



HAL
open science

Conditions de durabilité d'un système écologique et social : une approche par modélisation mathématique

Thibaut France

► **To cite this version:**

Thibaut France. Conditions de durabilité d'un système écologique et social : une approche par modélisation mathématique. Mathématiques générales [math.GM]. Museum national d'histoire naturelle - MNHN PARIS, 2020. Français. NNT : 2020MNHN0011 . tel-03358518

HAL Id: tel-03358518

<https://theses.hal.science/tel-03358518>

Submitted on 29 Sep 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MUSÉUM NATIONAL D'HISTOIRE NATURELLE



École Doctorale 227
Sciences de la Nature et de l'Homme : évolution et écologie

Année 2020

N° attribué par la bibliothèque
|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DU MUSÉUM NATIONAL D'HISTOIRE NATURELLE

Spécialité : Mathématiques appliquées

présentée et soutenue publiquement par

Thibaut FRANCE

Conditions de durabilité d'un système écologique et social : une approche par modélisation mathématique

sous la direction de :

Denis Couvet, Professeur, HDR, MNHN, Co-directeur de thèse

Sophie Martin, Ingénieur en chef des ponts, des eaux et forêts, HDR, INRAE, Co-directeur de thèse

devant le jury composé de :

Katrin Erdlenbruch, Directrice de recherche, HDR, INRAE, Rapportrice

Jean-Philippe Terreaux, Ingénieur en chef des ponts, des eaux et forêts, HDR, INRAE, Rapporteur

Juan Fernandez-Manjarres, Chargé de recherche, CNRS, Examinateur

Lauriane Mouysset, Chargée de recherche, CNRS, Examinatrice

Remerciements

Cette thèse n'aurait pu arriver à son terme, voir même exister, sans le soutien de nombreuses personnes et organisme. Je tente ici de les mentionner tous et toutes.

Tout d'abord, je tiens à remercier mes deux directeurs de thèse Sophie et Denis pour leur confiance, leurs conseils et leurs relectures attentives. Je remercie chaleureusement les membres du jury d'avoir accepté d'évaluer mon travail.

Je remercie la chaire Modélisation Mathématique et Biodiversité d'avoir accepté de financer cette thèse. Je remercie également l'ensemble de ses membres pour avoir fait que les écoles de recherche et les rencontres de la chaire soient toujours des événements à la fois plaisants et instructifs. De plus, je remercie Anne pour son aide dans la gestion et la mise à jour du site de la chaire.

Je remercie Olivier Commowick d'avoir mis à disposition un template latex adapté aux thèses rédigées en français sur son [site web](#).

Je suis très heureux d'avoir été accueilli au sein du CESCO pour effectuer cette thèse, car c'est un laboratoire pluridisciplinaire qui permet des échanges riches et intellectuellement stimulants que ce soit à l'occasion des cafés scienti, des ymcas ou des légendaires journées du Rocheton mais également pour l'atmosphère chaleureuse et collégiale qui y régne. Je tiens en particulier à remercier (dans un ordre arbitraire) : Anne, Benoit et Camila (pour leur accueil pendant mon stage de M2 et leurs précieux conseils de différentes natures), Théophile mon confrère doctorant de la chaire MMB du CESCO (pour tes conseils, notamment administratifs et de jardinage pour la culture d'avocat en intérieur), Charles (pour ta zenitude et ton aptitude à rassurer l'éternel angoissé que je suis), François D, Anya, Gaby, MX, Typhaine Alain, Olivier, Tanguy, Olivus, Guigui.

Merci à mes amis doctorants hors du CESCO avec qui j'ai partagé cette aventure qu'est la thèse (encore une fois, dans un ordre arbitraire) : Kevin, Baptiste L, Felicien, Gabriel, Sébastien, Helmy, Charlotte, François L.

Merci à mes ami.e.s non doctorants, qui étaient (et je l'espère resteront) de véritables bouffées d'oxygène hors du monde, parfois un peu angoissant, de la recherche : Aurélien, Tanguy, Baptiste M, Jeremy (et toute sa clique), Kit, Sarah, Thibault, Clothilde, Jonathan, Martin, Paul (et pour ton expertise sur tikz!).

Enfin, merci à ma famille pour son soutien pendant toutes ces années d'études que cette thèse ponctue, en particulier, merci à Célia de m'avoir parlé de cette merveille que sont les cachets de mélatonine.

Et, merci à Margaux, de m'avoir supporté dans tous les sens du terme au cours des ces dernières années.

Table des matières

Liste d'abréviations	vii
1 Outils mathématiques et conceptuels	5
1.1 Équations différentielles	6
1.1.1 Point fixe	6
1.1.2 Stabilité, instabilité et stabilité asymptotique	7
1.1.3 Bifurcations locales	8
1.1.4 Théorie de la viabilité	12
1.2 Apports pour la modélisation des systèmes écologiques et sociaux	13
1.2.1 Système écologique et social	13
1.2.2 Durabilité	14
1.2.3 Transitions critiques et hystérèse	14
1.3 Questions traitées	15
2 Méthodes	17
2.1 Dynamique : coupler les phénomènes démographiques, écologiques et économiques	18
2.1.1 Démographie	19
2.1.2 Dynamique du niveau de capital naturel renouvelable	20
2.1.3 Dynamique de la quantité de biens manufacturés par individu	20
2.1.4 Formalisation mathématique	21
2.2 Embarquer des changements possibles dans les pratiques	21
2.3 Outils numériques et analytiques mobilisés	22
2.3.1 Existence d'un régime stationnaire	22
2.3.2 Comportement transitoire	22
3 Résultats	23
3.1 Existence et stabilité d'un point stationnaire avec cohabitation	24
3.1.1 Condition d'existence	24
3.1.2 Condition de stabilité	26
3.1.3 Synthèse	30
3.2 Sensibilité du point stationnaire avec cohabitation	31
3.2.1 Variations de ses composantes	31
3.2.2 Sensibilité de sa stabilité	33
3.2.3 Synthèse	36
3.3 Aspects transitoires des crises	38
3.3.1 Flux de biens manufacturés faible	38
3.3.2 Surproduction	39
3.3.3 Synthèse	41
3.4 Estimer la sensibilité de la viabilité du système	43
3.4.1 Deux potentiels estimateurs du noyau de viabilité	43
3.4.2 Comparaison entre ces deux estimateurs	43
3.4.3 Synthèse	44
3.5 Entre sobriété et instabilité	46
3.5.1 Mise en évidence d'un piège socio-écologique	46
3.5.2 Espace traversé par la dynamique	46

3.5.3	Sensibilité des ces espaces aux contrôles	48
3.5.4	Synthèse	48
4	Discussion et conclusion	49
4.1	Bilan	50
4.2	Comparaisons	50
4.2.1	Influence du rendement d'échelle sur les transitions critiques	50
4.2.2	Cycles explosion-déclin dus à une surproduction pas toujours évitable	50
4.2.3	Apparition d'un cycle pas toujours précédée d'un déclin de la taille de population à l'équilibre	51
4.2.4	Sobriété, viabilité et piège socio-écologique	52
4.3	Perspectives	52
4.3.1	Changer les hypothèses	52
4.3.2	Piège socio-écologique, approche numérique	53
4.3.3	Modéliser l'adaptabilité d'un système écologique et social par la théorie de la viabilité	53
	Annexes	55
	A Conditions d'existence d'un équilibre avec cohabitation	57
	B Sensibilité à l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable	59
B.1	Cas analytiques (rendement d'échelle constant ou rendement d'échelle croissant avec $\alpha = 1$)	59
B.1.1	Rendement d'échelle constant ($\alpha + \beta = 1$)	59
B.1.2	Rendement d'échelle croissant avec $\alpha = 1$	59
B.2	Cas non analytiques (rendement d'échelle décroissant ou rendement d'échelle croissant avec $\alpha \neq 1$)	60
B.2.1	Remarque préliminaire sur le cas rendement d'échelle croissant avec $\alpha \neq 1$	60
B.2.2	Dérivée partielle de x_* par rapport à δ_R	60
B.2.3	Rendement d'échelle croissant avec $\alpha < 1$	61
B.2.4	Rendement d'échelle croissant avec $\alpha > 1$	61
B.2.5	Rendement d'échelle décroissant	61
	C Conditions de stabilité de cet équilibre	63
C.1	Rendement d'échelle croissant	64
C.2	Rendement d'échelle constant	65
C.3	Rendement d'échelle décroissant	66
C.4	Bornitude de Δ	66
C.4.1	Rendement d'échelle décroissant, $\alpha + \beta < 1$	66
C.4.2	Rendement d'échelle constant, $\alpha + \beta = 1$	67
C.5	Synthèse	67
C.5.1	Rendement d'échelle décroissant	67
C.5.2	Rendement d'échelle constant	67
C.5.3	Rendement d'échelle croissant	67
	D Impact des différentes stratégies sur la valeur de l'équilibre et sa stabilité	69
D.1	Changement d'intensité d'extraction du CNR	69
D.1.1	Taille de population $x_*(\cdot, p)$	69

D.1.2	Quantité de capital naturel renouvelable $y_*(\cdot, p)$	70
D.2	Changement de la répartition des tâches	71
D.2.1	Condition de subsistance (cas rendement d'échelle constant ou croissant)	71
D.2.2	Variations de $x_*(\delta_R, \cdot)$ (et implications sur la stabilité)	72
D.2.3	Variations de $y_*(\delta_R, \cdot)$	78
D.3	Changement de répartition des tâches et maintien d'un effort d'extraction constant	79
D.3.1	Condition de subsistance	79
D.3.2	Variations de x_* et y_*	80
D.3.3	Possibilité d'une instabilité	80
D.3.4	Localisation de l'instabilité	81
E	Sur le comportement transitoire du système	83
E.1	Deux proxys de viabilité	83
E.1.1	Proxy sur la distance à la frontière	83
E.1.2	Proxy d'inspiration viabiliste	83
E.2	Entre sobriété et instabilité	83
E.2.1	Remarques préliminaires	83
E.2.2	Estimation basse du piège socio-écologique	84
E.2.3	Mise en évidence d'un espace traversé par un courant	86
	Bibliographie	89

Liste d'abréviations

CNR Capital Naturel Renouvelable	79
BM Bien(s) Manufacturé(s)	74
RE Rendement(s) d'Échelle(s)	70
RECr Rendement d'Échelle Croissant	69
RECo Rendement d'Échelle Constant	71
RED Rendement d'Échelle Décroissant	75
PFAC Point Fixe Avec Cohabitation	79
FoBiMIE Fonction de production de Biens Manufacturés par Individu à l'Equilibre	74

Introduction

L'exploitation du capital naturel renouvelable dans le cadre d'activités anthropiques permet le développement des sociétés humaines, mais elle peut aussi causer la dégradation de leur cadre de vie à travers la perte des services écosystémiques [MEA 2005]. Actuellement, aucune nation n'arrive à atteindre les besoins humains de manière durable [O'Neill 2018]. Pour pallier ce problème, deux catégories de questions doivent être traitées. Premièrement, comment alléger les pressions anthropiques ? Deuxièmement, comment répartir au mieux ces pressions, ou les compenser ? Dans cette thèse, nous apportons des éléments de réponses à la seconde question. Cette question est traitée dans la littérature avec des angles d'approche variés. Ainsi, modélisant une ressource renouvelable sur laquelle s'exercent un type de prélèvement continu et un type de prélèvement discontinu, qui correspondent à des hypothèses différentes concernant les technologies d'extractions, [Alvarez 2016] cherche à caractériser la stratégie à adopter entre ces deux technologies afin de maximiser une certaine fonction objectif. La fonction objectif correspond aux bénéfices retirés par le gestionnaire de la ressource. [Rapaport 2006] traite de questions similaires sur une ressource renouvelable stratifiée en âge, en s'interrogeant également sur l'influence du niveau de prélèvement minimal. Enfin, [Roman 2017] étudie la dépendance de régime stationnaire d'un système écologique et social lorsque l'intensité d'extraction du capital naturel évolue. L'auteur explore ensuite l'influence de différents types de couplage entre une société durable et une non-durable.

Dans cette thèse, nous tentons de se placer entre ces deux perspectives, puisque nous modélisons la durabilité de façon similaire à celle de [Roman 2017] et, dans le même temps, nous nous intéressons à l'optimisation de certaines quantités. Plus précisément, nous cherchons à comprendre l'influence de certaines caractéristiques d'un système écologique et social sur sa durabilité. Ces caractéristiques concernent deux composantes d'un système écologique et social. D'une part, elles concernent la composante économique, qui est relative à la production et la distribution de biens. D'autre part, elles concernent la composante socio-anthropologique, qui affecte la consommation de biens manufacturés. Dans ce but, nous mobilisons le formalisme des équations différentielles ordinaires, celui de la théorie des bifurcations locales et celui de la théorie de la viabilité. Nous ne calibrons pas les paramètres de la dynamique. Ainsi, les résultats que nous établissons n'ont pas de capacité descriptive. Ils présentent plutôt une typologie des situations possibles. En effet, ces résultats ne dépendent que des relations existantes entre les paramètres. Nous mobilisons donc dans ce travail principalement des outils analytiques. Les simulations numériques ne sont là que pour illustrer ces résultats, et motiver des changements de perspectives. Le premier chapitre de cette thèse présente les outils mobilisés : les équations différentielles et leurs applications pour la modélisation des systèmes écologiques et sociaux. Nous présentons plus en détails les notions de stabilité [Chicone 2009] et de bifurcations [Arnold 1994], qui permet de formaliser mathématiquement des transitions critiques [Scheffer 2009]. Ce chapitre vise également à rappeler les principales caractéristiques de la théorie de la viabilité.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons les méthodes utilisées dans la thèse. Nous présentons les interactions que nous supposons et la façon dont nous les représentons. Dans ce chapitre, nous identifions ensuite les paramètres contrôles de la dynamique. Enfin, nous précisons les outils numériques et théoriques que nous utilisons.

Le troisième chapitre présente les résultats obtenus par l'analyse de ce modèle. Nous commençons par donner les conditions sous lesquelles un régime stationnaire existe. Ensuite, nous décrivons la sensibilité de ce régime stationnaire à certaines stratégies. Plus particulièrement, nous dissons l'impact de ces stratégies sur les valeurs des composantes du régime stationnaire et sur sa stabilité. Ensuite, nous illustrons l'impact de ces stratégies pour sortir d'une situation identifiée comme non-durable. Nous montrons que certaines situations bien qu'identifiées comme durables par notre formalisme peuvent exhiber des comportements transitoires avec des cycles explosion-declin et sont donc peu souhaitables. Enfin, nous montrons que sous certaines hypo-

thèses, ce régime stationnaire n'est pas toujours atteignable puisqu'un sous-espace de l'ensemble des phases présente des trajectoires menant au déclin de la population humaine. Nous qualifions ce sous-espace de piège socio-écologique. Toutefois, ce sous-espace peut être quitté par l'augmentation de l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable. Nous illustrons ainsi la difficulté de concilier deux objectifs d'égale importance; d'une part de minimiser la taille du piège socio-écologique, d'autre part de minimiser l'amplitude des cycles explosion-déclin.

Dans le quatrième chapitre nous comparons nos résultats avec ceux de la littérature. Nous discutons ainsi de l'aspect irrémédiable de l'apparition d'un cycle explosion-déclin à mesure que certains paramètres varient dans un modèle de système écologique et social. Nous discutons aussi du déclin de la taille de population comme signe avant-coureur de l'apparition d'un cycle explosion-déclin. Nous énonçons enfin des pistes d'améliorations pour ce travail.

Outils mathématiques et conceptuels

Ce chapitre présente les outils mathématiques et conceptuels que nous mobilisons dans le cadre de cette thèse. La première section traite des équations différentielles. Elle aborde en particulier les notions de point fixe, stabilité, bifurcations locales, et la théorie de la viabilité. La seconde section traite des apports de ces notions dans l'étude des conditions de durabilité des systèmes écologiques et sociaux.

Table des matières

1.1	Équations différentielles	6
1.1.1	Point fixe	6
1.1.2	Stabilité, instabilité et stabilité asymptotique	7
1.1.3	Bifurcations locales	8
1.1.4	Théorie de la viabilité	12
1.2	Apports pour la modélisation des systèmes écologiques et sociaux	13
1.2.1	Système écologique et social	13
1.2.2	Durabilité	14
1.2.3	Transitions critiques et hystérèse	14
1.3	Questions traitées	15

1.1 Équations différentielles

Une équation différentielle est un type d'équation liant une fonction f (d'une variable réelle et prenant ses valeurs dans un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^*$) avec sa (ou ses) dérivée(s). L'ensemble des valeurs possibles pour f s'appelle l'espace des phases, il est ici désigné par E . Dans le reste de ce chapitre, nous supposons que cette équation est de la forme suivante :

$$f'(t) = F(f(t), t), \quad (1.1)$$

avec : F une fonction définie sur $E \times \mathbb{R}^+$ et $t \in \mathbb{R}^+$. Remarque, lorsque F est indépendante du temps t l'équation différentielle est qualifiée d'autonome.

Énormément de phénomènes peuvent être modélisés par ce formalisme puisque cela revient à dire que, si à un instant t_0 on connaît l'état d'un système donné $f(t_0)$, on est capable de savoir la vitesse de variation de ce système $F(f(t_0), t_0)$. Nous supposons de plus que l'équation (1.1) est autonome.

1.1.1 Point fixe

D'un point de vue appliqué, pour un certain système modélisé, un point fixe est un état du système en lequel le système n'évolue plus.

Définition 1 (Point Fixe) *Soit l'équation différentielle autonome suivante :*

$$x'(t) = \tilde{F}(x(t)), \quad (1.2)$$

où $\tilde{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 .

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ est un point fixe de l'équation (1.2) si la fonction constante $x(\cdot) = x_0$ est solution de l'équation (1.2), de façon équivalente, si $\tilde{F}(x_0) = 0$.

Par exemple, supposons que nous nous intéressons à l'évolution de la quantité de matière ligneuse présente dans une forêt. C'est une quantité renouvelable et bornée, l'équation différentielle suivante (propre à la fonction logistique) peut donc constituer une première approximation de son

évolution au cours du temps :

$$f' = rf(1 - f), \quad (1.3)$$

avec : f la quantité de matière ligneuse présente (définie pour tout temps positif) et r son taux de croissance mis à l'échelle.

L'équation (1.3) présente deux points fixes. Un premier en zéro, aucune matière ligneuse n'est présente. Un second en un, tout l'espace disponible pour la matière ligneuse dans la forêt est occupé, cela correspond à la capacité de charge.

1.1.2 Stabilité, instabilité et stabilité asymptotique

La notion de stabilité s'applique aux points fixes.

Définition 2 (Point fixe stable) *En reprenant les notations de la définition 1, x_0 est dit stable si, pour toute solution de l'équation (1.2) ξ_x (telle que $\xi_x(0) = x$), nous avons :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu > 0, \|x_0 - x\| < \nu \text{ et } t > 0 \implies \|\xi_x(t) - x_0\| < \varepsilon.$$

Définition 3 (Point fixe asymptotiquement stable) *En reprenant les notations de la définition 2, x_0 est dit asymptotiquement stable si, de plus, il existe un voisinage \mathcal{V} de x_0 tel que*

$$\forall x \in \mathcal{V}, \lim_{t \rightarrow \infty} \xi_x(t) = x_0.$$

Si nous reprenons l'équation (1.3), zéro est un point instable alors qu'un est asymptotiquement stable. Effectivement, en tout point $0 < v_1 < 1$ (respectivement $1 < v_1$), la quantité $v_1(1 - v_1)$ est strictement positive (respectivement négative), ainsi une trajectoire issue de ce point croîtra (respectivement décroîtra), ainsi, elle tendra vers un et ne peut pas converger vers zéro, aussi faible que soit v_1 .

Le comportement d'une solution d'une équation différentielle ordinaire n'est pas toujours aussi simple à étudier que dans le cas de l'équation (1.3). C'est le cas du système d'équations différentielles étudié ci-après. Cela vient notamment du fait que F et f sont à valeurs dans l'espace. f est donc constituée de trois composantes, ainsi, à proximité d'un point fixe les directions dans lesquelles elle peut aller ne sont pas réduites à deux comme dans le cas de l'équation (1.3) (croître ou décroître). Cependant, nous présentons ci-après un théorème et une proposition qui permettent de trouver des conditions suffisantes pour qu'un point fixe soit asymptotiquement stable.

Le théorème donne des conditions pour garantir la stabilité asymptotique d'un point fixe d'une équation différentielle autonome à partir du signe des valeurs propres de la matrice jacobienne. La proposition donne des conditions nécessaires sur les signes des racines d'un polynôme réel du troisième degré. En combinant les deux nous pouvons donc avoir des informations sur la stabilité asymptotique même lorsque les valeurs propres sont inconnues pour un système de trois équations différentielles ordinaires.

Théorème 1 *Stabilité asymptotique et signes des parties réelles des valeurs propres de la Jacobienne d'un point fixe d'un système autonome.*

Étant donné : $n \in \mathbb{N}^$, un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, une fonction inconnue $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, une fonction connue $F := (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x_* \in \mathbb{R}^n$ tel que $F(x_*) = 0$ et F est deux fois continument*

différentiable dans un voisinage de x_* alors :

x_* est un point fixe asymptotiquement stable de l'équation différentielle suivante :

$$X' = F(X), \quad (1.4)$$

si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne de F au point x_* : $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_*)\right)_{i=1 \dots n, j=1 \dots n}$ ont une partie réelle strictement négative.

Proposition 1 Critère de Routh-Hurwitz en dimension 3

Soit $P := X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Les racines de P ont toutes des parties réelles strictement négatives si et seulement si le système suivant est vérifié :

$$\begin{cases} a > 0 & (1.5) \\ c > 0 & (1.6) \\ ab - c > 0. & (1.7) \end{cases}$$

1.1.3 Bifurcations locales

Supposons maintenant que cette matière ligneuse soit exploitée avec un effort constant. La quantité de matière ligneuse qui est prélevée dépend donc de cet effort et de la quantité de matière ligneuse présente. L'équation modélisant la quantité de matière ligneuse au cours du temps peut donc s'écrire :

$$f' = rf(1 - f) - \delta f, \quad (1.8)$$

avec δ un paramètre strictement positif correspondant à l'effort d'exploitation.

L'équation (1.8) se réécrit :

$$f' = rf \left(\left(1 - \frac{\delta}{r}\right) - f \right). \quad (1.9)$$

Ainsi, deux cas qualitativement différents peuvent se présenter.

- Si $r > \delta$, alors il existe deux points fixes, un en 0 et un en $1 - \frac{\delta}{r}$, le premier étant instable et l'autre asymptotiquement stable. L'effort d'exploitation n'étant pas supérieur aux taux de régénération de la matière ligneuse, il existe un régime stationnaire préservant forêt et assurant une production constante et non nulle de matière ligneuse.
- Si $\delta \geq r$ alors le membre de droite de l'équation (1.9) est toujours inférieur ou égal à zéro lorsque f est supposée positive. Ainsi le seul point fixe positif ou nul possible est zéro. Supposons qu'à un instant t_0 la quantité de matière ligneuse soit comprise entre zéro et un, puisque l'effort d'extraction est supérieur ou égal au taux de régénération, la quantité de matière ligneuse ne va faire que décroître et converger vers zéro.

Ainsi, nous montrons que le changement d'un de ces deux paramètres change qualitativement les propriétés de l'équation différentielle (1.8) (en particulier le comportement en temps long d'une solution). Ce changement qualitatif des propriétés de solutions d'une équation différentielle, lorsqu'un paramètre change de façon continue s'appelle une bifurcation.

Venant de l'étude des équations différentielles, [Arnold 1994], les bifurcations sont largement utilisées dans le cadre de la modélisation de phénomènes écologiques, comme par exemple l'eutrophisation d'un lac [Carpenter 1999]. Une synthèse de ces notions est [Scheffer 2009]. Ci-après, nous présentons trois bifurcations que nous trouvons dans l'étude de notre modèle.

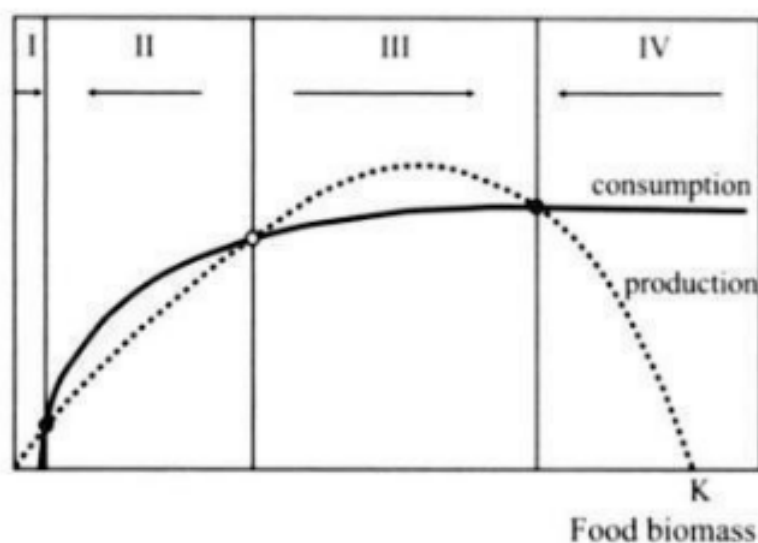


FIGURE 1.1 – En traits pointillés (respectivement en noir) la quantité de ressources halieutiques créées (respectivement prélevées) pour un niveau de ressource halieutique donné (correspondant au terme (1) de l'équation (1.10)). Image issue de [Scheffer 2009].

Bifurcation de type col-noeud Une bifurcation de type col-noeud advient lorsqu'un point fixe stable et un point fixe instable se rencontrent et s'annihilent. Ce type de bifurcation advient notamment dans des modèles d'exploitation de capital naturel renouvelable, lorsque l'effort de prélèvement devient supérieur à la vitesse de régénération du capital naturel renouvelable. Nous l'illustrons ci-dessous.

Nous désignons par $A(t)$ la quantité de ressources halieutiques à un instant t . Son évolution peut être modélisée par l'équation suivante :

$$A'(t) = \underbrace{rA(1 - A/K)}_{(1)} - \underbrace{k \frac{A^p}{A^p + H^p}}_{(2)}. \quad (1.10)$$

(1) correspond au caractère auto-reproduisant de la quantité de capital naturel renouvelable (r est son taux de renouvellement et K sa capacité de charge), (2) correspond au prélèvement, par vraisemblance (pour avoir une possible saturation) une fonction de Hill est utilisée avec : k un facteur d'échelle, $p > 0$ le coefficient de Hill (il est lié à la sensibilité du prélèvement par rapport à la quantité de capital naturel renouvelable disponible) et H correspond à la quantité de capital naturel renouvelable permettant un prélèvement à 50% de sa capacité maximale.

À mesure que k varie l'équation (1.10) expérimentera une bifurcation de type col-noeud. Sous certaines conditions, que nous n'explicitons pas ici, lorsque k est fixé, les courbes des (1) et (2) se recoupent suivant ce qui est représenté sur la figure 1.1. À mesure que k augmente, la courbe correspondant à la prédation se déplace vers le haut, comme illustré sur la figure 1.2. Au bout d'un certain temps, les deux points fixes à droite vont s'annihiler.

Bifurcation de type Hopf et transcritique [Roman 2017] modélise la thèse du suicide écologique de l'Île de Pâques à l'aide d'un système d'équations différentielles représentant l'évolution temporelle de variables d'intérêt dans une société agraire qu'il calibre à l'aide de données archéo-

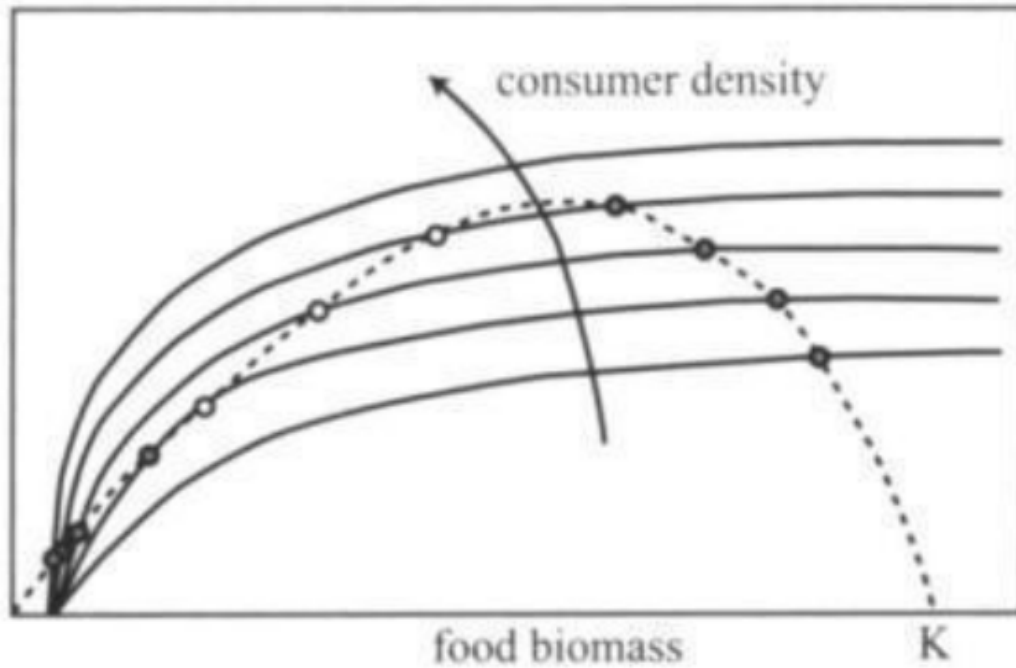


FIGURE 1.2 – En traits pointillés (respectivement en noir) la quantité de ressources halieutiques créées (respectivement prélevées) pour un niveau de ressource halieutique donné (correspondant au terme (1) de l'équation (1.10)). La flèche indique l'évolution du prélèvement à mesure que k varie. Image issue de [Scheffer 2009].

logiques propres à l'île de Pâques.

Plus précisément son modèle est donné par le système d'équations différentielles suivant :

$$\dot{x} = (b - de^{-\frac{z}{\rho x}})x \quad (1.11)$$

$$\dot{y} = ry(1 - y/k) - \alpha xy \quad (1.12)$$

$$\dot{z} = \alpha xy - sx \left(1 - e^{-\frac{z}{\rho x}}\right), \quad (1.13)$$

avec : x la taille de population, y le niveau de capital naturel renouvelable et z la quantité de biens manufacturés, la signification des paramètres est donnée dans la table 1.1. Nous précisons que : ρ , le « seuil de richesse par individu » embarque la sensibilité de la disponibilité de biens manufacturés par individu sur la croissance de la population et que s , l' « exigence de subsistance » embarque le plus grand niveau de consommation de biens manufacturés par individu possible (en supposant que ces biens par individu soit infiniment abondants).

[Roman 2017] montre que l'évolution du paramètre d'intensité d'extraction du capital naturel fait changer qualitativement la nature des trajectoires possibles. À mesure que ce paramètre varie, le système présente trois bifurcations. Parmi ces trois, nous en présentons deux, puisque nous les retrouvons dans l'étude de notre modèle.

Bifurcation transcritique Lorsque l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable est faible, la population humaine n'est pas capable de produire suffisamment de biens manufacturés pour perdurer durablement ainsi aucun point fixe avec une taille de population non nulle n'existe. À mesure que l'intensité d'extraction du capital naturel augmente un point fixe avec une

Symbole	Signification
b	Taux de naissance maximal
d	Taux de décès maximal
r	Taux de reproduction du capital naturel renouvelable
K	Niveau maximum de capital naturel renouvelable
s	Exigence de subsistance
ρ	Seuil de richesse par individu
α	Intensité d'extraction du capital naturel renouvelable

TABLE 1.1 – Symboles et définitions des paramètres de la dynamique de [Roman 2017].

taille de population non nulle apparaît puis sa taille de population (respectivement son niveau de capital naturel renouvelable) augmente puis diminue (respectivement diminue).

Inversement, si on considère une intensité d'extraction du capital naturel qui part d'une valeur intermédiaire et diminue deux point fixes de stabilités différentes vont se rencontrer : un point fixe avec une taille de population non nulle stable et un point fixe avec une taille de population nulle et un niveau de capital naturel maximal (égal à sa capacité de charge) vont se rencontrer, cela s'appelle une bifurcation transcritique. Sur la figure 1.3, cette bifurcation est localisée par le trait vertical le plus à gauche.

