Green, on détermine les seconds moments de  $\sigma_0$  par l'équation (7.44).

### C.2.3 Application à une matrice élasto-plastique renforcée par des particules sphériques

Dans cette partie, nous appliquons la formulation DIV proposée au cas d'un composite biphasé constitué d'une matrice élasto-plastique de type Drucker-Prager sans écrouissage renforcée par des particules sphériques élastiques linéaires distribuées de manière isotrope. On rappelle que les indices (1) et (2) représentent respectivement la phase inclusionnaire et la phase matricielle. Les moments d'ordre un sur les phases sont exprimés par les équations (3.56) et (3.57). Les inclusions étant élastiques, l'utilisation des bornes de Hashin et Shtrikman assurent que les champs de déformations et de contraintes du MLC  $w_0$  sont uniformes sur la phase inclusionnaire de sorte que  $C^{(1)}(\varepsilon_0) = 0$ . A partir de l'équation (3.45), on retrouve l'égalité de l'équation (2.67). De plus, en faisant la même hypothèse (2.68) que LaHellec et al. [54], l'équation (3.44) permet de retrouver l'équation (2.69).

#### Résumé du système non linéaire

Dans cette partie, nous résumons les équations que satisfait la formulation DIV proposée.

La phase inclusionnaire étant élastique linéaire, et en suivant la démarche de la partie 3.2.3, on retrouve alors l'équation (3.59) fournissant des relations entre les paramètres des MLC dans l'inclusion.

Dans la phase matricielle, les expressions de  $k_0^{(2)}$ ,  $\mu_0^{(2)}$ ,  $\tau_0^{(2)}$ ,  $k_L^{(2)}$ ,  $\mu_L^{(2)}$  et  $\tau_L^{(2)}$  qui caractérisent les MLC  $w_0$  et  $w_L$  doivent être déterminées. Les modules sécants  $k_L^{(2)}$  et  $\mu_L^{(2)}$  ainsi que la polarisation  $\tau_L^{(2)}$  sont donnés par les équations (C.47) et (C.46)<sub>2</sub>. La matrice étant plastiquement compressible, les expressions des équations sont identiques. La polarisation  $\tau_0^{(2)}$  pour des composites à phases isotropes se détermine à partir de (3.44) et s'exprime par l'équation (7.45). De même, en considérant l'équation (3.45) pour des MLC à phases isotropes, et en projetant cette équation sur  $\mathbb{J}$  et  $\mathbb{K}$ , on obtient respectivement une expression de  $k_0^{(2)}$  (7.46) et de  $\mu_0^{(2)}$  (7.47).

On remarquera qu'une fois que la viscosité  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  et que le multiplicateur de Lagrange  $\lambda^{(2)}$  (ou de manière équivalente le second moment  $\overline{\varepsilon_m^p}^{(2)}$  cf. (C.25) et (C.40)) sont connus,  $k_L^{(r)}$  et  $\mu_L^{(r)}$  sont aussi (voir Eq. (C.47)). Les numérateurs sous les racines des équations (7.46) et (7.47)



sont connus du pas précédent. Pour les dénominateurs, les moments d'ordre un  $\overline{\varepsilon_{0,m}}^{(2)}$  et  $\overline{\varepsilon_{0,d}}^{(2)}$  sont déterminés à partir de (3.56) et (3.57) et les seconds moments  $\langle (\varepsilon_{0,m})^2 \rangle^{(2)}$  et  $\langle \varepsilon_0^d : \varepsilon_0^d \rangle^{(2)}$  se déduisent de l'équation (A.3)<sub>2</sub> et s'écrivent respectivement comme

$$\langle (\varepsilon_{0,m})^2 \rangle^{(2)} = \frac{2}{9 c^{(2)}} \frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial k_0^{(2)}}(\mathbf{E}) \quad \text{et} \quad \langle \varepsilon_{0,d} : \varepsilon_{0,d} \rangle^{(2)} = \frac{1}{c^{(2)}} \frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial \mu_0^{(2)}}(\mathbf{E}). \quad (\text{C.50})$$

Pour des composites isotropes, on remarque que ces moments dépendent des paramètres  $k_0^{(2)}$ ,  $\mu_0^{(2)}$  et  $\tau_0^{(2)}$  qui définissent le MLC homogène  $w_0$  dans la phase matricielle. En conséquence, le problème non linéaire à résoudre se résume aux cinq équations (C.25), (C.37)<sub>1</sub>, (7.46), (7.47) et (7.45) à cinq inconnues  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$ ,  $\lambda^{(2)}$ ,  $k_0^{(2)}$ ,  $\mu_0^{(2)}$  et  $\tau_0^{(2)}$ . On observe d'après (C.46) que les expressions de  $k_L^{(2)}$ ,  $\mu_L^{(2)}$  et  $\tau_L^{(2)}$  dépendent des variables  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  et  $\lambda^{(2)}$ .

