

Quelques applications de la théorie de Galois différentielle

Thomas Dreyfus

▶ **To cite this version:**

Thomas Dreyfus. Quelques applications de la théorie de Galois différentielle. Analyse classique [math.CA]. Université de Strasbourg, 2021. tel-03357238

HAL Id: tel-03357238
https://hal.science/tel-03357238

Submitted on 28 Sep 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Habilitation à Diriger des Recherches

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE

UMR 7501

Strasbourg

Université de Strasbourg
Spécialité MATHÉMATIQUES

Thomas Dreyfus

Quelques applications de la théorie de Galois différentielle

Soutenue le 4 Juin 2021
devant la commission d'examen

M^me^ Nalini ANANTHARAMAN, Univ. Strasbourg, Examinatrice
M. Moulay BARKATOU, Université de Limoges, Rapporteur
M. Yann BUGEAUD, Université de Strasbourg, Examinateur
M^me^ Lucia DI VIZIO, Université de Versailles, Examinatrice
M. Frank LORAY, Université de Rennes 1, Examinateur
M. Amador MARTIN-PIZARRO, Univ. Freiburg , Rapporteur
M^me^ Marni MISHNA, Simon Fraser University, Examinatrice
M. Tanguy RIVOAL, Université Grenoble Alpes, Rapporteur

irma.math.unistra.fr

IRMA
Institut de Recherche Mathématique Avancée

cnrs

Université de Strasbourg

Institut de Recherche Mathématique Avancée, UMR 7501
7 rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex

Remerciements

Je tiens à remercier Moulay Barkatou, Amador Martin-Pizarro, et Tanguy Rivoal, pour avoir accepté de rapporter mon habilitation et pour y avoir consacré un temps important. Merci aux membres locaux, à savoir Nalini Anantharaman et Yann Bugeaud, pour avoir accepté de participer au jury. J'ai aussi une pensée pour Lucia Di Vizio, qui après avoir encadré ma thèse a accepté d'être jury pour cette HDR. Merci également à Frank Loray, qui était déjà présent à ma soutenance de thèse. Enfin, un merci admiratif à Marni Mishna, qui a accepté de se lever à 5h du matin pour suivre cette soutenance.

Cela fait maintenant 4 ans que je suis à Strasbourg. J'ai pu découvrir à quoi ressemblait un laboratoire en tant que permanent. Merci aux collègues de l'IRMA et en particulier à l'équipe Analyse pour l'accueil. Avant d'être au CNRS, j'ai été post-doctorant. Merci à Charlotte Hardouin et Boris Adamczewski de m'avoir accueilli à Toulouse et Lyon lors de ces contrats courts. Merci aux coauteurs et plus généralement à la communauté, de rendre ce travail toujours aussi stimulant. Cette décennie a été dense, il n'y a pas de raison que la suivante ne soit pas similaire.

Cette HDR a été écrite à un moment où la seule activité légale consistait à s'enfermer chez soi pour écrire une habilitation. J'ai une pensée pour tout ce qui fait le sel de la vie et qui m'a manqué au cours de cette année. Je citerais par ordre aléatoire la famille, les amis, le CRC, les Chouffes, la Bruche, le Motocultor, les marathons, Le Chariot, et plus généralement nos soirées à refaire le monde. Puissions-nous retrouver notre insouciance au plus vite.

Ever tried. Ever failed. No matter.
Try again. Fail again. Fail better.

Résumé

Mon sujet de recherche est la théorie de Galois différentielle, qui est un domaine mathématique à la croisée de la théorie des nombres, de l'analyse complexe, du calcul formel, et de la géométrie différentielle. Je me suis intéressé à diverses branches d'applications de celle-ci. J'ai notamment travaillé sur l'étude de la transcendance de fonctions spéciales ; les équations de Mahler, qui sont notamment en lien avec les suites automatiques ; les marches aléatoires dans le quart de plan (resp. trois-quarts de plan) ; la sommation de Borel-Laplace pour les équations aux q-différences ; les déformations isomonodromiques ; les problèmes de dégénérescence de ces dernières lorsque q tend vers 1 ; les théorèmes de Morales-Ramis sur l'intégrabilité des systèmes dynamiques ; et les aspects effectifs de calcul de groupe de Galois différentiel (resp. aux différences). Après une introduction présentant une partie de ces domaines, je détaillerai quelques résultats et donnerai des pistes de recherches futures en quatre grands axes correspondant aux quatre chapitres.

Ch. 2 Le calcul effectif du groupe de Galois différentiel.

Ch. 3 La transcendance différentielle des fonctions spéciales.

Ch. 4 L'étude analytique des équations aux q-différences.

Ch. 5 L'étude de la nature des séries génératrices de marches dans des espaces confinés.

Table des matières

Articles **9**

1 Introduction **11**
1.1 Théorie de Galois différentielle. 11
1.2 Équations aux différences. 12
1.3 Plan du mémoire 14

2 Calcul de groupes de Galois différentiels **15**
2.1 Introduction à la théorie de Galois différentielle 15
2.2 Aspects algorithmiques 16
2.3 Application à l'intégrabilité 17

3 Transcendance des fonctions spéciales **19**
3.1 Théorie de Galois aux différences 19
3.2 Théorie de Galois aux différences paramétrée 20
3.3 Transcendance différentielle des fonctions spéciales 22
3.4 Indépendance algébrique de fonctions spéciales 27

4 Équations aux q-différences **29**
4.1 Sommation q Borel-Laplace 29
4.2 Confluence des équations aux q-différences, cas fuchsien. 30
4.3 Déformations isomonodromiques et confluence 30
4.4 Confluence des équations aux q-différences, cas général 33

5 Marches à petits pas **35**
5.1 Présentation du problème 35
5.2 Quelques cas faciles 37
5.3 Marches dans le quart de plan 38
5.4 Marches dans le trois-quarts de plan 42

6 Résumé des pistes de recherches **45**

Références **47**

Articles

[1] Thomas Dreyfus, Computing the Galois group of some parameterized linear differential equation of order two,
Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 142, (2014), no. 4, p. 1193-1207.

[2] Thomas Dreyfus, A density theorem in parametrized differential Galois theory,
Pacific Journal of Mathematics, vol. 271, (2014), no. 1, p. 87-141.

[3] Thomas Dreyfus, Confluence of meromorphic solutions of q-difference equations,
Annales de l'institut Fourier (Grenoble), vol. 65, (2015), no. 2, p. 431-507.

[4] Thomas Dreyfus, Building meromorphic solutions of q-difference equations using a Borel-Laplace summation,
International Mathematics Research Notices (IMRN), (2015), no. 15, p. 6562-6587.

[5] Thomas Dreyfus et Julien Roques, Galois groups of difference equations of order two on elliptic curves,
Symmetry, Integrability and Geometry, Methods and Applications (SIGMA), vol. 11, (2015), paper 003, 23 pages.

[6] Thomas Dreyfus, q-deformation of meromorphic solutions of linear differential equations,
Journal of Differential Equations, vol. 259, (2015), no. 11, p. 5734-5768.

[7] Ainhoa Aparicio-Monforte, Thomas Dreyfus et Jacques-Arthur Weil, Liouville integrability : An effective Morales–Ramis–Simó theorem,
Journal of Symbolic Computation, vol. 74, (2016), p. 537-560.

[8] Thomas Dreyfus et Anton Eloy, q-Borel-Laplace summation for q-difference equations with two slopes,
Journal of Difference Equations and Applications, vol. 22, (2016), no. 10, p. 1501-1511.

[9] Thomas Dreyfus, Isomonodromic deformation of q-difference equations and confluence,
Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 145, (2017), no. 3, p. 1109-1120.

[10] Thomas Dreyfus, Real difference Galois theory,
Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 146, (2018), no. 1, p. 43-54.

[11] Thomas Dreyfus, Charlotte Hardouin et Julien Roques, Hypertranscendance of solutions of Mahler equations,
Journal of the European Mathematical Society (JEMS), vol. 20, (2018), no. 9, p. 2209-2238.

[12] Thomas Dreyfus, Charlotte Hardouin, Julien Roques et Michael F. Singer, On the nature of the generating series of walks in the quarter plane,
Inventiones Mathematicae, vol. 213, (2018), no. 1, p. 139-203.

[13] Frédéric Chyzak, Thomas Dreyfus, Philippe Dumas et Marc Mezzarobba, Computing solutions of linear Mahler equations,
Mathematics of Computation, vol. 87, (2018), p. 2977-3021.

[14] Thomas Dreyfus et Kilian Raschel, Differential transcendence and algebraicity criteria for the series counting weighted quadrant walks,
Publications mathématiques de Besançon, (2019), no. 1 , p. 41-80.

[15] Thomas Dreyfus, Alberto Lastra et Stéphane Malek, On the multiple-scale analysis for some linear partial q-difference and differential equations with holomorphic coefficients,
Advances in Difference Equations, (2019), paper 326, 42 pages.

[16] Thomas Dreyfus, Charlotte Hardouin, Julien Roques et Michael F. Singer, Walks in the quarter plane, genus zero case,
Journal of Combinatorial Theory, Series A, (2020), vol. 174, paper 105251, 25 pages.

[17] Boris Adamczewski, Thomas Dreyfus et Charlotte Hardouin, Hypertranscendence and linear difference equations,
Journal of the American Mathematical Society, vol. 34, (2021), no. 2, p. 475-503.

[18] Thomas Dreyfus, Charlotte Hardouin, Julien Roques et Michael F. Singer, On the Kernel curves associated with walks in the quarter plane,
Springer Proceedings in Mathematics and Statistics.

[19] Thomas Dreyfus, Charlotte Hardouin et Julien Roques, Functional relations for solutions of q-difference equations,
Mathematische Zeitschrift.

[20] Thomas Dreyfus et Jacques-Arthur Weil, Computing the Lie algebra of the differential Galois group : the reducible case,
Preprint, arxiv 1904.07925.

[21] Carlos Arreche, Thomas Dreyfus et Julien Roques, Differential transcendence criteria for second-order linear difference equations and elliptic hypergeometric functions,
Journal de l'École polytechnique - Mathématiques, vol. 8, (2021), p. 147-168.

[22] Thomas Dreyfus et Charlotte Hardouin, Length derivative of the generating series of walks confined in the quarter plane,
Preprint, arxiv 1902.10558.

[23] Thomas Dreyfus et Viktoria Heu, Degeneration from difference to differential Okamoto spaces for the sixth Painlevé equation,
Preprint, arxiv 2005.12805.

[24] Thomas Dreyfus et Amélie Trotignon, On the nature of four models of symmetric walks avoiding a quadrant,
Annals of Combinatorics.

[25] Boris Adamczewski, Thomas Dreyfus, Charlotte Hardouin et Michael Wibmer, Algebraic independence and linear difference equations,
Journal of the European Mathematical Society (JEMS).

Chapitre 1

Introduction

1.1 Théorie de Galois différentielle.

Au cours du XIXe siècle, Liouville, puis Picard et Vessiot, ont développé une théorie de Galois permettant d'étudier les équations différentielles d'un point de vue algébrique. Cette théorie sera modernisée par Kolchin dans les années 1950, et continue d'être un sujet de recherche actif.

Plus précisément, à un système différentiel linéaire d'ordre m à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$, où z est une variable complexe, on peut associer un groupe, le groupe de Galois différentiel, qui est un sous groupe algébrique des matrices complexes inversibles $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$, mesurant le nombre de relations algébriques entre les solutions du système. Plus ce groupe est gros, moins il y aura de relations algébriques entre les solutions. De manière analogue à ce qu'il se passe pour la théorie de Galois classique, la composante connexe de l'identité de ce groupe est résoluble, si et seulement si l'équation différentielle possède des solutions « simples à exprimer ». De plus, nous avons une correspondance de Galois pour cette théorie.

Une des forces de la théorie de Galois différentielle est qu'elle donne un sens galoisien à des objets du monde de l'analyse. Dans le cas fuchsien, le théorème de Schlesinger nous dit que la clôture de Zariski du groupe engendré par la monodromie est le groupe de Galois différentiel. Dans le cas irrégulier, la monodromie n'est plus suffisante pour engendrer topologiquement le groupe de Galois différentiel. Les opérateurs de Stokes jouent un rôle important dans cette situation. Non seulement ils permettent de faire la classification méromorphe des systèmes différentiels, mais ils appartiennent de plus à un ensemble de générateurs topologiques du groupe de Galois différentiel. Voir le théorème de densité de Ramis, [vdPS03], Chapitre 8. Plus précisément, étant donnée une série formelle solution d'une équation différentielle, on peut lui appliquer successivement des transformées de Borel et Laplace d'ordres et de directions convenables. On obtient alors des solutions de la même équation, qui sont méromorphes au voisinage de l'origine dans des secteurs de la surface de Riemann du logarithme. Un exemple classique est l'équation d'Euler $z^2y'(z) - y(z) = z$. Si $d \not\equiv 0[2\pi]$, on envoie une solution formelle vers une solution méromorphe de la manière suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!z^{n+1} \mapsto \int_0^{\infty} \frac{e^{\frac{-e^{id}\zeta}{z}}}{1-e^{id}\zeta} e^{id} d\zeta.$$

Les opérateurs de Stokes sont les éléments du groupe de Galois qui comparent différentes solutions sectorielles. Voir [Bal94, vdPS03] pour plus de détails.

Quelques applications. Présentons maintenant deux applications de la théorie de Galois différentielle, dont la première est en lien avec la théorie des nombres. Siegel a introduit les E-fonctions dans les années 1920 dans le but de prouver des théorèmes de transcendance de nombres. Les E-fonctions forment un ensemble de séries entières satisfaisant des équations différentielles d'un certain type. Cet ensemble contient, par exemple, l'exponentielle et les fonctions trigonométriques. Les E-fonctions ont été beaucoup étudiées, notamment grâce au théorème de Siegel-Shidlovsky, et son amélioration par Beukers, voir [Shi89, Beu06], qui généralisent le théorème de Lindemann-Weierstrass. Soit $(f_1, \dots, f_m)^t$ un vecteur de E-fonctions solution d'un système différentiel. Le théorème de Beukers dit que pour $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$, qui n'est pas une singularité de l'équation différentielle, les relations algébriques sur $\overline{\mathbb{Q}}$ entre les nombres $f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$ sont des spécialisations en $z = \alpha$ des relations algébriques sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ entre les fonctions $f_1, \dots, f_m$ elles-mêmes. En particulier, si nous arrivons à prouver que les fonctions $f_1, \dots, f_m$ sont algébriquement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, ce qui dans certains cas peut se faire grâce à la théorie de Galois différentielle, nous obtiendrons que, quel que soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ qui n'est pas une singularité, les nombres $f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$ sont algébriquement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Il est à noter que nous pouvons, grâce à ce théorème, retrouver la transcendance de π et e. Ce type de résultat a été prouvé dans un autre cadre par André, voir [And14].

La deuxième application que nous présentons maintenant est en lien avec les systèmes dynamiques. Plus précisément, la théorie de Galois différentielle permet de donner un critère de non intégrabilité des systèmes hamiltoniens grâce aux théorèmes de Morales-Ramis. À un tel système, nous pouvons associer une équation différentielle linéaire à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$, l'équation variationnelle. Soit G son groupe de Galois, qui est, rappelons-le, un sous groupe algébrique de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$. Nous avons alors le résultat suivant : si le système hamiltonien est intégrable, alors la composante connexe de l'identité de G est commutative. Autrement dit, si la composante connexe de l'identité est non commutative, alors cela signifie que le système hamiltonien initial n'est pas intégrable. Ce critère se traduit aussi sur l'algèbre de Lie : si le système hamiltonien est intégrable, alors l'algèbre de Lie de G est abélienne, c'est-à-dire que son crochet de Lie est identiquement nul. Voir [MRR10] pour un survol du domaine. Cette théorie a eu pour conséquence de populariser considérablement l'algorithme de Kovacic : dans de nombreux cas, l'équation variationnelle que nous obtenons est d'ordre deux et l'algorithme de Kovacic nous permet alors de calculer de manière effective le groupe de Galois différentiel de celle-ci. Il est à noter que dans l'article [7], nous établissons comment tester de manière efficace la généralisation de ce critère : le critère de Morales-Ramis-Simó.

La théorie de Galois différentielle revêt de nombreux autres aspects. Citons-en brièvement deux. Nous renvoyons à [Mal02] pour les travaux de Malgrange sur la théorie de Galois différentielle non linéaire ainsi qu'à quelques applications, [Cas09, CR08, CW18] ; et à [CS07] pour la théorie de Galois des systèmes différentiels paramétrés et à [1, 2], pour son lien avec l'isomonodromie.

1.2 Équations aux différences.

Un nombre automatique est un réel, dont le développement dans au moins une base entière peut être engendré par un automate fini. Du point de vue de l'informatique théorique et plus précisément de la complexité algorithmique, les nombres automatiques

forment donc une classe de nombres calculables particulièrement simples. Tous les rationnels sont des nombres automatiques, puisque leur écriture décimale est soit finie, soit ultimement périodique. Dans les années soixante, Cobham a conjecturé qu'un nombre automatique est soit rationnel, soit transcendant. Cette conjecture a été prouvée bien plus tard dans [AB07]. Elle démontre par exemple que la suite des décimales de la racine carrée de 2, dont on attend un comportement « chaotique », possède au moins une certaine complexité. Au-delà de ce résultat, les relations algébriques entre nombres automatiques demeurent largement incomprises.

Les séries génératrices de telles suites sont solutions d'équations de Mahler :

$$a_0 y + a_1 \phi_p y + \cdots + a_m \phi_p^m y = 0,$$

avec $a_i \in \mathbb{C}(z)$, $\phi_p y(z) := y(z^p), p \in \mathbb{N}^*$. Le résultat de [AB07] justifie l'étude de la transcendance des valeurs de telles fonctions. De manière analogue à ce qu'il se passe pour les E-fonctions, Philippon a prouvé dans [Phi15], par un raffinement d'un théorème de Nishioka, que les relations de dépendances algébriques sur $\overline{\mathbb{Q}}$, entre certaines valeurs de fonctions solutions d'un système d'équations mahlériennes proviennent par spécialisation des relations sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ entre les fonctions elles-mêmes. De manière analogue à ce qu'il se passe dans le cadre différentiel, il est donc naturel de s'intéresser aux relations algébriques entre les solutions d'un système fonctionnel. C'est le but de la théorie de Galois aux différences, qui a pour objet l'étude, d'un point de vue algébrique, des équations fonctionnelles, non nécessairement mahlériennes.

