



**HAL**  
open science

# Développement de stratégies de commandes pour des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles paraboliques non linéaires

Thérèse Azar

► **To cite this version:**

Thérèse Azar. Développement de stratégies de commandes pour des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles paraboliques non linéaires. Automatique. Université d'Angers, 2021. Français. NNT : 2021ANGE0006 . tel-03357657

**HAL Id: tel-03357657**

**<https://theses.hal.science/tel-03357657>**

Submitted on 28 Sep 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITÉ D'Angers  
COMUE UNIVERSITÉ BRETAGNE LOIRE

ÉCOLE DOCTORALE N° 601  
*Mathématiques et Sciences et Technologies  
de l'Information et de la Communication*  
Spécialité : *Automatique et génie informatique*

Par

« **Thérèse AZAR** »

« **Développement de stratégies de commandes pour des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles paraboliques non linéaires** »

Thèse présentée et soutenue à « Angers », le « 15 avril 2021 »

Unité de recherche : « Laboratoire Angevin de Recherche en Ingénierie des Systèmes (LARIS) »

Thèse N° : 190362

## Rapporteurs avant soutenance :

Marion Gilson-Bagrel    Professeur des universités, Polytech Nancy - CRAN  
Olivier Quemener      Professeur des universités, Université d'Evry Val d'Essone

## Composition du Jury :

Président :	Thierry Duvaut	Professeur des universités - Université de Reims Champagne-Ardenne
Examineurs :	Sébastien Rouquette	Maître de conférences - Université de Montpellier
	Emmanuel Moulay	Chargé de recherche CNRS - Laboratoire XLIM UMR CNRS 7252
Dir. de thèse :	Laurent Autrique	Professeur des universités - Université d'Angers
Co-dir. de thèse :	Laetitia Perez	Maître de conférences titulaire de l'HDR - Polytech Angers
	Christophe Prieur	Directeur de recherche CNRS - Gipsa-Lab



---

# Remerciements

Je souhaite remercier en premier lieu mon directeur de thèse, monsieur LAURENT AUTRIQUE, Professeur des universités en acceptant d'encadrer ce travail doctoral et pour m'avoir accueilli au sein de son équipe Systèmes Dynamiques et Optimisation (SDO). Je lui suis également reconnaissante pour le temps conséquent qu'il m'a accordé, ses qualités pédagogiques et scientifiques, sa franchise et sa sympathie. Qu'il soit aussi remercié pour sa gentillesse, sa disponibilité permanente et pour les nombreux encouragements qu'il m'a prodigués. J'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail doctoral. J'ai beaucoup appris à ses côtés et je lui adresse ma gratitude pour tout cela.

J'adresse de chaleureux remerciements à mes co-encadrants de thèse, madame LAETITIA PEREZ, Maître de conférence et monsieur CHRISTOPHE PRIEUR, Directeur de recherche CNRS pour leurs attentions de tout instant sur mes travaux, pour leurs relectures finales méticuleuses de chacun des chapitres m'a sans aucun doute permis de préciser mon propos qui ont été prépondérants pour la bonne réussite de cette thèse. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec eux.

Je souhaiterais aussi adresser ma gratitude au président du Jury monsieur THIERRY DUVAUT, Professeur des universités, et aux examinateurs : monsieur SEBASTIEN ROUQUETTE, Maître de conférences, et à monsieur EMMANUEL MOULAY, Chargé de recherche CNRS pour avoir accepté d'examiner mon travail. J'adresse de sincères remerciements à monsieur EMMANUEL MOULAY qui m'a intégré au Gdr MACS.

De même, je suis particulièrement reconnaissante à madame MARION GILSON-BAGREL, Professeur des universités, et à monsieur OLIVIER QUEMENER de l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'égard de cette recherche en s'engageant à être rapporteurs de ma thèse et d'avoir pris le temps d'échanger avec moi. Pour tout cela je les remercie.

Je souhaiterais exprimer ma gratitude à monsieur JEAN-LOUIS BOIMOND responsable ex du laboratoire LARIS de m'avoir accueilli chaleureusement au sein du labo. Je le remercie également à chaque fois que j'ai sollicité son aide.

Mes remerciements vont également à monsieur DAVID BIGAUD et madame ANNE HUMEAU-HEURTIER responsables actuels du laboratoire LARIS. Je remercie aussi monsieur DAVID BIGAUD

---

d'avoir participé à ma soutenance de thèse et pour tous ses encouragements.

Je remercie l'université d'Angers et la région Pays de la Loire qui ont financé cette thèse.

Mes inscriptions pour les conférences ont été particulièrement facilitées par la gestionnaire administrative et financière madame NANTY-CAIL ZOE et sa remplaçante madame HELENE GASNIER, je tiens à exprimer ma reconnaissance.

Ces remerciements seraient incomplets si je n'en adressais pas à l'ensemble des MEMBRES du LARIS pour leur soutien logistique et moral ainsi que pour la très bonne ambiance que j'ai toujours trouvée au labo. Je remercie plus particulièrement monsieur FABRICE GUERIN, Directeur de Polytech Belle-Beille, madame KRISTELL TANQUERAY, Chargée gestion administrative et pilotage ... Je voudrais aussi remercier madame MARIE-FRANCOISE GERARD, Responsable informatique au LARIS, monsieur FRANCK MERCIER, chargé de projets, monsieur REMI GUYONNEAU, Maître de conférence et madame CLAUDINE CADOT, gestionnaire administrative et financière ex, pour leur sympathie, leur amitié, leur bonne humeur et pour leurs nombreux conseils. Je désire en outre remercier mon collègue Mohamed Salim Bidou pour sa participation à ma soutenance de thèse et son aide logistique précieuse. J'ai eu beaucoup de plaisir à travailler avec eux. Le cadre de travail était idéal.

Je remercie toutes les personnes avec qui j'ai partagé mes études et notamment ces années de thèse. J'exprime ma gratitude à tous(tes) les amis (es)-chercheurs : Stéphanie Chahine, Mirvana Hilal, Christelle Traon, Jamin Antoine, Alaa, Augustin, Aziza, Charbel, Ibrahim, Mickaella, Salma, Nadare, Ibrahim, Marcello, Aiwen, Nicolas, Hadhami ...

Il m'est impossible d'oublier mes amis (es) Christine, Agathe, Alexis, Audrey, Bertille, Clara, Hélène, Roselyne, Elana, Lulu, Mathilde, Mirna, Paul, Rafaele, Rita, Stefan, Julie, Solène, Marie, Virginie, Layal, Yohan, Lama, Judith ...

Un grand merci aussi à Malek, Madiha, Antoinette, Ban, Fida, Miryam, Pouplin, Emmanuel, Francine qui ont été toujours là pour me soutenir.

Enfin, je remercie mon frère Nohra, ainsi que mes parents, Julie et Tanios pour leur soutien au cours de ces trois années et sans lesquels je n'en serais pas là aujourd'hui. Merci également à ma grand-mère Thérèse et à toute ma famille pour leur soutien affectif.

---

# Table des matières

Table des matières	3
Acronymes	1
Liste des figures	5
Liste des tableaux	9
Introduction	11
Partie A : Méthodes hors ligne	17
1 Stabilisation à zéro en temps fini	19
1.1 La problématique . . . . .	19
1.1.1 Quelques exemples d'EDPs . . . . .	20
1.1.2 Stabilisation à zéro . . . . .	23
1.2 Détermination d'un contrôle par une approche numérique . . . . .	25
1.2.1 Modélisation du système thermique . . . . .	25
1.2.2 Formulation du problème inverse . . . . .	32
1.2.3 La méthode de régularisation itérative du gradient conjugué . . . . .	34
1.2.4 Exemple de mise en oeuvre . . . . .	36
1.2.5 Algorithme de résolution . . . . .	42
1.3 Résultats numériques . . . . .	43
1.3.1 Première étude . . . . .	43
1.3.2 Seconde étude - effet de la sur-paramétrisation . . . . .	45
1.3.3 Troisième étude - effet du temps final . . . . .	47
Bilan du chapitre 1 . . . . .	50
Références bibliographiques du chapitre 1 . . . . .	51
2 Rejet de perturbations	53

---

2.1	La problématique . . . . .	53
2.1.1	La situation étudiée . . . . .	53
2.1.2	Application numérique . . . . .	54
2.2	Rejet de la perturbation par une approche numérique . . . . .	56
2.2.1	Formulation du problème inverse . . . . .	56
2.2.2	Mise en oeuvre de la méthode du gradient conjugué . . . . .	57
2.3	Résultats numériques . . . . .	63
2.3.1	Première étude . . . . .	63
2.3.2	Seconde étude – effet du positionnement . . . . .	66
2.3.3	Troisième étude – effet de la largeur du support spatial . . . . .	68
	Bilan du chapitre 2 . . . . .	69
	Références bibliographiques du chapitre 2 . . . . .	70
	Partie B : Commande quasi en ligne . . . . .	71
3	Adaptation pour une commande quasi en ligne . . . . .	71
3.1	Approche quasi en ligne . . . . .	71
3.1.1	Motivations . . . . .	71
3.1.2	Notations . . . . .	72
3.2	Différentes stratégies pour le contrôle quasi en ligne . . . . .	72
3.2.1	Stratégie n° 1 - à décalage constant . . . . .	73
3.2.2	Stratégie n° 2 – à décalage adaptatif . . . . .	75
3.2.3	Stratégie n° 3 – à durée adaptée . . . . .	77
3.3	Illustration didactique . . . . .	79
3.3.1	Première stratégie . . . . .	80
3.3.2	Seconde stratégie . . . . .	81
3.3.3	Troisième stratégie . . . . .	82
	Bilan du chapitre 3 . . . . .	84
	Références bibliographiques du chapitre 3 . . . . .	85
4	Rejet quasi en ligne de perturbations . . . . .	87
4.1	Configuration étudiée . . . . .	87
4.1.1	Formulation du problème . . . . .	88
4.1.2	Simulation numérique du problème non contrôlé . . . . .	90
4.2	Résolution du problème inverse de conduction de la chaleur . . . . .	92

---

4.2.1	Algorithme du gradient conjugué . . . . .	92
4.2.2	Problème de sensibilité . . . . .	93
4.2.3	Problème adjoint . . . . .	94
4.3	Implémentation quasi-en ligne . . . . .	95
4.4	Stratégie n° 1 - à décalage constant . . . . .	96
4.4.1	Description de la stratégie n° 1 . . . . .	96
4.4.2	Résultats numériques pour la stratégie à décalage constant . . . . .	97
4.5	Stratégie n° 2 - à décalage adaptatif . . . . .	102
4.5.1	Description de la stratégie n° 2 . . . . .	102
4.5.2	Résultats numériques pour la stratégie à décalage adaptatif . . . . .	102
4.6	Stratégie n° 3 - à durée adaptée . . . . .	108
4.6.1	Description de la stratégie n° 3 . . . . .	108
4.6.2	Résultats numériques pour la stratégie à durée adaptée . . . . .	109
4.7	Comparaison des différentes stratégies . . . . .	111
	Bilan du chapitre 4 . . . . .	114
	Références bibliographiques du chapitre 4 . . . . .	115

Partie C : Application au contrôle de la fusion nucléaire . . . . . 117

5	Contexte de la fusion nucléaire contrôlée . . . . .	117
5.1	Introduction à la fusion nucléaire . . . . .	117
5.1.1	Contexte énergétique . . . . .	117
5.1.2	Réactions nucléaires . . . . .	118
5.1.3	La réaction de fusion deutérium & tritium . . . . .	119
5.2	La réaction de fusion au sein d'un plasma de tokamak . . . . .	121
5.2.1	Principe du tokamak . . . . .	121
5.2.2	Exemple de schéma de réalisation . . . . .	123
5.3	Le projet ITER . . . . .	125
5.4	Phénomènes physiques et modélisation mathématique . . . . .	127
5.4.1	Bilan de puissance du plasma . . . . .	127
5.4.2	Critère de Lawson et facteur d'amplification . . . . .	128
5.4.3	Modélisation de la température au sein du plasma . . . . .	129
5.4.4	Modélisation du flux magnétique au sein du plasma . . . . .	131
5.5	La problématique du contrôle . . . . .	133

---

5.5.1	Généralités . . . . .	133
5.5.2	Formulation . . . . .	137
	Bilan du chapitre 5 . . . . .	140
	Références bibliographiques du chapitre 5 . . . . .	141
6	Stabilisation du profil de sécurité - applications numériques	143
6.1	Contrôle de l'état thermique . . . . .	143
6.1.1	Équations d'états et paramètres d'entrées . . . . .	143
6.1.2	Simulation numérique . . . . .	145
6.1.3	Identification d'une loi de contrôle interne . . . . .	147
6.2	Contrôle du profil de sécurité . . . . .	151
6.2.1	Équations d'états et paramètres d'entrées . . . . .	151
6.2.2	Identification d'une loi de contrôle interne . . . . .	153
6.3	Couplage des actionneurs . . . . .	156
	Bilan du chapitre 6 . . . . .	158
	Références bibliographiques du chapitre 6 . . . . .	159
	Conclusion générale	161
	Bibliographie	165

---

# Acronymes et Nomenclature

ED	Équation Différentielle
EDO	Équation Différentielle Ordinaire
EDP	Équation aux Dérivées Partielles
MGC	Méthode du Gradient Conjugué
PICC	Problème Inverse de Conduction de la Chaleur
INED	Institut National Études Démographiques
MHD	Magnétohydrodynamique
FCI	Fréquence Cyclotroniques Ioniques
FCE	Fréquences Cyclotroniques Electriques
HYB	Fréquences dites Hybrides
ITER	International Thermonuclear Experimental Reactor
CEA	Commissariat à l'Énergie Atomique
JET	Join European Torus

Symbole général	Description	Unité
$C$	Chaleur spécifique	$J.Kg^{-1}.K^{-1}$
$K$	Coefficient d'échange	$W.m^{-3}.K^{-1}$
$\mathbf{u}$	Vecteur décrivant $u(x, t)$	$W.m^{-3}$
$u$	Densité de flux thermique	$W.m^{-3}$
$u^+$	Flux varié	$W.m^{-3}$
$u_a$	Densité de flux ponctuel	$W.m^{-3}$
$L$	Longueur de la barre	$m$
$s_i(x)$	Fonction chapeau spatiale	
$s_j(t)$	Fonction chapeau temporelle	
$d^k \in \mathbb{R}^M$	Direction de descente à l'itération $k$	
$J$	Fonctionnelle à minimiser (critère)	
$\nabla J$	Gradient de la fonctionnelle à minimiser	
$J_{stop}$	Critère d'arrêt	
$\mathcal{L}$	Lagrangien de la fonctionnelle	
$\delta\mathcal{L}$	Variation du Lagrangien	

$[a, b]$	Intervalle spatial du contrôle	
$[b, c]$	Intervalle spatial du contrôle	
$x$	Variable d'espace	$m$
$t$	Variable de temps	$s$
$t_f$	Temps final	$s$
$\tilde{x}$	Variable d'espace	sans unité
$\tilde{t}$	Variable temporelle	sans unité
$\tilde{K}$	Coefficient d'échange	sans unité
$f(x, t) _{x \in [b, c]}$	Perturbation agissant uniquement sur $[b, c]$	
$N_x$	Nombre de pas de discrétisation spatiale	
$N_t$	Nombre de pas de discrétisation temporelle	
$\hat{K}$	Seuil d'instabilité	
$\tilde{J}$	Seuil	
$c$	Coût du contrôle	
$\mathcal{R}^n$	$\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n$	
$\mathcal{R}^+$	Corp des réels positifs	
$L^2$	Ensemble des processus du second ordre	
$\ \cdot\ $	Norme Euclidienne sur $L^2$	
$R$	Grand rayon du plasma	$m$
$R_0$	Grand rayon du tore	$m$
$a$	Petit rayon du plasma	$m$
$Q$	Facteur d'amplification	sans unité
$P_{\text{fusion}}$	Puissance de fusion	$W$
$P_{\text{alpha}}$	Puissance alpha	$W$
$P_{\text{neutrons}}$	Puissance des neutrons	$W$
$P_{\text{extérieure}}$	Puissance extérieure	$W$
$P_{\text{pertes}}$	Puissance perdue	$W$
$\frac{\partial W}{\partial t}$	Le bilan énergétique	$W \cdot s^{-1}$

$W$	Énergie stockée dans le plasma	$Kg.m^2.s^{-2}$
$n$	Densité électronique du plasma	nbr de particules. $m^{-3}$
$n_e$	Densité des électrons	nbr de particules. $m^{-3}$
$T$	Température moyenne du plasma	$eV$
$K_B$	Constante de Boltzmann	$J.K^{-1}$
$g$	Puissance absorbée par les particules	$W.m^{-3}$
$\vec{B}$	Champs magnétique	$T$
$B_0$	Champ magnétique toroïdal	$T$
$\vec{F}$	Force baignée dans un champ magnétique	$N$
$q$	Charge électrique	$C$
$\vec{v}$	Vitesse	$m.s^{-1}$
$j_{ni}$	Densité de courant non inductive	$A.m^{-2}$
$V_0$	Tension électronique au bord du plasma	$V$
$q(x, t)$	Facteur de sécurité	
Symbole grec	Description	Unité
$\lambda$	Conductivité thermique	$W.m^{-1}.K^{-1}$
$\rho$	Masse volumique	$Kg.m^{-3}$
$\psi(x, t)$	Fonction adjointe (multiplicateur de Lagrange)	
$\theta_0$	Température initiale	$K$
$\theta(x, t)$	Température simulée	$K$
$\hat{\theta}_i$	Température observée au point $x_i = \frac{iL}{10}$	$K$
$\hat{\theta}(x, t)$	Température mesurée	$K$
$\delta\theta(x, t)$	Fonction de sensibilité	$K$
$\theta_e$	Température électronique	$eV$
$\theta_{e0}$	Température initiale du plasma	$eV$
$\varepsilon$	Réel positif	
$\gamma$	Profondeur de descente	
$\Omega = [0, L]$	Domaine géométrique étudié	

$\tau_E$	Temps de confinement	s
$\alpha$ ou $\chi$	Coefficient de diffusion	$m^2.s^{-1}$
$\varphi$	Flux magnétique au sein du plasma	Wb
$\varphi_{cible}(x)$	Distribution spatiale du flux magnétique	Wb
$\tilde{\varphi}(x, t)$	Fonction erreur du flux magnétique	Wb
$\eta_{//}$	Composante parallèle de la résistivité du plasma	$\Omega.m$
$\mu_0$	Perméabilité magnétique du vide	$Kg.m.A^{-2}.s^{-2}$
Indice	Description	
0	Initial	
$i$	Capteurs	
$j$	Discrétisation temporelle	
$f$	Final	
Exposant	Description	
$k$	Nombre d'itérations	

---

# Liste des figures

1.1	Domaine étudié . . . . .	25
1.2	Température initiale . . . . .	27
1.3	Évolution de la température (1 <sup>er</sup> cas : $K = 0$ ) . . . . .	28
1.4	Évolution de la température pour différents instants . . . . .	29
1.5	Évolution de la température (2 <sup>nd</sup> cas : $K = -10^5$ ) . . . . .	29
1.6	Évolution de la température (3 <sup>ème</sup> cas : $K = 33 \times 10^3$ ) . . . . .	30
1.7	Évolution de la norme $\ \theta(x, t)\ _{L^2([0,0.1])}$ en fonction du coefficient $K$ . . . . .	31
1.8	Exemple de la base des fonctions chapeaux dans le domaine temporel . . . . .	34
1.9	Évolution du critère - première étude . . . . .	44
1.10	Température et contrôle à différents instants - première étude . . . . .	44
1.11	Température à l'issue des 20 s - première étude . . . . .	45
1.12	Évolution du critère - seconde étude . . . . .	46
1.13	Température et contrôle à différents instants - seconde étude . . . . .	46
1.14	Température à l'issue des 20 s - seconde étude . . . . .	47
1.15	Évolution du critère - troisième étude . . . . .	48
1.16	Température et contrôle à différents instants - troisième étude . . . . .	48
1.17	Température à l'issue des 5 s - troisième étude . . . . .	49
2.1	Évolution de la température avec $K_1 = K_2 = 10^5$ . . . . .	55
2.2	Évolution de la température en certains points du domaine avec $K_1 = K_2 = 10^5$ . . . . .	55
2.3	Discrétisation de l'actionneur localisé . . . . .	56
2.4	Évolution du critère (contrôle localisé en $a = 0.05$ ) avec $K_1 = K_2 = 10^5$ . . . . .	63
2.5	Distribution de la température finale avec $K_1 = K_2 = 10^5$ . . . . .	64
2.6	Évolution du critère (contrôle localisé en $a = 0.05$ ) avec $K_1 = 10^5$ et $K_2 = 5 \times 10^4$ . . . . .	65
2.7	Distribution de la température finale avec $K_1 = 10^5$ et $K_2 = 5 \times 10^4$ . . . . .	65

2.8	Évolution du contrôle localisé en $a = 0.05$ avec $K_1 = 10^5$ et $K_2 = 5 \times 10^4$ . . . . .	66
2.9	Évolution de la température sans contrôle (à gauche) et avec contrôle (à droite) . . . . .	66
2.10	Évolution du critère (contrôle localisé en $a = 0.09$ ) avec $K_1 = 10^5$ et $K_2 = 5 \times 10^4$ . . . . .	67
2.11	Évolution du contrôle localisé en $a = 0.09$ avec $K_1 = 10^5$ et $K_2 = 5 \times 10^4$ . . . . .	67
3.1	Illustration de la stratégie $n^\circ 1$ avec des exemples numériques . . . . .	74
3.2	Illustration de la stratégie $n^\circ 1$ dans le cas général . . . . .	74
3.3	Illustration de la stratégie $n^\circ 2$ avec des exemples numériques . . . . .	76
3.4	Illustration de la stratégie $n^\circ 2$ dans le cas général . . . . .	76
3.5	Illustration de la stratégie $n^\circ 3$ avec des exemples numériques . . . . .	79
3.6	Illustration de la stratégie $n^\circ 3$ dans le cas général . . . . .	79
3.7	Évolution de la fonction $g_1(t)$ sans et avec correction . . . . .	80
3.8	Évolution de la fonction $g_2(t)$ sans et avec correction . . . . .	81
3.9	Évolution de la fonction $g_3(t)$ sans et avec correction . . . . .	82
4.1	Température initiale . . . . .	89
4.2	Évolution de l'état du système sans contrôle . . . . .	90
4.3	Évolution du critère sans contrôle . . . . .	91
4.4	Évolution de la température avec contrôle (stratégie $n^\circ 1$ : pas constant $\tau = 9$ ) . . . . .	98
4.5	Les commandes en différents points (stratégie $n^\circ 1$ : pas constant $\tau = 9$ ) . . . . .	98
4.6	Évolution du critère avec et sans contrôle (stratégie $n^\circ 1$ : pas constant $\tau = 9$ ) . . . . .	99
4.7	Évolution de la température avec contrôle (stratégie $n^\circ 1$ : pas constant $\tau = 15$ ) . . . . .	100
4.8	Les commandes en différents points (stratégie $n^\circ 1$ : pas constant $\tau = 15$ ) . . . . .	100
4.9	Évolution du critère avec et sans contrôle (stratégie $n^\circ 1$ : pas constant $\tau = 15$ ) . . . . .	101
4.10	Évolution de la température avec contrôle (stratégie $n^\circ 2$ : $\tau = 6$ ; $\tilde{J} = 0.5$ ) . . . . .	103
4.11	Les commandes en différents points (stratégie $n^\circ 2$ : $\tau = 6$ ; $\tilde{J} = 0.5$ ) . . . . .	103
4.12	Évolution du critère avec et sans contrôle (stratégie $n^\circ 2$ : $\tau = 6$ ; $\tilde{J} = 0.5$ ) . . . . .	104
4.13	Évolution de la température avec contrôle (stratégie $n^\circ 2$ : $\tau = 6$ ; $\tilde{J} = 0.1$ ) . . . . .	105
4.14	Les commandes en différents points (stratégie $n^\circ 2$ : $\tau = 6$ ; $\tilde{J} = 0.1$ ) . . . . .	106
4.15	Évolution de la température avec et sans contrôle (stratégie $n^\circ 2$ : $\tau = 6$ ; $\tilde{J} = 0.1$ ) . . . . .	106
4.16	Évolution du critère avec et sans contrôle (stratégie $n^\circ 2$ : $\tau = 15$ ; $\tilde{J} = 0.5$ ) . . . . .	107
4.17	Évolution du critère avec et sans contrôle (stratégie $n^\circ 2$ : $\tau = 15$ ; $\tilde{J} = 0.1$ ) . . . . .	107

4.18	Évolution de la température avec contrôle (stratégie n° 3 : $\tilde{J}_{min} = 0.1$ et $\tilde{J}_{max} = 0.5$ ) . . .	109
4.19	Les commandes en différents points (stratégie n° 3 : $\tilde{J}_{min} = 0.1$ et $\tilde{J}_{max} = 0.5$ ) . . . . .	110
4.20	Évolution du critère avec et sans contrôle (stratégie n° 3 : $\tilde{J}_{min} = 0.1$ et $\tilde{J}_{max} = 0.5$ ) . . .	110
4.21	Évolution de la température avec contrôle (stratégie n° 3 : $\tilde{J}_{min} = 0.01$ et $\tilde{J}_{max} = 0.05$ ) . . .	111
4.22	Évolution du critère avec et sans contrôle (stratégie n° 3 : $\tilde{J}_{min} = 0.01$ et $\tilde{J}_{max} = 0.05$ ) . . .	112
5.1	Les différentes sources d'énergies . . . . .	117
5.2	Statistique de l'énergie mondiale . . . . .	118
5.3	Section efficace des principales réactions de fusion pour des applications énergétiques (Villegas, 2010) . . . . .	120
5.4	La réaction de fusion contrôlée standard . . . . .	121
5.5	Représentation des lignes de champs ( $B_T$ : toroïdal ; $B_P$ : poloïdal) . . . . .	122
5.6	Schéma tokamak - stellarator . . . . .	123
5.7	Schéma d'un réacteur à fusion (figure fournie par M.G. Marbach DRFC - CEA) . . . . .	124
5.8	Réacteur ITER . . . . .	126
5.9	Transformation d'une géométrie 3D en 1D : Source CEA IRFM . . . . .	130
5.10	Trajectoire hélicoïdale d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire . . . . .	132
5.11	Exemples de distribution spatiale du profil de sécurité $q(x, t)$ (en haut) et du flux magnétique $\varphi(x, t)$ (en bas) : en rouge la distribution désirée et en bleu la distribu- tion initiale . . . . .	135
5.12	Chauffage ohmique induit dans un tokamak . . . . .	136
5.13	Chauffage induit dans un tokamak . . . . .	137
5.14	Systèmes de chauffage utilisés dans les tokamaks - image CEA . . . . .	137
6.1	La diffusivité thermique $\alpha(x, t)$ ; au-delà de 15 secondes $\alpha(x, t)$ conserve le même profil spatial . . . . .	144
6.2	Le terme source $\tilde{g}(x, t)$ ; au-delà de 15 secondes $\tilde{g}(x, t)$ conserve le même profil spatial . . . . .	145
6.3	Le profil initial $\theta_0(x)$ . . . . .	145
6.4	Évolution des distributions de température $\theta(x, t)$ . . . . .	146
6.5	Évolution des températures $\theta(x, t)$ en certains points . . . . .	146
6.6	Distribution de la température $\theta(x, t)$ (sans contrôle $t \geq 20$ ) et température cible . . . . .	149

6.7	Distribution spatiale de la température $\theta(x, t)$ à différents instants (sans contrôle en bleu et avec contrôle en magenta) et température cible (en rouge) . . . . .	150
6.8	Évolution spatiotemporelle des contrôles . . . . .	150
6.9	Distribution spatiale des contrôles à différents instants . . . . .	151
6.10	Distribution spatiale des cibles (profil de sécurité et flux magnétique) . . . . .	152
6.11	Distribution spatiale du flux magnétique (cible et initial) . . . . .	153
6.12	Distribution spatiale du flux magnétique $\varphi(x, t)$ (avec contrôle en magenta ; sans contrôle en bleu) et flux magnétique cible (en rouge) ; la courbe noire correspond à l'état initial	154
6.13	Distribution spatiale du contrôle appliquée à $t = 1$ seconde pendant 1 seconde . . . . .	155
6.14	Distribution spatiale du flux magnétique $\varphi(x, t)$ (avec contrôle en magenta ; sans contrôle en bleu) et flux magnétique cible (en rouge) ; la courbe noire correspond à l'état initial	155
6.15	Distribution spatiale du contrôle appliquée à $t = 1$ seconde pendant 1 seconde . . . . .	156

---

# Liste des tableaux

2.1	Effet de la largeur du support spatial de l'actionneur quasi-ponctuel . . . . .	68
3.1	Description de la stratégie $n^{\circ} 3$ appliquée à la fonction $g(t)$ . . . . .	83
4.1	Valeur moyenne $\tilde{M}$ de la température dans la barre . . . . .	111
4.2	Durée (en secondes) $\tilde{T}$ de dépassement du seuil de température fixé à $1^{\circ}\text{C}$ . . . . .	112
4.3	Coût du contrôle $\tilde{U} \times 10^{12}$ . . . . .	113
4.4	Durée du contrôle $\tilde{t}_{act}$ en secondes . . . . .	113
5.1	Comparaison des paramètres d'ITER à ceux des tokamaks Tore Supra et JET . . . . .	127



---

# Introduction

L'étude des systèmes réels décrits par des équations aux dérivées partielles peut s'avérer indispensable lorsqu'il s'agit de maîtriser certains procédés complexes. En effet, l'introduction de tels systèmes dits à paramètres distribués ou répartis, qui se caractérisent par la dimension infinie de l'espace d'état (et éventuellement de l'espace d'entrée), permet de s'affranchir des approximations inhérentes aux systèmes à paramètres localisés (ou de dimension finie). Ces derniers sont en général valides sous réserve que les variables représentatives ne dépendent pas de la géométrie des éléments. Les systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles ne font pas en général intervenir un nombre de variables d'entrée ou de sortie élevé mais celles-ci sont des éléments d'espaces fonctionnels de dimension infinie. La cohérence entre la modélisation de l'évolution de l'état étudié et les phénomènes physiques intervenant impose ce contexte. Il en découle le besoin de développer des concepts adaptés à l'analyse de tels systèmes et de mettre en place des méthodes spécifiques visant à satisfaire les objectifs d'identification et/ou de contrôle (Dautray, Lions, 1984) (Rosier, 2007) (Coron, 2017).

La maîtrise de procédés physiques décrits par des équations aux dérivées partielles est en soi un objectif ambitieux nécessitant en premier lieu, la compréhension des phénomènes (étape permettant d'enrichir la connaissance des mécanismes mis en jeu). Une seconde étape consiste à développer un outil prédictif afin de décrire les relations entrées-sorties du système étudié pour en simuler le comportement. Sur la base de ce modèle validé, différentes approches peuvent alors être mises en oeuvre afin d'améliorer le procédé (en terme économique, de qualité du produit fini, de diagnostic, de supervision, ...). Dans ce contexte, plusieurs objectifs allant de l'observabilité (via les capteurs et plus généralement les observateurs) à la contrôlabilité (via les actionneurs) peuvent être brièvement présentés.

- Analyse de modèle : la mise au point d'un outil de simulation basé sur une modélisation mathématique d'un procédé permet de tester de nombreuses situations expérimentales, de rejeter certaines configurations, de proposer des procédures de contrôle optimal ... Ces objectifs visant à améliorer le procédé étudié (en terme de sécurité ou de rendement, par exemple) ne peuvent être atteints que lorsque l'adéquation du modèle avec la réalité a été établie. Lorsque la structure du modèle n'est pas discutable (car issue de bilan énergétique et de loi de comportement), l'ensemble des paramètres doit être soigneusement considéré. Pour les procédés régis par équations aux dérivées partielles, la nature même des paramètres intervenant dans le système engendre une complexité qu'il est nécessaire de prendre en compte. Pour les situations où la mau-

vaise connaissance d'un paramètre affecte sensiblement la pertinence du modèle, des procédures d'identification doivent être mises en place afin de ramener son incertitude à des niveaux raisonnables. Il est usuel pour les situations complexes, où de nombreux paramètres interviennent, d'étudier la sensibilité par rapport à quelques paramètres dont la méconnaissance justifierait a priori une étape d'identification (Beck, Arnold, 1977). Le choix des paramètres, dont l'effet de l'incertitude n'est pas étudié à travers les fonctions de sensibilité, peut être basé sur la connaissance de l'expérimentateur, des campagnes expérimentales, ...

— Identification de propriétés thermophysiques : lorsque la connaissance de certains paramètres d'entrée des modèles mathématiques n'est pas atteignable par mesures directes, on peut considérer des mesures indirectes. Dans (El Jai, Pritchard, 1986), les capteurs sont présentés comme l'intermédiaire physique permettant de recueillir des informations sur le système dont on souhaite superviser l'évolution. Ces informations peuvent être recueillies sur des supports spatiaux de différentes natures : ponctuels ou zones. L'observabilité d'un système peut être affectée par le choix des capteurs (nombre, type, localisation, répartition spatiale). La résolution du problème permettant d'identifier, à partir de mesures indirectes, le ou les paramètres peut être habituellement décomposée en 3 étapes ; voir (Idier, 2001) :

- un problème direct où à partir des paramètres d'entrées et la stratégie d'observation des sorties, un modèle mathématique décrivant les données observées est établi,
- un problème d'acquisition où l'on doit recueillir des données les plus informatives possibles à l'aide d'une instrumentation adéquate,
- un problème inverse où l'on doit estimer les paramètres d'entrée inconnus à partir du modèle mathématique et des données qui précèdent. Pour ce faire, on introduit souvent une fonctionnelle décrivant l'écart entre les observations (issues de mesures) et les simulations (issues de calculs) ; ce critère devant alors être minimisé.

Par exemple, pour les procédés décrits par une équation aux dérivées partielles de type parabolique, comme l'équation de la chaleur en génie thermique, on peut classer les problèmes inverses de conduction de la chaleur en quatre grandes familles (Alifanov, 1994) :

- les problèmes inverses qui consistent à retrouver le champ de température initial ou le champ de température à un instant donné dans le domaine étudié sont de type « problème inverse rétrograde de la conduction de la chaleur »,

- les problèmes inverses pour l'estimation/identification de conditions aux limites : il s'agit soit d'estimer un flux de chaleur appliqué sur une surface en fonction du temps et/ou de l'espace, soit d'identifier un paramètre thermique : échange convectif, coefficient radiatif . . .
- les problèmes inverses pour l'estimation des paramètres caractéristiques du milieu. Ce sont les problèmes d'estimation de propriétés thermo physiques (conductivité thermique, chaleur spécifique par exemple). On peut aussi classer dans cette catégorie les problèmes d'identification de source de chaleur,
- les problèmes inverses de design. Dans ces problèmes, il est souvent question d'estimer le flux de chaleur à imposer sur une surface du domaine dans le but d'avoir une température désirée sur une autre surface du domaine (comme par exemple, pour les procédés métallurgiques où l'on cherche à avoir un front matériau solide/matériau liquide uniforme, à une position précise à un instant donné).

Malgré la formulation d'un critère au sens des moindres carrés, la solution mathématique du problème inverse n'est pas toujours unique et rarement stable. Au début du vingtième siècle, Hadamard a défini la classe des problèmes bien posés et la classe des problèmes mal posés. Un problème est dit bien posé au sens d'Hadamard si et seulement si : la solution existe, est unique et stable. Quand on considère un problème inverse dans le cadre des équations aux dérivées partielles paraboliques, l'inversion des mesures (souvent bruitées) conduit à de grandes erreurs sur l'estimation. La condition de stabilité n'étant pas respectée, il est nécessaire d'utiliser une technique appropriée pour la résolution de ces problèmes mal posés. Les techniques dites de régularisation les plus employées sont la régularisation de Tikhonov, la régularisation par décomposition en valeurs singulières, la méthode de spécification de Beck, les méthodes itératives basées sur le gradient de la fonctionnelle quadratique. Le plus souvent ces dernières sont basées sur le gradient de la fonctionnelle quadratique à minimiser. Ces méthodes itératives ne nécessitent pas l'ajout d'un terme régularisateur car elles régularisent implicitement la solution. Le seul paramètre de régularisation est le nombre d'itérations qu'il faut effectuer avant d'arrêter le processus itératif. Le choix de ce paramètre dépend notamment du bruit de mesure (Morozov, 1984).

- Maîtrise de procédés : dans ce cadre, la diversité des objectifs nécessite une approche pluridisciplinaire. Les cahiers des charges deviennent de plus en plus exigeants lorsqu'il s'agit de passer de l'échelle laboratoire à celle du prototype adapté au transfert technologique pour enfin atteindre le stade industriel. Dans un tel contexte, il est alors nécessaire de prédire le comportement du

procédé par des simulations validées et de pouvoir déterminer des conditions optimales de fonctionnement en effectuant par exemple une étude de conception optimale. Pour ce faire, on peut agir sur le type des actions à mener, le nombre des actionneurs et leur localisation.

C'est dans le cadre des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles de type paraboliques que se positionnent mes travaux de recherche. L'objectif principal est de stabiliser à zéro l'état du système. Il s'agit en particulier soit de contrer l'effet de l'état initial (non nul), soit de rejeter une perturbation qui déstabilise le système. Pour ce faire, j'ai considéré que le problème de détermination d'une stratégie de commande pouvait être traité comme un problème d'identification d'une entrée inconnue. Cela nécessite la formulation d'un problème inverse pour lequel l'état du système est mesuré afin de déterminer quasi en ligne quelle devrait être la commande pertinente. De ce fait, l'architecture choisie est celle d'un système avec commande retardée. Deux types d'actionneurs internes au domaine sont considérés : ponctuel et zone. Les différentes stratégies sont développées et illustrées par des exemples numériques.

Une attention particulière est portée sur le contrôle de la fusion nucléaire. En effet, de nos jours, 84% des besoins mondiaux en énergie sont comblés par les énergies fossiles (Source : Données 2015 de l'Agence internationale de l'énergie). L'exploitation massive de ces énergies entraîne de nombreux changements climatiques, la pollution de l'air, l'effet de serre, les émissions de  $CO_2$ , l'épuisement des stocks de combustibles fossiles, etc. Par ailleurs, la fission nucléaire produit des déchets radioactifs ayant une longue durée de vie et présente des risques importants en cas de fuite de substance radioactive (catastrophes majeures de Tchernobyl puis de Fukushima Daiichi). Il est impérieux de faire face à ces défis mondiaux et de mettre en place une nouvelle source d'énergie durable et propre. Une solution envisageable est la « fusion nucléaire ». Celle-ci consiste à rapprocher à des températures très élevées deux atomes d'hydrogène (légers) pour qu'ils fusionnent. Lors de cette fusion un neutron et un atome d'hélium sont éjectés et une grande énergie est libérée. La fusion nucléaire présente les avantages suivants :

1. une énergie produite importante : elle libère une énergie près de 4 millions de fois supérieure à celle d'une réaction chimique telle que la combustion du charbon, et 4 fois supérieure à celle des réactions de fission nucléaire ;
2. une ressource abondante : les combustibles de fusion sont aisément disponibles ;
3. aucune émission de  $CO_2$  : le sous-produit principal est l'hélium, qui est un gaz inerte et non toxique ;

4. aucun déchet radioactif de haute activité à vie longue ;
5. aucun risque de fusion de coeur : le plasma se refroidit en quelques secondes et les réactions cessent tout de suite ce qui rend impossible des catastrophes nucléaires majeures de type Tchernobyl ou Fukushima.

Pour maîtriser la production d'énergie basée sur la fusion nucléaire, il est nécessaire d'augmenter la durée de vie du plasma en stabilisant le profil de sécurité autour d'une cible désirée (Brémond, 1995). Ce profil de sécurité dépend de la distribution spatiale du flux magnétique. L'évolution de ce dernier est décrite par un système d'équations aux dérivées partielles paraboliques couplé avec une équation de la chaleur décrivant l'état thermique du plasma.

Ce document présente les principaux résultats obtenus dans le contexte de systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires paraboliques. Il est constitué comme suit :

- la première partie concerne le développement d'une méthode hors ligne pour l'identification d'une loi de commande
  - pour la stabilisation à zéro en temps fini (chapitre 1),
  - pour le rejet de perturbations (chapitre 2),
- la seconde partie concerne l'adaptation de cette méthode pour une mise en oeuvre quasi en ligne
  - en présentant son principe de fonctionnement dans un scénario illustratif (chapitre 3),
  - pour le rejet quasi en ligne de perturbations (chapitre 4),
- la troisième partie concerne la mise en oeuvre de cette méthode pour le contrôle d'un système physique complexe
  - dans le contexte de la fusion nucléaire (chapitre 5), qui est brièvement présentée et modélisée,
  - pour lequel des commandes à base d'actionneurs internes sont déterminées (chapitre 6) afin de stabiliser la température électronique du plasma et le flux magnétique au voisinage de cibles désirées,
- une conclusion et quelques perspectives clôturent ce travail.

Ces travaux ont donné lieu aux présentations suivantes :

- Présentation orale, Contrôle optimal des EDPs décrivant la fusion nucléaire pour en assurer la stabilisation, pour les étudiants à Polytech Angers, 26 Février 2018, Angers – France.

- Présentation d'un poster, Étude numérique de la nulle contrôlabilité de l'équation de la chaleur, LARIS, Polytech Angers, 21 Juin 2018, Angers, France.
- T. Azar, L. Perez, L. Autrique, E. Moulay, C. Prieur, Contrôlabilité à zéro d'une équation de la chaleur : identification d'une loi de commande, JAMACS (Journées de l'Automatique du GDR Modélisation, Analyse et Conduite des Systèmes dynamiques), 15-16 Novembre 2018, Nantes, France.
- Présentation orale, Stabilisation à zéro d'une équation de la chaleur, Journée des doctorants, Faculté des Sciences à l'université d'Angers, 2 mai 2019, Angers, France.
- T. Azar, L. Perez, E. Moulay, C. Prieur, et L. Autrique, Stabilisation d'un système d'équations aux dérivées partielles paraboliques par un contrôle interne, JD-JN MACS (Modélisation, Analyse et Conduite des Systèmes dynamiques), 3-7 juin 2019, Bordeaux, France.
- T. Azar, L. Perez, C. Prieur, E. Moulay, et L. Autrique, Stabilization using in-domain actuator : a numerical method for a nonlinear parabolic partial differential equation, 14th International Conference on Automatic Control and Soft Computing, 1-3 juillet 2020, Bragança, Portugal.
- T. Azar, L. Perez, C. Prieur, E. Moulay, et L. Autrique, Quasi-online disturbance rejection for nonlinear parabolic PDE using a receding time horizon control, soumis à ECC21, 29 juin - 2 juillet 2021, European Control Conference, Rotterdam de Doelen, Pays-Bas. (accepté).





---

# Chapitre 1

## Stabilisation à zéro en temps fini

### Partie A : Méthodes hors ligne

#### 1.1 La problématique

Les équations différentielles (ED) sont rencontrées dans divers domaines et permettent la modélisation mathématique de nombreux phénomènes. Les domaines applicatifs concernés sont très différents : mécanique (comportement élastique, plastique, déformation, chocs, mécanique des fluides, ...), chimie (réaction-diffusion, combustion, thermodynamique, ...), propriétés et structures des matériaux, électromagnétisme, météorologie, économie, propagation d'un phénomène (maladie, migration, incendie, ...), biomédecine, ingénierie (génie civil, automobile, spatiale, ...).

La modélisation d'un phénomène « physique » à l'aide d'objets mathématiques permet de mieux comprendre ses dynamiques, d'effectuer des simulations numériques et ainsi prédire son comportement. De plus, les solutions (exactes ou numériques) des EDs jouent un rôle important dans la bonne compréhension des caractéristiques de nombreux phénomènes et processus.

A titre d'exemples, on peut citer quelques équations comme les équations d'onde, les équations de Navier-Stokes décrivant le mouvement des substances fluides visqueuses, les équations de Saint-Venant décrivant l'écoulement sous une surface de pression dans un fluide dans une direction bien définie, et l'équation de la chaleur décrivant l'évolution d'une quantité de chaleur ...

Les EDs peuvent être ordinaires (EDOs) ou bien des équations aux dérivées partielles (EDPs). Une EDP est une relation entre une fonction de plusieurs variables et ses dérivées. Les problèmes qui consistent à trouver la solution d'une équation différentielle vérifiant une certaine condition initiale sont appelés des problèmes de Cauchy. Les méthodes mathématiques relatives à la résolution des problèmes de Cauchy

relèvent en général de l'analyse fonctionnelle et considèrent des fonctions éléments d'espaces de Sobolev. L'ouvrage de R. Dautray et J.L. Lions, intitulé « Analyse mathématique et calcul numériques pour les sciences et les techniques », en trois tomes (ed. Masson, 1984) est incontournable.

### 1.1.1 Quelques exemples d'EDPs

- Équation des cordes vibrantes

L'exemple suivant est extrait de (Schwartz,1987). Considérons une corde de longueur  $L$  en  $m$  tendue entre deux points  $A$  et  $B$ . L'abscisse du point  $A$  (resp.  $B$ ) est  $x = 0$  (resp.  $x = L$ ). La densité linéaire de la corde est homogène d'unité  $Kg.m^{-1}$  et notée  $\rho_0$ . Lorsque la corde vibre dans l'espace chaque point matériel a pour coordonnées  $(x, y, z)$ .

Notons  $\vec{u}$  le vecteur de coordonnées  $(x, t)$ . Le vecteur  $\vec{u}$  est une fonction vectorielle qui dépend de l'espace  $x$  et du temps  $t$ .

Soit  $T$  la tension de la corde exprimée en  $Kg.m.s^{-2}$  au point  $x$  à l'instant  $t$ . En négligeant l'action de la pesanteur sur la corde, en supposant la tension constante  $T = T_0$  et en supposant le mouvement de la corde petit, on obtient l'EDP suivante :

$$\frac{\rho_0}{T_0} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

Si le mouvement de la corde est de grande amplitude alors le système précédent n'est plus valide et l'EDP obtenue est compliquée (en particulier non-linéaire).

L'équation (1.1) peut être résolue par la méthode de propagation en introduisant  $v = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}$  qui est la vitesse de propagation des ondes transversales dans la corde et exprimée en  $m.s^{-1}$ .

Ce type d'équation permet de formuler le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver la solution de l'équation des cordes vibrantes (1.1)} \\ \text{connaissant } \vec{u}(x, 0) = \vec{u}_0(x) \text{ la forme de la corde à l'instant } t = 0 \\ \text{connaissant } \frac{\partial \vec{u}(x, 0)}{\partial t} = \vec{u}_1(x) \text{ la distribution des vitesses le long de la corde à } t = 0 \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Le problème de Cauchy (1.2) peut aussi être résolu par la méthode des séries de Fourier.

- Système de Stokes

Cet exemple est extrait de (Raviart, Thomas, 1988). Le système suivant (1.3) décrit le mouvement permanent d'un fluide incompressible visqueux confiné dans l'espace  $\Omega \subset \mathcal{R}^n$  (de frontière  $\Gamma$ ) et

soumis à une densité volumique  $\vec{f}$  de forces extérieures, d'unité  $N.m^{-3}$ , en respectant l'hypothèse où ce mouvement est lent et exprimé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mu\Delta u_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i \quad \forall (x_i)_{i=1,\dots,n} \in \Omega \text{ et } t \in \mathcal{R}^+ \\ \text{div}(\vec{u}) = 0 \quad \forall (x_i)_{i=1,\dots,n} \in \Omega \text{ et } t \in \mathcal{R}^+ \\ u_i = 0 \quad \forall (x_i)_{i=1,\dots,n} \in \Gamma \text{ et } t \in \mathcal{R}^+ \\ \vec{u} = \vec{u}_0 \quad \forall (x_i)_{i=1,\dots,n} \in \Omega \text{ et } t = 0 \end{array} \right. \quad (1.3)$$

La vitesse en  $m.s^{-1}$  est notée  $\vec{u} = (u_i)_{i=1,\dots,n}$ , la vitesse initiale  $\vec{u}_0$  est supposée connue,  $\mu$  est la viscosité du fluide exprimée en  $1PI = Pa \cdot s$ , ( $PI$ ) est le poiseuille et  $p$  sa pression en  $Pa$ . Tandis que la divergence  $\text{div}(\vec{u}) = \sum_{i=1,\dots,n} \frac{du_i}{dx_i}$  est un scalaire qui mesure la variation première du volume le long des trajectoires du champ (la somme des dérivées), ici la divergence est nulle, alors la densité ne varie pas.

D'une manière générale, la divergence est liée en physique à l'expression locale de la propriété de conservation d'une grandeur. En considérant une surface fermée quelconque ( $\mathbf{S}$ ), la variation d'une grandeur conservative dans le volume fermé par cette surface est par définition d'une grandeur conservative, due aux échanges avec l'extérieur (il n'existe pas de sources de création ou d'annihilation d'une grandeur conservative). Le bilan de cette grandeur entre deux instants s'écrit donc uniquement comme la somme du flux de cette grandeur à travers la surface fermée ( $\mathbf{S}$ ) et de la variation temporelle de la grandeur à l'intérieur de la surface ( $\mathbf{S}$ ).

- Équation des ondes

L'exemple suivant est extrait de (Schwartz, 1987). L'équation (1.4) est appelée l'équation des ondes dans le domaine  $\Omega \subset \mathcal{R}^3$  :

$$\frac{F}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (1.4)$$

où  $u(x, y, z, t) \in \mathcal{R}^3$  est une petite déformation,  $F$  la tension superficielle en  $N.m^{-1}$  ou  $J.m^{-2}$  et  $\rho$  la masse spécifique superficielle en  $Kg.m^{-1}$ .

Le problème de Cauchy suivant peut alors être formulé considérant une condition de Neumann homogène sur les bords de  $\Omega$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver la solution de l'équation des ondes (1.4)} \\ \text{connaissant } u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z) \text{ et } \frac{\partial u(x, y, z, 0)}{\partial t} = u_1(x, y, z) \text{ à l'instant } t = 0 \end{array} \right. \quad (1.5)$$

- Electromagnétisme et équations de Maxwell

L'exemple suivant est extrait de (Dautray, Lions, 1984). Un conducteur cylindrique occupant le domaine  $\Omega \subset \mathcal{R}^3$  (de frontière  $\Gamma$ ) est placé dans un champ électrique extérieur imposé  $E_1(t)$  exprimé en  $v.m^{-1}$  parallèle à l'axe du conducteur et constant dans tout l'espace,  $(x, y, z) \in \Omega$  est la variable d'espace et  $t \in \mathcal{R}^+$ . Les équations d'évolution du champ électrique  $E(x, y, z, t)$  sont :

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{1}{\mu\sigma} \Delta E = 0 \quad \text{et} \quad \text{div}(E) = 0 \quad (1.6)$$

avec  $\mu$  la perméabilité magnétique en  $m.Kg.s^{-2}.A^{-2}$  ou bien  $4\pi 10^{-7}$  et  $\sigma$  une constante positive caractéristique du milieu considéré appelée constante de conductivité exprimée en  $S.m^{-1}$  (siemens par mètre).

Le champ électrique  $E$  est à flux conservatif : son flux sur une surface fermée entourant un volume est globalement nul ; le flux électrique entrant dans le volume est donc égal au flux qui en sort ; en conséquence, on ne peut trouver de monopôles électriques (il n'y a pas de charge).

A savoir que les espaces de Sobolev ne sont pas précisés mais font partie du problème de Cauchy.

Ce type d'équation permet de formuler le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Déterminer } E(x, y, z, t) \text{ solution de (1.6)} \\ \text{connaissant la condition initiale } E(x, y, z, 0) = E_0(x, y, z) \text{ avec } \text{div}(E_0) = 0 \\ \text{et considérant la condition au bord } v \wedge E(x, y, z, t) = v \wedge E_1(x, y, z, t) \end{array} \right. \quad (1.7)$$

où  $v$  est la normale extérieure à  $\Gamma$  en  $(x, y, z)$ .

- Équation de la chaleur

L'exemple suivant est extrait de (Raviart, Thomas, 1988). Il modélise mathématiquement l'évolution au cours du temps  $t$  de la température  $\theta$  exprimée en  $K$  d'un milieu continu  $\Omega \subset \mathcal{R}^3$  et qui est soumise à une source de chaleur  $f$  en  $W.m^{-2}.K^{-1}$ . Lorsque toutes les constantes physiques sont prises égales à 1 et que la température est fixée nulle au cours du temps sur la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$ , cette évolution est

décrite par le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta = f & \forall (x, y, z, t) \in \Omega \times \mathcal{R}^+ \\ \theta = 0 & \forall (x, y, z, t) \in \Gamma \times \mathcal{R}^+ \\ \theta(x, y, z, 0) = \theta_0(x, y, z) & \forall (x, y, z, t) \in \Omega \end{cases} \quad (1.8)$$

où  $\theta_0$  la température initiale est donnée.

- Induction magnétique dans un plasma

L'exemple suivant est extrait de (Dautray, Lions, 1984). On note  $B(x, y, z, t) \in \mathcal{R}^3$  l'induction magnétique dans un plasma en  $T$  (Tesla) occupant le domaine  $\Omega \subset \mathcal{R}^3$  et dont le bord est noté  $\Gamma$ . Il peut s'agir par exemple d'un réacteur de fusion nucléaire appelé Tokamak. Le problème de Cauchy posé consiste à déterminer  $B$  (connaissant l'induction magnétique initiale  $B(x, y, z, 0) = B_0(x, y, z)$  avec  $\operatorname{div}(B_0) = 0$ ) suivant ce système :

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial t} + \operatorname{rot} \left( \frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \left( \frac{1}{\mu} B \right) \right) = 0 & \forall (x, y, z, t) \in \Omega \times \mathcal{R}^+ \\ \operatorname{div}(B) = 0 & \forall (x, y, z, t) \in \Omega \times \mathcal{R}^+ \\ v \wedge \operatorname{rot} B = 0 & \forall (x, y, z, t) \in \Gamma \times \mathcal{R}^+ \end{cases} \quad (1.9)$$

avec  $\mu$  la perméabilité magnétique de  $4\pi 10^{-7}$  unité  $SI$  et  $\sigma$  une constante positive caractéristique du milieu considéré appelée constante de conductivité en  $S.m^{-1}$  (siemens par mètre).

Les exemples précédents illustrent la grande diversité des phénomènes qui peuvent être décrits par des modèles de connaissance basés sur des EDPs. De tels modèles mathématiques permettent de disposer d'outils prédictifs de comportement, d'optimiser des géométries ou des procédés, d'étudier des scénarios de défaillance . . . Dans ce qui suit, la maîtrise des systèmes décrits par des EDPs est abordée en considérant la théorie du contrôle qui a pour objet l'étude des possibilités d'actions sur un système afin que celui-ci fonctionne dans un but désiré, « au mieux », « au moindre coût », etc.

### 1.1.2 Stabilisation à zéro

Parmi les différents objectifs, il est possible de chercher à ce que l'état du système (dont l'évolution est décrite par un ensemble d'EDPs) soit amené à un état désiré au bout d'un temps donné grâce

à un contrôle opérant sur une sous-région du domaine géométrique ou sur la frontière de celui-ci. Il s'agit d'une stratégie de contrôle considérant un horizon temporel fini. Elle peut par exemple permettre d'accélérer la convergence du système vers zéro ou encore de stabiliser un système d'EDPs paraboliques instable. La notion de stabilité d'un système dynamique caractérise le comportement de ses trajectoires à partir de points d'équilibre. L'analyse de la stabilité permet par exemple de prédire l'évolution de l'état à partir d'un état initial proche d'un point d'équilibre.

De manière générale, un système d'EDP peut être :

- stable : si l'état du système tend vers 0 lorsque le temps tend vers l'infini ;
- instable : si en l'absence de contrôle l'état du système ne tend pas vers 0.

On peut citer de manière non exhaustive quelques références importantes concernant le contrôle d'EDPs et leur stabilisation : l'article (Russell, 1978), les articles de (Lions, 1988), (Coron, D'andrea Novel 1998), (Coron, 2007), ainsi que les articles de (Rosier, Zhang, 2006) et (Trélat, 2018).

En ce qui concerne la stabilisation d'une EDP parabolique à l'aide d'un contrôle adapté (frontière ou interne, ponctuel ou non), les méthodes de backstepping ont été développées depuis les travaux de (Krstic, 1995). L'approche de type backstepping est utilisée pour concevoir des lois de rétroaction stabilisant les systèmes de contrôle modélisés par des EDPs. « Miroslav Krstic » et ses collaborateurs ont présenté une amélioration de la méthode en se servant de la transformée de Volterra du second type, provenant de la méthode classique de backstepping appliquée à une discrétisation spatiale de l'EDP sachant que l'équation d'origine est supposée asymptotiquement stable.

Les premières applications de la méthode de backstepping ont été proposées pour les équations de la chaleur avec la commande au bord. Pour appliquer cette méthode, il faut :

1. Identifier dans l'EDP les termes indésirables qui provoquent l'instabilité du système ;
2. Choisir un système cible dans lequel les termes indésirables doivent être éliminés par la transformée d'état ;
3. Rechercher la transformation d'état basée sur un opérateur de Volterra. La transformation de Volterra est « triangulaire » ou « spatialement causale » ;
4. Obtenir un retour d'information sur la transformation de Volterra au bord. La transformation seule ne peut pas éliminer les termes indésirables, mais la transformation les amène à la frontière, donc le contrôle au bord peut les annuler.

La méthode de backstepping est capable d'éliminer les termes déstabilisateurs agissant dans le domaine

intérieur en utilisant un contrôle qui agit uniquement sur la frontière (Liu, Krstic, 2000). Une transformation d'état, qui implique un opérateur intégral de Volterra « absorbe » les termes déstabilisateurs agissant dans le domaine et les amène à la frontière, où le contrôle peut les éliminer. Le but de l'approche backstepping est de contrôler la trajectoire du système le long d'un système cible stable, par élimination de la source d'instabilité. Les travaux plus récents de (Woittennek, 2014) concernent la détermination d'un contrôle interne ponctuel basé sur une méthode de backstepping.

De manière théorique, l'étude de la nulle contrôlabilité de l'équation de la chaleur est abordée dans les travaux de (Rosier, 2007). Dans ce qui suit, une approche numérique est proposée.

## 1.2 Détermination d'un contrôle par une approche numérique

### 1.2.1 Modélisation du système thermique

Dans ce qui suit, la variable d'espace est notée  $x$  avec  $x \in [0, L]$  et la variable de temps est notée  $t$  avec  $t \in [0, t_f]$ . Considérons le problème de la barre chauffante dans un domaine 1D de longueur  $L = 0.1 \text{ m}$  dans laquelle la distribution de température initiale  $\theta_0(x)$  (à  $t = 0$ ) est connue.

Sur l'intervalle  $[a, b]$  de la barre (Figure 1.1) où  $0 < a < b < L$ , le flux  $u(x, t)$  est appliqué considérant l'hypothèse  $u(a, t) = u(b, t) = 0$  et que  $u(x, t) = 0$  pour  $x \notin [a, b]$ .

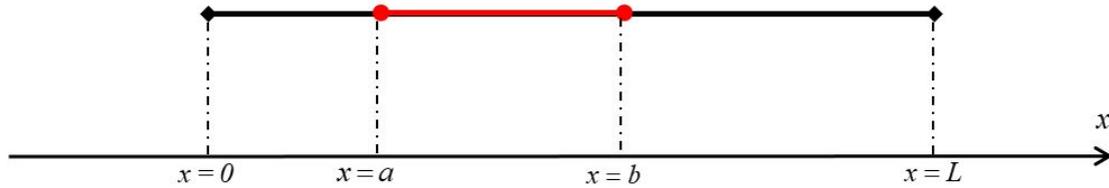


Figure 1.1 – Domaine étudié.

Cette configuration physique peut se modéliser mathématiquement par le système d'EDPs suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho C \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} = K\theta(x, t) + u(x, t)|_{x \in ]a, b[} & \forall (x, t) \in [0, L] \times [0, t_f] \\ \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0 & \forall t \in [0, t_f] \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) & \forall x \in [0, L] \end{array} \right. \quad (1.10)$$

avec  $\rho C$  est la masse volumique du matériau en  $J.m^{-3}.K^{-1}$ ,  $\lambda$  la conductivité thermique en  $W.m^{-1}.K^{-1}$ ,  $\theta(x, t)$  la température au point  $x$  à l'instant  $t$ ,  $K$  un coefficient d'échange lié aux transferts,  $u(x, t)$  le

flux appliqué uniquement sur  $[a, b] \subset ]0, L[$  et  $\theta_0(x)$  la température initiale.

La première équation est de type parabolique (il s'agit de l'équation de la chaleur).

Pour des raisons de continuité, on admet que la température initiale aux bords est imposée par les conditions de Dirichlet homogènes :  $\theta(0,0) = \theta(L,0) = 0$ .

