



**HAL**  
open science

# Simulation numérique des problèmes mécaniques non linéaires par approche mixte MEF-MESHLESS

Yosr Ghozzi

► **To cite this version:**

Yosr Ghozzi. Simulation numérique des problèmes mécaniques non linéaires par approche mixte MEF-MESHLESS. Matériaux et structures en mécanique [physics.class-ph]. Université de Technologie de Troyes, 2014. Français. NNT : 2014TROY0006 . tel-03356003

**HAL Id: tel-03356003**

**<https://theses.hal.science/tel-03356003v1>**

Submitted on 27 Sep 2021

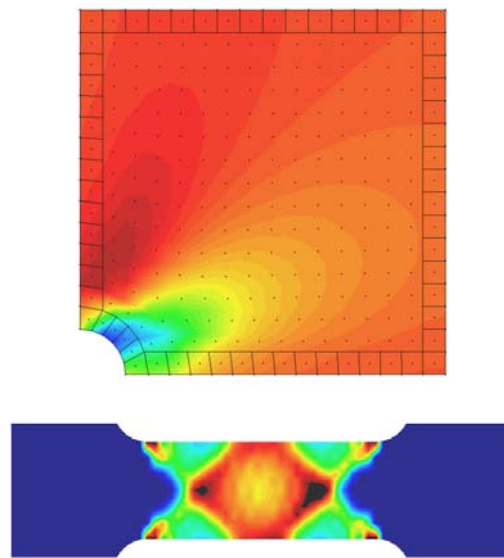
**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse  
de doctorat  
de l'UTT

**Yosr GHOZZI**

# Simulation numérique des problèmes mécaniques non linéaires par une approche mixte MEF-MESHLESS



**Spécialité :**  
Systèmes Mécaniques et Matériaux

2014TROY0006

Année 2014

---

---

# THESE

*pour l'obtention du grade de*

## DOCTEUR de l'UNIVERSITE DE TECHNOLOGIE DE TROYES Spécialité : SYSTEMES MECANIQUES ET MATERIAUX

*présentée et soutenue par*

**Yosr GHOZZI**

*le 20 février 2014*

---

---

### **Simulation numérique des problèmes mécaniques non linéaires par approche mixte MEF-MESHLESS**

---

---

#### JURY

M. K. SAANOUNI	PROFESSEUR DES UNIVERSITES	Président
M. H. BEL HADJ SALAH	PROFESSEUR	Examineur
M. A. HUERTA	PROFESOR	Rapporteur
M. P. JOYOT	MAITRE DE CONFERENCES - HDR	Examineur
M. C. LABERGÈRE	MAITRE DE CONFERENCES	Directeur de thèse
M. P. VILLON	PROFESSEUR DES UNIVERSITES	Directeur de thèse
M. J. YVONNET	PROFESSEUR DES UNIVERSITES	Rapporteur

à mes grands-parents

à mes chers parents

à Khalil et Yasmine

à Amine

## REMERCIEMENTS

Il m'est agréable d'adresser mes sincères remerciements à tous ceux qui m'ont apporté de près ou de loin, aide et conseils lors de l'élaboration de cette thèse de doctorat.

Je voudrais remercier en particulier mes deux directeurs de thèse. J'exprime ma gratitude à Monsieur Carl LABERGERE pour la confiance qu'il me témoigne, pour sa contribution quotidienne à ce travail de recherche, pour ses précieux conseils, sa compréhension et son aide lors de la rédaction de ma thèse. Je présente mes sincères remerciements à Monsieur Pierre VILLON pour ses conseils judicieux; son apport scientifique apporté tout au long de cette étude et le partage de ses nombreuses connaissances lors de nos discussions.

Je remercie également Monsieur Khemais SAANOUNI pour ses remarques et ses encouragements, ainsi que Monsieur Hedi BEL HADJ SALAH pour ses conseils lors de ses précieuses visites au sein de notre équipe de recherche.

Enfin, je remercie les membres du jury, qui ont accepté d'évaluer ce travail, pour l'honneur qu'ils m'accordent par leur présence pour ma soutenance de thèse.

## RESUME

Dans le présent travail, nous mettons en œuvre un développement numérique de la méthode Meshless. Une attention particulière est attribuée aux propriétés d'approximation et aux techniques d'application des conditions aux limites essentielles du modèle. Dans le but de traiter des problèmes de la mécanique des solides en transformations finies, nous développons une méthode numérique dite « Mixte » unissant à la fois la méthode numérique Meshless, afin de discrétiser les zones à fort gradient de déformation, et la méthode des Eléments Finis (MEF) pour les zones les moins sollicitées. Nous veillons donc à assurer le couplage entre les deux méthodes à travers la mise en œuvre de techniques spécifiques, notamment pour la continuité du domaine et sa consistance en premier lieu, mais aussi pour le choix de la méthode d'intégration numérique appropriée. Nous testons par la suite la fiabilité et la performance du modèle par la mise en place d'une étude comparative avec un modèle MEF standard conçu avec les mêmes conditions numériques, afin de tester la performance des techniques numériques attribuées au modèle « Mixte ». Nous développons, par la suite, un modèle de comportement à travers une description des transformations finies en grandes déformations. Nous adoptons ainsi, une discrétisation spatiale en éléments avec un champ de déformation postulé, pour éviter les problèmes de verrouillage, et une discrétisation temporelle adaptée. Pour valider le modèle « Mixte » retenu, nous réalisons une étude comparative avec des exemples simples de calcul non linéaire.

Mots clés: Méthodes sans maillage, Intégration numérique, Méthode des éléments finis, Elastoplasticité, Mécanique non linéaire, Endommagement, Couplage MLS-MEF.

## ABSTRACT

In this work, a Meshless method is developed. Attention is given to the approximation properties and application of essential boundary conditions of Meshless model. In order to deal with problems of solid mechanics in kinematic description for small perturbations, a so-called “mixed” numerical method combining both Meshless to discretize areas of high deformation gradient, and Finite Element Method (MEF) for non-concerned areas is developed. We are ensuring that coupling between both methods through the implementation of specific techniques, including the continuity and consistency of the fields and the choice of the appropriate numerical integration methods. The reliability and performance of the model is checked by a comparative study with a standard FEM model designed for the same numerical conditions to evaluate numerical techniques attributed to the “mixed” model. A spatial discretization elements “Assumed strain” is adopted to avoid locking problems, and an adapted time discretization. To validate our “mixed” model, a comparative study through usual nonlinear simple tests is performed.

Keywords: Meshfree methods, Numerical integration, Finite elements methods, Elastoplasticity, Nonlinear mechanics, Damage, Coupling MLS-MEF.

## TABLE DES MATIERES

TABLE DES FIGURES ET DES TABLEAUX .....	8
QUELQUES NOTATIONS .....	11
INTRODUCTION GÉNÉRALE.....	12
Chapitre1 LES METHODES MESHLESS : OBJECTIF ET STRATEGIE.....	15
1.1 MOTIVATION ET OBJECTIFS .....	15
1.2 LES METHODES MESHLESS.....	16
1.2.1 Généralités et historique .....	16
1.2.2 Avantages et inconvénients .....	17
1.2.3 Classification .....	18
1.2.4 Méthodes Meshless de type Galerkin.....	20
1.2.4.1 Moindres Carrés Mobiles (MLS) .....	21
1.2.4.2 Reproducing Kernel Particul Method (RKPM).....	23
1.2.4.3 Partition de l'Unité (PU) .....	24
1.2.4.4 Méthodes utilisant des Fonctions de Bases Radiales (RBFs).....	25
1.3 COUPLAGE DES METHODES MESHLESS AUX ELEMENTS FINIS.....	25
1.4 CONTENU .....	26
Chapitre2 MÉTHODE NUMÉRIQUE MLS APPLIQUÉE A DES PROBLEMES D'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE	29
2.1 CONSTRUCTION DES FONCTIONS DE FORME PAR MOINDRES CARRÉS MOBILES (MLS).....	29
2.1.1 Support des fonctions poids.....	30
2.1.1.1 Notion de support et domaine d'influence .....	30
2.1.1.2 Définition des fonctions poids.....	32
2.1.2 Détermination des fonctions de forme.....	34
2.1.2.1 Approximation par moindres carrés mobiles (MLS).....	34
2.1.2.2 Propriétés des fonctions de forme .....	36
2.1.3 Propriété de consistance .....	36
2.1.4 Fonctions de forme interpolantes .....	37
2.1.5 Fonctions dérivées complètes et diffuses .....	37
2.2 SCHÉMA DE COUPLAGE MLS-MEF.....	40
2.2.1 Approximation Mixte .....	41
2.2.2 Etude des fonctions de forme Mixtes .....	43
2.3 INTÉGRATION NUMÉRIQUE .....	45
2.3.1 Intégration numérique de Gauss-Legendre.....	46
2.3.1.1 Intégration de Gauss-Legendre sur un support classique .....	46



2.3.1.2	Intégration de Gauss-Legendre sur un support particulier .....	47
2.3.2	Intégration contrainte.....	47
2.3.3	Intégration nodale à gradient régularisé .....	48
2.4	IMPLÉMENTATION NUMÉRIQUE .....	52
2.4.1	Formulation générale d'un problème en élasticité linéaire.....	52
2.4.2	Intégration numérique .....	53
2.4.2.1	Intégration de Gauss-Legendre.....	53
2.4.2.2	Intégration nodale à gradient régularisé .....	54
2.4.3	Conditions aux limites de Dirichlet.....	56
2.4.3.1	Multiplicateurs de Lagrange.....	56
2.4.3.2	Imposition directe du déplacement.....	57
2.4.3.3	Méthode de pénalisation.....	58
2.4.4	Les limites des méthodes d'imposition des conditions aux limites de Dirichlet.....	58
2.4.5	Solveur implicite .....	59
2.5	STRUCTURES DISCRÉTISÉES PAR APPROXIMATION DIFFUSE INCLUANT UNE COUCHE D'ÉLÉMENTS FINIS SUR LA FRONTIERE.....	60
2.5.1	Modélisation de la déformation d'une plaque percée infinie .....	60
2.5.1.1	Comparaison du modèle MLS-MEF Mixte et modèle analytique.....	61
2.5.1.2	Comparaison des modèles MLS-MEF Mixte et MEF.....	65
2.5.1.3	Comparaison du modèle MLS-MEF Mixte en intégration nodale et intégration de Gauss-Legendre.....	71
2.5.1.4	Etudes de sensibilité des fonctions poids sur le modèle Mixte MLS-MEF en intégration nodale .....	75
2.5.2	Modélisation d'un essai de flexion pure.....	83
2.6	CONCLUSIONS .....	92
Chapitre3 COUPLAGE MLS-MEF APPLIQUÉ A DES PROBLEMES NON LINÉAIRES ÉLASTOPLASTIQUES EN TRANSFORMATIONS FINIES .....		
3.1	MODÉLISATION DES TRANSFORMATIONS FINIES .....	94
3.1.1	Gradient de la transformation.....	95
3.1.2	Décomposition de la déformation totale.....	97
3.1.3	Notion d'objectivité.....	100
3.1.4	Décomposition du tenseur des déformations totales .....	101
3.2	MODELE DE COMPORTEMENT .....	104
3.2.1	Définition des variables effectives, lien avec l'endommagement ductile .....	105
3.2.2	Potentiel et relations d'état .....	106
3.2.3	Analyse des dissipations.....	108
3.3	APPROCHE NUMERIQUE .....	110

3.3.1	Equations d'équilibre.....	110
3.3.2	Lagrangien réactualisé.....	111
3.3.3	Taux des déformations .....	114
3.3.4	Discretisation spatiale du domaine mécanique.....	114
3.3.5	Résolution du problème thermomécanique par la méthode dynamique explicite .....	116
3.3.6	Intégration locale des équations de comportement.....	117
3.3.6.1	Prédiction élastique .....	119
3.3.6.2	Correction plastique.....	120
3.4	ELEMENT A CHAMP DE DEFORMATION POSTULEE .....	122
3.4.1	Formulation variationnelle Mixte.....	122
3.4.2	Approche numérique .....	123
3.5	SCHEMA DE RESOLUTION DYNAMIQUE EXPLICITE ADAPTE A L'APPROXIMATION DIFFUSE .....	126
3.5.1	Référentiel tournant de Green-Naghdi .....	126
3.5.2	Matrice masse nodale diagonale.....	129
3.5.3	Vecteur des forces nodales internes.....	130
3.5.4	Pas de temps stabilisé .....	131
3.6	VALIDATION DU MODELE COUPLÉ MLS-MEF ÉLASTOPLASTIQUE EN HPP ....	132
3.7	SIMULATION NUMERIQUE D'UN ESSAI DE TRACTION D'UNE TÔLE EN DP1000 135	
3.8	CISAILLEMENT D'UNE EPROUVETTE EN « PAPILLON » .....	141
3.2	CONCLUSIONS .....	148
	CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES .....	150
	ANNEXES .....	154
	QUELQUES RÉFÉRENCES.....	174

## TABLE DES FIGURES ET DES TABLEAUX

### FIGURES

Figure 2-1 : Nœuds MLS dispersés dans un domaine global $\Omega$ et ses frontières $\Gamma$ .....	30
Figure 2-2 : Domaine d'influence des nœuds $I$ considérés.....	30
Figure 2-3: Définition de différentes formes de support d'une fonction poids. a) support circulaire, b) support rectangulaire, c) support polygonal.....	31
Figure 2-4: Construction d'un support lisse – Courbes de Bézier.....	32
Figure 2-5: Fonction poids spline cubique en un nœud pour un ensemble de nœuds en 1D.....	33
Figure 2-6: Génération d'une fonction poids spline cubique sur un support (a) circulaire (b) carrée (c) polygonal lisse .....	33
Figure 2-7: (a) nuage de nœuds MLS(b) Fonction de forme en un nœud MLS (b) Dérivée de la fonction de forme selon X (c) dérivée de la fonction de forme selon Y.....	39
Figure 2-8 : Couplage MLS-MEF en 1D- Fonctions de forme MLS sur $\Omega_{MLS}$ et MEF sur $\Omega_{MEF}$ ...	40
Figure 2-9 : Couplage MLS-MEF en 2D et répartition des zones pour l'approximation.....	40
Figure 2-10 : Partie modifiée des fonctions de forme MLS.....	42
Figure 2-11 : Répartition des domaines MEF, MLS et MLS/MEF .....	43
Figure 2-12 : Exemple de couplage en 2D, ligne de traçage des fonctions de forme pour un domaine d'influence $r_i=2.0$ mm .....	44
Figure 2-13 : Traçage des fonctions de forme pour un rayon d'influence $r_i=2.0$ mm, sur la ligne « a » $y=2.5$ mm selon $x$ .....	44
Figure 2-14: Traçage des fonctions de forme en 2D sur la ligne : (b) pour $y=5.5$ mm et la coordonnée $x$ en abscisse (c) $x=0.5$ mm et la coordonnée $y$ en abscisse (d) pour $y=5.0$ mm et la coordonnée $x$ en abscisse (e) pour $x=1.0$ mm et la coordonnée $y$ en abscisse.....	45
Figure 2-15: Cellules d'intégration utilisant la stratégie $r_{min}$ en norme $L^2$ .....	46
Figure 2-16: Cellule d'intégration de Gauss utilisant un support $C^1$ à deux dimensions.....	47
Figure 2-17: Construction des cellules de Voronoï sur $\Omega^{MLS}$ et Relation entre $supp(\phi_I)$ et le domaine $\Omega_I$ .....	49
Figure 2-18: L'intégration de Simpson 1/3 à 5 nœuds.....	51
Figure 2-19: Construction des sous-cellules $\Omega_I$ , $c$ sur chaque cellule de Voronoï sur $\Omega_I$ .....	55
Figure 2-20: Dépendance d'un point sur la frontière dans deux configurations (a) EF (b) MLS.....	59
Figure 2-21: Plaque avec un trou circulaire .....	60
Figure 2-22: Niveau des traçages des déplacements selon la direction $x$ .....	62
Figure 2-23: Déplacement analytique, MLS et leur écart (a) $u_x$ au tracé $y=0.7$ mm (b) $u_x$ au tracé $y=3.0$ mm (c) $u_y$ au tracé $y=0.7$ mm (d) $u_y$ au tracé $y= 3.0$ mm.....	64
Figure 2-24: Déplacement analytique, MLS, MEF et leurs écarts (a) $u_x$ au tracé $y=0.7$ mm (b) $u_x$ au tracé $y=3.0$ mm (c) $u_y$ au tracé $y=0.7$ mm (d) $u_y$ au tracé $y= 3.0$ mm .....	68
Figure 2-25 : Configurations des différentes méthodes d'intégration pour le modèle MLS Mixte.....	71
Figure 2-26 : Déplacement analytique, MLS en intégration nodale à gradient régularisé et en intégration de type Gauss (4 points et 9 points) et leurs écarts (a) $u_x$ au tracé $y=0.7$ mm (b) $u_x$ au tracé $y=3.0$ mm (c) $u_y$ au tracé $y=0.7$ mm (d) $u_y$ au tracé $y= 3.0$ mm.....	74
Figure 2-27 : Déplacement analytique, MLS en intégration nodale à gradient régularisé en utilisant des supports de fonctions de forme limités (IN) et larges (GS) ainsi que leurs écarts selon $x$ (a) $u_x$ au tracé $y=0.7$ mm (b) $u_x$ au tracé $y=3.0$ mm (c) $u_y$ au tracé $y=0.7$ mm (d) $u_y$ au tracé $y= 3.0$ mm .....	77
Figure 2-28 : Déplacement analytique, MLS en intégration nodale à gradient régularisé en utilisant des fonctions de forme interpolantes (IN) et non-interpolantes (NonInterp) et leurs écarts selon $x$ (a) $u_x$ au tracé $y=0.7$ mm (b) $u_x$ au tracé $y=3.0$ mm (c) $u_y$ au tracé $y=0.7$ mm (d) $u_y$ au tracé $y= 3.0$ mm	81

Figure 2-29 : Modèle de flexion pure pour l'examen de l'effet de distorsion.....	83
Figure 2-30 : Les différentes configurations de discrétisation nodale .....	85
Figure 2-31 : Déplacements $u_x$ (à gauche) et $u_y$ (à droite) en mm pour une plaque en flexion pure dans le cas de la config-I.....	86
Figure 2-32 : Déplacement analytique, MLS pour quatre configurations et leurs écarts selon $x$ (a) $u_x$ au tracé $y=-5.0$ mm (b) $u_x$ au tracé $y=-2.5$ mm (c) $u_y$ au tracé $y=-5.0$ mm (d) $u_y$ au tracé $y= 0$ mm (e) $u_y$ au tracé $y= -2.5$ mm.....	88
Figure 3-1 : Référentiel, repère et configuration de la transformation en grandes déformations.....	95
Figure 3-2 : Densités de charge dans les configurations initiale et finale .....	96
Figure 3-3: décomposition polaire de la transformation.....	98
Figure 3-4 : Problème mécanique en configuration déformée et non déformée.....	111
Figure 3-5 : Configurations en lagrangien réactualisé .....	112
Figure 3-6: Principe du schéma dynamique explicite de résolution du problème thermo-mécanique. ....	117
Figure 3-7: Définition du repère corotationnel pour élément Q4-URI (Wang, 2004).....	124
Figure 3-8: Référentiel intermédiaire entre $t_n$ et $t_{n+1/2}$ et $t_{n+1}$ .....	127
Figure 3-9: Schéma d'intégration à demi-pas .....	129
Figure 3-10 : Construction des sous-cellules $\Omega_I, \mathbf{c}$ sur chaque cellule de Voronoï sur $\Omega_I$ .....	131
Figure 3-11: Discrétisation de l'éprouvette de traction (a) Dimension de l'éprouvette plate (b) Maillage initial d'élément CPE4R + conditions aux limites (c) Répartition des différents domaines $\Omega^{MEF}$ , $\Omega^{MLS/MEF}$ , $\Omega^{MLS}$ et position initiale des nœuds MLS.....	133
Figure 3-12 : Géométrie de l'éprouvette de traction .....	135
Figure 3-13 : Conditions aux limites et répartitions des domaines .....	136
Figure 3-14 : Pas de discrétisation du domaine MLS (a) Pas de discrétisation $h=1.5$ mm (b) Pas de discrétisation $h=1$ . mm.....	137
Figure 3-15 : Réponse globale Force/ Déplacement expérimentale et numérique.....	141
Figure 3-16 : Géométrie de l'éprouvette pour un test de cisaillement.....	142
Figure 3-17 : Discrétisation des modèles (a) MLS Mixte et (b) MEF.....	143
Figure 3-18 : Répartition de la contrainte de von Mises obtenue dans le cas des deux modèles et pour différents niveaux de déplacement maximum .....	145
Figure 3-19 : Répartition de l'endommagement obtenu dans le cas des deux modèles et pour différents niveaux de déplacement maximum .....	146
Figure 3-20 : Réponse globale en Force/déplacement d'une éprouvette « papillon » en cisaillement .....	147
Figure 3-21 : Exemple 1d, Ordre 1d en schéma centré avec des fonctions poids interpolantes .....	154
Figure 3-22 : Fonction poids interpolante $w_{i1}$ .....	155
Figure 3-23 : Fonction poids interpolante $w_{i2}$ .....	155
Figure 3-24 : Fonction poids interpolante $w_{i3}$ .....	156
Figure 3-25 : Fonction de forme $\phi_{i1MLS}$ .....	156
Figure 3-26 : Fonction de forme $\phi_{i2MLS}$ .....	157
Figure 3-27 : Fonction de forme $\phi_{i3MLS}$ .....	157
Figure 3-28: Exemple pour la validation de consistance et de continuité du couplage MLS-MEF ...	158
Figure 3-29 : Fonction poids interpolante $w_{i1}$ .....	159
Figure 3-30 : Fonction poids interpolante $w_{i2}$ .....	160
Figure 3-31 : Fonction poids interpolante $w_{i3}$ .....	160
Figure 3-32 : Fonction de forme $\phi_{i1MLS}$ .....	161
Figure 3-33 : Fonction de forme $\phi_{i2MLS}$ .....	161

Figure 3-34 : Fonction de forme $\phi$ 3MLS .....	161
Figure 3-35 : Continuité des fonctions de forme entre $x_1=0$ et $x_3=2$ .....	162
Figure 3-36: Déplacement analytique, MLS et leur écart (a) $u_x$ au tracé $y=0$ mm (b) $u_x$ au tracé $y=1.0$ mm (c) $u_y$ au tracé $y=0$ mm (d) $u_y$ au tracé $y= 1.0$ mm .....	164
Figure 3-37: Déplacement analytique, MLS, MEF et leurs écarts (a) $u_x$ au tracé $y=0$ mm (b) $u_x$ au tracé $y=1.0$ mm (c) $u_y$ au tracé $y=0$ mm (d) $u_y$ au tracé $y= 1.0$ mm .....	166
Figure 3-38 : Déplacement analytique, MLS en intégration nodale à gradient régularisé et en intégration de type Gauss (4 points et 9 points) et leurs écarts (a) $u_x$ au tracé $y=0$ mm (b) $u_x$ au tracé $y=1.0$ mm (c) $u_y$ au tracé $y=0$ mm (d) $u_y$ au tracé $y= 1.0$ mm.....	168
Figure 3-39 : Déplacement analytique, MLS en intégration nodale à gradient régularisé en utilisant des supports de fonctions de forme limitée (IN) et larges (GS) ainsi que leurs écarts selon $x$ (a) $u_x$ au tracé $y=0$ mm (b) $u_x$ au tracé $y=1.0$ mm (c) $u_y$ au tracé $y=0$ mm (d) $u_y$ au tracé $y= 1.0$ mm .....	170
Figure 3-40 : Déplacement analytique, MLS en intégration nodale à gradient régularisé en utilisant des fonctions de forme interpolantes (IN) et non-interpolantes (NonInterp) et leurs écarts selon $x$ (a) $u_x$ au tracé $y=0$ mm (b) $u_x$ au tracé $y=1.0$ mm (c) $u_y$ au tracé $y=0$ mm (d) $u_y$ au tracé $y= 1.0$ mm ....	172

## TABLEAUX

Tableau 1 : Comparaison des modèles MLS Mixte et MEF pour un exemple de plaque percée en déplacement.....	66
Tableau 2 : Comparaison des modèles MLS Mixte et MEF pour un exemple de plaque percée en contrainte .....	70
Tableau 3 : Comparaison des écarts de distribution de contrainte du modèle MLS Mixte pour un exemple de plaque percée.....	75
Tableau 4 : Comparaison des écarts de distribution de contrainte des modèles MLS Mixte pour un exemple de plaque percée.....	78
Tableau 5: Comparaison des écarts de distribution de contrainte des modèles MLS Mixte pour un exemple de plaque percée.....	82
Tableau 6 : Ecart maximums des croisements de configurations.....	83
Tableau 7: Comparaison des écarts de distribution de contrainte du modèle MLS Mixte pour différentes configurations de distribution de nœuds MLS.....	90
Tableau 8 : Comparaison des écarts de distribution de contrainte du modèle MLS Mixte pour différentes configurations de distribution de nœuds MLS.....	91
Tableau 9 : Types des tenseurs lagrangiens et eulériens .....	99
Tableau 10 : Objectivité des tenseurs lagrangiens et eulériens.....	100
Tableau 11 : Equations d'équilibres en configuration déformée et non déformée .....	111
Tableau 12: Comparaison des résultats numériques entre le logiciel Abaqus® et la méthode numérique basée sur le couplage MLS-MEF .....	135
Tableau 13 : Paramètres du modèle de comportement élastoplastique avec endommagement ductile dans le cas d'un acier DP1000 .....	136
Tableau 14 : Distribution de la contrainte de von Mises et de l'endommagement pour différentes valeurs des déplacements imposés $U_m$ .....	139

## QUELQUES NOTATIONS

$x$	Scalaire
$\{x\}, x_i$	Vecteur
$\langle x \rangle, x_i$	Vecteur transposé de $x$
$\vec{x}, x_i$	Vecteur dans $\mathbb{R}^3$
$\underline{x}, x_{ij}$	Tenseur d'ordre 2 dans $\mathbb{R}^3$
$\underline{\underline{x}}, x_{ijkl}$	Tenseur d'ordre 4 dans $\mathbb{R}^3$
$[.]$	Matrice
$\ .\ $	Norme $L_2$
$\backslash$	Restreint par
$\otimes$	Produit vectoriel
$.$	Produit tensoriel contracté
$:$	Produit tensoriel doublement contracté
$\underline{a}^T$	Tenseur transposé de $\underline{a}$
$\det(\underline{a})$	Déterminant du tenseur $\underline{a}$
$tr(\underline{a})$	Trace du tenseur $\underline{a}$
$\underline{a}^{dev}$	Partie déviatorique du tenseur $\underline{a}$
$(\underline{a})_{sym}$	Partie symétrique du tenseur $\underline{a}$
$(\underline{a})_{asym}$	Partie antisymétrique du tenseur $\underline{a}$
$\nabla, \vec{\nabla}, \underline{\nabla}$	Tenseur gradient spatial
$\overrightarrow{div}$	Vecteur divergence
$supp(\varphi)$	Support de la fonction $\varphi$
$C^n$	Continuité d'ordre $n$

## INTRODUCTION GÉNÉRALE

La Méthode des Eléments Finis (MEF) standard a montré sa grande efficacité à traiter divers problèmes de l'ingénieur dans différents secteurs industriels et en particulier dans le cadre de la simulation numérique de nombreux procédés de mise en forme par grandes déformations inélastiques. Cependant, sa mise en œuvre reste difficile et coûteuse si on utilise des modèles de comportement « avancés » permettant de décrire les principaux phénomènes physiques.

Actuellement, le principal outil pour la simulation des procédés de mise en forme est la MEF. Toutefois, cette méthode présente quelques verrous numériques pour des procédés impliquant de grandes déformations lors de la configuration cinématique des éléments finis dans une discrétisation Lagrangienne. Les résultats deviennent ainsi erronés et peuvent même perdre leur signification physique en raison de la distorsion d'éléments finis.

Dans ce cadre, un nouveau groupe de méthodes numériques appelé Meshless (Meshfree ou sans maillage) vise à éviter ces problèmes. Ces méthodes, dont le succès est croissant depuis une dizaine d'années, étaient pour les premières fondées sur des méthodes d'interpolation purement nodales. En effet, tandis que les fonctions de forme éléments finis se définissent sur des sous-domaines ou EF, les méthodes Meshless génèrent leurs fonctions de forme en s'appuyant sur un nuage de points. Par conséquent, cette approche purement nodale, ne limite pas le mouvement relatif des nœuds par des critères géométriques liés aux éléments. L'idée est ainsi de reconstruire une fonction définie sur un espace continu à partir de l'ensemble des valeurs discrètes prises par cette fonction sur un nuage de points. De ce fait, ces méthodes sont initialement appelées « méthode des particules ».

Les avantages de ces méthodes sont principalement, l'absence de déformation du maillage puisqu'il n'existe plus de connectivités fixes entre les nœuds; une grande flexibilité pour l'adaptativité spatiale, due au fait que le raffinement local est effectué à travers une discrétisation par nuage de points; l'orientation des frontières internes (fissures..) ne sera pas directement dépendante de la discrétisation. Ces avantages font des méthodes Meshless des méthodes numériques fiables pour simuler des problèmes à frontières libres en grandes déformations.

L'objectif de cette thèse est de développer une méthode Meshless pour résoudre des problèmes en élastoplasticité de la manière la plus efficace possible. Toutefois, pour tirer profit des deux méthodes numériques MEF et Meshless, nous procédons à la construction d'une méthode numérique « Mixte »

impliquant les deux méthodes pour le même modèle. En effet, pour développer ce modèle, nous utilisons la MEF classique, qui reste extrêmement efficace pour traiter des problèmes avec des modèles de comportement locaux ; ainsi que les méthodes Meshless, notamment, celles basées sur une approximation par Moindres Carrés Mobiles (MLS), dans le cadre d'un milieu déformable en utilisant des modèles de comportement élastoplastique à écrouissage Mixte et fortement couplés à l'endommagement ductile développés à ICD/LASMIS dans le cadre de formulations locales [Hammi (2000), Lestriez (2003), Belamri (2004), Badreddine (2006), Boudifa (2006), Nguyen (2012)].

La méthode Meshless développées, ainsi que la MEF, ont été implémentées dans un outil de calcul numérique développé en langage « C ». Plusieurs outils numériques ont été mis en place pour assurer la fiabilité et prouver l'efficacité de la méthode « Mixte ». Cette méthode « mixte est utilisée pour simuler des problèmes de mécanique en transformations finies et, notamment, remédier à certaines instabilités durant le calcul.

Pour répondre à ces objectifs, nous avons structuré ce mémoire en trois chapitres.

Le premier synthétise les principales méthodes Meshless, notamment de type Galerkin. Nous avons discuté leurs avantages en égard à notre stratégie de recherche. Nous introduisons le principe de couplage des méthodes MEF et Meshless, dans le cadre de la mécanique des solides.

Le second chapitre est consacré au développement de la méthode d'approximation des Moindres Carrés Mobiles (MLS) pour évaluer le champ des déplacements lors de la discrétisation par des nœuds Meshless. Nous testons par la suite, la performance de l'intégration numérique appropriée à notre modèle Meshless. De plus, dans le but de traiter les conditions aux limites de Dirichlet, nous mettons en place une discrétisation MEF aux frontières du domaine MLS à travers une procédure de couplage MLS-MEF. Le modèle « Mixte » généré est testé et validé par des exemples simples à travers une étude comparative entre le modèle « Mixte » et le modèle MEF standard, sous la même discrétisation, dans le cadre d'un problème mécanique linéaire.

Le troisième chapitre introduit, dans le modèle « Mixte » élaboré, une description des transformations finies en grandes déformations pour une formulation variationnelle en description Lagrangienne réactualisée. Après la discrétisation en espace et en temps du système obtenu, nous élaborons le schéma de résolution adopté. Une méthode « Assumed strain » est proposée pour développer un élément quadrangulaire spécial pour le traitement de la zone MEF, afin d'éviter les problèmes de blocage et de non-linéarités géométriques. Pour valider notre modèle, nous avons réalisé des exemples simples de calcul non linéaire en transformations finies dans le cadre des grandes déformations.





# Chapitre1      **LES METHODES MESHLESS : OBJECTIF ET STRATEGIE**

## **1.1      MOTIVATION ET OBJECTIFS**

Pendant des décennies la Méthode des Eléments Finis (MEF) a été la technique dominante en calcul des structures. Pourtant, depuis plus d'une vingtaine d'années, les méthodes Meshless, appelées aussi Meshfree ou sans maillage, font l'objet de recherches importantes. Ces méthodes sont entièrement construites selon des approximations nodales, sans a priori, un besoin nécessaire de relation entre les nœuds pour l'approximation des fonctions inconnues des champs de variables. En fait, l'avantage majeur des méthodes Meshless est la disparition de la discrétisation par sous-domaines et donc de s'affranchir des problèmes de distorsion d'élément en raison de très grandes déformations des matériaux, et ainsi, d'éliminer une partie des difficultés rencontrées par la méthode des éléments finis. Ce sont des avantages théoriques, néanmoins, des verrous scientifiques apparaissent au cours de la mise en œuvre des méthodes Meshless.

Ces méthodes sont développées, entre autre, pour traiter les fortes discontinuités, telles que la propagation des fissures, impliquant des maillages adaptés. Un remaillage classique peut être facilement remplacé par l'ajout de nœuds Meshless (h-adaptativité) dans le cas des problèmes d'optimisation structurelle. Pour ces méthodes, alors qu'une discrétisation en éléments n'est pas nécessaire, la répartition de nœuds suffisamment dense est indispensable pour la qualité des résultats. La répartition d'un nuage de nœuds est générée par des techniques (diagramme de Voronoï) identiques à celles utilisées dans le cas des méthodes MEF. En outre, les nœuds Meshless doivent être regroupés localement pour former des nuages au même titre que les éléments finis. Cependant, les progrès récents dans le domaine de la distribution de nœuds et de la génération de nuages de points, ont montré de grandes promesses. Depuis les deux dernières décennies, la méthode Meshless a commencé à capter l'intérêt d'une communauté plus large de chercheurs et a évolué pour traiter de nombreux problèmes de calcul des plus complexes, notamment dans le cas de la mécanique des solides. Néanmoins, il existe encore des verrous scientifiques liés à ces méthodes Meshless.

Dans ce qui suit, nous présentons les principales méthodes Meshless, leurs classifications et critères. Nous nous intéressons particulièrement aux méthodes Meshless adaptées aux formulations intégrales de type Galerkin.

## 1.2 LES METHODES MESHLESS

### 1.2.1 Généralités et historique

Depuis les années 1970, des méthodes Meshless ont été conçues dans le but de déjouer les problèmes géométriques et numériques dus au maillage. Le domaine considéré est discrétisé par des nœuds (appelées initialement « particules ») qui interagissent via des fonctions de forme Meshless, formant ainsi leurs propres « connectivités », et pouvant changer au cours d'une simulation. Ces méthodes Meshless ont été exploitées dans des applications avec de grandes déformations en mécanique des fluides et des solides par la suite. En effet, une des premières méthodes Meshless proposée est la méthode Smooth Particle Hydrodynamics (SPH) [Lucy (1977), Gingold et Monaghan (1977)] afin de résoudre les problèmes en astrophysique et, plus tard, dans la dynamique des fluides [Monaghan (1982) et (1988), Bonet et al. (2000)]. Petschek et Libersky (1993) ont été les premiers à utiliser la méthode SPH en mécanique des solides. Ces méthodes SPH ont connu des améliorations apportées par de nombreux auteurs [Belytschko et Krongauz (1996), Randles et Libersky (1997), Johnson et Beissel (1996), Vila (1999), Dilts (1999), Bonet et al. (2000), Rabczuk et al. (2004)], et ainsi utilisées dans des cas de formulation forte de problèmes de mécanique des solides.

D'autres méthodes ont été développées dans les années 1990, basées sur des formulations faibles. Les principales applications de ces dernières méthodes sont en mécanique des solides. En effet, à partir des travaux de Lancaster et Salkauskas (1981) sur les moindres carrés mobiles MLS, Nayroles et al. (1992) ont proposé la notion d'Element Diffus (DEM). Depuis, il y a eu de nouveaux développements apportés aux méthodes Meshless, Belytschko et al. (1994) ont notamment proposé la méthode Element Free Galerkin (EFG) évitant des instabilités propres à certaines formulations SPH. Ensuite, Liu et al. (1995) ont présenté la méthode reproducing kernel particle (RKPM), dont la formulation est très similaire à celle de la méthode EFG, mais doit son origine à une introduction de termes correcteurs pour la stabilité du calcul afin de résoudre les problèmes en dynamique des structures. Contrairement aux méthodes RKPM et EFG, qui utilisent une base dite intrinsèque, d'autres méthodes ont été développées en se basant sur une base extrinsèque enrichie avec la base polynômiale de Legendre [Belytschko et al. (1996)]. Elle a été initialement utilisée pour augmenter l'ordre d'approximation similaire à un p-raffinement comme, par exemple, dans la méthode hp-cloud [Duarte et al. (1996), Lyszka et al. (1996)]. De plus, Melenk et Babuska (1996) ont souligné les similitudes des méthodes d'éléments finis et les méthodes Meshless; et développé la méthode de Partition de l'Unité des

Eléments Finis (PUFEM) qui reste similaire à la méthode hp-cloud. Braun et Sambridge (1995) introduisent la notion de voisins naturel [Sibson (1980)] pour la solution d'équations aux dérivées partielles. Sukumar (1998), Sukumar et al (1998), et Sukumar et Moran (1999) ont exploré l'application de la méthode des éléments naturels pour la solution de problèmes aux limites qui se posent dans la mécanique des solides. Par la suite, Wendland (1999) a développé des méthodes Meshless de type Galerkin utilisant des fonctions à base radiale (RBF) s'inspirant ainsi de la méthode créée par Kansa (1990) et connue sous le nom de Kansa's method (RBFs Collocation Method). Récemment, plusieurs auteurs ont contribué au développement des éléments naturels adaptés aux méthodes Meshless, notamment dans le cadre des problèmes aux limites à travers les travaux de : Yvonnet (2004), Yvonnet et al. (2005), (2006) et (2007), ainsi que les travaux de Chinesta et al. (2007) et (2009).

Toutes les méthodes citées ci-dessus sont de type Galerkin, et la différence majeure, entre elles, ne provient que des techniques d'approximation utilisées pour construire les fonctions de forme. Toutefois, malgré leur fluidité, les méthodes Meshless rencontrent des difficultés numériques et nécessitent des calculs supplémentaires à développer.

Dans ce qui suit, un bref résumé des avantages et inconvénients des méthodes Meshless, ainsi que leurs classifications sont présentées.

### 1.2.2 Avantages et inconvénients

Les méthodes Meshless bénéficient d'une souplesse due à la distribution aléatoire des nœuds. Les fonctions de forme Meshless ont l'avantage d'être continues. Les fonctions de base peuvent être choisies et modifiées lors de l'approximation, en vue d'une meilleure convergence et reproduction de la solution exacte. Ces méthodes conviennent pour analyser les problèmes de propagation de fissure [Liu et al. (1999), Rao et Rahman (2000)], des problèmes de mise en forme [Chen et al. (1998), Gu et al. (2008), Quak et al. (2009)], de moulage par injection de résine ou de composite [Garcia et al. (2007) et (2009), Estacio et al. (2007) et (2008)], etc... Néanmoins, ces méthodes dévoilent quelques faiblesses. En effet, lors de l'approximation, un support de la fonction de forme (centré sur un nœud Meshless) doit couvrir un nombre suffisant de nœuds du voisinage pour avoir un support assez large afin que la méthode soit stable (*Figure 1.1*). Or un support large entraîne un surcoût de calcul et occasionne la perte du caractère local de l'approximation.

Mise à part la gestion du coût de calcul, il existe une difficulté liée à l'imposition des conditions aux limites de Dirichlet. Plusieurs solutions ont été développées pour y remédier. Parmi ces issues nous trouvons l'imposition des conditions aux limites essentielles au sens fort comme dans les méthodes des éléments finis (Méthode DEM.), ajout de multiplicateurs de Lagrange (Méthode

EFG...), utilisation des fonctions poids singulières [Lankaster et Salkauskas (1981)] ou encore le recours au couplage avec des éléments finis au niveau des frontières. Toutes ces solutions sont présentées et la dernière est largement développée au niveau du *Chapitre 2*.

En dehors du fait que l'imposition des conditions aux limites est un défi en soit, l'intégration numérique s'avère l'une des plus importantes difficultés associées aux méthodes Meshless. En effet, les fonctions de forme générées par certaines de ces méthodes sont non polynômiales. Ces dernières sont rationnelles de nature complexe, ce qui rend l'intégration numérique difficile à mettre en œuvre pour des problèmes de mécanique en formulation faible. De plus la qualité de l'intégration des fonctions de forme rationnelles est dépendante des nombre de points de Gauss utilisés pour une intégration de Gauss-Legendre (Méthode EFG). La précision de la méthode est ainsi dégradée et des modes d'instabilité peuvent apparaître. De plus, l'influence entre les nœuds varie d'un nœud à un autre en fonction du domaine d'influence de chacun. Néanmoins, une construction particulière de ces supports de domaines est créée pour une intégration plus facile et fiable en décomposant le domaine en sous cellules d'intégration. Néanmoins, nous nous approprions les avantages de la méthode de l'intégration nodale SCNI [Chen et al. (2001)] en vue d'une plus grande stabilité des calculs (Voir le *Chapitre 2*). En fait, l'intégration spatiale sur un domaine borné, pour les méthodes Meshless, demande une attention particulière quel que soit la nature de l'intégration.

### 1.2.3 Classification

Les méthodes Meshless peuvent être classifiées selon plusieurs critères. Nous avons choisi de les répertorier selon la nature du problème physique, la méthode d'approximation des champs inconnus et les techniques de résolution des Equations aux Différences Partielles (MLSP) du problème concerné.

#### *Critère 1 : Nature du problème*

La tendance actuelle est d'utiliser non seulement les méthodes Meshless comme des outils pour résoudre les problèmes de discrétisation des milieux continus (comme SPH, EFG, etc..), mais aussi comme un modèle physique (modèle statistique ou modèle atomistique) pour simuler le comportement continu de la physique. Les méthodes Meshless peuvent être classées selon leur emploi en dynamique des fluides ou mécanique des solides, en tant que méthode des particules ou méthode basée sur un concept de maillage fictif, etc... Les exemples les plus récents utilisent les méthodes Meshless en se basant sur la méthode Lattice Boltzmann pour résoudre des problèmes de la mécanique des fluides [Kalarakis (2012)], ou encore, en utilisant la dynamique moléculaire pour résoudre les problèmes en mécanique de la rupture [Dünweg (2009)].

### *Critère 2 : Formulation du calcul*

Même si aucun maillage n'est nécessaire dans certaines des méthodes Meshless, l'utilisation d'éléments fictifs est inévitable pour d'autres, afin de mettre en œuvre l'intégration numérique. Les méthodes Meshless peuvent être classées selon les formulations du calcul numérique: ceux qui servent comme des approximations des formes fortes d'MLSP (SPH, méthode de collocation, méthode vertex, méthode des différences finis généralisée), et ceux qui servent comme des approximations des formes faibles d'MLSP (EFG, MLPG, LRPIM, etc...) et les méthodes de formulation faible-forte (MWS, etc...).

Chaque méthode Meshless dispose de fonctionnalités avec des avantages et des défauts. Grâce à ces propriétés, la méthode appropriée peut être sélectionnée pour résoudre le problème soutenu. Dans notre travail, nous nous sommes référés à une méthode classée de type Galerkin en se basant sur une formulation faible du problème.

### *Critère 3 : Méthode d'approximation*

En fait, théoriquement, les méthodes Meshless précédemment citées peuvent être globalement répertoriées selon de grandes familles d'approximation :

- Les méthodes des particules, comme les méthodes SPH, analogue à l'approximation RKPM pour les méthodes RKPM.
- Approximation par Moindres carrés mobiles MLS, utilisée par les méthodes DEM, EFG, Hp-Clouds, parmi d'autres.
- La partition de l'unité, soit donc, PUM, RBF hybride avec la méthode aux moindres carrés MLS, etc...

Néanmoins, les fonctions de forme développées par l'approximation MLS, la PUM ou l'approximation RKPM sont en général non-interpolantes. Les espaces d'approximation formés par ces fonctions d'approximation ne sont pas cinématiquement admissibles. Une méthode de multiplicateur de Lagrange ou une méthode de pénalité est nécessaire dans le cadre des méthodes de type Galerkin, afin d'imposer les conditions aux limites de Dirichlet.

D'autres méthodes Meshless ont été envisagées, comme la Natural Element Method-NEM [Sibson (1980)]. Elle a été adoptée dans le cadre des méthodes numériques Meshless par Braun et Sambridge (1995). Cette méthode est basée sur la notion de voisins naturels pour définir les fonctions de forme (*Figure 1.1*). Elle a été utilisée avec une forme faible par Sukumar et al. (2001). Le principal avantage de cette méthode est qu'elle ait une grande stabilité de partition à cause de l'utilisation de diagrammes

de Voronoï pour définir les fonctions de forme. Par conséquent, l'interpolation nodale est acquise, ce qui facilite le moyen d'imposer des conditions aux limites de Dirichlet. Cette méthode est traitée par Yvonnet en Meshless Natural Element Method (M-NEM) en 2004 pour des problèmes plus complexes (non convexité, discontinuité..).

Nous présentons ci-dessous des formes classiques de fonction de forme MLS, SPH, ou RKPM (Figure 1.1.b) et NEM (Figure 1.1.c), centrées sur leur support d'un nœud Meshless, par rapport à une fonction de forme classique EF (Figure 1.1.a).

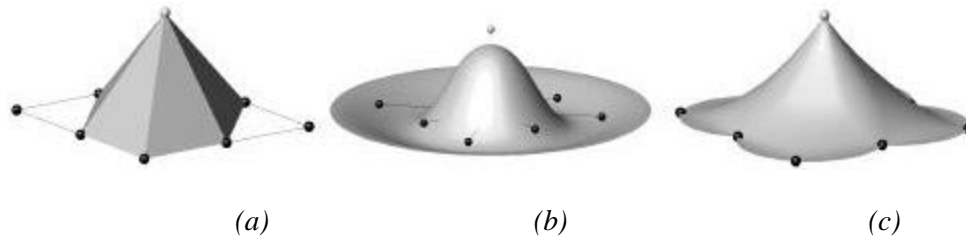


Figure 1.1: Fonction de forme classiques 2D pour une distribution de nœuds régulières (Idelsohn et al. 2003) (a)MEF (b)MLS,SPH,RKPM (c)NEM

Dans la littérature, il existe des méthodes de toute autre nature appelées Méthode de collocation, où Oñate et al. (1996) utilisent la méthode d'approximation MLS dans une formulation forte en plaçant des points de collocation au niveau des conditions aux limites de Dirichlet. La méthode Mixed Galerkin-Collocation a été développée plus tard par Dilts (1999).

Atluri et al. (1997) ont créé la méthode Meshless Local Petrov Galerkin-MLPG, qui n'est pas de type Galerkin. Elle a été plus tard développée par Atluri et Zhu (1998). Ce groupe [Zhu et al. (1998)] a intégré la méthode Local Boundary Integral Equation Method-LBIEM aux méthodes numériques Meshless. Ces dernières méthodes ont été créées spécialement pour traiter des problèmes aux limites et anticiper les problèmes classiques d'imposition des conditions essentielles.

#### 1.2.4 Méthodes Meshless de type Galerkin

Dans cette section, nous examinons brièvement la méthode de Galerkin, puis présentons quelques approximations spécifiques ainsi que leurs propriétés.

Soit un sous-espace de dimension finie  $V^h$  de  $V$  engendré par  $N$  fonctions indépendantes linéaires en  $V$ .

$$V^h \subset V, \quad V^h = \text{vect}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\} \quad 1-1$$

Où  $\varphi_i$  sont des fonctions indépendantes linéaires, appelées fonctions de base. Le paramètre  $h$  est utilisée pour caractériser la dimension du sous-espace, et diminue à mesure que le nombre  $N$  des fonctions de base augmente.

La méthode de Galerkin obtient la solution approximative d'un problème aux limites dans le sous espace  $V^h$  comme suit :

Trouver  $u^h \in V^h$  qui satisfait le système suivant :

$$a(u^h, v^h) = \langle l, v^h \rangle \quad \forall v^h \in V^h \quad 1-2$$

Ainsi, le champ de déplacement  $u^h$  est approché avec une série finie, à savoir,

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(x) u_i, \quad v^h(x) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(x) v_i \quad 1-3$$

Tels que  $u_i$  sont les coefficients pour la  $i^{\text{ème}}$  fonction de forme. Dans les sections suivantes, différentes méthodes de construction de l'approximation de l'espace  $V^h$  sont présentées.

#### 1.2.4.1 Moindres Carrés Mobiles (MLS)

La méthode MLS est généralement considérée comme l'une des méthodes les plus connues pour approcher les champs de données avec une précision judicieuse.

Considérons la fonction d'interpolation  $f^h$  sous la forme suivante,

$$f^h(x) = f^h(x, a_0, a_1, \dots, a_l) \quad 1-4$$

avec les termes  $a_0, a_1, \dots, a_l$  sont déterminés en minimisant l'erreur entre la solution réelle et approchée, constituant le vecteur à coefficients  $\{a(x)\}$ . En fait, pour chaque  $x$  fixé, ces coefficients  $a_i$  en dépendent.

Le caractère local de l'approximation MLS résulte de la dépendance des paramètres  $a_i$  sur  $x$  qui dépend en outre du domaine d'approximation du point considéré sur un domaine global  $\Omega$ .

Soit la base polynômiale  $\langle p(x) \rangle^T = \{p_i(x)\}_{i=1}^m$ , d'ordre  $m$ , et  $p_i$  sont calculés au point de coordonnées  $x$ . L'approximation du déplacement en un point  $x$  s'exprime ainsi comme suit :

$$u^h(x) = \langle p(x) \rangle \{a(x)\} \quad 1-5$$

La construction rigoureuse de la méthode d'approximation est bien illustrée au *Chapitre 2*.



Pour se référer à un problème géométrique, considérons un ensemble de  $N$  nœuds dispersés dans un domaine et soient  $x_i$  les coordonnées du nœud  $i$ . Le déplacement de l'approximant  $u^h(x)$  d'un champ  $u(x)$  est la suivante :

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^N \Phi_i(x) u_i \quad 1-6$$

où  $u_i$  est la valeur du champ de déplacement  $u$  en  $x_i$ , et  $\Phi_i$  est la fonction de forme associée (voir *Chapitre 2* pour plus de détails). L'approximation MLS a pour but la détermination des fonctions de forme; et contrairement aux éléments finis, elles sont obtenues par une transformation de fonctions locales polynômiales (voir *Chapitre 2* pour plus de détails)

Si la base  $p$  étant choisie correctement, l'approximation MLS est capable d'approcher des fonctions complexes. Certains auteurs proposent un enrichissement, appelé intrinsèque, de la méthode d'approximation MLS pour des fonctions de forme à fortes discontinuités. Dans ce cadre, Reuter et al. (2005), Joyot et al. (2005) proposent une approximation des fonctions de forme MLS pour considérer des problèmes de discontinuité des fonctions dérivées. Cette approche est analogue à celle utilisée par Huerta et Fernández-Méndez (2000) par enrichissement extrinsèque permettant de superposer deux approximations MLS ayant des consistances différentes. Cette méthode a été utilisée par Fernández-Méndez et Huerta (2004) pour décrire le couplage entre l'approximation MLS et la MEF dans le but de traiter les conditions aux limites (*Chapitre 2, section 2.2*). Dans ce qui suit, nous citons quelques méthodes basées sur l'approximation MLS.

#### 1.2.4.1.1 La Méthode des Eléments Diffus (DEM)

Shepard (1968) a représenté une interpolation d'un ensemble de points irréguliers dans l'espace. Après l'introduction de la méthode MLS par Lancaster et Salkauskas (1981), Nayroles et al. (1992) ont employé la forme locale de cette approximation pour trouver les solutions numériques de quelques équations aux dérivées partielles en utilisant des fonctions poids non-singulières à support compact. L'idée de base de l'approximation diffuse est de remplacer l'interpolation des éléments finis, admissible sur un élément, par un raccord pondéré des moindres carrés locaux, valable dans un petit voisinage d'un point d'évaluation, et sur la base d'un nombre variable de nœuds. Par conséquent, la méthode DEM supporte les propriétés suivantes : l'approximation est locale ; le degré de lissage de l'approximation est élevé et directement lié au degré de lissage des fonctions de forme ; les dérivées de la fonction de forme sont au sens diffus (pas complètes); mais les conditions aux limites de Dirichlet ne sont pas précisément satisfaites. D'où le besoin d'autres méthodes pour assurer les conditions aux limites essentielles.

#### 1.2.4.1.2 *Element Free Galerkin (EFG)*

Belytschko et al. (1994) ont généralisé la méthode DEM pour introduire la méthode EFG pour plus de précision, utilisant des dérivées complètes de fonctions de forme et assurant une solution pour les conditions aux limites de Dirichlet. En revanche, le temps de calcul est plus important qu'avec la méthode DEM. En fait, contrairement aux DEM certaines différences clés sont introduites dans la mise en œuvre pour augmenter la précision.

- *Comparaison des méthodes DEM et EFG dans la littérature.*

La première publication de Belytschko et al. (1994) sur la méthode EFG, montre certaines différences par rapport au DEM. En effet, un plus grand nombre de points d'intégration a été utilisé et organisé selon une structure cellulaire. Et les conditions aux limites de Dirichlet sont appliquées en utilisant les multiplicateurs de Lagrange.

#### 1.2.4.1.3 *h-p cloud*

Duarte et Oden (1996) ont introduit la méthode h-p cloud basée sur l'approximation MLS utilisant une base de fonctions complémentaires propre à chaque nœud. Ceci accorde une possibilité de support variable pour chaque nœud pour une approximation optimale dans un domaine local. Selon Garcia et al. (2000), l'avantage de cette méthode est qu'elle considère le p-raffinement de l'espace d'approximation. De plus, l'ordre de consistance peut être modifié sans l'introduction de discontinuité, d'où, la continuité de la méthode h-p clouds.

#### 1.2.4.2 **Reproducing Kernel Particul Method (RKPM)**

Liu et al. (1995) ont développé la méthode RKP afin de reproduire la fonction d'approximation correctement en introduisant une fonction de correction. Par conséquent la fonction d'interpolation est modifiée pour satisfaire la condition de consistance dans n'importe quel domaine géométrique. Cette méthode est inspirée de la méthode des particules SPH (pour ses fonctions fenêtre ou « Kernel »). Considérons le modèle numérique de l'approximation le plus simple. Soit ainsi le domaine global  $\Omega$  discrétisé par un ensemble de nœuds  $x$ . Le but étant de construire une fonction fenêtre  $W: \mathbb{R}^+ \rightarrow [0,1]$ , nous tentons de reproduire la solution  $u(x)$  par une fonction de reproduction  $u^R(x)$  en écrivant le produit de convolution comme suit :

$$u^R(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi)W(x - \xi)d\Omega_\xi \quad 1-7$$

Pour permettre à l'approximation de conserver son caractère local, la fonction fenêtre est choisie sur un support compact  $\Omega_\xi$ , tel que :

$$W(x - \xi) = \begin{cases} > 0 & \text{si } x \in \Omega_\xi \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad 1-8$$

généralisant ainsi les mêmes propriétés de la fonction poids en approximation MLS. (Voir les propriétés des fonctions poids MLS au *Chapitre 2*).

- *Combinaison des méthodes RKPM et MLS (Liu et al., 1997)*

La construction de cette méthode repose sur l'utilisation du formalisme continu de l'approximation MLS (Eq.1-5). Ainsi l'approximation se retrouve sous la forme,

$$u^R(x) = \langle p(x - \xi) \rangle \{a(\xi)\} \forall x \in \Omega_\xi \quad 1-9$$

La suite de la construction des fonctions de forme est analogue à celle en approximation MLS.

### 1.2.4.3 Partition de l'Unité (PU)

Babuska et Melenk (1995) incorporent l'enrichissement local dans l'approximation même en se basant sur la méthode des éléments finis. En fait, ce principe peut être considéré comme une généralisation des méthodes avec maillage, notamment les méthodes éléments finis ; mais aussi la plupart des méthodes Meshless. En effet, en 1996, le même groupe introduit la notion de PU pour traiter des fonctions de forme non-interpolantes, lors du développement de la plupart des méthodes Meshless. Soit la fonction d'interpolation sous la forme :

$$F(x) = \sum_i \Phi_i(x) f_i \quad 1-10$$

où  $f_i$  (données de fonction, dérivées...) et  $\Phi_i(x)$  est la fonction de forme. Néanmoins, ces fonctions de forme sont rationnelle (Voir *Chapitre 2*) et difficile à exprimer de manière explicite. Par conséquent, certains auteurs proposent la méthode de Shepard (1968) ; tel que,

$$F(x) = \sum_i w_i(x) f_i / (1 - \sum_i w_i(x)) \quad 1-11$$

Tels que les fonctions poids  $w_i$  sont des fonctions interpolantes centrées en un point d'évaluation  $x$ . Ainsi on en déduit les fonctions de forme générées sous la forme :

$$\Phi_i(x) = w_i(x) / (1 - \sum_j w_j(x)) \quad 1-12$$

Ces fonctions forment donc une partition d'unité. Si nous considérons la fonction d'interpolation  $F$  sous la forme suivant,

$$F(x) = \tilde{F}(x, a_0, a_1, \dots, a_I) \quad 1-13$$

Tels que, comme précédemment indiqué en approximation MLS, les coefficients  $a_I$  sont déterminés par minimisation, et l'approximation redevient de type MLS sous la forme,

$$F(x) = \sum_i \tilde{\Phi}_i(x) f_i \quad 1-14$$

avec  $\tilde{\Phi}_i$  la fonction de forme enfin interpolante.

#### 1.2.4.4 Méthodes utilisant des Fonctions de Bases Radiales (RBFs)

À l'heure actuelle, un certain nombre de façons pour construire des fonctions de forme Meshless ont été proposées. Exceptionnellement, le schéma numérique basé sur les Fonctions de Bases Radiales (RBFs) ne nécessite pas de formulation MLS. L'interpolation RBF est utilisée pour construire les fonctions de forme pour la discrétisation spatiale du domaine, car elle est stable et précise. La formulation locale d'interpolation RBF peut être écrite comme suit,

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^N R_i(r) a_i + \sum_{j=1}^m p_j(x) b_j \quad 1-15$$

avec  $R_i(r)$  est la fonction RBF,  $a_i$  et  $b_j$  sont des constantes d'interpolation. Comme indiqué précédemment,  $N$  est le nombre de nœuds dans le domaine d'interpolation du point  $x$ ,  $p_j(x)$  la base polynômiale d'ordre  $m$ . La variable unique en FBF est la distance  $r$  entre le point d'interpolation et le nœud du champs de variables  $x_i$ .

Dans la littérature, il existe plusieurs fonctions RBF qui ont été proposées et largement étudiées notamment dans le manuscrit de Liu et Gu (2005). Dans ce qui suit, nous introduisons une notion de couplage des méthodes Meshless avec d'autres méthodes de calcul, notamment celle des éléments finis pour bénéficier des avantages de chaque méthode.

### 1.3 COUPLAGE DES METHODES MESHLESS AUX ELEMENTS FINIS

La méthode des éléments finis (MEF) a montré son efficacité dans de nombreux cas de calcul des structures et de mise en forme. Une idée intéressante est de tirer avantage des méthodes Meshless et MEF en les associant. Plusieurs méthodes de couplage ont été donc proposées par différents auteurs [Attaway et al. (1994), Belytschko et al. (1995), Modaressi et al. (1995), Krongauz et Belytschko (1996), Liu et al. (2000), Huerta et al. (2000), Onate et al. (2001), Chen et Raju (2002), Fernandez-Mendez et Huerta (2005) parmi de nombreux autres]. Le couplage que l'on appellera « MEF-

Meshless» est dédié à l'amélioration des méthodes de calcul en grandes déformations, pour traiter les problèmes multi-physiques et remédier à la difficulté d'imposition des conditions aux limites rencontrée par les méthodes Meshless. En fait, Attaway et al. (1994) ont créé des méthodes de couplage MEF-SPH pour des problèmes d'impact et de couplage fluide-solide, permettant un glissement sans frottement entre les deux domaines physiques. Les premières méthodes de couplage MEF-Meshless, dans le cadre de la mécanique des solides, ont été développées pour imposer les conditions aux limites de Dirichlet du fait que les fonctions de forme MLS ne vérifient pas la propriété de Kröner. En effet, les premières techniques de couplage concernent la méthode EFG et consistent à utiliser des fonctions affines [Belytschko et al. (1995)], ou des multiplicateurs de Lagrange [Hegen (1996), Krongauz et Belytschko (1996)]. Ces derniers généralisent cette technique pour traiter différents ordres d'interpolation et renforcer des conditions aux limites essentielles des méthodes Meshless. Par la suite, Liu et al. (1997) suggèrent une notion d'enrichissement du domaine éléments finis par des particules en utilisant leur méthode KPM; et traiter le couplage de la méthode MLPG non seulement avec la MEF mais aussi avec la BEM.

Dans la littérature, il existe plusieurs méthodes de couplage qui répondent aux exigences mathématiques et physiques du couplage. Plusieurs auteurs ont proposé une interpolation Mixte entre les domaines géométriques MEF-Meshless. Ces méthodes traduisent l'évolution d'un champ sur un domaine Mixte. En effet, Modaressi et al. (1995), se servent de la méthode MEF- EFG [Belytschko et al. (1995)] dans laquelle l'un des champs inconnus (déplacements) est approché par la MEF et les autres champs (pressions de fluides), par la méthode EFG.

Plus tard, Huerta et al. (2000), proposent une formulation générale de couplage, appelée Continuous Blending Method, pour une interpolation Mixte MLS-MEF. Onate et al. (2001) améliorent la méthode classique de collocation où les conditions aux limites sont appliquées directement via une formulation forte des équations d'équilibre du système.

Les deux approches de couplage que nous adoptons dans notre travail sont, les approches de couplage présentées par les groupes de Belytschko et al. (1995) et Huerta et al. (2000). En effet, ces deux méthodes ont été modifiées afin d'obtenir des fonctions de forme qui peuvent être stabilisées de façon fiable, tout en maintenant une continuité et une consistance entre les deux domaines MEF et MLS au cours du calcul. Dans ces versions modifiées, l'ensemble des fonctions de forme générées sur le domaine global sont consistantes jusqu'à l'ordre souhaité (Voir *Chapitre 2* pour plus de détails).

## 1.4 CONTENU

Dans cette thèse, nous souhaitons remédier aux insuffisances bien connues de la méthode MEF standard pour simuler les problèmes mécaniques en grandes déformations.

Le travail consiste donc à :

- *Etape 1* : Développer une méthode Meshless basée sur une approximation MLS, en essayant de dépasser certains verrous tels que le choix des fonctions de forme interpolantes, le respect des conditions de consistance, l'efficacité de l'intégration numérique ainsi que l'imposition des conditions aux limites de Dirichlet.
- *Etape 2* : Effectuer le couplage entre cette formulation MLS effective dans la zone d'élaboration, et la MEF qui est effective dans le reste de la structure, compte tenu des évolutions des deux domaines.
- *Etape 3* : Appliquer cette méthodologie, que nous appellerons « Mixte », et totalement adaptative, à la simulation des problèmes en mécanique linéaires en hypothèses des petites perturbations (HPP), des problèmes mécaniques non linéaires adaptés aux équations de comportement multi-physiques et fortement couplées à l'endommagement.

Nous développons, ainsi, une technique innovante, basée sur le couplage MLS-MEF. Notre but est ainsi de discrétiser des zones fixes à fort gradient de déformation avec la méthode MLS, et développer un code numérique adapté pour la résolution des problèmes linéaires et non linéaires (plasticité, GD, endommagement, fissuration) afin de prouver la faisabilité d'une telle méthode hybride.

Les deux premières étapes sont développées au *Chapitre 2* en s'appuyant sur des cas d'exemples en mécanique linéaire en HPP. Le *Chapitre 3* développe l'étape 3 dans le cas d'exemples en mécanique non linéaire.



## Chapitre2      **MÉTHODE NUMÉRIQUE MLS APPLIQUÉE A DES PROBLEMES D'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE**

Les méthodes numériques Meshless sont employées pour construire l'approximation de champs physiques (vecteur déplacement, température, ...) à partir de fonctions de forme définies sur un support de discrétisation nodale ou nuage de nœuds d'un domaine borné. Dans ce chapitre, la méthode d'approximation par moindres carrés mobiles « MLS » est une alternative utilisée pour la construction des fonctions de forme diffuses. Les méthodes Meshless constituent une alternative aux méthodes des éléments finis « MEF ». Néanmoins, l'utilisation de ces méthodes peut s'avérer compliquée car suite au caractère non polynomial des fonctions de forme, l'intégration numérique classique de Gauss-Legendre n'est pas assez performante pour fiabiliser la résolution d'un problème de mécanique des solides. Ainsi, des exemples sont proposés pour tester l'approximation diffuse et la performance de l'intégration numérique appropriée. Par la suite, nous mettons en place une discrétisation MEF aux frontières du domaine MLS, en se basant sur l'exemple étudié au préalable, dans le but de traiter les conditions aux limites de Dirichlet. Pour ce faire, une procédure de couplage des deux méthodes numériques MLS-MEF est testée et validée par des exemples de mécanique linéaires des solides déformables.

### **2.1 CONSTRUCTION DES FONCTIONS DE FORME PAR MOINDRES CARRÉS MOBILES (MLS)**

L'approximation par moindres carrés mobiles introduit une dépendance des coefficients du lissage à chaque nœud MLS pour l'approximation du domaine. L'approximation globale classique, se transforme en une approximation à caractère local. Dans la suite de cette section, nous rappelons le principe de construction ainsi que les propriétés des fonctions de forme pour les méthodes basées sur ce type d'approximation.

*Hypothèses :*

Soit un ensemble de nœuds dispersés dans le domaine global  $\Omega$  et ses frontières  $\Gamma$ . La densité des nœuds dépend de l'exigence de précision de l'analyse et des ressources disponibles. La distribution nodale est utilisée dans la zone où nous voulons une approximation la plus précise. Une distribution plus dense des nœuds est souvent utilisée dans la zone où le gradient de déplacement est le plus important (*Figure 2-1*).



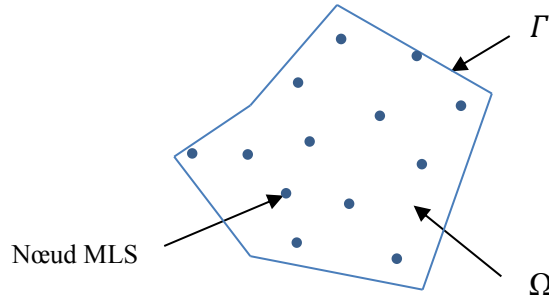


Figure 2-1 : Nœuds MLS dispersés dans un domaine global  $\Omega$  et ses frontières  $\Gamma$

## 2.1.1 Support des fonctions poids

### 2.1.1.1 Notion de support et domaine d'influence

Nous utilisons un concept de domaine d'influence de chaque nœud MLS pour approcher les différentes composantes du champ de déplacement à chaque nœud du domaine global  $\Omega$ . Ce domaine d'influence comprend un ensemble de nœuds MLS groupés dans un «sous-domaine local»  $\Psi_I$ . Ce domaine est différent d'un nœud MLS « $I$ » à un autre et regroupe le nombre de nœuds MLS voisins au nœud « $I$ » sélectionné (Figure 2-2).

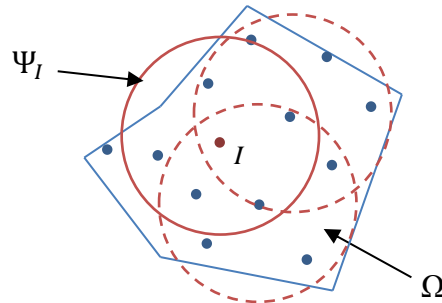
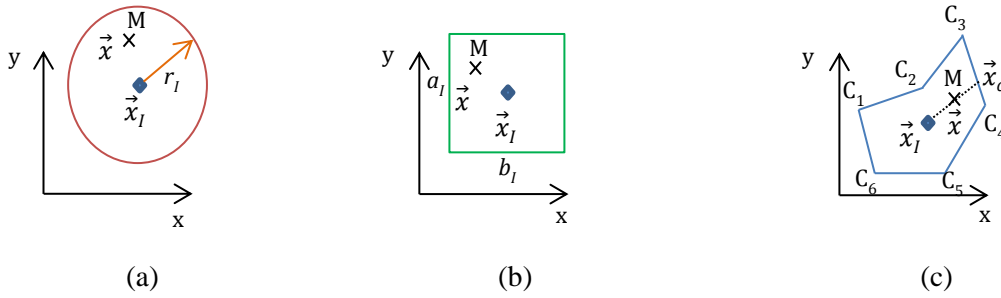


Figure 2-2 : Domaine d'influence des nœuds  $I$  considérés

Le vecteur position des nœuds MLS  $I$  est noté  $\vec{x}_I = x_I \vec{e}_x + y_I \vec{e}_y$ , tel que  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$  sont les vecteurs d'une base cartésienne orthonormée. Si un point d'évaluation  $M \in \Psi_I$ , défini par le vecteur coordonné  $\vec{x} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y$ , alors l'approximation du déplacement  $\vec{u}_M(\vec{x}) = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y$  dépend du déplacement nodal  $\vec{u}_I(\vec{x}_I) = \hat{u}_{xI} \vec{e}_x + \hat{u}_{yI} \vec{e}_y$ . Ce point est impliqué dans la construction de la fonction de forme pour un point qui est à l'intérieur de son domaine d'influence. Le fait que la dimension du domaine d'influence peut être différente d'un nœud à un autre fait qu'un nœud peut avoir plus d'influence que d'autres pour un caractère local lors de la construction des fonctions de forme. Nous

notons que la précision de l'approximation dépend du nombre de nœuds dans le domaine d'influence. En effet, lors de la définition d'un domaine d'influence, il est primordial qu'il existe suffisamment de nœuds à l'intérieur du domaine. Ceci évite de rencontrer des problèmes de singularité lors du calcul de la fonction de forme à cause d'un nombre insuffisant de nœuds dans le support considéré. Dans ce chapitre, nous utilisons différentes formes de supports de la fonction poids: circulaire, rectangulaire et polygonal (*Figure 2-3.c*). Le calcul des fonctions poids pour un point  $M$  est assuré par la fonction poids associée  $w(\vec{x}_I, \vec{x})$  au nœud  $I$  (Eq.2.1), tel que  $w_p$  est la fonction fenêtre à choisir (section 2.1.1.2).

$$w(\vec{x}_I, \vec{x}) = \begin{cases} w_p\left(\frac{\|\vec{x}_I - \vec{x}\|}{r_I}\right) & \text{circulaire} \\ w_p\left(\frac{|(\vec{x}_I - \vec{x}) \cdot \vec{e}_x|}{a_I}\right) w_p\left(\frac{|(\vec{x}_I - \vec{x}) \cdot \vec{e}_y|}{b_I}\right) & \text{rectangulaire} \\ w_p\left(\frac{\|\vec{x}_I - \vec{x}\|}{\|\vec{x}_c - \vec{x}\|}\right) & \text{polygonal} \end{cases} \quad 2.1$$



*Figure 2-3: Définition de différentes formes de support d'une fonction poids. a) support circulaire, b) support rectangulaire, c) support polygonal*

où  $r_I$  est le rayon du support circulaire du nœud «  $I$  »,  $a_I$  et  $b_I$  sont les longueurs des côtés du rectangle centré au nœud  $I$ . En fait, pour créer le support polygonal, des lignes de contour  $[C_j C_{j+1}]$  sont construites sur les sous domaines  $\psi_I$  comme support de fonction poids en formant un polygone. Par la suite, pour garantir au moins la continuité  $C^1$ , un lissage des coins du polygone est effectué par des courbes de Bézier (*Figure 2-4*). En effet, la construction d'une courbe de Bézier est réalisée en respectant le caractère de tangence sur  $A_0$  et  $A_2$  et fixant leur position avec le paramètre de courbure  $\theta$  (Eq.2.2).

$$\begin{aligned} \overrightarrow{C_4 A_0} &= (1 - \theta) \overrightarrow{C_4 C_3} \\ \overrightarrow{C_2 A_2} &= (1 - \theta) \overrightarrow{C_2 C_3} \end{aligned} \quad 2.2$$

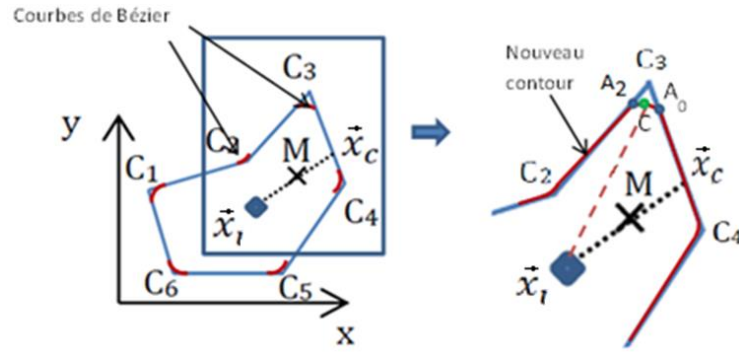


Figure 2-4: Construction d'un support lisse – Courbes de Bézier

Ensuite, une tangente spline est construite avec  $\overline{C_4A_0}$  et  $\overline{C_2A_2}$ , ce qui conduit à la construction de la courbe (Figure 2-4) selon l'équation ci-dessous.

$$\overline{IC} = (1 - t^2)\overline{IA_0} + 2 * t(1 - t)\overline{IC_3} + t^2\overline{IA_2} \quad 2.3$$

Des fonctions poids et leurs dérivées sont générées avec un support rectangulaire lissé (Figure 2-6.c). Au cours du travail, nous avons surtout exploité deux types de support circulaire et rectangulaire.

### 2.1.1.2 Définition des fonctions poids

La mise en œuvre de l'approximation MLS repose d'une part sur l'expression mathématique des fonctions poids associées à chaque nœud « I ». La fonction poids  $w(\vec{x}_I, \vec{x})$  est strictement positive en un sous-domaine de support d'influence d'un point  $\vec{x}_I$  et nulle au bord du domaine. Les différentes fonctions affectent considérablement la précision des résultats numériques et doivent satisfaire les conditions suivantes, :

- $w(\vec{x}_I, \vec{x}) > 0$  à l'intérieur du sous-domaine  $\psi_I$ ,
- $w(\vec{x}_I, \vec{x}) = 0$  à l'extérieur du sous-domaine  $\psi_I$ ,
- $w(\vec{x}_I, \vec{x})$  est telle que la fonction fenêtre  $w_p$  est décroissante et monotone.

Les petites dimensions d'un domaine d'influence peuvent entraîner une erreur numérique si l'intégration numérique de Gauss-Legendre est utilisée pour calculer les éléments des matrices de masse et de rigidité. D'autre part, les dimensions devraient être également assez petites pour maintenir le caractère local de l'approximation MLS. Nous remarquons aussi que la fonction poids affecte l'approximation qui en résulte car, si la fonction poids est continue alors les fonctions de forme le sont également. En se basant sur la formulation du système 2.1, les fonctions poids d'un nœud MLS, sont exprimées comme fonction de la distance normalisée,  $s$ .

