



HAL
open science

Simulation numérique du transfert convectif dans un écoulement viscoélastique

Fouad Hagani

► **To cite this version:**

Fouad Hagani. Simulation numérique du transfert convectif dans un écoulement viscoélastique. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université de Lyon, 2021. Français. NNT : 2021LYSEI012 . tel-03358910

HAL Id: tel-03358910

<https://theses.hal.science/tel-03358910>

Submitted on 29 Sep 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSA

N°d'ordre NNT : 2021LYSEI012

THÈSE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON
opérée au sein de
I'INSA LYON

École Doctorale ED162
(Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique)

Spécialité/ discipline de doctorat : Mécanique des Fluides

Soutenue publiquement le 13/04/2021, par :

Fouad HAGANI

Simulation numérique du transfert convectif dans un écoulement viscoélastique

Devant le jury composé de :

LE QUÉRÉ, Patrick / Directeur de Recherche CNRS / LIMS

Président

ABID-DAVID, Nora-Chérifa / Maître de conférences HDR / IUSTI
(Technopôle de Château-Gombert)

Rapporteuse

NOUAR, Cherif / Directeur de recherches CNRS / LEMTA (ENSEM)

Rapporteur

XIN, Shihe / Professeur des Universités / CETHIL (INSA-Lyon)

Directeur de thèse

BOUTAOUS, M'hamed / Maître de conférences HDR / CETHIL
(INSA-Lyon)

Co-directeur de thèse

KNIKKER, Ronnie / Maître de conférences / CETHIL (INSA-Lyon)

Co-directeur de thèse

Département FEDORA – INSA Lyon - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2016-2020

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	<p><u>CHIMIE DE LYON</u> http://www.edchimie-lyon.fr Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage secretariat@edchimie-lyon.fr INSA : R. GOURDON</p>	<p>M. Stéphane DANIELE Institut de recherches sur la catalyse et l'environnement de Lyon IRCELYON-UMR 5256 Équipe CDFA 2 Avenue Albert EINSTEIN 69 626 Villeurbanne CEDEX directeur@edchimie-lyon.fr</p>
E.E.A.	<p><u>ÉLECTRONIQUE,</u> <u>ÉLECTROTECHNIQUE,</u> <u>AUTOMATIQUE</u> http://edeea.ec-lyon.fr Sec. : M.C. HAVGOUDOUKIAN ecole-doctorale.eea@ec-lyon.fr</p>	<p>M. Gérard SCORLETTI École Centrale de Lyon 36 Avenue Guy DE COLLONGUE 69 134 Écully Tél : 04.72.18.60.97 Fax 04.78.43.37.17 gerard.scorletti@ec-lyon.fr</p>
E2M2	<p><u>ÉVOLUTION, ÉCOSYSTÈME,</u> <u>MICROBIOLOGIE, MODÉLISATION</u> http://e2m2.universite-lyon.fr Sec. : Sylvie ROBERJOT Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 INSA : H. CHARLES secretariat.e2m2@univ-lyon1.fr</p>	<p>M. Philippe NORMAND UMR 5557 Lab. d'Ecologie Microbienne Université Claude Bernard Lyon 1 Bâtiment Mendel 43, boulevard du 11 Novembre 1918 69 622 Villeurbanne CEDEX philippe.normand@univ-lyon1.fr</p>
EDISS	<p><u>INTERDISCIPLINAIRE</u> <u>SCIENCES-SANTÉ</u> http://www.ediss-lyon.fr Sec. : Sylvie ROBERJOT Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 INSA : M. LAGARDE secretariat.ediss@univ-lyon1.fr</p>	<p>Mme Sylvie RICARD-BLUM Institut de Chimie et Biochimie Moléculaires et Supramoléculaires (ICBMS) - UMR 5246 CNRS - Université Lyon 1 Bâtiment Curien - 3ème étage Nord 43 Boulevard du 11 novembre 1918 69622 Villeurbanne Cedex Tel : +33(0)4 72 44 82 32 sylvie.ricard-blum@univ-lyon1.fr</p>
INFOMATHS	<p><u>INFORMATIQUE ET</u> <u>MATHÉMATIQUES</u> http://edinfomaths.universite-lyon.fr Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage Tél : 04.72.43.80.46 infomaths@univ-lyon1.fr</p>	<p>M. Hamamache KHEDDOUCI Bât. Nautibus 43, Boulevard du 11 novembre 1918 69 622 Villeurbanne Cedex France Tel : 04.72.44.83.69 hamamache.kheddouci@univ-lyon1.fr</p>
Matériaux	<p><u>MATÉRIAUX DE LYON</u> http://ed34.universite-lyon.fr Sec. : Stéphanie CAUVIN Tél : 04.72.43.71.70 Bât. Direction ed.materiaux@insa-lyon.fr</p>	<p>M. Jean-Yves BUFFIÈRE INSA de Lyon MATEIS - Bât. Saint-Exupéry 7 Avenue Jean CAPELLE 69 621 Villeurbanne CEDEX Tél : 04.72.43.71.70 Fax : 04.72.43.85.28 jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr</p>
MEGA	<p><u>MÉCANIQUE, ÉNERGÉTIQUE,</u> <u>GÉNIE CIVIL, ACOUSTIQUE</u> http://edmega.universite-lyon.fr Sec. : Stéphanie CAUVIN Tél : 04.72.43.71.70 Bât. Direction mega@insa-lyon.fr</p>	<p>M. Jocelyn BONJOUR INSA de Lyon Laboratoire CETHIL Bâtiment Sadi-Carnot 9, rue de la Physique 69 621 Villeurbanne CEDEX jocelyn.bonjour@insa-lyon.fr</p>
ScSo	<p><u>ScSo*</u> http://ed483.univ-lyon2.fr Sec. : Véronique GUICHARD INSA : J.Y. TOUSSAINT Tél : 04.78.69.72.76 veronique.cervantes@univ-lyon2.fr</p>	<p>M. Christian MONTES Université Lyon 2 86 Rue Pasteur 69 365 Lyon CEDEX 07 christian.montes@univ-lyon2.fr</p>

Remerciements

Ce travail a été effectué au sein du groupe Fluides, polymères et composites du laboratoire CETHIL de l'INSA-Lyon. Je tiens à remercier tous les membres du laboratoire CETHIL de l'accueil qu'ils m'ont réservé.

Je souhaite remercier en premier lieu les rapporteurs, madame Nora-Chérifa ABID-DAVID, maître de conférences/HDR au laboratoire IUSTI et Monsieur Cherif NOUAR, directeur de recherches CNRS au laboratoire LEMTA, pour avoir jugé mon travail.

Je remercie également monsieur Patrick LE QUÉRÉ, directeur de Recherche CNRS au laboratoire LIMSI, de s'être intéressé à mon travail et de m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à mes directeurs de thèse, monsieur Shihe XIN professeur au laboratoire CETHIL, monsieur Ronnie KNIKKER, maître de conférences au laboratoire CETHIL et monsieur M'hamed BOUTAOUS, maître de conférences/HDR au laboratoire CETHIL, pour les fructueuses discussions que nous avons eues, leurs nombreux et précieux conseils, encouragements, disponibilités et l'aide qu'ils m'ont apporté à la préparation de cette thèse.

Je remercie également les thésards de CETHIL, entre autres, Wasso, Nabil, Thibaut, ... leurs très nombreuses connaissances m'ont permis de progresser et ont répondu à plusieurs de mes préoccupations.

Merci à toutes et à tous.

Table des matières

Remerciements	v
Table des matières	vii
Liste des figures	xi
Liste des tableaux	xix
Résumé	1
Abstract	3
Introduction générale	5
À propos de la viscoélasticité.....	8
Motivations : méthodes numériques pour les fluides viscoélastiques.....	10
Objectifs de la thèse	13
1 Lois de conservation et modèles rhéologiques	15
Première partie : lois de conservation	16
1.1 Lois de conservation	16
1.1.1 Conservation de la masse.....	16
1.1.2 Conservation de la quantité de mouvement	17
1.1.2.1 Équation de conservation de la quantité de mouvement	17
1.1.2.2 Symétrie du tenseur des contraintes	18
1.1.3 Conservation de l'énergie.....	19
1.2 Conclusion	20
Deuxième partie : modèles rhéologiques	20
1.3 Propriétés rhéologiques des fluides polymérique	21
1.3.1 Comportement rhéologique des fluides polymériques	22
1.3.2 Écoulement de cisaillement simple	23
1.3.2.1 Viscosité dépendante du taux de cisaillement.....	24
1.3.2.2 Différences des contraintes normales.....	25

1.3.3	Écoulement élongationnel uni-axial	27
1.3.3.1	Viscosité élongationnelle	28
1.4	Viscoélasticité	28
1.4.1	Fluide Newtonien	29
1.4.2	Solide Hookéen	29
1.4.3	Fluide non-Newtonien inélastique	30
1.4.4	Viscoélasticité linéaire	31
1.4.4.1	Modèle de Maxwell monomode	31
1.5	Modèles différentiels quasi-linéaires	33
1.5.1	Principe d'objectivité et dérivées objectives	33
1.5.2	Formulations constitutives du type Oldroyd	36
1.6	Viscoélasticité Non-linéaire, approche macroscopique	37
1.7	Viscoélasticité Non-linéaire, théories moléculaires des polymères	38
1.8	Théories moléculaires des polymères dilués	40
1.8.1	Modèle haltère élastique (<i>elastic dumbbell</i>)	41
1.8.2	Équation de Smoluchowsky	43
1.8.3	contributions au tenseur des contraintes	44
1.8.4	Dérivation du modèle d'Oldroyd-B	45
1.8.5	Dérivation du modèle de Giesekus	46
1.8.5.1	Fonctions viscométriques du modèle de Giesekus	48
1.9	Théorie du réseaux moléculaire	51
1.9.1	Équation de convection du réseau moléculaire	52
1.9.1.1	Mouvement non-affines	52
1.9.2	Contribution au tenseur des contraintes	53
1.9.3	Dérivation du modèle de Phan-Thien Tanner	54
1.9.3.1	Fonctions viscométriques du modèle de Phan-Thien Tanner	56
1.10	Conclusion	59
2	Système d'équations gouvernant	61
2.1	Modèle mathématique	63
2.2	Adimensionnement des équations gouvernantes	65
2.3	Classification du système d'équations	66
2.3.1	Type d'équation du système d'équations gouvernant	67
2.3.2	Forme quasi-linéaire et homogène du système d'équations	70
2.3.3	Condition d'hyperbolicité des modèles rhéologiques	75
2.4	Conditions initiales et aux limites	77
2.4.1	Conditions initiales	78
2.4.2	Conditions aux limites	78
2.4.2.1	Conditions aux parois	79
2.4.2.2	Conditions aux limites d'entrée et de sortie	79
2.4.2.3	Conditions aux limites thermiques	79
2.5	Conclusion	80
3	Méthodes Numériques	83
3.1	Méthodes numériques pour les fluides viscoélastiques	84
3.2	Discrétisations temporelles	89
3.3	Traitement du couplage vitesse-pression	91
3.4	Discrétisations spatiales	93
3.4.1	Discrétisation spatiale de la partie quasi-linéaire	94
3.4.1.1	Schémas amont d'ordre 1 et d'ordre 2	97
3.4.1.2	Schémas ENO et WENO	98

3.4.1.3	Schémas HOUC	100
3.4.1.4	Traitement de la partie hyperbolique sur les parois	102
3.4.2	Discrétisation spatiale des autres termes	105
3.5	Résumé de l'algorithme et conclusion.....	106
4	Validations générales	109
4.1	Évaluation des erreurs de discrétisations	110
4.2	Benchmarks fluides Newtoniens	111
4.2.1	Tourbillon de Green–Taylor.....	111
4.2.2	Cavité entraînée (2D & 3D)	113
4.2.3	Cavité différentiellement chauffée	114
4.2.4	Cavité entraînée chauffée par le haut	120
4.2.5	Écoulement de Poiseuille du fluide Newtonien.....	123
4.3	Benchmarks fluides viscoélastiques.....	127
4.3.1	Écoulement de Poiseuille du fluide Oldroyd–B.....	127
4.3.2	Écoulement de Poiseuille du fluide SPTT	138
4.4	Conclusion	146
5	Écoulement viscoélastique isotherme dans une conduite de section carrée	149
5.1	Configuration de l'écoulement, repère local du tenseur des contraintes et validations.....	152
5.1.1	Configuration de l'écoulement	152
5.1.2	Repère viscométrique du tenseur des contraintes.....	154
5.1.3	Validations numériques	155
5.2	Effet du rapport de viscosité en relation avec l'élasticité du fluide	159
5.2.1	Écoulement principale	160
5.2.2	Écoulements secondaires	168
5.3	Effet de l'inertie du fluide en relation avec l'élasticité du fluide	173
5.3.1	Écoulement principale	174
5.3.2	Écoulements secondaires	183
5.4	Effet de l'anisotropie du fluide en relation avec l'inertie et l'élasticité du fluide	191
5.4.1	Écoulement principale	191
5.4.2	Écoulements secondaires	197
5.5	Conclusion	203
6	Écoulement viscoélastique anisotherme dans une conduite de section carrée	205
6.1	Conditions aux limites thermiques et validations	208
6.1.1	Flux de chaleur constant et uniforme	209
6.1.2	Température constante et uniforme.....	209
6.1.3	Validations numériques	210
6.2	Effet du rapport de viscosité du fluide.....	212
6.3	Effet des écoulements secondaires sur le transfert thermique	216
6.3.1	Effet de l'inertie du fluide sur le transfert thermique.....	216
6.3.2	Effet de l'anisotropie du fluide sur le transfert thermique.....	220
6.4	Effet de la dissipation visqueuse totale	223
6.4.1	Interaction rhéofluidification – dissipation visqueuse totale dans le cadre de la condition aux limites thermique de flux imposé.....	223
6.4.2	Interaction de l'inertie du fluide – dissipation visqueuse totale dans le cadre de la condition aux limites thermique de flux imposé.....	229
6.5	Conclusion	234

Conclusions et perspectives	235
Conclusions générales.....	235
Perspectives	238
A Annexes	I
A.1 Cinématique de la déformation et du mouvement.....	I
A.1.1 Vecteurs vitesse et accélération	I
A.1.2 Dérivée particulaire	II
A.1.3 Tenseur gradient de vitesse	II
A.1.4 Tenseur taux de déformation.....	II
A.1.5 Vecteur–contrainte.....	IV
A.2 Théorème de Green-Ostrogradsky	IV
A.3 Théorème du transport	V
A.4 Dérivées objectives	V
A.5 Schémas d’ordre élevé WENO(7,9) et HOUC(7,9).....	VII
A.5.1 Schémas WENO(7,9).....	VII
A.5.2 Schémas HOUC(7,9).....	XI
Bibliographie	XXIV

Liste des figures

1.1	Schématisme usuelle des composantes du tenseur des contraintes de Cauchy.	18
1.2	Schématisme d'un écoulement de cisaillement simple.	23
1.3	Rotation d'une tige dans : (a) un fluide viscoélastique (solution aqueuse 4 % de polyacrylamide); (b) un fluide Newtonien (glycerin).	26
1.4	Gonflement d'un jet à la sortie d'un tube. À gauche jet Newtonien et à droite jet d'un fluide polymérique.	26
1.5	Écoulement élongationnel uni-axial d'un élément fluide cylindrique.	27
1.6	Viscoélasticité linéaire : Modèle de Maxwell.	32
1.7	Viscoélasticité uni-axiale : modèle de Jeffreys.	32
1.8	Schématisme d'une macromolécule polymérique dans un solvant. (a) macromolécule polymérique, (b) chaîne de Kramers, (c) haltère élastique.	41
1.9	Fonctions matérielles du modèle de Giesekus en fonction du taux de cisaillement dans le cas d'un écoulement de cisaillement simple et pour différentes valeurs des différents paramètres rhéologique (taux de relaxation, rapport de la viscosité du solvant à taux de cisaillement nul et paramètre d'anisotropie) : (a) viscosité totale adimensionnée, (b) première différence des contraintes normales et (c) seconde différence des contraintes normales	50
1.10	Fonctions matérielles du modèle de Giesekus en fonction du taux d'élongation dans le cas d'un écoulement élongationnel uni-axial et pour différentes valeurs du paramètre d'anisotropie : (a) viscosité élongationnelle totale adimensionnée, (b) première différences des contraintes normales.	51
1.11	Réseau moléculaire temporairement enchevêtré dont les segments sont représentés (à droite) par des ressorts Hookeés.	52
1.12	Fonctions viscométriques du modèle de PTT en fonction du taux de cisaillement, pour un écoulement de cisaillement simples, (a) viscosité de cisaillement, (b) première différences des contraintes normales et (c) secondes différences des contraintes normales.	58
1.13	Viscosité élongationnelle adimensionnée (notée $\frac{\eta}{\eta_0}$) en fonction du taux d'élongation pour le modèle du modèle PTT avec $\zeta = 0$ et pour différentes valeurs du paramètre ϵ : (1) $\epsilon = 0.01$, (2) $\epsilon = 0.05$ et (3) $\epsilon = 0.2$. Les lignes continues désignent le modèle de PTT linéaire et les lignes discontinues indiquent le modèle PTT exponentiel.	59
3.1	Illustration d'un maillage partiellement décalé structuré et uniforme sur une partie du domaine de calcul : maillage bidimensionnel ($d = 2$) à gauche et maillage tridimensionnel ($d = 3$) à droite.	94
3.2	Stencil de discrétisation du schéma UP2 (décentré d'ordre 2), ENO2 et WENO3 sur une grille unidimensionnelle et uniforme.	98
3.3	Stencil de discrétisation du schéma WENO5 sur une grille unidimensionnelle et uniforme.	100

3.4	Caractéristiques sur une paroi verticale.	103
3.5	Caractéristiques sur une paroi horizontale.	104
4.1	Domaine de calcul ainsi que les conditions aux limites associées au benchmark du tourbillon de Green–Taylor.	112
4.2	Champs initiaux de (a) la composante de vitesse u_1 , (b) la composante de vitesse u_2 , (c) la pression et finalement (d) la fonction de courant, associés au benchmark du tourbillon de Green–Taylor.	112
4.3	(a) Évolution des erreurs de discrétisation spatiales des composantes de la vitesse $\varepsilon^{\Delta x}(u_1)$ et $\varepsilon^{\Delta x}(u_2)$, mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ en fonction du pas de maillage $\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2$ pour différents nombres de Reynolds \mathbf{Re} et pour un temps fixe $t = n\Delta t = 0.568$ (c’est à dire avec $\Delta t = 1.136 \times 10^{-3}$ et pour un nombre d’itérations constant $n = 500$). (b) Évolution des erreurs de discrétisation temporelle des composantes de la vitesse $\varepsilon^{\Delta t}(u_1)$ et $\varepsilon^{\Delta t}(u_2)$, ainsi que de la pression $\varepsilon^{\Delta t}(p)$, mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ en fonction du pas de temps Δt pour le schéma d’Euler1 et de schéma BDF2 avec un maillage 51×51 et pour un pour un temps fixe $t = n_i \Delta t_i = 1.639$ (le nombre d’itérations correspondant au premier pas Δt_1 de temps est $n_1 = 500$).	113
4.4	Domaine de calcul ainsi que les conditions aux limites associées au cas test de la cavité entraînée	114
4.5	(a) Évolution des erreurs de discrétisation spatiales de la vitesse $\varepsilon^{\Delta x}(u_1)$ et $\varepsilon^{\Delta x}(u_2)$, mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ en fonction du pas de maillage $\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3$ pour les cas des cavités bidimensionnel 2D et cubique 3D et pour une nombre de Reynolds $\mathbf{Re} = 100$ avec $\Delta t = 2.5 \times 10^{-4}$ et pour un nombre d’itérations constant $n = 500$. (b) et (c) présentent respectivement pour les cavités bidimensionnel 2D et cubique 3D l’évolution des erreurs de discrétisation temporelle de la vitesse et de la pression mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ en fonction du pas de temps Δt pour le schéma d’Euler1 et de schéma BDF2 avec un maillage $51 \times 51 \times 51$ en 3D et 51×51 en 2D et pour pour un temps fixe $t = n_i \Delta t_i = 0.5$ (le nombre d’itérations correspondant au premier pas Δt_1 de temps est $n_1 = 500$).	115
4.6	Comparaison des profils de vitesse u_1 et u_2 obtenus avec différentes résolutions de maillage avec les résultats issus de la littérature Ghia et al. [75] dans le cas d’une cavité bidimensionnelle et Ku et al. [124] dans le cas d’une cavité tridimensionnelle en fonction du nombre de Reynolds (a) $\mathbf{Re} = 100$, (b) $\mathbf{Re} = 400$ et (c) $\mathbf{Re} = 1000$. . Notons que les profils sont prélevés le long des lignes médianes, $u_1(x_1 = 0.5, x_2)$ et $u_2(x_1, x_2 = 0.5)$ dans le cas d’une cavité bidimensionnelle et $u_1(x_1 = 0.5, x_2, x_3 = 0.5)$ et $u_2(x_1, x_2 = 0.5, x_3 = 0.5)$ dans le cas d’une cavité tridimensionnelle.	116
4.7	Domaine de calcul ainsi que les conditions aux limites associées au cas test de la cavité différentiellement chauffée.	117
4.8	(a) Évolution des erreurs de discrétisation spatiales de la vitesse $\varepsilon^{\Delta x}(u_1)$ et $\varepsilon^{\Delta x}(u_2)$ et de la température $\varepsilon^{\Delta x}(T)$ mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ en fonction du pas de maillage $\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2$ pour un nombre de Rayleigh $\mathbf{Ra} = 10^3$ avec $\Delta t = 2.232 \times 10^{-4}$ et pour un nombre d’itérations $n = 500$. (b) Évolution des erreurs de discrétisation temporelle de la vitesse $\varepsilon^{\Delta t}(u_1)$ et $\varepsilon^{\Delta t}(u_2)$, de la température $\varepsilon^{\Delta t}(T)$ ainsi que de la pression $\varepsilon^{\Delta t}(p)$ mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ en fonction du pas de temps Δt pour le schéma d’Euler1 et de schéma BDF2 avec un maillage 51×51 et pour un temps fixe $t = n_i \Delta t_i = 0.098$ (le nombre d’itérations correspondant au premier pas Δt_1 de temps est $n_1 = 500$).	118
4.9	Comparaison des champs de température obtenus en fonction du nombre de Rayleigh avec les résultats de la littérature de Vahl Davis [52] dans le cas de la cavité différentiellement chauffée.	119
4.10	Domaine de calcul ainsi que les conditions aux limites associées au cas test entraînée et chauffée par le haut.	120

4.11	(a) Évolution des erreurs de discrétisation spatiales de la vitesse $\varepsilon^{\Delta x}(u_1)$ et $\varepsilon^{\Delta x}(u_2)$ et de la température $\varepsilon^{\Delta x}(T)$ mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ en fonction du pas de maillage $\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2$ pour un nombre de Reynolds $\mathbf{Re} = 100$ et un nombre de Grashof $\mathbf{Gr} = 100$ avec $\Delta t = 2.232 \times 10^{-4}$ et pour un nombre d'itérations constant $n = 10^3$. (b) Évolution des erreurs de discrétisation temporelle de la vitesse $\varepsilon^{\Delta t}(u_1)$ et $\varepsilon^{\Delta t}(u_2)$, de la température $\varepsilon^{\Delta t}(T)$ ainsi que de la pression $\varepsilon^{\Delta t}(p)$ mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ en fonction du pas de temps Δt pour le schéma d'Euler1 et de schéma BDF2 avec un maillage 51×51 et pour un temps fixe $t = n_i \Delta t_i = 0.617$ (le nombre d'itérations correspondant au premier pas Δt_1 de temps est $n_1 = 10^3$).	122
4.12	Domaine de calcul ainsi que les conditions aux limites associées à l'écoulement de Poiseuille entre deux plaques parallèle.	123
4.13	(a) Comparaison de la solution numérique $u_1(x_2, t)$ à la solution exacte $u_1^{ana}(x_2, t)$ à différents instant t_i dans le cas de l'écoulement de Poiseuille d'un fluide Newtonien avec $\bar{u}_1 = 1$ et un maillage de 41 points et avec le schéma BDF2. (b) comparaison de la solution numérique au centre de la conduite $u_1(x_2 = 0.5, t)$ à la solution exacte $u_1^{ana}(x_2 = 0.5, t)$ en fonction du temps.	124
4.14	(a) Évolution des erreurs de discrétisation spatiales de la vitesse approchée d'une façon numérique $\varepsilon^{\Delta x}(u_1)$, et des erreurs de discrétisation spatiales de la vitesse donnée par rapport à la solution exacte $\varepsilon^{\Delta x, \Delta t}(u_1)$, d'abord lorsque $\Delta t = 1.28 \times 10^{-5}$ (en bleu) et ensuite lorsque $\Delta t = 1.28 \times 10^{-6}$ (en rouge) avec le schéma BDF2. Les erreurs de discrétisation spatiales, mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ , sont données en fonction du pas de maillage Δx_2 . (b) Évolution des erreurs de discrétisation temporelles de la vitesse approchée d'une façon numérique $\varepsilon^{\Delta t}(u_1)$, et des erreurs de discrétisation temporelles de la vitesse donnée par rapport à la solution exacte $\varepsilon^{\Delta x, \Delta t}(u_1)$, d'abord lorsque $\Delta x_2 = 8.26 \times 10^{-3}$ (en bleu) et ensuite lorsque $\Delta x_2 = 1.30 \times 10^{-4}$ (en rouge). Les erreurs de discrétisation temporelles, mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ , sont données en fonction du pas de temps Δt pour le schéma d'Euler1 et de schéma BDF2.	126
4.15	Profile de vitesse $u_1(x_2)$, de la contrainte de cisaillement polymérique τ_{12} et de la contrainte normal polymérique τ_{11} de l'écoulement de Poiseuille du fluide d'Oldroyd-B à différents instants t_i pour $\beta = 10^{-7}$ et $\mathbf{We} = 1$, obtenue avec les différents schémas de discrétisation de la partie hyperbolique UP(1,2), WENO(3,5,7,9) et HOU(3,5,7,9) et avec le schéma BDF2 et pour résolution temporelle $\Delta t = 4.13 \times 10^{-3}$ et un maillage de 1×121 .	129
4.16	Comparaison de l'évolution temporelle de la vitesse maximale obtenue numériquement $u_1(x_2 = 0.5)$ et de la solution exacte $u_{ana}(x_2 = 0.5)$ du fluide d'Oldroyd-B en fonction du rapport de viscosité du solvant et de la viscosité total $\beta = \mu_s / \mu_0 = \{0.99, 0.8, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001, 10^{-7}\}$ avec les schémas BDF2 et d'Euler1 et pour $\mathbf{Re} = 1$, $\mathbf{We} = 1$ et en utilisant le schéma WENO3 avec une résolution temporelle $\Delta t = 1.17 \times 10^{-2}$ et un maillage de 1×51 .	130
4.17	Évolution temporelle de la vitesse maximale obtenue numériquement $u_1(x_2 = 0.5)$ et de la solution exacte $u_{ana}(x_2 = 0.5)$, de contrainte de cisaillement polymérique numérique $\tau_{12}(x_2 = 1)$ et de la contrainte normal polymérique $\tau_{11}(x_2 = 1)$ numérique de l'écoulement de Poiseuille du fluide d'Oldroyd-B en fonction du nombre élastique $\mathbf{E} = \mathbf{We} / \mathbf{Re} = \{0.1, 1, 10, 100\}$ avec $\mathbf{Re} = 1$ et un rapport de viscosité du solvant $\beta = \mu_s / \mu_0 = 0.1$ avec le schémas BDF2 et une résolution temporelle $\Delta t = 1.93 \times 10^{-4}$ et en utilisant le schéma WENO3 et un maillage de 51 points.	131
4.18	Évolution temporelle des écarts entre la solution numérique et la solution exacte $\varepsilon^{\Delta x, \Delta t}(u_1)$, mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ , en fonction des schémas numériques utilisés pour la discrétisation de la partie hyperbolique UP(1,2), WENO(3,5,7,9) et HOU(3,5,7,9) avec le modèle d'Oldroyd-B avec $\beta = 10^{-7}$, $\mathbf{Re} = 1$ et $\mathbf{We} = 1$, et pour le schéma BDF2 sous une résolution temporelle $\Delta t = 4.13 \times 10^{-3}$ et un maillage de 121 points.	132
4.19	(a, b) Évolution des écarts entre la solution numérique et la solution exacte $\varepsilon^{\Delta x, \Delta t}(u_1)$ mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ en fonction de la résolution du maillage ($1/\Delta x_2$) avec le schéma BDF2 et le schéma d'Euler1 et pour un temps fixe $t = 9.9836 \times 10^{-2}$, et avec le fluide d'Oldroyd-B avec $\beta = 10^{-7}$, $\mathbf{Re} = 1$ et $\mathbf{We} = 1$. (c, d) Évolution des écarts entre la solution numérique et la solution exacte $\varepsilon^{\Delta x, \Delta t}(u_1)$ mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ en fonction du temps-cpu de la partie hyperbolique avec le schéma BDF2 et le schéma d'Euler1 et pour un temps fixe $t = 9.9836 \times 10^{-2}$, et avec le fluide d'Oldroyd-B avec $\beta = 10^{-7}$, $\mathbf{Re} = 1$ et $\mathbf{We} = 1$.	134

4.20	Évolution des erreurs de discrétisation spatiales approchée d'une façon numérique, pour le fluide d'Oldroyd-B avec $\mathbf{Re} = 1$ et $\mathbf{We} = 1$ et pour deux valeurs du rapport de viscosité $\beta = 10^{-7}$ et $\beta = 0.1$, de la vitesse (a) $\varepsilon^{\Delta x}(u_1)$, de la contrainte de cisaillement (b) $\varepsilon^{\Delta x}(\tau_{12})$ et de la contrainte normale (c) $\varepsilon^{\Delta x}(\tau_{11})$, mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ , en fonction du pas de maillage Δx_2 et pour différents schémas de discrétisation de la partie hyperbolique UP(1,2), WENO(3,5,7,9) et HOUC(3,5,7,9) et avec le schéma BDF2, pour un pas de temps $\Delta t = 5.127 \cdot 10^{-5}$ et un nombre d'itérations fixe $n = 5 \times 10^3$	136
4.21	Évolution des erreurs de discrétisation temporelles approchée d'une façon numérique, pour le fluide d'Oldroyd-B avec $\mathbf{Re} = 1$ et $\mathbf{We} = 1$ et pour deux valeurs du rapport de viscosité $\beta = 10^{-7}$ et $\beta = 0.1$, de la vitesse (a) $\varepsilon^{\Delta t}(u_1)$, de la contrainte de cisaillement (b) $\varepsilon^{\Delta t}(\tau_{12})$ et de la contrainte normale (c) $\varepsilon^{\Delta t}(\tau_{11})$, mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ , en fonction de la résolution temporelle Δt et pour les différents schémas de discrétisation de la partie hyperbolique UP(1,2), WENO(3,5,7,9) et HOUC(3,5,7,9), avec le schéma BDF2 et le schéma Euler1 et pour un temps fixe $t = n_i \Delta t_i = 2.066$ (le nombre d'itérations correspondant au premier pas Δt_1 de temps est $n_1 = 10^4$).	137
4.22	(a) Comparaison de la distribution de profil de la contrainte de cisaillement polymérique numérique $\tau_{12}(x_2)$ et exacte $\tau_{12,ana}(x_2)$ à l'état stationnaire du fluide d'Oldroyd-B en fonction du rapport de viscosité du solvant $\beta = \{0.99, 0.8, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001\}$ avec $\mathbf{Re} = 1$, $U = 1$ et maillage de 1×61 . (b) Comparaison de la distribution de profil de la contrainte polymérique normal numérique $\tau_{11}(x_2)$ et exacte $\tau_{11,ana}(x_2)$ à l'état stationnaire du fluide d'Oldroyd-B en fonction du rapport de viscosité du solvant $\beta = \{0.99, 0.8, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001\}$ avec $\mathbf{Re} = 1$, $\mathbf{We} = 1$ et $U = 1$ et pour maillage de 1×61 . (c) Comparaison de la distribution de profil de la contrainte polymérique normal numérique $\tau_{11}(x_2)$ et exacte $\tau_{11,ana}(x_2)$ à l'état stationnaire du fluide d'Oldroyd-B en fonction du nombre élastique $\mathbf{E} = \mathbf{We}/\mathbf{Re} = \{1, 10, 100\}$ avec $\beta = 0.1$ et pour maillage de 1×61	138
4.23	Évolution des erreurs de discrétisation spatiales approchée d'une façon numérique, pour le fluide SPTT avec $\mathbf{Re} = 1$, $\mathbf{We} = 1$ et $\varepsilon = 0.25$ et pour deux valeurs du rapport de viscosité $\beta = 10^{-7}$ et $\beta = 0.1$, de la vitesse (a) $\varepsilon^{\Delta x}(u_1)$, de la contrainte de cisaillement (b) $\varepsilon^{\Delta x}(\tau_{12})$ et de la contrainte normale (c) $\varepsilon^{\Delta x}(\tau_{11})$, mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ , en fonction du pas de maillage Δx_2 et pour différents schémas de discrétisation de la partie hyperbolique UP(1,2), WENO(3,5,7,9) et HOUC(3,5,7,9) et avec le schéma BDF2 pour un pas de temps $\Delta t = 1.488 \times 10^{-5}$ et un nombre d'itérations fixe $n = 5 \times 10^4$	141
4.24	Évolution des erreurs de discrétisation temporelles approchée d'une façon numérique, pour le fluide SPTT avec $\mathbf{Re} = 1$, $\mathbf{We} = 1$ et $\varepsilon = 0.25$ et pour deux valeurs du rapport de viscosité $\beta = 10^{-7}$ et $\beta = 0.1$, de la vitesse (a) $\varepsilon^{\Delta t}(u_1)$, de la contrainte de cisaillement (b) $\varepsilon^{\Delta t}(\tau_{12})$ et de la contrainte normale (c) $\varepsilon^{\Delta t}(\tau_{11})$, mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ , en fonction du pas de temps Δt et pour les différents schémas de discrétisation de la partie hyperbolique UP(1,2), WENO(3,5,7,9) et HOUC(3,5,7,9), avec le schéma BDF2 et le schéma Euler1 et pour un temps fixe $t = n_i \Delta t_i = 0.0413$ (le nombre d'itérations correspondant au premier pas Δt_1 de temps est $n_1 = 10^3$) et un maillage 1×51	142
4.25	Comparaison, à l'état stationnaire avec le fluide SPTT avec $\bar{u}_1^N = 1$, $\mathbf{Re} = 1$, $\mathbf{We} = 1$ et $\varepsilon = 0.25$, de la distribution de la solution numérique par rapport à la solution exacte de la vitesse (a.1) $u_1(x_2)$, de la contrainte de cisaillement polymérique (a.2) $\tau_{12}(x_2)$ et de la contrainte normal polymérique (a.2) $\tau_{11}(x_2)$, en fonction du rapport de viscosité du solvant $\beta = \{0.99, 0.8, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001\}$ avec avec le schéma WENO3 et pour un maillage de 1×61 . Comparaison, à l'état stationnaire avec le fluide SPTT avec $\bar{u}_1^N = 1$, $\mathbf{Re} = 1$ et $\beta = 0.1$ de la distribution de la solution numérique par rapport à la solution exacte de la vitesse (b.1) $u_1(x_2)$, de la contrainte de cisaillement polymérique (b.2) $\tau_{12}(x_2)$ et de la contrainte normal polymérique (b.3) $\tau_{11}(x_2)$, en fonction du paramètre $\sqrt{\varepsilon} \mathbf{We} = \{0.1, 0.5, 1, 10, 100\}$ avec un maillage de 1×61	143
4.26	Évolution de la vitesse maximale u_1^{max} , de la contrainte de cisaillement polymérique maximale τ_{12}^{max} et de la contrainte normal polymérique maximale τ_{11}^{max} , à l'état stationnaire avec le fluide SPTT avec $\bar{u}_1^N = 1$ et $\mathbf{Re} = 1$, en fonction du nombre de Weissenberg \mathbf{We} et pour différents rapports de viscosité du solvant $\beta = \{0.99, 0.8, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001\}$ et différents valeurs du paramètre $\varepsilon = \{0.01, 0.02, 0.1, 0.1, 0.25, 0.5, 1\}$	145
5.1	Schéma d'une conduite de section carrée de coté égal à l'unité et de longueur L_1	153
5.2	Illustration des différentes grilles adoptées (81×81 , 161×161 et 321×321 correspondant à la section complète) pour l'écoulement dans une conduite de section carrée.	153

5.3 Schématisation d’une transformation de rotation autour de \mathbf{e}_1 d’un angle θ de base \mathbf{e}_i liée au repère cartésien de la géométrie à la base $\bar{\mathbf{e}}_i$ liée à l’écoulement viscométrique de cisaillement, en un point discret du domaine de calcul. 154

5.4 Comparaisons des champs, respectivement, de la vitesse principale u_1 (a), du taux de déformation $\dot{\gamma}$ (b), de la seconde différence des contraintes normales $\bar{N}_2 = \tau_{22} - \tau_{33}$ (c) et de la fonction de courant ψ avec les résultats de Yue et al. [239] dans le cas du fluide de Giesekus $\alpha = 0.5$ avec un nombre de Weissenberg $\mathbf{We} = 1$ et un rapport de viscosité du solvant dans la viscosité totale $\beta = 0.1$, $f\mathbf{Re} = -6.7791$ et $\bar{u}_1 = 1$. La résolution du maillage utilisé ici est 80×80 . 157

5.5 Comparaisons de la vitesse moyenne des écoulements secondaires u_s^{moy} Comparaisons de la vitesse moyenne des écoulements secondaires u_s^{moy} obtenue dans ce travail avec les résultats de la littérature donnés par Li et al. [134] et Yue et al. [239]. Les vitesses moyennes sont données pour le modèle de Giesekus d’abord en fonction du nombre de Weissenberg avec $\alpha = 0.5$ et $\beta = 0.1$, ensuite en fonction du rapport β avec $\alpha = 0.5$ et $\mathbf{We} = 1$ et finalement en fonction du paramètre d’anisotropie α avec $\mathbf{We} = 1$ et $\beta = 0.1$. Notons que la vitesse moyenne de l’écoulement principale est constante $\bar{u}_1 = 1$ 158

5.6 Champs de vitesse principale $u_1(x_2, x_3)$ associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $\mathbf{Re} = 1$ sur le quart supérieur droit du canal en fonction du nombre de Weissenberg $\mathbf{We} = \{0.3, 1, 5\}$ et pour différents rapport de viscosité $\beta = \{0.5, 0.1, 0.001\}$ et pour un fluide Newtonien. . . . 160

5.7 Champs de vecteur $\dot{\gamma}(x_3, x_2) = (\partial u_1 / \partial x_3)\mathbf{e}_3 + (\partial u_1 / \partial x_2)\mathbf{e}_2$ en fonction du rapport de viscosité du solvant $\beta = \{0.5, 0.1, 0.001\}$ pour $\mathbf{We} = 1$, associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $\mathbf{Re} = 1$ 161

5.8 Champs de la viscosité totale $\mu_t(x_3, x_2) / \mu_{t_0}$, champs de la contrainte de cisaillement polymérique $\bar{\tau}_{12}(x_3, x_2)$ et champs de la première différence des contraintes normales $\bar{N}_1(x_2, x_3)$ associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $\mathbf{Re} = 1$ sur le quart supérieur droit du canal en fonction du nombre de Weissenberg $\mathbf{We} = \{0.3, 1, 5\}$ et pour différents rapport de viscosité $\beta = \{0.5, 0.1, 0.001\}$ 162

5.9 (a) Profils de vitesse principale $u_1(x_3 = 0.5, x_2)$ le long de la ligne centrale ($x_3 = 0.5, x_2 = 0.5$)–($x_3 = 0.5, x_2 = 1.$) en fonction du nombre de Weissenberg \mathbf{We} et pour différents rapport de viscosité $\beta = \{0.5, 0.1, 0.001\}$. Le long de la même ligne centrale et en fonction de \mathbf{We} , (b) taux de déformations $\dot{\gamma}(x_3 = 0.5, x_2)$ pour $\beta = 0.1$ et (c) taux de déformations $\dot{\gamma}(x_3 = 0.5, x_2)$ pour $\beta = 0.001$, associée au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $\mathbf{Re} = 1$ 163

5.10 Pour le modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) et avec $\mathbf{Re} = 1$, évolution le long de la ligne centrale ($x_3 = 0.5, x_2 = 0.5$)–($x_3 = 0.5, x_2 = 1.$) : des viscosités totales $\mu_t / \mu_{t_0}(\dot{\gamma})$, $\mu_t / \mu_{t_0}(\dot{\gamma}\mathbf{We})$ et $\mu_t / \mu_{t_0}(x_2)$; en fonction du \mathbf{We} et pour différents rapport de viscosité $\beta = \{0.5, 0.1, 0.001\}$. . . 165

5.11 Pour le modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) et avec $\mathbf{Re} = 1$, évolution le long de la ligne centrale ($x_3 = 0.5, x_2 = 0.5$)–($x_3 = 0.5, x_2 = 1.$) : de la contrainte de cisaillement Newtonienne $\bar{\tau}_{12}^N$, polymérique $\bar{\tau}_{12}$ et totale $\bar{\tau}_{12}^t$; de la première différence des contraintes normales en fonction divisé par le nombre de Weissenberg en fonction du taux de cisaillement $\bar{N}_1(\dot{\gamma}) / \mathbf{We}$ et en fonction du nombre de Weissenberg local $\bar{N}_1(\dot{\gamma}\mathbf{We}) / \mathbf{We}$ et finalement le coefficient de la première différence des contraintes normales divisé par le nombre de Weissenberg en fonction du taux de cisaillement $\bar{\Psi}_1(\dot{\gamma}) / \mathbf{We}$ et en fonction du nombre de Weissenberg local $\bar{\Psi}_1(\dot{\gamma}\mathbf{We}) / \mathbf{We}$, en fonction du \mathbf{We} et pour différents rapport de viscosité $\beta = \{0.5, 0.1, 0.001\}$ 166

5.12 Distribution : (a) du coefficient $f\mathbf{Re}$ et (b) de la vitesse principale maximale u_1^{max} en fonction du nombre de Weissenberg et pour différents rapport de viscosité $\beta = \{0.8, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001, 10^{-7}\}$, pour le modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) et avec $\mathbf{Re} = 1$ 169

5.13 Champs de la fonction $\psi(x_2, x_3)10^4$, champs de la composante transversale du champ de vitesse $u_2(x_2, x_3)10^3$ et champs de la seconde différence des contraintes normales $-\bar{N}_2(x_2, x_3)$ associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $\mathbf{Re} = 1$ sur le quart supérieur droit du canal en fonction du nombre de Weissenberg $\mathbf{We} = \{0.3, 1, 5\}$ et pour différents rapport de viscosité $\beta = \{0.5, 0.1, 0.001\}$ 170

5.14 Pour le modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) et avec $\mathbf{Re} = 1$, évolution le long de la ligne centrale ($x_3 = 0.5, x_2 = 0.5$)–($x_3 = 0.5, x_2 = 1.$) : de la seconde différence des contraintes normales en fonction divisé par le nombre de Weissenberg en fonction du taux de cisaillement $-\bar{N}_2(\dot{\gamma}) / \mathbf{We}$ et en fonction du nombre de Weissenberg local $-\bar{N}_2(\dot{\gamma}\mathbf{We}) / \mathbf{We}$ et du coefficient de la seconde différence des contraintes normales divisé par le nombre de Weissenberg en fonction du taux de cisaillement $-\bar{\Psi}_2(\dot{\gamma}) / \mathbf{We}$ et en fonction du nombre de Weissenberg local $-\bar{\Psi}_2(\dot{\gamma}\mathbf{We}) / \mathbf{We}$, en fonction du \mathbf{We} et pour différents rapport de viscosité $\beta = \{0.5, 0.1, 0.001\}$. 172

5.15	Distribution : (a) des vitesses maximale u_s^{max} et moyenne u_s^{moy} des écoulements secondaires ; (b) maximum de la fonction de courant ψ^{max} , en fonction du nombre de Weissenberg We et pour différents rapport de viscosité $\beta = \{0.8, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001, 10^{-7}\}$, pour le modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) et avec $Re = 1$	173
5.16	Champs de vitesse principale $u_1(x_2, x_3)$ associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $\beta = 0.1$ sur le quart supérieur droit du canal en fonction du nombre de Weissenberg $We = \{0.3, 1, 5, 10\}$ et pour différents nombres de Reynolds $Re = \{1, 100, 500, 1000\}$	175
5.17	Champs de vecteur $\dot{\gamma}(x_3, x_2) = (\partial u_1 / \partial x_3)e_3 + (\partial u_1 / \partial x_2)e_2$ en fonction du rapport de nombre de Reynolds $Re = \{1, 100, 500, 1000\}$ pour $We = 1$, associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $\beta = 0.1$	176
5.18	Champs de viscosité totale $\mu_t(x_3, x_2) / \mu_{t0}$ associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $\beta = 0.1$ sur le quart supérieur droit du canal en fonction du nombre de Weissenberg $We = \{0.3, 1, 5, 10\}$ et pour différents nombres de Reynolds $Re = \{1, 100, 500, 1000\}$	177
5.19	Pour le modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $\beta = 0.1$: (a) Profils de vitesse principale $u_1(x_3, x_2)$, (b) profils du taux de déformation $\dot{\gamma}(x_3, x_2)$, (c) profils de la contrainte du cisaillement polymérique $\bar{\tau}_{12}(x_3, x_2)Re$, (d) profils de la viscosité totale $\mu_t / \mu_{t0}(x_3, x_2)$, en fonction du nombre de Weissenberg We et pour différents nombres de Reynolds $Re = \{1, 100, 500, 1000\}$, soit (.1) le long de la ligne centrale verticale ($x_3 = 0.5, x_2 = 0.5$)–($x_3 = 0.5, x_2 = 1.$) ou (.2) le long de la ligne diagonale ($x_3 = x_2, x_2$).	181
5.20	Évolution : (a) du coefficient fRe et (b) de la vitesse principale maximale u_1^{max} en fonction du nombre de Weissenberg We et pour différents nombres de Reynolds Re avec le modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) et $\beta = 0.1$	182
5.21	Champs de la fonction de courant $\psi(x_2, x_3)10^4$ associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $\beta = 0.1$ sur le quart supérieur droit du canal en fonction du nombre de Weissenberg $We = \{0.3, 1, 5, 10\}$ et pour différents nombres de Reynolds $Re = \{1, 100, 500, 1000\}$	184
5.22	Champs de la composante transversale de champ de vitesse $u_2(x_2, x_3)10^3$ associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $\beta = 0.1$ sur le quart supérieur droit du canal en fonction du nombre de Weissenberg $We = \{0.3, 1, 5, 10\}$ et pour différents nombres de Reynolds $Re = \{1, 100, 500, 1000\}$	185
5.23	Figure provisoire : Champs de la seconde différence des contraintes normales \bar{N}_2Re associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $\beta = 0.1$ sur le quart supérieur droit du canal en fonction du nombre de Weissenberg $We = \{0.3, 1, 5, 10\}$ et pour différents nombres de Reynolds $Re = \{1, 100, 500, 1000\}$	186
5.24	Pour le modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $\beta = 0.1$: (a) Profils de la composante $u_2(x_3, x_2)$ de la vitesse, (b) profils de la seconde différences des contraintes normales $\bar{N}_2(x_3, x_2)Re$, en fonction du nombre de Weissenberg We et pour différents nombres de Reynolds $Re = \{1, 100, 500, 1000\}$, soit (.1) le long de la ligne centrale ($x_3 = 0.5, x_2 = 0.5$)–($x_3 = 0.5, x_2 = 1.$) ou (.2) le long de la ligne diagonale ($x_3 = x_2, x_2$).	188
5.25	Évolution (a) de la vitesse moyenne u_s^{moy} des écoulements secondaires et (b) des nombres de Mach $(u_s^{moy})^{1/2}Ma_0$ et de Reynolds $u_s^{moy}Re$ réécrit à l'échelle de de l'intensité des écoulements secondaires ainsi que le maximum de la fonction des écoulements secondaires initiaux $\bar{\Psi}_1^{max}$ et le maximum de la fonction de la seconde famille des écoulements secondaires $\bar{\Psi}_2^{max}$, en fonction du nombre de Weissenberg We et pour différents nombres de Reynolds Re avec le modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) et $\beta = 0.1$	190
5.26	Champ de la vitesse principale $u_1(x_2, x_3)$ associés au modèle de Giesekus avec $\beta = 0.1$ sur le quart supérieur droit du canal en fonction du nombre de Weissenberg $We = \{0.3, 1, 3, 10\}$ et pour différents nombres de Reynolds $Re = \{100, 500\}$ ainsi que différentes valeurs du paramètre d'anisotropie $\alpha = \{0.2, 0.8\}$	192
5.27	Champ de la viscosité totale $\mu_t(x_2, x_3) / \mu_{t0}Re$ associés au modèle de Giesekus avec $\beta = 0.1$ sur le quart supérieur droit du canal en fonction du nombre de Weissenberg $We = \{0.3, 1, 3, 10\}$ et pour différents nombres de Reynolds $Re = \{100, 500\}$ et différentes valeurs du paramètre d'anisotropie $\alpha = \{0.2, 0.8\}$	193
5.28	Pour le modèle de Giesekus avec $\beta = 0.1$: (a) Profils de vitesse principale $u_1(x_3, x_2)$, (b) profils du taux de déformation $\dot{\gamma}(x_3, x_2)$, (c) profils de la contrainte du cisaillement polymérique $\bar{\tau}_{12}(x_3, x_2)Re$, (d) profils de la viscosité totale $\mu_t / \mu_{t0}(x_3, x_2)$, en fonction du nombre de Weissenberg We et pour différents nombres de Reynolds $Re = \{100, 500\}$ et pour différentes valeurs du paramètres d'anisotropie $\alpha = \{0.2, 0.8\}$, soit (.1) le long de la ligne centrale ($x_3 = 0.5, x_2 = 0.5$)–($x_3 = 0.5, x_2 = 1.$) ou (.2) le long de la ligne diagonale ($x_3 = x_2, x_2$).	195

5.29	Évolution : (a) du coefficient $f_{\mathbf{Re}}$ et (b) de la vitesse principale maximale u_1^{max} en fonction du nombre de Weissenberg \mathbf{We} et pour différents nombres de Reynolds $\mathbf{Re} = \{1, 100, 500\}$ et pour différentes valeurs du paramètres d'anisotropie $\alpha = \{0.2, 0.5, 0.8\}$ avec le modèle de Giesekus et $\beta = 0.1$.	196
5.30	Champs de la seconde différence des contraintes normales $\bar{N}(x_2, x_3)\mathbf{Re}$ associés au modèle de Giesekus avec $\beta = 0.1$ sur le quart supérieur droit du canal en fonction du nombre de Weissenberg $\mathbf{We} = \{0.3, 1, 3, 10\}$ et pour différents nombres de Reynolds $\mathbf{Re} = \{1, 100, 500\}$ et différentes valeurs du paramètre d'anisotropie $\alpha = \{0.2, 0.8\}$.	198
5.31	Champs de la seconde différence des contraintes normales $\bar{N}_2(x_2, x_3)\mathbf{Re}$ associés au modèle de Giesekus avec $\beta = 0.1$ sur le quart supérieur droit du canal en fonction du nombre de Weissenberg $\mathbf{We} = \{0.3, 1, 3, 10\}$ et pour différents nombres de Reynolds $\mathbf{Re} = \{100, 500\}$ et différentes valeurs du paramètre d'anisotropie $\alpha = \{0.2, 0.8\}$.	199
5.32	Pour le modèle de Giesekus avec $\beta = 0.1$: (a) Profils de la composante $u_2(x_3, x_2)$ de la vitesse, (b) profils de la seconde différentes des contraintes normales $\bar{N}_2(x_3, x_2)\mathbf{Re}$, en fonction du nombre de Weissenberg \mathbf{We} et pour différents nombres de Reynolds $\mathbf{Re} = \{100, 500\}$ et pour différentes valeurs du paramètres d'anisotropie $\alpha = \{0.2, 0.8\}$, soit (.1) le long de la ligne centrale ($x_3 = 0.5, x_2 = 0.5$)–($x_3 = 0.5, x_2 = 1.$) ou (.2) le long de la linge diagonale ($x_3 = x_2, x_2$).	200
5.33	Évolution (a) de la vitesse moyenne u_s^{moy} des écoulements secondaires et (b) des nombres de Mach $(u_s^{moy})^{1/2}\mathbf{Ma}_0$ et de Reynolds $u_s^{moy}\mathbf{Re}$ réécrit à l'échelle de de l'intensité des écoulements secondaires ainsi que le maximum de la fonction des écoulements secondaires initiaux $\bar{\Psi}_1^{max}$ et le maximum de la fonction de la seconde famille des écoulements secondaires $\bar{\Psi}_2^{max}$, en fonction du nombre de Weissenberg \mathbf{We} et pour différents nombres de Reynolds $\mathbf{Re} = \{1, 100, 500\}$ et pour différentes valeurs du paramètre d'anisotropie $\alpha = \{0.2, 0.5, 0.8\}$ avec le modèle de Giesekus et $\beta = 0.1$.	202
6.1	Distribution du nombre de \mathbf{Nu} en fonction $x_1/(\mathbf{Pr}\mathbf{Re})$ dans le cadre du fluide Newtonien avec $\mathbf{Re} = 1$ et $\mathbf{Pr} = 50$ et pour les conditions aux limites de de flux imposé et de température imposée et pour un maillage de $7 \times 161 \times 161$ et un maillage de $21 \times 161 \times 161$.	211
6.2	Champs de la température normalisée $\Theta = (T - T^{moy}) / (T_w^{moy} - T^{moy})$ en fonction du rapport du viscosité $\beta = \mu_s / \mu_0$ associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) et $\mathbf{Pr} = 50$, $\mathbf{Re} = 1$ et $\mathbf{We} = 1$, dans la région complètement développée.	213
6.3	Évolution du nombre de Nusselt asymptotique \mathbf{Nu} en fonction du nombre de Weissenberg \mathbf{We} pour différents rapports de viscosité du solvant dans la viscosité totale $\beta = \mu_s / \mu_{t_0}$, avec le modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) et avec $\mathbf{Re} = 1$ et $\mathbf{Pr} = 50$ et pour les conditions aux limites de de flux imposé et de température imposée.	215
6.4	Champs de la température adimensionnée $\Theta = (T - T^{moy}) / (T_w^{moy} - T^{moy})$ dans la région complètement développée en fonction du nombre de Reynolds \mathbf{Re} , pour $\mathbf{We} = 0.3$ et $\mathbf{We} = 1$ associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) et $\beta = 0.1$ avec $\mathbf{Pr} = 50$.	218
6.5	Évolution du nombre de Nusselt asymptotique \mathbf{Nu} en fonction du nombre de Weissenberg \mathbf{We} et en fonction du nombre de Reynolds \mathbf{Re} pour le modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) et $\beta = 0.1$ et avec $\mathbf{Pr} = 50$ et pour les conditions aux limites de flux imposé et de température imposée.	219
6.6	Évolution du nombre de Nusselt asymptotique \mathbf{Nu} en fonction du l'importance de la convection transverse $u_s^{moy}\mathbf{RePr}$ pour les différents nombres de Reynolds \mathbf{Re} et pour le modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) et $\beta = 0.1$ et pour les différents nombres de Weissenberg \mathbf{We} avec $\mathbf{Pr} = 50$ et pour les conditions aux limites de flux imposé.	220
6.7	Évolution du nombre de Nusselt asymptotique \mathbf{Nu} en fonction du nombre de Weissenberg \mathbf{We} et en fonction du paramètre d'anisotropie du fluide de Giesekus α et pour différents nombres de Reynolds \mathbf{Re} pour $\beta = 0.1$ et avec $\mathbf{Pr} = 50$ et pour les conditions aux limites de flux imposé et de température imposée.	222
6.8	Champs de la température normalisée $\Theta = (T - T^{moy}) / (T_w^{moy} - T^{moy})$ dans la région complètement développée en fonction du nombre de Eckert \mathbf{Ec} et du rapport de viscosité β pour $\mathbf{We} = 0.2$ et $\mathbf{We} = 5$ associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $\mathbf{Pr} = 50$ et $\mathbf{Re} = 1$.	225

6.9	Évolution de la valeur moyenne de l'intensité de la dissipation visqueuse du solvant Newtonien $\bar{\Phi}_s$, de la valeur moyenne de l'intensité de la dissipation visqueuse due à la partie polymérique $\bar{\Phi}_p$ et de la valeur moyenne de l'intensité de la dissipation visqueuse totale $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_s + \bar{\Phi}_p$ en fonction du nombre de Weissenberg We et en fonction du rapport de viscosité β associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5, \alpha = 0$) et au modèle purement Newtonien avec $Re = 1$	226
6.10	Évolution du nombre de Nusselt asymptotique Nu en fonction du nombre de Weissenberg We et en fonction du nombre d'Eckert Ec et du rapport de viscosité β associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5, \alpha = 0$) avec $Pr = 50$ et $Re = 1$ et pour la condition aux limites de flux imposé.	228
6.11	Champs de la température adimensionnée $\Theta = (T - T^{moy}) / (T_w^{moy} - T^{moy})$ dans la région complètement développée en fonction du nombre de Eckert Ec et du nombre de Reynolds Re pour $We = 5$ associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) et $\beta = 0.1$ avec $Pr = 50$ sous la condition aux limites thermiques de flux imposé.	230
6.12	Évolution de la valeur moyenne de la dissipation visqueuse du solvant Newtonien $\bar{\Phi}_s$, de la valeur moyenne de la dissipation visqueuse due à la partie polymérique $\bar{\Phi}_p$ et de la valeur moyenne de la dissipation visqueuse totale $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_s + \bar{\Phi}_p$ en fonction du nombre de Weissenberg We et en fonction du nombre de Reynolds Re associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) et $\beta = 0.1$	231
6.13	Évolution du nombre de Nusselt asymptotique Nu en fonction du nombre de Weissenberg We et en fonction du nombre d'Eckert Ec et en fonction du nombre de Reynolds Re associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $Pr = 50$ et $\beta = 0.1$ et pour la condition aux limites de flux imposé.	233
A.1	Vitesse relative de deux points d'un domaine fluide en mouvement.	III
A.2	Volume d'un domaine fluide.	IV
A.3	Coordonnées curvilignes	V
A.4	Stencil de discrétisation du schéma WENO7 sur une grille unidimensionnelle et uniforme.	VIII
A.5	Stencil de discrétisation du schéma WENO9 sur une grille unidimensionnelle et uniforme.	XI

Liste des tableaux

1.1	Fonctions viscométriques des différentes variantes du modèle de Maxwell et du modèle Oldroyd-B	36
1.2	Fonction des termes non-linéaire $\mathbf{H}(\boldsymbol{\tau})$ (associe à l'Éqt. (1.138b)), paramètres rhéologiques, coefficients de la seconde différence des contraintes normales et viscosités de cisaillement pour chacun des modèles considérés.	60
3.1	Réduction de l'ordre du schéma de discrétisation de la partie hyperbolique pour les points discrets dans le voisinage des parois en fonction du signe de la valeur propre associée λ	102
4.1	Comparaison des valeurs des vitesses maximales et de leurs position ainsi que des valeurs du nombre de Nusselt moyen $\bar{\mathbf{Nu}}$ obtenues en fonction du nombre de Rayleigh avec les résultats de la littérature de Vahl Davis [52] dans le cas de la cavité différentiellement chauffée avec un maillage de 101x101.	120
4.2	Comparaison des valeurs Comparaison des valeurs du nombre de Nusselt moyen $\bar{\mathbf{Nu}}$ obtenues en fonction du nombre de Reynolds \mathbf{Re} et en fonction du nombre de Grashof \mathbf{Gr} avec les résultats de la littérature donnés par Iwatsu et al. [104], Khanafer et al. [119] et Tiwari and Das [218] dans le cas de la cavité entraînée et chauffée par le haut avec un maillage de 201x201.	123
5.1	Références bibliographiques des études (paramétriques) numériques et analytiques menées de l'écoulement viscoélastique polymérique dans un canal de section carré.	151
5.2	Évolution du coefficient du frottement ($f\mathbf{Re}$), des vitesses moyenne et maximale des écoulements secondaires (u_s^{moy}, u_s^{max}) et de la vitesse maximale (u_1^{max}) en fonction de la résolution du maillage pour différents nombre de Reynolds $\mathbf{Re} = \{1, 100, 500\}$, différents nombre de Weissenberg $\mathbf{We} = \{1, 10\}$ et différents rapport de viscosité $\beta = \{0.1, 0.001\}$	159
6.1	Confrontation du nombre de Nusselt asymptotique \mathbf{Nu} obtenu avec le fluide Newtonien en fonction des différentes résolutions de la grille avec les résultats donnés dans Chandrupatla and Sastri [39] et Shah and Bhatti [191] sous la condition aux limites thermique de flux imposé et sous la condition de température imposée et en fonction des différents résolution du maillage.	212
6.2	Accroissement maximal du nombre de \mathbf{Nu} associé au nombre de Weissenberg correspondant pour différents rapport de viscosité β , obtenu avec le modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $\mathbf{Re} = 1$ et $\mathbf{Pr} = 50$ pour la condition de flux imposé et pour la condition de température imposée	216

Résumé

Les écoulements incompressibles et laminaires de fluides viscoélastiques, comme les fluides polymériques et les solutions diluées de polymères, dans des conduites rectilignes de section non-circulaire se distinguent, d'une part, par leur comportement rhéofluidifiant, et d'autre part, par l'anisotropie de la seconde différence des contraintes normales conduisant à l'apparition d'écoulements secondaires. Dans les mêmes conditions d'écoulement, ces deux phénomènes (rhéofluidification, écoulements secondaires) entraînent une amélioration significative du transfert thermique convectif comparativement à l'écoulement d'un fluide Newtonien. En raison de l'importance des fluides viscoélastiques dans diverses applications industrielles (plasturgie, industrie pétrolière), biomédicales (produit pharmaceutiques, écoulement biologiques) et environnementales (détergents liquides, échangeurs de chaleur, mélangeurs chimiques, extrusion, etc.), l'utilisation de l'amélioration passive du mélange et du transfert thermique induite uniquement par les propriétés rhéologiques complexes des fluides viscoélastiques nécessite une connaissance précise du comportement dynamique et thermique de l'écoulement du fluide, particulièrement dans les conduites de section non-circulaire. Cependant, l'écoulement incompressible, laminaire, anisotherme et dépendant du temps d'un fluide viscoélastique est décrit par les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. L'extra-contrainte viscoélastique est donnée par des modèles constitutifs plus ou moins fidèles au comportement rhéologique du fluide viscoélastique considéré, comme le modèle rhéologique d'Oldroyd-B, le modèle de Giesekus et le modèle de Phan-Thien-Tanner (PTT). Le système d'équations ainsi obtenu est du type mixte, du type parabolo/ellipto/hyperbolique. Sa résolution nécessite des prouesses en développements numériques, dont la difficulté est accentuée pour des nombres de Weissenberg importants, représentant l'élasticité du fluide. Dans cette thèse, nous proposons un algorithme original basé sur la méthode des différences finies permettant la réalisation de double coulage numérique (parabolo/elliptique et parabolo/hyperbolique) d'une manière stable et convergente tout en conservant la positivité du tenseur de conformation de façon naturelle sans aucune méthode de stabilisation. En premier, le système d'équations composé de l'équation de la quantité de mouvement et de l'équation constitutive est réécrit sous une forme quasi-linéaire. Ensuite, sous réserve de la condition d'hyperbolicité, les termes d'advection pure résultant de la forme quasi-linéaire sont approchés en temps d'une façon explicite et discrétisés en espace en utilisant des schémas appropriés d'ordre élevé du type WENO(3,5,7,9) et HOU(3,5,7,9). Par suite, la contrainte d'incompressibilité (couplage pression/vitesse) est satisfaite à l'aide d'une méthode de projection incrémentale basée sur un schéma semi-implicite d'Euler de premier ordre de précision ou de BDF2 de seconde ordre de précision. Après avoir procédé à la validation de la précision et de la convergence des méthodes numériques implémentées, nous présentons l'étude de l'écoulement d'un fluide viscoélastique non-affine dans une conduite de section carrée. D'abord, l'influence de l'élasticité du fluide, de l'inertie du fluide et des différents paramètres rhéologiques du fluide sur l'écoulement principal ainsi que sur la structure et l'intensité des écoulements secondaires sont étudiés. Ensuite, une investigation de l'effet de la rhéofluidification, de l'effet de l'inertie des écoulements secondaires ainsi que l'effet de la dissipation visqueuse sur le taux du transfert thermique convectif est présentée. Sur bien des aspects, ce travail présente des originalités, notamment dans l'analyse et exploration des écoulements secondaires pour des nombres de Weissenberg élevés, ainsi que l'effet de la dissipation visqueuse, pour des fluides fortement non-linéaires, tels que Oldroyd-B, Giesekus et PPT, avec des paramètres rhéologiques variés, et cela constitue une réelle avancée dans la compréhension du comportement de ce type de fluides.

Mots clé : *simulation numérique, écoulement viscoélastique, transfert thermique, nombre de Weissenberg, nombre de Reynolds, rhéofluidification, écoulements secondaires, paramètres rhéologiques, nombre de Nusselt.*

Abstract

Incompressible and laminar flows of viscoelastic fluids, such as polymer melts and dilute polymer solutions, in straight pipes of non-circular cross-section are characterized, on the one hand, by their shear-thinning behaviour, and on the other hand, by the anisotropy of the second difference of normal stresses leading to the exhibition of secondary flows. These two phenomena lead to a significant enhancement of convective heat transfer compared to the flow of a Newtonian fluid under the same flowing conditions. Given the scientific importance of viscoelastic fluids and their interest in various industrial applications (heat exchanger, extrusion, injection, chemical mixing, bio-engineering fluids, etc.), the use of passive heat transfer enhancement induced purely by the complex rheological properties of viscoelastic fluids requires an accurate knowledge of the dynamic and thermal behavior of the flow in pipes with non-circular cross section. In an anisothermal configuration, the incompressible, laminar and time-dependent flow of a viscoelastic fluid is described by the conservation equations of mass, momentum and energy. For highly non-linear fluids, the viscoelastic extra-stress is given by a less or more accurate constitutive models, representative of the actual behavior of the considered viscoelastic fluids. Among of them, we can cite rheological model of Oldroyd-B, the Giesekus model and the Phan-Thien-Tanner (PTT) model. The system of governing equations obtained is of the mixed type, i.e. parabolic/elliptic/hyperbolic type. This leads to serious numerical difficulties in simulating the flow under such considerations, and needs real challenges to avoid the numerical instabilities, which grow with the Weissenberg number. In this thesis, we propose an original algorithm based on the finite differences method allowing the achievement of double numerical casting (parabolic/elliptic and parabolic/hyperbolic) in a stable and convergent way preserving the positivity of the conformation tensor in a natural way without any stabilization method. The system of equations composed of the momentum equation and the constitutive equation is first rewritten in a quasi-linear form. Under the checking of the hyperbolicity condition, the pure advection terms resulting from the quasi-linear form are discretized using appropriate high-order schemes of the type WENO(3,5,7,9) and HOUC(3,5,7,9). The incompressibility constraint is satisfied using an incremental projection method based on a semi-implicit Euler scheme of first order precision or BDF2 of second order precision. After validating the accuracy and the degree of convergence of the implemented numerical methods, we present the study of the flow of non-affine viscoelastic fluid in ducts with a square cross section. First, the influence of fluid's elasticity, fluid inertia and the different rheological parameters of the fluid on the primary flow and on the structure and intensity of the secondary flows are studied. Then, we investigated the effect of shear-thinning, the effect of the inertia of secondary flows and the effect of viscous dissipation on the rate of convective heat transfer. This work presents many originalities, in particular in the analysis and investigation of secondary flows for high Weissenberg numbers, as well as the effect of viscous dissipation, for strongly nonlinear fluids, such as Oldroyd-B, Giesekus and PPT, with various rheological parameters, and constitute an important step in understanding the non-linear behaviour of such fluids.

Keywords : *numerical simulation, viscoelastic flow, heat transfer, Weissenberg number, Reynolds number, shear-thinning, secondary flows, rheological parameters, Nusselt number.*

Introduction

Entre l'épuisement des ressources fossiles et l'accélération du réchauffement climatique, causé par les émissions considérables des gaz à effet de serre, le monde connaît depuis plusieurs décennies une crise énergétique croissante. La production d'une source d'énergie durable et respectueuse de l'environnement et la gestion efficace de l'énergie constituent en partie la réponse à la crise énergétique en cours. C'est pourquoi, la nécessité de trouver de nouveaux moyens pour optimiser et économiser de l'énergie dans diverses applications industrielles, domestiques et commerciales est devenue incontournable. Dans cette optique, les fluides dits complexes tels que : les fluides polymériques (à l'état dispersé ou enchevêtré), les colloïdes, les mousses, les aliments transformés, les émulsions, les cristaux liquides, etc., représentent un enjeu scientifique et industriel majeur. En effet, ces matériaux complexes sont omniprésents dans différents secteurs industriels, incluant l'agroalimentaire, le génie des procédés, le biomédical, le secteur pharmaceutique, le secteur de la cosmétique, le textile, la chimie, l'automobile ou encore l'aéronautique, etc, (voir Chhabra and Richardson [41]).

En raison de leurs propriétés macroscopiques non-linéaires, ces matériaux complexes se caractérisant par une structure propre à l'échelle microscopique peuvent développer des propriétés mécaniques et rhéologiques complexes au cours de l'écoulement. Les fluides complexes sont, en effet, dotés d'un comportement dit Non-Newtonien. En particulier, les fluides polymériques présentent une réponse dite viscoélastique qui se caractérise entre autre par : l'effet mémoire lié au temps de relaxation du fluide, la dépendance de la viscosité apparente du taux de cisaillement (effet rhéofluidifiant) et l'existence des différences des contraintes normales. Ainsi, à l'égard de leur importance scientifique et industrielle, la connaissance du comportement dynamique et thermique des fluides viscoélastiques en écoulement ainsi que la caractérisation de leurs propriétés rhéologiques est essentielle.

Récemment, dans plusieurs applications biomédicales, environnementales et d'ingénieries, tant à l'échelle macro qu'à l'échelle micro, les propriétés rhéologiques complexes des fluides viscoélastiques sont au cœur de nombreuses techniques pour l'amélioration des performances et l'optimisation des divers procédés. À l'instar des séparateurs de particules, dans la domaine de la microfluidique, les différences des contraintes normales et l'effet rhéofluidifiant font partie du mécanisme de migration des particules, initialement en suspension dans un fluide viscoélastique, lors d'un écoulement dans une conduite, Shin et al. [194] et Karimi et al. [113]. Par ailleurs, dans divers opérations conventionnelles et procédés classiques à l'échelle macroscopique, couramment

utilisés dans l'industrie, tels que l'injection, l'extrusion, le soufflage, etc., (voir Chhabra and Richardson [41] et Agassant et al. [6]), la dépendance des fonctions viscométriques du taux de cisaillement revêt une importance cruciale à la fois dans la description de l'interaction écoulement/-procédé, la modélisation et le dimensionnement des équipements, l'optimisation des conditions de fonctionnement et finalement dans le contrôle de la qualité du produit fini.

En effet, la mise en œuvre des fluides complexes dans ce type de procédé nécessite souvent le transport des fluides dans des réseaux de conduites¹ et leur transition à travers différents organes comme par exemple des pompes et différents systèmes thermiques tel que les échangeurs de chaleur. La modélisation et la conception de ces différents équipements, comme le dimensionnement des conduites et la détermination des puissances des pompes et des échangeurs de chaleur, requièrent la connaissance précise du comportement du fluide viscoélastique mis en œuvre.

Au delà des aspects économiques, les performances d'un échangeur de chaleur en termes de contrôle thermique et de la minimisation de la consommation d'énergie dépendent de son taux de transfert de chaleur et de la chute de pression totale nécessaire à la circulation du fluide. L'amélioration du taux de transfert de chaleur est généralement accompagnée d'une augmentation de la chute de pression entraînant conséquemment un surcoût de la puissance de pompage, Alam and Kim [8]. Raison pour laquelle les procédures de conception et d'optimisation des échangeurs de chaleur nécessitent une analyse détaillée de l'évolution de l'écoulement à la fois d'un point de vue de comportement dynamique et thermique.

La quête d'un taux de transfert de chaleur élevé et d'une chute de pression minimale possible a conduit au développement des diverses méthodes permettant l'amélioration du transfert de chaleur pour un moindre surcoût de la puissance de pompage, Alam and Kim [8]. Principalement, ces méthodes d'amélioration sont classées en trois catégories : méthodes actives, méthodes passives et méthodes mixtes. Les méthodes actives consistent, généralement, à introduire une force externe pour améliorer le transfert de chaleur. Cela peut être réalisé à travers différentes techniques, comme par l'introduction d'une aide mécanique, l'utilisation d'un outil générant des vibrations des parois ou de fluide, ou encore l'utilisation d'un champ magnétique pour perturber l'écoulement de fluide initialement ensemencé de particules chargées. Les méthodes passives, quant à elles, ne nécessitent aucune force externe et sont généralement basées sur l'augmentation de la surface de contact et la réduction des quantités du matériau mis en œuvre. L'augmentation du transfert de chaleur par convection est induit par l'incorporation des dispositifs supplémentaires comme l'insertion d'éléments à écoulement tourbillonnant ou l'utilisation de modifications de surfaces (surfaces rugueuses, chicanes). Les éléments insérés créent ainsi des turbulences dans l'écoulement qui favorisent le mélange de fluide et contribuent à l'augmentation du taux de transfert de chaleur convectif, en éliminant la couche limite thermique.

Dans le cadre de méthodes d'améliorations passives, il est également possible d'augmenter le transfert de chaleur à travers l'exploitation des propriétés rhéologiques des fluides complexes sans avoir recours nécessairement des modifications de la géométrie de la conduite. En effet, il est rapporté expérimentalement par Oliver and Karim [159], Hartnett and Kostic [95, 96] et Gao and Hartnett [68], montré d'une façon numérique par Gao and Hartnett [69], Naccache and Mendes [150] et Syrjälä [207] et analytiquement par Siginer and Letelier [203], que comparativement aux fluides purement visqueux ou Newtonien, dans les mêmes conditions d'écoulements², l'écoulement incompressible et laminaire du fluide viscoélastique dans une conduite de section non-circulaire est accompagné d'une augmentation significative de taux de transfert de chaleur convectif et d'une réduction de la chute de pression nécessaire. L'effet de la rhéofluidification ajouté à l'augmentation la capacité de transport transversal de l'écoulement liée à la présence des écoulements secondaires due à l'anisotropie de la seconde différence des contraintes normales,

1. Ces conduites peuvent présenter différentes sections de passage : circulaire, carrée, rectangulaire, elliptique, etc.
2. Avec la même géométrie et le même débit volumique.

sont à l'origine de l'amélioration du taux de transfert de chaleur convectif.

Cependant, malgré l'utilisation répandue dans l'industrie d'écoulements laminaires de fluides viscoélastiques non-affines à travers des sections non-circulaire, hormis le cas de la conduite de section circulaire (Coelho et al. [44]) et le cas des fluides inélastiques (Chandrupatla and Sastri [39] et Syrjälä [208]), le phénomène de transfert de chaleur dans de telles configurations n'a pas fait l'objet de nombreuses investigations.

En effet, le transfert de chaleur avec des fluides viscoélastiques non-affines dans des conduites de section non-circulaire a été déclaré comme un challenge scientifique au début des années 90 par Hartnett [94] et récemment (2010) Siginer and Letelier [203] ont également déclaré que les caractéristiques de transfert de chaleur dans les écoulements laminaires des fluides viscoélastiques non-affines à travers les canaux de section rectangulaires restent encore une question ouverte. Avec des solutions de polymère à l'état aqueux, Oliver and Karim [159] ont observé expérimentalement une amélioration du taux de transfert de chaleur de l'ordre de 40%. Aux travers d'investigations numériques de l'écoulement d'un fluide viscoélastique, décrit par le modèle rhéologique de Reiner-Rivlin, dans une conduite de section rectangulaire, Naccache and Mendes [150] et Gao and Hartnett [69] ont mis en évidence le lien entre l'amélioration de transfert de chaleur et la présence des écoulements secondaires. Avec différentes combinaisons des conditions aux limites thermique, Gao and Hartnett [69] ont quantifié l'effet de l'intensité des écoulements secondaires sur l'augmentation du transfert de chaleur. Naccache and Mendes [150] ont prédit des augmentations du taux de transfert de chaleur convectif de l'ordre de 300% et montré que la présence des écoulements secondaires est le mécanisme dominant de l'amélioration du transfert de chaleur, deux fois plus important que l'effet rhéofluidifiant.

Avec le modèle rhéologique de Criminale-Ericksen-Filbey (CEF), Syrjälä [207] ont montré l'effet des écoulements secondaires sur le transfert thermique pour différents rapport d'aspect d'une conduite de section rectangulaire. Cependant, au regard de la direction des écoulements secondaires prédit par le modèle de Reiner-Rivlin et certains modèles dérivés du modèle CEF, les résultats sont non-conforme à l'observation expérimental³. Ce type de modèles rhéologiques est devenu obsolète dans le cadre de fluides polymériques, Yue et al. [239]. Le modèle de Giesekus et le modèle Phan-Thien Tanner sont plus réalistes que les modèles Reiner-Rivlin et CEF (voir Bird and Wiest [30] et [200]).

En utilisant une résolution analytique basé sur une méthode asymptotique avec des valeurs faibles du nombre de Wiessenberg, Siginer and Letelier [203] et Siginer and Letelier [204] ont étudié cette amélioration de taux de transfert de chaleur en fonction des différentes section de passage (circulaire, carrée, rectangulaire et triangulaire) dans le cadre d'un fluide polymérique enchevêtré dépourvue de la viscosité de base (viscosité du solvant), décrit rhéologiquement par le modèle MPTT (modified Phan-Thien Tanner). Les résultats présentés sont donnés pour le fluide (MPTT) faiblement élastique (le nombre de Wiessenberg est faible, pratiquement $We \leq 0.4$). Les auteurs ont montré que la valeurs du nombre de Wiessenberg et les paramètres rhéologiques du fluide de MPTT jouent un rôle majeur dans le mécanisme d'amélioration de transfert de chaleur.

En fonction de l'élasticité du fluide, l'évolution du taux de transfert de chaleur prédite par Siginer and Letelier [203] et Siginer and Letelier [204] (avec $Re = \{50, 250\}$, $Pr = 50$) montre d'abord un comportement monotonique aux très faibles valeurs d'élasticité du fluide et ensuite un comportement asymptotique s'établit aux valeurs plus élevées de l'élasticité du fluide.

Jalali et al. [105] ont présenté pour la première fois une étude numérique de l'écoulement tri-dimensionnel d'un fluide viscoélastique décrit rhéologiquement par le modèle de MPTT dans un canal de section carrée où les propriétés thermophysiques et rhéologiques du fluide sont considérés dépendantes de la température.

3. L'analyse des écoulements secondaires est également au cœur de formulation des équations constitutives dans le cadre de la mécanique des fluides non-newtoniennes, Siginer [200].

Une analyse de l'effet des écoulements secondaires et de la dissipation visqueuse est présentée pour une faible élasticité du fluide et une faible force d'inertie (pratiquement pour $We = 0.04$, $Re = 10$ et $Pr = 5$). D'une part, ils ont montré que les paramètres rhéologiques peuvent affecter l'intensité des écoulements secondaires et par conséquent la valeur du taux de transfert convectif. Cependant, en raison des valeurs faibles d'élasticité et de la force d'inertie considérées par les auteurs, une faible amélioration du transfert thermique est enregistrée. D'autres part, l'analyse numérique rapportée montre que le taux de transfert de chaleur diminue avec l'augmentation de la dissipation visqueuse dans le cadre d'une configuration de chauffage par les parois. De plus, ils ont montré que dans le cadre de cette configuration du chauffage le taux de transfert de chaleur augmente d'abord avec l'augmentation de la dissipation visqueuse puis devient sujet à une inversion du signe.

Récemment, en utilisant le package commercial POLYFLOW, Filali et al. [65] ont investigué l'écoulement d'un fluide viscoélastique décrit par le modèle SPTT (simplified Phan-Thien-Tanner) à travers différents section de passage (circulaire, carrée, rectangulaire et triangulaire) et ont montré (avec $Pr \sim 50$) l'effet de la rhéofluidification sur l'augmentation du transfert de chaleur. Au delà du fait que les écoulement secondaires ne sont pas décrits par le modèle SPTT, les écarts non-négligeables entre la solution numérique obtenue et la solution analytique, dans le cadre d'un écoulement dans une conduite de section circulaire, restreignent la validité de l'analyse des résultats uniquement aux faibles valeurs d'élasticité (faibles nombre de Weissenberg).

Encore très récemment, en utilisant le même package commercial (POLYFLOW) Al Melhi et al. [7] ont également étudié l'écoulement d'un fluide viscoélastique décrit par le modèle de Giesekus à travers différents section de passage (circulaire, carrée, rectangulaire et triangulaire). Les effets de la rhéofluidification et de l'anisotropie du fluide de Giesekus dans l'augmentation du transfert de chaleur sont mis en évidence. Cependant, les très faibles valeurs de l'inertie du fluide considérées par les auteurs ($Re = 1$ et $Re = 1.5$ avec $Pr \sim 50$) mettent en défaut la contribution des écoulements secondaires dans l'amélioration du transfert thermique. Raison pour laquelle l'amélioration enregistrée dans le cas d'une conduite de section rectangulaire par Al Melhi et al. [7] est de l'ordre de 50%.

Enfin, hormis quelques investigations analytiques très récente Letelier et al. [132] ($Re = 200$, $Pr = 50$) et Siginer et al. [205] ($Re = 100$, $Pr = \{25, 50\}$) avec le fluide (MPTT) faiblement élastique (le nombre de Weissenberg $We \leq 0.4$), le mécanisme d'augmentation du taux de transfert de chaleur, dans le cadre d'écoulements laminaires de fluides viscoélastiques non-affines dans une conduites de section non-circulaire, en relation avec l'effet de l'inertie du fluide (nombre de Reynolds, écoulements secondaires), l'effet d'une forte élasticité (nombre de Weissenberg élevé), différents paramètres rhéologiques (rapport des viscosités, anisotropie du fluide) et en relation avec l'effet de la génération interne de la chaleur, demeurent encore sans réponse complète.

À propos de la viscoélasticité

L'approche idéaliste de la matière, distinguant deux grandes familles en termes de comportement, les fluides Newtoniens et les solides Hookéniens, est en effet valide uniquement pour les fluides simples constitués de molécules simples (tels que l'eau, le miel, gaz, etc.). Cette approche reste largement insuffisante pour plusieurs matériaux d'origine naturel ou synthétique. Les fluides viscoélastiques manifestent, sous l'action d'une sollicitation, conjointement le comportement d'un solide élastique (contrainte proportionnelle à la déformations) et le comportement d'un fluide visqueux (contrainte proportionnelle au taux de déformation).

En effet, les fluides viscoélastiques possèdent la capacité de s'étirer et peuvent aussi s'écouler. La viscoélasticité est l'une des propriétés les plus importantes des fluides complexes. Les effets visqueux et élastiques sont souvent quantifiés, respectivement, par les nombres sans dimension de Reynolds et de Weissenberg. Cependant, l'association de ces deux effet conduit à l'existence de

la première et de la deuxième différence des contraintes normales, y compris lors d'un cisaillement simple. Dans le cadre des fluides purement visqueux ou Newtonien les différences des contraintes normales sont nulles.

En raison de certains effets absents dans le cas de fluides Newtoniens, les écoulements viscoélastiques sont beaucoup plus complexes que les écoulements des fluides purement visqueux. Concrètement, outre qu'ils soient dotés d'une viscosité dépendante du taux de cisaillement (effet rhéofluidifiant), l'anisotropie des contraintes normales dans le cas des fluides viscoélastiques occasionne des phénomènes qui ne se manifestent pas dans le cas d'un fluide purement Newtonien, tels que : l'effet Weissenberg, le gonflement à la sortie de jet, la présence d'écoulements secondaires au sein d'écoulements dans les conduites de section non-circulaire, etc. Bird et al. [27], Phan-Thien and Mai-Duy [173].

La composition ainsi que la microstructure particulière de ces matériaux viscoélastiques sont à l'origine de leur comportement rhéologique complexe (fluide structuré). En effet, les fluides viscoélastiques polymériques sont constitués d'entités, dites macromolécules, dans un état dispersé ou enchevêtré baignant dans une phase solvant. Le solvant est souvent un fluide dont le comportement rhéologique est Newtonien. Par ailleurs, une macromolécule polymérique se présente comme une chaîne de molécules constituée de la répétition de plusieurs monomères assemblés par des liaisons covalentes et possède une masse moléculaire relativement élevée. À taux de cisaillement nul (au repos), l'ensemble des configurations (conformations) d'une macromolécule polymérique sont équiprobables (forme sphérique). Sous l'application d'un cisaillement, la macromolécule formant une structure hydrodynamique est étirée et orientée selon la direction de cisaillement. L'échelle de temps associée à la dynamique des chaînes macromoléculaires (réorganisation moléculaire) correspond au temps de relaxation du fluide (sa version adimensionnel peut être représenté par le nombre de Weissenberg).

En effet, les forces d'interaction d'une macromolécule avec la phase continue (solvant) et avec les autres macromolécules, exprimant la résistance d'une macromolécule au changement de forme (changement de configuration ou de conformation) tout en subissant l'écoulement, sont à l'origine du caractère élastique du fluide à l'échelle macroscopique. Les fluides viscoélastiques sont mis en œuvre dans de nombreux domaines industriels tels que le biomédical, la biochimie, la pétrochimie, le bâtiment (peintures) etc. Parmi les fluides polymères les plus connus on identifie les polymères naturels (ou organiques) issus de processus biologiques comme les acides nucléiques (ADN), protéines (polymères d'acides aminés), glucides complexes (amidon), fibres de cellulose (papier), et on trouve les polymères synthétiques préparés à l'aide de réactions chimiques comme les matières plastiques (polyéthylène PE, polypropylène PP, polyesters), les caoutchoucs artificiels, les émulsion (peintures, colles) et les résines.

Le tenseur des extra-contraintes dans un fluide viscoélastique en écoulement est composé d'une contribution due à la réponse du solvant et d'une contribution polymérique due aux chaînes macromoléculaires polymériques, Bird et al. [23]. La contrainte du solvant est donnée par la relation Newtonienne, ainsi $\sigma_s = 2\mu_s \mathbf{D}$ où $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ est le tenseur des taux de déformation et μ_s représente la viscosité du solvant à taux de cisaillement nul. L'extra-contrainte polymérique quant à elle est décrite par une équation constitutive (modèle rhéologique) plus ou moins fidèle au comportement rhéologique observé lors de l'expérience avec le fluide considéré. Cette équation constitutive est obtenue grâce à la rhéologie qui est une discipline de la mécanique des fluides et qui porte sur l'étude de la réponse d'un matériau complexe sous sollicitation (écoulement). Elle permet entre autre de décrire le comportement d'un matériau en écoulement et de formuler son équation constitutive. Cependant, au regard de la grande diversité des comportements Non-Newtoniens, il n'existe pas d'équation constitutive universelle commune pour l'ensemble des fluides complexes. En effet, il existe de nombreux modèles rhéologiques issus de différentes approches.

Les modèles rhéologiques dérivant des modèles macroscopiques de la mécanique des milieux continus, comme les modèles : UCM, d'Oldroyd–B, Reiner–Rivlin et CEF, ignorent les éléments constitutifs des fluides complexes Bird et al. [23, 27], Huilgol and Phan-Thien [100]. Ce type de modèles est basé sur le principe d'invariance du référentiel de la déformation du milieu continu par rapport à l'observateur. Seule la cinétique du fluide est considérée. Ainsi, les modèles appartenant à cette approche, comme UCM et Oldroyd–B, outre qu'ils prédisent une seconde différences des contraintes normales nulle et souffrent de leur incapacité à décrire l'effet rhéofluidifiant.

Par ailleurs, il est possible d'améliorer la modélisation des écoulements viscoélastiques et pour permettre une description précise du comportement mécanique des fluides polymériques à travers l'intégration de la dynamique de la microstructure du fluide dans l'équation constitutive, Bird et al. [23, 27], Larson [126], Huilgol and Phan-Thien [100], Lin [136].

Cette approche basée sur une description moléculaire du fluide permet de prendre en compte les interactions microscopiques les plus importantes d'une macromolécule polymérique à la fois avec ses voisines et avec la phase continue (solvant). Les modèles rhéologiques issus d'une approche moléculaire décrivent l'évolution de la fonction de distribution de probabilité des configurations d'une macromolécule polymérique, assimilée à un système de billes reliées par un ressort, au cours de l'écoulement.

Plusieurs théories dérivent de cette approche telles que : la théorie du polymère dilué, la théorie du réseau et la théorie de reptation, Bird et al. [23, 27]. À l'aide de moyennes qui sont basées sur certaines hypothèses simplificatrices Bird et al. [27] et Phan-Thien and Mai-Duy [173], le passage de l'échelle d'un modèle mésoscopique à sa version macroscopique devient possible.

Les modèles de Giesekus (Giesekus [77, 78]), le modèle FENE et FEN(CR) (Bird and Wiest [29, 30]) ou encore le modèle de Phan–Thien Tanner (Phan-Thien [172]) sont issus de cette approche. D'autre part, certains modèles rhéologiques issus de la mécanique des milieux continus peuvent aussi trouver une interprétation dans le cadre d'une approche basée sur la théorie moléculaire des polymères.

Dans le présent travail, nous considérons le modèle Oldroyd–B et les modèles non–affines de Giesekus et Phan–Thien Tanner (PTT).

Motivations : méthodes numériques pour les fluides viscoélastiques

Dans les diverses applications des fluides viscoélastiques citées précédemment, en plus du fait que les écoulements sont essentiellement en régime transitoire voire instationnaires, ils ont souvent lieu dans des géométries complexes et sous des taux de déformation élevés, Tanner and Xue [212]. À cette complexité, on peut ajouter l'évolution non–linéaire de la contrainte de cisaillement en fonction des vitesses de déformations (effet rhéofluidifiant).

En somme, ces aspects rendent le système d'équations gouvernant les problèmes d'écoulements des fluides viscoélastiques difficile à résoudre sur le plan analytique, Siginer [199], d'où la nécessité d'une approche numérique.

En effet, il est connu que la modélisation des écoulements de fluides viscoélastiques constitue un challenge tant au niveau théorique qu'au niveau numérique, Keunings [116], Owens and Phillips [165], Siginer [199]. La simulation numérique de problèmes d'écoulements de fluides viscoélastiques avec une élasticité importante (nombre de Weissenberg élevé) est un problème difficile à résoudre numériquement de fait de l'apparition d'oscillations numériques parasites conduisant à la divergence des outils de calcul Joseph [109], Joseph et al. [111], Keunings [116], Sato and Richardson [186], Filali et al. [65].

Concrètement, lorsque le nombre de Weissenberg dépasse certaines limites, les solutions numériques approchées par les différentes méthodes numériques divergent dans le temps. Ce pro-

blème, demeurant dans une certaine mesure encore en débat, est connu sous le nom du problème de haut nombre de Weissenberg (HWNP).

Ces instabilités numériques peuvent avoir plusieurs origines ; comme la nature hyperbolique du système d'équations et l'inadéquation des méthodes numériques appliquées ; l'effet de l'existence de points de singularités ; le traitement inapproprié des conditions aux limites, etc., Baaijens [15], Keunings [116, 117], Owens and Phillips [165, chap.7] et Webster et al. [230].

Par ailleurs, la très grande dimension du système d'équations couplée à résoudre numériquement à également était un obstacle majeur, en termes de ressource informatique nécessaire pour la simulation avec la quasi-majorité des méthodes numériques.

En réponse à l'échec persévérant de nombreux schémas numériques lorsque les effets élastiques deviennent significatifs, depuis plus de trois décennies, la simulation numérique d'écoulements viscoélastiques est devenue un domaine de recherche très actif et incontournable en mécanique des fluides numériques (CFD), Renardy [180], Owens and Phillips [165]. Le développement récent des moyens informatiques a permis le développement de nouvelles approches de discrétisation à la fois dans le cadre de la méthode des différences finies, la méthode des volumes finis ainsi que la méthode des éléments finis visant à surpasser le manque de convergence.

Cependant, la genèse des difficultés numériques dans le cadre de problème de fluides viscoélastiques a été assignée par Joseph and Saut [108], Joseph [109, 110], Joseph et al. [111] à l'utilisation d'approximations numériques inappropriées pour la formulation mathématique du problème, rapportant ainsi l'inexistence de limitations au niveau théorique (analytique).

En effet, la nature hyperbolique des modèles rhéologiques de type différentiels constitue la difficulté majeure dans le traitement numérique du système d'équation gouvernant [180], Owens and Phillips [165]. Une analyse de Fourier est introduite par Joseph et al. [111] afin d'identifier le type d'équation de la partie principale du système d'équations. Les auteurs montrèrent la possibilité du changement du type d'équations (elliptique/hyperbolique) dans l'écoulement de Stokes à l'état stationnaire du fluide d'Oldroyd-B et proposèrent d'appliquer des schémas numériques amont pour approcher le système d'équations gouvernant en régime supercritique (type hyperbolique).

Par suite, Renardy [180] a exclu le changement du type dans le cadre du fluide UCM en régime sous l'effet de l'inertie et a montré que les oscillations parasites observées avec les schémas numériques traditionnels sont dues à des erreurs numériques qui conduisent à un changement artificiel de type (numérique) induisant la perte de la positivité du tenseur de conformation.

Par ailleurs, de nombreuses méthodes de stabilisation ont été développées dans le but d'amortir les oscillations parasites comme la méthode SUPG (*Streamline-Upwind Petrov Galerkin*) appliquée par Marchal and Crochet [143] à un écoulement viscoélastique décrit par le modèle d'Oldroyd-B. Cependant, en absence de terme de diffusion dans l'équation constitutive, ces formulations de type variationnelles rencontrent souvent des difficultés lorsque l'élasticité du fluide devient importante, particulièrement dans le cas du fluide UCM (voir Amoreira and Oliveira [12], Chen et al. [40]).

Pour stabiliser la solution numérique, certaines techniques, comme la formulation EVSS (*Elastic-Viscous Stress Splitting*), consistent à introduire une ellipticité supplémentaire dans l'équation de la quantité de mouvement visant à ramener le problème sous la forme d'un problème de Stokes. Ce concept proposé par Perera and Walters [168] et ensuite étendue aux fluides viscoélastiques par Beris et al. [20], repose sur un changement de variable du tenseur des contraintes polymériques $\Sigma = \tau - 2(1 - \beta)\mathbf{D}$. L'inconvénient majeur de cette formulation réside dans le fait qu'elle requiert l'évaluation de la dérivée convectée supérieure du tenseur taux de déformation⁴. Par ailleurs, la

4. Il s'agit de la dérivée convectée supérieure du tenseur taux de déformation notée $\overset{\nabla}{\mathbf{D}}$.

méthode EVSS a donné lieu à plusieurs variantes telles que la méthode EVSS-G (voir Rajagopalan et al. [179], Brown et al. [36], Liu et al. [137]), la méthode DEVSS (voir [85]). Toutefois, l'introduction du terme supplémentaire rend ces méthodes inappropriées pour décrire fidèlement la solution numérique en régime transitoire.

D'autres méthodes de stabilisations comme la méthode BDS (*Both-Sides Diffusion*), davantage appliquées dans le cadre de la méthode des volumes finis, consistent à ajouter un terme de diffusion artificielle de part et d'autres de l'équation constitutive (voir Xue et al. [235], Mompean and Deville [147], Oliveira and Pinho [156], Oliveira et al. [157], Afonso et al. [5]). L'inconvénient majeur de cette approche est son incapacité à prédire la solution transitoire, seule la solution à l'état stationnaire satisfait les équations de départ, Amoreira and Oliveira [12], Chen et al. [40].

Les premières classifications en terme du type d'équation du système d'équations régissant les problèmes d'écoulements incompressibles associés aux modèles constitutifs d'Oldroyd-B et d'UCM ont été établies par Joseph and Saut [108], Joseph [109, 110], Joseph et al. [111], et récemment par Renardy [180], Owens and Phillips [165], Gerritsma and Phillips [73] où le type mixte (ellipto-parabolo-hyperbolique) du système d'équations gouvernant et la nécessité de prendre en compte le type d'équation lors de la discrétisation sont mis en évidence.

Notons que les méthodes numériques pour les systèmes d'équations du type mixtes ne sont pas bien développées et les difficultés de discrétisations sont particulièrement liées au traitement incorrect des termes de convection. En effet, l'accumulation des erreurs de discrétisation peut occasionner l'altération de la propriété de positivité du tenseur de conformation Hulsen [102], Beris et al. [21, p.277], Renardy [180], bien que le tenseur de conformation est défini positif au niveau continu. La perte de positivité du tenseur de conformation peut conduire à une instabilité numérique rendant le système d'équations non-évolutionnaire.

Dans le contexte de la méthode des différences finies, Phelan et al. [174] ont développé un algorithme numérique bidimensionnel purement hyperbolique pour l'écoulement dépendant du temps et faiblement compressible pour un fluide Giesekus dépourvu de la viscosité du solvant. L'algorithme développé permet en effet de mieux traiter la nature hyperbolique du système d'équations. Des solutions stables et convergentes ont été obtenues pour des nombres de Deborah⁵ $De \leq 4$ dans le cadre du benchmark de la cavité entraînée.

L'approche LCR (*Log-Conformation Representation*) introduite par Fattal and Kupferman [62, 63] permet de conserver explicitement la propriété "défini positif" du tenseur de conformation, y compris au niveau discret. En effet, les auteurs ont rapporté que l'un des aspects des difficultés numériques peut être lié à l'incapacité des schémas numériques, basés sur des approximations polynomiales, à reproduire l'évolution exponentielle des contraintes polymériques, dues aux termes de déformation incluse dans la dérivée convectée supérieure.

L'approche LCR est basée sur un changement de variable qui consiste à reformuler l'équation constitutive en fonction du logarithme du tenseur de conformation (symétrique et défini positif) diagonalisé dans le but d'anticiper le comportement exponentiel du tenseur des contraintes viscoélastiques. Ainsi, des solutions stables et convergentes ont été obtenues pour des nombres Weissenberg ≤ 3 , dans le cadre de l'écoulement dans une contraction 4 : 1. En effet, cette méthode à reçu beaucoup d'intentions ces dernières années et plusieurs variantes ont été proposées, telles que la méthode de factorisation du tenseur de conformation SRCR *square-root-conformation representation* introduite par Balci et al. [17], Afonso et al. [4] et Afonso et al. [5] permettant d'atteindre des nombre Weissenberg davantage plus élevés.

Dans le même esprit, Trebotich et al. [220] ont également mis en évidence la nature hyperbolique régissant l'écoulement incompressible du fluide d'Oldroyd-B et ont réécrit l'équation constitutive sous une forme qui permet de retrouver au niveau discret les limites purement visqueuses

5. Le nombre de Deborah et le nombre de Weissenberg sont similaires

et purement élastiques du tenseur de contrainte viscoélastique. Les termes de convection sont discrétisés en utilisant une méthode de Lax-Wendroff. Des solutions stables et convergentes sont obtenues dans le cadre d'un canal contracté pour des valeurs arbitraires du nombre de Weissenberg avec un nombre de Mach-élastique⁶ ($\text{Ma} < 1$).

Pour donner une extension aux travaux de Trebotich et al. [220], Nonaka et al. [152] ont d'abord proposé de réécrire le système d'équations gouvernant sous une forme quasi-linéaire bien-posée et ensuite ont introduit une formulation conservative du système d'équations. En utilisant une méthode des différences finies, la partie hyperbolique est discrétisée avec une méthode de Godunov de second ordre dans le but de mieux appréhender la propagation des ondes élastiques. Le second ordre de convergence du schéma a été démontré pour les fluides Oldroyd-B dans des géométries complexes bidimensionnelles.

Récemment Tsai and Miller [222] ont adopté la formulation conservative donnée par Nonaka et al. [152] aux écoulements de fluide de Giesekus multimodes, où la partie hyperbolique du système d'équations est traitée avec une méthode de Godunov de deuxième ordre. La stabilité de logarithme a été démontré pour des nombres de Weissenberg important ($\text{We} \approx 200$), pour des problèmes d'écoulements dans des géométries complexes 2D.

Plus récemment, une formulation basée sur une méthode hybride (élément finis/différences finies) utilisant une linéarisation de Newton-Raphson a été proposée par Guaily et al. [84] pour les écoulements compressibles de fluide de Giesekus. Il a été indiqué que le nombre et le type de conditions aux limites aux frontières peuvent être déterminées sans ambiguïtés à l'aide de la méthode des caractéristiques en fonction des variables caractéristiques entrantes-sortantes.

Objectifs de la thèse

Deux principaux objectifs ressortent de ce travail. Nous nous focalisons dans un premier temps sur la classification et l'étude du type de système d'équations gouvernant. L'identification de la partie hyperbolique nous permettra a priori l'application de schémas numériques adéquats et un traitement approprié aux frontières du domaine de calcul. Une partie de ces travaux ont pour objectif le développement et la validation, dans le cadre d'une méthode numérique par différences finies, un outil de calcul précis, stable et convergent pour la simulation de problèmes d'écoulements incompressibles, dépendant de temps et an-isothermes de fluides viscoélastiques. Dans la seconde partie, les objectifs de la thèse sont d'une part la mise en œuvre du code de calcul développé pour l'étude de l'écoulement incompressible et anisotherme d'un fluide viscoélastique non-affine à travers une conduite de section non-circulaire et d'autre part l'analyse de l'effet conjugué de la rhéofluidification et de la seconde différence des contraintes normales, responsable de l'apparition d'écoulements secondaires, sur le comportement dynamique et thermique de l'écoulement en fonction de l'élasticité, de l'inertie, de la dissipation visqueuse et différents paramètres rhéologiques du fluide. Cette analyse paramétrique permettra l'analyse de phénomènes physiques et la compréhension du comportement de ces écoulements. Le but final étant d'apporter une contribution dans la maîtrise des écoulements de fluides fortement non linéaires et de quantifier leur apport dans l'amélioration des transferts thermiques convectifs.

Le manuscrit est organisé de la façon suivante : la première partie du premier chapitre est consacrée à la description des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie régissant les écoulements des fluides incompressibles. Le recensement de l'état des connaissances des modèles rhéologiques dans le cadre des fluides viscoélastiques est donné dans la seconde partie du premier chapitre. Les modèles affines du type UCM, Oldroyd-B et SPTT et non-affines comme le modèle de Giesekus et le modèle de PTT, y sont présentés.

Le deuxième chapitre est consacré à la formulation mathématique du système d'équations,

6. $\text{Ma} = \sqrt{\text{ReWe}}$

aux conditions initiales et aux limites régissant l'écoulement des fluides viscoélastiques. La présentation des méthodes numériques utilisées et la description de l'algorithme développé, permettant une approximation numérique précise de la partie hyperbolique du système d'équations gouvernant et un découplage naturel de pression/vitesse, font l'objet du troisième chapitre.

L'étude de l'évolution des erreurs de discrétisation en fonction des résolutions spatiales et temporelles sont présentées dans le quatrième chapitre, avec notamment l'analyse de quelques benchmarks permettant la validation de notre méthode développée.

Le cinquième chapitre porte sur l'étude dynamique de l'écoulement d'un fluide viscoélastique non-affine à travers une conduite de section carrée. D'abord, avec une faible inertie du fluide (faible nombre de Reynolds $Re = 1$), l'effet de la rhéofluidification du fluide sur l'écoulement principal ainsi que sur les écoulements secondaires est analysé en fonction de l'élasticité du fluide (nombre de Weissenberg). Ensuite, l'analyse des effets de l'inertie et de l'anisotropie du fluide sur l'écoulement principal, l'intensité et la structure des écoulements secondaires est donnée en fonction de l'élasticité du fluide.

Dans le sixième chapitre, sous les conditions aux limites thermiques de flux imposé et de température imposée, nous étudions l'évolution du taux de transfert convectif en fonction de l'effet rhéofluidifiant, de l'inertie du fluide, de l'élasticité du fluide et de la dissipation visqueuse. D'abord, indépendamment de l'inertie et de la dissipation visqueuse, nous analysons l'effet de la rhéofluidification sur l'amélioration du transfert thermique en fonction de l'élasticité du fluide. Ensuite, nous étudions en fonction de l'inertie du fluide l'impact des écoulements secondaires et leurs structures dans l'augmentation du taux de transfert de chaleur convectif (nombre de Nusselt). Par ailleurs, dans le cadre des procédés de chauffage et de refroidissement, l'effet de la dissipation visqueuse en relation avec la rhéofluidification, de l'inertie du fluide et de l'anisotropie du fluide sont étudiés.

Enfin, nous terminons par une conclusion générale et nous donnons des perspectives à court et à long termes des travaux réalisés.

CHAPITRE 1

Lois de conservation et modèles rhéologiques

*« A fluid that's macromolecular
Is really quite weird-in particular
The big normal stresses
The fluid possesses
Give rise to effects quite
spectacular. »*

R. BYRON BIRD

Sommaire

À propos de la viscoélasticité	8
Motivations : méthodes numériques pour les fluides viscoélastiques	10
Objectifs de la thèse.....	13

Première partie : lois de conservation

L'étude de l'évolution d'un système matériel (solide ou fluide) en mécanique des milieux continus s'appuie sur la considération d'une échelle mésoscopique supérieure à l'échelle des composants élémentaires du matériau (atomes, molécules, macromolécules) et inférieure à l'échelle macroscopique. Dans ce cadre, la matière est assimilée à un milieu continu. Pour les fluides, cette échelle mésoscopique permet de définir localement une particule fluide (ou un volume élémentaire d'une manière générale) suffisamment petite pour être comparable à un point et convenablement grande pour pouvoir contenir un très grand nombre de composants élémentaires. Dès lors, l'évolution d'un système matériel fluide peut être décrite, conjointement, par deux types de grandeurs, définies localement, mais qui peuvent connaître des variations à l'échelle macroscopique. Des grandeurs thermodynamiques intensives telles que la masse volumique, la température, la pression, etc., correspondant à des valeurs moyennes des grandeurs moléculaires d'un très grand nombre de composants élémentaires constituant un volume élémentaire, et des grandeurs cinématiques comme la position, la vitesse, l'accélération, le gradient de vitesse, etc. attachées à un volume élémentaire.

Dans ce chapitre, nous passons brièvement en revue, avec détails dans l'annexe A.1, les grandeurs physiques relevant de la mécanique des milieux continus nécessaires pour décrire le mouvement d'un fluide quelconque et les transferts de matières et de chaleur sous-jacent. Nous introduisons également dans l'annexe A.1 les variables cinématiques associées au mouvement et aux déformations d'une particule fluide en un point et à un instant donné. Nous dérivons par suite les équations de conservations de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie régissant l'évolution de l'écoulement laminaire incompressible et anisotherme d'un fluide. Ce chapitre est basé principalement sur les références suivantes : Bird et al. [28, chapitres : 2, 9,10,11], Tanner [210, chapitre 2], Phan-Thien and Mai-Duy [173, chapitre 3], Caltagirone [37, chapitre 2, 3].

1.1 Lois de conservation

La formulation mathématique d'un problème physique en mécanique des milieux continus repose sur les énoncés de la conservation de la masse, du moment linéaire et angulaire, et de l'énergie. L'écoulement d'un fluide viscoélastique est soumis à ces mêmes lois de conservation indépendamment de la nature et du degré de complexité de sa microstructure. Les hypothèses et les développements aboutissant à l'établissement d'un système d'équations régissant l'écoulement instationnaire, incompressible et an-isotherme, d'un fluide sont donnés dans les sections suivantes.

1.1.1 Conservation de la masse

La masse d'un volume fluide V occupant un domaine Ω est donnée par,

$$m = \int_V \rho \, dV \quad (1.1)$$

En l'absence de processus permettant la création ou la destruction de matière, le principe de conservation de la masse traduit la non-variation de la masse du domaine fluide à toute instant,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV = 0. \quad (1.2)$$

En utilisant l'expression de dérivation particulière d'une intégrale d'un volume, donnée par

le théorème de transport de Reynolds (voir l'annexe A.3), l'Éq. (1.2) devient,

$$\int_V \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dV = 0 \quad (1.3)$$

où $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ est le champ de vitesse du fluide et $\frac{D}{Dt}$ est la dérivée particulaire (voir A.1.2). Cette relation est vérifiée quel que soit le volume V , elle se réduit à,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.4)$$

Particulièrement, quand la masse volumique d'une particule fluide est conservée lors de son mouvement (le long de sa trajectoire), l'écoulement est dit incompressible (isovolume),

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (1.5)$$

Dans ce cas, le principe de conservation de la masse se réduit à la condition de conservation de volume (contrainte d'incompressibilité),

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.6)$$

1.1.2 Conservation de la quantité de mouvement

La loi fondamentale de la dynamique exprime, pour un système matériel, l'équilibre entre le torseur des quantités d'accélération et le torseur des forces extérieures agissant sur lui. Les bilans de la quantité de mouvement et du moment cinétique d'un domaine fluide du volume V en mouvement sont donnés respectivement par,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \int_S \mathbf{t} dS + \int_V \rho \mathbf{b} dV \quad (1.7)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{x} \wedge \rho \mathbf{u} dV = \int_S \mathbf{x} \wedge \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{x} \wedge \rho \mathbf{b} dV. \quad (1.8)$$

où $\int_V \rho \mathbf{u} dV$ et $\int_V \mathbf{x} \wedge \rho \mathbf{u} dV$ sont respectivement la quantité du mouvement et le moment cinétique, \mathbf{b} représente la force de volume par unité de masse et \mathbf{t} est le vecteur contrainte (voir annexe A.1.5). Par ailleurs, en utilisant, d'une part, l'expression de la dérivée d'une intégrale de volume (théorème de transport de Reynolds, voir l'annexe A.3), et en utilisant d'autre part l'équation de la conservation de la masse (1.3) et l'Eq. (A.21), il vient,

$$\int_V \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \rho \mathbf{b} dV \quad (1.9)$$

$$\int_V \mathbf{x} \wedge \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \int_S \mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \mathbf{x} \wedge \rho \mathbf{b} dV. \quad (1.10)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy (voir annexe A.1.5).

1.1.2.1 Équation de conservation de la quantité de mouvement

L'équation de conservation de la quantité de mouvement est obtenue en appliquant le théorème de divergence (théorème de Green-Ostrogradsky, voir annexe (A.2)), permettant le passage d'une intégrale de surface à une intégrale de volume,

$$\int_V \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV + \int_V \rho \mathbf{b} dV \quad (1.11)$$

L'intégration sur un volume arbitraire conduit à la forme locale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement,

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \quad (1.12)$$

où $\nabla \mathbf{u}$ est le tenseur gradient de vitesse (donné en annexe A.1.3)

1.1.2.2 Symétrie du tenseur des contraintes

Le produit vectoriel de deux vecteurs, \mathbf{u} et \mathbf{v} , de composantes respectives u_i et v_j , peut s'écrire comme, $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})_i = \varepsilon^{ijk} u_j v_k$ où ε^{ijk} est le symbole d'anti-symétrie. En adoptant cette notation et en utilisant le théorème de la divergence, le premier terme du second membre de l'équation de conservation du moment cinétique (1.10) devient,

$$\int_S \mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \varepsilon^{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l dS = \int_V \frac{\partial}{\partial x_l} (\varepsilon^{ijk} x_j \sigma_{kl}) dV = \int_V (\mathbf{t}^A + \mathbf{x} \wedge \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV \quad (1.13)$$

où \mathbf{t}^A dénote le vecteur $\varepsilon^{ijk} \sigma_{jk}$. L'équation (1.10) se réécrit aussi sous la forme suivante,

$$\int_V \mathbf{t}^A dV = \int_V \mathbf{x} \wedge \left(\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{b} \right) dV \quad (1.14)$$

Cependant, remarquons l'apparition de l'équation de la quantité de mouvement (1.12) dans cette dernière relation, d'où,

$$\int_V \mathbf{t}^A dV = \int_V \varepsilon^{ijk} \sigma_{jk} dV = 0. \quad (1.15)$$

En intégrant sur un volume arbitraire V , pour tout $i = (1, 2, 3)$, il en résulte $\sigma_{jk} - \sigma_{kj} = 0$. Le bilan du moment cinétique implique donc la symétrie du tenseur de contrainte de Cauchy $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$. Dans un repère orthonormé dont les vecteurs unitaires des trois axes sont, $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy, schématisées sur la figure 1.1, sont notées usuellement comme

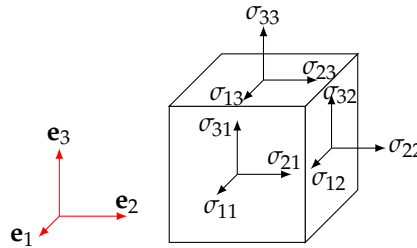


FIGURE 1.1 – Schématisation usuelle des composantes du tenseur des contraintes de Cauchy.

suit,

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

où les composantes $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ sont les contraintes normales et les composantes $\sigma_{12} = \sigma_{21}, \sigma_{13} = \sigma_{31}, \sigma_{23} = \sigma_{32}$ sont les contraintes de cisaillement. Pour un fluide au repos les contraintes tangentielles sont nulles, seul les contraintes normales subsistent, le tenseur des contraintes est isotrope, $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}$ où p est la pression. En revanche, quand le fluide est en écoulement, d'autres forces d'origines diverses (visqueuse, élastique, etc), peuvent s'ajouter aux forces de pression et contribuer aux tenseur des contraintes. En d'autres termes, le tenseur des contraintes de Cauchy peut se décomposer, au préalable, en deux parties : une partie sphérique, isotrope, et une partie déviatorique donnée par un tenseur des extra-contraintes \mathbf{T} ,

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mathbf{T} \quad (1.17)$$

1.1.3 Conservation de l'énergie

Le premier principe de la thermodynamique exprime, pour un système matériel, l'égalité du taux de variation temporelle de l'énergie totale (somme de l'énergie interne massique et de l'énergie cinétique par unité de masse) et de la puissance des forces extérieures, augmentée de la puissance des apports calorifiques (produits par unité de temps et de volume ou reçus à travers sa frontière de surface S). L'équation de conservation de l'énergie s'écrit,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(\varepsilon + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) dV = \int_S \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_V \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} dV + \int_V \varphi dV - \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.18)$$

où ε est l'énergie interne massique, \mathbf{u} désigne le champ de vitesse du milieu continu, \mathbf{b} représente les forces de volume, φ indique la production volumique d'énergie calorifique (due par exemple au rayonnement absorbé à l'intérieur du volume fluide) et \mathbf{q} est le vecteur densité de flux de chaleur reçue au travers de la surface S (par convection, conduction ou rayonnement surfacique). En utilisant le théorème de la divergence et l'expression de la dérivée d'une intégrale de volume (théorème de transport de Reynolds, annexe A.3) et en tenant compte de l'équation de conservation de la masse (1.3), il vient,

$$\int_V \rho \left(\frac{D\varepsilon}{Dt} + \mathbf{u} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right) dV = \int_V \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV + \int_V \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} dV + \int_V \varphi dV - \int_V \nabla \cdot \mathbf{q} dV. \quad (1.19)$$

Le premier terme du second membre de l'équation (1.19) peut se développer comme suit,

$$\int_V \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV = \int_V (\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u}) dV \quad (1.20)$$

et en tenant compte de la symétrie du tenseur des contraintes, on peut remarquer l'apparition de l'équation de la quantité de mouvement (1.11) dans l'équation (1.19). L'intégration sur un volume arbitraire V permet d'obtenir, par ailleurs, la forme locale de l'équation de conservation de l'énergie,

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \varphi \quad (1.21)$$

En introduisant l'enthalpie par unité de masse $h(T, p) = \varepsilon + \frac{p}{\rho}$, l'équation (1.21) devient,

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \varphi + \beta T \frac{Dp}{Dt} \quad (1.22)$$

où $C_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p$ et $\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$ sont respectivement la chaleur spécifique et le coefficient d'expansion thermique à pression constante.

D'autre part, pour le cas de la conduction thermique, le flux de chaleur est relié au gradient de température par la loi de Fourier, $\mathbf{q} = -\boldsymbol{\Lambda} \cdot \nabla T$ où $\boldsymbol{\Lambda}$ est un tenseur du second ordre, appelé tenseur de conductivité thermique. Pour un fluide homogène et isotrope, le tenseur de conductivité thermique est isotrope $\boldsymbol{\Lambda} = k\mathbf{I}$, où $k(T)$ est un scalaire positif représentant la conductivité thermique. Finalement, en absence de toute production volumique d'énergie calorifique et pour un fluide à dilatation nulle ($\beta = 0$) et compte tenu de la contrainte d'incompressibilité $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, l'équation (1.22) se réécrit comme suit, Bird [26, p. 337],

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot k \nabla T + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u} \quad (1.23)$$

et en négligeant le travail des forces de pression, nous obtenons finalement,

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot k \nabla T + \mathbf{T} : \nabla \mathbf{u} \quad (1.24)$$

1.2 Conclusion

Les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie régissant l'écoulement instationnaire, incompressible d'un fluide, d'une façon générale, sont les suivantes,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.25a)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} \quad (1.25b)$$

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot k \nabla T + \mathbf{T} : \nabla \mathbf{u} \quad (1.25c)$$

Deuxième partie : modèles rhéologiques

L'écoulement anisotherme incompressible d'un matériau est décrit par les cinq équations scalaires de conservation établies dans le chapitre précédent : l'équation de conservation de la masse (1.6), les trois équations de conservation de la quantité de mouvement (1.12) et l'équation de conservation de l'énergie (1.24), pour lesquelles onze variables scalaires sont définies (à savoir : les trois composantes de vitesse $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, la pression p , les six composantes indépendantes du tenseur des extra-contraintes $\mathbf{T} = T_{ij}$ et la température T).

Cependant, le nombre d'inconnus ne satisfait pas le nombre d'équations et le système d'équations : (1.6),(1.12) et (1.24) est donc incomplet. Pour compléter cette formulation mathématique, il est nécessaire de joindre à ce système l'équation reliant le tenseur des extra-contraintes aux variables cinématiques de l'écoulement. Cette relation est dite équation constitutive ou loi de comportement et traduit l'état rhéologique du fluide sous forme d'une fonctionnelle du taux de déformation et de ses dérivées et dépend intrinsèquement de l'écoulement et de la microstructure du matériau considéré. Cependant, il n'existe pas d'équation constitutive universelle commune pour l'ensemble des matériaux.

La rhéologie est l'étude des relations entre les contraintes et les déformations de la matière (sous ses divers états : fluide, solide, état réticulé, état plasma, etc). Ses deux principales préoccupations sont, d'une part, le développement d'équations constitutives pour différents matériaux, et d'une autre part, l'interprétation du comportement rhéologique en relation avec la micro-structure moléculaire, la composition, et l'état thermodynamique du milieu (c'est-à-dire, la température et la pression).

Cependant, deux approches peuvent se distinguer lors de l'établissement d'une équation constitutive. La première est basée sur la mécanique des milieux continus et utilise une description macroscopique du matériau. La seconde utilise une description microscopique du matériau et rend compte de la micro-structure particulière de chaque matériau et des interactions moléculaires sous-jacentes. Par ailleurs, pour développer et valider de telles descriptions des mesures expérimentales de la déformation produite suite à l'application d'une force où des mesures expérimentales des contraintes engendrées par une déformation spécifique sont nécessaires.

En terme de comportement rhéologique, on peut distinguer deux grandes catégories. D'un

côté, le comportement Newtonien qui caractérise les fluides simples dépourvus de microstructure complexe. De l'autre côté, le comportement non-Newtonien caractérisant les fluides à microstructure complexe, tels que : les solutions polymériques, le sang, le fluide synovial, les suspensions colloïdales, les émulsions, les peintures, la boue de forage, etc.

La catégorie des fluides non-newtoniens possèdent une grande variété de comportement (viscoélasticité, relaxation, rhéofluidification, rhéoépaississement, etc.). Ils sont essentiellement répartis en deux classes : les fluides inélastiques purement visqueux dont la viscosité peut dépendre du taux de déformation et les fluides viscoélastiques dépendant du temps dotés d'un comportement fortement non linéaire. Par ailleurs, si de simples observations suffisent pour caractériser l'état rhéologique d'un fluide newtonien ou d'un matériau à élasticité linéaire, la caractérisation de l'état rhéologique des fluides non-newtoniens nécessite souvent des données issues de plusieurs types d'expériences.

Dans ce chapitre, nous définissons d'abord dans une première partie les propriétés rhéologiques caractérisant les fluides viscoélastiques polymériques (sect. 1.3), puis nous passons en revue les principes de la modélisation rhéologique et nous présentons les différents modèles rhéologiques associés aux différents comportements non newtoniens (sect. 1.4.1, sect. 1.4 et sect. 1.5) les plus utilisés dans la littérature Bird and Wiest [30]. Dans une seconde partie, un accent est porté sur les modèles dérivant des théories moléculaires des polymères (sect. 1.7), en tentant particulièrement de rendre compte de la signification physique des différents paramètres rhéologiques qui les distinguent, nous exposons succinctement les étapes successives permettant leur obtention. Ce chapitre est basé, principalement, sur les ouvrages suivants : Bird et al. [23], Tanner [210], Larson [126], Truesdell and Noll [221], Phan-Thien and Mai-Duy [173], Irgens [103], Siginer [199], Lin [136], Bird et al. [27], Renardy [180], Bird et al. [28], Dealy and Wang [53], Agassant et al. [6].

1.3 Propriétés rhéologiques des fluides polymérique

Contrairement aux fluides newtoniens (voir sect. 1.4.1) qui requièrent seulement un coefficient de viscosité constant pour décrire leur état rhéologique sous un écoulement, la description complète du champ de contrainte des fluides non-newtoniens, notamment des fluides viscoélastiques, nécessite d'autres quantités matérielles. Il s'agit en effet de la viscosité dépendante du taux de déformation et des différences des contraintes normales dont l'existence est liée au comportement non-linéaire de fluide. Par ailleurs, au même titre que l'évaluation des prédictions des équations constitutives, la caractérisation expérimentale des fonctions matérielles d'un fluide est généralement réalisée au moyen d'écoulements simples permettant la mesure de l'état de contrainte, Bird et al. [28, chap. 8], Phan-Thien and Mai-Duy [173, Chap. 6]. Ce type d'écoulement est dit viscométrique.

Dans la suite, nous présentons l'écoulement de cisaillement simple et l'écoulement élongationnel uni-axial, pour lesquels les fonctions viscométriques du fluide, à savoir la viscosité dépendant du taux de déformation et les deux différences des contraintes normales, sont connues, Bird et al. [27, chap. 3, p. 104]. L'intérêt principal de présenter ce type d'écoulement dans le cadre de ce travail réside, d'une part, dans le fait qu'il permet de connaître les domaines de validation et la détermination des propriétés rhéologiques des différents modèles, et d'autre part, il nous permettra d'établir des comparaisons et des validations sur certains plans de symétrie dans le cas d'écoulement mixte dans des géométries complexes (voir 5), tels les écoulements dans les conduites de section non-circulaire.

1.3.1 Comportement rhéologique des fluides polymériques

L'ensemble des fluides complexes¹ constitués d'objets en suspension dont le comportement mécanique n'obéit pas à la relation Newtonienne (1.33) sont dits Non-Newtoniens. Leur réponse à une sollicitation mécanique, comme nous l'avons précédemment évoquée, est intimement liée à la nature, à la composition et à la concentration des constituants. Ces constituants varient d'un fluide complexe à un autre, d'où la diversité des comportements Non-Newtoniens.

Particulièrement dans le cas des fluides polymériques, les objets en suspension dans un solvant sont des macromolécules composées de longues chaînes de molécules (appelées monomères) liées par des liaisons covalentes. Les fluides polymériques se caractérisent par une masse molaire élevée, généralement comprise entre $10^4 g.mol^{-1}$ et $10^6 g.mol^{-1}$, Bird et al. [23].

Contrairement à leur homologue Newtonien, à conditions de température et de pression constantes, les fluides polymériques se caractérisent par une viscosité décroissante en fonction du taux de déformation. Cette effet émerge des changements qui se produisent au niveau de la structure moléculaire du fluide, Tanner [210]. En effet, lorsqu'un fluide polymérique est au repos, la configuration des macromolécules ne dépend que de l'interaction avec les particules du solvant à travers le mouvement Brownien. Les macromolécules sont contraintes d'adopter une configuration pseudo-sphérique (repliée sur elle-même). D'un point de vue thermodynamique, la configuration à l'état d'équilibre correspond à l'entropie maximale du système macromolécule-solvant. Une fois le fluide soumis à un écoulement, la configuration des macromolécules dépend du rapport de la force d'interaction avec le solvant qui tend à rétablir l'état d'entropie maximale et de la force de l'écoulement qui contribue à orienter et à étirer des macromolécules. Cependant, l'étirement des macromolécules provoque une perte d'entropie et l'interaction avec le solvant s'assimile à une force du rappel (d'où l'élasticité des fluides polymériques). Ainsi, sous l'effet d'un écoulement, les changements au niveau de la microstructure se traduisent essentiellement par l'orientation et l'alignement des objets en suspension dans le sens de l'écoulement. Par ailleurs, l'écoulement impose une disposition des objets face à l'écoulement du solvant qui amoindrit leur résistance à l'écoulement. Par conséquent, l'augmentation du taux de cisaillement favorise la restructuration des objets d'où l'effet décroissant de la viscosité en fonction du taux de cisaillement, Larson [126], Tanner [210]. Plusieurs fluides présentent cette propriété, comme : les solutions de fibres, les émulsions et les suspensions, etc. Par ailleurs, d'autres fluides complexes, tels que les suspensions colloïdales à forte concentration, possèdent une viscosité qui augmente avec l'augmentation des taux de cisaillement. Ce comportement vient des particules en suspension ayant la capacité de former des agglomérats de particules donnant lieu à des forces des frottements qui augmentent sous l'effet d'une sollicitation mécanique, Siginer [200, chap.6].

Bien que l'ensemble des matériaux possèdent un certain degré de compressibilité, les fluides polymériques requièrent des pressions très élevées pour produire un changement significatif de volume, raison pour laquelle les fluides polymériques sont souvent considérés incompressibles, [53]. Quand un fluide incompressible subit seulement des contraintes normales isotropes, son état de déformation reste inchangé. Tandis que, des déformations peuvent se produire lorsque les contraintes de cisaillement existent (comme dans le cas d'un écoulement cisailé) ou quand les différences des contraintes normales sont non-nulles. Du fait de l'incompressibilité, seules les différences des contraintes normales et les contraintes de cisaillement possèdent une importance rhéologique, [27].

Pour les fluides polymérique, les observations expérimentales, Bird et al. [27, chap. 3], Meissner [146], Larson [126], montrent que la viscosité décroît avec l'augmentation du taux de cisaillement et les différences des contraintes normales sont des fonctions quadratiques du taux de ci-

1. Le mot "complexe" vient du latin *complexus*, qui signifie embrasser, comprendre ou ce qui est tissé ensemble, qui a évolué vers le sens de « fait d'éléments différents, imbriqués », c'est-à-dire composé de plusieurs parties qui ne sont pas séparées ou non-isolées.

saillement, Kalogrianitis and van Egmond [112], Debbaut and Dooley [55]. Aux taux de cisaillement suffisamment faibles, les fluides viscoélastiques polymériques se rapprochent du comportement Newtonien. Pour les fluides constitués d'une seule phase et contenant uniquement des composants de faible masse moléculaire, comme les fluides Newtoniens, la contrainte de cisaillement est linéairement proportionnelle au taux de cisaillement et les différences de contrainte normales sont nulles.

1.3.2 Écoulement de cisaillement simple

L'expérience d'un écoulement de cisaillement simple consiste à considérer un fluide entre deux parois parallèles horizontales de surface S , séparées d'une hauteur h , voir la figure 1.2. On

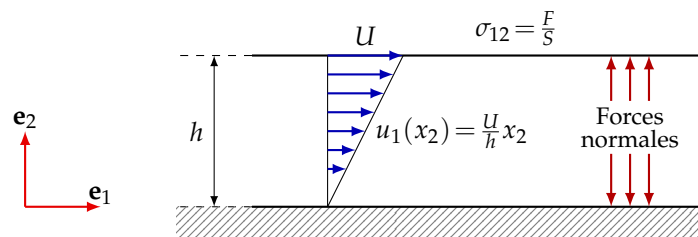


FIGURE 1.2 – Schématisation d'un écoulement de cisaillement simple généré par le mouvement rectiligne relatif d'une paroi horizontale par rapport à une autre.

admet l'hypothèse de non-glissement du fluide avec les parois et on considère que l'écoulement est constamment en régime laminaire. L'écoulement du fluide, supposé incompressible, est généré lorsque l'une des deux parois se voit animée d'une vitesse constante U et l'autre demeure immobile. Par ailleurs, le fluide peut être modélisé par un ensemble de couches infiniment minces, superposées et parallèles aux parois. Par conséquent, lors de la mise en mouvement de la paroi, un transfert de quantité de mouvement s'installe entre celle-ci et la première couche fluide avec laquelle elle se trouve en contact. Ensuite, quand deux couches fluides voisines possèdent deux vitesses différentes, celle dont la vitesse est plus élevée exerce une force d'entraînement sur l'autre. Inversement, une couche fluide dont la vitesse est inférieure à sa voisine impose un ralentissement à la couche la plus rapide. Le mouvement est ainsi communiqué successivement par frottement aux autres couches.

En effet, la force de contact par unité de surface entre deux couches successives désigne la contrainte de cisaillement $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \frac{F}{S}$ où F est la force de cisaillement. Lorsque l'ensemble des couches se déplacent avec la même vitesse, la force de cisaillement est nulle. Toutefois, pour un fluide purement visqueux, une force de cisaillement F appliquée à la paroi mobile est suffisante pour maintenir l'état stationnaire de l'écoulement du fluide. En revanche, dans le cas d'un fluide polymérique, l'état stationnaire requiert, en plus de la force de cisaillement, une force normale afin de maintenir la distance h , séparant les deux parois, constante.

Notons que l'écoulement du fluide se fait suivant la direction x_1 , de moment que la direction x_2 est direction perpendiculaire aux surfaces de cisaillement et correspond à la direction de variation de la vitesse (direction du gradient de vitesse) et x_3 est la direction neutre. Une fois l'état stationnaire de l'écoulement est atteint, la vitesse longitudinale adopte un profil linéaire, $u_1(x_2) = \dot{\gamma}x_2$ donné par la figure 1.2, un gradient de vitesse perpendiculaire aux parois s'établit. Les déformations subies par les particules fluides, dans cette configuration d'écoulement, sont complètement décrites par le gradient de vitesse, désigné par $\dot{\gamma} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$, appelé taux de cisaillement. Cette quantité est uniforme dans le cas d'un écoulement de cisaillement simple. Au niveau de la paroi mobile en $x_2 = h$ on peut déduire $\dot{\gamma} = \frac{U}{h}$, chaque particule fluide subit la même déformation. Par conséquent, à l'état stationnaire la contrainte de cisaillement est aussi uniforme, indépendante de la position. Le champ de vitesse, le champ gradient de vitesse et le tenseur taux de déformation ainsi que le

tenseur des contraintes, associés à l'écoulement de cisaillement simple sont, respectivement, les suivants :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1(x_2, t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ \dot{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

1.3.2.1 Viscosité dépendante du taux de cisaillement

Lors d'un glissement d'une couche fluide sur une autre, des échanges incessants de particules s'opèrent. Ces échanges de particules sont dus d'une part au mouvement Brownien et d'autre part au mouvement d'ensemble de particules appartenant à une même couche fluide. Cependant, quand une particule passe d'une couche fluide à une autre, elle conserve la vitesse de sa couche fluide de départ. Comme cette particule est sujet à des interactions avec les particules de la couche d'arrivée, raison pour laquelle un transfert irréversible de sa quantité de mouvement se produit. Soit elle acquiert de la quantité de mouvement, soit elle cède l'excédent de quantité de mouvement qu'elle possède par rapport aux particules de la couche d'arrivée. De ce point de vue, l'écoulement laminaire et incompressible d'un fluide correspond à un transfert successif de la quantité de mouvement entre couches fluides voisines. La viscosité est le coefficient qui mesure ce transfert ou cette diffusion de la quantité de mouvement. Par ailleurs, l'origine microscopique de la viscosité est l'objet de la théorie moléculaire de la viscosité des liquides, Bird et al. [28, p. 29], Agassant et al. [6, p. 142].

La viscosité décrit la capacité du fluide à l'écoulement. En d'autres termes, elle décrit la résistance du fluide aux déformations continues. La viscosité est la propriété la plus utilisée pour caractériser les fluides polymériques. Les fluides monophasiques, dépourvus de toute microstructure moléculaire complexe et contenant uniquement des composants de faible poids moléculaire (molécule simple), tels que l'eau, les alcools, les huiles, l'air, etc, possèdent une viscosité constante et indépendante du taux de cisaillement.

Toutefois, elle peut naturellement dépendre des conditions thermodynamiques locales du milieu, à savoir la température et la pression, voir Bird et al. [28, p.21]. Les fluides qui présentent ce comportement sont dits Newtoniens. L'état rhéologique de ce type de fluide est donnée par une simple proportionnalité entre le tenseur des contraintes et le tenseur taux de déformation. Le coefficient de proportionnalité représente la viscosité newtonienne, notée η .

À l'inverse, les fluides dotés de microstructures complexes, comme les fluides polymériques, se caractérisent par une viscosité qui ne dépend pas seulement des conditions thermodynamiques, mais elle est également très sensible aux variations du taux de cisaillement, du poids moléculaire du polymère ainsi que de la distribution du poids moléculaire, de la concentration et de la ramification à longues chaîne dans le cas des polymères.