Comme nous l'avons vu plus haut, la détermination de  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  et  $\lambda^{(2)}$  revient à déterminer  $\overline{\varepsilon_m^p}^{(2)}$  (cf. Eq. (C.25) et (C.40)). Pour cela, on fait appel aux équations (7.42) qui nécessitent de connaître les moyennes  $\overline{\sigma_{0,m}}^{(r)}$  et  $\overline{\sigma_{0,d}}^{(r)}$  données par (7.44). Ces dernières sont obtenues à partir des premier et second moments de  $\varepsilon_0$  qui eux mêmes s'obtiennent à partir des équations (3.56), (3.57) et (C.50).

Enfin, en considérant l'expression de  $\mathbb{P}_0^{(2)}$  pour un composite isotrope (cf. Eq. (A.5)) ainsi que les équations (3.56) et (3.57), on constate que  $\overline{\varepsilon_{0,m}}^{(2)}$  et  $\overline{\varepsilon_{0,d}}^{(2)}$  ne dépendent plus de  $\tau_0^{(r)}$  mais seulement des quatre paramètres  $k_0^{(2)}$ ,  $\mu_0^{(2)}$ ,  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  et  $\lambda^{(2)}$ . En considérant cette dépendance et en mettant en relation l'équation (7.45) avec les définitions de  $k_L^{(2)}$ ,  $\mu_L^{(2)}$  et  $\tau_L^{(2)}$  exposées dans (C.47) et (C.46)<sub>2</sub>, on montre ainsi que la polarisation  $\tau_0^{(2)}$  ne dépend également que des quatre paramètres  $k_0^{(2)}$ ,  $\mu_0^{(2)}$ ,  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  et  $\lambda^{(2)}$ .

En conclusion, le problème non linéaire à résoudre défini par les équations (C.25), (C.40), (7.45), (7.46) et (7.47) se réduit de un problème à quatre équations (C.25), (C.40), (7.46) et (7.47) pour quatre inconnues  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$ ,  $\lambda^{(2)}$ ,  $k_0^{(2)}$  et  $\mu_0^{(2)}$  défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 \left( \mu_0^{(2)}, k_0^{(2)}, \eta_{\varepsilon^p}^{(2)}, \lambda^{(2)} \right) \equiv \left( \mu_0^{(2)} - \mu_L^{(2)} \right)^2 - \left( \mu_L^{(2)} \right)^2 \frac{\langle \varepsilon_{n,d}^p : \varepsilon_{n,d}^p \rangle^{(2)} - \overline{\varepsilon_{n,d}^p}^{(2)} : \overline{\varepsilon_{n,d}^p}^{(2)}}{\langle \varepsilon_{0,d} : \varepsilon_{0,d} \rangle^{(2)} - \overline{\varepsilon_{0,d}}^{(2)} : \overline{\varepsilon_{0,d}}^{(2)}} = 0 \\ F_2 \left( \mu_0^{(2)}, k_0^{(2)}, \eta_{\varepsilon^p}^{(2)}, \lambda^{(2)} \right) \equiv \left( k_0^{(2)} - k_L^{(2)} \right)^2 - \left( k_L^{(2)} \right)^2 \frac{\langle (\varepsilon_{n,m}^p)^2 \rangle^{(2)} - \left( \overline{\varepsilon_{n,m}^p}^{(2)} \right)^2}{\langle (\varepsilon_{0,m})^2 \rangle^{(2)} - \left( \overline{\varepsilon_{0,m}}^{(2)} \right)^2} = 0 \\ F_3 \left( \mu_0^{(2)}, k_0^{(2)}, \eta_{\varepsilon^p}^{(2)}, \lambda^{(2)} \right) \equiv \eta_{\varepsilon^p}^{(2)} - \frac{\sigma_y^{(r)} \alpha^{(2)}}{3 \overline{\varepsilon_m^p}^{(2)}} = 0 \\ F_4 \left( \mu_0^{(2)}, k_0^{(2)}, \eta_{\varepsilon^p}^{(2)}, \lambda^{(2)} \right) \equiv \lambda^{(2)} - \frac{\overline{\sigma_d}^{(2)}}{3 \alpha^{(2)} \Delta t \overline{\varepsilon_m^p}^{(2)}} = 0. \end{array} \right. \quad (\text{C.51})$$

Après la résolution de ce système, il est alors possible de calculer les paramètres  $k_L^{(2)}$ ,  $\mu_L^{(2)}$ ,  $\tau_L^{(2)}$ ,  $\tau_0^{(2)}$ ,  $\overline{\varepsilon}_m^{(2)}$  et  $\overline{\varepsilon}_d^{(2)}$  à partir des équations (C.47), (C.46)<sub>2</sub>, (7.45) et (7.42).

