



**HAL**  
open science

# Un modèle de transfert radiatif pour la sensibilité géométrique : lecture physique des algorithmiques de Monte-Carlo via la double randomisation

Paule Lapeyre

► **To cite this version:**

Paule Lapeyre. Un modèle de transfert radiatif pour la sensibilité géométrique : lecture physique des algorithmiques de Monte-Carlo via la double randomisation. Optimisation et contrôle [math.OC]. Université de Perpignan, 2021. Français. NNT : 2021PERP0017 . tel-03359645

**HAL Id: tel-03359645**

**<https://theses.hal.science/tel-03359645>**

Submitted on 30 Sep 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

Pour obtenir le grade de  
**Docteur**

Délivré par  
**UNIVERSITÉ DE PERPIGNAN VIA DOMITIA**

Préparée au sein de l'école doctorale  
**Énergie Environnement ED 305**  
Et de l'unité de recherche  
**PROMES - CNRS UPR 8521**  
**Laboratoire Laplace - UMR 5213**

Spécialité:  
Sciences de l'ingénieur

Présentée par **Paule LAPEYRE**

**Un modèle de transfert radiatif pour la  
sensibilité géométrique : lecture physique des  
algorithmes de Monte-Carlo via la double  
randomisation**

Soutenue le 28 Juin 2021 devant le jury composé de

M. Paul LYBAERT, Professeur émérite, Université de Mons	Rapporteur
Mme. Céline CORNET, Professeure, Université de Lille	Rapporteuse
M. Nicolas FERLAY, Maître de conférences, Université de Lille	Examineur
M. Jean-François CORNET, Professeur, SIGMA Clermont	Examineur
M. Gilles FLAMANT, Professeur émérite, Université de Perpignan Via Domitia	Examineur
M. Mathias Paulin, Professeur, Université Toulouse III	Examineur
M. Maxime ROGER, Maître de conférences, INSA Lyon	Invité
M. Cyril CALIOT, Maître de conférence, Université de Pau et des Pays de l'Adour	Directeur
M. Richard FOURNIER, Professeur, Université de Toulouse III	Directeur



# Table des matières

---

<b>1</b>	<b>Problématique</b>	<b>14</b>
1.1	Transfert radiatif . . . . .	14
1.2	Monte-Carlo . . . . .	16
1.3	Sensibilités . . . . .	20
1.4	Illustration par un exemple simple . . . . .	24
1.4.1	Dérivation de la formulation intégrale de l'espérance . . . . .	24
1.4.2	Dérivation de l'équation différentielle . . . . .	25
1.5	Problématique . . . . .	26
1.5.1	Introduction aux sensibilités géométriques . . . . .	26
1.5.2	Nos directions de recherche . . . . .	57
<b>2</b>	<b>Modèles des dérivées spatiale et angulaire</b>	<b>60</b>
2.1	Introduction . . . . .	60
2.2	Le modèle de la dérivée spatiale . . . . .	63
2.2.1	Dans le milieu . . . . .	63
2.2.2	À la limite . . . . .	65
2.3	Le modèle de la dérivée angulaire . . . . .	70
2.3.1	Dans le milieu . . . . .	70
2.3.2	À la limite . . . . .	71
<b>3</b>	<b>Conditions aux limites du modèle de sensibilité</b>	<b>74</b>
3.1	Introduction et contexte . . . . .	75
3.1.1	Qu'allez-vous lire ? . . . . .	76
3.2	Choix de modélisation . . . . .	78
3.2.1	La luminance et ses variables indépendantes . . . . .	78
3.2.2	La sensibilité géométrique . . . . .	79
3.2.3	Séparation des problèmes paramétriques et géométriques . . . . .	79
3.2.4	Description de la déformation géométrique de la frontière . . . . .	80
3.2.5	Résumé des variables et des descripteurs . . . . .	81
3.3	La condition à la limite de sensibilité géométrique . . . . .	82
3.3.1	Sources de sensibilité géométriques . . . . .	82
3.3.2	Parois noires, spéculaires et diffuses . . . . .	89
3.4	Illustrations des termes des conditions aux limites en paroi noire et milieu transparent	94
3.4.1	Translation orthogonale du plan . . . . .	94
3.4.2	Homothétie de la zone émettrice . . . . .	101
3.4.3	Rotation du plan . . . . .	106
3.5	Illustration des termes de la condition à la limite en paroi réfléchissante et milieu transparent . . . . .	113
3.5.1	Translation orthogonale du plan, paroi spéculaire . . . . .	113
3.5.2	Rotation, paroi spéculaire . . . . .	120
3.5.3	Rotation, parois diffuses . . . . .	126
3.6	Discontinuités . . . . .	133



3.6.1	Le plan infini comme support à la condition à la limite radiative discontinue en paroi noire . . . . .	134
3.6.2	Géométries facétisées : conjecture des plans . . . . .	136
3.6.3	Parois noires ou diffuses en géométrie convexe . . . . .	138
3.6.4	Parois noires ou diffuses en géométrie concave . . . . .	148
3.7	Détails théoriques . . . . .	156
<b>4</b>	<b>Mise en oeuvre algorithmique</b>	<b>159</b>
4.1	Introduction . . . . .	161
4.2	Espaces de chemins d'un problème de sensibilité géométrique . . . . .	166
4.2.1	L'espace de chemin de la sensibilité . . . . .	166
4.2.2	L'espace de chemins de la dérivée spatiale . . . . .	169
4.2.3	L'espace de chemins de la dérivée angulaire . . . . .	172
4.3	Couplages . . . . .	176
4.3.1	Espaces de chemins sans branchements . . . . .	177
4.3.2	Espaces de chemins avec branchements uniquement en surface . . . . .	178
4.3.3	Espace de chemins avec branchements en surface et dans le milieu . . . . .	186
4.4	Mises en oeuvre . . . . .	188
4.4.1	Exemple 1 . . . . .	191
4.4.2	Exemple 2 . . . . .	198
4.4.3	Exemple 3 . . . . .	205
4.4.4	Exemple 4 . . . . .	209
4.4.5	Exemple 5 . . . . .	213
4.4.6	Exemple 6 . . . . .	222
4.4.7	Exemple 7 . . . . .	228
4.4.8	Exemple 8 . . . . .	233
4.5	Commentaire sur les résultats des 8 exemples . . . . .	237

# Nomenclature

---

## Ensembles

$D_\Gamma$	Domaine de définition de la variable aléatoire $\Gamma$
$\mathcal{D}$	Disque unité
$G$	Domaine géométrique
$\partial G$	Frontière du domaine géométrique
$\overset{\circ}{G}$	Intérieur du domaine géométrique
$\bar{G}$	Adhérence du domaine géométrique
$\Omega$	Domaine angulaire
$\Omega_s$	Cône solaire
$\mathbb{R}$	Nombres réels
$\mathcal{S}$	Sphère unité
$U$	Support matériel

## Vecteurs

$\vec{a}$	Axe de rotation
$\vec{a}^{spec}$	Axe de rotation spéculaire à $\vec{a}$
$\vec{b}$	Direction de la dérivation spatiale
$\vec{c}$	Vecteur directeur de la base locale $(\vec{a}, \vec{d}, \vec{c})$ normal au plan $(\vec{a}, \vec{n})$
$\vec{d}$	Vecteur directeur de la base locale $(\vec{a}, \vec{d}, \vec{c})$ appartenant au plan $(\vec{a}, \vec{n})$
$\vec{n}$	Normale à la frontière
$\vec{\tilde{n}}$	Normale à la frontière de l'espace géométrique
$\vec{p}_i$	Position d'émission des sources ponctuelles
$\vec{u}$	Vecteur tangent à la frontière
$\vec{\tilde{u}}$	Vecteur tangent à la frontière de l'espace géométrique
$\vec{v}_\Phi$	Vecteur directeur de la rotation
$\vec{v}_\chi$	Vecteur de déformation de la frontière
$\vec{x}$	Position

$\vec{x}_I$  Position d'intersection avec une paroi

$\vec{\omega}$  Direction

$\vec{\tilde{\omega}}$  Direction du repère local associé à la frontière de l'espace géométrique

$\vec{\omega}^{spec}$  Direction spéculaire

## Opérateurs mathématiques

$\partial_\pi \cdot$  Dérivée par rapport au paramètre géométrique

$\partial_1 \cdot$  Dérivée par rapport à la première variable

$\vec{\partial}_1 \cdot$  Gradient spatial

$\partial_{1,\vec{b}} \cdot$  Dérivée spatiale dans la direction  $\vec{b}$

$\partial_{\vec{u}} \cdot$  Dérivée surfacique dans la direction  $\vec{u}$

$\partial_{\vec{\mathcal{R}}} \cdot$  Dérivée angulaire autour de l'axe de rotation  $\vec{a}$

$\mathbb{E}$  Espérance

$\mathcal{G}[\cdot]$  Opérateur collisionnel

$\partial_{1,\vec{b}} \mathcal{G}[\cdot]$  Opérateur collisionnel dérivé spatialement

$\partial_{\vec{\mathcal{R}}} \mathcal{G}[\cdot]$  Opérateur collisionnel dérivé angulairement

$\mathcal{L}$  Application linéaire

$\mathcal{P}$  Projection sur la surface

## Fonctions

$\delta$  Distribution de Dirac

$f_\nu$  Fonction de distribution des photons

$\mathcal{H}$  Fonction de Heaviside

$L_\nu$  Luminance à la fréquence  $\nu$

$I$  Luminance matérielle

$L^{eq}(T)$  Luminance d'équilibre à la température  $T$

$L^{em}$  Luminance émise par la frontière

$L^{inc}$  Luminance incidente à la frontière

$I^{em}$	Luminance matérielle émise par la frontière	$N$	Nombre de réalisation d'une variable aléatoire
$I_{max}^{em}$	Luminance matérielle maximale émise par la paroi	$\nu$	Fréquence
$\xi$	Sources de sensibilité, de dérivée spatiale et de dérivée angulaire	$\bar{\pi}$	Paramètre géométrique
$\Omega$	Repère local associé à la frontière de l'espace géométrique	$\varphi$	Longitude
$\Omega_{\bar{y}, \bar{\pi}}^{-1}$	Fonction inverse de $\Omega$	$S_{Hélio}$	Surface totale du champs d'héliostats
$\mathcal{O}$	Observable	$\tau$	Distance infinitésimale
$p_{\Gamma}$	Densité de probabilité de $\Gamma$	$\theta$	Colatitute, ou angle polaire en $2D$
$p_{\Omega}$	Fonction de phase	$\mathcal{V}$	Volume du bain
$P_{sol}$	Puissance solaire	$\vec{X}_{Hélio}$	Variable aléatoire position sur la surface du champs d'héliostats
$P_{bain}$	Puissance absorbée par le bain	$\vec{y}$	Position sur l'espace matériel
$P_{tot}$	Puissance incidente au photobioréacteur	$\vec{y}$	Position sur la frontière de l'espace géométrique
$s$	Sensibilité géométrique	$\mathcal{S}_{capteur}$	Surface du capteur
$\mathcal{T}$	Transmissivité	$c$	Largeur du capteur
$T$	Température	$x_c$	Abscisse du centre du capteur
$\hat{\omega}$	Poids de Monte-Carlo	<b>Coefficients</b>	
$\mathcal{Z}$	Frontière de l'espace géométrique	$\alpha$	Coefficient de transport
$\mathcal{Z}_{\bar{\pi}}^{-1}$	Fonction inverse de $\mathcal{Z}$	$\beta$	Coefficient tangentiel
$\text{sign}(\cdot)$	Fonction signe	$\alpha^{spec}$	Coefficient de transport issu de la direction $\vec{\omega}^{spec}$
<b>Variables</b>		$\beta^{spec}$	Coefficient tangentiel issu de la direction $\vec{\omega}^{spec}$
$\delta\varphi$	Angle infinitésimal	$\gamma$	Coefficient angulaire
$\delta\bar{\pi}$	Variation infinitésimale de $\bar{\pi}$	$\varepsilon$	Coefficient d'émission
$\Gamma$	Variable aléatoire chemin	$\lambda$	Intensité de la déformation spatiale
$\Gamma_s$	Variable aléatoire chemin de sensibilité	$k_a$	Coefficient d'absorption
$\Gamma_{\vec{u}}$	Variable aléatoire chemin de dérivée spatiale dans la direction $\vec{u}$	$k_d$	Coefficient de diffusion
$\Gamma_{\vec{u}'}$	Variable aléatoire chemin de dérivée spatiale dans la direction $\vec{u}'$	$k_e$	Coefficient d'extinction
$\Gamma_L$	Variable aléatoire chemin de luminance dans la direction $\vec{\omega}'$	$\rho$	Coefficient de réflexion
$\gamma$	Réalisation de la variable aléatoire chemin	<b>Constantes</b>	
$\ell$	Distance jusqu'à la frontière dans la direction $\vec{\omega}$	$c$	Vitesse de la lumière dans le vide
$l_{\gamma}$	Longueur du chemin défini par la variable aléatoire $\gamma$	$h$	Constante de Planck
		$\pi$	Constante d'Archimède
		<b>Indices</b>	
		$b$	bas
		$c$	capteur
		$d$	droite

*e* émetteur  
*ext* extérieur  
*g* gauche  
*h* haut  
*inc* incident

*int* intérieur  
*n* noir  
*r* réfléchissant  
*spec* spéculaire



# Introduction

---

Nous ouvrons ici un travail de réflexion sur des modèles issus du transfert radiatif. Ce travail peut sembler détaché des nombreuses questions applicatives qui concernent le rayonnement, mais son histoire est pourtant tout l'inverse. C'est avant tout une analyse de la pratique de l'ingénieur qui motive cette thèse, un ingénieur thermicien cherchant à optimiser un design géométrique, un combustionniste cherchant à comprendre l'influence de la forme d'une chambre sur le refroidissement du front de flamme, un physicien du médical cherchant à comprendre la signature de l'enveloppe d'une tumeur sur une image tomographique, etc. Ce type de questions est abordé dans une pratique commune au sein du groupe des chercheurs que j'ai rencontrés au début de mon travail et qui avaient initié une réflexion sur les sensibilités depuis environ 20 ans, avec la thèse d'Amaury de Lataillade et la sensibilité du taux de chauffage à la concentration des espèces dans une flamme de CH<sub>4</sub>. C'est au sein de ce groupe qu'ont été définies et graduellement précisées chacune des questions qui sont les nôtres aujourd'hui.

L'équipe en question (LAPLACE, PROMES, CETHIL, LEMTA, Institut Pascal, RAPSODEE, LMAP et Mesostar, voir [Fig. 1](#)) fait le choix d'outils numériques spécifiquement dédiés à la gestion de la complexité géométrique et du couplage de différentes physiques ([\[Caliot et al., 2019, Eymet et al., 2019, Gattepaille, 2020, Ibarrart et al., 2018, Farges, 2014\]](#)). La complexité géométrique est entendue au sens où les rapports d'échelles entre les différents éléments de la géométrie peuvent être très importants ([\[Villefranque et al., 2019, Caliot et al., 2015\]](#)). Par exemple dans les études portées sur la thermique de la ville il est nécessaire de prendre en compte la géométrie d'un ensemble de bâtiments (tous dimensionnés par des hauteurs et largeurs différentes) et l'ensemble des éléments constituant ce bâtiment (bardages, attaches des bardages, balcons, fenêtres, vitrages, etc). L'utilisateur peut donc être amené à étudier la thermique à grande échelle, par exemple pour quantifier les conditions de confort thermique au sein d'un quartier et évaluer les consommations énergétiques correspondantes, mais pour cela il devra prendre en compte, dans une même étude, les échanges thermiques entre chaque bâtiment, entre chacun de ces bâtiments et l'environnement, le soleil, mais également le rayonnement traversant un double vitrage ou la diffusion thermique dans l'isolation d'un plancher. Quelque soit la méthode retenue par l'ingénieur pour aborder ces questions, c'est la géométrie de la ville à toutes ces échelles et dans tous ses détails qu'il s'agit d'intégrer dans l'analyse. Au sein des équipes que je viens de mentionner, l'idée est d'attaquer simultanément toutes ces échelles, par opposition à des pratiques impliquant une cascade de réductions de modèles qui ont fait leurs preuves dans de nombreux contextes mais qui laissent encore de nombreuses questions largement ouvertes, en particulier en ce qui concerne la propagation des incertitudes.

Avec l'exemple de l'étude de la thermique de la ville on retrouve également la problématique des couplages physiques. En effet les transferts de chaleur par conduction, convection et rayonnement doivent être tous pris en compte simultanément ([\[Fournier et al., 2016, Penazzi et al., 2019\]](#)). Cela demande de résoudre trois modèles différents qui sont couplés, souvent à travers leurs sources. On retrouve également ces questions dans l'étude des photobioréacteurs pour la production de biomasse, pour lesquels le transfert radiatif est couplé aux équations de l'électromagnétisme et de la photosynthèse à l'échelle de la micro-algue.

La méthode numérique de Monte-Carlo permet de répondre à de tels enjeux. Elle implique une résolution statistique des modèles mathématiques qui décrivent ces physiques. La pratique de cette méthode dans le contexte que nous venons d'énoncer est basée sur des développements formels (formulations intégrales en espace de chemin, processus stochastiques, etc.) qui permettent d'obtenir

une trajectoire statistique spatiale et temporelle de la quantité étudiée. Ces trajectoires (appelées également chemins) seront simulées numériquement dans la géométrie du problème, à toutes ses échelles.

La mise en oeuvre de la méthode de Monte-Carlo, en tenant compte de toute la complexité géométrique, est aujourd'hui possible grâce à la mise en place d'outils numériques ([Meso-Star, 2020, Pharr et al., 2016]) et de bibliothèques informatiques issues de la recherche en synthèse d'image (toutes les images de synthèse de l'industrie du cinéma font aujourd'hui appel à la méthode de Monte Carlo). L'idée du couplage est plus récente : elle s'appuie sur le concept de double randomisation qui transforme plusieurs espaces de chemins, correspondant à des physiques distinctes, en un espace de chemins unique qui traduit la physique couplée. Ce sont les deux grandes idées que nous aurons toujours en tête dans la suite de ce document où nous nous concentrerons sur le seul transfert radiatif (et pourtant nous verrons que la question du couplage sera centrale) en étudiant des sensibilités à des paramètres impactant la géométrie du problème.

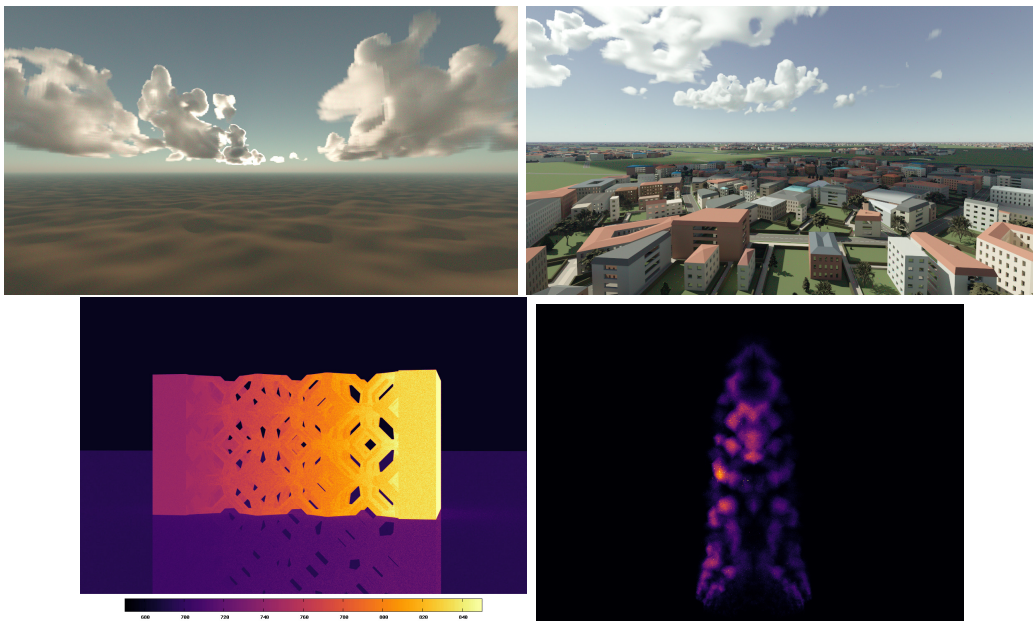


FIGURE 1 – Exemples de complexité géométrique abordées par les équipes partenaires de ce travail.

Sur la Fig. 2 est représenté un récepteur qui perçoit le rayonnement émis par un émetteur à travers une paroi réfléchissante. Sur le réflecteur est représentée la zone perçue depuis une position sur la surface du récepteur et dans un angle solide donné. La hauteur séparant la paroi réfléchissante du récepteur est appelée  $\tilde{\pi}$  qui est un paramètre dont la valeur peut varier et ce faisant modifier la hauteur entre les deux parois.

L'observable dans cet exemple est le flux incident au récepteur étant donné la position et l'angle solide qui sont dessinés. On appelle cette observable  $\mathcal{O}$  et un utilisateur pourra être intéressé, par exemple, par la détermination du flux maximal qu'il pourra obtenir sur le récepteur, ou encore il souhaitera simplement anticiper la valeur du flux avant un acte de déplacement du réflecteur. Classiquement pour essayer de répondre à ce type de questions il fera (mentalement ou numériquement) varier la hauteur du réflecteur et "mesurera", pour chaque valeur de  $\tilde{\pi}$ , la valeur du flux incident au récepteur.

La Fig. 3 représente l'évolution du flux incident au récepteur pour une hauteur du réflecteur qui varie entre une position minimale, par exemple 0, et une position maximale. Lorsque la paroi est à une hauteur minimale aucun flux n'atteint le récepteur. En faisant varier  $\tilde{\pi}$  on augmente progressivement la surface de la zone que perçoit le récepteur de l'émetteur à travers le réflecteur. Sur la Fig. 2 on imagine le réflecteur monter et la tâche de l'émetteur sur le réflecteur s'étaler progressivement. À

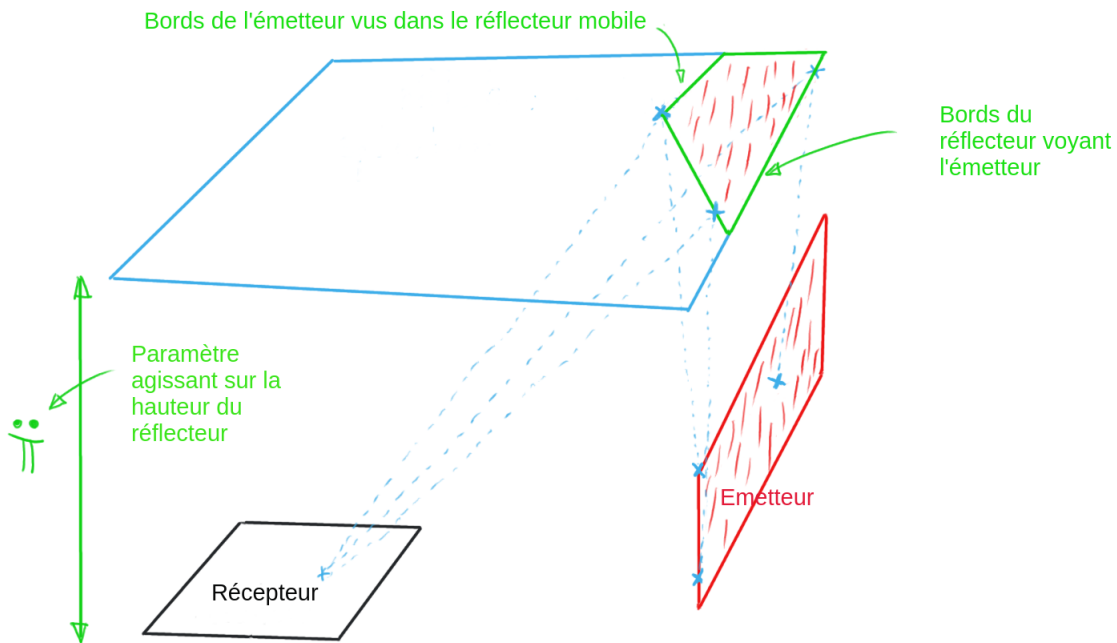


FIGURE 2 – Un exemple de configuration avec une géométrie déformée par variation d'un paramètre  $\pi$ . La grandeur étudiée est le flux reçu par un récepteur, provenant d'un émetteur, en ne considérant que la partie réfléchiée par un miroir spéculaire positionné en regard. Le capteur et l'émetteur sont fixes. En augmentant  $\pi$ , on éloigne le réflecteur. La question se résumera à identifier la partie de l'émetteur qui est vue dans le miroir (spécularité de la réflexion) pour chacun des points du capteur. Sur la figure cette zone est représentée de façon hachurée sur le miroir. Les sources de sensibilité sont localisées sur le pourtour de cette zone hachurée. Elles sont de deux type : les bords du réflecteur mobile voyant l'émetteur, d'une part, les bords de l'émetteur vu dans le réflecteur, d'autre part.

force d'augmenter la hauteur du réflecteur la tâche va disparaître de sa surface car dans la direction d'observation que l'utilisateur s'est donné le récepteur ne percevra plus l'émetteur. La valeur du flux incident va donc progressivement s'atténuer (avec la disparition de la tâche sur le réflecteur) jusqu'à devenir nulle. L'évolution de l'observable qui vient d'être décrite est représentée schématiquement sur la Fig. 3.

Dans cette situation la sensibilité est l'objet qui quantifie, pour une valeur de  $\pi$  donnée (comme illustré sur la Fig. 3), l'impact d'une perturbation de la hauteur sur la valeur de l'observable. Il y a deux façons de regarder cette sensibilité, la première basée sur la physique radiative et la seconde sur une physique de la sensibilité elle-même.

Regarder la sensibilité à partir de la physique radiative consiste à raisonner comme nous venons de le faire plus haut. C'est à dire à faire varier la valeur de la hauteur et d'observer comment varie la valeur de l'observable. Dans cette pratique de la sensibilité seule la physique des transferts radiatifs est nécessaire pour quantifier la sensibilité : pour une valeur de  $\pi$  j'évalue l'observable, pour une valeur un peu différente de  $\pi$  j'évalue à nouveau l'observable, enfin je différencie les deux observables calculées étant donné l'accroissement de  $\pi$  que j'ai réalisé. Pour les deux valeurs de  $\pi$  l'utilisateur n'a qu'à résoudre un problème de transfert radiatif usuel, avec les outils numériques dont il dispose si c'est en termes numériques qu'il aborde la question.

Regarder la sensibilité à partir de sa propre physique est complètement différent. Le principe est d'imaginer que l'objectif n'est plus de résoudre un problème de transfert radiatif mais de résoudre un problème de sensibilité. Dans ce problème les sources ne sont plus des sources radiatives mais des



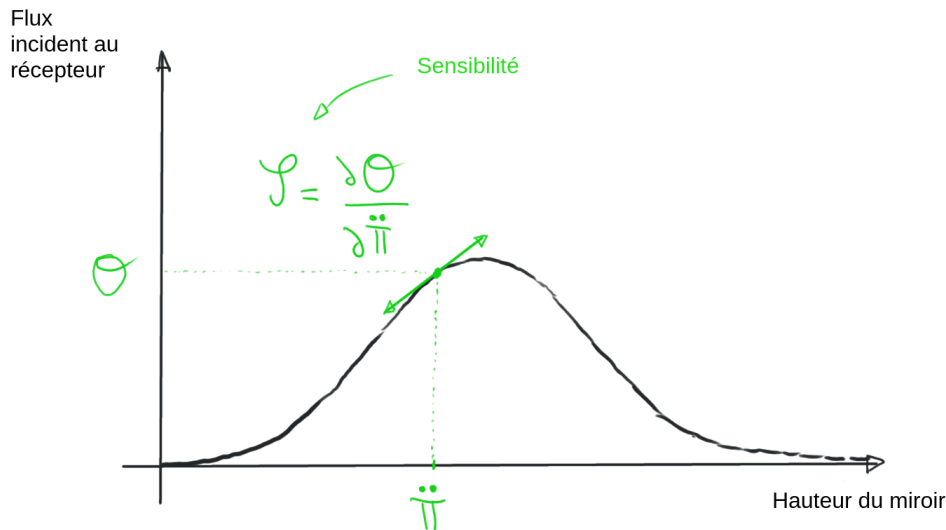


FIGURE 3 – Evolution qualitative du flux reçu par le récepteur via le miroir en fonction de l'éloignement du miroir (piloté par le paramètre  $\tilde{\pi}$ ). Dans une analyse (intuitive) de la sensibilité à l'aide du transfert radiatif usuel, on considère successivement plus positions du miroir et on imagine la courbe de réponse (nulle pour un miroir collé au capteur, nulle pour un miroir à une distance infinie du capteur, maximum au lieu du maximum de visibilité). Si elle peut être quantifiée sur cette base, la sensibilité est obtenue par différence. Avec la proposition d'un modèle de sensibilité, on concentre l'analyse sur une unique valeur du paramètre  $\tilde{\pi}$  et on cherche à comprendre la physique de la sensibilité : ses sources et ses modes de propagation. La sensibilité devient un objet physique à part entière.

sources de sensibilité. On pourrait également dire que le transport n'est plus du transfert radiatif mais du transport de sensibilité, ce qui est vrai, cependant nous verrons que dans notre cas (sensibilité géométrique) le transport de la sensibilité est strictement équivalent au transfert radiatif, et cela simplifiera beaucoup l'analyse. Pour mesurer la sensibilité de l'observable, à une valeur de  $\tilde{\pi}$  donnée (comme sur la Fig. 3), la démarche consistera à propager les sources de sensibilité dans le milieu et à évaluer le flux de sensibilité incident au récepteur étant donné la position et l'angle solide d'observation.

Dans cet exemple il est possible de distinguer deux sources de sensibilités différentes. Ces deux sources sont liées ici à des éléments de la géométrie. Par exemple la surface de la tâche de l'émetteur que perçoit le récepteur dans le réflecteur est délimitée par deux types de contours. Une partie de son contour correspond à la géométrie de l'émetteur : sur la Fig. 2 la partie du contour de la tâche située sur la surface du réflecteur est le bord de l'émetteur vu par le récepteur dans le réflecteur. L'autre partie correspond à la géométrie du réflecteur : les bords du réflecteur qui voient l'émetteur.

Dans le problème de sensibilité les sources de sensibilité proviendront alors de deux endroits différents. Certaines seront émises par le contour du réflecteur puisqu'en s'élevant il va augmenter ou diminuer la perception de la surface de l'émetteur par le récepteur. D'autres seront émises par le contour de l'émetteur puisque lorsque le réflecteur s'élève c'est la modification de l'image de ce contour sur le réflecteur qui va augmenter ou diminuer la perception du récepteur.

Les sources de sensibilités de cet exemple sont donc locales spatialement, une est répartie sur le contour du réflecteur, l'autre est répartie sur le contour de l'émetteur. Une première façon de distinguer ces sources est de dire que la première est située sur l'élément de la géométrie qui est

modifié (le réflecteur) et l'autre est situé sur l'élément de la géométrie qui émet radiativement et qui n'est pas déplacé. Ce n'est que dans le dernier chapitre de ce manuscrit que nous verrons clairement la distinction qui est faite entre ces deux sources et que nous proposerons des images physiques permettant de les combiner.

Dans le problème de sensibilité il est donc nécessaire d'identifier les sources de sensibilité et la façon dont elles sont propagées dans le milieu pour pouvoir évaluer la sensibilité de l'observable. C'est la modélisation de la sensibilité qui sera l'objet du présent manuscrit. Dans un premier chapitre nous commencerons par faire un état des lieux de la recherche autour des sensibilités et plus particulièrement des sensibilités à des paramètres géométriques. Cet état des lieux aboutira à un article publié dans JQSRT ([Lapeyre et al., 2020]) dans lequel des lectures en sources de sensibilité/propagation sont faites sur quelques exemples, sans encore de prétention à une systématique. Dans cet article un point clé du message sera que le modèle de sensibilité est couplé au modèle usuel de transfert radiatif (le modèle de luminance).

Dans la suite du travail il sera montré que ce n'est pas seulement à la luminance que le modèle de sensibilité est couplé mais c'est également au gradient spatial de la luminance et à son gradient angulaire. Après le chapitre introductif un chapitre (Chap. 2) est dédié à ces deux nouvelles grandeurs.

Une seconde idée essentielle présentée dans l'article est que, dans le champ, le modèle de sensibilité est identique à celui de la luminance : la sensibilité suit une équation de transfert radiatif. Tout l'effort de modélisation de la sensibilité géométrique est donc dans la construction de la condition à la limite, ce sera l'objet du troisième chapitre (Chap. 3).

Enfin ce n'est qu'au Chap. 4 que nous traduirons cette modélisation en des espaces de chemins qui aboutiront à une résolution numérique par la méthode de Monte-Carlo.



# CHAPITRE 1

## Problématique

---

<b>1.1</b>	<b>Transfert radiatif</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>1.2</b>	<b>Monte-Carlo</b> . . . . .	<b>16</b>
<b>1.3</b>	<b>Sensibilités</b> . . . . .	<b>20</b>
<b>1.4</b>	<b>Illustration par un exemple simple</b> . . . . .	<b>24</b>
1.4.1	Dérivation de la formulation intégrale de l'espérance . . . . .	24
1.4.2	Dérivation de l'équation différentielle . . . . .	25
<b>1.5</b>	<b>Problématique</b> . . . . .	<b>26</b>
1.5.1	Introduction aux sensibilités géométriques . . . . .	26
1.5.2	Nos directions de recherche . . . . .	57

---

L'objectif de ce chapitre est d'énoncer progressivement la problématique de la thèse. Nous commencerons par introduire quelques généralités sur les transferts radiatifs (et notamment la façon dont nous les travaillons dans la communauté), sur la méthode de Monte-Carlo et plus particulièrement sur les sensibilités. À la suite de ces introductions générales nous trouverons un article, écrit pendant la thèse, qui contextualise le positionnement que nous tiendrons dans ce manuscrit et qui présente quatre premiers exemples d'application du modèle de sensibilité sur des configurations de transfert radiatif. Enfin nous partirons des problématiques soulevées par l'article pour ouvrir le travail vers le cœur de la thèse.

### 1.1 Transfert radiatif

Comme nous l'avons déjà précisé, l'ensemble du travail de cette thèse concerne la physique du transfert radiatif ([Chandrasekhar, 2013, Howell et al., 2020]). Il existe de multiples façons de rentrer dans la description de cette physique mais dans notre pratique les images corpusculaires associées au transport des photons seront les principales ([Cercignani, 1988, Piaud, 2007]). L'équation de transfert radiatif (qui est une formulation mathématique de cette physique) est souvent écrite à partir de la grandeur luminance (flux par unité de surface perpendiculaire) qui est essentielle lorsqu'il s'agit de raisonner sur la dimension énergétique du transfert. La formulation de l'équation de transfert radiatif à partir de la fonction de distribution des photons est identique de tout point de vue :

$$\begin{cases} \vec{\omega} \cdot \vec{\partial}_1 f_\nu(\vec{x}, \vec{\omega}) = -k_a(\vec{x}) f_\nu(\vec{x}, \vec{\omega}) - k_d f_\nu(\vec{x}, \vec{\omega}) + k_a f_\nu^{eq}(T(\vec{x})) + k_d \int_{\Omega'} p(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}) d\vec{\omega}' f_\nu(\vec{x}, \vec{\omega}') & \vec{x} \in G \\ f_\nu(\vec{x}, \vec{\omega}) = \mathcal{L}[f_\nu(\vec{x}, \vec{\omega})] & \vec{x} \in \partial G \end{cases} \quad (1.1)$$

Travailler directement à partir de la fonction de distribution (qui exprime la densité de photons dans l'espace des phases) change assez notablement le point de vue, en mettant en avant les images particulières (les photons). Bien sur, rien n'empêche dans une formulation en luminance de penser le

transport de l'énergie par les photons, mais avec des considérations plus indirectes du fait même que sont convoquées des images en flux par unité de surface. Néanmoins, même si nous pensons essentiellement en densité, nos formulations dans tout le reste de la thèse utiliserons la luminance pour rester cohérent avec les pratiques usuelles du domaine. Bien sur l'équation de transfert en luminance est strictement identique du fait de la relation linéaire qui la relie à la fonction de distribution :

$$f_\nu(\vec{x}, \vec{\omega}) = \frac{L_\nu(\vec{x}, \vec{\omega})}{h\nu c}$$

Les descriptions du comportement statistique du photon en interaction avec le milieu sont donc au cœur de la représentation, notamment pour la construction du modèle formalisé mathématiquement. Dans ce travail on suppose toujours un milieu d'indice de réfraction uniforme de sorte que photon se déplace en ligne droite entre chaque interactions. Les évènements d'interaction avec la matière en volume peuvent conduire à une disparition (absorption) ou à un changement de direction (diffusion); il en est de même pour une interaction en surface qui peut donner lieu soit à une disparition (absorption surfacique) soit à un changement de direction (réflexion) ([Kerker, 2013, Tien, 1968]). Les sources de photons sont, selon les situations, distribuées sur les frontières du domaine (on les retrouve dans les conditions aux limites) ou distribuées en volume (par exemple l'émission thermique).

À partir d'une telle description, le photon se déplace dans le milieu en subissant des interactions de diffusion et d'absorption. La trajectoire suivie par un photon est stochastique, au sens où les lieux d'interactions sont décrits de façon statistique et non déterministe. Nous serons souvent amenés à décrire l'espace des chemins qui correspond à l'ensemble des trajectoires possibles pour une configuration radiative et géométrique donnée. Formellement l'espace des chemins peut être identifié à partir de la formulation intégrale de l'équation de transfert radiatif.

Par exemple l'Eq. 1.2 donne une formulation intégrale de l'ETR (ici une équation de Fredholm de seconde espèce) qui décrit le transport de la luminance dans une configuration radiative pour laquelle le milieu est semi-transparent et inhomogène. La frontière du domaine est appelée  $\partial G$ .

$$\begin{aligned} L(\vec{x}, \vec{\omega}) &= L(\vec{x}_0, \vec{\omega}) \mathcal{T}(\vec{x}_0, \vec{x}) \\ &+ \int_0^\ell d\vec{x}' \mathcal{T}(\vec{x}', \vec{x}) k_a L^{eq}(\vec{x}', \vec{\omega}) \\ &+ \int_0^\ell d\vec{x}' \int_{\Omega'} d\vec{\omega}' p(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}) d\vec{\omega}' \mathcal{T}(\vec{x}', \vec{x}) k_d L(\vec{x}', \vec{\omega}') \end{aligned} \quad (1.2)$$

Avec  $\ell$  la distance entre le point  $\vec{x}$  du milieu et la frontière du domaine  $\partial G$  dans la direction  $-\vec{\omega}$ . La fonction  $\mathcal{T}(\vec{x}', \vec{x})$  est la transmissivité et, dans un milieu non homogène, elle s'écrit :

$$\mathcal{T}(\vec{x}', \vec{x}) = \exp\left(-\int_0^\tau k_e(\vec{x} - \tau'\vec{\omega}) d\tau'\right) \quad (1.3)$$

La position  $\vec{x}' = \vec{x} - \tau\vec{\omega}$  est une position dans le milieu à une distance  $\tau$  de la position  $\vec{x}$  dans la direction  $-\vec{\omega}$  et  $\vec{x}_0 = \vec{x} - \ell\vec{\omega}$  est la position sur la frontière du domaine à une distance  $\ell$  de la position  $\vec{x}$  dans la direction  $-\vec{\omega}$ .

Un procédé classique de réécriture de ces équations intégrales est la méthode dite du noyau itéré qui consiste à réinjecter l'expression de la luminance dans la partie intégrale et cela de façon potentiellement infinie ([Case and Zweifel, 1967]). Ainsi le résultat obtenu est une écriture formelle de la solution du problème de transfert radiatif. En effet, bien que s'exprimant sur un domaine d'intégration de dimension infinie il n'y a maintenant sous l'intégrale que des sources connues du problème. Il est d'usage de considérer que ce domaine d'intégration définit formellement l'espace des chemins. Par exemple la Fig. 1.1 illustre un chemin de photon qui est compris dans l'espace de chemins de la configuration donnée. Sur cette illustration nous n'avons représenté qu'un chemin parmi l'infinité des chemins possibles. En toute généralité l'espace de chemins est continu et la solution de l'équation de transfert radiatif dépend des contributions radiatives propagées par l'ensemble des chemins de l'espace.

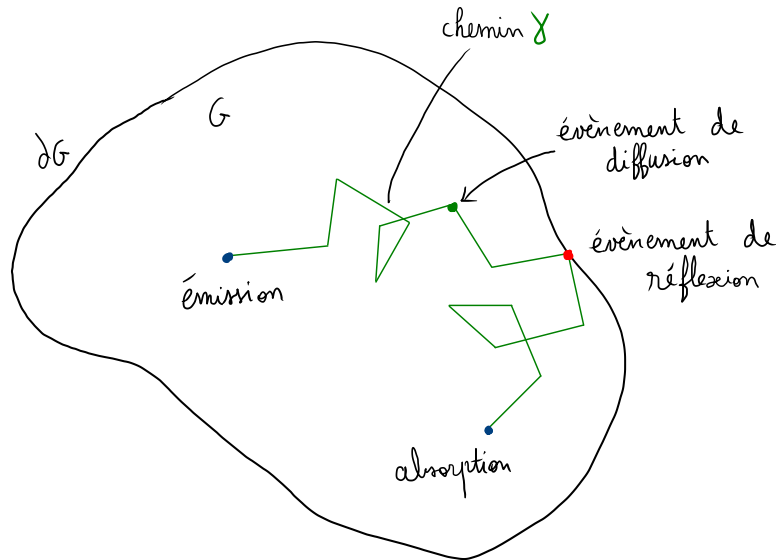


FIGURE 1.1 – Un chemin de photon  $\gamma$  émit, diffusé, réfléchit à la frontière du domaine et absorbé dans le milieu.

Il est tout à fait possible de probabiliser l'espace des chemins pour arriver à une écriture formelle qui identifie les densités de probabilité des chemins et leurs contributions radiatives sur la grandeur calculée ([Dauchet et al., 2013]). Dans l'optique de la résolution numérique de cette grandeur par la méthode de Monte-Carlo nous verrons, dans la partie suivante, que ces reformulations sont intéressantes, même si pour l'essentiel dans le présent travail elle rejoignent les images analogues. Par exemple l'Eq. 1.4 représente une telle écriture pour la luminance :

$$L(\vec{x}, \vec{\omega}) = \int_{D_\Gamma} p_\Gamma(\gamma) d\gamma g(\gamma) \quad (1.4)$$

Avec l'espace des chemins  $D_\Gamma$  dans lequel est définie la variable aléatoire "chemin"  $\Gamma$  qui représente un chemin de photon. La variable  $\gamma$  représente la réalisation d'un chemin de photon parmi l'ensemble des chemins possibles. La fonction  $g(\gamma)$  représente la contribution radiative du chemin  $\gamma$  sur la luminance en  $(\vec{x}, \vec{\omega})$ . De ce point de vue probabilisé nous pouvons regarder la Fig. 1.1 d'un autre oeil en considérant  $\gamma$  comme une réalisation de la variable aléatoire  $\Gamma$ .

## 1.2 Monte-Carlo

On appelle communément méthode de Monte-Carlo toute méthode numérique de résolution d'équation qui nécessite l'échantillonnage de variables aléatoires. L'utilisation des processus aléatoires pour résoudre des problèmes mathématiques n'est pas récente (expérience des aiguilles de Buffon (1777), estimation de  $\pi$  (Laplace 1786)) mais l'appellation et les premiers développements autour de la méthode peuvent être datés à partir des travaux de Fermi, Ulam, Von Neumann et Metropolis, réunis pour un projet de recherche sur la bombe atomique pendant la seconde guerre mondiale ([Metropolis and Ulam, 1949]).<sup>1</sup> Un des principes de la méthode consistait à simuler les trajectoires de neutrons dans un matériau fissile et de caractériser, à partir de variables aléatoires, leurs états, le nombre et le type d'interactions avec le milieu. *Les nouvelles performances informatiques de l'époque autorisait l'échantillonnage d'un grand nombre de ces variables aléatoires et, lors de leurs premiers échanges sur le sujet, les auteurs estimaient à 5 heures le temps de calcul du suivi de 100 neutrons, qui effectueraient 100 collisions dans le milieu.* ([Metropolis, 1987]) La possibilité de

1. La méthode de Monte-Carlo était également étudiée et utilisée pour les mêmes fins en Russie. [Metropolis, 1987]

généraliser informatiquement des nombres pseudo-aléatoires correspond au développement du premier ordinateur (ENIAC) et, au delà des problématiques liées au transport de neutrons, la méthode de Monte-Carlo permettait de ré-ouvrir numériquement des questions mathématiques complexes comme, par exemple, la résolution d'intégrales multiples (que l'on retrouve en théorie du contrôle, en économie et en physique statistique ([Jedrzejewski, 2009, Hammersley and Handscomb, 1964])) ou de certaines équations différentielles ([Hibbs and Feynman, 1965, Lapeyre et al., 1998, Kac, 1949]).

La méthode de Monte-Carlo est au cœur de nos activités de recherche car c'est une méthode produisant des résultats de référence qui permet notamment de résoudre des problèmes de transferts radiatifs en géométrie complexe avec des dépendances angulaires et spectrales fortes des propriétés radiatives. En effet elle est insensible à la dimension du problème et permet de traiter des géométries détaillées possédant de grands rapports d'échelle spatiale. De plus, la communauté scientifique en synthèse d'images a développé de nombreuses bibliothèques informatiques libres pour assurer l'indépendance des algorithmes de Monte-Carlo avec la donnée (géométrie, propriétés radiatives, etc.) [Meso-Star, 2020]. Ce qui apporte à notre communauté des transferts radiatifs les outils numériques nécessaires aux développements des algorithmes de résolution, par Monte-Carlo, d'intégrales formulées en espace de chemins ([Howell and Daun, 2021, Eymet et al., 2013, Galtier et al., 2013, Caliot et al., 2015]).

Dans la pratique nous avons l'habitude de travailler sur les formulations intégrales comme celle de l'Eq. 1.4 pour créer des algorithmes de Monte-Carlo basés sur la réalisation numérique de  $\Gamma$ . Le principe sera illustré dans un exemple à la fin de la partie et repose sur le fait que dans cette équation la luminance peut être interprétée comme une espérance sur les sources radiatives du problème. Cette espérance peut alors être résolue numériquement en estimant l'espérance à partir de moyennes sur un échantillon de réalisations de la variables aléatoire. L'avantage de cette représentation algorithmique formelle (Eq. 1.4) est qu'elle autorise de nombreux actes de reformulations de l'intégrale pour optimiser les algorithmes qui évaluent la grandeur observée. Par exemples nous pouvons citer les techniques de réduction de la variance comme l'échantillonnage par importance ou la variable de contrôle. ([Delatorre et al., 2014])

Nous pouvons également très bien rentrer dans la méthode de Monte-Carlo, sans avoir besoin de tout ce formalisme, à partir d'une vision analogue à celle conduisant à l'établissement de l'équation de transfert radiatif. Dans ce cas il s'agit de générer virtuellement des photons (ou des paquets de photons) et de reproduire leurs trajectoires en respectant scrupuleusement les lois locales de l'interaction avec la matière ([Dauchet and Fournier, 2014]). À partir d'une moyenne sur un grand ensemble de réalisations il est alors possible d'estimer la grandeur physique d'intérêt (l'observable) et l'incertitude statistique associée (qui décroît en  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  ou  $N$  est le nombre de réalisations).

En s'appuyant sur le principe de réciprocité des chemins lumineux, il est également habituel de produire de façon analogue des algorithmes dits réciproques (reverse ou backward en anglais, [Case, 1957, Modest, 2003]). Il s'agit dans ce cas de générer des chemins depuis un récepteur vers les sources de photons associées au problème. Selon les situations il peut être intéressant de basculer d'une vision à l'autre. Pour l'essentiel dans ce travail nous utiliserons principalement des algorithmes analogues dans la mise en œuvre de la méthode de Monte-Carlo.

**Double randomisation** Toute la praticabilité algorithmique des développements théoriques de cette thèse est basée sur la double randomisation. Le concept de double randomisation est issu d'une propriété mathématique de l'espérance qui établit que "l'espérance d'une espérance est une espérance" ([Tregan, 2020, Terrée, 2015]).

Au cours d'un processus emboîté dans lequel les issues de la première variable aléatoire sont elles mêmes des espérances on pourrait naïvement penser que pour chaque réalisation de la première variable aléatoire il faut estimer complètement l'issue (c'est à dire refaire un Monte-Carlo) pour estimer l'espérance de la deuxième variable aléatoire. Dans cette façon de penser on perçoit que le nombre de réalisations se multiplie à chaque dimension d'intégration ( $N$  pour une dimension,  $N^2$  pour deux dimensions et  $N^3$  pour 3 dimensions,...), ce qui rendrait très vite la méthode impraticable. Ce que permet la double randomisation c'est précisément de ne procéder qu'à une seule réalisation

pour chaque espérance rencontrée le long du processus emboîté. Le nombre de réalisations nécessaires pour le calcul varie simplement en  $d \times N$  dans lequel  $d$  représente le nombre d'espérances emboîtées et  $N$  le nombre typique de réalisations pour estimer une espérance.

La double randomisation conduit très pratiquement à gérer les processus qui sont couplés linéairement. Ce sera exactement ce type de processus que nous rencontrerons dans le présent travail. Nous pouvons mentionner que des travaux récents ont permis d'étendre cette idée à des processus couplés non-linéairement ([Tregan, 2020] et [Terrée, 2015, Dauchet et al., 2018]).

Pour illustrer complètement l'idée de la double randomisation nous détaillerons un exemple typique de transfert radiatif dans un photobioréacteur ([Dauchet et al., 2015]). Dans cet exemple la double randomisation aboutira sur l'échantillonnage des sources radiatives qui sont conduites à travers des fibres optiques plongées dans un bain de micro-algues (voir Fig. 1.2). La Fig. 1.2

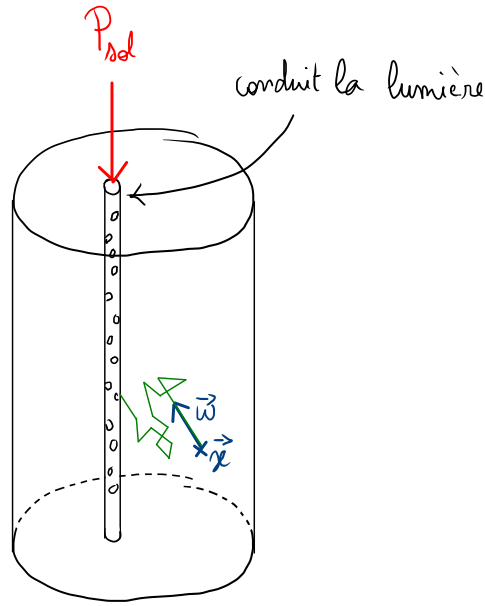


FIGURE 1.2 – La réalisation  $\gamma$  d'un chemin optique de diffusion réciproque qui va échantillonner la source  $P_{sol}$ .

schématise une fibre optique plongée dans un bain (cylindrique) rempli de micro-algues. Le bain peut accueillir 2500 fibres qui conduisent la lumière du soleil dans tout son volume. Nous cherchons à estimer la puissance absorbée par le bain de micro-algues, sous l'hypothèse que la puissance solaire  $P_{sol}$  conduite par une fibre est homogène sur toute la longueur de la fibre et qu'elle est identiquement distribuée sur toutes les fibres. Dans le milieu la puissance transmise par les fibres est diffusée le long d'un chemin optique de diffusion. Nous prendrons en compte l'absorption du volume en atténuant exponentiellement la puissance transportée par le chemin optique :

$$P_{bain} = \mathbb{E}(\hat{w}(\Gamma, P_{sol})) = \int_{D_\Gamma} p_\Gamma(\gamma) d\gamma \hat{w}(\gamma, P_{sol}) \quad (1.5)$$

L'Eq. 1.5 montre la formulation en espérance de la puissance absorbée par le bain de micro-algues. Le domaine d'intégration  $D_\Gamma$  est le domaine de définition de la variable aléatoire  $\Gamma$ . Il comprend le volume du cylindre et l'espace des chemins optiques réalisables dans le cylindre. La résolution par Monte-Carlo de la grandeur  $P_{bain}$  passe par l'estimation de l'espérance de la fonction  $\hat{w}(\Gamma, P_{sol})$  (poids de Monte-Carlo). En pratique cela consiste à réaliser  $N$  fois la variable aléatoire  $\Gamma$  et à comptabiliser la contribution de ce poids de Monte-Carlo. La réalisation de la variable aléatoire  $\Gamma$  commence par l'échantillonnage d'une position  $\vec{x}$  dans le volume du bain et d'une direction  $\vec{w}$  dans la sphère unité (voir la position et direction en bleu sur la Fig. 1.5). Ensuite la réalisation  $\gamma$  continue avec l'échantillonnage d'un chemin de transfert radiatif dans le volume rempli de micro-algues. Les



coefficients d'absorption et de diffusion équivalents du milieu sont supposés homogènes. La réalisation  $\gamma$  s'interrompt lors de l'intersection avec la fibre et la source radiative est comptabilisée selon le poids de Monte-Carlo :

$$\hat{w}(\gamma, P_{sol}) = P_{sol} \mathcal{V} 4\pi \exp(-k_a l_\gamma) \quad (1.6)$$

avec  $l_\gamma$  la longueur du chemin de diffusion et  $\mathcal{V}$  le volume du bain. Dans cette configuration la puissance solaire  $P_{sol}$  conduite par la fibre n'est pas connue. C'est à cet endroit que nous allons introduire la double randomisation. En effet il faut pouvoir évaluer la puissance solaire pour calculer le poids de Monte-Carlo et ajouter cette contribution à l'estimation de la puissance absorbée par le bain. Dans notre exemple la puissance solaire transportée par une fibre équivaut à la puissance solaire totale  $P_{tot}$  (incidente au photobioréacteur) divisée par le nombre de fibres, soit  $P_{sol} = \frac{1}{2500} P_{tot}$ . La puissance totale disponible pour le photobioréacteur est collectée par un champ d'héliostats. Cette puissance est connue : elle est calculée en intégrant, sur toute la surface du champs d'héliostat et sur le cône solaire, la luminance solaire.

Lors de la réalisation  $\gamma$  de la variable aléatoire  $\Gamma$  le chemin optique a terminé sa course lors de sa rencontre avec une fibre. La première étape de la double randomisation est de considérer  $P_{sol}$  comme l'espérance d'une variable aléatoire  $\Gamma_{sol}$  sachant que la réalisation du chemin  $\gamma$  a déterminé la fibre pour laquelle nous cherchons à estimer  $P_{sol}$ . L'espérance de  $P_{sol}$  s'écrit :

$$P_{sol} = \mathbb{E}(\hat{w}_{sol}(\Gamma_{sol})) = \int_{S_{Hélio}} p_{\vec{X}_H}(\vec{x}_{Hélio}) d\vec{x}_{Hélio} \int_{\Omega_S} p_{\vec{\Omega}_s}(\vec{\omega}_s) d\vec{\omega}_s \hat{w}_{sol}(\gamma_{sol}|\gamma) \quad (1.7)$$

avec

$$\hat{w}_{sol}(\gamma_{sol}|\gamma) = \hat{w}_{sol}(\vec{x}_{Hélio}, \vec{\omega}_s, I_{sol}) \quad (1.8)$$

La variable aléatoire  $\Gamma_{sol}$  représente l'ensemble des variables aléatoire  $\vec{X}_{Hélio}$  (position sur le champ d'héliostats) et  $\Omega_s$  (direction dans le cône solaire). Un échantillonnage de cette variable consistera donc à échantillonner une position sur le champ d'héliostats et une direction dans la cône solaire.

En réécrivant maintenant l'espérance de l'observable  $P_{bain}$  nous trouvons :

$$\mathbb{E}_\Gamma(\hat{w}(\Gamma, P_{sol})) = \mathbb{E}_\Gamma\left(\hat{w}\left(\Gamma, \mathbb{E}_{\Gamma_{sol}|\Gamma}(\hat{w}_{sol}(\Gamma_{sol}))\right)\right) \quad (1.9)$$

La double randomisation appliquée à l'Eq. 1.9 est basée sur la linéarité de la fonction  $\hat{w}$ , elle permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\Gamma(\hat{w}(\Gamma, P_{sol})) &= \mathbb{E}_\Gamma\left(\hat{w}\left(\Gamma, \mathbb{E}_{\Gamma_{sol}|\Gamma}(\hat{w}_{sol}(\Gamma_{sol}))\right)\right) \\ &= \mathbb{E}_{\Gamma, \Gamma_{sol}|\Gamma}\left(\hat{w}\left(\Gamma, \hat{w}_{sol}(\Gamma_{sol})\right)\right) \end{aligned} \quad (1.10)$$

L'Eq. 1.11 traduit mathématiquement que l'espérance d'une espérance est une espérance. C'est une propriété de l'espérance quand la fonction  $\hat{w}$  est linéaire. La conséquence de cette affirmation est que la grandeur que nous cherchons à calculer,  $P_{bain}$ , peut maintenant s'écrire comme l'espérance d'une fonction de deux variables aléatoires. L'estimation de  $P_{bain}$  par Monte-Carlo consistera alors à échantillonner  $N$  fois le couple de variables aléatoires  $\Gamma, \Gamma_{sol}$ . Il est possible de définir la variable aléatoire  $\Gamma_{bain}$  qui représente le couple  $\Gamma, \Gamma_{sol}$  et ainsi d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\Gamma(\hat{w}(\Gamma, P_{sol})) &= \mathbb{E}_{\Gamma, \Gamma_{sol}|\Gamma}\left(\hat{w}\left(\Gamma, \hat{w}_{sol}(\Gamma_{sol})\right)\right) \\ &= \mathbb{E}_{\Gamma_{bain}}\left(\hat{w}_{bain}\left(\Gamma_{bain}\right)\right) \end{aligned} \quad (1.11)$$

L'estimation de  $P_{bain}$  par Monte-Carlo consistera alors à échantillonner  $N$  fois la variable  $\Gamma_{bain}$  (soit le couple  $\Gamma, \Gamma_{sol}$ ) et à comptabiliser la valeur du poids  $\hat{w}_{bain}$  pour chaque réalisation.

Pour résumer, l'estimation de la puissance  $P_{bain}$  passe par la réalisation d'une position dans le volume, d'une direction dans la sphère unité, d'un chemin de diffusion, d'une position sur le champ

d'héliostat et d'une direction dans le cône solaire. Grâce à l'utilisation de la double randomisation nous remontons donc, depuis la position dans le volume, jusqu'à la source effective du problème qui est l'intensité solaire.

*Remarque* : Sans l'utilisation de la double randomisation il aurait fallu estimer la puissance solaire  $P_{sol}$  (donc effectuer  $N$  réalisations de  $\Gamma_{sol}$ ) pour chaque réalisation  $\gamma$ . Cela reviendrait à réaliser une position dans le volume, une direction dans la sphère unité, un chemin de diffusion puis  $N$  fois le couple : une position sur le champ d'héliostat et une direction dans le cône solaire. Et ce  $N$  fois.

### 1.3 Sensibilités

Quelque soit le champ disciplinaire concerné, l'évaluation de l'influence des paramètres (au sens très général) du problème sur le résultat est un acte commun pour le modélisateur. Il est même souvent aussi important de connaître avec précision les sensibilités paramétriques que le résultat lui-même. La quantification des sensibilités peut servir, selon les situations, à l'analyse du problème, à guider des stratégies d'optimisation ou d'inversion, à évaluer de façon rapide l'image d'une scène perturbée sans recalcul, à guider les questions d'assimilation de données ou toute autre intention dépendant du contexte d'étude.

**Types de sensibilité** On distingue en général plusieurs types de sensibilités qui conduisent à des évaluations plus ou moins coûteuses du point de vue calculatoire selon les méthodes numériques utilisées :

- les sensibilités aux conditions initiales : dans un problème dynamique (avec une dimension temporelle) il est souvent intéressant de connaître l'influence de l'état initial du système sur la dynamique générale ([Saltelli et al., 2000]). Pour les modèles linéaires (typiquement l'équation de transfert radiatif dans sa version temporelle) les sensibilités se résument à évaluer le propagateur qui est unique et indépendant des trajectoires dynamiques. La condition initiale joue dans ce cas là le rôle d'une source au sens de la théorie de Green. Pour les problèmes non linéaires les sensibilités aux conditions initiales s'évaluent le long d'une trajectoire et sont donc dépendantes de la condition initiale elle-même. Dans ces situations là les sensibilités permettent de qualifier la nature du comportement dynamique du système autour de la trajectoire considérée (stabilité, chaos, exposant de Lyapounov). Typiquement dans les modèles météorologiques l'évaluation permanente du champ de sensibilités aux conditions initiales permet de guider l'assimilation des données du problème pour réajuster en permanence les trajectoires de prévision aux mesures in-situ ([Tomović, 1963, Tsallis et al., 1997, Pradhan et al., 2021, Fischer, 2014]). Dans le cadre de ce travail nous n'aurons jamais à considérer ce type de sensibilité car le transfert radiatif sera toujours traité dans sa version stationnaire.
- les sensibilités aux paramètres physiques : il s'agit ici de considérer l'influence des paramètres du modèle qui peuvent, selon les situations, être connus à une incertitude donnée ou bien modifiables à souhait par l'utilisateur ([Hamby, 1994]). À nouveau, si le paramètre est une source et que le problème est linéaire, comme pour les conditions initiales, il suffit d'évaluer le propagateur du système. Néanmoins si le paramètre n'est pas assimilable à une source, même pour un problème linéaire, les sensibilités ne pourront s'évaluer qu'autour d'une trajectoire donnée. Typiquement si on cherche à connaître, en transfert radiatif, l'influence de l'intensité d'une émission thermique (ici c'est une source) il y a besoin d'une évaluation unique du propagateur qui est valable quelque soit la valeur de cette source ([Kramer et al., 1981]). En revanche si on cherche à connaître l'influence du coefficient d'absorption sur l'observable, il faudra évaluer la sensibilité autour de la valeur considérée du coefficient d'absorption (et recommencer si on en change sa valeur). Cela signifie que l'interprétation de la sensibilité dans ce cas là est limitée localement à des valeurs voisines du paramètre considéré. De ce point de vue le caractère linéaire ou pas du modèle ne change rien à la question. Dans le cadre de ce travail nous ne considérerons pas l'évaluation de

ce type de sensibilité car dans notre contexte il existe déjà des stratégies d'évaluation générales et performantes ([Knopman and Voss, 1987, Rose et al., 1991, de Lataillade et al., 2002]).

- les sensibilités aux paramètres géométriques : on pourrait considérer que les paramètres qui définissent la géométrie du système appartiennent aux paramètres du modèle et se rangent dans la classe précédente. En pratique il est d'usage de les distinguer ne serait-ce que par la différence de traitement et de la pensée induite au moment de leurs évaluations. Il s'agit ici de connaître l'effet d'une perturbation de la géométrie du système sur le jeu d'observable choisi. C'est par exemple ce genre de besoin qui apparaît dans les problématiques de recherche de design optimal ou de recalcul rapide d'un champ sans relancer la simulation complète du modèle. Par exemple en synthèse d'images, on cherche à calculer l'image perçue par une caméra suite au déplacement modéré d'un objet dans la scène sans avoir à relancer toute la simulation du rendu (qui consiste à résoudre l'ETR dans des scènes complexes). Comme dans la catégorie précédente le domaine de validité de sensibilité s'entend dans le voisinage de la géométrie de référence. De façon générale, du point de vue méthodologique les difficultés induites par l'évaluation directe de ce genre de sensibilité sont sans commune mesure avec l'évaluation des sensibilités paramétriques classiques. Le présent travail est exclusivement consacré, dans le cadre du transfert radiatif et de la méthode de Monte-Carlo, à cette question méthodologique.

**Méthode d'évaluation** Du point de vue calculatoire on distingue également différentes méthodes ou procédés numériques pour évaluer les sensibilités dans le problème considéré. Nous proposons ci-dessous de répertorier et de classer les différentes propositions et usages :

- très classiquement quand un utilisateur souhaite évaluer l'influence d'un paramètre, il est toujours possible de le faire par différence avec deux simulations construites avec deux valeurs proches du paramètre. Cela peut conduire à multiplier les simulations si l'espace des paramètres est de grande dimension (typiquement un champs de conditions initiales) et peut devenir très coûteux si chaque simulation nécessite des temps importants de calculs. Dans certaines situations, notamment avec les méthodes de Monte-Carlo, l'évaluation d'une sensibilité par différence de résultats associés à une petite perturbation du paramètre se heurte au recouvrement des incertitudes statistiques [Daun et al., 2003, Daun and Howell, 2005]. En effet pour évaluer correctement une sensibilité par différence finie il faut que la perturbation sur le paramètre soit suffisamment faible pour être représentative (ce qui signifie rester dans la gamme linéaire). Dans ce cas les deux évaluations de l'observable sont très proches et les barres d'erreur statistique correspondantes peuvent induire des barres d'erreur statistique très importantes sur la sensibilité. Pour palier à cela il faudrait augmenter énormément le nombre d'échantillons ce qui conduit à souvent faire le constat que cette façon de faire est quasiment impraticable dans les méthodes numériques statistiques. Néanmoins nous verrons par la suite que c'est de cette façon là que nous avons validé nos propositions méthodologiques sur des cas académiques.
- Il existe une pratique très ancrée dans l'informatique qui consiste à produire les sensibilités paramétriques par des méthodes dites de différenciation automatique de code. Sans rentrer dans les détails il s'agit de produire automatiquement un code séparé dont l'objectif est d'évaluer directement les gradients paramétriques. ([Lampoh, 2018]) Du point de vue méthodologique c'est un mélange de considérations théoriques sur la différenciation du modèle et de considérations informatiques d'ordre algorithmique ou plus profondément appuyées sur les caractéristiques des langages de programmation. Bien sur ces propositions ne s'appliquent pas avec la même performance selon le problème considéré. Nous avons référencé très peu de travaux de ce type pour l'évaluation des sensibilités géométriques dans des situations complexes. Il existe quelques propositions dans le domaine de la synthèse d'images ([Iman and Helton, 1988, Vassiliadis et al., 2016]) qui semble néanmoins se heurter à des problèmes important d'empreinte mémoire informatique. Nous n'aborderons pas du tout ces méthodes dans la suite de ce travail.

- La dernière proposition consiste à produire mathématiquement un modèle pour les sensibilités elles mêmes ([Rozenwasser and Yusupov, 2019]). De façon générale cela va consister à écrire un modèle en perturbations infinitésimales, mais on distingue deux pratiques très complémentaires :
  - les modèles directs de sensibilité qui sont construits en différentiant l’expression du modèle en champ et en l’accompagnant du jeu de conditions initiales et aux limites correspondant. Il existe ainsi autant de modèles de sensibilité (de la même dimension que le modèle de départ) que de paramètres de dérivation. Ceci permet par contre d’obtenir un champ de sensibilité complet, au même titre que la grandeur de départ ([Borgonovo and Plischke, 2016, Pianosi et al., 2016]). À l’exception triviale des sensibilités à des sources pour des modèles linéaires, le modèle de sensibilité est nécessairement couplé au modèle de la grandeur elle même. Ce qui nécessite en général, dans les méthodes déterministes, de résoudre un système de modèles couplés en champ ou aux limites. Ces méthodes sont pertinentes et utiles dès lors que la connaissance du champ de sensibilité est requise pour la question que l’on se pose. Néanmoins elle souffre d’une limitation calculatoire dès lors que le nombre de paramètres d’intérêt est grand. Pour résumer on retiendra, en simplifiant, que ces méthodes donnent la totalité du champ de sensibilité à un paramètre unique (si on change de paramètre on reconstruit le modèle correspondant).
  - une autre pratique très répandue consiste à produire le modèle adjoint du modèle de départ ([Errico, 1997, Matthes, 1971]). On ne s’intéresse plus cette fois ci à connaître le champ de sensibilités pour un paramètre donné mais de façon symétrique on cherche, pour une grandeur scalaire construite sur les variables d’état du modèle, l’ensemble des sensibilités aux différents paramètres du modèle. Par exemple on construit une observable (scalaire) qui est le flux sur une surface et on s’intéresse à évaluer le gradient paramétrique de ce flux (le gradient à la dimension du nombre de paramètre). Le gros intérêt de cette proposition est que la dimension du problème couplé entre la grandeur initiale et le modèle adjoint ne dépend pas du nombre de paramètre ([Anzell and Hakim, 2007]). En contre partie si on change l’observable on change le modèle adjoint. La construction des modèles adjoints sont des procédures assez classiques qui nécessitent d’effectuer un travail de formulation autour de la trajectoire du système pour un jeu de paramètres de références. Pour résumer on retiendra, en simplifiant, que ces méthodes donnent la totalité des sensibilités paramétriques à une observable unique.

**Évaluation des sensibilités par Monte-Carlo** L’ensemble des éléments que nous venons de décrire se décline de façon particulière dans notre contexte appuyé sur les méthodes statistiques pour la résolution des problèmes de transfert radiatif. En effet il existe des spécificités liées aux méthodes de Monte-Carlo qui nécessitent de développer une pratique adaptée. Par exemple dans les méthodes de Monte-Carlo (au sens où elles sont entendues ici, c’est à dire des méthodes de résolution d’intégrale en un point sonde) le champ complet des variables d’état n’est jamais calculé. Nous nous inscrivons toujours dans l’intention de produire un ou des modèles pour les sensibilités elles-mêmes. À partir de là nous allons distinguer deux pratiques associées à l’évaluation des sensibilités à partir de la méthode de Monte-Carlo :

- dans l’usage de la méthode telle qu’elle est pratiquée dans le groupe, la grandeur à estimer est toujours formulée à partir d’une intégrale (comme nous l’avons décrit dans le paragraphe précédent sur transfert radiatif). Ainsi la première idée consiste à dériver la formulation intégrale pour obtenir une formulation de la sensibilité elle-même. L’avantage, dans la méthode de Monte-Carlo, de pouvoir choisir arbitrairement les densités de probabilité (même idée que l’échantillonnage préférentiel) conduit à produire exactement une intégration sur le même échantillon de chemin pour la grandeur et la sensibilité. Algorithmiquement cela permet de calculer la sensibilité (en même temps que l’observable) sans influencer le temps de calcul de l’observable. L’article de [de Lataillade et al., 2002] pose les bases de la proposition pour l’ensemble des paramètres qui n’affectent pas le domaine d’intégration. L’extension au cas

général des paramètres définissant le domaine d'intégration (qui inclus le domaine géométrique) décrit dans l'article de [Roger et al., 2005] conduit à une proposition théorique complète mais laisse des questions ouvertes sur la praticabilité de la mise œuvre. On retrouve une pratique équivalente dans le domaine de la synthèse d'images ([Zhang et al., 2019, Li et al., 2018]) dans un objectif très précis associé au contexte de la production d'images. Cette façon générale de faire s'apparente à la pratique "adjointe" puisque le point de départ est de produire des sensibilités sur une grandeur scalaire. Néanmoins à aucun moment ici il n'a été nécessaire de formaliser une écriture du modèle adjoint.

- l'alternative à la proposition précédente consiste au contraire à construire le modèle de sensibilité à partir de la formulation différentielle de l'équation de transfert radiatif. On distingue ici deux façons de faire selon que le point de vue est de type direct ou adjoint. On peut faire une correspondance entre ces points de vue associés aux modèles de sensibilité et la pratique duale de Monte-Carlo des algorithmes analogues directs et des algorithmes réciproques "reverse". Typiquement le travail de [Rukolaine, 2015] consiste à construire le modèle adjoint pour une grandeur scalaire donnée (une intégrale de minimisation quadratique par exemple) ; par contre la résolution numérique correspondante est produite à partir de méthodes déterministes. Nous proposons l'autre alternative dans l'article [Sec. 1.5.1](#) qui consiste à construire le modèle direct de sensibilité en dérivant la formulation différentielle de l'équation de transfert radiatif [Dauchet, 2012]. Nous verrons par la suite que dans les situations de paramètres qui déforment la géométrie du domaine, l'essentiel de la difficulté est la construction des conditions aux limites. Une fois le modèle produit, il est tout à fait envisageable de proposer des algorithmes direct ou reverse sur la grandeur sensibilité en remplaçant la phase formelle de construction du modèle adjoint par l'usage du principe de réciprocité des rayons lumineux.

Nous finissons cette présentation du contexte sensibilité en focalisant l'attention sur l'objet précis de ce travail, à savoir l'évaluation des sensibilités à une déformation de la géométrie à partir des méthodes de Monte-Carlo pour les modèles de transferts radiatifs. De façon très large la question des sensibilités géométriques est un sujet important donnant lieu à une littérature spécifique abondante ([Henrot and Sokolowski, 2005, Allaire and Schoenauer, 2007, Daun et al., 2003, Dorn and Lesselier, 2009]). Néanmoins on peut repérer que énormément de travaux théoriques concernent des déformations continues de géométries différentiables pour des modèles en champ spatiaux (modèle mécanique des fluides, mécanique des solides, élasticité, contrainte, etc.). On trouve par contre très peu de travaux qui concerne les géométries non différentiables (avec des discontinuités), et quasiment rien (à l'exception du travail de Rukolaine) sur les modèles de transfert radiatif dans lesquels l'espace des phases est élargi à l'espace des directions. Si on ajoute à cela le choix de la méthode de Monte-Carlo comme méthode numérique de résolution il n'y a, à notre connaissance, aucun travaux référencé dans les sciences physiques ; on trouve uniquement des questionnements équivalents dans le domaine de l'informatique graphique autour de problématique de génération d'images de synthèse ([Ramamoorthi et al., 2007, Loubet et al., 2019]).

Lorsqu'on produit le modèle de sensibilité, à partir de l'ETR, à un paramètre géométrique on constate que le couplage avec la luminance intervient uniquement sur les conditions aux limites. Selon les situations on observe que ce n'est pas uniquement la luminance qui intervient dans le couplage mais également ses dérivées spatiales et angulaires. Or dans les méthodes de Monte-Carlo on ne résout pas directement le champ de luminance et a fortiori les champs de dérivées spatiales et angulaires (typiquement par différences finies tel qu'on le ferait dans les méthodes déterministes de résolution du champ). En revanche, étant donné que les couplages sont toujours linéaires, nous verrons qu'il est tout à fait possible d'évaluer la sensibilité par un usage intensif du concept de double randomisation. Néanmoins cela signifie qu'il faudra produire les modèles pour les gradients spatiaux et angulaires avec les conditions aux limites adéquates ; cela fera l'objet d'une discussion spécifique dans le [Chap. 2](#).

Pour illustrer quelque peu l'ensemble de cette description générale sur les sensibilités dans le cadre de la méthode de Monte-Carlo en transfert radiatif, et avant d'aborder directement la question

des sensibilité géométrique, nous proposons d'illustrer notre pratique au travers d'un petit exemple décrit dans la [Sec. 1.4](#) suivante.

## 1.4 Illustration par un exemple simple

Dans cet exemple l'observable  $\mathcal{T}$  est la quantité d'énergie transmise par rayonnement d'une paroi noire  $A$ , de température  $T_A$ , à une paroi noire parallèle  $B$ , froide. Le milieu est semi-transparent et froid. Dans les deux parties qui vont suivre, nous chercherons à illustrer, de deux façons différentes, la sensibilité de cette observable à la valeur du coefficient d'absorption  $k_a$ . La première consistera à déterminer la sensibilité en dérivant directement la formulation intégrale en espérance de  $\mathcal{T}$ . La deuxième méthode consistera à dériver l'ETR pour obtenir une équation d'évolution sur la sensibilité de la luminance à  $k_a$ .

### 1.4.1 Dérivation de la formulation intégrale de l'espérance

La formulation intégrale en espérance de l'observable s'écrit :

$$\mathcal{T}(k_a) = \int_{\Gamma} p_{\Gamma}(\gamma, k_a) d\gamma \hat{w}(\gamma, k_a) \quad (1.12)$$

La variable  $\Gamma$  correspond à un chemin de diffusion multiple qui est échantillonné de façon directe, c'est à dire en partant de la paroi  $A$  et en propageant les sources vers la paroi  $B$ . La sensibilité de  $\mathcal{T}$  au coefficient d'absorption est obtenue par dérivation directe de l'observable :

$$\partial_{k_a} \mathcal{T}(k_a) = \partial_{k_a} \left( \int_{\Gamma} p_{\Gamma}(\gamma, k_a) d\gamma \hat{w}(\gamma, k_a) \right) \quad (1.13)$$

En développant la dérivation on obtient pour la sensibilité :

$$\partial_{k_a} \mathcal{T}(k_a) = \int_{\Gamma} p_{\Gamma}(\gamma, k_a) d\gamma \hat{w}_{k_a}(\gamma, k_a) \quad (1.14)$$

avec

$$\hat{w}_{k_a}(\gamma, k_a) = \frac{\partial_{k_a} p_{\Gamma}(\gamma, k_a)}{p_{\Gamma}(\gamma, k_a)} \hat{w}(\gamma, k_a) + \partial_{k_a} \hat{w}(\gamma, k_a) \quad (1.15)$$

Si nous comparons l'[Eq. 1.12](#), de l'observable, et l'[Eq. 1.14](#), de la sensibilité, nous pouvons voir qu'elles sont très similaires. En effet l'espace des chemin est le même, la densité de probabilité est identique, seuls les poids de Monte-Carlo sont différents. De façon très pragmatique cela implique que le calcul de sensibilité par Monte-Carlo peut s'effectuer à partir des mêmes processus aléatoires que ceux de l'observable et donc que les deux grandeurs peuvent être estimées simultanément. Informatiquement le calcul de sensibilité revient à ajouter une ligne de code dans l'algorithme de l'observable (cette ligne correspond strictement au calcul du poids de la sensibilité soit l'écriture de l'[Eq. 1.15](#)). Cette opération n'a pratiquement aucune influence sur le temps de calcul, en référence à l'unique calcul de l'observable. Physiquement si nous essayons de donner une interprétation à ces équations nous verrons que les chemins de sensibilité sont strictement identiques aux chemins de l'observable. Le long de ces mêmes chemins nous propageons à la fois la source radiative (représentée par la fonction  $\hat{w}$ ) et à la fois la source de sensibilité (représentée par la fonction  $\hat{w}_{k_a}$ ).

L'avantage de cette propagation commune est un des grands intérêt du calcul de sensibilité par dérivation directe de la formulation intégrale et à fait l'objet de nombreuses recherche dans la communauté ([\[de Lataillade et al., 2002, De la Torre, 2011, Roger et al., 2004\]](#)).



### 1.4.2 Dérivation de l'équation différentielle

Dans cette méthode l'observable est définie comme une fonction de la luminance et de  $k_a$  et nous nous intéressons au système différentiel qui comprend l'observable et l'ETR :

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &= \mathcal{F}(L(\vec{x}, \vec{\omega}, k_a), k_a) \\ \vec{\omega} \cdot \vec{\partial}_1 L(\vec{x}, \vec{\omega}, k_a) &= \mathcal{G}[L(\vec{x}, \vec{\omega}, k_a)]\end{aligned}\quad (1.16)$$

L'estimation de l'observable  $\mathcal{T}$  passe par la résolution de ce système différentiel. Dans cet exemple, et en général en ce qui concerne les observables du transfert radiatif, l'application  $\mathcal{F}$  est une fonction intégrale linéaire de la luminance.

L'opérateur  $\mathcal{G}$  est l'opérateur collisionnel de l'ETR, il contient les termes d'absorption et de diffusion de la luminance dans le milieu. Il est défini tel que :

$$\mathcal{G}[L(\vec{x}, \vec{\omega}, k_a)] = -k_d L(\vec{x}, \vec{\omega}, k_a) - k_a L(\vec{x}, \vec{\omega}, k_a) + k_d \int_{\Omega} p_{\Omega}(\vec{\omega}' | \vec{\omega}) d\vec{\omega} L(\vec{x}, \vec{\omega}', k_a) \quad (1.17)$$

Pour exprimer la sensibilité de la transmissivité on dérive le système de l'Eq. 1.16 :

$$\begin{aligned}\partial_{k_a} \mathcal{T} &= \mathcal{K}(s(\vec{x}, \vec{\omega}, k_a), k_a) \\ \vec{\omega} \cdot \vec{\partial}_1 s(\vec{x}, \vec{\omega}, k_a) &= \underbrace{\mathcal{G}[s(\vec{x}, \vec{\omega}, k_a)]}_{1^{er} \text{ terme}} + \underbrace{\partial_{k_a} \mathcal{G}[L(\vec{x}, \vec{\omega}, k_a)]}_{2^{nd} \text{ terme}}\end{aligned}\quad (1.18)$$

avec  $\partial_{k_a} (\mathcal{G}[L(\vec{x}, \vec{\omega}, k_a)]) = \mathcal{G}[s(\vec{x}, \vec{\omega}, k_a)] + \partial_{k_a} \mathcal{G}[L(\vec{x}, \vec{\omega}, k_a)]$ .

Nous obtenons un nouveau système qui contient la sensibilité de l'observable  $\partial_{k_a} \mathcal{T}$  et qui porte sur la sensibilité la luminance  $s(\vec{x}, \vec{\omega}, k_a) = \partial_{k_a} L(\vec{x}, \vec{\omega}, k_a)$ . L'équation de transport obtenue par la dérivation de l'ETR n'est pas une équation de transfert radiatif classique, elle contient le terme collisionnel  $\mathcal{G}$  qui est cette fois ci appliqué à la sensibilité et un terme supplémentaire qui dépend de la luminance. Nous allons détailler ces termes dans les deux paragraphes suivants.

**Le premier terme** Le premier terme correspond à l'opérateur collisionnel  $\mathcal{G}$  appliqué à la sensibilité.

$$\mathcal{G}[s(\vec{x}, \vec{\omega}, k_a)] = -k_d s(\vec{x}, \vec{\omega}, k_a) - k_a s(\vec{x}, \vec{\omega}, k_a) + k_d \int_{\Omega} p_{\Omega}(\vec{\omega}' | \vec{\omega}) d\vec{\omega} s(\vec{x}, \vec{\omega}', k_a) \quad (1.19)$$

Cette identification à une signification forte, nous pouvons lire dans le parallèle entre l'Eq. 1.17 et l'Eq. 1.19 que la sensibilité  $s(\vec{x}, \vec{\omega}, k_a)$  possède les mêmes termes collisionnel que la luminance. Imaginons un instant que le second terme soit nul, alors le modèle de sensibilité serait strictement identique au modèle de luminance (c'est à dire l'ETR). Nous pourrions donc traiter la sensibilité comme une quantité obéissant aux mêmes phénomènes de transport que la luminance. Ainsi les réflexes intuitifs de la physique, et les réflexes algorithmiques, acquis pour traiter des problèmes de transfert radiatif, seraient transposables au problème de sensibilité.

**Le second terme** Le second terme du modèle de sensibilité de l'Eq. 1.18 correspond à l'opérateur dérivé  $\partial_{k_a} \mathcal{G}$  appliqué à la luminance :

$$\partial_{k_a} \mathcal{G}[L(\vec{x}, \vec{\omega}, k_a), k_a] = -L(\vec{x}, \vec{\omega}, k_a) \quad (1.20)$$

Nous avons identifié, juste avant, que le modèle de sensibilité pouvait se rapporter à un modèle de transport identique à celui de la luminance, à une source près. L'Eq. 1.20 montre que la source en question est la valeur de la luminance à une position de l'espace des phases donnée, pour une valeur de  $k_a$  donnée. Cela implique que dans le modèle de transport de sensibilité il existe une source dans le milieu qui dépend du champ de luminance. Nous appellerons cette source une source volumique. Étant donné que cette source dépend du champ de luminance, il existe un couplage local, dans le milieu, entre le modèle de sensibilité et l'ETR.

**Le modèle de sensibilité** En ré-injectant les deux termes des Eq. 1.19 et Eq. 1.20 dans le système 1.18, et en ajoutant le modèle d'évolution de la luminance on obtient le système du problème de sensibilité couplé :

$$\begin{aligned}\partial_{k_a} \mathcal{T} &= \mathcal{K} ( s(\vec{x}, \vec{\omega}, k_a), k_a ) \\ \vec{\omega} \cdot \vec{\partial}_1 s(\vec{x}, \vec{\omega}, k_a) &= \mathcal{G} ( s(\vec{x}, \vec{\omega}, k_a), k_a ) - L(\vec{x}, \vec{\omega}, k_a) \\ \vec{\omega} \cdot \vec{\partial}_1 L(\vec{x}, \vec{\omega}, k_a) &= \mathcal{G} ( L(\vec{x}, \vec{\omega}, k_a), k_a )\end{aligned}\tag{1.21}$$

Le résolution de ce système, c'est à dire l'évaluation de la sensibilité de la transmissivité, dépend de la résolution de deux modèles couplés : le modèle de sensibilité et l'ETR. L'Eq. 1.21 montre que le modèle de sensibilité est un modèle de transport, au même titre que la luminance, et que les termes collisionnels de sensibilités sont, comme la luminance, portés par l'opérateur  $\mathcal{G}$ . La seule différence entre la sensibilité et la luminance est que, tout le long de son transport dans la milieu, la sensibilité doit comptabiliser une source radiative directement dépendante du champ de luminance.

## 1.5 Problématique

### 1.5.1 Introduction aux sensibilités géométriques

L'article qui suit dépeint l'histoire de notre pratique des sensibilités à la géométrie, son positionnement dans la communauté des sciences de l'ingénieur et introduit le modèle de sensibilité géométrique. Il aborde notamment les conditions aux limites de sensibilité et les principales difficultés de modélisations qu'elles soulèvent. Les exemples d'applications qui sont présentés attestent du potentiel du modèle de sensibilité dans le cas de géométries complexes facétisées et pour différentes propriétés de parois (noires, réfléchissantes). Cependant ils témoignent également des efforts de modélisation qui seront nécessaires pour parvenir à couvrir l'ensemble des configurations radiatives que nous pouvons rencontrer dans nos sciences de l'ingénieur. Les solutions algorithmiques utilisées pour résoudre numériquement le modèle sont aussi introduites. Par exemple la double randomisation permet de gérer les couplages des différentes physiques qui interviennent dans le modèle de sensibilité. Cet article est donc un point de départ qui permet d'introduire les directions de recherches que nous avons suivies dans la réalisation de ce travail de thèse.



# Monte-Carlo and sensitivity transport models for domain deformation

P. Lapeyre<sup>a</sup>, S. Blanco<sup>b</sup>, C. Caliot<sup>a</sup>, J. Dauchet<sup>c</sup>, M. El Hafi<sup>d</sup>, R. Fournier<sup>b</sup>, O. Farges<sup>e</sup>, J. Gautrais<sup>g</sup>, M. Roger<sup>f</sup>

<sup>a</sup>PROMES CNRS, Université Perpignan Via Domitia - 7, rue du Four Solaire, 66120 Font Romeu Odeillo, France

<sup>b</sup>LAPLACE, UMR 5213 - Université Paul Sabatier, 118, Route de Narbonne - 31062 Toulouse Cedex, France

<sup>c</sup>Université Clermont Auvergne, CNRS, SIGMA Clermont, Institut Pascal, F-63000 Clermont-Ferrand, France

<sup>d</sup>Université Fédérale de Toulouse Midi-Pyrénées, Mines Albi, UMR CNRS 5302, Centre RAPSODEE, Campus Jarlard, F-81013 Albi CT Cedex

<sup>e</sup>LEMETA - UMR 7563 - Université de Lorraine, Vandœuvre-lès-Nancy, France

<sup>f</sup>CETHIL, UMR 5008, CNRS, INSA-Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, F-69621, Villeurbanne, France

<sup>g</sup>Centre de Recherches sur la Cognition Animale (CRCA), Centre de Biologie Intégrative (CBI), Université de Toulouse; CNRS, UPS, France

---

## Abstract

We address the question of evaluating shape derivatives of objective functions for radiative-transfer engineering involving semi-transparent media. After recalling the standard Monte-Carlo approach to sensitivity estimation and its current limitations, a new method is presented for the specific case of geometrical sensitivities. This method is then tested on configurations with multiple-scattering and absorbing (non-emitting) semi-transparent medium. A new geometrical sensitivity algorithm is presented with full details in order to extend, on several examples, its implementation in complex geometries.

*Keywords:* Monte Carlo, domain deformation, sensitivity transport models, sensitivity estimation, shape sensitivities

---

## 1. Introduction

The optimization of engineering processes involves an objective function driven by physical mechanisms. In the field of geometrical design, shape optimization models are required to find the extremum of an objective function, denoted here as  $J(\vec{\pi})$ , that depends on a vector of design parameters  $\vec{\pi}$ . Among optimization methods, the gradient descent method can be used to find a local extremum, and stochastic methods (genetic algorithms, particle swarm optimization) can be used to look for a global extremum (Daun et al., 2003; Rukolaine, 2010; Farges, 2014)<sup>1</sup>. In any case, the derivative of  $J(\vec{\pi})$  with respect to  $\vec{\pi}$  is a valuable piece of information for the optimization of engineering processes (Caliot et al., 2015; Piaud et al., 2012; Dauchet et al., 2013; Shim and Kim, 2011).

Our work address process configurations that have a complex geometry and where the radiative transfers are a major component of heat transfer models, and therefore of the objective function (Delatorre et al., 2014). Classically, the Monte-Carlo method is regarded as a method

---

*Email address:* [pau.le.lapeyre@promes.cnrs.fr](mailto:pau.le.lapeyre@promes.cnrs.fr) (P. Lapeyre)

<sup>1</sup>Some of the references are PHD theses in french. However, every information that is essential to this work is fully reported in the present text.

of reference in such cases because it remains unbiased even for configurations with high level of complexity in radiative properties and geometry (Galtier et al., 2016; Delatorre et al., 2014; Villefranque et al., 2019; Dauchet et al., 2015). To carry out the computation, the models are stated in an integral formulation, which is then considered as an expectation, which in turn is estimated by sampling, yielding an unbiased estimate of the expectation as well as its confidence interval. Considering sensitivities, a well-known advantage of the Monte-Carlo method is its ability to estimate such expectation and its derivatives by using the very same sampling, avoiding additional computation time (Blanco and Fournier, 2006; Roger et al., 2005, 2004, 2006; Tregan et al., 2019; Giles, 2007; Melchers and Ahammed, 2004). This advantage has however some limitations when sensitivity to geometrical parameters is considered because the integral formulation of the model raises formalization and implementation difficulties (De la Torre, 2011). Those limitations led us to consider the geometrical sensitivities restarting from the local differential equations, namely not formulating first the physical models as integrals.

Several studies have addressed the question of finding shape derivatives for linear physical models through shape sensitivity analysis (Sokolowski and Zolésio, 1992). In the field of deterministic approach, (Rukolaine, 2015) propose a generalization of the sensitivity models to the radiative transfer equation with specular and diffuse radiative boundary conditions in order to solve the shape optimization problems. In the present work, we extend the question of evaluating shape derivatives when using the Monte-Carlo method as a method of reference. Towards this goal, we propose a construction of the shape sensitivity models that overcome the limitations mentioned above, still preserving the intuitive aspect of the method and its unbiased prediction power. In short, we consider the geometrical sensitivity as a quantity that is transported.

We show how to formulate its transport model (Dauchet, 2012), as well as how to translate the boundary conditions of the physical problem into the corresponding boundary conditions for the sensitivity transport model. Then and only then, the MC method is used to draw estimates from this new transport model. As a result, we gain that geometrical sensitivities can be solved in configurations that were previously unsolvable by classical differentiation of Monte-Carlo integrals. As a side-effect, we lose the well-known advantage of estimating sensitivities using the same sampling — yet at the boundaries only.

In section 2, we will briefly review the existing Monte-Carlo method used to estimate an objective function  $J(\pi)$  and its derivative  $\partial_\pi J(\pi)$  and the difficulties raised by geometry deformation. In next section, we will introduce our new sensitivity model. We will use there an academic configuration with an uni-dimensional geometrical parameter  $\pi$  in order to expose it in full details.

Finally, the geometric sensitivity model will be applied on four different configurations, presenting the scope of our development so far for complex geometry, reflective boundary conditions and curve surfaces.

## 2. Classical approach for sensitivity in Monte Carlo methods

In this section, we briefly summarize the sensitivity calculation as described in (de Lataillade et al., 2002) and (Roger et al., 2005). Any radiative quantity  $J$  expressed as a linear integral function can be estimated by the Monte Carlo method as long as it is stated as an expectation (Eq. 1 of the first insert). Formulated as such, the objective function might depend on the parameter  $\pi$  through the density probability functions, the Monte Carlo weight function and the integration domain. One of the advantages of the Monte Carlo method is that the sensitivities

of the objective function can always be defined from the same random variable (same domain definition and same probability density functions) as the objective function (Eq. 2 of the first insert). Numerically, this means that the objective function and its sensitivities are estimated simultaneously from the same set of the random variable samples.

However, when the integration domain is parameterized by  $\pi$  (e.g. due to geometry deformation), two major difficulties have been pointed out in previous works ((Roger et al., 2005), (De la Torre, 2011)). The first one lies in constructing the formal expression of the deformation velocity vector inside the domain (see Eq. 4 in the first insert). The second one arises from the implementation of this formal expression when dealing with multiple scattering and multiple reflection. These two difficulties jeopardize the extension of the existing method to configurations with complex geometry. Therefore, we present an alternative proposal where the geometric sensitivities are obtained through the differentiation of the radiative transfer model itself.

As a last point, we recall that the typical objective functions for geometrical design of (stationary) radiative transfer, when addressed with Monte Carlo, are integrals over frequency, over positions  $\vec{x}$  and over directions  $\vec{u}$  of linear functions of the monochromatic intensity  $I(\vec{x}, \vec{u})$ . The Monte Carlo algorithms therefore start by sampling the corresponding spaces and the algorithm completes by estimating  $I(\vec{x}, \vec{u})$  at the sampled frequency. The four examples that will be presented below will include such preliminary sampling, but all our formal developments will focus on the expressions for  $I$  and  $\partial_\pi I$ .

### Classical approach to estimate sensitivities inside a Monte Carlo algorithm

The random variable  $\Gamma$ , established over a multiple dimension domain  $\mathcal{D}_\Gamma$  according to a probability density function  $p_\Gamma(\gamma)$ , is identified such as:

$$J(\pi) = \int_{\mathcal{D}_\Gamma(\pi)} p_\Gamma(\gamma, \pi) d\gamma \hat{w}(\gamma, \pi) = \mathbb{E}(\hat{w}(\Gamma, \pi)) \quad (1)$$

where  $\hat{w}$  is a random variable function called the Monte Carlo weight function. When the integration domain is independent of  $\pi$  it is shown in (de Lataillade et al., 2002) that the sensitivity of  $J(\pi)$  with respect to  $\pi$  is :

$$\partial_\pi J(\pi) = \int_{\mathcal{D}_\Gamma} p_\Gamma(\gamma, \pi) d\gamma \left[ \frac{\partial_\pi p_\Gamma(\gamma, \pi)}{p_\Gamma(\gamma, \pi)} \hat{w}(\gamma, \pi) + \partial_\pi \hat{w}(\gamma, \pi) \right] \quad (2)$$

$\partial_\pi J(\pi)$  is an expectation of a new random variable function  $\hat{w}_\pi$  of the same random variable  $\Gamma$ .

$$\hat{w}_\pi(\gamma, \pi) = \left[ \frac{\partial_\pi p_\Gamma(\gamma, \pi)}{p_\Gamma(\gamma, \pi)} \hat{w}(\gamma, \pi) + \partial_\pi \hat{w}(\gamma, \pi) \right] \quad (3)$$

When the integration domain does depend on  $\pi$ , it is shown in (Roger, 2006; Roger et al., 2005) that the sensitivity of  $J(\pi)$  with respect to  $\pi$  can be written as :

$$\begin{aligned} \partial_\pi J(\pi) &= \int_{\mathcal{D}_\Gamma(\pi)} p_\Gamma(\gamma, \pi) d\gamma \quad (4) \\ &\times \left[ \partial_\pi \hat{w}(\gamma, \pi) + \hat{w}(\gamma, \pi) \frac{\partial_\pi p_\Gamma(\gamma, \pi)}{p_\Gamma(\gamma, \pi)} + \frac{\vec{\nabla} \cdot (\hat{w}(\gamma, \pi) p_\Gamma(\gamma, \pi) \vec{v}_\pi)}{p_\Gamma(\gamma, \pi)} \right] \end{aligned}$$

where  $\vec{v}_\pi$  denote the deformation velocity. This velocity is constrained only at the integration domain boundaries, and must be extended arbitrarily all over the domain.

### 3. An alternative proposal : the sensitivity transport model

In this section, the intensity geometric sensitivity  $\partial_\pi I$  is introduced at the modeling level. That is, instead of derivating  $I(\pi)$  stated as an integral, we view the sensitivity as a quantity with its own transport model. This model is obtained by derivating the radiative transfer equation (RTE). In the present work, we consider the case of a scattering, absorbing non-emissive medium (adding medium emission would not convey any additional idea).

Denoting the domain  $\Omega$ , and the boundary  $\partial\Omega(\pi)$ , the RTE then reads :

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} I(\vec{x}, \vec{u}, \pi) = -(k_a + k_s)I(\vec{x}, \vec{u}, \pi) + k_s \int_{4\pi} p(\vec{u}'|\vec{u}) d\vec{u}' I(\vec{x}, \vec{u}', \pi) & \text{for } \vec{x} \in \Omega \\ I(\vec{x}, \vec{u}, \pi) = I_{\partial\Omega(\pi)}(\vec{x}, \vec{u}, \pi) & \text{for } \vec{x} \in \partial\Omega(\pi) \text{ and } \vec{u} \cdot \vec{n} > 0 \end{cases} \quad (5)$$

The RTE differentiation leads to

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} s(\vec{x}, \vec{u}, \pi) = -(k_a + k_s)s(\vec{x}, \vec{u}, \pi) + k_s \int_{4\pi} p(\vec{u}'|\vec{u}) d\vec{u}' s(\vec{x}, \vec{u}', \pi) & \text{for } \vec{x} \in \Omega \\ s(\vec{x}, \vec{u}, \pi) = s_{\partial\Omega(\pi)}(\vec{x}, \vec{u}, \pi) & \text{for } \vec{x} \in \partial\Omega(\pi) \text{ and } \vec{u} \cdot \vec{n} > 0 \end{cases} \quad (6)$$

where  $s(\vec{x}, \vec{u}, \pi) = \partial_\pi I(\vec{x}, \vec{u}, \pi)$ . Since the geometrical parameter  $\pi$  only appears at the boundary conditions, it does not affect the operators of Eq. (5). We can therefore notice that the sensitivity transport equation is identical to the intensity transport equation in the domain  $\Omega$ . It implies that, in the domain, the algorithms used to solve the RTE can be used unchanged to solve the sensitivity transport equation. The sensitivity transport and the intensity transport only differ over boundary conditions. Therefore sensitivity can be regarded as a quantity that is transported by the same transport model as the intensity, only changing the sources at boundaries. The question that remains is then to determine the sources of sensitivity at boundaries. We show below that sensitivity boundary conditions involve a coupling with intensity and depend on the radiative properties of the boundary (Eq. 9) so that the sensitivity transport can not be solved on its own. In the context of Monte Carlo formulation, this will result in an integral formulation of the sensitivity which includes equations (5) and (6) (details in Sec. 4), which requires in turn to solve systems (5) and (6) in parallel.

#### *General expression for sources of sensitivity at boundary*

Let us denote  $I_B$  the field of the incoming radiative intensity at the boundary. All Monte Carlo approaches rely on an integral formulation of the RTE solution of the form

$$I(\vec{x}, \vec{u}, \pi) = \int_{\mathcal{D}_\Gamma(\pi)} p_\Gamma(\gamma|\vec{x}, \vec{u}) d\gamma \hat{w}(\gamma, I_B) \quad (7)$$

where  $p_\Gamma(\gamma|\vec{x}, \vec{u})$  is the probability density of path  $\gamma$  propagating the radiative sources from the boundary through the medium up to  $\vec{x}$  in direction  $\vec{u}$ .

Identically, let us denote  $s_B$  the field of the incoming sensitivity at the boundary. The Monte Carlo algorithm evaluating the intensity is straightforwardly translated into a Monte Carlo algorithm evaluating the sensitivity based on the following integral formulation in which only the boundary sources are changed:

$$s(\vec{x}, \vec{u}, \pi) = \int_{\mathcal{D}_{\Gamma_\pi}(\pi)} p_{\Gamma_\pi}(\gamma_\pi|\vec{x}, \vec{u}) d\gamma_\pi \hat{w}(\gamma_\pi, s_B) \quad (8)$$

The absorbing and scattering medium properties are preserved during the process and therefore the space of optical paths  $\Gamma$  is identical to that of the sensitivity paths  $\Gamma_\pi$ . The main point here is that the sensitivity boundary conditions are transported by the same paths as the intensity boundary conditions and we can therefore use the same set of sampled paths to estimate simultaneously both quantities.

However at this point the boundary conditions of the sensitivity model are unknown. The main objective of constructing the sensitivity model is to formulate those boundary conditions: the sensitivities associated to the geometrical perturbations for all incoming directions at the boundary. Preserving the complete generality of the emission, absorption, reflection and scattering phenomena compatible with the radiative transfers equation, these incoming sensitivities can be written under the form of a linear application  $\mathcal{L}$  of

- the sensitivities  $s(\vec{x}, \vec{u}', \pi)$  in all outgoing directions  $\vec{u}'$  (as for any surface reflection problem, only here it is the sensitivity that is reflected),
- the intensities  $I(\vec{x}, \vec{u}', \pi)$  also in all outgoing direction  $\vec{u}'$ ,
- and the black-body intensity at the local temperature  $I_b(T(\vec{x}, \pi))$ .

$$s_{\partial\Omega(\pi)}(\vec{x}, \vec{u}, \pi) = \mathcal{L} [s(\vec{x}, \vec{u}', \pi), I(\vec{x}, \vec{u}', \pi), I_b(T(\vec{x}, \pi))] \quad \text{with } \vec{u} \cdot \vec{n} > 0 \quad (9)$$

The main point here is the fact that  $I$  appear in this linear application. This implies that via the boundary condition, the sensitivity model is coupled with the intensity model: the sources of sensitivity have to be evaluated, from the outgoing intensity (Figure 1), before being propagated into the domain. AppendixA and AppendixB provide practical examples of these coupling at the

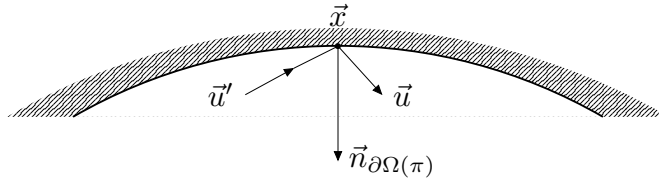


Figure 1: Schema corresponding to the sensitivity boundary condition (Eq. (9))

boundary. These examples correspond to the four configurations studied in next sections.

### A roadmap to the sensitivity transport model in the Monte Carlo context

- The sensitivity transport equation is well established and familiar: it represents the same transport phenomena as for the intensity (Sec. 3).
- Regarding the boundary conditions, as far as our configurations are concerned:
  - sources of sensitivities appear at geometrically modified boundaries (Sec. 5):
    - \* the impact of the volume of semi-transparent medium added or withdrawn when modifying the surface ; the term  $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} I$  of Eq. 18 is directly derived from the radiative transfer equation (Sec. 5, AppendixA).
    - \* sources of sensitivity appear as Dirac distributions where intensity displays discontinuities at the boundary (Sec. 5, AppendixA)
  - everywhere the boundary condition is reflecting for the intensity, it is as well reflecting for the sensitivity
- From an algorithmic point of view:
  - well-identified difficulties arise from sources expressed as Dirac distribution in location and/or direction (Sec. 5),
  - the coupling between sensitivity transport equation and intensity transport equation through the boundary conditions is dealt with standard double randomization technique (Sec. 4).

In **configuration 1**, the source of radiation is a black cylinder inside a square cavity filled with absorbing and scattering material. The objective function is the local absorption power and the geometric parameter  $\pi$  acts on the size of the square cavity. This configuration is discussed in full details in section 3 in order to illustrate the entire process of designing a shape sensitivity algorithm: expressing the sensitivity sources (as function of the incoming intensities); choosing a Monte Carlo algorithm propagating these sources as if they were known (according to the standard practice of Monte Carlo in radiative transfer); coupling it with a Monte Carlo algorithm evaluating  $I$ . In the following section (5) three other configurations are successively discussed. **Configuration 2** is very similar to **configuration 1** but now the square cavity is emitting with a temperature discontinuity. This leads to the definition of a new type of sensitivity sources: Dirac sources at the discontinuity location. **Configuration 3** deals with the same family of sensitivity sources but they are now related to reflection at geometrically modified boundaries and the technique is scaled up to realistic thermal solar plants. The Dirac sources will here be at the edge of heliostats of increasing sizes. With **configuration 4** we go back to semi-transparent media, still with complex geometries but now concentrating on the question of evaluating sources at altered curved surfaces.

#### 4. Foundational algorithm (configuration 1)

Here, we expose the algorithmic principles of the method, using, for the sake of clarity, a fairly simple configuration with a simple geometrical alteration and homogeneous medium and boundaries.

Let us consider a square cavity containing a gray semi-transparent absorbing, scattering, but non-emitting medium. Cavity dimensions are set along the  $x$  and  $y$  axes and are infinite along the  $z$  axis. At the center of the square an infinite isothermal black-body cylinder at temperature  $T$ . The square walls are also black but emit no radiation (Figure 2). The semi-transparent domain is denoted as  $\Omega$ , and its boundary  $\partial\Omega(\pi)$  is constituted by the cavity boundary  $\mathcal{R}(\pi)$  and the cylinder emitting boundary  $\mathcal{F}$ . The geometrical parameter  $\pi$  is setting the cavity boundary  $\mathcal{R}(\pi)$ : the deformation is a colinear translation of  $\mathcal{R}(\pi)$  according to the normal vector  $\vec{n}_{\mathcal{R}(\pi)}$  resulting in an uniform scaling of the cavity. The objective function is the local absorption power  $J(\vec{x}_0, \pi)$

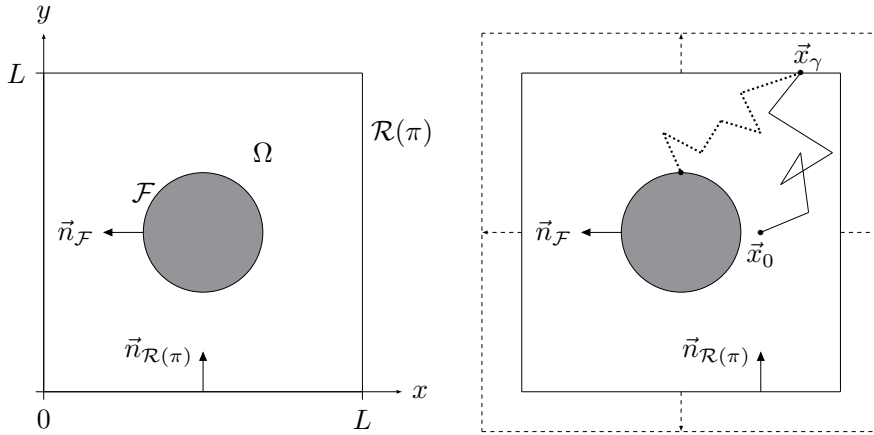


Figure 2: On the left, the square cavity geometry filled by a semi-transparent medium, lightened by an emissive cylinder at its center. On the right, the dashed line represents the uniform scaling of the cavity. The solid multiple-scattering path is a typical realization of a radiative path use in a Monte Carlo algorithm evaluating the local absorption power at  $\vec{x}_0$ . The same path is used to evaluate the sensitivity. The dotted multiple-scattering path illustrates how we translate in Monte Carlo terms the coupling of the sensitivity model with the initial radiative transfer model: the incoming sensitivity at  $\vec{x}_\gamma$  requires the evaluation of the outgoing intensity at the same location and thanks to double randomization, only one single sample of a standard Monte Carlo path is required to complete the sensitivity realization.

at a location  $\vec{x}_0$  and we aim at evaluating its derivative  $\partial_\pi J(\vec{x}_0, \pi)$  with respect to  $\pi$ . Both are integrals over the unit sphere of  $I$  and  $s$  :

$$J(\vec{x}_0, \pi) = \int_{4\pi} k_a I(\vec{x}_0, \vec{u}_0, \pi) d\vec{u}_0 \quad (10)$$

$$\partial_\pi J(\vec{x}_0, \pi) = \int_{4\pi} k_a s(\vec{x}_0, \vec{u}_0, \pi) d\vec{u}_0 \quad (11)$$

In the Monte Carlo context, these integrals will be evaluated by first sampling a direction  $\vec{u}_0$  and then evaluating  $I(\vec{x}_0, \vec{u}_0, \pi)$  and  $s(\vec{x}_0, \vec{u}_0, \pi)$ .

The radiative model is the RTE of Eq. (5) with the boundary conditions:

$$\begin{cases} I(\vec{x}_{\mathcal{R}}, \vec{u}, \pi) = 0 \\ I(\vec{x}_{\mathcal{F}}, \vec{u}) = I_b(T) \end{cases} \quad (12)$$

#### The sensitivity model

With regard to the square cavity deformation and considering the boundary radiative properties, the linear application  $\mathcal{L}$  describing sensitivity boundary conditions is here

$$s_{\partial\Omega(\pi)}(\vec{x}_{\mathcal{F}}, \vec{u}) = 0 \quad (13)$$

because  $\mathcal{F}$  is unaffected when changing  $\pi$ , and

$$s_{\partial\Omega(\pi)}(\vec{x}_{\mathcal{R}(\pi)}, \vec{u}, \pi) = -\frac{k_s}{\vec{u} \cdot \vec{n}_{\mathcal{R}}} \int_{4\pi} p(\vec{u}|\vec{u}') d\vec{u}' I(\vec{x}, \vec{u}', \pi) \quad (14)$$

We will discuss the expressions of such sensitivities for incoming directions at geometrically modified boundaries with more generality in Sec. 5 and AppendixA. The main point is that they include the intensity in outgoing directions. Here the reason is the following: when enlarging the cavity (for instance), a new layer of semi-transparent material is introduced and this layer can interact with outgoing radiation and scatter it back into the cavity.

#### *Propagating the sensitivity sources with a standard Monte Carlo approach*

The sensitivity boundary condition is coupled with the outgoing intensity at all points on the geometrically modified boundaries. This means that we have to evaluate this intensity to set the boundary condition. Let us temporarily assume that the intensity is known and therefore that the sensitivity is also known for all incoming directions. We can then consider these incoming sensitivities as sources, as in a standard radiative transfer problem, and think of Monte Carlo algorithms propagating them. Here we want to evaluate  $s$  at a location  $\vec{x}_0$  and direction  $\vec{u}_0$ . We know that  $s$  is solution of the very same RTE as  $I$  and the standard Monte Carlo approach would therefore be to use a reverse algorithm, exactly as for the estimation of  $I(\vec{x}_0, \vec{u}_0, \pi)$ . This means that the algorithms evaluating  $I(\vec{x}_0, \vec{u}_0, \pi)$  and  $s(\vec{x}_0, \vec{u}_0, \pi)$  start with the very same steps, and therefore can share the same sampled paths:

- A multiple scattering paths  $\gamma$  is sampled, starting at  $\vec{x}_0$  in direction  $-\vec{u}_0$ , finding successive scattering locations  $\vec{x}_i$  according to Beer law for pure scattering, scattering directions  $-\vec{u}_i$  according to the single scattering phase function, until reaching one of the two absorbing solids at location  $\vec{x}_\gamma$  in direction  $-\vec{u}_\gamma$ .
- Two Monte Carlo weights are then computed using the same path:
  - one for the intensity problem that is simply the value of the incoming intensity at  $\vec{x}_\gamma$  in direction  $\vec{u}_\gamma$  attenuated by continuous absorption along the path length  $l_\gamma$ , i.e.  $I(\vec{x}_\gamma, \vec{u}_\gamma, \pi) \exp(-k_a l_\gamma)$ ,
  - one for the sensitivity problem constructed the very same way but with the incoming sensitivity, i.e.  $s(\vec{x}_\gamma, \vec{u}_\gamma, \pi) \exp(-k_a l_\gamma)$ .