Dans de nombreuses études, le système suivant est considéré :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \theta(\tilde{x}, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}} - \frac{\partial^2 \theta(\tilde{x}, \tilde{t})}{\partial \tilde{x}^2} = \tilde{K} \theta(\tilde{x}, \tilde{t}) + u(\tilde{x}, \tilde{t}) & \forall (\tilde{x}, \tilde{t}) \in [0, 1] \times [0, \tilde{t}_f] \\ \theta(0, \tilde{t}) = \theta(1, \tilde{t}) = 0 & \forall \tilde{t} \in [0, \tilde{t}_f] \\ \theta(\tilde{x}, 0) = \theta_0(\tilde{x}) & \forall \tilde{x} \in [0, 1] \end{array} \right. \quad (1.11)$$

Le système (1.11) correspond bien au système (1.10) en tenant compte des changements de variables suivants :  $\tilde{x} = \frac{x}{L}$  et  $\tilde{t} = \frac{\lambda t}{\rho C L^2}$  et les changements de notations :  $\tilde{t}_f = \frac{\lambda t_f}{\rho C L^2}$  et  $\tilde{K} = \frac{K L^2}{\lambda}$ . A noter qu'en général, compte tenu des valeurs physiques de  $\rho C$ ,  $\lambda$ ,  $t_f$  et  $L$ , la valeur du temps final  $\tilde{t}_f$  est extrêmement modifiée.

En ce qui concerne  $(\tilde{x}, \tilde{t})$ , les formules sont issues des changements de variable (en  $x$  et en  $t$ ) qui permettent de passer du système (1.10) pour lesquels les coefficients ont un sens physique au système (1.11) où les coefficients sont normalisés : chaleur volumique, conductivité, longueur de la barre égaux à 1.  $\tilde{t}$  n'a plus alors la dimension d'un temps, elle est sans unité.

En ce qui concerne les valeurs de  $K$ , du point de vue pratique le terme  $K\theta$  décrit en général un terme source : avec  $K$  positif, il s'agit d'un chauffage. Ce dernier peut venir par exemple d'air chaud envoyé sur le domaine. Cette condition environnementale est indépendante des propriétés du matériau.

La stabilisation de ce type d'EDPs est le sujet principal de ce document. Elle a fait l'objet de nombreuses recherches approfondies depuis plusieurs décennies. Afin de mettre en évidence que le système (1.10) ne se stabilise pas à zéro en absence du contrôle c'est à dire lorsque  $u(x, t) = 0$ , on résout le système en considérant différentes valeurs de  $K$ .

On en déduit que le signe de ce coefficient détermine la convergence ou non vers zéro :

- Si  $K < 0$ , le terme  $K\theta(x, t)$  décrit un échange convectif. Si la température est positive alors ce terme décrit une perte de chaleur par convection qui refroidit le matériau. Si la température est négative, ce même terme décrit un réchauffement du matériau par convection. Ainsi pour  $K < 0$ , l'état du système tend naturellement vers 0 et le système est naturellement stable ;
- Si  $K = 0$ , les conditions de Dirichlet homogènes entraînent la convergence de la température vers

0. Ces conditions aux bords stabilisent le système par conduction (les transferts thermiques se faisant naturellement depuis les températures les plus chaudes vers les températures les plus basses) ;

- Si  $K > 0$ , le terme  $K\theta(x, t)$  contribue à réchauffer le matériau lorsque la température  $\theta(x, t)$  est positive et à le refroidir lorsque la température  $\theta(x, t)$  est négative. Ce terme engendre alors une instabilité qui rentre en compétition avec les conditions de Dirichlet homogènes qui elles tendent à favoriser la convergence de la température vers 0.

Ainsi, on peut dire qu'il existe un seuil  $K_s > 0$  tel que si  $K > K_s > 0$ , le système devient instable.

Dans ce cas,  $\|\theta(x, t)\|_{L^2([0, L])} = \left( \int_0^L (\theta(x, t))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$  ne tend pas vers 0.

Alors que si  $K < K_s$  :

$$\|\theta(x, t)\|_{L^2([0, L])} \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0.$$

Dans ce qui suit, on suppose que  $L = 0.1$  et que la température initiale  $\theta_0(x)$  est :

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x) = 25 \left( \frac{1}{2} \exp \frac{-(x - 0.02)^2}{5 \times 10^{-5}} + \exp \frac{-(x - 0.05)^2}{10^{-4}} \right).$$

Le graphe montrant la distribution initiale de cette température est donné sur la figure 1.2.

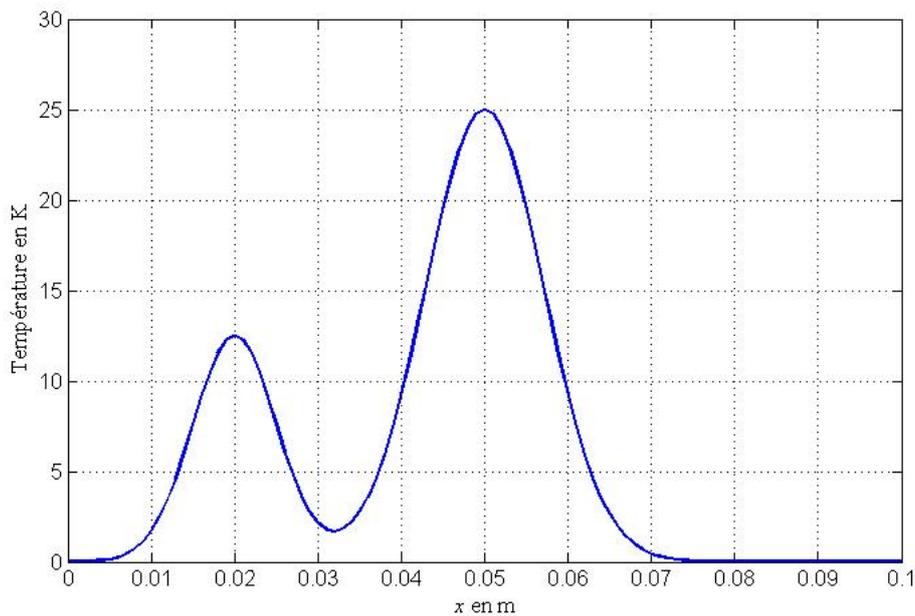


Figure 1.2 – Température initiale.

Afin de mettre en évidence l'influence du coefficient  $K$  sur la stabilité du système (1.10), on considère 3 cas :  $K = 0$ ,  $K = -10^5$  et  $K = 33 \times 10^3$ .

Le problème direct est résolu pour  $K = 0$  en considérant les coefficients ci-dessous avec  $t_f = 100$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 10^6 \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} - 33 \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} = 0 & \forall (x, t) \in [0, 0.1] \times [0, 100] \\ \theta(0, t) = \theta(0.1, t) = 0 & \forall t \in [0, 100] \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) & \forall x \in [0, 0.1] \end{array} \right.$$

Ce problème direct est résolu en utilisant la méthode des éléments finis (code « Comsol » interfacé avec le programme « Matlab »). Ainsi, la distribution de la température le long de la plaque est représentée jusqu'au temps final par le graphe ci-après.

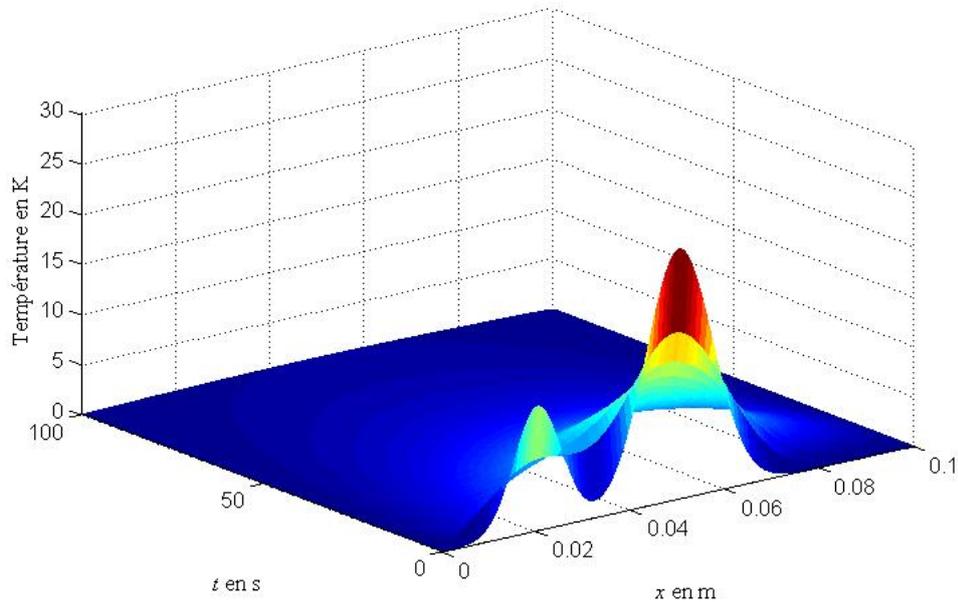


Figure 1.3 – Évolution de la température (1<sup>er</sup> cas :  $K = 0$ ).

Comme le montre la figure 1.3 la température tend vers zéro. En effet, les deux bords de la plaque étant maintenus à température nulle, et en absence de toute contribution extérieure, la température  $\theta$  va décroître à partir de sa température initiale  $\theta_0$  vers 0. Ceci peut aussi être visualisé par le graphe de la figure 1.4.

Abordons ensuite le deuxième cas où  $K = -10^5$ . Le système d'EDPs considéré est alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 10^6 \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} - 33 \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} = -10^5 \theta(x, t) & \forall (x, t) \in [0, 0.1] \times [0, 100] \\ \theta(0, t) = \theta(0.1, t) = 0 & \forall t \in [0, 100] \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) & \forall x \in [0, 0.1] \end{array} \right.$$

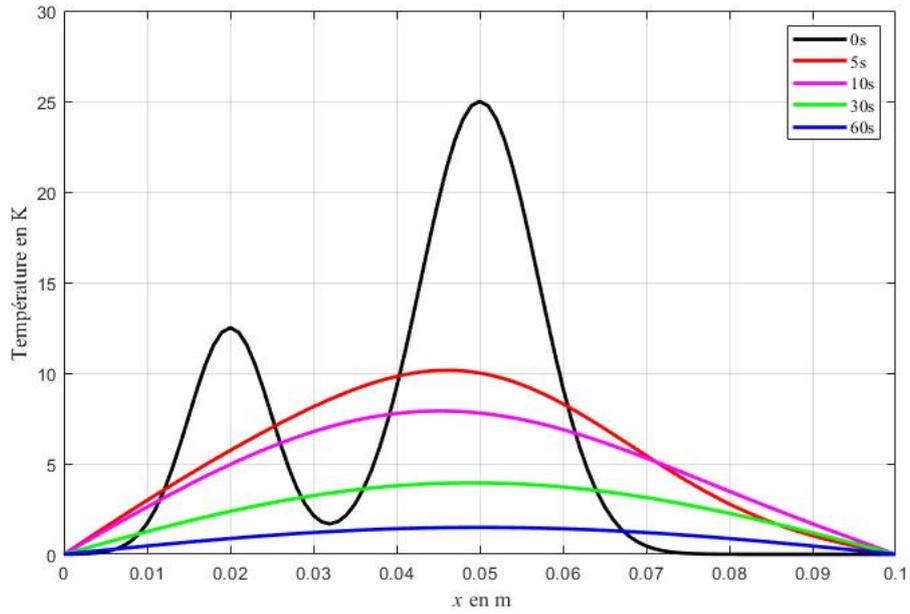


Figure 1.4 – Évolution de la température pour différents instants.

La résolution numérique de ce système conduit aux résultats du graphe de la figure 1.5.

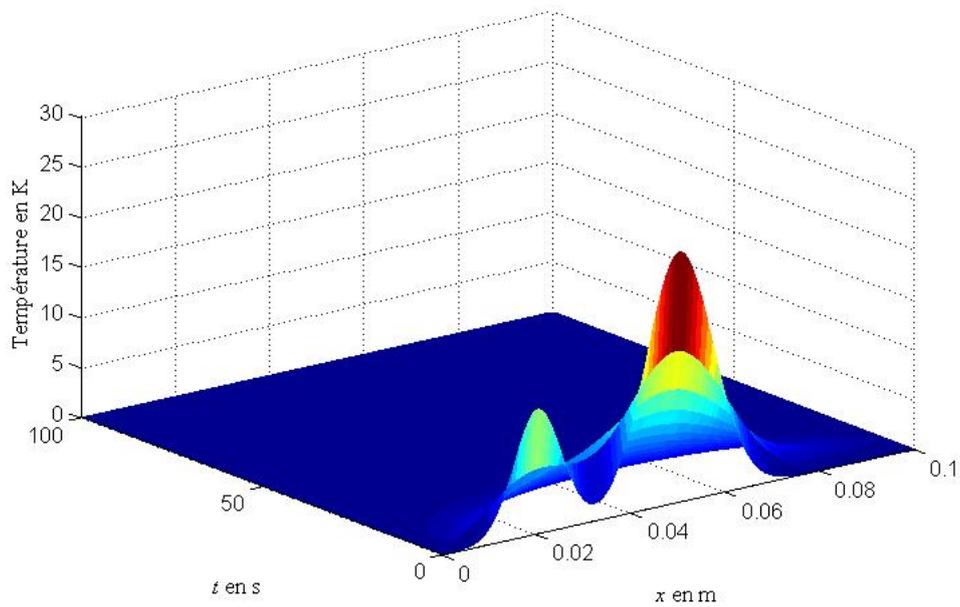


Figure 1.5 – Évolution de la température (2<sup>nd</sup> cas :  $K = -10^5$ ).

On observe que le système est stable et comme  $K = -10^5$ , les valeurs  $-10^5\theta(x, t)$  décrivent un phénomène convectif qui accélère la convergence vers son état final stable  $\theta(x, t_f) = 0$ .

Pour le troisième cas où  $K = 33 \times 10^3$ , le système est :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 10^6 \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} - 33 \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} = 33 \times 10^3 \theta(x,t) & \forall (x,t) \in [0,0.1] \times [0,100] \\ \theta(0,t) = \theta(0.1,t) = 0 & \forall t \in [0,100] \\ \theta(x,0) = \theta_0(x) & \forall x \in [0,0.1] \end{array} \right.$$

L'évolution de la température est montrée par le graphe de la figure 1.6.

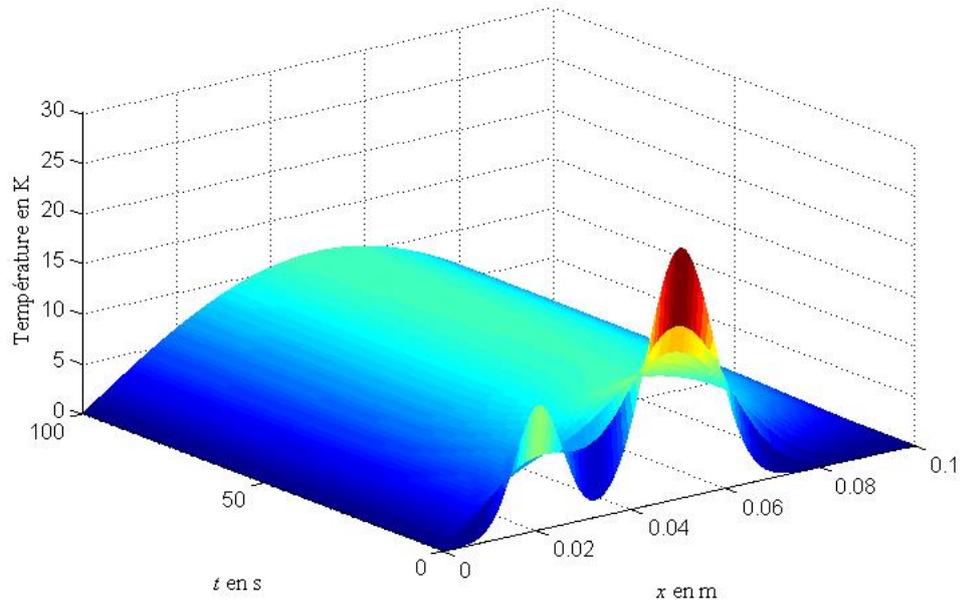


Figure 1.6 – Évolution de la température (3<sup>ème</sup> cas :  $K = 33 \times 10^3$ ).

On remarque que passée l'étape transitoire durant laquelle la conduction a atténué l'effet de la distribution initiale de température, la température ne converge pas vers zéro.

Afin de visualiser l'existence du seuil d'instabilité  $\hat{K}$ , l'évolution de la norme des températures

$$\|\theta(x,t)\|_{L^2([0,L])} = \left( \int_0^L (\theta(x,t))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

en fonction du temps est présentée ci-après. Dans les mêmes conditions que précédemment, on résout numériquement le système (1.10) en considérant six cas :

- 1<sup>er</sup> cas :  $K = -10^6$
- 2<sup>ème</sup> cas :  $K = -10^5$
- 3<sup>ème</sup> cas :  $K = 0$
- 4<sup>ème</sup> cas :  $K = 20 \times 10^3$

- 5<sup>ème</sup> cas :  $K = 33 \times 10^3$
- 6<sup>ème</sup> cas :  $K = 35 \times 10^3$

Le graphe qui montre l'évolution de  $\|\theta(x,t)\|_{L^2([0,0.1])}$  en fonction du temps pour les six valeurs de  $K$  est donné sur la figure 1.7.

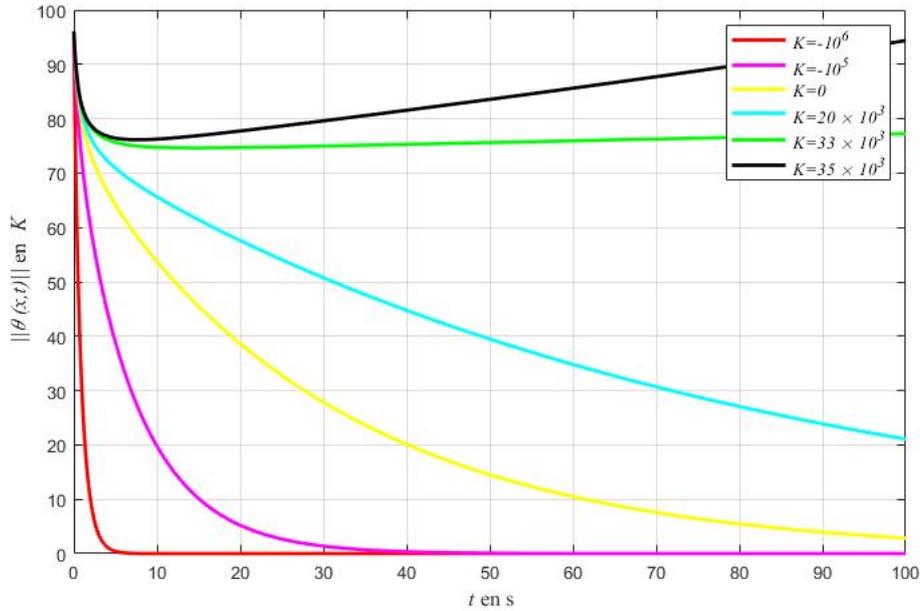


Figure 1.7 – Évolution de la norme  $\|\theta(x,t)\|_{L^2([0,0.1])}$  en fonction du coefficient  $K$ .

On remarque que la norme  $\|\theta(x,t)\|_{L^2([0,0.1])}$  décroît en fonction du temps pour les quatre premiers cas ( $K \leq 20 \times 10^3$ ). Par contre pour les deux derniers cas considérés, la température  $\theta(x,t)$  ne tend pas vers zéro. Ainsi, pour  $K \geq 33 \times 10^3$  : le système ne se stabilise pas à zéro. Ainsi dans le cas étudié, on peut considérer que le seuil d'instabilité est  $20 \times 10^3 < \hat{K} < 33 \times 10^3$ .

Le seuil d'instabilité  $\hat{K}$  dépend des paramètres thermophysiques du système étudié et peut dans certains cas académiques être calculé théoriquement (Goncalvès da Silva, 2007).

Dans ce qui suit une méthode de stabilisation par un contrôle zone est proposée (lorsque  $K > \hat{K}$ ). Il s'agit de déterminer le flux  $u(x,t)$  à appliquer sur l'intervalle de la barre  $[a,b]$  où  $0 < a < b < 0.1$  avec  $u(a,t) = u(b,t) = 0$  de manière qu'à l'instant final, la température soit nulle dans toute la barre :  $\theta(x,t_f) = 0, \forall x \in [0,0.1]$ .

### 1.2.2 Formulation du problème inverse

En science, un problème inverse est formulé lorsqu'il s'agit de déterminer les causes d'un phénomène à partir des observations expérimentales de ses effets. Par exemple, en sismologie la localisation de l'origine d'un tremblement de terre à partir de mesures faites par plusieurs stations sismiques réparties sur la surface du globe terrestre est un problème inverse (Averill, et al., 2007). On retrouve des problèmes inverses dans de nombreux domaines scientifiques, en particulier dans l'étude de systèmes complexes pour lesquels on n'a accès qu'à un petit nombre de mesures. On peut citer par exemple l'analyse des tissus organiques en imagerie médicale, l'étude de l'univers en cosmologie, la conception d'une salle de concert en acoustique architecturale, ... (Ambarzumian, 1929), (Bertero, Boccacci, 1998). De nombreuses approches ont été développées pour la résolution de problèmes inverses. Les dernières décennies ayant connu un essor prodigieux des outils informatiques, la mise en oeuvre d'outils numériques a été largement facilitée. La résolution du problème inverse passe en général par une étape initiale de modélisation du phénomène. Cela conduit à la formulation du problème direct qui décrit comment les paramètres du modèle se traduisent en effets observables. Ensuite, à partir des mesures obtenues sur le phénomène réel, la démarche va consister à approcher au mieux les paramètres qui permettent de rendre compte de ces mesures. Cette résolution peut se faire par simulation numérique ou de façon analytique. La résolution mathématique est rendue difficile par le fait que les problèmes inverses sont en général des problèmes mal posés, c'est-à-dire que les seules observations expérimentales ne suffisent pas à déterminer parfaitement tous les paramètres du modèle (Morozov, 1994), (Alifanov, 1988), (Alifanov, 1994) et (Alifanov, 1995). De plus une complexité supplémentaire apparaît lorsque le problème direct comporte des non linéarités.

A savoir qu'un problème de transfert de chaleur est « bien posé » si la solution des équations décrivant ces transferts :

- existe (condition de solvabilité) ;
- est unique (condition d'unicité) ;
- dépend de façon continue de la variation des conditions aux limites (condition de stabilité).

Si l'une des exigences ci-dessus est absente, le problème thermique devient « mal posé ». Telle situation est observée dans la résolution des problèmes inverses de la conduction de la chaleur (PICC). En effet, la condition de stabilité (Hadamard, 1932) n'est pas toujours vérifiée car de faibles perturbations sur les mesures engendrent de grandes variations sur les paramètres à identifier.

Tous les problèmes inverses peuvent être divisés en trois classes :

- les problèmes inverses qui se posent dans le diagnostic et l'identification des processus ;
- les problèmes inverses qui se posent dans la conception des produits d'ingénierie ;
- les problèmes inverses qui se posent dans le contrôle des processus et des systèmes.

Les problèmes inverses de la première classe sont généralement des recherches expérimentales. Dans certains cas, il est nécessaire de reconstruire les caractéristiques causales sur la base de caractéristiques d'effet « de sortie » mesurées. Ces problèmes sont primaires, à la fois par rapport aux problèmes directs et par rapport aux autres classes des problèmes inverses car ils sont liés à la détermination des différentes caractéristiques du modèle.

Le traitement et l'interprétation des résultats de mesure peuvent être effectués par des méthodes basées sur la résolution de problèmes de conduction thermique inverse pour la récupération des champs de température et des flux de chaleur. Le problème de la reconstruction du champ de température et du champ de flux thermique dans un corps solide à partir des résultats des mesures de la température intérieure est souvent réduit à une solution d'un PICC.

Dans de nombreuses situations pratiques, il est impossible de mesurer directement les flux thermiques sur les surfaces des structures composites étudiées notamment dans le cas de procédés thermocinétiques à l'intérieur des matériaux. Le seul moyen souvent utilisé pour surmonter ces difficultés est la mesure indirecte. Ce type de mesures est généralement formulé comme la solution des problèmes de transfert thermique inverse. En résolvant ces problèmes inverses, les conditions aux limites et la distribution de température instable sont reconstruites à l'aide de mesures de température intérieure dans les structures. De tels problèmes sont mal posés au sens mathématique et leur caractéristique principale se manifeste dans les instabilités de résolution. La méthode générale de régularisation itérative concerne l'application à l'estimation du flux thermique externe.

Dans notre problème inverse, cela consiste à identifier le flux  $u(x, t)$ ,  $\forall (x, t) \in ]a, b[ \times ]0, t_f[$  qui minimise le critère  $J(\theta) = \frac{1}{2} \|\theta(x, t_f)\|_{L^2([0, L])}^2 = \frac{1}{2} \left( \int_0^L (\theta(x, t_f))^2 dx \right)$  à l'instant final.

En effet, si  $J(\theta)$  est proche de zéro alors l'état  $\theta(x, t_f)$  est proche de zéro.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Identifier la fonction } u(x, t) \text{ telle que } J(\theta, u) = \frac{1}{2} \left( \int_0^L (\theta(x, t_f, u))^2 dx \right) \text{ soit} \\ \text{minimale avec la contrainte : } \theta(x, t) \text{ est la solution de (1.10) du problème direct qui} \\ \text{dépend de } u(x, t). \end{array} \right. \quad (1.12)$$

1.2.3 La méthode de régularisation itérative du gradient conjugué

L'identification de paramètres distribués (dépendant continûment de l'espace et du temps) dans des systèmes décrits par des EDPs non linéaires est, en général, ardue. La méthode du gradient conjugué (MGC) permettant la minimisation itérative de l'erreur de sortie présente des propriétés régularisantes dans le cadre des PICC (Allaire, 2005). Il s'agit d'une méthode de descente nécessitant le calcul du gradient de la fonctionnelle à minimiser suivant une technique basée sur l'emploi du gradient (Di Menza, 2009). Pour la mise en oeuvre des méthodes de gradients (Leborgne, 2018), (Rouquette, 2003), il est nécessaire de discrétiser la fonction à identifier  $u(x, t)$  qui est alors exprimée (sans pertes de généralités) sous forme de fonction continue linéaire par morceaux. On l'exprime dans la base des fonctions chapeaux :

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_t} u_{ij}(x) s_i(x) s_j(t) \quad \forall (x, t) \in ]a, b[ \times ]0, t_f[ \quad (1.13)$$

où  $N_x$  et  $N_t$  sont liés aux discrétisations spatiales et temporelles des fonctions inconnues  $u(x, t)$ .  $\{s_i(x)\}_{i=1, \dots, N_x}$  est la base des fonctions chapeaux pour la discrétisation spatiale et  $\{s_j(t)\}_{j=1, \dots, N_t}$  est la base des fonctions chapeaux pour la discrétisation temporelle.

Un exemple est donné sur la figure 1.8, pour un intervalle temporel  $[0, t_f] = [0, 20]$  discrétisé toutes les 4 secondes. A noter que l'on impose que  $u(x, 0) = u(x, t_f) = 0$ , comme condition initiale et finale de la commande. Sinon, il faudrait identifier ces inconnues en rajoutant les fonctions chapeaux  $s_0(t)$  et  $s_5(t)$  de la figure 1.8 à l'ensemble des inconnues  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$ ,  $s_3(t)$  et  $s_4(t)$ .

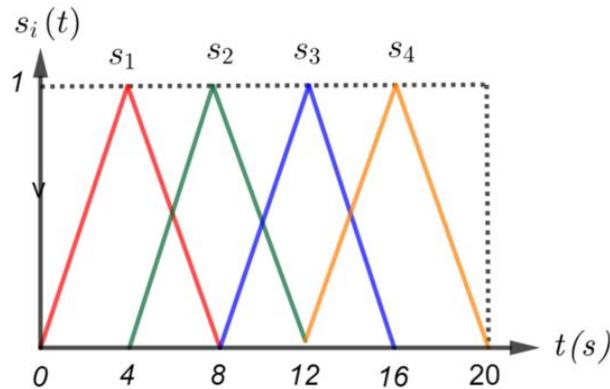


Figure 1.8 – Exemple de la base des fonctions chapeaux dans le domaine temporel.

La même remarque peut être considérée pour la variable d'espace car  $u(a, t) = u(b, t) = 0$ . Ces deux hypothèses ne réduisent en rien la généralité de la méthode développée ci-après.

Le contrôle  $u(x, t)$  est ainsi parfaitement déterminé par la connaissance de  $\mathbf{u} = [u_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,N_x \\ j=1,\dots,N_t}}$ . La minimisation du critère  $J(\theta, u) = \frac{1}{2} \left( \int_0^{0.1} (\theta(x, t_f; u))^2 dx \right)$  est réalisée à l'aide de la méthode itérative du gradient conjugué. Elle est utilisée dans le but de minimiser itérativement l'erreur quadratique entre la température prédite et la température mesurée. Cette méthode consiste à la résolution itérative de trois problèmes bien posés. Elle a été utilisée dans le domaine thermique dans les travaux de (Jarny, 1991).

A chaque nouvelle itération  $k + 1$ , la fonction inconnue est modifiée de la manière suivante à partir des valeurs obtenues à l'itération précédente  $k$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{k+1} &= \mathbf{u}^k - \gamma^k \mathbf{d}^k \\ u_{ij}^{k+1} &= u_{ij}^k - \gamma^k d_{ij}^k \quad \forall i = 1, \dots, N_x \quad \forall j = 1, \dots, N_t \end{aligned} \quad (1.14)$$

de manière à ce que  $J(\theta, \mathbf{u}^{k+1}) < J(\theta, \mathbf{u}^k)$ . Le fondement de cette méthode consiste à choisir à chaque itération  $k$  de l'algorithme, une direction de descente  $\mathbf{d}^k$  conjuguée à la direction de descente précédente  $\mathbf{d}^{k-1}$  (Minoux, 2007) ainsi qu'une profondeur de descente  $\gamma^k$ . La direction de descente est déterminée à partir du gradient de la fonctionnelle  $J(\theta^k)$  et d'un scalaire  $\beta^k$  que multiplie la direction de descente précédente.

Les directions de descente consécutives sont exprimées selon :

$$\mathbf{d}^k = -\overrightarrow{\nabla J^k} + \beta_k \mathbf{d}^{k-1} \quad \text{avec} \quad \beta_k = \frac{\|\overrightarrow{\nabla J^k}\|^2}{\|\overrightarrow{\nabla J^{k-1}}\|^2}. \quad (1.15)$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme Euclidienne. Ces directions dépendent du gradient de la fonctionnelle à minimiser. Ce dernier est obtenu suite à la résolution d'un problème adjoint. La profondeur de descente  $\gamma^k$  est déterminée en résolvant le problème de sensibilité (Autrique et al., 2012).

Ainsi, cette méthode nécessite la formulation et la résolution itérative de trois problèmes bien posés :

- le premier est le problème direct (1.10) pour calculer l'évolution des distributions de température prédites par le modèle mathématique afin de calculer le critère  $J(\theta, \mathbf{u}^k)$  à l'itération  $k$  ;
- le second est le problème adjoint pour calculer l'expression du gradient du critère  $\overrightarrow{\nabla J^k} = \left[ \frac{\partial J}{\partial u_{ij}} \right]_{\substack{i=1,\dots,N_x \\ j=1,\dots,N_t}}$  et en déduire la prochaine direction de descente  $\mathbf{d}^k = [d_{ij}^k]_{\substack{i=1,\dots,N_x \\ j=1,\dots,N_t}}$  à l'itération  $k$  ;

- le dernier est le problème de sensibilité pour calculer la profondeur de descente  $\gamma^k$  et enfin mettre à jour  $\mathbf{u}^{k+1} = \left[ u_{ij}^{k+1} \right]_{\substack{i=1,\dots,N_x \\ j=1,\dots,N_t}}$ .

#### 1.2.4 Exemple de mise en oeuvre

##### 1. Le problème direct

Le problème direct est celui du système (1.10) avec  $t_f = 20$  secondes. Nous cherchons à stabiliser le système dont l'instabilité est assurée par  $K = 10^5$ .

$$\left\{ \begin{array}{ll} 10^6 \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} - 33 \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} = 10^5 \theta(x,t) + u(x,t) \Big|_{x \in [a,b]} & \forall (x,t) \in [0,0.1] \times [0,20] \\ \theta(0,t) = \theta(0.1,t) = 0 & \forall t \in [0,20] \\ \theta(x,0) = \theta_0(x) & \forall x \in [0,0.1] \end{array} \right. \quad (1.16)$$

En résolvant numériquement le système (1.16), le champ de température  $\theta(x,t)$  est déterminé à chaque instant  $t$  et en chaque point  $x$ ; le critère peut alors en être déduit à partir de l'équation suivante :

$$J(\theta, u) = \frac{1}{2} \int_0^{0.1} (\theta(x, t_f; u))^2 dx \quad (1.17)$$

##### 2. Le problème de sensibilité

Le problème de sensibilité a pour objet le calcul de la fonction de sensibilité qui est définie comme la variation de température  $\delta\theta(x,t)$  induite par une variation du flux :

$$\delta u(x,t) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_t} (\delta u_{ij}) s_i(x) s_j(t).$$

La formulation du problème de sensibilité consiste à établir un nouveau système d'EDPs qui est satisfait par les fonctions dites de sensibilité. Soit le flux de chauffe (ou de refroidissement)  $u(x,t)$  varié de la manière suivante  $u^+(x,t) = u(x,t) + \varepsilon \delta u(x,t)$  où  $\varepsilon$  est un réel positif. La température obtenue lors de cette variation est notée  $\theta^+(x,t) = \theta(x,t, u^+)$  et satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 10^6 \frac{\partial \theta^+(x,t)}{\partial t} - 33 \frac{\partial^2 \theta^+(x,t)}{\partial x^2} = 10^5 \theta^+(x,t) + u^+(x,t) \Big|_{x \in [a,b]} & \forall (x,t) \in [0,0.1] \times [0,20] \\ \theta^+(0,t) = \theta^+(0.1,t) = 0 & \forall t \in [0,20] \\ \theta^+(x,0) = \theta_0(x) & \forall x \in [0,0.1] \end{array} \right.$$

L'expression de la fonction de sensibilité est donnée par :  $\delta\theta(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\theta^+(x, t) - \theta(x, t)}{\varepsilon}$  ce qui permet d'écrire :  $\theta^+(x, t) = \theta(x, t) + \varepsilon\delta\theta(x, t)$  (avec  $\varepsilon$  tend vers 0).

En le comparant avec le système (1.16) non varié, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 10^6 \frac{\partial(\theta^+ - \theta)}{\partial t} - 33 \frac{\partial^2(\theta^+ - \theta)}{\partial x^2} = 10^5(\theta^+ - \theta) + (u^+ - u)|_{x \in [a, b]} & \forall (x, t) \in [0, 0.1] \times [0, 20] \\ \theta^+(0, t) - \theta(0, t) = \theta^+(0.1, t) - \theta(0.1, t) = 0 & \forall t \in [0, 20] \\ \theta^+(x, 0) - \theta(x, 0) = 0 & \forall x \in [0, 0.1] \end{array} \right.$$

Ce qui conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 10^6 \varepsilon \frac{\partial \delta\theta(x, t)}{\partial t} - 33 \varepsilon \frac{\partial^2 \delta\theta(x, t)}{\partial x^2} = 10^5 \varepsilon \delta\theta + \varepsilon \delta u(x, t)|_{x \in [a, b]} & \forall (x, t) \in [0, 0.1] \times [0, 20] \\ \varepsilon \delta\theta(0, t) = \varepsilon \delta\theta(0.1, t) = 0 & \forall t \in [0, 20] \\ \varepsilon \delta\theta(x, 0) = 0 & \forall x \in [0, 0.1] \end{array} \right.$$

À l'itération  $k$ , en divisant par  $\varepsilon$  on trouve que la fonction de sensibilité  $\delta\theta^k(x, t)$  est solution du système d'EDPs qui s'écrit de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 10^6 \frac{\partial \delta\theta^k}{\partial t} - 33 \frac{\partial^2 \delta\theta^k}{\partial x^2} = 10^5 \delta\theta^k + \delta u|_{x \in [a, b]} & \forall (x, t) \in [0, 0.1] \times [0, 20] \\ \delta\theta^k(0, t) = \delta\theta^k(0.1, t) = 0 & \forall t \in [0, 20] \\ \delta\theta^k(x, 0) = 0 & \forall x \in [0, 0.1] \end{array} \right. \quad (1.18)$$

Le problème de sensibilité résolu à chaque itération en calculant la fonction de sensibilité  $\delta\theta(x, t)$  qui désigne la variation de l'état résultante d'une variation du flux  $\delta u(x, t)$  est égale à la direction de descente à l'itération  $k$  :  $(\delta u_{ij}^k)_{\substack{i=1, \dots, N_x \\ j=1, \dots, N_t}} = (d_{ij}^k)_{\substack{i=1, \dots, N_x \\ j=1, \dots, N_t}}$ .

La solution  $\delta\theta(x, t)$  du problème de sensibilité (1.18) permet de calculer la profondeur de descente pour chaque itération.

La profondeur de descente  $\gamma^k$  à l'itération  $k$ , est un nombre réel correspondant au pas optimal dans la direction de descente  $\mathbf{d}^k = (d_{ij}^k)_{\substack{i=1, \dots, N_x \\ j=1, \dots, N_t}}$ . Il permet à partir de  $\mathbf{u}^k$  de trouver la nouvelle valeur  $\mathbf{u}^{k+1}$  sachant que  $\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k - \gamma \mathbf{d}^k$ .

Ainsi, cette grandeur minimise le critère  $J(\mathbf{u}^{k+1})$  dans la direction de  $\mathbf{d}^k$ .

$$\gamma^k = \arg \min_{\gamma \in \mathcal{R}} J(\mathbf{u}^{k+1}) = \arg \min_{\gamma \in \mathcal{R}} J(\mathbf{u}^k - \gamma \mathbf{d}^k) \quad (1.19)$$

avec  $J(\mathbf{u}^k - \gamma \mathbf{d}^k) = \frac{1}{2} \int_0^{0.1} \left( \theta(x, t_f; \mathbf{u}^k - \gamma \mathbf{d}^k) \right)^2 dx$ .

De plus,  $\theta(x, t_f; \mathbf{u}^k - \gamma \mathbf{d}^k) \approx \theta(x, t_f; \mathbf{u}^k) - \gamma \delta \theta_{\mathbf{d}^k}(x, t_f; \mathbf{u}^k)$  où  $\delta \theta_{\mathbf{d}^k}(x, t_f; \mathbf{u}^k)$  est la variation de la température induite par la variation du flux dans la direction de descente  $\mathbf{d}^k$ .

En substituant l'équation précédente dans l'expression de  $J(\mathbf{u}^k - \gamma \mathbf{d}^k)$ , il vient :

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}^k - \gamma \mathbf{d}^k) &\approx \frac{1}{2} \int_0^{0.1} \left( \theta(x, t_f; \mathbf{u}^k) - \gamma \delta \theta_{\mathbf{d}^k}(x, t_f; \mathbf{u}^k) \right)^2 dx \\ &\approx \frac{1}{2} \int_0^{0.1} \theta^2(x, t_f; \mathbf{u}^k) dx - \gamma \int_0^{0.1} \theta(x, t_f; \mathbf{u}^k) \delta \theta_{\mathbf{d}^k}(x, t_f; \mathbf{u}^k) dx \\ &\quad + \frac{\gamma^2}{2} \int_0^{0.1} \left( \delta \theta_{\mathbf{d}^k}(x, t_f; \mathbf{u}^k) \right)^2 dx \end{aligned}$$

Comme signalé précédemment, la valeur de la profondeur de descente  $\gamma$  est obtenue en minimisant le critère  $J(\mathbf{u}^{k+1})$  :

$$\frac{\partial J(\mathbf{u}^{k+1})}{\partial \gamma} = 0 \Leftrightarrow - \int_0^{0.1} \theta(x, t_f; \mathbf{u}^k) \delta \theta_{\mathbf{d}^k}(x, t_f; \mathbf{u}^k) dx + \gamma \int_0^{0.1} \left( \delta \theta_{\mathbf{d}^k}(x, t_f; \mathbf{u}^k) \right)^2 dx = 0.$$

Ainsi, à chaque nouvelle itération  $k$ , la profondeur de descente est estimée comme suit :

$$\gamma = \frac{\int_0^{0.1} \theta(x, t_f; \mathbf{u}^k) \delta \theta_{\mathbf{d}^k}(x, t_f; \mathbf{u}^k) dx}{\int_0^{0.1} \left( \delta \theta_{\mathbf{d}^k}(x, t_f; \mathbf{u}^k) \right)^2 dx} \quad (1.20)$$

Afin de calculer les directions de descente à partir du gradient de la fonctionnelle  $J$ , il est nécessaire de résoudre le problème adjoint.

#### Remarque

Si le dénominateur de la profondeur de descente est nul cela signifie que la fonction de sensibilité est nulle. Dans ce cas, cela voudrait dire que lorsque le contrôle (ici un flux) varie alors la température ne varie pas. Pour le système étudié cela est impossible (absurde).

### 3. Le problème adjoint

Le problème adjoint a pour objet de calculer le gradient de la fonctionnelle à minimiser

$$\nabla J(u^k) = \left[ \frac{\partial J}{\partial u_{ij}^k} \right]_{\substack{i=1, \dots, N_x \\ j=1, \dots, N_t}}.$$

Pour ce faire, on utilise le Lagrangien associé au problème de minimisation de la fonction coût

formulé à chaque nouvelle itération  $k$  de l'algorithme en introduisant les fonctions  $\psi(x, t)$  nommées multiplicateurs de Lagrange qui servent à déterminer le gradient :

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}^k, \theta^k, \psi^k) = J(\theta^k) + \int_0^{20} \int_0^{0.1} \left[ 10^6 \frac{\partial \theta^k}{\partial t} - 33 \frac{\partial^2 \theta^k}{\partial x^2} - 10^5 \theta^k(x, t) - \mathbf{u}^k \Big|_{x \in [a, b]} \right] \psi^k(x, t) dx dt \quad (1.21)$$

L'expression de la variation du Lagrangien est donnée par :

$$\delta \mathcal{L}(\mathbf{u}^k, \theta^k, \psi^k) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}^k} \delta \mathbf{u}^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^k} \delta \theta^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^k} \delta \psi^k$$

De plus si  $\theta(x, t)$  est solution du problème direct (1.16) alors :

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}^k, \theta^k, \psi^k) = J(\theta^k) \Rightarrow \delta \mathcal{L}(\mathbf{u}^k, \theta^k, \psi^k) = \delta J(\theta^k)$$

Si de plus le multiplicateur de Lagrange  $\psi(x, t)$  est fixé de manière à annuler  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^k} \delta \theta^k$ , on aura :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^k} \delta \theta^k = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^k} \delta \psi^k = 0.$$

Par suite  $\delta \mathcal{L}(\mathbf{u}^k, \theta^k, \psi^k) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}^k} \delta \mathbf{u}^k = \delta J(\theta^k)$  et ainsi il est possible d'en déduire l'expression du gradient.

La variation du Lagrangien s'exprime à partir de (1.21) :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}(\mathbf{u}^k, \theta^k, \psi^k) &= \int_0^{0.1} \theta^k(x, t_f) \delta \theta^k(x, t_f) dx \\ &+ \int_0^{t_f} \int_0^{0.1} \left[ 10^6 \frac{\partial \delta \theta^k}{\partial t} - 33 \frac{\partial^2 \delta \theta^k}{\partial x^2} - 10^5 \delta \theta^k(x, t) - \delta \mathbf{u}^k \Big|_{x \in [a, b]} \right] \psi^k dx dt \end{aligned}$$

Soient les intégrales  $I_1$  et  $I_2$  issues de l'expression de la variation du Lagrangien définies par :

$$I_1 = \int_0^{t_f} \int_0^{0.1} 10^6 \left[ \frac{\partial \delta \theta^k(x, t)}{\partial t} \right] \psi^k(x, t) dx dt$$

et

$$I_2 = \int_0^{t_f} \int_0^{0.1} \left[ -33 \frac{\partial^2 \delta \theta^k(x, t)}{\partial x^2} \right] \psi^k(x, t) dx dt$$

En intégrant par partie selon le temps pour  $I_1$ , il vient :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^{t_f} \int_0^{0.1} \left[ 10^6 \frac{\partial \delta \theta^k(x, t)}{\partial t} \right] \psi^k(x, t) dx dt \\
 &= \int_0^{0.1} 10^6 \left[ \delta \theta^k(x, t) \psi^k(x, t) \right]_0^{t_f} dx - \int_0^{t_f} \int_0^{0.1} 10^6 \delta \theta^k(x, t) \frac{\partial \psi^k(x, t)}{\partial t} dx dt \\
 &= \int_0^{0.1} 10^6 \delta \theta^k(x, t_f) \psi^k(x, t_f) dx - \int_0^{0.1} 10^6 \delta \theta^k(x, 0) \psi^k(x, 0) dx \\
 &\quad - \int_0^{t_f} \int_0^{0.1} 10^6 \delta \theta^k(x, t) \frac{\partial \psi^k(x, t)}{\partial t} dx dt
 \end{aligned}$$

Or, d'après le problème de sensibilité, la variation de la température à  $t = 0$  est nulle, d'où :

$$\int_0^{0.1} 10^6 \delta \theta^k(x, 0) \psi^k(x, 0) dx = 0$$

Donc :

$$I_1 = \int_0^{0.1} 10^6 \delta \theta^k(x, t_f) \psi^k(x, t_f) dx - \int_0^{t_f} \int_0^{0.1} 10^6 \delta \theta^k(x, t) \frac{\partial \psi^k(x, t)}{\partial t} dx dt$$

En réalisant deux intégrations par parties selon l'espace pour  $I_2$ , il vient :

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_0^{t_f} \int_0^{0.1} \left[ -33 \frac{\partial^2 \delta \theta^k(x, t)}{\partial^2 x} \right] \psi^k(x, t) dx dt \\
 &= \int_0^{t_f} 33 \left[ -\frac{\partial \delta \theta^k(x, t)}{\partial x} \psi^k(x, t) \right]_0^{0.1} dt + \int_0^{t_f} 33 \left[ \delta \theta^k(x, t) \frac{\partial \psi^k(x, t)}{\partial x} \right]_0^{0.1} dt \\
 &\quad - \int_0^{t_f} \int_0^{0.1} 33 \delta \theta^k(x, t) \frac{\partial^2 \psi^k(x, t)}{\partial^2 x} dx dt
 \end{aligned}$$

Or, d'après les conditions aux bords du problème de sensibilité (1.18) :

$$\int_0^{t_f} 33 \left[ \delta \theta^k(x, t) \frac{\partial \psi^k(x, t)}{\partial x} \right]_0^{0.1} dt = 0$$

D'où :

$$I_2 = - \int_0^{t_f} \int_0^{0.1} 33 \delta \theta^k(x, t) \frac{\partial^2 \psi^k(x, t)}{\partial^2 x} dx dt - \int_0^{t_f} 33 \left[ \frac{\partial \delta \theta^k(x, t)}{\partial x} \psi^k(x, t) \right]_0^{0.1} dt$$

A partir des équations précédentes, il vient :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}(\mathbf{u}^k, \theta^k, \psi^k) &= \int_0^{0.1} \left( \theta^k(x, t_f) + 10^6 \psi^k(x, t_f) \right) \delta \theta^k(x, t_f) dx \\ &+ \int_0^{t_f} \int_0^{0.1} \left[ -10^6 \frac{\partial \psi^k}{\partial t} - 33 \frac{\partial^2 \psi^k}{\partial x^2} - 10^5 \psi^k(x, t) \right] \delta \theta^k(x, t) dx dt \\ &- \int_0^{t_f} 33 \left( \psi^k(0.1, t) \frac{\partial \delta \theta^k(0.1, t)}{\partial x} + \psi^k(0, t) \frac{\partial \delta \theta^k(0, t)}{\partial x} \right) dt \\ &- \int_0^{t_f} \int_0^{0.1} \delta \mathbf{u}^k(x, t) \psi^k(x, t) dx dt \end{aligned}$$

Le problème adjoint est formulé de manière à ce que  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^k} \delta \theta^k = 0$ , ça revient à ce que :

$$\int_0^{0.1} \left[ -10^6 \frac{\partial \psi^k}{\partial t} - 33 \frac{\partial^2 \psi^k}{\partial x^2} - 10^5 \psi^k(x, t) \right] \delta \theta^k(x, t) = 0;$$

$$\psi^k(0, t) = \psi^k(0.1, t) = 0;$$

$$\text{et } \theta^k(x, t_f) + 10^6 \psi^k(x, t_f) = 0$$

D'où le système d'EDPs suivant dont  $\psi$  est solution :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -10^6 \frac{\partial \psi^k(x, t)}{\partial t} - 33 \frac{\partial^2 \psi^k(x, t)}{\partial x^2} = 10^5 \psi^k(x, t) & \forall (x, t) \in [0, 0.1] \times [0, 20] \\ \psi^k(0, t) = \psi^k(0.1, t) = 0 & \forall t \in [0, 20] \\ \psi^k(x, t_f) = -10^{-6} \theta^k(x, t_f) & \forall x \in [0, 0.1] \end{array} \right. \quad (1.22)$$

Il est important de noter que ce problème adjoint est un problème mathématique qui ne décrit pas un problème thermique et que sa résolution se fait d'une manière rétrograde par rapport au temps. Une fois le problème adjoint résolu, on obtient l'expression de la variation du Lagrangien :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}(\mathbf{u}^k, \theta^k, \psi^k) &= - \int_0^{t_f} \int_0^{0.1} \delta \mathbf{u}^k(x, t) \Big|_{x \in [a, b]} \psi^k(x, t) dx dt \\ &= - \int_0^{t_f} \int_a^b \delta \mathbf{u}^k(x, t) \psi^k(x, t) dx dt \end{aligned}$$

Comme  $\delta \mathcal{L}(\mathbf{u}^k, \theta^k, \psi^k) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}^k} \delta \mathbf{u}^k = \delta J(\theta^k) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_t} \frac{\partial J}{\partial u_{ij}^k} \delta u_{ij}^k$ , on en déduit l'expression du gradient :

$$\frac{\partial J}{\partial u_{ij}} = - \int_0^{t_f} \int_a^b \psi^k(x, t) s_i(x) s_j(t) dx dt \quad (1.23)$$

sachant que  $\delta u(x, t) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_t} (\delta u_{ij}) s_i(x) s_j(t)$ .

## 4. Le test d'arrêt

Considérant les trois problèmes énoncés précédemment (direct, adjoint et sensibilité), un algorithme de minimisation basé sur la MGC peut être implémenté numériquement. Afin d'obtenir le meilleur estimateur du paramètre à identifier possible en dépit des bruits de mesure ou de modèle, plusieurs études proposent différents tests d'arrêt selon le niveau du bruit (Alifanov, 1988). Lorsque les erreurs de modèle, les erreurs de mesure et les erreurs numériques (lors de la résolution des trois problèmes bien posés) sont négligeables, le critère d'arrêt  $J_{stop}$  peut être choisi proche de 0 et lorsque  $J < J_{stop}$ , l'algorithme est arrêté.

Dans ce qui suit, en l'absence de bruit significatif, le test d'arrêt  $J_{stop}$  est arbitrairement fixé à  $10^{-3}$ .

Remarque

Un rafraîchissement des directions de descente a été pris en compte lors de la simulation numérique. Pour ce faire, on considère que  $\mathbf{d}^k = -\overrightarrow{\nabla J^k}$  au lieu de  $\mathbf{d}^k = -\overrightarrow{\nabla J^k} + \beta_k \mathbf{d}^{k-1}$  avec  $\beta_k = \frac{\|\overrightarrow{\nabla J^k}\|^2}{\|\overrightarrow{\nabla J^{k-1}}\|^2}$ . En pratique, on peut fixer toutes les dix itérations  $\beta_k = 0$ , puis pendant 9 itérations les directions de descente sont à nouveau calculer normalement et sont conjuguées entre elles.

Dans ce qui suit, l'algorithme complet est présenté.

 1.2.5 Algorithme de résolution

Les étapes principales de la MGC sont présentées dans ce qui suit :

 1. Initialisation

Initialisation du paramètre inconnu à la première itération  $k = 0$  :  $\left[ u_{ij}^0 \right]_{\substack{i=1,\dots,N_x \\ j=1,\dots,N_t}} = 0$ .

 2. Résolution du problème direct selon (1.16)

Simulation des températures  $\theta^k$  du problème direct.

 3. Calcul du critère  $J(\theta^k)$  selon (1.17)

- Si le critère  $J(\theta^k)$  est inférieur au seuil d'arrêt (par exemple  $J_{stop} = 10^{-3}$ ) alors l'algorithme de minimisation est stoppé et on considère  $u^{k+1}$  comme l'estimation du contrôle inconnu.
- Sinon on continue à l'étape 4.

 4. Résolution du problème adjoint selon l'équation (1.22)

- Calcul du multiplicateur de Lagrange  $\psi(x, t)$ .

- Calcul du gradient  $\overrightarrow{\nabla J^k} = \left[ \frac{\partial J}{\delta u_{ij}^k} \right]_{\substack{i=1,\dots,N_x \\ j=1,\dots,N_t}}$ .
- Calcul de la direction de descente selon la formule suivante :  $\mathbf{d}^k = -\overrightarrow{\nabla J^k} + \beta_k \mathbf{d}^{k-1}$  avec  $\beta_k = \frac{\|\overrightarrow{\nabla J^k}\|^2}{\|\overrightarrow{\nabla J^{k-1}}\|^2}$  (sauf pour  $\beta_0 = 0$  et si on tient compte du rafraîchissement des directions de descente).

5. Résolution du problème de sensibilité selon l'équation (1.18)

- Résolution du problème de sensibilité dans la direction de descente  $\mathbf{d}^k$  pour calculer la fonction de sensibilité  $\delta\theta^k(x, t)$ .
- Calcul de la profondeur de descente  $\gamma^k$  selon l'équation (1.20).

6. Mise à jour du contrôle selon l'équation (1.14)

$$u_{ij}^{k+1} = u_{ij}^k - \gamma \mathbf{d}^k \quad \forall i = 1, \dots, N_x \quad \forall j = 1, \dots, N_t$$

7. Incrémenter de l'itération

$k = k + 1$  et retour à l'étape 2.

## 1.3 Résultats numériques

### 1.3.1 Première étude

Il s'agit dans cette première étude numérique de déterminer un contrôle  $u(x, t)$  sur l'intervalle  $[a, b] = [0.03, 0.06]$ , pour atteindre un critère inférieur à  $10^{-3}$  en 20 secondes. La fonction  $u(x, t)$  est discrétisée tous les  $10^{-3}$ m entre  $a = 0.03$  m et  $b = 0.06$  m et toutes les 0.1 secondes entre 0 et 20 secondes. Cela représente 29 inconnues en espace car  $u(a, t) = u(b, t) = 0$  et 199 inconnues en temps car  $u(x, 0) = u(x, t_f) = 0$ .

L'algorithme du gradient conjugué est mis en oeuvre et fournit à l'itération 11 les résultats suivants en 141 secondes :

- Sur la figure 1.9, la convergence du critère est observée. L'algorithme s'arrête lorsque  $J(\theta) \leq J_{stop}$ , ici  $J_{stop}$  est égale à  $10^{-3}$ . On peut noter que l'identification du contrôle est réalisée en seulement 11 itérations alors qu'il y a 228 coefficients inconnus à identifier.
- Sur la figure 1.10, l'évolution des températures ainsi que la loi de contrôle est montrée pour différents temps. La stabilisation à zéro en temps fini est effective et on peut noter que le contrôle agit sur tout l'horizon temporel.

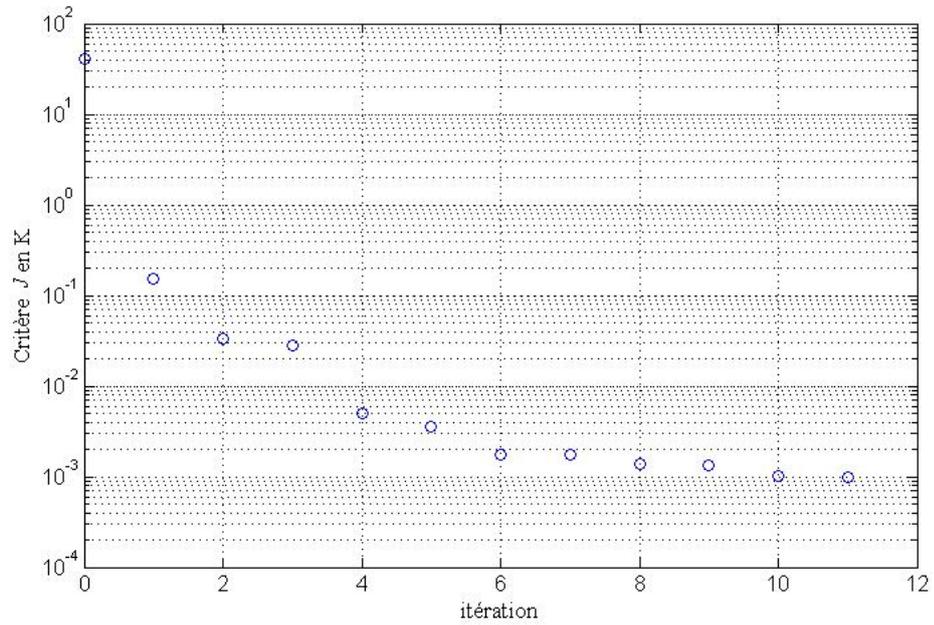


Figure 1.9 – Évolution du critère - première étude.

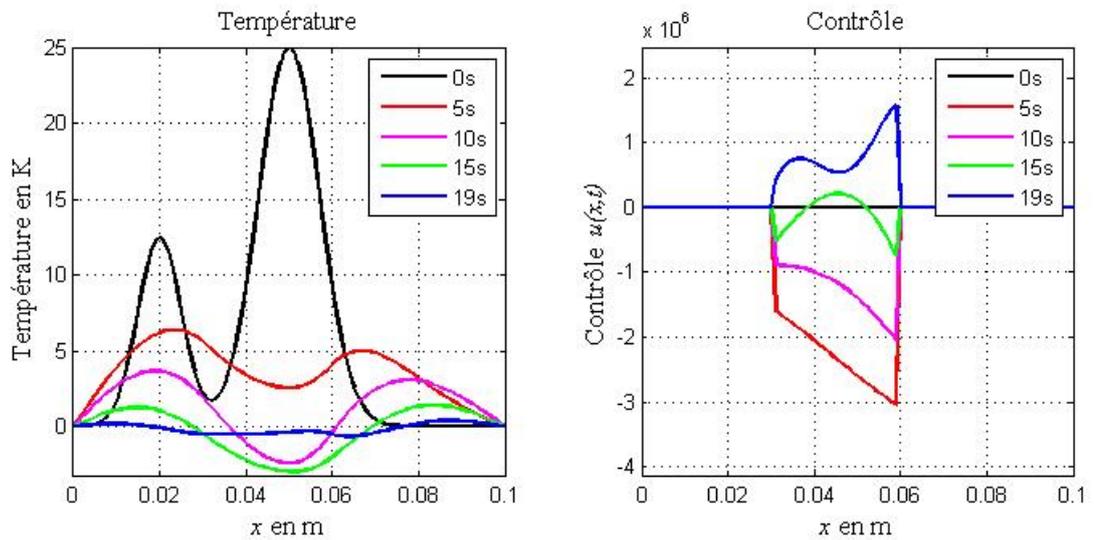


Figure 1.10 – Température et contrôle à différents instants - première étude.

- Sur la figure 1.11, on compare la distribution des températures à l'instant final selon que l'on utilise le contrôle identifié ou sans contrôle. On calcule le coût du contrôle agissant pour assurer la stabilité à zéro de la température.

Sachant que l'unité de  $u$  est le  $W.m^{-1}.K^{-1}$ , le coût du contrôle peut être estimé comme suit :

$$c = \int_0^{20} \int_{0.03}^{0.06} (u(x,t))^2 dx dt \approx 1.928 \times 10^{12}.$$

Rappelons que la température initiale est donnée sur la figure 1.2.

