



**HAL**  
open science

# Propriétés asymptotiques et inférence avec des données manquantes pour les modèles de maintenance imparfaite

Dinh Tuan Nguyen

## ► To cite this version:

Dinh Tuan Nguyen. Propriétés asymptotiques et inférence avec des données manquantes pour les modèles de maintenance imparfaite. Recherche opérationnelle [math.OC]. Université de Technologie de Troyes, 2015. Français. NNT : 2015TROY0034 . tel-03361247

**HAL Id: tel-03361247**

**<https://theses.hal.science/tel-03361247>**

Submitted on 1 Oct 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse  
de doctorat  
de l'UTT

**Dinh Tuan NGUYEN**

**Propriétés asymptotiques et inférence  
avec des données manquantes  
pour les modèles de maintenance  
imparfaite**

**Spécialité :**  
Optimisation et Sécurité des Systèmes

2015TROY0034

Année 2015

---

---

# THESE

*pour l'obtention du grade de*

## DOCTEUR de l'UNIVERSITE DE TECHNOLOGIE DE TROYES Spécialité : OPTIMISATION ET SURETE DES SYSTEMES

*présentée et soutenue par*

**Dinh Tuan NGUYEN**

*le 1<sup>er</sup> décembre 2015*

---

---

### **Propriétés asymptotiques et inférence avec des données manquantes pour les modèles de maintenance imparfaite**

---

---

#### JURY

M. B. CASTANIER	PROFESSEUR DES UNIVERSITES	Président
M. Y. DIJOUX	PROFESSEUR ASSISTANT UTT	Directeur de thèse
Mme M. FOULADIRAD	MAITRE DE CONFERENCES - HDR	Directrice de thèse
M. O. GAUDOIN	PROFESSEUR DES UNIVERSITES	Rapporteur
M. E. GOUNO	MAITRE DE CONFERENCES - HDR	Rapporteur
M. A. GRALL	PROFESSEUR DES UNIVERSITES	Examineur

#### Personnalités invitées

M. E. BEUTNER	ASSISTANT PROFESSOR
M. B. GUYOT	INGENIEUR DOCTEUR SNCF

Mis en page avec la classe thesul.

## Remerciements

Me voilà la page de remerciements. Celle-ci est censée être la plus facile à écrire une fois que le manuscrit est fini. Mais non, il y a tellement de choses qui passent pour en arriver jusqu'à là et des fois les mots ne peuvent pas transmettre ce que l'on a envie de dire.

First and foremost, j'envoie mes profondes gratitude à mes deux encadrants, Yann Dijoux et Mitra Fouladirad. Yann, ce n'est pas incorrect de dire que c'est la chance qui m'a permis de te connaître depuis le master, et ce qui m'a conduit jusqu'à là. Tu m'as démontré l'abnégation, la patience, la rigoureuse et la curiosité sans faille pour la recherche. Les parties de billard ont aussi contribué de près ou de loin à cette fin. Mitra, c'est aussi une chance pour moi de t'avoir comme prof depuis très tôt. Ta guidance, ton écoute, et ta bienveillance m'ont aidé à traverser ces années d'études. Ceci n'est donc pas la fin, mais plutôt un début pour moi et je suis reconnaissant de vous avoir comme encadrants. Nous cherchons un modèle parfait depuis trois ans, mais vous êtes depuis toujours mes modèles préférés.

Je tiens à remercier également M. Oliver Gaudoin et M. Evans Gouno d'avoir accepté de rapporter ma thèse. Vos suggestions pertinentes ne font qu'améliorer grandement la présentation du manuscrit et rendre la lecture plus aisément. Vos diverses questions m'ont guidé à réfléchir sur des ouvertures intéressantes.

Il sera un oubli impardonnable de ne pas mentionner la gentillesse des autres membres du jury : M. Eric Beutner, M. Bruno Castanier, M. Benoît Guyot, et M. Antoine Grall d'avoir accepté à évaluer ma thèse et d'avoir me proposé des réflexions intéressantes pour la suite.

Je souhaite adresser un grand merci à l'ensemble des personnels du département de mathématiques de l'INSA de Rennes qui m'a accueilli en tant qu'ATER et qui m'a réservé un cadre de travail idéal pour finaliser sereinement ma préparation de soutenance. Je tiens à remercier M. Marc Briane et M. James Ledoux qui m'ont donné cette opportunité. Je remercie également Pierrette Chagneau, Jean-François Dupuy, notre secrétaire bien aimée Martine et les collègues à l'étage.

Je pense aux amis avec qui je partage des moments inoubliables tout au long du parcours : les troyens et troyennes Khanh, Ngoc, Houda, Canh, Anh, Duong et les rennais Audrey, Emilie, Tangi, Tuyen et Viet. Merci pour les conseils de ceux qui ont passé cette étape, et du courage pour ceux et celles à venir !

J'exprime ma gratitude aux superbes secrétaires de LM2S et de l'école doctorale : Bernadette, Marie-Jo, Véronique, Pascale, Thérèse, Isabelle. Sans votre aide, les démarches administratives et les papiers deviendront certainement un cauchemar en plein jour.

Une petite pensée pour mes parents et mes mémés. Même si vous ne comprenez pas de quoi je parle quand je vous raconte mon quotidien, votre soutien inconditionnel et votre confiance totale m'ont soulevé après des moments difficiles.

Last but not least, je pense à ma femme, ma petite Quynh. Sans toi, je n'aurais pas probablement le courage pour continuer et finir cette thèse. Ton écoute, ton soutien, ton humour me donnent de la lumière au moment de l'impasse et désespéré. On a fini cela ensemble.



# Sommaire

<b>Introduction générale</b>	<b>7</b>
<b>Chapitre 1 Modèles classiques de maintenance</b>	<b>11</b>
1 Notations et modèles . . . . .	11
1.1 Processus de comptage . . . . .	11
1.2 Modélisation de la maintenance corrective seule . . . . .	14
1.3 Modélisation conjointe de la maintenance corrective et préventive . . . . .	23
2 Politiques de maintenance préventive . . . . .	27
2.1 Politique de maintenance périodique ou par bloc . . . . .	27
2.2 Politique de maintenance basée sur l'âge . . . . .	28
2.3 Politique de maintenance basée sur l'intensité de défaillance . . . . .	28
2.4 Politique de maintenance séquentielle . . . . .	29
2.5 Autres politiques de maintenance . . . . .	29
2.6 Discussion sur les politiques de maintenance . . . . .	29
3 Estimation pour les modèles de maintenance . . . . .	30
3.1 Estimation non-paramétrique . . . . .	30
3.2 Estimation semi-paramétrique . . . . .	31
3.3 Estimation paramétrique . . . . .	31
3.4 Estimation pour des données dans des fenêtres d'observation . . . . .	35
4 Thèmes abordés . . . . .	36
<b>Chapitre 2 Développement analytique et politique de maintenance imparfaite pour le modèle Weibull-<math>ARA_\infty</math></b>	<b>39</b>
1 Introduction . . . . .	39
2 Modèle Weibull- $ARA_\infty$ . . . . .	40
3 Développement . . . . .	40
4 Politiques de maintenance imparfaite avec le modèle $WARA_\infty$ . . . . .	49
4.1 Politiques de maintenance avec $\rho_c = \rho_p$ du modèle $WARA_\infty$ . . . . .	50
4.2 Politiques de maintenance avec $\rho_c < \rho_p$ du modèle $WARA_\infty$ . . . . .	58

Sommaire

4.3	Politiques de maintenance pour des intensités initiales croissantes . . . . .	61
4.4	Estimation des paramètres . . . . .	64
4.5	Application à un jeu de données EDF . . . . .	65
5	Conclusion et Perspectives . . . . .	67

**Chapitre 3 Approche fréquentiste pour les modèles d'âge virtuel sur une fenêtre d'observation** **69**

1	Présentation de la problématique . . . . .	69
2	Estimation dans le cas d'une maintenance imparfaite . . . . .	70
2.1	Rappels sur la fonction de vraisemblance avec des données complètes . . .	70
2.2	Les types d'observation . . . . .	71
3	Extension sur une fenêtre d'observation pour les modèles AGAN et ABAO . . . .	72
3.1	Maintenance parfaite AGAN . . . . .	72
3.2	Maintenance minimale . . . . .	74
4	Extension sur une fenêtre d'observation pour les modèles d'âge virtuel . . . . .	78
4.1	Modèle $ARA_1$ . . . . .	78
4.2	Modèle $ARA_\infty$ . . . . .	79
4.3	Modèle Brown-Proschan . . . . .	80
5	Simulation . . . . .	82
5.1	Méthodes d'estimation . . . . .	82
5.2	Plan d'échantillonnage . . . . .	84
5.3	Choix de paramètres . . . . .	84
5.4	Maintenance parfaite . . . . .	84
5.5	Maintenance minimale . . . . .	85
5.6	Maintenance $ARA_1$ . . . . .	86
5.7	Maintenance $ARA_\infty$ . . . . .	88
5.8	Maintenance Brown-Proschan . . . . .	90
5.9	Discussion autour des simulations . . . . .	92
6	Applications à des jeux de données réelles . . . . .	93
6.1	Modèle $ARA_1$ . . . . .	93
6.2	Modèle $ARA_\infty$ . . . . .	94
6.3	Modèle Brown-Proschan . . . . .	95
7	Conclusion et perspectives . . . . .	96

**Chapitre 4 Inférence bayésienne pour le modèle Brown-Proschan et critères de sélection de modèle** **99**

1	Introduction . . . . .	99
---	------------------------	----



2	Inférence bayésienne du modèle Brown-Proschan . . . . .	99
2.1	Choix de loi <i>a priori</i> . . . . .	100
2.2	Loi <i>a posteriori</i> des grandeurs de fiabilité . . . . .	103
2.3	Facteur de Bayes . . . . .	104
2.4	Test d'adéquation pour le modèle $ARA_1$ . . . . .	105
3	Simulations . . . . .	106
3.1	Estimation bayésienne . . . . .	106
3.2	Critères de sélection de modèle . . . . .	111
4	Cas d'étude . . . . .	114
5	Conclusion . . . . .	115
	<b>Conclusion générale</b>	<b>117</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>119</b>

## *Sommaire*

# Introduction générale

Toute au long de leur vie, les systèmes subissent des pannes et reçoivent des réparations et maintenances pour redevenir rapidement opérationnel. Une indisponibilité trop importante coûte très cher aux exploitants. Une défaillance mal contrôlée dans le domaine militaire, aéronautique, médical ou des transports a des conséquences catastrophiques. Du fait de leur dégradation, usure et vieillissement, les instants de défaillance des systèmes industriels ont un caractère aléatoire et inévitable en absence de maintenance préventive. L'objectif de l'équipe de maintenance est de bien intervenir sur les systèmes pour prolonger leur vie utile, en prenant en compte les critères de coût de maintenance et d'indisponibilité du système.

Une maintenance efficace et une bonne gestion de la politique de maintenance préventive sont des critères importants pour garantir un niveau correct de fiabilité. On peut être plus exigeant dans la conception, renforcer la redondance, utiliser les composants plus fiables. Toutefois, toutes ces actions ont un coût très élevé, voire non rentable. Il se peut aussi qu'il soit impératif d'utiliser les matériels ou composants déjà existants ou accessibles sans avoir beaucoup de choix. La maintenance devient alors une composante cruciale dans la gestion des systèmes industriels.

Dans ce manuscrit, nous nous intéressons aux instants de maintenance à l'échelle globale du système. Cela revient à ne pas prendre en compte la structure du système et à considérer que le système est formé d'un seul composant. On distingue les deux grands types de maintenance (Extrait de la norme NF EN 13306 X60-319) :

- Maintenance corrective : maintenance exécutée après détection d'une panne et destinée à remettre un bien dans un état dans lequel il peut accomplir une fonction requise.
- Maintenance préventive : maintenance exécutée à intervalles prédéterminés ou selon des critères prescrits et destinée à réduire la probabilité de défaillance ou la dégradation du fonctionnement d'un bien.

Les actions de maintenance sont réalisées à des instants aléatoires ou déterministes. Dans les applications industrielles, la défaillance (aussi appelée panne) est généralement considérée comme un événement aléatoire. Par conséquent, les instants de maintenance corrective sont aléatoires, puisque ceux-ci dépendent des défaillances. En revanche, les instants de maintenance préventive pourraient être déterministes ou aléatoires, selon les critères (coût, indisponibilité, cadence de production, etc.). Cela dit, il se trouve des cas où la politique de maintenance préventive n'est pas optimisée, ou qu'aucune politique de maintenance préventive ne soit mise en place. D'où l'importance de l'analyse de bases de données de maintenance. Cette analyse peut permettre de comprendre le mécanisme de dégradation et de vieillissement du système en question. D'autre part, on peut estimer l'efficacité des actions de maintenance réalisées avec les outils appropriés, afin d'adapter et de préparer les actions à venir.

Dans la littérature de la fiabilité et sûreté de fonctionnement, plusieurs outils sont proposés pour la modélisation, la mise en place et l'analyse de la maintenance. On peut citer quelques méthodes d'analyse de risques pour la maintenance, telles que Arbre de défaillance, Diagramme de Cause à Effet, Diagramme de fiabilité, AMDEC (Analyse des Modes de Défaillance, de leurs

Effets et de leur Criticité) ou l'analyse quantitative par les modèles statistiques. Un des avantages des méthodes qualitatives est qu'elles permettent de déterminer la cause et l'effet de la panne, afin d'avoir des actions appropriées sur les composants critiques. Ces méthodes nécessitent une connaissance approfondie du système en question. L'analyse par les modèles statistiques est complémentaire et ne requiert qu'une représentation relativement abstraite du comportement du système. De plus, il est généralement plus simple pour alimenter ces analyses : il suffit de disposer des instants de défaillance, des types de maintenance ou du niveau de dégradation. On peut obtenir ensuite des premières estimations de la dégradation et du vieillissement. Ces techniques permettent classiquement d'optimiser l'ensemble des actions de maintenance.

De ce fait, cette thèse est dédiée à l'analyse des données de maintenance par des méthodes statistiques. Pour une modélisation appropriée des données, il nous faut des hypothèses sur l'impact de la maintenance sur le système. Dans la littérature, les modèles font généralement l'hypothèse que les maintenances ont un effet palliatif (suite à une défaillance, le système est remis dans l'état où il se trouvait juste avant l'événement) ou de remise à neuf. Les modèles sont alors appelés ABAO (As Bad As Old) et AGAN (As Good As New), respectivement. Ainsi, l'efficacité de maintenance d'un modèle ABAO est minimale, d'un modèle AGAN est parfaite. En pratique, il est possible que les maintenances améliorent l'état du système, sans pour autant le remettre à l'état neuf. On parle alors de la maintenance imparfaite, dont l'efficacité se trouve entre les deux cas extrêmes. Plusieurs approches sont proposées pour modéliser l'effet imparfait de la maintenance, dont les plus répandus sont les modèles d'âge virtuel. Parmi eux, les modèles les plus employés sont les modèles de Kijima, le modèle de Brown-Proschan et la classe de modèles ARA (Arithmetic Reduction of Age - Réduction arithmétique d'Âge). De nombreux travaux sur les propriétés mathématiques et l'application industrielle de ces modèles sont proposés dans la littérature.

Dans des conditions moins extrêmes mais plus réalistes, les outils classiques ne sont plus adaptés, par exemple lorsque l'on est en présence de données manquantes. Généralement, ces outils supposent que les données sont issues d'un système neuf, c'est-à-dire que le début des observations commence en même temps que la mise en route du système. Dans la réalité, il se peut que seule une partie de la base de données (les instants de défaillance en l'occurrence) soit disponible pour diverses raisons : équipement d'enregistrement non adapté, perte d'information du passage de l'enregistrement physique au digital, systèmes achetés d'occasion etc. Par ailleurs, il est possible que l'enregistrement des données soit réalisé durant le régime stationnaire des systèmes. Ce régime peut être atteint suite à une période de jeunesse, de rodage ou de test. Par conséquent, le système livré aux exploitants ne peut pas être considéré comme neuf au début des observations. D'autre part, on rencontre des cas où très peu de données de défaillance sont enregistrées, puisque les systèmes sont très fiables. En contrepartie, les exploitants disposent d'une riche connaissance sur le fonctionnement et le comportement du système en question ou des systèmes similaires. Cela fait appel à des méthodes qui peuvent prendre en compte ces informations dans l'analyse statistique. Finalement, l'un des objectifs importants de l'analyse de base de données de maintenance est de pouvoir proposer une politique de maintenance préventive adaptée.

Nous souhaitons répondre le mieux possible à ces questions dans cette thèse. Dans un premier temps, nous présentons le cadre de littérature dans lequel on se positionne. Le deuxième chapitre est consacré au développement des propriétés d'un modèle de maintenance imparfaite de la classe ARA. En choisissant le cas particulier classique de la loi de Weibull, nous développons les lois marginales des grandeurs de fiabilité pour ce modèle, puis nous proposons les lois asymptotiques du régime stationnaire correspondant. Les résultats asymptotiques seront appliqués dans la construction des politiques de maintenance préventive avec la maintenance imparfaite. Lors

de l'application des politiques, nous supposons que les paramètres de modèles sont connus. En pratique, cela n'est généralement pas le cas. Les paramètres sont estimés à partir des données, puis ils sont utilisés pour implanter les politiques de maintenance préventive. Nous insistons sur l'importance de la procédure d'estimation, afin de bien identifier le comportement du système d'étude, et de proposer des politiques efficaces. Dans le chapitre 3, nous poursuivons l'inférence des modèles avec des données obtenues sur une fenêtre d'observation. Les extensions de méthodes d'estimation pour chacun des modèles sont présentées, accompagnées des simulations et des applications aux données réelles. Dans le chapitre 4, nous proposons également l'inférence bayésienne pour le modèle Brown-Prochan, afin d'étendre les analyses bayésiennes pour les modèles de maintenance imparfaite. La thèse est terminée par une conclusion générale des travaux effectués et par les pistes pour les futures recherches.

*Introduction générale*

# Chapitre 1

## Modèles classiques de maintenance

### 1 Notations et modèles

Cette section est consacrée à l'introduction des modèles et des méthodes statistiques pour la modélisation de la maintenance. Les durées des actions de maintenance sont supposées négligeables par rapport à la durée de vie du système. Les instants de défaillance et de maintenance sont modélisés par un processus de comptage. Dans un premier temps, nous ne considérons que les systèmes soumis à des maintenances correctives. La prise en compte de la maintenance préventive a lieu à partir de la section 1.3.

#### 1.1 Processus de comptage

Un processus de comptage décrit la situation où une suite d'occurrences d'un événement est observée, et notée par une suite de variables aléatoires positives  $\{T_i\}_{i \geq 0}$ . Les durées inter-occurrence (inter-défaillance) sont notées  $\{X_i\}_{i \geq 1}$ , avec  $X_i = T_i - T_{i-1}$ . La fonction de comptage associée au processus est définie comme suit :

$$N_t = \sum_{i \geq 1} \mathbb{1}_{\{T_i \leq t\}}$$

La variable aléatoire  $T_i$  désigne le temps ou l'instant de la  $i$ ème maintenance avec la convention  $T_0 = 0$ , et  $N_t$  compte le nombre de défaillances ou maintenances dans l'intervalle  $[0, t]$ . Un exemple de trajectoire est présenté dans la Figure 1.1.

La connaissance de la loi du processus  $\{T_i\}_{i \geq 0}$  implique celle du processus  $\{N_t\}_{t > 0}$  et inversement car :

$$\mathbb{P}(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2, \dots, T_n \leq t_n) = \mathbb{P}(N_{t_1} \geq 1, N_{t_2} \geq 2, \dots, N_{t_n} \geq n)$$

Pour une défaillance à l'instant  $T_i$ , dénotons  $T_i^-$  et  $T_i^+$  les instants juste avant et après la défaillance. Les lois de variables aléatoires  $\{T_i\}_{i \geq 0}$ ,  $\{X_i\}_{i \geq 1}$  ou  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  peuvent être définies par l'intensité de défaillance conditionnelle :

$$\lambda_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{P}(N_{t+\Delta t} - N_{t^-} = 1 | \mathcal{H}_{t^-}) \quad (1.1)$$

où  $N_{t^-}$  désigne le nombre de défaillances survenues avant  $t$ . Cette intensité décrit la propension d'observer une défaillance dans une très courte période de temps  $\Delta t$ , en sachant le passé du processus  $\mathcal{H}_{t^-}$  jusqu'au instant  $t^-$ . L'ensemble  $\mathcal{H}_{t^-}$  peut contenir les co-variables, les types de

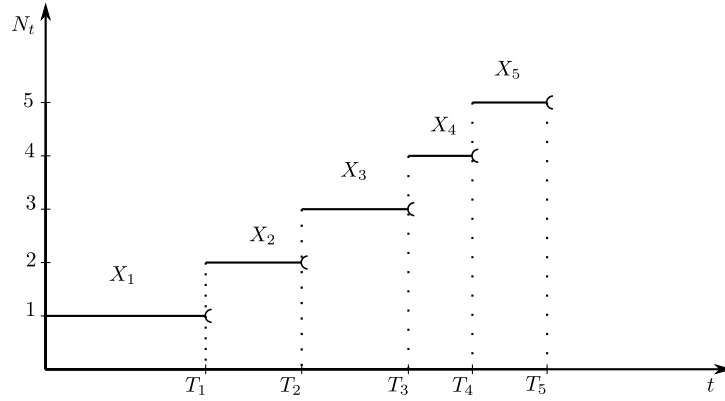


Figure 1.1 – Exemple de trajectoire d'un processus de comptage

maintenance et les instants de défaillances dans le passé. Pour ce type de processus de comptage, on suppose que la probabilité d'avoir plus de deux observations pendant une très courte période  $\Delta t$  est négligeable [52] :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{P}(N_{t+\Delta t} - N_{t-} \geq 1 | \mathcal{H}_{t-}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{P}(N_{t+\Delta t} - N_{t-} = 1 | \mathcal{H}_{t-})$$

Dans la modélisation de la maintenance où les instants de défaillance ne sont pas forcément indépendants, il est important de distinguer l'intensité  $\lambda_t$  du taux d'occurrence (*ROCOF-Rate of Occurrence of failure*), qui est défini sans le conditionnement [123] :

$$w(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(N_{t+\Delta t} - N_t = 1)}{\Delta t}$$

Pour les systèmes réparables, il est raisonnable de considérer que le passé du processus a un impact sur les futures défaillances. L'intensité de défaillance  $\lambda_t$  est alors une variable aléatoire, et  $\{\lambda_t\}_{t \geq 0}$  est un processus stochastique. Toutefois, pour un système neuf (et avant sa première défaillance), nous considérons que son intensité de défaillance est une fonction continue et déterministe  $\lambda(t)$ , que l'on appelle intensité initiale. L'écriture  $\lambda(t)$  désigne alors l'intensité de défaillance d'un système neuf avant la première défaillance ou d'un système non réparabile. Dans le cadre de la modélisation des systèmes réparables de cette thèse, nous privilégions l'utilisation du terme *intensité de défaillance initiale* (ou *intensité initiale*) à celui de *taux de défaillance*.

On définit l'intensité de défaillance cumulée dans l'intervalle  $[0, t]$ , comme l'intégrale de l'intensité de défaillance :

$$\Lambda_t = \int_0^t \lambda_s ds$$

Les fonctions  $\lambda_t$  et  $\Lambda_t$  ne sont pas forcément continues. Dans [52], il est montré que la fonction  $\lambda_t$  est une fonction continue par morceaux :

$$\lambda_t = \sum_{n \geq 0} \lambda_{X_{n+1} | T_1=t_1, \dots, T_n=t_n} (t - T_n) \mathbb{1}_{\{T_n < t \leq T_{n+1}\}}$$



où  $\lambda_{X_{n+1}|T_1=t_1, \dots, T_n=t_n}$  est le taux de défaillance de la durée de défaillance  $X_{n+1}$  sachant le passé  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ . La loi conditionnelle du  $T_{n+1}$  s'exprime alors comme suit [52] :

$$f_{T_{n+1}|T_1=t_1, \dots, T_n=t_n}(t) = \lambda_t \exp\left(-\int_{t_n}^t \lambda_u du\right) \mathbb{1}_{\{t_1 < t_2 < \dots < t_n < t\}}, \forall n \geq 1$$

$$f_{T_1}(t) = \lambda(t) \exp\left(-\int_0^t \lambda(u) du\right)$$

Pour établir la vraisemblance d'un tel processus de comptage, on a généralement besoin de connaître les lois des  $T_n$  et de définir un type de censure. La censure est la façon dont les événements sont enregistrés. Une des caractéristiques des données de survie est l'existence d'observations incomplètes. En effet, les données sont souvent recueillies partiellement, notamment, à cause des processus de censure et de troncature. Les données censurées ou tronquées proviennent du fait qu'on n'a pas accès à toute l'information : au lieu d'observer des réalisations indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) de durées  $X$ , on observe la réalisation de la variable  $X$  soumise à diverses perturbations, indépendantes ou non du phénomène étudié. Des notions de base concernant la censure sont les suivantes [2] :

- *Censure à droite* : Soit  $L$  une valeur fixée, au lieu d'observer les variables  $X_1, \dots, X_n$  qui nous intéressent, on n'observe  $X_i$  uniquement lorsque  $X_i \leq L$ , sinon on sait uniquement que  $X_i > L$ . La censure à droite est très couramment employée pour modéliser la fin des observations.
- *Censure à gauche* : Soit la variable aléatoire  $X$ , supposons que l'on observe seulement les variables aléatoires  $Y = \max\{X, U\}$  et  $Z = \mathbb{1}_{\{X \geq U\}}$  où  $U$  est la variable aléatoire de censure indépendante de  $X$ . Ce phénomène peut apparaître dans la situation où l'état de fonctionnement d'un objet n'est observé que par des inspections non continues. Lors de l'inspection, l'objet est déjà en panne, mais la durée exacte entre l'instant de panne et l'instant d'inspection est inconnue. D'autre part, il est possible que la censure à gauche soit causée par l'instrument de mesure : un instrument peu sensible n'est pas capable de mesurer un événement en dessous d'un certain seuil.
- *Troncature à gauche (Left-Truncated)* : Cette configuration est différente de la censure à gauche. Dans ce cas, un événement n'est observé qu'à partir d'un moment ultérieurement à son début, et jusqu'au moment où celui-ci s'achève. La durée  $X$  est tronquée à gauche par  $U$ , dans le sens où seule la durée résiduelle  $Y = X - U | X > U$  est observable. Cette configuration caractérise le phénomène d'entrée retardée [*late entry* ou *delayed entry*] [73]. Ainsi, les informations avant l'observation sont absentes ou partiellement disponibles. Les analyses statistiques doivent être adaptées à ces données, afin d'éviter les estimateurs biaisés (Exemple IV.1.3 dans [2]).

La collecte de données est caractérisée selon les types de censure. On remarque que les censures ci-dessus sont définies pour un seul événement. Supposons maintenant que les événements s'enchaînent, on parle alors des événements récurrents. Dans le cadre de la modélisation de maintenance, les opérations successives de maintenance d'un système réparable constituent une telle suite d'événement. Les données sont généralement des dates de maintenance, ou des types de maintenance. Ainsi, nous nous intéressons à deux types d'observation :

- *Plan d'essai de type I* : L'objet est observé dans l'intervalle de temps  $[0, t]$  prédéfini. La dernière expérience qui commence à  $T_{N_t^-}$  est censurée à droite (par  $t$ ).
- *Plan d'essai de type II* : L'observation est arrêtée lorsqu'il y a  $n$  événements ou expériences déjà réalisés. Le nombre  $n$  est fixé avant l'observation.

Ces deux types de collecte de données sont répandus dans la littérature, et la plupart des

analyses statistiques sont réalisées avec les plans d'essai de type I et II. Il existe aussi des situations où la troncature à gauche est présente. Les données peuvent concerner des réalisations indépendantes d'une même expérience, ou des instants d'occurrence des événements récurrents. Les analyses statistiques nécessite alors des modification pour adapter à la nouvelle situation. Nous en présentons en détails dans la section 3.4 de ce chapitre, et les travaux concernant la troncature à gauche sont présentés ensuite dans le chapitre 3.

Étant donné un type de censure, ou un plan d'essai, on peut définir les vraisemblances correspondant au processus de comptage. Considérons un intervalle  $[0, t]$ , dénotons  $\underline{t}_n^* = (t_1, t_2, \dots, t_n, t)$  les  $n$  instants de défaillance selon la censure de type I (avec la convention  $t_0 = 0$  et  $t_{n+1} = t$ ), et  $\underline{t}_n = (t_1, t_2, \dots, t_n)$  les  $n$  instants de défaillance selon la censure de type II et notons  $\theta$  le vecteur des paramètres du modèle. D'après [52], la fonction de vraisemblance associée à l'observation  $\underline{t}_n^*$  (censure de type I) est donnée par :

$$\mathcal{L}(\theta; \underline{t}_n^*) = \prod_{i=1}^n \lambda_{t_i} \exp \left( - \sum_{i=1}^{n+1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \lambda_u du \right) \quad (1.2)$$

Pour les observations  $\underline{t}_n$  avec une censure de type II, la vraisemblance admet l'expression suivante :

$$\mathcal{L}(\theta; \underline{t}_n) = \prod_{i=1}^n \lambda_{t_i} \exp \left( - \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \lambda_u du \right) \quad (1.3)$$

où  $\lambda_t$  est l'intensité de défaillance du processus de comptage associé, définie dans l'équation 1.1.

## 1.2 Modélisation de la maintenance corrective seule

### 1.2.1 Modèle de maintenance parfaite

Ce modèle permet d'écrire les cas où une maintenance ou une réparation remet le système à neuf, d'où le terme As Good As New (AGAN) ou maintenance parfaite. Il est construit à partir d'un processus de comptage dit de renouvellement dont les durées inter-arrivée (inter-défaillance) sont i.i.d. :  $X_i \sim X$ ,  $i \geq 1$ .  $X$  est la variable aléatoire dont la fonction de répartition et la densité sont  $F$  et  $f$ , respectivement. En termes de l'intensité de défaillance, on a :

$$\lambda_t = \lambda(t - T_{N_t^-})$$

En appliquant les équations 1.2 et 1.3, on obtient la fonction de vraisemblance du modèle AGAN associée à l'observation de  $n$  défaillances  $\underline{t}_n^*$  sur l'intervalle  $[0, t]$  (censure de type I) :

$$\mathcal{L}^{PR}(\theta; \underline{t}_n^*) = \prod_{i=1}^n \lambda(t_i - t_{i-1}) e^{-\Lambda(t_i - t_{i-1})} \times e^{-\Lambda(t - t_n)}$$

La vraisemblance associée à l'observation de  $n$  défaillances  $\underline{t}_n$  (censurée de type II) s'écrit :

$$\mathcal{L}^{PR}(\theta; \underline{t}_n) = \prod_{i=1}^n \lambda(t_i - t_{i-1}) e^{-\Lambda(t_i - t_{i-1})}$$

où  $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du$  désigne l'intensité de défaillance cumulée.

En particulier, lorsque la loi des durées inter-arrivée  $X$  est la loi exponentielle  $\mathcal{E}(\lambda)$  alors le processus de renouvellement associé est souvent appelé le processus de Poisson homogène (HPP).

Dans cette configuration, le processus de renouvellement  $\{T_i\}_{i \geq 1}$  et le processus de comptage associé  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  ont les lois suivantes :

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \forall t > 0$$

$$\mathbb{P}(T_n \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \forall t > 0, n \geq 1$$

Une propriété importante du HPP est le comportement sans mémoire de la durée à la défaillance :

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > t + s)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s}, \forall s, t > 0$$

Du fait de l'absence de mémoire et de l'hypothèse de non-vieillessement qui en découle, la loi exponentielle doit être utilisée avec une très grande vigilance pour les systèmes industriels maintenus. Le modèle HPP est souvent utilisé dans la modélisation des composants électroniques avec des remplacements parfaits après la panne [123]. Cette loi offre des avantages en termes d'analyse de fiabilité grâce à sa simplicité. Toutefois l'hypothèse de maintenance parfaite devient simpliste et trop optimiste pour les systèmes complexes.

### 1.2.2 Modèle de maintenance minimale

Contrairement au modèle de maintenance parfaite, ce modèle suppose que les maintenances remettent le système en fonctionnement dans l'état où il se trouvait juste avant la défaillance. Cette caractéristique est modélisée par un processus de Poisson non homogène (NHPP) défini comme suit :

- $N_t$  est le processus de comptage associé aux instants de maintenance minimale,
- $N_t$  a des incréments indépendants,
- $\mathbb{P}(N_{t+\Delta t} - N_t = 1) = \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t)$ .

La condition des incréments indépendants implique que l'intensité de défaillance dans l'intervalle  $(t, t + s]$  ne dépend pas de son passé  $\mathcal{H}_{t-}$ . En d'autres termes, l'intensité de défaillance n'est pas affectée par les maintenances depuis la mise en route du système :

$$\lambda_t = \lambda(t)$$

Dénotons l'intensité de défaillance cumulée :  $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du$ . Les instants de défaillance  $\{T_i\}_{i \geq 0}$  et le processus de comptage associé  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  ont les lois suivantes :

$$\mathbb{P}(T_n \leq t) = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\Lambda(t))^k}{k!} e^{-\Lambda(t)}$$

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \frac{(\Lambda(t))^n}{n!} e^{-\Lambda(t)}$$

Les fonctions de vraisemblance avec deux types de censure sont données par :

$$\mathcal{L}^{NHPP}(\theta; \underline{t}_n^*) = \prod_{i=1}^n \lambda(t_i) \times e^{-\Lambda(t)} \quad (\text{censure de type I})$$

$$\mathcal{L}^{NHPP}(\theta; \underline{t}_n) = \prod_{i=1}^n \lambda(t_i) \times e^{-\Lambda(t_n)} \quad (\text{censure de type II})$$

L'hypothèse de maintenance minimale est tout à fait réaliste lorsque l'on considère la maintenance palliative d'un système complexe où une simple action n'influence pas son état général. Cependant, il est aussi envisageable de supposer que la maintenance puisse améliorer l'état du système, sans pour autant le remettre à neuf. On parle alors de maintenance imparfaite qui se trouve entre ces deux cas extrêmes.

Dans la littérature, plusieurs approches sont proposées pour modéliser l'effet imparfait de la maintenance. Nous envoyons le lecteur à l'article de Pham et Wang [115] pour une présentation plus exhaustive. Nous présentons ici l'approche d'âge virtuel qui nous concerne particulièrement pour la suite de la thèse.