#### *Coupling the sensitivity Monte Carlo algorithm with an estimate of the outgoing intensity*

Since the sensitivity sources are unknown at this stage, the algorithm described above is incomplete for its sensitivity part: we would need to evaluate the intensity at each location  $\vec{x}_\gamma$  where paths meet boundaries, and in all directions  $\vec{u}'$ . We could embed a full new Monte Carlo computation of  $I$  for such each location  $\vec{x}_\gamma$ , but this is unnecessary due to one fundamental property of Monte-Carlo methods: the double randomization. Since the sensitivity is expressed as an expectation of a linear function of the intensity that is itself expressed as an expectation, both can be nested into one expectation (Dauchet et al., 2018). Hence, the sensitivity can be estimated with no bias using one single Monte Carlo algorithm to estimate the latter, combining sensitivity and intensity. This is the same idea as in reverse multiple scattering or multiple reflection Monte Carlo algorithms. In such very standard algorithms, when a collision location has been sampled, at a surface or in the volume, fully computing the reflection or scattering



sources would require to start a Monte Carlo algorithm with a large number of sampled paths for each unknown intensity in each incoming direction. But instead, only one reflection or scattering direction is sampled and a multiple scattering path is initiated for this direction only. Here the process is less intuitive because it combines sensitivities and intensities, but it is strictly similar:

- a path  $\gamma$  is sampled, as described above, from  $(\vec{x}_0, \vec{u}_0)$  to  $(\vec{x}_\gamma, -\vec{u}_\gamma)$ ;
- the required sensitivity  $s(\vec{x}_\gamma, \vec{u}_\gamma, \pi)$  is defined in Eq. 14 as an integral over directions  $\vec{u}'$  and the algorithm therefore samples  $\vec{u}'$  (just as sampling the phase function in a multiple scattering algorithm);
- a new path  $\gamma'$  is started in direction  $-\vec{u}'$  as if evaluating  $I(\vec{x}_\gamma, \vec{u}', \pi)$  with a reverse Monte Carlo algorithm.

The resulting algorithm is described in Fig. C.16. The sampling of  $\vec{u}'$  is isotropic. If  $\vec{u}'$  is oriented toward the inside of the cavity (scalar product  $\vec{u}' \cdot \vec{n}_{\mathcal{R}(\pi)} > 0$ ), the radiative intensity value is known: it is null since the square surface is neither emitting nor reflecting (box B in Fig. C.16). So the path  $\gamma'$  evaluating intensity is only required when  $\vec{u}'$  is an outgoing direction (dotted path in Fig. 2). Box C in Fig. C.16 displays an example of the only cases where the sensitivity Monte-Carlo weight has a non null value: when  $\gamma$  hits the square,  $\vec{u}'$  is outgoing, and  $\gamma'$  hits the cylinder.

Figure 3 displays the simulation results and illustrate the stability of sensitivities estimated by the model. For comparison, finite differences were calculated from Monte-Carlo estimation of the absorbed radiative power density for different positions of the upper surface. The latter results illustrate the typical difficulties encountered when evaluating the sensitivities from finite differences, that is the difficulty to obtain converged results. In this regard, if  $\delta L$  is chosen too small with respect to  $L$ , the variance of the finite difference estimate becomes too large and the results are inaccurate. On the contrary, if  $\delta L$  is too large, the finite difference converges but toward a value that departs from the true sensitivity. This difficulty is well known when gradients are estimated by differentiation (it is outlined in the gradient-based Kiefer-Wolfowitz method presented in (Daun et al., 2003)). The figure also shows that the local absorption power becomes less sensitive to a variation of  $\frac{\delta L}{L}$  when the size of the cavity increases. Table 1 summarizes the results of the local absorption power and its shape sensitivity for different parameter sets. The closer the probe location gets to the  $\mathcal{R}(\pi)$  boundary the higher the sensitivity. It also shows a practical limit to the evaluation of the sensitivities in the case of high optical thicknesses. Apart from this limit, there are no convergence issues.

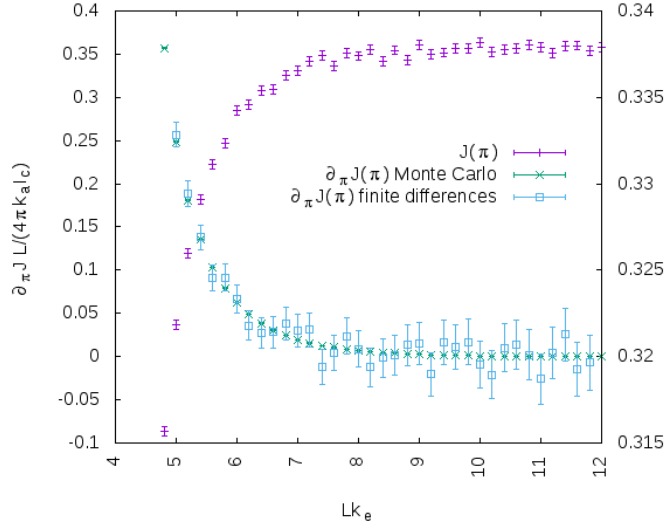


Figure 3: Absorbed radiative intensity density  $J(\pi)$  and its sensitivity  $\partial_\pi J(\pi)$  to the uniform scaling of  $\mathcal{R}(\pi)$  boundary. The phase function in the semi-transparent medium is isotropic  $p_{\vec{u}}(\vec{u}_i) = \frac{1}{4\pi}$  and the probability density function of scattering extinction is  $p_\Sigma(l_i) = k_s \exp(-k_s l_i)$ . Cavity dimensions are set by a variation  $\delta L$  of  $L$  influencing the optical thickness  $k_e L$ . Single scattering albedo is uniform on the cavity  $\frac{k_s}{k_e} = 0.5$ . Estimations of the absorbed radiative intensity density and its sensitivity are obtained from  $2.10^6$  realizations of the corresponding Monte-Carlo weight function.

Table 1: Absorbed radiative intensity density and its sensitivity results for a fixed value of  $L$ . The probability density function for isotropic scattering is  $p_{\vec{u}}(\vec{u}_i) = \frac{1}{4\pi}$  and probability density function of scattering extinction is  $p_\Sigma(l_i) = k_s \exp(-k_s l_i)$ . Location  $\vec{x}_0$  on the  $y$  axis is determined by  $\frac{y_0}{L} = 0.5$  and the ratio between the cylinder radius and  $L$  is set at  $\frac{r}{L} = 0.125$ . The number of realizations of the Monte-Carlo weight functions is  $N = 2 \times 10^6$ ,  $\epsilon(\%)$  represents the relative error of  $\partial_\pi J(\pi)$  and  $J(\pi)$ .

$k_a L$	$k_s L$	$\frac{x_0}{L}$	$\frac{\partial_\pi J(\vec{x}_0, \pi) L}{4\pi k_a I_b \max}$	$\frac{\sigma L}{4\pi k_a I_b \max}$	$\epsilon_{\partial_\pi J}(\%)$	$\frac{J(\vec{x}_0, \pi)}{4\pi k_a I_b \max}$	$\frac{\sigma}{4\pi k_a I_b \max}$	$\epsilon_J(\%)$
1	1	0.6375	1.47e-02	6.221e-05	0.42	3.89e-01	3.297e-04	0.09
1	10	0.6375	1.88e-02	2.299e-04	0.01	5.54e-01	3.037e-04	0.06
1	50	0.6375	4.06e-04	2.765e-05	6.80	6.64e-01	2.665e-04	0.04
1	100	0.6375	1.08e-05	2.31e-06	21.31	6.66e-01	2.602e-04	0.04
1	0.001	0.6375	1.85e-05	6.243e-08	0.34	3.53e-01	3.308e-04	0.09
10	1	0.6375	1.34e-06	1.198e-08	0.89	2.86e-01	2.669e-04	0.09
50	1	0.6375	1.16e-20	3.874e-22	3.33	1.19e-01	1.292e-04	0.01
0.001	1	0.6375	6.50e-02	2.878e-04	0.44	4.23e-01	3.493e-04	0.08
1	1	0.75	2.24e-02	9.048e-05	0.41	1.54e-01	2.199e-04	0.14
1	1	0.875	3.27e-02	1.255e-04	0.38	8.10e-02	1.531e-04	0.19
1	1	0.9875	7.70e-02	3.644e-04	0.47	4.73e-02	1.123e-04	0.24
1	1	$0.9875 = \frac{y_0}{L}$	5.22e-02	3.287e-04	0.63	2.05e-02	6.766e-05	0.33

### Surface and spectral integration

The methodology can be extended to a spectral and surface objective function, for example to simulate the response measured, at the position  $\vec{x}_0$  within the cavity, by a sensor of surface  $S$ , and for a given frequency range. As long as the measure settings are independent of the deformation

parameter, the question of evaluating the sensitivity as presented in Sec.3 and the corresponding methodology (Sec. 4) are not impacted. In terms of Monte-Carlo, evaluating the sensor response sensitivity to a perturbation of the square surface is equivalent to sample a position on the sensor surface, a wavelength within the specific frequency range and a direction within the measured hemisphere prior to sample the sensitivity path (Eq. 15 and Eq. 16).

$$J(\vec{x}_0, \pi) = \int_S dS \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} d\lambda \int_{2\pi} k_a(\lambda) I(\vec{x}_0, \vec{u}_0, \lambda, \pi) d\vec{u}_0 \quad (15)$$

$$\partial_\pi J(\vec{x}_0, \pi) = \int_S dS \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} d\lambda \int_{2\pi} k_a(\lambda) s(\vec{x}_0, \vec{u}_0, \lambda, \pi) d\vec{u}_0 \quad (16)$$

The typical integrated radiative objective functions do not introduce additional difficulties regarding the sensitivity. Figure 4 displays the corresponding simulation results.

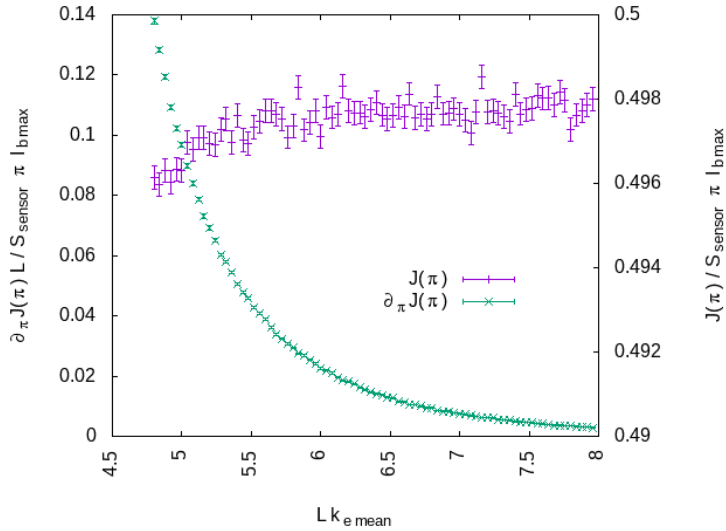


Figure 4: Sensor's response  $J(\pi)$  and its sensitivity  $\partial_\pi J(\pi)$  (Eq. 15 and Eq. 16) to a uniform scaling of  $\mathcal{R}(\pi)$ . By comparison with previous simulation examples, the intensity is here integrated over the sensor's surface and its response frequency range. The sensitivity results show that the additional integration process has no influence on the sensitivity estimation. The sensor of square surface  $S_{sensor}$  is located at location  $\vec{x}_0$  (Figure 2) and oriented toward the  $-\vec{e}_x$  direction. The geometrical change of the cavity is the same as in Figure 3. The wavelength range is  $[\frac{\lambda_{max}}{2}; 2\lambda_{max}]$  where  $\lambda_{max}(T)$  is the wavelength of the Planck function maximum at the cylinder temperature  $T = 1000K$ . The dependencies with wavelength of the absorption and scattering coefficients are  $k_a(\lambda) = k_s(\lambda) = (1/\lambda_{max})\lambda$ .

## 5. The different types of sensitivity sources

In this section we focus on the sensitivity sources. So far we have seen that beside the coupling at the boundary condition, the sensitivity model can be estimated in the domain exactly like the intensity model, using standard Monte Carlo approaches to radiative transfer. The following examples will all make use of most simple forward Monte Carlo algorithms. More attention will be devoted to the boundary condition definitions, in particular to the Dirac sources due to boundary discontinuities and to sources associated to curved surfaces.

We will see that depending on the configurations, the sensitivity sources can take diverse forms, namely that the linear application expressing the boundary conditions can be composed of distinct linear operators. In Appendix A, formal developments are provided and reported here by Eq. 17 for a translation colinear to the normal vector :

$$s(\vec{x}_{\partial\Omega(\pi)}, \vec{u}, \pi) = -\partial_y I(\vec{x}_{\partial\Omega(\pi)}, \vec{u}, \pi) v + \partial_\pi I_p(x, z, \vec{u}, \pi) \quad (17)$$

This formulation establishes a relation between the shape derivative  $s(\vec{x}_{\partial\Omega(\pi)}, \vec{u}, \pi)$  and the material derivative  $\partial_\pi I_p(x, z, \vec{u}, \pi)$  in this particular transformation (Sokolowski and Zolésio, 1992). Using this relation for black-body radiative boundary conditions, we identify two types of contributions to the sensitivity in incoming directions:

$$s(\vec{x}_{\partial\Omega(\pi)}, \vec{u}, \pi) = -\frac{\vec{u} \cdot \vec{\nabla}(I(\vec{x}_{\partial\Omega(\pi)}, \vec{u}, \pi))}{\vec{u} \cdot \vec{n}} v + \frac{\vec{u} \cdot \vec{\nabla}_T I(\vec{x}_{\partial\Omega(\pi)}, \vec{u}, \pi)}{\vec{u} \cdot \vec{n}} v \quad \text{with } \vec{u} \cdot \vec{n} > 0 \quad (18)$$

The first contribution type (first term in Eq. 18) corresponds to the effect of medium diffusion and medium absorption in the infinitesimal layer along the surface added or suppressed after the surface deformation (cf figure 5a). If a surface is shifted toward the outside, its displacement creates a new layer in its vicinity (the interior volume is increased). The intensity exiting the surface in direction  $\vec{u}$  will be attenuated by this layer (absorption and scattering) and furthermore the intensity incoming on this new layer will have a probability to be scattered in direction  $\vec{u}$ . When translated into sensitivities, these decreases and increases of the incoming intensity at the boundary lead to exactly the same terms as the collision terms in the radiative transfer equation ( $-(k_a + k_s)I(\vec{x}, \vec{u}, \pi) + k_s \int_{4\pi} p(\vec{u}'|\vec{u}) d\vec{u}' I(\vec{x}, \vec{u}', \pi)$ ), which allows to summarize them using the transport operator, which explains the term  $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} I$  in Eq. 18 (transport equals collision in the stationary RTE). In **configuration 1**, only this first contribution term was encountered. The second

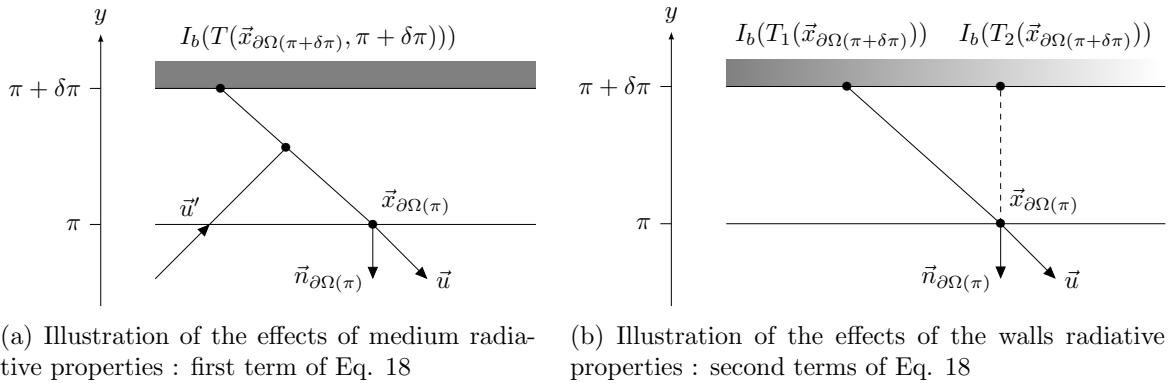


Figure 5: The two different effects of an infinitesimal modification of the boundary on the incoming intensity at position  $\vec{x}_{\partial\Omega(\pi)}$  and direction  $\vec{u}$ .

term of Eq. 18 corresponds to the effects of non homogeneous radiation in incoming directions at a geometrically modified boundary. We use the notation  $\vec{\nabla}_T I$  for the surface gradient, also called tangent gradient, of the incoming intensity at the boundary. Figure 5b illustrates this effect on the intensity at location  $\vec{x}_{\partial\Omega(\pi)}$  in direction  $\vec{u}$ . Let us assume that the medium is transparent: before the deformation, the intensity in direction  $\vec{u}$  was exactly the intensity emitted or reflected

by the surface at that point. After deformation, this intensity comes from another location on the surface which explains the tangential gradient in Eq. 18. This tangential gradient plays a very specific role when dealing with surface discontinuities, for instance when two adjacent surfaces have different temperatures (Fig. 6a), or different reflection properties, or even when they have the same reflection properties but their normals are not the same. In all three cases, the intensity in any incoming direction is discontinuous when modified along the surface and the corresponding Heaviside function leads to a Dirac when applying the tangential gradient. This creates sources that are not continuously distributed along the surface but concentrated on the discontinuity lines: we then have to deal with Dirac sources of sensitivity.

The same idea of a discontinuity of intensities at modified boundaries allows to think the sensitivity sources associated to shading effects. This is illustrated in Fig. 6b with a curved surface: at point  $p$  some directions are blocked by the surface and if the point is displaced along the  $y$  axes, it will block new directions and consequently become a local source of sensitivity. The same shading effect occurs with adjacent plane surfaces with different normal orientations as soon as the discontinuity  $p$  is geometrically modified (see 6c).

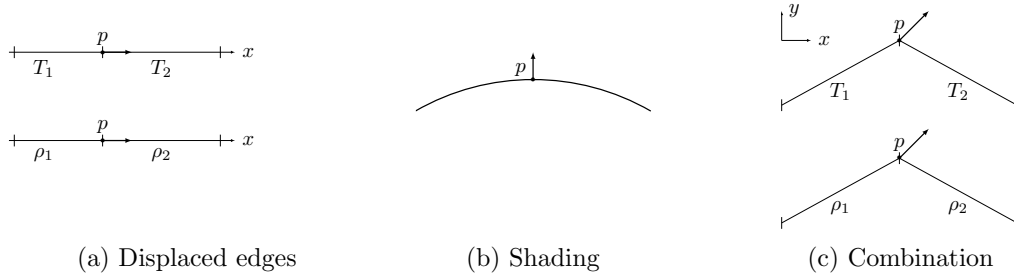


Figure 6: The two types of discontinuities generating sources of sensitivity. The image 6a represent the discontinuity induced by the edges connecting two plane surface. The image 6b represent the discontinuity induced by the shading. Finally the image 6c represent the combination of both types of discontinuities according to the radiative intensity direction.

For **configuration 2**, we handle formally this specific family of sensitivity sources, starting from Eq. 18 and we give rigorous definitions of Dirac sources of sensitivity. For further cases, the formal statement of those sensitivity sources at discontinuities is still a work in progress. We do not address them yet using the general sensitivity boundary condition stated in Eq. 18 but they are estimated on an ad hoc basis by analyzing geometrically the differential implications of surfaces deformations. This is the case for the curved and reflective surface examples of **configuration 3** and **configuration 4** (see AppendixB).

In the following of this section, **configuration 2** gives an example of an edge boundary discontinuity treated from the general sensitivity boundary condition statement (eq. 18) in an academic case: the same square cavity as in part 4 but with a different deformation. In **configuration 3**, the intensity edge discontinuity is extended on a thermal solar configuration with reflective surfaces. It is showed that this particular type of sensitivity sources can have a heavy impact on the algorithm when considering complex geometry. We recognize here similar difficulties as reported in another work about shape sensitivities (Li et al., 2018) where optimizing the algorithm process demanded great efforts in the case of image synthesis transparent medium configurations. The boundary condition statement of **configuration 3** has been done on an ad hoc basis in AppendixB. Finally **configuration 4** gives an example of a shading discontinuity in the case of curved surface.

### 5.1. Configuration 2

Let us consider another square cavity which dimensions are set along the  $x$  and  $y$  axes and are infinite along the  $z$  axis. The medium inside the square, in the domain  $\Omega$ , is semi-transparent. The four walls of the square cavities are black-bodies and only the upper wall is emitting ( $\mathcal{R}_{up}$ ) :

$$\begin{cases} I(\vec{x}_{\mathcal{F}}, \vec{u}, \pi) = 0 & \text{for } \vec{x}_{\mathcal{F}} = (x, 0, z) \\ I(\vec{x}_{\mathcal{R}_l}, \vec{u}, \pi) = 0 & \text{for } \vec{x}_{\mathcal{R}_l} = (0, y, z) \\ I(\vec{x}_{\mathcal{R}_r}, \vec{u}, \pi) = 0 & \text{for } \vec{x}_{\mathcal{R}_r} = (L, y, z) \\ I(\vec{x}_{\mathcal{R}_{up}}, \vec{u}, \pi) = I_b(T) & \text{for } \vec{x}_{\mathcal{R}_{up}} = (x, L, z) \end{cases} \quad (19)$$

The geometrical parameter  $\pi$  induces an extension of the height of the square cavity by a displacement of the upper-wall in a direction colinear to the upward normal vector  $\vec{n}_{\mathcal{R}_{up}}$  (Figure 7). The objective function is the radiative flux crossing the bottom-wall ( $\mathcal{F}$ ) and we want to estimate its sensitivity to  $\pi$ .

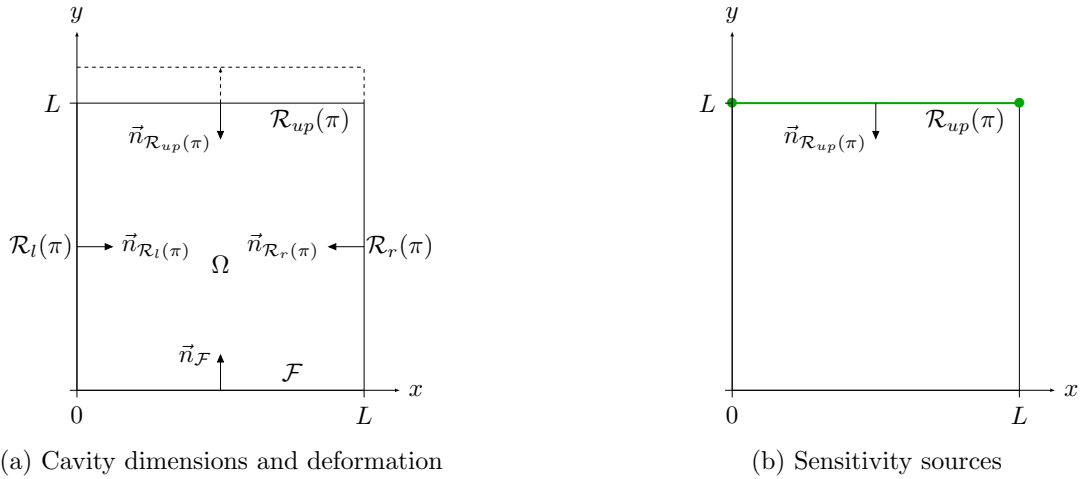


Figure 7: **Configuration 2**

The sensitivity source is only at the modified boundary, i.e. along the upper wall. It has four contributions associated to:

- extinction of radiation by the medium in the vicinity of the modified boundary,
- scattering sources in the same vicinity,
- temperature discontinuity at the left side of the modified boundary,
- temperature discontinuity at the right side of the modified boundary.

The last two contributions are Dirac sources (involving a Dirac distribution at 0 and  $L$ ):

$$\begin{aligned}
s_{\partial\Omega(\pi)}(\vec{x}_{\mathcal{R}(\pi)}, \vec{u}, \pi) &= -\frac{k_a + k_s}{\vec{u} \cdot \vec{n}_{\mathcal{R}_{up}}} I_b(T) \\
&+ \frac{k_s}{\vec{u} \cdot \vec{n}_{\mathcal{R}_{up}}} \int_{4\pi} p(\vec{u}|\vec{u}') d\vec{u}' I(\vec{x}, \vec{u}', \pi) \\
&+ I_b(\vec{x}, \vec{u}, \pi, T) \frac{\vec{u} \cdot \vec{e}_x}{\vec{u} \cdot \vec{n}_{\mathcal{R}_{up}}} \delta(x - 0) \mathcal{H}(L - x) \mathcal{H}(\vec{u} \cdot \vec{e}_x) \\
&- I_b(\vec{x}, \vec{u}, \pi, T) \frac{\vec{u} \cdot \vec{e}_x}{\vec{u} \cdot \vec{n}_{\mathcal{R}_{up}}} \delta(x - L) \mathcal{H}(x - 0) \mathcal{H}(-\vec{u} \cdot \vec{e}_x)
\end{aligned} \tag{20}$$

The second contribution was already discussed in **Configuration 1**. The first contribution did not appear because the square surface was neither emitting nor reflecting (no incoming radiation). Here it appears because the geometrically modified boundary is a black-body at temperature  $T$ . Both the first and second contributions are distributed all along the upper wall. The other two contributions are at the singular infinite corner lines (dots in Figure 7b). Because of the Heaviside terms  $\mathcal{H}(\vec{u} \cdot \vec{e}_x)$  and  $\mathcal{H}(-\vec{u} \cdot \vec{e}_x)$ , for a given direction  $\vec{u}$ , only one of the two is active: that corresponding to the corner from which  $\vec{u}$  is a valid incoming direction. They correspond to the fact that from a given location inside the domain, when considering radiation coming from the corner exactly, increasing  $\pi$  (i.e. raising the top surface) implies that the non-emitting lateral face is viewed, whereas lowering it implies that the emitting top surface is viewed. The Dirac sources of sensitivity translate this discontinuity in distribution terms.

We implemented a very standard forward Monte Carlo algorithm in which these sources are propagated from the upper-wall into the domain along multiple-scattering paths, attenuated exponentially with respect to the absorption optical thickness of the path. Only the paths reaching the bottom-wall contribute to the sensitivity estimate. Figure 8 displays the results for both the bottom-wall radiative flux as function of the top surface height. In the same graph the sensitivity to the height is plotted twice: as estimated using the present sensitivity Monte Carlo algorithm and evaluated from finite differences. Using the sensitivity model convergence is less than 1% for  $10^6$  sampled paths, in contrast with the finite difference estimates that are much less accurate as explained in section 4.

### 5.2. Configuration 3

In this configuration shape sensitivities are implemented for a concentrating solar tower application (Farges, 2014). The configuration is illustrated on fig. 9. The mirrors are specular reflecting flat squares and the surrounding medium is transparent. The intensity boundary conditions for all incoming directions are stated on each of the following geometrical objects: the sun  $\mathcal{S}$ , the tower  $\mathcal{T}$ , the thermal receiver  $\mathcal{R}$  and the heliostats  $\mathcal{H}$ :

$$\begin{cases}
I(\vec{x}_{\mathcal{S}}, \vec{u}, \pi) = I_s \\
I(\vec{x}_{\mathcal{T}}, \vec{u}, \pi) = 0 \\
I(\vec{x}_{\mathcal{R}}, \vec{u}, \pi) = 0 \\
I(\vec{x}_{\mathcal{H}}, \vec{u}, \pi) = \rho I(\vec{x}_{\mathcal{H}}, \vec{u}_{spec}, \pi)
\end{cases} \tag{21}$$

The incoming intensities are null at all the other limits (sky and ground). The simulation objective is to evaluate the radiative flux at the receiver and understand the impact of the heliostat field

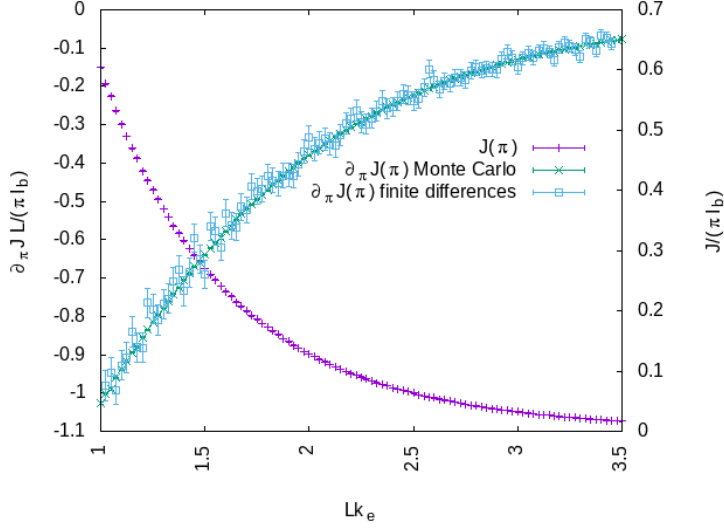


Figure 8: Radiative flux on the bottom-wall  $J(\pi)$  and its sensitivity  $\partial_\pi J(\pi)$  to the height of the up-wall. The phase function in the semi-transparent medium is isotropic  $p_{\vec{U}}(\vec{u}_i) = \frac{1}{4\pi}$  and the probability density function of scattering extinction is  $p_\Sigma(l_i) = k_s \exp(-k_s l_i)$ . Cavity dimensions are set by a variation  $\delta L$  of  $L$  influencing the optical thickness  $k_e L$ . Single scattering albedo is uniform on the cavity  $\frac{k_s}{k_e} = 0.5$ . Estimations of the radiative flux and its sensitivity are obtained for  $1.10^6$  realizations  $N$  of the corresponding Monte-Carlo weight function.

design in terms of the following three optical phenomena: an optical path from a point in the solar disk to a point on one of the heliostats may

- be shaded by a surface located between the sun and the heliostat (the shading phenomenon);
- be blocked by a surface located between the reflection location and the receiver (the blocking phenomenon);
- miss the receiver due to optical errors during the reflection (the spillage phenomenon).

We here study the influence of the variation of the heliostat size (which is modified according to the parameter  $\pi$ , Figure 10). The enlargement of a mirror symbolized in fig. D.17 by the arrow  $\mathcal{D}$ , can lead to

- an increase of the thermal power collected due to the increase in reflective area fig. D.17a
- a decrease of the thermal power collected due to the appearance of a shading phenomenon fig. D.17b
- a decrease of the thermal power collected due to the appearance of a blocking phenomenon fig. D.17c

As they are the only deformed surfaces, in terms of sensitivity modeling the heliostats mirrors are the only sensitivity sources. On each heliostat the incoming sensitivity has five contributions:

- one associated to the reflection of sensitivity sources coming from other heliostats;
- four associated to the extension of each of the heliostat edges.



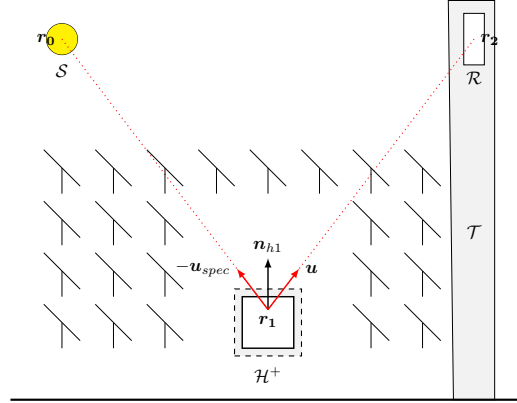


Figure 9: Schema of the concentrating solar tower and of the heliostat field with an illustration of the heliostat size deformation. The sun surface is named  $S$ , the tower  $\tau$ , the heliostats surface  $\mathcal{H}$  and the receiver surface  $\mathcal{R}$ .

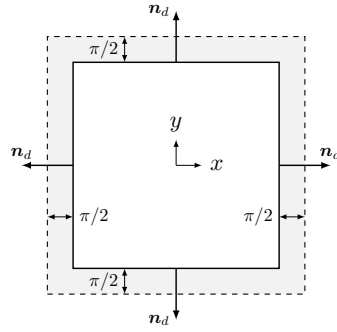


Figure 10: Deformation of an heliostat mirror with respect to the parameter  $\pi$ . The parameter influences the size of the mirror area surface.

Using a Cartesian coordinate system  $(O, x, y)$  centered on the heliostat and aligned with edges,

$$\begin{aligned}
s_{\partial\Omega(\pi)}(\vec{x}_{\mathcal{H}(\pi)}, \vec{u}, \pi) = & \quad (22) \\
& \rho s(\vec{x}, \vec{u}_{spec}, \pi) \mathcal{H}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \mathcal{H}\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \mathcal{H}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \mathcal{H}\left(\frac{\pi}{2} + y\right) \\
& + \frac{(\rho I(\vec{x}, \vec{u}_{spec}, \pi) - I(\vec{x}, \vec{u}, \pi))}{2} \delta\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \mathcal{H}\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \mathcal{H}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \mathcal{H}\left(\frac{\pi}{2} + y\right) \\
& + \frac{(\rho I(\vec{x}, \vec{u}_{spec}, \pi) - I(\vec{x}, \vec{u}, \pi))}{2} \delta\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \mathcal{H}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \mathcal{H}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \mathcal{H}\left(\frac{\pi}{2} + y\right) \\
& + \frac{(\rho I(\vec{x}, \vec{u}_{spec}, \pi) - I(\vec{x}, \vec{u}, \pi))}{2} \delta\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \mathcal{H}\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \mathcal{H}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \mathcal{H}\left(\frac{\pi}{2} + y\right) \\
& + \frac{(\rho I(\vec{x}, \vec{u}_{spec}, \pi) - I(\vec{x}, \vec{u}, \pi))}{2} \delta\left(\frac{\pi}{2} + y\right) \mathcal{H}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \mathcal{H}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \mathcal{H}\left(\frac{\pi}{2} - y\right)
\end{aligned}$$

The first contribution was not encountered in **configuration 1** and **configuration 2** because none of the surfaces were reflecting. Here for the sensitivity model, the reflecting heliostats simply reflect the impacting sensitivities exactly as they reflect intensity in the initial radiative transfer

model. It is not always the case. When the geometric parameter creates a translation of the reflective boundary, other terms appear (not shown). See, for instance, the generalization of reflective sensitivity boundary conditions that have been done in (Rukolaine, 2015) for deterministic method. The four other terms are very similar to the Dirac sources of **configuration 2**: they translate in sensitivity terms the intensity discontinuity at the limit of modified boundary.

As far as the sensitivity Monte Carlo implementation is concerned, we used a forward approach, which was not the case for the initial radiative transfer algorithm. Indeed, when evaluating the flux collected by the receiver, standard concentrated solar algorithm do not start at the sun: the first step is the sampling of a location on the heliostat surfaces and only then a location on the solar disk is sampled to represent the solar radiative sources in a backward Monte Carlo approach. Here for the sensitivity, we stick to a direct sampling of the sensitivity sources themselves, without any intermediate statistical step. This means that we start by sampling a location along all the edges of all the heliostats. The sensitivity sources are indeed only at the edges: the first contribution in (22), spread over all the heliostat surface, is only a reflection of sensitivities emitted elsewhere (at the edge of an heliostat) and propagated to the mirror surface. Therefore in a forward Monte Carlo algorithm for sensitivities, paths will be started at the edges and reflection will simply occur when a path encounters a mirror. The only subtle point is that the sources at each edge location involve the knowledge of two intensities: one in the direction  $\vec{u}_{spec}$  before reflection, one in the considered direction  $\vec{u}$  corresponding to radiation propagating at the edge location without impacting it, therefore coming from another heliostat. These two intensities are not known and double randomization is used (as already illustrated in Sec. 4 and Sec. 5.1), meaning that two radiative paths are initiated at the sampled edge location. Apart from this double randomization technique, that will be required for all sensitivity algorithms involving either reflection or scattering, the sensitivity algorithm is fully standard, the sources being propagated along straight lines, reflected by the heliostats, until they reach the receiver or are stopped by an absorbing surface.

Figure 11 displays simulation results for an heliostat field including 250 heliostat set up with a radial staggered layout (Siala and Elayeb, 2001). The thermal power sensitivities are estimated for an heliostat size range between 0.8 m to 1.2 m with a step of 0.02 m. The results presented in the Figure 11 start at the value of 0.8 m. Indeed when there is no overlap of the heliostats (blocking, shading) the collected power is proportional to the size of the heliostats. This results in a constant sensitivity of the collected power to the size of the heliostats. In this figure we therefore only present the sizes of heliostat mirrors which induce overlap.

The results have been cross validated with finite differences and show an exact match. The standard error is significantly smaller (0.03% for  $10^6$  samples) than that of the finite difference estimate, as explained in Section 4. Once the double randomization scheme was clarified, there were no particular difficulties associated to the implementation itself and no specific convergence issues were identified.

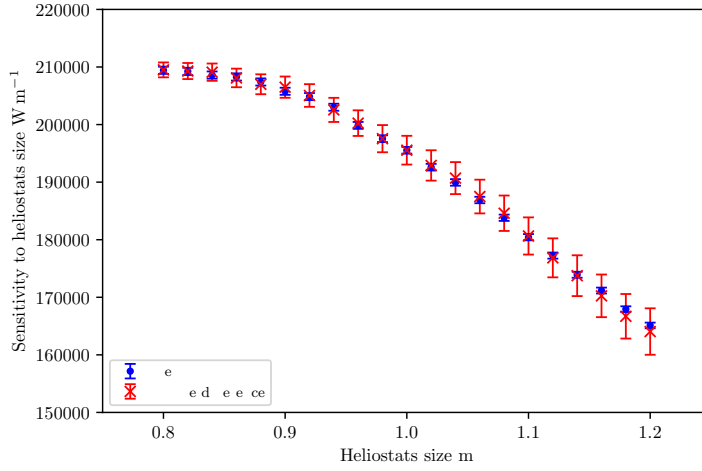
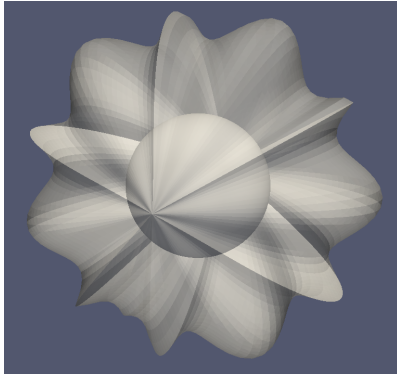


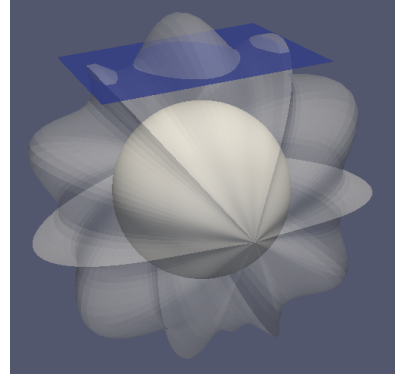
Figure 11: Thermal power sensitivity to the size of the mirrors of an heliostat field. The medium is transparent and the deformation the width of the mirrors increases by  $\pi$ . The size is represented by the width of the square heliostat mirrors.

### 5.3. Configuration 4

In this configuration we consider a sphere, described in parametric terms, inside a supershape geometry, described as a large ensemble of triangles. The sphere is stated as an isothermal emitting black-body at temperature  $T$  and the boundary of the supershape is also a black-body but not emitting. The medium between the supershape and the sphere is semi-transparent and non emitting.



(a) Sphere inside the supershape



(b) Slice on the supershape

Figure 12: Complex geometry academic configuration representing an emitting sphere inside a supershape (Figure 12a) and the receptive part of the supershape surface (12b)

The objective function is the radiative power received by a part of the supershape boundary: that is all the supershape surface above the slice in the Figure 12b. The goal is to estimate its sensitivity to the sphere radius. The intensity model is stated from the RTE with Lambertian

boundary condition at the sphere surface :

$$\begin{cases} I(\vec{x}_{\mathcal{S}Sphere}, \vec{u}, \pi) = I_b(T) & \text{with } \vec{u} \cdot \vec{n}_{\mathcal{S}Sphere} > 0 \\ I(\vec{x}_{\mathcal{S}Shape}, \vec{u}, \pi) = 0 & \text{with } \vec{u} \cdot \vec{n}_{\mathcal{S}Shape} > 0 \end{cases} \quad (23)$$

with all the normal vectors oriented toward the medium. The radiative power emitted by the sphere surface is  $4\pi r^2 \sigma T^4$ . This quantity is attenuated during its transport in the semi-transparent medium. Since only the sphere radius  $r$  is influenced by the geometrical parameter  $\pi$  only the sphere surface will be emitting sensitivity. The sensitivity source has three distinct contributions associated to:

- extinction of radiation by the medium in the vicinity of the sphere,
- scattering sources in the same vicinity,
- shadowing of tangent radiation.

Using standard notations of polar and azimuthal angles,  $\theta$  and  $\phi$  for incoming directions,  $\theta'$  and  $\phi'$  for outgoing directions,

$$\begin{aligned} s_{\partial\Omega(\pi)}(\vec{x}_{\mathcal{R}(\pi)}, \theta, \phi, \pi) &= -\frac{k_a + k_s}{\cos(\theta)} I_b(T) \\ &+ \frac{k_s}{\cos(\theta)} \int_{2\pi} d\phi' \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta' p(\theta, \phi | \theta', \phi') I(\vec{x}, \theta', \phi', \pi) \\ &+ \frac{1}{r} \left( \frac{\sigma T^4}{\pi} - I(\vec{x}, \theta, \phi, \pi) \right) \frac{\delta(\theta - \frac{\pi}{2})}{\cos(\theta) \sin(\theta)} \end{aligned} \quad (24)$$

The three contributions are distributed all over the surface and the distinction between them is essentially angular. The first two terms of Eq. 24 corresponds to the effect of medium diffusion and absorption in the additional infinitesimal volume. The third one only exist in the tangent directions (see the term in  $\delta(\theta - \frac{\pi}{2})$  in Eq. 24) and come from the intensity discontinuity between the boundary emission and the volume out-coming intensity at the same point, in that direction.

We implemented a very standard forward Monte Carlo algorithm in which these contributions are propagated throughout the medium according to a multiple scattering algorithm, with continuous extinction by absorption along the path, until reaching on of the absorbing boundaries. The path only contributes to the sensitivity if it ends at the surface of interest (the surface above the slice in Figure 12b). Figure 13 displays the results of the Monte Carlo estimates validated against the finite difference estimates. We encountered no algorithmic difficulty and there was no convergence issue. A perspective for curved parametric surfaces is the formal identification of the boundary condition by the methodology presented in AppendixA, which we could not yet achieved (Eq. 24 was only constructed in an ad-hoc manner. This would open the way to a similar handling of any smooth surface.

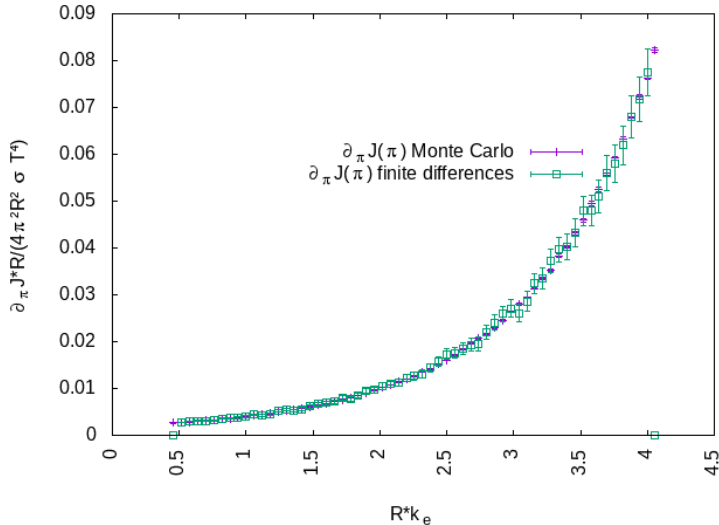


Figure 13: Radiative flux received by a part of the supershape surface (Figure 12b)  $J(\pi)$  and its sensitivity  $\partial_\pi J(\pi)$  to the sphere radius. The phase function in the semi-transparent medium is isotropic  $p_{\vec{J}}(\vec{u}_i) = \frac{1}{4\pi}$  and the probability density function of scattering extinction is  $p_\Sigma(l_i) = k_s \exp(-k_s l_i)$ . Cavity dimensions are set by a variation  $\delta r$  of  $r$ . Single scattering albedo is uniform on the supershape  $\frac{k_s}{k_e} = 0.5$ . Estimations of the received radiative flux and its sensitivity are obtained for  $1.10^6$  realizations  $N$  of the corresponding Monte-Carlo weight function.

## 6. CONCLUSION

As Monte Carlo starts from expressing the objective function as an integral (an expectation), the first approaches to the evaluation of sensitivities inside a Monte Carlo algorithm consisted in taking the derivative of this integral. This lead to a solution that although rigorously justified in full general terms (the deformation velocity method), encounters implementation difficulties when dealing with geometrical sensitivities. Here we presented an alternative approach to geometrical sensitivity estimation. It is shown to allow the handling of geometrical sensitivity problems that were technically assumed unsolvable with the deformation velocity method. The last implementation examples deal in particular with both a discretized complex geometry and curved parametric surface. However, this development comes with an algorithmic cost. While the deformation velocity method made it possible to compute the objective function and its sensitivity at the same time, using exactly the same sampled paths, the sensitivity model method leads to a different and more complex algorithm for the objective function sensitivity than for the objective function itself. Since both sensitivity and intensity share the same transport model, the objective function and its sensitivity are addressed simultaneously in the first part of the algorithm, until a geometrically modified boundary is encountered. But then an additional simulation time is required to deal with the coupling with intensity in the sensitivity boundary condition.

So far, there are still several restrictions due to formal developments that are still ongoing. We addressed only one example of parametric curved sensitivities (the sphere of increasing radius) and our only example involving reflection maintains the modified boundary in its origin plane (only its extension is changed). We also did not yet encounter the convergence difficulties associated with the Dirac sources at surface discontinuities such as those reported in (Li et al., 2018) for image synthesis applications (in complex geometries without participating media). But they are likely

to occur and it will certainly be very useful to make use of the importance sampling solutions implemented in this reference to bypass such convergence issues. Up to know, considering the restricted class of the configuration that we explored, the sensitivity simulations displayed no specific convergence difficulties.

As a perspective, we consider the extension of the sensitivity model to coupled heat transfer models (conduction, convection and radiative transfers). For the moment, we have been working within the specific framework of the radiative transfer equation. Our proposition of the sensitivity model will be examined in the context of the Monte-Carlo method used to treat heat coupled transfer. At this embryonic stage of the work, the difficulty is to estimate boundary conditions gradients.

This project has received funding from the Occitanie region and University of Perpignan Via Domitia, from the programme investments for the future of the French National Agency for Research (ANR) under award number "ANR-10-LBX-22-01-SOLSTICE". We acknowledge support from the ANR, grant HIGH-TUNE ANR-16-CE01-0010, (<http://www.umr-cnrm.fr/high-tune>) and ANR, grant MGC-RAD) and from Region Occitanie (Projet CLE-2016 ED- Star).

### Appendix A. Sensitivity boundary condition statement for a black-body surface

In this appendix we state the sensitivity boundary condition in the case of a black-body plane surface  $\mathcal{R}(\pi)$ . The Figure A.14 represent the segment  $[0, L]$  of a surface  $\mathcal{R}(\pi)$  and we want to find the sensitivity boundary conditions on that part of the surface.

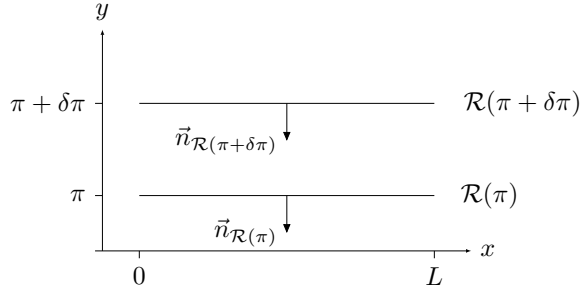


Figure A.14: Perturbation of the plane surface  $\mathcal{R}(\pi)$

The boundary  $\mathcal{R}(\pi)$  and the radiative intensity at this boundary are stated such as:

$$\begin{cases} \mathcal{R}(\pi) & \equiv x \in [0, L], y = \pi, z \in ]-\infty, +\infty[ \\ \mathcal{R}(\pi) & : I(x, y, z, \vec{u}, \vec{n} > 0, \pi) = I_b(T) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

The intensity at any point inside the domain is a function of five independent variables:

$$I \equiv I(x, y, z, \vec{u}, \pi) \quad (\text{A.2})$$

and its shape derivative:

$$s \equiv s(x, y, z, \vec{u}, \pi) = \partial_\pi I(x, y, z, \vec{u}, \pi) \quad (\text{A.3})$$

We state  $I_p \equiv I_p(x, z, \vec{u}, \pi)$ , the radiative intensity at the boundary  $\mathcal{R}(\pi)$ , in the incoming direc-

tion  $\vec{u} \cdot \vec{n}_{\mathcal{R}(\pi)} > 0$ , such as:

$$I_p(x, z, \vec{u}, \pi) = I(x, f(\pi), z, \vec{u}, \pi) \quad (\text{A.4})$$

$$f(\pi) = y_{ref} + v\pi \quad (\text{A.5})$$

With  $v$  the deformation velocity vector. We are interested on the shape derivative of the intensity at the boundary, that is the derivative of  $I_p$  with respect to the geometrical parameter  $\pi$  :

$$\begin{aligned} \partial_\pi I_p(x, z, \vec{u}, \pi) &= \partial_y I(x, f(\pi), z, \vec{u}, \pi) \partial_\pi f(\pi) \\ &\quad + s(x, f(\pi), z, \vec{u}, \pi) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\partial_\pi I_p(x, z, \vec{u}, \pi) = \partial_y I(x, f(\pi), z, \vec{u}, \pi) v + s(x, f(\pi), z, \vec{u}, \pi) \quad (\text{A.7})$$

$$s(x, f(\pi), z, \vec{u}, \pi) = -\partial_y I(x, f(\pi), z, \vec{u}, \pi) v + \partial_\pi I_p(x, z, \vec{u}, \pi) \quad (\text{A.8})$$

In the case of black-bodies walls the radiative intensity at the boundary, in the incoming direction, is equivalent to Planck's distribution for every  $\pi$  of  $\mathcal{R}(\pi)$ . So the intensity at the boundary  $I_p$  is insensitive to a variation of the shape parameter  $\pi$  and its derivative is null:

$$\partial_y I(x, f(\pi), z, \vec{u}, \pi) \vec{v} + \partial_\pi I(x, f(\pi), z, \vec{u}, \pi) = 0 \quad (\text{A.9})$$

$$\Rightarrow s(x, f(\pi), z, \vec{u}, \pi) = -\partial_y I(x, f(\pi), z, \vec{u}, \pi) v \quad (\text{A.10})$$

Furthermore we can write:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \partial_y I(x, \pi, z, \vec{u}, \pi) &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{\nabla}(I(x, \pi, z, \vec{u}, \pi))}{\vec{u} \cdot \vec{e}_y} v \\ &\quad - \frac{\vec{u} \cdot \vec{e}_x}{\vec{u} \cdot \vec{e}_y} \partial_x I(x, \pi, z, \vec{u}, \pi) v \\ &\quad - \frac{\vec{u} \cdot \vec{e}_z}{\vec{u} \cdot \vec{e}_y} \partial_z I(x, \pi, z, \vec{u}, \pi) v \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

And deduced the shape boundary condition:

$$\begin{aligned} \Rightarrow s(\vec{x}, \vec{u}, \pi) &= -\frac{\vec{u} \cdot \vec{\nabla}(I(x, \pi, z, \vec{u}, \pi))}{\vec{u} \cdot \vec{e}_y} v \\ &\quad + \frac{\vec{u} \cdot \vec{e}_x}{\vec{u} \cdot \vec{e}_y} \partial_x I(x, \pi, z, \vec{u}, \pi) v \\ &\quad + \frac{\vec{u} \cdot \vec{e}_z}{\vec{u} \cdot \vec{e}_y} \partial_z I(x, \pi, z, \vec{u}, \pi) v \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow s(\vec{x}, \vec{u}, \pi) &= -\frac{\vec{u} \cdot \vec{\nabla}(I(x, \pi, z, \vec{u}, \pi))}{\vec{u} \cdot \vec{e}_y} v \\ &\quad + \frac{\vec{u} \cdot \vec{\nabla}_T I(x, \pi, z, \vec{u}, \pi)}{\vec{u} \cdot \vec{e}_y} v \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

*Example*

Here a short illustration is given of the radiative boundary condition stated from the example 5.1 The radiative boundary condition is written for  $\vec{u} \cdot \vec{n} > 0$ :

$$I(\vec{x}_{\mathcal{R}(\pi)}, \vec{u}, \pi) = I_b(T) \mathcal{H}(x - 0) \mathcal{H}(L - x) \quad (\text{A.14})$$

If we input this statement on the tangent gradient terms of Eq. A.12 we will have to estimate the derivatives of Eq. A.14 with respect to the  $x$  and  $z$  coordinates. Since the boundary condition does not depend on  $z$  variable only one derivative has to be estimated:

$$\begin{aligned} \partial_x I(\vec{x}_{\mathcal{R}(\pi)}, \vec{u}, \pi) &= I_b(T) \delta(x - 0) \mathcal{H}(L - x) \\ &\quad - I_b(T) \mathcal{H}(x - 0) \delta(L - x) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

From Eq. A.15 and Eq. A.12 we can write the general sensitivity boundary condition:

$$\begin{aligned} s_{\partial\Omega(\pi)}(\vec{x}_{\mathcal{R}(\pi)}, \vec{u}, \pi) &= -\frac{k_a + k_s}{\vec{u} \cdot \vec{n}_{\mathcal{R}_{up}}} I_b(T) \\ &\quad + \frac{k_s}{\vec{u} \cdot \vec{n}_{\mathcal{R}_{up}}} \int_{4\pi} p(\vec{u}|\vec{u}') d\vec{u}' I(\vec{x}, \vec{u}', \pi) \\ &\quad + I_b(\vec{x}, \vec{u}, \pi, T) \frac{\vec{u} \cdot \vec{e}_x}{\vec{u} \cdot \vec{n}_{\mathcal{R}_{up}}} \delta(x - 0) \mathcal{H}(L - x) \mathcal{H}(\vec{u} \cdot \vec{e}_x) \\ &\quad - I_b(\vec{x}, \vec{u}, \pi, T) \frac{\vec{u} \cdot \vec{e}_x}{\vec{u} \cdot \vec{n}_{\mathcal{R}_{up}}} \delta(x - L) \mathcal{H}(x - 0) \mathcal{H}(-\vec{u} \cdot \vec{e}_x) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$



## Appendix B. Treating the discontinuities from an ad hoc basis

This appendix is meant only for the identification of discontinuities sensitivity sources, related to the boundary intensity function  $I_p$ . In this appendix those sources are treated separately from the previous boundary conditions statement (Eq. A.12). and in a second part on the sphere configuration.

*Heliostat mirror : reflective plane surface*

We consider one heliostat surface. The figure B.15 represent a slice of this surface on the  $y$  axes.

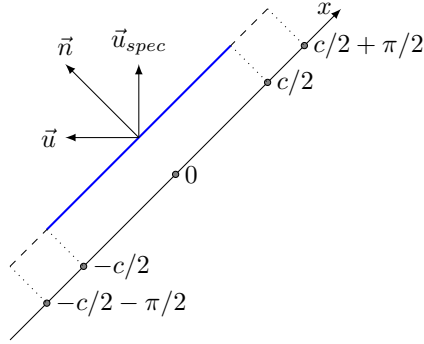


Figure B.15: Slice of a heliostat mirror

The radiative intensity on a reflective heliostat surface (B.15) for  $x > 0$ ,  $y > 0$  and  $\vec{u} \cdot \vec{n} > 0$  can be stated as:

$$\begin{aligned}
 I(x, y, z, \vec{u}, \pi) = & \hspace{20em} \text{(B.1)} \\
 & \rho I(x, y, z, -\vec{u}_{spec}, \pi) \mathcal{H}\left(\frac{c + \pi}{2} - x\right) \mathcal{H}\left(\frac{c + \pi}{2} - y\right) \\
 & + I(x, y, z, \vec{u}, \pi) \mathcal{H}\left(x - \frac{c + \pi}{2}\right) \mathcal{H}\left(y - \frac{c + \pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

The derivation of the radiative intensity with respect to the heliostat size parameter leads to :

$$\begin{aligned}
s_{\partial\Omega(\pi)}(\vec{x}_{\mathcal{H}(\pi)}, \vec{u}, \pi) = & \hspace{15em} \text{(B.2)} \\
& \rho s(\vec{x}, \vec{u}_{spec}, \pi) \mathcal{H}\left(\frac{c+\pi}{2} - x\right) \mathcal{H}\left(\frac{c+\pi}{2} - y\right) \\
& + \frac{(\rho I(\vec{x}, \vec{u}_{spec}, \pi) - I(\vec{x}, \vec{u}, \pi))}{2} \delta\left(\frac{c+\pi}{2} - x\right) \mathcal{H}\left(\frac{c+\pi}{2} - y\right) \\
& + \frac{(\rho I(\vec{x}, \vec{u}_{spec}, \pi) - I(\vec{x}, \vec{u}, \pi))}{2} \delta\left(\frac{c+\pi}{2} - y\right) \mathcal{H}\left(\frac{c+\pi}{2} - x\right) \\
& + s(\vec{x}, \vec{u}, \pi) \mathcal{H}\left(x - \frac{c+\pi}{2}\right) \mathcal{H}\left(y - \frac{c+\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

The configuration is symmetric for the  $x < 0$  and  $y < 0$  values.

### Appendix C. Sensitivity to the square size algorithm

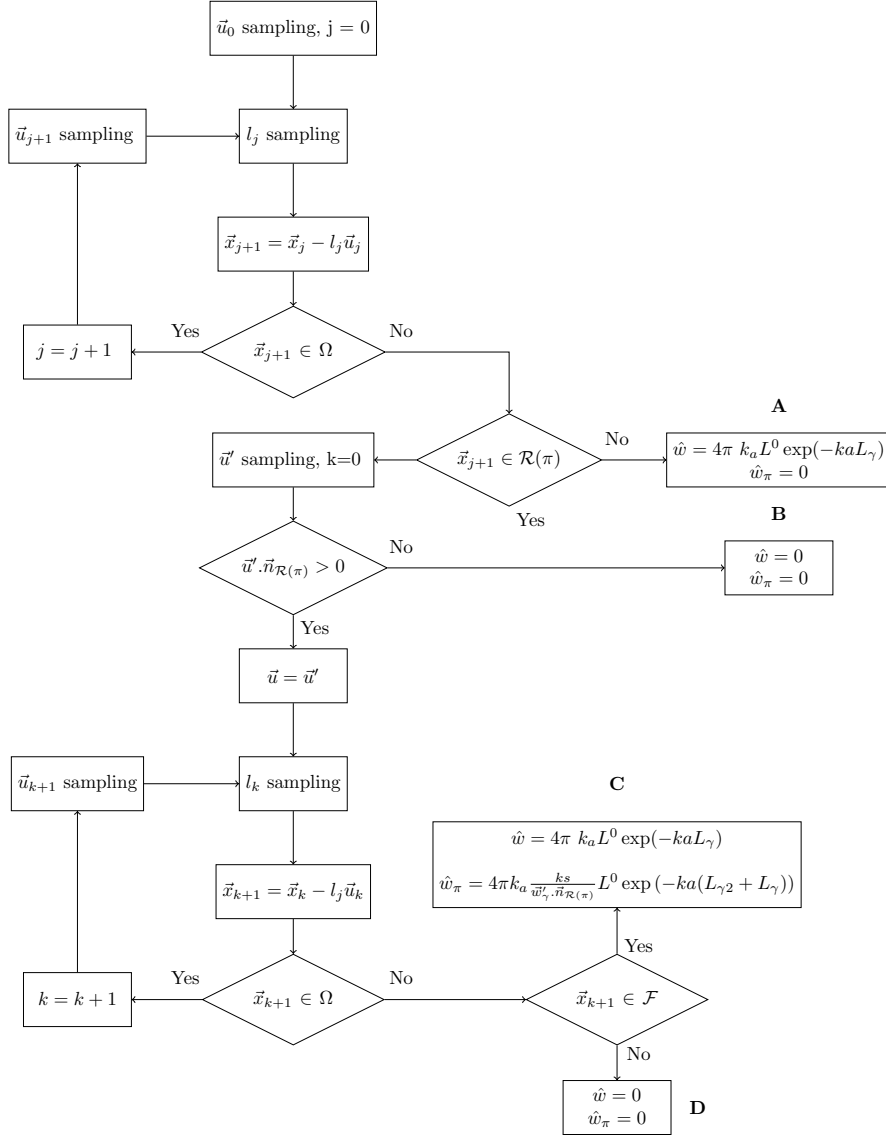


Figure C.16: Algorithm of **configuration 1**

## AppendixD. Sensitivity to the heliostat mirrors size

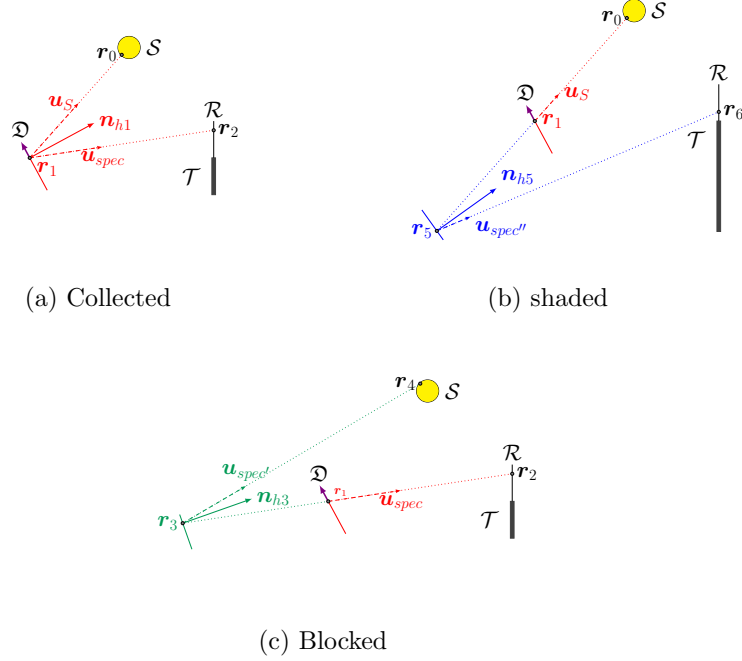


Figure D.17: The three effects of the mirrors deformation  $\mathcal{D}$  on the collected thermal power. The surface  $\mathcal{S}$  represent the sun surface, the surface  $\mathcal{R}$  is the receiver surface,  $\tau$  is the tower. The indices  $\mathcal{S}$  on the direction vector  $\vec{u}$  are for the sun and the *spec* ones are for the specular reflections. Their directions are related to the algorithm process described in AppendixD.

## References

- K. Daun, D. Morton, J. Howell, Geometric optimization of radiant enclosures containing specular surfaces, *Journal of Heat Transfer* 125 (5) (2003) 845–851.
- S. A. Rukolaine, The shape gradient of the least-squares objective functional in optimal shape design problems of radiative heat transfer, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 111 (16) (2010) 2390–2404.
- O. Farges, Conception optimale de centrales solaires à concentration: application aux centrales à tour et aux installations” beam down”, Ph.D. thesis, Ecole nationale des Mines d’Albi-Carmaux, 2014.
- C. Caliot, H. Benoit, E. Guillot, J.-L. Sans, A. Ferriere, G. Flamant, C. Coustet, B. Piaud, Validation of a Monte Carlo integral formulation applied to solar facility simulations and use of sensitivities, *Journal of Solar Energy Engineering* 137 (2).
- B. Piaud, C. Coustet, C. Caliot, E. Guillot, G. Flamant, Application of Monte-Carlo sensitivities estimation in Solfast-4D, in: *Proceedings of SolarPaces 2012 Conference*, Marrakech, Morocco, 2012.

- J. Dauchet, S. Blanco, J.-F. Cornet, M. El Hafi, V. Eymet, R. Fournier, The practice of recent radiative transfer Monte Carlo advances and its contribution to the field of microorganisms cultivation in photobioreactors, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 128 (2013) 52–59.
- H. J. Shim, C. H. Kim, Adjoint sensitivity and uncertainty analyses in Monte Carlo forward calculations, *Journal of nuclear science and technology* 48 (12) (2011) 1453–1461.
- J. Delatorre, G. Baud, J.-J. Bézian, S. Blanco, C. Caliot, J.-F. Cornet, C. Coustet, J. Dauchet, M. El Hafi, V. Eymet, et al., Monte Carlo advances and concentrated solar applications, *Solar Energy* 103 (2014) 653–681.
- M. Galtier, S. Blanco, J. Dauchet, M. El Hafi, V. Eymet, R. Fournier, M. Roger, C. Spiesser, G. Terrée, Radiative transfer and spectroscopic databases: A line-sampling Monte Carlo approach, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 172 (2016) 83–97.
- N. Villefranque, R. Fournier, F. Couvreur, S. Blanco, C. Cornet, V. Eymet, V. Forest, J.-M. Tregan, A Path-Tracing Monte Carlo Library for 3-D Radiative Transfer in Highly Resolved Cloudy Atmospheres, *Journal of Advances in Modeling Earth Systems* 11 (8) (2019) 2449–2473.
- J. Dauchet, S. Blanco, J.-F. Cornet, R. Fournier, Calculation of the radiative properties of photosynthetic microorganisms, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 161 (2015) 60–84.
- S. Blanco, R. Fournier, Short-path statistics and the diffusion approximation, *Physical review letters* 97 (23) (2006) 230604.
- M. Roger, S. Blanco, M. El Hafi, R. Fournier, Monte Carlo Estimates of Domain-Deformation Sensitivities, *Phys. Rev. Lett.* 95 (2005) 180601.
- M. Roger, M. E. Hafi, R. Fournier, S. Blanco, A. de Lataillade, V. Eymet, P. Perez, Applications of sensitivity estimations by Monte Carlo methods, in: 4th International Symposium in Radiative Transfer, Istanbul, 2004.
- S. Roger, M. and Blanco, M. El Hafi, R. Fournier, Monte Carlo estimations of domain-deformations sensitivities for radiative transfer applications., in: Proceedings of Eurotherm 78 - Computational Thermal Radiation in Participating Media, Poitiers, France, 2006.
- J. Tregan, S. Blanco, J. Dauchet, M. Hafi, R. Fournier, L. Ibarart, P. Lapeyre, N. Villefranque, Convergence issues in derivatives of Monte Carlo null-collision integral formulations: a solution, arXiv preprint arXiv:1903.06508 .
- M. B. Giles, Monte Carlo evaluation of sensitivities in computational finance. .
- R. Melchers, M. Ahammed, A fast approximate method for parameter sensitivity estimation in Monte Carlo structural reliability, *Computers & Structures* 82 (1) (2004) 55–61.
- J. De la Torre, Calculs de sensibilités par méthode de Monte-Carlo, pour la conception de procédés à énergie solaire concentrée, Ph.D. thesis, INPT, 2011.
- J. Sokolowski, J.-P. Zolésio, Introduction to shape optimization, in: Introduction to Shape Optimization, Springer, 5–12, 1992.

- S. A. Rukolaine, Shape optimization of radiant enclosures with specular-diffuse surfaces by means of a random search and gradient minimization, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 151 (2015) 174–191.
- J. Dauchet, Analyse radiative des photobioréacteurs, Ph.D. thesis, Université Blaise Pascal-Clermont-Ferrand II, 2012.
- A. de Lataillade, S. Blanco, Y. Clergent, J. Dufresne, M. E. Hafi, R. Fournier, Monte Carlo method and sensitivity estimations, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 75 (5) (2002) 529 – 538, ISSN 0022-4073.
- M. Roger, Modèles de sensibilité dans le cadre de la méthode de Monte-Carlo : illustrations en transfert radiatif, Ph.D. thesis, INPT, 2006.
- J. Dauchet, J.-J. Bézian, S. Blanco, C. Caliot, J. Charon, C. Coustet, M. El Hafi, V. Eymet, O. Farges, V. Forest, et al., Addressing nonlinearities in monte carlo, *Scientific reports* 8 (1) (2018) 1–11.
- T.-M. Li, M. Aittala, F. Durand, J. Lehtinen, Differentiable monte carlo ray tracing through edge sampling, in: *SIGGRAPH Asia 2018 Technical Papers*, ACM, 222, 2018.
- F. M. F. Siala, M. E. Elayeb, Mathematical formulation of a graphical method for a no-blocking heliostat field layout, *Renewable energy* 23 (1) (2001) 77–92.

### 1.5.2 Nos directions de recherche

L'idée principale de l'article concernant le modèle de sensibilité géométrique est que les sources de sensibilité sont positionnées aux frontières et qu'elles sont propagées dans le domaine exactement comme la luminance. Nous avons vu qu'en conséquence, pour tout problème de sensibilité géométrique (évaluation de l'influence de la perturbation du domaine sur une observable donnée), nous pouvons à priori nous servir de toute notre compréhension de la physique du transport et de notre pratique algorithmique comme nous avons l'habitude de le faire pour résoudre des problèmes de transfert radiatif. Dans notre communauté cela se traduit par l'utilisation de la version intégrale et probabilisée du modèle de sensibilité géométrique en vue de sa résolution par la méthode de Monte-Carlo. Dans l'article il est illustré que nous pouvons résoudre aussi bien le problème de sensibilité dans une géométrie simple cubique que dans une géométrie complexe quelconque. En effet tous les outils liés à la synthèse d'image développés dans notre communauté pour gérer le transfert radiatif dans les géométries complexes sont applicables pour gérer le transport de sensibilité. Par exemple, grâce à cette pratique, les phénomènes de diffusion multiple dans un milieu semi-transparent d'une géométrie quelconque ne nous posent aucune difficulté technique. En conséquence il en est de même pour le transport de sensibilité. C'est pour cette raison que dans cette thèse, au contraire de l'article, nous ne trouverons que des exemples d'applications pour lesquels le milieu est transparent : les difficultés sont situées aux parois (ou aux interfaces) et sont indépendantes du fait que le milieu est semi-transparent ou non. Les descriptions seront plus directes en laissant de côté la participation du milieu.

Dans l'article nous avons vu une première tentative de formalisation de la condition à la limite de sensibilité qui faisait apparaître deux termes : le terme de transport de la luminance et le gradient tangentiel de la luminance. Nous avons également vu que pour des configurations radiatives plus complexes (par exemple les héliostats ou la sphère facétisée) ce formalisme est insuffisant et ne nous permettait pas d'obtenir les conditions aux limites. Nous les avons donc déterminées de façon ad hoc. Dans cette thèse nous avons eu pour intention de construire la condition à la limite de sensibilité de façon très générale afin d'envisager l'application du modèle de sensibilité sur un gamme exhaustive de configurations radiatives. Une part énorme de littérature sur les sensibilités géométriques commence par "soit une géométrie différentiable". Dans notre contexte cette première hypothèse vient à l'encontre de notre pratique. En effet les outils de synthèse d'image que nous utilisons sont construits autours de géométries qui sont facétisées ou plus exactement triangularisées. Bien sur il existe des pans de la synthèse d'image dont le travail tourne autour de la courbure équivalente à une surface triangularisée mais notre objectif est de coller au plus près de ce que nous travaillons dans l'équipe, c'est à dire des formes facétisées.

La question de l'optimisation de forme, et donc de la sensibilité géométrique, est une question très actuelle en synthèse d'image. Nous avons rencontré de nombreuses références ([Zhang et al., 2020, Zeltner et al., 2021]) dont l'objet est le calcul d'un gradient paramétrique de la luminance pour lequel les paramètres sont géométriques. Cependant à travers toutes nos lectures nous n'avons pas su, du fait de la spécificité de cette culture numérique, nous approprier les développements présentés. Nous avons gardé tout au long de nos développements l'habitude de nous référer à ces lectures pour essayer, à la lumière de nos avancements, d'identifier les points qui pourraient nous être communs. Pour l'instant nous n'y sommes pas vraiment parvenus mais nous pensons que plus nous irons vers une généralisation algorithmique de notre travail, à partir des outils de la synthèse d'image tels que nous les pratiquons, plus nous identifierons de similitudes.

Dans la suite du manuscrit nous pouvons distinguer deux thématiques intentionnellement séparées, la première (Chap. 2 et Chap. 3) est uniquement axée sur la modélisation théorique de la sensibilité (à partir de l'ETR), et la deuxième (Chap. 4) est concentrée sur la résolution algorithmique, par Monte-Carlo, du problème de sensibilité.

La généralisation de la condition à la limite de la sensibilité fait apparaître deux grandeurs qui n'ont pas été croisées dans l'article. Ces deux grandeurs sont le gradient spatial de la luminance et le gradient angulaire de la luminance et nous verrons que, à travers la condition à la limite de sensibilité,

le modèle de sensibilité est couplé avec les modèles de ces deux gradients de la luminance. Dans ce qui va suivre on commence donc par introduire ces modèles indépendamment de toute question de déformation de la géométrie. L'intérêt d'introduire le modèle de la dérivée spatiale et le modèle de la dérivée angulaire avant d'attaquer le modèle de sensibilité géométrique est double. D'abord il est pédagogique : ces deux modèles sont des briques essentielles du modèle de sensibilité et il est nécessaire de les comprendre aussi bien que l'ETR pour la luminance. Ensuite ces modèles ont un intérêt en eux mêmes, indépendamment de toutes questions de sensibilité géométrique il existe de nombreuses configurations de transfert radiatif pour lesquelles il est essentiel de connaître le gradient spatial et le gradient angulaire de la luminance ([Matsui and Pielke Sr, 2006, Zhao et al., 2015]). La **Chap. 2** sera donc dédié à la construction de ces deux modèles.

Dans l'article, lorsque nous avons établi la condition à la limite de sensibilité, nous avons vu qu'il existait des relations linéaires qui reliaient la luminance et la sensibilité géométrique à la frontière. Nous avons donné quelques exemples de ces relations linéaires sans les démontrer. L'objet du **Chap. 3** est de formaliser de façon très générale ces relations linéaires. La généralité dont nous parlons ici concerne les propriétés radiatives du milieu et de la frontière (parois noires et réfléchissantes). À travers ces développements nous retrouverons la volonté de décrire l'aspect phénoménologique de la sensibilité et de nous approprier le modèle en tant que descripteur du transport et des sources de sensibilités géométrique. Pour cela nous serons amenés à utiliser des concepts développés dans les travaux théoriques sur la déformation du domaine ([Sokolowski and Zolésio, 1992]).

À l'issue du chapitre 3 le modèle de sensibilité sera finalement couplé avec trois grandeurs différentes à travers les conditions aux limites (la luminance, une dérivée spatiale et une dérivée angulaire). L'objectif du **Chap. 4** sera donc de montrer comment mettre en œuvre un algorithme de Monte-Carlo pour résoudre un problème de sensibilité couplé. Nous avons vu en introduction dans l'article que les couplages de la sensibilité géométrique avec la luminance pouvaient être gérés par la double randomisation. Dans le chapitre 4 nous verrons que les couplages avec les dérivées spatiales et angulaires auront exactement le même statut et que nous échantillonnerons des branches de dérivées angulaires et des branches de dérivées spatiales. Pour conclure le chapitre nous mettrons en œuvre la méthode sur un nombre limité de huit exemples. Ces exemples sont ceux que nous avons eu besoin de réaliser au fur et à mesure de l'évolution du travail théorique pour acquérir de la confiance sur les développements. Ils ont l'avantage de montrer graduellement les différentes spécificités de la mise en œuvre mais au delà de cette présentation didactique ils sont l'image exacte des "défis" que nous nous sommes donnés tout le long de ce travail.





# CHAPITRE 2

## Modèles des dérivées spatiale et angulaire

---

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>60</b>
<b>2.2</b>	<b>Le modèle de la dérivée spatiale</b>	<b>63</b>
2.2.1	Dans le milieu	63
2.2.1.1	Dérivation de l'ETR	63
2.2.1.2	Analyse du transport	64
2.2.1.3	Identification des sources	64
2.2.2	À la limite	65
2.2.2.1	Dérivation de la condition à la limite	66
2.2.2.2	Analyse du transport	69
2.2.2.3	Identification des sources	69
<b>2.3</b>	<b>Le modèle de la dérivée angulaire</b>	<b>70</b>
2.3.1	Dans le milieu	70
2.3.1.1	Dérivation de l'ETR	70
2.3.1.2	Analyse du transport	70
2.3.1.3	Identification des sources	71
2.3.2	À la limite	71
2.3.2.1	Dérivation de la condition à la limite	71
2.3.2.2	Analyse du transport	72
2.3.2.3	Identification des sources	72

---

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions deux quantités, la dérivée spatiale et la dérivée angulaire. Elles s'apparentent au gradient spatial et au gradient angulaire de la luminance projetés dans une direction donnée. L'objectif est de modéliser le comportement de ces grandeurs, dans le milieu et à la frontière. Dans ce but nous établirons leur équation d'évolution, leurs conditions aux limites et identifierons leurs sources. Les développements seront parfois techniques mais ils seront toujours directement appuyés sur l'équation de transfert radiatif et sur les conditions aux limites en luminance usuelles. Ils en conserveront l'esprit. Pour autant, nous verrons que la dérivée spatiale et la dérivée angulaire ne se comportent pas tout à fait comme la luminance dans le milieu et à la frontière. En effet nous retrouverons les lois physiques du rayonnement (atténuation de Beer-Lambert, fonctions de phase, brdf, etc..) dans les modèles de dérivée spatiale et de dérivée angulaire mais ce sera parfois partiellement et sous des formes différentes. Par exemple nous verrons que la dérivée angulaire n'est

pas diffusée dans un milieu semi-transparent mais qu'elle est transportée en ligne droite. En revanche lors de son transport elle est atténuée dans le milieu selon les propriétés d'absorption et de diffusion.

Le chapitre sera bref, il est composé de deux parties consacrées à la modélisation de chacune des dérivées. Nous séparons la modélisation dans le milieu et à la frontière et essayons à chaque reprise de fournir les éléments techniques de la modélisation et une interprétation physique du résultat. Mais avant toute chose, nous commençons par définir mathématiquement la dérivée spatiale et la dérivée angulaire.

**La dérivée spatiale** Il s'agit d'une grandeur qui quantifie la variation de la luminance  $L(\vec{x}, \vec{\omega})$  étant donné un déplacement infinitésimal de sa position  $\vec{x}$  dans l'espace. La direction du déplacement de  $\vec{x}$  est notée  $\vec{b}$  et l'opérateur qui donne la dérivée spatiale de la luminance est noté  $\partial_{1,\vec{b}}$ . Lorsqu'il est appliqué à la luminance il s'écrit :

$$\partial_{1,\vec{b}} L(\vec{x}, \vec{\omega}) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{L(\vec{x} + \tau \vec{b}, \vec{\omega}) - L(\vec{x}, \vec{\omega})}{\tau} \quad (2.1)$$

Elle peut se voir aussi comme la projection du gradient spatial dans la direction  $\vec{b}$  :

$$\partial_{1,\vec{b}} L(\vec{x}, \vec{\omega}) = \vec{\partial}_1 L(\vec{x}, \vec{\omega}) \cdot \vec{b} \quad (2.2)$$

Par exemple, dans un repère cartésien, si  $\vec{b} = \vec{e}_1$  la dérivée spatiale deviendra  $\partial_{x_1} L(\vec{x}, \vec{\omega})$ . La Fig. 2.1 représente le déplacement infinitésimal de la position  $\vec{x}$  dans la direction  $\vec{b}$ . Nous utiliserons souvent

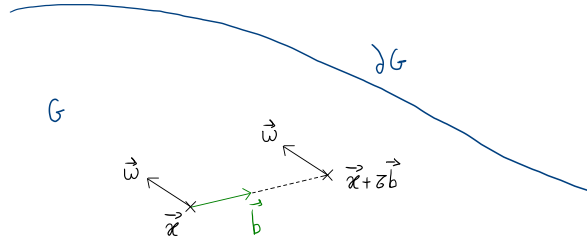


FIGURE 2.1 – Déplacement infinitésimal dans la direction  $\vec{b}$ .

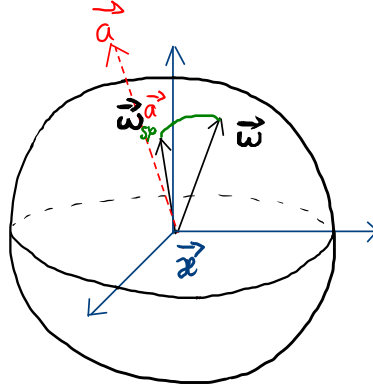
ce type de représentation pour illustrer graphiquement les contributions radiatives qui interviennent dans la différenciation de la luminance (Eq. 2.1).

**La dérivée angulaire** Il s'agit d'une grandeur qui quantifie la variation de la luminance  $L(\vec{x}, \vec{\omega})$  étant donné une rotation infinitésimale de la direction  $\vec{\omega}$  sur la sphère unité. La rotation de  $\vec{\omega}$  dans la sphère unité est caractérisée par un axe de rotation noté  $\vec{a}$  et un angle de rotation  $\varphi$ . L'opérateur qui donne la dérivée angulaire de la luminance est noté  $\partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}}$  et lorsqu'il est appliqué à la luminance il s'écrit :

$$\partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{x}, \vec{\omega}) = \lim_{\delta\varphi \rightarrow 0} \frac{L(\vec{x}, \vec{\omega}_{\delta\varphi}^{\vec{a}}) - L(\vec{x}, \vec{\omega})}{\delta\varphi} \quad (2.3)$$

La Fig. 2.2 représente la rotation infinitésimale d'un angle  $\delta\varphi$  de la direction  $\vec{\omega}$  autour d'un vecteur unitaire  $\vec{a}$  dans la sphère unité.

**L'opérateur de collision** La modélisation du transport (dans le milieu et à la frontière) des dérivées spatiales et angulaires consiste en l'application des opérateurs  $\partial_{1,\vec{b}}$  et  $\partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}}$  à l'équation de transfert radiatif et à la condition à la limite en luminance. L'équation de transfert radiatif est constituée d'un terme de transport et de différents termes collisionnels. La dérivation de l'ETR demandera donc de dériver ces deux types de termes. Afin de faciliter la lecture des modèles obtenus par la dérivation nous proposons de rassembler les termes collisionnels sous un seul opérateur que

FIGURE 2.2 – Rotation infinitésimale dans la direction  $\vec{w}$  dans la sphère unité.

nous noterons  $\mathcal{G}$ . La somme des termes collisionnels de l'ETR en milieu froid apparaîtra sous la notation  $\mathcal{G}[L(\vec{x}, \vec{w})]$ . L'opérateur  $\mathcal{G}$  appliqué à la luminance  $L$ , de variables  $\vec{x}$  et  $\vec{w}$ , est défini tel que :

$$\mathcal{G}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ L(\vec{x}, \vec{w}) & \longmapsto & \mathcal{G}[L(\vec{x}, \vec{w})] \end{array} \quad (2.4)$$

avec

$$\mathcal{G}[L(\vec{x}, \vec{w})] = -k_d(\vec{x})L(\vec{x}, \vec{w}) - k_a(\vec{x})L(\vec{x}, \vec{w}) + k_d(\vec{x}) \int_{\Omega} p_{\Omega}(\vec{x}, \vec{w}' | \vec{w}) d\vec{w}' L(\vec{x}, \vec{w}') \quad (2.5)$$

Si nous écrivons l'ETR à partir de l'opérateur  $\mathcal{G}$  nous obtenons :

$$\vec{\partial}_1 L(\vec{x}, \vec{w}) \cdot \vec{w} = \mathcal{G}[L(\vec{x}, \vec{w})] \quad (2.6)$$

Nous verrons l'avantage de ce formalisme dans les développements techniques des [Sec. 2.2](#) et [Sec. 2.3](#). Dans l'[Eq. 2.6](#) nous lisons l'ETR, c'est à dire que la luminance est transportée dans le milieu par des évènements de diffusion et qu'elle y est atténuée du fait des phénomènes d'extinction (ici absorption et diffusion). L'opérateur  $\mathcal{G}$  porte toute la signification des interactions avec le milieu et nous verrons dès les sections suivantes que cette formalisation des termes collisionnels de l'ETR facilitera grandement la lecture des nouveaux modèles que nous allons établir. En effet elle permet de voir très rapidement les points communs et les différences de ces modèles avec la physique des transferts radiatifs usuelle.

**Le terme de transport** Il est noté  $\vec{\partial}_1 L(\vec{x}, \vec{w}) \cdot \vec{w}$ . Lors de la dérivation (spatiale et angulaire), nous verrons que selon la variable par rapport à laquelle il est dérivé ( $\vec{x}$  ou  $\vec{w}$ ) sa dérivation donne des résultats très différents. En revanche, même si la dérivation fait apparaître des termes supplémentaires, nous retrouverons bien, dans les deux cas, un terme de transport portant sur la grandeur considérée (un transport de la dérivée spatiale, un transport de la dérivée angulaire).

**Les sources de la dérivée spatiale et de la dérivée angulaire** Dans l'article, nous avons vu que le modèle de la sensibilité géométrique fait intervenir le champ de luminance. Un des messages principaux était le couplage qui en résultait : pour penser une sensibilité géométrique il faut aussi penser le champ de luminance. Nous allons retrouver cette question avec les dérivées spatiales et angulaires. Le modèle de la dérivée spatiale fera intervenir la luminance ; le modèle de la dérivée angulaire fera intervenir à la fois la luminance et la dérivée spatiale. Il faudra donc que nous soyons très précis quand nous utiliserons le concept de source. Soit nous parlerons d'une source pour un problème découplé, soit d'une source dans un problème couplé. Par exemple, si nous regardons le modèle de la dérivée angulaire de façon découplée, alors les termes en luminance et en dérivée spatiale qui apparaîtront dans l'équation en champ et à la limite pourront être qualifiés de sources volumiques

ou sources surfaciques. Par contre, lorsqu'on s'intéressera au problème couplé : luminance, dérivée spatiale et dérivée angulaire, alors les mêmes termes seront des termes de couplage et ne seront plus qualifiés de source. Dans l'ensemble de ce chapitre nous regardons les problèmes de façon découplée et nous n'hésiterons donc pas à parler de sources même si la connaissance effective de ces sources passe par la connaissance de la solution des autres modèles.

Nous commençons ce chapitre par la construction du modèle de la dérivée spatiale et dans la partie suivante nous établirons le modèle de la dérivée angulaire. Pour chacune des deux grandeurs nous suivrons la structure suivante :

- établissement du modèle dans le milieu : dérivation de l'ETR, analyse du transport et identification des sources volumiques ;
- établissement du modèle à la frontière : dérivation de la condition à la limite en luminance, analyse du comportement et identification des sources surfaciques.

## 2.2 Le modèle de la dérivée spatiale

### 2.2.1 Dans le milieu

La dérivation de l'ETR par rapport à la première variable de la luminance  $\vec{x}$ , étant donné la direction de déplacement  $\vec{b}$ , s'écrit :

$$\partial_{1,\vec{b}} \left( \vec{\omega} \cdot \vec{\partial}_1 L(\vec{x}, \vec{\omega}) \right) = \partial_{1,\vec{b}} \left( \mathcal{G}[L(\vec{x}, \vec{\omega})] \right) \quad (2.7)$$

#### 2.2.1.1 Dérivation de l'ETR

La dérivation du terme de transport

$$\partial_{1,\vec{b}} \left( \vec{\omega} \cdot \vec{\partial}_1 L(\vec{x}, \vec{\omega}) \right) = \vec{\omega} \cdot \vec{\partial}_1 \left( \partial_{1,\vec{b}} L(\vec{x}, \vec{\omega}) \right) \quad (2.8)$$

Le résultat de la dérivation est le produit scalaire entre la direction  $\vec{\omega}$  et le gradient de la dérivée spatiale. Ce terme correspond à un terme de transport de la dérivée spatiale et est illustré par la Fig. 2.3. Sur la figure, la direction  $\vec{b}$  de dérivation spatiale est schématisé pour une position  $\vec{x}$  et une

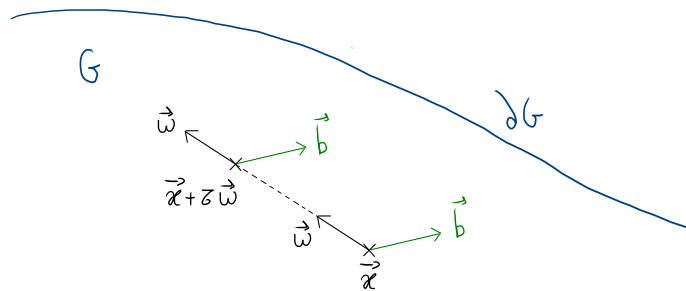


FIGURE 2.3 – Schéma du transport de la dérivée spatiale

position  $\vec{x} + \tau\vec{\omega}$ . Elle permet d'illustrer le transport de la dérivée spatiale le long de la trajectoire orientée par  $\vec{\omega}$ . Lors de son transport la dérivée spatiale interagit avec le milieu. Nous identifierons la nature de ces interactions à partir de la dérivation des termes collisionnels de l'ETR.

**La dérivation de l'opérateur  $\mathcal{G}$**  Dans le milieu les propriétés radiatives d'absorption et de diffusion ne sont pas forcément homogènes dans l'espace, les champs  $k_a \equiv k_a(\vec{x})$ ,  $k_d \equiv k_d(\vec{x})$  et  $p_\Omega \equiv p_\Omega(\vec{x})$  peuvent donc être des fonctions de la variable  $\vec{x}$ . Lors de la dérivation de l'ETR ces fonctions seront également dérivées et nous verrons qu'en conséquence il apparaît des sources supplémentaires dans l'équation de la dérivée spatiale. La dérivation de l'opérateur  $\mathcal{G}$  permet de visualiser clairement ce résultat, nous rappelons que les termes collisionnels de l'ETR sont synthétisés grâce à l'opérateur  $\mathcal{G}$  :

$$\mathcal{G}[L(\vec{x}, \vec{\omega})] = -k_a(\vec{x})L(\vec{x}, \vec{\omega}) - k_d(\vec{x})L(\vec{x}, \vec{\omega}) + k_d(\vec{x}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(\vec{x}, -\vec{\omega}' | -\vec{\omega}) d\vec{\omega}' L(\vec{x}, \vec{\omega}') \quad (2.9)$$

Étant donné que les champs d'absorption, de diffusion et de fonction de phase sont dépendants de  $\vec{x}$  l'opérateur  $\mathcal{G}$  est lui même dépendant de  $\vec{x}$ , sa dérivation donne donc :

$$\partial_{1,\vec{b}} \left( \mathcal{G}[L(\vec{x}, \vec{\omega})] \right) = \mathcal{G} \left[ \partial_{1,\vec{b}} L(\vec{x}, \vec{\omega}) \right] + \partial_{1,\vec{b}} \mathcal{G}[L(\vec{x}, \vec{\omega})] \quad (2.10)$$

Le premier membre issu de la dérivation représente les interactions de la dérivée spatiale avec le milieu. Étant donné que ces interactions sont regroupées dans l'opérateur  $\mathcal{G}$  nous pouvons déduire que la dérivée spatiale suivra les mêmes phénomènes de transport que la luminance dans le milieu :

$$\mathcal{G} \left[ \partial_{1,\vec{b}} L(\vec{x}, \vec{\omega}) \right] = -k_a(\vec{x}) \partial_{1,\vec{b}} L(\vec{x}, \vec{\omega}) - k_d(\vec{x}) \partial_{1,\vec{b}} L(\vec{x}, \vec{\omega}) + k_d(\vec{x}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(\vec{x}, -\vec{\omega}' | -\vec{\omega}) d\vec{\omega}' \partial_{1,\vec{b}} L(\vec{x}, \vec{\omega}') \quad (2.11)$$

Le deuxième membre issu de la dérivation correspond à la dérivée  $\partial_{1,\vec{b}} \mathcal{G}$  de l'opérateur  $\mathcal{G}$ . Ce nouvel opérateur contient les dérivées des propriétés d'absorption et de diffusion du milieu. Dans l'équation Eq. 2.10 il est appliqué à la luminance et s'écrit :

$$\begin{aligned} \partial_{1,\vec{b}} \mathcal{G}[L(\vec{x}, \vec{\omega})] &= -\partial_{1,\vec{b}} k_a(\vec{x}) L(\vec{x}, \vec{\omega}) - \partial_{1,\vec{b}} k_d(\vec{x}) L(\vec{x}, \vec{\omega}) \\ &\quad + \partial_{1,\vec{b}} k_d(\vec{x}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(\vec{x}, -\vec{\omega}' | -\vec{\omega}) d\vec{\omega}' L(\vec{x}, \vec{\omega}') \\ &\quad + k_d \int_{\Omega'} \partial_{1,\vec{b}} p_{\Omega'}(\vec{x}, -\vec{\omega}' | -\vec{\omega}) d\vec{\omega}' L(\vec{x}, \vec{\omega}') \end{aligned} \quad (2.12)$$

**Équation d'évolution de la dérivée spatiale** La dérivation de l'ETR par rapport à un déplacement dans l'espace suivant la direction  $\vec{b}$  donne donc :

$$\vec{\omega} \cdot \vec{\partial}_1 \left( \partial_{1,\vec{b}} L(\vec{x}, \vec{\omega}) \right) = \mathcal{G} \left[ \partial_{1,\vec{b}} L(\vec{x}, \vec{\omega}) \right] + \partial_{1,\vec{b}} \mathcal{G}[L(\vec{x}, \vec{\omega})] \quad \vec{x} \in G \subset \mathbb{R}^3 \quad (2.13)$$

### 2.2.1.2 Analyse du transport

Dans l'Eq. 2.13 on retrouve la forme de l'équation de transfert radiatif appliquée à la dérivée spatiale. Effectivement nous avons le terme de transport de dérivée spatiale à gauche de l'égalité et les termes collisionnels à droite dans l'opérateur  $\mathcal{G}$ . Le fait que nous soyons en présence d'une équation de transfert radiatif sur la dérivée spatiale est rassurant car nous pouvons de suite imaginer le transport de la dérivée spatiale ainsi que la façon dont elle est absorbée et diffusée dans le milieu.

### 2.2.1.3 Identification des sources

Cependant, bien qu'ici l'équation porte sur la dérivée spatiale, on remarque qu'il existe un terme supplémentaire qui ne dépend pas de la dérivée spatiale mais de la luminance. Dans l'équation ce terme peut s'interpréter comme une source volumique. Physiquement nous concluons que les phénomènes de transport de la dérivée spatiale sont identiques à ceux de la luminance (absorption et diffusion) mais

que tout le long de son transport la dérivée spatiale accumulera une quantité supplémentaire donnée par  $\partial_{1,\vec{b}} \mathcal{G}[L(\vec{x}, \vec{\omega})]$  qui dépendra de la luminance. Imaginons une configuration dans laquelle le champ de luminance serait connu : durant son transport la dérivée spatiale accumulerait la quantité connue de la fonction de la luminance. En général le champ de luminance ne sera pas connu et nous devons donc résoudre simultanément le modèle de dérivée spatiale et l'équation de transfert radiatif.

### 2.2.2 À la limite

La condition à la limite du modèle de dérivée spatiale est obtenue par dérivation de la condition à la limite du modèle de transfert radiatif. En toute généralité la luminance sortante d'une paroi est composée d'une partie émise et d'une partie réfléchi :

$$L(\vec{x}, \vec{\omega}) = L^{em}(\vec{x}, \vec{\omega}) + \rho(\vec{x}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(\vec{x}, -\vec{\omega}' | -\vec{\omega}) d\vec{\omega}' L(\vec{x}, \vec{\omega}') \quad \vec{x} \in \partial G \quad (2.14)$$

Nous laissons une notation très générale ( $L^{em}$ ) de l'émission de la paroi, elle sera modélisée selon la configuration, le plus souvent on trouvera  $L^{em} = \varepsilon L^{eq}(T)$ . La dérivation de la luminance sortante de la paroi consistera donc à dériver la luminance sortante de la paroi.

La Fig. 2.4 illustre géométriquement cette dérivée ( $\partial_{1,\vec{b}} L(\vec{x}, \vec{\omega})$  pour  $\vec{x} \in \partial G$  et  $\vec{\omega}$  sortant de la paroi) en schématisant un déplacement infinitésimal de la position  $\vec{x}$  dans la direction  $\vec{b}$ . En effet le calcul de la dérivée spatiale à la frontière consiste à différencier la luminance prise en  $\vec{x}$  sur la frontière avec la luminance prise en  $\vec{x} + \tau\vec{b}$  (voir Eq. 2.1). Selon le schéma de la Fig. 2.4 la position

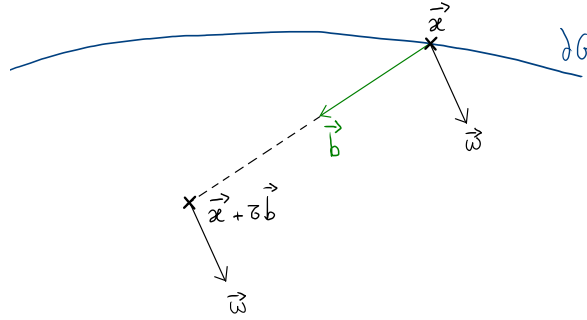


FIGURE 2.4 – Schéma de la différenciation de  $L(\vec{x}, \vec{\omega})$  à la frontière

$\vec{x} + \tau\vec{b}$  est placée dans le milieu. Lorsque nous réalisons la différenciation entre la luminance prise en chacune de ces positions nous différencions la valeur de la condition à la limite radiative en  $(\vec{x}, \vec{\omega})$  et la valeur de la luminance en  $(\vec{x} + \tau\vec{b}, \vec{\omega})$ . La première dépend des propriétés de la surface et la deuxième dépend des propriétés du milieu. Nous comprenons donc, qu'en plus des propriétés de surface, les propriétés du milieu vont jouer un rôle sur la condition à la limite de la dérivée spatiale.

**Les contributions de la surface et du volume** Sur la Fig. 2.5 nous schématisons les effets radiatifs qui entrent en compte dans la différenciation de la luminance en  $(\vec{x}, \vec{\omega})$  et  $(\vec{x} + \tau\vec{b}, \vec{\omega})$ . Ainsi nous introduisons les différentes contributions du volume et de la surface sur la condition à la limite de la dérivée spatiale. Sur la Fig. 2.5 nous avons schématisé la position  $(\vec{x}, \vec{\omega})$  sur la frontière ainsi qu'une direction incidente  $\vec{\omega}'$  en ce point. Cette schématisation correspond au fait que pour obtenir la valeur de la luminance sortante de la frontière en  $(\vec{x}, \vec{\omega})$  il est nécessaire de connaître la luminance émise par la paroi et la luminance incidente à la paroi dans la direction  $\vec{\omega}'$ . Ce schéma ne fait que résumer la condition à la limite radiative donnée par l'Eq. 2.14.

En revanche l'évaluation de la luminance en  $\vec{x} + \tau\vec{b}$  dépend de la luminance sortante de la paroi en une position différente sur la frontière (voir Fig. 2.5). Nous nommerons cette position  $\vec{x}_p$ . De plus, étant donné que nous nous sommes déplacés dans le milieu, tout en gardant la même direction

d'observation  $\vec{\omega}$ , il est également nécessaire de prendre en compte les évènements du transfert radiatif le long du chemin qui sépare  $\vec{x}_p$  et  $\vec{x} + \tau\vec{b}$ . Dans la configuration générale schématisée ici cela reviendra à considérer que la luminance sortante en  $(\vec{x}_p, \vec{\omega})$  est atténuée tout le long de ce chemin et que des phénomènes de diffusion peuvent ajouter une contribution de la luminance pour les directions  $\vec{\omega}'$  qui sont diffusées dans la direction  $\vec{\omega}$  tout le long du chemin.

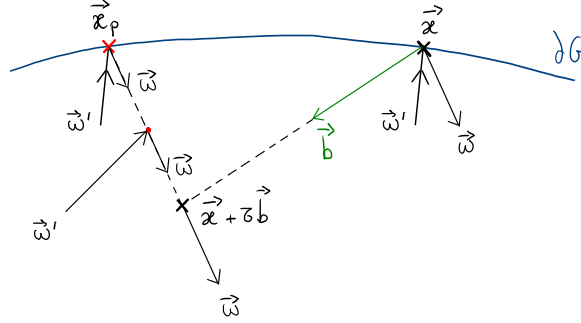


FIGURE 2.5 – Schéma des contributions impactant la dérivée spatiale à la limite

D'après la Fig. 2.5 la dérivée spatiale à la frontière représente donc la différence entre la luminance sortante de la paroi en  $(\vec{x}, \vec{\omega})$ , qui ne dépend que des propriétés de surfaces, et la luminance en  $(\vec{x} + \tau\vec{b}, \vec{\omega})$  qui dépend de la luminance sortante de la paroi en  $(\vec{x}_p, \vec{\omega})$  et du transfert radiatif le long du chemin séparant  $\vec{x}_p$  et  $\vec{x} + \tau\vec{b}$ . Quantitativement la différence de luminance entre  $(\vec{x}, \vec{\omega})$  et  $(\vec{x} + \tau\vec{b}, \vec{\omega})$  dépend donc :

- de l'évolution des propriétés de surface entre  $\vec{x}$  et  $\vec{x}_p$  (variation de  $L^{em}$ , de  $\rho$  et de  $p_{\Omega'}$  le long de la frontière) ;
- des propriétés du milieu (absorption, diffusion et fonction de phase) ;
- de la variation du champ de luminance incidente en  $\vec{x}$  et  $\vec{x}_p$  (il est possible que la luminance en  $(\vec{x}_p, \vec{\omega}')$  ne soit pas la même qu'en  $(\vec{x}, \vec{\omega}')$ ).

Nous allons introduire différentes notations pour représenter mathématiquement ces contributions, nous verrons que les variations des propriétés de surfaces seront mises en avant par l'opérateur  $\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{\omega}}$ , l'influence des propriétés du milieu par l'opérateur  $\mathcal{G}$  et les variations du champ de luminance incident par l'opérateur  $\partial_{1, \vec{u}}$ . Nous décrivons formellement les opérateurs  $\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{\omega}}$  et  $\partial_{1, \vec{u}}$  dans la section suivante.

### 2.2.2.1 Dérivation de la condition à la limite

Dans un premier temps nous allons présenter les éléments techniques qui conduiront à la condition à la limite de la dérivée spatiale. D'abord le vecteur directeur de la dérivation spatiale est décomposé à la frontière selon une direction tangente  $\vec{u}$  à la surface et la direction d'émission  $\vec{\omega}$ . L'objectif de cette décomposition est de mettre en évidence les contributions de la surface (grâce à la tangente) et du volume (grâce à la direction d'émission) sur la dérivée spatiale à la frontière. En effet cela permettra de décomposer la dérivée spatiale dans la direction  $\vec{b}$  en deux dérivées spatiales, une dans la direction  $\vec{\omega}$  et une dans la direction  $\vec{u}$  tangente à la frontière. Ainsi les opérateurs  $\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{\omega}}$  et  $\partial_{1, \vec{u}}$  seront des dérivées spatiales dans la direction tangente à la paroi, nous les appellerons des dérivées surfaciques.

**Projection du vecteur  $\vec{b}$**  La Fig. 2.6 illustre la décomposition de  $\vec{b}$  à la frontière.

Les coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$  et le vecteur  $\vec{u}$  sont déterminés de sorte que :

$$\vec{b} = \alpha\vec{\omega} + \beta\vec{u} \quad (2.15)$$



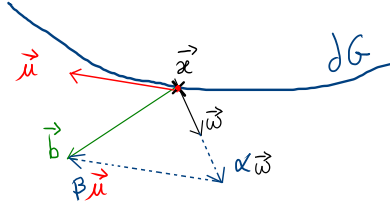


FIGURE 2.6 – Décomposition de  $\vec{b}$  à la frontière selon un vecteur tangent  $\vec{u}$  et la direction d'émission  $\vec{w}$

Avec  $\vec{u}$  un vecteur tangent à la frontière et  $\vec{w}$  la direction d'émission. Le vecteur  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire, le coefficient  $\beta$  est alors la norme de la projection tangente de  $\vec{b}$  sur la surface, on trouve :

$$\beta = \|\vec{b} - \alpha\vec{w}\| ; \quad \vec{u} = \frac{\vec{b} - \alpha\vec{w}}{\|\vec{b} - \alpha\vec{w}\|} ; \quad \alpha = \frac{\vec{b} \cdot \vec{n}}{\vec{w} \cdot \vec{n}} \quad (2.16)$$

À ce stade nous pouvons réécrire la dérivée spatiale dans la direction  $\vec{b}$  de la luminance sortante de la paroi comme une composition des dérivées dans les directions  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  :

$$\partial_{1,\vec{b}}L(\vec{x},\vec{w}) = \alpha\partial_{1,\vec{w}}L(\vec{x},\vec{w}) + \beta\partial_{1,\vec{u}}L(\vec{x},\vec{w}) \quad (2.17)$$

Dans les deux paragraphes suivants nous allons expliciter les deux dérivées issues de cette décomposition et cela nous mènera à la condition à la limite de la dérivée spatiale.

**Le terme de transport de la luminance sortante** Nous nous intéressons ici à la dérivée  $\partial_{1,\vec{w}}L(\vec{x},\vec{w})$  qui est illustrée sur la Fig. 2.7.

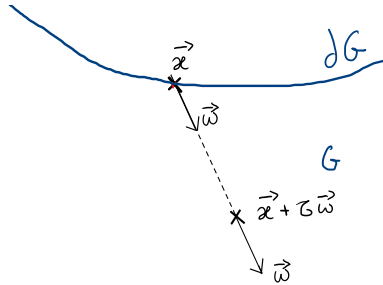


FIGURE 2.7 – Transport de la luminance sortante

Cette dérivée correspond au terme de transport de la luminance  $\vec{\partial}_1L(\vec{x},\vec{w}) \cdot \vec{w}$  et nous pouvons l'associer à l'opérateur  $\mathcal{G}$  à partir de l'ETR :

$$\vec{\partial}_1L(\vec{x},\vec{w}) \cdot \vec{w} = \mathcal{G}[L(\vec{x},\vec{w})] \quad (2.18)$$

Dans l'Eq. 2.17 la dérivée spatiale dans la direction  $\vec{w}$  est remplacée par l'opérateur  $\mathcal{G}$ . Étant donné que dans cette équation la luminance est prise à la frontière alors l'opérateur  $\mathcal{G}$  s'applique à la luminance sortante de la paroi avec la variable  $\vec{x}$  prise à la frontière  $\partial G$  et la variable  $\vec{w}$  prise dans l'hémisphère sortante de la frontière.

**La dérivée surfacique de la luminance sortante** Nous nous intéressons ici à la dérivée surfacique de la luminance sortante  $\partial_{1,\vec{u}}L(\vec{x},\vec{w})$ . En toute généralité la luminance sortante de la frontière est donnée par l'Eq. 2.14 et sa dérivation selon la direction tangente  $\vec{u}$  donne :

$$\partial_{1,\vec{u}}L(\vec{x},\vec{w}) = \partial_{1,\vec{u}} \left( L^{em}(\vec{x},\vec{w}) + \rho(\vec{x},-\vec{w}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(\vec{x},-\vec{w}'|-\vec{w}) d\vec{w}' L(\vec{x},\vec{w}') \right) \quad \vec{x} \in \partial G \quad (2.19)$$

Dans l'Eq. 2.19 toutes les fonctions dépendent de la variable  $\vec{x}$  prise à la frontière et les fonctions qui modélisent les propriétés radiatives de surface ( $L^{em}$ ,  $\rho$  et  $p_{\Omega'}$ ) ne sont définies qu'à la surface. Nous définissons l'opérateur  $\partial_{\vec{D}}$  pour représenter la dérivation de ces fonctions sur la surface. La notation  $\mathcal{D}$  indique la dérivation **selon le déplacement** de  $\vec{x}$  sur la surface et le vecteur  $\vec{u}$  la **direction** de ce déplacement. Considérons la fonction  $L^{em}(\vec{x}, \vec{\omega})$ , qui représente la luminance émise par la paroi, l'opérateur  $\partial_{\vec{D}}$  appliqué à cette fonction donne :

$$\partial_{\vec{D}} L^{em}(\vec{x}, \vec{\omega}) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{L^{em}(\mathcal{P}(\vec{x} + \tau \vec{u}), \vec{\omega}) - L^{em}(\vec{x}, \vec{\omega})}{\tau} \quad (2.20)$$

où  $\mathcal{P}(\vec{x} + \tau \vec{u})$  est la projection sur la surface de la position  $\vec{x}$  après un déplacement de  $\tau$  dans la direction  $\vec{u}$  (voir Fig. 2.9).

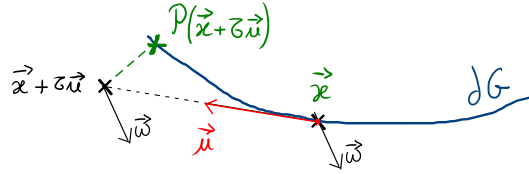


FIGURE 2.8 – Décomposition de  $\vec{b}$  à la frontière selon un vecteur tangent  $\vec{u}$  et la direction d'émission  $\vec{\omega}$

Dans l'expression  $\partial_{\vec{D}} L^{em}(\vec{x}, \vec{\omega})$  la projection garantit que le déplacement à partir de  $\vec{x}$  dans la direction  $\vec{u}$  reste rigoureusement sur la surface. En effet, étant donné que la fonction  $L^{em}(\vec{x}, \vec{\omega})$  est uniquement définie sur la frontière (comme les fonctions  $\rho(\vec{x}, -\vec{\omega})$  et  $p_{\Omega'}(\vec{x}, -\vec{\omega}' | -\vec{\omega})$ ), si le déplacement s'effectuait le long du vecteur directeur  $\vec{u}$  sans être projeté sur la surface, la dérivée ne serait pas définie.

En revanche nous n'aurons aucun problème à appliquer l'opérateur  $\partial_{1, \vec{u}}$  pour représenter la dérivée surfacique de la luminance incidente à la paroi. Effectivement le champ de luminance est défini en tout point du domaine  $G$ . Cet opérateur est l'opérateur de dérivée spatiale dans la direction tangente  $\vec{u}$ , nous l'appellerons aussi dérivée surfacique :

$$\partial_{1, \vec{u}} L(\vec{x}, \vec{\omega}) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{L(\vec{x} + \tau \vec{u}, \vec{\omega}) - L(\vec{x}, \vec{\omega})}{\tau} \quad (2.21)$$

La Fig. 2.9 illustre la dérivée surfacique de la luminance incidente. Bien qu'ils ne soient pas mathématiquement identiques les deux opérateurs  $\partial_{\vec{D}}$  et  $\partial_{1, \vec{u}}$  sont équivalents au premier ordre.