Cette théorie a récemment eu de nombreuses généralisations, voir notamment [HS08, OW15], qui visent en plus à déterminer les relations différentielles algébriques, et certaines relations fonctionnelles, satisfaites par les solutions. Ces théories ont été notamment appliquées dans [11, 17, 19, 21, 25], pour décrire les relations différentielles algébriques satisfaites par les solutions d'équations fonctionelles incluant les équations Mahlériennes, et dans [12, 14, 16, 22, 18, 24], pour décrire la nature des séries génératrices de marches aléatoires dans des domaines du plan.

Nous nous intéressons plus particulièrement à quatre familles d'équations :

— Les équations aux différences finies, qui sont de la forme $Y(z+h) = A(z)Y(z)$, avec $h \in \mathbb{C}^*$;

— Les équations aux q-différences, qui sont de la forme $Y(qz) = A(z)Y(z)$, avec $q \in \mathbb{C}^*$ non racine de l'unité ;

— Les équations de Mahler, qui sont de la forme $Y(z^p) = A(z)Y(z)$, avec $p \in \mathbb{N}^*$;

— Les équations à coefficients elliptiques, qui sont de la forme $Y(z+h') = A(z)Y(z)$, avec $h' \in \mathbb{C}^*$ et où les coefficients de A sont des fonctions elliptiques, i.e. des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ et admettant un réseau Λ de périodes, avec la contrainte que $h'\mathbb{Z} \cap \Lambda = \{0\}$.

Dans les trois premiers cas, A est une matrice inversible à coefficients dans un corps convenable que nous détaillerons plus tard. Ces équations ont été étudiées dans la première moitié du vingtième siècle. Après cinquante ans de quasi abandon, elles ont été redécouvertes dans les années quatre-vingt-dix, notamment grâce à leurs connexions avec de nombreuses autres branches des mathématiques, dont la présente liste ne prétend pas à l'exhaustivité :

— Suites automatiques et équations de Mahler, voir [11, 17, 25, AB07, AB17, Bec94, Dum93, Phi15, SS19] ;

— Calcul formel, voir [7, 13, 20, AB98, CvH06, HS99, Pet92] ;

— Fonctions spéciales, voir notamment [19, 21, 25, GR04] ;

— Combinatoire, voir [12, 14, 16, 22, 18, 24, BBMR15, BCVH$^+$17, BvHK10, BMM10, BMF95, FIM99, KR12, Ras12, Ric09] ;

— Analogues discrets des équations de Painlevé et déformations isomonodromiques, voir [9, 23, Bor04, GNP$^+$94, JS96, KK03, KMN$^+$04, NRGO01, ORS20, PNGR92, RGH91, Sak01] ;

— Groupes quantiques, voir [BG96, FR92a, FR92b] ;

— Invariants quantiques des nœuds, voir [Gar08, GG06, GL05, GL08] ;

— Géométrie non commutative et $\mathbb{C}^*$-algèbres, voir [MvS09, Man04, Pol04a, Pol04b, PS03, SV03] ;

— Théorie des modèles, voir [BHMP17, Cha05, CHS08, CH99] ;

— Équations différentielles p-adiques et théorie des représentations, voir [ADV04, Pul08].

1.3 Plan du mémoire

Par sa nature, la théorie de Galois différentielle est au carrefour de mathématiques variées et se prête particulièrement aux applications. Ainsi, chaque chapitre correspond à un domaine différent : calcul formel, arithmétique, analyse, et combinatoire.

Dans le chapitre 2 nous nous intéresserons au calcul formel. Après une courte introduction à la théorie de Galois différentielle, nous montrerons comment le théorème de réduction de Kolchin-Kovacic permet de calculer de manière effective les groupes de Galois différentiels. Nous montrerons comment cela permet de vérifier en pratique les critères d'intégrabilité de Morales-Ramis-Simó.

Le chapitre 3 s'intéresse à l'arithmétique. Nous verrons comment la théorie de Galois permet de comprendre quelles sont les relations algébriques et différentielles entre les solutions d'une équation aux différences.

Dans le chapitre 4 nous étudierons les équations aux q-différences du point de vue analytique. Nous verrons l'existence d'un q-analogue de la ressommé de Borel-Laplace, de la sixième équation de Painlevé, et comment ces objets dégénèrent vers leurs homologues différentiels lorsque q tend vers 1.

Le chapitre 5 traite de combinatoire. Nous verrons comment la théorie de Galois différentielle permet de déterminer la nature de certaines séries génératrices de marches dans le quart de plan et le trois-quarts de plan.

Le chapitre 6 résume les différents projets de recherche proposés au sein des différents chapitres.

Chapitre 2

Aspects algorithmiques : Calcul de groupes de Galois différentiels

Dans ce chapitre, nous considérons des équations différentielles linéaires. Nous verrons comment la théorie de Galois différentielle leur associe un groupe, qui permet de mesurer les relations algébriques entre les solutions. Nous verrons ensuite comment calculer l'algèbre de Lie de ce groupe.

2.1 Introduction à la théorie de Galois différentielle

Un corps différentiel est un corps $\mathbf{k}$ muni d'un morphisme additif ∂ vérifiant la règle de Leibniz $\partial(ab) = a\partial(b) + \partial(a)b$. Soit $(\mathbf{k}, \partial)$ un corps différentiel de caractéristique nulle et supposons que le corps des constantes $C := \{a \in \mathbf{k} | \partial a = 0\}$ est algébriquement clos. Par exemple on peut prendre $\mathbf{k} = \overline{\mathbb{Q}}(z)$ ou $\mathbb{C}(z)$, que l'on munit de la dérivée classique. Considérons un système différentiel $\partial Y = AY$ où $A \in \mathrm{M}_m\Big(\mathbf{k}\Big)$, c'est-à-dire une matrice carrée de taille m à coefficients dans $\mathbf{k}$. La théorie de Galois différentielle, voir [vdPS03], nous assure alors l'existence et l'unicité d'une extension de Picard-Vessiot, c'est-à-dire une extension de corps de $\mathbf{k}$

— qui est engendrée par $\mathbf{k}$ et les coefficients d'une matrice inversible de solutions de $\partial Y = AY$;

— et dont dont le corps des constantes est C.

Soit $K|\mathbf{k}$ l'extension de Picard-Vessiot de $\partial Y = AY$. On définit alors G, le groupe de Galois différentiel, comme étant le groupe des automorphismes de corps de K, laissant $\mathbf{k}$ invariant, et commutant avec ∂.

Soit $U \in \mathrm{GL}_m(K)$ telle que $\partial U = AU$. On a une représentation de groupe

$$\begin{array}{rccc} \rho_U : & G & \to & \mathrm{GL}_m(C) \\ & \phi & \mapsto & U^{-1}\phi(U). \end{array}$$

La représentation dépend du choix de U, un autre choix de matrice inversible de solutions donnera une représentation qui sera conjuguée. Un fait important est que l'image de G sous ρ_U est un sous groupe algébrique de $\mathrm{GL}_m(C)$. À partir de maintenant, nous identifierons G avec son image sous ρ_U. Le groupe G mesure le nombre de relations algébriques entre les solutions du système, voir [vdPS03]. Plus précisément, la dimension du groupe algébrique G, est égale à la dimension de l'extension de corps $K|\mathbf{k}$.

Exemple. Soit $\mathbf{k} = \mathbb{C}(z)$ que nous munissons de la dérivée usuelle $\partial_z = \partial$. Soit $t \in \mathbb{C}$ que nous considérons comme un paramètre et considérons

$$\partial_z Y = \frac{t}{z} Y.$$

Cette équation admet comme extension de Picard-Vessiot $K = \mathbb{C}(z, z^t)$ où z^t est la fonction multivaluée $e^{t \log(z)}$, et $\log(z)$ est une détermination du logarithme. Ici, G, le groupe de Galois différentiel vu comme un sous groupe algébrique de $\mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$, est soit $\mathbb{C}^*$, si $t \notin \mathbb{Q}$, et $\{e^{\frac{2i\pi\ell}{q}}, \ell = 0, \ldots, q-1\}$ si $t = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, avec $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{pgcd}(p, q) = 1$. On retrouve que la dimension de l'extension de corps $\mathbb{C}(z, z^t)|\mathbb{C}(z)$ est égale à la dimension du groupe algébrique G.

2.2 Aspects algorithmiques : [20].

Jusqu'à récemment, il n'existait pas encore d'algorithme raisonnablement efficace pour calculer le groupe de Galois différentiel d'une équation différentielle en général. L'algorithme de Kovacic, voir [Kov86], permet de calculer le groupe de Galois d'une équation d'ordre deux. Celui de Singer et Ulmer, voir [SU93], permet de traiter celles d'ordre trois. Pour les systèmes d'ordre quelquonque, une procédure basée sur une approche calculatoire du théorème de densité de Ramis a été proposée par [VDH07]. Un autre algorithme pour calculer le groupe de Galois d'un système différentiel d'ordre quelconque est dû à Hrushovski, voir [Hru02]. Cependant, la complexité de cet algorithme est telle, voir [Fen15], qu'il est illusoire de l'utiliser en pratique. Il est à noter que la complexité a récemment été diminuée, voir [AMP18, Sun19], mais nous sommes encore loin d'une implémentation concrète avec ces méthodes.

Soit $\mathfrak{g}$, l'algèbre de Lie de la composante connexe de l'identité de G. Le théorème de réduction de Kolchin-Kovacic nous assure l'existence d'un changement de variables de la forme $Z := PY$, où $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbf{k}_0)$, $\mathbf{k}_0$ étant une extension algébrique de $\mathbf{k}$, tel que nous pouvons transformer le système $\partial Y = AY$ en un système $\partial Z = BZ$ qui est réduit, c'est-à-dire que $B \in \mathfrak{g}(\mathbf{k}_0)$. Plutôt que de calculer directement le groupe de Galois du système $\partial Y = AY$, nous allons réduire le système $\partial Y = AY$, ce qui nous donnera l'algèbre de Lie. De cette dernière, il est alors possible de retrouver la composante connexe de l'identité du groupe de Galois différentiel. Celui-ci étant égal au groupe de Galois différentiel sur l'extension algébrique $\mathbf{k}_0$, nous avons ainsi, du moins théoriquement, la description des relations algébriques entre les solutions du système. L'avantage de cette stratégie est qu'il est possible à terme d'espérer un algorithme implémenté qui possède une complexité raisonnable pour être utilisé dans la pratique. Dans [20], nous décrivons une étape de l'algorithme de réduction du système. Plus précisément, nous montrons comment réduire le système différentiel réductible $\partial Y = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ S & D_2 \end{pmatrix} Y$, à partir du moment où le système $\partial Y = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} Y$ est déjà réduit. Le cas des systèmes irréductibles à été traité dans [BCDVW16], et nous allons voir maintenant que cela donne lieu à un algorithme général de réduction des systèmes différentiels qui se déroule en quatre étapes.

1. Transformer le système différentiel $\partial Y = AY$ en un système triangulaire inférieur par bloc, avec des blocs diagonaux les plus petits possibles. Ce problème revient à factoriser l'opérateur différentiel correspondant au système, et sa résolution est présentée dans [CW04].

2. Soient $D_1, \ldots, D_s$ les blocs diagonaux, soient $D_{i,j}$ les blocs sous la diagonale. Réduire chaque système $\partial Y = D_i Y$. Voir [AMCW13], et [BCDVW16] pour une version plus efficace.
3. Réduire le système diagonal par bloc $\partial Y = \mathrm{Diag}(D_i)Y$. Voir [AMCW13].
4. Pour $1 \leq k \leq s$, on définit $\widetilde{A}_k$ comme étant la matrice triangulaire par blocs obtenue à partir de A après remplacement des blocs $D_{i,j}$ avec $j < k$, par (0). En particulier $\widetilde{A}_1 = A$ et $\widetilde{A}_s = \mathrm{Diag}(D_i)$. Pour k allant de $s-1$ à 1, réduire le système $\partial Y = \widetilde{A}_k Y$. Voir [7] pour un cas particulier, et [20] pour le cas général. À la fin, on a réduit le système $\partial Y = \widetilde{A}_1 Y = AY$.

2.3 Application à l'intégrabilité : [7].

La quatrième étape de l'algorithme présente un intérêt particulier, car elle permet de rendre effectifs les critères d'intégrabilité de Morales-Ramis-Simó. Les critères d'intégrabilité de Morales-Ramis-Simó, voir [MRRS07], généralisent ceux de Morales-Ramis, voir [MRR10]. Soient X_H, un champ de vecteurs hamiltonien analytique complexe et ϕ, une solution non constante de ce champ. Nous pouvons alors définir l'équation variationnelle d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ le long de ϕ, qui est une équation différentielle linéaire notée $\partial Y = A_k Y$. Pour simplifier l'exposition, nous supposerons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A_k est à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$. Soit G_k le groupe de Galois différentiel de $\partial Y = A_k Y$ et $\mathfrak{g}_k$, l'algèbre de Lie correspondante. Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème (Morales-Ramis-Simó)**.** *Si le système hamiltonien est intégrable au voisinage de la solution, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_k$ est abélienne.*

Si l'on ne considère que la première équation variationnelle, on retrouve alors le critère de Morales-Ramis. Nous souhaitons rendre effectif le critère de Morales-Ramis-Simó. Le théorème de réduction de Kolchin-Kovacic dans ce cas nous assure l'existence d'un changement de variables de la forme $Z := P_k Y$, où P_k est une matrice inversible à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$, tel que nous pouvons transformer le système $\partial Y = A_k Y$ en un système $\partial Z = B_k Z$ qui est réduit. L'intérêt de considérer des systèmes réduits est qu'il est alors facile de vérifier si l'algèbre de Lie correspondante est abélienne ou non. Notre stratégie consiste donc à réduire de manière effective les équations variationnelles.

Dans [7], nous supposons que pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, $\partial Y = A_k Y$ est sous forme réduite. Nous expliquons alors comment réduire $\partial Y = A_{k+1} Y$. Cette dernière équation variationnelle est alors de la forme $A_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathrm{Sym}^{k+1}(A_1) & 0 \\ \widetilde{D}_k & A_k \end{pmatrix}$, où $\mathrm{Sym}^{k+1}(A_1)$ est la $(k+1)$-ième puissance symétrique de A_1 et $\widetilde{D}_k$ est une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$, et nous démontrons que $\partial Y = \begin{pmatrix} \mathrm{Sym}^{k+1}(A_1) & 0 \\ 0 & A_k \end{pmatrix} Y$ est déjà sous forme réduite. Nous sommes ainsi dans le cadre de la quatrième étape de notre algorithme que nous allons expliciter sur cet exemple. Nous prouvons alors qu'un changement de variables qui réduit $\partial Y = A_{k+1} Y$ peut être choisi de la forme $P_{k+1} := \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ \widetilde{B}_k & \mathrm{I} \end{pmatrix}$, où I désigne la matrice identité et où les matrices $\widetilde{D}_k$ et $\widetilde{B}_k$ ont la même taille. Nous montrons ensuite comment calculer explicitement et efficacement la matrice $\widetilde{B}_k$. Ce dernier calcul s'effectue essentiellement en résolvant dans $\mathbb{C}(z)$ des équations différentielles linéaires à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$. Ce processus permet de réduire successivement toutes les équations variationnelles, à partir

du moment où la première est réduite. Voir [AMW12], pour la réduction de la première équation variationnelle.

Chapitre 3

Aspects arithmétiques : Transcendance des fonctions spéciales

Le but de la théorie de Galois aux différences est de comprendre les relations algébriques entre les solutions d'un système aux différences linéaire. De manière analogue à ce qu'il se passe en différentiel, nous pouvons associer à un tel système un groupe, qui mesure les relations algébriques entre les solutions. Il a été développé récemment une théorie de Galois visant à comprendre les relations algébriques et différentielles entre les solutions, via l'introduction d'un groupe de Galois aux différences paramétré. Nous allons voir comment cette théorie peut s'appliquer pour obtenir que dans de nombreux cas, il n'existe pas de telles relations.

3.1 Théorie de Galois aux différences

Considérons un corps aux différences $(\mathbf{k}, \sigma)$, c'est-à-dire que σ est un automorphisme de corps de $\mathbf{k}$, et considérons le système aux différences

$$\sigma(Y) = AY, \tag{1}$$

où $A \in \mathrm{GL}_m(\mathbf{k})$. Notons $\mathbb{C}(z^{1/*}) := \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}^*} \mathbb{C}(z^{1/\ell})$ et étant donnée $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau, notons M_Λ le corps des fonctions elliptiques, i.e. les fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ et Λ-périodiques. Les exemples typiques sont

- $(\mathbf{k}, \sigma) = (\mathbb{C}(z), \tau_h)$, avec $\tau_h Y(z) := Y(z+h)$, $h \in \mathbb{C}^*$;
- $(\mathbf{k}, \sigma) = (\mathbb{C}(z), \sigma_q)$, avec $\sigma_q Y(z) := Y(qz)$, $q \in \mathbb{C}^*$, $|q| \neq 1$;
- $(\mathbf{k}, \sigma) = (\mathbb{C}(z^{1/*}), \phi_p)$ avec $\phi_p Y(z) := Y(z^p)$, $p \in \mathbb{N}^*$;
- $(\mathbf{k}, \sigma) = (\mathrm{M}_\Lambda, \tau_{h'})$, avec $\tau_{h'} Y(z) := Y(z+h')$, $h' \in \mathbb{C}^*$ tel que $h'\mathbb{Z} \cap \Lambda = \{0\}$.