### 1.2.3 Modèles d'âge virtuel

**1.2.3.1 Âge virtuel** Les modèles d'âge virtuel supposent qu'après la  $i$ ème maintenance, le système fonctionne comme un système neuf qui aurait vécu un âge  $A_i$  sans avoir eu de panne [75]. L'âge  $A_i$  est appelé âge effectif suite à la  $i$ ème maintenance. On peut déterminer la loi des durées inter-défaillance  $\{X_i\}_{i \geq 1}$  conditionnellement à l'âge du système et à son passé de la manière suivante. Notons  $X$  la variable aléatoire associée à la durée de défaillance d'un système neuf, la propriété d'âge virtuel se traduit alors par :

$$\forall i \geq 0, \forall t \geq 0, \mathbb{P}(X_{i+1} > t | A_1, X_1, \dots, A_i, X_i) = \mathbb{P}(X > A_i + t | X > A_i) \quad (1.4)$$

Notons  $f, F, R$  respectivement la densité de probabilité, la fonction de répartition et la fonction de survie associées à la variable aléatoire  $X$ , la loi conditionnelle de la prochaine durée inter-défaillance  $X_{i+1}$  en fonction des durées inter-défaillance du passé  $X_1, X_2, \dots, X_i$  et des âges effectifs associés  $A_1, A_2, \dots, A_n$  est donnée par :

$$\forall i \geq 0, \forall t \geq 0, \mathbb{P}(X_{i+1} > t | A_1, X_1, \dots, A_i, X_i) = \frac{R(A_i + t)}{R(A_i)}$$

L'âge initial du système  $A_0$  est égal à zéro si le système est neuf au départ, et est plus grand que zéro sinon. L'âge virtuel peut être défini comme étant la somme du dernier âge effectif et du temps qui s'est écoulé depuis la dernière maintenance :

$$V_t = t - T_{N_t^-} + A_{N_t^-} \quad (1.5)$$

On note  $A_n^-$  l'âge effectif juste avant la  $n$ ème défaillance :

$$A_n^- = A_{n-1} + X_n$$

Dans la plupart des cas, on a  $V_t \leq t$  et cette inégalité signifie qu'une maintenance efficace peut *rajeunir* le système. Il est possible de déterminer l'intensité de défaillance grâce à l'âge virtuel :

$$\lambda_t = \lambda(V_t) = \lambda(t - T_{N_t^-} + A_{N_t^-}) \quad (1.6)$$

En appliquant les équations 1.2 et 1.3, les vraisemblances d'un modèle d'âge virtuel associées à la censure de type I et type II sont données dans les équations 1.7 et 1.8, respectivement :

$$\mathcal{L}^{VA}(\theta; \underline{t}_n^*) = \prod_{i=1}^n \lambda(a_{i-1} + t_i - t_{i-1}) \times \exp\left(-\sum_{i=1}^{n+1} \Lambda(a_{i-1} + t_i - t_{i-1}) - \Lambda(a_{i-1})\right) \quad (1.7)$$

$$\mathcal{L}^{VA}(\theta; \underline{t}_n) = \prod_{i=1}^n \lambda(a_{i-1} + t_i - t_{i-1}) \times \exp \left( - \sum_{i=1}^n \Lambda(a_{i-1} + t_i - t_{i-1}) - \Lambda(a_{i-1}) \right) \quad (1.8)$$

Les valeurs  $\{a_i\}_{i \geq 0}$  sont les réalisations des âges effectifs  $\{A_i\}_{i \geq 0}$ . Ces informations sont importantes pour calculer la vraisemblance. Chaque modèle d'âge virtuel modélise l'effet de maintenance à travers les âges effectifs. Nous présentons les principales hypothèses et sur les âges virtuels et les modèles correspondant.

**1.2.3.2 Modèle de Brown-Proschan** Proposé par Brown et Proschan [13] (BP), il est supposé qu'à chaque défaillance, une maintenance parfaite est réalisée avec la probabilité  $p$  et une maintenance minimale avec la probabilité  $1 - p$ . Il en découle que l'efficacité de la  $i$ ème maintenance  $B_i$  suit alors la loi Bernoulli de paramètre  $p$  ( $\mathcal{B}(p)$ ) :

$$\begin{cases} B_i = 1 & \text{Si la } i\text{ème maintenance est parfaite} \\ B_i = 0 & \text{Si la } i\text{ème maintenance est minimale} \end{cases}$$

L'effet (minimal, parfait) de maintenance  $B_i$  est indépendant de l'instant de défaillance  $T_i$  et des événements dans le passé  $\{T_j, B_j\}_{1 \leq j < i}$ . L'âge effectif du modèle BP est déterminé par :

$$A_i = \sum_{j=1}^i \prod_{k=j}^i (1 - B_k) X_j$$

Puisque le modèle BP est un modèle d'âge virtuel, son intensité de défaillance dépendra de l'intensité initiale et de l'âge virtuel :

$$\lambda_t = \lambda \left( t - T_{N_{t-}} + \sum_{j=1}^{N_{t-}} \prod_{k=j}^{N_{t-}} (1 - B_k) X_j \right)$$

Il est montré dans [38] que si le taux de défaillance de la première défaillance  $T_1$  (ou l'intensité initiale) suit une loi exponentielle alors le modèle BP n'est pas identifiable. De plus, il est rare d'avoir des informations sur les effets de maintenance  $B_i$ . Malgré cela, Doyen [38] propose une nouvelle écriture de la fonction de vraisemblance même si l'on a pas d'accès à l'information sur les valeurs des  $B_i$ . Pour une observation de type I  $\underline{t}_n^*$  pendant l'intervalle  $[0, t]$ , la vraisemblance du modèle BP est donnée par comme suit :

$$\mathcal{L}^{BP}(\theta, p; \underline{t}_n^*) = (1 - p)^n \mathcal{L}^{NHPP}(\theta; \underline{t}_n^*) + \sum_{i=1}^n p(1 - p)^{n-i} \mathcal{L}^{BP}(\theta, p; \underline{t}_i) \mathcal{L}^{NHPP}(\theta; t_{i+1} - t_i, \dots, t_n - t_i, t - t_i)$$

De la même manière, la vraisemblance associée à l'observation de type II  $\underline{t}_n$  est :

$$\mathcal{L}^{BP}(\theta, p; \underline{t}_n) = (1 - p)^n \mathcal{L}^{NHPP}(\theta; \underline{t}_n) + \sum_{i=1}^{n-1} p(1 - p)^{n-i-1} \mathcal{L}^{BP}(\theta, p; \underline{t}_i) \mathcal{L}^{NHPP}(\theta; t_{i+1} - t_i, \dots, t_n - t_i)$$

où  $\theta$  désigne l'ensemble des paramètres de l'intensité initiale.

Block *et al.* [8] ont généralisé le modèle BP, en supposant que la probabilité de maintenance parfaite peut être une fonction du temps  $p(t)$ . Les propriétés du nouveau modèle restent similaires à celles du modèle BP.

**1.2.3.3 Modèle de Malik** Malik [98] présente une des premières modélisations de l'impact de la maintenance sur l'âge du système. Dans ce modèle, la maintenance réduit l'âge qui s'ajoute depuis la dernière défaillance ( $X_i = T_i - T_{i-1}$ ) par un facteur d'amélioration  $\xi_i$ . Il en découle que l'âge effectif juste après la  $i$ ème défaillance vaut :

$$A_i = A_{i-1} + (1 - \xi_i)(T_i - T_{i-1})$$

La suite des paramètres réels non-négatifs  $\{\xi_i\}_{i \geq 1}$  représente donc l'efficacité de la  $i$ ème maintenance. Une maintenance est qualifiée non nuisible si  $\xi_i > 0$ . Il est clair que ce modèle permet de généraliser les deux concepts classiques ABAO et AGAN en prenant  $\xi_i = 0$  et  $\xi_i = 1$ , respectivement.

Si les  $\{\xi_i\}_{i \geq 1}$  sont déterministes et représentés par un seul paramètre  $\xi \in [0, 1]$ , alors on obtient :

$$A_i = A_{i-1} + (1 - \xi)(T_i - T_{i-1}) = A_0 + (1 - \xi)T_i$$

Dans cette configuration et en supposant que  $A_0 = 0$ , l'intensité de défaillance du modèle est déterminée par :

$$\lambda_t = \lambda(t - \xi T_{N_t})$$

Guo et Love [62] rejoignent l'idée de Malik en proposant un modèle de réduction d'âge pour modéliser l'impact de la maintenance sur le système.

**1.2.3.4 Modèle Kijima** Kijima [74] propose deux modèles permettant la prise en compte de l'efficacité de deux manières différentes :

1. Modèle I : La  $i$ ème maintenance réduit l'âge du système d'une quantité proportionnelle à la dernière durée inter-défaillance :

$$A_i = A_{i-1} + Z_i X_i$$

où  $Z_i$  est une variable aléatoire réelle non négative qui représente l'efficacité de la  $i$ ème maintenance. L'expression générique de l'âge effectif est donc la suivante :

$$A_i = \sum_{j=1}^i Z_j X_j$$

Les modèles de Malik et de Guo et Love sont deux cas particuliers du modèle I lorsque les variables aléatoires  $Z_i$  sont considérées comme un unique paramètre déterministe.

2. Modèle II : La  $i$ ème maintenance rajeunit le système d'un montant proportionnel à son âge virtuel juste avant la défaillance  $A_{i-1} + X_i$  :

$$A_i = Z_i(A_{i-1} + X_i)$$

où  $Z_i$  est aussi une variable aléatoire réelle non négative pour l'efficacité de la  $i$ ème maintenance. On remarque que la maintenance réduit l'âge effectif lorsque  $Z_i < 1$ . L'âge effectif est donc défini par :

$$A_i = \sum_{j=1}^i \prod_{k=j}^i Z_k X_j$$

De par leurs constructions, les modèles I et II possèdent des propriétés très différentes. Étant donné un système dégradant avec de faibles conditions sur  $\lambda(t)$  et sur les  $Z_i$ , les durées inter-défaillance sous le modèle I tendent vers zéro, tandis que les durées inter-défaillance du modèle II convergent vers un régime stationnaire [45, 82]. Doyen [38] a montré que le modèle BP possède également des comportements similaires au modèle II. Le comportement du modèle II fera l'objet de notre étude dans le chapitre 2.

**1.2.3.5 Extensions du modèle Kijima** L'introduction du modèle Kijima de type I et II offre une grande flexibilité pour modéliser l'impact de la maintenance. A partir de ces modèles, plusieurs cas particuliers sont développés. On retrouve les modèles suivants :

- Modèle de Finkelstein [45] et de Dagpunar [26] : Les auteurs indépendamment proposent que les efficacités de maintenance  $\{Z_i\}_{i \geq 1}$  sont modélisées par une fonction du temps  $\rho(t)$ . Pour le modèle Kijima I, lorsque la fonction  $\rho(t)$  est une constante  $\rho$ , on retrouve le modèle proposé par Yevkin et Kristov [147], qui porte le nom *Generalized Renewal Process*. L'équation de renouvellement généralisé est introduite. Une procédure pour résoudre cette equation est également proposée par des simulations de Monte Carlo ou par la technique de calcul intégral de Volterra. Finkelstein [44] montre que pour une fonction  $\rho(t)$  continue et non linéaire, les durées inter-défaillance tendent vers zéro et le système tombe en panne juste après une maintenance, tandis que le modèle II va se stabiliser et entrer dans son régime stationnaire. Dagpunar [26] s'appuie sur l'existence de ce régime afin de proposer une méthode numérique pour l'approximation de l'intensité de défaillance et de l'espérance de l'âge virtuel dans l'état stationnaire.
- Modèle de Fuqing et Kumar [48] : Les auteurs supposent que les efficacités de maintenance sont modélisées par une fonction dépendant du temps chronologique  $z(t)$ , à valeurs dans l'intervalle  $[0, 1]$  et décroissante. Cela peut modéliser le cas où les maintenances deviennent de moins en moins efficaces au fur et à mesure que le système vieillit. Le cas d'exemple d'une loi exponentielle est proposé :

$$z(t) = \exp(-et^c)$$

Pour certaines applications [4], les auteurs montrent que le nouveau modèle est plus adapté aux données de défaillance que les modèles classiques de Kijima. Toutefois, si l'on s'intéresse à l'estimation de paramètres du modèles, celui-ci pourrait présenter des difficultés avec l'ajout de deux paramètres supplémentaires.

- Modèle de Stadje et Zukerman [135] : Ce modèle est construit sur le principe que l'équipe de maintenance peut déterminer l'efficacité de l'action de maintenance avant même que celle-ci soit réalisée. La décision se transforme en une variable supplémentaire  $d$  qui va ensuite influencer l'âge virtuel de la manière suivante :

$$A_n = A_{n-1} + X_n - d$$

Les deux cas spéciaux sont alors AGAN lorsque  $d = A_n^-$  et ABAO lorsque  $d = 0$ . Il est possible d'incorporer un coût de maintenance dans  $d$  et de construire une politique de maintenance optimale en s'appuyant sur cette configuration. Ce modèle permet de choisir par avance l'efficacité de l'action de maintenance pour que le processus de maintenance soit optimale. Ce modèle n'a pas été développé davantage dans la littérature.

- Modèle de Dorado, Hollander et Sethuraman [35] (DHS) : Les auteurs introduisent un nouveau processus  $\{\Theta_i\}_{i \geq 1}$  appelé suppléments d'âge pour décrire le processus d'âge virtuel.

Les variables aléatoires doivent vérifier d'abord :

$$\begin{aligned} A_1 &= 0, A_i \geq 0 \text{ et} \\ \Theta_1 &= 1, \Theta_i \in (0, 1], i > 1 \end{aligned}$$

Le modèle est déterminé par la loi conditionnelle de durée inter-défaillances  $X_i$  :

$$\mathbb{P}(X_{i+1} > t | A_i, \Theta_i, X_1, \dots, X_{i-1}) = \frac{R(\Theta_i t + A_i)}{R(A_i)}$$

Le modèle possède donc non seulement la propriété d'un modèle d'âge virtuel, mais aussi la vitesse de vieillissement est pondérée par le facteur  $\Theta_i$ . Plus  $\Theta_i$  est petit, plus l'espérance de la durée de vie résiduelle est longue. Ce paramètre permet de décrire comment la maintenance prolonge la durée de vie du système. Une méthode d'estimation non-paramétrique pour la loi de la première défaillance est ainsi présentée en supposant que l'on puisse connaître les âge virtuels  $\{A_i\}_{i \geq 1}$  et les suppléments d'âge  $\{\Theta_i\}_{i \geq 1}$ . Dans la réalité, ces informations sont rarement disponibles.

**1.2.3.6 Modèles Réduction Arithmétique d'Âge-ARA** La classe des modèles de Réduction arithmétique d'âge (Arithmetic Reduction of Age - ARA), proposée par Doyen et Gaudoin [40], s'appuie sur les modèles de Kijima. Les efficacités de maintenance  $\{Z_i\}_{i \geq 1}$  sont réduites à un paramètre déterministe  $\rho \in [0, 1]$ . Nous pouvons citer deux cas particuliers des modèles ARA :

- Modèle  $ARA_1$  : L'âge effectif  $A_i$  est réduit d'un montant proportionnel à la dernière durée inter-défaillance  $\rho X_i$ . Suite à la  $i$ ème maintenance, l'âge effectif est donné par :

$$A_i = A_{i-1} + (1 - \rho)X_i$$

Ce modèle est un cas particulier du modèle Kijima I. Il coïncide avec la proposition de Malik [98] et de Guo et Love [62].

- Modèle  $ARA_\infty$  : L'âge effectif est réduit d'un montant proportionnel à sa valeur juste avant la défaillance :

$$A_i = (1 - \rho)(A_{i-1} + X_i)$$

Le modèle  $ARA_\infty$  est un cas particulier du modèle Kijima II. Une modélisation similaire est proposée par Brown *et al.* [12].

De plus, les auteurs généralisent le concept de la réduction d'âge en proposant une auto-corrélation d'ordre  $m$  des âges :

- Modèle  $ARA_m$  : L'âge effectif après la  $i$ ème maintenance est donné par :

$$A_i = T_i - \rho \sum_{j=0}^{\min(m-1, i-1)} (1 - \rho)^j T_{i-j}$$

La quantité  $m$  est appelée *mémoire* du modèle. Ainsi, le modèle  $ARA_1$  est de mémoire 1, tandis que le modèle  $ARA_\infty$  est de mémoire infinie. Le paramètre  $\rho$  est considéré comme l'efficacité de maintenance, puisqu'il peut indiquer comment le système (par le biais de l'âge virtuel) est affecté par les actions de maintenance.

La classe des modèles  $ARA_m$  peut englober les modèles classiques, dépendant de valeur de  $\rho$  :

- $\rho = 0$  : Maintenance minimale (ABAO) avec  $A_i \equiv T_i$ .
- $\rho = 1$  : Maintenance parfaite (AGAN) avec  $A_i = 0$ .
- $0 < \rho < 1$  : Maintenance imparfaite.
- $\rho < 0$  : Maintenance nuisible.



### 1.2.4 Autres modèles de maintenance imparfaite

**1.2.4.1 Modèle de réduction d'intensité de défaillance** Les modèles de réduction d'intensité de défaillance considèrent que la maintenance peut réduire directement une proportion de l'intensité de défaillance sans passer par l'âge. La réduction d'intensité peut être un montant fixe, un pourcentage ou proportionnel. Chan et Shaw [18] sont parmi les premiers d'avoir proposé une telle réduction en proposant leur version comportant deux types de réduction :

$$\begin{cases} \lambda_{T_i^+} = \lambda_{T_i^-} - \Delta & \text{Montant fixe } \Delta \\ \lambda_{T_i^+} = \lambda_{T_i^-}(1 - \rho) & \text{Montant proportionnel } \rho \in [0, 1] \end{cases}$$

Entre deux défaillances consécutives, l'intensité de défaillance varie parallèlement à l'intensité initiale  $\lambda(t)$ . La réduction d'un montant fixe s'apparente à un développement proposé par Canfield [16], lorsqu'il évalue l'effet de la maintenance planifiée sur l'intensité de défaillance. Pour la réduction proportionnelle, le paramètre  $\rho$  peut caractériser l'efficacité de la maintenance.

Par analogie avec les modèles *ARA*, Doyen et Gaudoin [40] proposent une classe de modèles appelée Arithmetic Reduction of Intensity de mémoire  $m$  (*ARI<sub>m</sub>*). De manière similaire au modèle *ARA<sub>m</sub>*, on retrouve les modèles classiques pour les valeurs spéciales de l'efficacité  $\rho$  :

- $\rho = 0$  : La maintenance est minimale. Les modèles *ARI<sub>m</sub>* se réduisent au modèle ABAO.
- $\rho = 1$  : La maintenance est optimale. L'intensité de défaillance est remise à zéro, mais les maintenances ne sont pas parfaites.
- $0 < \rho < 1$  : La maintenance est imparfaite.
- $\rho < 0$  : La maintenance est nuisible.

**1.2.4.2 Modèle de quasi renouvellement** Pham et Wang [141] ont défini le modèle de quasi-renouvellement en se reposant sur le processus de comptage et un processus externe. Un processus de comptage  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  est appelé processus de quasi-renouvellement si les durées inter-défaillance satisfont :  $X_1 = Y_1, X_2 = \alpha Y_2, X_3 = \alpha^2 Y_3, \dots$  où  $\{Y_i\}_{i \geq 1}$  est une séquence de variables aléatoires i.i.d. non-négatives et  $\alpha > 0$ . Selon la valeur de  $\alpha$ , les durées inter-défaillance seront stochastiquement de plus en plus grandes, de plus en plus petites ou de même loi. L'efficacité de la maintenance peut s'exprimer comme suit :

- $\alpha = 1$  : La maintenance est parfaite car les  $\{X_i\}_{i \geq 1}$  sont indépendantes et de même loi.
- $\alpha > 1$  : La maintenance est plus que parfaite car la maintenance rend le système en état meilleur qu'avant ( $X_{i+1} >_{st} X_i$ ). Cette propriété est tout à fait possible dans la modélisation de la croissance de fiabilité des logiciels [142] ou lorsque le système est maintenu par une technologie plus récente.
- $0 < \alpha < 1$  : Les durées inter-défaillances se raccourcissent et la fiabilité du système décroît. On sait que la maintenance n'est pas parfaite, mais l'efficacité  $\alpha$  est interprétée de manière différente que celle d'un modèle d'âge virtuel (par exemple  $\rho$ ).

D'après la définition, l'intensité de défaillance du modèle est donnée par :

$$\lambda_t = \frac{1}{\alpha^{N_{t^-}}} \lambda \left( \frac{t - T_{N_{t^-}}}{\alpha^{N_{t^-}}} \right)$$

Le modèle de quasi-renouvellement est similaire à un modèle de processus géométrique (Geometric Process) présenté par Lam [80]. Une version étendue de ce dernier (Extended Geometric Process) est étudiée dans [9].

**1.2.4.3 Modèle de Trend-Renewal Process** Le modèle Trend-Renewal Process (TRP) généralise un résultat connu d'un NHPP : Soit  $T_1, T_2, \dots$  les instants d'occurrence d'un NHPP d'intensité  $\lambda(\cdot)$ , alors la suite des variables aléatoires  $\Lambda(T_1), \Lambda(T_2), \dots$  forme une statistique d'ordre d'un HPP de paramètre 1 [15]. Lindqvist *et al.* [90] proposent la définition suivante : le processus  $T_1, T_2, \dots$  est un TRP lorsque les variables aléatoires  $\Lambda(T_1), \Lambda(T_2), \dots$  forment un processus de renouvellement où l'espérance des durées inter-arrivée, qui admettent une fonction de répartition  $H$ , est égale à 1. L'intensité de défaillance du TRP ( $H, \lambda(\cdot)$ ) est donnée par :

$$\lambda_t = r(\Lambda(t) - \Lambda(T_{N_t^-})) \lambda(t)$$

où  $r(\cdot)$  est le taux de défaillance associé à la loi  $H$ . L'intensité de défaillance du modèle TRP est constituée, d'une part du taux de défaillance  $r(\cdot)$ , d'autre part d'un facteur dépendant de l'âge réel du système  $\lambda(\cdot)$ . Cela mène à une intensité qui se situe entre celle d'une maintenance parfaite et minimale, et donc illustre l'effet imparfait de la maintenance [123]. On remarque deux cas spéciaux de ce modèle :

- Si  $r(t) = \alpha$  constante, alors l'intensité de défaillance  $\lambda_t = \alpha\lambda(t)$ . Le modèle TRP se réduit à un NHPP.
- Si  $\lambda(t) = \beta$  constante, alors l'intensité de défaillance devient  $\lambda_t = \beta r(\beta(t - T_{N_t^-}))$ . Le modèle TRP devient un processus de renouvellement.

De nombreuses applications du modèle sont présentées dans [90, 95].

### 1.2.5 Impact de l'intensité initiale

Les modèles d'âge virtuel sont pratiquement définis par des efficacités de maintenance et de l'intensité initiale  $\lambda(t)$ . Nous intéressons à plusieurs classes de fonctions afin de définir  $\lambda(t)$ .

On distingue trois grandes familles pour les intensités initiales : taux de défaillance croissant (Increasing Failure Rate - IFR), constant (Constant Failure Rate - CFR) et décroissant (Decreasing Failure Rate - DFR). Soit  $X$  une variable aléatoire ayant la même distribution que le premier instant de défaillance d'un modèle de maintenance  $T_1$ , on dit que  $X$  admet un taux de défaillance croissant ou  $X$  appartient à la classe IFR si une des conditions suivantes est satisfaite :

- $\lambda(t)$  est croissante.
- $\log(R)$  est concave.
- $\forall a > 0$ , la fonction  $t \rightarrow \frac{R(t+a)}{R(t)}$  est décroissante.

De la manière similaire, une variable aléatoire  $X$  appartient à la classe DFR, si une des conditions suivantes est satisfaite :

- $\lambda(t)$  est décroissante  $t$ .
- $\log(R)$  est convexe.
- $\forall a > 0$ , la fonction  $t \rightarrow \frac{R(t+a)}{R(t)}$  est croissante.

La classe CFR consiste à supposer que la fonction  $\lambda(t)$  est constante.

Parmi les lois IFR nous pouvons citer la loi Gamma  $\Gamma(\alpha, \beta)$  avec  $\alpha > 1$ , loi Weibull  $\mathcal{W}(\alpha, \beta)$  (ou encore appelée loi de Puissance) avec  $\beta > 1$  et loi log-linéaire avec  $\beta > 0$ . Pour la classe DFR, hormis les cas spéciaux des trois lois précédentes, nous pouvons aussi mentionner la loi de Pareto  $\lambda(t) = \alpha/(\beta + t)$ . La classe CFR contient uniquement la loi exponentielle  $\lambda(t) = \lambda$ . La classe IFR est souvent utilisée pour modéliser le taux de défaillance des systèmes mécaniques [78, 103], tandis que la classe DFR pour les logiciels [52].

Dans de nombreuses applications, il est généralement admis que le taux de défaillance est une courbe en baignoire (Bathtub-shaped failure rate) : un premier segment décroissant qui correspond à une période de jeunesse ou rodage, un deuxième segment supposé constant correspondant

à la vie utile, et le dernier segment est la période de vieillissement. Un exemple de la courbe en baignoire est présenté dans la Figure 1.2. Dans les études statistiques, il est très important de considérer la possibilité d'une courbe en baignoire pour avoir une modélisation adaptée [33, 34].

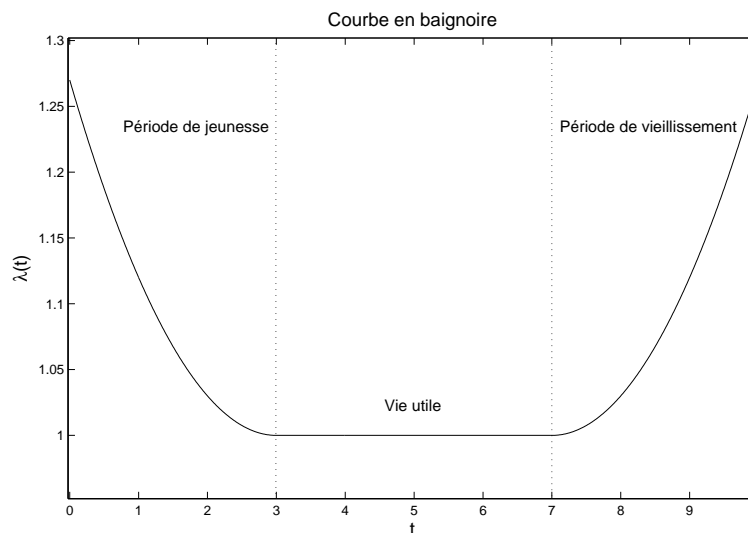


Figure 1.2 – Courbe en baignoire

Dans ce manuscrit, nous nous intéressons seulement à la famille des taux de défaillance croissants. Dans le contexte des systèmes industriels complexes avec des maintenances imparfaites et en l'absence de période de jeunesse, il est raisonnable de supposer que les systèmes vieillissent au fil du temps. L'utilisation des taux de défaillance croissants est alors bien justifiée.

### 1.3 Modélisation conjointe de la maintenance corrective et préventive

Dans les applications, il se peut que les systèmes soient maintenus préventivement. Une action de maintenance préventive (notée MP) s'applique sur un système en fonctionnement avant l'occurrence de la panne afin de prolonger sa durée de vie et sa qualité de fonctionnement. Le modèle de maintenance adapté à cette configuration doit alors prendre en compte l'effet des maintenances correctives (notée MC) et préventives. En pratique, la décision d'une action de maintenance préventive dépend des critères de coût, d'indisponibilité ou de l'état de fonctionnement du système. Si le système est maintenu périodiquement ou selon son âge, alors les instants de maintenance préventive peuvent être déterministes. Ces derniers sont généralement planifiés à l'avance. D'autre part, il est aussi possible de maintenir préventivement le système selon l'état de fonctionnement ou son état de dégradation. Dans cette configuration, les instants de maintenance sont aléatoires. Dans les paragraphes suivants, nous présentons deux de principales approches pour la modélisation conjointe des deux types de maintenance.

#### 1.3.1 Maintenance corrective et maintenance préventive planifiée

La modélisation conjointe des deux types de maintenance est proposée par le biais d'une généralisation du concept d'âge virtuel. Pour une observation pendant la période  $[0, t]$ , notons :

- $\{K_t\}_{t \geq 0}$  le processus de comptage des maintenances (MC et MP confondue),
- $\{C_i\}_{i \geq 0}$  les instants de maintenance et  $\{W_i\}_{i \geq 0}$  les durées inter-maintenance,

- $\{N_t\}_{t \geq 0}$  et  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  les processus de comptage des MC et MP,
- $\{T_i\}_{i \geq 0}$  et  $\{\tau_i\}_{i \geq 0}$  sont les instants des MC et MP.

Le type de maintenance est défini par un nouveaux processus  $\{U_i\}_{i \geq 0}$  où :

$$U_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i\text{ème maintenance est une MP} \\ 0 & \text{si la } i\text{ème maintenance est une MC} \end{cases}$$

Dans ce cadre, une MP est quantifiée comme planifiée si et seulement si, le prochain instant de MP est une fonction déterministe du passé [41] :

$$\forall t > 0, U_{K_{t-}+1} = 1 \Rightarrow \tau_{M_{t-}+1} = C_{K_{t-}} + h_{K_{t-}}(W_{K_{t-}}, U_{K_{t-}})$$

où  $h_i(\cdot), i \geq 0$  est une fonction déterministe. La durée effective inter-maintenance est naturellement définie comme la plus petite valeur de la durée d'attente potentielle jusqu'à la prochaine MP  $\tau_{M_{t-}+1}$  et de la durée résiduelle à la prochaine défaillance  $T_{K_{t-}+1}$  :

$$W_{K_{t-}+1} = \min(h_{K_{t-}}(W_{K_{t-}}, U_{K_{t-}}), T_{K_{t-}+1} - C_{K_{t-}})$$

Par analogie avec les modèles d'âge virtuels classiques, on définit  $A_i = a_i(K_i, U_i)$  comme l'âge virtuel du système suite à la  $i$ ème maintenance [41] où  $a_i(\cdot), i \geq 0$  est une fonction déterministe. Après la  $i$ ème défaillance, le système se comporte comme un neuf ayant l'âge  $A_i$  sans être maintenu. La loi conditionnelle de la durée d'attente jusqu'à la prochaine maintenance est [41] :

$$\mathbb{P}(W_{i+1} > w | W_1, U_1, \dots, W_i, U_i) = \mathbb{P}(W > A_i + w | W > A_i)$$

où  $W$  a la même loi que la première défaillance d'un système neuf  $W_1$  et  $w < h_{K_{t-}}(W_{K_{t-}}, U_{K_{t-}})$ . L'intensité de défaillance d'un modèle d'âge virtuel généralisé est donnée par [41] :

$$\lambda_t = \lambda(t - C_{K_{t-}} + A_{K_{t-}})$$

avec  $\lambda(\cdot)$  est l'intensité initiale.

Dû au vieillissement du système, cette modélisation suppose que les instants de MC  $\{T_i\}_{i \geq 0}$  sont aléatoires. Tandis que pour les MP, les instants d'occurrence  $\{\tau_i\}_{i \geq 0}$  sont déterminés à l'avance selon les critères choisis (par exemple : coût, indisponibilité). Aucune hypothèse n'est imposée quant à l'efficacité des MP et des MC. En effet, les deux types de maintenance pourraient avoir des hypothèses quelconques sur les efficacités des maintenances, comme celles présentées dans la section 1.2.3.

### 1.3.1.1 Quelques modèles d'âge virtuel généralisés

- **MC ABAO - MP AGAN** : Le système est remis à neuf suite à des MP, tandis qu'il est restauré en état juste avant la défaillance par les MC minimales. L'âge effectif est donc  $A_i = C_i - \tau_{M_{C_i}}$ . L'intensité de défaillance est ainsi déterminée par l'ensemble des MP et l'intensité initiale :

$$\lambda_t = \lambda(t - \tau_{M_{t-}})$$

- **MC  $ARA_\infty$  - MP  $ARA_\infty$**  : Le modèle  $ARA_\infty$  classique avec l'efficacité des MC  $\rho_c$  est généralisé par l'ajout des MP des efficacité  $\rho_p$ . L'âge effectif suite à une maintenance est alors :

$$A_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \\ (1 - \rho_c)(A_{i-1} + W_i) & \text{si la } i\text{ème maintenance est une MC} \\ (1 - \rho_p)(A_{i-1} + W_i) & \text{si la } i\text{ème maintenance est une MP} \end{cases}$$

En posant  $\rho_i = (1 - \rho_c)^{1-U_i}(1 - \rho_p)^{U_i}$ , on obtient une expression compacte pour l'âge effectif :

$$A_i = \sum_{j=1}^i \prod_{k=j}^i \rho_k W_j$$

L'intensité de défaillance est ainsi déduite :

$$\lambda_t = \lambda \left( t - C_{K_{t-}} + \sum_{i=1}^{K_{t-}} \prod_{k=j}^{K_{t-}} \rho_k W_i \right)$$

L'interprétation des efficacités de maintenance est identique à une modèle  $ARA_\infty$  classique : les cas  $\rho_c = 0$  et  $\rho_p = 0$  correspond à une MC ABAO et MP ABAO, tandis que  $\rho_c = 1$  et  $\rho_p = 1$  correspondent à une MC AGAN et MP AGAN, respectivement.

D'autres généralisations sont envisageables. L'hypothèse de  $ARA_1$  en présence de deux types de maintenance est discutée dans [36]. Une approche naturelle est de supposer que les MC et MP ont les efficacités  $\rho_c$  et  $\rho_p$ , du type  $ARA_1$ . Il est aussi possible d'utiliser l'hypothèse BP pour les deux types de maintenance.

### 1.3.2 Maintenance corrective et maintenance préventive conditionnelle

Dans ce paragraphe nous considérons que les deux types de maintenance sont dépendants. La dépendance entre les MC et MP peut être modélisée par le concept des risques concurrents [25]. Tout d'abord, la définition de risques concurrent est présentée, puis son application dans la modélisation conjointe des MC et des MP est détaillée.

**1.3.2.1 Définition des risques concurrents** Le modèle de risques concurrents est proposé pour modéliser les causes (risques, ou modes) de défaillance d'un système. Les observations sont des couples de variables aléatoires  $(W, U)$  où  $W$  représente la durée d'attente jusqu'à la prochaine défaillance et  $U \in \{1, 2, \dots, k\}$  indique la cause ou le risque qui est la source de la défaillance. La loi jointe du couple  $(W, U)$  peut être déterminée à partir des fonctions de **sous-survie**, définie par :

$$R_j(w) = \mathbb{P}(W > w, U = j), \quad t \geq 0, j \in \{1, 2, \dots, k\}$$

Les lois marginales sont alors définies par :

$$R_W(w) = \mathbb{P}(W > w) = \sum_{j=1}^k R_j(w)$$

$$\pi_j = \mathbb{P}(U = j) = R_j(0)$$

Un modèle de risques concurrents est entièrement défini par les fonctions de **sous-hazard** :

$$\lambda_j(w) = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta w} \mathbb{P}(W \leq w + \Delta w, U = j | W > w)$$

**1.3.2.2 Application à la modélisation de la maintenance** Le principe d'un modèle de risques concurrents est alors très approprié pour modéliser conjointement les instants de la MC et MP. Considérons un modèle de risques concurrents ayant  $k = 2$  risques, l'un est associé à la MP, l'autre à la MC. Suite à la  $i$ ème maintenance, on ne connaît pas le type de la prochaine maintenance. On modélise alors la durée potentielle d'attente de chaque type de maintenance par les variables aléatoires  $(Y_i, Z_i)$  :

- $Y_i$  est la durée d'attente à la prochaine maintenance, si elle est préventive,
- $Z_i$  est la durée d'attente à la prochaine maintenance, si elle est corrective.