Bifurcation de type Hopf Lorsque l'intensité d'extraction du capital naturel part d'une valeur intermédiaire et augmente, la stabilité du point fixe avec une taille de population non nulle cesse. En effet, une trajectoire issue du point fixe avec une taille de population non nulle après une arbitraire perturbation aura pour comportement limite non pas de revenir au point fixe initial, mais de converger vers un cycle limite. Ce cycle limite est un cycle de type explosion-déclin. Un cycle de type explosion-déclin comporte plusieurs phases :

1. Partant d'une configuration avec une quantité importante de capital naturel renouvelable et un niveau faible de biens manufacturés et de population,
2. l'exploitation du capital naturel renouvelable par le travail humain permet la création de biens manufacturés,
3. la consommation de ces biens manufacturés permet l'augmentation de la taille de population,
4. à mesure que la taille de population augmente, son impact sur le capital naturel renouvelable augmente,
5. au bout d'un certain moment, la création de biens manufacturés n'est plus suffisante pour équilibrer sa consommation, la quantité de biens manufacturés se met donc à diminuer,
6. la quantité de biens manufacturés ayant diminué, la population ne peut se maintenir et décroît,
7. la taille de population ayant décliné, le stock de capital naturel se reconstitue.

Sur la figure 1.3, cette bifurcation est localisée par le trait vertical central, les points correspondent aux valeurs extrémales de ce cycle et les pointillés correspondent au point fixe avec taille de population non nulle, lorsque ce dernier est devenu instable.

Ce cycle illustre une mauvaise adéquation entre la production de biens manufacturés et leur consommation par la population. Plus précisément, la quantité de biens manufacturés pouvant être produite est trop grande comparée à la quantité qui peut être consommée, ainsi un cycle d'explosion-déclin advient. Ce type de phénomène arrive couramment en écologie. Par exemple,

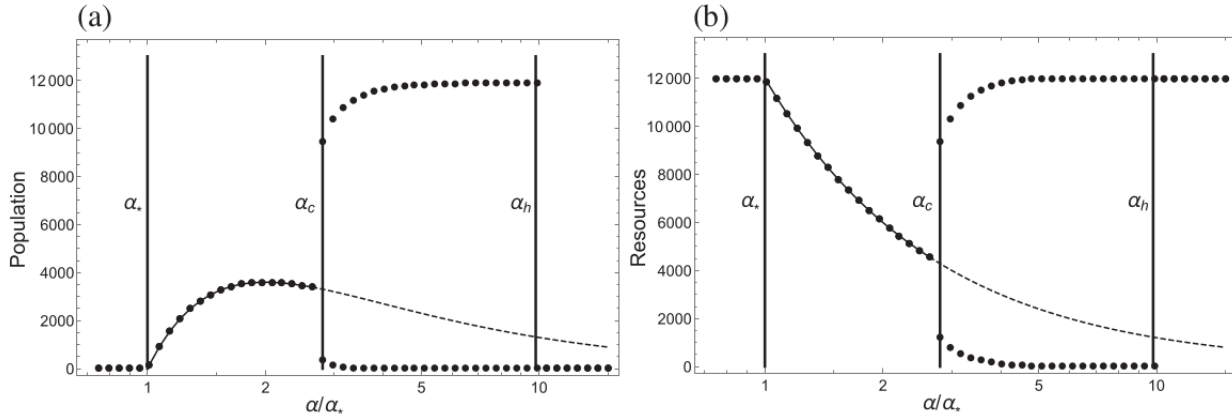


FIGURE 1.3 – Diagramme de bifurcation pour (a) la taille de population et (b) le niveau de capital naturel renouvelable de [Roman 2017]. Les lignes verticales montrent les endroits où des bifurcations arrivent. Les lignes continues correspondent aux composantes du point fixe intérieur (i.e. avec des composantes non nulles).

[Rosenzweig 1971] montre que l’enrichissement d’un écosystème exploité, mène à la perte de stabilité du point fixe, ce paradoxe est appelé paradoxe de l’enrichissement.

Remarque Ces bifurcations donnent des informations locales, à proximité des points fixes concernés, on ne peut tirer des conclusions sur l’espace ambiant que lorsque sa dimension est faible. La théorie de la viabilité permet d’avoir des informations sur le comportement transitoire en particulier lorsque le système est loin d’un équilibre et que l’espace d’état est de plus grande dimension.

1.1.4 Théorie de la viabilité

Introduction La théorie de la viabilité est une théorie mathématique liée à celle du contrôle optimal (le lecteur intéressé pourra consulter [Trélat 2008]). Comme elle, elle étudie des systèmes dynamiques contrôlés. Mais alors que la théorie du contrôle se concentre préférentiellement sur atteindre un objectif en minimisant un coût quantifié (par exemple : envoyer un satellite de la base de lancement à un point d’atterrissage sur la Lune en minimisant le coût en carburant) celle de la viabilité cherche à maintenir le système dans un certain espace (ou alors à le faire rejoindre cet espace) en considérant - par exemple - que ce ne sont pas les contrôles qui sont coûteux, mais le fait que le système ne respecte pas les contraintes. Cette manière de voir permet donc des applications vastes, de la macro-économie à l’automatique en passant par le développement durable [Brundtland 1987], [Bernard 2011].

Effectivement, le développement durable comprend, notamment, la satisfaction de plusieurs objectifs potentiellement contradictoires. À titre d’exemple, les huitième et treizième objectifs de développement durable (ODD, [Nations 2015]) demandent de combiner croissance économique et lutte contre le réchauffement climatique. Résumer cet ensemble d’objectifs à une grandeur scalaire peut donc avoir moins de sens que de l’assimiler à un ensemble de contraintes. Des approches de viabilité sont notamment utilisées pour la gestion durable d’un corridor forestier par la population locale (voir [Bernard 2013]) mais également pour concilier activités humaines et non eutrophisation d’un lac (voir [Martin 2004]).

Cadre On se donne :

- X un espace d'états
- \mathcal{U} un espace de contrôles
- $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ une trajectoire vivant dans cet espace
- $K \subset X$ un ensemble de contraintes que notre système doit respecter à tout instant
- Une fonction $f : X \times \mathcal{U} \rightarrow X$ la dynamique - partiellement contrôlable - de notre système
- Une fonction des contrôles admissibles $U : X \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{U})$, pour un état donné plusieurs valeurs de contrôles sont possibles.

L'évolution de la grandeur (potentiellement multivariée) x est donnée par le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), u(t)) \\ u(t) \in U(x(t)) \subset \mathcal{U} \end{cases} \quad (1.14)$$

où u est une variable de contrôle qui peut potentiellement prendre plusieurs valeurs à chaque instant.

Définition 4 (Noyau de viabilité) *Pour un horizon temporel $T \geq 0$ fixé, le noyau de viabilité $\text{Viab}(K, T)$, d'un ensemble de contraintes $K \subset X$ est l'ensemble défini de la manière suivante :*

$$\text{Viab}(K, T) = \{x_0 \in K \mid \exists u(\cdot) : [0, T] \rightarrow U \text{ mesurable, } \forall t \in [0, T] x(t) \in K\}$$

avec x la solution de 1.14.

Quelques remarques :

1. Puisque u peut prendre plusieurs valeurs, le cadre mathématique dans lequel on se place n'est plus celui des fonctions classiques (à valeurs ponctuelles) mais celui des fonctions à valeurs ensembles.
2. On peut vouloir qu'une propriété soit vraie pour toujours, dans le cadre de la théorie de la viabilité cela revient alors à déterminer : $\text{Viab}(K) := \limsup_T \text{Viab}(K, T)$.
3. On pourrait reprocher à la théorie de la viabilité de ne pas pouvoir prendre en compte - en apparence - une variation possible du domaine souhaitable K au cours du temps. Sous réserve de connaître son évolution au cours du temps et sous certaines conditions de régularité on peut, en augmentant la dimension de 1 (pour le temps), corriger cela.
4. Enfin, si (1.14) admet un point fixe, et qu'il appartient à K alors $\text{Viab}(K)$ est non vide.

1.2 Apports pour la modélisation des systèmes écologiques et sociaux

Ici, nous décrivons brièvement des concepts utilisés : système écologique et social, durabilité et transitions critiques.

1.2.1 Système écologique et social

Un système écologique et social est un système adaptatif complexe [Levin 2005]. Effectivement, un système écologique et social est composé de modules de différentes natures en interaction les uns avec les autres. Ces modules sont composés d'entités en interaction plus forte. La distinction de ces modules et sous-modules peut dépendre de l'échelle choisie, selon que l'on considère par exemple un village de pêcheurs ou bien l'ensemble de la planète [Bourg 2015].

Dans le modèle que nous construisons ci-après, nous choisissons de catégoriser les modules de la façon suivante : un système économique produisant des biens manufacturés, un système écologique vu comme capital naturel renouvelable exploité pour l'activité économique, enfin le système socio-anthropologique intervient pour décider l'intensité d'exploitation du capital naturel renouvelable, mais également l'intensité de consommation de biens manufacturés.

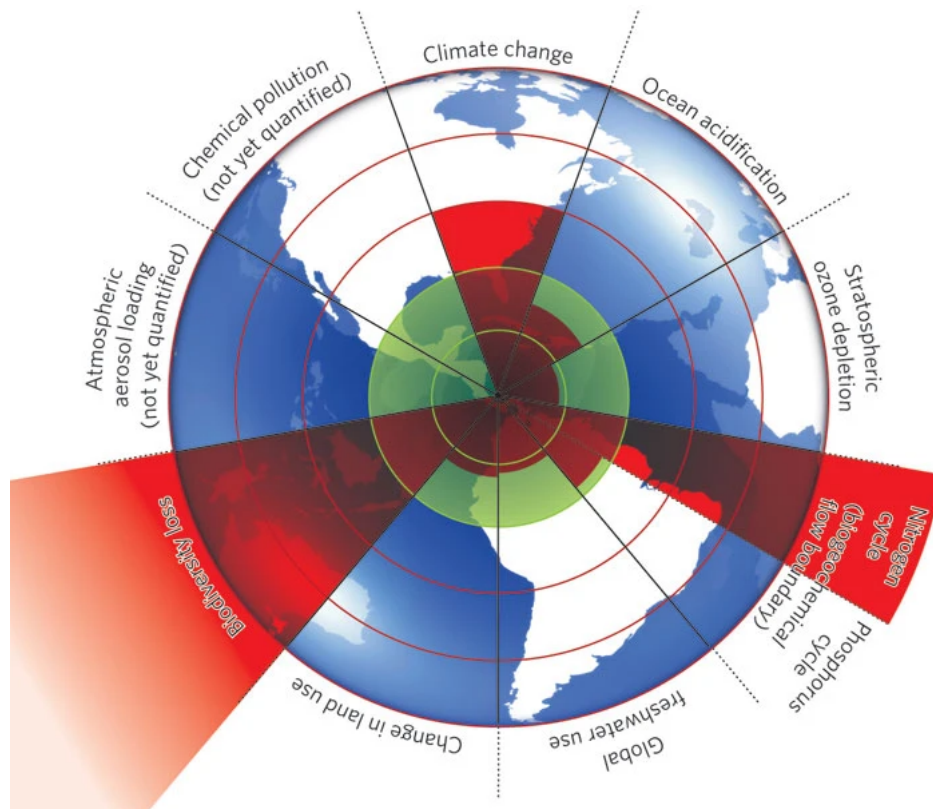


FIGURE 1.4 – Les neuf seuils planétaires identifiés par [Rockström 2009]. En vert la zone permettant le maintien de conditions propices à l’humanité. En rouges les domaines où les pratiques humaines perturbent les équilibres naturels.

1.2.2 Durabilité

Au sens premier du terme la durabilité exprime la capacité à se maintenir dans le temps. Par glissement sémantique, d’un point de vue économique, une pratique est dite durable lorsqu’elle respecte les limites environnementales (et qu’elle peut ainsi se maintenir dans le temps) [Raworth 2017]. Les limites environnementales sont multiples et dépendent de l’échelle spatiale considérée. Par exemple, à l’échelle de la biosphère, [Rockström 2009] liste neuf seuils concernant différentes quantités caractéristiques de la biosphère à ne pas dépasser si l’on ne veut pas déclencher des conséquences désastreuses pour l’humanité. Parmi ces seuils, trois sont actuellement déjà dépassés : celui relatif au déclin de la biodiversité, celui relatif au cycle de l’azote, et celui du réchauffement climatique, comme illustré sur la figure 1.4. Cet indicateur agrégé masque de fortes disparités. Au niveau de la disponibilité des quantités sous-jacentes : par exemple [Rockström 2009] ne mentionne pas l’eau douce comme seuil dépassé alors que sa disponibilité n’est pas assurée partout [Sophocleous 2004]. L’amélioration de ce point constitue d’ailleurs le sixième objectif de développement durable [Nations 2015]. L’indicateur agrégé ne donne pas d’informations non plus sur les contributions inégales des sociétés humaines aux dégradations de la biosphère. Or, à titre d’exemple, [Henriques 2017] ont montré que de fortes disparités en matière d’émission de gaz à effet de serre existaient entre les régions du monde.

1.2.3 Transitions critiques et hystérèse

La notion de transition critique est le pendant non-mathématique de celle des bifurcations. Une transition critique advient lorsque les caractéristiques fondamentales d’un système dynamique complexe ne sont plus maintenues. On parle d’hystérèse si ces transitions ne sont pas ré-

versibles simplement en se ramenant à la situation précédente la transition critique [Beisner 2003]. Par exemple, le modèle défini par l'équation (1.10) présente un phénomène d'hystérèse à mesure que k varie.

1.3 Questions traitées

Par l'étude d'un modèle, cette thèse répond à trois questions principales :

1. De quelles manières les propriétés supposées du processus productif impactent-elles la durabilité du système écologique et social ?
2. L'apparition d'un cycle de type explosion-déclin est-elle inéluctable à mesure que le processus productif devient plus productif ?
3. La stabilité est-elle vraiment toujours souhaitable ?

CHAPITRE 2

Méthodes

Cette section est divisée en trois parties. En premier, nous décrivons la construction du système différentiel modélisant le phénomène étudié. Ensuite, nous décrivons comment nous modélisons les changements possibles dans les systèmes économique et socio-anthropologique embarqués dans le système écologique et social. Enfin, nous donnons des informations sur les outils théoriques utilisés (pour savoir lorsque la stabilité asymptotique advient) et numériques (pour illustrer les différents comportements transitoires possibles).

Table des matières

2.1	Dynamique : coupler les phénomènes démographiques, écologiques et économiques	18
2.1.1	Démographie	19
2.1.2	Dynamique du niveau de capital naturel renouvelable	20
2.1.3	Dynamique de la quantité de biens manufacturés par individu	20
2.1.4	Formalisation mathématique	21
2.2	Embarquer des changements possibles dans les pratiques	21
2.3	Outils numériques et analytiques mobilisés	22
2.3.1	Existence d'un régime stationnaire	22
2.3.2	Comportement transitoire	22

2.1 Dynamique : coupler les phénomènes démographiques, écologiques et économiques

Nous modélisons la dynamique de trois variables, la taille de la population humaine x , le niveau de capital naturel renouvelable y et la quantité de biens manufacturés par individu z (cela implique donc que nous supposons que la taille de population est toujours non nulle et que chaque membre de la population dispose d'une quantité égale de biens manufacturés). Nous faisons les suppositions suivantes :

- Les individus sont égaux dans leur capacité à consommer des biens manufacturés et dans la sensibilité de leur taux de reproduction à cette consommation.
- Le système écologique et social est isolé. Aucun capital naturel renouvelable ni de biens manufacturés ne peut rentrer ni sortir du système écologique et social. Aucun individu ne peut quitter ni entrer dans le système écologique et social.
- Le maintien de la population dépend directement de la disponibilité en biens manufacturés (et indirectement de la disponibilité du capital naturel renouvelable).

Nous supposons que les variations de (x, y, z) sont données par un système d'équations de la forme suivante :

$$\dot{x} = \mu(C_c(\delta_C, z))x \quad (2.1)$$

$$\dot{y} = \Gamma(y) - Y_{ER}(px, y) \quad (2.2)$$

$$\dot{z} = \frac{C_{ER}((1-p)x, Y_{ER}(px, y))}{x} - C_c(\delta_C, z). \quad (2.3)$$

Le taux de croissance de la taille de population μ dépend explicitement de la quantité de biens manufacturés extrait par individu $C_c(\delta_C, z)$. $C_c(\cdot, \cdot)$ est une fonction croissante de la quantité de biens manufacturés disponibles par individu et d'un paramètre représentant l'intensité de consommation individuelle de biens manufacturés δ_C . Le capital naturel renouvelable est soumis à deux dynamiques antagonistes : une croissance logistique $\Gamma(\cdot)$ et une diminution due à l'extraction par une proportion p de la population pour produire des biens manufacturés, $Y_{ER}(px, y)$.

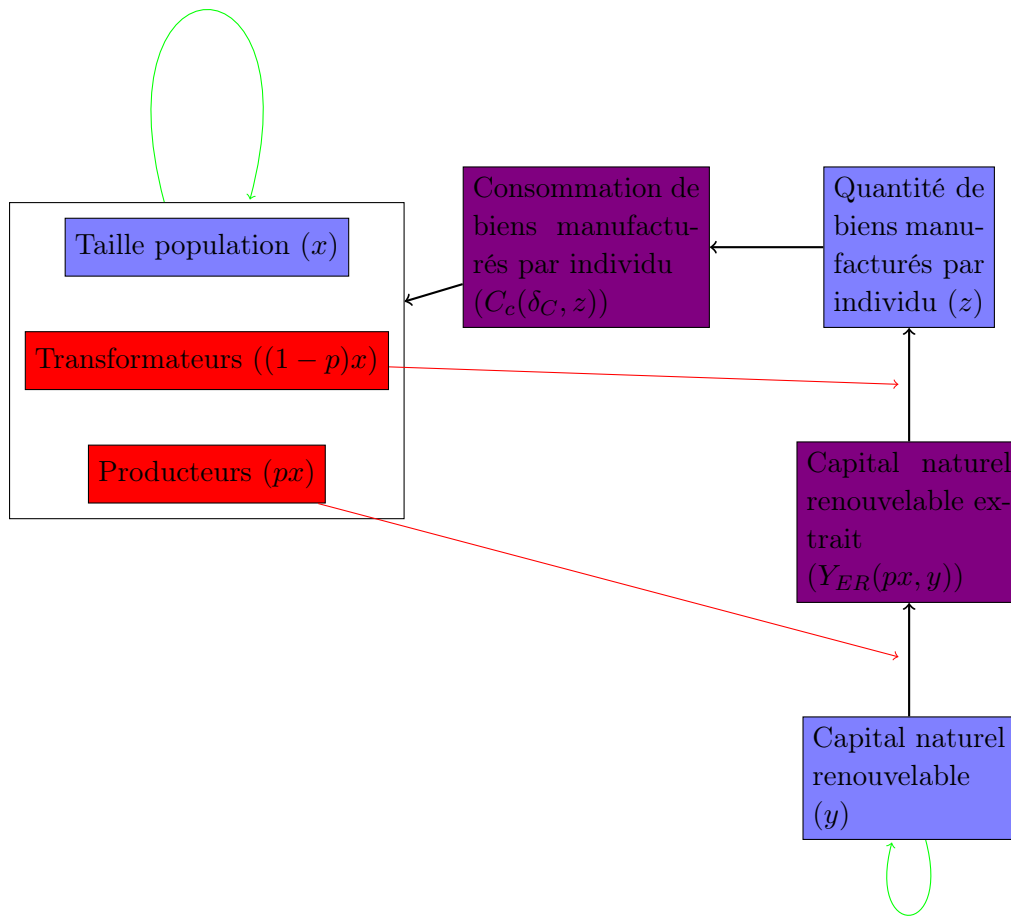


FIGURE 2.1 – Diagramme d’interactions. Les variables sont les boîtes bleues. Les boîtes violettes représentent des quantités extraites. Les boîtes rouges montrent la stratification de la population selon les tâches des agents. Les flèches rouges lient les types d’agents à leurs tâches. Les flèches noires illustrent des flux. Les flèches vertes illustrent des dynamiques auto-reproduisantes.

$Y_{ER}(\cdot, \cdot)$ est une fonction croissante du nombre d’agents impliqués dans le processus d’extraction et de la quantité de capital naturel renouvelable disponible.

La dynamique de la quantité de biens manufacturés par individu est soumise à deux dynamiques antagonistes. D’une part, elle croît, à cause du processus de production par individu $\frac{C_{ER}((1-p)x, Y_{ER}(px, y))}{x}$. D’autre part, elle décroît, puisque chaque individu consomme pour se maintenir voir se reproduire $C_c(\delta_C, z)$. La fonction de production $C_{ER}(\cdot, \cdot)$ est une fonction croissante du nombre d’agents impliqués dans le processus de transformation du capital naturel renouvelable extrait et de la quantité de capital naturel renouvelable extrait.

Ces interactions sont résumées dans le diagramme de la figure 2.1. Dans le reste de cette section nous présentons les formes fonctionnelles utilisées.

2.1.1 Démographie

La population est considérée uniforme dans sa capacité à consommer des biens manufacturés et dans la sensibilité sur la reproduction de cette consommation. En lien avec la théorie de la transition démographique [Coale 1989], nous supposons un lien non-monotone entre la quantité de biens manufacturés par individu extrait $C_c(\delta_C, z)$ et le taux de croissance de la taille de

population μ . Il existe d'autres façons d'embarquer la transition démographique [Lafuite 2017]. Nous nous en écartons puisque nous supposons qu'un seul type de bien est consommé par la population humaine et que l'intensité de cette consommation ne répond pas à une optimisation sous contrainte. Ainsi, pour reprendre la classification de [Roman 2017] notre modèle est plus d'inspiration écologique qu'économique. μ est la différence entre le taux de mortalité et le taux de natalité. Par souci de simplicité, nous ne raisonnons que sur lui dans les équations.

$$\mu(C_c(\delta_C, z)) := \begin{cases} \mu_m + kC_c(\delta_C, z), & \text{si } C_c(\delta_C, z) \leq \arg(\mu_M) \\ \mu_M e^{-(C_c(\delta_C, z) - \arg(\mu_M))} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.4)$$

avec μ_m le taux de croissance minimal pour la taille de population (négatif), μ_M le taux de croissance maximal pour la taille de population, $C_c(\delta_C, z)$ la consommation par individu de biens manufacturés, $\arg(\mu_M)$ est le niveau de consommation de biens manufacturés par individu qui maximise μ , $k := \frac{\mu_M - \mu_m}{\arg(\mu_M)}$ correspond à la sensibilité de μ à la consommation de biens manufacturés lorsqu'ils sont peu abondants.

2.1.2 Dynamique du niveau de capital naturel renouvelable

Le niveau de capital naturel [Missemer 2018] renouvelable y , est modélisé comme auto-reproduisant et exploité par les humains. Nous supposons que le terme correspondant à l'extraction faite par les producteurs correspond à un terme de type Lotka-Volterra (considérant les producteurs comme les prédateurs et le capital naturel renouvelable comme la proie). Ainsi la dynamique détaillée de y est :

$$\dot{y} = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right) - \delta_R p x y$$

avec r le taux de reproduction du capital naturel renouvelable, K correspond à niveau maximum, δ_R correspond à l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable et p donne la proportion de producteurs dans la population humaine.

2.1.3 Dynamique de la quantité de biens manufacturés par individu

Les biens manufacturés sont créés en transformant du capital naturel renouvelable extrait grâce au travail des transformateurs. Ils sont ensuite répartis de façon égale entre les différents individus. Nous utilisons comme fonction de production une fonction de type Cobb-Douglas avec deux intrants : le nombre de transformateurs et le capital naturel renouvelable extrait. La consommation individuelle de biens manufacturés est représentée par le terme suivant : $C_c(\delta_C, z) := \delta_C z$. δ_C correspond à l'intensité de la consommation de biens manufacturés. La dynamique de z est donc :

$$\dot{z} = \frac{A((1-p)x)^\alpha (\delta_R p x y)^\beta}{x} - \delta_C z.$$

Le premier terme de la différence correspond au flux entrant et le second correspond au flux sortant. Le premier est donc formé d'une fonction de type Cobb-Douglas divisée par la taille de population. A correspond à la productivité totale des facteurs, un nombre $(1-p)x$ de transformateurs comme premier intrant (avec une élasticité de α) et une quantité $\delta_R p x y$ de capital naturel renouvelable extrait comme second intrant (avec une élasticité de β). Nous supposons donc que la population n'est pas stratifiée par âge (chaque membre est impliqué dans l'un des deux types de tâches). Notre modèle peut embarquer les trois possibilités concernant le rendement d'échelle. Si l'élasticité par rapport aux transformateurs α et celle par rapport au capital naturel renouvelable extrait β se somment à moins (respectivement plus) de un, le processus productif est dit à rendement d'échelle décroissant (respectivement rendement d'échelle croissant) :

Symbole	Signification
A	Productivité totale des facteurs
α	Élasticité par rapport aux transformateurs
β	Élasticité par rapport au capital naturel renouvelable extrait
μ_m	Taux de croissance minimum de la population
μ_M	Taux de croissance maximum de la population
$\arg(\mu_M)$	Niveau de consommation individuel de biens manufacturés maximisant le taux de croissance
K	Niveau maximum de capital naturel renouvelable
r	Taux de reproduction du capital naturel renouvelable

TABLE 2.1 – Symboles et définitions des paramètres fixes de la dynamique.

Symbole	Signification
δ_R	Intensité d'extraction du capital naturel renouvelable
δ_C	Intensité de consommation individuelle de biens manufacturés
p	Proportion de producteurs dans la population

TABLE 2.2 – Symboles et définitions des contrôles de la dynamique.

si les intrants (quantité de transformateurs ou capital naturel renouvelable extrait) changent proportionnellement, la production augmente moins (respectivement plus) que proportionnellement. S'ils se somment à un, le processus productif est dit à rendement d'échelle constant. Le rendement d'échelle supposé est très important, car il impacte la nature des résultats. Par commodité, nous supposons les élasticités et la productivité totale fixes.

2.1.4 Formalisation mathématique

La dynamique de notre problème est donc donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu(\delta_C z)x \\ \dot{y} &= ry\left(1 - \frac{y}{K}\right) - \delta_R pxy \\ \dot{z} &= A(1-p)^\alpha (\delta_R p)^\beta x^{\alpha+\beta-1} y^\beta - \delta_C z.\end{aligned}$$

L'espace des phases est :

$$\mathbb{R}^{+*} \times [0, K] \times \mathbb{R}^+.$$

Nous cherchons à identifier les conditions de soutenabilité d'un système écologique et social. Dans le cadre mathématique utilisé, nous qualifions la situation de soutenable lorsqu'un point fixe avec cohabitation (un point fixe avec aucune composante nulle) existe et est stable. La stabilité n'exclut pas la présence de cycles mais elle assure que ces cycles soient amortis (sous réserve que le système se trouve suffisamment proche du point fixe avec cohabitation). Inversement, lorsqu'un point fixe stable n'existe pas, nous disons que le système écologique et social est en crise.

2.2 Embarquer des changements possibles dans les pratiques

Dans la dynamique (2.1.4), nous supposons que certains paramètres peuvent être changés (car directement liés à l'organisation sociale et économique du système écologique et social) afin d'augmenter la durabilité du système écologique et social. Nous les appelons contrôles. Les contrôles que nous supposons sont l'intensité de consommation de biens manufacturés δ_C (qui détermine la dynamique de la population, par la reproduction et l'éducation des individus),

l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable δ_R et la répartition des tâches dans la population définie par p .

Nous sélectionnons ces contrôles car ils ne dépendent pas uniquement de l'état de connaissance technique. Ainsi, il nous apparaît raisonnable de considérer que ce sont les plus faciles à changer si l'on veut parvenir à la durabilité. Ces contrôles sont listés dans la table 2.2. Les autres paramètres sont listés dans la table 2.1. Nous supposons donc pouvoir -partiellement- contrôler deux boucles de rétroactions, celle de l'exploitation du capital naturel renouvelable et celle de la reproduction de la population humaine.

2.3 Outils numériques et analytiques mobilisés

2.3.1 Existence d'un régime stationnaire

Nous utilisons le critère de Routh-Hurwitz pour évaluer les conditions (sur les contrôles et les paramètres) pour que la stabilité asymptotique advienne.

2.3.2 Comportement transitoire

Pour étudier le comportement transitoire du système, nous utilisons le langage Python (version 3.6.9) afin de simuler numériquement les trajectoires.

CHAPITRE 3

Résultats

Table des matières

3.1	Existence et stabilité d'un point stationnaire avec cohabitation	24
3.1.1	Condition d'existence	24
3.1.2	Condition de stabilité	26
3.1.3	Synthèse	30
3.2	Sensibilité du point stationnaire avec cohabitation	31
3.2.1	Variations de ses composantes	31
3.2.2	Sensibilité de sa stabilité	33
3.2.3	Synthèse	36
3.3	Aspects transitoires des crises	38
3.3.1	Flux de biens manufacturés faible	38
3.3.2	Surproduction	39
3.3.3	Synthèse	41
3.4	Estimer la sensibilité de la viabilité du système	43
3.4.1	Deux potentiels estimateurs du noyau de viabilité	43
3.4.2	Comparaison entre ces deux estimateurs	43
3.4.3	Synthèse	44
3.5	Entre sobriété et instabilité	46
3.5.1	Mise en évidence d'un piège socio-écologique	46
3.5.2	Espace traversé par la dynamique	46
3.5.3	Sensibilité des ces espaces aux contrôles	48
3.5.4	Synthèse	48

3.1 Existence et stabilité d'un point stationnaire avec cohabitation

Nous appelons point fixe avec cohabitation du système d'équations (2.1.4), un point fixe (définition 1) avec aucune composante nulle. Dans cette section, nous donnons les conditions pour qu'un tel point existe et soit stable.

3.1.1 Condition d'existence

Les détails des calculs de cette section sont dans l'annexe A. Un point fixe avec cohabitation $S_0 := (x_0, y_0, z_0)$ vérifie le système d'équations suivant :

$$z_0 = \frac{s}{\delta_C} \quad (3.1)$$

$$y_0 = K \left(1 - \frac{\delta_{RP}}{r} x_0 \right) \quad (3.2)$$

$$P_{(\alpha, \beta)}(x_0) := A(1-p)^\alpha (K\delta_{RP})^\beta x_0^{\alpha+\beta-1} \left(1 - \frac{\delta_{RP}}{r} x_0 \right)^\beta = s, \quad (3.3)$$

avec $s := -\frac{\mu_m \arg(\mu_M)}{\mu_M - \mu_m}$, le niveau de subsistance (c'est la quantité de biens manufacturés par individu qui permet à la population de se maintenir), si la quantité de biens manufacturés est inférieure (respectivement supérieure) la taille de population diminue (respectivement augmente)

et $P_{(\alpha,\beta)}$ la fonction de production de biens manufacturés par individu à l'équilibre. Cette dernière est obtenue à partir de la dynamique de z en supposant que la dynamique (cf section 2.1.4) est à l'équilibre et donc en substituant y par y_0 (et son expression en fonction de x_0) et z par z_0 . z_0 est donné explicitement et ne dépend que du niveau de subsistance et de l'intensité de consommation de biens manufacturés, $z_0 = \frac{s}{\delta_C}$. La valeur exacte de (x_0, y_0) n'est pas toujours accessible (elle ne l'est qu'en cas de rendement d'échelle constant ou dans un cas particulier de rendement d'échelle croissant peu vraisemblable, voir sous-section 3.2.1.1). De plus, un point fixe avec cohabitation existe si une condition de subsistance est satisfaite : le processus productif à l'équilibre doit être capable de produire suffisamment pour que la population se maintienne. La formule liant x_0 et y_0 informe sur un majorant de la taille de population à l'équilibre : cette dernière ne peut pas dépasser $\frac{r}{\delta_{RP}}$. La condition de subsistance dépend de la fonction de production de biens manufacturés par individu à l'équilibre, or cette dernière dépend du rendement d'échelle supposé. Il y a ainsi 3 différents cas à considérer (selon les rendements d'échelle).