Seule la dépendance de la viscosité avec le taux de cisaillement (ou d'une façon générale avec le taux de déformation) est considéré dans la suite. Les autres dépendances de viscosité sont fournies, par exemple, dans Dealy and Wang [53, chap. 7], Bird et al. [27, chap. 3, p. 104]. Par ailleurs, pour les fluides polymériques, le modèle de viscosité unique n'est pas suffisant. En effet, la relation entre la contrainte de cisaillement et le taux de cisaillement est fortement non-linéaire. Comme la viscosité des fluides polymériques est une fonction dépendante du taux de cisaillement,

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\sigma_{12}}{\dot{\gamma}} \quad (1.26)$$

où σ_{12} représente la contrainte de cisaillement et $\dot{\gamma}$ est le taux de cisaillement. D'un côté, aux très faibles taux de cisaillement, la viscosité se rapproche d'une valeur constante η_0 , appelée viscosité à taux de cisaillement nul. De l'autre côté, l'augmentation du taux de cisaillement provoque une

décroissance monotone de la viscosité des fluides polymériques. Ce type de comportement correspond à la rhéofluidification par cisaillement (voir fig. 1.9). Par ailleurs, aux valeurs très élevées du taux de cisaillement, la viscosité devient indépendante de celui-ci et tend vers une valeur limite η_∞ , dite viscosité à taux de cisaillement infini. Typiquement, pour les solutions de polyéthylène basse densité (LDPE), le rapport $\frac{\eta_\infty}{\eta_0}$ est de l'ordre 10^{-3} à 10^{-4} , (Phan-Thien and Mai-Duy [173, Fig. 2.2, p. 30], Phan-Thien and Mai-Duy [173, Fig. 2.2, p. 30], Bird et al. [27, chap. 3], Meissner [146]).

D'autre part, quand la viscosité augmente avec l'accroissement du taux de cisaillement, le comportement est qualifié de rhéoépaississant. Ce dernier caractérise, à titre d'exemple, certaines suspensions de particules colloïdales, pour lesquels le rhéoépaississement est principalement dû à la formation d'amas de particules.

1.3.2.2 Différences des contraintes normales

L'écoulement de cisaillement simple d'un fluide Newtonien (sans microstructure particulière) agit uniquement sur la contrainte de cisaillement, les contraintes normales demeurent isotropes et égalent au signe près à la pression. À l'inverse, pour divers fluides complexes, aussi bien les fluides polymériques que les suspensions de sphère colloïdales, l'écoulement de cisaillement simple ne modifie pas seulement la contrainte de cisaillement mais il induit également une anisotropie des contraintes normales. Cet effet provient des modifications subies par la microstructure du fluide dû à l'écoulement.

Dans le cas des fluides polymériques, les macromolécules s'éloignent de leur forme moyenne sphérique à l'état d'équilibre. En effet, quand le taux de déformation est relativement important, les chaînes polymériques s'étirent et s'orientent dans la direction de l'écoulement d'où l'émergence d'une tension le long des lignes de courant.

Cette anisotropie des contraintes est évaluée au moyen de deux quantités indépendantes, N_1 la première différence des contraintes normales et N_2 la seconde différence des contraintes normales,

$$N_1 = \sigma_{11} - \sigma_{22} = \Psi_1(\dot{\gamma})\dot{\gamma}^2 \quad (1.27)$$

$$N_2 = \sigma_{22} - \sigma_{33} = \Psi_2(\dot{\gamma})\dot{\gamma}^2 \quad (1.28)$$

La mesure de la première différence des contraintes normales est accessible par exemple à l'aide d'un rhéomètre à rotation, Dealy and Wang [53, chap. 2], Abed et al. [1], Agassant et al. [6, chap. 2]. La seconde différence des contraintes normales demeure relativement difficile à mesurer, Yeow et al. [238], notamment dans le cas des suspensions Khanafer et al. [119], très peu de données expérimentales de la seconde différence des contraintes normales sont rapportées dans la littérature, Mall-Gleissle et al. [142].

Toutefois, les observations montrent que les deux différences de contraintes normales sont des fonctions quadratiques du taux de cisaillement, d'où l'introduction des coefficients des différences de contraintes normales, respectivement, $\Psi_1(\dot{\gamma})$ et $\Psi_2(\dot{\gamma})$.

D'une manière générale, pour les fluides polymériques les mesures expérimentales montrent une première différence des contraintes normales positive et une seconde différence des contraintes normales négative, Kalogrianitis and van Egmond [112], Debbaut and Dooley [55], dont l'intensité est $\sim \frac{N_1}{10}$, Dealy and Wang [53, chap. 2]. La positivité de la première différence des contraintes normales est due à tension accumulée dans le fluide le long des lignes de courant (suivant la direction x_1) et le signe négatif de la seconde différence des contraintes normales peut se voir comme une tension dans la direction neutre (c'est-à-dire la direction 3).

Pour certains fluides polymériques, l'augmentation du taux de cisaillement peut induire une diminution des contraintes normales d'un facteur 10^7 , Bird et al. [28, chap. 8]. Toutefois, contraire-

ment aux fluides polymériques, les suspensions de particules colloïdales se caractérisent par une seconde différence des contraintes normales positive, Siginer [200, chap. 6], [50].

L'anisotropie des contraintes normales est une caractéristique très importante des fluides polymériques. Elle est à l'origine de l'apparition de plusieurs phénomènes spécifiques aux fluides polymériques², inexistant dans le cas des fluides Newtoniens, Bird et al. [27, chap. 2]. Par exemple, lors d'une rotation continue d'une tige dans un fluide polymérique, l'écoulement généré induit la montée du fluide le long de la tige en rotation, figure 1.3.

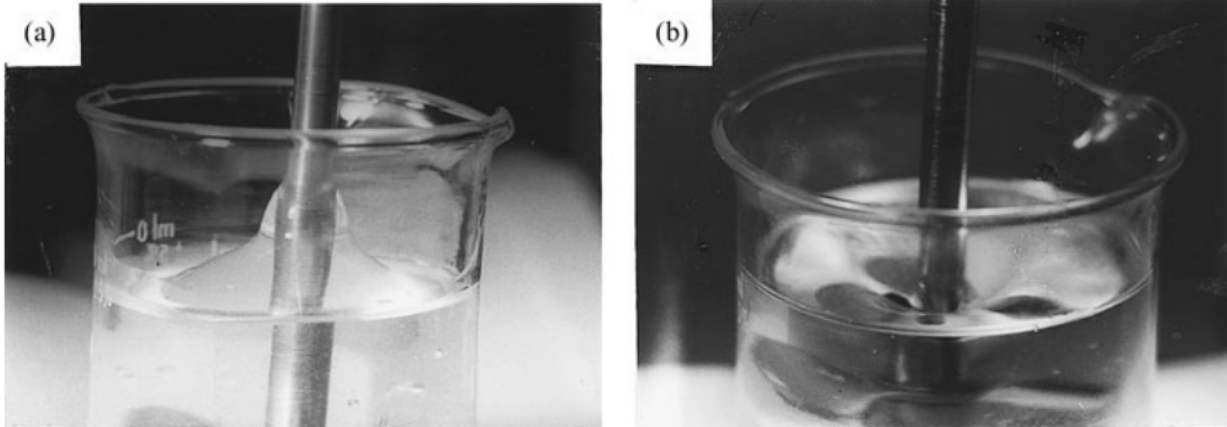


FIGURE 1.3 – Rotation d'une tige dans : (a) un fluide viscoélastique (solution aqueuse 4 % de polyacrylamide); (b) un fluide Newtonien (glycérin), (images tirées de Han [90, chap. 1]).

L'inégalité des contraintes normales est le moteur de ce phénomène, appelé *effet Wiessenberg*. À l'inverse, pour un fluide Newtonien sans aucune anisotropie des contraintes normales, la force centrifuge due à la rotation de la tige tend à écarter le fluide du centre de rotation. On peut citer aussi l'anisotropie des contraintes normales, également responsable du gonflement du jet d'un fluide polymérique à la sortie d'un tube capillaire, figure 1.4.

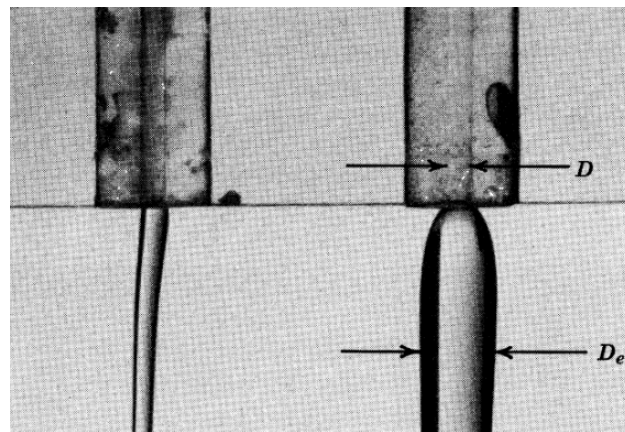


FIGURE 1.4 – Gonflement d'un jet à la sortie d'un tube. À gauche jet Newtonien et à droite jet d'un fluide polymérique. (images tirées de Bird et al. [27, chap.2]).

En effet, quand le fluide est à l'intérieur du tube, les chaînes polymériques sont orientées par l'écoulement et les contraintes normales engendrées sont équilibrées par les parois. Une fois à l'ex-

2. Un film intitulé *Rheological Behavior of Fluids*, présenté par le Prof. Hershel Markovitz, illustre plusieurs phénomènes Non-Newtonien dus à l'existence des différences des contraintes normales, Phan-Thien and Mai-Duy [173]. Ce film est disponible sur le lien suivant : <https://www.web.mit.edu/hml/ncfmf.html>.

térieur, à défaut de la présence des parois, les chaînes polymériques se réorientent et la contrainte longitudinale se relaxe d'où le gonflement du jet (augmentation du diamètre du jet), voir Phan-Thien and Mai-Duy [173, p. 34], Bird et al. [27, p.72]. Ce phénomène est souvent rencontré dans les procédés d'extrusion des polymères fondus, Agassant et al. [6, p.83, p.410]. Le rapport du diamètre du jet gonflé et du diamètre intérieur du tube peut être très supérieur à l'unité. Dans le cas du fluide Newtonien ce rapport ne dépasse pas 1.13, Phan-Thien and Mai-Duy [173, p. 34].

Ces deux phénomènes sont directement liés à la première différence des contraintes normales N_1 . La seconde différence des contraintes normales quant à elle est à l'origine de plusieurs instabilités tels que l'apparition des écoulements secondaires lors du passage d'un fluide polymérique (comme par exemple une solution de 1.5 % polyacrylamide dans un mélange 50/50 d'eau et de glycérine) dans un canal de section non-circulaires, Siginer [200, chap. 3], qui sera l'objet de notre étude numérique 5.

La seconde différence des contraintes normales possède une intensité bien inférieure à la première différence des contraintes normales. Elle est observable uniquement dans les cas où la première différence des contraintes normales, pour des raisons géométriques, n'a pas d'effet. Cependant, la seconde différence des contraintes normales est par exemple également responsable de l'inversion du sens de rotation des écoulements secondaires qui apparaissent quand un disque est mis en rotation au-dessus d'un béccher contenant un fluide polymérique, Bird et al. [27, p.62].

1.3.3 Écoulement élongationnel uni-axial

En mécanique des solides, l'homologue de l'écoulement élongationnel uni-axial correspond à l'essai de traction.

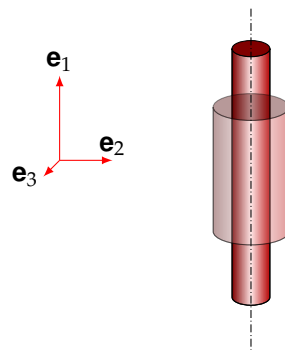


FIGURE 1.5 – Écoulement élongationnel uni-axial d'un élément fluide cylindrique.

Comme le montre la figure 1.5, l'écoulement élongationnel uni-axial d'un échantillon fluide cylindrique est généré suite à l'application d'une force perpendiculaire à la direction de l'écoulement. Le fluide subit une élongation homogène tout le long de son axe de symétrie. On admet que le taux d'élongation du fluide, noté $\dot{\epsilon} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$, est indépendant de la direction de l'écoulement. Par conséquent, dans le cas d'un fluide incompressible, l'équation de conservation de la masse requiert, $\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -\frac{\dot{\epsilon}}{2}$. Notons qu'aucune contrainte de cisaillement n'est induite par l'écoulement, le champ de contrainte se caractérise seulement par l'existence de contraintes normales non nulles. De plus, l'axe de symétrie de l'échantillon fluide implique, $\sigma_{22} = \sigma_{33}$, en d'autres termes, la seconde différence des contraintes normales est nulle.

Le champ de vitesse, le gradient de vitesse et le tenseur des contraintes associés à l'écoulement

d'élongation uni-axial sont respectivement donnés par,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}x_1 \\ -\frac{\dot{\epsilon}}{2}x_2 \\ -\frac{\dot{\epsilon}}{2}x_3 \end{pmatrix}, \quad \nabla\mathbf{u} = 2\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\dot{\epsilon}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\dot{\epsilon}}{2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

Pour un taux d'élongation donné, l'état de contrainte est entièrement défini par la première différence des contraintes normales $\sigma_{11} - \sigma_{22}$, la seconde différence des contraintes normales, comme annoncé précédemment, est nulle.

1.3.3.1 Viscosité élongationnelle

Le rapport de la première différence des contraintes normales et du taux d'élongation $\dot{\epsilon}$,

$$\eta_E(\dot{\epsilon}) = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\dot{\epsilon}} \quad (1.30)$$

représente la viscosité élongationnelle. D'une façon générale, la viscosité d'élongation des fluides polymériques augmente avec l'augmentation du taux d'élongation. Pour les fluides newtoniens la viscosité d'élongation vaut trois fois la viscosité du cisaillement. Par ailleurs, le rapport de ces deux quantités représente le rapport de Trouton $\frac{\eta_E}{\eta}$. Les solutions de polymère possèdent un rapport de Trouton qui peut atteindre plusieurs ordres de grandeur, Phan-Thien and Mai-Duy [173, p.40].

1.4 Viscoélasticité

En fonction du temps caractéristique de l'expérience mécanique qu'ils subissent, l'ensemble des matériaux disposent d'un certain degré de viscoélasticité.

En effet, le comportement d'un matériau est déterminé par le rapport entre le temps caractéristique de l'observation T_e indiquant la durée de la déformation et la constante de temps du matériau T_r correspondant au temps de relaxation.

Ce rapport sans dimension est le nombre de Deborah $\mathbf{De} = \frac{T_r}{T_e}$. Il représente une mesure du degré du comportement élastique d'un fluide durant la phase transitoire d'une expérience d'écoulement. Le temps de relaxation d'un fluide est intrinsèquement lié aux réarrangements qui se produisent au niveau de sa microstructure. Usuellement, le temps de relaxation représente le temps nécessaire aux contraintes pour qu'elles puissent retrouver, une fois la déformation est annulée, leur état d'équilibre.

De plus, le temps de relaxation varie considérablement d'un fluide à un autre, de 10^{-13} secondes pour l'eau, à quelques minutes pour les fluides polymériques et de l'ordre de l'année pour les solides mous, Bird et al. [27].

Par ailleurs, si la durée de la déformation est très inférieure au temps de relaxation du matériau, c'est-à-dire $\mathbf{De} \gg 1$; le temps de relaxation est très lent ($T_r \rightarrow \infty$), dans ce cas aucune relaxation de contrainte n'est observable durant l'expérience à l'échelle de l'observateur. En effet, les constituants d'un matériau ne se sont pas restructurés d'une manière significative et la réponse du fluide à la sollicitation est élastique. De ce fait, aux limites supérieures du nombre de Deborah, quand $\mathbf{De} = \infty$, la réponse du matériau est similaire à celle d'un solide élastique.

Pour le même matériau, si à l'inverse la durée de la déformation est supérieure au temps de relaxation, $\mathbf{De} \ll 1$, le temps de relaxation est alors très court ($T_r \rightarrow 0$) à l'échelle de temps de l'observateur, par conséquent, la relaxation des contraintes est très courte et échappe à l'observation. La réponse du matériau est instantanée et des changements irréversibles au niveau de la structure moléculaire du matériau s'opèrent.

Aux limites inférieures du nombre de Deborah, c'est-à-dire lorsque $De = 0$, la réponse du matériau s'apparente à celle d'un fluide parfaitement visqueux.

D'un point de vue rhéologique, il n'y est pas de différence fondamentale entre un solide et un fluide, ce n'est qu'une question de comparaison du temps de relaxation du matériau et du temps d'observation de l'expérience.

Le matériau est viscoélastique, seulement lorsque le temps de relaxation et le temps d'observation sont du même ordre de grandeur, $De \sim 1$. La viscoélasticité est un comportement non Newtonien qui caractérise un grand nombre de fluides complexes tels que, les fluides biologiques comme le fluide synovial, les solutions polymériques (matières plastiques, LPED et HPED), les suspensions, les gels, etc.

1.4.1 Fluide Newtonien

La contrainte totale de Cauchy (1.17) d'un fluide Newtonien, suivant Caltagirone [37, chap.2], est donnée par,

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{C} : \mathbf{D} \quad (1.31)$$

où \mathbf{D} et le tenseur taux de déformation (donné en annexe A.1.4) et \mathbf{T} est le tenseur d'extra-contraintes visqueuses relié au tenseur taux de déformation par un tenseur matériel du quatrième ordre, noté \mathbf{C} représentant les anisotropies du fluide. Dans le cas d'un fluide homogène et isotrope, ce tenseur se réduit à deux constantes ζ et η appelées respectivement, viscosité dynamique et viscosité de compression. L'équation constitutive gouvernant le comportement visqueux d'un fluide Newtonien est donnée par,

$$\mathbf{T} = 2\eta\mathbf{D} + \left(\frac{2}{3}\eta - \zeta\right)\mathbf{I}(\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (1.32)$$

De plus, pour un écoulement incompressible, nous avons $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ et l'équation (1.32) devient,

$$\mathbf{T} = 2\eta\mathbf{D} \quad (1.33)$$

Cette égalité tensorielle est en effet une généralisation 3-Dimensions des formules de viscosité (1-Dimension), Éq. (1.26) et Éq. (1.30), évoquée dans les sections précédentes dans les cas d'écoulements particuliers de cisaillement simple et d'élongation. La loi Newtonienne postule que la force de viscosité, c'est-à-dire la friction moléculaire, est la seule responsable de l'émergence du tenseur des extra-contraintes. Par ailleurs, en substituant la relation Newtonienne, Eq. (1.33), de l'équation de la quantité de mouvement (1.12), on obtient les équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible d'un fluide Newtonien,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.34a)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{b}. \quad (1.34b)$$

1.4.2 Solide Hookéen

L'élasticité est un type de comportement dans lequel un matériau déformé retrouve sa forme initiale une fois que la contrainte ou la déformation appliquée est supprimée. Le type de comportement élastique le plus simple est celui dans lequel la contrainte requise pour produire une déformation est directement proportionnelle à cette déformation. Pour un solide isotrope et homogène, le tenseur des contraintes est donné par la loi de Hook, Phan-Thien and Mai-Duy [173, p. 67],

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\eta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.35)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$ est le tenseur de déformation, \mathbf{v} est le vecteur de déplacement et les coefficients λ et η sont les coefficients de Lamé qui peuvent s'écrire en fonction du rapport de Poissons ν et du module de Young E , respectivement, comme suit, $\nu = \frac{\lambda}{2\lambda + \nu}$ et $E = \frac{\eta(3\lambda + 2\eta)}{\lambda + \eta}$.

1.4.3 Fluide non-Newtonien inélastique

Suivant Huilgol and Phan-Thien [100], dans le contexte de la viscosité de cisaillement, il est important de distinguer la différence fondamentale entre un comportement newtonien et un comportement non newtonien. Lorsque l'écoulement d'un fluide viscoélastique est dominé par la force de viscosité, le fluide peut être considéré inélastique, c'est-à-dire dépourvu de l'élasticité et de l'effet de mémoire lié à la relaxation des contraintes. Les fluides inélastiques (ou Newtoniens généralisés) sont les fluides pour lesquels le coefficient de viscosité reliant le tenseur des extra-contraintes au tenseur de taux de déformation est une fonction du taux de déformation,

$$\mathbf{T} = 2\eta(\dot{\boldsymbol{\gamma}})\mathbf{D} \quad (1.36)$$

où $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = (2\text{tr}(\mathbf{D}^2))^{1/2}$ est le taux de déformation ou le taux de cisaillement généralisé, qui se réduit à $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ dans le cas d'un écoulement du cisaillement simple. Cependant, différents comportements non-Newtoniens peuvent s'obtenir suivant la dépendance de la viscosité et du taux de déformation. Pour certains fluides inélastiques, le comportement non-Newtonien peut être décrit par une loi de puissance introduite par Ostwald [163],

$$\eta(\dot{\boldsymbol{\gamma}}) = k\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{n-1} \quad (1.37)$$

où k est un paramètre appelé consistance du fluide et n est l'indice de fluidification. Quand $n < 1$ la viscosité diminue avec l'augmentation du taux de déformation, le comportement est rhéofluidifiant (ou pseudoplastique). Pour $n > 1$ la viscosité augmente avec l'augmentation du taux de déformation le comportement est rhéoépaississement (dilatant).

L'inconvénient de la loi d'Oswald (1.37) est qu'elle ne tient pas compte des limites rhéologiques des fluides non-Newtonien, l'équation est uniquement valable dans la zone des valeurs élevées du taux de cisaillement. La viscosité à taux de cisaillement nul n'apparaît pas comme un paramètre. En effet, très souvent ces fluides polymériques se caractérisent par un comportement quasi-linéaire aux faibles et aux larges taux de déformation, le comportement rhéofluidifiant ou rhéoépaississant est situé à l'échelle intermédiaire des taux de déformation.

Le modèle Carreau-Yassuda, [237], tenant compte des limites rhéologiques du fluide, représente une généralisation de la loi de puissance d'Oswald,

$$\eta(\dot{\boldsymbol{\gamma}}) = \eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{(1 + \Gamma^2 \dot{\boldsymbol{\gamma}}^2)^{\frac{1-n}{2}}} \quad (1.38)$$

où Γ est une constante dont la dimension est le temps (cette constante n'a pas de relation avec le temps de relaxation du fluide) et les coefficients η_0 , η_∞ sont, respectivement, la viscosité à taux de cisaillement nul et la viscosité aux très larges taux de déformation. Lorsque $n = 1$ la viscosité est constante et le fluide inélastique (1.36) se réduit au modèle Newtonien (1.33).

D'autres fluides Non-Newtoniens possèdent des forces intérieures, dues aux liaisons intermoléculaires et intramoléculaires, qui les astreignent à adopter le comportement d'un solide au-dessous d'une certaine contrainte seuil. Quand la contrainte du fluide est supérieure à cette contrainte seuil, le fluide acquiert la capacité à l'écoulement. Ce comportement est dit viscoplastique, Huilgol and Phan-Thien [100, chap.4], et peut-être décrit par le modèle de Herschel and Bulkley [99],

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 + 2\eta(\dot{\boldsymbol{\gamma}})\mathbf{D} \quad \text{avec} \quad \eta(\dot{\boldsymbol{\gamma}}) = k\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{n-1} \quad (1.39)$$

où T_0 représente la contrainte seuil et n est l'indice de fluidification.

Lorsque l'indice de la fluidification vaut l'unité, le modèle de Herschel-Bulkley se réduit au modèle de Bingham [22].

1.4.4 Viscoélasticité linéaire

La viscoélasticité linéaire a été introduite dans le cadre de l'hypothèse de petites déformations successivement par Maxwell, Boltzmann et Jeffreys.

Elle repose sur le principe de superposition de Boltzmann stipulant que l'additivité linéaire des sollicitations implique l'additivité homologue des réponses.

La viscoélasticité linéaire est observée quand la déformation à laquelle est soumis un fluide polymérique est suffisamment faible pour que l'état des constituants ou d'enchevêtrement du fluide soient perturbés d'une manière significative par rapport à sa configuration d'équilibre.

Les fluides polymériques à l'état enchevêtré peuvent présenter un comportement linéaire quand la déformation se produit très lentement, c'est-à-dire, leur viscosité durant la phase transitoire de l'écoulement est indépendante du taux de cisaillement, Dealy and Wang [53, fig. 45, p.100].

Les macromolécules polymériques étirées et orientées sous l'effet de la déformation retrouvent progressivement leurs formes de l'état d'équilibre une fois la déformation est annulée. Ce processus de relaxation dû au mouvement Brownien est une caractéristique fondamentale de la viscoélasticité linéaire. La contrainte dans le matériau dépend à tout instant de l'histoire complète des déformations antérieures.

La description de la réponse viscoélastique représentant une coexistence du comportement visqueux et du comportement élastique en chaque point du fluide est donnée suivant une analogie avec le comportement mécanique d'un ressort et d'un amortisseur. L'amortisseur modélise le comportement d'un fluide Newtonien pour lequel lorsqu'une contrainte constante est imposée, la déformation augmente linéairement avec le temps et à l'annulation de la contrainte la déformation demeure permanente. De moment que le ressort modélise le caractère solide Hookéen où la déformation atteint, suite à l'application d'une contrainte, l'état d'équilibre instantanément et quand la contrainte cesse le matériau retrouve instantanément son état initial.

Suivant le mode de l'assemblage du ressort et de l'amortisseur (en série ou en parallèle), une grande variété de modèles viscoélastiques linéaires existent, Agassant et al. [6, chap.2, 75], Siginer [199, Chap.2, p.19] tels que : le modèle de Maxwell, le modèle de Voigt Kelvin, modèle de Burgers et le modèle à 4-éléments, etc. La forme intégrale de chacun de ces modèles permet de décrire le spectre de temps de relaxation du matériau. Cette approche est en effet souvent limitée aux modèles unidimensionnels. Toutefois, elle constitue une base de généralisation de nombreux modèles viscoélastiques non linéaires.

1.4.4.1 Modèle de Maxwell monomode

Le modèle de Maxwell repose sur l'hypothèse d'un unique temps de relaxation où la réponse viscoélastique du fluide est modélisée au travers d'un montage en série d'un ressort et d'un amortisseur visqueux Newtonien, figure 1.6.

Le ressort d'élasticité linéaire obéit à la loi de Hooke (1.35) : $\frac{dT_r}{dt} = G\dot{\gamma}_r$, où G est la constante de raideur du ressort et l'amortisseur de viscosité η est régit par la loi Newtonienne (1.33) : $T_a = \eta\dot{\gamma}_a$. Pour un montage en série, la contrainte est transmise $T_r = T_a = T$ et les déformations s'additionnent, $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_r + \dot{\gamma}_a$, le modèle de Maxwell s'écrit,

$$\lambda \frac{\eta}{G} \frac{\partial T}{\partial t} + T = \eta \dot{\gamma}, \quad (1.40)$$

le rapport $\lambda = \frac{\eta}{G}$ représente le temps de relaxation du fluide viscoélastique. Pour un fluide avec un temps de relaxation nul, le modèle de Maxwell se réduit au modèle Newtonien et quand le temps de relaxation est très lent $\lambda \rightarrow 0$ le modèle se réduit au modèle Hookéen. D'une manière générale,

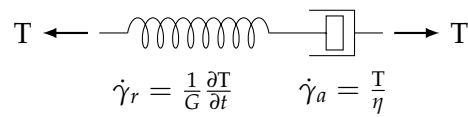


FIGURE 1.6 – Viscoélasticité linéaire : Modèle de Maxwell.

le principe de superposition linéaire des déformations implique que la contribution à la contrainte d'une déformation $d\gamma(t')$ au cours d'une courte période, de t' à $t' + dt'$, est $G(t - t')d\gamma(t')$ et la contribution totale est donnée par,

$$T(t) = \int_{-\infty}^t G(t-t')\dot{\gamma}(t') dt' \quad (1.41)$$

où $G(t - t')$ est le module de relaxation. L'équation rhéologique obtenue est une fonctionnelle de l'histoire de déformation du fluide. Le comportement du fluide Newtonien peut se déduire en considérant, $G(t - t') = \eta\delta(t - t')$, où δ est la fonction (l'impulsion) de Dirac. Dans le cas du modèle de Maxwell, la solution de l'Éq. (1.40) permet d'identifier le module de relaxation $G(t - t') = \frac{\eta}{\lambda}e^{-\frac{(t-t')}{\lambda}}$ et la réponse du fluide à une histoire de déformation est donnée par,

$$T(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\eta}{\lambda} e^{-\frac{(t-t')}{\lambda}} \dot{\gamma}(t') dt' \quad (1.42)$$

Plusieurs fluides viscoélastiques (tels que les solutions polymériques diluées) ne peuvent être décrits par le simple modèle de Maxwell. D'autres assemblages ont été alors proposés afin d'améliorer les prédictions du modèle de Maxwell.

À titre d'exemple, un arrangement en parallèle d'un ressort Hookéen et d'un amortisseur Newtonien permet d'obtenir le modèle de Kelvin-Voigt pour lequel les contraintes s'additionnent et les déformations sont égales. Le modèle de Jeffrey, quand à lui, il est basé sur un assemblage en parallèle d'un élément de Maxwell avec un amortisseur de viscosité η_s représentant l'association d'un fluide polymérique et d'un solvant-Newtonien, figure 1.7.

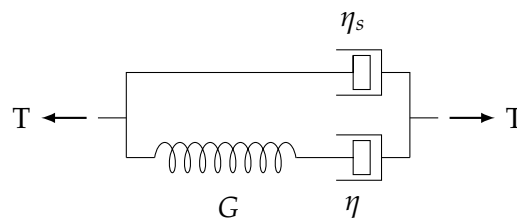


FIGURE 1.7 – Viscoélasticité uni-axiale : modèle de Jeffreys.

Un unique temps de relaxation ne convient général pas pour caractériser la relaxation de la contrainte d'un fluide viscoélastique de large masse moléculaire. La diversité des macromolécules polymériques, en termes de longueur et de forme, procure au fluide plusieurs temps de relaxation (spectre) et différentes viscosités. Une des généralisations du modèle de Maxwell consiste à considérer un nombre fini d'élément de Maxwell assemblée en parallèle où chaque élément est doté d'un temps de relaxation et d'une viscosité. Le modèle de Burgers schématise un fluide viscoélastique à deux éléments de Maxwell, et d'autres modèles basés sur 4 éléments de Maxwell, Siginer [199, p. 19], permettent une meilleure représentation de la relaxation des contraintes.

Les modèles présentés ci-dessous décrivent les effets de la viscoélasticité linéaire. Pour satisfaire le principe d'invariance par changement de repère, leur généralisation en 3D requière l'utilisation de dérivées objectives, que l'on définira un peu plus loin.

1.5 Modèles différentiels quasi-linéaires

Historiquement, les principes de la modélisation des comportements constitutifs dans le cadre des milieux continus ont été énoncés en 1950 par Oldroyd³ [154]. Ensuite, des pionniers tels que Rivlin [181], Rivlin and Ericksen [183], Green and Rivlin [81], Criminale et al. [46], Lodge [140] et Truesdell and Noll [221], ont étendu ces principes pour les matériaux supposés continus et soumis à des grandes déformations, Tanner and Walters [211].

La généralisation sous forme tensorielle des équations constitutives linéaires 1-D est soumise à des principes fondamentaux d'admissibilité. Elles doivent vérifier entre autres, suivant Phan-Thien and Mai-Duy [173, chap.4, p.73], Truesdell and Noll [221] :

1) le principe de déterminisme énonçant que l'état de contrainte actuel d'un matériau est déterminé par l'histoire antérieure de la déformation. L'état cinématique futur du matériau ne peut pas avoir d'influence sur l'état de contrainte actuel.

2) le principe de l'action locale postulant que l'état de contrainte en un point dans le matériau ne dépend que des conditions cinématiques dans une petite région autour de ce point. Ce principe concorde avec l'exclusion des forces du volume. Toutefois, il existe un grand nombre de problèmes relevant de la mécanique des milieux continus (tels que : les ferrofluides, la supraconductivité, ...) où les forces d'interactions entre les composants du matériau dominent le comportement du matériau. Ce type de matériaux ne peut pas se soumettre au principe d'action local, Siginer [199, p.12].

3) le principe d'objectivité (indifférence matérielle) présumant que le matériau ne possède aucune inertie à l'échelle microscopique, c'est-à-dire, le milieu est continu. Ce principe stipule que toutes les équations constitutives doivent être objectives et indépendantes de l'observateur (invariantes par changement de référentiel). Cependant, il est connu que certaines grandeurs cinématiques ne sont pas objectives par changement de référentiel.

D'autre part, les équations constitutives issues de cette approche manquent d'une base thermodynamique l'empêchant de décrire des phénomènes viscoélastiques dissipatifs importants tels que la dépendance de l'équation constitutive de la température, la diffusion, etc. Siginer [199].

1.5.1 Principe d'objectivité et dérivées objectives

Le principe d'objectivité contraint les équations constitutives à satisfaire d'une part la condition d'invariance par changement de référentiel et d'autre part la condition d'indépendance de référentiel utilisé. Les lois de comportement doivent faire intervenir uniquement des quantités dites objectives qui doivent être indépendante de tout mouvement rigide de l'observateur (transformation Euclidienne).

Considérons un point matériel P localisée simultanément dans l'espace par deux observateurs distincts \mathcal{O} et \mathcal{O}^* , restrictivement par les vecteurs positions $\mathbf{x}(t)$ et $\mathbf{x}^*(t)$. Ce changement de référentiel est donné par la transformation Euclidienne suivante,

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c} \quad (1.43)$$

3. James Gardner Oldroyd (né le 25 avril 1921 et mort à Liverpool le 22 novembre 1982) était mathématicien britannique, aux universités de Wales et de Liverpool, spécialiste de la mécanique des fluides et plus particulièrement de la rhéologie des fluides non-newtoniens. Il a apporté plusieurs contributions majeures à la formulation de l'équation constitutive, voir Tanner and Walters [211, p.91]. Les fluides d'Oldroyd-A et Oldroyd-B portent son nom.

où $\mathbf{c}(t)$ désigne le mouvement de translation de l'observateur \mathcal{O}^* par rapport à l'observateur \mathcal{O} et $\mathbf{Q}(t) = \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{x}}$ est un tenseur orthogonal représentant les mouvements de rotation de l'observateur \mathcal{O}^* par rapport à l'observateur \mathcal{O} . Ce tenseur vérifié $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$ et $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$.

Suivant Phan-Thien and Mai-Duy [173, chap.4], Huilgol and Phan-Thien [100, p.60], Irgens [103, chap.8], Joseph [110, chap.1] et Liu [138], une quantité physique (scalaire, vectorielle ou tensorielle) est dite objective ou invariante par changement de référentiel seulement si sa transformation est de la forme suivante :

- 1) $a^* = a$, où a représente un grandeur scalaire.
- 2) $\mathbf{a}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}$, avec \mathbf{a} comme grandeur vectorielle.
- 3) $\mathbf{A}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T$, où \mathbf{A} est une grandeur tensorielle.

Cependant, la vitesse, le gradient de vitesse, le tenseur taux de déformation et le tenseur taux de rotation, du point matériel P aperçu par rapport l'observateur \mathcal{O} sont, respectivement, $\mathbf{u}(t) = \frac{D\mathbf{x}}{Dt} = \dot{\mathbf{x}}$, $\nabla \mathbf{u}$, $2\mathbf{D}$ et $2\mathbf{\Omega}$. De même, ces même quantités s'expriment dans le référentiel de l'observateur \mathcal{O}^* comme suit,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^*(t) &= \dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u} + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{x} + \dot{\mathbf{c}} & (1.44) \\ \nabla^* \mathbf{u}^* &= \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} \right)_{1 \leq i, j \leq d} = \left(\sum_{k=1}^d \frac{\partial u_i^*}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_j^*} \right)_{1 \leq i, j \leq d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \nabla \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{Q}^T \\ &= \nabla (\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u} + \dot{\mathbf{c}}) \cdot \mathbf{Q}^T \\ &= \mathbf{Q} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T \end{aligned} \quad (1.45)$$

$$\begin{aligned} 2\mathbf{\Omega}^* &= \nabla^* \mathbf{u}^* - \nabla^* \mathbf{u}^{T*} \\ &= \mathbf{Q} \cdot 2\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{Q}^T + 2\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T \end{aligned} \quad (1.46)$$

$$\begin{aligned} 2\mathbf{D}^* &= \nabla^* \mathbf{u}^* + \nabla^* \mathbf{u}^{T*} \\ &= \mathbf{Q} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \nabla \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T \end{aligned} \quad (1.47)$$

Avec la dérivée du tenseur d'identité, $\frac{D\mathbf{I}}{Dt} = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T = 0$ et avec $\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T = -\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T = -(\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T)^T$, il en résulte que, à l'exception du tenseur taux de déformation, le vecteur vitesse, le gradient de vitesse et le tenseur taux de rotation sont des grandeurs non-objectifs.

D'autres part, certaines lois de comportement font intervenir la dérivée par rapport au temps dans leur formulation. Cette dérivée doit elle aussi satisfaire le principe d'objectivité. Cependant, notons \mathbf{T} le tenseur des contraintes au point P décrit par l'observateur \mathcal{O} . Le principe d'objectivité requiert a priori pour l'observateur \mathcal{O}^* la relation $\mathbf{T}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T$. Par conséquent, la dérivée par rapport au temps du tenseur des contraintes est donnée par,

$$\dot{\mathbf{T}}^* = \frac{D\mathbf{T}^*}{Dt} = \frac{D\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T}{Dt} = \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T \neq \mathbf{Q} \cdot \frac{D\mathbf{T}}{Dt} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (1.48)$$

Il est évident que la dérivée (1.48) n'est pas invariante par changement de référentiel, les termes résiduels, dus à la rotation d'un référentiel par rapport à l'autre, sont à l'origine de cette non-objectivité. Pour construire une dérivée objective Oldroyd [154] a intégré ces termes résiduels dans une nouvelle définition d'une dérivée en temps (voir l'annexe A.4) notée $\overset{\nabla}{\mathbf{T}}$, invariante par changement de référentiel,

$$\left(\overset{\nabla}{\mathbf{T}} \right)^* = \frac{D\mathbf{T}^*}{Dt} - \nabla^* \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{T}^* - \mathbf{T}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* \quad (1.49)$$

$$\begin{aligned}
 \left(\overset{\nabla}{\mathbf{T}}\right)^* &= \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{Q}^\top + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^\top + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^\top \\
 &\quad - (\mathbf{Q} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}^\top + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^\top) \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^\top - \\
 &\quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^\top (\mathbf{Q} \cdot \nabla \mathbf{u}^\top \cdot \mathbf{Q}^\top - \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^\top) \quad (1.50)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\overset{\nabla}{\mathbf{T}}\right)^* &= \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{Q}^\top + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^\top + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^\top \\
 &\quad - \mathbf{Q} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^\top - \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^\top - \\
 &\quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{u}^\top \cdot \mathbf{Q}^\top - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^\top \quad (1.51)
 \end{aligned}$$

Finalement, la dérivée (1.49) est objective,

$$\left(\overset{\nabla}{\mathbf{T}}\right)^* = \mathbf{Q} \left(\frac{D\mathbf{T}}{Dt} - \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) \mathbf{Q}^\top \quad (1.52)$$

Cette dérivée est dite d'Oldroyd ou dérivée convectée supérieure. En effet, les termes résiduels dans le second membre de la dérivée non-objective (1.48) peuvent également être annulés par l'incorporation d'autres termes. L'effet d'une rotation sur un tenseur peut être évalué, par exemple, à travers le tenseur taux de rotation, $\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Omega} + (\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Omega})^\top = \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{T}$. Ce dernier terme s'écrit dans le référentiel de l'observateur \mathcal{O}^* comme suit,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}^* \cdot \boldsymbol{\Omega}^* - \boldsymbol{\Omega}^* \cdot \mathbf{T}^* &= (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^\top) (\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{Q}^\top + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^\top) - (\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{Q}^\top + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^\top) (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^\top) \\
 &= \mathbf{Q} (\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{T}) \mathbf{Q}^\top + (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^\top) \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^\top - \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^\top \\
 &= \mathbf{Q} (\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{T}) \mathbf{Q}^\top - \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^\top - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^\top \quad (1.53)
 \end{aligned}$$

Les deux derniers termes du second membre de cette dernière équation (1.53) sont au signe près identiques aux deux derniers termes qui apparaissent dans la dérivée non-objective (1.48). Par conséquent la dérivée,

$$\left(\overset{\circ}{\mathbf{T}}\right)^* = \frac{D\mathbf{T}^*}{Dt} + \mathbf{T}^* \cdot \boldsymbol{\Omega}^* - \boldsymbol{\Omega}^* \cdot \mathbf{T}^* = \mathbf{Q} \left(\frac{D\mathbf{T}}{Dt} + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{T} \right) \mathbf{Q}^\top \quad (1.54)$$

est objective. Il existe dans la littérature plusieurs dérivées objectives, la dérivée objective de Gordon-Schowalter (voir Gordon and Schowalter [80]) regroupe, en fonction du paramètre $\zeta \in]0, 2[$, toute une famille de dérivées objectives, à savoir :

$$\overset{\square}{\mathbf{T}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{T} - \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{u}^\top + \zeta (\mathbf{D} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}) \quad (1.55)$$

— quand le paramètre $\zeta = 0$, la dérivée de Gordon-Schowalter se réduit à la dérivée convectée supérieure,

$$\overset{\nabla}{\mathbf{T}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{T} - \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{u}^\top \quad (1.56)$$

— lorsque $\zeta = 2$, cette dérivée se réduit à la dérivée convectée inférieure (*lower convected invariant derivative*),

$$\overset{\Delta}{\mathbf{T}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{T} + \nabla \mathbf{u}^\top \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (1.57)$$

— pour $\zeta = 1$, la dérivée de Gordon-Schowalter se réduit à la dérivée corotationnelle,

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{T} \quad (1.58)$$

Finalement, une combinaison de la dérivée convectée supérieure (1.56) et de la dérivée convectée inférieure (1.57) permet d'exprimer la dérivée de Gordon-Schowalter sous la forme suivante,

$$\overset{\square}{\mathbf{T}} = \left(1 - \frac{\zeta}{2}\right) \overset{\nabla}{\mathbf{T}} + \frac{\zeta}{2} \overset{\Delta}{\mathbf{T}} \quad (1.59)$$

1.5.2 Formulations constitutives du type Oldroyd

La généralisation sous forme tridimensionnelle (3D) du modèle de Maxwell (1.40) s'écrit sous la forme suivante,

$$\frac{\eta}{G} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \mathbf{T} = \eta \mathbf{D} \quad (1.60)$$

Cependant, outre que ce modèle ne satisfait pas le principe d'objectivité, il n'est valable que dans le cas des petits gradients de déplacement.

La généralisation d'Oldroyd [154] du modèle de Maxwell (1.40) consiste à remplacer la dérivée $\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}$ par une dérivée objective. Suivant le type de la dérivée objective utilisée, les équations (1.56), (1.57) et (1.58), trois variantes du modèle de Maxwell peuvent se déduire, Larson [126, p.66], Joseph [110, chap.1] :

— Modèle de Maxwell convecté supérieur (UCM),

$$\lambda \overset{\nabla}{\mathbf{T}} + \mathbf{T} = 2\eta \mathbf{D} \quad (1.61a)$$

$$\overset{\nabla}{\mathbf{T}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{T} - \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{u}^T \quad (1.61b)$$

— Modèle de Maxwell convecté inférieur (LCM),

$$\lambda \overset{\Delta}{\mathbf{T}} + \mathbf{T} = 2\eta \mathbf{D} \quad (1.62a)$$

$$\overset{\Delta}{\mathbf{T}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{T} \quad (1.62b)$$

— Modèle de Maxwell corotationnel (COM),

$$\lambda \overset{\circ}{\mathbf{T}} + \mathbf{T} = 2\eta \mathbf{D} \quad (1.63a)$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \frac{1}{2} \left(\overset{\nabla}{\mathbf{T}} + \overset{\Delta}{\mathbf{T}} \right) \quad (1.63b)$$

Les fonctions viscométriques associées aux variantes du modèle de Maxwell sont rapportées dans le tableau 1.1. Pour un écoulement de cisaillement simple 1.3.2, les modèles UCM et LCM prédisent une viscosité du cisaillement indépendante du taux de cisaillement. De plus, le modèle UCM possède une seconde différence de contraintes normales nulles. Le modèle COM, quand à lui, décrit l'effet de la rhéofluidification. D'autre part, pour un écoulement élongationnel 1.3.3, la viscosité élongationnelle donnée par les modèles UCM et LCM diverge lorsque le taux d'élongation devient $\dot{\epsilon} = \frac{1}{2\lambda}$. Le modèle COM présente une viscosité élongationnelle constante équivalente à la viscosité des fluides Newtoniens.

TABLEAU 1.1 – Fonctions viscométriques des différentes variantes du modèle de Maxwell et du modèle Oldroyd-B

modèles	$\eta(\dot{\gamma})$	$\Psi_1(\dot{\gamma})$	$\Psi_2(\dot{\gamma})$	$\eta_e(\dot{\gamma})$
UCM	η	$2\lambda\eta$	0	$\frac{3\eta}{(1-2\dot{\epsilon}\lambda)(1+\dot{\epsilon}\lambda)}$
LCM	η	$2\lambda\eta$	$-2\lambda\eta$	$\frac{3\eta}{(1+2\dot{\epsilon}\lambda)(1-\dot{\epsilon}\lambda)}$
COM	$\frac{\eta}{1+\dot{\gamma}^2\lambda^2}$	$\frac{2\lambda\eta}{1+\dot{\gamma}^2\lambda^2}$	$-\frac{\lambda\eta}{1+\dot{\gamma}^2\lambda^2}$	3η
Oldroyd-B	$\eta_0 = \eta_s + \eta_p$	$2\eta_p\lambda$	0	$\frac{3\eta_0}{(1-2\dot{\epsilon}\lambda)(1+\dot{\epsilon}\lambda)}$

Les trois variantes du modèle de Maxwell (1.61a)–(1.63a) considèrent seulement la contribution polymérique dans le tenseur des contraintes. Le modèle d’Oldroyd–B [154] exprime la partie déviatorique du tenseur des contraintes comme une combinaison linéaire $\mathbf{T} = \boldsymbol{\tau}^p + \boldsymbol{\tau}^s$, d’une contribution polymérique $\boldsymbol{\tau}^p$ donnée par le modèle UCM et d’une contribution Newtonienne du solvant $\boldsymbol{\tau}^s$, donnée par la relation linéaire de la viscosité (1.33),

$$\mathbf{T} = 2\eta_s \mathbf{D} + \boldsymbol{\tau} \quad (1.64a)$$

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} - \frac{\eta_p}{\lambda} 2\mathbf{D} = -\frac{1}{\lambda} \boldsymbol{\tau} \quad (1.64b)$$

Les fonctions matérielles prédites par le modèle Oldroyd–B sont données dans le tableau 1.1. Elles sont équivalentes aux fonctions viscométriques données par le modèle UCM, c’est-à-dire la viscosité est constante et la seconde différence des contraintes normales est nulle. Cependant, malgré son insuffisance à décrire correctement le comportement de la majorité des fluides polymériques, le modèle d’Oldroyd–B demeure très populaire dans la littérature, les solutions polymériques diluées, comme les fluides de Boger [31] (voir Alves et al. [10]) sont qualitativement décrites par ce modèle.

D’autre part, pour améliorer les prédictions du modèle d’Oldroyd–B, en 1958 Oldroyd [155] introduisit un modèle différentiel à 8 constantes généralisant le modèle de Jeffreys,

$$\mathbf{T} + \lambda_1 \overset{\circ}{\mathbf{T}} - \mu_1 (\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}) + \mu_0 (\text{tr}(\mathbf{T})) \mathbf{D} + \nu_1 (\text{tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D})) \mathbf{I} = 2\mu_0 \left(\mathbf{D} + \lambda_2 \overset{\circ}{\mathbf{D}} - 2\mu_2 \mathbf{D}^2 + \nu_2 (\text{tr}(\mathbf{D}^2) \mathbf{I}) \right) \quad (1.65)$$

Ce modèle prédit dans le cas d’un écoulement de cisaillement à la fois une viscosité dépendante de taux de cisaillement et les effets des différences des contraintes normales, données dans Bird et al. [27, chap. 7, p.356].

L’inconvénient majeur du modèle d’Oldroyd à 8 constantes vient des difficultés liées à la détermination expérimentale des 8 constantes, Bird et al. [27, chap. 7, p.352].

1.6 Viscoélasticité Non-linéaire, approche macroscopique

Dans le cadre de l’approche basée sur la mécanique des milieux continus, la théorie de la viscoélasticité non-linéaire introduite par Rivlin [181], Rivlin and Ericksen [183] et ensuite développée successivement par Green and Rivlin [81], Rivlin [182], Coleman and Noll [45] et Truesdell and Noll [221] repose sur le concept du fluide simple pour lequel les contraintes sont données par des fonctions dépendant uniquement du premier gradient spatial de déformation, Truesdell and Noll [221].

Le fluide simple est soumis aux principes d’Oldroyd (énoncés précédemment) dont le principe d’action locale postulant que l’état de contrainte n’est régi que par le gradient de vitesse locale. L’influence des dérivées supérieures de la vitesse sont considérées négligeables.

En d’autres termes, l’échelle caractéristique de la microstructure du fluide est supposée suffisamment petite devant la distance caractéristique sur laquelle l’état de la contrainte subit des variations. En effet, le concept du fluide simple permet de décrire l’histoire de la déformation du fluide par un seul descripteur de la déformation $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$, représentant le tenseur de déformation de Cauchy–Green à droite d’une particule fluide, Siginer [199, chap.2]. Suivant Truesdell and Noll [221], Irgens [103], Siginer [199, chap.2] et Phan-Thien and Mai-Duy [173, chap.4, p.78], pour un fluide simple incompressible, le tenseur des contraintes totales est donné par une fonctionnelle de l’histoire du tenseur de déformation de Cauchy–Green,

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{S} \quad \text{avec} \quad \mathbf{S} = \underset{t'=-\infty}{\overset{t'=t}{\mathfrak{F}}} [\mathbf{C}(\mathbf{x}, t')] \quad (1.66)$$

où la fonctionnelle \mathfrak{F} satisfait le principe d'objectivité,

$$\mathbf{Q} \left(\int_{t'=-\infty}^{t'=t} \mathfrak{F} [\mathbf{C}(\mathbf{x}, t')] \right) \mathbf{Q}^\top = \int_{t'=-\infty}^{t'=t} \mathfrak{F} [\mathbf{Q}(\mathbf{C}(\mathbf{x}, t')) \mathbf{Q}^\top] \quad \forall \mathbf{Q} \quad (1.67)$$

où \mathbf{Q} est un tenseur de rotation orthogonal quelconque. L'équation constitutive proposée par Rivlin et Ericksen [182], pour un fluide isotrope, suppose que le tenseur des contraintes d'un élément fluide à un instant t ne dépend pas seulement de la première dérivée de la mesure de la déformation par rapport au temps (gradient de vitesse), mais aussi il dépend de l'accélération et des dérivées supérieures,

$$\mathbf{S} = \mathbf{f}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_N) \quad (1.68)$$

où \mathbf{A}_N est le tenseur de Rivlin–Ericksen, introduit par Rivlin and Ericksen [183]. Pour un élément fluide en mouvement, le tenseur de Rivlin–Ericksen est défini comme suit,

$$\mathbf{A}_k(t) = \left. \frac{d^k}{dt^k} \mathbf{C}(\mathbf{x}, t, t') \right|_{t'=t} \quad \text{avec } n = 1, 2, \dots \quad (1.69)$$

Le tenseur de Rivlin–Ericksen d'ordre zero ($k=0$) est défini par $\mathbf{A}_0 = \mathbf{I}$. Suivant la définition du tenseur de Cauchy–Green $\mathbf{C} = \mathbf{F}^\top \mathbf{F}$, Éqt. (A.12), nous avons, $\mathbf{F}(t = t', t') = \mathbf{I}$ et avec $\mathbf{C}(t = t', t') = \mathbf{I}$. D'autre part, à partir de (A.19), il vient,

$$\mathbf{A}_1 = \left. \frac{d}{dt} \mathbf{C}(t, t') \right|_{t'=t} = \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top = 2\mathbf{D} \quad (1.70a)$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top \cdot \mathbf{A}_1 \quad (1.70b)$$

La forme générale du tenseur de Rivlin–Ericksen est donnée dans Rivlin and Ericksen [183], dans le cadre de la description Eulérienne, elle est donnée par,

$$\mathbf{A}_{k+1} = \frac{D}{Dt} \mathbf{A}_k + \mathbf{A}_k \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top \cdot \mathbf{A}_k \quad (1.71)$$

Pour un écoulement viscométrique incompressible, Rivlin [182] et Criminale et al. [46], avec $\forall \mathbf{A}_k = 0$ quand $k \geq 0$, la relation (1.68) se réduit au modèle Criminale–Ericksen–Filbey (CEF) représentant un fluide d'ordre deux,

$$\mathbf{S} = \mathbf{f}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) \quad (1.72)$$

avec,

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \eta_0 \mathbf{A}_1 + (\Psi_1 + \Psi_2) \mathbf{A}_1^2 - \frac{1}{2} \Psi_1 \mathbf{A}_2 \quad (1.73)$$

où η_0 est la viscosité, constante indépendante du taux de cisaillement. Les constantes Ψ_1 et Ψ_2 représentent, respectivement, le premier et le second coefficient des différences des contraintes normales. L'inconvénient majeur du modèle de CEF d'ordre deux est son incapacité à décrire le régime transitoire d'un écoulement d'un fluide polymérique, Joseph [109].

1.7 Viscoélasticité Non-linéaire, théories moléculaires des polymères

Les paramètres rhéologiques apparaissant dans les équations constitutives issues de la mécanique des milieux continus sont généralement déterminés par ajustement des prédictions des équations par rapport aux résultats expérimentaux. Ce type d'équations constitutives apporte

peu d'informations sur l'effet des paramètres moléculaires du fluide vis-à-vis de la réponse rhéologique.

Certaines équations constitutives, comme le modèle UCM (1.61a) et le modèle Oldroyd-B [154], peuvent acquérir une interprétation dans le cadre de la théorie moléculaire des polymères. Au moyen de quantités moléculaires, les paramètres rhéologiques variant d'un fluide à un autre, peuvent avoir une interprétation physique. C'est en ce sens que les théories moléculaires permettent l'émergence d'un grand nombre de modèles rhéologiques reliant des phénomènes viscoélastiques (anisotropie des contraintes normales, relaxation de contrainte, dépendance de la viscosité du taux de cisaillement, etc.) à la structure moléculaire des fluides polymériques.

La théorie moléculaire fournit la fonction de distribution (configuration) de la macromolécule. Une fois cette fonction est connue, plusieurs propriétés macroscopiques d'un fluide polymérique peuvent être calculées.

En effet, les effets viscoélastiques caractérisant les fluides polymériques sont dépendants de certains paramètres associés à leurs microstructures.

Particulièrement pour les fluides polymériques, le comportement non-linéaire résultant des déformations et de l'orientation des chaînes polymériques sous l'effet d'un écoulement est fortement lié aux paramètres moléculaires du fluide tels que la masse moléculaire M , la distribution de la masse moléculaire et le degré de ramification à longue chaîne.

De plus, au-dessus d'une certaine masse moléculaire critique M_c , des enchevêtrements de chaînes polymériques apparaissent et dominent la résistance du fluide à l'écoulement, Han [90, chap.4]. Au-dessous de la masse moléculaire critique ($M \leq M_c$), la viscosité à taux de cisaillement nul d'un fluide polymérique augmente linéairement avec la masse moléculaire et lorsque ($M \geq M_c$) la viscosité augmente rapidement $\eta = KM^{3.4}$, Bird et al. [27, fig.3.6-4, p.145] et Han [90, fig.4.1, p.92].

Deux théories moléculaires permettant l'élaboration de relations entre le comportement rhéologique et la structure moléculaire d'un fluide (équations constitutives) se distinguent suivant l'état de la microstructure du fluide. L'interprétation du comportement non-linéaire est basée sur des modèles phénoménologiques décrivant la dynamique de la microstructure au moyen de moyenne statistique appropriée. Des modèles constitutifs macroscopiques peuvent, ainsi, être déduits, Phan-Thien and Mai-Duy [173].

Quand la masse moléculaire du fluide est inférieure à M_c , le fluide peut être décrit par la théorie moléculaire des polymères dilués et lorsque la masse moléculaire est supérieure à M_c , le fluide correspond au polymère à l'état fondu ou une solution de polymère concentrée. Le fluide peut-être décrit dans ce cas soit par la théorie de réseaux, soit par la théorie de reptation :

1) La théorie moléculaire de solution de polymère dilués a été développée premièrement par Rouse Jr [184] et Zimm [241], ensuite par Peterlin [170] et Bird et al. [25]. Les macromolécules polymériques en suspension dans le solvant sont représentées par des billes reliées par des ressorts (ou tiges). Ces macromolécules n'interagissent qu'avec le solvant et les interactions macromolécule-macromolécule polymériques quant à elle ne sont pas considérées. Le modèle d'haltère élastique est la schématisation la plus simple de la macromolécule relevant de théorie des polymères dilués. Plusieurs modèles rhéologiques tels que UCM, Oldroyd-B [154], FENE-P Peterlin [170], FENE-CR Bird et al. [25] et Giesekus [78], tirent leur origine de la notion d'haltère élastique.

2) La théorie des polymères à l'état fondu ou enchevêtré où les interactions macromolécule-macromolécule, dues aux enchevêtrements moléculaires, dominent le comportement des macromolécules et le réarrangement des chaînes polymériques sur des grandes échelles est proscrit. En raison de la grande taille des macromolécules polymériques et de la proximité des macromolécules voisines, il est bien plus facile pour une macromolécule d'effectuer des mouvements longitudinaux que des mouvements transversaux. Dans ce cadre, deux approches se distinguent :

a) La théorie du réseau moléculaire, développée par Lodge [139] et Yamamoto [236] et ensuite par Phan-Thien [172] et Tanner [209], assimile les macromolécules polymériques à un réseau de

chaînes moléculaires liés par des jonctions temporaires, continuellement formées et détruites. Les modèles appartenant à cette approche incluent principalement les modèles de Phan-Thien [172], Tanner [209].

b) Dans la théorie de reptation Doi and Edwards [58], Doi and Edwards [58] et McLeish [144], le mouvement de la macromolécule est supposé confiner dans un tube topologique. Ce tube résulte de la proximité de nombreuses macromolécules environnantes qui limitent fortement les mouvements transversaux de la macromolécule. Cependant, la macromolécule est libre de diffuser le long du tube en effectuant des mouvements de reptation. Les modèles tels que Pom-Pom et eXtended Pom-Pom McLeish and Larson [145] et Verbeeten et al. [224], appartiennent à cette théorie.

Dans les sections suivantes nous présentons les grandes lignes de la théorie de la solution de polymère diluée et de la théorie du réseau de chaînes polymériques. Nous nous intéresserons particulièrement à la dérivation des modèles de Giesekus et de Phan-Thien Tanner qui peuvent être interprétés comme des extensions possibles au modèle Oldroyd-B, [199, chap.2].

1.8 Théories moléculaires des polymères dilués

Une solution polymérique est dite diluée si les macromolécules sont suffisamment éloignées les unes des autres pour que les interactions macromolécule-macromolécule puissent être négligées. Le solvant est alors assimilé à un milieu continu, et on suppose que la concentration du polymère dans le solvant est constante.

Chaîne de Kramers

Grâce aux liaisons Carbone-Carbone, une macromolécule polymérique se caractérise par un grand nombre de degré de liberté interne, figure 1.8–(a). Ces liaisons confère à la macromolécule un grand nombre de configurations distinctes (orientation adoptée par la macromolécule).

Relevant de la théorie des solutions de polymères diluées, la chaîne librement liée, dite chaîne de Kramers, est la schématisation la plus simple de la macromolécule polymérique en suspension dans un solvant homogène. Elle est constituée d'un nombre N de billes, connectées par $N-1$ tiges de longueur a , dite de Kuhn, voir la figure 1.8–(b).

Le nombre N de billes ainsi que la longueur de Kuhn dépendent de la masse moléculaire du polymère, Larson [126, chap. 2].

Les positions des tiges constituant cette chaîne sont des variables aléatoires indépendantes. Conséquemment, le vecteur bout-à-bout \mathbf{q} , joignant les deux extrémités d'une chaîne est aussi une variable aléatoire.

Pour relier l'élasticité de la macromolécule à sa conformation, nous nous intéressons à la configuration de la macromolécule dans un solvant à l'état d'équilibre (sans écoulement). Suivant Phan-Thien and Mai-Duy [173, chap. 7, p.126], Bird et al. [23, chap. 13] et Larson [126, chap. 2], si l'on considère une chaîne librement liée ayant une extrémité à l'origine du repère, la probabilité que l'autre extrémité de cette chaîne se trouve dans l'intervalle \mathbf{q} à $\mathbf{q}+d\mathbf{q}$ est une distribution Gaussienne, donnée dans un espace de dimension $d=3$ par,

$$p_{\text{eq}}(\mathbf{q}) = \left(\frac{3}{2\pi(N-1)a^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(- \frac{3 \mathbf{q}^2}{2(N-1)a^2} \right) \quad (1.74)$$

L'entropie, associée au grand nombre de configurations internes de la chaîne s'accordant avec la condition évoquée, s'exprime par la formule de Boltzmann comme $S = K_b \ln(\Omega)$, où k_b est la constante de Boltzmann et Ω est le nombre de configurations proportionnel à $p_{\text{eq}}(\mathbf{q})$.

Par conséquent, l'énergie libre du système est donnée par, $A(\mathbf{q}) = cst - kT \ln(p_{\text{eq}}(\mathbf{q}))$, où T est la température. Par ailleurs, l'étirement de la chaîne, traduisant l'augmentation de la mesure du

vecteur bout-à-bout, réduit le nombre de configurations possibles (donc une diminution de l'entropie). La variation de l'énergie libre du système, due à cette diminution d'entropie, peut être reliée à la conformation de la chaîne au travers d'une force résistance à l'étirement, donnée par la loi de Hook,

$$dA = \mathbf{F}(\mathbf{q}) \cdot d\mathbf{q} \quad \text{avec} \quad \mathbf{F} = H\mathbf{q} \quad (1.75)$$

où $H = \frac{3k_bT}{(N-1)a^2}$ représente une constante. La macromolécule résiste aux allongements avec une force \mathbf{F} proportionnelle à \mathbf{q} . Cette force s'assimile à une force du rappel d'un ressort Hookéen d'élasticité entropique et de raideur H .

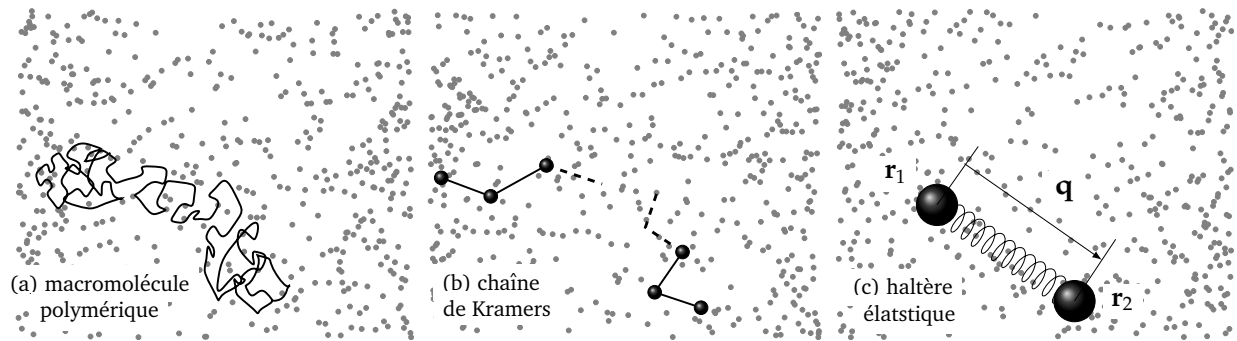


FIGURE 1.8 – Schématisation d'une macromolécule polymérique dans un solvant. (a) macromolécule polymérique, (b) chaîne de Kramers, (c) haltère élastique.

1.8.1 Modèle haltère élastique (*elastic dumbbell*)

Dans le cadre de la théorie des polymères dilués, le modèle haltère élastique (*elastic dumbbell*) est une représentation simplifiée de la chaîne librement liée. La macromolécule polymérique baignant dans un solvant Newtonien est modélisée par un unique ressort hookéen (de masse négligeable) connectant deux billes rigides de masse m , figure 1.8–(c).

Si une collection de ressorts hookéens connectant plusieurs billes sont considérés alors la chaîne librement liée se réduit au modèle de Rouse.

Le ressort modélise l'effet élastique de la macromolécule, de moment que les billes fournissent un cadre permettant de rendre compte des interactions hydrodynamiques entre les macromolécules polymériques et les molécules du solvant (interaction avec le continuum).

La théorie des polymères suppose que les macromolécules sont suffisamment distantes les unes des autres, si bien que les interactions hydrodynamiques macromolécule-macromolécule sont négligeables. Toutefois, cette hypothèse restreint le modèle haltère élastique aux solutions polymériques dont la concentration en polymères est faible.

Bien que les détails de la structure moléculaire du polymère sont négligés, le modèle haltère élastique inclut deux caractéristiques principales des polymères linéaires, à savoir, l'étirement et l'orientation. Ces deux propriétés sont essentielles pour décrire le comportement rhéologique de la solution de polymère.

La conformation de l'haltère élastique, caractérisant la taille moyenne et l'orientation d'une chaîne polymérique, est décrite par le vecteur bout-à-bout $\mathbf{q} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, joignant les deux billes ($i=1,2$) de l'haltère.

Les vecteurs positions des billes, attachés à un référentiel fixe, sont donnés respectivement par \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 .

Lors d'un écoulement, si les forces d'interactions solvant-polymère sont faibles devant les forces de cohésions de la macromolécule, l'haltère élastique est simplement convecté. En revanche, quand les forces dues à l'écoulement dominant le comportement de la macromolécule, la convection des

haltères, reliés à leur centre de gravité (le gradient de vitesse est considéré constant tout le long de l'haltère), sont accompagnées de déformations, c'est-à-dire, modifications de la configuration des haltères (étirement et orientation).

A partir de ces forces on peut déduire les équations de mouvement des billes, ce qui permettra d'obtenir par suite une équation d'évolution de la conformation de l'haltère. Les variations de la vitesse d'une bille dépendent entre autres de l'action de la force du ressort reliant les billes, de la résistance hydrodynamique du solvant et de la force due au mouvement brownien :

La force de rappel élastique : Le ressort hookéen reliant les deux billes de l'haltère exerce, quand il est étiré, une force de rappel élastique \mathbf{F}_i^C sur les deux billes. Comme évoquer précédemment, cette force de rappel, d'origine entropique, est due à la diminution de nombre de configurations accessibles à l'haltère. Elle est décrite par la loi de Hooke donnée par,

$$\mathbf{F}_1^C = -H(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = H\mathbf{q} = -\mathbf{F}_2^C \quad (1.76)$$

avec H la constante de raideur du ressort.

La force du frottement visqueux : Une macromolécule polymérique en mouvement dans un solvant subit de la part de ce dernier une force de frottement visqueux \mathbf{F}_i^F proportionnel, au signe près, à la différence entre la vitesse de la macromolécule et la vitesse du solvant.

Comme le nombre de Reynolds, basé sur la dimension caractéristique de la macromolécule est très faible, le mouvement de la macromolécule est régi par l'équation de Stokes. La force de résistance du solvant visqueux, localisée au niveau des billes de l'haltère, est donnée par,

$$\mathbf{F}_i^F = \zeta \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} - \mathbf{u}(\mathbf{r}_i) \right) \quad (1.77)$$

où ζ est le coefficient de friction visqueuse et $\mathbf{u}(\mathbf{r}_i)$ est la vitesse locale du solvant au voisinage de la position \mathbf{r}_i . Si on néglige les interactions hydrodynamiques polymère-polymère, dans le cas d'une bille sphérique rigide plongée dans un solvant en écoulement laminaire, le coefficient de friction est alors donné par la loi de Stokes, soit $\zeta = 6\pi\eta_s a$ où a est le rayon des billes et η_s la viscosité du solvant. D'autre part, pour les solutions polymériques concentrées les interactions hydrodynamiques polymères-polymères peuvent être décrites à travers le coefficient ζ , où celui-ci est considéré comme un tenseur de second ordre traduisant l'anisotropie de la friction visqueuse et dépendant de la conformation de l'haltère, comme par exemple le modèle de Giesekus qui sera décrit un peu plus loin.

La force du mouvement Brownien : Les macromolécules polymériques sont soumises au mouvement Brownien des molécules du solvant (agitation thermique), sous forme de collisions aléatoires entre les molécules du solvant et les macromolécules, qui entraînent des changements aléatoires de forme et de position des macromolécules.

L'effet cumulatif de ces bombardements aléatoires est représenté par une force aléatoire \mathbf{F}_i^B qui se caractérise par une corrélation en temps très petit par rapport au temps d'observation du mouvement de la bille.

Nous considérons un volume fluide d'une solution polymérique diluée contenant un grand nombre de macromolécule polymérique et nous introduisons la fonction de distribution des haltères élastiques $p(\mathbf{q}, t)$, définie telle que la probabilité que la conformation de l'haltère soit inclus dans l'intervalle \mathbf{q} à $\mathbf{q} + d\mathbf{q}$ est donnée par $p(\mathbf{q}, t)d\mathbf{q}$. Suivant, Bird et al. [23, chap. 18, section 18.3], Phan-Thien and Mai-Duy [173, chap. 7] et Lin [136, chap. 6], la force moyenne exercée sur une bille suite au bombardement du mouvement Brownien peut être reliée à la fonction de distribution de la conformation des haltères. Cette force, dite *smoothed-out brownian force*, est donnée par,

$$\mathbf{F}_i^B = -kT \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \ln(p(\mathbf{q})) \quad (1.78)$$

Notons que les forces extérieures telles que la force de pesanteur et la force électromagnétique peuvent agir sur la conformation de l'haltère, ces forces ne sont pas considérées dans la suite. Ainsi, les équations du mouvement des billes $i = 1, 2$ sont données par l'équation du bilan des trois forces précédentes associées aux forces d'inertie de la bille, $m \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i^F + \mathbf{F}_i^C + \mathbf{F}_i^B$. Comme les billes ont une masse très petite, l'effet de l'accélération peut être négligé, il en résulte pour les billes $i = 1, 2$,

$$-\zeta \left(\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} - \mathbf{u}(\mathbf{r}_1, t) \right) + H\mathbf{q} - kT \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \ln(p(\mathbf{q})) = 0 \quad (1.79a)$$

$$-\zeta \left(\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} - \mathbf{u}(\mathbf{r}_2, t) \right) - H\mathbf{q} - kT \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} \ln(p(\mathbf{q})) = 0 \quad (1.79b)$$

Si l'on suppose que l'écoulement du solvant autour de l'haltère est homogène, alors suivant la définition du tenseur gradient de vitesse, nous avons,

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}_2, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}_1, t) + (\nabla \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \mathbf{u}(\mathbf{r}_1, t) + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{q} \quad (1.80)$$

L'équation d'évolution du vecteur bout à bout \mathbf{q} de l'haltère élastique est obtenue par soustraction de l'équation (1.79a) de l'équation (1.79b),

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{q} - \frac{2H}{\zeta} \mathbf{q} - \frac{2kT}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \ln(p(\mathbf{q})) \quad (1.81)$$

où le premier terme du second membre représente l'effet de convection, le second terme indique la migration due à la force du rappel du ressort Hookéen et le dernier terme représente la diffusion due au bombardement des molécules du solvant du fait du mouvement Brownien.

1.8.2 Équation de Smoluchowsky

La nature stochastique du mouvement Brownien conduit, finalement, à l'équation différentielle stochastique (1.81), pour laquelle le vecteur bout à bout \mathbf{q} est aussi un processus stochastique. Par ailleurs, la conservation du nombre d'haltères (ou de macromolécule) d'un petit élément fluide se traduit aussi, Bird et al. [23, chap. 13, p.61], par la conservation de la fonction de distribution $p(\mathbf{q}, t)$ dans l'espace des configurations, appelée aussi équation de continuité de $p(\mathbf{q}, t)$,

$$\frac{\partial p(\mathbf{q}, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} p(\mathbf{q}, t) = 0 \quad (1.82)$$

En substituant l'équation d'évolution de \mathbf{q} dans l'équation de continuité (1.82), on obtient l'équation de Smoluchowsky (ou l'équation de diffusion),

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{q}, t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \cdot \left[\left(\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{q} - \frac{2H}{\zeta} \mathbf{q} \right) p(\mathbf{q}, t) - \frac{2kT}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} p(\mathbf{q}, t) \right] \quad (1.83)$$

décrivant l'évolution de la fonction de distribution $p(\mathbf{q}, t)$ sous l'effet d'un écoulement.

Toutefois, il n'est pas nécessaire de résoudre l'équation de Smoluchowsky pour déterminer la contribution des haltères élastiques dans le tenseur des contraintes. En effet, la valeur moyenne de toute quantité tensorielle $\mathbf{f}(\mathbf{q}, t)$ du processus aléatoire \mathbf{q} peut être s'écrire comme suit :

$$\langle \mathbf{f}(\mathbf{q}, t) \rangle = \int \mathbf{f}(\mathbf{q}, t) p(\mathbf{q}, t) d\mathbf{q}, \quad (1.84)$$

où le symbole $\langle \rangle$ indique une moyenne sur la fonction de distribution donnant la probabilité des configurations de l'haltère.

Suivant Bird et al. [23, chap. 13] et Kramers [123], en multipliant l'équation de Smoluchowsky (1.83) par la quantité tensorielle $\mathbf{f}(\mathbf{q}, t)$ et en intégrant dans l'espace de configuration \mathbb{R}^3 , on obtient l'équation d'évolution de la moyenne de cette quantité associée au processus stochastique \mathbf{q} ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{f}(\mathbf{q}, t) \rangle = \langle (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{f}(\mathbf{q}) \rangle + \frac{2KT}{\zeta} \langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{f}(\mathbf{q}) \rangle - \frac{2H}{\zeta} \langle \mathbf{q} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{f}(\mathbf{q}) \rangle \quad (1.85)$$

1.8.3 Contributions au tenseur des contraintes

Le tenseur des contraintes totales dans un fluide polymérique est la somme d'une contribution due au solvant σ_s et d'une contribution polymérique σ_p résultant de la présence des macromolécules, Bird et al. [23, chap. 13, p.64], Kramers [123], Lin [136, chap. 6, p. 97], Tanner, Phan Thien,

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_s + \sigma_p = (\mathbf{T}_s - p_s \mathbf{I}) + (\tau - p_p \mathbf{I}) \\ &= -p \mathbf{I} + \mathbf{T}_s + \tau \\ &= -p \mathbf{I} + \mathbf{T} \end{aligned} \quad (1.86)$$

avec $p = p_s + p_p$. À l'état d'équilibre, le tenseur des extra-contraintes totales $\mathbf{T} = (\mathbf{T}_s + \tau)$ est nul et $\sigma = -p \mathbf{I}$.

La contribution du solvant est donnée par la relation Newtonienne $\mathbf{T}_s = 2\eta_N \mathbf{D}$, où η_N représente la viscosité du solvant. La contribution polymérique est déterminée par l'équation d'évolution (1.85).

Lorsqu'un élément fluide est soumis à une déformation, la contribution polymérique en matière de contrainte représente les contributions cumulées de tous les haltères élastiques inclus dans cet élément.

On note n le nombre d'haltère par unité de volume. En l'absence de forces extérieures, la contribution des haltères élastiques au tenseur des contraintes est due à deux principales raisons :

1) Si on considère un plan arbitraire, de normal n et de surface S , qui se déplace dans le fluide avec une vitesse égale à la vitesse locale du solvant. Ce plan peut être intersecté à tout moment par le ressort d'un haltère, la force de rappel du ressort est alors transmise au plan. La force moyenne totale exercée par l'ensemble des haltères coupant le plan s'écrit,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{F} = nS \mathbf{n} \cdot \int \mathbf{q} \mathbf{F}^C p(\mathbf{q}, t) d\mathbf{q} \quad (1.87)$$

avec $\mathbf{n} \cdot \sigma_p^c = \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{F}}{S}$. Cependant, comme les ressorts sont considérés Hookéens (équation (1.75)), la contribution des ressorts dans le tenseur des contraintes est donnée, sous forme d'une moyenne, comme suit,

$$\sigma_p^c = n \int \mathbf{q} \mathbf{F} p(\mathbf{q}, t) d\mathbf{q} = n \langle \mathbf{q} \mathbf{F} \rangle = nH \langle \mathbf{q} \mathbf{q} \rangle \quad (1.88)$$

où la moyenne de la quantité tensorielle $\mathbf{q} \mathbf{q}$ représente le tenseur de conformation,

$$\mathbf{c} = \langle \mathbf{q} \mathbf{q} \rangle \quad (1.89)$$

Pour une macromolécule polymérique, le tenseur de conformation caractérise l'arrangement spatial des atomes constituant. Le tenseur de conformation exprime la position relative d'une bille par rapport à l'autre.

2) La seconde contribution dans le tenseur des contraintes résulte du mouvement des billes transportant une certaine quantité de mouvement et qui peuvent à tout moment traverser le plan arbitraire (défini ci-dessus) et contribuer de la sorte dans le tenseur des contraintes. Pour une distribution Maxwellienne de la vitesse des billes (théorie cinétique des gaz), le mouvement des billes ne contribue qu'aux contraintes normales, cette contribution est isotrope et équivalente à celle d'un fluide au repos, avec n le nombre d'haltère par unité de volume. Cette contribution s'écrit,

$$\sigma_p^b = 2nkT\mathbf{I} \quad (1.90)$$

1.8.4 Dérivation du modèle d'Olroyd-B

La somme des contributions de l'haltère, données par les expressions (1.90) et (1.88), fournit la contribution totale au tenseur des contraintes polymériques, (1.86), on obtient,

$$\sigma_p = \sigma_p^c + \sigma_p^b = -p_p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} = 2nkT\mathbf{I} + nH\mathbf{c} \quad (1.91)$$

En substituant la quantité tensorielle $\mathbf{f}(\mathbf{q}, t)$ par $\mathbf{q}\mathbf{q}$ dans l'équation (1.85), on obtient l'équation d'évolution du tenseur de conformation \mathbf{c} ,

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{c} = \nabla\mathbf{u} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \nabla\mathbf{u}^\top + \frac{4kT}{\zeta}\mathbf{I} - \frac{4H}{\zeta}\mathbf{c}, \quad (1.92)$$

Les deux premiers termes du second membre représentent les déformations dues aux forces hydrodynamiques, le troisième terme est relatif à la force du mouvement brownien et le dernier terme représente la force élastique du ressort. On note, l'apparition de la dérivée convectée supérieure (équation (1.56)), $\overset{\nabla}{\mathbf{c}} = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{c} - \nabla\mathbf{u} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c} \cdot \nabla\mathbf{u}^\top$. Par ailleurs, en l'absence de l'écoulement (à l'état d'équilibre) : le gradient de vitesse, le tenseur extra-contraintes polymériques $\boldsymbol{\tau}$ et le taux de variation $\frac{D\mathbf{c}}{Dt}$ sont nuls, l'équation d'évolution (1.92) est donnée dans ce cas par $\mathbf{c}_{\text{eq}} = \frac{kT}{H}\mathbf{I}$ la contribution des haltères élastiques au terme de pression peut s'identifier en utilisant l'équation (1.91),

$$p_p\mathbf{I} = -2nkT\mathbf{I} - nH\mathbf{c}_{\text{eq}} = -3nkT\mathbf{I} \quad (1.93)$$

On obtient l'expression de Kramers du modèle d'haltère élastique donnant le tenseur d'extra-contraintes total en fonction du tenseur de conformation,

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_S + \boldsymbol{\tau} = 2\eta_S\mathbf{D} + nH\mathbf{c} - nkT\mathbf{I} \quad (1.94a)$$

$$\overset{\nabla}{\mathbf{c}} = \frac{4kT}{\zeta}\mathbf{I} - \frac{4H}{\zeta}\mathbf{c} \quad (1.94b)$$

En utilisant le tenseur de conformation normalisé,

$$\tilde{\mathbf{c}} = \frac{H}{kT}\mathbf{c}, \quad (1.95)$$

vérifiant, $\tilde{\mathbf{c}}_{\text{eq}} = \mathbf{I}$, le modèle d'haltère élastique Hookéen se réécrit,

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_S + \boldsymbol{\tau} = 2\eta_S\mathbf{D} + \frac{\eta_p}{\lambda}(\tilde{\mathbf{c}} - \mathbf{I}) \quad (1.96a)$$

$$\overset{\nabla}{\tilde{\mathbf{c}}} = -\frac{1}{\lambda}(\tilde{\mathbf{c}} - \mathbf{I}) \quad (1.96b)$$

où $\lambda = \frac{\zeta}{4H}$ est une constante représentant le temps de relaxation associé au modèle d'haltère élastique et $\eta_p = nkT\lambda$ est la viscosité polymérique. Par ailleurs, en utilisant la dérivée convectée supérieure du tenseur d'identité,

$$\overset{\nabla}{\mathbf{I}} = -2\mathbf{D}, \quad (1.97)$$

le modèle haltère élastique peut, encore, s'exprimer en fonction du tenseur d'extra-contraintes polymériques $\boldsymbol{\tau}$ comme suit,

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_S + \boldsymbol{\tau} = 2\eta_s\mathbf{D} + \boldsymbol{\tau} \quad (1.98a)$$

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} - \frac{\eta_p}{\lambda}2\mathbf{D} = -\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\tau}. \quad (1.98b)$$

Sous cette forme le modèle haltère élastique est identique au modèle d'Oldroyd-B [154]. Les fonctions matérielles associées à ce dernier sont rapportées dans le tableau 1.1. Toutefois, notons que ce modèle prédit, dans le cas d'un écoulement de cisaillement simple, une viscosité de cisaillement constante et une seconde différence des contraintes normales nulle. Pour un écoulement élongationnel, la viscosité élongationnelle prédite par le modèle d'Oldroyd-B diverge quand $\dot{\epsilon} = (2\lambda)^{-1}$. Ce comportement improbable résulte du fait que le modèle d'haltère Hookéen, (1.75), possède une extension infinie.

Pour améliorer les prédictions du modèle haltère élastique Hookéen (modèle d'Oldroyd-B), diverses approches ont été proposées dans la littérature permettant une extensibilité finie des ressorts élastiques, Bird et al. [23, chap. 13, p.76]. Les modèles FENE-P (Bird et al. [25], Peterlin [170]) et FENE-CR (Chilcott and Rallison [42]) sont des variantes du modèle *finitely extensible nonlinear elastic* FENE, introduit par Warner Jr [228], basé sur le modèle d'haltère élastique non-Hookéen et caractérisé par une force de rappel non-linéaire donnée par,

$$\mathbf{F} = H\mathbf{q} \left(1 - \left\langle \frac{\text{tr}(\mathbf{q}\mathbf{q})}{q_0} \right\rangle^2 \right)^{-1} \quad (1.99)$$

où q_0 la taille maximal qui peut attendre une macromolécule en étirement.

Cette classe de modèles prédit aux larges taux d'élongations une viscosité élongationnelle finie dans le cas d'un écoulement élongationnel. En revanche, pour un écoulement de cisaillement simple, le modèle FENE-P possède une viscosité de cisaillement rhéofluidifiante et le modèle FENE-CR prédit une viscosité constante. D'autres part, les modèles FENE-P et FENE-CR prédisent une première différence des contraintes normales non-nulle et une seconde différence des contraintes normales nulle, Bird and Wiest [30].

Finalement, cette distribution devient non-physique, dans le sens où elle permet des probabilités finis lorsque $\mathbf{q} \geq (N-1)a$. La fonction de Langevin produit une extension nul lorsque $\mathbf{q} \geq (N-1)a$.

1.8.5 Dérivation du modèle de Giesekus

Lors d'un écoulement d'une solution de polymères concentrée, l'interaction hydrodynamique polymère-polymère contraint les chaînes polymériques à se déplacer seulement dans la direction de leurs longueurs latérales. La résistance d'une chaîne aux mouvements perpendiculaires est beaucoup plus élevée que la résistance aux mouvements longitudinaux, Bird et al. [23, chap. 13, p.96]. L'interaction hydrodynamique est l'effet du mouvement d'une macromolécule dans le voisinage d'une autre macromolécule, conduisant à une anisotropie du champ de vitesse. Cet effet n'est pas inclus dans le modèle d'haltère élastique (modèle d'Oldroyd-B). Le modèle

d'haltère élastique suppose que la friction visqueuse subie par les billes d'un haltère lors d'un écoulement est isotrope et le coefficient de frottement dans ce cas se réduit à un scalaire ζ donné par la loi de Stokes. Dans le cadre de la théorie moléculaire des solutions polymériques concentrées, les interactions intramoléculaires résultent conjointement de l'anisotropie de la force du frottement et de l'anisotropie de la force du mouvement Brownien expérimenté par une macromolécule. Ce concept d'anisotropie a été introduit d'abord par Curtiss and Bird [49], ensuite développé par, Bird and DeAguiar [24], Bird and Wiest [29], Giesekus [76, 77, 78], est supposé dépendant de l'orientation de la macromolécule.

Suivant Beris et al. [21, p.252], ce postulat se traduit dans la théorie du modèle haltère élastique Hookéen par la substitution de l'inverse du coefficient de friction, intervenant dans l'équation (1.96b), par un tenseur dit de mobilité anisotropique ζ , dépendant du tenseur de conformation,

$$\overset{\nabla}{\tilde{\mathbf{c}}} = -4H \zeta \cdot (\tilde{\mathbf{c}} - \mathbf{I}) \quad (1.100)$$

À l'état d'équilibre l'isotropie du tenseur des contraintes totales requière $\zeta_{\text{eq}}^{-1} = \frac{1}{\zeta}$ et $\tilde{\mathbf{c}}_{\text{eq}} = \mathbf{I}$. Le modèle de Giesekus [76, 77, 78] est basé sur une relation linéaire entre le tenseur de mobilité anisotropique ζ et le tenseur $(\tilde{\mathbf{c}} - \mathbf{I})$,

$$\zeta^{-1} = \frac{1}{\zeta} (\mathbf{I} + \alpha (\tilde{\mathbf{c}} - \mathbf{I})) \quad (1.101)$$

Le coefficient sans-dimension α , est un paramètre empirique. Il est associé à l'anisotropie de la friction et à l'anisotropie du mouvement brownien subit par la macromolécule polymérique. En termes du tenseur de conformation, le modèle de Giesekus est donnée par,

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_S + \boldsymbol{\tau} = 2\eta_S \mathbf{D} + \frac{\eta_p}{\lambda} (\tilde{\mathbf{c}} - \mathbf{I}) \quad (1.102a)$$

$$\overset{\nabla}{\tilde{\mathbf{c}}} = -\frac{1}{\lambda} ((\tilde{\mathbf{c}} - \mathbf{I}) + \alpha (\tilde{\mathbf{c}} - \mathbf{I})^2) \quad (1.102b)$$

et en termes de tenseur des contraintes polymériques, il s'écrit comme suit,

$$\mathbf{T} = 2\eta_S \mathbf{D} + \boldsymbol{\tau} \quad (1.103a)$$

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} - \frac{\eta_p}{\lambda} 2\mathbf{D} = -\frac{1}{\lambda} \boldsymbol{\tau} - \frac{\alpha}{\eta_p} \boldsymbol{\tau}^2 \quad (1.103b)$$

Le modèle de Giesekus (1.103b) peut être interprété comme un cas particulier du modèle Oldroyd à 8 constantes (1.65) auquel un terme non-linéaire en contrainte est ajouté, Bird et al. [23, p.358]. Par ailleurs, le paramètre empirique d'anisotropie α est obtenu expérimentalement (voir Quinzani et al. [177]).

Par exemple, pour les solutions à 2.5% de polyisobutylène, $\alpha = 0.3$, suivant Schoonen et al. [188]. D'autre part, quand $\alpha = \frac{1}{2}$ le modèle de Giesekus (1.103b) se réduit au modèle de Leonov [130] et lorsque $\alpha = 0$ le modèle de Giesekus se réduit au modèle d'Oldroyd-B (1.98b).

1.8.5.1 Fonctions viscométriques du modèle de Giesekus

Pour un écoulement de cisaillement simple (section 1.3.2), les composantes du tenseur des contraintes polymériques associées au modèle de Giesekus s'écrivent comme suit,

$$\tau_{11} + \frac{\alpha\lambda}{\eta_p}(\tau_{11}^2 + \tau_{12}^2) - 2\lambda\tau_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0 \quad (1.104a)$$

$$\tau_{12} + \frac{\alpha\lambda}{\eta_p}\tau_{12}(\tau_{11} + \tau_{22}) - \lambda\tau_{22}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \eta_p\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad (1.104b)$$

$$\tau_{22} + \frac{\alpha\lambda}{\eta_p}(\tau_{22}^2 + \tau_{12}^2) = 0 \quad (1.104c)$$

$$\tau_{33} + \frac{\alpha\lambda}{\eta_p}\tau_{33}^2 = 0 \quad (1.104d)$$

L'équation (1.104d) admet deux solutions, suivant Renardy [180, p. 26], la solution physique correspond à $\tau_{33} = 0$, de fait qu'elle implique des différences de contraintes normales nulles aux faibles taux de cisaillement $\dot{\gamma} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$. La seconde solution, à savoir $\tau_{33} = -\frac{\eta_p}{\alpha\lambda}$, ne permet pas la nullité des différences de contraintes normales aux faibles taux de cisaillement. Cependant, en éliminant les contraintes normales, le système d'équations (1.104a)–(1.104c) peut se réduire à une équation quadratique reliant la contrainte de cisaillement τ_{12} au taux de cisaillement,

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}^2 \left(\frac{\eta_p}{\lambda^2} - \frac{\eta_p\alpha}{\lambda^2} - \frac{\eta_p}{\lambda^2}\tau_{12}^2 \right)^2 + \dot{\gamma}\tau_{12} \left(\frac{\eta_p}{\lambda^4} + \frac{\eta_p\alpha}{\lambda^4} - \frac{\alpha}{\eta_p\lambda^2}\tau_{12} + \frac{\alpha^2}{\eta_p\lambda^2}\tau_{12}^2 - \frac{\alpha^3}{\eta_p\lambda^2}\tau_{12}^2 \right) + \\ + \frac{\alpha}{\eta_p}\tau_{12}^2 \left(\frac{\eta_p}{\lambda^4} - \frac{\alpha}{\lambda^3} + \frac{\alpha}{\lambda^2\eta_p}\tau_{12} - \frac{4\alpha}{\lambda^2\eta_p}\tau_{12}^2 + \frac{4\alpha^3}{\lambda^2\eta_p}\tau_{12}^2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.105)$$

L'analyse de l'Éq. (1.105) aux larges et aux faibles taux de cisaillement est donnée par Renardy [180, chap. 3] et la solution analytique de cette équation est donnée par Hulsen [101], Schleiniger and Weinacht [187]. Par ailleurs, les fonctions matérielles du modèle de Giesekus en fonction du taux de cisaillement sont données, quand $\alpha = \frac{1}{2}$, par Hulsen [101]. Toutefois, suivant Bird et al. [28, chap. 8, p. 251], pour $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, elles sont les suivantes,

$$\frac{\eta}{\eta_0}(\dot{\gamma}) = \frac{\sigma_{12}}{\dot{\gamma}} = \frac{\eta}{\eta_s} + \frac{\eta}{\eta_p} \frac{(1-f)^2}{1+(1-2\alpha)f} \quad (1.106a)$$

$$N_1(\dot{\gamma}) = \sigma_{11} - \sigma_{22} = \Psi_1(\dot{\gamma})\dot{\gamma}^2 = \frac{2\eta_p}{\lambda} \frac{f(1-\alpha f)}{\alpha(1-f)} \quad (1.106b)$$

$$N_2(\dot{\gamma}) = \sigma_{22} - \sigma_{33} = \Psi_2(\dot{\gamma})\dot{\gamma}^2 = -f\frac{\eta_p}{\lambda} \quad (1.106c)$$

où $f = \frac{1-\chi}{1+\chi(1-2\alpha)}$ et $\chi^2 = \frac{(1+16\alpha(1-\alpha)(\lambda\dot{\gamma})^2)^{\frac{1}{2}}-1}{8\alpha(1-\alpha)(\lambda\dot{\gamma})^2}$ et avec $\eta_0 = \eta_s + \eta_p$ la viscosité totale à taux de cisaillement nul. La figure 1.9–(a, b, c) montre l'évolution de la viscosité totale adimensionnée (1.106a) et des différences de contraintes normales (1.106b) et (1.106c) en fonction du taux de cisaillement et pour différentes valeurs des différents paramètres rhéologiques.

Aux faibles taux de cisaillement ($\dot{\gamma} \rightarrow 0$), la viscosité totale adimensionnée $\eta(\dot{\gamma})$ satisfait la viscosité totale à taux cisaillement nul η_0 et les différences des contraintes normales sont $\sim \dot{\gamma}^2$ et convergent vers une valeur nulle ($N_1 \rightarrow 0, N_2 \rightarrow 0$) quand ($\dot{\gamma} \rightarrow 0$).

On note que la première différence des contraintes normales est insensible aux variations du paramètre d'anisotropie α , figure 1.9–(b), et qu'elle augmente avec l'augmentation du temps de

relaxation et diminue avec la diminution du rapport de viscosité polymérique $\frac{\eta_p}{\eta_0}$.

La seconde différence des contraintes normales croît avec l'augmentation du paramètre d'anisotropie, voir figure 1.9–(c), et d'une manière similaire à la première différence des contraintes normales, elle décroît avec la diminution du rapport $\frac{\eta_p}{\eta_0}$ et elle augmente avec l'augmentation du taux de relaxation.

À l'autre extrémité des taux de cisaillement, c'est-à-dire aux larges valeurs du taux de cisaillement, ($\dot{\gamma} \rightarrow \infty$), la viscosité totale tend vers une valeur constante, définie par le rapport $\frac{\eta_s}{\eta_0}$, pour laquelle le fluide de Giesekus adopte un comportement Newtonien, figure 1.9–(a).

Pour ces valeurs élevées du taux de cisaillement, la première différence des contraintes normales est proportionnelle à $\sim \dot{\gamma}^{\frac{1}{2}}$, figure 1.9–(b), et la seconde différence des contraintes normales est homogène à une constante négative $N_2 \sim -\frac{\eta_p}{2\alpha\lambda} (1 - (1 - 4\alpha(1 - \alpha))^{\frac{1}{2}})$, figure 1.9–(c).

À l'opposé de leur comportement aux faibles valeurs de taux de cisaillement, aux larges valeurs du taux de cisaillement, les différences de contraintes normales diminuent avec l'augmentation du temps de relaxation et avec le rapport de viscosité polymérique $\frac{\eta_s}{\eta_0}$. De plus, la première différence des contraintes normales diminue avec l'accroissement du paramètre d'anisotropie et la seconde différence des contraintes normales est insensible aux variations de ce dernier.

Aux valeurs intermédiaires de taux de cisaillement, la viscosité décroît avec l'augmentation de taux de cisaillement (comportement rhéofluidifiant). L'augmentation du temps de relaxation et du paramètre d'anisotropie provoque une translation de l'effet rhéofluidifiant vers les faibles valeurs des taux de cisaillement.

Pour un écoulement élongationnel uni-axial en régime stationnaire (section 1.3.3), les composantes du tenseur des contraintes du modèle de Giesekus (1.104) se réduisent à,

$$(1 - 2\lambda\dot{\epsilon})\tau_{11} + \frac{\alpha\lambda}{\eta_p}\tau_{11}^2 = 2\eta_p\dot{\epsilon} \quad (1.107a)$$

$$(1 + \lambda\dot{\epsilon})\tau_{22} + \frac{\alpha\lambda}{\eta_p}\tau_{22}^2 = -\eta_p\dot{\epsilon} \quad (1.107b)$$

Seules les solutions $\sigma_{11} > 0$ et $-\frac{\eta_p}{\lambda} < \sigma_{22} < 0$ ont un sens physique (conditions liées au signe de la seconde différence de contraintes normales). La viscosité élongationnelle associée dans ce cas au modèle de Giesekus est donnée par,

$$\eta(\dot{\epsilon}) = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\dot{\epsilon}} = 3\eta_s + \frac{\eta_p}{2\alpha\lambda\dot{\epsilon}} \left((4\dot{\epsilon}^2\lambda^2 + (8\alpha - 4)\dot{\epsilon}\lambda + 1)^{\frac{1}{2}} - (\dot{\epsilon}^2\lambda^2 + (2 - 4\alpha)\dot{\epsilon}\lambda + 1)^{\frac{1}{2}} + 3\dot{\epsilon}\lambda \right) \quad (1.108)$$

Pour différentes valeurs du coefficient d'anisotropie $\alpha = (0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5)$, la figure 1.10 montre la viscosité élongationnelle totale adimensionnée et la première différence des contraintes normales en fonction du taux d'élongation. L'évolution de ces deux fonctions matérielles est monotone en fonction d'élongation, la viscosité d'élongation adopte un comportement rhéoépaississant et atteint une valeur constante dans la région des valeurs élevées du taux d'élongation.

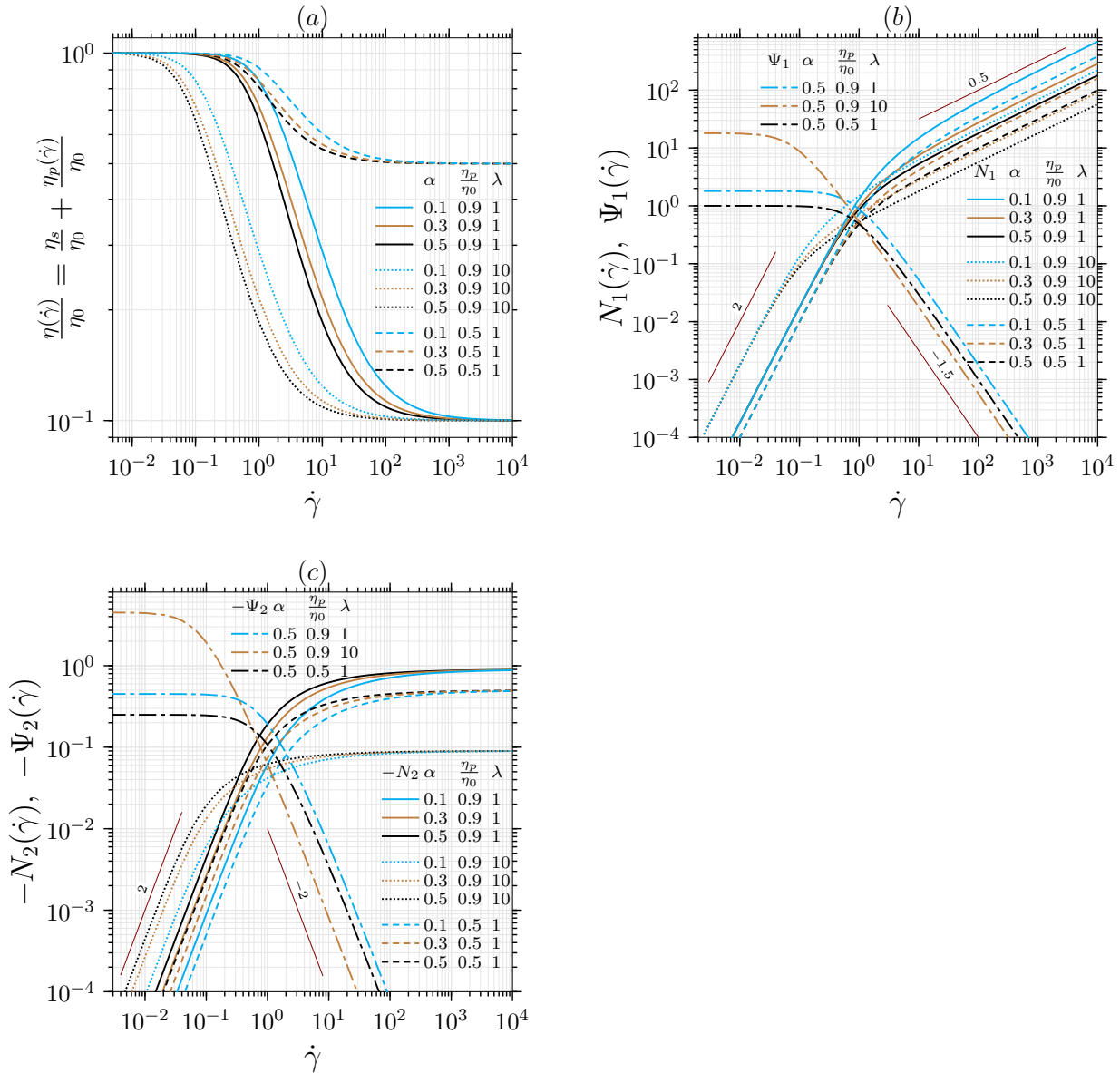


FIGURE 1.9 – Fonctions matérielles du modèle de Giesekus en fonction du taux de cisaillement dans le cas d’un écoulement de cisaillement simple et pour différentes valeurs des différents paramètres rhéologique (taux de relaxation λ , rapport de la viscosité du solvant $\frac{\eta_p}{\eta_0}$ à taux de cisaillement nul et paramètre d’anisotropie α) : (a) viscosité totale adimensionnée $\frac{\eta}{\eta_0}$, (b) première différence des contraintes normales N_1 et (c) seconde différence des contraintes normales N_2 .

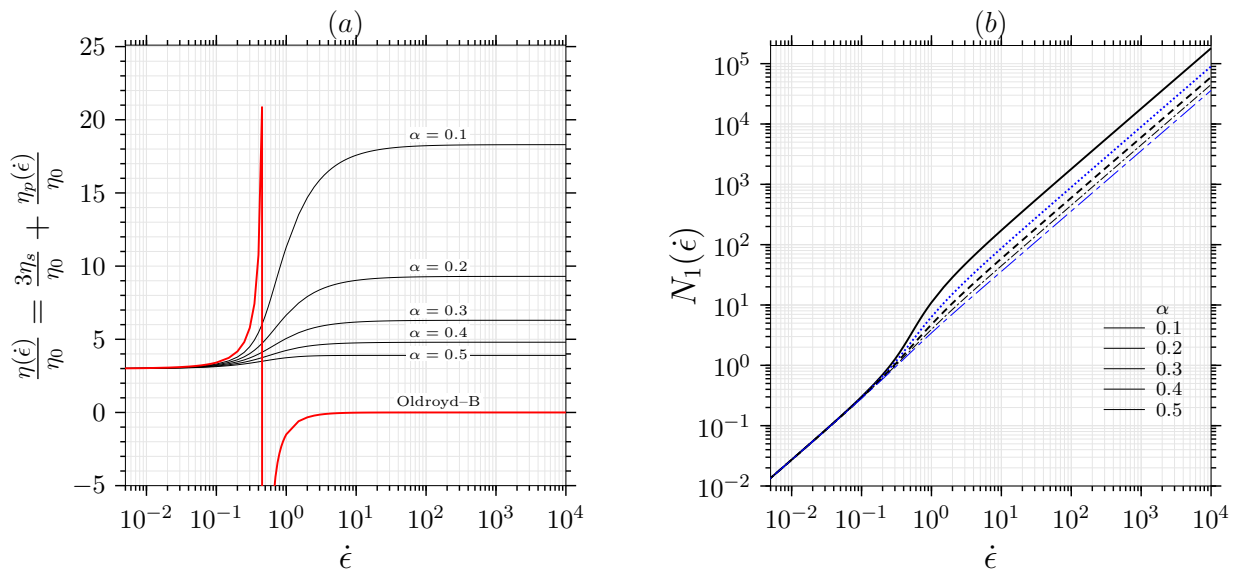


FIGURE 1.10 – Fonctions matérielles du modèle de Giesekus en fonction du taux d'élongation dans le cas d'un écoulement uniaxial et pour différentes valeurs du paramètre d'anisotropie $\alpha = (0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5)$: (a) viscosité élongationnelle totale adimensionnée, (b) première différences des contraintes normales N_1 .

1.9 Théorie du réseaux moléculaire

Dans le cadre de la théorie du polymère dilué les interactions polymères-polymères, si elles sont considérées, sont généralement prises en compte au travers de l'anisotropie de la friction visqueuse des billes de l'haltère, engendrée par la proximité d'autres billes appartenant à des haltères différents, Bird and Wiest [29].

Comme nous l'avons présenté dans la section précédente, le modèle de Giesekus est issu de cette approche.

Les interactions polymères-polymères, caractérisant les polymères à l'état fondu et les solutions de polymères concentrées, sont modélisées par une approche différente dans le cadre de la théorie du réseau (*Network theories*).

Cette approche a été initialement développée par Green and Tobolsky [83] pour modéliser le comportement mécanique des matériaux réticulés, comme le caoutchouc, dans lesquels les chaînes polymériques sont reliées par des points de réticulation (appelée aussi jonctions) formant un réseau moléculaire permanent.

Ensuite la théorie de réseau a été adaptée aux fluides polymériques, indépendamment, par Lodge [139, 140] et Yamamoto [236], d'abord par l'introduction du caractère temporaire des points de réticulation et ensuite par la considération du mouvement non-affine du réseau des chaînes moléculaires par rapport à la phase continue (c'est-à-dire le solvant).

En effet, les polymères à l'état fondu sont considérés comme une collection de longues chaînes temporairement réticulées (enchevêtrées) dressant des réseaux moléculaires continuellement créés et détruits.

Les enchevêtrements sont des barrières topologiques formées par des liaisons chimiques, ou par des forces de Van der Waals, ou dues à l'interaction entre différentes parties d'une même chaîne ou de chaînes différentes, restreignant le mouvement des chaînes.

Une portion de chaîne joignant deux jonctions, figure 1.11, appelée segment (ou brin de réseau) est représentée par N billes connectées par $(N-1)$ tiges de longueur a (chaîne de Kramers), Bird et al.

[27, chap. 4], Huilgol and Phan-Thien [100, chap. 4]. La configuration de ce segment est donnée par son vecteur bout-à-bout \mathbf{q} .

A cause du mouvement brownien des molécules du solvant et au grand nombre de degrés de liberté interne de la chaîne de Kramers, à l'état d'équilibre, les segments du réseau sont considérés selon Lodge [141] comme une distribution Gaussienne et peuvent se réduire à des ressorts d'élasticité Hookeenne.

La force de rappel d'origine entropique induite par le déploiement de la chaîne, donc par l'étirement du ressort Hookeen, figure 1.11, est donnée par $\mathbf{F} = H\mathbf{q}$, où $H = \frac{3kT}{(N-1)a^2}$ est la constante de raideur du ressort, k la constante de Boltzmann et T la température.

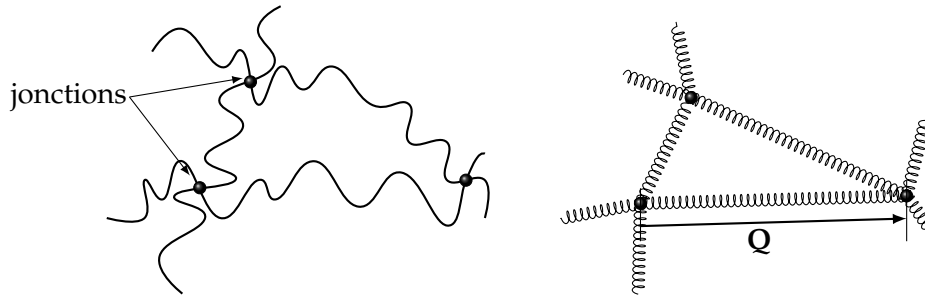


FIGURE 1.11 – Réseaux moléculaires temporairement enchevêtrés dont les segments sont représentés (à droite) par des ressorts Hookeens.

1.9.1 Équation de convection du réseau moléculaire

On introduit la fonction de distribution des segments, notée $D(q, t)$, pour laquelle la probabilité du nombre de segments à l'instant t ayant leurs vecteur bout-à-bout inclut dans l'intervalle \mathbf{q} à $\mathbf{q} + d\mathbf{q}$ est $D(\mathbf{q}, t)d\mathbf{q}$. Suivant Bird et al. [23, chap. 20 p.359], Huilgol and Phan-Thien [100, chap. 4], l'équation de conservation de la fonction de distribution, à un instant t , est donnée sous la forme suivante (équation de Liouville),

$$\frac{\partial D(\mathbf{q}, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \cdot \left(\frac{d\mathbf{q}}{dt} D(\mathbf{q}, t) \right) + g - hD(\mathbf{q}, t) \quad (1.109)$$

où $g(\mathbf{q}, t)$ représente le taux de création de segments d'un réseau et $h(\mathbf{q}, t)D(\mathbf{q}, t)$ traduit le taux de segments détruits proportionnel au nombre de segments présents. Cette équation de convection est similaire à l'équation de diffusion (1.83) diminuée du terme de second ordre. D'une manière analogue à l'équation (1.85), on introduit une fonction tensorielle $\mathbf{f}(\mathbf{q}, t)$ de la variable aléatoire \mathbf{q} , dont la moyenne est donnée par,

$$\langle \mathbf{f}(\mathbf{q}, t) \rangle = \int \mathbf{f}(\mathbf{q}, t) D(\mathbf{q}, t) d\mathbf{q} \quad (1.110)$$

Ensuite, en multipliant l'équation par $\mathbf{f}(\mathbf{q}, t)$ et en intégrant dans l'espace de configuration \mathbb{R}^3 , on obtient l'équation d'évolution suivante,

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{f}(\mathbf{q}) \rangle = -\left\langle \frac{d\mathbf{q}}{dt} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{q}) \right\rangle + \int g\mathbf{f}(\mathbf{q}) d\mathbf{q} - \langle h\mathbf{f}(\mathbf{q}) \rangle \quad (1.111)$$

1.9.1.1 Mouvement non-affines

Si l'on suppose que les jonctions polymériques se déplacent d'une façon affine avec l'écoulement, alors le vecteur bout-à-bout \mathbf{q} joignant deux jonctions est aussi transporté d'une façon

affine,

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{q} \quad (1.112)$$

L'incapacité du réseau moléculaire à suivre la vitesse imposée par l'écoulement peut se traduire par une vitesse de glissement par rapport au milieu continu, caractérisant les déplacements du réseau moléculaire, Larson [126, chap. 5], Bird et al. [23, Chapitre 20, p.374]. Johnson–Segalman dans [107] et Phan-Thien Tanner dans Phan-Thien [172], Thien and Tanner [216] supposent que le mouvement non-affine du réseau moléculaire est une fonction isotrope du tenseur gradient de déformation.

Le transport non-affine du vecteur bout-à-bout est donné par,

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = (\nabla \mathbf{u} - \zeta \mathbf{q}) \cdot \mathbf{q} = \mathcal{L} \cdot \mathbf{q} \quad (1.113)$$

où ζ est un paramètre qui décrit le glissement et $\mathcal{L} = (\nabla \mathbf{u} - \zeta \mathbf{D})$ est le tenseur gradient de vitesse effectif. La relation (1.113) correspond aussi au mouvement non affine introduit par Gordon and Schowalter [80] (dérivé convectée non-affine) dans le cadre de la théorie des polymères dilués.

Ainsi l'expression de l'équation d'évolution (1.111) devient, en considérant le mouvement non-affine,

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{f}(\mathbf{q}) \rangle = - \langle \mathcal{L} \cdot \mathbf{q} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{q}) \rangle + \int g \mathbf{f}(\mathbf{q}) d\mathbf{q} - \langle h \mathbf{f}(\mathbf{q}) \rangle \quad (1.114)$$

Si l'on choisit la fonction $\mathbf{f} = \mathbf{q}\mathbf{q}$, on obtient l'équation d'évolution du tenseur de conformation $\mathbf{c} = \langle \mathbf{q}\mathbf{q} \rangle$:

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{q}\mathbf{q} \rangle - \mathcal{L} \langle \mathbf{q}\mathbf{q} \rangle - \langle \mathbf{q}\mathbf{q} \rangle \mathcal{L}^\top = \int (g - hD(\mathbf{q}, t)) \mathbf{q}\mathbf{q} d\mathbf{q} \quad (1.115)$$

1.9.2 Contribution au tenseur des contraintes

Pour établir la contribution du réseau de polymères dans le tenseur des contraintes, on admet la même décomposition du tenseur des contraintes (1.86), utilisée dans le cas de solutions polymériques diluées. On considère un plan arbitraire, de surface S , dont la vitesse est égale à la vitesse locale de la solution en écoulement. L'orientation de ce plan est donnée par son vecteur unitaire \mathbf{n} . Ce plan peut être sujet de plusieurs intersections avec les segments constituant le réseau, dès lors, dû à l'étirement des segments, des forces de tension sont transmises au plan. Le nombre de segments intersectant le plan ayant leurs configurations incluses dans l'intervalle \mathbf{q} à $\mathbf{q} + d\mathbf{q}$, s'écrit (suivant Bird et al. [23, Chapitre 20, p.363]), $S|\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}| D(\mathbf{q}, t) d\mathbf{q}$, où $D(\mathbf{q}, t)$ est la fonction de distribution des segments définie telle que $D(\mathbf{q}, t) d\mathbf{q}$ est le nombre de segments par unité de temps. La force moyenne par unité de surface exercée sur le plan est la somme de l'ensemble des segments coupant le plan, elle est donnée par,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{n} \int \mathbf{q} \mathbf{F}_N^c D(\mathbf{q}, t) d\mathbf{q} = \mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{q}\mathbf{F} \rangle \quad (1.116)$$

où, pour les segments considérés Hookiens, la tension communiquée par un segment type est $\mathbf{F}_N^c = H_N \mathbf{q}$. La contribution de l'ensemble des segments au tenseur des extra-contraintes, est alors donnée par,

$$\sigma_P = \langle \mathbf{q}\mathbf{F}_N^c \rangle = H_N \langle \mathbf{q}\mathbf{q} \rangle \quad (1.117)$$

Par ailleurs, on peut déduire à partir de l'équation (1.132b), l'équation d'évolution de cette contribution,

$$\frac{d}{dt}\sigma_p = H_N \frac{d}{dt}\langle \mathbf{q}\mathbf{q} \rangle = \mathcal{L}\sigma_p + \sigma_p \mathcal{L}^T + H_N \left(\int g \mathbf{q}\mathbf{q} \, d\mathbf{q} - \langle h \mathbf{q}\mathbf{q} \rangle \right) \quad (1.118)$$

Plusieurs modèles rhéologiques découlent de cette dernière équation, en spécifiant la forme des taux de création et de destruction et au travers d'hypothèses simplificatrices portant sur la cinétique des segments, comme le modèle de Lodge [141], Wagner [225], Wagner and Stephenson [226], Phan-Thien [172], Tanner [209], Thien and Tanner [216]. Nous nous intéressons particulièrement ci-dessous au modèle de Phan-Thien Tanner.

1.9.3 Dérivation du modèle de Phan–Thien Tanner

À l'état d'équilibre (c'est-à-dire sans écoulement, quand $\mathbf{u} = 0$) l'équation de conservation (1.109) se réduit à l'égalité de taux de création et de taux de destruction des segments,

$$g_{\text{eq}} = h_{\text{eq}} D_{\text{eq}}(\mathbf{q}, t) \quad (1.119)$$

où, $D_{\text{eq}}(\mathbf{q}, t)$ est la fonction de distribution à l'état d'équilibre, identique à l'équation (1.74) (distribution gaussienne). Par ailleurs, si l'on suppose que le taux de création de segments pendant l'écoulement est proportionnel à la fonction de distribution à l'état d'équilibre, c'est à dire, la fonction de distribution des segments du réseau au cours de la création est identique à $D_{\text{eq}}(\mathbf{q}, t)$, alors on peut écrire :

$$g(\mathbf{q}) = \tilde{g} \cdot D_{\text{eq}}(\mathbf{q}, t) \quad (1.120)$$

où \tilde{g} représente le taux de création indépendant de vecteur bout-à-bout \mathbf{q} . L'idée de Phan-Thien [172], Tanner [209], Thien and Tanner [216], pour déduire un modèle macroscopique de l'équation (1.132b), est de relier les taux de destruction et de création de segments linéairement à la norme du vecteur bout-à-bout $\langle \mathbf{q}^2 \rangle$, c'est-à-dire,

$$h = h(\langle \mathbf{q}^2 \rangle) \quad (1.121)$$

$$g = \tilde{g}(\langle \mathbf{q}^2 \rangle) \cdot D_{\text{eq}}(\mathbf{q}, t) \quad (1.122)$$

Ce choix est basé sur le fait que l'énergie libre d'Helmholtz du réseau de segments est proportionnelle à la moyenne du carré du vecteur bout-à-bout ($\langle \mathbf{q}^2 \rangle$). L'expression de la norme du vecteur bout-à-bout est obtenue de l'équation (1.117) par,

$$\langle \mathbf{q}^2 \rangle = \frac{1}{H} \text{tr}(\sigma_p) = \frac{1}{H} (\text{tr}(\boldsymbol{\tau}) + 3p_p) \quad (1.123)$$

Suivant Phan-Thien [172], Tanner [209], Thien and Tanner [216], nous admettons que le taux de création de segments est proportionnel au taux de destruction de segments donné par,

$$\tilde{g}(\text{tr}(\boldsymbol{\tau})) = \frac{G}{kT(1 - \tilde{\zeta})} h(\text{tr}(\boldsymbol{\tau})) \quad (1.124)$$

où la constante $G = \frac{\eta_p}{\lambda}$ représente le module d'élasticité.

Expression du tenseur des contraintes totales

En substituant les taux de création et de destruction, donnés par (1.121) et (1.122), dans le tenseur des contraintes polymériques, équation (1.118), et en considérant la proportionnalité (1.124),

on obtient l'équation constitutive suivante,

$$\frac{d}{dt}\sigma_P - \mathcal{L}\sigma_P - \sigma_P\mathcal{L}^\top = H_N \left(-h(\text{tr}(\boldsymbol{\tau}))\langle \mathbf{q}\mathbf{q} \rangle + \tilde{g}(\text{tr}(\boldsymbol{\tau})) \int \mathbf{q}\mathbf{q} D_c(\mathbf{q})_{eq} d\mathbf{q} \right) \quad (1.125a)$$

$$= -h(\text{tr}(\boldsymbol{\tau}))\sigma_P + H_N \left(\tilde{g}(\text{tr}(\boldsymbol{\tau})) \frac{kT}{H_N} \mathbf{I} \right) \quad (1.125b)$$

$$= -h(\text{tr}(\boldsymbol{\tau}))\sigma_P + \frac{G}{(1-\xi)} h(\text{tr}(\boldsymbol{\tau})) \mathbf{I} \quad (1.125c)$$

ou encore, sous la forme,

$$\frac{1}{h(\text{tr}(\boldsymbol{\tau}))} \left(\frac{d}{dt}\sigma_P - \mathcal{L}\sigma_P - \sigma_P\mathcal{L}^\top \right) + \sigma_P = \frac{G}{(1-\xi)} \mathbf{I} \quad (1.126)$$

Pour une solution polymérique incompressible, le tenseur des contraintes est défini à un tenseur isotrope près. Le tenseur d'extra-contraintes polymériques se distingue de la pression, en l'évaluant le tenseur des contraintes polymériques à l'état d'équilibre (c'est-à-dire, $\mathbf{u} = 0$, les extra-contraintes polymériques sont nulles $\boldsymbol{\tau}_{eq} = 0$). Par ailleurs, l'équation (1.86) fournit, $\sigma_{peq} = -p_p \mathbf{I}$, et comme, $(\frac{d}{dt}\sigma_P - \mathcal{L}\sigma_P - \sigma_P\mathcal{L}^\top)_{eq} = 0$, l'équation (1.126) se réduit à,

$$\sigma_{peq} = \frac{G}{(1-\xi)} \mathbf{I} = -p_p \mathbf{I} \quad (1.127)$$

Cependant, la contribution extra-contrainte polymérique, donnée par $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} + p_p \mathbf{I}$, s'écrit,

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\tau} - \mathcal{L}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\mathcal{L}^\top + h(\text{tr}(\boldsymbol{\tau}))\boldsymbol{\tau} = 2GD \quad (1.128)$$

Les modèles : Lodge [141], Wagner [225], Wagner and Stephenson [226], Phan-Thien [172], Tanner [209], Thien and Tanner [216], associent le taux de relaxation du réseau au taux de destruction de segments,

$$\mathcal{F}(\text{tr}(\boldsymbol{\tau})) = h(\text{tr}(\boldsymbol{\tau}))\lambda \quad (1.129)$$

où λ est une constante de temps assimilée au temps de relaxation de la solution polymérique et $\mathcal{F}(\text{tr}(\boldsymbol{\tau}))$ est une fonction adimensionnelle. Quand $\mathcal{F} = 1$ et $\xi = 0$ l'équation constitutive (1.128) se réduit au modèle de Lodge [139] qui repose sur l'hypothèse du mouvement affine du réseau et un taux de destruction constant. Cependant, pour compléter l'équation (1.128), Phan-Thien [172], Tanner [209], Thien and Tanner [216], ont introduit deux expressions empiriques de la fonction $\mathcal{F}(\text{tr}(\boldsymbol{\tau}))$, résultant le modèle de Phan-Thien Tanner, donné en termes du tenseur des contraintes polymériques par,

$$\mathbf{T} = 2\eta_s \mathbf{D} + \boldsymbol{\tau} \quad (1.130a)$$

$$\square \boldsymbol{\tau} - \frac{\eta_p}{\lambda} 2\mathbf{D} = -\frac{1}{\lambda} \mathcal{F}(\text{tr}(\boldsymbol{\tau})) \boldsymbol{\tau} \quad (1.130b)$$

$$\mathcal{F}(\text{tr}(\boldsymbol{\tau})) = \begin{cases} 1 + \frac{\lambda \epsilon}{\eta_p} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}) \\ \exp\left(\frac{\lambda \epsilon}{\eta_p} \text{tr}(\boldsymbol{\tau})\right) \end{cases} \quad (1.130c)$$

où le symbole (\square) désigne la dérivée de Gordon Schowalter,

$$\square \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\tau} - \nabla \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u}^\top + \xi (\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}) \quad (1.131)$$

En termes du tenseur de conformation, le modèle de Phan–Thien Tanner s’écrit,

$$\mathbf{T} = 2\eta_s \mathbf{D} + \boldsymbol{\tau} = 2\eta_s \mathbf{D} + \frac{\eta_p}{\lambda} \frac{1}{(1-\zeta)} (\bar{\mathbf{c}} - \mathbf{I}) \quad (1.132a)$$

$$\bar{\mathbf{c}} = -\frac{1}{\lambda} \mathcal{P}(\text{tr}(\bar{\mathbf{c}})) (\bar{\mathbf{c}} - \mathbf{I}) \quad (1.132b)$$

$$\mathcal{P}(\text{tr}(\bar{\mathbf{c}})) = \begin{cases} 1 + \frac{\epsilon}{(1-\zeta)} \text{tr}(\bar{\mathbf{c}}) \\ \exp\left(\frac{\epsilon}{(1-\zeta)} \text{tr}(\bar{\mathbf{c}})\right) \end{cases} \quad (1.132c)$$

Le coefficient $\eta_p = G\lambda$ représente la viscosité polymérique et η_s la viscosité du solvant. Le modèle Phan–Thien Tanner incorpore deux paramètres : ϵ gouverne la réponse élongationnelle et l’effet rhéofluidifiant du fluide et traduit la création et la destruction des segments ; le paramètre ζ contrôle le mouvement non-affine du réseau moléculaire par rapport à l’écoulement du solvant. Par ailleurs, quand $\mathcal{F}(\text{tr}(\boldsymbol{\tau}))$ est linéaire, le modèle est appelée PTT (ou PTT linéaire) et lorsque $\mathcal{F}(\text{tr}(\boldsymbol{\tau}))$ est une fonction exponentielle le modèle est alors appelée EPTT. Le modèle PTT-affine ou SPP s’obtient avec $\zeta = 0$. De même que le modèle de Maxwell généralisé ou encore le modèle de Giesekus, une version multimode du modèle de PTT peut s’obtenir en définissant des paramètres rhéologiques propres à chacun des modes.

Par ailleurs, quand $\epsilon = 0$ et $\zeta \neq 0$ le modèle PTT se réduit au modèle de Johnson–Segalman [107] lequel peut être obtenu en se basant uniquement sur des considérations macroscopiques issues de la mécanique des milieux continus.

Les modèles Oldroyd–B [154] et d’UCM (1.61a) peuvent se déduire du modèle PTT avec $\epsilon = 0$ et $\zeta = 0$.

Finalement, quand $\epsilon = 0$, $\zeta = 0$ et $\lambda = 0$, on retrouve le modèle du fluide Newtonien (1.33).

Les paramètres rhéologiques du modèle PTT, à savoir, ϵ , ζ , η_p et λ , sont issus de mesures expérimentales (ensuite validés numériquement) dont l’identification se fait suivant le nombre de mode considérés du modèle PTT, Dietz [56] Hatzikiriakos et al. [97]. Les solutions polymériques diluées, comme le polyéthylène faiblement concentré (LDPE), se caractérisent par, $\epsilon = 0.02$, $\zeta = 0.1$ et $\lambda = 0.075$, tandis que les solutions polymériques concentrées comme le polyéthylène fondu (HDPE) se distinguent par, $\epsilon = 0.25$, Tanner [210], Larson [126, chap. 7], Shin et al. [194], Carrot et al. [38] et Phan-Thien [172]. D’autres fluides polymériques, comme les solutions de 5% polyisobutylène (PIB) se caractérisent par, $\epsilon = 0.25$, $\zeta = 0.25$, $\eta_p = 1.422$, $\lambda = 0.04$ Quinzani et al. [178], Azaiez et al. [14], ou encore des solutions de 2.5% polyisobutylène possèdent $\epsilon = 0.42$, $\zeta = 0.07$ et $\lambda = 0.084$, Schoonen et al. [188].

1.9.3.1 Fonctions viscométriques du modèle de Phan–Thien Tanner

Pour un écoulement de cisaillement simple (section 1.3.2), les composantes du tenseur des extra-contraintes polymériques associées au modèle PTT (1.130b) se réduisent à la forme suivante,

$$\mathcal{F}(\text{tr}(\boldsymbol{\tau}))\tau_{xx} + (\zeta - 2)\lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \tau_{xy} = 0 \quad (1.133a)$$

$$\mathcal{F}(\text{tr}(\boldsymbol{\tau}))\tau_{xy} - \lambda \frac{\zeta}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} (\tau_{xx} + \tau_{yy}) = \eta_p \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad (1.133b)$$

$$\mathcal{F}(\text{tr}(\boldsymbol{\tau}))\tau_{yy} + \lambda \zeta \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \tau_{xy} = 0 \quad (1.133c)$$

$$\tau_{zz} = 0 \quad (1.133d)$$

La résolution de ce système d'équations permet d'obtenir les fonctions viscométriques suivantes,

$$\eta(\dot{\gamma}) = \tau_{xy}\dot{\gamma} = \eta_s + \frac{Z \left(1 + \frac{\lambda\epsilon}{\eta_p} \text{tr}(\boldsymbol{\tau})\right)}{2\lambda\dot{\gamma}^2(1 - \xi)} \quad (1.134a)$$

$$N_1(\dot{\gamma}) = \tau_{xx} - \tau_{yy} = \frac{Z}{(1 - \xi)} \quad (1.134b)$$

$$N_2(\dot{\gamma}) = \tau_{yy} - \tau_{zz} = -\frac{Z\xi}{2(1 - \xi)} \quad (1.134c)$$

où $Z = (\tau_{xx} + \tau_{yy})$ est la solution de la relation suivante,

$$\left(\frac{\lambda\epsilon}{\eta_p}\right)^2 \left(\frac{\lambda\epsilon}{\eta_p}Z + 2\right) Z^2 + (\lambda^2\dot{\gamma}^2\xi(2 - \xi) + 1) Z - 2\lambda + \dot{\gamma}^2(1 - \xi)\eta_p = 0 \quad (1.135)$$

Relativement aux modèles Oldroyd-B, UCM, Johnson–Segalman et SPTT, les prédictions du modèle PTT sont beaucoup plus fidèles au comportement particulier des fluides polymériques (rhéofluidification, $N_1 > |N_2| > 0$ et $N_2 < 0$).

Pour différentes valeurs des différents paramètres du modèle PTT, la figure 1.13 montre la viscosité de cisaillement et les différences de contraintes normales en fonction du taux de cisaillement.

D'emblée, on constate que la rhéofluidification prédite par le modèle PTT est faiblement sensible aux variations du paramètre empirique ϵ , figure 1.13–(a). Ce paramètre gouverne, le comportement élongationnel du fluide. En revanche, l'accroissement du paramètre ξ intensifie l'effet rhéofluidifiant.

Par ailleurs, l'augmentation du temps de relaxation du fluide translate le comportement non-linéaire de la viscosité vers les faibles valeurs de taux de cisaillement. On note aussi que la première différence des contraintes normales est bien supérieure à la seconde différence (en valeur absolue), de plus, cette dernière est constamment négative, figure 1.13–(b, c).

D'autre part, aux faibles valeurs de taux de cisaillement les différences de contraintes normales sont proportionnelles à $\sim \dot{\gamma}^2$ et aux valeurs élevées de taux de cisaillement les différences de contraintes normales atteignent des plateaux constants, le rapport des deux différences est donnée par, $\frac{N_1}{N_2} = -\frac{\xi}{2}$. L'augmentation du paramètre ξ engendre la diminution de la première différence N_1 aux larges valeurs de taux de cisaillement, de moment que l'augmentation de ξ augmente la seconde différence N_2 à tout les niveaux de taux de cisaillement. D'un autre côté, aux larges et aux faibles taux de cisaillement les différences de contraintes normales demeurent insensibles aux variations du paramètre ϵ . À l'inverse, aux valeurs intermédiaires du taux de cisaillement, N_1 et N_2 diminuent avec l'augmentation de ϵ .

Finalement, dans le cas du modèle SPTT (c'est-à-dire quand $\xi = 0$) la seconde différence des contraintes normales, (1.134c), est nulle.

Pour un écoulement élongationnel uni-axial (section 1.3.3), en régime stationnaire, les composantes du tenseur des extra-contraintes du modèle de PTT s'écrivent comme suit,

$$\tau_{xx} = \frac{2\eta_p\dot{\epsilon}}{\mathcal{F}(\text{tr}(\boldsymbol{\tau})) - 2\lambda\dot{\epsilon}(1 - \xi)} \quad (1.136a)$$

$$\tau_{yy} = -\frac{\eta_p\dot{\epsilon}}{\mathcal{F}(\text{tr}(\boldsymbol{\tau})) + \lambda\dot{\epsilon}(1 - \xi)} \quad (1.136b)$$

La viscosité d'élongation est donnée par,

$$\eta_e = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\dot{\epsilon}} = 3\eta_s + \frac{3\eta_p\mathcal{F}(\text{tr}(\boldsymbol{\tau}))}{\left(\mathcal{F}(\text{tr}(\boldsymbol{\tau})) - 2\lambda\dot{\epsilon}(1 - \xi)\right)\left(\mathcal{F}(\text{tr}(\boldsymbol{\tau})) + \lambda\dot{\epsilon}(1 - \xi)\right)} \quad (1.137)$$

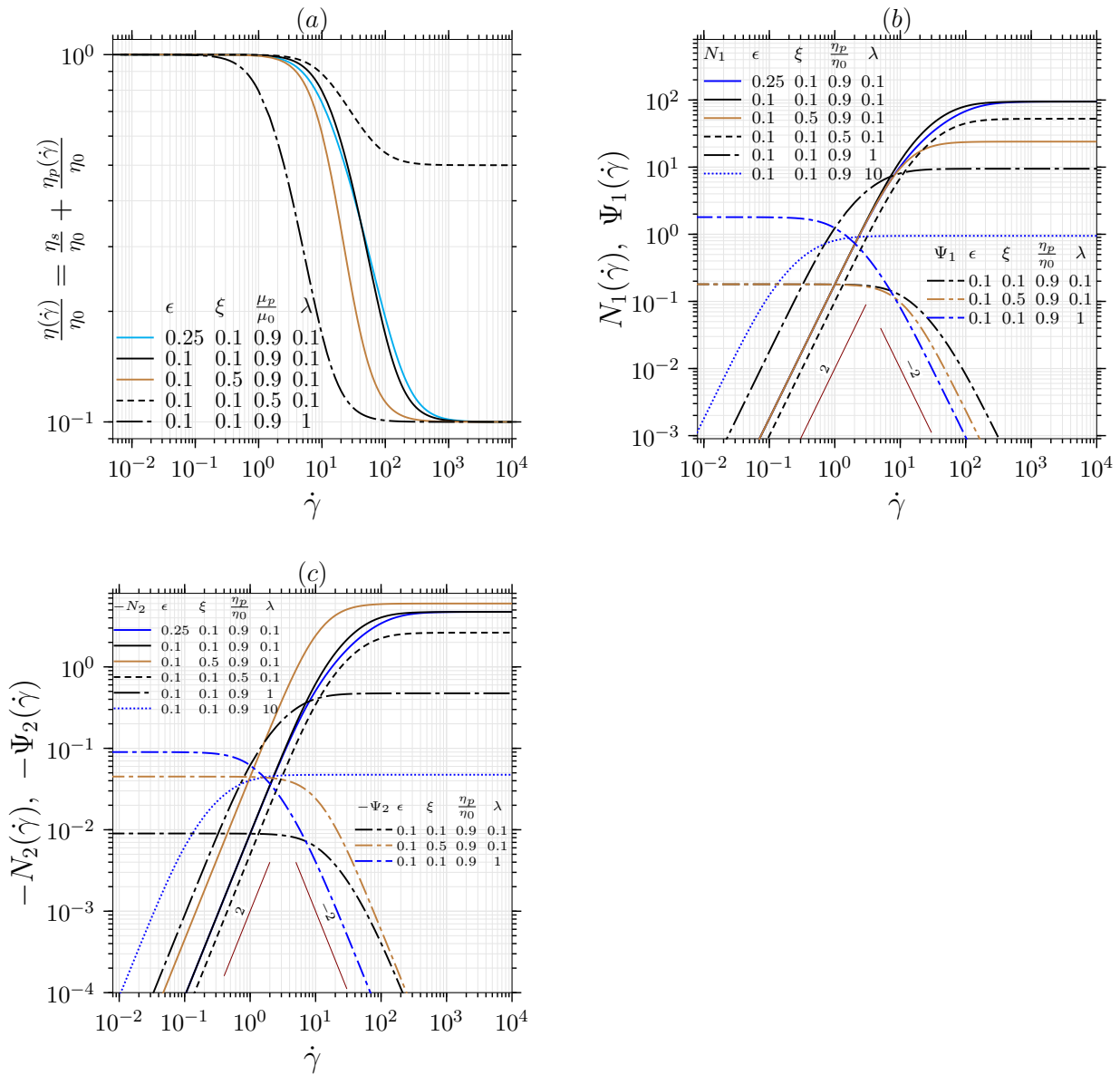


FIGURE 1.12 – Fonctions viscométriques du modèle de PTT en fonction du taux de cisaillement, pour un écoulement de cisaillement simples, (a) viscosité de cisaillement, (b) première différences des contraintes normales et (c) secondes différences des contraintes normales.