La véritable durée observée  $W_i$  est la première qui se produira :

$$W_i = \min(Y_i, Z_i)$$

Le type de maintenance est déterminé par :

$$U_i = \mathbb{1}_{\{Y_i < Z_i\}} = \begin{cases} 1 & \text{si la } i\text{ème maintenance est préventive} \\ 0 & \text{si la } i\text{ème maintenance est corrective} \end{cases}$$

Les observations sont alors les couples  $(W_i, U_i), i \geq 1$ , et non les variables aléatoires cachées  $(Y_i, Z_i)$ . Dans les modèles de risques concurrents classiques, les risques sont supposés mutuellement indépendants et de même loi :  $(Y_i, Z_i), i \geq 1$  ont la même loi que  $(Y, Z)$ , où  $Y$  et  $Z$  sont appelés risque de MP et de MC, respectivement. Selon [138], le modèle est identifiable seulement dans ce cas (risques indépendants). Dans un cadre plus général, les observations  $(W_i, U_i)$  ne permettent pas d'estimer les lois de survie marginale  $R_Y$  et  $R_Z$ , si nous n'avons pas d'autre hypothèse supplémentaire. Néanmoins, à partir des observations, on peut identifier les fonctions de sous-survie :

$$\begin{aligned} R_Y^*(t) &= \mathbb{P}(Y > t, Y < Z) = \mathbb{P}(W > t, U = 1) \\ R_Z^*(t) &= \mathbb{P}(Z > t, Z \leq Y) = \mathbb{P}(W > t, U = 0) \end{aligned}$$

On remarque que  $R_Y^*(0) = \mathbb{P}(Y < Z) = \mathbb{P}(U = 1)$  et  $R_Z^*(0) = \mathbb{P}(Z \leq Y) = \mathbb{P}(U = 0)$ , donc  $R_Y^*(0) + R_Z^*(0) = 1$ . On définit la fonction de sous-survie conditionnelle comme la fonction de survie conditionnée par la connaissance du type de maintenance qui s'est produit :

$$\begin{aligned} CR_Y^*(t) &= \mathbb{P}(Y > t | Y < Z) = \mathbb{P}(Y > t | U = 1) = \frac{R_Y^*(t)}{R_Y^*(0)} \\ CR_Z^*(t) &= \mathbb{P}(Z > t | Z \leq Y) = \mathbb{P}(Z > t | U = 0) = \frac{R_Z^*(t)}{R_Z^*(0)} \end{aligned}$$

Finalement, on définit la fonction diagnostic  $\phi(t)$ , qui permet de déterminer la probabilité d'occurrence d'une MP en sachant qu'elle n'a pas encore eu lieu à l'instant  $t$  :

$$\phi(t) = \mathbb{P}(U = 1 | W > t) = \frac{R_Y^*(t)}{R_Y^*(t) + R_Z^*(t)}$$

Les fonctions  $CR_Y^*(t), CR_Z^*(t)$  et  $\phi(t)$  permettent de choisir un modèle de risques concurrents adapté aux jeux de données [31, 32].

L'hypothèse d'indépendance implique que les MC et les MP sont des maintenances parfaites AGAN où le système est remis à neuf suite à toutes les opérations. Cependant, cette hypothèse n'est pas réaliste dans de nombreuses d'applications industrielles. En effet, les MP et MC ne

sont pas AGAN, bien que les MP soient classiquement plus efficaces que les MC. Dans ces cas, les efficacités des maintenances passées ont un impact sur la durée de vie résiduelle du système. Les variables  $Y_i$  et  $Z_i$  sont donc dépendantes du passé du processus  $(W_1, U_1, \dots, W_{i-1}, U_{i-1})$ . L'application des modèles de risques concurrents et leurs généralisations à la maintenance sont présentées avec plus de détails dans [31, 81, 91].

## 2 Politiques de maintenance préventive

L'un des objectifs importants d'une étude de modélisation des données de défaillance est de comprendre le comportement du système pour pouvoir anticiper les événements futurs et de proposer un plan d'action de maintenance préventive. Cela consiste à construire une politique de maintenance qui a pour but de maintenir le système dans son état opérationnel de manière optimale. La construction peut se baser sur une minimisation du coût ou une maximisation de la disponibilité sur un horizon défini [56].

Dans la section précédente, de nombreuses modélisations de l'efficacité de maintenance, avec un ou deux types de maintenance, sont présentées. La question de l'optimalité d'une telle politique de maintenance avec des maintenances correctives et préventives n'est pas encore abordée. La section suivante présente les approches d'optimisation des maintenances préventives les plus répandues dans la littérature : politique de maintenance périodique ou par bloc (periodic ou block policy) [4], politique basée sur l'âge (age-based policy) [4], politique basée sur l'intensité de défaillance (failure limit policy) [66], politique séquentielle (sequential policy) [106].

### 2.1 Politique de maintenance périodique ou par bloc

La politique périodique suppose que les maintenances préventives sont réalisées régulièrement aux instants  $T, 2T, 3T, \dots$ , tandis que le système est réparé par les maintenances correctives suite à des défaillances [4]. Un exemple des instants des MC et MP de la politique est présenté dans la Figure 1.3. Le coût de MC et MP est  $C_c$  et  $C_p$ , respectivement. En général, la politique périodique

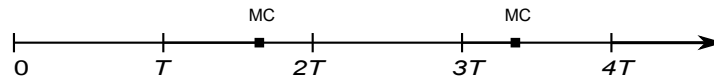


Figure 1.3 – Politique de maintenance préventive périodique

suppose que les MP remettent le système à neuf (donc maintenance préventive parfaite) [4, 56]. Dans ce cas, le coût moyen par unité de temps d'un cycle de maintenance (durée entre deux MP consécutives) s'exprime comme suit :

$$\eta(T) = \frac{C_p + C_c \times \mathbb{E}[N_T]}{T}$$

où  $\mathbb{E}[N_T]$  est le nombre moyen de maintenance pendant un cycle de longueur  $T$ . Les maintenances correctives peuvent être minimales ou parfaites. Dans le cas où les MC sont minimales et les MP sont parfaites, les instants de défaillance entre deux MP consécutives peuvent être modélisés par un NHPP et on connaît le nombre moyen de défaillances  $\mathbb{E}[N_T]$ . Il est alors possible d'obtenir une durée de remplacement optimal  $T^*$  en minimisant le coût  $\eta(T)$ . Des détails sur l'optimisation de la fonction de coût sont discutés dans [4, 56] pour une variété de lois de défaillance. Sur le plan numérique, on remarque que la connaissance du terme  $\mathbb{E}[N_T]$  est cruciale pour l'obtention de la durée optimale, et pour l'applicabilité de la politique proposée. En proposant une procédure de

calcul cette quantité pour le modèle  $ARA_\infty$ , Dagpunar [27] a montré qu'il est possible d'avoir une politique de remplacement par bloc avec des MC de type  $ARA_\infty$  et des MP parfaites.

Dans ces configurations, la politique est très performante et pratique, pourvu que les systèmes ou les composants soient simples à remplacer. Par ailleurs, lors d'une maintenance préventive, on profite pour remplacer plusieurs composants, d'où le nom politique de remplacement par bloc. On peut considérer que la politique périodique avec des MP parfaites est sur l'horizon infini, puisque le système est remis à neuf à chaque MP.

## 2.2 Politique de maintenance basée sur l'âge

La décision d'une MP de la politique basée sur l'âge est déterminée par la règle suivante. Une MP est déclenchée lorsque l'âge du système dépasse un seuil  $a$ , ou une MC est effectuée si une défaillance survient avant cet âge. Si l'on note  $X$  la durée d'attente jusqu'à la prochaine MC (ou la durée de vie) du système, alors la véritable durée d'attente à la prochaine maintenance est  $Z = \min(a, X)$ . Les MP sont généralement supposées parfaites, tandis que les MC peuvent être minimales ou parfaites. La Figure 1.4 illustre le cas des MC et des MP parfaites.

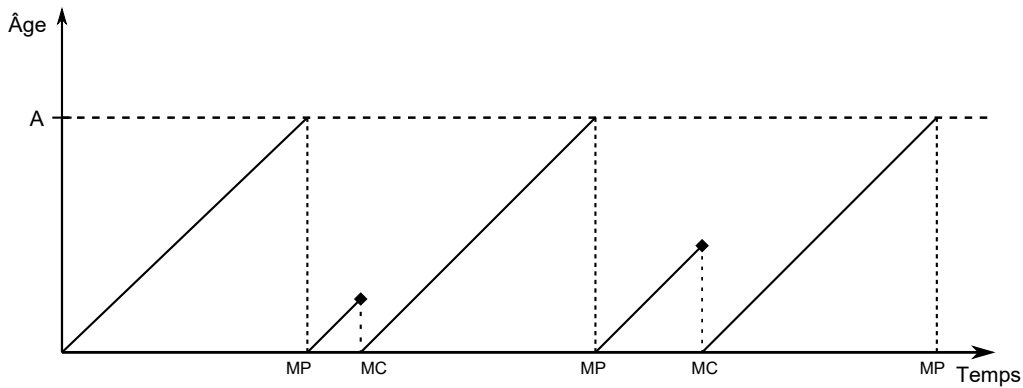


Figure 1.4 – Politique basée sur l'âge avec les MC et MP parfaites

Dans cette configuration, le coût moyen asymptotique par unité de temps sur un horizon infini est calculé par [56] :

$$\eta(a) = \frac{C_p + (C_c - C_p)(1 - R(a))}{\int_0^a R(u)du}$$

où  $R$  est la fonction de survie de la durée de vie  $X$ . L'âge optimal à remplacer est obtenu par la minimisation du coût. La politique est appliquée pour la plupart des lois de durée de vie [4, 56]. En particulier, les solutions optimales de la loi Weibull de différents paramètres sont présentées dans [137]. La politique basée sur l'âge peut être aussi considérée sur l'horizon infini avec les MP parfaites.

## 2.3 Politique de maintenance basée sur l'intensité de défaillance

Dans cette politique on surveille l'évolution de l'intensité de défaillance pour déclencher les maintenances appropriées. Le système est réparé par une MC suite à la défaillance, ou par une MP lorsque l'intensité de défaillance dépasse un seuil prédéfini. L'effet des MP s'inspire des modèles de réduction d'intensité : modèle de Malik [98], de Chan et Shaw [18], et de Canfield [16]. La mise en œuvre de la politique est discutée davantage dans [66, 67, 87]. Dans ces configurations,



les MP sont alors des maintenances imparfaites. Nous trouvons des algorithmes permettant une implantation pratique de la politique dans ces travaux.

## 2.4 Politique de maintenance séquentielle

La politique de maintenance séquentielle (sequential preventive maintenance policy) est initialement proposée par Barlow et Proschan [6] pour un horizon fini : le système est remis à neuf au bout de  $N$  opérations de MP. Les instants de MP sont définis au fur et à mesure, afin de minimiser le coût total de maintenance de la période de fonctionnement restant (avant la remise à neuf du système). Pendant ce temps, le système est réparé par les MC suite à des défaillances. On remarque alors que les MP ne sont pas planifiées à l'avance, et les durées d'attente aux prochaines MP ne sont pas nécessairement toutes égales (voir Figure 1.5). En effet, ces durées sont de plus

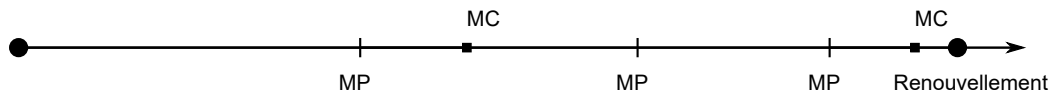


Figure 1.5 – Politique séquentielle avec  $N = 4$  MP, le dernier étant un renouvellement

en plus courtes, puisque le système se dégrade au cours du temps. Pour simplifier les calculs, les MC sont généralement supposées minimales, tandis que les MP peuvent être imparfaites. Deux classes de modèles sont alors proposées. Dans [104], les MP ont un effet imparfait sur l'intensité de défaillance : le système est maintenu avec des MP, mais l'intensité de défaillance s'accroît. Dans [105], les MP ont un impact sur l'âge, via un facteur de réduction similaire à celui du modèle de Malik [98] ou  $ARA_1$  [40]. Une politique de maintenance préventive séquentielle avec la réduction d'âge est aussi proposée dans [79].

## 2.5 Autres politiques de maintenance

Les politiques présentées dans les parties précédentes sont construites à partir de l'âge du système, en travaillant sur les lois de durée de vie. Ces modèles se focalisent sur l'analyse statistique du processus de comptage, mais ignorent l'état ou la dégradation physique du système. Or dans plusieurs situations, des indications sur cet état peuvent être disponibles et pourraient être un indicateur fiable pour la décision de maintenance. L'état physique (par exemple les phénomènes d'usure, de propagation de fissure, de corrosion) peut être modélisé par un processus stochastique approprié. De nombreuses approches sont alors proposées. Dans [123] (chapitre 8) et [17], la modélisation du système et de la politique de maintenance sont étudiées avec un processus de Markov. L'utilisation d'un processus de semi-Markov est étudiée dans [10]. Le système se trouve dans un des états de fonctionnement, un état dégradé et défaillant. Le temps de séjour dans chaque état et la probabilité de transition sont proposés ou estimés pour modéliser le mécanisme de dégradation et de maintenance. La dégradation graduelle et la dégradation continue ont fait l'objet de beaucoup d'études. On peut citer, par exemple la modélisation par les processus de Markov par morceaux (Piecewise Deterministic Markov Processes) [93], le processus de Gamma [59, 110], le processus de Wiener [85].

## 2.6 Discussion sur les politiques de maintenance

La plupart des politiques discutées dans cette section, et dans [115, 140] sont proposées pour des maintenances minimales et parfaites. Construire des politiques où les deux types de

maintenances imparfaites est une extension naturelle des modèles de maintenance présentés dans ce chapitre.

Nous pouvons citer dans la littérature quelques politiques de maintenance considérant les maintenances imparfaites. On peut considérer que le modèle de Malik [98] est une politique ayant des MC imparfaites, car les réparations réduisent l'âge effectif. Kijima *et al.* [75] propose une politique ayant des MC de type  $ARA_1$ . Les politiques de maintenance avec MC de type Kijima I ou  $ARA_1$  sont étudiés dans [69, 79, 94, 97]. Pour les MC de type Kijima II et  $ARA_\infty$ , quelques approches sont proposées dans [27, 34, 46, 148]. L'efficacité de maintenance de type Brown-Proschan est appliquée dans les politiques proposées dans [122].

Bien que les maintenances imparfaites sont maintenant prises en compte dans les politiques, ces dernières supposent toujours que le système est remis à neuf après une période de fonctionnement, ou après un nombre limité de réparations. Cette hypothèse est compréhensible pour les modèles NHPP, Malik, Kijima I ou  $ARA_1$  où l'intensité initiale croît vers l'infini : le système tombe en panne immédiatement après chaque maintenance après une durée de fonctionnement de longueur conséquente. Il serait préférable d'arrêter le système et de le remplacer par un nouveau. Tandis qu'avec les modèles de type Kijima II,  $ARA_\infty$  ou Brown-Proschan, le système admet un état stationnaire. La question qui se pose est de savoir s'il serait possible de construire une politique à l'horizon infini, sans avoir recours aux remplacements? Dans le chapitre 2, nous proposons des premiers éléments pour construire des telles politiques.

### 3 Estimation pour les modèles de maintenance

Cette section est dédiée à une brève introduction des méthodes d'estimation des paramètres des modèles de maintenance. L'étape d'estimation est sans doute la première et la plus importante dans l'analyse des données de maintenance. Avant toute étude d'inférence, il est également important de bien déterminer le phénomène de censure des données en considération.

Dans ce qui suit, nous présentons brièvement les travaux dans la littérature des estimations non-paramétriques, semi-paramétriques et paramétriques pour les processus de comptage en général, et pour les modèles de maintenance en particulier. Nous parlerons aussi de l'estimation fréquentiste et bayésienne. Puisque l'estimation et l'inférence est un vaste sujet, nous discutons exclusivement de l'utilisation des méthodes d'estimation dans le domaine de fiabilité et maintenance.

#### 3.1 Estimation non-paramétrique

Les méthodes d'estimation non-paramétrique pour les modèles de maintenance sont développées à partir de la théorie du processus ponctuel. Les quantités d'intérêt à estimer sont l'intensité initiale  $\lambda$  et l'intensité cumulée  $\Lambda$  du processus. Les données sont les instants d'occurrence  $T_i$  de la défaillance, observés pendant l'intervalle  $[0, t]$ . Les estimateurs les plus couramment utilisés sont l'estimateur de Nelson-Aalen et l'estimateur de Kaplan-Meier. L'estimateur de Nelson-Aalen [1, 2, 107] est un estimateur sans biais [2] de l'intensité cumulée du processus ponctuel  $\Lambda$ . L'estimateur Kaplan-Meier [70], propose d'estimer directement la survie associée  $R$  à l'intensité initiale  $\lambda$ . On remarque que les estimateurs non-paramétrique n'utilisent aucun modèle spécifique pour modéliser le processus ponctuel ou le processus de comptage des données.

Nelson [108] donne de nombreux exemples d'application sont présentés dans plusieurs domaines. L'estimation non-paramétrique des modèles de maintenance classique est présentée dans [95]. Gilardoni *et al.* [58] proposent une méthode non-paramétrique pour trouver le temps de

remplacement à neuf optimal pour un modèle de maintenance minimale. Les méthodes non-paramétrique pour la maintenance imparfaite sont plus complexes, puisqu'en général l'effet de maintenance n'est pas observable. Dans [77, 143], une méthode d'estimation non-paramétrique est proposée pour le modèle Brown-Prochan, en supposant que les types de maintenance (parfait, minimal) sont observés. Dorado *et al.* [35] proposent une méthode d'estimation non-paramétrique en se basant sur les techniques d'un processus de comptage pour leur modèle d'âge virtuel. L'estimation non-paramétrique est aussi proposée pour le modèle de Kijima de type II et  $ARA_\infty$  dans [49], tout en supposant que les âges effectifs sont connus.

### 3.2 Estimation semi-paramétrique

On remarque que les modèles de maintenance imparfaite, en particulier les modèles d'âge virtuel, ne permettent pas d'utiliser exactement les méthodes d'estimation non-paramétriques car l'intensité de défaillance est définie par les âges virtuels et non plus par le temps chronologique :

$$\lambda_t = \lambda(V_t)$$

Néanmoins, on remarque que les maintenances n'impactent que les âges virtuels. Le vieillissement intrinsèque, représenté par  $\lambda$ , n'est pas affecté mais simplement "caché". Pour pouvoir l'estimer à partir des observations, Peña *et al.* [114] proposent de redéfinir le processus de comptage des modèles d'âge virtuels par les durées inter-défaillance sous forme d'un processus doublement indexé  $N_{s,t}$ . Dans cette configuration, la variable  $s$  représente le temps chronologique, et  $t$  la durée inter-défaillance. Dans [112], une méthode semi-paramétrique est proposée en utilisant la technique de vraisemblance profilée. Les propriétés de convergence de l'estimateur sont discutées ensuite dans [111, 113]. Ces méthodes insistent sur la connaissance des âges effectifs, et la démarche est basée sur la technique de vraisemblance profilée. Si cela est le cas, l'estimateur est consistant. Dans le cas contraire, il n'y pas de garantie que ces méthodes fonctionnent : Beutner *et al.* [7] s'interrogent l'applicabilité de l'approche sémi-paramétrique à des modèles d'âge virtuel. En ce qui concerne le modèle BP, Doyen [39] propose une méthode qui permet d'estimer l'intensité de défaillance initiale  $\lambda$  de manière non-paramétrique, et la probabilité de maintenance parfaite  $p$  par une méthode paramétrique.

### 3.3 Estimation paramétrique

Les méthodes d'estimation paramétrique profitent de la spécification des modèles pour déduire les estimateurs. Dès lors que l'on peut déterminer les lois de dégradation, les fonctions de vraisemblance ou les connaissances *a priori* sur le modèle et le système, l'estimation peut être réalisée par l'approche fréquentiste (la méthode des moments ou la méthode du maximum de vraisemblance) ou bayésienne.

#### 3.3.1 Estimation fréquentiste

L'approche fréquentiste propose tout d'abord d'utiliser d'un modèle spécifique (avec des lois bien définies), puis de retrouver les valeurs des paramètres avec des données. La méthode des moments et la méthode du maximum de vraisemblance sont généralement utilisées pour réaliser cette tâche.

Dans [100], des détails sur l'estimation pour les modèles de maintenance parfaite et minimale sont présentés. La méthode du maximum de vraisemblance est généralement utilisée une fois que le modèle est précisé (par exemple l'intensité initiale  $\lambda(\cdot)$ ).

L'estimation pour les modèles d'âge virtuel nécessite la construction de fonction de vraisemblance. Pour rappel, la vraisemblance d'un modèle d'âge virtuel d'une observation pendant l'intervalle  $[0, t]$  pour une censure de type I est donnée par

$$\mathcal{L}(\theta; \underline{t}_n^*) = \prod_{i=1}^n \lambda(a_{i-1} + t_i - t_{i-1}) \times \exp \left( - \sum_{i=1}^{n+1} \Lambda(a_{i-1} + t_i - t_{i-1}) - \Lambda(a_{i-1}) \right)$$

Les âge effectifs  $\{a_i\}_{i \geq 0}$  sont déterminés selon les modèles spécifiques (par exemple pour les modèles de classe ARA). Si l'intensité initiale  $\lambda$  est définie, alors la fonction de vraisemblance est calculable facilement. Les paramètres inconnus peuvent être estimés par la méthode du maximum de vraisemblance. Nous pouvons citer des travaux dans la littérature pour quelques modèles d'âge virtuel. Les estimations du modèle  $ARA_1$  sont présentées dans [62, 131, 144]. Doyen [37] discute des conditions de convergence de l'estimateur du maximum de vraisemblance pour le modèle  $ARA_1$ . Les méthodes d'estimation du modèle BP sont présentées dans [38, 89].

La qualité des estimations des modèles d'âge virtuel est difficile à évaluer. Contrairement aux modèles classiques (AGAN, ABAO), il n'est pas évident de déduire un intervalle de confiance théorique pour les estimateurs. D'autre part, la convergence des estimateurs est discutable lorsque très peu de données sont disponibles (moins de 20 par exemple).

### 3.3.2 Estimation bayésienne

Pour un système ou composant critique, où peu de données sont observées, avec une connaissance parfaite des experts sur son fonctionnement, l'inférence bayésienne peut être une bonne alternative à l'inférence fréquentiste (maximum de vraisemblance, méthode des moments, etc.). En effet pour les systèmes fiables, il n'est pas rare d'observer de très peu, voire aucune défaillance (cas fortement censuré). Dans ce cas, parfois l'équipe de maintenance peut disposer des connaissances sur le système, ou sur des systèmes similaires. L'approche bayésienne semble alors plus adaptée. Dans cette configuration, les paramètres du modèle ne sont plus déterministes. Ils deviennent des quantités aléatoires, que l'on puisse leur associer des lois de probabilité, qui s'appelle lois *a priori*. Ces dernières sont, entre autre, le résumé des informations a priori sur le système. Ensuite, les données permettent de mettre à jour les informations a priori en lois *a posteriori*, à partir desquelles les estimations sont déduites.

Dans la littérature, l'utilisation de l'approche bayésienne est promue par Robert [125] pour les analyses statistiques en général. Des perspectives d'application dans le domaine de fiabilité sont évoquées par Rausand et Høyland [123] et Meeker et Escobar [100]. Singpurwalla [132] détaille la démarche de l'approche bayésienne pour le domaine de fiabilité et gestion des risques. La littérature de l'approche bayésienne pour les maintenance classiques est très riche. Tandis que pour les modèles de maintenance imparfaite, peu des résultats sont présentés. L'analyse bayésienne des modèles ARA avec maintenance corrective seule est présentée dans [21], l'analyse des modèles de MC et MP est développée dans [60]. Dans ce qui suit, nous présentons quelques éléments qui nous sont utiles pour effectuer une analyse bayésienne. Dans le chapitre 4, nous présentons en détail les différentes étapes de l'inférence bayésienne pour le modèle Brown-Proschan.

L'approche bayésienne nécessite la détermination d'une loi *a priori*  $\pi(\theta)$  sur le vecteur  $\theta$  des paramètres. Cette loi reflète les informations sur le paramètre, avant toute observation. Les informations peuvent être :

- L'expertise sur le modèle, le système ou des systèmes similaires.
- Le retour d'expérience de terrain, les résultats des essais, les contraintes dans le cahier des charges.

Les sources d'information sont bien sûr plus nombreuses. Toutefois, il n'est pas aisé de transformer toutes ces connaissances en loi de probabilité. En effet, les informations ne sont pas précises, au sens où plusieurs lois de probabilité peuvent être appropriées à l'information *a priori*. Il faudrait faire un choix, qui pourrait avoir un impact considérable sur la future étude qui en découle. Néanmoins, dans le choix des lois, il faudrait s'assurer que :

- les lois peuvent représenter un grand nombre de situations réelles,
- elles sont facilement paramétrables et les paramètres ont un sens physique,
- si possible les lois mènent à un calcul simple.

En fonction de la qualité des informations, on peut avoir une loi *a priori informative* ou *non-informative*. Une loi informative est une représentation des avis, des opinions d'experts et de l'incertitude sur le modèle et ses paramètres en lois de probabilité. Les connaissances et informations qui permettent de construire ces lois sont supposées indépendantes des données et des observations du modèle en question. En revanche, on a recours à une loi non-informative lorsqu'aucune information (qui est indépendante des données et observations comme dans le cas informative) n'est disponible sur le paramètre. La solution possible est de proposer une loi qui peut représenter ou résumer le mieux possible les informations qui sont contenues dans les données, puisque ces dernières sont la seule source d'information sur le paramètre et sur le système. Par conséquent, il n'y a pas une loi non-informative universelle. Certaines propositions de loi sont plus utiles et efficaces que d'autres, et le choix dépend du paramètre et du modèle spécifique. Kass et Wasserman [72] proposent un ensemble de règles pour sélectionner des lois *a priori*. Ainsi, les paramètres de la loi *a priori* sont appelés *hyper-paramètres*. La valeur des hyper-paramètres détermine la loi *a priori*, qui ensuite influence sur la qualité des estimations.

Les informations dans la loi *a priori* sont mises à jour avec des observations, qui sont résumées dans la vraisemblance  $\mathcal{L}(\theta; \underline{t}_n)$ , pour déduire la loi *a posteriori*  $\pi(\theta | \underline{t}_n)$ . Cette loi est obtenue en utilisant le théorème de Bayes :

$$\pi(\theta | \underline{t}_n) = \frac{\mathcal{L}(\theta; \underline{t}_n)\pi(\theta)}{\mathcal{L}(\underline{t}_n)} \propto \mathcal{L}(\theta; \underline{t}_n)\pi(\theta)$$

Le terme  $\mathcal{L}(\underline{t}_n)$  désigne la vraisemblance marginale. Elle est appelée parfois *constante de normalisation* et n'intervient pas en général dans les calculs d'estimation. Cela justifie l'utilisation de l'opérateur proportionnel  $\propto$  dans l'équation précédente. L'estimateur bayésien est déduit à partir de la loi *a posteriori*, en minimisant une fonction de perte  $L$  comme suit :

$$\hat{\theta}_b = \underset{\hat{\theta}}{\operatorname{argmin}} \int L(\theta, \hat{\theta})\pi(\theta | \underline{t}_n)d\theta$$

Nous choisissons le coût quadratique  $L(\theta, \hat{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2$  pour évaluer l'estimateur bayésien. Sous cette configuration, l'estimateur bayésien est la moyenne de la loi *a posteriori* [125] :

$$\hat{\theta}_b = \int \theta\pi(\theta | \underline{t}_n)d\theta \tag{1.9}$$

D'autres fonctions de coût sont envisageables, par exemple le coût 0-1 ou le coût absolu. L'estimateur bayésien correspondant au coût 0-1 et au coût absolu sont le mode et la médiane de la loi *a posteriori*, respectivement. Dans notre étude, nous utilisons le coût quadratique, puisqu'il donne un estimateur bayésien plus facile à obtenir (la moyenne *a posteriori*). L'expression de l'estimateur  $\hat{\theta}_b$  dépend de la complexité de la loi *a posteriori*. Lorsque son expression analytique n'est pas disponible, les simulations sont utilisées pour obtenir une approximation de l'intégrale.

Plusieurs techniques sont proposées pour le calcul et l'approximation de l'intégrale de l'estimateur  $\hat{\theta}_b$  dans l'équation 1.9. La première technique d'intégration Monte Carlo [101] consiste à générer des échantillons de la loi *a posteriori* :  $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K)$  et à approcher la moyenne *a posteriori* par :

$$\tilde{\theta}_b = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \theta_i$$

D'après la Loi des Grands Nombres, l'approximation par l'intégration Monte Carlo converge vers la moyenne *a posteriori* avec la probabilité 1. L'intégration Monte Carlo est améliorée par la construction d'une chaîne de Markov ergodique  $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K)$  qui admet la loi *a posteriori* comme sa mesure invariante. D'après le Théorème d'ergodicité, la chaîne converge vers la loi  $\pi(\theta|t_n)$  et la moyenne *a posteriori* est approchée par :

$$\mathbb{E}[\theta|t_n] = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \theta_i$$

L'ensemble des ces techniques sont appelés *Monte Carlo Markov Chain* (MCMC). Plusieurs techniques sont proposées pour simuler une telle chaîne de Markov, dont les plus fréquemment employées sont l'algorithme Metropolis-Hastings [126], l'algorithme d'échantillonnage de Gibbs [55] et la version hybride Metropolis-Hastings-dans-Gibbs [126].

L'algorithme Metropolis-Hastings génère la chaîne  $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K)$  de manière itérative, en utilisant une loi dite loi de proposition [125] ou loi instrumentale [52]  $q(\theta|\theta_{i-1})$ . A l'étape  $i$ , un candidat  $\theta_{cand}$  est généré avec la loi  $q(\theta|\theta_{i-1})$ , puis on calcule le ratio :

$$r = \frac{\pi(\theta_{cand}|t_n)q(\theta_{cand}|\theta_{i-1})}{\pi(\theta_{i-1}|t_n)q(\theta_{i-1}|\theta_{cand})}$$

Le candidat  $\theta_{cand}$  est alors accepté si  $RAND < \min(r, 1)$ , où  $RAND$  est une réalisation de la loi Uniforme  $\mathcal{U}[0, 1]$ .

L'algorithme d'échantillonnage de Gibbs est spécialement conçu pour le cas multivarié :  $\theta = (\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n)$ . Un échantillon de la composante  $\theta^j$  du vecteur  $\theta$  est générée par la densité conditionnelle complète correspondant :

$$\pi(\theta^j|\theta^1, \dots, \theta^{j-1}, \theta^{j+1}, \dots, \theta^n) = \frac{\pi(\theta^1, \dots, \theta^n)}{\pi(\theta^1, \dots, \theta^{j-1}, \theta^{j+1}, \dots, \theta^n)}$$

L'algorithme se déroule alors de manière itérative. A l'étape  $i$ , l'échantillon  $\theta_i^j$  est généré à partir de la loi  $\pi(\theta^j|\theta_i^1, \theta_i^2, \dots, \theta_i^{j-1}, \theta_{i-1}^{j+1}, \dots, \theta_{i-1}^n)$ . Pour comparer à l'algorithme Metropolis-Hastings, on remarque la valeur candidate  $\theta_i^j$  de l'échantillonnage de Gibbs est acceptée avec la probabilité 1.

Finalement, la version hybride Metropolis-Hastings-dans-Gibbs incorpore le principe de proposition et rejet de l'algorithme Metropolis-Hastings dans les étapes de l'échantillonnage de Gibbs : au lieu d'accepter tous les candidats de la densité conditionnelle complète, des valeurs candidates  $\theta_{cand}^j$  sont générés par une loi de proposition, puis le ratio  $r$  est calculé avec la densité  $\pi(\theta^j|\theta_i^1, \theta_i^2, \dots, \theta_i^{j-1}, \theta_{i-1}^{j+1}, \dots, \theta_{i-1}^n)$  pour décider si une valeur est admise.

On remarque que la qualité de l'estimation dépend de la longueur  $K$  de la chaîne de Markov, à savoir si le support  $\Theta$  du paramètre  $\theta$  est bien visité par la chaîne. D'autre part, l'initialisation de

la chaîne (la première valeur  $\theta_1$ ) a aussi un impact sur la convergence empirique de la chaîne. Bien souvent, il est conseillé de simuler plusieurs chaînes en parallèle :  $(\theta_{i,j}), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq K$ , afin d'avoir une meilleure estimation de la moyenne empirique.

On dispose aussi des critères de convergence empiriques pour les chaînes MCMC. Le critère de Geweke [57] vérifie si la longueur  $K$  d'une chaîne MCMC est suffisante. Sous l'hypothèse de convergence dans l'état stationnaire de la chaîne de Markov, la moyenne des premières valeurs  $(\theta_1, \dots, \theta_{Na})$  doit être égale à la moyenne des dernières valeurs  $(\theta_{Nb}, \dots, \theta_K)$ . Des tests classiques d'égalité entre deux moyennes empiriques peuvent être utilisés dans ce but. Le critère de Gelman [11, 54] est proposé pour mesurer la convergence des plusieurs chaînes MCMC en parallèle. Le critère propose une statistique, qui s'appelle Facteur de réduction d'échelle  $\hat{R}_c$  (Potential Scale Reduction Factor PSFR), qui mesure la différence entre la variance d'une chaîne et la variance inter-chaîne. Une valeur  $\hat{R}_c$  proche de 1 indique une convergence empirique des chaînes MCMC considérées. La convergence empirique peut être vérifiée par d'autres critères, par exemple critère de Raftery et Lewis [121], critère de Heidelberger et Welch [63].