Soient donc les fonctions fenêtre exponentielles sous la forme :

$$w_p(s) = \begin{cases} \frac{e^{-s^2/\zeta^2} - e^{-1/\zeta^2}}{1 - e^{-1/\zeta^2}} & \text{si } |s| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad 2.4$$

avec  $\zeta$  un paramètre représentatif de la distance maximale d'un support au nœud considéré. En se basant sur cette expression, Most et Bucher (2005) ont représenté par la suite, une étude de régularisation pour assumer un caractère interpolant souhaité des fonctions de forme. Nous avons choisi de tester des fonctions poids splines cubiques,

$$w_p(s) = \begin{cases} 1 - 3s^2 + 2s^3 & \text{si } |s| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{Avec } w(0) = 1, w_x(0) = w_x(1) = 0, w(1) = 0 \quad 2.5$$

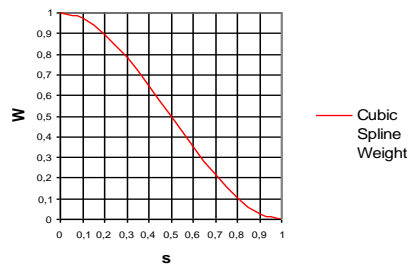


Figure 2-5: Fonction poids spline cubique en un nœud pour un ensemble de nœuds en 1D

La Figure 2-6 montre la génération de fonctions poids splines cubiques sur les trois types de supports cités en Figure 2-3.

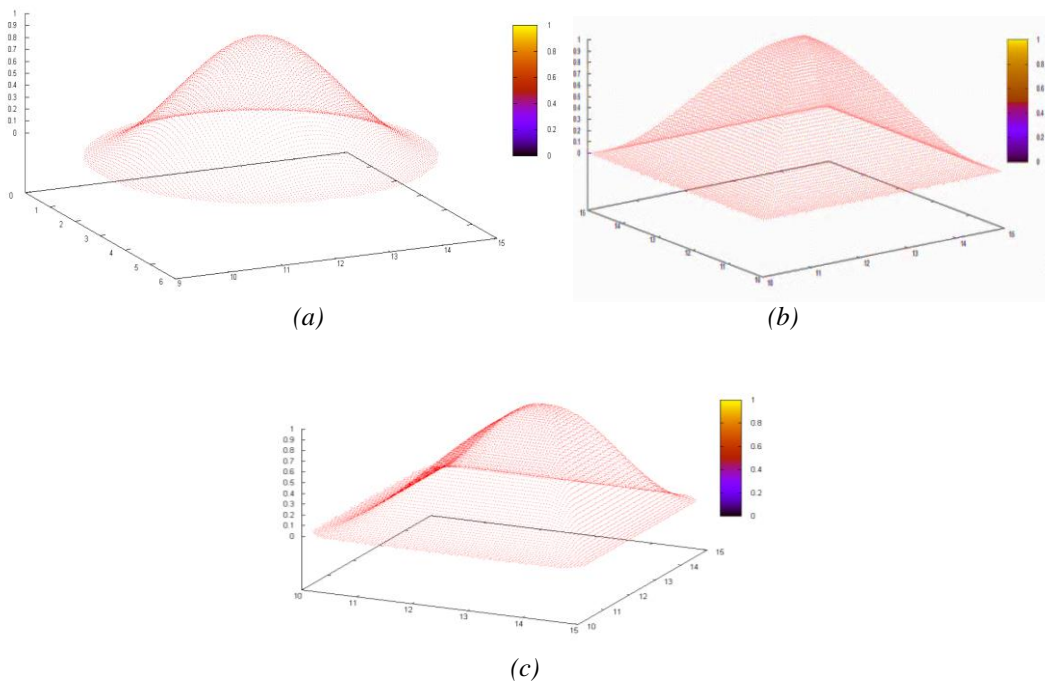


Figure 2-6: Génération d'une fonction poids spline cubique sur un support (a) circulaire (b) carrée (c) polygonale lisse

## 2.1.2 Détermination des fonctions de forme

Contrairement à l'approximation par les moindres carrés classiques, la méthode par Moindres Carrés mobiles (MLS) assure un caractère local de l'approximation en introduisant une dépendance de chaque nœud «  $I$  ».

### 2.1.2.1 Approximation par moindres carrés mobiles (MLS)

Avant de construire la fonction de forme, il est nécessaire de choisir une fonction poids  $w$  (section 2.1.1), qui délimite le support de la fonction de forme, et une base polynômiale  $\langle p \rangle$ . Dans le cadre d'une configuration 2D, nous pouvons choisir une base linéaire  $\langle p(\vec{x}) \rangle = \langle 1, x, y \rangle$  ou quadratique:  $\langle p(\vec{x}) \rangle = \langle 1, x, y, \frac{x^2}{2}, xy, \frac{y^2}{2} \rangle$ . Nous notons  $m$  le rang de la base  $\langle p \rangle$ . Considérons  $\vec{u}(\vec{x}) = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y$  le vecteur déplacement du point  $M$ . L'approximation du vecteur déplacement est notée  $\tilde{\vec{u}}(\vec{x}) = \tilde{u}_x \vec{e}_x + \tilde{u}_y \vec{e}_y$ . Afin de simplifier la suite, nous allons uniquement nous intéresser dans un premier temps à la composante  $\tilde{u}_x(\vec{x})$ . Cette approximation est construite à partir de la base polynômiale  $\langle p \rangle$  telle que,

$$\tilde{u}_x(\vec{x}) = \langle p(\vec{x}) \rangle \{a(\vec{x})\} \quad 2.6$$

Soit  $M'$  un point voisin de  $M$  de coordonnée  $\vec{x}'$ :

$$\tilde{u}_x(\vec{x}) = \lim_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}} \langle p(\vec{x}') \rangle \{a(\vec{x}')\} = \lim_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}} \langle p(\vec{x}' - \vec{x}) \rangle \{b(\vec{x}')\} \quad 2.7$$

La forme centrée de l'approximation MLS est alors:

$$\tilde{u}_x(\vec{x}) = \langle p(\vec{0}) \rangle \{b(\vec{x})\} \quad 2.8$$

Le vecteur coefficient  $\{b(\vec{x})\}$  est résolu en minimisant une norme pondérée discrète  $L_2$  définie par:

$$\begin{aligned} J(\{b(\vec{x})\}) &= \sum_{I=1}^{n_{loc}} w(\vec{x}_I, \vec{x}) \|\langle p(\vec{x}_I - \vec{x}) \rangle \{b(\vec{x})\} - \hat{u}_{xI}\|^2 \\ &= ([P(\vec{x})] \cdot \{b(\vec{x})\} - \{\hat{u}_{xI}\})^T [W] ([P(\vec{x})] \cdot \{b(\vec{x})\} - \{\hat{u}_{xI}\}) \end{aligned} \quad 2.9$$

avec  $w(\vec{x}_I, \vec{x})$  la fonction poids associée au nœud  $I$  de coordonnées  $\vec{x}_I$ ,  $n_{loc}$  est le nombre de nœuds «  $I$  » tel que  $M \in \psi_I$  pour chaque  $w(\vec{x}_I, \vec{x}) \neq 0$ ,  $\hat{u}_{xI}$  sont les déplacements nodaux du point  $I$  selon la direction  $x$ . Les matrices  $[P(\vec{x})]$  et  $[W(\vec{x})]$  sont définies par :

$$[P(\vec{x})] = \begin{bmatrix} \langle p(\vec{x}_1 - \vec{x}) \rangle \\ \langle p(\vec{x}_2 - \vec{x}) \rangle \\ \vdots \\ \langle p(\vec{x}_{n_{loc}} - \vec{x}) \rangle \end{bmatrix}_{n_{loc} \times m}, [W(\vec{x})] = \begin{bmatrix} w(\vec{x}_1, \vec{x}) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & w(\vec{x}_{n_{loc}}, \vec{x}) \end{bmatrix}_{n_{loc} \times n_{loc}}$$

La détermination du vecteur  $\{b(\vec{x})\}$  est obtenue en minimisant la norme  $J(\{b(\vec{x})\})$  qui donne le système linéaire suivant :

$$[A(\vec{x})]\{b(\vec{x})\} = \langle p(\vec{0}) \rangle \quad 2.10$$

$$[A(\vec{x})] = [P(\vec{x})]^T [W(\vec{x})] [P(\vec{x})] = \sum_{I=1}^{n_{loc}} w(\vec{x}_I, \vec{x}) \{p(\vec{x}_I - \vec{x})\} \langle p(\vec{x}_I - \vec{x}) \rangle \quad 2.11$$

$[A(\vec{x})]$  est un tenseur comoment symétrique non singulier et régulier si  $n_{loc} > m$  ( $m$  est le rang de la base polynômiale  $\langle p \rangle$ ). Le produit  $\{p(\vec{x}_I - \vec{x})\} \langle p(\vec{x}_I - \vec{x}) \rangle$  dans l'équation 2.11 dépend du point d'évaluation  $x_I$ . Il permet en revanche de stocker les coordonnées des nœuds et pointer vers la fonction poids  $w(\vec{x}_I, \vec{x})$  correspondante.

Toutefois, si plusieurs points  $I$  participent à l'approximation du champ de déplacement du point M Nous pouvons perdre le caractère local de l'approximation. En résolvant le système linéaire (voir Eq.2.10) et en remplaçant  $\{b(\vec{x})\}$  dans l'équation 2.6, l'expression suivante de la fonction de forme est obtenue,

$$\tilde{u}_x(\vec{x}) = \sum_{I=1}^{n_{loc}} \phi_I^{MLS}(\vec{x}) \hat{u}_{xI} \quad 2.12$$

$$\phi_I^{MLS}(\vec{x}) = w(\vec{x}_I, \vec{x}) \langle p(\vec{x}_I - \vec{x}) \rangle \{b(\vec{x})\} = \frac{G(\vec{x})}{L(\vec{x})} \quad 2.13$$

$\phi_I^{MLS}(\vec{x})$  est la fonction de forme rationnelle du nœud  $I$ . Il est à noter que quand  $\phi_I^{MLS}(\vec{x}) = 0$ ,  $w(\vec{x}_I, \vec{x}) = 0$  (Eq.2.12) ; alors la similarité entre les supports des deux fonctions conserve le caractère local de l'approximation MLS. D'autre part, il est constaté que si  $w(\vec{x}_I, \vec{x}) \in C^k(\Omega)$  et  $\{p(\vec{x}_J - \vec{x})\} \in C^l(\Omega)$ ,  $I=1,2,\dots, n_{loc}$ ,  $J=1, 2,\dots, m$ ; ainsi,  $\phi_I^{MLS}(\vec{x}) \in C^r(\Omega)$  avec  $r=\min(k,l)$ . L'ordre polynomial de la fonction  $G(\vec{x})$  dépend de l'ordre de la base polynômiale  $\langle p(\vec{x}) \rangle$  mais aussi de l'ordre polynomial de la fonction poids et de la forme du support. L'ordre polynomial de la fonction  $L(\vec{x})$  est alors la différence entre l'ordre du polynôme  $G(\vec{x})$  et l'ordre de la base polynômiale  $\langle p(\vec{x}) \rangle$ . La génération des fonctions de forme d'un exemple à une dimension est présentée en ANNEXE A.1.

### 2.1.2.2 Propriétés des fonctions de forme

Par définition, la fonction de forme générée par l'approximation MLS dépend du degré de la base polynômiale  $\langle p(\vec{x}) \rangle$ , de l'expression mathématique et du choix du support des fonctions poids  $w(\vec{x}_I, \vec{x})$  et bien sur de la discrétisation nodale. Le choix des fonctions poids est très important pour veiller à la simplicité, l'efficacité et la précision du calcul. Néanmoins, la fonction de forme en Meshless reste le problème principal à gérer. En effet, la méthode MLS a été exploitée pour la construction de ces fonctions qui, contrairement aux éléments finis, ne vérifient pas la propriété de Krönecker car nous utilisons une approximation par moindres carrés et, de ce fait, l'approximation du champ de déplacement n'est pas interpolant. En revanche, certaines propriétés doivent être satisfaites, le plus efficacement possible durant l'analyse. Une fonction de forme doit satisfaire les conditions suivantes :

- Partition de l'unité et consistance:  $\sum_I \phi_I^{MLS}(x) = 1$
- Précision linéaire :  $\sum_I \phi_I^{MLS}(x)x_I = x$

Outre les propriétés mathématiques de la fonction de forme, elle doit être en mesure de gérer le caractère aléatoire de distribution des nœuds et arriver à assurer une performance au moins comparable aux éléments finis pour le même nombre de nœuds.

### 2.1.3 Propriété de consistance

Idéalement, la fonction de forme doit avoir une certaine consistance pour permettre la convergence des résultats numériques, même avec la variation du nombre de nœuds au cours du calcul.

La condition de consistance exprime le fait que la solution cherchée est reproduite par un polynôme d'ordre  $m$  qui correspond à l'ordre de la base polynômiale choisie. Si l'approximation reproduit exactement une base polynômiale de degré inférieur ou égal à  $m$  alors l'approximation est consistante de même ordre  $m$ .

$$\forall \vec{x} \in \Omega, \quad \sum_{I=1}^n \phi_I^{MLS}(\vec{x}) \{p(\vec{x}_I - \vec{x})\} = \{p(\vec{0})\} \quad 2.14$$

En considérant l'équation 2.14, une consistance d'ordre 0, par exemple en 1D,  $\{p(\vec{x}_I - \vec{x})\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

vérifierait la partition de l'unité de la fonction de forme, c'est-à-dire,  $\sum_I \phi_I^{MLS}(\vec{x}) = 1$ .

### 2.1.4 Fonctions de forme interpolantes

La solution générée par l'approximation MLS est une solution approchée. En effet les coefficients d'approximation du déplacement à un nœud «  $I$  » sont différents des valeurs nodales en ce point. Par conséquent, nous souhaitons procéder à la recherche d'une solution interpolée. Pour se faire, nous remarquons que les fonctions de forme MLS associées à chaque nœuds «  $I$  », notées  $\phi_I^{MLS}(\vec{x})$ , ne vérifient pas, par défaut, la propriété de Krönecker :

$$\phi_I^{MLS}(\vec{x}_j) \neq \delta_{IJ} \quad 2.15$$

D'autre part, pour éviter la forte dépendance des fonctions de forme au domaine d'influence causée par la méthode d'approximation MLS, des solutions de régularisation ont été proposées (pour plus de détails, voir Most et Bucher (2008)). Ainsi, pour restaurer cette propriété d'interpolation, nous construisons des fonctions poids non singulières répondant à la condition suivante:

$$w^a(\vec{x}_I, \vec{x}) = w(\vec{x}_I, \vec{x}) / (1 - w(\vec{x}_I, \vec{x})), I=1, 2, \dots, n, \text{ avec } w_I^a(\vec{x}_I, \vec{x}) \rightarrow \infty \text{ si } \vec{x} \rightarrow \vec{x}_I \quad 2.16$$

Pour respecter la propriété de Krönecker ( $\phi_I^{MLS}(\vec{x}_j) \approx \delta_{IJ}$ ), nous utilisons les fonctions de Shepard. Ainsi, l'expression des fonctions poids « interpolantes »  $w_I^b$  d'un nœud  $\vec{x}_I$  évalué au point M de coordonnées  $\vec{x}$  s'écrit sous la forme:

$$w^b(\vec{x}_I, \vec{x}) = w^a(\vec{x}_I, \vec{x}) / \sum_{J=1}^n w_J^a(\vec{x}_I, \vec{x}), I, J=1, 2, \dots, n, \text{ avec } w_I^b(\vec{x}_I, \vec{x}) \rightarrow 1 \text{ si } \vec{x} \rightarrow \vec{x}_I \quad 2.17$$

Si nous utilisons ces fonctions poids, nous obtenons des fonctions de formes associées qui sont interpolantes.

### 2.1.5 Fonctions dérivées complètes et diffuses

Le calcul des dérivées des fonctions de forme peut être effectué selon leur utilisation dans une méthode de résolution. Il existe deux formes de dérivation ; la dérivation complète et la dérivée diffuse, notées respectivement  $\frac{\partial}{\partial x}$  et  $\frac{\delta}{\delta x}$ . En fait, la Méthode des Eléments Diffus (DEM) est la première méthode basée sur la dérivée diffuse des fonctions de forme MLS. La méthode Element Free Galerkin (EFG) est parmi les méthodes qui utilisent les dérivées complètes de ces types de fonctions de forme. Dans la suite nous avons effectué le calcul des dérivées selon  $x$ . En se basant sur l'expression de la fonction de forme MLS (Eq.2.13) sa dérivée complète en fonction du vecteur  $\{b(\vec{x})\}$  est sous la forme suivante :



$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_I^{MLS}(\vec{x})}{\partial x} &= \frac{\partial (w(\vec{x}_I, \vec{x}) \langle p(\vec{x}_I - \vec{x}) \rangle \{b(\vec{x})\})}{\partial x} \\
&= \frac{\partial w(\vec{x}_I, \vec{x})}{\partial x} \langle p(\vec{x}_I - \vec{x}) \rangle \{b(\vec{x})\} + w(\vec{x}_I, \vec{x}) \frac{\partial \langle p(\vec{x}_I - \vec{x}) \rangle}{\partial x} \{b(\vec{x})\} \\
&\quad + w(\vec{x}_I, \vec{x}) \langle p(\vec{x}_I - \vec{x}) \rangle \frac{\partial \{b(\vec{x})\}}{\partial x}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Selon l'équation 2.10, la dérivée du vecteur  $\{b(\vec{x})\}$  correspondant à un schéma centré en  $\vec{x}$  est obtenue par la résolution du système linéaire suivant :

$$[A(\vec{x})] \frac{\partial \{b(\vec{x})\}}{\partial x} = - \frac{\partial [A(\vec{x})]}{\partial x} \{b(\vec{x})\} \tag{2.19}$$

On appelle dérivée diffuse notée  $\frac{\delta}{\delta x}$  la formulation non centrée suivante,

$$\frac{\delta \phi_I^{MLS}(\vec{x})}{\delta x} = w(\vec{x}_I, \vec{x}) \frac{\partial \langle p(\vec{x}) \rangle}{\partial x} [A(\vec{x})]^{-1} \{p(\vec{x}_I)\} \tag{2.20}$$

Le calcul se fait par la résolution d'un système linéaire, à savoir,

$$[A(\vec{x})] \{\theta(\vec{x})\} = \frac{\partial \langle p(\vec{x}) \rangle}{\partial x} \tag{2.21}$$

où  $\{\theta(\vec{x})\}$  est le vecteur de coefficients à déterminer. Ainsi la fonction de forme, par analogie à la formulation de l'équation 2.13, se présente sous la forme suivante,

$$\phi_I^{MLS}(\vec{x}) = w(\vec{x}_I, \vec{x}) \langle p(\vec{x}_I) \rangle \{\theta(\vec{x})\} \tag{2.22}$$

L'algorithme de calcul se fait après changement d'échelle pour travailler avec un schéma centré sur  $\vec{x}$ , au niveau de l'équation 2.21, à savoir,

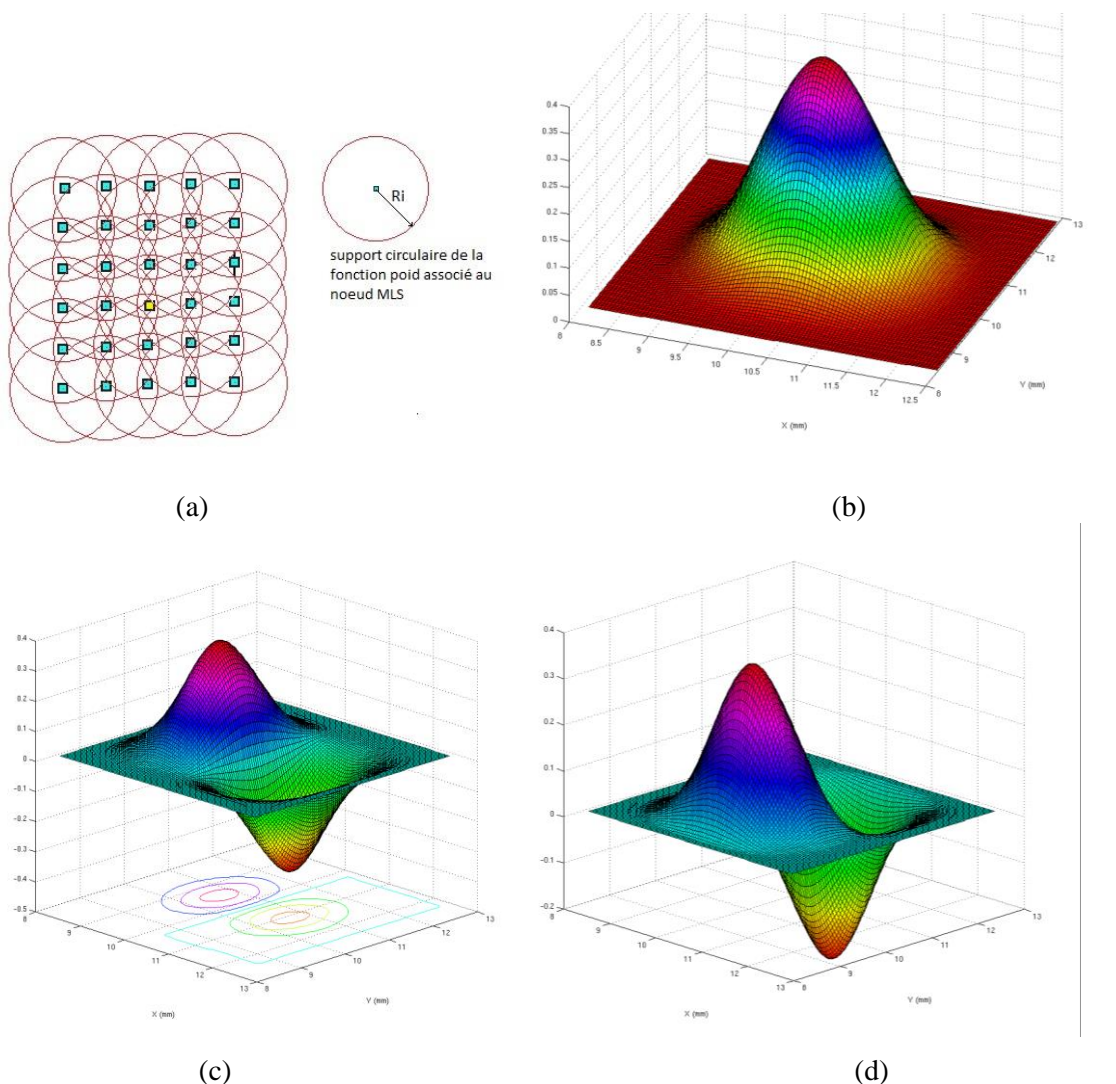
$$[A(\vec{x})] \{\gamma(\vec{x})\} = [D(\vec{x})]^{-1} \frac{\partial \langle p(\vec{0}) \rangle}{\partial x} \tag{2.23}$$

avec  $[D(\vec{x})]$  est la matrice de transformation d'échelle et  $\{\gamma(\vec{x})\}$  sont les nouveaux coefficients du vecteur à déterminer tel que la fonction de forme est de la forme,

$$\phi_I^{MLS}(\vec{x}) = w(\vec{x}_I, \vec{x}) \langle p(\vec{x}_I - \vec{x}) \rangle \{\gamma(\vec{x})\} \tag{2.24}$$

Les fonctions de forme, telles qu'elles sont générées, sont difficiles à mettre en œuvre. A cause de leur complexité provenant de leur forme rationnelle. En fait, dans l'espace de référence, l'attribution des domaines d'influence est facile à mettre en œuvre et les fonctions de forme sont générées. Mais

au-delà de l'espace de référence, lorsque les nœuds MLS se déplacent, les fonctions de forme impliquées bougent. Nous essayons néanmoins d'élargir les supports de ces fonctions mais ceci influe négativement sur la précision de la solution ainsi que le temps de calcul. La *Figure 2-7a* présente un nuage de nœuds MLS dont la répartition est structurée et uniforme, des supports poids circulaires  $\phi$  et une base polynômiale quadratique ont été adoptés dans cet exemple. La *Figure 2-7b* trace la fonction de forme du nœud (nœud coloré en jaune) dans le cas d'une fonction de forme non-interpolante. Cette fonction s'annule bien au-delà du support circulaire de la fonction poids comme espéré. Les *Figure 2-7c* et *d* représente successivement les composantes du gradient de la fonction de forme selon  $x$  et  $y$ . Nous observons que le gradient est bien continu et s'annule au nœud jaune.



*Figure 2-7: (a) nuage de nœuds MLS (b) Fonction de forme en un nœud MLS (b) Dérivée de la fonction de forme selon X (c) dérivée de la fonction de forme selon Y*

## 2.2 SCHEMA DE COUPLAGE MLS-MEF

Il existe différentes solutions pour coupler les méthodes MLS et MEF. Une des solutions les plus fréquentes est de construire une zone de transition qui recouvre partiellement les zones Meshless et MEF. Cette zone est constituée, en général, d'une ou plusieurs rangées d'éléments finis. Ainsi selon Huerta et al. (2000), une rangée d'éléments finis entre les deux domaines est interposée et le domaine global se présente comme  $\Omega = \Omega^{\text{MLS}} \cup \Omega^{\text{MEF}} \cup \Omega^{\text{MLS/MEF}}$ . Considérons un ensemble de nœuds de vecteur coordonnées  $x_i$  dans le domaine  $\Omega = \Omega^{\text{MLS}} \cup \Omega^{\text{MEF}} \cup \Omega^{\text{MLS/MEF}} / \Omega \subset \mathfrak{R}^n$ , tel que  $\Omega^{\text{MLS/MEF}} = \Omega^{\text{MLS}} \cap \Omega^{\text{MEF}}$  est la zone de transition entre les fonctions de forme MLS et MEF (Figure 2-8). Ainsi, en se basant sur l'approximation MLS, l'interpolation de  $\vec{u}(\vec{x})$  dans le domaine global  $\Omega$ , se fait en répartissant l'approximation sur les deux domaines : MEF et MLS.

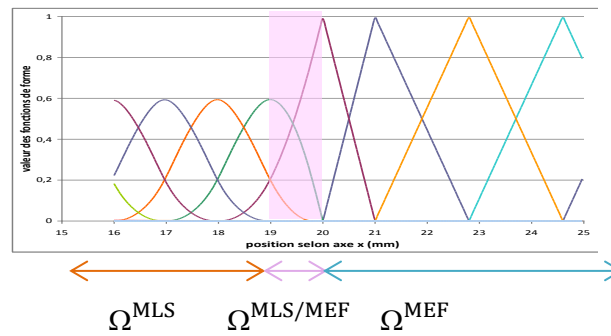


Figure 2-8 : Couplage MLS-MEF en 1D- Fonctions de forme MLS sur  $\Omega^{\text{MLS}}$  et MEF sur  $\Omega^{\text{MEF}}$

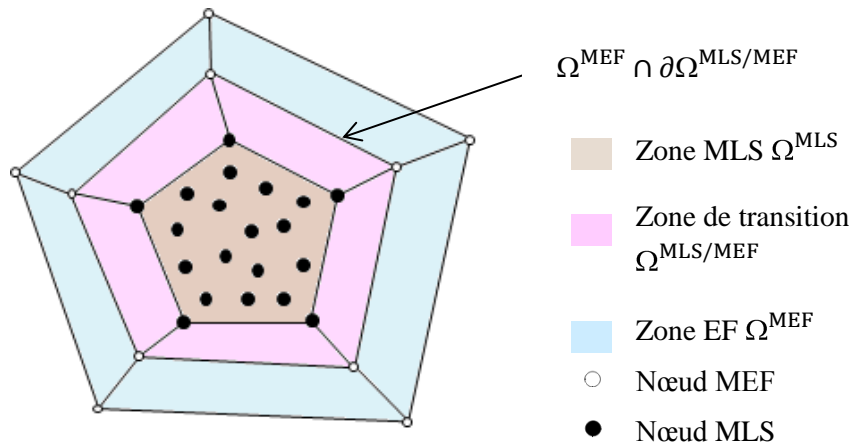


Figure 2-9 : Couplage MLS-MEF en 2D et répartition des zones pour l'approximation

Notre but est de calculer les fonctions de forme consistantes dans la zone de transition qui devrait assurer une continuité des champs physiques entre les domaines  $\Omega^{\text{MEF}}$  et  $\Omega^{\text{MLS}}$  par l'intermédiaire de la zone d'interface  $\Omega^{\text{MLS/MEF}}$ .

### 2.2.1 Approximation Mixte

Huerta et al (2000) proposent une combinaison entre MLS et MEF dans la zone de transition (Eq.2.28) en vérifiant la propriété de consistance (Eq.2.29). Pour ce faire, nous procédons au couplage des deux schémas d'approximations. En fait, dans la zone MLS nous utilisons des fonctions de forme MLS, dans la zone MEF nous avons recours aux fonctions de forme MEF et dans le domaine de transition nous considérons les deux fonctions de forme à la fois. Soient les nœuds MLS de vecteur coordonnées  $\vec{x}_I$  sur le domaine  $\Omega^{MLS}$  avec leurs fonctions de forme associées  $\phi_I^{MLS}(\vec{x})$ , l'approximation du déplacement à cette zone est telle que :

$$\forall \vec{x} \in \Omega^{MLS}, \quad \vec{u}_{MLS}(\vec{x}) = \sum_{I \in \Omega^{MLS}} \phi_I^{MLS}(\vec{x}) \vec{u}_I \quad 2.25$$

Tel que le domaine  $\Omega^{MLS}$  comprend les sous domaines où les  $\phi_I^{MLS}$  ont une influence sur l'approximation  $\vec{u}_{MLS}$ . Considérons les nœuds MEF de vecteur coordonnées  $\vec{x}_J$  sur le domaine  $\Omega^{MEF}$  avec leurs fonctions de forme associées  $N_J^e(\vec{x})$  sur le domaine, l'approximation du déplacement est comme suit :

$$\forall \vec{x} \in \Omega^{MEF}, \quad \vec{u}_{MEF}(\vec{x}) = \sum_{J \in \Omega^{MEF}} N_J^e(\vec{x}) \vec{u}_J \quad 2.26$$

Tel que le domaine  $\Omega^{MEF}$  comprend les sous domaines où les  $N_J^e$  ont une influence sur l'approximation  $\vec{u}_{MEF}$ . Pour toute approximation dans la zone de transition  $\Omega^{MLS/MEF}$ , l'approximation du champs de déplacement  $\vec{u}(\vec{x})$  prend en charge la contribution des éléments finis et des nœuds MLS, à savoir :

$$\forall \vec{x} \in \Omega^{MLS/MEF}, \quad \vec{u}_{MLS/MEF}(\vec{x}) = \vec{u}_{MLS}(\vec{x}) + \vec{u}_{MEF}(\vec{x}) \quad 2.27$$

C'est ainsi qu'une approximation est répartie sur un ensemble global de nœuds  $x_i$  dans un domaine  $\Omega = \Omega^{MLS} \cup \Omega^{MEF} \cup \Omega^{MLS/MEF} / \Omega \subset \mathfrak{R}^n$  tel que,

$$\forall M \in \Omega^{MLS/MEF} \quad \vec{u}_{MLS/MEF}(\vec{x}) = \sum_{I \in \Omega^{Mixte}} \phi_I^{MLS}(\vec{x}) \vec{u}_I + \sum_{J \in \Omega^{MEF}} N_J^e(\vec{x}) \vec{u}_J \quad 2.28$$

où  $\Omega^{Mixte} = \Omega^{MLS} \cup \Omega^{MLS/MEF}$  est le domaine Mixte.

$\forall \vec{x} \in \Omega^{MLS/MEF}$ ,  $N_J^e(\vec{x})$  et  $\phi_I^{MLS}(\vec{x})$  sont les fonctions de forme MEF et MLS respectivement,  $\vec{u}_J$  et  $\vec{u}_I$  sont les valeurs nodales.

- *Notions de consistance*

Soient les nœuds MLS de vecteur coordonnées  $\vec{x}_i$  sur le domaine  $\Omega^{MLS}$ . L'ensemble des fonctions de forme MLS  $\phi_i^{MLS}$  débordants sur le domaine de transition au point  $x_i$  est modifié par la présence des fonctions de formes MEF (Figure 2-10).

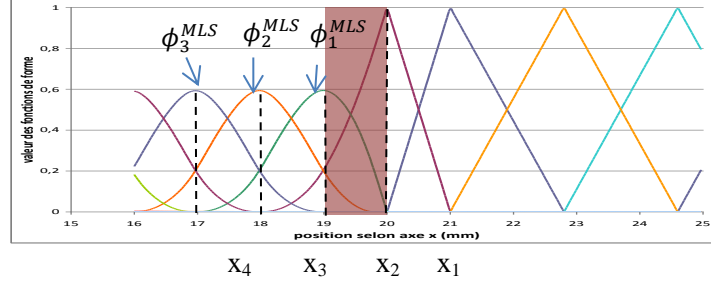


Figure 2-10 : Partie modifiée des fonctions de forme MLS

Théoriquement, si nous ne souhaitons pas enrichir l'ordre d'interpolation dans la zone MEF, nous imposons une consistance égale entre les zones MEF et MLS. Les fonctions de forme  $\phi_i^{MLS}$  sont alors nulles  $\forall \vec{x} \in \Omega^{MEF}$ . Certainement, une telle contribution doit vérifier les conditions de consistance. L'objectif est ainsi de garantir une condition de consistance au domaine de transition  $\Omega^{MLS/MEF}$ , et ceci, selon un schéma centré. Actuellement, si l'approximation reproduit une base de polynômes de degré  $m$ , ainsi la consistance est de même degré  $m$ . Le schéma de couplage de l'exemple en 1D (Figure 2-10) est développé en ANNEXE A.2. Considérons le schéma de couplage à 2D (Figure 2-9). Ainsi pour  $\{\vec{x}_I\}_{I \in \Omega^{MLS}}$  et  $\{\vec{x}_J\}_{J \in \Omega^{MEF}}$ , la consistance se traduit par :

$$\{p(\vec{0})\} = \sum_{J \in \Omega^{MLS/MEF}} N_J^e(\vec{x}) \{p(\vec{x}_J - \vec{x})\} + \sum_{I \in \Omega^{Mixte}} \phi_I^{MLS}(\vec{x}) \{p(\vec{x}_I - \vec{x})\} \quad 2.29$$

Par analogie avec l'expression de consistance du domaine MLS, nous abordons l'expression de l'équation 2.10, pour l'étendre vers un schéma de consistance Mixte (Eq.2.30). Pour ce faire, considérons l'expression de la fonction de forme MLS (Eq.2.13), que l'on utilise dans l'équation 2.29:

$$\begin{aligned} \sum_{I \in \Omega^{Mixte}} w(\vec{x}_I, \vec{x}) \{p(\vec{x}_I - \vec{x})\} \{b(\vec{x})\} \{p(\vec{x}_I - \vec{x})\} \\ = \{p(\vec{0})\} - \sum_{J \in \Omega^{MLS/MEF}} N_J^e(\vec{x}) \{p(\vec{x}_J - \vec{x})\} \end{aligned} \quad 2.30$$

A partir de l'expression de la matrice  $[A(\vec{x})]$  (Eq.2.11), le système de résolution du coefficient  $\{b(\vec{x})\}$  change et devient :

$$[A(\vec{x})] \{b(\vec{x})\} = \left\{ \{p(\vec{0})\} - \sum_{J \in \Omega^{MLS/MEF}} N_J^e(\vec{x}) \{p(\vec{x}_J - \vec{x})\} \right\} \quad 2.31$$

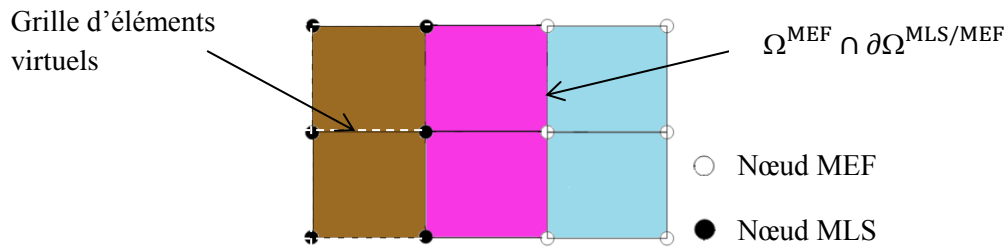
Il est à noter que pour chaque nœud  $\vec{x}_K \in (\Omega^{MEF} \cap \partial\Omega^{MLS/MEF})$ , nous avons :

$$\{p(\vec{0})\} - \underbrace{\sum_{j \in \Omega^{\text{MLS/MEF}}} N_j^e(\vec{x}_K) \{p(\vec{x}_j - \vec{x}_K)\}}_{\{p(\vec{0})\} \text{ par respect de la condition de consistance}} = \{0\} \quad 2.32$$

Par conséquence,  $\phi_I^{\text{MLS}}(\vec{x}_K) = 0$  sur le domaine  $\Omega^{\text{MEF}} \cap \partial\Omega^{\text{MLS/MEF}}$ ,  $\forall M \in \Omega^{\text{MLS}}$  et  $K \in \Omega^{\text{MEF}}$ . Si nous avons souhaité enrichir la zone MEF, l'ordre  $m$  de la consistance de l'interpolation Mixte doit être plus grand que l'ordre d'interpolation  $p$  des éléments finis  $m > p$ . De plus il faut vérifier pour chaque construction de fonction de forme MLS, que le nombre de nœuds MLS doit être suffisant pour que la matrice  $[A(\vec{x})]$  soit inversible. Il est à noter que la construction des fonctions de forme MLS ne minimise plus une erreur par moindres carrés mais vérifie essentiellement la condition de consistance.

### 2.2.2 Etude des fonctions de forme Mixtes

Soit un exemple à 2 dimensions (*Figure 2-12*) conçu selon une réparation (*Figure 2-11*) telle que  $\Omega^{\text{MLS}}$  (domaine orange) et  $\Omega^{\text{MLS/MEF}}$  (domaine rose) sont les deux zones raccordées avec le schéma de couplage précédemment développé. Dans ce qui suit, nous spécifions que les conditions aux limites de Dirichlet sont prises en compte à l'interface  $\Omega^{\text{MEF}} \cap \partial\Omega^{\text{MLS/MEF}}$  et le domaine MEF ne sera donc pas représenté.



*Figure 2-11 : Répartition des domaines MEF, MLS et MLS/MEF*

La distance minimale entre deux nœuds proches MLS est de 1 mm et le rayon du support circulaire de la fonction poids est identique pour tous les nœuds MLS «  $I$  » ( $\forall I \quad r_I = 2.0 \text{ mm}$ ). Nous proposons de tracer l'évolution des fonctions de forme  $N_j^e$  et  $\phi_I^{\text{MLS}}$  dans le cas de la discrétisation d'une plaque carrée sur des lignes de tracé selon  $x$  et  $y$  tels que  $x \in [0 \ 3]$  et  $y \in [3 \ 6]$  (Fig.3). La ligne de tracé «  $a$  » (*Figure 2-12*), montre la génération des fonctions de forme MLS pour  $1.0 \leq y \leq 5.0 \text{ mm}$  ; l'apparition d'une combinaison de fonctions de forme  $N_j^e$  et  $\phi_I^{\text{MLS}}$  au fur et à mesure que l'on s'approche de  $0 \leq y < 1.0 \text{ mm}$  et  $5.0 \leq y < 6.0 \text{ mm}$  ; ainsi que la contribution de tous les nœuds EF et MLS pour un domaine d'influence donné. Les fonctions  $N_j^e$  correspondent aux fonctions de forme d'un élément quadrangle bilinéaire classique. Nous avons rajouté des nœuds au centre de ces éléments quadrangles pour assurer une continuité des fonctions de forme au long d'un tracé, générant ainsi une forme modifiée des fonctions  $N_j^e$  dans la zone de transition (*Figure 2-12*). L'aspect des fonctions de forme MLS dépend de plusieurs paramètres comme l'ordre de consistance de la base polynômiale

$\{p(\vec{x})\}$ , du choix des fonctions poids  $w(\vec{x}_I, \vec{x})$  et dans la manière de positionner les nœuds MLS dans la zone  $\Omega^{MLS}$  (Figure 2-13). Lorsque  $x=6.0$  mm (et  $x=0$  mm par symétrie), les fonctions de forme  $\phi_I^{MLS}$  s'annulent. Cette condition  $\phi_I^{MLS}(6,y)=0$  est vérifiée pour toute consistance égale entre les domaines  $\Omega^{MEF}$  et  $\Omega^{MLS}$ .

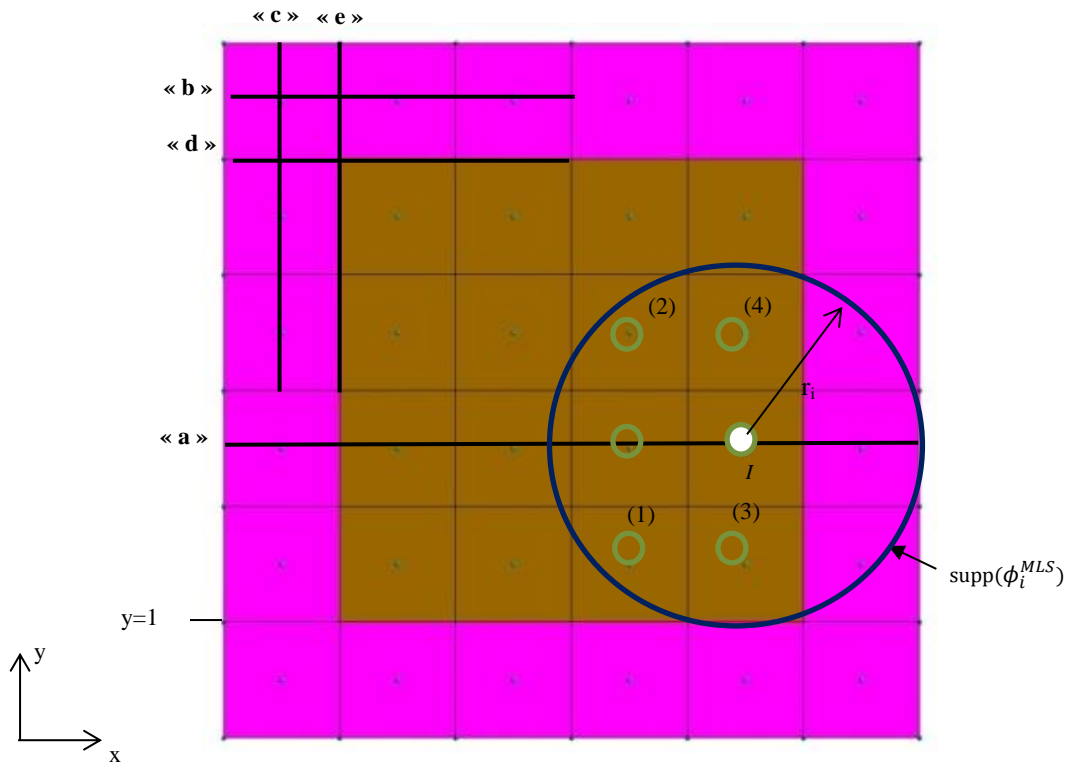


Figure 2-12 : Exemple de couplage en 2D, ligne de traçage des fonctions de forme pour un domaine d'influence  $r_i=2.0$  mm

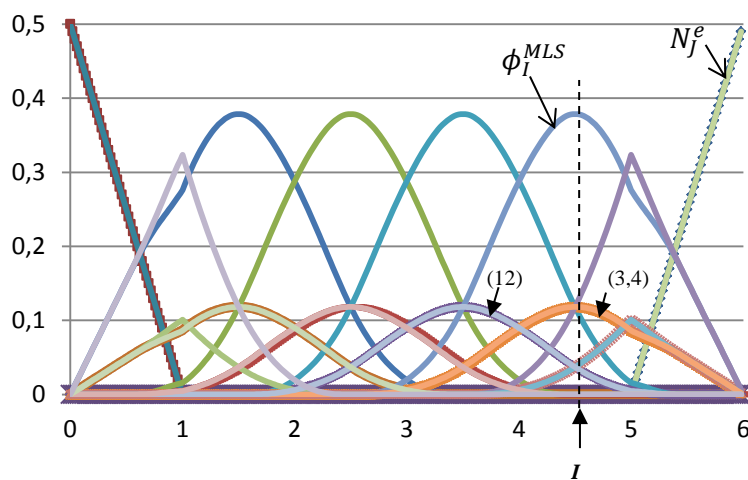


Figure 2-13 : Traçage des fonctions de forme pour un rayon d'influence  $r_i=2.0$  mm, sur la ligne « a »  $y=2.5$  mm selon  $x$

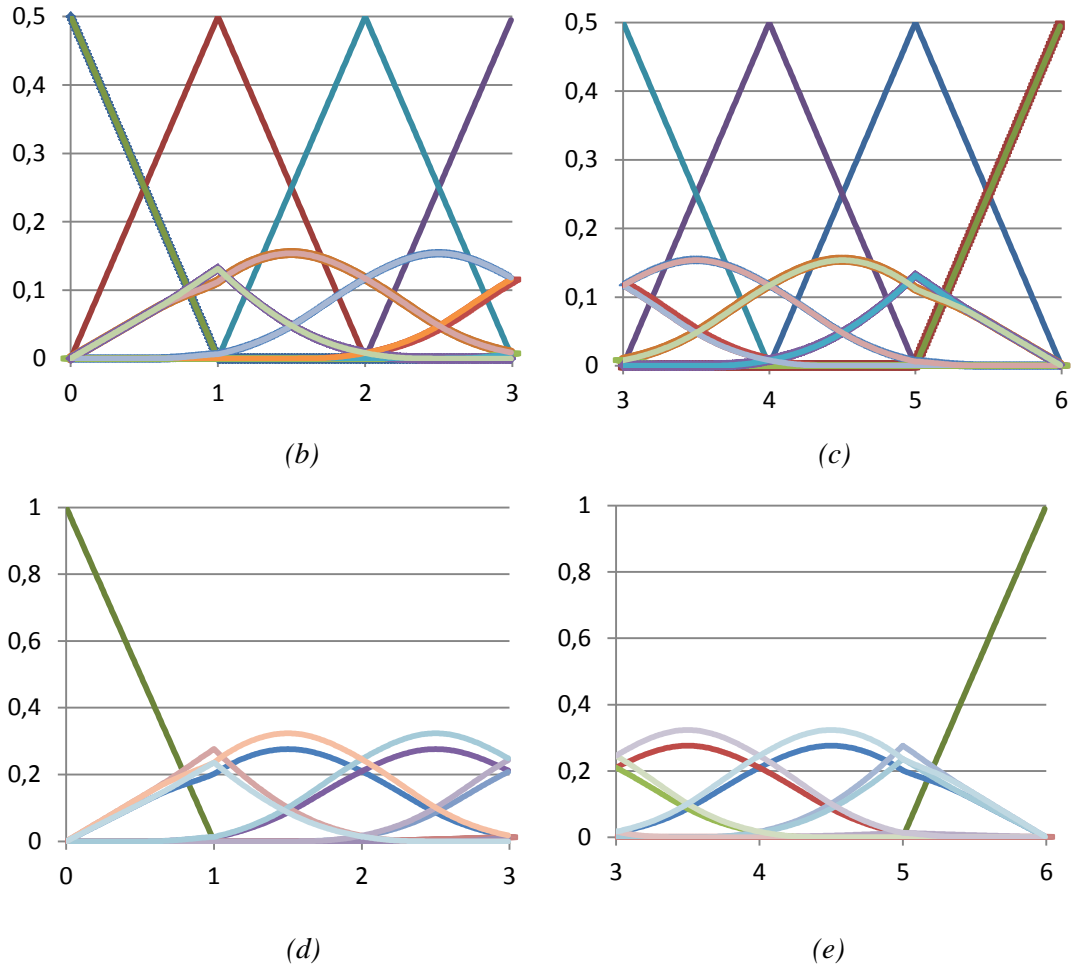


Figure 2-14: Traçage des fonctions de forme en 2D sur la ligne : (b) pour  $y=5.5\text{mm}$  et la coordonnée  $x$  en abscisse (c)  $x=0.5\text{mm}$  et la coordonnée  $y$  en abscisse (d) pour  $y=5\text{mm}$  et la coordonnée  $x$  en abscisse (e) pour  $x=1\text{mm}$  et la coordonnée  $y$  en abscisse

Les lignes de tracé de « b »  $y=5,5\text{mm}$  selon  $x \in [0 \ 3]$  (Figure 2-14.b) et « c »  $x = 0.5 \text{ mm}$  selon  $y \in [3 \ 6]$  (Figure 2-14.c) représentent les fonctions de forme sur la zone de transition  $\Omega^{MLS/MEF}$ . Le tracé « d », qui figure sur la limite de la zone  $\Omega^{MLS/MEF}$  et  $\Omega^{MLS}$  ( $y = 5.0 \text{ mm}$ ) symbolise la disparition des fonctions de forme  $N_j^e$  (Figure 2-14.d) ; et ceci au fur et à mesure que l'on s'éloigne du tracé « b » vers la zone MLS. Il est à noter que les fonctions de forme MLS  $\phi_i^{MLS}$  peuvent prendre des valeurs négatives. Elles sont par ailleurs nulles en dehors de leur support.

### 2.3 INTÉGRATION NUMÉRIQUE

Depuis l'introduction des méthodes Meshless, l'intégration numérique reste un sérieux verrou. Le schéma d'intégration de Gauss-Legendre est performant pour intégrer des fonctions polynômiales;



comme les fonctions de forme MEF. De plus, dans ce cas de figure, les éléments de frontière sont des domaines locaux appropriés pour l'intégration numérique. En revanche, pour la méthode Element Free Galerkin (EFG) par exemple, un patch test utilisant un ensemble limité de points d'intégration ne s'avère pas satisfaisant, à cause du caractère non polynomial des fonctions de forme. La recherche sur ces aspects a été faite par exemple pour la méthode EFG par Dolbow et Belytschko (1999). En effet, pour corriger ces problèmes d'intégration numérique pour les méthodes Meshless, plusieurs solutions ont été proposées dans la littérature. Nous avons étudié différentes méthodes d'intégration numérique : la méthode d'intégration numérique Gauss Legendre selon sa version « classique » et contrainte [Breitkopf et al. (2004)] et l'intégration nodale stabilisée par l'association d'un gradient régularisé (pour plus de détails voir Chen et al. (2000)).

### 2.3.1 Intégration numérique de Gauss-Legendre

L'intégration numérique de Gauss-Legendre est communément utilisée pour la méthode Meshless Galerkin. En fait, bien que la méthode Meshless ne nécessite pas de maillage, une grille de cellules d'intégration est nécessaire pour décomposer en sous domaines d'intégration. Pour la méthode des éléments finis, l'intégration de Gauss Legendre est utilisée pour chaque élément, et le support de la fonction de forme correspond à la cellule d'intégration même. Pour la méthode MLS, les cellules d'intégration sont usuellement construites indépendamment du support de la fonction de forme.

#### 2.3.1.1 Intégration de Gauss-Legendre sur un support classique

En fait, la méthode Meshless utilise, dans cette section, une grille de cellule afin d'intégrer la formulation faible de Galerkin. Ainsi nous considérons la décomposition d'un domaine  $\Omega$  divisé en sous-domaines d'intégration  $\Omega_I$  ( $I=1,2,\dots,E$ ) pour l'intégration globale sur le domaine  $\Omega$  en utilisant l'intégration numérique de Gauss-Legendre. L'évaluation de l'intégrale sur ce domaine dépend de la façon avec laquelle le domaine d'influence de chaque nœud est défini.

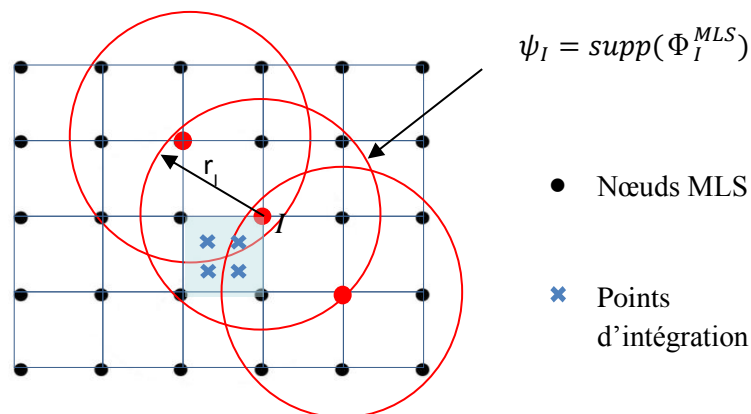


Figure 2-15: Cellules d'intégration utilisant la stratégie  $r_{min}$  en norme  $L^2$

Chaque point de Gauss d'une cellule élémentaire peut être influencé par un groupe de nœuds MLS différent (Figure 2-7). Par conséquent, un support rectangulaire est plus avantageux lorsqu'un arrangement régulier des nœuds est choisi pour la discrétisation. Par conséquent, nous avons développé un support d'intégration rectangulaire par niveau d'influence.

### 2.3.1.2 Intégration de Gauss-Legendre sur un support particulier

Dans un premier temps, nous avons cherché un support des fonctions de poids compatibles avec les cellules d'intégration. Nous utilisons pour cela des supports polygonaux présentés en Figure 2-6.c. Cette solution est intéressante si les cellules d'intégration ne suivent pas la déformation de la matière.

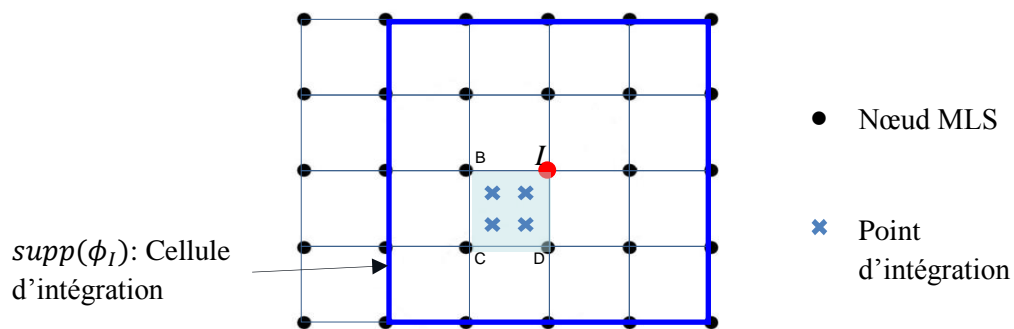


Figure 2-16: Cellule d'intégration de Gauss utilisant un support  $C^1$  à deux dimensions

Cette configuration permet de régler les problèmes d'intégration rencontrés; cela reste moins vrai pour les problèmes de déformation d'éléments considérés comme sous-cellules d'intégration élémentaires.

### 2.3.2 Intégration contrainte

Le caractère non polynomial des fonctions de forme ne permet pas une intégration exacte de la forme intégrale faible du problème. Pour obtenir une solution exacte d'un problème de second ordre lorsque la solution est linéaire, il est déjà impératif de parvenir à intégrer les fonctions de forme rationnelles, mais aussi de procéder à l'intégration discrète de la forme faible de Galerkin par vérification du théorème de Green-Riemann, à savoir,

$$\int_{\Omega_I} \vec{\nabla} \phi_I^{MLS}(\vec{x}) d\Omega = \int_{\Gamma_I} \phi_I^{MLS}(\vec{x}) \vec{n} d\Gamma \quad 2.33$$

$\Gamma_I$  est la frontière de la cellule d'intégration  $\Omega_I$ , pour le champ linéaire  $\vec{u}(M) = u_x \vec{x} + u_y \vec{y}$  (pour plus de détails, voir Breitkopf et al. 2004). Cette condition impose l'intégration contrainte suivante:

$$\sum_{k=1}^{NPG} \vec{\nabla} \phi_I^{MLS}(\vec{x}_g) \omega_g = \vec{0} \text{ si } \psi_I \subset \Omega_I \quad 2.34$$

avec  $\vec{x}_g$  les coordonnées spatiales des point d'intégration,  $\omega_g$  leurs poids correspondants,  $\phi_I^{MLS}(\vec{x}_g)$  la fonction de forme du nœud « I » évaluée aux points d'intégration et  $NPG$  le nombre de points de Gauss. Dans le cas le plus général, nous devons vérifier pour chaque cellule d'intégration :

$$\sum_{k=1}^{NPG} \omega_g \vec{\nabla} \phi_I^{MLS}(\vec{x}_g) = \int_{\Gamma_I} \phi_I^{MLS}(\vec{x}) \vec{n} d\Gamma \quad 2.35$$

Où les nouveaux poids  $\omega_g$  sont à déterminer. L'intégration du terme de droite peut s'effectuer par une intégration de Simpson à 3 points. Nous construisons ainsi le système suivant,

$$[D]\{\omega\} = \langle d \rangle |_{\vec{x}_g} \quad 2.36$$

Nous pouvons obtenir les poids d'intégration à la partie gauche de l'équation 2.33, en résolvant le système 2.36. Cette approche assure la consistance du schéma d'intégration, néanmoins, la matrice  $[D]$  dépend du nombre de nœuds connectés et le système 2.36 peut être mal conditionné. Par conséquent, nous complétons le système global par extension avec un système de monômes, à savoir,

$$\sum_{k=1}^{NPG} \omega_g \{p(\vec{x}_g)\} = \int_{\Omega_I} \{p(\vec{x})\} dx dy \quad 2.37$$

Le système 2.37 peut alors s'écrire sous la forme matricielle,

$$[G]\{\omega\} = \langle g \rangle \quad 2.38$$

L'intégration de la base polynômiale  $\{p(\vec{x})\}$  est assez simple à calculer par des formules analytiques ; ce qui génère le vecteur  $\langle g \rangle$ . Selon les travaux de Breitkopf et al. (2004), les fonctions poids du système 2.38 est calculé d'une manière précise en minimisant  $\|[G].\{\omega\} - \langle g \rangle\|^2$  en tout en considérant le système contraint 2.36. Le calcul est d'autant plus précis que l'on conditionne l'ordre des matrices et en choisissant un ordre d'intégration approprié. L'implémentation de cette méthode n'a pas été poussée loin ; ainsi la mise en œuvre a été limitée pour exploiter une approche d'intégration nodale à gradient régularisé

### 2.3.3 Intégration nodale à gradient régularisé

Certaines difficultés sont rencontrées, lors de l'intégration de Gauss utilisée pour la méthode Element Free Galerkin, pour l'intégration de la forme faible. En effet, l'intégration précise des

fonctions de forme MLS, représente la plus grande difficulté dans l'intégration numérique du problème.

Une alternative élégante proposée par différents auteurs [Belytschko et al. (1994), Nagashima (1999), Chen et al. (2001), Cueto et al. (2003)] pour remplacer la méthode d'intégration numérique de Gauss-Legendre est l'intégration nodale car elle permet d'une certaine mesure de conserver la propriété d'indépendance à la notion d'éléments. Cette méthode d'intégration nodale utilise uniquement les nœuds MLS comme points d'intégration mais ce schéma d'intégration est souvent instable car le gradient des fonctions de forme  $\phi_I^{MLS}(\vec{x})$  s'annule au nœud  $\vec{x}_I$ . Chen et al. (2001) proposent d'utiliser une technique de lissage des déformations comme technique de stabilisation de la méthode d'intégration nodale appelée Stabilization Conforming Nodal Integration (SCNI).

Uniquement à l'intérieur du domaine  $\Omega^{MLS}$  sont générés des cellules de Voronoï. Chaque cellule de Voronoï définit alors un domaine d'intégration nodale  $\Omega_I$  de frontière  $\Gamma_I$  associés au nœud MLS « I » de coordonnée  $\vec{x}_I$  (Figure 2-17). Les cellules de Voronoï en 2D sont générées à partir d'un algorithme proposé par Fortune (1987) qui a été intégré dans notre logiciel de calcul.

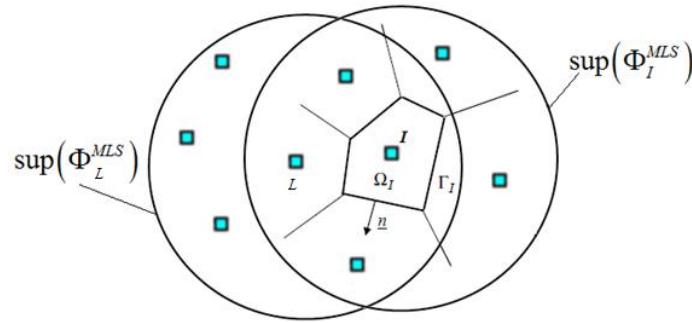


Figure 2-17: Construction des cellules de Voronoï sur  $\Omega^{MLS}$  et Relation entre  $supp(\phi_I)$  et le domaine  $\Omega_I$

La technique de lissage des déformations proposée par Chen et al. (2001) consiste à utiliser un gradient régularisé pour la détermination des composantes du tenseur des déformations à chaque nœud MLS,

$$\tilde{\varepsilon}_{kl}^h(\vec{x}_I) = \frac{1}{2A_I} \int_{\Omega_I} \left( \frac{\partial u_k^h}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^h}{\partial x_k} \right) d\Omega = \frac{1}{2A_I} \int_{\Gamma_I} (u_k^h n_l + u_l^h n_k) d\Gamma \quad 2.39$$

Avec  $A_I = \int_{\Omega_I} d\Omega$  aire du domaine  $\Omega_I$  et  $\Gamma_I$  le contour du domaine du nœud « I ». Dans le cas d'une configuration 2D, nous considérons l'équation 2.40 tels que  $\{\tilde{\varepsilon}^h(\vec{x}_I)\}^T = \langle \tilde{\varepsilon}_{11}^h \quad \tilde{\varepsilon}_{22}^h \quad 2\tilde{\varepsilon}_{12}^h \rangle$ ,  $\langle \hat{u}_I \rangle = \langle \hat{u}_{1L} \quad \hat{u}_{2L} \rangle$ ,  $G_I$  représente le groupe de nœuds « L » tel que  $\vec{x}_I \in supp(\Phi_L^{MLS})$  (Figure 2-17). En introduisant la fonction de forme à la formule précédente, nous obtenons :

$$\{\tilde{\varepsilon}^h(\vec{x}_I)\} = \sum_{L \in G_I} [\tilde{B}_L(\vec{x}_I)] \{\hat{u}_L\} \quad 2.40$$

Tels que :

$$[\tilde{B}_L(\vec{x}_I)] = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{L1}(\vec{x}_I) & 0 \\ 0 & \tilde{b}_{L2}(\vec{x}_I) \\ \tilde{b}_{L2}(\vec{x}_I) & \tilde{b}_{L1}(\vec{x}_I) \end{bmatrix} \quad 2.41$$

$$\tilde{b}_{Lk}(\vec{x}_I) = \frac{1}{A_I} \int_{\Gamma_I} \phi_L^{MLS}(\vec{x}) n_k(\vec{x}) d\Gamma \quad 2.42$$

Pour assurer la précision et la convergence en employant l'intégration nodale SCNI dans la discrétisation de Galerkin, la condition 2.34 a besoin d'être satisfaite. En effet, pour répondre à cette condition en utilisant la SCNI, la matrice de gradient régularisé est sous la forme:

$$\sum_I [\tilde{B}_I(\vec{x})] A_I = [0] \quad 2.43$$

Ces équations sont valables pour tout point intérieur du domaine tel que  $\{I: \text{supp}(\phi_I) \cap \Gamma = \emptyset\}$ . Et par conséquent, chaque composant de la matrice est nulle quand :

$$\sum_I \tilde{b}_{Li}(\vec{x}_I) A_I = \sum_I \int_{\Gamma_I} \phi_L^{MLS}(\vec{x}) n_i(\vec{x}) d\Gamma \quad 2.44$$

En fait, le contour  $\Gamma_L$  peut être complètement ou partiellement à l'intérieur du support de la fonction de forme au nœud « I » :  $\text{supp}(\phi_I)$  (Figure 2-17). La condition  $n^+(x) = -n^-(x)$  pour  $x \in \Gamma_L$ ,  $x \in \text{supp}(\phi_I^{MLS})$  conduit au fait que la somme  $\sum_L \int_{\Gamma_L} \phi_I^{MLS}(\vec{x}) n_i(\vec{x}) d\Gamma = 0$ . Aussi pour  $\Gamma_L$  complètement ou partiellement à l'extérieur du  $\text{supp}(\phi_I)$ ,  $\phi_I^{MLS}(\vec{x}) = 0$  pour  $x \in \Gamma_L$ ,  $x \notin \text{supp}(\phi_I^{MLS})$ , la condition nulle se maintient. Par conséquent, pour les nœuds intérieurs,  $[\tilde{B}_I]$  satisfait exactement l'intégration contrainte de l'équation (Eq.2.34), tel que la condition 2.43 est vérifiée. Dans ces mêmes conditions, nous pouvons ainsi considérer:

$$\sum_L \int_{\Gamma_L \setminus \Gamma^u} \phi_I^{MLS}(\vec{x}) n_i(\vec{x}) d\Gamma = 0 \quad 2.45$$

tel que  $\Gamma^u$  la frontière de Dirichlet. Par conséquent, comme stipulé précédemment, pour une fonction de forme couvrant une partie de la frontière de Dirichlet  $\Gamma^u$  du domaine ( $\phi_I^{MLS}(\vec{x}) = 0$  pour  $x \in \Gamma^u$ ,  $x \notin \text{supp}(\phi_I^{MLS})$ ), dans le cas d'une intégration nodale, l'intégration numérique de la formule requise pour satisfaire l'équilibre d'un problème statique en élasticité linéaire prend la forme suivante:

$$\sum_L \tilde{b}_{li}(\vec{x}_L) A_L = \int_{\Gamma^u} \phi_i^{MLS}(\vec{x}) n_i(\vec{x}) d\Gamma \quad 2.46$$

Cette expression est valable pour tout nœud qui figure dans les limites du domaine. L'intégration numérique aux bords conduit au respect de l'intégration contrainte à travers l'équation de Green-Riemann (Eq.2.33). Pour calculer une évaluation nodale des composants  $\tilde{b}_{Ik}(\vec{x}_I)$  dans  $[\tilde{B}_I(\vec{x}_I)]$ , en utilisant l'expression ci-dessus, une intégration des bords du domaine  $\Gamma_I$  du nœud « I » est requise  $\Gamma_I = \cup_{M=1}^{N_s} \Gamma_I^M$  ; avec  $\Gamma_I^M$  est la décomposition en segments du domaine  $\Gamma_I$ ,  $N_s$  le nombre total des segments du domaine,  $M$  le nombre des points du domaine,  $l_M = \int_{\Gamma_I^M} d\Gamma$  et  $n_I^M$  est la normale extérieure au contour  $\Gamma_I^M$ . Une intégration de Simpson 1/3 à 5 nœuds ( $n=4$ ) est utilisée pour chaque segment représenté par le bord  $\Gamma_I^M$  de chaque nœud représentatif « I » (Figure 2-18).

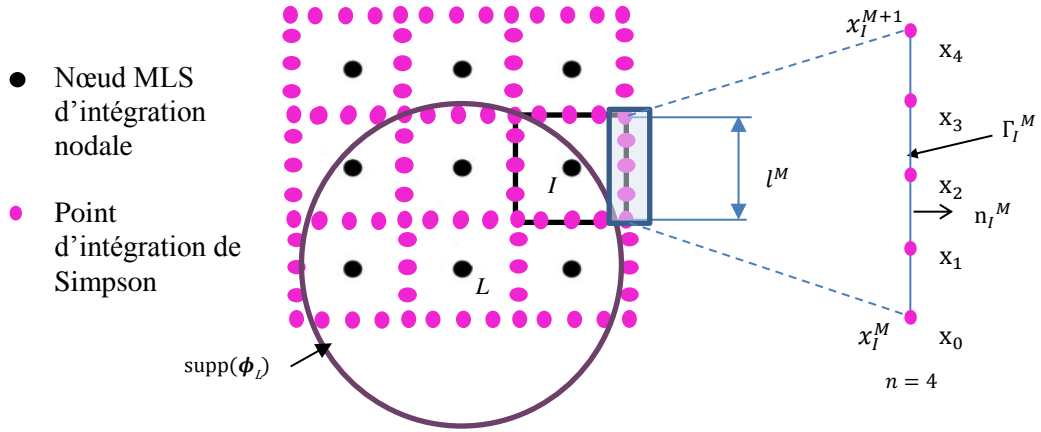


Figure 2-18: L'intégration de Simpson 1/3 à 5 nœuds

L'intégration de Simpson 1/3 à cinq nœuds sur un segment  $\Gamma_I^M$  se présente ainsi sous la forme suivante,

$$I_S^M = \frac{h}{3} (\phi_I^{MLS}(\vec{x}_0^M) + 4 * \phi_I^{MLS}(\vec{x}_1^M) + 2 * \phi_I^{MLS}(\vec{x}_2^M) + 4 * \phi_I^{MLS}(\vec{x}_3^M) + \phi_I^{MLS}(\vec{x}_4^M)) \quad 2.47$$

où  $h = \frac{l^M}{n}$  est l'espace entre deux points d'intégration ( $n=4$ ),  $\phi_L(\vec{x}_i^M)$  sont les fonctions de forme du nœud « L » aux cinq points de Simpson ( $i=0,1,2,3,4$ ) sur un segment  $[x_I^M, x_I^{M+1}]$  de la cellule du nœud « I ». Ainsi, en se basant sur la formulation 2.43, la somme des intégrations sur un groupe de nœuds « I » figurant dans le domaine d'influence du nœud « L » se présente, selon x et y, sous la matrice gradient régularisée pour un nœud MLS « L », à savoir,

$$[\tilde{B}_L(\vec{x}_I)] = \begin{bmatrix} \sum_{M=1}^{N_s} \frac{I_S^M}{A_I} * n_{Ix}^M & 0 \\ 0 & \sum_{M=1}^{N_s} \frac{I_S^M}{A_I} * n_{Iy}^M \\ \sum_{M=1}^{N_s} \frac{I_S^M}{A_I} * n_{Iy}^M & \sum_{M=1}^{N_s} \frac{I_S^M}{A_I} * n_{Ix}^M \end{bmatrix} \quad 2.48$$

## 2.4 IMPLÉMENTATION NUMÉRIQUE

Nous traitons dans cette section la méthode de résolution d'un problème en élasticité linéaire en se basant sur l'intégration spatiale de quadrature de Gauss-Legendre. Nous nous basons sur une discrétisation spatiale sous forme de grille et nous utilisons une formulation de type Galerkin et une intégration nodale à gradient régularisé de la formulation variationnelle faible du problème linéaire proposé. Ensuite, nous traiterons les problèmes reliés aux conditions aux limites de Dirichlet ; et finissons par présenter quelques exemples numériques pour valider l'approximation diffuse d'une part et les intégrations numériques adoptées d'autre part.

### 2.4.1 Formulation générale d'un problème en élasticité linéaire

Pour un problème bidimensionnel en élasticité linéaire en quasi-statique selon un domaine  $\Omega$ , l'équation d'équilibre se présente comme suit :

$$\overline{\text{div}}(\underline{\sigma}) + \vec{f} = \vec{0} \text{ dans } \Omega \quad 2.49$$

Avec les conditions aux limites de Dirichlet et Neumann, respectivement:

$$\vec{u} = \vec{\bar{u}} \text{ sur } \Gamma_u \quad 2.50$$

$$\underline{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{\bar{t}} \text{ sur } \Gamma_t \quad 2.51$$

Avec  $\vec{f}$  est la force volumique,  $\vec{\bar{u}}$  est le vecteur déplacement imposé suivant la frontière  $\Gamma_u$  et  $\vec{\bar{t}}$  est la densité surfacique d'effort imposée sur la frontière  $\Gamma_t$ , selon la normale  $\vec{n}$ .

Pour obtenir la forme faible d'un problème en élasticité, considérons une fonction de déplacement test  $\delta\vec{u}$  continument différentiable sur le domaine  $\Omega$  et nulle sur  $\Gamma_u$ . En multipliant l'expression d'équilibre volumique (Eq.2.49) par  $\delta\vec{u}$ , nous introduisons le principe variationnel exprimé par,

$$\int_{\Omega} \underline{\nabla}^T \delta\vec{u} \cdot \underline{\sigma} d\Omega = \int_{\Gamma_t} \delta\vec{u}^T \cdot \vec{\bar{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta\vec{u}^T \cdot \vec{f} d\Omega \quad 2.52$$

Et en tenant compte de la relation de comportement élastique, nous procédons dans la section d'intégration numérique à la détermination des matrices de rigidité et des forces internes selon la nature de l'intégration générée.

La discrétisation du principe variationnel en déplacement à partir d'un nuage de nœuds  $I$  et selon un ensemble de cellule d'intégration  $\Omega_I$  s'écrit sous la forme matricielle :

$$[K]\{U\} = \{F^{ext}\} \quad 2.53$$

Tel que  $[U]$  représente le vecteur des inconnues nodales en déplacement,  $[K]$  et  $\{F^{ext}\}$  sont respectivement la matrice de rigidité globale et le vecteur force extérieure nodale obtenus par assemblage des matrices de rigidité et vecteurs forces extérieurs construits sur chaque cellule d'intégration  $\Omega_I$ ,

$$[K] = \cup_I \int_{\Omega_I} [B_I]^T [C^e] [B_I] d\Omega \quad \text{et} \quad \{F^{ext}\} = \cup_I \int_{\Omega_I} [\Phi]^T \{f\} d\Omega + \int_{\Gamma_{tl}} [\Phi]^T \{t\} d\Gamma \quad 2.54$$

Tel que  $[\Phi] = \begin{bmatrix} \phi_1^{MLS} & 0 & \dots & \phi_N^{MLS} & 0 \\ 0 & \phi_1^{MLS} & \dots & 0 & \phi_N^{MLS} \end{bmatrix}$  est une matrice contenant l'ensemble des fonctions de forme  $\phi_I^{MLS}$  et  $[C^e]$  est la matrice d'élasticité dans le cas d'une configuration en 2D déformation

plane tel que le vecteur des déformations se présente sous la forme  $\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$  :

$$[C^e] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad 2.55$$

Où  $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  et  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$  sont les coefficients de Lamé.

## 2.4.2 Intégration numérique

Nous avons précédemment présenté un développement théorique des méthodes d'intégration numérique. On propose dans ce qui suit l'étude des schémas d'intégration proposés précédemment. Concernant l'évaluation de la forme variationnelle faible du problème posé précédemment. Nous avons testé les deux schémas d'intégration illustrés ci-dessous : le schéma d'intégration nodale à gradient stabilisé basé sur des cellules de Voronoï (*section 2.3.3*) et le schéma d'intégration de Gauss-Legendre basé sur une triangulation de Delaunay (*section 2.3.1.2*).

### 2.4.2.1 Intégration de Gauss-Legendre

Dans le cas où la cellule d'intégration à la forme d'un quadrangle, nous pouvons directement intégrer dans l'espace de référence :



$$[K] = \bigcup_I \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_I]^T [C^e] [B_I] \det(J) d\xi d\eta = \bigcup_I \sum_{k=1}^{NPG} [B_I(\vec{x}_k)]^T [C^e] [B_I(\vec{x}_k)] \omega_k \det(J) \quad 2.56$$

$$\begin{aligned} [F^{ext}] &= \bigcup_I \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\Phi]^T \{f\} \det(J) d\xi d\eta + \int_{-1}^1 [\Phi]^T \{t\} ds \\ &= \bigcup_I \sum_{k=1}^{NPG} [\Phi(\vec{x}_k)]^T \{f\} \omega_k \det(J) + \bigcup_I \sum_{k=1}^{NPG} [\Phi(\vec{x}_k^{1D})]^T \{t\} \omega_k^{1D} \det(J) \end{aligned}$$

Tels que  $\xi$  et  $\eta$  sont les coordonnées dans l'espace de référence de la cellule d'intégration  $\Omega_I$ ,  $\omega_k$  et  $\vec{x}_k$  sont respectivement les poids et les coordonnées des points de quadrature de Gauss en 2D et  $\det(J)$  est le déterminant de la matrice jacobienne qui définit le passage entre espace réel et espace de référence de la cellule d'intégration de forme quadrangle,  $NPG$  est le nombre total des points d'intégration,  $\omega_k^{1D}$  et  $\vec{x}_k^{1D}$  sont respectivement les poids et les coordonnées des points de quadrature en 1D et . La matrice d'interpolation des déformations et  $\omega_k$  sont les poids de Legendre. La matrice d'interpolations des déformations  $[B_I]$  tel que  $\{\varepsilon\}_I = [B_I]\{U\}$  est la matrice gradient considérée dans l'hypothèse des petites perturbations. La dérivée complète des fonctions de forme MLS est alors choisie pour construire cet opérateur matriciel.