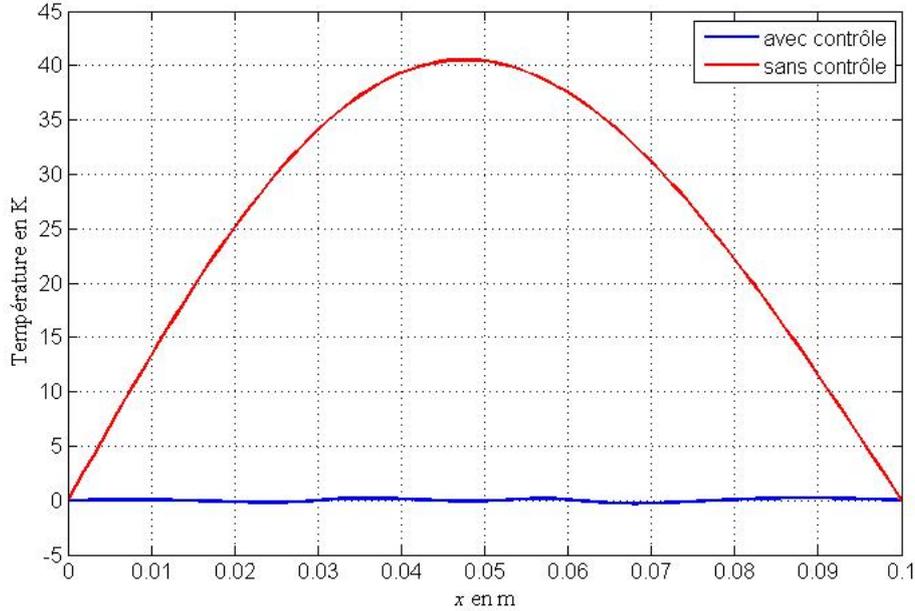


Figure 1.11 – Température à l’issue des 20 s - première étude.

### 1.3.2 Seconde étude - effet de la sur-paramétrisation

Pour cette deuxième étude, nous nous plaçons dans le cadre de la première étude : il s’agit d’identifier un contrôle  $u(x,t)$  sur l’intervalle  $[a,b] = [0.03,0.06]$ , pour atteindre un critère inférieur à  $10^{-3}$  en 20 secondes. Par contre, un nombre 10 fois plus important de paramètres est considéré en espace : la fonction  $u(x,t)$  est discrétisée tous les  $10^{-4}$  m entre  $a = 0.03$  m et  $b = 0.06$  m et toutes les 0.1 secondes entre 0 et  $t_f = 20$  secondes. Cela représente 299 inconnues en espace et 199 inconnues en temps.

L’algorithme du gradient conjugué est mis en oeuvre et fournit à l’itération 11 les résultats suivants en 1288 secondes comme est montré sur la figure 1.12. Il apparaît sur la figure 1.13 que l’allure générale du contrôle est beaucoup plus perturbée. Toutefois ces perturbations n’ont que peu d’effet sur le système thermique qui agit comme un filtre passe-bas. Ce comportement de l’algorithme est caractéristique de l’algorithme du gradient conjugué qui privilégie les directions de descente les plus pertinentes.

Le coût du contrôle peut être estimé comme suit :  $c = \int_0^{20} \int_{0.03}^{0.06} (u(x,t))^2 dx dt \approx 1.663 \times 10^{12}$ .

Celui-ci est similaire à celui de la première étude ce qui illustre bien que les perturbations observées sur le contrôle n’ont pas de réelle signification (ou nécessité).

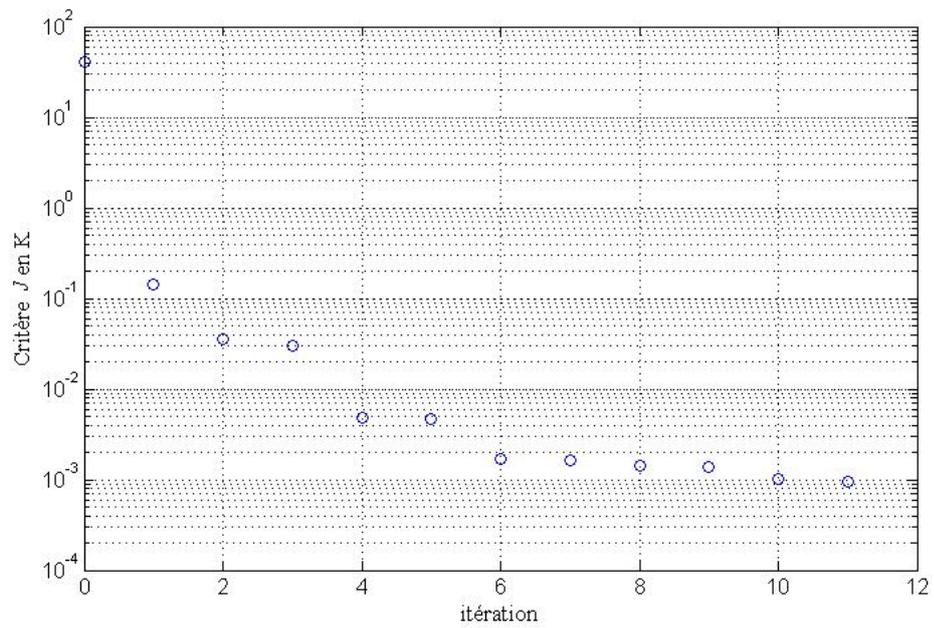


Figure 1.12 – Évolution du critère - seconde étude.

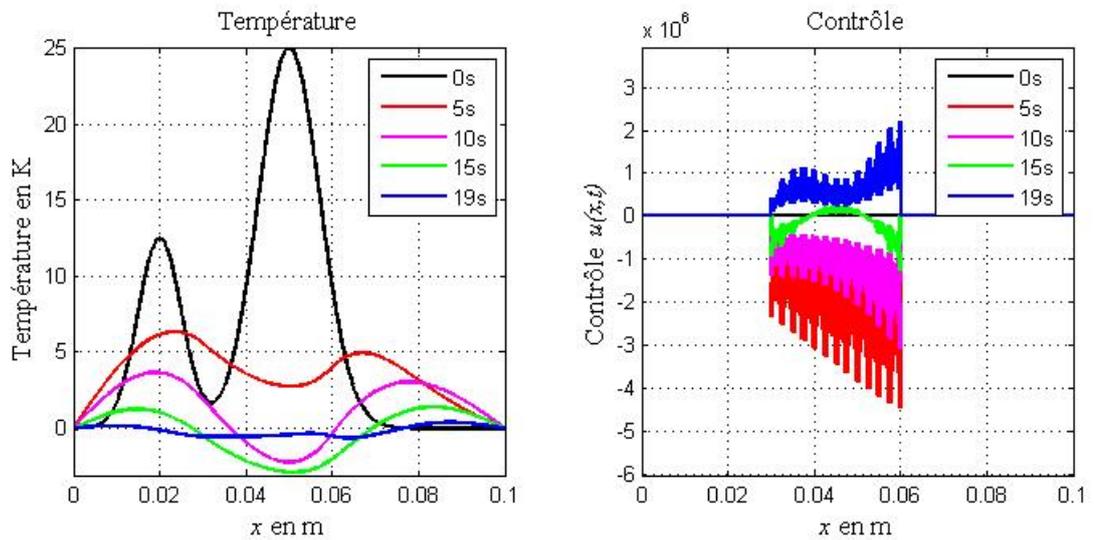


Figure 1.13 – Température et contrôle à différents instants - seconde étude.

Bilan : La sur-paramétrisation augmente inutilement le nombre de paramètres inconnus. Cela accroît le temps de calcul et conduit à des contrôles « perturbés » dont seule la tendance principale est significative. Cela n'influence pas le coût du contrôle et permet dans les cas étudiés d'obtenir des contrôles satisfaisant le critère requis.

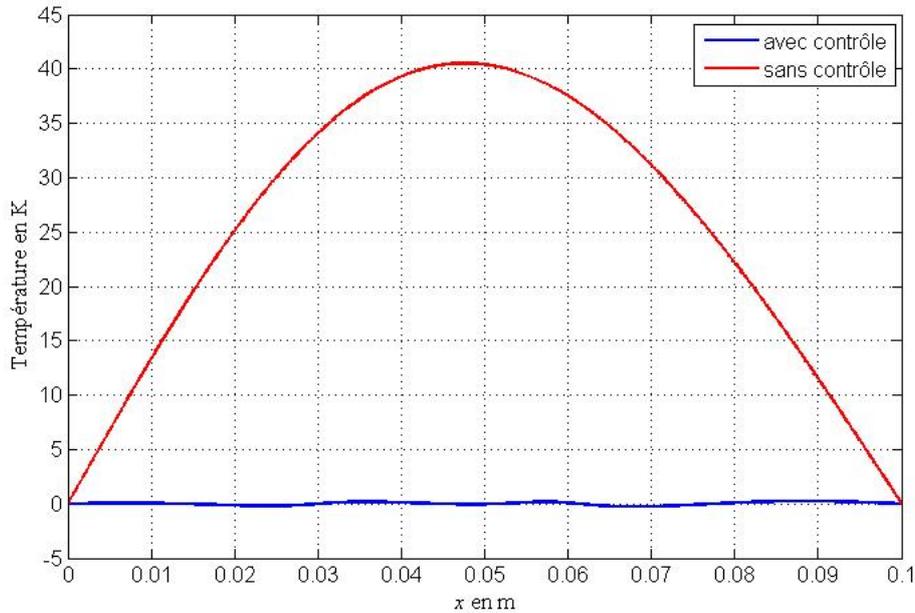


Figure 1.14 – Température à l’issue des 20 s - seconde étude.

### 1.3.3 Troisième étude - effet du temps final

Pour cette troisième étude, nous nous plaçons aussi dans le cadre de la première étude : il s’agit d’identifier un contrôle  $u(x, t)$  sur l’intervalle  $[a, b] = [0.03, 0.06]$ , pour atteindre un critère inférieur à  $10^{-3}$  en un temps beaucoup plus réduit : on choisit  $t_f = 5$  secondes.

La fonction  $u(x, t)$  est discrétisée tous les  $10^{-3}$  m entre  $a = 0.03$  m et  $b = 0.06$  m et toutes les 0.1 secondes entre 0 et  $t_f = 5$  secondes. Cela représente 29 inconnues en espace et 49 inconnues en temps. L’algorithme du gradient conjugué est mis en oeuvre et fournit à l’itération 101 les résultats présentés sur les figures 1.15 et 1.16 après 649 secondes. On peut noter qu’il faut beaucoup plus d’itérations car ce cas est plus contraignant. Le temps de calcul augmente mais dans une moindre mesure car il y a 4 fois moins d’inconnus en temps.

Les contrôles nécessaires pour stabiliser le système en 5 secondes, présentés sur la figure 1.16 ont une plus grande amplitude que ceux nécessaires pour stabiliser le système en 20 secondes comme il a été montré sur la figure 1.10. Cela entraîne aussi des évolutions de températures au profil spatial plus irréguliers, ce qui illustrent bien évidemment que l’objectif est plus difficile à atteindre.

Toutefois sur la figure 1.17, on peut noter la qualité du résultat obtenu en observant la température stabilisée au bout de 5 secondes lorsque le contrôle est appliqué.

Le coût du contrôle peut être estimé comme suit :  $c = \int_0^5 \int_{0.03}^{0.06} (u(x, t))^2 dx dt \approx 1.632 \times 10^{13}$ .

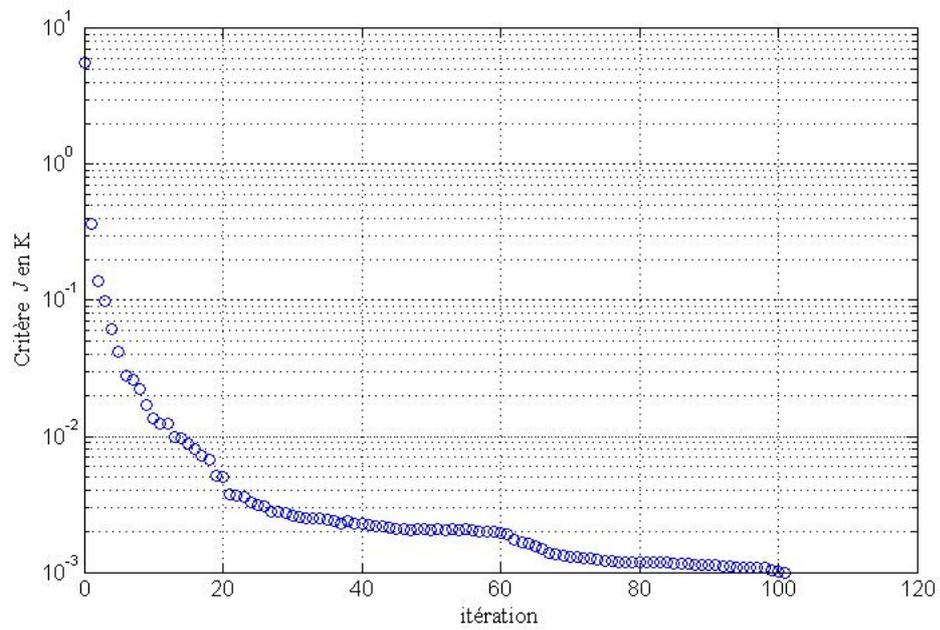


Figure 1.15 – Évolution du critère - troisième étude.

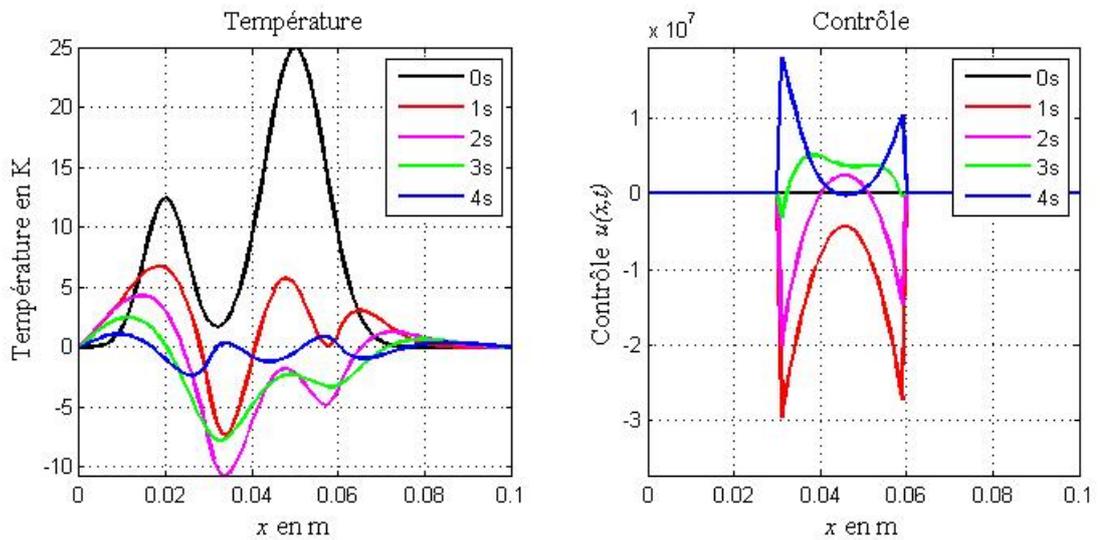


Figure 1.16 – Température et contrôle à différents instants - troisième étude.

Celui-ci est plus important que celui de la première étude : il faut davantage d'énergie pour amener l'état thermique à zéro en 5 secondes plutôt qu'en 20 secondes.

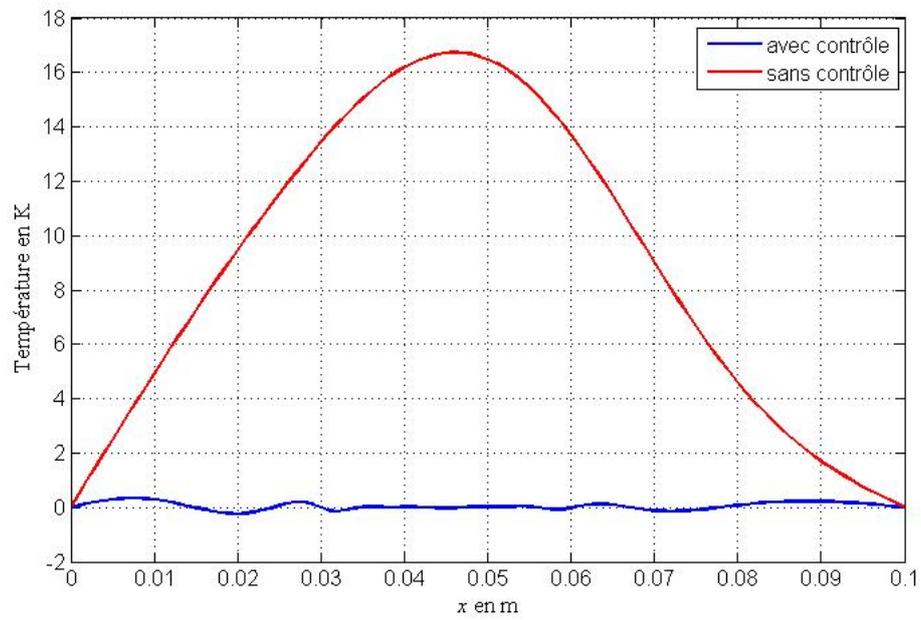


Figure 1.17 – Température à l'issue des 5 s - troisième étude.

## Bilan du chapitre

Dans ce premier chapitre après avoir présenté plusieurs classes de systèmes physiques décrits par des EDPs, l'équation de la chaleur (EDP parabolique) a été étudiée. La thématique spécifique de la stabilisation à zéro en temps fini d'un système thermique a été présentée. Afin de disposer d'une méthode généraliste, une approche numérique a été proposée. Pour ce faire, la détermination du contrôle est traitée comme un problème d'identification paramétrique formulé comme un problème d'optimisation (minimisation de l'erreur de sortie au temps final). La méthode développée est celle du gradient conjugué dont les propriétés régularisantes sont bien connues. Elle est aussi adaptée aux problèmes d'optimisation comprenant de nombreux paramètres. Différents cas numériques ont été traités afin de déterminer un contrôle zone. Les effets de la sur-paramétrisation ainsi que de la réduction de l'horizon temporel (entraînant une exigence plus grande) ont été illustrés sur deux exemples numériques.

Ce premier chapitre a permis de développer une méthode valide et efficace pour déterminer une stratégie de contrôle zone pour stabiliser à zéro et en temps fini un système d'EDPs parabolique instable.

## Références bibliographiques

- ALIFANOV. O.M., Inverse heat transfer problems, International series in heat and mass transfer, 1988.
- ALIFANOV. O.M., Inverse Heat Transfer Problems, Springer-Verlag, pp. 348, 1994.
- ALIFANOV. O.M., ARTYUKHIN. E.A., RUMYANTSEV. S.V., Extreme Methods for Solving Ill-Posed Problems with Applications to Inverse Heat Transfer Problems, New-York, Begell house Inc, 1995.
- ALLAIRE. G., Analyse Numérique et Optimisation, ed. l'École Polytechnique, pp. 464, 2005.
- AMBARZUMIAN. V., Über eine Frage der Eigenwerttheorie, Zeitschrift für Physik, vol. 53, pp. 690- 695, 1929.
- AUTRIQUE. L., BEDDIAF. S., PEREZ. L., JOLLY. J.C., Simultaneous determination of time-varying strength and location of fixed heat sources in 3D domain, 6th International Conference "Inverse Problems : Modeling and Simulation", Antalya, Turquie, pp. 21-26 May, 2012.
- AVERILL. M.G, MILLER. K.C., KELLER. G.R., KREINOVICH. V., RAIZA. R., STARKS. S.A., Using expert knowledge in solving the seismic inverse problem, International Journal of Approximate Reasoning, vol. 45, n° 3, pp. 564-587, 2007.
- BERTERO. M., BOCCACCI. P., Introduction to Inverse Problems in Imaging, CRC Press, pp. 352, 1998.
- CORON. J.M., Control and nonlinearity, Mathematical surveys and monographs, ed. American Mathematical Society, Providence, USA, 2007.
- CORON. J.M., D'ANDREA NOVEL. B., Stabilization of a rotating body beam without damping, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 43, n° 5, pp. 608-618, 1998.
- DAUTRAY. R., LIONS. J.L., Analyse mathématique et calcul numériques pour les sciences et les techniques, tome 1, ed. Masson, 1984.
- DI MENZA. L., Analyse Numérique des Équations aux Dérivées Partielles, ed. Cassini, Paris, pp. 221, 2009.
- HADAMARD. J., Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, ed. Hermann, Paris, 1932.
- JARNY. Y., OZISIK. M.N., BARDON. J.P., A general optimization method using adjoint equation for solving multidimensional inverse heat conduction, International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 34, n° 11, pp. 2911-2919, 1991.
- KRSTIC. M., KANELLAKOPOULOS. I., KOKOTOVIC. P.V., Nonlinear and Adaptive Control Design, ed. John Wiley Sons Inc., New York, 1995.
- LEBORGNE. G., Introduction à la méthode du gradient conjugué, notes de cours de l'ISIMA, première année, pp. 18, 2018. [http : www.isima.fr/leborgne/Isimathgradientconjugue/gradientconjugue.pdf](http://www.isima.fr/leborgne/Isimathgradientconjugue/gradientconjugue.pdf)

LIONS. J.L., Contrôlabilité exacte perturbations et stabilisation des systèmes distribués, ed. Masson, Paris, 1988.

LIU. W.J, KRSTIC. M., Backstepping boundary control of Burgers' equation with actuator dynamics, *Systems and Control Letters*, vol. 41, n° 4, pp. 291–303, 2000.

MINOUX. M., Programmation Mathématique : Théorie et Algorithmes, ed. Tec and Doc, Lavoisier, pp. 710, 2007.

MOROZOV. V.A., Methods for solving incorrectly posed problems, Ed. New York : Springer-Verlag, 1994.

RAVIART. P.A., THOMAS. J.M., Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, ed. Masson, 1988.

ROSIER. L., A survey of controllability and stabilization results for partial differential equations, *JESA, Journal Européen des Systèmes Automatisés*, vol. 41, n° 3-4, pp. 365-411, 2007.

ROSIER. L., ZHANG. B.Y., Global stabilization of the generalized Korteweg - de Vries equation posed on a finite domain, *SIAM Journal on control and optimization*, vol. 45, n° 3, pp. 927-956, 2006.

ROUQUETTE. S., Identification des transferts thermiques par méthode inverse dans un procédé de PACVD : approche méthodologique de la modélisation d'un processus complexe régi par un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires, Thèse de Doctorat de l'université de Perpignan, pp. 239. 2003.

RUSSEL. D.L., Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations : recent progress and open questions, *SIAM Review*, vol. 20, n° 4, pp. 639-739, 1978.

SCHWARTZ. L., Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, ed. Hermann, pp. 392, 1987.

TRELAT. E., Stabilization of semilinear PDE's, and uniform decay under discretization, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 439, 2018, *Evolution equations : long time behavior and control*, hal-01165329, 2018.

WOITTENNEK. F., WANG. S., KNUPPEL. T., Backstepping design for parabolic systems with in-domain actuation and robin boundary conditions, *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 47, n° 3, pp. 5175- 5180, 2014.

---

## Chapitre 2

# Rejet de perturbations

### 2.1 La problématique

#### 2.1.1 La situation étudiée

Dans ce chapitre, un système d'EDPs de type parabolique (équation de la chaleur) est étudié. Contrairement au chapitre précédent, un système naturellement stable est considéré avec une perturbation éloignant le système de son état d'équilibre. De plus, afin de présenter comment la méthode peut être étendue à une situation non-linéaire, l'un des paramètres thermo-physiques dépend de l'état (ici la température). Dans ce chapitre, un actionneur ponctuel sera mis en oeuvre afin de rejeter l'effet de la perturbation, alors que dans le chapitre 1 un actionneur zone était mis en oeuvre (Albertos, et al., 2014).

Le rejet de perturbation est un objectif usuel en théorie du contrôle introduit dans les articles (Gao, 2006), (Alberto, 2014), (Alberto, 2017) et diverses approches ont été développées, on en cite ici quelques-unes :

1. Réseaux de neurones (Mukhopadhyay, Narendra, 1993)
2. Modes glissants (Taimoor, 2019)
3. Platitude (Sira-Ramírez, et al., 2017)

et appliquées aux systèmes thermiques dans (Zheng, 2011).

Considérons le problème direct suivant où la conductivité thermique  $\lambda$  dépend de la température du

système :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho C \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(\theta) \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \right) = \mathbf{u}_a(t) + f(x,t)|_{x \in [b,c]} & \forall (x,t) \in [0,L] \times [0,t_f] \\ \theta(0,t) = \theta(L,t) = 0 & \forall t \in [0,t_f] \\ \theta(x,0) = \theta_0(x) & \forall x \in [0,L] \end{array} \right. \quad (2.1)$$

avec  $x \in [0,L]$  la variable d'espace,  $t \in [0,t_f]$  la variable de temps,  $\rho C$  la chaleur volumique en  $J.m^{-3}.K^{-1}$ ,  $\theta(x,t)$  la température au point  $x$  à l'instant  $t$ ,  $\lambda(\theta)$  la conductivité thermique en  $W.m^{-1}.K^{-1}$ ,  $\theta_0(x)$  la température initiale,  $\mathbf{u}_a(t)$  le flux appliqué uniquement en  $x = a$  avec  $a \in ]0,L[$  et  $f(x,t)|_{x \in [b,c]}$  une perturbation agissant uniquement sur  $[b,c] \subset ]0,L[$ .

$\mathbf{u}_a(t)$  est le contrôle ponctuel localisé en  $a$ , ayant pour objet de rejeter l'effet de la perturbation  $f(x,t)|_{x \in [b,c]}$ . La conductivité thermique dans ce système dépend de la température ce qui indique qu'on est dans une configuration réaliste.

Des études relatives à l'identification paramétrique dans le cadre de systèmes thermiques non-linéaires sont exposées dans (Herrero, et al., 2007), (Vergnaud, et al., 2014) ou encore (Maachou, et al., 2014).

### 2.1.2 Application numérique

La situation décrite au paragraphe précédent est illustrée ci-dessous avec les paramètres suivants :

La température initiale est  $\theta(x,0) = \theta_0(x) = 25 \left( \frac{1}{2} \exp \frac{-(x-0.02)^2}{5 \times 10^{-5}} + \exp \frac{-(x-0.05)^2}{10^{-4}} \right)$ .

Le domaine d'étude est  $x \in [0,L]$  avec  $L = 0.1$  m ; la chaleur volumique est  $\rho C = 10^6 J.m^{-3}.K^{-1}$  ; la conductivité thermique thermodépendante est  $\lambda(\theta) = 33 + \exp \left( \frac{\theta}{40} \right)$ . La perturbation est appliquée au bout de 60 secondes (de manière à la dissocier de l'effet de la température initiale).

Dans l'exemple numérique proposé, la perturbation est définie comme suit :

$$f(x,t) = \begin{cases} K_1 \theta(x,t) + K_2 & \text{si } x \in [0.04, 0.08] \text{ et } t \in [60, 120] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.2)$$

L'évolution de la température sans contrôle ( $\mathbf{u}_a(t) = 0$ ) est représentée sur la figure 2.1 lorsque  $K_1 = K_2 = 10^5$ .

Afin de mieux visualiser l'effet de la perturbation à partir de 60 secondes, l'évolution de la température au cours du temps est montrée sur la figure 2.2 pour différents points du domaine.

Dans ce chapitre la méthode de régularisation itérative du gradient conjugué est développée afin de

déterminer un contrôle ponctuel qui a pour objet de rejeter la perturbation pour un système d'EDPs parabolique non-linéaire.

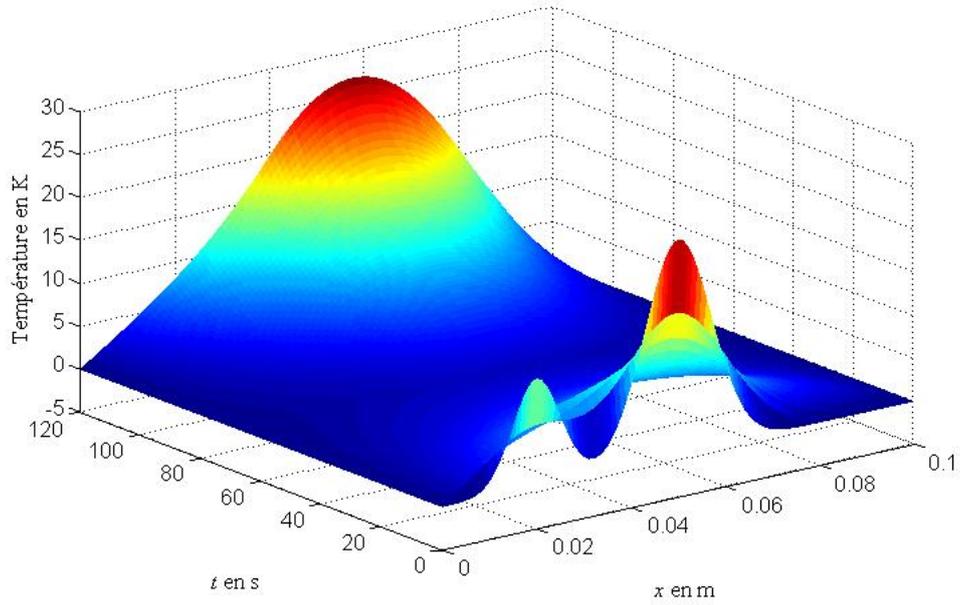


Figure 2.1 – Évolution de la température avec  $K_1 = K_2 = 10^5$ .

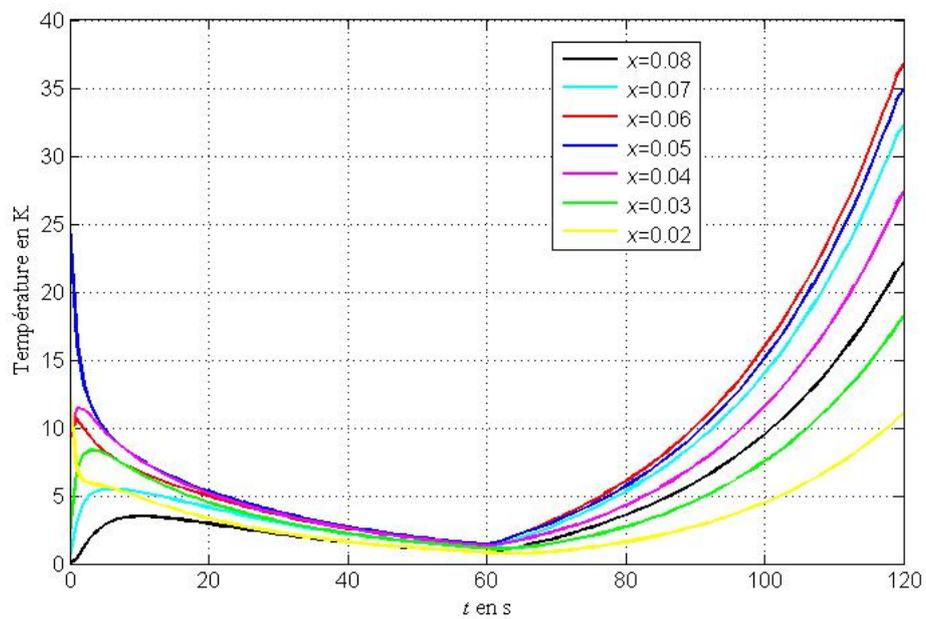


Figure 2.2 – Évolution de la température en certains points du domaine avec  $K_1 = K_2 = 10^5$ .

## 2.2 Rejet de la perturbation par une approche numérique

### 2.2.1 Formulation du problème inverse

Il s'agit de résoudre le problème inverse suivant :

Trouver le contrôle  $\mathbf{u}_a^*(t)$  tel que :  $\mathbf{u}_a^*(t) = \text{Arg min} J(\theta, \mathbf{u}_a)$  avec :

$$J(\theta, \mathbf{u}_a) = \frac{1}{2} \|\theta(x, t_f)\|_{L^2([0, L])}^2 = \frac{1}{2} \left( \int_0^L (\theta(x, t_f; \mathbf{u}_a))^2 dx \right) \quad (2.3)$$

La température  $\theta(x, t)$  étant solution du système (2.1).

En pratique le contrôle ponctuel est discrétisé de la manière suivante (voir figure 2.3) tel que :

$$\mathbf{u}_a(x, t) = \sum_{j=1}^M u_{aj}(x) s_j(t) \quad (2.4)$$

avec  $M$  le nombre de discrétisations temporelles,  $u_{aj}(x)$  les discrétisations spatiales et  $s_j(t)$  les discrétisations temporelles.

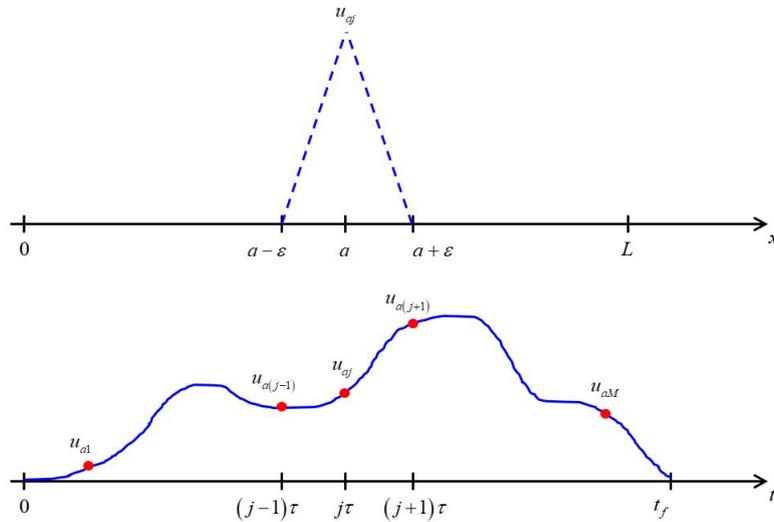


Figure 2.3 – Discrétisation de l'actionneur localisé.

avec

$$u_{aj}(x) = \begin{cases} \frac{x - (a - \varepsilon)}{\varepsilon} u_{aj} & \text{si } x \in [a - \varepsilon, a] \\ \frac{(a + \varepsilon) - x}{\varepsilon} u_{aj} & \text{si } x \in [a, a + \varepsilon] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$s_j(t) = \begin{cases} \frac{(M+1)t - (j-1)t_f}{t_f} & \text{si } t \in \left[ \frac{j-1}{M+1}t_f, \frac{j}{M+1}t_f \right] \\ \frac{(j+1)t_f - (M+1)t}{t_f} & \text{si } t \in \left[ \frac{j}{M+1}t_f, \frac{j+1}{M+1}t_f \right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le paramètre  $\varepsilon > 0$  est choisi aussi petit que l'on veut de manière à simuler un contrôle ponctuel et la discrétisation de (2.4) est illustrée sur la figure 2.3 avec le pas de temps  $\tau = \frac{t_f}{M+1}$  ( $\tau$  est en seconde). A partir de la discrétisation (2.4), il est aisé de voir que la fonction  $\mathbf{u}_a(t)$  est approchée sans pertes de généralités par  $\mathbf{u}_a(x, t)$  dès lors que les pas de discrétisation sont suffisamment petits :

- Si  $\varepsilon$  est trop grand alors le contrôle ne peut plus être considéré comme quasi ponctuel.
- Si  $\tau$  est trop grand alors la discrétisation  $\mathbf{u}_a(t)$  exprimée sous forme de fonction continue linéaire par morceaux (selon le temps) ne permettra pas de décrire de fréquents changements de dynamique.

Dans ce qui suit, on suppose que le contrôle quasi ponctuel est défini par la connaissance du vecteur  $\mathbf{u}_a = (u_{aj})_{j=1, \dots, M}$ .

### 2.2.2 Mise en oeuvre de la méthode du gradient conjugué

Les développements montrés ci-dessous sont extraits de (Azar et al., 2020).

Le problème de sensibilité permet de déterminer les variations de l'état (la température) résultantes d'une variation du paramètre inconnu (le contrôle  $\mathbf{u}_a(t)$ ).

La variation du flux est issue de (2.4) :

$$\delta \mathbf{u}_a(x, t) = \sum_{j=1}^M \delta u_{aj}(x) s_j(t) \quad (2.5)$$

avec

$$\delta u_{aj}(x) = \begin{cases} \frac{x - (a - \varepsilon)}{\varepsilon} \delta u_{aj} & \text{si } x \in [a - \varepsilon, a] \\ \frac{(a + \varepsilon) - x}{\varepsilon} \delta u_{aj} & \text{si } x \in [a, a + \varepsilon] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le problème de sensibilité est obtenu en comparant le système (2.1) au système suivant qui décrit

l'évolution de la température soumise au flux varié  $\mathbf{u}_a^+(x, t) = \mathbf{u}_a(x, t) + \delta\mathbf{u}_a(x, t)$  par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho C \frac{\partial \theta^+}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(\theta^+) \frac{\partial \theta^+}{\partial x} \right) = \mathbf{u}_a^+(x, t) + f^+(x, t) \Big|_{x \in [b, c]} \quad \forall (x, t) \in [0, L] \times [0, t_f] \\ \theta^+(0, t) = \theta^+(L, t) = 0 \quad \forall t \in [0, t_f] \\ \theta^+(x, 0) = \theta_0(x) \quad \forall x \in [0, L] \end{array} \right.$$

L'expression de la fonction de sensibilité est donnée comme dans le chapitre 1 par :

$$\delta\theta(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\theta^+(x, t) - \theta(x, t)}{\varepsilon} \text{ ce qui permet d'écrire : } \theta^+(x, t) = \theta(x, t) + \varepsilon\delta\theta(x, t) \text{ (avec } \varepsilon \rightarrow 0).$$

Il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho C \frac{\partial(\theta^+ - \theta)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(\theta^+) \frac{\partial \theta^+}{\partial x} - \lambda(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \varepsilon\delta\mathbf{u}_a + K_1(\theta^+ - \theta) \Big|_{\substack{x \in [b, c] \\ t \in [60, 120]}} \quad \forall (x, t) \in [0, L] \times [0, t_f] \\ \theta^+(0, t) - \theta(0, t) = \theta^+(L, t) - \theta(L, t) = 0 \quad \forall t \in [0, t_f] \\ \theta^+(x, 0) - \theta(x, 0) = 0 \quad \forall x \in [0, L] \end{array} \right.$$

Comme  $\lambda$  est en fonction de la température, alors quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\lambda(\theta^+) = \lambda(\theta + \varepsilon\delta\theta) \approx \lambda(\theta) + \varepsilon\delta\theta\lambda'(\theta).$$

Ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho C \frac{\partial(\theta^+ - \theta)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(\theta) \frac{\partial \theta^+}{\partial x} + \varepsilon\delta\theta\lambda'(\theta) \frac{\partial \theta^+}{\partial x} - \lambda(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \varepsilon\delta\mathbf{u}_a + K_1(\theta^+ - \theta) \Big|_{\substack{x \in [b, c] \\ t \in [60, 120]}} \\ \theta^+(0, t) - \theta(0, t) = \theta^+(L, t) - \theta(L, t) = 0 \quad \forall t \in [0, t_f] \\ \theta^+(x, 0) - \theta(x, 0) = 0 \quad \forall x \in [0, L] \end{array} \right.$$

Alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho C \frac{\partial(\theta^+ - \theta)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(\theta) \left[ \frac{\partial \theta^+}{\partial x} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + \varepsilon\delta\theta\lambda'(\theta) \frac{\partial \theta^+}{\partial x} \right) = \varepsilon\delta\mathbf{u}_a + K_1(\theta^+ - \theta) \Big|_{\substack{x \in [b, c] \\ t \in [60, 120]}} \\ \theta^+(0, t) - \theta(0, t) = \theta^+(L, t) - \theta(L, t) = 0 \quad \forall t \in [0, t_f] \\ \theta^+(x, 0) - \theta(x, 0) = 0 \quad \forall x \in [0, L] \end{array} \right.$$

Et donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \rho C \frac{\partial(\delta\theta)}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(\theta) \frac{\partial \delta\theta}{\partial x} + \delta\theta \lambda'(\theta) \frac{\partial \theta^+}{\partial x} \right) = \varepsilon \delta \mathbf{u}_a(x, t) + \varepsilon K_1 \delta\theta \Big|_{\substack{x \in [b, c] \\ t \in [60, 120]}} \quad \forall (x, t) \in [0, L] \times [0, t_f] \\ \delta\theta(0, t) = \delta\theta(L, t) = 0 \quad \forall t \in [0, t_f] \\ \delta\theta(x, 0) = 0 \quad \forall x \in [0, L] \end{array} \right.$$

Or :  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(\theta) \delta\theta \right) = \left( \lambda(\theta) \frac{\partial \delta\theta}{\partial x} + \delta\theta \lambda'(\theta) \frac{\partial \theta^+}{\partial x} \right)$ , d'où en divisant par  $\varepsilon$ , on obtient le problème de sensibilité suivant qui permet de calculer la fonction de sensibilité  $\delta\theta(x, t)$ , dans la direction de descente  $(d_j)_{j=1, \dots, M}$  où  $(\delta u_{aj})_{j=1, \dots, M} = (d_j)_{j=1, \dots, M}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho C \frac{\partial(\delta\theta)}{\partial t} - \frac{\partial^2 (\lambda(\theta) \delta\theta)}{\partial x^2} = \delta \mathbf{u}_a(x, t) + K_1 \delta\theta \Big|_{\substack{x \in [b, c] \\ t \in [60, 120]}} \quad \forall (x, t) \in [0, L] \times [0, t_f] \\ \delta\theta(0, t) = \delta\theta(L, t) = 0 \quad \forall t \in [0, t_f] \\ \delta\theta(x, 0) = 0 \quad \forall x \in [0, L] \end{array} \right. \quad (2.6)$$

La méthode itérative présentée au chapitre 1 consiste à la résolution itérative de trois problèmes bien posés (Jarny-91).

Ainsi à chaque nouvelle itération  $k + 1$ , le contrôle à déterminer est modifié à partir des valeurs obtenues à l'itération précédente  $k$  tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_a^{k+1} = u_a^k - \gamma^k d_j^k \\ u_{aj}^{k+1} = u_{aj}^k - \gamma^k d_j^k \quad \forall j = 1, \dots, M \end{array} \right. \quad (2.7)$$

de manière à ce que  $J(\theta, \mathbf{u}_a^{k+1}) < J(\theta, \mathbf{u}_a^k)$ .

A chaque itération  $k$  de l'algorithme de descente, la profondeur de descente est exprimée comme suit :

$$\gamma^k = \frac{\int_0^L \theta(x, t_f; \mathbf{u}_a^k) \delta\theta_{\mathbf{d}^k}(x, t_f; \mathbf{u}_a^k) dx}{\int_0^L \left( \delta\theta_{\mathbf{d}^k}(x, t_f; \mathbf{u}_a^k) \right)^2 dx} \quad (2.8)$$

Le gradient de la fonctionnelle  $\left( \frac{\partial J}{\partial u_{aj}} \right)_{j=1, \dots, M}$  s'obtient après la résolution du problème adjoint. Celui-ci se formule selon la même méthodologie que celle présentée au chapitre 1.

On introduit  $\psi(x, t)$  les multiplicateurs de Lagrange et le lagrangien  $\mathcal{L}$  :

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}_a^k, \theta^k, \psi^k) = J(\theta^k) + \int_0^{t_f} \int_0^L \left[ \rho C \frac{\partial \theta^k}{\partial t} - \frac{\partial^2 (\lambda(\theta^k) \delta \theta^k(x, t))}{\partial x^2} - \mathbf{u}_a^k - f(x, t) \Big|_{\substack{x \in [b, c] \\ t \in [60, 120]}} \right] \psi^k dx dt \quad (2.9)$$

La variation du Lagrangien lorsque  $\psi^k$  est fixé s'exprime à partir de (2.9) :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}(\mathbf{u}_a^k, \theta^k, \psi^k) &= \int_0^L \theta^k(x, t_f) \delta \theta^k(x, t_f) dx \\ &+ \int_0^{t_f} \int_0^L \left[ \rho C \frac{\partial \delta \theta^k}{\partial t} - \frac{\partial^2 (\lambda(\theta^k) \delta \theta^k(x, t))}{\partial x^2} - \delta \mathbf{u}_a^k - K_1 \delta \theta^k \Big|_{\substack{x \in [b, c] \\ t \in [60, 120]}} \right] \psi^k dx dt \end{aligned}$$

L'expression de la variation du Lagrangien est donnée par :

$$\delta \mathcal{L}(\mathbf{u}_a^k, \theta^k, \psi^k) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}_a^k} \delta \mathbf{u}_a^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^k} \delta \theta^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^k} \delta \psi^k$$

De plus si  $\theta(x, t)$  est solution du problème direct (2.1) alors :

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}_a^k, \theta^k, \psi^k) = J(\theta^k) \Rightarrow \delta \mathcal{L}(\mathbf{u}_a^k, \theta^k, \psi^k) = \delta J(\theta^k)$$

Si de plus le multiplicateur de Lagrange  $\psi(x, t)$  est fixé de manière à annuler  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^k} \delta \theta^k$ , on aura :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^k} \delta \theta^k = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^k} \delta \psi^k = 0.$$

Par suite :  $\delta \mathcal{L}(\mathbf{u}_a^k, \theta^k, \psi^k) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}_a^k} \delta \mathbf{u}_a^k = \delta J(\theta^k)$ .

Considérons les intégrales  $I_1$  et  $I_2$  issues de l'expression de la variation du Lagrangien définies par :

$$I_1 = \int_0^{t_f} \int_0^L \left[ \rho C \frac{\partial \delta \theta^k(x, t)}{\partial t} \right] \psi^k(x, t) dx dt \quad I_2 = - \int_0^{t_f} \int_0^L \frac{\partial^2 (\lambda(\theta^k) \delta \theta^k(x, t))}{\partial x^2} \psi^k(x, t) dx dt$$

En intégrant par partie selon le temps pour  $I_1$ , il vient :

$$I_1 = \int_0^L \rho C \delta \theta^k(x, t_f) \psi^k(x, t_f) dx - \int_0^L \rho C \delta \theta^k(x, 0) \psi^k(x, 0) dx - \int_0^L \int_0^{t_f} \rho C \delta \theta^k(x, t) \frac{\partial \psi^k(x, t)}{\partial t} dx dt$$

Or, d'après le problème de sensibilité (2.6),  $\delta \theta(x, 0) = 0$  on aura donc :  $\int_0^L \rho C \delta \theta^k(x, 0) \psi^k(x, 0) dx = 0$

D'où :

$$I_1 = \int_0^L \rho C \delta \theta^k(x, t_f) \psi^k(x, t_f) dx - \int_0^{t_f} \int_0^L \rho C \delta \theta^k(x, t) \frac{\partial \psi^k(x, t)}{\partial t} dx dt$$

En réalisant deux intégrations par parties selon l'espace pour  $I_2$ , il vient :

$$\begin{aligned} I_2 = & - \int_0^{t_f} \left[ \frac{\partial [\lambda(\theta^k) \delta \theta^k(x, t)]}{\partial x} \psi^k(x, t) \right]_0^L dt + \int_0^{t_f} \left[ \lambda(\theta^k) \delta \theta^k(x, t) \frac{\partial \psi^k(x, t)}{\partial x} \right]_0^L dt \\ & - \int_0^{t_f} \int_0^L \lambda(\theta^k) \delta \theta^k(x, t) \frac{\partial^2 \psi^k(x, t)}{\partial x^2} dx dt \end{aligned}$$

Considérant les conditions aux bords du problème de sensibilité (2.6), on aura :

$$\int_0^{t_f} \lambda(\theta^k) \delta \theta^k(L, t) \frac{\partial \psi^k(L, t)}{\partial x} dt = \int_0^{t_f} \lambda(\theta^k) \delta \theta^k(0, t) \frac{\partial \psi^k(0, t)}{\partial x} dt = 0,$$

il vient :

$$\begin{aligned} I_2 = & - \int_0^{t_f} \left[ \frac{\partial [\lambda(\theta^k) \delta \theta^k(x, t)]}{\partial x} \psi^k(x, t) \right]_0^L dt - \int_0^{t_f} \int_0^L \lambda(\theta^k) \delta \theta^k(x, t) \frac{\partial^2 \psi^k(x, t)}{\partial x^2} dx dt \\ = & - \int_0^{t_f} \frac{\partial [\lambda(\theta^k) \delta \theta^k(L, t)]}{\partial x} \psi^k(L, t) dt + \int_0^{t_f} \frac{\partial [\lambda(\theta^k) \delta \theta^k(0, t)]}{\partial x} \psi^k(0, t) dt \\ & - \int_0^{t_f} \int_0^L \lambda(\theta^k) \delta \theta^k(x, t) \frac{\partial^2 \psi^k(x, t)}{\partial x^2} dx dt \end{aligned}$$

En substituant  $I_1$  et  $I_2$  par leurs expressions dans l'expression de la variation de Lagrangien, il vient :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}(\mathbf{u}_a^k, \theta^k, \psi^k) = & \int_0^L \left[ \theta(x, t_f) + \rho C \psi^k(x, t_f) \right] \delta \theta^k(x, t_f) dx \\ & + \int_0^L \int_0^{t_f} \left[ -\rho C \frac{\partial \psi^k(x, t)}{\partial t} - \lambda(\theta^k) \frac{\partial^2 \psi^k(x, t)}{\partial x^2} - K_1 \psi^k(x, t) \Big|_{\substack{x \in [b, c] \\ t \in [60, 120]}} \right] \delta \theta^k(x, t) dx dt \\ & - \int_0^{t_f} \psi^k(L, t) \frac{\partial [\lambda(\theta^k) \delta \theta^k(L, t)]}{\partial x} dt + \int_0^{t_f} \psi^k(0, t) \frac{\partial [\lambda(\theta^k) \delta \theta^k(0, t)]}{\partial x} dt \\ & - \int_0^{t_f} \int_0^L \delta \mathbf{u}_a^k(x, t) \psi^k(x, t) dx dt \end{aligned}$$

Le problème adjoint est alors formulé de manière à ce que  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^k} \delta \theta^k = 0$  et conduit au système d'EDPs

suisant dont  $\psi(x, t)$  est solution :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\rho C \frac{\partial \psi^k(x, t)}{\partial t} - \lambda(\theta^k) \frac{\partial^2 \psi^k(x, t)}{\partial x^2} = K_1 \psi^k(x, t) \Big|_{\substack{x \in [b, c] \\ t \in [60, 120]}} & \forall (x, t) \in [0, L] \times [0, t_f] \\ \psi^k(0, t) = \psi^k(L, t) = 0 & \forall t \in [0, t_f] \\ \psi^k(x, t_f) = \frac{-1}{\rho C} \theta^k(x, t_f) & \forall x \in [0, L] \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Les composantes du gradient sont alors :

$$\left( \frac{\partial J}{\partial u_{aj}^k} \right)_{j=1, \dots, M} = - \left( \int_0^{t_f} \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \psi^k(x, t) s_j(t) dx dt \right)_{j=1, \dots, M} \quad (2.11)$$

Les développements précédents ont permis de montrer comment la MGC pouvait être développée dans une situation non-linéaire.

Dans ce cas non-linéaire, l'algorithme suivant est mis en oeuvre :

1. Initialisation

Initialisation du paramètre inconnu à la première itération  $k = 0$  :  $\left[ u_{aj}^0 \right]_{j=1, \dots, M} = 0$ .

2. Résolution du problème direct selon (2.1)

Simulation des températures  $\theta^k$  du problème direct.

3. Calcul du critère  $J(\theta^k)$  selon (2.3)

- Si le critère  $J(\theta^k)$  est inférieur au seuil d'arrêt (par exemple  $J_{stop} = 10^{-3}$ ) alors l'algorithme de minimisation est stoppé et on considère  $\mathbf{u}_a^{k+1}$  comme l'estimation du paramètre inconnu.
- Sinon on continue à l'étape 4.

4. Résolution du problème adjoint selon l'équation (2.10)

- Calcul du multiplicateur de Lagrange  $\psi(x, t)$ .
- Calcul du gradient  $\overrightarrow{\nabla J^k} = \left[ \frac{\partial J}{\partial u_{aj}^k} \right]_{j=1, \dots, M}$  selon (2.11).
- Calcul de la direction de descente selon la formule suivante :  $\mathbf{d}^k = -\overrightarrow{\nabla J^k} + \beta_k \mathbf{d}^{k-1}$  avec  $\beta_k = \frac{\|\overrightarrow{\nabla J^k}\|^2}{\|\overrightarrow{\nabla J^{k-1}}\|^2}$  (sauf pour  $\beta_0 = 0$  et si on tient compte du rafraîchissement des directions de descentes).

5. Résolution du problème de sensibilité selon l'équation (2.6)

- Résolution du problème de sensibilité dans la direction de descente  $\mathbf{d}^k$  pour calculer la fonction de sensibilité  $\delta\theta^k(x, t)$ .
  - Calcul de la profondeur de descente  $\gamma^k$  selon l'équation (2.8).
6. Mise à jour du contrôle selon l'équation (2.7)
- $$u_{a_j}^{k+1} = u_{a_j}^k - \gamma^k \mathbf{d}_j^k \quad \forall j \in 1, \dots, M.$$
7. Incrémentement de l'itération
- $k = k + 1$  et retour à l'étape 2.

Cet algorithme est mis en oeuvre ci-après dans différents cas numériques.

## 2.3 Résultats numériques

### 2.3.1 Première étude

La configuration étudiée est celle présentée au paragraphe 2.1.2 dans laquelle la perturbation localisée sur l'intervalle  $x \in ]0.04, 0.08[$  intervient à partir de 60 secondes. Afin de rejeter l'effet de la perturbation au temps final  $t_f = 120$  secondes, on considère un contrôle ponctuel  $\mathbf{u}_a(x)$  localisé en  $a = 0.05$  m avec  $\varepsilon = 10^{-4}$  m. Les résultats de la méthode présentée précédemment sont montrés dans la figure 2.4.

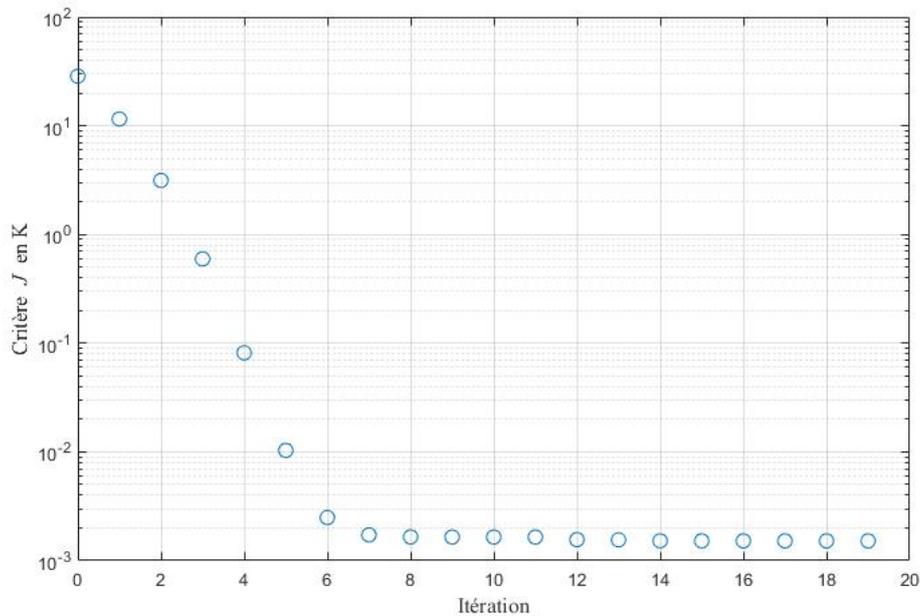


Figure 2.4 – Évolution du critère (contrôle localisé en  $a = 0.05$ ) avec  $K_1 = K_2 = 10^5$ .

Sur cette courbe, on note la décroissance rapide du critère. Toutefois celui-ci ne réussit pas à atteindre

le critère d'arrêt. Cela s'explique du fait de la perturbation choisie :

$$f(x, t) = \begin{cases} K_1\theta(x, t) + K_2 & \text{si } x \in [0.04, 0.08] \text{ et } t \in [60, 120] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En effet, le terme  $K_2$  agit même lorsque  $t \rightarrow 120$  secondes, alors que le contrôle  $\mathbf{u}_a$  est imposé nul lorsque  $t = 120$  secondes. Ainsi, si  $K_2$  est trop important, le contrôle ne parvient pas à contrer l'effet de  $K_2$  aussi précisément que désiré.

Toutefois, la distribution de température au temps final montrée sur la figure 2.5 est satisfaisante.

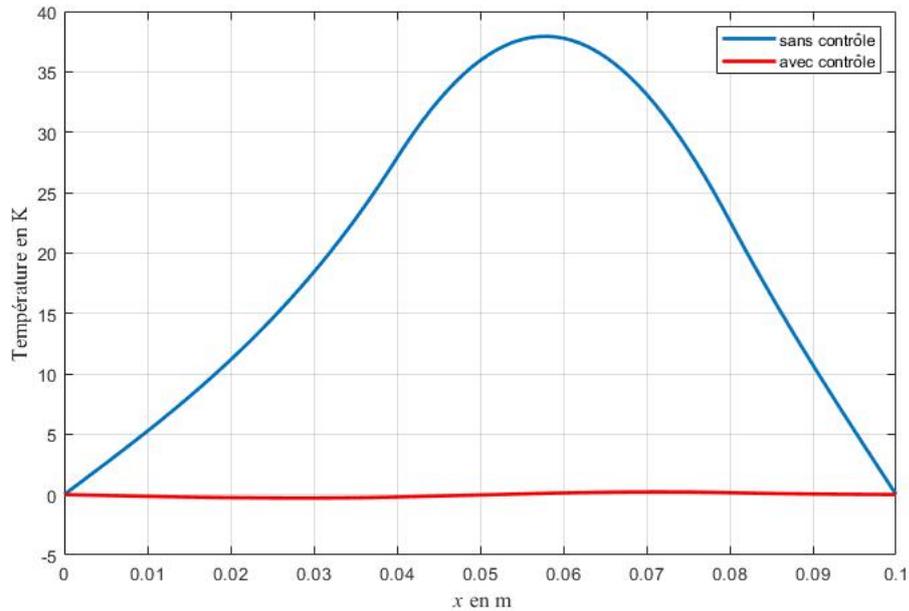


Figure 2.5 – Distribution de la température finale avec  $K_1 = K_2 = 10^5$ .

Considérant une plus faible valeur de  $K_2 = 5 \times 10^4$  et  $K_1 = 10^5$ , on obtient les résultats présentés sur les figures 2.6, 2.7 et 2.8 suivantes.

On observe sur la figure 2.6, que le test d'arrêt est atteint en quelques itérations. Le contrôle identifié permettant de rejeter les perturbations est obtenu à l'itération 5.

Le profil de la température finale est proche de zéro ce qui confirme le rejet de la perturbation causé par  $f(x, t)|_{[b,c]}$  comme il est montré sur la figure 2.7.

Sur la figure 2.8, on observe que le contrôle ponctuel  $\mathbf{u}_a(t)$  agit sur tout l'intervalle temporel et présente un fort changement de dynamique lorsque la perturbation intervient à  $t = 60$  secondes.

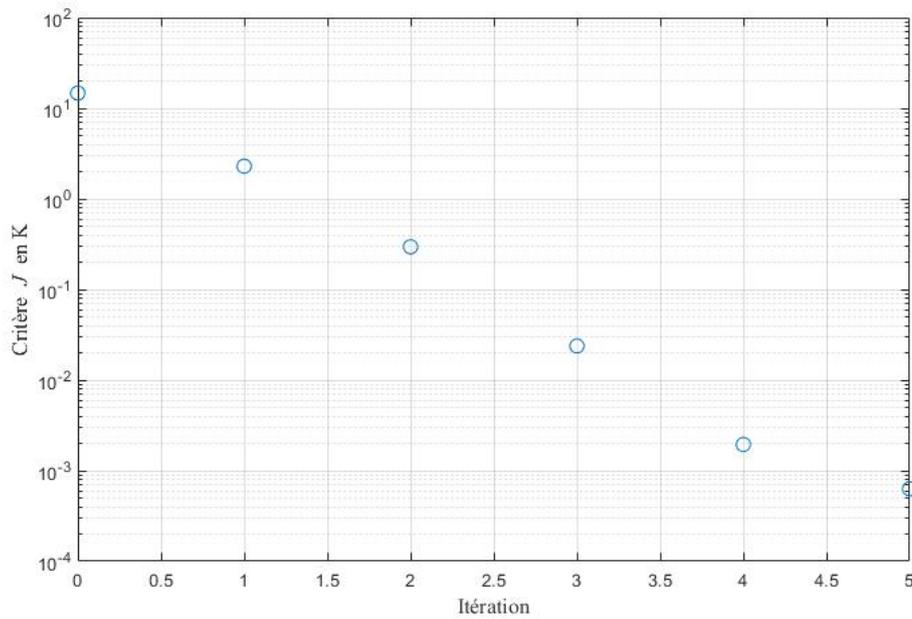


Figure 2.6 – Évolution du critère (contrôle localisé en  $a = 0.05$ ) avec  $K_1 = 10^5$  et  $K_2 = 5 \times 10^4$ .