En plus de fournir les estimations ponctuelles de la vraie valeur du paramètre  $\theta$ , il est aussi important de construire des régions de confiance  $S(\alpha)$  pour  $\theta$ . Un  $\alpha$ -intervalle de crédibilité est un sous-ensemble  $S(\alpha)$  de l'espace de paramètre  $\Theta$  tel que :

$$\mathbb{P}(\theta \in S(\alpha) | \underline{t}_n) \geq 1 - \alpha$$

Il pourrait exister plusieurs intervalles de crédibilité qui peuvent satisfaire ces conditions. De plus, lorsque la loi *a posteriori* est multimodale, il n'y pas de règle précise pour choisir un tel intervalle. Dans le cas où la loi  $\pi(\theta | \underline{t}_n)$  est non symétrique, il n'est pas non plus évident de choisir un intervalle de crédibilité. Pour pallier cela, l'intervalle HPD (Highest Posterior Density - densité a posteriori la plus forte) est proposée. Un  $\alpha$ -intervalle de HPD est un sous-ensemble  $S(\pi_\alpha)$  tel que

$$S(\pi_\alpha) = \{\theta : \pi(\theta | \underline{t}_n) \geq \pi_\alpha\}$$

où  $\pi_\alpha$  est la plus grande borne telle que

$$\mathbb{P}(\theta \in S(\pi_\alpha)) \geq 1 - \alpha$$

Dans [19], une méthode est proposée pour obtenir une approximation de l'intervalle HPD à partir des chaînes MCMC.

### 3.4 Estimation pour des données dans des fenêtres d'observation

Dans les études d'estimation, on suppose souvent que les données recueillies sont sur un système supposé totalement neuf. Les estimateurs sont ainsi construits dans l'intervalle  $[0, t]$ , où  $t$  est la fin de l'observation. Or en pratique, il y a des cas où les observations sont incomplètes, dans le sens où elles sont enregistrées depuis d'un instant ultérieur à l'origine : le système est observé pendant l'intervalle  $[s, s + t]$ . Il est alors fort probable que le système ne soit pas neuf au début de la période d'observation (à l'instant  $s$ ). Par conséquent, il est très important de proposer des extensions des méthodes d'estimation classiques pour pouvoir prendre en compte le nouveau type de collecte de données. Nous appellerons cette configuration données en fenêtres d'observation. Une fenêtre d'observation est une période pendant laquelle les défaillances sont observées. Le système n'est pas neuf au début de la fenêtre. Les informations en dehors de la fenêtre (notamment ce qui se produisent avant) sont absentes ou partiellement disponibles.

Il faudrait alors prendre en compte ce phénomène, et proposer des extensions des méthodes d'estimation classiques.

Pour le modèle de maintenance parfaite, des extensions d'estimation non-paramétrique [134, 139] et paramétrique [151, 152] sont déjà proposées. Les extensions des méthodes paramétriques pour les modèles de maintenance minimale sont proposées dans [23, 24, 149], en précisant que l'intensité initiale suit la loi de Weibull. On trouve aussi des extensions pour le modèle de maintenance minimale dans diverses applications, par exemple : gestion de maintenance des canalisations de réseaux d'eau potable [84, 96, 128, 153], analyse des données de défaillance des véhicules militaires et de retour de garantie [154].

Les extensions de méthodes d'estimation pour le modèle de maintenance imparfaite par âge virtuel sont peu nombreuses. Dans [50], l'âge virtuel initial (au début de l'observation) est donné comme un paramètre pour établir la vraisemblance d'un modèle d'âge virtuel. L'âge virtuel initial non nul est aussi considéré dans [53]. Dans [20], l'inférence en présence des données manquantes d'un modèle NHPP avec chocs est considérée.

Nous constatons un besoin d'extensions de méthodes d'estimation pour les modèles de maintenance imparfaite, en l'occurrence les modèles d'âge virtuel. Dans le cas où la présence des données manquantes est identifiée, il est nécessaire d'adapter la méthode d'estimation, afin d'avoir des résultats qui correspondent bien au mécanisme de vieillissement du système. Comme nous nous positionnons dans le cas de maintenance imparfaite, le système n'est pas remis à neuf à chaque maintenance, donc il est fort probable que l'âge virtuel initial au début de l'observation soit non nul. Cela a un impact considérable sur les résultats d'estimation.

D'autre part, nous identifions des cas où quelques informations initiales sont disponibles, et nous proposons des extensions des modèles de maintenance parfaite et minimale. Cela permettrait d'élargir les applications de ces modèles.

## 4 Thèmes abordés

Les riches travaux de modélisation de maintenance constituent des outils efficaces pour analyser les données dans les études de sûreté de fonctionnement. Plusieurs méthodes de modélisation sont proposées, allant des modèles classiques (maintenance minimale et parfaite) aux modèles plus élaborés de maintenance imparfaite. Les modèles peuvent permettre de considérer les maintenances correctives seules ou conjointement avec les maintenances préventives. De nombreuses applications de ces modèles sont présentées, ce qui confirme l'intérêt grandissant des modèles de maintenance, en particulier des maintenances imparfaites, dans l'industrie.

L'étude de travaux dans la littérature nous indiquent quelques grands thèmes qui méritent davantage d'attention. Premièrement, il est très intéressant de construire des politiques basées sur l'âge qui permettent de n'avoir que des maintenances imparfaites. En effet, la plupart des politiques nécessitent une remise à neuf ou un remplacement du système après un certain nombre d'opérations de maintenance, ou après une période de fonctionnement. Or, il y a bien des cas où un tel remplacement n'est pas concevable à cause d'un coût trop important, ou d'une longue rupture de service (qui engendra bien sûr un coût non négligeable). Le système doit être maintenu en permanence, avec des maintenances imparfaites. Il est alors indispensable de construire les politiques de maintenance adaptées. Cela pourrait offrir plusieurs possibilités de modélisation des processus de maintenance dans l'industrie. Dans le chapitre 2, en étudiant un modèle d'âge virtuel, nous proposons des premiers éléments pour la construction d'une telle politique de maintenance préventive.

Avant toute construction de politique, il est primordial de connaître le comportement du



système considéré. D'où la nécessité d'une procédure d'inférence et d'estimation appropriée. De nombreuses approches sont proposées pour l'estimation à partir des observations complètes, mais peu de travaux sont proposés pour le cas des données en fenêtre d'observation avec des informations initiales manquantes. En effet, nous constatons un nombre non négligeable de situations avec des données manquantes où les procédures d'inférence classiques ne sont plus adaptés. De nombreuses études ont montré l'impact de la négligence de ce phénomène, mais assez peu de travaux sont consacrés à l'amélioration de la procédure d'inférence de ces modèles de maintenance. Cela motive les travaux dans le chapitre 3. Finalement dans le chapitre 4, une procédure d'inférence est proposée pour le modèle de Brown-Prochan. La possibilité d'appliquer la démarche bayésienne pour la sélection des modèles est discutée aussi dans ce chapitre, ainsi qu'un nouveau critère sélection de modèle. Les développements sont illustrés par des simulations et les méthodes proposées sont appliquées aux données réelles.



## Chapitre 2

# Développement analytique et politique de maintenance imparfaite pour le modèle Weibull- $ARA_\infty$

### 1 Introduction

Dans la modélisation statistique des systèmes réparables, les modèles de maintenance imparfaite occupent une place très importante. Ces modèles sont très flexibles, et permettent d'analyser un grand nombre de cas pratiques. De nombreuses approches sont proposées pour modéliser la maintenance imparfaite, comme présentées dans le chapitre I. Parmi celles-ci, les modèles d'âge virtuel sont particulièrement répandus, puisqu'ils considèrent que la maintenance peut agir directement sur l'âge du système. Les paramètres des efficacités de maintenance ont alors un sens physique, et ils sont facilement interprétables. L'application de ces modèles dans l'étude de fiabilité et de sûreté de fonctionnement peut se trouver dans [34, 115, 117, 123].

Contrairement aux modèles classiques, comme par exemple le processus de renouvellement (maintenance parfaite) et le processus de Poisson non-homogène (maintenance minimale), les modèles d'âge virtuel sont naturellement plus complexes, puisqu'ils intègrent des paramètres représentant l'efficacité de maintenance. Pour certains modèles d'âge virtuel, l'expression des fonctions de survie ou des densités des variables aléatoires associées au modèle est proposée de manière analytique comme dans le cas du modèle BP [38]. Pour d'autres, des résultats asymptotiques ont été obtenus, comme pour les modèles  $ARA_m$ , avec  $m < \infty$  [37]. En considérant d'autres hypothèses sur les âges virtuels telles que  $ARA_\infty$ , des résultats approchés ont été proposés [26, 45], mais il existe relativement peu de résultats analytiques disponibles.

Dans ce chapitre, nous présentons de nouveaux développements analytiques pour un modèle dont l'efficacité de maintenance de type  $ARA_\infty$  et dont l'intensité initiale est de loi Weibull. Le modèle sera nommé  $WARA_\infty$ . Le choix de la loi Weibull permet d'appliquer le modèle à un vaste domaine d'applications [103]. Les lois statistiques des grandeurs de fiabilité, par exemple celles des âges virtuels et des durées inter-défaillance, sont développées de manière explicite. Nous mettons en évidence la propriété de convergence du modèle évoquée par Finkelstein [45] et par Last et Szekli [82]. L'expression des lois asymptotiques est ensuite développée. Nous présentons par la suite quelques applications pour la mise en place d'une politique optimale de maintenance préventive associée au modèle  $WARA_\infty$ . Les politiques seront implantées via des simulations numériques. Nous montrons également qu'il est possible de construire des politiques optimales de maintenance préventive pour des modèles dont l'efficacité de maintenance est de type  $ARA_\infty$ .

pour une vaste classe d'intensités initiales.

## 2 Modèle Weibull- $ARA_\infty$

Le modèle  $WARA_\infty$  est défini à partir d'un processus de comptage  $\{N_t\}_{t \geq 0}$ , dont les instants de défaillance et les durées de inter-défaillance sont notés  $\{T_i\}_{i \geq 0}$  et  $\{X_i\}_{i \geq 1}$ , respectivement. L'intensité initiale est supposée de la loi Weibull  $\mathcal{W}(\alpha, \beta)$  :

$$\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1} \quad (2.1)$$

Le processus des âges virtuels est noté  $\{V_t\}_{t \geq 0}$ . En particulier, le modèle  $WARA_\infty$  suppose que les âges effectifs  $\{A_i\}_{i \geq 0}$  sont de type  $ARA_\infty$  [40]. L'efficacité de maintenance  $ARA_\infty$  suppose que la maintenance rajeunit l'âge virtuel d'un montant proportionnel à sa valeur juste avant la défaillance. Si on note  $A_i^- = A_{i-1} + X_i$  l'âge effectif juste avant la  $i$ ème maintenance, alors l'efficacité de type  $ARA_\infty$  donne

$$A_i = A_i^- - \rho A_i^- = (1 - \rho)(A_{i-1} + X_i)$$

Il en découle que

$$A_i = (1 - \rho)^i A_0 + \sum_{j=1}^i (1 - \rho)^{(i-j+1)} X_j$$

L'âge initial du système  $A_0$  est nul pour un système neuf, et différent de zéro sinon. Le paramètre  $\rho$  définit l'efficacité de maintenance. Dans d'autres ouvrages, ce paramètre est parfois appelé facteur d'amélioration ou de restauration. On peut identifier quelques cas classiques :

- $\rho = 0$  : Maintenance minimale (NHPP) avec  $A_i = T_i$ .
- $\rho = 1$  : Maintenance parfaite (Processus de renouvellement) avec  $A_i = 0$ .
- $0 < \rho < 1$  : Maintenance imparfaite.
- $\rho < 0$  : Maintenance nuisible.

Le modèle résultant est alors appelé  $WARA_\infty$ , qui signifie un modèle de maintenance de type  $ARA_\infty$  dont l'intensité initiale de loi Weibull. Le modèle est entièrement défini par les paramètres  $(\alpha, \beta, \rho)$  et l'âge virtuel initial  $A_0$ . Dans ce qui suit, nous traitons seulement le cas d'une maintenance imparfaite ( $0 < \rho < 1$ ). Le cas d'une maintenance minimale et parfaite sont déjà abordés dans [23, 124] et [92, 145], respectivement. Le cas d'une maintenance nuisible ( $\rho < 0$ ) ne fait pas l'objet de cette étude. Le modèle  $WARA_\infty$  ne concerne que les maintenances correctives. Les maintenances préventives seront ajoutées à partir de la section 4, afin de construire des politiques de maintenance optimales.

## 3 Développement

Avant de proposer certains développements analytiques du modèle  $WARA_\infty$ , nous présentons une propriété sur les durées inter-défaillance  $\{X_i\}_{i \geq 1}$  qui permet de simuler une trajectoire pour n'importe quel modèle d'âge virtuel.

Sous l'hypothèse de l'âge virtuel, la loi conditionnelle de la prochaine durée inter-défaillance  $X_{i+1}$  est définie par :

$$\forall i \geq 0, \forall t \geq 0, \mathbb{P}(X_{i+1} > t | A_0, X_1, A_1, \dots, X_i, A_i) = \mathbb{P}(X > A_i + t | X \geq A_i) = \frac{R(A_i + t)}{R(A_i)} \quad (2.2)$$

où  $X$  désigne la variable aléatoire qui a la même loi que la première défaillance  $T_1$ . En utilisant le fait que  $R(t) = \exp(-\Lambda(t))$ , l'équation précédente nous donne la relation suivante :

$$\Lambda(A_i + t) = \Lambda(A_i) - \ln(\mathbb{P}(X > A_i + t | X > A_i))$$

La prochaine durée inter-défaillance peut être alors simulée si  $\Lambda(t)$  est inversible, en utilisant l'équation 2.3 suivante :

$$X_{i+1} = \Lambda^{-1}(\Lambda(A_i) - \ln(U_{i+1})) - A_i \quad (2.3)$$

où  $U_{i+1}$  suit une loi Uniforme  $\mathcal{U}[0, 1]$ .

L'écriture dans l'équation (2.3) nous permet de construire une méthode de simulation pour générer une séquence de durées inter-défaillance  $\underline{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et d'âges effectifs  $\underline{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ . L'algorithme 1 suivant présente l'exemple de simulation du modèle  $ARA_\infty$  dont l'intensité initiale est  $\lambda$  et l'efficacité est  $\rho$ .

---

**Algorithm 1** Simulation des durées inter-défaillance et âges effectifs du modèle  $ARA_\infty$

---

- 1: Initialiser  $x_0 = 0, a_0 = 0$
  - 2: **for**  $k = 1 : n$  **do**
  - 3:  $x_k = \Lambda^{-1}(\Lambda(a_{k-1}) - \ln(RAND)) - a_{k-1}$   $\triangleright$  RAND : Une réalisation de loi Uniforme  $\mathcal{U}[0, 1]$
  - 4:  $a_k = (1 - \rho)(a_{k-1} + x_k)$   $\triangleright$  Mise à jour de l'âge effectif du modèle  $ARA_\infty$
  - 5:  $t_k = t_{k-1} + x_k$   $\triangleright$  Calcul du prochain instant de défaillance
  - 6: **end for**
- 

On peut adapter l'algorithme pour un modèle  $ARA_m$  en général. Il suffit de mettre à jour de manière appropriée les âges effectifs  $a_k$  selon la mémoire  $m$ . Nous avons supposé que la fonction réciproque  $\Lambda^{-1}$  de l'intensité cumulée existe.

La définition de l'âge effectif du modèle  $ARA_\infty$  nous permet d'obtenir une relation de récurrence entre les  $A_n$ , sans passer par les durées inter-défaillance  $X_n$ .

**Proposition 2.1.**

$$A_n = (1 - \rho)\Lambda^{-1}(\Lambda(A_{n-1}) + \xi_n), \quad \forall n \geq 1$$

$\{\xi_j\}_{j=1, \dots, n}$  est une séquence des variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1  $\mathcal{E}(1)$ .

*Démonstration.* En utilisant l'équation (2.3) et la propriété de l'âge effectif  $ARA_\infty$ , on a :

$$\begin{aligned} A_n &= (1 - \rho)(A_{n-1} + X_n) \\ &= (1 - \rho)(A_{n-1} + \Lambda^{-1}(\Lambda(A_{n-1}) - \ln(U_n)) - A_{n-1}) \\ &= (1 - \rho)\Lambda^{-1}(\Lambda(A_{n-1}) + \xi_n) \end{aligned}$$

avec  $\xi_n = -\ln(U_n)$  variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1  $\mathcal{E}(1)$ . □

Suite à la Proposition 2.1, pour le modèle  $WARA_\infty$  où  $\Lambda^{-1}(t) = (t/\alpha)^{1/\beta}$ , les âges effectifs ont la relation de récurrence suivante :

$$A_n = (1 - \rho)\alpha^{-\frac{1}{\beta}}(\alpha A_{n-1}^\beta + \xi_n)^{\frac{1}{\beta}}, \quad \forall n \geq 1 \quad (2.4)$$

Une expression explicite pour  $A_n$  est alors disponible, comme montrée dans la proposition suivante.

**Proposition 2.2.** Pour le modèle  $WARA_\infty$ , où  $\{\xi_i\}_{i=1,\dots,n}$  est une séquence de  $n$  variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1,  $\mathcal{E}(1)$  :

$$A_n = (1 - \rho)\alpha^{-\frac{1}{\beta}} \left( \sum_{i=1}^n (1 - \rho)^{\beta(n-i)} \xi_i \right)^{\frac{1}{\beta}}, \forall n \geq 1$$

*Démonstration.* Le résultat est démontré par récurrence. Pour  $n = 1$ , on applique la Proposition 2.1, avec  $A_0 = 0$  :

$$A_1 = (1 - \rho)\Lambda^{-1}[\Lambda(A_0) + \xi_1] = (1 - \rho)\alpha^{-\frac{1}{\beta}} \xi_1^{\frac{1}{\beta}}$$

Supposons maintenant que la proposition est valide pour  $n$ . L'étape suivante se démontre comme suit :

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= (1 - \rho)\Lambda^{-1}[\Lambda(A_n) + \xi_{n+1}] \\ &= (1 - \rho)\alpha^{-\frac{1}{\beta}} \left[ \alpha \left[ (1 - \rho)\alpha^{-\frac{1}{\beta}} \left( \sum_{i=1}^n (1 - \rho)^{\beta(n-i)} \xi_i \right)^{\frac{1}{\beta}} \right]^\beta + \xi_{n+1} \right]^{\frac{1}{\beta}} \\ &= (1 - \rho)\alpha^{-\frac{1}{\beta}} \left[ \alpha \alpha^{-1} (1 - \rho)^\beta \sum_{i=1}^n (1 - \rho)^{\beta(n-i)} \xi_i + \xi_{n+1} \right]^{\frac{1}{\beta}} \\ &= (1 - \rho)\alpha^{-\frac{1}{\beta}} \left( \sum_{i=1}^{n+1} (1 - \rho)^{\beta(n+1-i)} \xi_i \right)^{\frac{1}{\beta}} \end{aligned}$$

□

D'après la proposition 2.2, l'âge effectif  $A_n$  s'exprime à partir d'une somme pondérée des variables aléatoires i.i.d. exponentielle  $\mathcal{E}(1)$ , ce qui est une somme des variables aléatoires de lois exponentielles i.i.d. Par ailleurs, une somme des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle est une variable aléatoire de loi hypo-exponentielle [52]. Par conséquent, l'âge effectif  $A_n$  est une transformation algébrique d'une variable aléatoire hypo-exponentielle. Pour obtenir la loi marginale de  $A_n$ , nous introduisons la notation **q-shifted factoriel** (factoriel sous forme de q-séries) [99], un cas particulier d'une série hypergéométrique [51] :

$$(a, q)_k = \prod_{j=0}^{k-1} (1 - aq^j), \forall k \geq 1 \quad (2.5)$$

La loi marginale de  $A_n$  est présentée de manière compacte avec l'opérateur q-shifted factoriel, comme présenté dans la proposition 2.3.

**Proposition 2.3.** La fonction de survie de l'âge effectif  $A_n$  du modèle  $WARA_\infty$ , avec  $q = (1 - \rho)^\beta$  est

$$R_{A_n}(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(q, q)_{n-k} \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{k-1}} e^{-\frac{\alpha t^\beta}{q^k}}, \forall n \geq 1$$

*Démonstration.* Dénotons  $\theta_i = q^{i-n}$  et  $Y_n = \sum_{i=1}^n \theta_i^{-1} \xi_i$ , l'âge effectif se réécrit :

$$A_n = (1 - \rho)\alpha^{-\frac{1}{\beta}} \left( \sum_{i=1}^n \theta_i^{-1} \xi_i \right)^{\frac{1}{\beta}} = (1 - \rho)\alpha^{-\frac{1}{\beta}} Y_n^{\frac{1}{\beta}}$$

Comme  $\xi_i$  suit la loi exponentielle de paramètre 1 alors  $\theta_i^{-1}\xi_i$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\theta_i$ . Il en découle que la variable  $Y_n$  suit la loi hypo-exponentielle de paramètre  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ , dont la fonction de survie a pour expression [52] :

$$R_{Y_n}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\theta_i} e^{-\theta_i t}, \quad n \geq 1$$

avec  $\mu_i = \frac{\prod_{i=1}^n \theta_i}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (\theta_j - \theta_i)}$ .

Une écriture compacte pour  $\mu_i$  avec le q-shifted factoriel est donnée par

$$\begin{aligned} \mu_i &= \frac{\prod_{i=1}^n \theta_i}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (\theta_j - \theta_i)} = \frac{\prod_{i=1}^n \theta_i}{\prod_{j=1, j \neq i}^n \theta_j (1 - \frac{\theta_i}{\theta_j})} = \frac{\theta_i}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (1 - \frac{\theta_i}{\theta_j})} \\ &= \frac{\theta_i}{\prod_{j=1}^{i-1} (1 - \frac{\theta_i}{\theta_j}) \prod_{j=i+1}^n (1 - \frac{\theta_i}{\theta_j})} = \frac{q^{i-n}}{\prod_{j=1}^{i-1} (1 - q^{i-j}) \prod_{j=i+1}^n (1 - q^{i-j})} \\ &= \frac{1}{q^{n-i}} \frac{1}{\prod_{j=1}^{i-1} (1 - q^j)} \frac{1}{\prod_{j=1}^{n-i} (1 - \frac{1}{q^j})} = \frac{1}{q^{n-i}} (q, q)_{i-1} (\frac{1}{q}, \frac{1}{q})_{n-i} \end{aligned}$$

La fonction de survie marginale de  $Y_n$  et  $A_n$  s'écrit alors

$$R_{Y_n}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(q, q)_{i-1} (\frac{1}{q}, \frac{1}{q})_{n-i}} e^{-\frac{t}{q^{n-i}}}$$

$$R_{A_n}(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(q, q)_{n-k} (\frac{1}{q}, \frac{1}{q})_{k-1}} e^{-\frac{\alpha t^\beta}{q^k}}$$

□

Avec l'obtention de la fonction de survie marginale de l'âge effectif, il est alors possible d'obtenir une expression de la fonction de survie marginale pour la prochaine durée inter-défaillance, comme montré dans la proposition 2.4.

**Proposition 2.4.** *La fonction de survie de  $X_{n+1}$  du modèle  $WARA_\infty$  est*

$$R_{X_{n+1}}(t) = \begin{cases} \frac{\sum_{k=1}^n \int_0^\infty \alpha \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha(x+t)^\beta + \alpha(1-q^{-k})x^\beta} dx}{q^k (q, q)_{n-k} (\frac{1}{q}, \frac{1}{q})_{k-1}} & , n \geq 1 \\ e^{-\alpha t^\beta} & , n = 0 \end{cases}$$

*Démonstration.* La loi de  $X_{n+1}$  est obtenue par un conditionnement suivant  $A_n$  de la manière

suivante :

$$\begin{aligned}
 \forall n \geq 1, P(X_{n+1} > t) &= \int_0^\infty P(X_{n+1} > t | A_n = x) dF_{A_n}(x) \\
 &= \int_0^\infty P(X > x+t | X > x) dF_{A_n}(x) = \int_0^\infty \frac{R(x+t)}{R(x)} dF_{A_n}(x) \\
 &= \int_0^\infty e^{-\alpha(x+t)^\beta + \alpha x^\beta} \alpha \beta x^{\beta-1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{q^k (q, q)_{n-k} (\frac{1}{q}, \frac{1}{q})_{k-1}} e^{-\frac{\alpha x^\beta}{q^k}} dx \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{\int_0^\infty \alpha \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha(x+t)^\beta + \alpha(1-q^{-k})x^\beta} dx}{q^k (q, q)_{n-k} (\frac{1}{q}, \frac{1}{q})_{k-1}}
 \end{aligned}$$

Le cas  $n = 0$ ,  $X_1$  suit la même loi de  $X$ , qui est la durée de défaillance d'un système neuf de loi de Weibull.  $\square$

Les lois marginales nous permettent d'obtenir les espérances mathématiques des variables aléatoires  $A_n$  et  $X_n$ . Nous présentons les résultats dans la Proposition 2.5.

**Proposition 2.5.** *L'espérance de l'âge effectif  $A_n$  et de la durée inter-défaillance  $X_{n+1}$  du modèle  $WARA_\infty$  est*

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[A_n] &= \alpha^{-1/\beta} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \sum_{k=1}^n \frac{q^{\frac{k}{\beta}}}{(q, q)_{n-k} (\frac{1}{q}, \frac{1}{q})_{k-1}}, \quad \forall n \geq 1 \\
 \mathbb{E}[X_{n+1}] &= \alpha^{-1/\beta} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{q^{\frac{k-1}{\beta}} (1 - q^{\frac{1}{\beta}} + q^{n+1-k+\frac{1}{\beta}})}{(q, q)_{n+1-k} (\frac{1}{q}, \frac{1}{q})_{k-1}}, \quad \forall n \geq 0
 \end{aligned}$$

où  $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$  est la fonction Gamma.

*Démonstration.* Pour le calcul de l'intégrale, on utilise un résultat de la fonction Gamma et d'un changement de variable :

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha t^\beta}{q^k}} dt = \alpha^{-\frac{1}{\beta}} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) q^{\frac{k}{\beta}}$$

L'espérance  $\mathbb{E}[A_n]$  est alors la suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[A_n] &= \int_0^\infty R_{A_n}(t) dt = \int_0^\infty \sum_{k=1}^n \frac{1}{(q, q)_{n-k} (\frac{1}{q}, \frac{1}{q})_{k-1}} e^{-\frac{\alpha t^\beta}{q^k}} dt \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(q, q)_{n-k} (\frac{1}{q}, \frac{1}{q})_{k-1}} \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha t^\beta}{q^k}} dt \\
 &= \alpha^{-1/\beta} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \sum_{k=1}^n \frac{q^{\frac{k}{\beta}}}{(q, q)_{n-k} (\frac{1}{q}, \frac{1}{q})_{k-1}}
 \end{aligned}$$

L'espérance de  $X_{n+1}$  est déduite à partir de la relation entre  $A_n, A_{n+1}$  et  $X_{n+1}$  :

$$\begin{aligned}
 A_{n+1} &= (1 - \rho)(A_n + X_{n+1}) \\
 \Rightarrow X_{n+1} &= \frac{A_{n+1}}{1 - \rho} - A_n = q^{-\frac{1}{\beta}} A_{n+1} - A_n
 \end{aligned}$$



En prenant l'espérance  $\mathbb{E}[\cdot]$  des deux côtés, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X_{n+1}] &= q^{-\frac{1}{\beta}} \mathbb{E}[A_{n+1}] - \mathbb{E}[A_n] \\
 &= \alpha^{-1/\beta} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \left( \sum_{k=1}^{n+1} \frac{q^{\frac{k-1}{\beta}}}{(q, q)_{n+1-k} \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{k-1}} - \sum_{k=1}^n \frac{q^{\frac{k}{\beta}}}{(q, q)_{n-k} \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{k-1}} \right) \\
 &= \alpha^{-1/\beta} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \left( \sum_{k=1}^n \frac{q^{\frac{k-1}{\beta}}}{\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{k-1}} \left[ \frac{1}{(q, q)_{n+1-k}} - \frac{q^{\frac{1}{\beta}}}{(q, q)_{n-k}} \right] + \frac{q^{\frac{n}{\beta}}}{\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_n} \right) \\
 &= \alpha^{-1/\beta} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \left( \sum_{k=1}^n \frac{q^{\frac{k-1}{\beta}}}{\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{k-1}} \left[ \frac{1 - q^{\frac{1}{\beta}} (1 - q^{n+1-k})}{(q, q)_{n+1-k}} \right] + \frac{q^{\frac{n}{\beta}}}{\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_n} \right) \\
 &= \alpha^{-1/\beta} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \left( \sum_{k=1}^n \frac{q^{\frac{k-1}{\beta}} (1 - q^{\frac{1}{\beta}} + q^{n+1-k+\frac{1}{\beta}})}{(q, q)_{n+1-k} \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{k-1}} + \frac{q^{\frac{n}{\beta}}}{\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_n} \right) \\
 &= \alpha^{-1/\beta} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \left( \sum_{k=1}^{n+1} \frac{q^{\frac{k-1}{\beta}} (1 - q^{\frac{1}{\beta}} + q^{n+1-k+\frac{1}{\beta}})}{(q, q)_{n+1-k} \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{k-1}} \right)
 \end{aligned}$$

□

La connaissance des lois  $A_n$  et  $X_n$  nous permet de déterminer la loi de  $A_n^-$ , qui représente l'âge virtuel du système avant la  $n$ ème défaillance. Sous le modèle  $WARA_\infty$ , ce dernier est défini par :  $A_n^- = A_{n-1} + X_n = A_n/(1-\rho)$ . La proposition suivante présente sa survie et son espérance.

**Proposition 2.6.** *La fonction de survie et l'espérance de l'âge virtuel juste avant la  $n$ ème maintenance  $A_n^-$  du modèle  $WARA_\infty$  est*

$$R_{A_n^-}(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(q, q)_{n-k} \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{k-1}} e^{-\frac{\alpha t^\beta}{q^{k-1}}}, \quad \forall n \geq 1$$

$$\mathbb{E}[A_n^-] = \alpha^{-1/\beta} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \sum_{k=1}^n \frac{q^{\frac{k-1}{\beta}}}{(q, q)_{n-k} \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{k-1}}, \quad \forall n \geq 1$$

Les résultats s'obtiennent directement à partir de la relation entre les âges :  $A_n^- = A_{n-1} + X_n = A_n/(1-\rho)$ .

D'après les résultats de Last et Szekli [82], et de Finkelstein [45], le modèle Kijima II, en particulier le modèle  $WARA_\infty$  converge vers un régime stationnaire après une période de fonctionnement. La convergence est similaire à celle d'une chaîne de Markov en temps continu, c'est-à-dire que le couple de variables  $(X_n, A_n)$  converge vers sa mesure stationnaire qui est la loi de  $(X_\infty, A_\infty)$ . Par ailleurs, Last et Szekli [82] ont montré que cette mesure est unique. Il en découle que les lois asymptotiques de  $A_\infty$  et  $X_\infty$  peuvent être obtenues au passage à la limite à partir de la proposition 2.3 et 2.4, respectivement.

**Proposition 2.7.** *L'âge effectif  $A_n$  et la durée inter-défaillance  $X_n$  convergent en loi vers l'âge effectif  $A_\infty$  et la durée inter-défaillance  $X_\infty$ , dont la fonction de survie et l'espérance sont les suivantes :*

$$R_{A_\infty}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(q, q)_\infty \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{k-1}} e^{-\frac{\alpha t^\beta}{q^k}}$$

$$R_{X_\infty}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_0^{\infty} \alpha \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha(x+t)^\beta + \alpha(1-q^{-k})x^\beta} dx}{q^k (q, q)_\infty \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{k-1}}$$

$$\mathbb{E}[A_\infty] = \alpha^{-\frac{1}{\beta}} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{\frac{k}{\beta}}}{(q, q)_\infty \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{k-1}}$$

$$\mathbb{E}[X_\infty] = \alpha^{-\frac{1}{\beta}} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{\frac{k}{\beta}} (q^{-\frac{1}{\beta}} - 1)}{(q, q)_\infty \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{k-1}}$$

*Démonstration.* Nous présentons la démonstration de la convergence en loi des variables aléatoires  $A_n$  et  $X_n$  vers  $A_\infty$  et  $X_\infty$ , respectivement, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} R_{A_n}(t) &= R_{A_\infty}(t), \quad \forall t \geq 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} R_{X_n}(t) &= R_{X_\infty}(t), \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

Les propriétés suivantes sont vérifiées et sont nécessaires pour démontrer la convergence des deux séries :

- (i) Le  $q$ -shifted factoriel  $(q, q)_k$  converge vers la fonction d'Euler  $(q, q)_\infty$  qui se développe de la manière suivante [51] :

$$(q, q)_\infty = \sqrt{-\frac{2\pi}{\ln(q)}} \exp\left(\frac{\pi^2}{6\ln(q)} - \frac{\ln(q)}{24}\right) + O(1)$$

(ii)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{k-1} \right| = +\infty, \quad \forall q \in (0, 1).$

(iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[ \prod_{j=n-k+1}^{\infty} (1 - q^j) - 1 \right] q^k = 0$

La condition (ii) se démontre par l'application du résultat en (i).

Pour montrer la condition (iii), posons  $c_k(q) = \left| \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{k-1} \right|$  alors on obtient :

$$c_k(q) = \left| \prod_{j=1}^{k-1} (1 - q^{-j}) \right| = \left| (-1)^{k-1} \frac{(q, q)_{k-1}}{q^{k(k-1)/2}} \right| = \frac{(q, q)_{k-1}}{q^{k(k-1)/2}}$$

Il en découle que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_k(q) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(q, q)_{k-1}}{q^{k(k-1)/2}} = \frac{(q, q)_\infty}{\lim_{k \rightarrow \infty} q^{k(k-1)/2}} = \infty$$

car le dénominateur tend vers zéro pour toute valeur de  $q$  comprise dans l'intervalle  $(0, 1)$ . Le terme dans le crochet peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} c(k, n) = \prod_{j=n-k+1}^{\infty} (1 - q^j) - 1, & k < n \\ c(k, n) = 0, & k > n \end{cases}$$

Il est évident que  $|c(k, n)| < 2$ ,  $\forall k, n \in \mathbb{N}$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} c(k, n) = 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ . Par ailleurs, on a  $\sum_{k=1}^{\infty} q^k < \infty$ . L'assertion se réécrit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} c(k, n) q^k = 0$$

En posant  $a_n = \sum_{k=1}^{\infty} c(k, n) q^k$ , on a alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  par le théorème de convergence dominée.

Les trois conditions sont valides, pour n'importe quelle valeur de  $q$  comprise dans l'intervalle  $(0, 1)$ , ou de manière équivalente de toute valeur de  $\rho \in (0, 1)$  et  $\beta > 1$ .