La figure 1.13 donne la viscosité élongationnelle en fonction du taux d'élongation pour différentes valeurs du paramètre ϵ .

En ce qui concerne le modèle de PTT avec $\epsilon = 0$ et $\mathcal{F}(\text{tr}(\tau)) = 1$ (c'est-à-dire quand PTT se réduit au modèle de Johnson–Segalman), le comportement de la viscosité élongationnelle en fonction du taux d'élongation est similaire au modèle d'Oldroyd–B, entre autres, la viscosité diverge quand le taux d'élongation vaut $\frac{1}{2\lambda(1-\xi)}$. Par ailleurs, pour tout $\epsilon > 0$, la viscosité élongationnelle prédite par le modèle PTT augmente avec l'augmentation de taux d'élongation puis atteint un plateau constant aux valeurs élevées de taux d'élongation.

D'un autre côté, une des différences entre les versions PTT et EPTT, dans le cas d'un écoulement élongationnel uni-axial, réside dans l'évolution de la viscosité élongationnelle.

À l'opposé du modèle PTT, la viscosité élongationnelle du modèle EPTT atteint un maximum puis décroît aux larges valeurs de taux d'élongation. Ce comportement survient lorsque le taux de création de segments dépasse le taux de destruction, Larson [126], Huilgol and Phan-Thien [100].

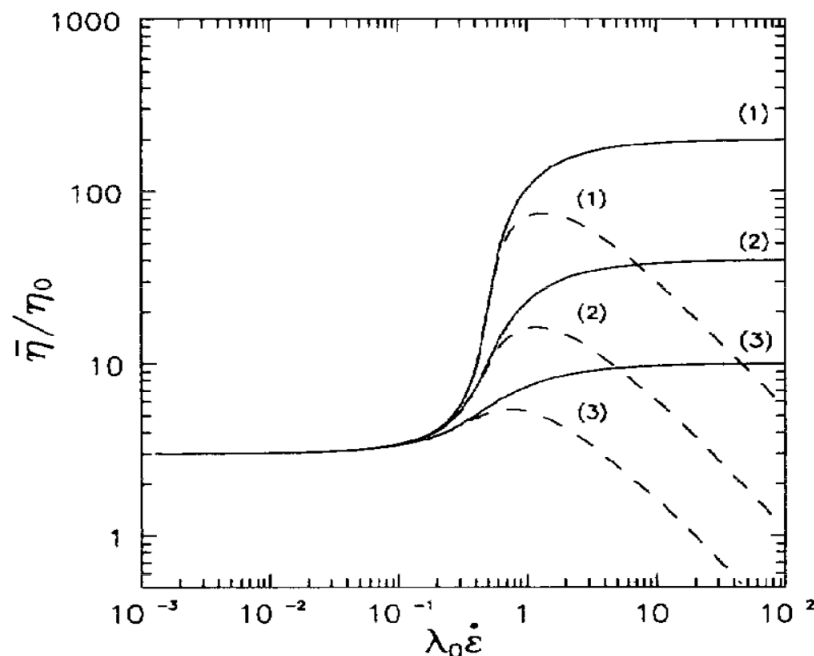


FIGURE 1.13 – Viscosité élongationnelle adimensionnée (notée $\frac{\bar{\eta}}{\eta_0}$) en fonction du taux d'élongation pour le modèle du modèle PTT avec $\xi = 0$ et pour différentes valeurs du paramètre ϵ : (1) $\epsilon = 0.01$, (2) $\epsilon = 0.05$ et (3) $\epsilon = 0.2$. Les lignes continues désignent le modèle de PTT linéaire et les lignes discontinues indiquent le modèle PTT exponentiel, (La figure est tirée de Souvaliotis and Beris [206]).

1.10 Conclusion

Après avoir passé en revue les bases de développement des modèles mathématiques décrivant les lois constitutives des fluides Newtoniens et complexes, nous avons mis en lumière spécialement certains modèles qui nous permettront, dans la suite de cette étude, de décrire les écoulements secondaires et analyser pour mieux comprendre, en relation avec la nature et les paramètres constitutifs de certains fluides, le rôle de leurs comportements spécifiques sur des phénomènes physiques dynamiques et thermiques.

Ces modèles seront la base des développements numériques que nous avons réalisés afin de

coupler leurs équations non-linéaires à celles de la quantité de mouvement, de continuité et de conservation de l'énergie, afin de présenter une analyse originale concernant le rôle de viscoélasticité dans la création d'écoulements secondaires et la perturbation (amélioration) des transferts convectifs dans ce genre d'écoulement anisotherme dans des conduites non circulaires.

Pour les écoulements de cisaillement simple et d'élongation uni-axial, plusieurs études expérimentales et calculs numériques, Khan and Larson [118], Souvaliotis and Beris [206], Azaiez et al. [14], Baaijens [16], Carrot et al. [38] et Owens and Phillips [165] montrent que les prédictions des modèles non-linéaires de Giesekus et Phan-Thien Tanner sont en bon accord avec les observations expérimentales.

Nous retenons, dans la suite de cette étude, les modèles Newtonien (1.33), UCM (1.61a), Oldroyd-B (1.98b) et les modèles non-linéaire de Giesekus (1.103b) et Phan-Thien Tanner (1.130b), pour fermer le système d'équations de conservation de la masse de la quantité de mouvement et de l'énergie.

Ces deux derniers modèles se distinguent par leurs termes non-linéaires reflétant le caractère non-linéaire des fluides viscoélastiques (la rhéofluidification, l'anisotropie des contraintes normales, etc.) et peuvent s'interpréter comme une extension du modèle d'Oldroyd-B, Siginer [199]. Par ailleurs, on peut remarquer que les seconds membres des équations constitutives d'Oldroyd-B (1.98b), de Giesekus (1.103b) et de PTT (1.130b), sont identiques.

Ces trois modèles peuvent se regrouper sous forme d'une seule équation générique,

$$\mathbf{T} = 2\eta_s \mathbf{D} + \boldsymbol{\tau} \quad (1.138a)$$

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} - \frac{\eta_p}{\lambda} 2\mathbf{D} = -\mathbf{H}(\boldsymbol{\tau}), \quad (1.138b)$$

où le symbole ($\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}$) désigne la dérivée convectée supérieure et la fonction $\mathbf{H}(\boldsymbol{\tau})$ représente les termes associés au modèle considéré.

Le tableau 1.2 donne les paramètres rhéologiques, la fonction tensorielle $\mathbf{H}(\boldsymbol{\tau})$ et les approximations de la seconde différence des contraintes normales $\Psi_2(\dot{\gamma})$ et de la viscosité de cisaillement $\eta(\dot{\gamma})$ pour différents modèles rhéologique qui sont considérés dans la suite.

TABLEAU 1.2 – Fonction des termes non-linéaire $\mathbf{H}(\boldsymbol{\tau})$ (associe à l'Éqt. (1.138b)), paramètres rhéologiques, coefficients de la seconde différence des contraintes normales et viscosités de cisaillement pour chacun des modèles considérés.
Les exposants n et m représente des réels.

Modèles	$\mathbf{H}(\boldsymbol{\tau})$	Paramètres	$\Psi_2(\dot{\gamma})$	$\eta(\dot{\gamma})$
Newtonien	0	η_s	0	η_s
UCM	$\frac{1}{\lambda} \boldsymbol{\tau}$	$\eta_p, \lambda, \xi = 0$	0	η_p
Oldroyd-B [154]	$\frac{1}{\lambda} \boldsymbol{\tau}$	$\eta_p, \lambda, \eta_s, \xi = 0$	0	$\eta_p + \eta_s$
Giesekus [76]	$\frac{1}{\lambda} \boldsymbol{\tau} + \frac{\alpha}{\eta_p} \boldsymbol{\tau}^2$	$\eta_p, \lambda, \eta_s, \alpha, \xi = 0$	$\simeq -\dot{\gamma}^n$	$\simeq \dot{\gamma}^m$
Johnson-Segalman [107]	$\frac{1}{\lambda} \boldsymbol{\tau} + \xi (\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D})$	$\eta_p, \lambda, \eta_s, \xi \in [0, 2]$	$\simeq -\dot{\gamma}^n$	$\simeq \dot{\gamma}^m$
S-PTT [172, 216]	$\frac{1}{\lambda} \boldsymbol{\tau} + \frac{\epsilon}{\eta_p} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau}$	$\eta_p, \lambda, \eta_s, \epsilon, \xi = 0$	0	$\simeq \dot{\gamma}^m$
PTT [172, 216]	$\frac{1}{\lambda} \boldsymbol{\tau} + \frac{\epsilon}{\eta_p} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau} + \xi (\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D})$	$\eta_p, \lambda, \eta_s, \epsilon, \xi \in [0, 2]$	$\simeq -\dot{\gamma}^n$	$\simeq \dot{\gamma}^m$

CHAPITRE 2

Systeme d'equations gouvernant

Sommaire

Première partie : lois de conservation	16
1.1 Lois de conservation	16
1.1.1 Conservation de la masse.....	16
1.1.2 Conservation de la quantité de mouvement	17
1.1.2.1 Équation de conservation de la quantité de mouvement	17
1.1.2.2 Symétrie du tenseur des contraintes	18
1.1.3 Conservation de l'énergie.....	19
1.2 Conclusion	20
Deuxième partie : modèles rhéologiques	20
1.3 Propriétés rhéologiques des fluides polymérique	21
1.3.1 Comportement rhéologique des fluides polymériques	22
1.3.2 Écoulement de cisaillement simple	23
1.3.2.1 Viscosité dépendante du taux de cisaillement.....	24
1.3.2.2 Différences des contraintes normales.....	25
1.3.3 Écoulement élongationnel uni-axial	27
1.3.3.1 Viscosité élongationnelle	28
1.4 Viscoélasticité	28
1.4.1 Fluide Newtonien	29
1.4.2 Solide Hookéen.....	29
1.4.3 Fluide non-Newtonien inélastique	30
1.4.4 Viscoélasticité linéaire.....	31
1.4.4.1 Modèle de Maxwell monomode.....	31
1.5 Modèles différentiels quasi-linéaires	33
1.5.1 Principe d'objectivité et dérivées objectives	33
1.5.2 Formulations constitutives du type Oldroyd	36
1.6 Viscoélasticité Non-linéaire, approche macroscopique	37
1.7 Viscoélasticité Non-linéaire, théories moléculaires des polymères	38

1.8 Théories moléculaires des polymères dilués	40
1.8.1 Modèle haltère élastique (<i>elastic dumbbell</i>).....	41
1.8.2 Équation de Smoluchowsky	43
1.8.3 contributions au tenseur des contraintes	44
1.8.4 Dérivation du modèle d'Olroyd-B.....	45
1.8.5 Dérivation du modèle de Giesekus	46
1.8.5.1 Fonctions viscométriques du modèle de Giesekus	48
1.9 Théorie du réseaux moléculaire	51
1.9.1 Équation de convection du réseau moléculaire	52
1.9.1.1 Mouvement non-affines.....	52
1.9.2 Contribution au tenseur des contraintes.....	53
1.9.3 Dérivation du modèle de Phan–Thien Tanner.....	54
1.9.3.1 Fonctions viscométriques du modèle de Phan–Thien Tanner	56
1.10 Conclusion	59

L'adjonction d'une équation constitutive différentielle affine, comme le modèle Oldroyd-B, ou non-affine, comme le modèle de Giesekus ou encore le modèle de PTT, aux équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, complique considérablement l'analyse mathématique et par conséquent la simulation numérique des problèmes d'écoulement des fluides viscoélastiques. Concrètement, suivant Renardy [180], la nature non-linéaire du système d'équations aux dérivées partielles régissant ce type de problèmes rend difficile l'élaboration d'une théorie mathématique complète de l'existence et de l'unicité de leur solution. Cependant, la connaissance de la structure mathématique et des propriétés mathématiques du système d'équations régissant l'écoulement des fluides viscoélastiques jouent un rôle très important à la fois dans le développement de technique de résolutions numériques appropriées et dans la prescription des conditions initiales et des conditions aux limites garantissant un problème mathématique bien posé¹.

Dans l'optique de construire dans le chapitre suivant un algorithme numérique robuste, résolvant le système d'équations régissant l'écoulement dépendant du temps et incompressible d'un fluide viscoélastique, il convient de connaître la structure mathématique d'un tel système d'équations et de déterminer le type d'équation auquel il appartient. Les premières classifications en termes du type d'équation des problèmes de fluides viscoélastiques ont été réalisées par les pionniers : Joseph and Saut [108], Joseph [109, 110], Joseph et al. [111] et Renardy [180]. Récemment, ces classifications ont été étudiées et généralisées aux fluides viscoélastiques de la classe d'Oldroyd par Gerritsma et al. [72, p.33], Gerritsma and Phillips [71, 73], Owens and Phillips [165] et Sibley [198, chap. 2]. La notion du type d'équation permet d'obtenir des indications à propos de la nature du système d'équations gouvernant à partir de la réponse des équations à une petite perturbation sous forme d'onde. En somme, si l'onde imposée est seulement convectée avec une vitesse finie dans le domaine de calcul, l'équation aux dérivées partielles est alors dite hyperbolique. Sinon, si l'onde est amortie par l'équation le type d'équation est dit parabolique. Finalement, si la vitesse de propagation de l'onde est infinie (non-réelle) le type d'équations est de type elliptique.

Dans ce chapitre, nous présentons d'abord le système d'équations gouvernant l'écoulement des fluides viscoélastiques affines et non-affines et nous introduisons ensuite la forme adimensionnelle adoptée pour analyser et résoudre le système d'équations gouvernant. Par suite, nous résumons l'analyse du type d'équation, basée sur la méthode Fourier, des modèles viscoélastiques de la classe Oldroyd d'une façon générale, montrons la nature hyperbolique des systèmes d'équations monodimensionnels et homogènes formé par l'équation de la quantité de mouvement et l'équation constitutive et donnons la condition hyperbolicité de tels système d'équations. Finalement, nous présentons les conditions initiales et les conditions aux limites appropriées pour chacune des parties constituant le système d'équations gouvernant.

2.1 Modèle mathématique

Nous considérons un écoulement incompressible, dépendant du temps et anisotherme d'un fluide polymérique viscoélastique dans un domaine Ω de bord $\partial\Omega$. Cet écoulement est décrit par les équations de conservation de la masse, de l'énergie

1. Un problème est dit bien posé seulement si les conditions d'existence d'une solution du problème, d'unicité de cette solution et stabilité par rapport aux données du problème, sont réunies, Renardy [180].

et de la quantité de mouvement qui contient le tenseur des extra-contraintes :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.1a)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (2.1b)$$

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T \right) = k \Delta T + \mathbf{T} : \nabla \mathbf{u} \quad (2.1c)$$

où $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^\top$ est le vecteur vitesse, p est pression représentant la partie isotopique du tenseur des contraintes totales, \mathbf{T} est le tenseur des extra-contraintes et T la température, ρ est la masse volumique, k est la conductivité thermique et C_p est la chaleur massique.

Le tenseur des extra-contraintes \mathbf{T} est exprimé, dans le cadre de notre travail, comme la somme de la contribution newtonienne du solvant $2\eta_s \mathbf{D}$ et de la contribution polymérique $\boldsymbol{\tau}$,

$$\mathbf{T} = 2\eta_s \mathbf{D} + \boldsymbol{\tau} \quad (2.2)$$

où \mathbf{D} est le tenseur du taux de déformation et η_s est la viscosité du solvant. La relation entre le tenseur de l'extra-contrainte polymérique $\boldsymbol{\tau}$ et le tenseur du taux de déformation est donnée par une équation constitutive,

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} - \frac{\eta_p}{\lambda} 2\mathbf{D} = -\mathbf{H}(\boldsymbol{\tau}) \quad (2.3)$$

où le symbole (∇) indique la dérivée convectée supérieure qui s'écrit comme suit :

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\tau} - \nabla \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u}^\top \quad (2.4)$$

où η_p représente la viscosité polymérique à taux de cisaillement nul, λ est le temps de relaxation du fluide et le terme \mathbf{H} permet de regrouper plusieurs modèles rhéologiques, à savoir, UCM, Oldroyd-B, Giesekus, SPTT, Johnson-Segalman et PTT, (voir la section 1.10). La fonction tensorielle \mathbf{H} s'écrit,

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\tau}) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \boldsymbol{\tau} & \text{Oldroyd-B [154] et UCM } \eta_s = 0 \\ \frac{1}{\lambda} \boldsymbol{\tau} + \frac{\alpha}{\eta_p} \boldsymbol{\tau}^2 & \text{Giesekus [76]} \\ \frac{1}{\lambda} \boldsymbol{\tau} + \frac{\epsilon}{\eta_p} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau} & \text{SPTT [172, 216]} \\ \frac{1}{\lambda} \boldsymbol{\tau} + \frac{\epsilon}{\eta_p} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau} + \zeta (\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}) & \text{PTT [172, 216] et JS [107] avec } \epsilon = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

A l'exception des modèles PTT et Johnson-Segalman, le paramètre de glissement ζ est nul pour tous les autres modèles, c'est-à-dire pour les modèles Oldroyd-B, Giesekus et SPTT. Notons que la dérivée objective de Gordon Schowalter se réduit à la dérivée convectée supérieure (voir les sections 1.5.1 et A.4).

Par ailleurs, le dernier terme du second membre de l'équation de l'énergie (2.1c) représente la dissipation,

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \nabla \mathbf{u} &= 2\eta_s \mathbf{D} : \nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} \\ &= \eta_s \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right] + \tau_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \tau_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \tau_{33} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ &\quad + \tau_{12} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \tau_{13} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + \tau_{23} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

qui a une origine newtonienne du solvant et une origine polymérique du tenseur de l'extra-contrainte.

2.2 Adimensionnement des équations gouvernantes

Afin d'introduire la version adimensionnelle du système d'équations gouvernant, nous considérons les échelles caractéristiques de longueur L , de vitesse U et l'écart de température $\Delta T = T_0 - T_1$. Dans le cadre de l'écoulement dans une conduite, sous la condition aux limites thermique de température imposée, qui sera traité dans le chapitre 6, T_0 est la température de référence (température à l'entrée du canal) et T_1 est la température de la paroi :

$$\bar{t} = t \frac{U}{L}, \quad \bar{\nabla} = L \nabla, \quad \bar{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho U^2}, \quad \bar{T} = \frac{T - T_0}{\Delta T}, \quad \bar{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{\rho U^2}. \quad (2.7)$$

Pour alléger l'écriture du système d'équations, nous omettons dans la suite la barre au-dessus des variables adimensionnées. Les équations de conservations de la masse (2.1a), de la quantité de mouvement (2.1b), de l'énergie (2.1c), s'écrivent sous forme adimensionnelle comme suit,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.8a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = -\nabla p + \frac{\beta}{\mathbf{Re}} \Delta \mathbf{u} \quad (2.8b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \frac{1}{\mathbf{Re Pr}} \Delta T + 2 \frac{\mathbf{Ec}}{\mathbf{Re}} \beta \mathbf{D} : \nabla \mathbf{u} + \mathbf{Ec} \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} \quad (2.8c)$$

et l'équation constitutive (2.3) s'exprime sous forme adimensionnée,

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} - \frac{1 - \beta}{\mathbf{Ma}^2} 2\mathbf{D} = -\mathbf{H}(\boldsymbol{\tau}) \quad (2.9)$$

avec,

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\tau}) = \begin{cases} \frac{1}{\mathbf{We}} \boldsymbol{\tau} & \text{Oldroyd-B et UCM } \eta_s = 0 \\ \frac{1}{\mathbf{We}} \boldsymbol{\tau} + \alpha \frac{\mathbf{Re}}{1 - \beta} \boldsymbol{\tau}^2 & \text{Giesekus} \\ \frac{1}{\mathbf{We}} \boldsymbol{\tau} + \epsilon \frac{\mathbf{Re}}{1 - \beta} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau} & \text{SPTT} \\ \frac{1}{\mathbf{We}} \boldsymbol{\tau} + \epsilon \frac{\mathbf{Re}}{1 - \beta} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau} - \zeta (\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}) & \text{PTT et JS } \epsilon = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Un certain nombre de paramètres sans dimension apparaissent : β , \mathbf{Re} , \mathbf{Pr} , \mathbf{Ec} et \mathbf{We} . Le paramètre $\beta = \frac{\eta_s}{\eta_0}$ représente le rapport entre la viscosité du solvant η_s et la viscosité totale à taux de cisaillement nul $\eta_0 = \eta_s + \eta_p$. Le nombre de Reynolds basé sur la viscosité totale η_0 , $\mathbf{Re} = \frac{\rho U L}{\eta_0}$ représente le rapport entre l'inertie et le cisaillement visqueux, le nombre de Prandtl $\mathbf{Pr} = \frac{\eta_0 c_p}{k}$ désigne le rapport entre la viscosité cinématique et la diffusivité thermique, le nombre d'Eckert $\mathbf{Ec} = \frac{U^2}{\Delta T c_p}$ indique la variation de l'énergie interne dans le fluide. Usuellement, le rapport des forces élastiques et des forces visqueuses polymériques définit le nombre de Weissenberg, Agassant et al. [6, p.88]. Pour un écoulement simple, la force élastique dominante est la première différence des contraintes normales $N_1 = \tau_{11} - \tau_{22}$ et la force visqueuse polymérique est liée au cisaillement polymérique τ_{12} ,

$$\mathbf{We} = \frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{2\tau_{12}} \quad (2.11)$$

Les modèles rhéologiques de type Oldroyd-B, Giesekus, PTT, prédisent une première différence des contraintes normales proportionnelle à $N_1 \sim \lambda \eta_p \dot{\gamma}^2$ et une contrainte de cisaillement $\tau_{12} \sim \eta_p \dot{\gamma}$. Dans ce cas, le nombre de Weissenberg peut être interprété comme une mesure du comportement viscoélastique par rapport au comportement d'un fluide Newtonien. Il est donné par le produit du temps de relaxation λ caractérisant la réponse non-linéaire du fluide et le taux de cisaillement moyen représentant l'inverse du temps caractéristique de l'écoulement, $\dot{\gamma} = \frac{U}{L}$, le nombre de Weissenberg se réduit à :

$$\mathbf{We} = \lambda \dot{\gamma} = \lambda \frac{U}{L} \quad (2.12)$$

Les solutions polymériques diluées possèdent un temps de relaxation très faible et par conséquent un nombre de Weissenberg proche de zero. À l'opposé, les polymères à l'état enchevêtré et les solutions de polymère concentrées se caractérisent par un temps de relaxation élevé et souvent par un grand nombre de Weissenberg. D'autre part, le rapport du nombre de Weissenberg et du nombre de Reynolds représente le nombre élastique $E = \frac{We}{Re}$, et la racine carrée de leur produit $Ma = \sqrt{Re We}$ est le nombre de Mach élastique. Ce dernier représente le rapport entre la vitesse caractéristique du fluide et la vitesse de propagation de l'onde de déformation ou de l'onde de cisaillement élastique $\sqrt{\frac{\eta}{\rho\lambda}}$.

2.3 Classification du système d'équations

La première classification, en termes du type d'équation, du système d'équations régissant les problèmes d'écoulements viscoélastiques bidimensionnels décrits par une équation constitutive de la classe d'Oldroyd-B a été établie par Joseph and Saut [108], Joseph [109, 110], Joseph et al. [111] autant pour des problèmes à l'état stationnaire que à l'état instationnaire, ce qui a soulevé l'importance de reconnaître le type de système d'équations régissant.

Les principales étapes dans l'analyse mathématique d'un système d'équations aux dérivées partielles tel que le système d'équation (2.8)–(2.9) sont la classification en termes du type d'équation (elliptique, parabolique, hyperbolique, mixte) et l'étude du caractère évolutionnaire du système d'équations au sens d'Hadamard, c'est-à-dire la continuité de la solution à l'égard des conditions aux initiales Owens and Phillips [165, chp. 3]. D'un point de vue numérique, la classification permet l'obtention d'importantes informations qui sont essentielles non seulement pour développer, construire et appliquer des méthodes de discrétisations numériques appropriées à la nature du systèmes d'équations, mais aussi pour déterminer les conditions aux limites et les conditions initiales nécessaires pour obtenir d'un problème bien posé (Renardy [180, chap. 9]).

Pour les problèmes indépendants du temps tels que l'écoulement de Stokes, la conduction thermique, l'écoulement laminaire d'un fluide visqueux, le problème d'élasticité, etc., il est connu qu'ils constituent des systèmes d'équations elliptiques (voir Gerritsma et al. [72, chap. 3, p. 35]). Par exemple, le problème de diffusion d'un scalaire ϕ en régime stationnaire, $D\Delta\phi + f = 0$ avec D le coefficient de diffusion et f comme terme source, est du type elliptique et nécessite des conditions aux limites sur toutes les frontières du domaine (voir Huilgol and Phan-Thien [100, chap. 6, p.386 et p.387] ou encore Renardy [180, chap. 9, p.80]). Par ailleurs, à l'opposé des problèmes indépendants du temps, les problèmes instationnaires engendrent des systèmes d'équations soit du type paraboliques soit du type hyperboliques. En effet, les problèmes à caractère dissipatif résultent souvent des systèmes d'équations paraboliques et ils deviennent elliptiques à l'état stationnaire. Dans ce cas, la solution du système d'équations se propage dans le temps et se diffuse dans l'espace : l'équation de diffusion en régime instationnaire, $\frac{\partial\phi}{\partial t} = D\Delta\phi + f$ en est un exemple. De l'autre côté, l'équation de convection pure $\frac{\partial\phi}{\partial t} = a\frac{\partial\phi}{\partial x}$ avec a comme vitesse d'advection, au même titre que l'équation d'onde, est du type hyperbolique (Huilgol and Phan-Thien [100, chap. 6, p.386]). Les systèmes d'équations du type hyperbolique se caractérisent par l'existence d'un certain nombre de vitesses caractéristiques réelles le long desquelles les variables caractéristiques évoluent. La solution de ce type de système d'équations nécessite la prescription des conditions initiales et des conditions aux limites pour les quantités caractéristiques rentrantes dans le domaine. Du fait que les équations de convection pure sont dépourvues de tout mécanisme dissipatif, toutes les discontinuités dans la solution initiale ou sur les bords seront préservées le long des caractéristiques. Dans ce sens, les problèmes elliptiques peuvent être considérés comme des problèmes hyperboliques avec des vitesses de propagation des ondes infinies et l'évolution d'une variable elliptique à l'intérieur d'un domaine est directement liée à sa valeur au bord.

Les équations de Navier-Stokes régissant les écoulements isothermes et incompressibles de

fluides Newtoniens sont principalement du type : doublement elliptique à l'état stationnaire et essentiellement elliptique–parabolique en régime dépendant du temps (voir Huilgol and Phan-Thien [100, chap. 7, p.404]). La partie parabolique des équations de Navier-Stokes est issue de la diffusion moléculaire Newtonienne évolutive dans le temps, alors que la partie elliptique provient de la contrainte d'incompressibilité (2.8a) qui est vérifiée à tout instant $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, ce qui implique $\partial(\nabla \cdot \mathbf{u})/\partial t = 0$. L'équation de la quantité de mouvement (2.8b) peut être reformulée sous la forme suivante,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p = \mathbf{s}_u \quad (2.13)$$

avec le second membre \mathbf{s}_u contenant les autres termes. De ce point de vue, la pression p apparaît dans l'équation de la quantité de mouvement pour garantir la condition d'incompressibilité. En d'autres termes, en considérant la divergence de l'équation (2.13), on obtient l'équation de Poisson² pour la pression

$$\Delta p = \nabla \cdot \mathbf{s}_u \quad (2.14)$$

et montre le caractère elliptique des équations de Navier-Stokes. Par ailleurs, pour les écoulements incompressibles et anisothermes de fluides Newtoniens, l'ajout de l'équation de l'énergie (2.8c) ne modifie pas le type du système d'équations gouvernant. En effet, l'équation de l'énergie, qui est une équation de convection–diffusion. Cependant, elle est, essentiellement, du type elliptique à l'état stationnaire et parabolique à l'état instationnaire, le système d'équations régissant global reste du type elliptique–parabolique.

En ce qui concernent les écoulements incompressible et an-isothermes des fluides viscoélastiques polymériques, le système (2.8)–(2.9) comprend en plus de l'équation l'énergie une équation constitutive (2.9) différentielle quasi-linéaire (modèles d'UCM et d'Oldroyd-B) ou non-linéaire (modèle de Giesekus et de PTT). L'équation constitutive (2.9) est du type hyperbolique, de fait qu'elle ne comprend pas de terme de dissipation. Ainsi, le système d'équations (2.8)–(2.9)

n'est ni strictement hyperbolique ni strictement elliptique. Les sections suivantes sont consacrées à la classification du système d'équations (2.8)–(2.9) selon les travaux de Joseph and Saut [108], Joseph [110], Joseph et al. [111], Owens and Phillips [165, chp. 3], Renardy [180] et Gerritsma and Phillips [71, 73].

2.3.1 Type d'équation du système d'équations gouvernant

Deux méthodes principales peuvent être employées pour classer en termes du type d'équation le système d'équations aux dérivées partielles (2.8)–(2.9) régissant l'écoulement incompressible et isotherme d'un fluide viscoélastique. La première approche concerne la méthode des dérivées discontinues donnée par Joseph [110, chap.5] et Joseph et al. [111] dans laquelle l'évaluation du type du système d'équations est basée sur la détermination des surfaces caractéristiques. La seconde approche consiste à réécrire le système d'équations dans l'espace de transformation de Fourier et à utiliser l'analyse de stabilité d'ondes de faibles amplitudes pour évaluer le type du système d'équations. Cette méthode a été donnée initialement par Joseph [110, chap.4] et ensuite développée par Renardy [180, chap.9] et Owens and Phillips [165, chp. 3] tant pour l'étude du caractère évolutionnaire des systèmes d'équations régissant des problèmes d'écoulement de fluides viscoélastiques que pour l'analyse du type du système d'équations.

Le type du système d'équations est déterminé au moyen de la partie principale du symbole de l'opérateur différentiel global du système d'équations : le symbole peut être interprété comme la réponse du système à une solution spécifique. La solution imposée est en effet donnée sous forme d'une onde plane, Owens and Phillips [165, p.59] et Gerritsma and Phillips [73, p.526].

2. L'équation de Poisson est équivalente à l'équation de la diffusion et elle est du type elliptique.

L'analyse du type du système d'équations régissant le modèle UCM est donnée par Gerritsma and Phillips [71] et Gerritsma and Phillips [73] en utilisant la seconde méthode (transformation de Fourier). Notons que les modèles constitutifs tels que UCM et Johnson-Segalman n'incluent pas la viscosité du solvant et ne présentent donc aucune dérivée seconde du champ de vitesse. Il est possible d'étendre cette approche à d'autres modèles tels que Oldroyd-B et PTT, lorsque les dérivées secondes sont présentes dans l'équation de la quantité de mouvement (Gerritsma and Phillips [71, 73], Joseph et al. [111]). Gerritsma and Phillips [71], Owens and Phillips [165, chap.3, p.54] et Gerritsma and Phillips [73] ont réalisé des études de stabilité en 2D pour l'ensemble des variables du système d'équations, à savoir pour $\mathbf{w} = [p, u_1, u_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}]^T$.

Afin de mieux illustrer la démarche, le modèle SPTT 2D est choisi comme exemple et mis sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}\mathbf{w} = \mathbf{A}_0 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \mathbf{A}_i(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^d \mathbf{B}_i(\mathbf{w}) \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial x_i^2} - \mathbf{s}(\mathbf{w}) = 0 \quad (2.15)$$

où $\mathcal{L}(\mathbf{x}, t, \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial^2}{\partial x_i^2})$ est l'opérateur différentiel agissant sur \mathbf{w} , les matrices \mathbf{A}_i représentent les matrices des coefficients des dérivées premières, \mathbf{B}_i sont les matrices des coefficients des dérivées secondes, \mathbf{s} est la matrice contenant le terme relaxation et le terme non-linéaire régi par le paramètre ϵ du modèle SPTT. Pour une configuration 2D, les matrices \mathbf{A}_i , \mathbf{B}_i et \mathbf{s} sont les suivantes :

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & u_1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2c_1 & 0 & u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_1 & 0 & u_1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\tau_{12} & 0 & 0 & u_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & u_2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2\tau_{12} & 0 & u_2 & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & 0 & 0 & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & -2c_2 & 0 & 0 & u_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \frac{\beta}{\text{Re}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{s} = Z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec $c_i = \left(\tau_{ii} + \frac{1-\beta}{\text{Ma}^2} \right)$ et $Z = \left(\frac{1}{\text{We}} + \epsilon \frac{\text{Re}}{1-\beta} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}) \right)$.

Dans l'étude de stabilité par l'analyse de Fourier d'onde de faibles amplitudes présentée par Owens and Phillips [165, p.59], la solution supposée pour le système d'équations gouvernant est donnée sous forme d'une onde plane qui se propage dans la direction $\boldsymbol{\kappa}$,

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_0 e^{-i(\boldsymbol{\Lambda}t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x})} \quad (2.16)$$

avec $\boldsymbol{\Lambda}$ la fréquence (ou la valeur propre), $\boldsymbol{\kappa} = \kappa_1 \mathbf{e}_1 + \kappa_2 \mathbf{e}_2$ représentant le vecteur d'onde (ou la variable de Fourier) et les vecteurs \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 désignant les vecteurs unitaires suivant les directions spatiales. Cette décomposition de la solution en une combinaison linéaire d'ondes planes de forme (2.16) permet de réécrire l'opérateur différentiel linéaire agissant sur le vecteur des variables dans l'espace de la transformation de Fourier : nous écrivons en effet pour les dérivées premières $\frac{\partial}{\partial x_1} = i\kappa_1$ et $\frac{\partial}{\partial x_2} = i\kappa_2$ et pour les dérivées secondes $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} = -\kappa_1^2$ et $\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = -\kappa_2^2$. Nous transformons ainsi l'équation (2.15) en

$$i(-\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{A}_0 + \kappa_1 \mathbf{A}_1 + \kappa_2 \mathbf{A}_2) \mathbf{w}_0 + (-\kappa_1^2 \mathbf{B}_1 - \kappa_2^2 \mathbf{B}_2 + \mathbf{s}) \mathbf{w}_0 = 0 \quad (2.17)$$

et celle-ci possède une solution non-triviale \mathbf{w} dans toutes les directions $\boldsymbol{\kappa}$ si son symbole $\mathcal{L}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Lambda}, i\boldsymbol{\kappa}, -\kappa_1^2, -\kappa_2^2)$ possède un déterminant nul,

$$\det [\mathcal{L}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Lambda}, i\boldsymbol{\kappa}, -\kappa_1^2, -\kappa_2^2)] = \det [-\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{A}_0 + \kappa_1 \mathbf{A}_1 + \kappa_2 \mathbf{A}_2 - i(-\kappa_1^2 \mathbf{B}_1 - \kappa_2^2 \mathbf{B}_2 + \mathbf{s})] = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & \kappa_2 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa_1 & \nu - i \frac{\beta}{\text{Re}} (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) & 0 & -\kappa_1 & -\kappa_2 & 0 \\ \kappa_2 & 0 & \nu - i \frac{\beta}{\text{Re}} (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) & 0 & -\kappa_1 & -\kappa_2 \\ 0 & -2\kappa_1 c_1 - 2\kappa_2 \tau_{12} & 0 & \nu - iZ & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 c_2 & -\kappa_1 c_1 & 0 & \nu - iZ & 0 \\ 0 & 0 & -2\kappa_2 c_2 - 2\kappa_1 \tau_{12} & 0 & 0 & \nu - iZ \end{bmatrix} = 0 \quad (2.18)$$

où $\nu = (-\Lambda + \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{u})$.

Le calcul détaillé conduit au polynôme suivant :

$$(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) (\nu - iZ)^2 \left[\boldsymbol{\kappa}^\top \left(\boldsymbol{\tau} + \frac{1-\beta}{\text{Ma}^2} \boldsymbol{\kappa} \right) \boldsymbol{\kappa} - \left(\nu - i \frac{\beta}{\text{Re}} (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \right) (\nu - iZ) \right] = 0 \quad (2.19)$$

dont les racines réelles déterminent les caractéristiques du système d'équations régissant. La partie principale de ce polynôme (2.19) correspond au degré le plus élevé en termes de κ :

$$-i \frac{\beta}{\text{Re}} \nu^3 (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)^2 \quad (2.20)$$

Les facteurs constituant la partie principale sont donc :

- Le facteur $\nu^3 = 0$, avec la multiplicité de trois de $\nu^3 = 0$ ($\Lambda = (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{u})$ trois fois), renseigne l'existence de trois caractéristiques réelles pour lesquelles les vecteurs propres réels sont linéairement indépendants. Cette partie du système d'équations est du type hyperbolique et traduit la présence de trois grandeurs (variables) caractéristiques convectées le long des lignes de courant (Owens and Phillips [165, chap.3, p.60]).
- Le facteur $(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) = \boldsymbol{\kappa}^\top \mathbf{I} \boldsymbol{\kappa} \neq 0$ est non-nul. En effet, ce facteur apparaît deux fois dans l'équation (2.19) et traduit les parties parabolique et elliptique du système d'équations. La partie elliptique correspond au symbole de l'opérateur de Laplace résultant de la contrainte d'incompressibilité, c'est-à-dire issu de l'application de l'opérateur divergence au gradient de pression. Cette partie elliptique ne dépend pas de temps. Notons néanmoins que cette partie peut devenir totalement hyperbolique lorsque un écoulement faiblement compressible est toléré, Phelan et al. [174]. La partie parabolique, identique à celle qui intervient dans la partie principale du symbole des équations de Navier-Stokes (voir Huilgol and Phan-Thien [100, chap.7, p.404]), est associée au symbole de l'opérateur de Laplacien lié à la viscosité du solvant dans l'équation de la quantité de mouvement en régime instationnaire. Elle devient elliptique lorsque le régime stationnaire s'établit.

Notons que le facteur $\boldsymbol{\kappa}^\top \left(\boldsymbol{\tau} + \frac{1-\beta}{\text{Ma}^2} \boldsymbol{\kappa} \right) \boldsymbol{\kappa} - \nu^2$ jouant le rôle de connecteur entre l'équation de la quantité de mouvement et l'équation constitutive est lié à la propagation des ondes élastiques de cisaillement. Dans le cadre du fluide UCM, ce facteur $(\boldsymbol{\kappa}^\top \left(\boldsymbol{\tau} + \frac{1-\beta}{\text{Ma}^2} \boldsymbol{\kappa} \right) \boldsymbol{\kappa} - \nu^2)$ est associé par Joseph et al. [111] au symbole de l'équation de vorticité qui est en effet du type hyperbolique en régime dépendant de temps.   l'état stationnaire, ce facteur est à l'origine du mécanisme de changement du "type d'équation" de l'équation de vorticité dans le cadre de l'écoulement de Stokes d'un fluide UCM.

Par ailleurs, nous constatons à travers (2.20) que le terme \mathbf{s} relatif au modèle SPTT et aux modèles d'UCM et d'Oldroyd-B ($\epsilon = 0$) ne contribue pas à la partie principale du système d' quations³. Pour un fluide de Giesekus, étant donné que les contributions du terme non-linéaire du modèle ($\alpha \boldsymbol{\tau}^2$) dans l'équation constitutive ne sont pas identiques, l'expression de l'équation caractéristique résultant est plus compliquée que l'équation (2.19). Toutefois, la partie principale du symbol du système d'équations régissant le fluide de Giesekus est similaire à l'équation (2.20)

3. Comme mentionné dans le chapitre précédent, les modèles de SPTT, PTT et de Giesekus peuvent être interprétés comme une extension naturel des modèles d'Oldroyd-B et de UCM.

du fluide SPTT. Pour les modèles de PTT et JS, le terme de glissement $\zeta(\mathbf{D}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{D})$ incluant des dérivés premières participe à la partie hyperbolique et influe sur les caractéristiques réelles du système d'équation (voir Renardy [180, chap9]). De fait de la complexité de calcul induite, les termes non-linéaires et le terme de glissement seront donc exclus du système quasi-linéaire et homogène et traités dans la suite comme des termes sources.

En résumé, le système d'équations décrivant les écoulements dépendant du temps et incompressibles des fluides viscoélastiques polymériques donné par les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement associé à un modèle rhéologique comme le modèle d'Oldroyd-B, SPTT, JS, Giesekus ou encore de PTT est du type mixte : elliptique/parabolique/hyperbolique. La partie elliptique est associée à la contrainte d'incompressibilité et donc au couplage vitesse-pression. La partie parabolique est liée à la diffusion moléculaire du solvant. La partie hyperbolique résulte du couplage vitesse- $\boldsymbol{\tau}$, introduit par l'équation constitutive, se caractérise par l'existence d'un certain nombre de vitesses caractéristiques réelles qui transportent les variables caractéristiques correspondantes le long des lignes de courant et peut se manifester sous forme de propagation d'ondes de cisaillement élastiques. L'équation de l'énergie de convection-diffusion (du type parabolique), la diffusion moléculaire de la quantité de mouvement (du type parabolique) et le couplage vitesse-pression (du type elliptique pour la pression) ont été traités sans difficulté avec des méthodes classiques connues telles que la méthode des différences finies ou la méthode des volumes finis (Anderson et al. [13], Peyret and Taylor [171], Shah and Bhatti [191] et Chandrupatla and Sastri [39]) et ne posent à priori pas de difficultés. La difficulté des études numériques d'écoulements des fluides viscoélastiques réside essentiellement dans le traitement de la partie hyperbolique. La connaissance du nombre et des expressions des variables caractéristiques associées aux vitesses caractéristiques revêt donc une importance cruciale non seulement pour le choix de méthodes de discrétisation numérique mais aussi pour la prescription des variables caractéristiques aux limites.

Comme il est connu que les méthodes numériques adéquates pour des problèmes du type parabolique/elliptique induisent des oscillations numériques catastrophiques lorsque elles sont appliquées aux problèmes du type hyperbolique, il est donc nécessaire d'identifier clairement la partie hyperbolique et son domaine d'hyperbolicité pour lui appliquer un traitement numérique approprié. Afin d'isoler la partie hyperbolique et d'identifier les variables caractéristiques, nous proposons dans la section suivante une analyse de Fourier du systèmes d'équations en excluant les parties parabolique/elliptique, le terme de relaxation et les termes non-linéaires.

2.3.2 Forme quasi-linéaire et homogène du système d'équations

L'analyse réalisée dans la section précédente a montré que le type hyperbolique de l'équation constitutive s'étend à l'équation de la quantité de mouvement en raison du couplage vitesse- $\boldsymbol{\tau}$. Le caractère hyperbolique du système d'équations est à l'origine des difficultés liées à la perte de convergence et de stabilité lors de simulations numériques (Crochet et al. [47], Marchal and Crochet [143], Joseph et al. [111], Baaijens [15], Keunings [117], Owens and Phillips [165] et Webster et al. [230]). Une discrétisation numérique adéquate de la partie hyperbolique et son traitement approprié aux limites sont nécessaires.

Supposons que le champ de vecteur vitesse pour lequel la contrainte d'incompressibilité est satisfaite. Le gradient de pression qui devient un multiplicateur de Lagrange peut être considéré connu dans l'équation de la quantité de mouvement.

Nous poursuivons la réorganisation du système (2.15) en le mettant sous une forme quasi-linéaire (Joseph [110], Joseph et al. [111], Gerritsma and Phillips [71, 73] et Trebotich et al. [220]),

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_i} = \mathbf{s} \quad (2.21)$$

où $d = 1, 2, 3$ désigne la dimension du problème ou de la géométrie, le vecteur $\mathbf{w} = [u_1, u_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}]^T$ pour $d=2$ (et $\mathbf{w} = [u_1, u_2, u_3, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{22}, \tau_{23}, \tau_{33}]^T$ pour $d=3$) est le vecteur des variables primitives, les matrices carrées \mathbf{A}_i représentent les coefficients des dérivées premières dans les directions spatiales i . Le second membre \mathbf{s} regroupe le terme de diffusion moléculaire et le terme du gradient de pression pour la quantité de mouvement et $\mathbf{H}(\boldsymbol{\tau})$ regroupe le terme de relaxation et les termes non-linéaires correspondant à un modèle rhéologique (voir (2.10)),

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} -\nabla p + \frac{\beta}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u} \\ -\mathbf{H}(\boldsymbol{\tau}) \end{bmatrix}$$

En dimension 2 pour $d=2$, les matrices des coefficients des dérivées premières \mathbf{A}_1 et \mathbf{A}_2 sont les suivantes :

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} u_1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & u_1 & 0 & -1 & 0 \\ -2c_1 & 0 & u_1 & 0 & 0 \\ 0 & -c_1 & 0 & u_1 & 0 \\ 0 & -2\tau_{12} & 0 & 0 & u_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} u_2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 & -1 \\ -2\tau_{12} & 0 & u_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & 0 & 0 & u_2 & 0 \\ 0 & -2c_2 & 0 & 0 & u_2 \end{bmatrix}$$

et pour $d=3$ les matrices des coefficients des dérivées premières \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 et \mathbf{A}_3 s'écrivent :

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} u_1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2c_1 & 0 & 0 & u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_1 & 0 & 0 & u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_1 & 0 & 0 & u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\tau_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 & 0 & 0 \\ \tau_{23} & -\tau_{13} & -\tau_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\tau_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} u_2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2\tau_{12} & 0 & 0 & u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_2 & 0 & 0 & 0 & u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\tau_{23} & \tau_{13} & -\tau_{12} & 0 & 0 & u_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\tau_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -2\tau_{13} & 0 & 0 & u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\tau_{23} & -\tau_{13} & \tau_{12} & 0 & u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\tau_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & u_3 & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_3 & 0 \\ 0 & 0 & -2c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_3 \end{bmatrix}$$

avec $c_i = \left(\tau_{ii} + \frac{1-\beta}{\text{Ma}^2} \right)$ pour $i = 1, \dots, 3$.

Le membre gauche de l'équation quasi-linéaire (2.3.2), donnée sous forme non-conservative, constitue la partie hyperbolique du système (Nonaka et al. [152]). Nous proposons d'analyser les caractéristiques réelles de la forme quasi-linéaire sous sa version homogène donnée par,

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_i} = 0 \quad (2.22)$$

Pour $d = 2$ et \mathbf{w} sous forme d'une onde plane, le symbole global du système d'équations (2.22) s'écrit comme,

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, \Lambda, i\kappa) = -\Lambda \mathbf{I} + \kappa_1 \mathbf{A}_1 + \kappa_2 \mathbf{A}_2 =$$

$$\det \begin{bmatrix} \nu & 0 & -\kappa_1 & -\kappa_2 & 0 \\ 0 & \nu & 0 & -\kappa_1 & -\kappa_2 \\ -2\kappa_1 c_1 - 2\kappa_2 \tau_{12} & 0 & \nu & 0 & 0 \\ -\kappa_2 c_2 & -\kappa_1 c_1 & 0 & \nu & 0 \\ 0 & -2\kappa_2 c_2 - 2\kappa_1 \tau_{12} & 0 & 0 & \nu \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

avec $\nu = (-\Lambda + \kappa \cdot \mathbf{u})$.

De façon générale, le système d'équations quasi-linéaire et homogène (2.22) est dit évolutionnaire dans le temps t si dans toute direction de vecteur unitaire κ le problème :

$$\det [\mathcal{L}(\mathbf{w}, \Lambda, i\kappa)] = \det [-\Lambda \mathbf{A}_0 + \kappa_1 \mathbf{A}_1 + \kappa_2 \mathbf{A}_2] = 0 \quad (2.24)$$

possède uniquement des valeurs propres réelles $\Lambda \in \mathbb{R}$. Si de plus pour l'ensemble des valeurs propres, pas nécessairement distinctes, les vecteurs propres correspondant sont linéairement indépendant alors le système d'équations est purement hyperbolique (voir Anderson et al. [13, chap. 11], [133, chap. 18, p. 425] et Joseph [110]). L'équation polynomiale caractéristique résultant de (2.24) s'écrit comme suit,

$$\nu \left[\kappa^\top \left(\boldsymbol{\tau} + \frac{(1-\beta)\mathbf{I}}{\text{Ma}^2} \right) \kappa - \nu^2 \right] \left[2\kappa^\top \left(\boldsymbol{\tau} + \frac{(1-\beta)\mathbf{I}}{\text{Ma}^2} \right) \kappa - \nu^2 \right] = 0 \quad (2.25)$$

et possède les racines suivantes,

$$\nu = \left\{ 0, \sqrt{\kappa^\top \left(\boldsymbol{\tau} + \frac{(1-\beta)\mathbf{I}}{\text{Ma}^2} \right) \kappa}, -\sqrt{\kappa^\top \left(\boldsymbol{\tau} + \frac{(1-\beta)\mathbf{I}}{\text{Ma}^2} \right) \kappa}, \sqrt{2\kappa^\top \left(\boldsymbol{\tau} + \frac{(1-\beta)\mathbf{I}}{\text{Ma}^2} \right) \kappa}, -\sqrt{2\kappa^\top \left(\boldsymbol{\tau} + \frac{(1-\beta)\mathbf{I}}{\text{Ma}^2} \right) \kappa} \right\}$$

où $\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12}/2 \\ \tau_{12}/2 & \tau_{22} \end{bmatrix}$. Si le tenseur $\left(\boldsymbol{\tau} + \frac{(1-\beta)\mathbf{I}}{\text{Ma}^2} \right)$ est défini positif, il existe dans toute direction κ cinq valeurs propres réelles (cinq vitesses caractéristiques) :

$$\Lambda = \text{diag} \left\{ \kappa \cdot \mathbf{u}, \kappa \cdot \mathbf{u} + \sqrt{\kappa^\top \left(\boldsymbol{\tau} + \frac{(1-\beta)\mathbf{I}}{\text{Ma}^2} \right) \kappa}, \kappa \cdot \mathbf{u} - \sqrt{\kappa^\top \left(\boldsymbol{\tau} + \frac{(1-\beta)\mathbf{I}}{\text{Ma}^2} \right) \kappa}, \right. \\ \left. \kappa \cdot \mathbf{u} + \sqrt{2\kappa^\top \left(\boldsymbol{\tau} + \frac{(1-\beta)\mathbf{I}}{\text{Ma}^2} \right) \kappa}, \kappa \cdot \mathbf{u} - \sqrt{2\kappa^\top \left(\boldsymbol{\tau} + \frac{(1-\beta)\mathbf{I}}{\text{Ma}^2} \right) \kappa} \right\}$$

et le système d'équations quasi-linéaire et homogène (2.22) est évolutionnaire.

Notons que dans la pratique lors de l'application des méthodes numériques, la condition de l'hyperbolicité peut être étudiée directement dans les directions conventionnelles suivantes : $\kappa_1 = (1, 0)$ et $\kappa_2 = (0, 1)$ lorsque $d = 2$. Cela revient à étudier les éléments propres des matrices \mathbf{A}_i et à faire une décomposition spectrale : $\mathbf{A}_i = \mathbf{L}_i \cdot \boldsymbol{\Lambda}_i \cdot \mathbf{R}_i$ avec $i = \{1, \dots, d\}$, où les matrices

\mathbf{L}_i représentent les vecteurs propres colonne par colonne, $\mathbf{R}_i = \mathbf{L}_i^{-1}$ et Λ_i représentent les matrices diagonales des valeurs propres. Les expressions de $\mathbf{A}_i(\mathbf{w})$ pour $d = 2$ conduisent aux matrices diagonales Λ_i suivantes :

$$\Lambda_i = \text{diag}\{u_i - \sqrt{2c_i}, u_i + \sqrt{2c_i}, u_i - \sqrt{c_i}, u_i + \sqrt{c_i}, u_i\} \quad (2.26)$$

et pour $d = 3$ on obtient :

$$\Lambda_i = \text{diag}\{u_i - \sqrt{2c_i}, u_i + \sqrt{2c_i}, u_i - \sqrt{c_i}, u_i - \sqrt{c_i}, u_i + \sqrt{c_i}, u_i + \sqrt{c_i}, u_i, u_i, u_i\} \quad (2.27)$$

avec $c_i = \left(\tau_{ii} + \frac{1-\beta}{\text{Ma}^2}\right)$ pour $i = 1, \dots, 3$.

Une analyse des variables caractéristiques du système hyperbolique comme celle proposée par Thompson [217] nous permet de comprendre la signification physique des valeurs propres. Si on reprend la forme quasi-linéaire sous sa version homogène en retenant une seule direction i ,

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_i} = 0 \quad (2.28)$$

et on multiplie le système d'équations par la matrice $\mathbf{R}_i = \mathbf{L}_i^{-1}$ et en utilisant la décomposition $\mathbf{A}_i = \mathbf{L}_i \cdot \Lambda_i \cdot \mathbf{R}_i$ on obtient :

$$\mathbf{R}_i \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \Lambda_i \cdot \mathbf{R}_i \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_i} = 0 \quad (2.29)$$

Si on introduit maintenant le vecteur des variables caractéristiques dans la direction i comme $d\mathbf{v}_i = \mathbf{R}_i d\mathbf{w}$, on obtient un système de 5 équations (ou 9 équations pour $d = 3$) d'advection pure où chaque variable caractéristique est transportée dans la direction i de manière indépendante des autres :

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + \Lambda_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial (v_i)_j}{\partial t} + (\lambda_i)_j \frac{\partial (v_i)_j}{\partial x_i} = 0 \quad (2.30)$$

Notons que cette méthode d'identification des variables caractéristiques ne peut pas s'appliquer de manière identique aux problèmes à deux ou à trois dimensions, et qu'elle doit être interprétée localement car la matrice des vecteurs propres à droite \mathbf{R}_i n'est pas constante dans le domaine fluide. Par ailleurs, elle permet d'appliquer aux termes d'advection $(\lambda_i)_j \frac{\partial (v_i)_j}{\partial x_i}$ une discrétisation spatiale direction par direction avec des schémas numériques appropriés aux systèmes d'équation du type hyperbolique (voir Section 3.4.1).

En effet, chaque valeur propre $(\lambda_i)_j$ désigne la vitesse sans dimension de propagation de la j ème variable caractéristique dans la direction i de l'espace cartésien. Pour un problème bidimensionnel les valeurs propres sont toutes de multiplicité simple. En 3D, la valeur propre u_i est de multiplicité 3 et $u_i \mp \sqrt{c_i}$ sont de multiplicité 2. Pour un problème bidimensionnel, les valeurs propres obtenues sont identiques à celles obtenues par Trebotich et al. [220] et par Gerritsma et al. [72, p.44, p.45] en utilisant la méthode d'étude de stabilité à faible amplitude.

En 2D, les matrices \mathbf{L}_i et \mathbf{R}_i obtenues sont :

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \sqrt{2c_1} & -\sqrt{2c_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c_1} & -\sqrt{c_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\tau_{12}}{\sqrt{c_1}} & -\frac{2\tau_{12}}{\sqrt{c_1}} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{c_1}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{c_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{c_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{c_1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2\tau_{12}}{c_1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\tau_{12}}{\sqrt{c_2}} & -\frac{2\tau_{12}}{\sqrt{c_2}} & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{c_2} & -\sqrt{c_2} & 0 \\ \sqrt{2c_2} & -\sqrt{2c_2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}\sqrt{c_2}} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}\sqrt{c_2}} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{c_2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{c_2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2\tau_{12}}{c_2} & 0 \end{bmatrix}$$

D'après les \mathbf{R}_i ci-dessus, les quatre premières variables caractéristiques, les quatre premières composantes de $\mathbf{R}_i \mathbf{w}$, sont une combinaison de vitesse et de τ . Elles montrent ainsi le couplage ou la connexion sous forme d'onde entre l'équation de la quantité de mouvement et le modèle rhéologique. La dernière variable caractéristique, une combinaison des composantes de τ , indique la cohérence entre certaines composantes de τ dans une direction spatiale donnée.

En 3D, les \mathbf{L}_i et \mathbf{R}_i obtenues sont :

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2c_1} & -\sqrt{2c_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c_1} & 0 & -\sqrt{c_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{c_1} & 0 & -\sqrt{c_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\tau_{12}}{\sqrt{c_1}} & 0 & -\frac{2\tau_{12}}{\sqrt{c_1}} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\tau_{23}}{\sqrt{2c_1}} & \frac{\tau_{23}}{\sqrt{2c_1}} & \frac{\tau_{13}}{\sqrt{c_1}} & \frac{\tau_{12}}{\sqrt{c_1}} & -\frac{\tau_{13}}{\sqrt{c_1}} & -\frac{\tau_{12}}{\sqrt{c_1}} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\tau_{13}}{\sqrt{c_1}} & 0 & -\frac{2\tau_{13}}{\sqrt{c_1}} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}\sqrt{c_1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}\sqrt{c_1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{c_1}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{c_1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{c_1}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{c_1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2\tau_{12}}{c_1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\tau_{23}}{2c_1} & -\frac{\tau_{13}}{c_1} & -\frac{\tau_{12}}{c_1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2\tau_{13}}{c_1} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\tau_{12}}{\sqrt{c_2}} & 0 & -\frac{2\tau_{12}}{\sqrt{c_2}} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c_2} & 0 & -\sqrt{c_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\tau_{13}}{\sqrt{2c_2}} & \frac{\tau_{13}}{\sqrt{2c_2}} & \frac{\tau_{23}}{\sqrt{c_2}} & \frac{\tau_{12}}{\sqrt{c_2}} & -\frac{\tau_{23}}{\sqrt{c_2}} & -\frac{\tau_{12}}{\sqrt{c_2}} & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2c_2} & -\sqrt{2c_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{c_2} & 0 & -\sqrt{c_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\tau_{23}}{\sqrt{c_2}} & 0 & -\frac{2\tau_{23}}{\sqrt{c_2}} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}\sqrt{c_2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}\sqrt{c_2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{c_2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{c_2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{c_2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{c_2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2\tau_{12}}{c_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\tau_{23}}{c_2} & 1 & \frac{\tau_{13}}{2c_2} & -\frac{\tau_{12}}{c_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2\tau_{23}}{c_2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\tau_{13}}{\sqrt{c_3}} & 0 & -\frac{2\tau_{13}}{\sqrt{c_3}} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\tau_{12}}{\sqrt{2c_3}} & \frac{\tau_{12}}{\sqrt{2c_3}} & \frac{\tau_{23}}{\sqrt{c_3}} & \frac{\tau_{13}}{\sqrt{c_3}} & -\frac{\tau_{23}}{\sqrt{c_3}} & -\frac{\tau_{13}}{\sqrt{c_3}} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c_3} & 0 & -\sqrt{c_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\tau_{23}}{\sqrt{c_3}} & 0 & -\frac{2\tau_{23}}{\sqrt{c_3}} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{c_3} & 0 & -\sqrt{c_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2c_3} & -\sqrt{2c_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}\sqrt{c_3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}\sqrt{c_3}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{c_3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{c_3}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{c_3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{c_3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2\tau_{13}}{c_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{\tau_{23}}{c_3} & 0 & -\frac{\tau_{13}}{c_3} & \frac{\tau_{12}}{2c_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2\tau_{23}}{c_3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous constatons qu'en 3D les six premières variables caractéristique, les six premières composantes de $\mathbf{R}_i \mathbf{w}$, sont une combinaison de vitesse et de $\boldsymbol{\tau}$. Elles traduisent le couplage entre l'équation de la quantité de mouvement et le modèle rhéologique. Les trois dernières variables caractéristiques traduisent la cohérence entre les composantes de $\boldsymbol{\tau}$ dans chaque direction spatiale.

2.3.3 Condition d'hyperbolicité des modèles rhéologiques

Comme nous l'avons présenté dans le chapitre précédent (section 1.8), les modèles d'Oldroyd-B, de Giesekus et de Phan-Thien-Tanner peuvent avoir une interprétation dans le cadre des théories moléculaires des polymères. L'évolution de l'extra-contrainte polymérique d'un élément fluide macroscopique est liée au tenseur de conformation $\mathbf{c} = \langle \mathbf{q}\mathbf{q} \rangle$, considéré comme la moyenne de la distribution des configurations microscopiques des macromolécules polymériques dans cet élément fluide (\mathbf{q} représente le vecteur bout-à-bout d'une macromolécule). La relation liant l'extra-contrainte polymérique au tenseur de conformation est donnée par l'expression dite de Kramers (Bird et al. [23], Larson [126] et Dai et al. [50]). Pour les modèle d'Oldroyd-B, de Giesekus et de

Phan–Thien–Tanner, elle peut s'écrire sous forme adimensionnée suivante,

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1 - \beta}{(1 - \zeta)\mathbf{Ma}^2} (\tilde{\mathbf{c}} - \mathbf{I}), \quad \text{ou} \quad \tilde{\mathbf{c}} = \frac{(1 - \zeta)\mathbf{Ma}^2}{1 - \beta} \boldsymbol{\tau} + \mathbf{I} \quad (2.31)$$

où $\tilde{\mathbf{c}}$ est la version normalisée de \mathbf{c} (voir 1.8.3), valant \mathbf{I} à l'état d'équilibre ($t = 0$). Le tenseur de conformation est lié à l'équation d'évolution du second moment de la distribution des configurations des macromolécules. Par définition, ce tenseur est symétrique et définit positif. On remarque que les composantes normales du tenseur de conformation normalisée sont, à une constante près, équivalentes aux quantités $c_i = \left(\tau_{ii} + \frac{1 - \beta}{\mathbf{Ma}^2} \right)$ régissant la condition d'hyperbolicité du système d'équation homogène. Par conséquent, à partir de (2.31) on déduit,

$$c_i = \frac{1 - \beta}{(1 - \zeta)\mathbf{Ma}^2} \tilde{c}_{ii} = \tau_{ii} + \frac{1 - \beta}{(1 - \zeta)\mathbf{Ma}^2} \geq 0 \quad (2.32)$$

Le coefficient $\frac{1 - \beta}{(1 - \zeta)\mathbf{Ma}^2}$ étant constamment positif, on peut admettre la condition (2.32) comme condition suffisante d'hyperbolicité du système d'équations homogène. En d'autres termes, le système d'équations homogène est hyperbolique si la positivité du tenseur de conformation $\tilde{\mathbf{c}}$ est préservée pour toute déformation possible. Par ailleurs, notons que la condition (2.32) peut être plus restrictive que $c_i = \left(\tau_{ii} + \frac{1 - \beta}{\mathbf{Ma}^2} \right) \geq 0$, du fait du paramètre de glissement ζ .

Les modèles d'Oldroyd–B, de Giesekus et de PTT sont donnés en termes de tenseur de conformation, respectivement, par les équations (1.96), (1.102) et (1.132). La loi constitutive générique regroupant ces trois modèles (2.9) en fonction du tenseur de conformation est donnée par Larson [126, p.158, p.171], Hulsen [102], et Beris et al. [21, p.277] et récemment par Niethammer et al. [151] :

$$\overset{\square}{\tilde{\mathbf{c}}} = \frac{1}{\mathbf{We}} \mathcal{P}(\tilde{\mathbf{c}}) \quad (2.33)$$

où $\mathcal{P}(\tilde{\mathbf{c}})$ est une fonction réelle qui satisfait le principe d'objectivité, c'est-à-dire l'invariance par changement de référentiel et $\left(\overset{\square}{\cdot} \right)$ représente la dérivée de Gordon–Schowalter. Selon Rivlin [182] et Rivlin and Ericksen [183], toute fonction réelle isotrope peut s'écrire sous la forme suivante,

$$\mathcal{P}(\tilde{\mathbf{c}}) = g_1 \mathbf{I} + g_2 \tilde{\mathbf{c}} + g_3 \tilde{\mathbf{c}}^2 \quad (2.34)$$

où les fonctions scalaires $g_0(\tilde{\mathbf{c}})$, $g_1(\tilde{\mathbf{c}})$ et $g_3(\tilde{\mathbf{c}})$ sont données en fonction des invariants principaux du tenseur de conformation,

$$I_1 = \text{tr}(\tilde{\mathbf{c}}) = \tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{22} + \tilde{c}_{33}, \quad I_2 = \tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22} + \tilde{c}_{22}\tilde{c}_{33} + \tilde{c}_{33}\tilde{c}_{11}, \quad I_3 = \det(\tilde{\mathbf{c}}) = \tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22}\tilde{c}_{33} \quad (2.35)$$

Pour tout modèle sous la forme de l'équation (2.33), Hulsen [102] a montré que $g_1(\tilde{\mathbf{c}}) > 0$ est une condition suffisante pour laquelle le tenseur de conformation, $\tilde{\mathbf{c}}$, s'il est positif à l'instant initiale, reste positif pour $t > 0$. Nous donnons ci-dessous, suivant le théorème de Hulsen [102] (voir aussi Beris et al. [21, p.277]), l'expression de la fonction $\mathcal{P}(\tilde{\mathbf{c}})$ des modèles d'Oldroyd–B, de Giesekus et de PTT et les conditions suffisantes pour garantir la positivité du tenseur de conformation.

Modèle d'Oldroyd–B :

Pour le modèle d'Oldroyd–B le paramètre du glissement $\zeta = 0$, la dérivée de Gordon–Schowalter du tenseur de conformation $\overset{\square}{\tilde{\mathbf{c}}}$ se réduit à la dérivée convectée supérieure $\overset{\nabla}{\tilde{\mathbf{c}}}$. En termes du tenseur de conformation, le modèle d'Oldroyd–B (donné par (1.96)), s'écrit,

$$\overset{\nabla}{\tilde{\mathbf{c}}} = \frac{1}{\mathbf{We}} \mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{We}} \tilde{\mathbf{c}} \quad (2.36)$$

Les fonctions scalaires g_1, g_2 et g_3 de l'équation (2.34) sont alors $g_1 = \frac{1}{\text{We}}$, $g_2 = -\frac{1}{\text{We}}$ et $g_3 = 0$. Comme le nombre de Weissenberg $\text{We} > 0$, $g_1 = \frac{1}{\text{We}} > 0$, par conséquent le modèle d'Oldroyd-B conduit à un tenseur de conformation défini positif.

Modèle de Giesekus :

De même que le modèle d'Oldroyd-B, le paramètre de glissement est également nul $\xi = 0$ pour le modèle de Giesekus. Le modèle de Giesekus est donné par (1.102) et s'écrit comme suit,

$$\overset{\nabla}{\tilde{\mathbf{c}}} = -\frac{1}{\text{We}}(\tilde{\mathbf{c}} - \mathbf{I}) - \frac{\alpha}{\text{We}}(\tilde{\mathbf{c}} - \mathbf{I})^2 \quad (2.37)$$

$$= \frac{1-\alpha}{\text{We}}\mathbf{I} - \frac{1-2\alpha}{\text{We}}\tilde{\mathbf{c}} - \frac{\alpha}{\text{We}}\tilde{\mathbf{c}}^2 \quad (2.38)$$

On identifie les fonctions scalaires suivantes : $g_1 = \frac{1-\alpha}{\text{We}}$, $g_2 = -\frac{1-2\alpha}{\text{We}}$ et $g_3 = \frac{\alpha}{\text{We}}$ et on conclut que le modèle de Giesekus engendre un tenseur de conformation défini positif si $g_1 = \frac{1-\alpha}{\text{We}} > 0$, i.e., lorsque $\alpha < 1$.

Modèle de Phan-Thien-Tanner :

Pour le modèle de PTT le paramètre du glissement est non nul, $\xi \in [0, 2]$. Le modèle PTT donné par (1.132) s'écrit comme suit,

$$\overset{\square}{\tilde{\mathbf{c}}} = \frac{1}{\text{We}}\mathcal{P}(\text{tr}(\tilde{\mathbf{c}}))\mathbf{I} - \frac{1}{\text{We}}\mathcal{P}(\text{tr}(\tilde{\mathbf{c}}))\tilde{\mathbf{c}} \quad (2.39)$$

La forme linéaire de la fonction $\mathcal{P}(\text{tr}(\tilde{\mathbf{c}}))$ du modèle PTT est donnée par,

$$\mathcal{P}(\text{tr}(\tilde{\mathbf{c}})) = 1 + \frac{\epsilon}{(1-\xi)}(\text{tr}(\tilde{\mathbf{c}}) - 3) \quad (2.40)$$

avec $g_1 = \frac{1}{\text{We}}\mathcal{P}(\text{tr}(\tilde{\mathbf{c}}))$ et $g_2 = -\frac{1}{\text{We}}\mathcal{P}(\text{tr}(\tilde{\mathbf{c}}))$ et $g_3 = 0$. Le modèle PTT linéaire induit un tenseur de conformation défini positif si $g_1 = \frac{1-\alpha}{\text{We}} > 0$. Cette condition est satisfaite lorsque $0 \leq \frac{\epsilon}{(1-\xi)} < \frac{1}{3}$. Pour la forme exponentielle du modèle de PTT, la fonction

$$\mathcal{P}(\text{tr}(\tilde{\mathbf{c}})) = \exp\left(\frac{\epsilon}{(1-\xi)}(\text{tr}(\tilde{\mathbf{c}}) - 3)\right) \quad (2.41)$$

est strictement positive et la condition d'hyperbolicité est assurée.

La seconde alternative pour démontrer la positivité de (2.32) consiste à examiner la version intégrale de ces modèles rhéologiques. La formulation générale sous forme intégrale est donnée récemment par Lee et al. [127, p.]. À titre d'exemple, la positivité de (2.32) est donnée par Trebotich et al. [220] pour le fluide d'Oldroyd-B et par Phelan et al. [174] et Tsai and Miller [222] dans le cadre du modèle de Giesekus.

2.4 Conditions initiales et aux limites

D'une manière générale, une résolution analytique ou numérique du système d'équations aux dérivées partielles nécessite de prescrire des conditions aux limites et de fixer des conditions initiales des variables du système. Pour un écoulement viscoélastique anisotherme gouverné par les équations (2.1a), (2.1b), (2.1c) et (2.3), les conditions aux limites et initiales sont indispensables. Les problèmes newtoniens et viscoélastiques que nous aborderons aux chapitres 5 et 6 concernent des écoulements soit dans des géométries confinées ou soit dans des conduites dotées d'une entrée et d'une sortie. Nous nous limiterons les discussions sur ces problèmes.

2.4.1 Conditions initiales

Pour un écoulement dépendant du temps d'un fluide newtonien, pour lequel le tenseur des extra-contraintes polymériques est nul, la résolution du système d'équations (2.1) en fonction du temps nécessite seulement les champs de vitesse \mathbf{u}_0 , de pression $p_0(\mathbf{x})$ et de température $T_0(\mathbf{x})$ à l'instant initial, c'est-à-dire, à l'instant $t = t_0 = 0$,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad (2.42a)$$

$$p(\mathbf{x}, t_0) = p_0(\mathbf{x}) \quad (2.42b)$$

$$T(\mathbf{x}, t_0) = T_0(\mathbf{x}) \quad (2.42c)$$

Notons que l'initialisation du champ pression n'est pas nécessaire en cas de la méthode de projection non-incrémentale car la pression initiale n'apparaît pas dans la partie parabolique de l'équation de la quantité de mouvement au premier pas de temps.

Si l'intérêt porte seulement sur la solution stationnaire, la prescription des champs initiaux \mathbf{u}_0 , $p_0(\mathbf{x})$ et $T_0(\mathbf{x})$ peut se faire de manière arbitraire.

Dans le cas d'un écoulement dépendant du temps d'un fluide polymérique viscoélastique, une condition initiale portant sur les composantes du tenseur extra-contraintes polymériques est requise

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t_0) = \boldsymbol{\tau}_0(\mathbf{x}) \quad (2.43)$$

Pour ce cas, étant donné le couplage induit par la partie hyperbolique du système d'équations, une cohérence entre la vitesse initiale et le tenseur des extra-contraintes initiales est requise par l'équation constitutive. Pour certains benchmarks ayant une solution analytique, le tenseur des extra-contraintes et la vitesse sont données analytiquement à l'instant initial. Finalement, suivant Huilgol and Phan-Thien [100, chap.7, p.404], nous admettons pour d'autres problèmes $\boldsymbol{\tau}_0 = 0$ comme condition initiale, c'est-à-dire, l'état de contrainte du fluide viscoélastique à l'instant initial est complètement relaxé.

2.4.2 Conditions aux limites

Les conditions aux limites du système d'équations sont soit du type mécanique ou du type thermique. On peut distinguer principalement les conditions aux parois solides et imperméables et les conditions d'entrée et de sortie.

Pour un écoulement incompressible, la partie parabolique associée à la diffusion de la quantité de mouvement exige la prescription de conditions aux limites pour chaque composante du vecteur vitesse sur tout le bord du domaine fluide.

La partie hyperbolique du système d'équations quant à elle, issue du modèle constitutif et de l'équation de la quantité de mouvement et associée à la propagation d'onde élastique de cisaillement, nécessite de spécifier les quantités caractéristiques entrantes dans le domaine. Lorsqu'une portion du bord de domaine est une paroi solide et imperméable, les quantités caractéristiques entrantes peuvent être reliées aux quantités caractéristiques sortantes. À l'entrée et à la sortie d'un domaine, le nombre de caractéristiques entrantes à imposer dépend du régime d'écoulement (sous-critique ou supercritique).

Concernant la partie elliptique liée à la contrainte d'incompressibilité, aucune condition aux limites de pression n'est nécessaire pour assurer la conservation de la masse et seulement une condition de compatibilité est requise sur la vitesse normale aux limites : l'intégrale surfacique de la vitesse normale au bord du domaine doit être nulle.

2.4.2.1 Conditions aux parois

Pour une paroi solide immobile et imperméable $\partial\Omega_{\text{paroi}}$ on a l'adhérence : $\mathbf{u} = 0$ ou bien

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_{\text{paroi}} \quad (2.44)$$

En cas d'une paroi mobile, les composantes de vitesse peuvent admettre des valeurs non-nulles. Ces conditions sont bien classiques de la partie parabolique.

La partie hyperbolique du système d'équations, la partie quasi-linéaire, possède des caractéristiques réelles entrantes et sortantes et requiert donc des informations supplémentaires pour l'évaluer sur les parois solides et imperméables du domaine. Plus précisément il s'agit de déterminer les caractéristiques entrantes. Étant donnée l'adhérence, le nombre de caractéristiques entrantes est égal au nombre de caractéristiques sortantes : les caractéristiques entrantes peuvent être appelées rentrantes ou rebondies. Par exemple, pour une paroi horizontale (vecteur normal $\mathbf{n} = (0, 1, 0)^\top$), seul le terme $\mathbf{A}_2 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_2}$ dans la partie hyperbolique nécessite des informations supplémentaires pour être calculé sur la paroi car les termes $\mathbf{A}_1 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_1}$ et $\mathbf{A}_3 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_3}$ en 3D seront calculés sans difficulté. Du fait de l'adhérence, les vitesses de transport des caractéristiques entrantes sont égales aux vitesses sortantes mais avec le signe opposé et les caractéristiques entrantes sont obtenues à partir de celles sortantes. Plus de détails sur l'implémentation numérique se trouvent au chapitre 3.

2.4.2.2 Conditions aux limites d'entrée et de sortie

En entrée et sortie du domaine, la partie parabolique a besoin de la prescription soit du gradient normal de pression soit de la vitesse normale. Pour une entrée $\partial\Omega_{\text{in}}$, les composantes de vitesse sont souvent connues \mathbf{u}_{in} et prescrites,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{in}} \quad \text{en } \partial\Omega_{\text{in}} \quad (2.45)$$

En sortie du domaine $\partial\Omega_{\text{out}}$, l'écoulement est souvent supposé établi et unidirectionnel et une condition de la dérivée normale nulle y est appliquée :

$$\frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u_3}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_{\text{out}} \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial \tau_{11}}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \tau_{22}}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \tau_{33}}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \tau_{12}}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \tau_{13}}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \tau_{23}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_{\text{out}} \quad (2.47)$$

La partie hyperbolique requiert aussi en entrée et sortie du domaine des informations supplémentaires pour être évaluée. En effet, les caractéristiques normales à l'entrée du domaine fluide sont principalement entrantes d'où la nécessité de les déterminer. Le nombre de caractéristiques entrantes dépend du signe des vitesses de transport, pour celles dont le produit scalaire avec le vecteur normal est négatif, des informations supplémentaires sont nécessaires. À titre d'exemple, pour une entrée normale à la direction $i = 1$ ayant le vecteur normal $\mathbf{n} = (-1, 0, 0)^\top$, les caractéristiques entrantes sont liées au terme $\mathbf{A}_1 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_1}$ et les vitesses de transport des caractéristiques, $(\lambda_1)_j$, sont respectivement u_1 , $u_1 \pm \sqrt{c_1}$ et $u_1 \pm \sqrt{2} c_1$. Lorsque $(\lambda_1)_j > 0$, les caractéristiques sont entrantes et doivent être prescrites, on parle du régime super-critique. Pour des $(\lambda_1)_j < 0$ il s'agit des caractéristiques sortantes et on appelle le régime sous-critique.

À la sortie du domaine la même démarche est poursuivie : on distingue les caractéristiques entrantes et sortantes (régimes super-critique et sous-critique) et précise celles entrantes.

2.4.2.3 Conditions aux limites thermiques

L'équation de l'énergie (2.8c) est du type parabolique et c'est une équation de convection/diffusion d'un scalaire (température) dont la résolution nécessite d'imposer sur les différentes parties

du bord de domaine des conditions aux limites thermiques. Ces conditions aux limites peuvent être du type Dirichlet portant sur la température, du type Neumann portant sur le gradient normal de température (densité de flux thermique) ou du type Fourier qui est un mélange des deux précédents. Habituellement, lorsque la température imposée est uniforme, la paroi est dite isotherme, quand le gradient normal de température est nul, la paroi est dite adiabatique.

Pour un écoulement dans un canal, diverses conditions aux limites thermiques d'intérêt académique et industriel peuvent être appliquées aux parois du canal Shah and London [192, page 20,21]. Dans le présent travail, nous retenons deux types de conditions aux limites thermiques (chapitre 6) :

— Condition isotherme du type Dirichlet,

$$T(\mathbf{x}) = T_p \quad \text{en } \partial\Omega \quad (2.48)$$

— Condition de flux thermique du type Neumann,

$$k\nabla T \cdot \mathbf{n} = q_p = -\mathbf{q}_p \cdot \mathbf{n} \quad \text{en } \partial\Omega \quad (2.49)$$

où T_p est la température pariétale, \mathbf{q}_p représente le vecteur densité de flux de chaleur, q_p représente sa composante normale et \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à la surface d'une paroi.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons d'abord présenté le système d'équations régissant les écoulements dépendant de temps, incompressibles et anisothermes des fluides viscoélastiques affines tels que le modèle d'Oldroyd-B, et non-affines tels que le modèle de Giesekus et le modèle de PTT. Ensuite, la version adimensionnelle du système d'équations régissant est introduite.

Dans l'objectif de développer une approche numérique appropriée à la structure mathématique du système d'équations régissant les écoulements de fluides viscoélastiques, nous proposons une analyse de Fourier pour évaluer le type d'équation du système gouvernant en configuration 2D. La partie principale du symbol du système d'équations indique un type mixte, c'est-à-dire du type ellipto/parabolo/hyperbolique. La partie elliptique est liée à la contrainte d'incompressibilité (couplage vitesse-pression) et la partie parabolique est liée à l'effet de la diffusion moléculaire du solvant. La partie hyperbolique indiquée par la partie principale du symbol du système d'équations est liée en 2D à trois caractéristiques réelles.

Afin d'identifier clairement la partie hyperbolique et ses caractéristiques réelles, nous proposons de réécrire le système d'équations régissant sous une forme quasi-linéaire et homogène en excluant la partie elliptique, la partie parabolique, les termes non-linéaires et le terme de relaxation et gardant l'équation de la quantité de mouvement et de l'équation constitutive. L'analyse de Fourier montre que le système quasi-linéaire et homogène est du type purement hyperbolique car le symbole du système admet cinq valeurs propres réelles si le tenseur $\left(\boldsymbol{\tau} + \frac{(1-\beta)\mathbf{I}}{\text{Ma}^2}\right)$ est défini positif. En pratique l'hyperbolicité du système quasi-linéaire peut être étudiée en coordonnées cartésiennes direction par direction. Cela revient à étudier les éléments propres des matrices \mathbf{A}_i et l'hyperbolicité est assurée si les valeurs propres de ces matrices sont réelles.

D'une façon générale, pour les modèles d'Oldroyd-B, le modèle de Giesekus et le modèle de PTT, la condition d'hyperbolicité est donnée par la condition de positivité du tenseur de conformation ou de son équivalent $c_i = \frac{1-\beta}{(1-\xi)\text{Ma}^2} \tilde{c}_{ii} \geq 0$. En termes de contrainte, la condition d'hyperbolicité implique que les contraintes normales ne dépassent pas une certaine valeur limite : $\tau_{ii} \geq -\frac{1-\beta}{(1-\xi)\text{Ma}^2}$. Enfin nous avons montré que le modèle de d'Oldroyd-B est hyperbolique sans

condition, que le modèle de Giesekus l'est si $\alpha < 1$ et que le modèle de PTT linéaire est hyperbolique si $0 \leq \frac{\epsilon}{(1-\xi)} < \frac{1}{3}$.

Étant donné que le couplage vitesse- τ introduit par les modèles rhéologiques est du type hyperbolique et nécessite des schémas numériques différents de ceux utilisés classiquement pour résoudre les équations de Navier-Stokes incompressibles, représenter correctement la partie hyperbolique et assurer la cohérence entre les parties elliptique, parabolique et hyperbolique constituent la difficulté principale des études numériques d'écoulements viscoélastiques auxquels nous nous intéressons dans le chapitre suivant.

CHAPITRE 3

Méthodes Numériques

Sommaire

2.1	Modèle mathématique	63
2.2	Adimensionnement des équations gouvernantes	65
2.3	Classification du système d'équations	66
2.3.1	Type d'équation du système d'équations gouvernant.....	67
2.3.2	Forme quasi-linéaire et homogène du système d'équations	70
2.3.3	Condition d'hyperbolicité des modèles rhéologiques	75
2.4	Conditions initiales et aux limites	77
2.4.1	Conditions initiales.....	78
2.4.2	Conditions aux limites.....	78
2.4.2.1	Conditions aux parois	79
2.4.2.2	Conditions aux limites d'entrée et de sortie.....	79
2.4.2.3	Conditions aux limites thermiques	79
2.5	Conclusion	80

Ce chapitre traite la discrétisation spatio-temporelle du système d'équations gouvernant les écoulements dépendant du temps, incompressibles et anisothermes des fluides viscoélastiques polymériques décrits par les modèles rhéologiques du type d'Oldroyd-B, Giesekus, SPTT et PTT. Avant d'exposer les étapes nécessaires pour l'obtention d'une solution numérique stable et convergente du système d'équations gouvernant en fonction des différents paramètres rhéologiques, nous présentons une revue bibliographique retraçant les techniques numériques existantes et les difficultés liées à la résolution numérique des équations gouvernant l'écoulement des fluides viscoélastiques.

Nous choisissons ensuite de présenter les schémas temporels utilisés pour discrétiser en temps le système d'équations gouvernant. Par la suite, le traitement du couplage vitesse-pression retenu est introduit, la méthode de projection semi-implicite du type Chorin–Temam est présentée avant d'aborder les discrétisations spatiales de la partie hyperbolique du système d'équations gouvernant et des autres termes apparaissant dans les équations. Finalement, la discrétisation spatiale des opérateurs différentiels et le traitement des conditions aux limites sont donnés. Notons bien que le traitement du couplage vitesse-pression est bien classique et le traitement de la partie quasi-linéaire, exemptée de toute méthode de stabilisation telle que SPUG, EVSS, BDS, *etc* incorporant des termes supplémentaires dans le système d'équations, constitue la nouveauté du présent travail.

L'objectif du présent chapitre est de se munir d'un outil de calcul stable, convergent et capable de prédire avec précision le comportement des fluides viscoélastiques affines (UCM, Oldroyd-B, Giesekus, SPTT) et non-affines (JS, PTT) en écoulement transitoire, incompressible et anisotherme dans des géométries multidimensionnelles.

3.1 Méthodes numériques pour les fluides viscoélastiques

Les prémices des simulations numériques de problème d'écoulement de fluides complexes ont été concrétisées au début des années soixante-dix à la faveur de l'adaptation des méthodes numériques connues à l'époque pour résoudre les équations de Navier-Stokes régissant les écoulements de fluides newtoniens incompressibles. Dès cette époque des formulations discrètes basées sur des méthodes des éléments finis ou encore des méthodes standard des différences finies ont été développées par Perera and Walters [168], Beris et al. [20], Keunings [116], et Crochet et al. [47]. Particulièrement pour les fluides non-newtoniens dotés d'une viscosité dépendante du taux de déformation (comportement rhéofluidifiant ou rhéoépaississant, section 1.4.3), des formulations discrètes précises ont été proposées par Crochet et al. [47] et Marchal and Crochet [143]. Cependant, étant donné que la formulation mathématique se restreignait aux fluides inélastiques qui n'incorporaient pas de phénomènes liés par exemple aux effets des différences des contraintes normales, les méthodes utilisées ne présentent guère d'intérêt pour les modèles rhéologiques fidèles au comportement des fluides viscoélastiques.

Pour les modèles rhéologiques dérivant de la théorie de la viscoélasticité de Rivlin–Ericksen, sous l'hypothèse de fluide faiblement élastique, des modélisations numériques du comportement viscoélastique décrit par le modèle CEF (section 1.6) ont été également développées par Crochet et al. [47]. Les techniques proposées dans ce contexte ne contribuent pas davantage à la modélisation numérique des problèmes de fluide viscoélastique dont le comportement rhéologique est donné par une équation différentielle de la classe Oldroyd. En effet, les méthodes de discrétisation telles que les différences finies et les éléments finis ont été initialement conçues pour résoudre les EDPs du type elliptique. Pour les problèmes de convection-diffusion et particulièrement dans le cas des écoulements viscoélastiques et lorsque les effets élastiques deviennent dominants, les méthodes de discrétisation classiques peuvent devenir instables et ne sont donc pas pertinentes pour la résolution des problèmes des fluides viscoélastiques décrits rhéologiquement par des modèles tels que Oldroyd-B, Giesekus ou PTT.

En effet, dès l'aube des années quatre-vingts la communauté scientifique (Crochet et al. [47], Marchal and Crochet [143], Joseph [109], Joseph et al. [111], et Keunings [116]) a reconnu le problème de haut nombre de Weissenberg (*high Weissenberg number problem*) comme la principale difficulté pour la simulation numérique des écoulements de fluides viscoélastiques du type UCM, Oldroyd-B dans des géométries non-triviales. Le problème du haut nombre de Weissenberg se manifeste pour des valeurs du nombre de Weissenberg modérément élevées via l'absence de convergence des méthodes itératives lorsque la résolution spatiale est raffinée. Keunings [116] ont montré que le nombre de Weissenberg maximal atteint était dépendant de la résolution spatiale et plus récemment plusieurs revues (Baaijens [15], Keunings [117], Owens and Phillips [165], Webster et al. [230]) ont souligné que pour la plupart des méthodes numériques le nombre maximal de Weissenberg atteint diminuait encore plus drastiquement avec le raffinement de la grille. Les difficultés liées à la perte de convergence des outils numérique ont été attribuées par de nombreux auteurs à plusieurs origines, à savoir, à l'utilisation d'équation constitutive téméraire, à l'incapacité des schémas numériques à traiter correctement les gradients raides de la solution au voisinage des singularités, ou encore à la spécification incorrecte des conditions aux limites. L'origine du mécanisme de l'instabilité demeure encore aujourd'hui inconnu. Bien que ces éléments soient plus ou moins conjecturaux à différentes échelles, Joseph [109], Joseph et al. [111], Joseph and Saut [108], et Joseph [110] assignent comme genèse aux difficultés numériques l'utilisation d'approximations numériques inappropriées pour la structure mathématique du problème résultant des limitations inexistantes au niveau théorique (analytique). Les benchmarks classiques les plus étudiés dans lesquels le problème du haut nombre de Weissenberg se manifeste sont : l'écoulement dans un canal avec une contraction 4 : 1, le problème de la cavité entraînée, l'écoulement autour d'un cylindre et l'écoulement de Poiseuille dépendant du temps, pour lesquels des solutions numériques stables et convergentes ne peuvent être obtenues que pour des nombres de Weissenberg faibles, (Walters and Webster [227], Owens and Phillips [165]).

De nombreux efforts ont été fournis pour remédier au problème du haut nombre de Weissenberg. Joseph et al. [111] proposent d'utiliser l'étude de stabilité à faible amplitude pour identifier le type de la partie principale du symbole du système d'équations. Ils démontrent notamment que l'écoulement de Stokes à l'état stationnaire du fluide d'Oldroyd-B peut produire un changement du type d'équations du système d'équations gouvernant. Par analogie aux écoulements compressibles dans lesquels, en fonction du nombre du Mach, le système d'équations passe du type elliptique au type hyperbolique (lorsque la vitesse du fluide devient supérieure à la célérité du son), Joseph et al. [111] identifient le nombre de Mach-élastique comme le paramètre régissant le changement du type d'équations du problème de Stokes à l'état stationnaire du fluide d'Oldroyd-B. Les auteurs proposent d'appliquer une méthode du type upwind pour approcher le système d'équations gouvernant en régime supercritique ($Ma > 1$), c'est-à-dire lorsque le changement de type se produit. Sous certaines conditions liées à la vitesse locale et à l'état de contraintes normales du fluide, l'équation de vorticit   à l'état stationnaire peut subir un changement de type d'équations en basculant du type elliptique au type hyperbolique. Cette situation conduit à la perte d'évolution (instabilité d'Hadamard) qui devient de plus en plus sévère en fonction de la résolution spatiale. Par suite pour le fluide UCM en écoulement de Stokes (sans inertie), Renardy [180] a montré qu'un changement de type ne pouvait pas se produire pour une telle configuration suggérant que la perte de convergence observée avec les schémas numériques traditionnels est due à des erreurs qui conduisent à un changement de type artificiel (numérique).

La nature hyperbolique des modèles rhéologiques de la classe d'Oldroyd rend nécessaire l'utilisation de techniques de discrétisation adaptées à la nature du problème. De nombreuses méthodes de stabilisation ont été développées sous ce cadre pour amortir les oscillations parasites comme par exemple la méthode SUPG (*Streamline-Upwind Petrov Galerkin*) qui a été appliquée pour la première fois pour les écoulements viscoélastiques décrits par le modèle constitutif d'Oldroyd-B par Marchal and Crochet [143] ou encore la méthode de Galerkin discontinue qui

a été introduite par Fortin and Fortin [66]. En l'absence d'un terme de diffusion dans l'équation constitutive, ces formulations variationnelles rencontrent souvent des difficultés lorsque l'élasticité du fluide est importante, plus particulièrement dans le cas du fluide UCM, (Amoreira and Oliveira [12], Chen et al. [40]). Suivant la configuration de l'écoulement (écoulement dans une contraction, cavité entraînée) pour le modèle d'Oldroyd-B, les effets viscoélastiques dominent l'effet visqueux dû à la contribution Newtonienne, dès lors des instabilités numériques parasites se manifestent. En effet, pour les équations de la quantité de mouvement, plus la contribution du terme visqueux est importante devant la contribution polymérique meilleure est la performance de la méthode numérique. En ce sens, pour stabiliser la solution numérique certaines techniques proposées visent à augmenter l'ellipticité de l'équation de la quantité de mouvement afin de ramener le problème sous la forme d'un problème elliptique, comme par exemples la formulation EVSS (*Elastic-Viscous Stress Splitting*), la formulation DEVSS (*Discret Elastic-Viscous Stress Splitting*) ou encore la méthode DEVSS-G qu'est une variante de la formulation DEVSS. La formulation EVSS repose sur un changement de variable lié au tenseur des contraintes polymériques $\Sigma = \tau - 2(1 - \beta)\mathbf{D}$. Le concept d'introduire de l'ellipticité supplémentaire dans les équations de quantité de mouvement via ce changement de variable (EVSS) a été proposé par Perera and Walters [168] et ensuite étendu aux fluides viscoélastiques par Beris et al. [20]. L'intérêt de cette méthode est fortement lié à l'opérateur de diffusion permettant de réduire le système d'équations sous la forme de problème de Poisson. L'inconvénient majeur de cette formulation est qu'elle requiert l'évaluation de la dérivée convectée supérieure du tenseur du taux de déformation, donc l'approximation des dérivées secondes des composantes du vecteur vitesse. D'autre part, Rajagopalan et al. [179] et ensuite Brown et al. [36], ont proposé d'utiliser une méthode de projection (fractionnaire) pour traiter l'inconnue supplémentaire, le tenseur du taux de déformation ou le tenseur du gradient de vitesse avec EVSS-G, comme une variable distincte. Toutefois, le changement de variable sur lequel reposent les méthodes EVSS n'est faisable que pour certaines classes d'équations constitutives.

Pour accroître le caractère elliptique de l'équation constitutive et de l'équation de la quantité de mouvement tout en évitant de manier une transformation du modèle, Guénette and Fortin [85] ont proposé la méthode DEVSS (Discret EVSS) qui consiste à introduire un terme visqueux dans les équations de la quantité de mouvement de façon discrète en ajoutant et soustrayant deux approximations numériques d'une même contribution visqueuse évaluée à deux niveaux de temps différents. Ainsi, le tenseur du taux de déformation discret inclus dans le tenseur des contraintes totales est approché par une méthode de projection et traité comme variable supplémentaire. Liu et al. [137] ont introduit la méthode DEVSS-G recourant au tenseur du gradient de vitesse utilisé dans l'équation constitutive comme inconnue supplémentaire au lieu du tenseur du taux de déformation. Toutefois, malgré ces traitements le type d'équation du modèle constitutif demeure hyperbolique, ce qui nécessite l'utilisation d'autres méthodes de stabilisation. De surplus, comme l'introduction du terme supplémentaire discrédite la solution transitoire ces méthodes ne conviennent pas aux problèmes transitoires.

Similaire à la méthode DEVSS, la méthode BDS (*Both-Sides Diffusion*) est davantage la méthode de stabilisation la plus appliquée dans le cadre de la méthode des volumes finis (Xue et al. [233, 234, 235], Mompean and Deville [147], Oliveira et al. [157], Oliveira and Pinho [156], Amoreira and Oliveira [12], Afonso et al. [5], Chen et al. [40]). La méthode BDS consiste à ajouter un terme de diffusion artificielle des deux côtés de l'équation constitutive paramétré par un coefficient de diffusion artificielle choisi de manière à satisfaire le critère de diagonale dominante. L'équation constitutive est discrétisée par la méthode des volumes finis classique où le terme supplémentaire ajouté à gauche est approché de façon implicite alors que le terme supplémentaire ajouté à droite est approché de façon explicite. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle pollue la solution transitoire et seule la solution à l'état stationnaire satisfait le système d'équations de départ (Amoreira and Oliveira [12], Chen et al. [40]). Des résultats stables et convergents ont été tou-

tefois obtenus par Xue et al. [234] pour un écoulement de fluide d'Oldroyd-B avec $We \leq 4.6$ dans une contraction 4:1 tridimensionnelle. Également dans le cadre de la méthode des volumes finis, Phillips and Williams [175] ont utilisé une méthode semi-lagrangienne pour résoudre le problème de l'écoulement du fluide Oldroyd-B dans une contraction. En régime permanent, des résultats stables et convergents ont été obtenus pour des nombres de Deborah $De \leq 2.5$. Les limitations de l'approche ont été justifiées par la nécessité d'augmenter la résolution de la grille au voisinage de la contraction pour capturer l'évolution raide des composantes du tenseur des contraintes viscoélastiques. Par suite, Alves et al. [11] ont utilisé un algorithme totalement implicite basé sur la méthode des éléments finis et traité séparément les termes de convection apparaissant dans les équations de la quantité de mouvement et l'équation constitutive par le schéma CUBISTA (*Convergent and Universally Bounded Interpolation Scheme for the Treatment of Advection*) développé par Alves et al. [9]. Alves et al. [11] ont obtenu des solutions convergentes de l'écoulement de Stokes de fluide d'Oldroyd-B dans un canal contracté avec des nombres de Deborah $De \leq 3$.

D'autres méthodes hybrides ont été développées dans l'optique de combiner l'avantage principal de la méthode des éléments finis qui est sa capacité à traiter les géométries complexes et l'avantage de la méthode des volumes finis qui réside dans le principe de satisfaire la conservation de certaines quantités physiques. Dans ce sens, Sato and Richardson [186] ont proposé un traitement hybride utilisant la méthode des éléments finis pour traiter l'équation de la quantité de mouvement et la méthode des volumes finis pour l'équation constitutive. Les termes de convection sont discrétisés par des schémas d'advection à correction de flux vérifiant la condition TVD (*Total Variation Diminishing*). Par suite, une autre approche hybride basée sur la méthode éléments-finis/volumes-finis a été proposée par Aboubacar et al. [2], Aboubacar and Webster [3], et Walters and Webster [227] pour résoudre le système d'équations gouvernant l'écoulement de Stokes de fluide d'Oldroyd-B dans une contraction 4:1. L'équation de la quantité de mouvement a été traitée par la méthode des éléments finis et le modèle d'Oldroyd-B par la méthode des volumes finis. Cette approche améliore notablement les prédictions numériques comparativement aux méthodes conventionnelles des éléments finis, des solutions stables et convergentes en régime stationnaire ont été obtenues pour des nombres de Weissenberg $De \leq 4$. La perte de stabilité pour les nombres de Weissenberg plus élevés a été attribuée par les auteurs au développement du gradient important du tenseur des contraintes autour du point de la singularité recommandant de raffiner le maillage au niveau de la singularité.

Comme discuté dans le chapitre précédent, la première classification en terme du type d'équation du système d'équations régissant les problèmes d'écoulements incompressibles associés au modèle constitutif d'Oldroyd-B a été établie par Joseph and Saut [108], Joseph [109, 110], Joseph et al. [111], ensuite par Renardy [180], et récemment par Gerritsma and Phillips [73], autant pour les écoulements dépendant du temps que pour les écoulements à l'état stationnaire, soulevant ainsi l'importance de prendre en compte le type d'équation du système d'équations régissant. Ces études ont été en effet à l'origine de plusieurs algorithmes de résolution prenant en considération le type mixte (ellipto-parabolo-hyperbolique) du système d'équations gouvernant. Les méthodes numériques pour des systèmes d'équations du type mixtes ne sont pas bien développées et les difficultés de discrétisations sont, particulièrement, liées au traitement incorrect des termes de convection. En effet, l'accumulation des erreurs de discrétisation peut occasionner l'altération de la propriété de positivité du tenseur de conformation (voir ??), bien que le tenseur de conformation soit défini positif au niveau continu (Hulsén [102], et Beris et al. [21, p.277]). La perte de positivité du tenseur de conformation peut conduire à une instabilité numérique rendant le système d'équations non évolutionnaire.

L'approche LCR (*Log-Conformation Representation*) introduite par Fattal and Kupferman [62, 63] permet d'éviter explicitement l'altération de la propriété définie positive du tenseur de conformation. Fattal and Kupferman [62, 63] ont d'abord souligné que l'un des aspects des difficultés numériques peut être lié à l'incapacité des schémas numériques, basés sur des approximations

polynomiales, à reproduire l'évolution exponentielle raide des contraintes polymériques dues au terme de déformation incluse dans la dérivée convectée supérieure. Lorsque le taux de déformation devient suffisamment important devant les termes de convection et de relaxation dans l'équation constitutive une instabilité numérique intervient. Cette instabilité est partagée par toutes les méthodes numériques standard et commune pour l'ensemble des modèles constitutifs qui satisfont le principe d'invariance par changement de référentiel d'Oldroyd (voir 1.5.1). L'approche LCR est en effet basée sur un changement de variable qui consiste à reformuler l'équation constitutive en fonction du logarithme du tenseur de conformation (symétrique et défini positif) diagonalisé afin d'anticiper le comportement exponentiel du tenseur des contraintes viscoélastiques. L'idée principale repose sur le constat que les méthodes numériques basées sur des approximations polynomiales ne peuvent pas capturer l'évolution exponentielle du tenseur de conformation, par ailleurs elles sont capables de saisir l'évolution polynomiale de son logarithme. Des résultats stables et convergents ont été obtenus pour des nombres Weissenberg ≥ 3 dans le cas de la contraction 4 : 1, les auteurs recommandent l'utilisation des maillages plus fins pour améliorer la stabilité de l'algorithme. Cette approche a été employée dans plusieurs études numériques telles que Damanik et al. [51], Afonso et al. [4], Pan and Hao [166], Afonso et al. [5], et Chen et al. [40]. L'intérêt principal de la transformation est qu'elle préserve naturellement, au niveau discret, la positivité du tenseur de conformation. Toutefois, en raison de l'apparition de l'inverse du nombre de Weissenberg la formulation proposée par Fattal and Kupferman [62, 63] la formulation devient singulière et diverge quand le nombre de Weissenberg tend vers zéro.

Diverses variantes ont été proposées pour y remédier, comme la méthode de la factorisation du tenseur de conformation SRCR *square-root-conformation representation* introduite par Balci et al. [17] et ensuite généralisée récemment dans le cadre de la méthode des volumes finis par Afonso et al. [4], et Afonso et al. [5] utilisant le schéma CUBISTA pour approcher l'équation d'advection de logarithme du tenseur de conformation. Aussi, Saramito [185] a proposé très récemment une formulation adaptable autant aux modèles viscoélastiques affines qu'aux modèles non-affines permettant au système d'équations gouvernant ellipto-parabolo-hyperbolique de recouvrer les équations de Navier-Stokes quand le nombre de Weissenberg tend vers zéro.

Dans le contexte de la méthode des différences finies, Phelan et al. [174] ont développé un algorithme numérique bidimensionnel purement hyperbolique pour l'écoulement dépendant du temps, faiblement compressible d'un fluide de Giesekus avec un rapport nul de la viscosité du solvant dans la viscosité totale. Le fait d'admettre un faible degré de compressibilité, le système d'équations gouvernant sous sa forme quasi-linéaire passe du type elliptique-hyperbolique au type purement hyperbolique ce qui permet l'application de méthode numérique spécifique aux problèmes hyperboliques. L'algorithme développé permet en effet de mieux traiter la nature complètement hyperbolique du système d'équations et, appliqué au benchmark de la cavité entraînée, des résultats stables et convergents ont été obtenus pour des nombres de Deborah $\mathbf{De} \leq 4$. Les limitations de l'approche sont liées au coût de calcul exorbitant.

Par suite, pour résoudre le système d'équations à caractère hyperbolique régissant l'écoulement incompressible du fluide d'Oldroyd-B dans un canal contracté, Trebotich et al. [220] ont réécrit l'équation constitutive sous une forme qui permet de retrouver au niveau discret les limites purement visqueuses et purement élastiques du tenseur de contrainte polymérique quand le temps de relaxation tend, respectivement, vers zéro et vers l'infini. L'équation constitutive d'Oldroyd-B est approchée avec une méthode fractionnaire où les termes de convection sont discrétisés en utilisant une méthode de Lax-Wendroff. Basée sur une méthode aux différences finies, l'implémentation proposée utilise une méthode de projection fractionnaire (prédiction-corrrection) pour imposer la contrainte d'incompressibilité. Pour la solution dépendant du temps, des résultats stables et convergents sont obtenus pour les valeurs arbitraires du nombre de Weissenberg sous la condition d'un régime sous-critique pour lequel le nombre de Mach-élastique ($\mathbf{Ma} < 1$). Les auteurs ont supposé que cette restriction du nombre de Mach-élastique est une conséquence de

l'emploi de schéma de Lax-Wendroff pour les termes de convection et ils suggèrent l'utilisation de l'approche Upwind afin de traiter les discontinuités qui pourraient apparaître.

Comme extension aux travaux de Trebotich et al. [220], Nonaka et al. [152] ont d'abord proposé de réécrire le système d'équations gouvernant sous une forme quasi-linéaire bien-posée. Ensuite une formulation conservative du système d'équations gouvernant a été introduite. Basée sur la méthode des différences finies, pour capturer la propagation des ondes élastiques la partie hyperbolique est discrétisée avec une méthode de Godunov de second ordre pour remplacer la méthode de Lax-Wendroff, engendrant une relaxation importante du nombre de CFL. Le second ordre de convergence du schéma a été démontré pour les fluides Oldroyd-B dans des géométries complexes bidimensionnelles. Récemment Tsai and Miller [222] ont adopté la formulation conservative donnée par Nonaka et al. [152] aux écoulements de fluide de Giesekus multimode. La partie hyperbolique du système d'équations est traitée avec une méthode de Godunov du deuxième ordre. Plus récemment, une formulation basée sur une méthode hybride (élément finis/différences finies) utilisant une linéarisation de Newton-Raphson a été proposée par Guaily et al. [84] pour les écoulements compressibles de fluide de Giesekus. Il a été indiqué que le nombre et le type de conditions aux limites aux frontières peuvent être déterminés sans ambiguïté à l'aide de la méthode des caractéristiques en fonction des variables caractéristiques entrantes-sortantes.

Cette synthèse montre la complexité du problème à traiter numériquement car la plupart des algorithmes ont été conçus pour des systèmes d'équations appartenant à un seul type d'une part et d'autre part les équations gouvernant les écoulements des fluides visco-élastiques sont du type mixte. En plus à des valeurs élevées du nombre de Weissenberg un traitement adéquat de la partie hyperbolique est indispensable pour disposer d'une méthode numérique stable et convergente.

Nous proposons dans ce travail de thèse une approche numérique permettant de traiter correctement la partie hyperbolique du système d'équation tout en préservant à l'échelle discrète la propriété symétrique et définie du tenseur de conformation. L'approche numérique que nous utilisons dans ce travail est basée sur une méthode aux différences finies classiques (voir Anderson et al. [13], Peyret and Taylor [171]). Au niveau temporel nous appliquons la famille de schémas d'Euler associée à des traitements semi-implicites des autres termes, ce qui est classique pour résoudre les équations de Navier-Stokes incompressibles. Au niveau spatial la partie quasi-linéaire des équations est discrétisée par des schémas décentrés appropriés d'ordre plus élevés et les autres termes sont approchés par des schémas centrés d'ordre 2.

3.2 Discrétisations temporelles

Nous rappelons que les équations sans dimension à résoudre, déjà définies dans le chapitre précédent, sont

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_i} = \mathbf{s} \quad (3.1b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \frac{1}{\text{Re Pr}} \Delta T + 2 \frac{\text{Ec}}{\text{Re}} \beta \mathbf{D} : \nabla \mathbf{u} + \text{Ec } \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} \quad (3.1c)$$

où \mathbf{w} , constitué des composantes de \mathbf{u} et $\boldsymbol{\tau}$, est le vecteur paru dans la forme quasi-linéaire de la formulation hyperbolique du problème, les matrices \mathbf{A}_i possèdent un spectre réel si $\left(\tau_{ii} + \frac{1-\beta}{\text{Ma}^2} \right) \geq 0$,

et \mathbf{s} est le terme source correspondant de \mathbf{w} ,

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} -\nabla p + \frac{\beta}{\mathbf{Re}} \Delta \mathbf{u} \\ -\mathbf{H}(\boldsymbol{\tau}) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Nous proposons de discrétiser en temps le système (3.1) par des schémas d'Euler semi-implicites comme classiquement fait pour des écoulements incompressibles : toutes les équations sont discrétisées au temps t_{n+1} à l'aide des champs connus aux temps t_n et t_{n-1} , les termes de diffusions et de relaxation, quant à eux, sont traités implicitement, le couplage vitesse-pression est traité implicitement et les autres termes sont traités explicitement.

Un schéma temporel d'ordre 1 conduit au système suivant :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} & = 0 \\ \frac{\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^n}{\Delta t} + \sum_{i=1}^d \mathbf{A}_i^n \frac{\partial \mathbf{w}^n}{\partial x_i} & = \mathbf{s}^{n+1} \\ \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) T^n & = \frac{1}{\mathbf{Re Pr}} \Delta T^{n+1} + 2 \frac{\mathbf{Ec}}{\mathbf{Re}} \beta \mathbf{D}^n : \nabla \mathbf{u}^n + \mathbf{Ec} \boldsymbol{\tau}^n : \nabla \mathbf{u}^n \end{cases} \quad (3.3)$$

avec $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ et \mathbf{s}^{n+1} détaillé pour le modèle SPTT comme suit :

$$\mathbf{s}^{n+1} = \begin{bmatrix} -\nabla p^{n+1} + \frac{\beta}{\mathbf{Re}} \Delta \mathbf{u}^{n+1} \\ -\frac{1}{\mathbf{We}} \boldsymbol{\tau}^{n+1} + \epsilon \frac{\mathbf{Re}}{1-\beta} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}^n) \boldsymbol{\tau}^n \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Ce schéma simple, facile à mettre en œuvre, est proposé pour tester des stratégies des schémas spatiaux avant de mettre en place des schémas temporels d'ordre 2.

Afin d'avoir des schémas plus précis en temps, nous proposons le schéma d'Euler d'ordre 2 suivant :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} & = 0 \\ \frac{3\mathbf{w}^{n+1} - 4\mathbf{w}^n + \mathbf{w}^{n-1}}{2\Delta t} + \sum_{i=1}^d \left(2\mathbf{A}_i^n \frac{\partial \mathbf{w}^n}{\partial x_i} - \mathbf{A}_i^{n-1} \frac{\partial \mathbf{w}^{n-1}}{\partial x_i} \right) & = \mathbf{s}^{n+1} \\ \frac{3T^{n+1} - 4T^n + T^{n-1}}{2\Delta t} + 2(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) T^n - (\mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla) T^{n-1} & = \frac{1}{\mathbf{Re Pr}} \Delta T^{n+1} + \\ 2 \frac{\mathbf{Ec}}{\mathbf{Re}} \beta (2\mathbf{D}^n : \nabla \mathbf{u}^n - \mathbf{D}^{n-1} : \nabla \mathbf{u}^{n-1}) + \mathbf{Ec} (2\boldsymbol{\tau}^n : \nabla \mathbf{u}^n - \boldsymbol{\tau}^{n-1} : \nabla \mathbf{u}^{n-1}) & \end{cases}$$

et pour le modèle SPTT, \mathbf{s}^{n+1} s'exprime comme suit :

$$\mathbf{s}^{n+1} = \begin{bmatrix} -\nabla p^{n+1} + \frac{\beta}{\mathbf{Re}} \Delta \mathbf{u}^{n+1} \\ -\frac{1}{\mathbf{We}} \boldsymbol{\tau}^{n+1} + \epsilon \frac{\mathbf{Re}}{1-\beta} (2\text{tr}(\boldsymbol{\tau}^n) \boldsymbol{\tau}^n - \text{tr}(\boldsymbol{\tau}^{n-1}) \boldsymbol{\tau}^{n-1}) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Notons que deux couplages apparaissent dans les systèmes (3.3) et (3.5) : le couplage classique entre la vitesse et la pression et le couplage entre la vitesse et l'extra-contrainte induit par la partie hyperbolique. À part ces couplages, les schémas temporels utilisés conduisent à des équations diagonales pour l'extra-contrainte et des équations de Helmholtz pour la vitesse et la température.

Si aucune difficulté n'est rencontrée pour résoudre des équations diagonales, la résolution d'une équation de Helmholtz multi-dimensionnelle est moins automatique. La méthode ADI (Alternating Direction Implicit) a été introduite par Peaceman and Rachford [167] pour la résolution de l'équation de conduction de la chaleur. Bien que cette méthode ait reçu un grand intérêt dans la littérature (Douglas and Gunn [59], Briley and McDonald [34], Quarteroni and Valli [176, chap. 2, p 37] et Peyret and Taylor [171, chap. 2, p. 66, p. 73]), nous nous proposons de factoriser l'équation de Helmholtz multi-dimensionnelle en un produit des équations mono-dimensionnelles car

son implémentation est plus simple. Prenons l'équation de l'énergie dans le système (3.5) comme exemple, nous la réécrivons de la manière suivante :

$$\frac{3}{2\Delta t} T^{n+1} - \frac{1}{\mathbf{Re Pr}} \Delta T^{n+1} = S_T \quad (3.6)$$

avec,

$$\begin{aligned} S_T = & \frac{-4T^n + T^{n-1}}{2\Delta t} - 2(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) T^n + (\mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla) T^{n-1} + \\ & 2\frac{\mathbf{Ec}}{\mathbf{Re}} \beta \left(2\mathbf{D}^n : \nabla \mathbf{u}^n - \mathbf{D}^{n-1} : \nabla \mathbf{u}^{n-1} \right) + \\ & \mathbf{Ec} (2\boldsymbol{\tau}^n : \nabla \mathbf{u}^n - \boldsymbol{\tau}^{n-1} : \nabla \mathbf{u}^{n-1}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Nous avons alors,

$$\left(I - \frac{2\Delta t}{3\mathbf{Re Pr}} \Delta \right) T^{n+1} = \frac{3}{2\Delta t} S_T \quad (3.8)$$

$$\left(I - \frac{2\Delta t}{3\mathbf{Re Pr}} \Delta \right) (T^{n+1} - T^n) = \frac{3}{2\Delta t} S_T - \left(I - \frac{2\Delta t}{3\mathbf{Re Pr}} \Delta \right) T^n \quad (3.9)$$

et donc en configuration 2D,

$$\begin{aligned} \left(I - \frac{2\Delta t}{3\mathbf{Re Pr}} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) \left(I - \frac{2\Delta t}{3\mathbf{Re Pr}} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (T^{n+1} - T^n) = & \frac{3}{2\Delta t} S_T - \\ & \left(I - \frac{2\Delta t}{3\mathbf{Re Pr}} \Delta \right) T^n + \mathcal{O}(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (3.10)$$

La factorisation permet de ne résoudre que de problèmes mono-dimensionnels et profiter des schémas numériques conduisant à des matrices en bande d'une part et d'autre part l'utilisation de la forme incrémentale de l'inconnue, $T^{n+1} - T^n$, conserve l'ordre 2 du schéma temporel initial. La même démarche a été suivie pour les autres équations de Helmholtz bi- et tri-dimensionnelles.

3.3 Traitement du couplage vitesse-pression

Nous nous proposons de traiter en premier le couplage vitesse-pression qui constitue la principale difficulté lors de la résolution numérique des équations de Navier-Stokes incompressibles. Une conséquence importante de la contrainte d'incompressibilité est que la pression perd sa valeur thermodynamique et devient une variable qui assure la divergence nulle du champ de vitesse à travers son gradient. En effet, à chaque instant, la contrainte d'incompressibilité doit être satisfaite au moyen d'un couplage implicite entre la conservation de masse et la quantité de mouvement au travers le gradient de pression qui apparaît comme un multiplicateur de Lagrange (Quarteroni and Valli [176, chap.9, chap.13] et Owens and Phillips [165, chap.6]).

Il existe différentes approches pour surmonter la difficulté due à la contrainte d'incompressibilité. La première approche consiste à utiliser des méthodes couplées tels que la méthode de compressibilité artificielle ou de pénalité (Peyret and Taylor [171, chap.6, p.144]), qui consiste à introduire dans l'équation de conservation de la masse une dérivée temporelle de la pression avec un paramètre dit de compressibilité artificielle dont le choix doit être judicieux afin de permettre la convergence de l'algorithme. Dans la même classe de méthodes couplées, on trouve en outre la méthode d'Uzawa (Quarteroni and Valli [176, chap.9, p327]) et celle de matrice d'influence qui est basée sur l'adjonction d'une équation de Poisson pour la pression (Owens and Phillips [165, chap.6, 153]). Cependant, l'inversion des systèmes linéaires de grande dimension est nécessaire et

le coût de calcul devient exorbitant pour un problème tridimensionnel. La seconde approche pour surmonter la difficulté d'incompressibilité consiste à contourner le problème en utilisant des méthodes découplées de type prédiction–correction comme la méthode de projection et la méthode de Taylor-Galerkin, (Quarteroni and Valli [176, chap.13, p441] et Owens and Phillips [165, chap.6, 155]). La méthode de projection, introduite indépendamment par Chorin [43] et Temam [215] en 1969, est une approche à pas de temps fractionnaire qui consiste à résoudre le système de départ en deux étapes successives. La première abandonne la contrainte d'incompressibilité et résout le problème de Helmholtz pour prédire un champ de vitesse *a priori* à divergence non-nulle et la seconde porte sur la résolution d'une équation de Poisson pour déterminer une correction pour le champ de vitesse.

La méthode de projection est connue pour son efficacité pour résoudre les équations de Navier-Stokes instationnaires incompressibles. Elle repose sur le théorème de décomposition de Hodge–Helmholtz d'un champ vectoriel, dans lequel un champ de vecteur \mathbf{u}^* (il s'agit du champ de vitesse dans notre cas) peut être décomposé de manière unique en une partie solénoïdale à divergence nulle $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ et en une partie irrotationnelle représentant le gradient d'une fonction d'un scalaire ϕ , c'est-à-dire,

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u} + \nabla \phi \quad (3.11)$$

Autrement dit, un champ à divergence non-nulle \mathbf{u}^* peut être corrigé par un gradient $\nabla \phi$ afin d'engendrer un champ à divergence nulle.

Nous prenons comme exemple le système (3.3) afin d'illustrer la méthode de projection pour traiter le couplage vitesse-pression. Le couplage vitesse-pression apparaissant dans le système (3.3) s'écrit :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} & = 0 \\ \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^n & = -\nabla p^{n+1} + \frac{\beta}{\mathbf{Re}} \Delta \mathbf{u}^{n+1} \end{cases} \quad (3.12)$$

La première étape, l'étape de prédiction de vitesse, consiste à calculer un champ de vitesse intermédiaire \mathbf{u}^* en ignorant d'abord la contrainte d'incompressibilité à l'aide de la pression p^* à la place de p^{n+1} (Fortin et al. [67] et Owens and Phillips [165, p.150]). Les équations gouvernant \mathbf{u}^* à résoudre s'écrivent :

$$\left(\frac{\beta}{\mathbf{Re}} \Delta - \frac{1}{\Delta t} \right) \mathbf{u}^* = \nabla p^* + \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^n - \frac{\mathbf{u}^n}{\Delta t} \quad (3.13)$$

Nous avons bien entendu $\nabla \cdot \mathbf{u}^* \neq 0$.

La deuxième étape consiste à utiliser le gradient de ϕ pour projeter le champ de vitesse prédit dans l'espace du champ de vitesse à divergence nulle. Le champ de vitesse \mathbf{u}^{n+1} est alors gouverné par

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} & = -\nabla \phi \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} & = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

En considérant la divergence de \mathbf{u}^{n+1} nulle nous obtenons l'équation de Poisson pour ϕ

$$\Delta \phi = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t} \quad (3.15)$$

La résolution de l'équation de Poisson permet d'obtenir ϕ et $\nabla \phi$, ainsi, de corriger la vitesse \mathbf{u}^* et de mettre à jour la pression :

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* + \Delta t \nabla \phi \quad (3.16)$$

En fonction du choix de p^* nous distinguons les méthodes non-incrémentale et incrémentale. En effet avec $p^* = 0$, la variable ϕ représente p^{n+1} et il s'agit de la méthode non incrémentale. Avec $p^* = p^n$, la variable ϕ représente l'incrément de la pression $p^{n+1} - p^n$ ou bien $p^{n+1} - p^n + \frac{\beta}{\text{Re}} \nabla \cdot \mathbf{u}^*$ pour une version plus évoluée et il s'agit de la méthode incrémentale.

De la même manière nous pouvons appliquer la méthode de projection au système (3.5) obtenu d'une discrétisation temporelle d'ordre 2. Nous n'entrons pas dans les détails ici, mais les lecteurs peuvent, pour une lecture approfondie, se référer aux revues données par Weinan and Liu [231], Weinan and Liu [232], Brown [35] et Guermond et al. [86] et aux références (Goda [79], Kim and Moin [120], Orszag et al. [160], Van Kan [223], Karniadakis et al. [114], Bell et al. [19], Owens and Phillips [164], Guermond and Quartapelle [87, 88], Guermond and Salgado [89] et Knikker [122]).

3.4 Discrétisations spatiales

Pour des écoulements de fluide Newtonien incompressible, il est connu que l'utilisation d'une évaluation co-localisée de la quantité de mouvement et de la conservation de la masse lors de l'application de schémas basés sur des différenciations finies centrées crée une instabilité parasite liée aux modes non physiques de pression, connue sous le nom de l'effet damier (Ferziger et al. [64, chap.7, p.164] et Owens and Phillips [165]). Le stockage co-localisé des composantes de la vitesse et de la pression est davantage adapté aux écoulements compressibles. Toutefois, associé à des méthodes spécifiques, ce type d'arrangement peut s'avérer particulièrement efficace pour les problèmes incompressibles dans des géométries complexes avec des maillages non-structurés (Ferziger et al. [64, chap.7]). Afin d'éliminer les oscillations parasites de la solution numérique, Harlow and Welch [91] furent les premiers à introduire dans le cas d'un fluide Newtonien le maillage décalé (grille MAC). Sous sa version complètement décalée, les composantes de vitesse sont évaluées séparément aux centres des faces des cellules de moment que la pression est localisée au centre des cellules. L'avantage principal de cet arrangement réside dans le fait qu'il permet un couplage fort entre les opérateurs discrets agissant sur la pression et le vecteur vitesse, de plus la composante tangentielle du vecteur au bord du domaine peut être imposée directement. Bien que l'approche décalée offre plusieurs avantages, elle induit par contre des interpolations supplémentaires nécessaires pour déterminer la pression aux centres des faces des cellules et la vitesse aux centres des cellules.

Concernant les problèmes d'écoulements incompressibles de fluide viscoélastique, l'équation de la quantité de mouvement est couplée à chaque instant non seulement à la conservation de la masse mais aussi à l'équation constitutive. Dans le cadre de la méthode des éléments finis, l'arrangement décalé du type Harlow and Welch [91] a été généralisé par Gerritsma et al. [72] pour les écoulements bidimensionnels de fluide d'Oldroyd-B en introduisant quatre points de quadrature supplémentaires localisés aux coins des cellules et dans le cadre de la méthode des volumes finis le maillage décalé a été étendu par Mompean and Deville [147] et Xue et al. [233, 234]. Les composantes normales du tenseur d'extra-contraintes polymériques sont stockées avec la pression aux centres des cellules et les composantes du cisaillement sont évaluées aux coins.

Dans le présent travail, nous préconisons que la partie hyperbolique du système d'équations gouvernant (2.3.2) et (3.1) joue le rôle de connecteur entre l'équation de quantité de mouvement et l'équation constitutive et proposons un traitement couplé. Dans cet esprit, un maillage partiellement décalé est utilisé : la partie hyperbolique, le vecteur \mathbf{w} , et la température sont définies sur un maillage et la pression et la conservation de la masse sont, pour des raisons précédemment évoquées, définies sur un maillage décalé. Supposons un domaine régulier noté par $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et délimité par un bord fermé noté $\partial\Omega$ où $d = (1, 2, 3)$ indique la dimension de l'espace. Ce domaine peut être assimilé à une cavité ou un canal bi-dimensionnel ($d=2$) ou tri-dimensionnel ($d=3$). Avec

les dimensions spatiales (L_1, \dots, L_d) de Ω dans les directions $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d)$, nous pouvons définir le maillage (grille) uniforme suivant : $(\mathbf{x}_l)_i = (i-1)\Delta x_l$ avec $\Delta x_l = L_l / (N_l - 1)$ le pas de maillage, L_l la dimension et N_l le nombre de points dans la direction \mathbf{e}_l . Le vecteur \mathbf{W} et la température sont donc définis sur les points $((x_1)_i, (x_2)_j)$ ou (i, j) en 2D et $((x_1)_i, (x_2)_j, (x_3)_k)$ ou (i, j, k) en 3D. Quant à la pression et la conservation de la masse, elles sont définies sur les points $((x_1)_{i+1/2}, (x_2)_{j+1/2})$ ou $(i + 1/2, j + 1/2)$ en 2D et $((x_1)_{i+1/2}, (x_2)_{j+1/2}, (x_3)_{k+1/2})$ ou $(i + 1/2, j + 1/2, k + 1/2)$ en 3D. La figure 3.1 illustre les maillages partiellement décalés ainsi construits en configurations 2D et 3D.

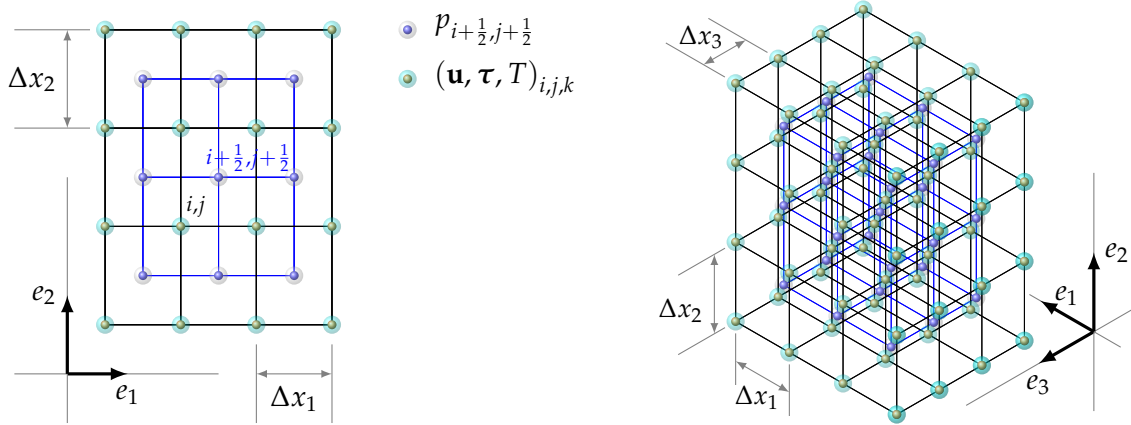


FIGURE 3.1 – Illustration d'un maillage partiellement décalé structuré et uniforme sur une partie du domaine de calcul : maillage bidimensionnel ($d = 2$) à gauche et maillage tridimensionnel ($d = 3$) à droite.

3.4.1 Discrétisation spatiale de la partie quasi-linéaire

La partie quasi-linéaire représente le couplage entre la vitesse et l'extra-contrainte introduit par l'équation constitutive de l'extra-contrainte. La vision introduite dans la section 2.3.2 est centrée sur le transport du vecteur \mathbf{w} ou l'équation de transport de \mathbf{w} afin de démontrer la nature hyperbolique des équations. Dans cette section nous présentons les méthodes numériques pour calculer les termes de transport de \mathbf{w} , à savoir, $\mathbf{A}_l \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_l}$ (voir Nonaka et al. [152], Tsai and Miller [222] pour la forme conservative du système d'équations gouvernant). Dans les schémas temporels utilisés, les termes $\mathbf{A}_l \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_l}$ sont traités explicitement en temps et doivent être calculés à partir de \mathbf{w} connu en espace.

La difficulté majeure lors de cette étape réside dans le calcul des estimations de ces termes de transport, la sélection d'une approche de discrétisation spatiale stable et convergente pour ces termes de transport est très délicate. *Stricto sensu*, de fait que les matrices des coefficients ne sont pas diagonales, les quantités transportées ne sont pas clairement définies ce qui rend l'advection du vecteur des variables \mathbf{w} mal définie. Pour calculer les contributions des termes de transport, nous proposons dans le présent travail une approche basée sur la méthode des caractéristiques.

Dans la section 2.3.2, on a montré que \mathbf{A}_l est diagonalisable ($\mathbf{A}_l = \mathbf{L}_l \cdot \mathbf{\Lambda}_l \cdot \mathbf{R}_l$) et que \mathbf{A}_l a un spectre réel si $\tau_{ll} + (1 - \beta) / \mathbf{M}\mathbf{a}_0^2 \geq 0$. En utilisant le maillage 3D défini ci-dessus, nous avons,

$$\left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right)_{(i,j,k)} + \left(\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{\Lambda}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x_1} \right)_{(i,j,k)} + \left(\mathbf{L}_2 \cdot \mathbf{\Lambda}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial x_2} \right)_{(i,j,k)} + \left(\mathbf{L}_3 \cdot \mathbf{\Lambda}_3 \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_3}{\partial x_3} \right)_{(i,j,k)} = (\mathbf{s})_{(i,j,k)} \quad (3.17)$$

où $\mathbf{v}_l = (\mathbf{R}_l \cdot \mathbf{w})_{(i,j,k)}$, avec $(\frac{\partial \mathbf{R}_l}{\partial x_l})_{(i,j,k)} = 0$, est le vecteur des variables caractéristique dans la direction spatiale l .