L'erreur d'un tel schéma d'intégration de fonction polynômiale est dépendante du nombre de point d'intégration dans une cellule ou tout simplement de l'utilisation de taille de cellule suffisamment petite et nombreuse. Une intégration nodale est exploitée pour dépasser les limites de l'intégration de Gauss-Legendre. Nous avons effectué une étude d'erreur sur l'intégration numérique (*section 2.5.1.3*) avant de valider le modèle retenu.

#### 2.4.2.2 Intégration nodale à gradient régularisé

L'essence de la méthode d'intégration nodale régularisée est qu'un gradient de déplacement pris en charge à un nœud soit constitué par la moyenne du gradient de déplacement sur une cellule accompagnement un nœud «  $I$  ». Pour définir les cellules nous avons choisi de générer des cellules de Voronoï pour une distribution de nœud MLS donnée. Nous utilisons l'expression de stabilisation de l'intégration nodale par gradient régularisé (*section 2.3.3*), tel que le tenseur de déformation stabilisé est sous la forme suivante,

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{u}) = \frac{1}{A_I} \int_{\Gamma_I} \frac{1}{2} (\vec{u}(\vec{x}) \otimes \vec{n}(\vec{x}) + \vec{n}(\vec{x}) \otimes \vec{u}(\vec{x})) d\Gamma \quad 2.57$$

En se basant sur cette expression, l'évaluation de la formulation variationnelle faible discrète, conduit respectivement, à la matrice de raideur et au vecteur des forces internes exprimés ci-dessous, ,

$$[K] = \bigcup_I [B_I(\vec{x}_I)]^T [C^e] [B_I(\vec{x}_I)] A_I$$

où  $A_I$  est l'aire de la cellule de Voronoï  $\Omega_I$ . La procédure d'intégration nodale considère que le point matériel est à l'emplacement du nœud physique MLS.

Néanmoins, l'intégration nodale basée sur l'expression 2.57, produit des modes parasites similaires aux modes à énergies nulles en éléments finis, rendant l'intégration nodale instable. Pour se faire, certains groupes de recherche, comme Puso et al. (2008), ont travaillé sur la correction de la méthode SCNI. En effet, nous introduisons une nouvelle expression du tenseur de déformation, noté  $\hat{\underline{\epsilon}}_c$ , calculé sur des sous-cellules d'intégration de volume  $\Omega_{I,c}$  (Figure 2-19). Ces déformations sont calculées sur les sous-cellules d'aire  $A_{I,c} = \int_{\Omega_{I,c}} d\Omega$ , de la cellule de Voronoï d'un nœud «  $I$  », en reprenant l'expression 2.57, à savoir,

$$\hat{\underline{\epsilon}}_c(\vec{u}) = \frac{1}{A_{I,c}} \int_{\Gamma_{I,c}} \frac{1}{2} (\vec{u}(\vec{x}) \otimes \vec{n}(\vec{x}) + \vec{n}(\vec{x}) \otimes \vec{u}(\vec{x})) d\Gamma \quad 2.58$$

Avec  $\Gamma_{I,c} = \bigcup_{M=1}^{N_s} \Gamma_{I,c}^M$  les frontières de chaque sous-cellule d'intégration. Par conséquent, la déformation corrigée est sous la forme,

$$\underline{\bar{\epsilon}}(\vec{u}) = \frac{1}{A_I} \sum_c A_{I,c} \hat{\underline{\epsilon}}_c(\vec{u}) \quad 2.59$$

Pour éviter les modes parasites de l'intégration nodale, nous avons utilisé des nœuds barycentres de ces sous-cellules, et en tant que tel calculer l'énergie de déformation de l'ensemble des sous-domaines, à savoir,

$$a(\vec{v}^h, \vec{u}^h) = \sum_{J=1}^{N_c} \hat{\underline{\epsilon}}_c(\vec{v}) \cdot \underline{\underline{C}}^e \cdot \hat{\underline{\epsilon}}_c(\vec{v}) A_{I,c} \quad 2.60$$

Tel que  $N_c$  est le nombre total des sous-cellules dans la discrétisation. L'énergie de déformation est ainsi plus stable.

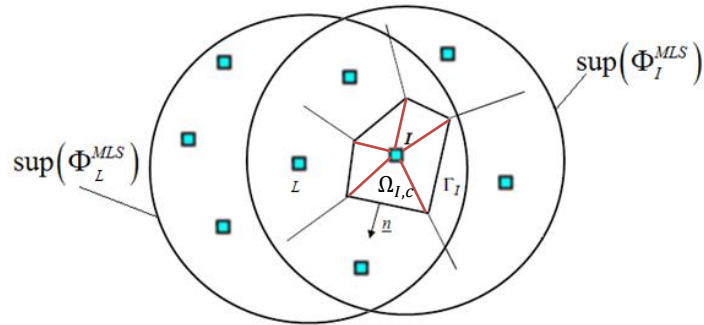


Figure 2-19: Construction des sous-cellules  $\Omega_{I,c}$  sur chaque cellule de Voronoï sur  $\Omega_I$

### 2.4.3 Conditions aux limites de Dirichlet

Mise à part la difficulté à exécuter l'intégration numérique, une des difficultés techniques dans les méthodes Meshless est d'imposer les conditions aux limites de Dirichlet malgré les fonctions de forme MLS non-interpolantes. En effet, l'application des conditions aux limites pour la plupart des méthodes Meshless, ici l'approximation MLS, nécessite une approche différente de celle habituellement utilisée pour la méthode des éléments finis. Pour cette dernière, la propriété de Kröneckner est validée, ce qui implique l'égalité entre le déplacement du champ à la position du nœud et le déplacement nodal. En revanche, certaines méthodes Meshless basées sur l'approximation MLS, ne satisfont pas cette propriété, ainsi l'imposition des conditions aux limites de Dirichlet sur des variables dépendantes, peut ne pas conduire à des résultats précis. Nous avons eu recours à certaines approches, parmi d'autres, pour répondre à ce problème. Belytschko et al. (1994) utilisent la méthode des multiplicateurs de Lagrange et modifient la formulation variationnelle pour imposer ces conditions aux limites sur le domaine en se basant sur une expression constituée de l'énergie potentielle et un terme de multiplicateur de Lagrange pour faire respecter les conditions de Dirichlet. Cette méthode est prise en main par Huerta et al. (2004), qui mettent aussi au point une autre formule mathématique impliquant la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Belytschko et al. (1995) proposent une alternative de couplage de la méthode EFG avec les éléments finis qui ont recours à des fonctions de pondération entre les deux domaines. Au même temps, Chu et Moran (1995) développent le Lagrangien perturbé en combinaison entre la méthode de Lagrange et la méthode de pénalisation classique. La méthode de pénalisation est appliquée plus tard aux méthodes Meshless par Zhu et Atluri (1998). Nous trouvons aussi dans la littérature la méthode de collocation directe développée par Liu (2002). Dans ce qui suit, nous traitons l'approche de Belytschko et al. (1994), ainsi qu'une stratégie proposée par Chen et al. (2000). Pour la première méthode, l'ensemble des degrés de liberté nodaux est élargi par un ensemble de multiplicateurs de Lagrange. Pour la seconde, les déplacements nodaux seront calés sur les champs de déplacement selon une approche de transformation pour une imposition directe des déplacements aux limites.

#### 2.4.3.1 Multiplicateurs de Lagrange

Pour cette méthode, le problème mécanique linéaire en *section 2.4.1*, nous conduit à la formulation faible généralisée des équations aux dérivées partielles et des conditions aux limites sur le domaine [Belytschko et al. (1994), Lu et al. (1996)]. Elle peut être décrite comme une expression constituée de l'énergie potentielle et un terme contenant les multiplicateurs de Lagrange, afin de respecter les conditions aux limites de Dirichlet,

$$\pi(\vec{u}^h, \vec{\lambda}) = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{u}) \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\vec{u}^h) - \vec{u} \cdot \vec{f} \right] d\Omega - \int_{\Gamma_t} \vec{u} \cdot \vec{t} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \vec{\lambda} \cdot (\vec{u} - \vec{u}) \, d\Gamma \quad 2.61$$

Afin d'obtenir l'équation discrète de la forme variationnelle faible, la solution approximative  $\vec{u}$  et le tenseur des multiplicateurs de Lagrange  $\vec{\lambda}$  sont considérés, tels que  $\vec{u}(\vec{x}) = \sum_{I=1}^N \phi_I^{MLS}(\vec{x}) \vec{u}_I$  et  $\vec{\lambda}(\vec{x}) = \sum_{I=1}^N \phi_I^{MLS}(\vec{x}) \vec{\lambda}_I$ . Avec  $\vec{u}_I = [u_{1x}, u_{1y}, u_{2x}, u_{2y}, \dots, u_{nx}, u_{ny}]$  et  $\vec{\lambda}_I = [\lambda_{1x}, \lambda_{1y}, \lambda_{2x}, \lambda_{2y}, \dots, \lambda_{qx}, \lambda_{qy}]$

Tels que  $N$  le nombre total de nœuds et  $q$  le nombre de nœuds dont la fonction poids est non nulle aux conditions aux limites de Dirichlet. Et le système discret final peut être obtenu par la substitution des expressions de  $\vec{u}$  et  $\vec{\lambda}$  dans la forme globale faible (Eq.2.61) qui mène au système suivant:

$$\begin{bmatrix} [K] & [G] \\ [G]^T & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\{\hat{u}_I\}\} \\ \{\{\hat{\lambda}_I\}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f\} \\ \{g\} \end{Bmatrix} \quad 2.62$$

$$G_{lm} = \int_{\Gamma_u} \Phi_{kl} \Phi_{lm} \, dr \quad 2.63$$

$$f_l = \int_{\Gamma_t} \Phi_{kl} t_k \, dr + \int_{\Omega} \Phi_{kl} f_k \, d\Omega \quad \text{et} \quad g_l = \int_{\Gamma_u} \Phi_{kl} \bar{u}_k \, dr \quad 2.64$$

### 2.4.3.2 Imposition directe du déplacement

Nous pouvons, dans ce qui suit, imposer directement les déplacements aux frontières d'un domaine donné, par une méthode de régularisation, élimination ou encore une méthode de transformation. En effet, Gosz et Liu (1996) et Chen et Wang (2000) montrent que pour vérifier la consistance aux frontières de Dirichlet, il est nécessaire de modifier les fonctions de forme calculées pour les nœuds proches des frontières  $\Gamma_u$ . Pour que le champ de déplacement virtuel  $\delta \vec{u}^h(\vec{x})$  soit cinématiquement amissible à 0 sur  $\Gamma_u$ . Le champ de déplacement  $\vec{u}^h(\vec{x})$  et le champ de déplacement virtuel  $\delta \vec{u}^h(\vec{x})$  doivent alors vérifier les conditions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}(\vec{x}_j) &= \sum_{I=1}^n \phi_I^{MLS}(\vec{x}_j) \vec{u}_I = \vec{g}_x(\vec{x}_j) \\ \delta \vec{u}(\vec{x}) &= \sum_{I=1}^n \phi_I^{MLS}(\vec{x}_j) \delta \vec{u}_I = 0 \end{aligned} \right\} \forall j \in \eta_{\vec{g}_x} \quad 2.65$$

Avec  $\eta_{\vec{g}_x}$  désigne l'ensemble de nœuds dans lequel les particules associées (appartenant à leurs support de fonction de forme) sont situées sur la limite de Dirichlet  $\Gamma_u^{\vec{g}_x}$ . Dans cette proposition, la fonction de forme est transformée par le biais d'une matrice de transport  $[H]$ , à savoir  $\check{\phi}_j^{MLS}(\vec{x}_j) = \delta_{IJ}$ . Avec cette propriété, la condition aux limites de Dirichlet de l'équation 2.65 est imposée par le système suivant :

$$\left. \begin{aligned} \vec{\hat{u}}_I &= \vec{g}_x(\vec{x}_I) \\ \delta \vec{\hat{u}}_I &= \vec{0} \end{aligned} \right\} \forall I \in \eta_{\underline{g}_x} \quad 2.66$$

Par conséquent, le système discret final peut être obtenu par :

$$[\tilde{K}]\{U\} = \{\tilde{F}^{ext}\} \text{ tels que } [\tilde{K}] = [H]^{-T}[K][H] \text{ et } \{\tilde{F}^{ext}\} = [H]^{-T}\{F^{ext}\} \quad 2.67$$

### 2.4.3.3 Méthode de pénalisation

La méthode de pénalisation a été utilisée, entre autre, par Belytschko et al. (1994), pour introduire les conditions de Dirichlet dans le cas d'une formulation Meshless. Considérons le problème d'élasticité linéaire définie par les 2.49 et 2.51. La forme faible de l'équation d'équilibre pour obtenir l'équilibre nodal est la suivante:

$$\pi(\vec{u}^h, \vec{\lambda}) = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}(\vec{u}^h) \cdot \underline{\sigma}(\vec{u}^h) - \vec{u}^h \cdot \vec{f} \right] d\Omega - \int_{\Gamma_t} \vec{u}^h \cdot \vec{t} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \frac{\beta}{2} (\vec{u}^h - \vec{u}) \cdot (\vec{u}^h - \vec{u}) \, d\Gamma \quad 2.68$$

Qui conduit à un système d'équations algébriques, à savoir,

$$([K] + \beta[G^{\vec{u}}])\{U\} = \{F^{ext}\} + \beta\{F^{\vec{u}}\} \quad 2.69$$

Les termes additionnels pour le problème aux limites de Dirichlet sont sous la forme suivante :

$$G_{im}^{\vec{u}} = \int_{\Gamma_u} \Phi_{kl} L_{ki} \Phi_{im} \, d\Gamma \quad 2.70$$

$$F_l^{\vec{u}} = \int_{\Gamma_u} \Phi_{kl} L_{ki} \vec{u}_i \, d\Gamma \quad 2.71$$

tels que  $L_{ii} = 1$  si les  $u_i$  sont décrits sur  $\Gamma_u$  et  $L_{ki} = 0$  sinon.

Néanmoins, une méthode de pénalisation, dite réduite, est mise en évidence par Cho et al. (2008). Elle permet de manipuler le nombre de points d'intégration pour éviter les problèmes sur-contraints.

## 2.4.4 Les limites des méthodes d'imposition des conditions aux limites de Dirichlet

Il existe des limites aux méthodes d'imposition des conditions aux limites essentielles. Certaines sont plus adaptées que d'autres à notre problème. En fait, même si la méthode des multiplicateurs de Lagrange est difficile à appliquer sur un contour non fermé, elle semble imposer correctement les conditions aux limites sur la frontière.

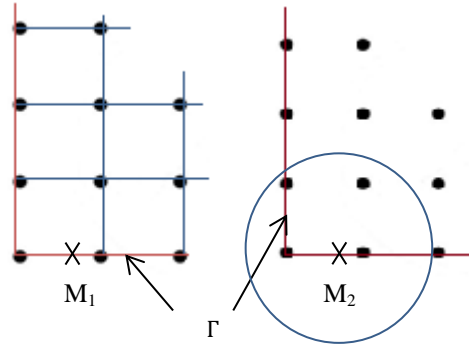


Figure 2-20: Dépendance d'un point sur la frontière dans deux configurations (a) EF (b) MLS

La Figure 2-20 montre que lorsqu'un milieu est discrétisé en éléments finis,  $M_1$  dépend des deux nœuds formant le segment sur lequel il figure. Si nous souhaitons imposer le déplacement en ce point même, le déplacement est imposé de manière homogène sur tout le segment. En revanche, dans le cas d'une discrétisation Meshless le point  $M_2$ , lui, dépend du groupe de nœuds représentant son domaine d'influence. Par conséquent l'imposition directe du déplacement sur la frontière pour un modèle MLS semble ne pas répondre à la procédure. Quelques travaux portent sur ce verrou, et certains utilisent des éléments finis linéiques sur les bords. Cependant Khoshnoudirad et al. (2008) développent une méthode basée sur une résolution par la méthode de collocation par points et par sous-domaines, pour chaque nœud proche du bord, dans le cadre des approximations enrichies.

Néanmoins, dans la section 2.5, nous avons choisi d'utilisons des éléments finis aux bords pour réduire les erreurs d'imposition des conditions aux limites de Dirichlet.

#### 2.4.5 Solveur implicite

Pour les équations constitutives, un modèle élastique linéaire est utilisé. L'équilibre nodal représenté est résolu par un solveur sparse à factorisation Cholesky pour résoudre le système linéaire suivant,

$$[K]\{\Delta U\} = \{F^{ext}\} - \{F^{int}\} \quad 2.72$$

A travers cette procédure une prédiction des déplacements se fait par la linéarisation du vecteur de force interne,

$$[K] = \left[ \frac{\partial \{F^{int}\}}{\partial \{\Delta U\}} \right] \approx \int_{\Omega} [B]^T [C^e] [B] d\Omega \quad 2.73$$

## 2.5 STRUCTURES DISCRÉTISÉES PAR APPROXIMATION DIFFUSE INCLUANT UNE COUCHE D'ÉLÉMENTS FINIS SUR LA FRONTIÈRE

Pour imposer les conditions aux limites de Dirichlet, dans une configuration couplée MLS-MEF, Belytschko et al. (1994) utilisent des éléments d'interface de nature éléments finis, à savoir des éléments quadrangulaires à 4 nœuds en 2D. Dans cette section, nous étudions la configuration MLS Mixte développée précédemment en *section 2.2*. En fait, nous avons choisi deux exemples d'étude. Nous avons mis en œuvre un premier modèle de plaque percée homogène infinie pour une étude comparative, dans le but de définir le modèle MLS Mixte le plus avantageux pour traiter des problèmes d'élasticité en HPP. Les deux schémas d'intégration numérique, Gauss-Legendre et nodal stabilisé, sont testés. Le second exemple étudié est un rectangle soumis à un chargement linéaire sur un seul côté. Ce dernier exemple est exploité pour étudier la sensibilité de la discrétisation nodale de la zone MLS sur la réponse mécanique en déplacement et en contrainte.

### 2.5.1 Modélisation de la déformation d'une plaque percée infinie

Soit une portion de côté «  $l$  » d'une plaque infinie avec un perçage circulaire de rayon «  $a$  » centré à l'origine, et soumise à un chargement «  $T_x$  » unidirectionnel dans la direction  $\overline{Ox}$  (Fig...). Pour simplifier la modélisation, nous exploitons les conditions de symétries pour ne représenter seulement un quart de la plaque.

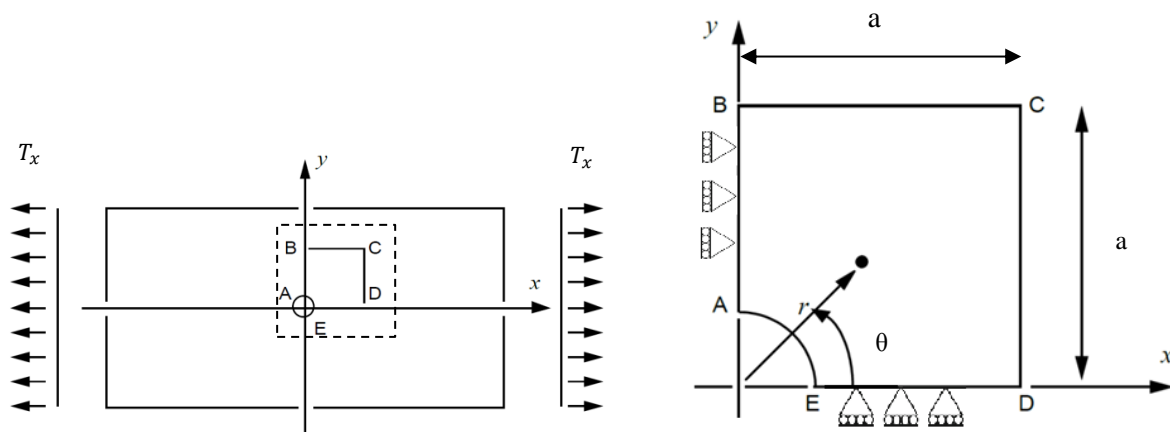


Figure 2-21: Plaque avec un trou circulaire

La solution analytique du problème en élasticité linéaire isotrope en HPP et dans le cadre des déformations planes, est la suivante,

$$\sigma_{xx} = T_x \left[ 1 - \frac{a^2}{r^2} \left( \frac{3}{2} \cos\theta + \cos(4\theta) \right) + \frac{3a^4}{2r^4} \cos(4\theta) \right] \quad 2.74$$

$$\sigma_{yy} = -T_x \left[ \frac{a^2}{r^2} \left( \frac{1}{2} \cos(2\theta) - \cos(4\theta) \right) + -\frac{3a^4}{2r^4} \cos(4\theta) \right] \quad 2.75$$

$$\sigma_{xy} = -T_x \left[ \frac{a^2}{r^2} \left( \frac{1}{2} \sin(2\theta) + \sin(4\theta) \right) - \frac{3a^4}{2r^4} \sin(4\theta) \right] \quad 2.76$$

avec  $(r, \theta)$  les coordonnées polaires. Les déplacements sont donnés par,

$$u_x = \frac{T_x}{4\mu} \left[ r \left( \frac{(\kappa - 1)}{2} + \cos(2\theta) \right) + \frac{a^4}{r} (1 + (1 + \kappa) \cos(2\theta)) - \frac{a^4}{r^3} \cos(2\theta) \right] \quad 2.77$$

$$u_y = \frac{T_x}{4\mu} \left[ (1 - \kappa) \frac{a^2}{r} - r - \frac{a^4}{r^3} \right] \sin(2\theta) \quad 2.78$$

où  $\kappa = 3 - 4\nu$  et  $\nu$  est le coefficient de poisson.

- *Conditions aux limites et chargements*

Sur AB,  $u_x = 0$  ; Sur MLS,  $u_y = 0$  ;

Sur CD : traction  $\begin{cases} F_x = \sigma_{xx}, x = l \\ F_y = \sigma_{xy}, x = l \end{cases}$  ; Sur BC : traction  $\begin{cases} F_x = \sigma_{xy}, y = l \\ F_y = \sigma_{yy}, y = l \end{cases}$

- *Dimensions du problème*

Nous avons choisi les grandeurs mécaniques suivantes pour ce problème. Pour les dimensions  $l=8$ . mm et  $a=1$ . mm. Au niveau du matériau, module d'Young  $E=210$  GPa et coefficient de Poisson  $\nu=0.3$

Le chargement imposé est de  $T_x=100$  MPa.

- *Conditions numériques (discrétisation, fonctions poids, ...)*

Une discrétisation partiellement régulière avec une distance moyenne entre nœuds de 0.5 mm a été utilisée dans cet exemple. Les domaines d'influence des fonctions poids sont de forme rectangulaire (voir Eq.2.1) tel que  $a_i=b_i=1.2$  mm. La zone de transition  $\Omega^{\text{MLS/MEF}}$  est dicrétisée avec une seule couche élément quadrangulaire bilinéaire à 4 nœuds. Enfin, pour le début de l'étude, nous avons opté pour des fonctions poids interpolantes de Shepard et une intégration nodale avec gradient régularisé.

### 2.5.1.1 Comparaison du modèle MLS-MEF Mixte et modèle analytique

La *Figure 2-22* montre les lignes de tracé du déplacement en 0, 0.7, 1.0 et 3.0 mm, selon la direction x.



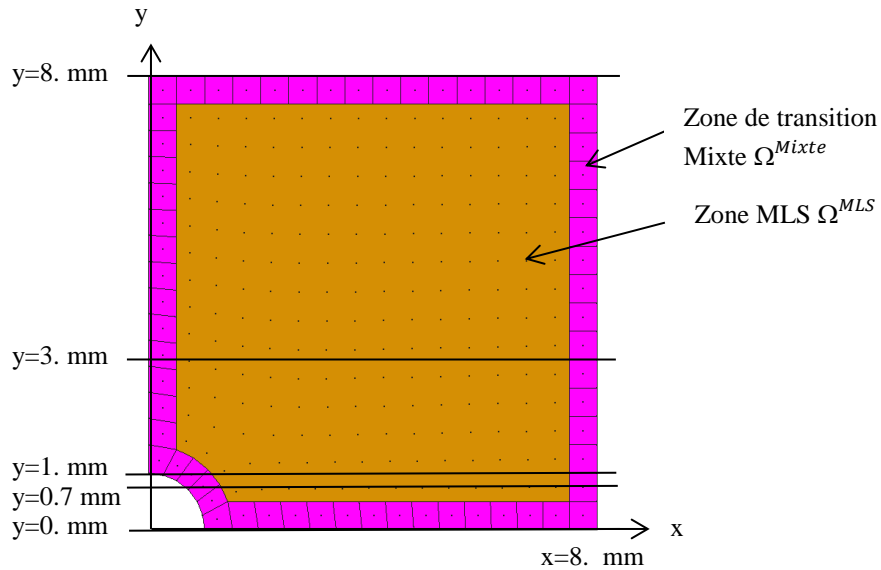
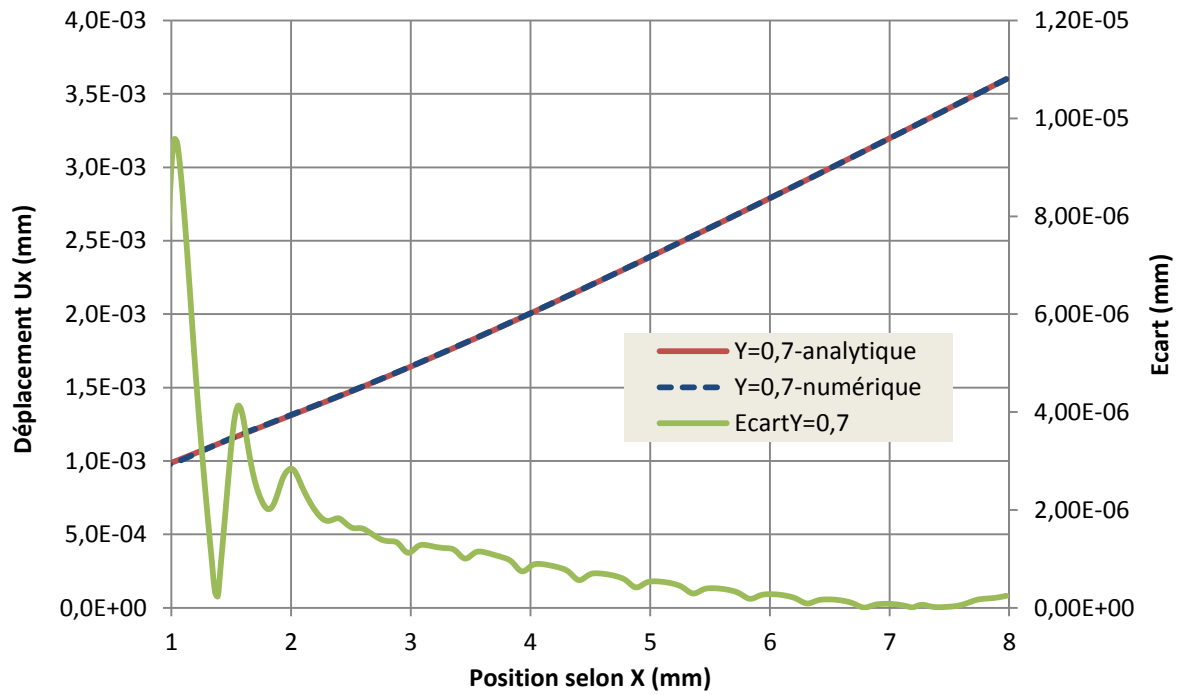


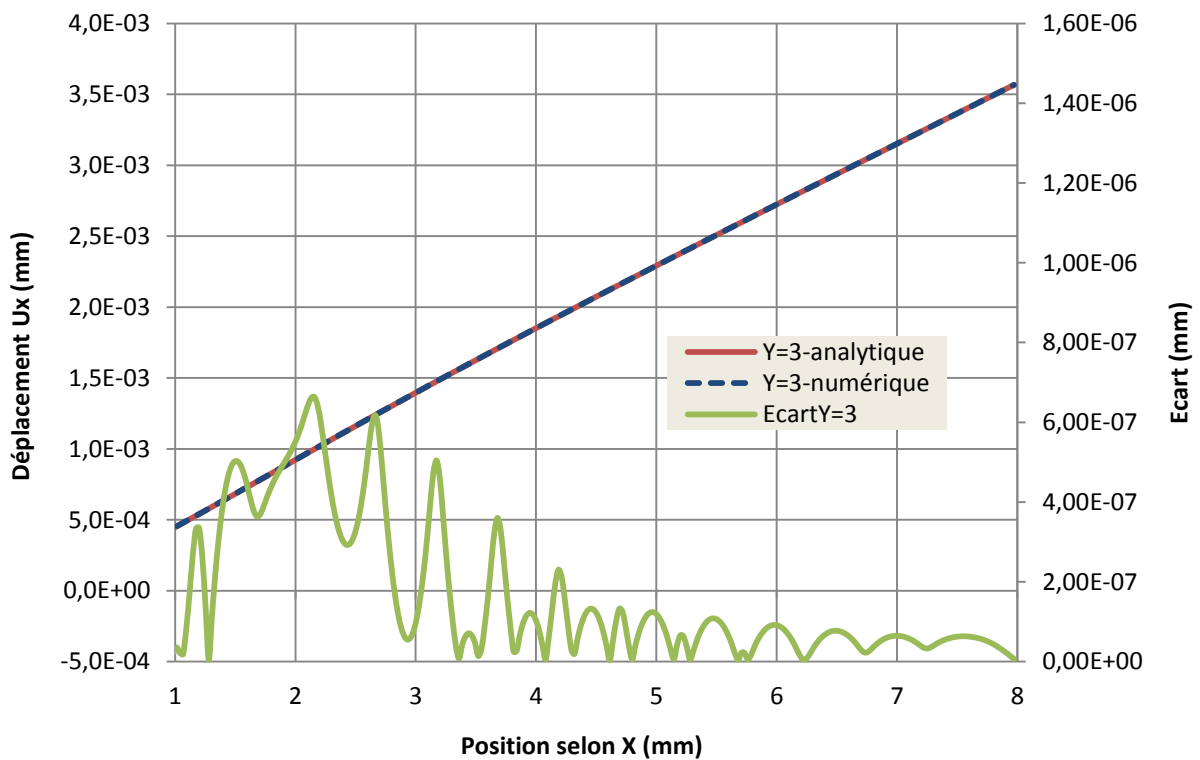
Figure 2-22: Niveau des traçages des déplacements selon la direction  $x$

Nous avons représenté l'écart en déplacement entre le modèle MLS Mixte et la solution de référence, tel que l'écart de déplacement « E » est la valeur absolue de la différence entre la solution numérique et la solution analytique, respectivement. La Figure 2-23 montre les courbes de déplacement pour les deux modèles étudiés, selon la direction  $x$  sur les lignes de tracé en 0.7 et 3. mm uniquement (le reste des traçages est représenté en ANNEXE B).

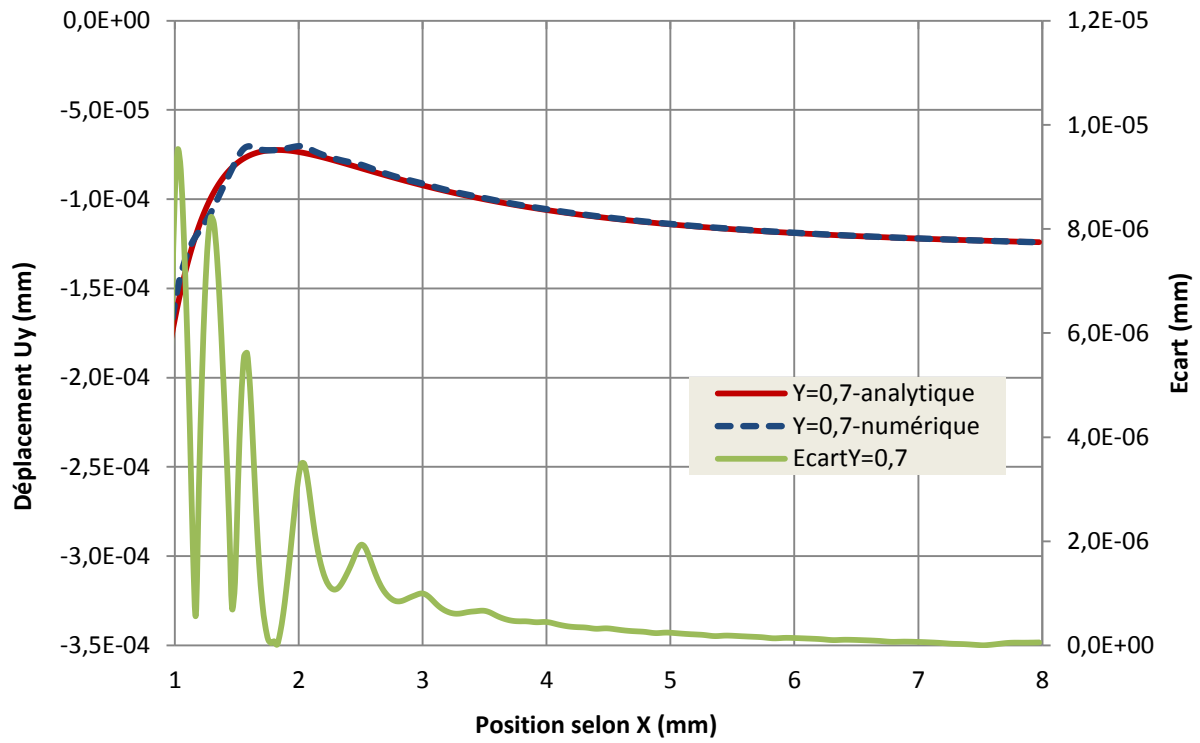
La comparaison entre la solution analytique et les résultats obtenus pour le modèle MLS-MEF Mixte montre que l'évolution de l'écart « E » est généralement le plus important lorsque nous nous rapprochons du trou. Cette tendance est observée sur l'ensemble des graphiques Figure 2-23a à d. Loin de la zone percée, l'écart 'E' reste inférieure à  $2 \cdot 10^{-7}$  mm, soit à peu près 1% erreur. L'évolution du déplacement suivant la composante  $U_x$  est quasi-linéaire sur les Figure 2-23a et b. . La Figure 2-23c montre une évolution non linéaire du déplacement suivant la composante  $U_y$ , nous remarquons un changement de pente en déplacement vers  $x=1.8$ mm, proche du trou, qui est source de non linéarité du problème posé, générant un écart de l'ordre de  $8 \cdot 10^{-6}$  mm avec une erreur de l'ordre de 8%, néanmoins, l'erreur reste acceptable. En fait, même si nous utilisons des fonctions de forme rationnelles, l'approximation du déplacement est linéaire. Nous observons sur l'ensemble des graphiques (Figure 2-23a et b) que l'évolution de l'écart présente des oscillations qui semblent être dépendantes du pas de discrétisation nodale de notre structure. En général, l'écart diminue lorsque nous sommes proches d'un nœud. En première conclusion, nous pouvons valider la prédiction du modèle Mixte MLS-MEF dans le cas des champs de déplacement. .



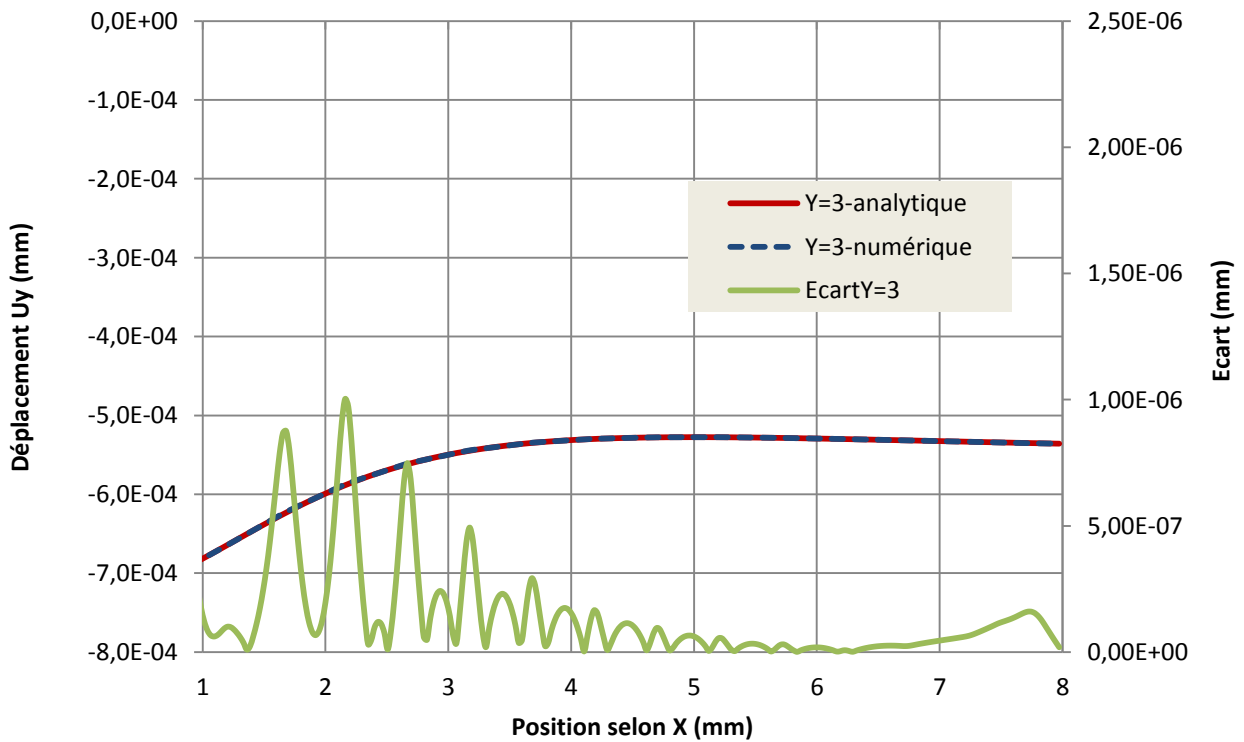
(a)



(b)



(c)



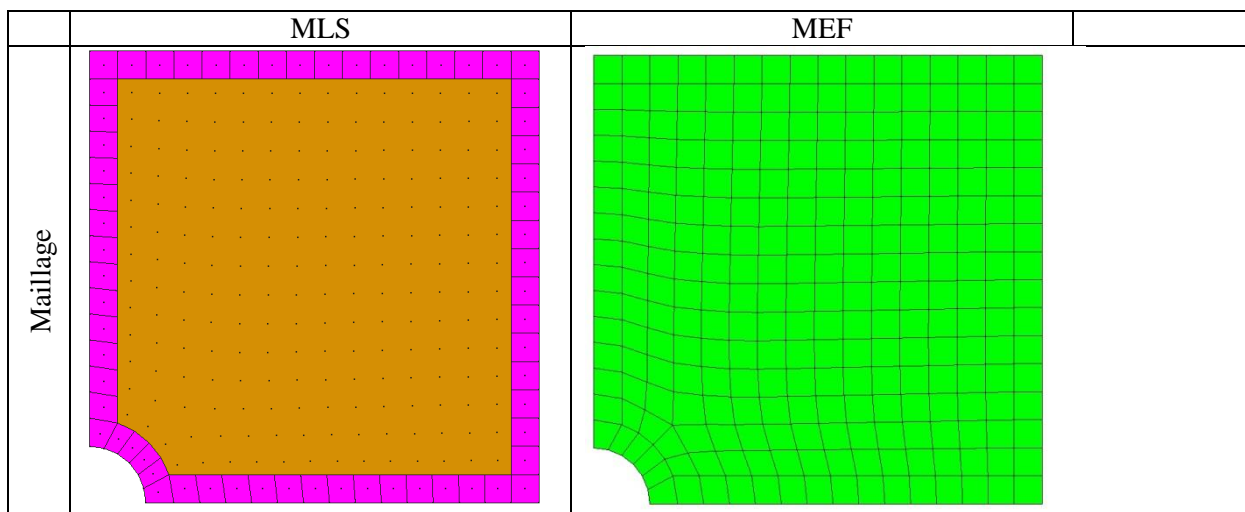
(d)

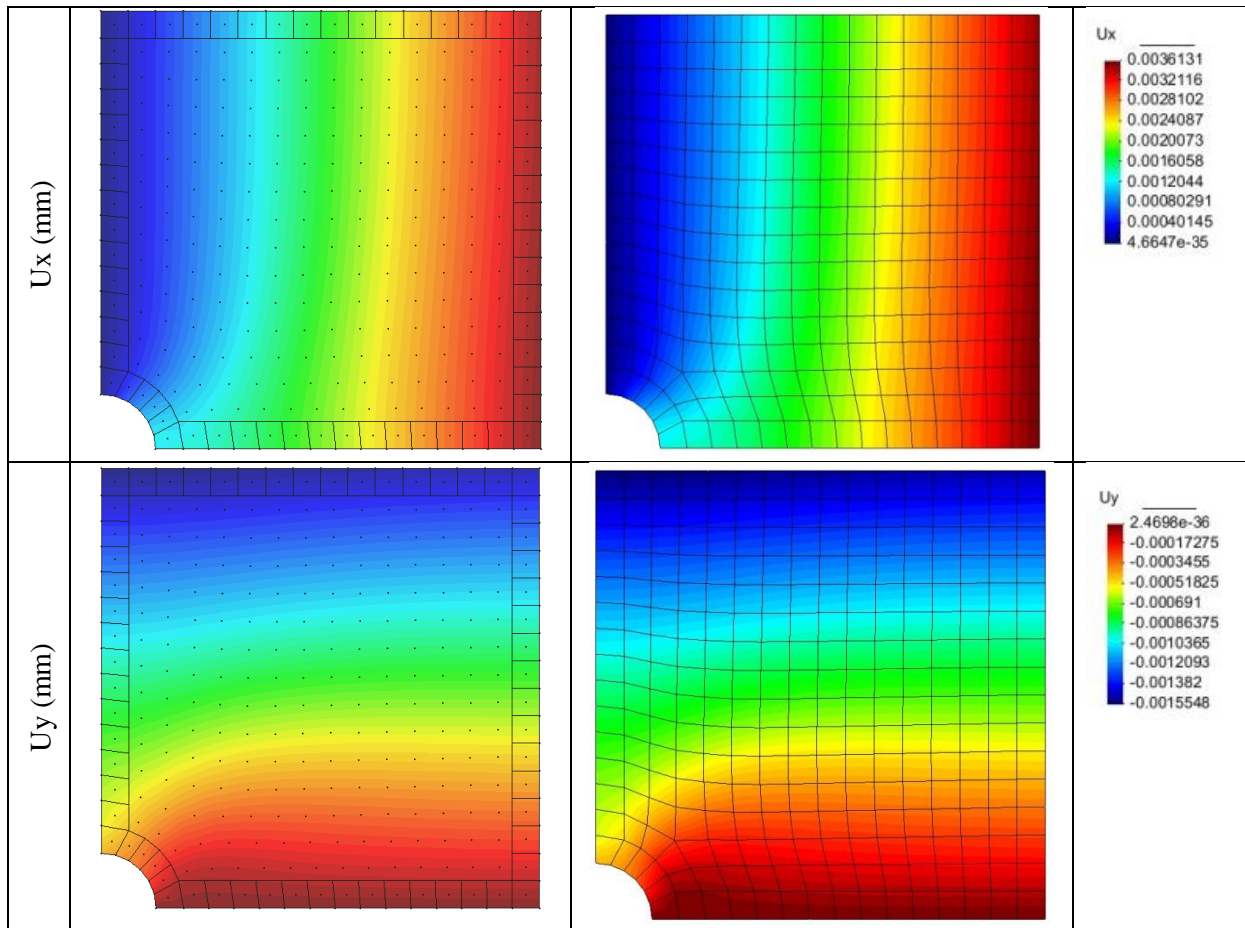
Figure 2-23: Déplacement analytique, MLS et leur écart (a)  $u_x$  au tracé  $y=0.7$  mm (b)  $u_x$  au tracé  $y=3.0$  mm (c)  $u_y$  au tracé  $y=0.7$  mm (d)  $u_y$  au tracé  $y=3.0$  mm

### 2.5.1.2 Comparaison des modèles MLS-MEF Mixte et MEF

La configuration MLS-MEF Mixte est identique à celle utilisée en *section 2.5.1.1*. Nous avons utilisé le logiciel Abaqus® standard pour réaliser la simulation de la déformation de la plaque percée avec une approche MEF. Nous avons utilisé une discrétisation de la plaque de façon quasi-identique avec des éléments CPE4R (élément Q4 bilinéaire, déformation plane, de la librairie Abaqus®). Nous avons imposé les mêmes conditions de solveur en termes de précision et même condition aux limites.. Nous utilisons pour cette étude comparative, la même plateforme d'affichage (GID post-process) entre MLS-MEF Mixte et MEF/Abaqus®, pour l'import des résultats. Le *Tableau 1* ci-dessous représentant la distribution de contraintes et la dispersion de l'écart sur la plaque. Visuellement, nous remarquons la même répartition des champs de déplacement pour les deux modèles.

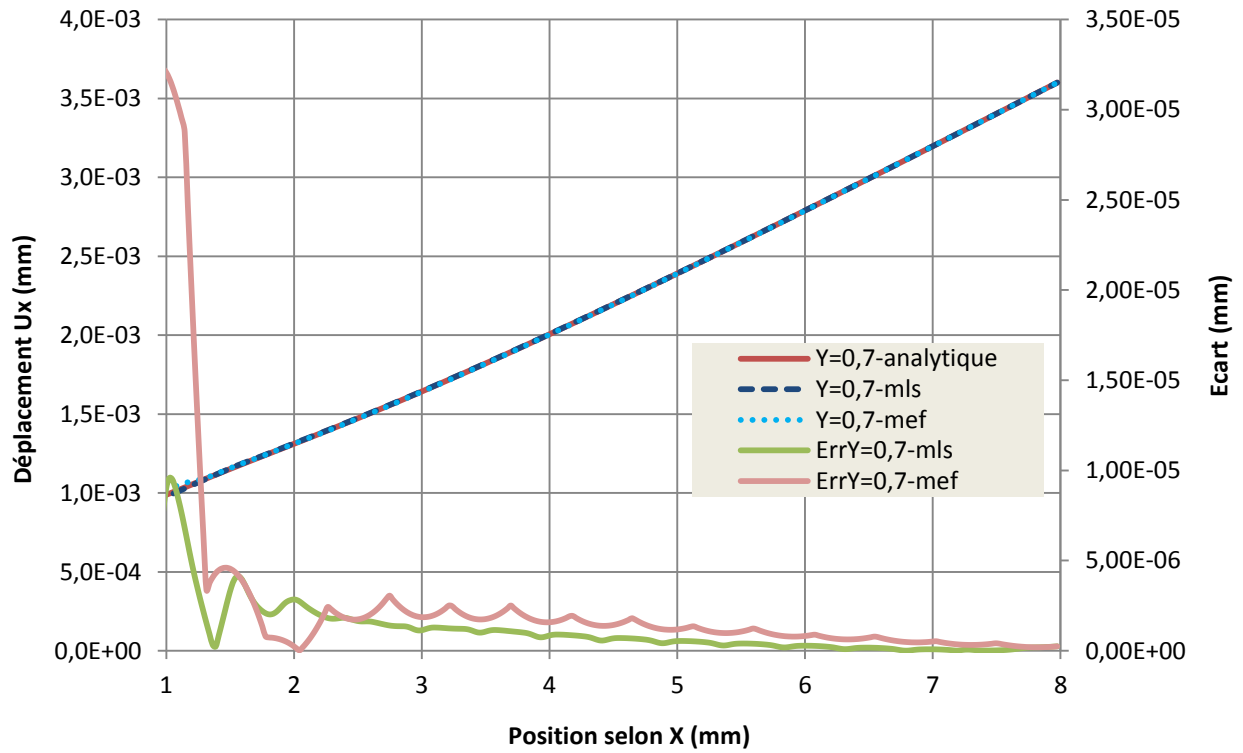
La *Figure 2-24* montre l'évolution du déplacement en x et y sur les mêmes lignes de traçage que précédemment. Nous avons rajouté l'évolution du modèle MEF et remarquons que ce dernier génère des écarts en déplacement nettement plus important que l'écart avec la solution analytique par rapport au modèle MLS-MEF Mixte (*Figure 2-24.a, b et d*), montrant un écart plus stable du modèle MLS Mixte.



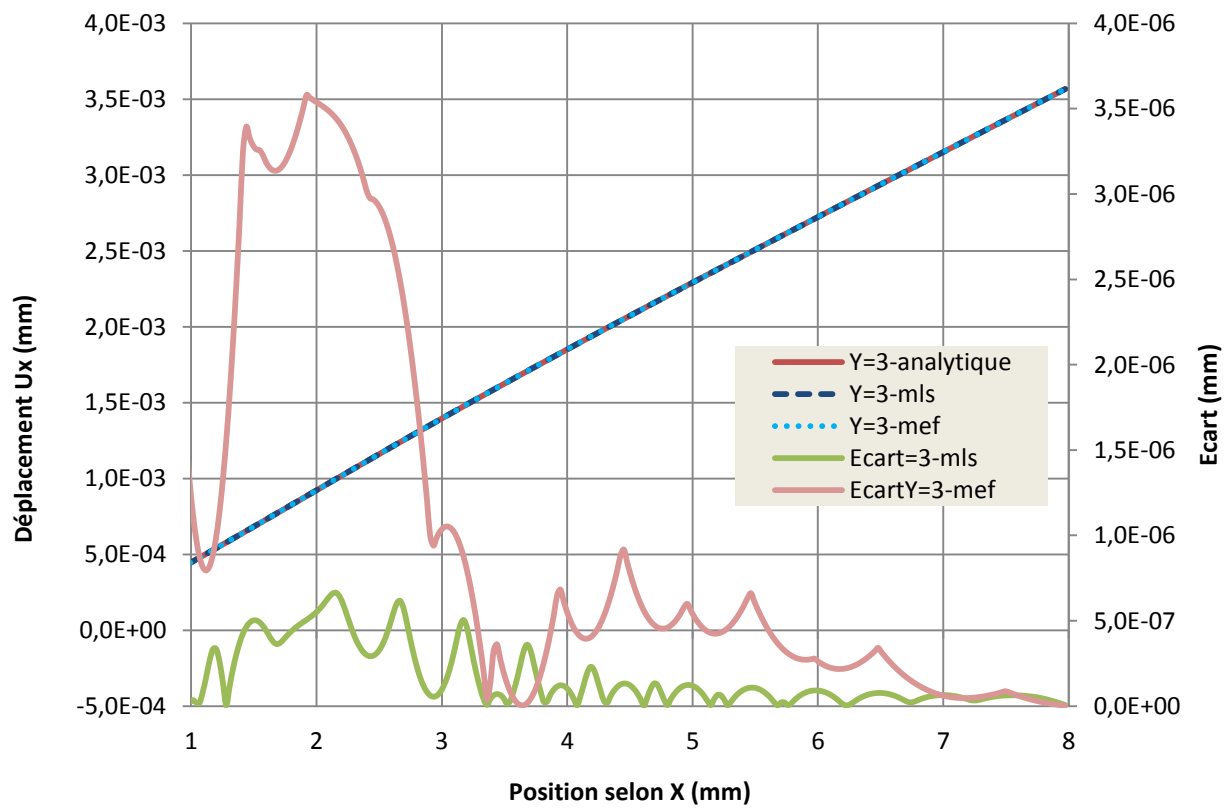


*Tableau 1 : Comparaison des modèles MLS Mixte et MEF pour un exemple de plaque percée en déplacement*

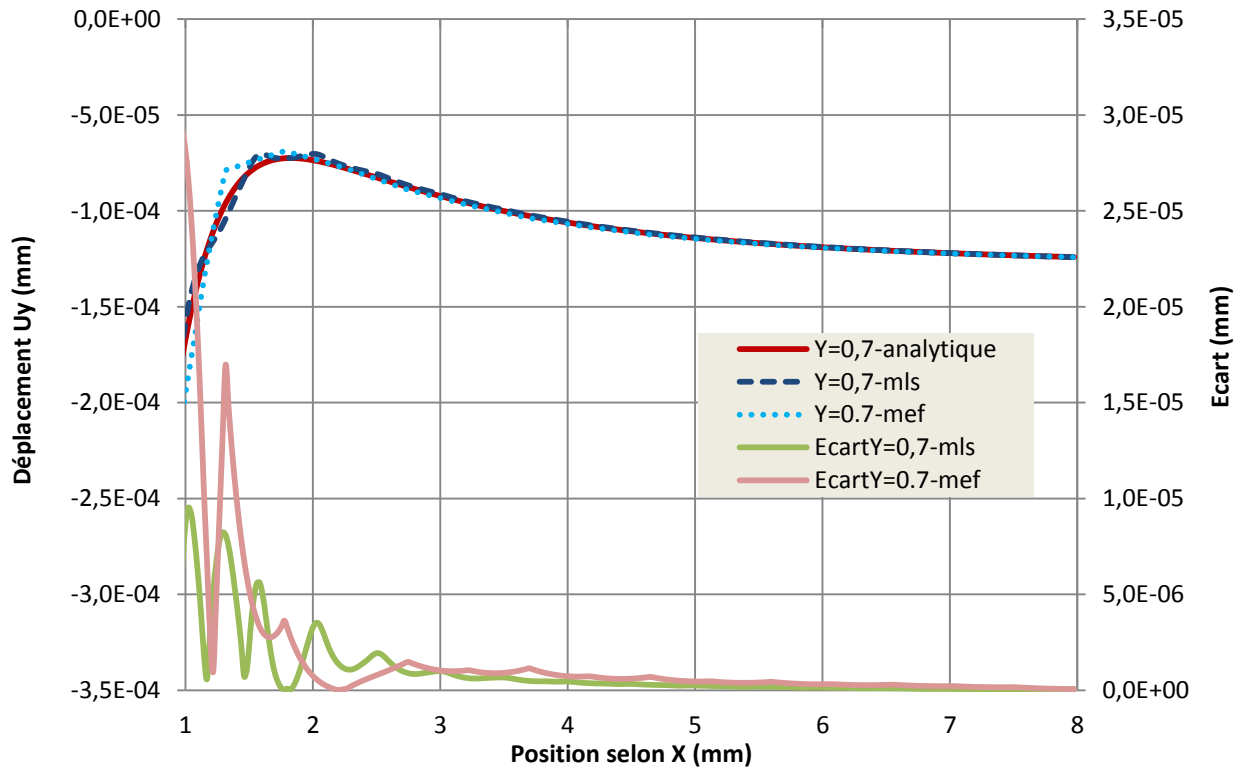
Ceci dit, les *Figure 2-24.c* et *d* montrent des sauts d'écarts plus importants, notamment dans la zone de perçage entre  $x=1. \text{ mm}$  et  $x=3. \text{ mm}$  (*Figure 2-24.c*) pour se stabiliser par la suite. Les *Figure 2-24.d* et *c* montrent que certes l'écart est beaucoup moins important que la solution MEF/Abaqus®, néanmoins, les sauts d'écarts se manifestent, et ce, sur la longueur du traçage. Ceci est peut-être dû au choix des éléments et à l'intégration réduite en un point de Gauss. A la section suivante, nous comparons l'intégration nodale à celle de la quadrature de Gauss, pour un support d'intégration rectangulaire de dimensions fixes.



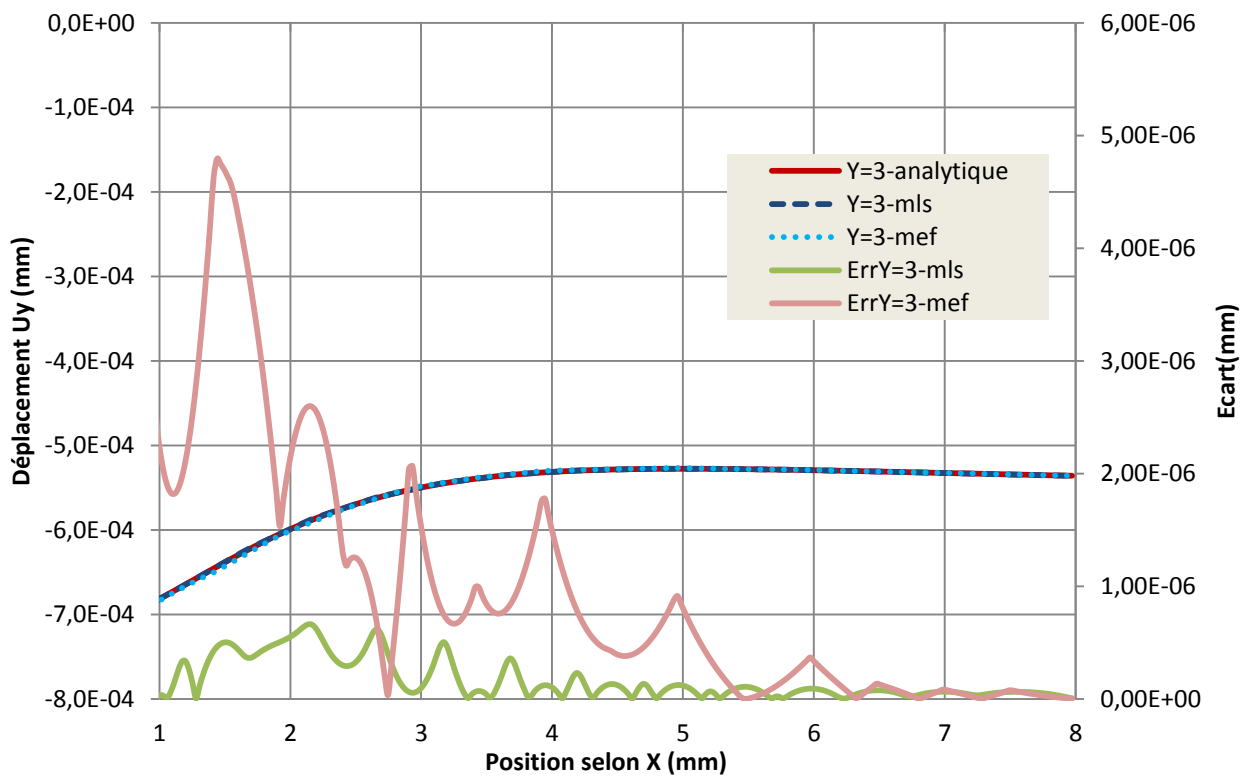
(a)



(b)



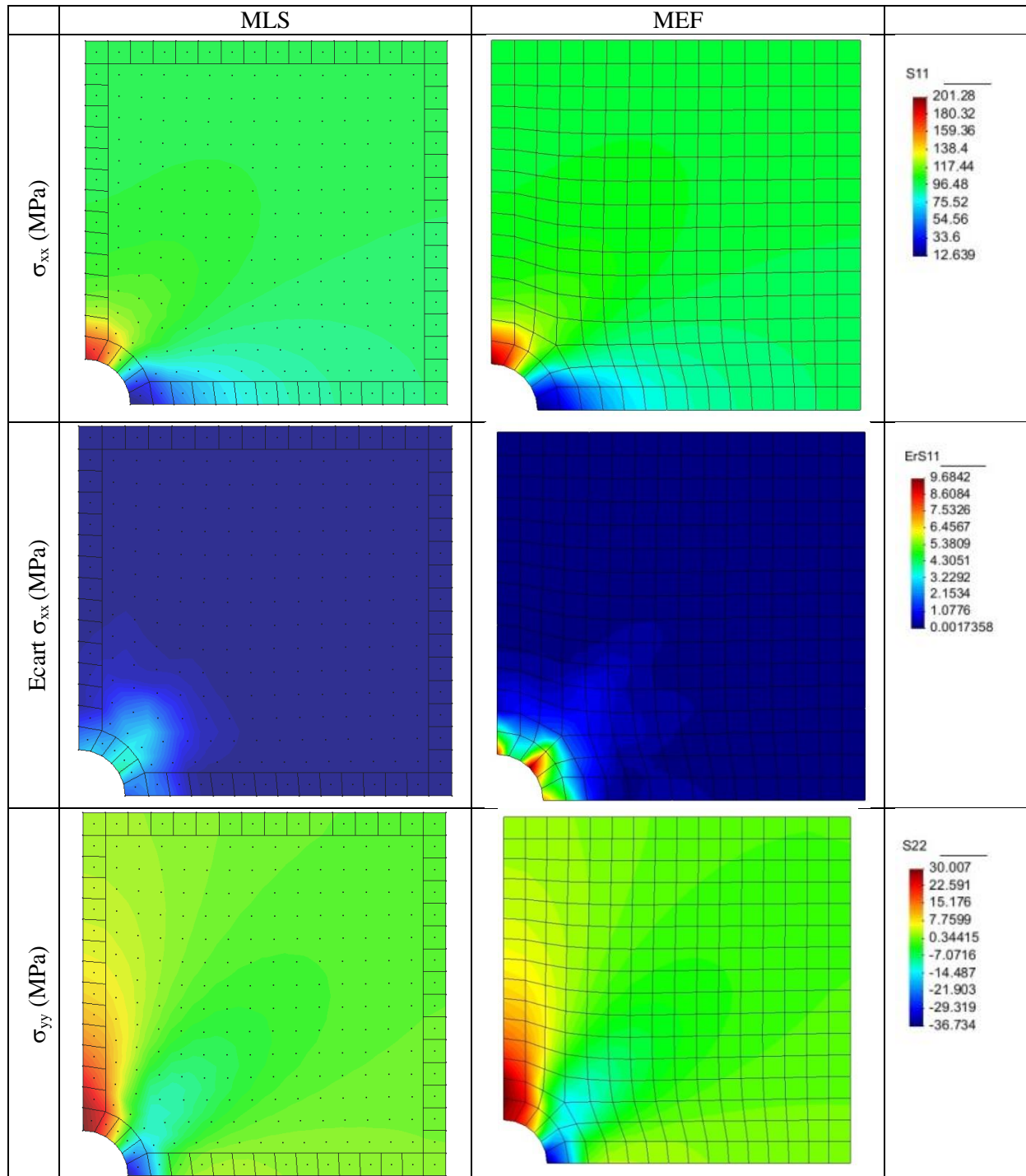
(c)



(d)

Figure 2-24: Déplacement analytique, MLS, MEF et leurs écarts (a)  $u_x$  au tracé  $y=0.7$  mm (b)  $u_x$  au tracé  $y=3.0$  mm (c)  $u_y$  au tracé  $y=0.7$  mm (d)  $u_y$  au tracé  $y=3.0$  mm

Selon le *Tableau 2*, nous observons le même aspect de répartition de contraintes pour les modèles MLS-MEF Mixte et MEF/Abaqus®. L'écart représenté est inférieur à une dizaine de MPa, et il est d'autant plus important dans la configuration MEF, en particulier dans la zone de perçage (Ecart  $\sigma_{xx}$ , Ecart  $\sigma_{yy}$ , Ecart  $\sigma_{xy}$ ).





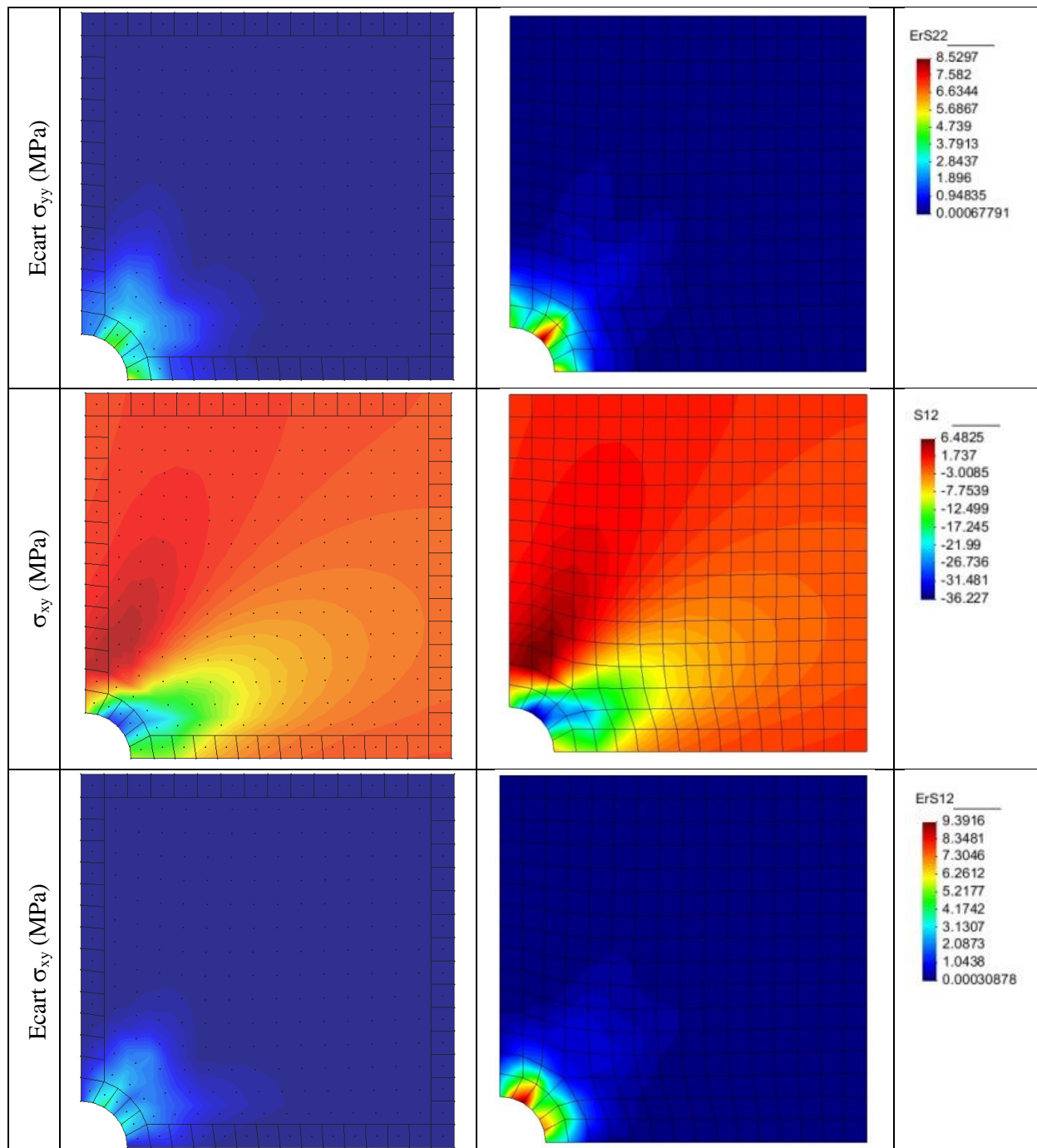


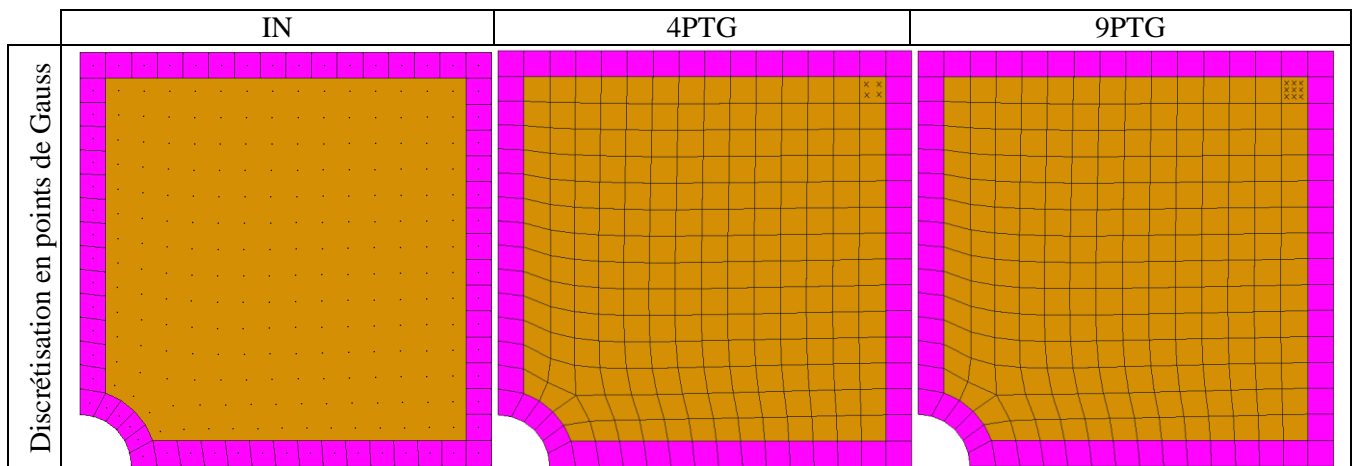
Tableau 2 : Comparaison des modèles MLS Mixte et MEF pour un exemple de plaque percée en contrainte

Dans l'ensemble, le modèle MLS-MEF semble apporter des meilleurs résultats que l'approche MEF/Abaqus® dans le cas d'un élément Q4 bilinéaire. Nous n'avons pas eu l'occasion de poursuivre cette étude avec un élément quadratique Q9, pour vérifier si cette tendance se confirme avec des éléments « plus performant » au moins au niveau des fonctions de forme.

### 2.5.1.3 Comparaison du modèle MLS-MEF Mixte en intégration nodale et intégration de Gauss-Legendre

Nous allons dans cette section évaluer la performance de la méthode d'intégration numérique pour notre modèle MLS-MEF Mixte. Par conséquent, nous avons choisi de tester l'intégration de Gauss – Legendre à 4 points (2x2) et 9 points de Gauss (3x3).

Dans cette section, nous avons aussi testé l'influence du nombre de points de Gauss sur une cellule d'intégration que nous avons comparé à la configuration de référence décrite au chapitre 2.5.1.1 . Au niveau des légendes, (IN) désigne Intégration Nodale, (IGL4PTG) intégration de Gauss-Legendre avec 4 points de Gauss et (IGL9PTG) intégration de Gauss-Legendre à 9 Points. En ce qui concerne l'intégration de Gauss Legendre, nous avons utilisé une cellule d'intégration en quadrangles de taille moyenne 0.5 mm x 0.5 mm dont les positions des points de Gauss sont données en *Figure 2-25*. Les fonctions poids et leurs supports sont identiques pour les trois configurations (voir chapitre 2.5.1.1).

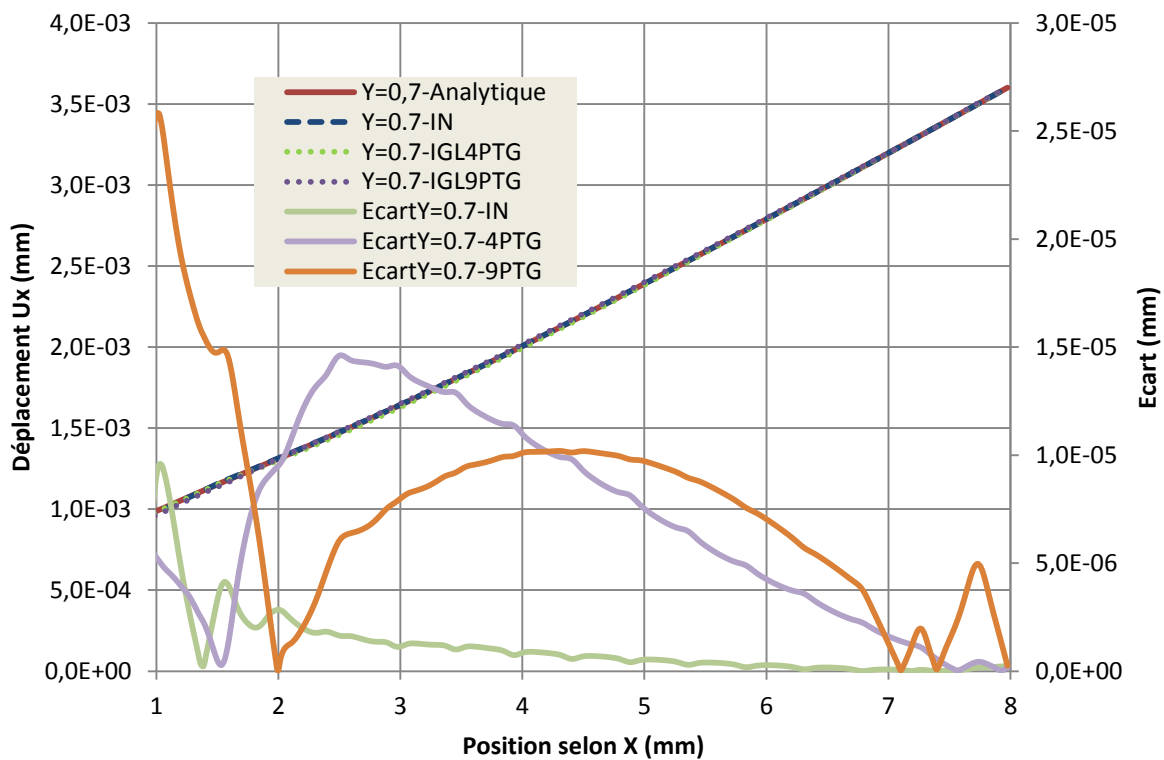


*Figure 2-25 : Configurations des différentes méthodes d'intégration pour le modèle MLS Mixte*

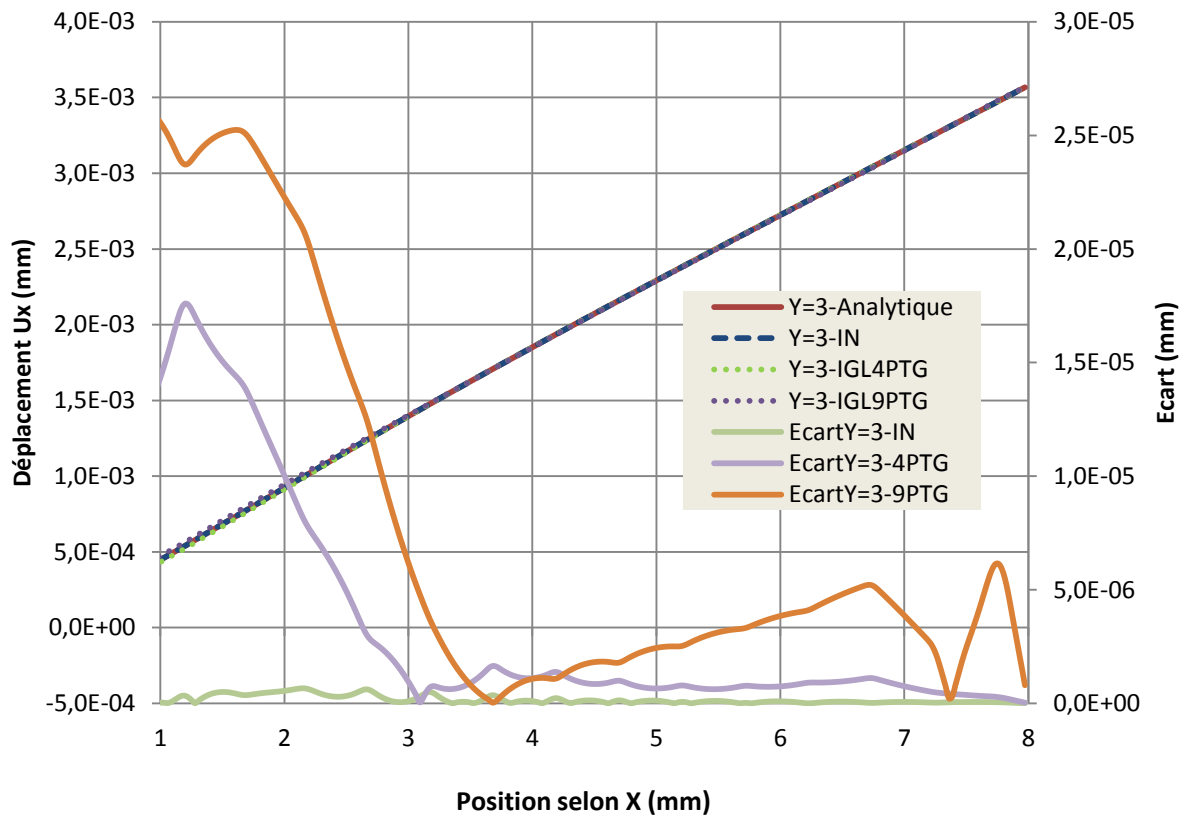
Nous avons tracé, *Figure 2-26*, les déplacements  $U_x$  et  $U_y$  selon l'axe  $x$ , sur les mêmes lignes de tracé que précédemment ( $y=0.7$  mm et  $y=3$ . mm). Si nous nous concentrons sur la lecture de l'écart par rapport à la solution analytique, nous constatons que l'intégration nodale offre une qualité de solution meilleure que les deux modes d'intégration de Gauss Legendre. Les tracés des lignes proche du trou, *Figure 2-26 a* et *c*, montrent que l'écart en déplacement pour la discrétisation à 9 points de Gauss semble la plus élevée au niveau de  $x=1$ . mm (au-delà du bord). Les solutions se stabilisent assez rapidement dans les zones 100% MLS. Dans le cas de cet exemple, nous pouvons déjà conclure que le choix de la solution d'intégration influence la qualité des résultats en déplacement. Nous allons alors continuer cette analyse par l'étude de la répartition de l'écart de contraintes par rapport à la solution analytique dans la plaque (*Tableau 3*).