### Cas du régime élastique

Dans le cas du régime élastique,  $\varepsilon^p = \varepsilon_n^p$  et donc  $\overline{\varepsilon}_m^{(2)} = 0$ . Les troisième et quatrième équations du système (C.51) impliquent que  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  et  $\lambda^{(2)}$  tendent vers  $+\infty$ . Le système non linéaire (C.51) se réduit alors à un système à deux équations pour deux inconnues  $F_1(\mu_0^{(2)}, k_0^{(2)}, +\infty, +\infty) = 0$  et  $F_2(\mu_0^{(2)}, k_0^{(2)}, +\infty, +\infty) = 0$ . Pour obtenir la valeur des paramètres lors de la charge et décharge élastique, il faut donc faire tendre  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  et  $\lambda^{(2)}$  vers  $+\infty$ . On obtient en particulier,  $k_L^{(2)} = k^{(2)}$ ,  $\mu_L^{(2)} = \mu^{(2)}$  et  $\tau_L^{(r)} = -3 k^{(2)} \varepsilon_{n,m}^p - 2 \mu^{(2)} \varepsilon_{n,d}^p$ . De plus, comme nous l'avons vu dans la partie C.2.1, le composite est en régime plastique lorsque l'équation (C.38) est satisfaite dans la phase matricielle. En conséquence, pour vérifier que nous sommes bien en régime élastique, les second moments  $\overline{\sigma}_m^{(2)}$  et  $\overline{\sigma}_d^{(2)}$  doivent satisfaire l'inégalité suivante

$$\overline{\sigma}_d^{(2)} + 3 \alpha^{(2)} \overline{\sigma}_m^{(2)} \leq \sigma_y^{(2)}, \quad (\text{C.52})$$

qui représente la surface de plasticité pour la matrice dans notre approche. Or, les moments d'ordre deux  $\overline{\sigma}_m^{(2)}$  et  $\overline{\sigma}_d^{(2)}$  sont déjà connus par l'équation (7.44).

### Difficultés numériques

La mise en œuvre numérique de ce modèle est quasiment similaire à celle présentée dans le cas d'une matrice de type Green (cf. partie 7.2.4). La différence entre ces deux modèles vient du régime plastique. En effet, dans le cas d'un critère de Green, le système non linéaire à résoudre est un système à trois équations pour trois inconnues (cf. Eq. (7.49)) alors que dans le cas d'un critère de Drucker-Prager, il faut résoudre un système à quatre équations quatre inconnues (cf. Eq. (C.51)).

Nous avons observé que numériquement l'algorithme ne convergeait pas dès le premier pas plastique. Ce problème peut provenir de deux problèmes, soit le modèle proposé n'est pas bon, soit l'algorithme n'arrive pas à converger vers la bonne solution.

## C.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étendu la formulation DIV aux comportements élasto-plastiques régis par un critère de type Drucker-Prager. Comme dans le chapitre 7, la matrice est plastiquement

compressible ( $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^p) \neq 0$ ). Du fait de la forme non quadratique du potentiel de dissipation  $\varphi^{(r)}$  (Eq. (C.3)), il a été nécessaire d'introduire un potentiel incrémental linéarisé  $J_L$  permettant l'homogénéisation du composite. La résolution des conditions de stationnarité nous a permis d'obtenir une expression de la déformation plastique, de la viscosité  $\eta_{\varepsilon^p}^{(2)}$  ainsi que du multiplicateur de Lagrange  $\lambda^{(2)}$ . Après l'homogénéisation du MLC à polarisation hétérogène intraphase par la méthode de Lahellec et al. [54], nous avons obtenu un système non linéaire à résoudre de quatre équations pour quatre inconnues. On a observé que numériquement ce système n'a pas pu être résolu. Ceci peut provenir soit d'une mauvaise modélisation du problème soit d'un problème de convergence de l'algorithme.

De plus, l'introduction d'un autre potentiel incrémental linéarisé  $J_L$  pourrait être envisagée afin d'aboutir à un système non linéaire plus simple à résoudre que celui présenté ici. Il est également probable qu'une formulation de type RVP (Rate Variational Procedure) soit plus appropriée.