La théorie de Galois aux différences usuelle repose sous l'hypothèse que $\mathbf{k}$ est de caractéristique nulle et son corps des constantes $C := \{\alpha \in \mathbf{k} | \sigma a = a\}$ est algébriquement clos. D'après les résultats de [vdPS97], nous obtenons l'existence d'une extension de Picard-Vessiot $R|\mathbf{k}$ associée à l'équation (1), c'est-à-dire que R est un anneau aux différences

- qui est engendré par $\mathbf{k}$ et les coefficients d'une matrice inversible de solutions de (1), ainsi que l'inverse du déterminant ;
- qui n'admet pas d'idéaux non triviaux stables sous σ.

Cette extension de Picard-Vessiot est unique à isomorphisme d'anneaux aux différences près. On définit alors G, le groupe de Galois aux différences comme étant le groupe des automorphismes d'anneaux de l'extension de Picard-Vessiot, laissant $\mathbf{k}$ invariant, et commutant avec σ. Soit $U \in \mathrm{GL}_m(R)$ telle que $\sigma U = AU$. On a une représentation de groupe

$$\begin{array}{rccc} \rho_U : & G & \to & \mathrm{GL}_m(C) \\ & \phi & \mapsto & U^{-1}\phi(U). \end{array}$$

Comme dans le cas différentiel, l'image du groupe de Galois par cette représentation est un sous groupe algébrique de $\mathrm{GL}_m(C)$ que nous noterons toujours G. Il mesure l'indépendance algébrique entre les solutions de (1) et un autre choix de matrice solution U donnera une représentation conjuguée.

L'équivalent aux différences du théorème de Kolchin-Kovacic a été démontré par van der Put et Singer, voir aussi [5]. Il existe un changement de variable $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbf{k}_0)$, $\mathbf{k}_0$ étant un extension algébrique aux différences de $\mathbf{k}$, tel que nous pouvons transformer le système $\sigma Y = AY$ en un système $\sigma Z = BZ$ qui est réduit, c'est-à-dire que $B \in G(\mathbf{k}_0)$. Afin d'éviter l'apparition d'extensions algébriques, nous voulons nous placer dans le cas où il n'existe pas d'extensions algébriques non triviales étendant σ. Ce n'est pas le cas pour les exemples q-différences et elliptiques, puisque $\mathbb{C}(z^{1/2})$ et $M_{2\Lambda}$ sont de telles extensions. Notons $M_\Lambda^\infty := \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \mathrm{M}_{k\Lambda}$. Les cas que nous allons considérer sont donc

(S) $(\mathbf{k}, \sigma) = (\mathbb{C}(z), \tau_h)$, avec $\tau_h Y(z) := Y(z+h)$, $h \in \mathbb{C}^*$;

(Q) $(\mathbf{k}, \sigma) = (\mathbb{C}(z^{1/*}), \sigma_q)$, avec $\sigma_q Y(z) := Y(qz)$, $q \in \mathbb{C}^*$, $|q| \neq 1$;

(M) $(\mathbf{k}, \sigma) = (\mathbb{C}(z^{1/*}), \phi_p)$ avec $\phi_p Y(z) := Y(z^p)$, $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$;

(E) $(\mathbf{k}, \sigma) = (M_\Lambda^\infty, \tau_{h'})$, avec $\tau_{h'} Y(z) := Y(z+h')$, $h' \in \mathbb{C}^*$ tel que $h'\mathbb{Z} \cap \Lambda = \{0\}$.

Cette stratégie de réduction a été appliquée pour calculer le groupe G dans le cas $m = 2$, dans les quatre cas ci dessus, voir [5, Hen97, Hen98, Roq18]. Le calcul de G est alors équivalent à la résolution d'équations de Riccati. Bien que cette méthode puisse théoriquement s'appliquer à l'ordre supérieur, il n'existe pas encore d'algorithmes généraux de calculs de groupes de Galois aux différences, ormis l'algorithme théorique de Feng [Fen18]. Mimer la stratégie différentielle pourrait être une piste pour un jour avoir un algorithme effectif dans le cas général. A l'instar du cas différentiel, il est probable qu'il faudra être capable de résoudre les problèmes suivants :

— Étant donnée une équations aux différences, savoir calculer les solutions dans $\mathbf{k}$.

— Étant donnée une équation aux différences, savoir calculer les solutions y vérifiant $\sigma y = ay$ avec $a \in \mathbf{k}$.

Il est bien évident que la résolution du deuxième problème, qui est lié à la factorisation des opérateurs aux différences, entraîne celle du premier. Ils sont vus comme deux problèmes distincts car la résolution dans $\mathbf{k}$ devrait avoir une meilleur complexité que le deuxième problème. La résolution de ces problèmes pour les cas **(S,Q)** est déjà bien compris. Dans le cas **(M)**, le premier problème a été traité dans [13], tandis que le deuxième est un travail en cours avec les mêmes auteurs.

3.2 Théorie de Galois aux différences paramétrée

La théorie de Galois aux différences permet de comprendre via le groupe de Galois aux différences, les relations algébriques entre les solutions du système. Nous souhaitons comprendre quelles pourraient être les relations différentielles satisfaites par ces dernières.

C'est le but des théories de Galois paramétrées. Le premier pas dans cette direction se trouve dans l'article [CS07] où les auteurs considèrent des équations différentielles dépendant de paramètres. Ils se demandent si les solutions de ces dernières satisfont des équations différentielles par rapport à la variable paramétrique. Par exemple, l'équation différentielle $\partial_z y = ty$ admet e^{tz} comme solution, et cette dernière vérifie $\partial_t e^{tz} = ze^{tz}$. Nous renvoyons à [1, 2] pour respectivement, le calcul du groupe de Galois pour cette théorie lorsque l'équation est d'ordre 2, et l'analogue paramétrique du théorème de densité de Ramis.

Considérons maintenant les équations aux différences. Par exemple, dans le cas **(S)**, l'équation $\tau_1 y = ey$ admet e^z comme solution. Cette fonction vérifie aussi l'équation différentielle $\partial_z y = y$. Dans [HS08], les auteurs adaptent les idées de [CS07] pour construire une théorie de Galois visant à comprendre les relations différentielles satisfaites par les solutions d'équations aux différences. Comme nous le verrons dans la suite, cette théorie connaîtra beaucoup d'applications.

Plus précisément, on se donne un corps aux différences de caractéristique nulle $(\mathbf{k}, \sigma)$ que nous munissons d'une dérivation ∂. Soit R une extension d'anneau de $\mathbf{k}$ telle que σ et ∂ s'étendent sur R. On dira que $f \in R$ est différentiellement algébrique sur $\mathbf{k}$ si il existe $n \in \mathbb{N}$, et un polynôme non nul $P \in \mathbf{k}[X_0, \dots, X_n]$ tel que $P(f, \partial(f), \dots, \partial^n(f)) = 0$. Si l'équation différentielle est de plus linéaire, on dira que f est holonome sur $\mathbf{k}$. Si f n'est pas différentiellement algébrique, on dira qu'elle est différentiellement transcendante. On a les inclusions d'ensembles

$$\mathbf{k} \subset \{\text{algèbriques sur } \mathbf{k}\} \subset \{\text{honolomes sur } \mathbf{k}\} \subset \{\text{différentiellement algébriques sur } \mathbf{k}\}.$$

Des exemples de fonctions appartenant à ces ensembles sont $z^{1/2}$, $\exp(z), \log(z), \wp(z)$. D'après le théorème de Hölder, la fonction $\Gamma(z)$ est différentiellement transcendante sur $\mathbb{C}(z)$. Plus généralement, étant données $f_1, \dots, f_r \in R$, on dira qu'elles sont ∂-algébriquement dépendantes sur $\mathbf{k}$ si il existe $n \in \mathbb{N}$ et un polynôme non nul P à rn variables tel que $P(\partial^i(f_j)) = 0$. Dans le cas contraire, on dira que $f_1, \dots, f_r$ sont ∂-algébriquement indépendantes sur $\mathbf{k}$.

Dans la théorie de Galois aux différences classique, l'hypothèse que le corps des constantes soit algébriquement clos est primordiale. Ici nous souhaiterions pouvoir résoudre les équations différentielles algébriques sur le corps des constantes. Dans les exemples **(S,Q,M,E)** le corps des constantes est $\mathbb{C}$ et la dérivée agit trivialement dessus. Il va donc falloir considérer un corps plus gros, un corps différentiellement clos. Nous renvoyons à [CS07] pour plus de détails, mais dans l'idée, c'est un corps immense qui permet de résoudre tous les systèmes différentiels polynomiaux qui ont une solution. Il existe toujours une clôture différentielle, et dans les cas qui nous intéressent, nous arrivons toujours à envoyer $\mathbf{k}$ sur un corps dont le corps des constantes est différentiellement clos. Supposons donc que nous avons un anneau aux différences $(\mathbf{k}, \sigma)$ muni d'une dérivation, tel que le corps des constantes $C := \{\alpha \in \mathbf{k} | \sigma a = a\}$ soit différentiellement clos. Supposons de plus que ∂ commute avec σ. Nous obtenons l'existence et l'unicité d'une extension de Picard-Vessiot paramétrée $S|\mathbf{k}$ associée à l'équation (1), c'est-à-dire que S est un anneau aux différences

- qui est engendré par $\mathbf{k}$ et les coefficients d'une matrice inversible de solutions de (1), l'inverse du déterminant, ainsi que leurs dérivées ;
- qui n'admet pas d'idéaux non triviaux stables sous σ et ∂.

Cette extension de Picard-Vessiot est unique à isomorphisme près. On définit alors H, le groupe de Galois aux différences paramétré comme étant le groupe des automorphismes d'anneaux de l'extension de Picard-Vessiot, laissant $\mathbf{k}$ invariant, et commutant avec σ et

∂. Soit $U \in \mathrm{GL}_m(S)$ telle que $\sigma U = AU$. On a une représentation de groupe

$$\begin{array}{rccc} \rho_U : & H & \to & \mathrm{GL}_m(C) \\ & \phi & \mapsto & U^{-1}\phi(U). \end{array}$$

L'image du groupe de Galois par cette représentation est un sous groupe différentiel de $\mathrm{GL}_m(C)$, c'est-à-dire que ses coefficients satisfont des équations différentielles algébriques. Tout groupe algébrique est un groupe différentiel, mais la réciproque n'est pas vraie, par exemple

$$\{M \in \mathrm{GL}_m(C) | \partial M = 0\}$$

est un groupe différentiel mais pas un groupe algébrique. Nous identifierons maintenant le groupe de Galois aux différences paramétré avec son image dans $\mathrm{GL}_m(C)$ que nous noterons toujours H. Celle-ci dépendant de U, elle est définie à conjugaison près.

Exemple. Plaçons-nous dans le cas **(S)**. Le corps $\mathbf{k}$ est de la forme $C(z)$, où C est un corps différentiellement clos contenant $\mathbb{C}$ où τ_1 agit trivialement. On considère l'équation $\tau_1 y = ey$ qui admet e^z comme solution. De manière plus abstraite, considérons une extension de Picard-Vessiot paramétrée $S|C(z)$. Elle est engendrée par $y^{\pm 1}$, où y est une solution, ainsi que leurs dérivées. Puisque τ_1 commute avec la dérivation, on trouve $\tau_1\left(\frac{\partial y}{y}\right) = \frac{\partial \tau_1(y)}{\tau_1(y)} = \frac{\partial(ey)}{ey} = \frac{\partial y}{y}$. On peut prouver que le corps des constantes d'une extension de Picard-Vessiot paramétrée est le même que celui de $C(z)$. Cela montre l'existence de $c_0 \in C^*$ tel que $\partial y = c_0 y$. Puisque C est différentiellement clos, il existe un élément abstrait $\widetilde{c} \in C^*$ tel que $\tau_1 \widetilde{c} = \widetilde{c}$ et $\partial \widetilde{c} = c_0 \widetilde{c}$. Quitte à remplacer y par $y/\widetilde{c} \in S$ on peut supposer $c_0 = 1$. Soit ψ appartenant au groupe de Galois. Puisque ψ commute avec τ_1 et laisse $C(z)$ invariant, $\psi(y)$ est une autre solution et il existe donc $c \in C^*$ tel que $\psi(y) = yc$. Appliquons maintenant ∂ des deux côtés. On trouve

$$yc = \psi(y) = \psi\partial(y) = \partial\psi(y) = \partial(yc) = \partial(y)c + y\partial(c) = yc + y\partial(c).$$

On obtient donc $\partial(c) = 0$. Ainsi,

$$H \subset \{c \in C^* | \partial(c) = 0\}.$$

En réalité, on peut prouver que l'autre inclusion est vérifiée, c'est donc une égalité.

Le groupe H mesure l'indépendance algébrique entre les solutions de (1) et leurs dérivées. Plus ce groupe est gros, moins il y a de relations. Puisque le corps des constantes est différentiellement clos, il est en particulier algébriquement clos et nous pouvons aussi définir G le groupe de Galois aux différences qui est rappelons-le un sous groupe algébrique de $\mathrm{GL}_m(C)$. Par construction, H est un sous groupe de G, mais c'est même un peu mieux : H est dense pour la topologie de Zariski dans G. En pratique cela signifie qu'une fois qu'on a calculé H, il suffit de retirer toutes les équations différentielles qui le définissent pour retrouver G. Par exemple, si $H = \{M \in \mathrm{GL}_m(C) | \partial M = 0, \det(M) = 1\}$, alors $G = \mathrm{SL}_m(C)$.

3.3 Transcendance différentielle des fonctions spéciales : [11, 17, 19, 21]

Par fonction spéciale on entendra une solution d'une équation aux différences. Nous voulons prouver qu'il y a assez peu de fonctions spéciales qui sont différentiellement algébriques. Le cadre que nous nous donnons est le suivant. On se donne F un corps de

caractéristique nulle, muni d'un automorphisme σ et d'une dérivation ∂ qui ne commutent plus nécessairement. On se donne $\mathbf{k}$ un sous corps tel que $\sigma(\mathbf{k}) \subset \mathbf{k}$ et $\partial(\mathbf{k}) \subset \mathbf{k}$. Considérons $f \in F$, qui satisfait une σ-équation linéaire à coefficients dans $\mathbf{k}$. Nous voulons donner des conditions sur les coefficients de l'équation qui garantiraient le fait que f soit différentiellement transcendante. Bien entendu, cela dépend du corps F que nous considérons. Par exemple, $\exp, \log$ sont solutions d'équations de type **(S)** et **(M)** mais sont holonomes. Le choix de F dans les quatre cas est résumé dans le tableau suivant. Ici, $\mathbb{C}((x^{1/*}))$ désigne le corps des séries de Puiseux, et $M(\mathbb{C})$ le corps des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$.

Cas	F	$\mathbf{k}$	C	σ	∂
(S)	$\mathbb{C}((z^{-1}))$	$\mathbb{C}(z)$	$\mathbb{C}$	τ_h	∂_z
(Q)	$\mathbb{C}((z^{1/*}))$	$\mathbb{C}(z^{1/*})$	$\mathbb{C}$	σ_q	∂_z
(M)	$\mathbb{C}((z^{1/*}))$	$\mathbb{C}(z^{1/*})$	$\mathbb{C}$	ϕ_p	∂_z
(E)	$M(\mathbb{C})$	M_Λ^∞	$\mathbb{C}$	$\tau_{h'}$	∂_z

Ici, h, q, p et h' satisfont les mêmes contraintes que dans les cas **(S,Q,M,E)**, à savoir $h \in \mathbb{C}^*$, $q \in \mathbb{C}^*$ tel que $|q| \neq 1$, $p \geq 2$, et $h' \in \mathbb{C}^*$ tel que $h'\mathbb{Z} \cap \Lambda = \{0\}$.

Nous avons choisi des corps aux différences $(\mathbf{k}, \sigma)$ n'admettant pas d'extensions finies non triviales. Cela entraîne que les éléments algébriques solutions d'équations aux différences sont dans $\mathbf{k}$. Le résultat suivant nous dit qu'il en va de même pour les holonomes, sauf pour le cas **(E)**, qui est bien plus délicat à traiter, voir l'article récent de de Shalit [dS20].

Théorème. *Considérons les cas **(S,Q,M)**. Soit $f \in F$ solution d'une σ-équation linéaire à coefficients dans $\mathbf{k}$. Alors soit $f \in \mathbf{k}$, soit f est non holonome sur $\mathbf{k}$.*

Les cas **(Q,M)** ont été traités indépendamment dans [Ram92, Béz94] et les trois cas ont été traités dans un cadre unifié dans [SS19]. L'idée de ces preuves est que les singularités des solutions d'une équation aux différences sont suffisamment différentes de celles d'une équation différentielle pour obtenir qu'une fonction solution d'une équation des deux types doit être dans $\mathbf{k}$. Ce genre de raisonnement n'a aucune chance d'aboutir pour prouver la transcendance différentielle, puisque les singularités d'une fonction différentiellement algébrique peuvent être de nature très variées.

Nous avons vu que dans les cas **(S,Q,M)**, il existe peu de fonctions spéciales qui sont holonomes. Les résultats suivants vont dans le même sens mais où l'holonomie est remplacée par la transcendance algébrique. Ce genre de résultat pour les équations d'ordre 1 est relativement ancien.

Théorème. *Considérons les cas **(S,Q,M)**. Soit $f \in F$ solution d'une équation aux différences de la forme $\sigma y = ay + b$ avec $a, b \in \mathbf{k}$. Alors soit $f \in \mathbf{k}$, soit f est différentiellement transcendante.*

Les cas **(Q,M)** ont été traités indépendamment dans [Nis84, Ran92]. La théorie de Galois de [HS08] donne une approche plus unifiée pour traiter les différents cas, dont le cas **(S)** qui s'en déduit facilement.

Nous voulons maintenant utiliser la théorie de [HS08] pour obtenir ce genre de résultats pour des équations d'ordre supérieur. Rappelons que le groupe de Galois est un groupe différentiel. De plus de manière analogue à ce qu'il se passe en géométrie algébrique, il y a relativement peu de tels groupes, ce qui restreint fortement les relations différentielles potentielles satisfaites par les solutions. Pour prouver la transcendance différentielle d'une

solution, il suffit donc de prouver qu'un certain type de relations n'apparaît pas. L'idée est alors de traduire ces relations par des conditions sur les coefficients. Ainsi, même si les résultats de [HS08] apparaissent de manière centrale dans les preuves des théorèmes suivants, nous pouvons énoncer des critères clé en main, qui sont applicables sans connaître la théorie de Galois de [HS08]. Pour les équations d'ordre deux, nous obtenons le résultat suivant.