Dans un premier temps, nous montrons la convergence en loi des âges effectifs. La démonstration se déroule en deux étapes : la convergence de la série de somme infinie  $R_{A_\infty}(t)$  et la convergence de la série de somme partielle  $R_{A_n}(t)$  vers  $R_{A_\infty}(t)$ , tout en considérant  $t > 0$ .

Tout d'abord, puisque  $(q, q)_\infty$  est positif et borné et  $\left| \left( \frac{1}{q}, \frac{1}{q} \right)_{k-1} \right|$  croît vers l'infini, le terme  $\left| \frac{1}{(q, q)_\infty \left( \frac{1}{q}, \frac{1}{q} \right)_{k-1}} \right|$  est borné par une grande valeur positive  $M$ . Chaque terme général de la série  $R_{A_\infty}(t)$  est alors borné :

$$0 \leq \left| \frac{1}{(q, q)_\infty \left( \frac{1}{q}, \frac{1}{q} \right)_{k-1}} e^{-\frac{\alpha t^\beta}{q^k}} \right| \leq M \frac{q^k}{\alpha t^\beta}, \quad t > 0$$

Cela implique que la série infinie  $R_{A_\infty}(t)$  est une série convergente, car elle est dominée par la série convergente  $S_\infty(t) = M/(\alpha t^\beta) \sum_{k=1}^{\infty} q^k$ . La démonstration de la convergence de  $R_{A_n}(t)$  vers  $R_{A_\infty}(t)$  se fait par l'évaluation du reste d'une série infinie, à savoir :

$$\begin{aligned} |R_{A_n}(t) - R_{A_\infty}(t)| &= \left| \sum_{k=1}^n \frac{e^{-\frac{\alpha t^\beta}{q^k}}}{(q, q)_{n-k} \left( \frac{1}{q}, \frac{1}{q} \right)_{k-1}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\alpha t^\beta}{q^k}}}{(q, q)_\infty \left( \frac{1}{q}, \frac{1}{q} \right)_{k-1}} \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{(q, q)_{n-k}} - \frac{1}{(q, q)_\infty} \right) \frac{e^{-\frac{\alpha t^\beta}{q^k}}}{\left( \frac{1}{q}, \frac{1}{q} \right)_{k-1}} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\alpha t^\beta}{q^k}}}{(q, q)_\infty \left( \frac{1}{q}, \frac{1}{q} \right)_{k-1}} \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \frac{[\prod_{j=n-k+1}^{\infty} (1 - q^j) - 1] e^{-\frac{\alpha t^\beta}{q^k}}}{(q, q)_\infty \left( \frac{1}{q}, \frac{1}{q} \right)_{k-1}} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\alpha t^\beta}{q^k}}}{(q, q)_\infty \left( \frac{1}{q}, \frac{1}{q} \right)_{k-1}} \right| \\ &\leq \frac{M}{\alpha t^\beta} \left| \sum_{k=1}^n \left[ \prod_{j=n-k+1}^{\infty} (1 - q^j) - 1 \right] q^k \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\alpha t^\beta}{q^k}}}{(q, q)_\infty \left( \frac{1}{q}, \frac{1}{q} \right)_{k-1}} \right| \end{aligned}$$

Le premier terme tend vers zéro d'après la condition (iii). Le second terme est le reste de la série convergente  $R_{A_\infty}(t)$ . Ainsi  $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_{A_n}(t) - R_{A_\infty}(t)| = 0$ ,  $t > 0$ . Le cas  $t = 0$  est trivial. La loi de l'âge effectif en état transitoire converge ainsi vers un loi asymptotique.

La démonstration de la convergence en loi des durées inter-défaillance se déroule également en deux étapes : convergence de la série de somme infinie  $R_{X_\infty}(t)$  et la convergence de la série de somme partielle  $R_{X_n}(t)$  vers  $R_{X_\infty}(t)$ , avec  $t > 0$ . Considérons la série de somme infinie :

$$R_{X_\infty}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha \beta}{q^k (q, q)_\infty \left( \frac{1}{q}, \frac{1}{q} \right)_{k-1}} I_k$$

où

$$I_k = \int_0^\infty x^{\beta-1} e^{-\alpha(x+t)^\beta + \alpha(1-q^{-k})x^\beta} dx, \quad k \geq 1$$

Comme  $t > 0$ , l'intégrale  $I_k$  est bornée par :

$$\begin{aligned} I_k &< \int_0^\infty x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta + \alpha(1-q^{-k})x^\beta} dx = \int_0^\infty x^{\beta-1} e^{-\alpha q^{-k} x^\beta} dx \\ &= -\frac{1}{\alpha \beta q^{-k}} e^{-\alpha q^{-k} x^\beta} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\alpha \beta q^{-k}} \end{aligned}$$

Nous allons montrer que la série  $R_{X_\infty}(t)$  converge absolument. Tout d'abord, on a :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\alpha \beta}{q^k (q, q)_\infty \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{k-1}} I_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(q, q)_\infty \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{k-1}}$$

Puisque le produit  $\left|\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{k-1}\right|$  tend vers l'infini d'après la condition (ii), il existe alors  $k_0 < \infty$  tel que  $\forall k \geq k_0, \left|1 - \frac{1}{q^k}\right| \geq 2$ . Nous obtenons par la suite :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(q, q)_\infty \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{k-1}} &= \sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{(q, q)_\infty \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{k-1}} + \frac{1}{(q, q)_\infty} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left| \frac{1}{\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{k-1}} \right| \\ &= \sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{(q, q)_\infty \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{k-1}} + \frac{1}{(q, q)_\infty} \left| \frac{1}{\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{k_0}} \right| \sum_{k=k_0}^{\infty} \left| \frac{1}{\prod_{i=k_0}^k \left(1 - \frac{1}{q^i}\right)} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{(q, q)_\infty \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{k-1}} + \frac{1}{(q, q)_\infty} \left| \frac{1}{\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{k_0}} \right| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \end{aligned}$$

Puisque le deuxième terme à droite est une série convergente, la série  $R_{X_\infty}(t)$  alors converge absolument. Cela implique aussi que la somme infinie  $R_{X_\infty}(t)$  converge. Pour montrer la convergence de la série de somme partielle vers la série infinie, nous considérons aussi la différence :

$$\begin{aligned} |R_{X_n}(t) - R_{X_\infty}(t)| &= \left| \sum_{k=1}^n \frac{\alpha \beta}{q^k (q, q)_{n-k} \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{k-1}} I_k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha \beta}{q^k (q, q)_\infty \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{k-1}} I_k \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \frac{\alpha \beta}{q^k \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{k-1}} \left( \frac{1}{(q, q)_{n-k}} - \frac{1}{(q, q)_\infty} \right) I_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\alpha \beta}{q^k (q, q)_\infty \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{k-1}} I_k \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^n \frac{\alpha \beta}{q^k \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{k-1}} \left( \frac{1}{(q, q)_{n-k}} - \frac{1}{(q, q)_\infty} \right) I_k \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\alpha \beta}{q^k (q, q)_\infty \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{k-1}} I_k \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{k-1}} \left( \frac{1}{(q, q)_{n-k}} - \frac{1}{(q, q)_\infty} \right) \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(q, q)_\infty \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{k-1}} \right| \end{aligned}$$

La première somme converge vers zéro d'après condition (iii) (et un raisonnement similaire dans la convergence du reste des âges effectifs). La deuxième somme est aussi le reste d'une série

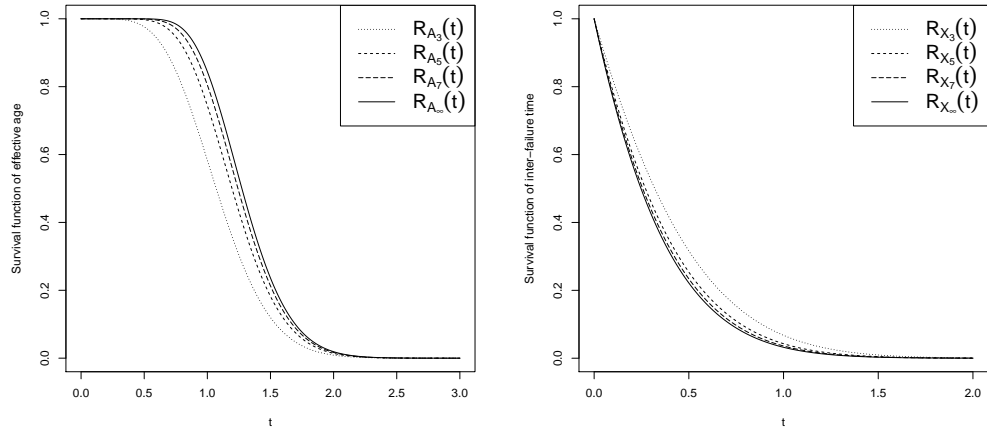
#### 4. Politiques de maintenance imparfaite avec le modèle $WARA_\infty$

convergence. Par conséquent, la série de somme partielle  $R_{X_n}(t)$  tend vers la série infinie  $R_{X_\infty}(t)$ . Le cas  $t = 0$  est aussi trivial.

Comme la survie de l'âge effectif et de la durée inter-défaillance dans le régime stationnaire sont finies, leur espérances le sont également. L'expression des espérances de l'âge effectif et de la durée inter-défaillance asymptotique est obtenue à partir de l'écriture dans le régime transitoire.  $\square$

Pour illustrer la vitesse de la convergence en loi, nous présentons les graphiques des fonctions de survie de différents âges effectifs et différentes durées inter-défaillance. Dans la Figure 2.1, nous avons l'évolution de la fonction de survie de  $A_n$  (Figure a) et  $X_n$  (Figure b) de l'état transitoire vers l'état stationnaire ( $A_\infty, X_\infty$ ), pour le triplet  $(\alpha = 1, \beta = 2, \rho = 0.2)$  et les différentes valeurs de  $n$  (3,5,7). Les courbes de l'état transitoire s'approchent de celle de l'état stationnaire assez rapidement. Cela représente un système qui se dégrade relativement lentement ( $\beta$  faible), accompagné d'une maintenance assez peu efficace ( $\rho$  proche de zéro). Il suffit cependant d'une dizaine d'opérations de maintenance pour que le système rentre dans l'état stationnaire. La vitesse de convergence sera plus élevée lorsque la maintenance devient plus efficace, ou la dégradation plus importante.

Les résultats de convergence du modèle  $WARA_\infty$  permettent la mise en place des politiques de maintenance préventive. Dans la section suivante, nous étendons les politiques de maintenance préventive classiques avec les hypothèse simples sur l'efficacité de maintenance (minimale et parfaite par exemple) à l'hypothèse  $ARA_\infty$ . Lorsqu'il est possible, les lois asymptotiques sont utilisées pour obtenir de conditions d'optimalité des politiques de maintenance préventive.



(a) Fonctions de survie de  $A_3, A_5, A_7, A_\infty$  with  $(\alpha = 1, \beta = 2, \rho = 0.2)$

(b) Fonctions de survie de  $X_3, X_5, X_7, X_\infty$  with  $(\alpha = 1, \beta = 2, \rho = 0.2)$

Figure 2.1 – Fonctions de survie des âges effectifs et durées inter-défaillance

## 4 Politiques de maintenance imparfaite avec le modèle $WARA_\infty$

Depuis ces dernières décennies, avec l'intérêt grandissant de la fiabilité et de la sûreté de fonctionnement en général, de nombreuses politiques de maintenance préventive sont proposées,

afin de maintenir le système dans son état opérationnel. Les politiques sont souvent optimisées par un critère de coût (minimal) ou de disponibilité (maximale). Une liste (non-exhaustive) des politiques de maintenance a été recensée dans le chapitre d'introduction. La plupart de ces politiques considère des maintenances parfaites ou minimales, tandis que les politiques avec les maintenances imparfaites sont moins nombreuses [26, 75, 106].

Le modèle  $WARA_\infty$  et les développements présentés ci-dessus sont destinés uniquement pour les maintenances correctives. Par la suite, nous nous envisageons de considérer les maintenances préventives imparfaites afin de construire des politiques de maintenance. L'ajout de la maintenance préventive rend la formulation plus complexe, puisqu'en général l'efficacité d'une maintenance préventive ( $\rho_p$ ) est plus importante que l'efficacité d'une maintenance corrective ( $\rho_c$ ). Dans un premier temps, et afin d'obtenir quelques formulations explicites sur les politiques de maintenance, nous supposons que les deux types de maintenance ont la même efficacité ( $\rho_p = \rho_c = \rho$ ). Ensuite, nous présentons la construction des politiques dans le cas  $\rho_p > \rho_c$  par des simulations de Monte Carlo. L'étude est ensuite étendue pour une plus grande classe d'intensités initiales. L'une des originalités de notre approche est la mise en place d'une politique de maintenance préventive sur un horizon infini sans qu'il y ait la moindre maintenance parfaite.

## 4.1 Politiques de maintenance avec $\rho_c = \rho_p$ du modèle $WARA_\infty$

### 4.1.1 Hypothèses générales

Les politiques de maintenance imparfaite présentées ici ont pour but de minimiser un critère de coût moyen à long terme. Pour atteindre cet objectif, les instants des maintenances préventives planifiées sont optimisés. Une maintenance corrective (MC) a lieu après une défaillance et une maintenance préventive (MP) planifiée a lieu lorsque le système est opérationnel, à un instant prédéterminé à la précédente remise en route du système. Les hypothèses supplémentaires sont :

- (i) Les paramètres du modèle  $WARA_\infty$  sont  $(\alpha, \beta, \rho)$ , et ils sont connus.
- (ii) Au début de l'observation, le système est dans son état stationnaire.
- (iii) Un cycle de maintenance est la période entre deux maintenances consécutives.
- (iv) La durée d'attente jusqu'à la prochaine défaillance (donc une MC) est notée  $X_i$ , et la durée d'attente jusqu'à la prochaine MP est  $\delta_i$ . La durée effective jusqu'à la prochaine maintenance est notée  $W_i$ .
- (v) Les MC et MP suivent le modèle  $ARA_\infty$ , avec la même efficacité  $\rho$ .
- (vi) Les coûts de MP et MC sont notés  $C_p$  et  $C_c$  respectivement, avec  $C_p < C_c$ . Ces derniers sont connus. Selon les critères de la politique mise en place, il y a deux façons de calculer le coût  $K(i)$  du  $i$ ème cycle de maintenance (le détail sera présenté ci-dessous).
- (vii) Le coût total est la somme des coûts encourus durant chaque cycle de maintenance

$$C(t) = \sum_{i=1}^{N_t} K(i)$$

Le coût moyen asymptotique par unité de temps a pour expression :

$$C_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[C(t)]}{t} \quad (2.6)$$

A partir de ces hypothèses, trois politiques de maintenance préventive sont proposées :

#### 4. Politiques de maintenance imparfaite avec le modèle $WARA_\infty$

1. **La politique statique** qui suppose que la durée potentielle d'attente  $\delta_i$  pour une MP après chaque remise en route (ou après la dernière maintenance) est constante :  $\delta_i = \delta$ , et une MC est déclenchée si la défaillance a lieu avant cette durée. Le coût du  $i$ ème cycle de maintenance est donné par :

$$\begin{aligned} K(i) &= C_p + (C_c - C_p)\mathbb{1}_{\{X_i < \delta\}} \\ W_i &= \min \{X_i, \delta\} \end{aligned} \tag{2.7}$$

La durée optimale  $\delta^*$  est celui qui minimise le coût moyen asymptotique (2.6). Elle est obtenue par des simulations de Monte-Carlo, ou est approchée par la théorie du renouvellement avec les lois asymptotiques de  $X_\infty$ .

2. **La politique adaptative** met à jour la valeur optimale  $\delta_i^*$  de la durée d'attente de la prochaine MP du  $i$ ème cycle de maintenance en fonction de l'histoire des maintenances effectuées. La durée optimale  $\delta_i^*$  minimisera le coût moyen par unité de temps du  $i$ ème cycle de maintenance.
3. **La politique basée sur l'intensité de défaillance VABR** (Virtual Age-Based Replacement) définit un seuil optimal  $\lambda^*$  à ne pas dépasser pour l'intensité de défaillance  $\lambda_t$ . Le coût de chaque cycle de maintenance est calculé par :

$$K(i) = C_p + (C_c - C_p)\mathbb{1}_{\{a_{i-1} + W_i < s^*\}} \tag{2.8}$$

où  $s^*$  est un âge virtuel optimal correspondant à l'intensité de défaillance maximale  $\lambda^*$  et  $a_{i-1}$  désigne l'âge effectif suite à la  $(i-1)$ ème maintenance. La valeur optimale de l'intensité minimise le coût (2.6), et est obtenue par des simulations de Monte-Carlo. La construction est basée sur l'intensité de défaillance et l'âge virtuel, d'où son nom Virtual Age-Based Replacement VABR. Plus de détails de cette politique sont présentés dans la suite.

Les trois politiques seront détaillées dans les parties suivantes. Quelques remarques méritent d'être évoquées :

- Nous nous positionnons dans le cas où l'équipe de maintenance cherche à mettre en place une politique de maintenance préventive pour un système qui jusque là a été soumis uniquement à des MC de type  $ARA_\infty$  et un vieillissement intrinsèque de loi de Weibull. Les maintenances préventives sont alors rajoutées afin de minimiser le coût des opérations. Cela se traduit par l'hypothèse (ii) et (i), où il est possible que les paramètres d'un système sous surveillance soient connus par le biais des études préliminaires.
- L'hypothèse (ii) n'est pas restrictive, puisque le modèle  $WARA_\infty$  peut converger rapidement vers son état stationnaire après un nombre limité d'opérations.
- L'ajout des MP de type  $ARA_\infty$  garantit que le système soit toujours maintenu dans son état stationnaire. Afin de simplifier les développements, nous supposons que les deux types de maintenance ont la même efficacité  $\rho$ .
- Dans la politique statique, la durée optimale  $\delta^*$  est calculée pour un horizon infini, ce qui implique que l'âge initial n'a pas d'impact sur la valeur trouvée. Ceci est garanti par les résultats de convergence du modèle  $ARA_\infty$ , où le système tend rapidement vers un régime stationnaire. Notons alors que l'hypothèse (ii) n'est plus utile pour cette politique. On peut donc considérer que le système est neuf au départ.
- L'hypothèse (v) est restrictive, puisqu'en général une MP est plus efficace qu'une MC.
- Les politiques proposées peuvent être considérées comme des politiques basées sur l'âge, puisque les décisions de maintenance sont basées sur la comparaison des âges (que ce soit l'âge virtuel ou réel). Cette approche est similaire à celle proposée dans [43].

### 4.1.2 Politique 1 : Politique statique

Les calculs des grandeurs optimales de la politique statique peuvent être réalisés par des simulations de Monte Carlo, ou par une approximation utilisant la théorie du renouvellement.

**4.1.2.1 Optimisation de Monte Carlo** Les durées d'attente jusqu'à la prochaine MP sont constantes  $\delta_i = \delta^*$ , cette valeur est obtenue par les simulations de Monte Carlo. L'algorithme 2 présente la procédure pour la mise en place et l'optimisation de la politique statique. La durée optimale et son coût associé sont obtenus par la recherche sur une grille, car les fonctions de coût sont relativement lisses.  $\delta^*$  est bornée par la 95ème centiles de la durée inter-défaillance  $X_\infty$ . Le temps max  $Tmax$  est fixé suffisamment long pour que le coût moyen asymptotique converge.

---

**Algorithm 2** Politique statique : Optimisation par simulations de Monte-Carlo

---

```

1: for  $\delta \in [\epsilon, \delta max]$  with step  $\epsilon$  do                                ▷  $\epsilon > 0$ , précision de l'algorithme
2:  $Cost(\delta) = 0$ ;  $age = 0$ ;  $time = 0$ ;
3:   while ( $time < Tmax$ ) do
4:    $\xi = -\log(RAND)$                                                     ▷ Loi exponentielle de paramètre 1
5:    $x = \Lambda^{-1}(\Lambda(age) + \xi) - age$                                ▷ Durée potentielle à la prochaine défaillance
6:    $u = \mathbb{1}_{\{x < \delta\}}$                                               ▷ Type de maintenance
7:    $Cost(\delta) = Cost(\delta) + C_p + (C_c - C_p)u$                        ▷ Mise à Jour du coût total
8:    $time = time + \min(\delta, x)$                                        ▷ MAJ du temps
9:    $age = (1 - \rho)(age + \min(\delta, x))$                                ▷ MAJ de l'âge effectif
10:  end while
11:  $Cost(\delta) = Cost(\delta)/time$                                        ▷ Coût moyen asymptotique
12: end for
13:  $\delta^* = \arg \min_{\delta \in [\epsilon, \delta max]} (Cost(\delta))$ 

```

---

**4.1.2.2 Estimation de la durée optimale par la théorie du renouvellement** Dans son régime stationnaire, le modèle  $WARA_\infty$  se comporte comme un processus de renouvellement : les durées entre deux maintenances consécutives suivent la même loi  $X_\infty$ . L'ajout des MP de type  $ARA_\infty$ , ayant la même efficacité  $\rho$  que les MC, conserve la propriété de convergence du modèle. Dans le cadre de la politique statique du modèle  $WARA_\infty$ , nous proposons d'approcher l'âge de maintenance optimal par la condition d'une politique de remplacement basée sur l'âge d'un processus de renouvellement [56] dont la loi générique (loi de renouvellement) est celle de  $X_\infty$  :

$$\hat{\delta}^* = \underset{\delta > 0}{\operatorname{argmin}} \frac{C_p + (C_c - C_p)(1 - R_{X_\infty}(\delta))}{\int_0^\delta R_{X_\infty}(u)du} \quad (2.9)$$

On remarque que cette hypothèse semble justifiée en ce qui concerne la loi de renouvellement  $X_\infty$ . Toutefois, deux durées inter-maintenance consécutives sont bien dépendantes. Notons  $\hat{C}(\delta)$  la fonction de coût, la solution optimale  $\hat{\delta}^*$  est obtenue par des méthodes d'optimisation numérique. Cette fonction est relativement lisse, ce qui permet de trouver  $\hat{\delta}^*$  sans difficulté. Dans [46], une approche similaire est proposée pour le modèle  $ARA_\infty$ .



### 4.1.3 Politique 2 : Politique adaptative ADA

La politique adaptative appartient à la classe des politiques basées sur l'âge. La durée d'attente jusqu'à la prochaine MP est recalculée en fonction du passé, c'est-à-dire l'ensemble des durées effectives entre deux maintenances consécutives (quelque soit le type de maintenance)  $W_1, \dots, W_i$ . Pour chaque cycle de maintenance, une durée d'attente jusqu'à la prochaine MP ( $\widetilde{\delta}_{i+1}^*$ ) est proposée, en utilisant une approximation du processus de renouvellement comme dans la section 4.1.2.2. Dans ce cas, la loi générique des durées d'attente jusqu'à la prochaine défaillance est la loi de durée de vie résiduelle (Remaining Useful Lifetime-RUL). Les détails de la politique sont les suivants.

Selon l'hypothèse (ii), l'âge effectif initial  $\mathcal{A}$  suit la loi asymptotique  $A_\infty$ . La première durée optimale  $\widetilde{\delta}_1^*$  est alors estimée comme dans (2.9). Étant donné l'âge effectif initial  $\mathcal{A} = u$ , l'âge effectif après la  $i$ ème maintenance se calcule par

$$A_i(u) = (1 - \rho)^i u + \sum_{j=1}^i (1 - \rho)^{i-j+1} w_j$$

Notons  $X_{i+1}$  la variable aléatoire représentant la durée jusqu'à la prochaine défaillance, sa loi conditionnelle aux instants de maintenance dans le passé est donnée par :

$$\begin{aligned} P(X_{i+1} > x | W_1, \dots, W_i) &= - \int_0^\infty P(X_{i+1} > x | W_1, \dots, W_i, \mathcal{A} = u) dR_{A_\infty}(u) \\ &= - \int_0^\infty P(X > A_i(u) + x | X > A_i(u)) dR_{A_\infty}(u) \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha(A_i(u)+x)^\beta}}{e^{-\alpha A_i(u)^\beta}} f_{A_\infty}(u) du \end{aligned} \quad (2.10)$$

où  $X$  est la variable aléatoire ayant la même loi que la variable décrivant la première défaillance d'un système neuf. On remarque que la loi conditionnelle de  $X_{i+1}$  représente ainsi la durée de vie résiduelle (RUL) suite à la  $i$ ème maintenance. En utilisant la loi conditionnelle de  $X_{i+1}$  dans l'équation 2.10 comme loi générique d'un processus de renouvellement, la durée optimale jusqu'à la prochaine MP sur un cycle est donnée par :

$$\widetilde{\delta}_{i+1}^* = \underset{\delta > 0}{\operatorname{argmin}} \frac{C_p + (C_c - C_p)(1 - P(X_{i+1} > \delta | W_1, \dots, W_i))}{\int_0^\delta P(X_{i+1} > u | W_1, \dots, W_i) du} \quad (2.11)$$

La durée effective entre deux maintenances est ainsi  $w_{i+1} = \min(\widetilde{\delta}_{i+1}^*, x_{i+1})$ .

La solution optimale  $\widetilde{\delta}_{i+1}^*$  peut être aussi obtenue par des simulations de la manière suivante. Étant donnée une durée  $\delta$ , le coût moyen sur un cycle associé à cette durée est estimé à partir d'un très grand nombre de trajectoires comme suit :

$$C^{ADA}(\delta) = \frac{C_c \sum_{j \geq 1} \mathbb{1}_{\{x_{i+1}^{(j)} < \delta\}} + C_p \sum_{j \geq 1} \mathbb{1}_{\{x_{i+1}^{(j)} > \delta\}}}{\sum_{j \geq 1} \min(x_{i+1}^{(j)}, \delta)} \quad (2.12)$$

où  $x_{i+1}^{(j)}$  correspond à la  $j$ ème réalisation simulée pour la loi conditionnelle de  $X_{i+1}$ . La solution optimale  $\widetilde{\delta}_{i+1}^*$  est celle qui minimise la fonction  $C^{ADA}(\delta)$ .

Un exemple d'une trajectoire de la politique adaptative se trouve en Figure 2.2.

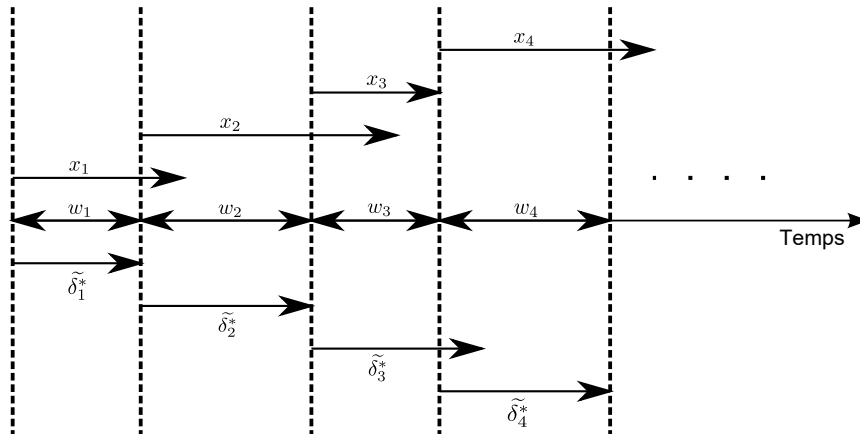


Figure 2.2 – Trajectoire type de la politique adaptative

#### 4.1.4 Politique 3 : Politique basée sur l'intensité de défaillance VABR

La politique opère selon le principe d'une politique basée sur la limite de l'intensité de défaillance (*Failure rate limit policy*) [66, 87, 98] : une MP est déclenchée lorsque l'intensité de défaillance  $\lambda_t$  dépasse un seuil optimal prédéfini  $\lambda^*$ . En particulier, la mise en place de cette politique est similaire à la politique 1P de Jayabalan et Chaudhuri [65] : chaque MP est déclenchée lorsque l'intensité de défaillance dépasse un seuil  $\lambda_{max}$ , et les MP ont l'efficacité de type  $ARA_1$ . On constate que l'intensité de défaillance de la politique 1P, même si elle est réduite à chaque MP, s'approche de plus en plus de  $\lambda_{max}$  (une particularité de l'efficacité de type  $ARA_1$ ). En revanche, l'intensité de défaillance de la politique VABR se stabilise et est maintenue à un niveau stable suite à des maintenances. Cela vient de l'existence d'un régime stationnaire pour le modèle  $WARA_\infty$ . Concrètement, la politique VABR pour le modèle  $WARA_\infty$  est mise en place de manière suivante. Tout d'abord, on sait que l'intensité  $\lambda_t$  peut être déterminée par l'âge virtuel  $V_t$  et l'intensité initial, c'est-à-dire :  $\lambda_t = \lambda(V_t)$ . Lorsque le paramètre  $\beta$  du  $WARA_\infty$  est supérieur à 1 (ou plus généralement lorsque l'intensité initiale est strictement croissante et admet en conséquence une fonction réciproque), le seuil maximal de l'intensité de défaillance correspond à l'âge virtuel maximal :  $s^* = \lambda^{-1}(\lambda^*)$ . Par conséquent, la politique VABR suppose qu'une MP est déclenchée lorsque l'âge virtuel dépasse la valeur maximale  $s^*$ , ce qui entraîne que la durée jusqu'à la prochaine MP est définie par :

$$\delta_{i+1} = s^* - a_i$$

Une MC a lieu si une défaillance a lieu avant. Le critère de coût est aussi utilisé pour mesurer la performance de la politique. La recherche de l'âge virtuel optimal est réalisée par des simulations de Monte-Carlo, implémentées dans l'algorithme 3. Le temps max  $Tmax$  est suffisamment large pour assurer la convergence du coût asymptotique. Ainsi, la version empirique du coût asymptotique (2.6) est utilisée dans l'algorithme. Une illustration de la politique est ainsi présentée dans la Figure 2.3.

#### 4.1.5 Simulations

Les politiques sont implantées via des simulations pour pouvoir comparer leurs performances. Les paramètres sont choisis de manière à ce qu'ils reflètent une grande majorité des cas rencontrés dans les applications industrielles. Comme  $\alpha$  est un pseudo-paramètre d'échelle et n'a pas d'impact sur la forme de la dégradation du système, il est fixé à 1 dans tous les exemples numériques.

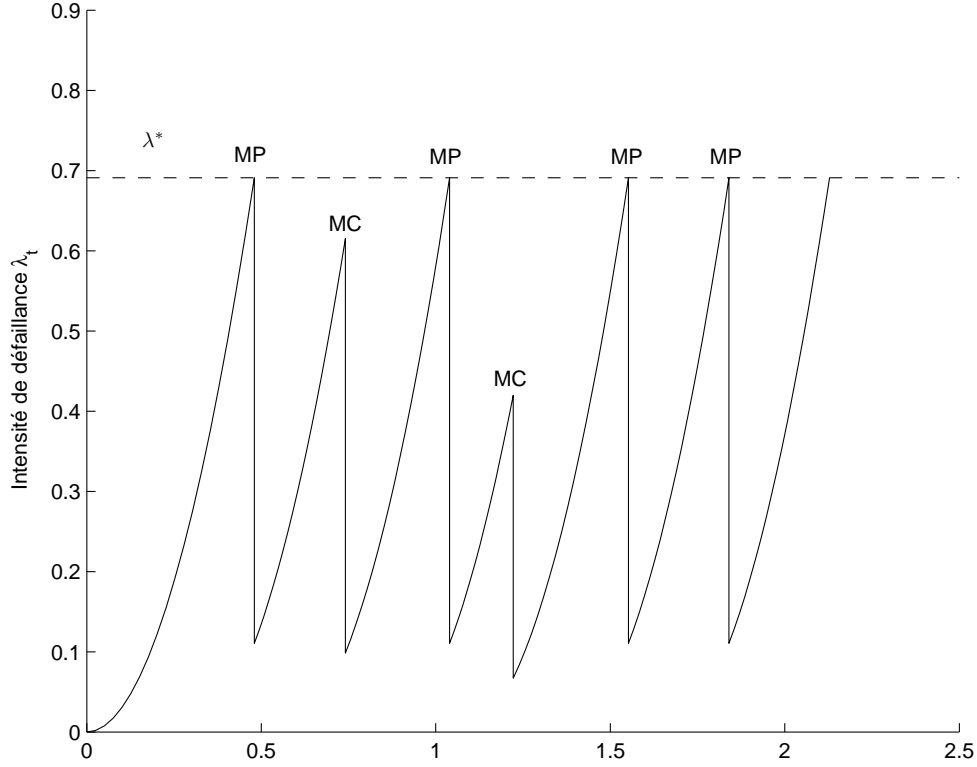


Figure 2.3 – Une trajectoire de la politique basée sur l'intensité

---

**Algorithm 3** Politique VABR : Optimisation par simulations de Monte Carlo
 

---

1: <b>for</b> $s \in [\epsilon, Smax]$ with step $\epsilon$ <b>do</b>	▷ $\epsilon > 0$ , précision de l'algorithme
2: $Cost(s) = 0$ ; $age = 0$ ; $time = 0$ ;	
3: <b>while</b> ( $time < Tmax$ ) <b>do</b>	
4: $\xi = -\log(RAND)$	▷ Loi exponentielle de paramètre 1
5: $x = \Lambda^{-1}(\Lambda(age) + \xi) - age$	▷ Durée potentielle à la prochaine défaillance
6: $u = \mathbb{1}_{\{age+x < s\}}$	▷ Type de maintenance
7: $Cost(s) = Cost(s) + C_p + (C_c - C_p)u$	▷ Mise à Jour du coût total
8: $time = time + \min(x, s - age)$	▷ MAJ du temps
9: $age = (1 - \rho) \times \min(age + x, s)$	▷ MAJ de l'âge effectif
10: <b>end while</b>	
11: $Cost(s) = Cost(s)/time$	▷ Coût moyen asymptotique
12: <b>end for</b>	
13: $s^* = \arg \min_{s \in [\epsilon, Smax]} (Cost(s))$	

---

Neuf configurations sont testées :  $\beta \in \{1.5, 3, 4.5\}$  et  $\rho \in \{0.2, 0.5, 0.8\}$ . Les choix représentent trois niveaux de dégradation et trois efficacités de maintenance. Les coûts des maintenances sont choisis de tels sorts que  $C_c = 10C_p$ . Dans le Tableau 2.1, nous trouvons les coûts optimaux des politiques proposées, avec les durées optimales (politique statique) et l'âge virtuel maximal (poli-

tique VABR). Nous présentons aussi le coût de la politique de maintenance corrective seule (sans MP : le système est réparé suite à une défaillance), et la durée moyenne entre deux défaillances dans l'état stationnaire sans MP. La politique statique ayant une approximation par la théorie du renouvellement est appelée Variante.