Rappelons que $\mathbf{w} = (u_1, u_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})^\top$ pour $d=2$ et que $\mathbf{w} = (u_1, u_2, u_3, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{22}, \tau_{23}, \tau_{33})^\top$ pour $d=3$. Lorsque $d=2$, les cinq variables caractéristiques identifiées dans chaque direction spa-

tiale sont :

$$\mathbf{v}_1 = \left[(v_1)_m \Big|_{m=1, \dots, 5} \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{u_1}{2} + \tau_{11}(R_1)_{13} \\ \frac{u_1}{2} - \tau_{11}(R_1)_{13} \\ \frac{u_2}{2} + \tau_{12}(R_1)_{34} \\ \frac{u_2}{2} - \tau_{12}(R_1)_{34} \\ \tau_{22} + \tau_{12}(R_1)_{54} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_2 = \left[(v_2)_m \Big|_{m=1, \dots, 5} \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{u_2}{2} + \tau_{22}(R_2)_{15} \\ \frac{u_2}{2} - \tau_{22}(R_2)_{15} \\ \frac{u_1}{2} + \tau_{12}(R_2)_{34} \\ \frac{u_1}{2} - \tau_{12}(R_2)_{34} \\ \tau_{11} + \tau_{12}(R_2)_{54} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Pour $d=3$, les neuf variables caractéristiques déterminées dans chaque direction spatiale sont les suivantes :

$$\mathbf{v}_1 = \left[(v_1)_m \Big|_{m=1, \dots, 9} \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{u_1}{2} + \tau_{11}(R_1)_{13} \\ \frac{u_1}{2} - \tau_{11}(R_1)_{13} \\ \frac{u_2}{2} + \tau_{12}(R_1)_{34} \\ \frac{u_3}{2} + \tau_{13}(R_1)_{45} \\ \frac{u_2}{2} - \tau_{12}(R_1)_{34} \\ \frac{u_3}{2} - \tau_{13}(R_1)_{45} \\ \tau_{12}(R_1)_{75} + \tau_{22} \\ \tau_{11}(R_1)_{84} + \tau_{12}(R_1)_{85} + \tau_{13}(R_1)_{86} + \tau_{23} \\ \tau_{13}(R_1)_{96} + \tau_{33} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{v}_2 = \left[(v_2)_m \Big|_{m=1, \dots, 9} \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{u_2}{2} + \tau_{22}(R_2)_{17} \\ \frac{u_2}{2} - \tau_{22}(R_2)_{17} \\ \frac{u_1}{2} + \tau_{12}(R_2)_{35} \\ \frac{u_3}{2} + \tau_{23}(R_2)_{48} \\ \frac{u_1}{2} - \tau_{12}(R_2)_{35} \\ \frac{u_3}{2} - \tau_{23}(R_2)_{48} \\ \tau_{12}(R_2)_{75} + \tau_{11} \\ \tau_{22}(R_2)_{87} + \tau_{12}(R_2)_{85} + \tau_{23}(R_2)_{88} + \tau_{13} \\ \tau_{23}(R_2)_{98} + \tau_{33} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\mathbf{v}_3 = \left[(v_3)_m \Big|_{m=1, \dots, 9} \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{u_3}{2} + \tau_{33}(R_3)_{17} \\ \frac{u_3}{2} - \tau_{33}(R_3)_{17} \\ \frac{u_1}{2} + \tau_{13}(R_3)_{46} \\ \frac{u_2}{2} + \tau_{23}(R_3)_{58} \\ \frac{u_1}{2} - \tau_{13}(R_3)_{46} \\ \frac{u_2}{2} - \tau_{23}(R_3)_{58} \\ \tau_{13}(R_3)_{76} + \tau_{11} \\ \tau_{33}(R_3)_{89} + \tau_{13}(R_3)_{86} + \tau_{23}(R_3)_{88} + \tau_{12} \\ \tau_{23}(R_3)_{98} + \tau_{22} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Si $(\lambda_l)_m$ désigne une composante de diagonale Λ_l avec m variant de 1 à n_v ($n_v = 5$ pour $d=2$ et $n_v = 9$ pour $d=3$), le terme de transport associé à la propagation de la variable caractéristique $(v_l)_m$ s'écrit,

$$(\mathbf{C}_l)_m = (\lambda_l)_m \frac{\partial (v_l)_m}{\partial x_l} \quad (3.22)$$

Ainsi, pour $d=2$, on peut réécrire l'équation (3.17) comme suit :

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \begin{bmatrix} (\mathbf{C}_1)_1 + (\mathbf{C}_1)_2 \\ (\mathbf{C}_1)_3 + (\mathbf{C}_1)_4 \\ \sqrt{2c_1} [(\mathbf{C}_1)_1 - (\mathbf{C}_1)_2] \\ \sqrt{c_1} [(\mathbf{C}_1)_3 - (\mathbf{C}_1)_4] \\ \frac{2\tau_{12}}{\sqrt{c_1}} [(\mathbf{C}_1)_3 - (\mathbf{C}_1)_4] + (\mathbf{C}_1)_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{C}_2)_3 + (\mathbf{C}_2)_4 \\ (\mathbf{C}_2)_1 + (\mathbf{C}_2)_2 \\ \frac{2\tau_{12}}{\sqrt{c_2}} [(\mathbf{C}_2)_3 - (\mathbf{C}_2)_4] + (\mathbf{C}_2)_5 \\ \sqrt{c_2} [(\mathbf{C}_2)_3 - (\mathbf{C}_2)_4] \\ \sqrt{2c_2} [(\mathbf{C}_2)_1 - (\mathbf{C}_2)_2] \end{bmatrix} = \mathbf{s} \quad (3.23)$$

et pour $d=3$, l'équation (3.17) s'écrit,

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \begin{bmatrix} (\mathbf{C}_1)_1 + (\mathbf{C}_1)_2 \\ (\mathbf{C}_1)_3 + (\mathbf{C}_1)_5 \\ (\mathbf{C}_1)_4 + (\mathbf{C}_1)_6 \\ \sqrt{2c_1} [(\mathbf{C}_1)_1 - (\mathbf{C}_1)_2] \\ \sqrt{c_1} [(\mathbf{C}_1)_3 - (\mathbf{C}_1)_5] \\ \sqrt{c_1} [(\mathbf{C}_1)_4 - (\mathbf{C}_1)_6] \\ \frac{2\tau_{12}}{\sqrt{c_1}} [(\mathbf{C}_1)_3 - (\mathbf{C}_1)_5] + (\mathbf{C}_1)_7 \\ \frac{\tau_{23}}{\sqrt{2c_1}} [(\mathbf{C}_1)_2 - (\mathbf{C}_1)_1] + \frac{\tau_{13}}{\sqrt{c_1}} [(\mathbf{C}_1)_3 - (\mathbf{C}_1)_5] + \frac{\tau_{12}}{\sqrt{c_1}} [(\mathbf{C}_1)_4 - (\mathbf{C}_1)_6] + (\mathbf{C}_1)_8 \\ \frac{2\tau_{13}}{\sqrt{c_1}} [(\mathbf{C}_1)_4 - (\mathbf{C}_1)_6] + (\mathbf{C}_1)_9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{C}_2)_3 + (\mathbf{C}_2)_5 \\ (\mathbf{C}_2)_1 + (\mathbf{C}_2)_2 \\ (\mathbf{C}_2)_4 + (\mathbf{C}_2)_6 \\ \frac{2\tau_{12}}{\sqrt{c_2}} [(\mathbf{C}_2)_3 - (\mathbf{C}_2)_5] + (\mathbf{C}_2)_7 \\ \sqrt{c_2} [(\mathbf{C}_2)_3 - (\mathbf{C}_2)_5] \\ \frac{\tau_{13}}{\sqrt{2c_2}} [(\mathbf{C}_2)_2 - (\mathbf{C}_2)_1] + \frac{\tau_{23}}{\sqrt{c_2}} [(\mathbf{C}_2)_3 - (\mathbf{C}_2)_5] + \frac{\tau_{12}}{\sqrt{c_2}} [(\mathbf{C}_2)_4 - (\mathbf{C}_2)_6] + (\mathbf{C}_2)_8 \\ \sqrt{2c_2} [(\mathbf{C}_2)_1 - (\mathbf{C}_2)_2] \\ \sqrt{c_2} [(\mathbf{C}_2)_4 - (\mathbf{C}_2)_6] \\ \frac{2\tau_{23}}{\sqrt{c_2}} [(\mathbf{C}_2)_4 - (\mathbf{C}_2)_6] + (\mathbf{C}_2)_9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{C}_3)_3 + (\mathbf{C}_3)_5 \\ (\mathbf{C}_3)_4 + (\mathbf{C}_3)_6 \\ (\mathbf{C}_3)_1 + (\mathbf{C}_3)_2 \\ \frac{2\tau_{13}}{\sqrt{c_3}} [(\mathbf{C}_3)_3 - (\mathbf{C}_3)_5] + (\mathbf{C}_3)_7 \\ \frac{\tau_{12}}{\sqrt{2c_3}} [(\mathbf{C}_3)_2 - (\mathbf{C}_3)_1] + \frac{\tau_{23}}{\sqrt{c_3}} [(\mathbf{C}_3)_3 - (\mathbf{C}_3)_5] + \frac{\tau_{13}}{\sqrt{c_3}} [(\mathbf{C}_3)_4 - (\mathbf{C}_3)_6] + (\mathbf{C}_3)_8 \\ \sqrt{c_3} [(\mathbf{C}_3)_3 - (\mathbf{C}_3)_5] \\ \frac{2\tau_{23}}{\sqrt{c_3}} [(\mathbf{C}_3)_4 - (\mathbf{C}_3)_6] + (\mathbf{C}_3)_9 \\ \sqrt{c_3} [(\mathbf{C}_3)_4 - (\mathbf{C}_3)_6] \\ \sqrt{2c_3} [(\mathbf{C}_3)_1 - (\mathbf{C}_3)_2] \end{bmatrix} = \mathbf{s} \quad (3.24)$$

L'intérêt d'utiliser la méthode des caractéristiques réside dans le fait que, sous réserve de condition d'hyperbolicité au niveau discret, les variables caractéristiques v_l se propagent dans chaque direction spatiale avec les vitesses de propagation données par les éléments de $(\Lambda_l)_{i,j,k}$, et ainsi les termes de transport apparaissant, $(\mathbf{C}_l)_m$, sont des termes d'advection pure qui doivent être évalués, en fonction du signe de chaque valeur propre, par des schémas appropriés.

Les schémas appropriés sont choisis parmi les schémas amont, ENO, WENO ou HOUIC où la direction amont est choisie en fonction du signe de $(\lambda_l)_m$. Les schémas amont font partie de la classe des méthodes dites de Godunov conçues pour résoudre sous le cadre des méthodes aux différences finies ou/et aux volumes finis les systèmes d'équations non-linéaires hyperboliques issus d'écoulements compressibles. Ce type de méthodes utilise des stencils décalés afin de tenir compte de la direction de propagation de l'information. Le schéma amont d'ordre 2, également nommé

LUDS (*Linear Upwind Scheme*), peut être obtenu par l'extrapolation linéaire des deux valeurs en amont (Shyy et al. [197]), et le schéma amont d'ordre 3, appelé QUICK et développés par Leonard [128, 129], sont basés sur des stencils utilisant deux points en amont et un seul point en aval. Ces schémas amont peuvent toutefois occasionner des oscillations voire de l'instabilité de la solution (Ferziger et al. [64, chap.4, p.76]). Pour remédier à ces problèmes, les schémas d'advections à correction de flux de haute résolution HRS (*high-resolution schemes*) (Harten et al. [93]) apportent une correction de dissipation par l'ajout d'un terme de diffusion artificielle. Les limiteurs de flux, utilisés avec les schémas d'advections HRS, introduisent localement de l'anti-diffusion si nécessaire et répondent au critère TVD (*Total Variation Diminishing*) qui garantit que la valeur d'une variable conservée varie dans les limites de l'intervalle dicté par les valeurs voisines (Harten et al. [93]). Plusieurs variantes de schémas HRS TVD ont été ainsi proposées dans la littérature : nous pouvons citer les schémas MINMOD, Van Leer, SMART, CUBISTA, ENO et WENO et nous présenterons dans la suite les schémas amont d'ordre 2, WENO d'ordre 3, WENO d'ordre 5, HOUC d'ordre 3 et HOUC d'ordre 5.

Afin de détailler les démarches utilisées et ne pas alourdir la présentation, nous choisissons $(\lambda_1)_m \frac{\partial(v_1)_m}{\partial x_1}$ au point (i, j, k) et présentons quelques schémas implémentés en ne gardant que l'indice i du point (au lieu de i, j, k). Comme le choix de l'approximation pour $\frac{\partial(v_1)_m}{\partial x_1}$ dépend du signe de $(\lambda_1)_m$, nous adoptons la notation simplifiée suivante :

$$\left((\lambda_1)_m \frac{\partial(v_1)_m}{\partial x_1} \right)_i = \begin{cases} \lambda \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i^- & \text{si } \lambda > 0 \\ \lambda \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i^+ & \text{si } \lambda \leq 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

et présentons que les schémas proposés pour approcher $\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i^-$ et $\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i^+$.

3.4.1.1 Schémas amont d'ordre 1 et d'ordre 2

Les approximations au premier ordre de la dérivée $\frac{\partial v}{\partial x}$ au nœud i , basées sur les stencils décentré à gauche S_1 pour $\lambda > 0$ et à droite S_1^* pour $\lambda < 0$, voir la figure (3.2), sont données par,

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial v^-}{\partial x} \right)_i = \frac{v_i - v_{i-1}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \simeq q_2 \\ \left(\frac{\partial v^+}{\partial x} \right)_i = \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \simeq q_3 \end{cases} \quad (3.26)$$

Ce schéma est connue sous le nom de *First-order upwind scheme* et sera noté simplement UP1. L'erreur de troncature de cette approximation est équivalent à un terme de dissipation (viscosité numérique) ce qui rend le schéma UP1 conditionnellement-stable en dépit de l'ordre de précision faible du schéma. Afin de gagner en ordre de précision on peut envisager des approximations d'ordre deux totalement rétrograde ou totalement progressif.

Les schémas amont d'ordre 2 approchent $\frac{\partial v}{\partial x_1}$ au point i avec un stencil amont, S_1 pour $\lambda > 0$ ou S_1^* pour $\lambda < 0$, contenant trois points, comme illustré dans la figure 3.2. Avec les définitions suivantes

$$\begin{cases} q_1 = \frac{v_{i-1} - v_{i-2}}{\Delta x} \\ q_2 = \frac{v_i - v_{i-1}}{\Delta x} \\ q_3 = \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta x} \\ q_4 = \frac{v_{i+2} - v_{i+1}}{\Delta x}, \end{cases} \quad (3.27)$$

les approximations amont d'ordre 2, nommées UP2, s'écrivent

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_i^- = -\frac{1}{2}q_1 + \frac{3}{2}q_2 + \mathcal{O}(\Delta x^2) = \frac{3v_i - 4v_{i-1} + v_{i-2}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_i^+ = \frac{3}{2}q_3 - \frac{1}{2}q_4 + \mathcal{O}(\Delta x^2) = \frac{-3v_i + 4v_{i+1} - v_{i+2}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \end{cases} \quad (3.28)$$

Étant donné que ce schéma introduit des oscillations parasites aux voisinages des discontinuités, son utilisation dans le présent travail a été motivée par des raisons de comparaison entre schémas.

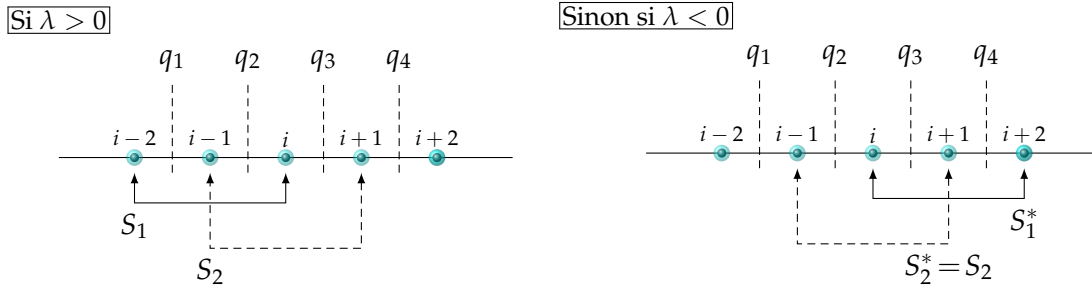


FIGURE 3.2 – Stencil de discrétisation du schéma UP2 (décentré d'ordre 2), ENO2 et WENO3 sur une grille unidimensionnelle et uniforme.

3.4.1.2 Schémas ENO et WENO

Les schémas ENO (*Essentially Non-Oscillatory*) ont été initialement développés par Harten et al. [92] pour traiter les discontinuités créées par les ondes de choc et ensuite adoptés par Osher and Sethian [161] et Osher and Shu [162] pour les équations de Hamilton-Jacobi. Les schémas ENO choisissent de manière adaptative, parmi un certain nombre de stencils candidat, une approximation lisse pour éviter d'interpoler sur une discontinuité. Prenons par exemple $\lambda > 0$: la figure 3.2 nous indique les deux choix d'ordre 2 possibles suivants : $S_1 = -\frac{1}{2}q_1 + \frac{3}{2}q_2$ et $S_2 = \frac{1}{2}q_2 + \frac{1}{2}q_3$. S_1 et S_2 correspondent respectivement aux schémas amont d'ordre 2 et centré d'ordre 2. Le schéma ENO consiste à choisir le stencil donnant moins d'oscillations :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_i^- = \begin{cases} S_1 & \text{si } |S_1| < |S_2| \\ S_2 & \text{si } |S_1| > |S_2| \end{cases} \quad (3.29)$$

Il s'agit du schéma ENO2 pour $\lambda > 0$. Le même schéma ENO2 pour $\lambda < 0$ est obtenu de la combinaison de q_2 , q_3 et q_4 (Figure 3.2).

Au même titre que les schémas ENO, les schémas WENO (*weighted essentially nonoscillatory*) s'appliquent aux équations aux dérivées partielles hyperboliques et aux problèmes dont l'advection est dominante. Les schémas WENO (*weighted essentially nonoscillatory*) sont basés sur les schémas ENO et ont l'avantage d'être d'ordre plus élevé. L'intérêt des schémas WENO réside dans leur capacité d'approcher la partie régulière de solution avec une précision élevée et la partie discontinue de la solution avec une transition stable non-oscillatoire. Dans le cadre d'une solution régulière, pour approcher $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_i^-$, les deux stencils candidat du schéma ENO2 peuvent être combinés, $S_1/3 + 2S_2/3$, pour donner un schéma d'ordre 3. Dans la pratique le schéma WENO3 consiste à chercher une combinaison adaptée de S_1 et S_2 , à savoir

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_i^- = \omega_1 S_1 + \omega_2 S_2 \quad (3.30)$$

avec $\omega_j > 0$ et $\sum_{j=1}^2 \omega_j = 1$. Les coefficients de pondération non-linéaires notés ω_j sont déterminés à l'aide d'indicateurs de régularité β_j qui mesurent la régularité relative de la fonction v dans les stencils S_j . Afin de mieux illustrer ce processus, nous prenons les stencils candidat du schéma ENO3 (Figure 3.3) et détaillons le processus de l'obtention du schéma WENO5. Avec les définitions suivantes pour $\lambda > 0$,

$$\begin{cases} q_1 = \frac{v_{i-2} - v_{i-3}}{\Delta x} \\ q_2 = \frac{v_{i-1} - v_{i-2}}{\Delta x} \\ q_3 = \frac{v_i - v_{i-1}}{\Delta x} \\ q_4 = \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta x} \\ q_5 = \frac{v_{i+2} - v_{i+1}}{\Delta x}, \end{cases} \quad (3.31)$$

les trois stencils permettent les trois approximations de $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_i^-$ suivantes :

$$S_1 = \frac{1}{3}q_1 - \frac{7}{6}q_2 + \frac{11}{6}q_3 \quad (3.32)$$

$$S_2 = -\frac{1}{6}q_2 + \frac{5}{6}q_3 + \frac{1}{3}q_4 \quad (3.33)$$

$$S_3 = \frac{1}{3}q_3 + \frac{5}{6}q_4 - \frac{1}{6}q_5 \quad (3.34)$$

Le schéma ENO3 consiste à choisir parmi S_1 , S_2 et S_3 l'approximation la plus régulière et reste donc à l'ordre 3. Le schéma WENO5 quant à lui est basé sur une combinaison de S_1 , S_2 et S_3 et permet d'aboutir à une approximation d'ordre 5 pour une solution régulière. Quand on regroupe les trois stencils S_1 , S_2 et S_3 de l'approximation ENO3 dans un seul stencil, on aboutit à un polynôme de reconstruction au plus de degré quatre pour reconstruire la dérivée première et donc l'approximation d'ordre 5 suivante :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_i^- = \frac{1}{30}q_1 - \frac{13}{60}q_2 + \frac{47}{60}q_3 + \frac{9}{20}q_4 - \frac{1}{20}q_5 \quad (3.35)$$

Il est également possible d'obtenir la même approximation précise au cinquième ordre à partir d'une combinaison linéaire de trois approximations du troisième ordre S_1 , S_2 et S_3 données respectivement par les estimations (3.32), (3.33) et (3.34), comme suit,

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_i^- = d_1 S_1 + d_2 S_2 + d_3 S_3 \quad (3.36)$$

où les constantes d_1 , d_2 , et d_3 satisfont $d_1 + d_2 + d_3 = 1$ et représentent les coefficients de pondération linéaires suivants :

$$d_1 = \frac{1}{10}, \quad d_2 = \frac{3}{5}, \quad d_3 = \frac{3}{10} \quad (3.37)$$

Si la solution est non-régulière (discontinuité de la fonction primaire ou de sa dérivée première), l'approximation WENO utilise la technique des coefficients de pondération non-linéaires afin d'éviter le stencil candidat ayant la discontinuité. L'approximation finale est une combinaison convexe de S_1 , S_2 et S_3 ,

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_i^- = \sum_{j=1}^3 \omega_j S_j \quad j=1, 2, 3 \quad (3.38)$$

avec $\omega_j > 0$ et $\sum_{j=1}^3 \omega_j = 1$. Les coefficients de pondération non-linéaires ω_j sont déterminés à l'aide des indicateurs de régularité β_j dans les stencils S_j . Les valeurs élevées de β_j renseignent que la fonction v est moins régulière dans le stencil S_j .

Il existe plusieurs méthodes pour déterminer le degré de régularité dans chaque stencil, Henrick et al. [98], Zhang and Shu [240], la méthode la plus populaire et la plus utilisée est celle introduite par Jiang and Shu [106]. Dans cette méthode les β_j s'obtiennent

$$\beta_j = \sum_{l=1}^k \Delta x^{2l-1} \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \left(\frac{d^l p_j(x)}{dx^l} \right)^2 dx \quad (3.39)$$

où k est le degré du polynôme d'approximation $p_j(x)$. Cette relation représente une somme, en norme L^2 , de toutes les dérivées de la reconstruction polynomiale $p_j(x)$ sur le stencil S_j . Le facteur Δx^{2l-1} permet aux expressions finales des indicateurs de régularité d'être indépendantes du pas de maillage Δx . Pour le schéma WENO5 avec $k = 2$, les expressions explicites des indicateurs de régularité pour chaque stencil sont des fonctions quadratiques des valeurs de l'approximation de la dérivé première, q_i , appartenant au stencil S_j :

$$\begin{cases} \beta_1 &= \frac{13}{12}(q_1 - 2q_2 + q_3)^2 + \frac{1}{4}(q_1 - 4q_2 + 3q_3)^2 \\ \beta_2 &= \frac{13}{12}(q_2 - 2q_3 + q_4)^2 + \frac{1}{4}(q_2 - q_4)^2 \\ \beta_3 &= \frac{13}{12}(q_3 - 2q_4 + q_5)^2 + \frac{1}{4}(q_5 - 4q_4 + 3q_3)^2 \end{cases} \quad (3.40)$$

Avec ces indicateurs de régularité, les poids de pondération non-linéaires sont définis comme suit,

$$\omega_j = \frac{\tilde{\omega}_j}{\sum_{j=1}^3 \tilde{\omega}_j}, \quad \tilde{\omega}_j = \frac{d_j}{(\varepsilon + \beta_j)^2}, \quad j=1,2,3 \quad (3.41)$$

Le paramètre ε est une constante positive utilisée pour rendre le dénominateur non-nul, typiquement $\varepsilon = 10^{-6}$. En utilisant les poids de pondération non-linéaires (A.58) et pour une fonction régulière, il a été vérifié dans plusieurs études (Jiang and Shu [106], Shu [195], Shu [196], Balsara and Shu [18] et Gerolymos et al. [70]), que les approximations WENO5 (A.57) sont précises au cinquième ordre.

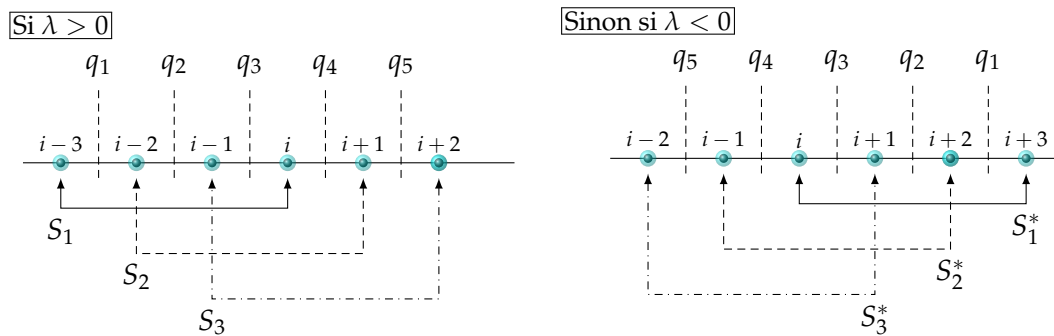


FIGURE 3.3 – Stencil de discrétisation du schéma WENO5 sur une grille unidimensionnelle et uniforme.

3.4.1.3 Schémas HOUC

Pour évaluer les dérivées de l'équation de level-set dans le cadre des écoulements biphasiques, Nourgaliev and Theofanous [153] ont utilisé des schémas de différences finies d'ordre élevé du type amont nommé *high-order upstream central* (HOUC). Ces schémas sont connus pour leurs très faible dissipation numérique, de plus ils ne requièrent ni de coefficients de pondération ni d'indicateurs de régularité. Par exemple, le schéma HOUC3 utilise les deux stencils du schéma ENO2 et conduit à l'approximation d'ordre 3 suivante :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)_i^- = \frac{1}{6}v_{i-2} - v_{i-1} + \frac{1}{2}v_i + \frac{1}{3}v_{i+1} + \mathcal{O}(\Delta x^3) \quad \text{HOUC3} \quad (3.42)$$

Il est la combinaison des deux stencils candidat du schéma ENO2, correspond à l'approximation $S_2 = -\frac{1}{6}q_2 + \frac{5}{6}q_3 + \frac{1}{3}q_4$ (figure 3.3) du schéma ENO3 et équivaut le schéma QUICK introduit par Leonard [128, 129]. Le schéma HOUC5 est le schéma WENO5 pour une fonction régulière, a une précision d'ordre 5 et s'écrit :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)_i^- = -\frac{1}{30}v_{i-3} + \frac{1}{4}v_{i-2} - v_{i-1} + \frac{1}{3}v_i + \frac{1}{2}v_{i+1} - \frac{1}{20}v_{i+2} + \mathcal{O}(\Delta x^5) \quad \text{HOUC5} \quad (3.43)$$

Notons que cette expression est identique à l'approximation linéaire d'ordre 5 du schéma WENO5, à savoir l'équation (3.35). Les coefficients d'un schéma HOUC sont issus du développement de Taylor.

Concernant le système d'équations quasi-linéaire, l'implémentation des schémas HOUC sur chaque point i consiste à appliquer le principe amont pour choisir entre les dérivées gauche et droite et à utiliser une approximation d'ordre élevé pour approcher cette dérivée. Son utilisation est beaucoup plus simple et moins coûteuse que le schéma WENO du même ordre.

Nous omettons ici la description des autres schémas d'ordre plus élevé implémentés à savoir WENO7, WENO9, HOUC7 et HOUC9 (voir Annexe A.5).

Notons que le traitement explicite de la partie hyperbolique influence la stabilité des schémas temporels utilisés. Cette influence est généralement traduite par la condition CFL (Courant, Friedrichs et Lewy) qui annonce une limite cohérente entre Δx et Δt dans laquelle l'écart entre les solutions numérique et exacte est borné. Il s'agit donc d'une condition nécessaire. Concernant la partie quasi-linéaire, le nombre de CFL est défini comme $\max|(\lambda_l)_m|\Delta t / \Delta x$ et la condition CFL est traduite par une limite supérieure du nombre de CFL.

Nous notons également le fait que les schémas amont d'ordre élevé rencontrent des difficultés aux voisinages des frontières car ils font intervenir des points extérieurs du domaine de calcul. En effet, si des schémas d'ordre plus élevé (WENO5, WENO7, WENO9, HOUC5, HOUC7 et HOUC9) sont utilisés pour traiter la partie quasi-linéaire, des schémas d'ordre moins élevé devront être utilisés à la proximité d'une frontière du fait d'un stencil de plus en plus limité. Le nombre de points concernés dépend du signe des valeurs propres des A_j . Le tableau 3.1 résume pour la discrétisation de la dérivée $(\partial v / \partial x_1)_i$ les schémas avec l'ordre de précision maximale possible, en fonction du point i du maillage et en fonction du signe de la valeur propre λ . Par exemple, pour une frontière perpendiculaire à x_1 , le schéma HOUC3 qui utilise deux points amont et un point aval ne peut être utilisé sur le point $i = 2$ si la valeur propre $(\lambda_1)_{i=2}$ est positive, et le schéma UP1 sera alors appliqué. Sur le point $i = 1$, si $(\lambda_1)_{i=1}$ est négatif seul le schéma UP2 peut être appliqué, et si $(\lambda_1)_{i=1}$ est positif la détermination de $(\partial v / \partial x_1)_{i=1}$, associé à l'onde de la variable caractéristiques entrant dans le domaine de calcul, devrait se faire en utilisant les conditions aux limites (voir Section 3.4.1.4).

TABLEAU 3.1 – Réduction de l'ordre du schéma de discrétisation de la partie hyperbolique pour les points discrets au voisinage des parois en fonction du signe de la valeur propre associée λ . Pour les points aux bords ($i = 1$) et ($i = N$), "C.L." indique que l'utilisation des conditions aux limites pour l'onde entrante est nécessaire.

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=N-4$	$i=N-3$	$i=N-2$	$i=N-1$	$i=N$
$\lambda < 0$	UP2	WENO3 HOUC3	WENO5 HOUC5	WENO7 HOUC7	WENO9 HOUC9	WENO7 HOUC7	WENO5 HOUC5	WENO3 WENO3	UP1	C.L.
$\lambda > 0$	C.L.	UP1	WENO3 HOUC3	WENO5 HOUC5	WENO7 HOUC7	WENO9 HOUC9	WENO7 HOUC7	WENO5 HOUC5	WENO3 HOUC3	UP2

3.4.1.4 Traitement de la partie hyperbolique sur les parois

Le stockage colocalisé des composantes du vecteur vitesse et des composantes du tenseur des contraintes utilisé n'est pas seulement approprié au traitement particulier de la partie hyperbolique à l'intérieur du domaine mais il est d'un grand intérêt pour calculer les gradients des variables caractéristiques au niveau des points situées sur les bords du domaine. Notant que les points situées sur les bords de la grille coïncident parfaitement avec les points appartenant aux bords du domaine de calcul. En effet, sur les points appartenant aux bords la direction de propagation pour certaines variables caractéristiques est orientée vers l'extérieur, et pour d'autres vers l'intérieur. La discrétisation des termes d'advection des quantités transportées le long des caractéristiques entrantes dans le domaine fait appelés à des informations stockées sur des points fictifs qui n'appartiennent pas au domaine de calcul. Souvent, la connaissance d'une condition au limite sur les frontières est suffisant pour obtenir les expression des valeurs des inconnues en ces points fictifs soit, par exemple en utilisant des extrapolations ou des différentiations suivant le type de la condition. Cependant, l'équation constitutive (2.3) ne dispose pas de conditions aux limites aux parois solides.

D'une façon classique dans le cadre de la méthode des caractéristiques, la partie des termes quasi-linéaires ayant des caractéristiques entrantes est substituée par les conditions aux limites numériques (dites aussi condition de rebond) basées sur les caractéristiques sortantes, voir par exemple Phelan et al. [174]. Afin d'illustrer la méthode utiliser dans le présent travail nous prenons la situation bi-dimensionnelle et nous considérons d'abord le cas d'une paroi non-glissante perpendiculaire à x_1 coïncidant aux points ($i = 1, j, k$) du maillage. Le calcul du terme $\mathbf{A}_2 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_2}$ (et du terme $\mathbf{A}_3 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_3}$ pour le cas tridimensionnel) ne pose pas de problème et c'est le calcul de $\mathbf{A}_1 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_1}$ qui est problématique. Nous rappelons qu'avec l'équation (2.3.2) nous avons obtenu $\mathbf{A}_1 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_1} = \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{A}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x_1} = \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{C}_1$ où

$$\mathbf{v}_1 = \left[(v_1)_m \Big|_{m=1, \dots, 5} \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{u_1}{2} + \tau_{11}(R_1)_{13} \\ \frac{u_1}{2} - \tau_{11}(R_1)_{13} \\ \frac{u_2}{2} + \tau_{12}(R_1)_{34} \\ \frac{u_2}{2} - \tau_{12}(R_1)_{34} \\ \tau_{22} + \tau_{12}(R_1)_{54} \end{bmatrix}$$

et la diagonale de \mathbf{A}_1 est donnée par

$$\text{diag}(\mathbf{A}_1) = \left[(\lambda_1)_m \Big|_{m=1, \dots, 5} \right]^T = [u_1 - \sqrt{2c_1}, u_1 + \sqrt{2c_1}, u_1 - \sqrt{c_1}, u_1 + \sqrt{c_1}, u_1]^T \quad (3.44)$$

où $c_1 = (\tau_{11} + (1 - \beta)/\mathbf{Ma}^2)$. En effet, pour une condition de paroi non-glissante à $i = 1$, les contributions $(\mathbf{C}_1)_1 = (\lambda_1)_1 \frac{\partial (v_1)_1}{\partial x_1}$ et $(\mathbf{C}_1)_3 = (\lambda_1)_3 \frac{\partial (v_1)_3}{\partial x_1}$ sont associées aux informations sortantes

et elles peuvent être calculées au niveau discret en utilisant le schéma UP2 décalé vers l'intérieure du domaine de calcul (voir le tableau 3.1). La contribution $(\mathbf{C}_1)_5$ est par définition zéro (car la valeur propre associée est nulle) et ne pose pas de problème particulier. En revanche, les termes $(\mathbf{C}_1)_2 = (\lambda_1)_2 \frac{\partial(v_1)_2}{\partial x_1}$ et $(\mathbf{C}_1)_4 = (\lambda_1)_4 \frac{\partial(v_1)_4}{\partial x_1}$ sont associés aux informations entrantes et on doit trouver une méthode pour déterminer ces contributions. Dans le cas d'une paroi non-glissante située à $i = N$, les termes $(\mathbf{C}_1)_2$ et $(\mathbf{C}_1)_4$ sont calculés en utilisant le schéma UP2 décalé vers l'intérieure du domaine de calcul et les contributions $(\mathbf{C}_1)_1$ et $(\mathbf{C}_1)_3$ sont associées aux informations entrantes et doivent être déterminées.

Cependant, sur une paroi verticale non-glissante, les conditions aux limites physiques sont $u_1 = 0$ et $u_2 = 0$, ce qui implique $(\lambda_1)_1 = -(\lambda_1)_2$ et $(\lambda_1)_3 = -(\lambda_1)_4$. Si $(\lambda_1)_1$ et $(\lambda_1)_3$ indiquent les caractéristiques sortantes (Figure 3.4), $(\lambda_1)_2$ et $(\lambda_1)_4$ indiquent celles entrantes. Étant donné $(v_1)_1 + (v_1)_2 = u_1$ et $(v_1)_3 + (v_1)_4 = u_2$, les caractéristiques entrantes sont calculées par les expressions suivantes,

$$(\mathbf{C}_1)_2 = (\mathbf{C}_1)_1 - (\lambda_1)_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad \text{ou} \quad (\lambda_1)_2 \frac{\partial(v_1)_2}{\partial x_1} = (\lambda_1)_1 \frac{\partial(v_1)_1}{\partial x_1} - (\lambda_1)_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (3.45)$$

$$(\mathbf{C}_1)_4 = (\mathbf{C}_1)_3 - (\lambda_1)_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad \text{ou} \quad (\lambda_1)_4 \frac{\partial(v_1)_4}{\partial x_1} = (\lambda_1)_3 \frac{\partial(v_1)_3}{\partial x_1} - (\lambda_1)_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad (3.46)$$

où $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$ sont obtenus par le schéma UP2. Le même principe s'applique lorsque $(\lambda_1)_2$ et $(\lambda_1)_4$ indiquent les caractéristiques sortantes. Sur le premier point intérieur les schémas WENO3 ou HOUC3 peuvent être appliqués pour calculer les caractéristiques sortantes et le schéma UP1 est utilisé pour les caractéristiques entrantes.

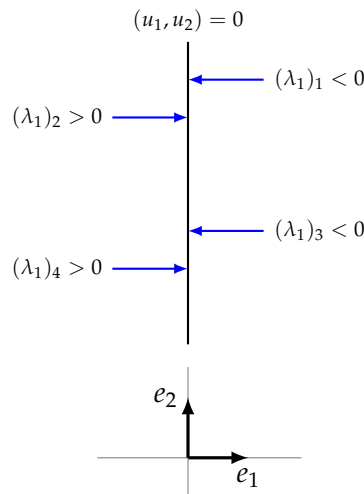


FIGURE 3.4 – Caractéristiques sur une paroi verticale.

Sur une paroi horizontale c'est le calcul de $\mathbf{A}_2 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_2}$ qui pose problème. Rappelons que $\mathbf{A}_2 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_2} = \mathbf{L}_2 \cdot \mathbf{\Lambda}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial x_2} = \mathbf{L}_2 \cdot \mathbf{C}_2$ où

$$\mathbf{v}_2 = \left[(v_2)_m \Big|_{m=1, \dots, 5} \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{u_2}{2} + \tau_{22}(R_2)_{15} \\ \frac{u_2}{2} - \tau_{22}(R_2)_{15} \\ \frac{u_1}{2} + \tau_{12}(R_2)_{34} \\ \frac{u_1}{2} - \tau_{12}(R_2)_{34} \\ \tau_{11} + \tau_{12}(R_2)_{54} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

et la diagonale de Λ_2 est donnée par,

$$\text{diag}(\Lambda_2) = \left[(\lambda_2)_m \Big|_{m=1, \dots, 5} \right]^T = \left[u_2 - \sqrt{2c_2}, u_2 + \sqrt{2c_2}, u_2 - \sqrt{c_2}, u_2 + \sqrt{c_2}, u_2 \right]^T, \quad (3.48)$$

et $c_2 = \tau_{22} + (1 - \beta)/\text{Ma}^2$.

Cependant, sur une paroi horizontale non-glissante, avec $u_2 = 0$ nous avons $(\lambda_2)_1 = -(\lambda_2)_2$ et $(\lambda_2)_3 = -(\lambda_2)_4$ et distinguons les caractéristiques sortantes et entrantes (Figure 3.5). Les caractéristiques sortantes sont calculées avec le schéma UP2 et celles entrantes sont obtenues avec les relations suivantes :

$$(\mathbf{C}_2)_2 = (\mathbf{C}_2)_1 - (\lambda_2)_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad \text{ou} \quad (\lambda_2)_2 \frac{\partial (v_2)_2}{\partial x_2} = (\lambda_2)_1 \frac{\partial (v_2)_1}{\partial x_2} - (\lambda_2)_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad (3.49)$$

$$(\mathbf{C}_2)_4 = (\mathbf{C}_2)_3 - (\lambda_2)_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad \text{ou} \quad (\lambda_2)_4 \frac{\partial (v_2)_4}{\partial x_2} = (\lambda_2)_3 \frac{\partial (v_2)_3}{\partial x_2} - (\lambda_2)_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad (3.50)$$

où $\frac{\partial u_2}{\partial x_2}$ et $\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$ sont également obtenus par le schéma UP2. La méthodologie appliquée au premier point à l'intérieur d'une paroi verticale est également applicable au premier point à l'intérieur d'une paroi horizontale.

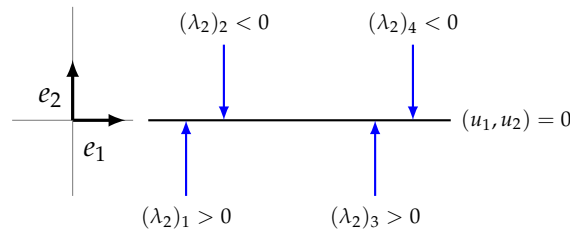


FIGURE 3.5 – Caractéristiques sur une paroi horizontale.

Dans le cas tridimensionnel, les caractéristiques entrantes sur une paroi non-glissante sont obtenues de la même façon, à savoir :

— dans la direction x_1 ,

$$(\mathbf{C}_1)_2 = (\mathbf{C}_1)_1 - (\lambda_1)_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (3.51)$$

$$(\mathbf{C}_1)_3 = (\mathbf{C}_1)_5 - (\lambda_1)_5 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad (3.52)$$

$$(\mathbf{C}_1)_4 = (\mathbf{C}_1)_6 - (\lambda_1)_6 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \quad (3.53)$$

$$(3.54)$$

— dans la direction x_2 ,

$$(\mathbf{C}_2)_2 = (\mathbf{C}_2)_1 - (\lambda_2)_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad (3.55)$$

$$(\mathbf{C}_2)_3 = (\mathbf{C}_2)_5 - (\lambda_2)_5 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad (3.56)$$

$$(\mathbf{C}_2)_4 = (\mathbf{C}_2)_6 - (\lambda_2)_6 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \quad (3.57)$$

$$(3.58)$$

— dans la direction x_3 :

$$(\mathbf{C}_3)_2 = (\mathbf{C}_3)_1 - (\lambda_3)_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (3.59)$$

$$(\mathbf{C}_3)_3 = (\mathbf{C}_3)_5 - (\lambda_3)_5 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \quad (3.60)$$

$$(\mathbf{C}_3)_4 = (\mathbf{C}_3)_6 - (\lambda_3)_6 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \quad (3.61)$$

$$(3.62)$$

3.4.2 Discrétisation spatiale des autres termes

Les dérivées première et seconde parues dans les autres termes des équations sont approchées par les schémas centrés d'ordre 2, à savoir, $f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{\Delta x_1}$ et $f''_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x_1^2}$. Ce traitement classique permet d'aboutir pour le Laplacien 2D de la pression au point $(i + 1/2, j + 1/2)$ à l'expression suivante :

$$\frac{p_{i-1/2,j+1/2} - 2p_{i+1/2,j+1/2} + p_{i+3/2,j+1/2}}{\Delta x_1^2} + \frac{p_{i+1/2,j-1/2} - 2p_{i+1/2,j+1/2} + p_{i+1/2,j+3/2}}{\Delta x_2^2}$$

En dimension 3 le Laplacien de la pression discret s'écrit :

$$\begin{aligned} & \frac{p_{i-1/2,j+1/2,k+1/2} - 2p_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} + p_{i+3/2,j+1/2,k+1/2}}{\Delta x_1^2} + \\ & \frac{p_{i+1/2,j-1/2,k+1/2} - 2p_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} + p_{i+1/2,j+3/2,k+1/2}}{\Delta x_2^2} + \\ & \frac{p_{i+1/2,j+1/2,k-1/2} - 2p_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} + p_{i+1/2,j+1/2,k+3/2}}{\Delta x_3^2} \end{aligned}$$

Étant donné le maillage semi-décalé, les opérateurs de gradient et divergence nécessitent un traitement plus sophistiqué. En 2 dimensions, la divergence au point $(i + 1/2, j + 1/2)$ s'exprime comme :

$$\frac{(u_1)_{i+1,j} - (u_1)_{i,j} + (u_1)_{i+1,j+1} - (u_1)_{i,j+1}}{2\Delta x_1} + \frac{(u_2)_{i,j+1} - (u_2)_{i,j} + (u_2)_{i+1,j+1} - (u_2)_{i+1,j}}{2\Delta x_2}$$

et le gradient de pression au point (i, j) est approché en x_1 par :

$$\frac{p_{i+1/2,j+1/2} - p_{i-1/2,j+1/2} + p_{i+1/2,j-1/2} - p_{i-1/2,j-1/2}}{2\Delta x_1}$$

et en x_2 par :

$$\frac{p_{i+1/2,j+1/2} - p_{i+1/2,j-1/2} + p_{i-1/2,j+1/2} - p_{i-1/2,j-1/2}}{2\Delta x_2}$$

En dimension 3, la divergence au points $(i + 1/2, j + 1/2, k + 1/2)$ est approchée par :

$$\begin{aligned} & \left((u_1)_{i+1,j,k} - (u_1)_{i,j,k} + (u_1)_{i+1,j+1,k} - (u_1)_{i,j+1,k} + (u_1)_{i+1,j,k+1} - (u_1)_{i,j,k+1} + \right. \\ & \quad \left. (u_1)_{i+1,j+1,k+1} - (u_1)_{i,j+1,k+1} \right) / (4\Delta x_1) + \\ & \left((u_2)_{i,j+1,k} - (u_2)_{i,j,k} + (u_2)_{i+1,j+1,k} - (u_2)_{i+1,j,k} + (u_2)_{i,j+1,k+1} - (u_2)_{i,j,k+1} + \right. \\ & \quad \left. (u_2)_{i+1,j+1,k+1} - (u_2)_{i+1,j,k+1} \right) / (4\Delta x_2) + \\ & \left((u_3)_{i,j,k+1} - (u_3)_{i,j,k} + (u_3)_{i,j+1,k+1} - (u_3)_{i,j+1,k} + (u_3)_{i+1,j,k+1} - (u_3)_{i+1,j,k} + \right. \\ & \quad \left. (u_3)_{i+1,j+1,k+1} - (u_3)_{i+1,j+1,k} \right) / (4\Delta x_3) \end{aligned}$$

Le gradient de la pression discret au point (i, j, k) s'écrit en x_1 comme :

$$\frac{p_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} - p_{i-1/2,j+1/2,k+1/2} + p_{i+1/2,j-1/2,k+1/2} - p_{i-1/2,j-1/2,k+1/2}}{4\Delta x_1} + \frac{p_{i+1/2,j+1/2,k-1/2} - p_{i-1/2,j+1/2,k-1/2} + p_{i+1/2,j-1/2,k-1/2} - p_{i-1/2,j-1/2,k-1/2}}{4\Delta x_1},$$

en x_2 comme :

$$\frac{p_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} - p_{i+1/2,j-1/2,k+1/2} + p_{i-1/2,j+1/2,k+1/2} - p_{i-1/2,j-1/2,k+1/2}}{4\Delta x_3} + \frac{p_{i+1/2,j+1/2,k-1/2} - p_{i+1/2,j-1/2,k-1/2} + p_{i-1/2,j+1/2,k-1/2} - p_{i-1/2,j-1/2,k-1/2}}{4\Delta x_2}$$

et en x_3 comme :

$$\frac{p_{i+1/2,j-1/2,k+1/2} - p_{i+1/2,j-1/2,k-1/2} + p_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} - p_{i+1/2,j+1/2,k-1/2}}{4\Delta x_3} + \frac{p_{i-1/2,j-1/2,k+1/2} - p_{i-1/2,j-1/2,k-1/2} + p_{i-1/2,j+1/2,k+1/2} - p_{i-1/2,j+1/2,k-1/2}}{4\Delta x_3}.$$

Compte tenu du maillage semi-décalé, la grille de pression ne coïncide pas avec la frontière du domaine de calcul et il y a une demi-maille de décalage. En espace fermé les conditions du type Neumann homogènes sont prises en compte par le laplacien discret : le gradient nul à la frontière indiquée par $i = 1$ est traduit par $p_{1/2,j+1/2,k+1/2} = p_{3/2,j+1/2,k+1/2}$: la dérivée seconde en x_1 au point $(3/2, j + 1/2, k + 1/2)$ devient $(-p_{3/2,j+1/2,k+1/2} + p_{5/2,j+1/2,k+1/2}) / (\Delta x_1^2)$. Le même traitement s'applique aux dérivées secondes en x_2 et x_3 .

Concernant la vitesse, le maillage utilisé épouse les frontières. Une condition du type Dirichlet homogène au point $(1, j, k)$ est traduite par $(u_l)_{1,j,k} = 0$. Une condition du type Neumann homogène qui demande au niveau discret $(u_l)_{0,j,k} = (u_l)_{2,j,k}$ est imposée dans l'opérateur discret via l'équation discrète au point $(1, j, k)$: la dérivée seconde s'écrit alors $(-2(u_l)_{1,j,k} + 2(u_l)_{2,j,k}) / (\Delta x_1^2)$.

L'équation de Poisson discrète pour la pression est résolue par l'algorithme BCGS (bi-conjugate gradient stabilized) de la bibliothèque NSPCG¹ (NonSymmetric Preconditioned Conjugate Gradient) qui permet de travailler sur des géométries plus complexes. La méthode BCGS est donnée par Quarteroni and Valli [176, chap. 2, p 62].

En ce qui concerne la vitesse et la température, la discrétisation spatiale combinée avec la factorisation de l'opérateur de Helmholtz conduit à des systèmes tri-diagonaux : l'algorithme de Thomas a été donc utilisé.

3.5 Résumé de l'algorithme et conclusion

Les méthodes numériques présentées dans ce chapitre sont implémentées en langage de programmation Fortran 90. Les étapes importantes sont les suivantes :

- Initialisation des champs aux pas de temps n et $n - 1$.
- Début de la boucle en temps.
 - Calcul du second membre pour la température et résolution de l'équation de l'énergie pour obtenir le champ de température au pas de temps $n + 1$.
 - Calcul des termes quasi-linéaires et des autres termes pour former les second membres des champs de vitesse et d'extra-contrainte.

1. voir Kincaid et al. [121] ou encore <https://web.ma.utexas.edu/CNA/NSPCG/>

- Résolution de l'équation constitutive pour obtenir l'extra-contrainte au pas de temps $n + 1$.
- Résolution de l'équation de la quantité de mouvement :
 - Une étape dite de prédiction où la vitesse prédite est obtenue par la résolution des équations de Helmholtz;
 - Une étape de correction la pression ou sa correction est obtenue par la résolution d'une équation de Poisson et son gradient est utilisé pour corriger la vitesse prédite et obtenir la vitesse au pas de temps $n + 1$.
- Fin de la boucle en temps

Ce chapitre est ainsi dédié à la description des méthodes numériques utilisées pour résoudre le système d'équations régissant les écoulements de fluides viscoélastiques décrits rhéologiquement par le modèle d'Oldroyd-B, de Giesekus, de SPPT ou encore de PTT.

L'idée principale est l'utilisation des méthodes de différences finies sur un maillage semi-décalé et le traitement approprié des termes quasi-linéaires de la partie hyperbolique introduite par l'équation constitutive. L'originalité du traitement numérique des termes quasi-linéaires consiste en leur discrétisation temporelle explicite et leur approximation en fonction des variables caractéristiques qui se propagent dans une direction spécifique. Dans le présent travail, les termes quasi-linéaires ont été d'abord diagonalisés pour faire apparaître le transport des variables caractéristiques et différents schémas, à savoir les schémas de type Upwind du premier et du deuxième ordre, les approximations WENO (*Weighted Essentially Non-Oscillatory*) d'ordre $\{3, 5, 7, 9\}$ et les schémas HOUIC (*High-Order Upstream Central*) d'ordre $\{3, 5, 7, 9\}$, ont été ensuite implémentés pour discrétiser les variables caractéristiques. Cette approche permet de déterminer la nature des caractéristiques aux limites et de calculer les caractéristiques entrantes aux limites, notamment dans le cas d'une paroi à la limite.

Les équations de Helmholtz issues de la discrétisation temporelle semi-implicite sont factorisées en un produit des équations 1D et résolues à l'aide de l'algorithme de Thomas car les schémas centrés d'ordre 2 en espace conduisent à des systèmes tri-diagonaux. Le couplage vitesse-pression est traité classiquement par une méthode de projection et l'équation de Poisson, obtenue pour la pression ou sa correction, est résolue par la méthode (mic1, BCGS) de la bibliothèque NSPCG.

CHAPITRE 4

Validations générales

« Toute connaissance est une traduction et reconstruction, c'est-à-dire comportant risque d'erreur. »

Edgar Morin

Sommaire

3.1 Méthodes numériques pour les fluides viscoélastiques	84
3.2 Discrétisations temporelles	89
3.3 Traitement du couplage vitesse-pression.....	91
3.4 Discrétisations spatiales	93
3.4.1 Discrétisation spatiale de la partie quasi-linéaire.....	94
3.4.1.1 Schémas amont d'ordre 1 et d'ordre 2.....	97
3.4.1.2 Schémas ENO et WENO.....	98
3.4.1.3 Schémas HOUC.....	100
3.4.1.4 Traitement de la partie hyperbolique sur les parois	102
3.4.2 Discrétisation spatiale des autres termes	105
3.5 Résumé de l'algorithme et conclusion.....	106

Dans ce chapitre nous présentons les benchmarks que nous avons retenus pour étudier les propriétés de convergence des méthodes numériques implémentées dans le présent travail et présentées dans le chapitre 3. Via des comparaisons des solutions numériques obtenues avec les résultats fournies par la littérature et au travers des confrontations aux solutions exactes lorsqu'elles sont disponibles, tout en passant par des techniques numériques permettant de remonter à l'ordre de précision des méthodes adoptées, nous analysons les performances de l'algorithme proposé et ainsi son potentiel pour résoudre les problèmes d'écoulement des fluides viscoélastiques.

La stratégie de validation consiste à étudier dans un premier temps les performances de notre résolution numérique des équations de Navier–Stokes dans le cadre d'écoulement de fluide Newtonien incompressible. Dans cette optique le benchmark du tourbillon de Green–Taylor, le cas test de la cavité entraînée et l'écoulement de Poiseuille sont considérés. Ensuite, il s'agit d'évaluer la résolution couplée de l'équation de l'énergie et des équations de Navier–Stokes dans le cadre du problème de convection naturelle de la cavité différentiellement chauffée et du problème de convection forcée de la cavité entraînée chauffée par le haut.

Le second groupe des benchmarks a pour objectif d'évaluer les performances des méthodes appliquées pour discrétiser la partie hyperbolique du système d'équations régissant l'écoulement des fluides viscoélastiques. À cet égard, l'écoulement de Poiseuille du fluide d'Oldroyd–B, l'écoulement de Poiseuille du fluide SPTT et le problème de la cavité entraînée du fluide SPTT sont considérés pour étudier l'implémentation des schémas d'ordre élevé WENO et HOUC sous l'effet du comportement viscoélastique du fluide.

4.1 Évaluation des erreurs de discrétisations

L'étude de la précision spatiale et temporelle des schémas numériques implémentés et l'analyse des propriétés de convergence des erreurs de discrétisation nécessitent de définir une mesure des erreurs de discrétisation en fonction de la résolution spatiale et temporelle. Pour ce faire, suivant la disponibilité de la solution analytique, nous nous basons sur deux approches afin d'évaluer l'évolution des erreurs de discrétisations.

D'abord, pour un benchmark ayant une solution exacte, les erreurs de discrétisations commises peuvent s'obtenir à travers une confrontation de la solution numérique obtenue (S^{num}) et de la solution analytique attendue (S^{ana}) :

$$\varepsilon^{\Delta t, \Delta x}(S) = S^{num}(t, x; \Delta t, \Delta x) - S^{ana}(t, x) \quad (4.1)$$

Cependant, s'agissant des problèmes dépendant de temps le caractère spatio-temporel des erreurs de discrétisation peut entraîner la dominance des erreurs dues à la différenciation spatiale par rapport à celles issues de la discrétisation temporelle, ou inversement. Cela rend difficile l'obtention de l'évolution d'une erreur de discrétisation indépendamment de l'autre (Duarte et al. [60, p.160]). Ainsi, pour des telles situations et pour l'ensemble des benchmarks dont la solution analytique est indisponible nous adoptons dans ce présent travail une technique numérique afin d'évaluer les erreurs de discrétisations spatiales et temporelles séparément. Cette méthode consiste à utiliser uniquement des combinaisons de solutions numériques.

L'erreur due à la discrétisation temporelle s'écrit pour une résolution spatiale constante Δx à un instant t et position x donné comme suit,

$$\varepsilon^{\Delta t}(S) = S^{num}(t, x; 2\Delta t, \Delta x) - S^{num}(t, x; \Delta t, \Delta x) \quad (4.2)$$

De même, l'erreur attachée à la discrétisation spatiale s'écrit pour un pas de temps constant Δt à un instant t et position x donné comme suit,

$$\varepsilon^{\Delta x}(S) = S^{num}(t, x; \Delta t, 2\Delta x) - S^{num}(t, x; \Delta t, \Delta x) \quad (4.3)$$

Finalement, la mesure des erreurs de discrétisation est donnée sous les différentes normes L_1 , L_2 et L_∞ , respectivement par,

$$\varepsilon_{L_1} = \sum_i^{\bar{N}} |\varepsilon_i| \quad (4.4)$$

$$\varepsilon_{L_2} = \left(\sum_i^{\bar{N}} |\varepsilon_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.5)$$

$$\varepsilon_{L_\infty} = \max_i^{\bar{N}} |\varepsilon_i| \quad (4.6)$$

Notons que lorsque il s'agit de confronter la solution numérique à la solution exacte (en utilisant l'équation (4.1)) ou d'étudier les erreurs de la discrétisation temporelle (en utilisant l'équation (4.2)) $\bar{N} = N$ représente le nombre de points discrets du maillage. Par ailleurs, quand il s'agit d'étudier les erreurs liées à la discrétisation spatiale (en utilisant l'équation (4.3)), \bar{N} représente le nombre de points discrets du premier maillage.

4.2 Benchmarks fluides Newtoniens

4.2.1 Tourbillon de Green–Taylor

Le premier cas test de validation porte sur le tourbillon dissipatif de Green–Taylor [214]. Ce benchmark, très utilisé dans la littérature, est adopté dans le présent travail afin d'étudier le taux de convergence des erreurs des schémas de discrétisation des parties paraboliques et elliptiques du système d'équations de Navier-Stokes dans le cas des fluides Newtoniens. Pour ce faire, nous considérons un écoulement dépendant du temps dans un domaine carré de côté π , donné par $(\pi/2 \leq x_1 \leq 3\pi/2)$ et $(\pi/2 \leq x_2 \leq 3\pi/2)$ sur la figure 4.1. Le domaine de calcul est défini de sorte que l'écoulement inclue un seul tourbillon (voir figure 4.2–(d)). Le choix d'une seule cellule permet de réduire les conditions aux limites associées à l'écoulement en condition aux limites de symétrie données sur la figure 4.1. La solution exacte des équations de Navier-Stokes pour ce cas test est donnée par,

$$u_1(x_1, x_2, t) = -\cos(x_1) \sin(x_2) \exp(-2t/\mathbf{Re}) \quad (4.7)$$

$$u_2(x_1, x_2, t) = \sin(x_1) \cos(x_2) \exp(-2t/\mathbf{Re}) \quad (4.8)$$

$$p(x_1, x_2, t) = -1/4 (\cos(2x_1) + \cos(2x_2)) \exp(-4t/\mathbf{Re}) \quad (4.9)$$

Les conditions initiales des composantes de la vitesse et de pression sont celles de la solution exacte à l'instant $t_0 = 0$. En ce sens, la figure 4.2 illustre les champs initiaux des composantes du vecteur vitesse, de la pression ainsi que de la fonction de courant.

La figure 4.3–(a) montre l'évolution des erreurs de discrétisation spatiales des composantes du vecteur vitesse $\varepsilon^{\Delta x}(u_1)$ et $\varepsilon^{\Delta x}(u_2)$ en fonction du pas de maillage $\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2$ et pour un temps fixe $t = n\Delta t = 0.568$ ($n = 500$ est nombre d'itérations et le pas de temps est $\Delta t = 1.136 \times 10^{-3}$), mesurées en différentes normes L_1 , L_2 et L_∞ en se basant sur la technique numérique décrite précédemment. À l'égard de la différenciation centrée d'ordre 2 adoptée pour l'opérateur laplacien et du fait de la régularité de la solution nous constatons que l'ordre des erreurs de la solution numérique obtenu est identique à l'ordre théorique du schéma de discrétisation.

D'autre part, la figure 4.3–(b) montre l'évolution des erreurs de discrétisation temporelle des composantes du vecteur vitesse $\varepsilon^{\Delta t}(u_1)$, $\varepsilon^{\Delta t}(u_2)$ et le champ de pression $\varepsilon^{\Delta t}(p)$ pour le schéma d'Euler d'ordre 1 et le schéma BDF2, mesurées en différentes normes L_1 , L_2 et L_∞ en fonction du pas de temps Δt en utilisant l'approche numérique avec un maillage 51×51 et pour un temps fixe $t = n_i \Delta t_i = 1.639$ (le nombre d'itérations correspondant au premier pas Δt_1 de temps est $n_1 = 500$). Nous constatons que les ordres des erreurs temporelles de la solution numérique obtenues avec

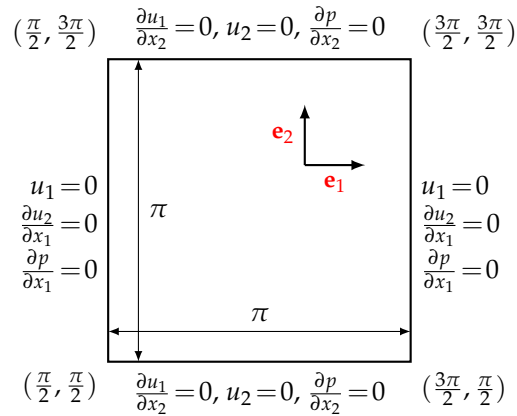


FIGURE 4.1 – Domaine de calcul ainsi que les conditions aux limites associées au benchmark du tourbillon de Green–Taylor.

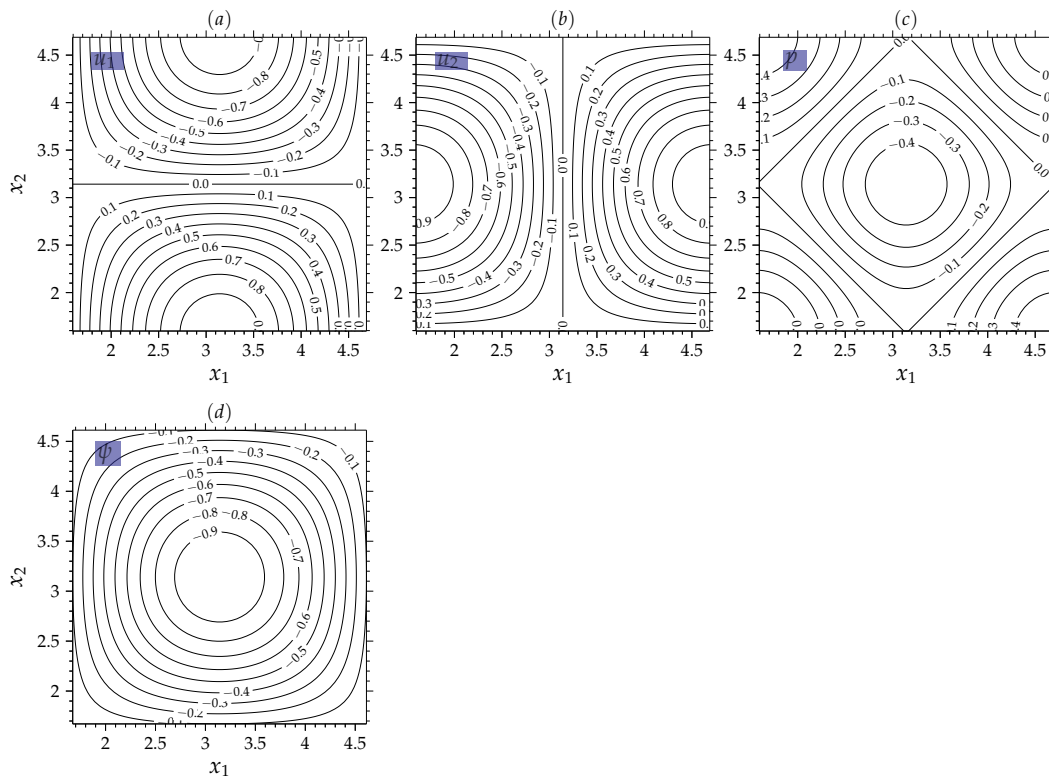


FIGURE 4.2 – Champs initiaux de (a) la composante de vitesse u_1 , (b) la composante de vitesse u_2 , (c) la pression et finalement (d) la fonction de courant, associés au benchmark du tourbillon de Green–Taylor.

les schémas Euler d'ordre 1 et BDF2 d'ordre 2 concordent clairement avec les ordres théoriques. Finalement, on admet la robustesse et l'efficacité de notre approche numérique à l'égard de la résolution des problèmes de diffusion.

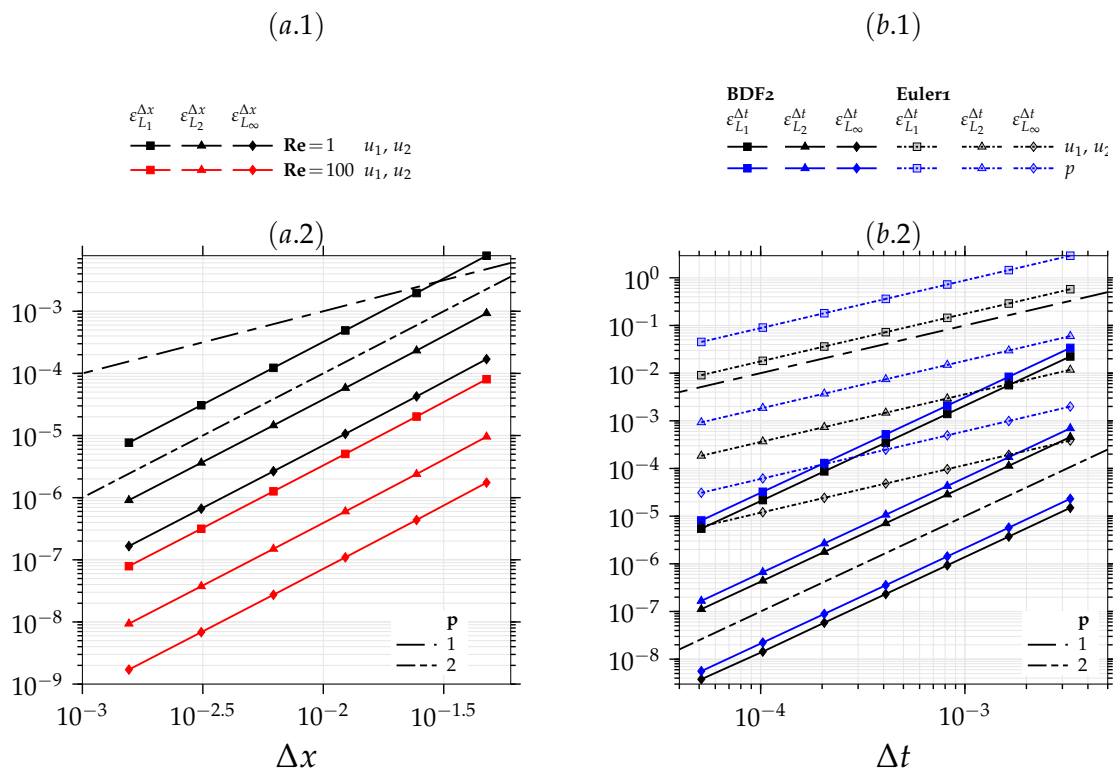


FIGURE 4.3 – (a) Évolution des erreurs de discrétisation spatiales des composantes de la vitesse $\varepsilon^{\Delta x}(u_1)$ et $\varepsilon^{\Delta x}(u_2)$, mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ en fonction du pas de maillage $\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2$ pour différents nombres de Reynolds \mathbf{Re} et pour un temps fixe $t = n\Delta t = 0.568$ (c'est à dire avec $\Delta t = 1.136 \times 10^{-3}$ et pour un nombre d'itérations constant $n = 500$). (b) Évolution des erreurs de discrétisation temporelle des composantes de la vitesse $\varepsilon^{\Delta t}(u_1)$ et $\varepsilon^{\Delta t}(u_2)$, ainsi que de la pression $\varepsilon^{\Delta t}(p)$, mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ en fonction du pas de temps Δt pour le schéma d'Euler1 et de schéma BDF2 avec un maillage 51×51 et pour un pour un temps fixe $t = n_i \Delta t_i = 1.639$ (le nombre d'itérations correspondant au premier pas Δt_1 de temps est $n_1 = 500$).

4.2.2 Cavité entraînée (2D & 3D)

Le deuxième cas test de référence est l'écoulement dans une cavité entraînée par le haut. Étudié de manière intensive dans la littérature, la cavité entraînée constitue un benchmark pour la validation de résolution des équations de Navier-Stokes. Nous considérons une cavité carrée (ou cubique en 3D) de côté unitaire, donnée sur la figure 4.4, possédant d'une paroi animée tandis que les autres parois sont immobiles. La paroi supérieure de la cavité défile avec une vitesse tangentielle constante $u_1 = 1$. Cependant, on note que ce benchmark inclut deux points singuliers localisés dans les coins supérieurs de la cavité.

La figure 4.5–(a) montre l'évolution des erreurs de discrétisation spatiale de la vitesse $\varepsilon^{\Delta x}(u_1)$ et $\varepsilon^{\Delta x}(u_2)$ mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ en fonction du pas de maillage Δx dans le cadre des cavités bidimensionnel 2D et cubique 3D lorsque le nombre de Reynolds $\mathbf{Re} = 100$ avec $\Delta t = 2.5 \times 10^{-4}$ et pour un nombre d'itérations $n = 500$. Nous constatons que la présence des points singuliers influence la précision globale des schémas numériques, les erreurs de discrétisation spatiales évoluent à l'ordre 1. D'autre part, les figures 4.5–(b) et 4.5–(c) montrent respectivement pour les cavité bidimensionnel 2D et cubique 3D l'évolution des erreurs de discrétisation tempo-

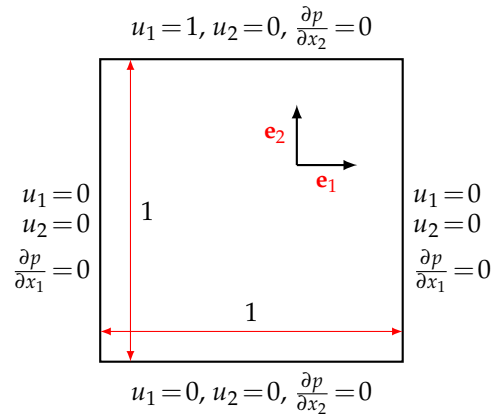


FIGURE 4.4 – Domaine de calcul ainsi que les conditions aux limites associées au cas test de la cavité entraînée.

relle pour la vitesse $\varepsilon^{\Delta t}(u_1)$ et $\varepsilon^{\Delta t}(u_2)$, ainsi que pour la pression $\varepsilon^{\Delta t}(p)$ mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ en fonction du pas de temps Δt pour le schéma d'Euler1 et de schéma BDF2 avec un maillage $51 \times 51 \times 51$ en 3D et 51×51 en 2D et pour un temps fixe $t = n_i \Delta t_i = 0.5$ (le nombre d'itérations correspondant au premier pas Δt_1 de temps est $n_1 = 500$). On relève que les ordres de convergences théoriques correspondant aux schémas BDF2 et Euler1 sont retrouvées au niveau numérique. Toutefois, on peut constater que la pression satisfait uniquement une évolution à l'ordre 1 en temps. Suivant Botella and Peyret [32], ce comportement est dû à la présence des singularités de la pression aux coins supérieurs de la cavité.

D'autre part, la figure 4.6 illustre avec différents nombre de Reynolds $\mathbf{Re} = [100, 400, 1000]$ une comparaison à l'état stationnaire des profils de vitesse u_1 et u_2 obtenus avec différentes résolutions de maillage avec les résultats issus de la littérature : Ghia et al. [75] dans le cas d'une cavité bidimensionnelle et Ku et al. [124] dans le cas d'une cavité cubique 3D. Les profils de vitesse sont prélevés le long des lignes médianes, $u_1(x_1 = 0.5, x_2)$ et $u_2(x_1, x_2 = 0.5)$ dans le cas d'une cavité bidimensionnelle et $u_1(x_1 = 0.5, x_2, x_3 = 0.5)$ et $u_2(x_1, x_2 = 0.5, x_3 = 0.5)$ dans le cas d'une cavité tridimensionnelle. En fonction de la résolution du maillage, on constate une très bonne concordance entre les résultats obtenus et ceux données dans la littérature Ghia et al. [75] et Ku et al. [124].

4.2.3 Cavité différentiellement chauffée

Afin d'étudier la fiabilité de la résolution couplée des équations de Navier-Stokes et de l'équation de l'énergie, nous nous intéressons au cas test de la cavité différentiellement chauffée. Nous considérons une cavité carrée de côté unitaire où les deux parois verticales sont maintenues à des températures différentes $T(x_1 = 1) = T_0 = 0$ et $T(x_1 = 0) = T_1 = 1$ et les deux parois horizontales sont supposées adiabatiques $\partial T / \partial x_2|_{x_2=0} = \partial T / \partial x_2|_{x_2=1} = 0$, voir la figure 4.7. En considérant que les quatre parois de la cavité sont immobiles, la configuration de la figure 4.7 représente typiquement un écoulement de convection naturelle dans lequel les forces volumiques sont le moteur l'écoulement. La dilatation du fluide le long de la paroi chaude a pour effet d'amoinrir la masse volumique ρ du fluide d'où l'apparition de la poussée d'Archimède. Au contact de la paroi froide, la masse volumique du fluide augmente, créant ainsi dans la cavité un mouvement de recirculation du fluide. Les variations de la masse volumique sont considérées uniquement dans le terme des forces volumique des équations de Navier-Stokes. Sous l'hypothèse de Boussinesq ces variations sont exprimées par $\rho = \rho_0 (1 - \beta_T (T - T_0))$ où β_T est le coefficient de dilatation volumique. Dans la suite, pour adapter le système d'équations gouvernant (2.8)–(2.9) au problème de la cavité différentiellement chauffée, nous reconsidérons l'adimensionnement du système d'équations en remplaçant l'échelle caractéristique de la vitesse U par $\sqrt{g \beta_T (T_1 - T_0) L / \mathbf{Pr}}$. Les équations de

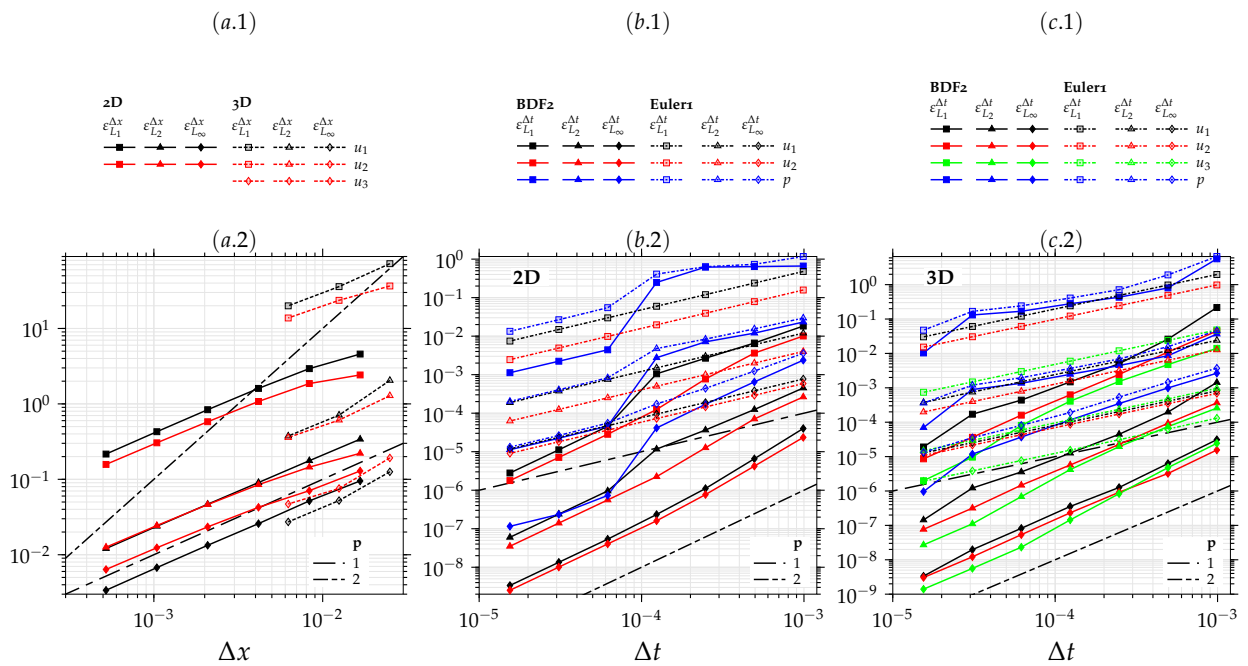


FIGURE 4.5 – (a) Évolution des erreurs de discrétisation spatiales de la vitesse $\epsilon^{\Delta x}(u_1)$ et $\epsilon^{\Delta x}(u_2)$, mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ en fonction du pas de maillage $\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3$ pour les cas des cavités bidimensionnel 2D et cubique 3D et pour une nombre de Reynolds $\mathbf{Re} = 100$ avec $\Delta t = 2.5 \times 10^{-4}$ et pour un nombre d'itérations constant $n = 500$. (b) et (c) présentent respectivement pour les cavités bidimensionnel 2D et cubique 3D l'évolution des erreurs de discrétisation temporelle de la vitesse et de la pression mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ en fonction du pas de temps Δt pour le schéma d'Euler1 et de schéma BDF2 avec un maillage $51 \times 51 \times 51$ en 3D et 51×51 en 2D et pour pour un temps fixe $t = n_i \Delta t_i = 0.5$ (le nombre d'itérations correspondant au premier pas Δt_1 de temps est $n_1 = 500$).

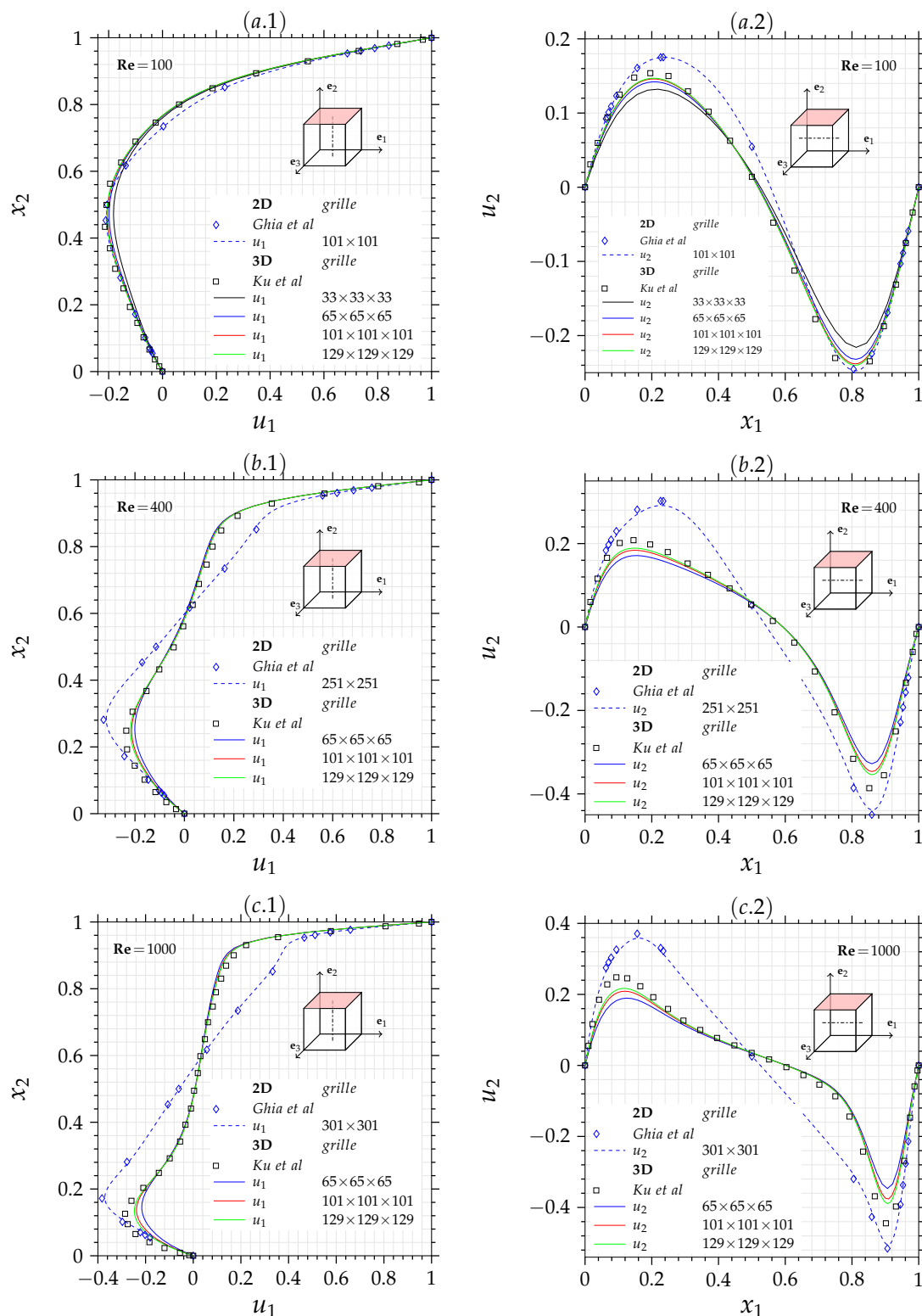


FIGURE 4.6 – Comparaison des profils de vitesse u_1 et u_2 obtenus avec différentes résolutions de maillage avec les résultats issus de la littérature Ghia et al. [75] dans le cas d’une cavité bidimensionnelle et Ku et al. [124] dans le cas d’une cavité tridimensionnelle, en fonction du nombre de Reynolds (a) $Re = 100$, (b) $Re = 400$ et (c) $Re = 1000$. Notons que les profils sont prélevés le long des lignes médianes, $u_1(x_1 = 0.5, x_2)$ et $u_2(x_1, x_2 = 0.5)$ dans le cas d’une cavité bidimensionnelle et $u_1(x_1 = 0.5, x_2, x_3 = 0.5)$ et $u_2(x_1, x_2 = 0.5, x_3 = 0.5)$ dans le cas d’une cavité tridimensionnelle.

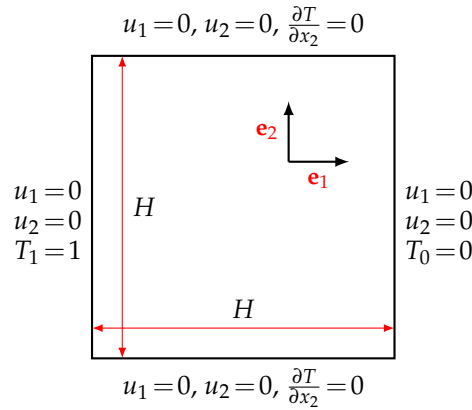


FIGURE 4.7 – Domaine de calcul ainsi que les conditions aux limites associées au cas test de la cavité différentiellement chauffée.

Navier-Stokes et de l'énergie s'écrivent alors comme suit,

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p_m + \frac{\text{Pr}}{\sqrt{\text{Ra}}} \Delta \mathbf{u} - \text{Pr} T \mathbf{e}_2 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \frac{1}{\sqrt{\text{Ra}}} \Delta T \end{cases} \quad (4.10)$$

où \mathbf{e}_2 est un vecteur unitaire valant $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ et $\mathbf{Ra} = g\beta_T L^3 (T_1 - T_0) / (\alpha\nu)$ représente le nombre de Rayleigh exprimant l'importance de l'effet des forces de flottabilité par rapport aux effets dissipatifs. Pour quantifier le transfert de chaleur s'opérant entre les parois chaude/froide et le fluide, nous introduisons le nombre de Nusselt $\mathbf{Nu} = qL/k(T_1 - T_0)$ représentant le rapport entre le flux thermique réellement transmis et le flux thermique qui serait transmis uniquement par conduction dans un milieu immobile. En utilisant la loi de Fourier, le nombre de Nusselt local s'écrit (en utilisant les variables sans dimension),

$$\mathbf{Nu} = -\frac{\partial T}{\partial x_1} \quad (4.11)$$

et le nombre de Nusselt moyen $\overline{\mathbf{Nu}}$ sur la paroi chaude est donné par,

$$\overline{\mathbf{Nu}} = \int_0^1 \mathbf{Nu} \Big|_{x_1=0} dx_2 = -\int_0^1 \frac{\partial T}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} dx_2 \quad (4.12)$$

La figure 4.8-(a) montre l'évolution des erreurs de discrétisation spatiales du vecteur vitesse $\varepsilon^{\Delta x}(u_1)$ et $\varepsilon^{\Delta x}(u_2)$ et de la température $\varepsilon^{\Delta x}(T)$ mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ en fonction du pas de maillage $\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2$ pour un nombre de Rayleigh $\mathbf{Ra} = 10^3$ avec $\Delta t = 2.232 \times 10^{-4}$ et pour un nombre d'itérations $n = 500$. On peut constater que les erreurs enregistrées pour les composantes du vecteur vitesse ainsi que pour la température convergent suivant une pente d'ordre 2, satisfaisant ainsi l'ordre théorique attendu de la discrétisation spatiale. La figure 4.8-(b) montre l'évolution des erreurs de discrétisation temporelle de la vitesse $\varepsilon^{\Delta t}(u_1)$ et $\varepsilon^{\Delta t}(u_2)$, de la température $\varepsilon^{\Delta t}(T)$ ainsi que de la pression $\varepsilon^{\Delta t}(p)$ mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ en fonction du pas de temps Δt pour le schéma d'Euler1 et de schéma BDF2 avec un maillage 51×51 et pour un temps fixe $t = n_i \Delta t_i = 0.098$ (le nombre d'itérations correspondant au premier pas Δt_1 de temps est $n_1 = 500$). On note que les ordres théoriques des schémas d'Euler1 et BDF2 sont retrouvés au niveau numérique.

D'autre part, la figure 4.9 montre une comparaison des champs de température obtenus en fonction du nombre de Rayleigh $\mathbf{Ra} = \{10^3, 10^4, 10^5, 10^6\}$ avec les résultats de la littérature

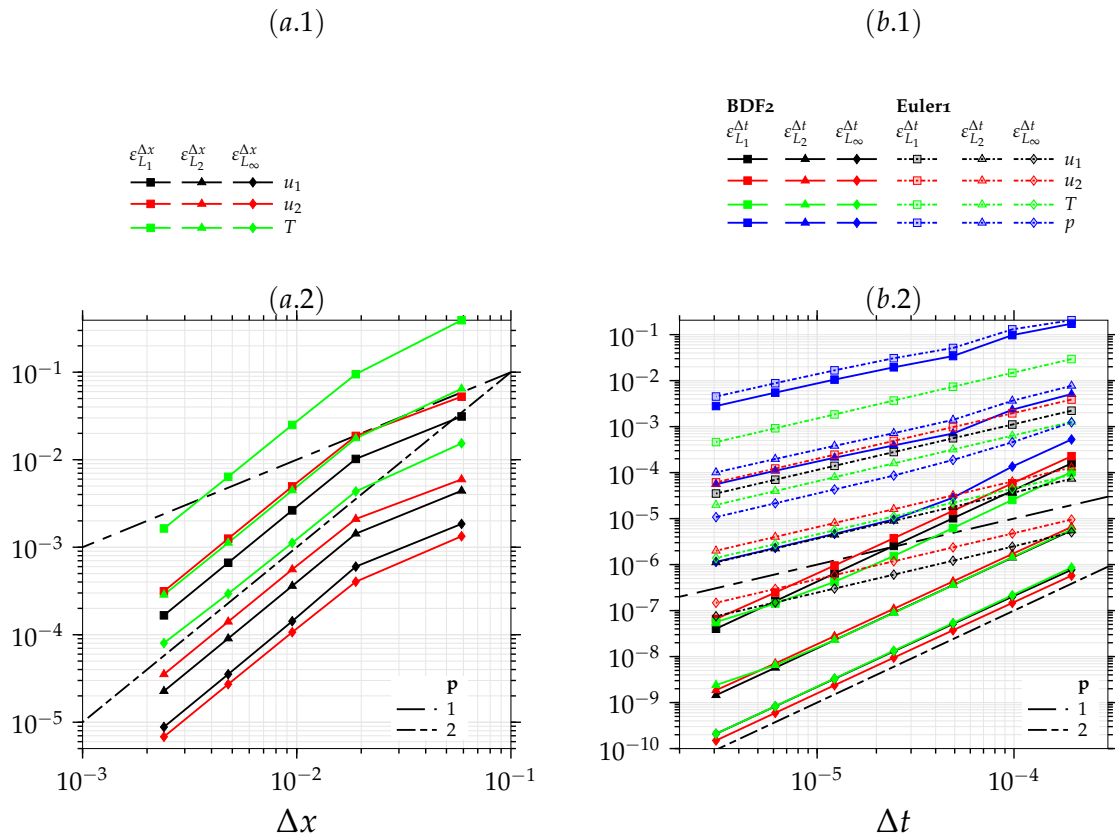


FIGURE 4.8 – (a) Évolution des erreurs de discrétisation spatiales de la vitesse $\varepsilon^{\Delta x}(u_1)$ et $\varepsilon^{\Delta x}(u_2)$ et de la température $\varepsilon^{\Delta x}(T)$ mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ en fonction du pas de maillage $\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2$ pour un nombre de Rayleigh $\mathbf{Ra} = 10^3$ avec $\Delta t = 2.232 \times 10^{-4}$ et pour un nombre d'itérations $n = 500$. (b) Évolution des erreurs de discrétisation temporelle de la vitesse $\varepsilon^{\Delta t}(u_1)$ et $\varepsilon^{\Delta t}(u_2)$, de la température $\varepsilon^{\Delta t}(T)$ ainsi que de la pression $\varepsilon^{\Delta t}(p)$ mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ en fonction du pas de temps Δt pour le schéma d'Euler1 et de schéma BDF2 avec un maillage 51×51 et pour un temps fixe $t = n_i \Delta t_i = 0.098$ (le nombre d'itérations correspondant au premier pas Δt_1 de temps est $n_1 = 500$).

de Vahl Davis [52, p.257] dans le cas test de la cavité différentiellement chauffée. On enregistre un parfait accord entre les champs de température obtenus et ceux issus de la littérature de Vahl Davis [52]. Aussi on peut constater une stratification du champ de la température au centre de la cavité avec l'accroissement du nombre de Rayleigh. Par suite, le tableau 4.1 montre une comparaison des valeurs des vitesses maximales, u_1^{max} et u_2^{max} , et de leurs position ainsi que des valeurs du nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} obtenues en fonction du nombre de Rayleigh $Ra = \{10^3, 10^4, 10^5, 10^6\}$ avec les résultats de la littérature de Vahl Davis [52] pour le cas de la cavité différentiellement chauffée avec un maillage de 101×101 . On note que les résultats obtenus dans le présent travail sont en bon accord avec ceux donnés dans littérature [52] permettant ainsi la validation de notre approche numérique vis-à-vis de la résolution couplée des équations du Navier-Stokes et de l'équation de l'énergie dans le cas d'un écoulement de convection naturelle.

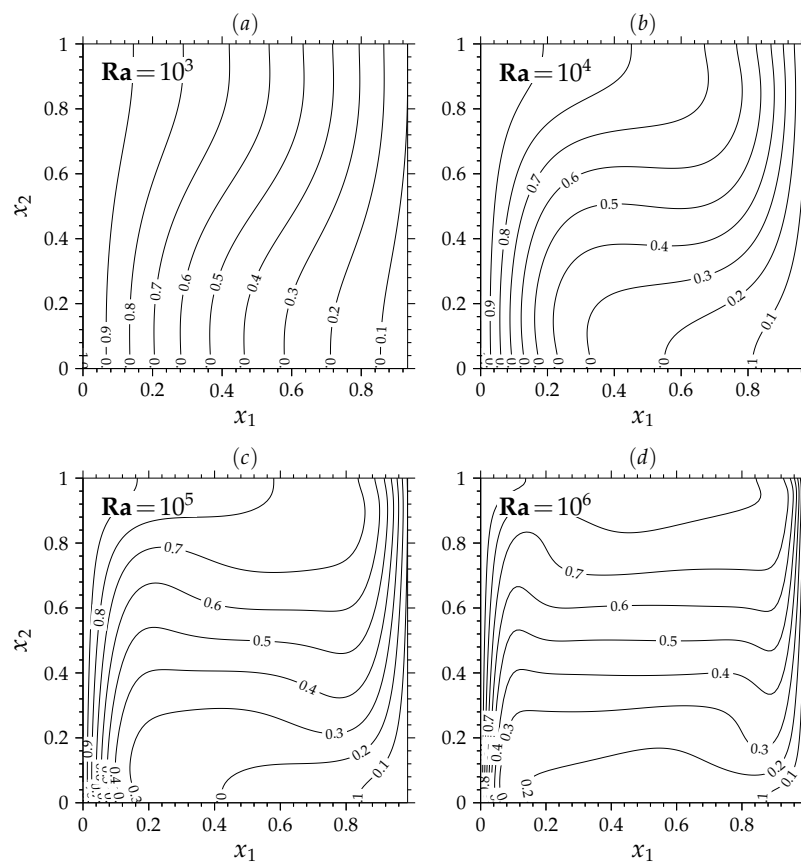


FIGURE 4.9 – Comparaison des champs de température obtenus en fonction du nombre de Rayleigh $Ra = \{10^3, 10^4, 10^5, 10^6\}$ avec les résultats de la littérature de Vahl Davis [52, figure 4, p.257] dans le cas de la cavité différentiellement chauffée.

TABLEAU 4.1 – Comparaison des valeurs des vitesses maximales et de leurs position ainsi que des valeurs du nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} obtenues en fonction du nombre de Rayleigh $Ra = \{10^3, 10^4, 10^5, 10^6\}$ avec les résultats de la littérature de Vahl Davis [52] dans le cas de la cavité différentiellement chauffée avec un maillage de 101×101 .

	u_1^{max}	x_2	u_2^{max}	x_1	\overline{Nu}
$Ra = 10^3$					
de Vahl Davis [52]	3.649	0.813	3.697	0.178	1.118
Présent travail	3.6511	0.81	3.6994	0.180	1.116
$Ra = 10^4$					
de Vahl Davis [52]	16.178	0.823	19.617	0.119	2.243
Présent travail	16.2095	0.82	19.6634	0.12	2.2345
$Ra = 10^5$					
de Vahl Davis [52]	34.73	0.855	68.59	0.066	4.519
Présent travail	34.6984	0.82	68.55	0.070	4.4972
$Ra = 10^6$					
de Vahl Davis [52]	64.63	0.85	219.36	0.0379	8.8
Présent travail	64.233	0.85	219.6	0.04	8.82

4.2.4 Cavité entraînée chauffée par le haut

Le cas test précédent portant sur la cavité différentiellement chauffée représente un écoulement de convection naturelle, le présent benchmark illustre un écoulement de convection forcée. Il s'agit de la cavité entraînée et chauffée par le haut. La paroi supérieure, animée par $u_1 = 1$, de la cavité carrée du côté unitaire est maintenue à une température chaude $T(x_2 = 1) = T_1 = 1$ et tandis que la paroi inférieure est maintenue à une température froide $T(x_2 = 0) = T_0 = 0$. Les parois verticales sont supposées adiabatiques $\partial T / \partial x_2|_{x_2=0} = \partial T / \partial x_2|_{x_2=1} = 0$, voir la figure 4.10.

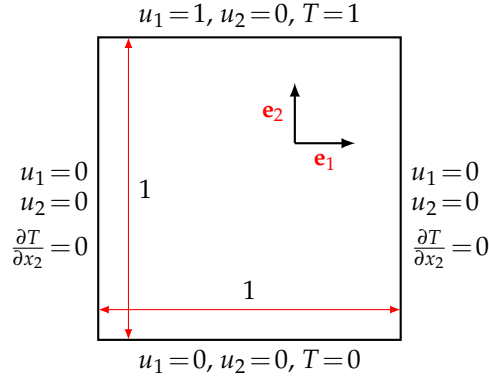


FIGURE 4.10 – Domaine de calcul ainsi que les conditions aux limites associées au cas test de la cavité entraînée et chauffée par le haut.

Pour ce benchmark les échelles caractéristique sont fidèles à celles données dans la section 2.2. Cependant, en considérant l'hypothèse de Boussinesq, le système d'équations gouvernant (2.8) peut se récrire sous la forme suivante,

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p_m + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} - \frac{Gr}{Re^2} T \mathbf{e}_2 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \frac{1}{Pr Re} \Delta T \end{cases} \quad (4.13)$$

où $Gr = Ra Pr^{-1} = g \beta_T (T_1 - T_0) L^3 / \nu^2$ représente le nombre de Grashof qui exprime le rapport entre

les forces de gravité et les forces visqueuses. Le rapport adimensionnel de Richardson $\mathbf{Ri} = \mathbf{Gr}/\mathbf{Re}^2$ permet de distinguer le mode de convection dominant. C'est-à-dire, si $\mathbf{Gr}/\mathbf{Re}^2 \gg 1$, la convection naturelle domine et sinon si $\mathbf{Gr}/\mathbf{Re}^2 \ll 1$, la convection forcée prévaut. Par ailleurs, le nombre de Nusselt local sur la paroi chaude s'écrit,

$$\mathbf{Nu} = \left. \frac{\partial T}{\partial x_2} \right|_{x_2=1} \quad (4.14)$$

et le nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude est donné par,

$$\overline{\mathbf{Nu}} = \int_0^1 \mathbf{Nu} \, dx_1 = \int_0^1 \left. \frac{\partial T}{\partial x_2} \right|_{x_2=1} dx_1 \quad (4.15)$$

La figure 4.11–(a) montre l'évolution des erreurs de discrétisation spatiales du vecteur vitesse $\varepsilon^{\Delta x}(u_1)$ et $\varepsilon^{\Delta x}(u_2)$ et de la température $\varepsilon^{\Delta x}(T)$ mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ en fonction du pas de maillage $\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2$ pour un nombre de Reynolds $\mathbf{Re} = 100$ et un nombre de Grashof $\mathbf{Gr} = 100$ avec $\Delta t = 2.232 \times 10^{-4}$ et pour un nombre d'itérations $n = 10^3$. On constate pour les composantes du vecteur vitesse que due à la présence des points singuliers, on obtient une évolution au premier ordre des erreurs liées à la discrétisation spatiale. Par ailleurs, on note que les erreurs spatiales attachées à la température satisfassent une évolution à l'ordre 2. D'autre part, la figure 4.11–(b) fournit l'évolution des erreurs de discrétisation temporelle des composantes du vecteur vitesse $\varepsilon^{\Delta t}(u_1)$ et $\varepsilon^{\Delta t}(u_2)$, de la température $\varepsilon^{\Delta t}(T)$ ainsi que de la pression $\varepsilon^{\Delta t}(p)$ mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ en fonction du pas de temps Δt pour les schémas d'Euler1 et BDF2 avec un maillage 51×51 et pour un temps fixe $t = n_i \Delta t_i = 0.617$ (le nombre d'itérations correspondant au premier pas Δt_1 de temps est $n_1 = 10^3$). Les évolutions des erreurs temporelles correspondent aux ordres théoriques attendus.

Finalement, le tableau 4.2 montre une comparaison des valeurs du nombre de Nusselt moyen $\overline{\mathbf{Nu}}$ obtenues en fonction du nombre de Reynolds $\mathbf{Re} = \{100, 400, 10^3\}$ et en fonction du nombre de Grashof $\mathbf{Gr} = \{100, 10^4, 10^6\}$ avec les résultats de la littérature donnés par Iwatsu et al. [104], Khanafer et al. [119] et Tiwari and Das [218] dans le cas de la cavité entraînée et chauffée par le haut avec un maillage de 201×201 . On enregistre un très bon compromis entre les valeurs du nombre de Nusselt moyen obtenues et les résultats de la littérature permettant ainsi de valider notre approche numérique à l'égard de la résolution des équations de Navier-Stokes et de l'énergie dans le cadre d'un écoulement de convection forcée.

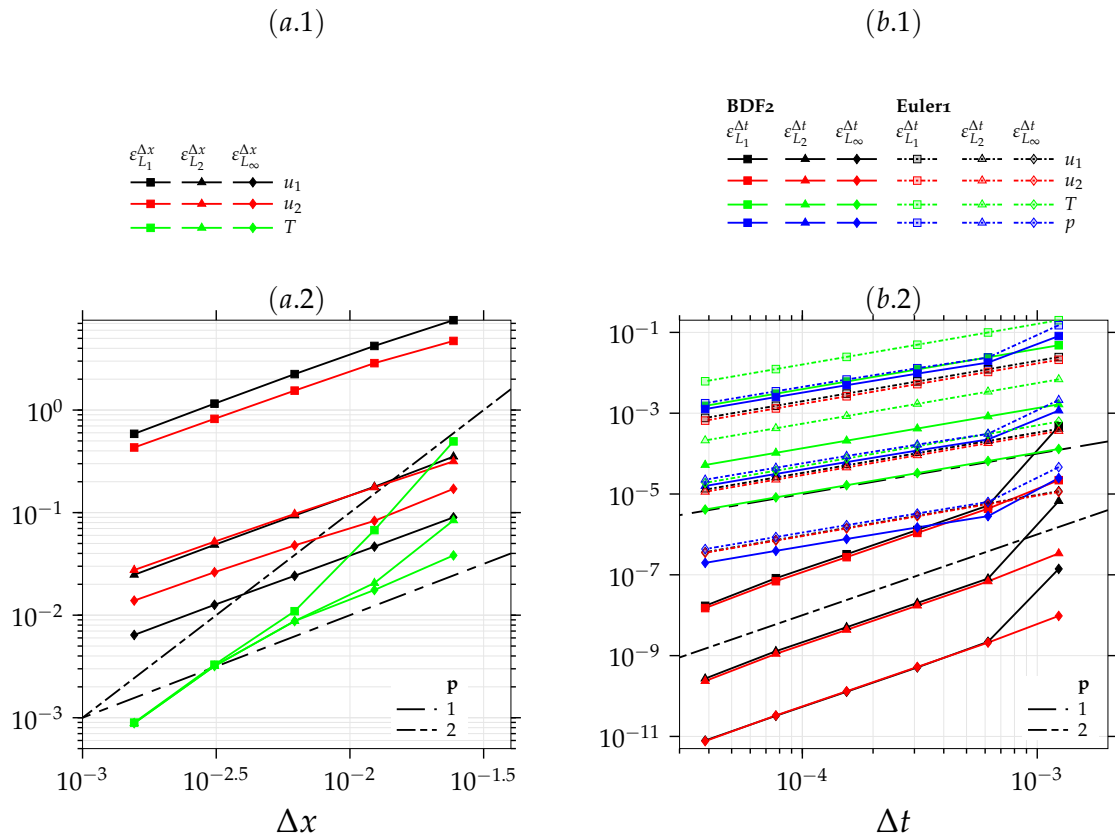


FIGURE 4.11 – (a) Évolution des erreurs de discrétisation spatiales de la vitesse $\varepsilon^{\Delta x}(u_1)$ et $\varepsilon^{\Delta x}(u_2)$ et de la température $\varepsilon^{\Delta x}(T)$ mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ en fonction du pas de maillage $\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2$ pour un nombre de Reynolds $\mathbf{Re} = 100$ et un nombre de Grashof $\mathbf{Gr} = 100$ avec $\Delta t = 2.232 \times 10^{-4}$ et pour un nombre d'itérations constant $n = 10^3$. (b) Évolution des erreurs de discrétisation temporelle de la vitesse $\varepsilon^{\Delta t}(u_1)$ et $\varepsilon^{\Delta t}(u_2)$, de la température $\varepsilon^{\Delta t}(T)$ ainsi que de la pression $\varepsilon^{\Delta t}(p)$ mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ en fonction du pas de temps Δt pour le schéma d'Euler1 et de schéma BDF2 avec un maillage 51×51 et pour un temps fixe $t = n_i \Delta t_i = 0.617$ (le nombre d'itérations correspondant au premier pas Δt_1 de temps est $n_1 = 10^3$).

TABLEAU 4.2 – Comparaison des valeurs du nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} obtenues en fonction du nombre de Reynolds $Re = \{100, 400, 10^3\}$ et en fonction du nombre de Grashof $Gr = \{100, 10^4, 10^6\}$ avec les résultats de la littérature donnés par Iwatsu et al. [104], Khanafer et al. [119] et Tiwari and Das [218] dans le cas de la cavité entraînée et chauffée par le haut avec un maillage de 201x201.

	$Gr = 10^2$	$Gr = 10^4$	$Gr = 10^6$
Re = 100			
Iwatsu et al. [104]	1.94	1.34	1.02
Khanafer et al. [119]	2.02	-	1.02
Tiwari and Das [218]	2.10	1.47	1.04
Présent travail	2.0164	1.3852	1.0197
Re = 400			
Iwatsu et al. [104]	3.84	3.62	1.22
Khanafer et al. [119]	4.04	-	1.17
Tiwari and Das [218]	3.85	3.61	1.23
Présent travail	4.0335	3.7791	1.1838
Re = 1000			
Iwatsu et al. [104]	6.33	6.29	1.77
Khanafer et al. [119]	6.42	-	1.72
Tiwari and Das [218]	6.33	6.28	1.77
Présent travail	6.5635	6.5101	1.7252

4.2.5 Écoulement de Poiseuille du fluide Newtonien

On considère l'écoulement de Poiseuille dépendant du temps d'un fluide Newtonien entre deux plaques parallèles séparées d'une hauteur unitaire, voir la figure 4.12. La composante u_1 du vecteur vitesse est soumise à la condition aux limites d'adhérence en $x_2 = 0$ et $x_2 = 1$. L'écoulement supposé laminaire et établi est généré par l'application à l'instant $t_0 = 0$ d'un gradient de pression longitudinal constant. Ainsi, à l'exception du gradient de pression longitudinal, l'ensemble des dérivées par rapport à la direction x_1 sont nulles. Pour l'écoulement de poiseuille dépendant

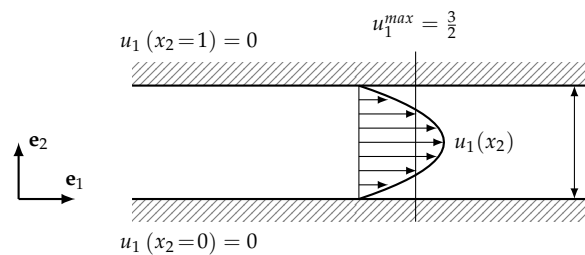


FIGURE 4.12 – Domaine de calcul ainsi que les conditions aux limites associées à l'écoulement de Poiseuille entre deux plaques parallèles.

du temps, laminaire et établi, le système d'équations de Navier-Stokes régissant se réduit à une simple équation de diffusion transitoire s'écrivant sous la forme suivante

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{dp}{dx_1} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \quad (4.16)$$

La solution exacte dépendant du temps s'écrit comme suit,

$$u_1(x_2, t) = \frac{Re}{2} \frac{dp}{dx_1} (x_2 - 1)x_2 + 4Re \frac{dp}{dx_1} \sum_{n'=1}^{\infty} \left[n^{-3} \sin(nx_2) \exp\left(-n^2 \frac{t}{Re}\right) \right] \quad (4.17)$$

avec $n = (2n' - 1)\pi$.

L'équilibre entre la force de pression (force de traînement) et les forces visqueuses correspond à l'état stationnaire de l'écoulement, le terme transitoire de l'équation (4.17) s'annule et la solution de l'écoulement s'écrit,

$$u_1(x_2) = \frac{\text{Re}}{2} \frac{dp}{dx_1} (x_2 - 1)x_2 \quad (4.18)$$

et la vitesse moyenne est donnée par,

$$\bar{u}_1 = \int_0^1 u_1(x_2) dx_2 = -\frac{\text{Re}}{12} \frac{dp}{dx_1} \quad (4.19)$$

La vitesse maximale est donnée au centre du canal et vaut $u_1^{\max} = \frac{3}{2}\bar{u}_1$.

La figure 4.13 montre pour $\bar{u}_1 = 1$ et $\text{Re} = 1$ une confrontation de la solution numérique $u_1(x_2, t)$ et de la solution exacte $u_1^{\text{ana}}(x_2, t)$, donnée par (4.17), à différents instant t_i avec un maillage de 41 points et avec le schéma BDF2. Qualitativement, on peut constater une très bonne concordance entre la solution numérique dépendant de temps et la solution exacte en régime transitoire. Toutefois, vu l'ordre 2 de la discrétisation spatiale et la distribution parabolique du profil de vitesse¹, à l'état stationnaire la solution numérique est identique à la solution exacte.

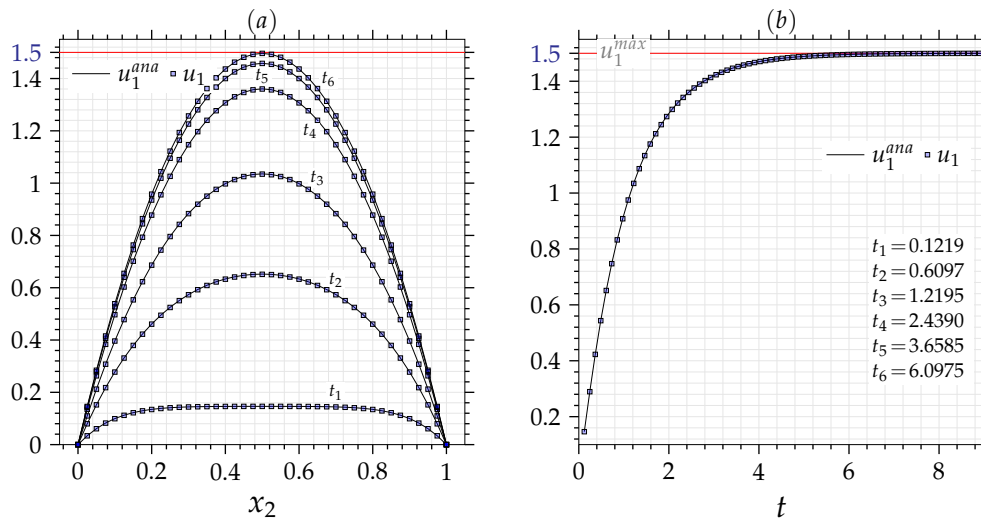


FIGURE 4.13 – (a) Comparaison de la solution numérique $u_1(x_2, t)$ à la solution exacte $u_1^{\text{ana}}(x_2, t)$ à différents instant t_i dans le cas de l'écoulement de Poiseuille d'un fluide Newtonien avec $\bar{u}_1 = 1$ et un maillage de 41 points et avec le schéma BDF2. (b) comparaison de la solution numérique au centre de la conduite $u_1(x_2 = 0.5, t)$ à la solution exacte $u_1^{\text{ana}}(x_2 = 0.5, t)$ en fonction du temps.

La figure 4.14–(a) montre l'évolution des écarts de la solution numérique par rapport à la solution exacte $\varepsilon^{\Delta x, \Delta t}(u_1)$ avec un pas de temps fixe $\Delta t = 1.28 \times 10^{-5}$ (en bleu) et $\Delta t = 1.28 \times 10^{-6}$ (en rouge), mesurés en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ , en fonction du maillage Δx_2 avec le schéma en temps BDF2. Une évolution suivant une pente d'ordre 2 est enregistrée uniquement lorsque $\Delta x_2 \gg 8 \times 10^{-3}$. En effet, comme les écarts $\varepsilon^{\Delta x, \Delta t}(u_1)$ incluent les erreurs de discrétisation spatiales et temporelles, avec $\Delta t = 1.28 \times 10^{-5}$ les erreurs temporelles dominent les erreurs spatiales lorsque $\Delta x_2 < 8 \times 10^{-3}$ d'où la saturation de $\varepsilon^{\Delta x, \Delta t}(u_1)$, avec la diminution du pas de maillage Δx_2 . Pour un pas de temps davantage plus faible $\Delta t = 1.28 \times 10^{-6}$ (courbes en rouge), on peut constater que les écarts de la solution numérique par rapport à la solution exacte $\varepsilon^{\Delta x, \Delta t}(u_1)$ évoluent suivant une pente d'ordre 2 dans une gamme plus large des pas de maillage $\Delta x_2 > 5 \times 10^{-4}$. Pour

1. À l'état stationnaire l'erreur de la discrétisation spatiale est une fonction de la classe C^4 , c'est-à-dire, elle est proportionnelle à $(\partial^4 u_1 / \partial x_2^4) \Delta x_2^2$.

$\Delta x_2 < \sim 5 \times 10^{-4}$, les erreurs de discrétisation temporelle dominent les erreurs de discrétisation spatiale. Toutefois, en utilisant une approche numérique pour évaluer les erreurs de discrétisation spatiale indépendamment des erreurs de discrétisation temporelle, on enregistre que les erreurs de discrétisation spatiale $\varepsilon^{\Delta x}(u_1)$, données par la figure 4.14-(a), vérifient une évolution d'ordre 2 pour l'ensemble des valeurs des pas de maillage Δx_2 considérés.

De même, la figure 4.14-(b) montre l'évolution des écarts de la solution numérique par rapport à la solution exacte $\varepsilon^{\Delta x, \Delta t}(u_1)$ avec un pas de maillage fixe $\Delta x_2 = 8.26 \times 10^{-3}$ (en bleu) et $\Delta x_2 = 1.3 \times 10^{-4}$ (en rouge), mesurés en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ , en fonction du pas de temps Δt avec le schéma d'Euler1 et le schéma BDF2. D'abord, pour le schéma BDF2 dont la précision est proportionnelle à Δt^2 , on constate pour les deux résolutions spatiales $\Delta x_2 = 8.26 \times 10^{-3}$ et $\Delta x_2 = 1.30 \times 10^{-4}$ que l'erreur $\varepsilon^{\Delta x, \Delta t}(u_1)$ ne varie pratiquement pas en fonction du pas de temps Δt . Cela est dû à la domination de la contribution des erreurs de la discrétisation spatiale devant la contribution des erreurs de la discrétisation temporelle. Par ailleurs, pour le schéma Euler 1 dont la précision est de premier ordre, on enregistre avec $\Delta x_2 = 8.26 \times 10^{-3}$, que l'évolution des écarts de la solution numérique par rapport à la solution exacte $\varepsilon^{\Delta x, \Delta t}(u_1)$ suit une pente de premier ordre en fonction de résolution temporelle, mais seulement pour les pas de temps $\Delta t > \sim 3 \times 10^{-4}$. Pour les pas de temps plus faibles on relève l'effet de la domination des erreurs de discrétisation spatiale. Avec une résolution spatiale davantage plus faible $\Delta x_2 = 1.30 \times 10^{-4}$, l'erreur de la discrétisation spatiale devient secondaire et les écarts de la solution numérique par rapport à la solution exacte $\varepsilon^{\Delta x, \Delta t}(u_1)$ satisfont l'ordre théorique.

Finalement, en s'appuyant sur une méthode numérique pour évaluer les erreurs de la discrétisation temporelle indépendamment des erreurs de la discrétisation spatiale (courbes en noir dans la figure 4.14-(b)), on peut remarquer que l'évolution des erreurs $\varepsilon^{\Delta t}(u_1)$ du schéma BDF2 et du schéma d'Euler1 satisfaisant les ordres théoriques attendus validant ainsi les méthodes numériques implémentées dans le cadre de l'écoulement de Poiseuille dans un canal plan d'un fluide Newtonien.

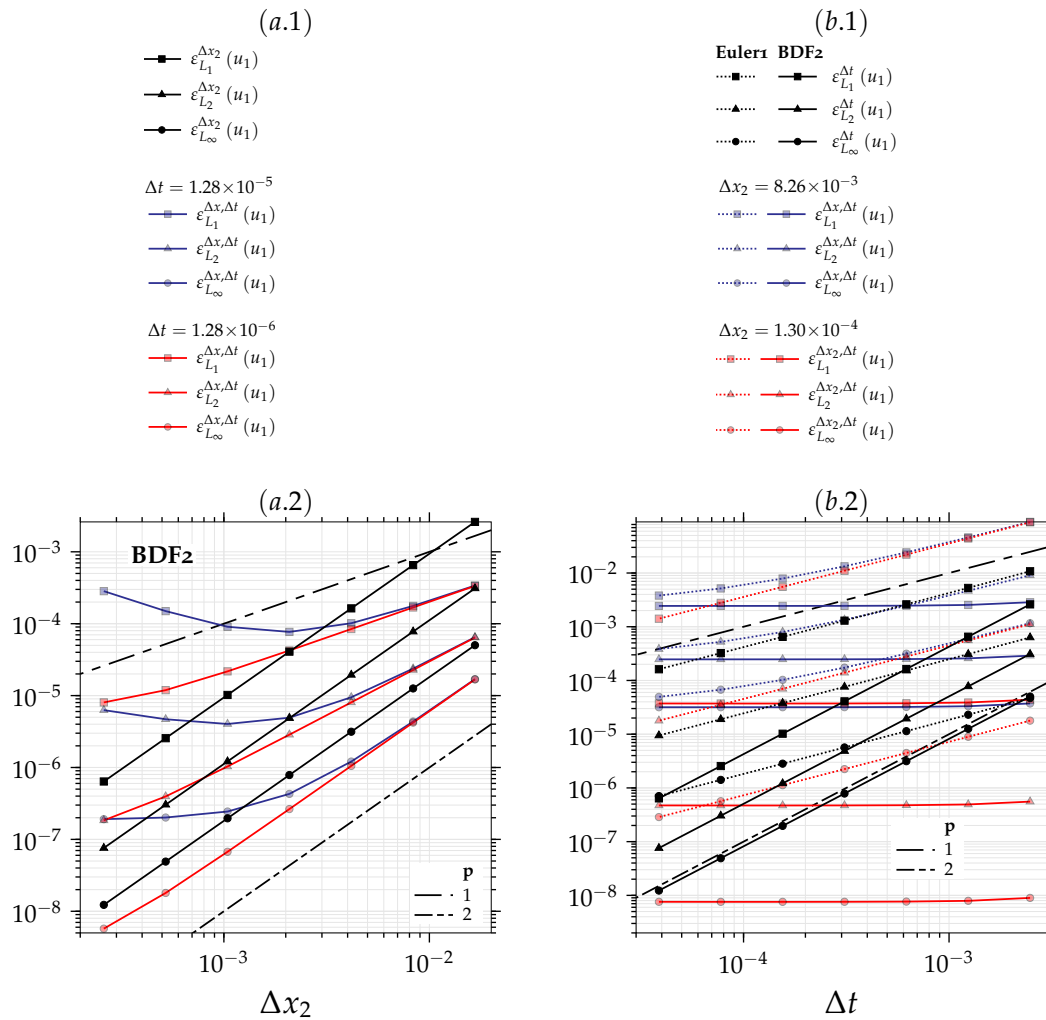


FIGURE 4.14 – (a) Évolution des erreurs de discrétisation spatiales de la vitesse approchée d’une façon numérique $\epsilon^{\Delta x}(u_1)$, et des erreurs de discrétisation spatiales de la vitesse donnée par rapport à la solution exacte $\epsilon^{\Delta x, \Delta t}(u_1)$, d’abord lorsque $\Delta t = 1.28 \times 10^{-5}$ (en bleu) et ensuite lorsque $\Delta t = 1.28 \times 10^{-6}$ (en rouge) avec le schéma BDF2. Les erreurs de discrétisation spatiales, mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ , sont données en fonction du pas de maillage Δx_2 . (b) Évolution des erreurs de discrétisation temporelles de la vitesse approchée d’une façon numérique $\epsilon^{\Delta t}(u_1)$, et des erreurs de discrétisation temporelles de la vitesse donnée par rapport à la solution exacte $\epsilon^{\Delta x, \Delta t}(u_1)$, d’abord lorsque $\Delta x_2 = 8.26 \times 10^{-3}$ (en bleu) et ensuite lorsque $\Delta x_2 = 1.30 \times 10^{-4}$ (en rouge). Les erreurs de discrétisation temporelles, mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ , sont données en fonction du pas de temps Δt pour le schéma d’Euler1 et de schéma BDF2.

4.3 Benchmarks fluides viscoélastiques

Dans cette section, à travers le benchmark de l'écoulement de Poiseuille de fluides viscoélastiques, nous analysons le comportement des erreurs de discrétisations des méthodes numériques implémentées en fonction des différents paramètres rhéologiques.

4.3.1 Écoulement de Poiseuille du fluide Oldroyd–B

Étant donné la disponibilité de la solution exacte en régime transitoire, l'écoulement de Poiseuille dépendant de temps de fluide d'Oldroyd–B constitue un benchmark de référence pour la validation de la fiabilité des méthodes numériques en régime transitoire dans le cadre de problèmes des écoulements de fluides viscoélastiques, Sato and Richardson [186], Tanner and Xue [212], Oliveira and Pinho [156], Xue et al. [234, 235] et Duarte et al. [60]. Nous considérons l'écoulement de Poiseuille dépendant de temps de fluide d'Oldroyd–B entre deux plaques parallèles. La géométrie de l'écoulement ainsi que les conditions aux limites sont fidèles à celles données par la figure 4.12. Le système d'équations gouvernant, pour l'écoulement de Poiseuille établie dépendant de temps du fluide d'Oldroyd–B, se réduit à la forme suivante,

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{dp}{dx_1} + \frac{\beta}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \tau_{11}}{\partial t} = -\frac{1}{\text{We}} \tau_{11} + 2\tau_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \tau_{12}}{\partial t} = -\frac{1}{\text{We}} \tau_{12} + \frac{1-\beta}{\text{Ma}^2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ u_2 = \tau_{22} = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

Avec $dp/dx_1 = \text{const}$ à l'état initial et $t_0 = 0$, la solution exacte en terme de la vitesse de ce système d'équations (4.20) est donnée par Waters and King [229], elle s'écrit comme suit,

$$u_1(x_2, t) = 6x_2(1 - x_2) - 48 \sum_{n'=1}^{\infty} \left[n^{-3} \sin(nx_2) \exp(-\alpha_n \frac{t}{2\text{We}}) G(t) \right] \quad (4.21)$$

$$\text{avec } \begin{cases} G(t) = \cosh(\frac{\beta_n t}{2\text{We}}) + \frac{\gamma_n}{\beta_n} \sinh(\frac{\beta_n t}{2\text{We}}) & \text{avec } \beta_n = \sqrt{\alpha_n^2 - 4\text{En}^2} & \text{si } \alpha_n^2 - 4\text{En}^2 > 0 \\ G(t) = \cos(\frac{\beta_n t}{2\text{We}}) + \frac{\gamma_n}{\beta_n} \sin(\frac{\beta_n t}{2\text{We}}) & \text{avec } \beta_n = \sqrt{-\alpha_n^2 + 4\text{En}^2} & \text{si } \alpha_n^2 - 4\text{En}^2 < 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

où $n = (2n' - 1)\pi$ et $\alpha_n = 1 + \beta\text{En}^2$ ainsi que $\gamma_n = 1 - (2 - \beta)\text{En}^2$. Le rapport du nombre de Weissenberg et du nombre de Reynolds $\text{E} = \text{We}/\text{Re}$ représente le nombre élastique².

Contrairement à l'écoulement de Poiseuille d'un fluide Newtonien, dont l'évolution du profil de la vitesse en fonction du temps est régulière et la solution à l'état stationnaire est atteint d'une façon asymptotique, le régime transitoire du fluide d'Oldroyd–B est marqué par des oscillations intimement attachées à l'élasticité du fluide représenté par le nombre de Weissenberg et le rapport la viscosité du solvant et de la viscosité totale à taux de cisaillement nul β . La figure 4.15 montre à cet égard pour l'écoulement de Poiseuille du fluide d'Oldroyd–B avec $\beta = 10^{-7}$ et $\text{We} = 1$, l'évolution du profil de vitesse u_1 analytique et numérique, de la contrainte de cisaillement polymérique τ_{12} numérique et de la contrainte normal polymérique numérique τ_{11} à différents instants t_i . Les résultats numériques sont obtenus avec les différents schémas de discrétisation de la partie hyperbolique UP(1,2), WENO(3,5,7,9) et HOU(3,5,7,9) sur un maillage fixe de 1×121 . Pour la résolution temporelle le schéma BDF2 est utilisé avec $\Delta t = 4.13 \times 10^{-3}$.

2. Étant donné que la solution analytique est donnée à l'origine pour un temps caractéristique défini par rapport à la diffusion $\bar{t}_{diff} = t\mu_0/(\rho L^2)$ alors que le temps caractéristique 2.2 est défini relativement au temps de convection $\bar{t} = tU/L$, nous notons la relation $\bar{t}_{diff} = \bar{t}/\text{Re}$.

À l'opposé du fluide purement Newtonien, on note avec le fluide d'Oldroyd-B la discontinuité du profil de vitesse u_1 et du profil de la contrainte de cisaillement polymérique en régime transitoire. Cette discontinuité est issue du transfert convectif des contraintes viscoélastiques engendrant la formation d'un front d'onde de la contrainte de cisaillement, ou d'une façon équivalente, la formation d'un front d'onde de taux de déformation à l'instant initial, qui se propage ensuite suivant la direction x_2 . Au niveau de la paroi, le front d'onde est réfléchi et subit par suite une atténuation progressive en fonction du temps. Cependant, en terme de vitesse, on peut constater qualitativement en fonction des schémas de discrétisation de la partie hyperbolique que les solutions numériques obtenues avec les schémas d'ordre élevé WENO(3,5,7,9) et HOU(3,5,7,9) sont davantage fidèles à la solution analytique u^{ana} (ligne discontinue) que les schémas UP(1,2). Ce fait peut s'apercevoir davantage au niveau de la discontinuité montrant ainsi l'importance de la précision du schéma de discrétisation de la partie hyperbolique. De plus avec les schémas d'ordre élevé, aucune oscillation artificielle n'est relevée en régime transitoire. À l'état stationnaire, comme la viscosité polymérique du fluide d'Oldroyd-B est une constante indépendante du taux de cisaillement, le profil de vitesse est parabolique et identique au profil de vitesse du fluide Newtonien. À cet égard, notons qu'à l'exception du schéma UP1, l'ensemble des schémas de discrétisation de la partie hyperbolique reproduisent à l'état stationnaire une solution numérique identique à la solution analytique.

La solution numérique en régime transitoire est également dépendante du niveau de précision de la discrétisation temporelle. Nous analysons cette dépendance en fonction de l'importance de l'effet de diffusion de la viscosité du solvant par rapport à l'effet de la partie viscoélastique, c'est-à-dire en fonction du rapport de viscosité β du fluide d'Oldroyd-B. Avec le schéma WENO3 et pour une résolution temporelle $\Delta t = 1.17 \times 10^{-2}$ et un maillage de 1×51 , la figure 4.16 montre une comparaison de l'évolution en fonction temps de la vitesse au centre du canal $u_1(x_2 = 0.5)$ et de la solution exacte $u_{ana}(x_2 = 0.5)$ du fluide d'Oldroyd-B avec $\mathbf{Re} = 1$ et $\mathbf{We} = 1$, pour différents valeurs du rapport de viscosité $\beta = \mu_s / \mu_{t0} = \{0.99, 0.8, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001, 10^{-7}\}$, et avec les différents schémas de la discrétisation temporelle BDF2 et Euler1. D'abord, on enregistre aucune oscillation artificielle en régime transitoire en fonction rapport β et on note qualitativement un très bon accord entre le résultat numérique et la solution exacte en fonction du temps. Par suite, on peut constater clairement avec un nombre de Weissenberg $\mathbf{We} = 1$ que l'amplitude des oscillations de la vitesse en fonction du temps et la durée nécessaire pour atteindre l'état stationnaire augmente significativement avec la diminution du rapport β . Ce comportement est dû à l'amointrissement de l'effet diffus de la viscosité du solvant avec la diminution du rapport β et à l'accentuation de l'importance de l'effet convectif de la propagation du front d'ordre de la contrainte de cisaillement viscoélastique. Conséquemment, lorsque le fluide d'Oldroyd-B se rapproche de la configuration du fluide UCM ($\beta \rightarrow 0$), l'oscillation devient discontinue et la durée nécessaire pour atteindre l'état stationnaire est maximale. Par ailleurs, à travers la figure 4.16-(b, c) avec $\beta = \mu_s / \mu_{t0} = \{0.01, 0.001, 10^{-7}\}$ et comparativement à la solution analytique, on peut constater que les oscillations de $u_1(x_2 = 0.5)$ au niveau du premier et du quatrième pic d'oscillations sont clairement davantage plus précis avec le schéma BDF2 que avec le schéma Euler1.

Le comportement en régime transitoire du fluide d'Oldroyd-B dépend également du nombre de Weissenberg \mathbf{We} (ou de son équivalent, le nombre élastique \mathbf{E}). La figure 4.17 montre dans le cadre de l'écoulement de Poiseuille du fluide d'Oldroyd-B avec un rapport de viscosité du solvant constant $\beta = 0.1$, l'évolution temporelle de la vitesse au centre du canal obtenue numériquement $u_1(x_2 = 0.5)$ et de la solution exacte $u_{ana}(x_2 = 0.5)$, de contrainte de cisaillement polymérique numérique maximale $\tau_{12}(x_2 = 1)$ et de la contrainte normal polymérique $\tau_{11}(x_2 = 1)$ numérique de en fonction du nombre Élastique $\mathbf{E} = \mathbf{We} / \mathbf{Re} = \{0.1, 1, 10, 100\}$ avec $\mathbf{Re} = 1$ et avec le schémas BDF2 et une résolution temporelle $\Delta t = 1.93 \times 10^{-4}$ et en utilisant le schéma WENO3 sous un maillage de 51 points. D'abord, on relève qualitativement un bon accord entre le profil de la vitesse analytique et le profil de la vitesse numérique en fonction du temps pour l'ensemble des valeurs du nombre

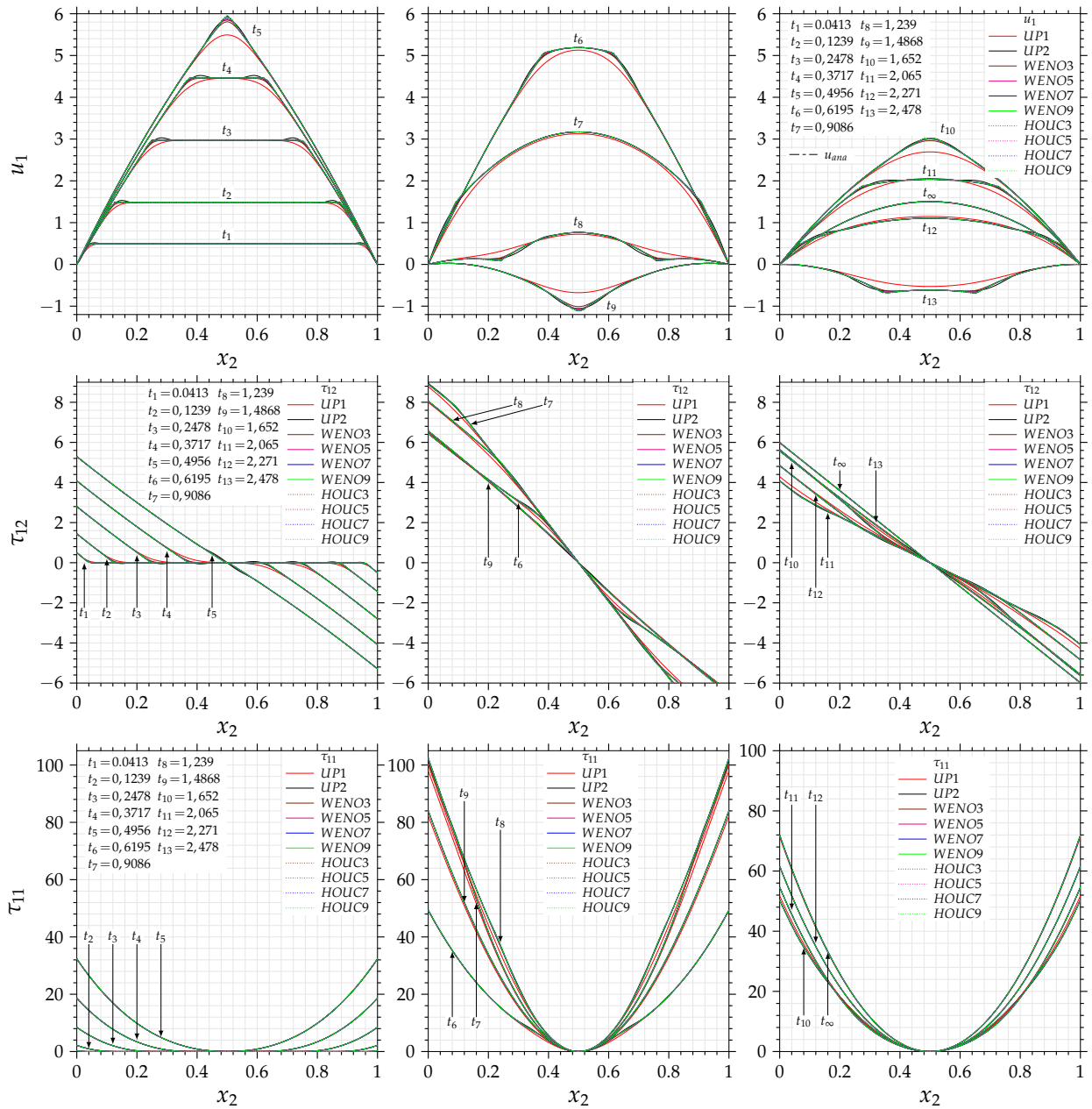


FIGURE 4.15 – Profile de vitesse $u_1(x_2)$, de la contrainte de cisaillement polymérique τ_{12} et de la contrainte normale polymérique τ_{11} de l'écoulement de Poiseuille du fluide d'Oldroyd-B à différents instants t_i pour $\beta = 10^{-7}$ et $We = 1$, obtenue avec les différents schémas de discrétisation de la partie hyperbolique UP(1,2), WENO(3,5,7,9) et HOUC(3,5,7,9) et avec le schéma BDF2 et pour résolution temporelle $\Delta t = 4.13 \times 10^{-3}$ et un maillage de 1×121 .

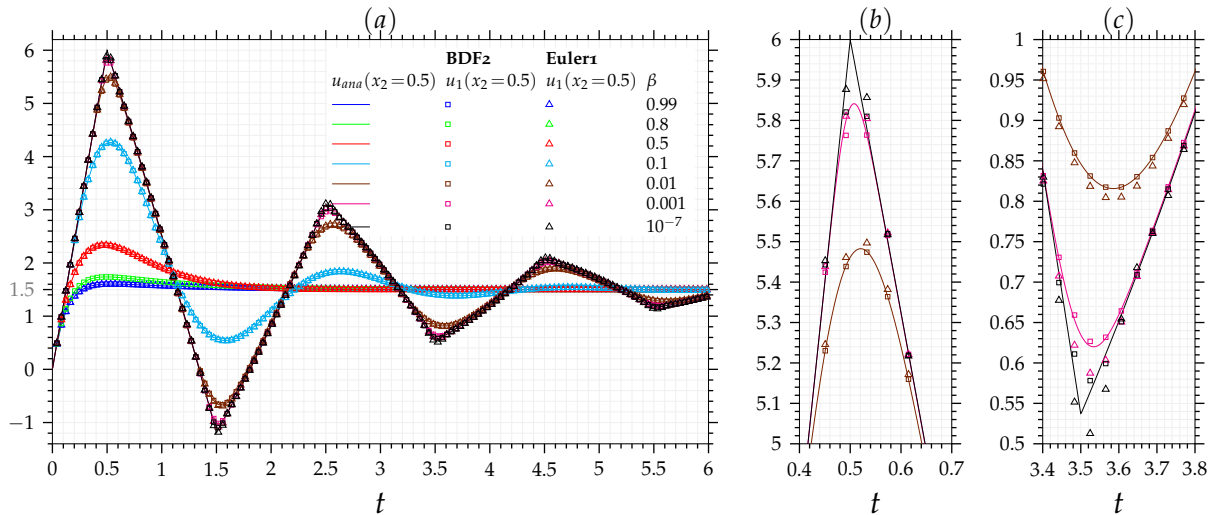


FIGURE 4.16 – Comparaison de l'évolution temporelle de la vitesse au centre du canal obtenue numériquement $u_1(x_2 = 0.5)$ et de la solution exacte $u_{ana}(x_2 = 0.5)$ du fluide d'Oldroyd-B en fonction du rapport de viscosité du solvant et de la viscosité total $\beta = \mu_s / \mu_{t0} = \{0.99, 0.8, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001, 10^{-7}\}$ avec les schémas BDF2 et d'Euler1 et pour $\mathbf{Re} = 1$, $\mathbf{We} = 1$ et en utilisant le schéma WENO3 avec une résolution temporelle $\Delta t = 1.17 \times 10^{-2}$ et un maillage de 1×51 .

élastique considérés. Par ailleurs, avec un rapport de viscosité du solvant constant $\beta = 0.1$, on peut constater que l'intensification de l'élasticité du fluide d'Oldroyd-B augmente à la fois l'amplitude et la période des oscillations, et ainsi la durée nécessaire pour atteindre le régime stationnaire. Cependant, aux valeurs relativement faibles du nombre de Weissenberg, $\mathbf{We} \leq 1$, le nombre d'oscillations augmentent (moins d'amortissement) avec l'augmentation du nombre de Weissenberg. En revanche, aux valeurs relativement larges du nombre de Weissenberg $\mathbf{We} > 1$, sous l'effet de la dissipation de la viscosité du solvant aux temps longs, le taux d'amortissement des oscillations augmente et le nombre d'oscillations diminue pour se réduire à une seule oscillation de la vitesse. Toutefois, la durée nécessaire pour atteindre l'état stationnaire continue d'augmenter avec l'augmentation du nombre de Weissenberg.