1. En cas de rendement d'échelle décroissant, la fonction de production de biens manufacturés par individu à l'équilibre est une fonction décroissante de la taille de population à l'équilibre. Elle tend vers l'infini lorsque la taille de population tend vers zéro et elle tend vers zéro lorsque la taille de population s'approche de sa valeur maximale. La condition de subsistance est ainsi toujours satisfaite. Remarquons qu'à un niveau de subsistance donné, une seule taille de population peut correspondre (comme antécédent par la fonction de production de biens manufacturés par individu à l'équilibre).
2. En cas de rendement d'échelle constant, la fonction de production de biens manufacturés par individu à l'équilibre est une fonction décroissante de la taille de population à l'équilibre (comme précédemment, à un niveau de subsistance donné, une seule taille de population peut correspondre (comme antécédent par la fonction de production de biens manufacturés par individu à l'équilibre)). Comme précédemment, elle tend vers zéro lorsque la taille de population s'approche de sa valeur maximale, mais elle est majorée. Le niveau de subsistance peut ne jamais être atteint, qu'importe la taille de population. La condition de subsistance n'est pas toujours satisfaite, elle est donnée par :

$$P_{(\alpha,1-\alpha)}(0) > s \iff A(1-p)^\alpha (K\delta_{RP})^{1-\alpha} > s. \quad (3.4)$$

3. En cas de rendement d'échelle croissant, la fonction de production de biens manufacturés par individu à l'équilibre n'est pas monotone (et cela diffère des deux cas précédents). Elle est maximum en $x_M := \frac{r}{\delta_{RP}} \frac{\alpha+\beta-1}{\alpha+2\beta-1}$. Pour une faible taille de population (inférieure à x_M), elle est croissante. Pour une taille de population supérieure à x_M elle est décroissante. Comme précédemment, elle est majorée (par sa valeur en x_M). La condition de subsistance n'est donc pas toujours satisfaite. Cependant lorsqu'elle l'est, il est possible que ce le soit pour deux tailles de populations différentes (une située dans la zone où la fonction de production de biens manufacturés par individu à l'équilibre est croissante et une située dans la zone où la fonction de production de biens manufacturés par individu à l'équilibre est décroissante). Ainsi deux points fixes avec cohabitation peuvent exister, l'un présentant une taille de population relativement faible, un niveau de capital naturel renouvelable assez élevé et l'autre une taille de population élevée et un niveau de capital naturel renouvelable plus faible. La condition de subsistance est donnée par :

$$P_{(\alpha,\beta)}(x_M) \geq s \iff A(1-p)^\alpha (\delta_{RP})^{1-\alpha} \psi_M \geq s \quad (3.5)$$

$$\text{avec } \psi_M := \frac{(K\beta)^\beta (r(\alpha+\beta-1))^{\alpha+\beta-1}}{(\alpha+2\beta-1)^{\alpha+2\beta-1}}.$$

3.1.2 Condition de stabilité

Les détails des calculs de cette section sont dans l'annexe C. Dans cette section, nous supposons qu'un point fixe avec cohabitation existe. Pour évaluer la stabilité d'un point fixe avec cohabitation $S_0 = (x_0, y_0, z_0)$, nous devons déterminer le signe de la partie réelle des valeurs propres de sa jacobienne (par théorème 1 de la section 1.1.2). En utilisant les informations liant les différentes composantes d'un point fixe avec cohabitation, nous obtenons que la jacobienne est égale à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu'(\delta_C z_0)x\delta_C \\ -\delta_{RP}y_0 & -ry_0/K & 0 \\ (\alpha + \beta - 1)\delta_C z_0/x_0 & \beta\delta_C z_0/y_0 & -\delta_C \end{pmatrix}.$$

Il n'est pas possible de connaître exactement les valeurs propres de cette matrice. Pour cette raison, nous mobilisons le critère de Routh-Hurwitz (donné par la proposition 1 de la section 1.1.2) et obtenons que le point fixe avec cohabitation est asymptotiquement stable (définition 3 de la section 1.1.2) si et seulement si le système suivant est vérifié :

$$\frac{ry_0}{K} + \delta_C x_0 > 0 \quad (3.6)$$

$$r(\alpha + \beta - 1) < \delta_{RP}x_0(\alpha + 2\beta - 1) \quad (3.7)$$

$$\delta_C R(x_0) < Q(x_0), \quad (3.8)$$

avec :

$$R(x_0) := (\alpha + \beta - 1)(-\mu_m) - r + x_0 \quad (3.9)$$

$$Q(x_0) := x_0^2 - (2r + \beta(-\mu_m))x_0 + r^2. \quad (3.10)$$

L'équation (3.6) est toujours vérifiée. L'équation (3.7) est toujours vérifiée en cas de rendement d'échelle constant ou rendement d'échelle décroissant. En cas de rendement d'échelle croissant, l'équation (3.7) discrimine le point fixe avec cohabitation avec la plus petite taille de population. L'inégalité est stricte dans l'équation (3.7), cela impacte la condition de subsistance dans le cas rendement d'échelle croissant et l'équation (3.5) doit être satisfaite de façon stricte.

Ainsi, si un point fixe avec cohabitation stable existe, il est unique. Nous le nommons $S := (x_*, y_*, z_*)$. Il est exactement égal à S_0 en cas de rendement d'échelle constant ou de rendement d'échelle décroissant. En cas de rendement d'échelle croissant, il n'est défini que lorsque l'équation (3.5) est satisfaite strictement, et il est alors égal au point fixe avec cohabitation avec la plus grande taille de population.

L'équation (3.8) est la seule équation contenant le terme d'intensité de consommation de biens manufacturés δ_C . La stabilité de S dépend donc de la valeur de δ_C mais aussi des autres paramètres du modèle. Nous trouvons qu'une distinction selon les rendements d'échelle supposés doit être faite.

Définissons les seuils de taille de population suivants :

$$x_{Q,1} := \frac{r}{\delta_{RP}} - \frac{\beta\mu_m + \sqrt{\beta\mu_m(\beta\mu_m - 4r)}}{2\delta_{RP}} \quad (3.11)$$

$$x_R := \frac{r + (\alpha + \beta - 1)\mu_m}{\delta_{RP}}. \quad (3.12)$$

Nous rappelons que $x_M = \frac{r}{\delta_{RP}} \frac{\alpha + \beta - 1}{\alpha + 2\beta - 1}$, défini en cas de rendement d'échelle croissant ou constant, correspond à la taille de population qui maximise la production de biens manufacturés par individu à l'équilibre. La position de x_* par rapport à x_R donne la nature de la condition sur δ_C pour avoir la stabilité. Si la taille de population est inférieure à x_R la condition donne une

minoration de δ_C .

En cas de rendement d'échelle décroissant, x_R est situé à l'extérieur de l'ensemble des valeurs possibles de x_* . Ce n'est donc pas un seuil pertinent. x_* doit donc être comparé à $x_{Q,1}$. Si x_* est inférieure à $x_{Q,1}$ alors S est stable, sinon il l'est si et seulement si δ_C est suffisamment grand (comme résumé dans la section C.3 de l'annexe C). δ_C doit être supérieur à la quantité suivante :

$$\Delta:]x_{Q,1}, x_R[\rightarrow \mathbb{R} \quad (3.13)$$

$$x_* \mapsto \Delta(x_*) := \delta_{RP} \frac{x_*^2 - x_*(x_{Q,1} + x_{Q,2}) + x_{Q,1}x_{Q,2}}{x_* - x_R}, \quad (3.14)$$

avec $x_{Q,2}$ une taille seuil de population majorant x_* .

En cas de rendement d'échelle constant, x_* doit encore être comparé à $x_{Q,1}$. Si x_* est inférieure à $x_{Q,1}$ alors S est stable, sinon il l'est si et seulement si δ_C est suffisamment grand (comme résumé dans la section C.2 de l'annexe C). δ_C doit être supérieur à $\Delta(x_*)$ (cf équation 3.14).

En cas de rendement d'échelle croissant, la position relative des différents seuils x_M , x_R et $x_{Q,1}$ dépend du paramètre suivant :

$$\psi := \beta r - (\alpha + \beta - 1)(\alpha + 2\beta - 1)(-\mu_m). \quad (3.15)$$

ψ doit être strictement supérieure à zéro pour que S puisse être stable (cf section C.1 de l'annexe C. Lorsque $\psi > 0$, les seuils sont ordonnés de la façon suivante : $x_M < x_{Q,1} < x_R$ (cf équation C.15).

Lorsque $\psi > 0$, la stabilité de S advient dans deux situations qualitativement différentes :

- La taille de population à l'équilibre est relativement faible (i.e. $x_* \leq x_{Q,1}$) (cf branches 2a et 2b de l'arbre de la section C.1 des annexes). Dans un tel cas, puisque la stabilité ne dépend pas de la valeur de l'intensité de consommation de biens manufacturés, nous qualifions le système écologique et social de « socialement et biophysiquement adapté ».
- La taille de population est plus élevée (i.e. $x_{Q,1} < x_* < x_R$), et l'intensité de consommation de biens manufacturés δ_C est supérieure au seuil défini par Δ (cf équation 3.14) (cf branche 2c de l'arbre de la section C.1 des annexes).

Inversement, lorsque S existe mais est instable, nous pouvons distinguer trois situations :

- $\psi < 0$. Le taux de régénération du capital naturel renouvelable r n'est pas assez élevé par rapport à un certain seuil dépendant de la sensibilité du processus productif à ses intrants (α et β) et au taux de déclin maximum de la taille de population μ_m (cf branche 1 de l'arbre de la section C.1 des annexes). Nous qualifions cette crise de « faible productivité de l'écosystème ».
- La taille de population est plus élevée (i.e. $x_{Q,1} < x_* < x_R$), et l'intensité de consommation de biens manufacturés δ_C n'est pas suffisamment élevée pour empêcher l'apparition de cycles du type explosion-déclin (cf branche 2c de l'arbre de la section C.1 des annexes). La quantité de biens manufacturés par individu augmente, puis la taille de population augmente, puis le niveau de capital naturel renouvelable diminue, puis la quantité de biens manufacturés par individu diminue, puis la taille de population diminue, puis le niveau de capital naturel renouvelable augmente, puis le niveau de biens manufacturés par individu augmente et ainsi de suite. Nous qualifions cette crise de « déficit de consommation de biens manufacturés ».
- La taille de population est encore plus élevée (i.e. $x_R \leq x_*$). Le cycle explosion déclin ne peut être résorbé par une valeur adéquate de δ_C (cf branches 2d et 2e de l'arbre de la section C.1). Nous qualifions cette crise de « flux de biens manufacturés trop élevé ».

Le raisonnement présenté dans cette section peut être résumé par l'arbre de classification de la figure 3.1 et est détaillé dans les sections C.1 et C.2.

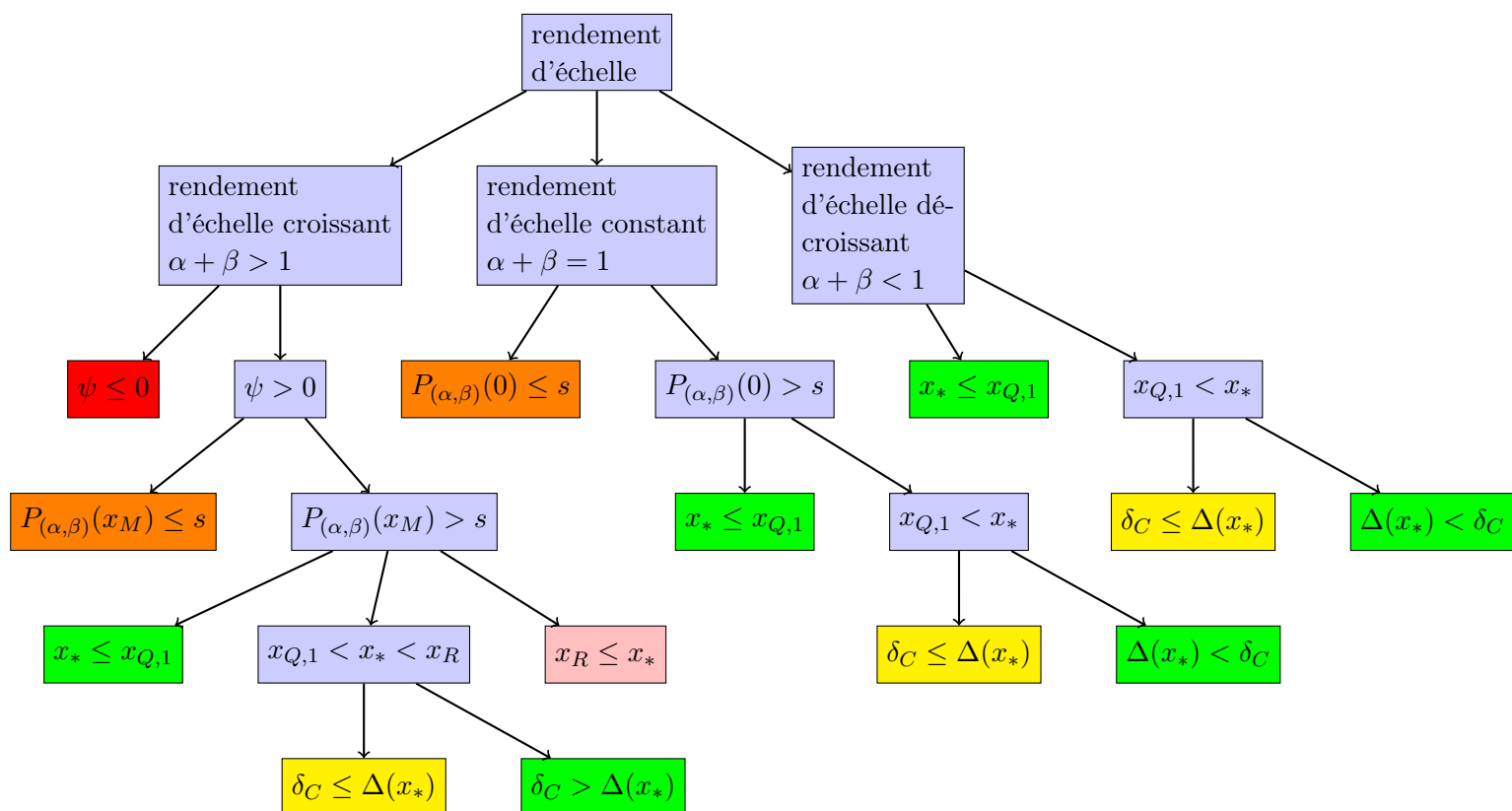


FIGURE 3.1 – Crises possibles et différents régimes pour le point fixe avec cohabitation. Les feuilles vertes désignent les cas asymptotiquement stables. Les autres couleurs désignent les cas où la stabilité asymptotique n’advient pas ; différentes raisons sont possibles. Les oranges désignent les situations où la condition de subsistance n’est pas strictement remplie. Les jaunes où l’intensité de consommation de biens manufacturés est trop faible. La rose désigne le cas où aucune valeur de l’intensité de consommation de biens manufacturés ne peut donner la stabilité asymptotique. La feuille rouge désigne le cas où le taux de reproduction du capital naturel renouvelable n’est pas assez élevé par rapport aux paramètres α , β et μ_m .

Nom	rendement d'échelle possible(s)	(s) Critère quantitatif	Interprétations	Si dépendant de (p, δ_R, δ_C) type de bifurcation
Faible productivité de l'écosystème	RECr	$\psi \leq 0$	La reproduction du capital naturel renouvelable est trop faible pour permettre l'existence d'un point fixe avec cohabitation stable.	
Flux de biens manufacturés faible	RECr, RECo	$\sup_{x \in]0, \frac{x}{\delta_{RP}}} [P_{(\alpha, \beta)}(x) \leq s$	Le processus productif n'est pas suffisamment efficace pour satisfaire la condition de subsistance.	RECr : Noeud-col. RECo : Transcritique.
Déficit de consommation de biens manufacturés	RED, RECo, RECr	$\begin{cases} \delta_C \leq \Delta(x_*) \\ x_{Q,1} < x_* < x_R \end{cases}$	L'intensité de consommation de biens manufacturés n'est pas suffisamment élevée pour empêcher l'apparition de cycle de type explosion-déclin.	Bifurcation de Hopf
Flux de biens manufacturés trop élevé	RECr	$x_R \leq x_*$	Similaire à la crise précédente à la différence que pour en sortir, un changement d'intensité de consommation de biens manufacturés seul n'est pas suffisant.	Bifurcation de Hopf

FIGURE 3.2 – Classification des crises. Remarque : le type de bifurcation de la première crise n'est pas étudié puisqu'elle ne dépend pas des contrôles. RED signifie rendement d'échelle décroissant. RECo signifie rendement d'échelle constant. RECr signifie rendement d'échelle croissant.

3.1.3 Synthèse

Le système écologique et social modélisé par le système d'équations donné à la section 2.1.4 peut donc présenter quatre crises qualitativement différentes. Le système écologique et social modélisé peut se trouver dans six régimes différents. Un premier régime que nous nommons « socialement et biophysiquement adapté » pour lequel un point fixe avec cohabitation stable existe et aucune minoration de l'intensité de consommation de biens manufacturés ne s'applique, un deuxième dans lequel l'intensité de consommation de biens manufacturés est suffisamment élevée pour permettre la stabilité du point fixe avec cohabitation, ces régimes sont représentés sur la figure 3.1 par les feuilles de couleur verte. Un troisième régime que nous nommons « flux de biens manufacturés faible » correspond à l'absence de point fixe avec cohabitation (représenté sur la figure 3.1 par les feuilles de couleur orange). Trois régimes présentent un point fixe avec cohabitation instable (un cycle limite l'entourant). Dans le premier régime, il est possible de stabiliser la situation en augmentant l'intensité de consommation de biens manufacturés (représenté sur la figure 3.1 par les feuilles de couleur jaune), que nous nommons « déficit de consommation de biens manufacturés ». Dans le deuxième, il faut changer d'autres contrôles (représenté sur la figure 3.1 par la feuille de couleur rose), nous nommons ce régime « flux de biens manufacturés trop élevé ». Enfin, dans le troisième, il n'est pas possible de stabiliser le système en changeant p , δ_R ou δ_C (représenté sur la figure 3.1 par la feuilles de couleur rouge), nous nommons ce régime « faible productivité de l'écosystème ».

Ces régimes dépendent des contrôles. Un changement de régime correspond à une bifurcation puisque, d'un régime à un autre, le comportement d'une solution du système d'équations donné à la section 2.1.4 est qualitativement modifié. La transgression de la condition de subsistance (dans le cas de la crise appelée « flux de biens manufacturés faible » tableau 3.2) correspond à une bifurcation de type col-noeud (respectivement transcritique) en cas de rendement d'échelle croissant (respectivement dans le cas rendement d'échelle constant). Ces bifurcations correspondent à la disparition du point fixe avec cohabitation. En cas de bifurcation de type transcritique, le point fixe avec cohabitation se rapproche d'un point ayant une taille de population nulle et un niveau de capital naturel renouvelable maximal. Ainsi, en cas de rendement d'échelle constant, localement la bifurcation ne transforme pas radicalement la dynamique.

En cas de bifurcation de type col-noeud, les deux points fixes avec cohabitation possibles se rapprochent jusqu'à s'annihiler. Avant la bifurcation, la taille de population du point fixe avec cohabitation stable reste toujours supérieure à une taille non nulle x_M . Ainsi, avant la bifurcation, des trajectoires démarrant suffisamment proches de S convergent vers S (et la taille de la population fluctue peut-être, mais ne tend pas vers zéro). Après la bifurcation, de telles trajectoires convergent vers un état avec une taille de population nulle, un niveau de capital naturel renouvelable maximum et un niveau quelconque de biens manufacturés. Cette bifurcation transforme drastiquement la dynamique.

Une surproduction de biens manufacturés (troisième ou quatrième ligne du tableau 3.2) correspond à une bifurcation de type Hopf. Notons que, lorsque la taille de population est comprise entre les seuils $x_{Q,1}$ et x_R l'instabilité est possible, mais pas certaine (elle dépend de la valeur de Δ par rapport à δ_C) par contre (uniquement dans le cas rendement d'échelle croissant), lorsque la taille de population dépasse x_R l'instabilité devient certaine. En cas de bifurcation de type Hopf, un cycle limite apparaît, correspondant ici à des phases d'explosion-déclin : la consommation de biens manufacturés n'est pas suffisamment élevée par rapport à la vitesse à laquelle ils sont créés, la population humaine augmente donc, ce qui entraîne une augmentation de la pression sur le capital naturel renouvelable, ce qui entraîne une diminution de la production de biens manufacturés et donc un déclin de biens manufacturés par individu et induit une diminution de la taille de population, le capital naturel renouvelable se régénère donc, la production de biens

manufacturés augmente et ainsi de suite.

Dans cette section, nous n'étudions que partiellement l'influence des caractéristiques des pratiques des systèmes socio-anthropologique et économique embarqués dans le système écologique et social sur la stabilité de S . Dans la section suivante, nous étudions l'influence de variations de certaines de ses caractéristiques sur les composantes de S , mais aussi sur sa stabilité.

3.2 Sensibilité du point stationnaire avec cohabitation

Cette section étudie la sensibilité d'un point fixe avec cohabitation aux changements de certains paramètres du modèle. La première partie étudie l'influence des contrôles caractérisant les systèmes économique et socio-anthropologique embarqués dans le système écologique et social sur les valeurs du point fixe avec cohabitation. La seconde étudie leurs influences sur sa stabilité. Concernant le point fixe avec cohabitation, puisque un seul est potentiellement asymptotiquement stable, à partir de maintenant nous nous intéressons exclusivement à lui, $S = (x_*, y_*, z_*)$. Nous rappelons que, S est égal à S_0 dans le cas rendement d'échelle constant ou rendement d'échelle décroissant. Dans le cas rendement d'échelle croissant, lorsque la condition de subsistance (donnée par l'équation (3.5)) est satisfaite strictement, S est le point fixe avec cohabitation avec la plus grande taille de population tandis que S_0 est le point fixe avec cohabitation avec la plus petite taille de population.

3.2.1 Variations de ses composantes

D'après l'équation (A.4), z_* est indépendant de (p, δ_R) et inversement proportionnel à δ_C . D'après les équations (A.6) et (A.5), x_* et y_* sont indépendantes de δ_C mais dépendent de (p, δ_R) . Pour ces raisons, ci-après nous étudions l'influence de certains types de changement des paramètres de contrôles sur (x_*, y_*) . Plus précisément, nous étudions l'influence de certains types de stratégies de changement d'organisation sociale du système écologique et social. La première stratégie est liée à la modification de l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable. La seconde est liée à la modification de la répartition des tâches. Enfin, nous étudions l'influence de la répartition des tâches tout en maintenant un effort d'extraction constant.

Pour chaque stratégie, nous répondons aux deux questions suivantes : comment la condition de subsistance se transcrit-elle sur les contrôles possibles ? Que pouvons nous dire de x_* et y_* vus comme fonctions des contrôles modifiés ?

3.2.1.1 Influence du changement de l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable

La seconde question structure ce paragraphe selon la valeur d' α , en effet suivant sa valeur les variations de $x_*(\cdot, p)$ et de $y_*(\cdot, p)$ ne sont pas de la même nature. Les détails des calculs de cette partie sont dans l'annexe B et la sous-section D.1.2.

Lorsque $\alpha < 1$ En cas de rendement d'échelle croissant ou de rendement d'échelle constant, la condition de subsistance impose à l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable δ_R d'être supérieure à un seuil (mais pas d'être inférieure à un autre). Plus précisément, dans le cas rendement d'échelle constant, la condition de subsistance équivaut à ce que δ_R soit supérieur à une borne inférieure positive. Dans le cas rendement d'échelle croissant, δ_R doit être supérieur ou égal à une valeur minimale positive. Pour tout rendement d'échelle possible, $y_*(\cdot, p)$ est une fonction décroissante alors que $x_*(\cdot, p)$ est une fonction croissante puis décroissante.

Les valeurs limites de la taille de population comme du niveau de capital naturel renouvelable

dépendent du rendement d'échelle. En effet, en cas de rendement d'échelle décroissant ou rendement d'échelle constant la taille de population tend vers 0 lorsque δ_R s'approche de sa borne inférieure alors qu'en cas de rendement d'échelle croissant la taille de population est équivalente à $x_M(\cdot, p)$ lorsque δ_R tend vers sa valeur minimale et $x_*(\cdot, p)$ tend donc vers une valeur non nulle. Pour tout rendement d'échelle, lorsque δ_R tend vers l'infini, $x_*(\cdot, p)$ tend vers 0.

Pour le niveau de capital naturel renouvelable, le comportement est analogue, en cas de rendement d'échelle constant ou rendement d'échelle décroissant il tend vers K lorsque δ_R tend vers sa borne inférieure et il tend vers 0 lorsque δ_R tend vers l'infini. Par contre, en cas de rendement d'échelle croissant, lorsque δ_R s'approche de sa valeur minimale, le niveau de capital naturel renouvelable tend vers :

$$y_M := \frac{K\beta}{\alpha + 2\beta - 1}. \quad (3.16)$$

Lorsque δ_R tend vers l'infini, le niveau de capital naturel renouvelable tend vers 0.

Lorsque $\alpha \geq 1$ Le seul rendement d'échelle possible est le cas rendement d'échelle croissant. La condition de subsistance impose à δ_R d'être inférieur ou égal à un certain seuil positif et sur cet ensemble la taille de population sera une fonction décroissante tandis que le niveau de capital naturel renouvelable sera une fonction croissante de δ_R . Voir sous-sections B.1.2 et B.2.4.

Remarque importante Lorsque $\alpha \geq 1$, la taille de la population est une fonction décroissante de δ_R . Or, pour un système écologique et social donné, si la population exploite peu le capital naturel renouvelable dont elle dispose, intensifier son exploitation permet d'augmenter la taille de population (notamment en permettant de produire plus de nourriture via un accroissement de l'effort de chasse par exemple). Mathématiquement, cela revient à dire que la taille de population à l'équilibre est une fonction croissante de l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable pour des faibles valeurs de l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable. Nous discriminons donc le cas $\alpha \geq 1$ par souci de vraisemblance du modèle par la suite.

3.2.1.2 Influence du changement de la répartition des tâches

Les calculs de cette partie sont dans la sous-section D.2.1, dans le premier paragraphe de la sous-section D.2.2.1 et dans la sous-section D.2.3 de l'annexe. La condition de subsistance impose à l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable δ_R d'être suffisamment élevée pour qu'il existe une proportion de producteurs p telle que S soit défini. Nous désignons par $I_D(\delta_R)$ l'ensemble des p possibles pour que S existe lorsque δ_R est donnée. Si un tel ensemble existe, il contient nécessairement $\{1 - \alpha\}$ et est contenu dans $]0, 1[$. Sur cet ensemble $x_*(\delta_R, \cdot)$ est une fonction croissante puis décroissante alors que $y_*(\delta_R, \cdot)$ est une fonction décroissante puis croissante. $x_*(\delta_R, \cdot)$ atteint son maximum pour une certaine valeur de p non explicite (inférieure à $1 - \alpha$) alors que $y_*(\delta_R, \cdot)$ atteint son minimum en $1 - \alpha$. Le déclin de la taille de population à l'équilibre arrive donc avant que $y_*(\delta_R, \cdot)$ ne soit à son minimum. Dit autrement, au delà d'un certain seuil, l'exploitation plus intensive du capital naturel renouvelable par une augmentation de p fait donc diminuer le capital naturel renouvelable sans pour autant permettre une augmentation de la taille de population.

Comme en cas de variation de δ_R , les valeurs limites de la taille de population et du niveau de capital naturel renouvelable dépendent des propriétés supposées du processus productif transformant le capital naturel renouvelable en des biens manufacturés. En effet, lorsque le processus productif est à rendement d'échelle constant ou décroissant, la taille de population tend vers 0 lorsque p s'approche de ses valeurs limites alors qu'en cas de rendement d'échelle croissant, la taille de population est équivalente à $x_M(\delta_R, \cdot)$ lorsque p s'approche de ses valeurs limites,

$x_*(\delta_R, \cdot)$ tend donc vers une valeur non nulle.

Pour le niveau de capital naturel renouvelable, en cas de rendement d'échelle constant ou rendement d'échelle décroissant, il tend vers K lorsque p s'approche de ses valeurs limites. Par contre en cas de rendement d'échelle croissant, il tend vers y_M (défini par l'équation (3.16)) lorsque p s'approche de ses valeurs limites.

3.2.1.3 Influence du changement de la répartition des tâches en maintenant un effort d'extraction constant

Les calculs de cette partie sont dans les sous-sections D.3.1 et D.3.2 de l'annexe. Dans ce paragraphe, nous supposons que l'effort de prélèvement du capital naturel renouvelable $\delta_R p$ est maintenu constant à δ . La condition de subsistance est vérifiée lorsque : δ est supérieur à un seuil dépendant de s , A , K et des rendements d'échelle et que p est inférieur à un seuil.

Sur cet ensemble, la taille de population (respectivement le niveau de capital naturel renouvelable) est une fonction décroissante (respectivement croissante) de p .

Lorsque p s'approche de 0, la taille de population et le niveau de capital naturel renouvelable tendent vers des valeurs non nulles pour tout rendement d'échelle, lorsque p s'approche de sa borne supérieure, la taille de population (respectivement le niveau de capital naturel renouvelable) tend vers 0 (respectivement K) dans le cas rendement d'échelle constant ou rendement d'échelle décroissant. Dans le cas rendement d'échelle croissant, la taille de population tend vers x_M (qui est constant à δ fixé) et le niveau de capital naturel renouvelable tend vers y_M lorsque p tend vers sa borne supérieure.

3.2.2 Sensibilité de sa stabilité

Dans cette section, nous étudions l'influence des trois différentes stratégies sur la stabilité de S . Conformément à la classification établie dans la figure 3.2, nous reprenons les résultats de la section précédente en y ajoutant la position relative de x_* par rapport aux seuils de taille de population définis précédemment ($x_{Q,1}$ ou x_R lorsqu'il est pertinent). Nous répondons aux questions suivantes : une instabilité est-elle impossible, possible ou certaine ? Lorsqu'elle est certaine ou possible, cela arrive-t-il au cours de la phase décroissante ou croissante de la taille de population ?

3.2.2.1 Influence du changement de l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable

Les calculs de cette partie sont dans la sous-section D.1.1 de l'annexe. En cas de rendement d'échelle constant, comme dit précédemment, une valeur minimale de l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable δ_R est nécessaire pour que le point fixe avec cohabitation S existe. Pour des faibles valeurs de δ_R une instabilité est impossible. À mesure que δ_R augmente une instabilité peut survenir, elle n'est pas certaine car une valeur adaptée de l'intensité de consommation de biens manufacturés δ_C peut l'empêcher. Dans ce cas, une instabilité est possible mais pas certaine. Si l'instabilité advient, cela correspond à la crise « déficit de consommation de biens manufacturés ». Le même type de comportement advient en cas de rendement d'échelle décroissant (sauf que toute valeur de δ_R est possible). Pour ces deux types de rendement d'échelle, l'endroit où une instabilité possible sera rencontrée dépend de la valeur du taux de régénération du capital naturel renouvelable r . Lorsqu'il est plus faible que $2\beta(-\mu_m)$ alors une instabilité est possible dès la phase croissante. Sinon si le point fixe avec cohabitation devient instable ce sera nécessairement lors de la phase décroissante de la taille de population.

En cas de rendement d'échelle croissant, la condition de subsistance s'applique de la même

manière que dans le cas rendement d'échelle constant et les variations de $x_*(\cdot, p)$ sont de la même nature. Cependant une instabilité ne peut pas toujours être compensée par δ_C . Lorsqu'elle ne peut pas, l'instabilité est certaine. Cela correspond à la crise « flux de biens manufacturés trop élevé ». Concernant la localisation de l'instabilité, on retrouve une dépendance à r, β, μ_m mais aussi à α . Si r est faible (plus petit que $2(\alpha + \beta - 1)(-\mu_m)$) alors une instabilité est certaine et elle adviendra lors de la phase croissante de $x_*(\cdot, p)$, lorsque r est moyennement élevé ($2(\alpha + \beta - 1)(-\mu_m) \leq r < 2\beta(-\mu_m)$) alors une instabilité est possible dès la phase croissante de $x_*(\cdot, p)$ mais ne devient certaine que lors de la décroissante. Enfin, lorsque r est élevé ($r \geq 2\beta(-\mu_m)$), si une instabilité se produit, quelle qu'en soit la nature (possible ou certaine), ce sera lors de la phase décroissante de la la taille de population $x_*(\cdot, p)$.

L'augmentation de l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable δ_R finit toujours par causer une instabilité (si c'est le seul contrôle qui change). Si on s'autorise en plus à modifier δ_C alors il est toujours possible de maintenir la stabilité en cas de rendement d'échelle constant ou rendement d'échelle décroissant. Cependant, alors que dans le cas rendement d'échelle décroissant un δ_C fini peut assurer la stabilité pour tout δ_R , il n'en est pas de même en cas de rendement d'échelle constant.

En cas de rendement d'échelle croissant, pour un certain seuil de δ_R la stabilité ne pourra plus être obtenue en modifiant δ_C .

La valeur de r intervient favorablement pour repousser l'arrivée de l'instabilité par rapport aux variations de $x_*(\cdot, p)$ tandis que $\beta, -\mu_m$ (et α dans le cas rendement d'échelle croissant) interviennent défavorablement. Dans le sens où, si r est élevé, l'instabilité ne peut advenir que lors de la phase décroissante de $x_*(\cdot, p)$.