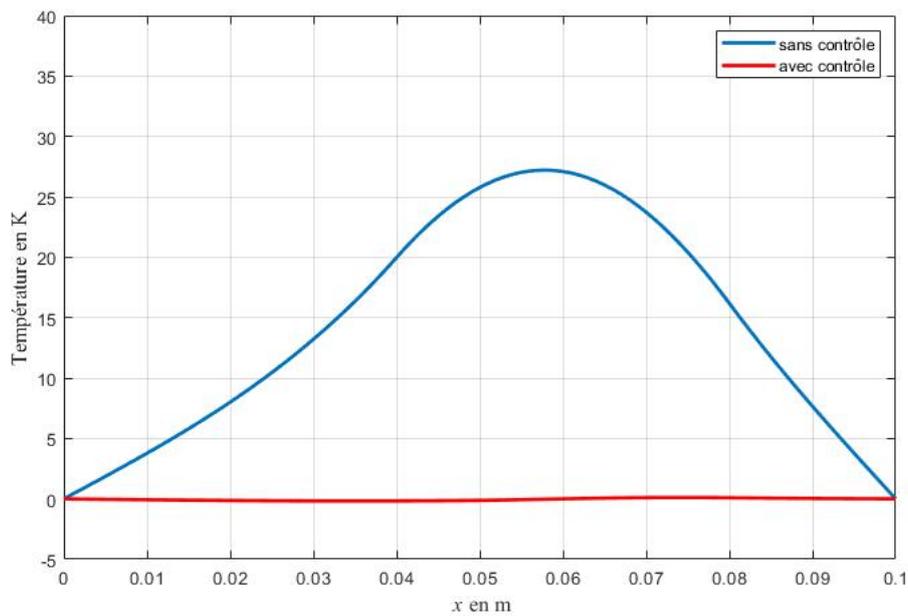


Figure 2.7 – Distribution de la température finale avec  $K_1 = 10^5$  et  $K_2 = 5 \times 10^4$ .

Dans la figure 2.9 l'évolution de la température dans le domaine est montrée pour le système sans contrôle et pour le système avec contrôle.

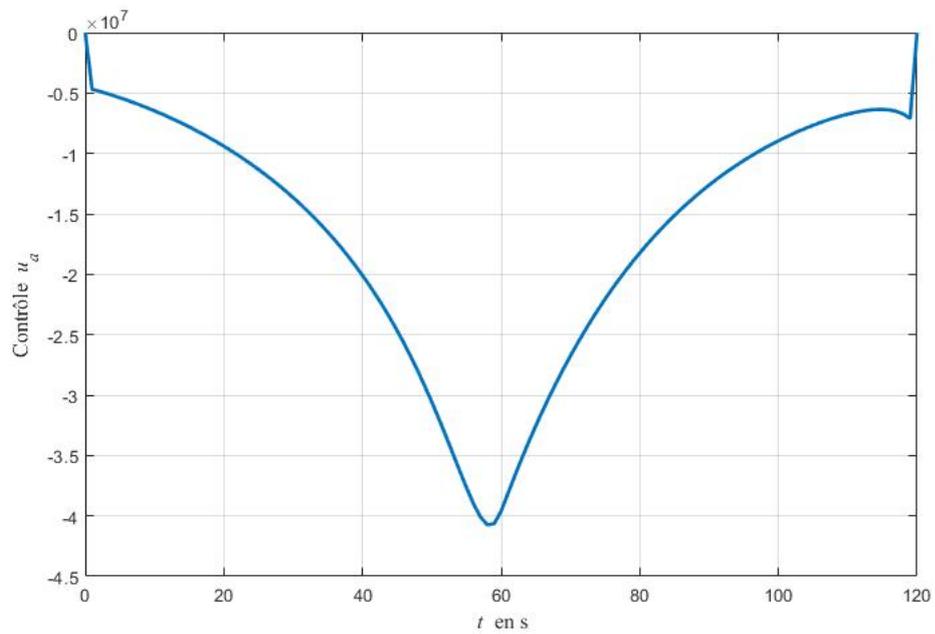


Figure 2.8 – Évolution du contrôle localisé en  $a = 0.05$  avec  $K_1 = 10^5$  et  $K_2 = 5 \times 10^4$ .

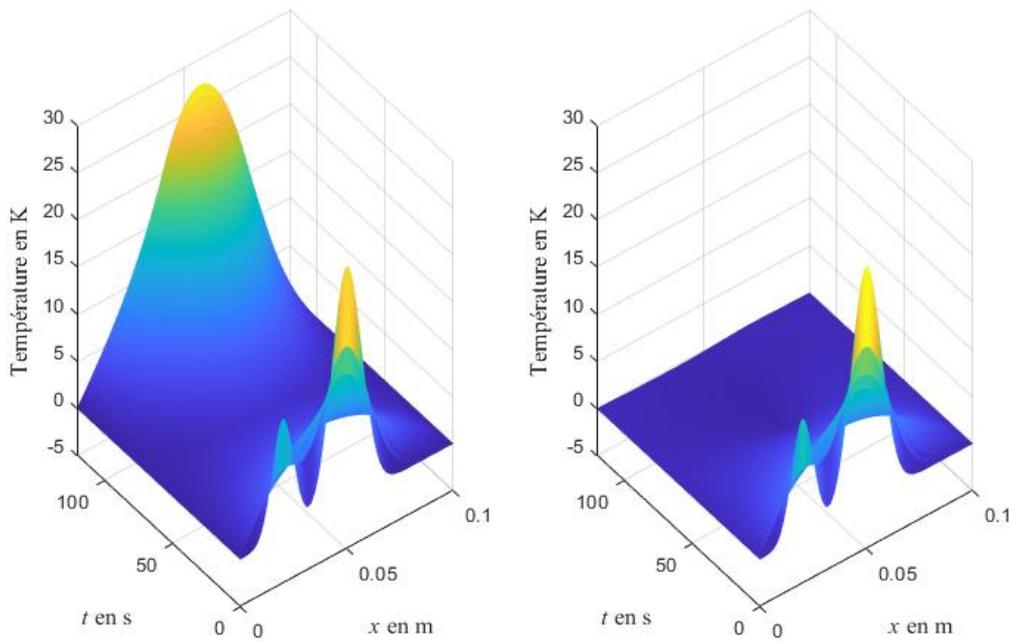


Figure 2.9 – Évolution de la température sans contrôle (à gauche) et avec contrôle (à droite).

### 2.3.2 Seconde étude – effet du positionnement

Dans l'exemple précédent, le contrôle ponctuel  $\mathbf{u}_a(t)$  était localisé au centre du domaine d'étude en  $a = 0.05$  m ce qui peut sembler une situation favorable.

Dans ce qui suit, on suppose que le contrôle ponctuel est situé plus près d'une extrémité au point d'abscisse  $a$  tel que  $a = 0.09$  m avec  $\varepsilon = 10^{-4}$  m.

Les résultats de la méthode sont montrés dans les figures 2.10 et 2.11 ci-après.

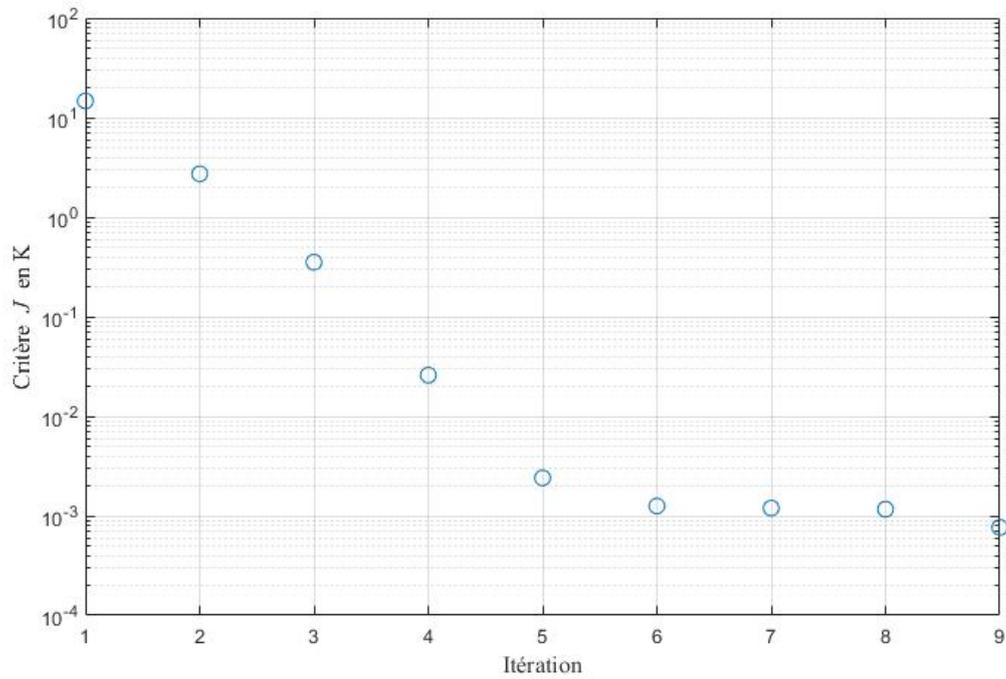


Figure 2.10 – Évolution du critère (contrôle localisé en  $a = 0.09$ ) avec  $K_1 = 10^5$  et  $K_2 = 5 \times 10^4$ .

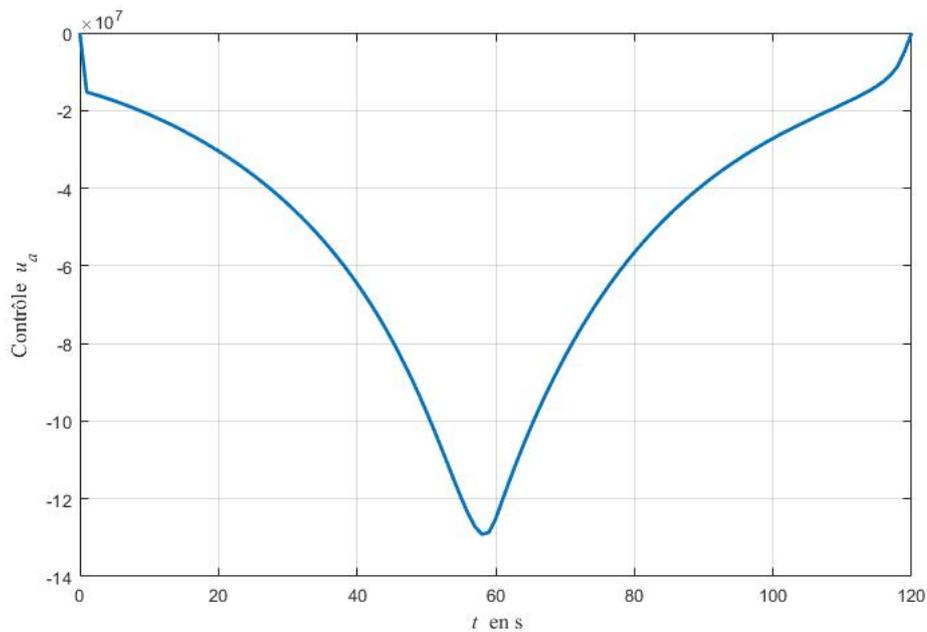


Figure 2.11 – Évolution du contrôle localisé en  $a = 0.09$  avec  $K_1 = 10^5$  et  $K_2 = 5 \times 10^4$ .

En comparant le minimum de la courbe 2.11 avec le minimum de la courbe 2.8, on remarque que l'évolution du contrôle lorsque  $a = 0.09$  est beaucoup plus important en terme d'énergie que celle de l'évolution du contrôle lorsque  $a = 0.05$  :  $\max_{a=0.09} | \mathbf{u}_a(t) | > \max_{a=0.05} | \mathbf{u}_a(t) |$ .

L'amplitude du contrôle est d'autant plus importante lorsque celui-ci est localisé plus près d'un bord sachant que l'on considère une condition de Dirichlet homogène aux bords.

Cependant même dans une configuration où le contrôle ponctuel est proche d'une des frontières, la MGC a permis de définir un contrôle capable d'atteindre l'objectif, à savoir le rejet de la perturbation et la stabilisation à 0.

### 2.3.3 Troisième étude – effet de la largeur du support spatial

Considérons comme pour la première étude la perturbation définie par :

$$f(x, t) = \begin{cases} K_1\theta(x, t) + K_2 & \text{si } x \in [0.04, 0.08] \text{ et } t \in [60, 120] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $K_1 = 10^5$  et  $K_2 = 5 \times 10^4$ . Les résultats illustrés sur le tableau 2.1 étaient obtenus pour  $a = 0.05$  m. Sur le tableau 2.1 sont montrés les résultats obtenus lorsque  $\varepsilon$  croît, c'est-à-dire lorsque le support spatial du contrôle  $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$  est de plus en plus grand.

Table 2.1 – Effet de la largeur du support spatial de l'actionneur quasi-ponctuel.

$\varepsilon$	$10^{-4}$	$2 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^{-4}$	$8 \times 10^{-4}$	$10^{-3}$	$2 \times 10^{-3}$
Nombre d'itérations nécessaires pour la convergence	5	4	3	3	3	3
$\max_{t \in [0, 120]}   \mathbf{u}_a(t)  $	$4.07 \times 10^7$	$2.04 \times 10^7$	$8.15 \times 10^6$	$5.08 \times 10^6$	$4.06 \times 10^6$	$2.03 \times 10^6$
$\varepsilon \  \mathbf{u}_a(t) \ _{L^2(0,t)}$	21319	21362	21331	21264	21255	21263

Ce tableau illustre que plus le support spatial du contrôle est grand, moins l'amplitude du contrôle est importante.

En effet, le coût du contrôle appliqué sur l'intervalle  $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$  pendant 120 secondes est environ toujours le même, à savoir  $\varepsilon \| \mathbf{u}_a(t) \|_{L^2(0,t)} = \varepsilon \left[ \int_0^{120} (\mathbf{u}_a(t))^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \approx 21300$ .

Ainsi pour un support spatial deux fois plus grand, l'amplitude est deux fois moindre.

## Bilan du chapitre

Dans ce second chapitre, la méthode de régularisation itérative du gradient conjugué a été mise en oeuvre pour stabiliser à zéro un système subissant une perturbation. Contrairement au cas considéré au chapitre 1, une situation non-linéaire réaliste a été considérée. La conductivité thermique dépend de la température qui elle-même dépend de l'espace et du temps (dans ce cas, il n'est plus possible de considérer le Laplacien de la température dans l'EDP parabolique). De plus, au lieu de considérer un actionneur zone, un actionneur localisé est mis en oeuvre afin de contrer la perturbation et ramener le système vers zéro au temps final.

La méthode numérique est décrite en insistant sur la prise en compte de la non-linéarité. La discrétisation du contrôleur localisé en un point est présentée. Enfin divers résultats numériques sont présentés. Ceux-ci montrent que la méthode est robuste et permet de rejeter efficacement la perturbation. L'influence de la position de l'actionneur est mise en évidence dans une configuration où le support spatial de la perturbation ne contient pas l'actionneur ponctuel. Ce dernier même hors de la zone d'action de la perturbation demeure efficace pour rejeter la perturbation. Ceci s'explique compte tenu du système étudié (EDPs parabolique) pour lequel toute action même localisée a un effet en tout point du domaine (du fait de la conduction).

## Références bibliographiques

ALBERTOS. P., GARCIA. P., GAO. Z., LIU. T., Disturbance rejection in process control, Proceeding of the 11th World Congress on Intelligent Control and Automation, pp. 4134-4145, Shenyang, China, June 29 - July 4, 2014.

AZAR. T., PEREZ. L., PRIEUR. C., MOULAY. E., AUTRIQUE. L., Stabilization Using In-domain Actuator : A Numerical Method for a Non Linear Parabolic Partial Differential Equation, in Proceedings, Control' 2020, Bragança, Portugal, 1-3 July, 2020.

GAO. Z., Active Disturbance Rejection Control : A Paradigm Shift in Feedback Control System Design, Proceedings of the 2006 American Control Conference, pp. 2399-2405, Minneapolis, Minnesota, USA, June 14-16, 2006.

HERRERO. J.M., BLASCO. X., MARTINEZ. M., SALCEDO. J.V., Non-linear Robust Identification : Application to a Thermal Process, International Work-Conference on the Interplay Between Natural and Artificial Computation, pp. 457-466, La Manga del Mar Menor, Spain, 18-21 June 2007.

MAACHOU. A., MALTI. R., MELCHIOR. P., BATTAGLIA. J.L., OUSTALOUP. A., HAY. B., Nonlinear thermal system identification using fractional Volterra series, Control Engineering Practice, vol. 29, pp. 50-60, 2014.

MUKHOPADHYAY. S., NARENDRA. K.S., Disturbance rejection in nonlinear systems using neural networks, IEEE Transactions on Neural Networks, vol. 4, n° 1, pp. 63-72, 1993.

SIRA-RAMIREZ. H., LUVIANO-JUAREZ. A., RAMIREZ-NERIA. M., ZURITA-BUSTAMANTE. E.W., Active Disturbance Rejection Control of Dynamic Systems : A Flatness-Based Approach, ed. Butterworth-Heinemann, pp. 358, 2017.

TAIMOOR. M., AIJUN. L., UL AMIN. R., Disturbances rejection based on sliding mode control, Aircraft Engineering and Aerospace Technology, vol. 91, n° 15, pp. 680-699, 2019.

VERGNAUD. A., BEAUGRAND. G., GAYE. O., PEREZ. L., LUCIDARME. P., AUTRIQUE. L., Quasi on-line identification of temperature-dependent thermal conductivity, European Control Conference 2014, Strasbourg, France, 24-27 June 2014.

ZHENG. Q., GAO. Z., TAN. W., Disturbance Rejection in Thermal Power Plants, Proceedings of the 30th Chinese Control Conference, pp. 6350-6355, Yantai, China, July 22-24, 2011.

---

## Chapitre 3

# Adaptation pour une commande quasi en ligne

### Partie B : Commande quasi en ligne

#### 3.1 Approche quasi en ligne

##### 3.1.1 Motivations

Dans les deux chapitres précédents, il a été possible de déterminer quelle aurait dû être la commande pour assurer la convergence de l'état vers zéro en temps fini  $t_f$ . Pour ce faire il est nécessaire de définir la cible  $\theta(x, t_f) = 0$ , en tout point de l'espace  $x \in [0, L]$ . Cela peut être fait a priori, c'est-à-dire que la connaissance de l'état final désiré est indépendante de l'expérience et logiquement antérieure à l'expérience. Ainsi à partir de l'état initial connu, il est judicieux de pouvoir exhiber une commande qui a été calculée hors ligne (antérieurement) pour assurer la convergence vers zéro à partir de cet état initial. Pour ce faire il est nécessaire que l'état ne change pas pendant que la loi de commande est en cours de calcul. Dans le cas contraire la loi déterminée devient obsolète et sa pertinence discutable.

Dans la situation où il s'agit de rejeter une perturbation qui apparaît à un instant inconnu, avec une amplitude aléatoire, l'approche hors ligne n'est pas adaptée. En effet, les stratégies de commande hors ligne n'ont un sens, que si elles sont disponibles et adaptées aux perturbations avant qu'elles aient eu lieu. Cela rend la méthode hors ligne inefficace face aux perturbations aléatoires. Elle s'apparente à une commande en boucle ouverte (sans boucle de rétroaction) dont les limitations sont connues (Borovic et al., 2017), (Savela, 2017).

Dans ce qui suit, une adaptation permettant une détermination quasi en ligne des contrôles pertinents est proposée. Celle-ci s'inspire des travaux présentés dans (Vergnaud, 2015), (Vergnaud et al., 2016)

et (Vergnaud et al., 2020). Dans les travaux de Alban Vergnaud, une adaptation de la méthode de régularisation itérative du gradient conjugué est proposée afin d'identifier quasi en ligne des paramètres thermophysiques intervenant dans une EDP parabolique linéaire (ou non) en utilisant des mesures. Pour les travaux présentés dans ce document dédiés à une problématique de commande, il s'agit d'analyser de manière séquentielle et au fur et à mesure de l'évolution de l'état du système quel contrôle il aurait fallu appliquer précédemment au système. Ce contrôle est alors appliqué avec retard compte tenu du fait qu'il faut non seulement mesurer l'état final obtenu pour agir (et que donc le contrôle est déterminé trop tard) mais qu'en plus il faut tenir compte du temps de calcul nécessaire à déterminer ce contrôle. Cette approche peut alors s'apparenter à une commande retardée (Yue, Han, 2005), (Roy, Kar, 2020). Dans ce qui suit, on suppose que la distribution de température dans la barre  $1D$  est mesurée avec un échantillonnage en temps adapté à la dynamique des phénomènes physiques mis en jeu. Par exemple, considérant les dynamiques des systèmes thermiques étudiés aux chapitres précédents, un pas d'échantillonnage de 1 seconde peut sembler satisfaisant. En pratique il conviendra de s'assurer que les capteurs permettant d'observer le système peuvent fournir des résultats à une telle fréquence et que le retard induit par la chaîne d'acquisition est inférieur au pas d'échantillonnage.

### 3.1.2 Notations

Dans ce qui suit, les notations suivantes sont considérées :

- $T_i = [t_{2i}, t_{2i+1}]$  est l'intervalle de temps courant qui correspond au temps durant lequel le procédé évolue. Son état (la température) est solution du problème direct (décrit par un système d'équations aux dérivées partielles paraboliques linéaires ou non) sur l'intervalle de temps  $[0, t_{2i+1}]$ .
- $T_j^* = [t_{2j}^*, t_{2j+1}^*]$  est l'intervalle de temps pris en compte pour la résolution du problème inverse. La longueur de l'intervalle  $T_j^*$  est notée  $\tau_j^* = t_{2j+1}^* - t_{2j}^*$ .
- $\tau_j$  est le temps de calcul nécessaire pour déterminer le contrôle correspondant à l'intervalle  $T_j^*$ . Ce contrôle est donc disponible à l'instant  $t_{2j+1}^* + \tau_j$  et est appliqué avec le retard  $\tau_j + \tau_j^*$ .

## 3.2 Différentes stratégies pour le contrôle quasi en ligne

Dans ce qui suit on suppose que la distribution de température dans la barre est mesurée toutes les secondes. Le choix arbitraire de ce pas d'acquisition de 1 seconde sera discuté dans les prochains chapitres.

### 3.2.1 Stratégie n° 1 - à décalage constant

Dans ce qui suit les valeurs numériques ont pour objet de faciliter la présentation de la méthode. Dans le prochain chapitre, ces données nécessaires à la détermination du contrôle seront discutées dans le cadre du problème étudié.

On suppose dans ce qui suit que toutes les  $\tau_j^* = 10$  secondes, on évalue la commande qu'il aurait fallu appliquer pour stabiliser à zéro l'état du système. Le temps nécessaire à calculer la commande est supposé constant et égal à  $\tau_j = 2$  secondes.

En pratique, en fonction des notations précédentes cela signifie que :

1. Le procédé démarre à  $t_0 = 0$  secondes et on attend  $t_1 = 10$  secondes pour observer la température sur l'intervalle  $T_0 = [t_0, t_1] = [0, 10]$ . La température « finale » est alors connue dans toute la barre :  $\theta(x, t_1)$ .
2. Le problème inverse est résolu sur l'intervalle  $T_0^* = T_0$ . La résolution numérique prend  $\tau_0 = 2$  secondes. On connaît donc au bout de  $t_1^* + 2 = 12$  secondes, le contrôle qu'il aurait fallu appliquer sur l'intervalle  $T_0 = [0, 10]$  pour que la température soit stabilisée à zéro au bout de 10 secondes.
3. Ce contrôle (validé pour  $T_0$ ) est appliqué sur  $T_1^* = [t_1^* + 2, t_1^* + 2 + 10] = [12, 22]$ . La commande agit avec un retard de 12 secondes alors que le système a continué à évoluer librement entre  $t_1 = t_0 + 10 = 10$  et  $t_2 = t_1 + \tau_0 = 10 + 2 = 12$  secondes. Ainsi au bout de  $t_3 = 22$  secondes, la température « finale » est connue dans toute la barre :  $\theta(x, t_3)$ .
4. Le problème inverse est résolu sur l'intervalle  $T_1^*$ . La résolution numérique prend  $\tau_1 = 2$  secondes. On connaît donc au bout de  $t_3^* + 2 = 24$  secondes le contrôle qu'il aurait fallu appliquer sur l'intervalle  $T_1 = [12, 22]$  pour que la température soit stabilisée à zéro au bout de 22 secondes.
5. Ce contrôle (validé pour  $T_1$ ) est appliqué sur  $T_2^* = [t_2^* + 2, t_2^* + 2 + 10] = [24, 34]$ . La commande agit avec un retard de 12 secondes alors que le système a continué à évoluer librement entre  $t_3 = 22$  secondes et  $t_4 = t_3 + \tau_1 = 24$  secondes. Au bout de  $t_4 = 24$  secondes, la température « finale » est connue dans toute la barre :  $\theta(x, t_4)$ .
6. etc.

Cette première stratégie est illustrée sur la figure 3.1 ainsi que sur la figure 3.2.

Cette stratégie n° 1 est la plus simple des différentes stratégies présentées dans ce document. Considérant un intervalle glissant sur l'état observé pour le calcul des contrôles, elle introduit na-

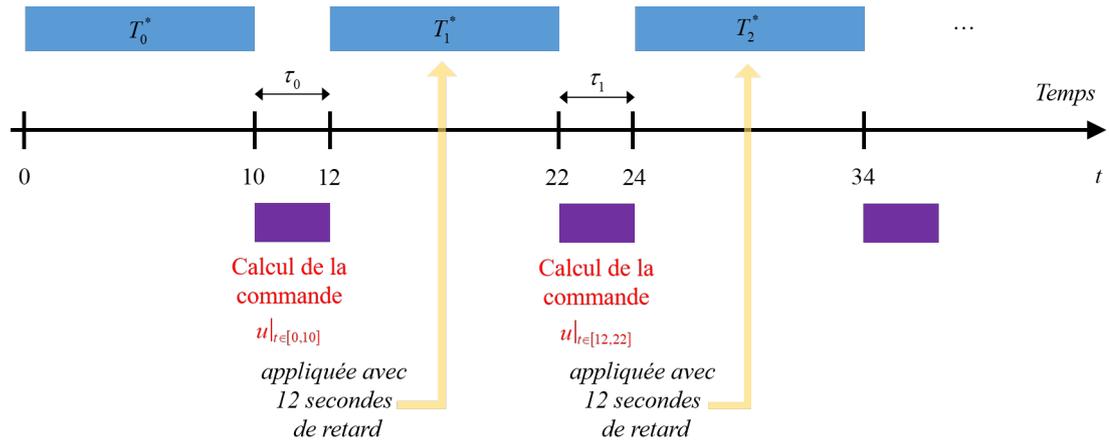


Figure 3.1 – Illustration de la stratégie n°1 avec des exemples numériques.

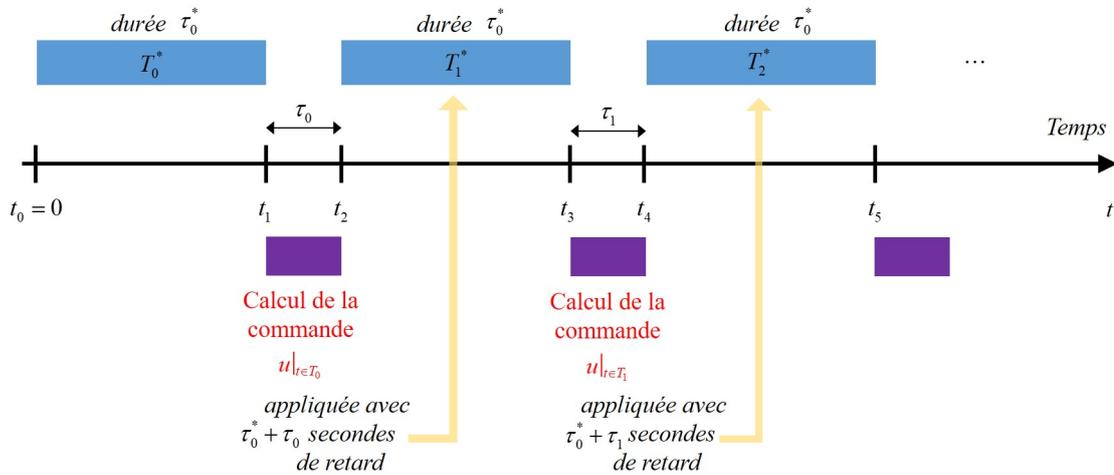


Figure 3.2 – Illustration de la stratégie n°1 dans le cas général.

tuellement un oubli des événements antérieurs à l'intervalle  $T_j^*$ . Elle est d'autant plus efficace que le retard pour appliquer la commande est faible.

Ce retard inhérent à la méthode proposée est d'autant plus faible que :

- Les intervalles  $T_j^*$  sont de petites tailles ( $\tau_j^*$  doit être faible)
- Le temps  $\tau_j$  nécessaire pour calculer les lois de commandes est faible. Cela est possible si l'intervalle sur lequel on calcule de manière itérative le problème direct, le problème de sensibilité et le problème adjoint est petit. Cela engendre aussi un nombre d'inconnus plus faible (pour les contrôles à déterminer) et contribue encore à la réduction de ce temps  $\tau_j$ .

Il est souhaitable que la durée de calcul  $\tau_j$  ne soit pas plus grande que la longueur des intervalles  $T_j^*$ .

En pratique, pour la stratégie n°1, on considère que les intervalles  $T_j^*$  sont de longueur  $\tau_j^*$  constante.

C'est pourquoi dans ce qui suit la stratégie n°1 est dite « à pas constant ».

3.2.2 Stratégie n° 2 – à décalage adaptatif

Afin d'éviter les calculs inutiles, il convient de ne pas déclencher de calculs pour déterminer la commande si le système actuel est déjà stabilisé à zéro. Pour ce faire, on évalue :

$$J(\theta(x, t)) = \|\theta(x, t)\|_{L^2([0, L])}^2 = \int_0^L (\theta(x, t))^2 dx \quad (3.1)$$

Ainsi, dès lors qu'à l'instant  $t_{2i+1}$  la température s'éloigne de zéro, c'est à dire :  $J(\theta(x, t_{2i+1})) > \alpha$ , alors la procédure d'identification est lancée en prenant en compte l'évolution de l'état sur  $[t_{2i}, t_{2i+1}]$ . On suppose à titre d'exemple que, comme pour la stratégie n° 1, les intervalles  $T_j^*$  sont de longueur  $\tau_j^*$  constante ( $\tau_j^* = 10$  secondes) et que le temps nécessaire à calculer la commande est constant et égal à  $\tau_j = 2$  secondes.

En pratique, en fonction des notations précédentes, pour la stratégie n° 2 :

1. Le procédé démarre, on attend 10 secondes puis on teste toutes les secondes la distribution de température dans toute la barre de manière à calculer  $J(\theta(x, t))$  selon (3.1).
2. Dès que  $J(\theta(x, t)) > \alpha$  alors  $t_1 = t$  et le problème inverse est résolu sur l'intervalle  $T_0^* = [t_0, t_1]$  avec  $t_0 = t_1 - 10$  secondes. La résolution numérique prend  $\tau_0 = 2$  secondes. On connaît donc au bout de  $t_1^* + 2 = 12$  secondes le contrôle qu'il aurait fallu appliquer sur l'intervalle  $T_0^*$  pour que la température soit stabilisée à zéro à  $t_1^*$ .
3. Ce contrôle (validé pour  $T_0$ ) est appliqué sur  $T_1 = [t_1^* + 2, t_1^* + 2 + 10] = [t_2^*, t_3^*]$ . Au bout de  $t_3^*$  secondes, on recommence à calculer toutes les secondes  $J(\theta(x, t))$  selon (3.1).
4. Dès que  $J(\theta(x, t)) > \alpha$  alors  $t_3 = t$  et le problème inverse est résolu sur l'intervalle  $T_1^* = [t_2, t_3]$  avec  $t_2 = t_3 - 10$  secondes. La résolution numérique prend  $\tau_1 = 2$  secondes. On connaît donc au bout de  $t_3^* + \tau_1$  secondes le contrôle qu'il aurait fallu appliquer sur l'intervalle  $T_1^*$  pour que la température soit stabilisée à zéro à  $t_3^*$ .
5. Ce contrôle (validé pour  $T_1$ ) est appliqué sur  $T_2 = [t_3^* + 2, t_3^* + 2 + 10] = [t_4^*, t_5^*]$ . Au bout de  $t_5^*$  secondes, on recommence à calculer toutes les secondes  $J(\theta(x, t))$  selon (3.1).
6. etc.

Cette seconde stratégie est illustrée sur la figure 3.3 ainsi que sur la figure 3.4.

Lorsque la température est suffisamment proche de zéro, c'est à dire :  $J(\theta(x, t)) < \alpha$ , alors le contrôle

à appliquer est nul. Pour cette stratégie n°2, la commande est recalculée dès que  $J(\theta(x, t)) > \alpha$  et si le problème inverse n'est pas en cours de résolution.

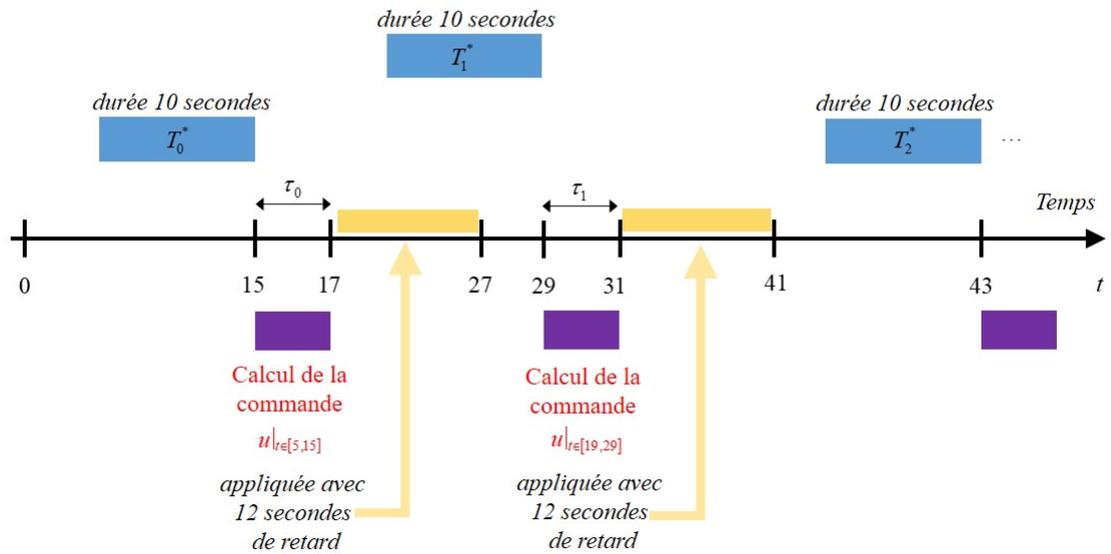


Figure 3.3 – Illustration de la stratégie n°2 avec des exemples numériques.

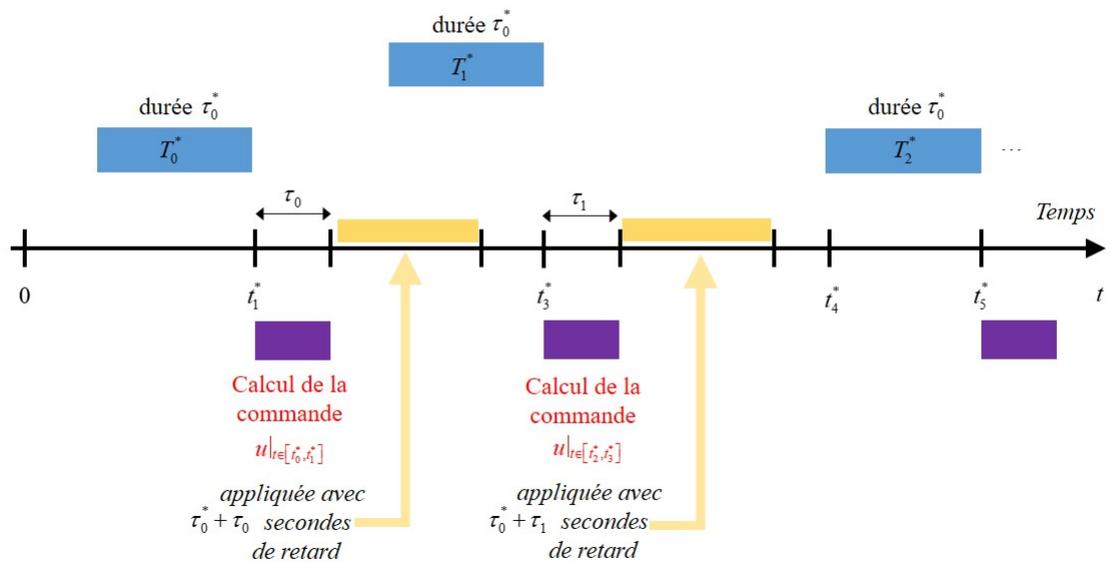


Figure 3.4 – Illustration de la stratégie n°2 dans le cas général.

La méthode est d'autant plus efficace par rapport à la stratégie n°1 que le seuil  $\alpha$  est bien choisi :

- si  $\alpha$  est trop grand alors l'état (la température) s'est trop éloigné de sa cible (température nulle dans  $\Omega = [0, L]$ ) et le contrôle agira avec un retard important qui nuira à son efficacité ;
- si  $\alpha$  est trop petit alors la commande va être recalculée trop souvent et un phénomène d'oscillation sera observé. Celui-ci s'apparente au broutement qui caractérise certaines commandes par modes glissants (Lee, Utkin, 2007), (Wang, Adeli, 2012).

Dans ce qui suit, la stratégie n°2 est dite « à décalage adaptatif ».

### 3.2.3 Stratégie n°3 – à durée adaptée

Cette troisième et dernière stratégie est une amélioration de la stratégie précédente. Elle repose sur une modification de la durée de l'intervalle pris en compte pour calculer le contrôle. Rappelons que ces intervalles sont notés  $T_j^* = [t_{2j}^*, t_{2j+1}^*]$  et que la longueur de l'intervalle  $T_j^*$  est notée  $\tau_j^*$ .

Comme précédemment, l'appel d'un nouveau contrôle est déclenché dès lors que la distribution de température dans  $\Omega$  s'est éloigné de zéro de manière jugée rédhitoire :

$$J(\theta(x, t_{2j+1}^*)) > \alpha_{max}$$

L'intervalle sur lequel il convient de prendre en compte les données pour proposer une nouvelle loi de contrôle est  $T_j^* = [t_{2j}^*, t_{2j+1}^*]$  et  $t_{2j}^*$  est l'instant à partir duquel la distribution de température avait commencé à s'éloigner de manière significative de 0 :

$$J(\theta(x, t_{2j}^*)) > \alpha_{min}$$

Il est évident que  $0 < \alpha_{min} < \alpha_{max}$ .

Autrement dit,  $t_{2j+1}^*$  est l'instant auquel la distribution de température s'est trop éloignée de zéro et  $t_{2j}^*$  est l'instant antérieur à  $t_{2j+1}^*$  à partir duquel la distribution de température a commencé à s'éloigner de zéro. La longueur des intervalles  $T_j^* = [t_{2j}^*, t_{2j+1}^*]$  est  $\tau_j^* = t_{2j+1}^* - t_{2j}^*$ ; elle varie à chaque identification. En pratique, on peut considérer que  $\alpha_{min}$  est une fraction de  $\alpha_{max}$ . Selon cette approche, il est possible qu'il y ait recouvrement de certains intervalles  $T_j^*$  mais comme pour les stratégies n°1 et n°2, il est impossible de lancer une nouvelle détermination du contrôle pendant la résolution du problème inverse. En pratique, en fonction des notations précédentes et en illustrant avec des valeurs numériques :

1. Le procédé démarre à  $t_0 = 0$  secondes et on attend 5 secondes pour observer la température

$\theta(x, t)$  pour  $x \in [0, L]$ . Dès l'instant  $t$  où  $J(\theta(x, t)) > \alpha_{max} = 10^{-3}$  alors  $t_1^* = t$  et on cherche  $t_0^*$  tel que  $J(\theta(x, t_0^*)) > \alpha_{min} = 10^{-1}$ . Par exemple on peut considérer qu'à  $t_1^* = 7$  secondes, la température s'est trop éloignée de son état stable (0) et que la température a commencé à s'en éloigner à partir de  $t_0^* = 3$  secondes.

2. Le problème inverse est résolu sur l'intervalle  $T_0^* = [t_0^*, t_1^*] = [3, 7]$ . La résolution numérique prend  $\tau_0 = 2$  secondes. On connaît donc au bout de  $t_1^* + 2 = 9$  secondes le contrôle qu'il aurait fallu appliquer pendant 4 secondes sur l'intervalle  $T_0^* = [3, 7]$  pour que la température soit stabilisée à zéro au bout de 7 secondes.
3. Ce contrôle est appliqué sur  $T_1 = [t_1^* + 2, t_1^* + 2 + 4] = [9, 13]$ . A partir de 9 secondes, on cherche l'instant  $t$  où  $J(\theta(x, t)) > \alpha_{max}$  alors  $t_3^* = t$  et on cherche  $t_2^*$  tel que  $J(\theta(x, t_2^*)) > \alpha_{min}$ . Par exemple on peut considérer qu'à  $t_3^* = 10$  secondes, la température s'est trop éloignée de son état stable (0) et que la température a commencé à s'en éloigner à partir de  $t_1^* = 3$  secondes.
4. Le problème inverse est résolu sur l'intervalle  $T_1^* = [t_2^*, t_3^*] = [3, 10]$ . La résolution numérique prend  $\tau_1 = 2$  secondes. On connaît donc au bout de  $t_3^* + 2 = 12$  secondes le contrôle qu'il aurait fallu appliquer sur l'intervalle  $T_1^* = [3, 10]$  pour que la température soit stabilisée à zéro au bout de 10 secondes.
5. Ce contrôle (validé pour  $T_1^*$ ) est appliqué sur  $T_2 = [t_3^* + 2, t_3^* + 2 + 7] = [12, 19]$ . Cet intervalle n'est pas disjoint avec  $T_1 = [9, 13]$ . Ainsi à partir du moment où la nouvelle commande est disponible (à 9 secondes) celle-ci remplace l'ancienne commande.
6. etc.

Cette troisième stratégie est illustrée sur la figure 3.5 ainsi que sur la figure 3.6.

Elle permet de réagir dès lors que la distribution de température dans le domaine est jugée trop différente de zéro. Comme pour la stratégie n°2 il convient de choisir le seuil  $\alpha_{max}$  ni trop grand (ce qui nuit à la stabilisation à zéro) ni trop petit (ce qui entraîne des oscillations inutiles).

De même, le seuil  $\alpha_{min} < \alpha_{max}$  doit être choisi ni trop proche de  $\alpha_{max}$  (sinon les intervalles  $T_j^*$  seront trop petits ce qui empêchera d'appréhender les dynamiques du système) ni trop petit (sinon les intervalles  $T_j^*$  seront trop grands ce qui augmentera le temps de calcul et le retard dans la commande). Compte tenu de la longueur variable des intervalles  $T_j^*$ , cette stratégie n°3 est dite à « durée adaptée ».

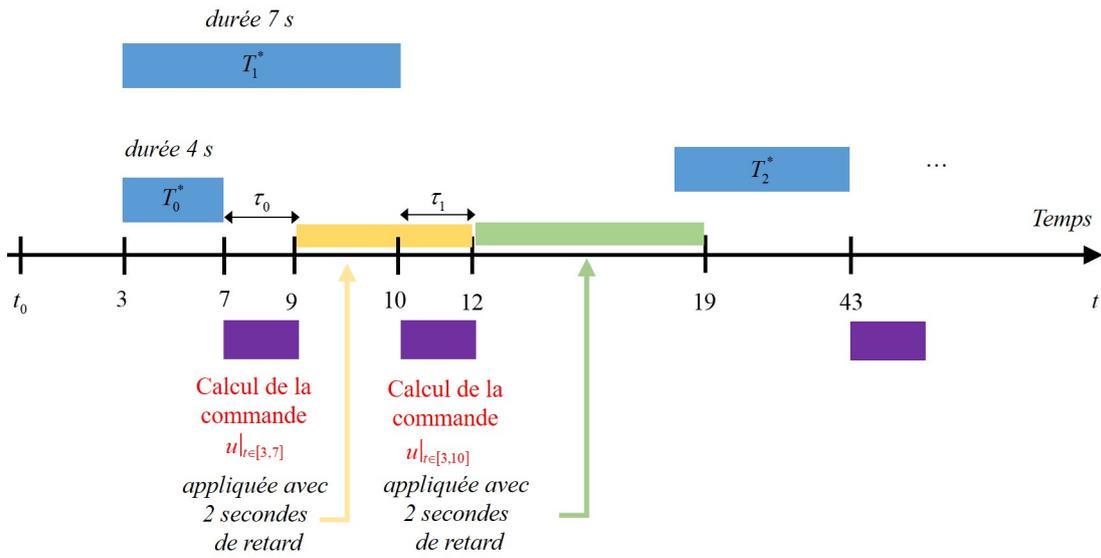


Figure 3.5 – Illustration de la stratégie n°3 avec des exemples numériques.

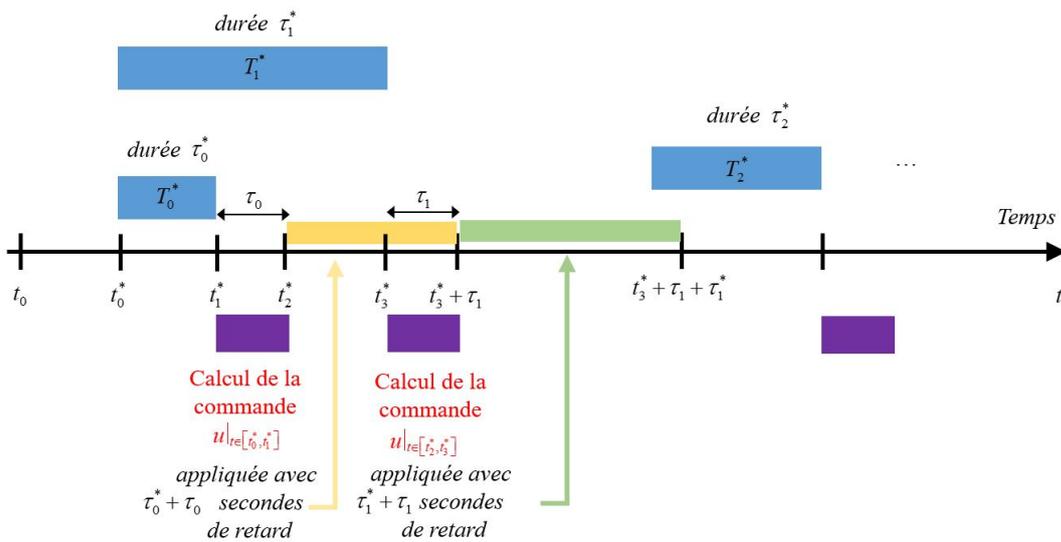


Figure 3.6 – Illustration de la stratégie n°3 dans le cas général.

### 3.3 Illustration didactique

Dans ce qui suit, afin de mieux illustrer le fonctionnement des stratégies présentées précédemment, on considère comme sortie une fonction  $g(t)$  qui dépend du temps. Les trois configurations décrites ci-après n'ont aucune relation avec le génie thermique, les EDPs ou même l'automatique. L'objectif n'est en aucun cas de « ramener » la fonction  $g(t)$  vers zéro. Il s'agit d'un support visuel afin de mieux appréhender le comportement des trois stratégies précédentes qui s'avèrent complexes à décrire.

3.3.1 Première stratégie

On considère dans ce qui suit l'évolution d'une fonction  $g(t)$  (tracée toutes les secondes sur la figure 3.7). Cette fonction peut être calculée à partir de sa valeur initiale et connaissant l'accroissement comme ceci :

$$g(1) = 0 \quad \text{et} \quad g(k+1) = g(k) + \delta g(k) \quad \text{pour} \quad k = 1, \dots, 119 \quad (3.2)$$

Toutes les 10 secondes, on calcule la correction définie comme le quart de la moyenne des 10 valeurs obtenues. Celle-ci est appliquée avec 2 secondes de retard. Ainsi la nouvelle fonction corrigée  $g_{1,corr}(t)$  est :

- pour  $k = 1, \dots, 10$ ;  $g_{1,corr}(k) = g(k)$ ;
- pour  $k = 11$  et  $k = 12$ ;  $g_{1,corr}(k) = g(k)$ ;
- pour  $k = 13, \dots, 22$ ;  $g_{1,corr}(k+1) = g_{1,corr}(k) + \delta g(k) - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} g_{1,corr}(i) \right)$ ;
- pour  $k = 23$  et  $k = 24$ ;  $g_{1,corr}(k+1) = g_{1,corr}(k) + \delta g(k)$ ;
- pour  $k = 25, \dots, 34$ ;  $g_{1,corr}(k+1) = g_{1,corr}(k) + \delta g(k) - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{10} \sum_{i=13}^{22} g_{1,corr}(i) \right)$ ;
- ...

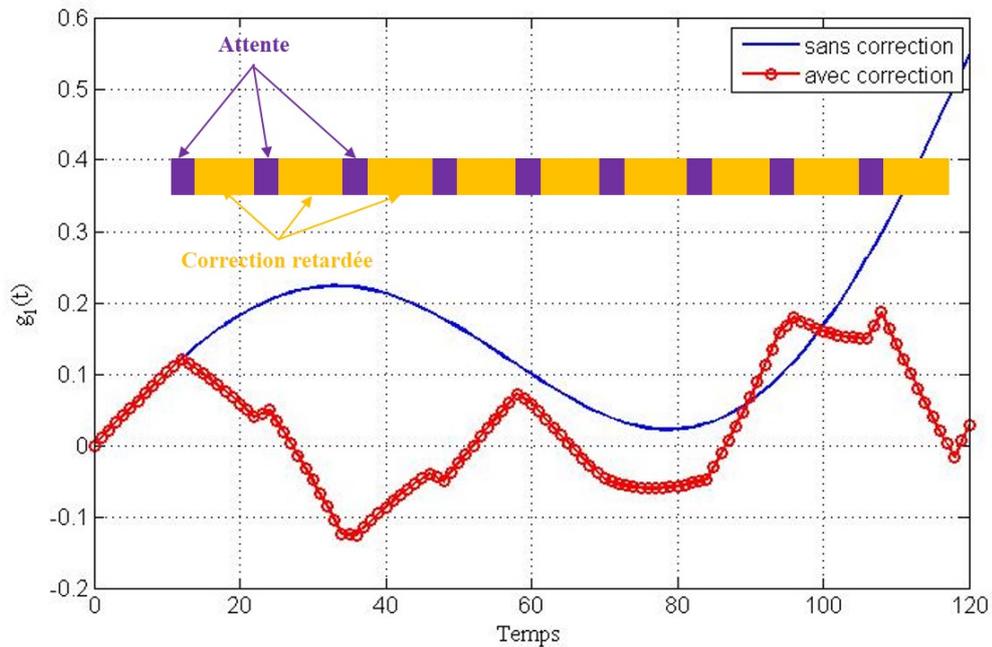


Figure 3.7 – Évolution de la fonction  $g_1(t)$  sans et avec correction.

Sur la figure 3.7, l'alternance des retards (en violet) et de l'application de la correction (en jaune) est

montrée. Ce comportement illustre le principe de la stratégie  $n^{\circ} 1$  dite « à décalage constant » car les intervalles jaunes sont de taille constante (10 secondes).

### 3.3.2 Seconde stratégie

On considère dans ce qui suit l'évolution de la même fonction  $g(t)$  (tracée toutes les secondes sur la figure 3.8). Cette fonction peut être calculée à partir de sa valeur initiale et connaissant l'accroissement comme en (3.2).

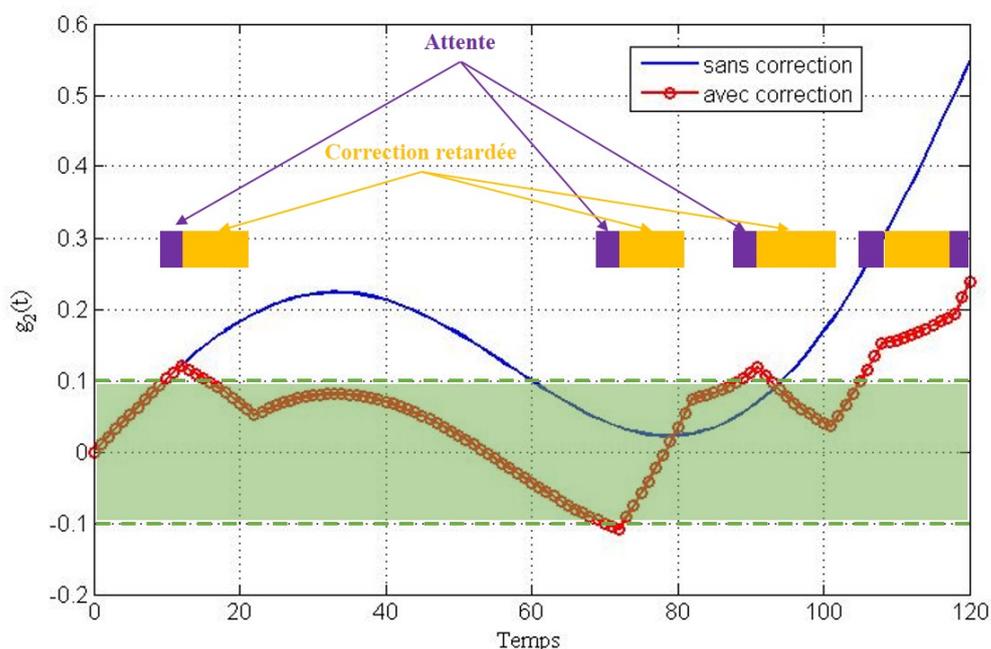


Figure 3.8 – Évolution de la fonction  $g_2(t)$  sans et avec correction.

Une fois passées les 10 premières secondes, on teste si  $|g(t)| > 0.1$ . Si oui, on applique la correction définie comme le quart de la moyenne des 10 valeurs obtenues précédemment. Celle-ci est appliquée avec 2 secondes de retard. Pendant ces 12 secondes, le test de dépassement n'est pas effectué. Ainsi la nouvelle fonction corrigée  $g_{2,corr}(t)$  est :

- pour  $k = 1, \dots, 10$ ;  $g_{2,corr}(k) = g(k)$ , et on remarque que  $|g_{2,corr}(10)| > 0.1$  il faudra donc appliquer le correctif dans 2 secondes ;
- pour  $k = 11$  et  $k = 12$ ;  $g_{2,corr}(k) = g(k)$  (il s'agit des 2 valeurs pour lesquelles on ne fait rien en attendant la correction) ;
- pour  $k = 13, \dots, 22$ ;  $g_{2,corr}(k+1) = g_{2,corr}(k) + \delta g(k) - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} g_{2,corr}(i) \right)$  car  $|g_{2,corr}(10)| > 0.1$  ;
- pour  $k = 23, \dots, 70$ ;  $g_{2,corr}(k+1) = g_{2,corr}(k) + \delta g(k)$  et on remarque que  $|g_{2,corr}(70)| > 0.1$ , il

faudra donc appliquer le correctif dans 2 secondes ;

- pour  $k = 71$  et  $k = 72$ ;  $g_{2,corr}(k) = g_{2,corr}(k - 1) + \delta g(k - 1)$  (il s'agit des 2 valeurs pour lesquelles on ne fait rien en attendant la correction) ;
- pour  $k = 73, \dots, 82$ ;  $g_{2,corr}(k+1) = g_{2,corr}(k) + \delta g(k) - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{10} \sum_{i=61}^{70} g_{2,corr}(i) \right)$  car  $|g_{2,corr}(70)| > 0.1$  ;
- ...

Sur la figure 3.8, l'alternance des retards (en violet) et de l'application de la correction (en jaune) est montrée. Ce comportement illustre le principe de la stratégie n° 2 qui ne se déclenche dès lors que le seuil n'est plus respecté mais qui agit pendant une durée constante de 10 secondes. Cette stratégie n° 2 est dite « à décalage adaptatif ».

### 3.3.3 Troisième stratégie

On considère dans ce qui suit l'évolution de la même fonction  $g(t)$  (tracée toutes les secondes sur la figure 3.9). Cette fonction peut être calculée à partir de sa valeur initiale et connaissant l'accroissement comme en (3.2). La stratégie est la suivante. Afin d'appliquer le correctif (toujours avec 2 secondes de retard) on recherche l'intervalle (antérieur) pendant lequel la fonction satisfaisait  $0.08 < |g(t)| < 0.1$ . La correction est égale au quart de la valeur moyenne des valeurs prises par la fonction sur cet intervalle. La correction est appliquée avec 2 secondes de retard.

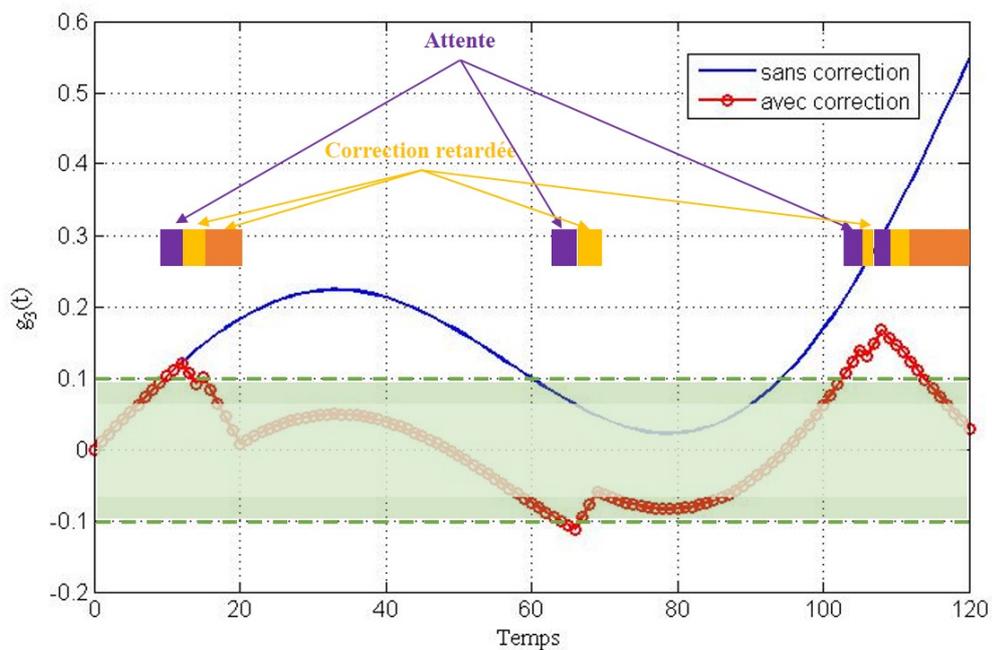


Figure 3.9 – Évolution de la fonction  $g_3(t)$  sans et avec correction.

Dans le tableau 3.1, les intervalles correspondants aux calculs de la correction ainsi qu'à son application sont donnés :

Table 3.1 – Description de la stratégie  $n^{\circ} 3$  appliquée à la fonction  $g(t)$ .

Instant où $ g(t)  < 0.1$	Instant antérieur où $ g(t)  > 0.08$	Intervalle sur lequel on calcule la moyenne	Intervalle pendant lequel on applique la correction
10	8	[8,10]	[13,15]
13	8	[8,13]	[16,20]
64	61	[61,64]	[67,70]
103	102	[102,103]	[106,107]
106	102	[102,106]	[109,111]
109	102	[102,109]	[112,114]
112	102	[102,112]	[115,120]

Sur la figure 3.9, l'alternance des retards (en violet) et de l'application de la correction (en jaune) est montrée. On remarque que la durée des corrections varie et que celles-ci peuvent se succéder sans qu'il y ait la présence d'un retard. Ce comportement illustre le principe de la stratégie  $n^{\circ} 3$  dite à « durée adaptée ».

## Bilan du chapitre

Dans ce troisième chapitre, la méthode de régularisation itérative du gradient conjugué a été adaptée afin d'offrir la possibilité de fournir des lois de commande quasi en ligne. Pour ce faire le problème inverse est résolu sur des intervalles temporels glissants, au fur et à mesure que les informations arrivent sur l'état du système (par exemple la distribution de température dans le domaine). Une commande est appliquée a posteriori. Cette technique introduit un décalage temporel et fournit donc une commande avec retard. Différentes approches peuvent être utilisées selon l'instant où on déclenche le calcul d'une nouvelle loi de contrôle, le nombre d'informations antérieures prises en compte pour déterminer le contrôle et enfin la durée pendant laquelle cette loi de commande va agir sur le système.

La première stratégie proposée consiste à agir séquentiellement afin de fournir à intervalles constants des lois de commande mises à jour. Cette stratégie est dite « à décalage constant ».

La seconde stratégie proposée consiste à mettre à jour des nouvelles lois de commande uniquement lorsque la distribution finale de température s'éloigne trop d'un seuil préalablement fixé (basé sur la norme  $L^2([0, L])$  de la température). Cette stratégie qui agit que lorsque cela s'avère nécessaire du fait de l'état du système est dite « à décalage adaptatif ».