D'une façon quantitative, pour le modèle d'Oldroyd-B avec $\beta = 10^{-7}$, $\mathbf{Re} = 1$ et $\mathbf{We} = 1$ et pour le schéma BDF2 avec une résolution temporelle $\Delta t = 4.13 \times 10^{-3}$, la figure 4.18 montre l'évolution temporelle des écarts entre la solution numérique et la solution exacte $\varepsilon^{\Delta x, \Delta t}(u_1)$, mesurés en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ , en fonction des schémas numériques utilisés pour la discrétisation de la partie hyperbolique UP(1,2), WENO(3,5,7,9) et HOUC(3,5,7,9) avec un maillage de 121 points. D'emblée, pour le schéma UP1, on note une saturation des écarts $\varepsilon^{\Delta x, \Delta t}(u_1)$ en fonction du temps indiquant l'erreur de discrétisation spatiale de la solution à l'état stationnaire³. Les écarts entre la solution numérique et la solution exacte correspondants aux schémas UP2, WENO et HOUC diminuent en fonction du temps et tendent vers zéro, c'est-à-dire, la solution numérique obtenues avec les schémas UP2, WENO(3,5,7,9) et HOUC(3,5,7,9) à l'état stationnaire sont identiques à la solution exacte. Cependant, durant la phase transitoire de l'écoulement, les écarts $\varepsilon^{\Delta x, \Delta t}(u_1)$ en fonction du temps diminuent avec l'augmentation de la précision locale des schémas de discrétisation de la partie hyperbolique, les écarts les plus faibles sont obtenus avec les schémas d'ordre élevé WENO9 et HOUC9. Par ailleurs, bien que les schémas HOUC(3,5,7,9) sont en principe moins adaptés que les schémas WENO aux zones où la solution est discontinue, les schémas HOUC(3,5,7,9) fournissent des écarts davantage plus faibles que les schémas WENO(3,5,7,9).

3. Étant donné la distribution parabolique du profil de vitesse à l'état stationnaire et comme l'erreur de discrétisation du schéma UP1 est de classe C^2 , c'est-à-dire, proportionnelle à $(\partial^2 u_1 / \partial x_2^2) \Delta x_2$, l'écart entre la solution numérique et la solution exacte est différent de zéro à l'état stationnaire.

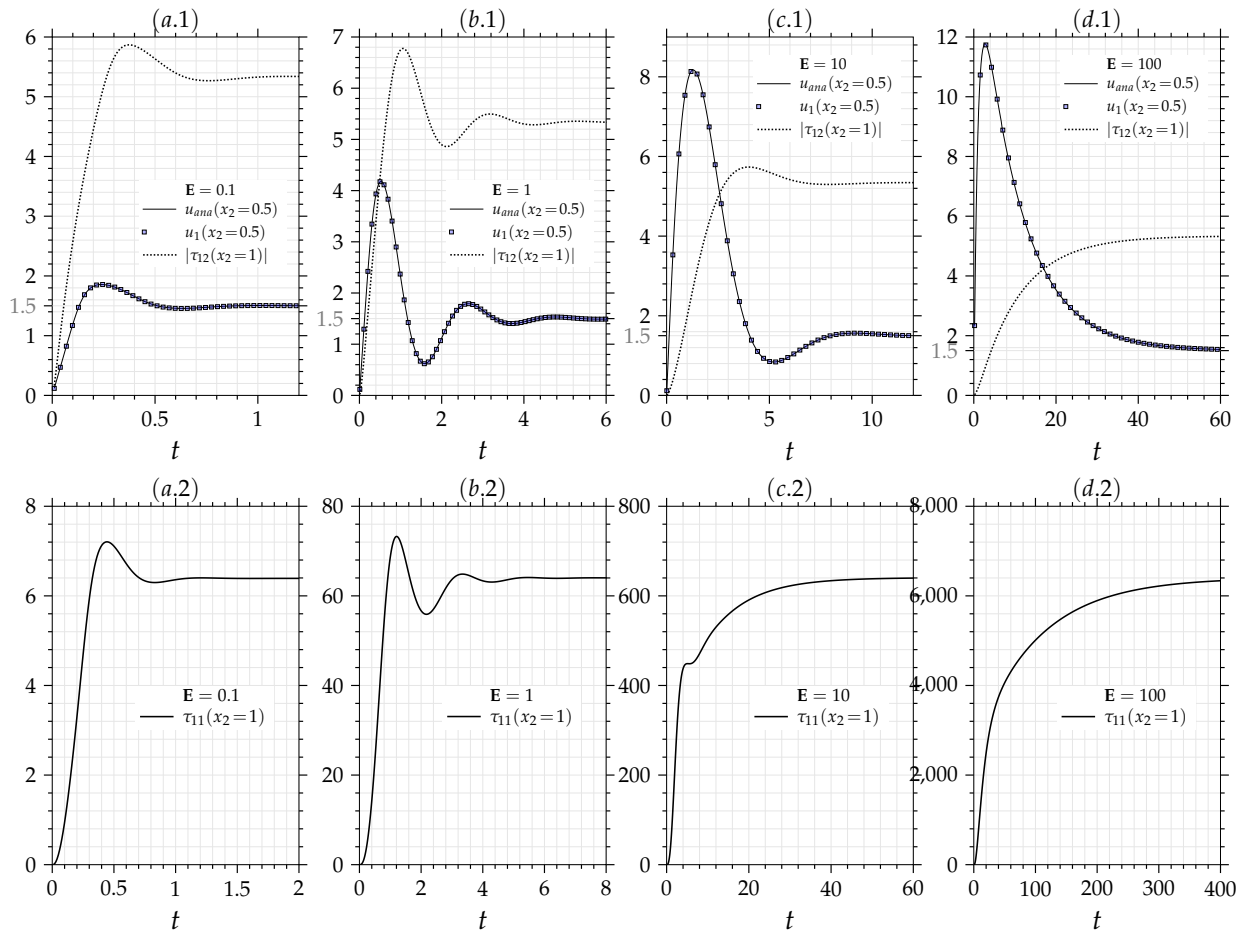


FIGURE 4.17 – Évolution temporelle de la vitesse maximale obtenue numériquement $u_1(x_2 = 0.5)$ et de la solution exacte $u_{ana}(x_2 = 0.5)$, de contrainte de cisailage polymérique numérique $\tau_{12}(x_2 = 1)$ et de la contrainte normal polymérique $\tau_{11}(x_2 = 1)$ numérique de l'écoulement de Poiseuille du fluide d'Oldroyd-B en fonction du nombre élastique $\mathbf{E} = \mathbf{We}/\mathbf{Re} = \{0.1, 1, 10, 100\}$ avec $\mathbf{Re} = 1$ et un rapport de viscosité du solvant $\beta = \mu_s / \mu_{t_0} = 0.1$ avec les schémas BDF2 et une résolution temporelle $\Delta t = 1.93 \times 10^{-4}$ et en utilisant le schéma WENO3 et un maillage de 51 points.

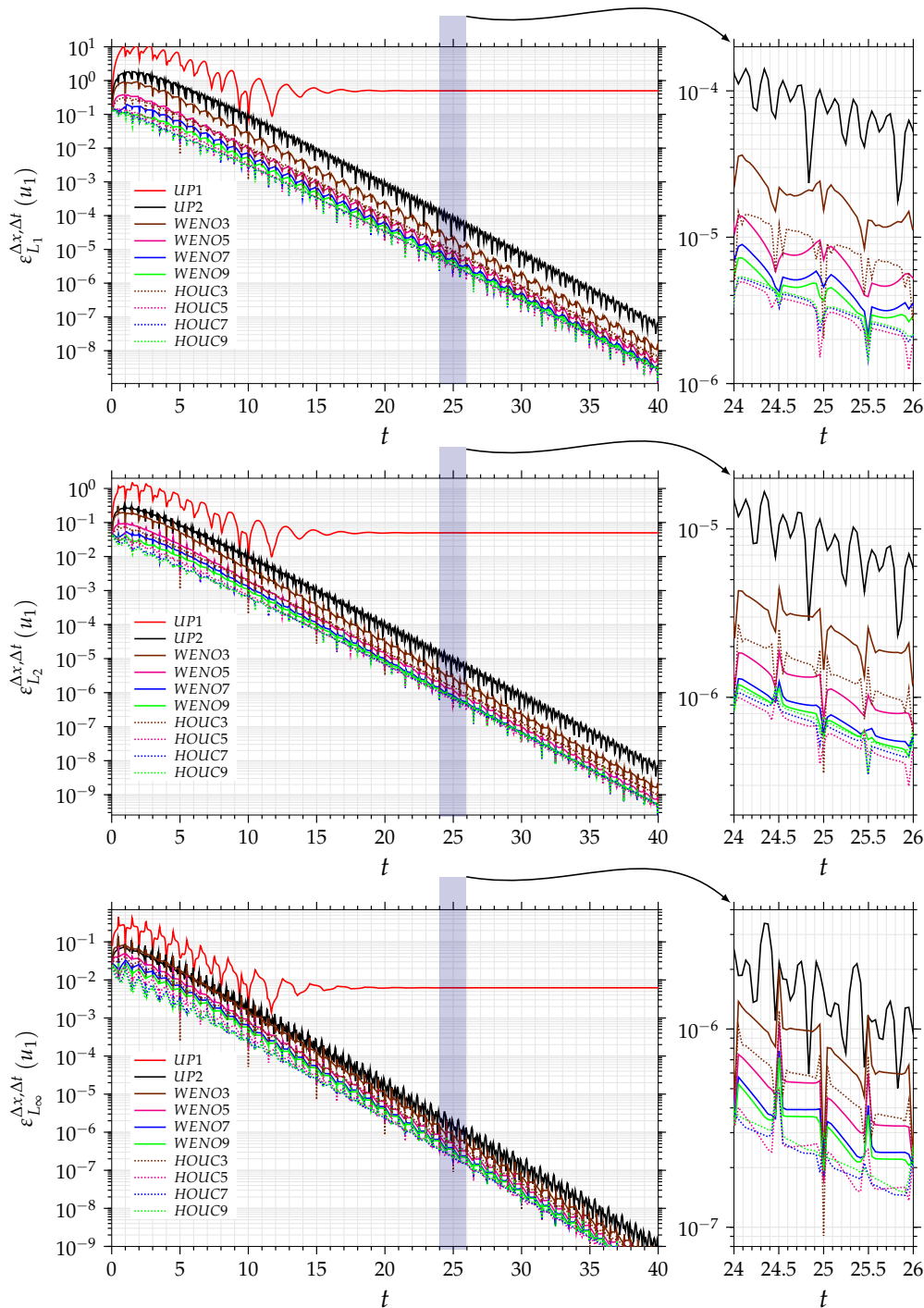


FIGURE 4.18 – Évolution temporelle des écarts entre la solution numérique et la solution exacte $\varepsilon^{\Delta x, \Delta t}(u_1)$, mesurés en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ , en fonction des schémas numériques utilisés pour la discrétisation de la partie hyperbolique UP(1,2), WENO(3,5,7,9) et HOUC(3,5,7,9) avec le modèle d'Oldroyd-B avec $\beta = 10^{-7}$, $\mathbf{Re} = 1$ et $\mathbf{We} = 1$, et pour le schéma BDF2 sous une résolution temporelle $\Delta t = 4.13 \times 10^{-3}$ et un maillage de 121 points.

D'autre part, la figure 4.19–(a, b) montre pour le fluide d'Oldroyd–B avec $\beta = 10^{-7}$, $\mathbf{Re} = 1$ et $\mathbf{We} = 1$, l'évolution des écarts entre la solution numérique et la solution exacte $\varepsilon^{\Delta x, \Delta t}(u_1)$ mesurés en différentes normes L_1 , L_2 et L_∞ en fonction de la résolution du maillage ($1/\Delta x_2$) pour différents schéma de discrétisation de la partie hyperbolique UP(1,2), WENO(3,5,7,9) et HOUC(3,5,7,9), et avec le schéma BDF2 et le schéma d'Euler1 et pour un temps fixe $t = 9.9836 \times 10^{-2}$. D'abord, on peut constater pour les différents schémas de discrétisation de la partie hyperbolique que les écarts $\varepsilon^{\Delta x, \Delta t}(u_1)$ n'évoluent pas en fonction de la résolution spatiale suivant la pente théorique attendue. Ce comportement est dû à la dominance de la contribution des erreurs de discrétisation temporelle dans l'écart total $\varepsilon^{\Delta x, \Delta t}(u_1)$. En effet, le pas de temps Δt , limité par la condition CFL (voir section 3.4.1), est inversement proportionnel à la résolution du maillage ($1/\Delta x_2$). Ainsi, on note aux larges résolutions du maillage que les écarts obtenus avec le schéma BDF2 (figure 4.19–(a2, a3)) sont plus faibles que ceux obtenus avec le schéma Euler1 (figure 4.19–(b2, b3)) indiquant l'effet de la contribution des erreurs de discrétisation temporelle. Cependant, pour une résolution spatiale fixe, on enregistre l'amointrissement des erreurs totales $\varepsilon^{\Delta x, \Delta t}(u_1)$ avec l'augmentation de l'ordre de précision des schémas de la partie hyperbolique. La précision la plus élevée, correspondant au premier ordre, est enregistrée pour le schéma WENO9 pour la classe des schémas WENO et le schéma HOUC9 pour la classe des schémas HOUC.

Par ailleurs, étant donné que les stencils larges des schémas d'ordre élevé, le coût de calcul dû aux schémas WENO et HOUC est conséquemment élevé. En ce sens, avec le schéma BDF2 et le schéma d'Euler1 et pour un temps fixe $t = 9.9836 \times 10^{-2}$, la figure 4.19–(c, d) illustre l'évolution des écarts entre la solution numérique et la solution exacte $\varepsilon^{\Delta x, \Delta t}(u_1)$ mesurés en différentes normes L_1 , L_2 et L_∞ en fonction du *temps-cpu* de la partie hyperbolique avec les différents schémas UP1(1,2), WENO(3,5,7,9) et HOUC(3,5,7,9) et pour différentes résolutions du pas maillage, avec le fluide d'Oldroyd–B avec $\beta = 10^{-7}$, $\mathbf{Re} = 1$ et $\mathbf{We} = 1$. Comme attendu, d'une part, pour les différents schémas de la discrétisation spatiale, le *temps-cpu* du schéma BDF2 est supérieur au *temps-cpu* du schéma Euler1, et d'autre part, le coût de calcul augmente avec l'augmentation de l'ordre de précision du schéma de discrétisation de la partie hyperbolique. Cependant, en fonction des différentes résolutions du maillage on enregistre que les schémas WENO sont les plus coûteux. D'abord, avec une résolution du maillage relativement faible ($1/\Delta x_2 < 120$), on constate que les écarts $\varepsilon^{\Delta x, \Delta t}(u_1)$ relevés avec les schémas WENO(5,7) et HOUC(3,5,7) sont, respectivement, quasiment équivalents aux écarts obtenus avec les schémas WENO9 et HOUC9 alors que le coût de calcul des schémas WENO9 et HOUC9 est beaucoup plus élevé que le coût de calcul des schémas d'ordre inférieur.

En termes de précision et coût de calcul, on conclut pour les valeurs relativement faibles de la résolution du maillage que les schémas WENO5 et HOUC3 sont, respectivement, plus efficaces que les schémas d'ordre plus élevés WENO(7,9) et HOUC(5,7,9). Ensuite, avec une résolution relativement élevée ($1/\Delta x_2 < 480$), on constate également que les écarts $\varepsilon^{\Delta x, \Delta t}(u_1 - u_1^{ana})$ enregistrés avec les schémas WENO7 et HOUC(5,7) sont, respectivement, égales aux écarts obtenus avec les schémas WENO9 et HOUC9. Ainsi, pour un tel niveau de la résolution spatiale, les schémas WENO7 et HOUC5 sont plus efficaces que les schémas WENO(3,5,9) et HOUC(3,7,9). Finalement, pour des résolutions plus larges du maillage ($1/\Delta x_2 > 960$), les écarts $\varepsilon^{\Delta x, \Delta t}(u_1)$ les plus faibles et les *temps-cpu* les plus importants sont relatifs à l'ordre de précision des schémas WENO et HOUC.

Afin d'éliminer les effets de l'interaction mutuelle entre les erreurs de discrétisation spatiale et les erreurs de discrétisation temporelle lors de l'étude de l'évolution des écarts de la solution numérique par rapport à la solution exacte, on propose d'analyser l'évolution des erreurs de discrétisation en s'appuyant sur l'approche numérique décrit précédemment (voir 4.1). La figure 4.20 montre pour le fluide d'Oldroyd–B avec $\mathbf{Re} = 1$ et $\mathbf{We} = 1$ et avec deux valeurs du rapport de viscosité $\beta = 10^{-7}$ et $\beta = 0.1$, l'évolution des erreurs de discrétisation spatiale de la vitesse $\varepsilon^{\Delta x}(u_1)$ de la contrainte de cisaillement $\varepsilon^{\Delta x}(\tau_{12})$ et de la contrainte normale $\varepsilon^{\Delta x}(\tau_{11})$, mesurées en différentes normes L_1 , L_2 et L_∞ , en fonction du pas de maillage Δx_2 et pour différents schémas de discrétisation de la partie hyperbolique UP(1,2), WENO(3,5,7,9) et HOUC(3,5,7,9). Les résultats sont obtenus

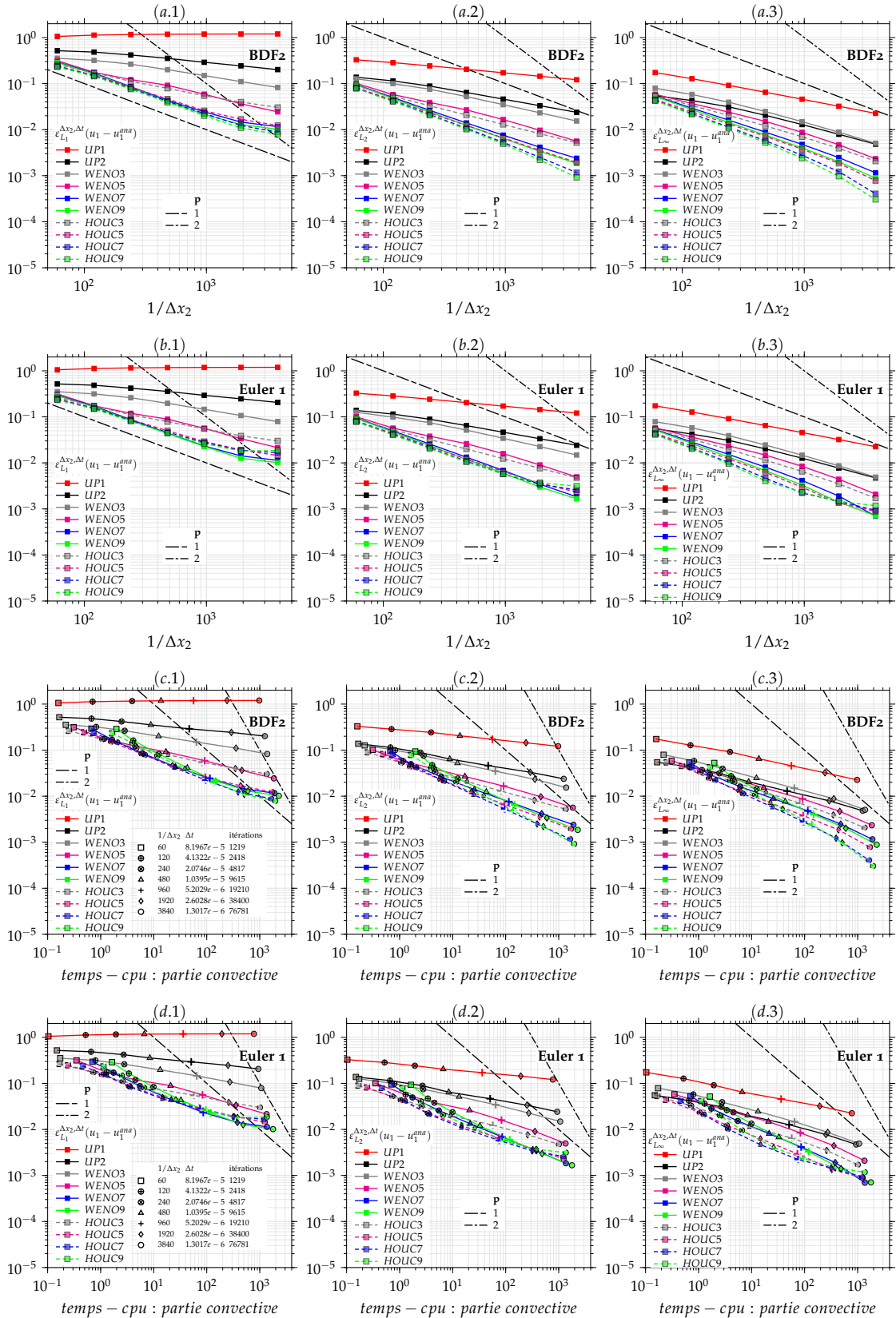


FIGURE 4.19 – (a, b) Évolution des écarts entre la solution numérique et la solution exacte $\varepsilon^{\Delta x, \Delta t}(u_1)$ mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ en fonction de la résolution du maillage ($1/\Delta x_2$) avec le schéma BDF2 et le schéma d’Euler1 et pour un temps fixe $t = 9.9836 \times 10^{-2}$, et avec le fluide d’Oldroyd-B avec $\beta = 10^{-7}$, $\text{Re} = 1$ et $\text{We} = 1$. (c, d) Évolution des écarts entre la solution numérique et la solution exacte $\varepsilon^{\Delta x, \Delta t}(u_1)$ mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ en fonction de *temps-cpu* de la partie hyperbolique avec le schéma BDF2 et le schéma d’Euler1 et pour un temps fixe $t = 9.9836 \times 10^{-2}$, et avec le fluide d’Oldroyd-B avec $\beta = 10^{-7}$, $\text{Re} = 1$ et $\text{We} = 1$.

avec le schéma BDF2, avec un pas de temps $\Delta t = 5.127 \times 10^{-5}$ et un nombre d'itérations $n = 5 \times 10^3$.

D'abord, pour un rapport de viscosité $\beta = 0.1$, on note que les erreurs de discrétisation spatiales de la vitesse $\varepsilon^{\Delta x}(u_1)$ et des composantes du tenseur de contraintes polymériques $\varepsilon^{\Delta x}(\tau_{12})$ et $\varepsilon^{\Delta x}(\tau_{11})$ obtenues avec les schémas WENO(3,5,7,9) et HOUC(3,5,7,9) évoluent suivant une pente seulement d'ordre 2. D'une part, ce résultat est dû à la dominance de l'ordre de précision de la discrétisation de l'opérateur de diffusion liée à la viscosité du solvant. Cette dépendance peut se constater à travers les valeurs des erreurs de la discrétisation spatiale, extrêmement proches, obtenues avec les schémas WENO(3,5,7,9) et HOUC(3,5,7,9) en fonction du pas de maillage, indiquant une erreur dominante indépendante de la discrétisation de la partie hyperbolique. D'autre part, le fait de maintenir une discrétisation de deuxième ordre de précision de la partie hyperbolique pour les points appartenant au bord du domaine avec les schémas WENO(3,5,7,9) et HOUC(3,5,7,9) influence l'ordre global des méthodes de discrétisation. Par ailleurs, on note que les ordres de précision théoriques des schémas UP(1,2) sont satisfaits au niveau numérique.

Par suite, pour un rapport de viscosité $\beta = 10^{-7}$, on enregistre dans le domaine des valeurs relativement faibles du pas de maillage Δx_2 , la diminution des erreurs de discrétisation spatiale $\varepsilon^{\Delta x}(u_1)$, $\varepsilon^{\Delta x}(\tau_{12})$ et $\varepsilon^{\Delta x}(\tau_{11})$ avec l'augmentation de l'ordre de précision du schéma de discrétisation de la partie hyperbolique. Cela montre l'indépendance des erreurs globales de la discrétisation spatiale de l'effet des erreurs de la discrétisation de l'opérateur de diffusion lié à la viscosité du solvant lorsque $\beta \rightarrow 0$. Cependant, bien que les erreurs de discrétisation spatiale diminuent avec l'augmentation de l'ordre de précision du schéma de discrétisation de la partie hyperbolique, on peut constater que l'ordre de précision globale obtenu avec les schémas UP(1,2), WENO(3,5,7,9) et HOUC(3,5,7,9) est proche du premier ordre de précision. Étant donné que la solution en régime transitoire n'est pas régulière, dû à l'effet du transport convectif de taux de déformation, la présence de discontinuités induit une dégradation locale de l'ordre de précision des schémas UP2, WENO(3,5,7,9) et HOUC(3,5,7,9) ce qui induit la réduction de l'ordre de précision globale à l'ordre 1.

De même, la figure 4.21 montre pour le fluide d'Oldroyd-B avec $\text{Re} = 1$ et $\text{We} = 1$ et pour deux valeurs du rapport de viscosité, $\beta = 10^{-7}$ et $\beta = 0.1$, l'évolution des erreurs de discrétisation temporelle de la vitesse $\varepsilon^{\Delta t}(u_1)$, de la contrainte de cisaillement $\varepsilon^{\Delta t}(\tau_{12})$ et de la contrainte normale $\varepsilon^{\Delta t}(\tau_{11})$, mesurées en différentes normes L_1 , L_2 et L_∞ , en fonction du pas de temps Δt avec le schéma BDF2 et le schéma d'Euler1 et pour un temps fixe $t = n_i \Delta t_i = 2.066$ (le nombre d'itérations correspondant au premier pas Δt_1 de temps est $n_1 = 10^4$) et pour les différents schémas de discrétisation de la partie hyperbolique UP(1,2), WENO(3,5,7,9) et HOUC(3,5,7,9). On note pour le schéma BDF2 et le schéma d'Euler1, avec les différents rapports de viscosité et avec les différents schémas de discrétisation de la partie hyperbolique, que les pentes d'évolution des erreurs de discrétisation temporelle correspondent parfaitement aux ordres de précisions théoriques attendues.

À l'état stationnaire, la solution exacte du système d'équations régissant l'écoulement Poiseuille établi du fluide d'Oldroyd-B (4.20), s'écrit comme suit,

$$\begin{cases} u_1(x_2) &= 6(1-x_2)x_2 \\ \tau_{11}(x_2) &= \frac{2\text{We}}{\text{Re}} (6(1-2x_2))^2 \\ \tau_{12}(x_2) &= \frac{1-\beta}{\text{Re}} 6(1-2x_2) \end{cases} \quad (4.23)$$

Comme le fluide d'Oldroyd-B est doté d'une viscosité polymérique indépendante du taux de déformation et indépendante du nombre de Weissenberg, le profil de vitesse $u_1(x_2)$ est identique la distribution parabolique du profil de vitesse du fluide Newtonien. Conséquemment, étant donné l'évolution linéaire du taux de déformation dans le canal, la contrainte de cisaillement polymérique τ_{12} est proportionnelle au rapport de la viscosité polymérique dans la viscosité totale $(1-\beta)$ et adopte un comportement linéaire.

À cet égard, la figure 4.22-(a) montre pour le fluide d'Oldroyd-B une comparaison à l'état

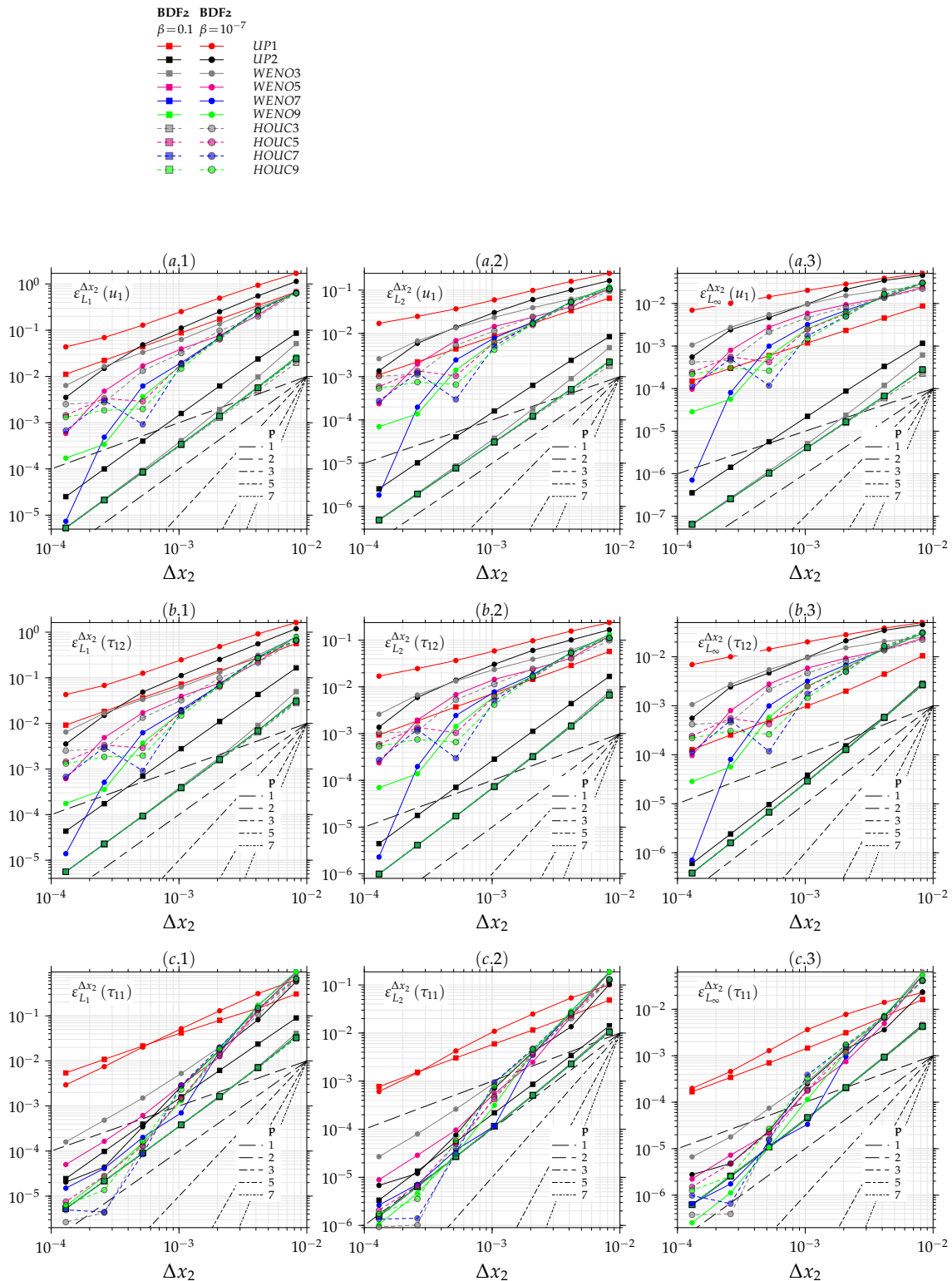


FIGURE 4.20 – Évolution des erreurs de discrétisation spatiales approchée d’une façon numérique, pour le fluide d’Oldroyd–B avec $\mathbf{Re} = 1$ et $\mathbf{We} = 1$ et pour deux valeurs du rapport de viscosité $\beta = 10^{-7}$ et $\beta = 0.1$, de la vitesse (a) $\varepsilon^{\Delta x}(u_1)$, de la contrainte de cisaillement (b) $\varepsilon^{\Delta x}(\tau_{12})$ et de la contrainte normale (c) $\varepsilon^{\Delta x}(\tau_{11})$, mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ , en fonction du pas de maillage Δx_2 et pour différents schémas de discrétisation de la partie hyperbolique UP(1,2), WENO(3,5,7,9) et HOU(3,5,7,9) et avec le schéma BDF2, pour un pas de temps $\Delta t = 5.127 \cdot 10^{-5}$ et un nombre d’itérations fixe $n = 5 \times 10^3$.

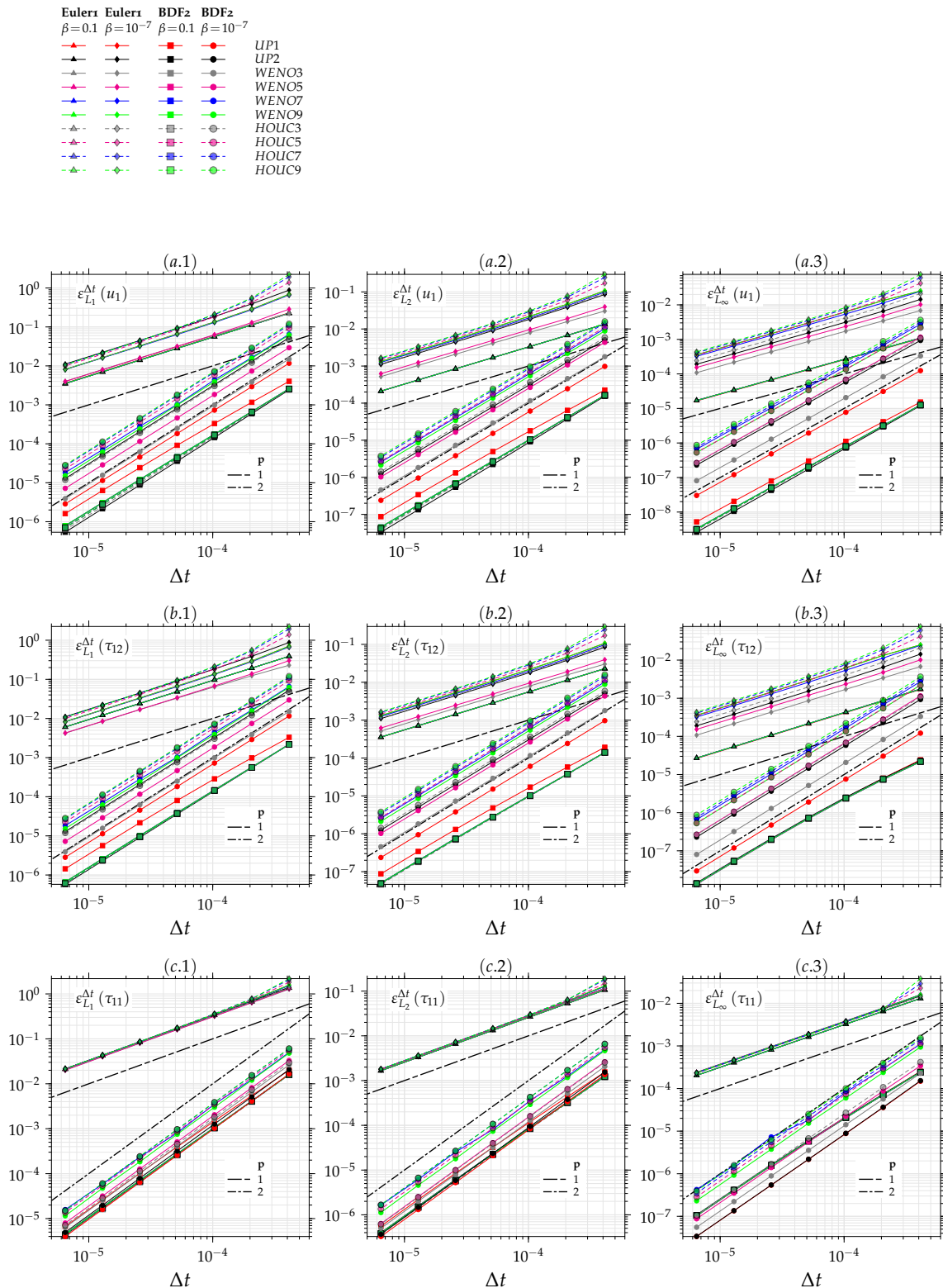


FIGURE 4.21 – Évolution des erreurs de discrétisation temporelles approchée d’une façon numérique, pour le fluide d’Oldroyd-B avec $\mathbf{Re} = 1$ et $\mathbf{We} = 1$ et pour deux valeurs du rapport de viscosité $\beta = 10^{-7}$ et $\beta = 0.1$, de la vitesse (a) $\varepsilon^{\Delta t}(u_1)$, de la contrainte de cisaillement (b) $\varepsilon^{\Delta t}(\tau_{12})$ et de la contrainte normale (c) $\varepsilon^{\Delta t}(\tau_{11})$, mesurées en différentes normes L_1 , L_2 et L_∞ , en fonction de la résolution temporelle Δt et pour les différents schémas de discrétisation de la partie hyperbolique UP(1,2), WENO(3,5,7,9) et HOU(3,5,7,9), avec le schéma BDF2 et le schéma Euler1 et pour un temps fixe $t = n_i \Delta t_i = 2.066$ (le nombre d’itérations correspondant au premier pas Δt_i de temps est $n_1 = 10^4$).

stationnaire du profil de la contrainte de cisaillement polymérique numérique $\tau_{12}(x_2)$ et exacte $\tau_{12}^{ana}(x_2)$ en fonction du rapport de viscosité du solvant $\beta = \{0.99, 0.8, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001\}$, avec maillage de 1×61 et en utilisant le schéma WENO3. Cependant, au regard de la linéarité du profil de la contrainte de cisaillement polymérique, la solution numérique à l'état stationnaire $\tau_{12}(x_2)$ est identique à la solution exacte raison pour laquelle on observe une parfaite concordance de la distribution spatiale de solution numérique et de la solution exacte en fonction du rapport β . Au même titre, les figures 4.22–(b, c) montre, respectivement, une comparaison à l'état stationnaire de la distribution de profil de la contrainte polymérique normale numérique $\tau_{11}(x_2)$ et exacte $\tau_{11}^{ana}(x_2)$ en fonction du rapport de viscosité du solvant $\beta = \{0.99, 0.8, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001\}$ (figure 4.22–(b)) avec $E = We/Re = 1$ et en fonction du nombre élastique $E = We/Re = \{1, 10, 100\}$ (figure 4.22–(c)) avec $\beta = 0.1$. Le fait que le schéma WENO3 est exact pour les fonctions de classe C^2 on note également que la contrainte normale polymérique numérique est identique à la solution exacte pour les différents rapports de viscosité β et différents valeurs nombre élastique.

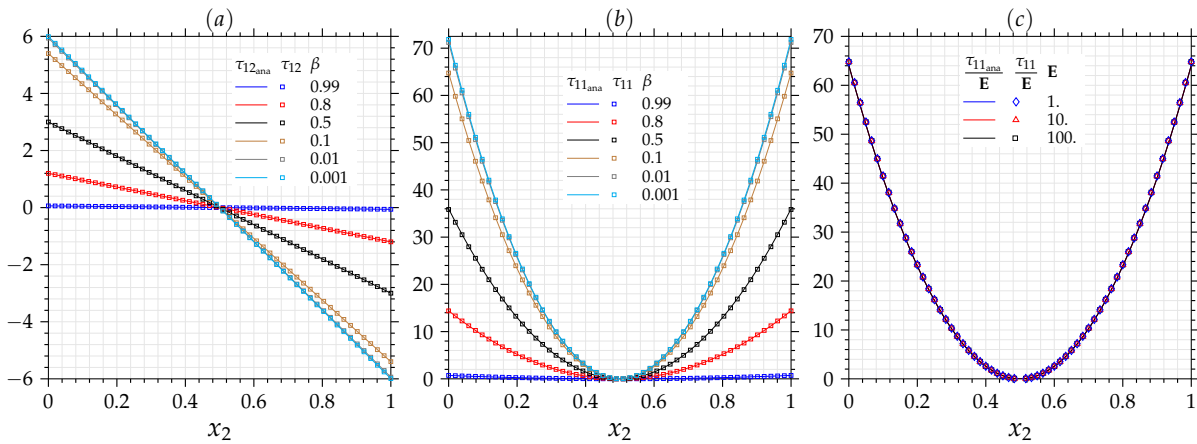


FIGURE 4.22 – (a) Comparaison de la distribution de profil de la contrainte de cisaillement polymérique numérique $\tau_{12}(x_2)$ et exacte $\tau_{12,ana}(x_2)$ à l'état stationnaire du fluide d'Oldroyd-B en fonction du rapport de viscosité du solvant $\beta = \{0.99, 0.8, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001\}$ avec $Re = 1$, $U = 1$ et maillage de 1×61 . (b) Comparaison de la distribution de profil de la contrainte polymérique normal numérique $\tau_{11}(x_2)$ et exacte $\tau_{11,ana}(x_2)$ à l'état stationnaire du fluide d'Oldroyd-B en fonction du rapport de viscosité du solvant $\beta = \{0.99, 0.8, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001\}$ avec $Re = 1$, $We = 1$ et $U = 1$ et pour maillage de 1×61 . (c) Comparaison de la distribution de profil de la contrainte polymérique normal numérique $\tau_{11}(x_2)$ et exacte $\tau_{11,ana}(x_2)$ à l'état stationnaire du fluide d'Oldroyd-B en fonction du nombre élastique $E = We/Re = \{1, 10, 100\}$ avec $\beta = 0.1$ et pour maillage de 1×61 . Les solutions numériques sont obtenues avec le schéma WENO3.

4.3.2 Écoulement de Poiseuille du fluide SPTT

Dans cette section nous considérons l'écoulement de Poiseuille établi du fluide SPTT ($\xi = 0$) entre deux plaques parallèles. Le système d'équations gouvernant (6.9) se réduit à la forme suivante dans le cadre de l'écoulement de Poiseuille à l'état stationnaire du fluide SPTT,

$$-\frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} = -\frac{dp}{dx_1} + \frac{\beta}{Re} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \quad (4.24)$$

$$-2\tau_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\left(\frac{1}{We} + \epsilon \frac{Re}{(1-\beta)} \tau_{11}\right) \tau_{11} \quad (4.25)$$

$$-\frac{(1-\beta)}{Ma_0^2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\left(\frac{1}{We} + \epsilon \frac{Re}{(1-\beta)} \tau_{11}\right) \tau_{12} \quad (4.26)$$

Afin de simplifier l'obtention de la solution exacte d'un tel système d'équations, nous considérons uniquement la moitié supérieure du canal 2D, de fait de la symétrie de l'écoulement. Conséquem-

ment, la condition aux limites de la vitesse au bord inférieur, c'est-à-dire en $x_2 = 0$, se réduit à la condition de symétrie $\partial u_1 / \partial x_2 = 0$. Au bord supérieur, en $x_2 = 1$, la condition d'adhérence à la paroi $u_1(x_2 = 1) = 0$ est imposée. La solution exacte à l'état stationnaire du système d'équations (4.24)–(4.26) pour le fluide SPTT avec $\beta = 0$ est donnée par Oliveira and Pinho [158] et pour le fluide SPTT avec $\beta \neq 0$ la solution exacte est donnée par Cruz et al. [48]. D'abord, l'intégration de l'équation (4.24) fournie,

$$\tau_{12} = c + \frac{dp}{dx_1} x_2 - \frac{\beta}{\mathbf{Re}} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad (4.27)$$

où c est une simple constante d'intégration. En considérant la condition aux limites de symétrie pour la vitesse en $x_2 = 0$, et comme nous avons $\tau_{12}|_{x_2=0} = 0$, la constante d'intégration est nulle $c = 0$. Par ailleurs, le rapport entre l'équation (4.25) et l'équation (4.26) donne,

$$\tau_{11} = 2 \frac{\mathbf{Ma}_0^2}{(1 - \beta)} \tau_{12}^2 \quad (4.28)$$

En injectant l'équation (4.28) dans l'équation (4.26), et par suite, en substituant l'équation (4.27) dans l'équation résultante, on obtient après arrangement l'équation cubique suivante,

$$\tau_{12}^3 + 3A\tau_{12} - 2B = 0 \quad (4.29)$$

où les coefficients $A = (1 - \beta)^2 [1 + (1 - \beta) / \beta] / (6 \epsilon \mathbf{Ma}_0^4)$ et $B = (1 - \beta)^3 (dp/dx_1) x_2 / (4 \beta \epsilon \mathbf{Ma}_0^4) = C x_2$. La solution exacte réelle de l'équation (4.29) peut s'obtenir facilement, elle s'écrit comme suit,

$$\tau_{12} = \sqrt[3]{B + \sqrt{A^3 + B^2}} + \sqrt[3]{B - \sqrt{A^3 + B^2}} \quad (4.30)$$

Ainsi, l'intégration de l'équation (4.27) permet l'obtention de l'expression de la solution exacte de la vitesse, elle est donnée par,

$$u_2(x_2) = \frac{\mathbf{Re}}{2\beta} \frac{dp}{dx_1} (x_2^2 - 1) - \frac{3\mathbf{Re}}{8C\beta} \left[\left(\sqrt{A^2 + C_2^2 x_2^2} - 3Cx_2 \right) \sqrt[3]{Cx_2 + \sqrt{A^3 + C^2 x_2}} - \left(\sqrt{A^2 + C_2^2 x_2^2} + 3Cx_2 \right) \sqrt[3]{Cx_2 - \sqrt{A^3 + C^2 x_2}} - \left(\sqrt{A^2 + C_2^2} - 3C \right) \sqrt[3]{C + \sqrt{A^3 + C^2}} + \left(\sqrt{A^2 + C_2^2} + 3C \right) \sqrt[3]{C - \sqrt{A^3 + C^2}} \right] \quad (4.31)$$

On peut constater que la solution exacte en terme de vitesse est une combinaison d'une contribution Newtonienne parabolique et d'une contribution polymérique. Par conséquent, l'expression de la vitesse moyenne \bar{u}_1 de l'écoulement n'est pas identique à celle obtenue pour un fluide Newtonien. Oliveira and Pinho [158] et Cruz et al. [48] ont proposé, pour des raisons de simplification, d'analyser l'écoulement par rapport à la contribution Newtonienne du solvant dans le champ de la vitesse. Ainsi, on définit la vitesse moyenne \bar{u}_1^N de la contribution Newtonienne dans le profil de vitesse (4.31),

$$\bar{u}_1^N = \int_0^1 \mathbf{Re} \frac{1}{2} \frac{dp}{dx_1} (x_2^2 - 1) dx_2 = -\frac{\mathbf{Re}}{3} \frac{dp}{dx_1} \quad (4.32)$$

Dans la suite, la valeur du gradient de pression longitudinal imposé est déterminé à partir de la vitesse moyenne \bar{u}_1^N de la contribution Newtonienne du solvant, en utilisant l'expression (4.32).

La figure 4.23 montre pour le fluide SPTT avec $\bar{u}_1^N = 1$, $\mathbf{Re} = 1$, $\mathbf{We} = 1$ et $\epsilon = 0.25$ l'évolution des erreurs de la discrétisation spatiale approchée d'une façon numérique, pour deux valeurs du rapport de viscosité $\beta = 10^{-7}$ et $\beta = 0.1$, de la vitesse (a) $\epsilon^{\Delta x}(u_1)$, de la contrainte de

cisaillement (b) $\varepsilon^{\Delta x}(\tau_{12})$ et de la contrainte normale (c) $\varepsilon^{\Delta x}(\tau_{11})$, mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ , en fonction du pas de maillage Δx_2 , pour différents schémas de discrétisation de la partie hyperbolique UP(1,2), WENO(3,5,7,9) et HOU(3,5,7,9), avec le schéma BDF2 et un pas de temps $\Delta t = 1.488 \times 10^{-5}$ et un nombre d'itérations fixe $n = 5 \times 10^4$. D'une façon similaire aux résultats obtenus avec le modèle d'Oldroyd-B, on peut constater pour le fluide de SPTT que lorsque $\beta = 0.1$ les erreurs de la discrétisation spatiale $\varepsilon^{\Delta x}(u_1)$, $\varepsilon^{\Delta x}(\tau_{12})$ et $\varepsilon^{\Delta x}(\tau_{11})$, obtenues avec les schémas WENO(3,5,7,9) et HOU(3,5,7,9) évoluent suivant une pente de second ordre de précision. Comme introduit auparavant, cela est dû à la dominance de l'erreur de discrétisation spatiale de l'opérateur de diffusion attaché à la viscosité du solvant. D'autre part, lorsque $\beta = 10^{-7}$, les erreurs de discrétisation spatiale enregistrées avec WENO(3,5,7,9) et HOU(3,5,7,9), diminuent rapidement avec la diminution de la résolution spatiale. Du fait de l'irrégularité de la solution lorsque $\beta \rightarrow 0$, l'effet de la présence de la discontinuité localement influence l'ordre globale du schéma de discrétisation de la partie hyperbolique.

Également, la figure 4.24 montre pour le fluide SPTT avec $\bar{u}_1^N = 1$, $\mathbf{Re} = 1$, $\mathbf{We} = 1$ et $\varepsilon = 0.25$ et pour deux valeurs du rapport de viscosité $\beta = 10^{-7}$ et $\beta = 0.1$, l'évolution des erreurs de discrétisation temporelle de la vitesse $\varepsilon^{\Delta t}(u_1)$, de la contrainte de cisaillement $\varepsilon^{\Delta t}(\tau_{12})$ et de la contrainte normale $\varepsilon^{\Delta t}(\tau_{11})$, mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ , en fonction de la résolution temporelle Δt avec le schéma BDF2 et le schéma d'Euler1 et pour un temps fixe $t = n_i \Delta t_i = 0.0413$ (le nombre d'itérations correspondant au premier pas Δt_1 de temps est $n_1 = 10^3$) et pour les différents schémas de discrétisation de la partie hyperbolique UP(1,2), WENO(3,5,7,9) et HOU(3,5,7,9). À l'égalité du fluide d'Oldroyd-B, on note pour le fluide SPTT avec le schéma BDF2 et le schéma d'Euler1 et pour les différents rapports de viscosité et avec les différents schémas de discrétisation de la partie hyperbolique, que les pentes d'évolution des erreurs de discrétisation temporelle correspondent parfaitement aux ordres de précisions théoriques attendus.

D'autre part, comme la vitesse moyenne de la contribution du solvant Newtonien est fixée à $\bar{u}_1^N = 1$, le gradient de pression longitudinale imposé ($\partial p / \partial x_1$) est également indépendant de l'ensemble des paramètres rhéologiques. De ce fait, le caractère rhéofluidifiant du fluide SPTT se traduit par une augmentation du débit volumique ou encore de la vitesse moyenne totale \bar{u}_1 par rapport à la vitesse moyenne de la contribution du solvant Newtonien \bar{u}_1^N . La figure 4.25-(a.1, a.2, a.3) montre, en ce sens, pour le fluide SPTT avec $\bar{u}_1^N = 1$, $\mathbf{Re} = 1$, $\mathbf{We} = 1$ et $\varepsilon = 0.25$, une comparaison à l'état stationnaire de la distribution de la solution numérique par rapport à la solution exacte de la vitesse $u_1(x_2)$, de la contrainte de cisaillement polymérique $\tau_{12}(x_2)$ et de la contrainte normale polymérique $\tau_{11}(x_2)$, en fonction du rapport de viscosité du solvant $\beta = \{0.99, 0.8, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001\}$ avec le schéma WENO3 et pour un maillage de 1×61 . En premier, on peut constater une excellente entente entre les prédictions numériques et les solutions analytiques pour les différents rapports de viscosité du solvant β . L'intensification de la rhéofluidification à travers la diminution du rapport β induit une hausse du débit volumique comparativement à un fluide Newtonien et/ou au fluide d'Oldroyd-B. Par conséquent, le taux de déformation caractéristique, subissant une augmentation avec l'amoinissement du rapport β , influence fortement le comportement viscoélastique du fluide. On note qu'avec un très faible rapport de viscosité du solvant $\beta = 0.001$, la contrainte de cisaillement polymérique est linéaire dans l'ensemble du domaine de calcul $0 \leq x_2 \leq 1$ (voir la figure 4.25-(a.2)). Cela indique que le taux de déformation produit avec le couple ($\mathbf{We} = 1, \beta = 0.001$) ne permet pas à la viscosité polymérique d'attendre le palier inférieur aux larges taux de déformations. En revanche, avec une valeur relativement élevée du rapport de viscosité du solvant β , la viscosité polymérique atteint rapidement sa valeur-limite aux larges taux de déformation.

Par ailleurs, pour $\beta = 0.1$ et $\bar{u}_1^N = 1$, $\mathbf{Re} = 1$, la figure 4.25-(b.1, b.2, b.3) montre une comparaison de la distribution de la solution numérique par rapport à la solution exacte de la vitesse (b.1) $u_1(x_2)$, de la contrainte de cisaillement polymérique (b.2) $\tau_{12}(x_2)$ et de la contrainte normale polymérique (b.3) $\tau_{11}(x_2)$, en fonction du paramètre $\sqrt{\varepsilon} \mathbf{We} = \{0.1, 0.5, 1, 10, 100\}$. On enregistre une excellente concordance entre la solution numérique et la solution exacte. Cependant, l'intensifica-

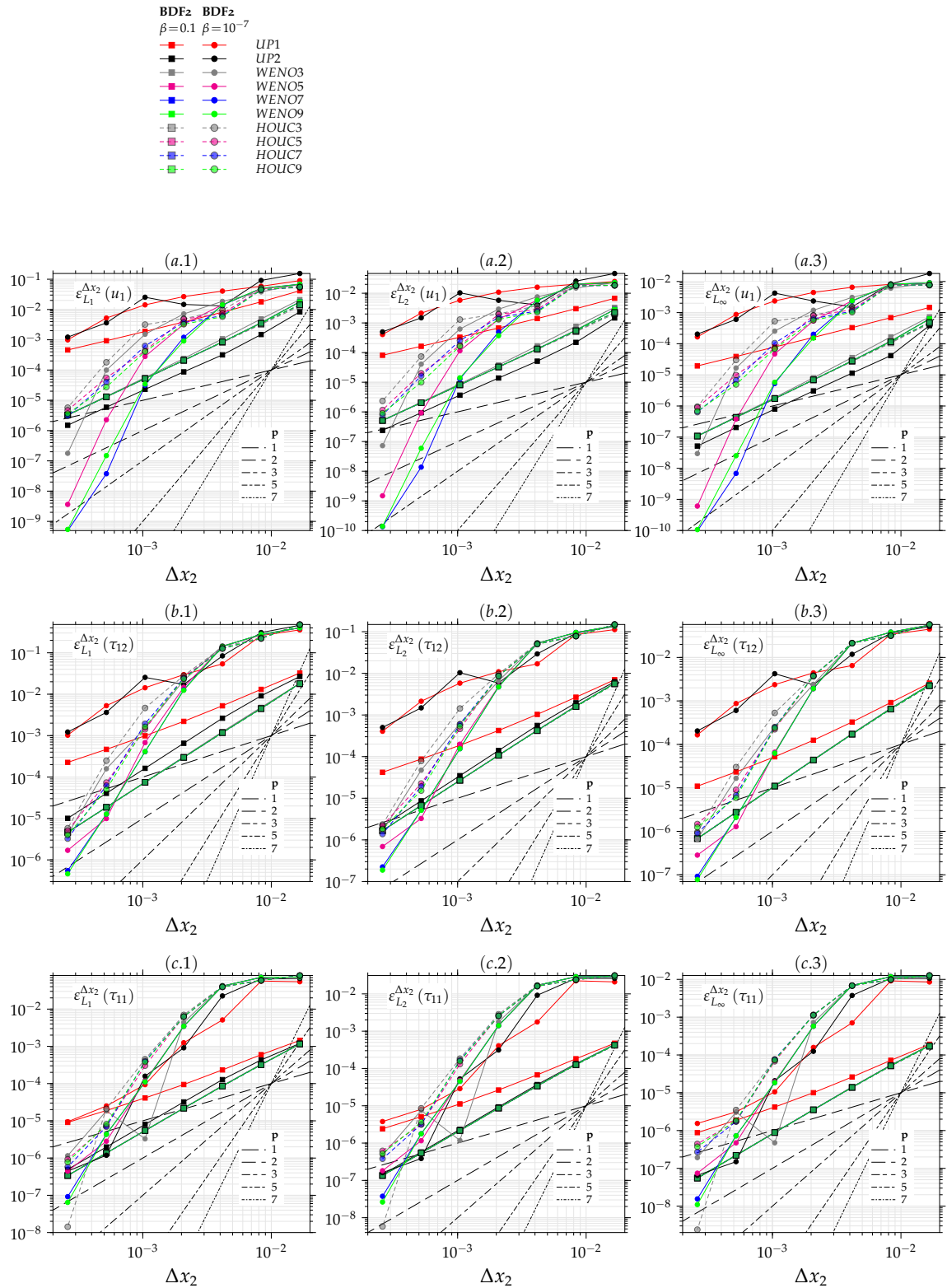


FIGURE 4.23 – Évolution des erreurs de discrétisation spatiales approchée d’une façon numérique, pour le fluide SPTT avec $\text{Re} = 1$, $\text{We} = 1$ et $\epsilon = 0.25$ et pour deux valeurs du rapport de viscosité $\beta = 10^{-7}$ et $\beta = 0.1$, de la vitesse (a) $\epsilon^{\Delta x}(u_1)$, de la contrainte de cisaillement (b) $\epsilon^{\Delta x}(\tau_{12})$ et de la contrainte normale (c) $\epsilon^{\Delta x}(\tau_{11})$, mesurées en différentes normes L_1, L_2 et L_∞ , en fonction du pas de maillage Δx_2 et pour différents schémas de discrétisation de la partie hyperbolique UP(1,2), WENO(3,5,7,9) et HOU(3,5,7,9) et avec le schéma BDF2 pour un pas de temps $\Delta t = 1.488 \times 10^{-5}$ et un nombre d’itérations fixe $n = 5 \times 10^4$.

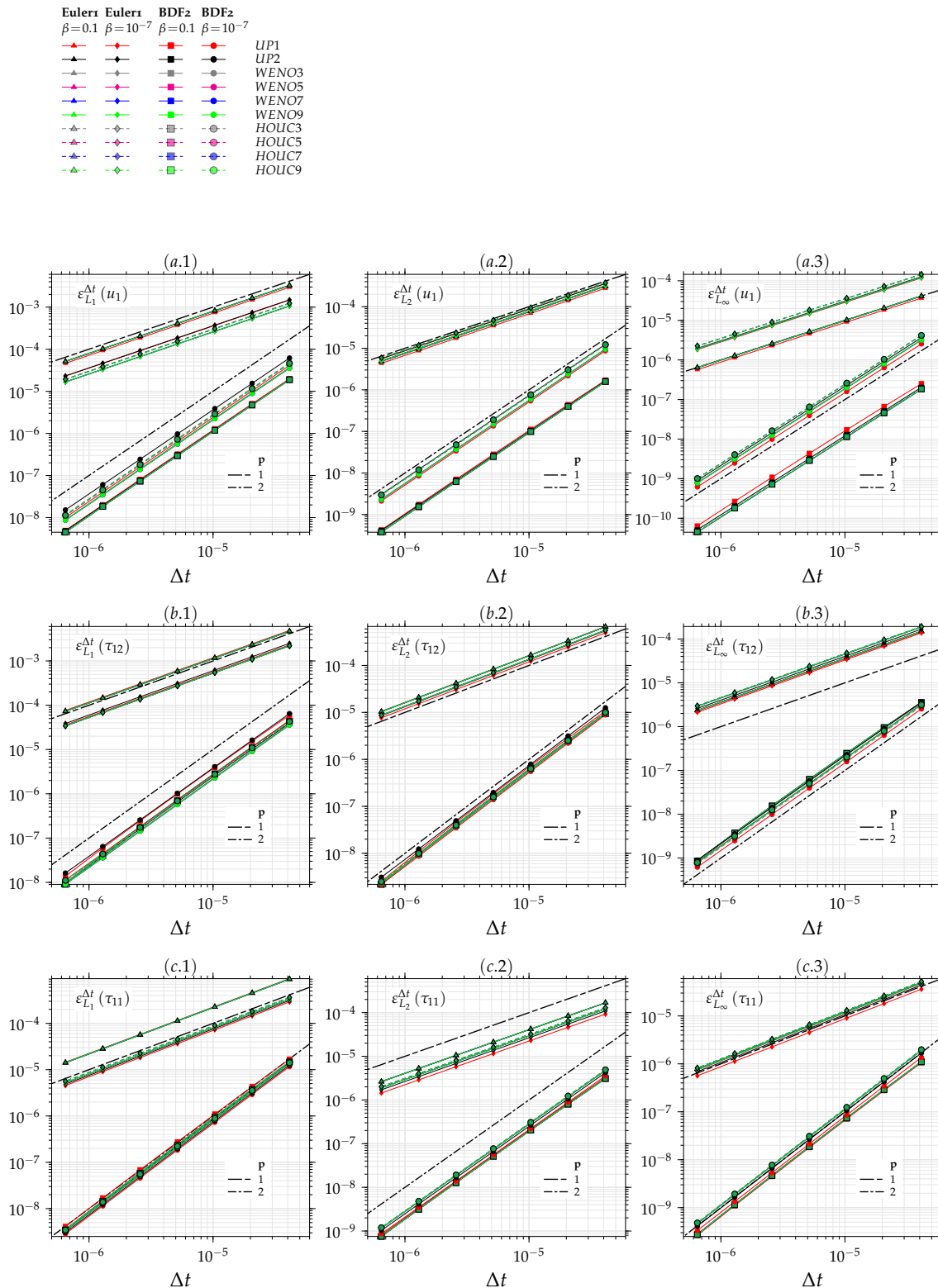


FIGURE 4.24 – Évolution des erreurs de discrétisation temporelles approchée d’une façon numérique, pour le fluide SPTT avec $\mathbf{Re} = 1$, $\mathbf{We} = 1$ et $\epsilon = 0.25$ et pour deux valeurs du rapport de viscosité $\beta = 10^{-7}$ et $\beta = 0.1$, de la vitesse (a) $\epsilon^{\Delta t}(u_1)$, de la contrainte de cisaillement (b) $\epsilon^{\Delta t}(\tau_{12})$ et de la contrainte normale (c) $\epsilon^{\Delta t}(\tau_{11})$, mesurées en différentes normes L_1 , L_2 et L_∞ , en fonction du pas de temps Δt et pour les différents schémas de discrétisation de la partie hyperbolique UP(1,2), WENO(3,5,7,9) et HOU(3,5,7,9), avec le schéma BDF2 et le schéma Euler1 et pour un temps fixe $t = n_i \Delta t_i = 0.0413$ (le nombre d’itérations correspondant au premier pas Δt_1 de temps est $n_1 = 10^3$) et un maillage 1×51 .

tion de l'effet de la rhéofluidification à travers l'augmentation du paramètre de $\sqrt{\epsilon}\text{We}$ induit une diminution accentuée de la contrainte de cisaillement polymérique. Aux très larges valeurs de $\sqrt{\epsilon}\text{We}$, comme la contrainte de cisaillement polymérique devient indépendante du taux de déformation au-delà d'une certaine valeur critique du taux de déformation, la zone proche paroi dans laquelle $\tau_{12}(x_2)$ devient constant tout en s'élargissant davantage.

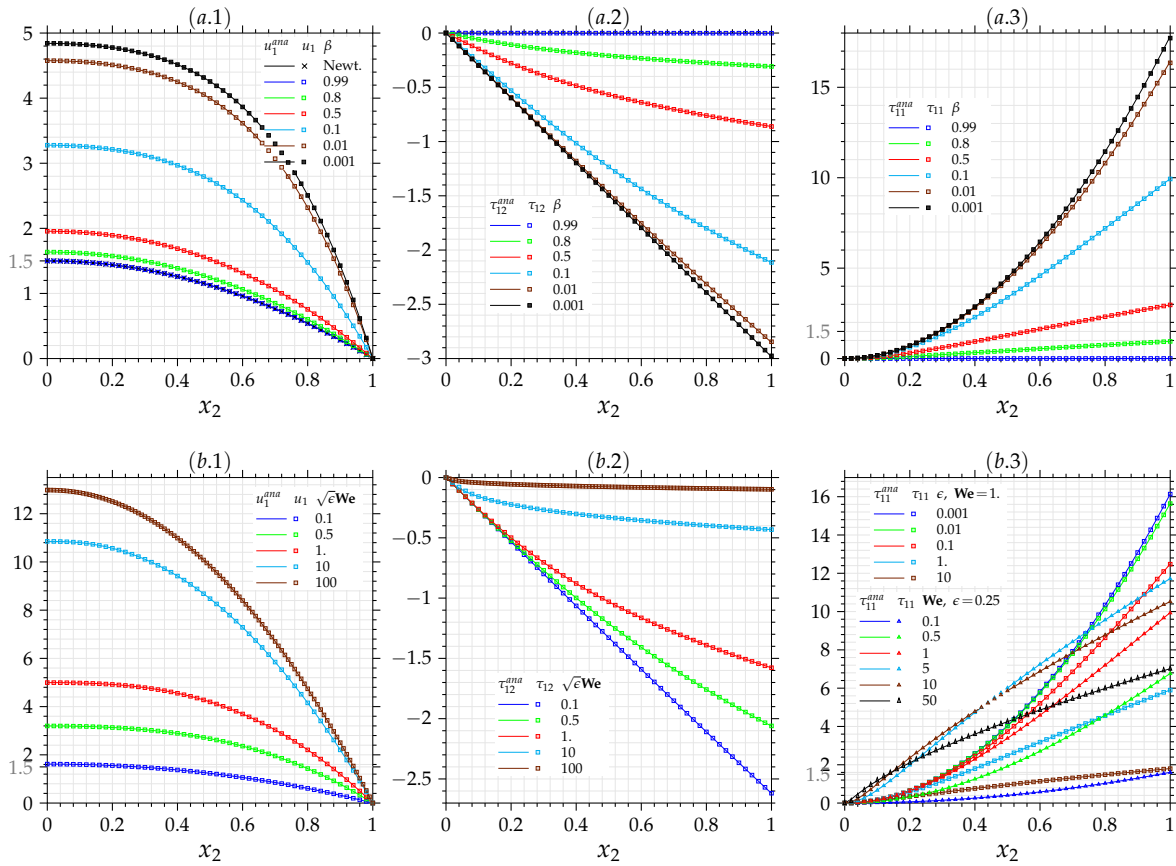


FIGURE 4.25 – Comparaison, à l'état stationnaire avec le fluide SPTT avec $\bar{u}_1^N = 1$, $\text{Re} = 1$, $\text{We} = 1$ et $\epsilon = 0.25$, de la distribution de la solution numérique par rapport à la solution exacte de la vitesse (a.1) $u_1(x_2)$, de la contrainte de cisaillement polymérique (a.2) $\tau_{12}(x_2)$ et de la contrainte normal polymérique (a.2) $\tau_{11}(x_2)$, en fonction du rapport de viscosité du solvant $\beta = \{0.99, 0.8, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001\}$ avec avec le schéma WENO3 et pour un maillage de 1×61 . Comparaison, à l'état stationnaire avec le fluide SPTT avec $\bar{u}_1^N = 1$, $\text{Re} = 1$ et $\beta = 0.1$ de la distribution de la solution numérique par rapport à la solution exacte de la vitesse (b.1) $u_1(x_2)$, de la contrainte de cisaillement polymérique (b.2) $\tau_{12}(x_2)$ et de la contrainte normal polymérique (b.3) $\tau_{11}(x_2)$, en fonction du paramètre $\sqrt{\epsilon}\text{We} = \{0.1, 0.5, 1, 10, 100\}$ avec un maillage de 1×61 .

La figure (4.26) montre à l'état stationnaire, pour le fluide SPTT avec $\bar{u}_1^N = 1$ et $\text{Re} = 1$, l'évolution de la vitesse maximale u_1^{\max} , de la contrainte de cisaillement polymérique maximale τ_{12}^{\max} et de la contrainte normal polymérique maximale τ_{11}^{\max} , en fonction du nombre de Weissenberg $\text{We} = [10^{-3}, 10^3]$ et pour différents rapports de viscosité du solvant $\beta = \{0.99, 0.8, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001\}$ et différentes valeurs du paramètre $\epsilon = \{0.01, 0.02, 0.1, 0.1, 0.25, 0.5, 1\}$. D'abord, pour une valeur fixe du rapport de viscosité β , à travers l'évolution de la vitesse maximale u_1^{\max} (figure(4.26)–(a)) en fonction du nombre de Weissenberg We , on note clairement l'effet de la rhéofluidification. Aux très faibles valeurs de We , la vitesse maximale est indépendante du couple (β, ϵ) et égale à la vitesse maximale du fluide Newtonien. Ensuite, la vitesse maximale subit une évolution monotone aux valeurs intermédiaires du nombre de Weissenberg et finalement elle tend vers un comportement asymptotique aux larges valeurs du nombre de Weissenberg. Cependant, la valeur asymptotique de u_1^{\max} augmente avec la diminution du rapport de viscosité du solvant β ce

qui indique l'accentuation de la rhéofluidification lorsque $\beta \rightarrow 0$. L'augmentation du paramètre ϵ , agissant d'une façon similaire que l'augmentation du nombre de Weissenberg, n'influence pas les valeurs-limites de la vitesse maximale. En revanche, aux valeurs intermédiaires du nombre de Weissenberg, étant donné que l'effet rhéofluidifiant est régi par $\sqrt{\epsilon}We$, l'augmentation du paramètre ϵ induit une translation des courbes d'évolution de la vitesse maximale vers les faibles valeurs du nombre de Weissenberg. De même, on peut constater avec la figure (4.26)–(b) que la contrainte de cisaillement polymérique maximale τ_{12}^{max} est constante aux très faibles valeurs du nombre de Weissenberg et ensuite diminue, sous l'effet de l'intensification de la rhéofluidification, avec l'augmentation du nombre de Weissenberg. La contrainte de cisaillement polymérique est proportionnelle au rapport de la viscosité polymérique $(\beta-1)$ et subit davantage l'effet rhéofluidifiant avec l'augmentation du paramètre ϵ . D'autre part, en l'absence de la rhéofluidification, la contrainte normale polymérique maximale τ_{11}^{max} évolue linéairement dans le domaine des faibles valeurs du nombre de Weissenberg, figure (4.26)–(c). Ensuite, aux valeurs intermédiaires et aux valeurs larges du nombre de Weissenberg, sous l'effet rhéofluidifiant la contrainte normale polymérique maximale diminuée avec l'augmentation du nombre de Weissenberg. La contrainte normale polymérique maximale augmente également d'une manière proportionnelle avec le rapport de la viscosité polymérique $(\beta-1)$ et subit davantage l'effet rhéofluidifiant avec l'augmentation du paramètre ϵ .

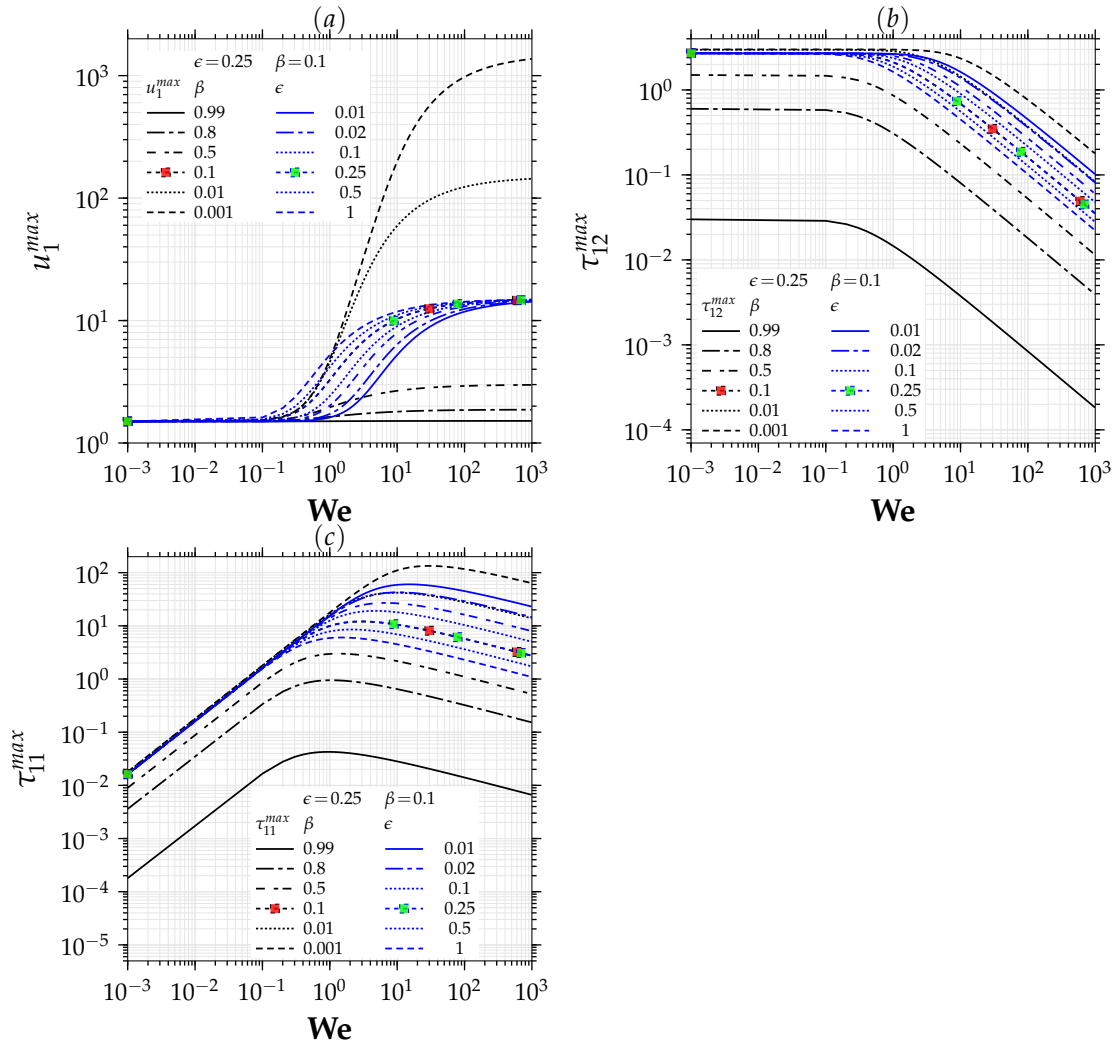


FIGURE 4.26 – Évolution de la vitesse maximale u_1^{max} , de la contrainte de cisaillement polymérique maximale τ_{12}^{max} et de la contrainte normal polymérique maximale τ_{11}^{max} , à l'état stationnaire avec le fluide SPTT avec $\bar{u}_1^N = 1$ et $Re = 1$, en fonction du nombre de Weissenberg $We = [10^{-3}, 10^3]$ et pour différents rapports de viscosité du solvant $\beta = \{0.99, 0.8, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001\}$ et différents valeurs du paramètre $\epsilon = \{0.01, 0.02, 0.1, 0.1, 0.25, 0.5, 1\}$.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les validations de la robustesse et du niveau de précision de l'algorithme développé pour la simulation d'écoulements incompressibles, des fluides viscoélastiques affines et non affines. L'étude des erreurs de discrétisation des différents schémas numériques utilisés est illustrée à travers la mise en œuvre d'un certain nombre de benchmark de référence.

Le premier groupe de benchmarks vise la validation des méthodes numériques implémentées dans le cadre de problèmes d'écoulement des fluides Newtoniens. D'abord, en s'appuyant sur le cas test du tourbillon dissipatif de Green-Taylor, l'efficacité de l'algorithme développé pour résoudre les parties parabolico-elliptique des équations de Navier-Stokes est montré. Ensuite avec le cas test de l'écoulement de Poiseuille dépendant du temps, via des comparaisons à la solution exacte et en utilisant une technique numérique pour évaluer les erreurs de discrétisation, nous avons montré que les ordres de précision des erreurs de discrétisation spatiale et temporelle relevé correspondent aux ordres théoriques des schémas numériques implémentés. Avec le benchmark de la cavité entraînée (2D & 3D), la validation de l'implémentation des termes de convection des équations de Navier-Stokes est présentée à travers des confrontations aux résultats issus de la littérature, en fonction du nombre de Reynolds. Également, les ordres de précision des erreurs de discrétisation spatiale et temporelle obtenus dans le cadre de la cavité entraînée (2D & 3D) concordent avec les ordres théoriques des schémas numériques implémentés.

Par suite, la résolution couplée des équations de Navier-Stokes et de l'équation de l'énergie est étudiée dans le cas de la convection naturel avec le benchmark de la cavité différentiellement chauffée et dans le cas de la convection forcée avec le benchmark de la cavité entraînée chauffée par le haut. Les comparaisons, en termes du nombre de Nusselt moyen et des vitesses maximales le long des lignes de symétrie, avec les résultats disponibles dans la littérature sont en très bon accord et l'évolution des erreurs de discrétisation en temps et en espace des vitesses et de la température est en parfaite entente avec les ordres de précision théoriques attendus.

L'objectif du second groupe de benchmarks est d'analyser les performances de l'algorithme développé dans le cadre d'écoulement de fluide viscoélastique. En premier, les performances des schémas de discrétisation d'ordre élevé WENO(3,5,7,9) et HOU(3,5,7,9) de la partie hyperbolique du système d'équations régissant sont étudiées dans le cas du benchmark de l'écoulement de Poiseuille dépendant de temps du fluide d'Oldroyd-B dont la solution exacte est connue en régime transitoire. Pour un laps de temps simulé fixe, les écarts enregistrés entre la solution numérique et la solution exacte avec les schémas d'ordre élevé WENO(3,5,7,9) et HOU(3,5,7,9) sont bien inférieurs aux écarts relevés avec les schémas UP(1,2) et diminuent davantage avec l'augmentation de l'ordre de précision. Cependant, bien que les schémas HOU(3,5,7,9) sont plus oscillants, respectivement, que les schémas WENO(3,5,7,9), les écarts enregistrés entre la solution numérique et la solution exacte avec les schémas HOU(3,5,7,9) sont inférieurs à ceux obtenus, respectivement, avec les schémas WENO(3,5,7,9). Toutefois, malgré le niveau de précision des schémas d'ordre élevé, au regard de leur coût de calcul, pour certaines résolutions du pas de maillage, les schémas HOU(3,5) ainsi que le schéma WENO3 s'avèrent plus efficaces que les schémas d'ordres davantage plus élevés HOU(7,9) et WENO(5,7,9).

Par ailleurs, lorsque le rapport de la viscosité du solvant dans la viscosité totale $\beta \rightarrow 1$, l'évolution des erreurs de discrétisation spatiale en fonction du pas de maillage obtenue avec les schémas UP(1,2) vérifient bien les ordres de précision théoriques attendus. En revanche, en raison de la discrétisation centrée d'ordre 2 de la partie parabolique et en raison du traitement particulier à l'ordre 2 de la partie hyperbolique des points appartenant au bord du domaine, les erreurs de discrétisation spatiale en fonction du pas de maillage obtenues avec les schémas d'ordre élevé WENO(3,5,7,9) et HOU(3,5,7,9) évoluent seulement suivant une pente de second ordre de précision. D'un autre côté, quand le rapport de viscosité $\beta \rightarrow 0$, la propagation de discontinuités issues

du transport convectif du taux de déformation influence le comportement des erreurs de discrétisation spatiale en fonction du pas de maillage. L'évolution globale des erreurs de discrétisation spatiale enregistrée avec les différents schémas de discrétisation de la partie, UP(1,2), WENO(3,5,7,9) et HOUC(3,5,7,9), est seulement de premier ordre de précision.

D'autre part, les erreurs de la discrétisation temporelle obtenues avec les schémas Euler1 et BDF2 coïncident parfaitement avec les ordres théoriques attendus. Dans un second cas test, le benchmark de l'écoulement de Poiseuille du fluide SPTT, dont la solution exacte est connue à l'état stationnaire, est utilisé. Les performances des méthodes numériques appliquées en espace et en temps sont étudiées en présence de l'effet rhéofluidifiant. Qualitativement, la solution numérique à l'état stationnaire est en très bonne entente avec la solution exacte. Le comportement des erreurs de la discrétisation spatiale obtenues avec les schémas UP(1,2), WENO(3,5,7,9) et HOUC(3,5,7,9) et des erreurs de discrétisations temporelle obtenues avec les schémas Euler1 et BDF2 est semblable aux résultats obtenus avec le fluide d'Oldroyd-B.

Finalement, nous admettons la validité et la robustesse de l'algorithme proposé pour la simulation de problème d'écoulement incompressible de fluide viscoélastique affine et non affine. Notons que des validations supplémentaires spécifiques à l'écoulement incompressible dans une conduite de section carrée sont présentées dans les chapitres suivants.

CHAPITRE 5

Écoulement viscoélastique isotherme dans une conduite de section carrée

Sommaire

4.1	Évaluation des erreurs de discrétisations	110
4.2	Benchmarks fluides Newtoniens	111
4.2.1	Tourbillon de Green–Taylor.....	111
4.2.2	Cavité entraînée (2D & 3D)	113
4.2.3	Cavité différentiellement chauffée	114
4.2.4	Cavité entraînée chauffée par le haut	120
4.2.5	Écoulement de Poiseuille du fluide Newtonien.....	123
4.3	Benchmarks fluides viscoélastiques	127
4.3.1	Écoulement de Poiseuille du fluide Oldroyd–B.....	127
4.3.2	Écoulement de Poiseuille du fluide SPTT	138
4.4	Conclusion	146

En raison de l'importance des fluides polymériques dans diverses applications industrielles (plasturgie, industrie pétrolière, industrie alimentaire), biomédicales (produit pharmaceutiques, écoulement biologiques) et environnementale (détergents liquides, échangeurs de chaleur, mélangeurs chimiques, extrusion, etc.), l'utilisation et la mise en œuvre des propriétés rhéologiques complexes de ces fluides viscoélastiques nécessitent une connaissance précise du comportement dynamique et thermique de l'écoulement du fluide, particulièrement dans les conduites de section non-circulaire.

En effet, les écoulements incompressibles et laminaires des fluides viscoélastiques, tels que les fluides polymériques et les solutions diluées de polymères, dans des conduites rectilignes de section non-circulaire se distinguent par leur comportement rhéofluidifiant et par l'anisotropie de la seconde différence des contraintes normales $N_2 = \tau_{22} - \tau_{33} = \bar{\Psi}_2(\dot{\gamma})\dot{\gamma}^2$ conduisant à l'apparition d'écoulements secondaires.

Alors que l'écoulement laminaire d'un fluide purement visqueux ou Newtonien présente toujours une structure rectiligne quelle que soit la section de la conduite dans la région entièrement développé, les écoulements des fluides viscoélastiques polymériques, quant à eux, sont accompagnées d'écoulements secondaires non-colinéaires avec l'axe de la conduite, Siginer [200], Leonov and Prokunin [131, chap.8], Huilgol and Phan-Thien [100, p.329], qui pourront contribuer à l'amélioration des mélanges, à l'intensification des transferts thermiques et/ou à d'autres phénomènes bouleversant totalement la dynamique de leur écoulement comparativement à celle des fluides Newtoniens.

La structure non-rectiligne de l'écoulement viscoélastique non-linéaire des fluides polymériques et ainsi l'existence des écoulements secondaires ont été mis en évidence dès les années 50 en utilisant des méthodes analytiques, par les pionniers Rivlin [182], Ericksen [61], Green and Rivlin [82] et Langlois and Rivlin [125]. L'écoulement principal engendré par le gradient de pression longitudinale imposé est associé aux propriétés visqueuses du fluide, alors que les écoulements secondaires sont régis par les effets élastique et inertiel. En utilisant une méthode de perturbation, Townsend et al. [219] ont étudié l'écoulement d'un fluide décrit par l'équation constitutive du Criminale-Ericksen-Filbey (CEF) dans un canal de section rectangulaire. Il a été rapporté que l'intensité des écoulement secondaires qui ont été observés est directement liée à l'intensité de la seconde différence des contraintes normales. Plus récemment, en utilisant une approche analytique basée sur une méthode asymptotique, Siginer [200], Siginer and Letelier [202, 203, 204] ont mis en évidence pour le modèle de PTT l'effet des écoulements secondaires pour différentes formes de sections de la conduite (circulaire, carrée, rectangulaire et triangulaire).

Par ailleurs, les recirculations secondaires ont été observées expérimentalement dès les années 70, notamment par Dodson et al. [57], Townsend et al. [219], Gervang and Larsen [74], Debbaut et al. [54], Debbaut and Dooley [55] et récemment par Schroeder and Jeffrey [189]. Pour une conduite de section rectangulaire, les écoulements secondaires se présentent sous forme de deux tourbillons contrarotatifs dans chaque quadrant de la section de passage. Notons que, en raison du faible débit des écoulements secondaires devant l'écoulement principal (inférieur à 1%) et la nécessité d'avoir à disposition un écoulement pleinement développé, l'observation expérimentale des recirculations secondaires demeure difficile et fastidieuse (Gervang and Larsen [74], Schroeder and Jeffrey [189]). C'est la raison du manque de données expérimentales caractérisant ces phénomènes, mais qui a encouragé des approches théoriques et numériques. L'apparition des recirculations secondaires a été, donc, constatée via des investigations numériques en utilisant le modèle CEF) (Townsend et al. [219], Gervang and Larsen [74], Syrjälä [207], Naccache and Mendes [150]), le modèle Reiner-Rivlin (Gao and Hartnett [69]), le modèle PTT (Xue et al. [233], Sharif [193], Tanoue et al. [213], Peres et al. [169]) et récemment avec le modèle de Giesekus (Debbaut and Dooley [55], Yue et al. [239], Al Melhi et al. [7], Li et al. [134]). Par ailleurs, pour un écoulement viscoélastique dans un canal non-circulaire, via une approche expérimentale et numérique Dodson et al. [57], Gervang and Larsen [74] ont rapporté que les prédictions numériques de l'intensité de la se-

conde différences des contraintes normales présentent une bonne concordance avec les résultats expérimentaux. En somme, la majorité de ces études ont montré que l'effet des écoulements secondaires sur la chute de pression est négligeable lorsque le débit est faible et devient conséquent pour des débits plus élevés.

Il a aussi été montré par Syrjälä [207] et Siginer and Letelier [201] que les écoulements secondaires dérivent d'une pseudo-force liée à la seconde différence des contraintes normales $\mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{N}_2$. Yue et al. [239] a montré que cette force \mathbf{f} est non-conservative seulement si la section de la conduite est non-circulaire (non-axisymétrique) et le coefficient de la seconde différence des contraintes normales $\Psi_2(\dot{\gamma})$ n'est pas une constante multiple de la viscosité totale dépendante du taux de déformation $\mu_t(\dot{\gamma})$.

Dans le cadre des fluides polymériques l'observation expérimentale montre que l'écoulement secondaires vont des centres des parois vers les coins et ensuite vers le centre de la conduite. Cependant, contrairement aux modèles de PTT, Giesekus et de Leonov, il a été montré (Yue et al. [239], Siginer [200, p.33]) que le modèle constitutif de Reiner-Rivlin et certaines variantes du modèle CEF prédisent des écoulements secondaires dont la direction n'est pas fidèle à l'observation expérimentale.

Yue et al. [239] a fournie le critère général régissant la direction des écoulements secondaires dans des fluides polymériques postulant que si $m(\dot{\gamma}) = \frac{\Psi_2(\dot{\gamma})}{\mu_t(\dot{\gamma})}$ et $\frac{dm(\dot{\gamma})}{d\dot{\gamma}} > 0$ ($m(\dot{\gamma})$ une fonction croissante avec le taux de déformation) la direction des écoulements secondaires est conforme.

En se limitant aux modèles de PTT et de Giesekus, on peut constater que la plupart des études numériques et analytiques menées jusqu'à présent sont limitées aux fluides dotés d'une faible élasticité (nombre de Weissenberg), négligent l'inertie (nombre de Reynolds) du fluide et souvent l'effet des paramètres rhéologiques (rhéofluidification et anisotropie du fluide) n'est pas exploré. Le tableau 5.1 montre les références bibliographiques des études numériques et analytiques cité ci-dessous consacrées à l'étude paramétrique de l'écoulement viscoélastique polymérique dans une conduite de section carré. Notons que les effets de la rhéofluidification, de l'inertie et de l'anisotropie en relation avec l'élasticité du fluide ne sont pas investigué d'une façon complète. Nous avons justement choisi de bien élucider ces aspects dans le cadres de notre étude.

TABLEAU 5.1 – Références bibliographiques des études (paramétriques) numériques et analytiques menées de l'écoulement viscoélastique polymérique dans un canal de section carré.

Référence	modèle	We	Re	$\beta = \frac{\eta_s}{\eta_p}$	α	ϵ	ζ
Xue et al. [233]	MPTT	[0, 0.13]	~ 1	0	–	0.1	0.2
Sharif [193]	PTT	[0, 0.13]	~ 1	0	–	0.1	0.2
Tanoue et al. [213]	PTT	[0.2, 100]	0	0.1	–	[0.013, 0.4]	[0.05, 0.5]
Yue et al. [239]	Giesekus	1	0	0.1	0.5	–	–
Peres et al. [169]	MPTT	[33, 333]	~ 1000	[0.02, 0.04]	–	0.25	[0.01, 0.03]
Siginer and Letelier [203]	MPTT	[0.1, 0.4]	[1, 250]	0	–	[0.1, 0.3]	[0.0, 0.3]
Al Melhi et al. [7]	Giesekus	1	[1, 2]	0	[0.1, 0.5]	–	–
Li et al. [134]	Giesekus	[0.1, 10]	0.1	[0.1, 0.9]	[0.1, 0.9]	–	–

L'objectif de présent chapitre est d'investiguer numériquement l'écoulement laminaire complètement développé d'un fluide viscoélastique non-affine décrit par les modèles de Giesekus et PTT, dans un canal de section carrée afin d'étudier la sensibilité de l'écoulement principal et la structure/intensité des recirculations secondaires vis-à-vis de l'effet des différents paramètres rhéologiques (rhéofluidification, anisotropie du fluide) et de l'effet de l'inertie en relation avec l'élasticité du fluide.

Dans une première partie nous décrivons la configuration de l'écoulement dans le cadre d'une

conduite de section carrée et nous donnons les conditions aux limites associées. Ensuite, nous présentons les expressions des fonctions viscoélastiques associées à un écoulement de fluide viscoélastique dans une conduite rectiligne de section non-circulaire. Nous exposons aussi, mais brièvement, les validations numériques de notre outil de calcul présenté dans les chapitres précédents.

Dans une seconde partie, nous analysons avec un débit constant et indépendamment de l'inertie du fluide, l'effet de la rhéofluidification sur la structure et la dynamique de l'écoulement principal ainsi que sur les écoulements secondaires en explorant finement l'influence d'une large gamme du rapport de la viscosité du solvant $\beta = \{0.8, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001, 10^{-7}\}$ et en fonction d'une large gamme du nombre de Weissenberg $We = [0.1, 10]$.

Ensuite, nous analysons l'interaction entre le comportement viscoélastique et l'effet de l'inertie du fluide, sur la dynamique de l'écoulement principal ainsi que la structure des écoulements secondaires associés en fonction du nombre de Weissenberg $We = [0.1, 10]$ et pour une large gamme du nombre de Reynolds $Re = [1, 1200]$.

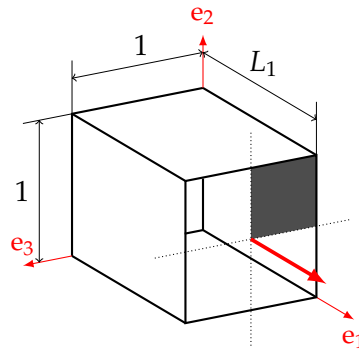
En fin, nous proposons une analyse de l'effet de l'anisotropie du fluide de Giesekus $\alpha = [0.2, 0.8]$ en relation avec l'effet de la force d'inertie $Re = \{100, 500\}$ et de l'élasticité du fluide $We = [0.1, 10]$, sur l'écoulement principal ainsi que sur les écoulements secondaires.

5.1 Configuration de l'écoulement, repère local du tenseur des contraintes et validations

Dans les chapitres suivants, nous considérons uniquement la partie complètement développée de l'écoulement. En effet, l'étude de la zone d'entrée de l'écoulement dans une conduite de section non-circulaire nécessite la considération d'un nombre important de points de calcul discrets. Au regard de la complexité de l'étude du passage du fluide viscoélastique dans une conduite, en termes de nombre de dépendances avec les différents paramètres (rhéologiques, inertiel, thermiques, etc.), la prise en considération de la région d'entrée nécessite de paralléliser le solveur de l'équation de Poisson, ce qui dépasse le cadre du présent travail. Ainsi, on se limitera dans ce chapitre à l'étude dynamique de la région entièrement développée de l'écoulement viscoélastique dans une conduite de section carrée.

5.1.1 Configuration de l'écoulement

On considère un écoulement d'un fluide viscoélastique dans une conduite de section carrée de côté égal à l'unité et de longueur L_1 , schématisée sur la figure 5.1. Dans la région complètement développée de l'écoulement, l'ensemble des dérivées suivant la première direction, à l'exception de la pression, sont nulles $\partial/\partial x_1 = 0$. Cependant, l'écoulement principal, suivant la direction \mathbf{e}_1 , est généré par l'application d'un gradient de pression longitudinale constant $\partial p/\partial x_1 = const$. Ainsi, le champ de pression peut se mettre sous la forme $p(\mathbf{x}) = p^*(x_2, x_3) + (\partial p/\partial x_1)x_1$, où $p^*(x_2, x_3)$ représente la partie du champ de pression qui satisfait la contrainte d'incompressibilité. Par ailleurs, garder une unique valeur du gradient de pression longitudinale pour toutes les variations ($\forall We, \forall \beta, \forall \alpha, \forall Re$), comme dans Siginer and Letelier [204], Siginer et al. [205], signifie que la vitesse moyenne (où le débit volumique) n'est pas conservée pour la gamme de variation du paramètre considéré. Or, d'un point de vue expérimental et notamment dans le cadre de l'analyse des transferts thermiques prévue dans ce travail, notamment l'effet de la dissipation visqueuse, il est plus réaliste d'imposer une conservation de débit volumique. Pour ce faire, un algorithme itératif est mis en œuvre. Il consiste à chercher la valeur du gradient de pression à imposer $\partial p/\partial x_1$ qui garantit une vitesse moyenne constante est égale à l'unité $\bar{u}_1 = 1$, pour des valeurs données des paramètres rhéologiques (We, β, α, Re).


 FIGURE 5.1 – Schéma d'une conduite de section carrée de côté égal à l'unité et de longueur L_1 .

Dans cette configuration, les conditions initiales à $t_0 = 0$ pour les composantes du vecteur vitesse, du tenseur de contraintes viscoélastiques et de pression, sur l'ensemble des points de calcul, sont données comme suit,

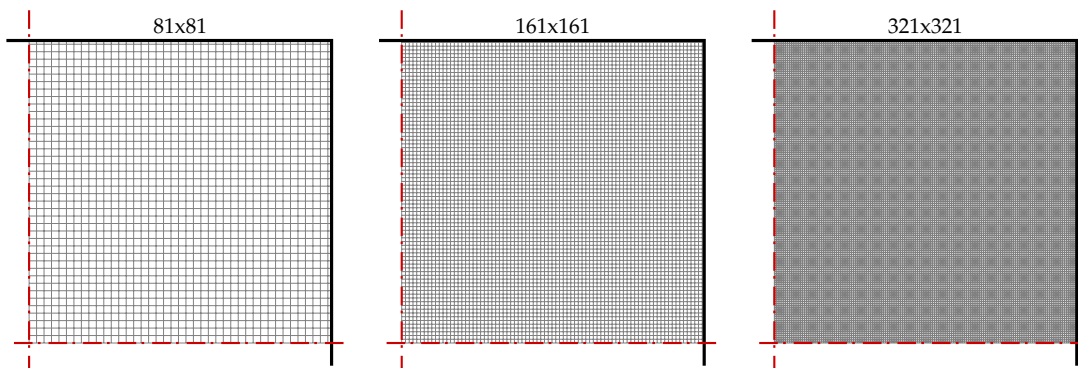
$$\begin{cases} u_i(t_0) = 0 \\ \tau_{ij}(t_0) = 0 \\ p^*(t_0) = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

et les conditions aux limites des composantes du vecteur vitesse au bord du domaine de calcul sont données par la condition de non glissement aux parois et celles pour la pression correspondent à la condition de Neumann homogène, et s'écrivent :

$$\begin{cases} u_i(x_2=0, x_3) = 0, & \frac{\partial p^*}{\partial x_2}(x_2=0, x_3) = 0 \\ u_i(x_2=1, x_3) = 0, & \frac{\partial p^*}{\partial x_2}(x_2=1, x_3) = 0 \\ u_i(x_2, x_3=0) = 0, & \frac{\partial p^*}{\partial x_3}(x_2, x_3=0) = 0 \\ u_i(x_2, x_3=1) = 0, & \frac{\partial p^*}{\partial x_3}(x_2, x_3=1) = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Notons que au regard du traitement de la partie quasi-linéaire (partie hyperbolique) et des termes non-linéaires du système d'équations gouvernant, le tenseur des contraintes viscoélastiques ne requière pas la connaissance de conditions aux limites sur les parois (voir 3.4.1).

Plusieurs configurations de discrétisation du domaine d'étude sont ainsi représentées sur la figure 5.2 montrant une schématisation des différentes grilles adoptées (81×81 , 161×161 et 321×321) pour l'écoulement dans une conduite de section carrée.


 FIGURE 5.2 – Illustration des différentes grilles adoptées (81×81 , 161×161 et 321×321 correspondant à la section complète) pour l'écoulement dans une conduite de section carrée. Les grilles sont montrées seulement sur le quart supérieur droit de la conduite.

5.1.2 Repère viscométrique du tenseur des contraintes

Comme nous l'avons évoqué dans la section 1.3.2.2, la contrainte de cisaillement τ_{12} ainsi que les contraintes normales τ_{ii} possèdent un sens rhéologique uniquement dans le cadre d'un écoulement viscométrique de cisaillement simple, Bird et al. [28, chap. 8], Bird et al. [27, chap. 2], Dealy and Wang [53, chap. 2] et Dai et al. [50]. Sous un tel cadre, le tenseur des contraintes est défini suivant des directions attachées au repère viscométrique de la particule fluide pour lequel la première direction est la direction de l'écoulement, la deuxième direction représente la direction de variation du gradient de vitesse et finalement la troisième direction est la direction neutre. Cependant, le système d'équations gouvernant donné par (2.8)–(2.9) est défini par rapport à la base \mathbf{e}_i du repère cartésien lié à la géométrie de la conduite (voir figure 5.1). La base du repère viscométrique ne concorde donc pas avec la base du repère de la géométrie de la conduite. En effet, pour l'écoulement d'un fluide viscoélastique dans une conduite de section non circulaire, l'expression du taux de déformation donnée par $\dot{\gamma} = (2\text{tr}\mathbf{D}^2)^{1/2}$ peut se réduire à $\dot{\gamma} = ((\partial u_1/\partial x_3)^2 + (\partial u_1/\partial x_2)^2)^{1/2}$. Suivant Yue et al. [239] et Li et al. [134], comme les écoulements secondaires sont d'une intensité très faible devant l'écoulement principal, leur contribution dans le taux de déformation peut être négligée. Ensuite, la complexité tridimensionnelle de l'écoulement dans la conduite (effet de confinement de géométrie) engendre la variation spatiale (suivant le rayon et l'azimutale) de la direction du gradient de la vitesse principale, c'est-à-dire $\nabla u_1 \times \mathbf{e}_2 \neq 0$ et $\nabla u_1 \times \mathbf{e}_3 \neq 0$. Dans le repère local, seule la première direction, concordant avec l'écoulement principal et donc \mathbf{e}_1 coïncide avec la première direction de l'écoulement viscométrique de cisaillement simple. Les directions \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 ne remplissent pas les conditions de l'écoulement viscométrique sur l'ensemble du domaine de calcul. Toutefois, notons que le long des lignes de symétrie horizontale et verticale, ces conditions en question sont satisfaites. Ainsi, afin de permettre une analyse rhéologique sur l'ensemble du domaine de calcul, une transformation de rotation du repère de la géométrie lié à \mathbf{e}_i au repère viscométrique de la particule fluide $\bar{\mathbf{e}}_i$, des composantes du tenseur des contraintes polymériques s'impose (voir figure 5.3). Cet angle de rotation correspond à l'angle entre ∇u_1 et \mathbf{e}_2 . Il peut

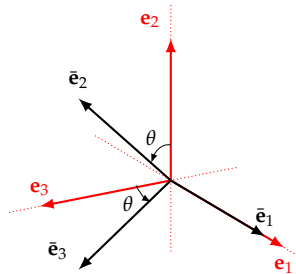


FIGURE 5.3 – Schématisation d'une transformation de rotation autour de \mathbf{e}_1 d'un angle θ de base \mathbf{e}_i liée au repère cartésien de la géométrie à la base $\bar{\mathbf{e}}_i$ liée à l'écoulement viscométrique de cisaillement, en un point discret du domaine de calcul.

s'écrire pour les points non appartenant aux lignes de symétrie verticales et horizontales comme suit, $\theta = \arctan(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} / \frac{\partial u_1}{\partial x_2})$. Par ailleurs, la transformation de rotation en chaque point discret du domaine de calcul est donnée par ¹ $\bar{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{R}$ où \mathbf{R} est la matrice orthogonale de rotation autour de la première direction \mathbf{e}_1 . Dans ce travail nous étendons la transformation de rotation adoptée par Yue et al. [239] et Li et al. [134] pour la seconde différence des contraintes normales afin d'inclure la première différence des contraintes normales ainsi que la contrainte de cisaillement.

1.

$$\begin{pmatrix} \bar{\tau}_{11} & \bar{\tau}_{12} & \bar{\tau}_{13} \\ \bar{\tau}_{12} & \bar{\tau}_{22} & \bar{\tau}_{23} \\ \bar{\tau}_{13} & \bar{\tau}_{23} & \bar{\tau}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \tau_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Ainsi, les composantes du tenseur de contraintes polymériques dans les directions $\bar{\mathbf{e}}_i$ associées à la définition de l'écoulement viscométrique de cisaillement simple s'écrivent comme suit,

$$\begin{cases} \bar{\tau}_{11} = \tau_{11} \\ \bar{\tau}_{12}^t = \tau_{12}^t \cos \theta + \tau_{13}^t \sin \theta \\ \bar{\tau}_{22} = \tau_{22} \cos^2 \theta + \tau_{33} \sin^2 \theta + 2\tau_{23} \sin \theta \cos \theta \\ \bar{\tau}_{33} = \tau_{22} \sin^2 \theta + \tau_{33} \cos^2 \theta - 2\tau_{23} \sin \theta \cos \theta \end{cases} \quad (5.3)$$

où les contraintes de cisaillement totale sont données par $\tau_{12}^t = \tau_{12}^N + \tau_{12}$ et $\tau_{13}^t = \tau_{13}^N + \tau_{13}$.

Finalement, les fonctions viscoélastiques associées à un écoulement de fluide viscoélastique dans une conduite rectiligne de section non-circulaire s'écrivent dans le cadre de l'écoulement viscométrique de cisaillement simple sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \bar{N}_1(\dot{\gamma}) = \bar{\tau}_{11} - \bar{\tau}_{22} = \bar{\Psi}_1(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}^2 \\ \bar{N}_2(\dot{\gamma}) = \bar{\tau}_{22} - \bar{\tau}_{33} = (\tau_{22} - \tau_{33}) \cos 2\theta + \tau_{23} 2 \sin 2\theta = \bar{\Psi}_2(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}^2 \\ \mu_p(\dot{\gamma}) = \bar{\tau}_{12} / \dot{\gamma} \end{cases} \quad (5.4)$$

où $\bar{\Psi}_1(\dot{\gamma})$ et $\bar{\Psi}_2(\dot{\gamma})$ sont respectivement les coefficients de la première et de la seconde différence des contraintes normales.

5.1.3 Validations numériques

En complément des validations des méthodes numériques présentées au chapitre 4, il est nécessaire de valider de nouveau l'implémentation du code de calcul dans le cas de l'écoulement viscoélastique à travers une conduite de section carrée. Pour ce faire, dans cette section, nous avons réalisé des comparaisons des résultats de notre travail avec les données disponibles dans la littérature. Vu la complexité de l'écoulement en termes de superposition des phénomènes qui y ont cours, notre stratégie a consisté à mener des validations numériques selon les différents effets étudiés. D'abord, l'effet de la rhéofluidification au travers de l'écoulement principal, ensuite l'effet de la seconde différence des contraintes normales via l'intensité des écoulements secondaires et finalement, l'effet de l'inertie.

Notons que pour un écoulement de fluide Newtonien dans une conduite de section rectangulaire, l'écoulement est rectiligne et la solution analytique à l'état stationnaire peut s'obtenir facilement à l'aide de la méthode de séparation de variable, (elle est aussi disponible dans plusieurs livres de référence, Shah [190], Agassant et al. [6]). Pour des raisons de symétrie, en considérant le centre de la conduite comme repère dont la base est (x_1^*, x_2^*, x_3^*) , cette solution analytique, semi-parabolique, peut s'écrire sous la forme suivante :

$$u_1(x_2^*, x_3^*) = \frac{f\mathbf{Re}}{2} \left((x_2^*)^2 - \frac{1}{4} \right) + f\mathbf{Re} \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cosh((2n+1)\pi x_3^*) \cos((2n+1)\pi x_2^*)}{(2n+1)^3 \cosh((2n+1)\pi \frac{\gamma}{2})} \quad (5.5)$$

où $f\mathbf{Re} = -\mathbf{Re}(dp/dx_1)$ représente la chute de pression longitudinale (semblable au coefficient de frottement) et γ représente le rapport d'aspect de la conduite, égal à l'unité pour le cas d'une section carrée. Ainsi, la vitesse moyenne est donnée par :

$$\bar{u}_1 = 4 \int_0^{1/2} \int_0^{1/2} u_1(x_2^*, x_3^*) dx_2^* dx_3^* \quad (5.6)$$

La forme simplifiée de cette expression s'écrit : $\bar{u}_1 = a\mathbf{Re}(dp/dx_1)$ où a est une constante dépendante du rapport d'aspect de la section d'écoulement. Dans le cas d'une conduite de section carrée $a = -0.035144$. Ainsi, la chute de pression longitudinale requise pour satisfaire une vitesse moyenne

$\bar{u}_1 = 1$ dans le cas d'un fluide purement Newtonien² est $\text{Re}(dp/dx_1) = -28.4543$, la vitesse maximale correspondante est $u_1^{\text{max}} = 2.0962$.

Par ailleurs, pour un écoulement d'un fluide viscoélastique non-affine, l'analyse des écoulements (tourbillons) secondaires, peut se faire via la fonction de courant maximale ψ^{max} qui constitue un bon indicateur de leur intensité. On introduit ainsi l'équation de Poisson de la fonction de courant³ s'écrivant,

$$-\nabla^2\psi = \Omega_{x_1} \quad (5.7)$$

où Ω_{x_1} est la composante de vorticité parallelle à l'écoulement principal $\Omega_{x_1} = \partial u_2/\partial x_3 - \partial u_3/\partial x_2$. La fonction de courant est obtenue après la résolution de l'équation de Poisson sous une discrétisation en différences finies centrées d'ordre 2.

La figure 5.4 montre sur le quart supérieur de la section de la conduite une comparaison des champs de la vitesse principale u_1 (a), du taux de déformation $\dot{\gamma}$ (b), de la seconde différence des contraintes normales $N = \tau_{22} - \tau_{33}$ (c) et de la fonction de courant ψ , obtenus dans ce travail avec les données de Yue et al. [239]. Les résultats sont obtenus avec le modèle du Giesekus $\alpha = 0.5$ pour un nombre de Weissenberg $\text{We} = 1$ et un rapport de viscosité du solvant dans la viscosité totale à taux de cisaillement nul $\beta = 0.1$, une vitesse moyenne constante $\bar{u}_1 = 1$ et avec $f\text{Re} = -6.7791$. On peut constater que la vitesse maximale, au même titre que le coefficient de frottement, diminue par rapport au cas d'un fluide Newtonien. Ce phénomène indique l'opérativité de l'effet rhéofluidifiant. Quant aux valeurs les plus élevées du taux de déformation, elles sont localisées sur les centres des parois. D'autre part, on remarque l'impact de la seconde différence des contraintes normales N_2 . Le fait qu'elle soit antisymétrique part rapport à la diagonale est due à l'effet de la variation spatiale de la direction du gradient de vitesse, et de fait les recirculations secondaires se manifestent sous forme de couple de tourbillons contrarotatifs dans chaque quart de la section de la conduite. Le signe positif des valeurs de la fonction de courant indique la rotation de la cellule dans le sens des aiguilles d'une montre, et *vice-versa* pour les valeurs de la fonction de courant dont le signe négatif. Finalement, on note un excellent accord total entre les résultats obtenus dans le cadre de ce travail et les résultats de Yue et al. [239], validant ainsi notre approche de calcul.

2. Dans la région complètement développée, l'écoulement du fluide Newtonien est indépendant du nombre de Reynolds.

3. La fonction de courant est définie par $u_3 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}$ et $u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_3}$.

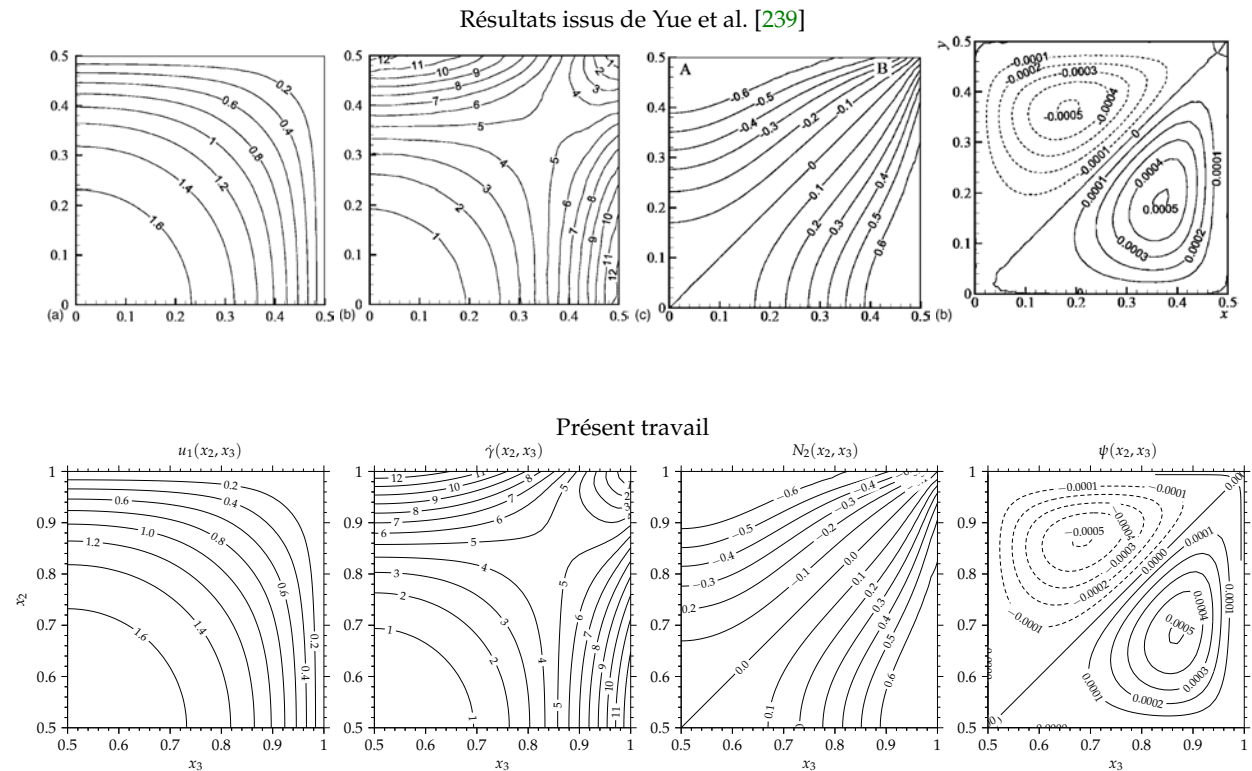


FIGURE 5.4 – Comparaisons des champs, respectivement, de la vitesse principale u_1 (a), du taux de déformation $\dot{\gamma}$ (b), de la seconde différence des contraintes normales $N_2 = \tau_{22} - \tau_{33}$ (c) et de la fonction de courant ψ avec les résultats de Yue et al. [239] dans le cas du fluide de Giesekus $\alpha = 0.5$ avec un nombre de Weissenberg $We = 1$ et un rapport de viscosité du solvant dans la viscosité totale $\beta = 0.1$, $fRe = -6.7791$ et $\bar{u}_1 = 1$. La résolution du maillage utilisé ici est 80×80 .

D'autre part, l'intensité des écoulements secondaires peut être aussi analysée à travers la vitesse moyenne des écoulements secondaires définie par :

$$u_s^{moy} = \int_0^h \int_0^h (u_2^2 + u_3^2)^{\frac{1}{2}} dx_2 dx_3 \quad (5.8)$$

La figure montre 5.5 des comparaisons de la vitesse moyenne des écoulements secondaires obtenues dans le présent travail avec les résultats donnés dans la littérature par Li et al. [134] et Yue et al. [239]. Les résultats sont donnés pour une vitesse moyenne de l'écoulement principale constante $\bar{u}_1 = 1$ pour le modèle de Giesekus, d'abord, en fonction du nombre de Weissenberg avec $\alpha = 0.5$ et $\beta = 0.1$, ensuite en fonction du rapport de viscosité du solvant dans la viscosité totale β avec $\alpha = 0.5$ et $We = 1$ puis en fonction du paramètre d'anisotropie α avec $We = 1$ et $\beta = 0.1$. On remarque que l'évolution u_s^{moy} en fonction de We passe par un maximum, mais en fonction du paramètre d'anisotropie et du rapport de viscosité, la vitesse u_s^{moy} adopte un comportement monotone. Les vitesses moyennes obtenues concordent avec les données de Li et al. [134] et Yue et al. [239] permettant ainsi de valider le comportement des écoulements secondaires prédit par notre outil de calcul.

Par ailleurs, le tableau 5.2 montre l'évolution du coefficient de frottement (fRe), des vitesses moyenne et maximale des écoulements secondaires (u_s^{moy}, u_s^{max}) ainsi que la vitesse maximale (u_1^{max}) de l'écoulement principal en fonction de la résolution du maillage pour différents nombre de Reynolds $Re = \{1, 100, 500\}$, deux valeurs du nombre de Weissenberg $We = \{1, 10\}$ et deux valeurs du rapport de viscosité $\beta = \{0.1, 0.001\}$. En premier lieu, en fonction de la résolution spatiale, pour les différents β et pour différents Re et We , on constate que les résultats sont consistants et l'ordre 2 dominant la discrétisation spatiale est retrouvé. On note aussi que le processus itératif garantis-

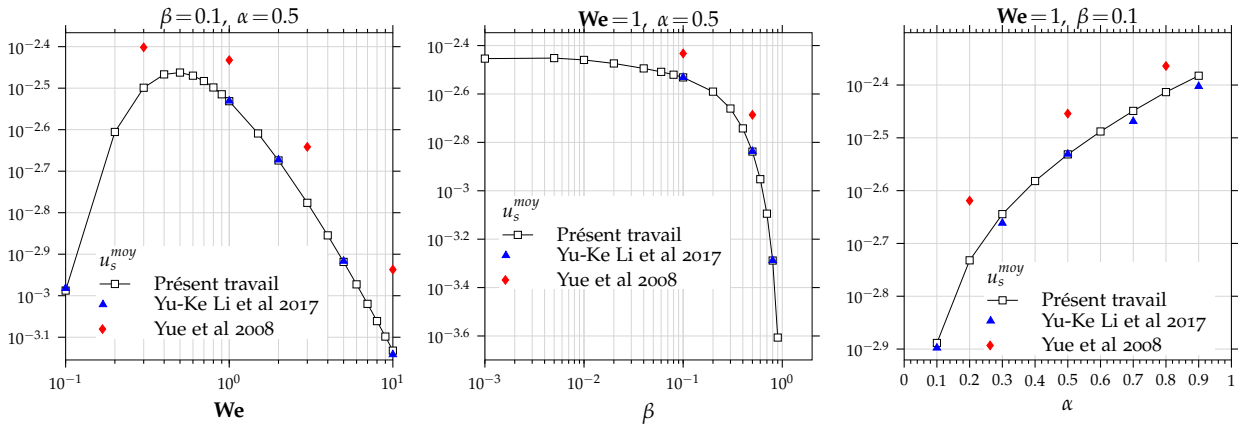


FIGURE 5.5 – Comparaisons de la vitesse moyenne des écoulements secondaires u_s^{moy} obtenue dans ce travail avec les résultats de la littérature donnés par Li et al. [134] et Yue et al. [239]. Les vitesses moyennes sont données pour le modèle de Giesekus d’abord en fonction du nombre de Weissenberg avec $\alpha = 0.5$ et $\beta = 0.1$, ensuite en fonction du rapport β avec $\alpha = 0.5$ et $We = 1$ et finalement en fonction du paramètre d’anisotropie α avec $We = 1$ et $\beta = 0.1$. Notons que la vitesse moyenne de l’écoulement principale est constante $\bar{u}_1 = 1$.

sant $\bar{u}_1 = 1$ converge à l’ordre 2. Ensuite pour les valeurs très faibles du rapport de viscosité, une résolution plus faible peut être requise pour les valeurs élevées du nombre de Weissenberg. En effet, comme il sera discuté dans la section suivante, l’effet rhéofluidifiant induit une diminution de la viscosité polymérique qui se traduit, avec la condition $\bar{u}_1 = 1$, par une élévation des valeurs de la vitesse au voisinage des centres des parois. Cette transition dans le voisinage de la paroi peut s’avérer très raide pour les faibles valeurs de β et les larges valeurs du nombre de Weissenberg. Par conséquent, pour la suite, on adopte une résolution de 160×160 pour $\beta > 0.001$ et 320×320 pour $\beta < 0.001$, afin de mener les calculs numériques. En conclusion, nos résultats montrent, d’une part, que les comparaisons avec les résultats de la littérature sont concordantes, et d’autre part, qu’en fonction de la résolution du maillage, les ordres théoriques des schémas de la discrétisation numérique sont retrouvés. Finalement, la fiabilité ainsi que la précision du code de calcul développé est acceptable pour le calcul d’écoulements viscoélastiques dans une conduite de section carrée.

TABLEAU 5.2 – Évolution du coefficient du frottement ($f\mathbf{Re}$), des vitesses moyenne et maximale des écoulements secondaires (u_s^{moy} , u_s^{max}) et de la vitesse maximale (u_1^{max}) en fonction de la résolution du maillage pour différents nombre de Reynolds $\mathbf{Re} = \{1, 100, 500\}$, différents nombre de Weissenberg $\mathbf{We} = \{1, 10\}$ et différents rapport de viscosité $\beta = \{0.1, 0.001\}$.

		$\mathbf{We} = 1$				$\mathbf{We} = 10$				
		\mathbf{Re}	$-f\mathbf{Re}$	$u_s^{moy}10^{-3}$	$u_s^{max}10^{-3}$	u_1^{max}	$-f\mathbf{Re}$	$u_s^{moy}10^{-4}$	$u_s^{max}10^{-3}$	u_1^{max}
$\beta = 0.1$										
[239]	50x50	/	6.78	-	-	-	-	-	-	-
	80x80	1	6.7791	2.9409	6.3659	1.72487	3.29209	7.4018	1.6835	1.9717
	160x160	1	6.7780	2.9410	6.4491	1.72478	3.29156	7.3715	1.6820	1.9728
	320x320	1	6.7804	2.9457	6.4688	1.72291	3.29144	7.3673	1.6830	1.9730
	80x80	100	6.8109	2.4803	5.9880	1.73510	3.2976	6.6579	1.5188	1.9780
	160x160	100	6.8111	2.4813	6.0292	1.73512	3.29740	6.6670	1.5239	1.9783
	320x320	100	6.8110	2.4816	6.0273	1.73513	3.29732	6.6689	1.5256	1.9783
	80x80	500	7.10085	1.9837	5.9382	1.77280	3.34768	5.1890	1.2075	1.9952
	160x160	500	7.10955	1.9934	5.9716	1.77378	3.34807	5.1959	1.2061	1.9954
	320x320	500	7.11092	1.9948	5.9719	1.77395	3.34812	5.1971	1.2078	1.9955
$\beta = 0.001$										
	80x80	1	3.8861	3.5217	14.093	1.3817	0.47536	7.4932	2.9958	1.261
	160x160	1	3.8532	3.5171	14.025	1.3692	0.46727	7.5612	3.0271	1.254
	320x320	1	3.8435	3.5385	14.628	1.3645	0.4629	7.6094	2.9030	1.2517

5.2 Effet du rapport de viscosité β en relation avec l'élasticité du fluide (\mathbf{We})

Suivant Joseph [110] et Siginer [200, chap.4, p.61], pour les écoulements de fluides viscoélastiques dépourvus de viscosité de base du solvant $\beta = \mu_s / \mu_{t_0} = 0$, les termes d'inertie peuvent être négligés seulement lorsque le nombre de Mach élastique $\mathbf{Ma}_0 \ll 1$. Mais, pour $\beta \neq 0$, cette condition concerne uniquement l'équation constitutive. Les termes d'inertie dans l'équation de quantité de mouvement sont régis par le nombre de Reynolds. Cependant, dans la région complètement développée de l'écoulement viscoélastique dans un canal rectiligne de section non circulaire, les termes d'inertie se réduisent au terme de convection transverse liée aux composantes u_2 et u_3 de la vitesse. Au regard de la faible intensité des écoulements secondaires devant l'écoulement principal, la convection transverse peut donc être négligée dans l'équation constitutive lorsque $(u_s^{moy})^{1/2} \mathbf{Ma}_0 \ll 1$ et dans l'équation de la quantité de mouvement lorsque $u_s^{moy} \mathbf{Re} \ll 1$. Par ailleurs, bien que la vitesse moyenne des écoulements secondaires a été donnée en fonction de quelques valeurs de temps de relaxation, notamment dans Xue et al. [233] pour le modèle de PTT, et dans Yue et al. [239] et Li et al. [134] pour le modèle de Giesekus, le comportement du fluide en fonction des différents paramètres rhéologiques n'a pas été bien décrit dans la littérature. Dans cette section, nous analysons pour une vitesse moyenne principale constante $\bar{u}_1 = 1$ et indépendamment des termes d'inertie du fluide dans l'équation de la quantité de mouvement, l'effet de la rhéofluidification sur la structure et la dynamique de l'écoulement viscoélastique dans une conduite de section carrée. Nous fixons le nombre de Reynolds $\mathbf{Re} = 1$ (c'est-à-dire $u_s^{moy} \mathbf{Re} \sim 10^{-3}$) et en fonction du nombre de Weissenberg $\mathbf{We} = [0.1, 10]$ nous explorons finement l'influence d'une large gamme du rapport de la viscosité du solvant $\beta = \{0.8, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001, 10^{-7}\}$ sur l'écoulement principal ainsi que sur les écoulements secondaires.

5.2.1 Écoulement principale

La figure 5.6 montre, pour un fluide Newtonien et pour le fluide de Giesekus ($\alpha = 0.5$), les champs de la vitesse principale $u_1(x_2, x_3)$ en fonction de trois valeurs du nombre de Weissenberg $We = \{0.3, 1, 5\}$ et trois rapports $\beta = \{0.5, 0.1, 0.001\}$ allant des fluides faiblement viscoélastiques (solutions de polymères dilués) aux fluides fortement viscoélastiques (polymères enchevêtrés). On peut remarquer d'emblée, par rapport au champ de la vitesse d'un fluide Newtonien⁴, que les champs de vitesse du fluide de Giesekus en fonction de We passent, progressivement, d'une distribution presque-parabolique à une distribution semi-parabolique. Les déviations subites sont intimement liées aux paramètres rhéologiques. En effet, l'effet rhéofluidifiant induit une élévation des valeurs du champ de vitesse au voisinage des centres des parois qui est accompagnée d'un aplatissement dans la région du centre de la conduite, qui est une conséquence directe de la condition de conservation du débit ($\bar{u}_1 = 1, \forall We, \forall \beta$) contraignant l'écoulement à ralentir dans la région du centre de la conduite.

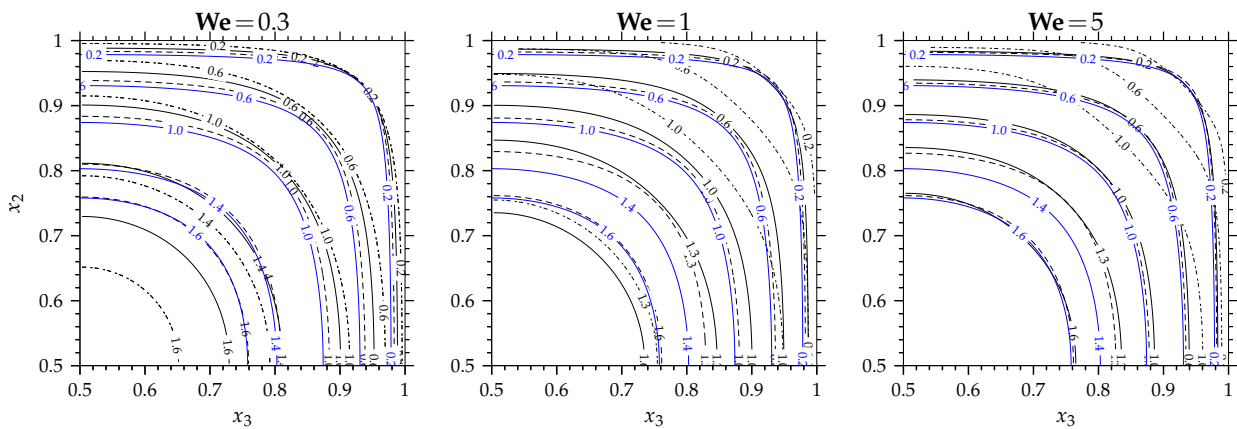


FIGURE 5.6 – Champs de vitesse principale $u_1(x_2, x_3)$ associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $Re = 1$ sur le quart supérieur droit du canal en fonction du nombre de Weissenberg $We = \{0.3, 1, 5\}$ et pour différents rapport de viscosité : (----- $\beta = 0.5$), (——— $\beta = 0.1$), (— · — · — $\beta = 0.001$) et pour un fluide Newtonien (——— *Newt.*).

Par ailleurs, pour les très faibles rapports de viscosité β , ce comportement (élévation–aplatissement) s'accroît avec l'augmentation de l'élasticité du fluide (nombre de Weissenberg) le champ de vitesse du fluide tend à coïncider avec le champ de vitesse Newtonien au large valeurs de We . De plus, la figure 5.6 permet aussi de montrer que l'influence de la rhéofluidification est moins prononcée dans la région de la diagonale que dans les régions des lignes de symétrie horizontale et verticale. Ainsi, pour constater l'effet de β sur la structure spatiale de l'écoulement principal, on montre en premier sur la figure 5.7 le champ de vecteur taux de déformation lié à l'écoulement principal $\dot{\gamma}(x_3, x_2) = (\partial u_1 / \partial x_3)e_3 + (\partial u_1 / \partial x_2)e_2$, sur le quart supérieur droit de la conduite pour $We = 1$ et en fonction du rapport de viscosité du solvant $\beta = \{0.5, 0.1, 0.001\}$. On note que le champ de vecteur taux de déformation est symétrique par rapport à la diagonale. Il prend ces valeurs maximales aux centres des parois et ces valeurs minimales dans la zone du centre de la conduite et la zone du coin. Par ailleurs, on remarque que la zone d'aplatissement s'élargit avec la diminution du β , mais présente un niveau très faible des taux de déformation.

Pour aller plus loin, nous avons représenté sur la figure 5.8, pour le quart supérieur droit de la conduite, la distribution spatiale de la viscosité totale adimensionnée μ_t / μ_{t_0} , de la contrainte de cisaillement polymérique $\bar{\tau}_{12}$ et de la première différence des contraintes normales \bar{N}_1 , associées au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $Re = 1$, en fonction du nombre de Weissenberg $We =$

4. En fait, l'utilisation du champ de vitesse d'un fluide Newtonien, ou du fluide d'Oldroyd-B, voir encore du fluide de Giesekus avec ($\alpha = 0$) pour fixer un champ de vitesse de référence est équivalent, puisque ces trois modèles fournissent des champs de vitesse identiques à l'état stationnaire.

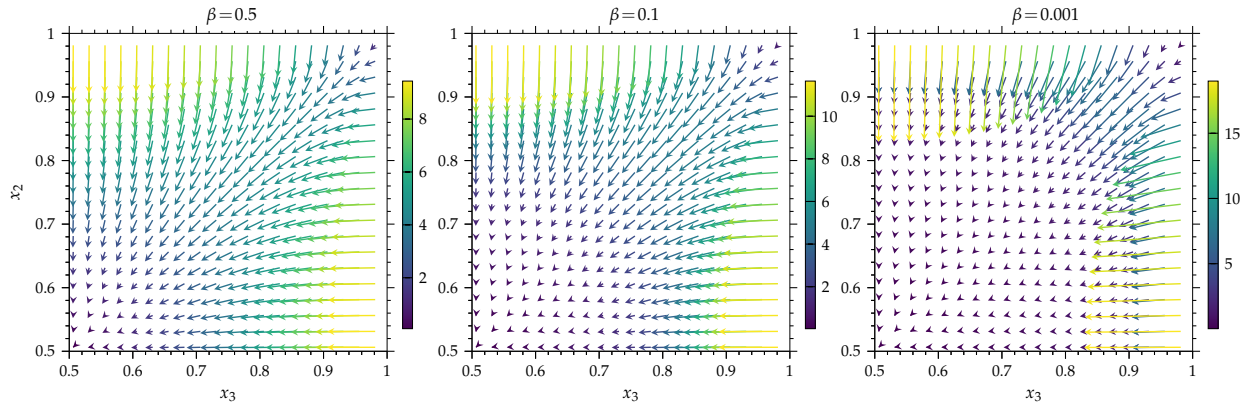


FIGURE 5.7 – Champs de vecteur $\dot{\gamma}(x_3, x_2) = (\partial u_1 / \partial x_3) \mathbf{e}_3 + (\partial u_1 / \partial x_2) \mathbf{e}_2$ en fonction du rapport de viscosité du solvant $\beta = \{0.5, 0.1, 0.001\}$ pour $\mathbf{We} = 1$, associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $\mathbf{Re} = 1$. La colorbar indique l'intensité du taux de déformations donnée par $\dot{\gamma}(x_3, x_2) = ((\partial u_1 / \partial x_3)^2 + (\partial u_1 / \partial x_2)^2)^{1/2}$. Quart supérieur droit du canal, résolution réduite (81:159:4, 81:159:4).

$\{0.3, 1, 5\}$ et pour différents rapport de viscosité du solvant. Pour les différents \mathbf{We} , on remarque que les zones correspondant aux niveaux les plus faibles de μ_t / μ_{t_0} et de $\bar{\tau}_{12}$ et les niveaux les plus importants de \bar{N}_1 , concordent avec les régions où l'intensité du taux de déformations est la plus élevée. Pour des rapports de viscosité importants et des nombres de Weissenberg faibles, les zones du fluide se trouvant sur la diagonale sont impactées d'une manière moindre par la rhéofluidification. Toutefois, pour des nombres Weissenberg importants, à l'exception de la région du centre et du coin, un fort degré de rhéofluidification occupe une large partie de la section de la conduite. Par suite, avec des rapports faibles valeurs de β , la rhéofluidification relative semble agir modestement dans la zone de l'aplatissement. Ce qui est normal, vu que les niveaux des taux de déformation sont faibles dans cette région. D'autre part, la distribution spatiale de la première différence des contraintes normales subit fortement l'effet des faibles β . Aux larges valeurs de \mathbf{We} , due à la répartition de taux de déformation, \bar{N}_1 varie lentement dans une large région du centre de la conduite. Ce comportement de \bar{N}_1 en fonction des paramètres rhéologiques peut induire une forte implication dans de nombreuses applications industrielles, telle que le séparateur de particules Lim et al. [135] utilisant les caractéristiques rhéologiques des fluides viscoélastiques pour répartir les objets en suspension suivant leur diamètre, où souvent seules des valeurs élevées du rapport β sont considérés.

Pour une analyse fine du comportement rhéologique en fonction de l'élasticité du fluide et du rapport de viscosité, nous étudions l'écoulement le long de la ligne de symétrie centrale vertical allant du centre de la conduite au centre de la paroi du haut ($x_3 = 0.5, 0.5 < x_2 < 1$). Le long de cette ligne de symétrie, la composante horizontale du taux de cisaillement est nulle, étant donné $\partial u_1 / \partial x_3 = 0$, et sa composante verticale contient les valeurs-limites obtenues sur l'ensemble de la section de l'écoulement. Pour différents nombre de Weissenberg, la figure 5.9–(a) montre les profils de vitesse le long de cette ligne centrale en fonction du rapport de viscosité $\beta = \{0.5, 0.1, 0.001\}$ et les figures 5.9–(b) et 5.9–(c) illustrent les profils de taux de déformation associés au profils de vitesse, respectivement pour $\beta = 0.1$ et $\beta = 0.001$.