Théorème ([21]). *Considérons les cas **(S,E)**. Soit $f \in F$ solution d'une équation aux différences de la forme $\sigma^2 y = a\sigma y + by$ avec $a, b \in \mathbf{k}$, $b \neq 0$. Supposons que*

- *il n'y a pas de $u \in \mathbf{k}$ tel que $u\sigma u + au + b = 0$.*
- *il n'y a pas de $g \in \mathbf{k}$, et de $\mathcal{L}$, opérateur différentiel linéaire à coefficients dans $\mathbb{C}$, tels que*

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial b}{b}\right) = \sigma(g) - g.$$

Alors soit $f = 0$, soit f est différentiellement transcendante.

Il est à noter que le théorème ci-dessus s'énonce aussi dans le cadre **(Q,M)**, il faut remplacer ∂ par une dérivée commutant avec σ. Ce résultat a pu notamment être utilisé pour démontrer que dans le cadre **(E)**, de larges familles de fonctions hypergéométriques elliptiques sont différentiellement transcendantes.

Intéressons-nous maintenant aux équations d'ordre quelconque en utilisant la théorie de Galois. Un premier pas dans cette direction est le résultat que nous allons énoncer maintenant.

Dans ce qui suit nous ferons la convention suivante. A un σ-équation à coefficients dans $\mathbf{k}$

$$\sigma^m(y) + a_{m-1}\sigma^{m-1}(y) + \cdots + a_0 y = 0\,, \tag{2}$$

avec $a_0, ..., a_{m-1} \in \mathbf{k}$, $a_0 \neq 0$, on peut associer un système $\sigma Y = AY$ avec

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{m-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{k})\,.$$

On appellera groupe de Galois aux différences de (2), le groupe de Galois aux différences de $\sigma Y = AY$.

Théorème ([11]). *Considérons les cas **(M)**. Supposons qu'il existe $f \in F$ solution d'une σ-équation d'ordre $m \geq 2$. Si le groupe de Galois aux différences contient $\mathrm{SL}_m(\mathbb{C})$, alors soit $f = 0$, soit f est différentiellement transcendante.*

Il est à noter que le résultat est à première vue déroutant, car il dit en substance que si f satisfait peu de relations algébriques, alors f ne satisfait pas de relations différentielles algébriques supplémentaires. Rappelons que les séries génératrices de suites p-automatiques satisfont des équations Mahlériennes. Comme expliqué dans l'introduction, une question naturelle en application avec les nombres automatiques, est de déterminer si la série est transcendante. Plus généralement, l'étude des relations différentielles et algébriques satisfaites par les séries génératrices de suites p-automatiques a donné naissance à une littérature abondante. La plupart des preuves de transcendance

marchaient pour une seule équation, et ce genre de théorème est une avancée puisqu'il donne un critère général. Il est à noter que lorsque $m = 2$, nous avons un algorithme pour tester si le groupe de Galois aux différences contient ou non $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, voir l'article de Roques [Roq18]. En particulier, nous pouvons déduire la transcendance différentielle des suites de Baum-Sweet et Rudin-Shapiro. En revanche nous ne disposons pas d'un algorithme général pour les équations d'ordre quelconque, ce qui constitue une vraie obstruction pour appliquer ce théorème à l'ordre supérieur. Nous allons voir plus loin que nous allons contourner ce problème.

Notre preuve suit le schéma suivant. Supposons que $0 \neq f$ satisfait une équation différentielle algébrique à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$. D'après un résultat de [HS08] basé sur la classification des groupes différentiels, nous obtenons que f satisfait en plus de l'équation mahlérienne, une équation différentielle linéaire. Nous appliquons alors le théorème sur les fonctions holonomes pour montrer que $f \in \mathbf{k}$. Ceci nous fournit une contradiction, puisque cela impliquerait que le groupe de Galois aux différences fixerait la solution f, ce qui l'empêcherait de contenir $\mathrm{SL}_m(\mathbb{C})$.

De manière analogue à [11], nous avons prouvé dans [19], un certain nombre de résultats de transcendance différentielle dans le cadre **(Q)**, en appliquant les théories de Galois de [HS08]. Nous avons affaibli l'hypothèse sur le groupe de Galois aux différences pour obtenir :

Théorème ([19])**.** *Considérons les cas **(Q)**. Supposons qu'il existe $0 \neq f \in F$ solution d'une σ-équation d'ordre $m \geq 2$.*

- *Si le groupe de Galois aux différences contient $\mathrm{SL}_m(\mathbb{C})$ (lorsque $m \geq 2$) , ou $\mathrm{SP}_m(\mathbb{C})$ (lorsque $m \geq 2$ est pair) , alors $f, \sigma_q(f), \dots, \sigma_q^{m-1}(f)$ sont différentiellement algébriquement indépendantes sur $\mathbf{k}$.*
- *Si le groupe de Galois aux différences contient $\mathrm{SO}_m(\mathbb{C})$ (lorsque $m \geq 3$), alors $f, \sigma_q(f), \dots, \sigma_q^{m-2}(f)$ sont différentiellement algébriquement indépendantes sur $\mathbf{k}$.*

En particulier, f est différentiellement transcendante sur $\mathbf{k}$.

Comme application, nous obtenons un résultat de transcendance sur les séries hypergéométriques basiques. Lorsque $a \in \mathbb{C}^*$, définissons le symbole de q-Pochammer

$$(a;q)_n := \prod_{i=0}^{n-1} (1 - aq^i)\,.$$

Soient $a, b, q \in \mathbb{C}^*$ avec $|q| < 1$ et $c \in \mathbb{C}^* \setminus q^{-\mathbb{N}}$. La série hypergéométrique basique est définie par

$${}_2\phi_2\left(\begin{matrix} a, b \\ q, c \end{matrix} \middle| q, z \right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n (b;q)_n}{(q;q)_n (c;q)_n} z^n.$$

Elle est solution de

$$\sigma_q^2 {}_2\phi_2\left(\begin{matrix} a, b \\ q, c \end{matrix} \middle| q, z \right) - \frac{(a+b)z - (1 + c/q)}{abz - c/q} \sigma_q {}_2\phi_2\left(\begin{matrix} a, b \\ q, c \end{matrix} \middle| q, z \right) + \frac{z-1}{abz - c/q} {}_2\phi_2\left(\begin{matrix} a, b \\ q, c \end{matrix} \middle| q, z \right) = 0.$$

Il est à noter que puisque q, a, b, c sont des complexes fixés, les coefficients de cette équation sont vus comme des éléments de $\mathbb{C}(z)$, et non comme des éléments de $\mathbb{C}(z, q, a, b, c)$. Nous sommes donc dans le cas **(Q)**. Plus généralement, on peut définir les séries hypergéométriques généralisées. Soient $m \geq s$ des entiers non nuls, avec

$m \geq 2$, et soient $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_s \in \mathbb{C}^*$, $b_j \notin q^{-\mathbb{N}}$, $b_1 := q$, nous définissons la série hypergéométrique généralisée :

$$ {}_m\phi_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_m \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix} \middle| q, z \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1;q)_n \cdots (a_m;q)_n}{(b_1;q)_n \cdots (b_s;q)_n} z^n \, . $$

Dans [Roq11, Roq12], Roques montre sous des hypothèses assez générales, que lorsque $m = s$, les groupes de Galois des séries hypergéométriques contiennent soit $\mathrm{SL}_m(\mathbb{C})$, soit $\mathrm{SP}_m(\mathbb{C})$ (lorsque $m \geq 2$ est pair), ou $\mathrm{SO}_m(\mathbb{C})$ (lorsque $m \geq 3$). Lorsque $m > s$, d'autres conditions sont données. Par exemple, nous obtenons l'énoncé suivant :

Corollaire ([19]). *Soient $A_1 := \{aq^{\mathbb{Z}}, bq^{\mathbb{Z}}\}$ et $A_2 := \{q^{\mathbb{Z}}, cq^{\mathbb{Z}}\}$. Supposons en outre que $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ et qu'il existe $i \in \{1, 2\}$ tel que $A_i \neq q^{1/2} A_i$. Alors ${}_2\phi_2 \left(\begin{matrix} a, b \\ q, c \end{matrix} \middle| q, z \right)$ ne satisfait pas d'équations différentielles algébriques à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$.*

Il est à noter que dans [19], nous prouvons un résultat analogue pour les séries hypergéométriques généralisées.

Une approche plus systématique a été effectuée dans [AS17], qui traite à la fois des cas **(S,Q,M)**.

La principale faiblesse de tous ces résultats reste l'hypothèse sur le groupe de Galois aux différences. On a vu qu'on savait traiter les équations de petits ordres, ainsi que le cas où le groupe de Galois aux différence est gros. Il reste en un certain sens les cas où le groupe de Galois aux différences est de taille moyenne. Dans [17], nous prouvons que ces groupes de taille moyenne correspondent en réalité à la situation où la représentation du groupe de Galois aux différences est réductible, ce qui revient à dire que le système aux différences est équivalent à un système triangulaire par bloc. Ce dernier étant un système correspondant à une équation d'ordre inférieur, cela donne l'idée de procéder par récurrence sur l'ordre de l'équation. Comme les équations d'ordre 1 ont déjà été traitées, nous obtenons :

Théorème ([17]). *Considérons les cas **(S,Q,M)**. Supposons qu'il existe $f \in F$ solution d'une σ-équation d'ordre m. Alors soit $f \in \mathbf{k}$, soit f est différentiellement transcendante.*

On obtient ainsi le corollaire suivant, qui généralise [11, 19] :

Corollaire ([17]). ***(Q)*** *Une série hypergéométrique généralisée est soit une fraction rationnelle, soit une fonction différentiellement transcendante.*

(M) *Une série solution d'une équation de Mahler linéaire est soit une fraction rationnelle, soit une fonction différentiellement transcendante.*

Dans les cas **(S,Q,M)**, cela clos la question de la transcendance différentielle d'une fonction spéciale. Nous avons laissé de côté deux cadres raisonnables qu'il serait intéressant de savoir traiter un jour.

(**$\mathbf{S_0}$**) Les auteurs de [SS19] ont prouvé que si une fonction méromorphe f sur $\mathbb{C}$ était solution d'une équation différentielle linéaire et d'une τ_h-équation linéaire à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$, alors f est une $\mathbb{C}(z)$ combinaison linéaires de $e^{\lambda_i z}$, avec $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Une conjecture serait de dire que si f est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et solution d'une τ_h-équation linéaire à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$, et est differentiellement algébrique, alors $f \in \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}} C_h(z)(e^{\lambda z})$, où $C_h \subset M(\mathbb{C})$ désigne le corps des fonctions h périodiques. Un résultat partiel à été énoncé dans ce sens dans [17].

(E) Que peut-on dire dans le cadre elliptique ?

Une question naturelle serait maintenant de se demander si on peut obtenir des critères d'indépendance différentielle entre différentes fonctions solutions de différentes équations. Plus précisément, étant donnés r équations fonctionnelles, et $f_1, \dots, f_r$ des solutions de ces équations, peut-on prouver que $f_1, \dots, f_r$ sont algébriquement indépendantes, voir mieux différentiellement algébriquement indépendantes ? Par exemple, nous avons prouvé dans [11], que les séries de Baum-Sweet et Rudin-Shapiro sont différentiellement algébriquement indépendantes. Dans [RS20] il est considéré le cas où deux séries sont solutions d'équations différentielles et des conditions sont données pour prouver l'indépendance algébrique. Ce problème, qui sera une piste de recherches futures, n'admettra a priori pas de réponse aussi générale que [17], mais il est raisonnable de penser que des résultats partiels pourront être obtenus. Nous présentons maintenant dans le paragraphe suivant un premier pas dans cette direction.

3.4 Indépendance algébrique de fonctions spéciales : [25]

Regardons la situation où un corps F est muni de deux automorphismes σ, ψ qui commutent. Soit $\mathbf{k}$ un sous corps tel que $\sigma(\mathbf{k}) \subset \mathbf{k}$ et $\psi(\mathbf{k}) \subset \mathbf{k}$.

Dans ce qui suit, on dira que deux nombres complexes a, b sont multiplicativement indépendants, si $a^n b^m = 1$ avec $m, n \in \mathbb{Z}$ entraine $m = n = 0$. Les cas que nous allons considérer sont :

(2S) $(F, \mathbf{k}, \sigma, \psi) = (\mathbb{C}((z^{-1})), \mathbb{C}(z), \tau_{h_1}, \tau_{h_2})$, avec $h_1/h_2 \notin \mathbb{Q}^*$;

(2Q) $(F, \mathbf{k}, \sigma, \psi) = (\mathbb{C}((z^{1/*})), \mathbb{C}(z^{1/*}), \sigma_{q_1}, \sigma_{q_2})$, avec $q_1, q_2 \in \mathbb{C}^*$, $|q_1|, |q_2| \neq 1$, et q_1, q_2 sont multiplicativement indépendants.

(2M) $(F, \mathbf{k}, \sigma) = (\mathbb{C}((z^{1/*})), \mathbb{C}(z^{1/*}), \phi_{p_1}, \phi_{p_2})$ avec $p_1, p_2 \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ multiplicativement indépendants.

Nous prouvons :

Théorème ([25]). *Considérons les cas **(2S,2Q,2M)**. Soient $f, g \in F \setminus \mathbf{k}$ tels que f soit solution d'une σ-équation linéaire à coefficients dans $\mathbf{k}$ et g soit solution d'une ψ-équation linéaire à coefficients dans $\mathbf{k}$. Alors, f et g sont algébriquement indépendantes sur $\mathbf{k}$.*

L'enoncé dans le cas **(2M)**, avait été conjecturé par Loxton et van der Poorten [LvdP78]. Dans le cas **(2Q)** on trouve que si q_1 et q_2 vérifient les conditions du cadre **(2Q)**, alors une série q_1 hypergéométrique généralisée sera algébriquement indépendante d'une série q_2 hypergéométrique généralisée, sauf si l'une d'entre elle est une fraction rationnelle.

Détaillons maintenant la stratégie. Si f et g sont algébriquement dépendantes, un argument d'algèbre aux différences nous assure que f est solution d'une ψ-équation algébrique, i.e il existe $n \in \mathbb{N}$ et $0 \neq P \in \mathbf{k}[X_0, \dots, X_n]$ tel que $P(f, \dots, \psi^n(f)) = 0$, et que g est solution d'une σ-équation algébrique. Alors que la théorie de [HS08] étudiait les relations différentielles satisfaites par une fonction speciale, c'est celle de [OW15] qui va nous permettre de conclure dans ce cas là. Plus précisement, les auteurs de [OW15] associent un groupe de Galois à une σ-équation aux différences donnée, qui encode les relations ψ-algébriques entre les solutions de l'équation. Ce dernier peut être vu comme un sous groupe de matrices dont les coefficients satisfont des ψ-équations polynomiales. Malheureusement, l'approche de [OW15] est plus délicate que pour [HS08], mais nous parvenons néanmoins à adapter la stratégie déployée dans [17] pour montrer :

Proposition ([25]). *Considérons les cas **(2S,2Q,2M)**. Soit $f \in F$ telle que f soit solution d'une σ-équation à coefficients dans $\mathbf{k}$. Alors soit $f \in \mathbf{k}$, soit f ne satisfait pas de ψ-équations algébriques à coefficients dans $\mathbf{k}$.*

Il est à noter que des résultats de ce type avaient été obtenus dans [19] dans le cas **(2Q)**. Plus précisément nous prouvons le fait suivant.

Proposition ([19]). *Plaçons-nous dans le cas **(2Q)**. Soit $0 \neq f \in F$ telle que f soit solution d'une σ-équation à coefficients dans $\mathbf{k}$ d'ordre $m \geq 2$ et soit G le groupe de Galois aux différences, que nous identifions à un sous groupe algébrique de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$.*

- *Si G contient $\mathrm{SL}_m(\mathbb{C})$ (lorsque $m \geq 2$), ou $\mathrm{SP}_m(\mathbb{C})$ (lorsque $m \geq 2$ est pair). Alors f ne satisfait pas de ψ-équations algébriques à coefficients dans $\mathbf{k}$. Si nous supposons de plus qu'il existe $n \in \mathbb{Q}$, $g \in \mathbf{k}$ et $c \in \mathbb{C}$ tels que $a_0 = cz^n \frac{\sigma(g)}{g}$, alors $f, \sigma(f), \ldots, \sigma^{m-1}(f)$ sont ψ-algébriquement indépendantes.*
- *Si G contient $\mathrm{SO}_m(\mathbb{C})$ (lorsque $m \geq 3$), alors f ne satisfait pas de ψ-équations algébriques à coefficients dans $\mathbf{k}$. Si nous supposons de plus qu'il existe $n \in \mathbb{Q}$, $g \in \mathbf{k}$ et $c \in \mathbb{C}$ tels que $a_0 = cz^n \frac{\sigma(g)}{g}$, alors $f, \sigma(f), \ldots, \sigma^{m-2}(f)$ sont ψ-algébriquement indépendantes.*

Ce résultat a des conditions sur le groupe de Galois plus strictes que [25], mais permet de conclure sur la ψ-indépendance entre les différents $\sigma^i(f)$ lorsque a_0 est sous une certaine forme et que G est suffisamment gros.