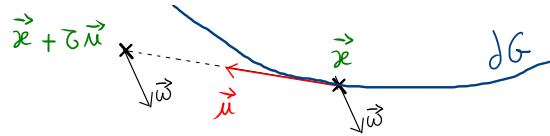


FIGURE 2.9 – Décomposition de  $\vec{b}$  à la frontière selon un vecteur tangent  $\vec{u}$  et la direction d'émission  $\vec{\omega}$

En partant de l'Eq. 2.19 nous pouvons donc écrire la dérivée surfacique de la luminance sortante :

$$\begin{aligned} \partial_{1, \vec{u}} L(\vec{x}, \vec{\omega}) &= + \partial_{\vec{D}} L^{em}(\vec{x}, \vec{\omega}) \\ &+ \partial_{\vec{D}} \rho(\vec{x}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(\vec{x}, -\vec{\omega}' | -\vec{\omega}) d\vec{\omega}' L(\vec{x}, \vec{\omega}') \\ &+ \rho(\vec{x}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} \partial_{\vec{D}} p_{\Omega'}(\vec{x}, -\vec{\omega}' | -\vec{\omega}) d\vec{\omega}' L(\vec{x}, \vec{\omega}') \\ &+ \rho(\vec{x}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(\vec{x}, -\vec{\omega}' | -\vec{\omega}) d\vec{\omega}' \partial_{1, \vec{u}} L(\vec{x}, \vec{\omega}') \quad \vec{x} \in \partial G \end{aligned} \quad (2.22)$$

**Condition à la limite de la dérivée spatiale** Dans les développements précédents nous avons vu que la condition à la limite de la dérivée spatiale dépendait de contributions volumiques (représentées par le terme  $\mathcal{G}$  appliqué à la luminance sortante) et surfaciques (représentées par les dérivées surfaciques des propriétés de paroi et de la luminance incidente). La projection du vecteur  $\vec{b}$ , directeur de la dérivation, selon la direction d'émission et une direction tangente, a permis de décomposer la dérivée spatiale en une somme de deux autres dérivées spatiales que nous avons successivement définies. En assemblant les contributions volumiques et surfaciques nous obtenons la condition à la limite suivante :

$$\begin{aligned}
\partial_{1,\vec{b}}L(\vec{x},\vec{\omega}) &= \alpha \mathcal{G}[L(\vec{x},\vec{\omega})] \\
&+ \beta \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}}L^{em}(\vec{x},\vec{\omega}) \\
&+ \beta \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}}\rho(\vec{x},-\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(\vec{x},-\vec{\omega}'|-\vec{\omega}) d\vec{\omega}' L(\vec{x},\vec{\omega}') \\
&+ \beta \rho(\vec{x},-\vec{\omega}) \int_{\Omega'} \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}}p_{\Omega'}(\vec{x},-\vec{\omega}'|-\vec{\omega}) d\vec{\omega}' L(\vec{x},\vec{\omega}') \\
&+ \beta \rho(\vec{x},-\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(\vec{x},-\vec{\omega}'|-\vec{\omega}) d\vec{\omega}' \partial_{1,\vec{u}}L(\vec{x},\vec{\omega}') \quad \vec{x} \in \partial G
\end{aligned} \tag{2.23}$$

### 2.2.2.2 Analyse du transport

Dans l'Eq. 2.23 nous pouvons remarquer que la dérivée spatiale n'est pas réfléchie à la frontière, même si les parois sont réfléchissantes. En effet dans l'Eq. 2.23 il n'y a aucun terme qui contienne la dérivée spatiale incidente  $\partial_{1,\vec{b}}L(\vec{x},\vec{\omega}')$ . En terme de modélisation du comportement de la dérivée spatiale à la frontière nous pouvons dire que quelles que soient les propriétés de surfaces la dérivée spatiale est toujours "absorbée" à la paroi. Pour bien comprendre le sens de cette affirmation il faut entendre qu'ici l'objet de la modélisation est  $\partial_{1,\vec{b}}L$  et non pas  $\vec{\partial}_1L$ , c'est à dire une dérivée spatiale dans une direction  $\vec{b}$  donnée (un scalaire) et non pas le vecteur gradient de luminance. Dans l'esprit de la littérature sur le rayonnement avec polarisation, où la physique du transport étudiée porte sur un vecteur (quatre quantités sont transportées simultanément), il serait tout à fait possible de se donner comme objectif de suivre le gradient. Dans ce cas l'Eq. 2.23 comporterait une matrice de réflexion pour le gradient : c'est ce sens qui est renvoyé par le terme  $\partial_{1,\vec{u}}L$  dans l'équation. En effet dans la condition à la limite de  $\partial_{1,\vec{b}}L$  il y a bien une composante liée à la "réflexion" de la dérivée spatiale dans une autre direction  $\vec{u}$ .

Cependant nous faisons ici un autre choix :  $\partial_{1,\vec{b}}L$  et  $\partial_{1,\vec{u}}L$  sont pour nous deux grandeurs scalaires distinctes. Ce point sera fondamental dans l'élaboration ultérieure des algorithmes de Monte Carlo avec branchement appuyés sur la double randomisation.

### 2.2.2.3 Identification des sources

La condition à la limite générale de la dérivée spatiale (Eq. 2.23) dépend de la luminance sortante de la paroi (par l'opérateur  $\mathcal{G}$ ), de la luminance incidente à la paroi et de la dérivée spatiale dans la direction  $\vec{u}$  de la luminance incidente à la paroi. Les sources de dérivée spatiale sont donc des sources qui font intervenir les propriétés du milieu, le champ de luminance incident et le champ de dérivée spatiale dans la direction  $\vec{u}$  incident. Cela implique que pour déterminer la condition à la limite de la dérivée spatiale il sera nécessaire de résoudre l'ETR (pour évaluer la luminance incidente) et de résoudre un autre modèle de dérivée spatiale (cette fois dans la direction  $\vec{u}$ ).

## 2.3 Le modèle de la dérivée angulaire

### 2.3.1 Dans le milieu

#### 2.3.1.1 Dérivation de l'ETR

La dérivation de l'ETR par rapport à la rotation d'un angle  $\varphi$  de la seconde variable de la luminance  $\vec{\omega}$ , étant donné l'axe de rotation  $\vec{a}$ , s'écrit :

$$\partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} \left( \vec{\omega} \cdot \vec{\partial}_1 L(\vec{x}, \vec{\omega}) \right) = \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} \left( \mathcal{G}[L(\vec{x}, \vec{\omega})] \right) \quad (2.24)$$

**La dérivation du terme de transport** La dérivation du terme de transport consiste à dériver un produit scalaire de deux termes qui dépendent de  $\vec{\omega}$ , nous obtenons donc :

$$\partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} \left( \vec{\omega} \cdot \vec{\partial}_1 L(\vec{x}, \vec{\omega}) \right) = \vec{v}_{\Phi} \cdot \vec{\partial}_1 L(\vec{x}, \vec{\omega}) + \vec{\omega} \cdot \vec{\partial}_1 \left( \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{x}, \vec{\omega}) \right) \quad (2.25)$$

Le vecteur  $\vec{v}_{\Phi}$  est la dérivée du vecteur  $\vec{\omega}$  par rapport à un angle de rotation  $\varphi$  autour de  $\vec{a}$  :

$$\vec{v}_{\Phi} = \lim_{\delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\vec{\omega}_{\delta\varphi}^{\vec{a}} - \vec{\omega}}{\delta\varphi} = \vec{a} \wedge \vec{\omega} \quad (2.26)$$

Il ne s'agit que de projections vectorielles ([Condamine M., 1960]). La dérivation du terme de transport de l'équation de transfert radiatif donne donc deux termes différents : un gradient de luminance projeté sur  $\vec{v}_{\Phi}$  et un terme qui correspond au transport de la dérivée angulaire.

**La dérivation de l'opérateur  $\mathcal{G}$**  Dans le milieu les champs d'absorption et de diffusion sont uniquement dépendants de l'espace. En revanche la fonction de phase est, en toute généralité, dépendante de la direction  $\vec{\omega}$ . Lors de la dérivation de l'opérateur  $\mathcal{G}$  cette fonction sera donc également dérivée et sera comprise dans l'opérateur dérivé  $\partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} \mathcal{G}[L(\vec{x}, \vec{\omega})]$  que nous retrouvons dans l'Eq. 2.27 :

$$\partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} \left( \mathcal{G}[L(\vec{x}, \vec{\omega})] \right) = -k_a(\vec{x}) \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{x}, \vec{\omega}) - k_d(\vec{x}) \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{x}, \vec{\omega}) + \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} \mathcal{G}[L(\vec{x}, \vec{\omega})] \quad (2.27)$$

avec

$$\partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} \mathcal{G}[L(\vec{x}, \vec{\omega})] = k_d \int_{\Omega'} \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} p_{\Omega'}(\vec{x}, -\vec{\omega}' | -\vec{\omega}) d\vec{\omega}' L(\vec{x}, \vec{\omega}') \quad (2.28)$$

**Équation d'évolution de la dérivée spatiale** La dérivation de l'ETR par rapport à une rotation de la direction  $\vec{\omega}$  dans la sphère unité donne donc le modèle de la dérivée angulaire suivant en combinant l'Eq. 2.25 et l'Eq. 2.27 :

$$\vec{\omega} \cdot \vec{\partial}_1 \left( \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{x}, \vec{\omega}) \right) = -k_a(\vec{x}) \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{x}, \vec{\omega}) - k_d(\vec{x}) \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{x}, \vec{\omega}) + \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} \mathcal{G}[L(\vec{x}, \vec{\omega})] - \partial_{1, \vec{v}_{\Phi}} L(\vec{x}, \vec{\omega}) \quad (2.29)$$

#### 2.3.1.2 Analyse du transport

L'équation qui résulte de la dérivation de l'ETR par rapport à une rotation de la direction  $\vec{\omega}$  n'est pas une équation de transfert radiatif classique. En effet nous retrouvons le terme de transport de la dérivée angulaire et l'extinction par absorption et diffusion. En revanche il n'y a pas de terme source de diffusion de la dérivée angulaire. Dans un milieu semi-transparent la dérivée angulaire sera donc transportée selon des lignes droites.

### 2.3.1.3 Identification des sources

De plus l'équation comporte deux termes sources qui ne dépendent pas de la dérivée angulaire mais de la luminance et de la dérivée spatiale dans la direction  $\vec{v}_\Phi$ . Cela implique que l'évolution de la dérivée angulaire dans le milieu dépendra du champ de luminance et du champ de la dérivée spatiale dans la direction  $\vec{v}_\Phi$ . Dans une vision propagative ces sources seront considérées tout le long d'un chemin balistique de dérivée angulaire et atténuées exponentiellement selon la loi de Beer-Lambert et le coefficient d'extinction  $k_e(\vec{x}) = k_a(\vec{x}) + k_d(\vec{x})$ . En conclusion le modèle de la dérivée angulaire est couplé dans le milieu avec l'ETR et le modèle de dérivée spatiale.

## 2.3.2 À la limite

### 2.3.2.1 Dérivation de la condition à la limite

La condition à la limite du modèle de dérivée angulaire est obtenue par dérivation de la condition à la limite du modèle de transfert radiatif (Eq. 2.14), on obtient en toute généralité :

$$\begin{aligned} \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{x}, \vec{\omega}) &= \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L^{em}(\vec{x}, \vec{\omega}) \\ &+ \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} \rho(\vec{x}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(\vec{x}, -\vec{\omega}' | -\vec{\omega}) d\vec{\omega}' L(\vec{x}, \vec{\omega}') \\ &+ \rho(\vec{x}, -\vec{\omega}) \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} \left( \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(\vec{x}, -\vec{\omega}' | -\vec{\omega}) d\vec{\omega}' L(\vec{x}, \vec{\omega}') \right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Selon les propriétés de parois la condition à la limite générale peut être simplifiée, nous donnons en suivant les déclinaisons de la condition à la limite pour les parois spéculaires et diffuses.

**Pour une paroi diffuse** Dans le cas d'une paroi diffuse la condition à la limite générale de la dérivée angulaire peut être simplifiée en travaillant sur le terme contenant la dérivée angulaire de la réflexion de la luminance incidente :

$$-\rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} \left( \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' L(\vec{x}, \vec{\omega}') \right)$$

Dans le cas d'une paroi diffuse la brdf est  $p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) = \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}}{\pi}$  alors le terme précédent devient :

$$\partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} \left( \int_{\Omega'} \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}}{\pi} L(\vec{x}, \vec{\omega}') d\vec{\omega}' \right) = 0 \quad (2.31)$$

En effet la dérivée angulaire est appliquée à la variable  $\vec{\omega}$  qui n'apparaît pas dans la densité de probabilité d'une paroi diffuse. La condition à la limite pour une paroi diffuse est donc indépendante de la dérivée angulaire incidente et s'écrit :

$$\begin{aligned} \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{x}, \vec{\omega}) &= \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L^{em}(\vec{x}, \vec{\omega}) \\ &+ \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} \rho(\vec{x}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(\vec{x}, -\vec{\omega}' | -\vec{\omega}) d\vec{\omega}' L(\vec{x}, \vec{\omega}') \end{aligned} \quad (2.32)$$

**Pour une paroi spéculaire** Dans le cas d'une paroi spéculaire la brdf est modélisée par

$$p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) = \delta \left( \vec{\omega}' - (\vec{\omega} - 2(\vec{\omega} \cdot \vec{n})\vec{n}) \right) \quad (2.33)$$

et on note  $\vec{\omega}^{spec} = \vec{\omega} - 2(\vec{\omega} \cdot \vec{n})\vec{n}$ . Le vecteur unitaire  $\vec{a}$  est l'axe de la rotation du vecteur  $\vec{\omega}$  et la Fig. 2.10 montre que la rotation d'un angle  $\varphi$  du vecteur  $\vec{\omega}$  autour de  $\vec{a}$  correspond à la rotation d'un angle  $\varphi$  du vecteur  $\vec{\omega}^{spec}$  autour de  $\vec{a}^{spec}$ . La dérivation du terme contenant la dérivée angulaire de

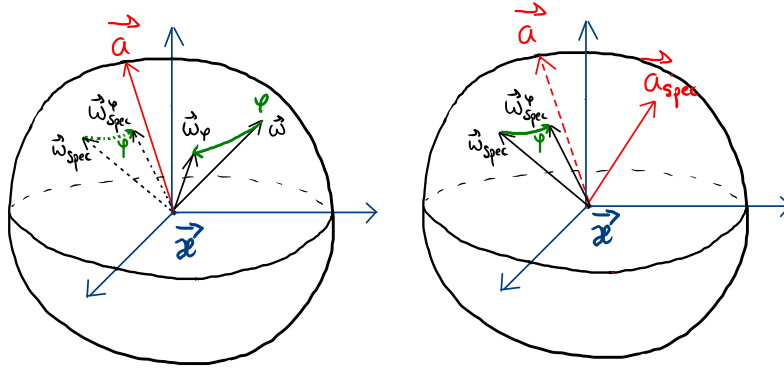


FIGURE 2.10 – Rotation infinitésimale dans la direction  $\vec{\omega}$  dans la sphère unité et rotation spéculaire correspondante.

la réflexion de la luminance incidente donne alors :

$$-\rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} \left( \int_{\Omega'} \delta(\vec{\omega}' - (\vec{\omega} - 2(\vec{\omega} \cdot \vec{n})\vec{n})) d\vec{\omega}' L(\vec{x}, \vec{\omega}') \right) = \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}^{spec}} L(\vec{x}, \vec{\omega}^{spec}) \quad (2.34)$$

Pour une paroi spéculaire la condition à la limite de la dérivée angulaire devient :

$$\begin{aligned} \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{x}, \vec{\omega}) &= \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L^{em}(\vec{x}, \vec{\omega}) \\ &+ \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} \rho(\vec{x}, -\vec{\omega}) L(\vec{x}, \vec{\omega}^{spec}) \\ &- \rho(\vec{x}, -\vec{\omega}) \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}^{spec}} L(\vec{x}, \vec{\omega}^{spec}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

### 2.3.2.2 Analyse du transport

**Pour une paroi diffuse** Pour une paroi diffuse la condition à la limite de la dérivée angulaire dépend de la dérivée angulaire de la luminance émise par la paroi et d'un terme faisant intervenir la luminance incidente. Il n'y a pas de terme qui ferait intervenir la dérivée angulaire dans la direction incidente  $\partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{x}, \vec{\omega}')$ . La dérivée angulaire n'est donc pas réfléchi par les parois diffuses.

**Pour une paroi spéculaire** Pour une paroi spéculaire la condition à la limite de la dérivée angulaire dépend, comme pour les parois diffuses, de la dérivée angulaire de la luminance émise et d'un terme qui contient la luminance incidente à la paroi. En revanche, à la différence des parois diffuses, elle dépend d'une dérivée angulaire incidente. Cependant cette dérivée angulaire incidente est différente de celle dont nous modélisons le transport. En effet l'axe de rotation n'est plus  $\vec{a}$  mais  $\vec{a}^{spec}$ , par conséquent le modèle qui servira à modéliser son transport sera différent. De ces observations nous pouvons donc conclure que la dérivée angulaire n'est pas non plus réfléchi par les parois spéculaires mais que sur ces parois elle dépend du champ de dérivée angulaire de la luminance incidente étant donné une rotation de  $\vec{\omega}$  d'un angle  $\varphi$  autour de l'axe de rotation  $\vec{a}^{spec}$ .

### 2.3.2.3 Identification des sources

Les sources de la dérivée angulaire de la luminance sont, en toute généralité, des fonctions de la dérivée angulaire de la luminance émise et des fonctions de la luminance incidente. Dans le cas des parois spéculaires elles sont aussi des fonctions d'une autre dérivée angulaire de la luminance incidente. Le modèle de dérivée angulaire de la luminance est donc couplé aux frontières à l'ETR et, dans le cas de parois spéculaires, à un autre modèle de dérivée angulaire (selon l'axe de rotation  $\vec{a}^{spec}$ ).



# CHAPITRE 3

## Conditions aux limites du modèle de sensibilité

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction et contexte</b>	<b>75</b>
3.1.1	Qu'allez-vous lire ?	76
<b>3.2</b>	<b>Choix de modélisation</b>	<b>78</b>
3.2.1	La luminance et ses variables indépendantes	78
3.2.2	La sensibilité géométrique	79
3.2.3	Séparation des problèmes paramétriques et géométriques	79
3.2.4	Description de la déformation géométrique de la frontière	80
3.2.4.1	Espace matériel et espace géométrique	80
3.2.4.2	Formalisation de la déformation géométrique de la frontière	80
3.2.5	Résumé des variables et des descripteurs	81
<b>3.3</b>	<b>La condition à la limite de sensibilité géométrique</b>	<b>82</b>
3.3.1	Sources de sensibilité géométriques	82
3.3.1.1	Contribution du milieu participant	82
3.3.1.2	Contributions surfaciques	83
3.3.1.3	Contribution angulaire	85
3.3.1.4	La condition à la limite générale de sensibilité	86
3.3.2	Parois noires, spéculaires et diffuses	89
3.3.2.1	La condition à la limite pour une paroi noire	90
3.3.2.2	La condition à la limite pour une paroi diffuse	90
3.3.2.3	La condition à la limite pour une paroi spéculaire	92
<b>3.4</b>	<b>Illustrations des termes des conditions aux limites en paroi noire et milieu transparent</b>	<b>94</b>
3.4.1	Translation orthogonale du plan	94
3.4.1.1	Définition de la configuration géométrique et radiative	94
3.4.1.2	Le modèle à la limite	96
3.4.1.3	Interprétation	100
3.4.2	Homothétie de la zone émettrice	101
3.4.2.1	Définition de la configuration géométrique et radiative	101
3.4.2.2	Le modèle à la limite	102
3.4.2.3	Interprétation	105
3.4.3	Rotation du plan	106
3.4.3.1	Définition de la configuration géométrique et radiative	106
3.4.3.2	Le modèle à la limite	108
3.4.3.3	Interprétation	110



<b>3.5</b>	<b>Illustration des termes de la condition à la limite en paroi réfléchissante et milieu transparent . . . . .</b>	<b>113</b>
3.5.1	Translation orthogonale du plan, paroi spéculaire . . . . .	113
3.5.1.1	Définition de la configuration géométrique et radiative . . . . .	113
3.5.1.2	Le modèle à la limite . . . . .	114
3.5.1.3	Interprétation . . . . .	118
3.5.2	Rotation, paroi spéculaire . . . . .	120
3.5.2.1	Définition de la configuration géométrique et radiative . . . . .	120
3.5.2.2	Le modèle à la limite . . . . .	121
3.5.2.3	Interprétation . . . . .	125
3.5.3	Rotation, parois diffuses . . . . .	126
3.5.3.1	Définition de la configuration géométrique et radiative . . . . .	126
3.5.3.2	Le modèle à la limite . . . . .	127
3.5.3.3	Interprétation . . . . .	131
<b>3.6</b>	<b>Discontinuités . . . . .</b>	<b>133</b>
3.6.1	Le plan infini comme support à la condition à la limite radiative discontinue en paroi noire . . . . .	134
3.6.1.1	Le modèle à la limite . . . . .	135
3.6.1.2	La dérivée surfacique dans l'espace matériel . . . . .	135
3.6.1.3	Le résultat . . . . .	135
3.6.2	Géométries facétisées : conjecture des plans . . . . .	136
3.6.3	Parois noires ou diffuses en géométrie convexe . . . . .	138
3.6.3.1	Première configuration : parois noires . . . . .	139
3.6.3.2	Deuxième configuration : avec deux parois diffuses . . . . .	144
3.6.4	Parois noires ou diffuses en géométrie concave . . . . .	148
3.6.4.1	Première configuration : parois noires . . . . .	148
3.6.4.2	Deuxième configuration : avec une paroi diffuse . . . . .	153
<b>3.7</b>	<b>Détails théoriques . . . . .</b>	<b>156</b>
3.7.0.1	Égalité de la luminance et la luminance matérielle . . . . .	156
3.7.0.2	Dérivation de la condition à la limite de luminance . . . . .	156
3.7.0.3	La luminance sortant de la paroi dans l'espace géométrique . . . . .	156
3.7.0.4	La luminance matérielle sortant de la paroi dans l'espace matériel . . . . .	157
3.7.0.5	La sensibilité géométrique sortant de la paroi . . . . .	158

### 3.1 Introduction et contexte

Ce chapitre est dédié aux sources de sensibilités géométriques (sensibilités à la déformation du domaine). Si on considère la sensibilité comme une quantité, un objet de la physique des transferts radiatifs, alors les conditions aux limites du modèle de sensibilité représentent le cœur de sa phénoménologie et l'objectif, qui devient un jeu naturel, est de parvenir à les écrire, d'en présenter une modélisation. Ce travail de description est retranscrit, en partie, par un ensemble d'outils mathématiques pris parmi ceux dont nous disposons. Nos choix d'écriture auraient probablement été différents si nos connaissances, par exemple en théorie des distributions et en géométrie différentielle, avaient été plus consistantes. À plusieurs étapes clé de notre élaboration des conditions aux limites, nous avons été freinés par ce que nous ressentions comme des lacunes formelles. Par contre, c'est systématiquement dans le formalisme usuel du transfert radiatif que nous avons finalement trouvé les moyens de contourner ces lacunes et nous espérons qu'un lecteur spécialiste de la physique du rayonnement nous pardonnera certains "flottements" au bénéfice d'un discours entièrement inscrit dans son langage le plus familier. Les objets mathématiques utilisés sont ainsi largement soutenus par notre analyse portée depuis la physique des transferts radiatifs. Dans la volonté de présenter un témoignage fidèle de ce que nous avons vécu sur ce plan de notre recherche, nous avons fait deux choix initiaux dans l'écriture : l'un d'eux concerne l'illustration, l'autre la théorie.

**Les illustrations** Dans les exemples qui seront donnés pour illustrer la théorie, nous nous placerons dans des configurations purement bi-dimensionnelles. L'espace géométrique aura deux dimensions et l'espace angulaire aura également deux dimensions, c'est-à-dire que les vecteurs directionnels seront définis dans le disque unité. *Dans sa description angulaire le vecteur directionnel correspondra à un seul angle  $\theta$ .* En supprimant le caractère tri-dimensionnel du transport de photons nous quittons, en quelque sorte, le monde des transferts radiatifs. Ces illustrations bi-dimensionnelles seront pourtant très utiles pour la représentation de chacun des termes présentés dans la théorie. En effet, ce n'est pas tellement la schématisation de la perspective qui pose problème mais le calcul lié aux définitions de la frontière, aux angles  $\theta$  et  $\phi$  et aux discontinuités : présenter nos développements en considérant la dimension 3 brouillerait inutilement leur exposition. Au contraire, les illustrations  $2D$  ne souffrant d'aucun biais conceptuel ou théorique, en ce qui concerne les conditions aux limites en sensibilité, elles faciliteront certainement la lecture de ce chapitre, et du chapitre suivant, surtout si nous ajoutons que le passage du  $2D$  au  $3D$  ne constitue qu'un geste technique que nous effectuerons le moment venu.

Comme une note, nous ferons remarquer qu'en biologie de nombreux phénomènes peuvent être assimilés, modélisés, par un transport  $2D$  pur et qu'ils trouveront une lecture directe dans ses illustrations. Nous pouvons notamment prendre l'exemple de la modélisation du comportement des fourmis qui se déplacent sur une surface [Khuong et al., 2013].

**La théorie** Les configurations radiatives qui nous serviront d'exemples présentent presque toujours des discontinuités. Dans ce chapitre nous n'aborderons pas les potentielles discontinuités en champ des coefficients d'absorption et de diffusion. Néanmoins le lecteur pourra se référer à la conclusion (Sec. 4.5) de cette thèse pour trouver l'illustration d'un calcul de sensibilité étant donné un champ discontinu des propriétés radiatives du milieu. En ce qui concerne la frontière, nous avons évoqué dans l'article ce que nous identifions comme discontinuités, et nous rappellerons ici avec un peu plus de précision qu'elles sont de deux types : les discontinuités radiatives, c'est-à-dire qui engendrent un échelon, spatial ou angulaire, de la valeur de la luminance à la frontière (par exemple les courbes concaves, les conditions aux limites discontinues) ; les discontinuités géométriques qui existent lorsque la frontière  $\partial G(\tilde{\pi})$  n'est pas régulière (par exemple un carré présente quatre singularités sur son contour). Il nous est donc difficile d'éviter les discontinuités dans nos illustrations et pourtant nous avons intérêt, pour pouvoir utiliser un formalisme mathématique que nous maîtrisons, à nous en séparer totalement dans un premier temps. En effet, nous avons construit tout notre formalisme sur les bases de la **régularité des frontières et de la continuité des configurations radiatives**. Les discontinuités auront un traitement formel légèrement différent puisqu'il s'appuiera sur une **conjecture du discontinu** qui sera développée séparément. Nous nous efforcerons donc, dans un premier temps, de préserver une continuité, qui pourra sembler parfois artificielle, face à des configurations qui seraient à même de nous imposer leurs discontinuités dès que l'on quittera l'exemple du plan infini ou du contour régulier fermé. Encore une fois, cet exercice ne sera que temporaire et aura pour but de simplifier le discours.

Lors de la définition de ce formalisme, nous avons rapidement retrouvé un vocabulaire employé par les méthodes d'optimisation de forme [Allaire and Schoenauer, 2007, Sokolowski and Zolésio, 1992]. Nous avons exploité les images associées à ce vocabulaire et l'avons utilisé pour définir la frontière  $\partial G(\tilde{\pi})$  comme un support géométrique construit à partir d'un support matériel et du paramètre géométrique  $\tilde{\pi}$ . Cette définition sera développée dans la partie Sec. 3.2.4. Elle nous permettra de clarifier chacun des termes de la condition à la limite et elle a aussi l'avantage de comporter tous les éléments nécessaires pour son extension en synthèse d'image.

### 3.1.1 Qu'allez-vous lire ?

Nous avons vu dans l'article du Chap. 1 que l'équation d'évolution de la sensibilité géométrique est obtenue en dérivant directement l'équation de transfert radiatif par rapport au paramètre

géométrique, nous la rappelons ici :

$$\vec{\omega} \cdot \vec{\partial}_1 s(\vec{x}, \vec{\omega}, \pi) = -k_a(\vec{x})s(\vec{x}, \vec{\omega}, \pi) - k_d(\vec{x})s(\vec{x}, \vec{\omega}, \pi) + k_d(\vec{x}) \int_{\Omega} p_{\Omega}(\vec{\omega}' | \vec{\omega}) d\vec{\omega}' s(\vec{x}, \vec{\omega}', \pi) \quad (3.1)$$

Pour compléter le modèle de sensibilité, nous devons donc nous intéresser aux sources de sensibilité. Comme le montre l'Eq. 3.1, il n'y a pas de source de sensibilité dans le milieu. En effet, pour la sensibilité géométrique, toutes les sources se situent aux frontières du domaine.

L'équation de transport de la sensibilité est une équation de transfert radiatif. Ainsi les sources de sensibilité, émises aux frontières, sont propagées dans le milieu de la même façon que se propage la luminance en transfert radiatif. Il nous est donc facile, une fois les sources de sensibilité connues, d'imaginer l'impact qu'elles auront sur la sensibilité d'une observable donnée. En revanche, nous verrons que la construction et l'interprétation physique de ces sources de sensibilité n'est pas aussi évidente que la construction du modèle de transport et que c'est au contraire la difficulté du modèle de sensibilité : construire mathématiquement les conditions aux limites du modèle de sensibilité et proposer une interprétation physique des sources.

### Les sources de sensibilité

En toute généralité, la condition à la limite de sensibilité est composée de 13 termes. Chacun de ces termes représente une contribution différente, en tant que source de sensibilité. Certaines de ces sources ont déjà été introduites dans l'article, comme les contributions surfaciques ou volumiques du problème radiatif, et d'autres sont présentées ici pour la première fois. Nous verrons que, dans leur globalité, ces sources feront intervenir la luminance et ses gradients spatiaux et angulaires (dérivée spatiale et dérivée angulaire). Comme pour le chapitre précédent, il faudra donc que nous soyons très précis dans l'utilisation du concept de source. Par exemple, si nous regardons le modèle de sensibilité de façon découplée, alors les termes en luminance et en ses gradients qui apparaîtront dans la condition à la limite pourront être qualifiés de sources surfaciques. Par contre, lorsque l'on s'intéressera au problème couplé (sensibilité, luminance, dérivée spatiale et dérivée angulaire) alors les mêmes termes seront des termes de couplages et ne seront plus qualifiés de sources. Dans l'ensemble de ce chapitre, nous regardons le modèle de sensibilité de façon découplée et nous n'hésiterons donc pas à parler de sources de sensibilité, même si la connaissance effective de ces sources passe par la connaissance de la solution des autres modèles. Une façon de porter ce positionnement à son paroxysme est de présenter la condition à la limite de sensibilité en distinguant les sources de sensibilité émises par la paroi et le terme de réflexion de la sensibilité incidente à la paroi :

$$s(\vec{x}, \vec{\omega}, \pi) = \xi + \rho(\vec{x}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}) d\vec{\omega}' s(\vec{x}, \vec{\omega}', \pi) \quad \vec{x} \in \partial G(\pi) \quad (3.2)$$

avec  $\xi$  une fonction comprenant l'intégralité des sources de sensibilité du problème découplé : une fonction de la luminance et de ses dérivées spatiales et angulaires.

Dans ce chapitre, nous écrirons la condition à la limite de sensibilité en toute généralité (en explicitant  $\xi$ ) et nous la déclinerons selon trois configurations radiatives de parois : en paroi noire, en paroi diffuse et en paroi spéculaire (Sec. 3.3). Les développements théoriques qui mènent à ces 13 termes ne précèdent pas l'introduction de la condition à la limite mais seront présentés dans une partie ultérieure. Le choix de séparer les enchaînements mathématiques du résultat final est uniquement motivé par l'intérêt que nous portons à la construction d'un intuitif physique sur chacune de ces sources. Nous verrons au moment venu que les gestes mathématiques qui mènent à la condition à la limite générale contiennent en eux mêmes des images conceptuelles très différentes de celles que nous essaierons de transmettre sur les sources de sensibilité. Ensuite (Sec. 3.4) nous entrerons dans la pleine interprétation physique de chacune des sources de sensibilité via des illustrations de la condition à la limite pour des déformations de frontières données et pour des parois noires. La section suivante (Sec. 3.5) viendra en continuité en illustrant la condition à la limite pour les mêmes

déformations de frontières et pour des parois réfléchissantes. Enfin (Sec. 3.6), nous verrons comment le modèle de sensibilité est appliqué dans les situations de discontinuité radiatives et géométriques. Nous clôturerons ce chapitre en donnant les développements mathématiques à l'origine de la forme générale de la condition à la limite de sensibilité (Sec. 3.7). Mais pour que la lecture de ces 5 parties soit possible, il faut d'abord que nous introduisions les choix de modélisation qui ont conditionné cette thèse.

## 3.2 Choix de modélisation

### 3.2.1 La luminance et ses variables indépendantes

Le premier effort de formalisme consiste à réécrire le modèle de sensibilité géométrique, tel qu'il est présenté dans l'article, à partir des définitions de chacune des variables de la luminance. Dans une configuration stationnaire et monochromatique du transfert radiatif, la luminance est une fonction de deux variables indépendantes, la position  $\vec{x}$  et la direction  $\vec{\omega}$ . Il convient de préciser ce que nous entendons par position : en géométrie une position est un point<sup>1</sup> de l'espace. Nous faisons souvent un parallèle entre **position** et **vecteur**, ainsi nous confondons **représentation géométrique**<sup>2</sup> et appartenance à un espace vectoriel. Si nous sous-entendons qu'un repère est défini dans l'espace géométrique, nous pouvons confondre avec précision position et vecteur tant que l'espace géométrique (ici  $\mathbb{R}^3$ ) reste un espace vectoriel. Une fois cet avertissement donné, nous pouvons écrire la phrase suivante.

**La position**  $\vec{x}$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  qui appartient à l'ensemble  $G$  des positions du domaine géométrique (un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$ ). Le domaine géométrique est délimité par la frontière  $\partial G$ , c'est-à-dire que l'ensemble  $G$  comprend l'intérieur du domaine géométrique et sa frontière. L'intérieur du domaine géométrique, donc de l'ensemble  $G$  des positions, correspond à la réunion de tous les ouverts inclus dans  $G$ , il est noté  $\overset{\circ}{G}$ .

$$G = \overset{\circ}{G} \cup \partial G$$

Cette égalité découle de la définition de frontière à partir de l'adhérence de  $G$  notée  $\bar{G}$ . Si  $G$  est fermé alors  $G = \bar{G}$  et la définition ci-dessus reste cohérente. Cette description de  $G$  par son intérieur et sa frontière permettra de bien caractériser les déformations appliquées au domaine à travers un paramètre géométrique.

**La direction**  $\vec{\omega}$  est un élément de la sphère unité  $\mathcal{S}$  : elle peut avoir plusieurs représentations, soit un vecteur normé de  $\mathbb{R}^3$ , soit un couple d'angles  $(\theta, \varphi)$  dans un système de coordonnées sphériques usuel. Dans le jeu des écritures formelles, en accord avec la tradition du transfert radiatif, nous utiliserons plus souvent le vecteur normé ; dans les phases plus calculatoires, nous utiliserons la représentation angulaire.

**Le paramètre géométrique** Dans le cadre d'une étude de sensibilité à la géométrie, la luminance est susceptible d'être influencée par une perturbation de la géométrie, en tout point du domaine  $G$  et dans chaque direction de  $\mathcal{S}$ . Le paramètre à l'origine de la déformation géométrique, noté  $\tilde{\pi}$ , devient alors une troisième variable indépendante pour la luminance. Nous écrirons donc  $L \equiv L(\vec{x}, \vec{\omega}, \tilde{\pi})$ . Sans expliciter pour l'instant la façon dont nous faisons intervenir  $\tilde{\pi}$  dans la définition de la déformation du domaine, nous pouvons déjà écrire  $G \equiv G(\tilde{\pi}) = \overset{\circ}{G}(\tilde{\pi}) \cup \partial G(\tilde{\pi})$ .

1. c'est-à-dire, dans les éléments d'Euclide, ce dont la partie est nulle.

2. la représentation géométrique du point n'est pas une définition : selon les édifices qui définissent le point (Euclide, Cantor..), les images qui y sont associées évoluent. Ici nous donnons celle dont nous sommes imprégnés par notre formation.

### 3.2.2 La sensibilité géométrique

À partir de la luminance et de ses trois variables indépendantes  $(\vec{x}, \vec{\omega}, \tilde{\pi})$ , nous définissons la quantité sensibilité géométrique :

$$s \equiv s(\vec{x}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) = \partial_{\tilde{\pi}} L(\vec{x}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) = \partial_3 L(\vec{x}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) \quad (3.3)$$

comme étant la grandeur qui quantifie l'impact d'une perturbation de la frontière  $\partial G(\tilde{\pi})$  sur la luminance prise en un point donné  $\vec{x}$  de  $G(\tilde{\pi})$  et dans une direction donnée  $\vec{\omega}$  de  $\mathcal{S}$ , respectivement indépendants de la perturbation géométrique.

Cette définition relève d'un choix conceptuel fort concernant la façon d'observer et de représenter l'influence de la géométrie sur la luminance. En effet, d'autres descriptions sont possibles. Cependant leurs utilisations dévoileraient des images physiques différentes. Par exemple, étant donné que l'intérieur du domaine  $\mathring{G}(\tilde{\pi})$  est une fonction de  $\tilde{\pi}$ , un choix alternatif sur la conception de la sensibilité aurait été d'affecter cette dépendance à chacun des éléments de  $\mathring{G}(\tilde{\pi})$ , c'est-à-dire de représenter la variable  $\vec{x}$  non plus comme une variable indépendante de la géométrie mais comme une fonction de la géométrie (i.e.  $\vec{x} \equiv \vec{x}(\tilde{\pi})$ ). Dans cette représentation, la sensibilité décrirait alors l'impact de la déformation du domaine  $G(\tilde{\pi})$  sur la luminance qui serait cette fois regardée dans une direction donnée  $\vec{\omega}$  mais en un point  $\vec{x}(\tilde{\pi})$  dont la position suivrait la déformation de la géométrie. Une telle représentation donnerait naissance à un autre formalisme et peut être à d'autres intuitions physiques relatives aux déformations de la géométrie. Le choix de travailler, au contraire, avec  $\vec{x}$  comme une variable indépendante de la perturbation géométrique s'est fait implicitement à partir des précédents travaux, notamment ceux de [Dauchet, 2012].

### 3.2.3 Séparation des problèmes paramétriques et géométriques

Avec ce choix de modélisation, nous trouvons un avantage dans la description de l'influence d'une déformation de la géométrie sur les propriétés radiatives du milieu. En effet, il est possible que les propriétés radiatives du milieu soient perturbées par une déformation de la géométrie. Par exemple, l'agrandissement d'une enceinte fermée pourrait induire une modification du champ du coefficient d'extinction  $k_e$  dans le milieu. Ainsi la luminance serait à la fois perturbée par l'agrandissement de la géométrie et par la modification du coefficient d'extinction. L'avantage de notre choix de modélisation (soit de l'indépendance des variables  $\vec{x}$ ,  $\vec{\omega}$  et  $\tilde{\pi}$ ) est dans la possibilité de traiter séparément l'influence de  $\tilde{\pi}$  sur la géométrie et son influence sur les propriétés radiatives du milieu et des surfaces. Dans un problème de transfert radiatif, si le domaine géométrique  $G(\tilde{\pi})$  est déformé par une perturbation de  $\tilde{\pi}$ , les positions  $\vec{x}$  incluses dans ce domaine, elles, ne le sont pas. Par conséquent, toutes les fonctions radiatives du milieu qui sont définies spatialement, et donc qui dépendent de  $\vec{x}$ , ne suivent pas non plus la déformation. Les champs des coefficients d'absorption  $k_a \equiv k_a(\vec{x})$ , de diffusion  $k_d \equiv k_d(\vec{x})$  et de la fonction de phase ne sont donc pas perturbés par un éventuel déplacement de  $\vec{x}$ .

En revanche, alors qu'à travers l'indépendance de  $\vec{x}$ , les champs des propriétés radiatives ne suivent pas la déformation du domaine, elles en restent néanmoins dépendantes (par exemple, une modification du champ du coefficient d'extinction). Cette dépendance à la déformation du domaine sera modélisée par une dépendance paramétrique à  $\tilde{\pi}$ , et  $\tilde{\pi}$  sera une variable indépendante des propriétés radiatives, par exemple  $k_e = k_e(\vec{x}, \tilde{\pi})$ . Ainsi, lorsque nous chercherons à étudier l'influence du paramètre  $\tilde{\pi}$  sur la luminance en un point du volume, nous découplerons le problème général de sensibilité à  $\tilde{\pi}$  en la somme d'un problème de sensibilité paramétrique pour lequel la géométrie est fixée et d'un problème de sensibilité géométrique pour lequel les propriétés radiatives du milieu sont fixées.

Cette **séparation** est possible grâce à la linéarité de l'opérateur de dérivation. Par exemple, dans un problème de transfert radiatif en milieu froid purement absorbant, la dérivation de l'observable  $k_a(\vec{x}, \tilde{\pi})L(\vec{x}, \vec{\omega}, \tilde{\pi})$  par rapport à  $\tilde{\pi}$  donne le produit des dérivées  $\partial_{\tilde{\pi}} k_a(\vec{x}, \tilde{\pi})L(\vec{x}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) + k_a(\vec{x}, \tilde{\pi})s(\vec{x}, \vec{\omega}, \tilde{\pi})$ . Le premier terme de ce produit demande de déterminer la sensibilité du coefficient d'absorption au paramètre  $\tilde{\pi}$ , c'est-à-dire de résoudre un problème de sensibilité paramétrique dans

une géométrie donnée. Le deuxième terme demande de résoudre la sensibilité géométrique  $s(\vec{x}, \vec{\omega}, \vec{\pi})$  pour un champ d'absorption fixé. L'étude de sensibilité de l'observable demandera donc la résolution de deux problèmes de sensibilité différents, un paramétrique et un géométrique. Dans cette thèse, nous nous concentrerons sur la résolution du problème géométrique et donc à l'étude de la sensibilité géométrique de la luminance. Les propriétés radiatives du milieu seront toujours considérées comme indépendantes de  $\vec{\pi}$  tout en sachant que, dans l'absolu, il sera éventuellement nécessaire de résoudre également un problème de sensibilité paramétrique. Ce choix est largement soutenu par le fait que les sensibilités paramétriques sont étudiées depuis longtemps dans notre communauté Monte-Carlo et n'apportent pas de difficultés (à l'exception de quelques problèmes de convergences).

### 3.2.4 Description de la déformation géométrique de la frontière

Le choix précédent sur l'indépendance des variables  $(\vec{x}, \vec{\omega}, \vec{\pi})$  a une conséquence directe sur le type d'équation que nous obtenons pour la sensibilité dans le milieu. En effet, dans les paragraphes précédents, nous avons évoqué la diversité des images physiques qui s'offre à nous selon le choix de modélisation sur les variables de la luminance. L'équation de transport que nous obtenons pour la sensibilité (Eq. 3.1) est une illustration parfaite de cette remarque : en choisissant l'indépendance des variables de la luminance, nous trouvons un modèle de transport de sensibilité dans le milieu identique à celui du transfert radiatif usuel, ce qui n'aurait pas été le cas autrement.

Dans cette partie, nous allons étendre ce choix de modélisation sur les variables spatiales et angulaires des fonctions définies aux frontières. Nous verrons que la séparation des problèmes de sensibilités paramétriques et géométriques s'applique avec le même esprit sur ces fonctions. La seule différence est que leur statut de fonctions uniquement définies à la frontière demande d'introduire une nouvelle variable indépendante uniquement définie sur un espace propre à la matière de la paroi.

#### 3.2.4.1 Espace matériel et espace géométrique

À la frontière du domaine, les propriétés radiatives des parois peuvent être modifiées par une perturbation de la géométrie. Par exemple, une paroi rainurée avec des rainures d'une forme et d'une taille donnée peut voir sa micro-morphologie modifiée, et ses propriétés de réflexion peuvent être perturbées par la déformation de la frontière. Ainsi, nous agissons à la frontière comme nous l'avons fait pour le milieu et cherchons à rendre indépendantes les variables position, direction et paramètre géométrique. De cette façon, nous séparons la question de la sensibilité géométrique de la luminance de la question de la sensibilité paramétrique de la luminance (par exemple, aux propriétés de réflexions).

Cependant, contrairement à l'intérieur du domaine, les fonctions qui caractérisent les propriétés de surface (coefficient de réflexion, température de la paroi, brdf, etc.) sont définies à la frontière et uniquement à la frontière. Cette condition propre aux propriétés radiatives de frontière demande de formaliser la séparation des problèmes géométriques et paramétriques. Pour cela, il sera nécessaire de définir une nouvelle variable indépendante : une variable qui indiquera une position sur la matière constituant la frontière et qui sera indépendante de  $\vec{\pi}$ . Nous nommerons cette quatrième variable indépendante  $\vec{y}$ , et elle sera utilisée pour repérer un point sur ce que nous appellerons **l'espace matériel**, qui représentera un espace de référence pour la matière de la frontière (et donc ses propriétés radiatives). Cet espace matériel sera distinct de **l'espace géométrique** dans lequel le domaine géométrique  $G(\vec{\pi})$  et la frontière  $\partial G(\vec{\pi})$  sont définis. Les fonctions représentant les propriétés des parois seront des fonctions de  $(\vec{y}, \vec{\omega})$  et seront définies sur **le support matériel**, qui sera la référence radiative de la frontière  $\partial G(\vec{\pi})$  de l'espace géométrique dans l'espace matériel.

#### 3.2.4.2 Formalisation de la déformation géométrique de la frontière

Formellement, la déformation géométrique de la frontière se traduira par la définition de deux fonctions : une qui représente la paramétrisation de la frontière par  $\vec{\pi}$  et une qui représente la

paramétrisation de l'orientation de son repère local (orienté par la normale de la frontière).

**La fonction  $\mathcal{Z}$**  définit la frontière du domaine géométrique. Pour une valeur de  $\bar{\pi}$  donnée, elle associe à une position  $\vec{y}$  de l'espace matériel, une position  $\vec{y}$  dans l'espace géométrique :

$$\vec{y} = \mathcal{Z}(\vec{y}, \bar{\pi}) \quad (3.4)$$

Lorsque nous utiliserons la notation  $\vec{y}$ , cela traduira le fait qu'un point attaché à la matière, repéré dans l'espace matériel par une valeur de  $\vec{y}$ , occupe la position  $\vec{y}$  sur la surface de l'espace géométrique pour une valeur de  $\bar{\pi}$  donnée. La position  $\vec{y}$  permettra donc de repérer comment la matière suit la déformation de la surface  $\partial G(\bar{\pi})$ . Nous l'utiliserons souvent comme décrivant une position de la surface dans l'espace géométrique mais nous la considérerons toujours comme une fonction de  $\vec{y}$  et de  $\bar{\pi}$ .

**La fonction  $\Omega$**  traduit la dépendance du repère local (orienté par la normale) au paramètre géométrique. En transfert radiatif, il est habituel de construire un repère associé à la paroi de façon à définir les propriétés angulaires de surface de façon locale. Typiquement, nous définissons un jeu de coordonnées sphériques autour de la normale à la paroi et c'est à partir de ce jeu de coordonnées locales que nous décrivons toutes les propriétés directionnelles de la surface. Par exemple, pour une paroi diffuse, la brdf sera  $p(\vec{\omega}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{n})/\pi$  où  $\vec{n}$  est la normale à la paroi et, dans une telle écriture,  $\vec{\omega}$  est considéré dans un repère attaché à la paroi et orienté par la normale. **Le repère local de la paroi, étant associé à la matière et utilisé pour la définition de ses propriétés radiatives, sera considéré dans l'espace matériel.**

Dans un problème de transfert radiatif, les parois de la frontière sont potentiellement toutes orientées de façons différentes, le passage du repère de notre espace matériel à celui du repère local de chacune de ces parois ne représente finalement qu'une rotation de l'ensemble du repère matériel.

Lorsque les frontières d'un problème radiatif sont déformées par une variation du paramètre géométrique  $\bar{\pi}$ , la rotation qui permet le passage de l'espace matériel au repère local de la paroi dépend de  $\bar{\pi}$ . On note cette rotation  $\Omega$ . Pour une valeur de  $\bar{\pi}$  et une position de l'espace matériel  $\vec{y}$  donnée, elle associe, à tout vecteur unitaire de l'espace matériel, un vecteur unitaire correspondant dans le repère local de la paroi de l'espace géométrique :

$$\vec{\omega} = \Omega(\vec{\omega}, \vec{y}, \bar{\pi}) \quad (3.5)$$

On notera  $\vec{\omega}$ , ou par exemple  $\vec{n}$ , (soit  $\vec{\cdot}$ ) les vecteurs unitaires de l'espace géométrique qui sont associés aux vecteurs  $\vec{\omega}$ , ou  $\vec{n}$ , de l'espace matériel, sur lequel seront définies les propriétés radiatives de chacune des parois. Comme pour  $\vec{y}$ , le vecteur  $\vec{\omega}$  de l'espace géométrique sera souvent utilisé pour désigner une direction d'observation sur la frontière, mais il sera toujours considéré comme une fonction de  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{y}$  et  $\bar{\pi}$ .

### 3.2.5 Résumé des variables et des descripteurs

Les fonctions représentant les propriétés radiatives des parois seront donc des fonctions de  $(\vec{y}, \vec{\omega})$  (pour tout point de l'espace matériel : qui reste attaché à la matière quand la paroi se déforme). Par exemple, la température  $T(\vec{y})$ , la brdf  $p_s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\omega}')$ , le coefficient de réflexion  $\rho(\vec{y}, \vec{\omega})$  et d'émission  $\varepsilon(\vec{y}, \vec{\omega})$ .

Dans l'espace matériel, la fonction  $I(\vec{y}, \vec{\omega}, \bar{\pi})$  est définie comme étant la luminance matérielle. Elle est l'équivalent, sur le support matériel, de la luminance définie sur la frontière de l'espace géométrique  $L(\vec{y}, \vec{\omega}, \bar{\pi})$ .

Les fonctions représentant les propriétés radiatives du milieu seront des fonctions de  $(\vec{x}, \vec{\omega})$  (variables indépendantes de  $\bar{\pi}$ ), par exemple le coefficient d'absorption  $k_a(\vec{x})$ , de diffusion  $k_d(\vec{x})$  et la fonction de phase  $p_v(\vec{x}, \vec{\omega}, \vec{\omega}')$ .



Enfin, pour tout point du domaine géométrique  $G(\tilde{\pi})$ , nous travaillerons à partir de la luminance  $L(\vec{x}, \vec{\omega}, \tilde{\pi})$  et de la sensibilité géométrique  $s(\vec{x}, \vec{\omega}, \tilde{\pi})$ .

Dans la suite de nos écritures, nous utiliserons donc les variables  $\vec{x}$ ,  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{y}$  et  $\tilde{\pi}$  en tant que variables indépendantes, et chacun des autres termes seront des fonctions de ces variables, notamment  $\vec{y}$  (fonction de  $\vec{y}$  et de  $\tilde{\pi}$ ) et  $\vec{\omega}$  (fonction de  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{y}$  et  $\tilde{\pi}$ ). Nous utiliserons très librement la correspondance entre  $\vec{y}$  et  $\vec{y}$  ainsi qu'entre  $\vec{\omega}$  et  $\vec{\omega}$ . Pour les développements théoriques, nous passerons systématiquement par la rigueur des fonctions  $\mathcal{Z}$  et  $\Omega$  et il n'y aura pas d'ambiguïté possible sur la nature des variables de la luminance. En revanche, si nous nous attachions à ce formalisme dans toutes nos écritures, la lourdeur des notations n'aiderait pas l'interprétation physique que nous proposons et l'intuitif que nous essayons de construire. Nous demanderons donc au lecteur une agilité dans le passage de  $\vec{y}$  à  $\vec{y}$  (et réciproquement), et dans le passage de  $\vec{\omega}$  à  $\vec{\omega}$  (et réciproquement).

### 3.3 La condition à la limite de sensibilité géométrique

#### 3.3.1 Sources de sensibilité géométriques

Pour que la condition à la limite générale de sensibilité soit lisible et pour que nous puissions lui donner un sens physique, nous commencerons par faire l'inventaire des différentes contributions radiatives que nous identifierons comme les sources de sensibilité. À ces contributions sont associées les quatre opérateurs  $\mathcal{G}[L]$ ,  $\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}}$ ,  $\partial_{1, \vec{u}}$  et  $\partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}}$  que nous avons introduits dans le chapitre précédent. Dans le contexte de la modélisation de la sensibilité géométrique, ces opérateurs apparaissent dans le passage entre "espace matériel" et "espace géométrique" que nous avons évoqué plus haut lors de la formalisation de la déformation géométrique et des variables indépendantes du problème.

##### 3.3.1.1 Contribution du milieu participant

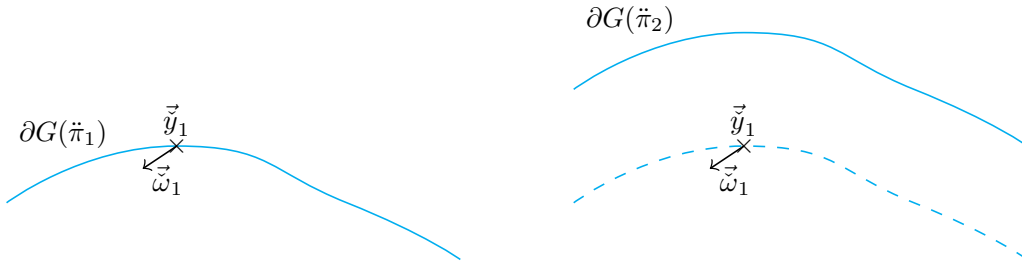


FIGURE 3.1 – Schéma milieu participant  $G(\tilde{\pi}_1)$  et  $G(\tilde{\pi}_2)$

Nous illustrons ici, de la même manière que dans l'article, que le milieu participant a une contribution sur la condition à la limite de sensibilité et que, à travers ses propriétés d'absorption et de diffusion, il est une source de sensibilité.

Dans la Fig. 3.1 sont représentées deux configurations géométriques,  $G(\tilde{\pi}_1)$  et  $G(\tilde{\pi}_2)$ , dont les frontières  $\partial G(\tilde{\pi}_1)$  et  $\partial G(\tilde{\pi}_2)$  sont des parois noires à la même température  $T_1$ . Dans cette illustration, la sensibilité correspond à la différence de la luminance prise en  $(\vec{x} = \vec{y}_1, \vec{\omega} = \vec{\omega}_1)$  dans la configuration  $\partial G(\tilde{\pi}_1)$  et dans la configuration  $\partial G(\tilde{\pi}_2)$ . Dans la configuration  $G(\tilde{\pi}_1)$  la luminance prise en une position  $\vec{x} = \vec{y}_1$  sur la frontière, dans la direction  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1$ , correspond à la luminance d'équilibre à la température de la surface  $\partial G(\tilde{\pi}_1)$ . Dans la configuration  $G(\tilde{\pi}_2)$ , la paroi est décalée, créant un volume supplémentaire dont les propriétés radiatives sont celles du milieu semi-transparent à l'intérieur du domaine. Dans cette configuration, la luminance en  $(\vec{x} = \vec{y}_1, \vec{\omega} = \vec{\omega}_1)$  dépend donc du transport de luminance dans ce volume supplémentaire : la luminance d'équilibre émise par la frontière  $\partial G(\tilde{\pi}_2)$  y est atténuée, par absorption ou par diffusion ; de nouvelles sources peuvent provenir de l'intérieur du volume supplémentaire et peuvent être diffusées dans la direction  $\vec{\omega}_1$ . La différence de la luminance en  $(\vec{x} = \vec{y}_1, \vec{\omega} = \vec{\omega}_1)$  entre les deux configurations géométriques dépend



donc de la capacité du volume supplémentaire à absorber ou diffuser le rayonnement incident émis par la frontière et à diffuser le rayonnement provenant de l'intérieur du domaine. Nous voyons bien apparaître les termes collisionnels de l'ETR comme étant une source de sensibilité : on retrouvera bien le terme donné au chapitre précédent, et on retrouvera notamment la façon avec laquelle interviennent les coefficients d'absorption et de diffusion. Pour cette source de sensibilité, c'est la physique de l'ETR en proche paroi qui devra guider l'interprétation physique. Par exemple, si le milieu est transparent, la différence de luminance en  $(\vec{x} = \vec{y}_1, \vec{\omega} = \vec{\omega}_1)$  entre  $G(\tilde{\pi}_1)$  et  $G(\tilde{\pi}_2)$  est nulle.

**Notation  $\mathcal{G}[L]$**  Comme dans le chapitre précédent, cette contribution apparaîtra sous la notation  $\mathcal{G}[L]$  qui représente l'opérateur  $\mathcal{G}$  appliqué à la luminance, de variables  $\vec{x}$ ,  $\vec{\omega}$  et  $\tilde{\pi}$  de sorte que :

$$\mathcal{G}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ L(\vec{x}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) & \longmapsto & \mathcal{G}[L] \end{array} \quad (3.6)$$

avec

$$\mathcal{G}[L] = -k_d L(\vec{x}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) - k_a L(\vec{x}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) + k_d \int_{\Omega} p_{\Omega}(\vec{\omega}' | \vec{\omega}) d\vec{\omega}' L(\vec{x}, \vec{\omega}', \tilde{\pi}) \quad (3.7)$$

L'opérateur  $\mathcal{G}$  appliqué à la luminance correspond à la somme des termes collisionnels de l'ETR en milieu froid.

*Note* : Dans le chapitre précédent (Sec. 2), cette contribution apparaissait dans la condition à la limite de la dérivée spatiale car nous différencions la luminance, pour une géométrie donnée, le long d'un vecteur de déplacement orienté depuis la surface vers l'intérieur du domaine. Ici, la contribution est la même mais l'image est différente, le point d'observation est donné (on reste en  $(\vec{x} = \vec{y}_1, \vec{\omega} = \vec{\omega}_1)$ ) et c'est la frontière qui est déplacée.

### 3.3.1.2 Contributions surfaciques

À travers une illustration, nous verrons que lorsque la paroi est déplacée ou déformée, les variations spatiales de la luminance incidente à la paroi ainsi que les fonctions définies à la frontière (propriétés d'émission, de réflexion, de la luminance d'équilibre etc.) qui ne sont pas homogènes sont des sources de sensibilités.

Pour illustrer schématiquement l'influence des propriétés de surfaces qui ne sont pas homogènes sur la paroi, considérons un problème de transfert radiatif où le milieu est transparent et les parois sont noires avec un profil de température variable sur la surface  $T(\vec{y})$ . La Fig. 3.2 montre deux configurations géométriques paramétrées par  $\tilde{\pi}_1$  et  $\tilde{\pi}_2$ . Dans cette illustration, la sensibilité correspond

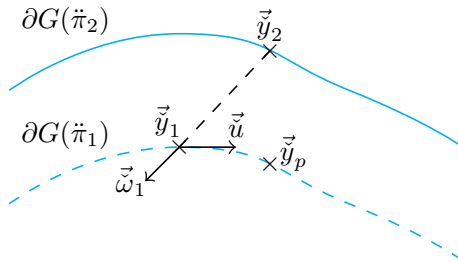


FIGURE 3.2 – Contribution dérivée surfacique sur le support géométrique.

à la différence de la luminance prise en  $(\vec{x} = \vec{y}_1, \vec{\omega} = \vec{\omega}_1)$  dans la configuration  $\partial G(\tilde{\pi}_1)$  et dans la configuration  $\partial G(\tilde{\pi}_2)$ . Dans la configuration  $\partial G(\tilde{\pi}_1)$ , la luminance en  $(\vec{y}_1, \vec{\omega}_1)$  correspond à la luminance d'équilibre à  $T(\vec{y}_1)$ . Dans la configuration  $\partial G(\tilde{\pi}_2)$ , la luminance en  $(\vec{y}_1, \vec{\omega}_1)$  correspond à la luminance d'équilibre à la température  $T(\vec{y}_2)$ ,  $\vec{y}_2$  étant la position perçue sur la frontière  $\partial G(\tilde{\pi}_2)$  le long de la ligne de visée partant de  $\vec{y}_1$  dans la direction  $-\vec{\omega}_1$ . Les propriétés de la matière étant inchangées lors de la déformation de la frontière, nous pouvons identifier la position équivalente à  $\vec{y}_2$  dans la configuration  $\partial G(\tilde{\pi}_1)$ . Sur la Fig. 3.2, nous avons représenté cette position sous le nom

de  $\vec{y}_p$  de sorte que  $L^{eq}(T(\vec{y}_p)) = L^{eq}(T(\vec{y}_2))$ . Radiativement, nous avons donc deux différentiations équivalentes :

- la différence de luminance en  $(\vec{y}_1, \vec{\omega}_1)$  dans la configuration  $\partial G(\tilde{\pi}_1)$  et dans la configuration  $\partial G(\tilde{\pi}_2)$ ,
- la différence de luminance en  $(\vec{y}_1, \vec{\omega}_1)$  et  $(\vec{y}_p, \vec{\omega}_1)$ , dans la configuration  $\partial G(\tilde{\pi}_1)$ .

Lorsque  $\tilde{\pi}_2$  tend vers  $\tilde{\pi}_1$ , il est donc équivalent de considérer la sensibilité à la déformation de la frontière comme une dérivée surfacique de la luminance.

**Notations  $\partial_{\vec{D}}$  et  $\partial_{1, \vec{u}}$**  Lorsqu'elles modélisent les propriétés radiatives de surface, les fonctions sont définies dans l'espace matériel à travers les variables  $(\vec{y}, \vec{\omega})$ . Nous utilisons l'opérateur  $\partial_{\vec{D}}$  (défini dans le chapitre précédent [Sec. 2.2.2.1](#)) pour représenter la dérivation de ces fonctions le long d'un déplacement sur la surface définie dans l'espace matériel (voir [Fig. 3.3](#)). La notation  $\mathcal{D}$  indique la dérivation **selon le déplacement** sur la surface et le vecteur  $\vec{u}$  **la direction** de ce déplacement.

Considérons la fonction  $I(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi})$ , qui représente la luminance définie sur une surface de l'espace matériel, l'opérateur  $\partial_{\vec{D}}$  appliqué à cette fonction donne :

$$\partial_{\vec{D}} I(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{I(\mathcal{P}(\vec{y} + \tau \vec{u}), \vec{\omega}, \tilde{\pi}) - I(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi})}{\tau} \quad (3.8)$$

où  $\mathcal{P}(\vec{y} + \tau \vec{u})$  est la projection sur la surface du point  $\vec{y}$  après déplacement de  $\tau$  dans la direction  $\vec{u}$  (voir [Fig. 3.3](#)).

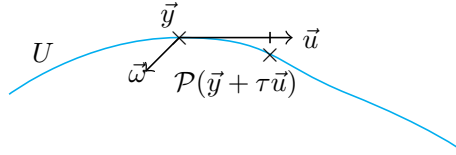


FIGURE 3.3 – Schéma dérivée surfacique sur le support matériel  $U$

Dans l'expression de  $\partial_{\vec{D}} I(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi})$  — que nous appellerons la dérivée surfacique de la luminance matérielle — la projection garantit que le déplacement à partir de  $\vec{y}$  dans la direction  $\vec{u}$  reste rigoureusement sur le support matériel. En effet, la fonction  $I(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi})$  est uniquement définie sur le support matériel et si le déplacement infinitésimal s'effectuait le long du vecteur directeur  $\vec{u}$  sans être projeté sur la surface, la dérivée surfacique ne serait pas définie.

En revanche, dans l'espace géométrique, la luminance est définie en tout point du domaine  $G$ . Nous utilisons l'opérateur  $\partial_{1, \vec{u}}$  (également défini dans le chapitre précédent [Sec. 2.1](#)) pour représenter la dérivée surfacique de la luminance géométrique. Il s'écrit comme la dérivée par rapport à la première variable dans la direction  $\vec{u}$  :

$$\partial_{1, \vec{u}} L(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) = \lim_{\tilde{\tau} \rightarrow 0} \frac{L(\vec{y} + \tilde{\tau} \vec{u}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) - L(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi})}{\tilde{\tau}} \quad (3.9)$$

La [Fig. 3.4](#) illustre cette dérivée sur le support géométrique  $\partial G(\tilde{\pi})$ .

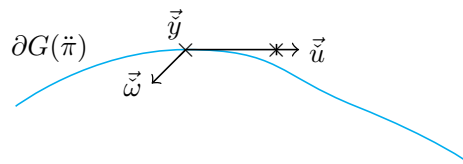


FIGURE 3.4 – Schéma dérivée surfacique sur le support géométrique  $\partial G(\tilde{\pi})$

**Notation**  $\|\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\|$  Si les deux opérateurs étaient définis dans le même espace, ils donneraient le même résultat au premier ordre. Ici, la dérivée surfacique sur le support matériel n'est pas forcément égale à la dérivée surfacique sur le support géométrique, parce qu'il peut y avoir un changement de mesure entre les deux espaces (par exemple, si la déformation est un étirement) : un déplacement infinitésimal  $\tilde{\tau}$  sur le support géométrique n'est donc pas forcément équivalent au déplacement infinitésimal correspondant  $\tau$  sur le support matériel (comme illustré Fig. 3.5 où  $\tilde{\tau} \neq \tau$ ).

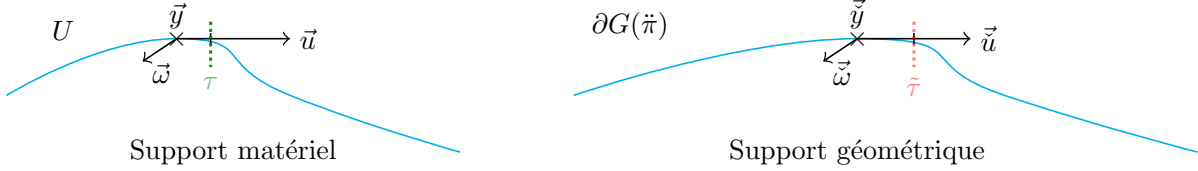


FIGURE 3.5 – Schéma du changement de mesure entre le support matériel et le support géométrique

La dérivée surfacique sur le support matériel  $\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}}$  est donc toujours associée à un terme supplémentaire qui représente le changement de mesure. Ce terme s'écrit  $\|\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\|$ , et on a :

$$\partial_{1, \vec{u}} L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = \|\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} I(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \quad (3.10)$$

Dans la pratique, ce changement de mesure est très important car toutes les transformations géométriques qui se traduiront par un étirement de la surface engendreront cette différence de mesure entre le support géométrique et le support matériel. Nous verrons plusieurs exemples d'applications dans lequel ce changement de mesure sera calculé en détail.

### 3.3.1.3 Contribution angulaire

Nous pouvons illustrer une contribution angulaire en prenant l'exemple de la rotation illustrée Fig. 3.6 qui schématise les deux configurations de  $G(\vec{\pi})$  pour  $\vec{\pi}_1$  et  $\vec{\pi}_2$  avec le paramètre  $\vec{\pi}$  qui contrôle une inclinaison du plan autour du point fixe  $\vec{y}_f$ .

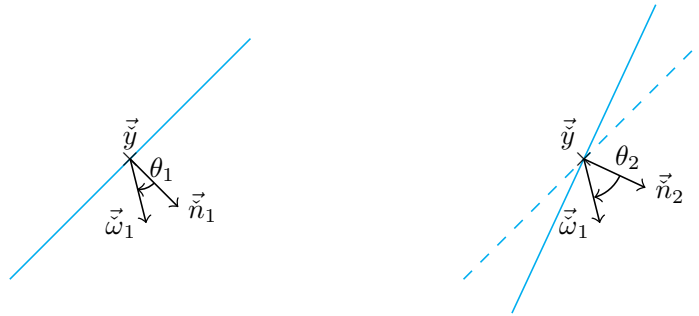


FIGURE 3.6 – Schéma dérivée angulaire

Pour cet exemple, considérons que la luminance sortante soit connue sous la forme d'une fonction analytique de la direction d'émission :  $L(\vec{y}, \vec{\omega}) = f(\vec{y}, \cos(\theta))$  avec  $\cos(\theta) = \vec{\omega} \cdot \vec{n}$

Nous voulons connaître la sensibilité de la luminance en  $(\vec{y}_f, \vec{\omega}_1)$  par rapport à l'inclinaison du plan par  $\vec{\pi}$ . Dans la configuration  $G(\vec{\pi}_1)$ , la luminance va prendre la valeur de la luminance sortante, connue,  $f(\vec{y}_f, \cos(\theta_1))$ . Dans la configuration  $G(\vec{\pi}_2)$ , la luminance en  $(\vec{y}_f, \vec{\omega}_1)$  va prendre la valeur de la luminance sortante, connue, mais pour un autre angle par rapport à la normale ( $\vec{\omega}_1 \cdot \vec{n}_1 \neq \vec{\omega}_1 \cdot \vec{n}_2$ ), soit  $f(\vec{y}_f, \cos(\theta_2))$ . En faisant tendre  $\vec{\pi}_2$  vers  $\vec{\pi}_1$ , l'angle  $\theta_1$  tendra vers  $\theta_2$  et la sensibilité sera de l'ordre de la différence entre  $f(\vec{y}_f, \cos(\theta_1))$  et  $f(\vec{y}_f, \cos(\theta_2))$ . Nous voyons alors que la sensibilité au paramètre  $\vec{\pi}$  sera équivalente à une dérivée angulaire de la luminance sortante.

**Notation**  $\partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}}$  Les dépendances angulaires du coefficient de réflexion  $\rho(\vec{y}, \vec{\omega})$ , de la brdf  $p_{\Omega}(\vec{\omega}' | \vec{\omega})$ , ainsi que les dépendance angulaires de la luminance, seront donc sources de sensibilité lorsque la déformation géométrique pilotée par  $\vec{\pi}$  viendra modifier l'orientation de la normale du support géométrique  $\vec{n}$ .

Nous utilisons donc l'opérateur  $\partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}}$  (défini dans le chapitre précédent [Sec. 2.1](#)) pour représenter les sources de sensibilité venant des dépendances angulaires des propriétés de surface. Il correspondra à la dérivation de fonctions définies sur le support matériel et sur le support géométrique selon les variables angulaires  $\vec{\omega}$  et  $\vec{\omega}'$ . La notation  $\mathcal{R}$  indique la dérivation selon une rotation de la surface et le vecteur  $\vec{a}$  indique l'axe de cette rotation. Considérons encore une fois la luminance matérielle  $I(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi})$ , l'opérateur  $\partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}}$  appliqué à cette fonction s'écrit :

$$\partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} I(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I(\vec{y}, \vec{\omega}_{\varepsilon}^{\vec{a}}, \vec{\pi}) - I(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi})}{\varepsilon} \quad (3.11)$$

avec  $\varepsilon$  un angle de rotation infinitésimal. Cette écriture représente simplement la différence entre la luminance matérielle prise dans une direction  $\vec{\omega}$  et dans une direction  $\vec{\omega}_{\varepsilon}^{\vec{a}}$  qui est la direction résultant d'une rotation infinitésimale de  $\vec{\omega}$  autour du vecteur directeur  $\vec{a}$ .

### 3.3.1.4 La condition à la limite générale de sensibilité

La condition à la limite de sensibilité s'écrit :

$$\begin{aligned} s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = & -\alpha \mathcal{G} \left[ L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \right] \\ & - \beta \|\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{y}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{y}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \\ & - \beta \|\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{y}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{y}} \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\ & - \beta \|\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{y}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{y}} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\ & - \beta \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' \partial_{1, \vec{a}} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\ & - \gamma \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \\ & - \gamma \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\ & - \gamma \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} \left( \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \right) \\ & + \partial_{\vec{\pi}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \\ & - \alpha' \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' \mathcal{G} \left[ L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \right] \\ & + \beta' \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' \partial_{1, \vec{a}'} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\ & + \gamma \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\ & + \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' s(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Nous reprendrons plus loin cette forme générale pour en donner son expression dans les cas particuliers des parois noires, diffuses et spéculaires, et nous l'illustrerons pour les cas de déformation géométrique sous forme de déplacement, d'étirement et de rotation.

Ici, nous commenterons brièvement chacun des termes pour le rattacher à la phénoménologie à laquelle il correspond. Rappelons que, à l'exception de la réflexion de la sensibilité, tous ces termes sont considérés comme des sources de sensibilité dans ce chapitre. En écho de l'expression de la

sensibilité donnée en introduction, ils représentent l'intégralité des sources de sensibilité comprises dans le terme source  $\xi$  de l'Eq. 3.2.

**La réflexion de la sensibilité**  $s(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi})$ , le dernier terme de la condition à la limite représente la réflexion de la sensibilité incidente à la paroi. Ce terme montre que la sensibilité géométrique se comporte à la paroi comme la luminance. Nous avons vu lors de l'établissement du modèle de sensibilité dans le milieu que la sensibilité était transportée de la même manière que la luminance et nous observons ici que la sensibilité incidente à la paroi est réfléchiée selon les propriétés de réflexion de la paroi exactement de la même manière que la luminance.

**La contribution volumique**  $\alpha \mathcal{G}[L]$  L'opérateur  $\mathcal{G}$  appliqué à la luminance prise en un point  $\vec{y}$  du support géométrique et dans la direction  $\vec{\omega}$  représente la contribution des propriétés radiatives du milieu, il est détaillé dans le paragraphe 3.3.1.1.

**La contribution surfacique**  $\|\partial_{\vec{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \partial_{\vec{D}}^{\vec{u}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi})$  de la luminance matérielle. Elle correspond à la contribution des variations surfaciques de la luminance à la paroi. Le terme de changement de mesure est présent étant donné que la dérivée surfacique est effectuée sur le support matériel.

**La contribution surfacique**  $\|\partial_{\vec{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \partial_{\vec{D}}^{\vec{u}} \rho(\vec{y}, -\vec{\omega})$  du coefficient de réflexion. De la même façon que nous avons illustré dans le paragraphe 3.3.1.2 qu'une inhomogénéité de la luminance d'équilibre sur la frontière était une source de sensibilité, une inhomogénéité des propriétés de réflexions sur la frontière est aussi une source de sensibilité. Cette source de sensibilité est comptabilisée grâce à la dérivée surfacique du coefficient de réflexion qui est défini sur le support matériel et sera illustrée dans la Sec. 3.5.

**La contribution surfacique**  $\|\partial_{\vec{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \partial_{\vec{D}}^{\vec{u}} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y})$  de la brdf. La source de sensibilité liée à ce terme est exactement du même type que celle liée à la dérivée surfacique du coefficient de réflexion  $\rho$ . Cette fois, c'est l'inhomogénéité surfacique de la brdf qui engendrera une perturbation sur la luminance réfléchiée par la paroi.

**La contribution surfacique**  $\vec{\partial}_1 L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \cdot \vec{u}$  de la luminance réfléchiée à la paroi. Si le champ de luminance incidente à la paroi varie selon  $\vec{y}$  alors une perturbation de la frontière engendrera une perturbation de la luminance sortante perçue à une position donnée de l'espace des phases  $(\vec{y}, \vec{\omega})$ . C'est ce que traduit cette contribution surfacique du gradient de la luminance incidente.

**La contribution angulaire**  $\partial_{\vec{R}}^{\vec{a}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi})$  de la luminance émise par la paroi. Ce terme est exactement similaire à celui détaillé en Sec. 3.3.1.3 : si les propriétés d'émission dépendent de la direction d'émission, et que l'orientation de la normale de la paroi est modifiée par une perturbation de  $\vec{\pi}$ , alors il y a une contribution angulaire de la luminance émise.

**La contribution angulaire**  $\partial_{\vec{R}}^{\vec{a}} \rho(\vec{y}, -\vec{\omega})$  du coefficient de réflexion. Nous avons montré dans le paragraphe 3.3.1.3 que toute fonction ayant une dépendance angulaire représentait une source de sensibilité. Si le coefficient de réflexion est homogène angulairement (identique quelle que soit la direction incidente) alors ce terme sera nul.

**Dérivée angulaire de la réflexion de la luminance**  $\partial_{\vec{R}}^{\vec{a}} \left( \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \right)$ .

Au même titre que le gradient spatial, cette dérivée s'applique au champ de luminance incident et s'interprète par l'influence de la rotation de la paroi sur la luminance sortante. En effet, si la distribution angulaire de la luminance incidente à la paroi n'est pas homogène alors la rotation de la paroi engendrera une perturbation de la luminance sortante dans une direction  $\vec{\omega}$  donnée. Nous verrons que, selon les propriétés de réflexion de la paroi, ce terme peut être simplifié.

**Les autres contributions volumiques, surfaciques et angulaires** Ces termes ont une signification très similaire aux éléments précédents. Sans les décrire plus amplement pour l'instant nous les détaillerons avec beaucoup plus d'attention dans la partie théorique sur l'établissement de la condition à la limite Sec. 3.7 et dans les exemples d'applications des Sec. 3.4 et Sec. 3.5.

**Commentaires** Certains termes de ce résultat sont des fonctions des variables  $\vec{y}$  et  $\vec{\omega}$  et d'autres des fonctions des variables  $\vec{y}$  et  $\vec{\omega}$ . La lecture de cette équation est une situation typique pour laquelle la variable  $\vec{y}$  doit être considérée comme la fonction  $\vec{y} = \mathcal{Z}^{-1}(\vec{y})$  et la variable  $\vec{\omega}$  comme la fonction  $\vec{\omega} = \Omega_{\vec{y}, \vec{\pi}}^{-1}(\vec{\omega})$ .

Chaque terme de ce résultat sera illustré dans les exemples en parois noires et en parois réfléchissantes [Sec. 3.4](#) et [3.5](#). Par exemple, nous verrons que selon les propriétés des parois, du milieu et le type de déformation de la paroi, la condition à la limite sera simplifiée.

Les expressions formelles des coefficients et vecteurs  $\alpha, \beta, \vec{u}, \vec{u}', \gamma, \vec{a}$  et leurs équivalences notées  $\beta', \alpha', \vec{u}'$  seront utilisées fréquemment dans les développements théoriques et dans les exemples d'applications. Elles seront expliquées à la suite des présents commentaires.

Dans une première analyse de ce résultat, nous pouvons distinguer les termes de la condition à la limite qui font intervenir des dérivées surfaciques et des dérivées angulaires. Par exemple, tous les termes qui sont factorisés par le coefficient  $\beta$  contiennent des dérivées surfaciques, soit du coefficient de réflexion ( $\partial_{\vec{D}}^{\vec{y}} \rho(\vec{y}, -\vec{\omega})$ ), soit de la densité de probabilité, soit de la luminance incidente. La somme de ces dérivées surfaciques sera illustrée dans les exemples en parois noires et réfléchissantes [Sec. 3.4](#) et [Sec. 3.5](#) : elle représente l'influence des variations des propriétés radiatives sur la surface de la paroi.

De la même façon, tous les termes multipliés par  $\gamma$  contiennent des dérivées angulaires, soit des propriétés de réflexion, soit de la luminance. La dérivée angulaire intervient lors des rotations du support géométrique et nous les étudierons dans les exemples d'application en parois noires et réfléchissantes. Nous montrerons, dans la suite de cette section, comment déterminer le coefficient  $\gamma$  et le vecteur directeur de la rotation  $\vec{a}$ .

Nous remarquons que certains termes sont multipliés par les coefficients  $\beta'$  et  $\gamma'$  qui sont également facteurs de dérivées surfaciques et angulaires de la luminance. La signification de ces contributions est exactement la même que celles que nous venons de décrire dans les paragraphes précédents. Cependant, nous verrons dans la [Sec. 3.7](#) qu'ils apparaissent de manière différentes lors des développements mathématiques. Nous les traiterons de la même manière que les autres dans les exemples d'application.

Les développements mathématiques qui permettent de voir apparaître formellement chacun de ces termes sont détaillés dans la [Sec. 3.7](#). Ils impliquent l'utilisation des coefficients et vecteurs unitaires que nous allons expliciter maintenant. Dans les paragraphes qui suivent, nous donnerons leurs écritures formelles. Cela demandera des développements techniques dont le lecteur peut se passer sans perturber sa compréhension de la suite. Cependant, nous utiliserons les résultats de ces développements dans chacun des exemples des sections sur les exemples d'applications.

**Les coefficients et les vecteurs unitaires des dérivées surfaciques  $\partial_{\vec{D}}^{\vec{y}}$  et  $\partial_{1, \vec{u}}$**  Les coefficients  $\alpha, \beta$  et le vecteur  $\vec{u}$  sont issus de la décomposition du champ de vecteur de déformation de la paroi :  $\vec{v}_{\chi}(\vec{y})$ . En une position sur la frontière  $\vec{y}$  nous pouvons déterminer le vecteur de déformation à partir de la transformation  $\mathcal{Z}$  :

$$\vec{v}_{\chi}(\vec{y}) = \partial_{\vec{\pi}} \mathcal{Z}(\vec{y}, \vec{\pi}) \quad (3.13)$$

Et en tout point  $\vec{y}$  de la frontière, le vecteur de déformation est décomposé (voir [Chap. 2](#)) de la façon suivante :

$$\vec{v}_{\chi} = \alpha \vec{\omega} + \beta \vec{u} \quad (3.14)$$

Avec  $\vec{u}$  un vecteur tangent au support géométrique (soit  $\partial G(\vec{\pi})$ ) et  $\vec{\omega}$  un vecteur de la sphère unité. La [Fig. 3.7](#) illustre la décomposition de  $\vec{v}_{\chi}$  à la frontière. Le vecteur  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire et le coefficient  $\beta$  est la norme de la projection tangente de  $\vec{v}_{\chi}$  sur la surface. On trouve alors :

$$\beta = \|\vec{v}_{\chi} - \alpha \vec{\omega}\| ; \quad \vec{u} = \frac{\vec{v}_{\chi} - \alpha \vec{\omega}}{\|\vec{v}_{\chi} - \alpha \vec{\omega}\|} ; \quad \alpha = \frac{\vec{v}_{\chi} \cdot \vec{n}}{\vec{\omega} \cdot \vec{n}} \quad (3.15)$$

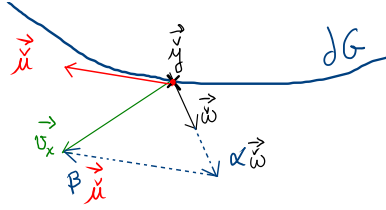


FIGURE 3.7 – Décomposition de  $\vec{v}_x$  à la frontière selon un vecteur tangent  $\vec{u}$  et la direction d'émission  $\vec{w}$

Le vecteur non annoté  $\vec{u}$  est la correspondance, dans l'espace matériel, du vecteur  $\vec{u}$  dans l'espace géométrique. Cette correspondance est obtenue par l'application de  $\Omega_{\vec{y}, \vec{\pi}}^{-1}$  au vecteur  $\vec{u}$  :  $\vec{u} = \Omega_{\vec{y}, \vec{\pi}}^{-1}(\vec{u})$ , elle sera illustrée dans les exemples de la [Sec. 3.4](#).

Les coefficients  $\alpha'$  et  $\beta'$  sont issus de la même décomposition mais cette fois à partir de  $\vec{w}'$ . ( $\vec{v}_x = \alpha' \vec{w}' + \beta' \vec{u}'$ )

**Les coefficients et les vecteurs unitaires de la dérivée angulaire  $\partial_{\vec{R}}^{\vec{a}}$**  La déformation angulaire est définie par le vecteur unitaire  $\vec{a}$  et la vitesse de rotation  $\gamma$ . Autour d'une valeur de  $\vec{\pi}$  donnée, tout vecteur de l'espace géométrique défini par  $\Omega$  qui dépend de  $\vec{\pi}$ , subira une rotation d'angle  $\varphi(\delta\vec{\pi})$  autour d'un axe de rotation  $\vec{a}$  pour une variation  $\delta\vec{\pi}$  de  $\vec{\pi}$ . La vitesse de la rotation  $\gamma$  est donnée par  $\gamma = \partial_{\vec{\pi}}\varphi(\vec{\pi})$ . Étant donné que l'application  $\Omega$  est connue pour tout  $\vec{\pi}$  le vecteur  $\vec{a}$  est également connu pour tout  $\vec{\pi}$ .

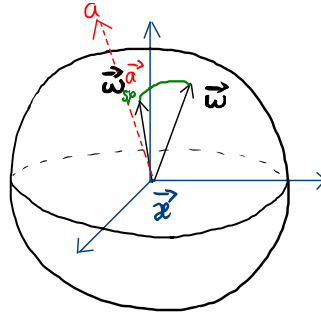


FIGURE 3.8 – Rotation infinitésimale dans la direction  $\vec{w}$  dans la sphère unité.

Dans les exemples qui suivront cette partie introductive, nous appliquerons la condition de sensibilité générale à des parois de différentes propriétés radiatives (parois noires, parois spéculaires et parois diffuses).

### 3.3.2 Parois noires, spéculaires et diffuses

Dans cette partie, nous donnons les formes particulières de la condition à la limite générale pour les cas de parois noires, parois diffuses et parois spéculaires. Les déclinaisons de la condition à la limite selon ces propriétés radiatives sont parfois plus abordables, en terme de résolution du modèle de sensibilité, que la condition à la limite générale. Nous avons donc un intérêt à utiliser directement les résultats de ces cas particuliers suivant les situations radiatives que nous rencontrons. Encore une fois les simplifications qui peuvent découler de ces propriétés radiatives demandent des développements techniques que nous donnons ici dans les détails. Les résultats sont cependant exploitables sans avoir connaissance de ces développements et le lecteur pourra passer ces détails sans perdre le fil de l'histoire.



### 3.3.2.1 La condition à la limite pour une paroi noire

Si la paroi est noire, tous les termes de la condition à la limite de sensibilité liés à la réflexion (fonctions des coefficients de réflexion et des brdf) disparaissent et on trouve :

$$\begin{aligned}
s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) &= -\alpha \mathcal{G} \left[ L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \right] \\
&\quad - \beta \left\| \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y}) \right\| \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \\
&\quad - \gamma \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \\
&\quad + \partial_{\vec{\pi}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi})
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Cette expression de la condition à la limite de la sensibilité sera étudiée à travers trois différents exemple dans la [Sec. 3.4](#).

### 3.3.2.2 La condition à la limite pour une paroi diffuse

Dans le cas d'un paroi diffuse, la condition à la limite générale de sensibilité peut être simplifiée en travaillant sur les termes incluant des dérivées angulaires de la luminance incidente. Les développements de l'encadré [3.1](#) permettent de montrer que :

$$-\gamma \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} \left( \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \right) = 0 \tag{3.17}$$

et que :

$$\int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) = \int_{\Omega'} (\vec{\omega}' \wedge \vec{n}) \cdot \vec{a} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) d\vec{\omega}' \tag{3.18}$$

L'association de ces deux résultats supprime toutes les dépendances à la dérivée angulaire de la luminance incidente de la condition à la limite de sensibilité et ajoute une dépendance à la luminance incidente. L'intérêt de ces développements est justement de montrer que pour résoudre le problème de sensibilité, il n'est plus nécessaire, dans le cas de parois diffuses, de déterminer la dérivée angulaire de la luminance incidente mais simplement de déterminer la luminance incidente, soit de résoudre un problème de transfert radiatif classique.

Notre intérêt est de remplacer le terme  $\partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi})$  par un terme uniquement dépendant de la luminance incidente. Pour cela, on construit un repère local sur la frontière qui est constitué du vecteur directeur de la rotation (vecteur qui oriente l'axe de rotation), soit le vecteur  $\vec{a}$ , et d'un autre vecteur dans le plan que forme la normale  $\vec{n}$  avec l'axe de rotation  $\vec{a}$  (voir [Fig. 3.9](#)). On appelle  $\vec{d}$  le vecteur qui appartient au plan  $(\vec{a}, \vec{d}, \vec{n})$  et qui vérifie  $\vec{a} \cdot \vec{d} = 0$ . Le dernier vecteur qui constitue le repère est le vecteur  $\vec{c}$  qui est normal à ce plan :  $\vec{c} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{d}}{\|\vec{a} \wedge \vec{d}\|}$ . Dans cette base locale  $(\vec{a}, \vec{d}, \vec{c})$ , on repère les vecteurs à partir de deux angles  $\theta_a$  et  $\varphi_a$  que l'on mesure à partir de l'axe  $\vec{a}$  pour le premier (i.e.  $\vec{a} \cdot \vec{n} = \cos(\theta_{a, \vec{n}})$ ) et à partir du plan  $(\vec{a}, \vec{d}, \vec{n})$  pour le deuxième (i.e.  $\varphi_{a, \vec{n}} = 0$ ). Ils sont représentés sur la [Fig. 3.9](#).

Ainsi, dans ce repère local, l'angle  $\varphi_a$  représente l'angle de rotation autour de l'axe  $\vec{a}$  soit l'angle de rotation par rapport auquel on dérive la luminance en appliquant l'opérateur  $\partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}}$ . Dans ce contexte, la dérivée  $\partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi})$  peut s'écrire  $\partial_{\varphi_a} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi})$  et l'encadré [3.1](#) montre comment, en reformulant l'intégration de cette dérivée (intégration par partie), nous arrivons au résultat de l'[Eq. 3.18](#).



## ENCADRÉ 3.1 – Simplification de la dérivée angulaire - paroi diffuse

**Dérivée angulaire de la réflexion de luminance**, soit du produit de la brdf et de la luminance incidente :

$$- \gamma \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} \left( \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \right) \quad (3.19)$$

Étant donné que dans le cas d'une paroi diffuse la brdf devient  $p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) = \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}}{\pi}$  alors

$$\partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} \left( \int_{\Omega'} \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}}{\pi} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) d\vec{\omega}' \right) = 0 \quad (3.20)$$

**Dérivée angulaire de la luminance incidente**, soit le terme qui traduit la réflexion de la dérivée angulaire de la luminance :

$$\gamma \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \quad (3.21)$$

Dans le repère local de la frontière  $(\vec{a}, \vec{d}, \vec{c})$ , cette équation peut s'écrire :

$$\int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) = \int_{\Theta_a} \sin(\theta_a) d\theta_a \int_{\Phi_a} d\varphi_a \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}}{\pi} \partial_{\varphi_a} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \quad (3.22)$$

Le développement qui va suivre consiste à faire une intégration par partie de l'intégration sur  $\Phi_a$  :

$$\int_{\Phi_a} d\varphi_a \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}}{\pi} \partial_{\varphi_a} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) = \left[ \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}}{\pi} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \right]_0^{2\pi} - \int_{\Phi_a} d\varphi_a \left[ \left( \partial_{\varphi_a} \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}}{\pi} \right) L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \right] \quad (3.23)$$

Dans le repère  $(\vec{a}, \vec{d}, \vec{c})$ , les vecteurs  $\vec{\omega}'$  et  $\vec{n}$  donnent :

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \cos(\theta_{a,n}) \vec{a} + \sin(\theta_{a,n}) \vec{d} \\ \vec{\omega}' &= \cos(\theta_a) \vec{a} + \sin(\theta_a) \left( \cos(\varphi_a) \vec{d} + \sin(\varphi_a) \vec{c} \right) \\ \implies \vec{\omega}' \cdot \vec{n} &= \cos(\theta_a) \cos(\theta_{a,n}) + \sin(\theta_a) \sin(\theta_{a,n}) \cos(\varphi_a) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Étant donné que le terme  $\cos(\varphi_a)$  est le seul dépendant de la variable  $\varphi_a$ , on a :

$$\left[ \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}}{\pi} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \right]_0^{2\pi} = 0 \quad (3.25)$$

Sachant que

$$\begin{aligned} \vec{\omega}' \wedge \vec{n} &= (\cos(\theta_a) \sin(\theta_{a,n}) - \cos(\theta_{a,n}) \sin(\theta_a) \cos(\varphi_a)) \vec{c} \\ &\quad + \cos(\theta_{a,n}) \sin(\theta_a) \sin(\varphi_a) \vec{d} \\ &\quad - \sin(\theta_{a,n}) \sin(\theta_a) \sin(\varphi_a) \vec{a} \end{aligned} \quad (3.26)$$

on trouve

$$(\vec{\omega}' \wedge \vec{n}) \cdot \vec{a} = -\sin(\theta_a) \sin(\theta_{a,n}) \sin(\varphi_a) = \left( \partial_{\varphi_a} \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}}{\pi} \right) \quad (3.27)$$

Soit

$$\left( \partial_{\varphi_a} \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}}{\pi} \right) = (\vec{\omega}' \wedge \vec{n}) \cdot \vec{a} \quad (3.28)$$

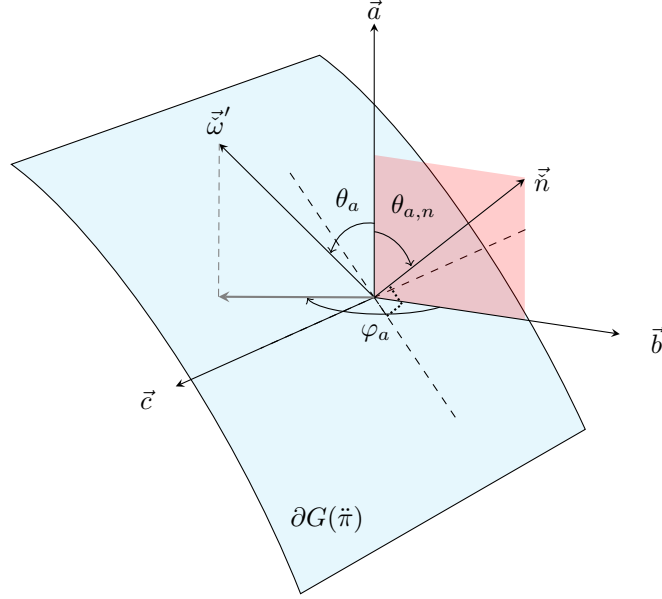


FIGURE 3.9 – Repère local - paroi diffuse

La condition à la limite de sensibilité pour une paroi diffuse peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned}
s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = & -\alpha \mathcal{G} \left[ L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \right] \\
& - \beta \|\partial_{\vec{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \partial_{\vec{D}}^{\vec{u}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \\
& - \beta \|\partial_{\vec{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \partial_{\vec{D}}^{\vec{u}} \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\
& - \beta \|\partial_{\vec{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} \partial_{\vec{D}}^{\vec{u}} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\
& - \beta \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' \partial_{1, \vec{a}} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\
& - \gamma \partial_{\vec{R}}^{\vec{a}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \\
& - \gamma \partial_{\vec{R}}^{\vec{a}} \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\
& + \partial_{\vec{\pi}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \\
& - \alpha' \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' \mathcal{G} \left[ L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \right] \\
& + \beta' \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' \partial_{1, \vec{a}} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\
& + \gamma \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} (\vec{\omega} \wedge \vec{n}) \cdot \vec{a} d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\
& + \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' s(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi})
\end{aligned} \tag{3.29}$$

### 3.3.2.3 La condition à la limite pour une paroi spéculaire

Dans le cas d'une paroi spéculaire, la brdf est modélisée par

$$p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) = \delta \left( \vec{\omega}' - (\vec{\omega} - 2(\vec{\omega} \cdot \vec{n})\vec{n}) \right) \tag{3.30}$$

et on note  $\vec{\omega}^{spec} = \vec{\omega} - 2(\vec{\omega} \cdot \vec{n})\vec{n}$ . Le vecteur unitaire  $\vec{a}$  est l'axe de la rotation du vecteur  $\vec{\omega}$  et la Fig. 3.10 montre que la rotation d'un angle  $\varphi$  du vecteur  $\vec{\omega}$  autour de  $\vec{a}$  correspond à la rotation d'un angle  $\varphi$  du vecteur  $\vec{\omega}^{spec}$  autour de  $\vec{a}^{spec}$ .

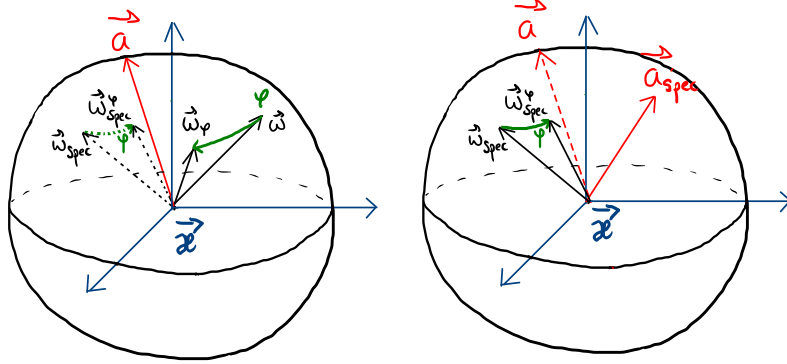


FIGURE 3.10 – Rotation infinitésimale dans la direction  $\vec{\omega}$  dans la sphère unité et rotation spéculaire correspondante.

La dérivation du terme contenant la dérivée angulaire de la réflexion de la luminance incidente donne alors :

$$-\gamma \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \partial_{\vec{R}}^{\vec{a}} \left( \int_{\Omega'} \delta(\vec{\omega}' - (\vec{\omega} - 2(\vec{\omega} \cdot \vec{n})\vec{n})) d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \right) = -\gamma \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \partial_{\vec{R}}^{\vec{a}^{spec}} L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi}) \quad (3.31)$$

Pour une paroi spéculaire, la condition à la limite de la dérivée angulaire devient :

$$\begin{aligned} s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = & -\alpha \mathcal{G} \left[ L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \right] \\ & -\beta \|\partial_{\vec{D}}^{\vec{y}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \partial_{\vec{D}}^{\vec{y}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \\ & -\beta \|\partial_{\vec{D}}^{\vec{y}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \partial_{\vec{D}}^{\vec{y}} \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi}) \\ & -\beta \|\partial_{\vec{D}}^{\vec{y}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} \partial_{\vec{D}}^{\vec{y}} \rho_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\ & -\beta \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \partial_{1, \vec{u}} L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi}) \\ & -\gamma \partial_{\vec{R}}^{\vec{a}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \\ & -\gamma \partial_{\vec{R}}^{\vec{a}} \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi}) \\ & -\gamma \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \partial_{\vec{R}}^{\vec{a}^{spec}} L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi}) \\ & +\gamma \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \partial_{\vec{R}}^{\vec{a}} L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi}) \\ & +\partial_{\vec{\pi}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \\ & -\alpha^{spec} \mathcal{G} \left[ L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi}) \right] \\ & +\beta^{spec} \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \partial_{1, \vec{u}^{spec}} L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi}) \\ & +\rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) s(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi}) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Cette condition à la limite sera mise en application dans la Sec. 3.5 sur des exemples radiatifs simples dont les parois sont spéculaires.

### 3.4 Illustrations des termes des conditions aux limites en paroi noire et milieu transparent

Dans cette section, nous allons illustrer les termes de la condition à la limite de sensibilité lorsqu'elle s'applique à des parois noires, sans discontinuité de températures, avec un milieu transparent. À partir de cette configuration radiative, nous aborderons en détail les termes de dérivée surfacique et de dérivée angulaire ainsi que les vecteurs et coefficients qui leur sont associés. Ces illustrations seront restreintes au 2D Pur. Cela signifie qu'à la fois la géométrie du système et le déplacement des objets suivis sont bidimensionnels. Dans notre cas, les "photon" se déplaceront dans un plan et les "parois" seront des lignes. Plus précisément il s'agira de lignes droites qui joueront donc le rôle qui aurait été celui de parois planes en transfert radiatif. Ce choix de nous restreindre à du 2D pur est seulement fait pour simplifier les développements et clarifier les figures, mais l'objectif est bien de préparer l'étude de configurations tridimensionnelles en transfert radiatif et, par conséquent, nous n'hésiterons pas à référencer les configurations étudiées en parlant de "plans" plutôt que de droites.

Trois modifications d'une paroi plane (d'une droite) seront considérés successivement : une translation, une homothétie et une rotation. Dans les cas de la translation et de l'homothétie (configurations [Sec. 3.4.1](#) et [Sec. 3.4.2](#)), pour une direction donnée  $\vec{\omega}$  dans l'espace matériel, la direction  $\vec{\omega}$  est indépendante du paramètre  $\tilde{\pi}$  : le terme de dérivée angulaire sera donc nul. En revanche, dans la [Sec. 3.4.3](#) cette dépendance existera bien, comme traduction de la rotation de la droite, et c'est dans cette section que nous illustrerons comment il est possible de gérer pratiquement le terme de dérivée angulaire apparaissant dans l'expression de la condition à la limite générale du modèle de sensibilité.

Pour chacun des exemples, nous exposerons les développements formels qui nous ont permis de donner une forme analytique à chaque coefficient et chaque dérivée de l'Eq. [3.12](#) avant de proposer une interprétation phénoménologique des sources de sensibilité, avec des illustrations schématiques et verbales dans le but d'appuyer l'interprétation.

#### 3.4.1 Translation orthogonale du plan

La première illustration que nous allons faire de ces termes est réalisée à travers l'application de la condition à la limite de sensibilité sur une paroi plane infinie anisotherme dans le cas d'un déplacement dans une direction perpendiculaire (colinéaire à sa normale).

##### 3.4.1.1 Définition de la configuration géométrique et radiative

En 2D pur, cela se traduit donc par une droite infinie émettrice. Dans un repère cartésien  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , nous prenons cette droite perpendiculaire à  $\vec{e}_2$  et, en tant que paroi émettrice, elle est orientée par la normale  $\vec{n} = (0, -1)$  : les photons sont émis dans des directions  $\vec{\omega}$  telles que  $\vec{\omega} \cdot \vec{e}_2 < 0$ . Le paramètre  $\tilde{\pi}$  définit la position de la paroi :  $\vec{y} \cdot \vec{e}_2 = \tilde{\pi}$  pour tout point sur la paroi. En modifiant  $\tilde{\pi}$ , on translate donc la paroi selon  $\vec{e}_2$ .

Nous posons un profil de température tel que la température est nulle en tout point de la paroi sauf dans une partie centrale correspondant à  $\vec{y} \cdot \vec{e}_1 \in [0, D]$  où  $D$ , la largeur de cette zone centrale émettrice, est indépendante de  $\tilde{\pi}$ . Au sein de cette zone, le profil de la luminance sortante est sinusoïdal, avec son intensité maximale au centre de la zone émettrice pour la température  $T_{D/2}$  et s'annule de façon continue aux positions  $\vec{y} = (0, \tilde{\pi})$  et  $\vec{y} = (D, \tilde{\pi})$  — les bornes de la zone centrale émettrice. Cette modélisation assure la continuité du profil de la luminance sortante de la paroi. Dans cette configuration, le support matériel est la droite :  $U = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^2 | \vec{y} \cdot \vec{e}_2 = h\}$  ( $h$  arbitraire,  $h = D$  sur l'illustration) orientée par la normale  $\vec{n} = -\vec{e}_2$ . Les espaces matériel et géométrique sont schématisés sur la [Fig. 3.11](#).

Sur ce support matériel, on définit la luminance matérielle :

$$I(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) = f(y_1) \quad (3.33)$$

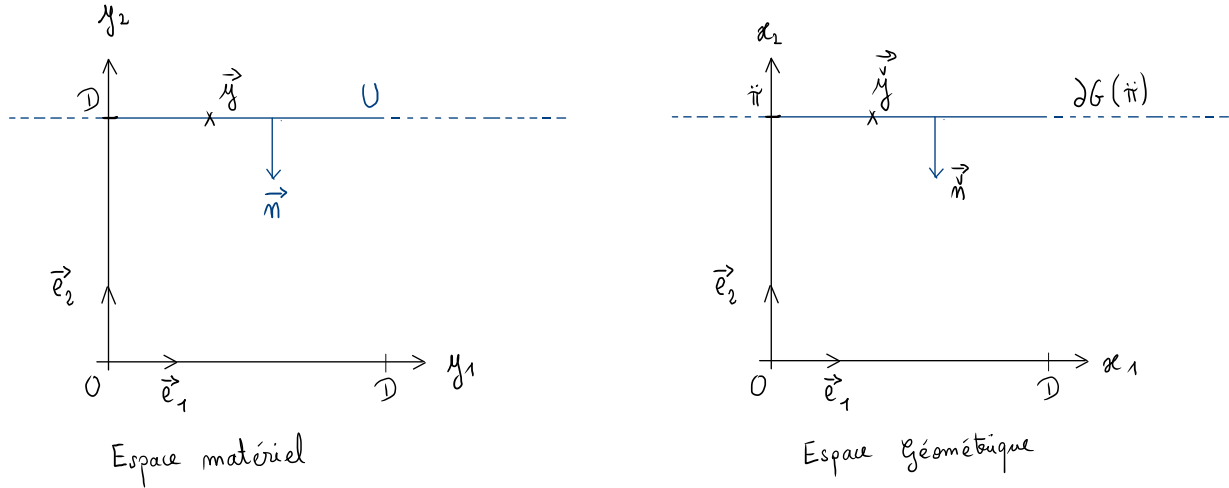


FIGURE 3.11 – Espace matériel et espace géométrique

avec  $y_1 = \vec{y} \cdot \vec{e}_1$ , et

$$f(y_1) = L^{eq}(T_{D/2}) \left( 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{D}y_1\right) \right) \mathcal{H}(y_1 \in [0, D]) \quad (3.34)$$

où la fonction test  $\mathcal{H}$  délimite la zone émettrice que nous avons choisie de longueur  $D$  identique à la longueur de la zone centrale du support géométrique. (pour éviter de discuter ici d'un terme que nous verrons dans l'exemple suivant).

Le support matériel et le support géométrique, ainsi que leurs propriétés radiatives, sont liés par les applications  $\mathcal{Z}$ ,  $\mathcal{Z}^{-1}$ ,  $\Omega$  et  $\Omega_{\vec{y}, \vec{\pi}}^{-1}$ . Ces applications permettent de définir le vecteur de déformation spatiale  $\vec{v}_\chi$  et de définir la vitesse de rotation  $\gamma$  ainsi que l'axe de la rotation  $\vec{a}$ . Pour la configuration présente, l'application  $\mathcal{Z}$  s'écrit

$$\mathcal{Z}: \begin{aligned} U \times \mathbb{R} &\longrightarrow \partial G(\vec{\pi}) \\ (\vec{y}, \vec{\pi}) &\longmapsto \vec{y} = (\vec{y} \cdot \vec{e}_1, \vec{\pi}) \end{aligned} \quad (3.35)$$

et, pour chaque valeur de  $\vec{\pi}$ , fait correspondre à tout point  $\vec{y}$  de la paroi matérielle  $U$  une position  $\vec{y}$  dans l'espace géométrique.

À partir de  $\mathcal{Z}$ , nous déduisons le vecteur de déformation spatiale  $\vec{v}_\chi = \partial_{\vec{\pi}} \mathcal{Z}(\vec{y}, \vec{\pi}) = (0, 1)$  (Fig. 3.12).

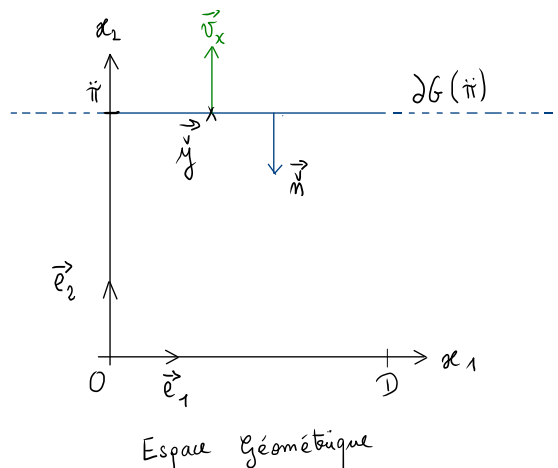


FIGURE 3.12 – Vecteur de déformation spatiale en  $\vec{v}_\chi$  en  $\vec{y}$

L'application inverse qui, pour une valeur de  $\tilde{\pi}$  donnée, fait correspondre une position  $\vec{y}$  du support matériel à toute position  $\vec{y}$  de la frontière de l'espace géométrique, est :

$$\mathcal{Z}_{\tilde{\pi}}^{-1}: \begin{array}{ccc} \partial G(\tilde{\pi}) & \longrightarrow & U \\ \vec{y} & \longmapsto & \vec{y} = (\vec{y} \cdot \vec{e}_1, h) \end{array} \quad (3.36)$$

L'application  $\Omega$  fait correspondre, pour toute valeur de  $\tilde{\pi}$ , à toute direction  $\vec{\omega}$  du cercle unité dans l'espace matériel, une direction  $\vec{\omega}$  du cercle unité dans l'espace géométrique. Pour la configuration présente, il n'y a pas de rotation du support géométrique,  $\Omega$  sera donc l'identité :

$$\Omega: \begin{array}{ccc} \mathcal{D} \times U \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ (\vec{\omega}, \vec{y}, \tilde{\pi}) & \longmapsto & \vec{\omega} = \vec{\omega} \end{array} \quad (3.37)$$

L'exemple dont nous discutons étant en 2D Pur,  $\mathcal{D}$  est le cercle unité. L'application inverse est :

$$\Omega_{\vec{y}, \tilde{\pi}}^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ \vec{\omega} & \longmapsto & \vec{\omega} = \vec{\omega} \end{array} \quad (3.38)$$

Avec cet ensemble de définitions, nous avons déterminé le problème de façon complète, à la fois géométriquement et en termes de condition à la limite du problème de transfert radiatif initial :

- Le support matériel est défini (la droite  $(0, \vec{e}_1)$ ) et pour une valeur donnée de  $\tilde{\pi}$ , nous savons comment toute position  $\vec{y}$  sur ce support se traduit par une position  $\vec{y}$  sur la paroi dans l'espace géométrique (nous connaissons aussi l'application inverse).
- Les directions  $\vec{\omega}$  dans l'espace géométrique sont également définies à partir de directions  $\vec{\omega}$  dans l'espace matériel (l'application inverse est aussi connue).
- Dans l'espace géométrique, la luminance sortant de la paroi est connue, pour toute position  $\vec{y}$  dans toute direction  $\vec{\omega}$ , à partir d'une fonction  $I$  connue dans l'espace matériel, soit

$$L(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) = I(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) \quad (3.39)$$

### 3.4.1.2 Le modèle à la limite

Avec une paroi noire, la luminance sortante vient seulement de la luminance  $I^{em}$  émise par le support matériel :  $I^{em} = I$ .

La condition à la limite de sensibilité, c'est-à-dire la valeur de  $s$  en tout point de la paroi émettrice et pour toute direction sortante, est donnée par l'expression générale de l'Eq. 3.16 rappelée ici

$$\begin{aligned} s(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) &= -\alpha \mathcal{G} \left[ L(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) \right] \\ &\quad - \beta \|\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\tilde{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) \\ &\quad - \gamma \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) \\ &\quad + \partial_{\tilde{\pi}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) \end{aligned} \quad \vec{y} \in \partial G(\tilde{\pi}), \vec{\omega} \cdot \vec{n} > 0 \quad (3.40)$$

La condition à la limite de sensibilité dans la configuration particulière que nous considérons sera construite à partir de cette forme générale, en évaluant les valeurs prises par :

- les coefficient  $\alpha$ ,  $\beta$  et les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{u}$  qui sont issus de la projection de  $\vec{v}_\chi$  sur la paroi ;
- le coefficient  $\gamma$  et le vecteur  $\vec{a}$  ;
- les dérivées surfaciques, angulaires et matérielles.

Les calculs des expressions analytiques des coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{a}$  sont réalisés dans l'encadré 3.2 et nous en concluons que dans le cas présent :

- le milieu est transparent, donc le résultat de  $\mathcal{G}$  appliqué à  $L(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi})$  est nul ;

- $\Omega$  est indépendant de  $\tilde{\pi}$ , donc  $\gamma$  est nul ;
- $I$  est indépendant de  $\tilde{\pi}$ , donc le terme de dérivée matérielle  $\partial_{\tilde{\pi}} I(\vec{y}, \vec{w}, \tilde{\pi})$  est nul.

La condition à la limite en sensibilité se réduit alors à :

$$s(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) = -\beta \|\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\tilde{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} I(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) \quad \vec{y} \in \partial G(\tilde{\pi}), \vec{\omega} \cdot \vec{n} > 0 \quad (3.41)$$

où  $\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} I$  est la dérivée surfacique de la luminance dans l'espace matériel et  $\|\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\tilde{\pi}}^{-1}\|$  est la correction de la mesure entre le support matériel et le support géométrique (voir [Sec. 3.3.1.2](#)).