Tableau 2.1 – Comparaison des coûts des politiques ( $\alpha = 1, C_c = 10C_p$ )

$\beta$	$\rho$	Pol. statique		Pol. VABR		Variante		Pol. adaptative	Sans MP	$\mathbb{E}[X_\infty]$
		Coût	$\delta^*$	Coût	$s^*$	Coût	$\hat{\delta}^*$	$C^{ADA}$		
1.5	0.2	17.72	0.18	17.69	0.85	20.81	0.84	20.76	22.01	0.45
1.5	0.5	12.30	0.26	12.28	0.50	13.51	0.62	13.11	15.68	0.64
1.5	0.8	9.71	0.33	9.71	0.41	9.97	0.48	9.71	12.74	0.78
3	0.2	15.50	0.09	15.48	0.48	25.00	0.23	23.64	40.70	0.24
3	0.5	7.54	0.20	7.54	0.40	8.02	0.26	7.62	20.72	0.48
3	0.8	4.92	0.30	4.92	0.38	4.92	0.30	4.92	13.90	0.72
4.5	0.2	12.51	0.10	12.51	0.51	16.51	0.15	16.10	46.87	0.21
4.5	0.5	5.49	0.23	5.48	0.46	5.51	0.22	5.49	21.39	0.47
4.5	0.8	3.46	0.37	3.46	0.46	3.49	0.34	3.46	13.68	0.73

La politique de maintenance corrective seule est la plus mauvaise en termes de coût. L'écart de coût avec les autres politiques est plus marquant pour un système qui se dégrade rapidement ( $\beta = 3, 4.5$ ). Cela s'explique par le fait que plus le système se dégrade, plus la défaillance est fréquente, donc le coût total augmente d'autant plus. Une maintenance plus efficace peut aider à réduire le coût de cette politique, sans pour autant rattraper les politiques avec maintenances préventives. Le résultat nous renseigne que, pour réduire le coût, il faut réaliser les maintenances de manière plus efficace, puisqu'il est difficile de réduire la dégradation d'un système industriel. Cela indique aussi la nécessité d'ajouter les maintenances préventives.

Nous observons que la durée moyenne entre deux défaillances consécutives dans l'état stationnaire  $\mathbb{E}[X_\infty]$  pour chacune des configurations est plus longue que la durée de MP optimale associée. Les politiques de maintenance préventive diminuent le risque des maintenances non planifiées.

La politique VABR est la plus performante en termes de coût. La valeur  $s^*$  dans le Tableau 2.1 correspond à l'âge virtuel maximal. Les durées de MP (non présentées dans le tableau) sont naturellement obtenues à partir de l'âge virtuel maximal :  $\delta_{i+1} = s^* - a_i$ , avec  $a_i$  l'âge effectif à la fin du  $i$ ème cycle. Nous remarquons par exemple que si deux MP sont consécutives (la  $(i-1)$ ème et  $i$ ème), les durées d'attente jusqu'à MP sont égales ( $\delta_i = \delta_{i+1}$ ) et que les âges effectifs après maintenance sont identiques ( $a_{i-1} = a_i$ ). Dans le cas contraire (une MC entre deux MP), les durées d'attente jusqu'à la prochaine MP  $\delta_i$  peuvent varier. La politique VABR a aussi la nature "adaptative".

Les coûts de la politique statique (par simulations de Monte Carlo et dans une bien moindre mesure par son approximation) s'approchent de ceux de la politique VABR. En particulier, les coûts de la politique statique Monte Carlo sont très proches de la politique VABR. Les coûts sont presque identiques pour  $\rho = 0.8$ . On remarque que si  $\rho = 1$  alors les deux politiques sont équivalentes (et qu'elles deviennent la politique de remplacement par âge pour un processus de renouvellement classique). Les écarts entre les coûts de ces deux politiques pour les faibles valeurs

#### 4. Politiques de maintenance imparfaite avec le modèle $WARA_\infty$

de  $\rho$  ne sont pas dus aux simulations. Ils persistent bien que nous avons répété l'expérience pour un très grand nombre de fois, sur des horizons de plus en plus grands. Les coûts proposés par la Variante s'approchent de plus en plus des deux premières politiques, lorsque  $\beta$  augmente et lorsque la maintenance devient plus efficace. On constate des écarts importants pour  $\rho$  faible (0.3).

Les coûts de la politique adaptative sont meilleurs que les estimations par la Variante, mais surclassés par la politique statique par simulations de Monte Carlo. Les résultats de la politique adaptative pour les  $\rho$  faibles sont plutôt médiocres. Ceux-ci s'améliorent avec des configurations où les valeurs de  $\beta$  et  $\rho$  sont plus grandes.

La performance de la politique adaptative s'approche de la politique statique pour les systèmes qui se dégradent rapidement (grand  $\beta$ ) et qui sont maintenus efficacement (grand  $\rho$ ). Les histogrammes des durées des MP proposées par la politique dynamique sont présentés dans les Figures 2.4a, 2.4b et 2.4c pour les cas ( $\alpha = 1, \beta \in \{1.5, 3, 4.5\}, \rho = 0.8$ ). La durée optimale de la politique statique obtenue par simulations de Monte Carlo est ajoutée à titre de comparaison. On constate que  $\delta^*$  se situe un peu en dessous de la moyenne des durées adaptatives. Pour les grands valeurs de  $\beta$  et  $\rho$ , la méthode adaptative propose des durées à la prochaine MP plus longues que celles de la politique statique Monte Carlo, pour un coût un peu plus élevé. En revanche, l'écart des coûts pour  $\rho$  faible est assez important, la politique adaptative n'améliore pas la politique statique.

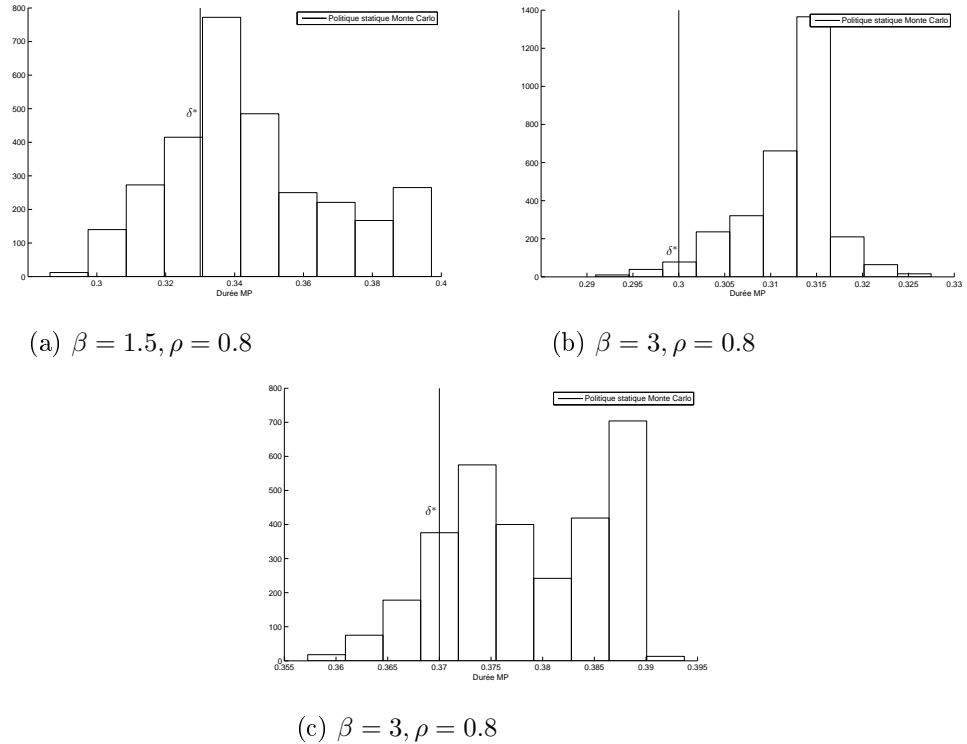


Figure 2.4 – Comparaison des durées adaptatives avec la durée statique optimale

Les Figures 2.5a, 2.5b et 2.5c présentent les courbes de coût de la politique statique par simulations de Monte Carlo en fonction des durées entre deux MP. Les graphiques montrent le coût optimal, accompagné de la durée optimale  $\delta^*$ , et son estimation par la Variante. Pour le cas  $\beta = 1.5$  (présenté dans la Figure 2.5a), nous constatons que les estimations de la durée optimale

$\delta^*$  par la Variante sont assez mauvaises. La qualité des estimations s'améliore quand  $\beta$  augmente. Le coût estimé s'approche de l'optimal pour les grandes valeurs de  $\beta$ . Le minimum des fonctions est de plus en plus marqué lorsque  $\beta$  augmente et  $\rho$  diminue.

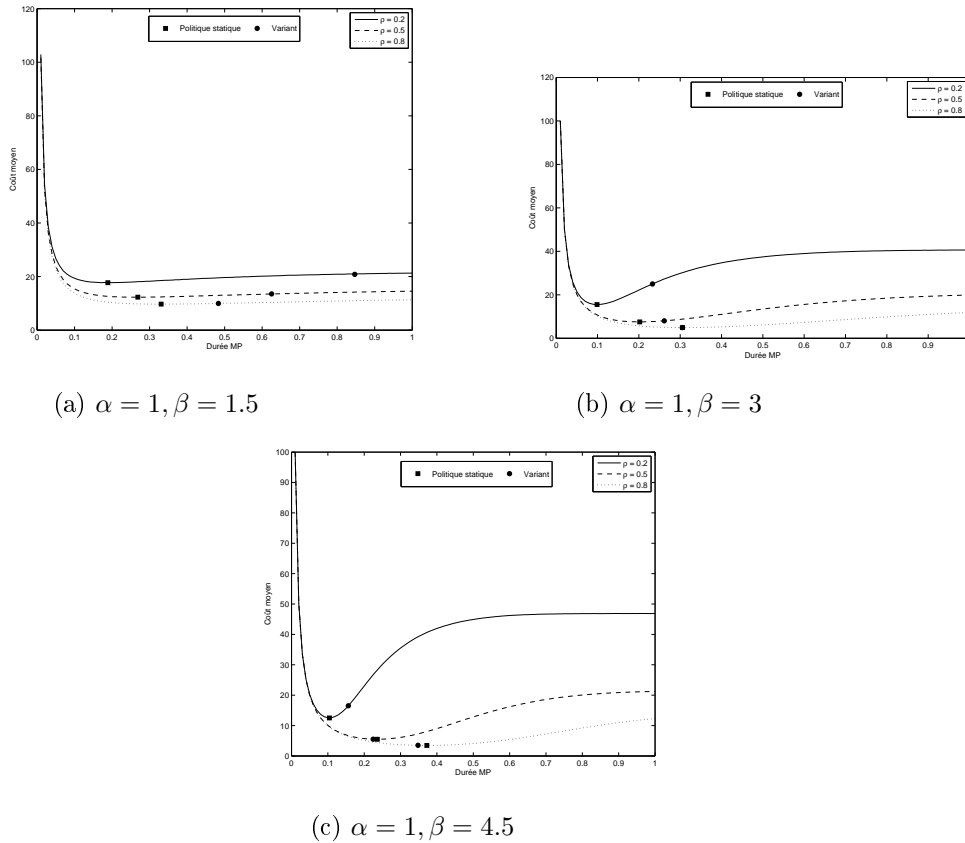


Figure 2.5 – Coût moyen asymptotique

En conclusion, la politique VABR est la plus efficace. Elle nécessite néanmoins la connaissance de l'âge virtuel au début de l'observation, ou juste avant sa mise en place. La politique statique est pratiquement aussi efficace que la première politique (en termes de coût), mais elle est plus simple à implanter en pratique car : nul besoin de connaître l'âge initial et les durées d'attente potentielle pour la prochaine MP sont invariables. La politique adaptative ne rapporte pas de bénéfice en comparaison avec la politique statique. La politique adaptative, bien qu'elle est optimale à l'échelle d'un cycle, ne donne pas de bon résultat sur un horizon infini. Il est peut-être envisageable d'appliquer cette politique aux systèmes dont le un nombre de maintenances est limité par défaut (avant qu'ils ne soient parfaitement restaurés). Ce point est également soulevé dans la construction des politiques séquentielles [104, 105, 109]. Un nombre limite d'opérations de maintenance avant renouvellement pourrait être imposé pour les systèmes critiques pour des mesures de sécurité.

## 4.2 Politiques de maintenance avec $\rho_c < \rho_p$ du modèle $WARA_\infty$

Dans cette section, nous montrons par des simulations de Monte Carlo qu'il est possible d'obtenir des politiques de maintenance préventive optimale avec des MP qui sont plus efficaces

que des MC ( $\rho_c < \rho_p$ ). Cette hypothèse est plus réaliste que celle de l'égalité entre deux efficacités, puisque les MP sont planifiées et préparées. Nous trouvons l'utilisation de cette hypothèse dans plusieurs études de fiabilité et optimisation de maintenance [31, 36, 117]. L'ajout d'un nouveau paramètre  $\rho_p$  fait que les résultats sur les lois asymptotiques ne sont plus directement applicables. Néanmoins, la maintenance de type  $ARA_\infty$  (par les MC et MP) conserve toujours la propriété de convergence vers un régime stationnaire. Les solutions optimales sont alors obtenues par des simulations de Monte Carlo.

#### 4.2.1 Hypothèses générales

Les hypothèses sont similaires à celles dans le cas de même efficacité (voir section 4.1.1). Bien entendu, le seul changement est sur l'efficacité de deux types de maintenance :

(v) L'efficacité des MCs et l'efficacité des MPs sont différentes :  $\rho_c < \rho_p$ .

Nous proposons des simulations pour deux politiques : politique statique et politique VABR. Comme la politique adaptative et la Variante ne sont pas très satisfaisantes, elles ne font pas l'objet de l'étude.

#### 4.2.2 Politique 1 : Politique statique

La durée optimale entre deux MP  $\delta^*$  et le coût optimal associé sont obtenus par les simulations Monte Carlo. On propose l'algorithme 4 qui permet de mettre en place la recherche de la solution optimale.  $\delta^*$  est bornée par la 95ème centiles de la durée inter-défaillance  $X_\infty$ . Le temps max  $Tmax$  est fixé suffisamment long pour que le coût moyen asymptotique converge.

---

**Algorithm 4** Politique statique : Optimisation par simulations de Monte-Carlo

---

```

1: for  $\delta \in [\epsilon, \delta max]$  with step  $\epsilon$  do                                     ▷  $\epsilon > 0$ , précision de l'algorithme
2:  $Cost(\delta) = 0$ ;    $age = 0$ ;    $time = 0$ ;
3:   while ( $time < Tmax$ ) do
4:    $\xi = -\log(RAND)$                                                          ▷ Loi exponentielle de paramètre 1
5:    $x = \Lambda^{-1}(\Lambda(age) + \xi) - age$                                    ▷ Durée potentielle à la prochaine défaillance
6:    $u = \mathbb{1}_{\{x < \delta\}}$                                                          ▷ Type de maintenance
7:    $Cost(\delta) = Cost(\delta) + C_p + (C_c - C_p)u$                              ▷ Mise à Jour du coût total
8:    $time = time + \min(\delta, x)$                                                ▷ MAJ du temps
9:    $age = (1 - \rho_p^{1-u} \rho_c^u)(age + \min(\delta, x))$    ▷ MAJ de l'âge effectif selon le type de maintenance
10:  end while
11:  $Cost(\delta) = Cost(\delta)/time$                                              ▷ Coût moyen asymptotique
12: end for
13:  $\delta^* = \arg \min_{\delta \in [\epsilon, \delta max]} (Cost(\delta))$ 

```

---

#### 4.2.3 Politique 3 : Politique basée sur l'intensité de défaillance

La politique basée sur l'intensité de défaillance VABR pour deux efficacités de maintenance est construite de la même manière que le cas de l'efficacité unique. La seule différence est dans la mise à jour de l'âge effectif suite à une défaillance : si c'est une MP (respectivement MC), alors on utilise l'efficacité  $\rho_p$  (respectivement  $\rho_c$ ) pour calculer le nouvel âge effectif. Nous proposons l'algorithme 5, adapté pour ce cas.

---

**Algorithm 5** Politique VABR : Optimisation par simulations de Monte Carlo

---

```

1: for  $s \in [\epsilon, Smax]$  with step  $\epsilon$  do ▷  $\epsilon > 0$ , précision de l'algorithme
2:  $Cost(s) = 0$ ;  $age = 0$ ;  $time = 0$ ;
3:   while ( $time < Tmax$ ) do
4:    $\xi = -\log(RAND)$  ▷ Loi exponentielle de paramètre 1
5:    $x = \Lambda^{-1}(\Lambda(age) + \xi) - age$  ▷ Durée potentielle à la prochaine défaillance
6:    $u = \mathbb{1}_{\{age+x < s\}}$  ▷ Type de maintenance
7:    $Cost(s) = Cost(s) + C_p + (C_c - C_p)u$  ▷ MAJ du coût total
8:    $time = time + \min(x, s - age)$  ▷ MAJ du temps
9:    $age = (1 - \rho_p^{1-u} \rho_c^u) \times \min(age + x, s)$  ▷ MAJ de l'âge effectif
10:  end while
11:  $Cost(s) = Cost(s)/time$  ▷ Coût moyen asymptotique
12: end for
13:  $s^* = \arg \min_{s \in [\epsilon, Smax]} (Cost(s))$ 

```

---

#### 4.2.4 Simulations

Les politiques sont implantées via des simulations de Monte Carlo. Le choix des paramètres de la loi Weibull est :  $\alpha = 1, \beta \in \{1.5, 3, 4.5\}$ . L'efficacité de maintenance corrective est fixée :  $\rho_c = 0.2$ . Nous testons trois niveaux d'efficacité de maintenance préventive :  $\rho_p \in \{0.4, 0.6, 0.8\}$ . Dans le Tableau 2.2, les résultats de neuf configurations sont présentées : la durée optimale entre deux MP, le coût associé de la politique statique, l'âge optimal et le coût de la politique VABR, le coût de la politique sans maintenance préventive et la moyenne empirique des durées inter-défaillance de cette politique.

Nous constatons tout d'abord que le coût des politiques est diminué lorsque l'efficacité de MP  $\rho_p$  augmente (ce qui est cohérent dans le cadre de l'optimisation de l'efficacité de maintenance). La politique VABR est toujours plus performante que la politique statique. L'écart entre ces deux politiques s'accroît lorsque la MP devient plus efficace, quel que soit la valeur de  $\beta$ . Dans la partie précédente (mêmes valeurs de  $\rho$  pour MP et MC), cette tendance est inversée lorsque l'efficacité augmente. Il est aussi intéressant de pouvoir comparer les coûts entre deux hypothèses (même  $\rho$  et deux  $\rho$  différents). Nous effectuons alors deux comparaisons. La première est entre le coût du cas ( $\rho = 0.2$ ) avec le cas ( $\rho_c = 0.2, \rho_p = 0.4$ ), et la deuxième le cas ( $\rho = 0.8$ ) avec ( $\rho_c = 0.2, \rho_p = 0.8$ ), pour  $\beta = 1.5$  de la politique VABR. Dans la première comparaison, nous constatons que l'ajout d'une MP plus efficace ( $\rho_c = 0.2, \rho_p = 0.4$ ) est très bénéfique en termes de coût (17.69 contre 14.03). La deuxième comparaison nous renseigne que, pour un même niveau d'efficacité de MP ( $\rho = \rho_p = 0.8$ ), les MC peu efficaces ( $\rho_c = 0.2$ ) engendrent des coûts plus importants (9.71 contre 10.20). Nous conservons la même conclusion pour la comparaison de la politique statique entre deux hypothèses. Pour les deux autres valeurs de  $\beta$ , nous constatons le même comportement.

Nous proposons les simulations pour les mêmes configurations des paramètres ( $\alpha, \beta, \rho$ ), mais avec de nouveaux ratios des coûts :  $C_c/C_p = 100$  et  $C_c/C_p = 1000$ . Les résultats sont présentés dans le Tableau 2.3 et 2.4. Nous constatons que les coûts sont plus élevés, à cause des MC plus coûteuses. Les âges optimaux  $\delta^*$  et les seuils  $s^*$  sont réduits pour des ratios forts, afin d'anticiper le coût engendré par une MC. Nous constatons que les écarts des coûts optimaux entre deux politiques sont faibles dans le deux nouveaux cas, en comparant au cas de  $C_c/C_p = 10$ .



#### 4. Politiques de maintenance imparfaite avec le modèle $WARA_\infty$

Tableau 2.2 – Comparaison des coûts des politiques de loi Weibull ( $\alpha = 1, \rho_c = 0.2, C_c = 10C_p$ )

$\beta$	$\rho_p$	Pol. statique		Pol. VABR		Sans MP	
		Coût	$\delta^*$	Coût	$s^*$	Coût	$\mathbb{E}[X_\infty]$
1.5	0.4	14.04	0.20	14.03	0.53	22.01	0.45
	0.6	11.86	0.23	11.83	0.41	22.01	0.45
	0.8	10.25	0.26	10.20	0.36	22.01	0.45
3	0.4	9.25	0.16	9.24	0.40	40.70	0.24
	0.6	6.61	0.22	6.58	0.38	40.70	0.24
	0.8	5.10	0.28	5.05	0.36	40.70	0.24
4.5	0.4	6.85	0.18	6.85	0.46	46.87	0.21
	0.6	4.70	0.26	4.67	0.45	46.87	0.21
	0.8	3.60	0.33	3.52	0.43	46.87	0.21

Tableau 2.3 – Comparaison des coûts des politiques de loi Weibull ( $\alpha = 1, \rho_c = 0.2, C_c = 100C_p$ )

$\beta$	$\rho_p$	Pol. statique		Pol. VABR		Sans MP	
		Coût	$\delta^*$	Coût	$s^*$	Coût	$\mathbb{E}[X_\infty]$
1.5	0.4	66.87	0.04	66.85	0.11	220	0.45
	0.6	55.82	0.05	55.73	0.09	220	0.45
	0.8	47.80	0.06	47.79	0.08	220	0.45
3	0.4	20.20	0.07	20.17	0.18	407	0.24
	0.6	14.30	0.10	14.29	0.17	407	0.24
	0.8	10.94	0.14	10.92	0.17	407	0.24
4.5	0.4	11.54	0.11	11.53	0.28	468	0.21
	0.6	7.85	0.16	7.83	0.27	468	0.21
	0.8	5.91	0.22	5.90	0.27	468	0.21

### 4.3 Politiques de maintenance pour des intensités initiales croissantes

Dans les parties précédentes, nous avons supposé que l'intensité initiale est de loi Weibull  $\mathcal{W}(\alpha, \beta)$ . La solution optimale existe, grâce à la propriété de convergence de la maintenance de type  $ARA_\infty$ , et du fait que l'intensité initiale est croissante (classe IFR) [46]. Dans ce qui suit, nous proposons la mise en place des politiques de maintenance préventive, avec de nouveaux choix d'intensité initiale : loi Gamma et loi log-linéaire. Ces deux lois appartiennent à la classe IFR, et sont fréquemment utilisées dans l'analyse de survie et de sûreté de fonctionnement [78, 83]. Pour chaque configuration, les solutions optimales sont obtenues par des simulations.

Tableau 2.4 – Comparaison des coûts des politiques de loi Weibull ( $\alpha = 1, \rho_c = 0.2, C_c = 1000C_p$ )

$\beta$	$\rho_p$	Pol. statique		Pol. VABR		Sans MP	
		Coût	$\delta^*$	Coût	$s^*$	Coût	$\mathbb{E}[X_\infty]$
1.5	0.4	312	0.01	311	0.03	2200	0.45
	0.6	261	0.01	259	0.02	2200	0.45
	0.8	223	0.02	222	0.02	2200	0.45
3	0.4	43.7	0.03	43.5	0.08	4070	0.24
	0.6	30.9	0.05	30.8	0.08	4070	0.24
	0.8	23.5	0.06	23.5	0.07	4070	0.24
4.5	0.4	19.3	0.06	19.2	0.17	4680	0.21
	0.6	13.1	0.10	13.07	0.16	4680	0.21
	0.8	9.86	0.13	9.85	0.15	4680	0.21

### 4.3.1 Politiques de maintenance préventive avec loi Gamma

L'intensité initiale d'un système neuf qui suit une loi Gamma  $\Gamma(\alpha, \beta)$  est donnée par :

$$\begin{cases} \lambda(0) = 0 \\ \lambda(t) = \left[ \int_0^\infty \left(1 + \frac{u}{t}\right)^{\alpha-1} e^{-\beta u} du \right]^{-1}, t > 0 \end{cases}$$

Pour que  $\lambda$  soit une fonction croissante, il faut que  $\alpha > 1$ . Les algorithmes proposés dans les sections précédentes sont encore valides pour ce cas, puisque l'efficacité de maintenance est toujours de type  $ARA_\infty$ . Il faut seulement modifier l'expression de l'intensité cumulée  $\Lambda$  et sa réciproque  $\Lambda^{-1}$ , afin de générer la durée d'attente à la prochaine défaillance, à savoir :

$$x_n = \Lambda^{-1}(\Lambda(a_{n-1}) - \ln(RAND)) - a_{n-1}$$

Les politiques de maintenance sont implantées via des simulations de Monte Carlo pour trois configurations : ( $\alpha = 2, \beta = 3, \rho_c = 0.2, \rho_p \in \{0.4, 0.6, 0.8\}$ ). Les résultats de simulations sont présentés dans le Tableau 2.5.

Tableau 2.5 – Comparaison des coûts des politiques avec loi Gamma ( $\alpha = 2, \beta = 3, \rho_c = 0.2, C_c = 10C_p$ )

$\rho_p$	Pol. statique		Pol. VABR		Sans MP	
	Coût	$\delta^*$	Coût	$s^*$	Coût	$\mathbb{E}[X_\infty]$
0.4	19.80	0.16	19.80	0.37	24.94	0.39
0.6	16.29	0.17	16.27	0.30	24.94	0.39
0.8	13.37	0.18	13.37	0.19	24.94	0.39

Le coût et la durée moyenne entre deux défaillances consécutives de la politique de maintenance corrective seule sont donnés à titre comparatif. Il est évident que l'ajout des MP est bénéfique.

#### 4. Politiques de maintenance imparfaite avec le modèle $WARA_\infty$

Pour la politique statique, lorsque l'efficacité de MP augmente, le coût est réduit et la durée optimale  $\delta^*$  s'allonge. Une MP performante permet de réduire l'âge virtuel et d'augmenter la fiabilité. La durée entre deux maintenances peut être allongée. Le coût moyen est aussi réduit.

Nous constatons une situation similaire pour la politique VABR. Le coût moyen est réduit en augmentant le niveau d'efficacité des MP. Le seuil optimal d'âge virtuel  $s^*$  est aussi réduit. Cela n'est pas surprenant, puisque l'âge virtuel moyen est plus faible dans le cas d'une maintenance efficace. Comme dans le cas de la loi Weibull, la politique VABR est légèrement meilleure que la politique statique.

Nous conservons la même conclusion que dans le cas de la loi de Weibull. La politique VABR reste la meilleure. La politique statique est quasi optimale et un peu plus simple à mettre en place.

##### 4.3.2 Politiques de maintenance avec loi log-linéaire

L'intensité associé à la loi log-linéaire a pour expression :

$$\lambda(t) = e^{\alpha + \beta t}, \quad t \geq 0$$

L'intensité initiale cumulée et sa réciproque sont données par :

$$\Lambda(t) = \frac{e^\alpha}{\beta} (e^{\beta t} - 1)$$

$$\Lambda^{-1}(t) = \frac{1}{\beta} \log \left( \frac{\beta t}{e^\alpha} + 1 \right)$$

La loi log-linéaire a été utilisée par Cox et Lewis [22] pour tester la fiabilité de la climatisation d'une flotte d'avions. Son taux de défaillance est croissant pour  $\beta > 0$ , tandis qu'il est décroissant pour  $\beta < 0$ . Les deux cas correspondent à un système qui se dégrade ou bien qui s'améliore, respectivement. Dans cette étude, nous nous intéressons au cas des systèmes vieillissants, donc  $\beta > 0$ .

Les politiques de maintenance sont proposées avec les configurations suivantes : ( $\alpha = 1, \beta = 3, \rho_c = 0.2, \rho_p \in \{0.4, 0.6, 0.8\}$ ). Les résultats sont présentées dans le Tableau 2.6. Au premier constat, on remarque que l'ajout des MP apporte un gain de plus de 50% en termes de coût (par rapport à la politique de MC seule). L'avantage des politiques est alors clairement identifié.

Tableau 2.6 – Comparaison des coûts des politiques avec une log-linéaire ( $\alpha = 1, \beta = 3, \rho_c = 0.2, C_c = 10C_p$ )

$\rho_p$	Pol. statique		Pol. VABR		Sans MP	
	Coût	$\delta^*$	Coût	$s^*$	Coût	$\mathbb{E}[X_\infty]$
0.4	53.94	0.06	53.86	0.17	106	0.09
0.6	47.88	0.08	47.56	0.15	106	0.09
0.8	43.99	0.09	43.60	0.13	106	0.09

La politique VABR reste la meilleure dans toutes les configurations. Pour la même intensité initiale ( $\alpha, \beta$ ), les coûts des deux politiques sont diminués en améliorant l'efficacité de maintenance préventive. Pour la politique statique, une MP efficace fait baisser le coût moyen asymptotique, et allonger la durée entre deux MP. Pour la politique VABR, une MP efficace aussi fait baisser le coût, et baisser l'âge virtuel. Nous constatons que les écarts entre la politique VABR

et la politique statique augmentent quand la maintenance préventive devient plus efficace. Ce comportement est également observé dans le cas de la loi Gamma.

#### 4.4 Estimation des paramètres

Dans les parties précédentes, nous nous appuyons sur une hypothèse très importante : les valeurs des paramètres (l'intensité  $\lambda$  et les efficacités  $\rho_p, \rho_c$ ) sont connues. Cela a pour but de focaliser sur la construction des politiques optimales. Cette hypothèse est très forte et peu réaliste, puisqu'en général les paramètres sont inconnus et il faut les estimer à partir des observations. Les optimisations des politiques de maintenance seront directement impactées par les incertitudes de ces estimations.

En pratique, nous avons souvent la situation suivante. Le système est maintenu par des maintenances imparfaites. La base de données contient des dates de MC et MP. Les MC sont réalisées suite aux défaillances. Les instants de MC sont donc des variables aléatoires. En revanche, les instants de MP pourraient être des instants déterministes (qui sont planifiés), ou des instants aléatoires conditionnelles (dans le cas de risques concurrents). Les MC sont réalisés systématiquement après une défaillance, et les MP ne sont pas forcément optimisées. Dans cette configuration, nous proposons d'analyser ces données avec le modèle  $ARA_\infty$  généralisé, qui permet de prendre en compte la présence de MP et de son paramètre d'efficacité  $\rho_p$ . L'intensité initiale est supposée de la loi Weibull. Ensuite, les paramètres de l'intensité initiale, de l'efficacité MC et MP seront estimés à partir de la base de données. Les politiques de maintenance préventive sont construites avec ces estimations. Les solutions optimales proposées par les politiques restent sensibles à l'incertitude des estimations. Il est alors important de quantifier l'impact de ces dernières. Nous proposons de ré-évaluer les estimations avec de nouvelles données après la mise en place des politiques de maintenance préventive : elles peuvent être des nouvelles dates de MC et MP. La configuration de la politique sera ensuite ajustée selon les nouvelles estimations. Nous proposons aussi d'effectuer ce rebouclage (ré-évaluation et calibrage de politique) constamment, afin d'améliorer la qualité de la politique mise en place.

D'autre part, nous nous apercevons de la nécessité d'une analyse de sensibilité afin d'évaluer l'impact des paramètres sur la performance des politiques. Dans les simulations, nous avons testé plusieurs configurations de paramètres, les solutions optimales proposées restent cohérentes. Ces solutions sont aussi impactées par le ratio entre le coût MC et MP. Nous avons testé trois cas représentatifs, et avons pu observer l'impact des coûts unitaires MC et MP dans ces cas. Dans les applications, il faudrait consulter les avis d'experts pour bien quantifier ces coûts de maintenance. Il existe donc des incertitudes dues aux estimations des paramètres, dues à une potentielle hétérogénéité dans les coûts des maintenances, mais aussi dues dans le choix du modèle. Il n'existe en effet pas de tests statistiques pour confirmer la validité du modèle  $WARA_\infty$ . D'autre part, les politiques de maintenance préventive dans ce chapitre sont proposées pour la loi Weibull dont l'intensité initiale est croissante (le paramètre  $\beta$  est plus grand que 1). Si les estimations indiquent que ce paramètre est inférieur à 1, il se peut que les politiques proposées ne soient plus applicables. Dans ce cas, il faut revoir la modélisation, quitte à utiliser un autre modèle. Nous n'avons pas encore identifié les conditions d'application pour les autres lois (log-linéaire, Gamma), mais il semble que la condition nécessaire soit que l'intensité initiale doit être strictement croissante.

#### 4.5 Application à un jeu de données EDF

Dans cette section, nous étudions un jeu de données de défaillance d'EDF (Électricité de France) présenté dans [36]. Il comprend les dates de maintenance préventive et corrective de 17 unités indépendantes. L'ensemble des données est présenté dans le Tableau 2.7 : les dates de maintenance corrective et préventive des 17 unités, ainsi que les dates de censure. À noter que la base de données originale comprend des défaillances dans la période de jeunesse. Nous n'avons pas fait une translation de l'échelle des temps (en remettant à zéro la fin de la période de jeunesse). Les maintenances pendant cette période sont alors ignorées. Nous supposons qu'elles n'ont pas d'impact sur le vieillissement. Dans [41], les auteurs utilisent ce jeu de données de la même manière : les maintenances pendant la période de jeunesse sont écartées. Le Tableau 2.7 présente alors les instants de maintenance sans la période de jeunesse. Dans ce cadre, nous souhaitons d'analyser ces données avec la maintenance  $ARA_\infty$ . Nous supposons que ces unités sont dans leur régime stationnaire, et nous cherchons à planifier de manière optimale les MP futures.

L'étape d'estimation a été réalisée dans [41] avec le modèle d'âge virtuel généralisé, afin de prendre en compte conjointement la maintenance corrective aléatoire et préventive planifiée. Les MC et MP sont toutes de type  $ARA_\infty$ , mais d'efficacités différentes ( $\rho_c$  et  $\rho_p$  pour les MC et MP, respectivement). L'intensité initiale suit la loi Weibull :  $\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$ . Les estimations des paramètres sont :

$$\hat{\alpha} = 3.36 \times 10^{-6}, \hat{\beta} = 1.44, \hat{\rho}_c = 0.15, \hat{\rho}_p = 1$$

Les MPs sont donc très efficaces, au point où le système est remis à l'état neuf après une opération de maintenance préventive. Tandis que les MCs sont presque minimales. En observant l'ensemble des données, nous constatons que la proportion des MP est importante. De ce fait, nous supposons que l'âge virtuel au début de l'implémentation des politiques est nul. Le paramètre  $\beta$  est estimé plus grand que 1, ce qui implique que les unités sont vieillissantes. Cela signifie que l'intensité initiale est croissante, et permet de construire des politiques avec deux efficacités de maintenance différentes ( $\hat{\rho}_c$  et  $\hat{\rho}_p$ ), présentées dans la section 4.2. Plusieurs ratios de coûts  $C_c/C_p$  sont choisis : 10, 100, 1000. Ces valeurs sont présentées à titre indicatif afin de refléter différentes configurations. Elles peuvent être facilement adaptées une fois le vrai ratio connu. Les solutions optimales des politiques sont présentées dans le Tableau 2.8.