La troisième stratégie proposée consiste à mettre à jour des lois de commande en ne tenant compte que des observations de températures (basées sur la norme  $L^2([0, L])$ ) entre deux seuils : l'un jugé réhibitoire, l'autre jugé significatif. Cette troisième stratégie vise à prendre en compte un nombre d'observations pertinents afin de stabiliser le système et permet le recouvrement des lois de commande ce qui peut en particulier éviter les retards. Les lois de commande étant de durée variable, cette stratégie est dite « à durée adaptée ».

Enfin, des illustrations ont été proposées afin de mieux expliquer les différentes stratégies.

## Références bibliographiques

BOROVIC. B., LIU. A.Q., POPA. D., CAI. H., LEWIS. F.L., Open-loop versus closed-loop control of MEMS devices : choices and issues, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 25, n° 10, pp. 1917-1924, 2005.

LEE. H., UTKIN. V.I., Chattering suppression methods in sliding mode control systems, *Annual Reviews in Control*, vol. 31, pp. 179-188, 2007.

ROY. S., KAR. I.N., Adaptive-robust Control With Limited Knowledge on Systems Dynamics : An Artificial Input Delay Approach and Beyond, ed. Springer Verlag, Singapore, pp. 144, 2020.

SAVELA. B., Open- vs. closed-loop control in fluid power applications, *Control engineering*, August 15, 2017.

VERGNAUD. A., Déploiement adaptatif d'un réseau de capteurs mobiles pour le suivi d'un phénomène évolutif décrit par des équations aux dérivées partielles, Thèse de doctorat, 194 pages, Université d'Angers, France, 2015.

VERGNAUD. A., PEREZ. L., AUTRIQUE. L., Quasi online parametric identification of moving heating devices in a 2D geometry, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 102, pp 47-61, 2016.

VERGNAUD. A., PEREZ. L., AUTRIQUE. L., Adaptive selection of relevant sensors in a network for unknown mobile heating flux estimation, *IEEE Sensors Journal*, sous presse, doi : 10.1109/JSEN.2020.3009779, 2020.

WANG. N., ADELI. H., Algorithms for chattering reduction in system control, *Journal of the Franklin Institute*, vol. 349, pp. 2687-2703, 2012.

YUE. D., HAN. Q.L., Delayed feedback control of uncertain systems with time-varying input delay, *Automatica*, vol. 41, n° 2, pp. 233-240, 2005.



---

## Chapitre 4

# Rejet quasi en ligne de perturbations

### 4.1 Configuration étudiée

Les EDPs sont largement étudiées en physique et le développement de stratégies de contrôle efficaces est une exigence clé pour de nombreux processus. La stabilité de l'état du système (au voisinage d'une cible souhaitée) doit être obtenue indépendamment de l'évolution des entrées non contrôlées.

Une EDP non linéaire parabolique est étudiée. Un domaine unidimensionnel est considéré et l'étude est motivée par le contrôle de la fusion nucléaire pour lequel la densité de flux magnétique et l'état thermique sont décrits par un tel système d'EDP (Attar-2017), (Gaye-2013), (Bribiesca-14). De nombreuses approches ont été développées ces dernières décennies : approche en mode glissant en dimension infinie, contrôle de rétroaction (Wijnands-1997),  $H_\infty$  stabilisation (Gaye-2013), contrôle prédictif du modèle (Ou-2009), contrôle d'un modèle orienté (Witrant-2007), ...

Cependant, le rejet des perturbations est complexe à assurer d'un point de vue théorique si les non-linéarités du modèle mathématique ne sont pas négligées. De plus, si l'emplacement des actionneurs est différent de la zone spatiale où se produisent les perturbations, le problème du contrôle optimal est assez difficile à résoudre.

Dans ce qui suit, la méthode présentée dans (Azar-2020) est modifiée afin de fournir une stratégie numérique quasi en ligne pour l'identification des lois de contrôle. Le but est d'identifier le contrôle qui peut stabiliser l'état du système à zéro (contrôlabilité nulle) en utilisant le problème du gradient conjugué. Cette méthode est pertinente pour les problèmes mal posés tel que le problème de conduction thermique inverse (IHCP) (Alifanov-1995), (Morozov-1994). Dans un contexte thermique, une sélection adaptative de capteurs pertinents dans un réseau pour l'estimation de flux de chauffage mobile incon-

nue a été proposée dans (Vergnaud-2020). L'approche présentée ci-dessous est différente du contrôle prédictif du modèle mais correspond à une commande retardée (Yue-2005), (Roy-2020). Du point de vue théorique, le problème de la contrôlabilité nulle pour l'équation de chaleur a été étudié par exemple dans (Barcena-2020).

La contrôlabilité nulle de l'équation différentielle partielle non linéaire est un défi très complexe. Compte tenu de la classe d'une EDP parabolique spécifique, l'équation de chaleur bien connue est non linéaire si les propriétés thermiques dépendent de la température. Dans un tel contexte, une méthode numérique basée sur la résolution d'un PICC est proposée. Elle vise à fournir des lois de contrôle identifiées quasi-en ligne afin d'assurer une stabilité en boucle fermée (équilibre zéro). La méthode itérative du gradient conjugué est mise en oeuvre afin de stabiliser la température dans le domaine spatial unidimensionnel malgré plusieurs perturbations (dépendantes du temps ou thermo-dépendantes). La stratégie proposée est basée sur des résolutions numériques successives du problème inverse mal posé sur des horizons temporels décroissants qui sont adaptés compte tenu de l'évolution temporelle précédente du système. Les résultats numériques dans la configuration étudiée mettent en évidence que les lois de contrôle identifiées sont capables de stabiliser le processus thermique et de rejeter les perturbations.

#### 4.1.1 Formulation du problème

Dans ce chapitre, les notations sont identiques à celles des précédents chapitres. Le problème direct consiste à déterminer la température  $\theta(x, t)$  solution de :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho C \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = u|_{[a,b]}(x, t) + f|_{[c,d]}(x, t) & \forall (x, t) \in [0, L] \times [0, t_f] \\ \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0 & \forall t \in [0, t_f] \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) & \forall x \in [0, L] \end{array} \right. \quad (4.1)$$

avec  $x \in [0, L] = \Omega$  la variable d'espace,  $t \in [0, t_f]$  la variable temporelle,  $\rho C$  la chaleur volumique en  $J.m^{-3}.K^{-1}$ ,  $\theta(x, t)$  la température au point  $x$  à l'instant  $t$ ,  $\lambda(\theta)$  la conductivité thermique en  $W.m^{-1}.K^{-1}$ ,  $\theta_0(x)$  la température initiale,  $u|_{[a,b]}(x, t)$  le flux appliqué uniquement sur l'intervalle  $x \in [a, b] \subset ]0, L[$  et  $f|_{[c,d]}(x, t)$  une perturbation agissant uniquement sur  $[c, d] \subset ]0, L[$ .

Dans ce chapitre, les paramètres suivants sont pris en considération :

- $L = 0.1 \text{ m}$
- $t_f = 900 \text{ s}$

- $\rho C = 10^6 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$
- $\lambda(\theta) = 4 \exp\left(\frac{-\theta^2}{10^4}\right) + 1 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ .

Afin de décrire l'impact de la perturbation, considérons la fonction de perturbation suivante :

cette perturbation localisée dans l'intervalle  $[0.04, 0.08]$  est définie par :

$$f(x, t) = \begin{cases} \frac{10^6(t - 240)}{60} & \text{si } t \in ]240, 300[ \\ 10^4 \times \theta(x, t) + 10^4 & \text{si } t > 600 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'état initial est donné par :

$$\theta_0(x) = 25 \left( 1.5 \exp\left(\frac{-(x - 0.03)^2}{5 \times 10^{-5}}\right) + \exp\left(\frac{-(x - 0.05)^2}{10^{-4}}\right) - 0.5 \exp\left(\frac{-(x - 0.08)^2}{5 \times 10^{-5}}\right) \right).$$

et visualisée sur la figure 4.1 :

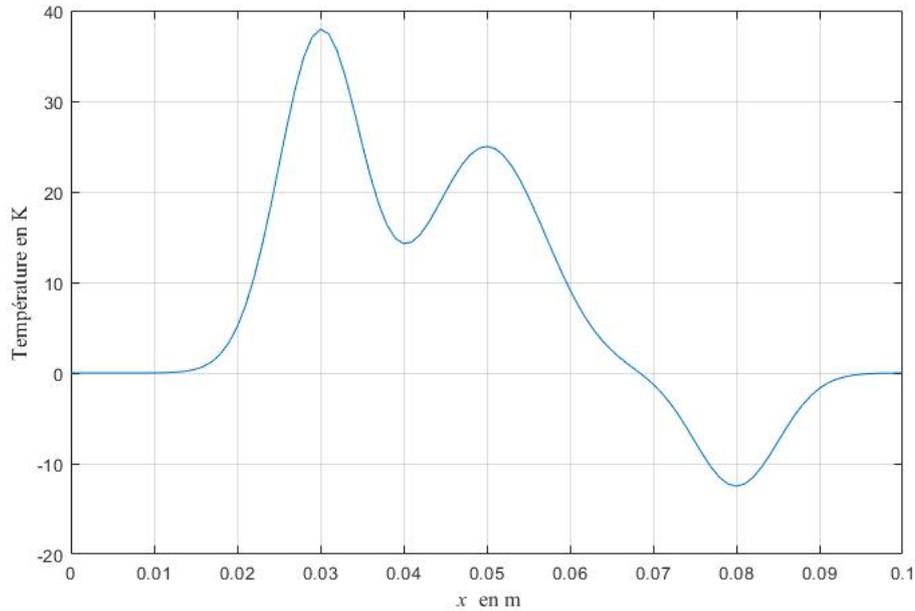


Figure 4.1 – Température initiale.

Les conditions aux limites pour  $x \in \{0, L\}$  sont des conditions de Dirichlet.

Dans la suite, une configuration sera présentée et servira à montrer comment la loi de commande conduit à stabiliser l'état du système à partir de son état initial et comment les deux types de perturbations

(dépendantes du temps pour  $t \in [240, 300]$  et thermo-dépendantes pour  $t \in [600, 900]$ ) sont rejetés. Il est important de noter que les ordres de grandeur de tous les paramètres précédents sont assez réalistes.

#### 4.1.2 Simulation numérique du problème non contrôlé

Avec les paramètres thermophysiques précédemment définis, le système (4.1) est résolu numériquement en utilisant la méthode des éléments finis avec le solveur Comsol-Multiphysics interfacé avec le programme Matlab. Sans contrôle, c'est-à-dire lorsque  $u|_{[a,b]}(x, t) = 0$ , l'évolution de la température est représentée sur la figure 4.2.

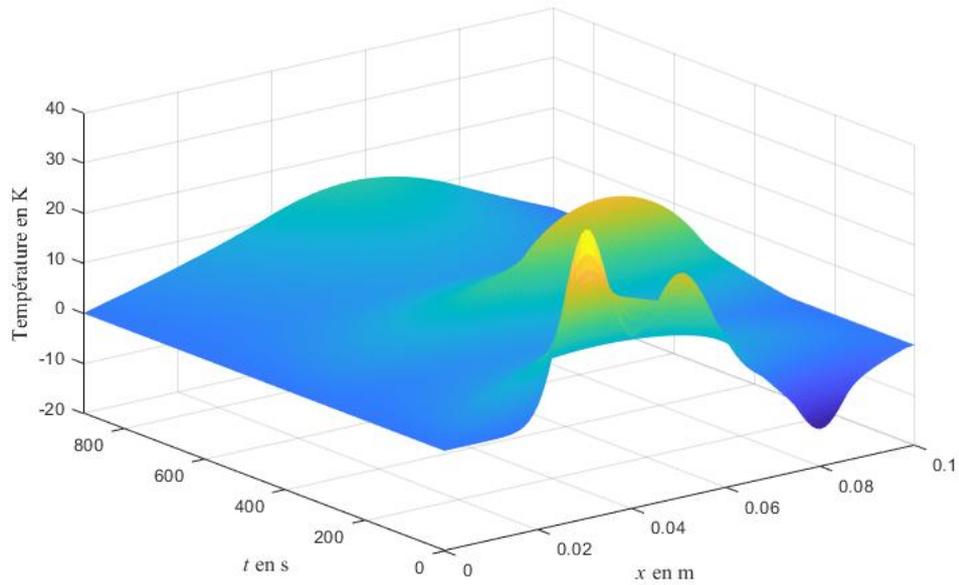


Figure 4.2 – Évolution de l'état du système sans contrôle.

Sur la base de la figure 4.2., il est évident que si

$$f(x, t) = 1,4 \times 10^4 \times \theta(x, t) + 10^4$$

pour  $x \in [0.04, 0.08]$  et  $t > 600$ , on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\theta(x, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^L [\theta(x, t)]^2 dx = +\infty.$$

Dans une telle configuration et en raison de la perturbation, la température  $\theta(x, t)$  régie par (4.1) n'est pas stable.

Afin d'observer comment la température est affectée par les perturbations  $f$  qui l'éloignent de son état d'équilibre, il est pertinent de calculer  $J(\theta)$  suivant (4.2) et qui est représenté sur la figure 4.3 :

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \|\theta(x, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{1}{2} \left( \int_0^L (\theta(x, t))^2 dx \right). \quad (4.2)$$

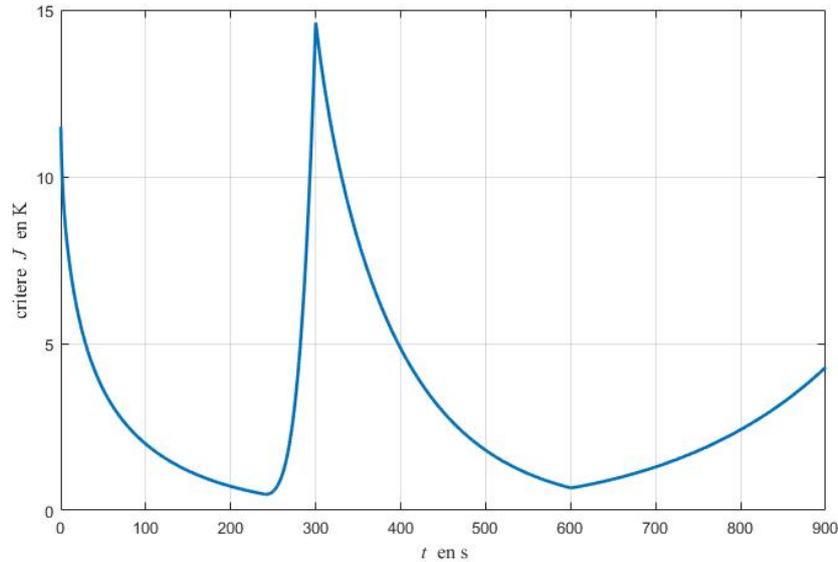


Figure 4.3 – Évolution du critère sans contrôle.

Compte tenu du temps, entre 0 et 240 secondes, sans perturbations, le système évolue à partir de sa température initiale et tend naturellement vers son état d'équilibre ( $\theta(x, t) = 0, \forall x \in \Omega$ ). Ensuite, entre 240 et 300 secondes, le système est affecté par une perturbation locale ( $x \in [0.04, 0.08]$ ) dont l'amplitude augmente linéairement en fonction du temps. L'état du système est ainsi rapidement éloigné de zéro. Lorsque cette première perturbation disparaît à  $t = 300$  secondes, la température converge naturellement vers zéro. Enfin, à partir de 600 secondes, le système est à nouveau perturbé par une fonction qui dépend de la température. Comme cela a été mentionné précédemment, une telle perturbation conduit à une non stabilité.

Cette étude numérique illustre l'impact des perturbations et sera utilisée comme modèle d'essai pour notre problème de contrôle.

Afin de réduire l'effet des perturbations, un problème inverse est formulé dans la section suivante.

## 4.2 Résolution du problème inverse de conduction de la chaleur

Dans cette section, une méthode d'optimisation est proposée afin de minimiser la fonction de coût définie dans (4.2). Cette méthode est basée sur la MGC qui agit comme une méthode de régularisation itérative. Des exemples d'implémentation numériques à des fins d'identification dans un contexte thermique sont donnés dans (Vergnaud-2016), (Beddiaf-2016) ou (Vergnaud-2014). L'algorithme de minimisation implémenté pour la résolution des PICC est présenté ci-après selon les notations suivantes :

1.  $\mathcal{T} = [t_0^*, t_f^*]$  : l'intervalle de temps,
2.  $u(x, t)$  : la loi de contrôle discrétisée comme une fonction linéaire continue par morceaux définie par  $u(x_i, t_j) = u_{ij}$ ,

A savoir que la température est mesurée par des capteurs également espacés dans le domaine  $\Omega = [0, L]$ .

### 4.2.1 Algorithme du gradient conjugué

A chaque itération  $k$  de l'algorithme, trois problèmes bien posés doivent être résolus :

- Le problème direct pour déterminer la distribution de température  $\theta^k(x, t_f)$ , puis estimer le critère  $J(\theta^k)$ ;
- Le problème adjoint pour déterminer le gradient de la fonction de coût  $J(\theta^k(x, t_f^*))$  et ainsi définir la prochaine direction de descente  $\mathbf{d}^k$ ;
- Le problème de sensibilité pour estimer la profondeur de descente  $\gamma^k$  (dans la direction de descente).

L'algorithme d'optimisation est brièvement décrit comme suit afin de minimiser le critère (4.2) :

1. Initialisation du paramètre inconnu (flux de contrôle) à la première itération  $k = 0$  :  $[u_{ij}^k] = 0$ ;
2. Résolution du problème direct (4.1) afin de déterminer  $\theta^k(x, t)$ ;
3. Détermination du critère  $J(\theta^k(x, t_f^*))$  d'après (4.2) ;
4. Résolution du problème adjoint (4.5) afin de déterminer le multiplicateur de Lagrange  $\psi^k(x, t)$  et le gradient de la fonction de coût selon (4.6). Détermination de la direction de descente  $\mathbf{d}^k$  selon (4.7) ;
5. Résolution du problème de sensibilité (4.3) dans la direction de descente  $\mathbf{d}^k$  pour calculer la fonction de sensibilité  $\delta\theta^k(x, t)$  et détermination de la profondeur de descente  $\gamma^k$  selon (4.4) ;

6. Mise à jour des nouvelles estimations du champ en fonction de :

$$[u_{ij}]^{k+1} = [u_{ij}]^k - \gamma^k [d_{ij}]^k$$

7. Incrémentation de l'itération  $k = k + 1$  et retour à l'étape 2.

Dans la suite, le problème de sensibilité est brièvement présenté.

#### 4.2.2 Problème de sensibilité

Pour calculer à l'itération  $k$  la profondeur de descente  $\gamma^k$  dans la direction de descente  $\mathbf{d}^k$ , le problème de sensibilité doit être résolu. Considérons la variation de température :

$$\theta(x, t) + \varepsilon_0 \delta\theta(x, t)$$

induite par une variation du flux thermique :

$$u(x, t) + \varepsilon_0 \delta u(x, t).$$

La fonction de sensibilité  $\delta\theta$  est la solution du problème de sensibilité suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho C \frac{\partial \delta\theta^k(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 (\lambda(\theta) \delta\theta^k(x, t))}{\partial x^2} = \zeta \delta\theta^k(x, t) + \delta u^k(x, t) & \forall (x, t) \in \Omega \times [0, t_f] \\ \delta\theta^k(0, t) = \delta\theta^k(L, t) = 0 & \forall t \in [0, t_f] \\ \delta\theta^k(x, t_0^*) = 0 & \forall x \in \Omega \end{array} \right. \quad (4.3)$$

avec :

$$\zeta(x, t) = \begin{cases} 10^4 & \text{si } t > 600 \text{ et } x \in [0.04, 0.08] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On notera que dans (4.3), le coefficient  $\zeta(x, t)$  de la première équation est dû à la perturbation  $f(x, t)$ .

La profondeur de descente optimale  $\gamma^k$  est déterminée comme suit :

$$\gamma^k = \arg \min_{\gamma \in \mathcal{R}} J(\mathbf{u}_{ij}^k - \gamma \mathbf{d}^k),$$

donc :

$$\gamma^k = \frac{-\int_0^L \theta^k(x, t_f^*) \delta\theta^k(x, t_f^*) dx}{\int_0^L [\delta\theta^k(x, t_f^*)]^2 dx} \quad (4.4)$$

où  $\theta^k(x, t_f^*)$  est la solution du problème direct et  $\delta\theta^k(x, t_f^*)$  est la solution du problème de sensibilité (4.3) (résolu dans la direction de descente  $\mathbf{d}^k$ ).

Un problème adjoint est développé dans la suite afin de déterminer la direction de descente  $\mathbf{d}^k$ .

#### 4.2.3 Problème adjoint

Pour calculer à chaque itération  $k$ , le gradient  $\nabla J = \frac{\partial J(\theta^k)}{\partial u_{ij}^k}$  et la direction de descente  $\mathbf{d}^k$ , un problème adjoint est formulé. Notons par  $\mathcal{L}$  une formulation Lagrangienne qui est une fonction de  $u_{ij}^k(\cdot)$ ,  $\theta^k(\cdot)$  et  $\psi^k(\cdot)$  où  $\psi^k(\cdot)$  est la fonction adjointe

$$\mathcal{L}(u^k, \theta^k, \psi^k) = J(\theta^k(x, t_f^*)) + \int_{t_0^*}^{t_f^*} \int_0^L F(\cdot) dx dt$$

où  $F$  est définie telle que :

$$F(\cdot) = \left[ \rho C \frac{\partial \theta^k}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(\theta^k) \frac{\partial \theta^k}{\partial x} \right) - u^k - f \right] \psi^k(\cdot) dx dt$$

La fonction adjointe  $\psi^k(\cdot)$  est fixée telle que  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^k} \delta\theta^k = 0$ . D'où  $\psi^k(x, t)$  est solution du problème adjoint suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\rho C \frac{\partial \psi^k(\cdot)}{\partial t} - \lambda(\theta) \frac{\partial^2 \psi^k(\cdot)}{\partial x^2} = \xi \psi^k(\cdot) & \forall (x, t) \in \Omega \times [0, t_f] \\ \psi^k(0, t) = \psi^k(L, t) = 0 & \forall t \in [0, t_f] \\ \psi^k(x, t_f^*) = -\frac{1}{\rho C} \theta^k(x, t_f^*) & \forall x \in \Omega \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Le gradient de la fonction coût est obtenu tel que :

$$\frac{\partial J}{\partial u_{ij}^k} = - \int_{t_0^*}^{t_f^*} \int_a^b \psi^k(x, t) s_i(x) s_j(t) dx dt \quad (4.6)$$

où  $s_i(x)$  est la base des fonctions chapeaux spatiale et  $s_j(t)$  est la base des fonctions chapeaux temporelle pour les fonctions linéaires continues par morceaux (dans l'espace et le temps).

La direction de descente peut être estimée à chaque nouvelle itération  $k$  du gradient précédent (à

l'itération  $k - 1$ ), comme suit :

$$\mathbf{d}^k = - \left( \frac{\partial J}{\partial u_{ij}^k} \right) + \beta_k \mathbf{d}^{k-1} \quad (4.7)$$

avec  $\beta_k = \frac{\left\| \left( \frac{\partial J}{\partial u_{ij}^k} \right) \right\|^2}{\left\| \left( \frac{\partial J}{\partial u_{ij}^{k-1}} \right) \right\|^2}$  et  $\|\cdot\|$  la norme Euclidienne.

Dans (Witrant-2007), la méthode d'optimisation précédente a été mise en oeuvre avec succès afin de déterminer une stratégie de contrôle qui assure la convergence vers zéro. Le problème a été résolu hors ligne puisque la commande a été obtenue sur  $T = [0, t_f]$  c'est à dire lorsque  $t_0^* = 0$  et  $t_f^* = t_f$ .

Dans ce qui suit, l'adaptation en ligne est présentée. Les stratégies de rejet quasi en ligne basées sur une adaptation de la méthode de régularisation itérative du gradient conjugué sont mises en oeuvre pour déterminer un contrôle pertinent  $u|_{[a,b]}(x, t)$  qui sera appliqué uniquement pour  $x \in [0.03, 0.06]$  avec  $a = 0.03$  et  $b = 0.06$ . Celui-ci aura pour objet de faire tendre  $\|\theta(x, t)\|_{L^2(\Omega)}$  vers zéro.

### 4.3 Implémentation quasi-en ligne

Trois stratégies quasi-en ligne basées sur une adaptation de la méthode de régularisation itérative de la MGC sont mises en oeuvre afin de déterminer un contrôle pertinent  $u$  qui ramène la température à zéro. Les approches proposées sont basées sur le choix des intervalles de temps  $\mathcal{T}$ .

Introduisons des commentaires généraux :

- Pour les trois stratégies, il est important d'avoir suffisamment d'observations contenues dans  $\mathcal{T} = [t_o^*, t_f^*]$  pour comprendre l'évolution du système et pouvoir agir dessus ;
- La température est mesurée chaque centimètre du domaine ;
- La loi de contrôle est discrétisée avec un pas spatial de 3 millimètres sur  $[0.03; 0.06]$  ;
- Le choix du pas de temps a évidemment un effet significatif sur les performances de la méthode. Il doit être réaliste et cohérent avec les technologies et basé sur une connaissance de la dynamique des transferts thermiques.
- Le pas de temps de 1 seconde pour le contrôle et l'observation a été choisi dans la suite de ce chapitre.

Dans les sections suivantes, les trois stratégies sont brièvement présentées.

Il est important de dissocier dans la présentation ci-après le comportement du système thermique commandé et les résolutions successives du problème inverse permettant d'identifier les lois de commande.

#### 4.4 Stratégie $n^{\circ} 1$ - à décalage constant

##### 4.4.1 Description de la stratégie $n^{\circ} 1$

Cette méthode a été présentée de manière générale à la section 3.2.1. Pour le rejet de perturbations dans le cadre d'un système d'équations aux dérivées partielles parabolique non linéaire, un exemple de mise en oeuvre de cette méthode est décrit ci-après. Il est important de disposer d'un nombre suffisant d'informations pour appréhender l'évolution du système et de pouvoir agir dessus. Dans ce qui suit, on considère que la température est mesurée dans la barre par des capteurs espacés d'un centimètre : il y en a 9 dans le domaine  $]0, 0.1[$ . L'évolution de la température est prise en compte sur les 9 secondes précédentes pour définir une loi de commande. La loi de commande est discrétisée temporellement toutes les secondes et avec un pas spatial de 3 mm. Le choix du pas de temps de 1 seconde ainsi que de l'horizon de 9 secondes a un effet important sur les performances de la méthode. Il doit être réaliste et cohérent avec les technologies (des capteurs et des actionneurs) et basé sur des connaissances a priori de la dynamique des transferts thermiques dans la configuration physique étudiée.

Pour la première stratégie,  $\tau$  en secondes a un décalage constant. La stratégie  $n^{\circ} 1$  agit séquentiellement afin de fournir des lois de contrôle mises à jour à des intervalles temporels constants. Notons par exemple,  $\mathcal{T}_m = [m\tau, (m + 1)\tau]$ .

- pour  $m = 0$  : le processus démarre à  $t_0 = 0$ , le système évolue « naturellement » à partir de son état initial et sous l'effet d'éventuelles perturbations externes. Après  $\tau$  secondes, la température est mesurée dans toute la plaque et nous permet de connaître  $\theta(x, \tau)$  ;
- pour  $m = 1$  : la température continue à évoluer librement sans contrôleur et simultanément la première loi de commande est estimée en considérant les mesures collectées pendant l'intervalle de temps  $\mathcal{T}_0 = [0, \tau]$  ;
- pour  $m = 2$  : le premier contrôle validé pour l'intervalle de temps  $\mathcal{T}_0$  est appliqué et simultanément, la deuxième loi de contrôle est estimée en considérant les mesures collectées pendant l'intervalle de temps  $\mathcal{T}_1 = [\tau, 2\tau]$  ;
- pour  $m = 3$  : le deuxième contrôle validé pour l'intervalle de temps  $\mathcal{T}_1$  est appliqué et simul-

tanément, la troisième loi de contrôle est estimée en considérant les mesures collectées pendant l'intervalle de temps  $\mathcal{T}_2 = [2\tau, 3\tau]$ ;

— etc.

#### Identification des lois de commande

1. A  $t = \tau = 9$  secondes, le problème inverse est résolu en considérant l'intervalle temporel  $\mathcal{T} = [0, 9]$  afin de déterminer le contrôle qu'il aurait fallu appliquer sur l'intervalle  $[0, 9]$  pour que la température soit stabilisée à zéro au bout de 9 secondes. La résolution numérique prend un certain temps (inférieur à 9 secondes). Ainsi au bout de  $2\tau = 18$  secondes, la première loi de commande est disponible.
2. A  $t = 2\tau = 18$  secondes, le problème inverse est résolu en considérant l'intervalle temporel  $\mathcal{T} = [9, 18]$  afin de déterminer le contrôle qu'il aurait fallu appliquer sur l'intervalle  $[9, 18]$  pour que la température soit stabilisée à zéro au bout de 18 secondes. La résolution numérique prend un certain temps (inférieur à 9 secondes). Ainsi au bout de  $3\tau = 27$  secondes, la deuxième loi de commande est disponible.
3. A  $t = 3\tau = 27$  secondes, le problème inverse est résolu en considérant l'intervalle temporel  $\mathcal{T} = [18, 27]$  afin de déterminer le contrôle qu'il aurait fallu appliquer sur l'intervalle  $[18, 27]$  pour que la température soit stabilisée à zéro au bout de 27 secondes. La résolution numérique prend un certain temps (inférieur à 9 secondes). Ainsi au bout de  $4\tau = 36$  secondes, la troisième loi de commande est disponible.
4. etc.

La méthode décrite précédemment est basée sur un décalage constant de 9 secondes (qui introduit un retard de 18 secondes). La résolution numérique du PICC nécessite un temps de calcul (inférieur à  $\tau$ ) pour identifier la commande qui agit avec un retard de  $2\tau$ .

#### 4.4.2 Résultats numériques pour la stratégie à décalage constant

Les résultats suivants sont présentés pour un décalage constant de  $\tau = 9$  secondes (18 s de retard) :

- Figure 4.4 : Évolution de la température avec contrôle.
- Figure 4.5 : Évolution des lois de contrôle.
- Figure 4.6 : Évolution de  $J(\theta) = \frac{1}{2} \|\theta(x, t)\|_{L^2(\Omega)}^2$ .

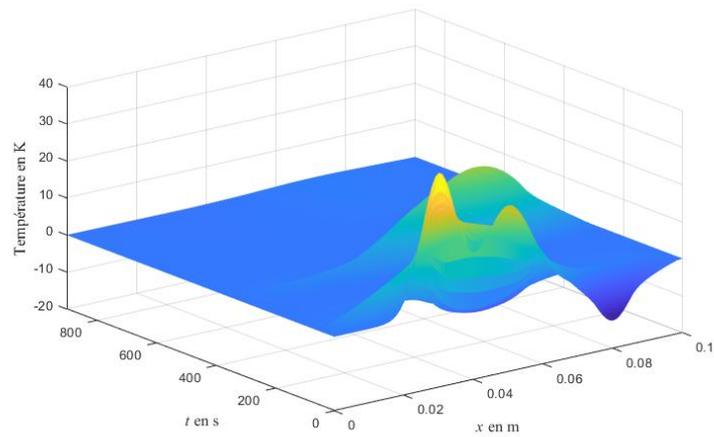


Figure 4.4 – Évolution de la température avec contrôle (stratégie  $n^{\circ} 1$  : pas constant  $\tau = 9$ ).

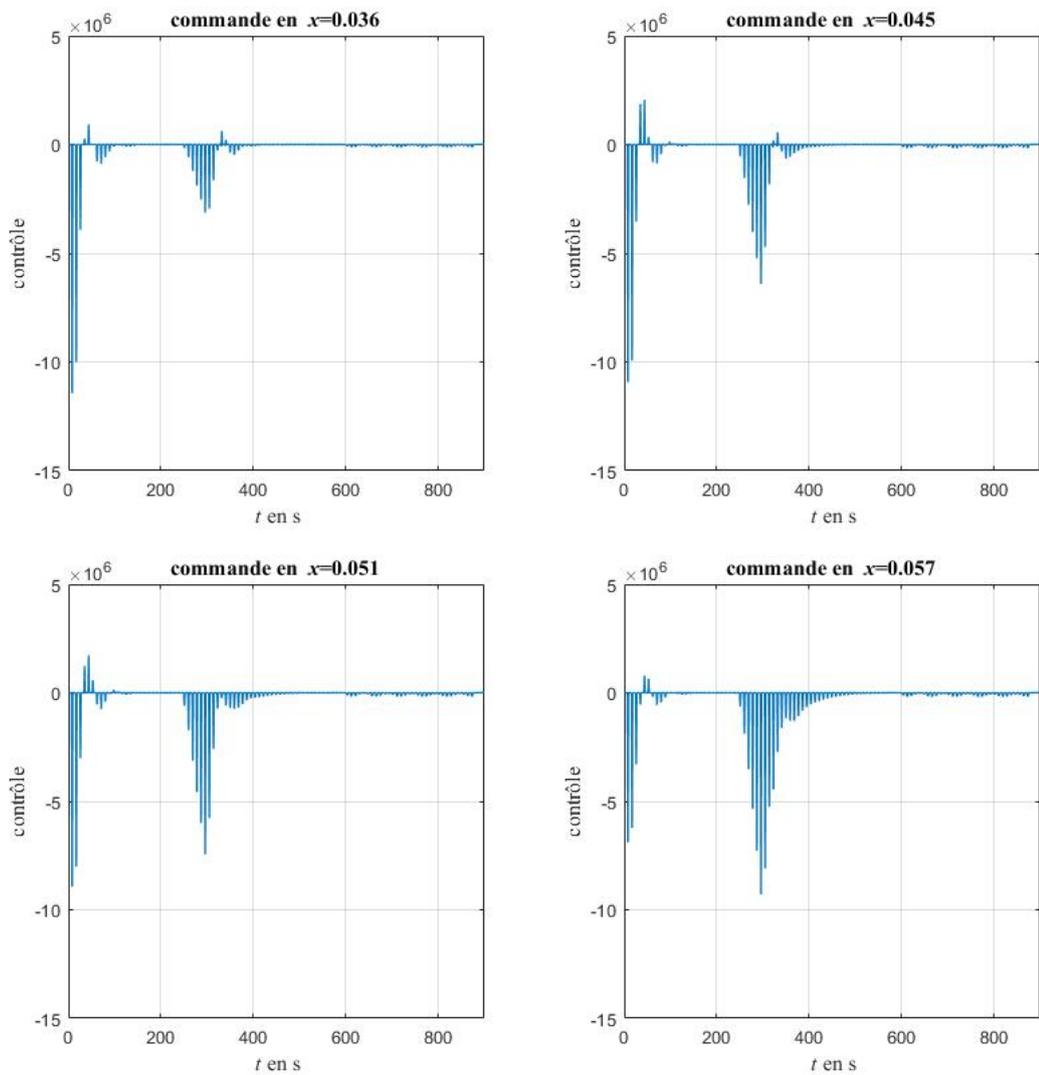


Figure 4.5 – Les commandes en différents points (stratégie  $n^{\circ} 1$  : pas constant  $\tau = 9$ ).

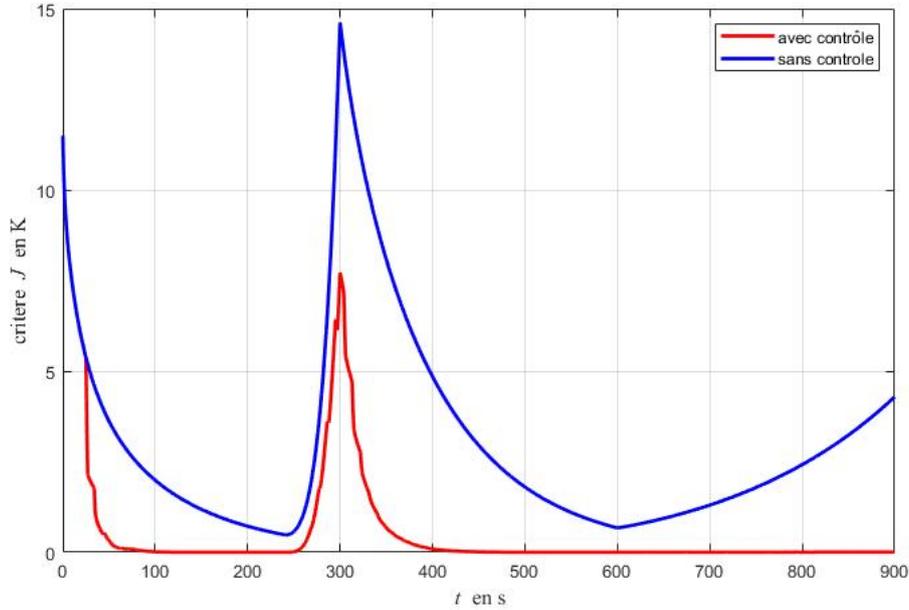


Figure 4.6 – Évolution du critère avec et sans contrôle (stratégie n° 1 : pas constant  $\tau = 9$ ).

La figure 4.4 peut être comparée avec la figure 4.2. On remarque que l'effet des perturbations est amoindri comme cela pourra être visualisé sur la figure 4.6. La seconde perturbation (après 600 secondes) est rejetée de manière plus efficace car son effet est proportionnel à la température. Comme celle-ci a été préalablement « ramenée » à zéro alors la perturbation est moins forte, ainsi que le contrôle utilisé pour la contrer.

Sur la figure 4.5, l'évolution des contrôles est représentée (ceux-ci sont appliqués pour  $x \in [0.03, 0.06]$  sachant que  $u(0.03, t) = u(0.06, t) = 0$ ). La discrétisation spatiale permet d'identifier les contrôles tous les  $3mm$  et de définir ainsi un contrôle continu linéaire par morceaux (selon l'espace et le temps). On remarque un comportement oscillant provoqué par le retard de la commande.

Afin de visualiser l'effet du retard, la stratégie est mise en oeuvre avec un décalage constant de  $\tau = 15$  secondes.

Les résultats suivants sont présentés pour un décalage constant de  $\tau = 15$  secondes (et donc un retard de la commande de  $2\tau = 30$  secondes) :

- Figure 4.7 : Évolution de la température avec contrôle.
- Figure 4.8 : Évolution des lois de contrôle.
- Figure 4.9 : Évolution de  $J(\theta) = \frac{1}{2} \|\theta(x, t)\|_{L^2(\Omega)}^2$ .

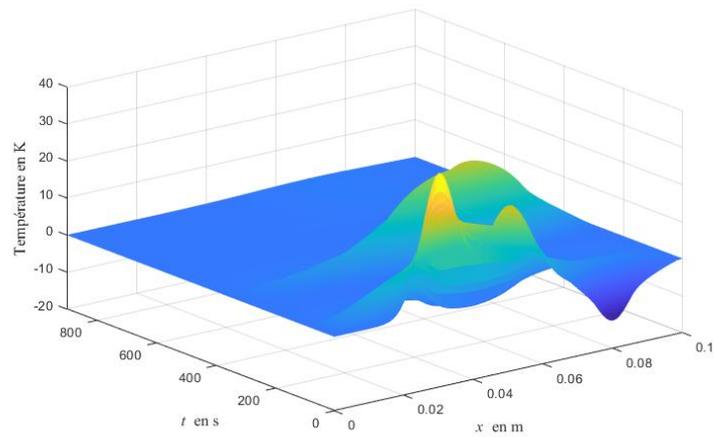


Figure 4.7 – Évolution de la température avec contrôle (stratégie n° 1 : pas constant  $\tau = 15$ ).

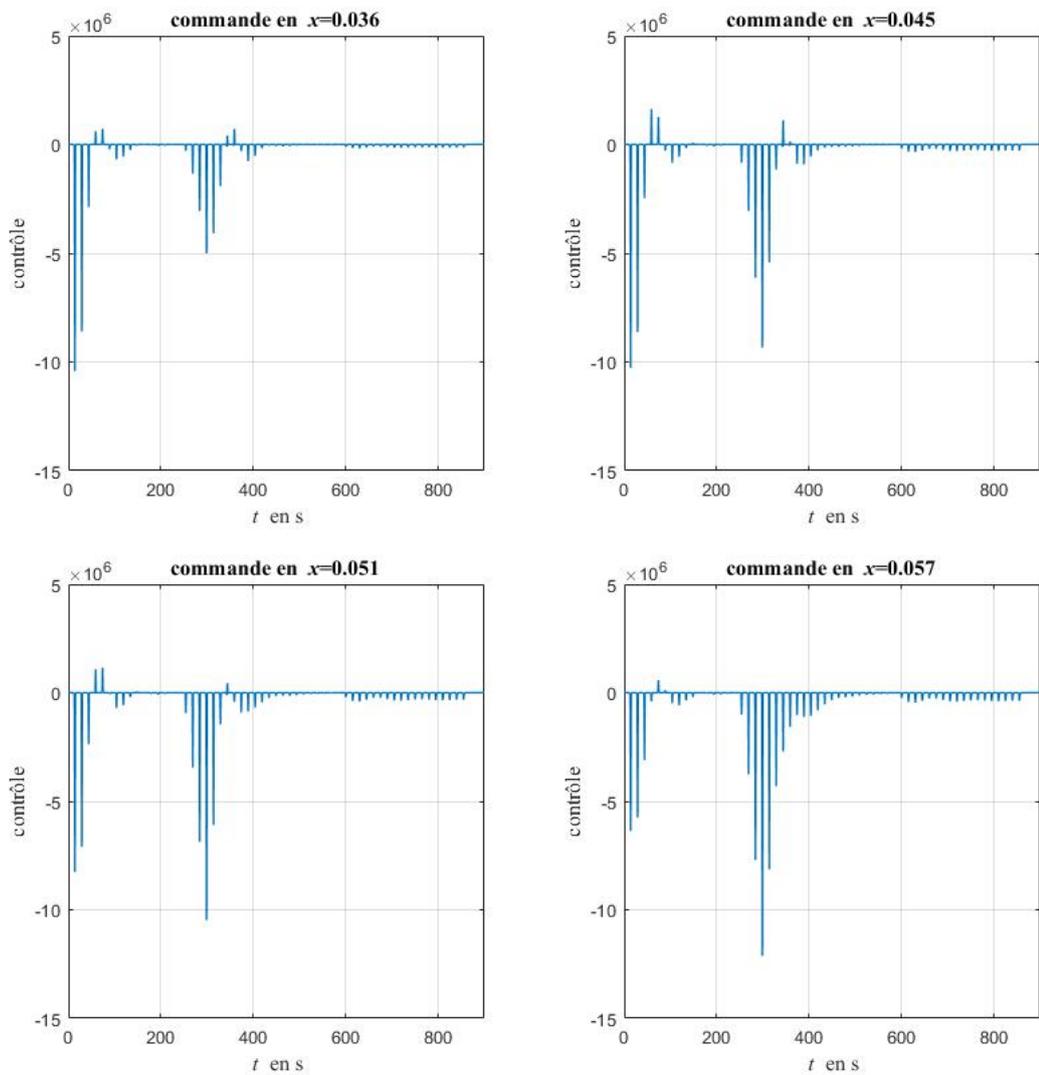


Figure 4.8 – Les commandes en différents points (stratégie n° 1 : pas constant  $\tau = 15$ ).

On remarque sur la figure 4.7 et la figure 4.8 qu'un décalage plus grand introduit en général un retard plus important et donc ne permet pas de rejeter la perturbation de manière assez satisfaisante.

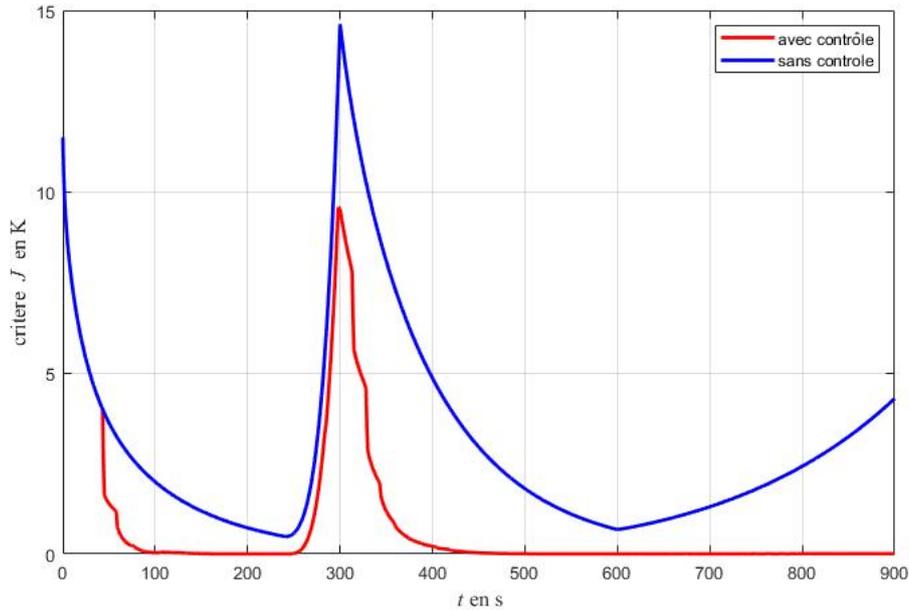


Figure 4.9 – Évolution du critère avec et sans contrôle (stratégie n° 1 : pas constant  $\tau = 15$ ).

Sur la figure 4.9, on remarque que compte tenu d'un retard plus important de la commande, non seulement l'effet de l'état initial perdure plus longtemps mais aussi que la première perturbation est difficilement contrée.

L'efficacité de la stratégie n° 1 dite « à décalage constant » est affectée par le retard imposé par le décalage. Plus le décalage est grand, moins le contrôle agit efficacement pour contrer les perturbations et stabiliser le système à zéro. Il est pour ce système difficile de réduire le décalage car il est nécessaire d'avoir suffisamment d'observations sur l'état du système pour que sa dynamique soit bien selon les lois de commande. De plus, le temps nécessaire à la résolution du problème inverse ne peut être réduit aisément.

## 4.5 Stratégie $n^{\circ} 2$ – à décalage adaptatif

### 4.5.1 Description de la stratégie $n^{\circ} 2$

Pour cette stratégie, les températures dans la barre sont mesurées toutes les secondes. Le critère suivant est ainsi disponible toutes les secondes :

$$J(\theta(x, t)) = \frac{1}{2} \left( \int_0^L (\theta(x, t))^2 dx \right) \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^9 \hat{\theta}_i^2$$

où  $\hat{\theta}_i$  est l'observation de la température au point  $x_i = i \frac{L}{10}$ .

Dès lors que le critère dépasse un certain seuil  $\tilde{J}$ , cela signifie que la température s'est trop éloignée de la cible ( $\theta(x, t) \equiv 0, \forall x \in \Omega$ ). Ainsi, si  $|J(\theta)| > \tilde{J}$  alors la procédure d'identification est lancée en tenant compte des mesures précédentes sur l'intervalle  $\mathcal{T}_m$  dont la taille est égale à  $\tau$  secondes. En pratique, on considère l'intervalle temporel précédent d'amplitude  $\tau$  secondes. A noter que pendant les  $\tau$  premières secondes, l'identification ne peut être lancée. Les deux paramètres  $\tilde{J}$  et  $\tau$  sont cruciaux et leur influence est mise en évidence dans les configurations présentées ci-après.

### 4.5.2 Résultats numériques pour la stratégie à décalage adaptatif

Dans ce qui suit, les résultats sont présentés pour un décalage constant de  $\tau = 6$  secondes (et donc un retard de la commande de  $2\tau = 12$  secondes) et avec un seuil  $\tilde{J} = 0.5$  :

- Figure 4.10 : Évolution de la température avec contrôle.
- Figure 4.11 : Évolution des lois de contrôle.
- Figure 4.12 : Évolution de  $J(\theta) = \frac{1}{2} \|\theta(x, t)\|_{L^2(\Omega)}^2$ .

La figure 4.10 illustre bien la prise en compte de la perturbation qui est atténuée.

Sur la figure 4.11, on observe que les lois de contrôle sont calculées moins souvent en différents points de l'espace.

Avec la stratégie  $n^{\circ} 2$ , les lois de commandes sont calculées si le critère dépasse le seuil choisi  $J > \tilde{J}$ .

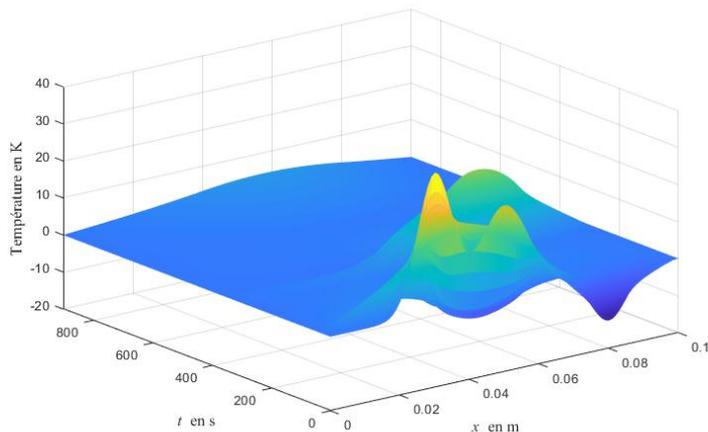


Figure 4.10 – Évolution de la température avec contrôle (stratégie n° 2 :  $\tau = 6$  ;  $\tilde{J} = 0.5$ ).

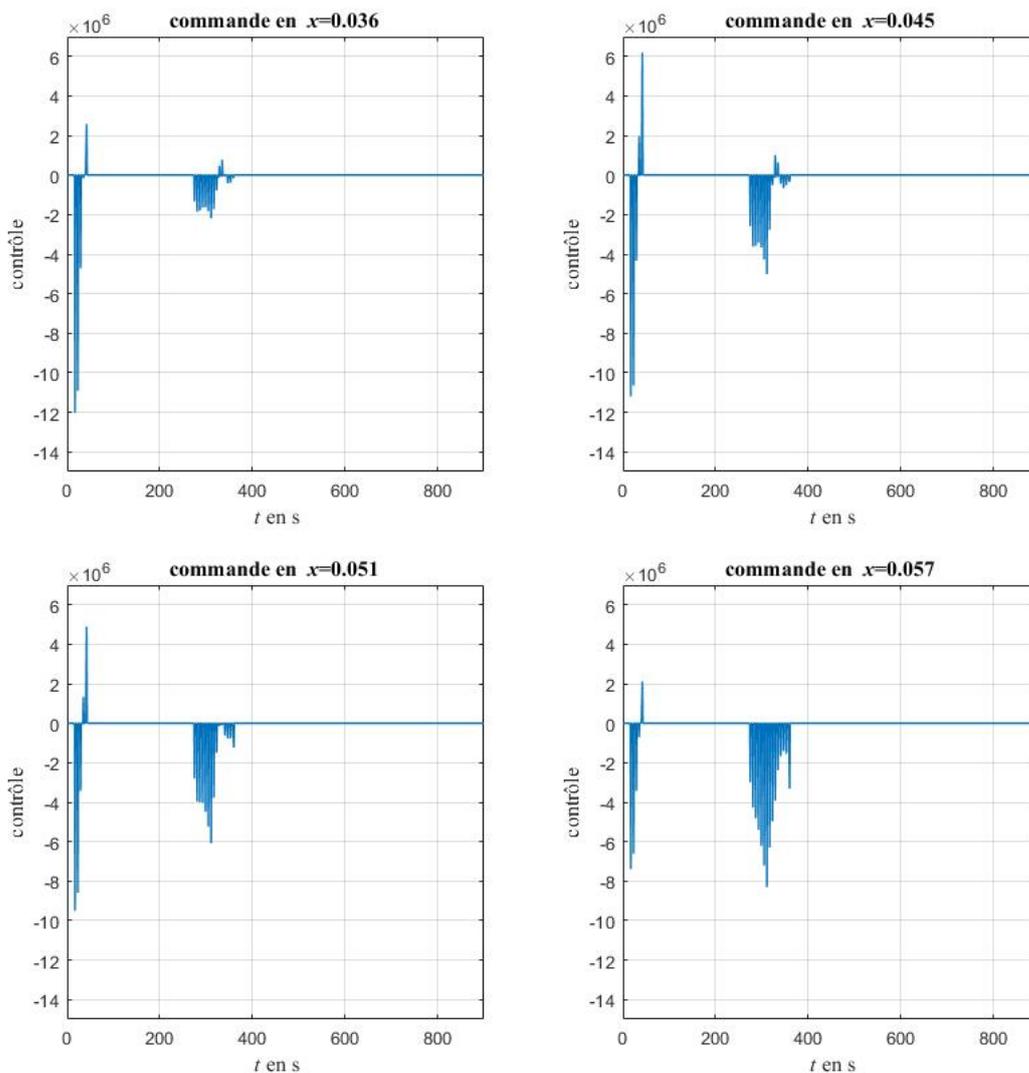


Figure 4.11 – Les commandes en différents points (stratégie n° 2 :  $\tau = 6$  ;  $\tilde{J} = 0.5$ ).

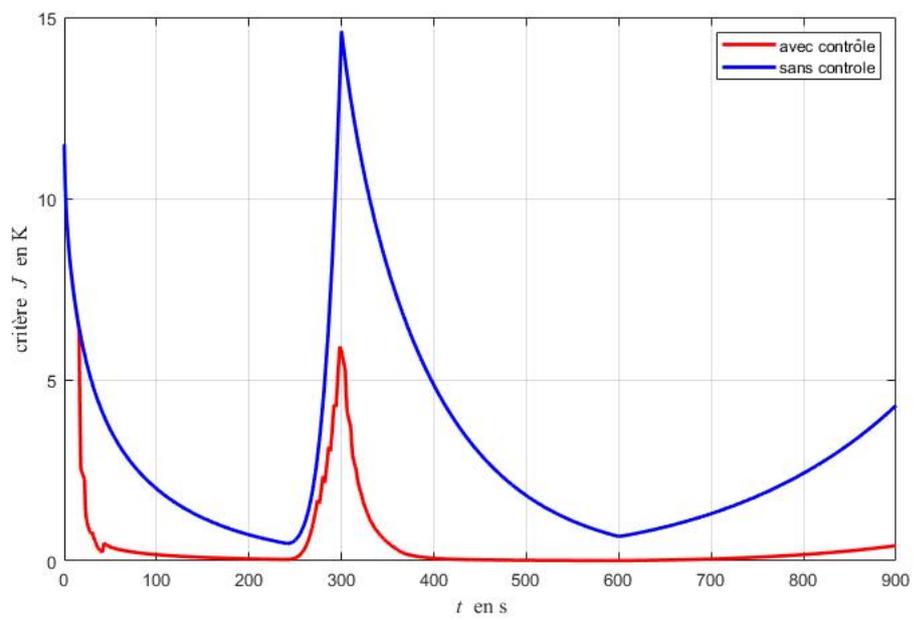


Figure 4.12 – Évolution du critère avec et sans contrôle (stratégie n° 2 :  $\tau = 6$ ;  $\tilde{J} = 0.5$ ).

Dans ce qui suit, les résultats sont présentés pour un décalage constant de  $\tau = 6$  secondes (et donc un retard de la commande de  $2\tau = 12$  secondes) et avec un seuil  $\tilde{J} = 0.1$  :

- Figure 4.13 : Évolution de la température avec contrôle.
- Figure 4.14 : Évolution des lois de contrôle.
- Figure 4.15 : Évolution de  $J(\theta) = \frac{1}{2} \|\theta(x, t)\|_{L^2(\Omega)}^2$ .

La figure 4.13 illustre bien la prise en compte de la perturbation qui est atténuée.

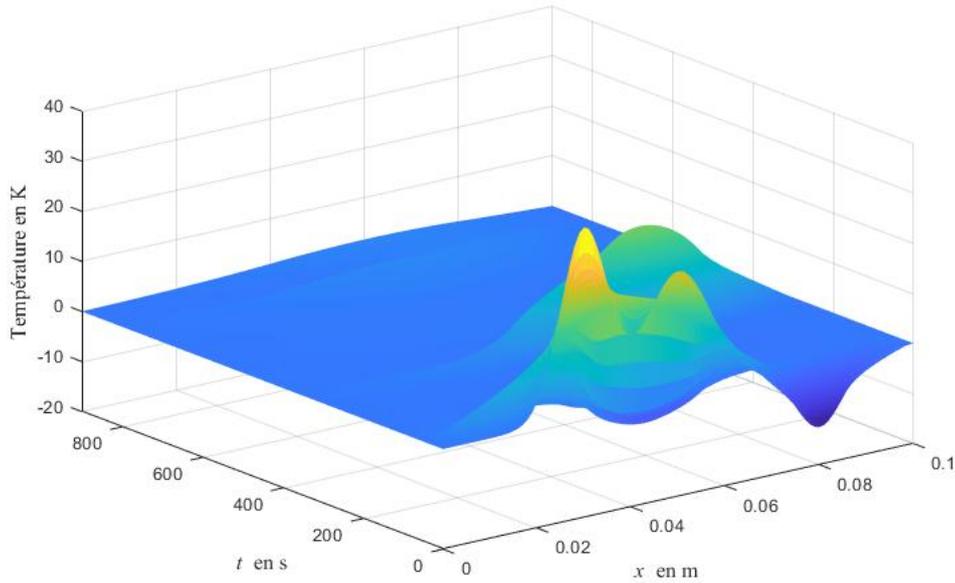


Figure 4.13 – Évolution de la température avec contrôle (stratégie n° 2 :  $\tau = 6$  ;  $\tilde{J} = 0.1$ ).

Sur la figure 4.14, on observe que les lois de contrôle sont calculées moins souvent.

De même, sur la figure 4.15 est visualisée l'évolution de la température avec et sans contrôle de la stratégie n° 2, lorsque  $\tau = 6$  et  $\tilde{J} = 0.1$ .

Sur la figure 4.16, le critère est tracé avec  $\tau = 15$  secondes et un seuil de déclenchement  $\tilde{J} = 0.5$ .

Sur la figure 4.17, l'évolution du critère avec et sans contrôle de la stratégie n° 2 est montrée où  $\tau = 15$  et  $\tilde{J} = 0.1$ .

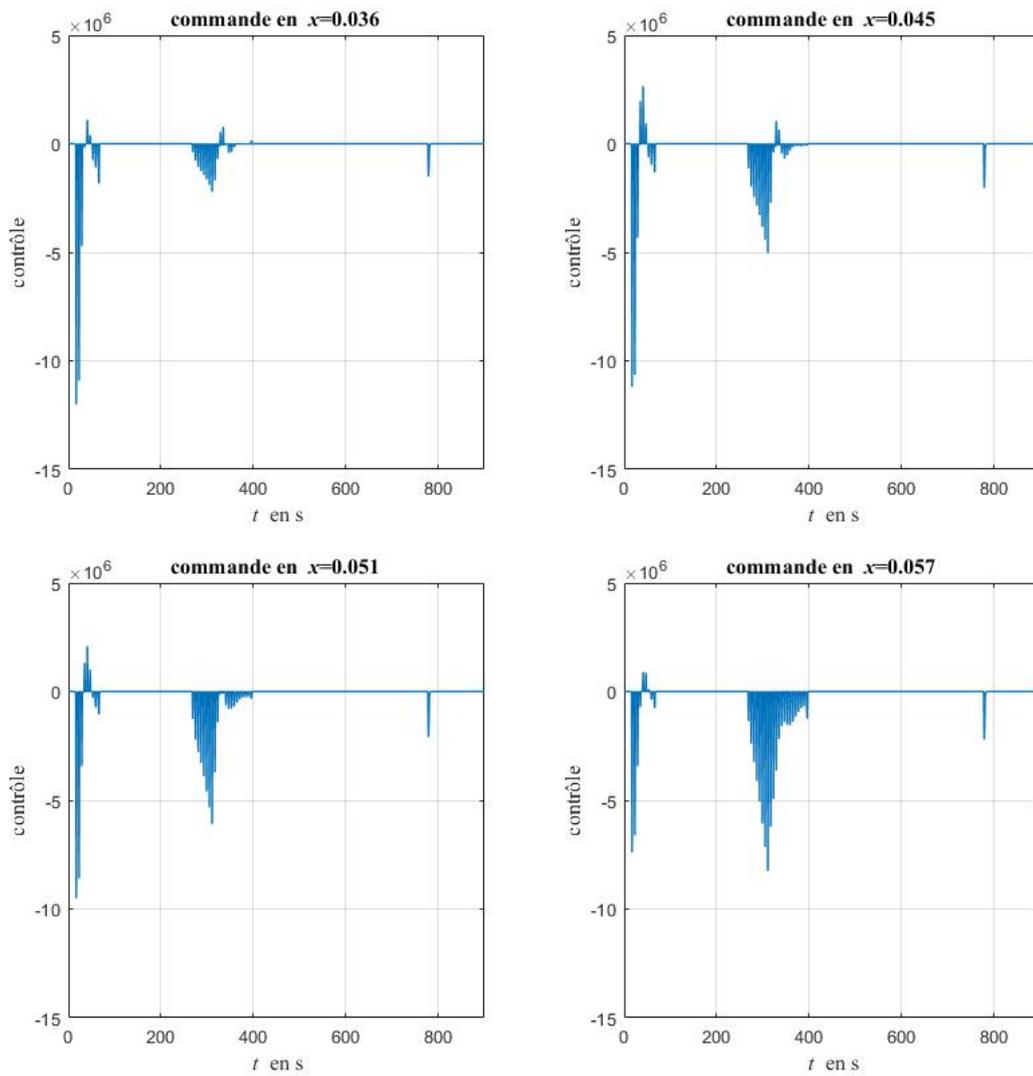


Figure 4.14 – Les commandes en différents points (stratégie n° 2 :  $\tau = 6$  ;  $\tilde{j} = 0.1$ ).