**Dérivée surfacique dans l'espace matériel** Rappelons que dans l'expression de la dérivée surfacique, nous faisons en sorte que le déplacement à partir de  $\vec{y}$  dans la direction  $\vec{u}$  reste rigoureusement sur le support matériel  $U$  :

$$\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} I(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{I(\mathcal{P}(\vec{y} + \tau \vec{u}), \vec{\omega}, \tilde{\pi}) - I(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi})}{\tau} \quad (3.42)$$

où  $\mathcal{P}(\vec{y} + \tau \vec{u})$  est la projection sur  $U$  du point  $\vec{y}$  après déplacement de  $\tau$  dans la direction  $\vec{u}$  (voir paragraphe [3.3.1.2](#)). Comme ici, il n'y a aucune courbure du support matériel, on a :  $\mathcal{P}(\vec{y} + \tau \vec{u}) = \vec{y} + \tau \vec{u}$ . L'expression analytique de la dérivée surfacique s'écrit donc (précisions dans l'encadré [3.3](#)) :

$$\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} I(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) = \text{sign}(-\tan(\theta)) L^{eq}(T_{D/2}) \frac{2\pi}{D} \sin\left(\frac{2\pi}{D} y_1\right) \mathcal{H}(y_1 \in [0, D]) \quad (3.43)$$

**Correction de la mesure**  $\|\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\tilde{\pi}}^{-1}\|$  représente le rapport entre la longueur d'un pas élémentaire dans la direction  $\vec{u}$  dans l'espace matériel et la longueur du pas élémentaire correspondant dans l'espace géométrique (le rapport entre la mesure sur le support matériel et la mesure sur le support géométrique) :

$$\begin{aligned} \|\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\tilde{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| &= \left\| \lim_{\check{\tau} \rightarrow 0} \frac{\mathcal{Z}_{\tilde{\pi}}^{-1}(\vec{y} + \check{\tau} \vec{u}) - \mathcal{Z}_{\tilde{\pi}}^{-1}(\vec{y})}{\check{\tau}} \right\| \\ &= \left\| \lim_{\check{\tau} \rightarrow 0} \frac{((\vec{y} + \check{\tau} \vec{u}) \cdot \vec{e}_1, 0) - (\vec{y} \cdot \vec{e}_1, 0)}{\check{\tau}} \right\| \\ &= |\vec{u} \cdot \vec{e}_1| \\ &= 1 \end{aligned} \quad (3.44)$$

**Résultat** La condition à la limite en sensibilité est finalement

$$s(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) = \tan(\theta) L^{eq}(T_{D/2}) \frac{2\pi}{D} \sin\left(\frac{2\pi}{D} y_1\right) \mathcal{H}(y_1 \in [0, D]) \quad \vec{y} \in \partial G(\tilde{\pi}), \vec{\omega} \cdot \vec{n} > 0 \quad (3.45)$$

avec  $y_1 = \vec{y} \cdot \vec{e}_1$  et  $\vec{y} = \mathcal{Z}_{\tilde{\pi}}^{-1}(\check{y})$ .

## ENCADRÉ 3.2 – Les coefficients et les vecteurs de la condition à la limite

**Coefficients de la déformation spatiale** Les coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\vec{u}$  sont obtenus par projection de  $\vec{v}_\chi$  sur la surface (voir paragraphe 3.3.1.4) :

$$\beta = \|\vec{v}_\chi - \alpha\vec{\omega}\| ; \quad \vec{u} = \frac{\vec{v}_\chi - \alpha\vec{\omega}}{\|\vec{v}_\chi - \alpha\vec{\omega}\|} ; \quad \alpha = \frac{\vec{v}_\chi \cdot \vec{n}}{\vec{\omega} \cdot \vec{n}} \quad (3.46)$$

Nous avons fixé :

$$\vec{n} = (0, 1) \quad (3.47)$$

et nous avons déjà obtenu le vecteur de déformation spatiale à partir de  $\mathcal{Z}$  :

$$\vec{v}_\chi = (0, 1) \quad (3.48)$$

Comme nous sommes dans le plan, le vecteur direction  $\vec{\omega}$  (est repéré dans le repère local du support géométrique avec un seul angle  $\theta$ . Sa représentation dans le repère cartésien  $2D$  est

$$\vec{\omega} = (\sin(\theta), \cos(\theta)) \quad (3.49)$$

ce qui conduit à

$$\alpha = \frac{1}{\cos(\theta)} \quad (3.50)$$

$$\beta = \|(0, 1) - \frac{1}{\cos(\theta)}(\sin(\theta), \cos(\theta))\| = \|(-\tan(\theta), 0)\| = |\tan(\theta)| \quad (3.51)$$

et

$$\vec{u} = \frac{(-\tan(\theta), 0)}{\|(-\tan(\theta), 0)\|} = (\text{sign}(-\tan(\theta)), 0) \quad (3.52)$$

Dans notre exemple  $\vec{u} = \Omega_{\vec{y}, \vec{\pi}}^{-1}(\vec{u}) = \vec{u}$

**Coefficients de la déformation angulaire** L'application  $\Omega$  ne dépend pas de  $\vec{\pi}$ , la vitesse de rotation  $\gamma$  est donc nulle.



## ENCADRÉ 3.3 – Précisions sur la dérivée surfacique

Dans cet exemple, il est possible de vérifier rapidement le résultat obtenu pour la dérivée surfacique en écrivant  $\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} I(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi})$  non plus comme une limite mais à partir du gradient de  $I(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi})$  en utilisant le fait que l'ensemble  $U$  (i.e. le support matériel) est ici un espace vectoriel.

En toute généralité, si l'ensemble  $U$  est un sous-espace vectoriel sur lequel est définie la luminance matérielle  $I(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi})$ , il existe le vecteur gradient de  $I(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi})$ , noté  $\vec{\partial}_{\vec{y}} I(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi})$ , qui permet d'écrire la dérivée surfacique  $\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} I(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi})$  à partir de la projection du gradient surfacique dans la direction  $\vec{u}$  soit :

$$\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} I(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = \vec{\partial}_{\vec{y}} I(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \cdot \vec{u} \quad (3.53)$$

Dans notre exemple, la luminance matérielle  $I(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi})$  est définie sur le support matériel  $U$  qui peut s'interpréter comme un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$  contenant l'ensemble des vecteurs  $y_1$  de dimension 1 tels que  $y_1 = \vec{y} \cdot \vec{e}_1$ . Dans cet espace, il existe le vecteur gradient de  $I(y_1, \vec{\omega}, \vec{\pi})$  — en  $1D$  il est constitué uniquement de la dérivée partielle  $\partial_{y_1} I(y_1, \vec{\omega}, \vec{\pi})$  — qui permet d'écrire la dérivée surfacique  $\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} I(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi})$  à partir de la projection du "gradient surfacique" dans la direction  $u_1 = \vec{u} \cdot \vec{e}_1$  soit :  $\partial_{y_1} I(y_1, \vec{\omega}, \vec{\pi}) u_1$ , avec la dérivée partielle de la luminance matérielle

$$\partial_{y_1} I(y_1, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = L^{eq}(T_{D/2}) \frac{2\pi}{D} \sin\left(\frac{2\pi}{D} y_1\right) \mathcal{H}(y_1 \in [0, D]) \quad (3.54)$$

et le scalaire

$$u_1 = \text{sign}(-\tan(\theta)) \quad (3.55)$$

De la même manière, dans l'espace géométrique nous pouvons remarquer que le support géométrique  $\partial G(\vec{\pi})$  s'identifie à un sous-espace vectoriel de dimension 1 qui comprend l'ensemble des vecteurs  $\check{y}_1$  définis tels que  $\check{y}_1 = y_1$ .

### 3.4.1.3 Interprétation

Dans la source de sensibilité telle qu'elle est présentée par l'Eq. 3.45, nous pouvons distinguer la dérivée surfacique  $L^{eq}(T_{D/2}) \frac{2\pi}{D} \sin(\frac{2\pi}{D}y_1)$  et une dépendance angulaire portée par le terme  $\tan(\theta)$ . Nous allons illustrer l'origine de ces deux termes en repartant du transfert radiatif.

Dans cette configuration la paroi est noire, le milieu est transparent et la luminance sortante de la paroi n'est pas homogène sur la surface. Nous étudions la différence de luminance perçue en un point d'observation  $(\vec{x}_{obs}, \vec{\omega}_{obs})$  dans le milieu, lorsque la paroi horizontale émettrice est déplacée par une variation infinitésimale  $\delta\pi$  ( Fig. 3.13 ). La sensibilité géométrique perçue en cette position d'observation correspond à la différence entre la luminance en  $(\vec{x}_{obs}, \vec{\omega}_{obs})$  pour une géométrie de référence ( $\pi = \pi_{ref}$ ) et la luminance, au même point, après une légère perturbation de cette géométrie ( $\pi = \pi_p$ ).

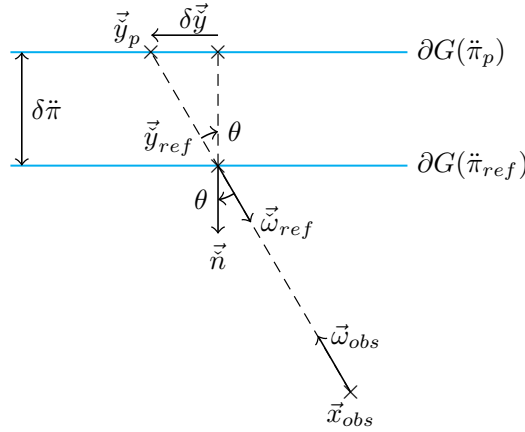


FIGURE 3.13 – Schéma de la luminance reçue en  $(\vec{x}_{obs}, \vec{\omega}_{obs})$  selon les deux configurations géométriques.

Dans la configuration de référence, la luminance reçue en la position et direction d'observation est égale à la luminance sortante en  $\vec{y}_{ref}$  dans la direction  $\vec{\omega}_{ref}$ . Dans la configuration perturbée, le chemin optique orienté par  $\vec{\omega}_{obs}$  intersecte la frontière en une position  $\vec{y}_p$  légèrement décalée sur la paroi par rapport à  $\vec{y}_{ref}$ . Si la luminance émise par la paroi n'est pas homogène sur la surface, la position d'observation recevra donc une luminance différente. Notons  $\delta\vec{y}$  la distance infinitésimale entre la position  $\vec{y}_p$  sur la surface perturbée et la position de référence dans la configuration de référence.

Le développement au premier ordre de la luminance émise par la paroi en  $\vec{y}_p = \vec{y}_{ref} + \delta\vec{y}$  et  $\vec{\omega}_p = \vec{\omega}_{ref}$  s'écrit :

$$L(\vec{y}_{ref} + \delta\vec{y}, \vec{\omega}_{ref}, \pi_p) = L(\vec{y}_{ref}, \vec{\omega}_{ref}, \pi_p) + \partial_{\vec{y}}L(\vec{y}, \vec{\omega}, \pi)\delta\vec{y} \quad (3.56)$$

La sensibilité au déplacement de la paroi devient donc ici :

$$s(\vec{y}, \vec{\omega}, \pi) = \frac{L(\vec{y}_{ref} + \delta\vec{y}, \vec{\omega}_{ref}, \pi_p) - L(\vec{y}_{ref}, \vec{\omega}_{ref}, \pi_p)}{\delta\pi} = \partial_{\vec{y}}L(\vec{y}, \vec{\omega}, \pi) \frac{\delta\vec{y}}{\delta\pi} \quad (3.57)$$

Notons  $\theta$  l'angle entre la direction d'émission  $\vec{\omega}_{ref}$  et la normale à la paroi.

On a alors :

$$\delta\vec{y} = \tan(\theta)\delta\pi \quad (3.58)$$

Le déplacement  $\delta\vec{y}$  sur la surface de la position perturbée  $\vec{y}_p$  sera d'autant plus grand que  $\theta$  tendra vers  $\frac{\pi}{2}$  (ou  $-\frac{\pi}{2}$ ), soit vers une direction tangente à la surface, et d'autant plus petit que  $\theta$  tendra vers 0, soit vers une direction colinéaire à la normale.

On retrouve alors :

$$s(\vec{y}, \vec{\omega}, \pi) = \tan(\theta)\partial_{\vec{y}}L(\vec{y}, \vec{\omega}, \pi) \quad (3.59)$$

À la suite de notre illustration, nous comprenons donc cette dépendance angulaire de la source de sensibilité. Plus la direction d'émission tendra vers une direction tangente à la paroi, plus la source de sensibilité sera importante et, au contraire, quand la direction d'émission tendra vers la normale à la paroi la source de sensibilité tendra vers 0. Elle tend vers l'infini pour une direction tangente, où on "perdrait" la paroi, et elle devient naturellement nulle pour la direction normale à la paroi puisque la position d'émission ne change pas par la déformation géométrique.

### 3.4.2 Homothétie de la zone émettrice

La deuxième illustration que nous allons faire des termes de la condition à la limite est réalisée par l'application de la condition à la limite de sensibilité sur une paroi plane infinie anisotherme dont la largeur de la zone émettrice varie avec  $\tilde{\pi}$ .

#### 3.4.2.1 Définition de la configuration géométrique et radiative

En  $2D$ , le support géométrique est défini dans un repère cartésien  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  par la paroi perpendiculaire à  $\vec{e}_2$ , dont la hauteur  $\vec{y} \cdot \vec{e}_2 = D$  est indépendante du paramètre géométrique  $\tilde{\pi}$ , et orientée par la normale  $\vec{n} = (0, -1)$  (les photons sont émis dans des directions  $\vec{\omega}$  telles que  $\vec{\omega} \cdot \vec{e}_2 < 0$ ).

Comme dans l'exemple précédent, sur la paroi, le profil de température est nul partout en dehors de la zone émettrice qui correspond aux positions  $\vec{y} \cdot \vec{e}_1 \in [0, D(\tilde{\pi})]$ . Au sein de cette zone centrale, le profil de luminance est sinusoïdal et la luminance sortante atteint son intensité maximale pour la température  $T_{D/2}$  et s'annule continûment aux bornes de la zone émettrice  $\vec{y} = (0, D)$  et  $\vec{y} = (l(\tilde{\pi}), D)$ .

La déformation géométrique porte sur la largeur de la zone émettrice. La largeur de la zone, notée  $l(\tilde{\pi})$ , est donc paramétrée par  $\tilde{\pi} : l(\tilde{\pi}) = D + \lambda \tilde{\pi}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Selon le signe de  $\lambda$ , la paroi est allongée ou raccourcie par une variation de  $\tilde{\pi}$  (dans nos illustrations nous prendrons  $\lambda$  positif). Le support matériel est la droite  $U = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^2 | \vec{y} \cdot \vec{e}_2 = h\}$  ( $h$  arbitraire,  $h = D$  sur l'illustration) orientée par la normale  $\vec{n} = -\vec{e}_2$ .

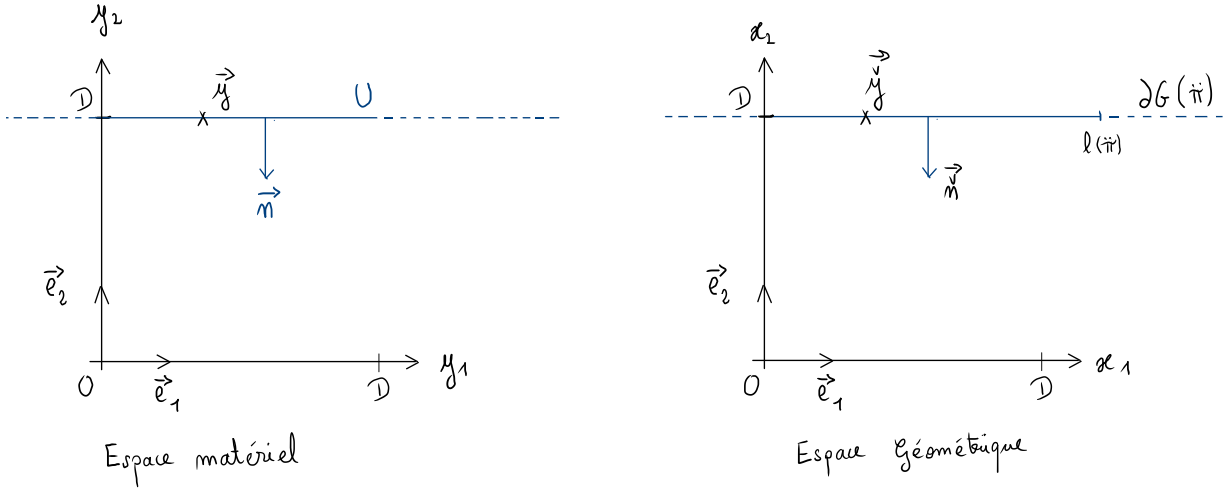


FIGURE 3.14 – Espace matériel et espace géométrique

Sur ce support matériel, on définit la luminance

$$I(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) = f(y_1) \quad (3.60)$$

avec  $y_1 = \vec{y} \cdot \vec{e}_1$  et  $f(y_1)$  identique à l'exemple précédent

$$f(y_1) = L^{eq}(T_{D/2}) \left( 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{D} y_1\right) \right) \mathcal{H}(y_1 \in [0, D]) \quad (3.61)$$

Sur le support matériel, la zone émettrice est indépendante de  $\tilde{\pi}$  et elle est de longueur  $D$ . Le lien entre le support matériel et le support géométrique est donné par l'application  $\mathcal{Z}$  définie telle que :

$$\mathcal{Z}: \begin{array}{ccc} U \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \partial G(\tilde{\pi}) \\ (\vec{y}, \tilde{\pi}) & \longmapsto & \vec{y} = \left( \frac{\vec{y} \cdot \vec{e}_1}{D} l(\tilde{\pi}), h \right) \end{array} \quad (3.62)$$

À partir de  $\mathcal{Z}$  nous déduisons le vecteur de déformation spatiale  $\vec{v}_x = \partial_{\tilde{\pi}} \mathcal{Z}(\vec{y}, \tilde{\pi}) = \left( \frac{\lambda}{D} \vec{y} \cdot \vec{e}_1, 0 \right)$  (Fig. 3.15) avec  $\lambda \in \mathbb{R}$  l'intensité donnée à la déformation.

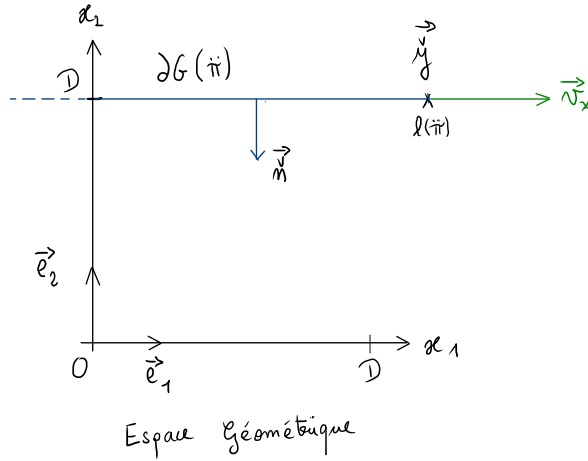


FIGURE 3.15 – Vecteur de déformation spatiale en  $\vec{v}_x$  en  $\vec{y} \cdot \vec{e}_1 = l(\tilde{\pi})$

L'application inverse est

$$\mathcal{Z}_{\tilde{\pi}}^{-1}: \begin{array}{ccc} \partial G(\tilde{\pi}) & \longrightarrow & U \\ \vec{y} & \longmapsto & \vec{y} = \left( \frac{\vec{y} \cdot \vec{e}_1}{l(\tilde{\pi})} D, 0 \right) \end{array} \quad (3.63)$$

avec  $l(\tilde{\pi})$  la largeur de la zone émettrice pour un  $\tilde{\pi}$  donné. Le paramètre  $\tilde{\pi}$  n'ayant ici aucune influence sur la normale du support géométrique l'application  $\Omega$  est :

$$\Omega: \begin{array}{ccc} \mathcal{D} \times U \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ (\vec{\omega}, \vec{y}, \tilde{\pi}) & \longmapsto & \vec{\omega} = \vec{\omega} \end{array} \quad (3.64)$$

En 2D pur,  $\mathcal{D}$  est le cercle unité. Et l'application inverse :

$$\Omega_{\vec{y}, \tilde{\pi}}^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ \vec{\omega} & \longmapsto & \vec{\omega} = \vec{\omega} \end{array} \quad (3.65)$$

À partir de ces éléments, nous avons défini entièrement la configuration géométrique et la configuration radiative de l'exemple. Nous avons identifié que le profil de la condition à la limite radiative est étiré avec la déformation de la paroi mais qu'il peut être référencé par un profil indépendant de la déformation, ce qui se traduit par :

$$L(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) = I(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) \quad (3.66)$$

### 3.4.2.2 Le modèle à la limite

La condition à la limite, c'est-à-dire la valeur de  $s$  en tout point de la paroi émettrice et pour toute direction sortante, est donnée, pour une paroi noire, par l'expression générale de l'Eq. 3.16

rappelée ici

$$\begin{aligned}
s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) &= -\alpha \mathcal{G} \left[ L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \right] \\
&\quad - \beta \left\| \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y}) \right\| \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \\
&\quad - \gamma \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \\
&\quad + \partial_{\vec{\pi}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \qquad \vec{y} \in \partial G(\vec{\pi}), \vec{\omega} \cdot \vec{n} > 0
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Les calculs des expressions analytiques des coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{a}$  sont réalisés dans l'encadré 3.4 et nous en déduisons que pour la déformation géométrique envisagée ici, nous avons :

- le milieu est transparent, donc le résultat de  $\mathcal{G}$  appliqué à  $L$  est nul ;
- $\Omega$  est indépendant de  $\vec{\pi}$ , donc  $\gamma$  est nul ;
- $I$  est indépendant de  $\vec{\pi}$ , donc le terme de dérivée matérielle est nul,

La condition à la limite en sensibilité devient alors :

$$s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = -\beta \left\| \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y}) \right\| \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \qquad \vec{y} \in \partial G(\vec{\pi}), \vec{\omega} \cdot \vec{n} > 0 \tag{3.68}$$

où  $\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} I^{em}$  est la dérivée surfacique de la luminance dans l'espace matériel et  $\left\| \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1} \right\|$  est la correction de la mesure entre le support matériel et le support géométrique.

**Dérivée surfacique dans l'espace matériel** Les développements que nous avons fait dans la [Sec. 3.4.1](#) pour déterminer la dérivée surfacique dans l'espace matériel s'appliquent de façon identique à l'exemple de l'homothétie.

$$\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} I(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = -\text{sign}(\lambda) L^{eq} (T_{D/2}) \frac{2\pi}{D} \sin\left(\frac{2\pi}{D} y_1\right) \mathcal{H}(y_1 \in [0, D]) \tag{3.69}$$

avec  $-\text{sign}(\lambda)$  la projection  $\vec{u} \cdot \vec{e}_1$  (voir encadré 3.3).

**Correction de la mesure** Le rapport des mesures du support matériel et du support géométrique est déterminé par  $\left\| \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y}) \right\|$  dont le calcul donne

$$\begin{aligned}
\left\| \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y}) \right\| &= \left\| \lim_{\check{\tau} \rightarrow 0} \frac{\mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y} + \check{\tau} \vec{u}) - \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})}{\check{\tau}} \right\| \\
&= \left\| \lim_{\check{\tau} \rightarrow 0} \frac{\left( \frac{1}{l(\vec{\pi})} \left( (\vec{y} + \check{\tau} \vec{u}) \cdot \vec{e}_1 \right) D, 0 \right) - \left( \frac{1}{l(\vec{\pi})} \left( \vec{y} \cdot \vec{e}_1 \right) D, 0 \right)}{\check{\tau}} \right\| \\
&= \left| \frac{\vec{u} \cdot \vec{e}_1}{l(\vec{\pi})} D \right| \\
&= \frac{D}{l(\vec{\pi})}
\end{aligned} \tag{3.70}$$

**Résultat**

$$s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = \frac{\left| \frac{\lambda}{D} y_1 \right|}{D + \lambda \vec{\pi}} L^{eq} (T_{D/2}) 2\pi \sin\left(\frac{2\pi}{D} y_1\right) \mathcal{H}(y_1 \in [0, D]) \tag{3.71}$$

avec  $y_1 = \vec{y} \cdot \vec{e}_1$  et  $\vec{y} = \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})$ .

## ENCADRÉ 3.4 – Déclinaison de la condition à la limite

**Coefficients de la déformation spatiale** Les coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\vec{u}$  sont obtenus par projection de  $\vec{v}_\chi$  sur la surface (voir paragraphe 3.3.1.4) :

$$\beta = \|\vec{v}_\chi - \alpha\vec{\omega}\| ; \quad \vec{u} = \frac{\vec{v}_\chi - \alpha\vec{\omega}}{\|\vec{v}_\chi - \alpha\vec{\omega}\|} ; \quad \alpha = \frac{\vec{v}_\chi \cdot \vec{n}}{\vec{\omega} \cdot \vec{n}} \quad (3.72)$$

sachant que dans le cas présent

$$\vec{n} = (0, -1) \quad (3.73)$$

et que nous avons déjà obtenu le vecteur de déformation spatiale à partir de  $\mathcal{Z}$ , soit

$$\vec{v}_\chi = (\lambda \frac{1}{D} \vec{y} \cdot \vec{e}_1, 0) \quad (3.74)$$

Comme nous sommes dans le plan (simplification du 2D pur), le vecteur direction  $\vec{\omega}$  (de module unité) est repéré dans le repère local du support géométrique avec un seul angle  $\theta$ , sa représentation dans le repère cartésien  $2D$  est

$$\vec{\omega} = (\sin(\theta), -\cos(\theta)) \quad (3.75)$$

ce qui conduit à

$$\alpha = 0 \quad (3.76)$$

$$\beta = \|(\frac{\lambda}{D} \vec{y} \cdot \vec{e}_1, 0)\| = |\frac{\lambda}{D} \vec{y} \cdot \vec{e}_1| \quad (3.77)$$

et

$$\vec{u} = \frac{(\frac{\lambda}{D} \vec{y} \cdot \vec{e}_1, 0)}{\|(\frac{\lambda}{D} \vec{y} \cdot \vec{e}_1, 0)\|} = (\text{sign}(\lambda), 0) \quad (3.78)$$

et  $\vec{u} = \Omega_{\vec{y}, \vec{\pi}}^{-1}(\vec{u}) = \vec{u}$ .

Le vecteur tangentiel  $\vec{u}$  est indépendant de la direction d'émission, il sera donc uniquement orienté par l'intensité de la déformation représentée par le coefficient  $\lambda$  qui peut être négatif (raccourcissement de la largeur de la zone d'émission) ou positif (allongement de la largeur de la zone d'émission).

**Coefficients de la déformation spatiale** L'application  $\Omega$  ne dépend pas de  $\vec{\pi}$ , la vitesse de rotation  $\gamma$  est donc nulle.

### 3.4.2.3 Interprétation

Nous illustrerons ici le résultat (Eq. 3.71) de cet exemple en repartant des images du transfert radiatif. Dans cet exemple, la condition à la limite de sensibilité a la même forme que dans l'exemple précédent — à l'exception du coefficient  $\beta$  qui ne dépend plus de l'angle d'émission  $\theta$  mais que le développement formel fait apparaître ici comme une dépendance à la position d'émission sur la paroi. Cette dépendance montre que, selon la position  $\vec{y}$  le long de la zone émettrice, la source de sensibilité sera plus ou moins importante.

Etudions la différence de luminance perçue en une position d'observation  $(\vec{x}_{obs}, \vec{\omega}_{obs})$  sous l'effet d'une elongation de la zone émettrice de la paroi. et pour cela, considérons une géométrie de référence  $\vec{\pi} = \vec{\pi}_{ref}$  et une perturbation géométrique d'elongation  $\vec{\pi} = \vec{\pi}_p$  (Fig. 3.16). Le schéma illustre bien que, dans la configuration perturbée, la luminance reçue en  $(\vec{x}_{obs}, \vec{\omega}_{obs})$  est différente (ici, plus importante) que dans la configuration de référence.

Pour chacune des valeurs de  $\vec{\pi}$ , nous devons associer un profil de la luminance sortante à la paroi : nous pouvons donc comprendre la sensibilité, en la position d'observation  $(\vec{x}_{obs}, \vec{\omega}_{obs})$ , en étudiant la différence de luminance qui lui parvient dans la configuration de référence et dans la configuration perturbée. Cette différence de luminance est engendrée par "l'étirement" du profil de luminance sortante (la condition radiative sur le support géométrique) sous l'effet de l'agrandissement de la paroi.

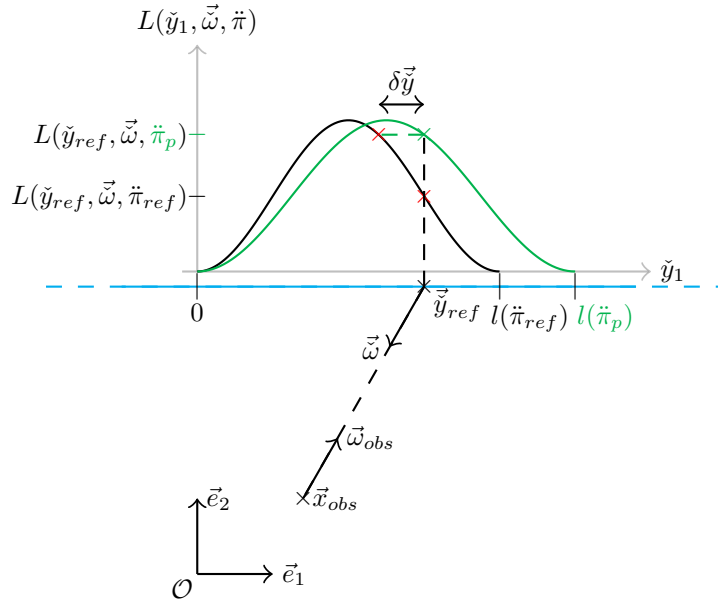


FIGURE 3.16 – Schéma de la condition à la limite pour  $\vec{\pi}_{ref}$  et  $\vec{\pi}_p$

Sur la paroi, la luminance émise en  $\vec{y}_{ref}$  varie selon la valeur de  $\vec{\pi}$ . Pour caractériser cette variation, nous pouvons nous placer dans la configuration de référence et quantifier le déplacement de la position d'émission qui correspondrait à la luminance émise dans la configuration perturbée ( $\delta\vec{y}$  sur la Fig. 3.16). La différence de luminance perçue par l'observation lors de la déformation de la paroi est donc équivalente à une variation de la luminance émise aux positions  $\vec{y}_{ref}$  et  $\vec{y}_{ref} + \delta\vec{y}$  dans la configuration géométrique de référence.

Cette différence peut être écrite par un développement de  $L$  au premier ordre :

$$L(\vec{y}_{ref} + \delta\vec{y}, \vec{\omega}_{ref}, \vec{\pi}_{ref}) - L(\vec{y}_{ref}, \vec{\omega}_{ref}, \vec{\pi}_{ref}) = \partial_{\vec{y}} L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}_{ref}) \delta\vec{y} \quad (3.79)$$

et la source de sensibilité devient :

$$s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = \frac{L(\vec{y}_{ref} + \delta\vec{y}, \vec{\omega}_{ref}, \vec{\pi}_{ref}) - L(\vec{y}_{ref}, \vec{\omega}_{ref}, \vec{\pi}_{ref})}{\delta\vec{\pi}} = \partial_{\vec{y}} L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \frac{\delta\vec{y}}{\delta\vec{\pi}} \quad (3.80)$$

Étant donné la définition du support géométrique (voir Eq. 3.62), on a  $\delta\vec{y} = \lambda\delta\tilde{\pi}\frac{\vec{y}\cdot\vec{e}_1}{D}$  et donc :

$$s(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) = \partial_{\vec{y}}L(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) \left( \lambda \frac{\vec{y}\cdot\vec{e}_1}{D} \right) \quad (3.81)$$

Nous retrouvons la dépendance de la condition à la limite à la position  $\vec{y}\cdot\vec{e}_1$  sur la paroi (position référencée dans le support matériel). Sur le schéma, nous pouvons voir que plus la position d'intersection sera proche de l'origine du repère de la paroi (borne de gauche), moins la déformation de la condition à la limite sera grande et moins la sensibilité sera importante. Au contraire, plus elle sera éloignée de l'origine du repère, plus l'étirement de la paroi se fera ressentir et plus la sensibilité sera importante. Cet effet vient de l'augmentation de la déformation lorsqu'on s'éloigne de 0 : la déformation est nulle à l'origine de la paroi et maximale à l'extrémité droite.

### 3.4.3 Rotation du plan

Dans cette partie, nous étudions la condition à la limite de sensibilité d'une paroi plane dont l'inclinaison varie avec  $\tilde{\pi}$ .

#### 3.4.3.1 Définition de la configuration géométrique et radiative

En  $2D$ , la configuration géométrique est décrite, dans un repère cartésien  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , par une droite infinie passant par  $(0, h)$  et inclinée d'un angle  $\varphi(\tilde{\pi}) = \varphi_0 + \tilde{\pi}$  par rapport à  $\vec{e}_1$ . Son orientation est donnée par la normale  $\vec{n} = (\sin(\varphi(\tilde{\pi})), -\cos(\varphi(\tilde{\pi})))$ . Le support matériel est la droite  $U = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^2 | \vec{y}\cdot\vec{e}_2 = h\}$ ,  $h$  arbitraire, fixée ici à  $D$  sur la figure, orientée par la normale  $\vec{n} = -\vec{e}_2$ .

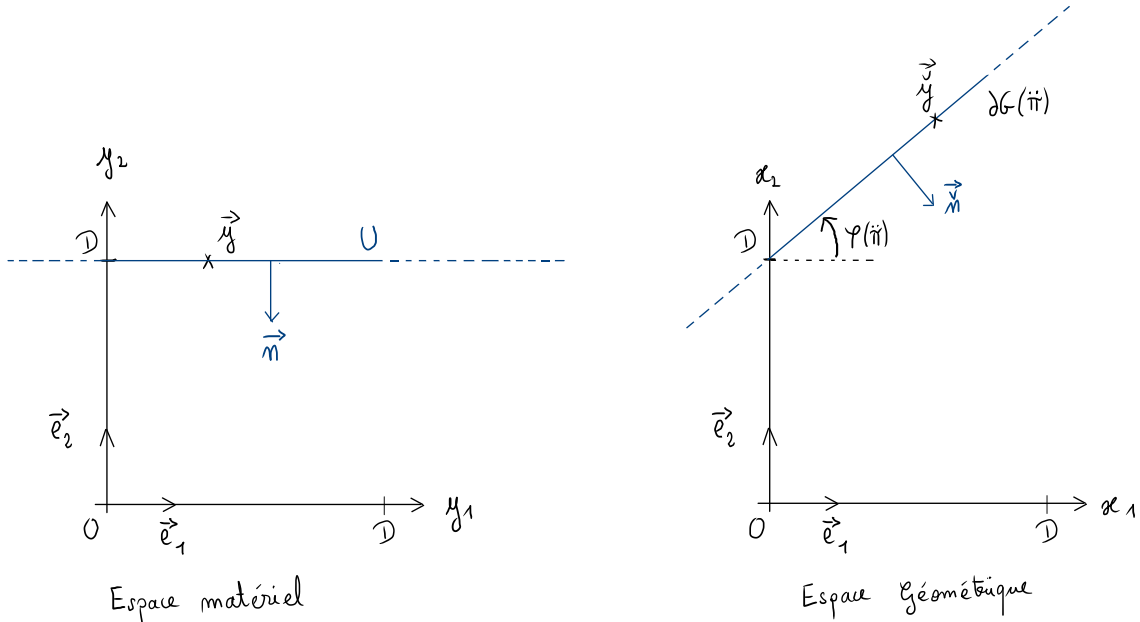


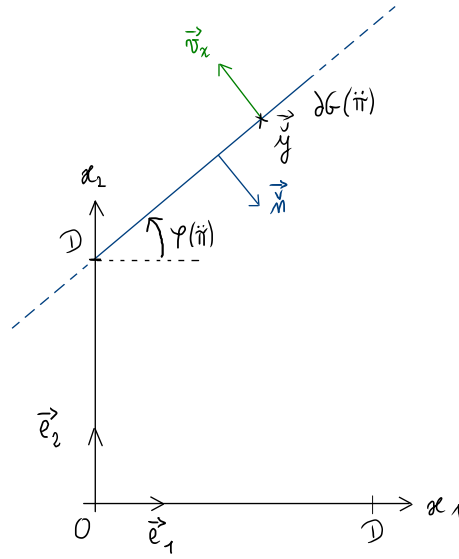
FIGURE 3.17 – Espace matériel et espace géométrique

Le profil de température de la paroi est identique aux exemples précédents, c'est-à-dire que la température est nulle autour d'une zone centrale d'émission et, sur la paroi, le profil de luminance est sinusoïdal avec une intensité maximale au centre de la zone émettrice et qui s'annule continûment aux bornes  $\vec{y}\cdot\vec{e}_1 = 0$  et  $\vec{y}\cdot\vec{e}_1 = D \cos(\varphi(\tilde{\pi}))$ . La largeur de la zone émettrice est indépendante de  $\tilde{\pi}$  et égale à  $D$ .

Par rapport aux exemples précédents, nous introduisons ici une dépendance de la luminance matérielle à la direction  $\vec{\omega}$  :

$$I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) = f(y_1) \vec{\omega}\cdot\vec{n} \quad (3.82)$$



FIGURE 3.18 – Vecteur de déformation  $\vec{v}_x$  en  $\vec{y}$ 

avec  $y_1 = \vec{y} \cdot \vec{e}_1$  et

$$f(y_1) = L^{eq}(T_{D/2}) \left( 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{D} y_1\right) \right) \mathcal{H}(y_1 \in [0, D]) \quad (3.83)$$

Cette dépendance de la luminance matérielle au scalaire  $\vec{\omega} \cdot \vec{n}$  est une modélisation qui permet de rendre la configuration sensible à la déformation géométrique.

Le lien entre le support matériel et le support géométrique est donné par l'application  $\mathcal{Z}$  définie telle que :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}: \quad U \times \mathbb{R} &\longrightarrow \partial G(\bar{\pi}) \\ (\vec{y}, \bar{\pi}) &\longmapsto \vec{y} = \left( \vec{y} \cdot \vec{e}_1 \cos(\varphi(\bar{\pi})), \vec{y} \cdot \vec{e}_1 \sin(\varphi(\bar{\pi})) \right) \end{aligned} \quad (3.84)$$

À partir de  $\mathcal{Z}$ , nous déduisons le vecteur de déformation spatiale (Fig. 3.18) :

$$\vec{v}_x = \partial_{\bar{\pi}} \mathcal{Z}(\vec{y}, \bar{\pi}) = \left( -\vec{y} \cdot \vec{e}_1 \sin(\varphi(\bar{\pi})), \vec{y} \cdot \vec{e}_1 \cos(\varphi(\bar{\pi})) \right) \quad (3.85)$$

L'application inverse de  $\mathcal{Z}$  est

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{\bar{\pi}}^{-1}: \quad \partial G(\bar{\pi}) &\longrightarrow U \\ \vec{y} &\longmapsto \vec{y} = \left( \frac{\vec{y} \cdot \vec{e}_1}{\cos(\varphi(\bar{\pi}))}, 0 \right) \end{aligned} \quad (3.86)$$

Au contraire des deux parties précédentes, la transformation appliquée au support géométrique induit une rotation de sa normale  $\vec{n}$ . Dans cette configuration, l'application  $\Omega$  permettra, d'une part, de lier les vecteurs unitaires propres au support géométrique à ceux propres au support matériel et, d'autre part, d'identifier l'axe de rotation  $\vec{a}$ , et la vitesse de rotation  $\gamma$ , à partir desquels nous déterminerons la contribution de la dérivée angulaire sur la condition à la limite de sensibilité.

L'application  $\Omega$  reliant le vecteur directionnel du support matériel  $\vec{\omega}$  et le vecteur directionnel du support géométrique  $\vec{\tilde{\omega}}$  est une rotation d'un angle  $\varphi(\bar{\pi})$  autour d'un axe orienté par  $\vec{e}_3$  et l'application inverse est la rotation d'un angle  $\varphi(\bar{\pi})$  autour d'un axe orienté par  $-\vec{e}_3$ . Le vecteur  $\vec{\tilde{\omega}}$  est donc le résultat d'une rotation du vecteur  $\vec{\omega}$  d'un angle  $\varphi(\bar{\pi})$  autour d'un axe orienté par  $\vec{e}_3$  et le vecteur  $\vec{\omega}$  est obtenu à partir de  $\vec{\tilde{\omega}}$  par la rotation inverse (voir une illustration dans l'encadré 3.5).

ENCADRÉ 3.5 – Applications  $\Omega$  et  $\Omega_{\vec{y}, \vec{\pi}}^{-1}$  dans le repère cartésien 2D

Les vecteurs directionnels  $\vec{\omega}$  et  $\vec{\tilde{\omega}}$  peuvent être représentés dans le repère cartésien  $2D$  à partir de l'angle  $\theta$  et des rotations  $\Omega$  et  $\Omega_{\vec{y}, \vec{\pi}}^{-1}$  qui sont alors les matrices de rotations d'axes  $\vec{e}_3$  et  $-\vec{e}_3$  et d'angle  $\varphi(\vec{\pi})$ . Le vecteur directionnel du support matériel  $\vec{\omega}$  est repéré par l'angle  $\theta$  dans le repère cartésien. Sachant que la normale est le vecteur  $\vec{n} = (0, -1)$ , nous pouvons écrire  $\vec{\omega} = (\sin(\theta), -\cos(\theta))$ . L'application  $\Omega$  qui donne  $\vec{\tilde{\omega}}$  à partir de  $\vec{\omega}$  peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \times U \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{D} \\ \Omega: (\vec{\omega}, \vec{y}, \vec{\pi}) &\longmapsto \vec{\tilde{\omega}} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi(\vec{\pi})) & -\sin(\varphi(\vec{\pi})) \\ \sin(\varphi(\vec{\pi})) & \cos(\varphi(\vec{\pi})) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.87)$$

Soit  $\vec{\tilde{\omega}} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi(\vec{\pi})) \sin(\theta) + \sin(\varphi(\vec{\pi})) \cos(\theta) \\ \sin(\varphi(\vec{\pi})) \sin(\theta) - \cos(\varphi(\vec{\pi})) \cos(\theta) \end{pmatrix}$  et l'application inverse :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &\longrightarrow \mathcal{D} \\ \Omega_{\vec{y}, \vec{\pi}}^{-1}: \vec{\tilde{\omega}} &\longmapsto \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi(\vec{\pi})) & \sin(\varphi(\vec{\pi})) \\ -\sin(\varphi(\vec{\pi})) & \cos(\varphi(\vec{\pi})) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi(\vec{\pi})) \sin(\theta) + \sin(\varphi(\vec{\pi})) \cos(\theta) \\ \sin(\varphi(\vec{\pi})) \sin(\theta) - \cos(\varphi(\vec{\pi})) \cos(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.88)$$

## 3.4.3.2 Le modèle à la limite

La condition à la limite de sensibilité, c'est-à-dire la valeur de  $s$  en tout point de la paroi émettrice et pour toute direction sortante, est donnée, pour une paroi noire, par l'expression générale de l'Eq. 3.16 rappelée ici

$$\begin{aligned} s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) &= -\alpha \mathcal{G} \left[ L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \right] \\ &\quad - \beta \|\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \\ &\quad - \gamma \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \\ &\quad + \partial_{\vec{\pi}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \end{aligned} \quad \vec{y} \in \partial G(\vec{\pi}), \vec{\omega} \cdot \vec{n} > 0 \quad (3.89)$$

Les calculs des expressions analytiques des coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{a}$  sont réalisés dans l'encadré 3.6, et nous en déduisons que dans le cas présent :

- le milieu est transparent, donc le résultat de  $\mathcal{G}$  appliqué à  $L$  est nul ;
- $I$  est indépendant de  $\vec{\pi}$ , donc le terme de dérivée matérielle est nul.

La condition à la limite en sensibilité devient alors :

$$\begin{aligned} s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) &= -\beta \|\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \\ &\quad - \gamma \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \end{aligned} \quad \vec{y} \in \partial G(\vec{\pi}), \vec{\omega} \cdot \vec{n} > 0 \quad (3.90)$$

avec  $\vec{y} = \mathcal{Z}^{-1}(\vec{\tilde{y}})$  et  $\vec{\omega} = \Omega_{\vec{y}, \vec{\pi}}^{-1}(\vec{\tilde{\omega}})$ . Des deux termes qui composent la condition à la limite de sensibilité, nous avons déjà abordé la dérivée surfacique sur le support matériel. Dans un premier temps, nous donnerons les développements formels de son expression qui nous mèneront à sa forme analytique. Le deuxième terme est appelé dérivée angulaire, il résulte de la rotation de la normale du support géométrique et de l'influence de cette rotation sur les directions d'émission  $\vec{\omega}$ . Nous donnerons, dans un deuxième temps, les développements formels de cette dérivée afin d'en obtenir une forme analytique.

## ENCADRÉ 3.6 – Déclinaison de la condition à la limite

**Coefficients de la déformation spatiale** Les coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\vec{u}$  sont obtenus par projection de  $\vec{v}_\chi$  sur la surface (voir paragraphe 3.3.1.4) :

$$\beta = \|\vec{v}_\chi - \alpha\vec{\omega}\| ; \quad \vec{u} = \frac{\vec{v}_\chi - \alpha\vec{\omega}}{\|\vec{v}_\chi - \alpha\vec{\omega}\|} ; \quad \alpha = \frac{\vec{v}_\chi \cdot \vec{n}}{\vec{\omega} \cdot \vec{n}} \quad (3.91)$$

sachant que dans le cas présent

$$\vec{n} = (\sin(\varphi(\ddot{\pi})), -\cos(\varphi(\ddot{\pi}))) \quad (3.92)$$

et que nous avons déjà obtenu le vecteur de déformation spatiale à partir de  $\mathcal{Z}$ , soit

$$\vec{v}_\chi = \left( -\vec{y} \cdot \vec{e}_1 \sin(\varphi(\ddot{\pi})), \vec{y} \cdot \vec{e}_1 \cos(\varphi(\ddot{\pi})) \right) \quad (3.93)$$

En utilisant la représentation cartésienne du vecteur directionnel (voir encadré 3.5)

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi(\ddot{\pi})) \sin(\theta) + \sin(\varphi(\ddot{\pi})) \cos(\theta) \\ \sin(\varphi(\ddot{\pi})) \sin(\theta) - \cos(\varphi(\ddot{\pi})) \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

on trouve

$$\alpha = \frac{-\vec{y} \cdot \vec{e}_1 (\sin(\varphi(\ddot{\pi}))^2 + \cos(\varphi(\ddot{\pi}))^2)}{\cos(\theta)} = \frac{-\vec{y} \cdot \vec{e}_1}{\cos(\theta)} \quad (3.95)$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \beta &= \left\| \begin{pmatrix} -\vec{y} \cdot \vec{e}_1 \sin(\varphi(\ddot{\pi})) \\ \vec{y} \cdot \vec{e}_1 \cos(\varphi(\ddot{\pi})) \end{pmatrix} + \frac{\vec{y} \cdot \vec{e}_1}{\cos(\theta)} \begin{pmatrix} \cos(\varphi(\ddot{\pi})) \sin(\theta) + \sin(\varphi(\ddot{\pi})) \cos(\theta) \\ \sin(\varphi(\ddot{\pi})) \sin(\theta) - \cos(\varphi(\ddot{\pi})) \cos(\theta) \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} \vec{y} \cdot \vec{e}_1 (\tan(\theta) \cos(\varphi(\ddot{\pi}))) \\ \vec{y} \cdot \vec{e}_1 (\tan(\theta) \sin(\varphi(\ddot{\pi}))) \end{pmatrix} \right\| \\ &= |\vec{y} \cdot \vec{e}_1 \tan(\theta)| \end{aligned} \quad (3.96)$$

et

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \text{sign}(\tan(\theta)) \cos(\varphi(\ddot{\pi})) \\ \text{sign}(\tan(\theta)) \sin(\varphi(\ddot{\pi})) \end{pmatrix} \quad (3.97)$$

$$\vec{u} = \Omega_{\vec{y}, \ddot{\pi}}^{-1}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \text{sign}(\tan(\theta)) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.98)$$

**Coefficient de la déformation angulaire** En déterminant  $\Omega$  nous fixons l'axe de rotation  $\vec{a} = \vec{e}_3$  et la vitesse de rotation  $\gamma = \partial_{\ddot{\pi}} \varphi(\ddot{\pi}) = 1$ .

**Dérivée surfacique dans l'espace matériel** Les développements que nous avons fait dans la [Sec. 3.4.1](#) pour déterminer la dérivée surfacique dans l'espace matériel s'appliquent de façon identique à l'exemple de la rotation.

$$\partial_{\vec{D}}^{\vec{u}} I(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = \vec{\omega} \cdot \vec{n} \operatorname{sign}(\tan(\theta)) L^{eq}(T_{D/2}) \frac{2\pi}{D} \sin\left(\frac{2\pi}{D} y_1\right) \mathcal{H}(y_1 \in [0, D]) \quad (3.99)$$

avec  $\operatorname{sign}(\tan(\theta))$  la projection  $\vec{u} \cdot \vec{e}_1$  (voir encadré [3.3](#)).

**Correction de la mesure** Le rapport des mesures du support matériel et du support géométrique est déterminé par  $\|\partial_{\vec{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\|$  :

$$\begin{aligned} \|\partial_{\vec{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| &= \left\| \lim_{\check{\tau} \rightarrow 0} \frac{\mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y} + \check{\tau} \vec{u}) - \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})}{\check{\tau}} \right\| \\ &= \left\| \lim_{\check{\tau} \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{(\vec{y} + \check{\tau} \vec{u}) \cdot \vec{e}_1}{\cos(\varphi(\vec{\pi}))}, 0\right) - \left(\frac{\vec{y} \cdot \vec{e}_1}{\cos(\varphi(\vec{\pi}))}, 0\right)}{\check{\tau}} \right\| \\ &= \left| \frac{\vec{u} \cdot \vec{e}_1}{\cos(\varphi(\vec{\pi}))} \right| \\ &= 1 \end{aligned} \quad (3.100)$$

**Dérivée angulaire dans l'espace matériel** La luminance matérielle est dérivée par rapport à sa seconde variable pour traduire l'influence d'une rotation infinitésimale de  $\vec{\omega}$  autour de  $\vec{a}$  dans une configuration géométrique  $G(\vec{\pi})$  donnée (la normale est donc fixée). Dans notre exemple la luminance matérielle s'écrit

$$I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = \vec{\omega} \cdot \vec{n} L^{eq}(T_{D/2}) \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{D} y_1\right)\right) \mathcal{H}(y_1 \in [0, D]) \quad (3.101)$$

On a  $\vec{\omega} \cdot \vec{n} = \cos(\theta)$  avec  $\theta$  l'angle  $(\vec{n}, \vec{\omega})$ . Une variation de  $\vec{\omega}$  autour de  $\vec{a}$  correspond donc, dans cet exemple particulier, à une variation de  $\theta$ . On a donc :

$$I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = \cos(\theta) L^{eq}(T_{D/2}) \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{D} y_1\right)\right) \mathcal{H}(y_1 \in [0, D]) \quad (3.102)$$

et sa dérivée angulaire donne

$$\partial_{\vec{R}}^{\vec{a}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = -\sin(\theta) L^{eq}(T_{D/2}) \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{D} y_1\right)\right) \mathcal{H}(y_1 \in [0, D]) \quad (3.103)$$

## Résultat

$$\begin{aligned} s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) &= -\tan(\theta) |y_1| \vec{\omega} \cdot \vec{n} L^{eq}(T_{D/2}) \frac{2\pi}{D} \sin\left(\frac{2\pi}{D} y_1\right) \mathcal{H}(y_1 \in [0, D]) \\ &\quad + \gamma \sin(\theta) L^{eq}(T_{D/2}) \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{D} y_1\right)\right) \mathcal{H}(y_1 \in [0, D]) \end{aligned} \quad (3.104)$$

avec  $y_1 = \vec{y} \cdot \vec{e}_1$  et  $\vec{y} = \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})$ ,  $\gamma = 1$ .

### 3.4.3.3 Interprétation

Pour illustrer les termes de la condition à la limite, nous étudions la différence de la luminance perçue en  $(\vec{x}_{obs}, \vec{\omega}_{obs})$  pour deux inclinaisons de parois différentes.

Par rapport aux configurations précédentes, la condition à la limite (voir [Eq. 3.90](#)) contient un terme supplémentaire. Ce terme correspond à la dérivée angulaire de la luminance sortante de la

paroi qui est, nous allons le voir, uniquement induit par la rotation de la paroi. Comme pour les exemples précédents, nous étudions la luminance perçue par une position d'observation ( $\vec{x}_{obs}, \vec{\omega}_{obs}$ ) dans une configuration géométrique de référence et une configuration perturbée. Le schéma de la Fig. 3.19 illustre, à gauche, les deux points d'intersections de la frontière selon la géométrie de référence (position  $\vec{y}_{ref}$ ) et la géométrie perturbée (position  $\vec{y}_p$ ).

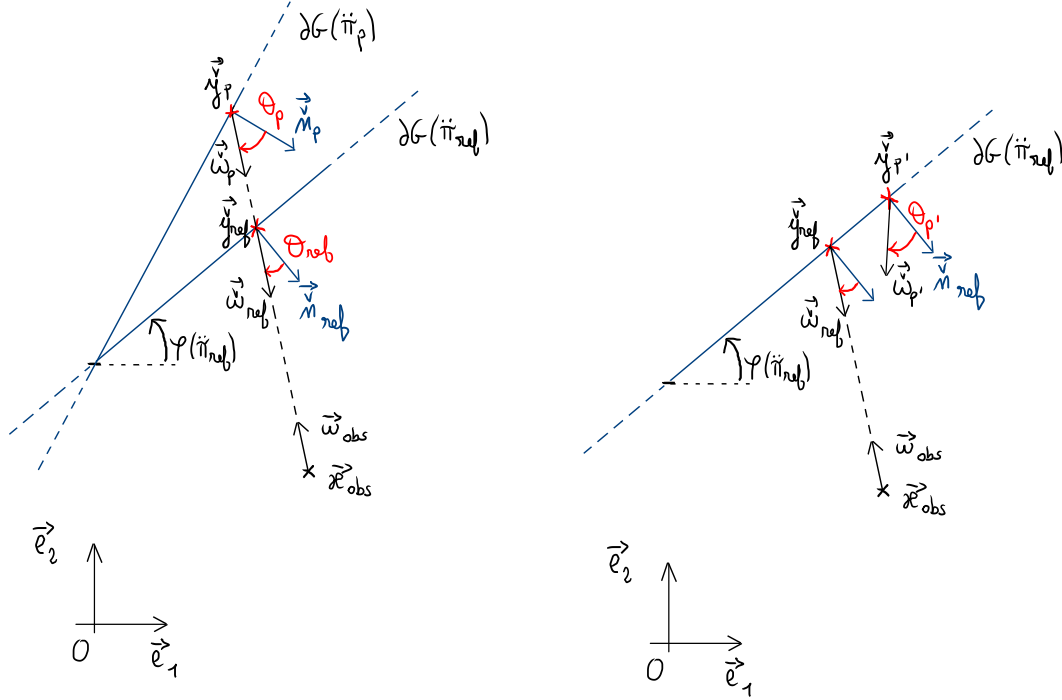


FIGURE 3.19 – Frontière pour  $\vec{\pi} = \vec{\pi}_{ref}$  et  $\vec{\pi} = \vec{\pi}_p$

En plus de cette perturbation de la position d'intersection de la paroi, la rotation induit également une perturbation de la direction d'émission à la frontière. En effet, la direction d'observation  $\vec{\omega}_{obs}$  reste identique mais la rotation de la paroi modifie l'angle avec lequel la ligne de visée intercepte la paroi. Dans cette configuration, la position d'émission sur la paroi de référence ( $\vec{y}_{ref}, \vec{\omega}_{ref}$ ) est différente, spatialement et angulairement, de la position d'émission dans la configuration perturbée ( $\vec{y}_p, \vec{\omega}_p$ ).

La différence de luminance reçue par l'observation correspond donc à :

$$L(\vec{y}_p, \vec{\omega}_p, \vec{\pi}_p) - L(\vec{y}_{ref}, \vec{\omega}_{ref}, \vec{\pi}_{ref}) \quad (3.105)$$

Sur le schéma, nous avons représenté à droite une position et direction sur la frontière de référence qui est équivalente à la position d'émission de la frontière perturbée : la luminance sortante à cette position et dans cette direction est la même que celle émise dans la configuration perturbée en ( $\vec{y}_p, \vec{\omega}_p$ ) et qui est reçue en ( $\vec{x}_{obs}, \vec{\omega}_{obs}$ ).

La différence peut donc s'écrire :

$$L(\vec{y}_{p'}, \vec{\omega}_{p'}, \vec{\pi}_{ref}) - L(\vec{y}_{ref}, \vec{\omega}_{ref}, \vec{\pi}_{ref}) \quad (3.106)$$

qui correspond, au premier ordre, à :

$$L(\vec{y}_{p'}, \vec{\omega}_{p'}, \vec{\pi}_{ref}) - L(\vec{y}_{ref}, \vec{\omega}_{ref}, \vec{\pi}_{ref}) = \partial_{\vec{y}} L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \delta \vec{y} + \partial_{\vec{\omega}} L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \delta \vec{\omega} \quad (3.107)$$

Nous retrouvons dans cette formulation les deux dérivées spatiales et angulaires de la condition à la limite de sensibilité. Nous ne détaillerons pas le formalisme qui permettrait de retrouver les valeurs des coefficients  $\beta$  et  $\gamma$  à partir des éléments infinitésimaux  $\delta\vec{y}$  et  $\delta\vec{\omega}$  mais ce sont bien, comme précédemment, les dérivées  $\partial_{\vec{\pi}}\vec{y}$  et  $\partial_{\vec{\pi}}\vec{\omega}$  qui en sont l'origine.

Cet exemple de déformation angulaire de la paroi noire avec un effet angulaire du profil de luminance nous permet d'anticiper la présence des termes angulaires qui seront parfois présents dans les configurations radiatives des parois spéculaires.

### 3.5 Illustration des termes de la condition à la limite en paroi réfléchissante et milieu transparent

Dans cette section, nous allons illustrer les termes de la condition à la limite de sensibilité lorsqu'elle s'applique à des parois réfléchissantes avec un milieu transparent. Les propriétés de parois (coefficient de réflexion, luminance émise) seront modélisées par des fonctions qui s'annulent continument aux frontières des parois. À partir de cette configuration radiative, nous aborderons plusieurs des termes de la condition à la limite générale et nous verrons apparaître les couplages avec la dérivée spatiale et la dérivée angulaire.

Les transformations que nous traiterons sont la rotation et la translation d'une paroi. Nous verrons que, selon les différentes propriétés de parois, une même transformation (par exemple la rotation) peut engendrer deux conditions aux limites différentes.

#### 3.5.1 Translation orthogonale du plan, paroi spéculaire

La première illustration que nous allons faire sur les parois réfléchissantes est réalisée à travers l'application de la condition à la limite de sensibilité sur une paroi plane, spéculaire, qui est déplacée dans une direction colinéaire à la normale.

##### 3.5.1.1 Définition de la configuration géométrique et radiative

La configuration géométrique est identique à celle de la [Sec. 3.4.1](#). Dans un repère cartésien  $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , la paroi horizontale réfléchissante est perpendiculaire à  $\vec{e}_2$  et est orientée par la normale  $\vec{n} = (0, -1)$ . Le paramètre  $\tilde{\pi}$  définit la position de la paroi :  $\vec{y} \cdot \vec{e}_2 = \tilde{\pi}$  pour tout point sur la paroi. En modifiant  $\tilde{\pi}$ , on translate donc la paroi réfléchissante selon  $\vec{e}_2$ .

Le support matériel est la droite  $U = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^2 | \vec{y} \cdot \vec{e}_2 = D\}$  orientée par la normale  $\vec{n} = (0, -1)$  (voir [Fig. 3.11](#)). Le profil de température de la paroi réfléchissante est uniforme et à  $0K$ . La luminance matérielle sortante de cette paroi s'écrit alors

$$I(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) = f(y_1, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) \quad (3.108)$$

avec

$$f(y_1, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) = \rho(y_1, -\vec{\omega}) \int_{\mathcal{H}_{incid}} p(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, y_1) d\vec{\omega}' I(y_1, \vec{\omega}', \tilde{\pi}) \quad (3.109)$$

où  $\mathcal{H}_{incid}$  est l'hémisphère des directions incidentes au support matériel et  $\rho(y_1, -\vec{\omega})$  est la proportion de la luminance incidente qui est réfléchi.

Dans cet exemple, nous considérons un profil spatial du coefficient de réflexion  $\rho(y_1, -\vec{\omega})$  sans discontinuité, qu'on écrit :

$$\rho(y_1, -\vec{\omega}) = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi}{D} y_1 \right) \right) \mathcal{H}(y_1 \in [0, D]) \quad (3.110)$$

avec  $D$  la largeur de la zone réfléchissante que nous avons arbitrairement choisie identique à celle du support géométrique.

Dans le cas d'une paroi spéculaire

$$p(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, y_1) = \delta(\vec{\omega}' - \vec{\omega}^{spec}) \quad (3.111)$$

avec  $\vec{\omega}^{spec} = (\vec{\omega} - 2(\vec{\omega} \cdot \vec{n})\vec{n})$ . Ainsi nous pouvons écrire

$$f(y_1, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi}{D} y_1 \right) \right) I(y_1, \vec{\omega}^{spec}, \tilde{\pi}) \mathcal{H}(y_1 \in [0, D]) \quad (3.112)$$

L'application  $\mathcal{Z}$  qui permet de lier le support géométrique de la paroi réfléchissante et le support matériel est alors la suivante :

$$\mathcal{Z}: \quad \begin{array}{ccc} U \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \partial G(\tilde{\pi}) \\ (\vec{y}, \tilde{\pi}) & \longmapsto & \vec{y} = (\vec{y} \cdot \vec{e}_1, \tilde{\pi}) \end{array} \quad (3.113)$$

À partir de  $\mathcal{Z}$ , nous déduisons le vecteur de déformation spatiale  $\vec{v}_\chi = \partial_{\tilde{\pi}} \mathcal{Z}(\vec{y}, \tilde{\pi}) = (0, 1)$  (Fig. 3.12). L'application inverse est

$$\mathcal{Z}_{\tilde{\pi}}^{-1}: \quad \begin{array}{ccc} \partial G(\tilde{\pi}) & \longrightarrow & U \\ \vec{y} & \longmapsto & \vec{y} = (\vec{y} \cdot \vec{e}_1, D) \end{array} \quad (3.114)$$

L'application  $\Omega$  qui permet de lier la direction d'émission du support matériel avec la direction d'émission de la paroi réfléchissante est l'identité :

$$\Omega: \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{D} \times U \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ (\vec{\omega}, \vec{y}, \tilde{\pi}) & \longmapsto & \vec{\omega} = \vec{\omega} \end{array} \quad (3.115)$$

En 2D pur,  $\mathcal{D}$  est le cercle unité et l'application inverse est :

$$\Omega_{\vec{y}, \tilde{\pi}}^{-1}: \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ \vec{\omega} & \longmapsto & \vec{\omega} = \vec{\omega} \end{array} \quad (3.116)$$

À partir de ces éléments, nous avons défini entièrement la configuration géométrique et la configuration radiative de l'exemple. Nous avons identifié que le profil de la luminance sortante de la frontière est continu entre les bornes de la zone émettrice (grâce au profil de  $\rho$ ) et il est connu en  $\vec{y}$  et  $\vec{\omega}$  via la fonction  $I$  sur le support matériel, soit  $L(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) = I(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi})$ .

### 3.5.1.2 Le modèle à la limite

La condition à la limite de sensibilité — d'une paroi dont la réflexion est spéculaire — est donnée par l'Eq. 3.32, rappelée ici :

$$\begin{aligned} s(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) = & -\alpha \mathcal{G} \left[ L(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) \right] \\ & - \beta \|\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{y}} \mathcal{Z}_{\tilde{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{y}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) \\ & - \beta \|\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{y}} \mathcal{Z}_{\tilde{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{y}} \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \tilde{\pi}) \\ & - \beta \|\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{y}} \mathcal{Z}_{\tilde{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{y}} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \tilde{\pi}) \\ & - \beta \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \partial_{1, \vec{u}} L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \tilde{\pi}) \\ & - \gamma \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{y}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) \\ & - \gamma \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{y}} \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \tilde{\pi}) \\ & + 2 \gamma \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{y}} L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \tilde{\pi}) \\ & + \partial_{\tilde{\pi}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) \\ & - \alpha^{spec} \mathcal{G} \left[ L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \tilde{\pi}) \right] \\ & + \beta^{spec} \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \partial_{1, \vec{u}^{spec}} L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \tilde{\pi}) \\ & + \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) s(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \tilde{\pi}) \end{aligned} \quad \vec{y} \in \partial G(\tilde{\pi}), \vec{\omega} \cdot \vec{n} > 0 \quad (3.117)$$

Cette forme générale de la condition à la limite va être instanciée pour notre exemple par le calcul des coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha^{spec}$ ,  $\beta^{spec}$ ,  $\gamma$ , du vecteur de déformation spatiale et des conditions aux limites radiatives. Dans le cas présent :



- le milieu est transparent, donc le résultat de  $\mathcal{G}$  appliqué à  $L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi})$  et  $L(\vec{y}, \vec{\omega}_{spec}, \vec{\pi})$  est nul ;
- la température de la paroi est nulle donc  $I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = 0$  et ses dérivées sont nulles ;
- la fonction de phase est uniforme spatialement sur la paroi donc  $\partial_{\vec{D}}^{\vec{u}} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y})$  est nul et son intégrale l'est donc aussi ;
- $\Omega$  est indépendant de  $\vec{\pi}$ , donc  $\gamma$  est nul ;
- le coefficient de réflexion  $\rho(\vec{y}, -\vec{\omega})$  est indépendant de  $\vec{\omega}$ , sa dérivée angulaire et donc nulle.

La condition à la limite en sensibilité de la paroi horizontale devient alors :

$$\begin{aligned}
s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) &= -\beta \|\partial_{\vec{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \partial_{\vec{D}}^{\vec{u}} \rho(y_1, -\vec{\omega}) L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi}) \\
&\quad - \beta \rho(y_1, -\vec{\omega}) \partial_{1, \vec{u}} L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi}) \\
&\quad + \beta^{spec} \rho(y_1, -\vec{\omega}) \partial_{1, \vec{u}^{spec}} L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi}) \\
&\quad + \rho(y_1, -\vec{\omega}) s(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi}) \quad \vec{y} \in \partial G(\vec{\pi}), \vec{\omega} \cdot \vec{n} > 0
\end{aligned} \tag{3.118}$$

Le premier terme de la condition à la limite de sensibilité représente la dérivée surfacique matérielle du coefficient de réflexion  $\rho(y_1, -\vec{\omega})$  associée au terme  $\|\partial_{\vec{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\|$  qui correspond à la correction de la mesure entre le support géométrique de la paroi horizontale et le support matériel. Au delà de la forme analytique du coefficient de réflexion et de sa dérivée surfacique, nous ne pouvons pas exprimer de façon plus explicite la forme locale de la condition à la limite. Chacune de ses contributions demande la connaissance locale d'une quantité incidente à la paroi :

- la luminance incidente  $L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi})$  ;
- le gradient spatial de luminance incidente dans la direction  $\vec{u}$ ,  $\partial_{1, \vec{u}} L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi})$  ;
- le gradient spatial de luminance incidente dans la direction  $\vec{u}^{spec}$ ,  $\partial_{1, \vec{u}^{spec}} L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi})$  ;
- la sensibilité incidente  $s(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi})$ .

À travers cette condition à la limite de sensibilité, nous identifions donc trois couplages au modèle de sensibilité : un couplage avec l'ETR, un couplage avec le modèle de la dérivée spatiale de la luminance dans la direction  $\vec{u}$  et un couplage avec celui de la dérivée spatiale de la luminance dans la direction  $\vec{u}^{spec}$ . Le terme faisant apparaître la sensibilité incidente correspond au modèle de sensibilité et à ses propriétés de réflexions à la paroi.

**Dérivée surfacique dans l'espace matériel** La propriété de surface  $\rho(y_1, -\vec{\omega})$  présente dans tous les termes de l'Eq. 3.118 est dérivée sur la surface dans la direction  $\vec{u}$

$$\partial_{\vec{D}}^{\vec{u}} \rho(y_1, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = \text{sign}(\tan(\theta)) \frac{\pi}{D} \sin\left(\frac{2\pi}{D} y_1\right) \mathcal{H}(y_1 \in [0, D]) \tag{3.119}$$

avec  $\text{sign}(\tan(\theta)) = \vec{u} \cdot \vec{e}_1$ .

**Correction de la mesure** La correction de la mesure entre le support géométrique de la paroi réfléchissante horizontale est

$$\begin{aligned}
\|\partial_{\vec{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| &= \left\| \lim_{\check{\tau} \rightarrow 0} \frac{\mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y} + \check{\tau} \vec{u}) - \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})}{\check{\tau}} \right\| \\
&= \left\| \lim_{\check{\tau} \rightarrow 0} \frac{((\vec{y} + \check{\tau} \vec{u}) \cdot \vec{e}_1, 0) - (\vec{y} \cdot \vec{e}_1, 0)}{\check{\tau}} \right\| \\
&= |\vec{u} \cdot \vec{e}_1| \\
&= 1
\end{aligned} \tag{3.120}$$

Les expressions analytiques des coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha^{spec}$ ,  $\beta^{spec}$ ,  $\gamma$  et des vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{u}^{spec}$  et  $\vec{a}$  sont présentés dans l'encadré 3.7.

**Résultat**

$$\begin{aligned}
s(\vec{y}, \vec{\omega}, \ddot{\pi}) &= \tan(\theta) \frac{\pi}{D} \sin\left(\frac{2\pi}{D}y_1\right) \mathcal{H}(y_1 \in [0, D]) L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \ddot{\pi}) \\
&\quad - |\tan(\theta)| \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{D}y_1\right)\right) \mathcal{H}(y_1 \in [0, D]) \partial_{1, \vec{u}} L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \ddot{\pi}) \\
&\quad + |\tan(\theta)| \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{D}y_1\right)\right) \mathcal{H}(y_1 \in [0, D]) \partial_{1, \vec{u}^{spec}} L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \ddot{\pi}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{D}y_1\right)\right) \mathcal{H}(y_1 \in [0, D]) s(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \ddot{\pi})
\end{aligned} \tag{3.121}$$

Sachant que  $\vec{u}^{spec} = -\vec{u}$ , on peut ré-écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
s(\vec{y}, \vec{\omega}, \ddot{\pi}) &= -\tan(\theta) \frac{\pi}{D} \sin\left(\frac{2\pi}{D}y_1\right) \mathcal{H}(y_1 \in [0, D]) L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \ddot{\pi}) \\
&\quad - 2 |\tan(\theta)| \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{D}y_1\right)\right) \mathcal{H}(y_1 \in [0, D]) \partial_{1, \vec{u}} L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \ddot{\pi}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{D}y_1\right)\right) \mathcal{H}(y_1 \in [0, D]) s(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \ddot{\pi})
\end{aligned} \tag{3.122}$$

## ENCADRÉ 3.7 – Déclinaison de la condition à la limite

**Coefficients de la déformation spatiale** Les coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\vec{u}$  sont obtenus par projection de  $\vec{v}_\chi$  sur la surface (voir paragraphe 3.3.1.4) :

$$\beta = \|\vec{v}_\chi - \alpha\vec{\omega}\| ; \quad \vec{u} = \frac{\vec{v}_\chi - \alpha\vec{\omega}}{\|\vec{v}_\chi - \alpha\vec{\omega}\|} ; \quad \alpha = \frac{\vec{v}_\chi \cdot \vec{n}}{\vec{\omega} \cdot \vec{n}} \quad (3.123)$$

sachant que dans le cas présent

$$\vec{n} = (0, -1) \quad (3.124)$$

et que nous avons déjà obtenu le vecteur de déformation spatiale à partir de  $\mathcal{Z}$ , soit

$$\vec{v}_\chi = (0, 1) \quad (3.125)$$

Comme nous sommes dans le plan, le vecteur direction  $\vec{\omega}_r$  (de module unité) peut être repéré avec un seul angle  $\theta$ , sa représentation dans un repère cartésien est

$$\vec{\omega} = (\sin(\theta), -\cos(\theta)) \quad (3.126)$$

ce qui conduit à

$$\alpha = -\frac{1}{\cos(\theta)} \quad (3.127)$$

$$\beta = \|(0, 1) + \frac{1}{\cos(\theta)}(\sin(\theta), -\cos(\theta))\| = \|(\tan(\theta), 0)\| = |\tan(\theta)| \quad (3.128)$$

et

$$\vec{u} = \frac{(\tan(\theta), 0)}{\|(\tan(\theta), 0)\|} = (\text{sign}(\tan(\theta)), 0) \quad (3.129)$$

De la même manière  $\beta^{spec}$  et  $\vec{u}^{spec}$  sont obtenus par projection de  $\vec{v}_\chi$  sur la surface (voir paragraphe 3.3.1.4). La direction  $\vec{\omega}^{spec}$  est déterminée comme la direction spéculaire à  $\vec{\omega}$  soit

$$\begin{aligned} \vec{\omega}^{spec} &= \vec{\omega} - 2(\vec{\omega} \cdot \vec{n})\vec{n} \\ &= (\sin(\theta), \cos(\theta)) \end{aligned} \quad (3.130)$$

ce qui conduit à

$$\alpha^{spec} = \frac{1}{\cos(\theta)} \quad (3.131)$$

$$\beta^{spec} = \|(0, 1) - \frac{1}{\cos(\theta)}(\sin(\theta), \cos(\theta))\| = \|(-\tan(\theta), 0)\| = |-\tan(\theta)| \quad (3.132)$$

et

$$\vec{u}^{spec} = \frac{(-\tan(\theta), 0)}{\|(-\tan(\theta), 0)\|} = (\text{sign}(-\tan(\theta)), 0) \quad (3.133)$$

et  $\vec{u} = \Omega_{\vec{y}, \vec{\pi}}^{-1}(\vec{u}) = \vec{u}$

Nous pouvons en déduire que  $\vec{u} = -\vec{u}^{spec}$  et  $\beta = \beta^{spec}$

**Coefficient de la déformation angulaire** Dans cette partie l'application  $\Omega$  ne dépend pas de  $\vec{\pi}$ , la vitesse de rotation  $\gamma$  est donc nulle.

### 3.5.1.3 Interprétation

L'interprétation que nous allons avoir de cette condition à la limite de sensibilité est basée sur la forme générale du résultat, nous n'avons effectivement pas besoin des détails sur la forme du coefficient de réflexion et de sa dérivée :

$$\begin{aligned}
 s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = & - |\tan(\theta)| \partial_{\vec{D}} \rho(y_1, -\vec{\omega}) L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi}) \\
 & - 2 |\tan(\theta)| \rho(y_1, -\vec{\omega}) \partial_{1, \vec{u}} L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi}) \\
 & + \rho(y_1, -\vec{\omega}) s(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi})
 \end{aligned} \tag{3.134}$$

Nous distinguons trois termes de natures différentes dans la condition à la limite de cet exemple, commençons par le dernier terme : la réflexion de la sensibilité.

**Réflexion de la sensibilité** Cet effet a déjà été commenté en introduction de ce chapitre et traduit le fait que la sensibilité est réfléchié selon les propriétés de réflexion des parois qu'elle rencontre. Dans une géométrie donnée, la sensibilité sera donc réfléchié par toutes les parois réfléchissantes, de la même façon que la luminance peut l'être. Si une paroi est source de sensibilité (comme c'est le cas de notre paroi horizontale), alors elle émettra de la sensibilité mais elle réfléchira également la sensibilité incidente. Il y aura donc, comme pour la luminance, une partie de sensibilité émise par la paroi et une partie de sensibilité réfléchié par la paroi. Si la paroi n'est pas source de sensibilité (si elle ne subit pas de déformation dépendante de  $\vec{\pi}$ ) alors la partie émise de la sensibilité sera nulle mais la partie réfléchié ne le sera pas : toute sensibilité incidente à une paroi réfléchissante est réfléchié.

Dans cet exemple, en plus de réfléchir la sensibilité incidente, la paroi génère deux autres sources de sensibilités. Ces deux autres termes de la condition à la limite peuvent être décrits séparément si on en découple les effets : pour décrire le terme de dérivation du coefficient de réflexion (1<sup>er</sup> terme), nous considérerons un champ de luminance incident homogène, et pour décrire le terme du gradient de luminance incidente (2<sup>ème</sup> terme), nous considéreront  $\rho$  homogène sur la paroi.

**La dérivée surfacique de  $\rho(\vec{y})$**  est un terme de sensibilité qui est représenté dans la Fig. 3.20 et que nous pouvons illustrer en considérant la différence de luminance perçue en une position et direction d'observation ( $\vec{x}_{obs}, \vec{\omega}_{obs}$ ) pour une configuration géométrique de référence et une configuration perturbée.

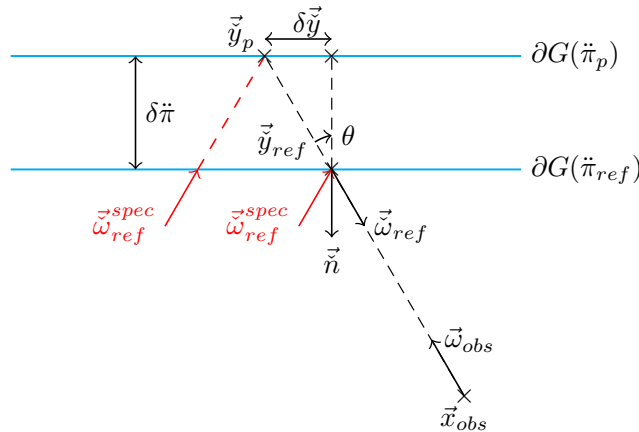


FIGURE 3.20 – Différenciation de  $\rho(\vec{y})$

La luminance sortant de la paroi dans la direction  $\vec{\omega}_{ref} = -\vec{\omega}_{obs}$  dans la configuration de référence est équivalente à la luminance incidente à la paroi en  $\vec{y}_{ref}$  dans la direction spéculaire  $\vec{\omega}_{ref}^{spec}$  atténuée par la valeur de  $\rho(\vec{y}_{ref})$  en  $\vec{y}_{ref}$ . Dans la configuration perturbée, la luminance perçue en la position

d'observation correspond à la luminance sortante de la paroi en  $\vec{y}_p$ , soit la luminance incidente en ce point dans la direction  $\vec{\omega}_{ref}^{spec}$  atténuée par la valeur de  $\rho(\vec{y}_p)$  en  $\vec{y}_p$ . Sous l'hypothèse que la luminance incidente à la paroi est homogène, la seule différence radiative au point d'observation consistera en la différence d'atténuation par  $\rho(\vec{y})$  de la luminance incidente. Notons  $\delta\vec{y}$  le déplacement sur la paroi entre la position de référence et la position perturbée et  $\theta$  l'angle d'inclinaison entre la direction d'émission et la normale de la paroi. On a :  $\delta\vec{y} = \tan(\theta)\delta\vec{\pi}$ .

Au premier ordre, et sous l'hypothèse que la luminance incidente est homogène, la différence de luminance émise par la paroi entre  $\vec{y}_{ref}$  et  $\vec{y}_{ref} + \delta\vec{y}$  dans la direction  $\vec{\omega}_{ref}$  est :

$$\begin{aligned} L(\vec{y}_{ref} + \delta\vec{y}, \vec{\omega}_{ref}, \vec{\pi}_{ref}) - L(\vec{y}_{ref}, \vec{\omega}_{ref}, \vec{\pi}_{ref}) &= \partial_{\vec{y}}\rho(\vec{y}) \delta\vec{y} L(\vec{y}, \vec{\omega}_{ref}^{spec}, \vec{\pi}_{ref}) \\ &= \partial_{\vec{y}}\rho(\vec{y}) \tan(\theta)\delta\vec{\pi} L(\vec{y}, \vec{\omega}_{ref}^{spec}, \vec{\pi}_{ref}) \end{aligned} \quad (3.135)$$

ce qui donne la sensibilité suivante :

$$s(\vec{y}_{ref}, \vec{\omega}_{ref}, \vec{\pi}_{ref}) = \partial_{\vec{y}}\rho(\vec{y}) \tan(\theta) L(\vec{y}, \vec{\omega}_{ref}^{spec}, \vec{\pi}_{ref}) \quad (3.136)$$

Dans cette illustration, nous avons considéré la luminance incidente homogène sur la surface. Pour illustrer le deuxième terme de la condition à la limite de sensibilité, nous allons maintenant nous intéresser au cas où la luminance incidente n'est plus homogène et nous considérerons le coefficient de réflexion  $\rho$  homogène sur la paroi.

**La dérivée surfacique de la luminance incidente** est illustrée par la Fig. 3.21, nous utiliserons le même principe de différenciation de la géométrie pour obtenir la sensibilité émise par la paroi à une position  $(\vec{y}_{ref}, \vec{\omega}_{ref})$  et reçue par l'observation en  $(\vec{x}_{obs}, \vec{\omega}_{obs})$ .

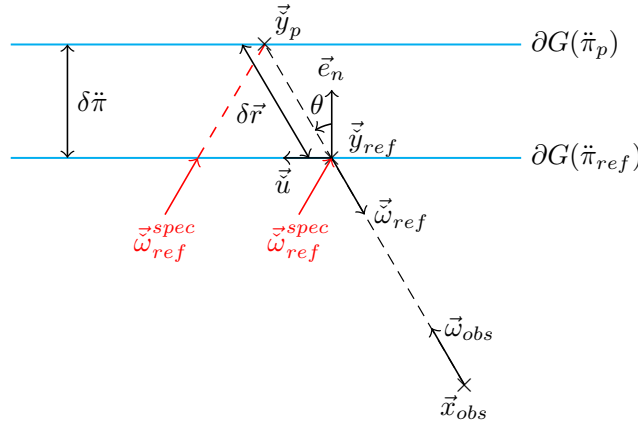


FIGURE 3.21 – Différenciation de la luminance incidente

En différenciant la luminance sortante en  $(\vec{y}_{ref}, \vec{\omega}_{ref})$  dans la configuration de référence et dans la configuration perturbée, nous pouvons voir que sous l'hypothèse que le coefficient de réflexion est homogène, la seule différence entre les deux configurations vient du fait que la luminance incidente en  $\vec{y}_{ref}$  n'est pas la même qu'en  $\vec{y}_p$ . Nous comprenons donc que le gradient de la luminance incidente aura bien une influence sur la sensibilité. Cependant cette contribution est factorisée par 2 dans la condition à la limite, et nous pouvons interroger pourquoi cette contribution de la dérivée surfacique compte deux fois.

Considérant que le déplacement de la paroi crée un volume supplémentaire, il vient une contribution du champ non homogène de luminance dans la hauteur du volume supplémentaire. Nous pouvons voir cette contribution à travers un développement limité de  $L$  au premier ordre :

$$L(\vec{y}_p, \vec{\omega}_{ref}, \vec{\pi}_p) = L(\vec{y}_{ref}, \vec{\omega}_{ref}, \vec{\pi}_p) + \vec{\partial}_1 L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \cdot \delta\vec{r} \quad (3.137)$$

avec  $\delta\vec{r}$  le déplacement séparant  $\vec{y}_p$  et  $\vec{y}_{ref}$ , illustré dans la Fig. 3.21.

Dans la condition à la limite, c'est le gradient dans la direction  $\vec{u}$  tangente à la surface qui apparaît. Nous pouvons donc décomposer  $\delta\vec{r}$  de sorte de faire apparaître cette direction tangente :

$$\delta\vec{r} = \delta\pi \tan(\theta)\vec{u} + \delta\pi\vec{e}_n \quad (3.138)$$

Le gradient de la luminance incidente, projeté dans la direction  $\delta\vec{r}$  correspond à la somme du gradient projeté dans la direction  $\vec{u}$  et dans la direction  $\vec{e}_n$ . En effet, si la luminance incidente n'est pas homogène dans la direction  $\vec{e}_n$ , il faudra prendre en compte son gradient dans cette direction.

Ecrivons maintenant  $\vec{e}_n$  en fonction de  $\theta$ ,  $\vec{u}$  et  $\vec{\omega}_{ref}$  :

$$\vec{e}_n = \tan(\theta)\vec{u} - \frac{1}{\cos(\theta)}\vec{\omega}_{ref} \quad (3.139)$$

on a alors :

$$\begin{aligned} \delta\vec{r} &= \delta\pi \tan(\theta)\vec{u} + \delta\pi \tan(\theta)\vec{u} - \frac{\delta\pi}{\cos(\theta)}\vec{\omega}_{ref} \\ &= 2\delta\pi \tan(\theta)\vec{u} - \frac{\delta\pi}{\cos(\theta)}\vec{\omega}_{ref} \end{aligned} \quad (3.140)$$

On retrouve bien que la contribution du gradient de luminance incidente peut être interprétée comme la somme d'un gradient surfacique, dont la contribution est multipliée par 2, et d'un gradient projeté dans la direction  $\vec{\omega}_{ref}$ . Ce dernier terme correspond au terme de transport de l'équation de transfert radiatif. Dans notre exemple, le milieu étant transparent, cette dérivée est nulle et la contribution n'apparaît pas dans la condition à la limite et nous ne retenons que la double contribution de la dérivée tangentielle.

**Pour conclure sur cet exemple,** la condition à la limite de sensibilité comprend trois termes. Les deux premiers sont pondérés par  $\beta = |\tan(\theta)|$  du fait de la décomposition du vecteur de déformation spatial (voir l'exemple de translation avec paroi noire Sec. 3.4.1). Cette pondération va diminuer la valeur des contributions pour les directions  $\vec{\omega}$  sortantes proches de la normale et va l'accentuer pour les directions proches de la tangente à la surface. Dans les exemples en parois noires, nous avons vu que ce sont les dérivées spatiales du profil de luminance à la paroi qui sont pondérés selon la direction d'émission. Pour les parois réfléchissantes, ce sont les sources incidentes qui sont pondérées, soit la luminance et les gradients spatiaux. Le dernier terme représente la réflexion spéculaire de la sensibilité géométrique entrante pondérée par le coefficient de réflexion  $\rho(y_1, -\vec{\omega})$ .

### 3.5.2 Rotation, paroi spéculaire

Dans cette partie, nous étudions les termes de la condition à la limite de sensibilité lorsqu'elle s'applique à une paroi plane, spéculaire, dont l'inclinaison varie avec  $\pi$ .

#### 3.5.2.1 Définition de la configuration géométrique et radiative

La configuration géométrique est identique à celle de la Sec. 3.4.3 : elle est composée d'une paroi plane infinie passant par le point  $(0, D)$ , inclinée d'un angle  $\varphi(\pi)$  par rapport à la direction  $\vec{e}_1$  et orientée par la normale  $\vec{n} = (\sin(\varphi(\pi)), -\cos(\varphi(\pi)))$ .

Le support matériel est la droite  $U = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^2 | \vec{y} \cdot \vec{e}_2 = D\}$  orientée par la normale  $\vec{n} = (0, -1)$ . Le profil de température de la paroi réfléchissante est uniforme et à  $0K$ . Comme dans l'exemple précédent (Eq. 3.112), la paroi a un profil spéculaire, et le profil de luminance sortante de la paroi s'écrit :

$$I_r(\vec{y}, \vec{\omega}, \pi) = f(y_1, \vec{\omega}, \pi) \quad (3.141)$$

avec

$$f(y_1, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) I_r(y_1, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi}) \mathcal{H}(y_1 \in [0, D]) \quad (3.142)$$

avec  $\vec{\omega}^{spec} = (\vec{\omega} - 2(\vec{\omega} \cdot \vec{n})\vec{n})$  et

$$\rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi}{D} y_1 \right) \right) \quad (3.143)$$

Le lien entre le support matériel et le support géométrique est donné par l'application  $\mathcal{Z}$  (identique à celle de l'exemple [Sec. 3.4.3](#)) définie telle que :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}: \quad U \times \mathbb{R} &\longrightarrow \partial G(\vec{\pi}) \\ (\vec{y}, \vec{\pi}) &\longmapsto \vec{y} = \left( \vec{y} \cdot \vec{e}_1 \cos(\varphi(\vec{\pi})), \vec{y} \cdot \vec{e}_1 \sin(\varphi(\vec{\pi})) \right) \end{aligned} \quad (3.144)$$

À partir de  $\mathcal{Z}$ , nous déduisons le vecteur de déformation spatiale

$$\vec{v}_\chi = \partial_{\vec{\pi}} \mathcal{Z}(\vec{y}, \vec{\pi}) = \left( -\vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda \sin(\varphi(\vec{\pi})), \vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda \cos(\varphi(\vec{\pi})) \right) \quad (3.145)$$

avec  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  l'intensité donnée à la rotation à travers  $\varphi(\vec{\pi}) = \varphi_0 + \lambda \vec{\pi}$ . L'application inverse de  $\mathcal{Z}$  est

$$\begin{aligned} \partial G(\vec{\pi}) &\longrightarrow U \\ \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}: \quad \vec{y} &\longmapsto \vec{y} = \left( \frac{\vec{y} \cdot \vec{e}_1}{\cos(\varphi(\vec{\pi}))}, 0 \right) \end{aligned} \quad (3.146)$$

L'application  $\Omega$  reliant le vecteur directionnel du support matériel  $\vec{\omega}$  et le vecteur directionnel du support géométrique  $\vec{\omega}$  est une rotation d'un angle  $\varphi(\vec{\pi})$  autour d'un axe orienté par  $\vec{e}_3$  et l'application inverse est la rotation d'un angle  $\varphi(\vec{\pi})$  autour d'un axe orienté par  $-\vec{e}_3$ . Le vecteur  $\vec{\omega}$  résulte d'une rotation du vecteur  $\vec{\omega}$  d'un angle  $\varphi(\vec{\pi})$  autour d'un axe orienté par  $\vec{e}_3$  et le vecteur  $\vec{\omega}$  est obtenu à partir de  $\vec{\omega}$  par la rotation inverse (voir une illustration dans l'encadré [3.5](#) de la [Sec. 3.4.3](#)).

### 3.5.2.2 Le modèle à la limite

La condition à la limite de sensibilité — d'une paroi dont la réflexion est spéculaire — est donnée par l'[Eq. 3.32](#), rappelée ici :

$$\begin{aligned} s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) &= -\alpha \mathcal{G} \left[ L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \right] \\ &\quad - \beta \|\partial_{\vec{D}}^{\vec{y}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \partial_{\vec{D}}^{\vec{y}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \\ &\quad - \beta \|\partial_{\vec{D}}^{\vec{y}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \partial_{\vec{D}}^{\vec{y}} \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi}) \\ &\quad - \beta \|\partial_{\vec{D}}^{\vec{y}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} \partial_{\vec{D}}^{\vec{y}} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\ &\quad - \beta \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \partial_{1, \vec{u}} L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi}) \\ &\quad - \gamma \partial_{\vec{R}}^{\vec{y}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \\ &\quad - \gamma \partial_{\vec{R}}^{\vec{y}} \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi}) \\ &\quad + 2 \gamma \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \partial_{\vec{R}}^{\vec{y}} L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi}) \\ &\quad + \partial_{\vec{\pi}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \\ &\quad - \alpha^{spec} \mathcal{G} \left[ L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi}) \right] \\ &\quad + \beta^{spec} \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \partial_{1, \vec{u}^{spec}} L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi}) \\ &\quad + \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) s(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi}) \end{aligned} \quad \vec{y} \in \partial G(\vec{\pi}), \vec{\omega} \cdot \vec{n} > 0 \quad (3.147)$$

Dans le cas présent :

- le milieu est transparent, donc le résultat de  $\mathcal{G}$  appliqué à  $L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi})$  et  $L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi})$  est nul ;
- la température de la paroi est nulle donc  $I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = 0$  ;
- la fonction de phase est uniforme spatialement sur la paroi donc  $\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \rho_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y})$  est nul ;
- le coefficient de réflexion  $\rho(\vec{y}, -\vec{\omega})$  est indépendant de  $\vec{\omega}$ , sa dérivée angulaire est donc nulle.

La condition à la limite dans le cas de notre exemple devient :

$$\begin{aligned}
s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) &= -\beta \|\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi}) & \vec{y} \in \partial G(\vec{\pi}), \vec{\omega} \cdot \vec{n} > 0 \\
&\quad - \beta \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \partial_{1, \vec{a}} L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi}) \\
&\quad + 2 \gamma \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi}) \\
&\quad + \beta^{spec} \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \partial_{1, \vec{u}^{spec}} L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi}) \\
&\quad + \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) s(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi})
\end{aligned} \tag{3.148}$$

En la comparant à la condition à la limite en sensibilité de l'exemple précédent (Sec. 3.5.1), nous remarquons que notre condition à la limite contient un terme supplémentaire : celui de la dérivée angulaire de la luminance  $\partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi})$ . De ce fait, le modèle de sensibilité devient ici couplé non seulement aux modèles de la luminance et de la dérivée spatiale comme pour l'exemple précédent, mais il sera également couplé au modèle de la dérivée angulaire. Ce modèle est détaillé dans le Chap. 2 et implique de résoudre le problème de dérivée angulaire pour tout  $\vec{y}$  et  $\vec{\omega}^{spec}$  de la configuration géométrique à  $\vec{\pi}$  donné.

Les calculs des expressions analytiques des coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha^{spec}$ ,  $\beta^{spec}$ ,  $\gamma$  et des vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{u}^{spec}$  et  $\vec{a}$  sont réalisés dans les encadrés 3.8, 3.9 et 3.10.

**Résultat** Nous connaissons la forme analytique des coefficients et vecteurs issus de la décomposition du vecteur de déformation spatial et de la déformation angulaire. Nous savons également calculer la dérivée surfacique du coefficient de réflexion dans l'espace matériel (voir Eq. 3.119) et la correction de la mesure (voir Sec. 3.4.3, Eq. 3.120). Nous trouvons :

$$\begin{aligned}
s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) &= -|\vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda \tan(\theta)| \frac{\pi}{D} \sin\left(\frac{2\pi}{D} y_1\right) \mathcal{H}(y_1 \in [0, D]) L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi}) \\
&\quad - |\vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda \tan(\theta)| \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{D} y_1\right)\right) \mathcal{H}(y_1 \in [0, D]) \partial_{1, \vec{u}} L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi}) \\
&\quad + \lambda \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{D} y_1\right)\right) \mathcal{H}(y_1 \in [0, D]) \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{D} y_1\right)\right) \mathcal{H}(y_1 \in [0, D]) s(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi})
\end{aligned} \tag{3.149}$$



ENCADRÉ 3.8 – Les coefficients et vecteur la condition à la limite - déformation spatiale

**Coefficients de la déformation spatiale** Les coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\vec{u}$  sont obtenus par projection de  $\vec{v}_\chi$  sur la surface (voir paragraphe 3.3.1.2) :

$$\beta = \|\vec{v}_\chi - \alpha \vec{\omega}\| ; \quad \vec{u} = \frac{\vec{v}_\chi - \alpha \vec{\omega}}{\|\vec{v}_\chi - \alpha \vec{\omega}\|} ; \quad \alpha = \frac{\vec{v}_\chi \cdot \vec{n}}{\vec{\omega} \cdot \vec{n}} \quad (3.150)$$

sachant que dans le cas présent

$$\vec{n} = (\sin(\varphi(\ddot{\pi})), -\cos(\varphi(\ddot{\pi}))) \quad (3.151)$$

et que nous avons déjà obtenu le vecteur de déformation spatiale à partir de  $\mathcal{Z}$ , soit

$$\vec{v}_\chi = \left( -\vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda \sin(\varphi(\ddot{\pi})), \vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda \cos(\varphi(\ddot{\pi})) \right) \quad (3.152)$$

En utilisant la représentation cartésienne du vecteur directionnel (voir encadré 3.5)

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi(\ddot{\pi})) \sin(\theta) + \sin(\varphi(\ddot{\pi})) \cos(\theta) \\ \sin(\varphi(\ddot{\pi})) \sin(\theta) - \cos(\varphi(\ddot{\pi})) \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.153)$$

on trouve

$$\alpha = \frac{-\vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda (\sin(\varphi(\ddot{\pi}))^2 + \cos(\varphi(\ddot{\pi}))^2)}{\cos(\theta)} = \frac{-\vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda}{\cos(\theta)} \quad (3.154)$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \beta &= \left\| \begin{pmatrix} -\vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda \sin(\varphi(\ddot{\pi})) \\ \vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda \cos(\varphi(\ddot{\pi})) \end{pmatrix} + \frac{\vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda}{\cos(\theta)} \begin{pmatrix} \cos(\varphi(\ddot{\pi})) \sin(\theta) + \sin(\varphi(\ddot{\pi})) \cos(\theta) \\ \sin(\varphi(\ddot{\pi})) \sin(\theta) - \cos(\varphi(\ddot{\pi})) \cos(\theta) \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} \vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda (\tan(\theta) \cos(\varphi(\ddot{\pi}))) \\ \vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda (\tan(\theta) \sin(\varphi(\ddot{\pi}))) \end{pmatrix} \right\| \\ &= |\vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda \tan(\theta)| \end{aligned} \quad (3.155)$$

et

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \text{sign}(\tan(\theta)) \cos(\varphi(\ddot{\pi})) \\ \text{sign}(\tan(\theta)) \sin(\varphi(\ddot{\pi})) \end{pmatrix} \quad (3.156)$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \text{sign}(\tan(\theta)) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.157)$$

ENCADRÉ 3.9 – Les coefficients et vecteur la condition à la limite - déformation spatiale - spéculaire

De la même manière  $\beta^{spec}$  et  $\vec{u}^{spec}$  sont obtenus par projection de  $\vec{v}_\chi$  sur la surface (voir paragraphe 3.3.1.4).

$$\beta^{spec} = \|\vec{v}_\chi - \alpha^{spec} \vec{\omega}^{spec}\| ; \quad \vec{u}^{spec} = \frac{\vec{v}_\chi - \alpha^{spec} \vec{\omega}^{spec}}{\|\vec{v}_\chi - \alpha^{spec} \vec{\omega}^{spec}\|} ; \quad \alpha^{spec} = \frac{\vec{v}_\chi \cdot \vec{n}}{\vec{\omega}^{spec} \cdot \vec{n}} \quad (3.158)$$

sachant que dans le cas présent

$$\vec{n} = (\sin(\varphi(\ddot{\pi})), -\cos(\varphi(\ddot{\pi}))) \quad (3.159)$$

et que nous avons déjà obtenu le vecteur de déformation spatiale à partir de  $\mathcal{Z}$ , soit

$$\vec{v}_\chi = \left( -\vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda \sin(\varphi(\ddot{\pi})), \vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda \cos(\varphi(\ddot{\pi})) \right) \quad (3.160)$$

La direction  $\vec{\omega}^{spec}$  est déterminée comme la direction spéculaire à  $\vec{\omega}$  soit

$$\vec{\omega}^{spec} = \vec{\omega} - 2(\vec{\omega} \cdot \vec{n}) \vec{n} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi(\ddot{\pi})) \sin(\theta) - \sin(\varphi(\ddot{\pi})) \cos(\theta) \\ \sin(\varphi(\ddot{\pi})) \sin(\theta) + \cos(\varphi(\ddot{\pi})) \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.161)$$

ce qui conduit à

$$\alpha^{spec} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda}{\cos(\theta)} \quad (3.162)$$

$$\begin{aligned} \beta^{spec} &= \left\| \begin{pmatrix} -\vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda \sin(\varphi(\ddot{\pi})) \\ \vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda \cos(\varphi(\ddot{\pi})) \end{pmatrix} - \frac{\vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda}{\cos(\theta)} \begin{pmatrix} \cos(\varphi(\ddot{\pi})) \sin(\theta) - \sin(\varphi(\ddot{\pi})) \cos(\theta) \\ \sin(\varphi(\ddot{\pi})) \sin(\theta) + \cos(\varphi(\ddot{\pi})) \cos(\theta) \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} -\vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda (\tan(\theta) \cos(\varphi(\ddot{\pi}))) \\ -\vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda (\tan(\theta) \sin(\varphi(\ddot{\pi}))) \end{pmatrix} \right\| \\ &= |\vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda \tan(\theta)| \end{aligned} \quad (3.163)$$

et

$$\vec{u}^{spec} = \begin{pmatrix} -\text{sign}(\tan(\theta)) \cos(\varphi(\ddot{\pi})) \\ -\text{sign}(\tan(\theta)) \sin(\varphi(\ddot{\pi})) \end{pmatrix} \quad (3.164)$$

$$\vec{u}^{spec} = \begin{pmatrix} -\text{sign}(\tan(\theta)) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.165)$$

D'après l'encadré 3.8 nous pouvons déduire que  $\vec{u} = -\vec{u}^{spec}$  et  $\beta = \beta^{spec}$

ENCADRÉ 3.10 – Les coefficients et vecteurs de la condition à la limite - déformation angulaire

**Coefficient de la déformation angulaire** L'application  $\Omega$  dépend de  $\ddot{\pi}$ , en déterminant  $\Omega$  nous fixons l'axe de rotation  $\vec{a} = \vec{e}_3$  et la vitesse de rotation  $\gamma = \partial_{\ddot{\pi}} \varphi(\ddot{\pi}) = \lambda$ . Le vecteur  $\vec{a}^{spec}$  est déterminé d'après les développements de la Sec. 3.3.1.4. Dans notre cas, on obtient  $\vec{a}^{spec} = -\vec{a}$ .

### 3.5.2.3 Interprétation

Comme pour la configuration précédente, nous allons exprimer le résultat de la condition à la limite de façon un peu plus générale pour en commenter chaque termes :

$$\begin{aligned}
s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = & -\beta \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \rho(\vec{y}_1, -\vec{\omega}) L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi}) \\
& - 2 \beta \rho(\vec{y}_1, -\vec{\omega}) \partial_{1, \vec{u}} L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi}) \\
& + 2 \gamma \rho(\vec{y}_1, -\vec{\omega}) \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi}) \\
& + \rho(\vec{y}_1, -\vec{\omega}) s(\vec{y}, \vec{\omega}^{spec}, \vec{\pi})
\end{aligned} \tag{3.166}$$

Par rapport à la translation d'une paroi spéculaire, nous retrouvons la contribution liée à la variation de  $\rho$  sur la surface, la contribution liée à la dérivée surfacique de la luminance incidente et la réflexion de la sensibilité, qui ont été traités dans les exemples précédents.

Cependant, contrairement à une simple translation de la paroi, la rotation implique une contribution supplémentaire qui correspond à une dérivée angulaire.

La Fig. 3.22 permet d'illustrer l'ensemble des termes de la condition à la limite en suivant le même raisonnement que pour les interprétations précédentes. Nous cherchons à identifier la sensibilité en une position d'observation  $(\vec{x}_{obs}, \vec{\omega}_{obs})$  et, pour cela, nous différencions la luminance sortante au point  $(\vec{y}_{ref}, \vec{\omega}_{ref})$  entre les configurations géométriques perturbée et de référence.

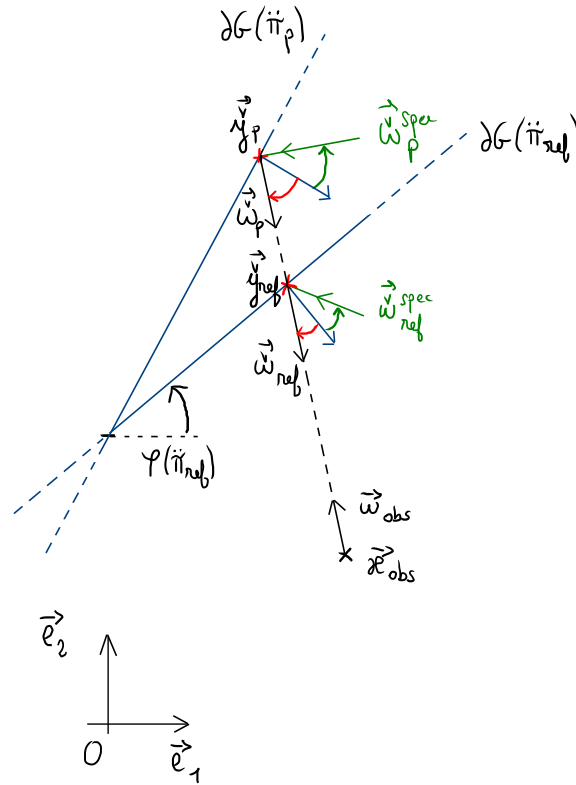


FIGURE 3.22 – Contribution à la sensibilité - Rotation - Frontière pour  $\vec{\pi} = \vec{\pi}_{ref}$  et  $\vec{\pi} = \vec{\pi}_p$

Cette fois ci, nous ne séparons pas les effets de chacun des termes de la source et nous considérons la différence pour un coefficient de réflexion variable à la surface, pour un champ de luminance incidente non homogène spatialement et angulairement. La luminance reçue à l'endroit de l'observation dans la configuration de référence est donc égale à la luminance incidente en  $\vec{y}_{ref}$  et dans la direction  $\vec{\omega}_{ref}^{spec}$  pondérée par la valeur du coefficient de réflexion  $\rho(\vec{y}_{ref})$ . Dans la configuration perturbée, la luminance sortante correspond à la luminance incidente en  $\vec{y}_p$  et dans la direction  $\vec{\omega}_p^{spec}$  pondérée

par la valeur de  $\rho(\vec{y}_p)$ . La différence entre la luminance reçue au point d'observation dans les deux configurations va dépendre alors :

- de la différence de valeur du coefficient de réflexion entre  $\vec{y}_{ref}$  et  $\vec{y}_p$
- de la variation spatiale de la luminance incidente entre  $\vec{y}_{ref}$  et  $\vec{y}_p$
- de la variation angulaire de la luminance incidente entre  $\vec{\omega}_{ref}^{spec}$  et  $\vec{\omega}_p^{spec}$

Pour l'illustration précédente (Sec. 3.5.1), nous avons montré d'où venait le facteur 2 devant la dérivée surfacique du second terme de la condition à la limite. Pour la contribution angulaire le facteur 2 vient du fait qu'en  $2D$  le vecteur  $\vec{a}^{spec}$  qui est l'axe de la rotation de  $\vec{\omega}^{spec}$  est égale à  $-\vec{a}$  qui est l'axe de la rotation de  $\vec{\omega}$ .

**Pour conclure sur cet exemple** de rotation d'une paroi spéculaire, la source de sensibilité contient les effets surfaciques que nous avons déjà rencontrés dans les exemples précédents (en paroi noire et en paroi spéculaire). Il retranscrivent à la fois une pondération angulaire de la source de sensibilité, qui dépendra donc de la direction d'émission (repérée par  $\theta$ ), et une pondération spatiale qui dépendra de la position d'émission : les positions les plus éloignées du centre de rotation auront un impact plus important sur la sensibilité. La rotation de la paroi engendre, en plus, le terme de dérivée angulaire de la luminance qui est pondéré par l'intensité  $\lambda$  de la rotation.

Toutes les quantités incidentes à la paroi sont donc pondérées angulairement et spatialement lorsqu'elles sont réfléchies sur la paroi, et le modèle de sensibilité se trouve ici couplé avec les modèles en luminance, en dérivée surfacique et en dérivée angulaire.

### 3.5.3 Rotation, parois diffuses

Dans cette partie, nous étudions les termes de la condition à la limite de sensibilité lorsqu'elle s'applique à une paroi plane, diffuse, dont l'inclinaison varie avec  $\vec{\pi}$ .

#### 3.5.3.1 Définition de la configuration géométrique et radiative

La configuration géométrique est identique à celle de la Sec. 3.5.2 précédente. Le profil de température sur la paroi est toujours uniforme à  $0K$ , seules les propriétés de réflexion sont modifiées : la paroi devient diffuse. La luminance sortante de la paroi s'écrit

$$I_r(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = f(y_1, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \quad (3.167)$$

avec

$$f(y_1, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = \rho(y_1, -\vec{\omega}) \int_{\mathcal{H}_{incid}} p(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, y_1) d\vec{\omega}' I(y_1, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \quad (3.168)$$

avec  $\mathcal{H}_{incid}$  l'hémisphère des directions incidentes au support matériel et  $\rho(y_1, -\vec{\omega})$  la proportion de la luminance incidente qui est réfléchi. Comme pour l'exemple précédent, nous utilisons un profil pour le coefficient de réflexion  $\rho(y_1, -\vec{\omega})$  qui assure la continuité de la luminance sortante de la paroi :

$$\rho(y_1, -\vec{\omega}) = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi}{D_r} y_1 \right) \right) \mathcal{H}(y_1 \in [0, D]) \quad (3.169)$$

avec  $D$  la largeur de la zone réfléchissante que nous avons arbitrairement choisie identique à celle du support géométrique.

Dans le cas d'une paroi diffuse, en  $2D$ ,

$$p(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, y_1) = \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}}{2} \quad (3.170)$$

Le lien entre le support matériel et le support géométrique est donné par les applications  $\mathcal{Z}$ ,  $\mathcal{Z}^{-1}$ ,  $\Omega$  et  $\Omega_{\vec{y}, \vec{\pi}}^{-1}$  qui sont données dans l'exemple précédent par les équations 3.144, 3.146 (voir aussi

la description des rotations dans le paragraphe 3.3.1.4). Le vecteur de déformation spatiale ( $\vec{v}_\chi$ ), la vitesse de rotation et l'axe de rotation sont déterminés à partir de ces applications (voir Eq. 3.145) et l'encadré 3.10.

### 3.5.3.2 Le modèle à la limite

La condition à la limite de sensibilité — d'une paroi dont la réflexion est diffuse — est donnée par l'Eq. 3.29, rappelée ici :

$$\begin{aligned}
s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = & -\alpha \mathcal{G} \left[ L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \right] \\
& -\beta \|\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \\
& -\beta \|\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\
& -\beta \|\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\
& -\beta \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' \partial_{1, \vec{u}} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\
& -\gamma \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \\
& -\gamma \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\
& + \partial_{\vec{\pi}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \\
& -\alpha' \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' \mathcal{G} \left[ L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \right] \\
& + \beta' \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' \partial_{1, \vec{u}} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\
& + \gamma \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} (\vec{\omega} \wedge \vec{n}) \cdot \vec{a} d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\
& + \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' s(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \tag{3.171}
\end{aligned}$$

Cette forme générale va être instanciée par le calcul des coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma$ , du vecteur de déformation spatiale et des conditions aux limites radiatives.

Dans le cas présent :

- le milieu est transparent, donc le résultat de l'application de  $\mathcal{G}$  sur  $L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi})$  et  $L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi})$  est nul ;
- la température de la paroi est nulle donc  $I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = 0$  ;
- la fonction de phase est uniforme spatialement sur la paroi donc  $\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y})$  est nul ;
- le coefficient de réflexion  $\rho(\vec{y}, -\vec{\omega})$  est indépendant de  $\vec{\omega}$ , sa dérivée angulaire est donc nulle.

La condition à la limite de la paroi réfléchissante diffuse devient alors :

$$\begin{aligned}
s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = & -\beta \|\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\
& -\beta \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' \partial_{1, \vec{u}} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\
& + \beta' \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' \partial_{1, \vec{u}} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \tag{3.172} \\
& + \gamma \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} (\vec{\omega}' \wedge \vec{n}) \cdot \vec{a} d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\
& + \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' s(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi})
\end{aligned}$$

Les calculs des coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\beta'$ ,  $\alpha'$ ,  $\gamma$  et des vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{u}'$  et  $\vec{a}$  sont réalisés dans les encadrés 3.8, 3.11 et 3.10. Le terme invoquant le produit vectoriel est traité dans l'encadré 3.12.