Les écarts des trois composantes des contraintes ( $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$ ) par rapport à la solution analytique en contrainte conforte le choix de l'intégration nodale. Nous observons que les maximums des écarts pour les trois modes d'intégration sont proches du trou, lieu de concentration des contraintes à fort gradient. L'augmentation du nombre de points de Gauss améliore la précision en contrainte mais semble être plus néfaste sur la précision en déplacement.

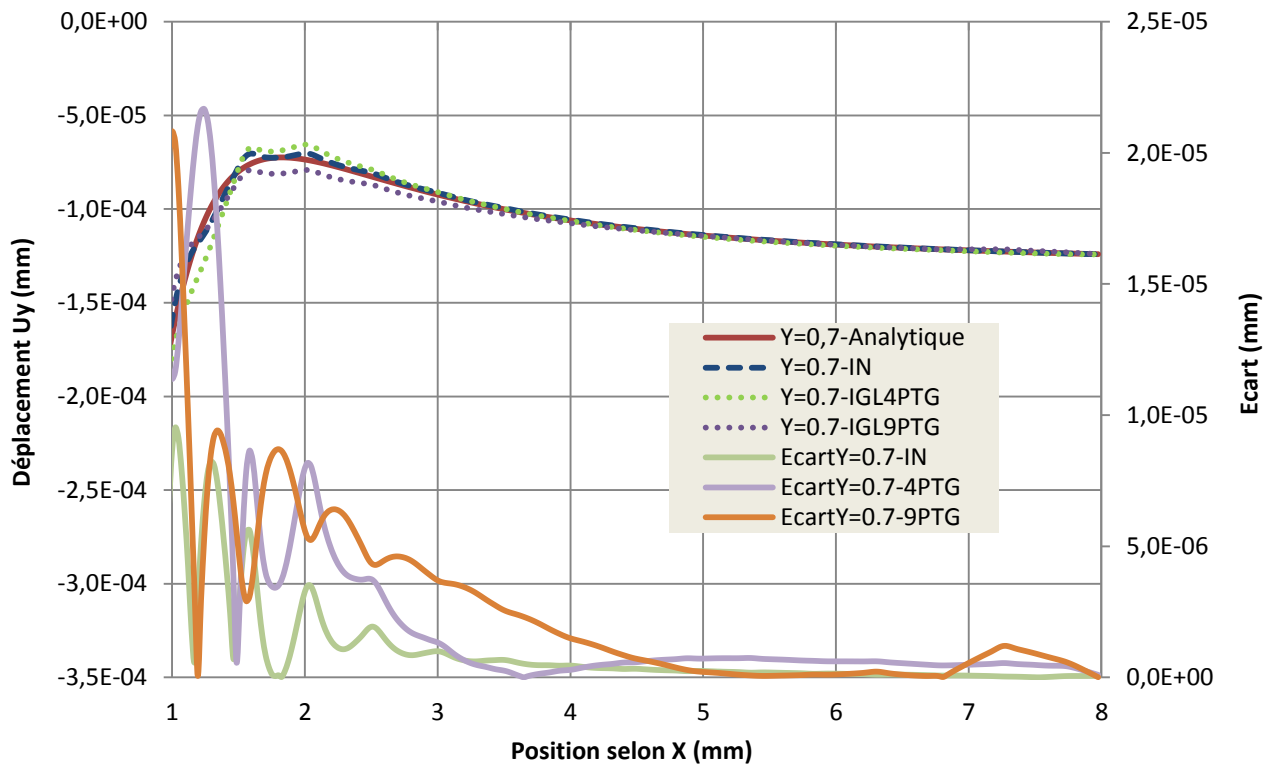
Dans le cas de l'intégration de Gauss-Legendre à 9 points de Gauss, nous remarquons une perte de précision dans la zone MLS-MEF lorsque  $0 < x < 1\text{mm}$ , nous pensons que les fonctions de forme MEF dans cette zone doivent influencer les résultats et qu'un effet de verrouillage au cisaillement peut expliquer cette défaillance. Sinon, dans le reste de la plaque, les trois modes d'intégration donnent des résultats quasi-identiques.



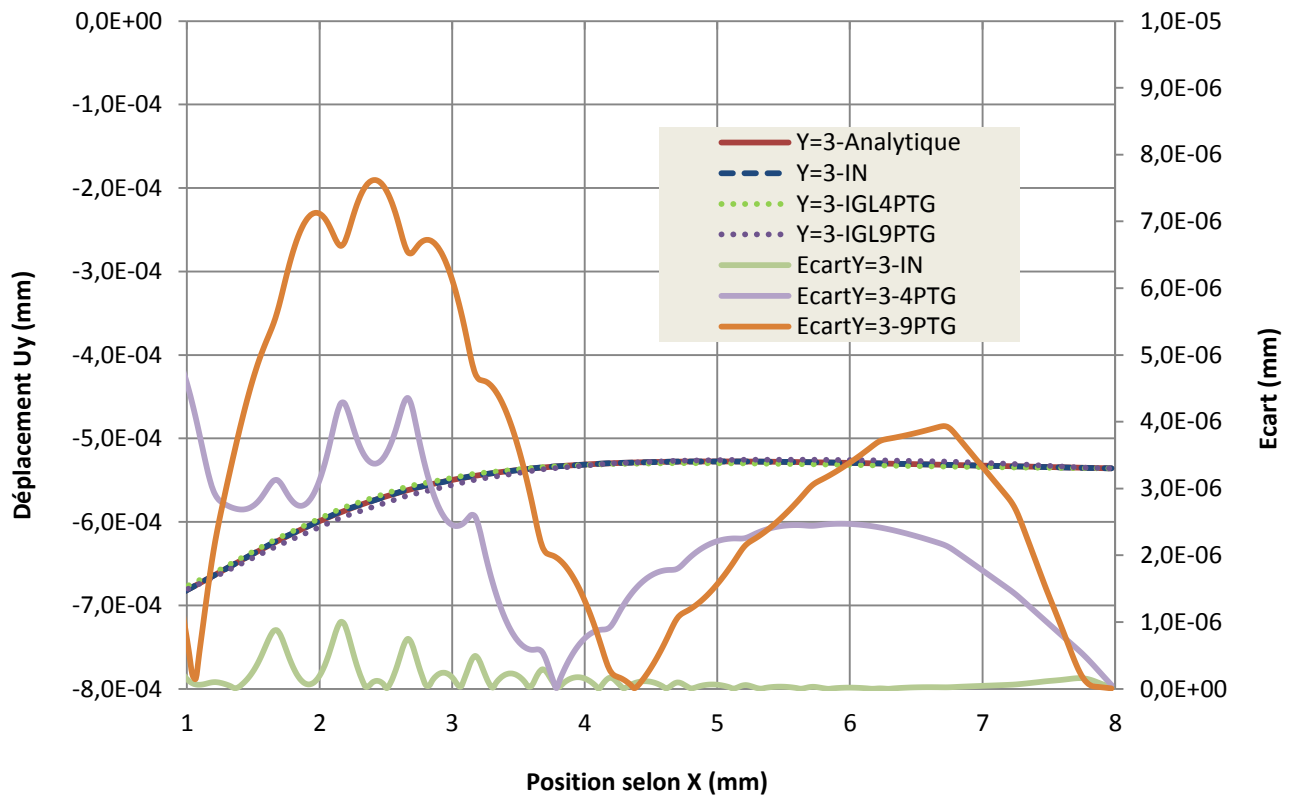
(a)



(b)

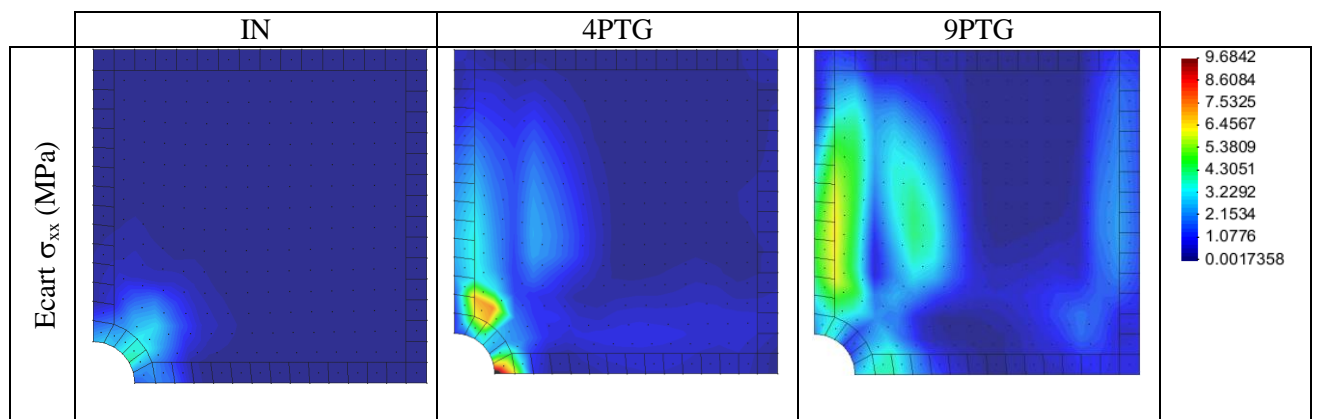


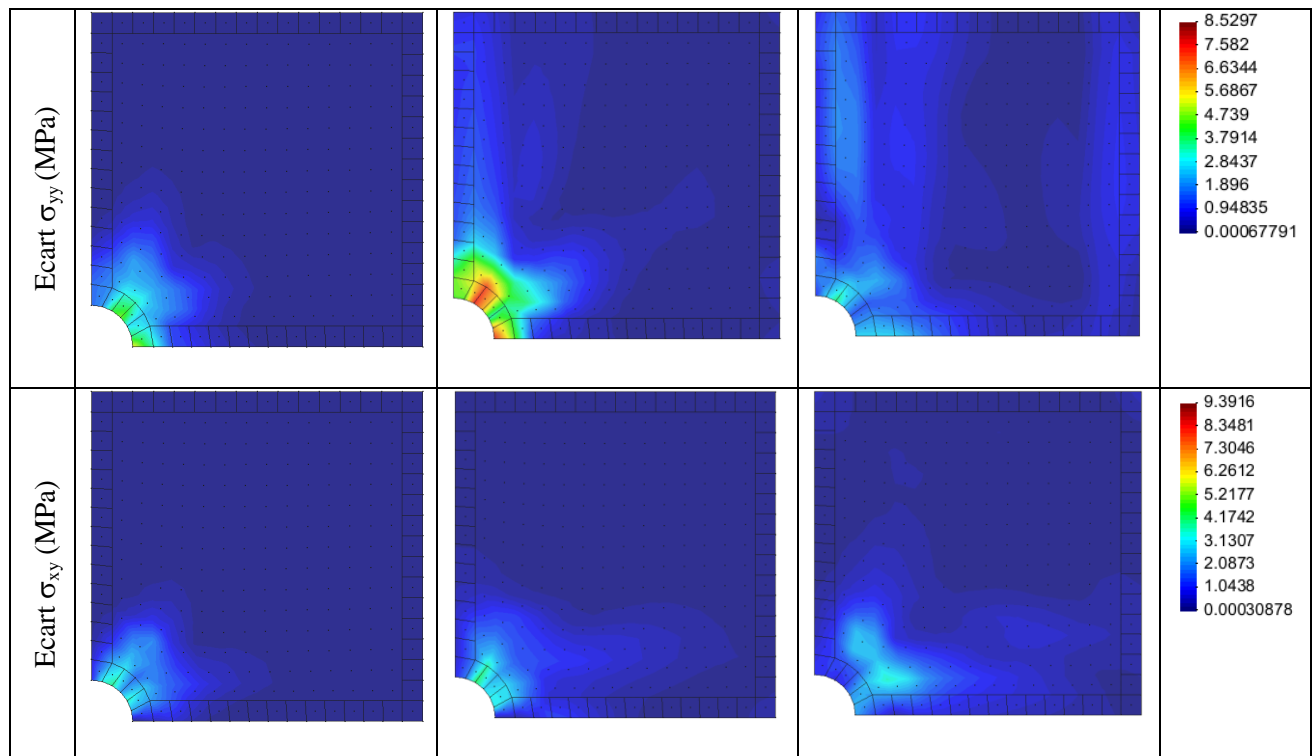
(c)



(d)

Figure 2-26 : Déplacement analytique, MLS en intégration nodale à gradient régularisé et en intégration de type Gauss (4 points et 9 points) et leurs écarts (a)  $u_x$  au tracé  $y=0.7$  mm (b)  $u_x$  au tracé  $y=3.0$  mm (c)  $u_y$  au tracé  $y=0.7$  mm (d)  $u_y$  au tracé  $y= 3.0$  mm





*Tableau 3 : Comparaison des écarts de distribution de contrainte du modèle MLS Mixte pour un exemple de plaque percée*

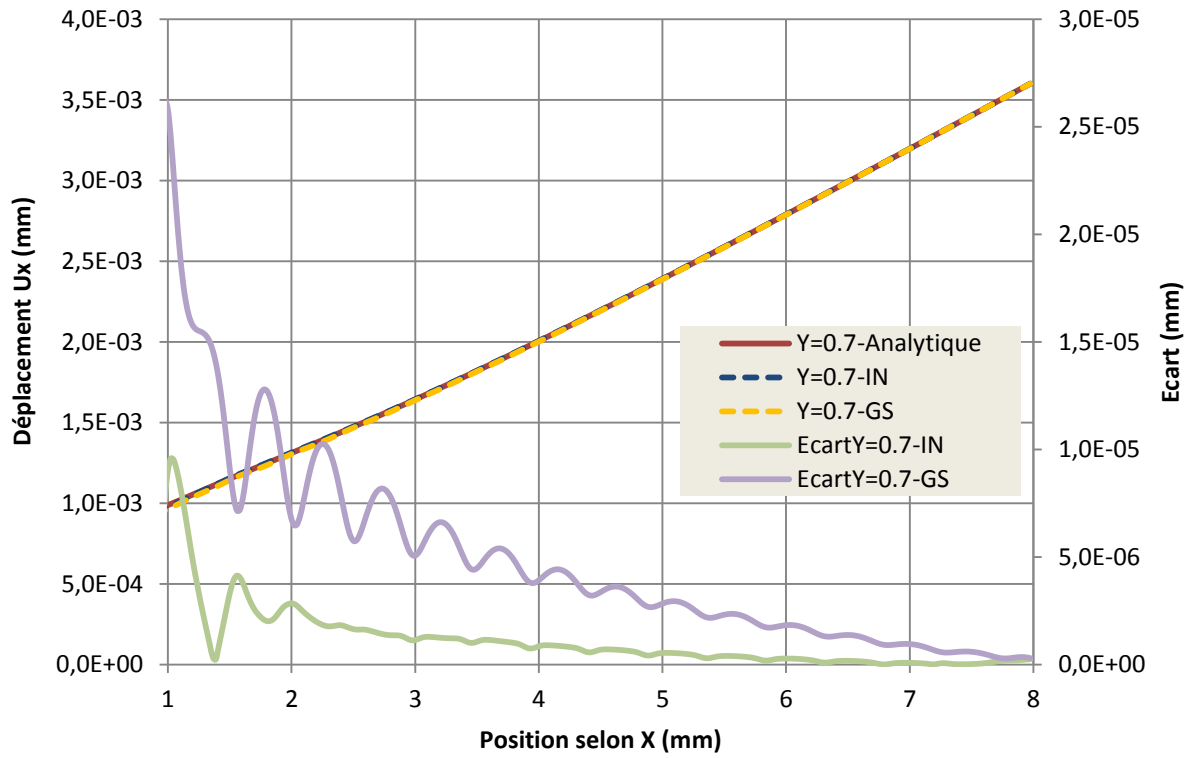
Nous avons déduit des résultats précédents, que l'intégration nodale offre un moindre écart en déplacement et en contrainte, mais aussi une bonne répartition de distribution d'écart en contrainte. Ainsi, nous validons le modèle Mixte MLS-MEF et choisissons la configuration suivante : intégration nodale à gradient régularisé, un support rectangulaire (fixé à  $a_i=b_i=1.5$  mm) des fonctions poids interpolantes. Dans le chapitre suivant nous nous intéressons à l'influence des fonctions poids et la taille de leurs supports sur la qualité des résultats.

#### 2.5.1.4 Etudes de sensibilité des fonctions poids sur le modèle Mixte MLS-MEF en intégration nodale

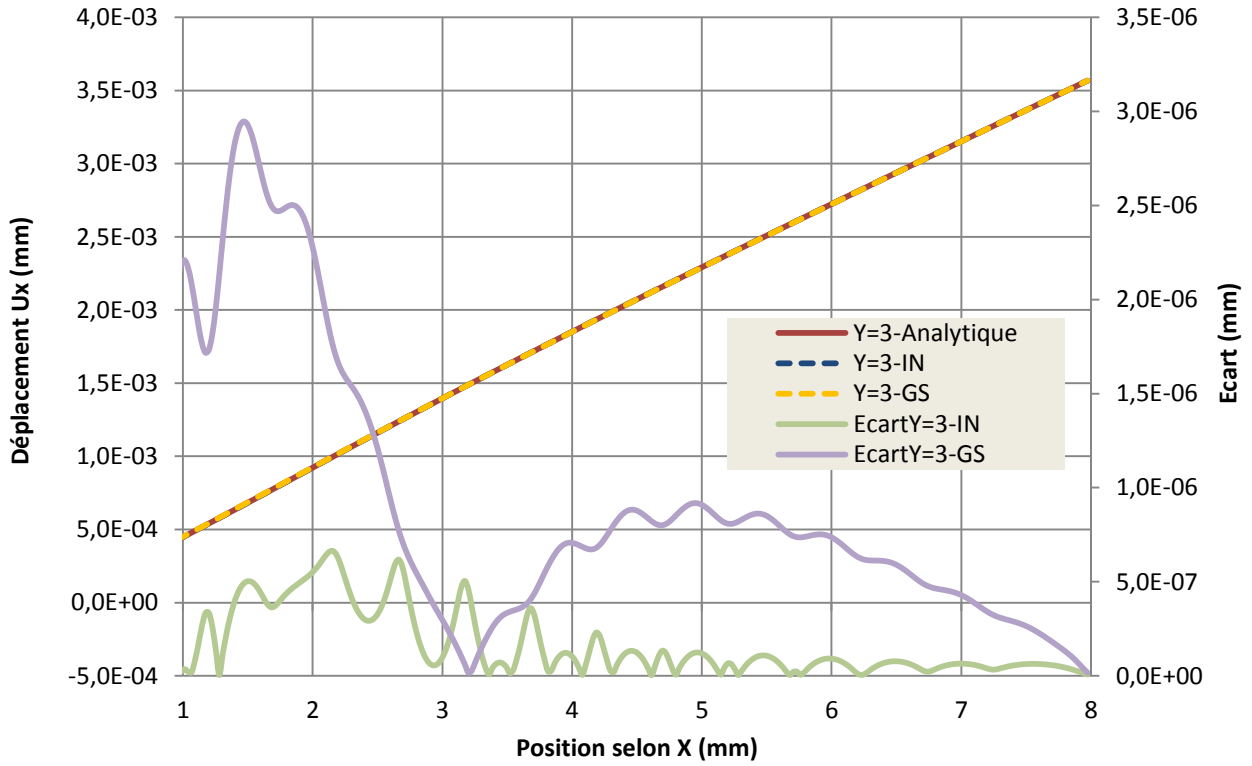
Nous allons donc dans ce chapitre étudier la sensibilité des fonctions poids et de leurs supports sur la prédiction du modèle Mixte MLS-MEF.

##### Sensibilité sur la taille du support des fonctions poids

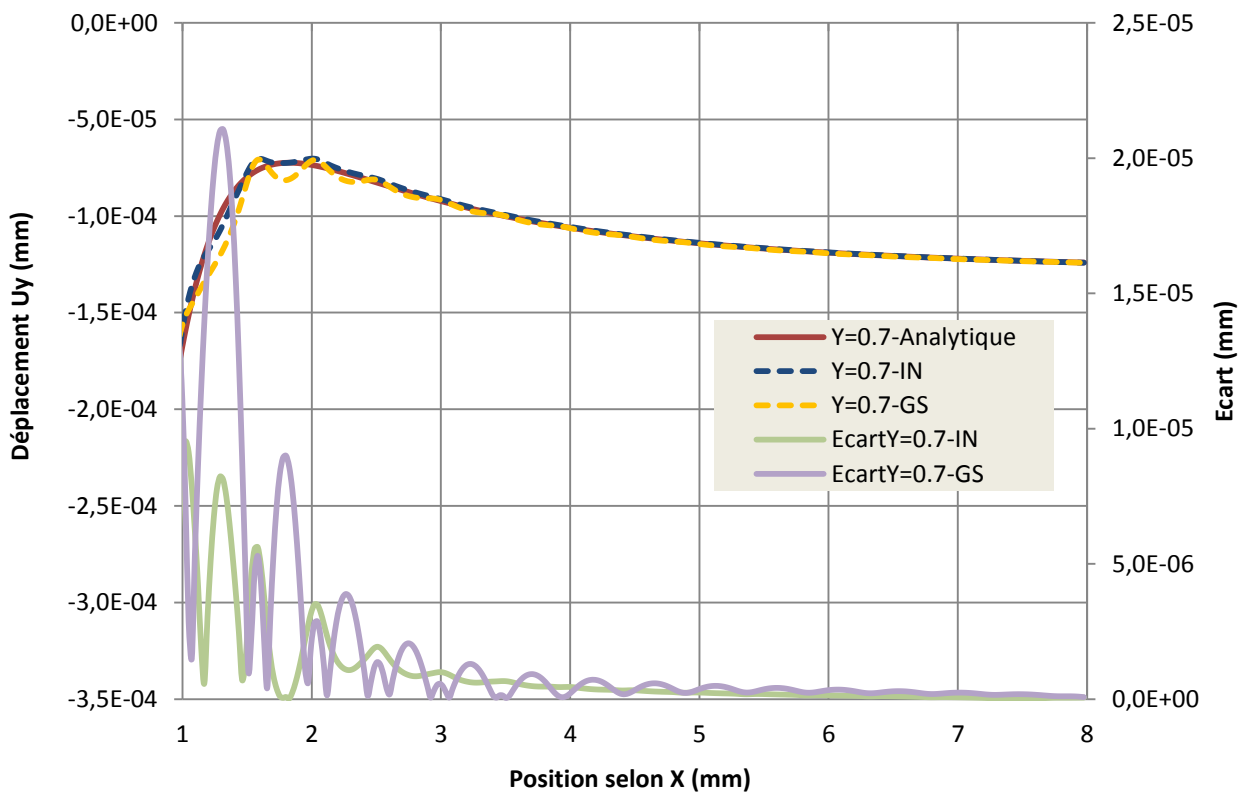
Dans ce qui suit, nous étudions la sensibilité de la taille du domaine d'influence du support des fonctions de forme sur l'approximation. Pour ce faire, nous avons gardé la solution de référence et augmenté la taille du support d'influence tel que  $a_i=b_i=3$  mm. Le support élargi est noté GS et la solution de référence est toujours notée IN. Nous étudions ainsi les écarts de la solution, par rapport à la solution de référence, sur la qualité de l'approximation du champ de déplacement.



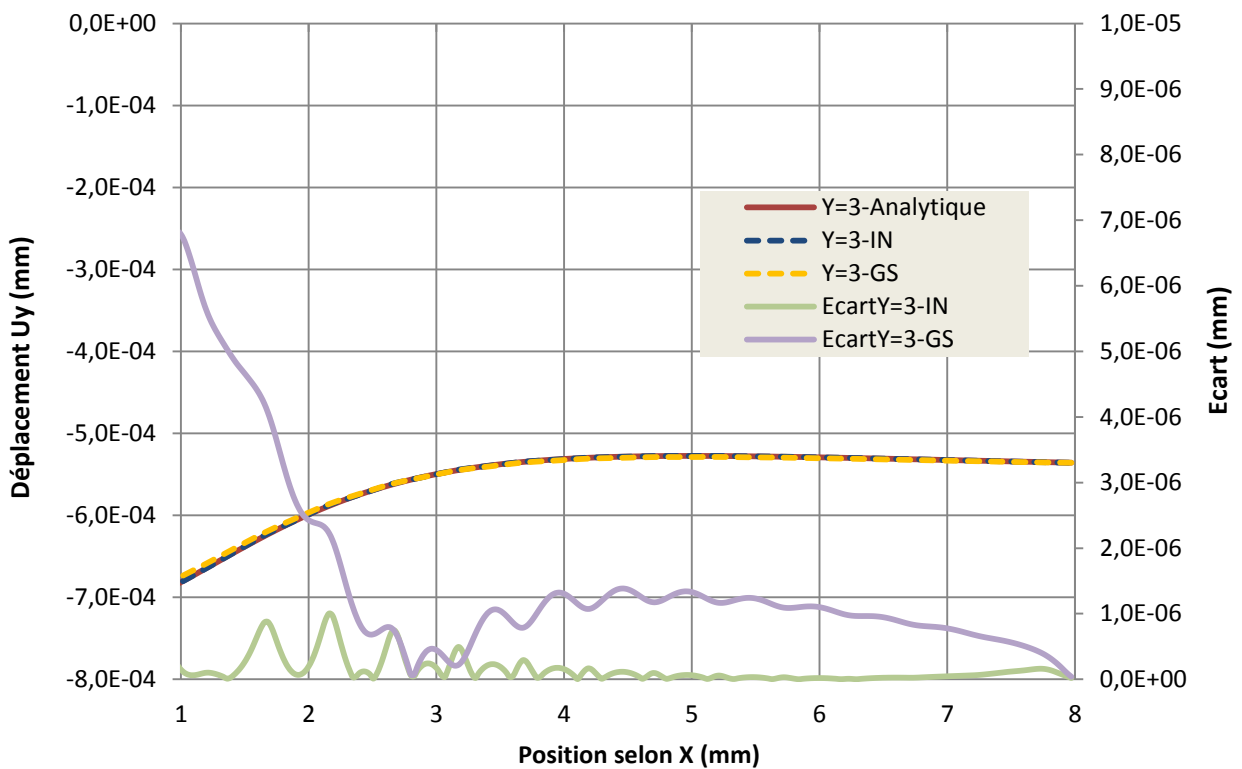
(a)



(b)



(c)

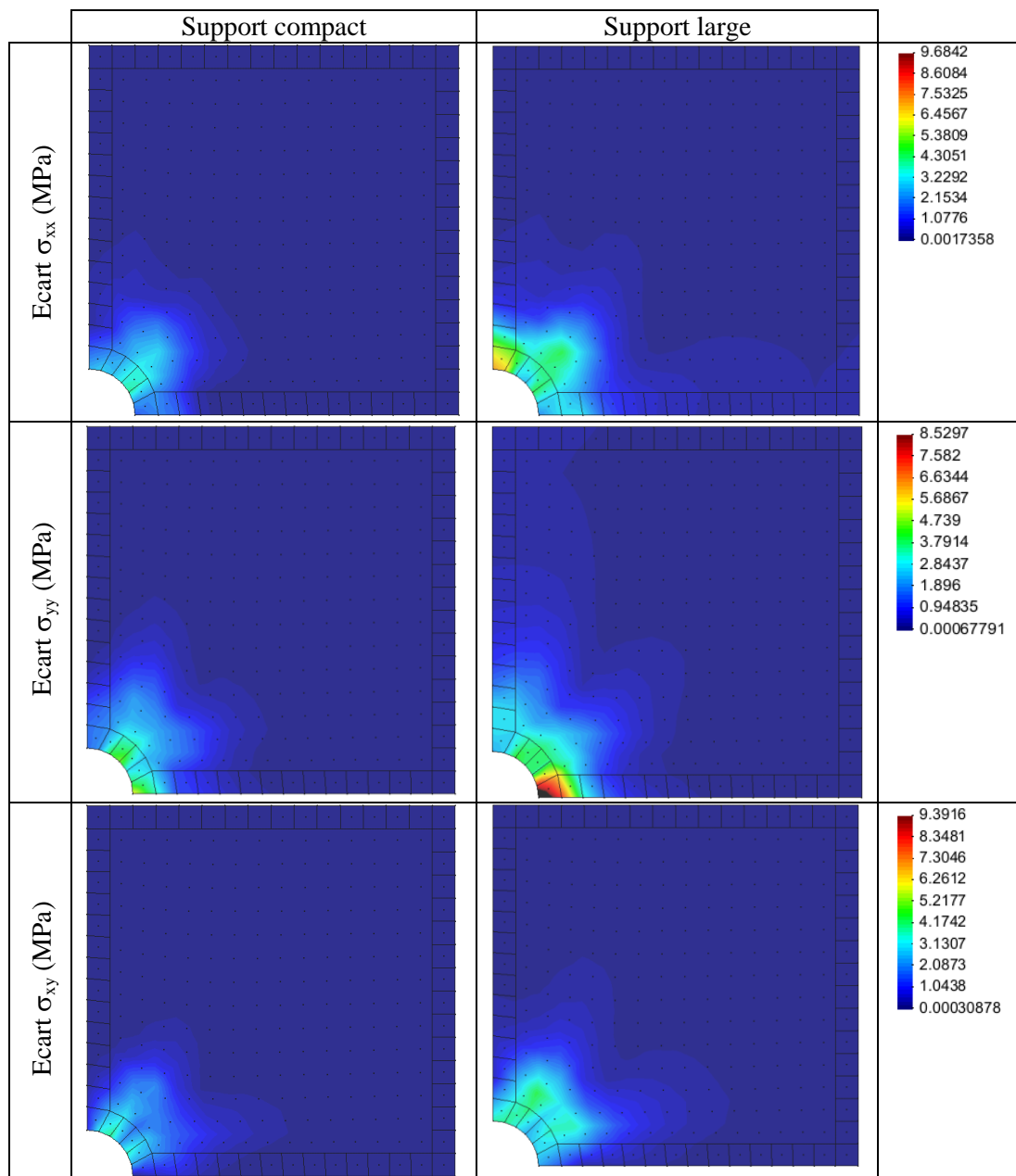


(d)

Figure 2-27 : Déplacement analytique, MLS en intégration nodale à gradient régularisé en utilisant des supports de fonctions de forme limitée (IN) et larges (GS) ainsi que leurs écarts selon  $x$  (a)  $u_x$  au tracé  $y=0.7$  mm (b)  $u_x$  au tracé  $y=3.0$  mm (c)  $u_y$  au tracé  $y=0.7$  mm (d)  $u_y$  au tracé  $y=3.0$  mm



Lorsque nous augmentons le support des fonctions de forme, nous augmentons le nombre de nœuds qui peuvent participer localement à la construction de l'approximation. Nous avons alors tendance à moyenniser l'approximation et à entacher le caractère local de l'approximation. Les graphiques de la *Figure 2-27*, de *a* à *d*, confortent ce constat, nous observons une dégradation de la précision des déplacements selon les lignes  $y=0.7$  mm et  $y=3$  mm lorsque nous augmentons la taille du support. L'erreur peut même dépasser les 20% dans le cas du graphique *Figure 2-27 c*. La perte de précision avec l'utilisation de support de fonction de forme élargie est confirmée au niveau de la mesure de l'écart des composantes de contraintes dont les répartitions sont données en *Tableau 4*. La différence est la plus notable au niveau de la zone de perçage.

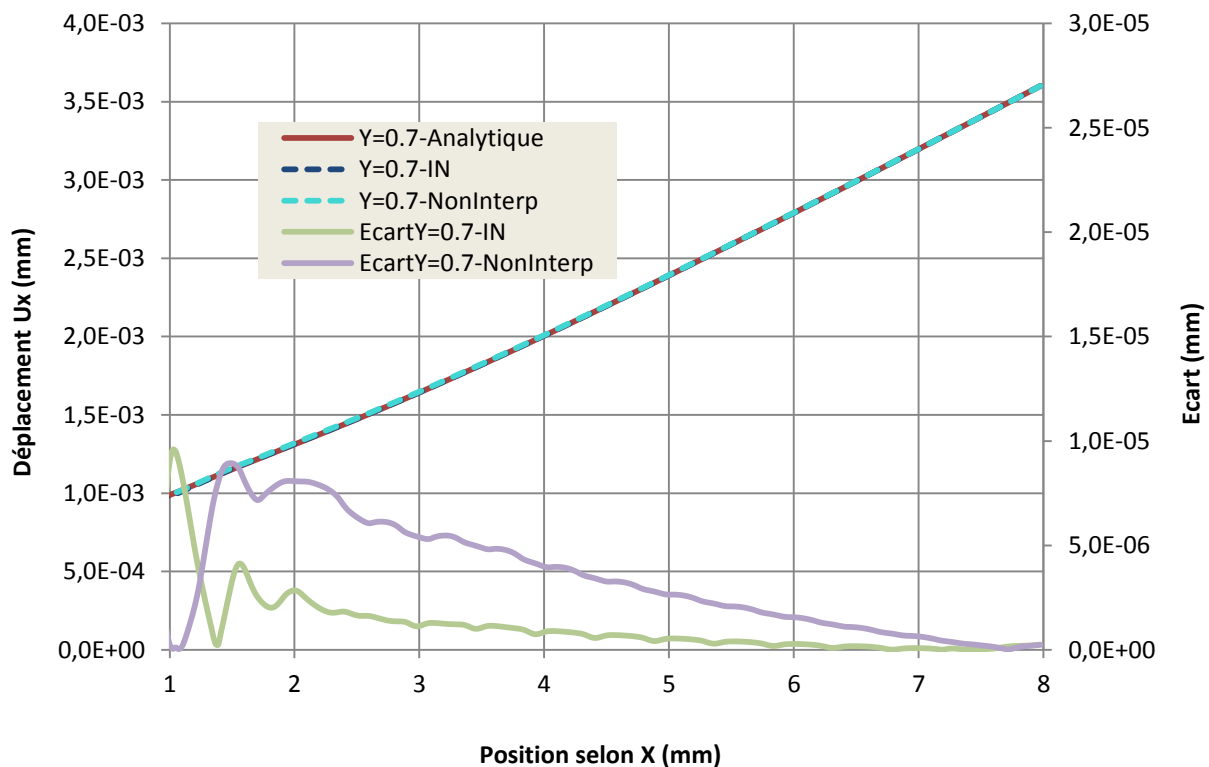


*Tableau 4 : Comparaison des écarts de distribution de contrainte des modèles MLS Mixte pour un exemple de plaque percée*

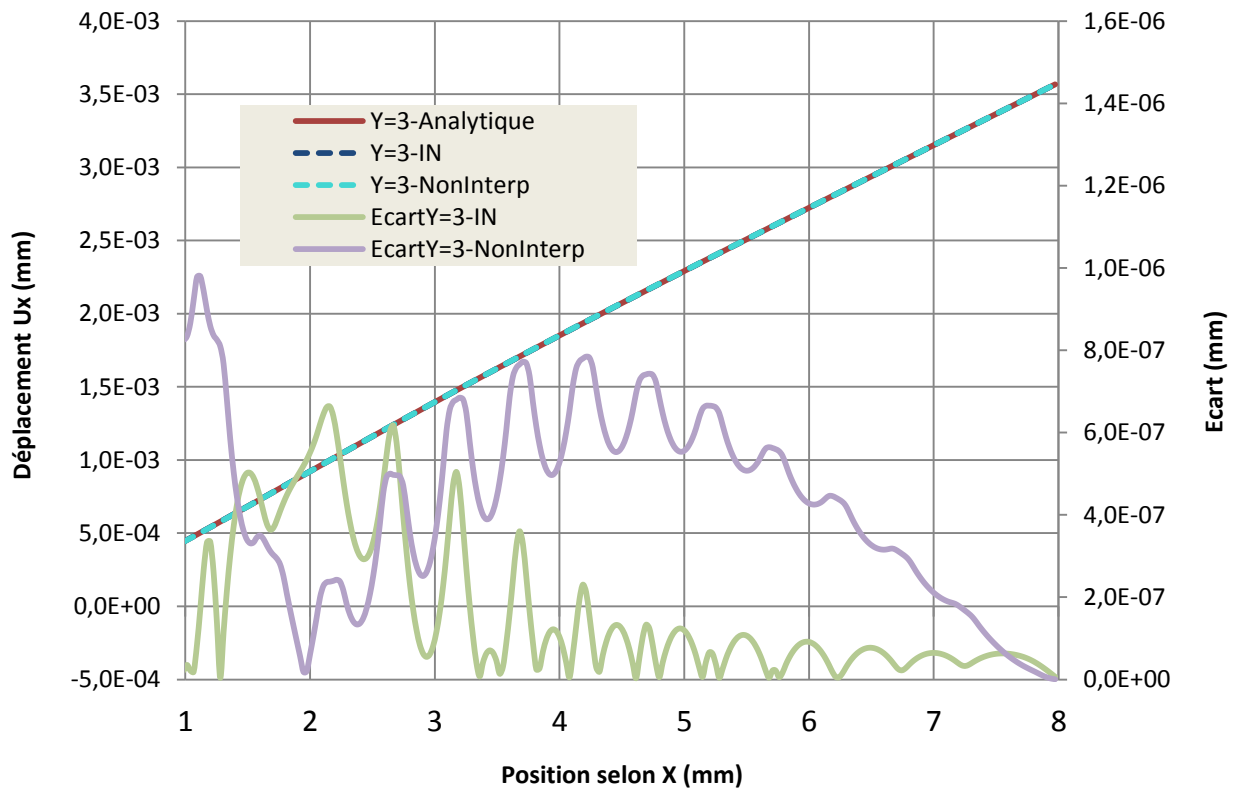
Nous pouvons donc conclure que le choix du support a un effet certain sur la précision du modèle Mixte MLS-MEF. Néanmoins, le choix de la taille du support par l'intermédiaire des longueurs  $a_i$  et  $b_i$  n'est jamais simple à définir. Le premier critère consiste à trouver une taille locale des supports afin de garantir la construction des fonctions de forme en tous points. Les choses se compliquent lorsque nous devons faire appel à des critères de visibilité avec apparition de fissures. Une étude plus complète est présentée notamment dans la thèse de Julien Yvonnet (2006) à ce sujet.

Sensibilité à la nature des fonctions poids classiques ou selon une forme de Shepard

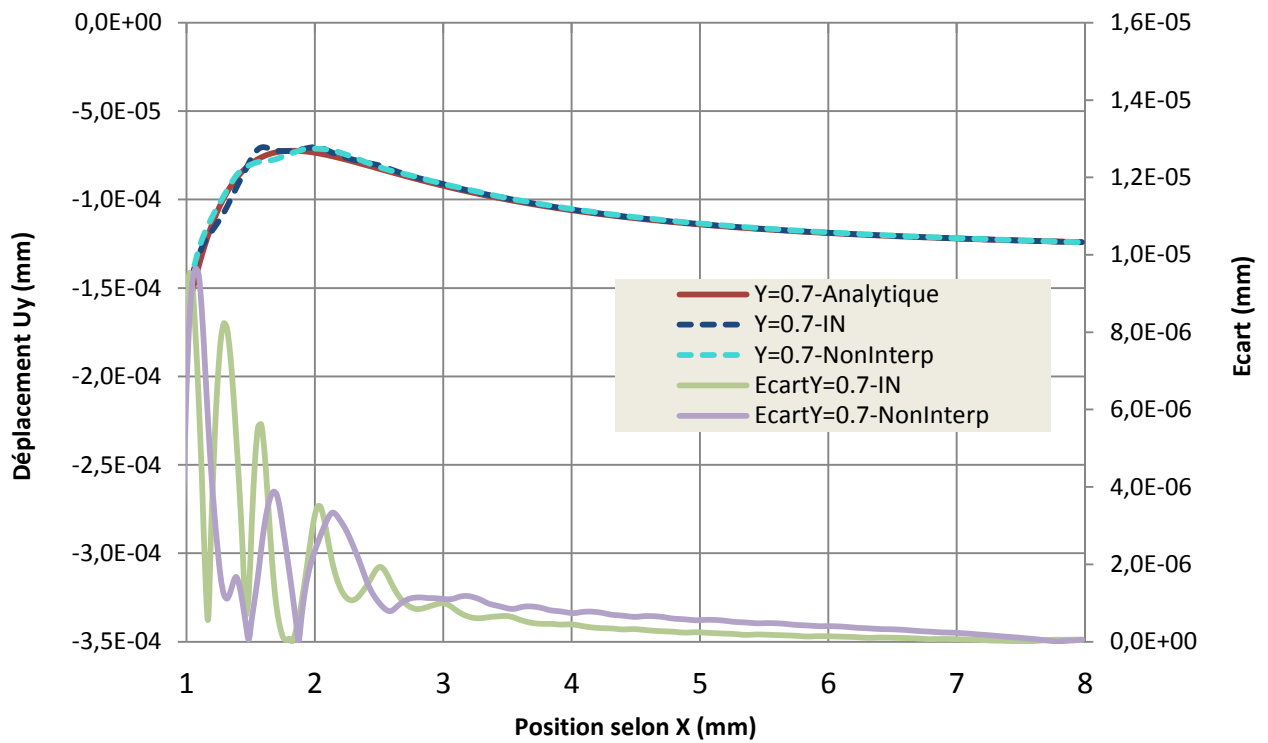
Nous allons terminer cet exemple par l'étude de la sensibilité des fonctions poids employés pour la construction des fonctions de forme. Nous voulons tester l'influence des fonctions de Shepard (notée IN) par rapport à des fonctions poids classiques polynômiales (notée NonInterp). Le support est identique pour les deux configurations  $a_i=b_i=1.2$  mm. Nous avons tracé sur les *Figure 2-28 a-d* les composantes en déplacement en écart par rapport à la solution analytique. Nous constatons que la solution non-interpolante est moins précise que la solution interpolante. Même lorsque l'évolution du déplacement est quasi-linéaire (voir *Figure 2-28b*) nous visualisons des ordres d'écart beaucoup plus importante avec la solution non-interpolante et plus particulièrement dans la zone 100% MLS. Néanmoins, la solution « NonInterp » génère une approximation beaucoup mieux lissées que l'approximation « IN », ceci s'observe bien au niveau du tracé de la *Figure 2-28 c*.



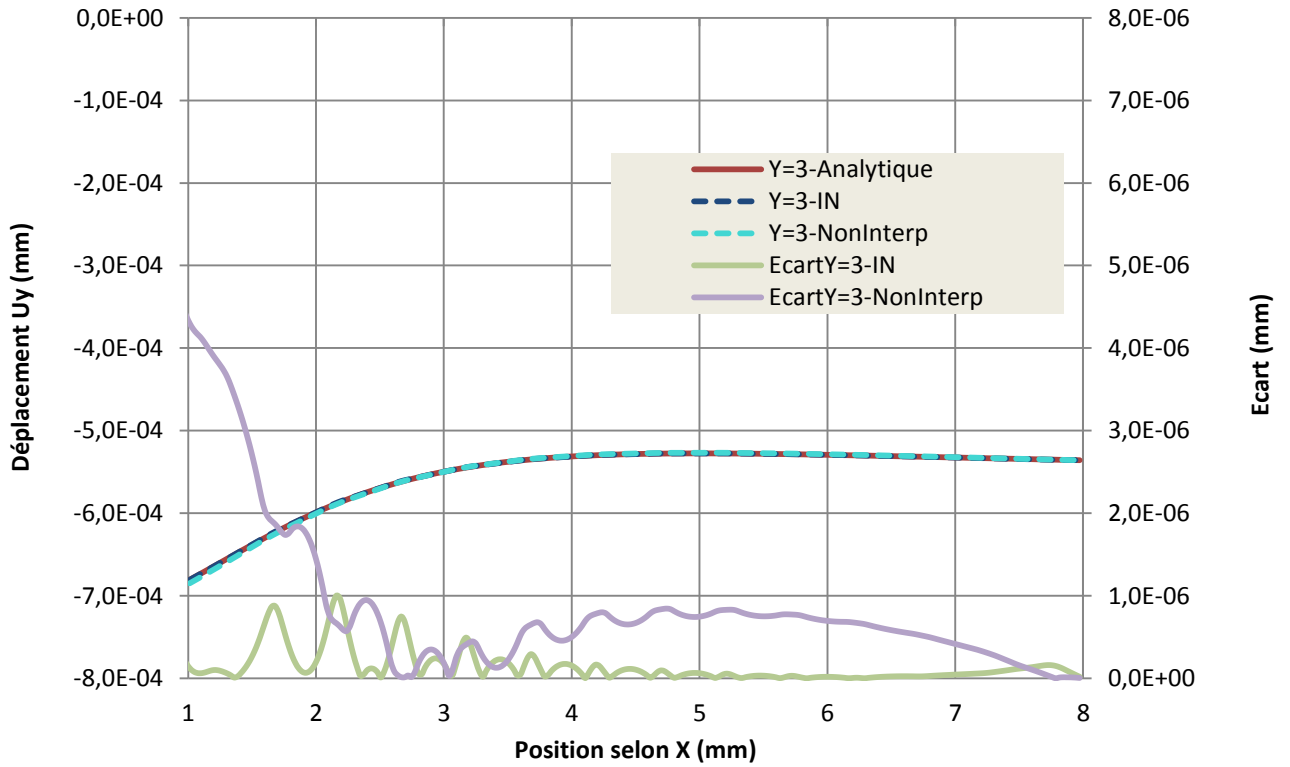
(a)



(b)



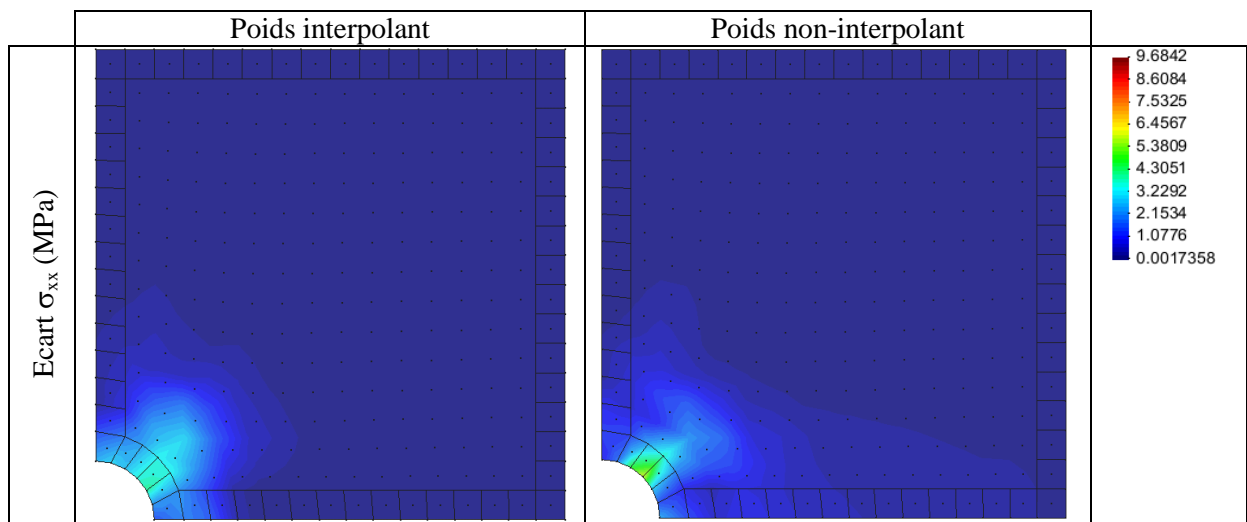
(c)



(d)

Figure 2-28 : Déplacement analytique, MLS en intégration nodale à gradient régularisé en utilisant des fonctions de forme interpolantes (IN) et non-interpolantes (NonInterp) et leurs écarts selon x (a)  $u_x$  au tracé  $y=0.7$  mm (b)  $u_x$  au tracé  $y=3.0$  mm (c)  $u_y$  au tracé  $y=0.7$  mm (d)  $u_y$  au tracé  $y=3.0$  mm

Si nous nous intéressons à la répartition de l'écart des composantes en contrainte par rapport à la solution analytique. Les différences en écarts sont moins perfectibles entre les deux cas IN et NonInterp. A première vue, le cas IN semble meilleure mais de très peu.



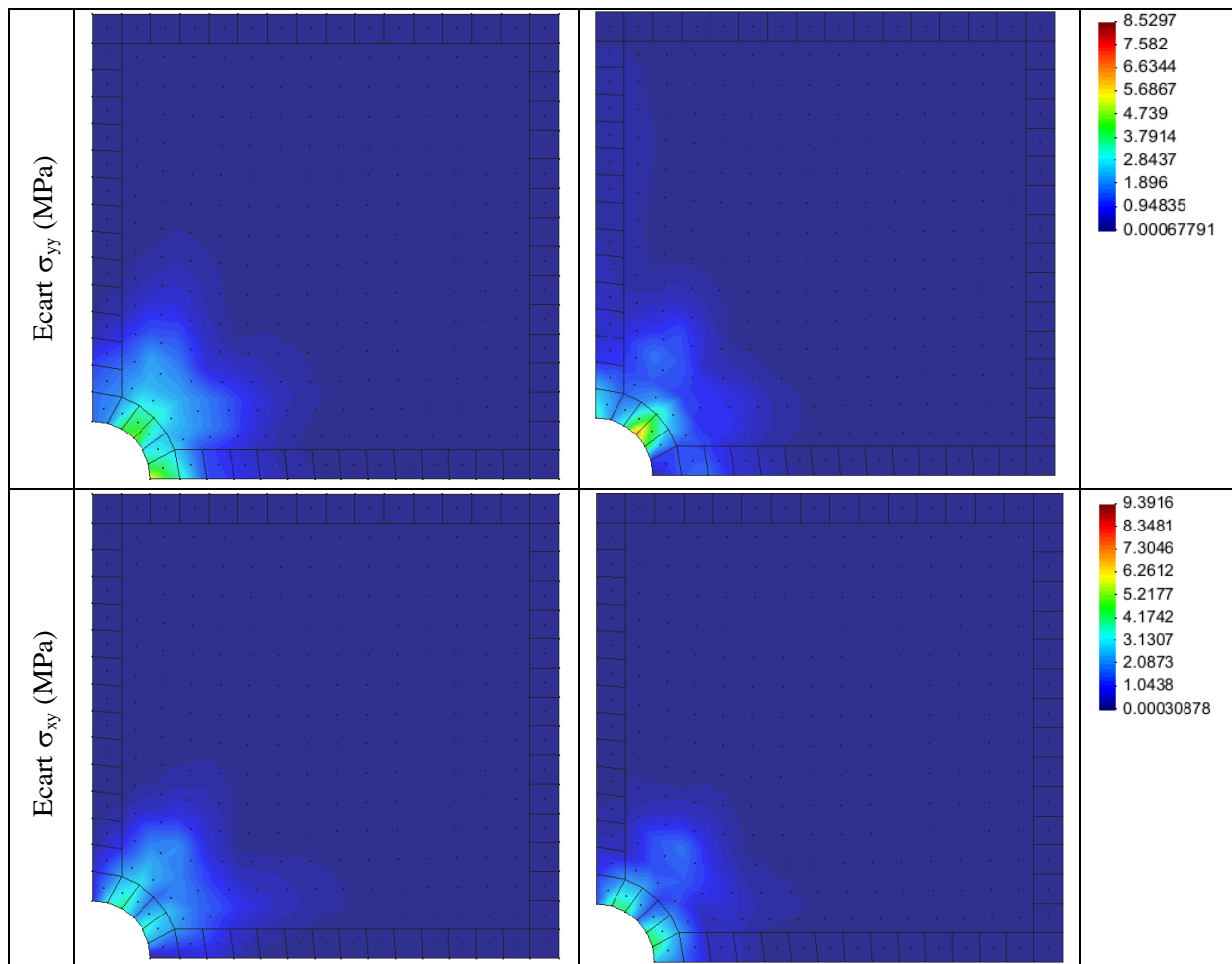


Tableau 5: Comparaison des écarts de distribution de contrainte des modèles MLS Mixte pour un exemple de plaque percée

Le tableau ci-dessous résume l'influence de la forme des fonctions de poids et la taille de leurs supports, sur l'écart par rapport à la solution analytique en contrainte.

	Fct de forme interpolant	Fct de forme non-interpolante
Support limité	Ecart $\sigma_{xx\_max}$ =4.118 MPa	Ecart $\sigma_{xx\_max}$ =6.006 MPa
	Ecart $\sigma_{yy\_max}$ =6.469 MPa	Ecart $\sigma_{yy\_max}$ =6.466 MPa
	Ecart $\sigma_{xy\_max}$ =4.182 MPa	Ecart $\sigma_{xy\_max}$ =4.677 MPa

Support large	Ecart $\sigma_{xx\_max}=7.264$ MPa	Ecart $\sigma_{xx\_max} =6.761$ MPa
	Ecart $\sigma_{yy\_max}=10.342$ MPa	Ecart $\sigma_{yy\_max} =6.436$ MPa
	Ecart $\sigma_{xy\_max} =4.435$ MPa	Ecart $\sigma_{xy\_max} =5.056$ MPa

Tableau 6 : Ecart maximums des croisements de configurations

D'après le *Tableau 6*, nous remarquons que la taille du support à une plus grande influence que la forme de la fonction poids. En effet, l'écart en contrainte maximum  $\sigma_{xx}$  augmente de 4.118 MPa à 7.264 MPa, si la taille de support devient large et le nombre de nœuds MLS qui participent à l'approximation augmente. En fait, lorsque le support est large le caractère interpolant des fonctions de forme n'est pas aussi influent qu'en support limité. Nous pouvons donc conclure que la solution « IN » semble plus performante, de plus l'utilisation des fonctions de forme interpolantes est plus appropriée à la gestion des transformations finies.

### 2.5.2 Modélisation d'un essai de flexion pure

Nous allons maintenant étudier la sensibilité du modèle MLS-MEF Mixte par rapport à la discrétisation nodale de la structure. L'intégration nodale est conservée ainsi que des supports de fonction poids carré de taille ( $a_i=b_i=1.5$  mm), les fonctions de Shepard sont utilisés pour définir la forme des fonctions poids. Enfin la zone MLS-MEF est discrétisée avec des éléments quadrangulaires bilinéaires à 4 nœuds, le reste de la structure est discrétisée par des nœuds MLS.

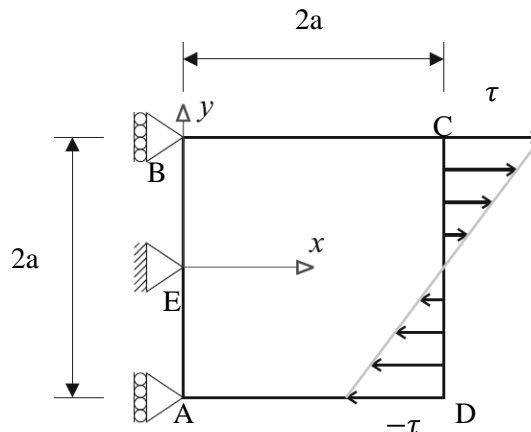


Figure 2-29 : Modèle de flexion pure pour l'examen de l'effet de distorsion

Le modèle choisi est un cas de flexion pure en 2D d'un carré de taille  $2a \times 2a$ . La géométrie de cette structure et l'ensemble des conditions aux limites sont répertoriés sur la *Figure 2-29*.

La solution analytique en termes de contraintes, de cet exemple est connue, à savoir,

$$\sigma_{xx} = \tau \frac{y}{a} \quad 2.79$$

$$\sigma_{yy} = 0 \quad 2.80$$

$$\sigma_{xy} = 0 \quad 2.81$$

où  $\tau$  est le niveau maximum de la contrainte au niveau de la fibre supérieure. A partir des relations constitutives en élasticité, le champ des déformations exact est défini, et le déplacement se présente sous la forme suivante,

$$u_x = \frac{\tau}{Ea} xy \quad 2.82$$

$$u_y = \frac{-\tau}{2Ea} (\nu y^2 + x^2) \quad 2.83$$

#### Conditions aux limites :

Sur AB,  $u_x = 0$  ; Sur DC,  $u_x = \frac{2\tau}{E} y$  et  $u_y = \frac{-\tau}{2Ea} (\nu 4a^2 + x^2)$  pour  $y = 2a$  ; et au point E,  $u_y = 0$ .

#### Dimensions du problème mécanique

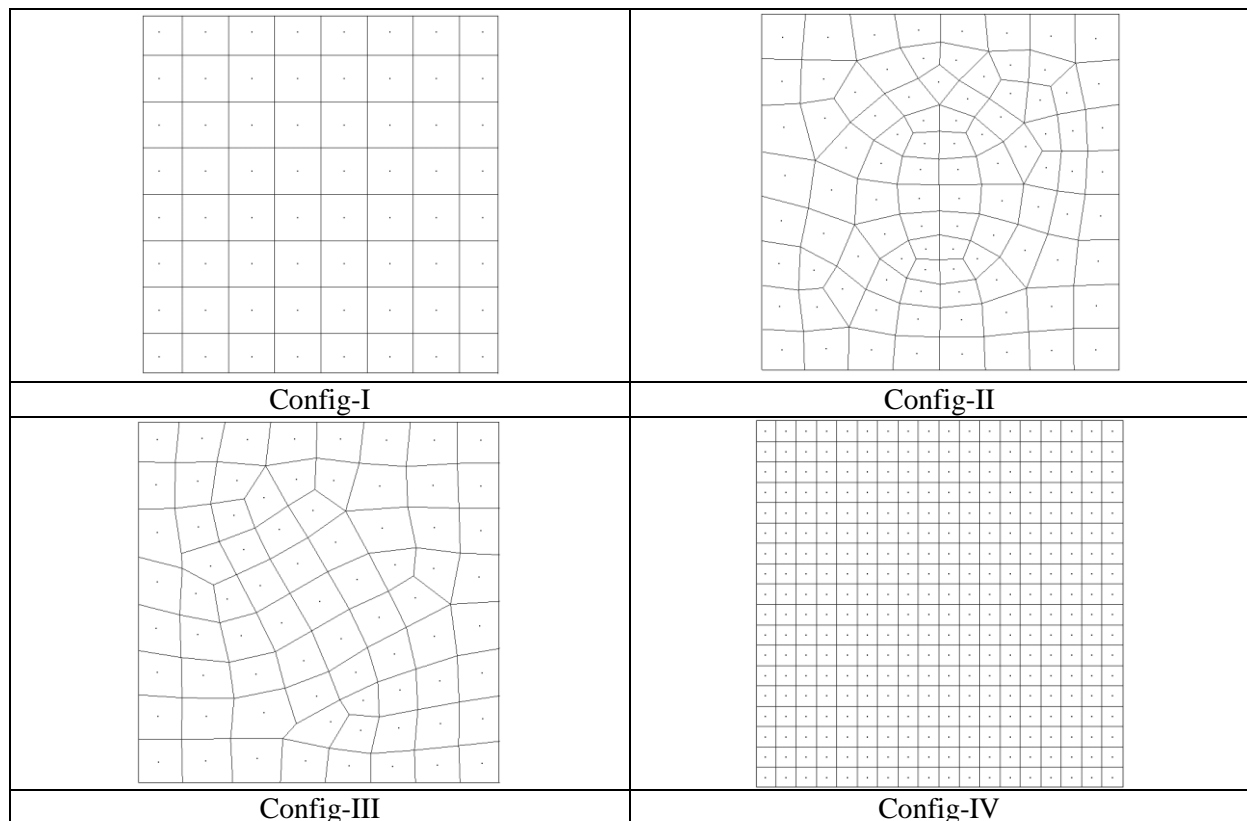
Nous avons choisi les grandeurs mécaniques suivantes pour ce problème. Pour les dimensions  $a=5$ . mm. Au niveau du matériau, le module d'Young  $E=210$  GPa et le coefficient de Poisson  $\nu=0.3$ .

Le chargement imposé est de  $\tau=100$  MPa.

#### Les différentes configurations de discrétisation

Nous allons tester différentes configurations de discrétisation nodale de la structure regroupées dans la *Figure 2-30*.

- Config-I : Répartition régulière et structurée des nœuds MLS avec un espacement de 1 mm
- Config II : Discrétisation libre des nœuds MLS avec des changements de taille des cellules de Voronoï
- Config III : Discrétisation libre des nœuds MLS avec des tailles de cellules de Voronoï quasi identiques. Un effet de rotation des cellules à  $45^\circ$  est imposé au centre de la plaque
- Config IV : Répartition régulière et structurée des nœuds MLS avec un espacement de 0.5 mm



*Figure 2-30 : Les différentes configurations de discrétisation nodale*

*Comparaison des champs de déplacement par rapport à la solution analytique*

Nous allons vérifier la précision de ces quatre configurations de discrétisation nodale par rapport à la solution analytique en déplacement. La *Figure 2-31* montre la répartition du champ de déplacement dans le cas de la Config-I. La *Figure 2-32* regroupe l'évolution des déplacements  $U_x$  et  $U_y$  sur différentes lignes de traçage ( $y = -5. \text{ mm}$ ,  $y = -2.5 \text{ mm}$  et  $y = 0. \text{ mm}$ ), selon les quatre configurations, ainsi que leurs écarts respectifs par rapport à la solution de référence. Les quatre configurations donnent des écarts du même ordre de grandeur et leurs évolutions sont quasi-identiques. Nous remarquons que la config-IV tend à être plus précise donc le nombre de points de discrétisation semble avoir un effet mais dans le cas de cet exemple le gain de précision est médiocre au niveau du champ de déplacement.



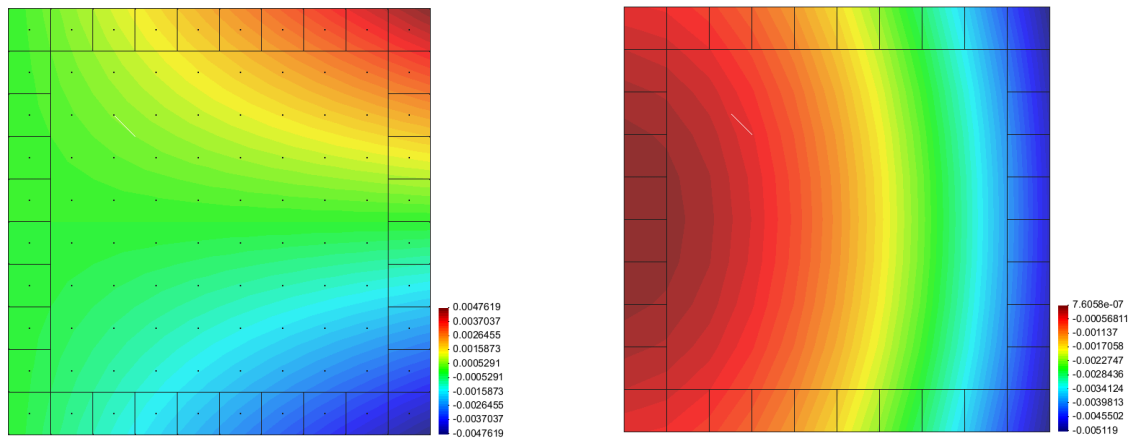
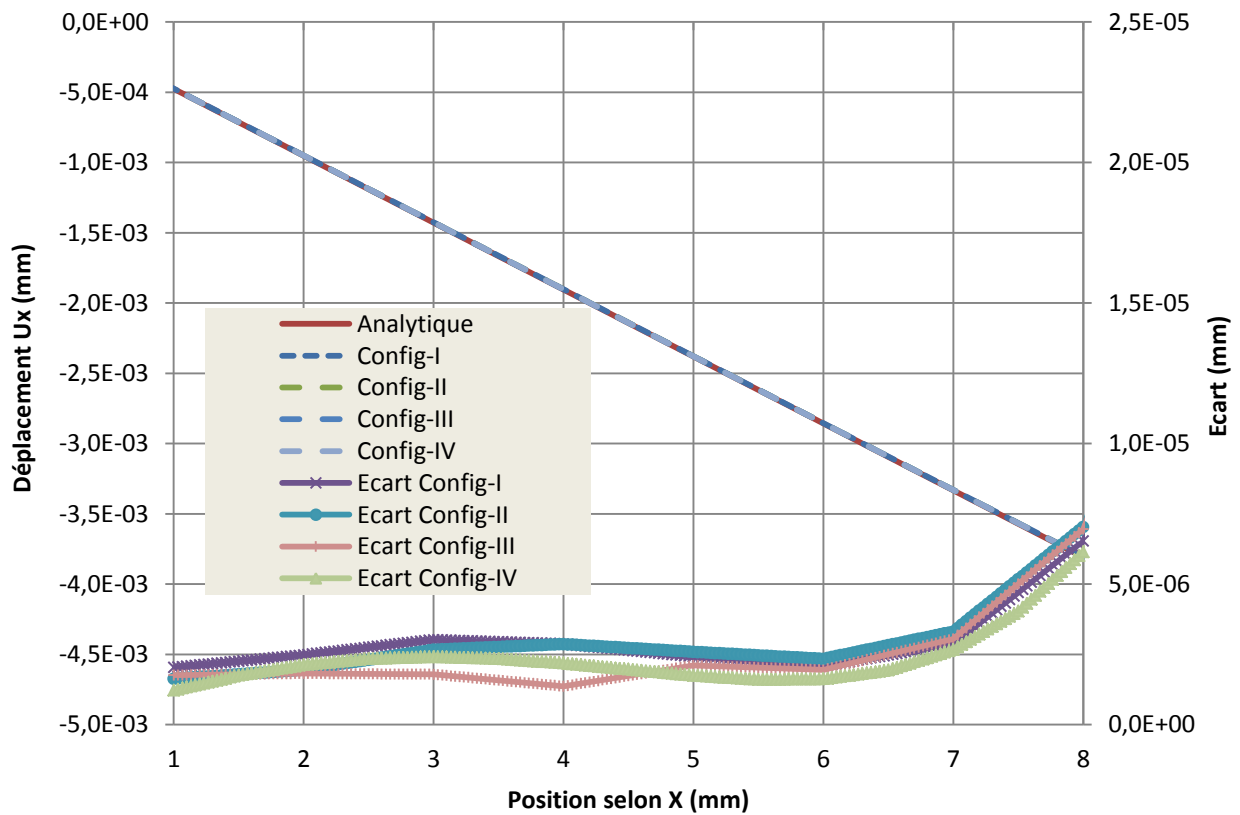
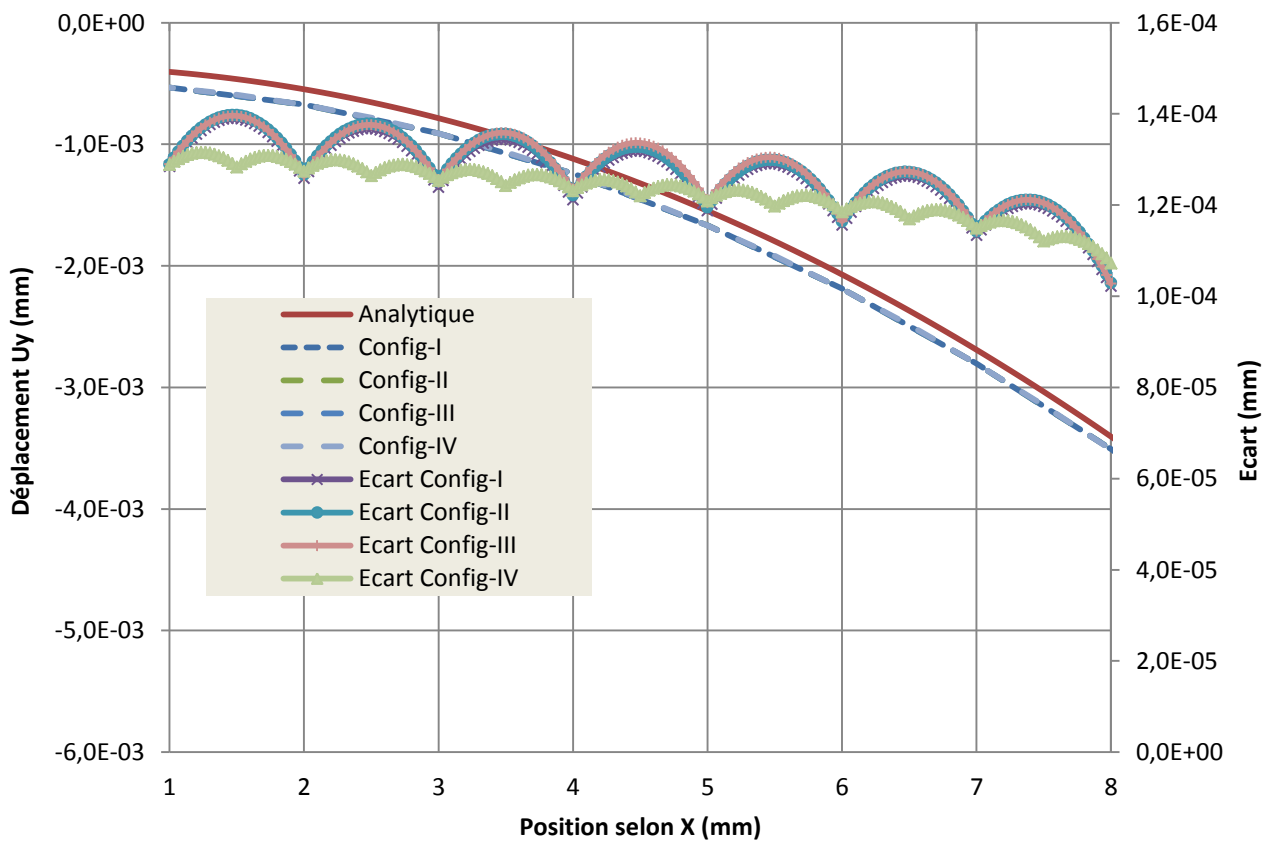
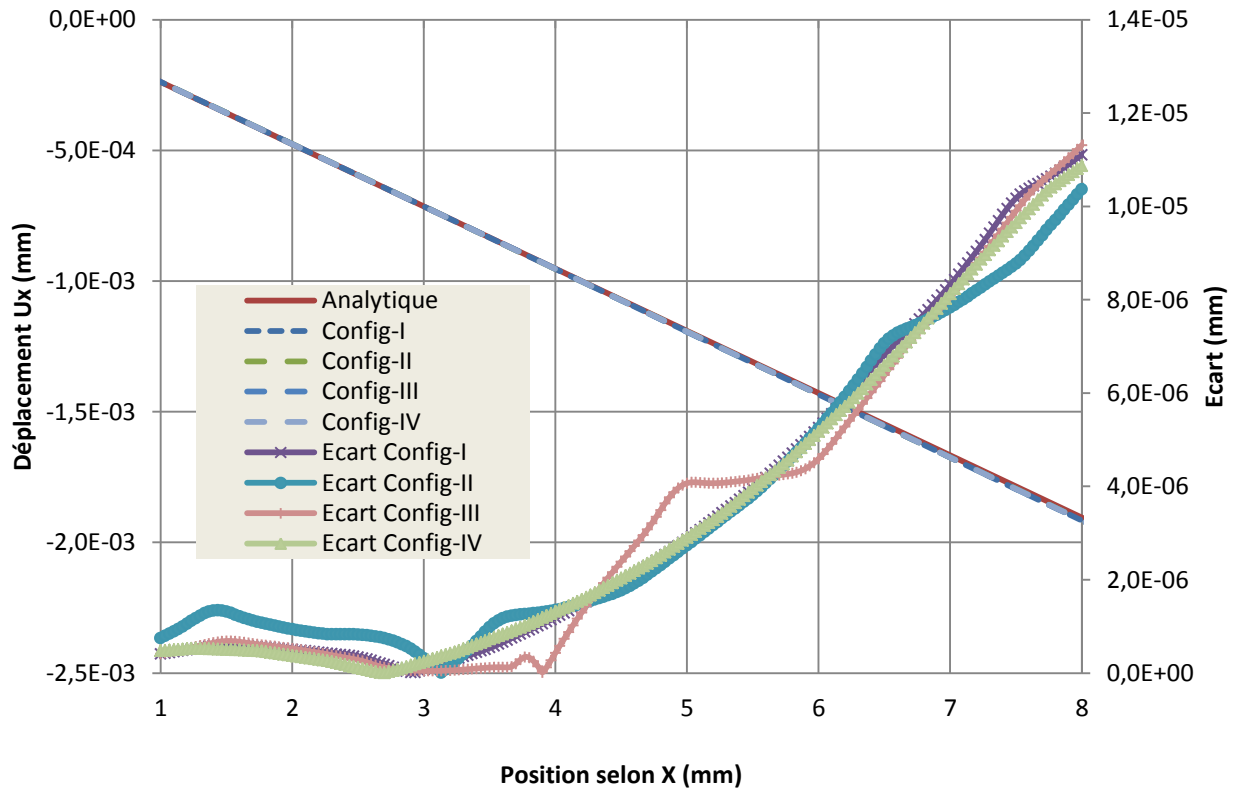


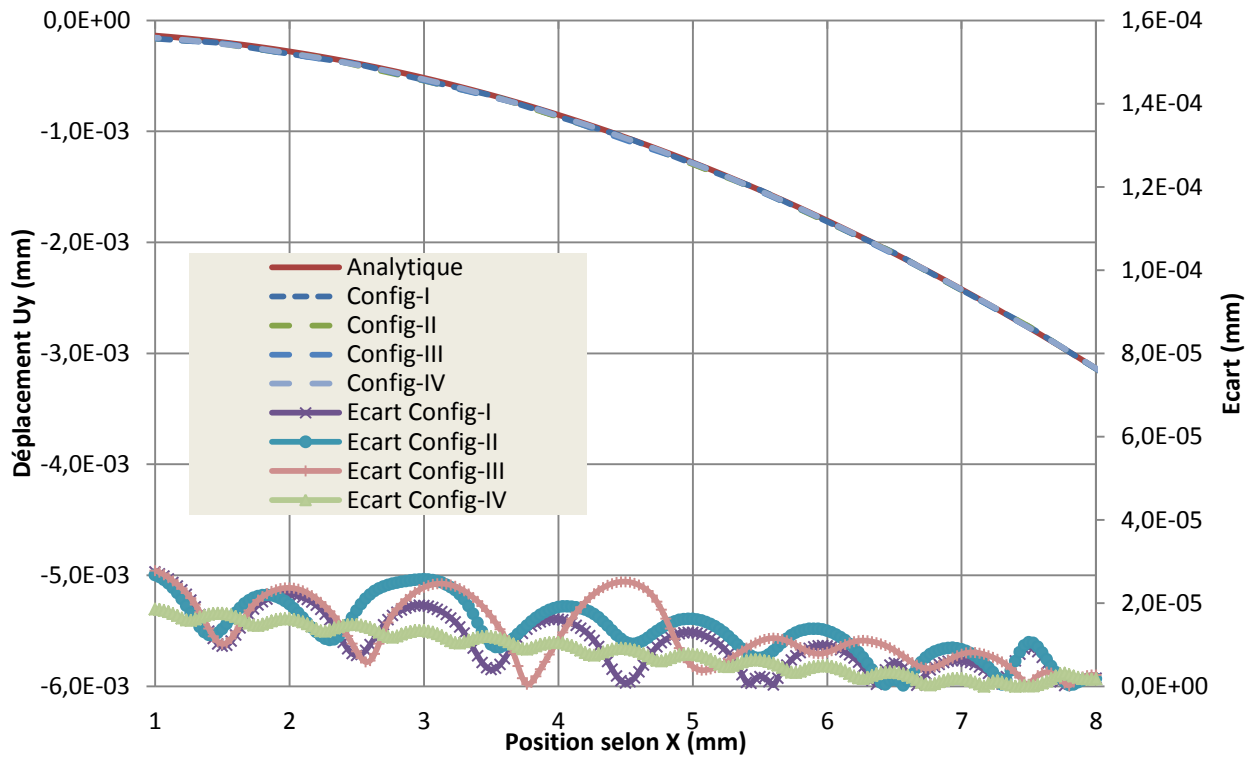
Figure 2-31 : Déplacements  $u_x$  (à gauche) et  $u_y$  (à droite) en mm pour une plaque en flexion pure dans le cas de la config-I

Dans le cas de la Figure 2-32 c que le déplacement numérique  $U_y$  le long du bord AD est légèrement décalé par rapport à la solution analytique. Ce décalage peut s'expliquer par l'effet des coins C et D lieux de discontinuités de contraintes.