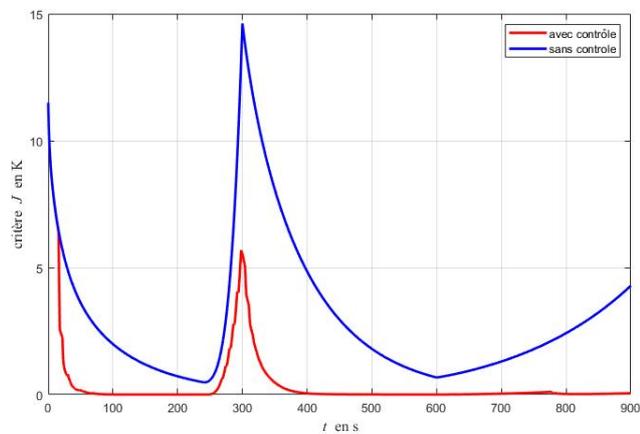


Figure 4.15 – Évolution de la température avec contrôle et sans contrôle (stratégie n° 2 :  $\tau = 6$  ;  $\tilde{j} = 0.1$ ).

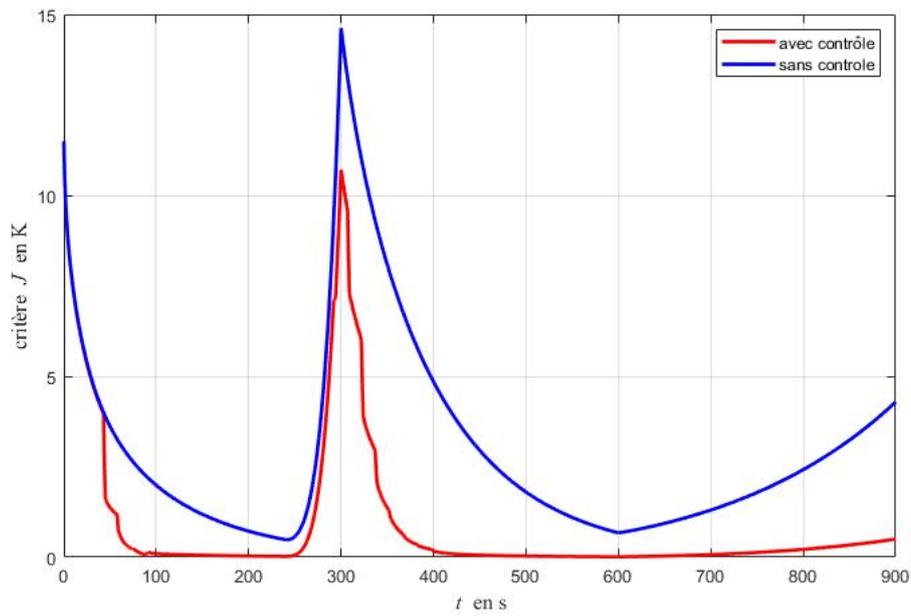


Figure 4.16 – Évolution du critère avec et sans contrôle (stratégie n°2 :  $\tau = 15$  ;  $\tilde{j} = 0.5$ ).

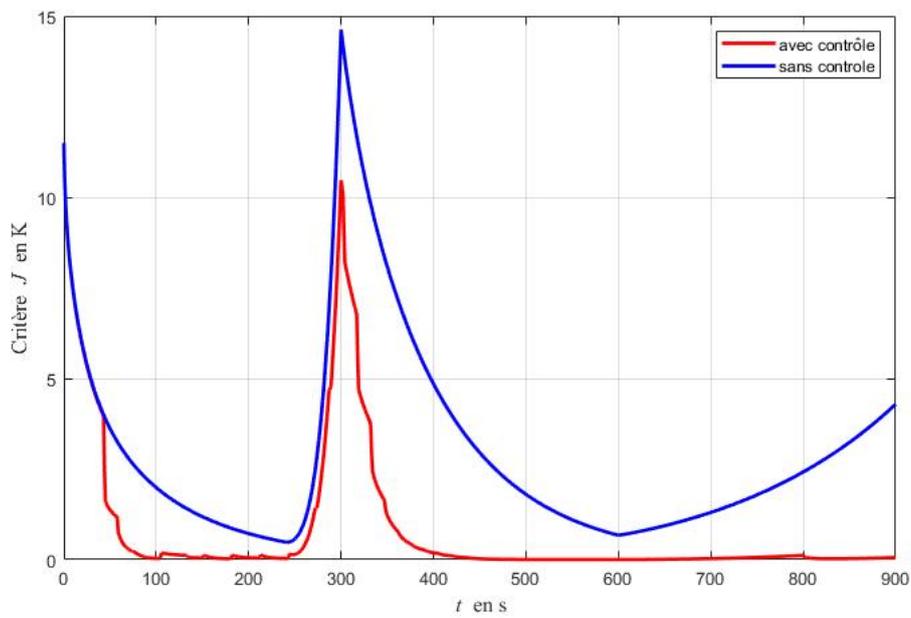


Figure 4.17 – Évolution du critère avec et sans contrôle (stratégie n°2 :  $\tau = 15$  ;  $\tilde{j} = 0.1$ ).

## 4.6 Stratégie n° 3 – à durée adaptée

### 4.6.1 Description de la stratégie n° 3

Comme pour la stratégie précédente, les températures dans la barre sont mesurées toutes les secondes.

Le critère suivant est ainsi disponible toutes les secondes suivant :

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \left( \int_0^L (\theta(x, t))^2 dx \right)$$

Cette troisième stratégie repose sur une modification de la durée de l'intervalle de temps décroissant  $\mathcal{T}_m = [t_{0m}^*, t_{fm}^*]$  pris en compte pour calculer le contrôle. Rappelons que la longueur de ces intervalles est notée  $\tau_j^*$ . A savoir que la demande de détermination d'une nouvelle loi de commande (contrôle) est déclenchée dès que si le critère (observations de température) dépasse un certain seuil  $\tilde{J}_{max}$  tel que :

$$J(\theta(x, t)) > \tilde{J}_{max} \quad (4.8)$$

En fait, les lois de contrôle ne sont estimées que si les observations de température vérifient le critère dans (4.8). Dans un tel cas,  $t_{fm}^* = t$  et  $t_{0m}^*$  est le temps précédent où (4.9) est vérifié :

$$J(\theta(x, t_{0m}^*)) > \tilde{J}_{min} \quad (4.9)$$

$\tilde{J}_{max}$  est considéré comme un seuil prohibitif (pour lequel la distribution de température est trop éloignée de zéro) et  $\tilde{J}_{min}$  est considéré comme un seuil significatif (pour lequel la distribution de température commencer à présenter une non stabilité).

Il est évident que  $\tilde{J}_{min} < \tilde{J}_{max}$ .

Ainsi, le nouveau contrôle est implémenté dès qu'il est déterminé.

A noter qu'au démarrage du procédé, la condition (4.8) n'est pas vérifiée et que  $J(\theta(x, t_{0m}^*)) > \tilde{J}_{min}$ .

Enfin, afin de ne pas accorder une importance trop grande au passé, la durée  $(t - t_{0m}^*)$  prise en compte pour calculer le contrôle, peut être bornée à une valeur maximale en adaptant la durée  $t$ .

Selon cette approche, il est possible qu'il y ait recouvrement de certains intervalles  $\mathcal{T}_m$  mais comme pour les stratégies n° 1 et n° 2, il est impossible de lancer une nouvelle détermination du contrôle pendant la résolution du problème inverse, dès que le contrôle est déterminé, il est tout de suite appliqué.

La stratégie n° 3 autorise la récupération des lois de contrôle qui peuvent réduire les délais. Les lois de contrôle ayant une durée variable, cette stratégie est appelée stratégie « à durée adaptée ».

#### 4.6.2 Résultats numériques pour la stratégie à durée adaptée

La figure 4.18 montre l'évolution de la distribution de température avec  $\tilde{J}_{min} = 0.1$  et  $\tilde{J}_{max} = 0.5$ .

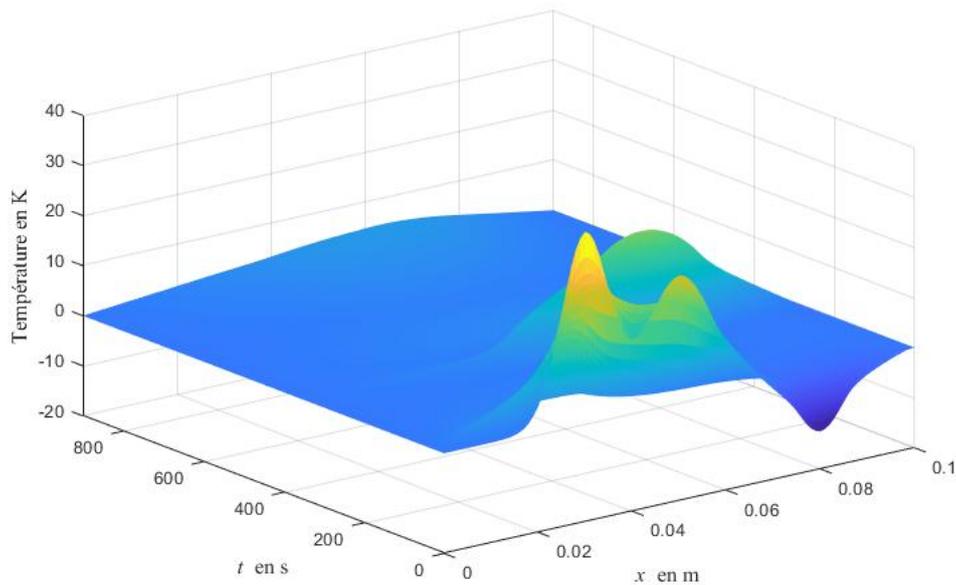


Figure 4.18 – Évolution de la température avec contrôle (stratégie n° 3 :  $\tilde{J}_{min} = 0.1$  et  $\tilde{J}_{max} = 0.5$ ).

En comparant la figure 4.18 avec la figure 4.1, l'effet de la stratégie n° 3 pour déterminer des lois de commandes permettant de rejeter la perturbation est mis en évidence.

Ainsi, la figure 4.19 visualise les commandes en différents points de l'espace et la figure 4.20 montre l'évolution du critère avec et sans contrôle.

Compte tenu des valeurs des critères choisies, cette stratégie montre bien que la commande calculée a bien contrôlé les perturbations et donc l'état du système a bien été stabilisé à zéro, d'où son efficacité.

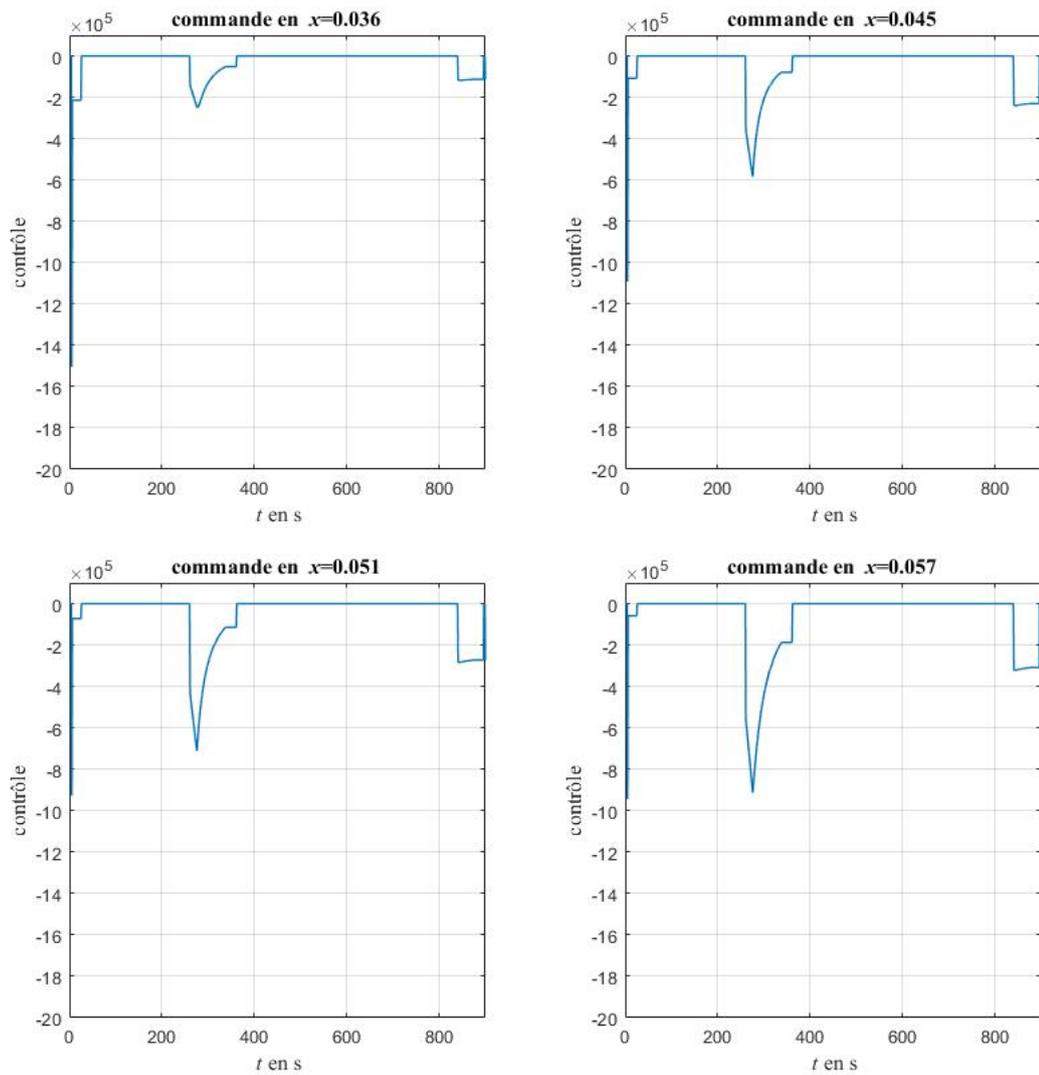


Figure 4.19 – Les commandes en différents points (stratégie  $n^{\circ} 3$  :  $\tilde{J}_{min} = 0.1$  et  $\tilde{J}_{max} = 0.5$ ).

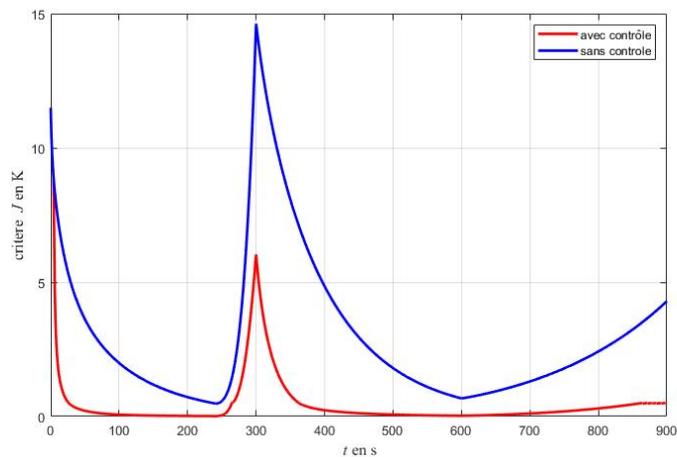


Figure 4.20 – Évolution du critère avec et sans contrôle (stratégie  $n^{\circ} 3$  :  $\tilde{J}_{min} = 0.1$  et  $\tilde{J}_{max} = 0.5$ ).

## 4.7 Comparaison des différentes stratégies

Dans cette section, différents tableaux sont proposés afin de comparer les différentes stratégies.

Le premier tableau 4.1 correspond à la performance du contrôle en calculant la valeur moyenne  $\tilde{M}$  de la température dans la barre :

$$\tilde{M} = \frac{1}{901} \left( \sum_{j=0}^{900} J(\theta_j) \right) = \frac{1}{901} \left( \sum_{j=0}^{900} \left( \frac{1}{2} \left\| \theta \left( x, \frac{j}{900} \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \right)$$

où  $j$  correspond au temps du processus allant de 0 secondes à 900 secondes.

Cette valeur correspond à la valeur moyenne des critères tracés sur les figures 4.3, 4.6, 4.9, 4.12, 4.15, 4.16, 4.17, 4.20, 4.22.

Table 4.1 – Valeur moyenne  $\tilde{M}$  de la température dans la barre.

Stratégie n° 1		Stratégie n° 2				Stratégie n° 3	
$\tau = 9$	$\tau = 15$	$\tau = 6$ $\tilde{J} = 0.5$	$\tau = 6$ $\tilde{J} = 0.1$	$\tau = 15$ $\tilde{J} = 0.5$	$\tau = 15$ $\tilde{J} = 0.1$	$\tilde{J}_{min} = 0.1$ $\tilde{J}_{max} = 0.5$	$\tilde{J}_{min} = 0.01$ $\tilde{J}_{max} = 0.05$
0.5531	0.792	0.5072	0.4207	0.8855	0.8171	0.4667	0.3681

A noter qu'en absence de contrôle :  $\tilde{M} \approx 2.998$ .

Le tableau 4.1 montre que dans la configuration étudiée et selon les paramètres choisis, la stratégie n° 3 avec un seuil de déclenchement faible  $\tilde{J}_{max} = 0.05$  assure la meilleure stabilisation à zéro. Elle présente une température la plus proche à zéro. Cela est illustré sur la figure 4.21 et sur la figure 4.22.

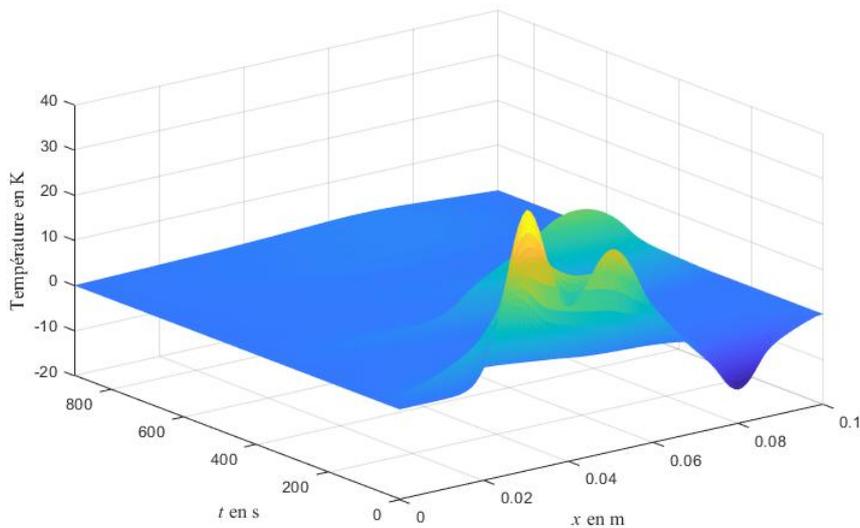


Figure 4.21 – Évolution de la température avec contrôle (stratégie n° 3 :  $\tilde{J}_{min} = 0.01$  et  $\tilde{J}_{max} = 0.05$ ).

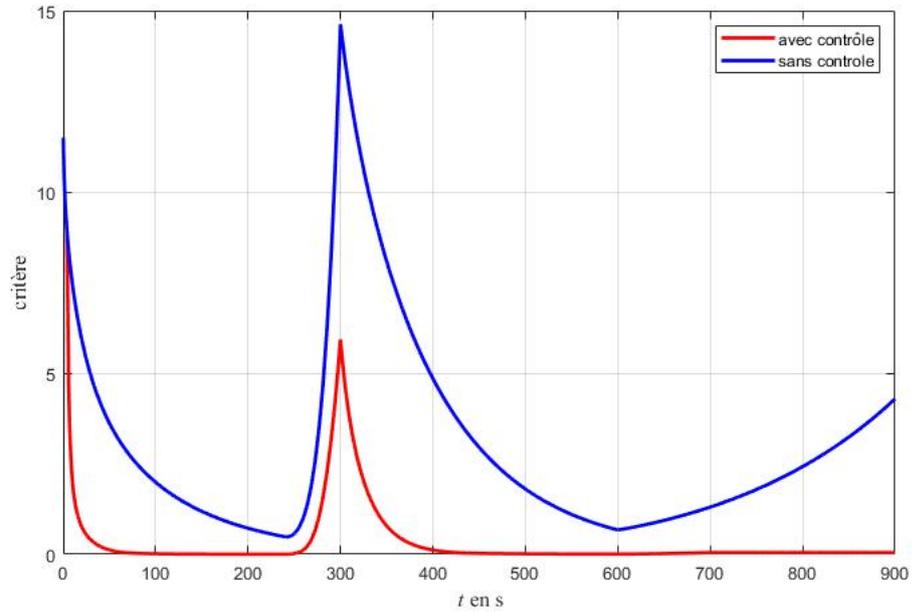


Figure 4.22 – Évolution du critère avec et sans contrôle (stratégie n° 3 :  $\tilde{J}_{min} = 0.01$  et  $\tilde{J}_{max} = 0.05$ ).

A noter que les stratégies n° 1 et n° 2 fournissent aussi des résultats satisfaisants et permettent de garder la température de la barre proche de zéro.

Le second tableau 4.2 fournit la durée  $\tilde{T}$  pendant laquelle :

$$\max_{x \in [0, L]} |\theta(x, t)| > 1^\circ\text{C}.$$

Ces valeurs sont obtenues à partir des distributions  $\theta(x, t)$  qui sont calculées pour chacune des trois stratégies.

Table 4.2 – Durée (en secondes)  $\tilde{T}$  de dépassement du seuil de température fixé à  $1^\circ\text{C}$ .

Stratégie n° 1		Stratégie n° 2				Stratégie n° 3	
$\tau = 9$	$\tau = 15$	$\tau = 6$ $\tilde{J} = 0.5$	$\tau = 6$ $\tilde{J} = 0.1$	$\tau = 15$ $\tilde{J} = 0.5$	$\tau = 15$ $\tilde{J} = 0.1$	$\tilde{J}_{min} = 0.1$ $\tilde{J}_{max} = 0.5$	$\tilde{J}_{min} = 0.01$ $\tilde{J}_{max} = 0.05$
303	354	726	501	785	682	837	571

En absence de contrôle, à partir des distributions tracées sur la figure 4.2, on peut estimer :  $\tilde{T} = 900$  secondes.

Le tableau 4.2 montre que dans la configuration étudiée et selon les paramètres choisis, la stratégie n° 1 est celle qui permet de rester le plus souvent sous le seuil de température fixé ici à  $1^\circ\text{C}$ .

La stratégie n° 3 pourrait donner de meilleurs résultats en abaissant le seuil de déclenchement  $\tilde{J}_{max}$ . En effet, la valeur de  $\tilde{J}_{max} = 0.05$  semble déclencher le calcul d'une loi de contrôle alors que  $\max_{x \in \Omega} |\theta(x, t)|$  est déjà supérieur à 1°C.

Le troisième tableau 4.3 fournit le coût du contrôle  $\tilde{U}$  calculé suivant le support spatial  $[a, b]$  et tout au long du support temporel  $[0, t_f]$ .

Ce coût est exprimé suivant : 
$$\tilde{U} = \iint_{\substack{x \in [0.03, 0.06] \\ t \in [0, 900]}} u(x, t)^2 dx dt.$$

Table 4.3 – Coût du contrôle  $\tilde{U} \times 10^{12}$ .

Stratégie n° 1		Stratégie n° 2				Stratégie n° 3	
$\tau = 9$	$\tau = 15$	$\tau = 6$ $\tilde{J} = 0.5$	$\tau = 6$ $\tilde{J} = 0.1$	$\tau = 15$ $\tilde{J} = 0.5$	$\tau = 15$ $\tilde{J} = 0.1$	$\tilde{J}_{min} = 0.1$ $\tilde{J}_{max} = 0.5$	$\tilde{J}_{min} = 0.01$ $\tilde{J}_{max} = 0.05$
8.87	8.62	10.05	9.45	9.49	10.81	1.23	0.33

Le tableau 4.3 montre que dans la configuration étudiée et selon les paramètres choisis la stratégie n° 3 est celle qui nécessite le moins d'énergie pour stabiliser la température.

Le quatrième tableau 4.4 fournit la durée  $\tilde{t}_{act}$  pendant laquelle le contrôle n'est pas nul sur la barre.

Table 4.4 – Durée du contrôle  $\tilde{t}_{act}$  en secondes.

Stratégie n° 1		Stratégie n° 2				Stratégie n° 3	
$\tau = 9$	$\tau = 15$	$\tau = 6$ $\tilde{J} = 0.5$	$\tau = 6$ $\tilde{J} = 0.1$	$\tau = 15$ $\tilde{J} = 0.5$	$\tau = 15$ $\tilde{J} = 0.1$	$\tilde{J}_{min} = 0.1$ $\tilde{J}_{max} = 0.5$	$\tilde{J}_{min} = 0.01$ $\tilde{J}_{max} = 0.05$
640	350	121	193	93	164	184	452

Le tableau 4.4 montre que dans la configuration étudiée et selon les paramètres choisis, la stratégie n° 1 demande beaucoup de calculs pour les lois de commandes car ceux-ci sont effectués même lorsque ce n'est pas utile.

La stratégie n° 2 nécessite peu de calculs mais les trois tableaux précédents ont montré que globalement elle était moins efficace que les stratégies n° 1 et n° 3.

D'où, la stratégie n° 3 basée sur un intervalle de temps décroissant avec une durée adaptée (liée à un seuil prohibitif et significatif) est la plus pertinente. L'effet des perturbations est divisé par 10 et cette stratégie nécessite moins d'énergie que les autres.

## Bilan du chapitre

Dans ce quatrième chapitre, la méthode de régularisation itérative du gradient conjugué a été mise en oeuvre afin de stabiliser à zéro la température dans le domaine  $1D$  en dépit de la condition initiale non nulle et de différents types de perturbations (dépendantes du temps ou thermo dépendantes). L'évolution de la température dans la barre est décrite par un système d'équations aux dérivées partielles paraboliques non linéaires et une des difficultés réside en ce que le support spatial des actionneurs dans la barre  $1D$  est plus petit et n'est pas inclus dans le support spatial de la perturbation.

Les stratégies présentées au troisième chapitre sont mises en oeuvre pour résoudre ce problème de stabilisation à zéro. Rappelons que :

- la première stratégie consiste à agir séquentiellement afin de fournir à des intervalles constants des lois de commande mises à jour. Cette stratégie est dite « à décalage constant ».
- la seconde stratégie proposée consiste à mettre à jour des nouvelles lois de commande uniquement lorsque la distribution finale de température s'éloigne trop d'un seuil préalablement fixé. Cette stratégie est dite « à décalage adaptatif ».
- la troisième stratégie consiste à mettre à jour des lois de commande en ne tenant compte que des observations de températures entre deux seuils : l'un jugé réhibitoire, l'autre jugé significatif. Cette troisième stratégie autorise le recouvrement des lois de commande ce qui peut en particulier éviter les retards. Les lois de commande étant de durée variable, cette stratégie est dite « à durée adaptée ».

Des illustrations et des tableaux ont été proposés afin d'évaluer les performances des différentes stratégies.

La stratégie la plus efficace est la troisième stratégie. Dans la configuration étudiée, elle permet en effet de diviser l'effet des perturbations par 10 (selon le critère retenu) et nécessite moins d'énergie que les autres stratégies. On peut noter qu'il est toutefois difficile de réduire le retard dans les contre-réactions des commandes (comme pour les autres stratégies) : cela est en partie dû à la dynamique des transferts thermiques. Une configuration plus favorable aurait consisté à disposer du même support spatial pour les actionneurs et les perturbations (voire d'agir sur l'ensemble du domaine). Il a été choisi une configuration plus compliquée pour montrer l'intérêt de la méthode qu'il conviendra de qualifier de « quasi en ligne ».

## Références bibliographiques

ALIFANOV. O.M., ARTYUKHIN. E.A., RUMYANTSEV. S.V., Extreme Methods for Solving Ill-Posed Problems with Applications to Inverse Heat Transfer Problems, New-York, Begell house Inc., 1995.

ATTAR. L., TRAN. T.P., PEREZ. L., MOULAY. E., NOUAILLETAS. R., BREMOND. S., AUTRIQUE. L., Plasma thermal characterization in nuclear fusion context, 9th International Conference on Inverse Problems in Engineering (ICIPE), Waterloo, Canada, may 2017.

AZAR. T., PEREZ. L., PRIEUR. C., MOULAY. E., AUTRIQUE. L., Stabilization using in-domain actuator : A Numerical Method for a Non Linear Parabolic Partial Differential Equation, in Proceedings, Controlo' 2020, Bragança, Portugal, 1-3 July, 2020.

BARCENA-PESTISCO. J-A., Null controllability of the heat equation in pseudo-cylinders by an internal control, ESAIM Control Optimisation and Calculus of Variations, <https://doi.org/10.1051/cocv/2020048>, July 2020.

BEDDIAF. S., AUTRIQUE. L., PEREZ. L., JOLLY. J- C., Heating source localization in a reduced time, International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, vol. 26, n° 3, pp 623-640, 2016.

BRIBIESCA ARGOMEDO. F., WITRANT. E., PRIEUR. C., "Safety Factor Profile Control in a Tokamak," New-York : Ed. Springer-Verlag, 2014.

GAYE. O., MOULAY. E., BREMOND. S., AUTRIQUE. L., NOUAILLETAS. R., ARTAUD. J-F., ORLOV. Y., Robust stabilization of the current profile in tokamak plasmas using sliding mode approach in infinite dimension, Control engineering practice, vol. 21, n° 10, pp. 1350-1358, 2013.

GAYE. O., AUTRIQUE. L., ORLOV. Y., MOULAY. E., BREMOND. S., NOUAILLETAS. R.,  $H_\infty$  stabilization of the current profile in tokamak plasmas via LMI approach, Automatica, vol. 49, n° 9, pp. 2795-2804, 2013.

MOROZOV. V.A., Methods for solving incorrectly posed problems, New-York : Ed. Springer-Verlag, 1984.

OU. Y., SCHUSTER. E., Model predictive control of parabolic PDE systems with dirichlet boundary conditions via galerkin model reduction, American Control Conference, St. Louis, USA. 2009.

ROY. S., KAR. I.N., Adaptive-robust Control With Limited Knowledge on Systems Dynamics : An Artificial Input Delay Approach and Beyond, ed. Springer Verlag, Singapore, pp. 144, 2020.

VERGNAUD. A., PEREZ. L., AUTRIQUE. L., Adaptive selection of relevant sensors in a network for unknown mobile heating flux estimation, IEEE Sensors Journal, sous presse, doi : 10.1109/JSEN.2020.3009779, 2020.

VERGNAUD. A., PEREZ. L., AUTRIQUE. L., Quasi-online parametric identification of moving heating devices in a 2D geometry, International Journal of Thermal Sciences, vol. 102, pp. 47 - 61, 2016.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

---

VERGNAUD. A., BEAUGRAND. G., GAYA. O., PEREZ. L., LUCIDARME. P., AUTRIQUE. L., Quasi on-line identification of temperature-dependent thermal conductivity, European Control Conference, Strasbourg, France, 24-27 June 2014.

WIJNANDS. T., VAN HOUTTE. D., MARTIN. G., LITAUDON. X., FROISSARD. P., Feedback control of the current profile on Tore Supra, Nuclear fusion, vol. 37, n° 6, pp. 777-791, 1997.

WITRANT. E., BREMOND. S., GIRUZZI. G., MAZON. D., BARANA. O., MOREAU. P., A control-oriented model of the current profile in tokamak plasma, Plasma Physics and Controlled Fusion, vol. 49, pp. 1075-1105, 2007.

YUE. D., HAN. Q-L., Delayed feedback control of uncertain systems with time-varying input delay, Automatica, vol. 41, n° 2, pp. 233-240, 2005.

---

# Chapitre 5

## Contexte de la fusion nucléaire contrôlée

### 5.1 Introduction à la fusion nucléaire

#### 5.1.1 Contexte énergétique

D'après l'étude biennale de l'Institut français d'études démographiques (INED), la croissance démographique mondiale devrait augmenter d'un tiers d'ici 2050, passant à plus de 10 milliards d'habitants. Cette croissance provoque une hausse des besoins humains plus spécifiquement dans le domaine de l'énergie. Les différentes sources d'énergie, leurs formes associées et leurs moyens de stockage sont représentées dans le diagramme ci-dessous :

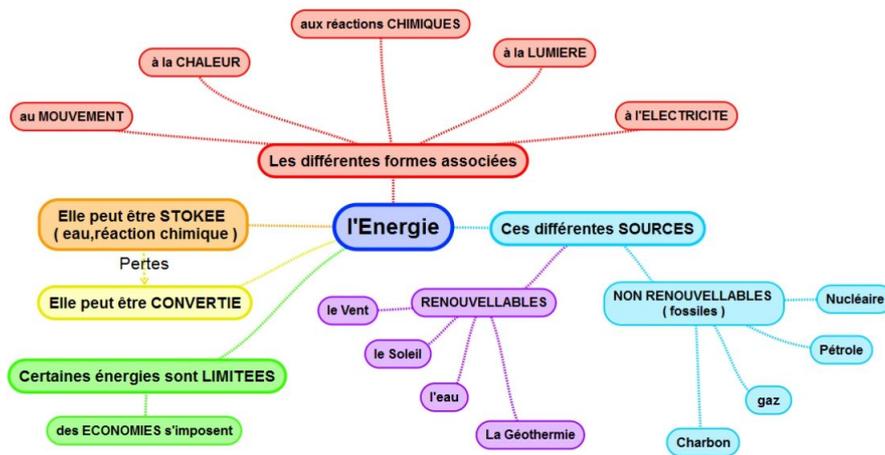


Figure 5.1 – Les différentes sources d'énergies.

L'augmentation des besoins énergétiques engendre déjà de nombreux problèmes compte tenu du fait que les ressources non renouvelables comme le gaz, le pétrole et le charbon sont en cours d'épuisement

dans le monde . . . Selon British Petroleum BP, la consommation mondiale d'énergie en 2017 représente 428 tonnes d'équivalent pétrole chaque seconde soit environ 13511 Millions de tonnes d'équivalent pétrole (*Mtep*) par an sachant que les énergies fossiles représentent encore 81% de la consommation mondiale (Figure 5.2). Celle-ci a par ailleurs doublé au cours des 35 dernières années. En mars 2018, l'Agence internationale de l'énergie avait déjà fait état d'une hausse de la consommation mondiale d'énergie de 2.1%. Le pétrole reste la principale source d'énergie du mix énergétique mondial (34.2%), avec une hausse de la consommation de 1.7 million de barils par jour en 2017.

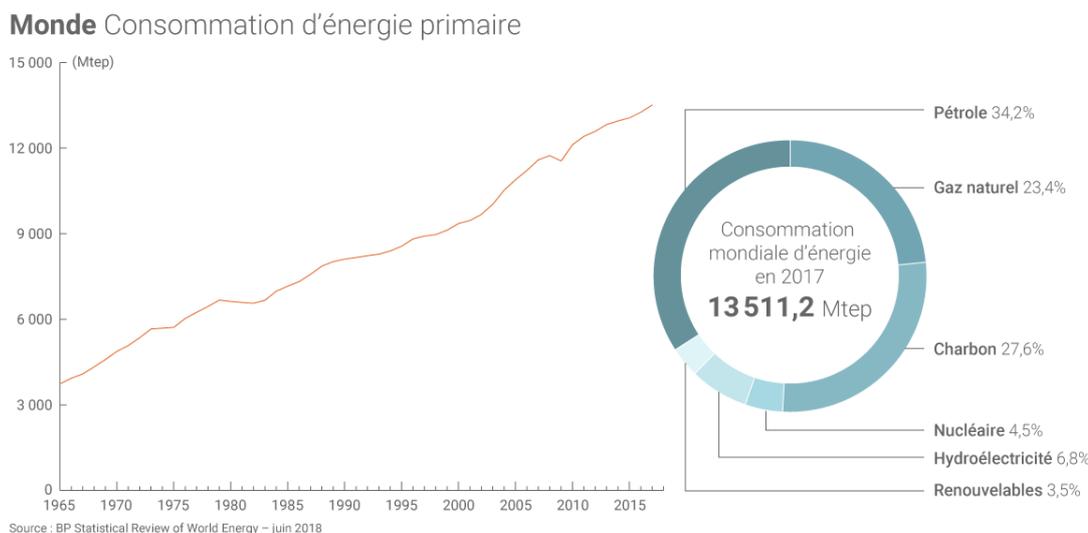


Figure 5.2 – Statistique de l'énergie mondiale.

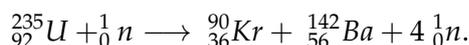
Une conséquence directe de cette progression est l'augmentation des émissions mondiales de  $CO_2$  : +1.95% en 2018 par rapport à 2017, après trois années consécutives de quasi-stabilité. Pour faire face au réchauffement climatique, réduire les émissions mondiales de gaz à effet de serre, diminuer la pollution, répondre à la raréfaction des matières premières, . . . les hommes doivent répondre à leurs besoins de manière durable. L'énergie de la fusion nucléaire est une énergie propre, abondante et répond à ces défis.

### 5.1.2 Réactions nucléaires

L'énergie de liaison  $E_l$  d'un noyau atomique est l'énergie qu'il faut fournir au noyau d'un atome pour le dissocier. Cette énergie permet de comparer la stabilité des différents atomes de symbole  ${}^A_ZX$ , où  $A$  représente le nombre des nucléons,  $Z$  le nombre des protons et  $A - Z$  le nombre des neutrons.

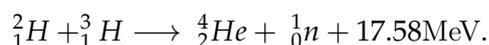
L'énergie nucléaire repose sur ce type de dissociation et on peut distinguer :

- la fission qui est une réaction nucléaire provoquée au cours de laquelle un noyau lourd se scinde généralement en deux noyaux moyens, sous l'impact d'un neutron. La réaction se fait avec perte de masse et dégagement d'énergie. Par exemple, le noyau d'uranium 235 peut subir la fission. On dit qu'il est fissile. L'équation de la réaction de fission s'écrit :



Le nombre de neutrons produits est plus grand que le nombre de neutrons consommés et les neutrons produits sont donc susceptibles de provoquer des réactions de fission en chaîne. La fission nucléaire non contrôlée est utilisée dans les armes redoutables que représentent les bombes atomiques. Dans les réacteurs nucléaires, la fission est contrôlée et le dégagement d'énergie est progressif. La France utilise près d'une soixantaine de réacteurs produisant de l'énergie électrique. Les déchets sont radioactifs et posent de sérieux problèmes de stockage.

- la fusion nucléaire qui est une réaction nucléaire provoquée au cours de laquelle deux noyaux légers s'associent pour former un noyau plus lourd. La réaction se fait avec perte de masse et dégagement d'énergie. Par exemple, le deutérium et le tritium deux éléments légers se fusionnent et produisent un dégagement d'énergie suivant :



Des réactions de fusion nucléaire non contrôlées ont lieu dans les étoiles (l'énergie du Soleil, par exemple, provient de réactions nucléaires qui se produisent dans son noyau).

Dans ce qui suit, seule la fusion nucléaire est très brièvement présentée.

### 5.1.3 La réaction de fusion deutérium & tritium

Deux noyaux chargés positivement rapprochés l'un de l'autre ont tendance à se repousser. Afin d'être dans la zone proche du noyau où les réactions nucléaires peuvent se produire, il est nécessaire de fournir une grande énergie pour franchir cette barrière naturelle. La probabilité de passage de cette barrière est fonction de la « section efficace » (grandeur physique liée à la probabilité d'interaction d'une particule pour une réaction donnée). La variation des sections efficaces de plusieurs réactions de fusion possibles en fonction de l'énergie d'interaction est indiquée sur la figure 5.3.

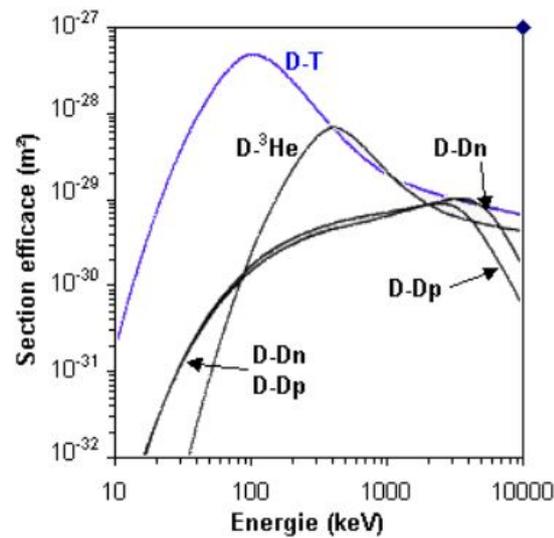


Figure 5.3 – Section efficace des principales réactions de fusion pour des applications énergétiques (Villegas, 2010).

La réaction de fusion la plus accessible est la réaction impliquant le deutérium ( $D$ , isotope naturel stable de l'hydrogène qui possède un proton et un neutron) et le tritium ( $T$ , isotope de l'hydrogène qui possède un proton et deux neutrons). C'est sur cette réaction que se concentrent les recherches sur la fusion contrôlée.

Le deutérium peut être extrait de l'eau de mer et fournit donc une ressource très abondante. Le tritium existe en très faible quantité dans la nature mais peut être extrait des rejets des réacteurs de fission ainsi que des rejets issus des essais nucléaires atmosphériques.

Avec un mélange approprié d'hydrogène  $H$  : de deutérium  $D$ , de tritium  $T$  et d'hélium ( $He$ ), plusieurs réactions sont possibles mais elles ne sont pas toutes aussi faciles à réaliser.

Ces réactions sont présentées ci-dessous avec les libérations d'énergies correspondantes :

1.  $D + D \longrightarrow ({}^3He + 0.82\text{MeV}) + (n + 2.45\text{MeV})$
2.  $D + D \longrightarrow (T + 1.01\text{MeV}) + (H + 3.03\text{MeV})$
3.  $D + T \longrightarrow ({}^4He + 3.52\text{MeV}) + (n + 14.06\text{MeV})$
4.  $D + {}^3He \longrightarrow ({}^4He + 3.67\text{MeV}) + (H + 14.64\text{MeV})$

On peut noter que l'énergie libérée est donnée en électron-volt :  $1eV = 1.602176634 \times 10^{-19}$  Joules.

Les réactions précédentes mettent aussi en jeu des isotopes de l'hélium :  ${}^3He$  (son noyau atomique compte deux protons et un seul neutron) et  ${}^4He$  (son noyau atomique compte deux protons et deux neutrons).

Les deux premières réactions peuvent se produire mais la troisième réaction est cent fois plus fréquente (dans certaines conditions au sein d'un réacteur de fusion). C'est cette troisième réaction qui est recherchée dans le cadre de la production d'énergie par un réacteur de fusion nucléaire (Figure 5.4).

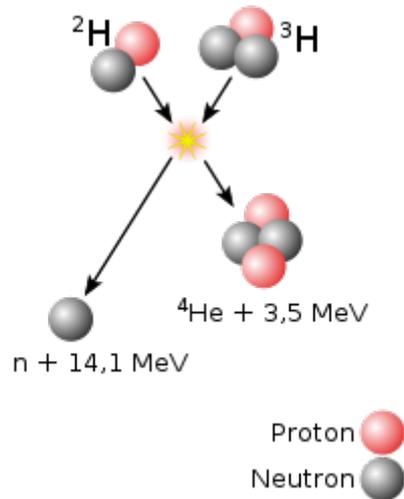


Figure 5.4 – La réaction de fusion contrôlée standard.

C'est une réaction qualifiée de réaction provoquée. Elle se forme dans un réacteur fusionnant l'hydrogène et ses isotopes pour former des noyaux plus lourds et dégager une grande quantité d'énergie. Afin de déclencher cette réaction et vaincre les forces de répulsion de charges, le milieu doit être chauffé à très haute température  $10^8\text{K}$ . A ces températures, la matière est à l'état de plasma : les électrons se sont dissociés du noyau auquel ils appartenaient, on obtient un gaz d'électrons et de noyaux atomiques qui sont totalement ionisés (le noyau et les électrons ne sont plus liés).

Sur Terre, l'homme a d'abord pu produire de telles réactions d'une manière explosive et incontrôlée, en concevant la bombe *H*. Le réacteur développé pour maîtriser cette réaction nucléaire est présenté dans le prochain paragraphe.

## 5.2 La réaction de fusion au sein d'un plasma de tokamak

### 5.2.1 Principe du tokamak

Afin de produire une réaction de fusion nucléaire contrôlée, il est nécessaire de confiner le plasma porté à de très hautes températures (plusieurs dizaines de millions de degrés) par des champs magnétiques au sein d'un réacteur. Comme le plasma est formé de particules chargées, les champs magnétiques peuvent interagir sur celles-ci.

Si ce même plasma baigne dans un champ magnétique rectiligne (image 2 de la figure 5.5), les particules s'enroulent autour des lignes de champ et ne peuvent plus atteindre les parois latérales puisque les particules vont s'échapper facilement.

Afin d'éviter les pertes aux extrémités, on referme la boîte magnétique en créant un tore (image 3 de la figure 5.5). Le champ magnétique ainsi créé par une série d'aimants entourant le plasma s'appelle le champ magnétique toroïdal. Les aimants générant ce champ sont les aimants toroïdaux. On montre que ce confinement n'est pas tout à fait suffisant et que pour minimiser encore les fuites de particules, les lignes de champ doivent être hélicoïdales (image 4 de la figure 5.5). Ceci est réalisé en ajoutant au champ toroïdal un autre champ magnétique qui lui est perpendiculaire (le champ poloïdal).

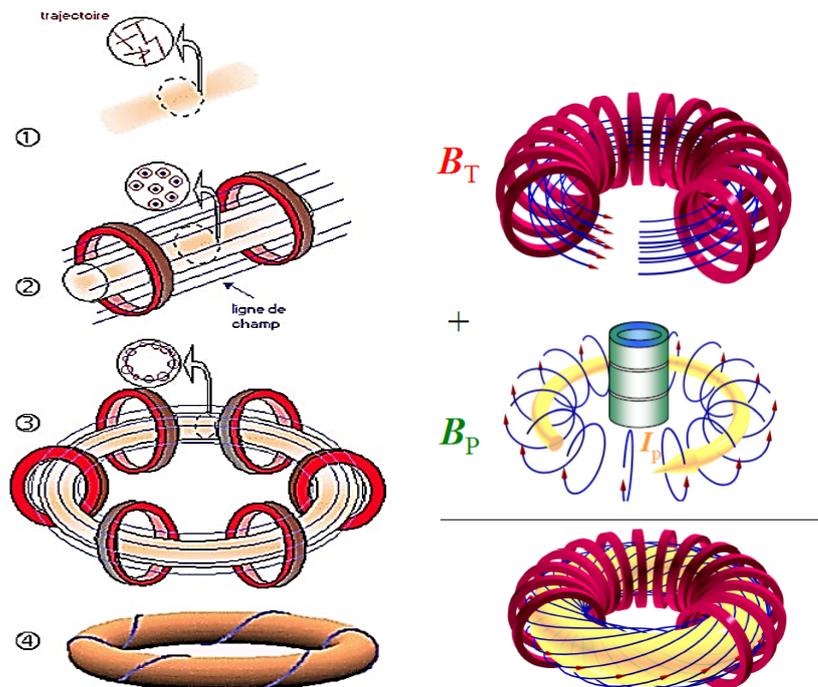


Figure 5.5 – Représentation des lignes de champs ( $B_T$  : toroïdal ;  $B_P$  : poloïdal).

La méthode utilisée pour produire ces lignes de champ hélicoïdales a donné naissance à deux types de machine :

- Le « tokamak », formé d'un ensemble de bobines produit un champ magnétique dans la direction du tore, auquel vient s'ajouter le champ magnétique créé par un courant intense axial circulant dans le plasma lui-même. Les deux champs génèrent la structure hélicoïdale des lignes de champ (image (a) de la figure 5.6). Cette configuration a fait des progrès considérables depuis son invention dans les années 1960 par des chercheurs russes. C'est actuellement la voie de recherche la plus étudiée (un exemple de tokamak : WEST).

- Le « stellarator », le confinement du plasma est entièrement réalisé par un champ magnétique hélicoïdal créé par l'arrangement complexe de bobines autour du tore, alimentées en courants forts et appelées bobines poloïdales. Il est analogue au « tokamak » à la différence qu'il n'utilise pas de courant toroïdal circulant à l'intérieur du plasma pour le confiner (image (b) de la figure 5.6).

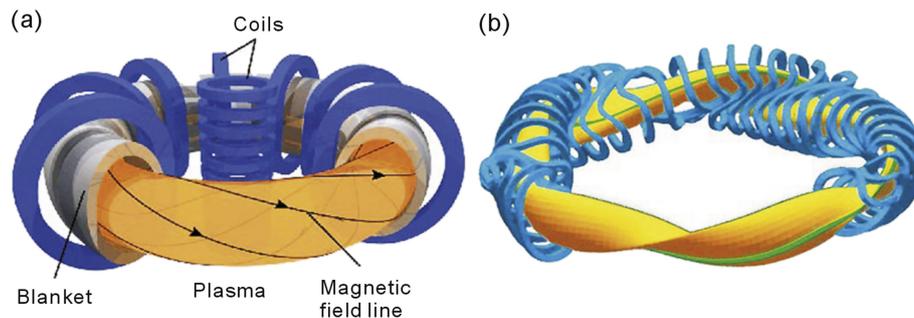


Figure 5.6 – Schéma tokamak - stellarator.

En résumé, un tokamak est une chambre torique (en forme d'anneau métallique) de confinement magnétique destinée à l'étude des plasmas et développé plus spécifiquement pour démontrer la faisabilité de la production d'énergie par fusion nucléaire. C'est une technologie candidate pour permettre à long terme la production d'électricité en récupérant la chaleur qui serait produite par la réaction de fusion nucléaire.

Inventé au début des années 1950 par les physiciens soviétiques Igor Tamm et Andreï Sakharov sur une idée originale du physicien Oleg Lavrentiev, le terme tokamak est tiré du russe « *тороидальная камера с магнитными катушками* » (*toroïdalnaïa kamera s magnitnymi katushkami*) ce qui signifie en français, chambre toroïdale avec bobines magnétiques. Le premier tokamak a été construit à l'institut Kurchatov à Moscou.

### 5.2.2 Exemple de schéma de réalisation

Le schéma d'un réacteur à fusion de type tokamak est présenté sur la figure 5.7 et les différents numéros correspondent aux éléments suivants :

- ① Le mélange combustible deutérium-tritium est injecté dans une chambre où, grâce au système de confinement et de chauffage, le mélange passe à l'état de plasma,
- ② Le plasma produit des cendres (les atomes d'hélium) et de l'énergie sous forme de particules chargées ou de rayonnement,
- ③ Les particules chargées et le rayonnement s'amortissent en émettant leur énergie dans une paroi

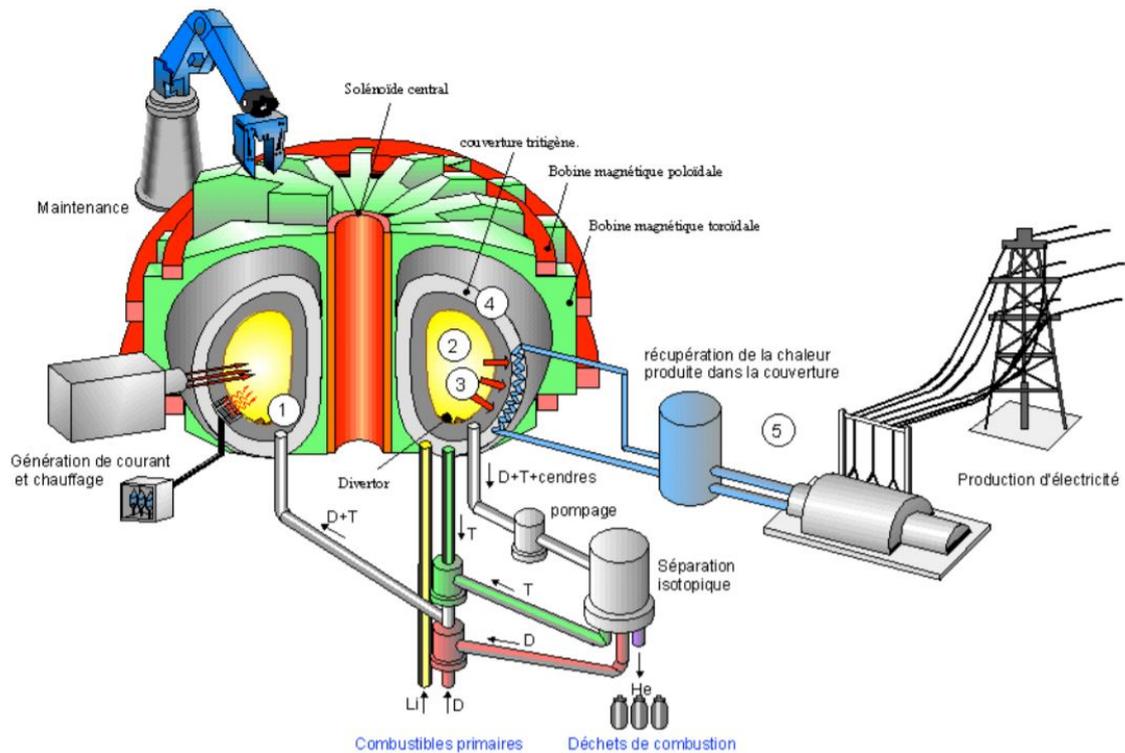


Figure 5.7 – Schéma d'un réacteur à fusion (figure fournie par M.G. Marbach DRFC - CEA).

appelée la « première paroi » qui, comme son nom l'indique, est le premier élément matériel rencontré au-delà du plasma. L'énergie qui apparaît est sous forme d'énergie cinétique des neutrons qui quant à elle, est convertie en chaleur dans la couverture,

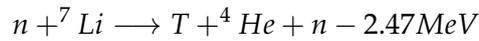
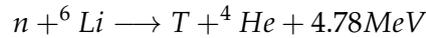
④ Couverture située après la première paroi, mais néanmoins à l'intérieur de la chambre à vide. La chambre à vide elle-même est le composant qui clôt l'espace où a lieu la réaction de fusion.

Première paroi, couverture et chambre à vide sont bien évidemment refroidies par un système d'extraction de la chaleur. La chaleur est utilisée pour produire de la vapeur et alimenter un ensemble classique turbine et alternateur producteur d'électricité dans ⑤.

La couverture ④ remplit en fait plusieurs fonctions :

- Elle permet de récupérer l'énergie que les neutrons abandonnent en échauffant les matériaux. Un fluide caloporteur circule dans la structure et évacue la chaleur produite vers les équipements classiques que sont le générateur de vapeur, la turbine et l'alternateur où est finalement générée l'électricité.
- Elle produit le tritium nécessaire à la réaction de fusion. Le tritium n'existe en fait qu'en très

petite quantité dans la nature. Il sera produit par bombardement neutronique sur un autre corps aisément disponible, le lithium, via les réactions suivantes :



L'intérêt est de prendre en compte la première réaction qui dégage de l'énergie. Le lithium peut être sous forme solide (céramique) ou liquide (alliage métallique), suivant la couverture utilisée.

L'un des principaux défis est le besoin de porter le coeur du plasma à une température extrême tout en évitant de faire fondre l'enceinte : le plasma doit donc être suffisamment froid au bord.

### 5.3 Le projet ITER

Il existe plusieurs tokamaks au monde (environ 200). Une liste non exhaustive est proposée ci-après :

- Experimental Advanced Superconducting tokamak (EAST), à Hefei, Chine, opérationnel depuis 2006, premier tokamak dans le monde qui a réussi à produire un plasma stable en mode  $H$  pour 100 secondes pour plus de 50 millions de Kelvin (juillet 2017) ;
- KSTAR (Korean Superconducting Tokamak Advanced Research) à Daejeon (Corée du Sud) ;
- Joint European Torus (JET), basé à Culham au Royaume-Uni ;
- Tore Supra, basé à Cadarache en France ;
- JT-60 ou JAERI - Japan Atomic Energy Research Institute - tokamak 60, au Japon (Naka) ;
- Asdex et son amélioration Asdex-Upgrade, conçu en Allemagne dans les années 1980 ;
- Doublet et son amélioration DIII-D, conçu aux États-Unis dans les années 1980 ;
- International Thermonuclear Experimental Reactor (ITER), qui est en cours de construction à Cadarache ;

Le tokamak auquel nous nous intéressons est ITER. Dans le sud de la France, 35 pays collaborent à la construction du plus grand tokamak au monde, un appareil de fusion magnétique conçu pour prouver la faisabilité de la fusion nucléaire en tant que source d'énergie à grande échelle et sans émissions de carbone. Les campagnes expérimentales qui seront menées à ITER sont essentielles pour faire progresser la science de la fusion et préparer la voie aux centrales de fusion pour la production d'énergie à grande échelle. ITER sera le premier réacteur de fusion conçu à la fois pour maintenir la fusion pendant de

longues périodes et pour produire de l'énergie (Figure 5.8). Il permettra aussi de tester et de valider des technologies, des matériaux, des stratégies de contrôle et des diagnostics nécessaires à la production commerciale d'électricité à base de fusion. Des milliers d'ingénieurs et de scientifiques ont contribué à la conception d'ITER depuis le lancement de l'idée d'une expérience internationale commune de fusion en 1985. Les membres principaux d'ITER sont la Chine, l'Union européenne, l'Inde, le Japon, la Corée, la Russie et les États-Unis.

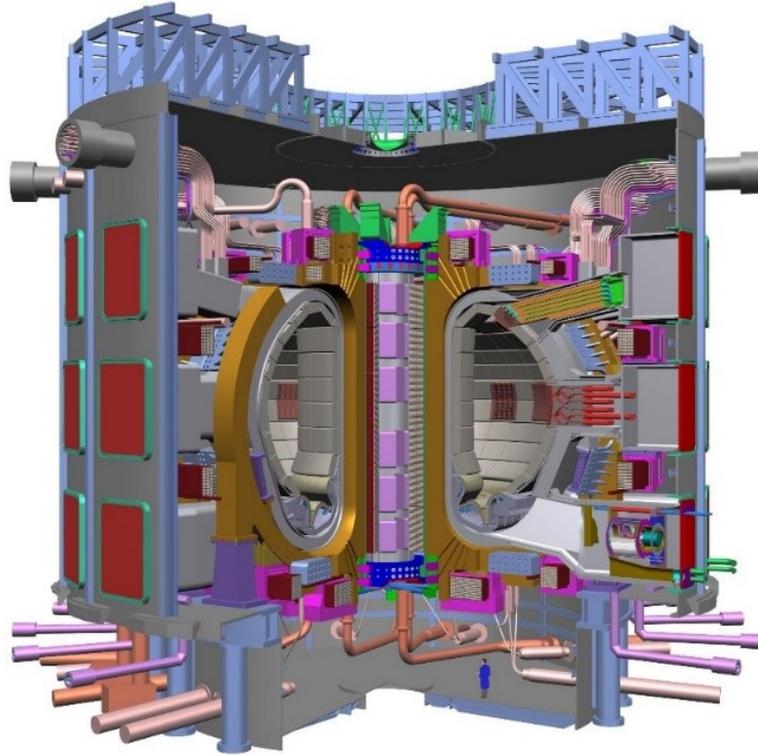


Figure 5.8 – Réacteur ITER.

ITER mesure 29 mètres de haut pour 28 mètres de diamètre et pèsera approximativement 23000 tonnes. Comme la puissance générée dépend en partie de la taille de la machine, ITER sera le plus grand tokamak jamais construit. Il s'agit d'un des projets technologiques nécessitant une des plus larges collaborations scientifiques au monde. Pour avoir un ordre d'idée de la taille d'ITER, nous avons rassemblé ci-dessous les dimensions relatives des tokamaks Tore Supra et JET par rapport à ITER. Le grand rayon  $R$  d'un tokamak correspond à la distance entre l'axe central et le milieu de la chambre à vide. Le petit rayon  $a$  se rapporte quant à lui au rayon moyen de l'anneau de plasma.

Dans le tableau 5.1, la notion de « Facteur d'amplification » est introduite. Cette notion est détaillée dans le paragraphe suivant.

Table 5.1 – Comparaison des paramètres d'ITER à ceux des tokamaks Tore Supra et JET.