3.2.2.2 Influence du changement de la répartition des tâches

Les calculs de cette partie sont dans le deuxième et troisième paragraphe de la sous-section D.2.2.1. À mesure que la répartition dans la population des producteurs p varie, il n'est pas certain qu'une instabilité soit rencontrée. Tout dépend de l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable δ_R . Ce dernier doit être comparé à différentes grandeurs liées aux tailles de population seuils :

$$\psi_{Q,1} := \left(r - \frac{\beta\mu_m + \sqrt{\beta\mu_m(\beta\mu_m - 4r)}}{2} \right)^{\alpha+\beta-1} \left(K \frac{\beta\mu_m + \sqrt{\beta\mu_m(\beta\mu_m - 4r)}}{2r} \right)^\beta \quad (3.17)$$

$$\psi_R := (r + (\alpha + \beta - 1)\mu_m)^{\alpha+\beta-1} \left(K \frac{(\alpha + \beta - 1)(-\mu_m)}{r} \right)^\beta \quad (3.18)$$

Effectivement, pour tout rendement d'échelle, lorsque δ_R est faible $\delta_R \leq \left(\frac{s}{A\alpha^\alpha\psi_{Q,1}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1}{1-\alpha}$, une instabilité est impossible, lorsque δ_R est moyen $\left(\frac{s}{A\alpha^\alpha\psi_{Q,1}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1}{1-\alpha} < \delta_R$ (et, dans le cas rendement d'échelle croissant $< \left(\frac{s}{A\alpha^\alpha\psi_R} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$) une instabilité est possible mais pas certaine : si δ_C n'est pas suffisamment élevée une crise du type « déficit de consommation de biens manufacturés » advient ; enfin lorsque δ_R est plus élevée (uniquement dans le cas rendement d'échelle croissant), $\delta_R \geq \left(\frac{s}{A\alpha^\alpha\psi_R} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, une instabilité est certaine (il n'existe pas de δ_C la supprimant), ce qui correspond à une crise de type « flux de biens manufacturés trop élevé ».

Ainsi, le changement de la répartition des tâches dans la population (modélisé par la variation de p) n'a pas le même type de conséquence que l'augmentation de l'intensité de l'extraction du capital naturel renouvelable. Alors que le passage au delà d'un certain seuil (dépendant des autres paramètres du modèle) de cette dernière crée une instabilité, la variation de p ne provoque

une crise que si l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable est suffisamment élevée et de plus cette crise cessera toujours lorsque p sera suffisamment grand.

À mesure que p varie, ces crises sont imbriquées, dans le sens où si des valeurs de p provoquent une crise du type « flux de biens manufacturés trop élevé », d'autres valeurs de p provoqueront une crise du type « déficit de consommation de biens manufacturés » (cette crise adviendra si δ_C n'est pas suffisamment élevé). Ainsi, trois cas qualitativement différents sont possibles. Si δ_R est faible, à mesure que p varie entre les bornes possibles, afin que S le point fixe avec cohabitation étudié existe, aucune instabilité n'est possible. Si δ_R est plus élevé, pour de faibles valeurs de p l'instabilité est impossible, pour des valeurs proches de $1 - \alpha$ l'instabilité est possible puis pour des p plus éloignés l'instabilité est impossible. Enfin (cas uniquement possible dans le cas rendement d'échelle croissant), pour des faibles valeurs de p l'instabilité est impossible, puis possible, puis certaine (à proximité de $1 - \alpha$), enfin elle redevient possible puis impossible.

La localisation de ces instabilités le long des variations de $x_*(\delta_R, \cdot)$ est plus compliquée que lors de l'étude de la stratégie précédente. Cependant, nous trouvons encore, pour tout rendement d'échelle possible, que si $r \geq 2\beta(-\mu_m)$, si une instabilité advient, c'est au cours de la phase décroissante de $x_*(\delta_R, \cdot)$.

Dans le cas de rendement d'échelle décroissant ou rendement d'échelle constant (en supposant la condition de subsistance satisfaite, donnée par l'équation (3.4)), lorsque $r < 2\beta(-\mu_m)$, la localisation de la possible instabilité le long de la trajectoire de $x_*(\delta_R, \cdot)$ dépend de δ_R , s'il est élevé alors elle peut avoir lieu dès la phase croissante de $x_*(\delta_R, \cdot)$ sinon elle n'est possible que lors de la phase décroissante.

Dans le cas de rendement d'échelle croissant (en supposant la condition de subsistance satisfaite, donnée par l'équation (3.5)), lorsque $2(\alpha + \beta - 1)(-\mu_m) \leq r < 2\beta(-\mu_m)$, l'instabilité certaine n'advient que lors de la phase décroissante de $x_*(\delta_R, \cdot)$, elle est cependant possible dès la phase croissante si δ_R est élevé (si δ_R est faible, une instabilité n'est possible que lors de la phase décroissante). Lorsque $2(\alpha + \beta - 1)(-\mu_m) > r$, le comportement est similaire : à mesure que δ_R augmente, la rencontre (possible ou certaine) d'une instabilité arrive pour des valeurs de p de plus en plus faible. Elle peut donc advenir dès la phase croissante de $x_*(\delta_R, \cdot)$.

3.2.2.3 Influence du changement de la répartition des tâches en maintenant un effort d'extraction constant

Les calculs de cette partie sont dans les sous-sections D.3.3 et D.3.4 de l'annexe. Une instabilité est possible lorsque l'intensité de prélèvement du capital naturel renouvelable δ est supérieure à un seuil, ce qui signifie que pour certaines valeurs de p , x_* sera supérieur à $x_{Q,1}$. L'instabilité peut être certaine dans le cas rendement d'échelle croissant lorsque δ est supérieure à un autre seuil plus élevé, (pour certaines valeurs de p , x_* sera supérieur à x_R).

Si une instabilité arrive, c'est pour des valeurs de p proches de 0. En effet, en cas de rendement d'échelle constant ou rendement d'échelle décroissant, si une instabilité est possible, elle ne peut arriver que pour des valeurs de p proches de zéro. En cas de rendement d'échelle croissant, si une instabilité certaine advient, elle arrive pour des valeurs de p proches de 0, ensuite à mesure que p s'éloigne de 0, l'instabilité devient possible mais pas certaine et finalement lorsque p est suffisamment élevé l'instabilité n'est plus possible.

Lorsque le rendement d'échelle est supposé constant ou décroissant, il existe un niveau fini d'intensité de consommation de biens manufacturés permettant la stabilité pour tout p varie. Ce niveau d'intensité dépend de de l'intensité de prélèvement.

3.2.3 Synthèse

L'augmentation de l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable a un effet non monotone (respectivement monotone) sur la taille de population (respectivement sur le niveau de capital naturel renouvelable). La taille de population à l'équilibre croît puis décroît à mesure que l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable augmente. Le niveau de capital naturel renouvelable à l'équilibre diminue à mesure que l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable augmente. L'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable a une influence monotone sur la stabilité du point fixe avec cohabitation. Lorsque l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable est faible, le point fixe avec cohabitation est stable. Lorsqu'elle est plus grande, le point fixe avec cohabitation est stable sous réserve que l'intensité de consommation de biens manufacturés soit suffisamment élevée. Enfin, ce cas ne se présente qu'en cas de rendement d'échelle croissant, lorsqu'elle est élevée il est nécessairement instable quelle que soit la valeur de l'intensité de consommation de biens manufacturés. La localisation relative de l'instabilité du point fixe avec cohabitation le long de la trajectoire de la taille de population vue comme fonction de l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable dépend de la valeur du taux de régénération du capital naturel renouvelable par rapport à un seuil dépendant de paramètres propres au processus productif (les élasticités des intrants) ainsi que le terme de décroissance maximale de la taille de population. Plus le taux de régénération du capital naturel renouvelable est élevé, plus l'instabilité (qu'elle soit compensable par une certaine valeur de l'intensité de consommation de biens manufacturés ou non) est repoussée à la phase décroissante de la taille de population. Ainsi, le déclin de la taille de population comme signal avant coureur d'instabilité n'arrive qu'à condition que r soit suffisamment important.

Le déclin de la proportion de transformateurs au profit d'une augmentation de la proportion de producteurs (ce qui correspond à une augmentation de p) se traduit par un effet non monotone sur la taille de population et sur le niveau de capital naturel renouvelable. À mesure que p varie, la taille de population (respectivement le niveau de capital naturel renouvelable) augmente (respectivement diminue) puis diminue (respectivement augmente). Le long de ces variations une instabilité n'arrive pas nécessairement, cela dépend de la valeur de l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable. La rencontre d'une instabilité lorsque p varie est conditionnée par le fait que l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable soit suffisamment grande. La localisation de cette instabilité le long de la trajectoire de la taille de population, ne dépend pas des mêmes critères que dans le paragraphe précédent. Plus précisément, comme précédemment, lorsque r est suffisamment grand, si une instabilité arrive cela ne peut être qu'au cours de la phase décroissante de la taille de population. Sinon, la valeur de l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable est déterminante, si elle est plus élevée qu'un seuil dépendant des paramètres du modèle (hormis δ_C et p) alors l'instabilité est possible dès la phase croissante. Ce type de résultat tient pour tout rendement d'échelle possible, dans le cas de rendement d'échelle croissant il est possible pour certaines configurations qu'une instabilité possible ait lieu dès la phase croissante mais ne devienne certaine que lors de la phase décroissante.

Si l'on suppose que l'effort d'extraction du capital naturel renouvelable $\delta_{Rp} = \delta$ peut être maintenu constant, l'augmentation de la proportion de transformateurs (lorsque p tend vers 0) entraîne une augmentation (respectivement diminution) de la taille de population (respectivement du niveau de capital naturel renouvelable). Une instabilité advient si l'effort d'extraction du capital naturel renouvelable est supérieur à un seuil dépendant des paramètres du modèle (hormis de l'intensité de consommation de biens manufacturés et de la répartition de la population). Ainsi, plus l'effort d'extraction du capital naturel renouvelable est élevé plus une instabilité est possible. Si une instabilité advient c'est pour des faibles valeurs de p . L'augmentation de la proportion de transformateurs, ce qui augmente la capacité du système productif, met en danger la stabilité

du point fixe avec cohabitation.

Nous savons donc comment stabiliser une situation. Cependant, nous n'avons aucune information sur le comportement de la dynamique transitoire du système (lorsque le système n'est pas à l'équilibre) nous étudions cela ci-après.

3.3 Aspects transitoires des crises

Le régime dans lequel le système écologique et social modélisé se trouve dépend de la position de la taille de population à l'équilibre x_* par rapport à certains seuils de taille de population (x_M , $x_{Q,1}$ et x_R). De façon équivalente, il dépend de la position du niveau de subsistance s par rapport aux niveaux de production par individu atteints en ces seuils ($P_{(\alpha,\beta)}(x_M)$, $P_{(\alpha,\beta)}(x_{Q,1})$ et $P_{(\alpha,\beta)}(x_R)$). Puisque ces niveaux de production dépendent linéairement du facteur de productivité total A , pour un rendement d'échelle donné, quasiment toutes les crises de la figure 3.2 peuvent être générées par la variation de A . Seule la crise intitulée « faible productivité de l'écosystème » dans la figure 3.2 n'est pas accessible par une modification de A , puisqu'elle n'en dépend pas. Cette crise dépend uniquement de la valeur du taux de régénération du capital naturel renouvelable par rapport aux propriétés du processus productif et au taux maximal de déclin de la taille de population.

Ci-après, nous générerons toutes les crises dépendant de ce paramètre, afin d'en illustrer le comportement transitoire.

Effectivement, un facteur de productivité total faible génère une crise de type « flux de biens manufacturés faible ». Puis, à mesure que A augmente le système passera par un état « socialement et biophysiquement adapté » puis par les crises suivantes : « déficit de consommation de biens manufacturés » puis « flux de biens manufacturés trop élevé » (uniquement dans le cas rendement d'échelle croissant).

Ci-après nous montrons que ces crises influent de façons différentes sur le comportement transitoire du système écologique et social modélisé. Dans un premier temps, nous parlons de la crise arrivant lorsque la condition de subsistance n'est pas satisfaite et dans un second temps, nous parlons des crises induites par une production de biens manufacturés trop importante. Les valeurs utilisées pour les paramètres sont présentées dans la table 3.1 (sauf A qui varie pour illustrer les différentes crises).

Symbole	Signification	Valeur(s)
(α, β)	Elasticités du processus productif par rapport aux (transformateurs, capital naturel renouvelable extrait)	(0.55, 0.55)
μ_{min}	taux de déclin maximal de la taille de population	-0.006213
μ_{max}	taux de croissance maximal de la taille de population	0.02
$\arg(\mu_{max})$	Niveau de consommation par individu maximisant le taux de croissance	0.15
K	valeur maximale de capital naturel renouvelable	1
r_0	taux de reproduction du capital naturel renouvelable	1

TABLE 3.1 – Symboles, définitions et valeurs des paramètres de la dynamique.

3.3.1 Flux de biens manufacturés faible

Lorsque le processus productif n'est pas capable de satisfaire la condition de subsistance à l'équilibre, il n'existe pas de point fixe avec cohabitation. Ainsi, pour toute condition initiale

Symbole	Signification	Valeur
δ_R	intensité d'extraction du capital naturel renouvelable	0.02
δ_C	Intensité de consommation des biens manufacturés	0.001
p	Proportion de producteurs	0.2

TABLE 3.2 – Symboles, définitions et valeurs des contrôles de la dynamique.

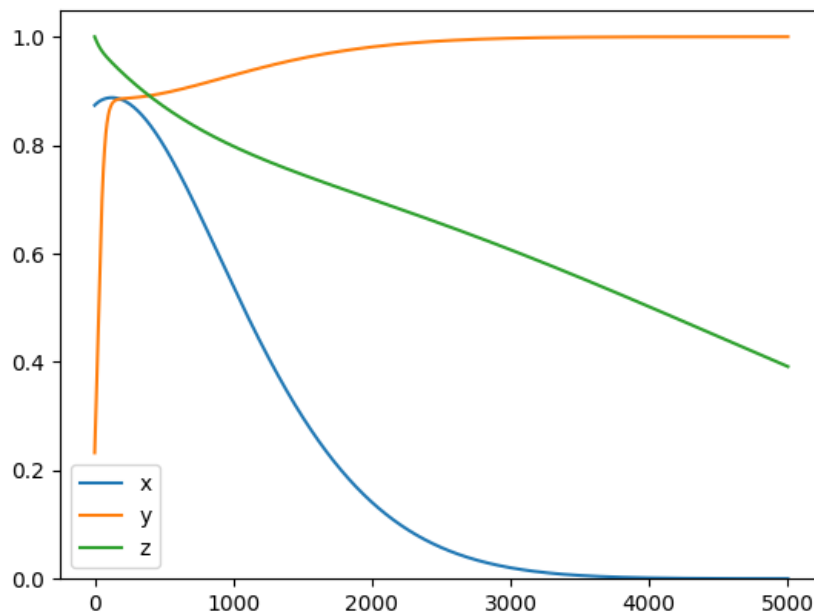


FIGURE 3.3 – Le processus productif à l'équilibre n'est pas capable de satisfaire la condition de subsistance $((A, \delta_R) = (0.63, 0.02))$. Après une phase croissante (dû à la consommation de biens manufacturés disponibles), la taille de population (x) diminue et tend vers 0. À mesure que la taille de population diminue, le niveau de capital naturel renouvelable (y) augmente. La condition initiale est la même que pour la figure 3.4.

avec un niveau de capital naturel renouvelable non nul, le système finira toujours par converger vers une des demi-droites de l'espace données par une taille de population nulle, un niveau de capital naturel renouvelable maximal ou nul et un niveau quelconque de biens manufacturés. Un exemple de trajectoire de cette crise est donné dans la figure 3.3.

Lorsque les contrôles sont changés pour quitter cette crise, le système arrive dans le régime « socialement et biophysiquement adapté » pour lequel toute valeur (positive) de δ_C est possible pour que le point fixe avec cohabitation soit stable. Un exemple de trajectoire de ce régime est donné dans la figure 3.4.

3.3.2 Surproduction

Comme définies dans la table 3.2, nous rappelons que nous séparons en deux catégories les bifurcations de Hopf que notre modèle peut rencontrer. Ces bifurcations illustrent une surproduction de biens manufacturés. La première, que nous qualifions de « déficit de consommation de biens manufacturés », peut être compensée par le seul changement de l'intensité de consommation de biens manufacturés. La seconde (rencontrable uniquement dans le cas rendement

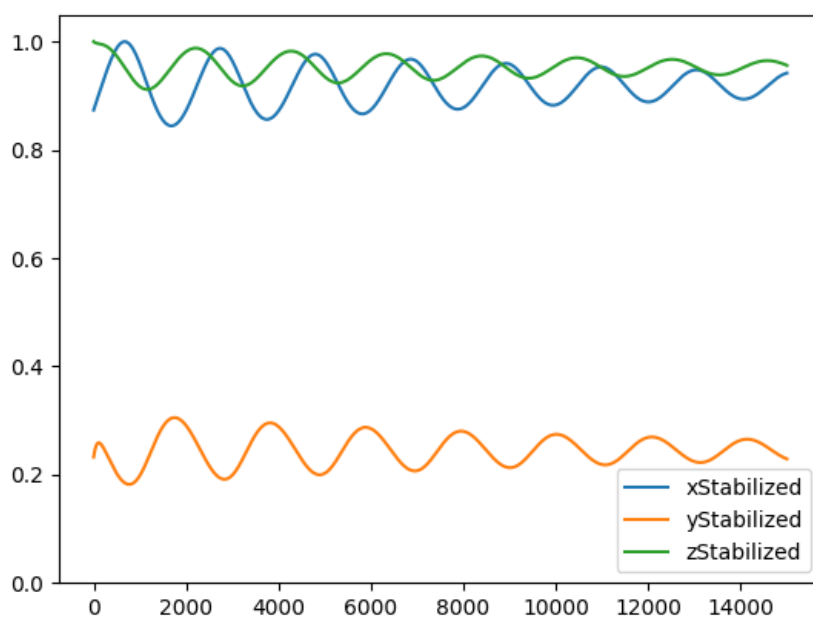


FIGURE 3.4 – Le processus productif à l'équilibre est capable de satisfaire la condition de subsistance $((A, \delta_R) = (0.63, 0.12))$. À la différence de la figure 3.3, la croissance du niveau de capital naturel renouvelable (y) (et la décroissance de la taille de population (x)) est empêchée car l'intensité d'extraction est plus élevée. Ainsi la trajectoire converge en oscillant de façon amortie vers le point fixe avec cohabitation. La condition initiale est proche du point fixe avec cohabitation. Le suffixe « stabilized » indique qu'un point fixe avec cohabitation stable existe désormais (par opposition au cas de la figure 3.3).

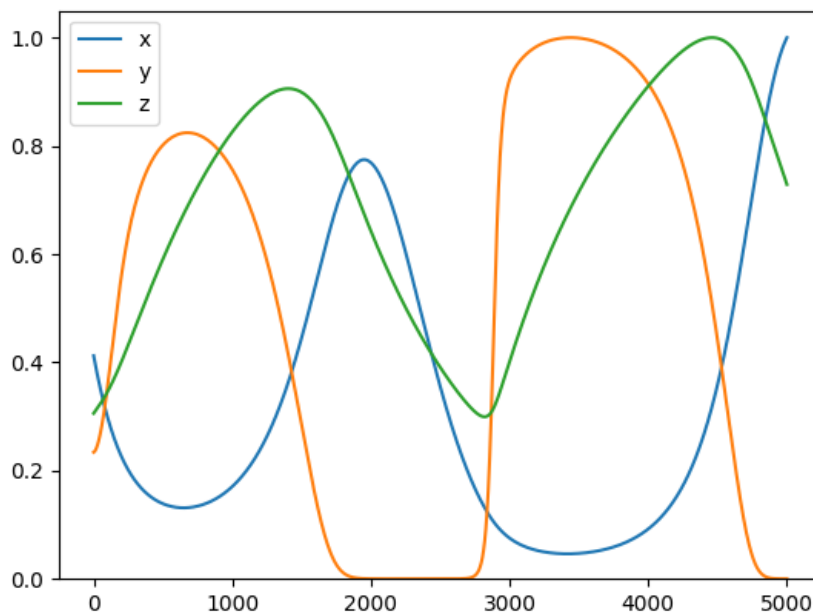


FIGURE 3.5 – Le système écologique et social expérimente une crise du type « déficit de consommation de biens manufacturés » ($(A, \delta_C) = (1.55, 0.001)$). La trajectoire oscille autour du point fixe avec cohabitation. La condition initiale est identique à celle de la figure 3.6.

d'échelle croissant), que nous qualifions de « flux de biens manufacturés trop élevé », ne peut l'être. Lorsque cette dernière advient, pour stabiliser le système, des changements sur p ou δ_R sont donc nécessaires.

Un exemple de trajectoire en cas de déficit de consommation est donné dans la figure 3.5. La stabilisation de cette trajectoire peut s'effectuer en ne changeant que l'intensité de consommation de biens manufacturés. Cela est illustré sur la figure 3.6.

3.3.3 Synthèse

Nous illustrons ici le comportement transitoire du modèle en cas de crises. Ces crises peuvent être de deux types. Le premier advient lorsque la condition de subsistance n'est pas satisfaite. Dans une telle situation, la population humaine est vouée à disparaître. Ces crises adviennent lorsque le processus productif n'est pas suffisamment performant pour atteindre le niveau de subsistance. Par rapport à nos contrôles, cela correspond à des situations où la répartition des tâches est très asymétriques (p proche de un ou zéro) ou que la pression sur le capital naturel renouvelable est trop faible (δ_R trop faible).

Le second type de crise advient lorsque la condition de subsistance est satisfaite mais que l'accumulation de biens manufacturés entraîne l'apparition de cycle explosion-déclin. Ces cycles sont induits par une surproduction ou, de manière équivalente, une sous-consommation. Ce type de crise peut se présenter de deux manières différentes. Dans un cas il est compensable par une augmentation de l'intensité de consommation de biens manufacturés dans l'autre les autres contrôles doivent être modifiés pour stabiliser le point fixe avec cohabitation.

Dans une perspective de gestion, on cherche à éviter les cycles explosion-déclin. De telles variations sont évidemment sources de tensions sociales. Mais de plus, en raison de l'amplitude, puisque le niveau de capital naturel renouvelable peut se retrouver très proche de zéro, nous

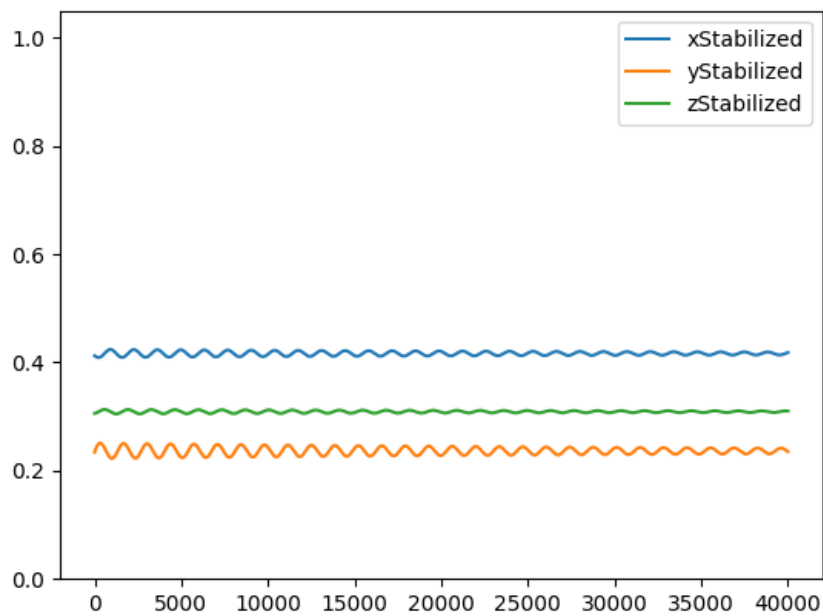


FIGURE 3.6 – Le système écologique et social n’expérimente plus une crise du type « déficit de consommation de biens manufacturés », l’intensité de consommation de biens manufacturés étant suffisamment élevée ($(A, \delta_C) \approx (1.55, 0.002)$). La trajectoire converge avec des oscillations amorties vers le point fixe avec cohabitation. La condition initiale est proche du point fixe avec cohabitation. Le suffixe « stabilized » indique qu’un point fixe avec cohabitation stable existe désormais (par opposition au cas de la figure 3.5).

pouvons raisonnablement penser que si une telle trajectoire devait arriver elle ne repartirait pas de zéro et ainsi le cycle s'arrêterait après la première phase décroissante du niveau de capital naturel renouvelable.

Il apparaît ici qu'en raison des conséquences possibles d'une instabilité (et donc la présence d'un cycle limite), la stabilité (et donc la présence de cycles amortis) soit toujours souhaitable pour tout système écologique et social modélisé. Cependant, nous supposons ici toujours que notre état est proche du point fixe avec cohabitation, nous montrons ci-après que si cela n'est pas vérifié alors une configuration socialement et biophysiquement adaptée n'est pas toujours souhaitable.

3.4 Estimer la sensibilité de la viabilité du système

Nous nous inspirons de la théorie de la viabilité et de ses outils pour étudier le comportement transitoire du système écologique et social modélisé. Les outils principaux de la théorie de la viabilité sont rappelés dans la sous-section 1.1.4. Ci-après, nous cherchons à étudier l'influence de la répartition des tâches et de l'intensité de l'extraction du capital naturel renouvelable sur la viabilité du système écologique et social. La contrainte que nous prenons est focalisée sur le niveau de capital naturel renouvelable. Ainsi, dans le formalisme viabiliste, l'espace de contrainte que nous considérons est le suivant :

$$K(y_l) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^+ \times [0, K] \times \mathbb{R}^+, y \geq y_l\}, y_l \in]0, K[. \quad (3.19)$$

Afin d'estimer le noyau de viabilité de $K(y_l)$ par rapport à la dynamique définie par le système d'équations (2.1.4) nous comparons deux estimateurs : le premier est basé sur la distance du point fixe avec cohabitation par rapport à la frontière de $K(y_l)$ (cf sous-section E.1.1 de l'annexe) et le second est basé sur la viabilité de trajectoires issues des alentours du point fixe avec cohabitation (cf sous-section E.1.2 de l'annexe).

Par souci de simplicité, nous nous plaçons dans le cas rendement d'échelle constant et nous fixons l'intensité de consommation de biens manufacturés. Ainsi, les valeurs des paramètres sont ceux de la table 3.1, $(\alpha, \beta, A, \delta_C, y_l) = (0.6, 0.4, 1, 0.01, 0.06)$ et $(p, \delta_R) \in]0, 1[\times]0.5, 2[$. Ci-après nous présentons ces proxys et leurs valeurs. Puis, nous les comparons, ce qui motive un changement de perspective.

3.4.1 Deux potentiels estimateurs du noyau de viabilité

3.4.1.1 Distance à la frontière de l'espace de contraintes

Cet estimateur correspond à la différence entre la valeur du niveau de capital naturel renouvelable du point fixe avec cohabitation avec y_l (cf sous-section E.1.1 de l'annexe).

3.4.1.2 Proportion de trajectoires viables au voisinage de S

Cet estimateur correspond à la proportion de trajectoires viables (i.e. restant dans $K(y_l)$) issues des alentours du point fixe avec cohabitation. Pour cela, nous calculons les coordonnées des sommets du cube correspondant à l'intersection entre le cube $[(1-\varepsilon)x_*, (1+\varepsilon)x_*] \times [(1-\varepsilon)y_*, (1+\varepsilon)y_*] \times [(1-\varepsilon)z_*, (1+\varepsilon)z_*]$ et l'espace de contraintes $K(y_l)$. Puis, nous simulons numériquement chaque trajectoire issue de ces points. Enfin nous évaluons la proportion de trajectoires restant viable (dans $K(y_l)$) (cf sous-section E.1.2 de l'annexe).

3.4.2 Comparaison entre ces deux estimateurs

La valeur du premier estimateur pour une certaine grille de (p, δ_R) est affichée dans la figure 3.7. Conformément au comportement analytique trouvé plus haut : $y_*(\cdot, \delta_R)$ est décroissant puis

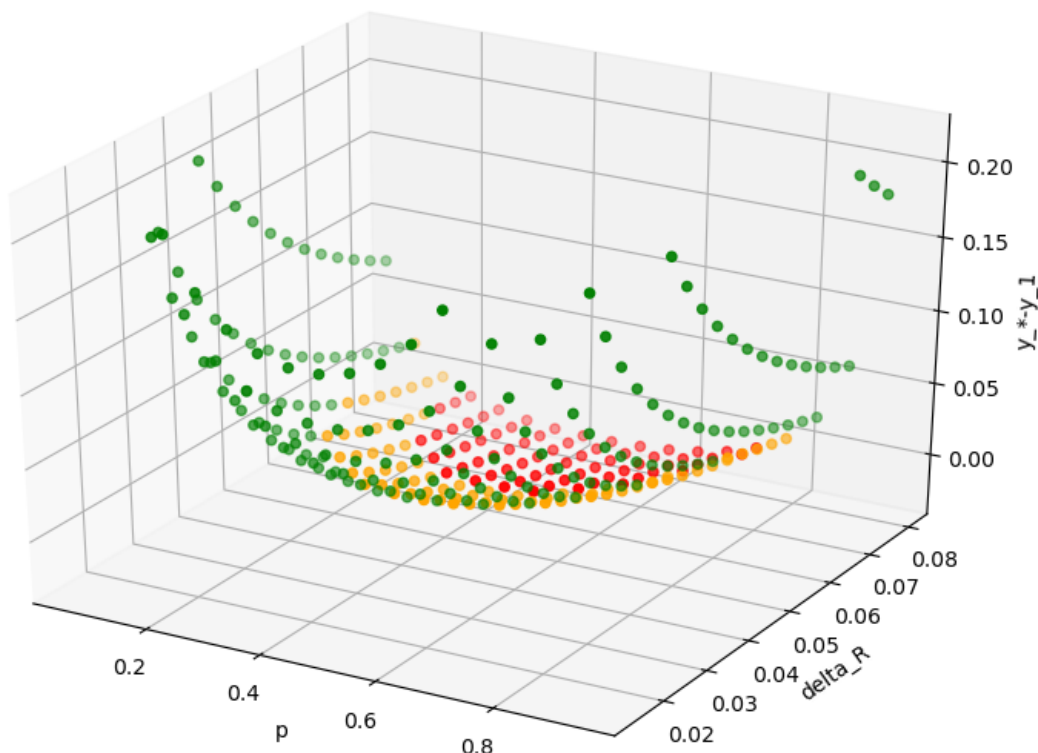


FIGURE 3.7 – Discrétisation de $(p, \delta_R) \mapsto y_*(p, \delta_R)$. Les configurations socialement et biophysiquement adaptées sont représentées en vert. Les situations où l'intensité de consommation de biens manufacturés est suffisamment haute pour que le point fixe avec cohabitation soit stable sont représentées en orange. Les crises du type « déficit de consommation de biens manufacturés » sont représentées en rouge.

croissant à mesure que p augmente (et minimum en $\beta = 1 - \alpha$) alors que $y_*(p, \cdot)$ est décroissante à mesure que δ_R augmente. La valeur du second estimateur pour la même grille de (p, δ_R) est affichée dans la figure 3.8. Nous trouvons que la stabilité ne garantit pas la viabilité. La viabilité augmente à mesure que l'on s'éloigne des scénarios instables (en s'approchant des scénarios socialement et biophysiquement adaptés).

3.4.3 Synthèse

Ainsi, cela illustre qu'aux alentours du point fixe avec cohabitation la situation socialement et biophysiquement adaptée est celle permettant la plus grande viabilité, il pourrait sembler qu'elle soit le plus souhaitable dans une perspective de gestion. Dans la section suivante, nous illustrons que les scénarios socialement et biophysiquement adaptés n'ont pas nécessairement un noyau de viabilité plus grand que des scénarios où la crise de type « déficit de consommation de biens manufacturés » est évitée.