### Résultat

$$\begin{aligned}
s(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) = & \left[ -|\vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda| \tan(\theta) \frac{\pi}{D} \sin\left(\frac{2\pi}{D} y_1\right) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta')}{\pi} d\theta' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \tilde{\pi}) \right. \\
& - |\vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda \tan(\theta)| \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{D} y_1\right)\right) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta')}{\pi} d\theta' \partial_{1, \vec{u}} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \tilde{\pi}) \\
& + |\vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda \tan(\theta')| \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{D} y_1\right)\right) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta')}{\pi} d\theta' \partial_{1, \vec{u}'} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \tilde{\pi}) \quad (3.173) \\
& + \gamma \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{D} y_1\right)\right) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta')}{\pi} d\theta' \frac{-\sin(\theta')}{\cos(\theta')} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \tilde{\pi}) \\
& \left. + \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{D} y_1\right)\right) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta')}{\pi} d\theta' s(\vec{y}, \vec{\omega}', \tilde{\pi}) \right] \times \mathcal{H}(y_1 \in [0, D])
\end{aligned}$$

avec  $\vec{y} = \mathcal{Z}_{\tilde{\pi}}^{-1}(\vec{y})$  et  $y_1 = \vec{y} \cdot \vec{e}_1$

## ENCADRÉ 3.11 – Déclinaison de la condition à la limite - A'

De la même manière  $\beta'$  et  $\vec{u}'$  sont obtenus par projection de  $\vec{v}_\chi$  sur la surface (voir paragraphe 3.3.1.4).

$$\beta' = \|\vec{v}_\chi - \alpha' \vec{\omega}'\| ; \quad \vec{u}' = \frac{\vec{v}_\chi - \alpha' \vec{\omega}'}{\|\vec{v}_\chi - \alpha' \vec{\omega}'\|} ; \quad \alpha' = \frac{\vec{v}_\chi \cdot \vec{n}}{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}} \quad (3.174)$$

sachant que dans le cas présent

$$\vec{n} = (\sin(\varphi(\ddot{\pi})), -\cos(\varphi(\ddot{\pi}))) \quad (3.175)$$

et que nous avons déjà obtenu le vecteur de déformation spatiale à partir de  $\mathcal{Z}$ , soit

$$\vec{v}_\chi = \left( -\vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda \sin(\varphi(\ddot{\pi})), \vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda \cos(\varphi(\ddot{\pi})) \right) \quad (3.176)$$

Le vecteur incident  $\vec{\omega}'$  peut être repéré par l'angle  $\theta'$  et dans la base cartésienne  $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  il peut s'écrire  $\vec{\omega}' = (\sin(\theta'), \cos(\theta'))$ . Le vecteur  $\vec{\omega}'$  issu de la rotation de  $\vec{\omega}$  d'un angle  $\varphi(\ddot{\pi})$  autour de  $\vec{e}_3$  donne

$$\vec{\omega}' = \begin{pmatrix} \cos(\varphi(\ddot{\pi})) \sin(\theta') + \sin(\varphi(\ddot{\pi})) \cos(\theta') \\ \sin(\varphi(\ddot{\pi})) \sin(\theta') - \cos(\varphi(\ddot{\pi})) \cos(\theta') \end{pmatrix} \quad (3.177)$$

on trouve

$$\alpha' = \frac{-\vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda (\sin(\varphi(\ddot{\pi}))^2 + \cos(\varphi(\ddot{\pi}))^2)}{\cos(\theta')} = \frac{-\vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda}{\cos(\theta')} \quad (3.178)$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \beta' &= \left\| \begin{pmatrix} -\vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda \sin(\varphi(\ddot{\pi})) \\ \vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda \cos(\varphi(\ddot{\pi})) \end{pmatrix} + \frac{\vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda}{\cos(\theta')} \begin{pmatrix} \cos(\varphi(\ddot{\pi})) \sin(\theta') + \sin(\varphi(\ddot{\pi})) \cos(\theta') \\ \sin(\varphi(\ddot{\pi})) \sin(\theta') - \cos(\varphi(\ddot{\pi})) \cos(\theta') \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} \vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda (\tan(\theta') \cos(\varphi(\ddot{\pi}))) \\ \vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda (\tan(\theta') \sin(\varphi(\ddot{\pi}))) \end{pmatrix} \right\| \\ &= |\vec{y} \cdot \vec{e}_1 \lambda \tan(\theta')| \end{aligned} \quad (3.179)$$

et

$$\vec{u}' = \begin{pmatrix} \text{sign}(\tan(\theta')) \cos(\varphi(\ddot{\pi})) \\ \text{sign}(\tan(\theta')) \sin(\varphi(\ddot{\pi})) \end{pmatrix} \quad (3.180)$$

$$\vec{u}' = \begin{pmatrix} \text{sign}(\tan(\theta')) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.181)$$

## ENCADRÉ 3.12 – Produit vectoriel dans l'espace matériel

Le produit scalaire entre le produit vectoriel de la direction incidente et la normale de la paroi dans le support matériel et l'axe de rotation s'écrit :

$$(\vec{\omega}' \wedge \vec{n}) \cdot \vec{a} = \left( \begin{pmatrix} \sin \theta' \\ \cos \theta' \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sin(\theta') \quad (3.182)$$

Ce geste d'application technique n'apporte pas d'information particulière sur le sens de ce terme dans la condition à la limite. Pour une première interprétation, nous pouvons faire la relation entre ce produit scalaire et la dérivée angulaire de la densité de probabilité de la réflexion. La dérivée angulaire de la densité de probabilité  $\partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y})$  correspond, dans le cas particulier de notre exemple, à une dérivée par rapport à  $\theta'$

$$\partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) = \frac{1}{\pi} \frac{d(\cos(\theta'))}{d\theta'} \quad (3.183)$$

En effet, l'axe de la rotation  $\vec{a}$  correspond à l'axe de rotation de tous vecteurs repérés par l'angle  $\theta'$  dans le plan  $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . On obtient

$$\frac{1}{\pi} \frac{d(\cos(\theta'))}{d\theta'} = \frac{-\sin(\theta')}{\pi} \quad (3.184)$$

Le facteur de  $\frac{1}{\pi}$  est propre à la densité de probabilité. Dans une reformulation intégrale de la dérivée de la densité de probabilité, le  $\sin(\theta')$  serait mis en facteur et serait équivalent au produit vectoriel. La correspondance entre le produit vectoriel et la dérivée angulaire de la densité de probabilité sera discutée dans l'interprétation.



### 3.5.3.3 Interprétation

Dans cette interprétation, nous travaillerons à nouveau sur la forme un peu plus générale du résultat :

$$\begin{aligned}
s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = & -\beta \partial_{\vec{D}}^{\vec{u}} \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\
& -\beta \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' \partial_{1, \vec{u}} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\
& +\beta' \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' \partial_{1, \vec{u}'} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\
& +\gamma \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} (\vec{\omega}' \wedge \vec{n}) \cdot \vec{a} d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\
& +\rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' s(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi})
\end{aligned} \tag{3.185}$$

Pour la plupart, les termes de la condition à la limite ont déjà été étudiés dans les exemples précédents, notamment la réflexion de la sensibilité et la dérivée surfacique du coefficient de réflexion. Dans le cas d'une paroi diffuse, nous constatons que la dérivée surfacique de la luminance incidente n'est pas multipliée d'un facteur 2 mais est composée de deux termes différents : une dérivation de la luminance incidente dans la direction  $\vec{u}$  qui dépend de la direction d'émission  $\vec{\omega}_r$  et une dérivation de la luminance dans la direction  $\vec{u}'$  qui dépend de la direction incidente à la paroi  $\vec{\omega}'_r$ . Nous pouvons montrer, en utilisant exactement la même méthode que pour la réflexion spéculaire, l'apparition de la somme de ces deux dérivées surfaciques. Pour cela, nous avons recours aux mêmes images de différenciation que dans l'exemple précédent avec une configuration géométrique de référence et une configuration perturbée. La sensibilité correspond toujours à la variation de luminance en un point d'observation et cette variation de luminance dépend des positions et directions  $(\vec{y}_{ref}, \vec{\omega}_{ref}$  et  $(\vec{y}_p, \vec{\omega}_p)$ ) d'émission de la luminance sortante à la paroi pour les deux configurations.

Dans les exemples précédents, nous avons montré que le déplacement infinitésimal  $\delta\vec{r}$ , lié au gradient de la luminance incidente, pouvait être décomposé en une somme de deux vecteurs (un normal à la paroi et un tangentiel à la paroi ( $\vec{u}$ )). Dans le cas présent, la même décomposition est également réalisable selon un vecteur tangentiel  $\vec{u}'$  et un vecteur normal qui, cette fois ci, sera projeté selon la direction  $\vec{u}' \tan(\theta') \partial\vec{\pi}$  (voir Fig. 3.23) :

$$\begin{aligned}
\delta\vec{r} &= \delta\vec{\pi} \tan(\theta) \vec{u} + \delta\vec{\pi} \vec{e}_n \\
&= \delta\vec{\pi} \tan(\theta) \vec{u} - \delta\vec{\pi} \tan(\theta') \vec{u}' + \frac{\delta\vec{\pi}}{\cos(\theta')} \vec{\omega}'_{ref}
\end{aligned} \tag{3.186}$$

On retrouve bien le fait que le gradient de luminance est projeté sur les directions tangentes  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  et que la projection selon  $\vec{u}'$  est de signe contraire à la projection selon  $\vec{u}$  comme nous pouvons le voir dans la condition à la limite. De la même manière que dans l'exemple spéculaire, le terme en  $\vec{\omega}'_{ref}$  va faire intervenir le terme de transport de l'ETR qui, le milieu étant transparent, est nul dans cet exemple.

Le seul terme que nous n'avons pas encore étudié est le terme contenant le produit vectoriel de la direction incidente  $\vec{\omega}'$  avec la normale du support matériel. Nous avons vu dans l'encadré 3.12 que, dans notre exemple, il était équivalent à la dérivée angulaire de la densité de probabilité de la direction de réflexion. En effet, nous étudions une paroi dont la déformation est une rotation : nous nous attendons donc à voir apparaître une dérivée angulaire de la luminance incidente. En début de chapitre, nous avons montré mathématiquement que, pour une paroi diffuse, la dérivée angulaire de la luminance incidente n'avait pas d'influence sur la condition à la limite de sensibilité. Ici, nous pouvons l'illustrer par des images.

Sur une paroi diffuse, la probabilité d'être réfléchi dans une direction donnée contient naturellement le cosinus de l'angle incident  $\theta'$ . Nous schématisons cette densité de probabilité sur la paroi de référence et sur la paroi perturbée et nous remarquons que sur la paroi perturbée la direction réfléchie

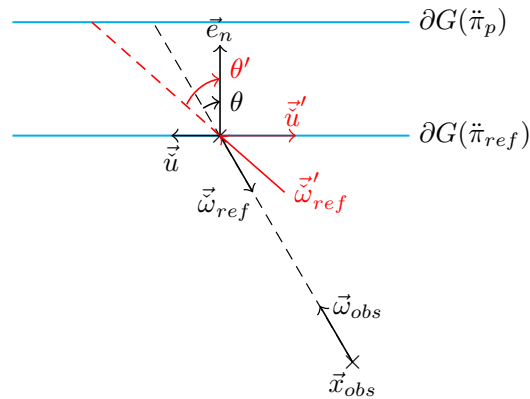


FIGURE 3.23 – Dérivée tangentielles de la luminance incidente

de référence n'a plus la même probabilité que dans la configuration de référence. En effet, la paroi ayant subi une rotation, sa normale a également tourné et, sur la paroi perturbée, la probabilité d'obtenir la direction de réflexion de référence a changé. C'est cet effet que traduit la dérivée angulaire de la densité de probabilité.

**Pour conclure sur cet exemple** de source de sensibilité par rotation d'une paroi diffuse, il y a deux termes que nous n'avions pas encore rencontrés : la pondération angulaire incidente par  $|\tan(\theta')|$  et la dérivée angulaire de la densité de probabilité d'être réfléchi dans la direction  $\vec{\omega}'$  connaissant  $\vec{\omega}$ . La pondération angulaire de la dérivée surfacique incidente est issue de la composante surfacique de la décomposition du vecteur de déformation spatiale. Sa provenance et ses effets sont identiques à la pondération angulaire d'émission (par  $|\tan(\theta)|$  que nous avons décrite précédemment e.g. en [Sec. 3.4.1](#)). La dérivée angulaire de la densité de probabilité d'être réfléchi a pour origine le fait que la rotation change la direction de référence de cette densité de probabilité (la normale à la paroi).

### 3.6 Discontinuités

Dans cette partie, nous étudierons des configurations radiatives dont le champ de luminance sur  $G(\pi)$  est discontinu. Les développements qui vont suivre sont basés sur le modèle de sensibilité que nous avons établi précédemment. Étant donné que ce modèle de sensibilité a été construit sous l'hypothèse de continuité du champ de luminance et de régularité des frontières, nous proposons ici une méthodologie spécifique à son application dans des situations de discontinuités (radiatives et géométriques). Pour cela, nous proposerons une conjecture du discontinu qui permet de combiner les résultats énoncés dans les sections précédentes et les discontinuités radiatives et géométriques.

En transfert radiatif, la discontinuité du champ de luminance se rencontre très fréquemment, et d'autant plus dans des milieux transparents ou minces au sein desquels le transport balistique est le plus probable. Dans notre pratique de modélisation et de résolution des transferts radiatifs, ces discontinuités sont couramment prises en compte et ne posent pas de difficultés particulières.

Illustrons ce point avec une configuration de transfert radiatif qui contient une paroi émettrice, plane et infinie. Le milieu est semi-infini et transparent. La condition à la limite du plan infini est homogène entre deux bornes A et B et nulle partout ailleurs (voir Fig. 3.24). Dans cet exemple, la condition à la limite de luminance est discontinue spatialement et par conséquent le champ de luminance sera discontinu spatialement et angulairement. Sur la Fig. 3.24 les lignes en pointillés oranges marquent les discontinuités du champ de luminance. Le schéma de gauche de la Fig. 3.24 illustre la discontinuité spatiale de la luminance traversant la ligne horizontale dans la direction  $\vec{\omega}_{obs}$ . En effet dans cette direction la luminance est égale à la luminance d'équilibre pour toutes les positions comprises entre les positions oranges et elle est nulle partout ailleurs. Le schéma de droite de la Fig. 3.24 illustre la discontinuité angulaire de la luminance en  $\vec{x}_{obs}$ . En effet la luminance en  $(\vec{x}_{obs}, \vec{\omega})$  est égale à la luminance d'équilibre pour toutes les directions comprises dans l'angle solide dessiné par les deux directions  $\vec{\omega}$  oranges et elle est nulle partout ailleurs.

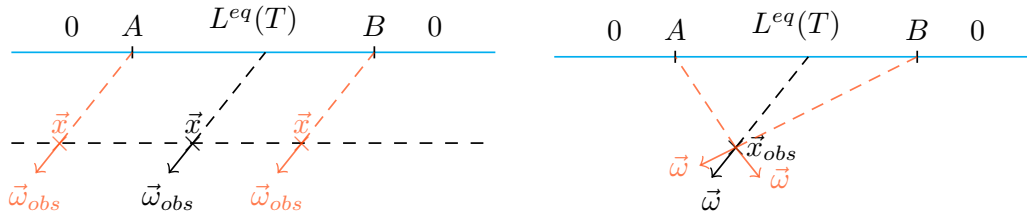


FIGURE 3.24 – Discontinuité spatiale (à gauche) et angulaire (à droite) du champ de luminance

Si nous considérons maintenant la sensibilité à une déformation de la géométrie, la modélisation de cette discontinuité radiative n'est pas aussi immédiate, notamment quand la déformation géométrique modifie la position des discontinuités dans l'espace géométrique. Considérons, par exemple, la déformation géométrique consistant à simplement déplacer "vers le haut" la paroi émettrice sur la Fig. 3.24. Un tel éloignement aurait un effet spatial et un effet angulaire sur le champ de luminance. L'effet spatial consisterait, sur le schéma de gauche, à une modification du rayonnement incident traversant la ligne pointillée dans la direction  $\vec{\omega}_{obs}$  : si on éloigne la paroi, tout ce rayonnement incident est décalé "vers la gauche". Les positions oranges qui délimitent la discontinuité spatiale du champ de luminance seraient décalées vers la gauche. L'effet angulaire consisterait, sur le schéma de droite, à modifier l'angle solide dessiné par les directions  $\vec{\omega}$  oranges : si on éloigne la paroi, l'angle entre les directions oranges qui délimitent la discontinuité angulaire du champ de luminance sera réduit.

Ces effets de frontière vont entraîner des termes particuliers lors de la modélisation de la sensibilité géométrique. Par exemple, sur la Fig. 3.25, considérons la luminance reçue en un point d'observation à la position  $\vec{x}_{obs}$  et dans la direction  $\vec{\omega}_{obs}$ .

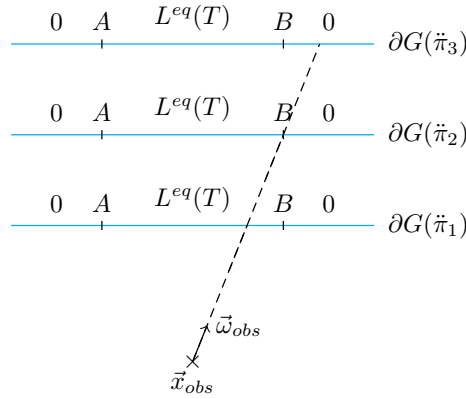


FIGURE 3.25 – Schéma source ponctuelle de sensibilité

Dans la configuration  $G(\bar{\pi}_1)$ , la luminance perçue en  $(\vec{x}_{obs}, \vec{\omega}_{obs})$  est la luminance d'équilibre. Si on éloigne la paroi d'une distance infinitésimale, la luminance perçue à la position d'observation est inchangée : la sensibilité géométrique à la hauteur de la paroi sera donc nulle.

Dans la configuration  $G(\bar{\pi}_3)$ , la luminance perçue en  $(\vec{x}_{obs}, \vec{\omega}_{obs})$  est nulle, et elle le reste si on éloigne la paroi : la sensibilité géométrique sera donc également nulle.

Entre les deux, il existe une valeur  $\bar{\pi} = \bar{\pi}_2$  pour laquelle une perturbation infinitésimale du paramètre géométrique fera passer brusquement la luminance perçue en  $(\vec{x}_{obs}, \vec{\omega}_{obs})$  de la luminance d'équilibre à une valeur nulle. Pour cette valeur de  $\bar{\pi}$  la sensibilité perçue en  $(\vec{x}_{obs}, \vec{\omega}_{obs})$  sera donc non nulle.

Cette variation brusque de luminance perçue en  $(\vec{x}_{obs}, \vec{\omega}_{obs})$  correspond à l'observation d'un point particulier sur la paroi : la source de sensibilité est ponctuelle.

Pour considérer ces effets ponctuels à partir du modèle de sensibilité, nous devons tout d'abord interpréter la luminance non plus comme une fonction mais comme une distribution. En effet, lorsqu'il est discontinu en  $\vec{x}$  et  $\vec{\omega}$ , le champ de luminance n'est pas dérivable au sens des fonctions classiques. Nous ne pouvons donc pas employer directement les conditions aux limites du modèle de sensibilité telles qu'elles sont écrites, puisque ces dérivées en sont deux des termes principaux. En revanche, la luminance est dérivable au sens des distributions et la méthodologie que nous proposons repose sur la dérivation de la fonction de Heaviside qui, au sens des distributions, donne la distribution de Dirac.

La méthode repose sur un élément de base qui est d'utiliser ces fonctions de Heaviside sur le plan infini (une droite infinie en  $2D$ ) pour formaliser les bornes de la condition à la limite là où elle est discontinue. Nous montrerons, dans un premier temps, que sur un plan infini, nous savons alors appliquer le modèle de sensibilité géométrique. Ensuite, nous montrerons qu'à partir de cet élément de base, nous pouvons étendre la méthode à toutes les géométries facétisées en proposant une conjecture sur la facétisation. Enfin, notre méthode (composée du plan infini et de la conjecture) sera appliquée à deux configurations géométriques différentes : une géométrie convexe (un carré) et une géométrie concave (une marche). Ces géométries seront étudiées successivement avec des parois noires et des parois diffuses.

### 3.6.1 Le plan infini comme support à la condition à la limite radiative discontinue en paroi noire

Ici, nous allons construire notre élément de base. L'objectif est de montrer que, sur un plan infini, nous savons appliquer la condition à la limite de sensibilité lorsque le profil de luminance sortante est discontinu. Afin d'illustrer ce principe, nous reprenons l'exemple présenté plus haut (Fig. 3.25). La configuration géométrique et matérielle étant identique à celle de l'illustration en paroi noire de la section 3.4.1, le formalisme en sera repris.

La configuration géométrique est donc constituée d'un plan infini perpendiculaire à  $\vec{e}_2$  dont la distance est paramétrée par  $\vec{\pi}$  selon  $\vec{y} \cdot \vec{e}_2 = \vec{\pi}$ . Le profil de température sur le support géométrique est nul en tout point de la paroi excepté dans une partie centrale correspondant à  $\vec{y} \cdot \vec{e}_1 \in [0, D]$ . Au sein de cette zone, le profil de luminance est constant. Le milieu est transparent, le transport de luminance et de sensibilité sera donc balistique.

Le support matériel est défini par  $U = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^2 | \vec{y} \cdot \vec{e}_2 = h\}$  orienté par la normale  $\vec{n} = -\vec{e}_2$ . Sur ce support matériel, on définit la luminance matérielle

$$I(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = f(y_1) \quad (3.187)$$

avec  $y_1 = \vec{y} \cdot \vec{e}_1$  et

$$f(y_1) = L^{eq}(T) \mathcal{H}(y_1 - 0) \mathcal{H}(D - y_1) \quad (3.188)$$

Le produit des fonctions test  $\mathcal{H}$  délimite la zone centrale émettrice. Aux bornes, la luminance passe localement d'une valeur nulle à la luminance d'équilibre.

Nous ne détaillerons pas de nouveau les applications  $\mathcal{Z}$ ,  $\mathcal{Z}^{-1}$ ,  $\Omega$  et  $\Omega_{\vec{y}, \vec{\pi}}^{-1}$  car elles sont strictement identiques à l'exemple de la [Sec. 3.4.1](#). Il en est de même pour les coefficients  $\alpha, \beta, \gamma$  et les vecteurs unitaires  $\vec{u}$  et  $\vec{a}$ .

### 3.6.1.1 Le modèle à la limite

Le long de la paroi émettrice, la luminance sortant de la paroi est

$$L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = I(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \quad \vec{y} \in \partial G(\vec{\pi}), \quad \vec{\omega} \cdot \vec{n} > 0 \quad (3.189)$$

avec  $\vec{y} = \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})$  et  $\vec{\omega} = \Omega_{\vec{y}, \vec{\pi}}^{-1}(\vec{\omega})$ .

Pour la sensibilité, la condition à la limite pour une paroi noire devient (voir exemple [3.4.1](#))

$$s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = -\beta \|\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} I(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \quad (3.190)$$

avec  $\|\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| = 1$  ;  $\beta = \tan(\theta)$  et  $\vec{u} = (\text{sign}(-\tan(\theta)), 0)$

### 3.6.1.2 La dérivée surfacique dans l'espace matériel

$$\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} I(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = L^{eq}(T) \left( \delta(y_1 - 0) - \delta(D - y_1) \right) \quad (3.191)$$

La dérivée surfacique comprend alors la somme de deux distributions de Dirac centrées aux bornes de la zone émettrice, soit en  $y_1 = 0$  et  $y_1 = D$ .

### 3.6.1.3 Le résultat

On note  $\text{sign}(-\tan(\theta)) = \vec{u} \cdot \vec{e}_1$ .

La condition à la limite de sensibilité pour une paroi noire, modélisée sur un plan infini, dont la condition à la limite radiative est discontinue est alors

$$\begin{aligned} s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = & -(\vec{u} \cdot \vec{e}_1) \tan(\theta) L^{eq}(T) \delta(y_1 - 0) \\ & + (\vec{u} \cdot \vec{e}_1) \tan(\theta) L^{eq}(T) \delta(D - y_1) \end{aligned} \quad (3.192)$$

### 3.6.2 Géométries facétisées : conjecture des plans

Dans cette partie, nous utiliserons l'élément de base pour attaquer l'étude de sensibilité géométrique pour toute configuration géométrique énoncée sous une forme facétisée. Dans ce but, nous aurons besoin de supposer que ces géométries peuvent être composées d'une succession de plans infinis prolongeant les facettes : c'est l'objet de la conjecture. En effet, la discontinuité de la frontière est un type de discontinuité que nous ne savons pas traiter mathématiquement. Par exemple, comment appliquer les dérivées surfaciques de la condition à la limite de sensibilité entre deux facettes sécantes ? À l'endroit de la discontinuité, aucun des éléments de la condition à la limite n'est vraiment défini.

La proposition présentée ici permet de passer au delà de ces difficultés de définitions géométrique et radiative en construisant une configuration équivalente dans laquelle elles n'apparaissent pas. Cette configuration équivalente est constituée à partir de l'élément de base que nous venons d'étudier dans la partie précédente : le plan infini et les conditions aux limites radiatives discontinues. La configuration équivalente représente donc une étape intermédiaire de modélisation dont nous avons besoin pour pouvoir transformer les discontinuités liées aux irrégularités de la frontière en une somme de discontinuités radiatives sur un plan infini similaires à celle de l'élément de base.

**Conjecture** Pour toute configuration radiative dont la géométrie est donnée dans une forme facétisée, il est possible de construire **une configuration radiative équivalente** dans laquelle chacune des facettes est prolongée infiniment. Chaque facette est alors représentée par un plan et il est possible d'appliquer la condition à la limite de sensibilité sur chaque plan indépendamment des autres. Dans la configuration équivalente, les **conditions aux limites respectives** de chaque plan sont superposées et le résultat de cette **superposition** est la condition à la limite de la configuration originale.

**Configuration radiative équivalente et superposition** La configuration radiative équivalente consiste à établir une configuration, à partir de plans, qui est équivalente radiativement à la configuration facétisée originale. Par exemple, dans une géométrie facétisée en  $2D$  (schématisée en [Fig. 3.26](#)), une facette de la surface (un segment de droite) sera modélisée comme un plan (une droite). Pour que la configuration radiative de cette nouvelle géométrie soit équivalente à la géométrie originale, il faudra considérer que, sur cette droite, les propriétés radiatives de la portion de la droite qui correspondent au segment soient identiques à celles du segment. Par exemple, si dans la configuration originale, il n'y a aucun rayonnement qui puisse intervenir en dehors du segment, alors les propriétés radiatives de la configuration équivalente devront satisfaire, en dehors du segment, qu'aucune luminance n'est émise par la droite et qu'aucune luminance n'est incidente à la droite (dans cet exemple, le reste de la droite doit donc être considéré comme une paroi noire et froide).

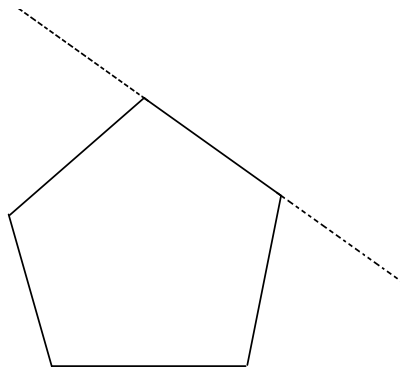


FIGURE 3.26 – Prolongation d'une paroi

Cette modélisation est étendue à chacune des facettes de la géométrie (voir [Fig. 3.27](#)) et la configuration équivalente correspond alors à la superposition de chacune des droites de sorte que

le rayonnement émis et incident aux portions des droites correspondant aux segments soit bien identique à la configuration originale et que, en dehors de ces portions, le rayonnement émis et incident soit bien nul.

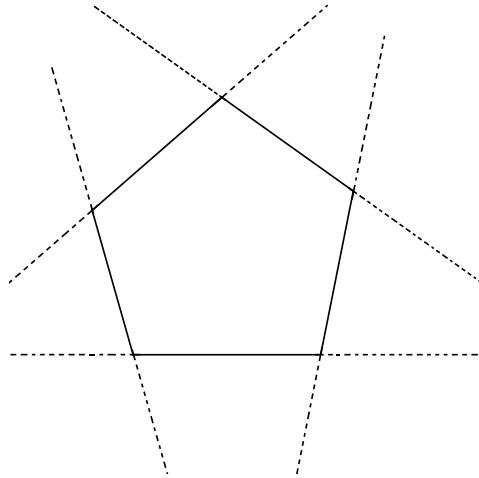


FIGURE 3.27 – Prolongation de toutes les facettes, configuration équivalente

Nous proposons donc une **systematique** pour traiter des discontinuités :

1. nous établissons une configuration radiative équivalente composée de plans infinis ;
2. nous déterminons les conditions aux limites de sensibilité sur chacun de ces plans ;
3. nous superposons l'ensemble des conditions aux limites de sensibilité de la configuration équivalente pour construire les conditions aux limites de la configuration géométrique facétisée originale.

Ci-après, nous mettrons cette systématique en œuvre sur des illustrations avec parois noires et/ou diffuses.

**1. Modélisation des plans** En général, lorsque nous modélisons les conditions aux limites radiatives sur le plan qui prolonge la facette de la configuration originale, nous cherchons à préserver les propriétés radiatives de la facette même au delà de ses bornes.

Par exemple, si la facette est une paroi noire, le plan entier est modélisé en paroi noire, et c'est seulement le profil de la luminance d'équilibre qui est formalisé comme discontinu. Nous cherchons à faire de même pour les parois diffuses : si la luminance sortante de la facette dépend d'un terme d'émission et d'un terme incident alors l'entièreté du plan sera modélisé comme la somme d'un terme d'émission et d'un terme incident. Cette homogénéité de la forme de la luminance sortante sur le plan nous permet d'utiliser le modèle approprié de la condition à la limite de sensibilité. Par exemple, dans le cas d'une paroi noire, nous appliquerons la condition à la limite de sensibilité des parois noires tout le long de la droite. Pour une paroi diffuse, nous appliquerons la condition à la limite de sensibilité des parois diffuses tout le long de la droite.

Cette méthode a donc un gros avantage technique lorsque nous cherchons à déterminer les conditions aux limites de sensibilité sur chacun des plans. En revanche, elle nous amène à des actes de modélisation de la condition à la limite radiative qui doivent y correspondre. C'est le cas pour la condition à la limite des parois diffuses, comme nous le verrons dans ce qui suit.

**2. Condition à la limite de sensibilité des plans** Chacun des plans de la configuration équivalente est considéré indépendamment et étudié en tant que source de sensibilité. La condition à la limite de sensibilité générale (Eq. 3.12) est employée successivement sur ces plans en tenant compte de leurs propriétés radiatives discontinues et de la luminance (sortante et incidente) comme nous l'avons fait dans les exemples des sections précédentes. Par exemple, si les propriétés radiative

d'une paroi sont modélisées par un coefficient de réflexion  $\rho(\vec{y})$  non homogène sur la surface, il sera dérivé spatialement comme le veut le terme  $\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{y}}\rho(\vec{y})$  de la condition à la limite. La seule différence ici vient de la distribution surfacique des propriétés de paroi qui ne peut être que discontinue puisqu'elle est bornée par la zone correspondant à la facette de la configuration originale.

**3. Condition à la limite de sensibilité de la configuration originale** La condition à la limite de sensibilité de la configuration originale est obtenue en "superposant" les conditions aux limites de chacun des plans.

Sur le principe, la superposition consiste à juste sommer les conditions aux limites établies séparément. Dans le cas d'une géométrie convexe, la configuration radiative équivalente est telle que la superposition se traduit bien directement par la somme des sensibilités géométriques établies pour chaque facette. En termes de sensibilité géométrique, la configuration radiative équivalente correspond donc bien à la simple somme de chacune des sensibilités établies sur chacun des supports géométriques prolongés.

Pour les géométries concaves (où apparaissent des angles "entrants"), cette sommation n'est pas si immédiate parce qu'une géométrie concave peut engendrer des effets de masquage. Il est alors nécessaire de ne pas sommer "à l'aveugle" les conditions aux limites de chacun des plans décomposant la configuration originelle en liste de plans équivalents, sous peine de compter deux fois une contribution identique (notamment au niveau des angles "entrants").

Dans les parties suivantes, nous mettrons donc notre systématique en application dans des géométries convexes et concaves pour illustrer la différence de traitement. Ces illustrations montreront qu'à ce stade, cette sommation est faite "à la main" et qu'elle appelle à des développements futurs pour une identification systématique qui permette de reconstruire la condition à la limite de la configuration globale algorithmiquement.

### 3.6.3 Parois noires ou diffuses en géométrie convexe

La configuration géométrique originale est un carré au sein duquel le milieu est transparent. Le support géométrique est constitué de quatre segments et la hauteur du carré  $H(\tilde{\pi})$  dépend du paramètre géométrique  $\tilde{\pi}$ , soit  $H(\tilde{\pi}) = H_0 + \lambda\tilde{\pi}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$  (voir Fig. 3.28). La paroi du bas du carré est une paroi noire et froide non impactée par la déformation géométrique.

Nous étudierons deux configurations radiatives sur cette géométrie. La première sera uniquement constituée de parois noires, chacun des segments du carré aura une température différente et la luminance d'équilibre sera homogène. La deuxième sera constituée d'une paroi noire latérale, et de deux parois diffuses, une latérale et une supérieure. Dans les deux cas, la paroi du bas sera noire, froide et non perturbée par le paramètre géométrique.

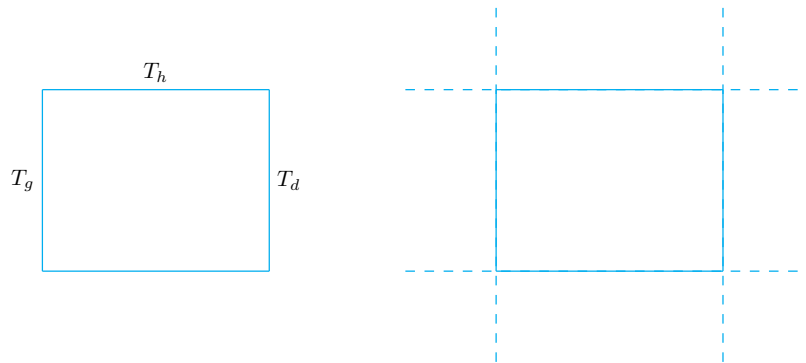


FIGURE 3.28 – Configuration originale (schéma de gauche) et équivalente (schéma de droite)

La Fig. 3.28 illustre la configuration équivalente constituée de droites à côté de la configuration originale facétisée. La première étape consiste à définir les supports géométriques nécessaires pour



établir la configuration équivalente puis à déterminer leurs conditions aux limites radiatives en faisant en sorte que la superposition de ces droites infinies soit équivalente à la configuration originale.

Pour que la superposition des supports géométriques de chacune des droites donne une configuration équivalente à la configuration originale, les conditions aux limites radiatives sont définies comme étant nulles partout en dehors des zones équivalentes aux segments du carré original.

Dans les exemples de cette partie, nous travaillerons principalement sur le support géométrique. En effet, l'étape de superposition est effectuée sur le support géométrique et demande d'exprimer explicitement tous les termes en fonction des variables  $\vec{y}$  et  $\vec{\omega}$ . Pour éviter plusieurs aller-retour entre support géométrique et support matériel, nous donnerons toutes les conditions aux limites directement sur le support géométrique (donc en fonction de  $\vec{y}$  et  $\vec{\omega}$ ). Dans les exemples de cette partie, les parois seront planes et leurs déformation uniquement des translations. Par conséquent les dérivées surfacique  $\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}}$  des fonctions du support matériel seront équivalentes à celles des fonctions du support géométrique. L'équivalence entre la dérivée surfacique du support matériel et celle du support géométrique s'écrira donc :

$$\|\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} I(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = \partial_{1, \vec{u}} L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \quad (3.193)$$

Nous donnerons les définitions de  $\mathcal{Z}$  et du vecteur de déformation correspondant pour chaque configuration et un schéma illustrant le support matériel et géométrique.

### 3.6.3.1 Première configuration : parois noires

Dans les zones correspondant aux carrés, les propriétés radiatives des droites équivalentes sont les mêmes que celles du carré (températures  $T_g$ ,  $T_d$  et  $T_h$ ). Dans ces zones, la luminance sortante de la paroi noire est considérée constante et correspond à la luminance d'équilibre.

**Configuration radiative équivalente - superposition des droites infinies** Une valeur de  $\vec{y}$  sur le support matériel correspondra à une position  $\vec{y}$  différente selon la paroi de l'espace géométrique considérée :

- pour la paroi de gauche, une position sur le support géométrique sera noté  $\vec{y}_g$
- pour la paroi de droite  $\vec{y}_d$
- pour la paroi du haut  $\vec{y}_h$ .

Les mêmes notations seront employées pour distinguer les directions  $\vec{\omega}$  et les normales  $\vec{n}$  qui seront construites à partir de  $\vec{\omega}$  et  $\vec{n}$ .

**La paroi de gauche** est représentée par la droite perpendiculaire à  $\vec{e}_1$  passant par 0 et orientée par la normale  $\vec{n}_g = (1, 0)$  (voir Fig. 3.29). Sur cette droite, la température est nulle en tout point sauf dans une zone comprise dans  $[0, H(\vec{\pi})]$  dont la longueur dépend du paramètre  $\vec{\pi}$ . En modifiant  $\vec{\pi}$ , on étire cette zone et cette déformation correspond exactement à celle de l'illustration 3.4.2. Sur le support matériel, la zone émettrice correspondant à cette paroi sera de longueur  $H$ .

On détermine  $\mathcal{Z}$  et le vecteur de déformation  $\vec{v}_{\chi_g}$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \vec{y}_g &= \mathcal{Z}_g(\vec{y}, \vec{\pi}) = \left( 0, \left(1 - \frac{\vec{y} \cdot \vec{e}_1}{H}\right) H(\vec{\pi}) \right) \\ \vec{v}_{\chi_g} &= \left( 0, \lambda \left(1 - \frac{1}{H} \vec{y} \cdot \vec{e}_1\right) \right) \end{aligned} \quad (3.194)$$

L'application  $\Omega_g$  qui, appliquée à  $\vec{\omega}$  et  $\vec{n}$  du support matériel donne  $\vec{\omega}_g$  et  $\vec{n}_g$ , ne dépend pas de  $\vec{\pi}$  et correspond à la rotation d'un angle  $-\frac{\pi}{2}$  autour de l'axe  $\vec{e}_3$ .

La condition à la limite radiative de cette paroi s'écrit :

$$L(\vec{y}_g, \vec{\omega}_g, \vec{\pi}) = L^{eq}(T_g) \mathcal{H}(\vec{y}_g - \vec{y}_{g,0}) \mathcal{H}(\vec{y}_{g,H\vec{\pi}} - \vec{y}_g) \quad (3.195)$$

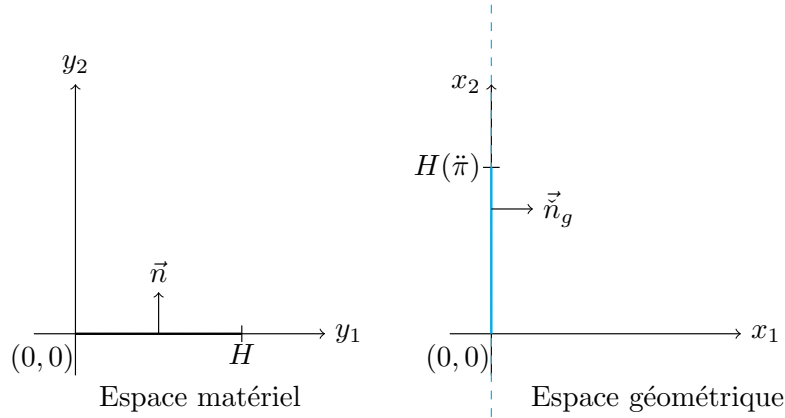


FIGURE 3.29 – Support matériel (schéma de gauche) et géométrique (schéma de droite) de la paroi de gauche

Avec  $\vec{y}_{g,0}$  et  $\vec{y}_{g,H\pi}$  les bornes de la zone émettrice sur le support géométrique de la paroi gauche définies telles que :

$$\vec{y}_{g,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{y}_{g,H\pi} = \begin{pmatrix} 0 \\ H(\pi) \end{pmatrix} \quad (3.196)$$

**La paroi de droite** est représentée par la droite perpendiculaire à  $\vec{e}_1$  passant par  $D$  et orientée par la normale  $\vec{n}_d = (-1, 0)$  (voir Fig. 3.30). Sur cette droite, la température est nulle en tout point sauf dans une zone comprise dans  $[0, H(\pi)]$  dont la longueur dépend du paramètre  $\pi$ . En modifiant  $\pi$ , on étire cette zone. Sur le support matériel, la zone émettrice correspondant à cette paroi sera de longueur  $H$ .

On détermine  $\mathcal{Z}$  et le vecteur de déformation  $\vec{v}_{\chi_d}$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \vec{y}_d &= \mathcal{Z}_d(\vec{y}, \pi) = \left( D, \left(1 - \frac{\vec{y} \cdot \vec{e}_1}{H}\right) H(\pi) \right) \\ \vec{v}_{\chi_d} &= \left( 0, \lambda \left(1 - \frac{1}{H} \vec{y} \cdot \vec{e}_1\right) \right) \end{aligned} \quad (3.197)$$

L'application  $\Omega$  qui, appliquée à  $\vec{\omega}$  et  $\vec{n}$  du support matériel donne  $\vec{\omega}_d$  et  $\vec{n}_d$ , correspond à la rotation d'un angle  $\frac{\pi}{2}$  autour de l'axe  $\vec{e}_3$ .

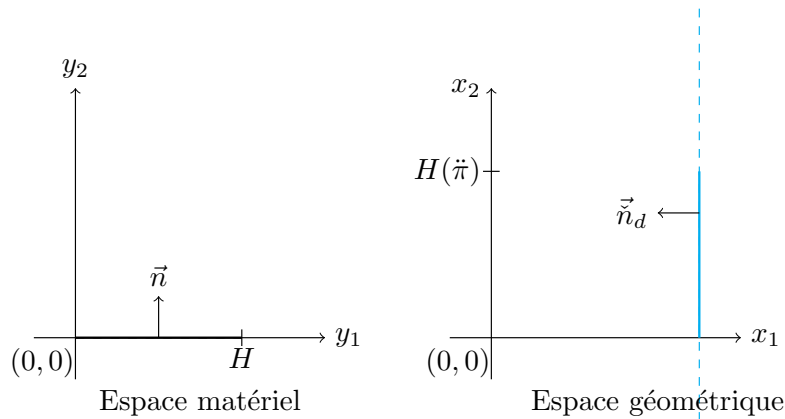


FIGURE 3.30 – Support matériel (schéma de gauche) et géométrique (schéma de droite) de la paroi de droite

La condition à la limite radiative de cette paroi s'écrit :

$$L(\vec{y}_d, \vec{\omega}_d, \vec{\pi}) = L^{eq}(T_d) \mathcal{H}(\vec{y}_d - \vec{y}_{d,0}) \mathcal{H}(\vec{y}_{d,H\vec{\pi}} - \vec{y}_d) \quad (3.198)$$

avec  $\vec{y}_{d,0}$  et  $\vec{y}_{d,H\vec{\pi}}$  les bornes de la zone émettrice sur le support géométrique de la paroi droite définies telles que :

$$\vec{y}_{d,0} = \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{y}_{d,H\vec{\pi}} = \begin{pmatrix} D \\ H(\vec{\pi}) \end{pmatrix} \quad (3.199)$$

**La paroi du haut** est représentée par la droite perpendiculaire à  $\vec{e}_2$  passant par  $H(\vec{\pi})$  et orientée par la normale  $\vec{n}_h = (0, -1)$  (voir Fig. 3.31). Sur cette droite, la température est nulle en tout point sauf dans une zone comprise dans  $[0, D]$ . En modifiant  $\vec{\pi}$ , on modifie la hauteur de cette paroi, comme dans l'illustration 3.4.1. Sur le support matériel, la zone émettrice correspondant à cette paroi sera de longueur  $D$ .

On détermine  $\mathcal{Z}$  et le vecteur de déformation  $\vec{v}_{\chi_h}$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \vec{y}_h &= \mathcal{Z}_h(\vec{y}, \vec{\pi}) = \left( (1 - \vec{y} \cdot \vec{e}_1), H(\vec{\pi}) \right) \\ \vec{v}_{\chi_h} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.200)$$

L'application  $\Omega$  qui, appliquée à  $\vec{\omega}$  et  $\vec{n}$  du support matériel donne  $\vec{\omega}_h$  et  $\vec{n}_h$ , correspond à la rotation d'un angle  $-\pi$  autour de l'axe  $\vec{e}_3$ . Cette rotation implique que  $\vec{n}_h = -\vec{n}$  et  $\vec{\omega}_h = -\vec{\omega}$ .

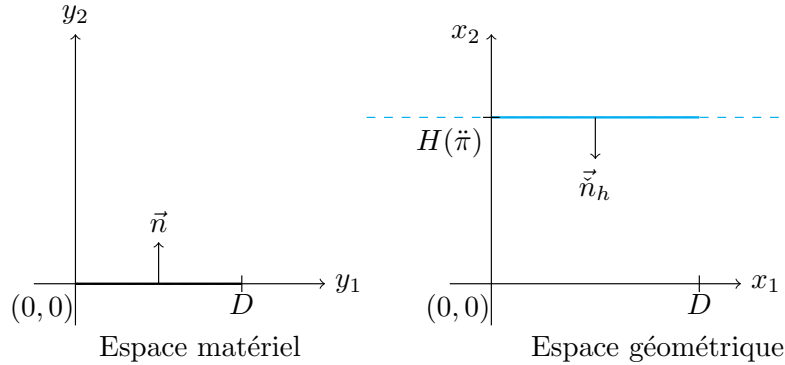


FIGURE 3.31 – Support matériel (schéma de gauche) et géométrique (schéma de droite) de la paroi du haut

La condition à la limite radiative de cette paroi s'écrit :

$$L(\vec{y}_h, \vec{\omega}_h, \vec{\pi}) = L^{eq}(T_h) \mathcal{H}(\vec{y}_h - \vec{y}_{h,0}) \mathcal{H}(\vec{y}_{h,D} - \vec{y}_h) \quad (3.201)$$

avec  $\vec{y}_{h,0}$  et  $\vec{y}_{h,D}$  les bornes de la zone émettrice sur le support géométrique de la paroi haute définies telles que :

$$\vec{y}_{h,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ H(\vec{\pi}) \end{pmatrix} \quad \vec{y}_{h,D} = \begin{pmatrix} D \\ H(\vec{\pi}) \end{pmatrix} \quad (3.202)$$

**Conditions aux limites de sensibilité des droites** Le principe ici est d'appliquer la condition à la limite de sensibilité aux profils de luminance de chacun des supports géométriques indépendants. Étant donné que le milieu est transparent, que les parois sont noires et que les parois déformées ne sont pas inclinées par la déformation, la condition à la limite s'écrit en généralité :

$$\begin{aligned} s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) &= -\beta \|\partial_{\vec{D}} \vec{\mathcal{Z}}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \partial_{\vec{D}} \vec{I}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \\ &= -\beta \partial_{1, \vec{a}} L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \end{aligned} \quad (3.203)$$

## ENCADRÉ 3.13 – Précision sur la dérivée surfacique de l'espace géométrique

Dans les exemples de cette partie, l'espace géométrique est représenté par l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$  qui admet la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  à partir de laquelle sont repérés les vecteurs positions  $\vec{y}$ . La coordonnée de  $\vec{y}$  selon  $\vec{e}_1$  est repérée par  $x_1$  et celle selon  $\vec{e}_2$  est repérée par  $x_2$ . La luminance étant une fonction définie dans cet espace, il existe le vecteur gradient de  $L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi})$ , noté  $\vec{\partial}_1 L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi})$ , qui permet d'écrire la dérivée surfacique  $\partial_{1, \vec{u}} L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi})$  à partir de la projection du gradient dans la direction  $\vec{u}$  :

$$\partial_{1, \vec{u}} L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = \vec{\partial}_1 L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \cdot \vec{u} = \partial_{x_1} L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi})(\vec{u} \cdot \vec{e}_1) + \partial_{x_2} L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi})(\vec{u} \cdot \vec{e}_2) \quad (3.204)$$

Dans les exemples qui vont suivre nous trouverons directement les résultats issus de cette décomposition du gradient. Les produits scalaires seront laissés tels quels pour ne pas alourdir les expressions.

Nous savons que les parois latérales sont étirées par la déformation alors que la paroi du haut est déplacée. Nous avons rencontré ces types de déformations pour des parois noires dans les [Sec. 3.4.2](#) et [3.4.1](#). Pour la détermination des coefficients et vecteurs unitaires le lecteur pourra se référer à ces parties.

**Sur la paroi de gauche**, nous obtenons alors la condition à la limite suivante :

$$s_g(\vec{y}_g, \vec{\omega}_g, \vec{\pi}) = -\beta_g L^{eq}(T_g)(\vec{u}_g \cdot \vec{e}_2) \left( \delta(\vec{y}_g - \vec{y}_{g,0}) - \delta(\vec{y}_{g,H\vec{\pi}} - \vec{y}_g) \right) \quad (3.205)$$

avec  $\beta_g = |\lambda(1 - \frac{1}{H}\vec{y} \cdot \vec{e}_1)|$  et  $\vec{u}_g \cdot \vec{e}_2$  le produit scalaire issu de la projection du gradient de la luminance dans la direction  $\vec{u}_g$ , avec  $\vec{u}_g = (0, \text{sign}(\lambda))$ .

$$\begin{aligned} s_g(\vec{y}_g, \vec{\omega}_g, \vec{\pi}) &= -\beta_g L^{eq}(T_g)(\vec{u}_g \cdot \vec{e}_2) \delta(\vec{y} - \vec{y}_{g,0}) \\ &+ \beta_g L^{eq}(T_g)(\vec{u}_g \cdot \vec{e}_2) \delta(\vec{y} - \vec{y}_{g,H\vec{\pi}}) \end{aligned} \quad (3.206)$$

**Sur la paroi de droite**, les développements sont les mêmes que sur la paroi de gauche, et on trouve :

$$\begin{aligned} s_d(\vec{y}_d, \vec{\omega}_d, \vec{\pi}) &= -\beta_d L^{eq}(T_d)(\vec{u}_d \cdot \vec{e}_2) \delta(\vec{y} - \vec{y}_{d,0}) \\ &+ \beta_d L^{eq}(T_d)(\vec{u}_d \cdot \vec{e}_2) \delta(\vec{y} - \vec{y}_{d,H\vec{\pi}}) \end{aligned} \quad (3.207)$$

avec  $\beta_d = |\lambda(1 - \frac{1}{H}\vec{y} \cdot \vec{e}_1)|$  et  $\vec{u}_d = (0, \text{sign}(\lambda))$ .

**Sur la paroi du haut**, on trouve :

$$\begin{aligned} s_h(\vec{y}_h, \vec{\omega}_h, \vec{\pi}) &= -\beta_h L^{eq}(T_h)(\vec{u}_h \cdot \vec{e}_1) \delta(\vec{y} - \vec{y}_{h,0}) \\ &+ \beta_h L^{eq}(T_h)(\vec{u}_h \cdot \vec{e}_1) \delta(\vec{y} - \vec{y}_{h,D}) \end{aligned} \quad (3.208)$$

avec  $\beta_h = \tan(\theta_h)$  et  $\vec{u}_h = (\text{sign}(\tan(\theta_h)), 0)$ .

**Conditions aux limites de la configuration originale - superposition** Chaque droite est superposée munie de sa propre condition à la limite pour former la configuration équivalente de la [Fig. 3.28](#). La condition à la limite de sensibilité de la configuration originale est obtenue en

superposant les conditions aux limites de sensibilité des droites de la configuration équivalente. Dans la configuration convexe du carré, nous les additionnons simplement, et on trouve :

$$\begin{aligned}
s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = & + \beta_g L^{eq}(T_g)(\vec{u}_g \cdot \vec{e}_2) \delta(\vec{y} - \vec{y}_{g,H\ddot{\pi}}) \\
& - \beta_g L^{eq}(T_g)(\vec{u}_g \cdot \vec{e}_2) \delta(\vec{y} - \vec{y}_{g,0}) \\
& + \beta_d L^{eq}(T_d)(\vec{u}_d \cdot \vec{e}_2) \delta(\vec{y} - \vec{y}_{d,H\ddot{\pi}}) \\
& - \beta_d L^{eq}(T_d)(\vec{u}_d \cdot \vec{e}_2) \delta(\vec{y} - \vec{y}_{d,0}) \\
& + \beta_h L^{eq}(T_h)(\vec{u}_h \cdot \vec{e}_1) \delta(\vec{y} - \vec{y}_{h,D}) \\
& - \beta_h L^{eq}(T_h)(\vec{u}_h \cdot \vec{e}_1) \delta(\vec{y} - \vec{y}_{h,0}) \quad \vec{y} \in \partial G(\vec{\pi})
\end{aligned} \tag{3.209}$$

Dans cet exemple, les bornes  $\vec{y}_{g,H\ddot{\pi}}$  et  $\vec{y}_{h,0}$  sont identiques, ainsi que les bornes  $\vec{y}_{d,H\ddot{\pi}}$  et  $\vec{y}_{h,D}$ . De plus, les coefficients  $\beta_d$  et  $\beta_g$  sont nuls aux bornes  $\vec{y}_{d,0}$  et  $\vec{y}_{g,0}$  (puisque le vecteur de déformation est nul en ces points). La condition à la limite devient donc :

$$\begin{aligned}
s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = & \delta(\vec{y} - \vec{y}_{h,0}) \left( (\vec{u}_g \cdot \vec{e}_2) \beta_g L^{eq}(T_g) - (\vec{u}_h \cdot \vec{e}_1) \beta_h L^{eq}(T_h) \right) \\
& + \delta(\vec{y} - \vec{y}_{h,D}) \left( (\vec{u}_d \cdot \vec{e}_2) \beta_d L^{eq}(T_d) + (\vec{u}_h \cdot \vec{e}_1) \beta_h L^{eq}(T_h) \right) \quad \vec{y} \in \partial G(\vec{\pi})
\end{aligned} \tag{3.210}$$

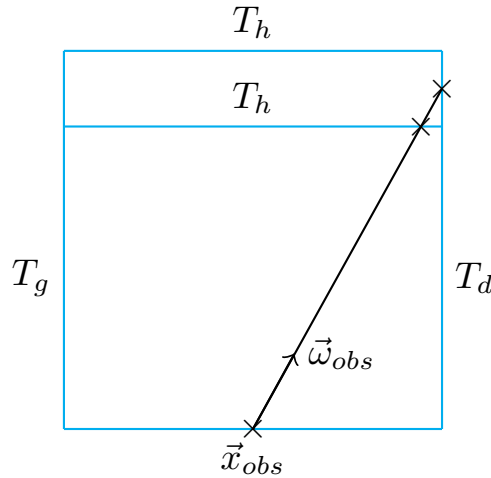


FIGURE 3.32 – Sensibilité carré parois noires

À la lecture de cette condition à la limite, nous pouvons voir que la sensibilité géométrique du problème du carré constitué de parois noires est issue principalement de la différence de température entre chacune des parois sécantes. Nous illustrons cet effet par le schéma Fig. 3.32 qui représente le carré pour deux valeurs de  $\vec{\pi}$ . Considérons une position et une direction  $(\vec{x}_{obs}, \vec{\omega}_{obs})$  sur la paroi du bas. Pour cette direction  $\vec{\omega}_{obs}$ , le produit scalaire  $(\vec{u}_d \cdot \vec{e}_2) > 0$  et le produit scalaire  $(\vec{u}_h \cdot \vec{e}_1) < 0$ . Dans l'équation 3.210 la condition à la limite à l'intersection entre la paroi du haut et la paroi de droite dépend donc de la différence entre les températures  $T_h$  et  $T_d$ . En effet, dans la configuration  $\vec{\pi}_1$ , la valeur de la luminance perçue en  $(\vec{x}_{obs}, \vec{\omega}_{obs})$  sera la valeur de la luminance d'équilibre à la température de la paroi du haut. Dans la configuration  $\vec{\pi}_2$ , la valeur de la luminance perçue en  $(\vec{x}_{obs}, \vec{\omega}_{obs})$  sera la valeur de la luminance d'équilibre à la température de la paroi de droite. Lorsque  $\vec{\pi}_2$  va tendre vers  $\vec{\pi}_1$ , la sensibilité de la luminance perçue en  $(\vec{x}_{obs}, \vec{\omega}_{obs})$  sera donc de l'ordre de la différence entre les deux luminances d'équilibre et proviendra de l'intersection entre les deux parois. C'est exactement ce que traduit l'expression 3.210.

### 3.6.3.2 Deuxième configuration : avec deux parois diffuses

Dans cette partie, nous appliquerons la même systématique que pour les parois noires : la première étape est donc de modéliser les conditions aux limites des droites de la configuration équivalente.

**Configuration radiative équivalente - superposition des droites** Dans cette partie, nous détaillerons la configuration radiative équivalente, c'est-à-dire les conditions aux limites radiatives de chaque support géométrique qui vérifient une configuration radiative équivalente au carré. Nous ne rappellerons pas les supports géométriques car ils viennent d'être donnés dans l'exemple juste au dessus.

**La paroi de gauche** du carré est une paroi noire à la température  $L^{eq}(T_g)$ .

Sa condition à la limite radiative sur le support géométrique de la droite équivalente à la paroi de gauche est donc :

$$L(\vec{y}_g, \vec{\omega}_g, \vec{\pi}) = L^{eq}(T_g) \mathcal{H}(\vec{y}_g - \vec{y}_{g,0}) \mathcal{H}(\vec{y}_{g,H\vec{\pi}} - \vec{y}) \quad (3.211)$$

**La paroi de droite** du carré est une paroi diffuse et de température  $T_d$ .

Le profil de luminance sortante tout au long de la paroi est donné par :

$$L(\vec{y}_d, \vec{\omega}_d, \vec{\pi}) = L^{em}(\vec{y}_d, \vec{\omega}_d, \vec{\pi}) + \rho \int_{\mathcal{H}_{incid}} \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}}{2} d\vec{\omega}' L^{inc}(\vec{y}_d, \vec{\omega}'_d, \vec{\pi}) \quad (3.212)$$

avec  $L^{em}$  la luminance émise par la paroi :

$$L^{em}(\vec{y}_d, \vec{\omega}_d, \vec{\pi}) = \varepsilon \left( L^{eq}(T_d) \mathcal{H}(\vec{y}_d - \vec{y}_{d,0}) \mathcal{H}(\vec{y}_{d,H\vec{\pi}} - \vec{y}) + 0 \mathcal{H}(\vec{y}_{d,0} - \vec{y}_d) \mathcal{H}(\vec{y}_d - \vec{y}_{d,H\vec{\pi}}) \right) \quad (3.213)$$

La luminance incidente  $L^{inc}$  est définie telle que :

$$L^{inc}(\vec{y}_d, \vec{\omega}'_d, \vec{\pi}) = L(\vec{y}_d, \vec{\omega}'_d, \vec{\pi}) \mathcal{H}(\vec{y}_d - \vec{y}_{d,0}) \mathcal{H}(\vec{y}_{d,H\vec{\pi}} - \vec{y}_d) + 0 \mathcal{H}(\vec{y}_{d,0} - \vec{y}_d) \mathcal{H}(\vec{y}_d - \vec{y}_{d,H\vec{\pi}}) \quad (3.214)$$

Les coefficients  $\varepsilon$  et  $\rho$  sont considérés comme constant tout le long de la droite. Pour le terme d'émission, c'est la luminance d'équilibre qui est formalisée comme discontinue le long de la paroi et, pour le terme incident, c'est la luminance incidente qui considérée comme nulle en dehors de la zone qui correspond à la facette.

**La paroi du haut** a les mêmes propriétés radiatives que la paroi de droite à la température  $T_h$ .

Le profil de luminance sortante tout au long de la paroi est donné par :

$$L(\vec{y}_h, \vec{\omega}_h, \vec{\pi}) = L^{em}(\vec{y}_h, \vec{\omega}_h, \vec{\pi}) + \rho \int_{\mathcal{H}_{incid}} \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}}{2} d\vec{\omega}' L^{inc}(\vec{y}_h, \vec{\omega}'_h, \vec{\pi}) \quad (3.215)$$

avec  $L^{em}$  la luminance émise par la paroi :

$$L^{em}(\vec{y}_h, \vec{\omega}_h, \vec{\pi}) = \varepsilon \left( L^{eq}(T_h) \mathcal{H}(\vec{y}_h - \vec{y}_{h,0}) \mathcal{H}(\vec{y}_{h,D} - \vec{y}_h) + 0 \mathcal{H}(\vec{y}_{h,0} - \vec{y}_h) \mathcal{H}(\vec{y}_h - \vec{y}_{h,D}) \right) \quad (3.216)$$

La luminance incidente  $L^{inc}$  est définie telle que :

$$L^{inc}(\vec{y}_h, \vec{\omega}'_h, \vec{\pi}) = L(\vec{y}_h, \vec{\omega}'_h, \vec{\pi}) \mathcal{H}(\vec{y}_h - \vec{y}_{h,0}) \mathcal{H}(\vec{y}_{h,D} - \vec{y}) + 0 \mathcal{H}(\vec{y}_{h,0} - \vec{y}_h) \mathcal{H}(\vec{y}_h - \vec{y}_{h,D}) \quad (3.217)$$

**Conditions aux limites de sensibilité des droites** La condition à la limite du modèle de sensibilité dans le cas particulier d'une paroi diffuse, pour une configuration dont le milieu est transparent, où les coefficients d'émission et de réflexion sont homogènes et les parois ne sont pas inclinées par la déformation donne en toute généralité :

$$\begin{aligned}
s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) &= -\beta \vec{\partial}_{1, \vec{u}_d} L^{em}(\vec{y}_d, \vec{\omega}_d, \vec{\pi}) \\
&\quad - \beta \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' \vec{\partial}_1 L^{inc}(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \cdot \vec{u} \\
&\quad + \beta' \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' \vec{\partial}_1 L^{inc}(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \cdot \vec{u}' \\
&\quad + \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' s(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi})
\end{aligned} \tag{3.218}$$

Avec  $L^{em}$  la luminance sortante émise par la paroi,  $L^{inc}(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi})$  la luminance incidente à la paroi et  $s(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi})$  la sensibilité incidente à la paroi.

**Sur la paroi de gauche**, la condition à la limite de sensibilité est :

$$\begin{aligned}
s_g(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) &= -\beta_g L^{eq}(T_g)(\vec{u}_g \cdot \vec{e}_2) \delta(\vec{y} - \vec{y}_{g,0}) \\
&\quad + \beta_g L^{eq}(T_g)(\vec{u}_g \cdot \vec{e}_2) \delta(\vec{y} - \vec{y}_{g,H_{\vec{\pi}}})
\end{aligned} \tag{3.219}$$

**Sur la paroi de droite**, la condition à la limite de sensibilité est déterminée à partir de l'Eq. 3.218 avec :

$$L^{em}(\vec{y}_d, \vec{\omega}_d, \vec{\pi}) = \varepsilon \left( L^{eq}(T_d) \mathcal{H}(\vec{y}_d - \vec{y}_{d,0}) \mathcal{H}(\vec{y}_{d,H_{\vec{\pi}}} - \vec{y}_d) + 0 \mathcal{H}(\vec{y}_{d,0} - \vec{y}_d) \mathcal{H}(\vec{y}_d - \vec{y}_{d,H_{\vec{\pi}}}) \right) \tag{3.220}$$

et

$$L^{inc}(\vec{y}_d, \vec{\omega}'_d, \vec{\pi}) = L(\vec{y}_d, \vec{\omega}'_d, \vec{\pi}) \mathcal{H}(\vec{y}_d - \vec{y}_{d,0}) \mathcal{H}(\vec{y}_{d,H_{\vec{\pi}}} - \vec{y}_d) + 0 \mathcal{H}(\vec{y}_{d,0} - \vec{y}_d) \mathcal{H}(\vec{y}_d - \vec{y}_{d,H_{\vec{\pi}}}) \tag{3.221}$$

En appliquant ces égalités à l'Eq. 3.218 on obtient :

$$\begin{aligned}
s_d(\vec{y}_d, \vec{\omega}_d, \vec{\pi}) &= \delta(\vec{y} - \vec{y}_{d,H_{\vec{\pi}}}) \left( \beta_d(\vec{u}_d \cdot \vec{e}_2) \varepsilon L^{eq}(T_d) + \rho \int_{\mathcal{H}_{incid}} \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}}{2} d\vec{\omega}' L(\vec{y}_d, \vec{\omega}'_d, \vec{\pi}) \left( -\beta'_d(\vec{u}'_d \cdot \vec{e}_2) + \beta_d(\vec{u}_d \cdot \vec{e}_2) \right) \right) \\
&\quad + \delta(\vec{y} - \vec{y}_{d,0}) \left( -\beta_d(\vec{u}_d \cdot \vec{e}_2) \varepsilon L^{eq}(T_d) + \rho \int_{\mathcal{H}_{incid}} \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}}{2} d\vec{\omega}' L(\vec{y}_d, \vec{\omega}'_d, \vec{\pi}) \left( -\beta_d(\vec{u}_d \cdot \vec{e}_2) + \beta'_d(\vec{u}'_d \cdot \vec{e}_2) \right) \right) \\
&\quad + \mathcal{H}(\vec{y}_d - \vec{y}_{d,H_{\vec{\pi}}}) \mathcal{H}(\vec{y}_{d,0} - \vec{y}_d) \rho \int_{\mathcal{H}_{incid}} \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}}{2} d\vec{\omega}' \times \\
&\quad \left( \beta'_d \vec{\partial}_1 L(\vec{y}_d, \vec{\omega}'_d, \vec{\pi}) \cdot \vec{u}' - \beta_d \vec{\partial}_1 L(\vec{y}_d, \vec{\omega}'_d, \vec{\pi}) \cdot \vec{u} + s(\vec{y}_d, \vec{\omega}'_d, \vec{\pi}) \right)
\end{aligned} \tag{3.222}$$

**Sur la paroi du haut**, dans le même esprit :

$$L^{em}(\vec{y}_h, \vec{\omega}_h, \vec{\pi}) = \varepsilon \left( L^{eq}(T_h) \mathcal{H}(\vec{y}_h - \vec{y}_{h,0}) \mathcal{H}(\vec{y}_{h,D} - \vec{y}_h) + 0 \mathcal{H}(\vec{y}_{h,0} - \vec{y}_h) \mathcal{H}(\vec{y}_h - \vec{y}_{h,D}) \right) \tag{3.223}$$

et

$$L^{inc}(\vec{y}_h, \vec{\omega}'_h, \vec{\pi}) = L(\vec{y}_h, \vec{\omega}'_h, \vec{\pi}) \mathcal{H}(\vec{y}_h - \vec{y}_{h,0}) \mathcal{H}(\vec{y}_{h,D} - \vec{y}_h) + 0 \mathcal{H}(\vec{y}_{h,0} - \vec{y}_h) \mathcal{H}(\vec{y}_h - \vec{y}_{h,D}) \tag{3.224}$$

En appliquant ces égalités à l'Eq. 3.218 on obtient :

$$\begin{aligned}
s_h(\vec{y}_h, \vec{\omega}_h, \vec{\pi}) &= \delta(\vec{y} - \vec{y}_{h,D}) \left( \beta_h(\vec{u}_h \cdot \vec{e}_1) \varepsilon L^{eq}(T_h) + \rho \int_{\mathcal{H}_{incid}} \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}}{2} d\vec{\omega}' L(\vec{y}_h, \vec{\omega}'_h, \vec{\pi}) \left( \beta_h(\vec{u}_h \cdot \vec{e}_1) - \beta'_h(\vec{u}'_h \cdot \vec{e}_1) \right) \right) \\
&+ \delta(\vec{y} - \vec{y}_{h,0}) \left( -\beta_h(\vec{u}_h \cdot \vec{e}_1) \varepsilon L^{eq}(T_h) + \rho \int_{\mathcal{H}_{incid}} \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}}{2} d\vec{\omega}' L(\vec{y}_h, \vec{\omega}'_h, \vec{\pi}) \left( \beta'_h(\vec{u}'_h \cdot \vec{e}_1) - \beta_h(\vec{u}_h \cdot \vec{e}_1) \right) \right) \\
&+ \mathcal{H}(\vec{y}_h - \vec{y}_{h,D}) \mathcal{H}(\vec{y}_{h,0} - \vec{y}_h) \rho \int_{\mathcal{H}_{incid}} \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}}{2} d\vec{\omega}' \times \\
&\left( \beta'_h \vec{\partial}_1 L(\vec{y}_h, \vec{\omega}'_h, \vec{\pi}) \cdot \vec{u}' - \beta_h \vec{\partial}_1 L(\vec{y}_h, \vec{\omega}'_h, \vec{\pi}) \cdot \vec{u} + s(\vec{y}_h, \vec{\omega}'_h, \vec{\pi}) \right)
\end{aligned} \tag{3.225}$$

Les conditions aux limites des droites équivalentes font intervenir à la fois des sources de sensibilité surfaciques (délimitées par les fonctions de Heaviside) et des sources de sensibilité locales (donnée en facteur des distributions de Dirac). À la différence de l'exemple en parois noires uniquement, les sources locales de sensibilité dépendent, non seulement de la luminance d'équilibre, mais aussi de la luminance incidente. Il existe donc également un couplage avec le modèle de transfert radiatif dans les sources locales de sensibilité. Nous allons le voir dans la condition à la limite de la configuration originale.

**Conditions aux limites de la configuration originale - superposition** La condition à la limite de la configuration originale est obtenue en superposant les conditions aux limites de sensibilité des droites de la configuration équivalente. Étant donné que les bornes  $\vec{y}_{d,H(\vec{\pi})}$  et  $\vec{y}_{h,D}$  sont identiques, ainsi que les bornes  $\vec{y}_{g,H(\vec{\pi})}$  et  $\vec{y}_{h,0}$  on trouve :

$$\begin{aligned}
s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) &= \delta(\vec{y} - \vec{y}_{h,0}) \left( -\beta_g(\vec{u}_g \cdot \vec{e}_2) \varepsilon L^{eq}(T_g) - \beta_h(\vec{u}_h \cdot \vec{e}_1) \varepsilon L^{eq}(T_h) \right. \\
&\quad \left. + \rho \int_{\mathcal{H}_{incid}} \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}}{2} d\vec{\omega}' L(\vec{y}_h, \vec{\omega}'_h, \vec{\pi}) \left( -\beta_h(\vec{u}_h \cdot \vec{e}_1) + \beta'_h(\vec{u}'_h \cdot \vec{e}_1) \right) \right) \\
&+ \delta(\vec{y} - \vec{y}_{h,D}) \left[ \varepsilon \left( \beta_h(\vec{u}_h \cdot \vec{e}_1) L^{eq}(T_h) + \beta_d(\vec{u}_d \cdot \vec{e}_2) L^{eq}(T_d) \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( \rho \int_{\mathcal{H}_{incid}} \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}}{2} d\vec{\omega}' \right) \times \right. \\
&\quad \left. \left( L(\vec{y}_h, \vec{\omega}'_h, \vec{\pi}) \left( \beta_h(\vec{u}_h \cdot \vec{e}_1) - \beta'_h(\vec{u}'_h \cdot \vec{e}_1) \right) + L(\vec{y}_d, \vec{\omega}'_d, \vec{\pi}) \left( -\beta'_d(\vec{u}'_d \cdot \vec{e}_2) + \beta_d(\vec{u}_d \cdot \vec{e}_2) \right) \right) \right] \\
&+ \mathcal{H}(\vec{y}_h - \vec{y}_{h,H(\vec{\pi})}) \mathcal{H}(\vec{y}_{h,0} - \vec{y}_h) \rho \int_{\mathcal{H}_{incid}} \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}}{2} d\vec{\omega}' \times \\
&\left( \beta'_h \vec{\partial}_1 L(\vec{y}_h, \vec{\omega}'_h, \vec{\pi}) \cdot \vec{u}' - \beta_h \vec{\partial}_1 L(\vec{y}_h, \vec{\omega}'_h, \vec{\pi}) \cdot \vec{u} + s(\vec{y}_h, \vec{\omega}'_h, \vec{\pi}) \right) \\
&+ \mathcal{H}(\vec{y}_d - \vec{y}_{d,H(\vec{\pi})}) \mathcal{H}(\vec{y}_{d,0} - \vec{y}_d) \rho \int_{\mathcal{H}_{incid}} \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}}{2} d\vec{\omega}' \times \\
&\left( \beta'_d \vec{\partial}_1 L(\vec{y}_d, \vec{\omega}'_d, \vec{\pi}) \cdot \vec{u}' - \beta_d \vec{\partial}_1 L(\vec{y}_d, \vec{\omega}'_d, \vec{\pi}) \cdot \vec{u} + s(\vec{y}_d, \vec{\omega}'_d, \vec{\pi}) \right)
\end{aligned} \tag{3.226}$$

La condition à la limite comprend des sources de sensibilités ponctuelles, situées à l'intersection des plans latéraux avec le plan du haut, et deux sources surfaciques sur les parois diffuses. Les sources surfaciques sont celles que nous avons maintenant l'habitude de voir et proviennent de la variation de luminance incidente à la paroi. Nous remarquons que, dans cette configuration, la sensibilité est réfléchiée sur les parois de droite et du haut : toutes les sources de sensibilités émises par les autres parois sont donc réfléchiées et s'ajoutent au terme de la sensibilité émise par les parois diffuses.



---

Les sources de sensibilité locale dépendent à la fois de la différence de température entre chaque paroi sécantes mais également de la différence de luminance incidente : elles incluent donc un couplage avec le modèle de transfert radiatif.

### 3.6.4 Parois noires ou diffuses en géométrie concave

Les géométries facétisées concaves contiennent des angles rentrants, comme c'est le cas pour le schéma de la Fig. 3.33. Lorsque les parois qui constituent l'angle rentrant sont déformées par une variation du paramètre géométrique, elles modifient les effets de masquage déjà présents. Par exemple, dans la configuration originale de la Fig. 3.33, lorsque la paroi à la température  $T_3$  est déplacée vers la droite, elle masque la luminance émise par la paroi à la température  $T_4$  qui est perçue à la position d'observation  $(\vec{x}_{obs}, \vec{\omega}_{obs})$ . En cette position la luminance passera brusquement de la luminance d'équilibre à la température  $T_4$  à la luminance d'équilibre à la température  $T_2$ .

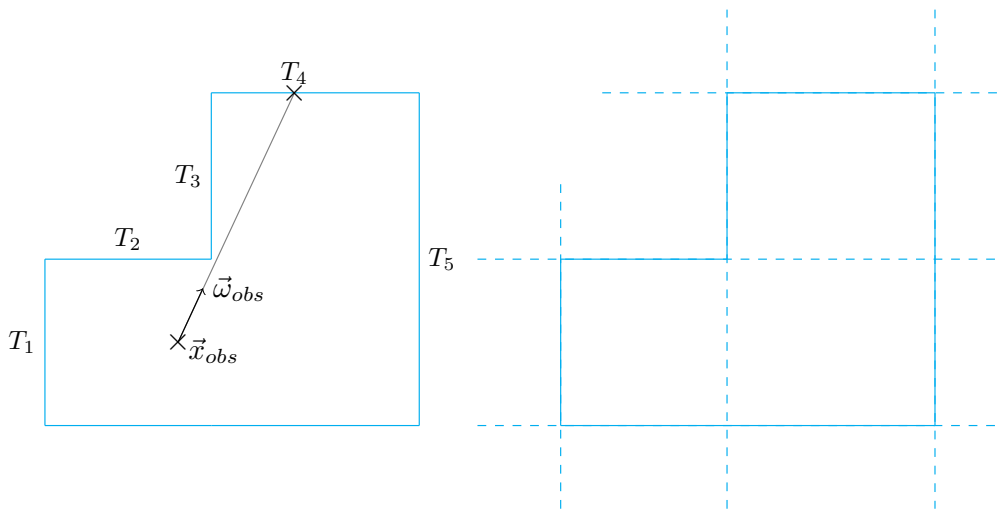


FIGURE 3.33 – Configuration originale, configuration équivalente et un point d'observation de la luminance

La construction de la configuration équivalente et la méthodologie construite autour de la conjecture vont permettre de prendre en compte la modification de ces effets de masquage dans la condition à la limite de sensibilité.

Les configurations équivalentes des géométries concaves ont une particularité importante par rapport aux géométries convexes : en prolongeant les segments de la configuration originale nous obtenons des droites qui traversent le milieu. Pour que les configurations soient réellement équivalentes, il faudra donc que ces droites agissent comme des parois transparentes au rayonnement, et il faudra aussi que sur ces zones "intérieures" les conditions aux limites des droites correspondent à la luminance entrante dans la paroi.

L'intérêt de cette illustration est de montrer le traitement des sources de sensibilité au niveau de l'angle rentrant. La déformation de la géométrie consistera à déplacer la paroi ("verticale") à la température  $T_3$  vers la droite et par conséquent à étirer la paroi ("basse") à la température  $T_2$  (de longueur  $D(\tilde{\pi}) = D + \lambda\tilde{\pi}$ ) et raccourcir la paroi ("haute") à la température  $T_4$  (de longueur  $E - D(\tilde{\pi})$ ). Seulement ces trois parois seront donc dépendantes du paramètre  $\tilde{\pi}$  et dans les développements qui suivront, nous n'aborderont pas les autres parois car elles ne sont pas sources de sensibilité.

De la même façon que dans la partie sur les géométries convexes, nous donnerons l'application  $\mathcal{Z}$  et le vecteur de déformation, et nous illustrerons le support matériel et géométrique par des schémas. Nous étudierons les sources de sensibilités pour deux configurations radiatives différentes, la première pour laquelle toutes les parois seront noires et la seconde pour laquelle la paroi à la température  $T_2$  sera diffuse et toutes les autres noires.

#### 3.6.4.1 Première configuration : parois noires

**Configuration équivalente - superposition des droites** Dans l'élaboration de la configuration équivalente, nous serons attentifs sur la définition de la luminance émise par la paroi comme sur

la luminance incidente à la paroi. En effet, étant donné que certaines parties de la condition à la limite modélisent la transparence de la paroi, nous devons identifier tout le rayonnement qui pourrait potentiellement traverser cette zone et le rayonnement incident représentera parfois les direction qui vérifient  $\vec{\omega}' \cdot \vec{n} > 0$  ou celles qui vérifient  $\vec{\omega}' \cdot \vec{n} < 0$ . Comme pour la partie précédente, les supports géométriques de chacune des parois seront définis à partir du support matériel  $U = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^2 | \vec{y} \cdot \vec{e}_2 = 0\}$  orienté par la normale  $\vec{n} = (0, 1)$ .

**La paroi haute** est représentée par la droite perpendiculaire à  $\vec{e}_2$  est passant par  $2H$  et orientée par  $\vec{n}_h = (0, -1)$ .

Sur cette droite, la température est nulle en tout point sauf dans une zone comprise dans  $[D(\tilde{\pi}), E]$  où  $E$  est la largeur totale du carré. En modifiant  $\tilde{\pi}$ , on raccourcit la longueur de cette paroi. Le support géométrique est déterminé comme :

$$\begin{aligned} \vec{y}_h &= \mathcal{Z}_h(\vec{y}, \tilde{\pi}) = \left( D(\tilde{\pi}) + \left( 1 - \frac{\vec{y} \cdot \vec{e}_1}{E - D} \right) (E - D(\tilde{\pi})), 0 \right) \\ \vec{v}_{\chi_h} &= \left( \lambda \frac{\vec{y} \cdot \vec{e}_1}{E - D}, 0 \right) \end{aligned} \quad (3.227)$$

L'application  $\Omega$  qui, appliquée à  $\vec{\omega}$  et  $\vec{n}$  du support matériel donne  $\vec{\omega}_h$  et  $\vec{n}_h$ , correspond à la rotation d'un angle  $-\pi$  autour de l'axe  $\vec{e}_3$ .

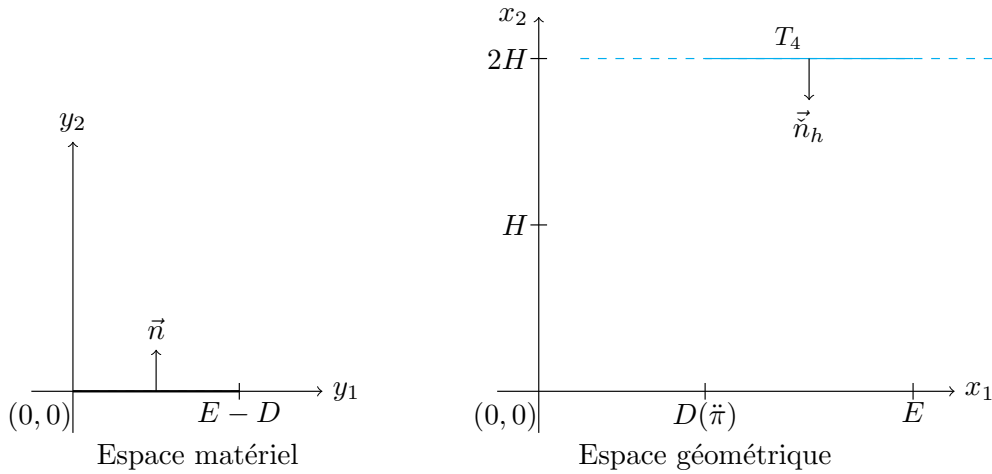


FIGURE 3.34 – Support matériel (schéma de gauche) et géométrique (schéma de droite) de la paroi du haut

La condition à la limite radiative de cette paroi s'écrit :

$$L(\vec{y}_h, \vec{\omega}_h, \tilde{\pi}) = L^{eq}(T_h) \mathcal{H}(\vec{y}_h - \vec{y}_{h,D(\tilde{\pi})}) \mathcal{H}(\vec{y}_{h,E} - \vec{y}_h) \quad (3.228)$$

**La paroi verticale** est représentée par la droite perpendiculaire à  $\vec{e}_1$  passant par  $D(\tilde{\pi})$  et orientée par  $\vec{n}_v = (1, 0)$  (voir Fig. 3.35).

Comme pour la droite équivalente à la paroi basse, la droite de la paroi verticale est prolongée dans le milieu. Le support géométrique est déterminé comme :

$$\begin{aligned} \vec{y}_v &= \mathcal{Z}_v(\vec{y}, \tilde{\pi}) = \left( D(\tilde{\pi}), \vec{y} \cdot \vec{e}_1 \right) \\ \vec{v}_{\chi_b} &= \left( \lambda, 0 \right) \end{aligned} \quad (3.229)$$

L'application  $\Omega$  qui, appliquée à  $\vec{\omega}$  et  $\vec{n}$  du support matériel donne  $\vec{\omega}_v$  et  $\vec{n}_v$ , correspond à la rotation d'un angle  $-\frac{\pi}{2}$  autour de l'axe  $\vec{e}_3$ .

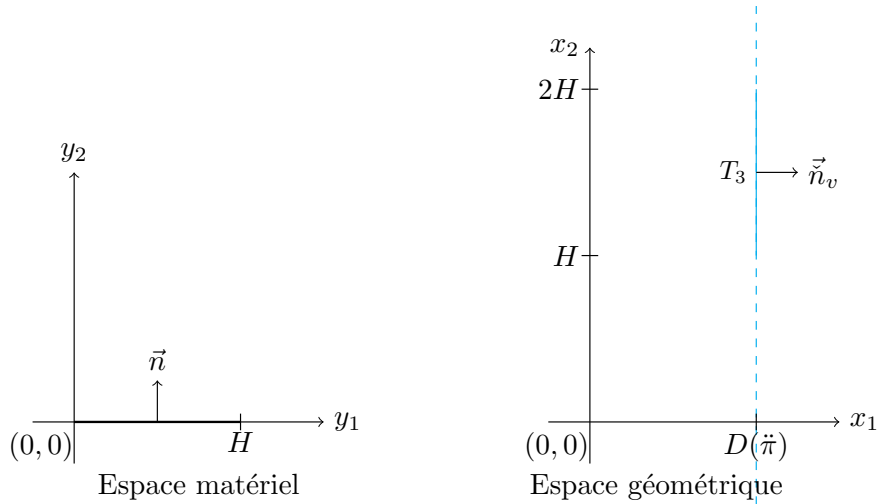


FIGURE 3.35 – Support matériel (schéma de gauche) et géométrique (schéma de droite) de la paroi verticale

Sur le support géométrique, la luminance sortante s'écrit :

$$L(\vec{y}_v, \vec{\omega}_v, \vec{\pi}) = L^{eq}(T_3) \mathcal{H}(\vec{y}_v - \vec{y}_{v,H}) \mathcal{H}(\vec{y}_{v,2H} - \vec{y}_v) + L(\vec{y}_b, \vec{\omega}_b, \vec{\pi}) \mathcal{H}(\vec{y}_v - \vec{y}_{v,0}) \mathcal{H}(\vec{y}_{v,H} - \vec{y}_v) \quad (3.230)$$

**La paroi basse** est représentée par la droite perpendiculaire à  $\vec{e}_2$  passant par  $H$  et orientée par la normale  $\vec{n}_b = (0, -1)$  (voir Fig. 3.36).

Sur cette droite, la température est nulle en tout point sauf dans une zone comprise dans  $[0, D(\vec{\pi})]$  dont la longueur dépend du paramètre  $\vec{\pi}$ . En modifiant  $\vec{\pi}$ , on étire cette zone. On définit le support géométrique et le vecteur de déformation :

$$\begin{aligned} \vec{y}_b &= \mathcal{Z}_b(\vec{y}, \vec{\pi}) = \left( \left(1 - \frac{\vec{y} \cdot \vec{e}_1}{D}\right) D(\vec{\pi}), 0 \right) \\ \vec{v}_{\chi_b} &= \left( \lambda \left(1 - \frac{1}{D} \vec{y} \cdot \vec{e}_1\right), 0 \right) \end{aligned} \quad (3.231)$$

L'application  $\Omega$  qui, appliquée à  $\vec{\omega}$  et  $\vec{n}$  du support matériel donne  $\vec{\omega}_b$  et  $\vec{n}_b$ , correspond à la rotation d'un angle  $-\pi$  autour de l'axe  $\vec{e}_3$ .

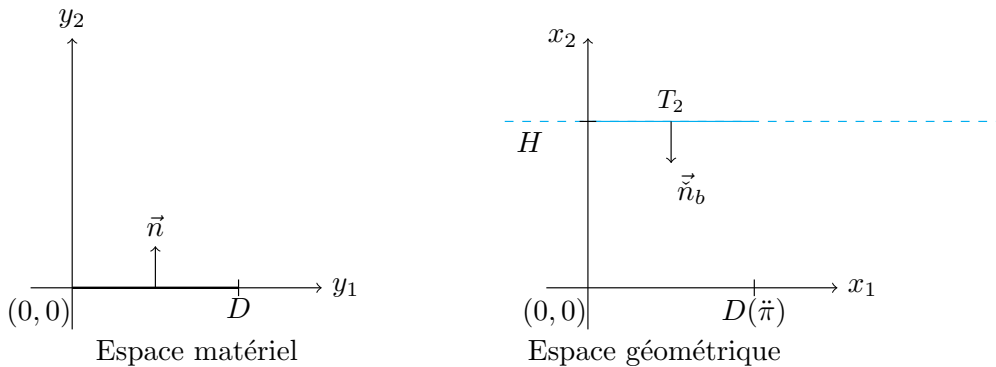


FIGURE 3.36 – Support matériel (schéma de gauche) et géométrique (schéma de droite) de la paroi basse

Sur le support géométrique, la luminance sortante est égale à la luminance d'équilibre dans la zone  $[0, D(\vec{\pi})]$  et égale à la luminance du milieu incidente dans la zone  $[D(\vec{\pi}), E]$ . Sur le reste de la droite, elle est nulle. La luminance incidente est donc nulle partout sauf dans la zone  $[0, E]$  :

$$L(\vec{y}_b, \vec{\omega}_b, \vec{\pi}) = L^{eq}(T_2) \mathcal{H}(\vec{y}_b - \vec{y}_{b,0}) \mathcal{H}(\vec{y}_b, \vec{\omega}_b, \vec{\pi} - \vec{y}) + L(\vec{y}_b, \vec{\omega}_b, \vec{\pi}) \mathcal{H}(\vec{y}_b - \vec{y}_{b,D_\pi}) \mathcal{H}(\vec{y}_{b,E} - \vec{y}_b) \quad (3.232)$$

**Conditions aux limites de sensibilité des droites** La condition à la limite de sensibilité qui s'applique à notre exemple est la même que l'exemple précédent puisque le milieu est de même nature. On donne donc directement les résultats pour chacune des droites.

**Pour la paroi haute,** la condition à la limite est :

$$s(\vec{y}_h, \vec{\omega}_h, \vec{\pi}) = -\beta_h(\vec{u}_h \cdot \vec{e}_1) \left( L^{eq}(T_4) \delta(\vec{y}_h - \vec{y}_{h,D_\pi}) - L^{eq}(T_4) \delta(\vec{y}_h - \vec{y}_{h,E}) \right) \quad (3.233)$$

**Pour la paroi verticale,** la condition à la limite est :

$$s(\vec{y}_v, \vec{\omega}_v, \vec{\pi}) = -\beta_v(\vec{u}_v \cdot \vec{e}_2) \left( L^{eq}(T_3) - L(\vec{y}_v, \vec{\omega}_v, \vec{\pi}) \right) \delta(\vec{y}_v - \vec{y}_{v,H}) + \beta_v(\vec{u}_v \cdot \vec{e}_2) L^{eq}(T_3) \delta(\vec{y}_v - \vec{y}_{v,2H}) \quad (3.234)$$

**Pour la paroi basse,** la condition à la limite est :

$$s(\vec{y}_b, \vec{\omega}_b, \vec{\pi}) = -\beta_b(\vec{u}_b \cdot \vec{e}_1) L^{eq}(T_2) \delta(\vec{y}_b - \vec{y}_{b,0}) - \beta_b(\vec{u}_b \cdot \vec{e}_1) \left( L(\vec{y}_b, \vec{\omega}_b, \vec{\pi}) - L^{eq}(T_2) \right) \delta(\vec{y}_b - \vec{y}_{b,D_\pi}) \quad (3.235)$$

**Traitement des angles rentrants** Dans les exemples précédents, la superposition des conditions aux limites de sensibilité consistait à sommer les conditions aux limites obtenues pour chaque droite indépendamment des autres. Dans le cas des géométries concaves, et plus précisément dans les cas des angles rentrants, cette solution serait fautive. Nous pouvons l'illustrer à partir de la **Fig. 3.37** qui représente notre géométrie (sur laquelle nous avons seulement prolongé les parties des droites traversant le milieu) avec deux configurations équivalentes du point de vue radiatif.

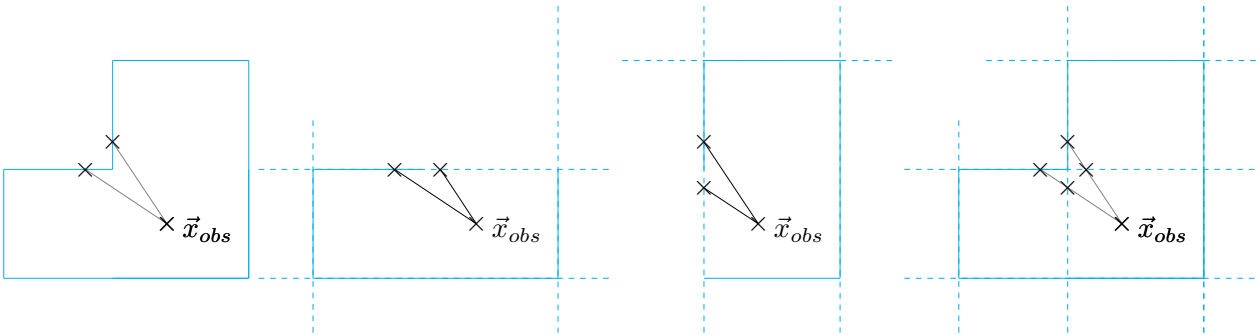


FIGURE 3.37 – Configuration de référence (à gauche), superposition (à droite) de deux configurations équivalentes (au milieu).

Nous nous donnons une position d'observation  $\vec{x}_{obs}$ .

Dans la configuration originale (**Fig. 3.37**, gauche), la condition à la limite de sensibilité induite par un déplacement de la paroi verticale vers la droite doit correspondre à l'addition d'une contribution radiative liée à la paroi basse et une diminution de la contribution radiative liée à la paroi verticale.

Si nous considérons la droite équivalente horizontale basse, la condition à la limite au niveau de l'angle rentrant correspond à la différence (infinitésimale) de luminance entre la valeur à droite de l'angle et la valeur à gauche de l'angle. La valeur à droite de l'angle correspondra à la valeur de la luminance incidente, soit la luminance d'équilibre à la température  $T_3$ . La valeur à gauche de l'angle correspondra à la luminance d'équilibre de la facette basse à la température  $T_2$ .

Pour la droite équivalente verticale, la condition à la limite au niveau de l'angle rentrant correspond à la différence (infinitésimale) de luminance entre la valeur au-dessus de l'angle et la valeur en dessous de l'angle. La valeur au-dessus correspondra à la luminance d'équilibre à la température  $T_3$ . La valeur en dessous correspondra à la luminance incidente, soit la luminance d'équilibre à la température  $T_2$ .

Les deux conditions aux limites des parois verticales et horizontales sont donc équivalentes et traduisent le même effet radiatif qu'aura un déplacement de la paroi verticale : une augmentation de la luminance d'équilibre perçue à la température  $T_2$  et une diminution de la luminance d'équilibre perçue à la température  $T_3$ .

Nous voyons donc que si nous additionnions ces deux conditions aux limites de sensibilité des deux configurations équivalentes, nous obtiendrions un résultat illustré par le schéma de droite de la **Fig. 3.37** : nous compterions la même différence deux fois.

La conséquence de cette superposition sur la condition à la limite de sensibilité doit donc être évitée en divisant par 2 le résultat de superposition des deux conditions aux limites pour les directions d'émission  $\vec{\omega}$  qui sont dirigées en direction de la zone surestimée.

**Condition aux limites de la configuration originale — superposition** En conséquence, le résultat de la superposition des conditions aux limites de chacune des droites équivalentes, rectifié par le coefficient  $\frac{1}{2}$ , donne :

$$\begin{aligned}
s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = & -\delta(\vec{y}_b - \vec{y}_{b,D\pi}) \beta_b(\vec{u}_b \cdot \vec{e}_2) \left( L(\vec{y}_b, \vec{\omega}_b, \vec{\pi}) - L^{eq}(T_2) \right) \frac{1}{2} \mathcal{H}(\vec{\omega}_b \cdot \vec{e}_1 > 0) \\
& -\delta(\vec{y}_b - \vec{y}_{b,D\pi}) \beta_b(\vec{u}_b \cdot \vec{e}_2) \left( L(\vec{y}_b, \vec{\omega}_b, \vec{\pi}) - L^{eq}(T_2) \right) H(\vec{\omega}_b \cdot \vec{e}_1 < 0) \\
& -\delta(\vec{y}_v - \vec{y}_{v,H}) \beta_v(\vec{u}_v \cdot \vec{e}_2) \left( L^{eq}(T_3) - L(\vec{y}_v, \vec{\omega}_v, \vec{\pi}) \right) \frac{1}{2} \mathcal{H}(\vec{\omega}_v \cdot \vec{e}_2 < 0) \\
& -\delta(\vec{y}_v - \vec{y}_{v,H}) \beta_v(\vec{u}_v \cdot \vec{e}_2) \left( L^{eq}(T_3) - L(\vec{y}_v, \vec{\omega}_v, \vec{\pi}) \right) H(\vec{\omega}_v \cdot \vec{e}_2 > 0) \\
& + \beta_v(\vec{u}_v \cdot \vec{e}_2) L^{eq}(T_3) \delta(\vec{y}_v - \vec{y}_{v,2H}) \\
& - \beta_h(\vec{u}_h \cdot \vec{e}_1) L^{eq}(T_4) \delta(\vec{y}_h - \vec{y}_{h,D\pi})
\end{aligned} \tag{3.236}$$

Dans l'**Eq. 3.236** les termes dont les distributions de dirac sont centrées en  $\vec{y}_{b,0}$  et  $\vec{y}_{h,E}$  n'apparaissent pas car en ces positions le vecteur de déformation est nul donc la valeur de la condition à la limite sera nulle.

Étant donné que les bornes  $\vec{y}_{v,H}$  et  $\vec{y}_{b,D\pi}$  sont identiques et qu'il en est de même pour les bornes  $\vec{y}_{v,2H}$  et  $\vec{y}_{h,D\pi}$  on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = & +\delta(\vec{y}_v - \vec{y}_{v,2H}) \left( \beta_v(\vec{u}_v \cdot \vec{e}_2) L^{eq}(T_3) - \beta_h(\vec{u}_h \cdot \vec{e}_1) L^{eq}(T_4) \right) \\
& -\delta(\vec{y}_b - \vec{y}_{b,D\pi}) \left( \beta_b(\vec{u}_b \cdot \vec{e}_1) \left( L(\vec{y}_b, \vec{\omega}_b, \vec{\pi}) - L^{eq}(T_2) \right) \frac{1}{2} H(\vec{\omega}_b \cdot \vec{e}_1 > 0) \right. \\
& \quad + \beta_b(\vec{u}_b \cdot \vec{e}_1) \left( L(\vec{y}_b, \vec{\omega}_b, \vec{\pi}) - L^{eq}(T_2) \right) \mathcal{H}(\vec{\omega}_b \cdot \vec{e}_1 < 0) \\
& \quad + \beta_v(\vec{u}_v \cdot \vec{e}_2) \left( L^{eq}(T_3) - L(\vec{y}_v, \vec{\omega}_v, \vec{\pi}) \right) \frac{1}{2} \mathcal{H}(\vec{\omega}_v \cdot \vec{e}_2 < 0) \\
& \quad \left. + \beta_v(\vec{u}_v \cdot \vec{e}_2) \left( L^{eq}(T_3) - L(\vec{y}_v, \vec{\omega}_v, \vec{\pi}) \right) \mathcal{H}(\vec{\omega}_v \cdot \vec{e}_2 > 0) \right)
\end{aligned} \tag{3.237}$$

Dans cette condition à la limite de sensibilité, nous voyons donc deux termes représentant des sources ponctuelles : l'une à l'intersection entre la paroi verticale et la paroi haute (rencontrée dans la première illustration), et l'autre à l'endroit de l'angle rentrant.

En ce point, la condition à la limite de sensibilité fait apparaître la différence entre la luminance d'équilibre de la paroi basse (à  $T_2$ ) et la luminance incidente  $L(\vec{y}_b, \vec{\omega}_b, \vec{\pi})$  ainsi que la différence entre la luminance d'équilibre de la paroi verticale (à  $T_3$ ) et la luminance incidente  $L(\vec{y}_v, \vec{\omega}_v, \vec{\pi})$ .

Nous illustrons ces différences dans la Fig. 3.38 sur laquelle nous avons représenté les distributions angulaires de  $\vec{\omega}_b$  (en rouge) et  $\vec{\omega}_v$  (en bleu).

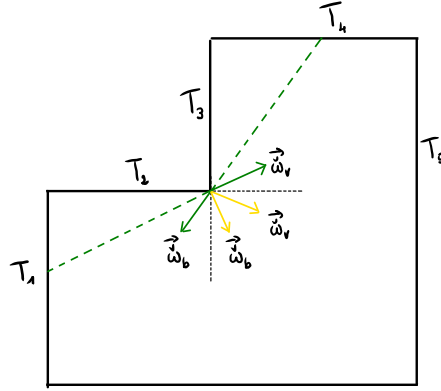


FIGURE 3.38 – Concavité, configuration équivalente

En nous référant à la Fig. 3.38 et sachant que le milieu est transparent, nous pouvons donner la valeur de la luminance incidente en fonction de  $\vec{\omega}$ .

Pour la source de sensibilité liée à la paroi basse de température  $T_2$  :

- Si la direction d'émission  $\vec{\omega}_b$  est dirigée vers la gauche alors la luminance incidente peut prendre la valeur de la luminance d'équilibre aux températures  $T_4$  et  $T_5$ .
- Si la direction d'émission est dirigée vers la droite (vecteur en jaune sur la figure) alors la luminance incidente prendra la valeur de la luminance d'équilibre à la température  $T_3$ .

Pour la source de sensibilité liée à la paroi verticale de température  $T_3$  :

- Si la direction  $\vec{\omega}_v$  est orientée vers le haut, la luminance incidente pourra prendre la valeur de la luminance d'équilibre de la paroi latérale à la température  $T_1$  ou elle pourra prendre la valeur de la luminance d'équilibre du socle à la température  $T = 0K$ .
- Si la direction  $\vec{\omega}_v$  est orientée vers le bas (direction représentée par le vecteur jaune sur la Fig. 3.38) alors la luminance incidente correspondra à la luminance d'équilibre de la paroi basse à la température  $T_2$ .

### 3.6.4.2 Deuxième configuration : avec une paroi diffuse

**Configuration équivalente - superposition des droites** Par rapport à l'exemple précédent, la paroi basse sera maintenant une paroi réfléchissante de type diffuse. Les autres parois gardent les mêmes propriétés radiatives.

**Pour la paroi haute**, la condition à la limite radiative s'écrit, comme précédemment :

$$L(\vec{y}_h, \vec{\omega}_h, \vec{\pi}) = L^{eq}(T_h) \mathcal{H}(\vec{y}_h - \vec{y}_{h,D\vec{\pi}}) \mathcal{H}(\vec{y}_{h,E} - \vec{y}_h) \quad (3.238)$$

**Pour la paroi verticale**, la luminance sortante s'écrit, comme précédemment :

$$L(\vec{y}_v, \vec{\omega}_v, \vec{\pi}) = L^{eq}(T_3) \mathcal{H}(\vec{y}_v - \vec{y}_{v,H}) \mathcal{H}(\vec{y}_{v,2H} - \vec{y}_v) + L(\vec{y}_b, \vec{\omega}_b, \vec{\pi}) \mathcal{H}(\vec{y}_v - \vec{y}_{v,0}) \mathcal{H}(\vec{y}_{v,H} - \vec{y}_v) \quad (3.239)$$

**Pour la paroi basse**, la luminance sortante s'écrit, sur le support géométrique, comme une somme de la luminance émise et de la luminance incidente à la paroi.

Dans la zone équivalente à la facette de la configuration initiale, la paroi est à la température  $T_2$  et le rayonnement incident correspond à la luminance qui sera réfléchie à la paroi. Sur la zone de la droite qui traverse le milieu, la luminance d'équilibre est nulle mais la luminance incidente correspond à la luminance qui traverse la paroi dans la direction  $\vec{\omega}_b$  (dans cette configuration, elle viendra du volume au dessus de la paroi).

$$L(\vec{y}_b, \vec{\omega}_b, \vec{\pi}) = L^{em}(\vec{y}_b, \vec{\omega}_b, \vec{\pi}) + \rho \int_{\mathcal{H}_{incid}} \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}}{2} d\vec{\omega}' L^{inc}(\vec{y}_b, \vec{\omega}'_b, \vec{\pi}) \quad (3.240)$$

avec  $L^{em}$  la luminance émise par la paroi :

$$L^{em}(\vec{y}_b, \vec{\omega}_b, \vec{\pi}) = \varepsilon \left( L^{eq}(T_b) \mathcal{H}(\vec{y}_b - \vec{y}_{b,0}) \mathcal{H}(\vec{y}_{b,D\vec{\pi}} - \vec{y}_b) + 0 \mathcal{H}(\vec{y}_{b,0} - \vec{y}_b) \mathcal{H}(\vec{y}_b - \vec{y}_{h,D\vec{\pi}}) \right) \quad (3.241)$$

La luminance incidente  $L^{inc}$  est définie telle que :

$$L^{inc}(\vec{y}_b, \vec{\omega}'_b, \vec{\pi}) = L(\vec{y}_b, \vec{\omega}'_b, \vec{\pi}) \mathcal{H}(\vec{y}_b - \vec{y}_{b,0}) \mathcal{H}(\vec{y}_{b,D\vec{\pi}} - \vec{y}_b) + L(\vec{y}_b, \vec{\omega}_b, \vec{\pi}) \mathcal{H}(\vec{y}_b - \vec{y}_{b,D\vec{\pi}}) \mathcal{H}(\vec{y}_{b,E} - \vec{y}_b) \quad (3.242)$$

Pour la luminance incidente donc :

- à gauche de la facette, elle est nulle
- sur la zone de la facette, elle est égale à la luminance incidente qui sera réfléchie
- sur la partie qui traverse le milieu, elle est égale à la luminance incidente du volume supérieur
- à droite du volume, elle est nulle.

**Conditions aux limites de sensibilité des droites** La configuration géométrique étant strictement identique, nous donnons directement les conditions aux limites et le résultat.

**Pour la paroi haute**, la condition à la limite est :

$$s_h(\vec{y}_h, \vec{\omega}_h, \vec{\pi}) = -\beta_h L^{eq}(T_4) (\vec{u}_h \cdot \vec{e}_1) \delta(\vec{y}_h - \vec{y}_{h,D\vec{\pi}}) \quad (3.243)$$

**Pour la paroi verticale**, la condition à la limite est :

$$s_v(\vec{y}_v, \vec{\omega}_v, \vec{\pi}) = -\beta_v \left( L^{eq}(T_3) - L(\vec{y}_v, \vec{\omega}_v, \vec{\pi}) \right) (\vec{u}_v \cdot \vec{e}_2) \delta(\vec{y}_v - \vec{y}_{v,H}) + \beta_v L^{eq}(T_3) (\vec{u}_v \cdot \vec{e}_2) \delta(\vec{y}_v - \vec{y}_{v,2H}) \quad (3.244)$$

**Pour la paroi basse**, rappelons d'abord l'expression générale de la condition à la limite de sensibilité qui s'applique à la paroi réfléchissante diffuse dans notre exemple de déformation géométrique (étirement sans rotation) :

$$s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = -\beta \partial_{1, \vec{u}_d} L^{em}(\vec{y}_d, \vec{\omega}_d, \vec{\pi}) - \beta \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' \vec{\partial}_1 L^{inc}(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \cdot \vec{u} + \beta' \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' \vec{\partial}_1 L^{inc}(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \cdot \vec{u}' + \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' s(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \quad (3.245)$$



La condition à la limite est donc :

$$\begin{aligned}
s_b(\vec{y}_b, \vec{\omega}_b, \vec{\pi}) = & \delta \left( \vec{y} - \vec{y}_{b,D\#} \right) \left( \beta_b \varepsilon L^{eq}(T_b)(\vec{u}_b \cdot \vec{e}_1) \right. \\
& - \beta_b \rho \int_{\mathcal{H}_{incid}} \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}}{2} d\vec{\omega}' (L(\vec{y}_b, \vec{\omega}_b, \vec{\pi}) - L(\vec{y}_b, \vec{\omega}'_b, \vec{\pi})) (\vec{u}_b \cdot \vec{e}_1) \\
& \left. + \beta'_b \rho \int_{\mathcal{H}_{incid}} \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}}{2} d\vec{\omega}' (L(\vec{y}_b, \vec{\omega}_b, \vec{\pi}) - L(\vec{y}_b, \vec{\omega}'_b, \vec{\pi})) (\vec{u}'_b \cdot \vec{e}_1) \right) \quad (3.246) \\
& + \mathcal{H}(\vec{y}_b - \vec{y}_{b,D(\vec{\pi})}) \mathcal{H}(\vec{y}_{b,0} - \vec{y}_b) \rho \int_{\mathcal{H}_{incid}} \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}}{2} d\vec{\omega}' \times \\
& \left( \beta'_b \vec{\partial}_1 L(\vec{y}_b, \vec{\omega}'_b, \vec{\pi}) \cdot \vec{u}' - \beta_b \vec{\partial}_1 L(\vec{y}_b, \vec{\omega}'_b, \vec{\pi}) \cdot \vec{u} + s(\vec{y}_b, \vec{\omega}'_b, \vec{\pi}) \right)
\end{aligned}$$

**Condition aux limites de la configuration originale - superposition** Exactement de la même manière que dans l'exemple précédent, la superposition des conditions aux limites de la paroi verticale et de la paroi basse au niveau de l'angle rentrant va construire une double contribution de cette source de sensibilité. Nous pondérons donc par  $\frac{1}{2}$  les contributions concernées et nous trouvons le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
s_b(\vec{y}_b, \vec{\omega}_b, \vec{\pi}) = & \delta \left( \vec{y} - \vec{y}_{b,D\#} \right) \frac{1}{2} \mathcal{H}(\vec{\omega}_b \cdot \vec{e}_1 > 0) \mathcal{H}(\vec{\omega}_v \cdot \vec{e}_2 < 0) \left( \beta_b \varepsilon L^{eq}(T_b)(\vec{u} \cdot \vec{e}_1) \right. \\
& - \beta_b \rho \int_{\mathcal{H}_{incid}} \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}}{2} d\vec{\omega}' (L(\vec{y}_b, \vec{\omega}_b, \vec{\pi}) - L(\vec{y}_b, \vec{\omega}'_b, \vec{\pi})) (\vec{u}_b \cdot \vec{e}_1) \\
& + \beta'_b \rho \int_{\mathcal{H}_{incid}} \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}}{2} d\vec{\omega}' (L(\vec{y}_b, \vec{\omega}_b, \vec{\pi}) - L(\vec{y}_b, \vec{\omega}'_b, \vec{\pi})) (\vec{u}'_b \cdot \vec{e}_1) \\
& \left. - \beta_v \left( L^{eq}(T_3) - L(\vec{y}_v, \vec{\omega}_v, \vec{\pi}) \right) (\vec{u}'_b \cdot \vec{e}_1) \right) \\
& + \delta \left( \vec{y} - \vec{y}_{b,D\#} \right) \mathcal{H}(\vec{\omega}_b \cdot \vec{e}_1 < 0) \mathcal{H}(\vec{\omega}_v \cdot \vec{e}_2 > 0) \left( \beta_b \varepsilon L^{eq}(T_b)(\vec{u} \cdot \vec{e}_1) \right. \\
& - \beta_b \rho \int_{\mathcal{H}_{incid}} \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}}{2} d\vec{\omega}' (L(\vec{y}_b, \vec{\omega}_b, \vec{\pi}) - L(\vec{y}_b, \vec{\omega}'_b, \vec{\pi})) (\vec{u}_b \cdot \vec{e}_1) \quad (3.247) \\
& + \beta'_b \rho \int_{\mathcal{H}_{incid}} \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}}{2} d\vec{\omega}' (L(\vec{y}_b, \vec{\omega}_b, \vec{\pi}) - L(\vec{y}_b, \vec{\omega}'_b, \vec{\pi})) (\vec{u}'_b \cdot \vec{e}_1) \\
& \left. - \beta_v \left( L^{eq}(T_3) - L(\vec{y}_v, \vec{\omega}_v, \vec{\pi}) \right) (\vec{u}'_b \cdot \vec{e}_1) \right) \\
& + \delta \left( \vec{y}_v - \vec{y}_{v,2H} \right) \left( \beta_v L^{eq}(T_3)(\vec{u}_v \cdot \vec{e}_2) - \beta_h(\vec{u}_h \cdot \vec{e}_1) L^{eq}(T_4) \right) \\
& + \mathcal{H}(\vec{y}_b - \vec{y}_{b,D(\vec{\pi})}) \mathcal{H}(\vec{y}_{b,0} - \vec{y}_b) \rho \int_{\mathcal{H}_{incid}} \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{n}}{2} d\vec{\omega}' \times \\
& \left( \beta'_b \vec{\partial}_1 L(\vec{y}_b, \vec{\omega}'_b, \vec{\pi}) \cdot \vec{u}' - \beta_b \vec{\partial}_1 L(\vec{y}_b, \vec{\omega}'_b, \vec{\pi}) \cdot \vec{u} + s(\vec{y}_b, \vec{\omega}'_b, \vec{\pi}) \right)
\end{aligned}$$

### 3.7 Détails théoriques

La démonstration de la forme générale de la condition à la limite de sensibilité qui est décrite en [Sec. 3.3.1.4](#) est détaillée entièrement dans cette partie.