Paramètres	Tore Supra	JET	ITER
Grand rayon du plasma ( $R$ )	2.40 m	3 m	6.2 m
Petit rayon du plasma ( $a$ )	0.72 m	1.25 m	2.0 m
Volume du plasma	$25 m^3$	$100 m^3$	$840 m^3$
Courant plasma	1.7 MA	$5 \sim 7$ MA	15 MA
Champ magnétique	4.5 Tesla	3.4 Tesla	5.3 Tesla
Type de plasma	Deutérium	Deutérium/Deutérium-Tritium	Deutérium/Deutérium-Tritium
Facteur d'amplification ( $Q$ )	$\sim 0$	0.64	$\geq 10$
Durée des impulsions	1000s	10 s	$> 400$ s ( $Q = 10$ ) et permanent à puissance réduite ( $Q = 5$ )

## 5.4 Phénomènes physiques et modélisation mathématique

### 5.4.1 Bilan de puissance du plasma

Le bilan énergétique du plasma est déterminé à partir des sources d'énergie qui alimentent le plasma et des pertes d'énergie qui le refroidissent. Pour que le plasma soit stationnaire, il faut que ce bilan soit équilibré, c'est-à-dire que les sources compensent les pertes. Les puissances mises en jeu sont les suivantes :

1. la puissance de fusion  $P_{\text{fusion}}$  qui constitue la puissance totale créée par la réaction de fusion entre les réactifs. Cette puissance se distribue entre les produits de la réaction : les particules alpha (c'est-à-dire les noyaux d'hélium) et les neutrons

$$P_{\text{fusion}} = P_{\text{alpha}} + P_{\text{neutrons}}$$

Où :

- $P_{\text{alpha}}$  est la source d'énergie la plus importante du plasma : ses particules chargées sont confinées par le champ magnétique et transmettent leur énergie au plasma par collisions.
  - $P_{\text{neutrons}}$  est définie par les neutrons, comme ils n'ont pas de charge, ils ne sont pas sensibles au champ magnétique et s'échappent rapidement sans céder leur énergie au plasma, d'où :  $P_{\text{neutrons}} = 0$ . Leur unique rôle est de produire du tritium.
2. la puissance extérieure  $P_{\text{extérieure}}$  qui est un système de chauffage additionnel, fournie au système en cas d'un déficit d'énergie de maintenance du plasma.

3. les pertes d'énergie  $P_{\text{pertes}}$  qui correspond à la puissance perdue à cause du freinage des électrons, des impuretés, du transport de la chaleur et des particules par conduction, convection et rayonnement. Si elle est importante, elle peut mener à une brusque perte du confinement du plasma : c'est la disruption.

D'où, la formule du bilan énergétique est la variation temporelle de l'énergie du plasma exprimée par :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = P_{\text{alpha}} + P_{\text{extérieure}} - P_{\text{pertes}} \quad (5.1)$$

Le plasma peut avoir l'un des trois états :

- perdant si  $\frac{\partial W}{\partial t} < 0$  : le plasma s'éteint, pas de fusion nucléaire,
- stationnaire si  $\frac{\partial W}{\partial t} = 0$  : si les gains compensent les pertes, pas de fusion nucléaire,
- gagnant si  $\frac{\partial W}{\partial t} > 0$  : au sein du plasma des réactions de fusion peuvent avoir lieu.

#### 5.4.2 Critère de Lawson et facteur d'amplification

Le plasma obtenu est le siège de pertes énergétiques. Un moyen de quantifier ces pertes est l'introduction de la quantité  $\tau_E$ , appelée temps de confinement de l'énergie et définie à l'état stationnaire comme le rapport entre  $W$  (l'énergie stockée dans le plasma) et  $P_{\text{pertes}}$  (la puissance nécessaire à l'entretien de ce plasma), c'est le temps caractéristique du refroidissement du plasma qui est calculé suivant :

$$\tau_E = \frac{W}{P_{\text{pertes}}} \quad (5.2)$$

Plus  $\tau_E$  sera élevé, meilleur sera le confinement et meilleures seront les performances du plasma. On peut montrer que le produit  $n.T.\tau_E$  est caractéristique de ces performances, où  $n$  est la densité électronique du plasma (exprimée en nombre de particules par mètre cube),  $T$  température moyenne du plasma et  $\tau_E$  le temps du confinement en s. Plus précisément, le plasma d'un réacteur stationnaire est rentable du point de vue énergétique si la condition suivante appelée critère de Lawson est vérifiée (Lawson, 1957), (Brémond, 1995), (Dumont, 2001) :

$$n.T.\tau_E \geq 10^{21} \text{ m}^{-3}.\text{KeV}.s \quad (5.3)$$

A noter que pour ce critère, la température est exprimée en électronvolt. En effet, dans certains domaines, comme la physique des plasmas, il peut être pratique d'utiliser l'électronvolt comme unité de température. Pour effectuer la conversion, on utilise la constante de Boltzmann  $K_B$  (en  $J.K^{-1}$ ) :

$$\frac{1eV}{K_B} \approx \frac{1.602176634 \times 10^{-19}}{1.380649 \times 10^{-23}} \approx 11605K$$

Par exemple, une température typique de plasma dans une fusion par confinement magnétique est de 15 keV, soit 174 MK (méga kelvins).

Le critère de Lawson (5.3) montre que le produit entre la densité  $n$ , la température  $T$  et le temps de confinement  $\tau_E$  doit être suffisamment élevé pour que la réaction de fusion soit déclenchée.

Le facteur d'amplification  $Q$  est défini par :  $Q = \frac{P_{\text{fusion}}}{P_{\text{chauffage}}}$  qui est le rapport entre la puissance par les réactions de fusion et la puissance extérieure fournie au plasma par les systèmes de chauffage. C'est le bilan énergétique du plasma.

Le critère de Lawson correspond à  $Q > 1$ , cela veut dire qu'on a produit plus d'énergie avec la réaction de fusion qu'on a dû en fournir pour entretenir le plasma.

Lorsque  $Q = 1$ , on parle de break even, c'est-à-dire le moment où la quantité d'énergie produite par les réactions de fusion est égale à celle qu'on a dû fournir pour entretenir le plasma. C'est une étape intéressante du point de vue scientifique, car le chauffage du plasma est alors assuré de façon importante par les particules alpha et non plus quasi uniquement par les chauffages additionnels, ce qui se rapproche de la situation du réacteur.

Si  $Q = \infty$ , on parle de l'ignition, c'est le stade où la puissance fournie par les réactions de fusion suffit à elle seule à compenser les pertes et où on peut donc couper la puissance extérieure. Le plasma est alors auto-entretenu.

Une centrale de production d'énergie basée sur le principe de la fusion nucléaire doit donc être conçue de telle sorte que  $Q > 1$ . Les objectifs principaux du réacteur expérimental ITER sont :

- obtenir un facteur d'amplification de  $Q = 10$  pendant 400 s
- obtenir un fonctionnement continu pour  $Q = 5$ .

#### 5.4.3 Modélisation de la température au sein du plasma

Certains états caractéristiques d'un plasma de fusion (flux magnétique, température) peuvent être décrits à l'aide de systèmes d'équations aux dérivées partielles. Ces systèmes d'EDP paraboliques sont

couplés. Les modèles mathématiques utilisés pour développer les contrôles temps réel des profils internes du plasma sont en général monodimensionnels et ne prennent pas en compte l'ensemble des phénomènes physiques intervenant au sein d'un plasma. Par exemple, le comportement turbulent d'un plasma nécessite, si on veut le reproduire finement, des modélisations cinétiques très complexes. Néanmoins, une approche basée sur les propriétés de symétrie du système étudié permet de considérer un modèle à une dimension (radiale) qui peut s'avérer suffisant pour des problématiques de contrôle. Les coefficients des équations résultantes sont alors donnés par des modèles empiriques ou pseudo-empiriques (Erba et al., 1998), (Witrant et al., 2007).

La modélisation des échanges thermiques dans le plasma du tokamak permet de décrire la distribution spatio-temporelle de la température au sein du plasma. L'analyse des surfaces magnétiques permet de passer d'une géométrie 3D puis 2D et enfin en 1D (Figure 5.9) (Blum, 1989).

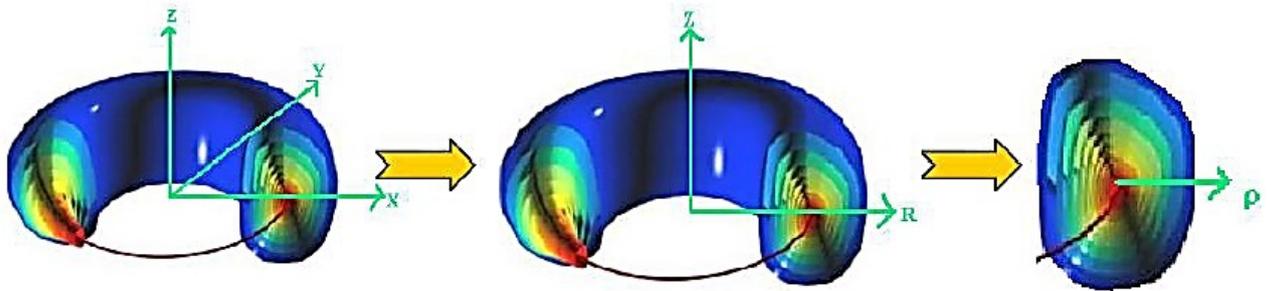


Figure 5.9 – Transformation d'une géométrie 3D en 1D : Source CEA IRFM.

Dans une géométrie 1D suite au changement de variable spatial :  $x = \frac{\rho}{a}$ , on obtient pour  $x \in [0, 1]$  une équation aux dérivées partielles parabolique, non linéaire, non homogène où les coefficients sont des paramètres distribués dans l'espace et dans le temps. Le centre du plasma correspond à  $x = 0$  alors que le bord du plasma correspond à  $x = 1$ . L'équation suivante est considérée (Attar, 2017) :

$$\frac{3}{2} \frac{\partial n_e \theta_e}{\partial t} - \frac{1}{a^2 x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x n_e \alpha \frac{\partial \theta_e}{\partial x} \right) = g \quad (5.4)$$

où  $n_e$  : est la densité des électrons

$t$  : est la variable de temps en secondes

$x$  : est la variable d'espace (sans unités suite au changement de variable exprimé précédemment)

$\theta_e$  : est la température électronique au sein du plasma exprimée en électronvolt (ou en Joules)

$a$  : est le petit rayon (considéré constant) du plasma formé par les lignes de champs poloidales et toroïdales (exprimé en  $m$ )

$\alpha$  : est le coefficient de diffusivité noté également  $\chi$  au sein de la communauté des physiciens des plasmas (s'exprime en  $m^2.s^{-1}$ )

$g$  : est la puissance absorbée par les particules en  $W.m^{-3}$ .

Le coefficient de diffusivité dépendant de l'espace et du temps est en général mal connu et nécessite une phase d'identification. Dans les travaux de (Tubbing et al., 1987), une étude a été proposée en supposant que le terme diffusivité thermique est en dépendance non-linéaire avec le gradient de la température des particules du plasma. Pour les modèles théoriques, on peut distinguer par exemple les modèles Bohm/gyro-Bohm (Erba et al., 1995), (Mikkelsen et al., 1997). A noter les travaux de (Sattin et al., 2012) ont eu pour objet l'estimation du coefficient de diffusion thermique mais en considérant que le terme source  $g$  est parfaitement connu. Des techniques d'identification ont été aussi développées dans (Mechhoud, 2013) et (Attar, 2017).

A l'équation (5.4) exprimée en  $W.m^{-3}$ , il convient d'ajouter les conditions aux bords et une condition initiale :

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_e}{\partial t}(x=0, t) = 0 & \theta_e(x=1, t) = 0 \\ \theta_e(x, 0) = \theta_{e0}(x) \end{cases} \quad (5.5)$$

#### 5.4.4 Modélisation du flux magnétique au sein du plasma

La fusion nucléaire au sein d'un tokamak nécessite de confiner le plasma dans une région donnée et de le chauffer pour atteindre des températures nécessaires à la fusion des noyaux. Une particule chargée-ionisée subit une force si elle est baignée dans un champ magnétique  $\vec{B}$ . Cette force est exprimée suivant :

$$\vec{F} = q. \vec{v} \wedge \vec{B}$$

où  $q$  est la charge électrique et  $\vec{v}$  la vitesse positive.

Ces particules chargées du plasma décrivent une trajectoire hélicoïdale autour des lignes de champs. On peut remarquer sur la figure 5.10, la ligne bleue qui représente la trajectoire d'un ion deutérium ou tritium autour d'une ligne de champ magnétique  $\vec{B}$  et la ligne rouge qui représente la trajectoire d'un électron.

La magnétohydrodynamique (MHD) est une discipline scientifique cruciale pour la modélisation des plasmas de fusion. Elle repose sur l'étude des propriétés d'un fluide conducteur du courant électrique en présence de champs électromagnétiques. Elle est basée sur l'ensemble des équations de Navier-Stokes

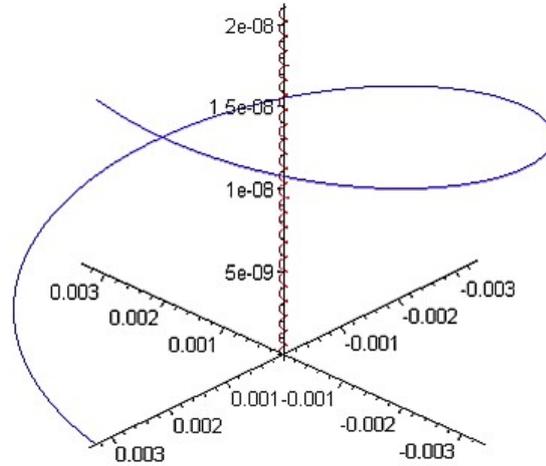


Figure 5.10 – Trajectoire hélicoïdale d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire.

de la dynamique des fluides et aussi les équations de Maxwell, où les champs magnétiques peuvent créer des courants dans le même champ magnétique.

Les équations qui décrivent l'évolution temporelle de la distribution spatiale du flux magnétique dans le plasma sont présentées dans (Blum, 1989), (Witrant, 2007) et (Gaye, 2012). Une version simplifiée est donnée ci-après :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\eta_{//}}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \eta_{//} R_0 j_{ni} \quad (5.6)$$

où  $t$  : est la variable de temps en secondes (en  $s$ )

$x$  : est la variable d'espace (sans unités suite au changement de variable exprimé précédemment)

$\varphi$  : est le flux magnétique au sein du plasma exprimé en Weber (en  $Wb$ )

$a$  : est le petit rayon (considéré constant) du plasma formé par les lignes de champs poloïdales et toroïdales (exprimé en  $m$ )

$\eta_{//}$  : est la composante parallèle de la résistivité du plasma (s'exprime en  $\Omega.m$ )

$\mu_0$  : est la perméabilité magnétique du vide  $\mu_0 = 1.2566370614 \times 10^{-6} \text{ Kg.m.A}^{-2}.s^{-2}$

$R_0$  : est le grand rayon du tore (en  $m$ )

$j_{ni}$  : est la densité de courants générés de manière non inductive (en  $A.m^{-2}$ ).

L'équation (5.6) est complétée par les conditions aux bords et la condition initiale :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{x=1} = -V_0(t) \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) \end{array} \right. \quad (5.7)$$

où  $V_0$  est la tension électrique au bord du plasma.

Les équations décrivant les transferts thermiques et l'évolution du flux magnétique sont couplées. En effet, la composante parallèle de la résistivité du plasma  $\eta_{//}$  dépend de la température électronique  $\theta_e$ . Depuis les travaux de (Cohen, 1950) et (Spitzer, 1953), il est admis que  $\eta_{//}$  varie proportionnellement à  $\theta_e^{-3/2}$ . Une autre source de couplage réside en ce que la densité de courants générés de manière non inductive ( $j_{ni}$ ) qui est le terme source de l'équation (5.6) est aussi une composante du terme source ( $g(x, t)$ ) de l'équation (5.4).

## 5.5 La problématique du contrôle

### 5.5.1 Généralités

Les multiples promesses et avantages que présente la fusion nucléaire en font une source d'énergie idéale pour répondre aux besoins de l'humanité : elle n'émet pas de gaz à effet de serre, ne produit pas de déchets radioactifs à longue durée de vie, ne présente aucun risque d'emballement ou de perte. De plus, les réserves de combustible sont abondantes et la possibilité à produire de l'énergie ne dépend pas de la météo (au contraire du solaire ou de l'éolien). Malgré toutes ces promesses et les énormes progrès depuis les années 50, il n'existe pas encore de centrale à fusion pour produire de l'énergie. Seuls des réacteurs de recherche sont fonctionnels. Cela peut être expliqué du fait des défis scientifiques et technologiques que représentent l'exploitation de la fusion.

Afin d'améliorer les performances et atteindre le break even (fusion auto-entretenu), il est nécessaire de pouvoir confiner une grande quantité de plasma. Il faut par conséquent construire des tokamaks de grande envergure, tel qu'ITER, dont les coûts de construction et de maintenance sont très importants. L'objectif du projet international ITER est de démontrer la faisabilité technologique de la fusion. Il devra aussi permettre de tester des solutions aux problèmes de stabilité du plasma, de génération interne de tritium, et de tenue des matériaux subissant le flux neutronique, qui sont de véritables défis sur les plans scientifiques et technologiques. Citons par exemple :

- la physique des plasmas est une discipline scientifique extrêmement complexe. Il est notamment très difficile de modéliser le comportement d'un plasma confiné ;
- les matériaux internes d'un tokamak doivent à la fois faire face à des contraintes extrêmes (température, résistance aux champs magnétiques, stabilité aux radiations et au bombardement des neutrons de fusion) et atteindre des durées de vie suffisantes. Dans un futur système indus-

triel, la paroi du réacteur devrait évacuer une densité de puissance très importante et aucun matériau est capable de résister sans dommages à ces conditions sur le long terme ;

- en irradiant les parois du tokamak, les neutrons issus de la réaction de fusion rendent les composants partiellement radioactifs pour une centaine d'années. Un plan de démantèlement efficace des installations doit donc être prévu.

Les phénomènes physiques se produisant dans le plasma engendrent l'apparition de plusieurs instabilités magnétohydrodynamiques. Pour que la réaction de fusion existe et perdure, il a été vérifié qu'il était nécessaire d'obtenir et conserver un profil de facteur de sécurité adéquat. De très nombreuses études se focalisent sur le contrôle du profil de sécurité. On peut citer des lois de commandes récentes (Argomedo, 2012), (Gaye, 2012), (Vu, 2014) et (Mavkov, 2017) conservant le caractère distribué du système étudié. Le facteur de sécurité est défini par la relation entre les deux composantes du champ magnétique (toroïdal et poloïdal). Cette grandeur caractéristique est décrite par un profil  $1D$  sur les surfaces magnétiques. Ce facteur de sécurité  $q(x, t)$ , est exprimé comme suit :

$$q(x, t) = \frac{-xB_0(x)}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)} \quad \forall x \in [0, 1], \forall t \geq 0 \quad (5.8)$$

où  $B_0$  est le champ toroïdal au centre de la chambre vide du tokamak supposé indépendant du temps et  $\varphi$  le flux poloïdal. En fonction du profil spatial désiré pour le facteur de sécurité, il est aisé de déterminer quel est le profil spatial désiré pour la distribution du flux magnétique à l'aide de l'équation (5.8). Dans (Gaye, 2011), les courbes suivantes de la figure (5.11) sont présentées en exemple.

D'où la question qui se pose :

Quels sont les moyens d'agir afin d'obtenir la distribution spatiale désirée pour le flux magnétique (ce qui permettra d'obtenir le profil souhaité pour le facteur de sécurité) ?

Pour le tokamak Tore Supra par exemple, deux actions principales peuvent être citées :

- Le système de champ poloïdal remplit deux fonctions. Le premier ensemble de bobines dites de chauffage ohmique est susceptible d'induire du courant dans l'anneau de plasma. Le deuxième ensemble de bobines dites de champ d'équilibre permet de maintenir le tore de plasma dans la position souhaitée, voire de donner une forme particulière à sa section méridienne.
- Le système de chauffage/génération de courant est susceptible de générer du courant non inductif et de chauffer le plasma (effet sur la diffusion résistive du flux). Le plasma peut absorber l'énergie d'ondes électromagnétiques aux fréquences caractéristiques du milieu. Ce chauffage par

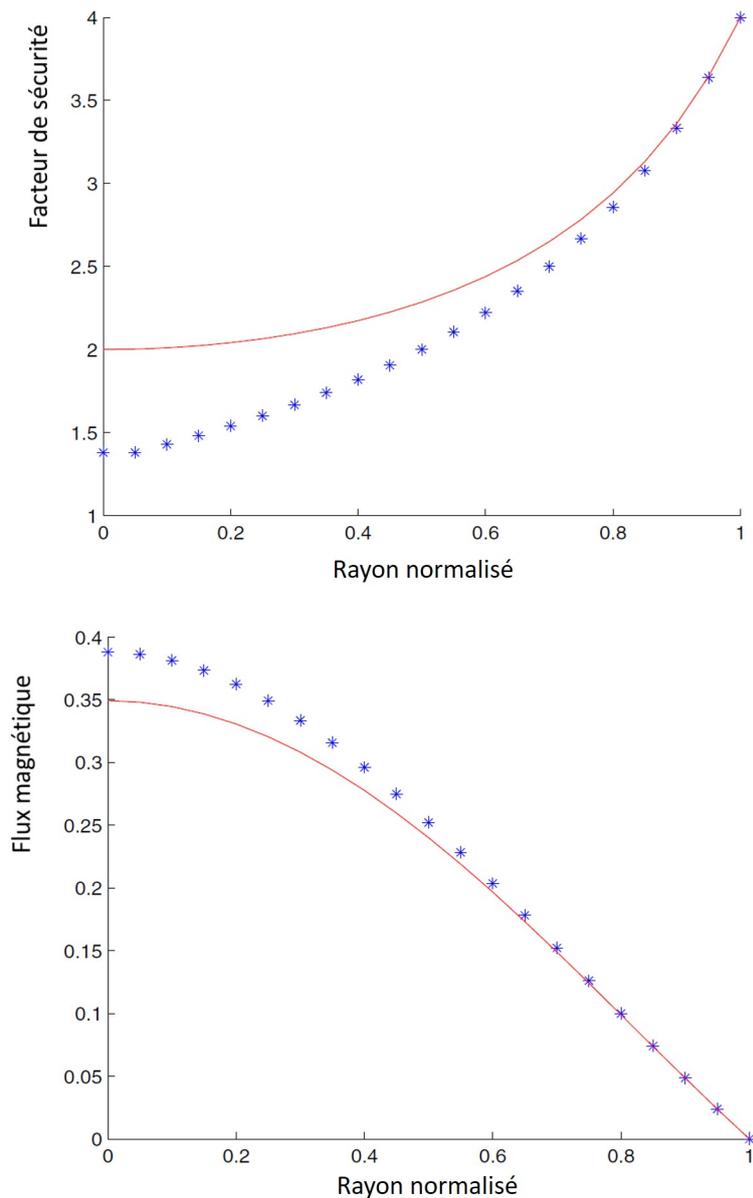


Figure 5.11 – Exemples de distribution spatiale du profil de sécurité  $q(x, t)$  (en haut) et du flux magnétique  $\varphi(x, t)$  (en bas) : en rouge la distribution désirée et en bleu la distribution initiale.

ondes électromagnétiques est transmis au plasma par des antennes qui tapissent une partie de l'enceinte de confinement. Le choix de la fréquence permet de définir l'espèce de particules (ions ou électrons) qui sera chauffée et la région où se fera l'absorption de l'onde et donc le chauffage. On a trois antennes d'émission d'ondes : Fréquence Cyclotroniques Ioniques (FCI), Fréquences Cyclotroniques Electriques (FCE) et Fréquences dites Hybrides (HYB). Un autre moyen de chauffer le plasma est d'injecter des neutres rapides.

Il existe différentes manières de chauffer un plasma.

- Le chauffage ohmique consiste à faire passer un courant électrique dans le plasma (Figure 5.12). Pour ce faire, un champ magnétique (notamment lié au champ poloïdal) est appliqué au centre du tore, des électrons apparaissent et un courant est créé grâce à la force de Lorentz. Ce chauffage n'est nécessaire qu'au démarrage. L'utilisation de l'effet Joule produit par le déplacement des électrons, n'est plus très efficace au-delà d'une température de 10 millions de degrés.

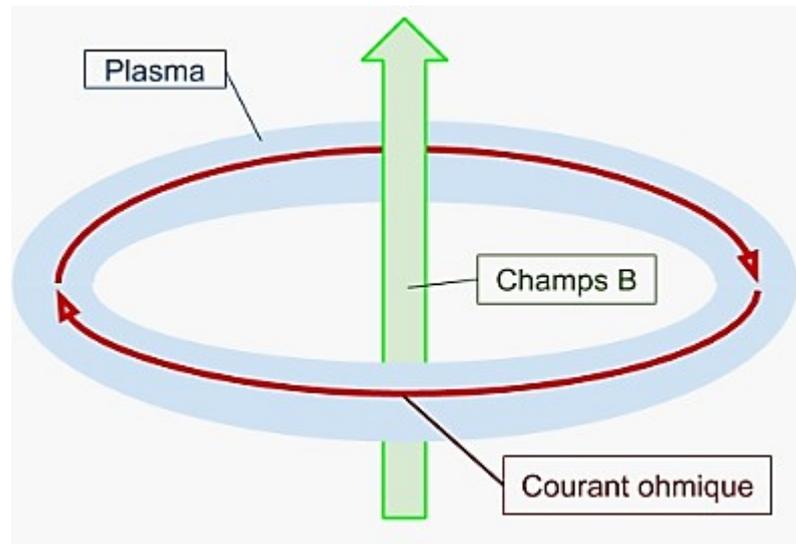


Figure 5.12 – Chauffage ohmique induit dans un tokamak.

- Le chauffage par résonance consiste à envoyer des ondes dans le plasma qui vont interagir avec certaines particules en leur transmettant de la chaleur. Le chauffage par ondes électromagnétiques hautes fréquences consiste à coupler au plasma une onde à une fréquence résonante avec une catégorie de particules présente dans le plasma. Le choix de la fréquence permet ainsi de définir l'espèce de particules qui sera chauffée et la région où se fera l'absorption de l'onde et donc le chauffage. Des antennes émettrices situées sur les parois de l'enceinte de confinement transmettent au plasma l'énergie des ondes.
- Le chauffage par injection de particules rapides consiste à injecter ces dernières qui vont entrer en collision à très haute énergie ( $> 300\text{KeV}$ ) dans le plasma transformant l'énergie cinétique en chaleur. Les collisions qui s'ensuivront vont redistribuer l'énergie et donc chauffer le plasma. Un injecteur de neutres est formé de trois parties principales : une source d'ions, un accélérateur et un neutralisateur.

L'utilisation de ces différents actionneurs est extrêmement délicate et pose de nombreuses difficultés qui

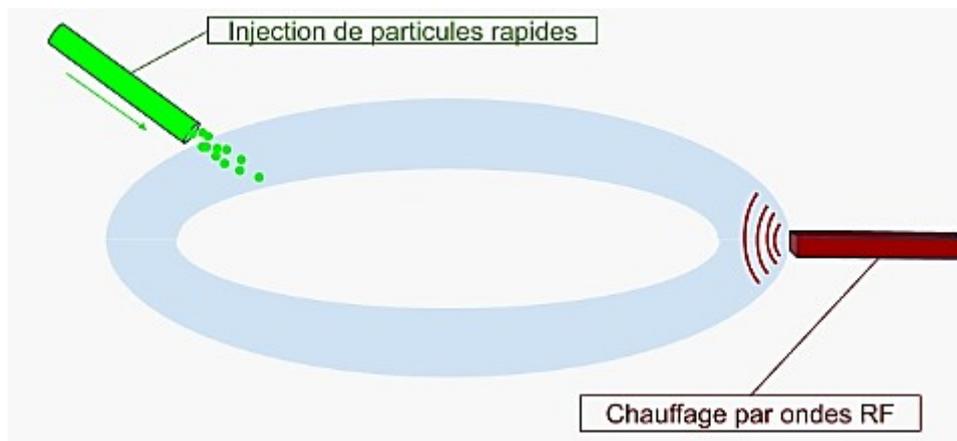


Figure 5.13 – Chauffage induit dans un tokamak.

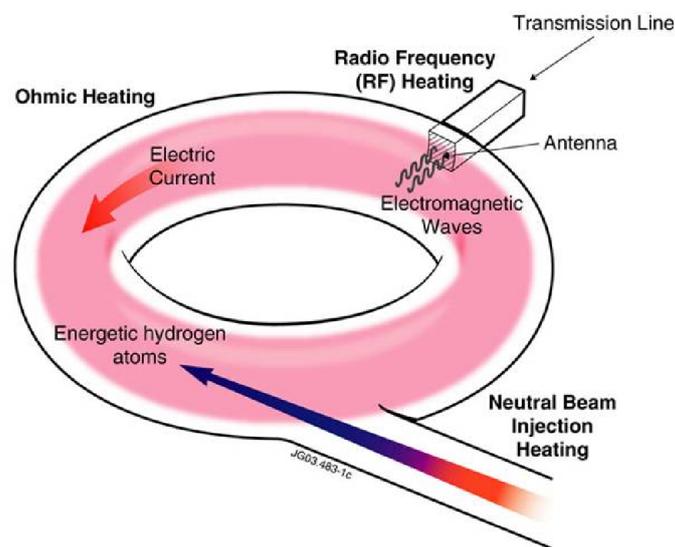


Figure 5.14 – Systèmes de chauffage utilisés dans les tokamaks - image CEA.

relèvent autant de la théorie (physique des plasmas) que de l'ingénierie. Dans le paragraphe suivant, une formulation du problème de contrôle est proposée (l'effet pratique des actionneurs n'est pas détaillé).

### 5.5.2 Formulation

L'objectif final est de contrôler le profil spatial du facteur de sécurité, paramètre clé pour la stabilité du plasma (et donc la durée de la décharge). Comme mentionné précédemment, cela revient à maîtriser le profil du flux magnétique (voir figure 5.11).

Il s'agit d'un problème difficile à résoudre. En effet,

- l'évolution de la variable physique à contrôler est gouvernée par la diffusion résistive du flux magnétique, qui est modélisée par une équation aux dérivées partielles de type parabolique, avec

des coefficients répartis et variant rapidement dans le temps qui dépendent de la solution d'une autre équation liée au transport de la chaleur ;

- bien que l'action soit distribuée dans le domaine spatial, des contraintes de forme non-linéaires sont imposées (avec seulement quelques paramètres disponibles pour la commande) ;
- des termes sources non-linéaires sont présents dans l'équation d'évolution (en particulier un courant auto-induit appelé courant de bootstrap) ;
- des incertitudes importantes existent sur la plupart de mesures, estimations et modèles.

On note  $\varphi_{\text{cible}}(x)$  la distribution spatiale du flux magnétique qu'il est nécessaire de maintenir.

Comme dans (Gaye, 2012), on se propose d'étudier la fonction erreur :

$$\tilde{\varphi}(x, t) = \varphi(x, t) - \varphi_{\text{cible}}(x).$$

L'objectif du contrôle est bien évidemment de stabiliser  $\tilde{\varphi}(x, t)$  à zéro et de rester proche de zéro en dépit de perturbations affectant le système. Il est montré dans (Gaye, 2013) que le système d'équations (5.6) et (5.7) devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\eta_{//}} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0 a^2 x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \right) = \frac{1}{\mu_0 a^2 x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial \varphi_{\text{cible}}}{\partial x} \right) + R_0 j_{\text{control}} \quad \forall (x, t) \in [0, 1] \times T \\ \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \quad \tilde{\varphi}(1, t) = 0 \quad \forall t \in T \\ \tilde{\varphi}(x, 0) = \tilde{\varphi}_0(x) \quad \forall x \in [0, 1] \end{array} \right. \quad (5.9)$$

En ce qui concerne la température, reprenant les équations (5.4) et (5.5) la température électronique est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2} \frac{\partial (n_e \theta_e(x, t))}{\partial t} - \frac{1}{a^2 x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x n_e \alpha(x, t) \frac{\partial \theta_e(x, t)}{\partial x} \right) = g(x, t) \quad \forall (x, t) \in [0, 1] \times [0, t_f] \\ \frac{\partial \theta_e}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \quad \theta_e(1, t) = 0 \quad \forall t \in [0, t_f] \\ \theta_e(x, 0) = \theta_{e0}(x) \quad \forall x \in [0, 1] \end{array} \right. \quad (5.10)$$

Afin de stabiliser à zéro  $\tilde{\varphi}(x, t)$ , les moyens d'actions pour le système (5.9) sont le courant  $j_{\text{control}}(x, t)$  et la résistivité  $\eta_{//}$  qui dépend de la température électronique  $\theta_e(x, t)$ . Afin de maîtriser la température  $\theta_e(x, t)$ , les moyens d'actions pour le système (5.9) sont liés aux sources de chauffage modélisées dans  $g(x, t)$ .

Dans le chapitre suivant, la problématique de contrôle des systèmes couplés (5.9) et (5.10) est abordée dans une configuration académique.

## Bilan du chapitre

Dans ce cinquième chapitre, la problématique de la production d'énergie par fusion nucléaire a été très brièvement abordée. Il s'agit d'un procédé innovant d'une complexité extrême dont le contrôle à l'échelle d'un « grand » réacteur reste un problème ouvert. Le projet ITER (International thermonuclear experimental reactor) a pour objet de démontrer la faisabilité de la production d'électricité basée sur des réactions de fusion nucléaire mettant en jeu des isotopes de l'hydrogène (deutérium et tritium). Après avoir décrit sommairement le contexte énergétique et les principes fondamentaux de la fusion nucléaire, quelques éléments technologiques sont présentés afin de mieux appréhender le fonctionnement d'un tokamak (réacteur de fusion nucléaire en forme de tore assurant le confinement du plasma par voie magnétique).

Afin d'assurer la production d'énergie, le critère de Lawson doit être satisfait et il est nécessaire d'atteindre un certain profil du facteur de sécurité au sein du plasma. Afin d'obtenir cette condition, deux états caractéristiques du milieu plasma sont décrits par des systèmes d'EDP paraboliques couplés : le flux magnétique et la température.

Après avoir mentionné quelques actionneurs technologiques disponibles à des fins de contrôle, les systèmes d'équations d'état sont reformulés. Dans cette configuration spécifique, le problème de stabilisation à zéro est abordé dans le prochain chapitre.

## Références bibliographiques

ARGOMEDO. F-B., Contrôle et stabilité Entrée-Etat en dimension infinie du profil du facteur de sécurité dans un plasma Tokamak. Thèse de doctorat, 131 pages, Université de Grenoble, France, 2012.

ATTAR. L., Identification paramétrique de l'équation de transport de la chaleur dans le plasma du Tokamak, Thèse de doctorat, Université d'Angers, France, 2017.

BLUM. J., Numerical Simulation and Optimal Control in Plasma Physics : With Applications to Tokamaks. Gauthier-Villars, 1989.

BREMOND. S., Modélisation et commande des plasmas de tokamak. Thèse de doctorat, 224 pages, Université de Paris 11, Orsay, France, 1995.

COHEN. R.S., SPITZER. L., ROUTLY. P.M., The Electrical Conductivity of an Ionized Gas, Physical Review, vol. 80, n° 2 pp. 230-238, October 1950.

DUMONT. R., Contrôle du profil de courant par ondes cyclotroniques électroniques dans les tokamaks. Thèse de doctorat, 232 pages, Université Henri Poincaré, Nancy I, France, 2001.

ERBA. M., PARAIL. V., SPRINGMAN. E., TARONI. A., Extension of a Bohm Model for L-Mode Electron Heat Transport to Ion Heat Transport and to the Ohmic Regime. Plasma Physics and Controlled Fusion, vol. 37, n° 11, 1995.

ERBA. M., ANIEL. T., BASIUK. V., BECOULET. A., LITAUDON. X., Validation of a New Mixed Bohm/gyro-Bohm Model for Electron and Ion Heat Transport against the ITER, Tore Supra and START Database Discharges. Nuclear Fusion, Volume 38, Number 7, pp. 1013-1028, 1998.

GAYE. O., MOULAY. E., BREMOND. S., AURIQUE. L., NOUAILLETAS. R., ORLOV. Y., Sliding mode stabilization of the current profile in Tokamak plasmas, 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), Orlando, FL, USA, December 12-15, 2011.

GAYE. O., Contrôle du profil de facteur de sécurité dans les plasmas de tokamak en dimension infinie, Thèse de doctorat, 169 pages, Université d'Angers, France, 2012.

GAYE. O., AURIQUE. L., ORLOV. Y., MOULAY. E., BREMOND. S., NOUAILLETAS. R.,  $H_{\infty}$  stabilization of the current profile in Tokamak plasmas via LMI approach, Automatica, vol. 49, n° 9, pp. 2795-2804, 2013.

LAWSON. J.D., Some Criteria for a Power Producing Thermonuclear Reactor. Proc. Phys. Soc. Sect. B 70, 6. doi :10.1088/0370-1301/70/1/303, 1957.

MAVKOV. B., Control of coupled transport in tokamak plasma. Thèse de doctorat, 121 pages, Université de Grenoble, France, 2017.

MECHHOUD. S., WITRANT. E., DUGARD. L., MOREAU. D., Joint Diffusivity and Source Estimation in Tokamak Plasma Heat Transport. American Control Conference (ACC 2013), June 2013, Washington, DC, United States, 2013.

MIKKELSEN. D.R., SCOTT. S.D., DORLAND. W., Testing the  $\rho^*$  Scaling of Thermal Transport

Models : Predicted and Measured Temperatures in the Tokamak Fusion Test Reactor Dimensionless Scaling Experiments. *Physics of Plasmas*, vol. 4, n° 5, 1997.

SATTIN. F., ESCANDE. D.F., CAMENEN. Y., SALMI. A.T., TALA. T., JET EFDA Contributors, Estimate of convection–diffusion coefficients from modulated perturbative experiments as an inverse problem. *Plasma Phys. Control. Fusion* 54, 124025, 2012.

SPITZER. L., HARM. R., Transport Phenomena in a completely ionized gas, *Physical Review*, vol. 89, n° 5, pp. 977-981, March 1953.

TUBBING. B.J.D., CARDOZON. N.J.L., DER WIEL. M.J.V., Tokamak heat transport – a study of heat pulse propagation in JET. *Nucl. Fusion* 27, 1843. doi :10.1088/0029-5515/27/11/009, 1987.

VILLEGAS. D., Etude expérimentale de l'influence du gradient de température électronique sur le transport turbulent des impuretés dans un plasma de fusion, Thèse de doctorat de l'Université de Provence, 2010.

VU. N.M.T., Approche hamiltonienne à ports pour la modélisation, la réduction et la commande des dynamiques des plasmas dans les tokamaks. Thèse de doctorat, 141 pages, Université de Grenoble, France, 2014.

WITRANT. E., JOFFRIN. E., BREMOND. S., GIRUZZI. G., MAZON D., BARANA. O., MOREAU. P., A control-oriented model of the current profile in tokamak plasma, *Plasma Physics and Controlled Fusion*, IOP Publishing, vol. 49, pp.1075-1105, 2007.

---

## Chapitre 6

# Stabilisation du profil de sécurité - applications numériques

### 6.1 Contrôle de l'état thermique

#### 6.1.1 Équations d'états et paramètres d'entrées

Dans le chapitre précédent, la température électronique du plasma  $\theta_e(x, t)$  satisfait les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2} \frac{\partial(n_e \theta_e(x, t))}{\partial t} - \frac{1}{a^2 x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x n_e \alpha(x, t) \frac{\partial \theta_e(x, t)}{\partial x} \right) = g(x, t) \quad \forall (x, t) \in [0, 1] \times [0, t_f] \\ \left. \frac{\partial \theta_e}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \theta_e(1, t) = 0 \quad \forall t \in [0, t_f] \\ \theta_e(x, 0) = \theta_{e0}(x) \quad \forall x \in [0, 1] \end{array} \right. \quad (6.1)$$

où  $n_e$  : est la densité des électrons

$t$  : est la variable de temps en secondes

$x$  : est la variable d'espace (sans unités suite au changement de variable exprimé précédemment)

$a$  : est le petit rayon (considéré constant) du plasma formé par les lignes de champs poloïdales et toroïdales (exprimé en  $m$ )

$\alpha$  : est le coefficient de diffusivité noté également  $\chi$  au sein de la communauté des physiciens des plasmas (s'exprime en  $m^2.s^{-1}$ )

$g$  : est la puissance absorbée par les particules en  $W.m^{-3}$

$\theta_{e0}$  : est la température initiale du plasma.

Il est extrêmement difficile dans le domaine de la physique de plasmas de disposer de données précises qui ne soient pas entachées d'incertitude. Il est toutefois important de prendre en compte des grandeurs réalistes et pour ce faire, les caractéristiques du réacteur Tore-Supra ont été prises en compte. Dans (Attar, 2017), le changement de variable suivant est proposé :

$$\theta(x, t) = n_e(x, t)\theta_e(x, t)$$

Après plusieurs développements, on obtient alors le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha(x, t) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \tilde{g} & \forall (x, t) \in [0, 1] \times [0, t_f] \\ \frac{\partial \theta}{\partial x}(x = 0, t) = 0 \quad \theta(x = 1, t) = 0 & \forall t \in [0, t_f] \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) & \forall x \in [0, 1] \end{array} \right. \quad (6.2)$$

On considérera que les paramètres connus sont similaires à ceux présentés dans (Attar, 2017) et correspondant au réacteur Tore-Supra du CEA-Cadarache :

- $a = 0.72 m$  : le petit rayon exprimé en  $m$  ;
- $\alpha(x, t)$  : le coefficient de diffusivité, présenté figure 6.1 ;
- $\tilde{g}(x, t)$  : le terme source, présenté figure 6.2 ;
- $\theta_0(x)$  : la température initiale, présentée figure 6.3.

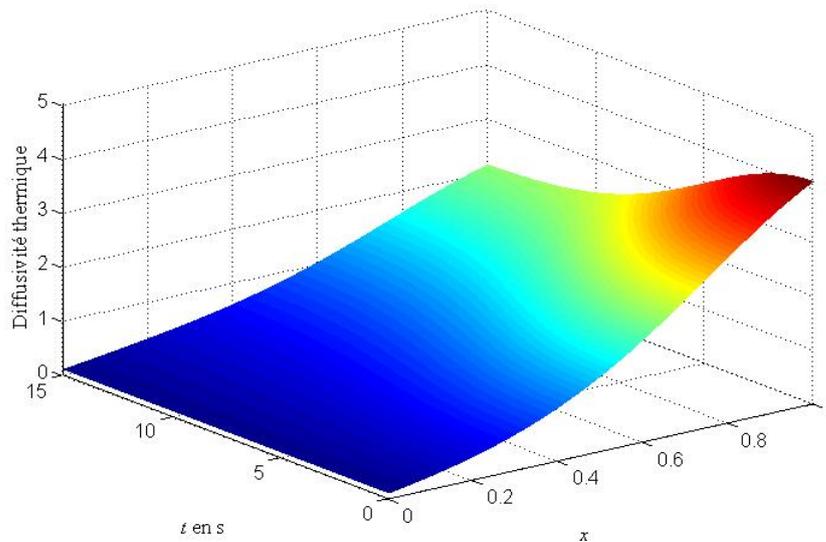


Figure 6.1 – La diffusivité thermique  $\alpha(x, t)$  ; au-delà de 15 secondes  $\alpha(x, t)$  conserve le même profil spatial.

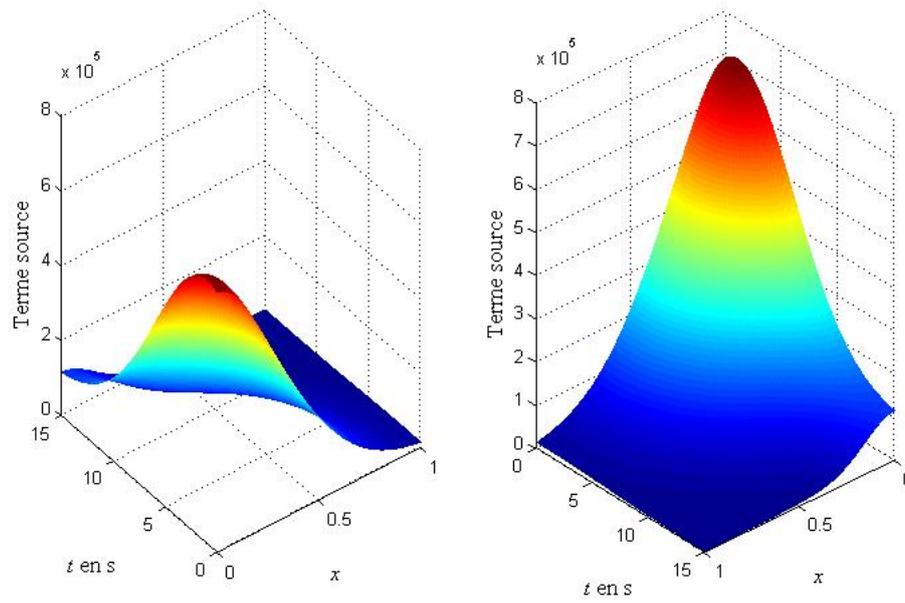


Figure 6.2 – Le terme source  $\tilde{g}(x, t)$  ; au-delà de 15 secondes  $\tilde{g}(x, t)$  conserve le même profil spatial.

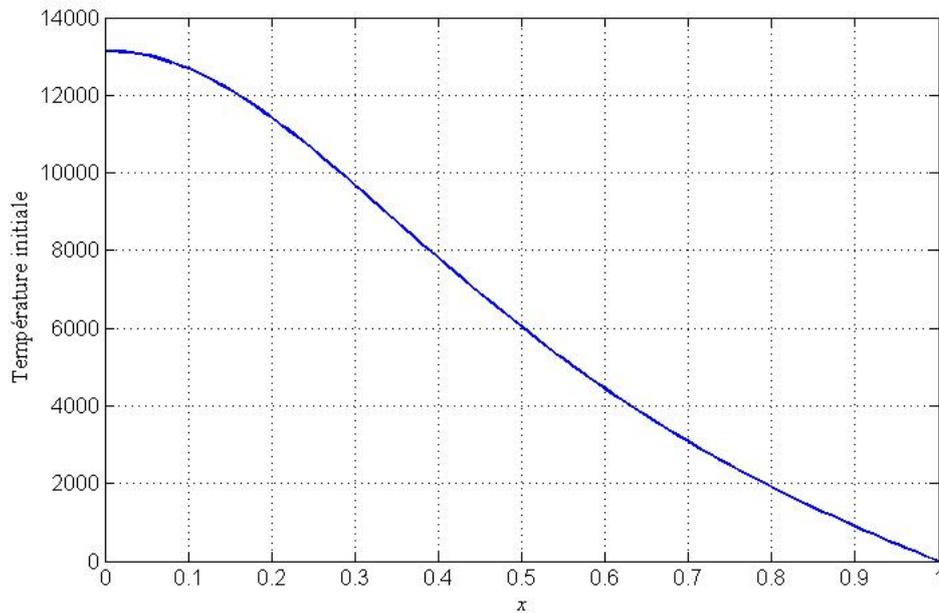


Figure 6.3 – Le profil initial  $\theta_0(x)$ .

### 6.1.2 Simulation numérique

Considérant les paramètres d'entrées précédents, la simulation du problème direct peut être réalisée à l'aide du logiciel aux éléments finis Comsol interfacé avec Matlab. Les résultats suivants sont obtenus :

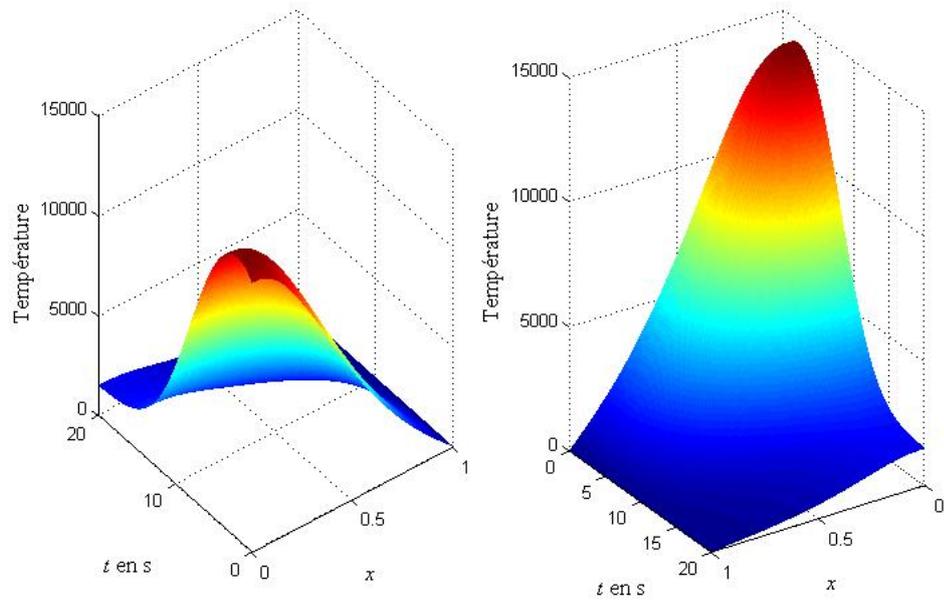


Figure 6.4 – Évolution des distributions de température  $\theta(x, t)$ .

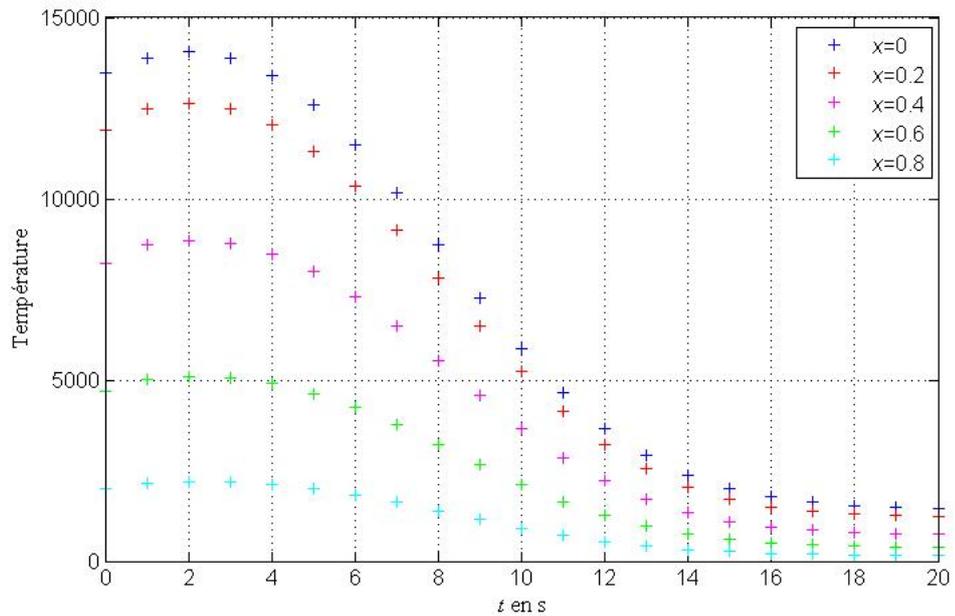


Figure 6.5 – Évolution des températures  $\theta(x, t)$  en certains points.

Les résultats de simulation obtenus sont tout à fait similaires aux résultats expérimentaux montrés dans (Attar, 2017) dans lequel est présenté un essai réalisé sur le réacteur Tore-Supra du CEA Cadarache sous la référence TS#47673. Ce test correspond à un « choc ohmique » car la source de chauffage alimentant le plasma est créée par effet joule à l'aide du courant inductif (de l'ordre du million d'ampère) circulant

au sein du plasma qui a priori possède une résistance de quelques ohms.

Ce régime en chauffage « naturel » est appelé régime ohmique, en référence à l'unité de mesure d'une résistance électrique. Cet effet proportionnel à la résistance du plasma ne permet d'atteindre que des températures relativement limitées (de l'ordre de 10 millions de degrés). C'est la raison pour laquelle la source de chauffage ohmique à elle seule ne suffit pas pour amener le plasma aux températures requises pour que la réaction de fusion se déclenche. Il est nécessaire de disposer d'un chauffage additionnel en utilisant par exemple des ondes radiofréquences.

A noter qu'au-delà de 20 secondes, la distribution spatiale de la température (figure 6.5) n'évolue plus car la diffusivité  $\alpha(x, t)$  et le terme source  $\tilde{g}(x, t)$  sont constantes à partir de 15 secondes.

### 6.1.3 Identification d'une loi de contrôle interne

Dans ce qui suit, on suppose qu'il est nécessaire d'atteindre l'état  $\theta_{\text{cible}}(x)$ . On souhaite donc stabiliser à zéro la fonction  $\hat{\theta}(x, t) = \theta(x, t) - \theta_{\text{cible}}(x)$  à l'aide d'une commande  $u_{\theta}(x, t)$  localisée dans  $x \in [a, b]$ . Pour des raisons de symétrie, il est nécessaire que  $\frac{\partial \theta_{\text{cible}}}{\partial x}(x = 0) = 0$  et compte tenu du fait que la température en bord de plasma est très faible (par rapport aux températures de coeur) :  $\theta_{\text{cible}}(x = 1) = 0$ . La fonction  $\hat{\theta}(x, t)$  satisfait donc le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x} \right) = \tilde{g} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha \frac{\partial \theta_{\text{cible}}}{\partial x} \right) + u_{\theta}|_{[a,b]} & \forall (x, t) \in [0, 1] \times [0, t_f] \\ \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x}(x = 0, t) = 0 & \hat{\theta}(x = 1, t) = 0 & \forall t \in [0, t_f] \\ \hat{\theta}(x, 0) = \theta_0(x) - \theta_{\text{cible}}(x) & & \forall x \in [0, 1] \end{array} \right. \quad (6.3)$$

On remarque que le système d'EDP (6.3) diffère des systèmes précédemment étudiés (1.16), (2.1) et (4.1). En effet pour des raisons de symétrie, dans le système (6.3), en  $x = 0$ , une condition de Neumann homogène doit être prise en compte  $\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x}(x = 0, t) = 0$  alors que dans les chapitres précédents une condition de Dirichlet homogène était considérée. Cela modifie l'écriture du problème de sensibilité et du problème adjoint mais ne change en rien l'esprit de la démarche présentée au chapitre 3 et la mise en oeuvre au chapitre 4. Rappelons que l'objectif est de minimiser :

$$J(\hat{\theta}, u) = \frac{1}{2} \left( \int_0^1 (\hat{\theta}(x, t_f; u_{\theta}))^2 \right) dx \quad (6.4)$$

de sorte qu'à l'instant final ( $t = t_f$ ) :  $\hat{\theta}(x, t_f) \approx 0 \implies \theta(x, t_f) \approx \theta_{\text{cible}}(x)$ .

### Le problème de sensibilité

Celui-ci décrit la variation de température  $\delta\hat{\theta}(x, t)$  résultante d'une variation du paramètre inconnu  $\delta u_\theta(x, t)$  (la commande).

Le problème de sensibilité consiste à déterminer  $\delta\hat{\theta}(x, t)$  solution de :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial(\delta\hat{\theta})}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha \frac{\partial(\delta\hat{\theta})}{\partial x} \right) = \delta u_\theta|_{[a,b]} & \forall (x, t) \in [0, 1] \times [0, t_f] \\ \frac{\partial(\delta\hat{\theta})}{\partial x}(x=0, t) = 0 & \delta\hat{\theta}(x=1, t) = 0 \quad \forall t \in [0, t_f] \\ \delta\hat{\theta}(x, 0) = 0 & \forall x \in [0, 1] \end{array} \right. \quad (6.5)$$

Le problème adjoint qui a pour objet la détermination de  $\psi(x, t)$  s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha(x, t) \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) = 0 & \forall (x, t) \in [0, 1] \times [0, t_f] \\ \frac{\partial\psi}{\partial x}(x=0, t) = 0 & \psi(x=1, t) = 0 \quad \forall t \in [0, t_f] \\ \psi(x, t_f) = -\hat{\theta}(x, t_f) & \forall x \in [0, 1] \end{array} \right. \quad (6.6)$$

Comme précédemment, le contrôle est discrétisé sous forme d'une fonction continue linéaire par morceaux :

$$u_\theta(x, t) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_t} u_{ij} s_i(x) s_j(t) \quad \forall (x, t) \in ]a, b[ \times ]0, t_f[ \quad (6.7)$$

où  $N_x$  et  $N_t$  sont liés aux discrétisations spatiales et temporelles des fonctions inconnues  $u_\theta(x, t)$ .  $\{s_i(x)\}_{i=1, \dots, N_x}$  est la base des fonctions chapeaux pour la discrétisation spatiale et  $\{s_j(t)\}_{j=1, \dots, N_t}$  est la base des fonctions chapeaux pour la discrétisation temporelle.

Dans ce cadre, le gradient de la fonctionnelle quadratique à minimiser est :

$$\frac{\partial J}{\partial u_{ij}} = - \int_0^{t_f} \int_a^b \psi^k(x, t) s_i(x) s_j(t) dx dt \quad (6.8)$$

Dans ce qui suit, on considère arbitrairement que la commande  $u_\theta(x, t) = 0$  si  $x \notin ]0.2, 0.6[$ .

Autrement dit, le support spatial de la commande est  $]a, b[ = ]0.2, 0.6[$ . Considérant l'ordre de grandeur des températures atteintes dans le plasma, on considère dans ce paragraphe que la distribution de température ciblée est représentée dans la figure suivante.

Cette température cible  $\theta_{\text{cible}}$  ainsi que la température obtenue (sans contrôle) lorsque  $t \geq 20$  secondes sont montrées sur la figure 6.6.

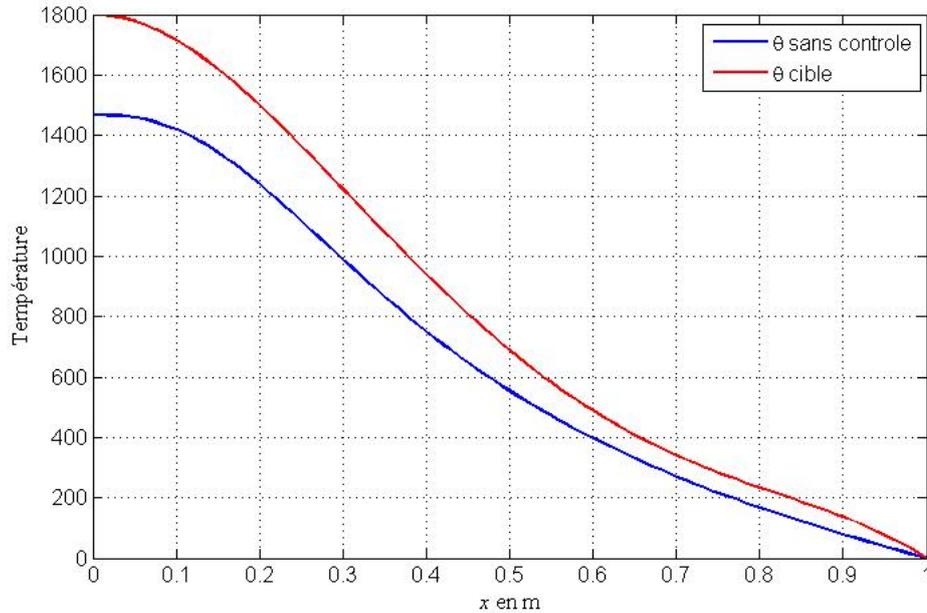


Figure 6.6 – Distribution de la température  $\theta(x, t)$  (sans contrôle  $t \geq 20$ ) et température cible.

Dans ce qui suit, les résultats obtenus avec la stratégie n° 3 (à durée adaptée) présentée au chapitre 4 est mise en oeuvre. Rappelons que celle-ci consiste à mettre à jour des lois de commande en ne tenant compte que des observations de températures entre deux seuils : l'un jugé rédhibitoire, l'autre jugé significatif. Considérant l'ordre de grandeur des températures, les seuils suivants sont pris en compte :

$$\tilde{J}_{\max} = 10^3 \text{ et } \tilde{J}_{\min} = 10^2 \text{ pour le critère } J(\hat{\theta}(x, t)) = \frac{1}{2} \left( \int_0^1 (\hat{\theta}(x, t))^2 dx \right).$$

Les résultats sont présentés dans les figures suivantes :

- Figure 6.7 : Distribution spatiale de la température cible  $\theta_{\text{cible}}$  et de la température  $\theta(x, t)$  à différents instants (avec ou sans contrôle).
- Figure 6.8 : Évolution spatiotemporelle des lois de contrôle.
- Figure 6.9 : Distribution spatiale des lois de contrôle à différents instants.

Cet exemple montre que la méthode de détermination de stratégies de commande conduit à des résultats satisfaisants pour le système d'équations aux dérivées partielles paraboliques caractérisé par une condition de Neumann homogène à un bord et une condition de Dirichlet homogène à l'autre bord. Cette situation est plus délicate à maîtriser du point de vue de la physique. En effet, les apports d'énergie des actionneurs internes au domaine sont « évacués » par conduction vers la frontière pour laquelle le transfert thermique est décrit par une condition de Neumann homogène. Il semble ainsi impossible d'atteindre n'importe quel état cible.