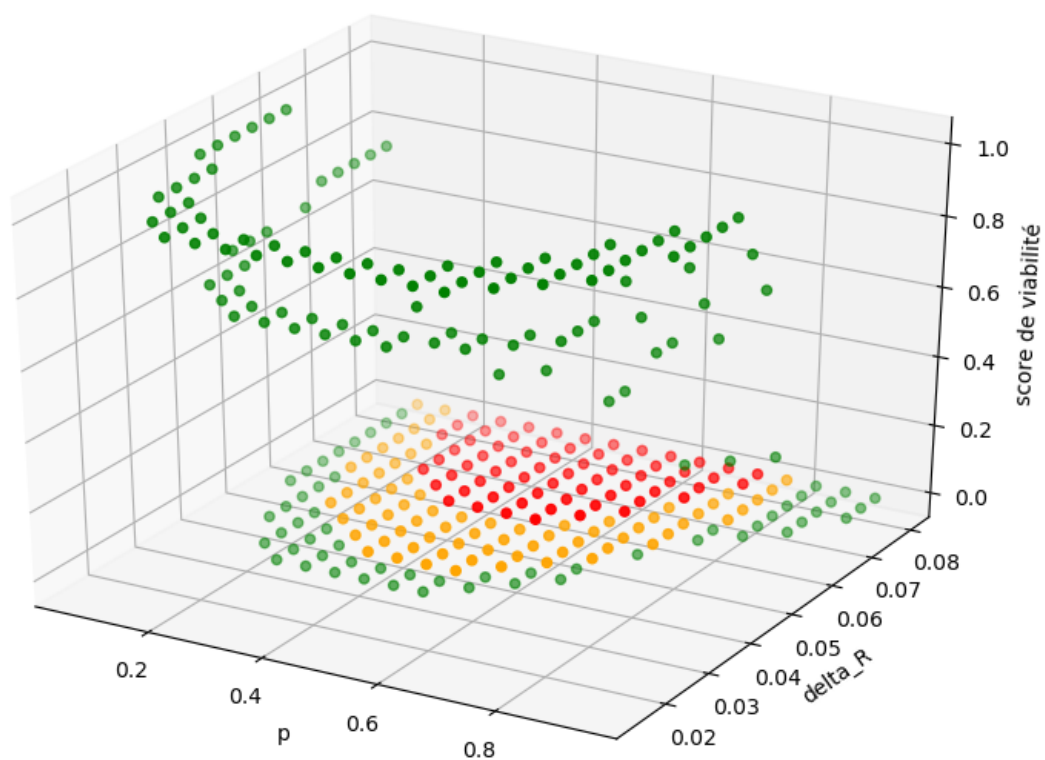


FIGURE 3.8 – Proportion de trajectoires viables en fonction de (p, δ_R) pour la même grille de discrétisation que la figure 3.7. Les configurations socialement et biophysiquement adaptées sont représentées en vert. Les situations où l'intensité de consommation de biens manufacturés est suffisamment haute pour que le point fixe avec cohabitation soit stable sont représentées en orange. Les crises du types déficit de consommation de biens manufacturés sont représentées en rouge. $\varepsilon = 0.2$.

3.5 Entre sobriété et instabilité

Dans cette section, nous faisons l'hypothèse de rendement d'échelle croissant (en supposant toujours que $\alpha < 1$) et que la condition de subsistance est strictement vérifiée. Nous qualifions de sobre un certain choix de valeurs de paramètres et de contrôles du modèle tel que les caractéristiques du système économique (embarquées ici par $\delta_R, p, \alpha, \beta$ et A), mais aussi du capital naturel renouvelable (embarquées par r et K) sont telles que la production de biens manufacturés par individu à l'équilibre ne pourrait pas être beaucoup plus élevée en modifiant la taille de population. Une situation sobre présente donc une taille de population x_* proche de x_M . Cela implique donc qu'un faible changement de δ_R ou de p peut violer la condition de subsistance. Les calculs de cette partie sont dans la sous-section E.2.2 de l'annexe. Comme nous l'avons vu précédemment, ce type de configuration est stable, cependant nous montrons qu'une telle situation n'est pas toujours souhaitable si l'on suppose que le système écologique et social se trouve dans un état éloigné du point fixe avec cohabitation.

3.5.1 Mise en évidence d'un piège socio-écologique

L'espace dans lequel peut se trouver un point fixe avec cohabitation est donné par :

$$E(\delta_R, p) :=]0, \frac{r}{\delta_R p}] \times [0, K] \times \mathbb{R}^{+*}.$$

Nous rappelons que deux points fixes avec cohabitation sont possibles : $S_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et $S = (x_*, y_*, z_0)$. Nous appelons piège socio-écologique, le sous-ensemble de E contenant l'ensemble des conditions initiales pour lesquelles la trajectoire d'une solution du système différentiel (2.1.4) tend vers $(0, K, z_q)$ avec $z_q \in \mathbb{R}^+$ un niveau quelconque de biens manufacturés. L'ensemble $B_1(\delta_R, p)$ défini de la façon suivante :

$$B_1(\delta_R, p, \delta_C) := \{(x, y, z) \in E, x \leq x_0, P(x, y) \leq s, z \leq z_0\}, \quad (3.20)$$

est contenu dans le piège socio-écologique (cf sous-sous-section E.2.2). Il s'agit des configurations avec une taille de population relativement faible, un niveau de capital naturel renouvelable potentiellement assez élevé et un niveau de biens manufacturés par individu assez bas. Par soucis de lisibilité, nous n'indiquons pas toujours les dépendances à (δ_R, p, δ_C) .

S_0 appartient à la frontière du piège socio-écologique. Effectivement, une trajectoire issue de $S'_0 := (x_0 - \nu, y_0, z_0)$ converge vers un point de la forme $(0, K, z_q)$, alors qu'une trajectoire issue de $S''_0 := (x_0 + \nu, y_0, z_0)$ converge vers S . ν est réel positif proche de zéro. Cela est illustré par la première rangée de sous-figures de la figure 3.9.

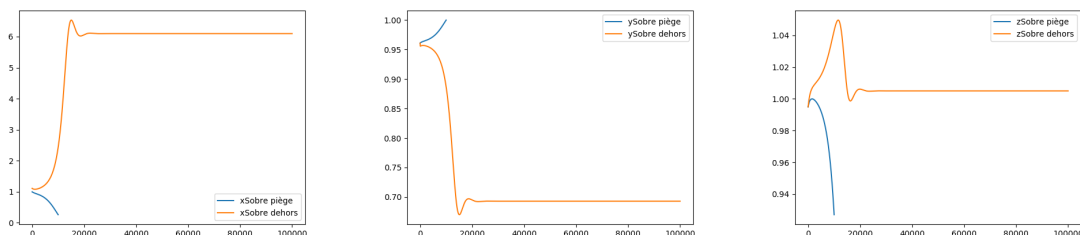
De plus, il est possible de sortir du piège socio-écologique en augmentant l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable. Cela est illustré par la seconde rangée de sous-figures de la figure 3.9.

3.5.2 Espace traversé par la dynamique

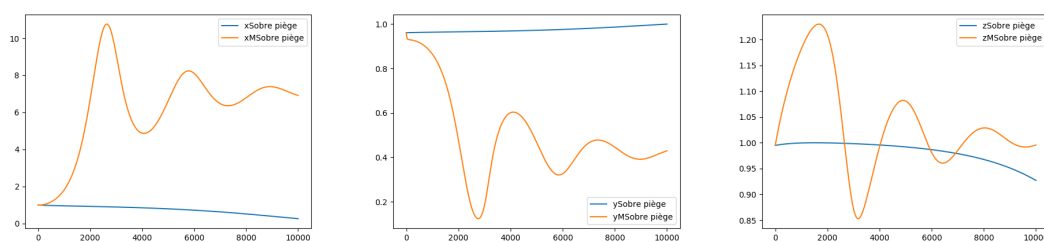
L'ensemble $W_1(\delta_R, p, \delta_C)$ défini de la façon suivante :

$$W_1(\delta_R, p, \delta_C) := \{(x, y, z) \in E, x_0 \leq x \leq x_*, P(x, y) \geq s, z \geq z_0\}, \quad (3.21)$$

est traversé par un courant (cf sous-sous-section E.2.3). Effectivement, toute trajectoire donnée par le système différentiel (2.1.4) qui appartient à un moment à W_1 le traversera. Plus précisément, lorsqu'une trajectoire sort de W_1 , la taille de population est égale à la taille de population du point fixe avec cohabitation, pour tous les autres points de la frontière, la dynamique est



(a) Évolution de la taille de population pour deux conditions initiales différentes. (b) Évolution du niveau de capital naturel renouvelable pour deux conditions initiales différentes. (c) Évolution du niveau de biens manufacturés par individu pour deux conditions initiales différentes.



(d) Évolution de la taille de population pour deux intensités d'extraction du capital naturel renouvelable différentes. (e) Évolution du niveau de capital naturel renouvelable pour deux intensités d'extraction du capital naturel renouvelable différentes. (f) Évolution de niveau de biens manufacturés par individu pour deux intensités d'extraction du capital naturel renouvelable différentes.

FIGURE 3.9 – Illustrations du piège socio-écologique.

La première ligne illustre la sensibilité aux conditions initiales : en bleu une trajectoire issue de l'intérieur du piège socio-écologique, en orange une située à l'extérieur. Condition initiale pour la trajectoire bleue (x_0^-, y_0, z_0) , pour la trajectoire orange (x_0^+, y_0, z_0) . L'exposant + (respectivement -) signifie une valeur supérieure (respectivement inférieure).

La seconde ligne illustre la dépendance du piège socio-écologique aux contrôles. À partir d'une condition initiale (x_0, y_0, z_0) , deux trajectoires sont affichées, l'une des deux présentant une intensité d'extraction du capital naturel plus élevée, et est qualifiée de moins sobre. Elle est représentée en orange alors que la sobre est représentée en bleue.

entrante. A l'intérieur de W_1 , la taille de population augmente. Concernant le niveau de capital naturel renouvelable ou la quantité de biens manufacturés par individu, nous ne pouvons rien dire.

3.5.3 Sensibilité des ces espaces aux contrôles

Dans cette sous-section, nous cherchons à déterminer la dépendance de ces sous-espaces aux contrôles. En particulier, nous cherchons à répondre aux questions suivantes : pour un point donné de l'espace $X_1 := (x_1, y_1, z_1) \in E$ tel que $x_1 y_1 z_1 > 0$, est-il toujours possible de trouver des contrôles afin qu'il n'appartienne pas à B_1 ? Est-il toujours possible d'en trouver pour qu'il appartienne à W_1 ?

3.5.3.1 Sensibilité du piège socio-écologique

Puisque B_1 est contenu dans $E(p, \delta_R)$ et que $z_0 = \frac{s}{\delta_C}$, il est possible de trouver des valeurs $\tilde{\delta}_C$ (ou $\tilde{\delta}_R$) telles que X_1 n'appartiendra pas à $B_1(\tilde{\delta}_R, p, \delta_C)$ ni à $B_1(\delta_R, p, \tilde{\delta}_C)$.

3.5.3.2 Sensibilité de l'espace traversé

Il n'est pas toujours possible de trouver $(\tilde{p}, \tilde{\delta}_R, \tilde{\delta}_C)$ permettant à X_1 d'appartenir à $W_1(\tilde{p}, \tilde{\delta}_R, \tilde{\delta}_C)$. Les justifications de cette affirmation sont dans la sous-sous-section E.2.3.4 de l'annexe E.

3.5.4 Synthèse

Ainsi, il existe un compromis à trouver pour un système écologique et social donné. La sobriété permet la stabilité mais elle induit aussi l'existence d'un piège socio-écologique. Inversement, lorsque le système n'est pas sobre une instabilité est possible, mais certaines conditions initiales peuvent être extraites du piège socio-écologique.

Discussion et conclusion

4.1 Bilan

A l'aide d'un modèle générique capturant les relations élémentaires d'un système écologique et social et permettant de tester l'importance des rendements d'échelle, nous avons montré des résultats asymptotiques ainsi que des résultats transitoires. En effet, nous avons d'une part classifié les différentes raisons pour lesquelles un régime stationnaire désirable (c'est-à-dire, dans notre formalisme, un point fixe avec cohabitation stable) n'était pas possible. De plus, nous avons étudié l'influence de certaines stratégies sur ce régime stationnaire, qui correspondent à des changements de pratiques de la communauté humaine. D'autre part, dans le cas du comportement transitoire, nous avons prouvé qu'en cas de rendement d'échelle croissant, il existait un piège socio-écologique, dont nous avons estimé l'un des sous-ensembles.

4.2 Comparaisons

4.2.1 Influence du rendement d'échelle sur les transitions critiques

En modélisant la thèse du suicide écologique de l'Île de Pâques, [Roman 2017] trouve les résultats suivants concernant l'existence d'un point fixe avec cohabitation pour un modèle de système écologique et social :

1. Lorsque l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable est faible, un point fixe avec cohabitation n'existe pas, puisque la quantité de capital naturel extrait n'est pas suffisamment élevée pour permettre à toute la population de se sustenter.
2. Lorsqu'elle est plus grande, il existe et est stable, puisque la capacité productive du système économique est cohérente avec le niveau de subsistance requis pour stabiliser la taille de population.

[Roman 2017] montre également que la taille de population à l'équilibre tend vers zéro lorsque l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable diminue. En cas de rendement d'échelle constant, nous trouvons des résultats similaires. Nos résultats diffèrent en cas de rendement d'échelle croissant.

Effectivement, en étudiant les conséquences de la première stratégie dans le cas rendement d'échelle constant, nous trouvons que notre modèle de système écologique et social expérimentera des situations similaires à celui de [Roman 2017], la première correspond à la crise que nous appelons « flux de biens manufacturés faible » et la seconde à ce que nous appelons une situation « socialement et biophysiquement adaptée ». De plus, toujours dans le cas rendement d'échelle constant, à mesure que l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable diminue, la taille de population à l'équilibre s'approche de zéro.

Dans le cas rendement d'échelle croissant, nous trouvons le même enchaînement de phases que [Roman 2017], cependant, alors que la taille de population à l'équilibre tendait vers zéro lorsque l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable diminuait en cas de rendement d'échelle constant, nous trouvons ici que la taille de population à l'équilibre tend vers une taille non nulle à mesure que l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable diminue. Lorsque l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable passe en dessous d'un certain seuil, le point fixe avec cohabitation disparaît.

4.2.2 Cycles explosion-déclin dus à une surproduction pas toujours évitable

Avec un formalisme similaire, [Rosenzweig 1971] montre qu'un écosystème composé de populations de proies et de prédateurs peut être déséquilibré à mesure que la capacité de charge de proies augmente. Ce phénomène s'appelle le paradoxe de l'enrichissement et correspond à une

bifurcation de type Hopf. Une bifurcation de Hopf advient lorsqu'un point fixe devient instable et qu'un cycle limite l'entourant apparaît. Un tel phénomène peut se présenter également dans les modèles de système écologique et social. Ainsi, [Roman 2017] montre que lorsque l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable est trop élevée, une telle bifurcation advient. Ici, nous montrons que ce n'est pas toujours le cas, sous réserve de supposer d'autres contrôles. Pour cela, nous explicitons le lien existant entre les trois paramètres de contrôles garantissant la stabilité asymptotique du point fixe avec cohabitation. Nous montrons le caractère décisif du rendement d'échelle supposé. En cas de rendement d'échelle décroissant ou de rendement d'échelle constant, la stabilité peut être préservée en modifiant de façon adaptée l'intensité de consommation de biens manufacturés lorsque l'un des deux autres contrôles varie. Plus précisément, en cas de rendement d'échelle décroissant, un niveau d'intensité fini de consommation de biens manufacturés assure la stabilité pour toute valeur admissible des autres contrôles. En cas de rendement d'échelle constant, l'intensité de consommation de biens manufacturés doit varier de façon conjointe à celle de l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable afin d'éviter l'apparition d'un cycle de type explosion-déclin. Enfin, en cas de rendement d'échelle croissant, nous montrons que pour certaines valeurs de l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable et de la répartition des tâches dans la population, aucune intensité de consommation de biens manufacturés ne permet la stabilité asymptotique du point fixe avec cohabitation ; l'apparition d'un cycle de type explosion-déclin est certaine.

4.2.3 Apparition d'un cycle pas toujours précédée d'un déclin de la taille de population à l'équilibre

D'autres travaux utilisant des approches similaires ont montré qu'une bifurcation de type Hopf (correspondant à l'apparition d'un cycle de type explosion-déclin) pouvait advenir lors de la phase décroissante de la taille de population à l'équilibre (vue comme fonction du paramètre modifié) [Anderies 2003], [Roman 2017]. Nos résultats montrent que cela n'est pas toujours le cas. En effet, le déclin de la taille de population à l'équilibre ne précède pas nécessairement un cycle de type explosion-déclin, et donc la perte de durabilité, selon notre typologie. Ainsi, dans le cas de rendement d'échelle croissant, lorsque le taux de régénération du capital naturel renouvelable est faible (i.e. inférieur à un seuil dépendant des élasticités des intrants du processus productif mais également du taux de déclin maximum de la taille de population), nous trouvons qu'une crise du type "Flux de bien(s) manufacturé(s) trop élevé" advient pour une valeur de l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable qui est inférieure à celle maximisant la taille de population. Ainsi, la perte de durabilité n'est pas précédée d'un déclin de la taille de population. Nous obtenons le même genre de résultat concernant la variation de la répartition de la population.

Cependant, alors que la survenue d'une telle crise est certaine lorsque c'est l'intensité d'extraction qui varie, si c'est la répartition de la population qui change, l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable doit être suffisamment élevée pour que la crise de type "flux de biens manufacturés trop élevé" puisse advenir. De plus, sa localisation relative le long de la trajectoire de la taille de population, lorsque la répartition de la population change, dépend de la valeur de l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable ; elle dépend également des mêmes paramètres que lorsque c'est l'intensité d'extraction du capital naturel qui varie, c'est-à-dire taux de régénération du capital naturel renouvelable, élasticités des intrants du processus productif et taux de déclin maximum de la taille de population.

Plus précisément, lorsque le taux de régénération du capital naturel renouvelable est faible (c'est-à-dire qu'il est inférieur à un seuil dépendant des élasticités du processus productif, d'une part, et du taux de déclin maximum de la taille de population, d'autre part), et sous réserve que l'inten-

sité d'extraction du capital naturel renouvelable soit suffisamment élevée, la crise de type "Flux de biens manufacturés trop élevé" advient lors de la phase croissante de la taille de population. Ainsi, lors de changements de pratiques, que nous identifions ici à la modification des contrôles, la perte de durabilité n'est pas nécessairement précédée d'un déclin de la taille de population. De plus, la sortie d'une telle crise n'induit une réduction de la taille de population que si le taux de régénération du capital naturel renouvelable est faible.

4.2.4 Sobriété, viabilité et piège socio-écologique

Une bifurcation peut être annoncée par des signaux avant-coureurs, de tels signaux peuvent concerner le comportement transitoire [Dakos 2012]. L'augmentation du temps de retour à l'équilibre après perturbation est l'un de ces signaux avant-coureur [Veraart 2012]. Nous obtenons ici un résultat de ce type, illustré par la figure 3.8. Ainsi, lorsque le système est proche de son état d'équilibre, une situation socialement et biophysiquement adaptée semble souhaitable (puisque, dans une telle situation, une plus grande proportion de trajectoires issues des environs de l'équilibre sont viables).

[Antoci 2011] montrent, dans un modèle comparable, la présence d'un piège à pauvreté. Pour cela, ils montrent que deux points fixes avec cohabitation existent P_1 et P_2 . Ces deux points ne sont pas dotés de la même quantité de capital (ce qui correspond dans notre modèle aux biens manufacturés). P_1 est doté d'une quantité de capital moindre que P_2 et est qualifié de piège à pauvreté. Nous obtenons un résultat comparable dans le cas rendement d'échelle croissant, puisque nous montrons que deux points fixes avec cohabitation coexistent (les deux présentant la même quantité de biens manufacturés par individu mais étant inégalement dotés en capital naturel renouvelable et en taille de population : l'un ayant une grande taille de population et un petit niveau de capital naturel renouvelable alors que pour l'autre c'est l'inverse). [Antoci 2011] illustrent le piège à pauvreté par la sensibilité aux conditions initiales. Effectivement, ils exhibent deux trajectoires T_1 et T_2 , T_1 partant proche de P_1 et T_2 partant proche de P_2 et pourtant T_1 se rapprochant de P_2 et T_2 de P_1 . Nous montrons qu'un sous-ensemble non vide de l'ensemble contenant le point fixe avec cohabitation présentant une taille de population la plus faible, peut être qualifié de piège socio-écologique : aucune trajectoire passant par ce sous-ensemble ne convergera vers un point fixe avec cohabitation. Or, en modifiant la valeur des contrôles, il est possible de quitter ce sous-ensemble de deux façons : soit en augmentant l'intensité de consommation de biens manufacturés, ou bien en augmentant l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable. Ainsi, lorsque le système est loin de son état d'équilibre, une situation socialement et biophysiquement adaptée n'est pas nécessairement souhaitable puisqu'alors le système a plus de chance d'appartenir au piège socio-écologique.

Finalement, d'un point de vue de gestion, pour une situation donnée, il y a donc un arbitrage à trouver entre une exploitation du capital naturel renouvelable permettant de quitter le piège socio-écologique mais qui en même temps n'induit pas l'apparition d'un cycle de type explosion-déclin.

4.3 Perspectives

Nous identifions plusieurs pistes pour poursuivre ce travail.

4.3.1 Changer les hypothèses

Tout d'abord, il serait possible de garder la même méthodologie, mais de modifier les hypothèses sous-jacentes. En effet, il serait possible, d'analyser la sensibilité des composantes du point fixe avec cohabitation et d'analyser sa stabilité lorsque certains paramètres, ou contrôles,

varient en choisissant une autre fonction de production qu'une Cobb-Douglas (correspondant à des hypothèses sur le processus productif différentes). A mesure que l'intensité d'extraction du capital naturel varie nous devrions retrouver les mêmes bifurcations : col-nœud ou transcritique puis Hopf. Cependant, notre typologie de crises ne serait probablement plus entièrement valable puisque la condition sur l'intensité de consommation de biens manufacturés assurant la stabilité asymptotique serait modifiée. De plus, en cas de rendement d'échelle croissant, l'estimation basse du piège socio-écologique ne serait peut être plus possible.

Nous pourrions aussi supposer une stratification dans le capital naturel renouvelable, de façon analogue à ce qui est fait dans [Rapaport 2006]. L'augmentation de la dimension de l'espace des phases induit par un tel changement est susceptible de changer drastiquement la typologie des crises possibles.

Enfin, nous pourrions supposer d'autres contrôles, puisque, comme illustré dans [Alvarez 2016], les hypothèses, et les formes fonctionnelles utilisées, d'un modèle peuvent changer drastiquement la nature des résultats.

4.3.2 Piège socio-écologique, approche numérique

Actuellement nous ne montrons que l'existence d'un piège socio-écologique, mais nous n'estimons pas précisément sa frontière ni son volume. Utiliser des algorithmes de calcul de noyaux de viabilité permettrait de répondre numériquement à ce problème. Bien que le modèle soit non calibré, de tels calculs permettraient de savoir si, comme nous le pensons, dans une certaine mesure, lorsque l'intensité d'extraction du capital naturel augmente, le volume de ce piège diminue.

4.3.3 Modéliser l'adaptabilité d'un système écologique et social par la théorie de la viabilité

Une autre piste d'amélioration pourrait être de considérer que ces contrôles sont des contrôles au sens de la théorie de la viabilité [Aubin 2011] et qu'il est donc possible de les changer au cours du temps. Cela correspond à l'hypothèse que la société est capable de changer ses pratiques de façon à changer non seulement la nature des résultats asymptotiques (i.e. du comportement en temps long de notre modèle) mais également les dynamiques transitoires. En reprenant le modèle que nous développons ici, les contrôles concerneraient donc la répartition des tâches, l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable ainsi que l'intensité de consommation de biens manufacturés. Cette approche pourrait être conjuguée avec un autre pilier de la théorie de la viabilité : l'espace de contrainte. Cela permettrait d'évaluer la durabilité d'un scénario par la capacité du système à appartenir à un certain ensemble de contraintes [Bates 2018], [Oubraham 2018].

Heuristiquement, le sauvetage d'une situation (i.e. une condition initiale (x_0, y_0, z_0)) appartenant au piège socio-écologique passe par l'augmentation de l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable (ou avec un succès moins certain le changement de répartition des tâches). Si cette augmentation déclenche une crise de type "Déficit de consommation de biens manufacturés", l'intensité de consommation de biens manufacturés doit également être changée. Si elle déclenche une crise du type "flux de biens manufacturés trop élevé", alors l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable devra être diminuée par la suite. Les instants où de tels changements doivent arriver n'étant pas facilement déterminables, l'utilisation d'algorithmes de viabilité permettrait d'une part de lever ces indéterminations, et d'autre part de vérifier la validité de cette heuristique. De plus, notre classification étant basée sur des critères asymptotiques, elle n'apporte pas d'information sur les trajectoires transitoires, en particulier sur l'amplitude des cycles. L'utilisation de tels algorithmes permettrait de déterminer à quel point il est possible de rectifier une situation problématique de façon similaire à ce qui est fait dans [Martin 2004].

Annexes

Conditions d'existence d'un équilibre avec cohabitation

Un Point Fixe Avec Cohabitation (**PFAC**) est un point $S_0 := (x_0, y_0, z_0)$ tel que $x_0 y_0 z_0 > 0$ en lequel la dynamique du système d'équations (2.1.4) est nulle. Il vérifie donc le système d'équations suivant :

$$0 = \mu(\delta_C z_0)x_0 \quad (\text{A.1})$$

$$0 = r y_0 \left(1 - \frac{y_0}{K}\right) - \delta_{RP} x_0 y_0 \quad (\text{A.2})$$

$$0 = A(1-p)^\alpha (\delta_{RP})^\beta x_0^{\alpha+\beta-1} y_0^\beta - \delta_C z_0. \quad (\text{A.3})$$

(x_0, y_0, z_0) vérifie donc les relations suivantes :

$$z_0 := \frac{s}{\delta_C} \quad (\text{A.4})$$

$$y_0 := K \left(1 - \frac{\delta_{RP}}{r} x_0\right) \quad (\text{A.5})$$

$$P_{(\alpha,\beta)}(x_0) = s, \quad (\text{A.6})$$

avec, $s = \frac{-\mu_m \arg(\mu_M)}{\mu_M - \mu_m}$ et $P_{(\alpha,\beta)}$ la Fonction de production de Biens Manufacturés par Individu à l'Equilibre (**FoBiMIE**), définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} P_{(\alpha,\beta)} &:]0, \frac{r}{\delta_{RP}}[\rightarrow \mathbb{R}^{+*} \\ x &\mapsto P_{(\alpha,\beta)}(x) = A(1-p)^\alpha (K \delta_{RP})^\beta x^{\alpha+\beta-1} \left(1 - \frac{\delta_{RP}}{r} x\right)^\beta. \end{aligned}$$

Ainsi, S_0 existe si et seulement si s appartient à l'image de $P_{(\alpha,\beta)}$. Différents cas (suivant les Rendement(s) d'Échelle(s) (**RE**)) sont à considérer :

1. En cas de Rendement d'Échelle Décroissant (**RED**), $P_{(\alpha,\beta)}$ est une fonction décroissante et bijective, puisque $s > 0$, S_0 existera toujours.
2. En cas de Rendement d'Échelle Constant (**RECo**), $P_{(\alpha,\beta)}$ est une fonction décroissante, $P_{(\alpha,\beta)} \rightarrow A(1-p)^\alpha (K \delta_{RP})^{1-\alpha}$ lorsque $x \rightarrow 0$ et $P_{(\alpha,\beta)} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \frac{r}{\delta_{RP}}$, ainsi S_0 existe si et seulement si :

$$\delta_R > \left(\frac{s}{A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1}{p(1-p)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} K} =: \delta_{R,RECo}(p). \quad (\text{A.7})$$

Si l'équation (A.7) est vérifiée alors S_0 est unique et donné par :

$$x_0(\delta_R, p) := \frac{r}{\delta_{RP}} - \frac{r}{K(\delta_{RP})^2} \left(\frac{s}{A(1-p)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (\text{A.8})$$

$$y_0(\delta_R, p) := \frac{1}{\delta_{RP}} \left(\frac{s}{A(1-p)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (\text{A.9})$$

$$z_0 := \frac{s}{\delta_C}. \quad (\text{A.10})$$

$$(\text{A.11})$$

3. En cas de Rendement d'Échelle Croissant (RECr), $P_{(\alpha,\beta)}$ est une fonction croissante puis décroissante, est maximum en $x_M(\delta_R, p) := \frac{r}{\delta_R p} \frac{\alpha+\beta-1}{\alpha+2\beta-1}$ et vérifie $P_{(\alpha,\beta)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, $P_{(\alpha,\beta)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \frac{r}{\delta_R p}} 0$. Ainsi S_0 existe si et seulement si :

$$P_{(\alpha,\beta)}(x_M(\delta_R, p)) \geq s \quad (\text{A.12})$$

$$\iff \quad (\text{A.13})$$

$$\delta_R^{1-\alpha} \geq s \frac{(\alpha + 2\beta - 1)^{\alpha+2\beta-1}}{(\alpha + \beta - 1)^{\alpha+\beta-1}} \frac{1}{(K\beta)^\beta p^{1-\alpha} A(1-p)^{\alpha r^{\alpha+\beta-1}}}. \quad (\text{A.14})$$

Remarquons, à la différence des deux cas précédents, si l'équation (A.14) est satisfaite strictement S_0 n'est pas unique. Deux tailles de population sont possibles, situées de part et d'autre de $x_M(\delta_R, p)$.

Sensibilité à l'intensité d'extraction du capital naturel renouvelable

Nous définissons $S := (x_*, y_*, z_*)$ (qui est égal à S_0 dans le cas rendement d'échelle constant ou rendement d'échelle décroissant et qui est le PFAC avec la plus grande taille de population dans le cas RECr). Comme il est montré ci-après (voir section C), c'est le seul PFAC potentiellement stable. Dans cette section, nous étudions le sens de variations de x_* et y_* lorsque δ_R varie ($z_* = \frac{s}{\delta_C}$, ne dépend pas de δ_R). Par soucis de lisibilité, nous n'indiquons pas toujours la dépendance à (δ_R, p) .

B.1 Cas analytiques (rendement d'échelle constant ou rendement d'échelle croissant avec $\alpha = 1$)

B.1.1 Rendement d'échelle constant ($\alpha + \beta = 1$)

Lorsque l'équation (A.7) est satisfaite, la dérivée partielle de x_* par rapport à δ_R , d'après l'équation (A.8) est :

$$\partial_{\delta_R} x_*(\delta_R, p) = \frac{r}{p\delta_R^2} (-1 + \delta_{R,RECo}(p)/\delta_R). \quad (\text{B.1})$$

Ainsi x_* est une fonction croissante lorsque $\delta_R \in [\delta_{R,RECo}(p), 2\delta_{R,RECo}(p)]$ et décroît lorsque $\delta_R \geq 2\delta_{R,RECo}(p)$.

y_* est inversement proportionnelle à δ_R donc décroissante. Concernant les limites, nous avons, pour tout $p \in]0, 1[$:

$$(x_*, y_*) \rightarrow (0, K), \text{ lorsque } \delta_R \rightarrow \delta_{R,RECo}(p), \quad (\text{B.2})$$

$$(x_*, y_*) \rightarrow (0, 0), \text{ lorsque } \delta_R \rightarrow \infty. \quad (\text{B.3})$$

B.1.2 Rendement d'échelle croissant avec $\alpha = 1$

L'équation (A.14) devient :

$$p < 1 - \left(\frac{4}{Kr}\right)^\beta \frac{s}{A} =: p_M. \quad (\text{B.4})$$

x_* vérifie l'équation suivante :

$$K\delta_{RP}x_* \left(1 - \frac{\delta_{RP}}{r}x_*\right) = \left(\frac{s}{A(1-p)}\right)^{\frac{1}{\beta}}. \quad (\text{B.5})$$

Ainsi, lorsque l'équation (B.4) est vérifiée, le trinôme du second degré $-\frac{K}{r}(\delta_{RP})^2 X^2 + K\delta_{RP}X - \left(\frac{s}{A(1-p)}\right)^{\frac{1}{\beta}}$ admet deux racines réelles de part et d'autre de $\frac{r}{2\delta_{RP}} = x_M(\delta_R, p)$ et ainsi nous

trouvons :

$$x_*(\delta_R, p) = \frac{r}{2\delta_R p} + \frac{\sqrt{r - 4\frac{r}{K} \left(\frac{s}{A(1-p)}\right)^{\frac{1}{\beta}}}}{2\delta_R p}, \quad (\text{B.6})$$

$$y_*(\delta_R, p) = \frac{1}{2} \left(K - \sqrt{K^2 - 4\frac{K}{r} \left(\frac{s}{A(1-p)}\right)^{\frac{1}{\beta}}} \right), \quad (\text{B.7})$$

y_* est donc indépendante de δ_R et x_* est une fonction décroissante de δ_R (car inversement proportionnelle). Concernant les limites, nous avons, dès que p satisfait l'équation (B.4) :

$$x_*(\delta_R, p) \rightarrow \infty, \text{ lorsque } \delta_R \rightarrow 0, \quad (\text{B.8})$$

$$x_*(\delta_R, p) \rightarrow 0, \text{ lorsque } \delta_R \rightarrow \infty. \quad (\text{B.9})$$

B.2 Cas non analytiques (rendement d'échelle décroissant ou rendement d'échelle croissant avec $\alpha \neq 1$)

B.2.1 Remarque préliminaire sur le cas rendement d'échelle croissant avec $\alpha \neq 1$

En cas de RECr, pour que S existe, il faut et il suffit que l'équation (A.14) soit vérifiée strictement. Cela revient à :

$$\delta_R > \left(s \frac{(\alpha + 2\beta - 1)^{\alpha + 2\beta - 1}}{(\alpha + \beta - 1)^{\alpha + \beta - 1}} \frac{1}{(K\beta)^\beta p^{1-\alpha} A(1-p)^{\alpha\gamma + \beta - 1}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} =: \delta_{R,m,RECr}(p) \text{ si } \alpha < 1 \quad (\text{B.10})$$

$$\delta_R < \delta_{R,m,RECr}(p) \text{ sinon.} \quad (\text{B.11})$$

Lorsque δ_R tend vers $\delta_{R,m,RECr}(p)$ (par valeur positive si $\alpha < 1$ et négative si $\alpha > 1$) alors $P_{(\alpha,\beta)}(x_M(\delta_R, p))$ tend vers s et donc $x_*(\delta_R, p)$ tend vers $x_M(\delta_{R,m,RECr}(p), p)$.