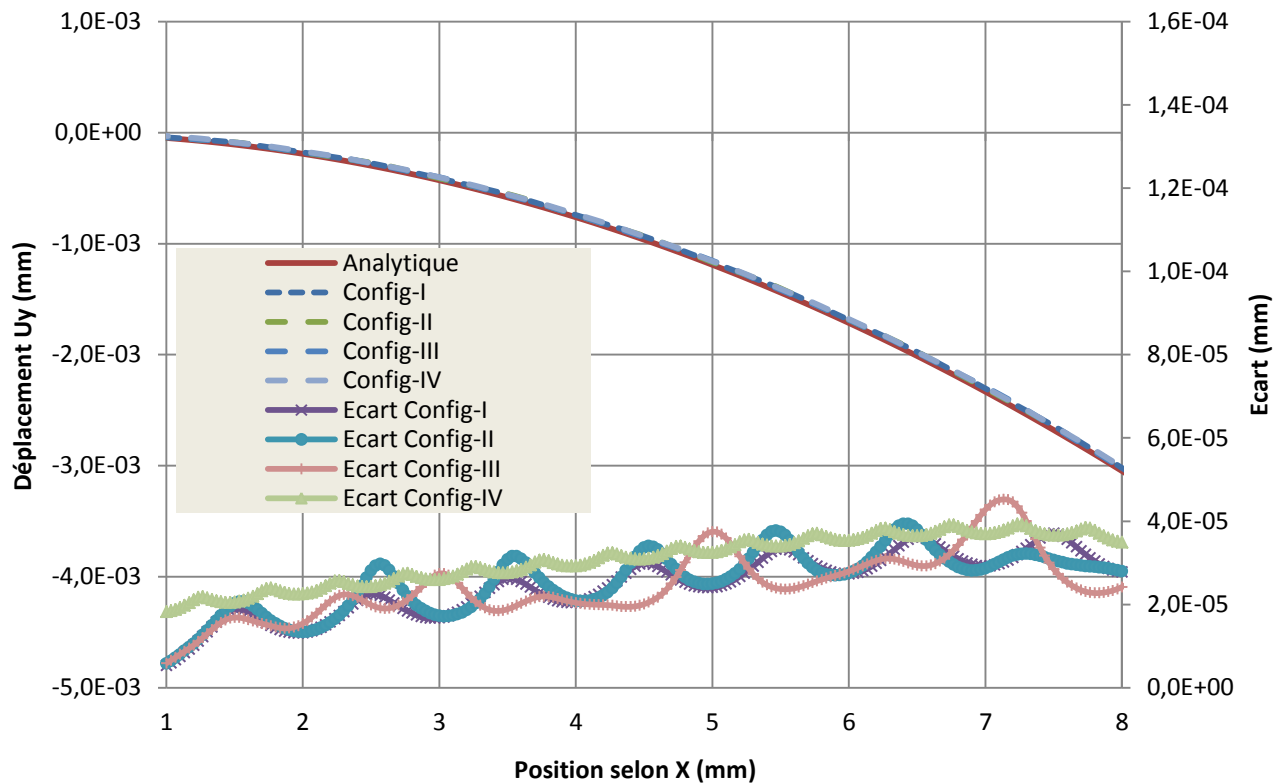


(a)





(d)

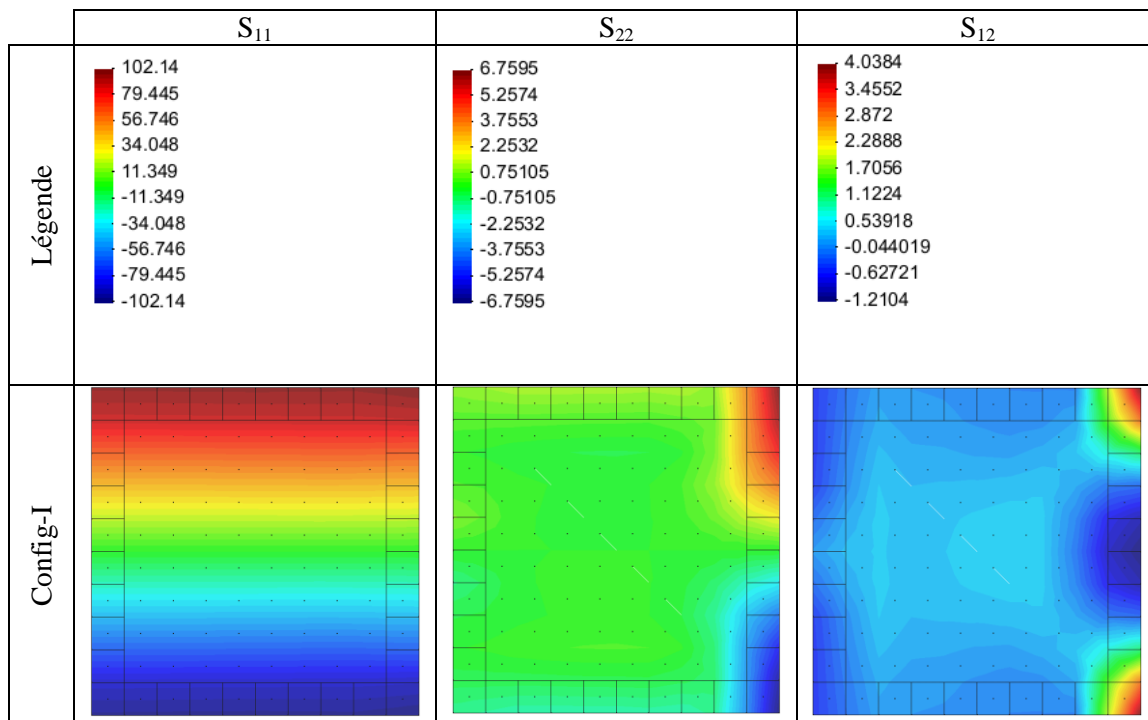


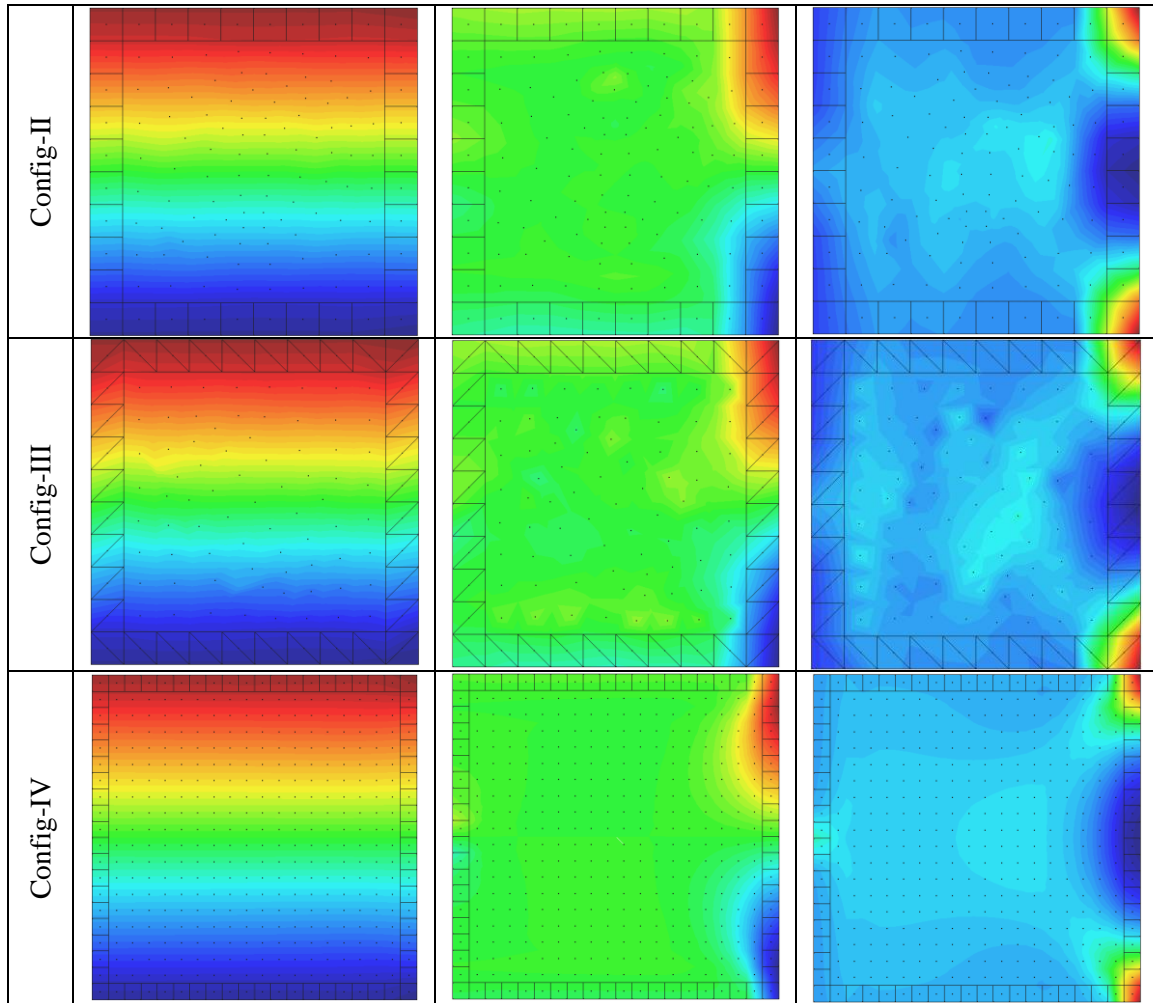
(e)

Figure 2-32 : Déplacement analytique, MLS pour quatre configurations et leurs écarts selon  $x$  (a)  $u_x$  au tracé  $y = -5.0$  mm (b)  $u_x$  au tracé  $y = -2.5$  mm (c)  $u_y$  au tracé  $y = -5.0$  mm (d)  $u_y$  au tracé  $y = 0$  mm (e)  $u_y$  au tracé  $y = -2.5$  mm

Comparaison des champs de contrainte par rapport à la solution analytique

Les *Tableau 7* et *Tableau 8* représentent respectivement les distributions des contraintes, ainsi que leurs écarts par rapport à la distribution de contrainte de la solution de référence. Le *Tableau 7* montre une répartition linéaire sur les contraintes, spécifiquement pour la composante  $\sigma_{xx}$ . Pour les quatre configurations, nous avons obtenus des composantes  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  non nulles, nous expliquons cette différence par l'incapacité du modèle à traiter les problèmes de discontinuité des contraintes au niveau des coins D et C. Nous constatons que l'écart maximum des composantes  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  se localisent au niveau de ces zones de coin. Nous pouvons donc déjà affirmer que l'approximation diffuse ne permet pas de résoudre ce type de discontinuité au même titre que la méthode MEF. Dans le cas des répartitions des contraintes, la manière de discrétiser la structure à un effet plus net. Les configurations I et IV, discrétisation régulière, permet d'assurer une répartition plus homogène des contraintes et conserve la répartition antisymétrique selon l'axe x. La rotation des cellules imposée au niveau de la configuration III influence modestement la répartition des contraintes. Le changement de taille de cellule pratiqué par la config-III n'influence que peu la répartition des contraintes. L'orientation des cellules d'intégration a donc globalement un effet sur la précision du modèle Mixte MLS-MEF plus important que la taille de la cellule. La différence de répartition est beaucoup plus influencée par la position des nœuds MLS, ceci est beaucoup plus visible à la lecture des cartographies d'écart de contrainte.





*Tableau 7: Comparaison des écarts de distribution de contrainte du modèle MLS Mixte pour différentes configurations de distribution de nœuds MLS*

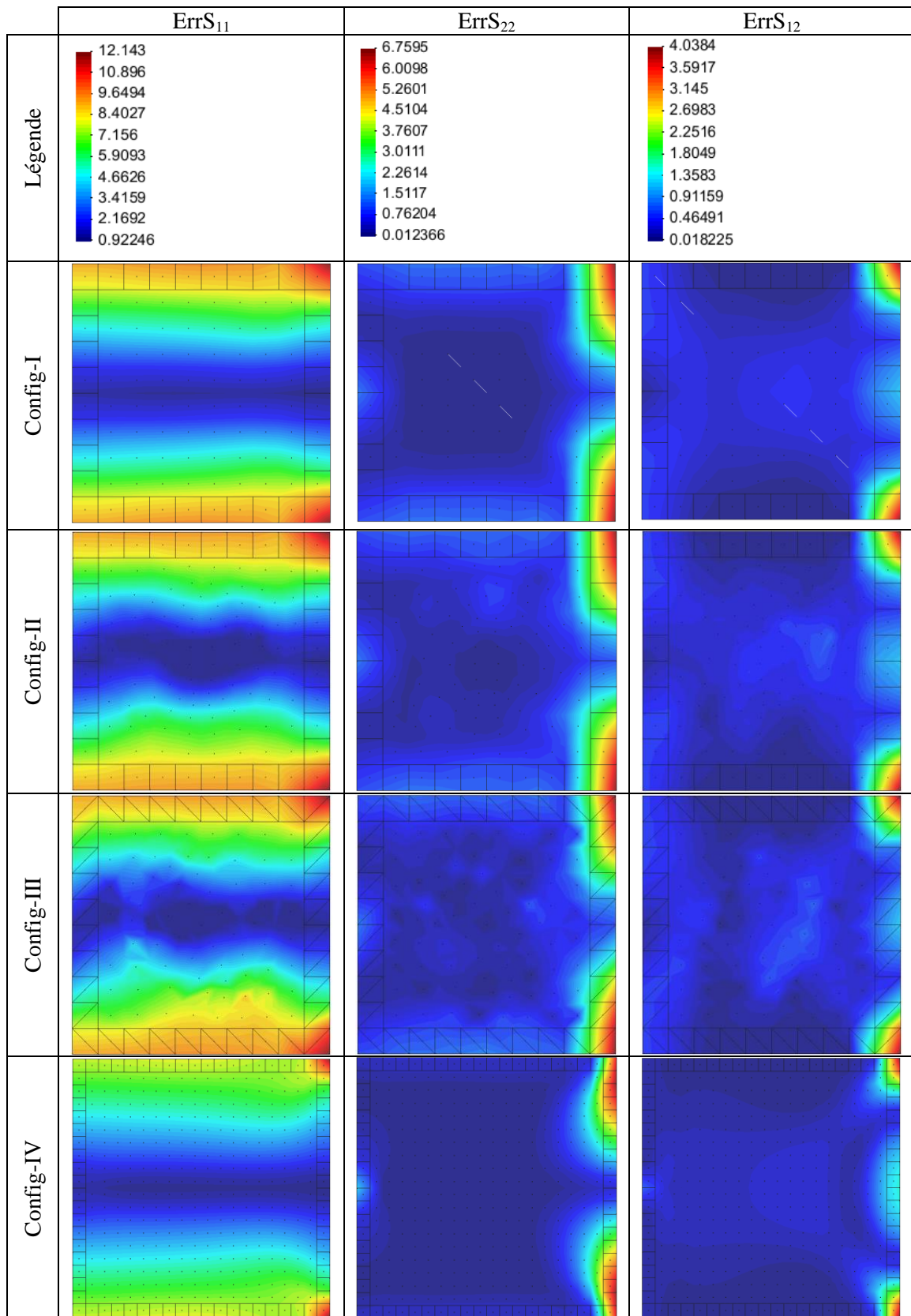


Tableau 8 : Comparaison des écarts de distribution de contrainte du modèle MLS Mixte pour différentes configurations de distribution de nœuds MLS

Nous pouvons donc conclure que dans le cas de cet exemple, la discrétisation nodale influence peu la discrétisation du champ en déplacement mais à plus d'effet sur la répartition en contrainte. Ceci peut s'expliquer par le lien qui existe sur la construction du tenseur des déformations par gradient régularisé et la forme de la cellule d'intégration.

## 2.6 CONCLUSIONS

Dans ce chapitre nous avons mis en place une discrétisation MEF aux frontières du domaine MLS à travers une procédure de couplage MLS-MEF. Nous avons élaboré un code numérique Mixte MLS-MEF dont la discrétisation se base sur l'approximation diffuse pour la construction des fonctions de forme selon différentes stratégies de fonction poids. Différentes solutions d'intégration numérique ont été testées, à savoir, l'intégration numérique de Gauss-Legendre et l'intégration nodale stabilisée par l'utilisation d'un gradient régularisé. Nous avons validé ce code numérique à travers différents essais mécaniques et les premiers résultats sont concluants. A partir de l'étude des mêmes exemples mécaniques, Quak et al. (2011) sont arrivés à des conclusions similaires, à savoir que l'intégration nodale donne des meilleurs résultats que l'intégration de Gauss Legendre et que l'intégration nodale est moins affectée par la discrétisation spatiale.

Dans ce chapitre nous nous sommes limités au cadre des petites perturbations ; dans le chapitre suivant nous allons nous intéresser à intégrer différentes sources de non-linéarités (grandes déformations, modèle de comportement non linéaire,...) et proposer un élément particulier pour traiter spécifiquement la zone MEF. Au bout de cette étude, nous retenons la configuration du modèle « Mixte » à intégration nodale qui semble la plus performante.





## Chapitre3      **COUPLAGE MLS-MEF APPLIQUÉ A DES PROBLEMES NON LINÉAIRES ÉLASTOPLASTIQUES EN TRANSFORMATIONS FINIES**

Dans le chapitre précédent, nous avons proposé un modèle couplé MLS-MEF traité dans le cadre de problèmes mécaniques linéaires. Dans ce chapitre nous développons une introduction à la simulation numérique en mécanique des solides déformables en conditions non linéaires. Différentes sources de non-linéarités seront présentées dans ce chapitre, à savoir l'introduction d'une description des transformations finies en grandes déformations, l'utilisation d'un modèle de comportement élastoplastique macroscopique avec différentes natures d'écrouissage (isotrope et cinématique) et prise en compte des effets d'adoucissement par endommagement ductile.

Un schéma de résolution dynamique explicite basé sur une formulation lagrangienne réactualisée est utilisé pour résoudre les problèmes de mécanique non linéaires discrétisés suivant une approche Mixte MLS-MEF. Dans un premier temps, nous avons complété la définition de la zone MEF par un élément quadrangulaire à déformation postulée initialement proposé par Li et Liu (1997), afin d'éviter les problèmes de blocage et de non-linéarités géométriques qui a été ensuite étendu à notre problématique. Dans un second temps, nous discutons de la notion de grandes déformations et objectivité dans les zones MLS et MLS-MEF, ainsi qu'une réflexion sur le calcul de la matrice de masse diagonalisée et des conditions de stabilité. Pour valider le modèle, ainsi que l'approche numérique, nous avons réalisé des exemples de calcul non linéaires en grandes déformations avec endommagement.

### **3.1      MODÉLISATION DES TRANSFORMATIONS FINIES**

Cette section est consacrée à l'introduction des transformations finies. Nous présentons ensuite un modèle de comportement élastoplastique avec différentes natures d'écrouissage (cinématique et isotrope) avec prise en compte de l'endommagement isotrope ductile. Les équations de comportement sont décrites dans un formalisme purement eulérien qui permet de bien décrire les transformations finies sur la configuration actuelle déformée. Pour s'affranchir des problèmes d'objectivité ou du respect du principe de l'indifférence matérielle, dès qu'une anisotropie apparaît dans le comportement, nous avons opté pour l'utilisation classique d'une formulation en référentiel tournant qui permet

d'écrire les équations de comportement dans une configuration locale lagrangienne par son orientation et eulérienne par les valeurs propres de toutes les grandeurs mécaniques tensorielles [Sidoroff (1982), Dogui (1983), Detraux (1985), Touzot (1988) parmi d'autres].

### 3.1.1 Gradient de la transformation

Considérons un solide déformable dans une configuration initiale  $C_0$  (formulation lagrangienne) à l'instant  $t_0$  et dans une configuration courante  $C_t$  (formulation eulérienne) à un instant  $t$  quelconque (Figure 3-1). Dans un repère cartésien,  $\vec{X}$  et  $\vec{x}$  sont, respectivement, la position spatiale du point matériel « M » dans la configuration initiale et courante.

Le vecteur déplacement et le vecteur vitesse de chaque point du solide sont donnés comme suivant :

$$\vec{u} = \vec{x} - \vec{X} \rightarrow \vec{x} = \vec{X} + \vec{u} \quad 3-1$$

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \quad 3-2$$

Dans une description lagrangienne, le mouvement du milieu continu peut être défini par la fonction vectorielle bijective  $\underline{Y}$  qui définit le mouvement global du solide (Figure 3-1).

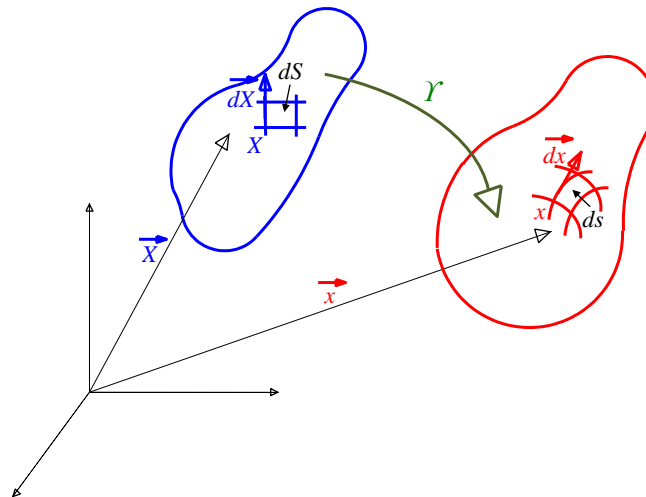


Figure 3-1 : Référentiel, repère et configuration de la transformation en grandes déformations

L'application linéaire tangente associée à la transformation  $\underline{Y}$  est comme suit,

$$d\vec{x} = \frac{\partial \underline{Y}}{\partial \vec{X}}(\vec{X}, t) d\vec{X} \text{ avec } \underline{F} = \frac{\partial \underline{Y}}{\partial \vec{X}} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}} \quad 3-3$$

Ainsi le gradient de la transformation est sous la forme suivante,

$$\underline{F}(\vec{X}, t) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}}(\vec{X}, t) = \underline{I} + \underline{\nabla} \vec{u} \quad 3-4$$

- *Notion de densité de charge*

Le champ des contraintes traduit les efforts de cohésion internes appliqués à travers un élément de surface interne. En grandes déformations, il suffit de choisir l'élément de référence et les efforts dans la configuration actuelle  $C_t$  ou celle de référence  $C_0$ .

Localement, le transport d'un élément de surface  $dS$  s'écrit comme suit,

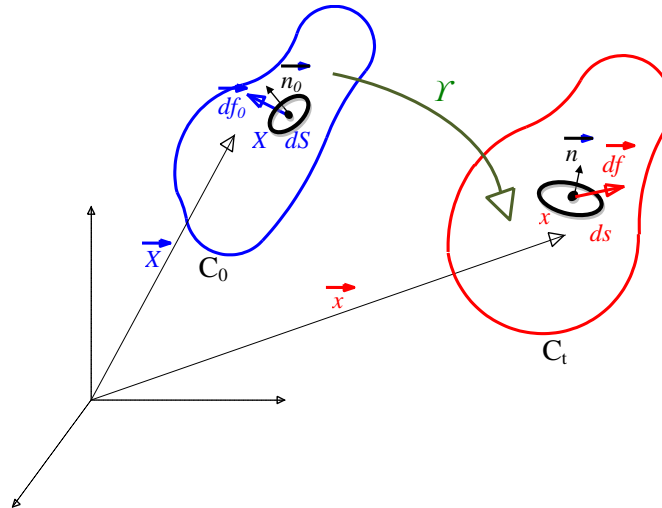
$$ds = J(\underline{F}) \underline{F}^{-1} dS \quad 3-5$$

avec  $J(\underline{F}) = \det(\underline{F}) = \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{v}{V}$ , conduisant ainsi au transport d'un élément de volume  $dV$ , à savoir,

$$dv = J(\underline{F}) dV \quad 3-6$$

tels que  $\rho_0$  et  $\rho$  représentent respectivement la masse volumique dans les configurations  $C_0$  et  $C_t$ .

Nous définissons, dans ce qui suit, des tenseurs de contraintes pour caractériser les efforts intérieurs s'exerçant entre deux points matériels. Soient  $d\vec{f}$  le vecteur contrainte, et  $d\vec{f}_0$  le vecteur contrainte transposé, ce qui traduit les efforts intérieurs à travers  $\vec{n} ds$  et  $\vec{n}_0 dS$ , respectivement (*Figure 3-2*).



*Figure 3-2 : Densités de charge dans les configurations initiale et finale*

Le tenseur eulérien de Cauchy est défini dans la configuration actuelle  $C_t$ , caractérisant les efforts de cohésion dans la configuration actuelle qui s'exerce à travers un élément de surface déformé, à savoir,

$$d\vec{f} = \underline{\sigma} \cdot \vec{n} ds \quad 3-7$$

La contrainte de Piola-Kirchhoff 1 est caractérisée dans la configuration actuelle, mais s'exerce en revanche à travers un élément de surface non déformé, à savoir,

$$d\vec{f} = \underline{\pi} \cdot \vec{n}_0 dS \quad 3-8$$

La contrainte de Piola-Kirchhoff 2 définit les efforts de cohésion dans la configuration de référence  $C_0$  et qui s'exerce à travers un élément de surface non déformé,

$$d\vec{f}_0 = \underline{F}^{-1} \cdot d\vec{f} = \underline{S} \cdot \vec{n}_0 dS \quad 3-9$$

- Relations entre  $\underline{\sigma}$ ,  $\underline{\pi}$  et  $\underline{S}$

$$\underline{\pi} = J(\underline{F}) \underline{\sigma} \cdot \underline{F}^{-T} \quad 3-10$$

$$\underline{S} = J(\underline{F}) \underline{F}^{-1} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{F}^{-T} = \underline{F}^{-1} \cdot \underline{\pi} \quad 3-11$$

Ainsi la relation entre les contraintes se traduit par :

$$J(\underline{F}) \underline{\sigma} = \underline{\pi} \cdot \underline{F}^T = \underline{F}^{-1} \cdot \underline{S} \cdot \underline{F}^T \quad 3-12$$

Il est à noter qu'en petites déformations, tous ces tenseurs de contrainte sont équivalents. Les lois de conservation sur les deux configurations sont résumées dans le *Tableau 11*.

### 3.1.2 Décomposition de la déformation totale

La décomposition polaire est un moyen pour éliminer la rotation de corps rigide dans la mesure des déformations. Ainsi, il est possible de séparer les rotations des déformations entre une configuration initiale  $C_0$  et une configuration finale  $C_t$  (*Figure 3-3*).

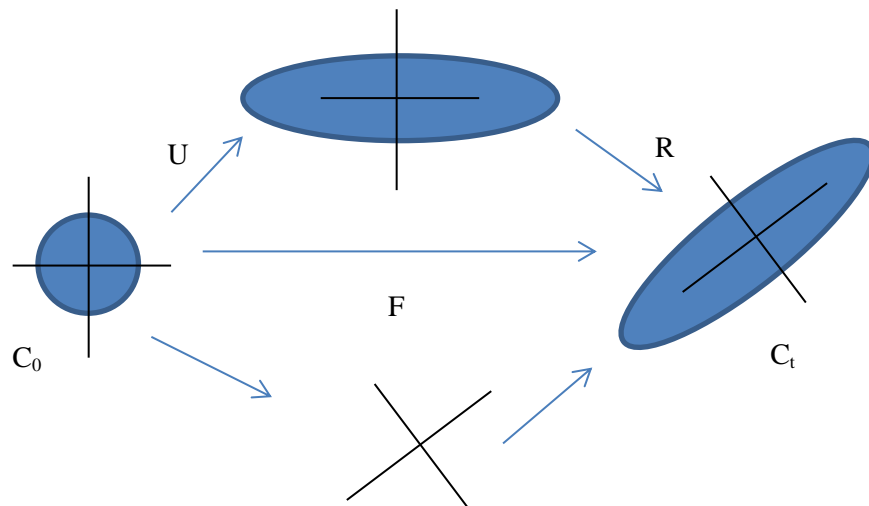




Figure 3-3: décomposition polaire de la transformation

La décomposition polaire peut être appliquée au gradient de transformation  $\underline{F}$ . Elle produit une transformation orthogonale en tenseur de rotation orthogonal  $\underline{R}$  ( $\underline{R}^{-1} = \underline{R}^T$ ); et les tenseurs définis positifs des déformations pures: droit  $\underline{U}$  ( $\underline{U} = \underline{U}^T$ ) et gauche  $\underline{V}$  ( $\underline{V} = \underline{V}^T$ ) (Figure 3-3), tel que,

$$\underline{F} = \underline{R} \cdot \underline{U} = \underline{V} \cdot \underline{R} \quad 3-13$$

Avec,

$$\underline{V} = \underline{R} \cdot \underline{U} \cdot \underline{R}^T \quad 3-14$$

$$\underline{R}^T \cdot \underline{R} = \underline{R} \cdot \underline{R}^T = \underline{I} \quad 3-15$$

La formulation de l'équation 3-13 existe alors sous la forme,

$$\underline{F}^T \cdot \underline{F} = \underline{U} \cdot \underline{R}^T \underline{R} \cdot \underline{U} = \underline{U}^2 \quad 3-16$$

Respectivement  $\underline{F} \cdot \underline{F}^T = \underline{V} \cdot \underline{R} \cdot \underline{R}^T \cdot \underline{V} = \underline{V}^2$ . De même, il existe un seul  $\underline{U} = \sqrt{\underline{F}^T \cdot \underline{F}}$  défini positif (respectivement  $\underline{V} = \sqrt{\underline{F} \cdot \underline{F}^T}$ ). L'unicité de la rotation est ainsi déduite. De plus, si  $\det(\underline{F}) > 0$ ,  $\underline{R} = \underline{I}$  pour former une rotation pure.

#### 3.1.1.1.1 Mesure des déformations

Pour définir les déformations du solide, nous introduisons la notion de tenseur de dilatation de Cauchy Green droit  $\underline{C}$  ou de Cauchy Green Gauche  $\underline{B}$ . En grandes déformations, et selon les expressions 3-16, ces tenseurs s'expriment par,

$$\underline{C} = \underline{F}^T \cdot \underline{F} = \underline{U}^2 \quad 3-17$$

$$\underline{B} = \underline{F} \cdot \underline{F}^T = \underline{V}^2 \quad 3-18$$

En se basant sur l'expression du gradient de transformation en équation 3-4, nous exprimons les tenseurs de déformation de Green-Lagrange et d'Euler-Almansi respectivement par  $\underline{E}$  et  $\underline{A}$ , à savoir,

$$\underline{E} = \frac{1}{2}(\underline{C} - \underline{I}) = \frac{1}{2}(\underline{H} + \underline{H}^T + \underline{H}^T \cdot \underline{H}) \quad 3-19$$

$$\underline{A} = \frac{1}{2}(\underline{I} - \underline{B}^{-1}) \quad 3-20$$

avec  $\underline{H} = \nabla \vec{u}$  et le terme  $\underline{H}^T \cdot \underline{H}$  caractérise la partie non linéaire de la déformation. Nous pouvons résumer le type de ces tenseurs sous la forme suivante :

	Lagrangien	Eulérien
Tenseur des dilatations	$\underline{C}, \underline{U}$	$\underline{B}, \underline{V}$
Tenseur des déformations	$\underline{E}$	$\underline{A}$

Tableau 9 : Types des tenseurs lagrangiens et eulériens

### 3.1.1.1.2 Le tenseur gradient des vitesses

L'évolution instantanée d'un vecteur matériel transporté par le mouvement est représentée par la formulation du gradient de transformation. Pour caractériser les vitesses, en se basant sur l'équation 3-4, le tenseur gradient des vitesses est défini par :

$$\underline{\dot{F}} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial \vec{X}}(\vec{X}, t) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vec{X} \partial t}(\vec{X}, t) = \underline{\nabla}_X \vec{V}(\vec{X}, t) = \underline{\nabla}_X \vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \underline{F} \quad 3-21$$

el que  $\vec{V}$  vecteur vitesse, dérivée matérielle par rapport au temps du vecteur position  $\vec{x}(\vec{X}, t)$ . Selon l'équation 3-21, le tenseur gradient des vitesses eulérien, non symétrique, est ainsi généré sous l'expression suivante :

$$\underline{L}(\vec{x}, t) = \underline{\nabla}_X \vec{v}(\vec{x}, t) = \underline{\dot{F}} \cdot \underline{F}^{-1} \quad 3-22$$

La décomposition du tenseur gradient de vitesse  $\underline{L}$  en partie symétrique et antisymétrique permet de définir les tenseurs eulériens du taux des déformations  $\underline{D}$  et celui du taux des rotations  $\underline{\omega}$ , à savoir,

$$\underline{D} = (\underline{L})_{sym} = \frac{1}{2}(\underline{L} + \underline{L}^T) \quad 3-23$$

$$\underline{\omega} = (\underline{L})_{asym} = \frac{1}{2}(\underline{L} - \underline{L}^T) \quad 3-24$$

Le tenseur  $\underline{\omega}$  correspond au rotationnel du champ des vitesses  $\vec{V}$  et décrit la vitesse de rotation du solide.  $\underline{D}$  représente la vitesse des déformations. En fait, l'intégrale de cette dernière dépend du chemin de déformation suivi, ce n'est donc pas une très bonne mesure de déformation totale. D'où l'introduction du Lagrangien réactualisé à l'approche numérique (voir section 3.3.2).

Dans le référentiel lagrangien, nous pouvons exprimer le transporté de  $\underline{D}$  par  $\underline{F}$ , par l'expression,

$$\underline{\dot{E}} = \underline{F}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{F} \quad 3-25$$

### 3.1.3 Notion d'objectivité

Soit un changement de référentiel défini par la rotation de corps rigide  $\underline{Q}$ , selon un repère tournant corotationnel, tel que,

$$\underline{Q} \cdot \underline{Q}^T = \underline{Q}^T \cdot \underline{Q} = \underline{I} \quad 3-26$$

$$\det(\underline{Q}) = 1 \quad 3-27$$

$$\underline{Q}^{-1} = \underline{Q}^T \quad 3-28$$

Nous définissons ainsi pour un point matériel  $x'_i$  dans le nouveau référentiel, à savoir,

$$x'_i = c_i + Q_{ij} x_j \quad 3-29$$

Si nous procédons à un changement de référentiel des « tenseur » bivecteurs  $\underline{\pi}$  et  $\underline{F}$ , définis précédemment en *section 3.1.1*, nous pouvons déduire qu'ils sont objectifs. Ci-dessous un tableau récapitulatif résumant l'objectivité des tenseurs antérieurement mentionnés.

	Objectif	Non objectif
Tenseurs lagrangiens	$\underline{C}, \underline{U}, \underline{E}, \underline{D}, \underline{S}$	-
Tenseurs eulériens	$\underline{B}, \underline{V}, \underline{A}, \underline{\sigma}$	$\underline{L}, \underline{\omega}$

*Tableau 10 : Objectivité des tenseurs lagrangiens et eulériens*

Tous les vecteurs lagrangiens sont objectifs. Dans la section suivante nous procédons à la description du modèle de comportement ; et seules les grandeurs objectives peuvent être utilisées dans le modèle décrit.

En revanche le tenseur  $\underline{\pi}' = \underline{Q} \cdot \underline{\pi} \cdot \underline{Q}^T$  n'est pas toujours une dérivée objective. Par conséquence, il nous faut recourir à des dérivées objectives. En fait, un algorithme d'intégration des modèles de comportement est dit incrémentalement objectif si, pour un mouvement de corps rigide, sur un intervalle temporel  $[t, t+\Delta t]$ , l'équation 3-29 est vérifiée, ainsi, les contraintes de Cauchy  $\underline{\sigma}$  sont actualisées de manière exacte selon,

$$\underline{\sigma}_{t+\Delta t} = \underline{Q} \cdot \underline{\sigma}_t \cdot \underline{Q}^T + \Delta \underline{\dot{\sigma}}_t \quad 3-30$$

Où  $\underline{Q}$  est le tenseur de rotation incrémental. Pour revenir à notre repère tourné, les dérivées temporelles rotationnelles des grandeurs mécaniques tensorielles, désignées par un tenseur général  $\underline{T}$ , sont alors définies dans cette configuration tournée en utilisant des dérivées rotationnelles, à savoir,

$$\frac{D_Q \underline{T}}{Dt} = \underline{Q} \cdot \left[ \frac{d\underline{T}'}{Dt} \right] \cdot \underline{Q}^T = \underline{Q} \cdot \left[ \frac{d(\underline{Q} \cdot \underline{T} \cdot \underline{Q}^T)}{Dt} \right] \cdot \underline{Q}^T = \dot{\underline{T}} + \underline{T} \cdot \underline{W}_Q - \underline{W}_Q \cdot \underline{T} \quad 3-31$$

Tel que  $\underline{W}_Q = \dot{\underline{Q}} \cdot \underline{Q}^T$  représente le taux de rotation relative des deux référentiels.

Le choix du type de dérivée objective rotationnelle dépend de la configuration de référence choisie. Et puisque nous souhaitons utiliser la formulation lagrangienne réactualisée (*section 3.3.2*), le respect d'objectivité des tenseurs des contraintes et des déformations par le principe de référentiel tournant est le plus simple à mettre en œuvre. En effet, à chaque incrément de calcul, la configuration de référence coïncide avec la configuration actuelle au cours du calcul. Parmi ces dérivées rotationnelles, nous trouvons la dérivée de Green-Naghdi en rotation propre [Dafalias (1983)]. En fait, dans l'ensemble des applications, nous nous limiterons à utiliser le référentiel tournant en rotation propre ou de Green-Naghdi tel que  $\underline{Q} = \underline{R}$ , où le tenseur de corps rigide  $\underline{R}$  est le tenseur issu de la décomposition polaire du gradient de la transformation  $\underline{F}$ . Nous souhaitons, par la suite, exprimer le modèle de comportement dans un repère tournant avec la vitesse de rotation. L'incrément de rotation  $\underline{\Delta\Omega}$  est obtenu à partir du tenseur de rotation totale  $\underline{R}$ . En effet, la dérivée par rapport au temps de l'équation 3-15, est comme suit :

$$\frac{d(\underline{R} \cdot \underline{R}^T)}{dt} = \dot{\underline{R}} \cdot \underline{R}^T + \underline{R} \cdot \dot{\underline{R}}^T = \underline{\dot{I}} = 0 \quad 3-32$$

Par conséquent, on définit le tenseur tourné  $\underline{\Omega}$ , par analogie à l'expression de la vitesse de rotation du repère tournant de Green-Naghdi à savoir,

$$\underline{\Omega} = \dot{\underline{R}} \cdot \underline{R}^T \quad 3-33$$

Tel que  $\underline{\Omega} = -\underline{\Omega}^T$  et par la suite  $\underline{W}_Q = \underline{\Omega}$ . Cette notion est développée et appliquée dans le cadre d'une approche numérique incrémentale en *section 3.5*.

### 3.1.4 Décomposition du tenseur des déformations totales

En général, la formulation du comportement élastoplastique en grandes déformations nécessite une décomposition de la déformation totale en parties réversible et irréversible. Lee (1969) a introduit la notion de configuration relâchée  $C_r$  entre la configuration initiale  $C_0$  et la configuration actuelle  $C_t$  de manière à décomposer la transformation totale en un produit d'une partie plastique et d'une partie élastique comme le montre la *Figure 1-2*. Le fait de considérer les déformations d'origine thermique



comme des déformations élastiques issues des contraintes dues aux variables thermiques permet de ne pas introduire une configuration thermique intermédiaire. Ceci conduit à une décomposition multiplicative du gradient de la transformation totale de la forme,

$$\underline{F} = \underline{F}^e \cdot \underline{F}^p \quad 3-34$$

où  $\underline{F}^e$  représente le gradient de la transformation élastique et  $\underline{F}^p$  le gradient de la transformation plastique. La difficulté introduite par cette décomposition est l'indétermination de la rotation qui définit cette configuration intermédiaire : Pour la déterminer, nous utilisons l'hypothèse que le comportement du milieu considéré ne doit pas être influencé par cette rotation. En suivant cette configuration et en considérant que la configuration intermédiaire est obtenue par relâchement local des contraintes sans rotation, on peut donc écrire,

$$\underline{F}^e = \underline{V}^e \cdot \underline{R}^e \quad 3-35$$

Avec cette décomposition, le tenseur taux des déformations s'exprime comme suit,

$$\underline{L} = \dot{\underline{F}} \cdot \underline{F}^{-1} \quad 3-36$$

Or  $\underline{F} = \underline{F}^e \cdot \underline{F}^p$  et  $\underline{F}^e = \underline{V}^e \cdot \underline{R}^e$ , ce qui fait que,

$$\underline{F} = \underline{V}^e \underline{R}^e \underline{F}^p \quad 3-37$$

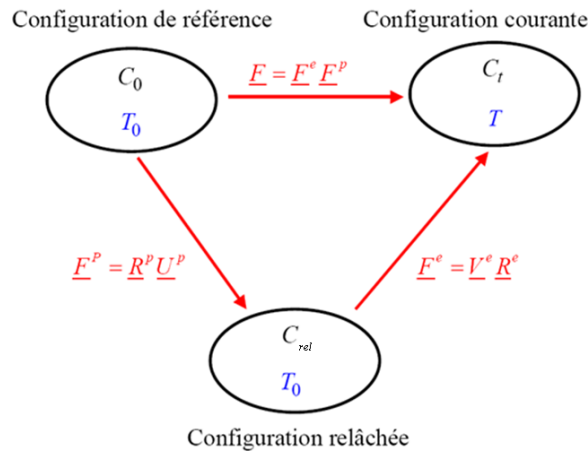


Figure 1-2. Représentation de la décomposition du gradient de la déformation

Et la dérivée temporelle conduit à :

$$\dot{\underline{F}} = \dot{\underline{V}}^e \cdot \underline{R}^e \cdot \underline{F}^p + \underline{V}^e \cdot \dot{\underline{R}}^e \cdot \underline{F}^p + \underline{V}^e \cdot \underline{R}^e \cdot \dot{\underline{F}}^p \quad 3-38$$

$$\underline{F}^{-1} = \underline{F}^{p-1} \cdot \underline{R}^{e-1} \cdot \underline{V}^{e-1} \quad 3-39$$

Donc :

$$\underline{L} = \dot{\underline{F}} \cdot \underline{F}^{-1} = \left( \dot{\underline{V}}^e \cdot \underline{R}^e \cdot \underline{F}^p + \underline{V}^e \cdot \dot{\underline{R}}^e \cdot \underline{F}^p + \underline{V}^e \cdot \underline{R}^e \cdot \dot{\underline{F}}^p \right) \underline{F}^{p-1} \cdot \underline{R}^{e-1} \cdot \underline{V}^{e-1} \quad 3-40$$

$$\underline{L} = \dot{\underline{V}}^e \cdot \underline{R}^e \cdot \underline{F}^p \cdot \underline{F}^{p-1} \cdot \underline{R}^{e-1} \cdot \underline{V}^{e-1} + \underline{V}^e \cdot \dot{\underline{R}}^e \cdot \underline{F}^p \cdot \underline{F}^{p-1} \cdot \underline{R}^{e-1} \cdot \underline{V}^{e-1} + \underline{V}^e \cdot \underline{R}^e \cdot \dot{\underline{F}}^p \cdot \underline{F}^{p-1} \cdot \underline{R}^{e-1} \cdot \underline{V}^{e-1} \quad 3-41$$

$$\underline{L} = \dot{\underline{V}}^e \cdot \underline{V}^{e-1} + \underline{V}^e \cdot \dot{\underline{R}}^e \cdot \underline{R}^{e-1} \cdot \underline{V}^{e-1} + \underline{V}^e \cdot \underline{R}^e \cdot \dot{\underline{F}}^p \cdot \underline{F}^{p-1} \cdot \underline{R}^{e-1} \cdot \underline{V}^{e-1} \quad 3-42$$

Comme  $\underline{L}^p = \dot{\underline{F}}^p \cdot \underline{F}^{p-1}$  on obtient :

$$\underline{L} = \dot{\underline{V}}^e \cdot \underline{V}^{e-1} + \underline{V}^e \cdot \dot{\underline{R}}^e \cdot \underline{R}^{e-1} \cdot \underline{V}^{e-1} + \underline{V}^e \cdot \underline{R}^e \cdot \underline{L}^p \cdot \underline{R}^{e-1} \cdot \underline{V}^{e-1} \quad 3-43$$

La configuration étant obtenue par décharge élastique pure donc  $\underline{R}^e = \underline{1}$ , pour la mise en forme des métaux, on peut souvent négliger les déformations élastiques devant les déformations plastiques de sorte que l'on peut les considérer comme infinitésimales, ce qui donne:

$$\underline{V}^e = \underline{\varepsilon}^e + \underline{1} \quad \underline{R}^e = \underline{1} \quad 3-44$$

$$\dot{\underline{V}}^e = \dot{\underline{\varepsilon}}^e \quad 3-45$$

Dans ce cas :

$$\underline{L} = \dot{\underline{\varepsilon}}^e \cdot (\underline{1} + \underline{\varepsilon}^e)^{-1} + (\underline{1} + \underline{\varepsilon}^e) \cdot \underline{L}^p \cdot (\underline{1} + \underline{\varepsilon}^e)^{-1} \quad 3-46$$

Or, en considérant  $(\underline{1} + \underline{\varepsilon}^e)^{-1} \approx \underline{1} - \underline{\varepsilon}^e$  par un développement limité de premier ordre au voisinage de zéro et en négligeant les termes  $\dot{\underline{\varepsilon}}^e \cdot \underline{\varepsilon}^e$  et  $\underline{\varepsilon}^e \cdot \underline{\varepsilon}^e$  par considération que la déformation élastique est minime devant celle plastique, nous obtenons :

$$\underline{L} = \dot{\underline{\varepsilon}}^e - \underline{L}^p \cdot \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^e \cdot \underline{L}^p + \underline{L}^p \quad 3-47$$

En prenant la partie symétrique de  $\underline{L}$  pour définir le tenseur taux des déformations, il vient :

$$\underline{D} = \frac{1}{2} (\underline{L} + \underline{L}^T) = \dot{\underline{\varepsilon}}^e - \underline{\Omega}^p \cdot \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^e \cdot \underline{\Omega}^p + \underline{D}^p = \dot{\underline{\varepsilon}}_J^e + \underline{D}^p \quad 3-48$$

Où  $\dot{\underline{\varepsilon}}_J^e = \dot{\underline{\varepsilon}}^e - \underline{\Omega}^p \cdot \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^e \cdot \underline{\Omega}^p$  est la dérivée de Jaumann du tenseur des petites déformations élastiques et  $\underline{\Omega}^p = (\underline{L}^p)^A$  est le tenseur taux des rotations plastiques.

Pour alléger les notations, dans la suite, la déformation élastique est exprimée par  $\underline{\varepsilon}^e$  et la déformation plastique par  $\underline{\varepsilon}^p$  avec  $\underline{\varepsilon}^p = \int_t \underline{D}^p dt$ .

### 3.2 MODELE DE COMPORTEMENT

Pour décrire un matériau, la physique des milieux continus fait appel à quelques principes généraux pour écrire les modèles de comportement. Nous nous plaçons dans le cadre d'une approche purement locale (principe de l'état local) et isotherme et nous utilisons le principe de la thermodynamique des processus irréversibles avec variables d'état pour construire l'ensemble de nos équations constitutives. Plusieurs hypothèses sont alors prises en compte, le principe de l'état local suppose que le comportement en un point « M » ne dépend que des variables définies en ce point, et non pas du voisinage. En fait en approche locale, le mouvement des points situés à une distance finie du point « M » dans la configuration actuelle peut être négligé pour calculer la contrainte en ce point. De plus, pour les matériaux simples, la contrainte est seulement fonction de l'histoire du gradient de la transformation. Le principe de simplicité matérielle, est aussi introduit, et suppose que seul intervient dans les équations de comportement le premier gradient de la transformation. Nous considérons, de même, le principe d'objectivité, qui traduit l'indépendance matérielle, et implique que le temps ne peut pas intervenir explicitement dans les relations de comportement. Ces hypothèses sont classiquement utilisées pour l'écriture des modèles de comportement. D'autres hypothèses, traduisent l'état de la matière et supposent que :

- Dans le cas des métaux, les équations constitutives de la loi de comportement sont formulées en supposant des petites déformations élastiques définies par le taux objectif  $\underline{\dot{\epsilon}}^e$  approprié et un grand débit de déformations plastiques  $\underline{D}^p$ . Les variations de volume générées par les déformations inélastiques (ou irréversibles) sont négligeables, car pour les métaux, les déformations irréversibles se produisent essentiellement par glissement cristallographique. Cette hypothèse est acceptable si les transformations de phases ne sont pas modélisées.
- Le formalisme Lagrangien réactualisé est utilisé pour le développement des modèles de comportement. Nous considérons alors que les configurations initiale et déformée sont très proches et nous assumons l'hypothèse d'incompressibilité totale malgré la présence d'endommagement. Ces hypothèses simplificatrices nous permettent de considérer que le tenseur des contraintes de Kirchhoff  $\underline{\tau}$  et le tenseur des contraintes de Cauchy  $\underline{\sigma}$  sont quasi-identiques et la masse volumique reste constante  $\rho = \rho_0$
- Deux natures d'écoulements non linéaires sont prises en compte de manière phénoménologique :
  - L'écoulement isotrope qui gouverne le « gonflement » du domaine élastique, il est relié physiquement à l'évolution de la densité des dislocations.

- L'écrouissage cinématique qui correspond à une translation du domaine élastique, il est relié physiquement à l'évolution des contraintes internes dues aux incompatibilités de déformation à l'échelle microscopique.

En réalité, les métaux ont un écrouissage qui est la combinaison de ces deux phénomènes.

- L'endommagement est de nature ductile. Pour simplifier le couplage endommagement-comportement, nous considérons en première approximation que l'endommagement ductile se développe sous forme de petites cavités sphériques isotropes (l'étape de coalescence de nature directionnelle sera alors négligée). L'effet de l'endommagement sur le comportement au niveau d'un EVR (Element Volumique Représentatif) sera alors introduit par l'intermédiaire d'un scalaire  $0 \leq d \leq d_c$  tel que, si  $d=0$ , l'EVR sera considéré comme sain et si  $d$  est supérieure à une limite critique  $d_c$ , l'EVR est alors complètement endommagé.

Les modèles de comportement permettent de traduire les réponses des matériaux soumis à des efforts ou à des mouvements imposés. D'une manière générale, ces modèles de comportement définissent les relations qui relient les variables d'état de déformation (primales) et les variables de contrainte (duales), respectivement:  $(\underline{\epsilon}^e, \underline{\sigma})$  tenseur de déformation élastique et le tenseur de contrainte de Cauchy, pour décrire l'écoulement plastique. Elles sont exprimées en tant que variables d'états observables. Les variables d'états internes sont définies, respectivement, par :  $(\underline{\alpha}, \underline{X})$  sont les tenseurs de déformation et de contrainte de l'écrouissage cinématique,  $(r, R)$  sont les déformations et contraintes associés à l'écrouissage isotrope, et enfin, les variables duales  $(d, Y)$  décrivent l'endommagement ductile isotrope.

### 3.2.1 Définition des variables effectives, lien avec l'endommagement ductile

La formulation d'un modèle de comportement dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles avec variables d'état repose sur la propriété de continuité des milieux concernés. Cependant, la présence de l'endommagement qui peut se représenter par une distribution de micro-cavités introduit des discontinuités dans l'EVR. Différents auteurs [Chaboche (1977), Cordebois et Sidoroff (1982), Lemaitre et Chaboche (1985), Saanouni (2012)] proposent de définir un EVR homogène « sain », sans endommagement par une transformation homogène adaptée de l'EVR réel endommagé. Cette transformation génère la création de variables effectives en fonction des variables d'état réelles. Dans l'ensemble de nos travaux en lien avec l'expérience de Saanouni et al. (1994), l'hypothèse de l'équivalence en énergie totale a été choisie pour construire l'ensemble des variables effectives. Cette hypothèse offre différents avantages :

- Elle conditionne naturellement un couplage fort entre l'endommagement et les différentes variables d'états sans négliger d'interactions entre les différentes hypothèses.
- Elle définit des variables effectives aussi bien dans l'espace des déformations que dans l'espace dual des contraintes.

Nous considérons un EVR endommagé dont l'état mécanique est décrit par les couples des variables d'états :  $(\underline{\hat{\varepsilon}}^e, \underline{\hat{\sigma}})$ ,  $(\underline{\hat{\alpha}}, \underline{\hat{X}})$ ,  $(r, R)$  et  $(d, Y)$  dans la configuration tournée déformée. Nous construisons un EVR fictif sain dont l'état mécanique est décrit par les variables effectives :  $(\underline{\tilde{\varepsilon}}^e, \underline{\tilde{\sigma}})$ ,  $(\underline{\tilde{\alpha}}, \underline{\tilde{X}})$ ,  $(\tilde{r}, \tilde{R})$ . L'énergie totale  $W$  est décomposée en énergie élastique  $W_e$  et énergie inélastique  $W_{inel}$ . Cette approche impose la conservation de l'énergie élastique et inélastique entre le milieu effectif et le milieu réel.

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \underline{\hat{\sigma}} : \underline{\hat{\varepsilon}}^e = \frac{1}{2} \underline{\tilde{\sigma}} : \underline{\tilde{\varepsilon}}^e \\ W_{inel} &= \frac{1}{2} \underline{\hat{X}} : \underline{\hat{\alpha}} + \frac{1}{2} Rr = \frac{1}{2} \underline{\tilde{X}} : \underline{\tilde{\alpha}} + \frac{1}{2} \tilde{R}\tilde{r} \end{aligned} \quad 3-49$$

Dans le cas simple de l'endommagement isotrope, les relations générales entre les variables d'état et les variables effectives peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\underline{\tilde{\sigma}} = \frac{\underline{\hat{\sigma}}}{\sqrt{1-d}}; \quad \underline{\tilde{\varepsilon}}^e = \underline{\hat{\varepsilon}}^e \sqrt{1-d} \quad 3-50$$

$$\underline{\tilde{X}} = \frac{\underline{\hat{X}}}{\sqrt{1-d}}; \quad \underline{\tilde{\alpha}} = \underline{\hat{\alpha}} \sqrt{1-d} \quad 3-51$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{R} &= \frac{R}{\sqrt{1-d^\gamma}}; \\ \tilde{r} &= r \sqrt{1-d^\gamma} \end{aligned} \right. \quad 3-52$$

### 3.2.2 Potentiel et relations d'état

Les variables d'état étant désignées, il nous reste à définir les relations d'état pour modéliser les phénomènes discutés précédemment. Pour se faire, nous définissons un potentiel d'état  $\rho\psi$  dans l'espace des déformations à partir des variables d'état. Ainsi, nous supposons que le potentiel d'état  $\rho\psi(\underline{\varepsilon}^e, \underline{\alpha}, r, d)$  peut se décomposer de manière additive en une partie élastique isotherme  $\rho\psi_e(\underline{\varepsilon}^e, d)$  et une partie, dans notre cas, plastique sous la forme  $\rho\psi_p(\underline{\alpha}, r, d)$ , à savoir,

$$\begin{aligned}\rho\psi(\underline{\varepsilon}^e, \underline{\alpha}, r, d) &= \rho\psi_e(\underline{\varepsilon}^e, d) + \rho\psi_p(\underline{\alpha}, r, d) \\ &= \frac{1}{2}(1-d)[\lambda_e(\underline{\varepsilon}^e : \underline{I})^2 + \mu_e \underline{\varepsilon}^e : \underline{\varepsilon}^e] + \frac{1}{3}(1-d)C\underline{\alpha} : \underline{\alpha} + \frac{1}{2}(1-d^\nu)Qr^2\end{aligned}\quad 3-53$$

Tels que  $\lambda_e = \nu E / (1 + \nu)(1 - 2\nu)$  et  $\mu_e = E / 2(1 + \nu)$  sont les coefficients de Lamé en élasticité isotrope,  $\nu$  est le coefficient de Poisson,  $C$  et  $Q$  sont les modules d'écroutissage cinématique et isotrope, respectivement. A partir de l'introduction de la différentiation totale du potentiel d'état dans l'inégalité de Clausius-Duhem, nous obtenons les différentes relations d'état suivantes,

Contrainte de Cauchy :

$$\underline{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}^e} = (1-d)[\lambda_e \text{tr}(\underline{\varepsilon}^e) \underline{I} + 2\mu_e \underline{\varepsilon}^e] \quad 3-54$$

Écroutissage cinématique :

$$\underline{X} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\alpha}} = \frac{2}{3}(1-d)C\underline{\alpha} \quad 3-55$$

Écroutissage isotrope :

$$R = \rho \frac{\partial \psi}{\partial r} = Q(1-d^\nu)r \quad 3-56$$

Tel que  $\gamma$  est un paramètre affectant l'endommagement lors de l'écroutissage isotrope.

Force thermodynamique associée à l'endommagement :

$$Y = \rho \frac{\partial \psi}{\partial d} = Y_e + Y_\alpha + Y_r \quad 3-57$$

avec,

$$Y_e = \lambda_e \langle \underline{\varepsilon}^e : \underline{I} \rangle_+ + \mu_e \langle \underline{\varepsilon}^e \rangle_+ : \langle \underline{\varepsilon}^e \rangle_+ \quad 3-58$$

$$Y_\alpha = \frac{2}{3}C\underline{\alpha} : \underline{\alpha} \quad 3-59$$

$$Y_r = \frac{1}{2}\gamma d^{\nu-1}Qr^2 \quad 3-60$$

où  $\langle \underline{\varepsilon}^e \rangle_+ = \sum_{i=1}^3 \langle \varepsilon_i^e \rangle \vec{e}_i \otimes \vec{e}_i$  représente la partie positive du tenseur de déformation élastique  $\underline{\varepsilon}^e$ , tel

que  $\varepsilon_i^e$  est la valeur propre et  $\vec{e}_i$  sont les vecteurs propres associés pour la direction ( $i$ ). La présence

de l'opérateur  $\langle \underline{\varepsilon}^e \rangle_+$  dans le taux de restitution de la densité d'énergie d'endommagement est le moyen le plus simple pour désactiver la croissance des dommages pendant la phase de compression (ou négative) de la charge. En conséquence, l'endommagement n'évolue que dans la phase positive de la contrainte (ou déformation élastique) pour tenir compte de la fermeture des micro-fissures en compression sans affecter la continuité et la convexité de la surface de rupture [Saanouni, (2012)].

### 3.2.3 Analyse des dissipations

A partir de l'inégalité de Clausius-Duhem et compte tenu des différentes relations d'état et des principales hypothèses retenues, la dissipation volumique s'exprime sous la forme suivante :

$$\varphi^V = \underline{\sigma} : \underline{D}^p - \underline{X} : \underline{\dot{\alpha}} - R\dot{r} + Y\dot{d} \geq 0 \quad 3-61$$

Dans notre cas, nous pouvons identifier dans l'expression de la dissipation volumique, l'écoulement inélastique écrouissable et endommageable ( $\underline{\sigma} : \underline{D}^p - \underline{X} : \underline{\dot{\alpha}} - R\dot{r} \geq 0$ ), ainsi que la dissipation dans l'endommagement ( $Y\dot{d} \geq 0$ ). L'admissibilité thermodynamique est prouvée si  $\varphi^V \geq 0$ . A ce stade, nous avons déterminé les relations d'état ( $\underline{\sigma}$ ,  $\underline{X}$ ,  $R$  et  $Y$ ). Les relations complémentaires, à déterminer ( $\underline{D}^p$ ,  $\underline{\dot{\alpha}}$ ,  $\dot{r}$  et  $\dot{d}$ ), traduisent l'évolution des variables en fonction du temps. Cette évolution est conditionnée par la positivité de la dissipation mécanique. Pour formuler les équations complémentaires, nous nous plaçons dans le cadre des milieux standards généralisés [Germain et al. (1983), Lemaitre (1985)]. Le couplage comportement-endommagement peut se formuler avec une surface de charge et un potentiel plastique, et dans le cadre des phénomènes dissipatifs indépendants du temps avec un critère d'écoulement quadratique isotrope, appelé fonction de charge,

$$f(\underline{\sigma}, \underline{X}, R, d) = \frac{\|\underline{\sigma} - \underline{X}\|_M}{\sqrt{1-d}} - \frac{R}{\sqrt{1-d^{\nu}}} - \sigma_y < 0 \quad 3-62$$

où  $\sigma_y$  correspond à la limite d'élasticité et  $\|\underline{\sigma} - \underline{X}\|_M = \sqrt{\frac{3}{2}(\underline{\sigma}^{dev} - \underline{X}) : (\underline{\sigma}^{dev} - \underline{X})}$  est la norme de contrainte de von Mises, telle que  $\underline{\sigma}^{dev}$  est la partie déviatorique de  $\underline{\sigma}$ .

A partir de la fonction de charge  $f$ , nous ajoutons des termes qui traduisent les non-linéarités des écrouissages et un autre terme décrivant l'évolution la non linéaire d'évolution de l'endommagement. Le pseudo potentiel de dissipation associé peut s'écrire sous la forme  $F(\underline{\sigma}, \underline{X}, R, d)$  et déduit de la surface de charge  $f$  en ajoutant des termes traduisant la non-linéarité des phénomènes dissipatifs :

$$F(\underline{\sigma}, \underline{X}, R, d) = f(\underline{\sigma}, \underline{X}, R, d) + \frac{3}{4} \frac{a}{C\sqrt{1-d}} \underline{X}:\underline{X} + \frac{1}{2} \frac{b}{Q\sqrt{1-d^\nu}} R^2 + F_d(Y, d) \quad 3-63$$

tels que  $a$  et  $b$  sont des paramètres de non-linéarité de l'évolution de l'érouissage cinématique et isotrope, respectivement.

Le potentiel  $F_d(Y, d)$  dépend de la nature physique de l'endommagement. Nous avons choisi d'utiliser une version modifiée du potentiel initialement proposé par Lemaitre (Lemaitre, 1985), à savoir,

$$F_d(Y, d) = \frac{S}{s+1} \left( \frac{Y - Y_0}{S} \right)^{s+1} \frac{1}{(1-d)^\beta} \quad 3-64$$

où les paramètres  $\beta$ ,  $s$ ,  $S$  et le seuil  $Y_0$  sont les paramètres caractéristiques de l'endommagement local, à identifier pour un matériau donné.

Par conséquent, les équations d'évolution des phénomènes dissipatifs sont déduites de ces potentiels par l'application de la règle de normalité :

$$\underline{D}^p = \dot{\delta} \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} = \dot{\delta} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = \dot{\delta} \underline{n} = \dot{\delta} \frac{1}{\sqrt{1-d}} \tilde{\underline{n}} \quad 3-65$$

tels que  $\tilde{\underline{n}} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\sigma}^{dev} - \underline{X}}{\|\underline{\sigma} - \underline{X}\|_M}$  est la normale de la surface de charge de von Mises,  $\dot{\delta}$  est le multiplicateur de plasticité, son expression se détermine par les conditions ( $\dot{\delta} \geq 0, f \leq 0, \dot{\delta} f = 0$ ). Ce multiplicateur plastique répond à la condition de chargement-déchargement de Kuhn-Tucker [Saanouni (2012)].

La règle de normalité généralisée donne les relations complémentaires de l'évolution des variables d'état. Celles-ci se présentent donc sous la forme,

Tenseur vitesse de déformation d'érouissage cinématique

$$\dot{\underline{\alpha}} = -\dot{\delta} \frac{\partial F}{\partial \underline{X}} = \dot{\delta} (\underline{n} - a \underline{\alpha}) \quad 3-66$$

Vitesse de déformation d'érouissage isotrope

$$\dot{r} = -\dot{\delta} \frac{\partial F}{\partial R} = \dot{\delta} \left( \frac{1}{\sqrt{1-d^\nu}} - b r \right) \quad 3-67$$

Taux d'endommagement ductile isotrope



$$\dot{d} = \delta \frac{\partial F}{\partial Y} = \frac{\delta}{(1-d)^\beta} \left\langle \frac{Y - Y_0}{S} \right\rangle^s \quad 3-68$$

### Vitesse des déformations plastiques cumulées

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{D}^p : \underline{D}^p} \quad 3-69$$

Si nous analysons les équations d'évolution, nous constatons que lorsque l'endommagement  $d \rightarrow 1$  les vitesses d'évolution des phénomènes dissipatifs tendent vers l'infini.

Dans le but d'intégrer le modèle de comportement présentée précédemment, nous développons une approche numérique pour résoudre un problème élastoplastique non linéaire en transformations finies, en se basant sur le modèle géométrique établi en *section 3.1*.

## 3.3 APPROCHE NUMERIQUE

Nous procédons dans ce qui suit à la résolution d'un problème mécanique suivant une formulation lagrangienne réactualisée selon une approche dynamique explicite.

### 3.3.1 Equations d'équilibre

Considérons en conséquence, un solide déformable dans la configuration  $C_t$ . Ce solide occupe un volume  $V$  de surface  $S$ . Il est soumis aux sollicitations d'une force surfacique  $\underline{T}$  sur  $\Gamma_t$  (*Figure 3-4*) et une force volumique  $\vec{f}$ . Les déplacements sont imposés sur  $\Gamma_u$  de la surface externe du solide (*Tableau 11-(S4)*).

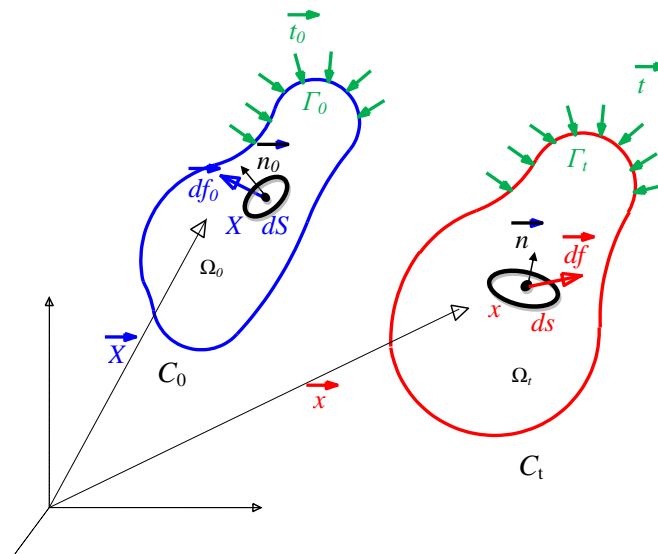


Figure 3-4 : Problème mécanique en configuration déformée et non déformée

En section 3.1.1, nous avons établi une liaison en termes de tenseurs de contrainte entre la configuration de référence  $C_0$  et actuelle  $C_t$ . Ainsi, nous exprimons les équations d'équilibre local en description eulérienne et lagrangienne comme ci-dessous.

	Configuration de référence Lagrange : non déformée		Configuration actuelle Euler : déformée	
Conservation de la masse	$J(\underline{F}) = \det(\underline{F}) = \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{v}{\bar{v}}$ en $\Omega_0$	(S1)	$\frac{d\rho}{dt} + \overline{\text{div}}(\rho\vec{V}) = 0$ en $\Omega_t$	(S2)
Quantité de mouvement	$\begin{cases} \overline{\text{div}}(\underline{S}) + \rho\vec{f} = \vec{0} \text{ en } \Omega_0 \\ \vec{u} = \vec{\bar{u}} \text{ sur } \Gamma_{u_0} \\ \vec{t}_0 = \underline{S} \cdot \vec{n}_0 \text{ sur } \Gamma_{t_0} \end{cases}$	(S3)	$\begin{cases} \overline{\text{div}}(\underline{\sigma}) + \rho\vec{f} = \vec{0} \text{ en } \Omega_t \\ \vec{u} = \vec{\bar{u}} \text{ sur } \Gamma_u \\ \vec{t} = \underline{\sigma} \cdot \vec{n} \text{ sur } \Gamma_t \end{cases}$	(S4)

Tableau 11 : Equations d'équilibres en configuration déformée et non déformée

### 3.3.2 Lagrangien réactualisé

Dans cette méthodologie, la configuration de base reste fixe  $C_0$ , mais la configuration de référence  $C_\tau$  est périodiquement mise à jour. La configuration initiale est maintenue en tant que configuration de référence pour toutes les étapes, et la configuration de référence est celle au début d'une phase d'analyse. La stratégie de mise à jour plus fréquente consiste à définir la configuration de référence à la dernière solution convergée. Par conséquent, dans cette méthodologie de calcul, nous considérons que le tenseur des contraintes de Kirchhoff  $\underline{\pi}$  et le tenseur des contraintes de Cauchy  $\underline{\sigma}$  sont quasi-identiques et la masse volumique reste constante  $\rho = \rho_0$ . Soit la configuration intermédiaire  $C_t$ . Nous Prenons la configuration de référence, la configuration actuelle à l'instant t. Nous pouvons ainsi écrire :

$$\underline{F}(t) = \underline{F}_\tau(t) \cdot \underline{F}(\tau) \quad 3-70$$

Tel que  $\underline{F}_\tau(t)$  est le gradient relatif de déformation entre les instants t et  $\tau$ .

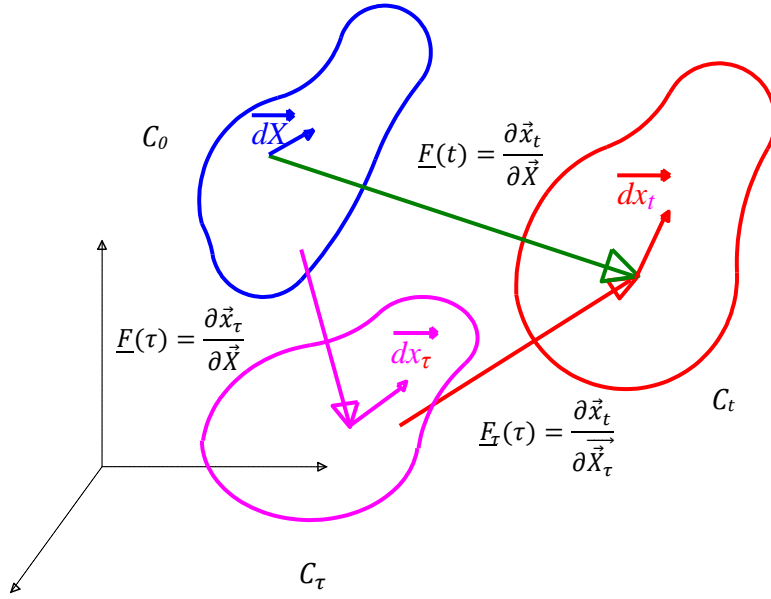


Figure 3-5 : Configurations en lagrangien réactualisé

Nous avons donc,

$$d\vec{x}_t = \underline{F}_t(t).d\vec{x}_\tau \quad 3-71$$

Tel que  $\underline{F}_t(\tau) = \underline{R}_\tau(\tau) = \underline{U}_\tau(\tau) = \underline{I}$ . La transformation entre les instants  $t$  et  $t + \Delta t$  se fait à volume constant (d'après les hypothèses ci-dessus).

Pour intégrer le modèle de comportement, exprimée en *section 3.2*, dans le cas des grandes déformations et rotations, il est important de choisir une approximation cinématique au cours d'un pas de temps pour évaluer le taux des déformations  $\underline{D}_{n+1}$ , selon un algorithme d'intégration incrémentalement objectif. L'approche la plus usuelle est de procéder par le calcul de la position matérielle  $\vec{x}_{n+1}$  et enchaîner comme suit,

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + \Delta \vec{u}_{n+1} \quad 3-72$$

Ainsi, le tenseur de transformation s'écrit sous la forme suivante,

$$\underline{F}_n = \frac{\partial \vec{x}_n}{\partial \vec{X}} \quad 3-73$$

Par conséquent,

$$\underline{F}_{n+1} = \frac{\partial \vec{x}_{n+1}}{\partial \vec{X}} = \Delta \underline{F}_{n+1} \cdot \underline{F}_n \quad 3-74$$

Avec,

$$\Delta \underline{F}_{n+1} = \underline{I} + \frac{\partial \Delta \vec{u}_{n+1}}{\partial \vec{x}_n} \quad 3-75$$

Néanmoins, en supposant l'hypothèse d'approximation du chemin réel par un schéma linéaire à vitesse constante, le schéma considéré provoque une variation de volume. Winget et Hughes (1980) proposent alors comme relation linéaire l'expression suivante,

$$\vec{x}_{n+\theta} = \vec{x}_n + \theta \Delta \vec{u}_{n+1} \quad 3-76$$

Ainsi,

$$\underline{F}_{n+\theta} = \Delta \underline{F}_{n+\theta} \cdot \underline{F}_n \quad \text{et} \quad \Delta \underline{F}_{n+\theta} = \frac{\partial \vec{x}_{n+\theta}}{\partial \vec{x}_n} = \underline{I} + \theta \frac{\partial \Delta \vec{u}_{n+1}}{\partial \vec{x}_n} \quad 3-77$$

Nous utilisons un schéma d'implémentation à demi-pas en supposant un schéma d'Euler implicite au niveau du temps avec  $\theta = \frac{1}{2}$ .

Pour parvenir à calculer le taux de déformation  $\underline{D}_{n+\frac{1}{2}}$ , à demi-pas considérons le développement du tenseur gradient de vitesse de déformation  $\underline{L}_{n+\frac{1}{2}}$ , tel que,

$$\underline{L}_{n+\frac{1}{2}} = \dot{\underline{F}}_{n+\frac{1}{2}} \cdot \underline{F}_{n+\frac{1}{2}}^{-1} \quad 3-78$$

D'après les équations 3-74 et 3-75,

$$\dot{\underline{F}}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{\underline{F}_{n+1} - \underline{F}_n}{\Delta t_{n+1}} = \frac{1}{\Delta t_{n+1}} \frac{\partial \Delta \vec{u}_{n+1}}{\partial \vec{x}_n} \cdot \underline{F}_n \quad 3-79$$

De même, selon les formules 3-73 et 3-75,

$$\Delta \underline{F}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{\partial \Delta \vec{x}_{n+\frac{1}{2}}}{\partial \vec{x}_n} \quad 3-80$$

Si maintenant nous inversons cette relation et considérons la relation de l'équation 3-77, nous aurons,

$$\underline{F}_{n+\frac{1}{2}}^{-1} = \underline{F}_n^{-1} \cdot \Delta \underline{F}_{n+\frac{1}{2}}^{-1} = \underline{F}_n^{-1} \cdot \frac{\partial \Delta \vec{x}_n}{\partial \vec{x}_{n+\frac{1}{2}}} \quad 3-81$$

Ainsi, nous déterminons, le tenseur gradient de vitesse de déformation  $\underline{L}_{n+\frac{1}{2}}$ ,

$$\underline{L}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t_{n+1}} \frac{\partial \Delta \vec{u}_{n+1}}{\partial \vec{x}_n} \cdot \underline{F}_n \cdot \underline{F}_n^{-1} \cdot \frac{\partial \Delta \vec{x}_n}{\partial \vec{x}_{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\Delta t_{n+1}} \frac{\partial \Delta \vec{u}_{n+1}}{\partial \vec{x}_{n+\frac{1}{2}}} \quad 3-82$$

Nous utilisons par la suite cette relation pour calculer le gradient des vitesses des déformations à demi-pas et estimer l'incrément de déformation totale sur un pas de temps  $\Delta t_{n+1}$ .