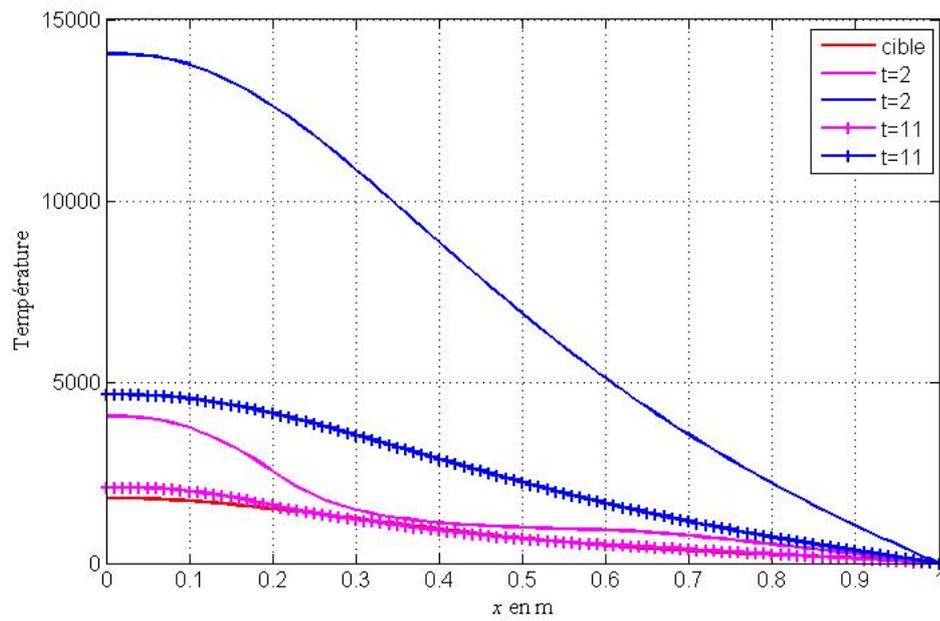


Figure 6.7 – Distribution spatiale de la température  $\theta(x, t)$  à différents instants (sans contrôle en bleu et avec contrôle en magenta) et température cible (en rouge).

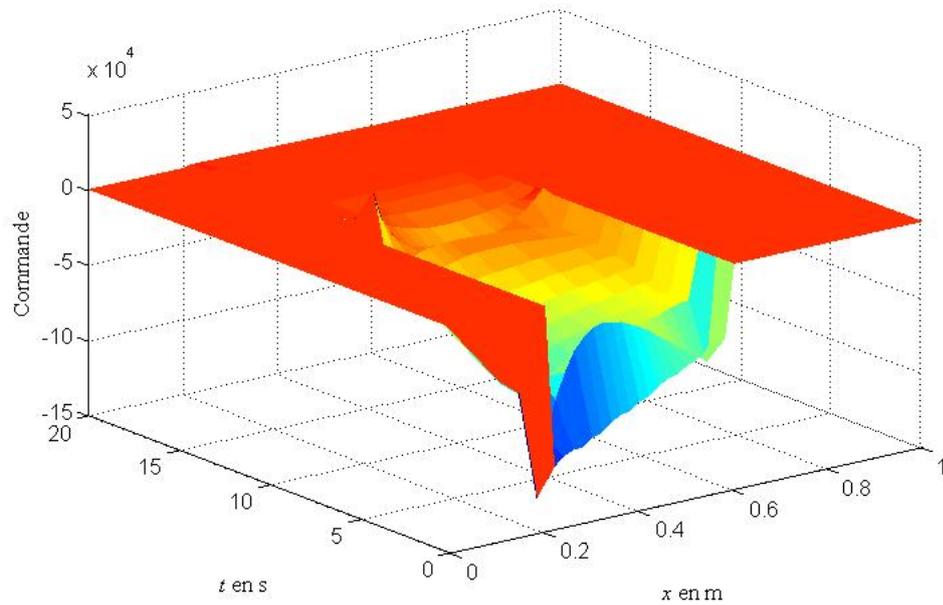


Figure 6.8 – Évolution spatiotemporelle des contrôles.

L'algorithme de minimisation tendra toutefois vers un compromis permettant compte tenu des contraintes de physiques de s'approcher au mieux de l'état désiré.

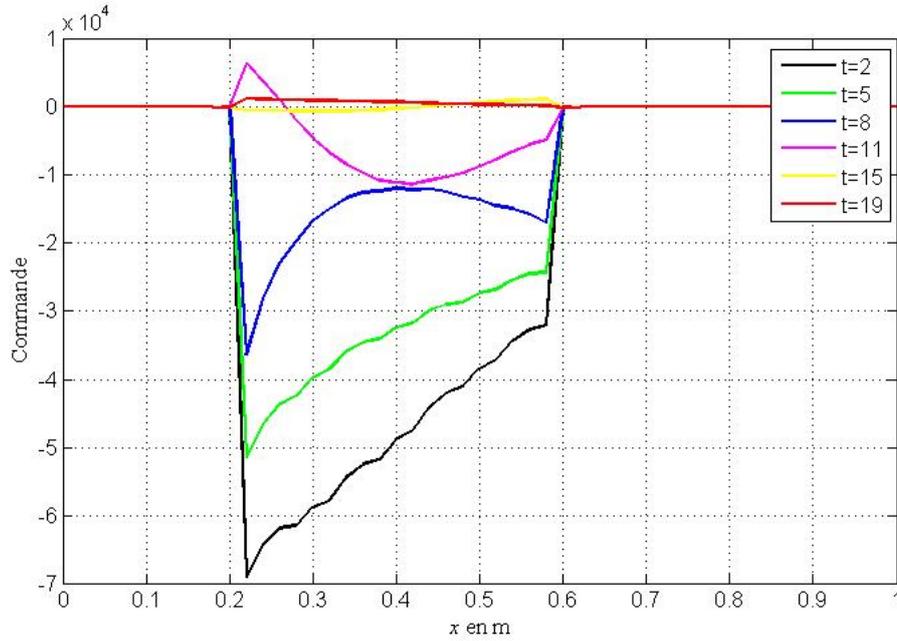


Figure 6.9 – Distribution spatiale des contrôles à différents instants.

## 6.2 Contrôle du profil de sécurité

### 6.2.1 Équations d'états et paramètres d'entrées

Dans le chapitre 5, le facteur de sécurité (permettant d'assurer la stabilité du plasma) dans le cas d'un petit rayon constant pour le plasma (Gaye, 2012) est défini comme suit :

$$q(x, t) = \frac{-a^2 x B_0}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}$$

avec  $a = 0.72 \text{ m}$  le petit rayon du plasma et  $B_0 = 3.8 \text{ Tesla}$  le champ toroïdal au centre de la chambre à vide du tokamak.

A partir d'un facteur sécurité cible :  $q_{\text{cible}}(x) = \frac{-a^2 x B_0}{\frac{\partial \varphi_{\text{cible}}}{\partial x}}$ , il est aisé de déterminer le flux magnétique qu'il est nécessaire d'atteindre :

$$\frac{\partial \varphi_{\text{cible}}}{\partial x} = \frac{-a^2 x B_0}{q_{\text{cible}}(x)} \quad ; \quad \varphi_{\text{cible}}(x) = \int \frac{-a^2 x B_0}{q_{\text{cible}}(x)} dx \quad (6.9)$$

Dans (Gaye, 2012) un profil de sécurité cible est proposé. Celui-ci est montré sur la figure 6.10 ainsi que le flux magnétique cible qu'il serait nécessaire d'atteindre.

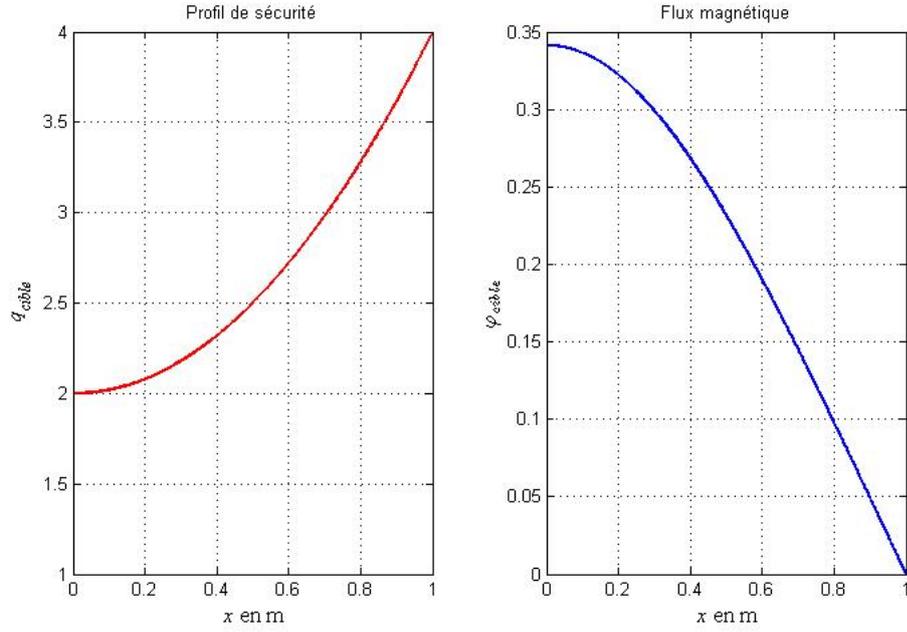


Figure 6.10 – Distribution spatiale des cibles (profil de sécurité et flux magnétique).

Conformément au chapitre précédent, le flux magnétique est décrit par le système d'équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\eta_{//}}{\mu_0 a^2 x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \eta_{//} R_0 j_{ni} & \forall (x, t) \in [0, 1] \times [0, t_f] \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x = 0, t) = 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x = 1, t) = -V_0(t) \quad \forall t \in [0, t_f] \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) & \forall x \in [0, 1] \end{array} \right. \quad (6.10)$$

La distribution initiale du flux magnétique est  $\varphi_0(x)$ . Dans (Gaye et al., 2013), après différents changements de variables, le problème de contrôle s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0 a^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta_{//} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \eta_{//} u + \frac{\eta_{//}}{\mu_0 a^2 x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial \varphi_{\text{cible}}}{\partial x} \right) & \forall (x, t) \in [0, 1] \times [0, t_f] \\ \frac{\partial \phi}{\partial x}(x = 0, t) = 0 & \phi(x = 1, t) = 0 \quad \forall t \in [0, t_f] \\ \phi(x, 0) = \varphi_0(x) - \varphi_{\text{cible}}(x) & \forall x \in [0, 1] \end{array} \right. \quad (6.11)$$

où :  $\phi(x, t) = \varphi(x, t) - \varphi_{\text{cible}}(x)$

Dans ce qui suit, l'objectif est la détermination de lois de commande pour  $u(x, t)$ , le terme source qui dépend de plusieurs paramètres et qui peut être localisé sur des sous domaines internes au domaine initial.

On considère que l'état initial du flux magnétique est décrit de manière similaire à (Gaye, 2013) par la figure 6.11 suivante :

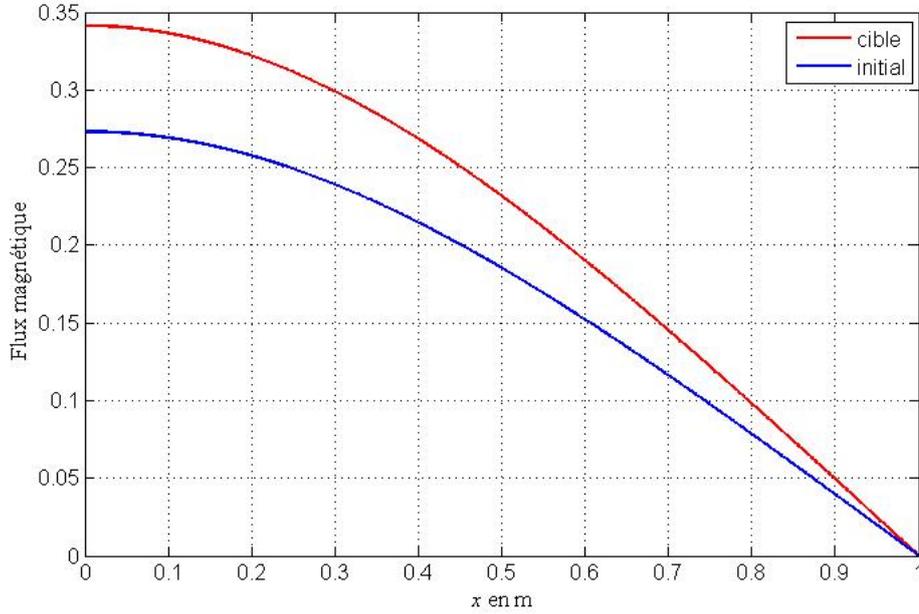


Figure 6.11 – Distribution spatiale du flux magnétique (cible et initial).

De même que pour les échanges thermiques au sein d'un plasma de fusion, il est extrêmement difficile de disposer de données d'entrées précises pour le modèle mathématique (6.11). La résistivité parallèle  $\eta_{//}(x, t)$  est parfois prise constante en première approche comme dans (Vu, 2014) :

- $\eta_{//}(x, t) = 10^{-5} \Omega.m$  : pour le tokamak à configuration variable (TCV de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne),
- $\eta_{//}(x, t) = 5 \times 10^{-7} \Omega.m$  : pour le tokamak WEST (CEA-Cadarache).

### 6.2.2 Identification d'une loi de contrôle interne

Dans un premier temps, la méthode de détermination des lois de commande développée dans ce document est appliquée dans la configuration pour laquelle il est nécessaire d'identifier  $u(x, t)$  alors la résistivité parallèle est supposée constante :  $\eta_{//}(x, t) = 5 \times 10^{-7} \Omega.m$ . L'actionneur  $u(x, t)$  est interne au domaine et localisé de manière arbitraire entre 0.1 et 0.5.

Il s'agit d'un problème inverse de conduction de la chaleur (PICC) similaire à celui du paragraphe 6.1.3. En effet le problème direct (6.11) étant similaire à (6.3) alors le problème de sensibilité est décrit

par le système d'équations (6.5) et le problème adjoint par le système d'équations (6.6). Les résultats numériques obtenus sont montrés dans les figures suivantes :

- Figure 6.12 : Distribution spatiale du flux magnétique cible  $\varphi_{\text{cible}}(x)$  et du flux magnétique  $\varphi(x, t)$  (avec ou sans contrôle) dont le support spatial du contrôle est :  $]0.1;0.5[$ .
- Figure 6.13 : Exemple de distribution spatiale de lois de contrôle.

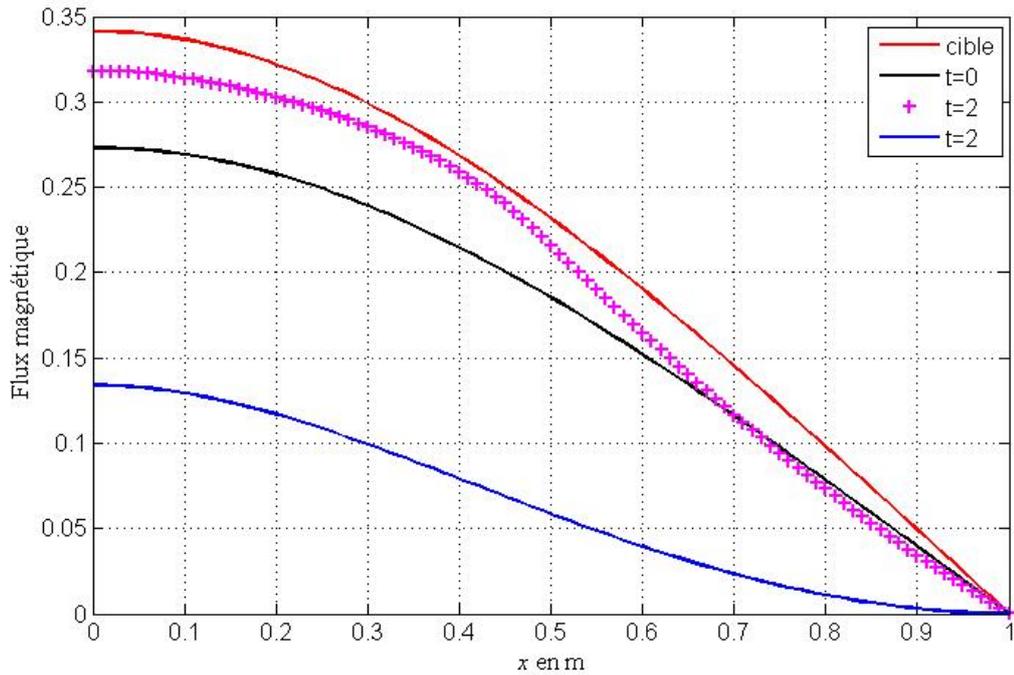


Figure 6.12 – Distribution spatiale du flux magnétique  $\varphi(x, t)$  (avec contrôle en magenta ; sans contrôle en bleu) et flux magnétique cible (en rouge) ; la courbe noire correspond à l'état initial.

On remarque d'après la figure 6.12 qu'après seulement 2 secondes, le flux magnétique tend à s'approcher de la cible excepté pour  $x > 0.5$ .

En effet comme il n'y a pas d'action au-delà de 0.5, seuls les échanges par conduction liés à la résistivité parallèle permettent de diminuer  $|\varphi(x, t) - \varphi_{\text{cible}}(x)|$ .

Il faudrait agrandir le support spatial de l'actionneur pour obtenir une meilleure réponse. La loi de commande proposée pour  $]0.1;0.5[$  est montrée sur la figure 6.13.

Si le support spatial de l'actionneur est  $]0.01;0.99[$ , les courbes suivantes de la figure 6.14 sont obtenues. Sur la figure 6.15, l'effet de la surparamétrisation du contrôle est visualisé comme au premier chapitre sachant que le support spatial du contrôle est :  $]0.01;0.99[$ .

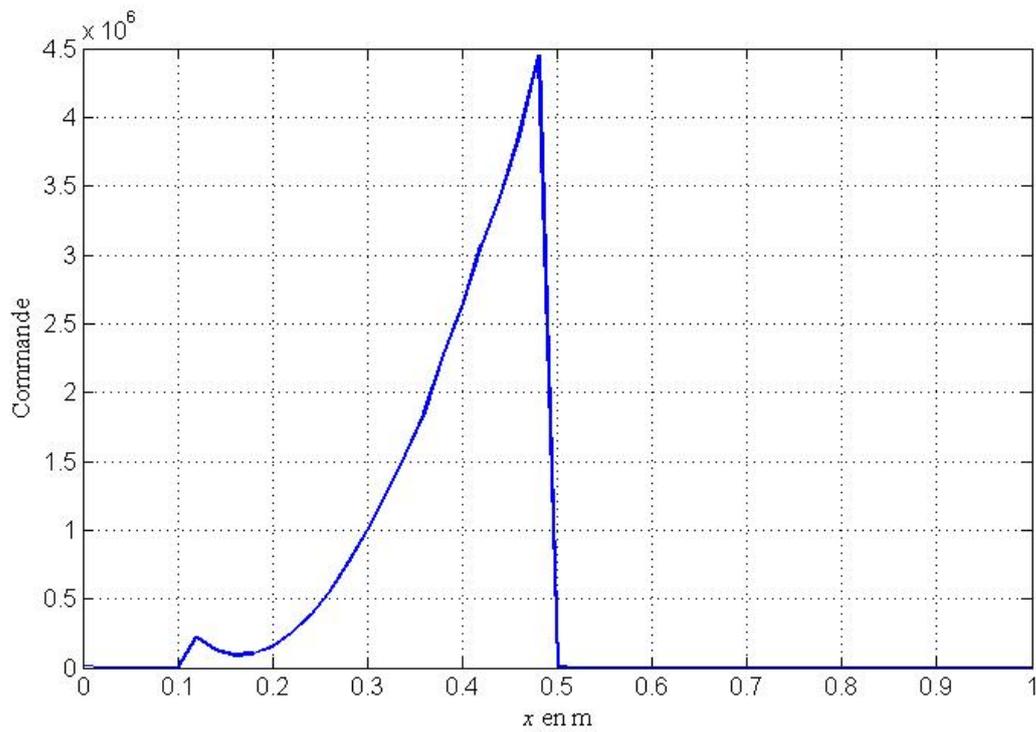


Figure 6.13 – Distribution spatiale du contrôle appliquée à  $t = 1$  seconde pendant 1 seconde.

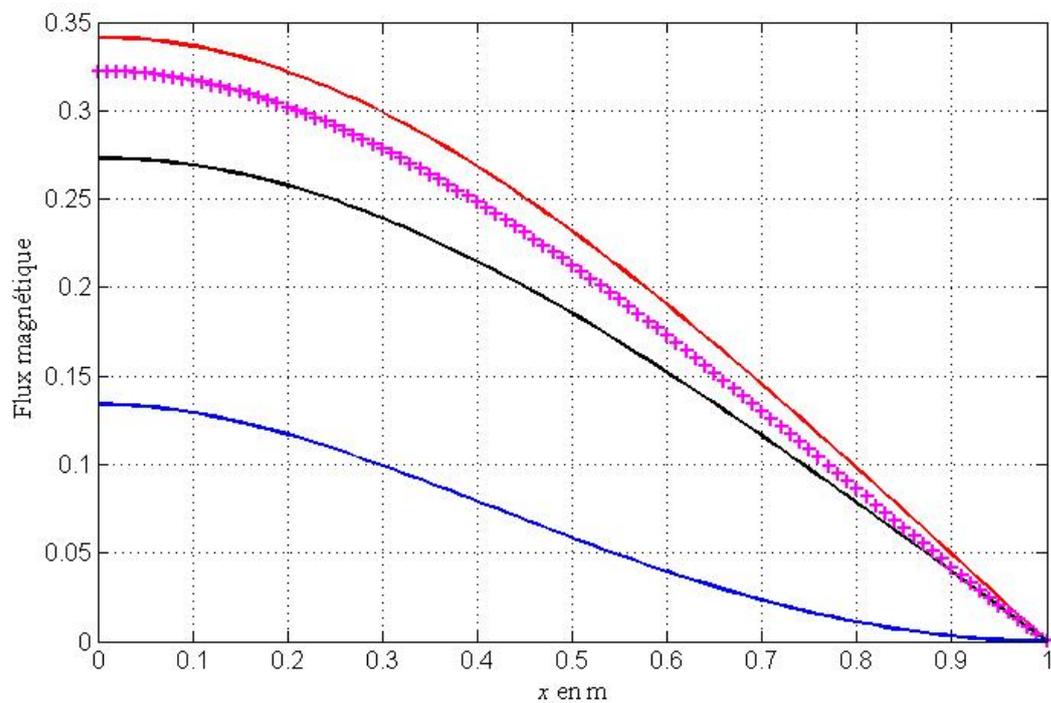


Figure 6.14 – Distribution spatiale du flux magnétique  $\varphi(x,t)$  (avec contrôle en magenta; sans contrôle en bleu) et flux magnétique cible (en rouge); la courbe noire correspond à l'état initial.

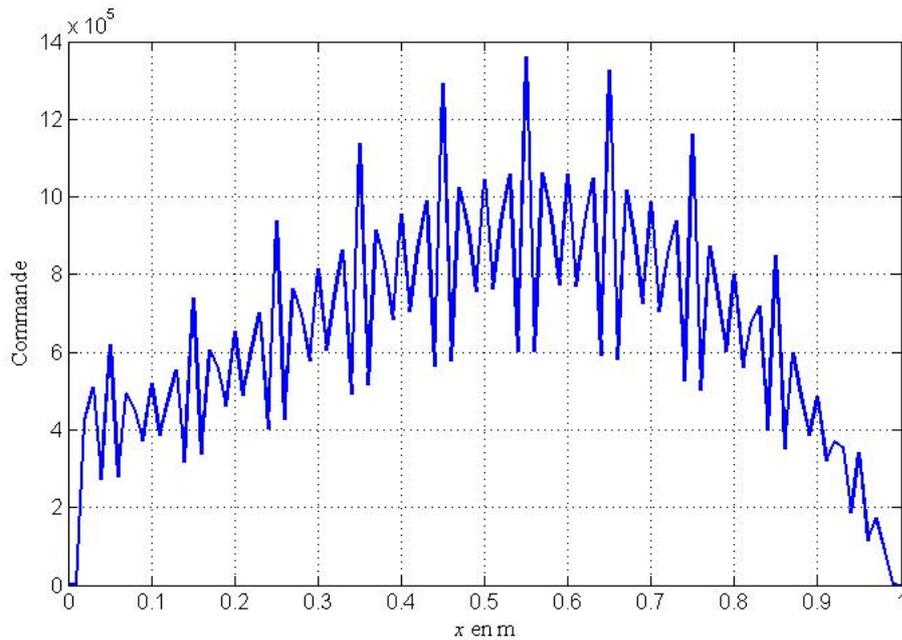


Figure 6.15 – Distribution spatiale du contrôle appliquée à  $t = 1$  seconde pendant 1 seconde.

### 6.3 Couplage des actionneurs

Les deux systèmes d'équations aux dérivées partielles paraboliques :

1. (6.3) : décrivant la température électronique du plasma ;
2. (6.11) : décrivant le flux magnétique au sein du plasma

sont couplés par la résistivité parallèle  $\eta_{//}(x, t)$  qui dépend de la température électronique du plasma. Dans (Witrant, 2007), il est montré que  $\eta_{//}(x, t)$  est une fonction de  $\theta_e^{-\frac{3}{2}}$  où  $\theta_e(x, t)$  est la température électronique du plasma.

Ainsi, plus  $\theta_e(x, t)$  est important, plus  $\eta_{//}(x, t)$  est faible ce qui diminuera les transferts par conduction. Cela rendra l'augmentation du flux magnétique provoqué par l'actionneur interne  $u(x, t)$  plus localisé : le flux magnétique se diffusera moins.

A l'inverse si la température électronique du plasma  $\theta_e(x, t)$  diminue alors  $\eta_{//}(x, t)$  augmente ce qui favorisera les transferts par conduction. Le flux magnétique se diffusera plus ce qui « rendra » l'effet de l'actionneur interne  $u(x, t)$  moins localisé.

A partir des considérations précédentes il est tout à fait envisageable de mettre en place une procédure itérative en deux étapes :

1. Étape 1 : à l'instant  $t_k$  considérant le profil de flux magnétique  $\varphi^k(x, t)$  et de température

électronique  $\theta_e^k(x, t)$ , et étant donné une résistivité parallèle  $\eta_{//}^k(x, t)$ , déterminer le couple d'actionneur  $\{\eta_{//}^{k+1}(x, t); u^{k+1}(x, t)\}$  optimal (à appliquer entre  $t_k$  et  $t_{k+1}$ ) afin de stabiliser l'erreur  $|\phi^{k+1}(x, t) - \phi_{\text{cible}}^{k+1}(x)|$  à zéro.

2. Étape 2 : Afin d'obtenir la résistivité parallèle recherchée  $\{\eta_{//}^{k+1}(x, t)\}$ , définir la température électronique cible  $\theta_{\text{cible}}^{k+2}$  et déterminer la commande optimal (à appliquer entre  $t_{k+1}$  et  $t_{k+2}$ ) afin de stabiliser l'erreur  $|\theta^{k+2}(x, t) - \theta_{\text{cible}}^{k+2}(x)|$  à zéro.

On peut noter dans l'étape 1 que deux actionneurs distincts  $\{\eta_{//}; u\}$  doivent être déterminés « simultanément ». Cela a déjà été réalisé précédemment dans les travaux de :

- (Vergnaud, 2015) : identification simultanée de la trajectoire et de la puissance de sources chauffantes mobiles ;
- (Attar, 2017) : identification simultanée de la diffusivité thermique et des sources chauffantes dans un plasma de tokamak.

La procédure itérative précédente n'a de sens que si les temps de calculs pour déterminer les lois de commande sont inférieurs aux dynamiques du système. En effet le retard dans la commande introduit par notre méthode quasi-en ligne pourrait s'avérer rédhibitoire. Toutefois, compte tenu des progrès réguliers en informatique, ce possible inconvénient de la méthode est amené à être relativisé.

## Bilan du chapitre

Dans ce sixième chapitre, la problématique de stabilisation de deux états caractéristique d'un plasma de fusion nucléaire est abordée : le flux magnétique et la température. Ceux-ci sont décrits par des systèmes d'équations aux dérivées partielles paraboliques (type « équation de la chaleur »).

Afin de stabiliser la durée de la réaction (voir critère de Lawson dans le cinquième chapitre) il est nécessaire d'atteindre un profil de sécurité (puis de rester à son voisinage). Considérant qu'un premier moyen d'action est le contrôle de la température au sein du plasma (qui peut être chauffé par exemple par des actionneurs internes), un Problème Inverse de Conduction de la Chaleur (PICC) est résolu. Il est résolu numériquement comme un second PICC par la méthode quasi en ligne développée dans le chapitre 3 et mise en oeuvre sur un exemple académique au chapitre 4. Les résultats numériques montrent comment la température cible peut être obtenu avec une précision satisfaisante.

De même, il est montré comment à partir d'un flux magnétique initial, un actionneur interne permet la stabilisation proche de l'état désiré en un temps relativement court. Ce problème consiste à atteindre une distribution spatiale désirée pour le flux magnétique.

Dans le dernier paragraphe, une proposition de couplage des deux PICC est proposée. En effet la résistivité parallèle du plasma (paramètre clé décrivant l'évolution du flux magnétique) est aussi liée à la température. Afin d'obtenir une résistivité parallèle adaptée à l'actionneur local agissant sur le flux magnétique, il est possible de chercher à déterminer une distribution optimale de température.

La méthode numérique développée dans ce document et dont la mise en oeuvre et certains résultats sont présentés dans le cadre de la fusion nucléaire complète différentes approches telles que celles de (Witrant, 2007), (Bribiesca Argomedo, 2012), (Gaye, 2011, 2012 & 2013), (Vu, 2014), (Mavkov, 2017).

## Références bibliographiques

ATTAR. L., Identification paramétrique de l'équation de transport de la chaleur dans le plasma du Tokamak, Thèse de doctorat, Université d'Angers, France, 2017.

ATTAR. L., TRAN. T.P., PEREZ. L., MOULAY. E., NOUAILLETAS. R., BREMOND. S., AUTRIQUE. L., Plasma thermal characterization in nuclear fusion context, 9th International Conference on Inverse Problems in Engineering (ICIPE), Waterloo, Canada, 23-26 mai 2017.

BRIBIESCA ARGOMEDO. F., Contrôle et stabilité Entrée-Etat en dimension infinie du profil du facteur de sécurité dans un plasma Tokamak. Thèse de doctorat, 131 pages, Université de Grenoble, France, 2012.

GAYE. O., MOULAY. E., BREMOND. S., AUTRIQUE. L., NOUAILLETAS. R., ORLOV. Y., Sliding mode stabilization of the current profile in Tokamak plasmas, 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), Orlando, FL, USA, December 12-15, 2011.

GAYE. O., Contrôle du profil de facteur de sécurité dans les plasmas de tokamak en dimension infinie, Thèse de doctorat, 169 pages, Université d'Angers, France, 2012.

GAYE. O., MOULAY. E., BREMOND. S., AUTRIQUE. L., NOUAILLETAS. R., ARTAUD. J.F., ORLOV. Y., Robust stabilization of the current profile in tokamak plasmas using sliding mode approach in infinite dimension, Control engineering practice, Vol. 21, n° 10, pp. 1350-1358, 2013.

GAYE. O., AUTRIQUE. L., ORLOV. Y., MOULAY. E., BREMOND. S., NOUAILLETAS. R.,  $H_\infty$  stabilization of the current profile in Tokamak plasmas via LMI approach, Automatica, vol. 49, n° 9, pp. 2795-2804, 2013.

MAVKOV. B., Control of coupled transport in tokamak plasma. Thèse de doctorat, 121 pages, Université de Grenoble, France, 2017.

VERGNAUD. A., BEAUGRAND. G., GAYE. O., PEREZ. L., LUCIDARME. P., AUTRIQUE. L., Quasi on-line identification of temperature-dependent thermal conductivity, European Control Conference 2014, Strasbourg, France, 24-27 June 2014.

VERGNAUD. A., Déploiement adaptatif d'un réseau de capteurs mobiles pour optimiser le suivi d'un phénomène en mouvement régi par des équations aux dérivées partielles, doctorat de l'Université d'Angers, 4 décembre 2015.

VU. N.M.T., Approche Hamiltonienne à ports pour la modélisation, la réduction, et la commande des dynamiques des plasmas dans les tokamaks, doctorat de l'Université de Grenoble, 12 novembre 2014.

WITRANT. E., JOFFRIN. E., BREMOND. S., GIRUZZI. G., MAZON. D., BARANA. O., MOREAU. P., A control-oriented model of the current profile in tokamak plasma, Plasma Physics and Controlled Fusion, IOP Publishing, vol. 49, pp.1075-1105, 2007.



---

# Conclusion générale

L'objectif principal des travaux menés durant cette thèse de doctorat était la détermination de lois de commande pour des procédés modélisés par des équations aux dérivées partielles paraboliques non linéaires. Dans un tel contexte, il est difficile de disposer de méthodes théoriques constructives (i.e. à même de déterminer des lois de commandes) qui puissent se généraliser à des systèmes physiques complexes. C'est pourquoi nos efforts ont porté sur le développement de méthodes numériques qui ne nécessitent pas d'hypothèses restrictives mais qui peuvent répondre aux objectifs de stabilisation et de rejets de perturbations pour de nombreuses situations. La méthode de contrôle quasi en ligne est abordée en considérant un problème inverse de conduction de la chaleur (situation généraliste dans le cas des équations aux dérivées partielles paraboliques). Du fait de son caractère mal posé, le problème d'optimisation (minimisation de l'erreur de sortie définie comme l'écart quadratique entre les simulations numériques du modèle mathématique et les mesures) est résolu à l'aide de la méthode de régularisation itérative du gradient conjugué. Celle-ci nécessite la résolution itérative de trois problèmes bien posés : le problème direct (pour évaluer le critère à minimiser), le problème adjoint (pour calculer le gradient de la fonctionnelle) et le problème de sensibilité (pour déterminer la profondeur de descente). Les chapitres 1 et 2 sont consacrés à la détermination d'un contrôle en mode hors ligne tandis que les chapitres 3 et 4 concernent une stratégie de contrôle quasi en ligne.

Dans le premier chapitre, plusieurs systèmes basés sur des équations aux dérivées partielles sont présentés afin de décrire des phénomènes physiques variés. Puis, plus spécifiquement, dans le cadre d'un système parabolique avec des conditions aux bords de type Dirichlet homogène et une condition initiale non nulle, la stabilisation à zéro est étudiée. Il s'agit de mettre en oeuvre la méthodologie numérique développée pour la détermination du contrôle en mode hors ligne. Deux exemples numériques illustrent l'intérêt de la méthode de régularisation itérative du gradient conjugué. Des contrôles (actionneurs sur des zones internes au domaine) dépendants de l'espace et du temps sont déterminés afin d'assurer la convergence de l'état vers zéro en temps fini. Plusieurs configurations sont étudiées et analysées : effet de la sur-paramétrisation, réduction de l'horizon temporel du contrôle ... Compte tenu des résultats présentés, la méthode de régularisation du gradient conjugué a montré son efficacité dans la détermination d'un contrôle zone en mode hors ligne pour la contrôlabilité à zéro d'un système thermique instable.

Ces résultats sont étendus dans le second chapitre pour la détermination de lois de commande hors ligne

pour le rejet de perturbations. La non linéarité prise en compte concerne le coefficient de conductivité thermique qui dépend de l'état (la température). Afin d'illustrer la pertinence de l'approche proposée dans une configuration originale, un actionneur ponctuel est utilisé. L'objectif reste la stabilisation à zéro du système physique alors que des perturbations tendent à l'écartier de cette position d'équilibre. Il est à noter que l'actionneur ponctuel n'est pas localisé dans le support spatial de la perturbation ce qui complique bien évidemment la configuration étudiée. Les résultats numériques obtenus montrent l'attractivité de la méthode du gradient conjugué qui effectue de manière satisfaisante le rejet des perturbations.

Le troisième chapitre propose trois stratégies d'estimation des lois de commande quasi en ligne basées sur une adaptation de la méthode du gradient conjugué. Ces différentes stratégies sont présentées et illustrées par des exemples pédagogiques. Le principe de la méthode quasi en ligne consiste à considérer un intervalle de temps glissant qui peut être de longueur « constante » ou bien de longueur « adaptée ». Il peut aussi être « optimisé » de manière à tenir compte des objectifs de stabilisation à zéro et de rejets de perturbations. Le problème inverse de conduction de la chaleur est résolu sur ces intervalles glissants et au fur et à mesure que des nouvelles informations sont mesurées. Les illustrations présentées ont mis en évidence les différents comportements des méthodes. La troisième stratégie permet une meilleure adaptation des lois de commande.

Dans le quatrième chapitre, les trois stratégies quasi en ligne présentées au chapitre précédent sont mises en oeuvre pour un système d'équations aux dérivées partielles paraboliques non linéaire. En présence de perturbations et avec un support spatial des actionneurs non inclus dans le support spatial de la perturbation, l'état du système a été stabilisé quasi en ligne grâce à la méthode de régularisation itérative du gradient conjugué. Cela est montré par des illustrations et des tableaux qui permettent de comparer les stratégies entre elles. Ainsi, la troisième stratégie dite « à durée adaptée » où la commande n'est lancée que si les observations de températures sont comprises entre deux seuils bien choisis, est considérée comme la meilleure stratégie. Elle permet de stabiliser à zéro le système en rejetant la perturbation tout en permettant une réduction du temps de calcul, d'énergie (coût du contrôle) et en offrant une bonne stabilisation du système.

La méthode de contrôle quasi en ligne est destinée à être testée dans le contexte de la fusion nucléaire pour lequel des lois de commande doivent être déterminées afin de maîtriser le profil du facteur de sécurité. Pour ce faire un système d'équations aux dérivées partielles paraboliques couplées modélisant le flux magnétique et l'état thermique du plasma doit être étudié.

Dans le cinquième chapitre, la fusion nucléaire est exposée dans le contexte du projet mondial ITER. Ce projet doit démontrer la faisabilité de la production d'électricité basée sur des réactions de fusion nucléaire. Le tokamak, réacteur en forme de tore assurant le confinement du plasma par voie magnétique, est présenté brièvement. Pour que la réaction se produise et dure suffisamment longtemps, plusieurs conditions doivent être satisfaites. Le critère de Lawson est un critère essentiel pour démontrer la faisabilité de la production d'électricité par fusion nucléaire. Les phénomènes magnétiques et thermiques intervenant dans un plasma de fusion sont extrêmement complexes et leur modélisation est brièvement abordée. Elle permet de formaliser les deux systèmes d'équations couplées qu'il est nécessaire de stabiliser ainsi que de définir quelques actionneurs qui sont pertinents pour le contrôle.

Dans le sixième chapitre, à partir des systèmes d'équations aux dérivées partielles, des commandes sont déterminées quasi en ligne dans le chapitre 6. Elles ont pour objet de stabiliser la température électronique du plasma et le flux magnétique au voisinage de cibles désirées. La distribution spatiale recherchée pour le flux magnétique permet d'obtenir un profil de sécurité permettant une plus grande durée de la réaction. On peut noter que pour ce dernier chapitre une condition aux bords de type Neumann homogène est considérée au centre du plasma (pour conserver la symétrie des états caractéristiques du plasma). Il est aussi discuté de la prise en compte du couplage entre les deux systèmes mathématiques étudiés.

L'ensemble des travaux présentés dans ce document permet de proposer une méthode numérique généraliste traitant la problématique de commande pour une large variété de systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles.

## Perspectives

Plusieurs perspectives peuvent être dressées à la suite de ce travail :

En premier lieu, l'étude des systèmes couplés pour la fusion nucléaire doit être poursuivie. La procédure itérative décrite à la fin du sixième chapitre doit être mise en oeuvre et son efficacité doit être quantifiée. Il serait nécessaire autant que possible de montrer des scénarios où la méthode est pertinente et des configurations où les cibles recherchées ne sont pas forcément atteignables. Dans ce dernier cadre, les algorithmes de minimisation doivent converger vers une valeur non nulle.

A court terme, il convient de placer cette méthode numérique (méthode de contrôle quasi en ligne développée à partir de la méthode de régularisation itérative du gradient conjuguée) dans le contexte des commandes avec retard afin de pouvoir comparer notre approche avec d'autres méthodes. Toutefois,

dans le cadre des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles non linéaires, les méthodes permettant de définir des lois de commande sont encore rares.

A moyen terme, dans le cadre de la fusion nucléaire, il est important de pouvoir tester la méthode permettant d'élaborer les stratégies de commande dans de nombreux scénarios expérimentaux préalablement définis par le CEA Cadarache. En effet, de nombreux essais ont été réalisés par le passé sur le réacteur de fusion nucléaire Tore Supra. Cela permettra de mieux tenir compte des spécificités des actionneurs disponibles (puissance, dynamique, localisation) et d'améliorer l'efficacité de la méthode.

Il serait envisageable de définir une expérimentation académique qui permettrait de tester pour des problèmes thermiques la pertinence des commandes quasi en ligne. Cela pourrait offrir des comparaisons avec différentes approches.

Enfin, à plus long terme et dans la mesure où les moyens de calculs n'engendrent pas des temps rédhibitoires (la pertinence de la méthode quasi en ligne étant affectée par ces retards), des développements à des géométries 2D et 3D ne semblent pas présenter de difficultés méthodologiques importantes. Elles permettraient de tester la méthode dans des configurations variées.

De même afin d'élargir les champs d'applications de l'approche développée dans ces travaux, d'autres types d'équations aux dérivées partielles pourraient être étudiés afin de déterminer quasi en ligne des lois de commandes judicieuses. Il ne faut toutefois pas minimiser le travail important que peut représenter la formulation des différents problèmes qu'il est nécessaire de résoudre de manière itérative.

---

# Bibliographie

ALBERTOS. P., GARCIA. P., GAO. Z., LIU. T., Disturbance rejection in process control, Proceeding of the 11th World Congress on Intelligent Control and Automation, pp. 4134-4145, Shenyang, China, June 29 - July 4, 2014.

ALIFANOV. O.M., Inverse heat transfer problems, International series in heat and mass transfer, 1988.

ALIFANOV. O.M., Inverse Heat Transfer Problems, Berlin, Editions Springer-Verlag, pp. 348, 1994.

ALIFANOV. O.M., ARTYUKHIN. E.A. et RUMYANTSEV. S.V., Extreme Methods for Solving Ill-Posed Problems with Applications to Inverse Heat Transfer Problems, New-York, Begell house Inc, 1995.

ALLAIRE. G., Analyse Numérique et Optimisation, ed. l'École Polytechnique, pp. 464, 2005.

AMBARZUMIAN. V., Über Eine Frage Der Eigenwerttheorie, Zeitschrift Für Physik, vol. 53, pp. 690-695, 1929.

ARGOMEDO. F.B., Contrôle et stabilité Entrée-Etat en dimension infinie du profil du facteur de sécurité dans un plasma Tokamak. Thèse de doctorat, 131 pages, Université de Grenoble, France, 2012.

ATTAR. L., Identification paramétrique de l'équation de transport de la chaleur dans le plasma du Tokamak, Thèse de doctorat, Université d'Angers, France, 2017.

ATTAR. L., TRAN. T.P., PEREZ. L., MOULAY. E., NOUAILLETAS. R., BREMOND. S., AUTRIQUE. L., Plasma thermal characterization in nuclear fusion context, 9th International Conference on Inverse Problems in Engineering (ICIPE), Waterloo, Canada, may 2017.

AUTRIQUE. L., BEDDIAF. S., PEREZ. L., JOLLY. J.C., Simultaneous determination of time-varying strength and location of fixed heat sources in 3D domain, 6th International Conference "Inverse Problems : Modeling and Simulation", Antalya, Turquie, pp. 21-26 May, 2012.

AVERILL. M.G., MILLER. K.C., KELLER. G.R., KREINOVICH. V., RAIZA. R., STARKS. S.A., Using expert knowledge in solving the seismic inverse problem, International Journal of Approximate Reasoning, vol. 45, n° 3, pp. 564-587, 2007.

AZAR. T., PEREZ. L., PRIEUR. C., MOULAY. E., AUTRIQUE. L., Stabilization Using In-domain Actuator : A numerical Method for a Non Linear Parabolic Partial Differential equation, in Proceedings, Control' 2020, Bragança, Portugal, 1-3 July, 2020.

BARCENA-PESTISCO. J.A., Null controllability of the heat equation in pseudo-cylinders by an internal control, ESAIM Control Optimisation and Calculus of Variations, [https : //doi.org/10.1051/cocv/2020048](https://doi.org/10.1051/cocv/2020048), July 2020.

BECK. J-V., ARNOLD. K-J., Parameter Estimation in Engineering and Science, Editions Wiley New-York, 1977.

- BEDDIAF. S., AUTRIQUE. L., PEREZ. L., JOLLY. J- C., Heating source localization in a reduced time, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, vol. 26, n° 3, pp 623-640, 2016.
- BERTERO. M., BOCCACCI. P., Introduction to Inverse Problems in Imaging, CRC Press, pp. 352, 1998.
- BLUM. J., Numerical Simulation and Optimal Control in Plasma Physics : With Applications to Tokamaks. Gauthier-Villars, 1989.
- BOROVIC. B., LIU. A.Q., POPA. D., CAI. H., LEWIS. F.L., Open-loop versus closed-loop control of MEMS devices : choices and issues, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 25, n° 10, pp. 1917-1924, 2005.
- BREMOND. S., Modélisation et commande des plasmas de tokamak. Thèse de doctorat, 224 pages, Université de Paris 11, Orsay, France, 1995.
- BRIBIESCA ARGOMEDO. F., Contrôle et stabilité Entrée-Etat en dimension infinie du profil du facteur de sécurité dans un plasma Tokamak. Thèse de doctorat, 131 pages, Université de Grenoble, France, 2012.
- BRIBIESCA ARGOMEDO. F., WITRANT. E., PRIEUR. C., "Safety Factor Profile Control in a Tokamak," New-York : Ed. Springer-Verlag, 2014.
- COHEN. R.S., SPITZER. L., ROUTLY. P.M., The Electrical Conductivity of an Ionized Gas, *Physical Review*, vol. 80, n° 2 pp. 230-238, October 1950.
- CORON. J.M., Control and nonlinearity, *Mathematical surveys and monographs*, ed. American Mathematical Society, Providence, USA, 2007.
- CORON. J.M., D'ANDREA NOVEL. B., Stabilization of a rotating body beam without damping, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, n° 5, pp. 608-618, 1998.
- DAUTRAY. R., LIONS. J.L., Analyse mathématique et calcul numériques pour les sciences et les techniques, tome 1, ed. Masson, 1984.
- DI MENZA. L., Analyse Numérique des Équations aux Dérivées Partielles, ed. Cassini, Paris, pp. 221, 2009.
- DUMONT. R., Contrôle du profil de courant par ondes cyclotroniques électroniques dans les tokamaks. Thèse de doctorat, 232 pages, Université Henri Poincaré, Nancy I, France, 2001.
- EL JAI. A., PRITCHARD. A-J., Capteurs et actionneurs dans l'analyse des systèmes distribués, ed. Masson, Recherche en mathématiques appliquées, pp. 203, 1986.
- ERBA. M., PARAIL. V., SPRINGMAN. E., TARONI. A., Extension of a Bohm Model for L-Mode Electron Heat Transport to Ion Heat Transport and to the Ohmic Regime. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, vol. 37, n° 11, 1995.
- ERBA. M., ANIEL. T., BASIUK. V., BECOULET. A., LITAUDON. X., Validation of a New

Mixed Bohm/gyro-Bohm Model for Electron and Ion Heat Transport against the ITER, Tore Supra and START Database Discharges. Nuclear Fusion, Volume 38, Number 7, pp. 1013-1028, 1998.

GAO. Z., Active Disturbance Rejection Control : A Paradigm Shift in Feedback Control System Design, Proceedings of the 2006 American Control Conference, pp. 2399-2405, Minneapolis, Minnesota, USA, June 14-16, 2006.

GAYE. O., MOULAY. E., BREMOND. S., AUTRIQUE. L., NOUAILLETAS. R., ARTAUD. J-F., ORLOV. Y., Robust stabilization of the current profile in tokamak plasmas using sliding mode approach in infinite dimension, Control engineering practice, vol. 21, n° 10, pp. 1350-1358, 2013.

GAYE. O., MOULAY. E., BREMOND. S., AURIQUE. L., NOUAILLETAS. R., ORLOV. Y., Sliding mode stabilization of the current profile in Tokamak plasmas, 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), Orlando, FL, USA, December 12-15, 2011.

GAYE. O., Contrôle du profil de facteur de sécurité dans les plasmas de tokamak en dimension infinie, Thèse de doctorat, 169 pages, Université d'Angers, France, 2012.

GAYE. O., AURIQUE. L., ORLOV. Y., MOULAY. E., BREMOND. S., NOUAILLETAS. R.,  $H_\infty$  stabilization of the current profile in Tokamak plasmas via LMI approach, Automatica, vol. 49, n° 9, pp. 2795-2804, 2013.

HADAMARD. J., Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, ed. Hermann, Paris, 1932.

HERRERO. J.M., BLASCO. X., MARTINEZ. M., SALCEDO. J.V., Non-linear Robust Identification : Application to a Thermal Process, International Work-Conference on the Interplay Between Natural and Artificial Computation, pp. 457-466, La Manga del Mar Menor, Spain, 18-21 June 2007.

IDIER. J., Approche Bayésienne pour les problèmes inverses, Traitement du signal et de l'image, ed. Hermes & Lavoisier, 2001.

JARNY. Y., OZISIK. M.N., BARDON. J.P., A general optimization method using adjoint equation for solving multidimensional inverse heat conduction, International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 34, n° 11, pp. 2911-2919, 1991.

KRSTIC. M., KANELAKOPOULOS. I., KOKOTOVIC. P.V., Nonlinear and Adaptive Control Design, ed. John Wiley Sons Inc., New York, 1995.

LAWSON. J.D., Some Criteria for a Power Producing Thermonuclear Reactor. Proc. Phys. Soc. Sect. B 70, 6. doi :10.1088/0370-1301/70/1/303, 1957.

LEBORGNE. G., Introduction à la méthode du gradient conjugué, notes de cours de l'ISIMA, première année, pp. 18, 2018.  
[http : www.isima.fr/leborgne/Isimathgradientconjugue/gradientconjugue.pdf](http://www.isima.fr/leborgne/Isimathgradientconjugue/gradientconjugue.pdf)

LEE. H., UTKIN. V.I., Chattering suppression methods in sliding mode control systems, Annual Reviews in Control, vol. 31, pp. 179-188, 2007.

LIONS. J.L., Contrôlabilité exacte perturbations et stabilisation des systèmes distribués, ed. Masson,

Paris, 1988.

LIU. W.J., KRSTIC. M., Backstepping boundary control of Burgers' equation with actuator dynamics, *Systems and Control Letters*, vol. 41, n° 4, pp. 291–303, 2000.

MAACHOU. A., MALTI. R., MELCHIOR. P., BATTAGLIA. J.L., OUSTALOUP. A., HAY. B., Nonlinear thermal system identification using fractional Volterra series, *Control Engineering Practice*, vol. 29, pp. 50-60, 2014.

MAVKOV. B., Control of coupled transport in tokamak plasma. Thèse de doctorat, 121 pages, Université de Grenoble, France, 2017.

MECHHOUD. S., WITRANT. E., DUGARD. L., MOREAU. D., Joint Diffusivity and Source Estimation in Tokamak Plasma Heat Transport. American Control Conference (ACC 2013), June 2013, Washington, DC, United States, 2013.

MIKKELSEN. D.R., SCOTT. S.D., DORLAND. W., Testing the  $\rho^*$  Scaling of Thermal Transport Models : Predicted and Measured Temperatures in the Tokamak Fusion Test Reactor Dimensionless Scaling Experiments. *Physics of Plasmas*, vol. 4, n° 5, 1997.

MINOUX. M., Programmation Mathématique : Théorie et Algorithmes, ed. Tec and Doc, Lavoisier, pp. 710, 2007.

MOROZOV. V.A., Methods for solving incorrectly posed problems, ed. Springer Verlag, pp. 257, 1984.

MUKHOPADHYAY. S., NARENDRA. K.S., Disturbance rejection in nonlinear systems using neural networks, *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 4, n° 1, pp. 63-72, 1993.

OU. Y., SCHUSTER. E., Model predictive control of parabolic PDE systems with dirichlet boundary conditions via galerkin model reduction, American Control Conference, St. Louis, USA. 2009.

RAVIART. P.A., THOMAS. J.M., Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, ed. Masson, 1988.

ROSIER. L., A survey of controllability and stabilization results for partial differential equations, *JESA, Journal Européen des Systèmes Automatisés*, vol. 41, n° 3-4, pp. 365-411, 2007.

ROSIER. L., ZHANG. B.Y., Global stabilization of the generalized Korteweg - de Vries equation posed on a finite domain, *SIAM Journal on control and optimization*, vol. 45, n° 3, pp. 927-956, 2006.

ROUQUETTE. S., Identification des transferts thermiques par méthode inverse dans un procédé de PACVD : approche méthodologique de la modélisation d'un processus complexe régi par un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires, Thèse de Doctorat de l'université de Perpignan, pp. 239. 2003.

ROY. S., KAR. I.N., Adaptive-robust Control With Limited Knowledge on Systems Dynamics : An Artificial Input Delay Approach and Beyond, ed. Springer Verlag, Singapore, pp. 144, 2020.

RUSSEL. D.L., Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations :

recent progress and open questions, *SIAM Review*, vol. 20, n° 4, pp. 639-739, 1978.

SATTIN. F., ESCANDE. D.F., CAMENEN. Y., SALMI. A.T., TALA. T., JET EFDA Contributors, Estimate of convection–diffusion coefficients from modulated perturbative experiments as an inverse problem. *Plasma Phys. Control. Fusion* 54, 124025, 2012.

SAVELA. B., Open- vs. closed-loop control in fluid power applications, *Control engineering*, August 15, 2017.

SCHWARTZ. L., *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, ed. Hermann, pp. 392, 1987.

SIRA-RAMIREZ. H., LUVIANO-JUAREZ. A., RAMIREZ-NERIA. M., ZURITA-BUSTAMANTE. E.W., *Active Disturbance Rejection Control of Dynamic Systems : A Flatness-Based Approach*, ed. Butterworth-Heinemann, pp. 358, 2017.

SPITZER. L., HARM. R., Transport Phenomena in a completely ionized gas, *Physical Review*, vol. 89, n° 5, pp. 977-981, March 1953.

TAIMOOR. M., AIJUN. L., UL AMIN. R., Disturbances rejection based on sliding mode control, *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, vol. 91, n° 15, pp. 680-699, 2019.

TRELAT. E., Stabilization of semilinear PDE's, and uniform decay under discretization, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 439, 2018, *Evolution equations : long time behavior and control*, hal-01165329, 2018.

TUBBING. B.J.D, CARDOZON. N.J.L., DER WIEL. M.J.V., Tokamak heat transport – a study of heat pulse propagation in JET. *Nucl. Fusion* 27, 1843. doi :10.1088/0029-5515/27/11/009, 1987.

VERGNAUD. A., Déploiement adaptatif d'un réseau de capteurs mobiles pour le suivi d'un phénomène évolutif décrit par des équations aux dérivées partielles, Thèse de doctorat, 194 pages, Université d'Angers, France, 2015.

VERGNAUD. A., PEREZ. L., AUTRIQUE. L., Adaptive selection of relevant sensors in a network for unknown mobile heating flux estimation, *IEEE Sensors Journal*, sous presse, doi : 10.1109/JSEN.2020.3009779, 2020.

VERGNAUD. A., PEREZ. L., AUTRIQUE. L., Quasi-online parametric identification of moving heating devices in a 2D geometry, *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 102, pp. 47 - 61, 2016.

VERGNAUD. A., BEAUGRAND. G., GAYA. O., PEREZ. L., LUCIDARME. P., AUTRIQUE. L., Quasi on-line identification of temperature-dependent thermal conductivity, *European Control Conference*, Strasbourg, France, 24-27 June 2014.

VILLEGAS. D., Etude expérimentale de l'influence du gradient de température électronique sur le transport turbulent des impuretés dans un plasma de fusion, Thèse de doctorat de l'Université de Provence, 2010.

VU. N.M.T., Approche hamiltonienne à ports pour la modélisation, la réduction et la commande

des dynamiques des plasmas dans les tokamaks. Thèse de doctorat, 141 pages, Université de Grenoble, France, 2014.

WANG. N., ADELI. H., Algorithms for chattering reduction in system control, Journal of the Franklin Institute, vol. 349, pp. 2687-2703, 2012.

WIJNANDS. T., VAN HOUTTE. D., MARTIN. G., LITAUDON. X., FROISSARD. P., Feedback control of the current profile on Tore Supra, Nuclear fusion, vol. 37, n° 6, pp. 777-791, 1997.

WITRANT. E., JOFFRIN. E., BREMOND. S, GIRUZZI. G., MAZON. D., BARANA. O., MOREAU. P., A control-oriented model of the current profile in tokamak plasma, Plasma Physics and Controlled Fusion, IOP Publishing, vol. 49, pp.1075-1105, 2007.

WOITTENNEK. F., WANG. S., KNUPPEL. T., Backstepping design for parabolic systems with in-domain actuation and robin boundary conditions, IFAC Proceedings Volumes, vol. 47, n° 3, pp. 5175- 5180, 2014.

YUE. D., HAN. Q.L., Delayed feedback control of uncertain systems with time-varying input delay, Automatica, vol. 41, n° 2, pp. 233-240, 2005.

ZHENG. Q., GAO. Z., TAN. W., Disturbance Rejection in Thermal Power Plants, Proceedings of the 30th Chinese Control Conference, pp. 6350-6355, Yantai, China, July 22-24, 2011.



---

**Titre :** Développement de stratégies de commandes pour des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles paraboliques non linéaires

**Mot clés :** Commande, Equations aux dérivées partielles, Méthodes numériques

**Résumé :** Le contexte général de ces recherches est la commande des systèmes physiques modélisés par des équations aux dérivées partielles (EDP). L'intérêt de tels modèles mathématiques, par rapport aux approches reposant sur des modèles de dimension finie, est qu'ils permettent d'envisager le contrôle d'une infinité de dynamiques en même temps. Les champs d'application sont nombreux, et dans le cadre de la fusion nucléaire par exemple, il est nécessaire de développer des outils pour déterminer des lois de commandes adaptées à des EDPs paraboliques non linéaires pour assurer la stabilisation à zéro et le rejet de perturbations. Il s'agit ici de contrôler le profil de sécurité satisfaisant un système d'EDP parabolique décrivant le flux magnétique et l'état thermique du plasma. Le problème de détermina-

tion du contrôle permettant de stabiliser le profil de sécurité est formulé comme un problème de minimisation. Du fait de son caractère mal posé, le problème inverse est résolu de manière itérative par la méthode régularisante du gradient conjugué. Les principaux développements concernent la mise en œuvre de stratégies quasi en ligne permettant d'obtenir des contrôles à l'aide d'actionneurs internes. Les résultats montrent que cette méthode généraliste numérique permet d'obtenir des stratégies de contrôle efficaces et ce sans hypothèses limitatives sur le système étudié. Les résultats sont d'autant plus satisfaisants que le modèle mathématique est en adéquation avec les phénomènes physiques étudiés et que la dynamique du système n'est pas totalement inconnue.

---

**Title:** Determination of control strategies for non linear parabolic partial differential equations

**Keywords:** Control, Partial differential equations, Numerical methods

**Abstract:** The general context of the investigated study is the control of distributed parameter systems, such as those modeled by partial differential equations (PDE). The interest of this type of mathematical model compared to finite dimensions mathematical models is that it allows to consider the control of an infinity of dynamics at the same time. The fields of application are numerous and in the context of nuclear fusion for example, it is necessary to determine control strategies for both zero stabilization and disturbances rejection. For nuclear fusion, the goal is to control the safety profile. The evolution of the spatial distribution of this key factor (conditioning the stability of the plasma) is described by a parabolic PDE system able to estimate the magnetic flux and the thermal state of the plasma. The problem of determining the con-

trol strategy to stabilize the safety profile is formulated as a minimization problem and solved using an inverse problem. Due to its well-known ill-posed character, the method of regularization of the conjugate gradient is adapted to solve this inverse heat conduction problem. Implementation of quasi-online strategies to obtain relevant controls for such nonlinear systems is developed. The actuators are intern to the geometry. The presented results show that this generalist numerical method makes it possible to obtain effective control strategies without strong assumptions on the studied system. The proposed alternative is meaningful if the mathematical model is in adequacy with the physical phenomena studied and as the system dynamics are not completely unknown.