Chapitre 4

Aspects analytiques : Équations aux q-différences

Ce chapitre est intégralement consacré aux équations aux q-différences, c'est-à-dire le cas **(Q)**, vu du côté analytique. Nous verrons d'abord le q-analogue du processus de ressomation de Borel-Laplace. Toute équation différentielle peut être discrétisée en une équation aux q-différences via la limite de $d_q := f \mapsto \frac{f(qz)-f(z)}{(q-1)z}$ lorsque q tend vers 1. Une question naturelle est de savoir si des solutions d'une équation aux q-différences dépendantes de q convergent vers des solutions de systèmes différentiels lorsque q tend vers 1. Ce phénomène est appelé confluence et a été étudié dans le cas fuchsien par Sauloy dans [Sau00]. Nous nous intéresserons ensuite à la q-équation de Painlevé VI, et comment elle dégénère vers son homologue différentiel lorsque q tend vers 1. Ce phénomène de confluence sera ensuite étudié en détail pour la convergence des solutions de systèmes aux q-différences linéaires, non nécessairement fuchsiens, vers des solutions de systèmes différentiels linéaires.

4.1 Sommation q Borel-Laplace : [4, 8].

Soit $q > 1$ et considérons l'opérateur aux q-différences σ_q qui envoie $y(z)$ sur $y(qz)$. Les systèmes aux q-différences fuchsiens ont été étudiés par Sauloy dans [Sau00] et nous y reviendrons plus loin. Dans [RSZ13], Ramis, Sauloy et Zhang étudient les systèmes aux q-différences, non nécessairement fuchsiens, dont les pentes du polygone de Newton sont entières, et font la classification méromorphe. Comme dans le cas différentiel, des séries formelles divergentes apparaissent comme solutions et nous pouvons leur associer des solutions méromorphes. La principale différence est qu'ici ces dernières sont méromorphes sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^*$, et non au voisinage de 0 dans un secteur de la surface de Riemann du logarithme.

Bien qu'il existe de nombreux q-analogues des transformées de Borel et Laplace, voir par exemple [DVZ09, MZ00], nous ne savions pas en général comment définir un processus de q-sommation de Borel-Laplace qui à n'importe quelle série solution d'une équation aux q-différences à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$, associe une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}^*$. Nous résolvons ce problème dans [4] grâce à des q-analogues des transformées de Borel et Laplace en $z = 0$. En particulier, pour tout système aux q-différences à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$, nous obtenons une solution fondamentale dont les coefficients sont méromorphes sur $\mathbb{C}^*$. Notons que Pragraam avait prouvé par un argument purement théorique l'existence de telles solutions, mais que l'on ne savait pas comment les construire. Ces résultats ont été appliqués par Malek dans [Mal15] et plus récemment dans [15]. Il est à noter que dans le

cas où le polygone de Newton du système aux q-différences a deux pentes, toutes les deux entières, nous retrouvons les solutions de [RSZ13].

Dans [Bug12], il est considéré des systèmes aux q-différences, dont le polygone de Newton à deux pentes, non nécessairement entières. Bugeaud fait alors un travail analogue à [RSZ13], et construit des solutions méromorphes sur $\mathbb{C}^*$. Dans [8], nous expliquons comment calculer des solutions similaires grâce à des q-analogues des transformées de Borel et Laplace.

Dans le cas différentiel, l'application qui à une série formelle associe sa sommation de Borel-Laplace induit un morphisme de corps commutant avec la dérivation et laissant le corps des germes de fonctions méromorphes en 0 invariant. Ces propriétés sont cruciales pour montrer que les opérateurs de Stokes, qui interviennent dans le théorème de densité de Ramis, appartiennent au groupe de Galois différentiel. Jusqu'ici, aucun des processus de q Borel-Laplace introduits ne jouit de telles propriétés algébriques. Avec Changgui Zhang, nous cherchons, dans un travail en cours, à définir une telle application, qui serait un morphisme d'anneau commutant avec σ_q et laissant l'anneau des germes de fonctions analytiques en 0 invariant.

4.2 Confluence des équations aux q-différences, cas fuchsien.

L'étude de la confluence des systèmes fuchsiens a été étudiée par Sauloy, voir [Sau00]. Donnons-nous une équation différentielle fuchsienne Δ et une famille d'équations aux q-différences fuchsienne Δ_q qui discrétise Δ. Sauloy utilise un q-analogue de l'algorithme de Frobenius et prouve, sous des hypothèses raisonnables, la convergence de solutions de Δ_q vers les solutions de Δ obtenues avec l'algorithme de Frobenius dans sa version différentielle. Plus précisément, supposons que $q > 1$ est un réel et voyons Δ_q et Δ comme des systèmes (ici d_q agit sur la variable en z) $zd_qY = A(z,q)Y$ et $z\partial_z Y = \widetilde{A}(z)Y$ avec $A(0,q), \widetilde{A}(0)$ inversibles. Une matrice inversible de solutions de $zd_qY = A(z,q)Y$ est donnée par $U_0(z,q) = H(z,q)\Lambda_{A(0,q)}$, où H est une matrice dont à q fixé, les coefficients sont des germes de fonctions méromorphes en 0, et $\Lambda_{A(0,q)}$ est une matrice inversible dont les coefficients sont méromorphes sur $\mathbb{C}^*$ et qui vérifie $\sigma_q\Lambda_{A(0,q)} = A(0,q)\Lambda_{A(0,q)} = \Lambda_{A(0,q)}A(0,q)$. L'algorithme de Frobenius donne une matrice inversible de solutions de $z\partial_z Y = \widetilde{A}(z)Y$ de la forme $\widetilde{U}_0(z) = \widetilde{H}(z)z^{\widetilde{A}(0)}$, où les coefficients de $\widetilde{H}$ sont des germes de fonctions méromorphes en 0. Il prouve alors la convergence uniforme sur les compacts de $U_0(z,q)$ vers $\widetilde{U}_0(z)$ lorsque q tend vers 1 par valeurs réelles. Il fait les mêmes hypothèses à l'infini et obtient la convergence d'une matrice de Birkhoff $U_\infty^{-1}(z,q)U_0(z,q)$ vers une matrice localement constante P. Il prouve enfin que les matrices de monodromies des singularités du système différentiel peuvent s'exprimer en fonction des valeurs de P sur les différentes composantes connexes de son domaine de définition.

4.3 Déformations isomonodromiques et confluence : [9, 23].

Commençons par un rapide résumé les travaux de Jimbo et Sakai, voir [JS96]. Considérons (ici σ_q agit sur la variable en z)

$$\sigma_q^{-1}Y(z,t) = (z-1)(z-t)(\mathrm{I} + (q^{-1}-1)z\mathcal{A}(z,t))Y(z,t) = A(z,t)Y(z,t), \qquad (3)$$

où $\mathcal{A}(z,t) := \frac{\mathcal{A}_0}{z} + \frac{\mathcal{A}_1}{z-1} + \frac{\mathcal{A}_t}{z-t}$, $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_t$ sont des matrices carrées complexes de taille 2, t est un paramètre complexe appartenant à un ouvert connexe stable par multiplication par q, et I est la matrice identité. Sous des hypothèses convenables, Jimbo et Sakai construisent

des solutions en zéro et en l'infini de (3), U_0 et U_∞, et considèrent une matrice de connexion de Birkhoff $P(z,t) := U_\infty^{-1}(z,t)U_0(z,t)$. Ils donnent une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit pseudo constante, c'est-à-dire que $P(z,t) = P(z,qt)$, pour toutes les valeurs du paramètre t. Cette condition est l'existence d'une matrice inversible $B(z,t)$ à coefficients rationnels en z telle que

$$U_0(z,qt) = B(z,t)U_0(z,t), \text{ et } U_\infty(z,qt) = B(z,t)U_\infty(z,t).$$

Il est à noter que (3) est alors un système intégrable ce qui donne une relation de commutation

$$A(z,qt)B(z,t) = B(qz,t)A(z,t),$$

qui permet à Jimbo et Sakai d'obtenir un q-analogue de la sixième équation de Painlevé, qui comme son homologue différentielle va dépendre d'un certain nombre de paramètres. Ils prouvent ensuite, que si l'on fait un choix convenable de ces paramètres, le q-analogue de la sixième équation de Painlevé tend vers la sixième équation de Painlevé.

Dans [9], nous voulons étudier le comportement de la matrice de connexion de Birkhoff associée à (3) lorsque q tend vers 1, en utilisant les résultats de [Sau00]. Nous commençons par étudier les déformations isomonodromiques pour les systèmes aux q-différences fuchsiens satisfaisant des hypothèses convenables. Contrairement aux auteurs de [JS96], pour résoudre les équations aux q-différences, nous utilisons des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}^*$, plutôt que des fonctions multivaluées. Cela nous permet en particulier d'utiliser les résultats de [Sau00] et d'obtenir sous des hypothèses convenables le comportement de la matrice de connexion de Birkhoff que nous associons à (3). Elle est égale au produit d'une matrice de connexion de Birkhoff de

$$\sigma_q^{-1}Y(z,t) = (\mathrm{I} + (q^{-1}-1)z\mathcal{A}(z,t))Y(z,t),$$

qui admet une limite lorsque q tend vers 1, et de matrices que nous explicitons, voir le théorème 5 de [9]. Il est à noter que ces dernières se comportent de manière très chaotique lorsque q tend vers 1, ce qui est naturel, puisque (3) dégénère lui-même lorsque q tend vers 1.

Puisque (3) ne dégènère pas convenablement lorsque q tend vers 1, cela va rendre compliquée l'étude de la confluence. Bien que les auteurs de [JS96] aient montré comment s'opérait le convergence, par souci de simplification, nous considérons dans [23] une famille d'équations aux q-différences de la forme

$$d_qY(z) = \left(\frac{\mathcal{A}_0(t,q)}{z} + \frac{\mathcal{A}_1(t,q)}{z-1} + \frac{\mathcal{A}_t(t,q)}{z-t}\right)Y(z) = \mathcal{A}(z,t,q)Y(z),$$

que nous voulons voir converger vers sa version différentielle

$$\partial_zY(z) = \left(\frac{A_0(t)}{z} + \frac{A_1(t)}{z-1} + \frac{A_t(t)}{z-t}\right)Y(z) = A(z,t)Y(z).$$

Nous partons de la q-paire de Lax, c'est-à-dire d'une matrice $\mathcal{B}(z,t,q)$ vérifiant une relation de la forme $\mathcal{A}(z,qt,q)\mathcal{B}(z,t,q) = \mathcal{B}(qz,t,q)\mathcal{A}(z,t,q)$, et prouvons sous des hypothèses convenables que cette dernière est équivalente à des q-équations de Schlesinger qui tendent vers les équations de Schlesinger différentielles lorsque q tend vers 1

$$\begin{cases} A_0'(t) &= \frac{[A_0(t),A_t(t)]}{0-t} \\ A_1'(t) &= \frac{[A_1(t),A_t(t)]}{1-t} \\ A_t'(t) &= -\frac{[A_0(t),A_t(t)]}{0-t} - \frac{[A_1(t),A_t(t)]}{1-t}. \end{cases}$$

A partir des q-équations de Schlesinger nous obtenons un q-analogue de l'équation de Painlevé VI. À l'instar du cas différentiel, c'est un système d'équations aux q-différences (par rapport à la variable t) algébrique dépendant de paramètres complexes $\Theta_0, \Theta_1, \Theta_t, \Theta_\infty$ qui vont dépendre de q. Nous obtenons alors qui dégénère vers son homologue différentiel :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'(t) & = & \frac{y(y-1)(y-t)}{t(t-1)}\left(2Z+\frac{1}{y-t}\right) \\ Z'(t) & = & \frac{-3y^2+2(t+1)y-t}{t(t-1)}Z^2-\frac{2y-1}{t(t-1)}Z+\frac{1}{4}\left(\frac{(\theta_\infty-1)^2-1}{t(t-1)}-\frac{\theta_0^2}{(t-1)y^2}-\frac{\theta_t^2}{(y-t)^2}+\frac{\theta_1^2}{t(y-1)^2}\right), \end{array}\right.$$

les θ_i étant des paramètres dépendants des matrices A_i. Ici, l'équation de Painlevé VI est représentée comme un système hamiltonien, mais nous pouvons aussi l'écrire comme une équation différentielle algébrique d'ordre 2 en y, pour retrouver la forme classique :

$$P_{\mathrm{VI}}: \quad \left\{\begin{array}{rcl} y'' & = & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y-t}\right)y'^2-\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{y-t}\right)y' \\ & + & \frac{y(y-1)(y-t)}{2t^2(t-1)^2}\left((\theta_\infty-1)^2+\frac{\theta_1^2(t-1)}{(y-1)^2}-\frac{\theta_0^2 t}{y^2}-\frac{(\theta_t^2-1)(t-1)t}{(y-t)^2}\right). \end{array}\right.$$

Un objet géométrique important associé à Painlevé VI est la variété des conditions initiales. C'est la fibre d'un fibré vectoriel transverse dont chaque point décrit une solution de Painlevé VI. On obtient alors une variété rationnelle. Voir [Oka79]. Plus concrètement lorsque l'on regarde l'équation de Painlevé VI, on constate que tant que $y_0 \neq 0, 1, t_0$ et $t_0 \neq 0, 1$, le théorème de Cauchy-Lipschitz nous permet de définir une solution telle que $(y(t_0), Z(t_0)) = (y_0, Z_0)$. En revanche que peut-on dire pour les valeurs interdites de y_0 ? Si $y_0 = 0$ par exemple, l'équation en Z montre que l'on doit nécessairement avoir $Z_0 = \pm\frac{t\theta_0}{2}$. En réalité toutes les solutions vont passer par un des deux points $(0, \pm\frac{t\theta_0}{2})$ mais seront toutes distinctes sur un voisinage épointé de t_0. C'est un éclatement qui permet de voir cela. Un même phénomène se produit en q-différences, et bien que les éclatements aient lieu dans des ordres différents, on obtient le résultat suivant :

Théorème ([22], Section 4.3)**.** *Considérons la sixième équation de Painlevé, dépendant des paramètres θ_i. Posons $\Theta_i(q) = 1 + \frac{q-1}{2}\theta_i$, pour $i \in \{0, 1, t, \infty\}$. Alors la q-variété des conditions initiales correspondant au q-analogue de la sixième équation de Painlevé de paramètres $\Theta_i(q)$ converge lorsque q tend vers 1, vers la variété des conditions initiales de la sixième équation de Painlevé de paramètre θ_i.*

Un certain nombre de questions reste en suspend :

— Contrairement au cas différentiel, les solutions sont définies de manière discrète, ce sont les valeurs que prendraient une fonction méromorphe solution si on l'interpolait en les $q^{\mathbb{Z}}t_0$. Une étude de la résolution des équations aux q-différences algébriques a été menée dans [BCAM20]. Appliquer ce dernier résultat au q-analogue de la sixième équation de Painlevé permettrait peut-être d'obtenir un résultat dans ce sens.

— Une autre variété associée à q-Painlevé VI (resp. Painlevé VI) est la variété des caractères : c'est la variété des représentations de monodromies modulo équivalence. Voir [CL09, ORS20]. Ici encore, peut-on énoncer un résultat de convergence de la variété des caractères de q-Painlevé VI vers celle de Painlevé VI lorsque q tend vers 1 ?

— La classification locale analytique des équations aux q-différences a récemment été achevée dans [Sau20], voir aussi [Bug12, RSZ13, Elo16] pour des cas partiels. Que peut-on dire sur les déformations isomonodromiques et leurs confluence dans le cas non fuschsien ?

4.4 Confluence des équations aux q-différences, cas général : [3, 6].

Dans [3], nous prouvons des résultats similaires à [Sau00] qui peuvent s'appliquer dans le cas non fuchsien. Plus précisément, considérons une famille de séries formelles $z \mapsto h(z,q) \in \mathbb{C}[[z]]$, solution de

$$b_m(z)(d_q)^m(y(z,q)) + \cdots + b_0(z)y(z,q) = 0,$$

avec $b_i \in \mathbb{C}[z]$. Supposons que chaque z-coefficient de $h(z,q)$ converge simplement lorsque q tend vers 1, et notons $h(z)$ la limite formelle, qui est solution de

$$b_m(z)y^{(m)}(z) + \cdots + b_0(z)y(z) = 0.$$

En utilisant une discrétisation de la méthode d'Euler, nous prouvons qu'un q-analogue de la sommation de Borel-Laplace de $h(z,q)$ donne une famille de solutions méromorphes sur $\mathbb{C}^*$, qui converge lorsque q tend vers 1, vers la sommation de Borel-Laplace de $h(z)$.

Nous faisons explicitement les calculs dans le cas des séries hypergéométriques et prouvons qu'une base de solutions d'une équation différentielle linéaire peut être uniformément approchée par une base de solutions d'une famille d'équations aux q-différences. Cela nous mène à l'approximation des matrices de Stokes et de monodromies de l'équation différentielle linéaire par des matrices dont les coefficients sont méromorphes sur la courbe elliptique $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$.

Les solutions méromorphes d'équations aux q-différences que nous considérons dans [3], n'ont a priori aucun lien avec celles présentes dans [RSZ13], qui sont pourtant les plus naturelles. Dans [6], nous résolvons ce problème. Dans un premier temps, nous énonçons un résultat de confluence. Considérons une équation différentielle $\widetilde{\Delta}$, et une famille d'équations aux q-différences Δ_q, à coefficients germes de fonctions méromorphes. Nous prouvons sous des hypothèses convenables, qu'il existe une famille de bases de solutions méromorphes de Δ_q, qui sont parmi celles construites dans [RSZ13], et qui converge, lorsque q tend vers 1, vers une base de solutions méromorphes de $\widetilde{\Delta}$. Ensuite, nous utilisons ce résultat pour prouver le théorème suivant :

Théorème ([6]). *Soit $\widetilde{\Delta}$, équation différentielle à coefficients germes de fonctions méromorphes d'ordre au moins deux, dont les pentes du polygone de Newton de $\widetilde{\Delta}$ sont de multiplicité une, et considérons une base de solutions méromorphes de $\widetilde{\Delta}$. Alors, il existe une famille d'équations aux q-différences Δ_q à coefficients germes des fonctions méromorphes qui discrétise $\widetilde{\Delta}$, et il existe une famille de bases de solutions méromorphes de Δ_q, qui sont parmi celles construites dans [RSZ13], et qui converge, lorsque q tend vers 1, vers la base de solutions méromorphes de $\widetilde{\Delta}$.*

Il est à noter que dans [6], nous construisons explicitement les familles d'équations Δ_q, ainsi que la famille de bases de solutions méromorphes de Δ_q.