### 3.3.3 Taux des déformations

Le tenseur gradient des vitesses de déformation  $L_{n+\frac{1}{2}}$  peut être décomposé en partie symétrique et antisymétrique. La partie symétrique du tenseur est le taux de déformation totale, noté  $D_{n+\frac{1}{2}}$ , décrite telle que :

$$D_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left( L_{n+\frac{1}{2}} + L_{n+\frac{1}{2}}^T \right) \quad 3-83$$

De la même manière, nous exprimons le taux des rotations, noté  $\omega_{n+\frac{1}{2}}$ , par :

$$\omega_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left( L_{n+\frac{1}{2}} - L_{n+\frac{1}{2}}^T \right) \quad 3-84$$

### 3.3.4 Discrétisation spatiale du domaine mécanique

En se basant sur le problème mécanique présenté en *section 3.3.1*, la forme variationnelle faible associée au problème différentiel donnée par le principe des puissances virtuelles est :

$$I_u(\vec{u}, \delta\vec{u}) = - \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \delta \underline{\underline{D}} dV + \int_{\Omega} \vec{f}_d \cdot \delta \vec{u} dV + \int_{\Gamma} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} dS - \int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot \delta \vec{u} dV = 0 \quad \forall \delta \vec{u} \quad \text{C.A} \quad 3-85$$

Le domaine noté  $\Omega$  est décomposé en sous domaine d'intégration  $\Omega_I$  (une cellule de Voronoï pour une intégration nodale dans le cas d'une approche par approximation diffuse ou tout simplement un élément dans le cadre de la méthode MEF, pour plus de détails voir *Chapire 2*) tel que,

$$\Omega = \bigcup_I \Omega_I \quad 3-86$$

Dans chaque sous-domaine d'intégration et en utilisant les approximations matricielles, l'approximation nodale du champ de déplacement  $\vec{u}$  est définie par :

$$\{u^I(\vec{x})\} = [\Phi^I(\vec{x})] \{\hat{u}_I\} \quad 3-87$$

telle que  $[\Phi^I(\vec{x})]$  représente la matrice des fonctions d'interpolation construite soit par approximation diffuse soit par approche MEF. Ces fonctions ne dépendent que des coordonnées spatiales et pas du temps. Le vecteur  $\{\hat{u}_I\}$  est le vecteur de déplacement de l'ensemble des nœuds du domaine  $\Omega$ . De la même manière, les champs des vitesses et d'accélération sont déterminés par :

$$\{\dot{u}^I(\vec{x})\} = [\Phi^I(\vec{x})] \{\hat{\dot{u}}_I\} \quad 3-88$$

$$\{\ddot{u}^I(\vec{x})\} = [\Phi^I(\vec{x})] \{\hat{\ddot{u}}_I\} \quad 3-89$$

En assumant l'hypothèse de Galerkin, les champs des déplacements et des vitesses virtuels sont donnés par :

$$\{\delta u^I(\vec{x})\} = [\Phi^I(\vec{x})]\{\delta \hat{u}_I\} \quad 3-90$$

$$\{\dot{\delta u}^I(\vec{x})\} = [\Phi^I(\vec{x})]\{\delta \dot{\hat{u}}_I\} \quad 3-91$$

En utilisant les approximations ci-dessus et le principe des puissances virtuelles sur un sous domaine d'intégration, nous obtenons la fonctionnelle sous forme matricielle suivante,

$$I_u^I = \langle [M^I]\{\hat{u}_I\} + \{F_{int}^I\} - \{F_{ext}^I\} \rangle \{\delta \hat{u}_I\} \quad 3-92$$

avec  $\{F_{ext}^I\}$  est le vecteur forces extérieures,

$$\{F_{ext}^I\} = \int_{\Omega_I} [\Phi^I]^T \{f_v^I\} d\Omega + \int_{\Gamma_I} [\Phi^I]^T \{t^I\} d\Gamma \quad 3-93$$

et  $\{F_{int}^I\}$  est le vecteur forces intérieures.

$$\{F_{int}^I\} = \int_{\Omega_I} [B^I]^T \{\sigma\} d\Omega \quad 3-94$$

$[M^I]$  est la matrice masse du sous domaine  $\Omega_I$ ,

$$[M^I] = \int_{\Omega_I} \rho [\Phi^I]^T [\Phi^I] d\Omega \quad 3-95$$

et  $[B^I]$  est la matrice d'interpolation des déformations définie soit par le calcul du gradient régularisé, soit par les dérivées des fonctions de forme à partir de l'espace de référence dans le cas de l'approche MEF. En écrivant la condition d'équilibre sur l'ensemble des éléments, nous obtenons le système algébrique traduisant l'équilibre thermomécanique global du système suivant :

$$I_u = \sum_I I_u^I = \{[M]\{\hat{u}_I\} + \{F_{int}\} - \{F_{ext}\}\} \langle \delta \hat{u}_I \rangle \quad 3-96$$

avec,

$$[M] = \cup_I [M^I], \{F_{int}\} = \cup_I \{F_{int}^I\} \text{ et } \{F_{ext}\} = \cup_I \{F_{ext}^I\} \quad 3-97$$

Comme les  $\{\delta \hat{u}_I\}$  sont absolument quelconques, pourvu qu'ils soient cinématiquement admissibles, il découle de l'équation 3-96 le système algébrique non linéaire suivant :

$$[M]\{\hat{u}_I\} + \{F_{int}\} - \{F_{ext}\} = \{0\} \quad 3-98$$

Une notion d'amortissement est rajoutée pour stabiliser le système dynamique par l'intermédiaire d'une matrice amortissement  $[C]$  :

$$[M]\{\hat{u}_I\} + [C]\{\hat{u}_I\} + \{F_{int}\} - \{F_{ext}\} = \{0\} \quad 3-99$$

### 3.3.5 Résolution du problème thermomécanique par la méthode dynamique explicite

La méthode dynamique explicite utilisée pour la résolution d'un problème thermomécanique (en *section 3.2*) est basée sur le calcul de la matrice masse  $[M]$ . Elle consiste à calculer une solution à l'instant  $t_{n+1}$  en fonction des quantités connues à l'instant  $t_n$ .

A l'instant  $t_n$ , le vecteur accélération nodale est calculé à partir de la relation 3-98. L'équation de Rayleigh permet alors de définir une matrice d'amortissement  $[C]$  proportionnelle à la matrice masse, tel que  $[C] = \beta[M]$  :

$$\{\hat{u}_I\}_n = [M]^{-1} \left( \{F_{ext}\}_n - \{F_{int}\}_n - \beta \{\hat{u}_I\}_{n-\frac{1}{2}} \right) \quad 3-100$$

La matrice de masse nodale  $[M]$  est rendue diagonale pour diminuer les temps de calcul. Différentes techniques de diagonalisation sont décrites dans la littérature [Belytschko et Hughes (1983)]. Nous reviendrons sur ces techniques un peu plus tard dans le cas de l'approximation diffuse.

Connaissant l'accélération  $\{\hat{u}_I\}_n$  au début de l'incrément, nous pouvons calculer le déplacement en fin d'incrément en utilisant l'intégration numérique par la méthode des différences finies explicites:

$$\{\hat{u}_I\}_{n+\frac{1}{2}} = \{\hat{u}_I\}_{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t_{n+1} + \Delta t_n}{2} \{\hat{u}_I\}_n + \dots \quad 3-101$$

$$\{\hat{u}_I\}_{n+1} = \{\hat{u}_I\}_n + \Delta t_{n+1} \{\hat{u}_I\}_{n+\frac{1}{2}} + \dots \quad 3-102$$

La stabilité d'un tel schéma explicite est donnée par la taille de l'incrément de temps  $\Delta t_{n+1}$ . Dans le cas de la méthode MEF, la relation de Courant permet d'estimer un pas de temps stable  $\Delta t_s$

$$\Delta t_s = \frac{L_{min}}{C_e} \quad 3-103$$

Avec  $L_{min}$  est la plus petite dimension de l'élément du maillage et  $C_e$  est la célérité d'une onde élastique traversant l'élément. Cette vitesse peut être déterminée en calculant les différents modules effectifs du matériau élastique de la réponse matérielle :

$$C_e = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad 3-104$$

où  $\rho$  est la densité volumique,  $E$  le module de Young et  $\nu$  est le coefficient de Poisson.

Le schéma algorithmique de la méthode dynamique explicite est donné par le tableau suivant :

<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Calcul de la matrice masse <math>[M]</math>.</li> <li>2. Récupération des variables à instant <math>t_n</math> ; <math>u = u_n \dots</math></li> <li>3. Estimation du pas de temps : avec <math>\Delta t_s = \frac{L_{min}}{C_e}</math></li> <li>4. Calcul des forces internes  <math>\{F_{int}\} = \cup_I \int_{\Omega_I} [B^I]^T \{\sigma\} d\Omega</math></li> <li>5. Calcul des forces externes  <math>\{F_{ext}^I\} = \cup_I \left[ \int_{\Omega_I} [\Phi^I]^T \{f_v^I\} d\Omega + \int_{\Gamma_I} [\Phi^I]^T \{t^I\} d\Gamma \right]</math></li> </ol>
--

Calcul du vecteur accélération nodale:  $\{\hat{u}_I\}_n = [M]^{-1} \left( \{F_{ext}\}_n - \{F_{int}\}_n - \beta \{\hat{u}_I\}_{n-\frac{1}{2}} \right)$

<ol style="list-style-type: none"> <li>6. Calcul des nouveaux déplacements, vitesses températures :  <math>\{\hat{u}_I\}_{n+\frac{1}{2}} = \{\hat{u}_I\}_{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t_{n+1} + \Delta t_n}{2} \{\hat{u}_I\}_n</math> et <math>\{\hat{u}_I\}_{n+1} = \{\hat{u}_I\}_n + \Delta t_{n+1} \{\hat{u}_I\}_{n+\frac{1}{2}}</math></li> <li>7. Réactualisation des positions des nœuds</li> <li>8. <math>\Delta t_{n+1} &lt; t_f</math> (<math>t_f</math> est le temps de fin de chargement) <ul style="list-style-type: none"> <li>• Si oui : on retourne à l'étape 1.</li> <li>• Si non : Fin.</li> </ul> </li> </ol>
---

Figure 3-6: Principe du schéma dynamique explicite de résolution du problème thermo-mécanique.

### 3.3.6 Intégration locale des équations de comportement

Pour calculer  $\{F_{int}\}$  à l'étape 4 du schéma de résolution dynamique explicite, il est nécessaire de calculer toutes les variables d'état caractérisant le comportement élastoplastique endommageable. Cela se fait par intégration numérique à chaque point d'intégration de l'ensemble des équations différentielles développées au *Chapitre 2*.

Pour cela nous utilisons la méthode itérative de prédiction élastique-correction inélastique largement utilisée dans la littérature [Simo et al. (1986)]. Elle consiste à supposer que l'incrément de charge est élastique sans générer de dissipation. Nous calculons alors la contrainte « essai » issue de cette hypothèse puis la valeur de la fonction de charge qui en résulte. Si cette fonction de charge



« essai » est négative alors l'hypothèse d'élasticité est avérée. Dans le cas contraire, on doit corriger la contrainte « essai » et calculer les autres variables d'état de sorte à garantir l'admissibilité plastique.

Connaissant les différentes grandeurs :  $\underline{\sigma}_n$ ,  $\underline{X}_n$ ,  $R_n$ ,  $\underline{\varepsilon}_n^p$ ,  $D_n$ ,  $T_n$ , à l'instant  $t_n$ , on cherche à déterminer les grandeurs :  $\underline{\sigma}_{n+1}$ ,  $\underline{X}_{n+1}$ ,  $R_{n+1}$ ,  $\underline{\varepsilon}_{n+1}^p$ ,  $D_{n+1}$ , à l'instant  $t_{n+1}$  en prenant en compte une température constante  $T = T_n$  pour la résolution du problème mécanique.

Nous posons  $\underline{Z} = \underline{\sigma}^{dev} - \underline{X}$  et  $Y^* = \frac{1}{(1-d)^\beta} \langle \frac{Y-Y_0}{S} \rangle^s$ . Nous avons alors le système différentiel, ci-dessous, à résoudre dans le cas isotrope.

$$\begin{aligned}
 f(\underline{\sigma}, \underline{X}, R, d) &= \frac{\|\underline{Z}\|_M}{\sqrt{1-d}} - \frac{R}{\sqrt{1-d^\gamma}} - \sigma_y = 0 \\
 \underline{D}^p &= \delta \underline{n} \\
 \dot{r} &= \delta \left( \frac{1}{\sqrt{1-d^\gamma}} - b r \right) \\
 \dot{\underline{\alpha}} &= \delta (\underline{n} - a \underline{\alpha}) \\
 \dot{d} &= \frac{\delta}{(1-d)^\beta} \langle \frac{Y-Y_0}{S} \rangle^s \\
 \underline{\sigma} &= (1-d)[\lambda_e tr(\underline{\varepsilon}^e) \underline{I} + 2\mu_e \underline{\varepsilon}^e] \\
 \underline{X} &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\alpha}} = \frac{2}{3}(1-d)C \underline{\alpha} \\
 R &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial r} = Q(1-d^\gamma)r \\
 Y &= Y_e + Y_\alpha + Y_r
 \end{aligned} \tag{3-105}$$

Le schéma de la  $\theta$  – méthode permet d'écrire,

$$\forall y \in \{ \underline{\sigma}, \underline{D}^p, d \} ; \quad y_{n+\theta} = (1-\theta)y_n - \theta \cdot y_{n+1} \tag{3-106}$$

En choisissant un schéma purement implicite  $\theta=1$  pour sa stabilité inconditionnelle, nous pouvons discrétiser les équations différentielles ordinaires (Eq.3-105) en utilisant le schéma de la *Figure 3-6* ainsi qu'un schéma asymptotique appliqué aux équations de  $r$  et  $\underline{\alpha}$  qui s'y prêtent [Saanouni et Chaboche (2003)] comme suit,

$$\left\{ \begin{array}{l}
\underline{f} = \frac{\|\underline{Z}_{n+1}\|_M}{\sqrt{1-d_{n+1}}} - \frac{R_{n+1}}{\sqrt{1-d_{n+1}^\gamma}} - \sigma_y = 0 \\
\underline{g}_\varepsilon = \underline{\Delta\varepsilon}_{n+1}^p - \Delta\lambda \frac{\tilde{\underline{n}}_{n+1}}{\sqrt{1-D_{n+1}}} = \underline{0} \\
\underline{g}_r = r_{n+1} - r_n e^{-b\Delta\lambda} - \frac{1}{b\sqrt{1-d_{n+1}^\gamma}} (1 - e^{-b\Delta\lambda}) = 0 \\
\underline{g}_\alpha = \underline{\alpha}_{n+1} - \underline{\alpha}_n e^{-a\Delta\lambda} - \frac{\tilde{\underline{n}}_{n+1}}{a\sqrt{1-d_{n+1}}} (1 - e^{-a\Delta\lambda}) = \underline{0} \\
\underline{g}_d = \Delta d_{n+1} - \Delta\lambda Y_{n+1}^* = 0 \\
\underline{J} = \underline{\sigma}_{n+1} - \frac{(1-d_{n+1})\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} ((\underline{\varepsilon}_{n+1} - \underline{\varepsilon}_{n+1}^p) : \underline{1}) \underline{1} - \frac{(1-d_{n+1})E}{(1+\nu)} (\underline{\varepsilon}_{n+1} - \underline{\varepsilon}_{n+1}^p) = \underline{0}
\end{array} \right. \quad 3-107$$

### 3.3.6.1 Prédiction élastique

Nous considérons dans un premier temps que l'incrément des déformations totales  $\underline{\Delta\varepsilon}_{n+1} = \underline{D}_{n+1}\Delta t_{n+1}$  contribue à un comportement élastique:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\underline{\Delta\varepsilon}_{n+1}^p = \underline{0} \rightarrow \underline{\varepsilon}_{n+1}^p = \underline{\varepsilon}_n^p \\
\underline{\alpha}_{n+1} = \underline{\alpha}_n \\
r_{n+1} = r_n \\
d_{n+1} = d_n
\end{array} \right. \quad 3-108$$

La contrainte « essai » correspondante s'écrit sous la forme,

$$\underline{\sigma}_{n+1}^* = \frac{(1-d_n)\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\underline{\varepsilon}_{n+1}^* : \underline{1}) \underline{1} + \frac{(1-d_n)E}{(1+\nu)} \underline{\varepsilon}_{n+1}^* \quad 3-109$$

avec :

$$\underline{\varepsilon}_{n+1}^e = \underline{\varepsilon}_{n+1}^* \quad 3-110$$

Nous testons la surface de charge à partir de cette contrainte « essai » pour avoir,

$$\underline{f}_{n+1}(\underline{\sigma}_{n+1}^*, \underline{X}_n, R_n, d_n) = \frac{\|\underline{\sigma}_{n+1}^* - \underline{X}_n\|_M}{\sqrt{1-d_n}} - \frac{R_n}{\sqrt{1-d_n^\gamma}} - \sigma_y \leq 0 \quad 3-111$$

Dans le cas où le critère est strictement négatif, le comportement est purement élastique. la contrainte à l'instant  $t_{n+1}$  est alors égale à la contrainte « essai »  $\underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_{n+1}^*$  et les variables internes n'évoluent pas :  $\underline{X}_{n+1} = \underline{X}_n$ ,  $\underline{\alpha}_{n+1} = \underline{\alpha}_n$ ,  $R_{n+1} = R_n$ ,  $r_{n+1} = r_n$ ,  $Y_{n+1} = Y_n$  et  $d_{n+1} = d_n$ .

Par contre, si le critère est positif, alors le comportement est plastique et une correction inélastique devient nécessaire sur les variables  $\underline{\sigma}$ ,  $\underline{X}$ ,  $Y$ ,  $R$ ,  $D$  afin d'assurer le critère suivant,

$$f_{n+1}(\underline{\sigma}_{n+1}, \underline{X}_{n+1}, R_{n+1}, d_{n+1}, \Delta\lambda) = 0 \quad 3-112$$

### 3.3.6.2 Correction plastique

Le système 3-105 est composé de 21 équations non linéaires pour 21 inconnues, c'est-à-dire de six déformations plastiques, une variable d'écrouissage isotrope, six variables d'écrouissage cinématique, six contraintes, l'endommagement et le multiplicateur plastique.

Pour des raisons d'efficacité numérique, il est fortement conseillé de réduire la taille de ce système. Les équations  $g_{\varepsilon}=0$ ,  $g_r=0$ ,  $g_{\alpha}=0$  et  $J=0$  peuvent être réduites à la résolution de deux équations scalaires à deux inconnues  $\Delta\lambda$  et  $d_{n+1}$  (Saanouni, 2012). Toutes les autres variables se déduisent alors de ces deux inconnues.

Nous allons tout d'abord poser :

$$\underline{Z}_{n+1}^* = \left( \underline{\sigma}_{n+1}^{*dev} \right) - \frac{2}{3} C(1-d_n) \underline{\alpha}_n e^{-a\Delta\lambda} = \frac{2}{3} \left\| \underline{Z}_{n+1}^* \right\|_M \tilde{\underline{n}}_{n+1} \text{ avec } \underline{\sigma}_{n+1}^{*dev} = \frac{E(1-d_n)}{1+\nu} \underline{\varepsilon}_{n+1}^{*dev} \quad 3-113$$

$$\underline{\sigma}_{n+1} = \frac{(1-d_{n+1})\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\underline{\varepsilon}_{n+1}^e : \underline{1}) \underline{1} + \frac{(1-d_{n+1})E}{(1+\nu)} \underline{\varepsilon}_{n+1}^e \quad 3-114$$

$$\underline{\varepsilon}_{n+1}^e = \underline{\varepsilon}_{n+1}^* - \Delta \underline{\varepsilon}_{n+1}^p \Leftrightarrow \underline{\varepsilon}_{n+1}^e = \underline{\varepsilon}_{n+1}^* - \Delta\lambda \frac{\tilde{\underline{n}}_{n+1}}{\sqrt{1-d_{n+1}}} \quad 3-115$$

$$\underline{X}_{n+1} = \frac{2}{3} C(1-d_{n+1}) \underline{\alpha}_{n+1} \quad 3-116$$

$$R_{n+1} = Q(1-d_{n+1}^y) r_{n+1} \quad 3-117$$

$$\tilde{\underline{n}}_{n+1} = \frac{3}{2} \frac{\underline{Z}_{n+1}^*}{\left\| \underline{Z}_{n+1}^* \right\|_M} \quad 3-118$$

$$\left\| \underline{Z}_{n+1}^* \right\|_M = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{Z}_{n+1}^* : \underline{Z}_{n+1}^*} \quad 3-119$$

Nous sommes ramenés à un système de deux équations non linéaires à deux inconnues ( $\Delta\lambda$  et  $d_{n+1}$ ), où l'on fera apparaître les variables connues au début du pas de temps. Après simplification, on obtient le système suivant,

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{n+1}(\Delta\lambda, \mathbf{d}_{n+1}) = \left\| \mathbf{Z}_{n+1}^* \right\|_M - \frac{1-d_n}{\sqrt{1-d_{n+1}}} \left[ \frac{Q}{b}(1-e^{-b\Delta\lambda}) + \frac{\sqrt{1-d_{n+1}^\gamma}}{1-d_n^\gamma} \mathbf{R}_n e^{-b\Delta\lambda} \right] \\ \mathbf{g}_d(\Delta\lambda, \mathbf{d}_{n+1}) = d_{n+1} - d_n - \Delta\lambda \mathbf{Y}_{n+1}^* \end{cases} \quad 3-120$$

La forme de  $\mathbf{Y}_{n+1}$  est donnée par l'expression 3-121, où la partie élastique de  $\mathbf{Y}_{n+1}$  est fonction du tenseur des contraintes décomposés en parties positive et négative pour ralentir l'évolution de l'endommagement dans les chargements de compression:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{n+1} = & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \langle \underline{\varepsilon}_{n+1}^e : \underline{I} \rangle_+ + \frac{E}{1+\nu} \langle \underline{\varepsilon}_{n+1}^e \rangle_+ : \langle \underline{\varepsilon}_{n+1}^e \rangle_+ + \frac{2}{3} C \underline{\alpha}_{n+1} : \underline{\alpha}_{n+1} \\ & + \frac{1}{2} \gamma d_{n+1}^{\gamma-1} Q r_{n+1} \end{aligned} \quad 3-121$$

La méthode de résolution de Newton-Raphson est alors utilisée pour résoudre itérativement le système 3-107. En utilisant un développement en série de Taylor au premier ordre, on obtient le système suivant à résoudre pour chaque itération (i) :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{n+1}^i \\ \mathbf{g}_d^i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \Delta\lambda} \right)_{n+1}^i & \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{d}} \right)_{n+1}^i \\ \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \Delta\lambda} \right)_{n+1}^i & \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{d}} \right)_{n+1}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \Delta\lambda \\ \delta \mathbf{d}_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 3-122$$

Les dérivées  $\left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \Delta\lambda} \right)_{n+1}^i$  et  $\left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \Delta\mathbf{d}} \right)_{n+1}^i$  sont données par :

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{f}_{n+1}}{\partial \Delta\lambda} \right]^i = \frac{aC(1-d_n)e^{-a\Delta\lambda} \underline{\alpha}_n : \mathbf{Z}_{n+1}^*}{\left\| \mathbf{Z}_{n+1}^* \right\|_M} - \frac{(1-d_n)}{\sqrt{1-d_{n+1}}} \left( \frac{3E}{2(1+\nu)} + C e^{-a\Delta\lambda} + Q e^{-b\Delta\lambda} - b \frac{\sqrt{1-d_{n+1}^\gamma}}{1-d_n^\gamma} \mathbf{R}_n e^{-b\Delta\lambda} \right) \quad 3-123$$

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{f}_{n+1}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}} \right]^i = - \frac{(1-d_n)}{\sqrt{1-d_{n+1}}} \left[ \left( \frac{1}{(1-d_{n+1})} \frac{\sqrt{1-d_{n+1}^\gamma}}{(1-d_n^\gamma)} - \frac{1}{2} \frac{\gamma D_{n+1}^{\gamma-1}}{(1-d_n^\gamma) \sqrt{1-d_{n+1}^\gamma}} \right) \mathbf{R}_n e^{-b\Delta\lambda} \right. \\ \left. + \frac{1}{1-d_{n+1}} \left( \frac{3E}{2(1+\nu)} \Delta\lambda + \frac{C}{a} (1-e^{-a\Delta\lambda}) + \frac{Q}{b} (1-e^{-b\Delta\lambda}) + \sigma_y \right) \right] \quad 3-124$$

De même  $\left[ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \Delta\lambda} \right]^i$  s'écrit sous la forme,

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \Delta\lambda} \right]^i = -\mathbf{Y}_{n+1}^* - \Delta\lambda \left( \frac{1}{S} \right)^s \frac{s}{(1-d_{n+1})^\beta} (\mathbf{Y}_{n+1} - \mathbf{Y}_0)^{s-1} \frac{\partial \mathbf{Y}_{n+1}}{\partial \Delta\lambda} \quad 3-125$$

et enfin :

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}} \right]^i = 1 - \Delta \lambda \left( \frac{s}{S} \frac{Y_{n+1}^*}{(Y_{n+1} - Y_0)} \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}} + \beta \frac{Y_{n+1}^*}{1 - \mathbf{d}_{n+1}} \right) \quad 3-126$$

La résolution du système 3-122 permet d'obtenir  $\delta \mathbf{D}_{n+1}$  et  $\delta \Delta \lambda$  :

$$\begin{cases} \delta \mathbf{D}_{n+1} = \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \Delta \lambda} \right)_{n+1}^i \mathbf{g}_{n+1}^i - \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \Delta \lambda} \right)_{n+1}^i \mathbf{f}_{n+1}^i \right] \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{d}} \right)_{n+1}^i \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \Delta \lambda} \right)_{n+1}^i - \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{d}} \right)_{n+1}^i \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \Delta \lambda} \right)_{n+1}^i \right]^{-1} \\ \delta \Delta \lambda = \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{d}} \right)_{n+1}^i \mathbf{f}_{n+1}^i - \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{d}} \right)_{n+1}^i \mathbf{g}_{n+1}^i \right] \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{d}} \right)_{n+1}^i \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \Delta \lambda} \right)_{n+1}^i - \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{d}} \right)_{n+1}^i \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \Delta \lambda} \right)_{n+1}^i \right]^{-1} \end{cases} \quad 3-127$$

Celles-ci servent à corriger les valeurs pour l'itération suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{d}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{d}_{n+1}^i + \delta \mathbf{d}_{n+1} \\ \Delta \lambda^{i+1} = \Delta \lambda^i + \delta \Delta \lambda \end{cases} \quad 3-128$$

Ces itérations continuent jusqu'à convergence et obtention des valeurs définitives de  $\mathbf{d}_{n+1}$  et  $\Delta \lambda$ .

Ces valeurs serviront ensuite à calculer toutes les variables d'état à instant  $t_{n+1}$ .

### 3.4 ELEMENT A CHAMP DE DEFORMATION POSTULEE

Nous avons implémenté dans notre logiciel un élément quadrangle 2D proposé initialement par Wang et al. (2004). Cet élément dit « Assumed strain » est défini de sorte à éviter l'apparition de verrouillage au cisaillement et dilatation volumique. Pour définir le champ de déplacement, nous présentons le développement de Simo et Rifai (1990) dans leurs premiers travaux sur les éléments « Assumed strain ». La formulation proposée est basée sur l'expression de la forme variationnelle de Hu-Washizu avec une décomposition particulière du tenseur des gradients des déformations.

#### 3.4.1 Formulation variationnelle Mixte

Nous considérons donc le principe Mixte non linéaire de Hu-Washizu (Eq.3-129) définissant une formulation variationnelle stationnaire, comme décrit par Fish et Belytschko (1988), à savoir,

$$\delta \Pi^{HW}(\vec{u}, \dot{\underline{\epsilon}}, \underline{\sigma}) = \int_{\Omega} (\underline{\sigma} : \delta \underline{D}_a) dV + \delta \int_{\Omega} \underline{\sigma}_a : \left( \underline{\nabla}^s(\vec{u}) - \underline{D}_a \right) dV - \delta \dot{W}^{ext} + \delta \dot{W}^{inert} = 0 \quad 3-129$$

Tel que,

$$\delta \dot{W}^{ext} = \int_{\Omega} \vec{f}_d \cdot \delta \vec{u} dV + \int_{\Gamma} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} dS \quad \text{et} \quad \delta \dot{W}^{inert} = \int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot \delta \vec{u} dV \quad 3-130$$

Avec  $\delta$  désigne l'opérateur de variation,  $\dot{W}^{ext}$  est le taux de travail de chargement extérieur,  $\dot{W}^{kin}$  est le taux de l'énergie inertielle,  $\vec{u}$  est le vecteur champ de vitesse,  $\underline{\sigma}$  la contrainte de Cauchy évaluée par le modèle de comportement,  $\underline{D}_a$  est le taux de déformation postulée,  $\underline{\sigma}_a$  est la contrainte postulée et  $\underline{\nabla}^s(\vec{u})$  est le gradient symétrique du champs de vitesse.

### 3.4.2 Approche numérique

Nous discrétisons cette formulation variationnelle de Hu-Washizu à partir de sous-domaines élémentaires  $\Omega^e$ . Nous allons alors raisonner sur un élément « e » et basculer en notation matricielle.

Simo et Hughes (1986) préconisent de construire la projection du gradient discrétisé du champ des vitesses  $\left[ B_{n+1/2} \right]$ , tel que  $\left\{ \nabla^s(\vec{u}^e) \right\}_{n+1} = \left[ B_{n+1/2} \right] \left\{ \hat{u}^e \right\}_{n+1/2}$ , dans un sous espace « Assumed strain » défini de façon à éviter l'apparition de verrouillage au cisaillement transverse et à la dilatation de volume. Ce nouvel opérateur  $\left[ B_{n+1/2}^a \right]$  est choisie de manière à évaluer le taux des déformations postulé  $\left\{ D^a \right\}_{n+1} = \left[ B_{n+1/2}^a \right] \left\{ \hat{u}^e \right\}_{n+1/2}$  et de générer un tenseur des contraintes postulé  $\left\{ \sigma_{n+1}^a \right\}$  orthogonal à la différence entre le gradient symétrique du champ des vitesses et le taux des déformations postulé.

$$\delta \left( \int_{\Omega^e} \langle \sigma_{n+1}^a \rangle \left( \left[ B_{n+1/2} \right] - \left[ B_{n+1/2}^a \right] \right) dV \left\{ \hat{u}^e \right\}_{n+1/2} \right) = 0 \quad 3-131$$

Nous utilisons un repère corotationnel défini au barycentre de l'élément et construit à partir des fonctions géométriques de l'élément quadrangle (*Figure 3-7*) défini dans son espace de référence à partir des variables  $\xi$  et  $\eta$  :

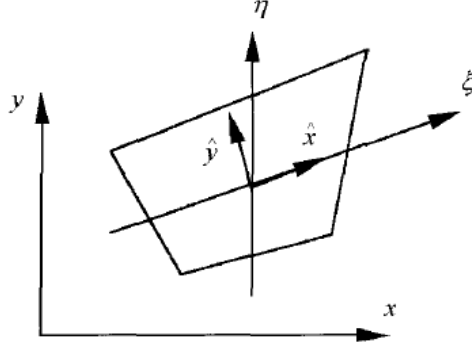


Figure 3-7: Définition du repère corotationnel pour élément Q4-URI (Wang, 2004)

La matrice de rotation  $[Q]$  s'exprime alors par la forme suivante,

$$[Q] = \begin{Bmatrix} -T \\ e_1 \\ -T \\ e_2 \end{Bmatrix}, \quad \vec{g}_1 = \frac{\partial x}{\partial \xi} \vec{e}_x + \frac{\partial x}{\partial \eta} \vec{e}_y, \quad \vec{e}_1 = \frac{\vec{g}_1}{\|\vec{g}_1\|}, \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0, \quad \|\vec{e}_2\| = 1 \quad 3-132$$

Les variables mécaniques (vecteur des déplacements, tenseur des contraintes et des déformations) et géométriques (coordonnées des nœuds de l'élément) sont exprimées dans le nouveau repère corotationnel tel que,

$$\hat{\vec{u}}_{n+1} = [Q_{n+1}] \cdot \vec{u}_{n+1} \quad \text{et} \quad [\hat{\sigma}_n] = [Q_n][\sigma_n][Q_n]^T \quad 3-133$$

L'opérateur gradient  $[\hat{B}_{n+1/2}^a]$  est décomposé en deux parties, le tenseur des déformations  $[\hat{B}_{n+1/2}^0]$  qui donne l'ensemble des composantes du taux des déformations  $\{\hat{D}^a\}_{n+1}$  au centre de l'élément et le tenseur  $[\hat{B}_{n+1/2}^h] = \xi [\hat{B}_{n+1/2}^\xi] + \eta [\hat{B}_{n+1/2}^\eta]$  qui complète la formulation des composantes du tenseur taux des déformations à n'importe quel point de l'élément.

Au centre de l'élément ( $\xi = \eta = 0$ ), la première partie de l'opérateur gradient discrétisé  $[\hat{B}_{n+1/2}^0]$  s'exprime de la façon suivante,

$$[\hat{B}_{n+1/2}^0] = \begin{bmatrix} \langle b_x \rangle & \langle 0 \rangle \\ \langle 0 \rangle & \langle b_y \rangle \\ \langle b_y \rangle & \langle b_x \rangle \end{bmatrix} \quad 3-134$$

L'incrément des déformations totales évalué au barycentre de l'élément est sous la forme,

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_{xx} \\ \Delta \varepsilon_{yy} \\ 2\Delta \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}_{\xi=\eta=0} = [\hat{B}_{n+1/2}^0] \{\Delta U_{n+1}\} \quad 3-135$$

avec  $\langle b_x \rangle = \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \hat{x}} \Big|_{\xi=\eta=0}$  et  $\langle b_y \rangle = \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \hat{y}} \Big|_{\xi=\eta=0}$  ; tel que  $\langle N \rangle = \langle N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \rangle$ . La forme de la seconde partie de l'opérateur gradient  $[\hat{B}_{n+1/2}^h]$  s'appuie sur l'expression du champ de déplacement pour un élément Q4 et s'annule au point d'intégration. L'expression de l'opérateur développée par Wang et al., permet de prendre en compte l'élimination du verrouillage au cisaillement et à la dilatation volumique :

$$[\hat{B}_{n+1/2}^h] = \xi [\hat{B}_{n+1/2}^\xi] + \eta [\hat{B}_{n+1/2}^\eta] = \frac{\xi}{2} \begin{bmatrix} \langle b_{x\xi} \rangle & -\langle b_{y\xi} \rangle \\ -\langle b_{x\xi} \rangle & \langle b_{y\xi} \rangle \\ \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle \end{bmatrix} + \frac{\eta}{2} \begin{bmatrix} \langle b_{x\eta} \rangle & -\langle b_{y\eta} \rangle \\ -\langle b_{x\eta} \rangle & \langle b_{y\eta} \rangle \\ \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle \end{bmatrix} \quad 3-136$$

Les expressions des vecteurs composantes de la matrice des déformations  $[\hat{B}_{n+1/2}^h]$  sont obtenues par une décomposition astucieuse du tenseur de déformation auquel nous enlevons la contribution de la déformation au centre de l'élément, dans ces conditions :

$$\begin{aligned} \langle b_{x\xi} \rangle &= -\frac{1}{4detJ} (\langle Tsi \rangle \{Y\}) \langle \zeta \rangle \\ \langle b_{x\eta} \rangle &= \frac{1}{4detJ} (\langle Net \rangle \{Y\}) \langle \zeta \rangle \\ \langle b_{y\xi} \rangle &= \frac{1}{4detJ} (\langle Tsi \rangle \{X\}) \langle \zeta \rangle \\ \langle b_{y\eta} \rangle &= -\frac{1}{4detJ} (\langle Net \rangle \{X\}) \langle \zeta \rangle \end{aligned} \quad 3-137$$

où  $detJ$  est le déterminant de la matrice Jacobienne,  $\langle X \rangle = \langle \hat{x}_1 \ \hat{x}_2 \ \hat{x}_3 \ \hat{x}_4 \rangle$  et  $\langle Y \rangle = \langle \hat{y}_1 \ \hat{y}_2 \ \hat{y}_3 \ \hat{y}_4 \rangle$  sont respectivement les coordonnées selon  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  des nœuds de l'élément Q4 dans le repère corotationnel.  $\langle Tsi \rangle = \langle -1 \ 1 \ 1 \ -1 \rangle$  et  $\langle Net \rangle = \langle -1 \ -1 \ 1 \ 1 \rangle$ . Enfin le vecteur  $\langle \zeta \rangle$  se calcul par l'expression suivante :

$$\langle \zeta \rangle = \frac{1}{4} (\{h\} - (\langle h \rangle \{X\}) \{b_x\} - (\langle h \rangle \{Y\}) \{b_y\}) \text{ avec } \langle h \rangle = \langle 1 \ -1 \ 1 \ -1 \rangle \quad 3-138$$

Le vecteur incrément de contrainte de Cauchy est obtenu par la résolution du modèle de comportement présenté au *Chapitre 2* et est décomposé en série de Taylor :

$$\begin{aligned} \{\Delta \hat{\sigma}_{n+1}\} &= \{\Delta \hat{\sigma}_{n+1}^0\} + \xi \{\Delta \hat{\sigma}_{n+1}^\xi\} + \eta \{\Delta \hat{\sigma}_{n+1}^\eta\} \\ &= [C^{ep}] \left( [\hat{B}_{n+1/2}^0] + \xi [\hat{B}_{n+1/2}^\xi] + \eta [\hat{B}_{n+1/2}^\eta] \right) \{\Delta U_{n+1}\} \end{aligned} \quad 3-139$$

avec  $[C^{ep}]$  représente la matrice tangente consistante du modèle de comportement élastoplastique.

Le vecteur force interne nodale est alors évalué par intégration réduite à un seul point de Gauss,



$$\{\hat{F}_{int}^e\}_{n+1} = \{\hat{F}_{int}^0\}_{n+1} + \{\hat{F}_{int}^a\}_{n+1} \quad 3.140$$

$$\{\hat{F}_{int}^0\}_{n+1} = A \left[ \hat{B}_{n+1/2}^0 \right]^T \{\hat{\sigma}_{n+1}^0\}^i \quad 3.141$$

$$\{\hat{F}_{int}^a\}_{n+1} = \frac{A}{3} \left[ \hat{B}_{n+1/2}^\xi \right]^T \{\hat{\sigma}_{n+1}^\xi\} + \frac{A}{3} \left[ \hat{B}_{n+1/2}^\eta \right]^T \{\hat{\sigma}_{n+1}^\eta\} \quad 3-142$$

où  $A$  représente l'aire de l'élément.

Le vecteur force interne nodale est ensuite tourné pour trouver son expression dans le repère global,

$$\{\hat{F}_{int}^e\}_{n+1} = \bigcup_e [Q]^T \{\hat{F}_{int}^e\} \quad 3-143$$

### 3.5 SCHEMA DE RESOLUTION DYNAMIQUE EXPLICITE ADAPTE A L'APPROXIMATION DIFFUSE

Considérons le modèle couplé MLS-MEF développé au *Chapitre 2, section 2.2*. Ce modèle a été exploité pour traiter des problèmes linéaires en HPP. Dans ce chapitre, nous allons étendre le modèle approximation diffuse dans le cadre des transformations finies. Nous utilisons un schéma dynamique explicite pour résoudre numériquement le problème posé qui nécessite la construction d'une matrice masse diagonalisée et un calcul d'incrément de temps stabilisé

#### 3.5.1 Référentiel tournant de Green-Naghdi

Les contraintes corotationnelles notées  $\hat{\underline{\sigma}}$  sont reliées à la contrainte non tournée de Cauchy  $\underline{\sigma}$  par la transformation orthogonale  $\underline{R}$  (de l'Eq.3-15).

$$\underline{\sigma} = \underline{R} \cdot \hat{\underline{\sigma}} \cdot \underline{R}^T \quad 3.144$$

La dérivée corotationnelle au sens de Green-Naghdi du tenseur des contraintes  $\dot{\underline{\sigma}}^{GN}$  découle de la dérivée par rapport au temps  $t$  de la contrainte de Cauchy (Eq.3.144), en utilisant l'équation 3-33, comme suit,

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\sigma}} &= \underline{\dot{R}} \cdot \hat{\underline{\sigma}} \cdot \underline{R}^T + \underline{R} \cdot \dot{\hat{\underline{\sigma}}} \cdot \underline{R}^T + \underline{R} \cdot \hat{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\dot{R}}^T \\ &= \underline{\Omega} \cdot \underline{R} \cdot \hat{\underline{\sigma}} \cdot \underline{R}^T + \underline{R} \cdot \dot{\hat{\underline{\sigma}}} \cdot \underline{R}^T + \underline{R} \cdot \hat{\underline{\sigma}} \cdot \underline{R}^T \cdot \underline{\Omega}^T \\ &= \underline{\Omega} \cdot \underline{\sigma} + \underline{R} \cdot \dot{\hat{\underline{\sigma}}} \cdot \underline{R}^T + \underline{\sigma} \cdot \underline{\Omega}^T \end{aligned} \quad 3.145$$

L'expression de la dérivée corotationnelle est donc :

$$\underline{\dot{\sigma}}^{GN} = \underline{R} \cdot \underline{\dot{\hat{\sigma}}} \cdot \underline{R}^T = \underline{\sigma} + \underline{\Omega}^T \cdot \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \cdot \underline{\Omega} \quad 3-146$$

Dans le cas d'une intégration temporelle par un schéma des différences centrées, les composantes du tenseur des contraintes  $\underline{\hat{\sigma}}_{n+1}$  à l'instant  $t_{n+1}$  sont obtenues en ajoutant l'incrément des contraintes corotationnelles à l'état du tenseur des contraintes à l'instant  $t_n$  :

$$\underline{\hat{\sigma}}_{n+1} = \underline{\hat{\sigma}}_n + \Delta \underline{\hat{\sigma}}_{n+1} = \underline{\sigma}_n + \Delta t_{n+1} \underline{\dot{\hat{\sigma}}}_{n+\frac{1}{2}} \quad 3-147$$

Selon les équations 3.145 et 3-146, le transport corotationnelle à partir du tenseur de Cauchy se fait comme suit,

$$\underline{R}_{n+1}^T \cdot \underline{\sigma}_{n+1} \cdot \underline{R}_{n+1} = \underline{R}_n^T \cdot \underline{\sigma}_n \cdot \underline{R}_n + \Delta t_{n+1} \cdot \underline{R}_{n+\frac{1}{2}}^T \cdot \underline{\dot{\sigma}}_{n+\frac{1}{2}}^{GN} \cdot \underline{R}_{n+\frac{1}{2}} \quad 3-148$$

Tel que  $\underline{R}_{n+1}$  est reliée à  $\underline{R}_n$  par la transformation orthogonale  $\underline{Q}_{n+\frac{1}{2}}$ , à savoir ,

$$\underline{R}_{n+1} = \underline{Q}_{n+\frac{1}{2}} \cdot \underline{R}_n \text{ et } \underline{R}_{n+\frac{1}{2}} = \underline{Q}_{n+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cdot \underline{R}_n = \left( \underline{Q}_{n+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right)^T \cdot \underline{R}_{n+1} \quad 3-149$$

Avec,

$$\underline{Q}_{n+\frac{1}{2}}^T \cdot \underline{Q}_{n+\frac{1}{2}} = \underline{Q}_{n+\frac{1}{2}} \cdot \underline{Q}_{n+\frac{1}{2}}^T = \underline{I} \text{ et } \underline{Q}_{n+\frac{1}{2}} = \underline{Q}_{n+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cdot \underline{Q}_{n+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \quad 3-150$$

$\underline{Q}_{n+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$  est introduite pour définir la transformation intermédiaire tournée de  $\underline{R}_{n+\frac{1}{2}}$  (Figure 3-8).

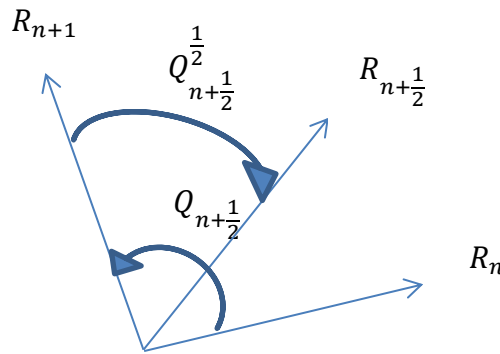


Figure 3-8: Référentiel intermédiaire entre  $t_n$  et  $t_{n+1/2}$  et  $t_{n+1}$

L'évaluation du tenseur  $\underline{Q}_{n+\frac{1}{2}}$  peut s'avérer fastidieuse, Hughes et Winget proposent alors la simplification suivante,

$$\underline{Q}_{n+\frac{1}{2}} \approx \underline{I} + \Delta t_{n+1} \underline{\Omega}_{n+\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \underline{Q}_{n+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \underline{I} + \frac{1}{2} \Delta t_{n+1} \underline{\Omega}_{n+\frac{1}{2}} \quad 3-151$$

La difficulté est maintenant de définir une procédure afin de calculer les tenseurs  $\underline{R}_{n+1}$  et  $\underline{\Omega}_{n+\frac{1}{2}}$ . Une première solution consiste à réaliser la décomposition polaire de  $\underline{F}_{n+1} = \underline{R}_{n+1} \cdot \underline{U}_{n+1} = \underline{V}_{n+1} \cdot \underline{R}_{n+1}$ . Maurer (2003) préconise une procédure incrémentale pour réaliser une mise à jour des tenseurs  $\underline{\Omega}_{n+\frac{1}{2}}$  et  $\underline{V}_{n+1}$  à partir de leurs données en vitesse, à savoir,

$$\begin{aligned} \underline{V}_{n+1} &= \underline{V}_n + \Delta t_{n+1} \underline{\dot{V}}_{n+\frac{1}{2}} \\ \underline{V}_{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} (\underline{V}_n + \underline{V}_{n+1}) = \underline{V}_n + \frac{1}{2} \Delta t_{n+1} \cdot \underline{\dot{V}}_{n+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

A partir du tenseur gradient des vitesses de déformation et de la décomposition polaire de  $\underline{F}_{n+1}$ , nous obtenons la relation suivante [Maurer (2003)],

$$\underline{\dot{V}}_{n+\frac{1}{2}} = \underline{L}_{n+\frac{1}{2}} \cdot \underline{V}_{n+1} - \underline{V}_{n+1} \cdot \underline{\Omega}_{n+\frac{1}{2}} \quad 3-152$$

Si nous utilisons les parties antisymétriques des tenseurs, alors la vitesse  $\underline{\dot{V}}_{n+\frac{1}{2}}$ , qui est symétrique, s'élimine ( $\underline{\dot{V}}_{n+\frac{1}{2}} = \underline{\dot{V}}_{n+\frac{1}{2}}^T$ ,  $\underline{V}_{n+1} = \underline{V}_{n+1}^T$  et  $\underline{\Omega}_{n+\frac{1}{2}} = -\underline{\Omega}_{n+\frac{1}{2}}^T$ ) et nous avons donc,

$$\underline{L}_{n+\frac{1}{2}} \cdot \underline{V}_{n+1} - \underline{V}_{n+1} \cdot \underline{L}_{n+\frac{1}{2}}^T - \underline{V}_{n+1} \cdot \underline{\Omega}_{n+\frac{1}{2}} - \underline{\Omega}_{n+\frac{1}{2}} \cdot \underline{V}_{n+1} = \underline{0} \quad 3-153$$

Cette relation permet d'obtenir le tenseur spin rotation à partir de la résolution du système suivant :

$$\begin{bmatrix} (-V_{22} - V_{33}) & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & (-V_{11} - V_{33}) & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & (-V_{11} - V_{22}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Omega_{32} \\ \Omega_{13} \\ \Omega_{21} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^3 \begin{Bmatrix} L_{2j}V_{j3} - L_{3j}V_{j2} \\ L_{3j}V_{j1} - L_{1j}V_{j3} \\ L_{1j}V_{j2} - L_{2j}V_{j1} \end{Bmatrix} \quad 3-154$$

Par la suite, pour déterminer les inconnues, un algorithme itératif est mis en place :

- i) Initialisation, nous posons  $k=0$ , et  $\underline{V}_{n+1}^0 = \underline{V}_n$  et le gradient vitesse de déformation est évalué à partir des fonctions de forme MLS et du gradient régularisé
- ii) Obtenir une première évaluation de  $\underline{\Omega}_{n+\frac{1}{2}}^k$  par la résolution du système 3-154
- iii) Evaluation du tenseur vitesse  $\underline{\dot{V}}_{n+\frac{1}{2}}^k$  à partir de la relation 3-152

- iv) Remise à jour du tenseur  $\underline{V}_{n+1}^{k+1} = \underline{V}_{n+1}^k + \Delta t_{n+1} \dot{\underline{V}}_{n+\frac{1}{2}}^k$
- v) Si  $|DEV(\underline{V}_{n+1}^{k+1} - \underline{V}_{n+1}^k)| > \varepsilon_{tot}$  alors nous recommençons les itérations à partir de la ligne ii)
- vi) Sinon, la boucle est terminée et  $\underline{V}_{n+1} = \underline{V}_{n+1}^{k+1}$ ,  $\underline{\Omega}_{n+\frac{1}{2}} = \underline{\Omega}_{n+\frac{1}{2}}^{k+1}$

Tel que  $DEV(\underline{A}) = A_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \sum_k A_{kk}$

La Figure 3-9 présente l'évaluation des différents tenseurs selon un schéma d'intégration centrée.

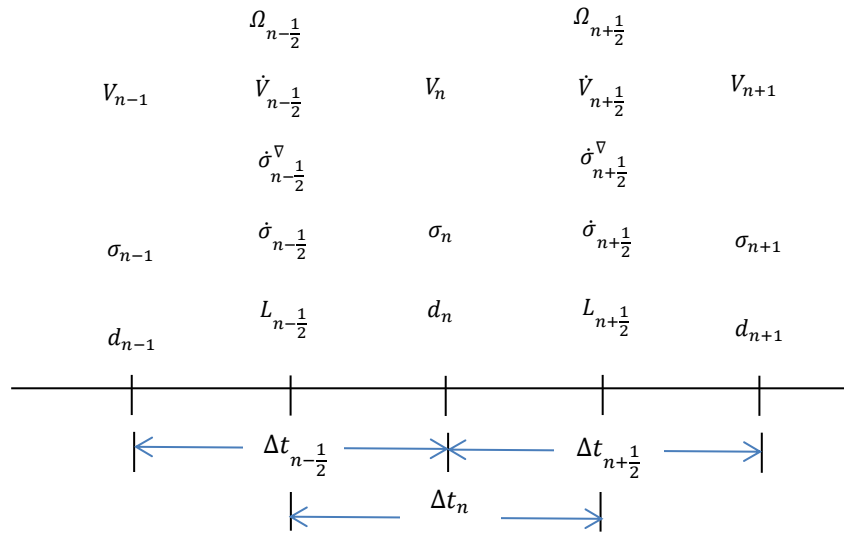


Figure 3-9: Schéma d'intégration à demi-pas

### 3.5.2 Matrice masse nodale diagonale

La résolution du problème mécanique par une approche dynamique explicite nécessite la mise en place d'une matrice masse diagonale. Dans le cas des méthodes MEF, Il existe dans la littérature plusieurs expression de cette matrice masse nodale diagonalisée [Hinton et al. (1976), Hughes (1987)]. Des études plus récentes [Li et Liu (2000), Chen et Wang (2000), parmi d'autres] ont proposé différentes possibilités de construction de la matrice masse diagonale dans le cas d'une approche Meshless. De manière générale la matrice masse diagonale s'exprime par la formule suivante,

$$\forall I, M_I^{diag} = \vartheta_I M_{II} \quad 3-155$$

Tels que, dans le cas d'une intégration nodale,  $\Omega_I$  représente la cellule d'intégration du nœud MLS  $I$ , et  $\vartheta_I$  est le facteur d'échelle, à savoir,

$$\vartheta_I = \frac{M_{\Omega_I}}{\sum_{J=1}^{n_I} M_{IJ}}, M_{\Omega_I} = \int_{\Omega_I} \rho d\Omega \quad 3-156$$

La formulation 3-155 conduit à une matrice masse diagonalisée (lumped mass matrix) qui « conserve » la masse de l'ensemble du système, même si les fonctions d'enrichissement sont incluses.

$$M_{IJ} = \int_{\Omega_I} \rho \phi_I^{MLS}(\vec{x}) \phi_J^{MLS}(\vec{x}) d\Omega \quad 3-157$$

Tels que  $n_I$  est le nombre de nœuds dans le domaine d'influence du nœud  $I$  et  $M_{\Omega_I}$  est la masse de la cellule d'intégration  $\Omega_I$ . Ou encore, d'une façon plus générale, la matrice masse nodale se présente sous la forme ci-dessous selon Menouillard et al. (2006),

$$M_I^{diag} = \frac{\rho}{\int_{\Omega_I} \phi_I^{MLS}(\vec{x}) \left[ \sum_{J=1}^{n_I} \phi_J^{MLS}(\vec{x}) \right] d\Omega} \int_{\Omega_I} \left( \phi_I^{MLS}(\vec{x}) \right)^2 d\Omega \quad 3-158$$

Les conditions de consistance imposent la partition de l'unité des fonctions de forme MLS, à savoir,

$$\sum_{J=1}^{n_I} \phi_J^{MLS}(\vec{x}) = 1 \quad 3-159$$

Ceci nous amène à la formulation suivante :

$$\forall I, M_I^{diag} = \rho \int_{\Omega_I} \phi_I^{MLS}(\vec{x}) d\Omega \quad 3-160$$

### 3.5.3 Vecteur des forces nodales internes

Le vecteur des forces internes dans la zone  $\Omega^{MLS}$  est obtenu à partir de la relation suivante

$$\{F_{int}\}_{n+1} = \sum_{I=1}^N \left[ \tilde{B}_{n+\frac{1}{2}}^I \right] \cdot \{\sigma_{n+1}(\vec{x}_I)\} A_I \quad 3-161$$

Le vecteur contrainte  $\{\sigma_{n+1}(\vec{x}_I)\}$  évalué au nœud  $I$  est obtenue à partir du modèle de comportement décrit en *section 3.2*, dont le principe d'objectivité est assuré par le transport corotationnel de Green-Nagdhi (*section 3.5.1*).

La difficulté réside dans la programmation du tenseur des déformations régularisées  $\left[ \tilde{B}_{n+\frac{1}{2}}^I \right]$ . A chaque cellule d'intégration  $\Omega_I$  associée au nœud  $I$ , nous utilisons la formule 3-114 pour construire la matrice  $\left[ \tilde{B}_{n+\frac{1}{2}}^I \right]$ .

La relation 3-82 impose une construction du tenseur des gradients régularisés à demi-pas. Cette situation complique la méthode car lorsque nous perturbons la position du nœud  $I$ , l'ensemble des fonctions de forme MLS sont perturbées et nous devons gérer cette perturbation  $\vec{x}_{n+\frac{1}{2}} = \vec{x}_n + \frac{1}{2}\Delta\vec{u}_{n+1}$  de position sur l'ensemble du modèle.

### 3.5.4 Pas de temps stabilisé

La résolution d'un problème mécanique par un schéma dynamique explicite est conditionnellement stable. La stabilité temporelle est garantie par un choix d'incrément de temps tel que,

$$\Delta t \leq \Delta t_c = \frac{2}{\omega_{max}} \quad 3-162$$

avec  $\omega_{max}$  la fréquence propre maximale du problème suivant :

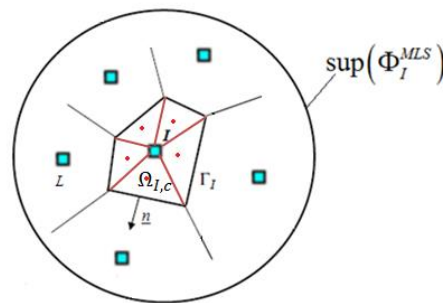
$$\det([K] - \omega^2[M^{diag}]) = 0 \quad 3-163$$

Dans le cas d'un problème 2D, Belytchko et al (2000) montrent que nous pouvons estimer la fréquence propre maximale par l'équation suivante :

$$\omega_{max}^2 \leq C_e^2 \max_{\vec{x}} \left( \sum_{I=1}^N \frac{1}{\phi_I^{MLS}(\vec{x})} \left[ \frac{\partial \phi_I^{MLS}(\vec{x})}{\partial x} \right]^2, \sum_{I=1}^N \frac{1}{\phi_I^{MLS}(\vec{x})} \left[ \frac{\partial \phi_I^{MLS}(\vec{x})}{\partial y} \right]^2 \right) \quad 3-164$$

avec  $C_e$  est la célérité d'une onde élastique, défini par l'équation 3-104. Dans le cas d'un schéma d'intégration de Gauss-Legendre, l'estimation de la relation 3-164 s'effectue aux points de Gauss de la cellule d'intégration. Dans le cas d'une intégration nodale, nous avons développé une solution semblable en décomposant les cellules de Voronoï en sous triangles. Nous estimons alors les quantités

$\frac{1}{\phi_I^{MLS}(\vec{x})} \left[ \frac{\partial \phi_I^{MLS}(\vec{x})}{\partial x} \right]^2$  et  $\sum_{I=1}^N \frac{1}{\phi_I^{MLS}(\vec{x})} \left[ \frac{\partial \phi_I^{MLS}(\vec{x})}{\partial y} \right]^2$  aux barycentres des triangles (voir *Figure 3-10*).



*Figure 3-10 : Construction des sous-cellules  $\Omega_{I,c}$  sur chaque cellule de Voronoï sur  $\Omega_I$*

### 3.6 VALIDATION DU MODELE COUPLÉ MLS-MEF ÉLASTOPLASTIQUE EN HPP

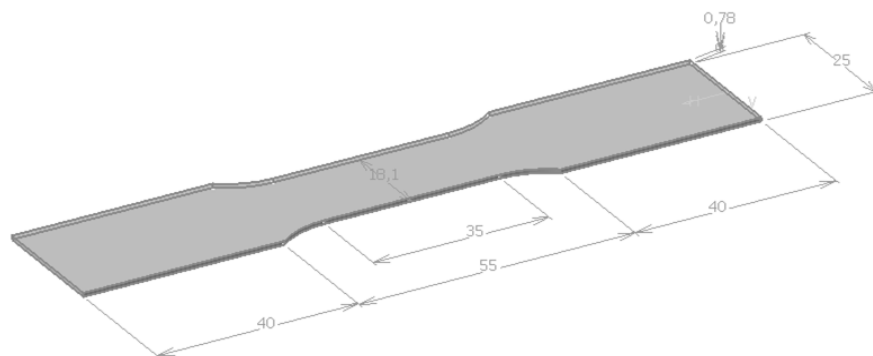
Nous avons choisi comme exemple la modélisation d'un essai de traction d'une éprouvette plate en 2D déformation plane dont les dimensions sont données suivant la *Figure 2-11.a*. Cet exemple a été publié dans le congrès ESDA2012 [Ghozzi et al. (2012)] pour tester la possibilité d'introduire un modèle de comportement non linéaire. Le comportement du matériau est régi par le modèle élastoplastique présenté au Chapitre 3.2 mais en annulant les écrouissages isotrope et cinématique. Pour des raisons de simplicité, le couplage avec l'endommagement ductile n'est pas introduit. Dans ce cas la surface de charge se réduit à cette simple expression:

$$f(\underline{\sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\sigma}^{dev} : \underline{\sigma}^{dev}} - \sigma_y \leq 0 \quad 3-165$$

Les paramètres matériaux retenus pour cet exemple sont : module d'Young  $E=210$  GPa, coefficient de Poisson  $\nu=0.3$  et  $\sigma_y=500$  MPa. Des conditions aux limites en déplacement sont imposées à chaque extrémité de l'éprouvette et indiquées dans la *Figure 2-11b*.

Le logiciel Abaqus® a été utilisé dans un premier temps pour simuler la déformation plastique de l'éprouvette, l'éprouvette est maillée avec des éléments plans CPE4R de taille  $1.5 \times 1.5$  mm<sup>2</sup> et un schéma de résolution implicite est employé pour la résolution des équations d'équilibre (voir *Figure 2-11b*).

Nous avons ensuite modélisé, le même essai avec notre méthode numérique Mixte MLS-MEF (*Figure 2-11c*). Les têtes de l'éprouvette sont maillées avec des éléments 2D à champ de déformation postilée. La partie utile de l'éprouvette est discrétisée avec des nœuds MLS et la transition MLS-MEF ainsi que les frontières sont discrétisées avec des éléments de transition MLS-MEF. Nous avons opté sur des fonctions poids avec des supports de forme circulaire de rayon d'influence  $r_i=2.5$ mm.



(a)

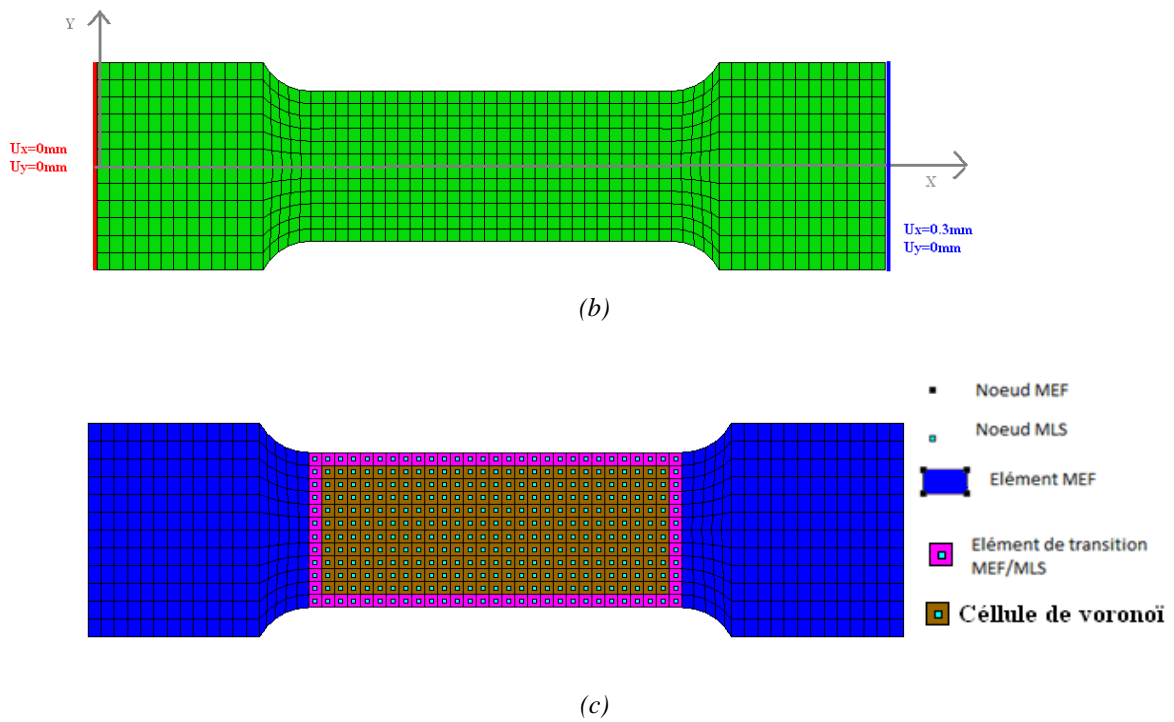
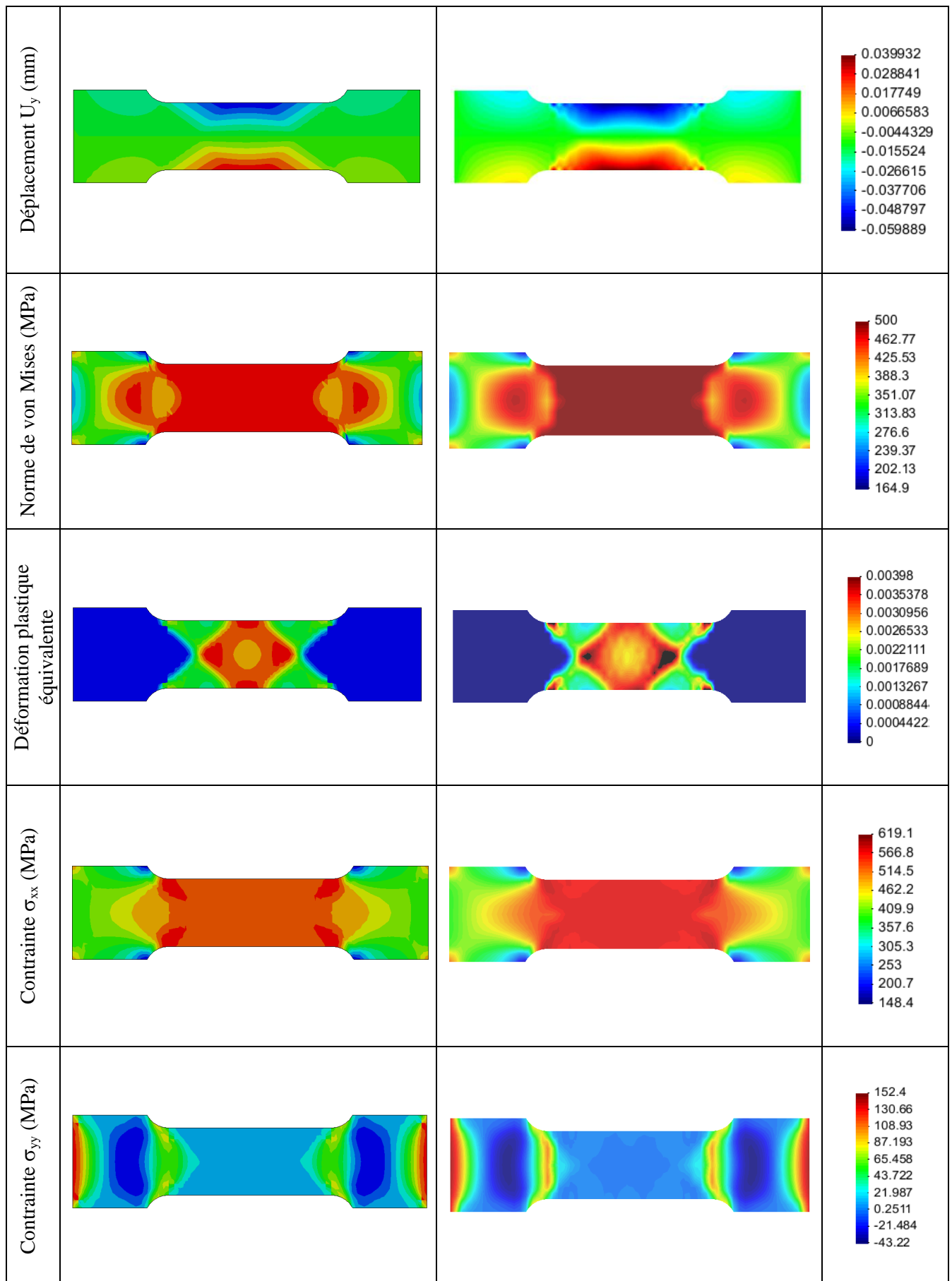


Figure 3-11: Discretisation de l'éprouvette de traction (a) Dimension de l'éprouvette plate (b) Maillage initial d'élément CPE4R + conditions aux limites (c) Répartition des différents domaines  $\Omega^{MEF}$ ,  $\Omega^{MLS/MEF}$ ,  $\Omega^{MLS}$  et position initiale des nœuds MLS

	ABAQUS®	MLS-MEF	Légende
Déplacement $U_x$ (mm)			0.3 0.26667 0.23333 0.2 0.16667 0.13333 0.1 0.066667 0.033333 0





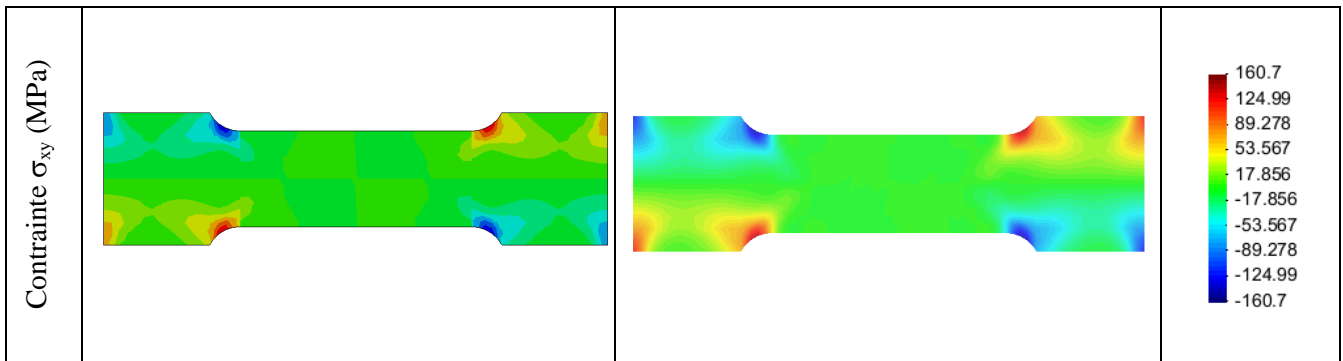


Tableau 12: Comparaison des résultats numériques entre le logiciel Abaqus® et la méthode numérique basée sur le couplage MLS-MEF

Le Tableau 12 montre un certain nombre de composantes physiques (déplacement, contraintes, ...) et leurs répartitions dans l'éprouvette déformée après un déplacement maximum de 0.3mm. Lorsque nous comparons les solutions Abaqus® à notre méthode numérique MLS-MEF, nous pouvons déjà remarquer que le champ de contrainte de von Mises et les différentes composantes du tenseur des contraintes sont qualitativement semblables pour les deux approches. Nous observons des différences de valeur mais dans l'ordre de l'acceptable. Nous constatons aussi que la localisation de l'écoulement plastique au centre de l'éprouvette est bien modélisée par les deux approches. La méthode MLS-MEF semble mieux capter les zones de localisations mais ceci est peut être occasionné par une position adéquate des nœuds MLS. Ce premier exemple nous a donc servi de valider l'intégration d'un modèle de comportement non linéaire et de tester l'élément Q4 Assumed strain. De plus, ce premier exemple nous a validé la possibilité de résoudre un problème mécanique non-linéaire d'une structure discrétisée par trois zones (MEF, MLS/MEF et MLS). A la suite de cet exemple, nous avons entrepris l'intégration de l'approche dynamique explicite et la gestion des grandes déformations.

### 3.7 SIMULATION NUMERIQUE D'UN ESSAI DE TRACTION D'UNE TÔLE EN DP1000

Nous allons simuler un essai de traction d'une éprouvette plate en acier DP1000 d'épaisseur  $e=0.51$  mm, dont l'ensemble des dimensions sont données en Figure 3-12.

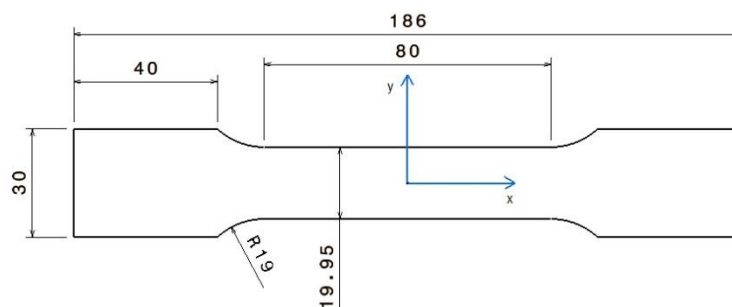


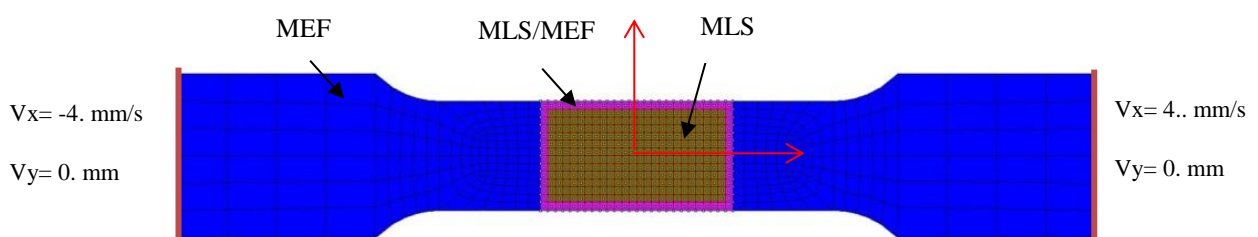
Figure 3-12 : Géométrie de l'éprouvette de traction

Le schéma dynamique explicite est utilisé comme schéma de résolution. Nous allons tester, à travers ce deuxième exemple, l'intégration des transformations finies incrémentales et simuler la propagation de fissure au sens de endommagement ductile qui apparaît lors de la rupture de l'éprouvette en deux parties. Les paramètres du modèle de comportement qui correspondent à l'acier DP1000 ont été identifiés dans une précédente étude [Gharbi et al. (2011)]. Ces paramètres matériaux sont donnés dans le *Tableau 13*.

Acier DP1000												
E (GPa)	$\nu$	$\sigma_y$ (MPa)	$Q$ (MPa)	$b$	$C$ (MPa)	$a$	$S$	$s$	$\beta$	$Y_0$	$\gamma$	$h$
220	0.29	810	3800	15	69500	240	4.5	1.2	2	0.	4	0

*Tableau 13 : Paramètres du modèle de comportement élastoplastique avec endommagement ductile dans le cas d'un acier DP1000*

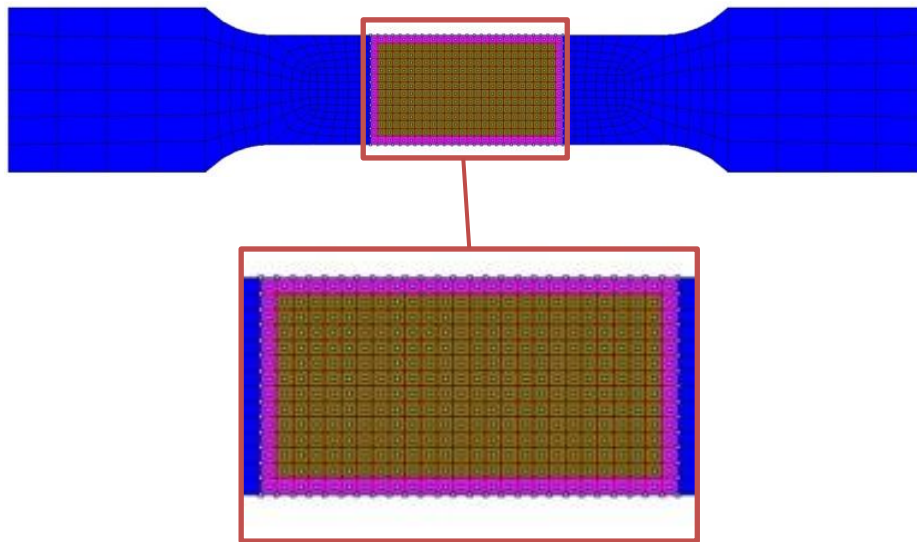
Nous allons décomposer l'éprouvette en quatre domaines (voir *Figure 3-13*). Deux domaines « MEF » discrétisés avec des éléments 2D quadrangulaires à champ de déformation postulé et situés aux extrémités de l'éprouvette. Chaque domaine MEF englobe une tête et une partie de la zone utile de l'éprouvette. Un domaine « MLS » discrétisé essentiellement par des nœuds MLS et situé au centre de l'éprouvette qui est le lieu préférentiel de la formation d'une fissure. Enfin le dernier domaine MLS/MEF qui gère le couplage entre les domaines MEF et MLS. Le domaine MLS/MEF est discrétisé avec une seule couche élément quadrangulaires bilinéaires à quatre nœuds. L'hypothèse des contraintes planes est choisie. Les conditions aux limites sont données sur la *Figure 3-13*.