Elle part de l'égalité entre la luminance sortant du support géométrique et la luminance sortant du support matériel.

#### 3.7.0.1 Égalité de la luminance et la luminance matérielle

$$L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = I(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \quad (3.248)$$

#### 3.7.0.2 Dérivation de la condition à la limite de luminance

$$\partial_{\vec{\pi}} \left( L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \right) = \partial_{\vec{\pi}} I(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \quad (3.249)$$

$$\vec{\partial}_1 L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \cdot \vec{v}_\chi + \gamma \partial_{\vec{\mathcal{R}}} L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) + s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = \partial_{\vec{\pi}} I(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \quad (3.250)$$

Décomposition du vecteur de déformation et de la dérivée  $\vec{\partial}_1 L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \cdot \vec{v}_\chi$

$$\vec{v}_\chi = \alpha \vec{\omega} + \beta \vec{u} \quad (3.251)$$

$$\vec{\partial}_1 L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \cdot \vec{v}_\chi = \alpha \vec{\partial}_1 L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \cdot \vec{\omega} + \beta \vec{\partial}_1 L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \cdot \vec{u} \quad (3.252)$$

Transport de la luminance  $\vec{\partial}_1 L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \cdot \vec{\omega}$

$$\vec{\partial}_1 L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \cdot \vec{\omega} = -(k_a + k_d) L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) + \int_{\Omega'} p(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}) d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \quad (3.253)$$

$$\vec{\partial}_1 L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \cdot \vec{\omega} = \mathcal{G} \left[ L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \right] \quad (3.254)$$

$$\alpha \mathcal{G} \left[ L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \right] + \beta \vec{\partial}_1 L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \cdot \vec{u} + \gamma \partial_{\vec{\mathcal{R}}} L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) + s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = \partial_{\vec{\pi}} I(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \quad (3.255)$$

$$\text{Notation : } \vec{\partial}_1 L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \cdot \vec{u} = \vec{\partial}_{1, \vec{u}} L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \quad (3.256)$$

$$\alpha \mathcal{G} \left[ L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \right] + \beta \vec{\partial}_{1, \vec{u}} L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) + \gamma \partial_{\vec{\mathcal{R}}} L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) + s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = \partial_{\vec{\pi}} I(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \quad (3.257)$$

#### 3.7.0.3 La luminance sortant de la paroi dans l'espace géométrique

Luminance sortante

$$L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = L^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) + \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\mathcal{H}_{incid}} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | \vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \quad (3.258)$$

Dérivée surfacique de la luminance sortante

$$\begin{aligned}
\vec{\partial}_{1,\vec{u}} \left( L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \right) &= \vec{\partial}_{1,\vec{u}} \left( L^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) + \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\mathcal{H}_{incid}} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}'|\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \right) \\
&= \vec{\partial}_{1,\vec{u}} L^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \\
&\quad + \vec{\partial}_{1,\vec{u}} \left( \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \right) \int_{\mathcal{H}_{incid}} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}'|\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\
&\quad + \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\mathcal{H}_{incid}} \vec{\partial}_{1,\vec{u}} \left( p_{\Omega'}(-\vec{\omega}'|\vec{\omega}, \vec{y}) \right) d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\
&\quad + \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\mathcal{H}_{incid}} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}'|\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' \vec{\partial}_{1,\vec{u}} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi})
\end{aligned} \tag{3.259}$$

Dérivée angulaire de la luminance sortante

$$\begin{aligned}
\vec{\partial}_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} \left( L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \right) &= \vec{\partial}_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} \left( L^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) + \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\mathcal{H}_{incid}} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}'|\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \right) \\
&= \vec{\partial}_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \\
&\quad + \vec{\partial}_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} \left( \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \right) \int_{\mathcal{H}_{incid}} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}'|\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\
&\quad + \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \vec{\partial}_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} \left( \int_{\mathcal{H}_{incid}} \left( p_{\Omega'}(-\vec{\omega}'|\vec{\omega}, \vec{y}) \right) d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \right)
\end{aligned} \tag{3.260}$$

#### 3.7.0.4 La luminance matérielle sortant de la paroi dans l'espace matériel

$$I(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) + \rho \int_{\mathcal{H}_{incid}} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}'|\vec{\omega}) d\vec{\omega}' I(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \tag{3.261}$$

La luminance incidente à la paroi dans le support matériel  $I(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi})$

$$I(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) = L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \tag{3.262}$$

$$\partial_{\vec{\pi}} I(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) = \partial_{\vec{\pi}} \left( L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \right) \tag{3.263}$$

La dérivée par rapport à  $\vec{\pi}$  de la luminance incidente

$$\partial_{\vec{\pi}} \left( L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \right) = \vec{\partial}_1 L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \cdot \vec{v}_\chi + \gamma \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) + s(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \tag{3.264}$$

$$\vec{v}_\chi = \alpha' \vec{\omega}' + \beta' \vec{u}' \tag{3.265}$$

$$\partial_{\vec{\pi}} \left( L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \right) = \alpha' \vec{\partial}_1 L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \cdot \vec{\omega}' + \beta' \vec{\partial}_1 L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \cdot \vec{u}' + \gamma \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) + s(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \tag{3.266}$$

Dérivation de la luminance matérielle sortante de la paroi

$$\begin{aligned}
\partial_{\vec{\pi}} I(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) &= \partial_{\vec{\pi}} \left( L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \right) \\
&= \partial_{\vec{\pi}} \left( I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) + \rho \int_{\mathcal{H}_{incid}} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}'|\vec{\omega}) d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \right) \\
&= \partial_{\vec{\pi}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) + \rho \int_{\mathcal{H}_{incid}} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}'|\vec{\omega}) d\vec{\omega}' \partial_{\vec{\pi}} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\
&= \partial_{\vec{\pi}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) + \rho \int_{\mathcal{H}_{incid}} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}'|\vec{\omega}) d\vec{\omega}' \times \\
&\quad \left( \alpha' \mathcal{G} \left[ L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \right] + \beta' \partial_{1, \vec{u}'} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) + \gamma \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) + s(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \right)
\end{aligned} \tag{3.267}$$

### 3.7.0.5 La sensibilité géométrique sortant de la paroi

$$\partial_{\vec{\pi}} \left( L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \right) = \partial_{\vec{\pi}} I(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \tag{3.268}$$

$$\alpha \mathcal{G} \left[ L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \right] + \beta \vec{\partial}_{1, \vec{u}} L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) + \gamma \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) + s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = \partial_{\vec{\pi}} I(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \tag{3.269}$$

$$s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = \partial_{\vec{\pi}} I(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) - \left( \alpha \mathcal{G} \left[ L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \right] + \beta \vec{\partial}_{1, \vec{u}} L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) + \gamma \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \right) \tag{3.270}$$

$$\text{Équivalence des supports} : \vec{\partial}_{1, \vec{u}} L^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = \|\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \tag{3.271}$$

Condition à la limite

$$\begin{aligned}
s(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) &= -\alpha \mathcal{G} \left[ L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \right] \\
&\quad - \beta \|\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \\
&\quad - \beta \|\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}'|-\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\
&\quad - \beta \|\partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} \mathcal{Z}_{\vec{\pi}}^{-1}(\vec{y})\| \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} \partial_{\mathcal{D}}^{\vec{u}} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}'|-\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\
&\quad - \beta \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}'|-\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' \partial_{1, \vec{u}'} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\
&\quad - \gamma \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \\
&\quad - \gamma \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}'|-\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\
&\quad - \gamma \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} \left( \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}'|-\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \right) \\
&\quad + \partial_{\vec{\pi}} I^{em}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \\
&\quad - \alpha' \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}'|-\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' \mathcal{G} \left[ L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \right] \\
&\quad + \beta' \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}'|-\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' \partial_{1, \vec{u}'} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\
&\quad + \gamma \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}'|-\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\
&\quad + \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}'|-\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' s(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi})
\end{aligned} \tag{3.272}$$

# CHAPITRE 4

## Mise en oeuvre algorithmique

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>161</b>
4.1.0.1	Espaces de chemins	161
4.1.0.2	Les exemples	162
4.1.0.3	La méthode de validation	162
<b>4.2</b>	<b>Espaces de chemins d'un problème de sensibilité géométrique</b>	<b>166</b>
4.2.1	L'espace de chemin de la sensibilité	166
4.2.1.1	Le modèle	166
4.2.1.2	L'espace de chemins	167
4.2.2	L'espace de chemins de la dérivée spatiale	169
4.2.2.1	Le modèle	170
4.2.2.2	L'espace de chemins	171
4.2.3	L'espace de chemins de la dérivée angulaire	172
4.2.3.1	Le modèle	172
4.2.3.2	L'espace de chemins	173
<b>4.3</b>	<b>Couplages</b>	<b>176</b>
4.3.1	Espaces de chemins sans branchements	177
4.3.1.1	Conditions pour qu'il n'y ait aucun branchement	177
4.3.1.2	Illustrations générales	177
4.3.2	Espaces de chemins avec branchements uniquement en surface	178
4.3.2.1	Conditions pour qu'il n'y ait que des branchements aux frontières	178
4.3.2.2	Illustrations générales	179
4.3.3	Espace de chemins avec branchements en surface et dans le milieu	186
4.3.3.1	Conditions pour qu'il y ait des branchements dans le milieu et aux frontières	186
4.3.3.2	Les branchements des chemins de la dérivée spatiale	186
4.3.3.3	Les branchements des chemins de la dérivée angulaire	187
<b>4.4</b>	<b>Mises en oeuvre</b>	<b>188</b>
4.4.1	Exemple 1	191
4.4.1.1	La configuration géométrique et radiative	191
4.4.1.2	L'observable	191
4.4.1.3	La sensibilité	194
4.4.1.4	Éléments de géométrie	194
4.4.1.5	Espace de chemins de la sensibilité	195
4.4.1.6	Algorithme	196
4.4.1.7	Résultat	197
4.4.2	Exemple 2	198
4.4.2.1	La configuration géométrique et radiative	198

4.4.2.2	L'observable . . . . .	198
4.4.2.3	La sensibilité . . . . .	198
4.4.2.4	Éléments de géométrie . . . . .	200
4.4.2.5	Espace de chemins de la sensibilité . . . . .	200
4.4.2.6	Algorithme . . . . .	202
4.4.2.7	Résultat . . . . .	204
4.4.3	Exemple 3 . . . . .	205
4.4.3.1	La configuration géométrique . . . . .	205
4.4.3.2	L'observable et la sensibilité . . . . .	205
4.4.3.3	Éléments de géométrie . . . . .	205
4.4.3.4	Espace de chemins de la sensibilité . . . . .	207
4.4.3.5	Algorithme . . . . .	207
4.4.3.6	Résultat . . . . .	208
4.4.4	Exemple 4 . . . . .	209
4.4.4.1	La configuration géométrique et radiative . . . . .	209
4.4.4.2	L'observable et la sensibilité . . . . .	209
4.4.4.3	Éléments de géométrie . . . . .	209
4.4.4.4	Espace de chemins de la sensibilité . . . . .	209
4.4.4.5	Algorithme . . . . .	211
4.4.4.6	Résultat . . . . .	212
4.4.5	Exemple 5 . . . . .	213
4.4.5.1	La configuration géométrique . . . . .	213
4.4.5.2	L'observable . . . . .	213
4.4.5.3	La sensibilité . . . . .	213
4.4.5.4	Éléments de géométrie . . . . .	216
4.4.5.5	Espace de chemins de la sensibilité . . . . .	218
4.4.5.6	Algorithme . . . . .	218
4.4.5.7	Résultat . . . . .	220
4.4.6	Exemple 6 . . . . .	222
4.4.6.1	La configuration géométrique et radiative . . . . .	222
4.4.6.2	L'observable . . . . .	222
4.4.6.3	La sensibilité . . . . .	222
4.4.6.4	Éléments de géométrie . . . . .	224
4.4.6.5	Espace de chemins de la sensibilité . . . . .	224
4.4.6.6	Algorithme . . . . .	225
4.4.6.7	Résultat . . . . .	227
4.4.7	Exemple 7 . . . . .	228
4.4.7.1	La configuration géométrique . . . . .	228
4.4.7.2	L'observable . . . . .	228
4.4.7.3	La sensibilité . . . . .	230
4.4.7.4	Espace de chemin de la sensibilité . . . . .	231
4.4.7.5	Résultat . . . . .	232
4.4.8	Exemple 8 . . . . .	233
4.4.8.1	La configuration géométrique . . . . .	233
4.4.8.2	L'observable . . . . .	233
4.4.8.3	Résultat . . . . .	236
<b>4.5</b>	<b>Commentaire sur les résultats des 8 exemples . . . . .</b>	<b>237</b>

## 4.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à la résolution du modèle de la sensibilité géométrique par la méthode de Monte-Carlo. Nous avons vu dans le chapitre précédent que la sensibilité géométrique se comporte comme la luminance dans le milieu et à la frontière, son équation de transport est une équation de transfert radiatif et elle est absorbée ou réfléchié selon les propriétés de parois. En revanche les sources de sensibilité géométrique sont particulières, nous avons établi qu'en toute généralité elles dépendent de la dérivée spatiale, de la dérivée angulaire et de la luminance. En conséquence le modèle de sensibilité est couplé avec les modèles de ces différentes grandeurs et, pour résoudre un problème de sensibilité, il est nécessaire de résoudre un système d'équations couplées. Nous avons vu dans le chapitre précédent que les différentes grandeurs de ce système sont couplées à la frontière, à travers les conditions aux limites, et dans le milieu, à travers les équations d'évolution. Par exemple le modèle de sensibilité est couplé, à la frontière, avec le modèle de dérivée spatiale qui est lui même couplé, dans le milieu, avec la luminance et, à la frontière, avec la luminance et une seconde dérivée spatiale. La technique de la double randomisation, que nous avons introduite dans le [Chap. 1](#), nous donne la possibilité de résoudre de tels systèmes couplés par Monte-Carlo et nous verrons par la suite que les espaces de chemins qui en résultent comprennent à la fois les chemins de la grandeur observée et à la fois ceux des grandeurs avec lesquelles elle est couplée.

### 4.1.0.1 Espaces de chemins

En transferts radiatifs l'utilisation de la méthode de Monte-Carlo repose sur la réalisation de chemins radiatifs issus de la modélisation du transport de photons (e.g. modélisé par l'ETR). L'acte algorithmique consiste alors à reproduire numériquement les phénomènes de transport au sein d'une géométrie virtuelle étant donné les propriétés radiatives du milieu et des frontières. Les chemins radiatifs simulés visitent les sources volumiques et surfaciques de la géométrie et tout le long de ces chemins ces sources sont comptabilisées. Selon leurs parcours dans la géométrie (rencontre fréquente de la frontière si elle est réfléchissante, nombreuses diffusions dans le milieu, etc.), chacun des chemins apporte une contribution radiative différente à l'estimation de l'observable.

La pratique statistique des espaces de chemins de la luminance repose sur l'interprétation du chemin radiatif en tant que variable aléatoire. Dans cette vision l'espace de chemin devient le domaine de définition de la variable aléatoire "chemin" et la densité de probabilité associée au chemin est modélisée par les lois de la physique du transport (Beer-Lambert, fonction de phase, etc.). Nous verrons que pour la sensibilité nous pouvons agir exactement de la même manière, en toute généralité il existe un espace de chemin de la sensibilité et, grâce à la double randomisation, nous pouvons identifier une variable aléatoire "chemin de sensibilité". La méthode de Monte-Carlo appliquée au problème de sensibilité consistera alors à réaliser un grand nombre de cette variable aléatoire et à effectuer une moyenne du poids de Monte-Carlo qui lui est associée. Nous verrons tout au long de ce chapitre comment s'identifient et se construisent les poids de Monte-Carlo de la sensibilité étant donné les différents couplages et les types de chemins engendrés.

Du fait des nombreux couplages et de la grande diversité d'espace de chemins qui en résulte il est ardu d'attaquer de front l'ensemble des espaces de chemins que nous rencontrerons face à des problèmes de sensibilité géométrique. L'objectif de cette partie est alors de proposer une classification des espaces de chemins que nous pourrions rencontrer dans un problème de sensibilité. D'un point de vue méthodologique cette classification nous informe sur le type d'algorithme à employer face à un problème de sensibilité donné. D'un point de vue théorique elle permettra de mieux appréhender les interactions entre les différentes quantités qui interviennent dans ces problèmes et d'en maîtriser la manipulation à travers les espaces de chemins.

Nous avons donc structuré ce chapitre en trois parties, la première consiste à étudier séparément les espaces de chemins de la sensibilité géométrique, de la dérivée spatiale et de la dérivée angulaire, comme si ces grandeurs n'étaient pas couplées entre elles. Cette séparation entre les modèles, disons

ce découplage, permettra d'étudier les espaces de chemins de façon indépendante et ainsi d'accéder à la même liberté d'analyse des chemins que nous avons pour la luminance.

La deuxième partie consiste à reconstruire l'espace de chemin du problème de sensibilité en rétablissant les couplages entre chaque quantité, cela impliquera de réunir les espaces de chemins de la sensibilité, de la dérivée spatiale et de la dérivée angulaire aux endroits des couplages à partir des sources volumiques ou surfaciques. Nous basculerons à ce moment là vers une lecture statistique des espaces de chemins et nous les classerons en trois familles en fonction des différents lieux de couplages (à la frontière et dans le volume).

La troisième partie consiste à la mise en oeuvre de la méthode de Monte-Carlo sur 8 exemples différents, pour chacun des exemples nous donnerons la formulation intégrale en espérance de la sensibilité, le poids de Monte-Carlo en détail, l'algorithme utilisé pour estimer l'espérance et les résultats.

#### 4.1.0.2 Les exemples

Dans ce chapitre les exemples utilisés auront deux statuts différents, certains d'entre eux serviront à illustrer de façon très générale les espaces de chemins que nous introduirons. Pour ces exemples les géométries utilisées seront quelconques et les propriétés de parois et du milieu seront spécifiées sur le moment. La deuxième catégorie d'exemples sera principalement constituée des configurations géométriques  $2D$ , ainsi que leur équivalent en  $3D$ , que nous avons étudiés dans le chapitre précédent. Ces exemples seront utilisés pour la mise en oeuvre algorithmique complète des problèmes de sensibilité. L'objectif de cette série d'exemples sera simplement de valider la proposition de modélisation théorique du chapitre précédent et de montrer une première utilisation des espaces de chemins de la sensibilité.

#### 4.1.0.3 La méthode de validation

Les résultats que nous présenterons contiendront l'observable et la sensibilité pour plusieurs valeurs de référence du paramètre  $\bar{\pi}$ . Afin de valider les résultats obtenus pour la sensibilité, nous appliquerons la méthode des différences finies sur les estimations de l'observable par Monte-Carlo. Cette méthode de validation pose de gros problèmes, en effet une estimation de l'observable est toujours accompagnée de l'erreur statistique associée et lors de la différenciation nous devons alors prendre en compte l'écart entre deux valeurs de l'observable mais également l'erreur statistique de cet écart. L'erreur statistique de la différence finie correspond à la somme des erreurs statistiques des deux observables différenciées.

**Exemple :** Nous affichons dans la [Fig. 4.1](#) trois résultats correspondants aux valeurs de l'observable :  $\mathcal{O}(\bar{\pi} = 0)$ ,  $\mathcal{O}(\bar{\pi} = 0.3)$  et  $\mathcal{O}(\bar{\pi} = 0.6)$ . Afin d'obtenir une approximation de la sensibilité  $\partial_{\bar{\pi}}\mathcal{O}(\bar{\pi} = 0.3)$  nous réalisons une différence finie centrée entre les grandeurs de l'observable en  $\bar{\pi} = 0$  et  $\bar{\pi} = 0.6$  pour un  $\delta\bar{\pi} = 0.3$ , c'est à dire :

$$\partial_{\bar{\pi}}\mathcal{O}(\bar{\pi} = 0.3) \approx \frac{\mathcal{O}(\bar{\pi} = 0.6) - \mathcal{O}(\bar{\pi} = 0)}{2\delta\bar{\pi}} \quad (4.1)$$

Lorsque nous estimons ces observables par Monte-Carlo nous établissons que :

$$\mathcal{O}(\bar{\pi} = 0.3) = \mathbb{E}(f(\Gamma, \bar{\pi})) = \bar{f}(\Gamma, \bar{\pi}) \pm s(\bar{f}(\Gamma, \bar{\pi})) \quad (4.2)$$

Avec la variable aléatoire  $\Gamma$ ,  $\bar{f}$  la moyenne d'un grand nombre de réalisations de  $f$  et  $s$  une estimation de l'écart type de  $\bar{f}$ . Le graphe de gauche de la [Fig. 4.1](#) montre les trois estimations de l'observable, chacune entourée de son erreur statistique. Appliquons la différence finie centrée à  $\bar{f}$  :

$$\partial_{\bar{\pi}}\bar{f}(\Gamma, \bar{\pi} = 0.3) \approx \frac{\bar{f}(\Gamma, \bar{\pi} = 0.6) - \bar{f}(\Gamma, \bar{\pi} = 0)}{2\delta\bar{\pi}} \quad (4.3)$$



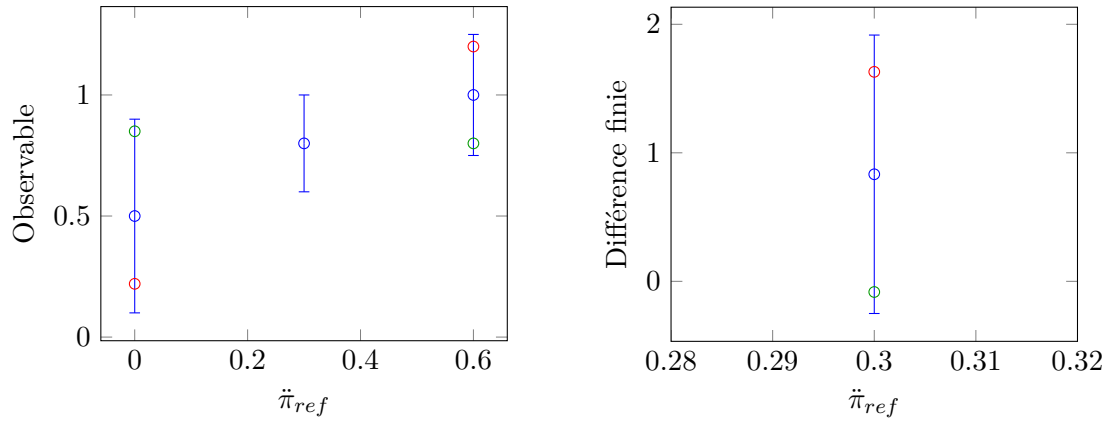


FIGURE 4.1 – Exemple de résultats, observable à gauche et différence finie centrée à droite

La valeur de ce résultat est reporté, par le rond bleu, sur le graphe de droite de la Fig. 4.1. Maintenant prenons deux valeurs possibles de l'observable qui sont comprises dans la barre d'erreur (ronds rouges et verts sur le graphe de gauche), si nous appliquons une différence finie à chacune de ces valeurs (une sur les valeurs des ronds rouges et une sur les valeurs des ronds verts) nous retrouverons les résultats reportés sur le graphe de droite. L'erreur statistique qui englobe les résultats **possibles** des différences finies, représentés par le rond rouge et le rond vert, est déterminée par la somme des barres d'erreur des observables différenciées :

$$s(\partial_{\bar{\pi}} \bar{f}(\Gamma, \bar{\pi} = 0.3)) \approx \frac{s(\bar{f}(\Gamma, \bar{\pi} = 0.6)) + s(\bar{f}(\Gamma, \bar{\pi} = 0))}{2\delta\bar{\pi}} \quad (4.4)$$

elle est représentée comme la barre d'erreur de la différence finie du graphe de gauche sur la Fig. 4.1. De ces résultats et de l'Eq. 4.3 découle la conclusion logique que, pour une erreur statistique donnée de l'observable, plus le  $\delta\bar{\pi}$  va diminuer plus l'erreur statistique de la différence finie va augmenter. Ainsi plus nous essaierons d'approcher la dérivée en diminuant le pas des différences finies moins notre résultat sur la dérivée aura de sens puisque son erreur statistique ne cessera d'augmenter.

Lors de la validation des sensibilités, obtenues à partir du modèle de sensibilité, nous avons donc dû accepter un compromis entre la pertinence des différences finies par Monte-Carlo et la précision de notre validation. Nous retrouverons l'impact de ce compromis dans les résultats que nous présentons pour chacune des configurations suivantes.



## Espaces de chemins

## 4.2 Espaces de chemins d'un problème de sensibilité géométrique

Dans cette partie nous étudions les espaces de chemins des principales grandeurs d'un problème de sensibilité géométrique (sensibilité, dérivée spatiale, dérivée angulaire). Ces grandeurs étant naturellement couplées les unes avec les autres à travers leurs sources nous forçons leur indépendance en supposant toutes les sources surfaciques et volumiques connues. Les modèles que nous obtenons sont donc tous indépendants et nous pouvons en déduire les espaces de chemins qui leurs sont propres. Nous verrons que tous n'ont pas le même comportement dans le milieu et à la frontière et nous les illustrerons avec le plus de généralité possible.

Le positionnement intermédiaire que nous observons dans cette partie est indispensable pour appréhender les espaces de chemins d'un problème de sensibilité, en effet ils seront toujours issus d'une composition des espaces de chemins des grandeurs que nous décrivons dans les trois sections suivantes.

**Les illustrations** Les illustrations que nous réalisons sur les espaces de chemins ne représentent qu'un chemin parmi tous ceux de l'espace des possibles. Nous avons accès à plusieurs choix arbitraires de représentation des chemins, dans toute cette partie nous suivrons uniquement des chemins de diffusion et considérerons que la quantité propagée sera absorbée exponentiellement sur toute la longueur du chemin (lorsque le milieu est absorbant). Ce choix est motivé par la clarté d'illustration des chemins de diffusion mais surtout par l'efficacité de cette pratique lors de la mise en oeuvre algorithmique des problèmes couplés que nous rencontrerons dans les exemples de la partie suivante. Dans le même esprit nous considérerons les sources volumiques comme des quantités accumulées le long des chemins.

### 4.2.1 L'espace de chemin de la sensibilité

L'objectif de cette partie est de présenter l'espace des chemins de la grandeur sensibilité géométrique. Cet espace de chemin est issu du transport de la sensibilité dans le milieu, de son comportement à la frontière et de ses sources présentes dans le domaine. Dans le cas de la sensibilité nous avons vu dans le chapitre précédent que les sources étaient situées uniquement aux frontières du domaine, en conséquence nous regrouperons l'intégralité des sources dans une fonction  $\xi$  dont nous supposerons la valeur connue en tout point de la frontière. Bien sûr nous savons, depuis le chapitre précédent, que les sources de sensibilité ne sont pas les mêmes selon les propriétés de parois, la fonction  $\xi$  qui regroupe les sources de sensibilité qui sont émises par une paroi réfléchissante sera nommée  $\xi_r$ , celles qui sont émises par une paroi noire sera nommée  $\xi_n$  et enfin, dans le cas de sources ponctuelles liées au discontinuités, la fonction  $\xi$  sera nommée  $\xi_p$ .

#### 4.2.1.1 Le modèle

Le modèle de sensibilité est identique à une équation de transfert radiatif dans le milieu et, en supposant les sources de sensibilité connues aux frontières, il est également très similaire aux conditions aux limites en luminance. En effet les sources  $\xi_n$  et  $\xi_r$  peuvent être considérées comme des émissions de sensibilité par la paroi et être assimilées à la partie émise de la condition à la limite de la luminance pour une paroi noire ou réfléchissante. Ces deux sources correspondent donc à l'émission des parois.

**Dans le milieu**

$$\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} s(\vec{x}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = -k_a(\vec{x})s(\vec{x}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) - k_d(\vec{x})s(\vec{x}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) + k_d(\vec{x}) \int_{\Omega} p_{\Omega}(\vec{\omega}' | \vec{\omega}) d\vec{\omega}' s(\vec{x}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \quad (4.5)$$

Nous retrouvons l'équation de transfert radiatif en milieu froid qui décrit le transport de la sensibilité géométrique dans le milieu.

### À la limite - paroi réfléchissante

$$s_r(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = \xi_r + \xi_p + \rho(\vec{y}, -\vec{\omega}) \int_{\Omega} p_{\Omega'}(-\vec{\omega}' | -\vec{\omega}, \vec{y}) d\vec{\omega}' s(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \quad (4.6)$$

Pour les parois réfléchissantes nous distinguons bien le terme d'émission de sensibilité à la paroi, qui contient les sources  $\xi_r$  et  $\xi_p$  connues, du terme de réflexion de la sensibilité à la paroi. Si nous devons faire un parallèle avec la luminance, les sources  $\xi_r$  et  $\xi_p$  correspondraient à la partie  $\varepsilon L^{eq}(T)$  de la condition à la limite de la luminance sur une paroi réfléchissante. Nous parlons donc bien ici d'une émission de sensibilité par la paroi, en terme d'espace de chemin nous allons voir que l'équivalence avec la luminance est stricte.

En toute généralité la source  $\xi_r$  contient tous les termes de la condition à la limite de sensibilité (à l'exception de la réflexion de la sensibilité qui est mise en avant ici). La source  $\xi_p$  en revanche est une source qui ne dépend que de la luminance d'équilibre de la paroi.

### À la limite - paroi noire

$$s_n(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = \xi_n + \xi_p \quad (4.7)$$

Pour les parois noires nous n'avons que les termes d'émission de sensibilité et pas de terme de réflexion, la sensibilité incidente est donc absorbée par les parois noires, exactement comme la luminance. Ici les sources  $\xi_n$  et  $\xi_p$  s'apparentent bien à l'émission de sensibilité à la paroi, pour la luminance cela représenterait l'équivalent de la luminance d'équilibre.

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la source de sensibilité d'une paroi noire (ici  $\xi_n$ ) dépendait principalement de la dérivée surfacique de la luminance d'équilibre (voir [Sec. 3.3.2.1](#)).

Pour les deux types de parois les sources ponctuelles liées aux discontinuités s'écrivent :

$$\xi_p \equiv \sum_i \xi_{p,i} \delta(\vec{y} - \vec{p}_i) \quad (4.8)$$

avec  $\vec{p}_i$  les positions d'émission des sources ponctuelles sur la frontière. Ces sources sont également supposées connues. En transfert radiatif nous avons l'habitude de travailler en présence de sources ponctuelles, par exemple dans les applications qui font intervenir des sources laser ou le soleil dans l'atmosphère. Dans notre cas les espaces de chemins qui prennent en compte les sources ponctuelles des discontinuités pourront être directement assimilés aux espaces de chemins utilisés pour gérer les sources laser ([[Sans et al., 2021](#)]) ou solaires ([[Marchuk et al., 1980](#), [Villefranque et al., 2019](#)]) en transfert radiatif.

#### 4.2.1.2 L'espace de chemins

Pour décrire l'espace des chemins de la sensibilité géométrique nous commencerons par considérer qu'il n'y a pas de discontinuités aux frontières, la géométrie dessinée dans les illustrations est bien facétisée mais nous considérerons que les conditions aux limites s'annulent continument entre deux facettes (comme dans les exemples du chapitre précédent dans les [Sec. 3.4](#) et [3.5](#)). Dans cette première partie les sources  $\xi_p$  seront donc nulles et nous ne les ferons pas apparaître sur le schéma de la [Fig. 4.2](#).

Dans un deuxième temps nous considérerons l'espace de chemins de la sensibilité en incluant les discontinuités des conditions aux limites, nous verrons que les sources  $\xi_p$  sont positionnées à chaque intersection de facettes, les positions d'émissions  $\vec{p}_i$  de ces sources seront spécifiées sur la [Fig. 4.3](#).

**Continuité aux frontières** Dans le milieu le transport de la sensibilité est identique à celui de la luminance, nous l'avons déjà décrit dans le premier exemple de l'article ([Chap. 1](#)), le chemin de sensibilité sera donc un chemin de diffusion dont le libre parcours moyen dépend de la loi de Beer-Lambert et les directions de diffusion dépendent de la fonction de phase. À la rencontre d'une

frontière réfléchissante, une partie de la sensibilité incidente sera absorbée par la paroi et une partie sera réfléchiée selon la BRDF de la paroi, la luminance sortante de la paroi réfléchissante dépendra alors d'une source de sensibilité (la source  $\xi_n + \xi_p$ ) et de la sensibilité réfléchiée selon la BRDF. Lors d'une rencontre avec une paroi noire la sensibilité incidente est totalement absorbée, comme la luminance dans ce cas là, et la sensibilité sortante d'une paroi noire est émise selon une émission Lambertienne, comme la luminance. Dans la Fig. 4.2 nous avons représenté un chemin parmi l'espace

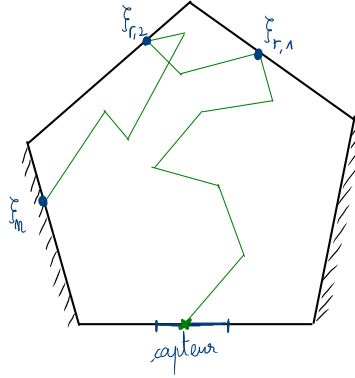


FIGURE 4.2 – Un exemple de chemin de sensibilité étant donné toutes les sources  $\xi_n, \xi_r$  connues à la frontière

des chemins possibles étant donné la géométrie dessinée et les propriétés de parois (noires pour les parois latérales et diffuses pour les parois du haut). L'évolution du chemin de sensibilité dans le domaine est strictement similaire à celle de la luminance. Ainsi les sources de sensibilité peuvent être assimilées à des sources telles que l'émission thermique des surfaces pour la luminance. Dans un chemin comme celui dessiné dans la Fig. 4.2 la source  $\xi_n$  sera propagée tout le long du chemin de sensibilité et atténuée exponentiellement selon l'absorption dans le milieu (si  $k_a$  est homogène la sensibilité qui est émise par la paroi noire et qui atteint le capteur sera  $\xi_n \exp(-k_a l_{tot})$  avec  $l_{tot}$  la longueur totale du chemin). En revanche les sources de sensibilité émise par les parois réfléchissantes ( $\xi_{r,2}$  et  $\xi_{r,1}$ ) ne seront atténuées que sur la longueur du chemin qui les relie au capteur.

**Discontinuités aux frontières** Dans ce paragraphe nous discuterons de l'espace de chemin de la sensibilité dans le cas où les discontinuités à la frontière font apparaître des sources ponctuelles de sensibilité. Nous l'avons vu dans le chapitre précédent (Sec. 3.6), les positions d'émissions des sources ponctuelles sont situées au niveau des intersections entre chaque facette des parois déformées. Ces positions sont reportées sur la Fig. 4.3, sur cette figure la paroi du bas n'est pas impactée par la déformation, elle n'émet donc pas de sources de sensibilité. Le fait que ces sources soient ponctuelles spatialement engendre un espace de chemins particulier. L'espace de chemins de la configuration précédente visite le milieu en entier et les surfaces entières des frontières (il récupère ainsi toutes les sources surfaciques  $\xi_r$  et  $\xi_n$ ), cependant ces chemins n'atteindront jamais exactement les positions d'émissions ponctuelles  $\vec{p}_1, \vec{p}_2$  et  $\vec{p}_3$  ainsi les sources  $\xi_{p,1}, \xi_{p,2}$  et  $\xi_{p,3}$  ne seront pas prises en compte. De ce fait, pour propager les sources ponctuelles dans le milieu jusqu'au capteur il faut forcer des chemins qui partent des sources ponctuelles et qui sont propagés dans le milieu. Il existe un grand nombre de descriptions en espace de chemins qui traduisent ce forçage, nous en illustrons une sur la Fig. 4.3 qui consiste à aller chercher directement les sources ponctuelles lors de chaque diffusion dans le milieu. Le choix de cette représentation est arbitraire, en revanche l'espace de chemins de sensibilité comprendra toujours un chemin principal diffusé dans le milieu combiné avec des chemins partant des sources ponctuelles pour rejoindre le capteur.

Sur la figure nous n'avons schématisé cet effet uniquement sur la première diffusion pour ne pas que le dessin soit submergé de chemins, mais il faut imaginer que les trois positions  $\vec{p}_1, \vec{p}_2$  et  $\vec{p}_3$  sont liées au chemin principal par autant de chemins qu'il y a de diffusions.

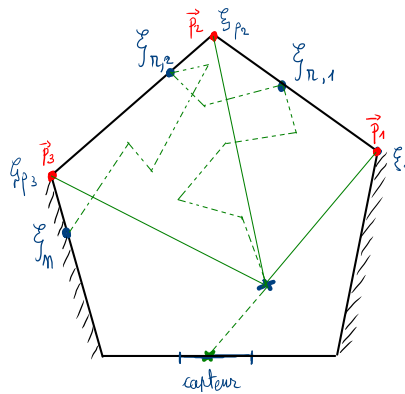


FIGURE 4.3 – Un exemple de chemin de sensibilité étant donné toutes les sources  $\xi_n$ ,  $\xi_r$  et  $\xi_p$  connues à la frontière

### 4.2.2 L'espace de chemins de la dérivée spatiale

Dans cette partie nous présentons l'espace de chemins de la dérivée spatiale en suivant la même démarche que celle employée pour la sensibilité géométrique. La dérivée spatiale est décrite par sa propre équation d'évolution dans le milieu et ses propres conditions aux limites, nous verrons que, au contraire de la sensibilité, l'équivalence entre l'espace de chemins de la dérivée spatiale et celui de la luminance n'est pas stricte. Par exemple, nous avons vu dans le 2 que l'équation d'évolution de la dérivée spatiale n'était pas une équation de transfert radiatif usuelle mais une équation de transfert radiatif avec un terme source supplémentaire qui dépend de la luminance. Dans cette partie nous avons pour but d'éviter tous les couplages avec d'autres modèles, nous considérons donc la source supplémentaire de l'équation de transport de la dérivée spatiale comme une source connue en tout point du volume et nous nommerons cette source  $\xi_v$ . Aux frontières nous agissons de la même façon, les sources spécifiques aux parois noires seront nommées  $\xi_n$  et celles spécifiques aux parois réfléchissantes seront nommée  $\xi_r$ .

Nous devons préciser que le modèle de la dérivée spatiale contient également des sources ponctuelles au niveau des conditions aux limites. Cette spécificité n'a pas été évoquée dans le chapitre précédent, nous avons abordé les discontinuités aux limites en tant que sources de sensibilité géométrique mais nous ne les avons pas abordées en tant que sources pour la dérivée spatiale. Nous ne le ferons pas dans ce chapitre non plus car, bien qu'il existe des sources ponctuelles dans le modèle de dérivée spatiale, ces sources interviennent exactement de la même manière que pour la sensibilité. Nous avons vu dans la Sec. 3.6 du chapitre précédent que les sources ponctuelles de sensibilité existaient (lorsque la condition à la limite radiative était discontinue aux frontières) du fait de la dépendance des conditions aux limites à une dérivée surfacique. Nous avons élaboré une conjecture pour prendre en compte le fait que cette dérivée surfacique génère les sources ponctuelles. Il se trouve qu'il existe également une dérivée surfacique dans la condition à la limite de la dérivée spatiale et que, de la même façon que pour la sensibilité géométrique, cette dérivée surfacique engendrera des sources ponctuelles, dans le modèle de la dérivée spatiale, à l'endroit des discontinuités. Comme dans la section précédente nous nommerons ces positions d'émissions  $\vec{p}_i$  et les sources ponctuelles de dérivée spatiale seront supposées connues et nommées  $\xi_p$ .

### 4.2.2.1 Le modèle

Dans le milieu

$$\begin{aligned}
\vec{\omega} \cdot \vec{\partial}_1 \left( \partial_{1,\vec{b}} L(\vec{x}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \right) &= -k_a(\vec{x}) \partial_{1,\vec{b}} L(\vec{x}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \\
&\quad - k_d(\vec{x}) \partial_{1,\vec{b}} L(\vec{x}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \\
&\quad + k_d(\vec{x}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(\vec{x}, -\vec{\omega}' | -\vec{\omega}) d\vec{\omega}' \partial_{1,\vec{b}} L(\vec{x}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\
&\quad + \xi_v
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Nous retrouvons l'équation de transfert radiatif avec le terme de transport de la dérivée spatiale (à gauche) et les termes d'atténuation et d'apparition de la dérivée spatiale selon les propriétés d'absorption et de diffusion du milieu. Cette équation de transfert radiatif comprend un terme source ( $\xi_v$ ) indépendant de la dérivée spatiale, nous verrons que l'espace de chemins qui traduira le transport de la dérivée spatiale ne sera pas impacté par ce terme source car nous le supposons connu.

**À la limite - paroi réfléchissante**

$$\partial_{1,\vec{b}} L(\vec{x}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = \xi_r + \xi_p \tag{4.10}$$

Étant donné que nous supposons ces sources  $\xi_r$  et  $\xi_p$  connues nous percevons clairement que les parois réfléchissantes ne réfléchissent pas la dérivée spatiale. En effet dans la condition à la limite donnée en [Sec. 2.2](#) du [Chap. 2](#) la dérivée spatiale, dans la direction  $\vec{b}$ , sortante d'une paroi réfléchissante de dépend pas de la même dérivée incidente. Techniquement cette indépendance vient du fait que la dérivée spatiale, dans la direction  $\vec{b}$ , est toujours décomposée à la paroi en deux autres dérivées, une dérivée selon  $\vec{\omega}$ , la direction d'émission, et une dérivée selon  $\vec{u}$ , un direction tangente à la paroi. Ce geste technique est réalisé car nous ne savons pas faire autrement pour évaluer la dérivée spatiale en paroi que de connaître la dérivée surfacique (dans la direction  $\vec{u}$ ). La conséquence de ce geste est que, à chaque paroi rencontrée, la dérivée dont nous suivons le transport est décomposée en la somme de deux dérivées différentes. Son espace de chemins est alors interrompu à chaque rencontre avec la paroi : pour la dérivée spatiale la paroi réfléchissante agit comme une paroi noire et la dérivée spatiale est "absorbée" par toutes les parois, quelles que soient leurs propriétés.

En revanche les sources de dérivée spatiale à la frontière ne sont pas les mêmes si la paroi est réfléchissante ou si la paroi est noire, dans cette partie cette distinction correspond juste à  $\xi_r$  qui regroupe les sources d'une paroi réfléchissante et  $\xi_n$  qui regroupe les sources d'une paroi noire.

**À la limite - paroi noire**

$$\partial_{1,\vec{b}} L(\vec{x}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = \xi_n + \xi_p \tag{4.11}$$

Les sources  $\xi_n$  et  $\xi_p$  correspondent à des émissions Lambertiennes de dérivée spatiales. Dans le [Chap. 2](#) nous avons vu que explicitement la source  $\xi_n$  dépend de la dérivée surfacique de la luminance d'équilibre.

Pour les deux types de parois les sources ponctuelles liées aux discontinuités s'écrivent :

$$\xi_p \equiv \sum_i \xi_{p,i} \delta(\vec{y} - \vec{p}_i) \tag{4.12}$$

avec  $\vec{p}_i$  les positions d'émission des sources ponctuelles sur la frontière. Comme pour la sensibilité les sources  $\xi_p$  de la dérivée spatiale dépendent uniquement de la luminance.



### 4.2.2.2 L'espace de chemins

De la même façon que pour la description de l'espace de chemins de la sensibilité, nous distinguons un cas pour lequel il n'y a pas de discontinuités aux frontières (les conditions aux limites radiatives s'annulent continûment aux bords des facettes), les sources ponctuelles  $\xi_p$  sont nulles, et un cas pour lequel il y a des discontinuités.

**Continuité au frontières** Nous avons vu que pour la dérivée spatiale toutes les parois se comportaient comme des parois noires, si nous reprenons la même configuration radiative que celle utilisée pour la sensibilité, nous verrons que les chemins s'arrêtent de la même façon sur les parois du haut (qui sont réfléchissantes) que sur les parois latérales (qui sont noires). Dans le milieu c'est bien une équation de transfert radiatif qui décrit le transport de la dérivée spatiale, nous suivrons donc un chemin de diffusion dont les libres parcours moyens seront déterminés à partir de la loi de Beer-Lambert et dont les directions de diffusion dépendront de la fonction de phase dans le milieu. Jusque là le transport de la dérivée spatiale dans le milieu est donc identique à celui de la luminance. Sur la Fig. 4.4 nous avons représenté deux chemins parmi ceux possibles de l'espace de chemins,

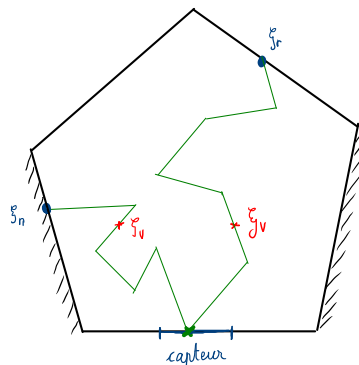


FIGURE 4.4 – Un chemin de sensibilité étant donné toutes les sources  $\xi_n$  et  $\xi_r$  connues à la frontière et  $\xi_v$  connue dans le milieu.

ainsi nous schématisons le fait que, quelles que soient les propriétés de parois, la dérivée spatiale est absorbée à la frontière. De plus, sur chacun de ces chemins, nous avons dessiné en rouge une position quelconque à laquelle nous avons associé la source volumique  $\xi_v$ . L'intérêt de ce dessin est de faire comprendre que tout le long de ces chemins de diffusion il est nécessaire de prendre en compte la source volumique  $\xi_v$ , si nous voulions représenter entièrement cette contribution il faudrait recouvrir tout le chemin vert par des croix rouges car c'est en tout point du chemin que la contribution de la source volumique intervient. Les sources  $\xi_r$  et  $\xi_n$  qui sont propagées jusqu'au capteur seront atténuées exponentiellement selon le coefficient d'absorption sur toute la longueur du chemin et les sources  $\xi_v$  seront propagées exactement de la même façon depuis leur position d'émission (en rouge) jusqu'au capteur.

**Discontinuités aux frontières** Dans ce paragraphe les sources ponctuelles  $\xi_p$  ne sont pas nulles et nous devons donc les intégrer à l'espace de chemins de la dérivée spatiale. La logique est exactement la même que celle que nous avons décrite pour la sensibilité, au chemin initial de dérivée spatiale vont s'ajouter les chemins qui relient les positions d'émissions des sources ponctuelles à chaque endroit de diffusion dans le milieu. Sur la Fig. 4.5 nous avons uniquement illustré une contribution des sources ponctuelles mais il faut imaginer que pour chaque diffusion dans le milieu les trois positions d'émission ponctuelle sont reliées au chemin principal.

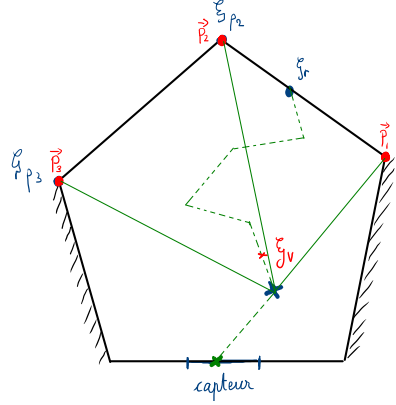


FIGURE 4.5 – Un chemin de sensibilité étant donné toutes les sources  $\xi_n$ ,  $\xi_r$  et  $\xi_p$  connues à la frontière et  $\xi_v$  connue dans le milieu.

### 4.2.3 L'espace de chemins de la dérivée angulaire

Nous nous concentrons dans cette partie sur l'espace de chemins de la dérivée angulaire, nous chercherons donc à déterminer la façon dont la dérivée angulaire évolue dans le milieu et dont elle se comporte aux frontières. Comme pour la dérivée spatiale, la dérivée angulaire a sa propre équation d'évolution dans le milieu et ses propres conditions aux limites, nous verrons que l'espace de chemins de la dérivée angulaire est très différent de celui de la luminance ou des autres grandeurs que nous venons de décrire. La première différence vient de son équation d'évolution qui ne ressemble plus tellement à une équation de transfert radiatif car elle contient deux sources dans le milieu qui dépendent, une de la luminance, l'autre d'une dérivée spatiale. La deuxième différence est qu'elle ne contient pas de source par diffusion, au contraire de toutes les grandeurs précédentes. Nous verrons ce que cela implique en terme d'espace de chemins.

À la frontière son comportement est également complètement différent de celui de la luminance et ressemble à celui de la dérivée spatiale, en effet pour la dérivée angulaire toutes les parois se comportent comme des parois noires.

Dans cette partie nous supposons que les sources volumiques qui dépendent de la luminance sont connues et nous les nommerons  $\xi_{v,\Omega}$ . De la même manière nous supposons que les sources volumiques qui dépendent de la dérivée spatiales sont connues et nous les nommerons  $\xi_{v,\Phi}$ . À la frontière les sources émises par les parois réfléchissantes seront nommées  $\xi_r$  et les sources émises par les parois noires seront nommées  $\xi_n$ . Pour la dérivée angulaire nous avons vu dans le [Chap. 2](#) que les conditions aux limites en parois noires ne dépendent que de la luminance d'équilibre, c'est ce que représentera  $\xi_n$ . En revanche pour une paroi réfléchissante la dérivée angulaire sortante dépend de la luminance incidente et potentiellement d'une autre dérivée angulaire incidente. Nous supposons ces quantités connues et c'est ce que représentera  $\xi_r$ .

Les conditions aux limites de la dérivée angulaire ne dépendent pas d'une dérivée surfacique donc il n'y aura aucune source ponctuelle dans le modèle de la dérivée angulaire (voir [Chap. 2](#)).

#### 4.2.3.1 Le modèle

##### Dans le milieu

$$\vec{\omega} \cdot \vec{\partial}_1 \left( \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{x}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \right) = -k_a(\vec{x}) \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{x}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) - k_d(\vec{x}) \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{x}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) + \xi_{v,\Omega} - \xi_{v,\Phi} \quad (4.13)$$

De l'équation de transfert radiatif nous retrouvons le terme de transport de la dérivée angulaire (à gauche) et les termes qui correspondent à l'atténuation de la dérivée angulaire selon les propriétés

d'absorption et de diffusion du milieu. Comme nous l'avons évoqué dans l'introduction de cette partie, le terme source lié à la diffusion dans le milieu n'existe pas pour la dérivée angulaire. L'absence de source de diffusion dans le milieu a une grande conséquence sur l'espace de chemins, elle implique que les trajectoires des chemins de dérivée spatiale ne changeront pas de direction dans le milieu : le chemin sera simplement une ligne droite alors que le milieu est semi-transparent. Nous commenterons ce qu'il advient des sources le long de ce chemin en décrivant le schéma de la Fig. 4.6.

### À la limite - paroi réfléchissante

$$\partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{x}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = \xi_r \quad (4.14)$$

Pour la dérivée angulaire les parois réfléchissantes se comportent comme des parois noires, la dérivée angulaire incidente à la paroi est complètement absorbée et la paroi émet la source  $\xi_r$ .

### À la limite - paroi noire

$$\partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{x}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = \xi_n \quad (4.15)$$

Sur les parois noires la dérivée angulaire est totalement absorbée et les sources d'émission  $\xi_n$  sont émises selon la loi de Lambert comme pour la luminance.

#### 4.2.3.2 L'espace de chemins

Nous avons vu que la dérivée angulaire, en plus de se comporter comme si toutes les parois étaient noires à la frontière, était transportée dans le milieu comme s'il était transparent. Les chemins résultants de cette modélisation sont des lignes droites qui rejoignent le capteur et les sources en surface. Encore une fois nous faisons le choix arbitraire de prolonger les chemins de dérivée angulaire jusqu'à l'intersection d'une paroi et d'atténuer les sources tout le long du chemin. En revanche pour la dérivée angulaire les sources seront atténuées selon le coefficient d'extinction  $k_e(\vec{x}) = k_a(\vec{x}) + k_d(\vec{x})$ . Sur la Fig. 4.6 nous avons représenté deux chemins de dérivée angulaire parmi l'espace des chemins

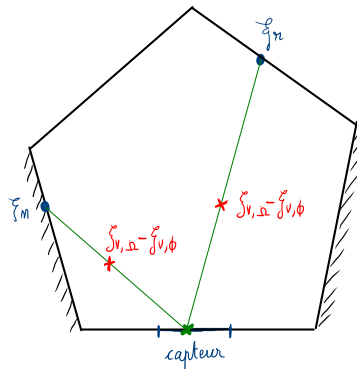


FIGURE 4.6 – Un exemple de chemin de dérivée angulaire étant donné toutes les sources  $\xi_n$ ,  $\xi_r$  connues à la frontière et les sources  $\xi_{v,\Omega}$  et  $\xi_{v,\Phi}$  connues dans le volume.

possibles. Quelles que soient les propriétés de la paroi le chemin s'arrête à la frontière. Les sources  $\xi_r$  et  $\xi_n$  seront propagées le long de la ligne droite et atténuées exponentiellement selon le coefficient d'extinction. Par exemple la partie des sources émises par la paroi réfléchissante qui sera transmise au capteur pourra s'écrire (pour un coefficient d'extinction homogène dans le milieu)  $\xi_r \exp(-k_e l_{tot})$ .

Au delà des sources émises par les parois il sera également nécessaire de prendre en compte les sources présentes dans le volume, soit la somme des sources  $\xi_{v,\Omega}$  et  $\xi_{v,\Phi}$ . Comme pour la dérivée spatiale ces sources devront être prises en compte sur toute la longueur du chemin et propagées depuis leur position d'émission jusqu'au capteur. Lors de cette propagation elles seront également atténuées exponentiellement selon le coefficient d'extinction. Sur la Fig. 4.6 nous avons schématisé en

rouge une position d'émission sur chaque chemin de dérivée angulaire. La partie de la source émise le long du chemin de droite qui est reçue par le récepteur sera équivalente à  $(\xi_{v,\Omega} - \xi_{v,\Phi}) \exp(-k_e l)$  avec  $l$  la longueur qui sépare la position d'émission et le capteur le long du chemin.

# Monte-Carlo

### 4.3 Couplages

Pour la suite de cette partie nous allons basculer sur une vision probabilisée de l'espace de chemins en lien avec la méthode de Monte-Carlo. L'espace de chemins est un ensemble continu de chemin, pour lequel nous pouvons définir formellement une densité de probabilité. Nous proposons donc de considérer les espaces de chemins à travers une lecture algorithmique de la statistique des chemins. Cela nous permettra de préparer la future mise en oeuvre des algorithmes de Monte-Carlo sur les exemples que nous présenterons dans la section suivante (Sec. 4.4). En pratique cela consistera à écrire les formulations en espérance des intégrales de chemin et à identifier à chaque fois le domaine d'intégration (soit l'espace des chemins possibles). De plus nous pourrons d'ores et déjà faire référence à l'utilisation de la double randomisation comme technique de gestion des couplages. Au delà d'anticiper également la mise en oeuvre de la prochaine partie (grâce aux branchements, voir Chap. 1) cela simplifiera les illustrations que nous pourrons faire sur chacune des familles d'espace de chemins.

Dans la partie précédente nous avons étudié indépendamment les espaces de chemins de la sensibilité, de la dérivée spatiale et de la dérivée angulaire. Dans cette partie nous étudierons l'espace de chemins d'un problème de sensibilité pour lequel il est possible que ces trois grandeurs soient couplées les unes avec les autres. Les couplages interviennent à travers leurs sources et l'objectif est de proposer une classification de l'ensemble des espaces de chemins qui naissent de ces couplages. Les sources  $\xi$ , que nous avons jusqu'à présent supposées connues, seront éventuellement des fonctions d'une ou de plusieurs grandeurs. Ainsi, pour décrire l'espace de chemins du problème global, nous devront alors combiner (à travers les sources) chacun des espaces de chemins que nous avons étudiés séparément. La Fig. 4.7 illustre un exemple dans lequel la sensibilité est couplée avec la dérivée spatiale au niveau des parois réfléchissantes. Nous y avons représenté un chemin de sensibilité (en vert) parmi tous les chemins possibles et un chemin de dérivée spatiale (en bleu) parmi tout ceux possibles étant donné une position sur la frontière réfléchissante. L'espace de chemins de la dérivée

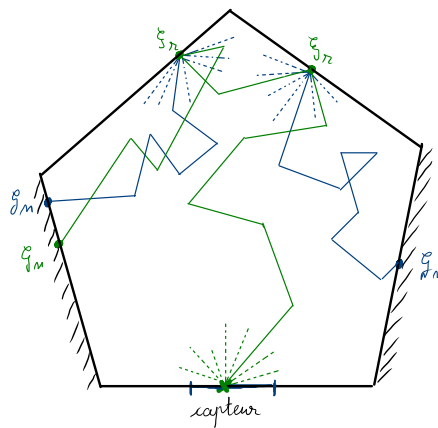


FIGURE 4.7 – Couplage entre l'espace de chemins de la sensibilité (en vert) et l'espace de chemins de la dérivée spatiale (en bleu).

spatiale va aller visiter toutes les sources de dérivée spatiale dans le domaine et ces sources seront propagées comme nous l'avons vu dans la Sec. 4.2.2 jusqu'au point de la frontière. Ainsi le couplage entre la sensibilité et la dérivée spatiale implique que pour chaque chemin de sensibilité qui arrive à la paroi réfléchissante (il en existe une infinité) la source d'émission de sensibilité dépend de l'espace de chemins complet (une autre infinité de chemin) de la dérivée spatiale. Nous pouvons concevoir à cet instant que l'espace de chemins du problème de sensibilité que l'on regarde comprend la combinaison de deux types d'espace de chemins (celui de la sensibilité et celui de la dérivée spatiale) et ce sur toute la frontière réfléchissante. L'idée est la même pour tous les couplages qui existent entre les différents modèles, qu'ils interviennent à travers des sources de la frontière ou à travers celles du

milieu.

La classification des espaces de chemins d'un problème de sensibilité géométrique que nous proposons est justement basée sur les lieux de couplages entre les grandeurs. Nous avons distingué trois classes d'espaces de chemins possibles :

- **Les espaces de chemins qui ne comprennent aucun couplage.** Pour cette classe là le problème de sensibilité se résume à la résolution du modèle de sensibilité dans le cas où toutes les sources de sensibilité sont connues. Les espaces de chemins compris dans cette famille seront strictement identiques à ceux de la luminance comme nous l'avons vu dans la [Sec. 4.2.1](#).
- **Les espaces de chemins qui comprennent uniquement des couplages sur les frontières.** Dans cette famille d'espace de chemins seules les sources aux limites de chacune des quantités que nous avons décrites précédemment dépendent d'autres grandeurs.
- **Les espaces de chemins qui comprennent des couplages dans le volume et à la frontière.** Dans cette famille d'espace de chemins les sources volumique et surfaciques dépendent d'autres grandeurs.

Nous allons utiliser des exemples très généraux pour illustrer les trois familles d'espaces de chemins des sections suivantes. L'intérêt est d'illustrer de façon exhaustive les espaces de chemins inclus dans la famille en question.

### 4.3.1 Espaces de chemins sans branchements

Dans cette catégorie les espaces de chemins ne branchent jamais car le problème de sensibilité ne dépend pas d'autres grandeurs, les sources de sensibilité sont donc toutes connues.

#### 4.3.1.1 Conditions pour qu'il n'y ait aucun branchement

- Parois noires : si les parois sont noires tous les couplages de la condition à la limite de sensibilité, avec la luminance incidente, la dérivée spatiale incidente et la dérivée angulaire incidente, n'existe pas. Le seul couplage restant est celui avec la luminance à travers l'opérateur  $\mathcal{G}$ <sup>1</sup>.
- Milieu transparent : la seule façon pour que l'opérateur  $\mathcal{G}$  donne un résultat nul (et donc que le couplage avec la luminance soit supprimé) est de considérer un milieu transparent (les coefficients d'absorption et de diffusion sont nuls donc  $\mathcal{G}[L(\vec{x}, \vec{\omega}, \vec{\pi})] = 0$ ).
- Géométries convexes : si la géométrie était concave (dans le cas des géométries facétisée cela correspond à un angle rentrant) alors la condition à la limite dépend de la luminance incidente au niveau de l'angle rentrant (voir la [Sec. 3.6](#) sur les discontinuités). Les géométries concaves font donc intervenir un couplage avec la luminance même si le milieu est transparent et les parois noires.

#### 4.3.1.2 Illustrations générales

Les espaces de chemins compris dans cette famille correspondent simplement à des espaces de chemins de sensibilité dans un milieu transparent, pour des sources de sensibilité connues. Nous avons vu dans la [Sec. 4.2.1](#) que ces espaces de chemins sont identiques à ceux de la luminance dans les mêmes conditions. Nous allons profiter de ce rapprochement pour introduire la formulation intégrale à partir de laquelle nous définissons l'observable de notre problème. La sensibilité  $\mathcal{S}_{\text{capteur}}$  correspond à la sensibilité géométrique de l'observable radiative  $\mathcal{O}_{\text{capteur}}$  qui représente, par exemple, le flux reçu par le capteur. Elle peut s'écrire comme l'espérance, sur l'espace de chemins  $D_\Gamma$ , d'une

1.

$$\mathcal{G}[L(\vec{x}, \vec{\omega}, \vec{\pi})] = -k_a(\vec{x})L(\vec{x}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) - k_d(\vec{x})L(\vec{x}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) + k_d(\vec{x}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(\vec{x}, -\vec{\omega}' | -\vec{\omega}) d\vec{\omega}' L(\vec{x}, \vec{\omega}', \vec{\pi})$$

fonction  $f$  des sources de sensibilité  $\xi_n$  :

$$\mathcal{S}_{\text{capteur}} = \mathbb{E}(f(\Gamma)) = \int_{D_\Gamma} p_\Gamma(\gamma) d\gamma f(\gamma, \xi_n) \quad (4.16)$$

La formulation intégrale en espérance de la sensibilité  $\mathcal{S}$  est un premier pas vers sa résolution algorithmique par la méthode de Monte-Carlo. En effet dans l'Eq. 4.16 la fonction  $f$  représentera le poids de Monte-Carlo (voir Chap. 1) et la variable aléatoire  $\gamma$  sera échantillonnée numériquement selon la densité de probabilité  $p_\Gamma(\gamma)$ . Dans notre exemple une réalisation  $\gamma$  de la variable aléatoire  $\Gamma$  correspond à la réalisation d'un chemin parmi tous ceux possibles. L'ensemble des chemins possibles, soit l'espace des chemins, est représenté par  $D_\Gamma$  le domaine de définition de la variable aléatoire  $\Gamma$ . Par exemple une réalisation  $\gamma$  donne le chemin illustré sur la Fig. 4.8. Le chemin intercepte la

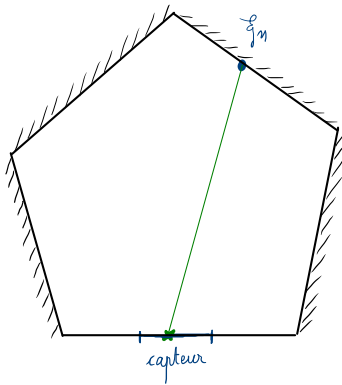


FIGURE 4.8 – Un chemin de sensibilité dans un milieu transparent et un domaine convexe aux parois noires à température homogène.

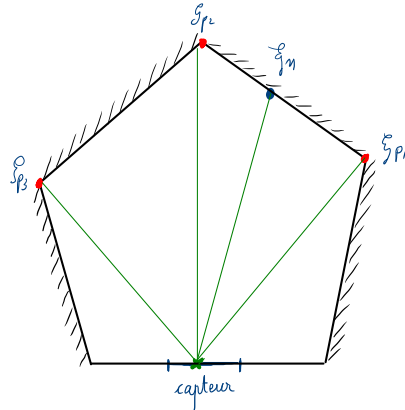


FIGURE 4.9 – Un chemin de sensibilité dans un milieu transparent et un domaine convexe aux parois noires à températures différentes.

paroi noire et récupère l'information sur la source de sensibilité  $\xi_n$ . La Fig. 4.9 illustre un espace de chemins différent engendré par les sources ponctuelles de sensibilité. En effet dans cette configuration nous pouvons imaginer que les parois sont à des températures différentes, cela va engendrer des discontinuités à chaque intersection des facettes et en plus des sources surfaciques  $\xi_n$  vont s'ajouter trois sources ponctuelles  $\xi_p$ . Nous verrons dans les exemples d'application qui suivent que l'espace de chemins de la configuration de la Fig. 4.9 n'est pas le seul existant pour prendre en compte les sources ponctuelles.

### 4.3.2 Espaces de chemins avec branchements uniquement en surface

Dans cette famille les couplages entre les espaces de chemins auront lieu uniquement à travers les sources aux frontières (comme dans la Fig. 4.7). Nous commençons donc par identifier les configurations radiatives pour lesquelles les espaces de chemins ne branchent pas dans le milieu. Nous verrons que pour la même géométrie (voir Fig. 4.10) et pour la même déformation du domaine, les propriétés de parois ont une conséquence énorme sur les espaces de chemins admissibles dans cette famille. Nous étudierons ces deux configurations radiatives l'une après l'autre.

#### 4.3.2.1 Conditions pour qu'il n'y ait que des branchements aux frontières

##### Parois diffuses

- Propriétés radiatives homogènes dans le milieu : le modèle de dérivée spatiale est couplé avec les autres modèles dans le milieu et à la frontière. Mathématiquement (Sec. 2.2) la source volumique du modèle de dérivée spatiale résulte des dépendances spatiales des coefficients d'absorption, de diffusion et de la fonction de phase. Pour qu'il n'y ait pas de source dans le milieu il faut donc que les propriétés radiatives du milieu soient homogènes spatialement.



### Parois spéculaires - Translation

- Propriétés radiatives homogènes dans le milieu : lorsque la déformation de la paroi spéculaire ne modifie pas l'orientation de la normale il n'y a pas de couplage avec la dérivée angulaire à la frontière, les conditions sont donc exactement les mêmes que dans le cas d'une paroi diffuse.

### Parois spéculaires - Rotation

- Milieu transparent : la condition à la limite de sensibilité dépend de la dérivée angulaire incidente. Nous montrerons que pour éviter les branchements dans le milieu lors d'une réalisation d'un chemin de dérivée angulaire il est nécessaire que le milieu soit transparent.

#### 4.3.2.2 Illustrations générales

Sur la Fig. 4.10 nous avons représenté une géométrie quelconque et la déformation engendrée par une modification du paramètre géométrique  $\tilde{\pi}$ . Le vecteur de déformation est schématisé pour montrer que la déformation va déplacer la paroi du haut (rotation et allongement de la surface), elle va étirer la paroi de droite et elle n'aura aucune influence sur la paroi de gauche et celle du bas. Les sources de sensibilité de cette configuration seront donc situées sur la paroi du haut et sur la paroi de droite les sources de sensibilité situées sur la paroi de gauche sont nulles. Sur cette géométrie nous

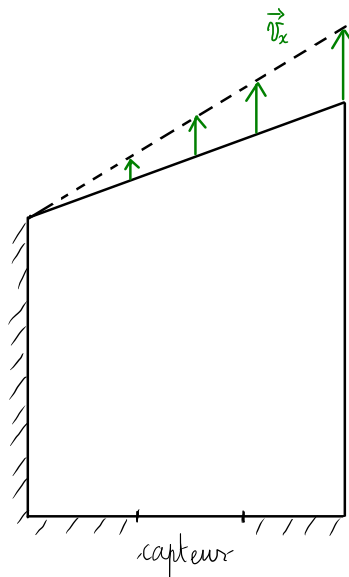


FIGURE 4.10 – Une réalisation d'un chemin  $\gamma$  du problème de sensibilité avec couplages aux frontières.

allons considérer deux configurations radiatives, dans les deux cas les parois de gauche et du bas seront noires. En revanche dans la première configuration la paroi du haut et la paroi de droite seront des parois diffuses et dans la deuxième configuration la paroi de droite sera toujours diffuse mais la paroi du haut sera spéculaire. Nous verrons que les conditions nécessaires pour que les espaces de chemins de ces deux configurations appartiennent à cette famille d'espaces de chemins seront différentes.

**Parois diffuses rotation** Dans cette configuration, les parois étant diffuses ou noires, il n'existe pas de couplage avec la dérivée angulaire (les conditions à la limite de sensibilité ne dépendent pas de la dérivée angulaire). Les seuls branchements qui pourraient exister dans le milieu sont ceux issus du couplage de la dérivée spatiale avec la luminance. Si les propriétés radiatives sont homogènes dans le milieu ce couplage disparaît.

La sensibilité reçue par le capteur peut s'écrire comme une espérance de la fonction  $f(\gamma, S)$ , à partir d'une intégrale sur l'espace des chemins  $D_\Gamma$ , avec  $\Gamma$  la variable aléatoire qui représente le chemin. Dans cette fonction la variable  $S$  représente l'intégralité des sources nécessaires à l'estimation de la sensibilité.

$$\mathcal{S}_{\text{capteur}} = \int_{D_\Gamma} p_\Gamma(\gamma) d\gamma f(\gamma, S) \quad (4.17)$$

La Fig. 4.10 représente une réalisation  $\gamma$  d'un chemin compris dans l'espace de chemins  $D_\Gamma$  du problème de sensibilité. La réalisation de ce chemin nécessite l'utilisation de la double randomisation, nous l'illustrons pas à pas dans la Fig. 4.11 à partir de la réalisation  $\gamma$ .

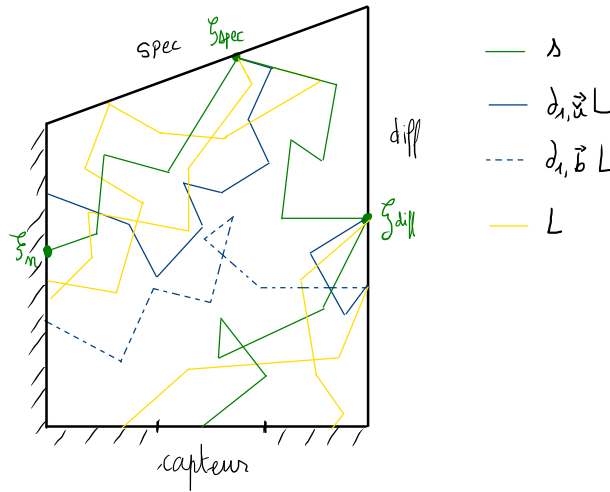


FIGURE 4.11 – Une réalisation d'un chemin  $\gamma$  du problème de sensibilité avec couplages aux frontières.

La Fig. 4.12 contient une succession de schémas qui représentent tous une certaine décomposition de la réalisation  $\gamma$ , le but est de détailler les étapes de cette réalisation en remontant le chemin de sensibilité du capteur jusqu'aux sources  $\xi_{diff_1}$ ,  $\xi_{diff_2}$  et  $\xi_n$ . Les schémas sont numérotés de 1 à 6 afin de décrire l'ensemble des branchements issus des couplages au niveau de ces sources.

**Schéma 1** Le premier schéma représente le transport de sensibilité dans le milieu, algorithmiquement ce dessin correspond à la réalisation  $\gamma_s$  (en vert) de la variable aléatoire  $\Gamma_s$  qui représente un chemin de sensibilité. Ce schéma traduit l'écriture de la sensibilité comme l'espérance de la variable aléatoire  $\Gamma_s$  :

$$\mathcal{S}_{\text{capteur}} = \int_{D_{\Gamma_s}} p_{\Gamma_s}(\gamma_s) d\gamma_s g(\gamma_s, \xi_{diff_1}, \xi_{diff_2}) \quad (4.18)$$

Avec  $\xi_{diff_1}$  et  $\xi_{diff_2}$  les sources de sensibilité. Afin d'introduire les schémas suivants nous allons expliciter comment la double randomisation permet de passer de la variable  $\Gamma_s$  à la variable  $\Gamma$  (soit de l'Eq. 4.18 à l'Eq. 4.24). Pour cela nous allons travailler à partir de deux propriétés de l'espérance rencontrées dans la Sec. 1.2, la linéarité de l'espérance et la double randomisation. Pour commencer l'Eq. 4.18 peut s'écrire de façon plus synthétique :

$$\mathcal{S}_{\text{capteur}} = \mathbb{E}(g(\Gamma_s, \xi_{diff_1}, \xi_{diff_2})) \quad (4.19)$$

La fonction  $g$  est linéaire et les sources  $\xi_{diff_1}$  et  $\xi_{diff_2}$  sont également toutes les deux des fonctions linéaire de la luminance et la dérivée spatiale. La luminance et la dérivée spatiales sont toutes les deux des solutions, respectivement, de l'ETR et du modèle de dérivée spatiale qui peuvent s'écrire

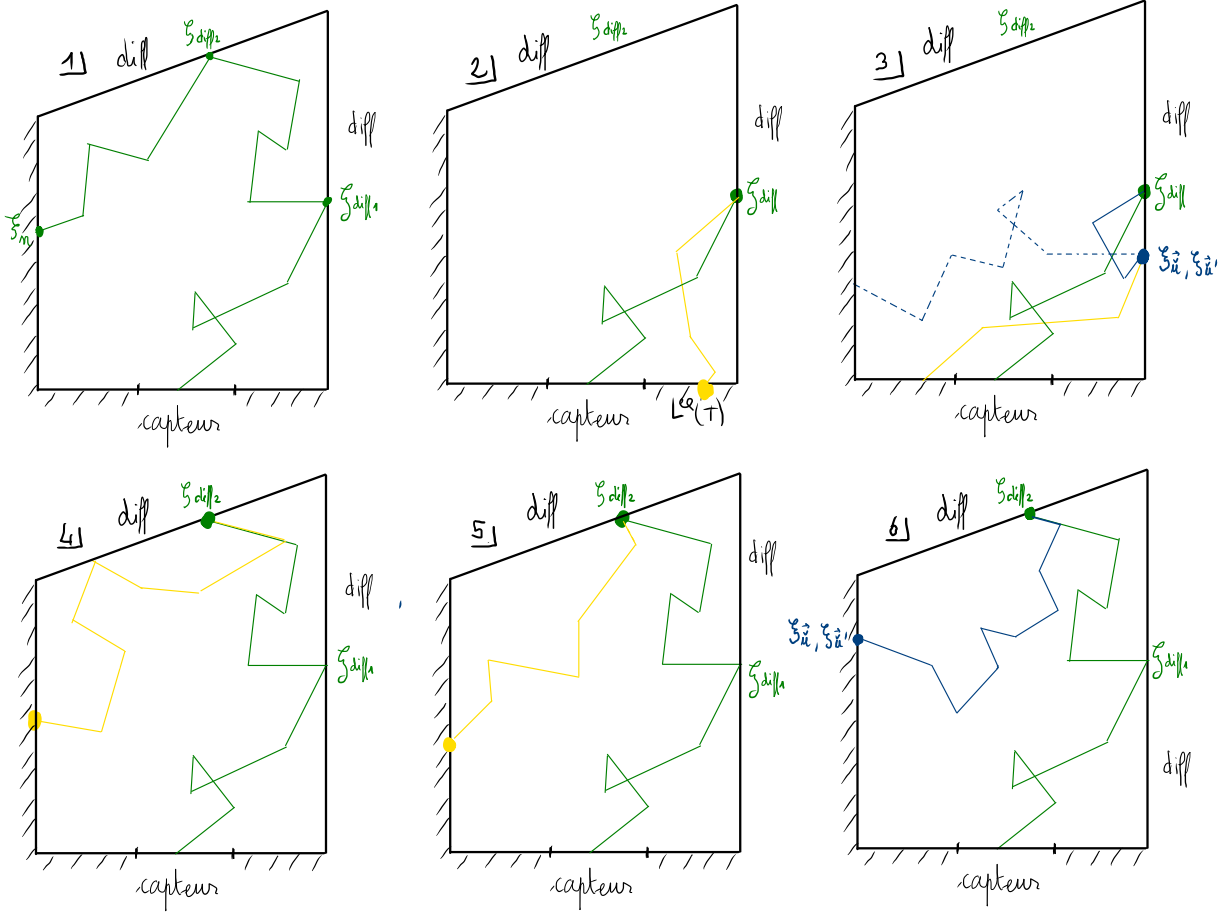


FIGURE 4.12 – Décomposition d’une réalisation d’un chemin  $\gamma$  du problème de sensibilité avec couplages aux frontières.

comme des espérances sur leurs espaces de chemins respectifs. Par exemple pour la dérivée surfacique dans la direction  $\vec{u}$  :

$$\partial_{1, \vec{u}} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) = \mathbb{E} (f(\Gamma_{\vec{u}}, \xi_{\vec{u}})) = \int_{D_{\Gamma_{\vec{u}}}} p_{\Gamma_{\vec{u}}}(\gamma_{\vec{u}}) d\gamma_{\vec{u}} f(\gamma_{\vec{u}}, \xi_{\vec{u}}) \quad (4.20)$$

Avec  $D_{\Gamma_{\vec{u}}}$  l’espace de chemins de la dérivée spatiale dans la direction  $\vec{u}$  que nous avons décrit dans la [Sec. 4.2.2](#) et  $\xi_{\vec{u}}$  les sources de dérivée spatiale.

Les sources  $\xi_{diff1}$  et  $\xi_{diff2}$  seront donc toutes les deux des fonctions linéaires d’espérances sur plusieurs espaces de chemins différents. Par exemple la fonction  $\xi_{diff1}$  peut s’écrire :

$$\begin{aligned} \xi_{diff1} &= \mathcal{L}_{diff1} \left( L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}), \partial_{1, \vec{u}} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}), \partial_{1, \vec{u}'} L(\vec{y}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \right) \\ &= \mathcal{L}_{diff1} \left( \mathbb{E}(\Gamma_{L'}), \mathbb{E}(\Gamma_{\vec{u}}), \mathbb{E}(\Gamma_{\vec{u}'}) \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Étant donné que l’opérateur  $\mathcal{L}_{diff1}$  est linéaire la source de sensibilité  $\xi_{diff1}$  peut se réécrire :

$$\xi_{diff1} = \mathbb{E} \left( \mathcal{L}_{diff1} \left( \Gamma_{L'}, \Gamma_{\vec{u}}, \Gamma_{\vec{u}'} \right) \right) \quad (4.22)$$

Ce qui se traduit par : la source de sensibilité, au bout du chemin de sensibilité qui rencontre la paroi de droite, peut s’interpréter comme l’espérance de trois variables aléatoires "chemin de luminance", "chemin de dérivée spatiale dans la direction  $\vec{u}$ " et "chemin de dérivée spatiale dans la direction  $\vec{u}'$ ". L’estimation de la source de sensibilité  $\xi_{diff1}$  demandera donc d’effectuer un grand nombre de

réalisations des chemins et de faire une moyenne des sources de luminance et de dérivées spatiales (par exemple  $\xi_{\vec{u}}$ ) visitées par ces chemins. C'est là qu'intervient la double randomisation, nous l'avons vu dans la [Sec. 1.2](#), l'espérance d'une espérance est une espérance. La sensibilité reçu par le capteur est bien une espérance de deux sources qui sont elles mêmes des espérances :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{capteur}} &= \mathbb{E}(g(\Gamma_s, \xi_{diff_1}, \xi_{diff_2})) \\ &= \mathbb{E}(f(\Gamma_s, \Gamma_{L'}, \Gamma_{\vec{u}}, \Gamma_{\vec{u}'}, \Gamma_L \Gamma_{L'}, \Gamma_{\vec{u}}, \Gamma_{\vec{u}'})) \\ &= \mathbb{E}(f(\Gamma)) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Avec  $\Gamma$  la variable aléatoire "chemin du problème de sensibilité" dont le domaine de définition (l'espace de chemins)  $D_\Gamma$  comprend les domaines de définitions de l'ensemble des variables aléatoires de l'[Eq. 4.23](#). L'application de la double randomisation implique qu'au lieux d'échantillonner un grand nombre de chemin, pour estimer  $\xi_{diff_1}$  et  $\xi_{diff_2}$  à chaque fois que le chemin de sensibilité rencontre une paroi diffuse, il sera nécessaire de ne réaliser qu'un seul chemin pour chacune des grandeurs. C'est ce que nous appelons une branche. Nous dirons souvent que nous échantillonons les sources  $\xi_{diff_1}$  et  $\xi_{diff_2}$ , ce qui traduit le fait que nous réalisons une branche pour chaque grandeurs dont dépendent ces sources. L'échantillonnage d'un chemin  $\gamma$  revient donc à échantillonner le chemin de sensibilité et toutes les branches nécessaires pour prendre en compte les couplages.

**Schéma 2** Le deuxième schéma représente l'échantillonnage d'une branche de luminance, soit une réalisation de la variable aléatoire  $\Gamma_{L'}$ , lors de l'échantillonnage de la source de sensibilité  $\xi_{diff_1}$ . La réalisation intercepte la paroi du bas et la contribution ramenée par le chemin de luminance sera de l'ordre de la luminance d'équilibre à la température de la paroi du bas qui sera atténuée exponentiellement sur tout le chemin de luminance.

**Schéma 3** Le troisième schéma représente deux branchements consécutifs qui sont générés par l'application de la double randomisation sur la source de sensibilité  $\xi_{diff_1}$  et sur la source de dérivée spatiale  $\xi_{\vec{u}}$ . En effet le chemin bleu représente la branche de dérivée spatiale, soit la réalisation de la variable aléatoire  $\Gamma_{\vec{u}}$ . Lorsque cette branche intercepte la paroi diffuse elle doit récupérer la valeur de la source  $\xi_{\vec{u}}$ , seulement cette source n'est pas connue et dépend d'une dérivée spatiale dans une autre direction ( $\vec{u}$ ) et de la luminance incidente. L'échantillonnage de  $\xi_{\vec{u}}$  repose également sur le principe de double randomisation (comme pour les sources de sensibilité) et consiste à réaliser une branche de dérivée spatiale dans la direction  $\vec{u}$  (chemin bleu pointillé) et une branche de luminance (jaune). Ces deux branches "secondaires" rejoignent des parois noires et vont propager ces sources le long de leur chemin jusqu'à retrouver le chemin de dérivée spatiale initial (bleu) qui va lui même remonter sa source jusqu'au chemin de sensibilité. Le milieu étant semi-transparent toutes les sources auront été atténuées exponentiellement selon  $k_a$  en étant propagées le long de leur chemins respectifs dans le milieu.

Les branches de ce schéma permettent également d'échantillonner la variable aléatoire  $\Gamma_{\vec{u}'}$ , en fait les variables  $\Gamma_{\vec{u}}$  et  $\Gamma_{\vec{u}'}$  partagent le même espace de chemins (se sont bien toutes les deux des dérivées spatiales) et suivront donc la même branche. La seule différence réside dans le fait que ces deux dérivées ne sont pas évaluées dans la même direction (une selon  $\vec{u}$  et une selon  $\vec{u}'$ ), les sources  $\xi_{\vec{u}}$  et  $\xi_{\vec{u}'}$  seront différentes. En revanche elles dépendent des mêmes variables aléatoires ( $\xi_{\vec{u}}$  = luminance et dérivée spatiale dans la directions  $\vec{u}$  et  $\xi_{\vec{u}'}$  = luminance et dérivée spatiale dans la directions  $\vec{u}'$ ). Les dérivées spatiales suivront toujours les mêmes chemins cependant les quantités transportées par ces mêmes chemins seront différentes.

**Schéma 4** Comme pour le schéma 2 cette étape correspond à la réalisation d'une branche de luminance pour échantillonner la source  $\xi_{diff_2}$ .

**Schéma 5** La branche représentée dans le schéma 5 est une branche de luminance que nous n'avons pas eu besoin de réaliser pour l'échantillonnage de la source  $\xi_{diff_1}$  mais qui est nécessaire pour

l'échantillonnage de la source  $\xi_{diff_2}$ . En effet cette source correspond à l'évaluation de l'opérateur  $\mathcal{G}$  appliqué à la luminance. Sur la paroi de droite la déformation géométrique (un allongement) ne fait pas apparaître cet opérateur dans la condition à la limite de sensibilité, au contraire de la déformation de la paroi du haut qui dans son déplacement "crée un volume supplémentaire" et implique un couplage avec la luminance échantillonnée à partir de la fonction de phase (voir l'opérateur  $\mathcal{G}$  Sec. ).

**Schéma 6** La sixième et dernière branche consiste à réaliser les variables aléatoires  $\Gamma_{\vec{u}}$  et  $\Gamma_{\vec{u}'}$  comme pour le schéma 3 sauf que la branche intercepte une paroi noire sur laquelle les sources  $\xi_{\vec{u}}$  et  $\xi_{\vec{u}'}$  sont connues.

**Paroi spéculaire rotation** Par rapport à la configuration diffuse nous changeons simplement la propriété de la paroi du haut qui devient maintenant spéculaire. La différence vient du fait que, lors d'une rotation de la paroi spéculaire, la source de sensibilité dépend de deux dérivées angulaires (selon les axes de rotation  $\vec{a}$  et  $\vec{a}^{spec}$ ) de la luminance incidente.

Dans la Sec. 4.2.3 nous avons vu que le modèle de dérivée angulaire comprend deux sources volumiques dans son équation de transport, une issue de la dépendance angulaire de la fonction de phase et une qui est une dérivée spatiale. Chacune de ces deux sources va entraîner un couplage dans le milieu. La Fig. 4.13 illustre un branchement engendré par le couplage entre la dérivée angulaire et la dérivée spatiale dans le milieu. Le schéma de gauche représente un chemin de dérivée angulaire (en rouge). La valeur de la dérivée angulaire en  $(\vec{x}_{obs}, \vec{\omega}_{obs})$  dépend de la condition à la limite de dérivée angulaire (en  $(\vec{y}, \vec{\omega})$ ) et de la valeur de la dérivée spatiale en  $(\vec{x}, \vec{\omega})$ , pour tout  $\vec{x}$  compris entre  $\vec{y}$  et  $\vec{x}_{obs}$ , soit tout le long du chemin. La dérivée spatiale en tout  $\vec{x}$  sur le chemin n'étant pas connue nous devons l'évaluer et pour cela prendre en compte son espace de chemins. Sur le schéma du centre nous avons représenté un chemin de l'espace de chemins de la dérivée spatiale en  $(\vec{x}, \vec{\omega})$ . Si la dérivée angulaire est transportée en ligne droite dans le milieu semi-transparent ce n'est pas le cas de la dérivée spatiale, la réalisation d'un chemin de dérivée spatiale consistera donc à échantillonner une longueur  $l$  selon la loi de Beer-Lambert puis une direction de diffusion selon la fonction de phase etc.. Le chemin échantillonné est schématisé en bleu sur le schéma du centre et constituera une branche de dérivée spatiale lorsque nous traduirons ce couplage statistiquement. En revanche, si le milieu est

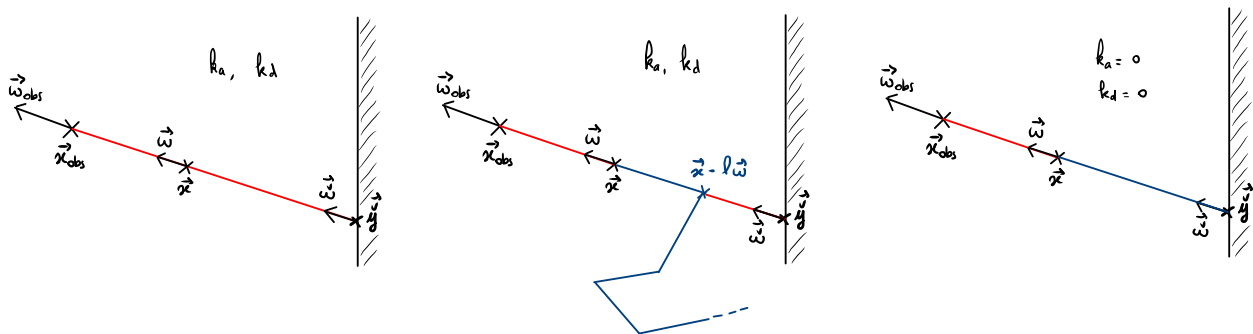


FIGURE 4.13 – Couplage dans le milieu entre l'espace de chemins de la dérivée angulaire et l'espace de chemins de la dérivée spatiale

transparent, l'espace de chemins de la dérivée spatiale traduit lui aussi un transport balistique et nous obtiendrons alors des chemins comme ceux sur le schéma de droite de la Fig. 4.13 qui illustre un chemin de la dérivée spatiale en  $(\vec{x}, \vec{\omega})$  pour un milieu transparent. Sur ce schéma nous pouvons voir que pour évaluer la dérivée spatiale en tout point le long du chemin de la dérivée angulaire nous avons seulement besoin de connaître la valeur de la dérivée spatiale à la frontière. La contribution de la source volumique de dérivée spatiale correspondra donc à l'intégrale, sur le long du chemin de dérivée angulaire, de la condition à la limite de dérivée spatiale.

Pour conclure sur les conditions pour qu'il n'y ait que des branchements aux frontières lorsque les parois sont spéculaires : si le milieu est semi-transparent l'espace de chemins de la dérivée angulaire engendrera une branche de dérivée spatiale dans le milieu, en revanche, si le milieu est transparent, alors nous aurons besoin d'évaluer la dérivée spatiale uniquement à la frontière. Parmi les trois familles d'espaces de chemins que nous avons identifié le premier cas correspond à la troisième famille (couplage dans le milieu et à la frontière) et le deuxième cas correspond à la famille que nous sommes en train de décrire. Pour la description de l'espace de chemins de cette configuration nous travaillons donc en milieu transparent.

Le problème de sensibilité consiste à estimer la sensibilité géométrique  $\mathcal{S}$  du flux reçu par le capteur. Exactement de la même façon que pour la configuration précédente nous définissons la sensibilité  $\mathcal{S}$  comme l'espérance d'un fonction de la variable aléatoire "chemin"  $\Gamma$  :

$$\mathcal{S}_{\text{capteur}} = \int_{D_{\Gamma}} p_{\Gamma}(\gamma) d\gamma f(\gamma, S) \tag{4.24}$$

Sur la Fig. 4.11 nous avons représenté la réalisation  $\gamma$  de la variable aléatoire  $\Gamma$ . Cette réalisation est

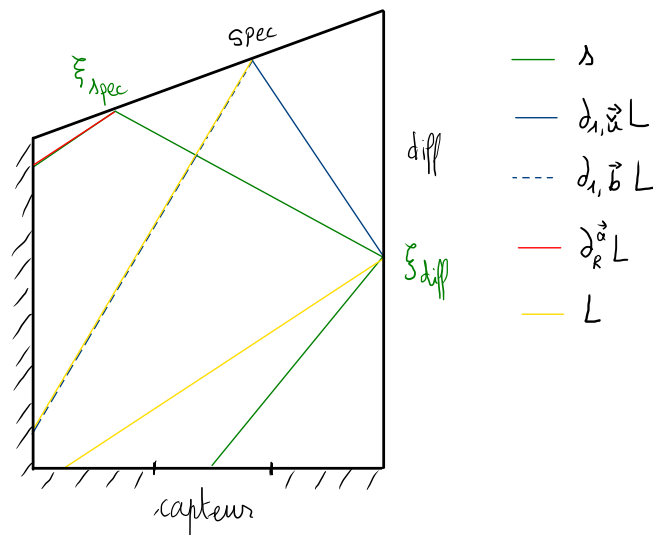


FIGURE 4.14 – Une réalisation d'un chemin  $\gamma$  du problème de sensibilité avec couplages aux frontières.

rendue possible grâce à la double randomisation qui permet d'échantillonner les sources de sensibilité  $\xi_{diff}$  et  $\xi_{spec}$  qui sont formulée comme des espérances sur les espaces de chemin de la luminance, de la dérivée spatiale et, pour la paroi spéculaire, de la dérivée angulaire. Pour expliciter le processus de double randomisation sur cet exemple nous avons décomposé le chemin  $\gamma$  dans la Fig. 4.15.

**Schéma 1** Comme pour la configuration précédente le premier schéma représente le chemin de sensibilité et les sources  $\xi_{diff}$  et  $\xi_{spec}$  qui seront échantillonnées lors de la réalisation algorithmique de ce chemin.

**Schéma 2** Lors de la première intersection du chemin de sensibilité avec la paroi diffuse il est nécessaire d'échantillonner  $\xi_{diff}$  ce qui revient, comme dans l'exemple précédent, à commencer par échantillonner une branche de luminance (un chemin échantillonné parmi l'espace de chemins de la luminance). Lorsque le milieu est transparent la luminance est transportée de façon balistique, ici elle intercepte la paroi noire du bas et la valeur de sa contribution sur la source  $\xi_{diff}$  sera la luminance d'équilibre à la température de la paroi du bas.

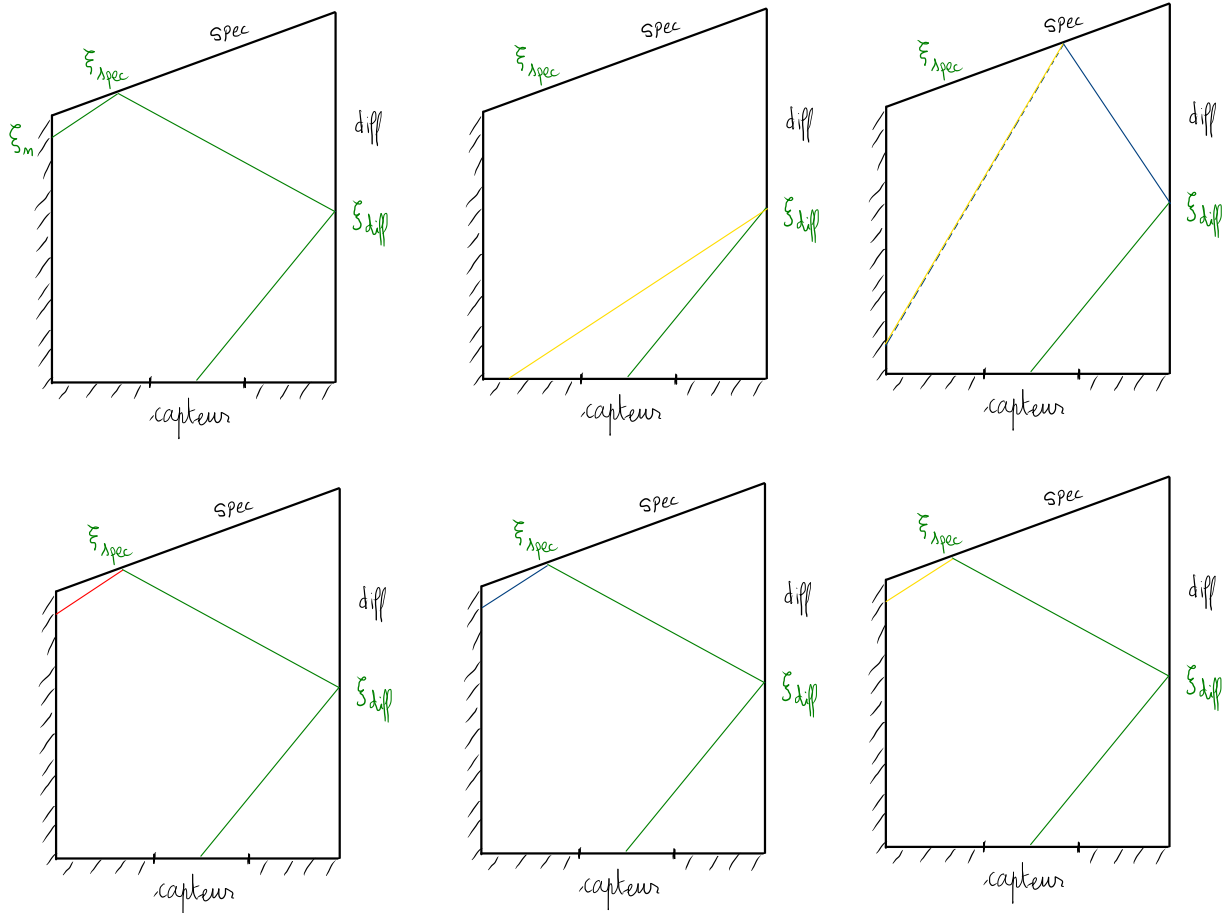


FIGURE 4.15 – Décomposition d'une réalisation d'un chemin  $\gamma$  du problème de sensibilité avec couplages aux frontières.

**Schéma 3** La deuxième grandeur à évaluer pour compléter l'échantillonnage de la source  $\xi_{diff}$  est la dérivée spatiale incidente. Le transport de la dérivée spatiale est également balistique, lorsqu'il intercepte la paroi spéculaire sa source est  $\xi_{\vec{u}}$  inconnue, elle est échantillonnée en réalisant une branche de luminance et une branche de dérivée spatiale (dans une autre direction  $\vec{u}$  tangente à la surface). Le milieu étant transparent et la paroi spéculaire ces branches se superposent sur le schéma (bleu pointillé pour la dérivée tangentielle et jaune pour la luminance incidente).

**Schéma 4** Sur le quatrième schéma le chemin de sensibilité a continué sa course et a rencontré la paroi spéculaire, à cet endroit il est nécessaire de prendre en compte la contribution de la source de sensibilité  $\xi_{spec}$ . Cette source étant formulée comme une espérance nous pouvons l'échantillonner en réalisant les variables aléatoires "chemin de dérivée angulaire", "chemin de dérivée spatiale" et "chemin de luminance". Ce schéma montre la branche de dérivée angulaire en rouge. Sa contribution sur la source de sensibilité comprendra la condition à la limite de la dérivée angulaire sur la paroi noire (ici elle est nulle car la luminance d'équilibre est homogène angulairement) et l'intégrale sur tout le chemin de dérivée angulaire de la dérivée spatiale estimée à la frontière. La paroi étant noire cette dérivée spatiale est connue et sa valeur multipliée par la longueur du chemin (résultat de l'intégrale le long du chemin).

**Schéma 5** Le cinquième schéma représente un chemin de dérivée spatiale dont la contribution sur la source de sensibilité correspondra à la condition à la limite de dérivée spatiale sur la paroi noire.

**Schéma 6** Le dernier schéma correspond à l'évaluation de la luminance incidente comme pour les autres chemins sa contribution sur la source de sensibilité  $\xi_{spec}$  sera la luminance d'équilibre à la température de la paroi.

Dans la suite de cette partie nous présenterons les différents exemples d'application du chapitre précédent dont les espaces de chemins font partie de cette famille.

### 4.3.3 Espace de chemins avec branchements en surface et dans le milieu

Dans cette familles les couplages entre les espaces de chemins auront lieu à travers les sources dans le volume et aux frontières.

#### 4.3.3.1 Conditions pour qu'il y ait des branchements dans le milieu et aux frontières

- Parois diffuses : les parois diffuses entraînent des couplages de la sensibilité avec la luminance et la dérivée spatiale.
- Parois spéculaire : les parois spéculaires engendrent des couplages de la sensibilité avec la dérivée angulaire.
- Milieu semi-transparent : si le milieu est semi-transparent les chemins de dérivée angulaires font intervenir des branches de dérivées spatiales dans le milieu.
- Fonction de phase non isotrope : si la fonction de phase n'est pas isotrope alors les chemins de dérivée angulaire vont brancher dans le milieu.
- Propriétés radiatives du milieu non-homogènes : si les propriétés d'absorption et de diffusion ne sont pas homogène dans l'espace alors les chemins de dérivées spatiales font intervenir des branches de luminance dans le milieu.

Pour illustrer ces espaces de chemins nous allons étudier les branchements qui interviennent le long d'un chemin de dérivée spatiale puis ceux qui interviennent le long d'un chemin de dérivée angulaire. Lors des précédentes illustrations générales nous avons abordé tous les couplages et branchements existants au delà de ces deux derniers, nous nous concentrerons de façon très générale sur ces branchements sans spécifier une géométrie particulière.

#### 4.3.3.2 Les branchements des chemins de la dérivée spatiale

Nous avons vu dans la partie précédente [Sec. 4.2.2](#) que la source volumique de dérivée spatiale était comptabilisée tout le long de son chemin. Dans le modèle de dérivée spatiale décrit en [Sec. 2.2](#) nous montrons que cette source dépend de la luminance et s'écrit

$$\begin{aligned}
\partial_{1,\vec{b}} \mathcal{G}[L(\vec{x}, \vec{\omega}, \vec{\pi})] &= -\partial_{1,\vec{b}} k_a(\vec{x}) L(\vec{x}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) - \partial_{1,\vec{b}} k_d(\vec{x}) L(\vec{x}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \\
&+ \partial_{1,\vec{b}} k_d(\vec{x}) \int_{\Omega'} p_{\Omega'}(\vec{x}, -\vec{\omega}' | -\vec{\omega}) d\vec{\omega}' L(\vec{x}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \\
&+ k_d \int_{\Omega'} \partial_{1,\vec{b}} p_{\Omega'}(\vec{x}, -\vec{\omega}' | -\vec{\omega}) d\vec{\omega}' L(\vec{x}, \vec{\omega}', \vec{\pi})
\end{aligned} \tag{4.25}$$

L'évaluation de cette source en tout point  $\vec{x}$  le long d'un chemin de dérivée spatiale demande donc l'estimation de la luminance dans la direction  $\vec{\omega}$  et dans la direction  $\vec{\omega}'$ . Nous avons vu dans les sections précédentes que, étant donné que la luminance peut s'écrire comme une espérance sur son espace de chemins, il est possible d'utiliser la double randomisation pour échantillonner ces sources lors d'une réalisation d'un chemin de dérivée spatiale. La [Fig. 4.16](#) schématise un chemin de dérivée spatiale (en bleu) réalisé pour estimer la dérivée spatiale en  $(\vec{x}_{obs}, \vec{\omega}_{obs})$ . Sur la longueur du chemin nous échantillonnons une position  $\vec{x}$  et réalisons une branche de luminance dans la direction  $-\vec{\omega}$  (on remonte le chemin de luminance). Cette branche servira à évaluer la contribution de la luminance sur la source de dérivée spatiale, soit  $-(\partial_{1,\vec{b}} k_a(\vec{x}) + \partial_{1,\vec{b}} k_d(\vec{x})) L(\vec{x}, \vec{\omega}, \vec{\pi})$ .



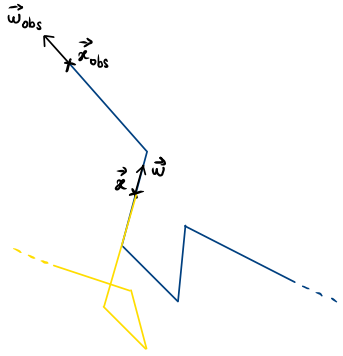


FIGURE 4.16 – Couplages dans le milieu

Sur la Fig. 4.17 nous avons ajouté la deuxième branche donc nous avons besoin pour évaluer le reste de la source volumique, en effet nous devons réaliser une branche de luminance qui commence par l'échantillonnage de la direction  $\vec{\omega}'$  selon la fonction du phase du milieu. Algorithmiquement les

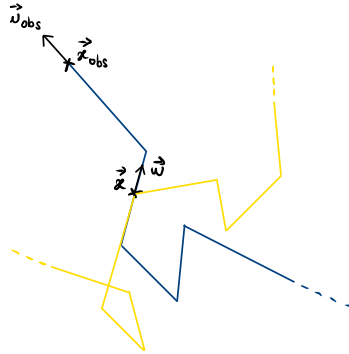


FIGURE 4.17 – Couplages dans le milieu

points de départ  $\vec{x}$  de ces branches sont échantillonnés sur toute la longueur du chemin.

#### 4.3.3.3 Les branchements des chemins de la dérivée angulaire

Quelque soient les propriétés du milieu la dérivée angulaire dépend de la dérivée spatiale dans la direction  $\vec{v}_\Phi$  dans le milieu (voir Sec. 3.3.1.4) :

$$\partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} \mathcal{G}[L(\vec{x}, \vec{\omega}, \vec{\pi})] = \partial_{1, \vec{v}_\Phi} L(\vec{x}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \quad (4.26)$$

La Fig. 4.18 montre la réalisation d'un chemin de dérivée angulaire et la réalisation d'un chemin de dérivée spatiale le long du chemin de la dérivée angulaire.

Si la fonction de phase n'est pas isotrope (et donc indépendante de la direction  $\vec{\omega}$ ) la dérivée angulaire est couplée avec la luminance dans le milieu à travers la source :

$$\partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} \mathcal{G}[L(\vec{x}, \vec{\omega}, \vec{\pi})] = k_d \int_{\Omega'} \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} p_{\Omega'}(\vec{x}, -\vec{\omega}' | -\vec{\omega}) d\vec{\omega}' L(\vec{x}, \vec{\omega}', \vec{\pi}) \quad (4.27)$$

Pour évaluer cette source nous réalisons une branche de luminance qui commence par l'échantillonnage d'une direction de diffusion  $\vec{\omega}'$ . La Fig. 4.19 représente le chemin de dérivée angulaire et l'échantillonnage des sources de dérivée spatiale et de luminance sur son chemin.

Parmi les exemples que nous avons travaillé aucun ne rentre dans cette catégorie, nous ne verrons donc pas d'exemple d'application d'un couplage dans le milieu.

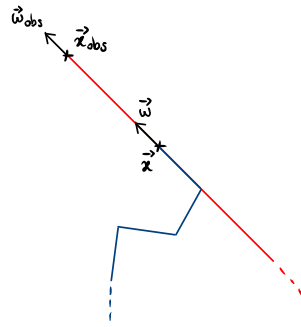


FIGURE 4.18 – Couplages dans le milieu

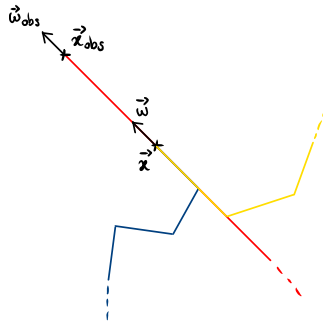


FIGURE 4.19 – Couplages dans le milieu

#### 4.4 Mises en œuvre

Nous en arrivons au stade de la mise en œuvre. Dans les chapitres [Chap. 2](#) et [Chap. 3](#), ainsi qu'au début du présent chapitre, notre intention était avant tout une compréhension du modèle de sensibilité, en particulier de chacun des termes de la condition à la limite et de leur propagation dans le champ. En ouvrant la question de la résolution de ce modèle par la méthode de Monte Carlo, nous avons été amenés à proposer une classification des espaces de chemins résultant des couplages avec les trois autres modèles (pour la luminance et ses deux gradients spatiaux et angulaires). Nous retrouverons ici ces familles lors de la mise en œuvre algorithmique du modèle de sensibilité appliqué à 8 exemples de transfert radiatif différents.

Les 6 premiers exemples permettent de travailler le passage à la pratique : traduction de chacun des termes sur des géométries très simples. Nous identifierons l'espace de chemins de la sensibilité et le poids de Monte-Carlo de façon complète et explicite. Dans l'esprit de ce que nous avons décrit de la méthode de Monte Carlo au [Chap. 1](#), chaque estimation d'une sensibilité passe par l'échantillonnage de  $N$  chemins, et l'estimateur est la moyenne des  $N$  poids  $w$  associés à chaque chemin. Pour chaque exemple nous transcrivons ces chemins et poids au sein d'un *pseudo-algorithme* et testerons la convergence numérique. Pour les exemples 7 et 8, nous décrirons également les chemins et le mode de construction des poids, mais nous le ferons plus rapidement en nous appuyant sur des références à la pratique usuelle de Monte Carlo en transfert radiatif usuel (chemins de réflexion multiple, accumulation des contributions au poids liées aux sources à chaque rencontre avec une paroi, etc). Ces deux derniers exemples ont essentiellement comme rôle de valider que les formulations

intégrales auxquelles conduit notre proposition théorique correspondent bien à des algorithmes de Monte Carlo convergeant dans des configurations qui, bien que géométriquement simples, contiennent les ingrédients pour lesquels nous nous sommes préparés au cours de ce travail : discontinuités, concavités et réflexions multiples.

Il ne nous a pas semblé primordial de proposer, à ce stade, une optimisation algorithmique particulière. Les résultats que nous présentons ne font appel à aucune technique d'amélioration de convergence : aucun effort de reformulation intégrale, aucun échantillonnage par importance. Nous montrons seulement qu'une estimation précise de la sensibilité géométrique peut être obtenue à l'aide d'une simple approche de type "Monte Carlo analogue" (pour l'essentiel un suivi direct des chemins de sensibilité et un suivi inverse des chemins de la luminance et de ses gradients). Il s'agit donc ici seulement de valider la démarche ; la question de l'optimisation des temps de calcul n'est pas même ouverte.

En ce qui concerne la validation, chaque calcul de sensibilité est comparé à une autre estimation, réalisée par différence finie à l'aide de deux calculs de Monte Carlo usuels évaluant l'observable pour deux valeurs différentes du paramètre géométrique (voir [Sec. 4.1](#)). Pour des raisons didactiques, jusqu'ici à chaque fois que nous sommes rentré dans le concret d'une illustration par l'exemple, nous avons utilisé des configurations  $2D$  impliquant des pseudo photons se déplaçant dans un plan, se réfléchissant sur des lignes (au lieu de photons se déplaçant dans un volume et se réfléchissant sur des surfaces). Dans cette dernière partie concernant la mise en oeuvre nous retournerons tout de même au  $3D$  de la physique radiative. Chacun des 8 exemples bidimensionnel sera donc doublé de son pendant tridimensionnel.

**Structuration des exemples** Pour chacun des 8 exemples nous chercherons à estimer la sensibilité  $\mathcal{S} = \partial_{\vec{\pi}} \mathcal{O}$  d'une observable  $\mathcal{O}$  à une déformation de la géométrie. La structure type de présentation d'un exemple contient :

- une présentation de la configuration géométrique et radiative illustrée d'une figure descriptive de la version  $2D$  et de la version  $3D$ ,
- la formulation intégrale et le poids de Monte-Carlo de l'observable en  $2D$  et en  $3D$  ;
- la formulation intégrale et le poids de Monte-Carlo de la sensibilité en  $2D$  et en  $3D$  ;
- les éléments de géométrie nécessaires à la reproduction algorithmique de l'exemple (définition des applications  $\mathcal{Z}$ ,  $\Omega$ , du vecteur de déformation et de ses projections vectorielles) ;
- l'espace de chemins de la sensibilité correspondant à la formulation intégrale (nous y retrouvons les familles de chemins) ;
- le pseudo-algorithme de la sensibilité (sauf pour les Exemples 7 et 8 où l'algorithme n'est donné que dans le texte) ;
- les résultats de l'observable et les résultats de la sensibilité superposés avec ceux des différences finies pour validation.

**Observable et sensibilité** Dans chaque exemple  $2D$  l'observable physique  $\mathcal{O}(\vec{\pi})$  est le flux radiatif incident sur un segment récepteur noir non émetteur. Dans un repère cartésien  $(O, x_1, x_2)$  de vecteurs unitaires  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , ce segment est situé sur la droite  $(O, \vec{e}_1)$ , sa largeur est notée  $c$ , il est centré sur le point  $(x_{c,1}, 0)$  et il est tourné vers les  $x_2$  croissants. En  $3D$   $\mathcal{O}(\vec{\pi})$  sera le flux radiatif incident sur un récepteur carré noir non émetteur. Dans un repère cartésien  $(O, x_1, x_2, x_3)$  de vecteurs unitaires  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , ce carré sera situé dans le plan  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_3)$ , de largeur  $c$ , centré sur le point  $(x_{c,1}, 0, 0)$  et tourné vers les  $x_2$  croissants (voir [Fig. 4.20](#)).