Au premier constat, nous observons l'impact du coût de MC sur la durée optimale à la prochaine MP. Dans le premier cas où le ratio est relativement faible ( $C_c/C_p = 10$ ), les solutions (durée d'attente avant MP et âge virtuel maximal) proposées par la politique statique et VABR sont en général de même d'ordre de grandeur des durées inter-défaillance dans la base de données. En revanche, si le ratio devient plus important (100 et 1000), les solutions optimales sont nettement réduites. Cela semble cohérent, puisque les MC sont devenues trop coûteuses donc il vaut mieux améliorer les systèmes par des MP moins onéreuses. Les écarts des coûts entre les deux premières politiques sont aussi réduits lorsque le ratio  $C_c/C_p$  augmente.

Dans les trois cas, la durée d'attente avant MP et l'âge virtuel maximal semblent proches l'une de l'autre. Cela peut être dû au fait que les MP sont parfaites et l'efficacité des MC est proche de zéro. Nous nous plaçons alors dans une politique de remplacement préventif à neuf avec des MC minimales. Dans ce cas, l'âge virtuel est égal à la durée écoulée depuis la dernière MP parfaite, et le comportement de la politique VABR est similaire à la politique statique (toutes les deux ressemblent à la politique classique de remplacement basée sur l'âge pour des MC minimales).

La politique adaptative n'est pas bénéfique dans cette situation. Les coûts qu'elle propose sont plus grands que ceux proposés par les deux premières politiques. D'autre part, l'actualisation

Tableau 2.7 – Dates de maintenance

Unité 1	2145 MP	4582 Censure		
Unité 2	4368 Censure			
Unité 3	1942 MP	5009 Censure		
Unité 4	3273 Censure			
Unité 5	4120 MC	5040 Censure		
Unité 6	2689 MP	4643 Censure		
Unité 7	4394 MP	5739 Censure		
Unité 8	2602 MC	5130 Censure		
Unité 9	1462 MP	2259 MC	5040 Censure	
Unité 10	1667 MC	2073 MP	3607 Censure	
Unité 11	1090 MC	1207 MC	1705 MP	2483 Censure
Unité 12	2921 MP	4454 MC	4703 Censure	
Unité 13	3011 MC	3559 MP	4284 Censure	
Unité 14	3528 MP	5433 Censure		
Unité 15	2008 MC	2968 Censure		
Unité 16	5344 Censure			
Unité 17	6348 Censure			

Tableau 2.8 – Solutions des politiques de maintenance imparfaite sur l'ensemble des systèmes

Paramètres	Politique statique		Politique VABR		Politique adaptative
$\hat{\alpha} = 3.36 \times 10^{-6}$ , $\hat{\beta} = 1.44$ , $\hat{\rho}_c = 0.15$ , $\hat{\rho}_p = 1$	Coût	$\delta^*$	Coût	$s^*$	$C^{ADA}$
$C_c = 1000$ , $C_p = 100$	0.1460	1924	0.1442	2233	0.15
$C_c = 10000$ , $C_p = 100$	0.71	444	0.70	434	0.72
$C_c = 100000$ , $C_p = 100$	3.55	96	3.54	91	3.57

du planning de maintenance (notamment les durées d'attente à la prochaine MP) est d'autant plus difficile puisque l'on doit gérer 17 unités en parallèle.

Dans cet exemple, nous constatons l'importance des ratios des coûts sur les résultats des politiques. Les estimations, en particulier de  $\beta$ , nous permettent d'appliquer les politiques proposées pour le modèle  $WARA_\infty$ . Nous avons à présent les MP parfaites et les MC presque minimales, ce qui fait que les comportements de deux politiques se ressemblent. Comme la MP est parfaite, nous pouvons établir des fonctions de coûts analytiques, sans avoir besoin des simulations. Cette approche (MC  $ARA_\infty$ , MP parfaite) est par ailleurs présentée dans [27], quel que soit le choix d'intensité initiale. Il est alors primordial de quantifier les incertitudes dues aux estimations tout en effectuant un rebouclage du modèle en réestimant les paramètres dès l'observation d'une nouvelle maintenance.

## 5 Conclusion et Perspectives

Ce chapitre est dédié au développement du modèle *Weibull* –  $ARA_\infty$ , qui combine l'effet de la maintenance de type  $ARA_\infty$  et l'intensité initiale Weibull. Les distributions de probabilité marginales des âges effectifs et des durées inter-défaillance sont proposées. Nous avons mis en évidence la convergence vers un état stationnaire d'un système ayant la maintenance de type  $ARA_\infty$ . En particulier, lorsque l'intensité de défaillance suit une loi Weibull à deux paramètres, les lois asymptotiques sont disponibles sous forme de séries. Nous avons observé au travers de l'analyse que la convergence dans la plupart des cas est rapide. D'où l'idée du domaine d'application du modèle  $ARA_\infty$  : le modèle est adapté pour les grands systèmes qui ont déjà passé leurs phases de rodage ou de jeunesse, et qui commencent à entrer dans un état stable.

Les propriétés du modèle  $WARA_\infty$  nous permettent de mettre en place plusieurs politiques de maintenance préventive en vue d'optimiser les coûts globaux de maintenance : la politique basée sur l'âge (politique statique), la politique adaptative et la politique basée sur l'intensité de défaillance ou basée sur l'âge virtuel VABR. La politique VABR est la meilleure dans toutes les configurations, mais elle n'est pas simple à mettre en place puisqu'il faut connaître l'âge initial. La politique statique est un peu moins efficace en termes de coût, mais elle reste très performante et est plus simple à mettre en place. Nous proposons également la version adaptative de la politique statique. Toutefois, cette nouvelle politique n'est pas très satisfaisante sur un horizon infini. Il serait intéressant de poursuivre les études pour trouver un cadre approprié pour appliquer la politique adaptative.

Les politiques proposées dans ce chapitre ne sont pas exclusives au modèle  $WARA_\infty$ . En effet, nous proposons des simulations des mêmes politiques avec d'autres intensités initiales de la classe IFR, pourvu que la maintenance soit toujours de type  $ARA_\infty$ . Les solutions optimales des nouveaux cas sont obtenues par des simulations de Monte Carlo. Les distributions marginales des âges pourraient être plus difficiles à obtenir pour les autres lois, mais cela n'empêchera pas la construction des politiques de maintenance optimale pour la maintenance  $ARA_\infty$ . Les politiques de maintenance préventive proposées dans ce chapitre sont les premières politiques à ne considérer que les maintenances imparfaites sur un horizon infini et qui ne font pas intervenir les maintenances parfaites. Comme la maintenance de type Brown-Proshan donnera également un modèle admettant un état stationnaire, nous pourrions envisager la mise en place d'une politique de maintenance préventive planifiée similaire à celles de cette étude.

Dans ce chapitre, nous avons effectué une hypothèse forte : les paramètres du modèle sont connus. En général, ils sont inconnus et à estimer à partir des observations. Les incertitudes de cette étape impacteront directement sur la configuration des politiques à mettre en place. L'application à un jeu de données réelles a illustré ces difficultés : les paramètres sont inconnus, il n'y a pas de critères de sélection de modèle a priori, la présence de la période de jeunesse est simplement masquée. Nous avons choisi d'utiliser le modèle  $WARA_\infty$ , et les estimations de paramètres ont permis de proposer des politiques de maintenance préventive. Pour affiner les solutions optimales, il faudrait effectuer une analyse de sensibilité, et améliorer constamment les estimations avec de nouvelles dates de maintenance après la mise en place des politiques. Il est aussi important de vérifier l'estimation de l'intensité initiale, puisque cela peut entraîner des solutions incohérentes lorsque l'intensité initiale devient une fonction décroissante. Nous insistons sur l'importance de prendre en compte les incertitudes dues aux estimations, pour pouvoir construire des politiques de maintenance préventive efficaces.





## Chapitre 3

# Approche fréquentiste pour les modèles d'âge virtuel sur une fenêtre d'observation

### 1 Présentation de la problématique

L'analyse des données de défaillance d'un système est d'un grand intérêt car elle peut fournir un bilan sur le comportement du système dans le passé et permettre d'effectuer le pronostic des événements futurs. Ces données sont dans la plupart du temps recensées suite aux défaillances et actions de maintenance et elle sont accessibles sous différents formats : durée inter-défaillances, nombre de défaillances, type d'actions de maintenance. Toutefois, il n'est pas rare de constater que les bases de données ne sont que partiellement exploitables. L'un des cas le plus classiques d'historique incomplet, se présente dans l'achat des matériels usagés ou d'occasion : l'historique de l'utilisation précédente n'est généralement pas disponible. Les premières défaillances, qui se produisent pendant la période de jeunesse ou de rodage, pourraient être absentes. D'autres facteurs pourraient engendrer cette perte d'informations : équipements de mesure inadaptés, changement de technologie du stockage de l'information, etc. L'ensemble des données disponibles ne représentent alors qu'une partie de l'histoire complète du système. Elles se résument à une fenêtre d'observation. Pour surmonter ses difficultés, les procédures d'analyse statistiques classiques nécessitent d'être adaptées, puisque la majorité des méthodes d'inférence sont adaptées à un historique de maintenance complet.

Dans ce chapitre, nous considérons uniquement les maintenances correctives sur une fenêtre d'observation. Comme le début de la fenêtre d'observation et les instants de défaillance sont en général indépendants, la première observation n'est pas une durée de vie complète mais une durée de vie résiduelle. Autrement dit, la durée de vie de la dernière défaillance avant le début de la fenêtre est partiellement observée, elle est tronquée à gauche. Les méthodes d'inférence pour les données d'événements récurrents en présence de troncature à gauche sont présentées dans le cadre général d'un processus de comptage [2]. La troncature à gauche est parfois caractérisée par le phénomène *delayed entry* [73] dans la littérature de la bio-statistique : l'individu n'est pas observé avant qu'il ait atteint un certain âge, toutes les informations avant l'observation restent inconnues. L'importance de considérer l'âge de l'individu au début de l'observation est discutée dans [53]. Dans la modélisation de maintenance, cette thématique est traitée dans [23, 24] pour la maintenance minimale, et dans [134, 139, 151] pour la maintenance parfaite. En ce qui concerne la maintenance imparfaite, la thématique a été abordée succinctement dans [20, 50]. Le premier

article discute de la difficulté de l'inférence en présence des données manquantes pour le modèle NHPP dont les chocs sont similaires aux modèles d'âge virtuel. Le deuxième considère que les systèmes ont déjà fonctionné avant que l'observation ne commence. Le concept d'âge virtuel est utilisé afin d'analyser l'impact de ce manque d'information dans les estimations. Les méthodes d'estimation pour les modèles de maintenance parfaite et minimale avec l'historique incomplet sont appliquées dans plusieurs domaines, par exemple dans le management des réseaux d'eau potable [84, 96, 153], dans la gestion de retour de garantie [146, 154].

Dans la littérature, les extensions des méthodes d'estimation pour des données en fenêtre d'observation pour les modèles d'âge virtuel sont peu nombreuses, malgré l'intérêt grandissant de ces modèles dans les études théoriques et d'application. Dans ce chapitre, nous présentons les premiers éléments de méthodes d'estimation sur une fenêtre d'observation pour l'ensemble des modèles d'âge virtuel en traitant spécifiquement les hypothèses  $ARA_1$ ,  $ARA_\infty$  et Brown-Proshan. Le chapitre est organisé de la manière suivante. Dans un premier temps, nous présentons la modélisation de l'historique complet par les modèles d'âge virtuel. Ensuite, les types d'observations considérés sont présentés, puis les extensions de méthodes d'estimation sont décrites. Nous proposons des études basées sur des simulations et des applications à des données réelles pour les extensions.

## 2 Estimation dans le cas d'une maintenance imparfaite

### 2.1 Rappels sur la fonction de vraisemblance avec des données complètes

Comme les extensions des méthodes d'estimation sur une fenêtre d'observation sont développées à partir de celles des données complètes, nous rappelons les fonctions de vraisemblance des modèles dans le cas d'un historique complet. Pour distinguer avec les notations d'une fenêtre d'observation (qui sont présentées ultérieurement), nous utilisons la notation  $\underline{\tau}_n = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n)$  pour désigner les instants de défaillance d'une observation complète dans l'intervalle  $[0, \tau]$  avec la convention  $\tau_0 = 0$  et  $\tau_{n+1} = \tau$ . Dénotons  $f$ ,  $F$  et  $R$  la densité, la fonction de répartition et la survie associées à l'intensité initiale  $\lambda$ . L'ensemble des paramètres de l'intensité initiale  $\lambda$  est noté par le vecteur  $\theta$ . L'intensité initiale cumulée est  $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du$ .

#### 2.1.1 Modèle de maintenance parfaite

Le processus de renouvellement est utilisé pour étudier la maintenance parfaite. La fonction de vraisemblance d'un modèle de maintenance parfaite associée à  $n$  défaillances  $\underline{\tau}_n$  s'écrit :

$$\mathcal{L}^{PR}(\theta; \underline{\tau}_n) = \prod_{i=1}^n \lambda(\tau_i - \tau_{i-1}) e^{-\Lambda(\tau_i - \tau_{i-1})} \times e^{-\Lambda(\tau - \tau_n)} \quad (3.1)$$

#### 2.1.2 Modèle de maintenance minimale

La maintenance minimale est modélisée par un processus de Poisson non-homogène NHPP. La vraisemblance associée à  $n$  défaillances  $\underline{\tau}_n$  est donnée par :

$$\mathcal{L}^{NHPP}(\theta; \underline{\tau}_n) = \prod_{i=1}^n \lambda(\tau_i) \times e^{-\Lambda(\tau)} \quad (3.2)$$

### 2.1.3 Modèle d'âge virtuel

Dans ce chapitre, la maintenance imparfaite est caractérisée par les modèles d'âge virtuel. Dénotons  $\{a_i\}_{i \geq 0}$  les âges effectifs suite à des maintenances, la vraisemblance d'un modèle d'âge virtuel associées à  $n$  défaillances  $\underline{\tau}_n$  est donnée par :

$$\mathcal{L}(\theta; \underline{\tau}_n) = \prod_{i=1}^n \lambda(a_{i-1} + \tau_i - \tau_{i-1}) \times \exp \left( - \sum_{i=1}^{n+1} \Lambda(a_{i-1} + \tau_i - \tau_{i-1}) - \Lambda(a_{i-1}) \right) \quad (3.3)$$

Dans cette écriture, il est supposé classiquement que  $a_0 = 0$ . Cette quantité correspond à l'âge effectif à la mise en route du système (donc zéro). A partir de la fonction de vraisemblance générale, nous pouvons obtenir la vraisemblance d'un modèle d'âge virtuel spécifique en calculant les âges effectifs de la manière appropriée, par exemple :

- Modèle  $ARA_1$  :  $a_i = (1 - \rho)\tau_i$ ,  $i \geq 0$
- Modèle  $ARA_\infty$  :  $a_i = (1 - \rho)(a_{i-1} + x_i) = \sum_{j=1}^i (1 - \rho)^{i-j+1} x_j$ ,  $i \geq 1$

### 2.1.4 Modèle Brown-Proschan

Le modèle Brown-Proschan (BP) est caractérisé par l'intensité initiale  $\lambda$  et la probabilité de maintenance parfaite  $p$ . Nous utilisons l'écriture de *vraisemblance propre* [38]. Si l'observation est censurée à droite, nous avons la vraisemblance associée à la censure de type I suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{BP}(\theta, p; \underline{\tau}_n) &= (1 - p)^n \mathcal{L}^{NHPP}(\theta; \underline{\tau}_n) \\ &+ \sum_{i=1}^n p(1 - p)^{n-i} \mathcal{L}^{BP}(\theta, p; \tau_1, \dots, \tau_i) \mathcal{L}^{NHPP}(\theta; \tau_{i+1} - \tau_i, \dots, \tau_n - \tau_i, \tau - \tau_i) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Si l'observation est terminée par une défaillance (à  $\tau_n$ ), alors la vraisemblance associée à la censure de type II est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{BP}(\theta, p; \underline{\tau}_n) &= (1 - p)^{n-1} \mathcal{L}^{NHPP}(\theta; \underline{\tau}_n) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} p(1 - p)^{n-1-i} \mathcal{L}^{BP}(\theta, p; \tau_1, \dots, \tau_i) \mathcal{L}^{NHPP}(\theta; \tau_{i+1} - \tau_i, \dots, \tau_n - \tau_i) \end{aligned} \quad (3.5)$$

La vraisemblance du modèle BP est sous forme récursive mais peut être calculée de manière itérative. Un algorithme de type *forward-backward* est proposé dans [38] pour réaliser le calcul.

## 2.2 Les types d'observation

Nous présentons les notations qui correspondent à une fenêtre d'observation. L'intervalle d'une fenêtre d'observation est notée  $[s, s + t]$  :  $s$  et  $t$  désignent le début et la longueur de la fenêtre d'observation. Le début de l'observation  $s$  est considéré aussi comme l'âge réel quand nous commençons à observer le système. Dans le cadre de cette étude, nous considérons que les informations avant  $s$  ne sont que partiellement disponibles. La variable aléatoire  $T_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  désigne la durée entre la  $i$ ème défaillance et le début de l'observation  $s$ . Les durées inter-défaillance sont toujours représentées par les variables aléatoires  $\{X_i\}_{i \geq 1}$ ,  $X_i = T_i - T_{i-1}$  et  $X_1 = T_1$ . Un exemple de la collecte des données sur une fenêtre d'observation est présenté dans la Figure 3.1. On observe uniquement les événements survenus pendant l'intervalle  $[s, s + t]$ . Le vecteur des observations est noté  $\underline{t}_n = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ .

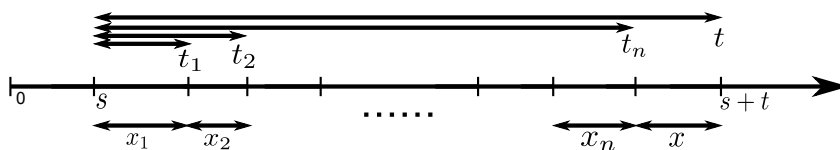


Figure 3.1 – Observation de  $n$  défaillances pendant la période  $[s, s + t]$ .

Dans cette configuration, on remarque que la première durée inter-défaillance  $T_1$  ou  $X_1$  est en particulier une durée de vie tronquée à gauche, même si l'instant du début  $s$  est l'instant de la dernière remise en route. Comme les informations avant  $s$  sont totalement absentes ou partiellement disponibles, nous proposons de traiter plusieurs cas de figure. Dénotons  $N_s, V_s$  le nombre de défaillance avant  $s$  et l'âge virtuel initial respectivement, nous considérons les situations suivantes :

1. L'âge réel  $s$  du système et le nombre de défaillances  $N_s$  sont connus.
2. L'âge réel  $s$  du système est connu mais pas le nombre de défaillances  $N_s$ .
3. L'âge réel  $s$  du système et le nombre de défaillances  $N_s$  sont inconnus.

Les approches présentées dans la littérature se placent presque systématiquement dans un des trois cas. D'autres configurations peuvent être envisagées :

- L'âge réel  $s$  est inconnu, mais  $N_s$  est connu : ce cas n'est pas très réaliste.
- Des données avant  $s$  sont partiellement disponibles : ce cas est en dehors du domaine considéré dans cette étude.

Dans la suite, nous proposons des extensions de méthodes d'estimation des trois cas ci-dessus pour les modèles classiques (ABAO, AGAN), puis pour les modèles d'âge virtuel.

### 3 Extension sur une fenêtre d'observation pour les modèles AGAN et ABAO

#### 3.1 Maintenance parfaite AGAN

La maintenance parfaite remet le système en état neuf après une défaillance, et elle est modélisée par un processus de renouvellement. Les durées entre deux défaillances consécutives sont indépendantes et suivent la même loi  $X$ , et nous gardons les notations habituelles.

##### 3.1.1 L'âge $s$ et le nombre de défaillance $N_s$ sont connus

Ce cas correspond à un système qui est observé à partir de l'instant  $s$ , pour lequel l'âge  $s$  du système au début de l'observation, ainsi que le nombre de maintenances ou de renouvellements  $N_s = \nu$  sont connus. La vraisemblance est présentée dans la proposition suivante.

**Proposition 3.1.** *La vraisemblance associée à un processus de renouvellement observé dans l'intervalle  $[s, s + t]$ , avec des instants de défaillance  $\underline{t}_n$ , et dont l'âge initial  $s$  et le nombre de défaillances  $N_s = \nu$  sont connus est donnée par :*

$$\mathcal{L}(\theta; s, N_s = \nu, \underline{t}_n) = \begin{cases} \int_0^s f^{*(\nu)}(u) f(s + t_1 - u) du \prod_{i=2}^n f(t_i - t_{i-1}) \times R(t - t_n), & \nu > 0 \\ f(s + t_1) \prod_{i=2}^n f(t_i - t_{i-1}) \times R(t - t_n), & \nu = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

### 3. Extension sur une fenêtre d'observation pour les modèles AGAN et ABAO

où  $f$  est la densité de la loi des durées inter-défaillance et  $f^{*(k)}(t)$  désigne le produit de convolution de la fonction  $f$ , définie par :

$$\begin{aligned} f^{*(1)}(t) &= f(t), \\ f^{*(k)}(t) &= \int_0^t f(t-u)f^{*(k-1)}(u)du, \quad k \geq 2 \end{aligned}$$

*Démonstration.* On commence par le cas  $\nu > 0$ . Comme la maintenance remet le système à neuf, et les durées inter-défaillance sont i.i.d. de la loi commune  $F$ , il suffit de connaître la jointe de  $N_s$  et de la première durée de vie résiduelle  $T_1$  pour établir la vraisemblance. Sous l'hypothèse  $s$  et  $N_s$  connus, la loi jointe de  $N_s$  et de  $T_1$  est obtenue à partir de la probabilité de l'événement  $(N_s = \nu, N_{s+x} = \nu)$  [133] :

$$\mathbb{P}(N_s = \nu, N_{s+x} = \nu) = \int_0^s f^{*(\nu)}(u)R(s+x-u)du$$

Posons  $R_s^\nu(x) = \mathbb{P}(N_s = \nu, N_{s+x} = \nu) = \mathbb{P}(N_s = \nu, T_1 \geq x)$  la survie de la durée de vie résiduelle à l'instant  $s$ . La vraisemblance est obtenue de manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta; s, N_s = \nu, \underline{t}_n) &= -\left. \frac{dR_s^\nu(x)}{dx} \right|_{t_1} \times \prod_{i=2}^n f(t_i - t_{i-1}) \times R(t - t_n) \\ &= \int_0^s f^{*(\nu)}(u)f(s+t_1-u)du \prod_{i=2}^n f(t_i - t_{i-1}) \times R(t - t_n) \end{aligned}$$

Pour le cas  $\nu = 0$ , aucune défaillance n'a lieu avant  $s$ . Cela revient donc à avoir observé un processus de renouvellement complet avec des instants de défaillance :  $s+t_1, s+t_2, \dots, s+t_n$  et fin d'observation à  $s+t$ . En utilisant la vraisemblance complète dans l'équation 3.1, le résultat est immédiat.  $\square$

**Remarque 1 :** Le produit de convolution peut être calculée par l'approche analytique avec les transformations de Laplace. Quand la loi de renouvellement  $F$  suit la loi de Weibull, le produit de convolution peut être calculé par les développements en séries [30].

Le calcul de la fonction de vraisemblance et sa maximisation font intervenir le calcul d'un produit de convolution, ce qui est généralement obtenu par des méthodes numériques. L'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance avec cette fonction de vraisemblance est alors effectuée par des méthodes d'optimisation numérique.

#### 3.1.2 L'âge réel $s$ connu et le nombre de défaillance $N_s$ inconnu

Le système est observé pendant l'intervalle  $[s, s+t]$  et le nombre de défaillances avant le début de l'observation  $N_s$  est inconnu. La fonction de vraisemblance est proposée dans la proposition suivante.

**Proposition 3.2.** *La vraisemblance d'un processus de renouvellement observée dans l'intervalle  $[s, s+t]$  avec  $n$  défaillance  $\underline{t}_n$ , où le début de l'observation  $s$  est connu s'écrit de manière suivante :*

$$\mathcal{L}(\theta; s, \underline{t}_n) = f_{\gamma_s}(t_1) \prod_{i=2}^n f(t_i - t_{i-1}) \times R(t - t_n) \quad (3.7)$$

où  $f_{\gamma_s}(x)$  est la densité associée à la variable aléatoire de la durée de vie résiduelle  $\gamma_s = \tau_{N_s+1} - s$ .

La survie associée  $R_{\gamma_s}$  de la durée de vie peut être approché par l'algorithme suivant [3] :

---

**Algorithm 6** Algorithme de calcul la durée de vie résiduelle

---

1: Définir un large nombre  $m$  et calculer :

$$a_i = F\left(\frac{i}{m}\right) - F\left(\frac{i-1}{m}\right), \quad i = 1, 2, \dots, [sm] + [xm], \quad \text{où } [\cdot] \text{ désigne la partie entière}$$

2: Calculer :  $b_i = \sum_{j=0}^{i-1} b_j a_{i-j}$ ,  $i = 1, 2, \dots, [sm]$  et  $b_0 = 1$ .

3: Approcher  $\hat{R}_{\gamma_s}(x) = 1 - \sum_{i=[sm]}^{[sm]+[xm]} \sum_{j=0}^{[sm]} b_j a_{i-j}$

---

D'après les auteurs, l'approximation est valide pour les lois de renouvellement continues, ce qui convient très bien à notre cadre d'applications. La densité peut être obtenue à partir de l'approximation de la survie  $R_{\gamma_s}$  de la manière suivante :

$$f_{\gamma_s}(x) = \frac{R_{\gamma_s}(x) - R_{\gamma_s}(x + \Delta x)}{\Delta x}$$

pour un  $\Delta x$  petit.

Si  $s$  est suffisamment élevé pour que le processus se situe dans le régime stationnaire du processus de renouvellement, la connaissance de  $s$  aura un impact infime sur l'inférence. De ce fait, on peut se placer dans la configuration où  $s$  est inconnu, situation présentée dans la section suivante.

### 3.1.3 L'âge $s$ et le nombre de défaillance $N_s$ sont inconnus

Ce cas est souvent traité dans la littérature ([134, 139, 152]). Les travaux font généralement l'hypothèse que le système est déjà dans son état stationnaire lorsque l'observation commence à l'instant  $s$ . D'après le résultat classique d'un processus de renouvellement, la loi de la durée de vie résiduelle  $T_1$  à l'instant  $s$  dans l'état stationnaire a pour densité [15] :

$$f_{T_1}(x) = \frac{1 - F(x)}{\mathbb{E}[X]}$$

La vraisemblance associée à  $n$  défaillances  $\underline{t}_n$  observées dans l'intervalle  $[s, s + t]$  est alors donnée par :

$$\mathcal{L}(\theta; \underline{t}_n) = f_{T_1}(t_1) \prod_{i=2}^n f(t_i - t_{i-1}) \times R(t - t_n) \quad (3.8)$$

## 3.2 Maintenance minimale

Nous nous intéressons à la maintenance minimale, qui est caractérisée par un NHPP. Le système est remis dans l'état où il se trouvait juste avant la défaillance.

### 3.2.1 L'âge $s$ et le nombre de défaillance $N_s$ sont connus

Le cas présent a été traité dans [149], sous l'hypothèse que l'intensité initiale suit une loi de Weibull  $\mathcal{W}(\alpha, \beta)$ . Le résultat peut être étendu pour n'importe quel choix d'intensité initiale continue.

**Proposition 3.3.** *La vraisemblance d'un NHPP associée à  $n$  défaillances  $\underline{t}_n$  observées pendant l'intervalle  $[s, s + t]$ , où le début de l'observation  $s$  et le nombre de défaillance  $N_s$  sont connus est donnée par :*

$$\mathcal{L}(\theta; N_s = \nu, \underline{t}_n) = \frac{\Lambda(s)^\nu}{\nu!} \prod_{i=1}^n \lambda(s + t_i) \times R(s + t)$$

*Démonstration.* Comme l'âge  $s$  est connu, nous pouvons retrouver des "vrais" instants de défaillance en translatant d'une durée  $s$  :  $s + t_1, s + t_2, \dots, s + t_n$ . Nous dénotons ce nouveau vecteur par  $s + \underline{t}_n$ . En revanche, les instants de défaillance avant  $s$  restent inconnus  $\underline{\tau}_{N_s} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{N_s})$ , seul leur nombre  $N_s$  est disponible. La vraisemblance associée aux  $n$  observations  $s + \underline{t}_n$  pendant l'intervalle  $[s, s + t]$  est obtenue en conditionnant sur les  $N_s$  premières défaillances non observées :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta; N_s = \nu, \underline{t}_n) &= \int_{0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{N_s} < s} \prod_{j=1}^n \lambda(s + t_j) \times R(s + t) \prod_{i=1}^{N_s} \lambda(\tau_i) d\tau_1 \dots d\tau_{N_s} \\ &= \prod_{j=1}^n \lambda(s + t_j) \times R(s + t) \int_{0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{N_s} < s} \prod_{i=1}^{N_s} \lambda(\tau_i) d\tau_1 \dots d\tau_{N_s} \\ &= \prod_{j=1}^n \lambda(s + t_j) \times R(s + t) \int_{0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{N_s} < s} d\Lambda(\tau_1) \dots d\Lambda(\tau_{N_s}) \end{aligned}$$

L'intégrale est calculée grâce à l'identité suivante [149] :

$$\int_{a < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m < b} dG(\tau_1) \dots dG(\tau_m) = \frac{[G(b) - G(a)]^m}{m!}$$

où  $m$  est un entier positif,  $a$  et  $b$  sont les nombres réels qui satisfont  $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m < b$ ,  $G(t)$  est une fonction croissante et dérivable. En posant  $G = \Lambda, a = 0, b = s, m = N_s$ , nous obtenons l'expression suivante :

$$\mathcal{L}(\theta; N_s = \nu, \underline{t}_n) = \frac{\Lambda(s)^\nu}{\nu!} \prod_{j=1}^n \lambda(s + t_j) \times R(s + t)$$

□

Lorsque l'intensité initiale suit la loi Weibull  $\mathcal{W}(\alpha, \beta)$ , nous avons le résultat suivant.

**Corollaire 3.1** (Yu *et al.* [149]). *La vraisemblance d'un NHPP, dont l'intensité de défaillance suit la loi Weibull  $\mathcal{W}(\alpha, \beta)$ , associée à  $n$  défaillances  $\underline{t}_n$  observées pendant l'intervalle  $[s, s + t]$ , où le début de l'observation  $s$  et le nombre de défaillance  $N_s$  sont connus est donnée par :*

$$\mathcal{L}(\alpha, \beta; N_s = \nu, \underline{t}_n) = \frac{\alpha^{n+\nu} \beta^n}{\nu!} s^{\beta\nu} \prod_{i=1}^n (s + t_i)^{\beta-1} e^{-\alpha(s+t)^\beta}$$

Dans ce cas, il est possible d'obtenir une expression explicite des estimateurs de maximum de vraisemblance pour chacun des paramètres comme suit :

$$\hat{\alpha} = \frac{n + \nu}{(s + t)^\beta}$$

$$\hat{\beta} = \frac{n}{(n + \nu)\ln(s + t) - \nu\ln(s) - \sum_{i=1}^n \ln(s + t_i)}$$

Dans [149], les intervalles de confiance et un test d'adéquation d'un NHPP se basant sur les données en fenêtre d'observation sont également proposés pour la loi Weibull.

### 3.2.2 L'âge $s$ est connu et le nombre de défaillance $N_s$ inconnu

Le cas où seul l'âge initial  $s$  est supposé connu est considéré par Crow [23], Crow et Basu [24] avec l'intensité de défaillance de la loi Weibull  $\mathcal{W}(\alpha, \beta)$ . Dans le premier article, l'auteur considère que les défaillances sont observées dans l'intervalle  $[s_1, s_2]$ , dont le début  $s_1$  est connu mais ne correspond pas à l'instant de mise en route du système ( $s_1 > 0$ ). Aucune autre information avant  $s_1$  n'est disponible pour l'étude. Le deuxième article généralise le résultat précédent, en considérant qu'une partie  $[\tau_1, \tau_2]$  de l'historique complet  $[0, \tau]$  est absente, comme présenté dans la Figure 3.2. Les données sont les défaillances observées dans les deux périodes  $[0, \tau_1]$  et  $[\tau_2, \tau]$ . On remarque que la collecte des données de notre étude est similaire à celle considérée par le

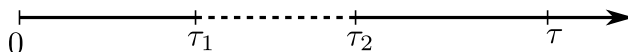


Figure 3.2 – Absence d'informations sur une période de temps

premier article, et elle est un cas particulier du deuxième article ( $\tau_1 = 0$ ). Toutefois, ces travaux sont construits uniquement sur l'intensité initiale de loi de Weibull. Nous proposons de l'étendre aux cas d'une intensité initiale continue quelconque.

**Proposition 3.4.** *La vraisemblance d'un NHPP associée à  $n$  défaillances  $\underline{t}_n$  observées pendant l'intervalle  $[s, s + t]$ , où le début de l'observation  $s$  est connu, est donnée par :*

$$\mathcal{L}_s^{NHPP}(\theta; \underline{t}_n) = \prod_{i=1}^n \lambda(s + t_i) \times e^{-\Lambda(s+t) + \Lambda(s)} \quad (3.9)$$

*Démonstration.* La démonstration s'inspire de celle de la vraisemblance d'un NHPP. En remarquant que la première durée  $t_1$  est une durée de vie résiduelle, la vraisemblance est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s^{NHPP}(\theta; \underline{t}_n) &= f(s + t_1 | s) f(s + t_2 | s + t_1) \dots f(s + t_n | s + t_{n-1}) R(s + t | s + t_n) \\ &= \frac{\lambda(s + t_1) e^{-\Lambda(s+t_1)}}{e^{-\Lambda(s)}} \dots \frac{\lambda(s + t_n) e^{-\Lambda(s+t_n)}}{e^{-\Lambda(s+t_{n-1})}} \frac{e^{-\Lambda(s+t)}}{e^{-\Lambda(s+t_n)}} \\ &= \prod_{i=1}^n \lambda(s + t_i) \times e^{-\Lambda(s+t) + \Lambda(s)} \end{aligned}$$

□



### 3. Extension sur une fenêtre d'observation pour les modèles AGAN et ABAO

On remarque que le résultat est valide pour tout choix d'intensité initiale continue  $\lambda$ . Dans le cas de la loi Weibull  $\mathcal{W}(\alpha, \beta)$ , nous pouvons obtenir des estimateurs de maximum de vraisemblance de chacun des paramètres, qui satisfont le système d'équations suivant :

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{(s+t)^{\hat{\beta}} - s^{\hat{\beta}}}$$

$$\hat{\beta} = n \frac{(s+t)^{\hat{\beta}} - s^{\hat{\beta}}}{(s+t)^{\hat{\beta}} [n \ln(s+t) - \sum_{i=1}^n \ln(t_i)] - s^{\hat{\beta}} [n \ln(s) - \sum_{i=1}^n \ln(t_i)]}$$

Ces estimateurs sont aussi proposés dans le premier article [23].