Chapitre 5

Aspects combinatoires : Marches à petits pas

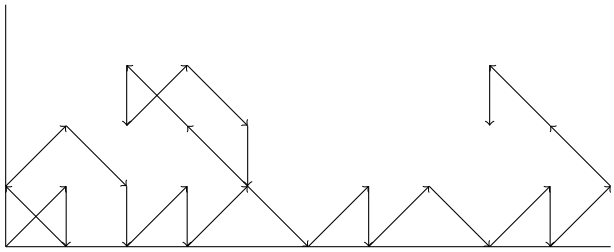
Dans ce chapitre, nous considérons les marches à petit pas dans un ensemble de directions fixé restreint à un cône de $\mathbb{Z}^2$. On leur associe une série génératrice et une question importante est de déterminer si cette dernière satisfait des équations algébriques et/ou différentielles. La nature de la série va dépendre de l'ensemble de directions autorisées et du cône, c'est donc un problème de classification. Dans un premier temps, nous allons traiter des cas triviaux, qui ont une série génératrice toujours algébrique. Nous parlerons du problème des marches dans le quart de plan, qui a été récemment complètement résolu. Nous parlerons des marches à poids, qui sont en quelque sorte la généralisation probabiliste de ce problème combinatoire. Enfin nous détaillerons quelques résultats sur un sujet plus récent : les marches dans le trois-quarts de plan.

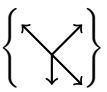
5.1 Présentation du problème

Donnons-nous un cône $\mathcal{C}$ de $\mathbb{Z}^2$ de sommet $(0,0)$, ainsi qu'un ensemble $\mathcal{D} \subset \{-1,0,1\}^2$. Considérons une marche à pas discrets dans $\mathcal{D}$ restreinte au $\mathcal{C}$, c'est-à-dire une succession de points

$$(0,0) = P_0, P_1, \ldots, P_k,$$

où chaque P_n est dans $\mathcal{C}$, tel que les pas $P_{n+1} - P_n$ appartiennent tous à $\mathcal{D}$. Voici un exemple de marche :



$\mathcal{D} =$  $\mathcal{C} = \mathbb{N}^2$

Ces marches apparaissent de manière naturelle dans de nombreux domaines, en combinatoire, en probabilité, et en statistiques. Nous renvoyons à [BF02, Hum10] pour plus de détails.

Étant donnés $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$, soit $\tilde{q}_{;\mathcal{D},\mathcal{C},i,j,k}$, le nombre de marches confinées dans $\mathcal{C}$ prenant ses directions dans $\mathcal{D}$ et arrivant en (i,j) au bout de k pas. Par soucis de lisibilité nous omettrons $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$. La détermination de la nature algébrique de la série génératrice

$\widetilde{Q}(x,y,t) = \sum_{i,j,k} \tilde{q}_{i,j,k} x^i y^j t^k$ est un sujet qui a mobilisé de nombreuses communautés, allant de la combinatoire à la théorie de Galois différentielle, en passant par le calcul formel. Nous classerons les séries génératrices en différents types. Contrairement au chapitre 3, les fonctions dépendent de plusieurs variables x, y, t, il faut donc redéfinir les notions d'algébricité différentielle et d'holonomie dans ce contexte.

— *Rationnel* : La série $\widetilde{Q}(x,y,t)$ appartient à $\mathbb{C}(x,y,t)$.

— *Algébrique* : La série $\widetilde{Q}(x,y,t)$ satisfait une équation polynomiale non triviale à coefficients dans $\mathbb{C}(x,y,t)$.

— *Transcendant et holonome* : La série $\widetilde{Q}(x,y,t)$ est transcendante et holonome, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, tel que pour $\star \in \{x,y,t\}$, il existe $a_{0,\star}, \ldots, a_{n,\star} \in \mathbb{C}(x,y,t)$, non tous nuls tels que

$$\begin{cases} 0 &= \sum_{\ell=0}^{n} a_{\ell,x} \partial_x^\ell \widetilde{Q}(x,y,t) \\ 0 &= \sum_{\ell=0}^{n} a_{\ell,y} \partial_y^\ell \widetilde{Q}(x,y,t) \\ 0 &= \sum_{\ell=0}^{n} a_{\ell,t} \partial_t^\ell \widetilde{Q}(x,y,t). \end{cases}$$

— *Non holonome et différentiellement algébrique* : La série $\widetilde{Q}(x,y,t)$ est non holonome et différentiellement algébrique, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, tel que pour $\star \in \{x,y,t\}$, il existe des polynômes non nuls $P_\star \in \mathbb{C}(x,y,t)[X_0, \ldots, X_n]$, tels que

$$\begin{cases} 0 &= P_x(\widetilde{Q}(x,y,t), \ldots, \partial_x^n \widetilde{Q}(x,y,t)) \\ 0 &= P_y(\widetilde{Q}(x,y,t), \ldots, \partial_y^n \widetilde{Q}(x,y,t)) \\ 0 &= P_t(\widetilde{Q}(x,y,t), \ldots, \partial_t^n \widetilde{Q}(x,y,t)). \end{cases}$$

— *Différentiellement transcendant* : la série n'est pas différentiellement algébrique.

La nature algébrique de la série génératrice donne de nombreuses propriétés combinatoires sur le modèle de marche que l'on se donne. Cela permet aussi d'obtenir des relations de récurrences sur les coefficients, qui permet de calculer cette dernière plus facilement.

On peut généraliser le problème en y ajoutant un aspect probabiliste. Fixons une famille d'éléments $(d_{i,j})_{(i,j)\in\{0,\pm1\}^2}$ de $\mathbb{R} \cap [0,1]$ tels que $\sum_{i,j} d_{i,j} = 1$. Pour $(i,j) \in \{0,\pm1\}^2 \backslash \{(0,0)\}$ (resp. $(0,0)$), l'élément $d_{i,j}$ peut être vu comme la probabilité pour la marche d'aller dans la direction (i,j) (resp. de rester sur place). Les $d_{i,j}$ seront appelés poids. On définit l'ensemble des directions comme étant

$$\mathcal{D} = \{(i,j) \in \{0,\pm1\}^2 | d_{i,j} \neq 0\}.$$

Pour $(i,j) \in \mathcal{C}$ et $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, on définit $q_{i,j,k}$ comme étant la somme des poids des marches dans $\mathcal{D}$ allant à la position (i,j) depuis la position $(0,0)$ en k pas. Enfin on introduit la série génératrice

$$Q(x,y,t) := \sum_{i,j,k} q_{i,j,k} x^i y^j t^k.$$

On peut retrouver le cadre précédent comme suit. Si $d_{0,0} = 0$ et les $d_{i,j}$ ont même valeur, on dira que la marche est sans poids. On a alors $\widetilde{Q}(x,y,t) = Q(x,y,|\mathcal{D}|t)$. Notons que les séries génératrices $Q(x,y,t)$ et $Q(x,y,|\mathcal{D}|t)$ ont la même nature. Nous allons donc nous concentrer sur la nature de $Q(x,y,t)$.

Nous verrons que dans nos critères pour les marches sans poids, la valeur de $d_{0,0}$ n'interviendra jamais. C'est pour cette raison que nous représenterons uniquement les directions non triviales de $\mathcal{D}$ par des flèches

$$\{\leftarrow, \nwarrow, \uparrow, \nearrow, \rightarrow, \searrow, \downarrow, \swarrow\}.$$

5.2 Quelques cas faciles

Commençons par traiter le cas où $\mathcal{C} = \mathbb{Z}^2$. On a $q_{0,0,0} = 1$. En comparant les marches en k pas et les marches en $k+1$ pas, on trouve l'équation fonctionnelle suivante

$$(1 - S(x, y, t))Q(x, y, t) = 1,$$

où

$$S(x, y, t) = t\left(\sum_{(i,j)\in\mathcal{D}} d_{i,j}x^i y^j\right).$$

On trouve ainsi que la série génératrice est rationnelle.

Le cas suivant est le demi-plan $\mathcal{C} = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Il faut retrancher les marches qui quittent le demi-plan supérieur. On trouve donc

$$(1 - S(x, y, t))Q(x, y, t) = -(d_{-1,-1}x^{-1}y^{-1} + d_{0,-1}y^{-1} + d_{1,-1}xy^{-1})tQ(x, 0, t) + 1.$$

Pour supprimer les puissances négatives, multiplions par xy et définissons la noyau de la marche $K(x, y, t) = xy(1 - S(x, y, t))$. Nous avons alors

$$K(x, y, t)Q(x, y, t) = K(x, 0, t)Q(x, 0, t) + xy.$$

L'idée est maintenant d'évaluer cette équation sur la courbe algébrique $K(x, y, t) = 0$ et d'exprimer y en fonction de x et t. Soit donc $y(x, t)$ tel que $K(0, y(x, t), t) = 0$. On a alors

$$0 = K(x, 0, t)Q(x, 0, t) + xy(x, t).$$

Comme $y(x, t)$ est une fonction algébrique et que K est un polynôme, il vient que $Q(x, 0, t)$ est une fonction algébrique. Par conséquent $Q(x, y, t)$ l'est aussi.

Si on se donne une marche dans un cône de $\mathbb{Z}^2$ de sommet $(0, 0)$ et d'angle $\alpha 2\pi$, avec $\alpha \in]0, 1[\cap\mathbb{Q}$, après changement de variable, elle sera équivalente à une marche (éventuellement à grands pas) dans le quart de plan $\mathbb{N}^2$ (si $\alpha < 1/2$), le trois-quarts de plan $\mathbb{Z}^2 \setminus \mathbb{Z}^2_{<0}$ (si $\alpha > 1/2$), ou le demi-plan. L'étude des marches à grands pas étant pour l'instant hors d'atteinte dans sa généralité, voir par exemple [BBMM18], nous nous concentrons sur les marches à petits pas dans le quart de plan $\mathbb{N}^2$ et le trois-quarts de plan $\mathbb{Z}^2 \setminus \mathbb{Z}^2_{<0}$. Il existe un dernier cas que nous souhaitons éliminer dans le cas du quart et du trois-quarts de plan.

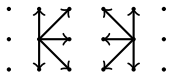
Definition. On dira que la marche est dégénérée si l'une des conditions suivantes est satisfaite.

- $K(x, y, t)$ est réductible dans l'anneau $\mathbb{C}[x, y]$,
- $K(x, y, t)$ a un degré en x au plus égal à 1,
- $K(x, y, t)$ a un degré en y au plus égal à 1.

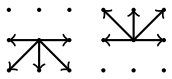
Dans [14, 18], il est donné des critères très explicites sur $\mathcal{D}$ pour statuer si une marche est dégénérée ou non. Pour que cela soit vérifiée il faut faire une hypothèse supplémentaire cruciale, à savoir que $0 < t < 1$. Le premier article prouve le résultat suivant pour t transcendant sur $\mathbb{Q}(d_{i,j})$, tandis que le deuxième utilise des arguments analytiques pour prouver que le résultat est vrai pour $0 < t < 1$ algébrique. A partir de maintenant supposons donc que $0 < t < 1$.

Proposition ([14, 18]). *On suppose $0 < t < 1$. Une marche est dégénérée si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

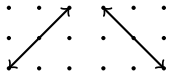
1. *Il existe $i \in \{-1, 1\}$ tel que $d_{i,-1} = d_{i,0} = d_{i,1} = 0$. Cela correspond aux marches dont l'ensemble des directions appartient à l'une de deux configurations :*



2. *Il existe $j \in \{-1, 1\}$ tel que $d_{-1,j} = d_{0,j} = d_{1,j} = 0$. Cela correspond aux marches dont l'ensemble des directions appartient à l'une de deux configurations :*



3. *Tous les poids sont nuls, sauf $\{d_{1,1}, d_{0,0}, d_{-1,-1}\}$ ou $\{d_{-1,1}, d_{0,0}, d_{1,-1}\}$. Cela correspond aux marches dont l'ensemble des directions appartient à l'une de deux configurations :*



Plaçons-nous dans le cas où $\mathcal{C} \in \{\mathbb{N}^2, \mathbb{Z}^2 \setminus \mathbb{Z}^2_{<0}\}$. Si on reprend le même raisonnement que pour le demi-plan et pour le plan, on trouve que dans les configurations 1 et 2, la série génératrice est algébrique, et que dans la configuration 3, la série est une fraction rationnelle.

5.3 Marches dans le quart de plan : [12, 14, 16, 22].

Considérons maintenant les marches sans poids dans le quart de plan $\mathbb{N}^2$. Leurs natures ont été complètement classifiées dans les années 2010, et auront permis de développer des interactions entre de nombreux domaines. Une des raisons de l'engouement pour cette question est qu'avec un nombre de cas restreint (nous verrons qu'il y en a 79 à traiter), il se produit à peu près tous les phénomènes possibles.

La situation est bien plus délicate que dans le demi-plan. En effet, l'équation fonctionnelle se complexifie, puisqu'il faut retrancher les marches quittant le quart de plan par l'axe des abscisses, celles quittant par l'axe des ordonnées, et puisqu'on a éventuellement retranché deux fois celles qui quittaient les deux à la fois, (c'est-à-dire celles partant de $(0,0)$ dans la direction $\swarrow$) rajouter un terme correctif. On obtient alors, voir [BMM10], l'équation

$$K(x,y,t)Q(x,y,t) = K(x,0,t)Q(x,0,t) + K(0,y,t)Q(0,y,t) - K(0,0,t)Q(0,0,t) + xy. \quad (4)$$

Les autrices de [BMM10] prouvent qu'en plus des cas dégénérés, un nouveau cas mène à une série génératrice automatiquement algébrique. En effet, si la marche possède un

ensemble de directions incluses dans  alors on aura $Q(x,0,t) = Q(0,0,t)$, et le même raisonnement que dans le cas du demi-plan montre que la série génératrice est algébrique. Pour finir, elles montrent que $Q(x,y,t)$ et $Q(y,x,t)$ ont même nature algébrique. En terme de poids, celle ayant pour poids $d_{i,j}$ aura même nature que celle ayant pour poids $d_{j,i}$. Il ne reste alors plus que 79 cas à traiter sur les $2^8 - 1 = 255$ cas initiaux. Le tableau 1 résume les différents cas.

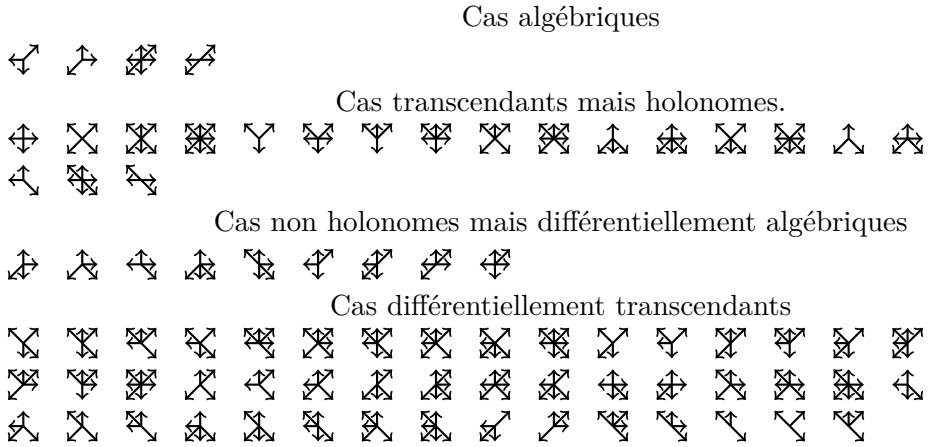


FIGURE 1 – Classification de la nature algébrique de la série génératrice pour les 79 marches du quart de plan sans poids.

Faisons un rapide survol des différents résultats de classification. Dans l'article initial [BMM10], les autrices, à l'instar de [FIM99], associent à la marche un groupe que nous définissons maintenant. Le noyau de la marche est la courbe algébrique $E_t := \{x, y \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})^2, K(x,y,t) = 0\}$. Nous définissons l'involution de E_t, ι_1 (resp. ι_2) qui à (x,y) associe (x,y') (resp. (x',y)), où y, y' (resp. x, x') sont les deux racines de $y \mapsto K(x,y,t) = 0$ (resp. $x \mapsto K(x,y,t) = 0$). Considérons maintenant le groupe G_E engendré par ι_1 et ι_2.

Il est à noter que le cardinal de G_E dépend de t. Le groupe G_E est fini pour tout $0 < t < 1$ dans 23 cas, et infini pour des valeurs génériques de t dans les autres cas. Dans 22 des 23 cas à groupe fini, les autrices de [BMM10] prouvent que la série est holonome (et même algébrique dans 3 cas). Le dernier cas à groupe fini, a été traité dans [BvHK10] et a été prouvé algébrique. Dans [BMM10], il était conjecturé que les 56 autres modèles étaient non holonomes. En suivant les idées de [FIM99], il a été prouvé dans [14, 18], que le noyau de la marche possède un genre égale à 0 ou 1. Plus précisément, dans les cas qui

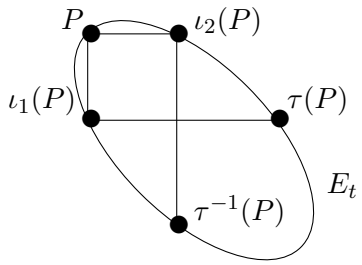
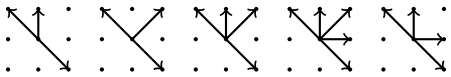


FIGURE 2 – Les applications ι_1, ι_2 et τ agissant sur E_t.

nous intéressent, le noyau est de genre nul pour les marches ayant pour directions l'une des cinq configurations



(G0)

Le genre 1 correspond alors au cas où les directions ne sont pas incluses dans un demi-plan dont la frontière passe par $(0,0)$. Dans [KR12], il est prouvé que pour les 51 cas où le groupe est génériquement de cardinal infini et le noyau est de genre 1, la série génératrice n'est pas holonome, voir aussi ([BRS14, Ras12]). Quant aux marches ayant un noyau de genre nul, il a été prouvé dans [MR09, MM14] que les séries génératrices étaient non holonomes. Puisque le groupe est toujours génériquement de cardinal infini dans ce cas, on obtient le théorème suivant.