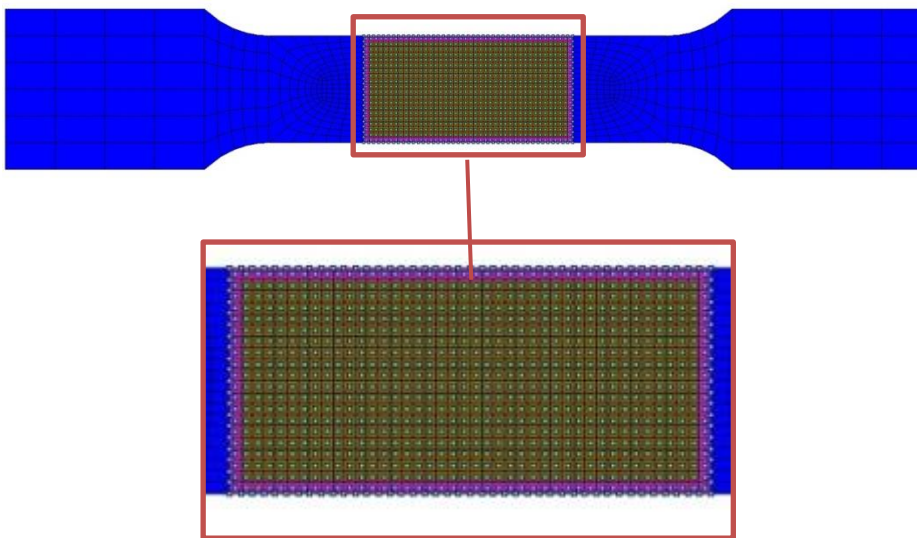
*Figure 3-13 : Conditions aux limites et répartitions des domaines*

L'adoucissement occasionnée par la présence de l'endommagement modifie dans la phase post-critique de l'éprouvette (peu après la condition de Considère) la nature du problème lorsque nous utilisons un modèle de comportement basé sur l'approche locale. Le problème perd alors son caractère elliptique et la solution devient alors sensible aux conditions de discrétisation (taille des éléments dans le cas de la méthode MEF). Le domaine MLS est discrétisé de manière régulière avec des nœuds MLS

espacés d'un pas constant «d ». Nous utilisons deux pas de discrétisation différent,  $d=1. \text{ mm}$  *Figure 3-14a* et  $d=1.5 \text{ mm}$  *Figure 3-14b*, afin d'analyser la sensibilité de la solution à la discrétisation. Pour ces deux cas de discrétisation, la forme et la taille des supports des fonctions de forme sont identiques, à savoir une forme carré de côté  $a_i=b_i=2. \text{ mm}$ .



(a)



(b)

*Figure 3-14 : Pas de discrétisation du domaine MLS (a) Pas de discrétisation  $h=1.5 \text{ mm}$  (b) Pas de discrétisation  $h=1. \text{ mm}$*

Nous avons regroupé dans le *Tableau 14* l'état déformée de l'éprouvette à différents résultats de la sollicitation définie par l'allongement total de l'éprouvette  $U_m$  suivant toute sa longueur (ou déplacement relatif des mors de traction). Pour différentes valeurs de  $U_m$ , nous donnons la distribution de la contrainte de von Mises et de l'endommagement pour le cas de la discrétisation la plus fine  $d=1$ . mm. Lorsque  $U_m=5.5$  mm, les champs mécaniques sont homogènes dans l'éprouvette et l'endommagement reste faible. Juste après le point de Considère,  $U_m=5.8$  mm, la distribution des contraintes commencent à se concentrer au centre de l'éprouvette. A partir de  $U_m=6.8$  mm, les champs des contraintes et d'endommagement se localisent au centre de l'éprouvette. Une striction diffuse apparait et accélère l'amincissement selon la largeur et l'épaisseur. La striction localisée apparait peu de temps après,  $U_m=7.05$  mm et deux bandes de localisation se croisent formant une croix au centre de l'éprouvette. A  $U_m=7.05$  mm, l'endommagement est maximum au centre de l'éprouvette est atteint environ 30%. Une fissure, représentée par un petit groupe de cellules d'intégration dont l'endommagement atteint l'endommagement critique de 0.99, commence alors à s'initier au centre lorsque le déplacement du mors dépasse 7.1 mm. La fissure se propage alors perpendiculairement à la direction de sollicitation. Enfin pour un déplacement  $U_m=7.4$  mm, l'éprouvette est entièrement rompue, la fissure s'est totalement propagée dans l'éprouvette. L'endommagement dans toute une rangée de nœuds MLS a atteint l'endommagement critique. Nous pouvons aussi constater que la contrainte de von Mises dans cette rangée de nœuds a chuté à zéro, justifié par le couplage fort entre l'endommagement et l'ensemble des variables d'état du modèle de comportement. Toutefois, la direction de la fissure finale n'est pas conforme aux observations expérimentales post mortem. En effet, l'éprouvette réelle présente une fissure orientée d'un angle de  $60^\circ$  par rapport à la direction x. Cet angle correspond aux orientations des bandes de localisation que nous avons réussi à capter lorsque  $U_m=7.05$  mm. Nous pensons que cette défaillance de prédiction du modèle Mixte MLS-MEF peut être liée à l'utilisation du gradient régularisé dans la méthode d'intégration nodale qui a tendance à moyenniser les déformations dans la cellule d'intégration. Une autre piste serait de revoir la manière de définir les fonctions poids dans la zone d'élaboration de la fissure. En effet, le grand dilemme dans le traitement des fissures, appelées aussi limites non convexes, est particulièrement lié à la définition du support de la fonction poids, en d'autres termes, le domaine d'influence de la fonction poids à un nœud MLS considéré. En fait, la fissure générée coupe le domaine d'influence à son voisinage, et l'approximation MLS est discontinue dans la fissure puisque le domaine d'influence se termine à sa surface. Le traitement de ces domaines d'influence peut affecter la précision de la méthode. Il convient donc de vérifier plus attentivement la manière de traiter les nœuds totalement endommagés dans les zones MLS.

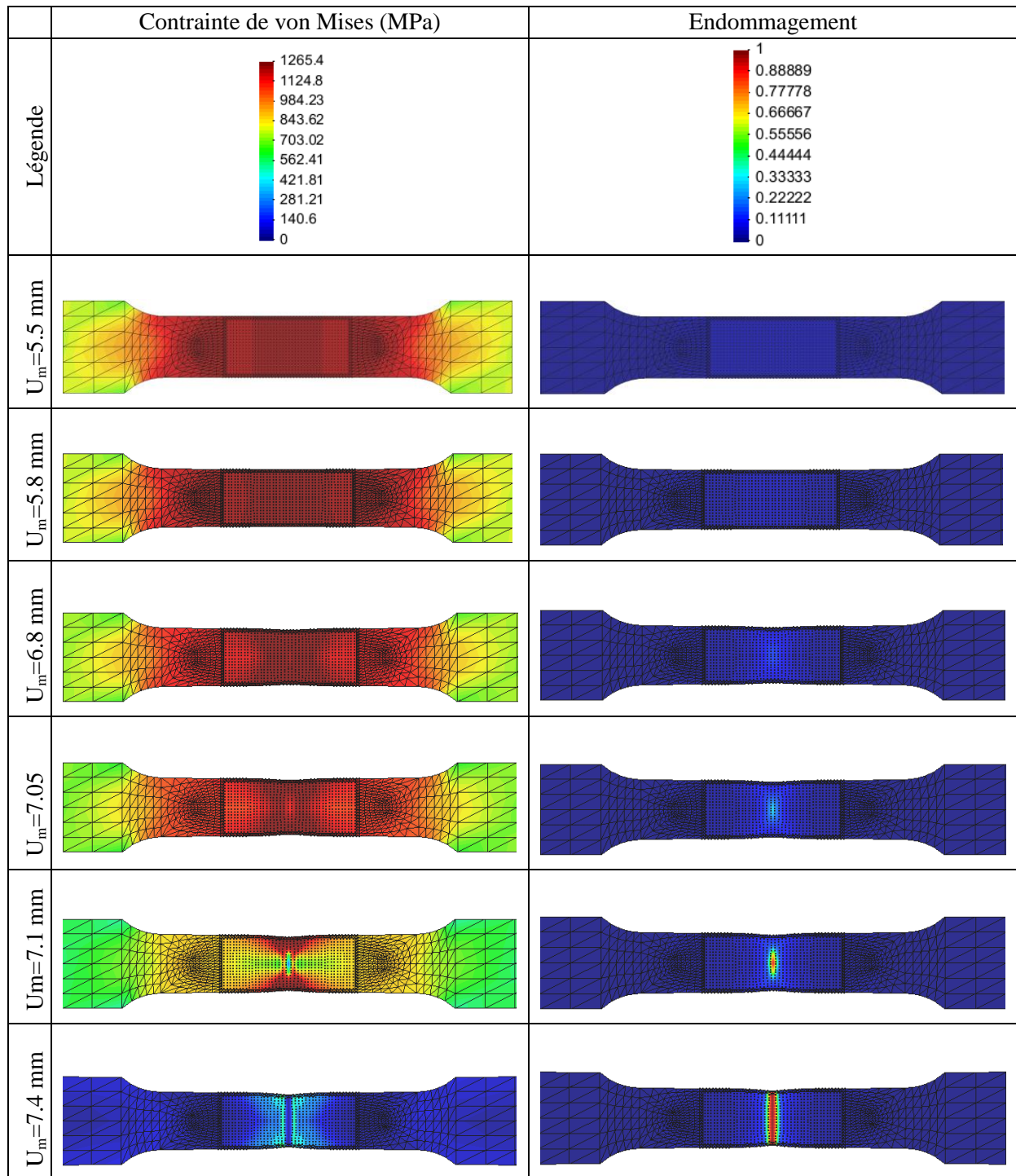


Tableau 14 : Distribution de la contrainte de von Mises et de l'endommagement pour différentes valeurs des déplacements imposés  $U_m^1$

<sup>1</sup> Les éléments quadrangles ainsi que les cellules de voronoï sont découpés en triangle lors de la phase de post-traitement

Cependant, si ces limites non convexes sont ignorées et le domaine d'influence est autorisé à s'étendre à travers la fissure, la fonction poids sera continue, mais avec une convergence qui reste néanmoins faible. Pour ce faire, certains auteurs [Belytschko et al. (1994) et Krysl et Belytschko (1996), Yvonnet et al (2004)] définissent ainsi le domaine d'influence par un critère que l'on appelle « critère de visibilité », permettant d'éliminer les influences parasites entre les nœuds de part et d'autre de la fissure. Il a été démontré à la fois par des expériences numériques [Belytschko et al. (1995)] et par des arguments théoriques [Krysl et Belytschko (1999)] que l'approximation MLS fondée sur le « critère de visibilité » est convergente malgré les discontinuités dans l'approximation.

La simulation de l'essai de traction avec une discrétisation dans le domaine de pas  $d=1.5\text{mm}$  montrent des résultats quasi-identiques que ceux présentés dans le *Tableau 14*. Même l'orientation de la fissure selon le sens transversal est observée avec un pas de discrétisation plus gros. Cependant lorsque nous traçons l'évolution de l'effort de traction pour les deux cas de discrétisation (*Figure 3-15*) nous remarquons :

1. Les efforts de traction numérique et expérimentale coïncident très bien.
2. Nous retrouvons bien quatre phases de comportement, élastique, plastique avec écrouissage positif qui provoque l'augmentation de l'effort, passage par un maximum d'effort et début de la diminution de l'effort attribuée à l'apparition de la striction diffuse et enfin chute brusque de l'effort qui met en évidence la rupture de l'éprouvette.
3. Lorsque  $U_m < 6\text{ mm}$  les deux réponses numériques  $d=1.\text{ mm}$  et  $d=1.5\text{ mm}$  sont identiques
4. Lorsque  $U_m > 6\text{ mm}$ , les deux réponses numériques commencent à se dissocier mais très légèrement et nous constatons une limite de déplacement à la rupture égale ( $U_m=7.4\text{ mm}$ ). Nous pouvons donc entrevoir que l'utilisation de support de fonction poids unique dans la zone MLS pour les deux conditions de discrétisation ( $d=1.\text{ mm}$  et  $d=1.5\text{ mm}$ ) peut être une solution pour régulariser la dépendance à la discrétisation lors de la présence de zone d'adoucissement.

Nous pouvons donc conclure que le modèle Mixte MLS-MEF est capable de simuler un essai de traction jusqu'à rupture d'une éprouvette plate. Néanmoins, le modèle montre certaines faiblesses pour décrire parfaitement une propagation de fissure. Ces faiblesses sont liées à la manière de traiter les nœuds totalement endommagés.

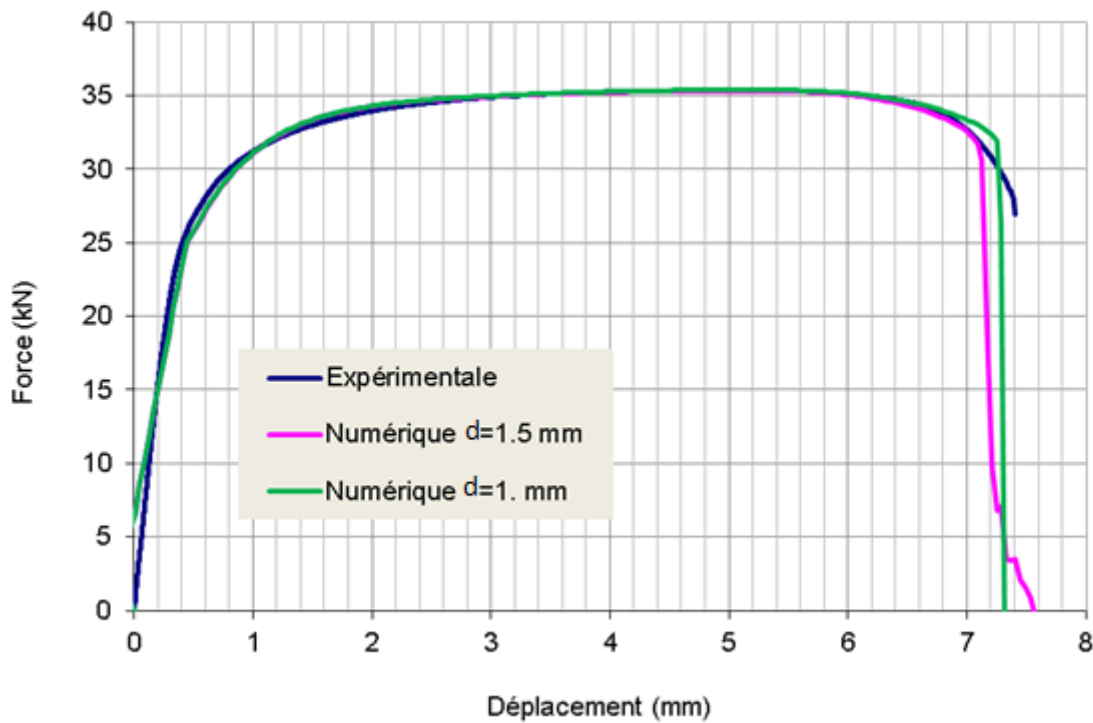


Figure 3-15 : Réponse globale Force/ Déplacement expérimentale et numérique

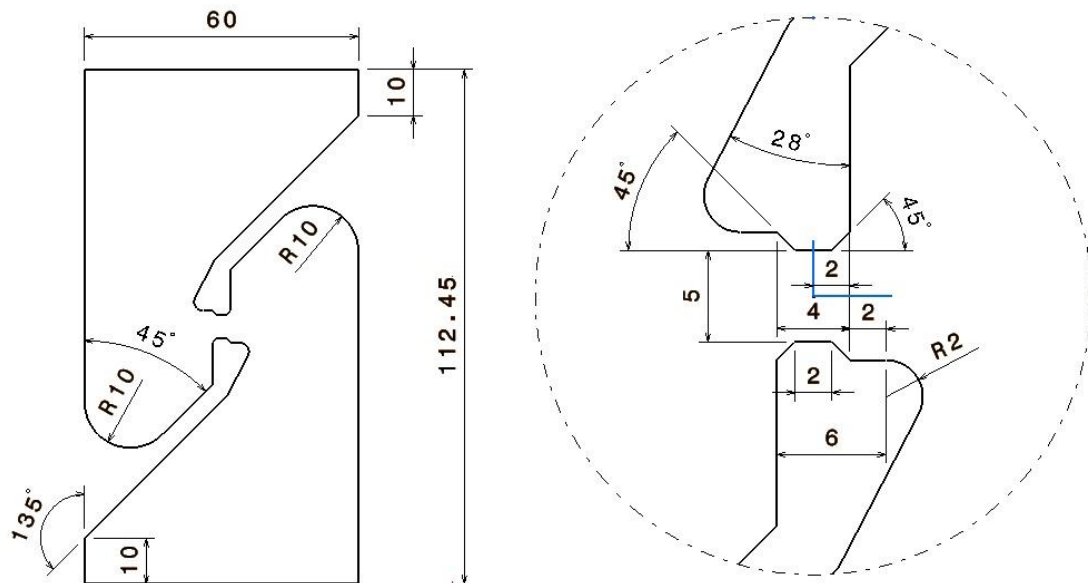
L'approximation diffuse semble être une solution pour résoudre partiellement la dépendance à la discrétisation. Néanmoins, le modèle de comportement reste basé sur une approche locale. Plusieurs auteurs [Saanouni et al. (1988), Chen et al. (2000) et (2002), Borino et al. (2003), Jose et al. (2007), Saanouni et Hamed 2013, parmi d'autres] introduisent la notion d'endommagement non local fondé sur l'introduction d'une régulation de l'endommagement sous forme intégrale qui se traduit par la résolution d'une équation de diffusion en endommagement. Jose et al. (2007) ont notamment proposé d'utiliser l'approximation diffuse pour traiter numériquement cette équation de diffusion. En perspective, nous avons la volonté d'étendre le modèle en intégrant un modèle de comportement avec endommagement non locale développée dans le cadre d'une formulation micromorphique [Saanouni (2012), Hamed (2012)]. Nous pensons que l'alliance d'un modèle élastoplastique à endommagement non locale et d'une approximation diffuse du champ des déplacements est une solution élégante pour résoudre la dépendance de la solution à la discrétisation des domaines.

### 3.8 CISAILEMENT D'UNE EPROUVETTE EN « PAILLON »

Dans le cadre de ce dernier exemple, nous modélisons un essai de cisaillement en grandes déformations jusqu'à rupture dans le but de mettre en œuvre une étude comparative entre notre méthode numérique Mixte MLS-MEF et la méthode MEF. Pour ce faire, nous avons choisi une éprouvette de type « papillon » pour mener l'essai de cisaillement, le matériau est identique à l'étude



précédente à savoir, l'acier DP1000. Les dimensions de l'échantillon sont schématisées à la *Figure 3-16* avec une épaisseur de départ de 0.51 mm.

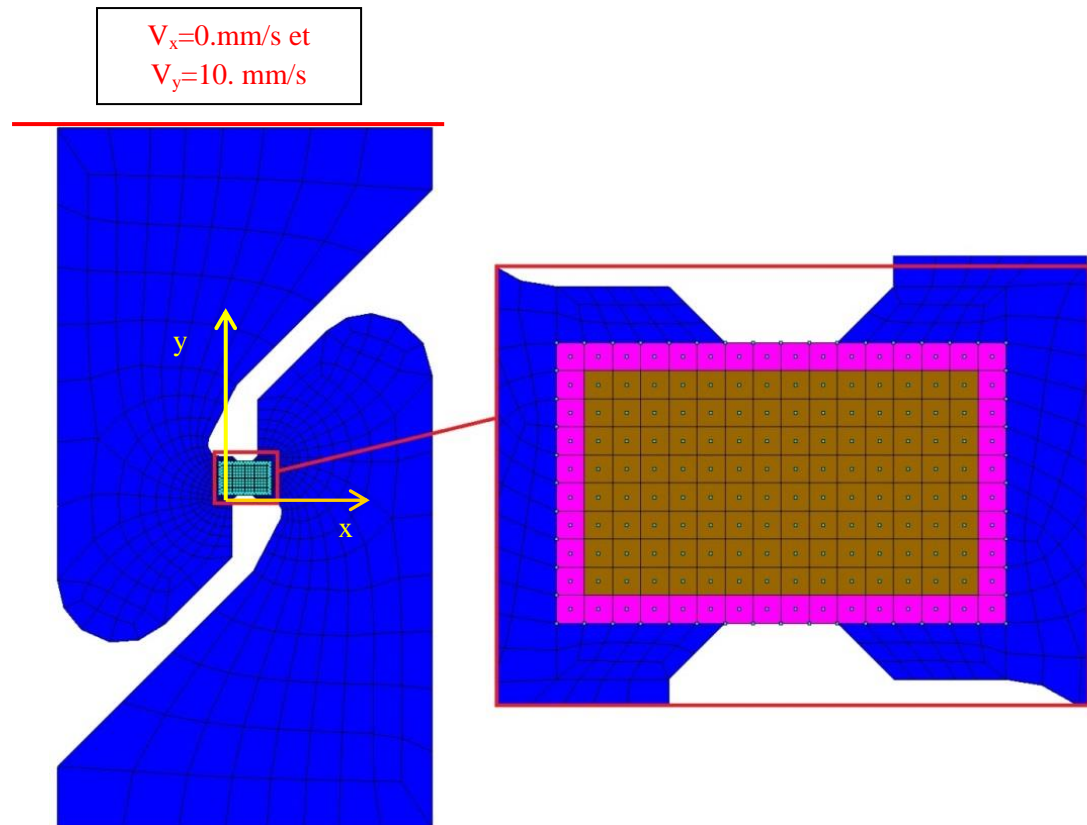


*Figure 3-16 : Géométrie de l'éprouvette pour un test de cisaillement*

Dans l'essai de cisaillement à la *Figure 3-17*, la partie utile de l'éprouvette est discrétisée par des nœuds MLS. Dans cette zone, les fonctions de forme sont générées à partir des fonctions poids de Shepard avec des supports carrés de côté  $a_i=b_i=0.8$  mm. Les zones MEF de raccordement et les bords sont discrétisés avec l'élément 2D à déformation postulée. Les deux domaines MEF et MLS sont raccordés par une couche d'éléments finis quadrangulaires bilinéaires à quatre nœuds définissant la zone de transition (voir la *Figure 3-17a*). Les différentes conditions aux limites en vitesse sont données en *Figure 3-17a*.

La configuration 2D déformation plane est adoptée dans cet exemple. Le logiciel Abaqus/implicit® a été utilisé pour simuler le même essai de cisaillement à partir d'une discrétisation en quadrangle bilinéaire à quatre nœuds (élément CPE4R de la librairie Abaqus®). Nous appliquons pour les deux configurations des conditions de calcul semblables, selon un schéma de résolution explicite pour la résolution des équations d'équilibre, avec les mêmes conditions aux limites. Les conditions de discrétisation en terme de taille et de répartition sont quasi-identique que la discrétisation du modèle Mixte MLS-MEF, voir *Figure 3-17b*.

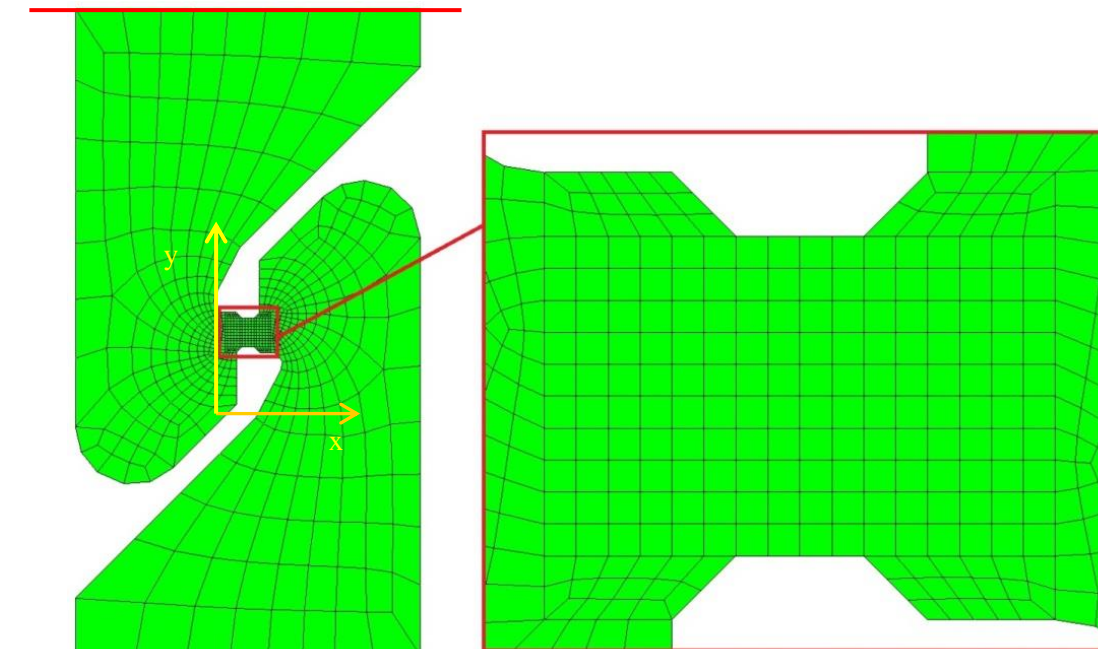
Le modèle de comportement décrit au *Chapitre 2, section 3.2* est intégré dans le logiciel Abaqus® via la subroutine utilisateur VUMAT. L'ensemble des post-traitements sont réalisés sur le logiciel (GID post-process) afin de faciliter la comparaison des résultats des deux logiciels de calcul.



$V_x=0. \text{mm/s}$  et  
 $V_y=0. \text{mm/s}$

$V_x=0. \text{mm/s}$  et  
 $V_y=10. \text{mm/s}$

(a)



$V_x=0. \text{mm/s}$  et  
 $V_y=0. \text{mm/s}$

(b)

Figure 3-17 : Discrétisation des modèles (a) MLS Mixte et (b) MEF

Les *Figure 3-18* et *Figure 3-19* montrent respectivement la répartition de la contrainte de von Mises et l'endommagement obtenues avec le modèle Mixte MLS-MEF et le modèle MEF/Abaqus® pour différents niveaux du déplacement imposé  $U_m$ . Lorsque  $U_m=0.34$  mm, la répartition de la contrainte de von Mises est quasi-identique dans sa distribution et au niveau des amplitudes. Les niveaux d'endommagement sont identiques au centre de l'éprouvette. Nous remarquons une concentration des contraintes avec le modèle Mixte MLS-MEF dans le chanfrein de raccordement de la zone utile de l'éprouvette, cette concentration est mise en évidence par élément 2D à déformation postulée. Lorsque  $U_m=0.68$  mm, la répartition de la contrainte de von Mises reste semblable dans sa distribution pour les deux modèles mais diffère dans les niveaux d'amplitude. Les niveaux d'endommagement sont plus importants (de l'ordre de 7%) pour le modèle Mixte MLS-MEF pour atteindre des niveaux de 3% pour le modèle MEF/Abaqus®. Le couplage entre les contraintes et l'endommagement peut alors expliquer la différence dans les amplitudes de contraintes des deux modèles.

Néanmoins, à ce stade nous constatons une divergence de comportement entre les modèles. Enfin lorsque nous dépassons un déplacement  $U_m=0.99$  mm, l'éprouvette est entièrement rompue dans le cas du modèle Mixte MLS-MEF où nous observons toute une rangée de nœuds dont l'endommagement atteint 1. Cependant, le modèle MEF/Abaqus® ne fait apparaître aucune fissure et l'éprouvette maintient encore une certaine intégrité et des niveaux de contrainte de von mises importantes (maximum de 1296 MPa) et des niveaux maximum d'endommagement encore faible (environ 15%).

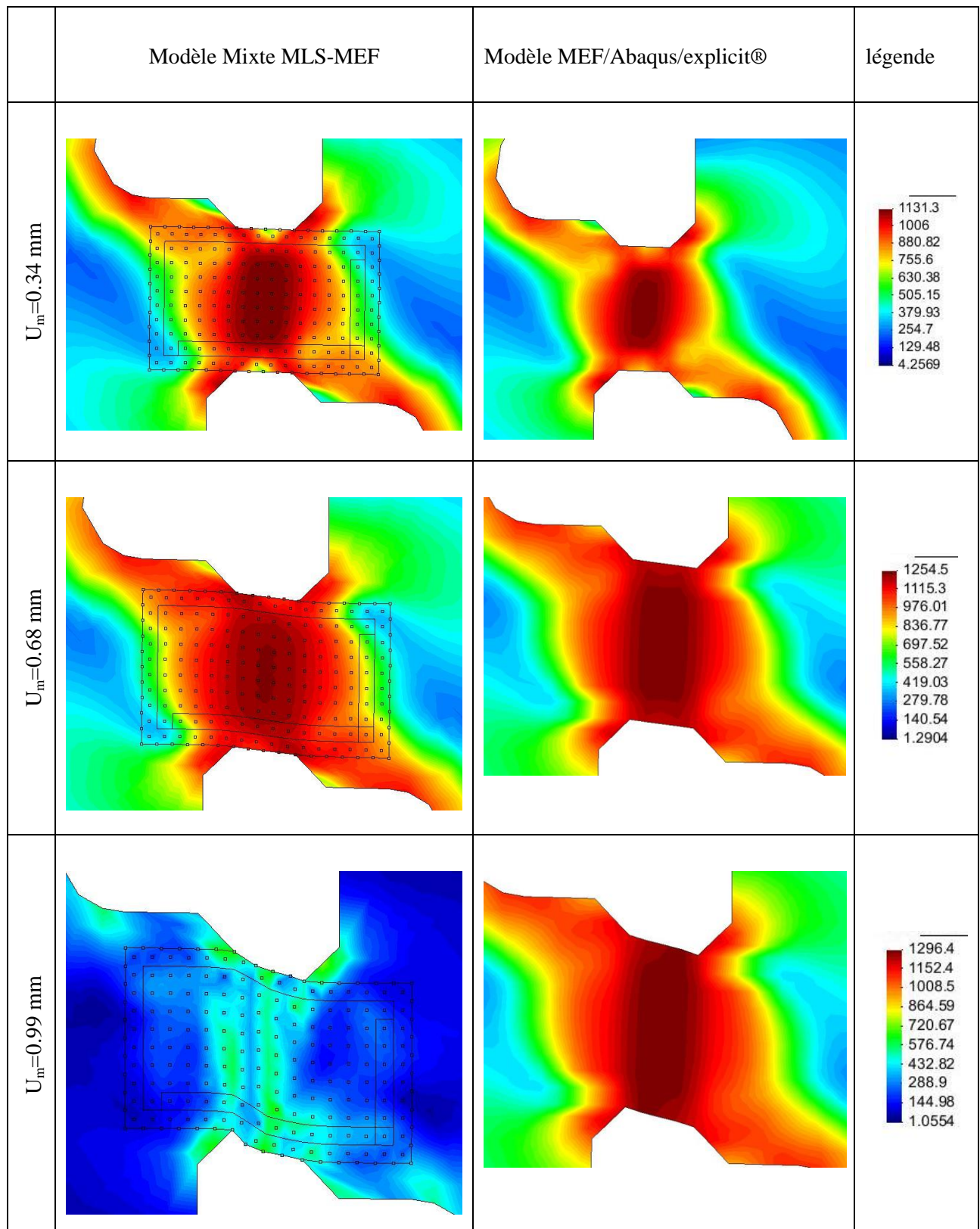


Figure 3-18 : Répartition de la contrainte de von Mises obtenue dans le cas des deux modèles et pour différents niveaux de déplacement maximum

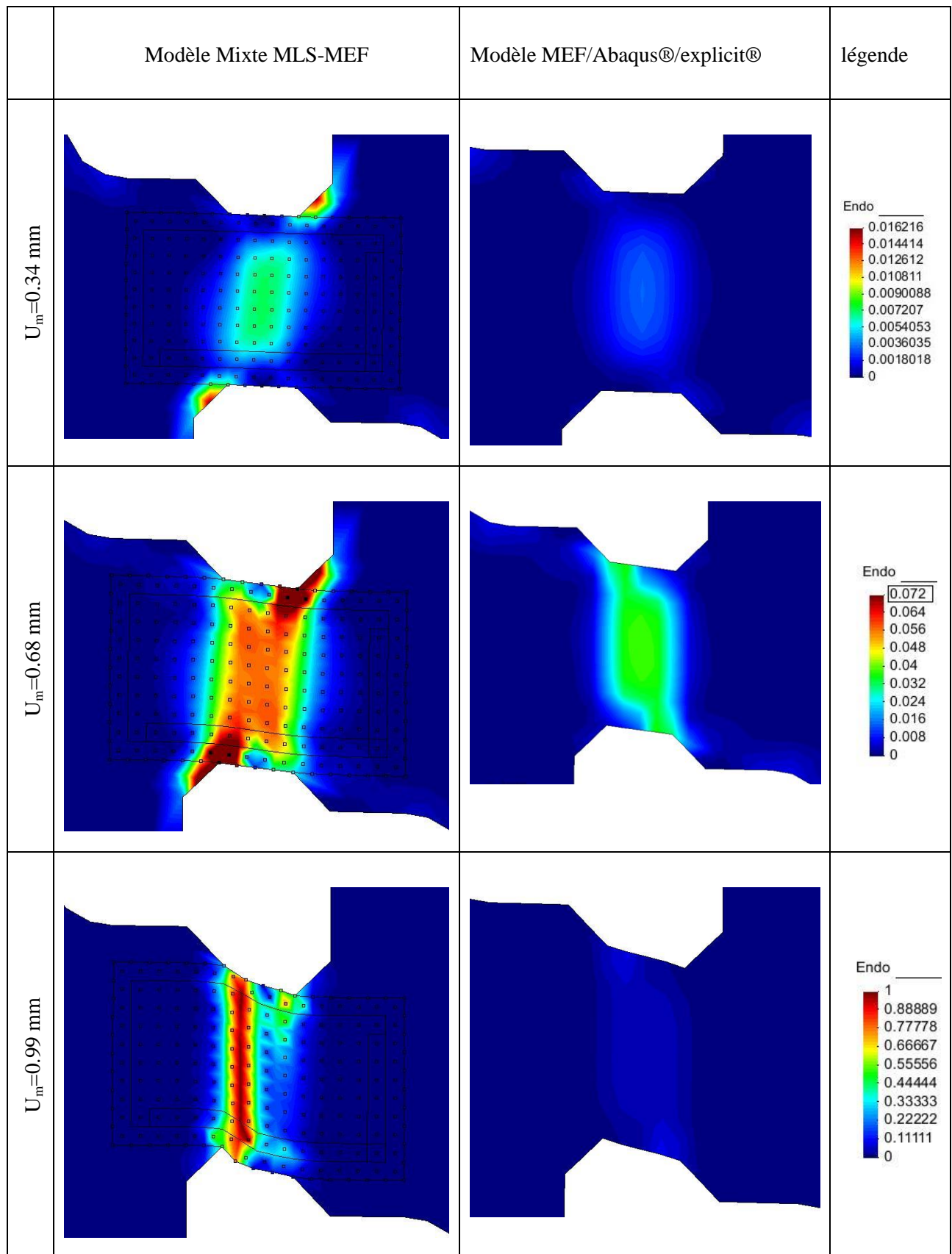


Figure 3-19 : Répartition de l'endommagement obtenu dans le cas des deux modèles et pour différents niveaux de déplacement maximum

Nous pouvons donc conclure que le modèle Mixte et MEF sont cohérents lorsque l'endommagement reste relativement faible. Lorsque l'endommagement augmente, les deux modèles n'offrent pas les mêmes résultats aussi bien sur l'instant de fissuration mais aussi sur la croissance de l'endommagement à l'intérieure de la zone utile. Nous pouvons expliquer ces différences par la faiblesse du modèle Mixte MLS-MEF à modéliser parfaitement l'élaboration d'une fissure. Néanmoins, ces résultats montrent que le modèle Mixte MLS-MEF est capable de modéliser des grandes déformations plastiques en cisaillement.

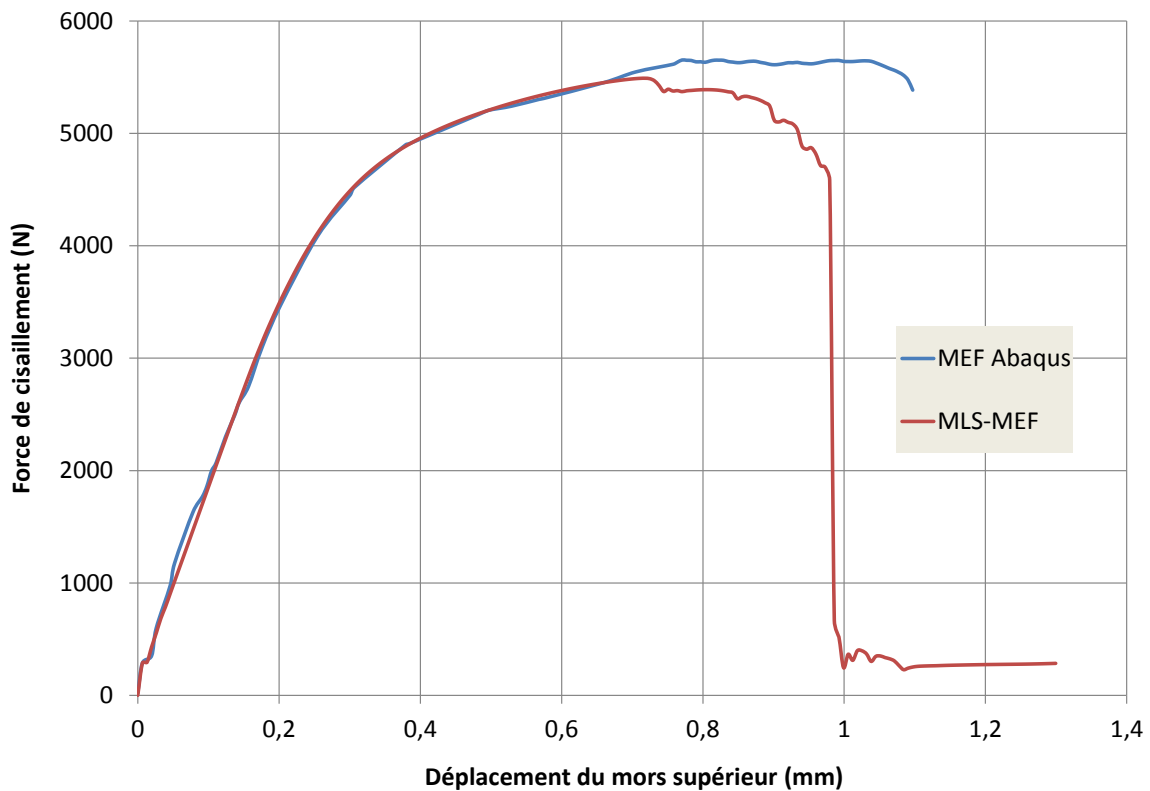


Figure 3-20 : Réponse globale en Force/déplacement d'une éprouvette « papillon » en cisaillement

Nous traçons les réponses Force/déplacement de l'essai de cisaillement pour les deux modèles MEF/Abaqus® et MLS-MEF, nous confirmons que les deux modèles donnent une réponse semblable lorsque  $U_m < 0.7$  mm, notamment lorsque l'endommagement est très faible. La cohérence sur la première partie de la courbe nous conforte sur les capacités du modèle Mixte MLS-MEF est notamment dans le cadre des transformations finies. Lorsque  $U_m > 0.7$  mm, les deux modèles divergent comme nous l'avons déjà observé dans l'analyse de répartition de contrainte de von Mises.

## 3.2 CONCLUSIONS

Dans ce chapitre, nous avons intégré un modèle de comportement complexe dans le cadre des transformations finies par une approche incrémentale en se basant sur un Lagrangien réactualisé. Nous avons traité l'objectivité du modèle et intégré une approche « Assumed strain » dans la zone MEF. Les différents exemples illustrés dans ce chapitre ont montré la capacité du modèle à simuler le comportement plastique d'éprouvette suivant différents trajets de chargement. Ces premiers résultats sont encourageants mais nous avons montré une faiblesse lors de la modélisation de la propagation d'une fissure. Le modèle Mixte MLS-MEF est actuellement capable de reproduire une courbe d'effort de traction avec une assez bonne prédiction. Il est souvent difficile de savoir si le modèle Mixte MLS-MEF est susceptible d'apporter de meilleures solutions que la méthode MEF lorsque nous utilisons des exemples complexes de mécanique non linéaire. Dans un cas complexe, la solution de référence n'existe pas forcément, une idée serait alors de discrétiser très finement les éprouvettes afin de s'affranchir de la précision d'approximation.





## CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

### *Conclusion*

Nous avons développé une approche Meshless basée essentiellement sur l'approximation diffuse pour la génération des fonctions de forme. A partir des travaux de Huerta et al. (2000), nous avons élaboré un couplage entre les Eléments Diffus (MLS) et la Méthode des Eléments Finis (MEF) à partir d'une zone de transition MLS/MEF. Il est à noter que dans cette zone de transition les fonctions de forme sont construites par respect de la condition de consistance et non par Moindres Carrés Mobiles. Nous exploitons ce couplage pour faciliter la prise en charge des conditions aux limites de Dirichlet uniquement par la discrétisation MEF.

Nous avons abordé également certaines difficultés de gestion des domaines d'influence des nœuds de discrétisation MLS. Toutefois, d'après l'étude comparative dans le cadre des petites perturbations au chapitre 2, la taille du support de la fonction de forme est plus influente sur l'approximation que la nature de la fonction de forme elle-même. Dans ce cadre, nous avons choisi d'utiliser un support rectangulaire des fonctions poids qui permet d'améliorer les performances numériques de la méthode. Cependant, un paramètre encore plus important que le support des fonctions poids, est le choix de la méthode d'intégration numérique appropriée. A ce niveau, l'étude comparative montre que l'intégration nodale offre une plus grande précision numérique que la méthode d'intégration de Gauss-Legendre. Néanmoins, une mise en place de certaines corrections et régularisations numériques est indispensable pour maintenir la précision de l'intégration nodale. Parmi ces corrections nous utilisons la régularisation conforme de l'intégration numérique (CSNI) proposée par Chen et al. (2001), ainsi qu'une correction de régularisation sur les sous-cellules de chaque domaine d'intégration nodale. Cette méthode est analogue à la « stress point » où un ajout supplémentaire de nœuds dans la discrétisation est indispensable pour la stabilisation du calcul. A ce stade, notre modèle Mixte MLS-MEF a montré une bonne capacité de prédiction à travers l'application de deux exemples mécaniques linéaires, à savoir l'essai de traction de la plaque percée et l'essai de flexion pure. Les résultats de l'essai de flexion pure montrent que la discrétisation spatiale a peu d'influence sur la solution en déplacement lorsque nous utilisons l'intégration nodale avec gradient régularisé. La discrétisation spatiale semble avoir plus d'effet sur la répartition des champs de contrainte.

Dans le cadre du chapitre 3, nous avons intégré différentes sources de non-linéarité. Un modèle de comportement élastoplastique avec différentes natures d'écroutissement fortement couplé à l'endommagement ductile a été introduit dans le cadre de l'approche Eléments Diffus. Nous avons

porté notre effort sur l'utilisation d'un schéma de résolution dynamique explicite et plus particulièrement sur la construction de la matrice masse diagonalisée et l'étude des conditions de stabilité temporelle. Dans le cadre des grandes déformations en transformation finies, nous adoptons ce modèle et utilisons la discrétisation en nœuds MLS pour modéliser les zones endommagées actives, à travers une formulation locale. Néanmoins, si dans le cadre des HPP les caractéristiques du domaine d'influence ne sont pas aussi influentes que la technique d'intégration numérique adoptée, en grandes déformations, ces critères sont d'autant plus importants. En effet, le traitement de ces domaines d'influence peut affecter la précision de la méthode.

Au cours des études comparatives au chapitre 3, nous avons montré que notre modèle Mixte MLS-MEF reproduit un comportement assez réaliste et comparable à des résultats expérimentaux ou issus du code commercial Abaqus®. Ces premiers résultats sont encourageants, cependant, nous remarquons une instabilité de propagation de fissure, qui s'étale plus rapidement qu'en MEF standard, et une localisation d'endommagement prématurée dans le modèle « Mixte », générant des contraintes élevées au niveau de la fissure. Parmi les solutions proposées, nous nous proposons de reproduire la régularisation du gradient au niveau des frontières internes ou encore générer des supports de fonction poids dépendant du temps, selon des tailles requises à un instant donné au cours du calcul. De même, des frontières internes sont engendrées après propagation de fissure, générant des limites non convexes du modèle. Des solutions proposées supposent que ces limites convexes sont ignorées et le domaine d'influence est autorisé à s'étendre à travers la fissure, la fonction poids sera ainsi continue, mais la convergence reste néanmoins faible. Yvonnet et al. (2004) définissent le domaine d'influence par un « critère de visibilité », permettant d'éliminer les influences parasites entre les nœuds de part et d'autre de la fissure.

L'étude sur l'essai de traction de acier DP1000 a permis d'entrevoir que l'approximation diffuse semble être une solution pour résoudre partiellement la dépendance à la discrétisation. Cette tendance reste encore à confirmer dans des travaux ultérieurs.

### *Perspectives*

Nous souhaitons dans un premier temps améliorer le modèle Mixte MLS-MEF pour la modélisation de la propagation de fissure. Ceci passe par une meilleure gestion des supports des fonctions poids à partir de la définition d'un critère de visibilité. Pour compléter l'adaptation de la discrétisation du modèle numérique, nous souhaitons mettre en place une méthodologie automatique de génération de domaine MLS. L'idée est de partir d'un modèle initialement traité par la méthode MEF dans tout son domaine. Au cours du calcul, nous utiliserons un critère de détection basé sur l'apparition de zone de localisation (estimateur basé sur la dissipation plastique par exemple) pour déterminer les zones MEF que nous voulons convertir en zone MLS. Nous générerons automatiquement nos zones MEF, MLS et MLS/MEF au cours de la déformation de la pièce. Nous

pouvons aussi adapter la discrétisation de la zone MLS en rajoutant automatiquement des nœuds dans les zones de localisation, lieu de concentration de contrainte et d'endommagement. Des estimateurs d'erreur  $ZZ$ , pourront être utilisés pour calculer la taille des supports des fonctions poids.

La seconde idée est l'utilisation d'un modèle de comportement associé à de l'endommagement non local. A partir des récents travaux de l'équipe sur ce sujet, nous souhaitons utiliser l'approche micromorphique pour rajouter une seconde équation de bilan uniquement définie à partir de la variable d'endommagement local et d'une variable nodale d'endommagement micromorphique. Ceci implique une seconde fonctionnelle en endommagement à discrétiser et qui nécessite d'introduire une notion de longueur de régularisation. Il serait alors judicieux de définir le lien entre cette longueur de régularisation et la taille du support des fonctions poids.

Par la suite, nous souhaitons modéliser des procédés de mise en forme par déformation plastique avec cette méthodologie numérique Mixte MLS-MEF. Ceci nécessite de développer des solutions de contact, ce qui n'est pas forcément notre volonté. Nous pensons plutôt intégrer ce modèle dans le logiciel commercial Abaqus® en construisant un super élément domaine (MLS/MEF+MLS) via une subroutine utilisateur VUEL.

Enfin, nous voulons étendre cette méthodologie numérique à des cas 3D. La difficulté réside surtout dans la construction des cellules d'intégration en 3D et la gestion des supports des fonctions poids.



## ANNEXES

### ANNEXE A

#### A.1. Exemple 1D en schéma centré avec des fonctions poids interpolantes sous Mathematica :

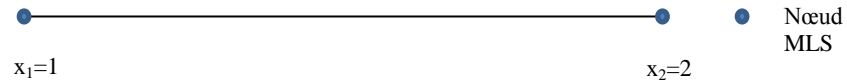


Figure 3-21 : Exemple 1d, Ordre 1d en schéma centré avec des fonctions poids interpolantes

Soit un exemple linéaire monodimensionnel. Le but principal de l'exemple étant le calcul des fonctions poids interpolantes, la méthode s'avère améliorer l'allure des fonctions de forme.

Le système à résoudre est,

$$[A] \{b(x)\} = \langle c(x) \rangle = \langle p(0) \rangle = \langle 1, 0 \rangle$$

Pour ce faire, soit la fonction fenêtre  $w_p$  suivante:

$$w_p(x) = 1 - 3x^2 + 2x^3$$

Considérons la base linéaire de dimension 1 :  $\langle p(x) \rangle = \langle 1, x \rangle$

$$[P(x)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1-x & 2-x & 3-x \end{bmatrix}$$

Calcul des fonctions poids:

$$w_1(x) = w_p(1-x); w_2(x) = w_p\left(\frac{2-x}{2}\right); w_3(x) = w_p\left(\frac{3-x}{3}\right)$$

$$[W(x)] = \begin{bmatrix} w_1(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & w_2(x) & \vdots \\ 0 & \cdots & w_3(x) \end{bmatrix}$$

Calcul des poids interpolants:

$$O_1(x) = \frac{w_1(x)}{1-w_1(x)}; O_2(x) = \frac{w_2(x)}{1-w_2(x)}; O_3(x) = \frac{w_3(x)}{1-w_3(x)}$$

$$s(x) = O_1(x) + O_2(x) + O_3(x)$$

$$w_{i1}(x) = O_1(x)/s(x); w_{i2}(x) = O_2(x)/s(x); w_{i3}(x) = O_3(x)/s(x)$$

$$[W(x)] = \begin{bmatrix} w_{i1}(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & w_{i2}(x) & \vdots \\ 0 & \cdots & w_{i3}(x) \end{bmatrix}$$

Construction de la matrice comement  $[A]$  :

$$[A(x)] = [P(x)]^T [W(x)] [P(x)]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{432 - 1728x + 450x^2 + 5039x^3 - 6963x^4 + 1980x^5 + 2454x^6 - 2435x^7 + 927x^8 - 168x^9 + 12x^{10}}{432 - 1296x + 81x^2 + 2907x^3 - 2568x^4 - 84x^5 + 1157x^6 - 639x^7 + 144x^8 - 12x^9} \\ \frac{432 - 1728x + 450x^2 + 5039x^3 - 6963x^4 + 1980x^5 + 2454x^6 - 2435x^7 + 927x^8 - 168x^9 + 12x^{10}}{432 - 1296x + 81x^2 + 2907x^3 - 2568x^4 - 84x^5 + 1157x^6 - 639x^7 + 144x^8 - 12x^9} & \frac{432 - 1296x - 81x^2 + 2907x^3 - 2568x^4 - 84x^5 + 1157x^6 - 639x^7 + 144x^8 - 12x^9}{(-6 + 11x - 6x^2 + x^3)^2(-12 + 16x + 115x^2 - x^3 - 48x^4 + 12x^5)} \end{pmatrix}$$

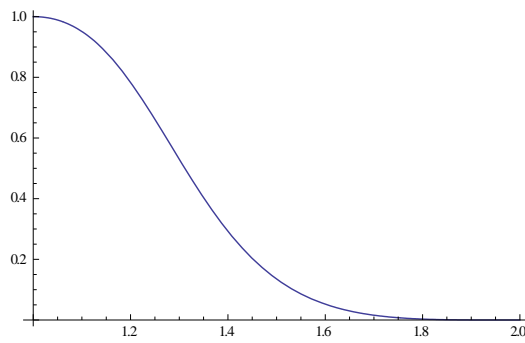


Figure 3-22 : Fonction poids interpolante  $w_{i1}$

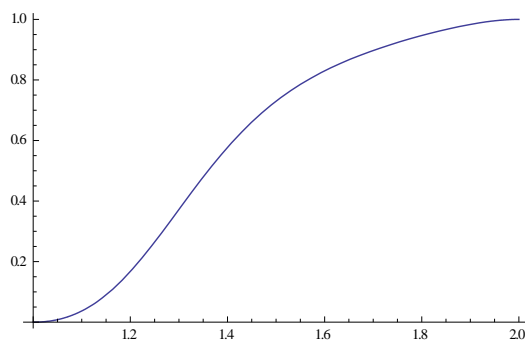


Figure 3-23 : Fonction poids interpolante  $w_{i2}$

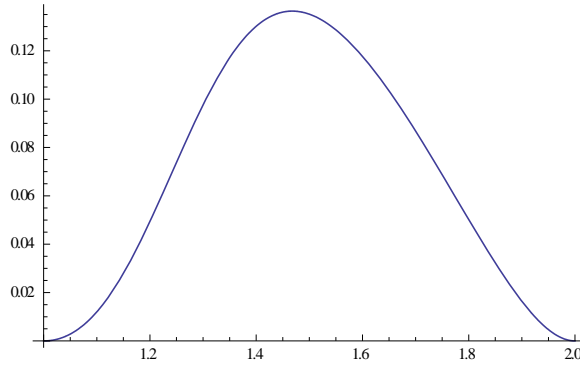


Figure 3-24 : Fonction poids interpolante  $w_{i3}$

Calcul du vecteur  $\{b(x)\}$  :

$$\{b(x)\} = [A(x)]^{-1}\langle p(0) \rangle$$

$$= \left( \frac{5184 - 22464x - 29916x^2 + 185652x^3 - 48573x^4 - 361698x^5 + 325119x^6 + 121420x^7 - 279335x^8 + 98978x^9 + 39537x^{10} - 43032x^{11} + 14568x^{12} - 2304x^{13} + 144x^{14}}{2x^2(-6750 + 13470x + 12457x^2 - 27786x^3 - 58x^4 + 17996x^5 - 7305x^6 - 2384x^7 + 2328x^8 - 576x^9 + 48x^{10})} \right. \\ \left. \frac{(-72 + 156x + 283x^2 - 489x^3 + 7x^4 + 219x^5 - 96x^6 + 12x^7)(-432 + 1296x + 81x^2 - 2907x^3 + 2568x^4 + 84x^5 - 1157x^6 + 639x^7 - 144x^8 + 12x^9)}{2x^2(-6 + 11x - 6x^2 + x^3)(-6750 + 13470x + 12457x^2 - 27786x^3 - 58x^4 + 17996x^5 - 7305x^6 - 2384x^7 + 2328x^8 - 576x^9 + 48x^{10})} \right)$$

Calcul des fonctions de forme  $\phi^{MLS}$  :

$$\begin{pmatrix} \phi_{i1}^{MLS} \\ \phi_{i2}^{MLS} \\ \phi_{i3}^{MLS} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{i1}\langle p(1-x) \rangle \{b(x)\} \\ w_{i2}\langle p(2-x) \rangle \{b(x)\} \\ w_{i3}\langle p(3-x) \rangle \{b(x)\} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{(-2+x)^3(189-411x-37x^2+255x^3-104x^4+12x^5)}{2(450-1468x+1029x^2+669x^3-1235x^4+639x^5-144x^6+12x^7)} \\ \frac{(-3+x)^2(-18+66x-89x^2+61x^3-24x^4+4x^5)}{450-1468x+1029x^2+669x^3-1235x^4+639x^5-144x^6+12x^7} \\ -\frac{288-1216x+1282x^2+789x^3-2575x^4+2115x^5-831x^6+160x^7-12x^8}{900-2936x+2058x^2+1338x^3-2470x^4+1278x^5-288x^6+24x^7} \end{pmatrix}$$

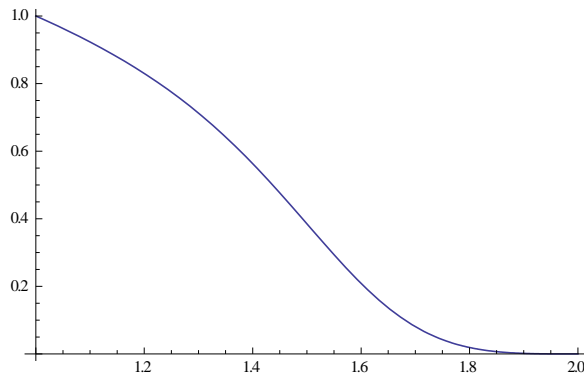


Figure 3-25 : Fonction de forme  $\phi_{i1}^{MLS}$

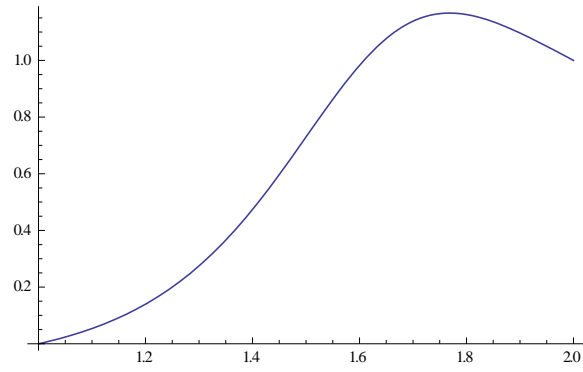


Figure 3-26 : Fonction de forme  $\phi_{12}^{MLS}$

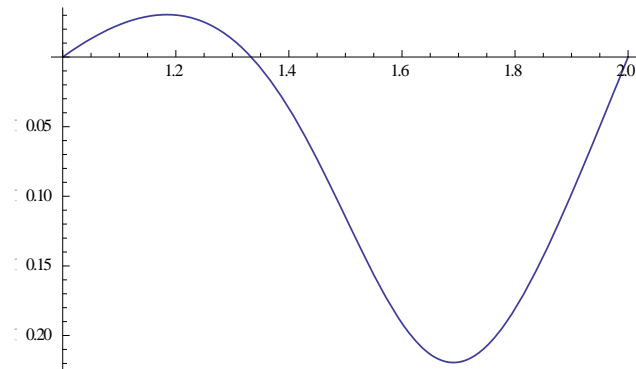


Figure 3-27 : Fonction de forme  $\phi_{13}^{MLS}$



A.2. Couplage MLS-MEF Exemple 1D en schéma centré avec des fonctions poids interpolantes sous Mathematica :

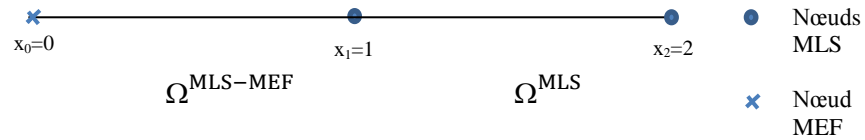


Figure 3-28: Exemple pour la validation de consistance et de continuité du couplage MLS-MEF

Le but principal de l'exemple étant le calcul des fonctions poids interpolantes, la méthode s'avère améliorer l'allure des fonctions de forme. Soit la fonction poids  $w_p$  suivante :

$$w_p(x) = 1 - 3x^2 + 2x^3$$

Nous procédons à l'étude de l'évolution des fonctions de forme et leur consistance dans les deux domaines comme suit.

1- Etude de la zone de transition [0,1]

Soit la fonction de forme EF,

$$N_0(x) = 1 - 2x + x^2$$

Considérons la base linéaire de dimension 1 :  $\langle p(x) \rangle = \langle 1, x \rangle$

$$[P(x)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1-x & 2-x & 3-x \end{bmatrix}$$

$$\langle c(x) \rangle = \langle p(0) \rangle - N_0(x) \langle p(0-x) \rangle = \langle 2x - x^2, x(1 - 2x + x^2) \rangle$$

Calcul des fonctions poids:

$$w_1(x) = w_p(1-x); w_2(x) = w_p\left(\frac{2-x}{2}\right); w_3(x) = w_p\left(\frac{3-x}{3}\right)$$

$$[W(x)] = \begin{bmatrix} w_1(x) & \dots & 0 \\ \vdots & w_2(x) & \vdots \\ 0 & \dots & w_3(x) \end{bmatrix}$$

Calcul des poids interpolants:

$$O_1(x) = \frac{w_1(x)}{1-w_1(x)}; O_2(x) = \frac{w_2(x)}{1-w_2(x)}; O_3(x) = \frac{w_3(x)}{1-w_3(x)}$$

$$s(x) = O_1(x) + O_2(x) + O_3(x)$$

$$w_{i1}(x) = O_1(x)/s(x); w_{i2}(x) = O_2(x)/s(x); w_{i3}(x) = O_3(x)/s(x)$$

$$[W(x)] = \begin{bmatrix} w_{i1}(x) & \dots & 0 \\ \vdots & w_{i2}(x) & \vdots \\ 0 & \dots & w_{i3}(x) \end{bmatrix}$$

Construction de la matrice [A] :

$$[A(x)] = [P(x)]^T [W(x)] [P(x)]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{-594 + 735x + 1045x^2 - 1944x^3 + 458x^4 + 693x^5 - 513x^6 + 132x^7 - 12x^8}{-441 + 251x + 756x^2 - 708x^3 - 99x^4 + 297x^5 - 108x^6 + 12x^7} \\ \frac{-594 + 735x + 1045x^2 - 1944x^3 + 458x^4 + 693x^5 - 513x^6 + 132x^7 - 12x^8}{-441 + 251x + 756x^2 - 708x^3 - 99x^4 + 297x^5 - 108x^6 + 12x^7} & \frac{-441 + 251x + 756x^2 - 708x^3 - 99x^4 + 297x^5 - 108x^6 + 12x^7}{(-6 + 11x - 6x^2 + x^3)^2(-27 - 55x - 12x^2 + 12x^3)} \end{pmatrix}$$

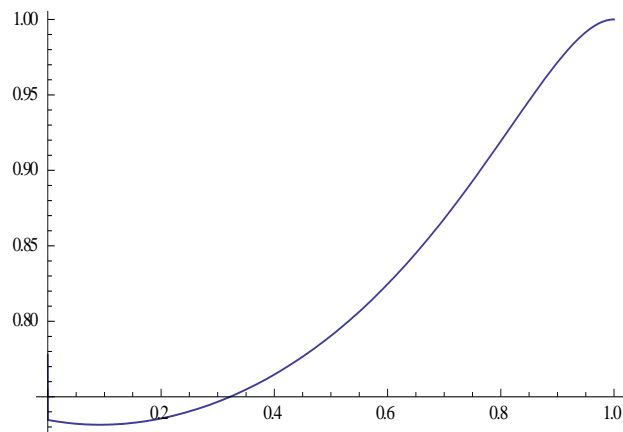


Figure 3-29 : Fonction poids interpolante  $w_{i1}$

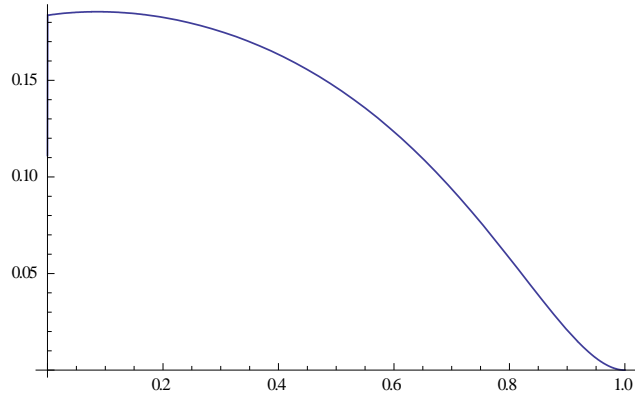


Figure 3-30 : Fonction poids interpolante  $w_{i2}$

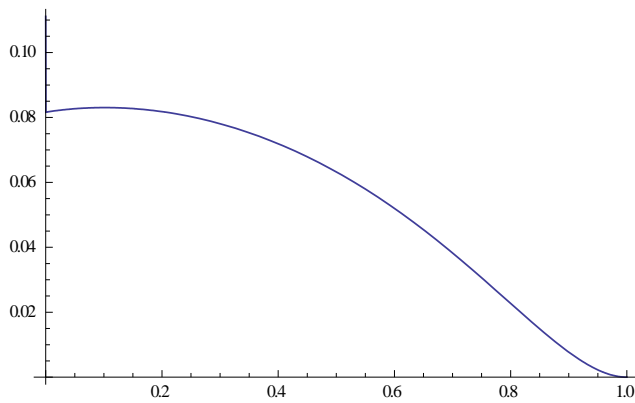


Figure 3-31 : Fonction poids interpolante  $w_{i3}$

Calcul du vecteur  $\{b(x)\}$  :

$$\{b(x)\} = [A(x)]^{-1}\{p(0)\}$$

$$= \left( \frac{x(99225 + 61713x - 379811x^2 - 16037x^3 + 548569x^4 - 222469x^5 - 273465x^6 + 227361x^7 - 4998x^8 - 53256x^9 + 23712x^{10} - 4272x^{11} + 288x^{12})}{6(6 - 5x + x^2)(351 + 966x + 44x^2 - 1190x^3 - 179x^4 + 560x^5 + 8x^6 - 96x^7 + 16x^8)} \right. \\ \left. \frac{x(-441 + 251x + 756x^2 - 708x^3 - 99x^4 + 297x^5 - 108x^6 + 12x^7)(-747 + 184x + 1726x^2 - 1238x^3 - 451x^4 + 690x^5 - 228x^6 + 24x^7)}{6(-1+x)(6-5x+x^2)^2(351+966x+44x^2-1190x^3-179x^4+560x^5+8x^6-96x^7+16x^8)} \right)$$

L'approximation de la fonction de forme s'étend sur un espace linéaire sous la forme  $\phi^{MLS}$  :

$$\begin{pmatrix} \phi_{i1}^{MLS} \\ \phi_{i2}^{MLS} \\ \phi_{i3}^{MLS} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{i1}\langle p(1-x)\rangle\{b(x)\} \\ w_{i2}\langle p(2-x)\rangle\{b(x)\} \\ w_{i3}\langle p(3-x)\rangle\{b(x)\} \end{pmatrix}$$

$$= \left( \frac{x(1809 - 2823x + 331x^2 + 1731x^3 - 1260x^4 + 340x^5 - 32x^6)}{6(117 - 107x - 61x^2 + 99x^3 - 36x^4 + 4x^5)} \right. \\ \left. - \frac{x(54 - 165x + 283x^2 - 303x^3 + 171x^4 - 44x^5 + 4x^6)}{3(117 - 107x - 61x^2 + 99x^3 - 36x^4 + 4x^5)} \right. \\ \left. \frac{x(-297 + 507x + 145x^2 - 783x^3 + 576x^4 - 164x^5 + 16x^6)}{6(117 - 107x - 61x^2 + 99x^3 - 36x^4 + 4x^5)} \right)$$

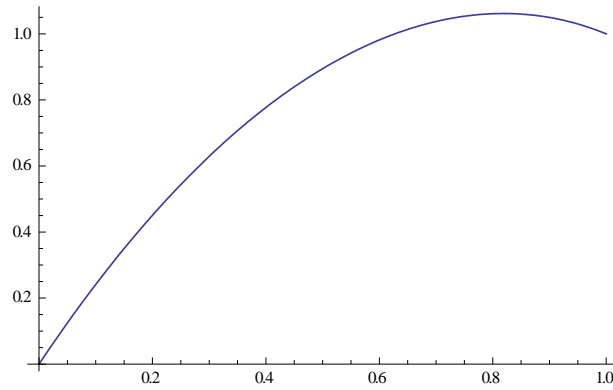


Figure 3-32 : Fonction de forme  $\phi_{i1}^{MLS}$

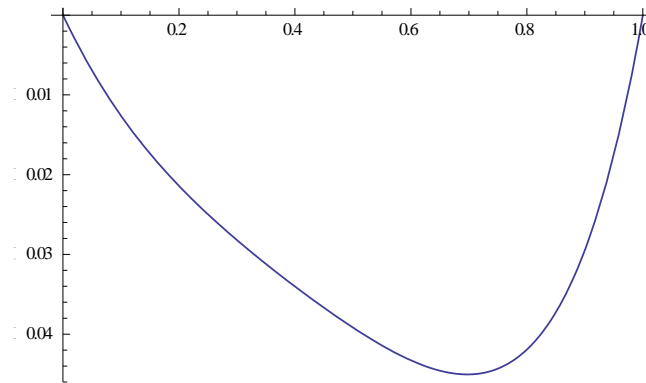


Figure 3-33 : Fonction de forme  $\phi_{i2}^{MLS}$

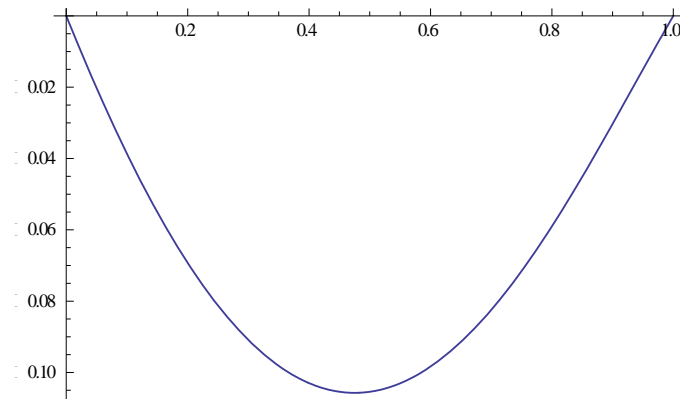


Figure 3-34 : Fonction de forme  $\phi_{i3}^{MLS}$

### Vérification de la consistance

En fait, les fonctions de forme générées doivent vérifier une partition de l'unité devenue possible avec l'interpolation des fonctions poids. Ainsi, les fonctions de forme doivent vérifier les conditions linéaires suivantes :

$$\sum_{j \in \Omega} \phi_j^{MLS}(x) = 1 \text{ et } \sum_{j \in \Omega} x \phi_j^{MLS}(x) = x \quad 3.166$$

En effet, notre exemple vérifie la une partition de l'unité des fonctions de forme :

$$N_0^e(x) + \sum_{j \in \Omega} \phi_j^{MLS}(x) = N_0^e(x) + \phi_1^{MLS} + \phi_2^{MLS} + \phi_3^{MLS} = 1 \quad 3.167$$

$$\sum_{j \in \Omega} x \phi_j^{MLS}(x) = 0 * N_0^e(x) + 1 * \phi_1^{MLS} + 2 * \phi_2^{MLS} + 3 * \phi_3^{MLS} = x \quad 3.168$$

2- Etude de la zone MLS [1,2] (Chapitre 2, section 2.1.5).

3- Continuité au niveau du raccordement en  $x_1=1$

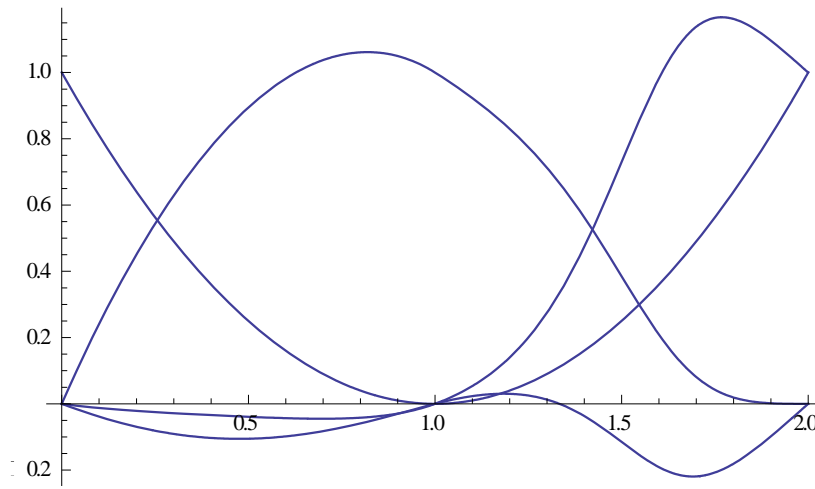
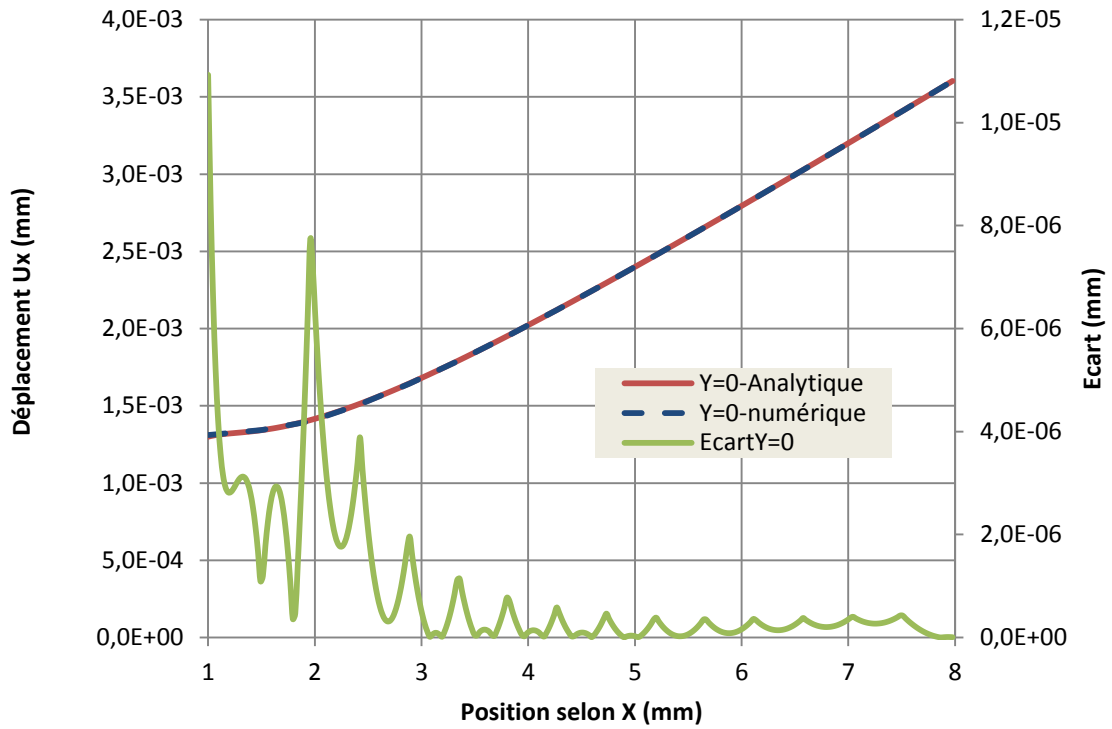


Figure 3-35 : Continuité des fonctions de forme entre  $x_1=0$  et  $x_3=2$

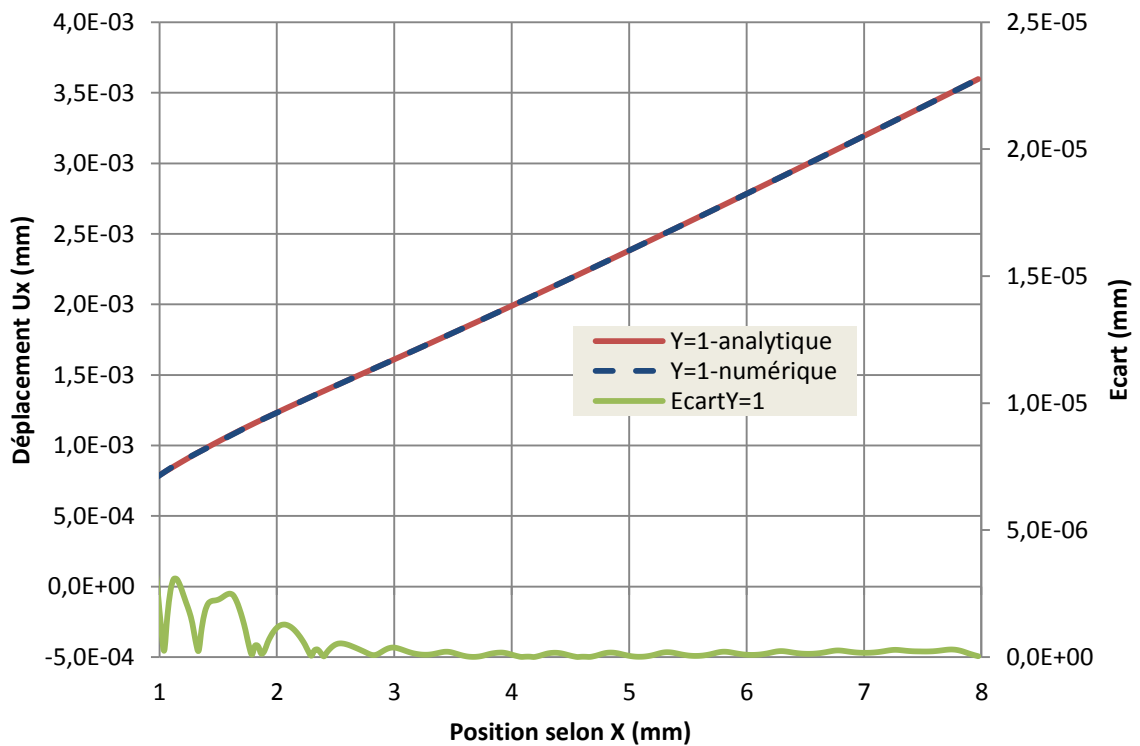
Nous remarquons que le raccordement  $x=1$  assure une continuité entre les deux zones  $\Omega^{\text{MLS-MEF}}$  ( $x=[0,1]$ ) et  $\Omega^{\text{MLS}}$  ( $x=[1,2]$ ) pour un exemple à une dimension. L'exemple traité au Chapitre 2, section 2.1.5, est de dimension deux. Il est élaboré pour maintenir cette consistance.