B.2.2 Dérivée partielle de x_* par rapport à δ_R

En cas de rendement d'échelle décroissant, pour toute valeur de δ_R , x_* existe, en cas de rendement d'échelle croissant, il suffit que δ_R satisfasse l'équation (A.14). Dans les deux cas x_* est une fonction implicite de δ_R et vérifie :

$$P_{(\alpha,\beta)}(x_*) = A(1-p)^\alpha (K\delta_R p)^\beta x_*^{\alpha+\beta-1} \left(1 - \frac{\delta_R p}{r} x_*\right)^\beta = s. \quad (\text{B.12})$$

Ainsi, dans le cas rendement d'échelle croissant, en supposant que l'équation (A.14) est vérifiée strictement, comme dans le cas rendement d'échelle décroissant, nous avons :

$$\partial_{\delta_R} x_* = -\frac{x_*^\beta A_1(\delta_R p x_*)}{\delta_R A_2(\delta_R p x_*)}, \quad (\text{B.13})$$

avec A_1, A_2 des fonctions de l'effort total d'extraction $t := \delta_R p x_*$:

$$A_1(t) := r - 2t \quad (\text{B.14})$$

$$A_2(t) := (\alpha + \beta - 1)r - (\alpha + 2\beta - 1)t. \quad (\text{B.15})$$

Puisque :

1. En cas de RECr, $A_2(t) < 0 \iff x_M < x_*$,
2. En cas de RED, $A_2(t) < 0 \iff 0 < t$,

nous avons que $\partial_{\delta_R} x_* > 0 \iff A_1(\delta_R p x_*) > 0$.

Soit

$$f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (\delta_R, p) \mapsto f(\delta_R, p) := \frac{r}{2\delta_R p},$$

avec $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+*} \times]0, 1[$.

Si $x_*(\delta_R, p)$ est inférieure à $f(\delta_R, p)$, $x_*(\cdot, p)$ est croissante, sinon elle est décroissante et est maximum en (δ_R, p) si $f(\delta_R, p) = x_*(\delta_R, p)$. Le sens de variation de la fonction $x_*(\cdot, p)$ dépend donc des valeurs de $x_*(\cdot, p)$ lorsque δ_R tend vers ses valeurs limites. Puisque :

$$(x_M - f)(\delta_R, p) = \frac{r}{\delta_R p} \frac{\alpha - 1}{2(\alpha + 2\beta - 1)}, \quad (\text{B.16})$$

une distinction selon les RE doit être faite.

B.2.3 Rendement d'échelle croissant avec $\alpha < 1$

Par l'équation (B.16), $x_M(\cdot, p)$ est inférieure à $f(\cdot, p)$ et donc $x_*(\cdot, p)$ est croissante pour des petites valeurs de δ_R . Puisque $f(\cdot, p)$ est décroissante et tend vers 0 lorsque $\delta_R \rightarrow \infty$, $x_*(\cdot, p)$ la rencontre pour une certaine valeur de δ_R . Ensuite, $x_*(\cdot, p)$ décroît, mais ne peut pas passer en dessous de $f(\cdot, p)$ (car sinon cela impliquerait que $x_*(\cdot, p)$ est inférieure à $f(\cdot, p)$ et pourtant croissante). De plus, puisque $x_*(\delta_R, p) < \frac{r}{\delta_R p}$ (puisque x_* doit appartenir à l'ensemble de définition de la FoBiMIE définie dans l'annexe (E.2.1.2)), $x_*(\delta_R, p) \rightarrow 0$ quand $\delta_R \rightarrow \infty$.

B.2.4 Rendement d'échelle croissant avec $\alpha > 1$

Par l'équation (B.16), nous avons :

$$f(\cdot, p) < x_M(\cdot, p).$$

De plus, $x_M(\cdot, p) < x_*(\cdot, p)$ (par définition de S). Ainsi, $x_*(\cdot, p)$ est une fonction décroissante avec, pour la même raison que précédemment :

$$x_*(\delta_R, p) \xrightarrow{\delta_R \rightarrow \delta_{R,m,RECr}(p)} x_M(p, \delta_{R,m,RECr}(p)), \\ x_*(\delta_R, p) \xrightarrow{\delta_R \rightarrow \infty} 0.$$

B.2.5 Rendement d'échelle décroissant

Dans le cas rendement d'échelle décroissant, l'équation (B.12) peut toujours être satisfaite pour un certain x_* non nul. À p fixé, $x_*(\cdot, p)$ est donc définie sur \mathbb{R}^{+*} . L'équation (B.12) est équivalente à :

$$A(1-p)^\alpha (K\delta_R p)^\beta \left(1 - \frac{\delta_R p}{r} x_*\right)^\beta = s x_*^{1-\alpha-\beta}. \quad (\text{B.17})$$

Le terme de gauche tend vers 0 lorsque δ_R tend vers 0. Le terme de droite tend donc vers 0 lorsque δ_R tend vers 0. Ainsi, $x_*(\delta_R, p)$ tend vers 0 lorsque δ_R tend vers 0.

De plus, lorsque δ_R tend vers l'infini, $x_*(\delta_R, p)$ étant majoré par $\frac{r}{\delta_R p}$, x_* tend vers 0. Lorsque δ_R est suffisamment proche de 0, $x_*(\delta_R, p)$ est inférieur à $f(\delta_R, p)$ (qui tend vers l'infini lorsque $\delta_R \rightarrow 0$). Ainsi à mesure que δ_R s'éloigne de 0, $x_*(\cdot, p)$ croît. Au bout d'un moment puisque $f(\cdot, p)$ décroît et tend vers 0 lorsque $\delta \rightarrow \infty$, $x_*(\cdot, p)$ et $f(\cdot, p)$ vont se rencontrer, ensuite $x_*(\cdot, p)$ décroît mais sans passer en dessous de $f(\cdot, p)$ (pour la même raison que dans les cas plus haut).

Variations de $x_*(\cdot, p)$

Pour tout rendement d'échelle, la taille de population est une fonction croissante puis décroissante de l'intensité d'extraction du Capital Naturel Renouvelable (CNR). Ses valeurs limites dépendent du rendement d'échelle.

Conditions de stabilité de cet équilibre

Nous rappelons que le PFAC que nous étudions est $S = (x_*, y_*, z_*)$. Il correspond à S_0 dans le cas rendement d'échelle constant ou rendement d'échelle décroissant. En cas de RECr, il est le PFAC avec la plus grande taille de population.

Pour évaluer sa stabilité, nous devons déterminer le signe des valeurs propres de la jacobienne définie ainsi :

$$J_S := \begin{pmatrix} \mu(\delta_C z_*) & 0 & \mu'(\delta_C z_*) x_* \delta_C \\ -\delta_{RP} y_* & r(1 - 2y_*/K) - \delta_{RP} x_* & 0 \\ A(1-p)^\alpha (\delta_{RP})^\beta (\alpha + \beta - 1) x_*^{\alpha + \beta - 2} y_*^\beta & A(1-p)^\alpha (\delta_{RP})^\beta x_*^{\alpha + \beta - 1} \beta y_*^{\beta - 1} & -\delta_C \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

En utilisant les liens entre les composantes de S , l'équation (C.1) devient :

$$J_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu'(\delta_C z_*) x_* \delta_C \\ -\delta_{RP} y_* & -r y_*/K & 0 \\ (\alpha + \beta - 1) \delta_C z_*/x_* & \beta \delta_C z_*/y_* & -\delta_C \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

En appliquant le critère de Routh-Hurwitz, nous savons que S est asymptotiquement stable si et seulement si le système suivant est vérifié :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{r y_*}{K} + \delta_C > 0 \quad (\text{C.3}) \\ -\frac{\delta_C^2 \mu'(\delta_C z_*) z_* (r y_*(\alpha + \beta - 1) - K \beta \delta_{RP} x_*)}{K} > 0 \quad (\text{C.4}) \\ -\frac{\delta_C}{K^2} (K^2 \delta_C \mu'(\delta_C z_*) z_* (\beta \delta_{RP} x_* + \beta \delta_C + \alpha \delta_C - \delta_C) - r^2 y_*^2 - K \delta_C r y_*) > 0 \quad (\text{C.5}) \end{array} \right.$$

L'équation (C.3) est toujours satisfaite. Par définition μ (cf section 2.1.1) est croissante en $\delta_C z_*$. Ainsi, l'équation (C.4) est toujours satisfaite en cas de rendement d'échelle constant ou rendement d'échelle décroissant. En cas de rendement d'échelle croissant, puisque $y_* = K(1 - \frac{\delta_{RP}}{r} x_*)$, elle est équivalente à :

$$\frac{r}{\delta_{RP}} \frac{\alpha + \beta - 1}{\alpha + 2\beta - 1} = x_M(\delta_R, p) < x_*. \quad (\text{C.6})$$

Ainsi, la condition de subsistance (donnée par l'équation (A.14)) doit être satisfaite strictement pour avoir stabilité asymptotique. Parmi les deux équilibres possibles avec cohabitation seul celui avec la plus grande taille de population, que nous avons noté S , peut être asymptotiquement stable. Enfin l'équation (C.5) est équivalente à :

$$\delta_C R(x_*) < Q(x_*), \quad (\text{C.7})$$

avec :

$$R(x_*) := (\alpha + \beta - 1)(-\mu_m) - r + \delta_{RP} x_*, \quad (\text{C.8})$$

$$Q(x_*) := x_*^2 - (2r + \beta(-\mu_m))x_* + r^2. \quad (\text{C.9})$$

R est une fonction croissante affine, s'annulant en $x_R := \frac{r - (\alpha + \beta - 1)(-\mu_m)}{\delta_{RP}}$. L'étude du discriminant de Q permet d'affirmer qu'elle sera positive ou nulle sur l'intervalle de longueur non nulle $[x_{Q,1}, x_{Q,2}]$. Avec

$$x_{Q,1} := \frac{r}{\delta_{RP}} - \frac{\beta\mu_m + \sqrt{\beta\mu_m(\beta\mu_m - 4r)}}{2\delta_{RP}}, \quad (\text{C.10})$$

$$x_{Q,2} := \frac{r}{\delta_{RP}} - \frac{\beta\mu_m - \sqrt{\beta\mu_m(\beta\mu_m - 4r)}}{2\delta_{RP}}. \quad (\text{C.11})$$

Notons que $x_{Q,2} > \frac{r}{\delta_{RP}}$ et que $x_{Q,1} > 0$, ainsi, Q est positive sur $]0, x_{Q,1}[$ nulle en $x_{Q,1}$ puis négative sur $]x_{Q,1}, \frac{r}{\delta_{RP}}[$.

Posons $\psi = \beta r - (-\mu_m)(\alpha + \beta - 1)(\alpha + 2\beta - 1)$, nous avons que :

$$x_R - x_{Q,1} = -\frac{\mu_m\psi}{\delta_{RP} \left[\frac{\sqrt{\beta\mu_m(\beta\mu_m - 4r)}}{2} + \left(\alpha + \frac{3\beta}{2} - 1 \right) (-\mu_m) \right]}, \quad (\text{C.12})$$

$$x_M - x_R = -\frac{\psi}{\delta_{RP}(\alpha + 2\beta - 1)}, \quad (\text{C.13})$$

$$x_M - x_{Q,1} = -\frac{r\beta\psi}{\delta_{RP}(\alpha + 2\beta - 1)^2 \left(\frac{\sqrt{\beta\mu_m(\beta\mu_m - 4r)}}{2} + \frac{\beta(-\mu_m)}{2} + \frac{\beta r}{(\alpha + 2\beta - 1)} \right)}. \quad (\text{C.14})$$

Ainsi dans le cas RECo ou RECr, il y a trois possibilités concernant la position relative de $x_M, x_{Q,1}$ et x_R :

1.

$$x_M < x_{Q,1} < x_R \iff \psi > 0, \quad (\text{C.15})$$

2.

$$x_M = x_{Q,1} = x_R \iff \psi = 0, \quad (\text{C.16})$$

3.

$$x_R < x_{Q,1} < x_M \iff \psi < 0. \quad (\text{C.17})$$

Dans le cas rendement d'échelle décroissant, x_R et x_M sont en dehors de $]0, \frac{r}{\delta_{RP}}[$ ainsi, la seule position relative pouvant changer est celle de x_* par rapport à $x_{Q,1}$.

En discriminant les différents RE possibles, nous pouvons donc déduire les arbres de classification suivants quant à la stabilité de S .

C.1 Rendement d'échelle croissant

Une condition de subsistance s'applique (donnée par l'équation (A.14)). Si elle n'est pas vérifiée, S n'existe pas.

1. Si $\psi \leq 0$, alors S est instable. Plusieurs raisons sont possibles :

(a) Si $\alpha + \beta \geq 1 + \frac{r}{-\mu_m}$. R est positive sur $]0, \frac{r}{\delta_{RP}}[$ et en particulier sur $]x_M, \frac{r}{\delta_{RP}}[$, ainsi $x_M > x_R$, par l'équivalence (C.17) nous avons donc que $x_{Q,1} < x_M$, cela implique que $Q(x_*) < 0$ et $R(x_*) > 0$ et la condition (C.7) requière $\delta_C < 0$.

(b) Sinon (R est donc négative, nulle puis positive sur $]0, \frac{r}{\delta_{RP}}[$)

i. Par l'équivalence (C.17), si $\psi < 0$, $Q(x_*) < 0$ et $R(x_*) > 0$ et la condition (C.7) requière $\delta_C < 0$.

ii. Par l'équivalence (C.16), si $\psi = 0$, $Q(x_*) = 0$ et $R(x_*) = 0$ et la condition (C.7) requière $\delta_C < 0$.

2. Sinon (lorsque $\psi > 0$) par l'équivalence (C.15) $x_M < x_{Q,1} < x_R$, la position de x_* par rapport à x_R et $x_{Q,1}$ décide de la nature de la condition (C.7) sur δ_C .

- (a) Si $x_* < x_{Q,1}$, la condition donnée par l'équation (C.7) sur δ_C est :

$$\delta_C \underbrace{R(x_*)}_{<0} < \underbrace{Q(x_*)}_{>0}; \quad (\text{C.18})$$

La condition donnée par l'équation (C.7) est donc toujours satisfaite. S est asymptotiquement stable.

- (b) Si $x_* = x_{Q,1}$, la condition donnée par l'équation (C.7) sur δ_C est :

$$\delta_C \underbrace{R(x_*)}_{<0} < \underbrace{Q(x_*)}_{=0}; \quad (\text{C.19})$$

La condition donnée par l'équation (C.7) est donc toujours satisfaite. S est asymptotiquement stable.

- (c) Si $x_{Q,1} < x_* < x_R$, la condition donnée par l'équation (C.7) sur δ_C est équivalente à :

$$\delta_C > \frac{Q}{R}(x_*) > 0. \quad (\text{C.20})$$

- (d) Si $x_* = x_R$, la condition donnée par l'équation (C.7) sur δ_C est :

$$\delta_C \underbrace{R(x_*)}_{=0} < \underbrace{Q(x_*)}_{<0}. \quad (\text{C.21})$$

La condition donnée par l'équation (C.7) n'est donc jamais satisfaite.

- (e) Enfin, si $x_R < x_*$, la condition donnée par l'équation (C.7) sur δ_C est :

$$\delta_C \underbrace{R(x_*)}_{>0} < \underbrace{Q(x_*)}_{<0}. \quad (\text{C.22})$$

La condition donnée par l'équation (C.7) n'est donc jamais satisfaite.

C.2 Rendement d'échelle constant

Une condition de subsistance s'applique (donnée par l'équation (A.7)). Si elle n'est pas vérifiée, S n'existe pas. R est négative sur $]0, \frac{r}{\delta_{RP}}[$ et par l'équivalence (C.15) nous avons encore des sous-cas à considérer suivant la position de x_* .

1. Si $x_* < x_{Q,1}$, la condition donnée par l'équation (C.7) sur δ_C est :

$$\delta_C \underbrace{R(x_*)}_{<0} < \underbrace{Q(x_*)}_{>0}. \quad (\text{C.23})$$

La condition donnée par l'équation (C.7) est donc toujours satisfaite.

2. Si $x_* = x_{Q,1}$, la condition donnée par l'équation (C.7) sur δ_C est :

$$\delta_C \underbrace{R(x_*)}_{<0} < \underbrace{Q(x_*)}_{=0}. \quad (\text{C.24})$$

La condition donnée par l'équation (C.7) est donc toujours satisfaite.

3. Sinon $x_{Q,1} < x_*$, la condition donnée par l'équation (C.7) sur δ_C est équivalente à :

$$\delta_C > \frac{Q}{R}(x_*) > 0. \quad (\text{C.25})$$

C.3 Rendement d'échelle décroissant

Ici aucune condition de subsistance ne s'applique et, comme dans la section précédente, seul $x_{Q,1}$ joue un rôle :

1. Si $x_* < x_{Q,1}$, la condition donnée par l'équation (C.7) sur δ_C est :

$$\delta_C \underbrace{R(x_*)}_{<0} < \underbrace{Q(x_*)}_{>0}. \quad (\text{C.26})$$

La condition donnée par l'équation (C.7) est donc toujours satisfaite.

2. Si $x_* = x_{Q,1}$, la condition donnée par l'équation (C.7) sur δ_C est :

$$\delta_C \underbrace{R(x_*)}_{<0} < \underbrace{Q(x_*)}_{=0}. \quad (\text{C.27})$$

La condition donnée par l'équation (C.7) est donc toujours satisfaite.

3. Sinon $x_{Q,1} < x_*$, la condition donnée par l'équation (C.7) sur δ_C est équivalente à :

$$\delta_C > \frac{Q}{R}(x_*) > 0. \quad (\text{C.28})$$

C.4 Bornitude de Δ

Définissons la fonction seuil de δ_C ,

$$\Delta(x_*) := \frac{Q(x_*)}{R(x_*)}. \quad (\text{C.29})$$

Elle caractérise les valeurs de δ_C pour lesquelles S est asymptotiquement stable lorsque $x_{Q,1} \leq x_* < x_R$. Elle donne un infimum de δ_C pour que S soit asymptotiquement stable.

Sa dérivée est :

$$\Delta'(x_*) := \frac{\delta_{RP}}{(x_* - x_R)^2} \left((x_* - x_R)^2 - (x_R - x_{Q,1})(x_R - x_{Q,2}) \right). \quad (\text{C.30})$$

Remarquons que, dans le cas rendement d'échelle constant ou rendement d'échelle croissant avec $\psi > 0$, Δ est une fonction croissante puisque $x_{Q,1} < x_R < x_{Q,2}$.

C.4.1 Rendement d'échelle décroissant, $\alpha + \beta < 1$

Nous avons que :

$$0 < x_* < \frac{r}{\delta_{RP}}.$$

Ainsi :

$$0 < \frac{1}{x_R - x_*} < \frac{\delta_{RP}}{(1 - \alpha - \beta)(-\mu_m)}.$$

Il s'en suit :

$$\Delta(x_*) < \frac{(\delta_{RP})^2}{(1 - \alpha - \beta)(-\mu_m)} (x_* - x_{Q,1})(x_{Q,2} - x_*).$$

En majorant $x_* - x_{Q,1}$ par $\frac{r}{\delta_{RP}}$ et $x_{Q,2} - x_*$ par $x_{Q,2}$ nous trouvons que :

$$\Delta(x_*) < \frac{r}{(1 - \alpha - \beta)(-\mu_m)} \left(r - \frac{\beta\mu_m - \sqrt{\beta\mu_m(\beta\mu_m - 4r)}}{2} \right). \quad (\text{C.31})$$

Ainsi, $\sup_{\delta_R, p} \Delta(x_*(\delta_R, p)) < \infty$.

x_*	0	$x_{Q,1}$	$\frac{r}{\delta_{RP}}$
Stabilité		St	St ssi $\delta_C > \Delta(x_*)$

FIGURE C.1 – Possibilité de stabilité pour le cas rendement d'échelle décroissant. Les zones hachurées désignent des valeurs impossibles pour x_* . St signifie que S est stable.

x_*	0	$x_{Q,1}$	$\frac{r}{\delta_{RP}}$
Stabilité		St	St ssi $\delta_C > \Delta(x_*)$

FIGURE C.2 – Possibilité de stabilité pour le cas rendement d'échelle constant. Les zones hachurées désignent des valeurs impossibles pour x_* . St signifie que S est stable.

C.4.2 Rendement d'échelle constant, $\alpha + \beta = 1$

En utilisant les valeurs de x_* , $x_{Q,1}$ et $x_{Q,2}$, nous trouvons que :

$$\Delta(x_*) = \frac{1}{\frac{r}{K} \left(\frac{s}{A(1-p)^\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \left(\frac{\delta_{RP} (1-\alpha)\mu_m + \sqrt{(1-\alpha)\mu_m((1-\alpha)\mu_m - 4r)}}{2} - \frac{r}{K} \left(\frac{s}{A(1-p)^\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) \\ \left(\frac{r}{K\delta_{RP}} \left(\frac{s}{A(1-p)^\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - \frac{(1-\alpha)\mu_m - \sqrt{(1-\alpha)\mu_m((1-\alpha)\mu_m - 4r)}}{2} \right).$$

Ainsi, à la différence du cas rendement d'échelle décroissant, Δ , vue comme fonction de (δ_R, p) , n'est pas bornée.

C.5 Synthèse

C.5.1 Rendement d'échelle décroissant

cf figure C.1.

C.5.2 Rendement d'échelle constant

Lorsque la condition de subsistance donnée par l'équation (A.7) est satisfaite, nous avons la classification donnée par figure C.2. (similaire au cas rendement d'échelle décroissant).

C.5.3 Rendement d'échelle croissant

Lorsque la condition de subsistance donnée par l'équation (A.14) est satisfaite et que $\psi > 0$, nous avons la classification donnée par la figure C.3.

x_*	x_M	$x_{Q,1}$	x_R	$\frac{r}{\delta_{RP}}$	
Stabilité		St	St ssi $\delta_C > \Delta(x_*)$	Inst	

FIGURE C.3 – Possibilité de stabilité pour le cas rendement d'échelle croissant. Les zones hachurées désignent des valeurs impossibles pour x_* . St signifie que S est stable. Inst qu'il est instable.

Impact des différentes stratégies sur la valeur de l'équilibre et sa stabilité

Nous rappelons que S est égal à S_0 dans le cas rendement d'échelle constant ou rendement d'échelle décroissant ; dans le cas rendement d'échelle croissant, c'est le Point Fixe Avec Cohabitation (PFAC) avec la plus grande taille de population. Par l'annexe C, nous savons que seul S peut être un PFAC asymptotiquement stable. Dans cette section, nous déterminons l'impact sur les variations de S et sur sa stabilité de trois stratégies différentes. La première stratégie consiste en la variation de δ_R , la seconde en la variation de p et la dernière en la variation conjointe de p et δ_R mais en maintenant $\delta_R p$ constant. L'impact de δ_R étant étudié dans l'annexe B, pour la première stratégie, nous ne développons ici que son impact sur la stabilité de S . Puisque seuls x_* et y_* sont impactés par (δ_R, p) , ces stratégies laissent z_* constant. Par souci de vraisemblance, nous supposons que $\alpha < 1$ dans tous les cas. Effectivement, lorsque $\alpha \geq 1$, x_* est une fonction décroissante de δ_R et ce cas n'est donc pas considéré, (cf section 3.2.1.1). Dans le cas rendement d'échelle croissant, nous supposons de plus que $\psi > 0$, c'est-à-dire que la stabilité asymptotique est possible pour certaines valeurs de contrôles (δ_R, p, δ_C) (cf annexe C).

D.1 Changement d'intensité d'extraction du CNR

Cette sous-section est divisée en deux parties. Une première où l'on s'intéresse à $x_*(\cdot, p)$ afin de déterminer si S est stable ou non et une seconde où l'on s'intéresse au sens de variation de $y_*(\cdot, p)$.

D.1.1 Taille de population $x_*(\cdot, p)$

Ici, nous cherchons à déterminer si $x_*(\cdot, p)$ rencontre les tailles seuils $(x_R(\cdot, p)$ et $x_{Q,1}(\cdot, p))$ au cours de sa phase croissante ou décroissante. Ces seuils de taille de population doivent donc être comparés à $f(\cdot, p)$. Nous rappelons que :

- $f(\cdot, p)$ délimite les zones où $x_*(\cdot, p)$ est croissante ou décroissante,
- À mesure que δ_R varie, $x_*(\cdot, p)$ est croissante puis décroissante, (cf annexe B)
- Lorsque $x_* \leq x_{Q,1}$, S est stable,
- Lorsque $x_{Q,1} < x_* < x_R$, une instabilité est possible mais non certaine (cela dépend de δ_C par rapport à Δ),
- Lorsque $x_R \leq x_*$, une instabilité est certaine (cela ne peut arriver qu'en cas de Rendement d'Échelle Croissant (RECr)).

La localisation des seuils de population $x_{Q,1}$ et x_R par rapport à la fonction f (qui permet de déterminer le sens de variation de $x_*(\cdot, p)$) est donnée par :

$$\delta_R p (x_R - f)(\delta_R, p) = \frac{r}{2} + (\alpha + \beta - 1)\mu_m, \quad (\text{D.1})$$

$$2\delta_R p (x_{Q,1} - f)(\delta_R, p) = r + \beta(-\mu_m) - \sqrt{\beta\mu_m(\beta\mu_m - 4r)}. \quad (\text{D.2})$$

Nous avons les équivalences suivantes :

$$\delta_{Rp}(x_R - f)(\delta_R, p) = \frac{r}{2} + (\alpha + \beta - 1)\mu_m \leq 0 \quad (\text{D.3})$$

$$\iff x_R \leq f \quad (\text{D.4})$$

$$\iff r \leq 2(\alpha + \beta - 1)(-\mu_m), \quad (\text{D.5})$$

$$2\delta_{Rp}(x_{Q,1} - f)(\delta_R, p) = r + \beta(-\mu_m) - \sqrt{\beta\mu_m(\beta\mu_m - 4r)} \leq 0 \quad (\text{D.6})$$

$$\iff x_{Q,1} \leq f \quad (\text{D.7})$$

$$\iff r(r - 2\beta(-\mu_m)) \leq 0. \quad (\text{D.8})$$

D.1.1.1 Cas rendement d'échelle constant ou rendement d'échelle décroissant

Par l'équation (D.8) :

- Si $r \leq 2\beta(-\mu_m)$, alors $x_{Q,1}(\cdot, p) \leq f(\cdot, p)$. Ainsi, $x_*(\cdot, p)$ devient supérieure à $x_{Q,1}(\cdot, p)$ au cours de sa phase croissante et une instabilité est donc possible dès la phase croissante de la taille de population.
- Sinon, ($x_{Q,1}(\cdot, p) > f(\cdot, p)$), alors, $x_*(\cdot, p)$ devient supérieure à $x_{Q,1}(\cdot, p)$ au cours de sa phase décroissante. Une instabilité n'est donc possible qu'au cours de la phase décroissante de la taille de population.

D.1.1.2 En cas de rendement d'échelle croissant

Par les équations (D.5) et (D.8) :

- Si $r \geq 2\beta(-\mu_m)$, alors $f(\cdot, p) \leq x_{Q,1}$ et ainsi une instabilité n'est possible que lors de la phase décroissante de la taille de population.
- Si $2\beta(-\mu_m) > r \geq 2(\alpha + \beta - 1)(-\mu_m)$, alors $x_{Q,1} < f \leq x_R$ et ainsi une instabilité est possible dès la phase croissante mais ne devient certaine que lors de la phase décroissante.
- Sinon ($2(\alpha + \beta - 1)(-\mu_m) > r$), alors $x_{Q,1} < x_R < f$ et ainsi une instabilité (certaine) arrivera dès la phase croissante.

D.1.2 Quantité de capital naturel renouvelable $y_*(\cdot, p)$

De façon équivalente à l'équation (B.12), y_* est défini implicitement par l'équation suivante :

$$\mathcal{Q}_{(\alpha, \beta)}(y_*(\delta_R, p)) := A(\delta_R p)^{1-\alpha} (1-p)^\alpha y_*^\beta \left(r \left(1 - \frac{y_*}{K} \right) \right)^{\alpha+\beta-1} = s. \quad (\text{D.9})$$

Lorsque $x_*(\cdot, p)$ est défini et dérivable, $y_*(\cdot, p)$ est défini et dérivable. Ces conditions sont données dans la section B, elles reviennent à supposer que δ_R est positif (cas rendement d'échelle décroissant) ou supérieur à un seuil (cas rendement d'échelle croissant ou constant), en dérivant nous obtenons :

$$\partial_{\delta_R} y_*(\delta_R, p) = - \frac{y_*(K - y_*)}{\beta K - y_*(\alpha + 2\beta - 1)} \frac{1 - \alpha}{\delta_R}. \quad (\text{D.10})$$

Puisque $\beta K - y_*(\alpha + 2\beta - 1) > 0$ est équivalent à l'équation (C.4), $y_*(\cdot, p)$ est donc une fonction décroissante (puisque nous avons supposé $\alpha < 1$). Pour savoir ses valeurs limites, nous devons distinguer les cas selon les Rendement(s) d'Échelle(s) (RE).

D.1.2.1 Rendement d'échelle décroissant

L'équation (D.9) est équivalente à :

$$\frac{y_*^\beta}{(1 - y_*/K)^{1-\alpha-\beta}} = \frac{s r^{1-\alpha-\beta}}{A(\delta_R p)^{1-\alpha} (1-p)^\alpha}. \quad (\text{D.11})$$

Le terme de droite tend vers l'infini lorsque δ_R tend vers 0, donc le terme de gauche également, or $y_*(\cdot, p)$ est bornée et donc $y_*(\delta_R, p) \rightarrow K$ lorsque $\delta_R \rightarrow 0$.

Le terme de droite tend vers 0 lorsque δ_R tend vers l'infini, donc le terme de gauche également. Puisque $y_*(\cdot, p)$ est strictement décroissante et tend vers K en 0, $1 - y_*(\cdot, p)/K$ est donc borné inférieurement par un nombre strictement positif. Ainsi, $y_*(\cdot, p)$ tend donc vers 0.

D.1.2.2 Rendement d'échelle constant

En se servant de l'équation définissant y_* (A.9) et de celle de $\delta_{R,RECo}(p)$ (A.7), nous trouvons que :

$$\begin{aligned} y_*(\delta_R, p) &\xrightarrow{\delta_R \rightarrow \delta_{R,RECo}(p)} K, \\ y_*(\delta_R, p) &\xrightarrow{\delta_R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

D.1.2.3 Rendement d'échelle croissant

L'équation (D.9) est équivalente à :

$$y_*^\beta (1 - y_*/K)^{\alpha+\beta-1} = \frac{sr^{1-\alpha-\beta}}{A(\delta_R p)^{1-\alpha}(1-p)^\alpha}. \quad (D.12)$$

Le terme de droite tend vers 0 lorsque δ_R tend vers l'infini, donc le terme de gauche également et puisque $1 - y_*/K$ est borné inférieurement par un nombre strictement positif, y_* tend donc vers 0. Lorsque $\delta_R \rightarrow \delta_{R,m,RECr}(p)$, $x_* \rightarrow x_M$ donc $y_* \rightarrow \frac{K\beta}{\alpha+2\beta-1}$.

D.2 Changement de la répartition des tâches

D.2.1 Condition de subsistance (cas rendement d'échelle constant ou croissant)

Pour que S soit un PFAC asymptotiquement stable, l'équation de subsistance doit être satisfaite strictement. En cas de Rendement d'Échelle Constant (RECo), il s'agit de l'équation (A.7). En cas de RECr, il s'agit de l'équation (A.14).