Théorème. *Pour les 79 modèles de marches sans poids dans le quart de plan, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le groupe de la marche est de cardinal fini pour tout* $0 < t < 1$ *;*
2. *La série* $Q(x, y, t)$ *est holonome.*

Le cas des séries différentiellement algébriques a été obtenu dans [BBMR15, BBMR17]. Les auteurs prouvent que parmi les 56 cas non holonomes, 9 ont une série génératrice différentiellement algébrique.

Pour compléter la classification, il restait à démontrer que 47 derniers cas (42 avec un noyau de genre 1, 5 avec un noyau de genre 0) sont différentiellement transcendants. A priori aucune des techniques précédemment introduites ne pouvait répondre à cette question, et c'est à ce moment que la théorie de Galois aux différences va intervenir.

Concentrons-nous maintenant sur le cas où E_t est de genre 1 et $0 < t < 1$ est fixé tel que G_E soit de cardinal infini. Il a été prouvé dans [KR12] que les séries $Q(x, 0, t)$ et $Q(0, y, t)$ admettent des prolongements méromorphes multivalués sur la courbe elliptique E_t et que ces derniers possèdent beaucoup de pôles. Puisqu'une fonction holonome possède un nombre restreint de singularités, on en déduit la non holonomie de la série génératrice. Ce genre d'argument n'a aucune chance de prouver la différentielle transcendance, puisqu'une fonction différentiellement algébrique peut posséder un ensemble de singularités très chaotique. En revanche le prolongement méromorphe va nous servir de point de départ pour appliquer la théorie de Galois de [HS08].

Identifions maintenant le corps des fonctions méromorphes sur la courbe elliptique E_t, avec les fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ qui sont doublement périodiques. Nous noterons la variable dans ce plan complexe par ω. Les prolongements sont maintenant notés $\omega \mapsto Q(x(\omega), 0, t)$ et $\omega \mapsto Q(0, y(\omega), t)$, et sont vus comme des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$. Dans le plan des ω, l'application τ correspond à une translation $\omega \mapsto \omega + \omega_0$ pour un certain $\omega_0 \in \mathbb{C}^*$. Nous étendons les définitions τ, ι_1, ι_2 pour les fonctions méromorphes dans le plan des $\omega \in \mathbb{C}$. En particulier, $\tau(f(\omega)) = f(\omega + \omega_0)$. Nous avons alors les équations fonctionnelles

$$\tau(K(x(\omega), 0, t)Q(x(\omega), 0, t)) = K(x(\omega), 0, t)Q(x(\omega), 0, t) + b_1(\omega) \tag{5}$$

et

$$\tau(K(0, y(\omega), t)Q(0, y(\omega), t)) = K(0, y(\omega), t)Q(0, y(\omega), t) + b_2(\omega),$$

où $b_1(\omega) = \iota_1(y(\omega))(\tau(x(\omega)) - x(\omega))$ et $b_2(\omega) = x(\omega)(\iota_1(y(\omega)) - y(\omega))$ sont méromorphes sur E_t. En particulier, $K(x(\omega), 0, t)Q(x(\omega), 0, t)$ et $K(0, y(\omega), t)Q(0, \omega, t)$ satisfont des équations aux différences de type **(E)**, et nous allons pouvoir appliquer toute la machinerie

de la théorie de Galois aux différences sur ce problème. Nous trouvons alors le résultat suivant.

Théorème ([12]). *Supposons que E_t est de genre 1 et fixons $0 < t < 1$ tel que G_E soit de cardinal infini. Pour 42 parmi les 51 considérés, $x \mapsto Q(x, y, t)$ (resp. $y \mapsto Q(x, y, t)$) est différentiellement transcendante. Pour les 9 autres marches, $x \mapsto Q(x, y, t)$ (resp. $y \mapsto Q(x, y, t)$) satisfait une équation différentielle algébrique.*

En particulier on en déduit que $Q(x, y, t)$ est différentiellement transcendante. Il est à noter que les 9 cas différentiellement algébriques sont les cas traités dans [BBMR15, BBMR17]. Ces cas correspondent aux situations où le groupe de Galois aux différences paramétré de (5) n'est pas maximal.

Le traitement des cas de genre 0 est similaire. L'équation de type **(E)** est alors remplacée par une équation de type **(Q)**, et on obtient.

Théorème ([16]). *Considérons un des modèles de marches de (G0) et fixons $0 < t < 1$ un nombre transcendant. Alors $x \mapsto Q(x, y, t)$ (resp. $y \mapsto Q(x, y, t)$) est différentiellement transcendante.*

En particulier on en déduit que $Q(x, y, t)$ est différentiellement transcendante. Dans [22] il a été traité la question de la différentielle transcendance en t. Il a été démontré que si $t \mapsto Q(x, y, t)$ est différentiellement algébrique alors $x \mapsto Q(x, y, t)$ et $y \mapsto Q(x, y, t)$ sont différentiellement algébriques. On obtient alors :

Corollaire. *Pour les 79 modèles de marches sans poids dans le quart de plan, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *La série $x \mapsto Q(x, y, t)$ est différentiellement algébrique ;*
2. *La série $y \mapsto Q(x, y, t)$ est différentiellement algébrique ;*
3. *La série $t \mapsto Q(x, y, t)$ est différentiellement algébrique.*

Il est à noter que ce résultat est surprenant puisque la variable t joue un rôle tout à fait différent de celui des variables x et y.

Discutons maintenant brièvement des marches avec poids. Il serait intéressant de pouvoir prouver dans ce cadre les deux conjectures suivantes.

Conjecture. *Pour les marches à poids dans le quart de plan, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le groupe de la marche est de cardinal fini pour tout $0 < t < 1$;*
2. *La série $x \mapsto Q(x, y, t)$ est holonome ;*
3. *La série $y \mapsto Q(x, y, t)$ est holonome ;*
4. *La série $t \mapsto Q(x, y, t)$ est holonome.*

Conjecture. *Pour les marches à poids dans le quart de plan, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *La série $x \mapsto Q(x, y, t)$ est différentiellement algébrique ;*
2. *La série $y \mapsto Q(x, y, t)$ est différentiellement algébrique ;*
3. *La série $t \mapsto Q(x, y, t)$ est différentiellement algébrique.*

Décrivons quelques résultats partiels qui vont dans ces directions. Nous renvoyons à [14] pour des résultats pour les marches à poids avec noyau de genre 1. Il y est notamment prouvé que dans le cas où $0 < t < 1$ est fixé tel que G_E soit fini, les séries $x \mapsto Q(x, y, t)$ et $y \mapsto Q(x, y, t)$ sont holonomes. L'holonomie en t n'est a priori pas connue dans ce cadre. Il y est aussi donné un critère explicite pour l'algébricité de la série génératrice. Les résultats de [16, 22] sont aussi valables pour les marches à poids. On obtient alors que pour les modèles à poids ayant leurs directions dans une des configurations de (G0), la série est différentiellement transcendante en ses trois variables. Si on suppose maintenant que le noyau est de genre 1 et que le groupe est génériquement de cardinal infini, on ne sait pas conclure en général sur la nature de la série génératrice. En revanche on sait que la transcendance différentielle en x ou en y impliquera celle en t. Un premier pas vers la réciproque de ce résultat a récemment été obtenu dans [HS20].

5.4 Marches dans le trois-quarts de plan : [24].

Considérons maintenant le cas du trois-quarts de plan $\mathcal{C} = \mathbb{Z}^2 \setminus \mathbb{Z}^2_{<0}$, et pour simplifier, supposons que nous sommes dans le cadre sans poids. Les configurations avec noyau de genre nul (G0) correspondent à des marches ne pouvant jamais quitter le trois-quarts de plan et sont de simples marches dans le plan. Elles ont donc des séries génératrices rationnelles. Pour les autres cas il n'existe pour l'instant que des résultats très partiels. Dans [BM16], il est prouvé que la marche simple (avec pas) et la marche diagonale (avec pas ) ont des séries génératrices holonomes. Plus récemment, il a été prouvé dans [BMW20] que la marche du roi (avec pas ) possède aussi une série génératrice holonome. Dans [Mus19], il a été prouvé que dans le cas où le groupe est infini, la série génératrice est non holonome.

Une grande difficulté des marches dans le trois-quarts de plan est qu'une équation fonctionnelle du même type que (4) fera intervenir beaucoup trop d'inconnues. Dans [RT19], les auteurs contournent cette contrainte en supposant que la marche est symétrique ($d_{i,j} = d_{j,i}$) et ne possède pas de directions anti diagonales ($d_{1,-1} = d_{-1,1} = 0$). Dans le cas où le groupe de la marche est fini pour tout $0 < t < 1$, ils prouvent alors que les quatre modèles correspondants ont une série génératrice holonome. En réalité sous ces hypothèses, la série génératrice est équivalente en un certain sens à une série génératrice de marche dans le quart de plan (mais pour un autre choix de directions) qui va satisfaire une certaine équation fonctionnelle. Dans le cas où le groupe est de cardinal infini, on peut appliquer la théorie de Galois et on prouve alors le théorème suivant.

Théorème ([24]). *Les faits suivants sont vérifiés :*

- *La série génératrice de la marche dans le trois-quarts de plan avec pas*  *est différentiellement algébrique.*
- *Les séries génératrices des marches dans le trois-quarts de plan avec pas*    *sont différentiellement transcendants.*

Nous résumons dans la figure 3 les résultats que nous venons d'énoncer. Ceci nous donne l'intuition de la conjecture suivante.

Conjecture. *Supposons que les directions $\mathcal{D}$ ne soient pas incluses dans un demi-plan dont la frontière passe par $(0, 0)$. Alors la série génératrice de direction $\mathcal{D}$ dans le quart de plan a la même nature algébrique que la série génératrice de direction $\mathcal{D}$ dans le trois-quarts de plan.*

Cette conjecture est surprenante car a priori rien n'explique le lien entre les deux séries génératrices. Mimer l'approche analytique de [FIM99] qui a eu tant de succès dans le quart de plan pourrait être une piste pour attaquer un certain nombre de cas dans le trois-quarts de plan.

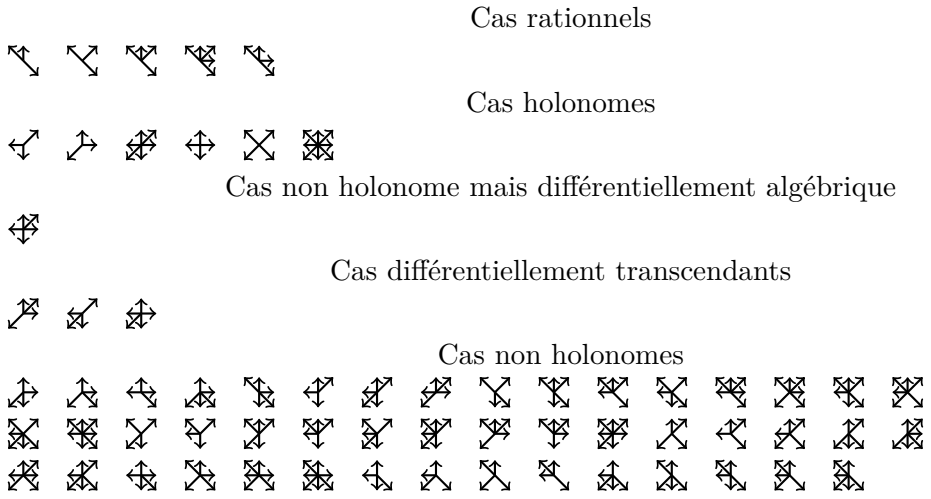


FIGURE 3 – Classification actuelle d'une partie des 79 modèles de marches dans le trois-quarts de plan.

Chapitre 6

Résumé des pistes de recherches

Nous résumons ici les pistes de recherches qui sont énumérées dans les divers chapitres.

Ch. 3 Nous nous proposons de développer un algorithme pour le calcul du groupe de Galois aux différences. Ce dernier pourrait mimer la stratégie du calcul de groupe de Galois différentiel en calculant une forme réduite.

Ch. 3 Nous nous proposons de développer un algorithme dans le cas **(M)** pour déterminer les solutions y vérifiant $\sigma y = ay$, avec $a \in \mathbf{k}$.

Ch. 3 Nous chercherons à prouver un analogue de [17] pour les fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ solutions d'équations aux différences finies à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$ (resp. elliptiques).

Ch. 3 Étant données r équations fonctionnelles, et $f_1, \dots, f_r$ des solutions de ces équations, peut-on trouver des conditions sur les groupes de Galois de ces équations pour obtenir que $f_1, \dots, f_r$ sont algébriquement indépendantes, voir mieux différentiellement algébriquement indépendantes ?

Ch. 4 Nous cherchons à définir un processus de q Borel-Laplace qui induise un morphisme d'anneau commutant avec l'opérateur aux q-différences et laissant l'anneau des germes de fonctions analytiques en 0 invariant.

Ch. 4 Nous chercherons à prouver, dans un cadre raisonnable, l'existence de solutions méromorphes de la q-équation de Painlevé VI.

Ch. 4 Nous chercherons à montrer la confluence de la varieté des caractères associée à la q-équation de Painlevé VI vers son homologue différentiel.

Ch. 4 Nous cherchons à étudier les déformations isomonodromiques et le phénomène de confluence pour les équations aux q-différences irrégulières.

Ch. 5 Dans le cas des marches à poids dans le quart de plan, nous chercherons à prouver l'équivalence entre la finitude du groupe de la marche pour tout $0 < t < 1$, et l'holonomie de la série génératrice en x, en y et en t.

Ch. 5 Dans le cas des marches à poids dans le quart de plan, nous chercherons à prouver l'équivalence entre la différentielle algébricité de la série génératrice en x, en y et en t.

Ch. 5 Nous chercherons à adapter la stratégie de prolongement analytique développée dans le quart de plan pour déterminer la nature de la série génératrice des marches dans le trois-quarts de plan.

Références

[AB98] S. A. Abramov and M. A. Barkatou. Rational solutions of first order linear difference systems. In *Proceedings of the 1998 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (Rostock)*, pages 124–131 (electronic). ACM, New York, 1998.

[AB07] Boris Adamczewski and Yann Bugeaud. On the complexity of algebraic numbers. I. Expansions in integer bases. *Ann. of Math. (2)*, 165(2) :547–565, 2007.

[AB17] Boris Adamczewski and Jason P. Bell. A problem about Mahler functions. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa*, 5(4) :1301–1355, 2017.

[ADV04] Yves André and Lucia Di Vizio. q-difference equations and p-adic local monodromy. *Astérisque*, (296) :55–111, 2004. Analyse complexe, systèmes dynamiques, sommabilité des séries divergentes et théories galoisiennes. I.

[AMCW13] Ainhoa Aparicio-Monforte, Elie Compoint, and Jacques-Arthur Weil. A characterization of reduced forms of linear differential systems. *J. Pure Appl. Algebra*, 217(8) :1504–1516, 2013.

[AMP18] Eli Amzallag, Andrei Minchenko, and Gleb Pogudin. Degree bound for toric envelope of a linear algebraic group. *arXiv preprint arXiv :1809.06489*, 2018.

[AMW12] Ainhoa Aparicio-Monforte and Jacques-Arthur Weil. A reduced form for linear differential systems and its application to integrability of Hamiltonian systems. *Journal of Symbolic Computation*, 47(2) :192 – 213, 2012.

[And14] Yves André. Solution algebras of differential equations and quasi-homogeneous varieties : a new differential Galois correspondence. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 47(2) :449–467, 2014.

[AS17] Carlos E Arreche and Michael F Singer. Galois groups for integrable and projectively integrable linear difference equations. *Journal of Algebra*, 480 :423–449, 2017.

[Bal94] Werner Balser. *From divergent power series to analytic functions*, volume 1582 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1994. Theory and application of multisummable power series.

[BBMM18] A. Bostan, M. Bousquet-Mélou, and S. Melczer. On walks with large steps in an orthant. *Journal of the European Mathematical Society (JEMS)*, to appear, 2018.

[BBMR15] Olivier Bernardi, Mireille Bousquet-Mélou, and Kilian Raschel. Counting quadrant walks via Tutte's invariant method. An extended abstract to appear in *Proceedings of FPSAC 2016*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., arXiv :1511.04298, 2015.

[BBMR17] Olivier Bernardi, Mireille Bousquet-Mélou, and Kilian Raschel. Counting quadrant walks via Tutte's invariant method. Preprint, arXiv :1708.08215, 2017.

[BCAM20] Ph Barbe, J Cano, P Fortuny Ayuso, and WP McCormick. q-algebraic equations, their power series solutions, and the asymptotic behavior of their coefficients. *arXiv preprint arXiv :2006.09527*, 2020.

[BCDVW16] Moulay A. Barkatou, Thomas Cluzeau, Lucia Di Vizio, and Jacques-Arthur Weil. Computing the lie algebra of the differential galois group of a linear differential system. *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.*, 2016.

[BCVH+17] Alin Bostan, Frédéric Chyzak, Mark Van Hoeij, Manuel Kauers, and Lucien Pech. Hypergeometric expressions for generating functions of walks with small steps in the quarter plane. *European Journal of Combinatorics*, 61 :242–275, 2017.

[Bec94] Paul-Georg Becker. k-regular power series and Mahler-type functional equations. *J. Number Theory*, 49(3) :269–286, 1994.

[Beu06] Frits Beukers. A refined version of the Siegel-Shidlovskii theorem. *Ann. of Math. (2)*, 163(1) :369–379, 2006.

[Béz94] J.-P. Bézivin. Sur une classe d'equations fonctionnelles non linéaires. *Funkcial. Ekvac.*, 37 :263–271, 1994.

[BF02] Cyril Banderier and Philippe Flajolet. Basic analytic combinatorics of directed lattice paths. *Theoretical Computer Science*, 281(1-2) :37–80, 2002.