L'augmentation de la vitesse principale, avec la diminution du rapport de viscosité β , est maximale sur ligne de symétrie et l'aplatissement du profil de vitesse survenant dans la région centrale et occupant une large région est très dépendant du nombre de Weissenberg. Pour des larges du nombre de Weissenberg, on s'approche d'un écoulement bouchon, avec des taux de cisaillements très importants, localisés de proche en proche de la paroi. Cependant on peut constater sur 5.9–(b, c) que l'accélération du fluide au voisinage des parois est issue d'une production des taux de déformation et l'aplatissement est accompagné d'une diminution des taux de déforma-

$$\frac{\mu_t(x_3, x_2)}{\mu_{t_0}} = \beta + \mu_p(x_3, x_2) / \mu_{t_0}$$

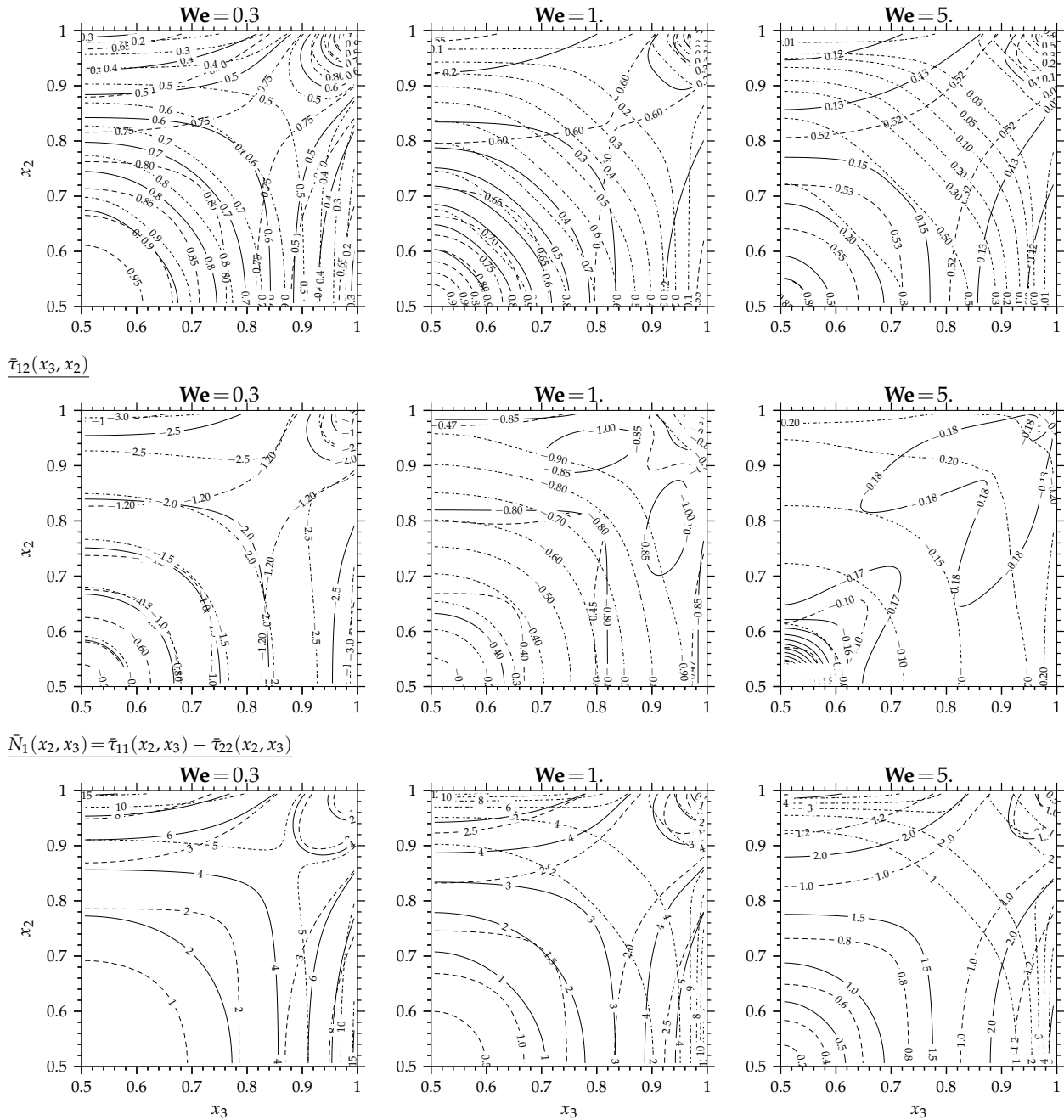


FIGURE 5.8 – Champs de la viscosité totale $\mu_t(x_3, x_2)/\mu_{t_0}$, champs de la contrainte de cisaillement polymérique $\bar{\tau}_{12}(x_3, x_2)$ et champs de la première différence des contraintes normales $\bar{N}_1(x_2, x_3)$ associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $\mathbf{Re} = 1$ sur le quart supérieur droit du canal en fonction du nombre de Weissenberg $\mathbf{We} = \{0.3, 1, 5\}$ et pour différents rapport de viscosité : (----- $\beta = 0.5$), (——— $\beta = 0.1$), (-·-·-· $\beta = 0.001$).

tion. Sous la condition ($\bar{u}_1 = 1, \forall \mathbf{We}, \forall \beta$), la production des taux de déformation est le résultat du comportement rhéofluidifiant du fluide de Giesekus. Autrement dit, la production du taux de déformation est autorisée dans la mesure de la condition de conservation de débit volumique.

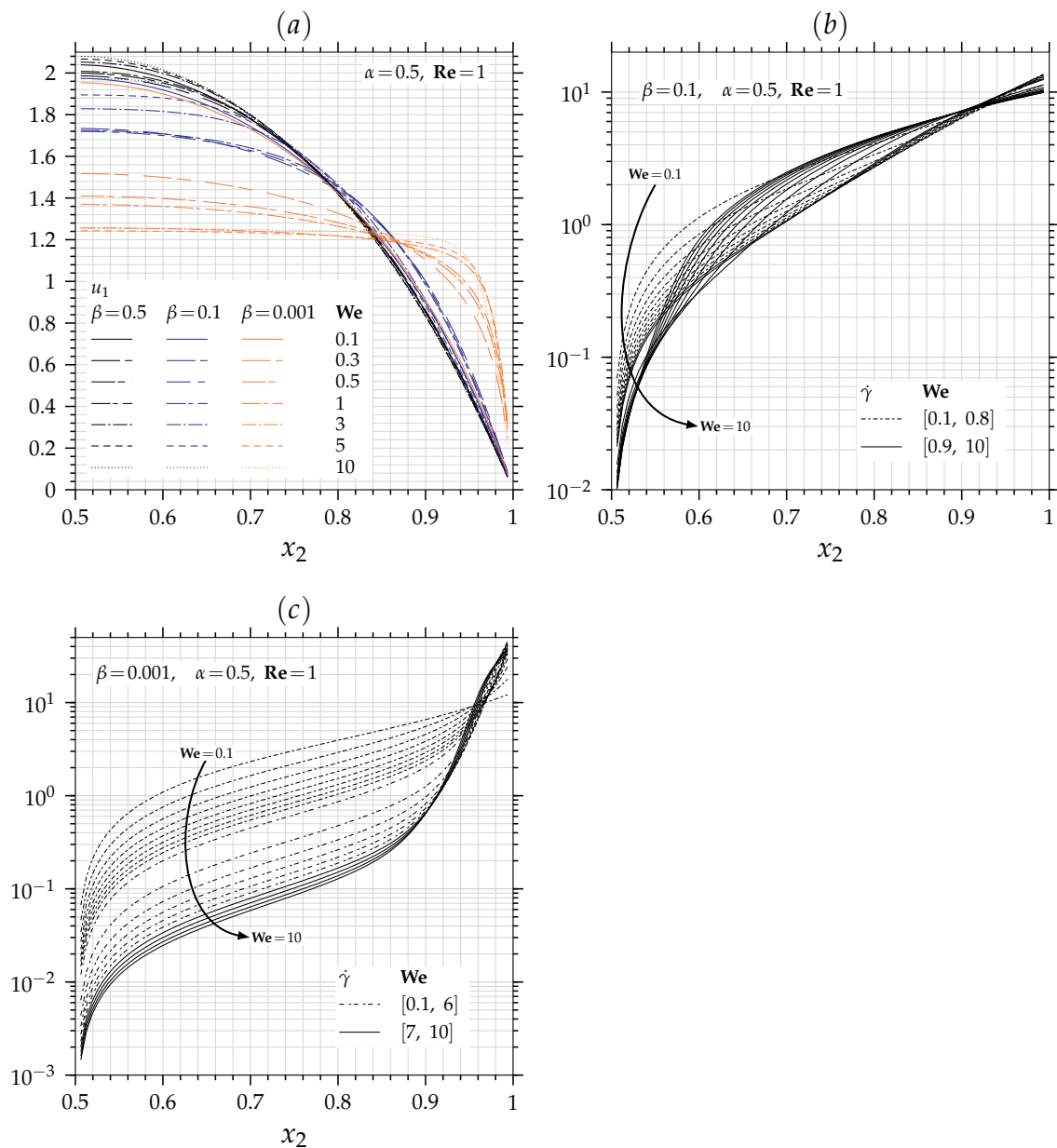


FIGURE 5.9 – (a) Profils de vitesse principale $u_1(x_3=0.5, x_2)$ le long de la ligne centrale ($x_3=0.5, x_2=0.5$) – ($x_3=0.5, x_2=1.$) en fonction du nombre de Weissenberg $\mathbf{We} = [0.1, 10]$ et pour différents rapport de viscosité $\beta = \{0.5, 0.1, 0.001\}$. Le long de la même ligne centrale et en fonction de $\mathbf{We} = [0.1, 10]$, (b) taux de déformations $\dot{\gamma}(x_3=0.5, x_2)$ pour $\beta=0.1$ et (c) taux de déformations $\dot{\gamma}(x_3=0.5, x_2)$ pour $\beta=0.001$, associée au modèle de Giesekus ($\alpha=0.5$) avec $\text{Re}=1$.

Afin d’analyser la réponse rhéologique du fluide lors de l’écoulement dans le canal, nous avons représenté sur la figure 5.10–(b), l’évolution de la viscosité totale μ_t/μ_{t_0} en fonction du taux de déformation et en fonction de x_2 , le long de la ligne centrale verticale, en fonction du nombre de Weissenberg $\mathbf{We} = [0.1, 10]$ et pour différents rapports de viscosité $\beta = \{0.5, 0.1, 0.001\}$.

On observe, pour l’ensemble des rapports β , la dépendance de la viscosité totale adimensionnée μ_t/μ_{t_0} du taux de déformation. Aux faibles $\dot{\gamma}$, la viscosité totale adimensionnée est égale à l’unité constituant sa valeur plateau à taux de déformation nul. Au-delà d’une certaine valeur de

taux de déformation, la viscosité totale adimensionnée décroît.

L'augmentation simultanée du rapport de viscosité et du nombre de Weissenberg induit un très fort accroissement du degré de rhéofluidification relative. Le plateau inférieur de la viscosité totale adimensionnée est presque entièrement investi (voir les courbes de la viscosité totale adimensionnée en fonction de $\mu_t(x_2)/\mu_{t_0}$). En effet, comme le plateau inférieur de la viscosité totale adimensionnée est proportionnel à β , le taux de déformation maximal autorisé suffit pour atteindre le plateau inférieur⁵.

Par ailleurs, même pour les faibles valeurs de β , un niveau de rhéofluidification important est atteint mais le plateau inférieur requière soit des taux de déformation plus élevés soit un nombre de Weissenberg plus important.

D'autre part, on peut constater que les courbes $\mu_t(\dot{\gamma})/\mu_{t_0}$ se translatent avec l'augmentation de We vers les faibles valeurs des taux de déformation. Cette dépendance peut se traduire par les courbes de la viscosité totale adimensionnée en fonction du nombre de Weissenberg local représenté par la variable $We\dot{\gamma}$ (voir courbe bleu). En fonction du nombre de Weissenberg local, une courbe maîtresse se distingue pour chaque valeur du rapport β pour lesquelles les viscosités les plus faibles dépendent du maximum du nombre de Weissenberg local atteint à la paroi⁶. Aussi, l'existence des courbes maîtresses témoigne de l'unicité du comportement rhéologique pour l'ensemble de la série de points analysée.

5. Rappelons que β est une constante sans dimension indépendante du taux de déformation, représentant le rapport de la viscosité du solvant dans la viscosité totale à taux de cisaillement nul ou encore appelée aussi temps de retardation.

6. Notons que les points de divergence qui se manifestent aux faibles valeurs de $\dot{\gamma}$ et aux larges valeurs de We et de β sont dus à une insuffisance de la résolution du maillage au centre de la conduite.

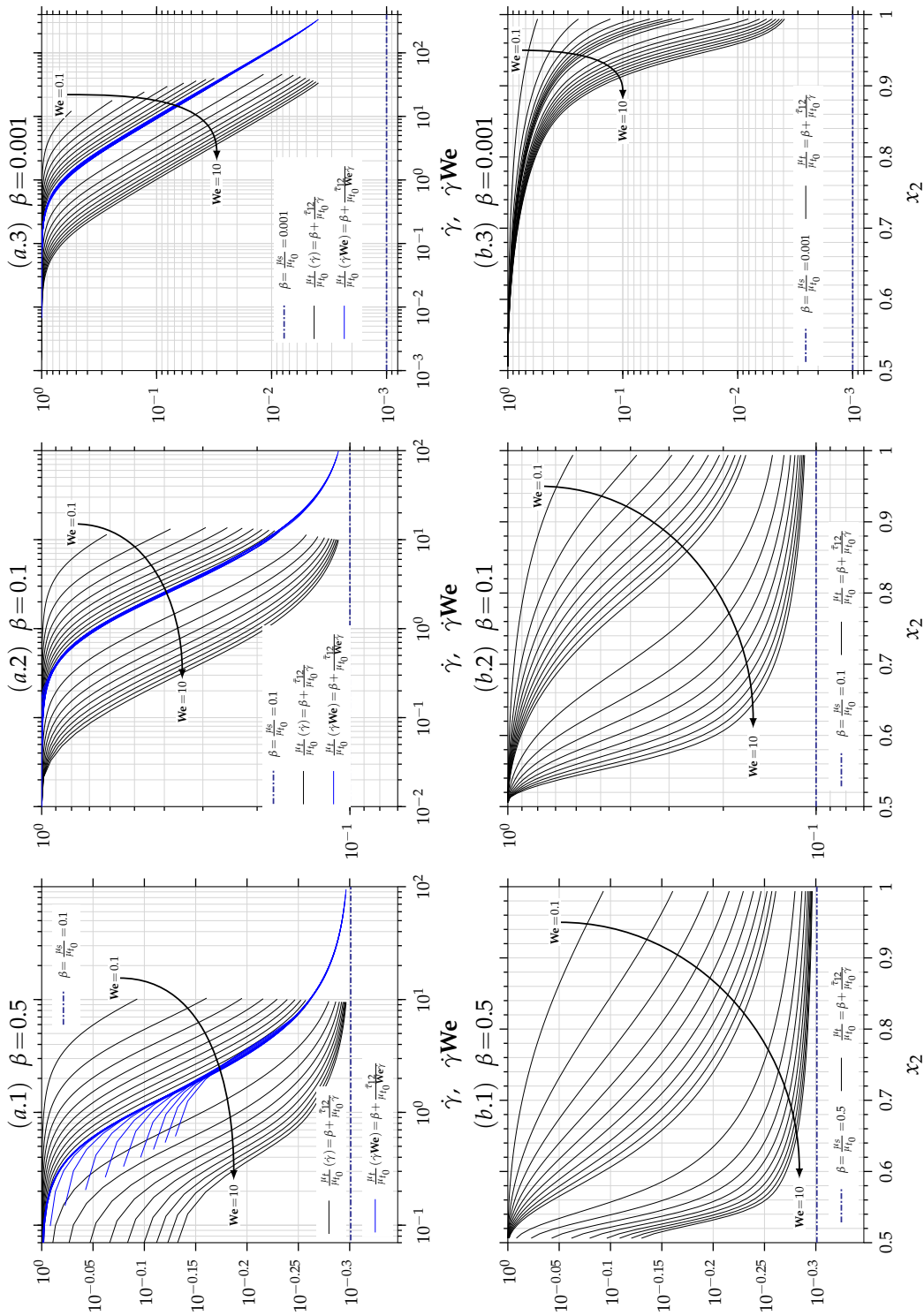


FIGURE 5.10 – Pour le modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) et avec $\mathbf{Re} = 1$, évolution le long de la ligne centrale ($x_3 = 0.5, x_2 = 0.5$) – ($x_3 = 0.5, x_2 = 1.$) : de la viscosité totale $\mu_t / \mu_{t_0}(\dot{\gamma})$ fonction des taux de déformations $\dot{\gamma}$, de la viscosité totale $\mu_t / \mu_{t_0}(\dot{\gamma} \mathbf{We})$ en fonction du nombre de Weissenberg local à taux de cisaillement non-nul[†] et de la viscosité totale $\mu_t / \mu_{t_0}(x_2)$; et en fonction du nombre de Weissenberg local $\bar{\Psi}_1(\dot{\gamma} \mathbf{We}) / \mathbf{We}$ et pour des différents nombre de Weissenberg $\mathbf{We} = [0.1, 10]$ et différents rapport de viscosité $\beta = \{0.5, 0.1, 0.001\}$.

[†] : étant donné $\mathbf{We} = \lambda U / L$ avec $U / L = 1$, la variable $\dot{\gamma} \mathbf{We}$ représente le nombre de Weissenberg local à taux de cisaillement non-nul.

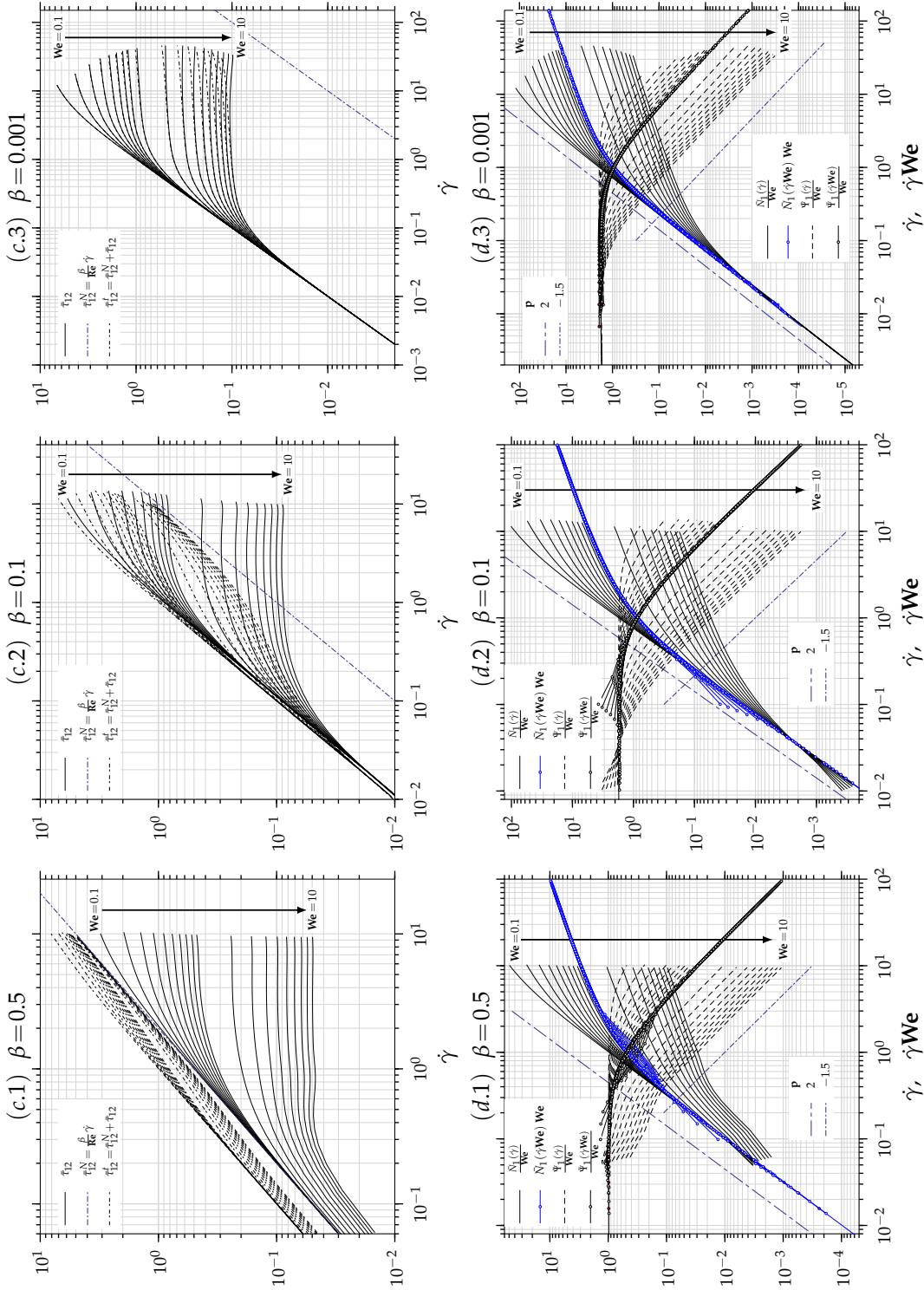


FIGURE 5.11 – Pour le modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) et avec $Re = 1$, évolution le long de la ligne centrale ($x_3 = 0.5, x_2 = 0.5, x_1 = 0.5$) : de la contrainte de cisaillement Newtonienne $\bar{\tau}_{12}^N$, polymérique $\bar{\tau}_{12}^f$ et totale $\bar{\tau}_{12} = \bar{\tau}_{12}^N + \bar{\tau}_{12}^f$; de la première différence des contraintes normales en fonction divisé par le nombre de Weissenberg en fonction du taux de cisaillement $\bar{\tau}_{12}^N / We$ et en fonction du nombre de Weissenberg local à taux de cisaillement non-nul $\bar{\tau}_{12}^f / We$ et finalement le coefficient de la première différence des contraintes normales divisé par le nombre de Weissenberg en fonction du taux de cisaillement $\bar{\tau}_{12}^f - \bar{\tau}_{12}^N / We$ et en fonction du nombre de Weissenberg local $\bar{\tau}_{12}^f - \bar{\tau}_{12}^N / We$, en fonction du $We = [0.1, 10]$ et pour différents rapport de viscosité $\beta = \{0.5, 0.1, 0.001\}$.

Étant donné que la contrainte de cisaillement polymérique est proportionnelle à la viscosité polymérique, la forte dépendance de la viscosité polymérique du taux de déformation gouverne la dynamique de l'écoulement principale en fonction de l'élasticité et du rapport de viscosité. À cet égard, la figure 5.11–(c) montre l'évolution des contraintes de cisaillement Newtonienne $\bar{\tau}_{12}^N = \beta\dot{\gamma}$, polymérique $\bar{\tau}_{12}$ et totale $\bar{\tau}_{12}^t = \bar{\tau}_{12}^N + \bar{\tau}_{12}$ en fonction du taux de déformation et pour différents nombres de Weissenberg et différents β . Aux faibles valeurs de taux de déformation, la contrainte de cisaillement polymérique adopte un comportement linéaire et augmente avec la diminution du rapport de viscosité du solvant dans la viscosité totale, à taux de cisaillement nul $\bar{\tau}_{12} \sim (1-\beta)\dot{\gamma}$. Aux larges valeurs de taux de déformation, la contrainte de cisaillement polymérique devient indépendante du taux de déformation et au-delà d'une certaine valeur de celui-ci, elle épouse un comportement inversement proportionnel au nombre de Weissenberg $\bar{\tau}_{12} = (1-\beta)/\text{We}$. Comme la contrainte de cisaillement Newtonienne domine la contrainte polymérique aux larges nombres de Weissenberg et aux larges taux de déformation, la contrainte de cisaillement totale passe successivement par trois phases, en fonction du taux de déformation. Une phase où $\bar{\tau}_{12}^t$ adopte un comportement linéaire aux faibles et aux larges taux de déformation (vers une asymptote suivant la contrainte Newtonienne dominante) et une phase de transition aux valeurs intermédiaires du taux de cisaillement où $\bar{\tau}_{12}^t$ suit un comportement rhéofluidifiant. Lorsque le rapport $(1-\beta)$ augmente, la phase de transition est d'autant plus prononcée que $(1-\beta)$ est important. Il est néanmoins important de noter que pour un rapport de viscosité de solvant nul, seul le comportement rhéofluidifiant subsistera aux larges valeurs de taux de déformation.

L'effet rhéofluidifiant impacte aussi fortement le comportement des contraintes normales. Afin de faciliter l'analyse, et étant donné que les contraintes normales sont proportionnelles au nombre de Weissenberg aux larges valeurs du taux de déformation, nous proposons d'adimensionnaliser ces contraintes normales et les analyser en les divisant par le nombre de Weissenberg. La figure 5.11–(d) montre l'évolution de la première différence des contraintes normales et de son coefficient, divisés par le nombre de Weissenberg ; \bar{N}_1/We et $\bar{\Psi}_1/\text{We}$, en fonction de $\dot{\gamma}$ et du nombre de Weissenberg local $\dot{\gamma}\text{We}$ l'analyse se fera pour différents nombres de Weissenberg et différents rapports β . Aux faibles valeurs du taux de déformation, la première différence des contraintes normales est proportionnelle aux carrés des taux de déformation, et augmente avec la diminution du rapport de viscosité du solvant, car $\bar{N}_1/\text{We} \sim (1-\beta)\dot{\gamma}^2$. Le même comportement est aussi valide aux larges valeurs de taux de déformation, car : $\bar{N}_1/\text{We} \sim (1-\beta)\dot{\gamma}^{1/2}/\text{We}^{1/2}$. D'autre part, du fait que la première différence des contraintes normales évolue suivant une pente d'ordre 2 aux faibles taux de déformation, son coefficient est constant $\bar{\Psi}_1/\text{We} = \alpha(1-\beta)$ dans cette gamme de taux de déformation. De la même façon, aux larges taux de déformations, comme la première différence des contraintes normales dépend de la racine carrée du taux de déformation, son coefficient tend vers zéro suivant une pente égale à $-\frac{3}{2}$, c'est-à-dire, $\bar{\Psi}_1/\text{We} \sim \alpha(1-\beta)\dot{\gamma}^{-3/2}/\text{We}^{1/2}$. En analysant, les contraintes normales en fonction du nombre de Weissenberg local $\dot{\gamma}\text{We}$, des courbes maîtresses de la première différence des contraintes normales et de son coefficient à savoir $\bar{N}_1(\dot{\gamma}\text{We})\text{We}$ et $\bar{\Psi}_1(\dot{\gamma}\text{We})/\text{We}$ peuvent être obtenues. Ces courbes indiquent, d'une part, l'unicité du comportement rhéologique et montrent, d'autre part, la dépendance des contraintes normales du nombre de Weissenberg local⁶. Finalement, pour conclure on note que le comportement rhéologique de fluide de Giesekus en écoulement dans une conduite de section non-circulaire est régi par l'évolution de la viscosité polymérique et de la première différence des contraintes normales, comme dans le cas de l'écoulement de cisaillement simple, voir figure 1.9.

La prépondérance de la contrainte Newtonienne $\bar{\tau}_{12}^N$ par rapport à la contrainte polymérique $\bar{\tau}_{12}$ est un effet très dépendant de l'élasticité du fluide (We) et du rapport de viscosité du solvant dans la viscosité totale. Cet effet, lié à la rhéofluidification, intervient dans les zones de fort taux de déformations et marque l'arrêt de l'élévation de la vitesse principale au voisinage des parois, c'est-à-dire, il commande la tendance du champ de vitesse à retrouver la distribution du champ de vitesse d'un fluide Newtonien. Cependant, comme la distribution semi-parabolique du profil

de vitesse est conservée suivant l'azimutale, la vitesse principale maximale u_1^{max} peut jouer le rôle d'indicateur de l'aplatissement/élévation du champ de la vitesse principale. Pour illustrer cela, la figure 5.12–(b) montre l'évolution de u_1^{max} en fonction du nombre Weissenberg $We = [0.1, 10]$, pour différents rapports de viscosité $\beta = \{0.8, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001, 10^{-7}\}$ et dans le cas d'un fluide de Giesekus ($\alpha = 0.5$). Avec l'augmentation de We , la vitesse maximale principale s'écarte progressivement de la vitesse maximale du fluide Newtonien, pour atteindre son apogée à un nombre de Weissenberg critique $We_{c\beta}$ au-delà duquel la vitesse maximale adopte une évolution monotone jusqu'à rejoindre progressivement à nouveau la vitesse maximale du fluide Newtonien. Le nombre Weissenberg critique $We_{c\beta}$ croît avec la diminution du rapport de viscosité. L'existence des couples $(\beta, We_{c\beta})$, correspondant à ce changement de comportement, pourra être un indicateur du passage de la contrainte cisaillement totale d'une dominance de la contribution polymérique à une dominance de la contribution Newtonienne. Il est à noter que pour un rapport de viscosité $\beta = 0$, u_1^{max} suivra une diminution monotone sans décrochement aux grandes valeurs de We , étant donné que la contribution Newtonienne dans la contrainte totale est nulle.

D'autre part, l'effet rhéofluidifiant influence aussi le coefficient de frottement fRe . En effet, la chute de pression longitudinale $-\partial p/\partial x_1$ représente la somme d'une contribution liée à la contrainte de cisaillement Newtonien et d'une contribution liée à la contrainte de cisaillement polymérique. La figure 5.12–(a) donne la distribution du coefficient de frottement fRe pour la gamme des rapports de viscosité considérés et en fonction du nombre de Weissenberg $We = [0.1, 10]$ pour le modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $Re = 1$.

Pour l'ensemble des rapports de viscosité, le coefficient de frottement subit une diminution à partir d'une valeur proche de la valeur du fluide Newtonien $(fRe)_{Newt}$ aux faibles valeurs de We , pour se rapprocher asymptotiquement, aux grandes valeurs du nombre de Weissenberg, de la valeur de la contribution Newtonienne dans le coefficient du frottement, donnée par le produit $\beta(fRe)_{Newt}$. La valeur terminale de la contribution polymérique dans le coefficient de frottement est proportionnelle à la contrainte de cisaillement polymérique. En effet, comme $\bar{\tau}_{12}$ est indépendant du taux de cisaillement aux grandes valeurs du nombre de Weissenberg (effet rhéofluidifiant) et devient inversement proportionnel au nombre de Weissenberg $\bar{\tau}_{12} \sim (1-\beta)/We$, le coefficient de frottement tend vers une valeur constante donnée par $(fRe)_\beta \sim \beta(fRe)_{Newt} + (1-\beta)/We$, aux grandes valeurs du nombre de Weissenberg. ($\bar{\tau}_{12} \sim (1-\beta)/We$). Cela conformément à l'évolution de la contrainte totale comme déjà expliqué précédemment, voir figure 5.11–(c).

5.2.2 Écoulements secondaires

La figure 5.13 montre sur le quart supérieur droit du canal ($0.5 < x_2 < 1$, $0.5 < x_3 < 1$) les champs de la fonction ψ et de la composante transversale u_2 du vecteur vitesse, ainsi que les champs de la seconde différence des contraintes normales \bar{N}_2 en fonction du rapport de viscosité $\beta = \{0.5, 0.1, 0.001\}$ et pour différentes valeurs du nombre de Weissenberg $We = \{0.3, 1, 5\}$ avec $Re = 1$ et pour le fluide de Giesekus avec ($\alpha = 0.5$). En terme d'ordre de grandeur, les écoulements secondaires $u_s \sim 10^{-3}$ sont deux à trois décades moins élevés que l'écoulement principal $\bar{u}_1 = 1$. Par ailleurs, en se basant sur les contours de la fonction de courant, indépendamment du rapport de viscosité β , on constate qu'avec l'augmentation du nombre de Weissenberg l'intensité des écoulements secondaires passe par un maximum. Ensuite, nous constatons que la diminution du rapport de viscosité β engendre une augmentation de l'intensité des tourbillons et provoque un déplacement de leurs centres vers les coins. Par exemple, pour $We = 1$, le centre du tourbillon associé à $\beta = 0.5$ localisé à $(x_3 \sim 0.84, x_2 \sim 0.67)$, est translaté lorsque $\beta = 0.001$ à $(x_3 \sim 0.92, x_2 \sim 0.705)$. Cette translation peut aussi se constater au travers de la composante transversale u_2 du champ de vitesse. Les zones correspondant aux maximums de u_2 augmentent en intensité avec la diminution du rapport de viscosité et se translatent vers les parois, où effectivement le taux de cisaillement est plus important et donc une rhéofluidification plus accrue. Autrement dit, le passage de solutions polymériques diluées aux fluides polymériques enchevêtrés tend à écraser les tourbillons contre

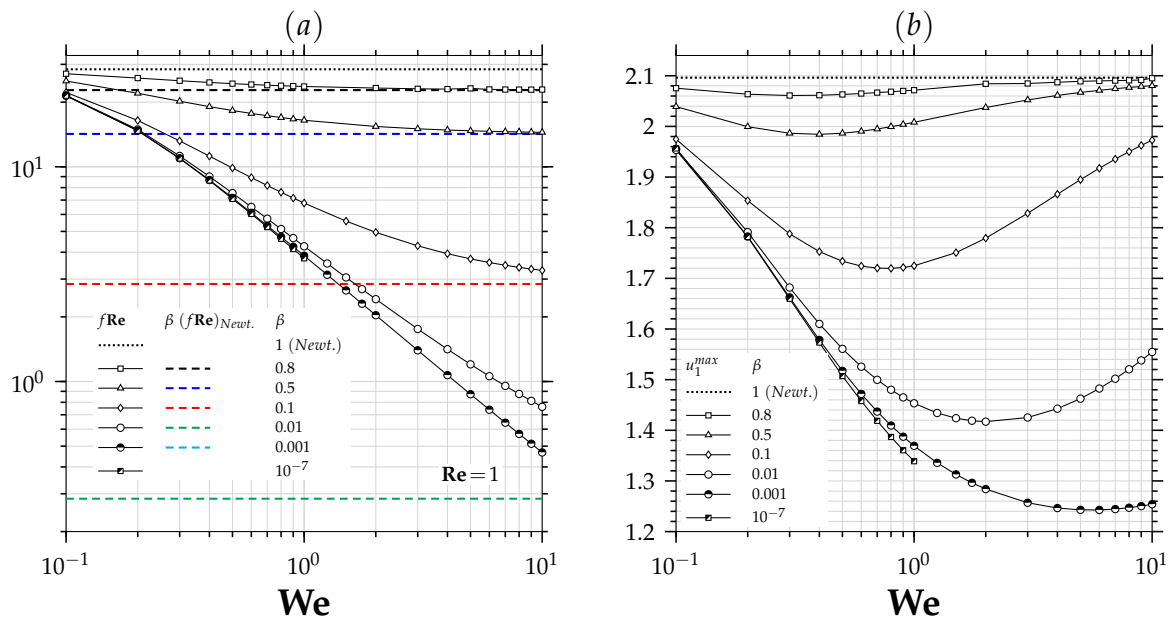


FIGURE 5.12 – Distribution : (a) du coefficient fRe et (b) de la vitesse principale maximale u_1^{max} indiquant l’aplatissement du champs de vitesse, en fonction du nombre de Weissenberg $We = [0.1, 10]$ et pour différents rapport de viscosité $\beta = \{0.8, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001, 10^{-7}\}$, pour le modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) et avec $Re = 1$.

les parois, lieu de forts taux de déformation et donc de forte rhéofluidification. Le comportement des écoulements secondaires avec la diminution du rapport de viscosité β est dû à l’intensification du caractère rhéofluidifiant du fluide, conduisant à une redistribution spatiale de taux de déformation (voir figure 5.7). En effet, la seconde différence des contraintes normales subit l’effet de l’évolution de l’écoulement principal avec la diminution du rapport de viscosité β . D’abord, aux faibles valeurs de We , on peut constater, dans les régions en proche paroi, l’accroissement des valeurs maximales de la seconde différence des contraintes normales \bar{N}_2 avec la diminution de β . Ensuite, avec l’augmentation du nombre de We , on remarque que la diminution de β induit l’élargissement spatial de la zone correspondant aux faibles valeurs de la seconde différence des contraintes normales \bar{N}_2 , avec étalement vers le centre de la conduite, tendant à généraliser ainsi les écoulement secondaires sur toute la section de la conduite. En revanche, au voisinage des centres des parois, \bar{N}_2 subit une évolution rapide, poussant les tourbillons à se rapprocher des parois. En contre partie, on peut constater dans la région de la diagonale, la translation des isovaleurs maximales de la seconde différence des contraintes normales \bar{N}_2 vers le coin avec la diminution du rapport de viscosité β . Cette réponse de la seconde différence des contraintes normales à l’écoulement principal, subissant l’intensification de la rhéofluidification, est la raison de cette évolution de la structure des écoulements secondaires observé avec la diminution du rapport de viscosité β . Enfin, on peut noter que cette translation du centre des tourbillons peut induire une intensification du transfert thermique aux larges valeurs du nombre de Reynolds, et fera l’objet de plus de détails plus tard dans ce document.

Pour mieux cerner le comportement rhéologique de la seconde différence des contraintes normales, nous avons rapporté sur la figure 5.14, le long de la ligne centrale verticale ($x_3 = 0.5, 0.5 < x_2 < 1.$) et pour la gamme des nombres de Weissenberg considérée $We = [0.1, 10]$ et des rapports β , l’évolution de la seconde différence des contraintes normales re-adiimensionnée et de son coefficient en fonction du taux des déformations. Dans un premier lieu, le degré d’inflexion des courbes dénote une accentuation de l’effet rhéofluidifiant avec l’augmentation du nombre de Weissenberg. Ensuite, comparons nos résultats avec l’analyse fournie par Yue et al. [239, p.320], où la seconde différence des contraintes normales est introduite pour un écoulement de cisaillement simple

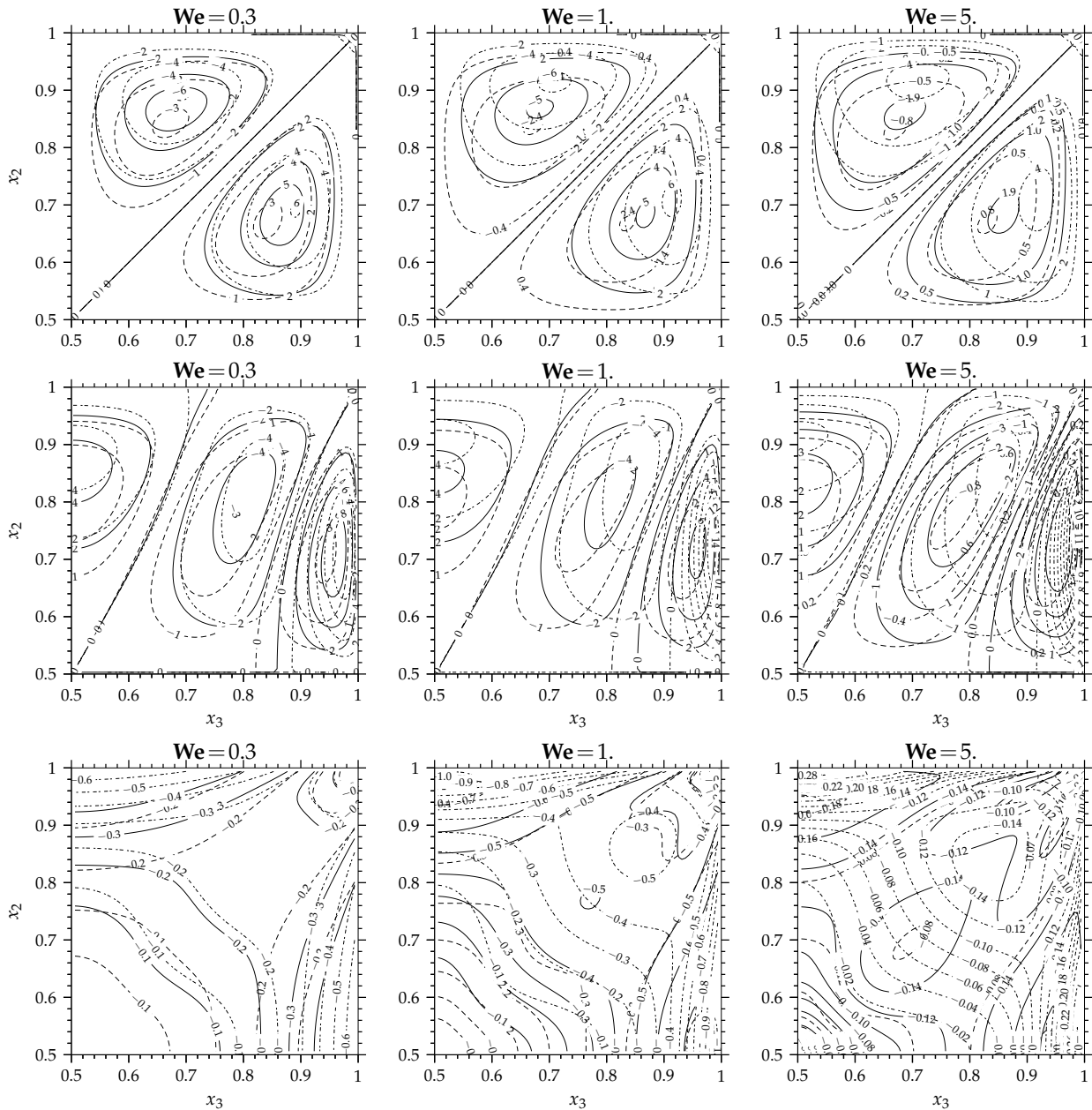


FIGURE 5.13 – Champs de la fonction $\psi(x_2, x_3)10^4$, champs de la composante transverse du champ de vitesse $u_2(x_2, x_3)10^3$ et champs de la seconde différence des contraintes normales $\bar{N}_2(x_2, x_3)$ associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $Re = 1$ sur le quart supérieur droit du canal en fonction du nombre de Weissenberg $We = \{0.3, 1, 5\}$ et pour différents rapport de viscosité : (----- $\beta = 0.5$), (— $\beta = 0.1$), (..... $\beta = 0.001$).

(écoulement de couette plan) pour lequel la répartition de la sollicitation taux de déformation (profil de $\dot{\gamma}$) est identique $\forall \beta \forall \text{We}$. À signaler que dans leur étude, l'effet de l'écoulement sur la seconde différence des contraintes normales n'a pas été pris en considération, notamment la distribution des niveaux du taux de déformation dans le centre de la conduite. Par conséquent, on note à partir de la figure 5.14 qu'aux faibles valeurs de $\dot{\gamma}$ la seconde différence des contraintes normales re-adimensionnée adopte une tendance telle que : $-\bar{N}_2/\text{We} \sim c \alpha (1 - \beta) \dot{\gamma}^2$. Avec c comme constante sans dimension qui dépend de la prépondérance de la contrainte du solvant sur la contrainte polymérique⁷. Pour l'écoulement de cisaillement simple de couette plan $c = 1$. Toutefois, du moment qu'elle intervient aux faibles valeurs de $\dot{\gamma}$ cet effet demeure mineur et donc sans influence majeure sur les écoulements secondaires. Par ailleurs, aux grandes valeurs des taux de déformations, la seconde différence des contraintes normales re-adimensionnée devient indépendante de $\dot{\gamma}$, et tend vers le rapport de viscosité polymérique sur la viscosité totale $(1 - \beta)$, à taux de cisaillement nul, c'est-à-dire $-\bar{N}_2/\text{We} \sim (1 - \beta)$. Ainsi, le coefficient de la seconde différence des contraintes normales re-adimensionnée $-\bar{\Psi}_2/\text{We}$ est constant aux faibles taux de déformation et décroît avec l'augmentation du taux de déformation comme $-\bar{\Psi}_2/\text{We} \sim \dot{\gamma}^{-2}$. Finalement, ces tendances du coefficient de la seconde différence des contraintes normales en fonction du nombre de Weissenberg local $\dot{\gamma}\text{We}$ montrent, à faible taux de déformation, l'effet de l'intensification de la rhéofluidification sur l'écoulement principal (à travers la constante c) et aux grandes valeurs de déformation $-\bar{\Psi}_2(\dot{\gamma}\text{We})/\text{We} \rightarrow 0$.

L'intensité des écoulements secondaires est liée à la seconde différence des contraintes normales. Vu que cette dernière est fortement dépendante des paramètres rhéologiques du fluide, les recirculations secondaires en sont donc aussi très dépendantes. La figure 5.15-(a) montre l'évolution de la vitesse moyenne u_s^{moy} des écoulements secondaires et la figure 5.15-(b) donne le maximum de la fonction de courant ψ^{max} , en fonction du nombre de Weissenberg $\text{We} = [0.1, 10]$ et pour différents rapport de viscosité β pour le modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $\text{Re} = 1$. Nous y avons aussi rapporté des comparaisons avec des résultats issus de la littérature, dans des configurations proches de la nôtre, notamment Yue et al. [239, p.320]. Comme nous l'avons montré auparavant, on peut constater que la vitesse moyenne des écoulements secondaires ainsi que le maximum de la fonction de courant augmentent avec l'augmentation du nombre de Weissenberg, l'élasticité favorise les écoulements secondaires, puis passent par des valeurs maximales, au-delà des quelles, u_s^{moy} et ψ^{max} diminuent suivant une pente inversement proportionnelle au nombre de Weissenberg. Autrement dit, les produits $u_s^{\text{moy}}\text{We}^{-1}$ et $\psi^{\text{max}}\text{We}^{-1}$ tendent vers des valeurs constantes aux grandes valeurs de We . D'autre part, l'intensité des écoulements secondaires augmente relativement avec l'augmentation du rapport de la viscosité polymérique dans la viscosité totale $(1 - \beta)$. Ce comportement est attendu car, la seconde différence des contraintes normales, responsable des écoulements secondaires, augmente également avec le $(1 - \beta)$. Cependant, l'évolution non-monotonique de u_s^{moy} et de ψ^{max} en fonction du nombre de Weissenberg peut s'interpréter comme le passage du fluide d'un état faiblement viscoélastique et peu non-linéaire aux très faibles valeurs du nombre de Weissenberg, à un état fortement non-linéaire dominé par l'effet rhéofluidifiant. En effet, le long de la ligne de symétrie verticale, le terme source de la première composante de la vorticité Ω_{x_1} se réduit au gradient verticale de la seconde différence des contraintes normales. Aux faibles taux de déformation, $\partial\bar{N}_2/\partial x_2$ suit une évolution linéaire et aux valeurs intermédiaires de $\dot{\gamma}$ cette quantité passe par un maximum pour enfin décroître linéairement aux grandes valeurs de $\dot{\gamma}$.

7. Lorsque $\text{Re} = 1$, la constante c peut être corrélée avec le comportement la vitesse maximale principale.

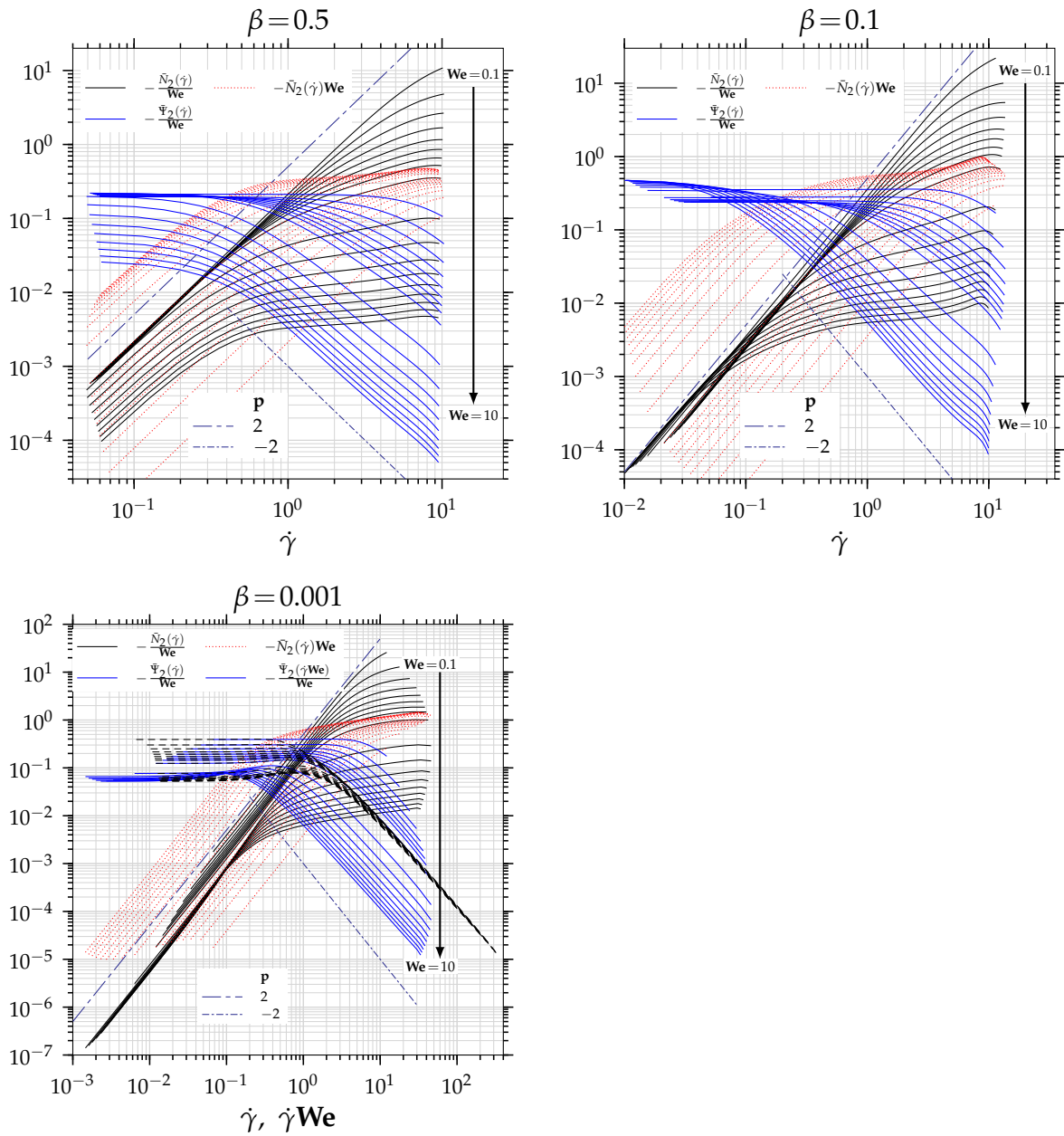


FIGURE 5.14 – Pour le modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) et avec $Re = 1$, évolution le long de la ligne centrale ($x_3 = 0.5, x_2 = 0.5$)–($x_3 = 0.5, x_2 = 1$) : de la seconde différence des contraintes normales en fonction divisé par le nombre de Weissenberg en fonction du taux de cisaillement $-\bar{N}_2(\dot{\gamma})/We$ et en fonction du nombre de Weissenberg local $-\bar{N}_2(\dot{\gamma}We)/We$ et du coefficient de la seconde différence des contraintes normales divisé par le nombre de Weissenberg en fonction du taux de cisaillement $-\bar{\Psi}_2(\dot{\gamma})/We$ et en fonction du nombre de Weissenberg local $-\bar{\Psi}_2(\dot{\gamma}We)/We$, en fonction du $We = [0.1, 10]$ et pour différents rapport de viscosité $\beta = \{0.5, 0.1, 0.001\}$.

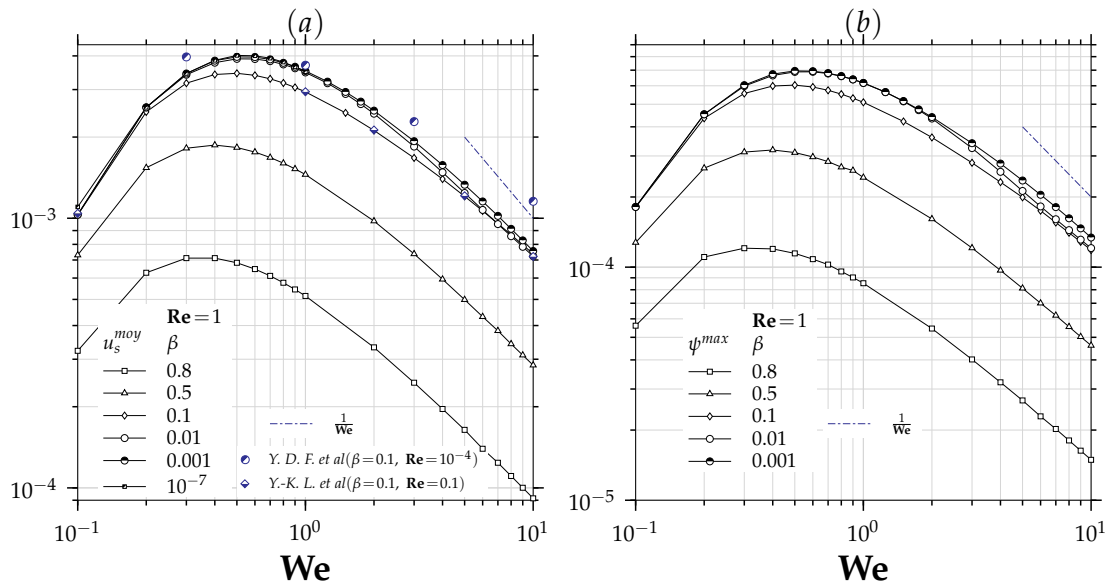


FIGURE 5.15 – Distribution : (a) des vitesses maximale u_s^{max} et moyenne u_s^{moy} des écoulements secondaires; (b) maximum de la fonction de courant ψ^{max} , en fonction du nombre de Weissenberg $We = [0.1, 10]$ et pour différents rapport de viscosité $\beta = \{0.8, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001, 10^{-7}\}$, pour le modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) et avec $Re = 1$.

5.3 Effet de l'inertie du fluide Re en relation avec l'élasticité du fluide We

Dans la quasi-totalité des études numériques dédiées aux écoulements de fluides viscoélastiques dans les conduites de section non-circulaire (telles que Xue et al. [233], Yue et al. [239], Li et al. [134]) l'inertie du fluide est souvent négligée. Bien que pour des précédés comme le procédé d'extrusion, la non-prise en considération de l'inertie est due aux conditions de l'écoulement qui est très lent donc à des Reynolds faibles, Yue et al. [239], dans de nombreuses applications industrielles; (échangeurs de chaleur Siginer and Letelier [203], Siginer et al. [205], séparateur de particules Lim et al. [135]), des écoulements viscoélastiques ont lieu avec des valeurs élevées du nombres de Reynolds. De plus, étant donné que dans les conduites l'effet des écoulements secondaires sur le transfert thermique est proportionnel au nombre de Péclet, souvent les variations de ce dernier sont considérées à travers le nombre de Prandtl et non pas à travers le nombre de Reynolds, comme dans Siginer and Letelier [203], Siginer et al. [205]. Or, dans les conduites droites, contrairement à la partie de l'écoulement rectiligne dont la structure ne dépend pas du nombre de Reynolds, la composante non rectiligne interagit avec la force d'inertie du fluide. Pourtant, dans le cadre des études portant sur les écoulements viscoélastiques, la littérature demeure vis-à-vis de cette question pratiquement muette. Or, comme nous l'avons montré dans la section précédente, lorsque l'inertie du fluide est faible $Re = 1$, la vitesse moyenne des écoulements secondaires varie, en fonction de l'élasticité du fluide et du paramètre β , autour de $u_s^{moy} \sim 10^{-3}$. En revanche, quand l'effet de la force d'inertie devient important $Re \gg 1$, la structure dynamique de l'écoulement et l'intensité des recirculations secondaires peuvent devenir aussi dépendant de Re . En effet, il est attendu que l'influence des termes d'advections liés aux composantes transverses du vecteur vitesse dans les équations de la quantité de mouvement devient conséquente lorsque le produit $u_s^{moy} Re$ représentant le nombre de Reynolds exprimé à l'échelle des écoulements secondaires s'approche de l'ordre de l'écoulement principal ($\bar{u}_1 = 1$). Par ailleurs, comme la contribution des termes de transport dans l'équation constitutive est proportionnelle au nombre de Mach élastique $Ma^2 = ReWe$, à l'échelle des écoulements secondaires, l'effet de la force d'inertie est attendue aux valeurs intermédiaires de la quantité $(u_s^{moy})^{1/2} Ma_0$.

Ainsi, on propose dans cette section d'étudier l'interaction entre le comportement viscoélastique et l'effet de l'inertie du fluide, puis d'analyser leur effet sur la dynamique de l'écoulement principal ainsi que la structure des écoulements secondaires associés. Pour ce faire, nous proposons, pour une large gamme des nombres de Reynolds $\mathbf{Re} = \{1, 1200\}$ une analyse du comportement rhéologique du fluide en fonction du nombre de Weissenberg $\mathbf{We} = [0.1, 10]$. Les résultats sont présentés pour un fluide de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec un rapport de viscosité $\beta = 0.1$ en écoulement dans un canal de section carrée.

5.3.1 Écoulement principale

L'interaction de la force d'inertie avec l'écoulement a un effet *double*. D'une part, l'augmentation du nombre de Reynolds confère de l'importance à la convection transverse au point de pouvoir imposer son effet sur l'écoulement principal. D'autre part, l'évolution de la distribution du taux de déformation liée au champ de la vitesse principale agit sur la seconde différence des contraintes normales qui elle-même génère les recirculations secondaires. La figure 5.16 montre pour le modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec un rapport $\beta = 0.1$, le champ de la vitesse principale pour les différents nombres de Reynolds $\mathbf{Re} = \{1, 100, 500, 1000\}$ en fonction du nombre de Weissenberg $\mathbf{We} = \{0.3, 1, 5, 10\}$.

D'emblée, comparativement au champ de la vitesse principale avec $\mathbf{Re} = 1$, on enregistre avec l'augmentation de la force d'inertie du fluide la perte de la distribution semi-parabolique suivant l'azimutale. On remarque aussi que l'effet de la convection transverse agit différemment dans la région de la diagonale que dans les régions des lignes de symétrie, et ce conformément à ce que nous avons déjà analysé concernant les champs de contraintes et de vitesses lors d'écoulements secondaires.

De manière plus claire, comme les écoulements secondaires sont drainés des coins vers le centre de la conduite suivant la diagonale, puis du centre de la conduite vers les centres des parois dans les régions des lignes de symétrie, les isovaleurs du champ de la vitesse principale suivent la même tendance, c'est-à-dire elles sont convectées des coins vers le centre de la conduite dans la région des diagonales pour compenser le fait qu'elles subissent la convection du centre de la conduite vers les centres des parois dans les régions des lignes de symétrie. Notons que ce comportement s'accroît avec l'augmentation de \mathbf{Re} . Pour ce qui est de l'effet de \mathbf{We} , son augmentation génère d'abord une perturbation du profil parabolique, jusqu'à atteindre un seuil (l'effet de l'inertie des écoulements secondaires sur le champ de la vitesse principale passe par un maximum), puis l'effet s'estampe tout en gardant le même effet de l'inertie : plus \mathbf{Re} , plus la perturbation de la distribution du champ de vitesse est accrue.

S'agissant de la tendance de l'écoulement en fonction de \mathbf{Re} , on peut rappeler que pour la région d'écoulement complètement développée dans une conduite, les termes de convection dans l'équation de la quantité de mouvement, liés à la vitesse principale se résument à $\mathbf{Re}u_3(\partial u_1/\partial x_3) + \mathbf{Re}u_2(\partial u_1/\partial x_2)$, qui pour une conduite carrée sont identiques dans les deux directions. Raison pour laquelle l'augmentation de \mathbf{Re} agit d'une façon uniforme sur l'ensemble du domaine de calcul. Cependant, la tendance observée en fonction de l'élasticité du fluide (\mathbf{We}) n'est pas seulement liée à l'intensité des écoulements secondaires à travers le produit $\mathbf{Re} u_s$ mais elle est aussi intimement liée à la structure des écoulements secondaires. En effet, comme il sera discuté dans la section suivante (5.3.2), le nombre des recirculations secondaires, leur structure ainsi que leur intensité sont très dépendants du couple (\mathbf{Re}, \mathbf{We}) (voir figure 5.21). Par conséquent, le comportement rhéologique du fluide subit d'une part, l'effet de l'inertie du fluide sur le champ de vitesse, via l'évolution du taux de déformation, et d'autre part l'effet du transport sur les composantes du tenseur de contrainte viscoélastique. Réciproquement, la réponse rhéologique particulière du fluide viscoélastique, au travers de la seconde différence des contraintes normales, agit d'une façon indirecte

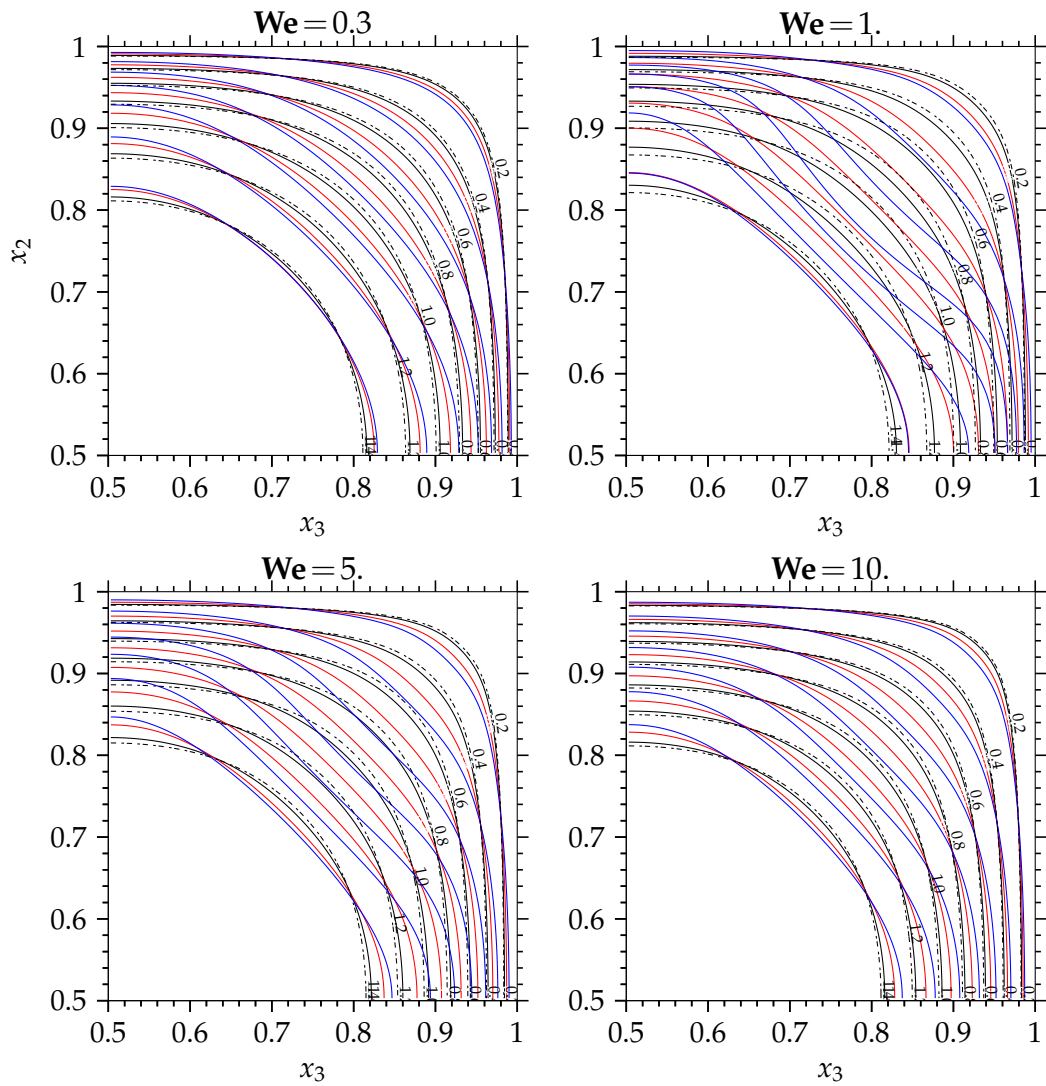


FIGURE 5.16 – Champs de vitesse principale $u_1(x_2, x_3)$ associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $\beta = 0.1$ sur le quart supérieur droit du canal en fonction du nombre de Weissenberg $We = \{0.3, 1, 5, 10\}$ et pour différents nombres de Reynolds : (..... $Re = 1$), (_____ $Re = 100$), (— $Re = 500$), (— $Re = 1000$).

sur l'écoulement principal, d'où l'effet *double* de l'augmentation de l'inertie du fluide. À cet égard, la figure 5.7 montre le champ du vecteur taux de déformation attaché à l'écoulement principal $\dot{\gamma}(x_3, x_2)$ pour $We = 1$ et en fonction du nombre de Reynolds $Re = \{1, 100, 500, 1000\}$. Avec l'augmentation de la force d'inertie, on constate que le champ de vecteur taux de déformation $\dot{\gamma}$ est imprégné de l'effet de la convection transverse, notamment de la structure des écoulements secondaires. Dans la région de la diagonale, on constate clairement, notamment au-delà de $Re = 500$ que la zone correspondant aux fortes intensités de $\dot{\gamma}$ s'élargit spatialement et se translate de la zone proche du coin vers l'intérieur. La distribution de l'intensité de $\dot{\gamma}$ dans le centre de la conduite et particulièrement dans les zones des lignes de symétrie est due à la superposition de l'effet rhéofluidifiant et de la force d'inertie, en relation avec la structure des écoulements secondaires dans ces zones qui sera discutée dans la section suivante (5.3.2, figure 5.21).

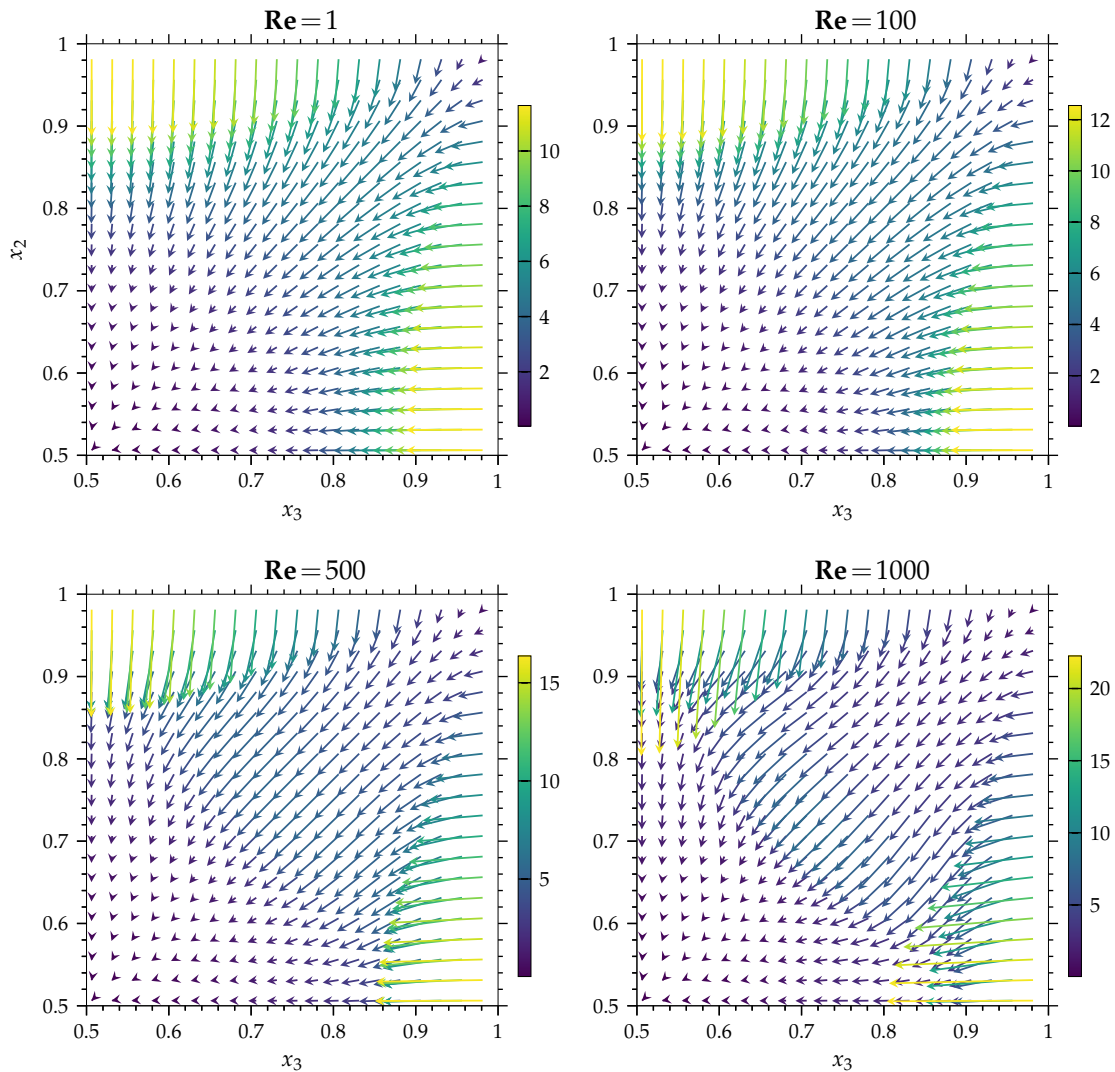


FIGURE 5.17 – Champs de vecteur $\dot{\gamma}(x_3, x_2) = (\partial u_1 / \partial x_3) \mathbf{e}_3 + (\partial u_1 / \partial x_2) \mathbf{e}_2$ en fonction du rapport de nombre de Reynolds $Re = \{1, 100, 500, 1000\}$ pour $We = 1$, associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $\beta = 0.1$. Par ailleurs, la *colorbar* indique l'intensité du taux de déformations donnée par $\dot{\gamma}(x_3, x_2) = ((\partial u_1 / \partial x_3)^2 + (\partial u_1 / \partial x_2)^2)^{1/2}$. Notons que les champs du taux de déformation sont montré sur le quart supérieur droit du canal pour une résolution réduite (81:159:4, 81:159:4).

À l'état stationnaire, la réponse rhéologique du fluide à l'écoulement (c'est-à-dire à la chute de pression longitudinale), en termes de viscosité (rhéofluidification) et des différences des contraintes normales, reflète l'état de déformation subit par le fluide. Dans cette optique, la figure 5.18 montre

pour le fluide de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $\beta = 0.1$ l'évolution du champ de la viscosité totale adimensionnée en fonction de \mathbf{Re} et pour différents nombre de Weissenberg $\mathbf{We} = \{0.3, 1, 5, 10\}$. Rappelons, comme présenté dans la figure 5.10–(a), que le plateau de viscosité totale adimensionnée aux larges valeurs de nombre de Weissenberg local $\mathbf{We}\dot{\gamma}$ possède comme limite inférieure $\mu_t(x_3, x_2)/\mu_{t_0} \rightarrow \beta$. Cependant, dans la région de la diagonale, comparativement à $\mathbf{Re} = 1$, l'augmentation de la force d'inertie induit la diminution de la $\mu_t(x_3, x_2)/\mu_{t_0}$ au voisinage du centre de la conduite et une augmentation au voisinage des coins. Inversement, dans les régions des lignes de symétrie proche du centre de la conduite on observe une augmentation de $\mu_t(x_3, x_2)/\mu_{t_0}$. En revanche, au voisinage des centres des parois, la viscosité totale adimensionnée diminue avec l'augmentation de \mathbf{Re} . Comme nous l'avons précédemment vu, l'augmentation du \mathbf{We} augmente l'effet de la rhéofluidification. Par ailleurs, l'effet de l'augmentation du nombre de \mathbf{Re} sur le comportement rhéologique s'intensifie avec l'élasticité du fluide jusque autour $\mathbf{We} = 1$, ensuite, l'effet de la force d'inertie diminue avec l'augmentation du \mathbf{We} .

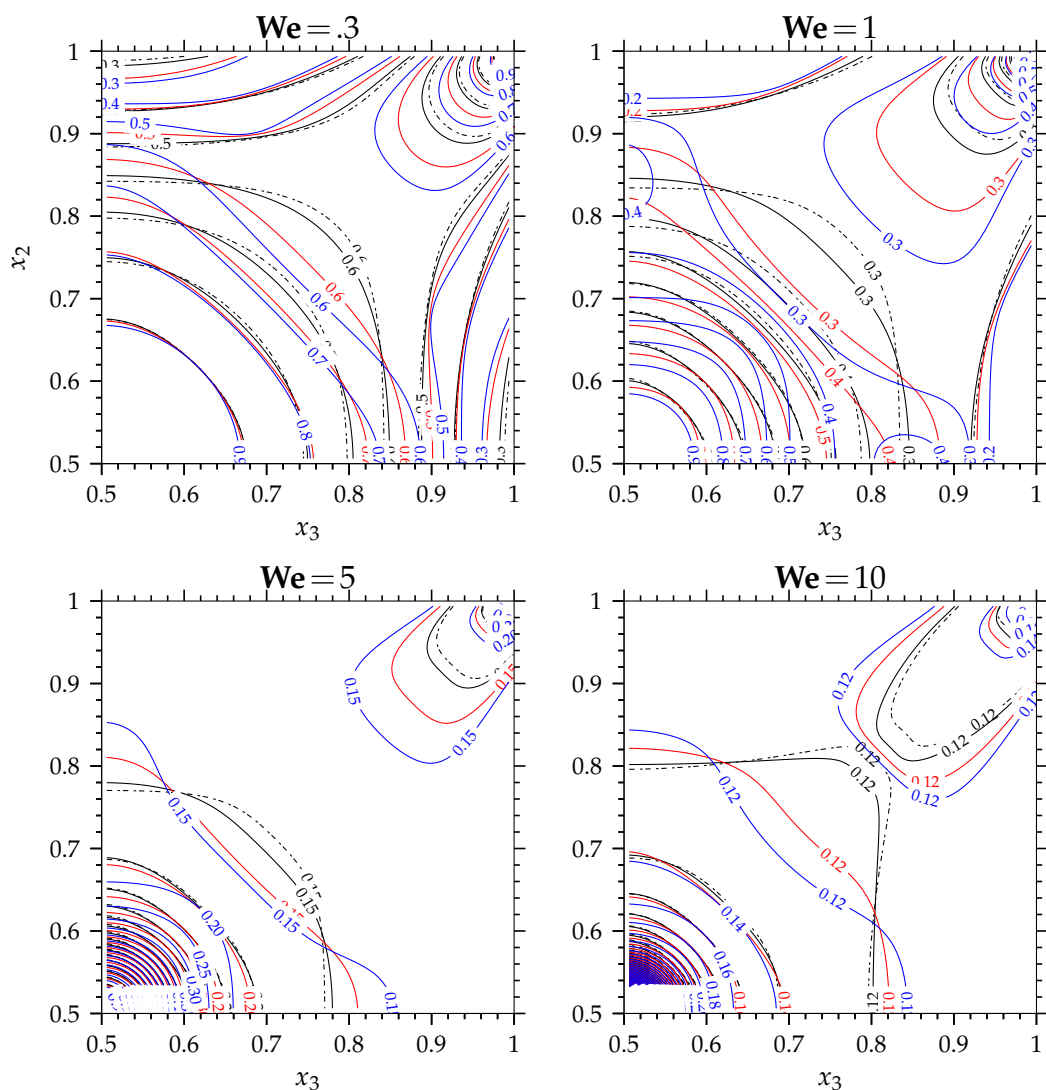


FIGURE 5.18 – Champs de viscosité totale $\mu_t(x_3, x_2)/\mu_{t_0}$ associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $\beta = 0.1$ sur le quart supérieur droit du canal en fonction du nombre de Weissenberg $\mathbf{We} = \{0.3, 1, 5, 10\}$ et pour différents nombres de Reynolds : (..... $\mathbf{Re} = 1$), (—— $\mathbf{Re} = 100$), (—— $\mathbf{Re} = 500$), (—— $\mathbf{Re} = 1000$).

Par ailleurs, étant donné que la distribution des profils de u_1 suivant l'azimutale n'est ni parabolique ni semi-parabolique, nous investiguons les résultats des simulations le long de la

ligne diagonale ($x_3 = x_2$, $0.5 < x_2 < 1$) ainsi que le long de la ligne de symétrie verticale ($x_3 = 0.5$, $0.5 < x_2 < 1$) afin d'explorer finement l'effet de l'inertie sur le comportement rhéologique du fluide. Pour le modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $\beta = 0.1$, les figures 5.19–(a.1, b.1, c.1, d.1) montrent le long de la ligne de symétrie verticale, respectivement les profils : de la vitesse principale $u_1(x_2)$, du taux de déformation $\dot{\gamma}(x_2)$, de la contrainte du cisaillement polymérique $\bar{\tau}_{12}(\dot{\gamma})\mathbf{Re}$ et les profils de la viscosité totale adimensionnée $\mu_t/\mu_{t_0}(\dot{\gamma})$, en fonction du nombre de Weissenberg $\mathbf{We} = [0.1, 10]$ et pour différents nombres de Reynolds $\mathbf{Re} = \{1, 100, 500, 1000\}$ et les figures 5.19–(a.2, b.2, c.2, d.2) montrent respectivement les mêmes variables le long de la ligne diagonale.

D'abord, notons que suivant la ligne de symétrie verticale, le terme de convection transverse se réduit à $u_2(\partial u_1/\partial x_2)$. Par ailleurs, au voisinage de la paroi, on constate pour $u_1(x_2)$ qu'avec l'augmentation de \mathbf{Re} , la combinaison de l'effet rhéofluidifiant et du terme la convection transverse accentue l'élévation du profil de vitesse principale. En s'appuyant sur la distribution de $u_2(x_2)$ donnée par la figure 5.24⁸, on enregistre que l'effet de la force d'inertie est maximal sur le segment ($0.85 < x_2 < 0.95$) et ensuite augmente de façon non monotonique avec l'augmentation de \mathbf{We} . On note aussi sur le segment ($0.65 < x_2 < 0.85$) un changement du signe de u_2 .

D'autre part, suivant la valeur du rapport β , la prépondérance de $\bar{\tau}_{12}^N$ par rapport $\bar{\tau}_{12}$ force $u_1(x_2, x_3)$, avec l'augmentation de \mathbf{We} , à coïncider avec la distribution de vitesse d'un fluide Newtonien.

Ainsi, de la superposition de ces effets⁹ résulte l'intensification de l'élévation de la vitesse principale au voisinage de la paroi comparativement à $\mathbf{Re} = 1$. Cependant, dans la région du centre de la conduite, étant donné que le taux de déformation est faible et la force de convection tend vers un vecteur nul, le champ de vitesse associé constitue simplement la réponse du fluide pour satisfaire la condition ($\bar{u}_1 = 1, \forall \mathbf{Re}, \forall \mathbf{We} \vee \forall \beta$) vis-vis de la dynamique qu'il subit en dehors de la région du centre.

En se basant sur la figure 5.19–(b.1) on peut constater que l'élévation de la vitesse dans la région proche paroi ($x_3 = 0.5, x_2 \rightarrow 1$) est accompagnée d'une production de taux de déformation qui s'accroît avec l'augmentation de \mathbf{Re} tout en évoluant d'une façon non-monotonique avec \mathbf{We} . Par ailleurs, l'effet de la convection transverse sur u_1 le long du segment ($0.85 < x_2 < 0.95$) induit une diminution sévère du taux de déformation. Cette tendance de $\dot{\gamma}$ est maximale autour $\mathbf{We} = 1$. Inversement à la tendance de u_1 observée le long de la ligne de symétrie verticale, suivant le segment de la diagonale ($0.7 < x_2 = x_3 < 1$) l'effet de la convection transverse engendre une diminution des valeurs de la vitesse principale (voir figure 5.19–(a.2)). Ce résultat signifie que les valeurs faibles de u_1 sont convectées des coins vers l'intérieur de la conduite. Comme nous l'avons noté précédemment, l'effet de la convection transverse aussi sur u_1 dans cette partie de la diagonale augmente avec \mathbf{Re} et connaît un maximum en fonction de \mathbf{We} . Autrement dit, l'effet de la convection transverse dépend de l'intensité des écoulements secondaires et de leur structure. En fait, la diminution de u_1 le long de ligne de diagonale s'accorde avec l'élévation maximale de u_2 donnée par la figure 5.24 le long de cette ligne témoignant de l'effet du transport. Ainsi, sur le segment ($0.5 < x_2 = x_3 \sim 0.7$), la composante u_2 change de signe, signifiant que le transport transverse sur cette portion de segment s'opère du centre ($x_2 = x_3 = 0.5$) vers ($x_2 = x_3 \sim 0.7$).

D'autre part, l'effet de la convection transverse sur u_1 le long de diagonale peut aussi être aperçu sur le taux de déformation (voir figure 5.19–(b.2)). Le long du segment ($0.7 < x_2 = x_3 < 0.76$), on observe la production d'un pic du taux de déformation dont la position coïncide, ici aussi, avec la position du changement de signe de u_2 . Par ailleurs, le long du segment ($0.76 < x_2 = x_3 < 1$), le taux de déformation décroît pour atteindre une valeur minimale au niveau du coin. Également, on constate que ces tendances s'accroissent avec l'augmentation de \mathbf{Re} et passe par un maximum avec l'accroissement de \mathbf{We} .

8. Ce résultat sera discuté dans la section suivante.

9. Convection transverse, effet rhéofluidifiant à travers la prépondérance de $\bar{\tau}_{12}^N$ sur $\bar{\tau}_{12}$.

Comme évoqué précédemment, la force d'inertie affecte aussi le comportement rhéologique du fluide, notamment son caractère rhéofluidifiant. En d'autres termes, la contrainte de cisaillement polymérique ainsi que la viscosité polymérique adimensionnée subissent l'effet du transport transverse. On peut remarquer, pour la ligne de symétrie verticale, l'effet du terme du transport qui se résume à $u_2(\partial\bar{\tau}_{12}/\partial x_2)$ sur la contrainte de cisaillement polymérique (voir figure 5.19–(c.1)) en fonction du couple $(\mathbf{Re}, \mathbf{We})$. D'emblée, on note l'effet de la direction de transport. Par suite, comme u_2 est négatif le long d'une portion du segment ($x_3 = 0.5, 0.5 < x_2 < 0.85$), $\bar{\tau}_{12}$ est convecté vers les faibles valeurs de la contrainte de cisaillement polymérique localisées au centre de la conduite. Cet effet sur $\bar{\tau}_{12}$ s'intensifie avec l'augmentation de \mathbf{Re} et passe par un maximum en fonction de \mathbf{Re} . La tendance obtenue est directement liée à l'évolution de l'intensité de u_2 le long de cette ligne de symétrie (voir figure 5.24). Rappelons que le gradient de la contrainte de cisaillement polymérique en fonction de $\dot{\gamma}$ est égal à l'unité aux faibles taux de déformation et ensuite diminue avec l'augmentation du taux de déformation pour atteindre une valeur nulle aux larges taux de déformation. Ainsi, pour la portion de segment ($x_3 = 0.5, 0.5 < x_2 < 0.85$), malgré les faibles valeurs de u_2 dans le domaine négatif, l'effet de la convection transverse n'est pas faible, à l'égard du gradient de $\bar{\tau}_{12}$ qui continue à évoluer sur cette portion de segment et ainsi l'effet de la convection transverse est intensifié. Inversement, en proche paroi, c'est-à-dire, le long de la portion de segment ($x_3 = 0.5, 0.85 < x_2 < 1.$) à cause de l'inversion de la direction du transport, on enregistre une évolution brusque de la contrainte de cisaillement polymérique¹⁰.

Par ailleurs, malgré l'intensité élevée de u_2 le long de cette portion de segment, l'effet du transport est moindre comparativement à la portion de segment précédente. En effet, comme la région proche paroi coïncide avec les larges valeurs du taux de déformation, le gradient de $\bar{\tau}_{12}$ tend vers une valeur nulle, ce qui conduit ainsi, à l'amoindrissement de l'effet du transport dans cette région. Toutefois, notons qu'au début des larges $\dot{\gamma}$, la contrainte de cisaillement polymérique augmente légèrement avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Une telle augmentation de la contrainte de cisaillement polymérique engendre un effet direct sur le coefficient de frottement.

L'effet de la convection transverse est aussi visible sur la viscosité totale adimensionnée suivant la ligne de symétrie verticale (voir figure 5.19–(d.1)). Le long de la première portion de segment, ($x_3 = 0.5, 0.5 < x_2 < 0.85$), le transport agit depuis les faibles valeurs de μ_t/μ_{t_0} vers la direction du centre de la conduite correspondant aux larges valeurs de μ_t/μ_{t_0} induisant la diminution de la viscosité totale adimensionnée $\mu_t(\dot{\gamma})/\mu_{t_0}$ avec l'augmentation de \mathbf{Re} . Encore une fois, l'évolution en fonction du couple $(\mathbf{Re}, \mathbf{We})$ est liée à l'intensité de u_2 sur cette portion de segment. Par ailleurs, le changement de direction du transport est également visible sur la viscosité totale adimensionnée où une augmentation brusque est enregistrée autour de $\dot{\gamma} \sim 2.5$ accompagnée d'une augmentation des valeurs de $\mu_t(\dot{\gamma})/\mu_{t_0}$ en fonction du nombre de Reynolds. Cependant, l'effet de la convection transverse diminue vers les larges taux de déformation, ce qui concorde avec l'évolution de la contrainte de cisaillement. Notons aussi que la production de taux de déformation avec l'augmentation du nombre de Reynolds au voisinage du centre de la paroi conduit à une diminution de $\mu_t(\dot{\gamma})/\mu_{t_0}$.

Pour la ligne diagonale, l'évolution non-monotonique du taux de déformation sur cette ligne engendre une sorte d'*aller-retour* de la contrainte de cisaillement polymérique en fonction du taux de déformation (voir figure 5.19–(c.2)). Pour la portion de segment ($0.5 < x_2 = x_3 \sim 0.7$) le transport transverse s'opère du centre de la conduite vers la limite du segment ($0.5 < x_2 = x_3 \sim 0.7$). Inversement à ligne de symétrie verticale, la convection transverse engendre une augmentation de la contrainte de cisaillement polymérique, car les fortes valeurs de $\bar{\tau}_{12}$ sont convectées sur cette portion de segment vers les faibles valeurs conduisant à l'augmentation locale de la contrainte de cisaillement polymérique. Par ailleurs, comme le transport le long de la seconde portion de

10. Dans ce cas, la contribution du transport dans l'équation constitutive de $\bar{\tau}_{12}$ est du même signe que la contribution du taux de déformation, c'est-à-dire positif, indiquant que l'évolution brusque vient du changement du signe de la contribution du transport.

segment ($0.7 < x_2 = x_3 \sim 1.$) se fait du coin vers l'intérieur, la contrainte de cisaillement subit une diminution avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Finalement, l'évolution de la viscosité totale adimensionnée le long de la ligne diagonale, donnée par la figure 5.19-(d.2), concorde avec l'évolution de la contrainte de cisaillement en fonction des nombres de Reynolds et de Weissenberg.

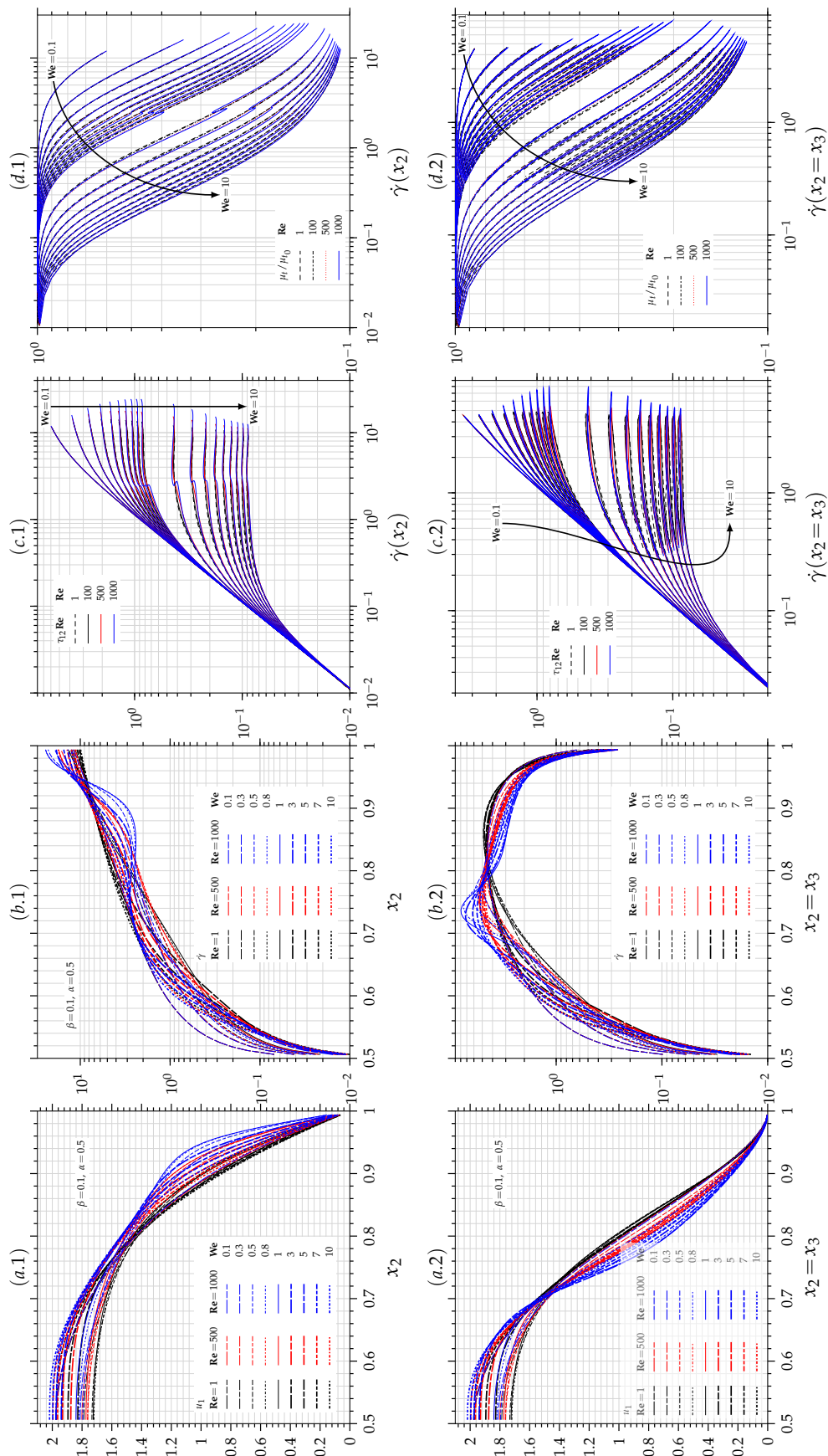


FIGURE 5.19 – Pour le modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $\beta = 0.1$: (a) Profils de vitesse principale $u_1(x_3, x_2)$, (b) profils du taux de déformation $\dot{\gamma}(x_3, x_2)$, (c) profils de la contrainte de cisaillement polymérique $\tau_{12}(x_3, x_2)$ \mathbf{Re} , (d) profils de la viscosité totale $\mu_t/\mu_0(x_3, x_2)$, en fonction du nombre de Weissenberg $\mathbf{We} = [0.1, 10]$ et pour différents nombres de Reynolds $\mathbf{Re} = \{1, 100, 500, 1000\}$, soit (·) le long de la ligne centrale ($x_3 = 0.5, x_2 = 0.5$)–($x_3 = 0.5, x_2 = 1.$) ou (·) le long de la ligne diagonale ($x_3 = x_2, x_2$).

La figure 5.20–(a) montre l'évolution du coefficient de frottement fRe en fonction du nombre de Weissenberg $We = [0.1, 10]$ pour différents nombres de Reynolds $Re = [1, 1200]$. On constate pour l'ensemble des nombres de Reynolds que l'évolution de fRe en fonction de l'effet rhéofluidifiant est fidèle à la tendance du coefficient de frottement lorsque $Re = 1$. C'est-à-dire, aux faibles nombres de Weissenberg, fRe s'écarte progressivement de la valeur du coefficient de frottement du fluide Newtonien $(fRe)_{Newt}$, pour rejoindre aux larges valeurs de We , une valeur légèrement supérieure à la contribution de la partie Newtonienne dans le fluide $\beta(fRe)_{Newt}$. Par ailleurs, avec l'augmentation du nombre de Reynolds on enregistre une augmentation du coefficient de frottement qui s'accroît. Toutefois, cette tendance de $\beta(fRe)$ est très faible aux faibles We , passe par un maximum vers les valeurs intermédiaires du nombre de Weissenberg et finalement, diminue vers les larges valeurs We . Ce comportement du coefficient de frottement en fonction du couple (Re, We) témoigne de l'effet de la force d'inertie, au travers de la convection transverse, sur la contrainte de cisaillement polymérique. En effet, particulièrement, en proche des centres de parois, avec l'augmentation de We et au début des larges taux de déformation, l'effet de la convection transverse produit une augmentation du maximum de la contrainte de cisaillement polymérique. L'effet de la force d'inertie sur $(\bar{\tau}_{12})_{max}$ gouverne l'accroissement du coefficient de frottement fRe en fonction des nombres de Reynolds et de Weissenberg.

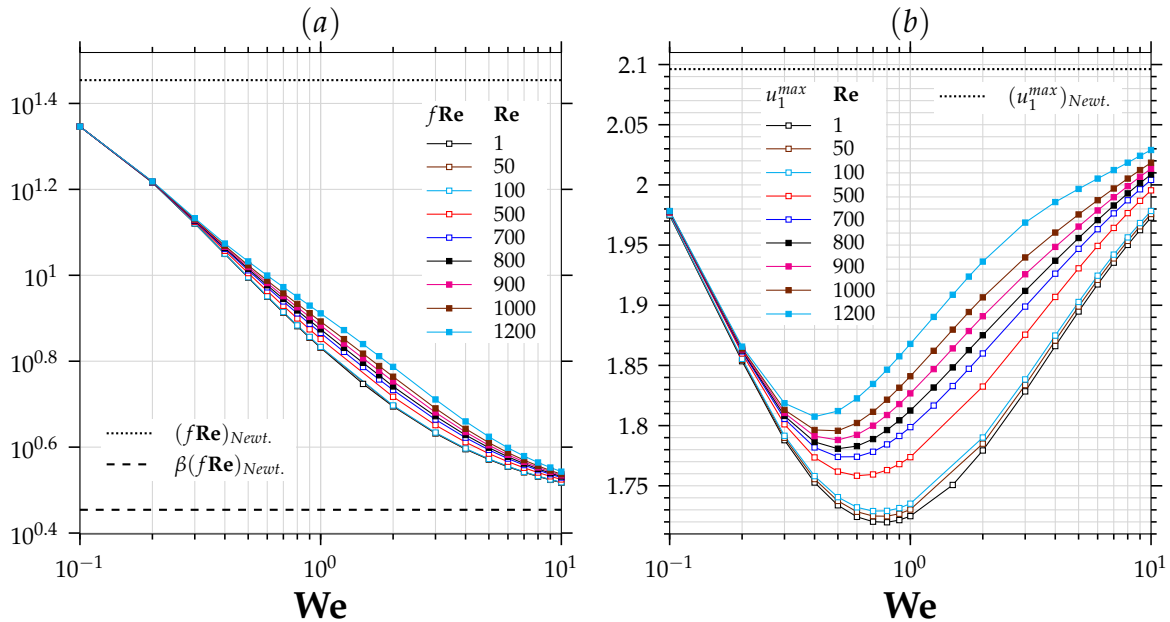


FIGURE 5.20 – Évolution : (a) du coefficient fRe et (b) de la vitesse principale maximale u_1^{max} en fonction du nombre de Weissenberg $We = [0.1, 10]$ et pour différents nombres de Reynolds $Re = [1, 1200]$ avec le modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) et $\beta = 0.1$.

Finalement, la figure 5.20–(b) montre l'évolution de la vitesse principale maximale u_1^{max} en fonction du nombre de Weissenberg $We = [0.1, 10]$, pour différents nombres de Reynolds $Re = [1, 1200]$. D'abord, pour $Re = 1$, la vitesse maximale principale en fonction We renseigne sur le passage de la contrainte de cisaillement totale d'un comportement dominé par la contrainte de cisaillement polymérique à un comportement dominé par la contrainte de cisaillement Newtonienne. Comme indiqué précédemment, cet effet devient conséquent aux larges valeurs de γWe . Par ailleurs, avec l'augmentation de Re , comme les champs de u_1 deviennent non-semiparabolique, la vitesse principale maximale en fonction (Re, We) est aussi perturbée par l'effet de la diminution de u_1 dans la région de la diagonale. Ainsi, on peut constater pour les différents nombres de Re que u_1^{max} suit la même évolution en fonction de We , c'est-à-dire, u_1^{max} diminue pour atteindre son apogée par rapport à la vitesse maximale Newtonienne et ensuite croît avec le nombre de Weissenberg. Cependant, son maximum résulte de deux effets contraires : elle aug-

mente avec l'augmentation de \mathbf{Re} et diminue avec l'augmentation de \mathbf{We} . En effet, cette tendance en fonction \mathbf{Re} signifie qualitativement, par rapport au champ de la vitesse principale de $\mathbf{Re} = 1$, que la diminution brusque dans la région de la diagonale due à l'effet de la convection transverse est plus conséquent que l'élévation des valeurs de la vitesse principale endurée dans les zones des lignes de symétrie. D'autre part, pour la tendance de l'apogée de u_1^{max} qui tend vers les faibles valeurs de \mathbf{We} avec l'augmentation de \mathbf{Re} , elle indique aussi qualitativement que la zone de la diagonale impactée par l'effet de la convection transverse s'élargit plus vite avec l'augmentation de l'effet rhéofluidifiant que les zones subissant une élévation de vitesse due à l'effet de la convection transverse.

5.3.2 Écoulements secondaires

L'effet de la force d'inertie, en relation avec le couple $(\mathbf{Re}, \mathbf{We})$, sur le champ de la vitesse principale conduit à la redistribution des valeurs de taux de déformations d'une part, et à l'accroissement du transport du champ de la contrainte de cisaillement polymérique d'autre part. De plus, cet effet induit une évolution du nombre des écoulements secondaires et une reconfiguration de la structure. En ce sens, la figure 5.21 montre, sur le quart supérieur droit de la conduite, l'évolution de la fonction de courant $\psi(x_2, x_3)$ en fonction du nombre de Weissenberg $\mathbf{We} = \{0.3, 1, 5, 10\}$ et pour différents nombres de Reynolds $\mathbf{Re} = \{1, 100, 500, 1000\}$.

En premier, on peut constater que l'accroissement du nombre de Reynolds $\mathbf{Re} = 1$ puis 100, puis 1000, tend à chasser les écoulements secondaires de la région du centre, sous l'effet de la force d'inertie. Cet effet est plus prononcé dans la région de la diagonale que le long des parois. De plus, on notera aussi la diminution de l'intensité des écoulements secondaires lors de $\mathbf{Re} = 1$ à $\mathbf{Re} = 100$ avec l'ensemble des nombres de Weissenberg.

L'effet de la convection transverse sur la seconde différence des contraintes normales provoque l'apparition au centre de la conduite d'une seconde famille d'écoulements secondaires. Le sens de rotation des recirculations secondaires de cette seconde famille est contrarotatif par rapport à la première. De plus, pour une valeur très élevée du nombre de Reynolds $\mathbf{Re} = 1000$, on constate aussi l'apparition d'une troisième famille dont l'intensité est très faible. Cependant, on enregistre que l'intensité des recirculations secondaires de cette seconde famille est faible par rapport aux écoulements secondaires initiaux. Néanmoins, elle est maximale quand $\mathbf{We} = 1$ et augmente avec l'augmentation de \mathbf{Re} . Par ailleurs, l'intensité des écoulements secondaires initiaux en fonction du nombre de Weissenberg est fidèle à son comportement aux faibles valeurs du nombre de Reynolds. En revanche aux larges valeurs de \mathbf{Re} , l'intensité des écoulements secondaires initiaux augmente. Ce comportement est la conséquence de l'accroissement de l'influence de la convection transverse sur le taux de déformation dans la région de la diagonale, par le biais de la vitesse principale, dont l'importance de la force d'inertie par rapport à la force de viscosité évolue comme $u_s^{moy} \mathbf{Re}$.

En effet, deux tendances peuvent être identifiées dans l'évolution de la structure des écoulements secondaires et de leur intensité en fonction du couple $(\mathbf{Re}, \mathbf{We})$. D'abord, pour $\mathbf{Re} = \{1, 100\}$, l'effet de la convection tendant à diminuer l'intensité des écoulements secondaires est visible sur la composante u_2 du champ de vitesse donnée par la figure 5.22 sur le quart supérieur droit du canal en fonction du nombre de Weissenberg $\mathbf{We} = \{0.3, 1, 5, 10\}$. On constate que lors du passage de $\mathbf{Re} = 1$ à $\mathbf{Re} = 100$, les cellules correspondant à $u_2 > 0$ sont imprégnées de l'effet de la convection transverse dont l'importance est proportionnelle ($u_s^{moy} \mathbf{Re}$), d'où une influence prononcée quand $\mathbf{We} \sim 1$. Par contre, pour la cellule correspondant à $u_2 > 0$, comme la force de l'inertie induit le transport et la redistribution du taux de déformation dans la région de la diagonale (voir figure 5.7) qui entraîne l'évolution de la seconde différence des contraintes normales \bar{N}_2 , l'effet de transport conjuguée avec l'évolution de \bar{N}_2 engendre une diminution de l'intensité des vitesses transversales. Ensuite, pour les nombres de Reynolds important $\mathbf{Re} > 500$, l'impacte

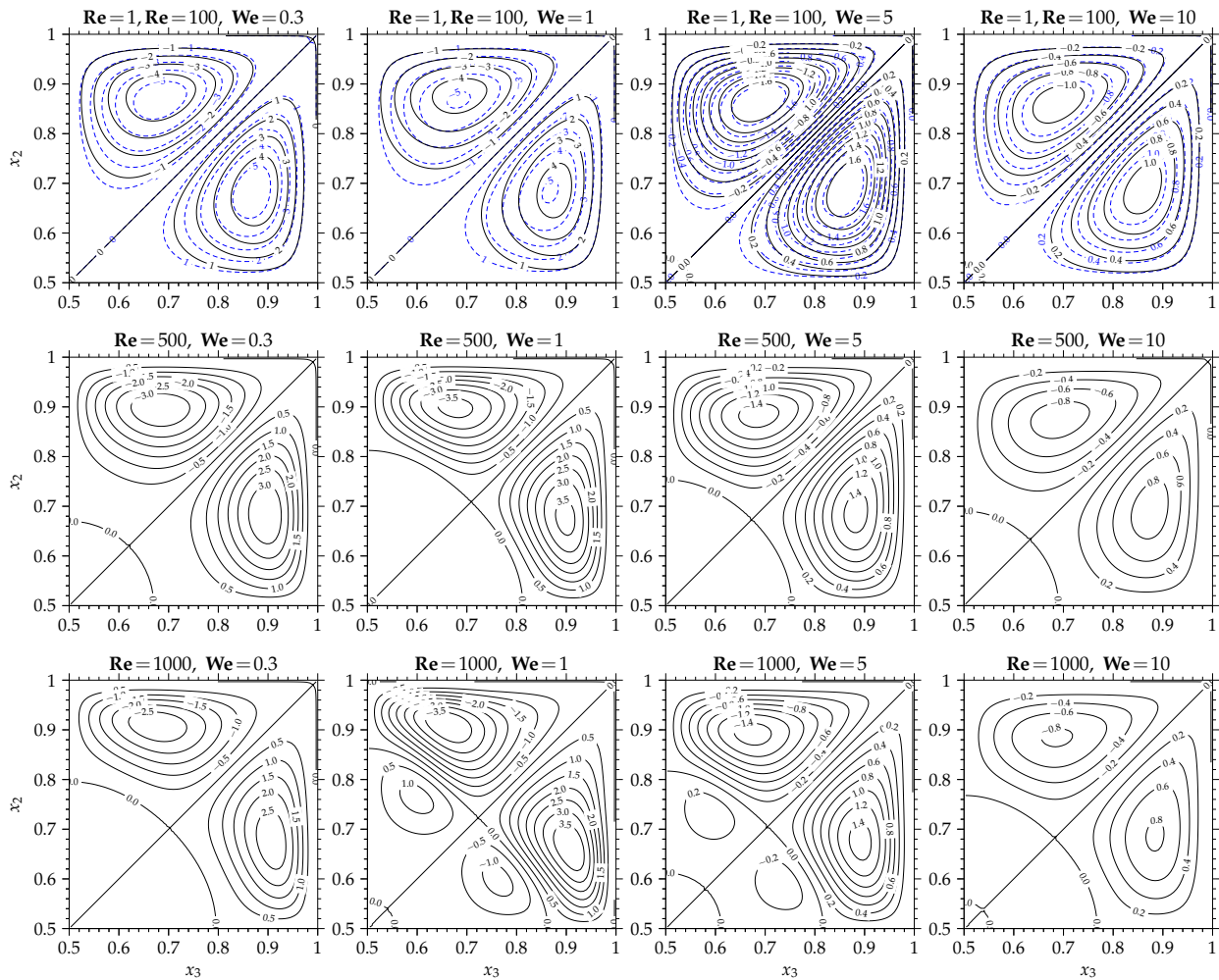


FIGURE 5.21 – Champs de la fonction de courant $\psi(x_2, x_3)10^4$ associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $\beta = 0.1$ sur le quart supérieur droit en fonction du nombre de Weissenberg $We = \{0.3, 1, 5, 10\}$ et pour différents nombres de Reynolds $Re = \{1, 100, 500, 1000\}$.

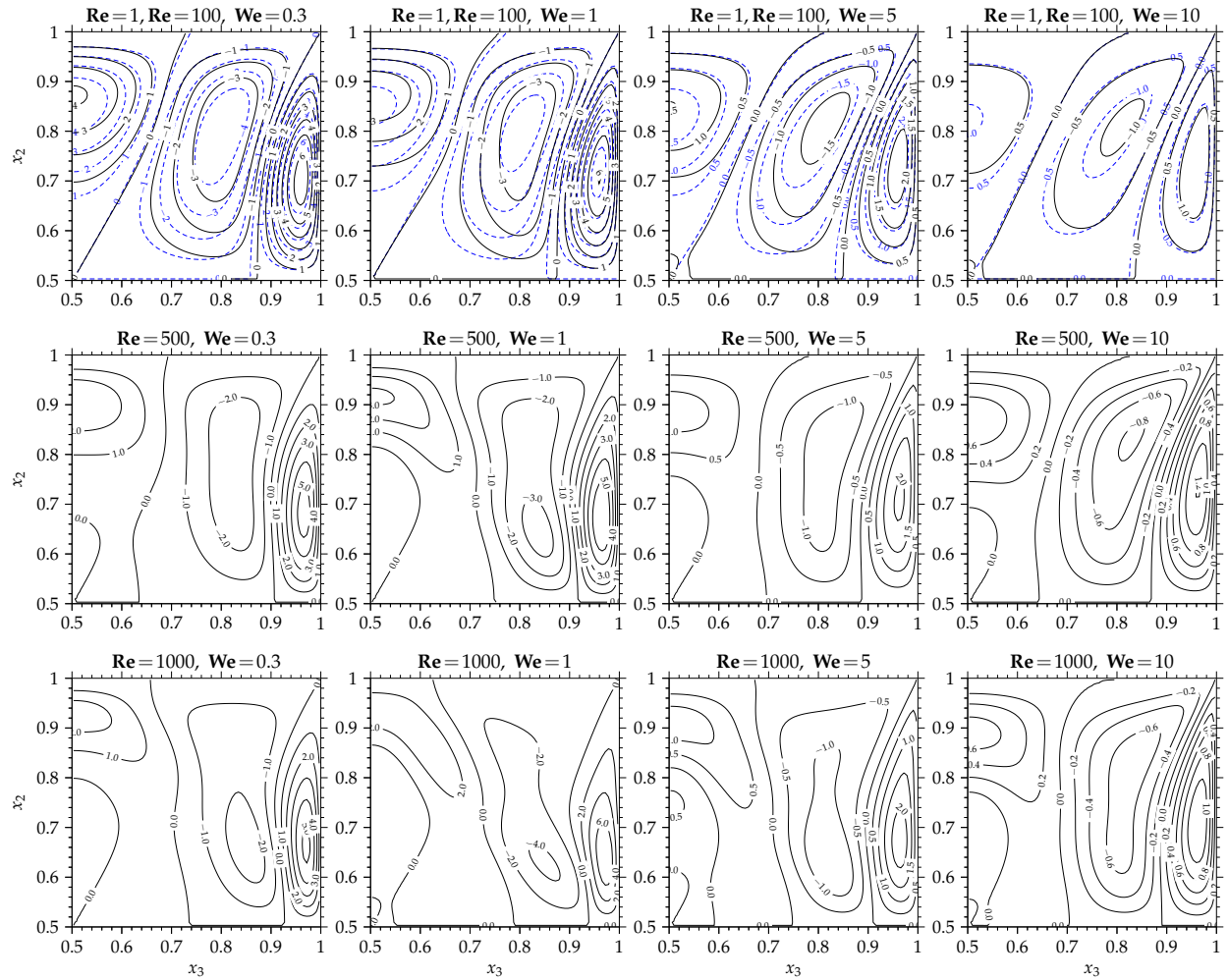


FIGURE 5.22 – Champs de la composante transversale de champ de vitesse $u_2(x_2, x_3)10^3$ associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $\beta = 0.1$ sur le quart supérieur droit du canal en fonction du nombre de Weissenberg $We = \{0.3, 1, 5, 10\}$ et pour différents nombres de Reynolds $Re = \{1, 100, 500, 1000\}$.

de la force d'inertie sur la production/diminution du taux de déformation, respectivement, dans les régions de la diagonale et les régions des lignes de symétrie, conduit à un accroissement/diminution sévère de la seconde différence des contraintes normales qui génère une nouvelle structure des écoulements secondaires. L'inversion du signe des vitesses transversales dans la région du centre de la conduite marque l'apparition de la seconde famille des écoulements secondaires.

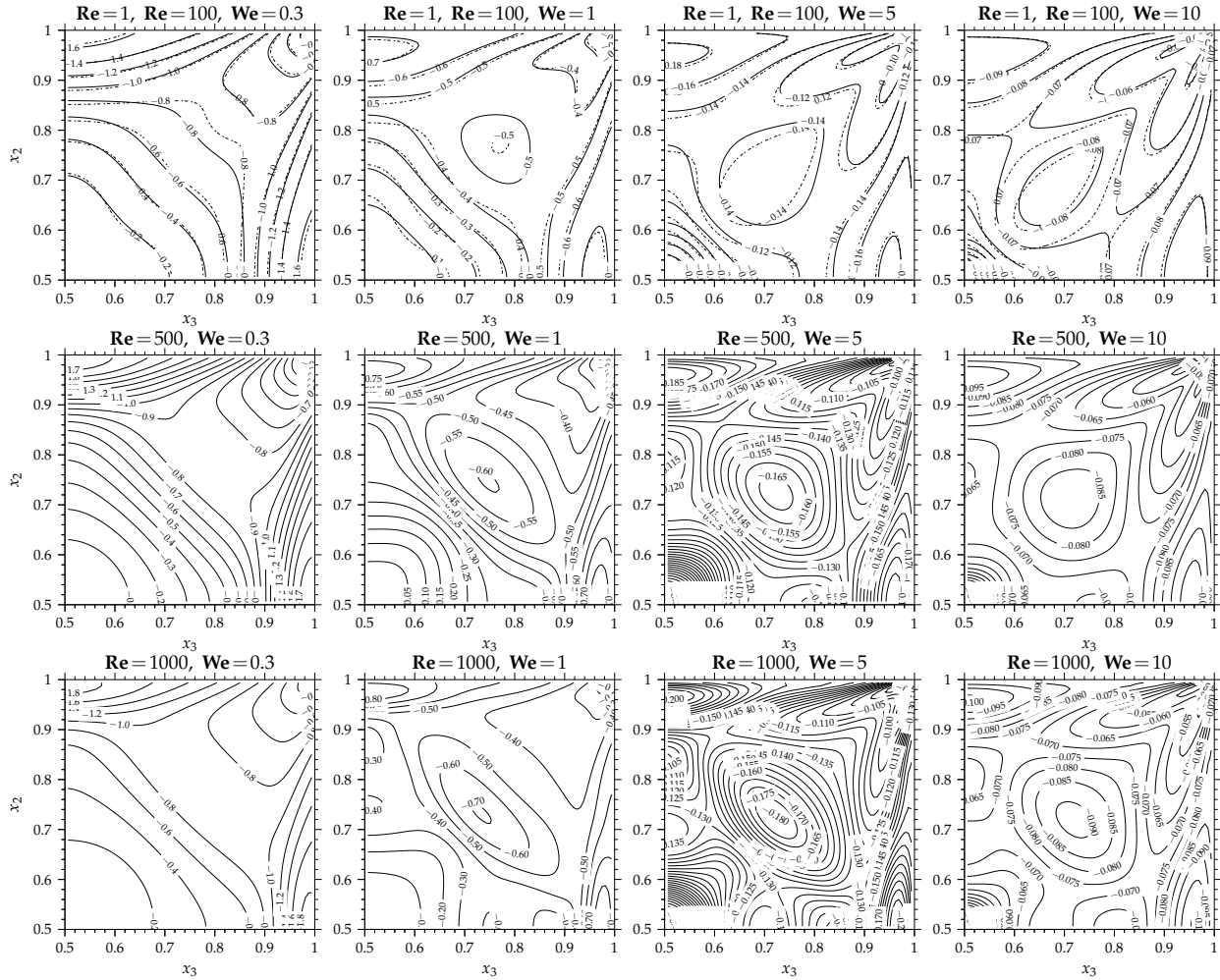


FIGURE 5.23 – Champs de la seconde différence des contraintes normales $\bar{N}_2 \text{Re}$ associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $\beta = 0.1$ sur le quart supérieur droit du canal en fonction du nombre de Weissenberg $\text{We} = \{0.3, 1, 5, 10\}$ et pour différents nombres de Reynolds : (.....) $\text{Re} = 1$, $\text{Re} = 100$, $\text{Re} = 500$, $\text{Re} = 1000$. La figure provisoire représente le champs du taux de déformation $\dot{\gamma}$ en fonction du nombre de Weissenberg $\text{We} = \{0.3, 1, 5, 10\}$ et pour différents nombres de Reynolds.

Pour le passage de $\text{Re} = 1$ à $\text{Re} = 100$, l'effet de la convection transverse est constatable sur \bar{N}_2 particulièrement dans les régions des lignes de symétrie. La tendance s'accroît autour des valeurs intermédiaires du nombre de Weissenberg. Notons que, comparativement à $\text{Re} = 1$, l'impact de la fonction d'inertie sur le taux de déformation dans la région de la diagonale lorsque $\text{Re} = 100$ engendre une augmentation de \bar{N}_2 . Par ailleurs, pour des Reynolds plus élevés $\text{Re} > 500$, l'effet de la force d'inertie sur le taux de déformation dans la région de la diagonale élargit, d'une part, le domaine de variation de \bar{N}_2 , et d'autre part, il augmente en intensité. À l'inverse, le comportement du taux de déformation dans les régions des lignes de symétrie (voir la figure 5.7 ou encore la figure 5.19) induit l'apparition d'une nouvelle famille d'isovaleurs de \bar{N}_2 . Par exemple, pour $\text{Re} = 500$, le long du segment ($x_3 = 0.5, 0.7 < x_2 < 0.9$) et du segment ($x_2 = 0.5, 0.7 < x_3 < 0.85$) cette nouvelle famille d'isovaleurs de \bar{N}_2 se caractérise par un maximum local. La redistribution

du champ de la seconde différence des contraintes normales dans les régions des diagonales et l'émergence des maximums locaux le long des lignes de symétrie sont à l'origine de l'apparition d'autres familles d'écoulements secondaires au centre de la conduite. De plus, l'apparition d'autres familles d'écoulements secondaires peut aussi être interprétée comme le résultat d'une reconfiguration des points d'appui de l'écoulement du fluide à travers le canal.

Pour étudier finement l'effet de la convection transverse sur la génération des écoulements secondaires, nous avons rapporté sur la figure 5.24 les profils de la vitesse u_2 , le long de la ligne de centrale verticale (a.1) et le long de la diagonale (a.2), ainsi que la seconde différence des contraintes normales réadimensionnée $\bar{N}_2 \mathbf{Re}/\mathbf{We}$ le long de la ligne de centrale verticale (b.1) ainsi que le long de la diagonale (b.2), en fonction du nombre de Weissenberg et pour différents nombres de Reynolds $\mathbf{Re} = \{1, 100, 500, 1000\}$.

D'abord, pour la transition de $\mathbf{Re} = 1$ à $\mathbf{Re} = 100$, on peut constater le long de la ligne de symétrie verticale une diminution de u_2 (figure 5.24 (a.1)) due à l'interaction de la force d'inertie avec la seconde différence des contraintes normales le long de cette ligne. Pour les nombres de Reynolds davantage plus élevés, l'impact de la force d'inertie sur le taux de déformation (à travers la composante de vitesse u_1) conduit à l'inversion du signe de u_2 , marquant l'apparition d'une nouvelle famille de recirculations secondaires.

On peut remarquer sur la figure 5.24 (b.1), à analyser avec la figure (5.19–(b.2)), que la seconde différence des contraintes normales le long de la ligne de symétrie vertical est très impactée par l'augmentation de la force d'inertie. Aux faibles taux de déformation, $\bar{N}_2(\dot{\gamma})\mathbf{Re}/\mathbf{We}$ s'accroît lors du passage de $\mathbf{Re} = 1$ à $\mathbf{Re} = 100$, mais aux larges taux de déformation, cet accroissement s'estampe et les valeurs redeviennent quasi-identiques. Le comportement enregistré aux larges taux de déformation est due au caractère rhéofluidifiant du fluide. En effet, comme $\bar{N}_2(\dot{\gamma})\mathbf{Re}/\mathbf{We}$ et $\bar{\tau}_{12}(\dot{\gamma})$ deviennent indépendant de $\dot{\gamma}$ aux larges taux de déformation, conséquemment le transport de leurs dérivées devient nul.

D'autre part, pour des valeurs du nombre de Reynolds plus élevées $\mathbf{Re} > 500$, aux faibles taux de déformation, l'élévation subie par $\bar{N}_2(\dot{\gamma})\mathbf{Re}/\mathbf{We}$ devient plus intense. Ensuite, une diminution brusque est enregistrée autour de $2 < \dot{\gamma} < 3$ pour enfin diminuer avec l'augmentation du nombre de Reynolds aux larges taux de déformation. Cette tendance est très prononcée aux valeurs intermédiaires du nombre de Weissenberg, concordant avec la tendance de l'intensité u_s des écoulements secondaires (plus faibles au centre et vers les coins). Cependant, notons que l'effet de la convection transverse enregistré sur \bar{N}_2 est à l'opposé de celui observé précédemment sur la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{12}$ ¹¹. Ce comportement est lié au signe négatif de la dérivée $\dot{\gamma}$ dans le domaine des taux de déformation intermédiaires.

Si l'on regarde le long de la ligne diagonale, on note également la diminution de l'intensité de u_2 lors du passage de $\mathbf{Re} = 1$ à $\mathbf{Re} = 100$. Pour des nombres de Reynolds plus élevés, en plus de l'inversion du signe de u_2 qui illustre la seconde famille d'écoulements secondaires, l'effet de la force d'inertie qui se traduit par une diminution de u_2 avec l'augmentation de \mathbf{Re} est constatable dans le voisinage du coin pour les différents nombres de \mathbf{We} . Avec l'augmentation de \mathbf{Re} , aux faibles taux de déformation, la seconde différence des contraintes normales (5.19–(b.2)) subit une diminution proche du coin.

Pour le modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) et avec $\beta = 0.1$, l'intensité des recirculations secondaires en termes de la vitesse moyenne u_s^{moy} des écoulements secondaires est rapportée sur la figure 5.25–(a) en fonction du nombre de Weissenberg $\mathbf{We} = [0.1, 10]$ et pour différents nombres de Reynolds $\mathbf{Re} = [1, 1200]$. D'abord, pour les valeurs du nombre de Reynolds relativement faibles $\mathbf{Re} \leq 100$, on constate une diminution régulière de la vitesse moyenne des écoulements secondaires, avec

11. Rappelons que l'augmentation du nombre de Reynolds induit une diminution de $\bar{\tau}_{12}$ aux faibles $\dot{\gamma}$ et une augmentation aux valeurs intermédiaires de $\dot{\gamma}$, en revanche l'augmentation du nombre de Weissenberg engendre une augmentation de $\bar{\tau}_{12}$ aux faibles $\dot{\gamma}$ et une diminution aux valeurs intermédiaires de $\dot{\gamma}$

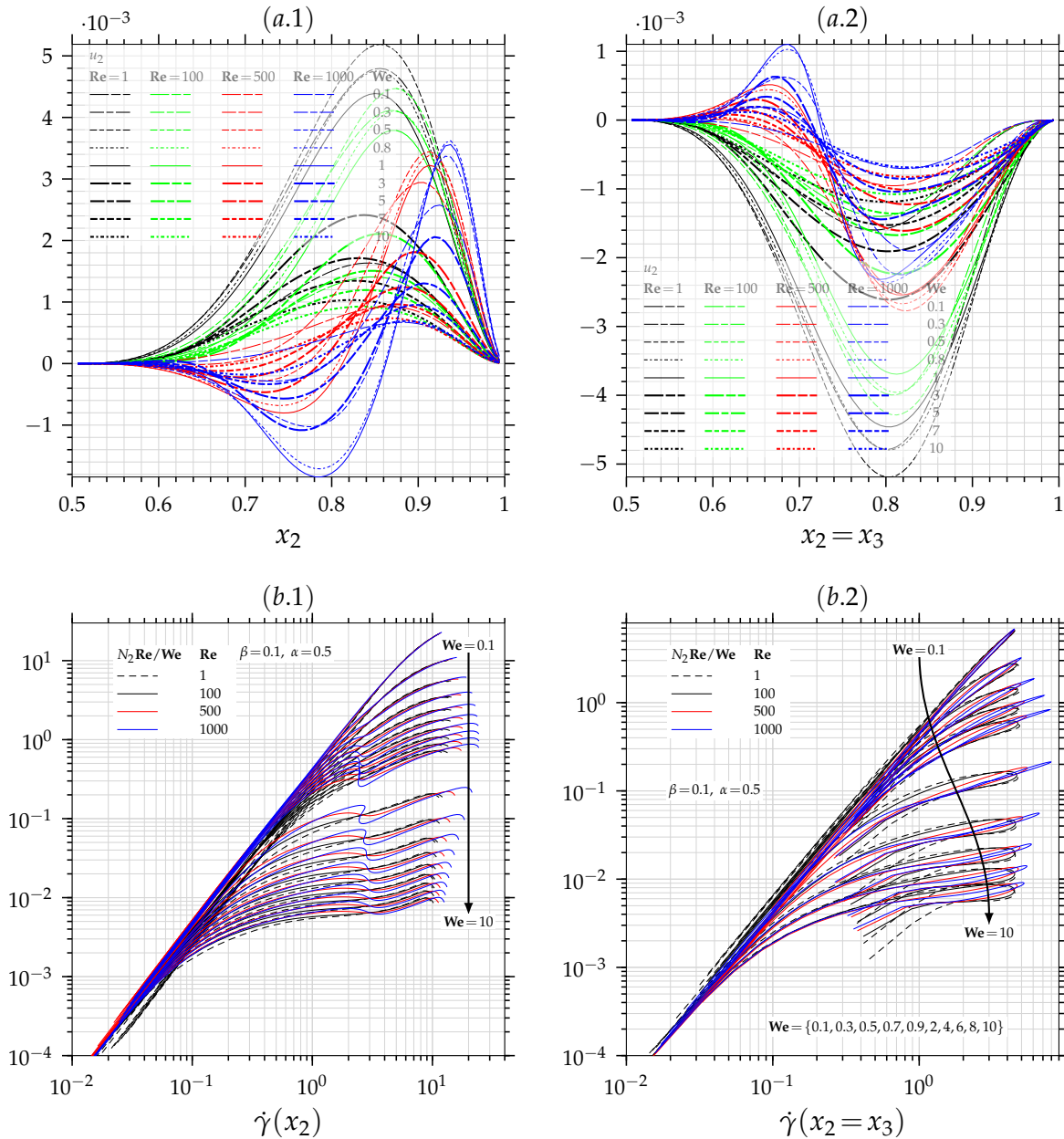


FIGURE 5.24 – Pour le modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $\beta = 0.1$: (a) Profils de la composante $u_2(x_3, x_2)$ de la vitesse, (b) profils de la seconde différentes des contraintes normales $\bar{N}_2(x_3, x_2)Re$, en fonction du nombre de Weissenberg $We = [0.1, 10]$ et pour différents nombres de Reynolds $Re = \{1, 100, 500, 1000\}$, soit (.1) le long de la ligne centrale ($x_3 = 0.5, x_2 = 0.5$)–($x_3 = 0.5, x_2 = 1.$) ou (.2) le long de la ligne diagonale ($x_3 = x_2, x_2$).

l'augmentation du nombre de Reynolds, pour l'ensemble des nombres de Weissenberg. Ensuite pour les valeurs relativement élevées du nombre de Reynolds $\mathbf{Re} \geq 500$, apparaît une compétition entre l'effet de l'élasticité via le \mathbf{We} et l'inertie via le nombre de Reynolds. On constate que u_s^{moy} diminue d'abord avec l'augmentation du nombre de Reynolds pour $\mathbf{We} < \sim 0.5$, puis augmente avec l'augmentation du nombre de Reynolds dans l'intervalle $\mathbf{We} > \sim 0.5$. Les deux tendances qui s'esquissent en fonction du couple $(\mathbf{Re}, \mathbf{We})$ sont, en effet, le résultat de l'importance de l'effet des termes de la convection transverse sur les composantes du champ de vitesse et de l'importance de l'effet des termes de la convection transverse sur les composantes du tenseur des contraintes viscoélastiques.

Ces deux effets sont régis, respectivement, par le nombre de Reynolds $u_s^{moy} \mathbf{Re}$ et le nombre de Mach $(u_s^{moy})^{1/2} \mathbf{Ma}_0$, réécrits à l'échelle de la vitesse moyenne des écoulements secondaires, illustrés par la figure 5.25–(b). D'abord, on peut constater pour $\mathbf{Re} = 1$ que l'effet de la convection transverse sur le tenseur des contraintes viscoélastiques est relativement faible, $(u_s^{moy})^{1/2} \mathbf{Ma}_0 \ll 1$, alors qu'il prend de l'importance pour $\mathbf{Re} = [50, 100]$ l'effet de la convection transverse sur le tenseur des contraintes viscoélastiques $(u_s^{moy})^{1/2} \mathbf{Ma}_0 \simeq 1$ pour l'ensemble des nombres de Weissenberg. Pour des nombres de Reynolds plus élevés $\mathbf{Re} \geq 500$, l'effet de la convection transverse $(u_s^{moy})^{1/2} \mathbf{Ma}_0 \gg 1$ autours de $\mathbf{We} \sim 0.8$.

Notons qu'aux larges nombres de Weissenberg, comme $u_s^{moy} \sim \mathbf{We}^{-1}$, l'effet de la convection transverse sur le tenseur des contraintes viscoélastiques tend $(u_s^{moy})^{1/2} \mathbf{Ma}_0 \rightarrow (\mathbf{Re})^{1/2}$. D'autre part, on note que l'effet de la convection transverse sur le champ de vitesse devient relativement important $u_s^{moy} \mathbf{Re} \simeq 1$ lorsque $\mathbf{Re} \geq 500$. On peut remarquer aussi qu'aux valeurs larges du nombre de Weissenberg, l'effet de la convection transverse sur le champ de vitesse tend vers $u_s^{moy} \mathbf{Re} \rightarrow \mathbf{Re}/\mathbf{We}$. Cependant, comme l'effet de la convection transverse sur le champ de vitesse (en l'occurrence sur le champ du taux de déformation), c'est-à-dire $u_s^{moy} \mathbf{Re}$, est très faible pour les faibles nombres de Reynolds, alors l'effet de la convection transverse sur le tenseur des contraintes viscoélastiques $(u_s^{moy})^{1/2} \mathbf{Ma}_0$ est à l'origine de la diminution de la vitesse moyenne des écoulements secondaires aux faibles nombres de Reynolds. En effet, comme nous l'avons constaté précédemment par la figure 5.19, le long de la ligne de symétrie verticale. Lors de la transition de $\mathbf{Re} = 1$ à $\mathbf{Re} = 100$, l'effet de la convection transverse sur la seconde différence des contraintes normales conduit à une augmentation de \bar{N}_2 aux valeurs intermédiaires du taux de déformation. Cette augmentation de \bar{N}_2 engendre conséquemment une diminution de la dérivée $\partial \bar{N}_2 / \partial x_2$, d'où la diminution de l'intensité des écoulements lors du passage $\mathbf{Re} = 1$ à $\mathbf{Re} = 100$. Comme mentionné auparavant, l'évolution de l'intensité des écoulements secondaires en fonction de \mathbf{We} aux valeurs relativement faibles du nombre de Reynolds concordent avec le gradient maximal atteint le long des lignes de symétrie verticale et horizontale.

D'autre part, l'accroissement de l'importance de l'effet de la convection transverse sur le champ de vitesse lorsque $\mathbf{Re} \geq 500$ entraîne une redistribution du taux de déformation conduisant à la reconfiguration du champ de la seconde différence des contraintes normales. Toutefois, rappelons que l'élément connecteur entre la seconde différence des contraintes normales et le taux de déformation est établie à travers le terme non-linéaire d'anisotropie (voir eq. (2.10)). Ainsi, \bar{N}_2 subit l'apparition dans la région de la diagonale d'une zone dotée d'un maximum local et dans les régions des lignes de symétrie d'un minimal local. Malgré l'importance de l'effet de la convection transverse sur la seconde différence des contraintes normales (c'est à dire $(u_s^{moy})^{1/2} \mathbf{Ma}_0 \sim 1$), à travers le terme de l'anisotropie, l'effet de la convection transverse sur le champ de vitesse domine la réponse de la seconde différence des contraintes normales. De manière plus explicite, en analysant les courbes 1.24 (b), on remarque que l'effet de $((u_s^{moy})^{1/2} \mathbf{Ma}_0)$ augmente continuellement avec le Weissenberg, en s'estampant vers les hautes valeurs de ce dernier, alors que l'effet de $((u_s^{moy}) \mathbf{Re})$, lui, tend d'abord à augmenter aux faibles valeurs de Weissenberg, puis décroît à partir d'un Weissenberg seuil, proche de 0.5. L'effet conjugué de ces deux paramètres, engendre un seuil au-delà

duquel l'effet d'inertie l'emporte sur l'effet élastique, générant les comportements précédemment détaillés sur les écoulements secondaires, notamment la formation d'autres familles d'écoulements secondaire comme reporté dans la figure 1.24 (c),

On note que l'augmentation de l'intensité de la vitesse moyenne des écoulements secondaires enregistrée avec $We > 0.6$ et pour $Re \geq 500$ est issue de l'interaction de \bar{N}_2 avec la redistribution spatiale du taux de déformation.

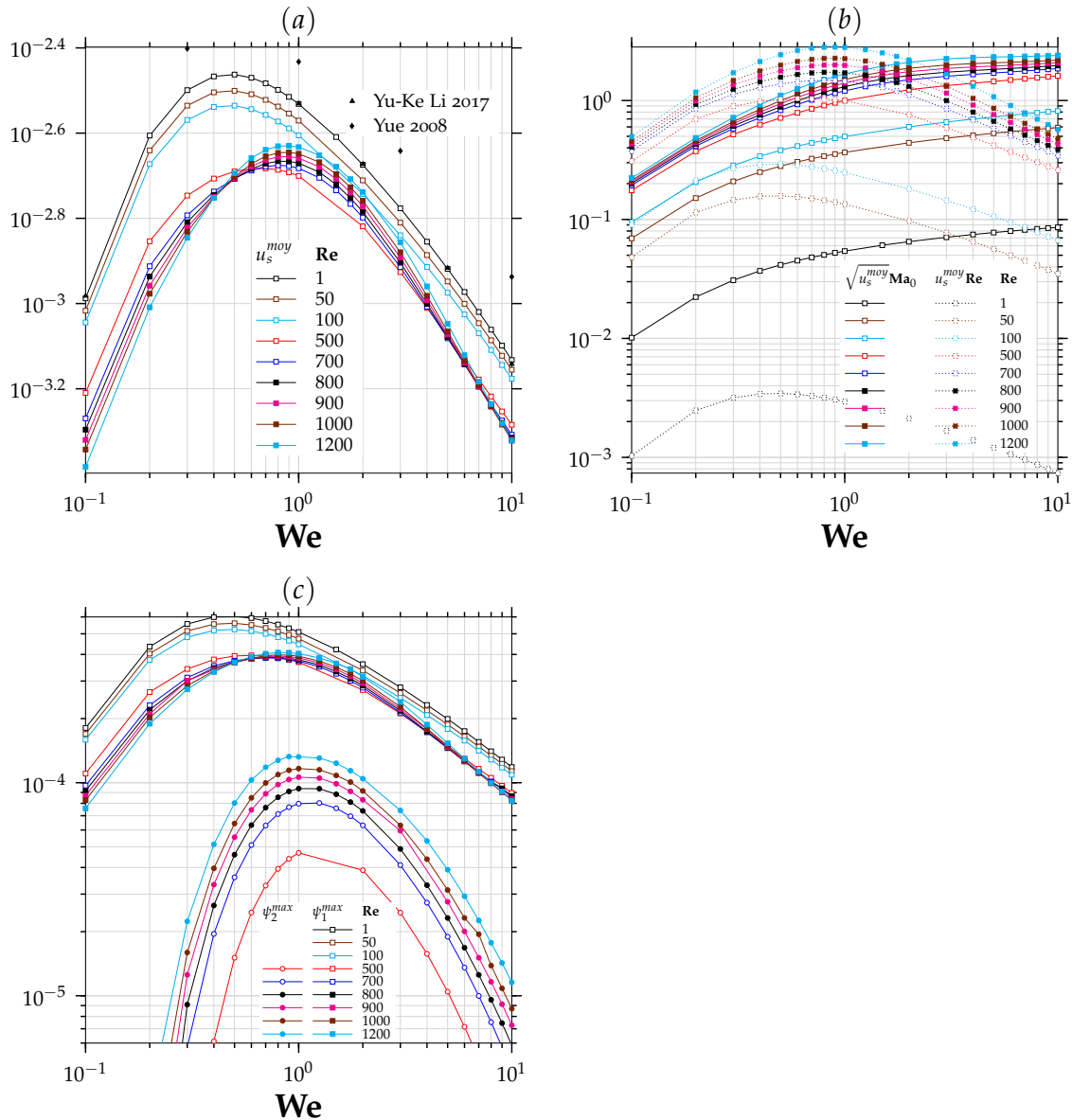


FIGURE 5.25 – Évolution (a) de la vitesse moyenne u_s^{moy} des écoulements secondaires et (b) des nombres de Mach $(u_s^{moy})^{1/2} Ma_0$ et de Reynolds $u_s^{moy} Re$ réécrit à l'échelle de de l'intensité des écoulements secondaires ainsi que le maximum de la fonction des écoulements secondaires initiaux Ψ_1^{max} et le maximum de la fonction de la seconde famille des écoulements secondaires Ψ_2^{max} , en fonction du nombre de Weissenberg $We = [0.1, 10]$ et pour différents nombres de Reynolds $Re = [1, 1200]$ avec le modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) et $\beta = 0.1$.