D.2.1.1 Rendement d'échelle constant

Cela revient à :

$$p^{1-\alpha}(1-p)^\alpha > \frac{s}{A(\delta_R K)^{1-\alpha}}. \quad (D.13)$$

D.2.1.2 Rendement d'échelle croissant

Cela revient à :

$$p^{1-\alpha}(1-p)^\alpha > s \frac{(\alpha + 2\beta - 1)^{\alpha+2\beta-1}}{A(r(\alpha + \beta - 1))^{\alpha+\beta-1} \delta_R^{1-\alpha} (K\beta)^\beta}. \quad (D.14)$$

D.2.1.3 Synthèse

Pour qu'un PFAC existe et soit asymptotiquement stable une condition nécessaire est :

$$\delta_R^{1-\alpha} > \frac{s}{A(1-\alpha)^{1-\alpha} \alpha^\alpha} \rho. \quad (D.15)$$

Avec

$$\rho = \begin{cases} \frac{1}{K^{1-\alpha}} & \text{en cas de RECo.} \\ \frac{(\alpha+2\beta-1)^{\alpha+2\beta-1}}{(r(\alpha+\beta-1))^{\alpha+\beta-1}(K\beta)^\beta} & \text{en cas de RECr.} \end{cases} \quad (\text{D.16})$$

Ainsi, lorsque l'équation (D.15) est vérifiée, nous avons que l'ensemble des p satisfaisant strictement la condition de subsistance est de la forme $I_D(\delta_R) :=]p_1(\delta_R), p_2(\delta_R)[$ avec $1 - \alpha \in I_D(\delta_R) \subset]0, 1[$, que le RE soit croissant ou constant.

D.2.2 Variations de $x_*(\delta_R, \cdot)$ (et implications sur la stabilité)

D.2.2.1 Variations de $x_*(\delta_R, \cdot)$

En dérivant l'équation (B.12) par rapport à p sur $I_D(\delta_R)$, nous obtenons :

$$\partial_p x_*(\delta_R, p) = -\frac{x_*}{p(1-p)} \frac{A_{3,p}(\delta_R p x_*)}{A_2(\delta_R p x_*)}. \quad (\text{D.17})$$

Avec :

$$A_2(\delta_R p x_*) := (\alpha + \beta - 1)r - (\alpha + 2\beta - 1)\delta_R p x_*, \quad (\text{D.18})$$

$$A_{3,p}(\delta_R p x_*) := r \underbrace{(\beta - p(\alpha + \beta))}_{A(p)} - \delta_R p x_* \underbrace{(2\beta - p(\alpha + 2\beta))}_{B(p)}. \quad (\text{D.19})$$

Pour un p donné dans $I_D(\delta_R)$, en se rappelant que $t = \delta_R p x_*$, 3 cas -au plus- sont possibles :

- Si $p \in [\frac{\beta}{\alpha+\beta}, \frac{2\beta}{\alpha+2\beta}]$, alors $A(p) \leq 0 \leq B(p)$ et donc $A_{3,p}(t) \leq 0$ pour tout $t \geq 0$.
- Si $p \in]\frac{2\beta}{\alpha+2\beta}, 1[$, alors $A(p) < B(p) < 0$, ainsi $t_0 := r \frac{A(p)}{B(p)} > r$ et donc $A_{3,p}(t) < 0$ pour tout $t > 0$.
- Sinon ($p \in]0, \frac{\beta}{\alpha+\beta}[$), alors

$$A_{3,p}(\delta_R p x_*) \leq 0 \iff g(\delta_R, p) := \frac{r}{\delta_R p} \frac{A(p)}{B(p)} \leq x_*(\delta_R, p). \quad (\text{D.20})$$

Puisque

$$\partial_p g(\delta_R, p) := \frac{r [-p^2(\alpha + \beta)(\alpha + 2\beta) + 2p\beta(\alpha + \beta) - 2\beta^2]}{\delta_R (2\beta p - p(\alpha + 2\beta))^2} \leq 0, \quad (\text{D.21})$$

$g(\delta_R, \cdot)$ est donc une fonction positive et décroissante définie sur $]0, \frac{\beta}{\alpha+\beta}[$ et ses limites sont :

$$g(\delta_R, p) \xrightarrow{p \rightarrow 0} \infty, \quad (\text{D.22})$$

$$g(\delta_R, p) \xrightarrow{p \rightarrow \frac{\beta}{\alpha+\beta}} 0. \quad (\text{D.23})$$

Concernant la position relative de G (la courbe représentative de $g(\delta_R, \cdot)$) par rapport à celle de $x_*(\delta_R, \cdot)$, nous avons que :

$$\delta_R p (x_M - g)(\delta_R, p) = \frac{r\beta[\alpha - 1 + p]}{(\alpha + 2\beta - 1)(2\beta - p(\alpha + 2\beta))}. \quad (\text{D.24})$$

Ainsi, nous avons les équivalences suivantes :

$$x_M(\delta_R, p) < g(\delta_R, \cdot) \iff p \in I_D(\delta_R) \cap]0, 1 - \alpha[, \quad (\text{D.25})$$

$$x_M(\delta_R, p) = g(\delta_R, \cdot) \iff p = 1 - \alpha. \quad (\text{D.26})$$

Nous rappelons que $1 - \alpha \in I_D(\delta_R)$. Par les équivalences (D.25) et (D.26), nous pouvons donc en déduire le sens de variations de $x_*(\delta_R, \cdot)$ ainsi que ses limites au bord de $I_D(\delta_R)$ dans les différents RE possibles.

Rendement d'échelle croissant Les valeurs aux limites, par le même argument sur $P_{(\alpha,\beta)}$ qu'au paragraphe B.2.3, sont :

$$x_*(\delta_R, p) \xrightarrow{p \rightarrow p_1(\delta_R)} x_M(\delta_R, p_1(\delta_R)), \quad (\text{D.27})$$

$$x_*(\delta_R, p) \xrightarrow{p \rightarrow p_2(\delta_R)} x_M(\delta_R, p_2(\delta_R)). \quad (\text{D.28})$$

$x_*(\delta_R, \cdot)$ aura donc les variations suivantes sur $I_D(\delta_R)$:

1. Pour des p proches de $p_1(\delta_R)$, $p_1(\delta_R) < p$, par l'équivalence (D.25), $x_*(\delta_R, \cdot)$ sera croissante ;
2. puis $x_*(\delta_R, \cdot)$ rencontrera $g(\delta_R, \cdot)$ pour un $p < 1 - \alpha$;
3. ensuite, $x_*(\delta_R, \cdot)$ sera décroissante jusqu'à rencontrer $x_M(\delta_R, \cdot)$ en $p = p_2(\delta_R)$.

Rendement d'échelle constant En dérivant l'équation (A.8) nous obtenons :

$$\partial_p x_*(\delta_R, p) = -\frac{r}{K\delta_R^2 p^3} \left[K\delta_R p + \left(\frac{s}{A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} (1-p)^{-\frac{1}{1-\alpha}} \left(-2 + p\frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right) \right], \quad (\text{D.29})$$

de signe opposé à :

$$t_1(p) := K\delta_R p + \left(\frac{s}{A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} (1-p)^{-\frac{1}{1-\alpha}} \left(-2 + p\frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right), \quad (\text{D.30})$$

$$t'_1(p) = K\delta_R + \left(\frac{s}{A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} (1-p)^{-\frac{2+\alpha}{1-\alpha}} \frac{\alpha}{1-\alpha} \left(-1 + p\frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right), \quad (\text{D.31})$$

$$t_1^{(2)}(p) = \left(\frac{s}{A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} (1-p)^{-\frac{3+2\alpha}{1-\alpha}} p \frac{\alpha(2-\alpha)}{(1-\alpha)^3} > 0. \quad (\text{D.32})$$

t_1 est donc croissante avec :

$$t'_1(p) \xrightarrow{p \rightarrow p_1(\delta_R)} \frac{K\delta_R}{(1-p_1(\delta_R))^2(1-\alpha)} \left[(3-2\alpha)p_1(\delta_R)^2 - 3(1-\alpha)p_1(\delta_R) + 1 - \alpha \right] \underbrace{>}_* 0, \quad (\text{D.33})$$

(*) vient du fait que le polynôme : $(3-2\alpha)X^2 - 3(1-\alpha)X + (1-\alpha)$ n'admet pas de racines réelles. Ce qui implique $t'_1 > 0$ et donc t_1 est une fonction croissante. Nous avons :

$$t_1(p) \xrightarrow{p \rightarrow p_1(\delta_R)} \frac{K\delta_R p_1(\delta_R)}{1-p_1(\delta_R)} \left[p_1(\delta_R) \frac{1}{1-\alpha} - 1 \right] \underbrace{<}_1 0, \quad (\text{D.34})$$

$$t_1(p) \xrightarrow{p \rightarrow p_2(\delta_R)} \frac{K\delta_R p_2(\delta_R)}{1-p_2(\delta_R)} \left[p_2(\delta_R) \frac{1}{1-\alpha} - 1 \right] \underbrace{>}_2 0. \quad (\text{D.35})$$

(1) (respectivement (2)) vient du fait que $p_1(\delta_R) < 1 - \alpha$ (respectivement $p_2(\delta_R) > 1 - \alpha$). Finalement $x_*(\delta_R, \cdot)$ est une fonction croissante puis décroissante, et puisque $t_1(1-\alpha) > 0$ son maximum est atteint pour un $p_0 < 1 - \alpha$.

Rendement d'échelle décroissant Combinant les équations (A.6), (A.5) et (A.4), nous trouvons que $x_*(\delta_R, p)$ vérifie :

$$\underbrace{x_*(\delta_R, p)}_{(1)}^{\alpha+\beta-1} \underbrace{\left(1 - \frac{\delta_R p}{r} x_*(\delta_R, p)\right)}_{(2)}^\beta = \underbrace{\frac{s}{A(K\delta_R p)^\beta (1-p)^\alpha}}_{(3)}. \quad (\text{D.36})$$

Lorsque p tend vers 0 ou 1, (3) tend vers l'infini alors que (2) reste borné donc (1) tend vers l'infini et ainsi $x_*(\delta_R, p)$ tend vers 0.

Comme dans les deux paragraphes précédents, la trajectoire de $x_*(\delta_R, \cdot)$ est divisée en trois phases :

1. pour p petit (proche de 0), $x_*(\delta_R, p) < g(\delta_R, p)$, ainsi $x_*(\delta_R, \cdot)$ est croissante.
2. pour un $p < 1 - \alpha$, $x_*(\delta_R, p) = g(\delta_R, p)$, ainsi $x_*(\delta_R, \cdot)$ atteint son maximum.
3. Ensuite, $x_*(\delta_R, p) > g(\delta_R, p)$ et donc $x_*(\delta_R, \cdot)$ décroît.

D.2.2.2 Présence d'une instabilité

La présence d'instabilité alors que p varie dépend la position de $x_*(\delta_R, p)$ par rapport à celle des seuils de taille de population. Ces seuils ne sont pas les mêmes dans tous les RE possibles. Ainsi, nous distinguons les différents RE possibles :

Rendement d'échelle croissant Ici, les seuils pertinents sont $x_{Q,1}$ et x_R . Puisque $x_*(\delta_R, p)$ n'est pas accessible directement, nous devons passer par la Fonction de production de Biens Manufacturés par Individu à l'Equilibre (FoBiMIE). Ainsi, nous devons comparer s aux seuils suivants :

$$P_{(\alpha,\beta)}(x_{Q,1}) = A(1-p)^\alpha (\delta_R p)^{1-\alpha} \psi_{Q,1}, \quad (\text{D.37})$$

$$P_{(\alpha,\beta)}(x_R) = A(1-p)^\alpha (\delta_R p)^{1-\alpha} \psi_R, \quad (\text{D.38})$$

$$(\text{D.39})$$

avec :

$$\psi_{Q,1} := \left(r - \frac{\beta\mu_m + \sqrt{\beta\mu_m(\beta\mu_m - 4r)}}{2} \right)^{\alpha+\beta-1} \left(K \frac{\beta\mu_m + \sqrt{\beta\mu_m(\beta\mu_m - 4r)}}{2r} \right)^\beta, \quad (\text{D.40})$$

$$\psi_R := (r + (\alpha + \beta - 1)\mu_m)^{\alpha+\beta-1} \left(\frac{K}{r} (\alpha + \beta - 1)(-\mu_m) \right)^\beta. \quad (\text{D.41})$$

Puisque ψ est supposée strictement positive et par définition de S , nous rappelons les équivalences suivantes :

$$x_* < x_R \iff s > P_{(\alpha,\beta)}(x_R), \quad (\text{D.42})$$

$$x_* < x_{Q,1} \iff s > P_{(\alpha,\beta)}(x_{Q,1}). \quad (\text{D.43})$$

Nous rappelons également que :

- Lorsque $x_* \leq x_{Q,1}$, alors S est stable.
- Lorsque $x_{Q,1} < x_* < x_R$, alors S est stable si et seulement si δ_C est supérieur à $\Delta(x_*)$. En cas d'instabilité, nous qualifions cette situation de : « déficit de consommation de Bien(s) Manufacturé(s) (BM) ».
- Lorsque $x_R \leq x_*$, alors S est instable. Nous qualifions cette situation de : « Flux de BM trop élevé ».

Ainsi, puisque $\arg \max_p (1-p)^\alpha p^{1-\alpha} = 1 - \alpha$, à partir des équations (D.43), (D.42), (D.37) et (D.38), selon δ_R , nous avons la classification de l'arbre D.1.

- Si $\delta_R \leq \left(\frac{s}{A\psi_{Q,1}\alpha^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1}{1-\alpha}$, une instabilité est impossible.
- Si $\left(\frac{s}{A\psi_{Q,1}\alpha^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1}{1-\alpha} < \delta_R < \left(\frac{s}{A\psi_{R}\alpha^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1}{1-\alpha}$, une crise du type « déficit de consommation de BM » est possible.
- Sinon $\left(\left(\frac{s}{A\psi_{R}\alpha^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1}{1-\alpha} \leq \delta_R\right)$, une crise du type « Flux de BM trop élevé » est certaine.

Arbre D.1 – Classification des crises possibles par rapport à la valeur de δ_R . Cas RECr.

Rendement d'échelle constant Ici, le raisonnement est analogue au paragraphe précédent, à la différence que x_R n'est plus un seuil pertinent pour la taille de population et que $\psi_{Q,1}$ est changé en $\tilde{\psi}_{Q,1}$ de la façon suivante :

$$\tilde{\psi}_{Q,1} = \left(K \frac{(1-\alpha)\mu_m + \sqrt{(1-\alpha)\mu_m((1-\alpha)\mu_m - 4r)}}{2r} \right)^{1-\alpha}. \quad (\text{D.44})$$

Selon δ_R , nous avons la classification de l'arbre D.2.

- Si $\delta_R \leq \left(\frac{s}{A\tilde{\psi}_{Q,1}\alpha^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1}{1-\alpha}$, une instabilité est impossible.
- Sinon $\left(\left(\frac{s}{A\tilde{\psi}_{Q,1}\alpha^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1}{1-\alpha} < \delta_R\right)$, une crise du type « déficit de consommation de BM » est possible.

Arbre D.2 – Classification des crises possibles par rapport à la valeur de δ_R . Cas RECo.

Rendement d'échelle décroissant Ici, le raisonnement est analogue aux paragraphes précédents et x_R n'est encore pas un seuil pertinent. Selon δ_R , nous avons la classification de l'arbre D.3.

- Si $\delta_R \leq \left(\frac{s}{A\psi_{Q,1}\alpha^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1}{1-\alpha}$, une instabilité est impossible.
- Sinon $\left(\left(\frac{s}{A\psi_{Q,1}\alpha^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1}{1-\alpha} < \delta_R\right)$, une crise du type « déficit de consommation de BM » est possible.

Arbre D.3 – Classification des crises possibles par rapport à la valeur de δ_R . Cas Rendement d'Échelle Décroissant (RED).

D.2.2.3 Localisation de l'instabilité et sens de variation

Quand une instabilité est possible ou certaine, elle peut arriver au cours de la phase croissante ou décroissante de $x_*(\delta_R, \cdot)$. Ci-après nous répondons aux questions suivantes. A quelles conditions une crise du type « déficit de consommation de BM » peut-elle advenir lors de la phase croissante? Décroissante? De même, à quelles conditions une crise du type « Flux de BM trop élevé » arrive lors de la phase croissante? Décroissante?

Pour cela, nous cherchons à connaître la position relative de $g(\delta_R, \cdot)$ par rapport aux autres seuils vus comme fonctions de p et δ_R (ce dernier étant fixé). Nous rappelons que g , définie à la section D.2.2.1, donne les variations de $x_*(\delta_R, \cdot)$.

Sans distinction sur les RE, nous avons :

$$\delta_{RP}(x_R - g)(\delta_R, p) = \frac{a(\alpha, \beta, \mu_m, r) - b(\alpha, \beta, \mu_m, r)p}{2\beta - p(\alpha + 2\beta)}, \quad (\text{D.45})$$

$$\delta_{RP}(x_{Q,1} - g)(\delta_R, p) = r \left(\frac{\beta(1-p)}{2\beta - p(\alpha + 2\beta)} \right) - \frac{\beta\mu_m + \sqrt{\beta\mu_m(\beta\mu_m - 4r)}}{2}, \quad (\text{D.46})$$

$$\frac{r}{\delta_{RP}} - g(\delta_R, p) = r \left(\frac{A(p)}{B(p)} - 1 \right) \geq 0, \quad (\text{D.47})$$

avec :

$$a(\alpha, \beta, \mu_m, r) := \psi + (-\mu_m)(\alpha + \beta - 1)(\alpha - 1), \quad (\text{D.48})$$

$$b(\alpha, \beta, \mu_m, r) := a(\alpha, \beta, \mu_m, r) - \alpha \underbrace{(-\mu_m)(\alpha + \beta - 1)}_{>0} < a(\alpha, \beta, \mu_m, r). \quad (\text{D.49})$$

Par l'équation (D.46), pour $p \in]0, \frac{\beta}{\alpha + \beta}[$, nous avons :

$$x_{Q,1}(\delta_R, p) \geq g(\delta_R, p) \iff \underbrace{\beta \frac{1-p}{B(p)}}_{\tilde{g}(p)} \geq \frac{\beta\mu_m + \sqrt{\beta\mu_m(\beta\mu_m - 4r)}}{2r}. \quad (\text{D.50})$$

\tilde{g} est croissante sur $]0, \frac{\beta}{\alpha + \beta}[$, donc elle est minorée par $\tilde{g}(0) = \frac{1}{2}$ (et majorée par $\tilde{g}(\frac{\beta}{\alpha + \beta}) = 1$ et ainsi :

$$\frac{1}{2} \geq \frac{\beta\mu_m + \sqrt{\beta\mu_m(\beta\mu_m - 4r)}}{2r} \implies x_{Q,1}(\delta_R, p) \geq g(\delta_R, p). \quad (\text{D.51})$$

Or $\frac{1}{2} \geq \frac{\beta\mu_m + \sqrt{\beta\mu_m(\beta\mu_m - 4r)}}{2r}$ est équivalent à :

$$r \geq 2\beta(-\mu_m). \quad (\text{D.52})$$

Ainsi,

Si $r \geq 2\beta(-\mu_m)$, alors si S devient instable, c'est au cours de la phase décroissante de $x_*(\delta_R, \cdot)$. (D.53)

Puisque

$$\frac{\beta\mu_m + \sqrt{\beta\mu_m(\beta\mu_m - 4r)}}{2r} > 1 \iff r^2 < 0, \quad (\text{D.54})$$

nous avons donc :

$$\frac{\beta\mu_m + \sqrt{\beta\mu_m(\beta\mu_m - 4r)}}{2r} \leq 1. \quad (\text{D.55})$$

Ainsi, si $r < 2\beta(-\mu_m)$, alors :

$$\frac{1}{2} < \frac{\beta\mu_m + \sqrt{\beta\mu_m(\beta\mu_m - 4r)}}{2r} \leq 1, \quad (\text{D.56})$$

et $x_{Q,1}(\delta_R, \cdot)$ rencontre $g(\delta_R, \cdot)$ en

$$p_Q := \beta \frac{2r - 2(\beta\mu_m + \sqrt{\beta\mu_m(\beta\mu_m - 4r)})}{2r\beta - (\alpha + 2\beta)(\beta\mu_m + \sqrt{\beta\mu_m(\beta\mu_m - 4r)})}. \quad (\text{D.57})$$

Ainsi :

1. Pour $p < p_Q$ alors $x_{Q,1} < g$
2. Pour $p = p_Q$ alors $x_{Q,1} = g$
3. Pour $p > p_Q$ alors $x_{Q,1} > g$.

Arbre D.4 – Position relative de $x_{Q,1}(\delta_R, \cdot)$ par rapport à $g(\delta_R, \cdot)$ lorsque $r < 2\beta(-\mu_m)$.

Dans la section D.2.2.2, nous montrons que l'arrivée d'une crise à mesure que p varie dépend de δ_R , nous résumons ces conditions dans les arbres D.1, D.2 et D.3.

Quelle que soit la crise (ou possibilité de crise) considérée, l'idée de preuve est la même, pour la valeur de p où elle advient (ou peut advenir), nous regardons si $x_*(\delta_R, \cdot)$ est décroissante ou croissante ? Si elle arrive dans une zone où $x_*(\delta_R, \cdot)$ est croissante, nous vérifions que $x_*(\delta_R, \cdot)$ est définie à cet endroit, ce qui revient à vérifier que la FoBiMIE est supérieure à s .

En effectuant une distinction selon le RE, nous déduisons les arbres suivants :

Rendement d'échelle décroissant

1. Par l'équation (D.53), si $r \geq 2\beta(-\mu_m)$, alors si une crise arrive c'est au cours de la phase décroissante.
2. Sinon, par l'arbre D.4, la rencontre entre $x_{Q,1}(\delta_R, \cdot)$ et $g(\delta_R, \cdot)$ arrive en p_Q . Pour savoir si la rencontre a lieu au cours de la phase croissante ou décroissante, on compare la quantité s à $P_{(\alpha,\beta)}(x_{Q,1}(\delta_R, p_Q))$. On trouve la disjonction de cas suivante selon δ_R :
 - (a) Si $\delta_R \leq \left(\frac{s}{A\psi_{Q,1}(1-p_Q)^\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1}{p_Q}$, alors si une crise du type « déficit de consommation de BM » arrive c'est au cours de la phase décroissante de $x_*(\delta_R, \cdot)$.
 - (b) Sinon, elle peut arriver dès la phase croissante de $x_*(\delta_R, \cdot)$.

Rendement d'échelle constant Ici, l'idée est identique au paragraphe précédent sauf qu'en plus nous devons vérifier que $p_Q \in I_D(\delta_R)$.

1. Par l'équation (D.53), si $r \geq 2\beta(-\mu_m)$, alors si une crise arrive c'est au cours de la phase décroissante.
2. Sinon si $x_*(\delta_R, \cdot)$ est défini en p_Q , alors par l'arbre D.4 :
 - (a) i. Si $\delta_R \leq \left(\frac{s}{A\psi_{Q,1}(1-p_Q)^\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1}{p_Q}$, alors si une crise du type « déficit de consommation de BM » advient c'est au cours de la phase décroissante de $x_*(\delta_R, \cdot)$.
 - ii. Sinon, elle peut arriver dès la phase croissante.
 - (b) Sinon, elle n'est possible qu'au cours de la phase décroissante.

Rendement d'échelle croissant Lorsque, $\psi > 0$ et $p \in]0, \frac{\beta}{\alpha+\beta}[$, en substituant b par sa formule en fonction de a (équation (D.49)) dans l'équation (D.45), nous avons :

$$\begin{aligned} x_R(\delta_R, p) \geq g(\delta_R, p) &\iff a(\alpha, \beta, \mu_m, r) - b(\alpha, \beta, \mu_m, r)p \geq 0 \\ &\iff a(\alpha, \beta, \mu_m, r)(1-p) + \alpha(-\mu_m)(\alpha + \beta - 1)p \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, nous en déduisons les implications D.5 et D.6.

Si $r \geq 2(-\mu_m)(\alpha + \beta - 1)$, alors $a(\alpha, \beta, \mu_m, r) > 0$ et donc la courbe représentative de $x_R(\delta_R, \cdot)$ n'intersecte pas celle de $g(\delta_R, \cdot)$.

Implication D.5 – Position relative de la courbe de $x_R(\delta_R, \cdot)$ par rapport à celle de $g(\delta_R, \cdot)$ lorsque $r \geq 2(-\mu_m)(\alpha + \beta - 1)$.

Si $r < 2(-\mu_m)(\alpha + \beta - 1)$, alors :

- pour $p < p_R$, $x_R(\delta_R, p) < g(\delta_R, p)$
- pour $p = p_R$, $x_R(\delta_R, p) = g(\delta_R, p)$
- pour $p > p_R$, $x_R(\delta_R, p) > g(\delta_R, p)$

Implication D.6 – Position relative de la courbe de $x_R(\delta_R, \cdot)$ par rapport à celle de $g(\delta_R, \cdot)$ lorsque $r < 2(-\mu_m)(\alpha + \beta - 1)$.

Nous pouvons en déduire l'arbre suivant :

1. Par l'équation (D.53), si $r \geq 2\beta(-\mu_m)$, alors une crise ne peut arriver que lors de la phase décroissante.
2. Par l'équation (D.5), si $2\beta(-\mu_m) > r \geq 2(-\mu_m)(\alpha + \beta - 1)$, alors la crise « flux de BM trop élevé » ne peut arriver que lors de la phase décroissante; pour la crise « déficit de consommation de BM » :
 - (a) Si $x_*(\delta_R, \cdot)$ est défini en p_Q , alors :
 - i. Si $\delta_R > \left(\frac{s}{A\psi_{Q,1}(1-p_Q)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1}{p_Q}$, alors la crise « déficit de consommation de BM » peut advenir dès la phase croissante.
 - ii. Sinon, elle ne peut advenir que lors de la phase décroissante.
 - (b) Sinon, la crise « déficit de consommation de BM » ne peut advenir que lors de la phase décroissante.
3. Sinon ($2(-\mu_m)(\alpha + \beta - 1) > r$), par l'implication D.6, si la crise « déficit de consommation de BM » advient cela peut être dès la phase croissante de $x_*(\delta_R, \cdot)$.
 - (a) Si $x_*(\delta_R, \cdot)$ défini en p_R , alors :
 - i. Si $\delta_R > \left(\frac{s}{A\psi_{R,1}(1-p_R)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1}{p_R}$, alors la crise « flux de BM trop élevé » advient dès la phase croissante.
 - ii. Sinon, si, $\delta_R > \left(\frac{s}{A\psi_{Q,1}(1-p_Q)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1}{p_Q}$, alors la crise « déficit de consommation de BM » est possible dès la phase croissante alors que la crise « flux de BM trop élevé » advient lors de la phase décroissante.
 - iii. Sinon, si une crise advient, c'est lors de la phase décroissante.
 - (b) Sinon, la crise de type « flux de BM trop élevé » n'est possible que lors de la phase décroissante. Concernant la crise de type « déficit de consommation de BM » :
 - i. Si $x_*(\delta_R, \cdot)$ est définie en p_Q , alors :
 - A. Si $\delta_R > \left(\frac{s}{A\psi_{Q,1}(1-p_Q)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1}{p_Q}$, alors la crise de type « déficit de consommation de BM » est possible lors de la phase croissante.
 - B. Sinon, une crise n'est possible que lors de la phase décroissante.
 - ii. Sinon, s'il y a une crise ce sera lors de la phase décroissante.

D.2.3 Variations de $y_*(\delta_R, \cdot)$

Partant de l'équation (D.9), et avec les mêmes hypothèses que dans le paragraphe D.1.2, nous trouvons que :

$$\partial_p y_*(\delta_R, p) = -\frac{y_*(K - y_*)(1 - \alpha - p)}{(\beta K - y_*(\alpha + 2\beta - 1))p(1 - p)}. \quad (\text{D.58})$$

Ainsi, quel que soit le RE, y_* est décroissante lorsque $p \in]p_1(\delta_R), 1 - \alpha[$ et croissante lorsque $p \in]1 - \alpha, p_2(\delta_R)[$.

D.2.3.1 Rendement d'échelle croissant

Par un raisonnement analogue au paragraphe D.2.2.1, lorsque $p \rightarrow p_1(\delta_R), p_2(\delta_R), y_*(\delta_R, p) \rightarrow y_M =: \frac{\beta K}{\alpha + 2\beta - 1}$.

D.2.3.2 Rendement d'échelle constant

En dérivant l'équation (A.9), nous trouvons :

$$\partial_p y_*(\delta_R, p) = - \left(\frac{s}{A} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1 - \frac{p}{1-\alpha}}{\delta_R p^2 (1-p)^{-\frac{1}{1-\alpha}}}. \quad (\text{D.59})$$

Ainsi $y_*(\delta_R, \cdot)$ décroît puis croît à mesure que p varie et son minimum est atteint en $p_1 = 1 - \alpha$ (résultat déjà obtenu plus haut). Combinant, les équations (A.9) et (A.7), nous avons que $y_*(\delta_R, p)$ converge vers K lorsque p tend vers $p_1(\delta_R)$ ou $p_2(\delta_R)$.

D.2.3.3 Rendement d'échelle décroissant

L'équation (D.9) est équivalente à :

$$y_*(\delta_R, p)^\beta \left(r \left(1 - \frac{y_*(\delta_R, p)}{K} \right) \right)^{\alpha + \beta - 1} = \underbrace{\frac{s}{A(\delta_R p)^{1-\alpha} (1-p)^\alpha}}_{(1)}. \quad (\text{D.60})$$

Lorsque $p \rightarrow 0, 1$, (1) $\rightarrow \infty$, puisque $y_*(\delta_R, p)$ est borné, $y_*(\delta_R, p)$ tend vers K .

D.3 Changement de répartition des tâches et maintien d'un effort d'extraction constant

Ici nous supposons que l'effort d'extraction du Capital Naturel Renouvelable (CNR) est maintenu constant à $\delta = \delta_R p$.

D.3.1 Condition de subsistance

D.3.1.1 Rendement d'échelle constant

Un Point Fixe Avec Cohabitation (PFAC) existe si et seulement si $A(1-p)^\alpha (K\delta)^{1-\alpha} > s$, ce qui revient à :

$$\delta > \left(\frac{s}{A} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1}{K}. \quad (\text{D.61})$$

Lorsque l'équation (D.61) est satisfaite x_* est défini pour $p \in]0, p_{M,REC_o}(\delta)[$ avec $p_{M,REC_o}(\delta) := 1 - \frac{s}{A(K\delta)^{1-\alpha}}$.

D.3.1.2 Rendement d'échelle croissant

De façon analogue, à partir de (A.14) en substituant $\delta_R p$ par δ , en isolant δ et en se rappelant que $\alpha < 1$, nous trouvons qu'un PFAC existe si et seulement si :

$$\delta > \left[\frac{s(\alpha + 2\beta - 1)^{\alpha + 2\beta - 1}}{A(K\beta)^\beta (r(\alpha + \beta - 1))^{\alpha + \beta - 1} \delta^{1-\alpha}} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (\text{D.62})$$

Lorsque l'équation (D.62) est satisfaite, x_* est défini pour $p \in]0, p_{M,REC_r}(\delta)[$ avec $p_{M,REC_r}(\delta) := 1 - \left[\frac{s(\alpha + 2\beta - 1)^{\alpha + 2\beta - 1}}{A(K\beta)^\beta (r(\alpha + \beta - 1))^{\alpha + \beta - 1} \delta^{1-\alpha}} \right]^{\frac{1}{\alpha}}$.

D.3.2 Variations de x_* et y_*

D.3.2.1 Variations de x_*

x_* est défini par l'équation suivante :

$$A(K\delta)^\beta(1-p)^\alpha x_*^{\alpha+\beta-1} \left(1 - \frac{\delta}{r}x_*\right)^\beta = s. \quad (\text{D.63})$$

En dérivant par rapport à p , nous trouvons :

$$\partial_p x_* = -\frac{(1 - \delta/rx_*)x_*\alpha}{(1-p)(\delta/rx_*(\alpha + 2\beta - 1) - (\alpha + \beta - 1))}. \quad (\text{D.64})$$

Puisque l'équation (C.4) est vérifiée, $\partial_p x_*$ est donc négative et ainsi x_* est une fonction décroissante de p .

D.3.2.2 Variations de y_*

y_* est défini par l'équation suivante :

$$A\delta^{1-\alpha}(1-p)^\alpha y_*^\beta (r(1 - y_*/K))^{\alpha+\beta-1} = s. \quad (\text{D.65})$$

En dérivant par rapport à p , nous trouvons :

$$\partial_p y_* = \frac{\alpha y_*(1 - y_*/K)}{(1-p)[\beta - y_*/K(\alpha + 2\beta - 1)]}. \quad (\text{D.66})$$

Pour la même raison, $\partial_p y_*$ est donc positive et ainsi y_* est une fonction croissante de p .