ANNEXE B

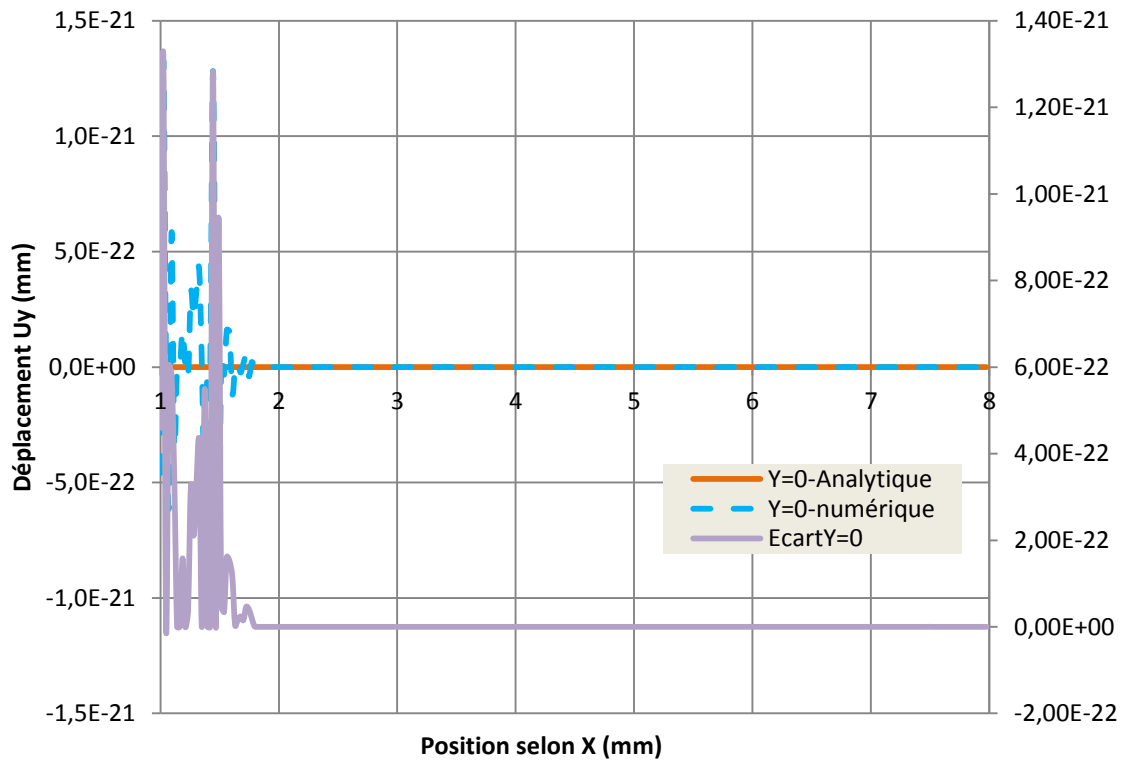
Solution analytique d'une plaque percée



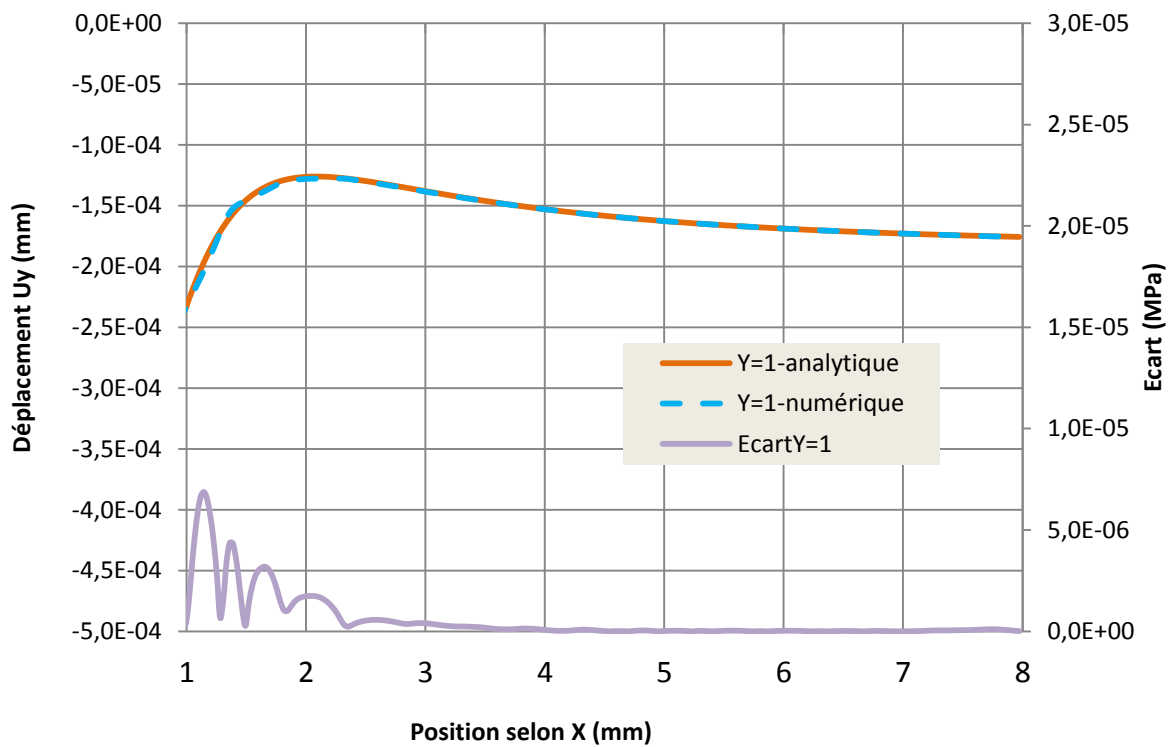
(a)



(b)



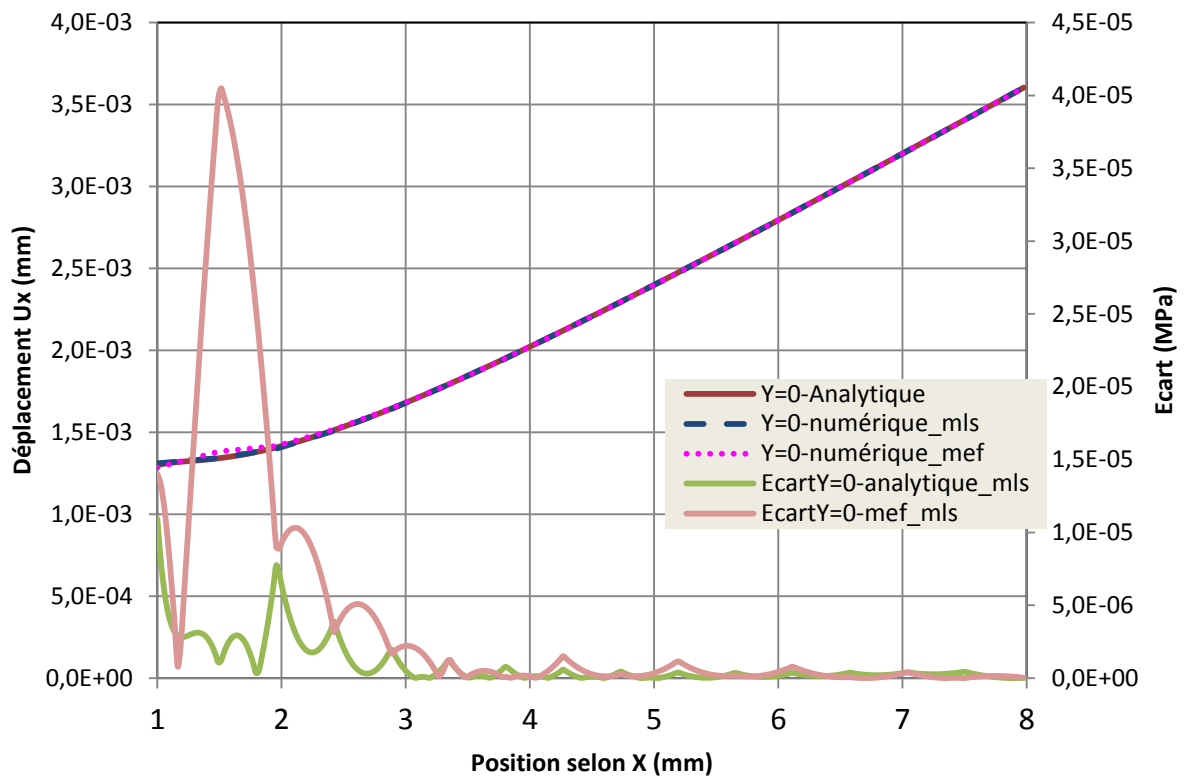
(c)



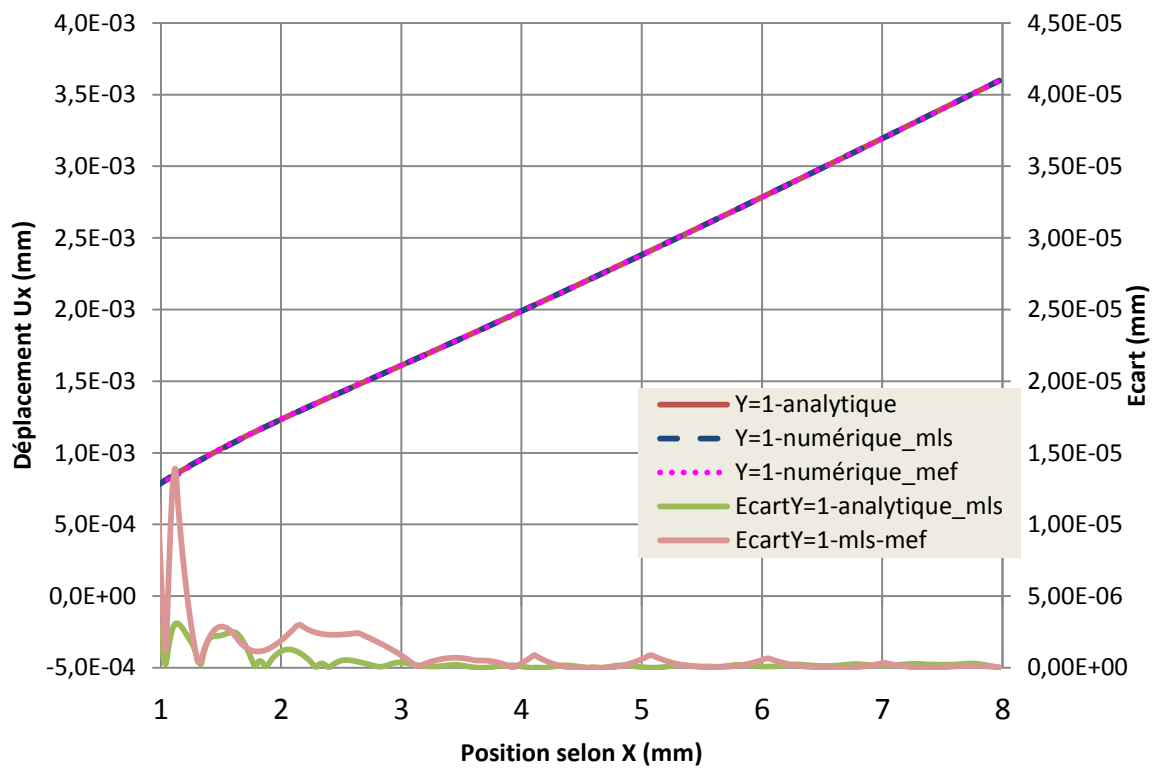
(d)

Figure 3-36: Déplacement analytique, MLS et leur écart (a)  $u_x$  au tracé  $y=0$  mm (b)  $u_x$  au tracé  $y=1.0$  mm (c)  $u_y$  au tracé  $y=0$  mm (d)  $u_y$  au tracé  $y= 1.0$  mm

*Comparaison des modèles MLS Mixte et MEF*

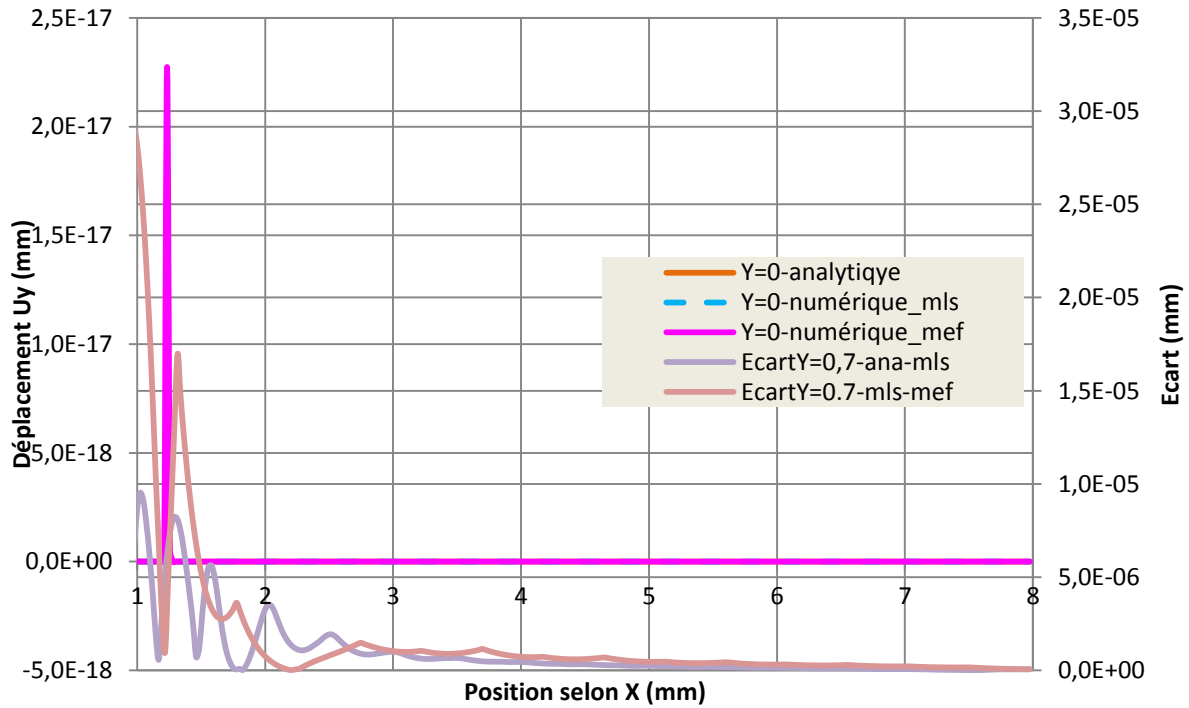


(a)

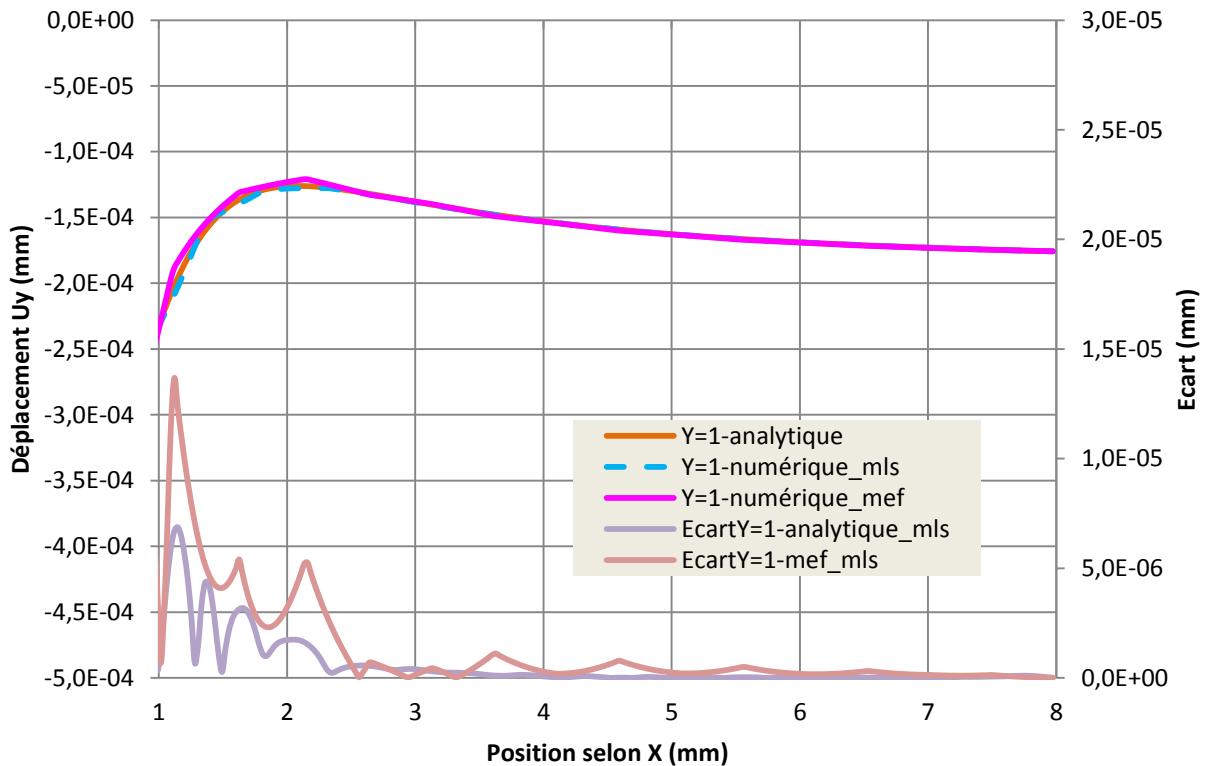


(b)





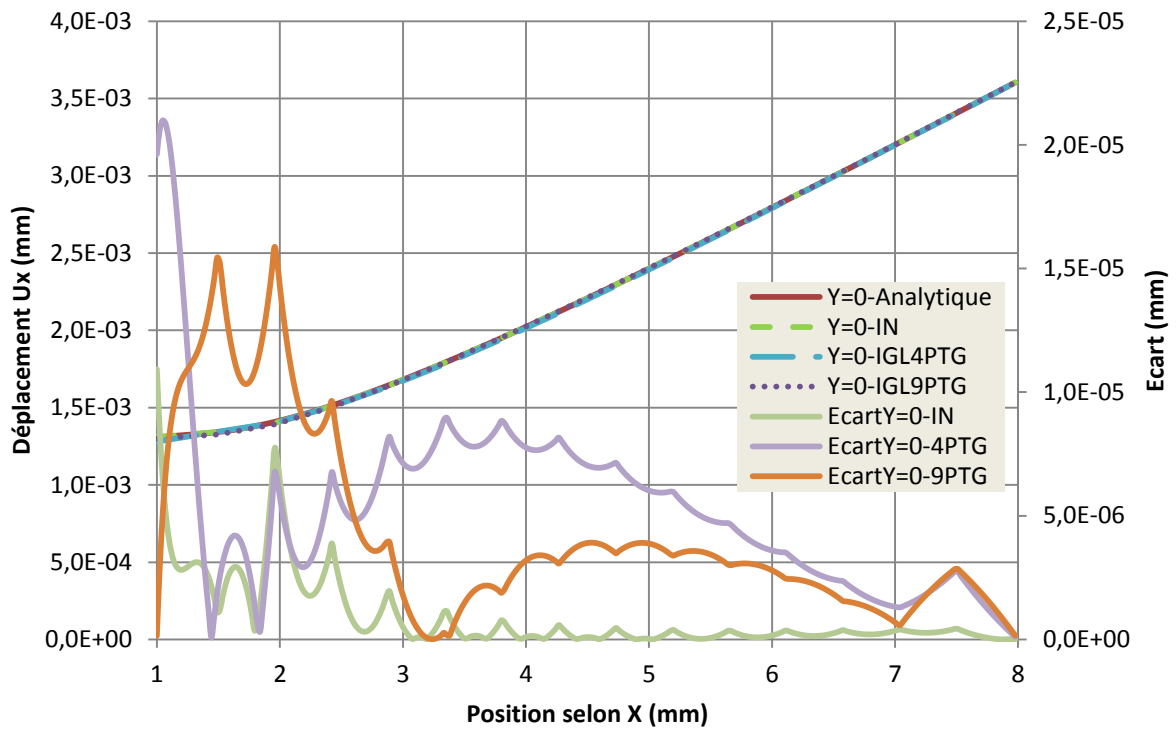
(c)



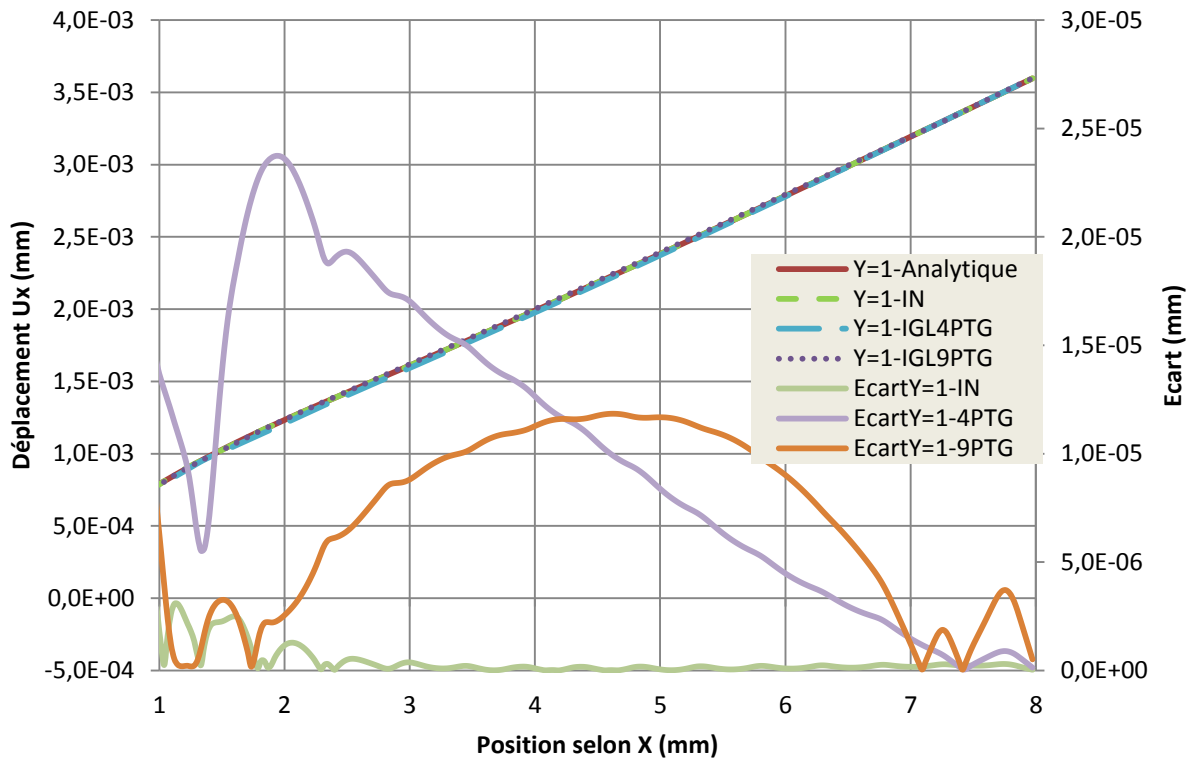
(d)

Figure 3-37: Déplacement analytique, MLS, MEF et leurs écarts (a)  $u_x$  au tracé  $y=0$  mm (b)  $u_x$  au tracé  $y=1.0$  mm (c)  $u_y$  au tracé  $y=0$  mm (d)  $u_y$  au tracé  $y= 1.0$  mm

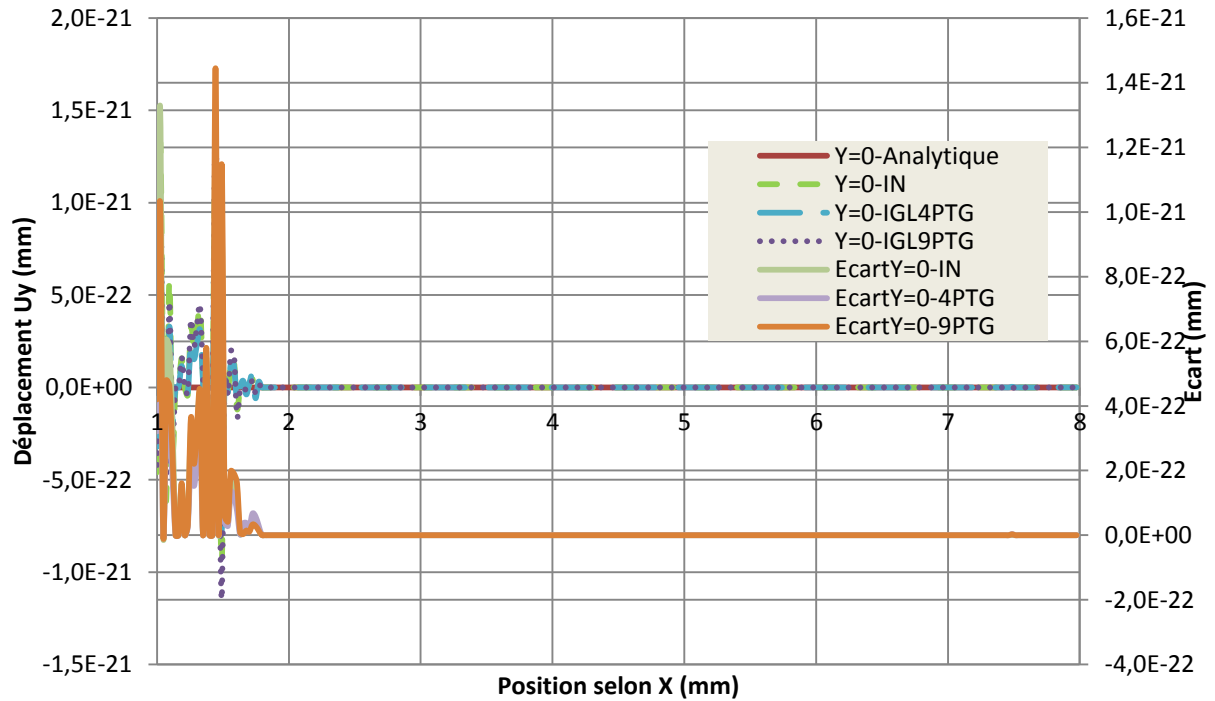
*Comparaison des modèles MLS Mixte en intégration nodale et intégration de Gauss-Legendre*



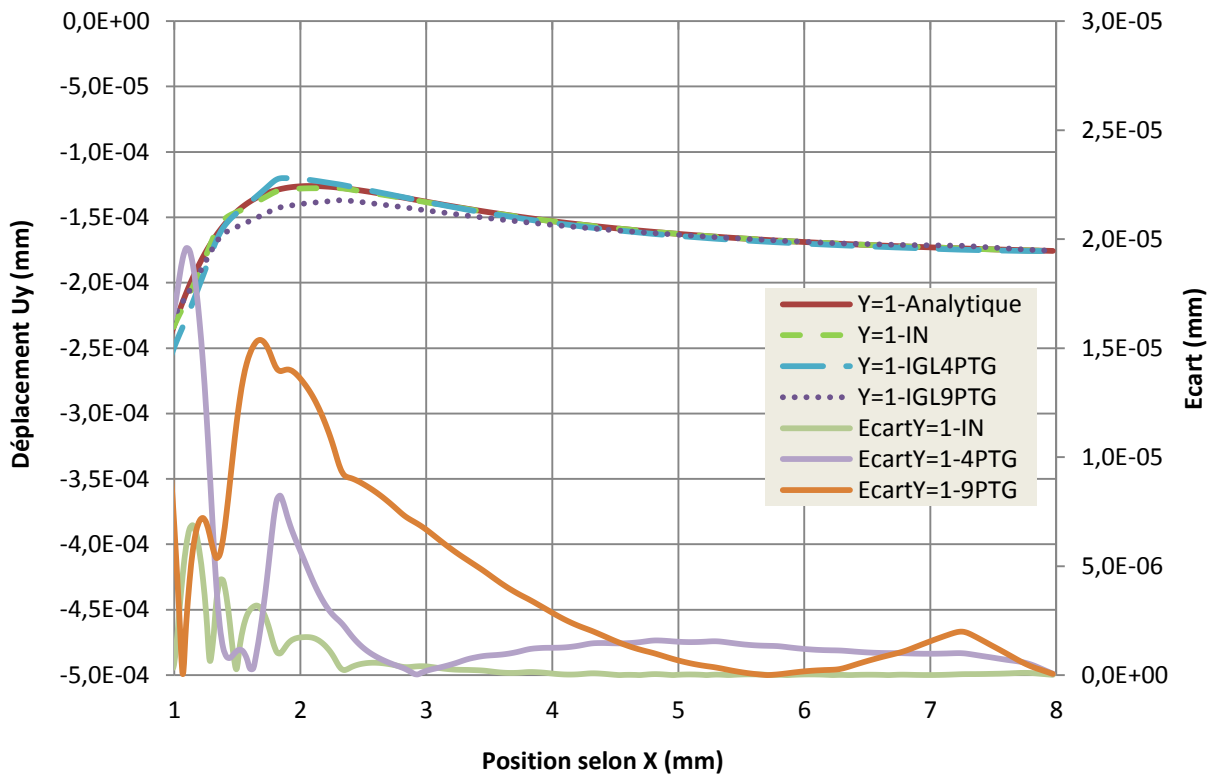
(a)



(b)



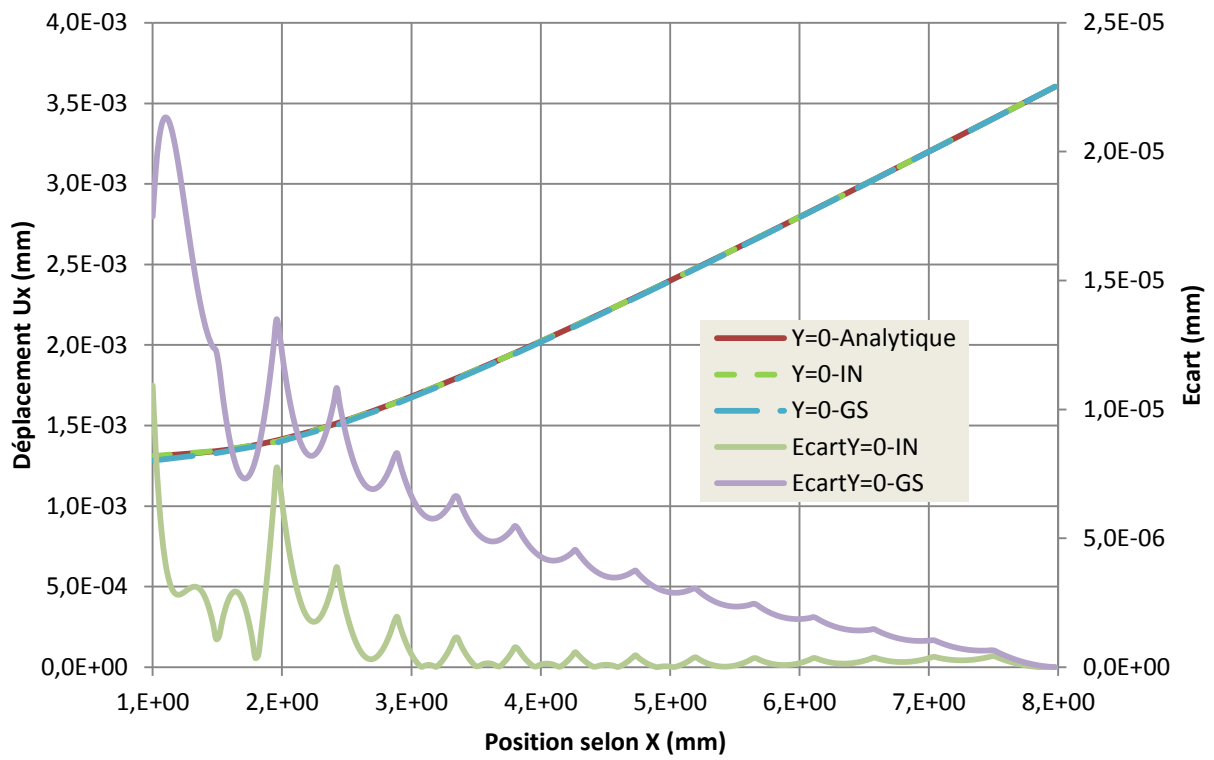
(c)



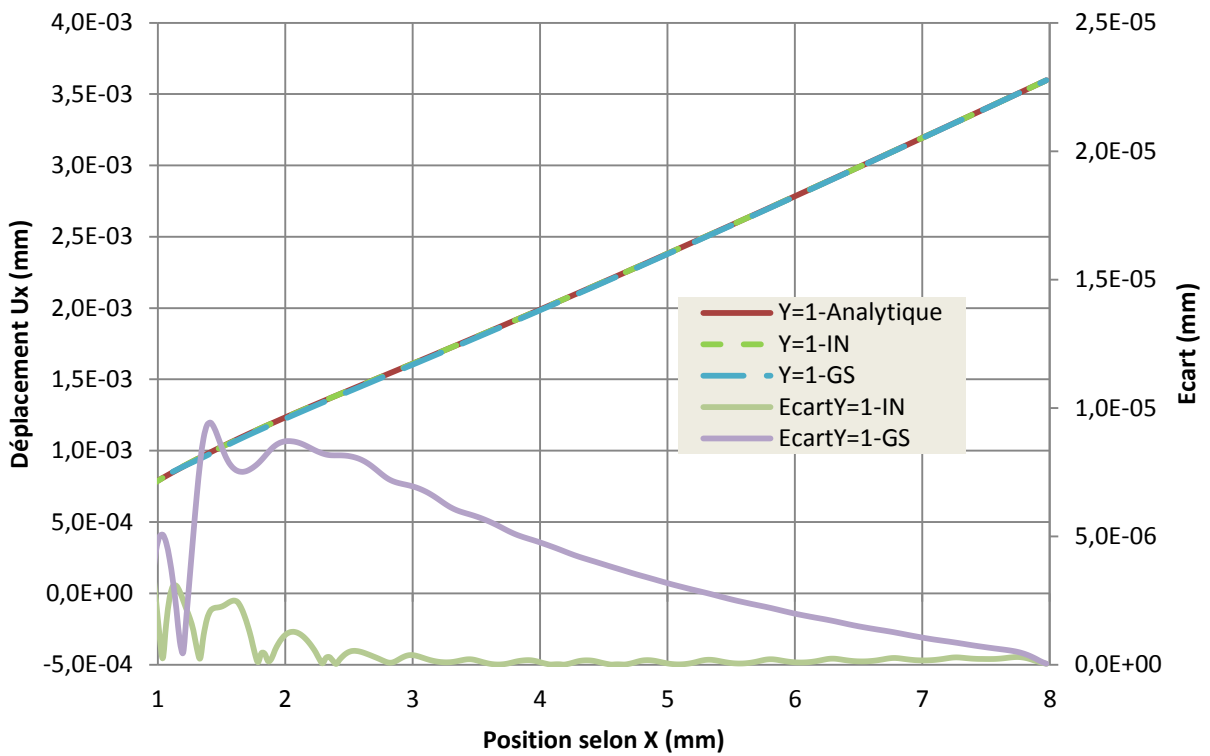
(d)

Figure 3-38 : Déplacement analytique, MLS en intégration nodale à gradient régularisé et en intégration de type Gauss (4 points et 9 points) et leurs écarts (a)  $u_x$  au tracé  $y=0$  mm (b)  $u_x$  au tracé  $y=1.0$  mm (c)  $u_y$  au tracé  $y=0$  mm (d)  $u_y$  au tracé  $y= 1.0$  mm

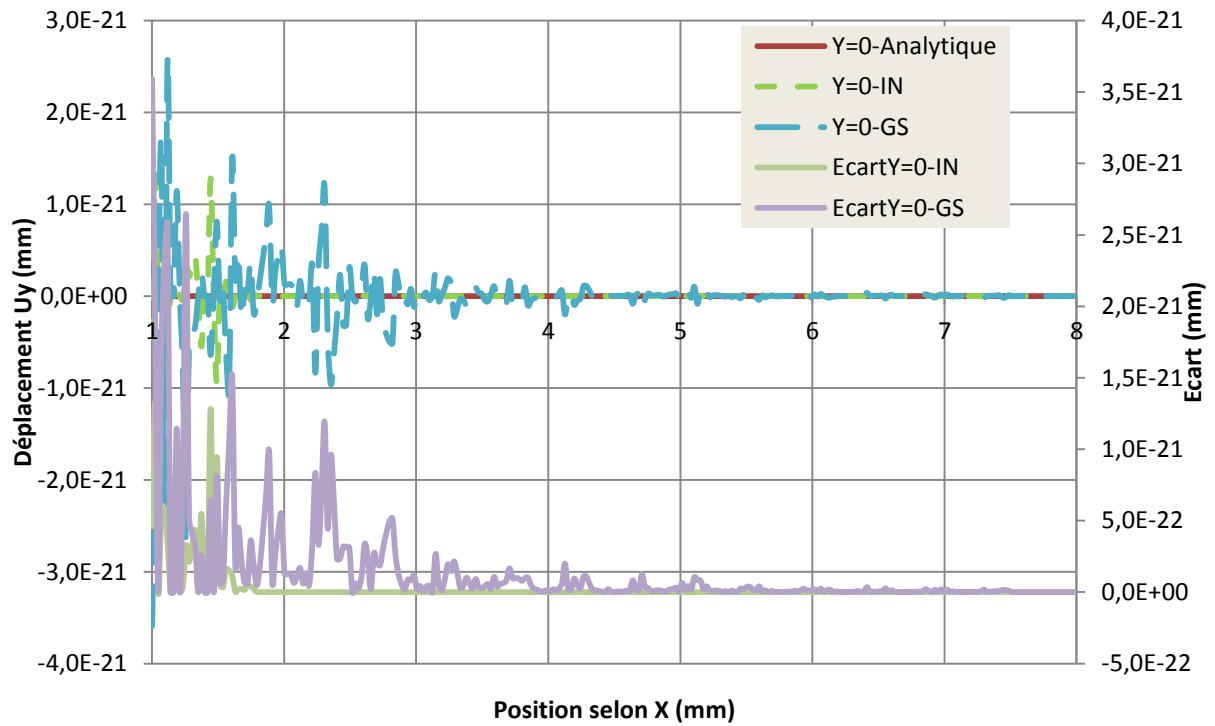
*Erreurs sur la taille du support des fonctions de forme*



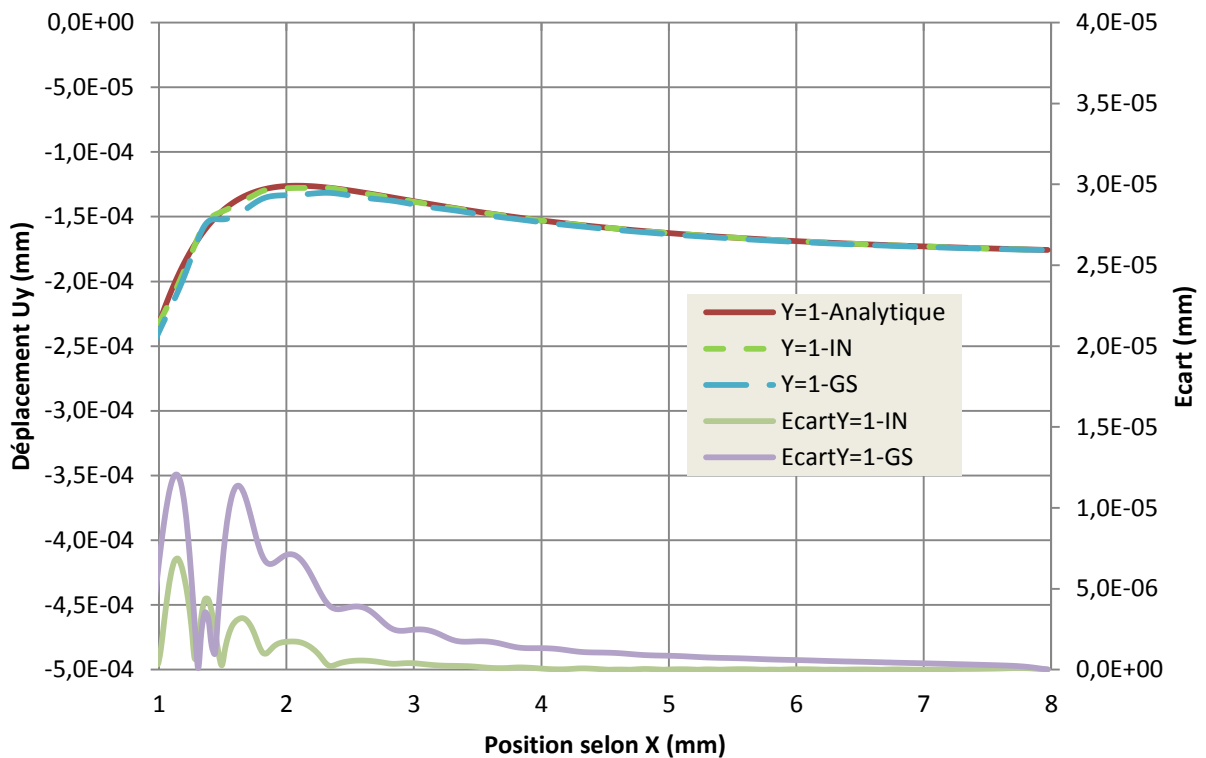
(a)



(b)



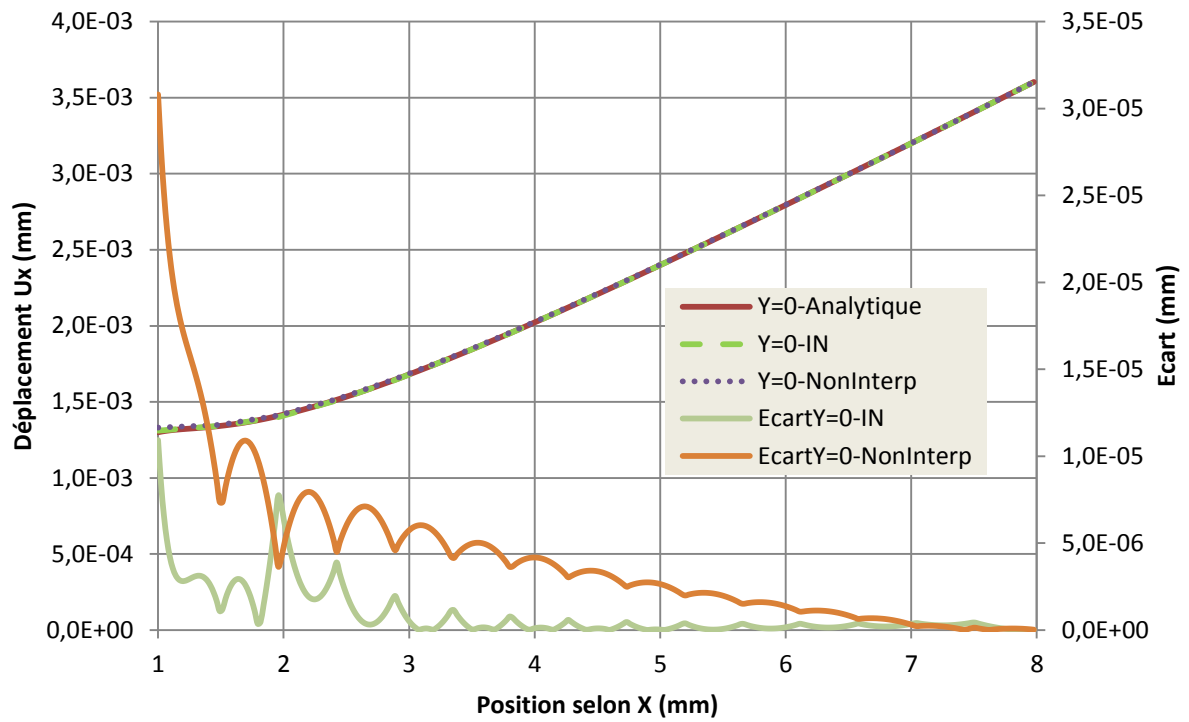
(c)



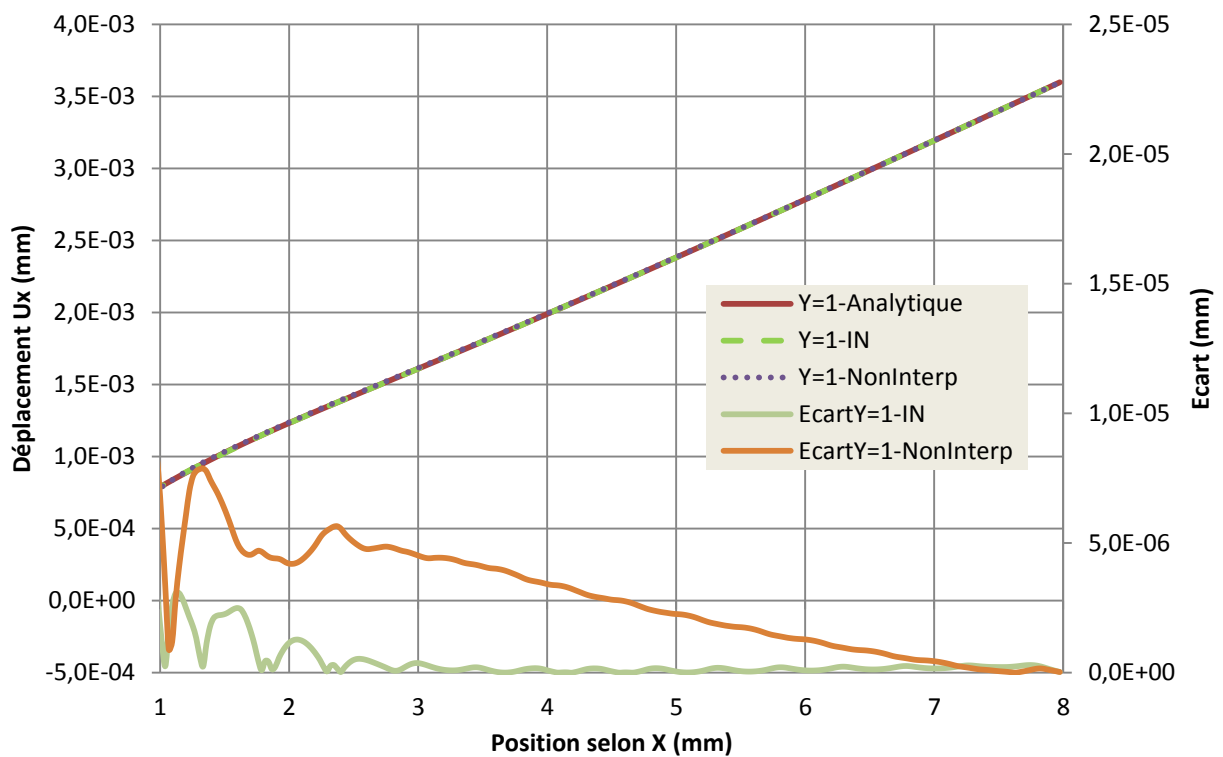
(d)

Figure 3-39 : Déplacement analytique, MLS en intégration nodale à gradient régularisé en utilisant des supports de fonctions de forme limitée (IN) et larges (GS) ainsi que leurs écarts selon  $x$  (a)  $u_x$  au tracé  $y=0$  mm (b)  $u_x$  au tracé  $y=1.0$  mm (c)  $u_y$  au tracé  $y=0$  mm (d)  $u_y$  au tracé  $y=1.0$  mm

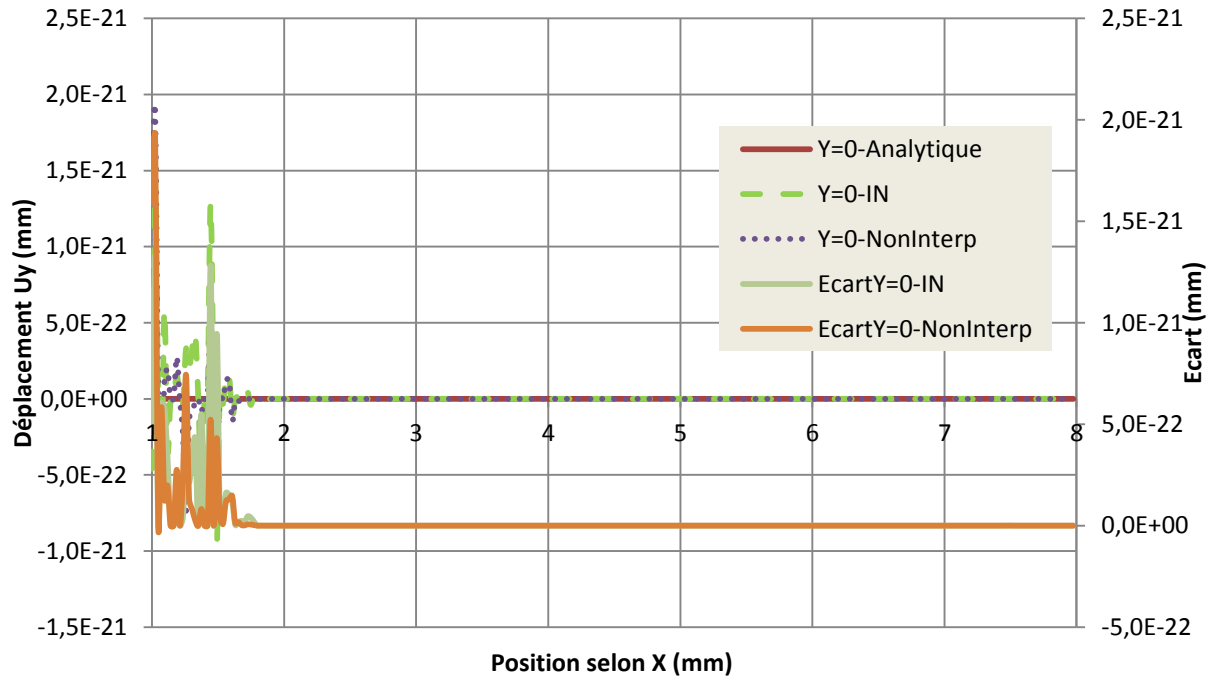
Sensibilité aux fonctions poids interpolantes



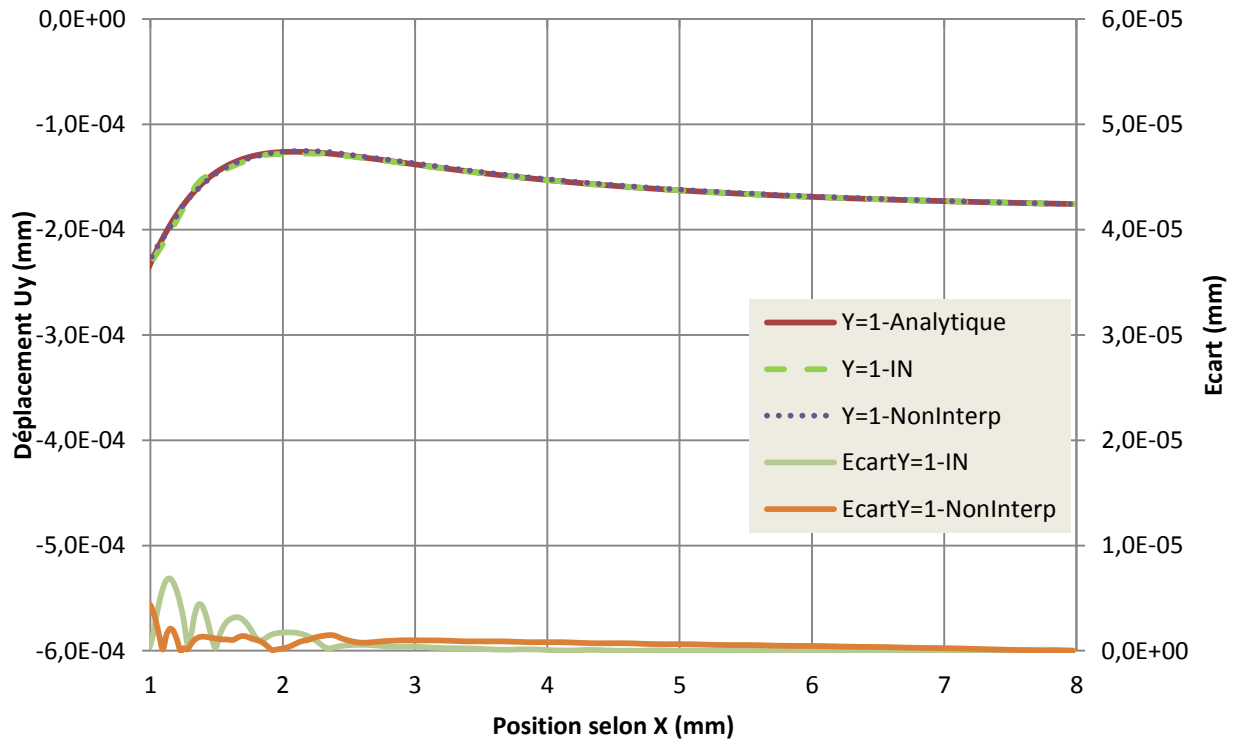
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 3-40 : Déplacement analytique, MLS en intégration nodale à gradient régularisé en utilisant des fonctions de forme interpolantes (IN) et non-interpolantes (NonInterp) et leurs écarts selon  $x$  (a)  $u_x$  au tracé  $y=0$  mm (b)  $u_x$  au tracé  $y=1.0$  mm (c)  $u_y$  au tracé  $y=0$  mm (d)  $u_y$  au tracé  $y= 1.0$  mm





## QUELQUES RÉFÉRENCES

- Atluri S. N., Zhu T., "A new Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics", *Computational Mech.*, 22: 117-127, 1998.
- Attaway S.W., Heinstein M.W., Swegle J.W., "Coupling of smooth particle hydrodynamics with the finite element method," *Nuclear Engineering and Design*, vol. 150, no. 2-3, pp. 199-205, 1994.
- Babuška I., Melenk J. M., "The partition of unity finite element method: Basic theory and applications", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.* Vol. 4, p. 289-314, 1996.
- Babuška I., Melenk J. M., "The partition of unity finite element method", *Technical Report BN-1185, Institute for Physical Science and Technology, University of Maryland*, 1995.
- Badreddine H., « Elastoplasticité anisotrope endommageable en grandes déformations : aspects théoriques, numériques et applications », PhD Thesis, University of Technology of Troyes, France, 2006.
- Belamri N., Modélisation numérique de découpage de tôles laminées : application au cisailage et au refendage en 3D. PhD Thesis, University of Technology of Troyes, France, 2004.
- Belytschko T., Hughes T. J. R., "Computational Methods for Transient Analysis", North-Holland, Amsterdam, 1983.
- Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., Fleming M., Krysl P., "Meshless methods: an overview and recent developments", *Computer Meth. Applied Mech. Engng.*, 139: 3-48, 1996.
- Belytschko T., Lu Y. Y., Gu L., "Element-free Galerkin methods", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 37: 229-256, 1994.
- Belytschko T., Organ D., Krongauz Y., "A coupled finite element-element free Galerkin method", *Computational Mech.*, 17:186-195, 1995.
- Bonet J. & Kulasegaram S., "Correction and stabilization of smooth particle hydrodynamics methods with applications in metal forming simulations", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 47: 1189-1214, 2000.
- Bonet J., Kulasegaram S., "Correction and stabilization of smooth particle hydrodynamics methods with applications in metal forming simulations". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47: 1189-1214, 2000.
- Borino, G., Failla, B., & Parrinello, F., "A symmetric nonlocal damage theory". *International Journal of Solids and Structure*, 40: 3621-3645, 2003.
- Boudifa M., « Modélisation macro et micro-macro des matériaux polycristallins endommageables avec compressibilité induite », PhD Thesis, University of Technology of Troyes, France, 2006.
- Braun J, Sambridge M., "A numerical method for solving partial differential equations on highly irregular evolving grids". *Nature* 376:655-660,1995.
- Breitkopf P., Rassinoux A., Savignat J-M., Villon P., "Integration constraint in diffuse element method". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol 193, pp 1203-1220, 2004.
- Chaboche J. L., "Problèmes non linéaires de mécanique", Symposium Franco-polonais de rhéologie en mécanique, Cracovie, 137-159, 1977.
- Chaboche J. L., "Sur l'utilisation des variables d'état interne pour la description du comportement viscoplastique et de la rupture par endommagement", Symposium Franco-polonais de rhéologie en mécanique, Cracovie, 1977.
- Chen J. S., Roque C., Pan C., Button S. T. Analysis of metal forming processes based on Meshless methods. *J. Mater. Process. Technol.*, 80: 642, 1998.
- Chen J. S., Wang H. P., "New boundary condition treatments in meshfree computation of contact problems". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 01/2000; DOI:10.1016/S0045-7825(00)80004-3, 2000.

- Chen T., and Raju I. S., “A coupled finite element and Meshless local Petrov-Galerkin method for two-dimensional potential problems”, *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 192, pp. 4533-4550, 2003.
- Chen, J.S, Yoon, S., Wu, C.T., “Non-linear version of stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* , 53, 2587-2615, 2002.
- Chen, J.S., Wu, C.T., Yoon, S., You, Y., “A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50, 435–466, 2001.
- Chinesta F., « La Méthode des Eléments Naturels en calcul des structures et simulation des procédés », Hermes Science Publishing Ltd, ISBN : 978-2-7462-1984-7, 2009.
- Chinesta F., Cueto E., and Coupez T., “New and Advanced Numerical Strategies for the Simulation of Material Forming”. In Chinesta F., Cueto E., editors. *Advances in material forming*. Springer. Paris, France. ISBN 978-2-287-72142-7. 2007.
- Chinesta F., Cueto E., Joyot P., and Villon. P., “Accounting for weak discontinuities and moving boundaries in the context of the Natural Element Method and model reduction techniques”. IUTAM symposium on Discretisation Methods for evolving discontinuities. IUTAM Bookseries, Vol. 5, Combescure, de Borst and Belytschko editors, Springer, 37-55, 2007.
- Chinesta F., Yvonnet J., Villon P., Breitkopf P., Joyot P., Alfaro I., and Cueto E., “New Advances in Meshless Methods: Coupling Natural Element and Moving Least Squares Techniques in Meshless Methods”. In Alves C. J. S., Duarte C. A., Leito V. M. A., Eds. *Computational Methods in Applied Sciences Book series*, Springer, ISBN: 978-1-4020-6094-6, 2007.
- Cho J. Y., Song Y. M., Choi Y. H., “Boundary locking induced by penalty enforcement of essential boundary conditions in mesh-free methods”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 197 1167–1183, 2008.
- Chu, Y. A., Moran B., “A computational model for nucleation of solid-solid phase transformations”. *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.* 3, 455 :471, 1995.
- Cordebois J. P., Sidoroff F., « Endommagement anisotrope en élasticité et plasticité », *J. Mec. Theor. Appl.*, 45-60.
- Cueto E., Cegonino J., Calvo B. Doblare M., “On the imposition of essential boundary conditions in natural neighbour Galerkin methods”, *Commun. Numer. Meth. Engrg.*, 19:361–376, 2003.
- Dafalias Y. E., « Corotational rates for kinematic hardening at large plastic deformation. ASME, *J. Appl. Mech.* 50:561-565, 1983.
- Detraux J. M., « Formulations et applications en grandes déformations des solides », Thèse présentée pour l'obtention du grade de Docteur-Ingénieur - Spécialité : Mécanique appliquée à la construction - Option : Mécanique et calcul des structures – 1985.
- Dilts G.A., Moving-Least-Squares-Particle Hydrodynamics – I. Consistency and stability. *Int J Numer Meth Engng* 44: 1115–1155, 1999.
- Dogui A., « Contribution à l'étude de l'écrouissage isotrope et anisotrope en grandes déformations élastoplastiques », PhD Thesis Université Paris VI, 1983.
- Dolbow J., Belytschko T., “Numerical integration of the galerkin weak form in Meshfree methods”. *Computational Mechanics*, 23:219–230, 1999.
- Duarte C. A. & Oden J. T., ‘An *h-p* adaptive method using clouds’, *Computer Meth. Applied Mech. Engrg.*, 139: 237-262, 1996.
- Dünweg B., “Computer simulations of systems with hydrodynamic interactions: The coupled Molecular Dynamics — lattice Boltzmann approach”, in *Multiscale Simulation Methods in Molecular Sciences*, edited by J. Grotendorst, N. Attig, S. Bl'ugel and D. Marx, NIC Series Volume 42, ISBN 978-3-9810843-8-2, 2009.
- Estacio K.C., Nonato L., Mangiavacchi N., “A Meshless method for 1/2D mold filling simulations using point set surfaces”, *TEMA. Tendências em Matemática Aplicada e Computacional [Trends in Computational and Applied Mathematics]*, vol. 8, pp. 239–248, 2007.

- Estacio K.C., Nonato L.G., Mangiavacchi N., Carey G.F., "Combining CVFEM and Meshless front tracking in Hele-Shaw mold filling simulation", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 56, no. 8, pp. 1217–1223, 2008.
- Fernandez-Mendez S, Huerta A., "Imposing essential boundary conditions in mesh-free methods". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193:1257–1275, 2004.
- Fish J., Belytschko T., "Elements with embedded localization zones for large deformation problems". *Comput. Struct.*, 30, 247–256, 1988.
- Garcia O., Fancello E.A., Barcellos C.S., Duarte C.A., "hp-Clouds in Mindlin's thick plate model", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 47(8):1381–1400, 2000.
- Garcia, J. A. and Gascon, L. and Cueto, E. and Ordeig, I. and Chinesta, F., "Meshless methods with application to Liquid Composite Molding simulation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 198, no. 33-36, pp. 2700-2709, 2009.
- García, J. A.; Gascón, Ll.; Cueto, E.; Sánchez, F.; Chinesta, F., "Meshless methods with application to Resin Transfer Molding simulation", AIP Conf. Proc. 907, pp. 1378-1383, 2007
- Germain, P. Nguyen, Q. S., and Suquet, P., "Continuum Thermodynamics," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50, pp. 1010-1020, 1983.
- Gharbi M., Labergere C., Badreddine H., Soyarslan C., Weinrich A., Hermes M., Chatti S., Sulaiman H., Saanouni K., Tekkaya A.E., "Advanced experimental-numerical investigations of cold bending of high strength steels", 10th International conference on technology of plasticity, 25-30 September 2011.
- Ghozzi Y., Labergere C., Villon P., Numerical simulation based on Meshless formulation. Application to 2D solid mechanics. ESDA, 11<sup>th</sup> Engineering Systems Design and Analysis, 2-4 July 2012 Nantes, France
- Gingold R. A., Monaghan J. J., "Smoothed particle hydrodynamics: theory and applications to non-spherical stars", *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 181: 375-389, 1977.
- Gosz J., Liu W. K., « Admissible approximation of essential boundary condition in the reproducing kernel method », *Computational Mechanics*, 19, 120-125, 1996.
- Gu Y.T., Yan C. and Yarlagadda Prasad K.D.V., An Advanced Meshless Technique for Large Deformation Analysis of Metal Forming, 9th Global Congress on Manufacturing and Management, GCMM, 2008.
- Hammi Y., « Simulation numérique de l'endommagement dans les procédés de mise en en forme » PhD Thesis, University of Technology of Troyes, France, 2000.
- Hinton E, Rock T, Zienkiewicz O C., "A note on mass lumping and related processes in finite element method". *Earthquake Eng. Struct. Dyna.* 4: 246–249, 1976.
- Huerta A. & Fernández-Méndez S., 'Enrichment and coupling of the finite element and Meshless methods', *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 48: 1615-1636, 2000.
- Hughes T. J. R., "The Finite Element method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.
- Hughes T. J. R., Winget J., « Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large-deformation analysis », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 15, Issue 12, pages 1862–1867, 1980.
- Johnson G. R., Beissel S. R., "Normalized smoothing functions for SPH impact computations", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 39: 2725-2741, 1996.
- Jose M. A., Cesar d. S., Cai Z., "A comparison of meshless and finite element approaches to ductile damage in forming processes", *Computer Methods in Materials Science*, vol. 7, no. 2, 2007.
- Kalarakis, A.N., Bourantas, G.C., Skouras, E.D., Loukopoulos, V.C., Burganos, V.N., "Lattice-Boltzmann and Meshless point collocation solvers for fluid flow and conjugate heat transfer". *International Journal for Numerical Methods in Fluids* vol. 70 issue 11 20 December 2012. p. 1428-1442

Kansa, E., "Multiquadrics -A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics -I Surface approximations and partial derivative estimates". *Computers & Mathematics with Applications*, 19(8-9):127-145, 1990.

Khoshnoudirad D. B., Joyot P., Chinesta F., Villon P., Collocation Model Reduction for Moving-least-square method, hal-00783202 - version 1, 2008.

Krongauz Y., Belytschko T., 'Enforcement of essential boundary conditions in Meshless approximations using finite elements', *Computer Meth. Applied Mech. Engng.*, 131: 133-145, 1996.

Krysl P., Belytschko T., "Element free Galerkin method : convergence of the continuous and discontinuous shape functions". *Computer methods in applied mechanics and engineering* , 148:257-277,1996.

Krysl P., Belytschko T., "The element-free Galerkin method for dynamic propagation of arbitrary 3-D cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* , 44:767-800, 1999.

Lankaster P. and Salkauskas K., 'Surfaces generated by moving least squares methods', *Math. Comput.*, 37: 141-158, 1981.

Lemaitre J., Chaboche J-L., « Mécanique des matériaux solides », Dunod, 1985.

Lestriez Y., « Modélisation numérique du couplage thermo-mécanique-endommagement en transformations finies. Application à la mise en forme », PhD Thesis, University of Technology of Troyes, France, 2003.

Li S, Liu WK., "Moving least-squares reproducing Kernel method, Part III: Wavelet packet and its applications". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1997.

Liszka, T.J., Duarte, C.A.M., Tworzydło, W. W. "*hp*-Meshless Cloud Method", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 139, pp. 263-288, 1996.

Liu G. R., Gu Y. T., "Coupling of element free Galerkin method with boundary point interpolation method", in *Advances in Computational Engng. & Science*, Atluri S. N. & Brust F. W., Eds., ICES'2K, Los Angeles, 1427-1432, 2000.

Liu G. R., Gu Y. T., An introduction to Meshfree methods and their programming. Springer, Berlin, 2005.

Liu W. K., Chen Y., "Wavelet and multiple scale reproducing kernel methods", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 21: 901-932, 1995.

Liu W. K., Jun S., Zhang Y. F., 'Reproducing kernel particle methods', *Int.J. Num. Meth. Engng.*, 20: 1081-1106, 1995.

Liu, W.K., Hao, S., Belytschko, T., Li, S., Chang, C.T., "Multiple scale Meshfree methods for damage fracture and localization", *Computational Materials Science*, 16, 197-205, 1999.

Lucy L., "A numerical approach to testing the fission hypothesis", *Astron. J.*, 82: 1013-1024, 1977.

M. A. Puso, J. S. Chen, E. Zywicki, W. Elmer, "Meshfree and finite element nodal integration methods", *International journal for numerical methods in engineering*, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 74:416-446, 2008.

Maurer D., "Rate defined Stress Update applied to Explicit Time Integration", August 2003.

Melenk J. M. and Babuska I., "The partition of unity finite element method: Basic theory and applications", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 139, 289-314, 1996

Modaresi H., Aubert P., "A diffuse element-finite element technique for transient coupled analysis", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 39:3809-3838, 1996.

Modaresi H., Aubert P., "Coupled FEM-EFGM for consolidation modelling", *Proceedings of the 5th International Symposium on Numerical Models in Geomechanics (NUMOG V)*, Davos, Suisse, 417-422, Sept. 1995.

Monaghan J. J., "An introduction to SPH", *Comput. Physics Comm.*, 48: 89-96, 1988.

Monaghan J. J., "Why particle methods work", *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 3: 422-433, 1982.

- Most T., Bucher C., “A Moving Least Squares weighting function for the Element-free Galerkin Method which almost fulfills essential boundary conditions”. *Structural Engineering and Mechanics*, 21(3):315–332, 2005.
- Most T., Bucher C., “New concepts for moving least squares: An interpolating nonsingular weighting function and weighted nodal least squares”. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 32, 461–470, 2008.
- Nagashima, T., “Node-by-node meshless approach and its applications to structural analysis”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46, 341–385, 1999.
- Nayroles B., Touzot G., Villon P., “Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements”, *Computational Mechanics*, 10:307-318, 1992.
- Nguyen T. D., “Anisotropie de l'endommagement et simulation numérique en mise en forme par grandes déformations plastiques”, PhD Thesis, University of Technology of Troyes, France, 2012.
- Ōnate, E., Perazzo, F., Miquel, J., “A finite point method for elasticity problems”. *Comput. Struct.* 79, 2151–2163, 2001.
- Onate, E., Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., “A finite point method in computational mechanics, Applications to convective transport and fluid flow,” *Int. J. Numer. Methods Eng.* 39, 3839–3866, 1996.
- Petschek AG and Libersky LD, “Cylindrical smoothed particle hydrodynamics”, *J. Comput. Phys.*, 109, 76–83, 1993.
- Quak W., Boogaard, A. H., and Huetink, J., “Meshless methods and forming processes”. *International Journal of Material Forming*, 2 (Suppl.). 585 - 588. ISSN 1960-6206, 2009.
- Quak, W.; Boogaard, A.; González, D.; Cueto, E., “A comparative study on the performance of meshless approximations and their integration”, *Computational Mechanics*, Vol. 48 Issue 2, 121-137, 2011.
- Rabczuk T., Belytschko T., Xiao S., “Stable Particle Methods based on Lagrangian Kernels”, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, 193, 1035-1063, 2004
- Randles P. W., Libersky L. D., “Smoothed particle hydrodynamics: some recent improvements and applications”, *Computer Meth. Applied Mech. Engrg.*, 139: 375-408, 1996.
- Rao B. N., Rahman S., “An efficient Meshless method for fracture analysis of cracks”. *Computational Mechanics*, 26(4): 398–408, 2000.
- Saanouni K., Chaboche J-L, « Computational damage mechanics : Application forming ». *Comprehensive structural integrity*, vol 3. Elsevier, Oxford, 321-376.
- Saanouni K., Damage Mechanics in metal forming. *Advanced modeling and numerical simulation*, ISTE/Wiley, London, ISBN: 978-1-84821-3487, 2012.
- Saanouni K., Forster C., Ben Hatifa F., “On the anelastic flow with damage”. *Int. J. Damage. Mesh*, 3:140-169, 1994.
- Sibson R., “A vector identity for the Dirichlet tessellation”. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 87:151-155, 1980.
- Sidoroff F., “Incremental constitutive equation for large strain elastoplasticity”, *International Journal of Engineering Science*, vol 20(1), 19-26, 1982.
- Simo J.C., Taylor, R.L., “A return mapping algorithm for plane stress Elastoplasticity”, *Inter. J. Num. Methods. Eng.*, vol. 22, pp. 649-670, 1986.
- Sukumar N., Moran B. and Belytschko T., The Natural Element Method in Solid Mechanics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 43, Number 5, pp. 839-887, 1998.
- Sukumar, N., Moran B., Yu Semenov A. and Belikov V. V., Natural neighbour Galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50, Number 1; 1-27, 2001.
- Vila J.P., “On particle weighted methods and smooth particle hydro dynamics”. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 9 (2):161-209, 1999.

Wendland H., “Meshless Galerkin methods using radial basis functions”, *Mathematics of Computation*, 68: 1521-1531, 1999.

Wendland H., “Meshless Galerkin methods using radial basis functions”. *Math. Comp.*, 68:1521–1531, 1999.

Yvonnet J., Chinesta F., Lorong Ph., Ryckelynck D., “The constrained natural element method (C-NEM) for treating thermal models involving moving interfaces”, *International Journal of Thermal Sciences*, Volume 44, Issue 6, Pages 559-569, 2005.

Yvonnet J., Coffignal G., Ryckelynck D., Lorong Ph., Chinesta F., “A simple error indicator for meshfree methods based on natural neighbors”, *Computers & Structures*, Volume 84, Issue 21, August 1301-1312, 2006.

Yvonnet J., He Q. C., “The reduced model multiscale method (R3M) for the non-linear homogenization of hyperelastic media at finite strains”, *Journal of Computational Physics*, Volume 223, Issue 1, 341-368, 2007.

Yvonnet J., Ryckelynck D., Lorong P., Chinesta F., « A new extension of the natural element method for non-convex and discontinuous domains: the constrained natural element method (C-NEM) », *Int. J. Numer. Meth. in Engng*, vol. 60, p. 1451-1474, 2004.

Zhu T., Atluri S. N., “A modified collocation method and a penalty formulation for enforcing the essential boundary conditions in the element free Galerkin method”. *Computational Mechanics*, vol 21, 211-222, 1998.

Zhu T., Zhang S., Atluri S. N. “A local boundary integral equation (LBIE) in computational mechanics and a Meshless discretization approach”, *Computational Mech.*, 21: 223-235, 1998.

# Yosr GHOZZI

## Doctorat : Systèmes Mécaniques et Matériaux

### Année 2014

#### Simulation numérique des problèmes mécaniques non linéaires par une approche mixte MEF-MESHLESS

Dans le présent travail, nous mettons en œuvre un développement numérique d'une méthode de discrétisation mixte MEF/Meshless pour la résolution de problème mécanique fortement non-linéaire. Une attention particulière est attribuée à la construction des fonctions de forme par approximation diffuse. Dans le but de traiter des problèmes de la mécanique des solides en transformations finies, nous développons une méthode numérique dite « mixte » unissant à la fois la méthode numérique Meshless afin de discrétiser les zones à fort gradient de déformation, et la méthode des Eléments Finis (MEF) pour les zones les moins sollicitées. Nous veillons donc à assurer le couplage entre ces deux méthodes de discrétisation à travers la mise en œuvre de techniques spécifiques, notamment pour la continuité du domaine et sa consistance en premier lieu, mais aussi pour le choix de la méthode d'intégration numérique appropriée. Nous testons par la suite la fiabilité et la performance du modèle par la mise en place d'une étude comparative avec un modèle MEF standard conçu pour les mêmes conditions numériques, afin de tester la performance des techniques numériques attribuées au modèle « mixte ». Nous développons, par la suite, un modèle de comportement à travers une description des transformations finies. Nous adoptons ainsi une discrétisation spatiale en éléments «assumed strain», et une discrétisation temporelle adaptées. Pour valider notre modèle « mixte » retenu, nous réalisons une étude comparative avec des exemples simples de calcul non linéaire.

Mots clés : méthodes sans maillage - méthode des éléments finis - mécanique non linéaire - intégration numérique - élastoplasticité - endommagement.

#### Numerical Simulation of Nonlinear Mechanical Problems by MEF-MESHLESS Mixed Approach

In this work, we implement a development of mixed discretization MEF-Meshless for solving strongly nonlinear mechanical problem. Particular attention is given to the construction of the shape functions by diffuse approximation. In order to deal with problems of solid mechanics with large strain, we develop a so-called "mixed" numerical method combining both Meshless to discretize areas of high deformation gradient, and Finite Element Method (MEF) for non-concerned areas. We ensure coupling between both discretization methods through the implementation of specific techniques, including the continuity and consistency of the field and the choice of the appropriate method of numerical integration. We test later the reliability and performance of the model by the introduction of a comparative study with a standard FEM model designed for the same numerical conditions to evaluate numerical techniques attributed to our "mixed" model. We develop, thereafter, a model of behavior through a large strain description. We adopt spatial discretization elements "assumed strain" and a suitable time discretization. To validate our "mixed" model, we perform a comparative study of nonlinear simple calculation examples.

Keywords: meshfree methods - finite elements methods - nonlinear mechanics - numerical integration - elastoplasticity - damage.

Thèse réalisée en partenariat entre :