Il est à noter que le comportement de la fonction de courant maximale $\bar{\Psi}_1^{max}$ des recirculations initiales (figure 5.25–(c)) est fidèle au comportement de la vitesse moyenne u_s^{moy} indiquant d'une part que la vitesse moyenne de la seconde famille des écoulements secondaires est faible et n'impacte pas le comportement de la vitesse moyenne u_s^{moy} de l'ensemble des recirculations

secondaires. Finalement, pour $\mathbf{Re} \geq 500$, l'intensité de la fonction de courant maximale Ψ_2^{max} de la seconde famille des écoulements secondaires (figure 5.25–(c)) augmente avec l'augmentation du nombre de Reynolds et adopte une évolution non monotonique dont le maximum est situé autour de $\mathbf{We} \sim 1$.

5.4 Effet de l'anisotropie du fluide en relation avec l'inertie et l'élasticité du fluide

L'écoulement de fluides polymériques induit au niveau moléculaire des interactions hydrodynamiques polymère-polymère contraignant les chaînes polymériques à se réorganiser suivant la direction de leurs longueurs. En effet, les interactions hydrodynamiques s'incarnent dans l'anisotropie du champ de vitesse au voisinage d'une macromolécule due au mouvement d'une macromolécule voisine, Bird and DeAguiar [24], Bird and Wiest [29], Giesekus [76, 77, 78] (voir section ??). Dans cette section, on se propose d'analyser l'effet de l'anisotropie du fluide de Giesekus, via l'effet de la force d'inertie \mathbf{Re} et de l'élasticité du fluide \mathbf{We} , sur l'écoulement principal puis sur les écoulements secondaires.

5.4.1 Écoulement principale

Étant donné que le paramètre d'anisotropie α du modèle de Giesekus gouverne aussi l'intensité du caractère rhéofluidifiant du fluide¹², par conséquent l'écoulement principal se trouve aussi très dépendant des variations du paramètre α . Le champ de la vitesse principale u_1 associé au modèle de Giesekus avec $\beta = 0.1$ est donné sur la figure 5.26 pour différentes valeurs du paramètre d'anisotropie $\alpha = \{0.2, 0.8\}$ et différentes valeurs du nombre de Weissenberg $\mathbf{We} = \{0.3, 1, 3, 10\}$ ainsi que pour différents nombres de Reynolds $\mathbf{Re} = \{100, 500\}$. Pour les faibles nombres de Reynolds $\mathbf{Re} = 100$ et les faibles nombres de Weissenberg $\mathbf{We} = 0.3$, on constate que le passage de $\alpha = 0.2$ à $\alpha = 0.8$ engendre davantage d'élévation des valeurs de la vitesse principale dans les régions de ligne de symétrie horizontale et verticale. Ainsi, le phénomène d'aplatissement liée à la région du centre du canal est plus prononcé avec l'accroissement du paramètre d'anisotropie. On note aussi que dans la région de la diagonale, u_1 est aussi sensible aux variations du paramètre d'anisotropie, mais avec effet inversé par rapport à ce qui se passe dans les zones de symétrie verticale et horizontale.

Pour des valeurs plus élevées du nombre de Weissenberg, $\mathbf{We} \geq 1$, on constate avec l'augmentation du paramètre d'anisotropie α que l'élévation de la vitesse dans les régions de ligne de symétrie verticale et horizontale s'amointrit aux grandes valeurs du nombre de Weissenberg. En effet, cette tendance s'explique par l'intensification du caractère rhéofluidifiant avec l'augmentation de l'anisotropie du fluide, entraînant la dominance de la contrainte de cisaillement du solvant Newtonien sur la contrainte polymérique et poussant le champ de vitesse à retrouver la distribution du champ de vitesse d'un fluide Newtonien au large valeur de \mathbf{We} . Ces faibles élévations enregistrées sont dues à l'effet de force d'inertie qui est proportionnelle à $u_s^{moy} \mathbf{Re}$. D'autre part, pour une valeur élevée du nombre de Reynolds $\mathbf{Re} = 500$, l'effet de la force d'inertie engendre davantage d'incidence avec $\alpha = 0.8$ qu'avec $\alpha = 0.2$ (idem pour $\alpha = 0.5$, voir figure 5.16).

On peut constater pour les valeurs intermédiaires de \mathbf{We} que la vitesse principale subit une forte convection dans les régions des lignes de symétrie et la région de la diagonale lorsque $\alpha = 0.8$. Toutefois, avec $\mathbf{We} = 10$, l'effet de la force d'inertie sur u_1 devient faiblement dépendant de l'augmentation de l'effet de l'anisotropie du fluide. En effet, la tendance du champ de vitesse à retrouver la distribution du u_1 d'un fluide Newtonien, associée à la modeste intensité de la convection transverse aux grandes valeurs de \mathbf{We} , atténue l'influence de la force de l'inertie.

12. Lorsque $\alpha = 0$ le modèle de Giesekus se réduit au modèle d'Oldroyd-B pour lequel la viscosité polymérique devient indépendante du taux de déformation.

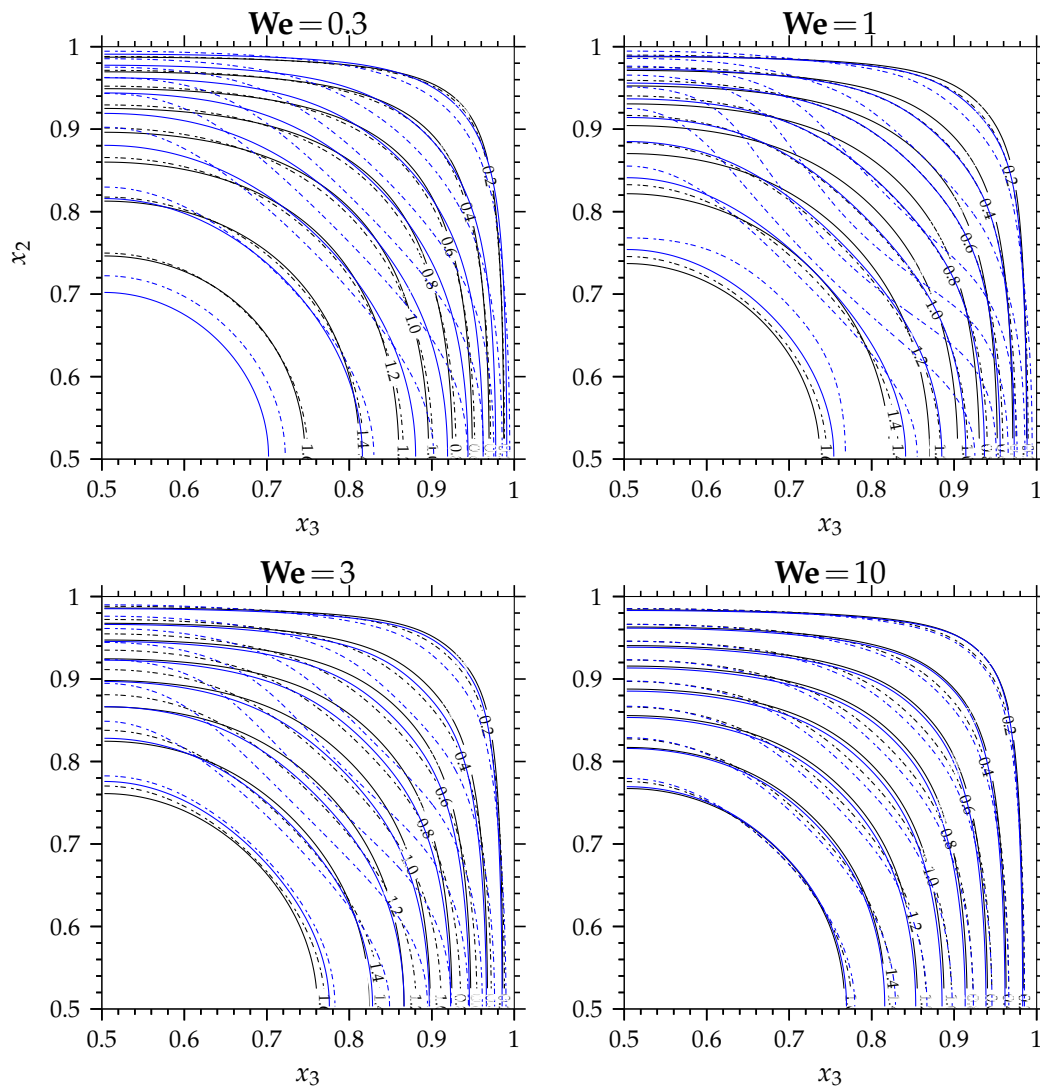


FIGURE 5.26 – Champ de la vitesse principale $u_1(x_2, x_3)$ associés au modèle de Giesekus avec $\beta = 0.1$ sur le quart supérieur droit du canal en fonction du nombre de Weissenberg $We = \{0.3, 1, 3, 10\}$ et pour différents nombres de Reynolds $Re = \{100, 500\}$ ainsi que différentes valeurs du paramètre d’anisotropie $\alpha = \{0.2, 0.8\}$: (— $Re = 100$, $\alpha = 0.2$), (--- $Re = 500$, $\alpha = 0.2$), (— $Re = 100$, $\alpha = 0.8$), (--- $Re = 500$, $\alpha = 0.8$).

Cette perturbation du champ de vitesse se répercute directement sur la viscosité totale du fluide, comme le montre la figure 5.27, où est représenté le champ de la viscosité totale $\mu_t(x_2, x_3)/\mu_{t0}$. En premier, pour $\text{Re}=100$ et pour l'ensemble des nombres de Weissenberg, on note que l'augmentation du paramètre d'anisotropie de $\alpha = 0.2$ à $\alpha = 0.8$ a pour effet la diminution de la viscosité totale dans les régions au voisinage des parois, qui correspond aux régions associées aux grandes valeurs du taux de déformation. Ensuite, lors du passage de $\text{Re}=100$ à $\text{Re}=500$, on peut remarquer que la viscosité totale subit l'effet de la convection transverse, dans la région de la diagonale et dans les régions des lignes de symétrie, d'une façon plus intense lorsque $\alpha = 0.8$. Avec une faible anisotropie, l'effet de la convection subit par la viscosité totale, c'est-à-dire le transport des faibles valeurs de μ_t/μ_{t0} vers le centre de la conduite le long de la région de la diagonale et vers les parois le long des régions des lignes de symétrie, est relativement modeste. En effet, pour $\alpha = 0.8$ la transition à $\text{Re} = 500$ engendre avec les valeurs intermédiaires du nombre de Weissenberg un transport important des isovalues de μ_t/μ_{t0} dans les régions des lignes de symétrie et la région de la diagonale.

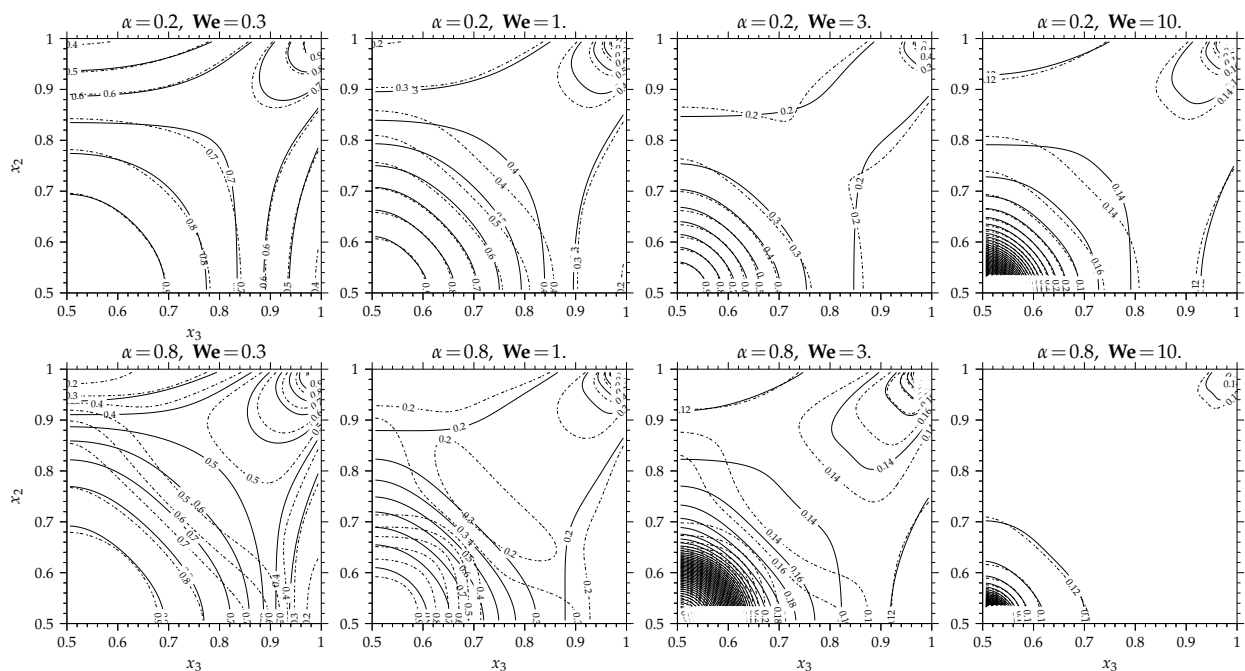


FIGURE 5.27 – Champ de la viscosité totale $\mu_t(x_2, x_3)/\mu_{t0}$ Re associés au modèle de Giesekus avec $\beta = 0.1$ sur le quart supérieur droit du canal en fonction du nombre de Weissenberg $\text{We} = \{0.3, 1, 3, 10\}$ et pour différents nombres de Reynolds : (— $\text{Re} = 100$), (--- $\text{Re} = 500$) et différentes valeurs du paramètre d'anisotropie $\alpha = \{0.2, 0.8\}$.

D'autre part, afin d'analyser l'effet de l'anisotropie en relation avec l'effet d'inertie avec $\text{Re} = \{100, 500\}$, sur le comportement rhéologique du fluide pour des Weissenberg variés : $\text{We} = [0.1, 10]$, les résultats des simulations sont analysés le long de la ligne diagonale ($x_3 = x_2, 0.5 < x_2 < 1$) et long de la ligne de symétrie verticale ($x_3 = 0.5, 0.5 < x_2 < 1$). Les résultats sont présentés dans la figure 5.28.

En premier, pour $\text{Re} = 100$ et en fonction de We , on peut constater sur la vitesse principale (figure 5.28–(a.1)) l'effet de l'intensification du caractère rhéofluidifiant du fluide avec l'augmentation du paramètre d'anisotropie à travers l'élévation en proche paroi. Ensuite, avec $\text{Re} = 500$, l'élévation de u_1 en proche paroi s'accroît davantage avec $\alpha = 0.8$ que $\alpha = 0.2$ (ou encore $\alpha = 0.5$, voir figure 5.19). De même, le long de ligne diagonale, avec $\text{Re} = 500$, on peut constater que le transport des valeurs faibles de u_1 (figure 5.28–(a.2)) du coin vers le centre de la conduite est plus prononcé avec une anisotropie importante du fluide. Cette tendance en fonction de α indique, à travers l'importance de l'effet de la convection transverse $u_s^{\text{moy}} \text{Re}$, que l'intensité des écoulements secondaires

augmente avec l'anisotropie du fluide.

Ce comportement est aussi constatable avec la distribution du taux de déformation (figure 5.28–(b.1, b.2)). En effet, avec $Re = 500$ on observe le long de ligne de symétrie verticale pour $\alpha = 0.8$, que la diminution du taux de déformation sur la portion de segment ($x_3 = 0.5, 0.8 < x_2 < 0.9$) est plus prononcée par rapport à $\alpha = 0.2$ (ou encore $\alpha = 0.5$, voir figure 5.19). Idem pour la ligne diagonale, la production du taux de déformation sur la portion de segment ($x_3 = x_2, 0.68 < x_2 < 0.8$) est plus importante pour les valeurs importantes de l'anisotropie du fluide.

De la même façon, l'anisotropie affecte aussi la contrainte de cisaillement polymérique du fluide (figure 5.28–(c.1)). On peut constater pour l'ensemble des nombres de We , qu'avec l'augmentation du paramètre d'anisotropie, la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{12}Re$ subit une diminution. Cette tendance est due à la diminution de la viscosité polymérique dans la zone de fort taux de déformation avec l'augmentation de l'anisotropie du fluide. Le long de ligne de symétrie verticale, la diminution de $\bar{\tau}_{12}Re$ au début des larges taux de déformation, s'accroît avec l'augmentation de α . Cette accentuation est due à l'augmentation de l'importance de la convection transverse $(u_s^{moy})^{1/2}Ma_0$ subit par le tenseur des contraintes polymériques. De même, on peut constater le long de la ligne diagonale que l'augmentation de $\bar{\tau}_{12}Re$ aux faibles taux de déformation ainsi que la diminution notée aux larges taux de déformation, deviennent plus prononcées (figure 5.28–(c.2)).

Finalement, on peut constater (figure 5.28–(d.1)) le long de la ligne de symétrie verticale que l'augmentation de l'anisotropie intensifie le caractère rhéofluidifiant du fluide. En effet, étant donné que l'effet de la force d'inertie est proportionnel à $(u_s^{moy})^{1/2}Ma_0$, l'accentuation des tendances de la viscosité lorsque l'anisotropie $\alpha = 0.8$ aux valeurs relativement élevées de Re illustre l'accroissement de l'intensité des écoulements secondaires et l'évolution de leurs structures avec l'anisotropie du fluide.

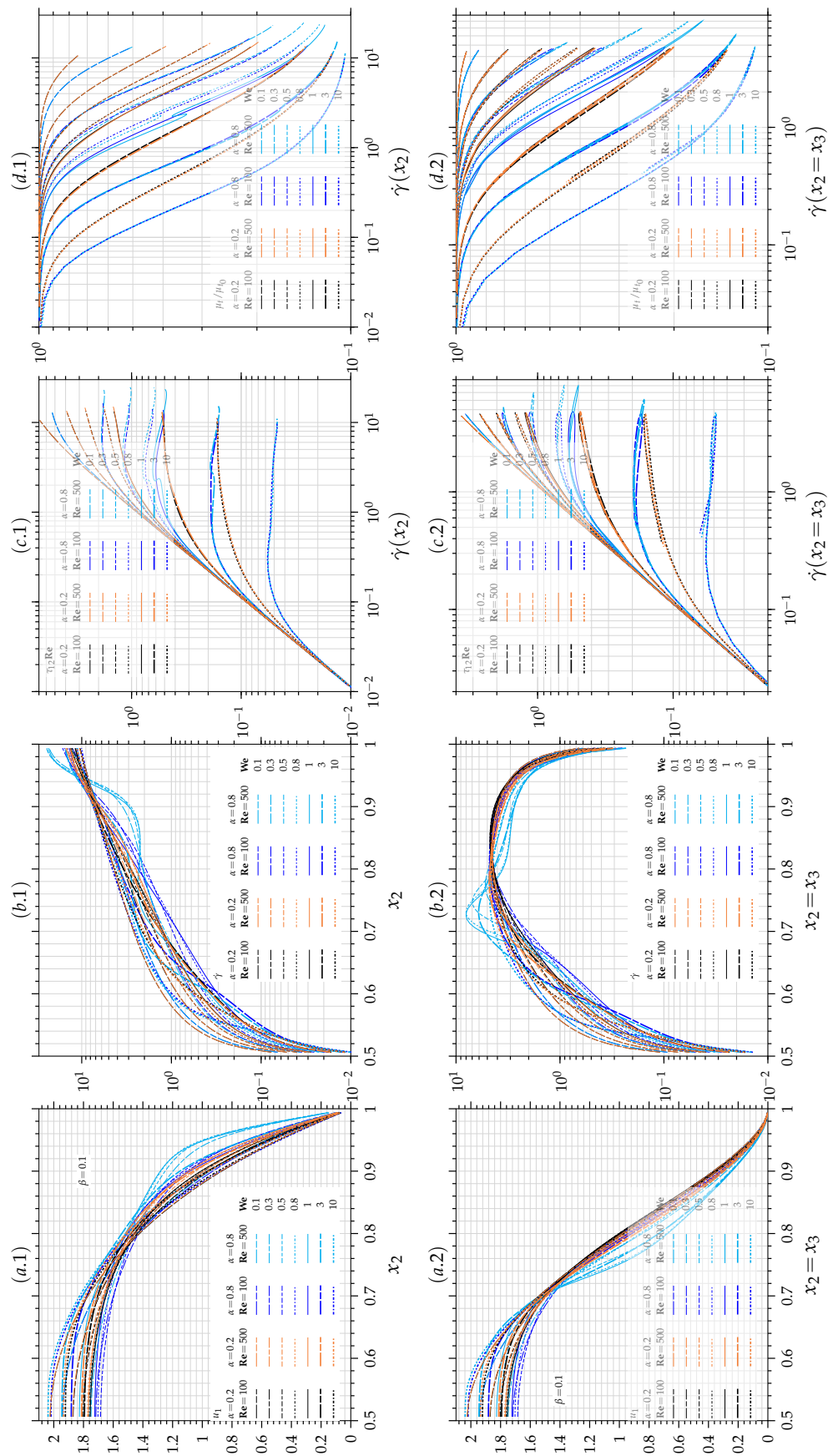


FIGURE 5.28 – Pour le modèle de Giesekus avec $\beta = 0.1$: (a) Profils de vitesse principale $u_1(x_3, x_2)$, (b) profils du taux de déformation $\dot{\gamma}(x_3, x_2)$, (c) profils de la contrainte de cisaillement polymérique $\bar{\tau}_{12}(x_3, x_2)$, (d) profils de la viscosité totale $\mu_t/\mu_0(x_3, x_2)$, en fonction du nombre de Weissenberg $We = [0.1, 10]$ et pour différents nombres de Reynolds $Re = \{100, 500\}$ et pour différentes valeurs du paramètre d'anisotropie $\alpha = \{0.2, 0.8\}$, soit (·.1) le long de la ligne centrale ($x_3 = 0.5, x_2 = 0.5$)–($x_3 = 0.5, x_2 = 1$) ou (·.2) le long de la ligne diagonale ($x_3 = x_2, x_2$).

La figure 5.29–(a) montre, l'évolution du coefficient de frottement fRe en fonction des différentes valeurs du paramètres d'anisotropie $\alpha = \{0.2, 0.5, 0.8\}$ et pour différentes valeurs des nombres de Weissenberg et de Reynolds.

D'abord, pour les valeurs relativement faibles du nombre de Reynolds $Re \leq 100$, on observe pour l'ensemble des nombres de Weissenberg $We = [0.1, 10]$ que l'augmentation de l'anisotropie induit davantage de diminution du coefficient du frottement fRe . Cette tendance concorde avec l'intensification de l'effet de la rhéofluidification sur la contrainte de cisaillement avec l'augmentation de α . Les variations de fRe lors du passage de $Re = 1$ à $Re = 100$ sont très faibles pour l'ensemble des valeurs d'anisotropie. Cependant, pour une valeur plus élevée du nombre de Reynolds $Re = 500$, l'effet de la force d'inertie est plus prononcé pour les valeurs élevées de α . Comparativement à $Re \leq 100$, on constate dans le domaine de valeurs intermédiaires du nombre de We que le passage à $Re = 500$ engendre une augmentation significative du coefficient de frottement, notamment pour $\alpha = 0.8$. Ce comportement est lié à l'effet de la force d'inertie sur la contrainte de cisaillement polymérique. En subissant l'effet de la convection transverse, la contrainte de cisaillement maximale augmente davantage avec l'augmentation de l'anisotropie du fluide. Par ailleurs, une sorte de courbe maîtresse en fonction du paramètre d'anisotropie, est obtenue pour chaque nombre de Reynolds. Ces tendances deviennent moins prononcées dans le cas de forte anisotropie $\alpha = 0.8$, due à la forte non-linéarité des fluides pour des α très grand.

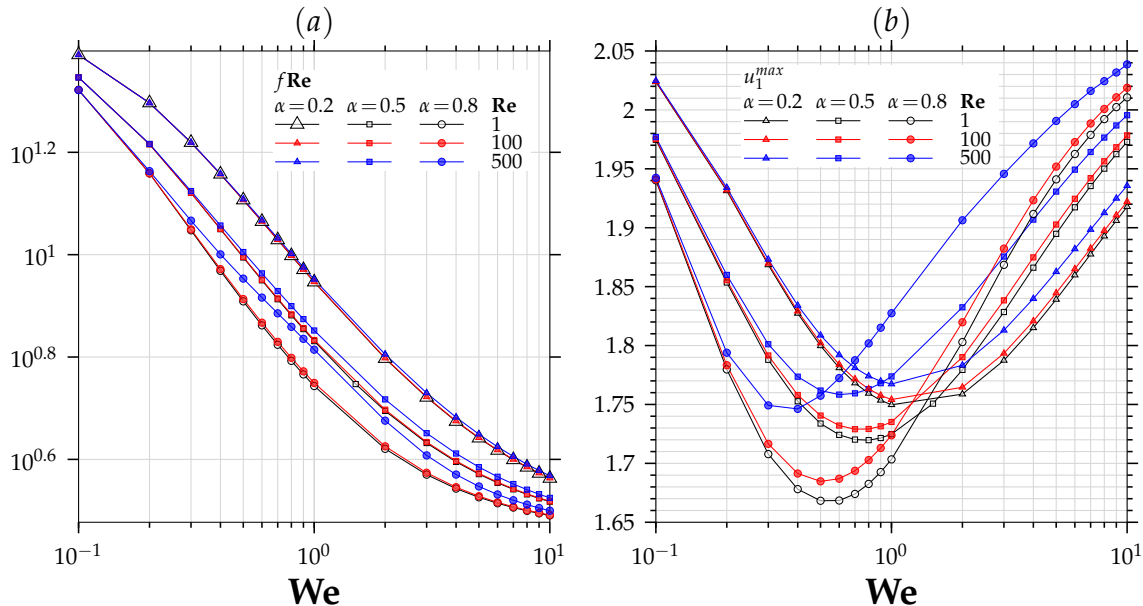


FIGURE 5.29 – Évolution : (a) du coefficient fRe et (b) de la vitesse principale maximale u_1^{max} en fonction du nombre de Weissenberg $We = [0.1, 10]$ et pour différents nombres de Reynolds $Re = \{1, 100, 500\}$ et pour différentes valeurs du paramètres d'anisotropie $\alpha = \{0.2, 0.5, 0.8\}$ avec le modèle de Giesekus et $\beta = 0.1$.

D'autre part, la vitesse principale maximale u_1^{max} est donnée par la figure 5.29–(b) en fonction des différentes valeurs du paramètre d'anisotropie $\alpha = \{0.2, 0.5, 0.8\}$ et pour différents nombres de Reynolds $Re = \{1, 100, 500\}$ et différents nombres de Weissenberg $We = [0.1, 10]$. Au préalable, on constate que le phénomène d'aplatissement s'accroît avec l'augmentation de l'anisotropie du fluide, c'est-à-dire la vitesse principale au centre de la conduite u_1^{max} diminue avec α . Cependant, par le fait de l'intensification de la rhéofluidification, la contrainte de cisaillement polymérique s'affaiblit davantage avec l'augmentation de α engendrant une élévation prononcée de la vitesse au voisinage des centres des parois et par conséquent un aplatissement plus sévère.

On peut aussi noter avec α qui augmente, il y a translation de l'apogée d'aplatissement, par rapport à la vitesse maximale d'un fluide Newtonien, vers les faibles valeurs du nombre de Weis-

senberg. Ce comportement est aussi dû à l'intensification de la rhéofluidification avec l'augmentation du nombre de Weissenberg aux valeurs élevées de l'anisotropie α . Ensuite, pour une valeur plus élevée du nombre de Reynolds $\mathbf{Re} = 500$, l'augmentation des valeurs de u_1^{max} est plus prononcée avec des valeurs importantes de α . Cette tendance, indiquant l'accroissement de l'effet de la convection transverse avec le paramètre α et le nombre de Reynolds \mathbf{Re} , est issue de la conjonction entre l'effet de la prépondérance de $\bar{\tau}_{12}^N$ sur $\bar{\tau}_{12}$ et de l'effet de la force d'inertie dans les régions des lignes de symétrie et des lignes diagonales.

5.4.2 Écoulements secondaires

Comme le montre la figure 5.30, l'intensité de la fonction de courant $\psi(x_2, x_3)$ augmente significativement avec l'augmentation du facteur d'anisotropie du fluide α .

Pour $\mathbf{Re} = 100$, on note qu'avec $\alpha = 0.8$ l'effet de la force d'inertie conduit à l'apparition de la seconde famille des écoulements secondaires aux valeurs intermédiaires de \mathbf{We} , alors qu'avec $\alpha = 0.2$ et ($\alpha = 0.5$, voir figure 5.21) la seconde famille des écoulements secondaires n'apparaît pas. Cette tendance peut aussi s'apercevoir dans les données de Li et al. [134, p.65, fig.13] avec $\beta = 0.5$ et $\mathbf{Re} = 0.1$ où la seconde famille des recirculations secondaires intervient dès que $\alpha \geq 0.5$, cependant ce résultat n'a pas été analysé dans Li et al. [134].

Ensuite, pour $\mathbf{Re} = 500$, on constate l'augmentation de l'intensité et de la zone occupée par la seconde famille des écoulements secondaires avec l'accroissement de l'anisotropie du fluide. En effet, la structure des écoulements secondaires en relation avec la force d'inertie dépend de $(u_s^{moy})^{1/2} \mathbf{Ma}_0$.

Comme il sera discuté dans la suite, la vitesse moyenne des écoulements secondaires augmente considérablement avec l'augmentation de α , conduisant à l'intensification de l'effet de la convection transverse.

Par ailleurs, les champs de la seconde différence des contraintes normales en fonction de l'anisotropie du fluide α sont donnés dans la figure 5.31. Pour une faible valeur d'anisotropie $\alpha = 0.2$, avec l'augmentation de \mathbf{Re} on peut distinguer l'effet de la convection transverse principalement dans la région de la diagonale et dans les régions des lignes de symétrie en proche paroi. En suite, lors d'une élévation de l'anisotropie du fluide $\alpha = 0.8$, on constate, avec $\mathbf{Re} = 100$, l'augmentation de la seconde différence des contraintes normales dans la région du centre de la conduite correspondant aux faibles valeurs de taux de déformation. Pour des valeurs relativement élevées du nombre de Weissenberg, l'effet de la convection transverse conduit à une augmentation significative de $\bar{N}_2 \mathbf{Re}$ dans la région de la diagonale, concordant avec l'importance de l'effet des termes de convection $(u_s^{moy})^{1/2} \mathbf{Ma}_0$.

L'augmentation du nombre de Reynolds conduit à l'intensification de cette tendance et à son élargissement le long de la diagonale. Dans la région des lignes de symétrie verticale et horizontale, due à l'effet de la force d'inertie sur le taux de déformation, on observe l'apparition d'une famille d'isovaleurs de $\bar{N}_2 \mathbf{Re}$ se caractérisant par un minimum local. Ce comportement est d'une intensité moindre lorsque $\alpha = 0.5$ (voir figure 5.23).

Pour analyser finement l'effet de l'augmentation de l'anisotropie en fonction de l'inertie du fluide sur le comportement de la seconde différence des contraintes \bar{N}_2 , nous avons représenté sur la figure 5.32 les profils de la composante u_2 de la vitesse et de la seconde différence des contraintes normales en fonction du facteur d'anisotropie du fluide α . D'abord, on peut constater, le long de la ligne de symétrie verticale, l'augmentation de l'intensité de u_2 avec l'augmentation de α (figure 5.32-(a.1)).

Lors de la transition de $\mathbf{Re} = 100$ à $\mathbf{Re} = 500$, on constate l'augmentation de l'effet de convection transverse avec l'anisotropie du fluide, d'abord à travers l'inversion du signe de u_2 et ensuite à travers l'accroissement des valeurs maximales et minimales de u_2 . Le même constat est également

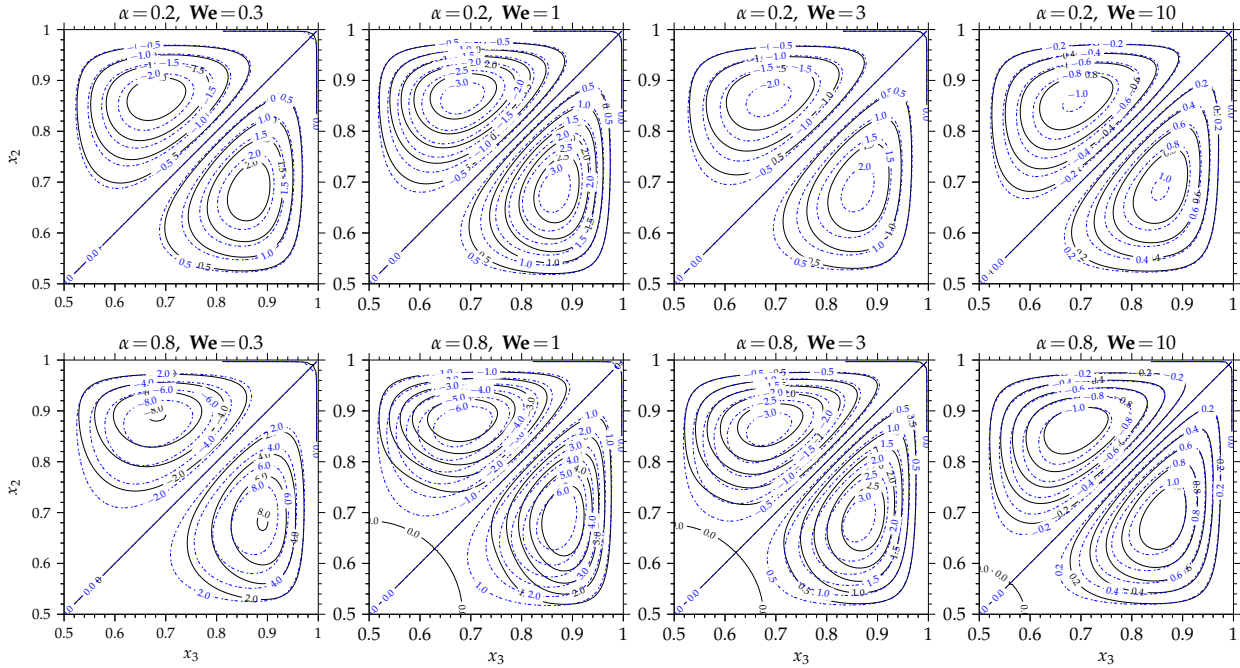
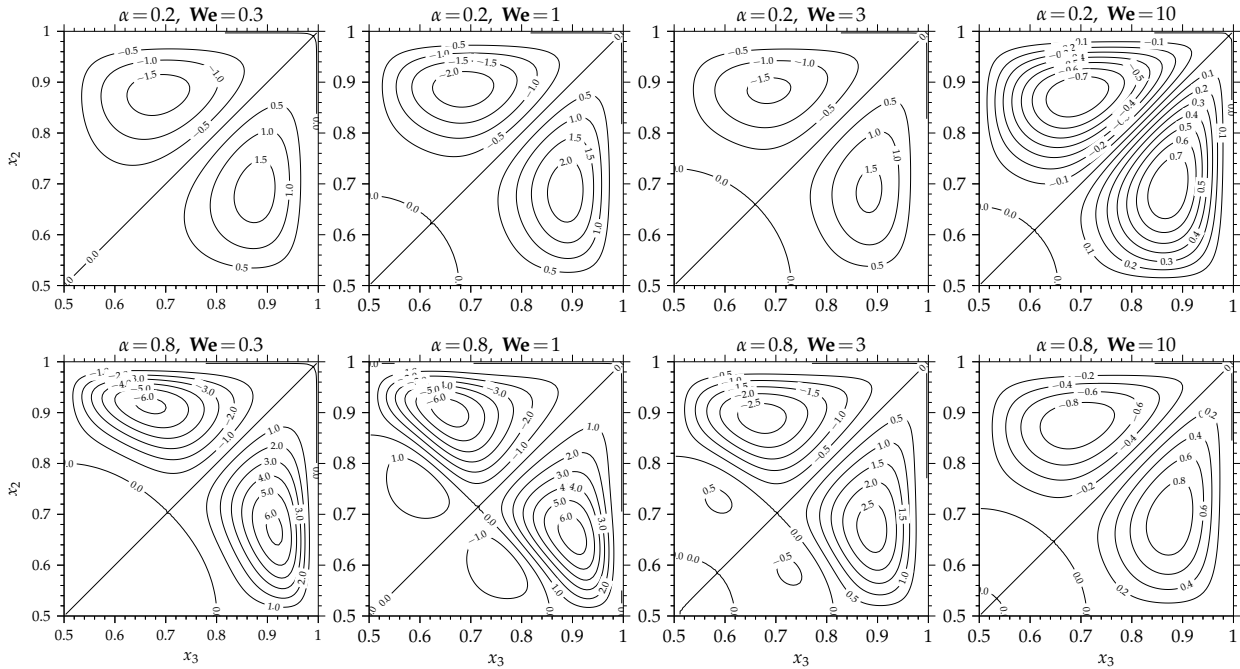
Re = 1, Re = 100

Re = 500


FIGURE 5.30 – Champs de la fonction de courant $\psi(x_2, x_3) 10^4$ associés au modèle de Giesekus avec $\beta = 0.1$ sur le quart supérieur droit du canal en fonction du nombre de Weissenberg $We = \{0.3, 1, 3, 10\}$ et pour différents nombres de Reynolds $Re = \{1, 100, 500\}$ (..... $Re = 1$) et différentes valeurs du paramètre d'anisotropie $\alpha = \{0.2, 0.8\}$.

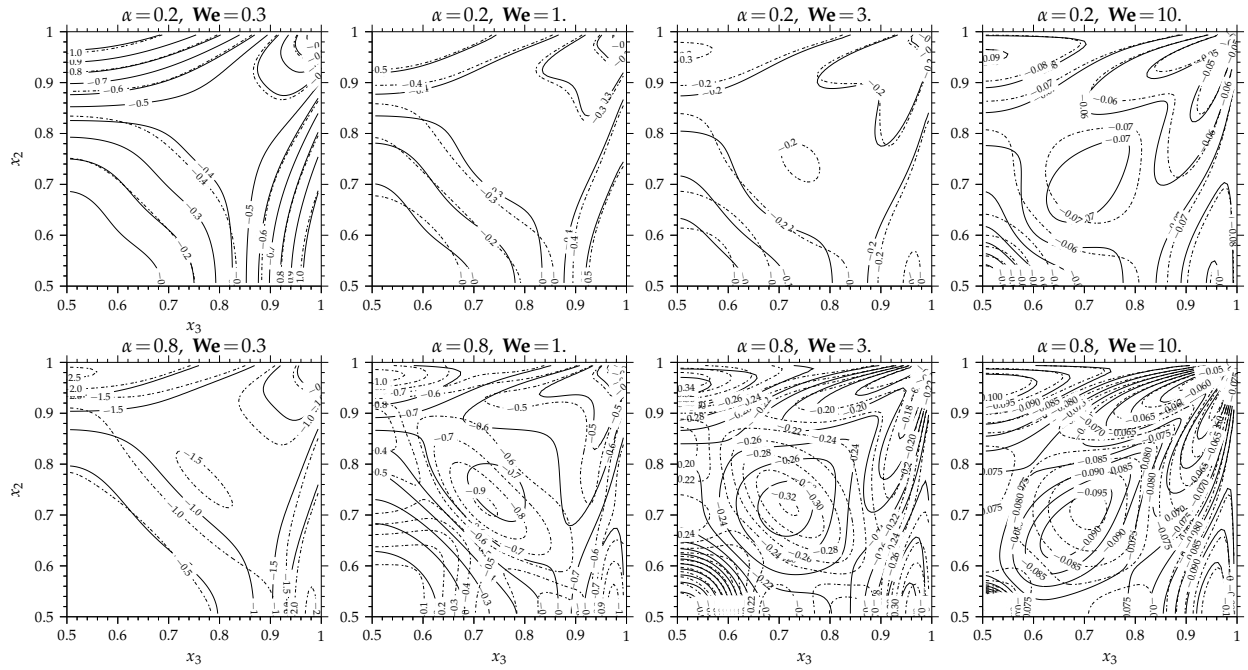


FIGURE 5.31 – Champs de la seconde différence des contraintes normales $\bar{N}_2(x_2, x_3)\mathbf{Re}$ associés au modèle de Giesekus avec $\beta = 0.1$ sur le quart supérieur droit du canal en fonction du nombre de Weissenberg $\mathbf{We} = \{0.3, 1, 3, 10\}$ et pour différents nombres de Reynolds : (..... $\mathbf{Re} = 100$), (— $\mathbf{Re} = 500$) et différentes valeurs du paramètre d’anisotropie $\alpha = \{0.2, 0.8\}$.

à faire le long de ligne diagonale (figure 5.32–(a.2)), où l’augmentation de α conduit à l’accroissement des vitesses $|u_2|$ maximales.

D’autres part, le comportement de la seconde différence des contraintes normales est très attaché au paramètre d’anisotropie du fluide. Aux faibles taux de déformation, le long de la ligne de symétrie verticale (figure 5.32–(b.1)), on enregistre que la seconde différence des contraintes normales augmente proportionnellement au facteur d’anisotropie du fluide $-\bar{N}_2\mathbf{Re}/\mathbf{We} \sim c\alpha(1 - \beta)\dot{\gamma}^2$. Cependant, aux larges taux de déformation $-\bar{N}_2\mathbf{Re}/\mathbf{We}$ tends vers une valeur indépendante de l’anisotropie du fluide. Avec l’augmentation de \mathbf{Re} et α , on peut constater aux faibles taux de déformations l’accentuation de l’augmentation de $-\bar{N}_2\mathbf{Re}/\mathbf{We}$. De même, aux larges taux de déformations, la diminution de la seconde différence des contraintes normales due à l’effet de la convection transverse s’accroît avec l’anisotropie du fluide. Les mêmes constatations sont aussi valides le long de la ligne diagonale (figure 5.32–(b.2)).

Pour différents nombres de Reynolds $\mathbf{Re} = \{1, 100, 500\}$, l’évolution (a) de la vitesse moyenne u_s^{moy} des écoulements secondaires et (b) des nombres de Mach $(u_s^{moy})^{1/2}\mathbf{Ma}_0$ et de Reynolds $u_s^{moy}\mathbf{Re}$ réécrits à l’échelle de l’intensité des écoulements secondaires ainsi que le maximum de la fonction des écoulements secondaires initiaux $\bar{\Psi}_1^{max}$ et le maximum de la fonction de la seconde famille des écoulements secondaires $\bar{\Psi}_2^{max}$, en fonction de l’anisotropie du fluide α .

De manière globale, l’augmentation du facteur d’anisotropie fait augmenter l’intensité de la vitesse moyenne des écoulements secondaires quelque soit le nombre de Reynolds. Mais, pour $\mathbf{Re} \leq 100$, le passage de $\mathbf{Re} = 1$ à $\mathbf{Re} = 100$, on constate l’augmentation de la vitesse moyenne des écoulements secondaires avec l’anisotropie du fluide, puis, quand l’inertie augmente; pour $\mathbf{Re} = 100$ à $\mathbf{Re} = 500$, bien que l’effet de l’anisotropie reste le même, l’intensité de la vitesse, elle, diminue 5.33–(a). A noter, sur cette figure, que nos résultats sont corroborés par d’autres issus de la littérature.

Plus encore, on remarque que la valeur maximale atteinte en fonction du nombre de Weis-

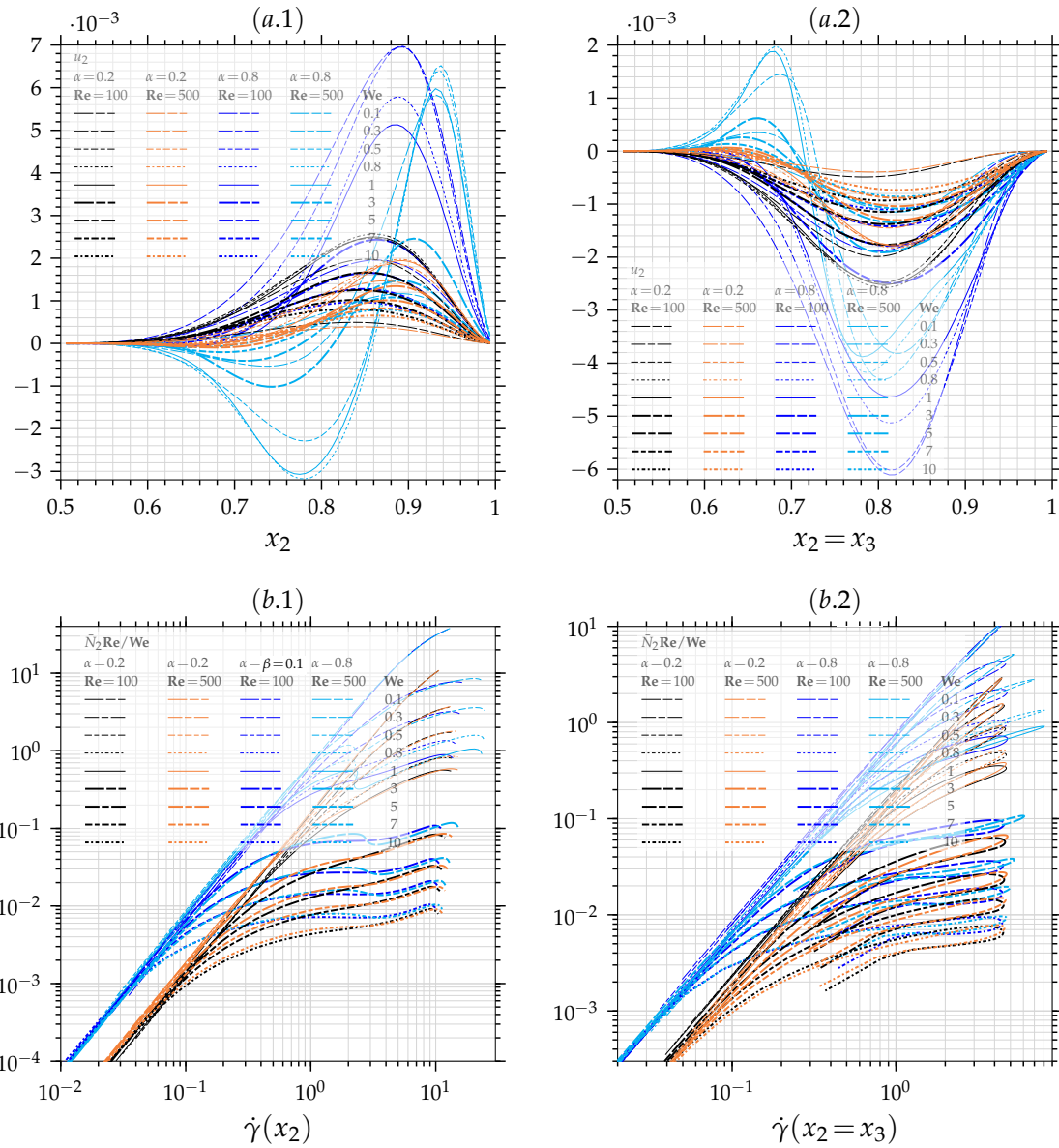


FIGURE 5.32 – Pour le modèle de Giesekus avec $\beta = 0.1$: (a) Profils de la composante $u_2(x_3, x_2)$ de la vitesse, (b) profils de la seconde différent des contraintes normales $\bar{N}_2(x_3, x_2)Re$, en fonction du nombre de Weissenberg $We = [0.1, 10]$ et pour différents nombres de Reynolds $Re = \{100, 500\}$ et pour différentes valeurs du paramètres d'anisotropie $\alpha = \{0.2, 0.8\}$, soit (·.1) le long de la ligne centrale $(x_3 = 0.5, x_2 = 0.5) - (x_3 = 0.5, x_2 = 1.)$ ou (·.2) le long de la ligne diagonale $(x_3 = x_2, x_2)$.

senberg se déplace vers les faibles valeur de ce dernier, avec l'augmentation de α . Ensuite, pour $\mathbf{Re} \leq 500$ et avec des faibles valeurs du paramètre d'anisotropie on note la même tendance observée précédemment avec $\alpha = 0.5$, c'est-à-dire, l'intensité des écoulements secondaires décroît pour les valeurs intermédiaires du nombre de Reynolds. En revanche, pour $\alpha = 0.8$, la vitesse moyenne des écoulements secondaires subit une augmentation lors de la transition de $\mathbf{Re} \leq 100$ à $\mathbf{Re} \leq 500$ dans le domaine des valeurs intermédiaires du nombre de Weissenberg.

Rappelons cependant que ce comportement nous l'avons observé précédemment avec $\alpha = 0.5$ pour des valeurs plus élevées du nombre de Reynolds. Comme discuté précédemment, cette tendance de l'intensité des écoulements secondaires vient de l'importance des termes de convection à la fois dans l'équation de la quantité de mouvement $u_s^{moy} \mathbf{Re}$ et dans l'équation constitutive $(u_s^{moy})^{1/2} \mathbf{Ma}_0$, figure 5.33-(b).

On note aussi l'indépendance de l'importance de la convection transverse de α aux larges valeurs du nombre de Weissenberg $(u_s^{moy})^{1/2} \mathbf{Ma}_0 \rightarrow (\mathbf{Re})^{1/2}$, les courbes évoluent continuellement en augmentant.

Cependant, on remarque que pour $\mathbf{Re} \leq 500$ et avec $\alpha = 0.5$ l'importance de l'effet de la convection transverse $(u_s^{moy})^{1/2} \mathbf{Ma}_0 < 1$ pour l'ensemble des \mathbf{We} , alors qu'avec $\alpha = 0.8$ l'importance des termes de convection $(u_s^{moy})^{1/2} \mathbf{Ma}_0 > 1$ aux valeurs intermédiaires du nombre de Weissenberg. Ce comportement est responsable de l'augmentation de u_s^{moy} lors du passage $\mathbf{Re} \leq 100$ à $\mathbf{Re} \leq 500$ quand $\alpha = 0.8$.

En résumé, avec l'augmentation du nombre de Reynolds et du nombre de Weissenberg, l'augmentation de $(u_s^{moy})^{1/2} \mathbf{Ma}_0$ conduit à la diminution de l'intensité des écoulements secondaires alors que l'augmentation de $u_s^{moy} \mathbf{Re}$ induit l'augmentation de l'intensité des écoulements secondaires. D'autre part, on peut constater en fonction de α et des nombres de Weissenberg et de Reynolds la concordance de la fonction de courant $\bar{\Psi}_1^{max}$ des écoulements secondaires initiaux avec la vitesse moyenne u_s^{moy} . Enfin, pour $\mathbf{Re} = 500$, on note que la fonction de courant de la seconde famille des écoulements secondaires augmente avec l'anisotropie du fluide et devient de même ordre de grandeur que $\bar{\Psi}_1^{max}$ lorsque $\alpha = 0.8$. En d'autres termes, une forte inertie conjuguée à une forte anisotropie favorise l'intensification des écoulements secondaires en nombre et en intensité.

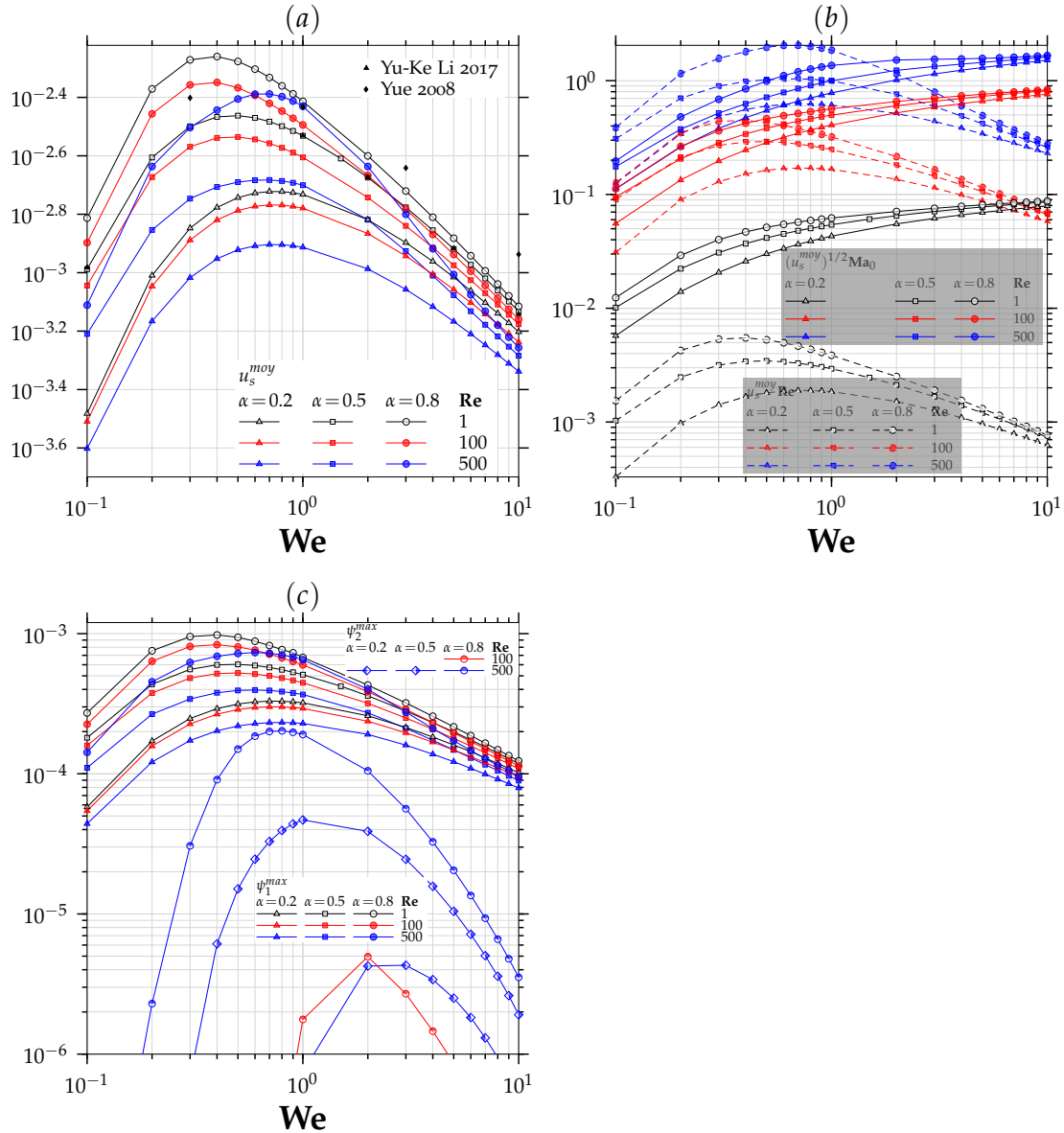


FIGURE 5.33 – Évolution (a) de la vitesse moyenne u_s^{moy} des écoulements secondaires et (b) des nombres de Mach $(u_s^{moy})^{1/2} Ma_0$ et de Reynolds $u_s^{moy} Re$ réécrit à l'échelle de de l'intensité des écoulements secondaires ainsi que le maximum de la fonction des écoulements secondaires initiaux Ψ_1^{max} et le maximum de la fonction de la seconde famille des écoulements secondaires Ψ_2^{max} , en fonction du nombre de Weissenberg $We = [0,1, 10]$ et pour différents nombres de Reynolds $Re = \{1, 100, 500\}$ et pour différentes valeurs du paramètre d'anisotropie $\alpha = \{0,2, 0,5, 0,8\}$ avec le modèle de Giesekus et $\beta = 0,1$.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, les résultats de simulations d'écoulements viscoélastiques non-affines à travers un canal de section carrée sont présentés. D'abord, des validations numériques de notre outil de calcul sont menées. En s'appuyant sur les résultats de la littérature et en utilisant des techniques numériques, la précision ainsi que la robustesse des méthodes numériques implémentées sont démontrées. Ensuite, avec $\mathbf{Re} = 1$ et pour une large gamme des nombres de Weissenberg, l'effet de la rhéofluidification du fluide sur le comportement de l'écoulement principal et des écoulements secondaires est étudiée en fonction du rapport de viscosité du solvant dans la viscosité totale β .

D'une part, nous avons montré que la diminution du β intensifie la diminution de la viscosité polymérique dans les régions des centres des parois. Cette intensification du caractère rhéofluidifiant du fluide induit l'élévation du champ de la vitesse principale au voisinage des parois et conséquemment engendre son aplatissement dans la région du centre de la conduite.

La tendance du coefficient de frottement $f\mathbf{Re}$ en fonction de β est aussi décrit. Aux larges valeurs du nombre de Weissenberg le coefficient de frottement se réduit à la contribution de la partie Newtonienne du fluide $\beta(f\mathbf{Re})_{Newt}$. La tendance du champ de la vitesse principale à retrouver la distribution du champ de la vitesse d'un fluide Newtonien, due à la présence d'une viscosité de base (viscosité du solvant), est également analysée.

D'autre part, l'intensification à travers β de la rhéofluidification conduit à la translation des centres des écoulements secondaires vers la paroi. Cependant, l'augmentation de la vitesse moyenne des écoulements secondaires est aussi donnée en fonction de β et du nombre de Weissenberg.

Par ailleurs, l'effet de la force d'inertie possède une incidence à la fois sur le comportement rhéologique de l'écoulement principal et sur la structure des écoulements secondaires. En effet, dans le cas d'une conduite rectiligne et pour la région complètement développée de l'écoulement, l'importance de la convection transverse sur le tenseur des contraintes viscoélastiques est proportionnel au nombre du Mach élastique réécrit à l'échelle des écoulements secondaires $(u_s^{moy})^{1/2}\mathbf{Ma}_0$, alors que l'importance de la convection transverse sur le vecteur vitesse est proportionnelle au nombre du Reynolds également réécrit à l'échelle des écoulements secondaires de Reynolds $u_s^{moy}\mathbf{Re}$.

En premier, aux valeurs relativement faibles de \mathbf{Re} , l'importance de la convection transverse sur le tenseur des contraintes viscoélastiques augmente davantage que sur le vecteur vitesse, engendrant ainsi la diminution de l'intensité des écoulements secondaires. En revanche, aux valeurs relativement élevées de \mathbf{Re} , l'effet de la force d'inertie sur le champ de la vitesse principale induit une évolution significative du taux de déformation dans la région de la diagonale et dans les régions des lignes de symétrie verticale et horizontale, conduisant à la réorganisation spatiale de la seconde différence des contraintes normales.

D'une part, cette évolution fait évoluer la structure des écoulements secondaires par l'apparition d'autres familles de tourbillon secondaire et d'autre part elle conduit à l'augmentation de la vitesse moyenne des écoulements secondaires aux larges valeurs de \mathbf{Re} , dans le domaine des valeurs intermédiaires de \mathbf{We} .

Finalement, l'effet de l'anisotropie du fluide de Giesekus α est aussi explorée pour différentes valeurs de \mathbf{Re} et de \mathbf{We} . L'augmentation de α accentue le caractère rhéofluidifiant du fluide et favorise l'évolution de la structure des écoulements secondaires.

CHAPITRE 6

Écoulement viscoélastique anisotherme dans une conduite de section carrée

Sommaire

5.1	Configuration de l'écoulement, repère local du tenseur des contraintes et validations.....	152
5.1.1	Configuration de l'écoulement	152
5.1.2	Repère viscométrique du tenseur des contraintes.....	154
5.1.3	Validations numériques	155
5.2	Effet du rapport de viscosité en relation avec l'élasticité du fluide	159
5.2.1	Écoulement principale	160
5.2.2	Écoulements secondaires	168
5.3	Effet de l'inertie du fluide en relation avec l'élasticité du fluide.....	173
5.3.1	Écoulement principale	174
5.3.2	Écoulements secondaires	183
5.4	Effet de l'anisotropie du fluide en relation avec l'inertie et l'élasticité du fluide ..	191
5.4.1	Écoulement principale	191
5.4.2	Écoulements secondaires	197
5.5	Conclusion.....	203

Dans l’optique de l’amélioration passive du transfert de chaleur lors d’écoulements dans les conduites rectilignes, il est possible d’augmenter le transfert de chaleur via l’exploitation des propriétés rhéologiques des fluides complexes sans utiliser nécessairement des modifications de la géométrie de la conduite, Alam and Kim [8].

En effet, il est rapporté expérimentalement par Oliver and Karim [159], Hartnett and Kostic [95, 96] et Gao and Hartnett [68], démontré d’une façon numérique par Gao and Hartnett [69], Naccache and Mendes [150] et Syrjälä [207] et analytiquement par Siginer and Letelier [203], que comparativement aux fluides purement visqueux ou Newtonien dans les mêmes conditions d’écoulement¹, l’écoulement incompressible et laminaire du fluide viscoélastique dans une conduite de section non-circulaire est accompagné d’une augmentation significative du taux de transfert de chaleur convectif et d’une réduction de la chute de pression nécessaire.

L’effet de la rhéofluidification ajouté à l’augmentation de la capacité de transport transversal de l’écoulement, grâce à la présence des écoulements secondaires, sont à l’origine de l’amélioration du transfert de chaleur convectif.

Cependant, malgré l’utilisation répandue dans l’industrie d’écoulements laminaires de fluides viscoélastiques non-affine à travers des sections non-circulaire, hormis le cas de la conduite de section circulaire (Coelho et al. [44]) et le cas des fluides inélastiques (Chandrupatla and Sastri [39] et Syrjälä [208]), le phénomène de transfert de chaleur dans de telles configurations n’a pas fait l’objet de nombreuses investigations.

De ce fait, le transfert de chaleur avec des fluides viscoélastiques non-affines dans des conduites de section non-circulaire a été déclaré comme un challenge scientifique au début des années 90 par Hartnett [94] et récemment (2010) Siginer and Letelier [203] a également déclaré que les caractéristiques du transfert de chaleur dans les écoulements laminaires des fluides viscoélastiques non-affines à travers les canaux de section quelconque restent encore une question ouverte. Avec des solutions de polymère dans l’état aqueux, Oliver and Karim [159] ont observé expérimentalement une amélioration du taux de transfert de chaleur de l’ordre de 40%.

Aux travers d’investigations numériques de l’écoulement d’un fluide viscoélastique, décrit par le modèle rhéologique de Reiner–Rivlin, dans une conduite de section rectangulaire, Naccache and Mendes [150] et Gao and Hartnett [69] ont mis en évidence le lien entre l’amélioration de transfert de chaleur et la présence des écoulements secondaires.

Avec différentes combinaisons des conditions aux limites thermiques, Gao and Hartnett [69] ont quantifié l’effet de l’intensité des écoulements secondaires sur l’augmentation du transfert de chaleur. Naccache and Mendes [150] ont prédit des augmentations du taux de transfert de chaleur convectif de l’ordre de 300% et montré que les écoulements secondaires sont le mécanisme dominant de l’amélioration du transfert de chaleur, deux fois plus important que l’effet rhéofluidifiant.

Avec le modèle rhéologique de Criminale–Ericksen–Filbey (CEF), Syrjälä [207] ont montré l’effet de la présence des écoulements secondaires sur le transfert thermique pour différents rapports d’aspect d’une conduite de section rectangulaire. Cependant, au regard de la direction des écoulements secondaires prédite par le modèle de Reiner–Rivlin et certains modèles dérivés du modèle CEF, les résultats sont non-conformes à l’observation expérimentale² et ce type de modèles rhéologiques est devenu obsolète dans le cadre de fluides polymériques, Yue et al. [239].

Le modèle de Giesekus et le modèle Phan–Thien Tanner sont plus réalistes que les modèles Reiner–Rivlin et CEF (voir Bird and Wiest [30] et [200]).

En utilisant une résolution analytique basée sur une méthode asymptotique, à faible nombre de Wiessenberg, Siginer and Letelier [203] et Siginer and Letelier [204] ont étudié cette améliora-

1. Avec la même géométrie et le même débit volumique.

2. L’analyse des écoulements secondaires est également au cœur de formulation des équations constitutives dans le cadre de la mécanique des fluides non-newtonien, Siginer [200].

tion du taux de transfert de chaleur pour différentes sections de passage (circulaire, carrée, rectangulaire et triangulaire) dans le cadre d'un fluide polymérique enchevêtré dépourvu de la viscosité de base (viscosité du solvant) décrit rhéologiquement par le modèle MPTT (modified Phan–Thien–Tanner). Les résultats sont présentés pour le fluide (MPTT) faiblement élastique (le nombre de Weissenberg est faible $We \leq 0.4$). Les auteurs ont montré que les valeurs du nombre de Weissenberg et les paramètres rhéologiques du fluide de MPTT jouent un rôle majeur dans le mécanisme d'amélioration de transfert de chaleur. En fonction de l'élasticité du fluide, l'évolution du taux de transfert de chaleur prédite par Siginer and Letelier [203] et Siginer and Letelier [204] (avec $Re = \{50, 250\}$, $Pr = 50$) montre d'abord un comportement monotonique aux très faibles valeurs d'élasticité du fluide, suivi d'un comportement asymptotique qui s'établit aux intensités élevées de l'élasticité du fluide.

Jalali et al. [105] ont présenté pour la première fois une étude numérique de l'écoulement tridimensionnel d'un fluide viscoélastique décrit rhéologiquement par le modèle de MPTT dans un canal de section carrée où les propriétés thermo-physiques et rhéologiques du fluide sont considérées dépendantes de la température. Une analyse de l'effet des écoulements secondaires et de la dissipation visqueuse est présentée pour une faible élasticité du fluide et une faible force d'inertie (pour $We = 0.04$, $Re = 10$ et $Pr = 5$). D'une part, ils ont montré que les paramètres rhéologiques peuvent affecter l'intensité des écoulements secondaires et par conséquent la valeur du taux de transfert convectif. Cependant, en raison des valeurs faibles d'élasticité et de la force d'inertie considérées par les auteurs, une faible amélioration du transfert thermique est relevée. D'autre part, l'analyse numérique rapportée montre que le taux du transfert de chaleur diminue avec l'augmentation de la dissipation visqueuse dans le cadre d'une configuration de chauffage par les parois. De plus, ils montrent dans le cadre d'une configuration du chauffage, que le taux de transfert de chaleur augmente d'abord avec l'augmentation de la dissipation visqueuse puis devient sujet d'une inversion du signe.

Récemment, Peres et al. [169] ont étudié les caractéristiques d'écoulement et de transfert de chaleur des fluides viscoélastiques décrits par la forme complète de l'équation constitutive MPTT (avec $Re \sim 1000$) dans un conduit rectangulaire. Ils ont étudié l'effet de certaines caractéristiques rhéologiques telles que la viscosité dépendante du taux cisaillement et également les effets de la convection naturel sur l'intensité de l'écoulement secondaire et ainsi sur l'amélioration du transfert de chaleur.

En utilisant le package commercial POLYFLOW, Filali et al. [65] ont étudié l'écoulement d'un fluide viscoélastique décrit par le modèle SPTT (simplified Phan-Thien-Tanner) à travers différentes sections de passage (circulaire, carrée, rectangulaire et triangulaire) et montré (avec $Pr \sim 50$) l'effet de la rhéofluidification sur l'augmentation du transfert de chaleur. Au-delà du fait que les écoulements secondaires ne sont pas décrits par le modèle SPTT, des écarts non négligeables entre la solution numérique obtenue et la solution analytique, dans le cadre d'un écoulement dans une conduite de section circulaire, restreint la validité de l'analyse des résultats uniquement aux faibles valeurs d'élasticité (faibles nombres de Weissenberg).

Encore plus récemment, en utilisant le même package commercial (POLYFLOW) Al Melhi et al. [7] ont également étudié l'écoulement d'un fluide viscoélastique décrit par le modèle de Giesekus à travers différentes sections de passage (circulaire, carrée, rectangulaire et triangulaire). Les effets de la rhéofluidification et de l'anisotropie du fluide de Giesekus dans l'augmentation du transfert de chaleur sont mis en évidence. Cependant, les très faibles valeurs de l'inertie du fluide considérées par les auteurs ($Re = 1$ et $Re = 1.5$ avec $Rr \sim 50$) mettent en défaut la contribution des écoulements secondaires dans l'amélioration du transfert thermique. Raison pour laquelle l'amélioration enregistrée dans le cas d'une conduite de section rectangulaire par Al Melhi et al. [7] est de l'ordre de 50%.

Enfin, hormis quelques investigations analytiques très récentes Letelier et al. [132] ($Re = 200$,

$\text{Pr} = 50$) et Siginer et al. [205] ($\text{Re} = 100$, $\text{Pr} = \{25, 50\}$) avec le fluide (MPTT) faiblement élastique (le nombre de Weissenberg $\text{We} \leq 0.4$), le mécanisme d'augmentation du taux de transfert de chaleur, dans le cadre d'écoulements laminaires de fluides viscoélastiques non-affines dans une conduite de section non-circulaire, en relation avec l'effet de l'inertie du fluide (nombre de Reynolds, écoulements secondaires), l'effet d'une forte élasticité (nombre de Weissenberg élevé), différents paramètres rhéologiques (rapport des viscosités, anisotropie du fluide) et en relation avec l'effet de la génération interne de la chaleur, demeurent encore sans réponse complète.

Après avoir analysé dans le chapitre précédent l'écoulement des fluides viscoélastiques dans des configurations isothermes, dans le présent chapitre nous tenterons d'élucider certains comportements et phénomènes liés aux effets thermiques, dans une configuration d'écoulement non isotherme, en conduite de section carrée, en s'affranchissant des limites de faibles nombres de Weissenberg et de faible inertie. Cela constitue aussi une nouvelle analyse et un apport original de notre travail.

6.1 Conditions aux limites thermiques et validations

Nous considérons l'écoulement anisotherme d'un fluide viscoélastique dans une conduite de section carrée et de longueur L_1 , voir figure 5.1. Pour les modèles rhéologiques considérés dans le chapitre précédent 5, sous les différentes combinaisons des paramètres rhéologiques, la solution de l'écoulement dans la région dynamiquement développée en termes des composantes du champs de vitesse \mathbf{u} et des composantes du tenseur des contraintes viscoélastiques $\boldsymbol{\tau}$ est connue. Par conséquent, à l'état stationnaire, l'équation de l'énergie se réduit au simple problème de Graetz incluant des termes de convection transverse et de dissipations, donné sous la forme suivante,

$$\text{Re Pr} \left(u_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial T}{\partial x_3} \right) = \Delta T + \text{Re Pr Ec } \Phi \quad (6.1)$$

où $\Phi = 2 \frac{\beta}{\text{Re}} (\mathbf{D} : \nabla \mathbf{u}) + (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u})$ est le terme source lié aux dissipations visqueuses Newtonienne et viscoélastique. Cependant, étant donné que la région d'entrée nécessite un maillage très fin (Muzychka and Yovanovich [149]), nous nous focalisons dans ce travail à l'étude de la région de la conduite thermiquement complètement développée. Pour permettre une analyse du taux de transfert convectif en relation avec le comportement du fluide, nous introduisons la température moyenne débitante $T^{moy}(x_1)$, appelée aussi température du mélange. Suivant Kays et al. [115, chap.9, p.113] et Shah and London [192], la température moyenne débitante est définie par rapport à l'écoulement principal en chacun des points le long de la conduite, comme suit :

$$T^{moy}(x_1) = \frac{1}{A \bar{u}_1} \int_0^1 \int_0^1 u_1 T \, dx_2 dx_3 \quad (6.2)$$

où $\bar{u}_1 = A^{-1} \int_0^1 \int_0^1 u_1(x_2, x_3) \, dx_2 dx_3$ est la vitesse moyenne et A est l'aire adimensionnée de la section de la conduite³. Nous introduisons aussi la température moyenne $T_w^{moy}(x_1)$ ainsi que le flux moyen $q_w^{moy}(x_1)$ sur le périmètre d'une section donnés par,

$$T_w^{moy}(x_1) = \frac{1}{P} \oint^P T_w(\mathbf{x}) \, dl \quad (6.3)$$

$$q_w^{moy}(x_1) = \frac{1}{P} \oint^P - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_w \, dl \quad (6.4)$$

où $T_w(\mathbf{x})$ et $\partial T / \partial \mathbf{n}$ sont respectivement la température locale en un point de la paroi et le gradient de température sur la paroi suivant la normale \mathbf{n} entrante, P représente le périmètre de la section

3. Pour une conduite de section carrée $A = \int_0^1 \int_0^1 dx_2 dx_3 = 1$

de la conduite et finalement dl est un élément infinitésimal appartenant au périmètre P . Pour analyser l'évolution du champ de la température dans la région complètement développée de la conduite, nous introduisons le champ de température normalisé définie par,

$$\Theta = \frac{T - T^{moy}}{T_w^{moy} - T^{moy}} \quad (6.5)$$

Ainsi, la région thermiquement complètement développée se caractérise par l'invariance du champ de température normalisée Θ suivant la direction de l'écoulement principal, c'est-à-dire, $\partial\Theta/\partial x_1 = 0$.

Notons que dans la suite du présent chapitre, deux conditions aux limites thermiques seront étudiées, suivant Shah and London [192, p.200], elles sont nommées $\textcircled{\text{H2}}$ et $\textcircled{\text{T}}$.

Finalement, le taux de transfert thermique convectif, le nombre de Nusselt local, en chacun des points le long de la conduite est défini comme suit,

$$\text{Nu}(x_1) = \frac{q_w^{moy}(x_1)}{T^{moy}(x_1) - T_w^{moy}(x_1)} \quad (6.6)$$

Notons que le nombre de Nusselt asymptotique est associé à la région thermiquement complètement développée.

6.1.1 Flux de chaleur constant et uniforme

La condition aux limites thermiques de flux de chaleur constant et uniforme $\textcircled{\text{H2}}$, consiste à prescrire circonférenciellement et axialement sur la conduite la même constante de flux de chaleur $q_w = -\partial T/\partial n = 1$. Pour un procédé de chauffage par les parois, les conditions aux limites thermiques $\textcircled{\text{H2}}$ s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial x_2} \Big|_{(x_1, x_2=0, x_3)} = -1 \\ \frac{\partial T}{\partial x_2} \Big|_{(x_1, x_2=1, x_3)} = 1 \\ \frac{\partial T}{\partial x_3} \Big|_{(x_1, x_2, x_3=0)} = -1 \\ \frac{\partial T}{\partial x_3} \Big|_{(x_1, x_2, x_3=1)} = 1 \\ T(x_1=0, x_2, x_3) = T_e = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x_1} \Big|_{x_1=L_1, x_2, x_3} = 0 \end{array} \right. \quad (6.7)$$

Lorsque la dissipation visqueuse est négligée, l'application de la conservation d'énergie à travers la section du canal permet l'obtention de la constante du gradient longitudinal de température : $\partial T/\partial x_1 = \partial T^{moy}/\partial x_1 = \partial T_w^{moy}/\partial x_1 = 4/(\text{RePr})$.

Finalement, notons que la température moyenne sur les parois de la conduite est donnée par l'expression (6.3) et l'expression de flux de chaleur moyenne sur les parois (6.4) se réduit à $q_w^{moy}(x_1) = q_w$. Ainsi le nombre de Nusselt local donné par (6.10) se réécrit comme suit pour la condition aux limites $\textcircled{\text{H2}}$,

$$\text{Nu}(x_1) = \frac{1}{T_w^{moy}(x_1) - T^{moy}(x_1)} \quad (6.8)$$

6.1.2 Température constante et uniforme

La condition aux limites thermiques de température constante et uniforme $\textcircled{\text{T}}$, consiste à imposer sur la circonférence et tout le long d'axe de la conduite une température T_w constante.

Pour un procédé de chauffage, les conditions aux limites thermiques \textcircled{T} s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} T(x_1, x_2=0, x_3) = T_w = 1 \\ T(x_1, x_2=1, x_3) = T_w = 1 \\ T(x_1, x_2, x_3=0) = T_w = 1 \\ T(x_1, x_2, x_3=1) = T_w = 1 \\ T(x_1=0, x_2, x_3) = T_e = 0 \\ \left. \frac{\partial T}{\partial x_1} \right|_{x_1=L_1, x_2, x_3} = 0 \end{array} \right. \quad (6.9)$$

D'autre part, lorsque la dissipation visqueuse est négligée, la constante du gradient longitudinal de température moyenne est usuel, elle s'écrit $\frac{\partial T}{\partial x_1} = \frac{(T_w^{moy} - T)}{(T_w^{moy} - T^{moy})} \frac{\partial T^{moy}}{\partial x_1} = 4 \frac{\mathbf{Nu}}{\mathbf{RePr}} (T_w^{moy} - T)$.

Notons que la température moyenne sur les parois de la conduite, donnée par l'expression (6.3), se réduit à $T_w^{moy}(x_1) = T_w$ et l'expression du flux de chaleur moyenné sur les parois est donnée par l'expression (6.4). Ainsi le nombre de Nusselt local donné par (6.10) se réécrit comme suit pour la condition aux limites \textcircled{T} ,

$$\mathbf{Nu}(x_1) = \frac{-\frac{1}{P} \oint \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_w dl}{T_w - T^{moy}(x_1)} \quad (6.10)$$

Notons que dans la région complètement développée et pour les conditions aux limites $\textcircled{H2}$ et \textcircled{T} , lorsque la dissipation visqueuse n'est pas prise en compte l'équation de l'énergie 6.1 peut se mettre sous la forme suivante :

$$u_1 \mathcal{C} + \mathbf{Re Pr} \left(u_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial T}{\partial x_3} \right) = \Delta T \quad (6.11)$$

où $\mathcal{C} = 4$ pour la condition $\textcircled{H2}$ et $\mathcal{C} = 4 \mathbf{Nu} (T_w^{moy} - T)$ pour la condition \textcircled{T} . On peut constater ainsi à travers l'équation 6.11 que la contribution de la convection longitudinale dans le transfert thermique dans la région complètement développée est indépendante du nombre de Péclet $\mathbf{Pe} = \mathbf{Re Pr}$. Cela indique pour un écoulement rectiligne ($u_2 = u_3 = 0$) que le taux de transfert thermique convectif asymptotique est une constante unique pour toutes les valeurs du nombre de Péclet. En revanche, pour un écoulement non-rectiligne, comme l'écoulement d'un fluide viscoélastique incluant des recirculations secondaires, l'importance de la convection transverse est proportionnelle au nombre de Péclet.

Dans le cas de la condition $\textcircled{H2}$, comme $\frac{\partial T}{\partial x_1}$ est constant dans la région complètement développée, la conduction axiale $\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2}$ est nulle. En revanche, avec la condition \textcircled{T} la température évolue exponentiellement suivant la direction longitudinale. Suivant Shah and London [192], pour les écoulements en conduite, la conduction axiale est négligeable en dehors de la zone d'entrée lorsque $\mathbf{Pe} \gg 50$. Dans la suite nous fixons $\mathbf{Pr} = 50$ et considérons $\mathbf{Re} \geq 1$, la conduction axiale peut donc être négligée dans le cas de la condition \textcircled{T} .

6.1.3 Validations numériques

Comme annoncé précédemment, dans ce chapitre nous nous focalisons sur l'étude de la région complètement développée d'un écoulement à travers une conduite de section carrée. À cet

égard, la figure 6.1 montre pour deux maillages ($7 \times 161 \times 161$ et $21 \times 161 \times 161$) la distribution du nombre de Nu en fonction $x_1 / (\text{Pr Re})$ dans le cas du fluide Newtonien (avec $\text{Re} = 1$ et $\text{Pr} = 50$) et pour les conditions aux limites de flux imposé (H_2) et de température imposée (T). Le nombre de Nusselt asymptotique est associé à la région complètement développée et ne requiert pas une forte résolution spatiale dans la direction longitudinale. Afin de diminuer le coût de calcul, un maillage de 7 points a été retenu pour la direction longitudinale. Par la suite, seuls les résultats dans la région complètement développée sont montrés où la température normalisée $\Theta(x_2, x_3)$ est indépendante de x_1 .

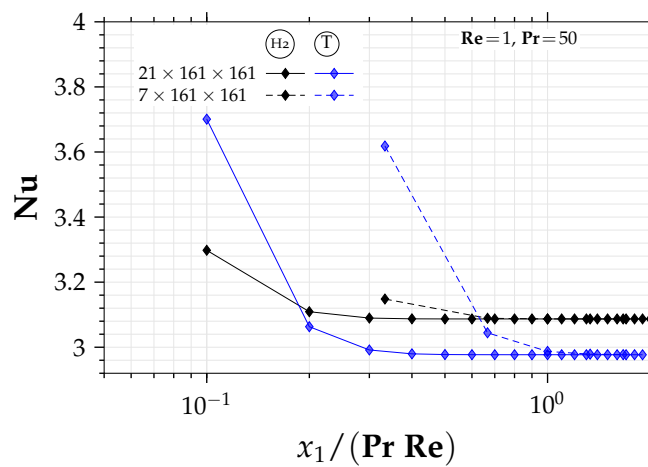


FIGURE 6.1 – Distribution du nombre de Nu en fonction $x_1 / (\text{Pr Re})$ dans le cadre du fluide Newtonien avec $\text{Re} = 1$ et $\text{Pr} = 50$ et pour les conditions aux limites de flux imposé (H_2) et de température imposée (T) et pour un maillage de $7 \times 161 \times 161$ et un maillage de $21 \times 161 \times 161$.

Par ailleurs, pour garantir la précision et l'efficacité des méthodes numériques implémentées pour la résolution de l'équation de l'énergie dans le cadre d'un écoulement anisotherme à travers une conduite de section carrée, nous menons une comparaison du nombre de Nusselt Nu avec les données disponibles dans la littérature pour les différentes conditions aux limites.

Le tableau 6.1 montre pour l'écoulement d'un fluide Newtonien, une comparaison du nombre de Nusselt asymptotique Nu avec les résultats donnés par Chandrupatla and Sastri [39] et Shah and Bhatti [191] sous la condition aux limites thermiques de flux imposé (H_2) et sous la condition de température imposée (T) et en fonction des différentes résolutions du maillage. On peut constater que les prédictions issues du présent travail et des résultats de références sont en très bon accord. Les écarts par rapport aux références sont inférieures à 1%, ce qui montre la validité de notre approche numérique s'agissant de la résolution de l'écoulement rectiligne anisotherme du fluide Newtonien.

TABLEAU 6.1 – Confrontation du nombre de Nusselt asymptotique \mathbf{Nu} obtenu avec le fluide Newtonien en fonction des différentes résolutions de la grille avec les résultats donnés par Chandrupatla and Sastri [39] et Shah and Bhatti [191] sous la condition aux limites thermique de flux imposé (H_2) et sous la condition de température imposée (T) et en fonction des différents résolutions du maillage.

résolution	$\mathbf{Nu} (H_2)$	$\mathbf{Nu} (T)$
41x41	3.0811	2.9708
81x81	3.0862	2.9756
161x161	3.0877	2.9770
Chandrupatla and Sastri [39]	3.095	2.975
Shah and Bhatti [191]	3.091	2.976

Cependant, étant donné que les termes de convection transverse sont nuls pour l'écoulement de fluide Newtonien et vu la rareté des données de référence en relation avec le nombre de Reynolds \mathbf{Re} dans le cas de l'écoulement de fluide viscoélastique non-affine. Nous nous basons sur les validations présentées précédemment au chapitre 4, portant sur le problème de cavité différentiellement chauffée (voir section 4.2.3) et le problème de la cavité entraîné et chauffée par le haut (voir section 4.2.4) pour garantir la précision et l'efficacité de notre code de calcul vis-à-vis de l'implémentation des méthodes numériques liées au terme de convection transverse dans l'équation de l'énergie. Finalement, pour une précision optimale, nous adoptons la résolution 161x161 dans les sections suivantes.

6.2 Effet du rapport de viscosité β du fluide

L'effet de la rhéofluidification sur le transfert thermique est analysé dans cette section à travers l'effet du rapport de la viscosité du solvant $\beta = \mu_s / \mu_0$ en fonction du nombre de Weissenberg \mathbf{We} , lorsque $\mathbf{Re} = 1$, $\mathbf{Pr} = 50$ et en négligeant dans un premier temps l'effet de la dissipation visqueuse $\mathbf{Ec} = 0$. Étant donné que les termes de convection thermique transverse sont proportionnels à $u_s^{moy} \mathbf{RePr}$ (voir équation 6.11) et comme l'intensité des écoulements secondaires est de l'ordre $u_s^{moy} \simeq 10^{-3}$, la contribution des termes de convection transverse à l'établissement du transfert thermique lorsque $\mathbf{Re} = 1$ et $\mathbf{Pr} = 50$ demeure très inférieur à l'unité. Ainsi, avec de tels ordres de grandeur des nombres de Reynolds et de Prandtl, l'apport des écoulements secondaires aux taux du transfert thermique convectif est négligeable. Par conséquent, les déviations de l'évolution du transfert thermique convectif comparativement au fluide Newtonien sont uniquement dues à l'effet de la rhéofluidification, à l'égard de l'écoulement principal.

En ce sens, la figure 6.2 illustre le champ de la température normalisé $\Theta = (T - T^{moy}) / (T_w^{moy} - T^{moy})$ dans la région complètement développée sous la condition aux limites de flux imposé (H_2) en fonction du rapport de viscosité $\beta = \{1, 0.1, 0.001\}$ avec $\mathbf{Re} = 1$ et $\mathbf{Pr} = 50$ et pour un nombre de $\mathbf{We} = 1$, associé au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$).

On peut constater que les isothermes sont convexes dans la région de la diagonale, ce qui signale la non-intervention des écoulements secondaires $u_s^{moy} \mathbf{RePr} \simeq 10^{-2}$, et donc seulement liés aux conditions aux limites aux parois ainsi qu'à l'advection dans la direction principale.

Par ailleurs, on relève une diminution de la température dans la région du centre de la conduite avec la diminution du rapport de viscosité du solvant $\beta = \{1, 0.1, 0.001\}$, indiquant l'augmentation du transfert thermique pariétale.

Pour illustrer cela, en s'appuyant sur l'isovaleur $\Theta = 0.5$, on peut constater que la diminution de la température avec l'intensification de la rhéofluidification est davantage importante dans

les régions des lignes de symétrie que dans les régions des lignes diagonales. En effet, comme la diminution de β est liée à l'élévation de la vitesse principale dans les voisinages des centres des parois, la prononciation de la diminution de la température est due à l'élévation de la vitesse principale.

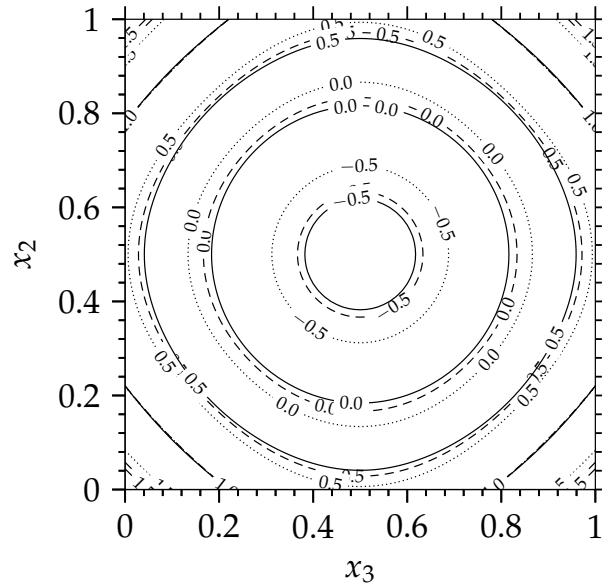


FIGURE 6.2 – Champs de la température normalisée $\Theta = (T - T^{moy}) / (T_w^{moy} - T^{moy})$ en fonction du rapport du viscosité $\beta = \mu_s / \mu_0$ associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) et $\text{Pr} = 50$, $\text{Re} = 1$ et $\text{We} = 1$, dans la région complètement développée pour la condition au limite de flux imposé (H2). Avec — $\beta = 1$ (fluide Newtonien), - - - $\beta = 0.1$, $\beta = 0.001$.

L'évolution du taux de transfert convectif asymptotique en fonction du nombre de Weissenberg $\text{We} = [0.1, \dots, 10]$ et pour différents rapports de viscosité $\beta = [0.8, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001, 10^{-7}]$ est donnée par la figure 6.3 pour les cas de la condition aux limites de flux imposé (H2) et de la condition de température imposée (T).

En premier, on relève la similarité en termes d'évolution entre les valeurs du nombre de Nusselt obtenues avec les deux conditions aux limites ; de flux imposé (H2) et de température imposée (T). Notons aussi, la prévalence des valeurs du nombre de Nusselt associées à la condition (H2) par rapport aux valeurs du nombre de Nusselt associées à la condition (T) pour l'ensemble des nombres de Weissenberg considérés.

De plus, notons que pour le modèle d'Oldroyd-B ($\alpha = 0$), les valeurs du nombre de Nu obtenues pour différentes valeurs de β et de We se confondent avec la valeur Newtonienne. En effet, comme à l'état stationnaire la solution de l'écoulement d'Oldroyd-B en termes de champ de la vitesse principale est indépendante à la fois du nombre de Weissenberg et du rapport de viscosité, par conséquent, le taux de transfert thermique convectif se maintient identique à celui d'un fluide Newtonien (voir tableau 6.1).

Par ailleurs, pour le modèle de Giesekus avec ($\alpha = 0.5$), la figure 6.3 renseigne, en premier, que les valeurs du nombre de Nu , pour différents rapports de viscosité β présentent une évolution non-monotonique en fonction du nombre de Weissenberg We . Ensuite, on relève qu'en fonction du We , la diminution du rapport de viscosité β favorise davantage l'augmentation du nombre de Nusselt. Cependant, aux larges valeurs du nombre de Weissenberg ($\text{We} \gg 1$), les valeurs terminales du nombre de Nusselt convergent vers la valeur du fluide Newtonien.

Au même titre que la présence du maximum du nombre de Nusselt en fonction du We , la

tendance du nombre de Nusselt aux larges valeurs du We est liée à la dépendance de la viscosité polymérique du taux de cisaillement, c'est-à-dire à la rhéofluidification. En effet, la diminution du rapport de viscosité β lié à une intensification de la rhéofluidification, conduit à l'élévation du champ de la vitesse principale au voisinage des centres des parois et à son aplatissement dans la région du centre de la conduite.

Comme nous l'avons montré au chapitre précédent, le phénomène d'élévation/aplatissement du champ de la vitesse principale est intimement dépendant des paramètres rhéologiques et du nombre de Weissenberg.

Par ailleurs, lorsque la contrainte de cisaillement polymérique $\bar{\tau}_{12}$ devient inférieure à la contrainte de cisaillement Newtonienne $\bar{\tau}^N$ (voir chap6, figure), l'élévation/aplatissement du champ de la vitesse principale connaît en fonction de We une inversion de tendance. Le champ de la vitesse principale tend à retrouver le champ de la vitesse d'un fluide Newtonien aux larges valeurs du nombre de Weissenberg. C'est la raison pour laquelle les valeurs du nombre de Nusselt aux larges valeurs de We tendent vers la valeur du fluide Newtonien.

Notons que pour tout rapport de viscosité du solvant non nul ($\beta \neq 0$), de fait de l'effet de prépondérance de la contrainte de cisaillement Newtonienne, l'allure du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Weissenberg We est condamnée à adopter un comportement non-monotonique. La valeur du nombre de Weissenberg pour laquelle le taux de transfert de chaleur convectif maximal est atteint croît avec la diminution du rapport de viscosité β .

Pour les deux conditions aux limites considérées, l'accroissement maximal du nombre de Nusselt par rapport aux valeurs Newtoniennes, ainsi que les nombres de Weissenberg correspondants sont rapportés sur le tableau 6.2.

D'autre part, pour $\beta = 0$, un comportement d'abord monotonique du nombre de Nusselt aux valeurs faibles du nombre de Weissenberg et ensuite asymptotique aux valeurs intermédiaires du nombre de Weissenberg a été prédit par Siginer and Letelier [202, 203] pour un fluide de PTT ($\epsilon = 0.25, \zeta = 0.1$) avec $RePr = 100$.

En se basant sur la figure 6.3, on peut remarquer que la tendance du nombre de Nusselt décrite par Siginer and Letelier [202, 203] est en effet la limite supérieure attendue aux valeurs intermédiaires et larges du nombre de Weissenberg, lorsque $\beta \rightarrow 0$.

Pour les polymères enchevêtrés, la tendance (ou la dynamique) de phénomène d'élévation/aplatissement du champ de la vitesse principale avec l'accroissement du nombre de Weissenberg ne s'inverse pas aux larges valeurs de We , du fait que la contrainte de cisaillement est uniquement polymérique. L'évolution des valeurs du nombre de Nusselt dans cette configuration est strictement monotonique aux faibles valeurs de Weissenberg et tend vers une valeur plateau aux larges valeurs du nombre de Weissenberg.

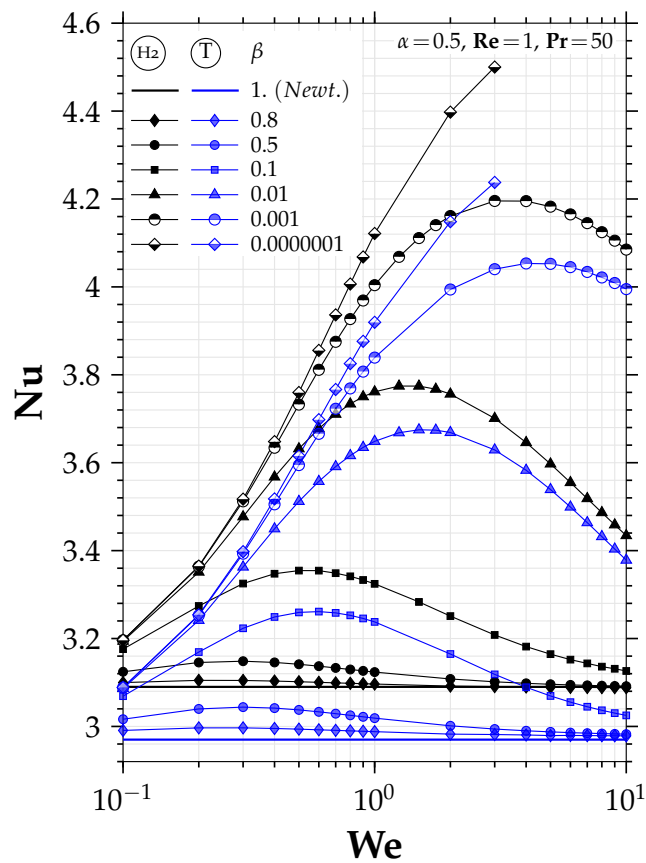


FIGURE 6.3 – Évolution du nombre de Nusselt asymptotique Nu en fonction du nombre de Weissenberg $We = [1, 10]$ pour différents rapports de viscosité du solvant dans la viscosité totale $\beta = \mu_s / \mu_{t0} = [10^{-7}, 0.8]$, avec le modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) et avec $Re = 1$ et $Pr = 50$ et pour les conditions aux limites de de flux imposé $\textcircled{H_2}$ et de température imposée \textcircled{T} .

TABLEAU 6.2 – Accroissement maximal du nombre de \mathbf{Nu} associé au nombre de Weissenberg correspondant pour différents rapport de viscosité β , obtenu avec le modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $\mathbf{Re} = 1$ et $\mathbf{Pr} = 50$ pour la condition de flux imposé (H2) et pour la condition de température imposée (T).

α	β	(H2)			(T)		
		\mathbf{We}_{max}	\mathbf{Nu}_{max}	accr. %	\mathbf{We}_{max}	\mathbf{Nu}_{max}	accr. %
0(<i>Newt., Oldy-B</i>)	1.	-	3.095	-	-	2.975	-
0.5	0.8	0.2	3.1048	0.31	0.3	2.9967	0.73
0.5	0.5	0.3	3.1484	1.72	0.3	3.0439	2.31
0.5	0.1	0.5	3.3545	8.38	0.6	3.2612	9.62
0.5	0.01	1.25	3.7744	21.95	1.50	3.6748	23.52
0.5	0.001	3.	4.1955	35.55	4.	4.0533	36.24

6.3 Effet des écoulements secondaires sur le transfert thermique

Pour un rapport de viscosité β constant, l'effet de la convection transverse des écoulements secondaires $u_s^{moy} \mathbf{RePr}$ sur le transfert de chaleur dans la région complètement développée est à la fois lié à l'inertie du fluide, à travers le nombre de Reynolds \mathbf{Re} , et à l'élasticité du fluide, par le biais de la dépendance de la vitesse moyenne des écoulements secondaires du nombre de Weissenberg \mathbf{We} et du paramètre d'anisotropie du fluide α .

Dans cette section nous analysons l'effet des écoulements secondaires sur le transfert thermique en fonction de l'inertie et de l'anisotropie du fluide de Giesekus.

6.3.1 Effet de l'inertie du fluide (nombre de Reynolds) sur le transfert thermique

Pour le modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec un rapport de viscosité $\beta = 0.1$ et avec $\mathbf{Pr} = 50$, la figure 6.4 montre la distribution spatiale du champ de température dans la section de la conduite associée à la région complètement développée en fonction du nombre de Reynolds $\mathbf{Re} = [10, 1200]$ et pour deux valeurs du nombre de Weissenberg $\mathbf{We} = 0.3$ et $\mathbf{We} = 1$, dans le cas de la condition aux limites thermiques du flux imposé (H2).

D'emblée, comparativement aux résultats précédents pour lesquelles l'effet de l'inertie du fluide est négligeable ($\mathbf{Re} = 1$, $\mathbf{Pr} = 50$) (voir figure 6.3 avec $\beta = 0.1$), lorsque le nombre de Reynolds augmente d'un ordre de grandeur ($\mathbf{Re} = 10$, $\mathbf{We} = 1$) on peut remarquer la perte de convexité des isothermes dans les régions de la diagonale. Ce fait indique l'effet de la convection transverse pour cet ordre de grandeur du nombre de Reynolds. Par ailleurs, pour un nombre de Weissenberg relativement faible $\mathbf{We} = 0.3$ et pour les valeurs du nombre de Reynolds relativement élevées $\mathbf{Re} \leq 500$, on constate, d'une part, une distorsion des isothermes dans les régions des lignes diagonales, et d'autre part, la convection des isothermes vers les parois dans les régions des lignes de symétrie.

Notons que cette tendance est en accord avec la distribution spatiale de l'intensité des écoulements secondaires, qui prend ses valeurs maximales dans les régions citées. Cependant, l'accentuation du phénomène distorsion-convection avec l'augmentation du nombre de Reynolds est issue de l'accroissement de l'importance de l'effet des écoulements secondaires ($u_s^{moy} \mathbf{RePr}$) évacuant de la chaleur des parois vers le centre de la conduite.

Pour des valeurs plus élevées du nombre de Reynolds $\mathbf{Re} \geq 700$, on distingue une seconde famille d'isothermes attachées à la région du centre de la conduite.

L'apparition de cette seconde famille d'isothermes coïncide avec la restructuration des écoulements secondaires avec l'augmentation du nombre de Reynolds engendrant l'apparition de nouvelles familles d'écoulements secondaires contrarotatifs dans le centre de la conduite (voir section

5.3.2).

On peut remarquer que cette seconde famille d'isothermes tend à augmenter la température dans le centre de la conduite (en intensifiant le mélange des couches fluides), défavorisant ainsi le procédé du chauffage pour cette configuration d'écoulement sous la condition aux limites thermiques $\textcircled{\text{H2}}$.

Pour des valeurs davantage plus élevées du nombre de Reynolds $\text{Re} \geq 500$, l'intensification de l'importance du transfert convectif (u_s^{moy}) RePr induit l'installation d'un fort gradient de la température dans la région de la diagonale indiquant l'intensification du transfert de chaleur. Cependant, la seconde famille des écoulements secondaires dans les régions des lignes de symétrie induit la convection de l'isotherme de la température moyenne $\Theta = 0$ vers le centre de la conduite, ce qui défavorise le transfert de chaleur parois/fluide.

L'accentuation du transfert convectif transverse u_s^{moy} RePr ne réside pas uniquement dans l'augmentation du nombre de Reynolds. En effet, il dépend également, à travers la vitesse moyenne des écoulements secondaires u_s^{moy} , du nombre de Weissenberg.

Dans cette optique, la figure 6.5 montre l'évolution du taux de transfert de chaleur convectif asymptotique Nu en fonction du nombre de Weissenberg $\text{We} = [1, 10]$ et du nombre de Reynolds $\text{Re} = [1, 1200]$, avec $\text{Pr} = 50$ et pour les deux différentes conditions aux limites imposées, $\textcircled{\text{H2}}$ et $\textcircled{\text{T}}$.

D'abord, rappelons que la seconde famille des écoulements secondaires apparaît, pour la gamme des nombres Reynolds simulés quand $\text{Re} > 500$ et leur fonction de courant maximal est de l'ordre $\sim 10^{-5}$ lorsque le nombre de Weissenberg $\text{We} \sim > 0.3$.

Par ailleurs, comparativement à $\text{Re} = 1$, lorsque $\text{Re} = 10$ on constate une augmentation légère des valeurs du nombre de Nusselt asymptotiques. Pour des valeurs davantage plus élevées du nombre de Reynolds $\text{Re} = [50, 1200]$, on obtient une amélioration significative du taux de transfert thermique, supérieure à 250%.

Toutefois, cette amélioration significative issue de l'augmentation du nombre de Reynolds est aussi intimement dépendante du nombre de Weissenberg. En premier, pour les valeurs du nombre de Reynolds $\text{Re} = [50, 100]$, on constate que le nombre de Nusselt maximal enregistré en fonction de We est en accord avec la vitesse moyenne des écoulements secondaires en fonction de We , donnée par 5.25. Ce fait indique le rôle de la vitesse moyenne des écoulements secondaires et donc de l'élasticité via We , dans l'importance du transfert convectif transverse u_s^{moy} RePr .

Ensuite, pour $\text{Re} = 500$, on remarque que le taux du transfert convectif maximal et la vitesse moyenne des écoulements secondaires ne concordent pas avec l'augmentation du nombre de Weissenberg. En effet, le nombre de Nusselt maximal est obtenu pour $\text{We} \sim 0.3$. Ce résultat est dû à l'apparition de la seconde famille des écoulements secondaires dont la fonction de courant devient $\sim 10^{-5}$ autour $\text{We} \sim 0.4$.

L'augmentation en intensité de la seconde famille des écoulements secondaires avec Weissenberg induit un changement du mécanisme du transfert de chaleur dans la région du centre de la conduite résultant une diminution relative du taux de transfert de chaleur convectif.

Cet effet est très remarquable avec les valeurs plus élevées du nombre de Reynolds $\text{Re} \geq 700$, lorsque $\text{We} \sim 0.3$, où le nombre de Nusselt subit un changement de régime en fonction du nombre de Weissenberg. D'abord pour $\text{We} = \{0.1, 0.2\}$, l'étendue et l'intensité de la seconde famille des écoulements secondaires sont négligeables (extrêmement concentrés dans la région du centre de la conduite avec une intensité $\psi_2^{\text{max}} < 5 \cdot 10^{-5}$), et le transfert de chaleur est régi uniquement par les écoulements secondaires initiaux. Puis, pour $\text{We} = 0.3$, l'étendue et l'intensité de la seconde famille des écoulements secondaires entravent l'efficacité du transfert de chaleur dans le centre de la conduite, ce qui induit la diminution du taux de transfert convectif. Ensuite, l'augmentation de la vitesse moyenne des écoulements secondaires u_s^{moy} avec le nombre de Weissenberg dans le do-

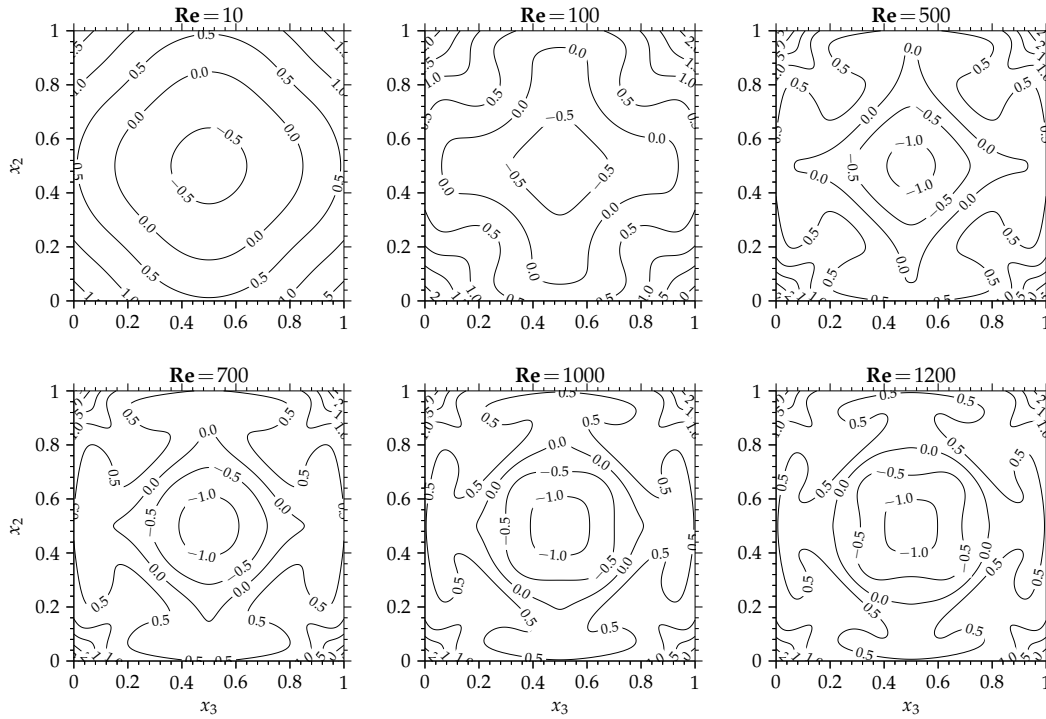
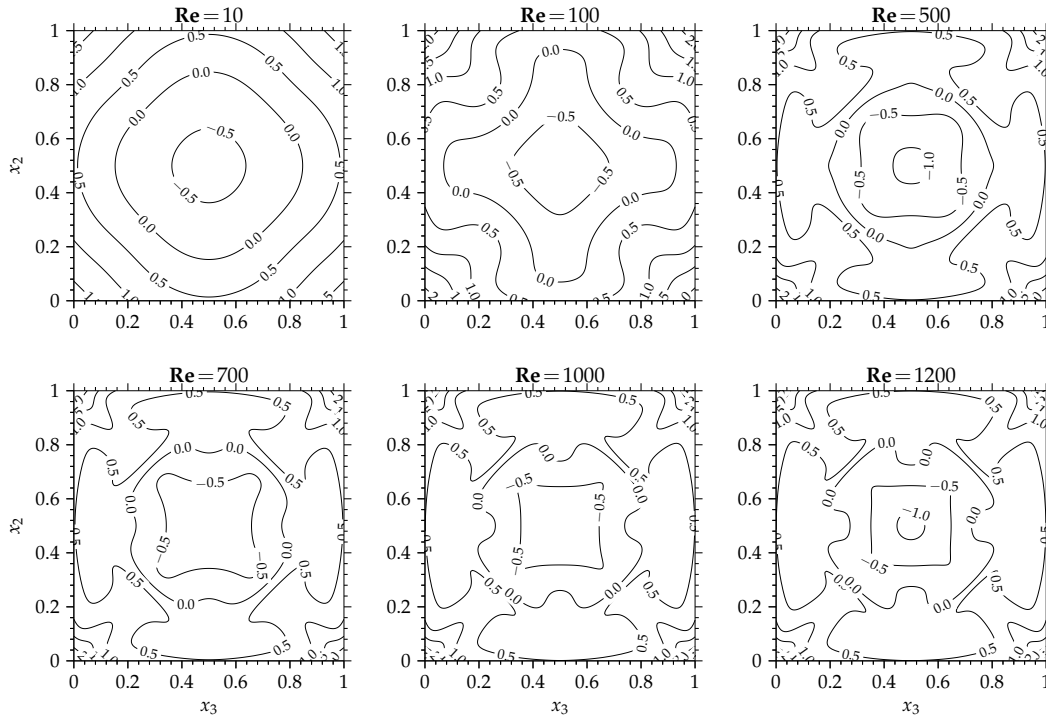
We = 0.3

We = 1


FIGURE 6.4 – Champs de la température adimensionnée $\Theta = (T - T^{moy}) / (T_w^{moy} - T^{moy})$ dans la région complètement développée en fonction du nombre de Reynolds $\text{Re} = [10, 100, 500, 700, 1000, 1200]$, pour $\text{We} = 0.3$ et $\text{We} = 1$ associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) et $\beta = 0.1$ avec $\text{Pr} = 50$ et pour la condition thermique au limite (H2) .

maine $0.4 < \text{We} \sim < 1$ engendre une intensification des écoulements secondaires initiaux $u_s^{moy} \text{RePr}$. Finalement, pour les valeurs plus élevées du nombre de Weissenberg $\text{We} > 1$, comme la vitesse moyenne des écoulements secondaires subit une diminution aux larges nombres de Weissenberg comme $u_s^{moy} \sim \text{We}^{-1}$, le nombre de Nusselt asymptotique subit aussi une diminution similaire.

Enfin, on peut constater que les valeurs du taux de transfert de chaleur convectif obtenues avec la condition aux limites de flux imposé (H2) sont supérieures à celles obtenues avec la condition de température imposée (T). De plus, avec l'augmentation du nombre de Reynolds, on enregistre un accroissement des écarts des valeurs obtenues pour les deux conditions aux limites.

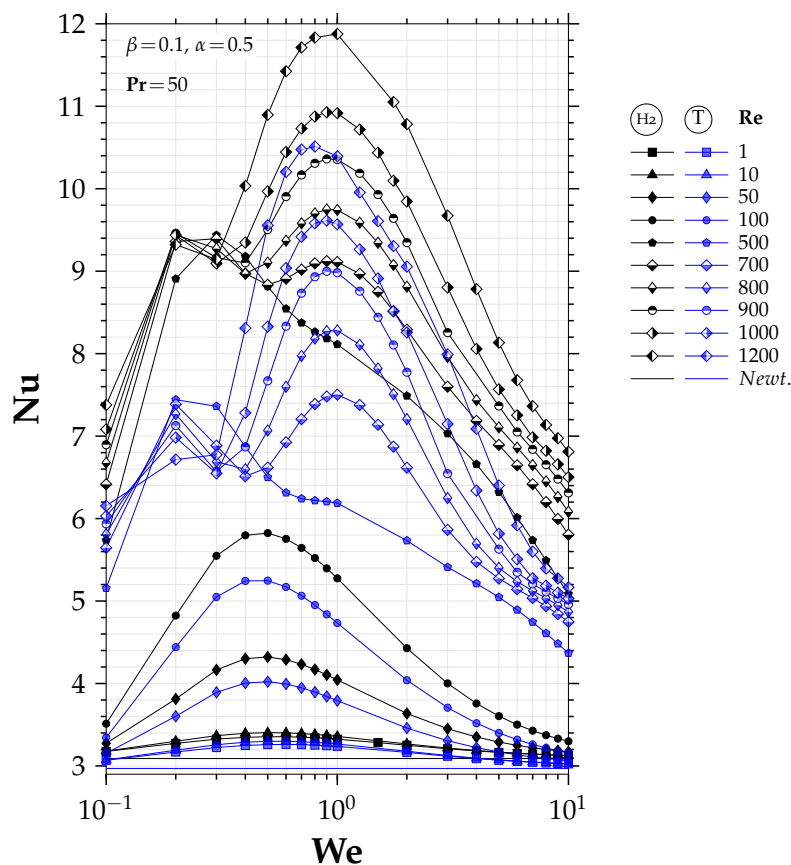


FIGURE 6.5 – Évolution du nombre de Nusselt asymptotique Nu en fonction du nombre de Weissenberg $\text{We} = [1, 10]$ et en fonction du nombre de Reynolds $\text{Re} = [1, 1200]$ pour le modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) et $\beta = 0.1$ et avec $\text{Pr} = 50$ et pour les conditions aux limites de flux imposé (H2) et de température imposée (T).

Pour mieux constater le rôle du transfert convectif transverse dans l'amélioration du transfert thermique, avec l'augmentation du nombre de Reynolds, nous avons enregistré sur la figure 6.6, l'évolution du nombre de Nusselt asymptotique Nu en fonction de l'importance de la convection transverse $u_s^{moy} \text{RePr}$ pour différentes valeurs du nombre de Weissenberg $\text{We} = [1, 10]$ et différentes valeurs du nombre de Reynolds $\text{Re} = [50, 1200]$ avec $\text{Pr} = 50$.

Plusieurs tendances peuvent en être prélevées. D'abord, aux faibles nombres de Reynolds $\text{Re} = [50, 100]$, on constate l'unicité du comportement du nombre de Nusselt en fonction du transfert convectif transverse avec une amélioration du taux de transfert thermique en fonction du nombre de Weissenberg.

Ensuite, pour une valeur du nombre de Reynolds relativement élevée $\text{Re} = 500$, on remarque pour $\text{We} \sim [0.4, 0.9]$ que malgré que le transfert convectif transverse augmente, le nombre de Nusselt diminue indiquant l'action de la seconde famille des écoulements secondaires. Toutefois

l'amélioration du transfert thermique maximale est proche de 100%.

D'autre part, pour les valeurs plus élevées du nombre de Reynolds $\mathbf{Re} > 700$, comme les écoulements secondaires associés sont assujettis à la seconde famille des écoulements secondaires, on constate un changement de régime du nombre de Nusselt dans le domaine des faibles valeurs du nombre de Weissenberg.

En effet, une stagnation du taux de transfert thermique s'esquisse autour de $u_s^{moy} \mathbf{RePr} \sim [40, 80]$ correspondant à un nombre de Weissenberg autour de $\mathbf{We} \sim 0.3$ suivie d'une augmentation jusqu'à un nombre de Weissenberg de $\mathbf{We} = 1$.

On note que l'accroissement maximal du nombre de Nusselt dans cette tranche des nombres de Weissenberg est supérieur à 200%. Finalement, pour les nombres de Weissenberg plus élevés (forte élasticité) $\mathbf{We} > 1$ les valeurs du taux de transfert convectif décroissent mais à un taux semblable, c'est-à-dire suivant la même pente. L'effet de l'inertie longitudinale l'emporte sur l'effet élastique.

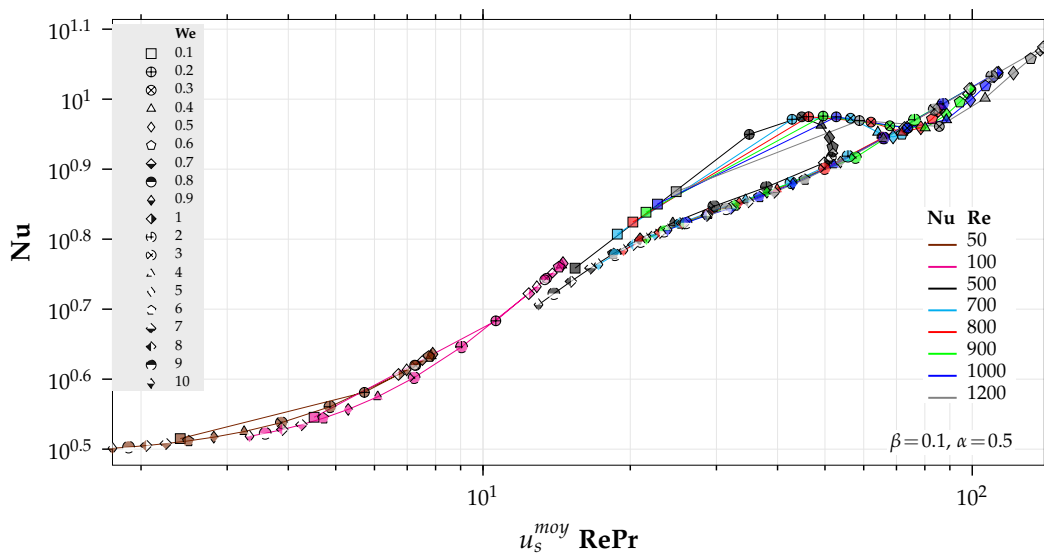


FIGURE 6.6 – Évolution du nombre de Nusselt asymptotique \mathbf{Nu} en fonction de l'importance de la convection transverse $u_s^{moy} \mathbf{RePr}$ pour les différents nombres de Reynolds $\mathbf{Re} = [50, 1200]$ et pour les différents nombres de Weissenberg $\mathbf{We} = [1, 10]$ pour le modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) et $\beta = 0.1$ et avec $\mathbf{Pr} = 50$ et pour les conditions aux limites de flux imposé (H_2) .

6.3.2 Effet de l'anisotropie du fluide sur le transfert thermique

Comme montré dans le chapitre précédent 5, l'intensité des écoulements secondaires ainsi que leurs structures en fonction de la force d'inertie du fluide sont également dépendantes de l'anisotropie du fluide. Par conséquent, le taux de transfert convectif asymptotique est pareillement dépendant de l'anisotropie du fluide et du nombre de Reynolds. En ce sens, la figure 6.7 illustre le nombre de Nusselt asymptotique \mathbf{Nu} en fonction du paramètre d'anisotropie du fluide de Giesekus $\alpha = [0.2, 0.5, 0.8]$ avec $\beta = 0.1$ et en fonction du nombre de Weissenberg $\mathbf{We} = [1, 10]$ et pour différents nombres de Reynolds $\mathbf{Re} = \{1, 100, 500\}$ et avec $\mathbf{Pr} = 50$, pour les conditions aux limites de flux imposé (H_2) et de température imposée (T) .

D'abord, pour une valeur relativement faible du nombre de Reynolds $\mathbf{Re} = 1$, on enregistre avec l'augmentation du paramètre d'anisotropie α une amélioration du transfert thermique dans le domaine des faibles valeurs du nombre de Weissenberg. Cette amélioration du transfert thermique est issue de l'intensification de l'effet de la rhéofluidification avec l'augmentation α engendrant une élévation croissante des valeurs de la vitesse principale au voisinage des centres des

parois. Cependant, on note que l'accroissement du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Weissenberg et pour les différentes valeurs paramètres d'anisotropie est en accord avec l'élévation maximale de la vitesse principale.

Par suite, pour une valeur relativement élevée du nombre de Reynolds $\mathbf{Re} = 100$, on note avec l'augmentation du paramètre d'anisotropie α un accroissement significatif du nombre de Nusselt asymptotique dans le domaine de valeurs intermédiaires du nombre de Weissenberg $\mathbf{We} = [0.2, 4]$. Toutefois, on constate que les améliorations obtenues avec l'ensemble des valeurs d'anisotropie α concordent avec l'importance du taux de transfert convectif $u_s^{moy} \mathbf{RePr}$. À l'inverse, pour une valeur élevée du nombre de Reynolds $\mathbf{Re} = 500$, on note pour $\alpha = 0.2$, dont l'intensité de la seconde famille des écoulements secondaires est négligeable, que l'augmentation du nombre de Weissenberg s'agence parfaitement avec la vitesse moyenne des écoulements secondaires ou encore avec l'importance du transfert convectif $u_s^{moy} \mathbf{RePr}$.

En revanche, pour $\alpha = 0.5$ la vitesse moyenne ne concorde pas avec l'évolution du nombre de Nusselt asymptotique⁴. En effet, comme indiqué précédemment ce fait est liée à l'action de la seconde famille des écoulements secondaires dans la région du centre de la conduite. On peut remarquer qu'avec $\mathbf{We} = 0.3$ la fonction de courant maximale de la seconde famille des écoulements secondaires est négligeable ($\psi_2^{max} < 10^{-6}$) alors que qu'avec $\mathbf{We} = 0.3$, elle est ($\psi_2^{max} > 5 \cdot 10^{-6}$). Cependant, avec l'augmentation du nombre de Weissenberg l'intensité de la seconde famille des écoulements secondaires (ψ_2^{max}) augmente plus vite que l'intensité des écoulements secondaires initiaux (ψ_1^{max})⁵. Ainsi, dans le domaine $\mathbf{We} = [0.4, 0.6]$ le nombre du Nusselt diminue car pour cette tranche des nombres de Weissenberg l'évolution de l'intensité de la seconde famille d'écoulements secondaires (ψ_2^{max}) par rapport à l'évolution des écoulements secondaires initiaux (ψ_1^{max}) à pour effet d'amortir le transfert thermique.

Raison pour laquelle la valeur maximale du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Weissenberg est atteinte pour $\mathbf{We} = 0.3$. D'autres part, avec $\alpha = 0.8$, on constate que le nombre de Nusselt asymptotique subit un décrochage intervenant autour de $\mathbf{We} = 0.3$.

D'une façon similaire, on peut remarquer que ce comportement survient lorsque la fonction de courant maximale de la seconde famille des écoulements secondaires devient supérieure à $\psi_2^{max} > 5 \cdot 10^{-6}$. Ensuite, malgré l'augmentation de l'intensité de la seconde famille des écoulements secondaires dans le domaine du nombre de Weissenberg $\mathbf{We} = [0.4, 0.7]$, le taux de transfert convectif augmente dans ce domaine des nombres de Weissenberg. En effet, comme l'intensité des écoulements secondaires initiaux est plus accentuée pour $\alpha = 0.8$, le nombre de Nusselt subit une augmentation. Finalement, notons qu'un comportement semblable est obtenu avec $\alpha = 0.5$ lorsque les valeurs du nombre de Reynolds sont plus élevées $\mathbf{Re} \geq 700$.

4. Pour étayer notre analyse on est amené remettre en scène l'évolution du nombre de Nusselt asymptotique lorsque $\alpha = 0.5$ et $\mathbf{Re} = 500$.

5. Rappelons que la valeur maximale de (ψ_2^{max}) en fonction du nombre de Weissenberg est obtenue pour $\mathbf{We} \sim 1$ et la valeur maximale de (ψ_1^{max}) est obtenue pour $\mathbf{We} \sim 0.6$.

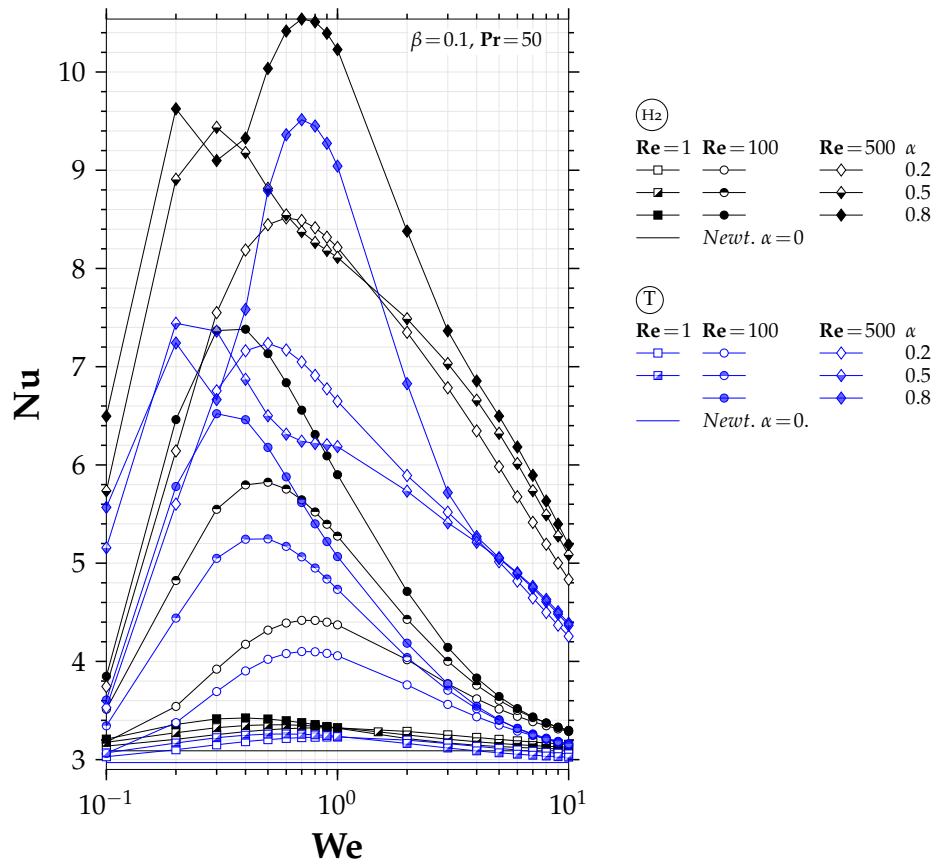


FIGURE 6.7 – Évolution du nombre de Nusselt asymptotique Nu en fonction du nombre de Weissenberg $We = [1, 10]$ et en fonction du paramètre d'anisotropie du fluide de Giesekus $\alpha = [0.2, 0.5, 0.8]$ et pour différents nombres de Reynolds $Re = \{1, 100, 500\}$ pour $\beta = 0.1$ et avec $Pr = 50$ et pour les conditions aux limites de flux imposé (H₂) et de température imposée (T).

6.4 Effet de la dissipation visqueuse totale

Les dissipations visqueuses Newtonienne et polymérique contribuent perpétuellement au chauffage interne du fluide pendant son écoulement. L'intensité de ces contributions est indiquée par la valeur absolue du nombre d'Eckert $|\text{Ec}|$. Rappelons que le nombre d'Eckert est défini par $\text{Ec} = \frac{u_1^2}{c_p \Delta T}$ où $\Delta T = (T_w - T_e)$.

Cependant, le signe du nombre d'Eckert permet l'identification de deux régimes de l'effet de la dissipation visqueuse totale à l'égard de la configuration des conditions aux limites du problème. En effet, le signe du nombre d'Eckert est attaché à la direction du transfert de la chaleur vis-à-vis du fluide, c'est-à-dire, si le fluide reçoit de la chaleur des parois de la conduite lors de son passage dans celle-ci (procédé de chauffage), ou à l'opposé, si le fluide cède de la chaleur aux parois pendant sa traversée (procédé de refroidissement). Pour les conditions aux limites thermiques, (H2) et (T) , adoptées dans le présent travail, la configuration d'un procédé de chauffage ($q_w > 0, (T_w - T_e) > 0$) est représentée par un nombre d'Eckert positif $\text{Ec} > 0$ et la configuration d'un procédé de refroidissement ($q_w < 0, (T_w - T_e) < 0$) est représentée par un nombre d'Eckert négatif $\text{Ec} < 0$.

Finalement, dans cette section, pour les configurations des procédés du chauffage et de refroidissement sous les conditions aux limites thermiques de flux imposé (H2) et de température imposée (T) , nous étudions l'effet des dissipations visqueuses Newtonienne et polymérique sur le transfert thermique en fonction du nombre de Weissenberg $\text{We} = [0.1, 10]$ et avec $\text{Pr} = 50$.

Dans un premier temps, indépendamment de l'effet de l'inertie du fluide ($\text{Re} = 1$ et $\text{Pr} = 50$), nous analysons l'interaction de l'effet des dissipations visqueuses via le nombre d'Eckert $\text{Ec} = [-0.1, \dots, 0, \dots, 0.1]$ avec la rhéofluidification du fluide pour différents rapports de viscosité rapport de viscosité $\beta = \{0.001, 0.01, 0.1\}$.

Ensuite, dans un second temps, nous analyserons l'interaction de l'effet des dissipations visqueuses en fonction du nombre d'Eckert $\text{Ec} = [0, \dots, 0.1]$ avec l'inertie du fluide Re , c'est-à-dire, lorsque l'effet des écoulements secondaires devient important $u_s^{moy} \text{RePr} > 1$.

6.4.1 Interaction rhéofluidification – dissipation visqueuse totale dans le cadre de la condition aux limites thermique de flux imposé

La figure 6.8 montre pour le modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $\text{Pr} = 50$ et $\text{Re} = 1$ le champ de la température normalisée Θ dans la région complètement développée en fonction du nombre d'Eckert $\text{Ec} = [0.1, 0.01, -0.1, -0.01]$ et en fonction du rapport de viscosité $\beta = \{0.1, 0.001\}$ pour $\text{We} = 0.2$ et $\text{We} = 5$ sous la condition aux limites thermiques de flux imposé (H2) .

D'abord pour la configuration d'un procédé de chauffage, i.e, les parois chauffent le fluide, $\text{Ec} > 0$ ($q_w > 0$). On constate comparativement à $\text{Ec} = 0$, donné par la figure 6.2, que l'augmentation du nombre d'Eckert $\text{Ec} > 0$ engendre une augmentation de la température particulièrement dans le voisinage des parois. Cela peut se constater à travers la localisation de l'isotherme $\Theta = 0.5$, par exemple, ou encore de l'isotherme $\Theta = 0$ correspondant à la température moyenne débitante.

En effet, pour la configuration du chauffage, l'effet de la dissipation visqueuse totale, s'incarnant par le chauffage interne du fluide, s'additionne avec l'action du flux chaleur positif imposé aux parois ($q_w > 0$) (flux chauffant), d'où l'augmentation de la température du fluide. Notons cependant que le comportement de la température globale du fluide en présence de l'effet de génération interne de chaleur signale la diminution du taux de transfert convectif. Par ailleurs, de manière globale, on note aussi la diminution de l'effet de la dissipation visqueuse totale, aussi bien sous l'effet de la diminution du rapport de viscosité β que par celui de l'augmentation du nombre

de We . Autrement dit, l'effet de la génération interne de chaleur s'amointrit avec l'intensification de la rhéofluidification et l'augmentation de l'élasticité.

Ensuite pour la configuration d'un procédé de refroidissement $Ec < 0$ ($q_w < 0$), on distingue en fonction de l'intensité de l'effet de la dissipation visqueuse totale et de l'intensité de la rhéofluidification β, We , deux familles d'isothermes. Rappelons que lorsque $Ec < 0$ l'action de la dissipation visqueuse totale est à l'opposé de la condition aux limites de flux négatif de refroidissement ($q_w < 0$). La génération de la chaleur produisant un chauffage interne du fluide tend à augmenter la température globale du fluide alors que la condition aux limites thermiques refroidit le fluide pendant son écoulement tout le long de la conduite.

En effet, on peut remarquer comparativement au champ de la température normalisée avec $Ec = 0$, donné par la figure 6.2, que lorsque $Ec = -0.01$ et pour une rhéofluidification relativement intense ($We = 5, \beta = 0.001$) la génération de la chaleur diminue la température normalisée dans le voisinage des centres des parois.

Étant donné que le flux imposé aux parois étant négatif ($q_w < 0$), la température moyenne sur les parois de la conduite T_w^{moy} est inférieure à la température du mélange T^{moy} . Dans ce cas, l'effet de la dissipation visqueuse engendre une augmentation de la température moyenne des parois se traduisant par la diminution de la température normalisée et donc un accroissement du taux de transfert convectif.

Avec la même intensité de la rhéofluidification (c'est-à-dire, $We = 5$ et $\beta = 0.001$) et lorsque l'effet de la dissipation visqueuse devient plus intense $Ec = -0.1$, la génération de chaleur induit une augmentation prononcée de la température moyenne des parois T_w^{moy} ainsi que de la température du mélange, cependant le fluide continue de céder de la chaleur aux parois. On note que l'effet de la dissipation visqueuse est davantage prononcé dans les régions correspondant aux larges taux de déformation, en proche des parois.

De plus, en combinant une augmentation du rapport de viscosité dans la même configuration, la dissipation est accrue et la génération de la chaleur induit une forte augmentation de la température moyenne sur les parois T_w^{moy} au point de devenir supérieure à la température du mélange T^{moy} indiquant l'inversion du signe du taux de transfert convectif.

En fin, lorsque $We = 0.2$ et pour un effet de la dissipation visqueuse totale plus intense $Ec = -0.1$, la génération de chaleur domine totalement l'effet de la condition aux limites de refroidissement et tend à uniformiser la température normalisée au voisinage des parois.

La dissipation visqueuse totale représente le travail des contraintes de cisaillement du fluide. Comme montré précédemment (??), à cause de la rhéofluidification et du rapport de viscosité non nul $\beta = (\mu_s / \mu_{t_0}) \neq 0$, la contrainte de cisaillement polymérique $\bar{\tau}_{12}$ est assujettie à la contrainte du solvant Newtonien $\bar{\tau}^N$.

Ce phénomène de dissipation est donc très dépendant de l'intensité de la rhéofluidification, c'est-à-dire, des valeurs du rapport de viscosité β et du nombre de Weissenberg We . Par conséquent, bien que la dissipation visqueuse totale $Ec\Phi$ est linéairement dépendante du nombre d'Eckert, elle présente aussi une dépendance non-linéaire en avec le rapport de viscosité du solvant β ainsi qu'avec le nombre de Weissenberg We .