**Échantillonnage sur le support matériel** Ayant fait le choix d'algorithmes de Monte-Carlo analogues directs, nous commençons toujours par l'échantillonnage d'une position et d'une direction sur une surface "émettrice". Pour l'algorithme évaluant l'observable, on part donc des surfaces émettrices comme dans un algorithme de Monte Carlo analogue direct usuel. Pour l'algorithme

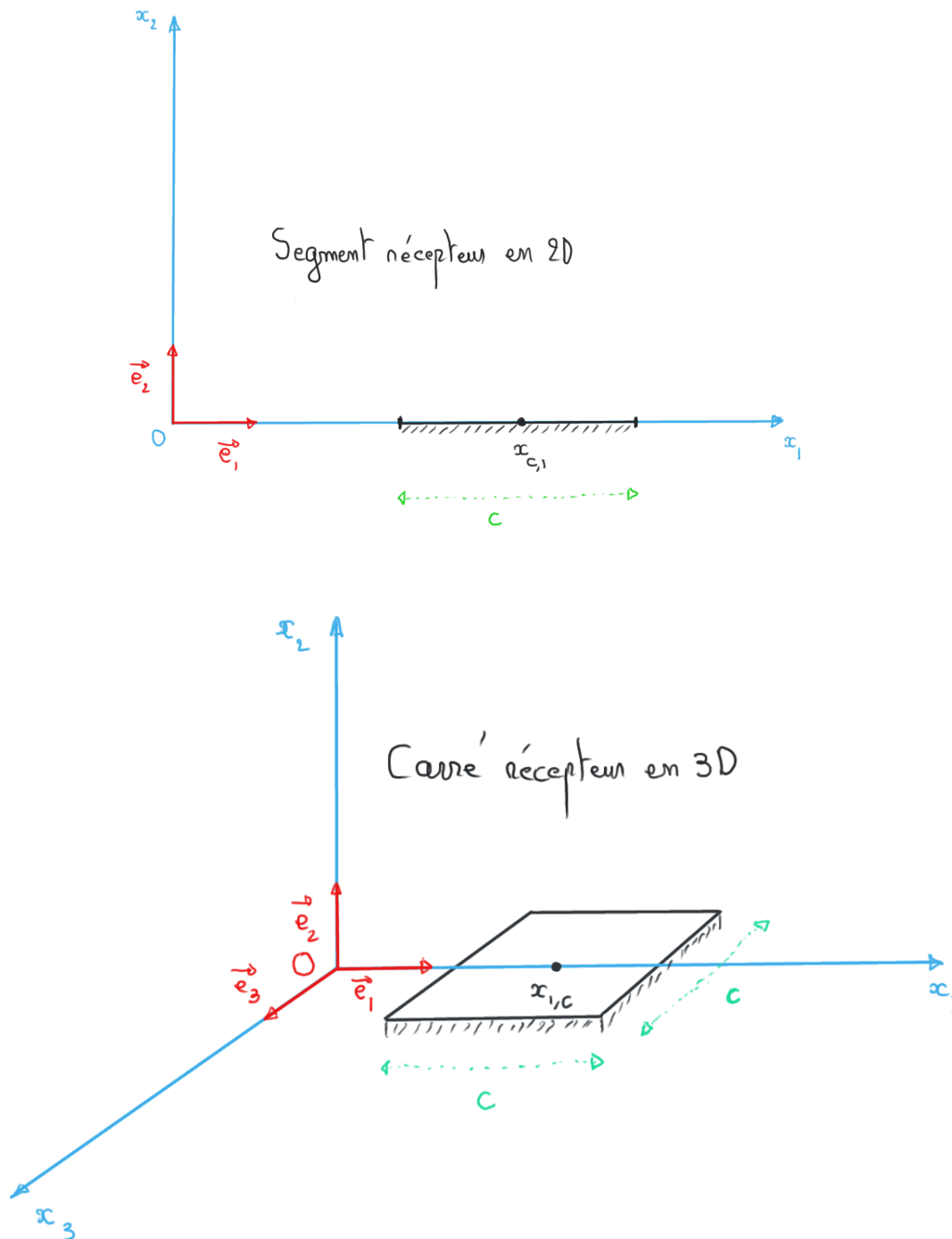


FIGURE 4.20 – Le récepteur utilisé dans les 8 exemples (version 2D et version 3D).

estimant la sensibilité, partir de la surface "émettrice" signifie partir du lieu des sources du modèle de sensibilité découpé (les chemins secondaires assurant le couplage). On échantillonne donc ici une position de départ sur la paroi déformée. Pour réaliser cet échantillonnage, nous proposons de définir les statistiques "d'émission" dans l'espace matériel : une position et une direction d'émission sont échantillonnées sur le support matériel et on construit ensuite leur correspondant dans l'espace géométrique à l'aide des applications  $\mathcal{Z}$  et  $\Omega$ . Autant la coexistence de ces deux représentations (espace matériel, espace géométrique) était fondamentale dans la partie théorique de notre travail, autant son utilisation dans la définition des algorithmes relève ici d'un choix pratique. Il s'est fait naturellement en accord avec notre pratique de Monte-Carlo en relation avec la synthèse d'images où l'espace matériel représente algorithmiquement un espace de référence qui a une image dans un espace "monde", qui est celui dans lequel nous suivons l'évolution des chemins en interaction avec la géométrie. Pour les géométries que nous utiliserons dans les 6 premiers exemples, le support matériel est soit un segment de droite en  $2D$  soit une surface plane parallélépipédique en  $3D$ , parfois horizontaux, parfois verticaux :

- dans le cas horizontal en  $2D$ , le segment appartient à la droite  $U_{2D} : \{\vec{y} \in \mathbb{R}^2 | \vec{y} \cdot \vec{e}_2 = D\}$  avec  $\vec{n} = (0, -1)$  ;
- dans le cas horizontal en  $3D$ , la surface appartient au plan  $U_{3D} : \{\vec{y} \in \mathbb{R}^3 | \vec{y} \cdot \vec{e}_2 = D\}$  avec  $\vec{n} = (0, -1, 0)$  (en  $3D$ ) ;
- dans le cas vertical en  $2D$ , le segment appartient à la droite  $U_{2D} : \{\vec{y} \in \mathbb{R}^2 | \vec{y} \cdot \vec{e}_1 = D\}$  avec  $\vec{n} = (-1, 0)$  ;
- dans le cas vertical en  $3D$ , la surface appartient au plan  $U_{3D} : \{\vec{y} \in \mathbb{R}^3 | \vec{y} \cdot \vec{e}_1 = D\}$  avec  $\vec{n} = (-1, 0, 0)$  (en  $3D$ ).

Dans la suite du document nous utiliserons très librement la correspondance entre les variables du support matériel et celles du support géométrique.

#### 4.4.1 Exemple 1

##### 4.4.1.1 La configuration géométrique et radiative

Le premier exemple appartient à la famille des algorithmes sans branchement que nous avons défini en [Sec. 4.3.1](#). Il est inspiré du travail d'illustration que nous avons proposé au chapitre [Chap. 3](#) pour la translation d'une paroi noire (voir [Sec. 3.4.1](#)). La déformation de la géométrie se résume à la translation d'un segment émetteur noir (nous restons en  $2D$ ) et l'observable est le flux radiatif incident sur le segment récepteur défini précédemment (figure [4.20](#)). Dans le repère cartésien  $(O, x_1, x_2)$  que nous avons choisi, de vecteurs unitaires  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , le segment récepteur est situé sur la droite  $(O, \vec{e}_1)$ . Le segment émetteur est en regard, parallèle au récepteur, tourné vers les  $x_2$  décroissants, de largeur  $D$ , entre les points  $(0, D + \pi)$  et  $(D, D + \pi)$ . La distance entre l'émetteur et le récepteur est  $h(\pi) = D + \pi$  (voir la figure [4.21](#) qui présente également la version  $3D$  du même exemple). Le milieu est transparent et aucun rayonnement n'est incident depuis l'extérieur du système (environnement noir à  $0K$ ). De façon à éviter les discontinuités, la température de l'émetteur noir suit un profil sinusoïdal qui s'annule aux extrémités du segment.

##### 4.4.1.2 L'observable

L'observable de ce problème est le flux radiatif incident au récepteur. Le problème de sensibilité consiste à quantifier l'impact de l'élévation de la paroi noire sur le flux radiatif incident au récepteur. L'algorithme que nous mettons en oeuvre est un algorithme de Monte Carlo très usuel, typiquement pour le calcul d'un facteur de forme. Nous suivons les photons émis par la paroi noire émettrice de façon analogue. Cela signifie que l'observable sera d'abord écrite sous forme intégrale avec une intégrale sur l'émetteur puis une intégrale angulaire depuis chaque point de l'émetteur. Ayant un point sur l'émetteur et une direction d'émission depuis ce point, un chemin est défini. L'étape suivante consiste à introduire les densités de probabilité d'échantillonnage (ici uniforme pour la

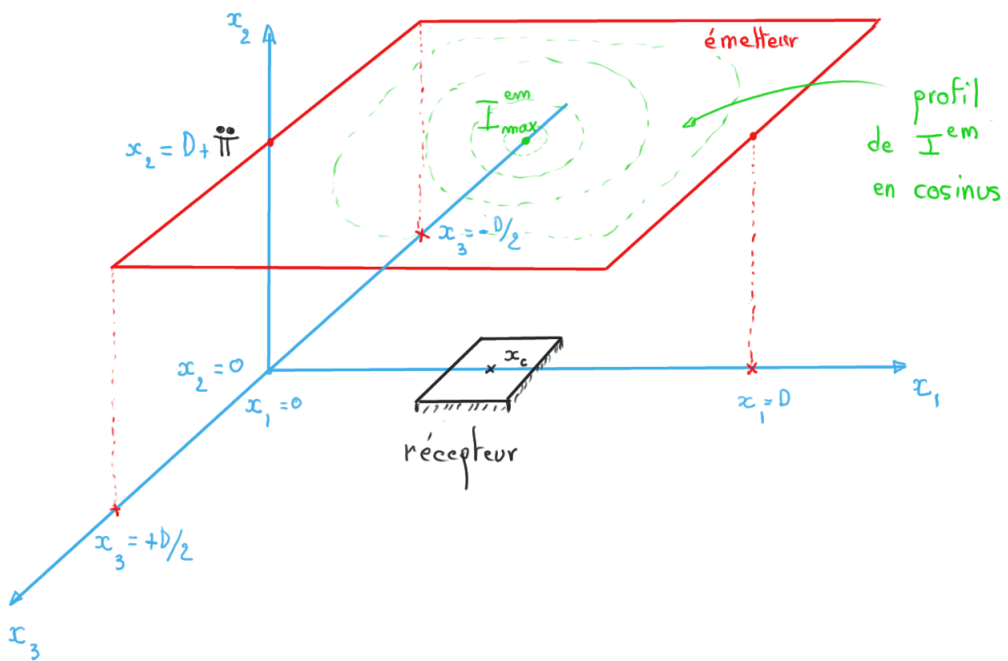
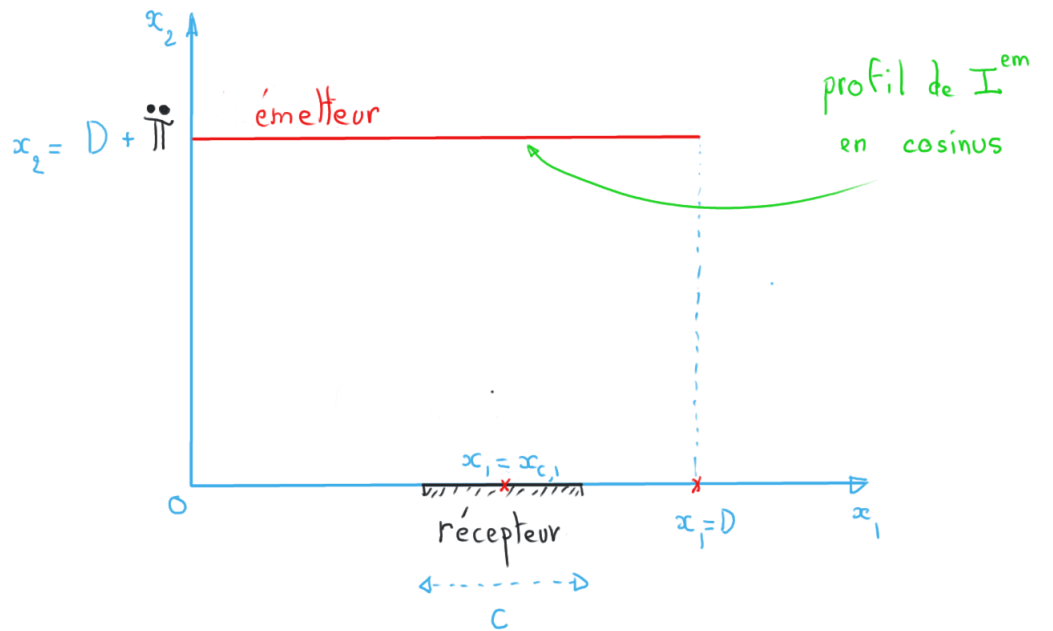


FIGURE 4.21 – L'exemple 1 : version 2D et version 3D.

position et lambertienne pour la direction). On obtient alors une forme intégrale pondérée par les probabilités d'échantillonnage, la grandeur intégrée étant le poids de Monte Carlo.

**Configuration 2D** Le flux émis par la paroi noire émettrice est une intégrale sur les positions, repérées par leurs coordonnées  $y_1$  sur  $[0, D]$ , et une intégrale sur les directions, repérées par l'angle  $\theta$  avec la normale :

$$\int_0^D dy_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta |\vec{n} \cdot \omega| I^{em}(y_1) = D I_{max}^{em}$$

où  $I^{em}$  est la luminance émise par l'émetteur, qui suit un profil en cosinus s'annulant aux bords, et qui est donc une fonction de  $y_1$  :

$$I^{em}(y_1) = \frac{I_{max}^{em}}{2} \left( 1 - \cos\left(2\pi \frac{y_1}{D}\right) \right)$$

Le flux incident sur le récepteur est une fraction de ce flux émis que l'on obtient en regardant, pour chaque position  $y_1$  et chaque angle  $\theta$ , si le chemin correspondant intersecte le récepteur. On obtient alors la formulation intégrale suivante de l'observable, qui définit un algorithme de résolution par Monte-Carlo, avec un échantillonnage uniforme de  $y_1$  (densité de probabilité  $\frac{1}{D}$ ) et un échantillonnage lambertien de  $\theta$  (densité de probabilité  $\frac{\cos\theta}{2}$ ) :

$$\mathcal{O} = \int_0^D \frac{1}{D} dy_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{2} d\theta \hat{w}_{\mathcal{O}}(y_1, \theta, I^{em}(y_1)) \quad (4.28)$$

où la fonction poids de Monte-Carlo  $\hat{w}_{\mathcal{O}}$  est :

$$\hat{w}_{\mathcal{O}}(y_1, \theta, I^{em}(y_1)) = \left[ \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I}} \in \text{récepteur}) 2D I^{em}(y_1) + \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I}} \notin \text{récepteur}) 0 \right] \quad (4.29)$$

où  $\vec{x}_{\mathcal{I}}$  est l'intersection avec la scène de la droite  $(\vec{y}, \vec{\omega})$ .

**Configuration 3D** Le flux émis est donné par :

$$\int_0^D dy_1 \int_{-D/2}^{D/2} dy_3 \int_{2\pi} d\vec{\omega} |\vec{n} \cdot \omega| I^{em}(y_1, y_3) = D^2 \pi \frac{I_{max}^{em}}{4}$$

avec

$$I^{em}(y_1, y_3) = \frac{I_{max}^{em}}{4} \left( 1 - \cos\left(2\pi \frac{y_1}{D}\right) \right) \left( 1 + \cos\left(2\pi \frac{y_3}{D}\right) \right)$$

Pour la formulation intégrale de l'observable résolue par Monte-Carlo l'esprit est exactement le même qu'en 2D. La simple différence vient du fait que l'échantillonnage angulaire se fait maintenant à partir de deux variables aléatoires ( $\theta$  et  $\varphi$ ) et que l'échantillonnage spatial est réalisé sur la surface de l'émetteur :

$$\mathcal{O} = \int_{-D/2}^{D/2} \frac{1}{D} dy_1 \int_0^D \frac{1}{D} dy_3 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos\theta \sin(\theta) d\theta \hat{w}_{\mathcal{O}}(y_1, y_3, \theta, \varphi, I^{em}(y_1, y_3)) \quad (4.30)$$

Dans l'écriture des futures expressions en 3D nous ne détaillerons plus l'échantillonnage angulaire à partir des variables  $\theta$  et  $\varphi$  mais directement à partir de la direction d'émission  $\vec{\omega}$  :

$$\mathcal{O} = \int_0^D \frac{1}{D} dy_1 \int_{-D/2}^{D/2} \frac{1}{D} dy_3 \int_{\mathcal{H}^+} \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{n}}{\pi} d\vec{\omega} \hat{w}_{\mathcal{O}}(y_1, y_3, \vec{\omega}, I^{em}(y_1, y_3)) \quad (4.31)$$

avec  $\mathcal{H}^+$  l'hémisphère sortante orientée par la normale de la paroi et  $\hat{w}_{\mathcal{O}}$  la fonction poids de Monte-Carlo :

$$\hat{w}_{\mathcal{O}}(y_1, y_3, \vec{\omega}, I^{em}(y_1, y_3)) = \left[ \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I}} \in \text{récepteur}) D^2 \pi I^{em}(y_1, y_3) + \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I}} \notin \text{récepteur}) 0 \right] \quad (4.32)$$

#### 4.4.1.3 La sensibilité

Dans cet exemple la source de sensibilité est égale à la condition à la limite de sensibilité que nous avons déterminée de façon analytique dans le chapitre précédent pour la translation d'une paroi noire. Dans la continuité de ce que nous venons d'aborder sur les espaces de chemins nous appelons cette source  $\xi_n$  (voir [Sec. 4.3.1](#)).

**Configuration 2D** L'[Eq. 4.33](#) représente la formulation intégrale de la sensibilité résolue par Monte-Carlo :

$$\mathcal{S} = \int_0^D \frac{1}{D} dy_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{2} d\theta \hat{w}_S(y_1, \theta, \xi_n(y_1)) \quad (4.33)$$

avec  $\hat{w}_S(y_1, \theta, \xi_n(y_1))$  qui représente le poids de Monte-Carlo de la sensibilité :

$$\hat{w}_S(y_1, \theta, \xi_n(y_1)) = \left[ \mathcal{H}(\vec{x}_I \in \text{récepteur}) 2D \xi_n(y_1) + \mathcal{H}(\vec{x}_I \notin \text{récepteur}) 0 \right] \quad (4.34)$$

avec la source de sensibilité

$$\xi_n(y_1) = -\beta (\vec{u} \cdot \vec{e}_1) \frac{I_{max}^{em}}{2} \frac{2\pi}{D} \sin(2\pi \frac{y_1}{D}) \quad (4.35)$$

**Configuration 3D**

$$\mathcal{S} = \int_0^D \frac{1}{D} dy_1 \int_{-D/2}^{D/2} \frac{1}{D} dy_3 \int_{\mathcal{H}^+} \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{n}}{\pi} d\vec{\omega} \hat{w}_S(y_1, y_3, \vec{\omega}, \xi_n(y_1, y_3)) \quad (4.36)$$

avec  $\mathcal{H}^+$  l'hémisphère sortante orientée par la normale de la paroi et  $\hat{w}_S$  la fonction poids de Monte-Carlo :

$$\hat{w}_S(y_1, y_3, \vec{\omega}, \xi_n(y_1, y_3)) = \left[ \mathcal{H}(\vec{x}_I \in \text{récepteur}) D^2 \pi \xi_n(y_1, y_3) + \mathcal{H}(\vec{x}_I \notin \text{récepteur}) 0 \right] \quad (4.37)$$

avec la source de sensibilité

$$\begin{aligned} \xi_n(y_1, y_3) = -D^2 \pi \beta \frac{I_{max}^{em}}{4} \left( (\vec{u} \cdot \vec{e}_1) \frac{2\pi}{D} \sin(2\pi \frac{y_1}{D}) \left[ 1 + \cos(2\pi \frac{y_3}{D}) \right] \right. \\ \left. - (\vec{u} \cdot \vec{e}_3) \frac{2\pi}{D} \sin(2\pi \frac{y_3}{D}) \left[ 1 - \cos(2\pi \frac{y_1}{D}) \right] \right) \end{aligned} \quad (4.38)$$

#### 4.4.1.4 Éléments de géométrie

La position  $\vec{y}$  en 2D :

$$\vec{y} = \mathcal{Z}(\vec{y}, \ddot{\pi}) = (y_1, D + \ddot{\pi})$$

La position  $\vec{y}$  en 3D :

$$\vec{y} = (y_1, D + \ddot{\pi}, y_3)$$

La direction en 2D et en 3D :

$$\vec{\omega} = \Omega(\vec{\omega}, \vec{y}, \ddot{\pi}) = \vec{\omega}$$

Le vecteur de déformation spatiale (2D et 3D) :

$$\vec{v}_\chi = (0, 1); \quad \vec{v}_\chi = (0, 1, 0)$$

La normale (2D et 3D) :

$$\vec{n} = (0, -1); \quad \vec{n} = (0, -1, 0)$$

Les projections :

$$\beta = \|\vec{v}_\chi - \alpha \vec{\omega}\|; \quad \vec{u} = \frac{\vec{v}_\chi - \alpha \vec{\omega}}{\|\vec{v}_\chi - \alpha \vec{\omega}\|}; \quad \alpha = \frac{\vec{v}_\chi \cdot \vec{n}}{\vec{\omega} \cdot \vec{n}}$$

Étant donné les applications  $\mathcal{Z}$  et  $\Omega$  on trouve  $\vec{u} = \vec{u}$ .



#### 4.4.1.5 Espace de chemins de la sensibilité

La configuration radiative et géométrique de cet exemple le placent dans la catégorie des configurations qui génèrent des chemins sans branchement et donc qui appartiennent à la première famille d'espaces de chemins.

Dans cet exemple, en  $2D$ , l'espace de chemins est  $[0, D] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  avec  $[0, D]$  le domaine de définition de la variable  $y_1$  et  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  le domaine d'intégration de la variable  $\theta$  (à partir de laquelle on détermine la direction d'émission  $\vec{\omega}$ ). Nous avons vu dans les parties précédentes que, pour cette famille de chemin, l'espace de chemins de sensibilité était strictement identique à l'espace de chemins de la luminance à condition qu'il n'y ait pas de discontinuité. La conséquence algorithmique est que la sensibilité  $\mathcal{S}$  et l'observable  $\mathcal{O}$  partageant les mêmes variables aléatoires. Nous pourrions partir des mêmes échantillons des variables aléatoires pour construire les deux poids de Monte-Carlo et estimer  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{S}$  simultanément. En effet nous avons vu dans les paragraphes précédents que les formulations intégrales et les poids de Monte-Carlo de l'observable et de la sensibilité sont strictement identiques. Dans les deux cas seules les sources sont différentes ( $I^{em}$  pour l'observable et  $\xi_n$  pour la sensibilité). La Fig. 4.22 représente la réalisation d'un chemin parmi ceux de l'espace des chemins possibles. La

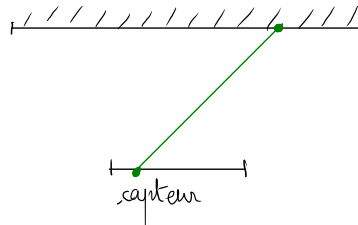


FIGURE 4.22 – Exemple 1 : translation de l'émetteur, profil de  $I^{em}$  sinusoïdal (pas de discontinuité).

conséquence du choix algorithmique, qui consiste à échantillonner la surface de la paroi émettrice, est qu'il existe des chemins qui ne rejoindront jamais le capteur. Ainsi la convergence des résultats de l'observable et de la sensibilité ne sera pas optimale.

#### 4.4.1.6 Algorithme

La traduction algorithmique de l'Eq. 4.33 est réalisée dans le pseudo algorithme Al. 1. Il détaille l'estimation numérique de la sensibilité, les couleurs permettent d'identifier l'opération algorithmique à la fonction mathématique de la formulation intégrale.

$$\mathcal{S} = \int_D \frac{1}{D} dy_1 \int_{\mathcal{H}^+} \frac{\cos(\theta)}{2} d\theta \hat{w}_S(y_1, \theta, \xi_n(y_1))$$

$$\hat{w}_S(y_1, \theta, \xi_n(y_1)) = \begin{bmatrix} \mathcal{H}(\vec{x}_I \in \text{récepteur}) & 2D \xi_n + \mathcal{H}(\vec{x}_I \notin \text{récepteur}) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xi_n(y_1) = -\beta (\vec{u} \cdot \vec{e}_1) \frac{I_{max}^{em}}{2} \frac{2\pi}{D} \sin(2\pi \frac{y_1}{D})$$

---

**Algorithme 1** Exemple 1 : échantillonnage du chemin et calcul du poids en  $2D$ .

---

```

1 : for  $i = 0$  to  $i < N$  do
2 :   Définition de  $\vec{v}_\chi, \vec{n}$  et  $\vec{\pi}$ 
3 :   Éch.  $y_1 \in [0; D]$  ▷ échantillonnage d'une position sur l'émetteur
4 :    $\vec{y} \leftarrow \mathcal{Z}(\vec{y}, \vec{\pi})$ 
5 :   Éch. angle  $\theta$  entre  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  ▷ échantillonnage d'un angle d'émission
6 :   Calcul direction  $\vec{\omega}$  à partir de  $\theta$ , et  $\vec{n}$ 
7 :    $\vec{\omega} \leftarrow \vec{\omega}$ 
8 :    $\alpha \leftarrow \frac{\vec{v}_\chi \cdot \vec{n}}{\vec{\omega} \cdot \vec{n}}$  ▷ Calcul des projections de  $\vec{v}_\chi$ 
9 :    $\beta \leftarrow \|\vec{v}_\chi - \alpha \vec{\omega}\|$ 
10 :   $\vec{u} \leftarrow \frac{\vec{v}_\chi - \alpha \vec{\omega}}{\beta}$ 
11 :   $\vec{u} \leftarrow \Omega^{-1}(\vec{u})$ 
12 :  Détermination de l'intersection  $\vec{x}_I$ 
13 :  if  $\vec{x}_I \in \text{récepteur}$  then ▷ l'intersection est sur le récepteur
14 :     $\omega_O \leftarrow D I_{max}^{em} (1 - \cos(2\pi \frac{y_1}{D}))$  ▷ poids de l'observable
15 :     $\omega_S \leftarrow -D \beta (\vec{u} \cdot \vec{e}_1) I_{max}^{em} 2\pi \sin(2\pi \frac{y_1}{D})$  ▷ poids de la sensibilité
16 :  else ▷ l'intersection n'est pas sur le récepteur
17 :     $\omega_O \leftarrow 0$ 
18 :     $\omega_S \leftarrow 0$ 
19 :  end if
20 :   $W_O \leftarrow W_O + \omega_O$  ▷ somme pour l'espérance de l'observable
21 :   $V_O \leftarrow V_O + \omega_O^2$  ▷ idem pour la variance
22 :   $W_S \leftarrow W_S + \omega_S$  ▷ somme pour l'espérance de la sensibilité
23 :   $V_S \leftarrow V_S + \omega_S^2$  ▷ idem pour la variance
24 : end for
25 :  $\mathcal{O} \leftarrow \frac{W_O}{N}$  ▷ Estimation de l'observable et de son erreur
26 :  $Var_{\mathcal{O}} \leftarrow \frac{V_O}{N} - \mathcal{O}^2$ 
27 :  $Err_{\mathcal{O}} \leftarrow \frac{\sqrt{Var_{\mathcal{O}}}}{\sqrt{N}}$ 
28 :  $\partial_{\vec{\pi}} \mathcal{O} \leftarrow \frac{W_S}{N}$  ▷ Estimation de la sensibilité et de son erreur
29 :  $Var_S \leftarrow \frac{V_S}{N} - \mathcal{S}^2$ 
30 :  $Err_S \leftarrow \frac{\sqrt{Var_S}}{\sqrt{N}}$ 

```

---

### 4.4.1.7 Résultat

Les résultats issus de la simulation sont présentés par la Fig. 4.23. Pour chacune des hauteurs données par  $\tilde{\pi}$ , l'observable  $\mathcal{O}(\tilde{\pi})$  est calculée ainsi que la sensibilité correspondante. Nous avons calculé la dérivée de l'observable par rapport à la hauteur à partir des différences finies et comparé nos résultats avec les résultats obtenus pour la sensibilité. Pour  $\mathcal{O}$  comme pour  $\mathcal{S}$ , les barres d'erreur indiquent l'erreur standard évaluée lors du calcul de Monte Carlo. Elles nous informent sur les écarts types des estimateurs, qui selon le théorème de la limite centrale ont des distributions gaussiennes. On peut donc s'attendre à ce que des erreurs de l'ordre de 2 fois l'écart type soient observées dans environ 95% des cas et que 3 fois l'écart type soit quasiment impossible. Les écarts observés entre le calcul de sensibilité et la différence finie sont en accord avec cette prédiction.

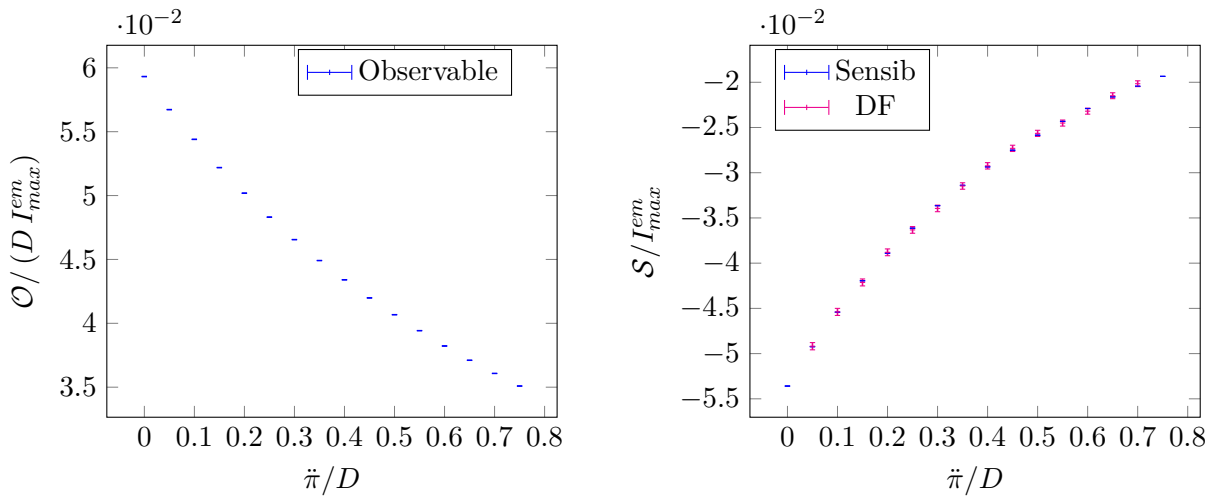


FIGURE 4.23 – Résultats pour l'exemple 1 en 2D. Flux reçu ( $\mathcal{O}$ ) par le capteur (à gauche) et sensibilité ( $\mathcal{S}$ ) du flux au déplacement de l'émetteur (à droite, calculs MC et différences finies).  $N = 10^8$ ,  $c = D/4$ ,  $x_{c,1} = D/2$ .

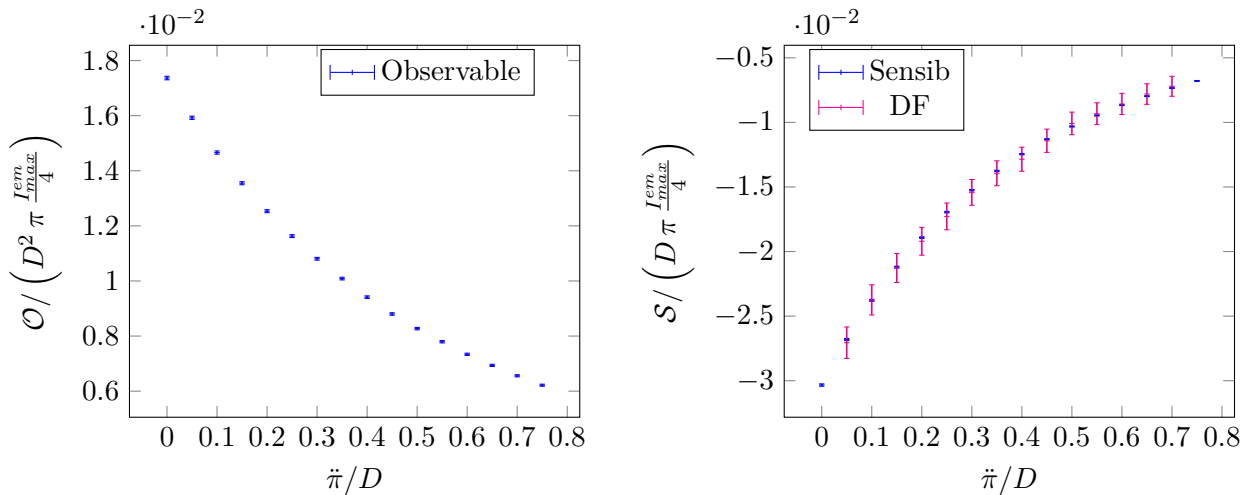


FIGURE 4.24 – Résultats pour l'exemple 1 en 3D. Flux reçu ( $\mathcal{O}$ ) par le capteur (à gauche) et sensibilité ( $\mathcal{S}$ ) du flux au déplacement de l'émetteur (à droite, calculs MC et différences finies).  $N = 10^8$ ,  $c = D/4$ ,  $x_{c,1} = D/2$ .

## 4.4.2 Exemple 2

### 4.4.2.1 La configuration géométrique et radiative

Pour notre second exemple, la seule différence par rapport à l'exemple 1 est que la luminance émise  $I^{em}$  est uniforme le long de l'émetteur (voir la Fig. 4.25 qui présente également la version 3D du même exemple).

### 4.4.2.2 L'observable

L'observable de ce problème est strictement identique à celui de l'exemple 1. La seule différence entre les deux problèmes concerne la source radiative émise par la paroi du haut qui est maintenant uniforme. Dans le poids de Monte-Carlo (Eq. 4.29)  $I^{em}$  est maintenant uniforme sur la paroi (il n'est plus une fonction de  $y_1$ ).

### 4.4.2.3 La sensibilité

Nous avons décrit cet exemple en détail dans le chapitre précédent (Sec. 3.6) lorsque nous avons introduit les discontinuités. Nous avons identifié que la condition à la limite de sensibilité contenait deux sources ponctuelles situées aux extrémités de la paroi émettrice (la source de sensibilité de la surface est nulle). Par rapport à l'exemple 1 la source de sensibilité n'est donc plus située sur l'intégralité de la surface mais uniquement à ses bornes.

**Configuration 2D** La formulation intégrale de la sensibilité résolue par Monte-Carlo est :

$$\mathcal{S} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{2} d\theta \left( \hat{w}_S(\vec{p}_1, \theta, \xi_{p_1}) + \hat{w}_S(\vec{p}_2, \theta, \xi_{p_2}) \right) \quad (4.39)$$

avec  $\vec{p}_1 = (0, D + \pi)$  la borne de gauche de la paroi émettrice, et  $\vec{p}_2 = (D, D + \pi)$  la borne de droite de la paroi émettrice. Les poids de Monte-Carlo sont

$$\hat{w}_S(\vec{p}_1, \vec{\omega}, \xi_{p_1}) = 2\xi_{p_1} \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I},1} \in \text{récepteur}) \quad (4.40)$$

et

$$\hat{w}_S(\vec{p}_2, \vec{\omega}, \xi_{p_2}) = 2\xi_{p_2} \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I},2} \in \text{récepteur}) \quad (4.41)$$

où  $\vec{x}_{\mathcal{I},1}$  est l'intersection avec la scène de la droite  $(\vec{p}_1, \vec{\omega})$  et  $\vec{x}_{\mathcal{I},2}$  est l'intersection avec la scène de la droite  $(\vec{p}_2, \vec{\omega})$ . Les sources de sensibilité sont

$$\xi_{p_1} = -\beta(\vec{u}, \vec{e}_1) I^{em} \quad (4.42)$$

et

$$\xi_{p_2} = \beta(\vec{u}, \vec{e}_1) I^{em} \quad (4.43)$$

**Configuration 3D** Dans cette configuration les discontinuités interviennent le long des arrêtes de la paroi émettrice. Algorithmiquement cela demande un traitement supplémentaire par rapport à la configuration 2D car il ne faut plus sommer les contributions de deux bornes ( $\vec{p}_1$  et  $\vec{p}_2$  en 2D) mais il faut sommer les contributions de tous les points appartenant à la ligne du contour  $\mathcal{C}$  de la paroi (en rouge sur la Fig. 4.25). D'un point de vue algorithmique cela revient à échantillonner une position sur cette ligne et la formulation intégrale de la sensibilité résolue par Monte-Carlo devient

$$\mathcal{S} = \int_{\mathcal{C}} p_{\mathcal{C}} d\vec{y} \int_{2\pi} \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{n}}{\pi} d\vec{\omega} \hat{w}_S(\vec{y}, \vec{\omega}, \xi_p(\vec{y})) \quad (4.44)$$

Si on échantillonne le contour  $\mathcal{C}$  de façon uniforme, alors  $p_{\mathcal{C}} = \frac{1}{4D}$  et

$$\hat{w}_S(\vec{y}, \vec{\omega}, \xi_p(\vec{y})) = 4D\pi \xi_p(\vec{y}) \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I}} \in \text{récepteur}) \quad (4.45)$$

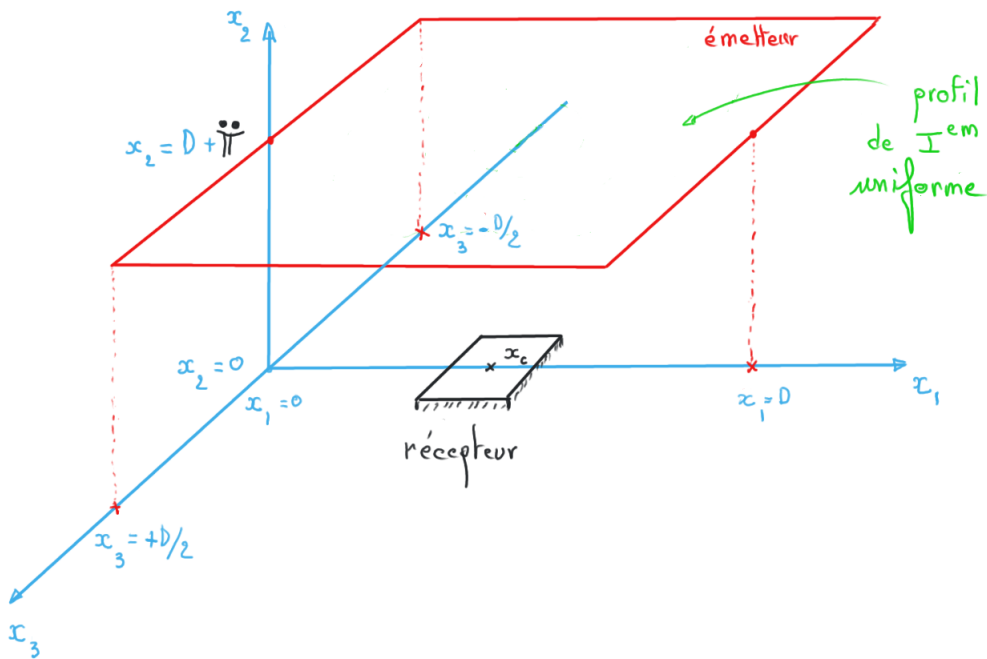
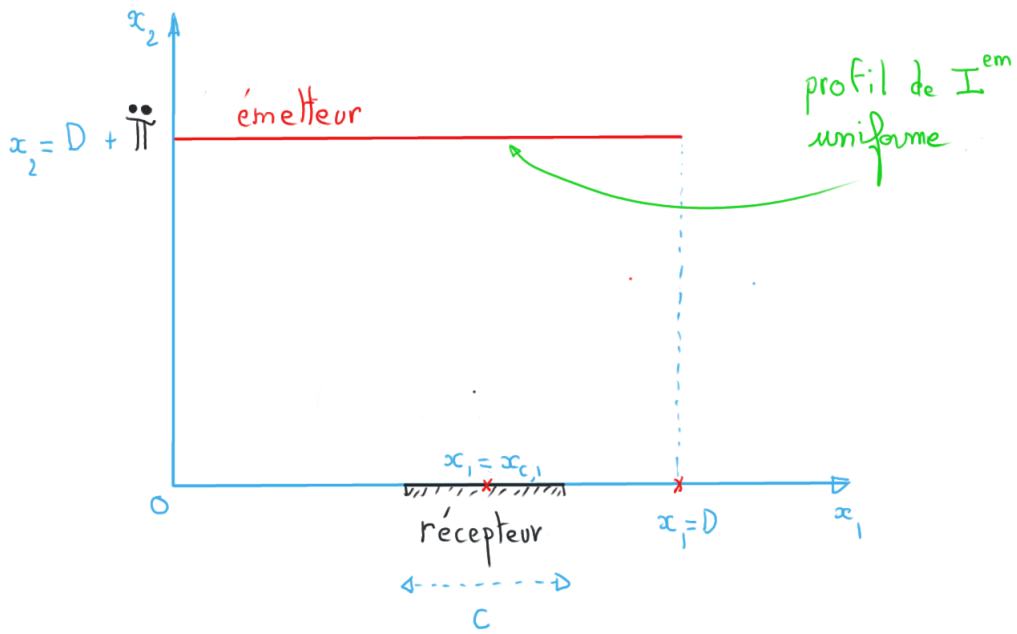


FIGURE 4.25 – L'exemple 2 : version 2D et version 3D.

avec

$$\xi_p(\vec{y}) = -\mathcal{H}(\vec{y} \in \mathcal{C}_1) \beta (\vec{u} \cdot \vec{e}_1) I^{em} \quad (4.46)$$

$$+\mathcal{H}(\vec{y} \in \mathcal{C}_2) \beta (\vec{u} \cdot \vec{e}_1) I^{em} \quad (4.47)$$

$$-\mathcal{H}(\vec{y} \in \mathcal{C}_3) \beta (\vec{u} \cdot \vec{e}_3) I^{em} \quad (4.48)$$

$$+\mathcal{H}(\vec{y} \in \mathcal{C}_4) \beta (\vec{u} \cdot \vec{e}_3) I^{em} \quad (4.49)$$

où  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  et  $\mathcal{C}_4$  sont les quatre côtés du contour de l'émetteur :

- $\mathcal{C}_1$  parallèle à  $(O, \vec{e}_3)$  en  $y_1 = 0$ ,
- $\mathcal{C}_2$  parallèle à  $(O, \vec{e}_3)$  en  $y_1 = D$ ,
- $\mathcal{C}_3$  parallèle à  $(O, \vec{e}_1)$  en  $y_3 = -D/2$ ,
- $\mathcal{C}_4$  parallèle à  $(O, \vec{e}_1)$  en  $y_3 = D/2$ .

#### 4.4.2.4 Éléments de géométrie

La position  $\vec{y}$  en  $2D$  :

$$\vec{y} = \mathcal{Z}(\vec{y}, \vec{\pi}) = (y_1, D + \vec{\pi})$$

La position  $\vec{y}$  en  $3D$  :

$$\vec{y} = (y_1, D + \vec{\pi}, y_3)$$

La direction en  $2D$  et en  $3D$  :

$$\vec{\omega} = \Omega(\vec{\omega}, \vec{y}, \vec{\pi}) = \vec{\omega}$$

Le vecteur de déformation spatiale ( $2D$  et  $3D$ ) :

$$\vec{v}_\chi = (0, 1); \quad \vec{v}_\chi = (0, 1, 0)$$

La normale ( $2D$  et  $3D$ ) :

$$\vec{n} = (0, -1); \quad \vec{n} = (0, -1, 0)$$

Les projections :

$$\beta = \|\vec{v}_\chi - \alpha \vec{\omega}\|; \quad \vec{u} = \frac{\vec{v}_\chi - \alpha \vec{\omega}}{\|\vec{v}_\chi - \alpha \vec{\omega}\|}; \quad \alpha = \frac{\vec{v}_\chi \cdot \vec{n}}{\vec{\omega} \cdot \vec{n}}$$

Étant donné l'application  $\Omega$  on trouve  $\vec{u} = \vec{u}$ .

#### 4.4.2.5 Espace de chemins de la sensibilité

En  $2D$  l'espace de chemins de la sensibilité n'est pas identique à celui de l'observable. En effet, même s'il n'y a pas de couplage de la sensibilité avec d'autres modèles, les discontinuités du problème génèrent des sources ponctuelles (elles sont linéiques en  $3D$ ). Sur la **Fig. 4.26** nous avons dessiné

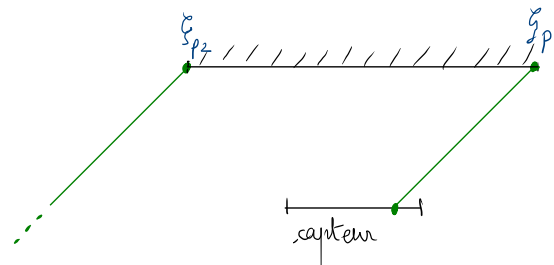


FIGURE 4.26 – Exemple 2 : translation de l'émetteur,  $I^{em}$  uniforme (discontinuités).

une réalisation des chemins émis depuis les bornes de la paroi. Comme pour l'exemple précédent

---

tous n'arriveront pas sur le récepteur. Dans le cas des discontinuités l'utilisation d'un algorithme analogue direct est triviale. Nous suivons les sources émises à partir de deux positions données. En revanche pour utiliser un algorithme réciproque (c'est à dire partir d'une position sur le récepteur et remonter vers les sources) il faudrait modifier l'algorithme pour forcer l'échantillonnage des sources.

#### 4.4.2.6 Algorithme

À partir de cette écriture de l'espérance l'Al. 2 décrit les étapes de l'estimation de la sensibilité pour la configuration 2D.

$$\mathcal{S} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta)}{2} d\theta \left( \hat{w}_S(\vec{p}_1, \theta, \xi_{p_1}) + \hat{w}_S(\vec{p}_2, \theta, \xi_{p_2}) \right) \quad (4.50)$$

$$\hat{w}_S(\vec{p}_1, \theta, \xi_n) = 2\xi_{p_1} \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I},1} \in \text{récepteur}) \quad (4.51)$$

$$\hat{w}_S(\vec{p}_2, \theta, \xi_n) = 2\xi_{p_2} \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I},2} \in \text{récepteur}) \quad (4.52)$$

$$\xi_{p_1} = -\beta(\vec{u} \cdot \vec{e}_1) I^{em} \quad (4.53)$$

$$\xi_{p_2} = \beta(\vec{u} \cdot \vec{e}_1) I^{em} \quad (4.54)$$

---

**Algorithme 2** Exemple 2 : échantillonnage du chemin et calcul du poids en 2D.

---

```

1 : for  $i = 0$  to  $i < N$  do
2 :   Définition de  $\vec{v}_\chi, \vec{n}$ 
3 :   Définition des positions  $\vec{y}_{p_1}$  et  $\vec{y}_{p_2}$ 
4 :   Éch. angle  $\theta$  entre  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  ▷ échantillonnage d'une direction d'émission
5 :   Calcul direction  $\vec{\omega}$  à partir de  $\theta, \vec{n}$ 
6 :    $\alpha \leftarrow \frac{\vec{v}_\chi \cdot \vec{n}}{\vec{\omega} \cdot \vec{n}}$  ▷ Calcul des projections de  $\vec{v}_\chi$ 
7 :    $\beta \leftarrow \|\vec{v}_\chi - \alpha \vec{\omega}\|$ 
8 :    $\vec{u} \leftarrow \frac{\vec{v}_\chi - \alpha \vec{\omega}}{\beta}$ 
9 :    $\vec{u} \leftarrow \Omega^{-1}(\vec{u})$ 
10 :   Détermination des intersections  $\vec{x}_{\mathcal{I},1}$  et  $\vec{x}_{\mathcal{I},2}$ .
11 :   if  $\vec{x}_{\mathcal{I},1} \in \text{récepteur}$  then ▷ la première intersection est sur le récepteur
12 :      $\omega_{p_1} \leftarrow -2 \beta(\vec{u} \cdot \vec{e}_1) I^{em}$ 
13 :   else ▷ la première intersection n'est pas sur le récepteur
14 :      $\omega_{p_1} \leftarrow 0$ 
15 :   end if
16 :   if  $\vec{x}_{\mathcal{I},2} \in \text{récepteur}$  then ▷ la seconde intersection est sur le récepteur
17 :      $\omega_{p_2} \leftarrow 2 \beta(\vec{u} \cdot \vec{e}_1) I^{em}$ 
18 :   else ▷ la seconde intersection n'est pas sur le récepteur
19 :      $\omega_{p_2} \leftarrow 0$ 
20 :   end if
21 :    $\omega_S \leftarrow \omega_{p_1} + \omega_{p_2}$ 
22 :   Calcul des sommes  $W_S$  et  $V_S$ 
23 : end for
24 :  $\mathcal{S} \leftarrow \frac{W_S}{N}$  ▷ Estimation de la sensibilité et de son erreur
25 :  $Var_S \leftarrow \frac{V_S}{N} - \mathcal{S}^2$ 
26 :  $Err_S \leftarrow \frac{\sqrt{Var}}{\sqrt{N}}$ 

```

---



L'Al. 3 décrit les étapes de l'estimation de la sensibilité pour la configuration 3D.

$$S = \int_C p_C d\vec{y} \int_{2\pi} \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{n}}{\pi} d\vec{\omega} \hat{w}_S(\vec{y}, \vec{\omega}, \xi_p(\vec{y})) \quad (4.55)$$

$$\hat{w}_S(\vec{y}, \vec{\omega}, \xi_p(\vec{y})) = 4D\pi \xi_p(\vec{y}) \mathcal{H}(\vec{x}_I \in \text{récepteur}) \quad (4.56)$$

$$\xi_p(\vec{y}) = -\mathcal{H}(\vec{y} \in \mathcal{C}_1) \beta(\vec{u} \cdot \vec{e}_1) I^{em} + \mathcal{H}(\vec{y} \in \mathcal{C}_2) \beta(\vec{u} \cdot \vec{e}_1) I^{em} - \mathcal{H}(\vec{y} \in \mathcal{C}_3) \beta(\vec{u} \cdot \vec{e}_3) I^{em} + \mathcal{H}(\vec{y} \in \mathcal{C}_4) \beta(\vec{u} \cdot \vec{e}_3) I^{em} \quad (4.57)$$

---

**Algorithme 3** Exemple 2 : échantillonnage du chemin et calcul du poids en 3D.

---

```

1 : for  $i = 0$  to  $i < N$  do
2 :   Définition de  $\vec{v}_\chi, \vec{n}$ 
3 :   Ech. d'une position  $\vec{y}$  sur le périmètre de la source           ▷ échantillonnage d'une position
   d'émission
4 :    $\vec{y} \leftarrow \mathcal{Z}(\vec{y}, \pi)$ 
5 :   Ech. angle  $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$  et  $\varphi \in [0; 2\pi]$            ▷ échantillonnage d'une direction d'émission
6 :   Calcul direction  $\vec{\omega}$  à partir de  $\theta, \varphi$  et  $\vec{n}$ 
7 :    $\alpha \leftarrow \frac{\vec{v}_\chi \cdot \vec{n}}{\vec{\omega} \cdot \vec{n}}$            ▷ Calcul de la projection de  $\vec{v}_\chi$ 
8 :    $\beta \leftarrow \|\vec{v}_\chi - \alpha \vec{\omega}\|$ 
9 :    $\vec{u} \leftarrow \frac{\vec{v}_\chi - \alpha \vec{\omega}}{\beta}$ 
10 :   $\vec{u} \leftarrow \Omega^{-1}(\vec{u})$ 
11 :  Détermination de l'intersection  $\vec{x}_I$ 
12 :  if ( $\vec{x}_I \in \text{récepteur}$ ) then
13 :    if  $\vec{y} \in \mathcal{C}_1$  then
14 :       $\omega_S \leftarrow -4D\pi \beta(\vec{u} \cdot \vec{e}_1) I^{em}$ 
15 :    else if  $\vec{y} \in \mathcal{C}_2$  then
16 :       $\omega_S \leftarrow 4D\pi \beta(\vec{u} \cdot \vec{e}_1) I^{em}$ 
17 :    else if  $\vec{y} \in \mathcal{C}_3$  then
18 :       $\omega_S \leftarrow 4D\pi \beta(\vec{u} \cdot \vec{e}_3) I^{em}$ 
19 :    else if  $\vec{y} \in \mathcal{C}_4$  then
20 :       $\omega_S \leftarrow -4D\pi \beta(\vec{u} \cdot \vec{e}_3) I^{em}$ 
21 :    end if
22 :  else           ▷ l'intersection n'est pas sur le récepteur
23 :     $\omega_S \leftarrow 0$ 
24 :  end if
25 :  Calcul des sommes  $W_S$  et  $V_S$ 
26 : end for
27 :  $\mathcal{S} \leftarrow \frac{W_S}{N}$            ▷ Estimation de la sensibilité et de son erreur
28 :  $Var_S \leftarrow \frac{V_S}{N} - \mathcal{S}^2$ 
29 :  $Err_S \leftarrow \frac{\sqrt{Var}}{\sqrt{N}}$ 

```

---

## 4.4.2.7 Résultat

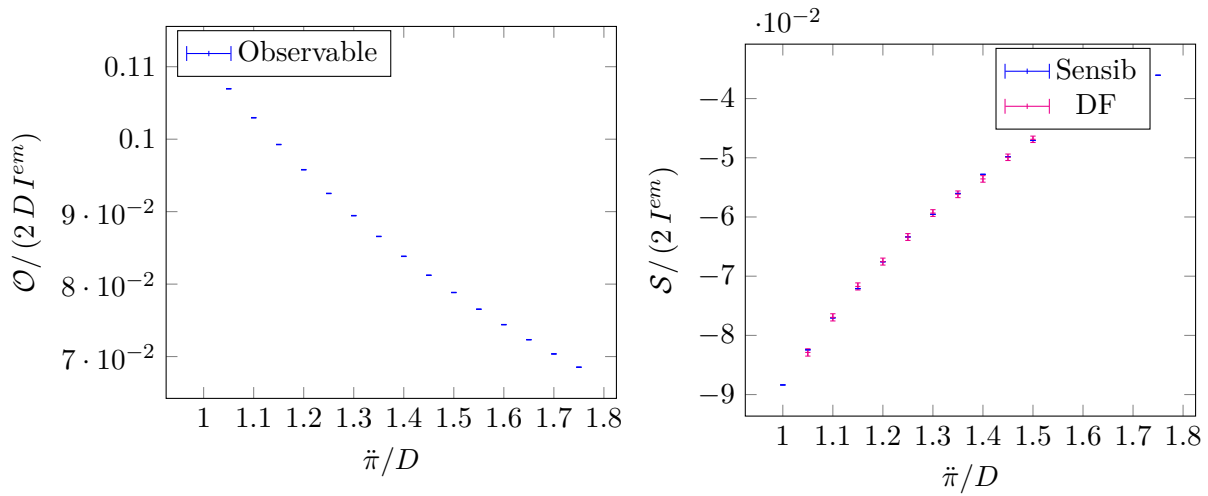


FIGURE 4.27 – Résultats pour l'exemple 2 en  $2D$ . Flux reçu ( $\mathcal{O}$ ) par le capteur (à gauche) et sensibilité ( $\mathcal{S}$ ) du flux au déplacement de l'émetteur (à droite, calculs MC et différences finies).  $N = 10^8$ ,  $c = D/4$ ,  $x_{c,1} = D/2$ .

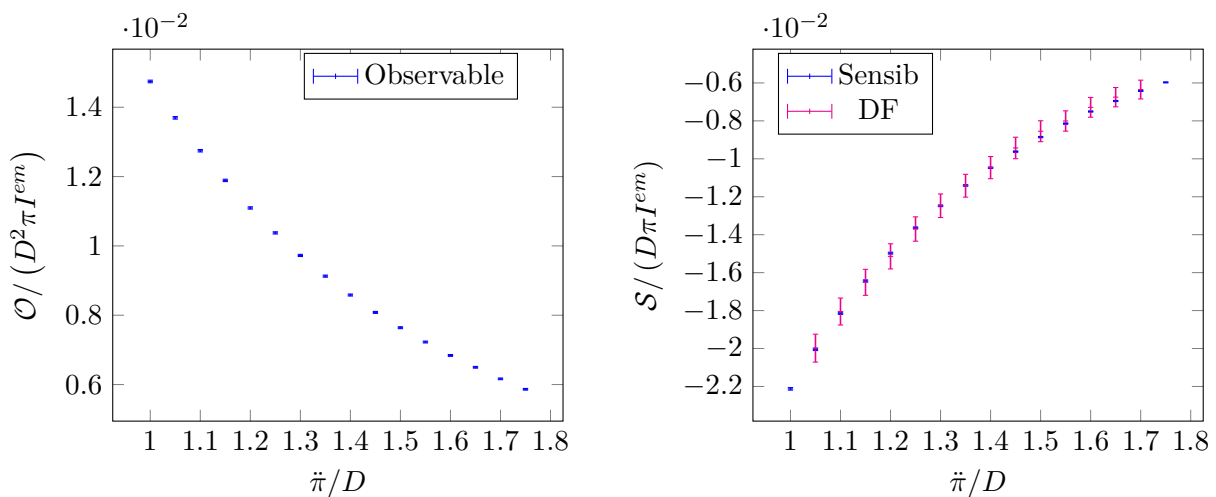


FIGURE 4.28 – Résultats pour l'exemple 2 en  $3D$ . Flux reçu ( $\mathcal{O}$ ) par le capteur (à gauche) et sensibilité ( $\mathcal{S}$ ) du flux au déplacement de l'émetteur (à droite, calculs MC et différences finies).  $N = 10^7$ ,  $c = D/4$ ,  $x_{c,1} = D/2$ .

Sur la Fig. 4.36 les résultats concordent bien avec les différences finies même si nous voyons que au niveau du point d'inflexion de la sensibilité les différences finies ne sont pas très précises. D'autres calculs ont été réalisés avec des pas de discrétisation plus petit, lors de ces calculs les barres d'erreurs sont plus grandes et nous ne gagnons pas en précision. Les barres d'erreurs de la sensibilité en revanche sont très petite, les convergences de calcul sont bien en dessous de 1% d'erreur relative.

### 4.4.3 Exemple 3

#### 4.4.3.1 La configuration géométrique

Notre troisième exemple est très proche de l'exemple 1 : le même segment récepteur, et le même segment émetteur de longueur  $D$  (avec un profil sinusoïdal de  $I^{em}$  qui permet l'absence de discontinuités). La seule différence est dans la déformation : l'émetteur subit une rotation d'angle  $\varphi(\tilde{\pi}) = \tilde{\pi}$  autour du point  $(0, D)$  (voir la figure 4.29 qui présente également la version 3D du même exemple).

#### 4.4.3.2 L'observable et la sensibilité

L'observable de ce problème est toujours le flux radiatif incident au récepteur. En revanche cette fois ci le problème de sensibilité consiste à quantifier l'impact de la rotation de la paroi noire émettrice sur l'observable. La formulation intégrale de l'observable et son poids de Monte-Carlo sont strictement identiques à ceux de l'exemple 1. En effet l'échantillonnage des variables aléatoires étant réalisé sur la position et la direction du support matériel, indépendant de la rotation, il n'y a aucune différence algorithmique. L'unique différence entre cet exemple et l'exemple 1 est d'ordre géométrique avec la définition des variables  $\vec{y}$  et  $\vec{\omega}$  que nous indiquons ci-dessous.

#### 4.4.3.3 Éléments de géométrie

La position sur la paroi en 2D :

$$\vec{y} = \mathcal{Z}(\vec{y}, \tilde{\pi}) = \begin{pmatrix} y_1 \cos(\tilde{\pi}) + D \sin(\tilde{\pi}) \\ y_1 \sin(\tilde{\pi}) - D \cos(\tilde{\pi}) \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

La position sur la paroi en 3D :

$$\vec{y} = \mathcal{Z}(\vec{y}, \tilde{\pi}) = \begin{pmatrix} y_1 \cos(\tilde{\pi}) + D \sin(\tilde{\pi}) \\ y_1 \sin(\tilde{\pi}) - D \cos(\tilde{\pi}) \\ y_3 \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

La direction sur la paroi en 2D :

$$\vec{\omega} = \Omega(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) = \begin{pmatrix} \cos(\tilde{\pi}) & -\sin(\tilde{\pi}) \\ \sin(\tilde{\pi}) & \cos(\tilde{\pi}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

La direction sur la paroi en 3D :

$$\vec{\omega} = \Omega(\vec{y}, \vec{\omega}, \tilde{\pi}) = \begin{pmatrix} \cos(\tilde{\pi}) & -\sin(\tilde{\pi}) & 0 \\ \sin(\tilde{\pi}) & \cos(\tilde{\pi}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ -\cos(\theta) \\ \sin(\theta) \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

L'axe de la rotation est donnée par  $\vec{a} = (0, 0, 1)$ .

Le vecteur de déformation spatiale (2D et 3D) :

$$\vec{v}_\chi = (-y_1 \sin(\tilde{\pi}), y_1 \cos(\tilde{\pi})); \quad \vec{v}_\chi = (-y_1 \sin(\tilde{\pi}), y_1 \cos(\tilde{\pi}), 0)$$

La normale (2D et 3D) :

$$\vec{n} = (\sin(\tilde{\pi}), -\cos(\tilde{\pi})); \quad \vec{n} = (\sin(\tilde{\pi}), -\cos(\tilde{\pi}), 0)$$

Les projections :

$$\beta = \|\vec{v}_\chi - \alpha \vec{\omega}\|; \quad \vec{u} = \frac{\vec{v}_\chi - \alpha \vec{\omega}}{\|\vec{v}_\chi - \alpha \vec{\omega}\|}; \quad \alpha = \frac{\vec{v}_\chi \cdot \vec{n}}{\vec{\omega} \cdot \vec{n}}$$

Étant donné l'application  $\Omega$  on trouve  $\vec{u} = \Omega_{\vec{y}, \tilde{\pi}}^{-1} \vec{u}$  en prenant la matrice de rotation inverse appliquée au vecteur  $\vec{u}$ .

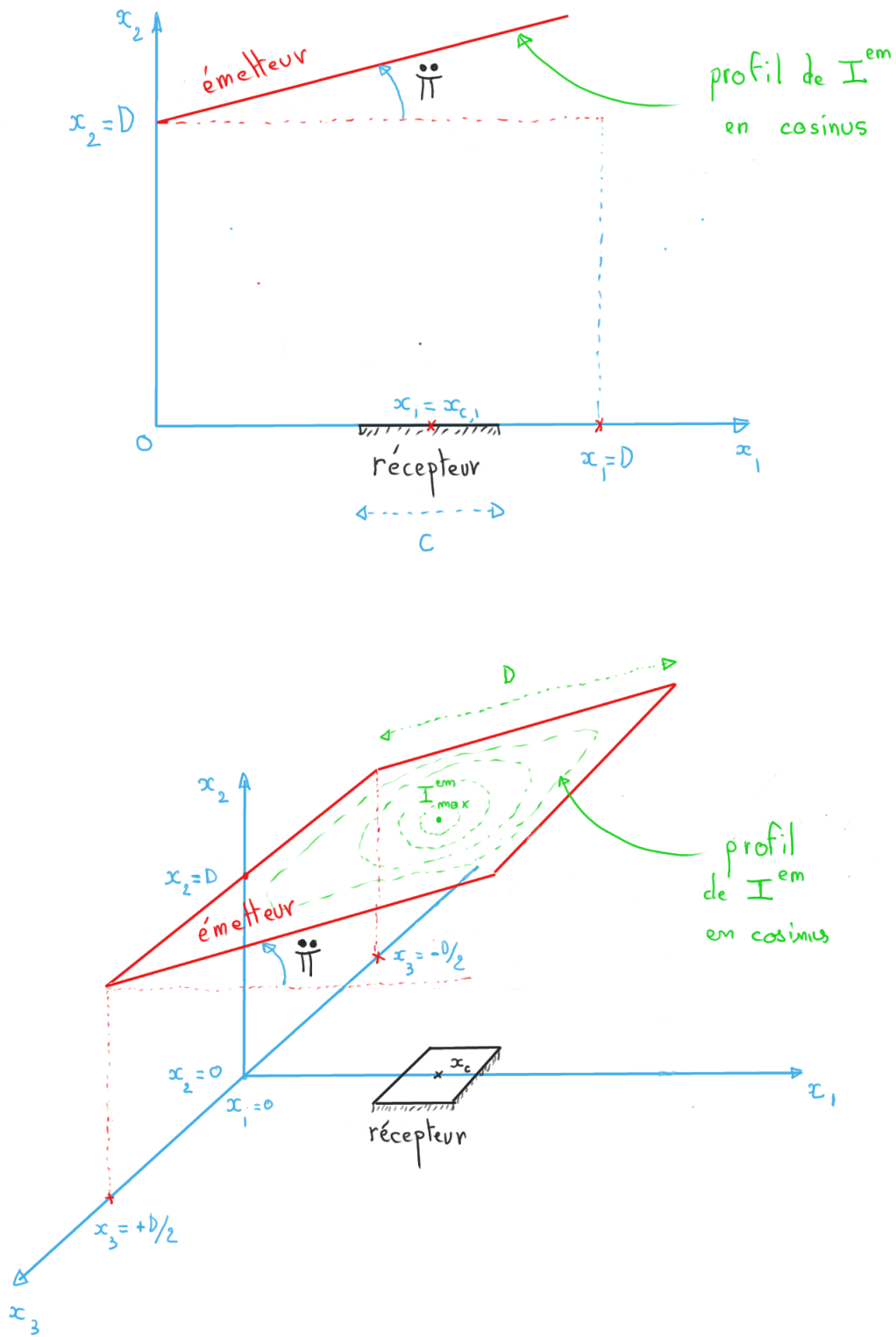


FIGURE 4.29 – L'exemple 3 : version 2D et version 3D.

#### 4.4.3.4 Espace de chemins de la sensibilité

Dans cet exemple l'espace des chemins est identique à celui de l'exemple 1. Une réalisation d'un de ces chemins est schématisée sur la Fig. 4.30.

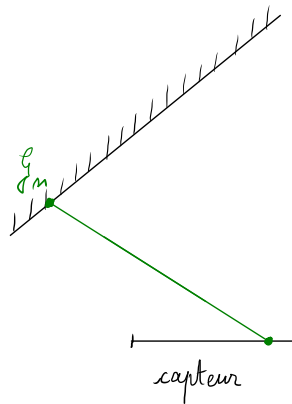


FIGURE 4.30 – Exemple 3 : rotation de l'émetteur, profil de  $I^{em}$  sinusoïdal (pas de discontinuité).

#### 4.4.3.5 Algorithme

L'algorithme de cet exemple est identique à celui de l'exemple 1 à l'exception des lignes 4, 7 et 11 pour lesquelles les applications  $\mathcal{Z}$ ,  $\Omega$  et  $\Omega_{\vec{y}, \vec{\pi}}^{-1}$  sont différentes.

## 4.4.3.6 Résultat

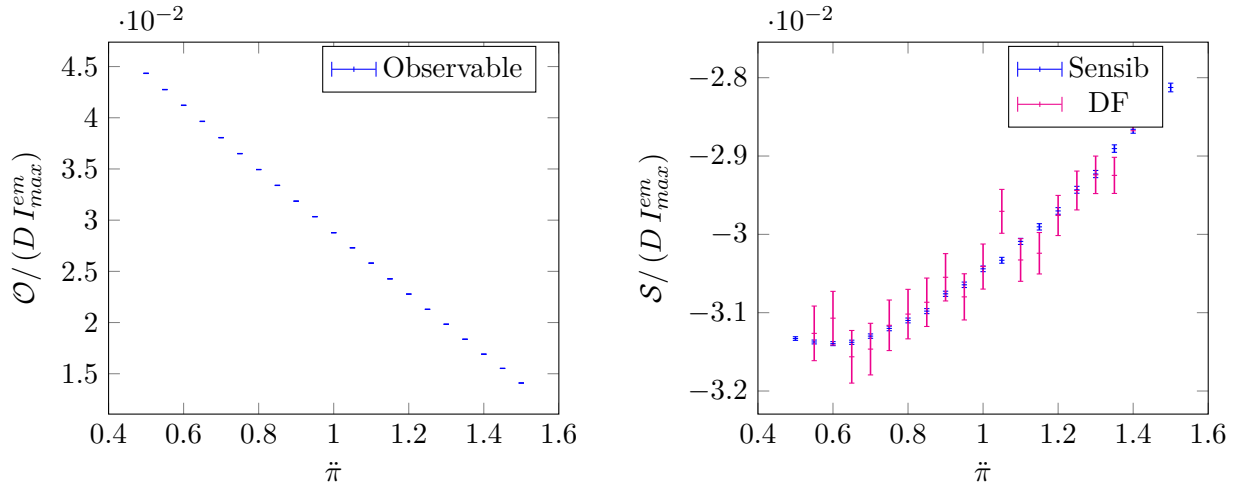


FIGURE 4.31 – Résultats pour l'exemple 3 en  $2D$ . Flux reçu ( $\mathcal{O}$ ) par le capteur (à gauche) et sensibilité ( $\mathcal{S}$ ) du flux à la rotation de l'émetteur (à droite, calculs MC et différences finies).  $N = 10^8$ ,  $c = D/4$ ,  $x_{c,1} = D/2$ .

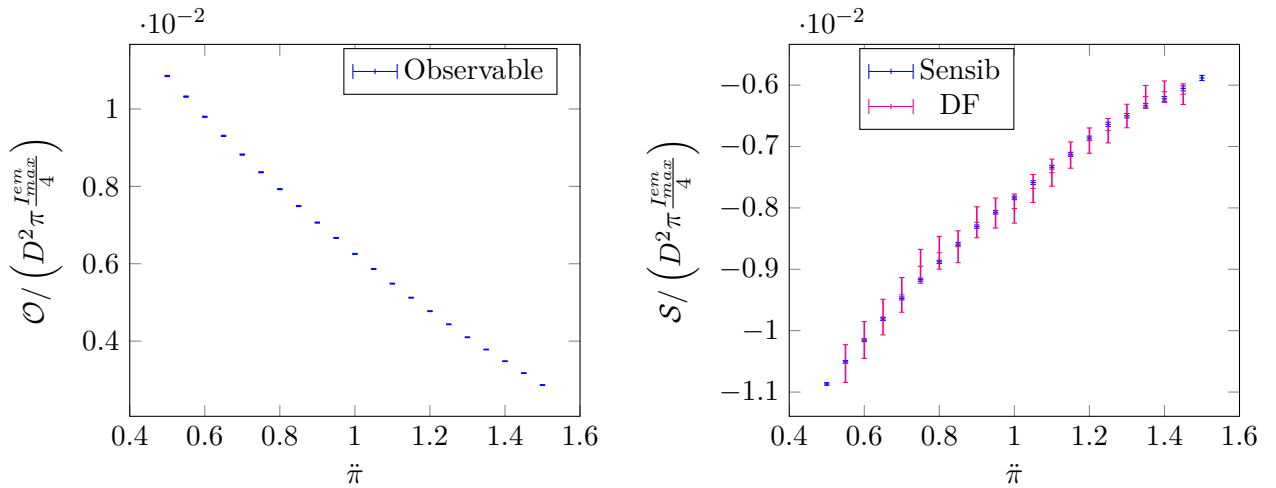


FIGURE 4.32 – Résultats pour l'exemple 3 en  $3D$ . Flux reçu ( $\mathcal{O}$ ) par le capteur (à gauche) et sensibilité ( $\mathcal{S}$ ) du flux à la rotation de l'émetteur (à droite, calculs MC et différences finies).  $N = 10^8$ ,  $c = D/4$ ,  $x_{c,1} = D/2$ .

#### 4.4.4 Exemple 4

##### 4.4.4.1 La configuration géométrique et radiative

Pour le quatrième exemple, la seule différence avec l'exemple 3 est que la luminance émise  $I^{em}$  est uniforme le long de l'émetteur (voir la figure 4.33 qui présente également la version 3D du même exemple).

##### 4.4.4.2 L'observable et la sensibilité

Dans cet exemple l'observable et la déformation sont les mêmes que celles de l'exemple 3. La formulation intégrale de l'observable est également identique à celle de l'exemple à la différence de la valeur de la source radiative  $I^{em}$  qui est homogène sur la paroi. Étant donné que la valeur de  $I^{em}$  est homogène sur la paroi la source de sensibilité est nulle sur la surface et est localisée sur les bords de la paroi émettrice. Comme pour l'exemple 2, les sources de sensibilité seront émises depuis les points  $\vec{p}_1$  et  $\vec{p}_2$  en 2D et depuis la ligne  $\mathcal{C}$  du contour de la paroi en 3D. Les formulations intégrales de la sensibilité et les poids de Monte-Carlo sont strictement identiques à ceux de l'exemple 2.

##### 4.4.4.3 Éléments de géométrie

Étant donné que la transformation de la paroi est identique à celle de l'exemple 3, les éléments géométriques sont également strictement identiques.

Pour résumer, la formulation intégrale et les poids de Monte-Carlo sont les mêmes que ceux de l'exemple 2 et le vecteur de déformation et les applications  $\mathcal{Z}$  et  $\Omega$  sont les mêmes que ceux de l'exemple 3.

##### 4.4.4.4 Espace de chemins de la sensibilité

De la même façon que l'exemple 3 est le pendant de l'exemple 1, celui-ci est le pendant de l'exemple 2. L'espace de chemins est donc identique à celui de l'exemple 2, une réalisation de chemins suivis depuis les bornes de la paroi en 2D est illustrée dans la Fig. 4.34.

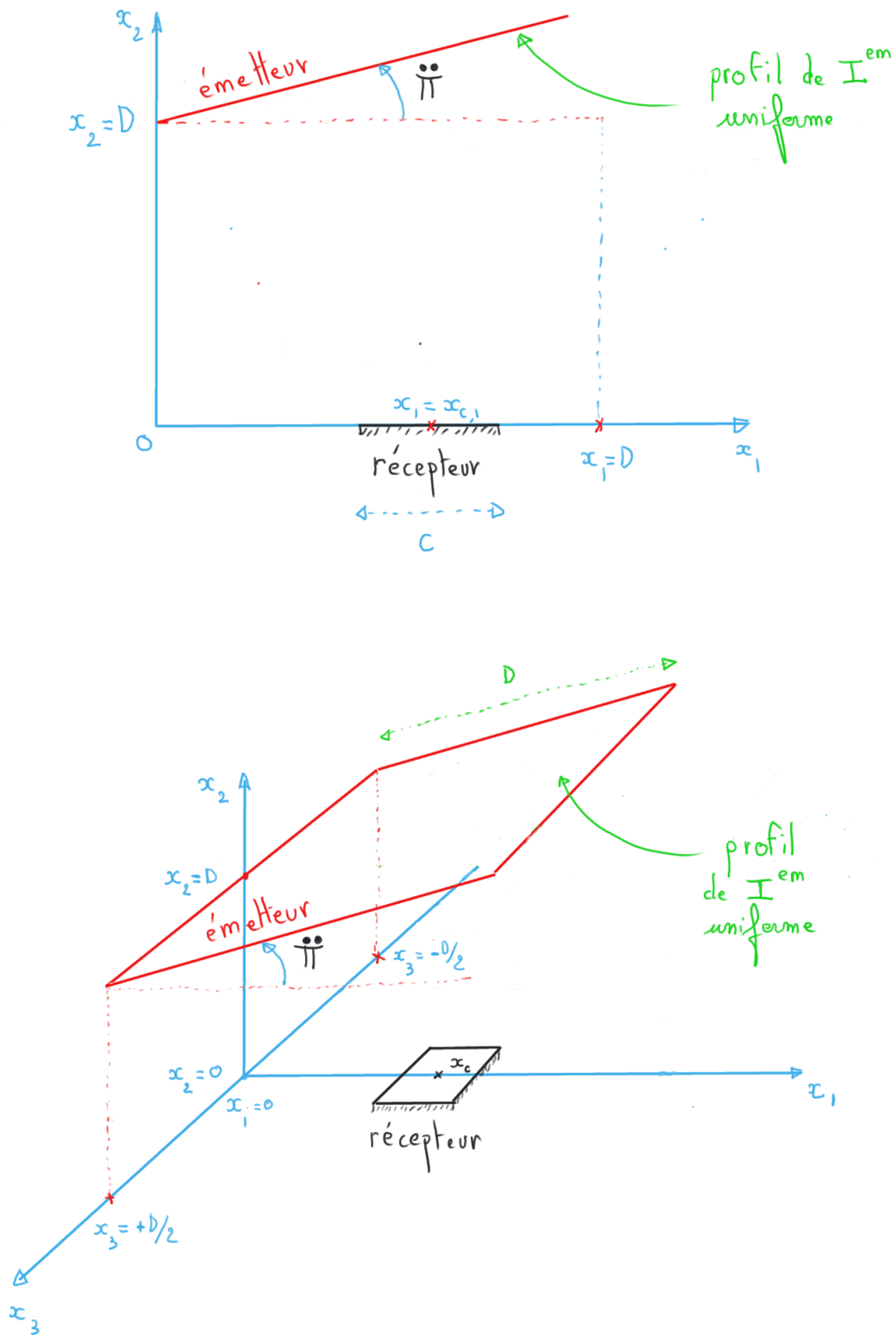


FIGURE 4.33 – L'exemple 4 : version 2D et version 3D.



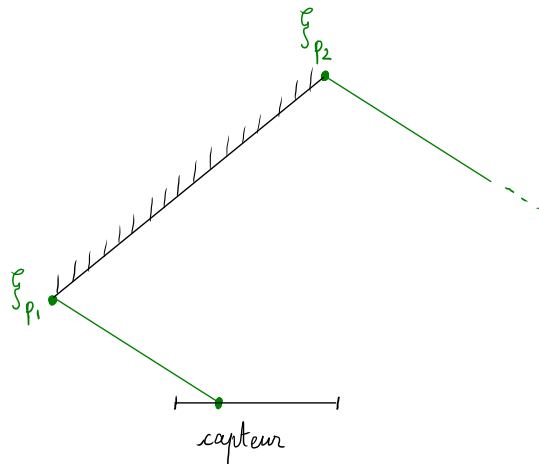


FIGURE 4.34 – Exemple 4 : rotation de l'émetteur,  $I^{em}$  uniforme (discontinuités).

#### 4.4.4.5 Algorithme

Les algorithmes  $2D$  et  $3D$  de cet exemple sont identiques à ceux de l'exemple 2 à l'exception des lignes 3, 5 et 9 en  $2D$  et des lignes 4, 6 et 10 en  $3D$  pour lesquelles les applications  $\mathcal{Z}$ ,  $\Omega$  et  $\Omega_{\vec{y}, \vec{\pi}}^{-1}$  sont différentes.

## 4.4.4.6 Résultat

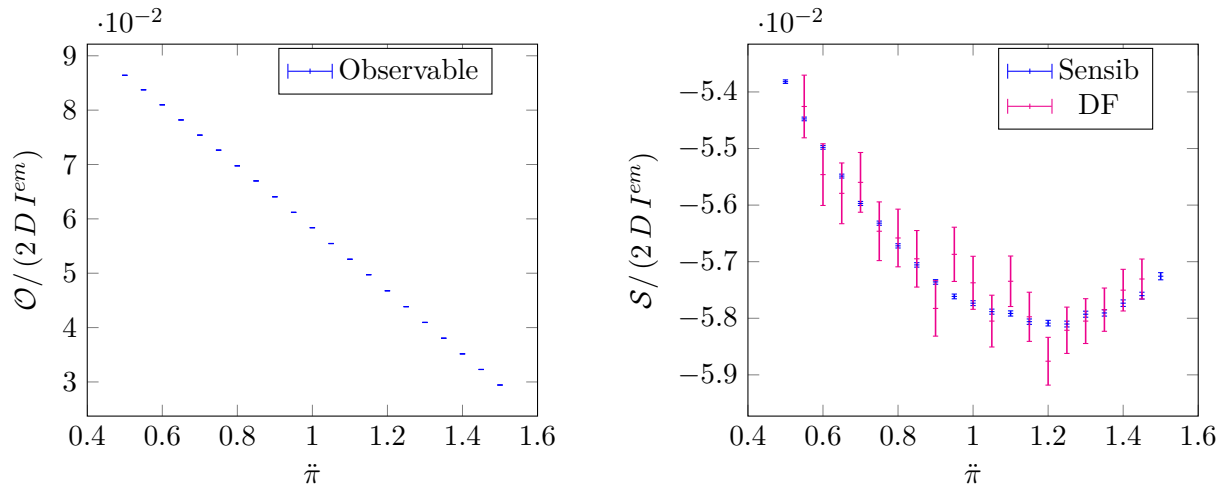


FIGURE 4.35 – Résultats pour l'exemple 4 en  $2D$ . Flux reçu ( $\mathcal{O}$ ) par le capteur (à gauche) et sensibilité ( $\mathcal{S}$ ) du flux à la rotation de l'émetteur (à droite, calculs MC et différences finies).  $N = 10^8$ ,  $c = D/4$ ,  $x_{c,1} = D/2$ .

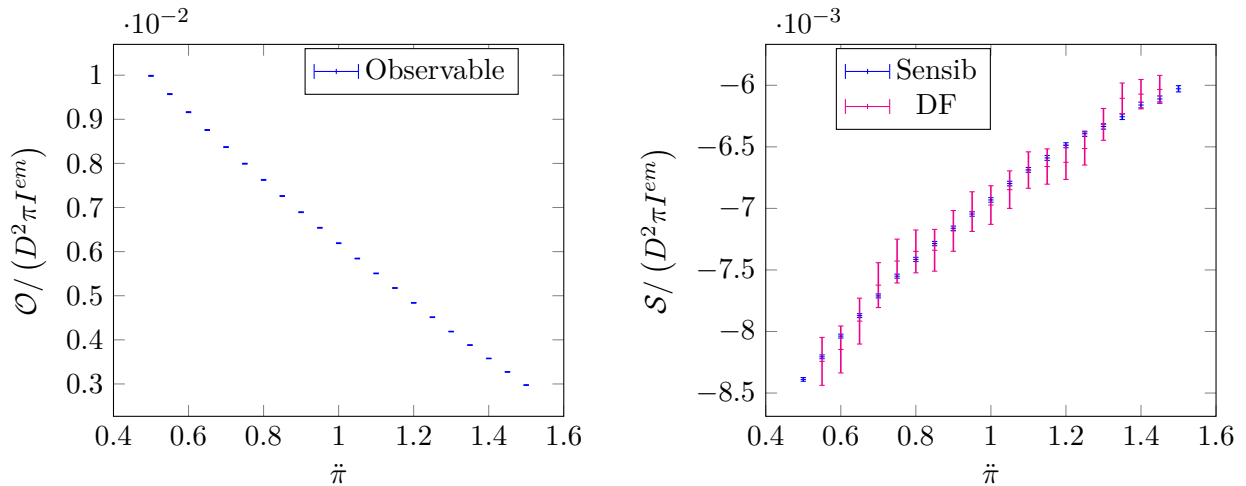


FIGURE 4.36 – Résultats pour l'exemple 4 en  $3D$ . Flux reçu ( $\mathcal{O}$ ) par le capteur (à gauche) et sensibilité ( $\mathcal{S}$ ) du flux à la rotation de l'émetteur (à droite, calculs MC et différences finies).  $N = 10^8$ ,  $c = D/4$ ,  $x_{c,1} = D/2$ .

### 4.4.5 Exemple 5

#### 4.4.5.1 La configuration géométrique

Avec ce cinquième exemple nous reprenons la translation de l'exemple 1, mais le segment qui se déplace est maintenant un réflecteur spéculaire. La source du rayonnement vient d'un émetteur parallèle à  $(0, \vec{e}_2)$ , entre les points  $(D, 0)$  et  $(D, D/2)$ , orienté vers les  $x_1$  décroissants (voir la figure 4.37 qui présente également la version  $3D$  du même exemple). De façon à éviter les discontinuités, la réflectivité du segment réflecteur suit un profil sinusoïdal qui s'annule aux extrémités du segment. Pour un point de coordonnées  $(x_1, D + \bar{\pi})$  sur le réflecteur, la réflectivité est  $\rho(x_1) = \frac{\rho_{max}}{2} (1 - \cos(2\pi \frac{x_1}{D}))$ . La température du réflecteur est  $0K$  de façon à ce qu'il ne soit source d'aucun rayonnement. Toujours pour éviter les discontinuités, la température de l'émetteur noir suit un profil sinusoïdal qui s'annule aux extrémités du segment. Pour un point de coordonnées  $(D, x_2)$  sur l'émetteur, la luminance émise est  $I^{em}(x_2) = \frac{I_{max}^{em}}{2} (1 - \cos(2\pi \frac{x_2}{D/2}))$ .

#### 4.4.5.2 L'observable

L'observable de ce problème est le flux radiatif incident au récepteur. Cette fois la paroi émettrice est la paroi verticale, d'un point de vu de Monte-Carlo nous continuerons à échantillonner les sources radiatives et à suivre leur transport dans la géométrie. Pour cet exemple cela reviendra à échantillonner une position et une direction d'émission sur l'émetteur, puis à suivre la destination des chemins émis jusqu'au récepteur.

Dans la configuration  $2D$ , si le chemin arrive directement sur le récepteur, la valeur retenue dans le poids de Monte-Carlo sera  $2\frac{D}{2}I^{em}(y_2)$ . En revanche si le chemin est dirigé vers le réflecteur et qu'il est réfléchi (de façon spéculaire) vers le récepteur, alors la valeur retenue dans le poids de Monte-Carlo sera  $2\frac{D}{2}I^{em}(y_2)\rho(y_1)$  avec  $y_1$  le point d'intersection avec la paroi réfléchissante. Dans la configuration  $3D$  le principe est le même, les valeurs de  $I^{em}$  et de  $\rho$  étant déterminées à partir des positions  $(y_2, y_3)$  sur l'émetteur et  $(y_1, y_3)$  sur le réflecteur.

#### 4.4.5.3 La sensibilité

Cet exemple est le premier qui implique une paroi déformable réfléchissante. Nous avons vu dans la partie précédente sur les espaces de chemins que ce type de configuration appartenait à la famille des chemins qui branchent uniquement à la surface. Nous nous attendons donc à rencontrer un couplage avec la luminance et avec le gradient spatial de la luminance au niveau de la source sensibilité (au sens du problème de sensibilité découplé). Cette source de sensibilité, située sur la paroi réfléchissante, est ici nommée  $\xi_{spec}$  car la réflexion est spéculaire. Dans un premier temps, l'algorithme de Monte-Carlo que nous réalisons est construit comme si nous connaissions cette source de sensibilité, c'est à dire que nous échantillonons une position et une direction sur la paroi réfléchissante et nous vérifions si le chemin intercepte le récepteur. S'il intercepte le réflecteur alors il faudrait comptabiliser la source de sensibilité  $\xi_{spec}$ . Mais cette source n'est pas connue. Dans la pratique nous n'évaluons pas  $\xi_{spec}$  car dans le problème couplé il ne s'agit pas d'une source au sens de la théorie de Green mais d'un raccord entre le modèle de sensibilité, le modèle de la luminance et le modèle du gradient spatial de luminance. L'algorithme se poursuit donc par l'échantillonnage de chemins secondaires et c'est seulement lorsque nous rencontrons une véritable source du problème couplé que le poids de Monte Carlo peut être calculé. Nous verrons que ces sources se situent sur l'émetteur et sont des sources de luminance et des sources de gradient spatial.

**Configuration  $2D$**  La sensibilité de l'observable au déplacement de la paroi spéculaire est estimée par Monte-Carlo à partir de la formulation intégrale suivante :

$$\mathcal{S} = \int_D \frac{1}{D} dy_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{2} d\theta \hat{w}_S(y_1, \theta, \xi_{spec}) \quad (4.62)$$

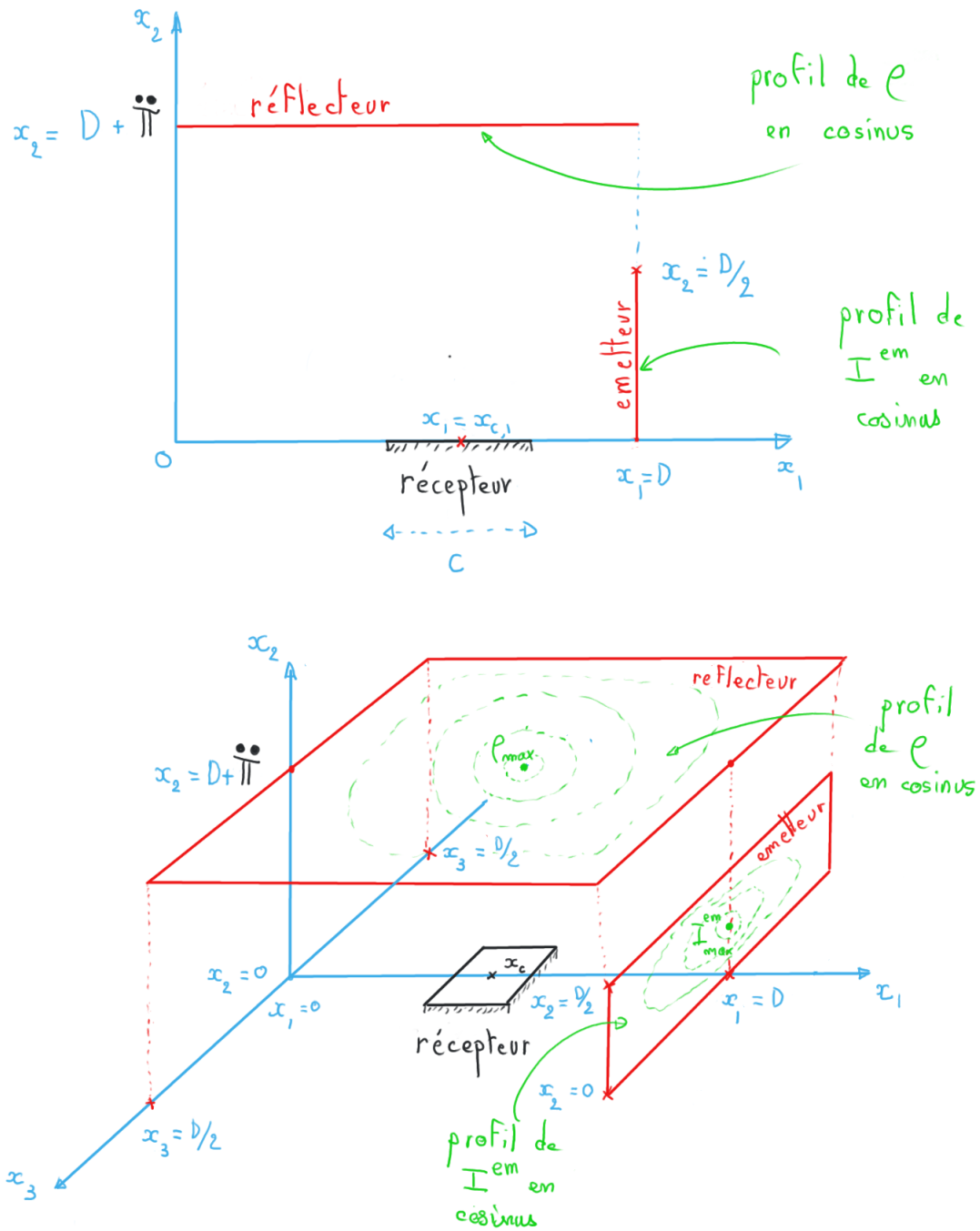


FIGURE 4.37 – L'exemple 5 : version 2D et version 3D.

$$\hat{w}_S(y_1, \theta, \xi_{spec}) = \left[ \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I}} \in \text{récepteur}) 2D \xi_{spec} + \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I}} \notin \text{récepteur}) 0 \right] \quad (4.63)$$

$$\xi_{spec} = -\beta \rho(y_1) \partial_{1, \vec{u}} L(\vec{y}, \vec{\omega}_{spec}, \vec{\pi}) - \beta \partial_{1, \vec{u}} \rho(y_1) L(\vec{y}, \vec{\omega}_{spec}, \vec{\pi}) + \beta_{spec} \rho(y_1) \partial_{1, \vec{u}_{spec}} L(\vec{y}, \vec{\omega}_{spec}, \vec{\pi}) \quad (4.64)$$

avec  $\vec{y} = \mathcal{Z}(\vec{y}, \vec{\pi})$ ,  $\vec{y} = (y_1, y_2)$  et  $\vec{\omega} = \Omega(\vec{\omega}, \vec{y}, \vec{\pi})$ . Les applications sont les mêmes que celles de l'exemple 1. Elles sont rappelées à la fin de cette section. La direction  $\vec{\omega}_{spec}$  est déterminée à partir de la connaissance de  $\vec{\omega}$  par :  $\vec{\omega}_{spec} = \vec{\omega} - 2(\vec{\omega} \cdot \vec{n})\vec{n}$ . Les contributions des dérivées spatiales du poids de Monte-Carlo sont donc :

$$\partial_{1, \vec{u}} L(\vec{y}, \vec{\omega}_{spec}, \vec{\pi}) = \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I}, spec} \in \text{émetteur}) \beta_e \partial_{1, \vec{u}_e} L(\vec{y}_e, \vec{\omega}_e, \vec{\pi}) + \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I}, spec} \notin \text{émetteur}) 0 \quad (4.65)$$

$$L(\vec{y}, \vec{\omega}_{spec}, \vec{\pi}) = \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I}, spec} \in \text{émetteur}) L(\vec{y}_e, \vec{\omega}_e, \vec{\pi}) + \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I}, spec} \notin \text{émetteur}) 0 \quad (4.66)$$

$$\partial_{1, \vec{u}_{spec}} L(\vec{y}, \vec{\omega}_{spec}, \vec{\pi}) = \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I}, spec} \in \text{émetteur}) \beta_e^{spec} \partial_{1, \vec{u}_e^{spec}} L(\vec{y}_e, \vec{\omega}_e, \vec{\pi}) + \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I}, spec} \notin \text{émetteur}) 0 \quad (4.67)$$

où  $\vec{x}_{\mathcal{I}, spec}$  est l'intersection avec la scène de la droite  $(\vec{y}, -\vec{\omega}_{spec})$  et où lorsque  $\vec{x}_{\mathcal{I}, spec} \in \text{émetteur}$ , cette intersection définit une position et une direction d'émission sur le récepteur, toutes deux définies dans l'espace géométrique et notées respectivement  $\vec{y}_e$  et  $\vec{\omega}_e$  :

$$\vec{y}_e = \vec{x}_{\mathcal{I}, spec} \quad \text{si} \quad \vec{x}_{\mathcal{I}, spec} \in \text{émetteur} \quad (4.68)$$

$$\vec{\omega}_e = -\vec{\omega}_{spec} \quad \text{si} \quad \vec{x}_{\mathcal{I}, spec} \in \text{émetteur} \quad (4.69)$$

Les termes intervenant dans le poids sont

$$\partial_{1, \vec{u}} \rho(y_1) = \vec{u} \cdot \vec{e}_1 \frac{1}{D} \rho_{max} \pi \sin\left(2\pi \frac{y_1}{D}\right) \quad (4.70)$$

$$\partial_{1, \vec{u}_e} L(\vec{y}_e, \vec{\omega}_e, \vec{\pi}) = (\vec{u}_e \cdot \vec{e}_2) \frac{1}{D/2} I_{max}^e \pi \sin\left(2\pi \frac{y_{e2}}{D/2}\right) \quad (4.71)$$

$$\partial_{1, \vec{u}_e^{spec}} L(\vec{y}_e, \vec{\omega}_e, \vec{\pi}) = (\vec{u}_e^{spec} \cdot \vec{e}_2) \frac{1}{D/2} I_{max}^e \pi \sin\left(2\pi \frac{y_{e2}}{D/2}\right) \quad (4.72)$$

$$L(\vec{y}_e, \vec{\omega}_e, \vec{\pi}) = \frac{I_{max}^e}{2} \left(1 - \cos\left(2\pi \frac{y_{e2}}{D/2}\right)\right) \quad (4.73)$$

avec  $\vec{y}_e = \mathcal{Z}_e^{-1}(\vec{y}_e)$ ,  $\vec{u}_e = \Omega_{\vec{y}, \vec{\pi}, e}^{-1}(\vec{u}_e)$  et  $\vec{u}_e^{spec} = \Omega_{\vec{y}, \vec{\pi}, e}^{-1}(\vec{u}_e^{spec})$ . Les applications  $\mathcal{Z}_e$  et  $\Omega_e$  sont données à la fin de cette section. Elles correspondent aux applications qui définissent le support géométrique de l'émetteur par rapport au support matériel correspondant.

Les valeurs des dérivées surfaciques de la luminance (dans les directions  $\vec{u}_e$  et  $\vec{u}_e^{spec}$ ) ainsi que la valeur de la luminance sont donc les sources effectives du problème de sensibilité couplé. Ces sources sont propagées de l'émetteur jusqu'au récepteur via un chemin tout à fait usuel de réflexion spéculaire sur le réflecteur déformé.

Pour aider à la lecture de l'algorithme, voici l'expression complète du poids résultant (pour  $\vec{x}_{\mathcal{I}} \in \text{récepteur}$  et  $\vec{x}_{\mathcal{I}, spec} \in \text{émetteur}$ ) :

$$\begin{aligned} \hat{w} = & -2\beta \rho(y_1) \beta_e (\vec{u}_e \cdot \vec{e}_2) \frac{1}{D/2} I_{max}^e \pi \sin\left(2\pi \frac{y_{e2}}{D/2}\right) \\ & - 2\beta \vec{u} \cdot \vec{e}_1 \frac{1}{D} \rho_{max} \pi \sin\left(2\pi \frac{y_1}{D}\right) \frac{I_{max}^e}{2} \left(1 - \cos\left(2\pi \frac{y_{e2}}{D/2}\right)\right) \\ & + 2\beta_{spec} \rho(y_1) \beta_e^{spec} (\vec{u}_e^{spec} \cdot \vec{e}_2) \frac{1}{D/2} I_{max}^e \pi \sin\left(2\pi \frac{y_{e2}}{D/2}\right) \end{aligned} \quad (4.74)$$

**Configuration 3D** Pour la configuration 3D la formulation intégrale de la sensibilité est :

$$\mathcal{S} = \int_D \frac{1}{D} dy_1 \int_D \frac{1}{D} dy_3 \int_{2\pi} \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{n}}{\pi} d\vec{\omega} \hat{w}_S(y_1, y_3, \vec{\omega}, \xi_{spec}) \quad (4.75)$$

$$\hat{w}_S(y_1, y_3, \vec{\omega}, \xi_{spec}) = \left[ \mathcal{H}(\vec{x}_I \in \text{récepteur}) D^2 \pi \xi_{spec} + \mathcal{H}(\vec{x}_I \notin \text{récepteur}) 0 \right] \quad (4.76)$$

La source de sensibilité  $\xi_{spec}$  est exactement de la même forme qu'en 2D. Seules les valeurs de la luminance et des dérivées spatiales calculées sur l'émetteur seront différentes, nous les donnons ici :

$$\begin{aligned} \partial_{1, \vec{u}} \rho(y_1) = \frac{\rho_{max}}{4} & \left( (\vec{u} \cdot \vec{e}_1) \frac{2\pi}{D} \sin(2\pi \frac{y_{e1}}{D}) \left[ 1 + \cos(2\pi \frac{y_{e3}}{D}) \right] \right. \\ & \left. - (\vec{u} \cdot \vec{e}_3) \frac{2\pi}{D} \sin(2\pi \frac{y_{e3}}{D}) \left[ 1 - \cos(2\pi \frac{y_{e1}}{D}) \right] \right) \end{aligned} \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned} \partial_{1, \vec{u}_e} L(\vec{y}_e, \vec{\omega}_e, \tilde{\pi}) = \frac{I_{max}^{em}}{4} & \left( (\vec{u}_e \cdot \vec{e}_2) \frac{2\pi}{D/2} \sin(2\pi \frac{y_{e2}}{D/2}) \left[ 1 + \cos(2\pi \frac{y_{e3}}{D/2}) \right] \right. \\ & \left. - (\vec{u}_e \cdot \vec{e}_3) \frac{2\pi}{D/2} \sin(2\pi \frac{y_{e3}}{D/2}) \left[ 1 - \cos(2\pi \frac{y_{e2}}{D/2}) \right] \right) \end{aligned} \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned} \partial_{1, \vec{u}_e^{spec}} L(\vec{y}_e, \vec{\omega}_e, \tilde{\pi}) = \frac{I_{max}^{em}}{4} & \left( (\vec{u}_e^{spec} \cdot \vec{e}_2) \frac{2\pi}{D/2} \sin(2\pi \frac{y_{e2}}{D/2}) \left[ 1 + \cos(2\pi \frac{y_{e3}}{D/2}) \right] \right. \\ & \left. - (\vec{u}_e^{spec} \cdot \vec{e}_3) \frac{2\pi}{D/2} \sin(2\pi \frac{y_{e3}}{D/2}) \left[ 1 - \cos(2\pi \frac{y_{e2}}{D/2}) \right] \right) \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$L(\vec{y}_e, \vec{\omega}_e, \tilde{\pi}) = \frac{I_{max}^{em}}{4} \left( 1 - \cos(2\pi \frac{y_{e3}}{D/2}) \right) \left( 1 - \cos(2\pi \frac{y_{e2}}{D/2}) \right) \quad (4.80)$$

#### 4.4.5.4 Éléments de géométrie

La position sur le réflecteur  $\vec{y}$  en 2D :

$$\vec{y} = \mathcal{Z}(\vec{y}, \tilde{\pi}) = (y_1, D + \tilde{\pi})$$

La position sur le réflecteur  $\vec{y}$  en 3D :

$$\vec{y} = (y_1, D + \tilde{\pi}, y_3)$$

La direction sur le réflecteur en 2D et en 3D :

$$\vec{\omega} = \Omega(\vec{\omega}, \vec{y}, \tilde{\pi}) = \vec{\omega}$$

Le vecteur de déformation spatiale (2D et 3D) :

$$\vec{v}_\chi = (0, 1); \quad \vec{v}_\chi = (0, 1, 0)$$

La normale sur le réflecteur (2D et 3D) :

$$\vec{n} = (0, -1); \quad \vec{n} = (0, -1, 0)$$

Les projections sur le réflecteur :

$$\beta = \|\vec{v}_\chi - \alpha \vec{\omega}\|; \quad \vec{u} = \frac{\vec{v}_\chi - \alpha \vec{\omega}}{\|\vec{v}_\chi - \alpha \vec{\omega}\|}; \quad \alpha = \frac{\vec{v}_\chi \cdot \vec{n}}{\vec{\omega} \cdot \vec{n}}$$

Étant donné l'application  $\Omega$  on trouve  $\vec{u} = \vec{u}$ .

$$\beta_{spec} = \|\vec{v}_\chi - \alpha_{spec} \vec{\omega}_{spec}\| ; \quad \vec{u}_{spec} = \frac{\vec{v}_\chi - \alpha_{spec} \vec{\omega}_{spec}}{\|\vec{v}_\chi - \alpha_{spec} \vec{\omega}_{spec}\|} ; \quad \alpha_{spec} = \frac{\vec{v}_\chi \cdot \vec{n}}{\vec{\omega}_{spec} \cdot \vec{n}}$$

Étant donné l'application  $\Omega$  on trouve  $\vec{u} = \vec{u}$ .

La position sur l'émetteur  $\vec{y}_e$  en  $2D$  :

$$\vec{y}_e = \mathcal{Z}_e(\vec{y}_e, \vec{\pi}) = (D, y_{e2})$$

La position sur l'émetteur  $\vec{y}$  en  $3D$  :

$$\vec{y}_e = (D, y_{e2}, y_{e3})$$

La direction sur l'émetteur en  $2D$  et en  $3D$  :

$$\vec{\omega}_e = \Omega_e(\vec{\omega}, \vec{y}, \vec{\pi}) = \vec{\omega}_e$$

La normale sur l'émetteur ( $2D$  et  $3D$ ) :

$$\vec{n}_e = (-1, 0); \quad \vec{n}_e = (-1, 0, 0)$$

La décomposition de  $\vec{u}$  sur l'émetteur :

$$\beta_e = \|\vec{u} - \alpha_e \vec{\omega}_e\| ; \quad \vec{u}_e = \frac{\vec{u} - \alpha_e \vec{\omega}_e}{\|\vec{u} - \alpha_e \vec{\omega}_e\|} ; \quad \alpha_e = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}_e}{\vec{\omega}_e \cdot \vec{n}_e}$$

Étant donné l'application  $\Omega_e$  on trouve  $\vec{u}_e = \vec{u}_e$ .

La décomposition de  $\vec{u}_{spec}$  sur l'émetteur :

$$\beta_e^{spec} = \|\vec{u}_{spec} - \alpha_e^{spec} \vec{\omega}_e\| ; \quad \vec{u}_e^{spec} = \frac{\vec{u}_{spec} - \alpha_e^{spec} \vec{\omega}_e}{\|\vec{u}_{spec} - \alpha_e^{spec} \vec{\omega}_e\|} ; \quad \alpha_e^{spec} = \frac{\vec{u}_{spec} \cdot \vec{n}_e}{\vec{\omega}_e \cdot \vec{n}_e}$$

Étant donné l'application  $\Omega_e$  on trouve  $\vec{u}_e^{spec} = \vec{u}_e^{spec}$ .

Cette projection est schématisée sur la Fig. 4.38.

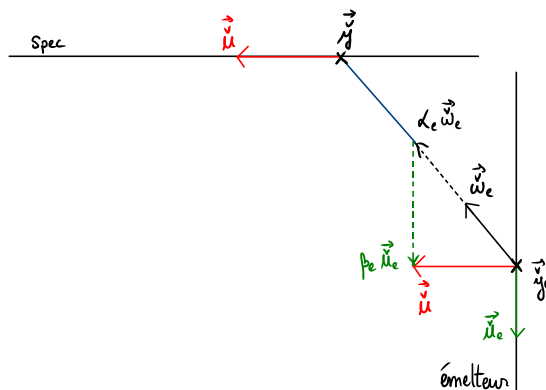


FIGURE 4.38 – Projection du vecteur  $\vec{u}$  sur la paroi de l'émetteur

#### 4.4.5.5 Espace de chemins de la sensibilité

La nécessité d'utiliser à la fois des chemins directs pour suivre la sensibilité et à la fois des chemins inverses pour remonter jusqu'aux sources effectives de sensibilité (celles du problème couplé) est une des conséquences algorithmiques des couplages au niveau des conditions aux limites de sensibilité. Nous propageons une source (du problème découplé) dans le sens direct mais nous ne connaissons pas cette source et devons l'échantillonner en évaluant les quantités incidentes (du problème couplé) à la position et à la direction d'émission.

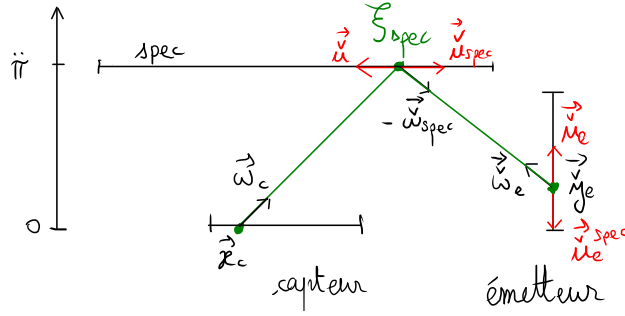


FIGURE 4.39 – Exemple 5 : translation du réflecteur, profil de  $\rho$  sinusoïdal (pas de discontinuité de réflexion), émetteur latéral fixe, profil de  $I^m$  sinusoïdal (pas de discontinuité d'émission).

Ici une réalisation d'un chemin de sensibilité commencera donc par échantillonner une position et une direction sur la paroi du haut. La réalisation d'un chemin est représentée sur la Fig. 4.39, elle correspond à la réalisation d'une position d'émission sur la paroi suivi de la réalisation d'une direction d'émission. Le milieu étant transparent et la paroi du haut spéculaire, lorsque le chemin de sensibilité (partant de  $\vec{y}$  dans la direction  $\vec{\omega}$ ) intercepte le capteur la source de sensibilité  $\xi_{spec}$  doit être connue pour être comptabilisée. La direction de réflexion  $\vec{\omega}_{spec}$  est déduite de la direction d'émission. L'échantillonnage de  $\vec{y}$  et  $\vec{\omega}$  donne donc directement (par géométrie) l'échantillonnage d'une position  $\vec{y}_e$  et  $\vec{\omega}_e$  sur l'émetteur. La source de sensibilité  $\xi_{spec}$  sur la paroi spéculaire s'écrit comme l'espérance des variables aléatoires "chemin de luminance spéculaire", "chemin de dérivée spatiale spéculaire dans la direction  $\vec{u}$ " et "chemin de dérivée spatiale spéculaire dans la direction  $\vec{u}_{spec}$ ". La réalisation de chacune de ces variables consiste à générer une branche, qui part de la position d'émission sur la paroi spéculaire, dans la direction  $-\vec{\omega}_{spec}$ . Dans cet exemple toutes les branches sont confondues avec le chemin de sensibilité qui est réfléchi et les sources évaluées au bout de chacune de ces branches sont, respectivement, la luminance d'équilibre à la température de l'émetteur, la dérivée surfacique dans la direction  $\vec{u}_e$  et la dérivée surfacique dans la direction  $\vec{u}_{spec}$ , tout ça en  $(\vec{y}_e, \vec{\omega}_e)$ .