[BG96] Vladimir Baranovsky and Victor Ginzburg. Conjugacy classes in loop groups and G-bundles on elliptic curves. *Internat. Math. Res. Notices*, (15) :733–751, 1996.

[BHMP17] Thomas Blossier, Charlotte Hardouin, and Amador Martin-Pizarro. Sur les automorphismes bornés de corps munis d'opérateurs. *Math. Research Letters*, 24 :955–978, 2017.

[BM16] M. Bousquet-Mélou. Square lattice walks avoiding a quadrant. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 144 :37–79, 2016.

[BMF95] Mireille Bousquet-Mélou and Jean-Marc Fédou. The generating function of convex polyominoes : the resolution of a q-differential system. *Discrete Math.*, 137(1-3) :53–75, 1995.

[BMM10] Mireille Bousquet-Mélou and Marni Mishna. Walks with small steps in the quarter plane. In *Algorithmic probability and combinatorics*, volume 520 of *Contemp. Math.*, pages 1–39. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.

[BMW20] M. Bousquet-Mélou and M. Wallner. More Models of Walks Avoiding a Quadrant. *31st International Conference on Probabilistic, Combinatorial and Asymptotic Methods for the Analysis of Algorithms (AofA 2020)*, 159 :8 :1–8 :14, 2020.

[Bor04] Alexei Borodin. Isomonodromy transformations of linear systems of difference equations. *Ann. of Math. (2)*, 160(3) :1141–1182, 2004.

[BRS14] Alin Bostan, Kilian Raschel, and Bruno Salvy. Non-D-finite excursions in the quarter plane. *J. Combin. Theory Ser. A*, 121 :45–63, 2014.

[Bug12] Virginie Bugeaud. *Groupe de Galois local des équations aux q-différences irrégulières.* PhD thesis, Institut de Mathématiques de Toulouse, 2012.

[BvHK10] Alin Bostan, Mark van Hoeij, and Manuel Kauers. The complete generating function for gessel walks is algebraic. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 138(9) :3063–3078, 2010.

[Cas09] Guy Casale. Une preuve galoisienne de l'irréductibilité au sens de Nishioka-Umemura de la première équation de Painlevé. *Astérisque*, (323) :83–100, 2009.

[CH99] Zoé Chatzidakis and Ehud Hrushovski. Model theory of difference fields. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 351(8) :2997–3071, 1999.

[Cha05] Zoé Chatzidakis. Model theory of difference fields. In *The Notre Dame lectures*, volume 18 of *Lect. Notes Log.*, pages 45–96. Assoc. Symbol. Logic, Urbana, IL, 2005.

[CHS08] Zoé Chatzidakis, Charlotte Hardouin, and Michael F. Singer. On the definitions of difference Galois groups. In *Model theory with applications to algebra and analysis. Vol. 1*, volume 349 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 73–109. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.

[CL09] Serge Cantat and Frank Loray. Dynamics on character varieties and Malgrange irreducibility of Painlevé VI equation. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 59(7) :2927–2978, 2009.

[CR08] Guy Casale and Julien Roques. Dynamics of rational symplectic mappings and difference Galois theory. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, pages Art. ID rnn 103, 23, 2008.

[CS07] Phyllis J. Cassidy and Michael F. Singer. Galois theory of parameterized differential equations and linear differential algebraic groups. In *Differential equations and quantum groups*, volume 9 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 113–155. Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.

[CvH06] Thomas Cluzeau and Mark van Hoeij. Computing hypergeometric solutions of linear recurrence equations. *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.*, 17(2) :83–115, 2006.

[CW04] Elie Compoint and Jacques-Arthur Weil. Absolute reducibility of differential operators and Galois groups. *J. Algebra*, 275(1) :77–105, 2004.

[CW18] Guy Casale and Jacques-Arthur Weil. Galoisian methods for testing irreducibility of order two nonlinear differential equations. *Pacific Journal of Mathematics*, 297(2) :299–337, 2018.

[dS20] Ehud de Shalit. Elliptic (p, q)-difference modules. *Algebra and Number Theory, to appear*, 2020.

[Dum93] Philippe Dumas. Récurrences mahlériennes, suites automatiques, études asymptotiques. *Thèse de l'Université Bordeaux*, 1993.

[DVZ09] Lucia Di Vizio and Changgui Zhang. On q-summation and confluence. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 59(1) :347–392, 2009.

[Elo16] Anton Eloy. *Classification et géométrie des équations aux q-différences : étude globale de q-Painlevé, classification non isoformelle et Stokes à pentes arbitraires.* PhD thesis, 2016.

[Fen15] Ruyong Feng. Hrushovski's algorithm for computing the Galois group of a linear differential equation. *Adv. in Appl. Math.*, 65 :1–37, 2015.

[Fen18] Ruyong Feng. On the computation of the galois group of linear difference equations. 87(310) :941–965, 2018.

[FIM99] Guy Fayolle, Roudolf Iasnogorodski, and Vadim Malyshev. *Random walks in the quarter-plane*, volume 40 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, Berlin, 1999. Algebraic methods, boundary value problems and applications.

[FR92a] Igor B. Frenkel and N. Yu. Reshetikhin. Quantum affine algebras and holonomic difference equations. *Comm. Math. Phys.*, 146(1) :1–60, 1992.

[FR92b] Igor B. Frenkel and Nicolai Yu. Reshetikhin. Quantum affine algebras, commutative systems of difference equations and elliptic solutions to the Yang-Baxter equations. In *Proceedings of the XXth International Conference on Differential Geometric Methods in Theoretical Physics, Vol. 1, 2 (New York, 1991)*, pages 46–107. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992.

[Gar08] Stavros Garoufalidis. Difference and differential equations for the colored Jones function. *J. Knot Theory Ramifications*, 17(4) :495–510, 2008.

[GG06] Stavros Garoufalidis and Jeffrey S. Geronimo. Asymptotics of q-difference equations. In *Primes and knots*, volume 416 of *Contemp. Math.*, pages 83–114. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[GL05] Stavros Garoufalidis and Thang T. Q. Lê. The colored Jones function is q-holonomic. *Geom. Topol.*, 9 :1253–1293 (electronic), 2005.

[GL08] Stavros Garoufalidis and Thang T. Q. Lê. Gevrey series in quantum topology. *J. Reine Angew. Math.*, 618 :169–195, 2008.

[GNP+94] Basile Grammaticos, Frank W. Nijhoff, Vassilios G. Papageorgiou, Alfred Ramani, and Junkichi Satsuma. Linearization and solutions of the discrete Painlevé III equation. *Phys. Lett. A*, 185(5-6) :446–452, 1994.

[GR04] George Gasper and Mizan Rahman. *Basic hypergeometric series*, volume 96 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2004. With a foreword by Richard Askey.

[Hen97] Peter A. Hendriks. An algorithm for computing a standard form for second-order linear q-difference equations. *J. Pure Appl. Algebra*, 117/118 :331–352, 1997. Algorithms for algebra (Eindhoven, 1996).

[Hen98] Peter A. Hendriks. An algorithm determining the difference Galois group of second order linear difference equations. *J. Symbolic Comput.*, 26(4) :445–461, 1998.

[Hru02] Ehud Hrushovski. Computing the Galois group of a linear differential equation. In *Differential Galois theory (Bedlewo, 2001)*, volume 58 of *Banach Center Publ.*, pages 97–138. Polish Acad. Sci., Warsaw, 2002.

[HS99] Peter A. Hendriks and Michael F. Singer. Solving difference equations in finite terms. *J. Symbolic Comput.*, 27(3) :239–259, 1999.

[HS08] Charlotte Hardouin and Michael F. Singer. Differential Galois theory of linear difference equations. *Math. Ann.*, 342(2) :333–377, 2008.

[HS20] Charlotte Hardouin and Michael F Singer. On differentially algebraic generating series for walks in the quarter plane. *arXiv preprint arXiv :2010.00963*, 2020.

[Hum10] Katherine Humphreys. A history and a survey of lattice path enumeration. *Journal of statistical planning and inference*, 140(8) :2237–2254, 2010.

[JS96] Michio Jimbo and Hidetaka Sakai. A q-analog of the sixth Painlevé equation. *Lett. Math. Phys.*, 38(2) :145–154, 1996.

[KK03] Kenji Kajiwara and Kinji Kimura. On a q-difference Painlevé III equation. I. Derivation, symmetry and Riccati type solutions. *J. Nonlinear Math. Phys.*, 10(1) :86–102, 2003.

[KMN+04] Kenji Kajiwara, Tetsu Masuda, Masatoshi Noumi, Yasuhiro Ohta, and Yasuhiko Yamada. Hypergeometric solutions to the q-Painlevé equations. *Int. Math. Res. Not.*, (47) :2497–2521, 2004.

[Kov86] Jerald J. Kovacic. An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations. *J. Symbolic Comput.*, 2(1) :3–43, 1986.

[KR12] Irina Kurkova and Kilian Raschel. On the functions counting walks with small steps in the quarter plane. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 116 :69–114, 2012.

[LvdP78] J. H. Loxton and A. J. van der Poorten. Algebraic independence properties of the Fredholm series. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 26(1) :31–45, 1978.

[Mal02] Bernard Malgrange. On nonlinear differential Galois theory. *Chinese Ann. Math. Ser. B*, 23(2) :219–226, 2002. Dedicated to the memory of Jacques-Louis Lions.

[Mal15] Stéphane Malek. Parametric gevrey asymptotics for a q-analog of some linear initial value problem. *À paraître dans Funkcialaj Ekvacioj*, 2015.

[Man04] Yuri I. Manin. Real multiplication and noncommutative geometry (ein Alterstraum). In *The legacy of Niels Henrik Abel*, pages 685–727. Springer, Berlin, 2004.

[MM14] Stephen Melczer and Marni Mishna. Singularity analysis via the iterated kernel method. *Combin. Probab. Comput.*, 23(5) :861–888, 2014.

[MR09] Marni Mishna and Andrew Rechnitzer. Two non-holonomic lattice walks in the quarter plane. *Theoret. Comput. Sci.*, 410(38-40) :3616–3630, 2009.

[MRR10] Juan J. Morales-Ruiz and Jean-Pierre Ramis. Integrability of dynamical systems through differential Galois theory : a practical guide. In *Differential algebra, complex analysis and orthogonal polynomials*, volume 509 of *Contemp. Math.*, pages 143–220. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.

[MRRS07] Juan J. Morales-Ruiz, Jean-Pierre Ramis, and Carles Simo. Integrability of Hamiltonian systems and differential Galois groups of higher variational equations. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 40(6) :845–884, 2007.

[Mus19] S. Mustapha. Non-d-finite walks in a three-quadrant cone. *Annals of Combinatorics*, 23(1) :143–158, 2019.

[MvS09] Snigdhayan Mahanta and Walter D. van Suijlekom. Noncommutative tori and the Riemann-Hilbert correspondence. *J. Noncommut. Geom.*, 3(2) :261–287, 2009.

[MZ00] Fabienne Marotte and Changgui Zhang. Multisommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences linéaire analytique. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 50(6) :1859–1890 (2001), 2000.

[Nis84] Keiji Nishioka. A note on differentially algebraic solutions of first order linear difference equations. *aequationes mathematicae*, 27(1) :32–48, 1984.

[NRGO01] Frank W. Nijhoff, Alfred Ramani, Basile Grammaticos, and Yasuhiro Ohta. On discrete Painlevé equations associated with the lattice KdV systems and the Painlevé VI equation. *Stud. Appl. Math.*, 106(3) :261–314, 2001.

[Oka79] Kazuo Okamoto. Sur les feuilletages associés aux équations du second ordre à points critiques fixes de P. Painlevé. *Japan. J. Math. (N.S.)*, 5(1) :1–79, 1979.

[ORS20] Yousuke Ohyama, Jean-Pierre Ramis, and Jacques Sauloy. The space of monodromy data for the jimbo-sakai family of q-difference equations. *arXiv preprint arXiv :2005.10122*, 2020.

[OW15] Alexey Ovchinnikov and Michael Wibmer. σ-Galois theory of linear difference equations. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (12) :3962–4018, 2015.

[Pet92] Marko Petkovšek. Hypergeometric solutions of linear recurrences with polynomial coefficients. *J. Symbolic Comput.*, 14(2-3) :243–264, 1992.

[Phi15] Patrice Philippon. Groupes de Galois et nombres automatiques. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 92(3) :596–614, 2015.

[PNGR92] Vassilios G. Papageorgiou, Frank W. Nijhoff, Basile Grammaticos, and Alfred Ramani. Isomonodromic deformation problems for discrete analogues of Painlevé equations. *Phys. Lett. A*, 164(1) :57–64, 1992.

[Pol04a] Alexander Polishchuk. Classification of holomorphic vector bundles on noncommutative two-tori. *Doc. Math.*, 9 :163–181 (electronic), 2004.

[Pol04b] Alexander Polishchuk. Noncommutative two-tori with real multiplication as noncommutative projective varieties. *J. Geom. Phys.*, 50(1-4) :162–187, 2004.

[PS03] Alexander Polishchuk and Albert Schwarz. Categories of holomorphic vector bundles on noncommutative two-tori. *Comm. Math. Phys.*, 236(1) :135–159, 2003.

[Pul08] Andrea Pulita. p-adic confluence of q-difference equations. *Compos. Math.*, 144(4) :867–919, 2008.

[Ram92] Jean-Pierre Ramis. About the growth of entire functions solutions of linear algebraic q-difference equations. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 1(1) :53–94, 1992.

[Ran92] Bernard Randé. *Équations fonctionnelles de Mahler et applications aux suites p-régulières*. PhD thesis, 1992.

[Ras12] Kilian Raschel. Counting walks in a quadrant : a unified approach via boundary value problems. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 14(3) :749–777, 2012.

[RGH91] Alfred Ramani, Basile Grammaticos, and Jarmo Hietarinta. Discrete versions of the Painlevé equations. *Phys. Rev. Lett.*, 67(14) :1829–1832, 1991.

[Ric09] Christoph Richard. On q-functional equations and excursion moments. *Discrete Math.*, 309(1) :207–230, 2009.

[Roq11] Julien Roques. Generalized basic hypergeometric equations. *Invent. Math.*, 184(3) :499–528, 2011.

[Roq12] Julien Roques. On classical irregular q-difference equations. *Compositio Mathematica*, 148(5) :1624–1644, 2012.

[Roq18] Julien Roques. On the algebraic relations between mahler functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 370(1) :321–355, 2018.

[RS20] Julien Roques and Michael F Singer. On the algebraic dependence of holonomic functions. 2020.

[RSZ13] Jean-Pierre Ramis, Jacques Sauloy, and Changgui Zhang. Local analytic classification of q-difference equations. *Astérisque*, (355) :vi+151, 2013.

[RT19] K. Raschel and A. Trotignon. On walks avoiding a quadrant. *Electronic Journal of Combinatorics*, 26 :1–34, 2019.

[Sak01] Hidetaka Sakai. Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations. *Comm. Math. Phys.*, 220(1) :165–229, 2001.

[Sau00] Jacques Sauloy. Systèmes aux q-différences singuliers réguliers : classification, matrice de connexion et monodromie. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 50(4) :1021–1071, 2000.

[Sau20] Jacques Sauloy. Théorie analytique locale des équations aux q-différences de pentes arbitraires. *arXiv preprint arXiv :2006.03237*, 2020.

[Shi89] Andrei Borisovich Shidlovskii. *Transcendental numbers*, volume 12 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1989. Translated from the Russian by Neal Koblitz, With a foreword by W. Dale Brownawell.

[SS19] R. Schäfke and M. Singer. Consistent systems of linear differential and difference equations. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 21 :2751–2792, 2019.

[SU93] Michael F. Singer and Felix Ulmer. Galois groups of second and third order linear differential equations. *J. Symbolic Comput.*, 16(1) :9–36, 1993.

[Sun19] Mengxiao Sun. A new bound on hrushovski's algorithm for computing the galois group of a linear differential equation. *Communications in Algebra*, 47(9) :3553–3566, 2019.

[SV03] Yan Soibelman and Vadim Vologodsky. Noncommutative compactifications and elliptic curves. *Int. Math. Res. Not.*, (28) :1549–1569, 2003.

[VDH07] Joris Van Der Hoeven. Around the numeric–symbolic computation of differential galois groups. *Journal of Symbolic Computation*, 42(1-2) :236–264, 2007.

[vdPS97] Marius van der Put and Michael F. Singer. *Galois theory of difference equations*, volume 1666 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[vdPS03] Marius van der Put and Michael F. Singer. *Galois theory of linear differential equations*, volume 328 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

Résumé.

Mon sujet de recherche est la théorie de Galois différentielle, qui est un domaine mathématique à la croisée de la théorie des nombres, de l'analyse complexe, du calcul formel, et de la géométrie différentielle. Je me suis intéressé à diverses branches d'applications de celle-ci. J'ai notamment travaillé sur l'étude de la transcendance de fonctions spéciales ; les équations de Mahler, qui sont notamment en lien avec les suites automatiques ; les marches aléatoires dans le quart de plan (resp. trois-quarts de plan) ; la sommation de Borel-Laplace pour les équations aux q-différences ; les déformations isomonodromiques ; les problèmes de dégénérescence de ces dernières lorsque q tend vers 1 ; les théorèmes de Morales-Ramis sur l'intégrabilité des systèmes dynamiques ; et les aspects effectifs de calcul de groupe de Galois différentiel (resp. aux différences). Après une introduction présentant une partie de ces domaines, je détaillerai quelques résultats et donnerai des pistes de recherches futures en quatre grands axes correspondant aux quatre chapitres.

Ch. 2 Le calcul effectif du groupe de Galois différentiel.
Ch. 3 La transcendance différentielle des fonctions spéciales.
Ch. 4 L'étude analytique des équations aux q-différences.
Ch. 5 L'étude de la nature des séries génératrices de marches dans des espaces confinés.

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
UMR 7501
Université de Strasbourg
CNRS
IRMA, UMR 7501
7 rue René Descartes
F-67000 STRASBOURG
Tél. 03 68 85 01 29
irma.math.unistra.fr
irma@math.unistra.fr

IRMA 2021/001
http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03211520