Cette dissipation visqueuse totale Φ ainsi que ses composantes Newtonienne $\Phi_s = 2\beta / \text{Re } \mathbf{D} : \nabla \mathbf{u}$ et polymérique $\Phi_p = \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u}$, peuvent être représentées par leur valeur moyenne, respectivement, l'intensité moyenne du flux de chaleur généré par la dissipation visqueuse totale $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_s + \bar{\Phi}_p$, l'intensité moyenne du flux de chaleur généré par la dissipation visqueuse Newtonienne $\bar{\Phi}_s = 1/A \int_0^H \int_0^H \Phi_s dx_2 dx_3$ et l'intensité moyenne du flux de chaleur généré par la dissipation visqueuse polymérique $\bar{\Phi}_p = 1/A \int_0^H \int_0^H \Phi_p dx_2 dx_3$.

Ainsi, la figure 6.9 montre pour le fluide de Giesekus ($\alpha = 0.5, \alpha = 0$) et le fluide purement

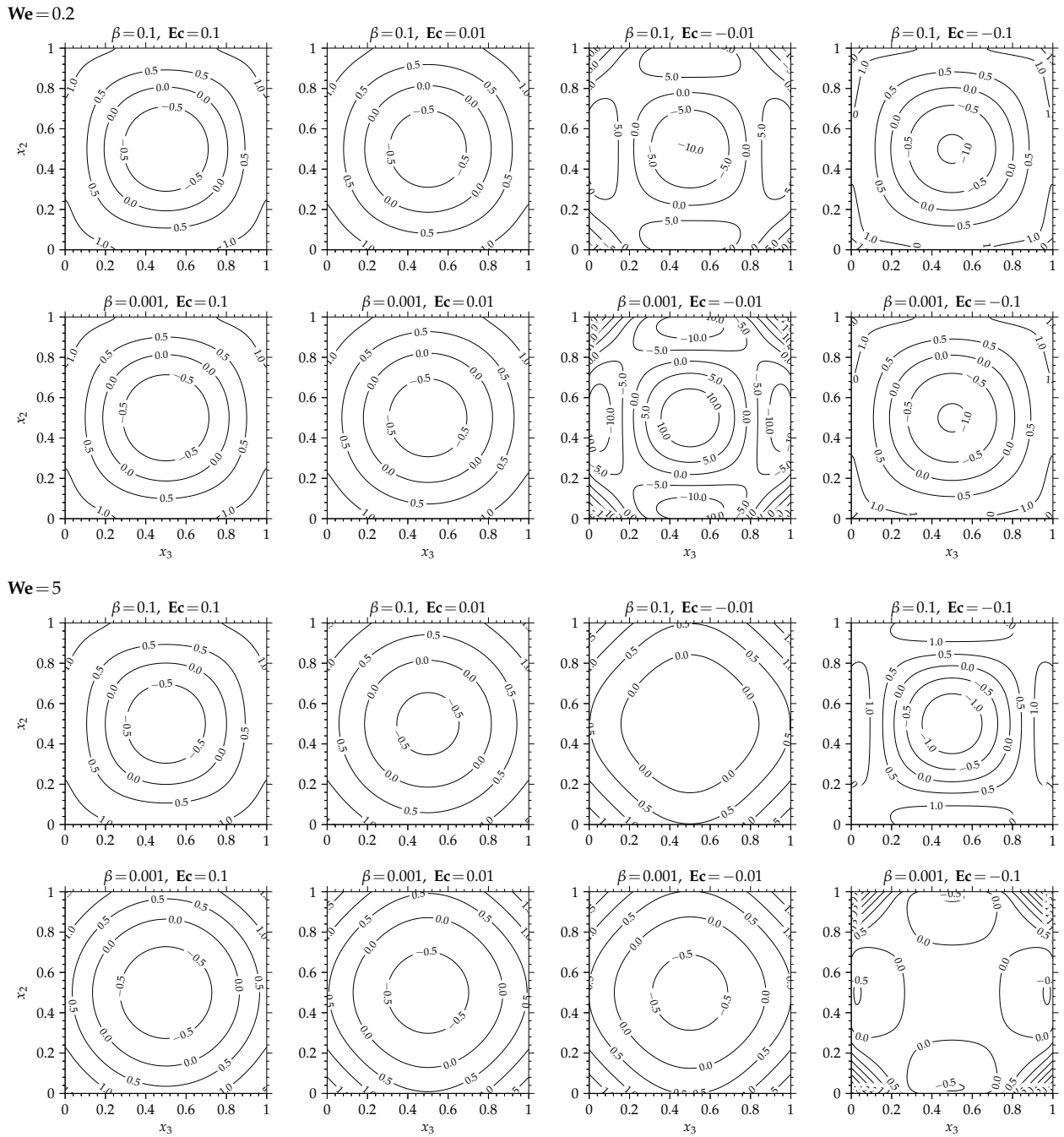


FIGURE 6.8 – Champs de la température normalisée $\Theta = (T - T^{moy}) / (T_w^{moy} - T^{moy})$ dans la région complètement développée en fonction du nombre de Eckert $Ec = [0.1, 0.01, -0.1, -0.01]$ et du rapport de viscosité $\beta = \{0.1, 0.001\}$ pour $We = 0.2$ et $We = 5$ associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) avec $Pr = 50$ et $Re = 1$ sous la condition aux limites thermique de flux imposé (H2).

Newtonien avec $\mathbf{Re} = 1$ les évolutions des intensités moyennes des flux de chaleur générés par dissipation $\bar{\Phi}_s$, $\bar{\Phi}_p$ et $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_s + \bar{\Phi}_p$ en fonction du nombre de Weissenberg $\mathbf{We} = [1, 10]$ et en fonction du rapport de viscosité $\beta = [0.8, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001]$.

D'emblée, on constate que l'intensité moyenne maximale correspond à celle du fluide purement Newtonien ($\alpha = 0, \beta = 1$). Ensuite, pour le fluide d'Oldroyd-B⁶, étant donné que la viscosité polymérique associée à ce modèle est indépendante du taux de déformation, le champ de la vitesse principale est identique à celui obtenu avec le fluide Newtonien. Conséquemment, l'intensité de la dissipation visqueuse totale $\bar{\Phi}$ du fluide d'Oldroyd-B est indépendante du nombre de Weissenberg \mathbf{We} et du rapport de viscosité β , elle est égale à la dissipation visqueuse du fluide purement Newtonien.

Toutefois, on note que la dissipation visqueuse associée à la contribution Newtonienne du solvant $\bar{\Phi}_s$ du fluide d'Oldroyd-B est proportionnel au rapport de la viscosité du solvant dans la viscosité totale β et la dissipation visqueuse associée à la contribution polymérique $\bar{\Phi}_p$ est proportionnelle au rapport de la viscosité polymérique constante dans la viscosité totale $(1 - \beta)$.

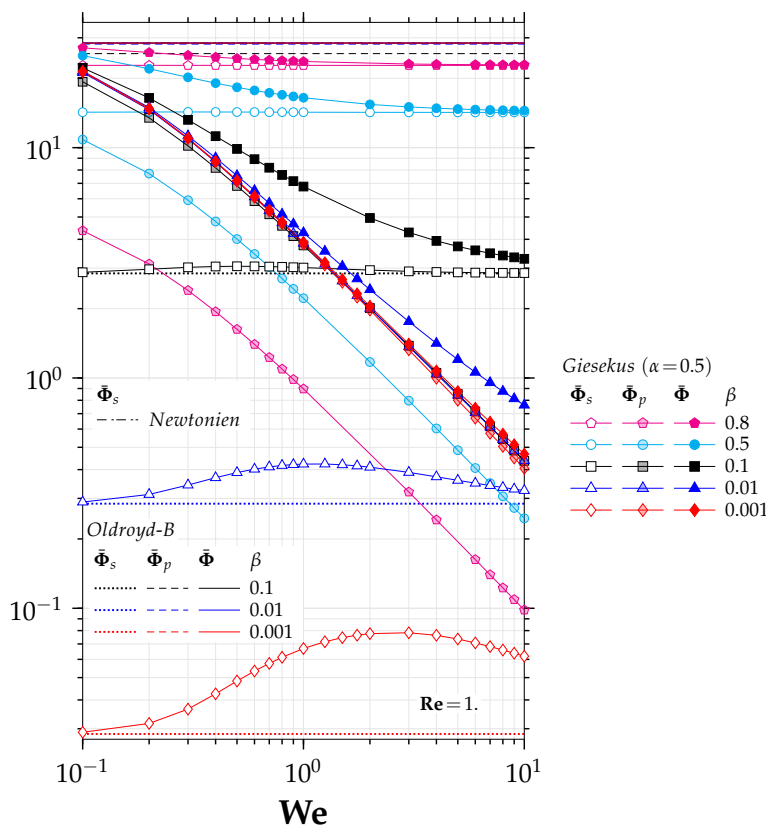


FIGURE 6.9 – Évolution de la valeur moyenne de l'intensité de la dissipation visqueuse du solvant Newtonien $\bar{\Phi}_s$, de la valeur moyenne de l'intensité de la dissipation visqueuse du à la partie polymérique $\bar{\Phi}_p$ et de la valeur moyenne de l'intensité de la dissipation visqueuse totale $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_s + \bar{\Phi}_p$ en fonction du nombre de Weissenberg $\mathbf{We} = [1, 10]$ et en fonction du rapport de viscosité $\beta = [0.8, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001]$ associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5, \alpha = 0$) et au modèle purement Newtonien avec $\mathbf{Re} = 1$.

Ces relations de proportionnalité sont aussi valables pour le modèle de Giesekus avec $\alpha = 0.5$. Cependant, l'action de la rhéofluidification lorsque $\alpha \neq 0$ induit la dépendance des intensités des dissolutions visqueuses, (partie Newtonienne et partie polymérique), du nombre de Weissenberg \mathbf{We} . D'abord, notons que $\bar{\Phi}_s$ est par définition proportionnelle au carré du taux de déformation, alors que $\bar{\Phi}_p$ est soumise à cette relation uniquement aux faibles valeurs du taux de déformation

6. Notons que le fluide d'Oldroyd-B correspond au fluide Giesekus avec $\alpha = 0$

et aux larges valeurs du taux de déformation elle devient indépendante.

Ainsi, pour la dissipation visqueuse liée à la partie Newtonienne du fluide Giesekus, aux faibles valeurs de We , comme la rhéofluidification est faible alors le champ de la vitesse principale subit une faible élévation au voisinage des parois et un faible aplatissement dans le centre de la conduite. Le taux de déformation augmente faiblement et $\bar{\Phi}_s$ demeure proche de $\bar{\Phi}_s$ de fluide d'Oldroyd-B avec $\alpha = 0$.

L'augmentation du nombre de Weissenberg intensifie la rhéofluidification, donc le phénomène d'élévation/aplatissement du champ de la vitesse principale s'accroît, et par conséquent la dissipation visqueuse subit une augmentation avec We jusqu'à atteindre un maximum. Ce comportement est directement lié à la prépondérance de la contrainte de cisaillement Newtonien sur la contrainte de cisaillement polymérique qui marque l'inversion du phénomène élévation et aplatissement du champ de vitesse. C'est la raison pour laquelle on observe pour $\bar{\Phi}_s$, un comportement non monotone en fonction du nombre de Weissenberg puis, une relation linéaire avec le rapport de viscosité du solvant.

Pour ce qui est de la dissipation visqueuse liée à la partie polymérique du fluide de Giesekus $\bar{\Phi}_p$, étant donné que la rhéofluidification devient davantage plus intense avec l'augmentation du nombre de Weissenberg, la contrainte de cisaillement polymérique devient constante aux larges taux de déformation, ce qui provoque la diminution de $\bar{\Phi}_p$.

Cependant, notons qu'aux faibles valeurs du rapport de viscosité, $\bar{\Phi}_p$ domine $\bar{\Phi}_s$ et aux larges valeurs du rapport de viscosité $\bar{\Phi}_s$ est la contribution dominante devant $\bar{\Phi}_p$.

Pour les larges valeurs du rapport de viscosité β , la dissipation visqueuse totale $\bar{\Phi}$ converge rapidement vers sa contribution Newtonienne, avec l'augmentation du nombre de Weissenberg, mais aux faibles valeurs de β , la convergence de la dissipation visqueuse totale $\bar{\Phi}$ vers sa valeur terminale ne peut s'atteindre qu'aux très larges valeurs du nombre Weissenberg.

En se basant sur les résultats de la figure 6.9, regardons maintenant l'évolution du taux de transfert convectif en fonction de l'intensité de la génération de chaleur liée à la fois au nombre d'Eckert et aux paramètres constitutifs.

La figure 6.10 montre, dans le cas de la condition aux limites de flux imposé (H2), l'évolution du nombre de Nusselt asymptotique Nu en fonction du nombre de Weissenberg $We = [1, 10]$ et du nombre d'Eckert $Ec = \{0.1, -0.01, -0.001, 0, 0.001, 0.01, 0.1\}$ et pour différents rapports de viscosité $\beta = \{0.1, 0.01, 0.001\}$.

Pour une configuration du procédé de chauffage du fluide ($Ec > 0, q_w > 0$), comme discuté précédemment, l'effet de la génération de la chaleur se combine avec la condition aux limites de flux chauffant et engendre une augmentation de la température dans le voisinage des parois. Ce fait a pour résultat la diminution de nombre de Nusselt avec l'augmentation du nombre d'Eckert positif, la dissipation réduisant les écarts de température, réduisant ainsi le taux de transfert à la paroi.

Ainsi, vu que la dissipation visqueuse engendrée par un fluide purement Newtonien $\beta = 1$, relativement aux autres fluides, est davantage plus intense, alors pour l'ensemble des valeurs du nombre d'Eckert positif ($Ec > 0$), les nombres de Nusselt les plus faibles correspondent à ceux obtenus avec le fluide purement Newtonien.

De même, comme la dissipation visqueuse totale $\bar{\Phi}$ du fluide d'Oldroyd-B est identique à celle du fluide purement Newtonien, on constate que les nombres de Nusselt obtenus pour ces deux fluides sont identiques.

Par ailleurs, compte tenu de la dépendance de la dissipation visqueuse totale des paramètres constitutifs, l'évolution de Nu en relation avec la génération de la chaleur du fluide de Giesekus est très dépendante du nombre de Weissenberg et du rapport de viscosité.

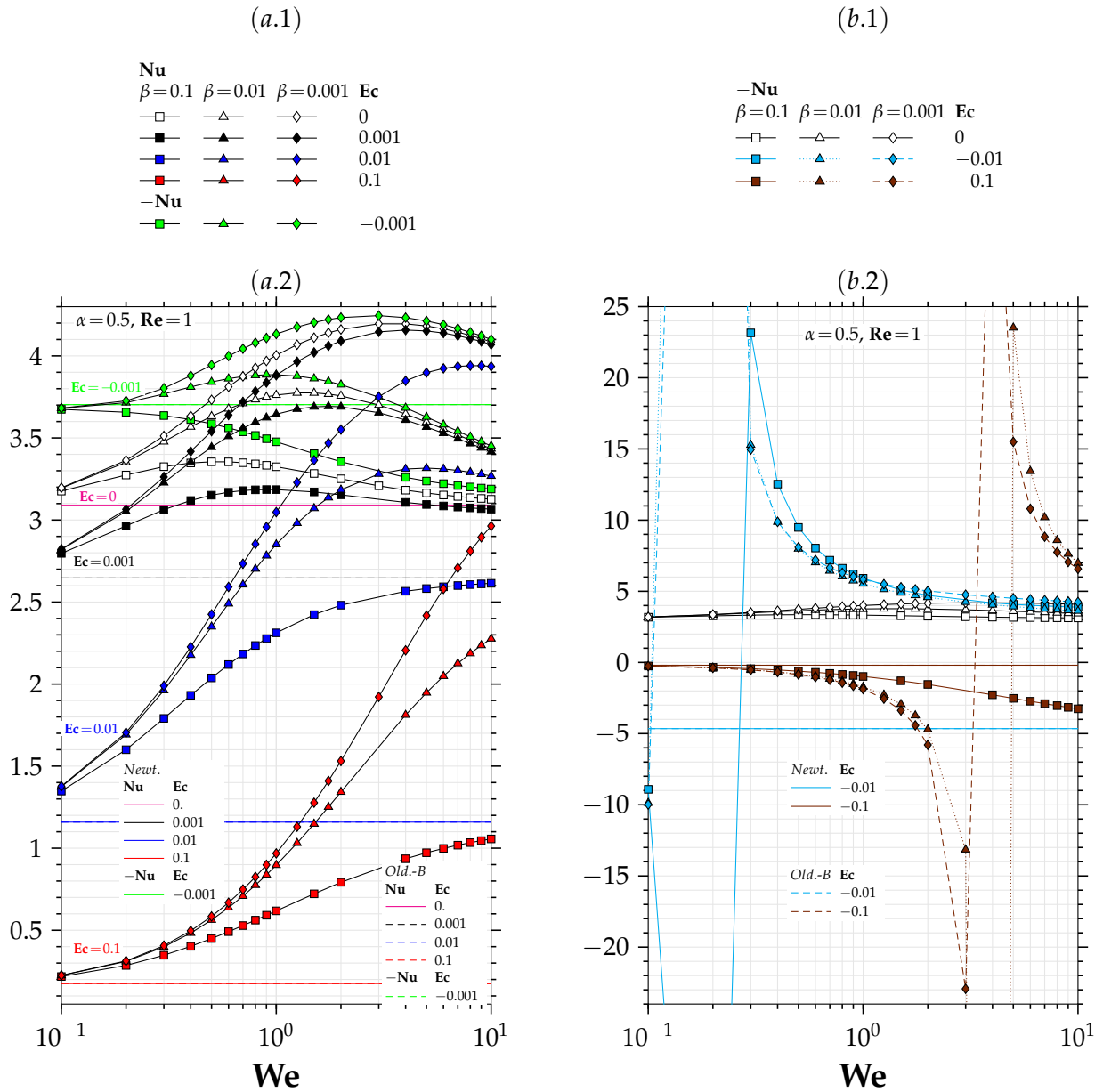


FIGURE 6.10 – Évolution du nombre de Nusselt asymptotique Nu en fonction du nombre de Weissenberg $We = [1, 10]$ et en fonction du nombre d'Eckert $Ec = \{0.1, -0.01, -0.001, 0, 0.001, 0.01, 0.1\}$ et du rapport de viscosité $\beta = \{0.1, 0.01, 0.001\}$ associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5, \alpha = 0$) avec $Pr = 50$ et $Re = 1$ et pour la condition aux limites de flux imposé (H2).

Avec l'augmentation du nombre d'Eckert positif, le nombre de Nusselt diminue avec l'augmentation du rapport de viscosité β . Les nombres de Nusselt les plus faibles sont enregistrés pour la valeur la plus faible des nombres de Weissenberg simulés, c'est-à-dire $We = 0.1$. L'évolution de Nu en fonction de β est dû à l'intensification de l'effet de la génération de la chaleur lorsque $\beta \rightarrow 1$.

Par suite, pour une valeur donnée du nombre de d'Eckert positif ($Ec > 0$), l'augmentation du nombre de Weissenberg induit l'augmentation relative du nombre de Nusselt. Cela est dû à la diminution de l'intensité de l'effet de la dissipation visqueuse totale avec l'augmentation du nombre de Weissenberg. Les gradients de température entre les parois et le centre deviennent plus important. Aussi, on peut constater que les écarts entre les valeurs du nombre de Nusselt de ($Ec > 0$) et les valeurs du nombre de Nusselt de ($Ec = 0$) diminuent avec l'augmentation du nombre de Weissenberg.

Cependant, aux larges valeurs du nombre de Weissenberg, comme l'intensité de la dissipation visqueuse totale diminue davantage, on peut constater pour ($Ec = 0.001$) que les valeurs du nombre de Nusselt se rapprochent des valeurs obtenues quand la dissipation est omise. Les valeurs terminales (au haut We) du nombre de Nusselt sont inférieures aux valeurs obtenues sans dissipation, du fait qu'aux larges valeurs de We , la dissipation visqueuse totale converge vers la contribution de sa partie Newtonienne. Ce comportement est de plus en plus retardé avec l'augmentation du nombre d'Eckert.

D'autre part, pour une configuration du procédé de refroidissement ($Ec < 0, q_w < 0$), l'effet de la génération de la chaleur interagit avec la condition aux limites de flux refroidissant est induit une augmentation de la température davantage plus prononcée dans le voisinage des parois. Pour un nombre d'Eckert ($Ec = -0.001$), cette interaction conduit à l'augmentation sévère du nombre de Nusselt lorsque l'effet de la génération de la chaleur est maximal. Ensuite, pour des valeurs plus intenses du nombre d'Eckert, typiquement $Ec = \{-0.01, -0.1\}$, la génération de la chaleur conduit à une augmentation de la température moyenne des parois T_w^{moy} qui surplombe la température moyenne débitante T^{moy} ce qui induit l'inversion du signe du nombre de Nusselt. Ce phénomène provoque l'apparition d'un point singulier dans la distribution du nombre Nusselt local dû à l'isotherme $\Theta = 0$, conduisant à la divergence du nombre de Nusselt asymptotique. Ce phénomène est lié à l'intensité de génération de la chaleur, à travers la proportionnalité avec le nombre d'Eckert et à travers les paramètres constitutifs. Pour $Ec = -0.01$, l'inversion du signe du nombre de Nusselt intervenant aux faibles valeurs du nombre de Weissenberg ($We \simeq 0.2$) est retardé lorsque le rapport de viscosité devient important. De même, on peut constater que l'inversion de signe du nombre de Weissenberg ayant lieu autour de ($We \simeq 4$) est également retardée avec l'augmentation du rapport de viscosité. Enfin, comme la diminution de l'intensité de rhéofluidification augmente l'effet de l'intensité de dissipation totale Φ , ce phénomène d'inversion devient plus persistant lorsque $\beta \rightarrow 1$.

6.4.2 Interaction de l'inertie du fluide – dissipation visqueuse totale dans le cadre de la condition aux limites thermique de flux imposé

Dans cette section nous étudions sous la condition aux limites thermiques de flux imposé $\textcircled{H2}$ l'interaction de l'augmentation de l'inertie du fluide, impliquant la présence d'écoulements secondaires, avec l'effet de la dissipation visqueuse totale. La figure 6.11 illustre, en ce sens, le champ de température normalisée $\Theta = (T - T^{moy}) / (T_w^{moy} - T^{moy})$ en fonction du nombre de Eckert $Ec = \{0.001, 0.01, 0.1\}$ et du nombre de Reynolds $Re = \{100, 1000\}$ pour $We = 5$ avec $Pr = 50$.

D'abord, pour les deux nombres de Reynolds, sous l'augmentation du nombre d'Eckert on peut constater l'augmentation de la température normalisée au voisinage des parois. Pour $Re = 100$, en se focalisant sur l'isotherme $\Theta = 0.5$, on distingue clairement cette hausse de température davantage dans les régions des centres des parois ainsi que dans les régions proches des coins.

La distorsion des isothermes dans la région de la diagonale due à l'effet de la convection transverse devient moins influente lorsque le nombre d'Eckert devient relativement important $Ec=0.1$. En effet, comme l'augmentation de l'effet de la génération de la chaleur uniformise la température dans les coins et au voisinage des centres des parois, le gradient de température dans ces régions devient faible induisant la diminution de l'efficacité de la convection transverse des écoulements secondaires. Ensuite, pour $Re=1000$, comme l'intensité de la convection transverse $u_s^{moy} RePr$ augmente davantage comparativement à $Re=100$ (voir figure 6.6), l'effet des écoulements secondaires sur les isothermes persiste avec l'augmentation du nombre d'Eckert.

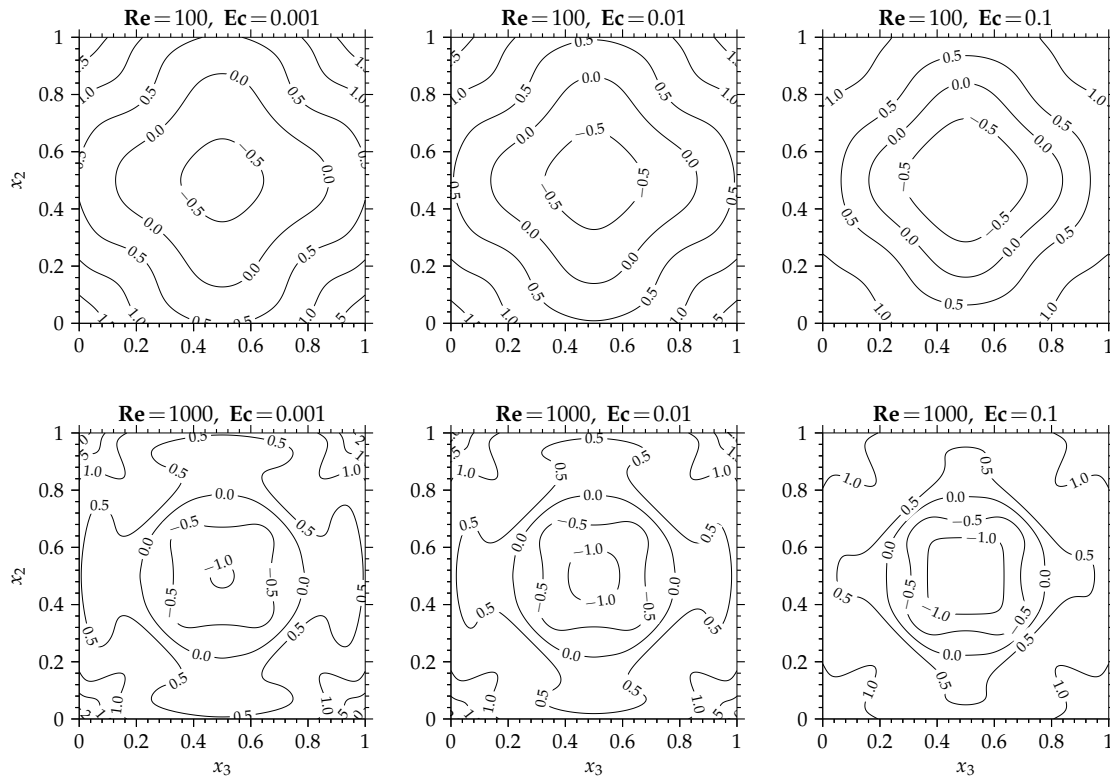


FIGURE 6.11 – Champs de la température adimensionnée $\Theta = (T - T^{moy}) / (T_w^{moy} - T^{moy})$ dans la région complètement développée en fonction du nombre de Eckert $Ec = \{0.001, 0.01, 0.1\}$ et du nombre de Reynolds $Re = \{100, 500, 1000\}$ pour $We = 5$ associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) et $\beta = 0.1$ avec $Pr = 50$ sous la condition aux limites thermiques de flux imposé (H2).

On constate que lors du passage de $Ec=0.001$ à $Ec=0.01$, il y a augmentation de la température dans la région des diagonales à mi-distance du centre de la paroi (voir l'isotherme $\Theta = 0.5$). En effet, comme pour $Re = 1000$, à cause de l'effet de la convection, le taux de déformation devient relativement important dans les régions des diagonales au voisinage du centre de la conduite (voir figure 5.17), la génération de la chaleur est par conséquent plus importante. Cela est encore plus visible avec $Ec=0.1$.

Finalement, pour la même valeur du nombre d'Eckert ($Ec = 0.1$), on relève aussi dans les régions des lignes de symétries et proche des centres des parois l'effet de la convection transverse due aux écoulements secondaires initiaux qui persévèrent malgré l'intensité de la dissipation visqueuse relativement importante.

Pour permettre d'analyser le taux de transfert convectif en relation avec l'effet des écoulements secondaires en présence des dissipation visqueuses, nous analysons l'intensité de la génération de la chaleur en termes des valeurs moyennes des dissipation visqueuses (Newtonienne, polymérique et totale), en fonction des différentes valeurs des nombres de Reynolds et de Weis-

senberg.

La figure 6.12 montre $\bar{\Phi}_s$, $\bar{\Phi}_p$ et $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_s + \bar{\Phi}_p$ en fonction du nombre de Weissenberg $We = [1, 10]$ et en fonction du nombre de Reynolds $Re = [1, 100, 500, 1000]$, pour un fluide de Giesekus. En premier lieu, on constate que la valeur moyenne de la dissipation visqueuse Newtonienne $\bar{\Phi}_s$ croît avec l'augmentation du nombre de Reynolds. L'accroissement maximal est enregistré dans le domaine des valeurs intermédiaires du nombre de Weissenberg, formellement lorsque $We \simeq 1$. Cette augmentation est due à l'intensification de l'effet de la convection transverse sur le champ de la vitesse principale, dans ce domaine des nombres de Weissenberg, induisant conséquemment une augmentation du taux de déformation principalement dans les régions de la diagonale (voir section 5.3.1, figure 5.17).

D'autre part, on constate aussi avec l'augmentation du nombre de Reynolds que la dissipation visqueuse polymérique $\bar{\Phi}_p$ subit également une légère augmentation dans le domaine des valeurs intermédiaires du nombre de Weissenberg. Cette tendance est due à l'effet du transport. Mais cette dissipation décroît continuellement avec l'augmentation du nombre de Weissenberg. Finalement, la combinaison des tendances $\bar{\Phi}_s$ et de $\bar{\Phi}_p$ engendre l'accroissement de la dissipation visqueuse totale.

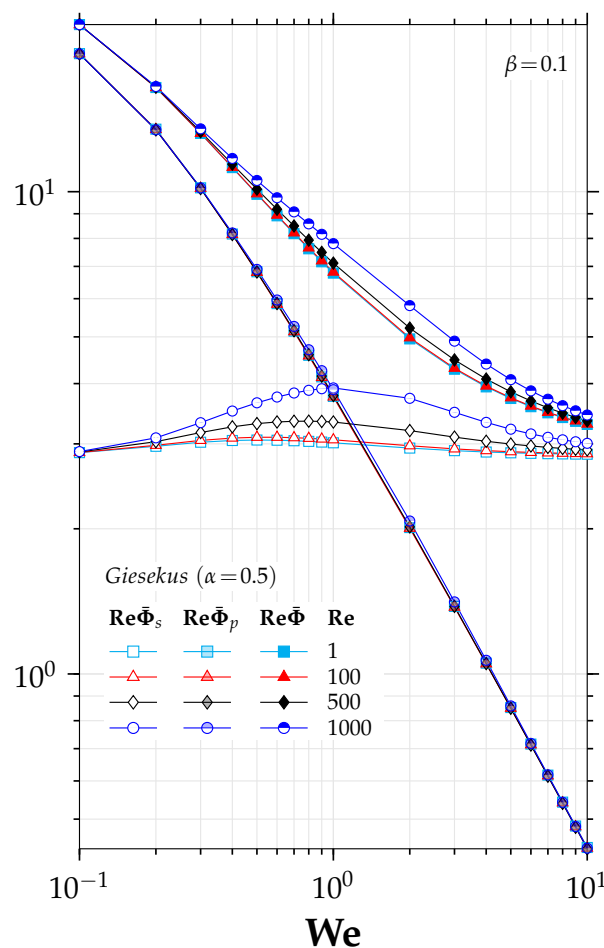


FIGURE 6.12 – Évolution de la valeur moyenne de la dissipation visqueuse du solvant Newtonien $\bar{\Phi}_s$, de la valeur moyenne de la dissipation visqueuse due à la partie polymérique $\bar{\Phi}_p$ et de la valeur moyenne de la dissipation visqueuse totale $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_s + \bar{\Phi}_p$ en fonction du nombre de Weissenberg $We = [1, 10]$ et en fonction du nombre de Reynolds $Re = [1, 100, 500, 1000]$ associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5$) et $\beta = 0.1$.

Pour aller plus loin, nous avons représenté dans la figure 6.13, l'évolution du nombre de Nusselt Nu en fonction du nombre de Weissenberg $We = [1, 10]$ et en fonction du nombre d'Eckert

$Ec = \{0, 0.001, 0.01, 0.1\}$ pour différents nombres de Reynolds $Re = \{1, 100, 500, 1000\}$, dans le cas de la condition aux limites de flux imposé (H2). En premier, de manière globale, on constate que l'augmentation de Ec engendre une réduction de Nusselt. En effet, la dissipation visqueuse a tendance à homogénéiser les températures et donc à réduire l'effet de convection. De plus, comparativement au comportement à $Ec = 0$, on constate pour les différents nombres de Reynolds que lorsque l'intensité de la dissipation visqueuse totale est relativement faible, typiquement lorsque $Ec = 0.001$, l'effet de la génération de la chaleur n'entraîne pas une évolution radicale du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Weissenberg.

En effet, le taux de transfert convectif subit une diminution sans évoluer vers un changement d'allure ou de comportement avec l'augmentation du nombre de Weissenberg. Principalement pour les valeurs élevées du nombre de Reynolds, ce résultat indique que pour cette intensité de la dissipation visqueuse totale, l'effet de la génération de la chaleur est secondaire devant le brassage dû à l'effet des écoulements secondaires.

Toutefois, on note que l'écart entre les courbes relatives à $Ec = 0$ et à $Ec = 0.001$ diminue avec l'augmentation du nombre de Weissenberg. Cela concorde avec la diminution globale de la valeur moyenne de la dissipation visqueuse avec le nombre de Weissenberg (voir figure 6.12).

Par ailleurs, pour une valeur relativement élevée, typiquement avec $Ec = 0.01$, on enregistre que l'allure du nombre de Nusselt ne subit pas uniquement une diminution, mais son allure varie fortement en fonction du nombre de Weissenberg. Pour l'ensemble des valeurs du nombre de Reynolds considérés, le nombre de Weissenberg We_{max} correspondant au taux de transfert convectif maximale augmente avec l'augmentation lors de la transition de $Ec = 0$ à $Ec = 0.01$. La translation de We_{max} vers les valeurs davantage plus élevées lors de cette transition est liée au comportement de la valeur moyenne de la dissipation totale $\bar{\Phi}$ en fonction du nombre de Weissenberg, c'est-à-dire à sa diminution. Il y a donc compétition entre écoulements secondaires et dissipation visqueuse, et l'élasticité servant de paramètre de leur évolution. L'évolution des valeurs du nombre de Nusselt quand $We < We_{max}$ est dominée par l'effet de la génération de la chaleur, alors que l'évolution des valeurs du nombre de Nusselt dont $We > We_{max}$ se caractérise par la persistance de l'effet des écoulements secondaires.

Finalement, pour une valeur plus élevée du nombre d'Eckert ($Ec = 0.1$), on constate que lorsque $Re \leq 100$ l'effet de la dissipation visqueuse totale est dominant pour toute la gamme des valeurs du nombre de Weissenberg simulées. Quand $Re \geq 500$ l'effet de brassage des écoulements secondaires se maintient aux valeurs moyennement élevées du nombre de Weissenberg.

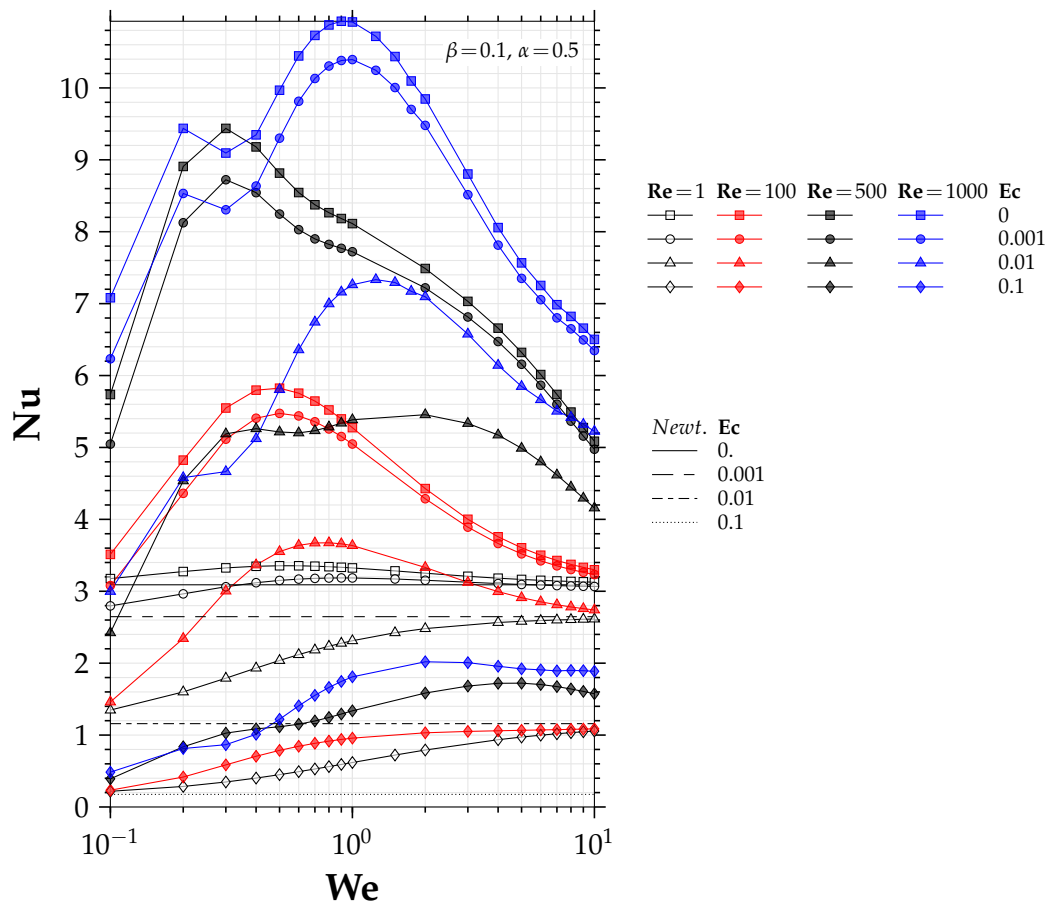


FIGURE 6.13 – Évolution du nombre de Nusselt asymptotique Nu en fonction du nombre de Weissenberg $We = [1, 10]$ et en fonction du nombre d'Eckert $Ec = \{0, 0.001, 0.01, 0.1\}$ et en fonction du nombre de Reynolds $Re = \{1, 100, 500, 1000\}$ associés au modèle de Giesekus ($\alpha = 0.5, \alpha = 0$) avec $Pr = 50$ et $\beta = 0.1$ et pour la condition aux limites de flux imposé (H2).

6.5 Conclusion

Des simulations numériques du transfert thermique dans un écoulement anisotherme de fluides viscoélastiques (affines et non-affines) à travers une conduite de section rectangulaire, sont menées. Les méthodes numériques utilisées sont basées sur la méthode des différences finies introduite dans le chapitre 3. L'efficacité et la robustesse des méthodes implémentées sont encore une fois démontrées dans ce chapitre, pour l'écoulement an-isotherme d'un fluide Newtonien dans une conduite de section carrée, via des comparaisons avec les données de la littérature. Les résultats ont montré que le taux de transfert convectif de l'écoulement d'un fluide viscoélastique non-affine dans une conduite de section non-circulaire possède plusieurs dépendances, liées aux caractéristiques soit du fluide soit de l'écoulement : $\mathbf{Nu}(\mathbf{We}, \beta, \mathbf{Re}, \alpha, \mathbf{Ec})$.

Dans ce chapitre, dans un premier temps indépendamment de l'effet des écoulements secondaires et de des dissipations visqueuse, nous avons analysé l'effet de la rhéofluidification, représenté par les paramètres constitutifs donnés par $(\mathbf{We}, \beta, \alpha)$, sur le nombre de Nusselt asymptotique sous les conditions aux limites thermiques du flux imposé (H2) et de température imposée (T) .

Avec un paramètre d'isotropie constant, une évolution non-monotonique de \mathbf{Nu} avec le nombre de Weissenberg \mathbf{We} est obtenu. Ce comportement est justifié par la prépondérance de la contrainte de cisaillement Newtonienne $\bar{\tau}^N$ sur la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{12}$.

L'intensification de la rhéofluidification à travers la diminution du rapport de la viscosité du solvant dans la viscosité totale β augmente le taux de transfert convectif. Une telle augmentation est due à l'accentuation du phénomène élévation/aplatissement du champ de la vitesse principale avec la diminution du rapport de viscosité β .

Ensuite, avec un rapport de de viscosité β constant, nous avons exploré, avec $\mathbf{Pr} = 50$, l'effet des écoulements secondaires à travers le nombre de Péclet $\mathbf{Re Pr}$. Nous avons montré, pour la gamme des nombres de Reynolds considérés, que lorsque $\mathbf{Re} \leq 100$ le taux de transfert convectif est proportionnel à l'intensité de la convection transverse $u_s^{moy} \mathbf{Re Pr}$ et pour $\mathbf{Re} \geq 500$ l'apparition de la seconde famille des écoulements secondaires au centre de la conduite entraîne le taux de transfert convectif dans un autre régime.

La seconde famille des écoulements secondaires, contrarotative par rapport aux écoulements secondaires initiaux, défavorise le brassage au voisinage du centre de la conduite.

Par la suite, l'effet de l'anisotropie du fluide en relation avec l'inertie du fluide est examiné. L'augmentation de l'anisotropie du fluide engendre, d'une part, un accroissement du nombre de Nusselt aux valeurs relativement faibles du nombre de Reynolds et il précipite l'installation de l'effet de la seconde famille des écoulements secondaires, d'autre part.

Dans une seconde partie de ce chapitre, une étude de l'effet des dissipations visqueuses Newtonienne et polymérique en fonction du nombre d'Eckert est présentée sous la condition aux limites thermique du flux de chaleur constant et uniforme (H2) .

Avec $\mathbf{Re} = 1$, d'abord l'interaction de l'effet de la rhéofluidification avec l'effet de la génération interne de chaleur est analysée.

Pour les nombres d'Eckert $\mathbf{Ec} > 0$, le nombre de Nusselt diminue par rapport $\mathbf{Ec} = 0$ et subit d'avantage l'effet de la génération interne de chaleur aux valeurs élevées de β et aux faibles valeurs du nombre de Weissenberg \mathbf{We} .

Pour les nombres d'Eckert $\mathbf{Ec} < 0$, le nombre de Nusselt augmente par rapport $\mathbf{Ec} = 0$. Par contre, l'augmentation de l'effet des dissipations visqueuse induit l'inversion du signe du nombre de Nusselt, puis lors de l'intensification plus importante des dissipations visqueuses, le nombre de Nusselt tend vers zéro. Finalement, l'interaction de l'effet des écoulements secondaires avec l'effet de la génération de la chaleur et leur effet sur le taux de transfert aux parois est également étudié. Une compétition entre la dissipation visqueuse et les écoulements secondaire est observée, selon l'élasticité du fluide.

Conclusions et perspectives

Conclusions générales

Ce travail de thèse a porté sur la modélisation numérique et l'analyse de l'écoulement d'une famille de fluides viscoélastiques fortement non-linéaires. Ce fut un premier travail sur ces aspects au laboratoire CETHIL UMR5008 et il a donc fallu développer entièrement les outils numériques adéquats, les valider puis les utiliser pour revisiter des benchmarks de la littérature et enfin réaliser une étude paramétrique.

Après une analyse bibliographique approfondie, nous avons d'abord présenté le système d'équations gouvernant les problèmes d'écoulements incompressibles, anisothermes et dépendant du temps, des fluides Non-Newtoniens dont le comportement rhéologique est viscoélastique. En premier, les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie ainsi que les équations constitutives régissant le comportement rhéologique des fluides viscoélastique affines et non-affines et leurs dérivations sont décrites. Les modèles rhéologiques affines tels UCM et d'Oldroyd-B et les modèles non-affines comme les modèles de Giesekus, SPTT et PTT, sont considérés.

Dans l'objectif de proposer une approche numérique appropriée à la structure mathématique du système d'équations régissant, une étude du type d'équation de ce système est introduite. En effet, ce système d'équations est du type mixte, c'est à dire, du type parabo/ellipto/hyperbolique. Nous avons ainsi proposé un algorithme original, basé sur la méthode des différences finies, permettant la réalisation du double coulage numérique (parabo/elliptique et parabo/-hyperbolique) d'une manière stable et convergente, tout en conservant la positivité du tenseur de conformation de façon naturelle sans aucune méthode de stabilisation.

En premier lieu, le système d'équations composé de l'équation de la quantité de mouvement et de l'équation constitutive est réécrit sous une forme quasi-linéaire. Ensuite, sous la satisfaction de la condition hyperbolicité, les termes d'advection pure résultant de la forme quasi-linéaire, traités d'une façon explicite, sont discrétisés en utilisant des schémas appropriés d'ordre élevé du type WENO(3,5,7,9) et HOU(3,5,7,9).

Les conditions aux limites numériques de la partie hyperbolique sont déduites d'une façon suffisante dans chaque direction spatiale. De même, la contrainte d'incompressibilité (couplage pression/vitesse) est satisfaite à l'aide d'une méthode de projection incrémentale basée sur un schéma semi-implicite d'Euler de premier ordre de précision ou de BDF2 de seconde ordre de

précision. Les termes de diffusion (moléculaire et thermique) sont ainsi traités de façon entièrement implicite. Enfin, les équations de Helmholtz résultantes sont résolues par la méthode ADI et l'équation de Poisson de pression (ou de son incrément) est résolue à l'aide d'une bibliothèque externe (NSPCG).

La stratégie de validation de la robustesse et de la précision de l'algorithme proposé est basée sur la mise en œuvre d'un certain nombre de benchmarks de référence dans le cadre des fluides Newtoniens et des fluides viscoélastiques.

D'abord, dans le cadre des fluides Newtoniens, en s'appuyant sur le cas test du tourbillon dissipatif de Green–Taylor, l'efficacité de l'algorithme développé pour résoudre les parties parabo/elliptique des équations de Navier–Stokes est démontrée. Puis avec le cas test de l'écoulement de Poiseuille dépendant du temps, à travers des comparaisons à la solution exacte et en utilisant une technique numérique pour évaluer les erreurs de discrétisation, nous avons montré que les ordres de précision des erreurs de discrétisation spatiale et temporelle des méthodes numériques implémentées correspondent aux ordres théoriques attendues.

Par ailleurs, pour tester l'implémentation des termes de convection des équations de Navier–Stokes et la résolution couplée des équations de Navier–Stokes et de l'équation de l'énergie, nous avons revisité le benchmark de la cavité entraînée (2D & 3D), le benchmark de la cavité différentiellement chauffée pour ce qui de la convection naturelle, et le benchmark de la cavité entraînée chauffée par le haut dans le cadre de la convection forcée. Les ordres de précision des erreurs de discrétisation spatiales et temporelles obtenues dans le cadre de ces benchmarks concordent avec les ordres théoriques attendus des schémas numériques implémentés.

D'autre part, les comparaisons avec les résultats disponibles dans la littérature, en termes du nombre de Nusselt moyen et des vitesses maximales le long des lignes de symétrie, montre un très bon accord.

Ensuite, dans le cadre des fluides viscoélastiques, les performances des schémas de discrétisation de la partie hyperbolique sont étudiées en utilisant le benchmark de l'écoulement de Poiseuille dépendant de temps d'un fluide d'Oldroyd–B, pour lequel la solution exacte en régime transitoire est connue et du fluide SPTT dont la solution exacte à l'état stationnaire est disponible. Comparativement à la solution exacte, les écarts enregistrés, pour un laps de temps simulé fixe avec les schémas d'ordre élevé, sont inférieurs aux écarts relevés avec les schémas UP(1,2).

Bien que les schémas HOUC sont plus oscillants que les schémas WENO, les écarts enregistrés avec les schémas HOUC sont inférieurs à ceux obtenus avec les schémas WENO(3,5,7,9). Cependant, pour certaines résolutions du pas de maillage, malgré le niveau de précision des schémas d'ordre élevé au regard de leur coût de calcul, les schémas HOUC(3,5) ainsi que le schéma WENO3 s'avèrent plus efficaces que les schémas d'ordres davantage plus élevés, respectivement, HOUC(7,9) et WENO(5,7,9).

Lorsque le rapport de la viscosité du solvant dans la viscosité totale $\beta \rightarrow 1$, en raison de la discrétisation centrée d'ordre 2 de la partie parabo/elliptique et à l'égard du traitement particulier à l'ordre 2 de la partie hyperbolique des points discrets appartenant au bord du domaine, les erreurs de discrétisation spatiales en fonction du pas de maillage obtenues avec les schémas d'ordre élevé évoluent suivant une pente de second ordre de précision. Mais aussi, lorsque le rapport de viscosité $\beta \rightarrow 0$, la propagation des discontinuités due au transport convectif du taux de déformation influence le comportement des erreurs de discrétisation spatiale en fonction de la résolution spatiale. Conséquemment, l'évolution générale des erreurs de discrétisation spatiale enregistrées, avec les différents schémas de la partie hyperbolique, est seulement de premier ordre de précision.

D'autre part, les erreurs de discrétisations temporelles obtenue avec les schémas Euler1 et BDF2 coïncident parfaitement avec les ordres théoriques attendus. Enfin, et sur la base de toutes ces vérifications, la validité de l'algorithme proposé pour la simulation de problème d'écoulement

de fluides viscoélastiques affines et non-affines est admise.

À l'issue des validations numériques, le code de calcul développé est appliqué à l'étude de l'écoulement incompressible, laminaire et anisotherme d'un fluide viscoélastique non-affine (Oldroyd-B, Giesekus et PTT) dans une conduite de section carrée.

En premier, avec un débit volumique fixe, nous avons présenté une analyse des effets de l'élasticité du fluide (nombre de Weissenberg We), de l'inertie du fluide (nombre de Reynolds Re) et des différents paramètres rhéologiques (β, α) sur l'écoulement principal, la structure et l'intensité des écoulements secondaires.

Par suite, une investigation du transfert thermique en relation avec l'effet de la rhéofluidification, l'effet de l'inertie des écoulements secondaires ainsi que l'effet de la dissipation visqueuse (nombre de Eckert Ec) est présentée pour les conditions aux limites thermiques de flux imposé (H_2) puis de température imposée (T) .

Indépendamment de l'effet de l'inertie du fluide ($Re = 1$), l'étude de l'effet de la rhéofluidification montre que la diminution du rapport β et l'augmentation du nombre de Weissenberg We intensifient la diminution de la viscosité polymérique dans les régions proches des centres des parois. Cela induit l'élévation du champ de la vitesse principale au voisinage des parois et son aplatissement dans la région du centre de la conduite.

De plus, du fait de la présence d'une viscosité de base (viscosité du solvant), le champ de la vitesse principale tend à retrouver la distribution du champ de la vitesse d'un fluide Newtonien aux larges valeurs du nombre de Weissenberg.

D'autre part, l'évolution de la vitesse moyenne des écoulements secondaires est également analysée en fonction des différents rapports β avec une large gamme du nombre de Weissenberg.

Une analyse de l'effet de la force d'inertie à la fois sur l'écoulement principal, l'intensité et la structure des écoulements secondaires est présentée.

Aux valeurs relativement faibles du nombre de Reynolds Re , due à l'effet de la convection transverse sur le tenseur des contraintes viscoélastiques, l'augmentation du Re engendre la diminution de l'intensité des écoulements secondaires en fonction du nombre de Weissenberg.

Par suite, aux valeurs relativement élevées de Re , l'effet de la force d'inertie sur le champ de la vitesse principale induit une évolution significative du taux de déformation dans la région de la diagonale et dans les régions de ligne de symétrie verticale et horizontale, conduisant à la réorganisation spatiale de la seconde différence des contraintes normales. Ce comportement fait apparaître une seconde famille des tourbillons secondaires et conduit à l'augmentation de la vitesse moyenne des écoulements secondaires dans le domaine des valeurs intermédiaires de We .

Par ailleurs, l'analyse de l'effet de l'anisotropie du fluide de Giesekus α en fonction des différentes valeurs du nombre de Re et du nombre de Weissenberg We montre que l'augmentation de α accentue le caractère rhéofluidifiant du fluide et favorise l'évolution de la structure des écoulements secondaires.

Le transfert thermique est analysé à travers le taux de transfert convectif représenté sous sa version adimensionnée par le nombre de Nusselt asymptotique $Nu(We, \beta, Re, \alpha, Ec)$ sous les différentes conditions aux limites thermiques considérées (H_2, T) .

D'abord, indépendamment des effets de l'inertie du fluide (c'est-à-dire de l'effet des écoulements secondaires) et de la dissipation visqueuse, pour différentes valeur du rapport de la viscosité $\beta = \{0.001, 0.01, 0.1, 0.5, 0.8\}$, une évolution non-monotonique du nombre de Nusselt Nu est enregistrée en fonction du nombre de Weissenberg $We = [0.1, 10]$. Nous avons montré que cette évolution est liée à la prépondérance de la contrainte de cisaillement Newtonienne sur la contrainte de cisaillement polymérique. L'intensification de la rhéofluidification, à travers la diminution du rapport de viscosité β , augmente le taux de transfert convectif. Cette augmentation est due à l'accentuation du phénomène élévation/aplatissement du champ de la vitesse principale avec la

diminution du rapport de viscosité β .

Ensuite, avec un nombre de Prandtl fixe $Pr = 50$ et pour un rapport de viscosité constant $\beta = 1$, l'effet des écoulements secondaires sur le taux de transfert thermique convectif est investigué sur une large gamme du nombre de Reynolds $Re = [1, 1200]$.

En premier, le lien entre l'intensité de la convection transverse représentée par $u_s^{moy} Re Pr$ et l'amélioration du transfert thermique est mis en évidence. Ainsi, deux régimes peuvent être identifier. Lorsque $Re \leq 100$, le taux de transfert convectif est proportionnel à l'intensité de la convection transverse, et lorsque $Re \geq 500$, la présence de la seconde famille des écoulements secondaires défavorise le brassage au voisinage du centre de la conduite diminuant par conséquent l'amélioration du taux de transfert convectif.

Nous avons constaté que l'augmentation du paramètre d'anisotropie du fluide α induit d'une part un accroissement du nombre de Nusselt et précipite d'autre part l'installation de l'effet de la seconde famille des écoulements secondaires.

En somme, l'accroissement du nombre de Nusselt induit par les écoulements secondaires est nettement plus important que l'amélioration due à l'effet rhéofluidifiant.

L'interaction de l'effet de la dissipation visqueuse avec l'effet de la rhéofluidification est analysée dans un premier temps indépendamment de l'effet de l'inertie $Re = 1$.

D'une part, lorsque le nombre d'Eckert est positif $Ec > 0$, le nombre de Nusselt diminue comparativement à la valeur enregistrée avec $Ec = 0$. L'effet de la génération interne de chaleur s'accroît davantage avec des valeurs élevées du rapport β et des valeurs faibles du nombre de Weissenberg. D'autre part, lorsque le nombre d'Eckert est négatif $Ec < 0$, le nombre de Nusselt augmente par rapport à la valeur enregistrée avec $Ec = 0$. Puis, l'augmentation de l'effet de la génération interne de la chaleur induit le phénomène l'inversion du signe du nombre de Nusselt. Aux faibles valeurs du nombre de Weissenberg, l'intensification de l'effet de la génération interne de la chaleur fait tendre le nombre de Nusselt vers zéro.

Finalement, l'interaction de l'effet des écoulements secondaires avec l'effet de la génération de la chaleur est également décrite et analysée. Pour différentes valeurs du nombre de Reynolds, nous avons montré que l'accroissement maximale du nombre de Nusselt observé, en fonction du nombre de Weissenberg, est très sensible à l'effet de la génération de la chaleur.

Ainsi, ce travail, s'inscrit dans les développements engagés ces dernières années par la communauté scientifique, dans le cadre de la résolution du problème de "Grand Wiessenberg", et l'analyse des écoulements secondaires. Les résultats obtenus constituent une première avancées indéniable dans ce domaine et proposent déjà des observations et analyse originales de certains phénomènes, notamment l'impact des paramètres rhéologiques, de l'élasticité sur l'intensité des écoulements secondaires et l'amélioration des transferts convectifs lors d'écoulements anisothermes de fluides viscoélastiques, dans des conduits son circulaires. Par ailleurs, l'outil numériques ainsi développé est assez robuste et abouti, et servira pour des investigations futures, afin de mieux étudier et comprendre le comportement de ce type d'écoulements et les phonèmes physiques associés, ce qui permettra de proposer des solutions industrielles pertinentes.

Perspectives

A l'image de l'intérêt scientifique et industriel grandissant des fluides viscoélastiques, en particulier des solutions polymériques, il est très important de continuer les développements numériques afin de permettre l'adaptation du code de calcul développé à des configurations industrielles, biomédicales et environnementales. Toutefois, notons que notre code de calcul peut être d'ores et déjà adapté et appliqué facilement à des configurations d'écoulements très courantes,

comme l'instabilité de Rayleigh–Bénard viscoélastique ou la cavité différentiellement chauffée viscoélastique. Cela permettra de mener des analyses dynamiques et thermiques originales de ce type de problèmes dans le cadre des fluides viscoélastiques. Toutefois notons que dans le cas des procédés industriels, les écoulements de fluides viscoélastiques interviennent souvent à travers des géométries complexes, voir Mu and Zhao [148], raison pour laquelle il est nécessaire d'améliorer les capacités prédictifs du code de calcul développé.

Au préalable, les perspectives à cours termes du présent travail consistent à augmenter la finesse des prédictions de l'effet rhéofluidifiant aux voisinages des parois lorsque le rapport de la viscosité du solvant dans la viscosité totale tend vers zéro. On propose comme première approche d'utiliser des maillages cartésiens rectangulaires non-uniformes. Dans cette optique, notre algorithme de calcul est ouvert pour l'adaptation des différentiations finies de secondes ordre de précision des opérateurs différentiels : Laplacien, gradient et divergence, par des différentiations à pas de résolution spatiale variable, voir Knikker [122]. Pour prendre en compte les maillages non-uniformes, il est également nécessaire d'adapter les coefficients de pondérations des schémas WENO et HOUC, lors de traitement de la partie hyperbolique.

Par suite, les perspectives à cours termes peuvent également s'incarner dans l'amélioration de la modélisation physique du comportement viscoélastique. En effet, pour modéliser plus fidèlement le comportement des fluides viscoélastiques, d'autres modèles ou équations constitutives, davantage réalistes comme le modèle MPTT ou encore le modèle POMPOM, peuvent également être intégrés facilement dans le code de calcul développé.

Les perspectives à long termes peuvent porter en premier sur l'amélioration de la capacité prédictif des méthodes numériques vis-à-vis de problèmes d'écoulements élongationnels et du traitement des singularités. En ce sens, on propose de réécrire l'équation constitutive sous une formulation logarithmique du tenseur de conformation comme (LCR) Fattal and Kupferman [62, 63] ou l'une de ses variantes Balci et al. [17], Afonso et al. [4]. Cependant, notons que l'approche LCR peut facilement s'adapter à la formulation quasi-linéaire du système d'équations gouvernant. Cela permettra à priori de pallier les problèmes entourant le traitement de singularités.

Par ailleurs, dans l'optique d'applications industrielles, comme le procédé de l'extrusion, le code de calcul doit être capable de prendre en compte la complexité de la géométrie, d'où la nécessité de prémunir le code de calcul d'une méthode pour traiter les points appartenant aux frontières comme la méthode des frontières immergées.

Enfin, les procédés de transformation de polymères, tels que l'extrusion ou l'injection, requiert l'enrichissement de la physique de l'outil de calcul par l'intégration des couplages multiphysiques supplémentaires, comme par exemple les cinétiques de cristallisation, voir Boutaous et al. [33].

ANNEXE A

Annexes

A.1 Cinématique de la déformation et du mouvement

A.1.1 Vecteurs vitesse et accélération

La description de l'écoulement d'un fluide, en mécanique des milieux continus, est souvent réalisée par rapport à un observateur fixe. Cette approche du mouvement correspond à la description dite eulérienne pour laquelle les grandeurs physiques intervenantes sont définies en chaque point dans l'espace.

La position courante d'une particule fluide en mouvement dans un repère orthonormé fixe dont les vecteurs unitaires des trois axes sont $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, est donnée par le vecteur position suivant,

$$\mathbf{x}(t) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3. \quad (\text{A.1})$$

Par ailleurs, lorsque le mouvement d'une particule fluide est décrit par rapport à un observateur attaché à cette particule, la description dans ce cas est dite Lagrangienne, une particule fluide est préalablement identifiée par ses coordonnées matérielles, notées \mathbf{X} . Au cours du mouvement, la position de cette particule fluide est décrite par une courbe notée $\mathbf{x}(t) = \Phi(\mathbf{X}, t)$ et les grandeurs physiques qui lui sont associées sont des fonctions des coordonnées matérielles \mathbf{X} . La trajectoire d'une particule fluide est connue au moyen de son champ de déplacement $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$ donnée par,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X} + \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) \quad (\text{A.2})$$

Le champ de vitesse Eulérien d'une particule fluide est donné par,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\Phi(\mathbf{X}, t)}{dt} = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3 \quad (\text{A.3})$$

et le champ d'accélération est défini par,

$$\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2} \quad (\text{A.4})$$

A.1.2 Dérivée particulière

La variation temporelle totale d'une grandeur (position, vitesse, température, ...) liée à un ensemble de particules fluides, que l'on suit durant leur mouvement, est la somme de la contribution de la variation au cours du temps en un point fixe dans l'espace, et la contribution de la variation résultant du fait que l'ensemble des particules explore différents points de l'espace. On suppose un petit déplacement d'un élément fluide pendant un laps de temps dt , du point $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$ au point, $\mathbf{x} + d\mathbf{x} = (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)^\top$, et on considère une grandeur physique différentiable, notée (\bullet) , qui peut représenter une quantité scalaire, vectorielle ou tensorielle, attachée à l'élément fluide en mouvement. Nous avons,

$$d(\bullet) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} dt + \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_3} dx_3 \quad (\text{A.5})$$

d'où,

$$\frac{d(\bullet)}{dt} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} + \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla(\bullet). \quad (\text{A.6})$$

Cette dérivée, notée usuellement par $\frac{D(\bullet)}{Dt}$ est dite particulière ou matérielle. Le champ d'accélération d'un élément fluide peut s'écrire comme suit,

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u}, \quad (\text{A.7})$$

Le premier terme du second membre représente l'accélération locale et le dernier terme donne l'accélération due aux variations spatiales, à un instant donné, du champ de vitesse.

A.1.3 Tenseur gradient de vitesse

Le tenseur du second rang intervenant dans le second membre de l'équation (A.7) est le tenseur gradient de vitesse, donné comme suit,

$$\nabla\mathbf{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Ce tenseur décrit la variation spatiale du champ de vitesse autour d'un point. En effet, en utilisant le développement en série de Taylor,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = d\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t) = \nabla\mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} + O(|d\mathbf{x}|^2) \quad (\text{A.9})$$

où $d\mathbf{x}$ est un petit vecteur et $O(|d\mathbf{x}|^2)$ est l'erreur d'ordre 2. Le tenseur gradient de vitesse peut se décomposer en somme d'une partie symétrique et d'une partie antisymétrique,

$$\nabla\mathbf{u} = \mathbf{D} + \mathbf{\Omega}. \quad (\text{A.10})$$

La partie symétrique $2\mathbf{D} = \nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^\top$ représente le tenseur taux de déformation et la partie antisymétrique $2\mathbf{\Omega} = \nabla\mathbf{u} - \nabla\mathbf{u}^\top$, est liée au tenseur taux de rotation.

A.1.4 Tenseur taux de déformation

Pour décrire les déformations d'un domaine matériel (fluide ou solide), c'est-à-dire, les changements de forme, deux états doivent être considérés, un avant et un après la déformation. Raison pour laquelle, on s'intéresse à l'évolution au cours du temps des positions de deux particules

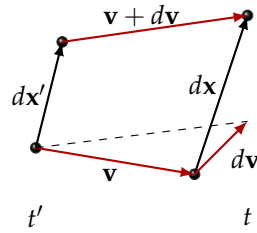


FIGURE A.1 – Vitesse relative de deux points d'un domaine fluide en mouvement.

fluides infiniment voisines. Les vecteurs positions des deux particules, à l'instant t' , sont donnés par, \mathbf{x}' et $\mathbf{x}'+d\mathbf{x}'$. La position relative d'une particule par rapport à l'autre est donnée par le vecteur élémentaire, $d\mathbf{x}'$, voir la figure A.1.

Pour $t > t'$, le domaine fluide évolue et change de forme, les positions des deux particules deviennent respectivement $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{x}')$ et $\mathbf{x}+d\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{x}'+d\mathbf{x}')$ et le vecteur élémentaire $d\mathbf{x}'$ devient $d\mathbf{x}$. Par ailleurs, en utilisant le développement de Taylor, on peut obtenir l'équation reliant un vecteur infinitésimal d'une configuration antérieure à la configuration courante,

$$d\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{x}'+d\mathbf{x}') - \Phi(\mathbf{x}') + O(|d\mathbf{x}'|^2) = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}' + O(|d\mathbf{x}'|^2) \quad (\text{A.11})$$

où $O(|d\mathbf{x}'|^2)$ est une erreur d'ordre 2 et $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'}$ représente le tenseur gradient de déformation. Ce tenseur caractérise les variations de longueur et les variations d'angle et relie un segment de ligne de la configuration de référence au segment de la configuration actuelle. Toutefois, le tenseur gradient de déformation \mathbf{F} ne constitue pas une bonne mesure de la déformation. En effet, un tenseur de déformation ne doit induire aucune modification de l'état de contrainte du milieu lors d'une rotation rigide. Pour isoler la *déformation pure*, il convient donc d'éliminer les effets de rotation rigide dans le tenseur mesurant les déformations. Comme nous l'avons évoquée ci-dessus, les changements de forme se traduisent par des variations de longueur et des variations d'angle. Pour quantifier ces variations, on s'intéresse au produit scalaire de deux vecteurs, $d\mathbf{x}_1$ et $d\mathbf{x}_2$ relatifs à la configuration courante,

$$d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 = d\mathbf{x}'_1 \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{x}'_2 = d\mathbf{x}'_1 \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{x}'_2 \quad (\text{A.12})$$

où \mathbf{C} est le tenseur de dilatation de Cauchy–Green à droite représentant la partie *déformation pure* du tenseur gradient de transformation. Cependant, la différence de la norme du vecteur $d\mathbf{x}$ avant et après déformation est donnée par,

$$|d\mathbf{x}|^2 - |d\mathbf{x}'|^2 = d\mathbf{x}' \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{x}' = 2d\mathbf{x}' \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x}' \quad (\text{A.13})$$

où \mathbf{E} est le tenseur de déformation, symétrique, de Green–Lagrange.

Pour caractériser la variation temporelle de la norme du vecteur $d\mathbf{x}$, on s'intéresse en premier à la dérivée par rapport au temps du tenseur gradient déformation. En utilisant la définition du gradient de vitesse donnée par la relation (A.9), on obtient,

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} \quad (\text{A.14})$$

Ainsi, l'évolution du produit scalaire $d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$ est donnée par,

$$\frac{d(d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})}{dt} = d\mathbf{x}' \cdot \frac{d\mathbf{C}}{dt} \cdot d\mathbf{x}' \quad (\text{A.15})$$

$$= d\mathbf{x}' \cdot \left(\frac{d\mathbf{F}^T}{dt} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot \frac{d\mathbf{F}}{dt} \right) \cdot d\mathbf{x}' \quad (\text{A.16})$$

$$= (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}') \cdot (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}') \quad (\text{A.17})$$

$$= 2d\mathbf{x} \cdot \mathbf{D} \cdot d\mathbf{x}, \quad (\text{A.18})$$

où \mathbf{D} est le tenseur des taux de déformation caractérisant la vitesse de variation du produit scalaire de deux directions matérielles appartenant à la configuration actuelle. L'évolution temporelle du tenseur de Cauchy–Green et du tenseur de Green–Lagrange peuvent aussi s'écrire en fonction du tenseur taux de déformation.

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = 2\frac{d\mathbf{E}}{dt} = 2\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} \quad (\text{A.19})$$

A.1.5 Vecteur–contrainte

Soit un domaine fluide en mouvement occupant à chaque instant un volume V et possédant une frontière de surface S qui le distingue de son milieu environnant, figure A.2. Un élément

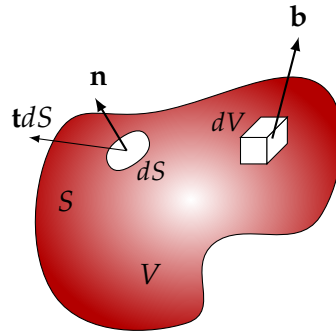


FIGURE A.2 – Volume d'un domaine fluide.

infinitésimal appartenant à ce domaine fluide se déplace sous l'action de deux types de forces extérieures, **1**) Il subit l'action des forces à distance, dites aussi forces de volume, comme la force de gravité ou la force électromagnétique, pouvant être représentées par une densité volumique $\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{b}$, où $\rho(\mathbf{x}, t)$ la masse volumique du fluide et \mathbf{b} représente la force du volume par unité de masse. **2**) L'élément infinitésimal subit aussi des forces de contact, exercées sur sa frontière S par un fluide extérieur au volume V . Pour une surface élémentaire dS dont le vecteur unitaire sortant est \mathbf{n} , ces forces de contact sont caractérisées par un vecteur contrainte (densité de force par unité de surface) $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ dépendant de la normale \mathbf{n} . La résultante des efforts exercés sur le domaine fluide du volume V est donnée par,

$$\int_S \mathbf{t} dS + \int_V \rho \mathbf{b} dV \quad (\text{A.20})$$

Le théorème de Cauchy postule l'existence d'un tenseur $\sigma(\mathbf{x}, t)$, vérifiant l'application linéaire, Tanner [210, p. 61], Caltagirone [37, p. 25],

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}) = \sigma(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} \quad (\text{A.21})$$

Le tenseur $\sigma(\mathbf{x}, t)$, de composantes $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$, est le tenseur des contraintes de Cauchy.

A.2 Théorème de Green-Ostrogradsky

Le théorème de Green-Ostrogradsky permet de transformer l'intégrale d'un champ scalaire $\Phi(\mathbf{x}, t)$ (ou d'un champ vectoriel \mathbf{u} ou d'un champ tensoriel \mathbf{A}) sur un volume V en une intégrale sur la frontière S ,

$$\int_V \nabla \Phi dV = \int_S \Phi \mathbf{n} dS \quad (\text{A.22})$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{u} dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} dS \quad (\text{A.23})$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} dS \quad (\text{A.24})$$

où S désigne une surface fermée entourant le volume V et \mathbf{n} est la normale de la frontière S , dirigée vers l'extérieur.

A.3 Théorème du transport

Soit $\Phi(\mathbf{x}, t)$ un champ scalaire, (ou un champ vectoriel ou tensoriel), défini sur un volume $V(t)$ occupé par un système matériel à l'instant t . La dérivée d'une intégrale de volume évoluant dans le temps est donnée par le théorème de transport de Reynolds (la démonstration est donnée par Huilgol and Phan-Thien [100, p. 85]),

$$\frac{d}{dt} \int_V \Phi dV = \int_{V(t)} \left(\frac{D\Phi}{Dt} + \Phi \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dV = \int_{V(t)} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\Phi \mathbf{u}) \right) dV \quad (\text{A.25})$$

où \mathbf{u} est le champ de vitesse et $\frac{D}{Dt}$ est la dérivée particulaire.

A.4 Dérivées objectives

Nous considérons un point matériel noté P localisé dans un repère fixe par ces coordonnées cartésiennes x^i (x^1, x^2, x^3) dont le vecteur position, noté \mathbf{P} , est donné par,

$$\mathbf{P} = x^1 \mathbf{i}_1 + x^2 \mathbf{i}_2 + x^3 \mathbf{i}_3 = x^k \mathbf{i}_k \quad (\text{A.26})$$

Le point P est aussi localisé dans son repère naturel associé à un système de coordonnées curvilignes convectées (qui se déplacent avec le point P) ζ^i ($\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$), figure A.3. Par ailleurs, il existe

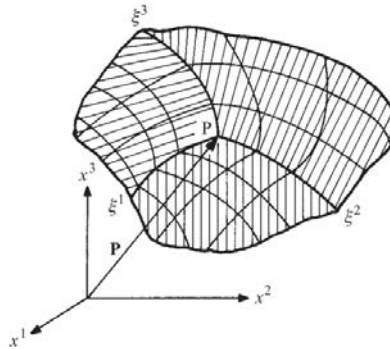


FIGURE A.3 – Coordonnées curvilignes (tirée de Han [90, chap.1]).

une base formée par les vecteurs \mathbf{g}_i ($\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$) reliant les coordonnées curvilignes du point P à ses coordonnées cartésiennes définie par,

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \zeta^i} = \left(\frac{\partial x^m}{\partial \zeta^i} \right) \mathbf{i}_m \quad (\text{A.27})$$

Ce repère naturel (g_1, g_2, g_3) est tangent aux lignes de coordonnées (x^1, x^2, x^3). Par ailleurs, il est possible de définir le tenseur métrique de cet espace,

$$\mathbf{g}_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = \left(\frac{\partial x^m}{\partial \zeta^i} \right) \left(\frac{\partial x^n}{\partial \zeta^j} \right) \mathbf{i}_m \mathbf{i}_n \quad (\text{A.28})$$

Ce tenseur covariant est symétrique et quand deux vecteur de base, \mathbf{g}_i et \mathbf{g}_j sont orthogonal, le tenseur métrique $\mathbf{g}_{ij} = 0$ pour $i \neq j$. Cependant, suivant Oldroyd [154], Joseph [110, chap.1] et Han [90, chap.1, p.32, p.41], si \mathbf{a}_{ij} dénote le tenseur des contraintes au point P dans le système

de coordonnées fixes x^i et si \mathbf{A}_{ij} dénote le même tenseur des contraintes au même point (P) dans le système de coordonnées convectées, alors la relation entre les composantes covariantes de ces deux tenseurs est donnée par,

$$\mathbf{A}_{mn}(\boldsymbol{\zeta}, t) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial \zeta^m} \right) \left(\frac{\partial x^j}{\partial \zeta^n} \right) \mathbf{a}_{ij}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.29})$$

et la relation entre leurs composantes contravariantes est donnée par,

$$\mathbf{A}^{mn}(\boldsymbol{\zeta}, t) = \left(\frac{\partial x^m}{\partial \zeta^i} \right) \left(\frac{\partial x^n}{\partial \zeta^j} \right) \mathbf{a}^{ij}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.30})$$

Par ailleurs, l'équation de conservation de la masse, au même titre que l'équation de la quantité de mouvement et l'équation de l'énergie, sont décrites dans un repère de coordonnées fixes (voir chapitre 1). Le repère fixe est le repère dans lequel les mesures physiques sont réalisées. Supposons que l'équation constitutive régissant le milieu auquel appartient le point P fait intervenir la dérivée matérielle (suivant le mouvement du point P) du tenseur des contraintes \mathbf{A} (décrit dans le système de coordonnées convectées). Il convient dans ce cas de connaître la transformation de cette dérivée matérielle du système de coordonnées convectées au système de coordonnées fixes afin de pouvoir associer l'équation constitutive à l'équation de la quantité de mouvement. La dérivée matérielle de l'équation (A.29) (composantes covariantes) s'écrit,

$$\frac{D\mathbf{A}_{mn}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left(\left(\frac{\partial x^i}{\partial \zeta^m} \right) \left(\frac{\partial x^j}{\partial \zeta^n} \right) \mathbf{a}_{ij}(\mathbf{x}, t) \right) \quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{A}_{mn}}{Dt} &= \left(\frac{\partial x^i}{\partial \zeta^m} \right) \left(\frac{\partial x^j}{\partial \zeta^n} \right) \frac{D\mathbf{a}_{ij}}{Dt} + \\ &\quad \left(\frac{\partial x^j}{\partial \zeta^n} \right) \mathbf{a}_{ij}(\mathbf{x}, t) \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \zeta^m} \right) + \\ &\quad \left(\frac{\partial x^i}{\partial \zeta^m} \right) \mathbf{a}_{ij}(\mathbf{x}, t) \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial x^j}{\partial \zeta^n} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

La dérivée du chaque terme s'écrit,

$$\frac{D\mathbf{a}_{ij}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{a}_{ij}}{\partial t} + u^k \frac{\partial \mathbf{a}_{ij}}{\partial x^k} \quad (\text{A.33})$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \zeta^m} \right) = \frac{\partial}{\partial \zeta^m} \left(\frac{Dx^i}{Dt} \right) = \frac{\partial u^i}{\partial \zeta^m} = \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \zeta^m} \quad (\text{A.34})$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial x^j}{\partial \zeta^n} \right) = \frac{\partial}{\partial \zeta^n} \left(\frac{Dx^j}{Dt} \right) = \frac{\partial u^j}{\partial \zeta^n} = \frac{\partial u^j}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \zeta^n} \quad (\text{A.35})$$

On obtient finalement la transformation suivante,

$$\frac{D\mathbf{A}_{mn}}{Dt} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial \zeta^m} \right) \left(\frac{\partial x^j}{\partial \zeta^n} \right) \left[\frac{\partial \mathbf{a}_{ij}}{\partial t} + u^k \frac{\partial \mathbf{a}_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^j} \mathbf{a}_{ik} + \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \mathbf{a}_{kj} \right] \quad (\text{A.36})$$

$$\frac{D\mathbf{A}_{mn}}{Dt} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial \zeta^m} \right) \left(\frac{\partial x^j}{\partial \zeta^n} \right) \Delta \mathbf{a} \quad (\text{A.37})$$

Les termes regroupés dans

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{\partial \mathbf{a}_{ij}}{\partial t} + u^k \frac{\partial \mathbf{a}_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^j} \mathbf{a}_{ik} + \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \mathbf{a}_{kj} \quad (\text{A.38})$$

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \nabla \mathbf{u}^\top \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (\text{A.39})$$

représentant la dérivée équivalente du tenseur \mathbf{A}_{mn} , est la dérivée dans le système de coordonnées fixes. Cette dérivée est appelée dérivée d'Oldroyd convectée inférieure. Avec les composantes contravariantes des tenseurs de \mathbf{A}^{mn} et \mathbf{a}^{mn} , il en résulte la dérivée d'Oldroyd convectée supérieure, Oldroyd [154],

$$\overset{\nabla}{\mathbf{a}} = \frac{\partial \mathbf{a}_{ij}}{\partial t} + u^k \frac{\partial \mathbf{a}_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial u^j}{\partial x^k} \mathbf{a}_{ik} - \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \mathbf{a}_{kj} \quad (\text{A.40})$$

$$\overset{\nabla}{\mathbf{a}} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{a} - \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u}^\top \quad (\text{A.41})$$

Les deux premiers termes du second membre des équations (A.38) et (A.40) représentent la dérivée matérielle qui donne le taux de variation de \mathbf{a} suivant le mouvement d'un point matériel et les deux derniers termes décrivent les mouvements de rotation et la déformation d'un élément fluide (le gradient de vitesse peut s'écrire comme la somme du tenseur taux de déformation et du tenseur de taux de rotation $\nabla \mathbf{u} = \mathbf{D} + \mathbf{\Omega}$).

A.5 Schémas d'ordre élevé WENO(7,9) et HOU(7,9)

A.5.1 Schémas WENO(7,9)

— Schéma WENO7 :

Le schéma WENO d'ordre 7 est basé sur le schéma ENO d'ordre 4. Rappelons que ce dernier consiste à choisir parmi les stencils S_1 , S_2 , S_3 et S_4 , de quantième ordre l'approximation la plus régulière (voir figure A.4), à savoir pour $\lambda_i > 0$,

$$S_1 = -\frac{1}{4} q_1 + \frac{13}{12} q_2 - \frac{23}{12} q_3 + \frac{25}{12} q_4 \quad (\text{A.42})$$

$$S_2 = \frac{1}{12} q_2 - \frac{5}{12} q_3 + \frac{13}{12} q_4 + \frac{1}{4} q_5 \quad (\text{A.43})$$

$$S_3 = -\frac{1}{12} q_3 + \frac{7}{12} q_4 + \frac{7}{12} q_5 - \frac{1}{12} q_6 \quad (\text{A.44})$$

$$S_4 = \frac{1}{4} q_4 + \frac{13}{12} q_5 - \frac{5}{12} q_6 + \frac{1}{12} q_7 \quad (\text{A.45})$$

avec les définitions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = \frac{v_{i-3} - v_{i-4}}{\Delta x} \\ q_2 = \frac{v_{i-2} - v_{i-3}}{\Delta x} \\ q_3 = \frac{v_{i-1} - v_{i-2}}{\Delta x} \\ q_4 = \frac{v_i - v_{i-1}}{\Delta x} \\ q_5 = \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta x} \\ q_6 = \frac{v_{i+2} - v_{i+1}}{\Delta x} \\ q_7 = \frac{v_{i+3} - v_{i+2}}{\Delta x} \end{array} \right. \quad (\text{A.46})$$

L'approximation WENO7 est une combinaison convexe des stencils S_1 , S_2 , S_3 et S_4 qui s'écrit,

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i^- = \sum_{j=1}^4 \omega_j S_j \quad j=1,2,3,4 \quad (\text{A.47})$$

avec $\omega_j > 0$ et $\sum_{j=1}^4 \omega_j = 1$ les coefficients de pondération non-linéaires qui servent à éviter le stencil candidat ayant la discontinuité. Les coefficients de pondération non-linéaires ω_j sont définis comme :

$$\omega_j = \frac{\tilde{\omega}_j}{\sum_{j=1}^4 \tilde{\omega}_j}, \quad \tilde{\omega}_j = \frac{d_j}{(\varepsilon + \beta_j)^2}, \quad j=1,2,3,4 \quad (\text{A.48})$$

et sont déterminés à l'aide des indicateurs de régularité β_j associés aux stencils S_j . Suivant Balsara and Shu [18] les indicateurs de régularité β_j s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = q_1(547 q_1 - 3882 q_2 + 4642 q_3 - 1854 q_4) + \\ \quad q_2(7043 q_2 - 17246 q_3 + 7042 q_4) + \\ \quad q_3(11003 q_3 - 9402 q_4) + \\ \quad 2107 q_4^2 \\ \beta_2 = q_2(267 q_2 - 1642 q_3 + 1602 q_4 - 494 q_5) + \\ \quad q_3(2843 q_3 - 5966 q_4 + 1922 q_5) + \\ \quad q_4(3443 q_4 - 2522 q_5) + \\ \quad 547 q_5^2 \\ \beta_3 = q_3(547 q_3 - 2522 q_4 + 1922 q_5 - 494 q_6) + \\ \quad q_4(3443 q_4 - 5966 q_5 + 1602 q_6) + \\ \quad q_5(2843 q_5 - 1642 q_6) + \\ \quad 267 q_6^2 \\ \beta_4 = q_4(2107 q_4 - 9402 q_5 + 7042 q_6 - 1854 q_7) + \\ \quad q_5(11003 q_5 - 17246 q_6 + 4642 q_7) + \\ \quad q_6(7043 q_6 - 3882 q_7) + \\ \quad 547 q_7^2 \end{array} \right. \quad (\text{A.49})$$

et les constantes d_1, d_2, d_3 et d_4 , satisfaisant $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 1$, sont les coefficients de pondération linéaires :

$$d_1 = \frac{1}{35}, \quad d_2 = \frac{12}{35}, \quad d_3 = \frac{18}{35}, \quad d_4 = \frac{4}{35} \quad (\text{A.50})$$

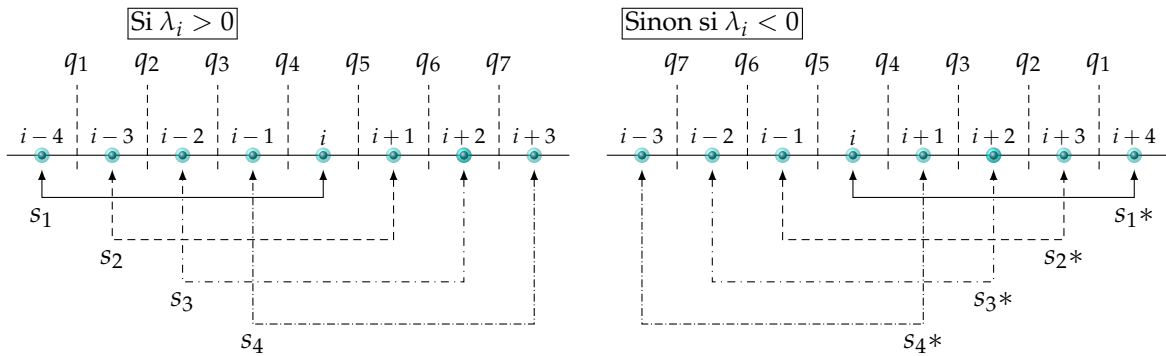


FIGURE A.4 – Stencil de discrétisation du schéma WENO7 sur une grille unidimensionnelle et uniforme.

— Schéma WENO9 :

Le schéma WENO d'ordre 9 est basé sur le schéma ENO d'ordre 5. Le schéma ENO5 consiste à choisir parmi les stencils S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5 de cinquième ordre, l'approximation

la plus régulière (voir figure A.5), à savoir pour $\lambda_i > 0$,

$$S_1 = \frac{1}{5} q_1 - \frac{21}{20} q_2 + \frac{137}{60} q_3 - \frac{163}{60} q_4 + \frac{137}{60} q_5 \quad (\text{A.51})$$

$$S_2 = -\frac{1}{20} q_2 + \frac{17}{60} q_3 - \frac{43}{60} q_4 + \frac{77}{60} q_5 + \frac{1}{5} q_6 \quad (\text{A.52})$$

$$S_3 = \frac{1}{30} q_3 - \frac{13}{60} q_4 + \frac{47}{60} q_5 + \frac{9}{20} q_6 - \frac{1}{5} q_7 \quad (\text{A.53})$$

$$S_4 = -\frac{1}{20} q_4 + \frac{9}{20} q_5 + \frac{47}{60} q_6 - \frac{13}{60} q_7 + \frac{1}{30} q_8 \quad (\text{A.54})$$

$$S_5 = \frac{1}{5} q_5 + \frac{77}{60} q_6 - \frac{43}{60} q_7 + \frac{17}{60} q_8 - \frac{1}{20} q_9 \quad (\text{A.55})$$

avec les définitions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = \frac{v_{i-4} - v_{i-5}}{\Delta x} \\ q_2 = \frac{v_{i-3} - v_{i-4}}{\Delta x} \\ q_3 = \frac{v_{i-2} - v_{i-3}}{\Delta x} \\ q_4 = \frac{v_{i-1} - v_{i-2}}{\Delta x} \\ q_5 = \frac{v_i - v_{i-1}}{\Delta x} \\ q_6 = \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta x} \\ q_7 = \frac{v_{i+2} - v_{i+1}}{\Delta x} \\ q_8 = \frac{v_{i+3} - v_{i+2}}{\Delta x} \\ q_9 = \frac{v_{i+4} - v_{i+3}}{\Delta x} \end{array} \right. \quad (\text{A.56})$$

L'approximation WENO9 est donc une combinaison convexe des stencils S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5 ,

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i^- = \sum_{j=1}^5 \omega_j S_j \quad j=1,2,3,4,5 \quad (\text{A.57})$$

avec $\omega_j > 0$ et $\sum_{j=1}^5 \omega_j = 1$ les coefficients de pondération non-linéaires qui sont définis comme :

$$\omega_j = \frac{\tilde{\omega}_j}{\sum_{j=1}^5 \tilde{\omega}_j}, \quad \tilde{\omega}_j = \frac{d_j}{(\varepsilon + \beta_j)^2}, \quad j=1,2,3,4,5 \quad (\text{A.58})$$

et sont déterminés à l'aide des indicateurs de régularité β_j associés aux stencils S_j . Suivant Balsara and Shu [18] les indicateurs de régularité β_j s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\beta_1 = q_1 (22658 q_1 - 208501 q_2 + 364863 q_3 - 288007 q_4 + 86329 q_5) + \\
\quad q_2 (482963 q_2 - 1704396 q_3 + 1358458 q_4 - 411487 q_5) + \\
\quad q_3 (1521393 q_3 - 2462076 q_4 + 758823 q_5) + \\
\quad q_4 (1020563 q_4 - 649501 q_5) + \\
\quad q_5^2 107918 \\
\beta_2 = q_2 (6908 q_2 - 60871 q_3 + 99213 q_4 - 70237 q_5 + 18079 q_6) + \\
\quad q_3 (138563 q_3 - 464976 q_4 + 337018 q_5 - 88297 q_6) + \\
\quad q_4 (406293 q_4 - 611976 q_5 + 165153 q_6) + \\
\quad q_5 (242723 q_5 - 140251 q_6) + \\
\quad q_6^2 22658 \\
\beta_3 = q_3 (6908 q_3 - 51001 q_4 + 67923 q_5 - 38947 q_6 + 8209 q_7) + \\
\quad q_4 (104963 q_4 - 299076 q_5 + 179098 q_6 - 38947 q_7) + \\
\quad q_5 (231153 q_5 - 299076 q_6 + 67923 q_7) + \\
\quad q_6 (104963 q_6 - 51001 q_7) + \\
\quad q_7^2 6908 \\
\beta_4 = q_4 (22658 q_4 - 14025 q_5 + 165153 q_6 - 88297 q_7 + 18079 q_8) + \\
\quad q_5 (242723 q_5 - 611976 q_6 + 337018 q_7 - 70237 q_8) + \\
\quad q_6 (406293 q_6 - 464976 q_7 + 99213 q_8) + \\
\quad q_7 (138563 q_7 - 60871 q_8) + \\
\quad q_8^2 6908 \\
\beta_5 = q_5 (109718 q_5 - 649501 q_6 + 758823 q_7 - 411487 q_8 + 86329 q_9) + \\
\quad q_6 (1020563 q_6 - 2462076 q_7 + 1358458 q_8 - 288007 q_9) + \\
\quad q_7 (1521393 q_7 - 1704396 q_8 + 364863 q_9) + \\
\quad q_8 (482963 q_8 - 208501 q_9) + \\
\quad q_9^2 22658
\end{array} \right. \quad (A.59)$$

et les constantes d_1, d_2, d_3, d_4 et d_5 , satisfaisant $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = 1$, sont les coefficients de pondération linéaires :

$$d_1 = \frac{1}{126}, \quad d_2 = \frac{10}{63}, \quad d_3 = \frac{10}{21}, \quad d_4 = \frac{20}{63}, \quad d_5 = \frac{5}{126} \quad (A.60)$$

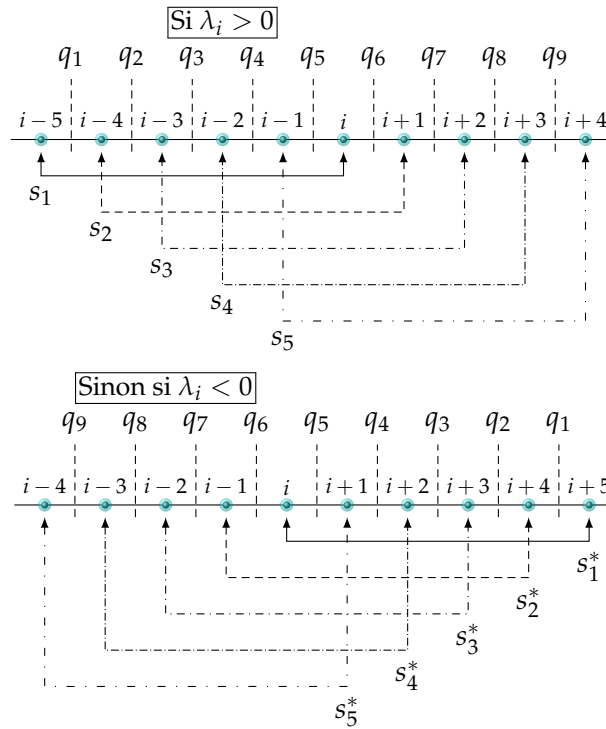


FIGURE A.5 – Stencil de discrétisation du schéma WENO9 sur une grille unidimensionnelle et uniforme.

A.5.2 Schémas HOUC(7,9)

Lorsque les stencils sont décalés à gauche ou lorsque $\lambda_i > 0$, suivant Nourgaliev and Theofanous [153], le schéma d'ordre élevé HOUC7 s'écrit en utilisant la figure A.4 comme suit,

$$\left(\frac{\partial v^-}{\partial x_1}\right)_i = \frac{1}{140}v_{i-4} - \frac{1}{15}v_{i-3} + \frac{3}{10}v_{i-2} - v_{i-1} + \frac{1}{4}v_i + \frac{3}{5}v_{i+1} - \frac{1}{10}v_{i+2} + \frac{1}{105}v_{i+3} + \mathcal{O}(\Delta x^7) \quad \text{HOUC7 (A.61)}$$

et le schéma d'ordre élevé HOUC9 s'écrit en utilisant la figure A.5 comme suit,

$$\left(\frac{\partial v^-}{\partial x_1}\right)_i = -\frac{1}{630}v_{i-5} + \frac{1}{56}v_{i-4} - \frac{2}{21}v_{i-3} + \frac{1}{3}v_{i-2} - v_{i-1} + \frac{1}{5}v_i + \frac{2}{3}v_{i+1} - \frac{1}{7}v_{i+2} + \frac{1}{42}v_{i+3} - \frac{1}{504}v_{i+4} + \mathcal{O}(\Delta x^9) \quad \text{HOUC9 (A.62)}$$

Bibliographie

- [1] Abed, W. M., Whalley, R. D., Dennis, D. J., and Poole, R. J. (2016). Experimental investigation of the impact of elastic turbulence on heat transfer in a serpentine channel. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 231 :68–78.
- [2] Aboubacar, M., Matallah, H., and Webster, M. (2002). Highly elastic solutions for oldroyd-b and phan-thien/tanner fluids with a finite volume/element method : planar contraction flows. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 103(1) :65–103.
- [3] Aboubacar, M. and Webster, M. (2001). A cell-vertex finite volume/element method on triangles for abrupt contraction viscoelastic flows. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 98(2-3) :83–106.
- [4] Afonso, A., Oliveira, P. J., Pinho, F., and Alves, M. (2009). The log-conformation tensor approach in the finite-volume method framework. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 157(1-2) :55–65.
- [5] Afonso, A., Pinho, F., and Alves, M. (2012). The kernel-conformation constitutive laws. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 167 :30–37.
- [6] Agassant, J.-F., Avenas, P., Carreau, P. J., Vergnes, B., and Vincent, M. (2017). *Polymer processing : principles and modeling*. Carl Hanser Verlag GmbH Co KG.
- [7] Al Melhi, S., Filali, A., Khezzar, L., and Alshehhi, M. (2017). Flow and heat transfer of a giesekus fluid in plane and 3d ducts. *Heat Transfer—Asian Research*, 46(8) :1380–1398.
- [8] Alam, T. and Kim, M.-H. (2018). A comprehensive review on single phase heat transfer enhancement techniques in heat exchanger applications. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 81 :813–839.
- [9] Alves, M., Oliveira, P., and Pinho, F. (2003a). A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection. *International journal for numerical methods in fluids*, 41(1) :47–75.
- [10] Alves, M., Pinho, F., and Oliveira, P. J. (2005). Visualizations of boger fluid flows in a 4 : 1 square–square contraction. *AIChE journal*, 51(11) :2908–2922.
- [11] Alves, M. A., Oliveira, P. J., and Pinho, F. T. (2003b). Benchmark solutions for the flow of oldroyd-b and ptt fluids in planar contractions. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 110(1) :45–75.
- [12] Amoreira, L. J. and Oliveira, P. J. (2010). *Adv. Appl. Math. Mech*, 4 :483–502.
- [13] Anderson, D., Tannehill, J. C., and Pletcher, R. H. (2016). *Computational fluid mechanics and heat transfer*. CRC Press.

- [14] Azaiez, J., Guenette, R., and Ait-Kadi, A. (1996). Entry flow calculations using multi-mode models. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 66(2-3) :271–281.
- [15] Baaijens, F. P. (1998). Mixed finite element methods for viscoelastic flow analysis : a review. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 79(2-3) :361–385.
- [16] Baaijens, F. P. (1999). Numerical and experimental analysis of viscoelastic flows. In *Polymer Processing Society : annual meeting, 15th, s-Hertogenbosch, The Netherlands, May 31-June 4, 1999 : proceedings*.
- [17] Balci, N., Thomases, B., Renardy, M., and Doering, C. R. (2011). Symmetric factorization of the conformation tensor in viscoelastic fluid models. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 166(11) :546–553.
- [18] Balsara, D. S. and Shu, C.-W. (2000). Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy. *Journal of Computational Physics*, 160(2) :405–452.
- [19] Bell, J. B., Colella, P., and Glaz, H. M. (1989). A second-order projection method for the incompressible navier-stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 85(2) :257–283.
- [20] Beris, A., Armstrong, R., and Brown, R. (1984). Finite element calculation of viscoelastic flow in a journal bearing : I. small eccentricities. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 16(1-2) :141–172.
- [21] Beris, A. N., Edwards, B. J., and Edwards, B. J. (1994). *Thermodynamics of flowing systems : with internal microstructure*. Number 36. Oxford University Press on Demand.
- [22] Bingham, E. C. (1922). *Fluidity and plasticity*, volume 2. McGraw-Hill.
- [23] Bird, R., Curtiss, C. F., Armstrong, R. C., and Hassager, O. (1987a). *Dynamics of polymeric liquids. Vol. 2 : Kinetic theory*. Wiley.
- [24] Bird, R. and DeAguiar, J. (1983). An encapsulated dumbbell model for concentrated polymer solutions and melts i. theoretical development and constitutive equation. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 13(2) :149–160.
- [25] Bird, R., Dotson, P., and Johnson, N. (1980). Polymer solution rheology based on a finitely extensible bead—spring chain model. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 7(2-3) :213–235.
- [26] Bird, R. B. (2002). Transport phenomena. *Applied Mechanics Reviews*, 55(1) :R1–R4.
- [27] Bird, R. B., Armstrong, R. C., and Hassager, O. (1987b). *Dynamics of polymeric liquids. Vol. 1 : Fluid mechanics*.
- [28] Bird, R. B., Stewart, W. E., and Lightfoot, E. N. (2007). *Transport phenomena*. John Wiley & Sons.
- [29] Bird, R. B. and Wiest, J. M. (1985). Anisotropic effects in dumbbell kinetic theory. *Journal of Rheology*, 29(5) :519–532.
- [30] Bird, R. B. and Wiest, J. M. (1995). Constitutive equations for polymeric liquids. *Annual review of fluid mechanics*, 27(1) :169–193.
- [31] Boger, D. and Binnington, R. (1977). Separation of elastic and shear thinning effects in the capillary rheometer. *Transactions of the Society of Rheology*, 21(4) :515–534.
- [32] Botella, O. and Peyret, R. (1998). Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow. *Computers & Fluids*, 27(4) :421–433.
- [33] Boutaous, M., Bourgin, P., and Zinet, M. (2010). Thermally and flow induced crystallization of polymers at low shear rate. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 165(5-6) :227–237.
- [34] Briley, W. and McDonald, H. (1980). On the structure and use of linearized block implicit schemes. *Journal of Computational Physics*, 34(1) :54–73.
- [35] Brown, D. L. (2003). Accuracy of projection methods for the incompressible navier-stokes equations. In *Numerical Simulations Of Incompressible Flows*, pages 101–107. World Scientific.

- [36] Brown, R., Szady, M., Northey, P., and Armstrong, R. (1993). On the numerical stability of mixed finite-element methods for viscoelastic flows governed by differential constitutive equations. *Theoretical and computational fluid dynamics*, 5(2-3) :77–106.
- [37] Caltagirone, J.-P. (2013). *Physique des écoulements continus*. Springer.
- [38] Carrot, C., Guillet, J., Revenu, P., and Arzac, A. (1996). Experimental validation of non linear network models. In *Rheology Series*, volume 5, pages 141–198. Elsevier.
- [39] Chandrupatla, A. R. and Sastri, V. (1977). Laminar forced convection heat transfer of a non-newtonian fluid in a square duct. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 20(12) :1315–1324.
- [40] Chen, X., Marschall, H., Schäfer, M., and Bothe, D. (2013). A comparison of stabilisation approaches for finite-volume simulation of viscoelastic fluid flow. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 27(6-7) :229–250.
- [41] Chhabra, R. P. and Richardson, J. F. (1999). *Non-Newtonian flow in the process industries : fundamentals and engineering applications*. Butterworth-Heinemann.
- [42] Chilcott, M. and Rallison, J. M. (1988). Creeping flow of dilute polymer solutions past cylinders and spheres. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 29 :381–432.
- [43] Chorin, A. J. (1968). Numerical solution of the navier-stokes equations. *Mathematics of computation*, 22(104) :745–762.
- [44] Coelho, P., Pinho, F., and Oliveira, P. (2003). Thermal entry flow for a viscoelastic fluid : the graetz problem for the ptt model. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46(20) :3865–3880.
- [45] Coleman, B. D. and Noll, W. (1974). An approximation theorem for functionals, with applications in continuum mechanics. In *The Foundations of Mechanics and Thermodynamics*, pages 97–112. Springer.
- [46] Criminale, W. O., Ericksen, J., and Filbey, G. (1957). Steady shear flow of non-newtonian fluids. *Archive for rational mechanics and analysis*, 1(1) :410–417.
- [47] Crochet, M. J., Davies, A. R., and Walters, K. (2012). *Numerical simulation of non-Newtonian flow*. Elsevier.
- [48] Cruz, D., Pinho, F. T. d., and Oliveira, P. J. (2005). *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 132(1) :28–35.
- [49] Curtiss, C. and Bird, R. B. (1981). A kinetic theory for polymer melts. ii. the stress tensor and the rheological equation of state. *The Journal of Chemical Physics*, 74(3) :2026–2033.
- [50] Dai, S.-C., Qi, F., and Tanner, R. I. (2014). Viscometric functions of concentrated non-colloidal suspensions of spheres in a viscoelastic matrix. *Journal of Rheology*, 58(1) :183–198.
- [51] Damanik, H., Hron, J., Ouazzi, A., and Turek, S. (2010). A monolithic fem approach for the log-conformation reformulation (lcr) of viscoelastic flow problems. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 165(19-20) :1105–1113.
- [52] de Vahl Davis, G. (1983). Natural convection of air in a square cavity : a bench mark numerical solution. *International journal for numerical methods in fluids*, 3(3) :249–264.
- [53] Dealy, J. M. and Wang, J. (2013). *Melt rheology and its applications in the plastics industry*. Springer Science & Business Media.
- [54] Debbaut, B., Avalosse, T., Dooley, J., and Hughes, K. (1997). On the development of secondary motions in straight channels induced by the second normal stress difference : experiments and simulations. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 69(2-3) :255–271.
- [55] Debbaut, B. and Dooley, J. (1999). Secondary motions in straight and tapered channels : Experiments and three-dimensional finite element simulation with a multimode differential viscoelastic model. *Journal of Rheology*, 43(6) :1525–1545.
- [56] Dietz, W. (2015). Polyester fiber spinning analyzed with multimode phan thien-tanner model. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 217 :37–48.

- [57] Dodson, A., Townsend, P., and Walters, K. (1974). Non-newtonian flow in pipes of non-circular cross section. *Computers & Fluids*, 2(3-4) :317–338.
- [58] Doi, M. and Edwards, S. F. (1988). *The theory of polymer dynamics*, volume 73. oxford university press.
- [59] Douglas, J. and Gunn, J. E. (1964). A general formulation of alternating direction methods. *Numerische Mathematik*, 6(1) :428–453.
- [60] Duarte, A., Miranda, A. I., and Oliveira, P. J. (2008). Numerical and analytical modeling of unsteady viscoelastic flows : The start-up and pulsating test case problems. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 154(2-3) :153–169.
- [61] Ericksen, J. (1956). Overdetermination of the speed in rectilinear motion of non-newtonian fluids. *Quarterly of Applied Mathematics*, 14(3) :318–321.
- [62] Fattal, R. and Kupferman, R. (2004). Constitutive laws for the matrix-logarithm of the conformation tensor. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 123(2-3) :281–285.
- [63] Fattal, R. and Kupferman, R. (2005). Time-dependent simulation of viscoelastic flows at high weissenberg number using the log-conformation representation. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 126(1) :23–37.
- [64] Ferziger, J. H., Perić, M., and Street, R. L. (2002). *Computational methods for fluid dynamics*, volume 3. Springer.
- [65] Filali, A., Khezzar, L., Siginer, D., and Nemouchi, Z. (2012). Graetz problem with non-linear viscoelastic fluids in non-circular tubes. *International Journal of Thermal Sciences*, 61 :50–60.
- [66] Fortin, M. and Fortin, A. (1989). A new approach for the fem simulation of viscoelastic flows. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 32(3) :295–310.
- [67] Fortin, M., Peyret, R., and Temam, R. (1971). Calcul des écoulements d'un fluide visqueux incompressible. In *Proceedings of the Second International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, pages 336–342. Springer.
- [68] Gao, S. and Hartnett, J. (1993). *International communications in heat and mass transfer*, 20(2) :197–210.
- [69] Gao, S. and Hartnett, J. (1996). Heat transfer behavior of reiner-rivlin fluids in rectangular ducts. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 39(6) :1317–1324.
- [70] Gerolymos, G., Sénéchal, D., and Vallet, I. (2009). Very-high-order weno schemes. *Journal of Computational Physics*, 228(23) :8481–8524.
- [71] Gerritsma, M. and Phillips, T. (2001). On the use of characteristic variables in viscoelastic flow problems. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 66(2) :127–147.
- [72] Gerritsma, M. I. et al. (1996). *Time dependent numerical simulations of a viscoelastic fluid on a staggered grid*. Rijksuniversiteit Groningen.
- [73] Gerritsma, M. I. and Phillips, T. N. (2008). On the characteristics and compatibility equations for the ucm model fluid. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik : Applied Mathematics and Mechanics*, 88(7) :523–539.
- [74] Gervang, B. and Larsen, P. (1991). Secondary flows in straight ducts of rectangular cross section. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 39(3) :217–237.
- [75] Ghia, U., Ghia, K. N., and Shin, C. (1982). High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multigrid method. *Journal of computational physics*, 48(3) :387–411.
- [76] Giesekus, H. (1982). A simple constitutive equation for polymer fluids based on the concept of deformation-dependent tensorial mobility. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 11(1-2) :69–109.
- [77] Giesekus, H. (1983). Stressing behaviour in simple shear flow as predicted by a new constitutive model for polymer fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 12(3) :367–374.

- [78] Giesekus, H. (1985). Constitutive equations for polymer fluids based on the concept of configuration-dependent molecular mobility : a generalized mean-configuration model. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 17(3) :349–372.
- [79] Goda, K. (1979). A multistep technique with implicit difference schemes for calculating two-or three-dimensional cavity flows. *Journal of Computational Physics*, 30(1) :76–95.
- [80] Gordon, R. and Schowalter, W. (1972). Anisotropic fluid theory : a different approach to the dumbbell theory of dilute polymer solutions. *Transactions of the Society of Rheology*, 16(1) :79–97.
- [81] Green, A. E. and Rivlin, R. S. (1957). The mechanics of non-linear materials with memory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1(1) :1–21.
- [82] Green, A. E. and Rivlin, R. S. (1997). Steady flow of non-newtonian fluids through tubes. In *Collected Papers of RS Rivlin*, pages 1931–1940. Springer.
- [83] Green, M. and Tobolsky, A. (1946). A new approach to the theory of relaxing polymeric media. *The Journal of Chemical Physics*, 14(2) :80–92.
- [84] Guaily, A., Cheluget, E., Lee, K., and Epstein, M. (2011). A new hyperbolic model and an experimental study for the flow of polymer melts in multi-pass rheometer. *Computers & fluids*, 44(1) :258–266.
- [85] Guénette, R. and Fortin, M. (1995). A new mixed finite element method for computing viscoelastic flows. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 60(1) :27–52.
- [86] Guermond, J.-L., Mineev, P., and Shen, J. (2006). An overview of projection methods for incompressible flows. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 195(44-47) :6011–6045.
- [87] Guermond, J.-L. and Quartapelle, L. (1998a). On stability and convergence of projection methods based on pressure poisson equation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 26(9) :1039–1053.
- [88] Guermond, J.-L. and Quartapelle, L. (1998b). On the approximation of the unsteady navier–stokes equations by finite element projection methods. *Numerische mathematik*, 80(2) :207–238.
- [89] Guermond, J.-L. and Salgado, A. (2009). A splitting method for incompressible flows with variable density based on a pressure poisson equation. *Journal of Computational Physics*, 228(8) :2834–2846.
- [90] Han, C. D. (2007). *Rheology and processing of polymeric materials : Volume 1 : Polymer Rheology*, volume 1. Oxford University Press on Demand.
- [91] Harlow, F. H. and Welch, J. E. (1965). Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *The physics of fluids*, 8(12) :2182–2189.
- [92] Harten, A., Engquist, B., Osher, S., and Chakravarthy, S. R. (1987). Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, iii. In *Upwind and high-resolution schemes*, pages 218–290. Springer.
- [93] Harten, A., Lax, P. D., and Leer, B. v. (1983). On upstream differencing and godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM review*, 25(1) :35–61.
- [94] Hartnett, J. (1992). Viscoelastic fluids : a new challenge in heat transfer. *Journal of Heat Transfer (Transactions of the ASME (American Society of Mechanical Engineers), Series C) ;(United States)*, 114(2).
- [95] Hartnett, J. P. and Kostic, M. (1985). Heat transfer to a viscoelastic fluid in laminar flow through a rectangular channel. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 28(6) :1147–1155.
- [96] Hartnett, J. P. and Kostic, M. (1989). Heat transfer to newtonian and non-newtonian fluids in rectangular ducts. In *Advances in heat transfer*, volume 19, pages 247–356. Elsevier.
- [97] Hatzikiriakos, S. G., Heffner, G., Vlassopoulos, D., and Christodoulou, K. (1997). Rheological characterization of polyethylene terephthalate resins using a multimode phan-tien-tanner constitutive relation. *Rheologica acta*, 36(5) :568–578.

- [98] Henrick, A. K., Aslam, T. D., and Powers, J. M. (2005). Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes : achieving optimal order near critical points. *Journal of Computational Physics*, 207(2) :542–567.
- [99] Herschel, W. and Bulkley, R. (1926). Measurement of consistency as applied to rubber-benzene solutions. In *Am. Soc. Test Proc*, volume 26, pages 621–633.
- [100] Huilgol, R. R. and Phan-Thien, N. (2015). *Fluid mechanics of viscoplasticity*. Springer.
- [101] Hulsen, M. A. (1988). Some properties and analytical expressions for plane flow of leonov and giesekus models. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 30(1) :85–92.
- [102] Hulsen, M. A. (1990). A sufficient condition for a positive definite configuration tensor in differential models. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 38(1) :93–100.
- [103] Irgens, F. (2014). *Rheology and non-newtonian fluids*. Springer.
- [104] Iwatsu, R., Hyun, J. M., and Kuwahara, K. (1993). Mixed convection in a driven cavity with a stable vertical temperature gradient. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 36(6) :1601–1608.
- [105] Jalali, A., Hulsen, M., Norouzi, M., and Kayhani, M. (2013). Numerical simulation of 3d viscoelastic developing flow and heat transfer in a rectangular duct with a nonlinear constitutive equation. *Korea-Australia Rheology Journal*, 25(2) :95–105.
- [106] Jiang, G.-S. and Shu, C.-W. (1996). Efficient implementation of weighted eno schemes. *Journal of Computational Physics*, 126(1) :202 – 228.
- [107] Johnson Jr, M. and Segalman, D. (1977). A model for viscoelastic fluid behavior which allows non-affine deformation. *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, 2(3) :255–270.
- [108] Joseph, D. and Saut, J. (1986). Change of type and loss of evolution in the flow of viscoelastic fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 20 :117–141.
- [109] Joseph, D. D. (1981). Instability of the rest state of fluids of arbitrary grade greater than one. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 75(3) :251–256.
- [110] Joseph, D. D. (2013). *Fluid dynamics of viscoelastic liquids*, volume 84. Springer Science & Business Media.
- [111] Joseph, D. D., Renardy, M., and Saut, J.-C. (1985). Hyperbolicity and change of type in the flow of viscoelastic fluids. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 87(3) :213–251.
- [112] Kalogrianitis, S. G. and van Egmond, J. W. (1997). Full tensor optical rheometry of polymer fluids. *Journal of Rheology*, 41(2) :343–364.
- [113] Karimi, A., Yazdi, S., and Ardekani, A. (2013). Hydrodynamic mechanisms of cell and particle trapping in microfluidics. *Biomicrofluidics*, 7(2) :021501.
- [114] Karniadakis, G. E., Israeli, M., and Orszag, S. A. (1991). High-order splitting methods for the incompressible navier-stokes equations. *Journal of computational physics*, 97(2) :414–443.
- [115] Kays, W. M., Crawford, M., and Weigand, B. (2005). *Convective Heat and Mass Transfer (4th Edition)*. McGraw-Hill, New York.
- [116] Keunings, R. (1986). On the high weissenberg number problem. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 20 :209–226.
- [117] Keunings, R. (2000). A survey of computational rheology. In *Proceedings of the XIIIth International Congress on Rheology*, volume 1, pages 7–14. British Soc. Rheol.
- [118] Khan, S. and Larson, R. (1987). Comparison of simple constitutive equations for polymer melts in shear and biaxial and uniaxial extensions. *Journal of Rheology*, 31(3) :207–234.

- [119] Khanafer, K. M., Al-Amiri, A. M., and Pop, I. (2007). Numerical simulation of unsteady mixed convection in a driven cavity using an externally excited sliding lid. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 26(5) :669 – 687.
- [120] Kim, J. and Moin, P. (1984). Application of a fractional-step method to incompressible navier-stokes equation.
- [121] Kincaid, D. R., Oppe, T. C., and Joubert, W. D. (1989). An introduction to the nspcg software package. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 27(3) :589–608.
- [122] Knikker, R. (2009). Study of a staggered fourth-order compact scheme for unsteady incompressible viscous flows. *International journal for numerical methods in fluids*, 59(10) :1063–1092.
- [123] Kramers, H. A. (1946). The behavior of macromolecules in inhomogeneous flow. *The Journal of Chemical Physics*, 14(7) :415–424.
- [124] Ku, H. C., Hirsh, R. S., and Taylor, T. D. (1987). A pseudospectral method for solution of the three-dimensional incompressible navier-stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 70(2) :439–462.
- [125] Langlois, W. and Rivlin, R. (1997). Slow steady-state flow of visco-elastic fluids through non-circular tubes. In *Collected Papers of RS Rivlin*, pages 1946–1962. Springer.
- [126] Larson, R. G. (2013). *Constitutive Equations for Polymer Melts and Solutions : Butterworths Series in Chemical Engineering*. Butterworth-Heinemann.
- [127] Lee, Y.-J., Xu, J., and Zhang, C.-S. (2011). Stable finite element discretizations for viscoelastic flow models. In *Handbook of numerical analysis*, volume 16, pages 371–432. Elsevier.
- [128] Leonard, B. (1991). The ultimate conservative difference scheme applied to unsteady one-dimensional advection. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 88(1) :17–74.
- [129] Leonard, B. P. (1988). Simple high-accuracy resolution program for convective modelling of discontinuities. *International journal for numerical methods in fluids*, 8(10) :1291–1318.
- [130] Leonov, A. (1976). Nonequilibrium thermodynamics and rheology of viscoelastic polymer media. *Rheologica acta*, 15(2) :85–98.
- [131] Leonov, A. I. and Prokunin, A. (2012). *Nonlinear phenomena in flows of viscoelastic polymer fluids*. Springer Science & Business Media.
- [132] Letelier, M. F., Hinojosa, C. B., and Siginer, D. A. (2017). Analytical solution of the graetz problem for non-linear viscoelastic fluids in tubes of arbitrary cross-section. *International Journal of Thermal Sciences*, 111 :369–378.
- [133] LeVeque, R. J. et al. (2002). *Finite volume methods for hyperbolic problems*, volume 31. Cambridge university press.
- [134] Li, Y.-K., Zheng, Z.-Y., Zhang, H.-N., Li, F.-C., Qian, S., Joo, S. W., and Kulagina, L. V. (2017). Numerical study on secondary flows of viscoelastic fluids in straight ducts : Origin analysis and parametric effects. *Computers & Fluids*, 152 :57–73.
- [135] Lim, H., Nam, J., and Shin, S. (2014). Lateral migration of particles suspended in viscoelastic fluids in a microchannel flow. *Microfluidics and nanofluidics*, 17(4) :683–692.
- [136] Lin, Y.-H. (2003). *Polymer viscoelasticity : basics, molecular theories, and experiments*. World Scientific.
- [137] Liu, A. W., Bornside, D. E., Armstrong, R. C., and Brown, R. A. (1998). Viscoelastic flow of polymer solutions around a periodic, linear array of cylinders : comparisons of predictions for microstructure and flow fields. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 77(3) :153–190.
- [138] Liu, I.-S. (2004). On euclidean objectivity and the principle of material frame-indifference. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 16(1-2) :177–183.
- [139] Lodge, A. (1956). *Transactions of the Faraday Society*, 52 :120–130.

- [140] Lodge, A. S. (1964). Elastic liquids; an introductory vector treatment of finite-strain polymer rheology.
- [141] Lodge, A. S. (1968). Constitutive equations from molecular network theories for polymer solutions. *Rheologica Acta*, 7(4) :379–392.
- [142] Mall-Gleissle, S. E., Gleissle, W., McKinley, G. H., and Buggisch, H. (2002). The normal stress behaviour of suspensions with viscoelastic matrix fluids. *Rheologica acta*, 41(1-2) :61–76.
- [143] Marchal, J. and Crochet, M. (1987). A new mixed finite element for calculating viscoelastic flow. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 26(1) :77–114.
- [144] McLeish, T. (2002). Tube theory of entangled polymer dynamics. *Advances in physics*, 51(6) :1379–1527.
- [145] McLeish, T. and Larson, R. (1998). Molecular constitutive equations for a class of branched polymers : The pom-pom polymer. *Journal of rheology*, 42(1) :81–110.
- [146] Meissner, J. (1975). Basic parameters, melt rheology, processing and end-use properties of three similar low density polyethylene samples. *Pure and Applied Chemistry*, 42(4) :551–612.
- [147] Mompean, G. and Deville, M. (1997). Unsteady finite volume simulation of oldroyd-b fluid through a three-dimensional planar contraction. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 72(2-3) :253–279.
- [148] Mu, Y. and Zhao, G. (2008). Numerical study of nonisothermal polymer extrusion flow with a differential viscoelastic model. *Polymer Engineering & Science*, 48(2) :316–328.
- [149] Muzychka, Y. and Yovanovich, M. (2004). Laminar forced convection heat transfer in the combined entry region of non-circular ducts. *J. Heat Transfer*, 126(1) :54–61.
- [150] Naccache, M. F. and Mendes, P. R. S. (1996). *International journal of heat and fluid flow*, 17(6) :613–620.
- [151] Niethammer, M., Marschall, H., Kunkelmann, C., and Bothe, D. (2018). A numerical stabilization framework for viscoelastic fluid flow using the finite volume method on general unstructured meshes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 86(2) :131–166.
- [152] Nonaka, A., Trebotich, D., Miller, G., Graves, D., and Colella, P. (2009). A higher-order upwind method for viscoelastic flow. *Communications in Applied Mathematics and Computational Science*, 4(1) :57–83.
- [153] Nourgaliev, R. R. and Theofanous, T. G. (2007). High-fidelity interface tracking in compressible flows : Unlimited anchored adaptive level set. *Journal of Computational Physics*, 224(2) :836–866.
- [154] Oldroyd, J. (1950). On the formulation of rheological equations of state. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 200(1063) :523–541.
- [155] Oldroyd, J. (1958). Non-newtonian effects in steady motion of some idealized elastico-viscous liquids. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 245(1241) :278–297.
- [156] Oliveira, P. J. and Pinho, F. (1999a). Plane contraction flows of upper convected maxwell and phan-thien-tanner fluids as predicted by a finite-volume method. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 88(1-2) :63–88.
- [157] Oliveira, P. J., Pinho, F. d., and Pinto, G. (1998). Numerical simulation of non-linear elastic flows with a general collocated finite-volume method. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 79(1) :1–43.
- [158] Oliveira, P. J. and Pinho, F. T. (1999b). *Journal of Fluid Mechanics*, 387 :271–280.
- [159] Oliver, D. and Karim, R. (1971). Laminar-flow non-newtonian heat transfer in flattened tubes. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 49(2) :236–240.
- [160] Orszag, S. A., Israeli, M., and Deville, M. O. (1986). Boundary conditions for incompressible flows. *Journal of Scientific Computing*, 1(1) :75–111.
- [161] Osher, S. and Sethian, J. A. (1988). Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of computational physics*, 79(1) :12–49.

- [162] Osher, S. and Shu, C.-W. (1991). High-order essentially nonoscillatory schemes for hamilton–jacobi equations. *SIAM Journal on numerical analysis*, 28(4) :907–922.
- [163] Ostwald, W. (1925). Ueber die geschwindigkeitsfunktion der viskosität disperser systeme. i. *Colloid & Polymer Science*, 36(2) :99–117.
- [164] Owens, R. G. and Phillips, T. N. (1996). Steady viscoelastic flow past a sphere using spectral elements. *International journal for numerical methods in engineering*, 39(9) :1517–1534.
- [165] Owens, R. G. and Phillips, T. N. (2002). *Computational rheology*, volume 14. World Scientific.
- [166] Pan, T.-W. and Hao, J. (2007). Numerical simulation of a lid-driven cavity viscoelastic flow at high weissenberg numbers. *Comptes Rendus Mathématique*, 344(4) :283–286.
- [167] Peaceman, D. W. and Rachford, Jr, H. H. (1955). The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. *Journal of the Society for industrial and Applied Mathematics*, 3(1) :28–41.
- [168] Perera, M. and Walters, K. (1977). Long-range memory effects in flows involving abrupt changes in geometry : Part i : flows associated with i-shaped and t-shaped geometries. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2(1) :49–81.
- [169] Peres, N., Afonso, A., Alves, M., and Pinho, F. (2009). Heat transfer enhancement in laminar flow of viscoelastic fluids through a rectangular duct. In *Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*.
- [170] Peterlin, A. (1966). Hydrodynamics of macromolecules in a velocity field with longitudinal gradient. *Journal of Polymer Science Part B : Polymer Letters*, 4(4) :287–291.
- [171] Peyret, R. and Taylor, T. D. (2012). *Computational methods for fluid flow*. Springer Science & Business Media.
- [172] Phan-Thien, N. (1978). A nonlinear network viscoelastic model. *Journal of Rheology*, 22(3) :259–283.
- [173] Phan-Thien, N. and Mai-Duy, N. (2017). *Understanding viscoelasticity : an introduction to rheology*. Springer.
- [174] Phelan, F., Malone, M., and Winter, H. (1989). A purely hyperbolic model for unsteady viscoelastic flow. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 32(2) :197–224.
- [175] Phillips, T. and Williams, A. (1999). Viscoelastic flow through a planar contraction using a semi-lagrangian finite volume method. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 87(2-3) :215–246.
- [176] Quarteroni, A. and Valli, A. (2008). *Numerical approximation of partial differential equations*, volume 23. Springer Science & Business Media.
- [177] Quinzani, L., McKinley, G., Brown, R., and Armstrong, R. (1990). Modeling the rheology of polyisobutylene solutions. *Journal of Rheology*, 34(5) :705–748.
- [178] Quinzani, L. M., Armstrong, R. C., and Brown, R. A. (1994). Birefringence and laser-doppler velocimetry (ldv) studies of viscoelastic flow through a planar contraction. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 52(1) :1–36.
- [179] Rajagopalan, D., Armstrong, R. C., and Brown, R. A. (1990). Finite element methdos for calculation of steady, viscoelastic flow using constitutive equations with a newtonian viscosity. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 36 :159–192.
- [180] Renardy, M. (2000). *Mathematical analysis of viscoelastic flows*, volume 73. Siam.
- [181] Rivlin, R. (1948). Large elastic deformations of isotropic materials iv. further developments of the general theory. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 241(835) :379–397.
- [182] Rivlin, R. S. (1955). Further remarks on the stress-deformation relations for isotropic materials. *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, 4 :681–702.

- [183] Rivlin, R. S. and Ericksen, J. L. (1955). Stress-deformation relations for isotropic materials. *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, 4 :323–425.
- [184] Rouse Jr, P. E. (1953). A theory of the linear viscoelastic properties of dilute solutions of coiling polymers. *The Journal of Chemical Physics*, 21(7) :1272–1280.
- [185] Saramito, P. (2014). A newton algorithm for steady johnson-segalman viscoelastic fluids based on a new non-singular log-conformation formulation and an incompressible finite element method.
- [186] Sato, T. and Richardson, S. M. (1994). Explicit numerical simulation of time-dependent viscoelastic flow problems by a finite element/finite volume method. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 51(3) :249–275.
- [187] Schleiniger, G. and Weinacht, R. (1991). A remark on the giesekus viscoelastic fluid. *Journal of Rheology*, 35(6) :1157–1170.
- [188] Schoonen, J. F., Swartjes, F. H., Peters, G. W., Baaijens, F., and Meijer, H. E. (1998). A 3d numerical/experimental study on a stagnation flow of a polyisobutylene solution. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 79(2-3) :529–561.
- [189] Schroeder, C. B. and Jeffrey, K. R. (2011). Rheo-nmr of the secondary flow of non-newtonian fluids in square ducts. *Physical review letters*, 106(4) :046001.
- [190] Shah, R. (1975). *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 18(7-8) :849–862.
- [191] Shah, R. K. and Bhatti, M. (1987). Laminar convective heat transfer in ducts. *Handbook of single-phase convective heat transfer*, 3.
- [192] Shah, R. K. and London, A. L. (2014). *Laminar flow forced convection in ducts : a source book for compact heat exchanger analytical data*. Academic press.
- [193] Sharif, F. (1999). *Three-dimensional finite element analysis of viscoelastic flow*. PhD thesis.
- [194] Shin, D. M., Lee, J. S., Kim, J. M., Jung, H. W., and Hyun, J. C. (2007). Transient and steady-state solutions of 2d viscoelastic nonisothermal simulation model of film casting process via finite element method. *Journal of Rheology*, 51(3) :393–407.
- [195] Shu, C.-W. (1998). Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws. In *Advanced numerical approximation of nonlinear hyperbolic equations*, pages 325–432. Springer.
- [196] Shu, C.-W. (1999). High order eno and weno schemes for computational fluid dynamics. In *High-order methods for computational physics*, pages 439–582. Springer.
- [197] Shyy, W., Thakur, S., and Wright, J. (1992). Second-order upwind and central difference schemes for recirculatingflow computation. *AIAA journal*, 30(4) :923–932.
- [198] Sibley, D. N. (2010). *Viscoelastic Flows of PTT Fluid*. PhD thesis, University of Bath.
- [199] Siginer, D. A. (2014). *Stability of non-linear constitutive formulations for viscoelastic fluids*. Springer.
- [200] Siginer, D. A. (2015). *Developments in Tube Flow of Complex Fluids*, Monograph, ISBN : 978-3-319-02425-7 (hardcover), 978-3-319-02426-4 (eBook), Springer Inc., New York, NY.
- [201] Siginer, D. A. and Letelier, M. F. (2002). Pulsating flow of viscoelastic fluids in straight tubes of arbitrary cross-section—part ii : secondary flows. *International journal of non-linear mechanics*, 37(2) :395–407.
- [202] Siginer, D. A. and Letelier, M. F. (2008). Interplay of inertia and elasticity, enhanced heat transfer and change of type of vorticity in noncircular tube flow of nonlinear viscoelastic fluids. In *AIP Conference Proceedings*, volume 1027, pages 78–80. AIP.
- [203] Siginer, D. A. and Letelier, M. F. (2010). Heat transfer asymptote in laminar flow of non-linear viscoelastic fluids in straight non-circular tubes. *International journal of engineering science*, 48(11) :1544–1562.

- [204] Siginer, D. A. and Letelier, M. F. (2011). Laminar flow of non-linear viscoelastic fluids in straight tubes of arbitrary contour. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 54(9-10) :2188–2202.
- [205] Siginer, D. A., Letelier, M. F., Barrera, C., and González, A. (2019). Transversal field and heat transfer in the flow of non-linear viscoelastic fluids in tear-drop shaped tubes including viscous dissipation. *International Journal of Thermal Sciences*, 141 :150–159.
- [206] Souvaliotis, A. and Beris, A. (1992). An extended white–metzner viscoelastic fluid model based on an internal structural parameter. *Journal of Rheology*, 36(2) :241–271.
- [207] Syrjälä, S. (1998). Laminar flow of viscoelastic fluids in rectangular ducts with heat transfer : A finite element analysis. *International communications in heat and mass transfer*, 25(2) :191–204.
- [208] Syrjälä, S. (2002). Accurate prediction of friction factor and nusselt number for some duct flows of power-law non-newtonian fluids. *Numerical Heat Transfer : Part A : Applications*, 41(1) :89–100.
- [209] Tanner, R. (1979). Some useful constitutive models with a kinematic slip hypothesis. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 5 :103–112.
- [210] Tanner, R. I. (2000). *Engineering rheology*, volume 52. OUP Oxford.
- [211] Tanner, R. I. and Walters, K. (1998). *Rheology : an historical perspective*, volume 7. Elsevier.
- [212] Tanner, R. I. and Xue, S. (2002). Computing transient flows with high elasticity. *Korea-Australia Rheology Journal*, 14(4) :143–159.
- [213] Tanoue, S., Naganawa, T., and Iemoto, Y. (2006). Quasi-three-dimensional simulation of viscoelastic flow through a straight channel with a square cross section. *Nihon Reorji Gakkaishi*, 34(2) :105–113.
- [214] Taylor, G. (1923). Lxxv. on the decay of vortices in a viscous fluid. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 46(274) :671–674.
- [215] Temam, R. (1968). Une méthode d'approximation de la solution des équations de navier-stokes. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 96 :115–152.
- [216] Thien, N. P. and Tanner, R. I. (1977). A new constitutive equation derived from network theory. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2(4) :353–365.
- [217] Thompson, K. (1987). Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics*, 68(1) :1–24.
- [218] Tiwari, R. K. and Das, M. K. (2007). Heat transfer augmentation in a two-sided lid-driven differentially heated square cavity utilizing nanofluids. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50(9–10) :2002 – 2018.
- [219] Townsend, P., Walters, K., and Waterhouse, W. (1976). Secondary flows in pipes of square cross-section and the measurement of the second normal stress difference. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 1(2) :107–123.
- [220] Trebotich, D., Colella, P., and Miller, G. (2005). A stable and convergent scheme for viscoelastic flow in contraction channels. *Journal of Computational Physics*, 205(1) :315–342.
- [221] Truesdell, C. and Noll, W. (2004). The non-linear field theories of mechanics. In *The non-linear field theories of mechanics*, pages 1–579. Springer.
- [222] Tsai, W. and Miller, G. H. (2014). Numerical simulations of viscoelastic flow in complex geometries using a multi-mode giesekus model. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 210 :29–40.
- [223] Van Kan, J. (1986). A second-order accurate pressure-correction scheme for viscous incompressible flow. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 7(3) :870–891.
- [224] Verbeeten, W. M., Peters, G. W., and Baaijens, F. P. (2001). Differential constitutive equations for polymer melts : The extended pom–pom model. *Journal of rheology*, 45(4) :823–843.

- [225] Wagner, M. (1976). Analysis of time-dependent non-linear stress-growth data for shear and elongational flow of a low-density branched polyethylene melt. *Rheologica Acta*, 15(2) :136–142.
- [226] Wagner, M. and Stephenson, S. (1979). The irreversibility assumption of network disentanglement in flowing polymer melts and its effects on elastic recoil predictions. *Journal of Rheology*, 23(4) :489–504.
- [227] Walters, K. and Webster, M. (2003). The distinctive cfd challenges of computational rheology. *International journal for numerical methods in fluids*, 43(5) :577–596.
- [228] Warner Jr, H. R. (1972). Kinetic theory and rheology of dilute suspensions of finitely extendible dumbbells. *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*, 11(3) :379–387.
- [229] Waters, N. and King, M. M. (1970). Unsteady flow of an elastico-viscous liquid. *Rheologica Acta*, 9(3) :345–355.
- [230] Webster, M., Tamaddon-Jahromi, H., and Aboubacar, M. (2004). Transient viscoelastic flows in planar contractions. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 118(2-3) :83–101.
- [231] Weinan, E. and Liu, J.-G. (1995). Projection method i : convergence and numerical boundary layers. *SIAM journal on numerical analysis*, pages 1017–1057.
- [232] Weinan, E. and Liu, J.-G. (1996). Projection method ii : Godunov-ryabenki analysis. *SIAM journal on numerical analysis*, pages 1597–1621.
- [233] Xue, S.-C., Phan-Thien, N., and Tanner, R. (1995). Numerical study of secondary flows of viscoelastic fluid in straight pipes by an implicit finite volume method. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 59(2-3) :191–213.
- [234] Xue, S.-C., Phan-Thien, N., and Tanner, R. (1998). Three dimensional numerical simulations of viscoelastic flows through planar contractions. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 74(1-3) :195–245.
- [235] Xue, S.-C., Tanner, R., and Phan-Thien, N. (2004). Numerical modelling of transient viscoelastic flows. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 123(1) :33–58.
- [236] Yamamoto, M. (1956). The visco-elastic properties of network structure i. general formalism. *Journal of the physical society of Japan*, 11(4) :413–421.
- [237] Yasuda, K., Armstrong, R., and Cohen, R. (1981). Shear flow properties of concentrated solutions of linear and star branched polystyrenes. *Rheologica Acta*, 20(2) :163–178.
- [238] Yeow, Y. L., Chandra, D., Sardjono, A. A., Wijaya, H., Leong, Y.-K., and Khan, A. (2005). A general method for obtaining shear stress and normal stress functions from parallel disk rheometry data. *Rheologica acta*, 44(3) :270–277.
- [239] Yue, P., Dooley, J., and Feng, J. J. (2008). *Journal of Rheology*, 52(1) :315–332.
- [240] Zhang, S. and Shu, C.-W. (2007). A new smoothness indicator for the weno schemes and its effect on the convergence to steady state solutions. *Journal of Scientific Computing*, 31(1-2) :273–305.
- [241] Zimm, B. H. (1956). Dynamics of polymer molecules in dilute solution : viscoelasticity, flow birefringence and dielectric loss. *The journal of chemical physics*, 24(2) :269–278.