#### 4.4.5.6 Algorithme

$$\mathcal{S} = \int_D \frac{1}{D} dy_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{2} d\theta \hat{w}_S(y_1, \theta, \xi_{spec}) \quad (4.81)$$

$$\hat{w}_S(y_1, \theta, \xi_{spec}) = \left[ \mathcal{H}(\vec{x}_I \in \text{récepteur}) 2D \xi_{spec} + \mathcal{H}(\vec{x}_I \notin \text{récepteur}) 0 \right] \quad (4.82)$$

$$\xi_{spec} = -\beta \rho(\vec{y}) \partial_{1, \vec{u}} L(\vec{y}, \vec{\omega}_{spec}, \pi) - \beta \partial_{1, \vec{u}} \rho(\vec{y}) L(\vec{y}, \vec{\omega}_{spec}, \pi) + \beta_{spec} \rho(\vec{y}) \partial_{1, \vec{u}_{spec}} L(\vec{y}, \vec{\omega}_{spec}, \pi) \quad (4.83)$$



**Algorithme 4** Exemple 5 : échantillonnage du chemin et calcul du poids en  $2D$ .

---

```

1 : for  $i = 0$  to  $i < N$  do
2 :   Définition de  $\vec{v}_\chi$ ,  $\vec{n}_e$  et  $\vec{n}$ 
3 :   Éch. de  $y_1 \in [0; D]$  ▷ échantillonnage d'une position sur le réflecteur
4 :   Calcul de la position  $\vec{y}$  à partir de  $y_1$ 
5 :   Éch. angle  $\theta$  entre  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  ▷ échantillonnage d'une direction de réflexion
6 :   Calcul direction  $\vec{\omega}$  à partir de  $\theta$  et  $\vec{n}$ 
7 :   Calcul direction spéculaire incidente  $\vec{\omega}_{spec} \leftarrow \vec{\omega} - 2(\vec{\omega} \cdot \vec{n})\vec{n}$ 
8 :    $\alpha \leftarrow \frac{\vec{v}_\chi \cdot \vec{n}}{\vec{\omega} \cdot \vec{n}}$  ▷ Calcul des projections de  $\vec{v}_\chi$  à partir des directions  $\vec{\omega}$  et  $\vec{\omega}_{spec}$ 
9 :    $\alpha_{spec} \leftarrow \frac{\vec{v}_\chi \cdot \vec{n}}{\vec{\omega}_{spec} \cdot \vec{n}}$ 
10 :   $\beta \leftarrow \|\vec{v}_\chi - \alpha\vec{\omega}\|$ 
11 :   $\beta_{spec} \leftarrow \|\vec{v}_\chi - \alpha_{spec}\vec{\omega}_{spec}\|$ 
12 :   $\vec{u} \leftarrow \frac{\vec{v}_\chi - \alpha\vec{\omega}}{\beta}$ 
13 :   $\vec{u}_{spec} \leftarrow \frac{\vec{v}_\chi - \alpha_{spec}\vec{\omega}_{spec}}{\beta_{spec}}$ 
14 :   $\vec{u} \leftarrow \Omega^{-1}(\vec{u})$ 
15 :  Détermination des positions d'intersection  $\vec{x}_I$  et  $\vec{x}_{I,spec}$ 
16 :  if  $\vec{x}_I \in \text{récepteur}$  and  $\vec{x}_{I,spec} \in \text{émetteur}$  then
17 :     $\vec{y}_e \leftarrow \vec{x}_{I,spec}$ 
18 :     $\vec{\omega}_e \leftarrow -\vec{\omega}_{spec}$ 
19 :     $\alpha_e \leftarrow \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}_e}{\vec{\omega}_e \cdot \vec{n}_e}$ 
20 :     $\beta_e \leftarrow \|\vec{u} - \alpha_e\vec{\omega}_e\|$ 
21 :     $\vec{u}_e \leftarrow \frac{\vec{u} - \alpha_e\vec{\omega}_e}{\beta_e}$ 
22 :     $\vec{u}_e \leftarrow \Omega^{-1}(\vec{u}_e)$ 
23 :     $\alpha_e^{spec} \leftarrow \frac{\vec{u}_{spec} \cdot \vec{n}_e}{\vec{\omega}_e \cdot \vec{n}_e}$ 
24 :     $\beta_e^{spec} \leftarrow \|\vec{u}_{spec} - \alpha_e^{spec}\vec{\omega}_e\|$ 
25 :     $\vec{u}_e^{spec} \leftarrow \frac{\vec{u}_{spec} - \alpha_e^{spec}\vec{\omega}_e}{\beta_e^{spec}}$ 
26 :     $\vec{u}_e^{spec} \leftarrow \Omega^{-1}(\vec{u}_e^{spec})$ 
27 :     $\omega_S \leftarrow 2 D \rho_{max} \frac{(1 - \cos(2\pi \frac{y_1}{D}))}{2} \frac{I_{max}^{em}}{2} \frac{2\pi}{D} \sin(\frac{2\pi}{D}(\vec{x}_e \cdot \vec{e}_2)) \left( \beta_{spec} \beta_e^{spec} (\vec{u}_e^{spec} \cdot \vec{e}_2) - \beta \beta_e (\vec{u}_e \cdot \vec{e}_2) \right) +$   

     $2 D \rho_{max} \frac{\pi}{D} \sin(2\pi \frac{y_1}{D}) (\vec{u} \cdot \vec{e}_1) \frac{I_{max}^{em}}{2} \left( 1 - \cos(\frac{2\pi}{D}(\vec{x}_e \cdot \vec{e}_2)) \right)$ 
28 :  else
29 :     $\omega_S \leftarrow 0$ 
30 :  end if
31 :  Calcul des sommes  $W_S$  et  $V_S$ 
32 : end for
33 :  $\partial_\pi \mathcal{O} \leftarrow \frac{W_S}{N}$  ▷ Estimation de la sensibilité et de son erreur
34 :  $Var_S \leftarrow \frac{V_S}{N} - \mathcal{S}^2$ 
35 :  $Err_S \leftarrow \frac{\sqrt{Var}}{\sqrt{N}}$ 

```

---

4.4.5.7 Résultat

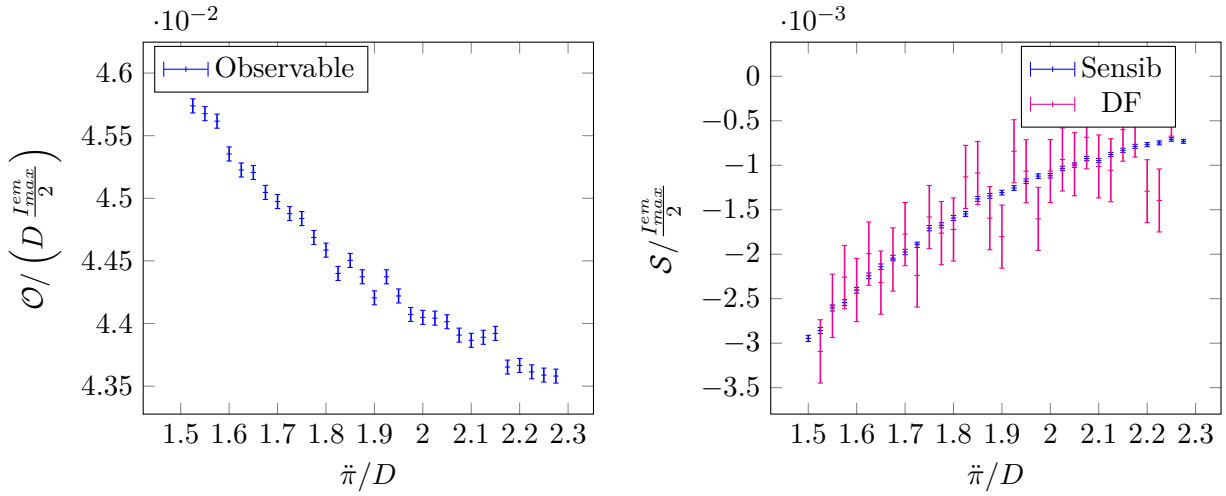


FIGURE 4.40 – Résultats pour l'exemple 5 en 2D. Flux reçu ( $\mathcal{O}$ ) par le capteur (à gauche) et sensibilité ( $\mathcal{S}$ ) du flux au déplacement du réflecteur (à droite, calculs MC et différences finies) pour  $\delta\tilde{\pi} = 0.1$ .  $N = 10^8$ ,  $c = D/4$ ,  $x_{c,1} = D/2$ .

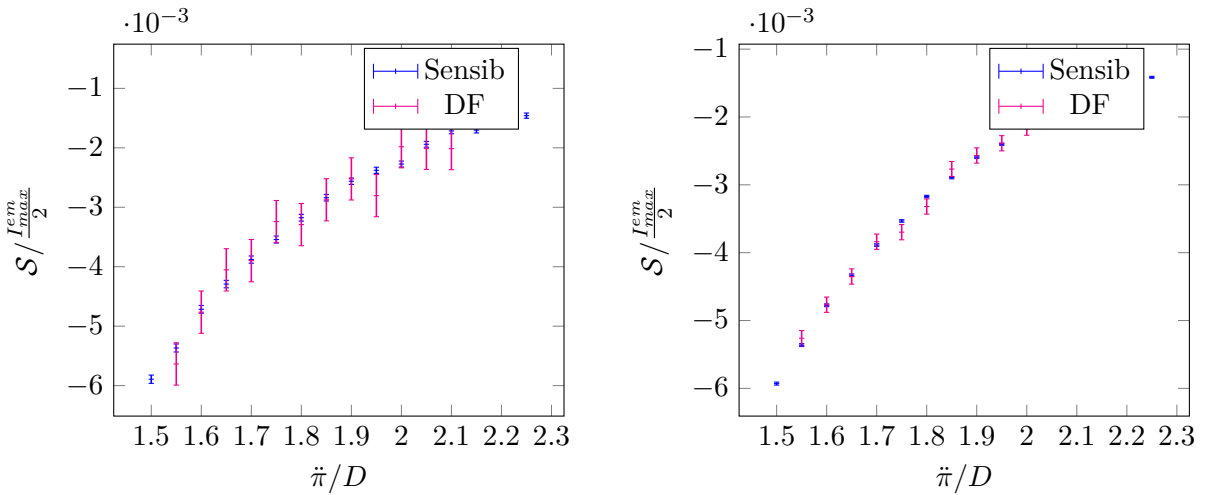


FIGURE 4.41 – Résultats pour l'exemple 5 en 2D. Sensibilité du flux au déplacement du réflecteur ( $\mathcal{S}$ ) (à gauche) pour  $N = 10^8$  et  $\delta\tilde{\pi} = 0.2$ . Sensibilité ( $\mathcal{S}$ ) du flux au déplacement du réflecteur (à droite), calculs MC et différences finies pour  $N = 10^9$  et  $\delta\tilde{\pi} = 0.2$ .  $c = D/4$ ,  $x_{c,1} = D/2$ .

Les résultats obtenus pour le calcul de l'observable et de la sensibilité sont présentés dans les Fig. 4.40 et 4.41. Les sensibilités calculées à partir du modèle sont confrontées à trois reprises aux différences finies centrées déduites du calcul de l'observable. En effet nous mettons en avant la difficulté de validation de nos résultats par les différences finies. Sur la Fig. 4.40 le  $\delta h$  de la discrétisation a été choisi suffisamment petit de sorte de bien approcher la dérivée et le nombre de réalisations  $N$  suffisamment grand pour avoir une bonne convergence des calculs. Malgré tout les barres d'erreurs sont trop importantes pour estimer la validité de nos calculs de sensibilité. Dans la figure de gauche de la Fig. 4.41 nous avons alors doublé le pas de discrétisation et gardé le même nombre de réalisations. En référence à notre précédente introduction à cette partie d'analyse des résultats (Sec. 4) nous pouvons voir que l'augmentation du pas de discrétisation a bien une influence sur les barres d'erreur, mais ici elle n'est pas suffisante. Pour valider nos calculs (figure de droite de la Fig. 4.41) nous sommes donc amenés à multiplier par 10 le nombre de réalisations du

poids de Monte-Carlo. C'est bien seulement en termes de validation face aux différences finies que nous observons ces difficultés : le modèle de sensibilité lui-même, malgré l'absence de tout effort d'optimisation, affiche un bon comportement de convergence.

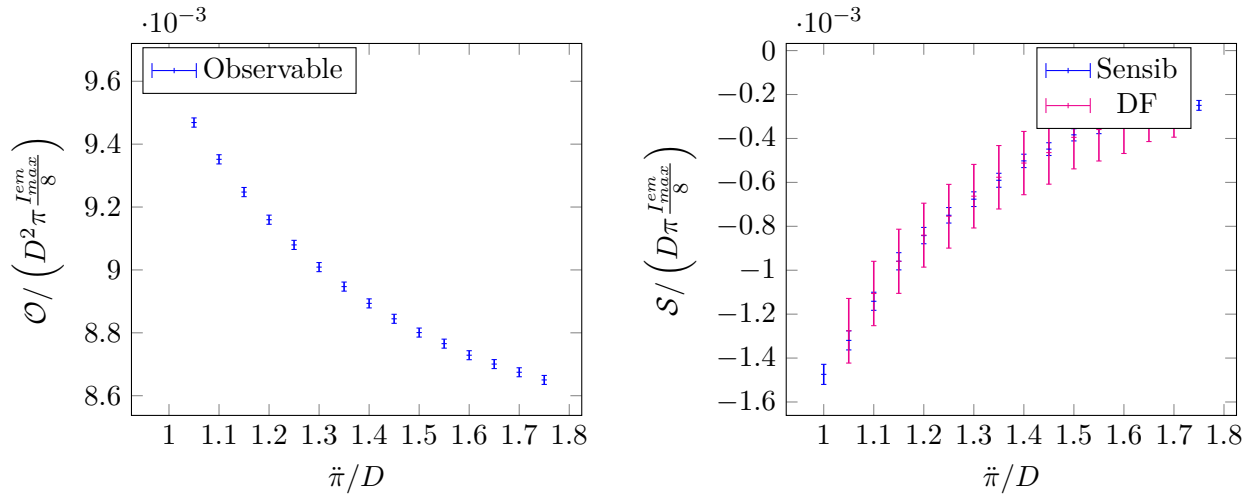


FIGURE 4.42 – Résultats pour l'exemple 5 en 3D. Flux reçu ( $\mathcal{O}$ ) par le capteur (à gauche) et sensibilité ( $S$ ) du flux au déplacement du réflecteur (à droite, calculs MC et différences finies).  $N = 10^8$ ,  $c = D/4$ ,  $x_{c,1} = D/2$ .

## 4.4.6 Exemple 6

### 4.4.6.1 La configuration géométrique et radiative

Le sixième exemple est très proche de l'exemple 5 : le même segment émetteur de longueur  $D/2$  (avec un profil sinusoïdal de  $I^{em}$  qui permet l'absence de discontinuité à l'émission) et le même segment réflecteur de largeur  $D$  (avec un profil sinusoïdal de  $\rho$  qui permet l'absence de discontinuité à la réflexion). La seule différence est dans la déformation : le réflecteur subit une rotation d'angle  $\varphi(\tilde{\pi}) = \tilde{\pi}$  autour du point  $(0, D)$  (voir la figure 4.43 qui présente également la version 3D du même exemple).

### 4.4.6.2 L'observable

L'observable est exactement identique à celle de l'exemple précédent. La seule particularité de cette configuration concerne la déformation qui est identique à celle de l'exemple 3.

### 4.4.6.3 La sensibilité

La sensibilité n'est pas tout à fait identique à celle de l'exemple précédent. En effet lorsqu'une paroi spéculaire subit une déformation qui entraîne la rotation de sa normale alors la condition à la limite de sensibilité fait intervenir un couplage avec la dérivée angulaire incidente de la luminance. Par rapport à l'exemple 5 nous avons donc un terme supplémentaire dans le poids de Monte-Carlo. Dans cette partie nous rappellerons donc la formulation intégrale ainsi que le poids de Monte-Carlo mais nous ne détaillerons que le terme supplémentaire car pour les autres il n'y a aucun changement par rapport à l'exemple 5.

### Configuration 2D

$$S = \int_D \frac{1}{D} dy_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{2} d\theta \hat{w}_S(y_1, \theta, \xi_{spec}) \quad (4.84)$$

$$\hat{w}_S(y_1, \theta, \xi_{spec}) = \left[ \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I}} \in \text{récepteur}) 2D \xi_{spec} + \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I}} \notin \text{récepteur}) 0 \right] \quad (4.85)$$

$$\begin{aligned} \xi_{spec} = & -\beta \rho(y_1) \partial_{1, \vec{u}} L(\vec{y}, \vec{\omega}_{spec}, \tilde{\pi}) - \beta \partial_{1, \vec{u}} \rho(y_1) L(\vec{y}, \vec{\omega}_{spec}, \tilde{\pi}) \\ & + \beta_{spec} \rho(y_1) \partial_{1, \vec{u}_{spec}} L(\vec{y}, \vec{\omega}_{spec}, \tilde{\pi}) - 2\rho(y_1) \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{y}, \vec{\omega}_{spec}, \tilde{\pi}) \end{aligned} \quad (4.86)$$

avec  $\vec{y} = \mathcal{Z}(\vec{y}, \tilde{\pi})$ ,  $\vec{y} = (y_1, y_2)$  et  $\vec{\omega} = \Omega(\vec{\omega}, \vec{y}, \tilde{\pi})$ . Les applications sont les mêmes que celles de l'exemple 3, elle sont rappelées à la fin de cette section.

$$\begin{aligned} \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{y}, \vec{\omega}_{spec}, \tilde{\pi}) &= \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I}, spec} \in \text{émetteur}) l \partial_{1, \vec{v}_{\Phi}} L(\vec{y}_e, \vec{\omega}_e, \tilde{\pi}) \\ &+ \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I}, spec} \notin \text{émetteur}) 0 \\ &= \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I}, spec} \in \text{émetteur}) l \beta_{\Phi} \partial_{1, \vec{u}_{\Phi}} L(\vec{y}_e, \vec{\omega}_e, \tilde{\pi}) \\ &+ \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I}, spec} \notin \text{émetteur}) 0 \end{aligned} \quad (4.87)$$

où  $l$  la longueur du chemin secondaire, soit  $l = \|\vec{x}_e - \vec{y}\|$ . Cette longueur apparaît du fait de l'intégration de la source volumique (dérivée spatiale dans la direction  $\vec{v}_{\Phi}$ ) sur toute la longueur du chemin. Le milieu étant transparent la source volumique vaut la même valeur en tout point du chemin et l'intégration est immédiate. Cette valeur est donnée par la dérivée spatiale  $\partial_{1, \vec{v}_{\Phi}} L(\vec{y}_e, \vec{\omega}_e, \tilde{\pi})$  prise à la frontière. La projection de  $\vec{v}_{\Phi}$  sur la surface de l'émetteur est donnée dans le paragraphe suivant. La dérivée spatiale sur l'émetteur dans la direction  $\vec{u}_{\Phi}$  est

$$\partial_{1, \vec{u}_{\Phi}} L(\vec{y}_e, \vec{\omega}_e, \tilde{\pi}) = (\vec{u}_{\Phi} \cdot \vec{e}_2) \frac{1}{D/2} I_{max}^{em} \pi \sin(2\pi \frac{y_{e2}}{D/2}) \quad (4.88)$$

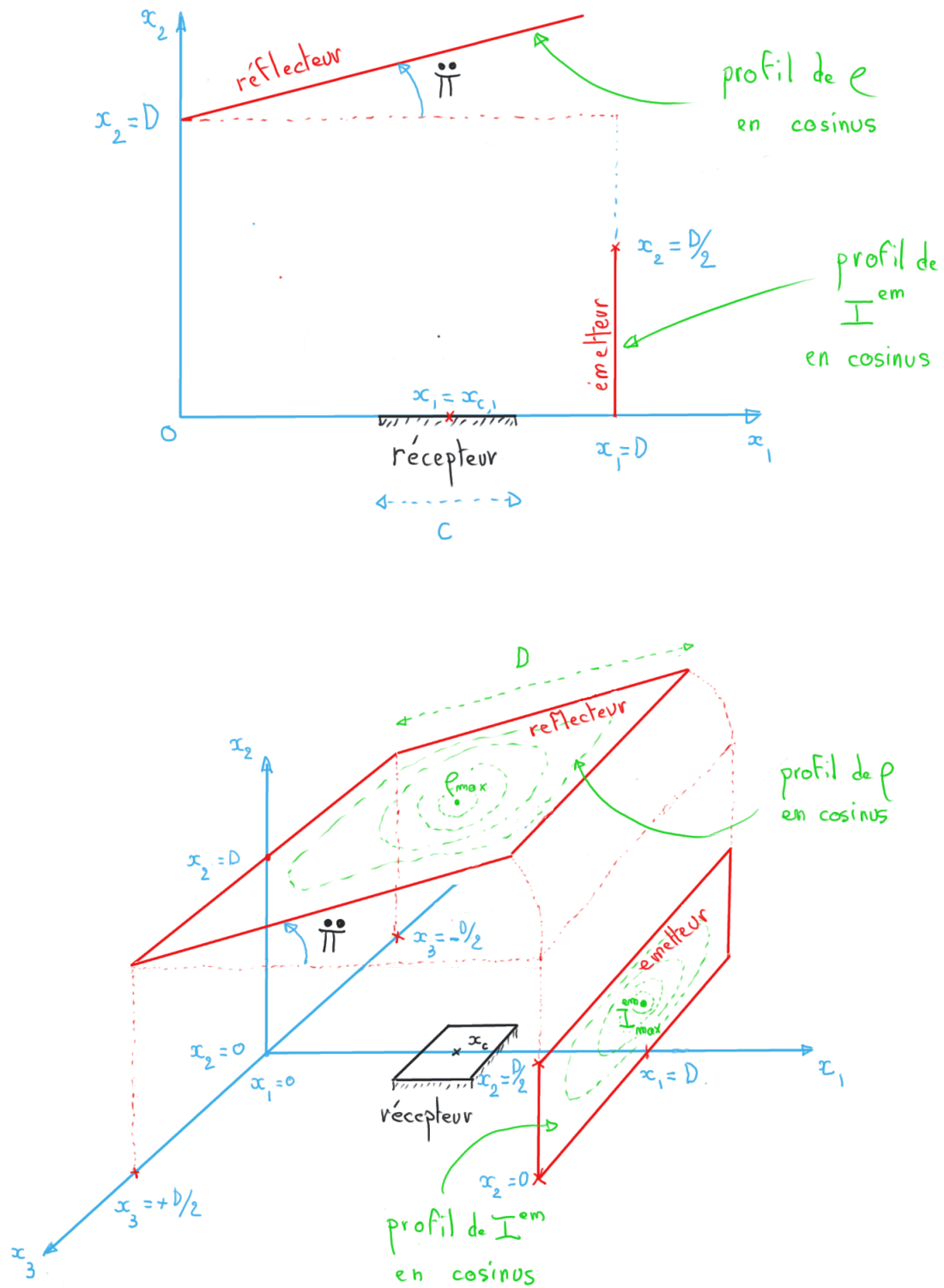


FIGURE 4.43 – L'exemple 6 : version 2D et version 3D.

**Configuration 3D** Dans la configuration 3D l'Eq. 4.88 devient :

$$\begin{aligned} \partial_{1, \vec{u}_\Phi} L(\vec{y}_e, \vec{\omega}_e, \vec{\pi}) = \frac{I_{max}^{em}}{4} & \left( (\vec{u}_\Phi \cdot \vec{e}_2) \frac{2\pi}{D/2} \sin\left(2\pi \frac{y_{e2}}{D/2}\right) \left[ 1 + \cos\left(2\pi \frac{y_{e3}}{D}\right) \right] \right. \\ & \left. - (\vec{u}_\Phi \cdot \vec{e}_3) \frac{2\pi}{D} \sin\left(2\pi \frac{y_{e3}}{D}\right) \left[ 1 - \cos\left(2\pi \frac{y_{e2}}{D/2}\right) \right] \right) \end{aligned} \quad (4.89)$$

#### 4.4.6.4 Éléments de géométrie

Le vecteur de déformation angulaire  $\vec{v}_\Phi = \vec{a} \wedge \vec{\omega}_e$ , avec  $\vec{a} = (0, 0, 1)$ .

La projection sur l'émetteur :

$$\beta_\Phi = \|\vec{v}_\Phi - \alpha_\Phi \vec{\omega}_e\| ; \quad \vec{u}_\Phi = \frac{\vec{v}_\Phi - \alpha_\Phi \vec{\omega}_e}{\|\vec{v}_\Phi - \alpha_\Phi \vec{\omega}_e\|} ; \quad \alpha_\Phi = \frac{\vec{v}_\Phi \cdot \vec{n}_e}{\vec{\omega}_e \cdot \vec{n}_e}$$

Étant donné l'application  $\Omega_e$  (voir exemple 5) on trouve  $\vec{u}_\Phi = \vec{u}$ .

Les applications  $\mathcal{Z}$  et  $\Omega$  du réflecteur sont données dans l'exemple 3.

#### 4.4.6.5 Espace de chemins de la sensibilité

Dans cet exemple l'espace de chemins est identique à celui de l'exemple précédent, en effet la sensibilité est réfléchiée sur la paroi spéculaire et les branches de dérivées spatiales, angulaires et de luminance qui partent de  $\vec{y}$  dans la direction  $\vec{\omega}_{spec}$  sont confondues avec le chemin de sensibilité. La Fig. 4.44 illustre une réalisation de ces chemins.

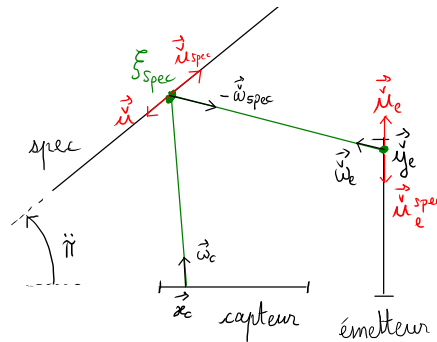


FIGURE 4.44 – Exemple 6 : rotation du réflecteur, profil de  $\rho$  sinusoïdal (pas de discontinuité de réflexion), émetteur latéral fixe, profil de  $I^{em}$  sinusoïdal (pas de discontinuité d'émission).

## 4.4.6.6 Algorithme

$$\mathcal{S} = \int_D \frac{1}{D} dy_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{2} d\theta \hat{w}(y_1, \theta, \xi_{spec}) \quad (4.90)$$

$$\hat{w}(y_1, \theta, \xi_{spec}) = \left[ \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I}} \in \text{récepteur}) 2D \xi_{spec} + \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I}} \notin \text{récepteur}) 0 \right] \quad (4.91)$$

$$\begin{aligned} \xi_{spec} = & -\beta \rho(y_1) \partial_{1, \vec{u}} L(\vec{y}, \vec{\omega}_{spec}, \vec{\pi}) - \beta \partial_{1, \vec{u}} \rho(y_1) L(\vec{y}, \vec{\omega}_{spec}, \vec{\pi}) \\ & + \beta_{spec} \rho(y_1) \partial_{1, \vec{u}_{spec}} L(\vec{y}, \vec{\omega}_{spec}, \vec{\pi}) - 2\rho(y_1) \partial_{\mathcal{R}}^{\vec{a}} L(\vec{y}, \vec{\omega}_{spec}, \vec{\pi}) \end{aligned} \quad (4.92)$$

---

**Algorithme 5** Exemple 6 : échantillonnage du chemin et calcul du poids en  $2D$ .

---

```

1 : for  $i = 0$  to  $i < N$  do
2 :   Définition de  $\vec{v}_\chi$ ,  $\vec{n}_e$  et  $\vec{n}$ 
3 :   Définition de  $\vec{a}$ 
4 :   Éch. de  $y_1 \in [0; D]$  ▷ échantillonnage d'une position sur le réflecteur
5 :   Calcul de la position  $\vec{y}$  à partir de  $y_1$ 
6 :   Éch. angle  $\theta$  entre  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  ▷ échantillonnage d'une direction de réflexion
7 :   Calcul direction  $\vec{\omega}$  à partir de  $\theta$  et  $\vec{n}$ 
8 :   Calcul direction spéculaire incidente  $\vec{\omega}_{spec} \leftarrow \vec{\omega} - 2(\vec{\omega} \cdot \vec{n})\vec{n}$ 
9 :    $\alpha \leftarrow \frac{\vec{v}_\chi \cdot \vec{n}}{\vec{\omega} \cdot \vec{n}}$  ▷ Calcul des projections de  $\vec{v}_\chi$  à partir des directions  $\vec{\omega}$  et  $\vec{\omega}_{spec}$ 
10 :    $\alpha_{spec} \leftarrow \frac{\vec{v}_\chi \cdot \vec{n}}{\vec{\omega}_{spec} \cdot \vec{n}}$ 
11 :    $\beta \leftarrow \|\vec{v}_\chi - \alpha\vec{\omega}\|$ 
12 :    $\beta_{spec} \leftarrow \|\vec{v}_\chi - \alpha_{spec}\vec{\omega}_{spec}\|$ 
13 :    $\vec{u} \leftarrow \frac{\vec{v}_\chi - \alpha\vec{\omega}}{\beta}$ 
14 :    $\vec{u}_{spec} \leftarrow \frac{\vec{v}_\chi - \alpha_{spec}\vec{\omega}_{spec}}{\beta_{spec}}$ 
15 :    $\vec{u} \leftarrow \Omega^{-1}(\vec{u})$ 
16 :   Détermination des positions d'intersection  $\vec{x}_I$  et  $\vec{x}_{I,spec}$ 
17 :   if  $\vec{x}_I \in$  récepteur and  $\vec{x}_{I,spec} \in$  émetteur then
18 :      $\alpha_e \leftarrow \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}_e}{\vec{\omega}_e \cdot \vec{n}_e}$ 
19 :      $\beta_e \leftarrow \|\vec{u} - \alpha_e\vec{\omega}_e\|$ 
20 :      $\vec{u}_e \leftarrow \frac{\vec{u} - \alpha_e\vec{\omega}_e}{\beta_e}$ 
21 :      $\vec{u}_e \leftarrow \Omega^{-1}(\vec{u}_e)$ 
22 :      $\alpha_e^{spec} \leftarrow \frac{\vec{u}_{spec} \cdot \vec{n}_e}{\vec{\omega}_e \cdot \vec{n}_e}$ 
23 :      $\beta_e^{spec} \leftarrow \|\vec{u}_{spec} - \alpha_e^{spec}\vec{\omega}_e\|$ 
24 :      $\vec{u}_e^{spec} \leftarrow \frac{\vec{u}_{spec} - \alpha_e^{spec}\vec{\omega}_e}{\beta_e^{spec}}$ 
25 :      $\vec{u}_e^{spec} \leftarrow \Omega^{-1}(\vec{u}_e^{spec})$ 
26 :      $\vec{v}_\Phi \leftarrow \vec{a} \wedge \vec{\omega}_e$ 
27 :      $\alpha_\Phi \leftarrow \frac{\vec{v}_\Phi \cdot \vec{n}_e}{\vec{\omega}_e \cdot \vec{n}_e}$  ▷ Calcul des projections de  $\vec{v}_\Phi$  à partir de la direction  $\vec{\omega}_e = \vec{\omega}_{spec}$ 
28 :      $\beta_\Phi \leftarrow \|\vec{v}_\Phi - \alpha_\Phi\vec{\omega}_e\|$ 
29 :      $\vec{u}_\Phi \leftarrow \frac{\vec{v}_\Phi - \alpha_\Phi\vec{\omega}_e}{\beta_\Phi}$ 
30 :      $\vec{u}_\Phi \leftarrow \Omega^{-1}(\vec{u}_\Phi)$ 
31 :      $\omega_S \leftarrow 2 \rho_{max} \frac{(1 - \cos(2\pi \frac{y_1}{D}))}{2} \frac{I_{max}^{em}}{2} \frac{2\pi}{D} \sin(\frac{2\pi}{D}(\vec{x}_e \cdot \vec{e}_2)) \left( \beta_{spec} \beta_e^{spec} (\vec{u}_e^{spec} \cdot \vec{e}_2) - \beta \beta_e (\vec{u}_e \cdot \vec{e}_2) \right) +$   

 $2 \rho_{max} \pi \sin(2\pi \frac{y_1}{D}) (\vec{u} \cdot \vec{e}_1) \frac{I_{max}^{em}}{2} \left( 1 - \cos(\frac{2\pi}{D}(\vec{x}_e \cdot \vec{e}_2)) \right) - D \rho_{max} (1 -$   

 $\cos(2\pi \frac{y_1}{D})) \beta_\Phi (\vec{u}_\Phi \cdot \vec{e}_2) \frac{1}{D/2} I_{max}^{em} \pi \sin(2\pi \frac{y_{e2}}{D/2})$ 
32 :   else ▷ pas d'intersection avec le récepteur
33 :      $\omega_S \leftarrow 0$ 
34 :   end if
35 :   Calcul des sommes  $W_S$  et  $V_S$ 
36 : end for
37 :  $\partial_\pi \mathcal{O} \leftarrow \frac{W_S}{N}$  ▷ Estimation de la sensibilité et de son erreur
38 :  $Var_S \leftarrow \frac{V_S}{N} - \mathcal{S}^2$ 
39 :  $\text{Erreur} \leftarrow \sqrt{Var}$ 

```



4.4.6.7 Résultat

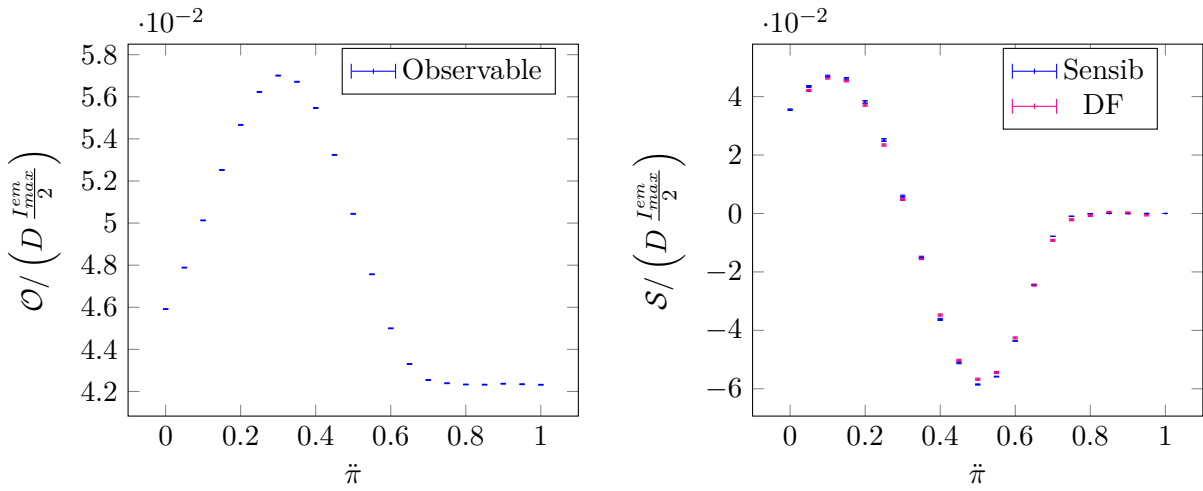


FIGURE 4.45 – Résultats pour l'exemple 6 en 2D. Flux reçu ( $\mathcal{O}$ ) par le capteur (à gauche) et sensibilité ( $\mathcal{S}$ ) du flux à la rotation du réflecteur (à droite, calculs MC et différences finies).  $N = 10^8$ ,  $c = D/4$ ,  $x_{c,1} = D/2$ .

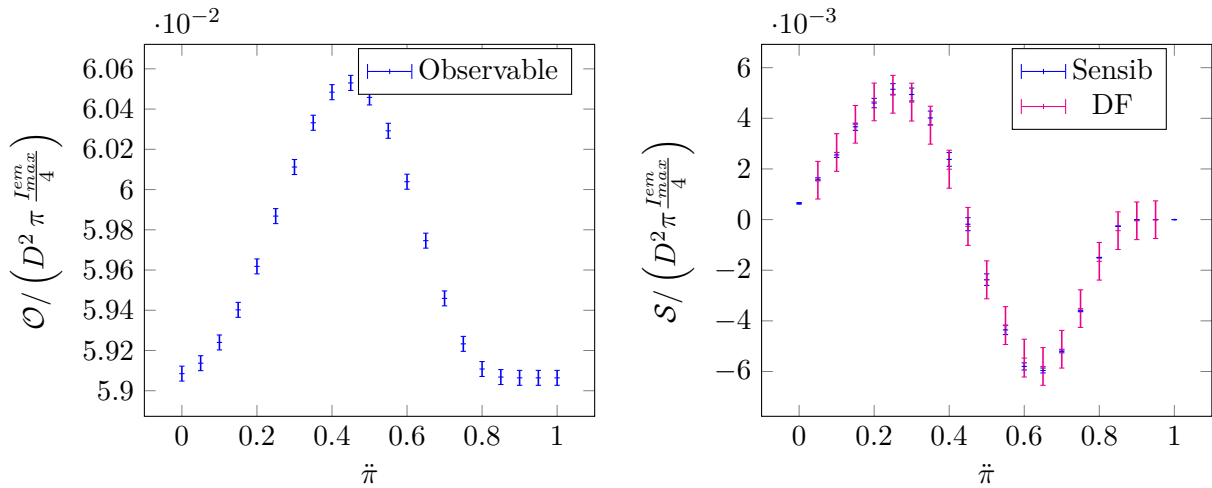


FIGURE 4.46 – Résultats pour l'exemple 6 en 3D. Flux reçu ( $\mathcal{O}$ ) par le capteur (à gauche) et sensibilité ( $\mathcal{S}$ ) du flux à la rotation du réflecteur (à droite, calculs MC et différences finies).  $N = 10^8$ ,  $c = D/4$ ,  $x_{c,1} = D/2$ .

### 4.4.7 Exemple 7

Nous allons aborder la mise en oeuvre de l'exemple 7, qui traite des discontinuités d'une géométrie concave, et l'exemple 8, qui traite de la multi-réflexion dans une géométrie convexe. Ces deux exemples ont un statut particulier. À travers les exemples précédents nous avons mis en oeuvre des algorithmes de Monte-Carlo pour des transformations géométriques élémentaires (translation, rotation) et des configurations radiatives simples et distinctes (parois noires puis parois spéculaires). L'intérêt de ces exemples était de tester la théorie du chapitre précédent et de comprendre ce que signifiait sa mise en oeuvre pour des algorithmes de Monte-Carlo. Il était donc important, dans ces exemples là, de détailler précisément les formulations intégrales, les poids de Monte-Carlo et les pseudo-algorithmes pour comprendre la façon dont se code un problème de sensibilité géométrique. L'objectif des deux exemples suivants est de commencer à étendre la mise en oeuvre de la théorie à des configurations radiatives plus concrètes, par exemple l'exemple 7 introduit les géométries concave, radiativement nous retrouverons toutes les problématiques liées au masquage. L'exemple 8 est une géométrie convexe dont les parois sont presque toutes réfléchissantes, nous aborderons donc la multi-réflexion. Ces deux exemples ont été, pour nous, une façon de nous convaincre de l'application de l'édifice théorique : tester la convergence des estimateurs, identifier ce qui pourrait générer des problèmes de variance et enfin vérifier la praticabilité des algorithmes issus d'un problème de sensibilité. Conceptuellement ces exemples n'ajoutent rien à tout ce que nous venons de voir sur les espaces de chemins et sur la mise en oeuvre algorithmique. Simplement la réalisation de ces cas test nous a permis de vérifier que la résolution du modèle de sensibilité est possible lorsque nous chercherons à combiner les difficultés radiatives. Par exemple résoudre un problème de sensibilité dans une géométrie concave dont les parois sont réfléchissantes avec un coefficient de réflexion homogène en surface (ce qui induit des discontinuités). Bien sur cet objectif est une perspective que nous n'avons pas menée pour l'instant et qui sera de toute façon envisagée à partir des outils de la synthèse d'image. En effet, à partir des exemples précédents "élémentaires", nous avons déjà perçu l'importance d'une systématique et d'une rigueur informatique pour gérer ce type d'algorithmique.

Dans la présentation des exemples 7 et 8 nous présenterons donc la formulation intégrale et l'espace de chemins en commentant leur évolution dans la géométrie et les poids de Monte-Carlo résultants. Les détails algorithmiques (définition des transformations, projections des vecteurs, pseudo-algorithmes) seront omis et nous insisterons sur l'espace de chemins.

#### 4.4.7.1 La configuration géométrique

Le septième exemple est inspiré de l'étude des discontinuités des géométries concaves proposée au chapitre [Chap. 3](#). Il s'agit d'une enceinte fermée dont toutes les parois sont soit parallèles à  $(0, \vec{e}_1)$ , soit parallèles à  $(0, \vec{e}_2)$ . Comme dans les exemples précédents, le récepteur est situé sur la droite  $(0, \vec{e}_1)$ . Il est une partie de la base de la cavité qui est de largeur  $D$  entre les points  $(0, 0)$  et  $(D, 0)$ . Le reste de cette base est un corps noir à  $OK$ . Les segments latéraux, parallèles à  $(0, \vec{e}_2)$ , sont l'un de longueur  $D/2$ , entre les points  $(0, 0)$  et  $(0, D/2)$ , et l'autre de longueur  $D$ , entre les points  $(D, 0)$  et  $(D, D)$ . La cavité est fermée par une marche qui crée la concavité. L'angle de la marche est situé au point  $(D/2 + \tilde{\pi}, D/2)$ , et c'est donc sur la largeur de la marche qu'agit le paramètre  $\tilde{\pi}$  (voir la figure [4.47](#) qui présente également la version 3D du même exemple). A l'exception de la base, tous les segments sont des émetteurs noirs isothermes. La partie basse de la marche (en  $x_2 = D/2$ ) est à la température la plus élevée. La luminance émise par ce segment est notée  $I_{max}^{em}$ . La luminance émise par la partie haute de la marche est  $I_{max}^{em}/2$ . Pour les trois autres segments (parallèles à  $(0, \vec{e}_2)$ ) la luminance émise est  $I_{max}^{em}/4$ .

#### 4.4.7.2 L'observable

L'observable correspond au flux radiatif reçu par le récepteur. Dans cet exemple nous estimerons l'observable en utilisant un algorithme réciproque qui commence par l'évaluation d'une position et d'une direction sur le récepteur et qui suit un chemin émis dans cette direction pour remonter

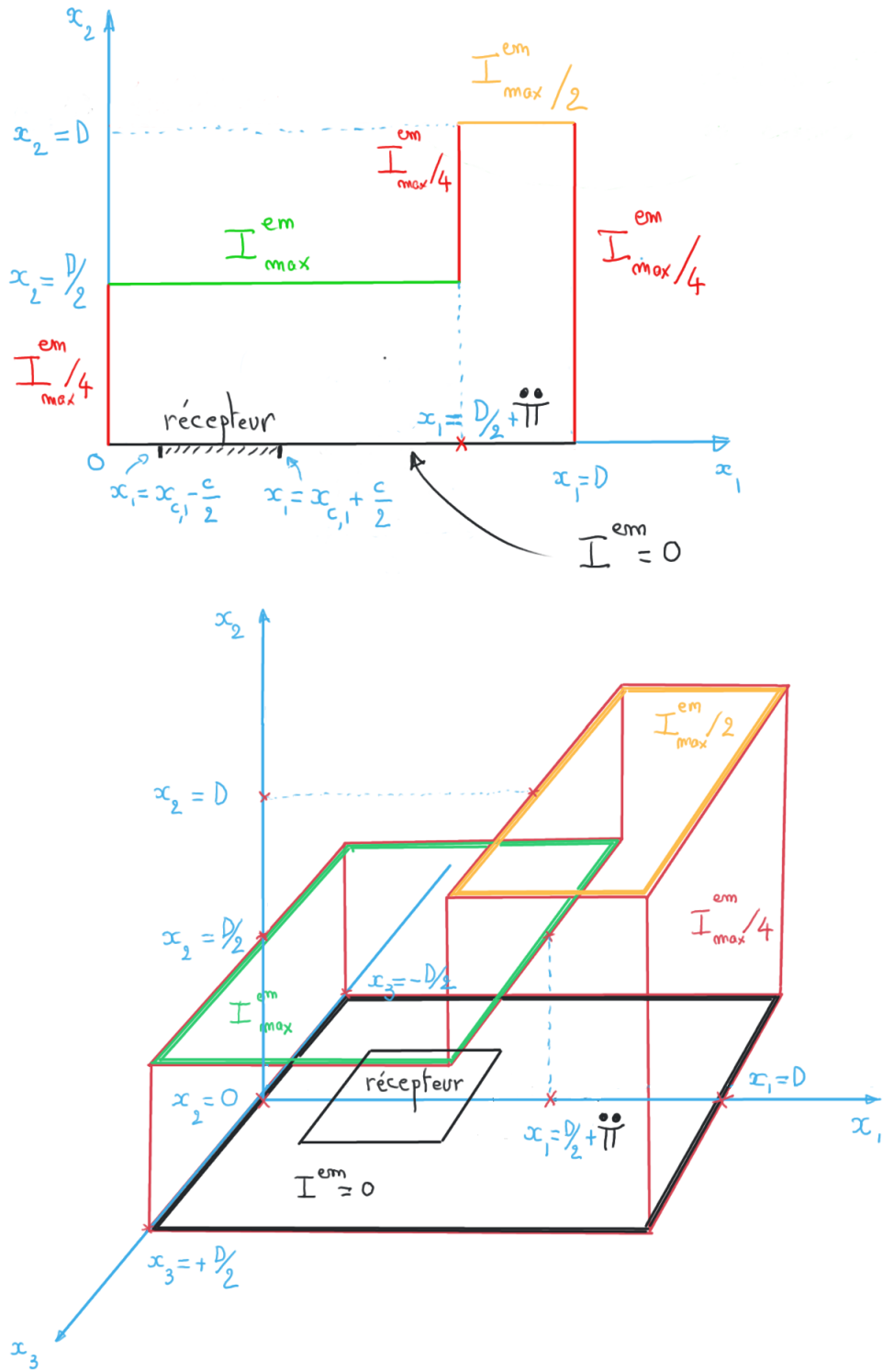


FIGURE 4.47 – L'exemple 7 : version 2D et version 3D.

jusqu'aux sources. La formulation intégrale qui traduit cet algorithme s'écrit (en  $2D$ ) :

$$\mathcal{O} = \int_{\text{récepteur}} \frac{1}{c} dy_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{2} d\theta \hat{w}(y_1, \theta) \quad (4.93)$$

$$\begin{aligned} \hat{w}(y_1, \theta) = & \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I}} \in \text{paroi gauche}) 2 * c * \frac{I_{max}^{em}}{4} \\ & + \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I}} \in \text{paroi droite}) 2 * c * \frac{I_{max}^{em}}{4} \\ & + \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I}} \in \text{paroi basse}) 2 * c * \frac{I_{max}^{em}}{2} \\ & + \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I}} \in \text{paroi haute}) 2 * c * \frac{I_{max}^{em}}{2} \\ & + \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I}} \in \text{paroi verticale}) 2 * c * \frac{I_{max}^{em}}{4} \end{aligned} \quad (4.94)$$

où  $c$  est la longueur du récepteur et  $\vec{x}_{\mathcal{I}}$  est l'intersection avec la scène de la droite partant du récepteur à la position et dans la direction échantillonnées. Verbalement cette formulation dit : si le chemin partant du récepteur intercepte la paroi basse verticale alors il ramènera la source radiative correspondante soit  $\frac{I_{max}^{em}}{2}$ , si il arrive sur la paroi verticale il ramènera la source radiative  $\frac{I_{max}^{em}}{4}$  etc. .

#### 4.4.7.3 La sensibilité

La sensibilité  $\mathcal{S}$  quantifie l'impact du déplacement de la paroi verticale sur le flux reçu par le récepteur. Nous reprenons ici les conditions aux limites de sensibilité développées dans la partie sur les discontinuités des géométries concaves du chapitre précédent (Sec. 3.6). Les profils des luminances d'équilibre étant homogènes sur les parois, les sources de sensibilité sont nulles sur les surfaces. En revanche elles sont non nulles à l'endroit des discontinuités. En  $2D$  ce sont des sources ponctuelles aux positions  $\vec{p}_1$  et  $\vec{p}_2$  (voir Fig. 4.48).

**Configuration  $2D$**  La sensibilité évaluée par un algorithme direct de Monte-Carlo s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta_b}{2} d\theta_b \hat{w}_{\mathcal{S},b}(\vec{p}_1, \theta_b, \xi_b) \\ & + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta_v}{2} d\theta_v (\hat{w}_{\mathcal{S},v1}(\vec{p}_1, \theta_v, \xi_{v1}) + \hat{w}_{\mathcal{S},v2}(\vec{p}_2, \theta_v, \xi_{v2})) \\ & + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta_h}{2} d\theta_h \hat{w}_{\mathcal{S},h}(\vec{p}_2, \theta_h, \xi_h) \end{aligned} \quad (4.95)$$

Dans cet exemple, en  $2D$ , nous choisissons d'échantillonner toutes les sources de sensibilité indépendamment les unes des autres, ce choix algorithmique n'a pas d'autre motivations que d'appliquer la théorie du modèle de sensibilité le plus directement possible sans chercher à améliorer la convergence de l'algorithme. La variable  $\theta_b$  correspond à l'angle d'émission de la source émise par la paroi de gauche (au point  $\vec{p}_1$ ). La variable  $\theta_v$  correspond à l'angle d'émission de la source émise par la paroi de verticale (aux points  $\vec{p}_1$  et  $\vec{p}_2$ ). Enfin La variable  $\theta_h$  correspond à l'angle d'émission de la source émise par la paroi du haut (au point  $\vec{p}_2$ ). Les poids  $\hat{w}_{\mathcal{S},b}$ ,  $\hat{w}_{\mathcal{S},v1}$ ,  $\hat{w}_{\mathcal{S},v2}$  et  $\hat{w}_{\mathcal{S},h}$  sont les poids correspondants. Ils sont détaillés en suivant :

$$\hat{w}_{\mathcal{S},b}(\vec{p}_1, \theta_b, \xi_b) = 2\xi_b \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I},b} \in \text{récepteur}) \quad (4.96)$$

$$\hat{w}_{\mathcal{S},v1}(\vec{p}_1, \theta_v, \xi_{v1}) = 2\xi_{v1} \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I},v1} \in \text{récepteur}) \quad (4.97)$$

$$\hat{w}_{\mathcal{S},v2}(\vec{p}_2, \theta_v, \xi_{v2}) = 2\xi_{v2} \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I},v2} \in \text{récepteur}) \quad (4.98)$$

$$\hat{w}_{\mathcal{S},h}(\vec{p}_2, \theta_h, \xi_h) = 2\xi_h \mathcal{H}(\vec{x}_{\mathcal{I},h} \in \text{récepteur}) \quad (4.99)$$

avec

$$\begin{aligned} \xi_b = & -\beta_b(\vec{u}_b \cdot \vec{e}_1) \left( \frac{I_{max}^{em}}{4} - I_{max}^{em} \right) \frac{1}{2} H(\vec{\omega}_b \cdot \vec{e}_1 > 0) \\ & + \beta_b(\vec{u}_b \cdot \vec{e}_1) \left( L(\vec{x}'_{\mathcal{I},b}, \vec{\omega}_b, \vec{\pi}) - I_{max}^{em} \right) \mathcal{H}(\vec{\omega}_b \cdot \vec{e}_1 < 0) \end{aligned} \quad (4.100)$$

$$\begin{aligned} \xi_{v1} = & +\beta_v(\vec{u}_v \cdot \vec{e}_2) \left( \frac{I_{max}^{em}}{4} - I_{max}^{em} \right) \frac{1}{2} \mathcal{H}(\vec{\omega}_v \cdot \vec{e}_2 < 0) \\ & + \beta_v(\vec{u}_v \cdot \vec{e}_2) \left( \frac{I_{max}^{em}}{4} - L(\vec{x}'_{\mathcal{I},v1}, \vec{\omega}_v, \vec{\pi}) \right) \mathcal{H}(\vec{\omega}_v \cdot \vec{e}_2 > 0) \end{aligned} \quad (4.101)$$

$$\xi_{v2} = \beta_v(\vec{u}_v \cdot \vec{e}_2) \frac{I_{max}^{em}}{4} \quad (4.102)$$

$$\xi_h = -\beta_h(\vec{u}_h \cdot \vec{e}_1) \frac{I_{max}^{em}}{2} \quad (4.103)$$

où

- $\vec{x}_{\mathcal{I},b}$  est l'intersection avec la scène de la droite  $(\vec{p}_1, \vec{\omega}_b)$ ,
- $\vec{x}_{\mathcal{I},v1}$  est l'intersection avec la scène de la droite  $(\vec{p}_1, \vec{\omega}_v)$ ,
- $\vec{x}_{\mathcal{I},v2}$  est l'intersection avec la scène de la droite  $(\vec{p}_2, \vec{\omega}_v)$ ,
- $\vec{x}_{\mathcal{I},h}$  est l'intersection avec la scène de la droite  $(\vec{p}_2, \vec{\omega}_h)$ ,
- $\vec{x}'_{\mathcal{I},b}$  est l'intersection avec la scène de la droite  $(\vec{p}_1, -\vec{\omega}_b)$ ,
- $\vec{x}'_{\mathcal{I},v1}$  est l'intersection avec la scène de la droite  $(\vec{p}_1, -\vec{\omega}_v)$ .

**Éléments de géométrie** Les vecteurs de déformation de la paroi haute, verticale et basse, ont été donnés, ainsi que leur projections, dans le [Chap. 3 Sec. Discontinuités](#).

#### 4.4.7.4 Espace de chemin de la sensibilité

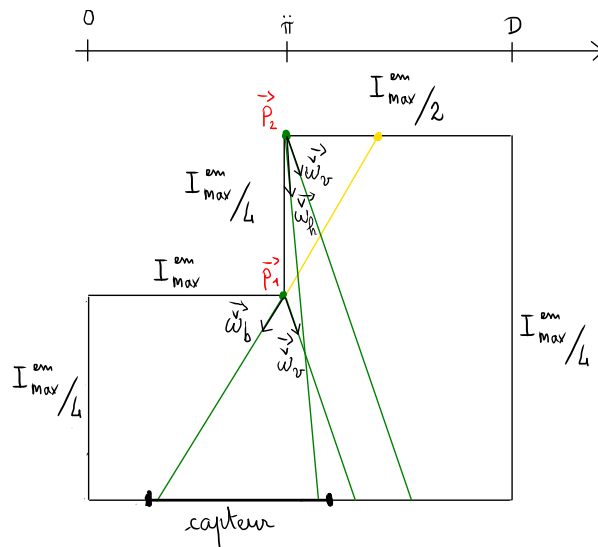


FIGURE 4.48 – Exemple 7 : concavité, extension d'une marche, surfaces noires isothermes avec discontinuités

Les sources ponctuelles seront propagées dans le milieu depuis leurs positions d'émission. Par simplicité algorithmique nous choisissons de les suivre directement en échantillonnant la variable aléatoire "direction d'émission" (ici  $\vec{\omega}_b$ ,  $\vec{\omega}_v$  et  $\vec{\omega}_h$ ) et en suivant le chemin balistique dans la direction

échantillonnée. La source au point  $\vec{p}_1$  dépend de la luminance incidente. Pour une direction  $\vec{\omega}_b$  échantillonnée nous réalisons donc une branche de luminance qui va évaluer la luminance incidente (chemin en jaune sur la Fig. 4.48). Le chemin de luminance est remonté dans la direction inverse  $-\vec{\omega}_b$  jusqu'à intercepter la paroi du haut. Sur le chemin de la Fig. 4.48 la contribution de la luminance incidente sur la source de sensibilité sera donc soit de valeur  $\frac{I_{max}^{em}}{2}$  si la paroi interceptée par le chemin inverse est la paroi du haut, soit  $\frac{I_{max}^{em}}{4}$  si la paroi interceptée par le chemin inverse est la paroi de droite. Radiativement la source de sensibilité correspondra donc à la différence entre la luminance émise par la paroi basse et la luminance émise par la paroi "masquée" par la déformation. En effet c'est cette différence que perçoit le capteur, dans cette direction donnée, lorsque la paroi verticale est déplacée.

À la position  $\vec{p}_1$  une deuxième source de sensibilité sera échantillonnée, elle provient de la paroi verticale. Sur la Fig. 4.48 la direction  $\vec{\omega}_v$  échantillonnée engendre un chemin de sensibilité qui n'arrive pas au capteur, cette contribution ne sera donc pas comptabilisée. Bien qu'elle ne soit pas comptabilisée, car non perçue par le capteur, cette source de sensibilité est du même ordre que celle de la paroi basse. Radiativement elle correspond à la différence de luminance entre la paroi verticale et la paroi basse. En effet il existe une direction pour laquelle le capteur percevra la paroi verticale avant la déformation et la paroi basse après la déformation. C'est ce que traduit cette source.

Dans la même direction  $\vec{\omega}_v$ , la paroi verticale émet également à la position  $\vec{p}_2$ . La paroi du haut émet également en  $\vec{p}_2$  mais dans une direction  $\vec{\omega}_h$  différente qui engendrera un chemin reçu par le capteur. Ces sources de discontinuité sont liées à la convexité irrégulière de la géométrie et ont été détaillées dans le chapitre précédent.

#### 4.4.7.5 Résultat

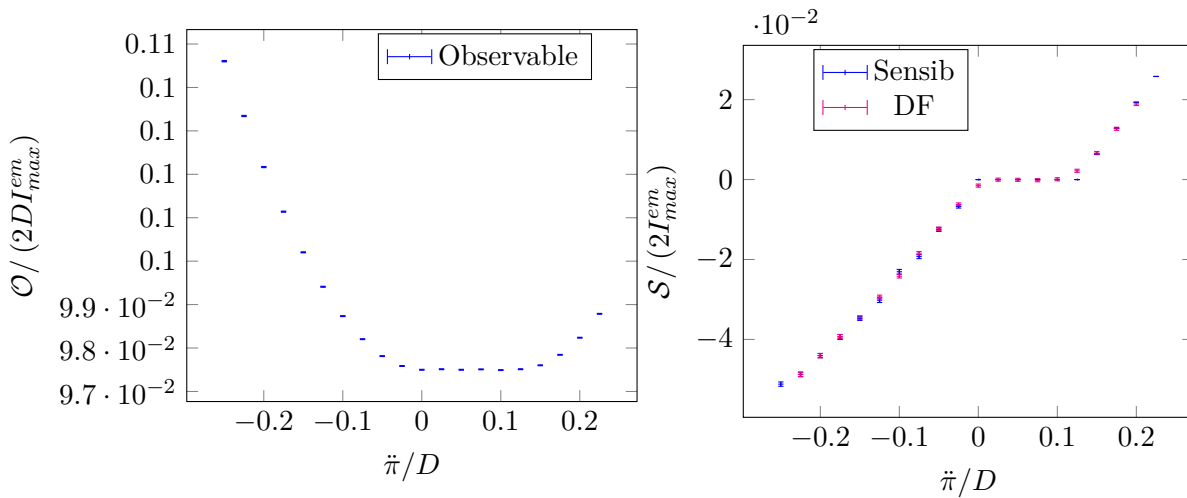


FIGURE 4.49 – Résultats pour l'exemple 7 en 2D. Flux reçu ( $\mathcal{O}$ ) par le capteur (à gauche) et sensibilité ( $\mathcal{S}$ ) du flux au déplacement de la paroi verticale de la concavité (à droite, calculs MC et différences finies).  $N = 10^8$ ,  $c = D/4$ ,  $x_{c,1} = D/2$ .

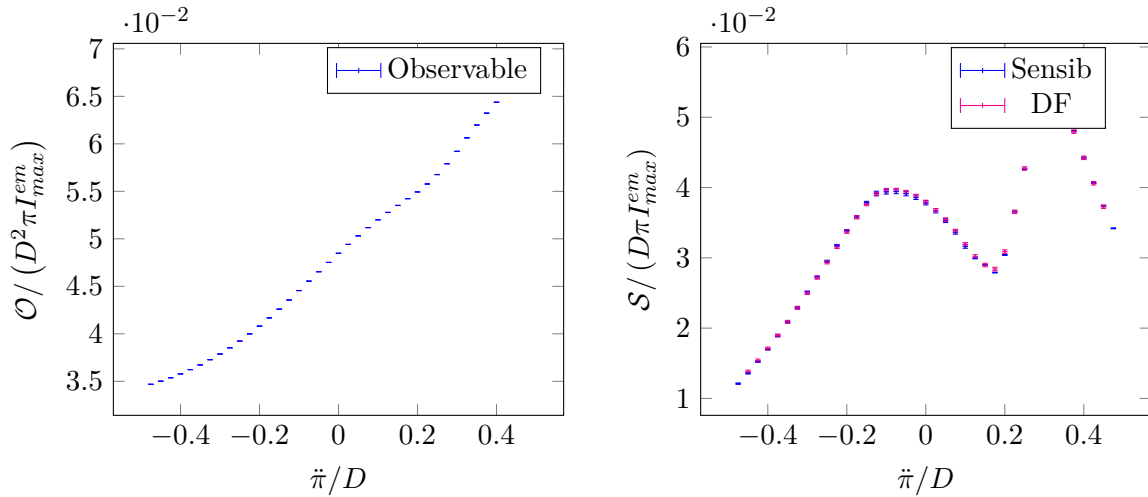


FIGURE 4.50 – Résultats pour l'exemple 7 en 3D. Flux reçu ( $\mathcal{O}$ ) par le capteur (à gauche) et sensibilité ( $\mathcal{S}$ ) du flux au déplacement de la paroi verticale de la concavité (à droite, calculs MC et différences finies).  $N = 10^8$ ,  $c = D/4$ ,  $x_{c,1} = D/2$ .

#### 4.4.8 Exemple 8

##### 4.4.8.1 La configuration géométrique

Ce dernier exemple implique des réflexions multiples en présence de rotation. Il est proche de l'exemple 6 avec un émetteur latéral et un réflecteur qui subit une rotation. Les différences sont que l'émetteur est maintenant de longueur  $D$ , les réflexions sont diffuses au lieu de spéculaire, et pour  $\tilde{\pi} = 0$  le système est fermé et constitue une enceinte cubique de côté  $D$ . Les trois segments fermant l'enceinte (le segment face à l'émetteur et les deux segments de chaque côté du récepteur) sont réfléchissants. Pour  $\tilde{\pi} > 0$  le réflecteur tournant crée une ouverture vers l'extérieur qui est toujours un environnement noir à  $0K$  (aucun rayonnement incident, voir la figure 4.51 qui présente également la version 3D du même exemple). Comme dans l'exemple 6, de façon à éviter toute discontinuité le profil de luminance émise est sinusoïdal le long du segment émetteur : pour un point de coordonnées  $(D, x_2)$  sur l'émetteur (segment de droite), la luminance émise est  $I^{em}(x_2) = \frac{I_{max}^{em}}{2} (1 - \cos(2\pi \frac{x_2}{D}))$ . Toujours comme dans l'exemple 6, le profil de réflectivité est sinusoïdal le long du réflecteur tournant. Il en va de même pour chacun des trois nouveaux réflecteurs (la température de chaque réflecteur est  $0K$  de façon à ce qu'il ne soit source d'aucun rayonnement) :

- pour un point de coordonnées  $(0, x_2)$  sur le réflecteur de gauche, la réflectivité est  $\rho_G(x_2) = \frac{\rho_{max}}{2} (1 - \cos(2\pi \frac{x_2}{D}))$  ;
- pour un point de coordonnées  $(x_1, 0)$  sur le réflecteur inférieur situé à gauche du récepteur, la réflectivité est  $\rho_{IG}(x_1) = \frac{\rho_{max}}{2} \left(1 - \cos(2\pi \frac{x_1}{x_{1,c}-c/2})\right)$  ;
- pour un point de coordonnées  $(x_1, 0)$  sur le réflecteur inférieur situé à droite du récepteur, la réflectivité est  $\rho_{ID}(x_1) = \frac{\rho_{max}}{2} \left(1 - \cos(2\pi \frac{x_1-x_{1,c}-c/2}{D-x_{1,c}-c/2})\right)$ .

##### 4.4.8.2 L'observable

L'observable est le flux incident au récepteur. L'algorithme de Monte-Carlo qui permet d'estimer l'observable dans cette configuration est un algorithme réciproque qui commence par échantillonner une position et une direction sur le récepteur. Le chemin émis est remonté jusqu'à, soit rejoindre la paroi de droite, soit sortir de la boîte. L'intégrale à partir de laquelle nous estimons l'observable s'écrit :

$$\mathcal{O} = \int_{D_r} p_{\Gamma}(\gamma) d\gamma \hat{w}_{\mathcal{O}}(\gamma, I^{em}(\vec{x}_{\gamma})) \quad (4.104)$$

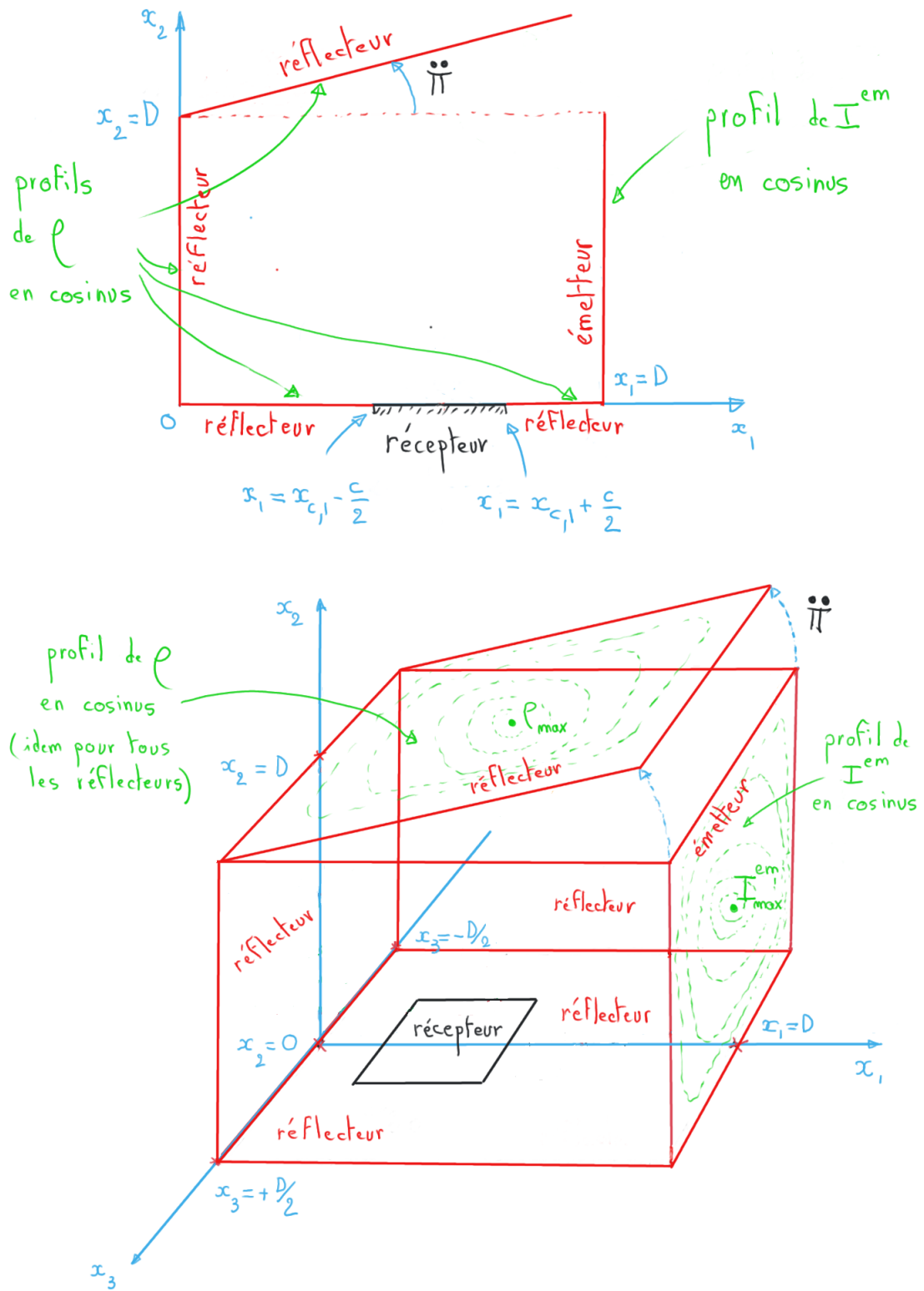


FIGURE 4.51 – L'exemple 8 : version 2D et version 3D.



avec le poids de Monte-Carlo

$$\hat{w}_{\mathcal{O}}(\gamma, I^{em}(\vec{x}_{\gamma})) = \mathcal{H}(\vec{x}_{\gamma} \in \text{émetteur}) I^{em}(\vec{x}_{\gamma}) \prod_{i=1}^{n_r} \rho(\vec{x}_i) + \mathcal{H}(\vec{x}_{\gamma} \notin \text{émetteur}) 0 \quad (4.105)$$

Le produit des réflectivités  $\rho$  dépend du nombre de fois ( $n_r$ ) où le chemin  $\gamma$  a intercepté une paroi réfléchissante. À chaque intersection la source radiative est affaiblie selon la valeur du coefficient de réflectivité au point d'intersection  $\vec{x}_i$ .

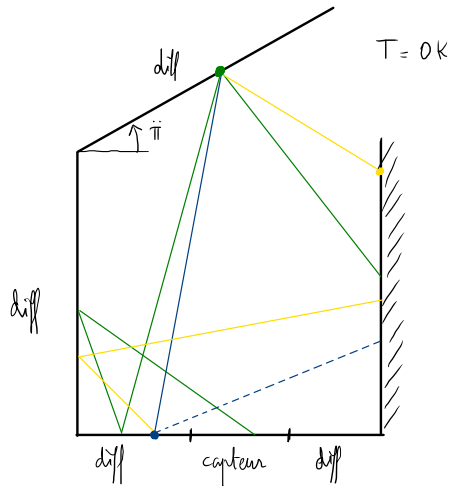


FIGURE 4.52 – Exemple 8 : réflexion multiple.

**La sensibilité** Nous ne ferons que commenter le chemin de sensibilité illustré dans la Fig. 4.52 à partir de la formulation intégrale de la sensibilité et du poids de Monte-Carlo correspondant.

$$\mathcal{S} = \int_{D_{\Gamma}} p_{\Gamma}(\gamma) d\gamma \hat{w}_{\mathcal{S}}(\gamma) \quad (4.106)$$

Sur la Fig. 4.52 sont dessinés différents chemins, le chemin vert est celui de la sensibilité, les chemins bleus sont ceux de la dérivée spatiale et les chemins jaunes sont ceux de la luminance. L'espace de chemins de ce type de configuration a déjà été détaillé, en toute généralité, pour décrire les espaces de chemins de la deuxième famille (branchements uniquement aux frontières) dans la Sec. 4.3.2. Ici nous retrouvons exactement les mêmes idées :

- à chaque rencontre du chemin de sensibilité avec une paroi réfléchissante, la sensibilité est réfléchié ;
- lorsque le chemin de sensibilité rencontre la paroi du haut (qui est la source de sensibilité du problème découplé) alors on échantillonne des branches de luminance (jaunes) et de dérivées spatiales (dans les direction  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$ , toutes les deux suivent le chemin bleu).
- lorsque le chemin de sensibilité rencontre la paroi noire il s'arrête.
- Lorsque le chemin de dérivée spatiale rencontre une paroi réfléchissante il s'arrête et branche avec un chemin de luminance (jaune) et un chemin de dérivée spatiale dans une autre direction (bleu pointillé).

La gestion algorithmique de ces chemins branchant de façon récursive n'est pas une grande source de difficulté en tant que telle. Le type de programmation qu'elle implique est complètement similaire

à celui nécessaire pour la mise en oeuvre des algorithmes de réflexion multiple. La seule différence est ici que qu'il n'y a pas à la rencontre d'une paroi uniquement à gérer le chemin réfléchi : il faut aussi faire naître deux chemins supplémentaires et les suivre également. On peut noter que de telles situations algorithmiques existent déjà de façon courante, même en réflexion multiple, lorsque que des besoins de convergence conduisent par exemple à échantillonner avec une attention particulière certaines directions d'incidence (e.g. des lampes localisées que l'on peut souhaiter échantillonner à chaque réflexion). La vraie difficulté algorithmique concerne la construction du poids.

Il y a deux composantes dans cette construction du poids. La première est très classique en réflexion multiple et concerne la représentation des atténuations à chaque réflexion. Typiquement, dans un algorithme réciproque tel que celui que nous avons choisi pour la grandeur principale, on voit apparaître des produits de réflectivités qui concernent toutes les réflexions entre un point d'émission et le point échantillonné sur le récepteur. Il en va exactement de même lors de la construction du poids de la sensibilité. La seconde composante n'est pas du tout usuelle au sens où elle concerne le fait que lorsqu'une source de sensibilité est rencontrée, elle n'est pas connue ... ce que nous avons géré grâce à la double randomisation, mais qui a des conséquences algorithmiques fortes : les poids construits le long de chaque branche secondaire vont intervenir dans l'expression du poids de la sensibilité (comme dans l'exemple 3 par exemple), mais ici ces poids eux même dépendent de sources qui sont inconnues, et qui à leur tour conduisent à l'initiation de nouvelles branches. Cela conduit à des niveaux d'emboîtement supplémentaire qui, même si ils ne transforment pas la logique générale, demandent une attention algorithmique toute particulière. C'est ce point spécifiquement (la systématisation de la construction hiérarchique des poids, par opposition à la construction ad-hoc que nous avons effectuée à l'occasion de ce dernier exemple) qui sera l'objet des discussions à venir avec les informaticiens de la synthèse d'image qui nous accompagnent dans ces recherches.

#### 4.4.8.3 Résultat

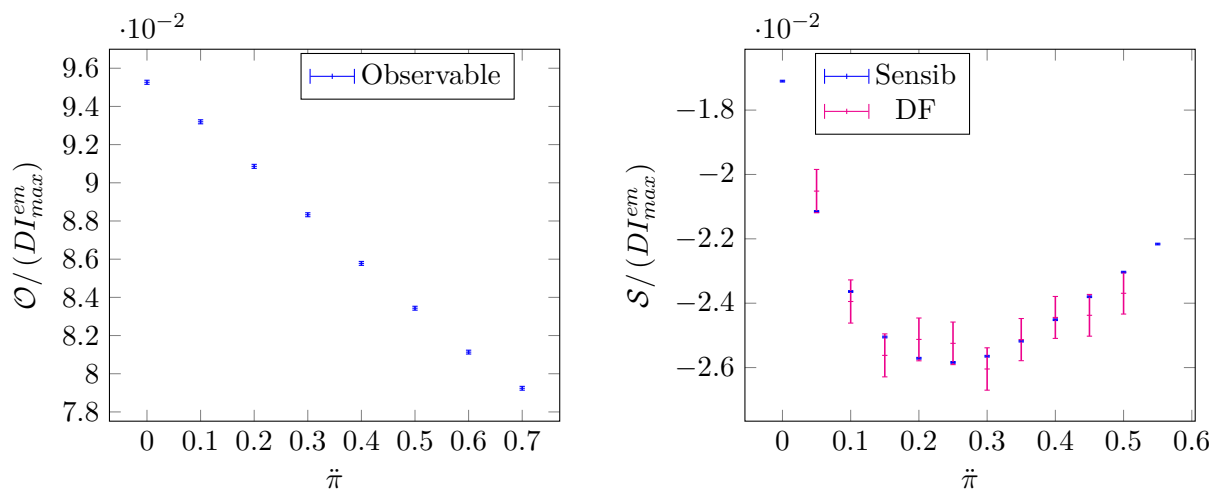


FIGURE 4.53 – Résultats pour l'exemple 8 en 2D. Flux reçu ( $\mathcal{O}$ ) par le capteur (à gauche) et sensibilité ( $\mathcal{S}$ ) du flux à la rotation de l'émetteur (à droite, calculs MC et différences finies).  $N = 10^7$  et  $\delta\hat{\pi} = 0.1$ .

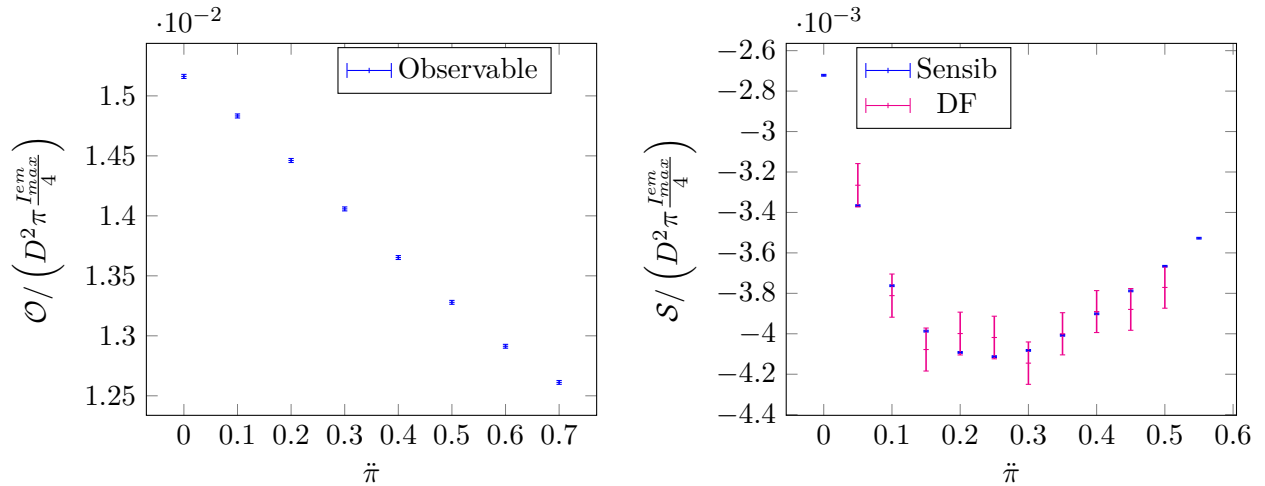


FIGURE 4.54 – Résultats pour l'exemple 8 en 3D. Flux reçu ( $\mathcal{O}$ ) par le capteur (à gauche) et sensibilité ( $\mathcal{S}$ ) du flux à la rotation de l'émetteur (à droite, calculs MC et différences finies).  $N = 10^7$  et  $\delta\dot{\pi} = 0.1$ .

## 4.5 Commentaire sur les résultats des 8 exemples

Nous avons très peu commenté les résultats de simulation que nous avons proposé pour chacun des 8 exemples. L'interprétation des courbes elles-mêmes ne pose en effet aucune difficulté particulière. Pour des configurations aussi simples, le message est seulement sur la validation et sur la convergence.

En ce qui concerne la validation, il a parfois été difficile d'obtenir des résultats précis à partir de la différence finie. Il n'y a ici rien de surprenant puisque c'est une des motivations du calcul de la sensibilité vue comme une grandeur physique en tant que telle : si l'algorithme de Monte Carlo évaluant la sensibilité est réussi, alors il converge rapidement vers la sensibilité et de façon non biaisée, alors que la différence finie est soit biaisée (quand la différence est faite entre deux valeurs du paramètre trop éloignées pour que le remplacement de la dérivée par un accroissement soit pertinent), soit converge difficilement (quand la différence est faite entre deux valeurs du paramètre trop proches pour que les barres d'erreurs soient faibles devant l'accroissement). Néanmoins, parfois en augmentant le nombre de réalisations, nous avons réussi à assurer la validation pour chacun des 8 exemples.

En ce qui concerne la convergence, encore une fois nous n'avons fait aucun effort de réduction de la variance. Dans la construction des algorithmes évaluant la sensibilité, nous sommes chaque fois allé au plus simple : des algorithmes directs ou réciproques, dans une pensée analogue (suivi de "photons") sans aucun travail sur l'échantillonnage par importance. Et le résultat est un bon niveau de convergence des calculs de sensibilité dans chacun des 8 exemples (sur les figures les barres d'erreur élevées sont systématiquement celles de la différence finie). Cette observation tranche avec beaucoup des travaux précédents sur les calculs de sensibilité par Monte Carlo, notamment ceux partant de la formulation intégrale qui pointent des problèmes de convergence spécifiques de la sensibilité elle-même (des cas particuliers où l'observable converge rapidement mais la sensibilité demande beaucoup de réalisations). Nous n'avons pas fait de constatation de cet ordre. Bien sûr, en réduisant la taille de l'émetteur ou la taille du récepteur, nous rencontrons des problèmes de convergence. Mais ces problèmes n'ont rien de spécifique de la sensibilité elle-même. Ils sont déjà là pour l'observable de départ et sont des problèmes de convergence très bien connus pour lesquels des solutions d'optimisation sont disponibles. Nous ne pouvons bien sûr pas affirmer à ce stade que nous ne rencontrerons pas de problèmes de convergence spécifiques de la sensibilité dans les applications à venir, mais il est déjà notable que dans la logique que nous avons retenue, de telles questions de convergence n'apparaissent pas au premier plan.



# Conclusion

---

Dans le dernier chapitre de ce manuscrit les exemples  $2D$  et  $3D$  d'application du cadre théorique ont seulement permis de valider la proposition et de tester la convergence numérique du modèle. En effet les travaux de cette thèse ont été principalement tournés vers l'élaboration du modèle de sensibilité et n'ont pas réellement abordé la question informatique de sa mise en oeuvre. Dans l'article présenté en introduction du manuscrit nous avons déjà identifié que le transport de sensibilité s'effectuait de la même manière que celui de la luminance. La conséquence informatique majeure de cette propriété est que les bibliothèques développées pour la simulation du transfert radiatif en géométrie complexe peuvent être utilisées directement pour mettre en oeuvre le modèle de sensibilité. En revanche nous n'avons pas perçu dans l'article que le modèle de sensibilité allait être couplé avec les dérivées angulaire et spatiale de la luminance. Le couplage de la sensibilité avec d'autres quantités et l'utilisation de la double randomisation n'implique pas de grosses difficultés conceptuelles d'un point de vue informatique. En effet dans notre pratique cette façon de programmer est devenue courante par le biais des nombreuses problématiques qui concernent les physiques couplées et qui sont au coeur de notre communauté. Donc en termes de programmation, la structure de balayage des chemins couplés est prête mais pour d'autres raisons que celle de la sensibilité géométrique (par exemple en vue du couplage des modèles de climats avec ceux de la thermique). Cependant dès que les propriétés radiatives du milieu ne sont plus homogènes les modèles de gradients angulaires et spatiaux font intervenir des couplages très spécifiques dans le volume. Dans le chapitre précédent, nous avons souvent assimilés ces couplages à des sources volumiques classiques de type émission thermique pour la luminance mais dans la pratique leur contribution demande algorithmiquement de gérer des branchements dans le volume. Cette question est donc une perspective immédiate pour la mise en oeuvre du modèle de sensibilité et il sera nécessaire de travailler sur la structure algorithmique pour gérer ces couplages.

Un autre point important qui concerne les perspectives de recherche sur la mise en oeuvre algorithmique est la gestion informatique des discontinuités. Du point de vue de la convergence des résultats il semblerait que les recherches en informatique graphique pointent des difficultés liées aux discontinuités ([Li et al., 2018, Zhang et al., 2019]). Comme nous ne sommes pas arrivés à comprendre la littérature de la synthèse d'images sur ces questions nous ne savons pas dire si ces difficultés sont liées à la façon dont sont conçus leurs algorithmes ou à d'autres problématiques. Pour l'instant nous n'avons pas identifié de problèmes de convergence dans nos calculs en présence de sources ponctuelles ou linéiques. Il existe donc une question de fond que nous ne pourrons pas gérer indépendamment des acteurs de cette culture. Nous avons déjà amorcé une collaboration en ce sens avec des spécialistes de l'informatique graphique intéressés par les sensibilités à la géométrie et nous espérons que ce type de travail à l'interface de nos deux communautés produira le même type de bénéfices que celui que nous avons décrit en introduction concernant la souplesse de gestion des géométries complexes : garder cette souplesse maintenant que nous identifions le besoin nouveau d'échantillonner des arêtes de triangles.

Les perspectives concernant la mise en oeuvre algorithmique du modèle de sensibilité et des modèles des gradients de la luminance ne sont pas légères. De plus, bien que nous n'identifions pas de difficultés majeures, la construction des poids de la sensibilité n'est pas toujours intuitive et nous n'y sommes pas encore habitués. Il va donc être nécessaire de nous approprier collectivement la manipulation de cette nouvelle quantité. Cependant nous pouvons noter ici que le caractère systématique de la construction des conditions aux limites qui est proposée dans ce manuscrit nous

soulage de l'incertitude et de la difficulté qui étaient associées à la sensibilité géométrique depuis les travaux de Maxime Roger ([Roger, 2006]). En effet la dérivation directe de la formulation intégrale par rapport à un paramètre de la géométrie a entraîné de grosses difficultés qui ont même donné lieu à une thèse (Jérémi de la Torre ([De la Torre, 2011])) entièrement dédiée au tri de ces difficultés (problèmes de convergence, impraticabilité informatique etc.). En partant de l'idée du modèle de sensibilité introduite par Jérémi Dauchet ([Dauchet, 2012]) nous avons réussi à systématiser le traitement des sensibilités géométriques et à nous rassurer sur leur exploitation. Nous pouvons maintenant réouvrir des questions théoriques, qui ont pour l'instant été écartées des présents travaux de thèse afin d'arriver au bout du travail de modélisation. Par exemple, depuis cette nouvelle solidité, nous allons bien sûr avoir envie de remettre au premier plan les questions liées aux milieux semi-transparents.

De ce point de vue, parmi les perspectives de recherche ouvertes il y a la question des déformations de nuages dans les situations où il est possible de supposer que la limite entre le nuage et l'air ambiant est une interface franche. Bien entendu une telle interface n'est pas une condition à la limite comme celles que nous avons étudiées dans le manuscrit pour les parois opaques. Et pourtant on devine bien que le formalisme s'applique de la même façon. Par exemple imaginons un nuage observé par un satellite comme sur la figure Fig. 4.55. L'observable est le flux au niveau du satellite et on s'intéresse à la sensibilité de ce flux à une déformation du nuage. En chaque point sur l'interface il y a une discontinuité des propriétés radiatives (celles du nuage d'un côté, celles de l'air de l'autre). Si on note  $\mathcal{S}_n$  la surface du nuage, alors un point  $\vec{y}$  sur  $\mathcal{S}_n$  et une direction  $\vec{\omega}$ , on décompose la vitesse de déformation locale de la frontière comme nous l'avons fait précédemment :

$$\vec{v}_\chi = \alpha \vec{\omega} + \beta \vec{u} \quad (4.107)$$

Ici nous n'avons pas besoin d'introduire la variable  $\vec{\omega}$  car il n'y a pas de propriété directionnelles qui seraient attachées à la frontière. Comme précédemment on écrit,

$$L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = I(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \quad (4.108)$$

et on dérive cette équation par rapport à  $\vec{\pi}$ . En revanche dans cette configuration nous avons deux dérivées différentes de chaque côté de la frontière  $\mathcal{S}_n$  (la sensibilité sera discontinue à la traversée de la frontière). On indice "ext" et "int" les côtés extérieurs et intérieurs.

$$\begin{aligned} \partial_{\vec{\pi}} \left( L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \right) &= \partial_{\vec{\pi}} I(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \\ \vec{v}_\chi \cdot \vec{\partial}_1 L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi})_{int} + s_{int}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) &= \vec{v}_\chi \cdot \vec{\partial}_1 L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi})_{ext} + s_{ext}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \end{aligned} \quad (4.109)$$

En isolant la sensibilité sortante du nuage ( $s_{ext}$ ) on trouve le saut de sensibilité :

$$\begin{aligned} s_{ext}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) &= s_{int}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \\ &+ \alpha \vec{\omega} \cdot \vec{\partial}_1 L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi})_{int} \\ &+ \beta \vec{u} \cdot \vec{\partial}_1 L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi})_{int} \\ &- \alpha \vec{\omega} \cdot \vec{\partial}_1 L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi})_{ext} \\ &- \beta \vec{u} \cdot \vec{\partial}_1 L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi})_{ext} \end{aligned} \quad (4.110)$$

On comprend pourquoi  $\vec{\omega} \cdot \vec{\partial}_1 L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi})$  est discontinu : en effet  $\vec{\omega} \cdot \vec{\partial}_1 L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = \mathcal{G} \left[ L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \right]$  et le terme collisionnel  $\mathcal{G} \left[ L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \right]$  est discontinu à la frontière du nuage (même si  $L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi})$  est continue) car les coefficients d'absorption, de diffusion et la fonction de phase sont discontinus à la frontière du nuage. Par contre il n'y a pas de discontinuité tangentielle à la surface du nuage et donc  $\vec{u} \cdot \vec{\partial}_1 L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi})_{int} = \vec{u} \cdot \vec{\partial}_1 L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi})_{ext}$ . On obtient donc :

$$s_{ext}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) = s_{int}(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) + \alpha \left( \mathcal{G} \left[ L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \right]_{int} - \mathcal{G} \left[ L(\vec{y}, \vec{\omega}, \vec{\pi}) \right]_{ext} \right) \quad (4.111)$$

Comme  $\mathcal{G}$  fait intervenir la luminance on voit que les chemins de sensibilité vont faire naître des branches allant chercher la luminance à chaque traversée de la surface déformée du nuage. Nous pouvons donc envisager des algorithmes de Monte-Carlo qui évaluent des sensibilités à une déformation du nuage qui, en terme de balayage statistique du chemin principal, seraient rigoureusement identiques à ceux du transfert radiatif usuel, mais qui nécessiteraient le lancement d'un chemin secondaire à chaque traversée d'une surface déformée. Ces chemins secondaires ne généreraient eux-mêmes aucun nouveaux chemins car ils auraient comme rôle d'évaluer la luminance comme en transfert radiatif usuel. Dans ces algorithmes il y aurait donc un seul niveau de branchement (voir Fig. 4.55).

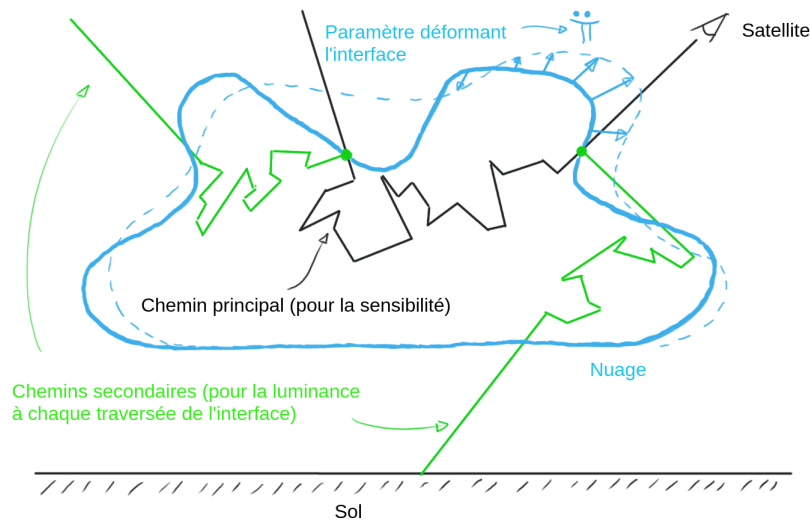


FIGURE 4.55 – Une question typique de l'observation satellitaire : on analyse la réponse du signal reçu par le satellite à une déformation du nuage. Le chemin en noir est le chemin principal de la sensibilité (il y a un chemin radiatif usuel). Les chemins verts naissent à chaque intersection entre le chemin de sensibilité et l'interface du nuage et ont comme rôle d'évaluer par double randomisation la contribution de la luminance à la source locale de sensibilité.

Même si nous ne pouvons parler d'algorithme qu'en utilisant la précaution d'un conditionnel (une perspective) la Fig. 4.56 montre un premier résultat que nous avons pu obtenir dans le cas très simplifié d'un nuage non diffusant et d'un capteur surfacique qui englobe l'ensemble du nuage (condition qui nous offre la possibilité d'une validation analytique). Le point essentiel dans ce premier test est l'observation du fait que même si la surface est triangularisée, il n'y a besoin d'aucun échantillonnage des arêtes des triangles : même si les propriétés radiatives sont discontinues, les arêtes à l'interface entre deux milieux semi-transparentes ne créent aucune discontinuité de luminance. On peut utiliser les outils de la synthèse d'image sans aménagement particulier. Il nous a donc été possible de faire tourner un test sur des surfaces impliquant un très grand nombre de triangles aussi facilement que pour un nuage cubique ou sphérique. Dans la Fig. 4.56 le nuage est représenté par une supershape très "repliée" qui ne ressemble pas tellement à un nuage. La motivation du choix de cette forme particulière est théorique. En effet les éventuels problèmes de convergence de la sensibilité viendraient des rencontres du rayon avec l'interface qui sont les lieux des sources de sensibilité. En jouant sur les paramètres de la supershape qui fixent le niveau de repliement, nous avons pu diversifier la statistique de ces intersections rayon/interface (couverture de tous les angles d'incidence, multiplication du nombre d'intersections pour un même rayon) et comme dans les précédents exemples de cette thèse, aucune difficulté de convergence spécifique de la sensibilité ne semble apparaître quand on agit sur ces paramètres géométriques.

La possibilité de calculer des sensibilités à un paramètre qui déforme le nuage ouvre également la question de la sensibilité au coefficient de diffusion. En effet lorsque le milieu est épais l'estimation de



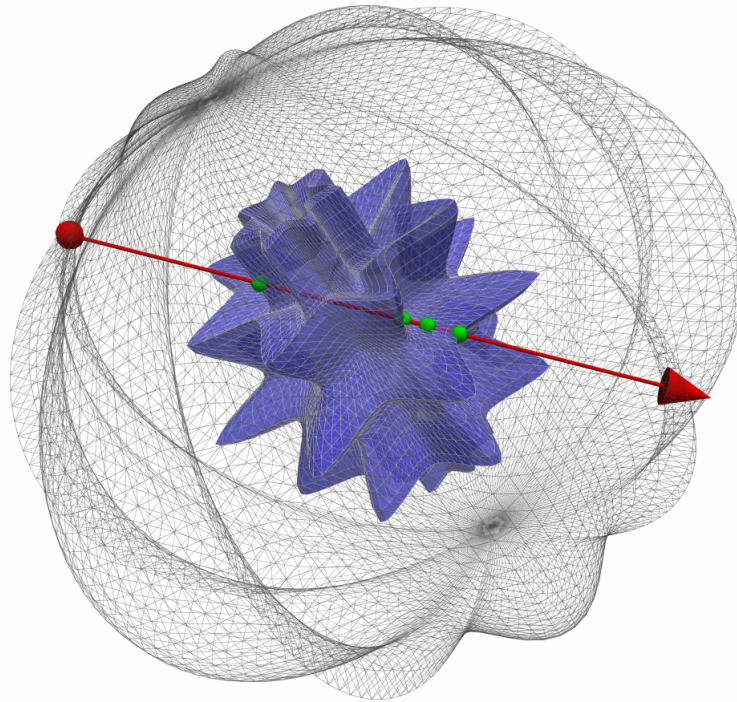


FIGURE 4.56 – Exemple de calcul d’une sensibilité pour une configuration en géométrie complexe inspirée de la figure Fig. 4.55. Les simplifications faites permettent de disposer d’une solution analytique malgré la complexité géométrique. On s’intéresse à l’émission thermique monochromatique d’un nuage homogène isotherme optiquement mince en l’absence de diffusion. L’air environnant est transparent. La réception par le satellite est remplacée par celle d’une surface complexe englobante et l’algorithme de Monte Carlo utilisera des chemins réciproques (partant du capteur) en des points qu’il échantillonera de façon uniforme sur cette surface. Comme à la limite mince l’intégralité de la puissance émise par le nuage est reçue par le récepteur englobant, l’observable vaut  $\mathcal{O} = 4\pi k_a V_{nuage} L^{eq}$ . La vitesse de déformation est  $\vec{v}_D = \dot{\pi} \vec{n}$  où  $\vec{n}$  est la normale sortante. La déformation est donc homothétique et la sensibilité est  $\mathcal{S} = 4\pi k_a S_{nuage} \dot{\pi} L^{eq}$ . Avec les paramètres choisis, la solution analytique est  $\mathcal{S} = 1.16525$ . Pour un calcul de Monte Carlo avec  $10^5$  tirages nous obtenons 1.14307 pour un écart type de 0.0128925 (pour  $10^7$  tirages nous obtenons 1.16492 pour un écart type de 0.0014572).

cette sensibilité par Monte-Carlo est difficile. Dans ces situations la variance associée à l’estimation de la sensibilité au coefficient de diffusion calculée de façon traditionnelle (dérivation de la formulation intégrale) peut être trop grande pour permettre la validation des résultats. Une solution qui pourrait être étudiée est de considérer qu’une augmentation du coefficient de diffusion peut être équivalente à l’agrandissement de la taille du nuage en prenant en compte le rapport d’échelle, c’est à dire en supposant une épaisseur optique identique dans les deux cas. Ainsi au lieu d’estimer la sensibilité d’une observable au coefficient de diffusion (qui pose des problèmes de variance) on estimerait la sensibilité de la même observable à la taille du nuage.



# Bibliographie

---

- [Allaire and Schoenauer, 2007] Allaire, G. and Schoenauer, M. (2007). Conception optimale de structures, volume 58. Springer.
- [Ancell and Hakim, 2007] Ancell, B. and Hakim, G. J. (2007). Comparing adjoint-and ensemble-sensitivity analysis with applications to observation targeting. Monthly Weather Review, 135(12) :4117–4134.
- [Borgonovo and Plischke, 2016] Borgonovo, E. and Plischke, E. (2016). Sensitivity analysis : a review of recent advances. European Journal of Operational Research, 248(3) :869–887.
- [Caliot et al., 2015] Caliot, C., Benoit, H., Guillot, E., Sans, J.-L., Ferriere, A., Flamant, G., Coustet, C., and Piaud, B. (2015). Validation of a monte carlo integral formulation applied to solar facility simulations and use of sensitivities. Journal of Solar Energy Engineering, 137(2).
- [Caliot et al., 2019] Caliot, C., Blanco, S., Coustet, C., El-Hafi, M., Eymet, V., Forest, V., Fournier, R., and Piaud, B. (2019). Combined conductive-radiative heat transfer analysis in complex geometry using the monte carlo method.
- [Case, 1957] Case, K. (1957). Transfer problems and the reciprocity principle. Reviews of Modern Physics, 29(4) :651.
- [Case and Zweifel, 1967] Case, K. M. and Zweifel, P. F. (1967). Linear transport theory.
- [Cercignani, 1988] Cercignani, C. (1988). The boltzmann equation. In The Boltzmann equation and its applications, pages 40–103. Springer.
- [Chandrasekhar, 2013] Chandrasekhar, S. (2013). Radiative transfer. Courier Corporation.
- [Condamine M., 1960] Condamine M., V. P. (1960). Algèbre linéaire et géométrie. Delagrave.
- [Dauchet, 2012] Dauchet, J. (2012). Analyse radiative des photobioréacteurs. PhD thesis, Université Blaise Pascal-Clermont-Ferrand II.
- [Dauchet et al., 2018] Dauchet, J., Bézian, J.-J., Blanco, S., Caliot, C., Charon, J., Coustet, C., El Hafi, M., Eymet, V., Farges, O., Forest, V., et al. (2018). Addressing nonlinearities in monte carlo. Scientific reports, 8(1) :1–11.
- [Dauchet et al., 2015] Dauchet, J., Blanco, S., Cornet, J.-F., and Fournier, R. (2015). Calculation of the radiative properties of photosynthetic microorganisms. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 161 :60–84.
- [Dauchet et al., 2013] Dauchet, J., Blanco, S., Cornet, J.-F., Hafi, M. E., Eymet, V., and Fournier, R. (2013). The practice of recent radiative transfer monte carlo advances and its contribution to the field of microorganisms cultivation in photobioreactors. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 128 :52 – 59. Eurotherm Seminar on Computational Thermal Radiation in Participating Media IV.
- [Dauchet and Fournier, 2014] Dauchet, M. and Fournier, R. (2014). Rayonnement thermique en milieux semi-transparents.
- [Daun and Howell, 2005] Daun, K. and Howell, J. (2005). Inverse design methods for radiative transfer system. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 93(7) :43–60.
- [Daun et al., 2003] Daun, K., Morton, D., and Howell, J. (2003). Geometric optimization of radiant enclosures containing specular surfaces. Journal of Heat Transfer, 125(5) :845–851.

- [De la Torre, 2011] De la Torre, J. (2011). Calculs de sensibilités par méthode de Monte-Carlo, pour la conception de procédés à énergie solaire concentrée. PhD thesis, INPT.
- [de Lataillade et al., 2002] de Lataillade, A., Blanco, S., Clergent, Y., Dufresne, J., Hafi, M. E., and Fournier, R. (2002). Monte carlo method and sensitivity estimations. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 75(5) :529 – 538.
- [Delatorre et al., 2014] Delatorre, J., Baud, G., Bézian, J.-J., Blanco, S., Caliot, C., Cornet, J.-F., Coustet, C., Dauchet, J., El Hafi, M., Eymet, V., et al. (2014). Monte carlo advances and concentrated solar applications. Solar Energy, 103 :653–681.
- [Dorn and Lesselier, 2009] Dorn, O. and Lesselier, D. (2009). Level set methods for inverse scattering—some recent developments. Inverse Problems, 25(12) :125001.
- [Errico, 1997] Errico, R. M. (1997). What is an adjoint model? Bulletin of the American Meteorological Society, 78(11) :2577–2592.
- [Eymet et al., 2013] Eymet, V., Poitou, D., Galtier, M., Hafi, M. E., Terrée, G., and Fournier, R. (2013). Null-collision meshless monte-carlo—application to the validation of fast radiative transfer solvers embedded in combustion simulators. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 129 :145 – 157.
- [Eymet et al., 2019] Eymet, V., Vincent, F., Piaud, B., Coustet, C., Fournier, R., Blanco, S., Ibarrart, L., Tregan, J.-M., Lavieille, P., Caliot, C., et al. (2019). Synthèse d’images infrarouges sans calcul préalable du champ de température. In SFT 2019-27ème Congrès Français de Thermique, pages 153–160.
- [Farges, 2014] Farges, O. (2014). Conception optimale de centrales solaires à concentration : application aux centrales à tour et aux installations "beam down". PhD thesis, Ecole nationale des Mines d’Albi-Carmaux.
- [Fischer, 2014] Fischer, C. (2014). An overview and illustration of sensitivity of forecasts with respect to initial conditions. Tellus A : Dynamic Meteorology and Oceanography, 66(1) :20496.
- [Fournier et al., 2016] Fournier, R., Blanco, S., Eymet, V., El Hafi, M., and Spiesser, C. (2016). Radiative, conductive and convective heat-transfers in a single monte carlo algorithm. In Journal of Physics : Conference Series, volume 676, page 012007. IOP Publishing.
- [Galtier et al., 2013] Galtier, M., Blanco, S., Caliot, C., Coustet, C., Dauchet, J., El Hafi, M., Eymet, V., Fournier, R., Gautrais, J., Khuong, A., Piaud, B., and Terrée, G. (2013). Integral formulation of null-collision monte carlo algorithms. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 125 :57 – 68.
- [Gattepaille, 2020] Gattepaille, V. (2020). Modélisation multi-échelles par formulation intégrale d’un procédé photoréactif solaire et méthode de Monte-Carlo. PhD thesis, Université Clermont Auvergne.
- [Hamby, 1994] Hamby, D. M. (1994). A review of techniques for parameter sensitivity analysis of environmental models. Environmental monitoring and assessment, 32(2) :135–154.
- [Hammersley and Handscomb, 1964] Hammersley, J. M. and Handscomb, D. C. (1964). General principles of the monte carlo method. In Monte Carlo Methods, pages 50–75. Springer.
- [Henrot and Sokołowski, 2005] Henrot, A. and Sokołowski, J. (2005). Mathematical challenges in shape optimization. Control and Cybernetics, 34(1) :37–57.
- [Hibbs and Feynman, 1965] Hibbs, A. and Feynman, R. P. (1965). Quantum mechanics and path integrals. McGraw-Hill Interamericana.
- [Howell and Daun, 2021] Howell, J. R. and Daun, K. (2021). The past and future of the monte carlo method in thermal radiation transfer. Journal of Heat Transfer.
- [Howell et al., 2020] Howell, J. R., Mengüç, M. P., Daun, K., and Siegel, R. (2020). Thermal radiation heat transfer. CRC press.

- [Ibarrart et al., 2018] Ibarrart, L., Caliot, C., El-Hafi, M., Fournier, R., Blanco, S., Dutour, S., Dauchet, J., Tregan, J.-M., Eymet, V., and Vincent, F. (2018). Combined conductive-convective-radiative heat transfer in complex geometry using the monte carlo method. In IHTC 16-16th International Heat Transfer Conference, pages 8–p.
- [Iman and Helton, 1988] Iman, R. L. and Helton, J. C. (1988). An investigation of uncertainty and sensitivity analysis techniques for computer models. Risk analysis, 8(1) :71–90.
- [Jedrzejewski, 2009] Jedrzejewski, F. (2009). Simulation et algorithmes stochastiques, pages 181–216. Springer Paris, Paris.
- [Kac, 1949] Kac, M. (1949). On distributions of certain wiener functionals. Transactions of the American Mathematical Society, 65(1) :1–13.
- [Kerker, 2013] Kerker, M. (2013). The scattering of light and other electromagnetic radiation : physical chemistry : a series of monographs, volume 16. Academic press.
- [Khuong et al., 2013] Khuong, A., Lecheval, V., Fournier, R., Blanco, S., Weitz, S., Bezian, J.-j., and Gautrais, J. (2013). How Do Ants Make Sense of Gravity? A Boltzmann Walker Analysis of *Lasius niger* Trajectories on Various Inclines. PLoS ONE, 8(10) :e76531.
- [Knopman and Voss, 1987] Knopman, D. S. and Voss, C. I. (1987). Behavior of sensitivities in the one-dimensional advection-dispersion equation : Implications for parameter estimation and sampling design. Water Resources Research, 23(2) :253–272.
- [Kramer et al., 1981] Kramer, M., Calo, J., and Rabitz, H. (1981). An improved computational method for sensitivity analysis : Green’s function method with ‘aim’. Applied Mathematical Modelling, 5(6) :432–441.
- [Lampoh, 2018] Lampoh, K. (2018). Différentiation automatique de codes mécaniques : application à l’analyse de sensibilité des toles sandwich aux paramètres de modélisation. PhD thesis, Université de Lorraine.
- [Lapeyre et al., 1998] Lapeyre, B., Pardoux, É., and Sentis, R. (1998). Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion, Mathématiques et Applications 29. Springer.
- [Lapeyre et al., 2020] Lapeyre, P., Blanco, S., Caliot, C., Dauchet, J., El Hafi, M., Fournier, R., Farges, O., Gautrais, J., and Roger, M. (2020). Monte-carlo and sensitivity transport models for domain deformation. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 251 :107022.
- [Li et al., 2018] Li, T.-M., Aittala, M., Durand, F., and Lehtinen, J. (2018). Differentiable monte carlo ray tracing through edge sampling. ACM Transactions on Graphics (TOG), 37(6) :1–11.
- [Loubet et al., 2019] Loubet, G., Holzschuch, N., and Jakob, W. (2019). Reparameterizing discontinuous integrands for differentiable rendering. ACM Transactions on Graphics (TOG), 38(6) :1–14.
- [Marchuk et al., 1980] Marchuk, G. I., Mikhailov, G. A., Nazaraliev, M. A., Darbinjan, R. A., Kargin, B. A., and Elepov, B. S. (1980). Elements of Radiative-Transfer Theory Used in the Monte Carlo Methods. In The Monte Carlo Methods in Atmospheric Optics, Springer Series in Optical Sciences, pages 5–17. Springer, Berlin, Heidelberg. DOI : 10.1007/978-3-540-35237-2\_2.
- [Matsui and Pielke Sr, 2006] Matsui, T. and Pielke Sr, R. A. (2006). Measurement-based estimation of the spatial gradient of aerosol radiative forcing. Geophysical Research Letters, 33(11).
- [Matthes, 1971] Matthes, W. (1971). Monte carlo simulation of the adjoint transport equation. eur 4678.
- [Meso-Star, 2020] Meso-Star (2020). platform.
- [Metropolis, 1987] Metropolis, N. (1987). The beginning. Los Alamos Science, 15 :125–130.
- [Metropolis and Ulam, 1949] Metropolis, N. and Ulam, S. (1949). The monte carlo method. Journal of the American statistical association, 44(247) :335–341.
- [Modest, 2003] Modest, M. F. (2003). Backward monte carlo simulations in radiative heat transfer. J. Heat Transfer, 125(1) :57–62.

- [Penazzi et al., 2019] Penazzi, L., Blanco, S., Caliot, C., Coustet, C., El Hafi, M., Fournier, R., Galtier, M., Ibarrart, L., and Roger, M. (2019). Toward the use of symbolic monte carlo for conduction-radiation coupling in complex geometries. In Proceedings of the 9th International Symposium on Radiative Transfer, RAD-19. Begel House Inc.
- [Pharr et al., 2016] Pharr, M., Jakob, W., and Humphreys, G. (2016). Physically based rendering : From theory to implementation. Morgan Kaufmann.
- [Pianosi et al., 2016] Pianosi, F., Beven, K., Freer, J., Hall, J. W., Rougier, J., Stephenson, D. B., and Wagener, T. (2016). Sensitivity analysis of environmental models : A systematic review with practical workflow. Environmental Modelling & Software, 79 :214–232.
- [Piaud, 2007] Piaud, B. (2007). Modélisation mésoscopique des écoulements avec changement de phase à partir de l'équation de Boltzmann-Enskog. Introduction des effets thermiques. PhD thesis, Université Toulouse III.
- [Pradhan et al., 2021] Pradhan, P., Dasari, H. P., Desamsetti, S., Rao, S. V. B., and Guvvala, R. (2021). Sensitivity to initial conditions on the simulation of extratropical cyclone 'gong'formed over north atlantic. Journal of Earth System Science, 130(1) :1–21.
- [Ramamoorthi et al., 2007] Ramamoorthi, R., Mahajan, D., and Belhumeur, P. (2007). A first-order analysis of lighting, shading, and shadows. ACM Transactions on Graphics (TOG), 26(1) :2–es.
- [Roger, 2006] Roger, M. (2006). Modèles de sensibilité dans le cadre de la méthode de Monte-Carlo : illustrations en transfert radiatif. PhD thesis, INPT.
- [Roger et al., 2005] Roger, M., Blanco, S., El Hafi, M., and Fournier, R. (2005). Monte carlo estimates of domain-deformation sensitivities. Phys. Rev. Lett., 95 :180601.
- [Roger et al., 2004] Roger, M., El Hafi, M., Fournier, R., Blanco, S., de Lataillade, A., Eymet, V., and Perez, P. (2004). Application of sensitivity estimations by monte carlo methods. In Proceeding of the 4th International Symposium on Radiative Transfer, pages 1–8. Begellhouse.
- [Rose et al., 1991] Rose, K. A., Smith, E. P., Gardner, R. H., Brenkert, A. L., and Bartell, S. M. (1991). Parameter sensitivities, monte carlo filtering, and model forecasting under uncertainty. Journal of Forecasting, 10(1-2) :117–133.
- [Rozenwasser and Yusupov, 2019] Rozenwasser, E. and Yusupov, R. (2019). Sensitivity of automatic control systems. CRC press.
- [Rukolaine, 2015] Rukolaine, S. A. (2015). Shape optimization of radiant enclosures with specular-diffuse surfaces by means of a random search and gradient minimization. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 151 :174–191.
- [Saltelli et al., 2000] Saltelli, A., Tarantola, S., Campolongo, F., et al. (2000). Sensitivity analysis as an ingredient of modeling. Statistical Science, 15(4) :377–395.
- [Sans et al., 2021] Sans, M., El Hafi, M., Eymet, V., Forest, V., Fournier, R., and Villefranque, N. (2021). Null-collision meshless monte-carlo - a new reverse monte-carlo algorithm designed for laser-source emission in absorbing/scattering inhomogeneous media. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, page 107725.
- [Sokolowski and Zolésio, 1992] Sokolowski, J. and Zolésio, J.-P. (1992). Introduction to shape optimization. In Introduction to Shape Optimization, pages 5–12. Springer.
- [Terrée, 2015] Terrée, G. (2015). Méthode de Monte-Carlo et non-linéarités : de la physique du transfert radiatif à la cinétique des gaz. PhD thesis, Ecole nationale des Mines d'Albi-Carmaux.
- [Tien, 1968] Tien, C. (1968). Thermal radiation properties of gases. Advances in heat transfer, 5 :253–324.
- [Tomović, 1963] Tomović, R. (1963). Sensitivity analysis of dynamic systems. McGraw-Hill.
- [Tregan, 2020] Tregan, J.-M. (2020). Thermique non-linéaire et Monte-Carlo. PhD thesis, Université Paul Sabatier.

- [Tsallis et al., 1997] Tsallis, C., Plastino, A., and Zheng, W.-M. (1997). Power-law sensitivity to initial conditions—new entropic representation. *Chaos, Solitons and Fractals*, 8(6) :885–891.
- [Vassiliadis et al., 2016] Vassiliadis, V., Riehme, J., Deussen, J., Parasyris, K., Antonopoulos, C. D., Bellas, N., Lalis, S., and Naumann, U. (2016). Towards automatic significance analysis for approximate computing. In *2016 IEEE/ACM International Symposium on Code Generation and Optimization (CGO)*, pages 182–193. IEEE.
- [Villefranque et al., 2019] Villefranque, N., Fournier, R., Couvreur, F., Blanco, S., Cornet, C., Eymet, V., Forest, V., and Tregan, J.-M. (2019). A path-tracing monte carlo library for 3-d radiative transfer in highly resolved cloudy atmospheres. *Journal of Advances in Modeling Earth Systems*, 11(8) :2449–2473.
- [Zeltner et al., 2021] Zeltner, T., Speierer, S., Georgiev, I., and Jakob, W. (2021). Monte carlo estimators for differential light transport. *Transactions on Graphics (Proceedings of SIGGRAPH)*, 40(4).
- [Zhang et al., 2020] Zhang, C., Miller, B., Yan, K., Gkioulekas, I., and Zhao, S. (2020). Path-space differentiable rendering. *ACM Trans. Graph.(Proc. SIGGRAPH)*, 39(6) :143.
- [Zhang et al., 2019] Zhang, C., Wu, L., Zheng, C., Gkioulekas, I., Ramamoorthi, R., and Zhao, S. (2019). A differential theory of radiative transfer. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 38(6) :1–16.
- [Zhao et al., 2015] Zhao, J., Tan, J., and Liu, L. (2015). Monte carlo method for polarized radiative transfer in gradient-index media. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 152 :114–126.