D.3.3 Possibilité d'une instabilité

Nous supposons que δ est suffisamment élevé pour que la condition de subsistance soit satisfaite. De façon analogue aux équivalences (D.43) et (D.42), nous avons

$$x_* < x_{Q,1} \iff s > P_{(\alpha,\beta)}(x_{Q,1}) = A(1-p)^\alpha \delta^{1-\alpha} \psi_{Q,1}, \quad (\text{D.67})$$

$$x_* < x_R \iff s > P_{(\alpha,\beta)}(x_R) = A(1-p)^\alpha \delta^{1-\alpha} \psi_R. \quad (\text{D.68})$$

D.3.3.1 Rendement d'échelle décroissant ou rendement d'échelle constant

Par l'équivalence (D.67), nous avons :

1. Si $\delta \leq \left[\frac{s}{A\psi_{Q,1}}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$, alors une instabilité est impossible.
2. Sinon, une instabilité est possible.

D.3.3.2 Rendement d'échelle croissant

Par les équivalences (D.67) et (D.68), nous avons :

1. Si $\delta \leq \left[\frac{s}{A\psi_{Q,1}}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$, alors une instabilité est impossible.
2. Si $\left[\frac{s}{A\psi_{Q,1}}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} < \delta < \left[\frac{s}{A\psi_R}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$, alors une instabilité est possible.
3. Sinon, une instabilité est certaine.

D.3.4 Localisation de l'instabilité

D.3.4.1 Rendement d'échelle décroissant ou rendement d'échelle constant

Lorsqu'une instabilité est possible, elle l'est pour $p < p_{Q,1} := 1 - \left[\frac{s}{A\psi_{Q,1}\delta^{1-\alpha}} \right]^{\frac{1}{\alpha}}$.

Synthèse Pour $p < p_{Q,1}$ une instabilité est possible.

D.3.4.2 Rendement d'échelle croissant

Instabilité possible mais non certaine Lorsqu'une instabilité est possible, elle l'est pour $p < p_{Q,1} := 1 - \left[\frac{s}{A\psi_{Q,1}\delta^{1-\alpha}} \right]^{\frac{1}{\alpha}}$.

Instabilité certaine Lorsqu'une instabilité est certaine, elle advient pour $p < p_R := 1 - \left[\frac{s}{A\psi_R\delta^{1-\alpha}} \right]^{\frac{1}{\alpha}}$.

Synthèse Pour $p < p_R$, une instabilité est certaine. Pour $p_R \leq p < p_{Q,1}$, une instabilité est possible.

Sur le comportement transitoire du système

E.1 Deux proxys de viabilité

Nous considérons comme espace de contraintes :

$$\mathcal{K}(y_1) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^+ \times [0, K] \times \mathbb{R}^+, y \geq y_1\}, y_1 \in \mathbb{R}^+. \quad (\text{E.1})$$

E.1.1 Proxy sur la distance à la frontière

Étant donné $(\delta_C, p, \delta_R, \arg(\mu_M), \mu_M, \mu_m, r, K, A, \alpha, \beta)$, le premier proxy que nous considérons est donné par :

$$\mathcal{E}_1(\delta_C, p, \delta_R, \arg(\mu_M), \mu_M, \mu_m, r, K, A, \alpha, \beta) := \begin{cases} y_* - y_1, & \text{si } S \text{ existe} \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{E.2})$$

E.1.2 Proxy d'inspiration viabiliste

Étant donné $(\delta_C, p, \delta_R, \arg(\mu_M), \mu_M, \mu_m, r, K, A, \alpha, \beta)$ et $\varepsilon > 0$, qui nous donne une distance relative par rapport à S , le second proxy est construit à partir de :

1. $D := \mathcal{K}(y_1) \cap [(1 - \varepsilon)x_*, (1 + \varepsilon)x_*] \times [(1 - \varepsilon)y_*, (1 + \varepsilon)y_*] \times [(1 - \varepsilon)z_*, (1 + \varepsilon)z_*]$,
2. et $(s_i)_{i=1..8}$ les 8 sommets de D .

Le second proxy est donné par :

$$\mathcal{E}_2(\delta_C, p, \delta_R, \arg(\mu_M), \mu_M, \mu_m, r, K, A, \alpha, \beta, \varepsilon) := \frac{n_i}{8}, \quad (\text{E.3})$$

avec n_i , un nombre entier compris entre 0 et 8 qui correspond au nombre de trajectoires $(\mathcal{T}_i)_{i=1..8}$ issues des $(s_i)_{i=1..8}$ et données par la dynamique des équations (2.1.4) qui restent dans $\mathcal{K}(y_1)$.

E.2 Entre sobriété et instabilité

Nous supposons ici être dans le cas rendement d'échelle croissant, que $\alpha < 1$ et que la condition de subsistance donnée par l'équation (A.14) de l'annexe A est strictement vérifiée.

Pour alléger les notations, nous n'indiquons pas toujours les dépendances à (δ_R, p, δ_C) .

Nous montrons ci-après l'existence d'un piège-socio-écologique : toute trajectoire passant par cet ensemble converge vers un point de la forme $(0, K, z_q)$ avec $z_q \in \mathbb{R}^{+*}$. Nous montrons ensuite l'existence d'un ensemble traversé par les trajectoires.

E.2.1 Remarques préliminaires

Un point fixe avec cohabitation appartient à l'ensemble suivant : $E :=]0, \frac{r}{\delta_{Rp}}] \times [0, K] \times \mathbb{R}^{+*}$.

E.2.1.1 Bornitude des composantes de la trajectoire

Soit $X_1 = (x_1, y_1, z_1) \in E$,

1. La taille de population reste positive car si $x_1 = 0$ alors $\dot{x} = 0$.
2. Le niveau de capital naturel renouvelable est borné car :
 - si $y_1 = 0$ alors $\dot{y} = 0$,
 - si $y_1 = K$ alors $\dot{y} \leq 0$.
3. Le niveau de biens manufacturés par individu est positif car si $z_1 = 0$ alors $\dot{z} \geq 0$.

E.2.1.2 Monotonie de la fonction de production par rapport au niveau de capital naturel renouvelable et à la taille de population

La fonction de production que nous supposons est donnée par :

$$P : \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$$

$$(x, y) \mapsto P(x, y) = A(1-p)^\alpha (\delta_{RP})^\beta x^{\alpha+\beta-1} y^\beta.$$

$P(\cdot, \cdot)$ est une fonction croissante par rapport à x et y :

1. Soit $x, x', y \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$P(x, y) < P(x', y) \iff x < x'. \quad (\text{E.4})$$

2. Soit $x, y, y' \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$P(x, y) < P(x, y') \iff y < y'. \quad (\text{E.5})$$

E.2.2 Estimation basse du piège socio-écologique

Dans cette sous-section, nous montrons que

$$B_1 := \left\{ (x, y, z) \in E, \begin{cases} 0 \leq x \leq x_0 \\ P(x, y) \leq s \\ 0 \leq z \leq z_0 \end{cases} \right\} \quad (\text{E.6})$$

$$= \left\{ (x, y, z) \in E, \begin{cases} 0 & \leq x \leq \frac{r}{\delta_{RP}} \frac{\alpha+\beta-1}{\alpha+2\beta-1} \\ A(1-p)^\alpha (K\delta_{RP})^\beta x^{\alpha+\beta-1} (1 - \frac{\delta_{RP}}{r} x)^\beta & \leq s \\ A(1-p)^\alpha (\delta_{RP})^\beta x^{\alpha+\beta-1} y^\beta & \leq s \\ 0 \leq z & \leq \frac{s}{\delta_C} \end{cases} \right\}, \quad (\text{E.7})$$

est tel que toute trajectoire donnée par la système d'équations différentielles (2.1.4) passant par B_1 converge vers la droite $\{(0, K, z_q), z_q \in \mathbb{R}\}$. Pour cette raison, nous qualifions B_1 de piège socio-écologique. Pour cela nous mobilisons les résultats de la sous-section E.2.1.

E.2.2.1 Dynamique à la frontière

Soit $X_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \partial B_1 \cap \partial E^{\text{C}}$. Nous rappelons que deux PFAC existent : $S_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et $S_* = (x_*, y_*, z_0)$.

Ci-dessous, nous donnons les signes des dérivées pertinentes parmi \dot{x}, \dot{y} et \dot{z} pour des zones différentes de celles mentionnées dans la sous-section E.2.1.1.

1. Si $x_1 = x_0$, alors il y a quatre sous-cas à distinguer :

- (a) Si $y_1 = y_0$ et $z_1 = z_0$, alors

$$\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0.$$

- (b) Si $y_1 = y_0$ et $z_1 < z_0$, alors
 $\dot{x} < 0$ et $\dot{y} = 0$.
- (c) Si $y_1 < y_0$ et $z_1 < z_0$, alors
 $\dot{x} < 0$.
- (d) Sinon (lorsque $y_1 < y_0$ et $z_1 = z_0$), alors
 $\dot{x} = 0$ et $\dot{z} < 0$.
2. Sinon (lorsque $0 < x_1 < x_0$). Il y a deux sous-cas à distinguer :
- (a) Si $z_1 < z_0$, alors il y a deux sous-sous-cas à distinguer :
- i. Si $y_1 = K$, alors
 $\dot{y} < 0$.
- ii. Sinon (lorsque $P(x_1, y_1) = s$ et $y_1 < K$), alors
 $\dot{y} < 0$ et $\dot{x} < 0$.
- (b) Sinon (lorsque $z_1 = z_0$), alors il y a trois sous-sous-cas à distinguer :
- i. Si $y_1 = K$, alors
 $\dot{y} < 0$ et $\dot{z} < 0$.
- ii. Si $P(x_1, y_1) = s$ et $y_1 < K$, alors
 $\dot{y} < 0$, $\dot{x} = 0$ et $\dot{z} = 0$.
- iii. Sinon (lorsque $y_1 < K$ et $P(x_1, y_1) < s$) alors
 $\dot{z} < 0$.

Ainsi, en tout point de la frontière, la dynamique est entrante.

E.2.2.2 Dynamique à l'intérieur

$$\mathring{B}_1 := \left\{ (x, y, z) \in B_1, \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < x_0 \\ 0 < y < K \\ 0 < P(x, y) < s \\ 0 < z < z_0 \end{array} \right. \right\} \quad (\text{E.8})$$

En tout point $X_2 := (x_2, y_2, z_2)$ de \mathring{B}_1 , nous avons que :

- $z < z_0$ donc, par définition de μ (cf équation (2.4)), $\dot{x} < 0$.
- Ou bien $y_2 \geq K(1 - \delta_{Rp}/rx_2)$ ou bien $y_2 < K(1 - \delta_{Rp}/rx_2)$, dans le premier cas $\dot{y} \leq 0$, dans le second $\dot{y} > 0$.

Dans tous les cas, x décroît la trajectoire est amenée vers le plan d'équation $\{(x, y, z) \in E, y = K(1 - \delta_{Rp}/rx)\}$.

E.2.2.3 B_1 est un sous ensemble du piège socio-écologique

Combinant les deux paragraphes précédents, nous avons que $B_1(\delta_R, p, \delta_C)$ est un piège socio-écologique. Néanmoins, nous ne prouvons pas que c'est le plus grand.

E.2.3 Mise en évidence d'un espace traversé par un courant

Dans cette sous-section, nous montrons que

$$W_1 := \left\{ (x, y, z) \in E, \begin{cases} z & \geq z_0 \\ P(x, y) & \geq s \\ P_{(\alpha, \beta)}(x) & \geq s \end{cases} \right\} \quad (\text{E.9})$$

$$= \left\{ (x, y, z) \in E, \begin{cases} z & \geq \frac{s}{\delta_C} \\ A(1-p)^\alpha (\delta_{RP})^\beta x^{\alpha+\beta-1} y^\beta & \geq s \\ A(1-p)^\alpha (K \delta_{RP})^\beta x^{\alpha+\beta-1} \left(1 - \frac{\delta_{RP}}{r} x\right)^\beta & \geq s \end{cases} \right\}, \quad (\text{E.10})$$

est traversé par les trajectoires solutions de (2.1.4). Comme dans la sous-section précédente, nous raisonnons en trois étapes. Premièrement, nous regardons le comportement à la frontière, pour certaines zones, les trajectoires sont entrantes, pour d'autres, elles sont sortantes. Ensuite, nous montrons la monotonie de x . Puis, nous concluons.

E.2.3.1 Dynamique à la frontière

La frontière de W_1 est donnée par :

$$\partial W_1 = \{(x, y, z) \in E, x = x_0 \text{ ou } x = x_* \text{ ou } P(x, y) = s \text{ ou } y = K \text{ ou } z = z_0\}. \quad (\text{E.11})$$

Soit $X_3 := (x_3, y_3, z_3)$, trois cas sont à distinguer :

1. Si $x_3 = x_0$, alors il y a 4 sous-cas à distinguer :
 - (a) Si $P(x_3, y_3) = s$ et $z_3 = z_0$, alors
 $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$.
 - (b) Si $P(x_3, y_3) > s$ et $z_3 > z_0$, alors
 $\dot{x} > 0$ (de plus, si $y = K$ alors $\dot{y} < 0$).
La dynamique est entrante.
 - (c) Si $P(x_3, y_3) > s$ et $z_3 = z_0$, alors
 $\dot{x} = 0$ et $\dot{z} > 0$ (si $y = K$ alors $\dot{y} < 0$).
La dynamique est entrante.
 - (d) Sinon (lorsque $P(x_3, y_3) = s$ et $z_3 > z_0$), alors
 $\dot{y} = 0$ et $\dot{x} > 0$.
La dynamique est entrante.
2. Si $x_0 < x_3 < x_*$, alors il y a trois sous-cas à distinguer :
 - (a) Si $P(x_3, y_3) = s$ et $z_3 = z_0$, alors
 $\dot{y} > 0$, $\dot{x} = 0$ et $\dot{z} = 0$.
La dynamique est entrante.
 - (b) Si $P(x_3, y_3) > s$ et $z_3 = z_0$, alors
 $\dot{z} > 0$.
La dynamique est entrante.
 - (c) Sinon (lorsque $P(x_3, y_3) = s$ et $z_3 > z_0$), alors
 $\dot{x} > 0$, $\dot{y} > 0$.
La dynamique est entrante.
3. Sinon (lorsque $x_3 = x_*$), alors il y a 4 sous-cas à distinguer :

- (a) Si $P(x_3, y_3) = s$ et $z_3 = z_0$, alors
 $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$.
- (b) Si $P(x_3, y_3) > s$ et $z_3 > z_0$, alors
 $\dot{x} > 0$.
 La dynamique est sortante.
- (c) Si $P(x_3, y_3) > s$ et $z_3 = z_0$, alors
 $\dot{x} = 0$ et $\dot{z} > 0$.
 La dynamique est entrante.
- (d) Sinon (lorsque $P(x_3, y_3) = s$ et $z_3 > z_0$), alors
 $\dot{x} > 0$ et $\dot{y} = 0$.
 La dynamique est sortante.

E.2.3.2 Dynamique à l'intérieur

Tout point $X_4 := (x_4, y_4, z_4) \in W_1$ est tel que $z_4 \geq z_0$. Nous avons donc : $\dot{x} > 0$.

E.2.3.3 W_1 est traversé par un courant

$\dot{x} > 0$, les trajectoires traversent W_1 . Elles sont entrantes ou nulles quasiment partout sur la frontière sauf lorsque $x = x_*$. Ainsi le flux est traversant (avec potentiellement un comportement non monotone de y et z).

E.2.3.4 Capturabilité d'un point de l'espace par dilatation de $W_1(\delta_R, p, \delta_C)$

Soit $X_5 := (x_5, y_5, z_5) \in \mathbb{R}^{+*} \times]0, K] \times \mathbb{R}^{+*}$, peut on trouver $p_{X_5}, \delta_{R, X_5}, \delta_{C, X_5}$ tels que $X_5 \in W_1(p_{X_5}, \delta_{R, X_5}, \delta_{C, X_5})$?
 δ_{C, X_5} doit vérifier :

$$\delta_{C, X_5} \geq \frac{s}{z}. \quad (\text{E.12})$$

$(p_{X_5}, \delta_{R, X_5})$ doit vérifier :

$$\frac{r}{x_5} \underbrace{\geq}_{(*)} \delta_{R, X_5} p_{X_5} \underbrace{\geq}_{(**)} \frac{\left(\frac{s}{A(1-p_{X_5})x_5^{\alpha+\beta-1}} \right)^{\frac{1}{\beta}}}{y_5}. \quad (\text{E.13})$$

(*) vient du fait que $1 - \delta_{R,p}/rx_5$ doit être supérieur ou égal à 0. (**) vient de la seconde inégalité définissant W_1 (cf équation (E.10)). Ainsi une condition nécessaire est :

$$r > \left(\frac{s}{A} \right)^{\frac{1}{\beta}} \frac{x_5^{\frac{1-\alpha}{\beta}}}{y_5}. \quad (\text{E.14})$$

Lorsque l'équation (E.14) est vérifiée, pour un p_{X_5} suffisamment proche de zéro, cela signifie que la seconde inégalité définissant W_1 peut être vérifiée.

La troisième inégalité est équivalente à :

$$\delta_{R,p}(1 - \delta_{R,p}/rx_5) \geq \left(\frac{s}{A(1-p)Kx_5^{\alpha+\beta-1}} \right)^{\frac{1}{\beta}}. \quad (\text{E.15})$$

Puisque $d : t \mapsto t(1 - t\frac{x_5}{r})$ est croissante sur $[0, \frac{r}{2x_5}]$, maximum en $\frac{r}{2x_5}$ et décroissante sur $[\frac{r}{2x_5}, \infty[$.

Étudier d sur $[\left(\frac{s}{A(1-p_X)^\alpha x_5^{\alpha+\beta-1}} \right)^{\frac{1}{\beta}} \frac{1}{y_5}, \frac{r}{x_5}]$ permet de savoir sous quelles conditions l'équation

(E.15) peut être satisfaite. Suivant la position relative de $\left(\frac{s}{A(1-pX_5)^\alpha x_5^{\alpha+\beta-1}}\right)^{\frac{1}{\beta}}$ (qui est un mineur de $\delta_{R,X_5} p_{X_5}$, donné par l'équation (E.13)) par rapport à $\frac{r}{2x_5}$, deux cas sont à distinguer :

— Si $\frac{r}{2x_5} \geq \left(\frac{s}{A(1-pX_5)^\alpha x_5^{\alpha+\beta-1}}\right)^{\frac{1}{\beta}}$, alors

$d\left(\frac{r}{2x_5}\right)$ est à comparer à $\left(\frac{s}{A(1-pX_5)^\alpha x_5^{\alpha+\beta-1}}\right)^{\frac{1}{\beta}} \frac{1}{K}$, ainsi une autre condition nécessaire est donnée par :

$$\frac{r}{4} > \left(\frac{s}{A(1-pX_5)^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} \frac{x_5^{\frac{1-\alpha}{\beta}}}{K}. \quad (\text{E.16})$$

— Sinon, alors

$d\left(\left(\frac{s}{A(1-pX_5)^\alpha x_5^{\alpha+\beta-1}}\right)^{\frac{1}{\beta}} \frac{1}{y_5}\right)$ est à comparer à $\left(\frac{s}{A(1-pX_5)^\alpha x_5^{\alpha+\beta-1}}\right)^{\frac{1}{\beta}} \frac{1}{K}$ et une autre condition nécessaire est donnée par :

$$ry_5(1 - y_5/K) \geq \left(\frac{s}{A(1-pX_5)^\alpha x_5^{\alpha-1}}\right)^{\frac{1}{\beta}}. \quad (\text{E.17})$$

Synthèse p_{X_5} étant quelconque, nous en déduisons que l'ensemble des points atteignables par dilatation de W_1 est donné par :

$$\cup_{(\delta_R, p, \delta_C) \in]0,1[\times \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}} W_1(\delta_R, p, \delta_C) = D_1 \cup D_2, \quad (\text{E.18})$$

avec :

$$D_1 := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^{+*} \times [0, K] \times \mathbb{R}^{+*} \mid ry(1 - y/K) > \left(\frac{s}{A}\right)^{\frac{1}{\beta}} x^{\frac{1-\alpha}{\beta}} \right\}, \quad (\text{E.19})$$

$$D_2 := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^{+*} \times [0, K] \times \mathbb{R}^{+*} \mid r/4 > \left(\frac{s}{A}\right)^{\frac{1}{\beta}} \frac{x^{\frac{1-\alpha}{\beta}}}{y} \right\}. \quad (\text{E.20})$$

Bibliographie

- [Alvarez 2016] María Evangelina Alvarez, Silvia Di Marco, Katrin Erdlenbruch et Mabel Tidball. *a mixed control problem of the management of natural resources*. Natural Resource Modeling, vol. 29, no. 3, pages 353–373, 2016. (Cité en pages 2 et 53.)
- [Anderies 2003] John M. Anderies. *Economic development, demographics, and renewable resources : a dynamical systems approach*. Environment and Development Economics, vol. 8, no. 2, page 219–246, 2003. (Cité en page 51.)
- [Antoci 2011] Angelo Antoci, Marcello Galeotti et Paolo Russu. *Poverty trap and global indeterminacy in a growth model with open-access natural resources*. Journal of Economic Theory, vol. 146, no. 2, pages 569 – 591, 2011. (Cité en page 52.)
- [Arnold 1994] Vladimir Igorevitch Arnold, Valentin Afraimovich, Yulij Sergeevich Ilyashenko et Leonid Shilnikov. *Dynamical systems v : Bifurcation theory and catastrophe theory*. Springer, 1994. (Cité en pages 2 et 8.)
- [Aubin 2011] Jean-Pierre Aubin, Alexandre Bayen et Patrick Saint-Pierre. *Viability theory : New directions*. Springer, 2011. (Cité en page 53.)
- [Bates 2018] Samuel Bates et Patrick Saint-Pierre. *Adaptive Policy Framework through the Lens of the Viability Theory : A Theoretical Contribution to Sustainability in the Anthropocene Era*. Ecological Economics, vol. 145, pages 244 – 262, 2018. (Cité en page 53.)
- [Beisner 2003] BE Beisner, DT Haydon et K. Cuddington. *Alternative stable states in ecology*. Frontiers in Ecology and the Environment, vol. 1, no. 7, pages 376–382, 2003. (Cité en page 15.)
- [Bernard 2011] Claire Bernard. *La théorie de la viabilité au service de la modélisation mathématique du développement durable. Application au cas de la forêt humide de Madagascar. Mathématiques générales*. PhD thesis, Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2011. (Cité en page 12.)
- [Bernard 2013] Claire Bernard et Sophie Martin. *Comparing the sustainability of different policies : Application to the issue of both household survival and forest preservation in the Fianarantsoa corridor*. Mathematical Biosciences, August 2013. (Cité en page 12.)
- [Bourg 2015] Dominique Bourg et Alain Papaux. *Dictionnaire de la pensée écologique*. PUF, 2015. (Cité en page 13.)
- [Brundtland 1987] Gro Harlem Brundtland. *Our common future*. Oxford University Press, 1987. (Cité en page 12.)
- [Carpenter 1999] S. R. Carpenter, D. Ludwig et W. A. Brock. *Management of Eutrophication for Lakes Subject to Potentially Irreversible Change*. Ecological Applications, vol. 9, no. 3, pages 751–771, 1999. (Cité en page 8.)
- [Chicone 2009] Carmen Chicone. *Stability theory of ordinary differential equations*, pages 8630–8649. Springer New York, New York, NY, 2009. (Cité en page 2.)
- [Coale 1989] Ansley J. Coale. *Demographic Transition*. In *Social Economics*, pages 16–23. Palgrave Macmillan UK, 1989. (Cité en page 19.)
- [Dakos 2012] Vasilis Dakos, Stephen R. Carpenter, William A. Brock, Aaron M. Ellison, Vishwsha Guttal, Anthony R. Ives, Sonia Kéfi, Valerie Livina, David A. Seekell, Egbert H. van Nes et Marten Scheffer. *Methods for Detecting Early Warnings of Critical Transitions in Time Series Illustrated Using Simulated Ecological Data*. PLOS ONE, vol. 7, no. 7, pages 1–20, 07 2012. (Cité en page 52.)

- [Henriques 2017] Sofia Teives Henriques et Karol J. Borowiecki. *The drivers of long-run CO₂ emissions in Europe, North America and Japan since 1800*. Energy Policy, vol. 101, pages 537 – 549, 2017. (Cité en page 14.)
- [Lafuite 2017] A.-S. Lafuite et M. Loreau. *Time-delayed biodiversity feedbacks and the sustainability of social-ecological systems*. Ecological Modelling, vol. 351, pages 96 – 108, 2017. (Cité en page 20.)
- [Levin 2005] Simon A. Levin. *Self-organization and the Emergence of Complexity in Ecological Systems*. BioScience, vol. 55, no. 12, pages 1075–1079, 12 2005. (Cité en page 13.)
- [Martin 2004] Sophie Martin. *The Cost of Restoration as a Way of Defining Resilience : a Viability Approach Applied to a Model of Lake Eutrophication*. Ecology and Society, October 2004. (Cité en pages 12 et 53.)
- [MEA 2005] Millenium ecosystem assessment. ecosystems and human well-being : Synthesis. Island Press, Washington, DC, 2005. (Cité en page 2.)
- [Missemer 2018] Antoine Missemer. *Natural Capital as an Economic Concept, History and Contemporary Issues*. Ecological Economics, vol. 143, pages 90 – 96, 2018. (Cité en page 20.)
- [Nations 2015] United Nations. *Sustainable Development Knowledge Platform*. <https://sustainabledevelopment.un.org/>, 2015. En ligne, accédé le 17 Juillet 2017. (Cité en pages 12 et 14.)
- [O’Neill 2018] Daniel W. O’Neill, Andrew L. Fanning, William F. Lamb et Julia K. Steinberger. *A good life for all within planetary boundaries*. Nature Sustainability, vol. 1, no. 2, pages 88–95, Feb 2018. (Cité en page 2.)
- [Oubraham 2018] Aïchouche Oubraham et Georges Zaccour. *A Survey of Applications of Viability Theory to the Sustainable Exploitation of Renewable Resources*. Ecological Economics, vol. 145, pages 346 – 367, 2018. (Cité en page 53.)
- [Rapaport 2006] A. Rapaport, J.P. Terreaux et L. Doyen. *Viability analysis for the sustainable management of renewable resources*. Mathematical and Computer Modelling, vol. 43, no. 5, pages 466 – 484, 2006. (Cité en pages 2 et 53.)
- [Raworth 2017] Kate Raworth. *Doughnut economics : seven ways to think like a 21st-century economist*. London : Random House, 2017. (Cité en page 14.)
- [Rockström 2009] Johan Rockström, Will Steffen, Kevin Noone, Åsa Persson, F. Stuart III Chapin, Eric Lambin, Timothy M. Lenton, Marten Scheffer, Carl Folke, Hans Joachim Schellnhuber, Björn Nykvist, Cynthia A. de Wit, Terry Hughes, Sander van der Leeuw, Henning Rodhe, Sverker Sörlin, Peter K. Snyder, Robert Costanza, Uno Svedin, Malin Falkenmark, Louise Karlberg, Robert W. Corell, Victoria J. Fabry, James Hansen, Brian Walker, Diana Liverman, Katherine Richardson, Paul Crutzen et Jonathan Foley. *Planetary Boundaries : Exploring the Safe Operating Space for Humanity*. Ecology and Society, vol. 14, no. 2, 2009. (Cité en page 14.)
- [Roman 2017] Sabin Roman, Seth Bullock et Markus Brede. *Coupled Societies are More Robust Against Collapse : A Hypothetical Look at Easter Island*. Ecological Economics, vol. 132, pages 264 – 278, 2017. (Cité en pages 2, 9, 10, 11, 12, 20, 50 et 51.)
- [Rosenzweig 1971] Michael L. Rosenzweig. *Paradox of Enrichment : Destabilization of Exploitation Ecosystems in Ecological Time*. Science, vol. 171, no. 3969, pages 385–387, 1971. (Cité en pages 12 et 50.)
- [Scheffer 2009] Marten Scheffer. *Critical transitions in nature and society*. Princeton Studies in complexity, 2009. (Cité en pages 2, 8, 9 et 10.)

-
- [Sophocleous 2004] Marios Sophocleous. *Global and Regional Water Availability and Demand : Prospects for the Future*. Natural Resources Research, vol. 13, no. 2, pages 61–75, Jun 2004. (Cité en page 14.)
- [Trélat 2008] Emmanuel Trélat. *Contrôle optimal : théorie et applications*. Vuibert, 2008. (Cité en page 12.)
- [Veraart 2012] Annelies J. Veraart, Elisabeth J. Faassen, Vasilis Dakos, Egbert H. van Nes, Miquel Lüring et Marten Scheffer. *Recovery rates reflect distance to a tipping point in a living system*. Nature, vol. 481, no. 7381, pages 357–359, Jan 2012. (Cité en page 52.)

Résumé : Si l'exploitation du capital naturel renouvelable (CNR) dans le cadre d'activités anthropiques permet le développement des sociétés humaines, elle peut aussi causer la dégradation de leur cadre de vie à travers la perte des services écosystémiques. La question de la compatibilité entre ces deux objectifs se pose donc. Cette thèse étudie comment les transformations du CNR en biens nécessaires à la population et les pratiques humaines influencent la durabilité d'un système écologique et social (SES).

Pour ce faire, nous construisons un modèle générique conçu dans le formalisme des équations différentielles ordinaires. Ce modèle comprend trois variables : la taille de population humaine, le niveau de CNR et le niveau de biens manufacturés par individu. Nous en étudions les propriétés asymptotiques et transitoires. À partir de ce modèle, nous identifions comme durable un modèle de SES présentant un certain type de point stationnaire asymptotiquement stable. Nous montrons le caractère déterminant du rendement d'échelle du système économique, puisque cette hypothèse change la nature des résultats. En cas de rendement d'échelle croissant, l'instabilité du point stationnaire d'intérêt peut être due à : 1) un taux de régénération du CNR trop faible par rapport à certaines propriétés du système économique ; 2) une condition de subsistance non respectée ou 3) une surproduction de biens manufacturés, qui peut causer des cycles explosion-déclin pour la taille de population, ainsi que pour le niveau de CNR et le niveau de biens manufacturés. Nous étudions ensuite la sensibilité de ce point stationnaire asymptotiquement stable à des changements de pratiques dans les sous-systèmes embarqués dans le SES. Nous retrouvons que l'augmentation seule de l'intensité d'extraction du CNR induit une non-durabilité du SES. Cependant, l'originalité de notre travail réside dans la démonstration que, sous certaines hypothèses, cette instabilité peut être évitée en réorganisant les tâches dans la société. Ainsi, la durabilité d'un SES dépend des propriétés du système économique et du système écologique.

Ensuite, dans une perspective de viabilité, nous illustrons que stabilité ne signifie pas viabilité : avant que l'instabilité advienne la viabilité cesse. Enfin, en cas de rendement d'échelle croissant, nous trouvons qu'un ensemble de conditions initiales, correspondant à une estimation basse d'un bassin de capture, menant au déclin de la population humaine du SES peut toujours être quitté en augmentant l'effort d'extraction sur le CNR. Ainsi, d'un point de vue de la gouvernance d'un SES, un compromis est à trouver entre, d'une part, la capacité productive pour sortir d'un piège socio-écologique et, d'autre part, la sobriété du SES pour le rendre durable.

Mots clés : Système socio-écologique, durabilité, piège socio-écologique, équations différentielles ordinaires, bifurcations, analyse asymptotique, bassin de capture.

Abstract :

Renewable natural capital (RNC) exploitation by human activities allows human society's development, but may cause deterioration of their quality of life through ecosystem services loss. This paradox questions the compatibility between economic development and the preservation of natural resources. This thesis studies how does the properties of the economic and social-anthropological dimensions of a social-ecological system (SES) may influence its sustainability. To do so, we build a generic model in the ordinary differential equation framework. This model has three variables : human population size, the amount of the RNC and the manufactured good amount per capita (BMpi). This allows us to study its asymptotic and transient properties. We identify as sustainable a situation in which a special type of asymptotically stable steady state exists. We show the importance of return to scale, since this hypothesis changes drastically the results. In case of increasing return to scale, instability of the steady state of interest may be due to : 1) A RNC regeneration rate that is too weak compared to economic system properties ; 2) not fulfilled subsistence requirement or 3) an over-production of BMpi that may cause boom and bust cycles for the population size, but also the RNC and the manufactured goods. We then study how does the asymptotically stable steady state vary in case of modification in sub-systems embedded in the SES. As expected, we find that increasing the RNC extraction rate provokes non sustainability of the SES. However, our work shows that, under some hypotheses, this instability may be avoided through task repartition changes in the society. Then, sustainability of a SES depends on the properties assumed for the ecological and economic systems. Moreover, we illustrate that stability does not mean viability : before stability disappears, viability is no more assured. Lastly, in increasing return to scale case, we show that an inner approximation of a capture basin, which lead to population disappearance can always be left by increasing RNC extraction rate.

We conclude that for SES governance, a trade-off has to be found between increasing productive capacity to be able to leave a socio-ecological trap and achieve sustainability.

Key words : Social-ecological system, sustainability, social-ecological trap, ordinary differential equations, bifurcations, asymptotic analysis, capture basin.