#### 3.2.3 L'âge du système $s$ et le nombre de défaillance $N_s$ sont inconnus

Le système est observé pendant l'intervalle  $[s, s+t]$  et aucune autre information avant  $s$  n'est disponible. Ce cas pourrait se produire à l'achat d'un matériel d'occasion dont l'historique antérieur est totalement absent, ou lorsque l'histoire en période de jeunesse n'est pas enregistrée. Nous proposons deux approches pour prendre en compte l'absence de l'information à l'instant  $s$  :

- L'âge initial du système à l'instant  $s$  est considéré comme une variable aléatoire admettant une densité  $\pi(s)$ . Cette hypothèse est plausible, s'il y a suffisamment d'informations sur le fonctionnement du système. La situation est déjà considérée pour les systèmes non réparables [45], ou pour la méthode capture-recapture [102]. La vraisemblance associée à  $n$  défaillances  $\underline{t}_n$  observées pendant l'intervalle  $[s, s+t]$  avec  $s$  inconnu est alors :

$$\mathcal{L}(\theta; \underline{t}_n) = \int_0^{\infty} \mathcal{L}_s(\theta; \underline{t}_n) \pi(s) ds$$

La nouvelle vraisemblance est un mélange de vraisemblance dans l'équation 3.9.

- L'âge initial  $s$  est considéré comme un paramètre inconnu à estimer. La fonction de vraisemblance est alors identique à celle de l'équation 3.9, dans laquelle  $s$  est un paramètre supplémentaire. Lorsque l'intensité de défaillance suit la loi de Weibull, alors nous avons des estimateurs de maximum de vraisemblance des paramètres vérifiant :

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{(\hat{s}+t)^{\hat{\beta}} - \hat{s}^{\hat{\beta}}}$$

$$\hat{\beta} = n \frac{(\hat{s}+t)^{\hat{\beta}} - \hat{s}^{\hat{\beta}}}{(\hat{s}+t)^{\hat{\beta}} [n \ln(\hat{s}+t) - \sum_{i=1}^n \ln(t_i)] - \hat{s}^{\hat{\beta}} [n \ln(\hat{s}) - \sum_{i=1}^n \ln(t_i)]} \quad (3.10)$$

$$(\hat{\beta} - 1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\hat{s} + t_i} = \hat{\alpha} \hat{\beta} \left[ (\hat{s}+t)^{\hat{\beta}-1} - \hat{s}^{\hat{\beta}-1} \right]$$

On remarque que si le paramètre inconnue  $s$  est estimé par l'approche bayésienne, alors cette configuration est similaire à la configuration précédente ( $s$  une variable aléatoire).

Les estimateurs peuvent être obtenus par des méthodes itératives (par exemple méthode Newton-Raphson). Dans les applications industrielles, Le Gat et Eisenbeis [84], Røstum [128] ont également considéré l'âge initial inconnu  $s$  comme un paramètre supplémentaire. Ils ont montré que ce paramètre a un impact non négligeable sur le résultat des estimations, d'où l'importance de l'inclure dans les modèles lorsqu'il est disponible.

## 4 Extension sur une fenêtre d'observation pour les modèles d'âge virtuel

Nous nous intéressons à la maintenance imparfaite caractérisée par des modèles d'âge virtuel. Des extensions de méthodes d'estimation sur une fenêtre d'observation pour les trois modèles d'âge virtuel ( $ARA_1$ ,  $ARA_\infty$  et BP) sont présentées. Comme les maintenances avant  $s$  ne sont pas observées, l'âge virtuel initial  $V_s$  est en général inconnu. De plus, la loi de  $N_s$  et son espérance sont difficiles à obtenir pour la plupart des modèles d'âge virtuel. Sans avoir des informations supplémentaires sur le fonctionnement antérieur, nous proposons deux approches générales pour les extensions de méthodes d'estimation :

- L'âge virtuel initial à l'instant  $s$  est considéré comme un paramètre  $V_s = a_0$ . Il est peut être connu, ou inconnu et à estimer conjointement avec les paramètres de l'intensité initiale. La vraisemblance associée à  $n$  défaillances  $\underline{t}_n$  observées pendant l'intervalle  $[s, s + t]$  d'un modèle d'âge virtuel où le début de l'observation  $s$  est inconnu a pour expression :

$$\mathcal{L}_s^{VA}(\theta; \underline{t}_n) = \prod_{i=1}^n \lambda(a_{i-1} + t_i - t_{i-1}) \exp \left( - \sum_{i=1}^{n+1} \Lambda(a_{i-1} + t_i - t_{i-1}) - \Lambda(a_{i-1}) \right) \quad (3.11)$$

Cette fonction de vraisemblance est construite de la même manière de la vraisemblance proposée dans [50], pour un modèle d'âge virtuel dont son âge virtuel initial est connu. On considère que le système fonctionne avec une intensité initiale modifiée  $\lambda(a_0 + t)$ . Le paramètre  $a_0$ , qui représente l'âge virtuel du système au début de la fenêtre d'observation, peut être considéré comme un paramètre de position négative. On remarque que cette écriture est similaire à celle avec un historique complet dans l'équation 3.3. Dans le cas présent, l'âge virtuel initial  $a_0$  n'est pas nécessairement égal à zéro, à cause des informations manquantes au début de l'observation. Cette approche est également considérée dans [53].

- L'âge  $s$  est inconnu, mais on connaît la loi de l'âge virtuel initial  $V_s$ . Dans ce cas, la vraisemblance est obtenue de la manière suivante :

$$\mathcal{L}(\theta; \underline{t}_n) = \int \mathcal{L}_s^{VA}(\theta; \underline{t}_n) f_{V_s}(u) du$$

La loi de  $V_s$  peut être obtenue par les calculs analytiques, ou par avis d'experts.

Les extensions de méthodes d'estimations pour les modèle  $ARA_1$ ,  $ARA_\infty$  et BP dépendent donc des informations supplémentaires disponibles au début de l'observation. Pour les modèles  $ARA_1$  et  $ARA_\infty$ , nous traitons uniquement le cas numéro 3 ( $s$  et  $N_s$  inconnus) car l'expression des lois de  $s$  et de  $N_s$  ne sont pas connues. Pour le modèle BP, le cas numéro 2 ( $s$  connu) et numéro 3 seront développés, car on peut déterminer la loi de l'âge virtuel  $V_s$  associé à un instant  $s$  connu.

### 4.1 Modèle $ARA_1$

Nous dénotons  $\rho$  l'efficacité de maintenance du modèle  $ARA_1$ . D'après Doyen [37], le modèle  $ARA_1$  converge vers un NHPP asymptotiquement, les âges effectifs  $\{A_i\}_{i \geq 1}$  constituent une suite croissante et non bornée (si l'intensité initiale tends vers l'infini). L'établissement de la loi de  $V_s$  nécessite alors la connaissance du passé avant  $s$ .

Pour pallier cela, nous proposons de considérer cet âge comme un paramètre supplémentaire  $a_0$ . Dans le cas où  $s$  est connu, l'âge effectif suite à la première défaillance vaut  $a_1 = (1 - \rho)(s + t_1)$ . Les âges effectifs restants peuvent être déterminés à partir de  $a_1$  et les instants de défaillance  $\underline{t}_n$ .

#### 4. Extension sur une fenêtre d'observation pour les modèles d'âge virtuel

Si  $s$  est inconnu, l'âge effectif  $A_1$  dépend de la durée  $D$  entre la première défaillance observée et la dernière défaillance (avant  $s$ ) non enregistrée :

$$A_1 = V_s + T_1 - \rho D$$

Comme la durée  $D$  est inconnue, la séquence des âges effectifs ne peut pas être déterminée. Afin de résoudre cette difficulté dans les deux cas, une hypothèse supplémentaire est imposée : une maintenance est effectuée juste avant l'observation à l'instant  $s^-$ . Par conséquent, nous avons :

- Si l'âge  $s$  est connu, l'âge virtuel initial est  $V_s = a_0 = (1 - \rho)s$ . Les âges effectifs sont alors calculés de manière suivante :  $a_n = (1 - \rho)(s + t_n)$ . La vraisemblance a la même expression que dans l'équation 3.11.
- Si l'âge  $s$  est inconnu, l'âge virtuel initial est considéré par le paramètre inconnu  $a_0$ . De plus, la durée  $D$  devient  $T_1$  et les âges effectifs sont calculés comme suit :  $a_n = a_0 + (1 - \rho)t_n$ . La vraisemblance générale d'un modèle d'âge virtuel (3.11) devient :

$$\mathcal{L}_{s,a_0}^{ARA_1}(\theta; \underline{t}_n) = \prod_{i=1}^n \lambda(a_0 + t_i - \rho t_{i-1}) \exp \left( - \sum_{i=1}^{n+1} \Lambda(a_0 + t_i - \rho t_{i-1}) - \Lambda(a_0 + (1 - \rho)t_{i-1}) \right) \quad (3.12)$$

Cette hypothèse semble raisonnable à double titre. En pratique, il n'est pas rare que le début des observations soit associé à une remise en route du système. Mathématiquement, notre hypothèse revient à utiliser un développement au premier ordre de  $V_s$  [37].

#### 4.2 Modèle $ARA_\infty$

L'extension des méthodes d'estimation sur une fenêtre d'observations pour le modèle  $ARA_\infty$  est proposée pour le cas numéro 3, où aucune information sur  $s$  et  $N_s$  n'est disponible. Dans ce cas, nous supposons que le modèle se trouve dans son régime stationnaire. Les résultats généraux de convergence dans [45, 82], et le résultat sur le modèle  $WARA_\infty$  montrent que le modèle de maintenance de type  $ARA_\infty$  converge vers un régime stationnaire, donc les âges effectifs admettent une loi asymptotique (ainsi que les durées inter-défaillance). Cette hypothèse est assez réaliste, puisque le modèle  $ARA_\infty$  converge rapidement vers son régime stationnaire, pour n'importe quelle intensité initiale croissante (IFR). Elle nous permet aussi de pallier le manque d'informations avant le début des observations. L'hypothèse de régime stationnaire est déjà utilisée pour le processus de renouvellement dans la littérature [134, 139, 152].

Dans un premier temps, nous proposons l'étude du modèle  $WARA_\infty$ . Sous l'hypothèse de régime stationnaire, les âges effectifs admettent la loi asymptotique suivante :

$$R_{A_\infty}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(q, q)_\infty \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)_{i-1}} e^{-\frac{\alpha t^\beta}{q^i}}$$

où  $q = (1 - \rho)^\beta$  et  $(q, q)_n$  est l'opérateur de **q-shifted** factoriel :

$$(q, q)_n = \begin{cases} \prod_{k=1}^n (1 - q^k), & n \geq 1 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

Le modèle  $WARA_\infty$  est déjà dans son régime stationnaire lorsqu'il est observé pendant l'intervalle  $[s, s + t]$ . L'hypothèse de régime stationnaire est prise en compte par le fait que le premier âge effectif observé dans la fenêtre (suite à  $T_1$ )  $\mathcal{A}_1$  suit la loi asymptotique de l'âge effectif :  $\mathcal{A}_1 \sim A_\infty$ . Cela nous permet d'établir la vraisemblance sous cette hypothèse.

**Proposition 3.5.** La vraisemblance du modèle  $WARA_\infty$  associée à  $n$  défaillances  $\underline{t}_n$  observées pendant l'intervalle  $[s, s + t]$  est donnée par :

$$\mathcal{L}_\infty^{WARA_\infty}(\alpha, \beta, \rho; \underline{t}_n) = - \int_{(1-\rho)t_1}^{\infty} \mathcal{L}_s^{VA}(\alpha, \beta, \rho, a_0 = u/(1-\rho) - t_1; \underline{t}_n) dR_{A_\infty}(u) \quad (3.13)$$

*Démonstration.* La vraisemblance se construit à partir de la vraisemblance générale d'un modèle d'âge virtuel (3.11), dont l'âge virtuel initial  $a_0$  est différent de zéro. En supposant  $\mathcal{A}_1 \sim A_\infty$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\infty^{WARA_\infty}(\alpha, \beta, \rho; \underline{t}_n) &= - \int_0^{\infty} \mathcal{L}_s^{VA}(\alpha, \beta, \rho; \underline{t}_n, \mathcal{A}_1 = u) dR_{\mathcal{A}_1}(u) \\ &= - \int_0^{\infty} \mathcal{L}_s^{VA}(\alpha, \beta, \rho; \underline{t}_n, \mathcal{A}_0 = u/(1-\rho) - t_1) dR_{A_\infty}(u) \\ &= - \int_{(1-\rho)t_1}^{\infty} \mathcal{L}_s^{VA}(\alpha, \beta, \rho, a_0 = u/(1-\rho) - t_1; \underline{t}_n) dR_{A_\infty}(u) \end{aligned}$$

Puisque l'instant  $s$  ne correspond pas systématiquement à un instant de défaillance, la valeur du premier âge effectif  $\mathcal{A}_1$  est calculée de la manière suivante :  $a_1 = (1-\rho)(a_0 + t_1)$ . Il en découle que  $a_0 = a_1/(1-\rho) - t_1$ .  $\square$

Les estimations par la méthode du maximum de vraisemblance sont réalisées par des méthodes d'optimisation numérique, comme il est difficile d'étudier la dérivée première de la fonction de vraisemblance  $\mathcal{L}_\infty^{WARA_\infty}$ .

**Remarque 2 :** La vraisemblance dans la proposition précédente est valide dès que l'on se place dans le régime stationnaire. Dans le cas où une maintenance vient d'être effectuée juste avant (à  $s^-$ ), nous supposons que l'âge effectif initial suit la loi asymptotique  $\mathcal{A}_0 \sim A_\infty$ . La vraisemblance correspondante devient :

$$\mathcal{L}_\infty^{WARA_\infty}(\alpha, \beta, \rho; \underline{t}_n) = - \int_0^{\infty} \mathcal{L}_s^{VA}(\alpha, \beta, \rho, a_0 = u; \underline{t}_n) dR_{A_\infty}(u)$$

**Remarque 3 :** La proposition 3.5 est valide uniquement pour le modèle  $WARA_\infty$ . Pour un autre choix de l'intensité initiale, si l'hypothèse de régime stationnaire reste valide (le cas des intensités initiales croissantes), alors il est possible d'obtenir des estimations du maximum de vraisemblance. Dans ce cas, l'âge effectif asymptotique  $A_\infty$  sera obtenu par des simulations. Les estimateurs sont ensuite déduits par des méthodes d'optimisation numérique.

### 4.3 Modèle Brown-Proschan

L'extension de méthode d'estimation sur une fenêtre d'observation  $[s, s + t]$  pour le modèle BP est proposée pour le cas numéro 2 ( $s$  connu) et 3 ( $s$  et  $N_s$  inconnus). Lorsque l'âge initial  $s$  est connu, nous proposons la fonction de vraisemblance associée à l'aide de la loi de l'âge virtuel  $V_s$ . Pour le cas restant, nous supposons que le système se trouve dans son régime stationnaire, et utilisons la loi de l'âge virtuel dans cet état. Dans un premier temps, nous construisons la loi de  $V_s$  dans le régime transitoire et dans le régime stationnaire, puis déduisons la fonction de vraisemblance associée pour chacun des cas.

Étant donné un modèle BP d'intensité initial  $\lambda$  et de probabilité de maintenance parfaite  $p$ , d'après [13] nous avons :

$$\begin{aligned} \lambda_p(t) &= p\lambda(t) \\ R_p(t) &= R^p(t), \quad 0 < p \leq 1 \end{aligned}$$

#### 4. Extension sur une fenêtre d'observation pour les modèles d'âge virtuel

où  $\lambda_p$  et  $R_p$  sont l'intensité et la survie de la variable aléatoire de durée entre deux maintenances parfaites consécutives  $X_p$ . La condition  $p > 0$  assure qu'il existe toujours une probabilité non nulle de remettre le système à neuf. L'hypothèse de convergence reste valide (dans le cas contraire, les maintenances sont toutes minimales, donc pas de convergence). Comme le système est remis à neuf par des maintenances parfaites, nous pouvons obtenir la loi de l'âge virtuel à l'instant  $s$  à partir des instants de renouvellement.

**Proposition 3.6.** *La loi de l'âge virtuel  $V_s$  du modèle BP ayant la probabilité de maintenance parfaite  $p$  est donnée par :*

$$F_{V_s}(x) = \begin{cases} F_p(s) - \int_0^{s-x} (1 - F_p(s-u)) dM_p(u), & x < s \\ 1, & x \geq s \end{cases}$$

où  $M_p(s) = \mathbb{E}[N_p(s)]$  est la fonction de renouvellement correspondant au nombre moyen de renouvellements dans l'intervalle  $[0, s]$ .

*Démonstration.* Comme le système est restauré à neuf par des maintenances parfaites, l'âge virtuel  $V_s$  est alors l'âge courant d'un processus de renouvellement dont la survie des durées de renouvellement est  $R_p$ . D'après Çinlar [15] (chapitre 9, page 320), la loi de  $V_s$  est donnée par l'équation de renouvellement suivante :

$$F_{V_s}(x) = F_p(s) - \int_0^{s-x} (1 - F_p(s-u)) dM_p(u), \quad x < s$$

Le cas de  $x \geq s$  est trivial. □

Le calcul de  $F_{V_s}(x)$  fait intervenir alors la résolution d'une équation de renouvellement, où la loi générique des durées inter-arrivée est  $F_p(x) = 1 - R_p(x)$ . Sauf pour des lois simples, les solutions (par exemple  $M_p(x)$ ) sont souvent obtenues par des approximations. Cela n'empêche pas l'utilisation de cette proposition pour le modèle BP dans le régime transitoire.

Dans le régime stationnaire, la densité asymptotique de l'âge virtuel satisfait :

$$f_{V_\infty}(x) = \frac{1 - F_p(x)}{\mathbb{E}[X_p]} \quad (3.14)$$

Nous proposons tout d'abord la vraisemblance du modèle BP dans le cas l'âge initial  $s$  est connu, puis nous utilisons l'hypothèse de régime stationnaire pour le cas  $s$  est inconnu.

**Proposition 3.7.** *La vraisemblance du modèle BP associée à  $n$  défaillances observées pendant l'intervalle  $[s, s+t]$ , où l'âge initial  $s$  est connu, est donnée par :*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s^{BP}(\theta, p; \underline{t}_n) &= \int_0^s (1-p)^n \mathcal{L}_u^{NHPP}(\theta, \underline{t}_n) dF_{V_s}(u) + \\ &\int_0^s \left[ \sum_{i=1}^n p(1-p)^{i-1} \mathcal{L}_u^{NHPP}(\theta; \underline{t}_i) \mathcal{L}^{BP}(\theta, p; t_{i+1} - t_i, \dots, t_n - t_i, t - t_i) \right] dF_{V_s}(u) \end{aligned} \quad (3.15)$$

$\theta$  est le vecteur des paramètres de l'intensité initiale  $\lambda$ ,  $\mathcal{L}_u^{NHPP}(\theta; \underline{t}_n)$  est la vraisemblance d'un NHPP observé dans l'intervalle avec l'âge initial  $u$  connu (3.9),  $\mathcal{L}^{BP}(\theta, p; \underline{t}_n)$  est la vraisemblance d'un modèle BP avec l'historique complet (3.4).

Nous considérons que le système se trouve dans son régime transitoire où l'âge réel  $s$  est connu. Le résultat est alors obtenu en conditionnant sur la première maintenance parfaite. Après la première maintenance parfaite, la vraisemblance est celle d'un modèle BP classique (dont l'âge initial est nul) développée dans l'équation 3.4. S'il n'y a pas de maintenance parfaite, alors le reste constitue un NHPP.

Dans le cas où l'âge initial  $s$  est inconnu, nous supposons que le modèle est dans son régime stationnaire au début des observations. L'âge virtuel suit sa loi asymptotique dans l'équation 3.14, et la vraisemblance admet une expression similaire à celle obtenue dans l'équation 3.15.

**Proposition 3.8.** *La vraisemblance du modèle BP associée à  $n$  défaillances observées pendant l'intervalle  $[s, s + t]$ , où l'âge initial  $s$  est inconnu et le modèle est dans le régime stationnaire, est donnée par :*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\infty}^{BP}(\theta, p; \underline{t}_n) &= \int_0^{\infty} (1-p)^n \mathcal{L}_u^{NHPP}(\theta, \underline{t}_n) dF_{V_{\infty}}(u) + \\ &\int_0^{\infty} \left[ \sum_{i=1}^n p(1-p)^{i-1} \mathcal{L}_u^{NHPP}(\theta; \underline{t}_i) \mathcal{L}^{BP}(\theta, p; t_{i+1} - t_i, \dots, t_n - t_i, t - t_i) \right] dF_{V_{\infty}}(u) \end{aligned} \quad (3.16)$$

L'hypothèse de régime stationnaire est déjà utilisée pour les modèles  $ARA_{\infty}$  et maintenance parfaite. Compte tenu de la complexité des fonctions de vraisemblance, les estimateurs de maximum de vraisemblance sont obtenues par des méthodes d'optimisation numérique.

## 5 Simulation

Dans cette section, nous présentons les performances des extensions de méthodes d'estimation. Chaque processus de défaillance est simulé sur une fenêtre d'observation similaire à la Figure 3.1. Dans la majorité des estimations, les méthodes classiques supposent que l'âge initial est nul, même en présence d'un début de l'observation différent de zéro [64, 77]. Nous comparons alors la performance de ces approches avec celle des extensions proposées dans les sections précédentes.

### 5.1 Méthodes d'estimation

Les méthodes d'estimation classiques supposent systématiquement que le système considéré est comme neuf au début des observations (début de fenêtre). Nous proposons alors de comparer les estimations des méthodes classiques et des extensions proposées dans ce chapitre. Pour cela, nous employons trois approches. L'Approche 1 considère le cas où aucune information initiale n'est disponible (cas numéro 3 :  $s$  et  $N_s$  inconnus). Elle utilise les extensions des fonctions de vraisemblance associée à une fenêtre d'observation, et les estimations sont effectuées par la méthode du maximum de vraisemblance. L'Approche 2 considère que l'âge initial est nul, quelque soit le type de collecte de données. Les estimations sont réalisées par la méthode du maximum de vraisemblance avec les fonctions de vraisemblance associées à une observation complète (qui débute à l'instant zéro). Pour l'Approche 3, nous donnons des informations supplémentaires (par exemple l'âge  $s$  ou le nombre de défaillances non enregistrées  $N_s$ ). Cette approche représente un cas idéal. Dans les simulations, l'intensité initiale est de la loi de Weibull  $\mathcal{W}(\alpha, \beta)$ . Les détails des trois approches associées chacune à une méthode d'estimation sont les suivants :

1. Approche 1 reconnaît que le système n'est pas neuf au début des observations. L'âge  $s$  et l'âge virtuel initial  $a_0$  sont inconnus et différents de zéro. Les fonctions de vraisemblance utilisées sont celles proposées pour le cas numéro 3 ( $s$  et  $N_s$  inconnus) :

- Maintenance parfaite : Pour le cas numéro 3, on suppose que le système se trouve dans un état stationnaire, et la fonction de vraisemblance s'exprime dans l'équation 3.8.
  - Maintenance minimale : L'âge initial inconnu  $s$  est considéré comme un paramètre à estimer. Les estimations sont alors données dans l'équation 3.10, pour le cas où  $s$  est un paramètre inconnu à estimer.
  - Modèle  $ARA_1$  : La fonction de vraisemblance utilisée par l'Approche 1 est l'équation 3.11, en supposant que l'âge initial inconnu  $s$  est estimé par le biais de l'estimation de l'âge virtuel initial  $a_0$ .
  - Modèle  $ARA_\infty$  : L'Approche 1 suppose que le système se trouve dans son régime stationnaire, et utilise la fonction de vraisemblance exprimée dans l'équation 3.13.
  - Modèle BP : L'Approche 1 suppose également que le système se trouve dans son régime stationnaire et utilise l'équation 3.16 pour exprimer la fonction de vraisemblance.
2. Approche 2 suppose que l'âge initial est nul, c'est-à-dire que le système est neuf au départ, et utilise les fonctions de vraisemblance des équations 3.1, 3.2, 3.3 ( $A_0 = 0$  et  $A_i$  défini selon la maintenance de type  $ARA_1$ ), 3.3 ( $A_0 = 0$  et  $A_i$  défini selon la maintenance de type  $ARA_\infty$ ) et 3.4 pour les modèles de maintenance parfaite, maintenance minimale,  $ARA_1$ ,  $ARA_\infty$  et BP respectivement.
3. Approche 3 a des informations initiales supplémentaires. Les hypothèses supplémentaires et les fonctions de vraisemblance associées pour chacun des modèles sont les suivantes :
- Maintenance parfaite : Nous donnons l'information sur  $s$  et sur  $N_s$  pour l'Approche 3. Par conséquent, la fonction de vraisemblance est exprimée dans l'équation 3.6 (cas numéro 1 où  $s$  et  $N_s$  sont connus).
  - Maintenance minimale : Nous donnons seulement l'information sur  $s$  pour l'Approche 3. La fonction de vraisemblance s'exprime dans l'équation 3.9, où  $s$  est un paramètre connu.
  - Modèle  $ARA_1$  : Nous donnons la valeur de l'âge virtuel initial  $a_0$ . La fonction de vraisemblance associée est exprimée dans l'équation 3.11.
  - Modèle  $ARA_\infty$  : Nous donnons également la valeur de l'âge virtuel initial  $a_0$  et utilisons l'équation 3.11 comme la fonction de vraisemblance pour cette approche. Les âges effectifs sont calculés bien entendu avec l'hypothèse  $ARA_\infty$ .
  - Modèle BP : Nous donnons l'âge virtuel initial pour le modèle BP, c'est-à-dire la durée écoulée depuis la dernière maintenance parfaite avant  $s$ . La fonction de vraisemblance utilisée est donnée dans l'équation 3.15.

En résumé, l'Approche 1 suppose toujours que l'on se trouve dans le cas numéro 3 ( $s$  et  $N_s$  inconnus) pour les données en fenêtre d'observation. L'Approche 2, en revanche, considère que les données sont issues d'un système neuf, dont l'âge initial est nul. Dans l'Approche 3, nous avons pris des informations initiales supplémentaires concernant  $s$  ou  $N_s$ , afin d'évaluer la performance de l'Approche 1 et 2.

Les estimations sont obtenues par la méthode du maximum de vraisemblance avec la méthode d'optimisation **Nelder-Mead**. La performance des estimations est comparée avec le critère de l'**Erreur Quadratique Moyenne** EQM :

$$EQM(\hat{\theta}) = \mathbb{E}[(\theta - \hat{\theta})^2]$$

où  $\theta$  désigne la vraie valeur, et  $\hat{\theta}$  désigne la valeur estimée.

Les données sont issues de l'observation pendant un intervalle, avec un âge virtuel initial potentiellement non nul.

## 5.2 Plan d'échantillonnage

Les données (instants de défaillance) sont simulées suivant la Figure 3.1, de telles sortes qu'elles se trouvent dans une fenêtre d'observation. Selon l'hypothèse faite pour chaque modèle, les détails de la génération des données sont :

- Maintenance parfaite : Les observations en fenêtre sont générées selon l'hypothèse de l'Approche 3. Nous générons une trajectoire complète (l'âge initial nul), puis choisissons un âge  $s$  tel que  $N_s = 3$ . Les instants de défaillance après  $s$  sont obtenus selon la Figure 3.1. Le nombre  $N_s$  est faible, afin de limiter les incertitudes dans les calculs des convolutions dans la fonction de vraisemblance dans l'équation 3.6.
- Maintenance minimale : Un âge  $s$  est obtenu de telle sorte que  $s = \mathbb{E}[\tau_{10}]$ , valeur obtenue par des simulations de Monte Carlo.  $\tau_{10}$  désigne la 10ème défaillance d'un NHPP dont l'âge initial est nul.
- Modèle  $ARA_1$  : Nous supposons que le début de l'observation  $s$  coïncide avec une remise en route du système suite à une défaillance. On peut alors considérer que la dernière maintenance se produit à l'instant  $s^-$ . L'âge virtuel à cet instant  $V_s$  est considéré alors comme un paramètre supplémentaire  $a_0$  à estimer. Le nombre de défaillances non observées avant l'observation est limité à  $N_s = 10$ , puisque les défaillances sont peu nombreuses. On fixe  $a_0 = \mathbb{E}[A_{10}]$ , qui est déterminée numériquement. Les  $n$  instants de défaillance seront ensuite générés avec l'âge effectif initial non nul  $a_0$ .
- Modèle  $ARA_\infty$  et Brown-Proshchan : Nous supposons que les deux systèmes sont observés dans leur état stationnaire, et l'âge effectif suite à la première maintenance suit la loi asymptotique. La simulation est similaire à celle du modèle  $ARA_1$ . Nous choisissons l'instant  $s$  suffisamment grand pour que les modèles soient dans leur état stationnaire respectif.

## 5.3 Choix de paramètres

Nous choisissons la loi Weibull  $\mathcal{W}(\alpha, \beta)$  comme l'intensité initiale pour les modèles. Le paramètre  $\beta$ , paramètre reflétant la cinétique de vieillissement, est testé avec trois valeurs  $\{2, 3, 4\}$ . Ces choix correspondent à trois niveaux de vieillissement : modéré, assez important et très important. Le paramètre  $\alpha$ , étant un pseudo-facteur d'échelle, est fixé à 1 dans toutes les configurations.

Nous testons trois niveaux d'efficacité de maintenance  $\rho$  pour les modèles  $ARA_1$  et  $ARA_\infty$  :  $\rho \in \{0.2, 0.5, 0.8\}$ . Ces valeurs correspondent respectivement à des maintenances peu efficace, moyennement efficace et très efficace. Trois niveaux de probabilité de maintenance parfaite  $p$  du modèle BP sont également testés :  $p \in \{0.2, 0.5, 0.8\}$ . Plus  $p$  est proche de 1, plus la probabilité qu'une maintenance soit parfaite augmente.

Le nombre d'observations dans l'intervalle  $n$  est varié :  $n \in \{10, 20, 30, 50\}$ . Ces valeurs sont faibles pour des simulations numériques, mais elles peuvent prendre en compte la réalité où les défaillances sont peu fréquentes. Pour chaque modèle,  $K = 10000$  trajectoires sont utilisées. D'après les simulations, cette valeur est suffisante pour avoir une convergence empirique.

## 5.4 Maintenance parfaite

Nous présentons dans le Tableau 3.1 les résultats de l'Erreur Quadratique Moyenne empirique  $\widehat{EQM}$  pour les paramètres obtenus par trois approches d'estimation.

Dans les trois cas, les écarts entre les Approches 1 et 2 sont très faibles, mais l'Approche 2 est toujours meilleure. Le paramètre  $\beta$  est relativement bien estimé par les trois approches. Le cas  $\beta = 2$ , l'Approche 2 est la meilleure, tandis que pour  $\beta = 4$  l'Approche 3 est plus efficace que les Approches 1 et 2.



Tableau 3.1 – Résultats d'estimation  $\widehat{EQM}$  du modèle de maintenance parfaite avec  $\alpha = 1$ 

	$n$	Approche 1		Approche 2		Approche 3	
		Âge positif		Âge nul		Âge réel	
		$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
$\beta = 2$	10	0.18	0.55	0.18	0.52	0.18	0.53
	20	0.06	0.22	0.07	0.20	0.07	0.21
	30	0.04	0.11	0.04	0.11	0.04	0.11
	50	0.02	0.05	0.02	0.05	0.02	0.05
$\beta = 3$	10	0.17	1.25	0.17	0.90	0.17	0.91
	20	0.07	0.42	0.07	0.39	0.06	0.41
	30	0.04	0.25	0.04	0.24	0.04	0.24
	50	0.03	0.13	0.03	0.12	0.02	0.12
$\beta = 4$	10	0.17	1.31	0.15	1.25	0.15	1.25
	20	0.06	0.55	0.06	0.53	0.05	0.52
	30	0.04	0.41	0.04	0.40	0.03	0.39
	50	0.02	0.24	0.02	0.24	0.02	0.23

Pour le cas  $\beta = 2$  et les  $\beta \in (1, 2)$ , il est difficile d'en tirer une conclusion nette pour les trois approches. L'Approche 2 semble bien efficace, en particulier pour les faibles nombres d'observations. Lorsque celui-ci devient plus important, nous trouvons des estimations correctes. Il est possible que pour un système bien maintenu (faible  $\beta$ ), le manque d'information ait peu d'impact. Pour les fenêtres d'observations, les Approches 1 et 2 sont appropriées, avec des erreurs peu importantes par rapport au cas idéal (par l'Approche 3).

## 5.5 Maintenance minimale

Les résultats d'estimation pour les trois cas  $\alpha = 1, \beta \in \{2, 3, 4\}$  sont présentés dans le Tableau 3.2. Le tableau comporte des EQM empiriques en fonction du nombre de défaillances  $n$  obtenus par trois approches pour les paramètres  $\alpha, \beta$  et l'âge réel  $s$  estimés par l'Approche 1.

Les valeurs d'EQM du paramètre  $\alpha$  obtenues par l'Approche 2 indiquent des ordres de grandeur très différents des autres approches. Dans le cas  $\beta = 2$ , les valeurs d'EQM pour  $\beta$  sont meilleurs que celles d'Approche 1. Nous n'observons plus ce phénomène pour les grandes valeurs de  $\beta$ . Les estimations conjointes des  $(\alpha, \beta)$  proposent un système dont le comportement (vieillessement, durées inter-défaillance) est très différent de celui qui a généré les observations.

L'Approche 3 propose de meilleures estimations dans toutes les configurations. Dans cette approche, les valeurs EQM semblent diminuer plus rapidement que celles d'Approche 1 et 2. Pour un nombre important de données, les valeurs EQM de l'Approche 1 se rapprochent de celles de l'Approche 3.

Les estimations pour l'âge réel  $s$  par l'Approche 1 sont améliorées lorsque le nombre de défaillance  $n$  augmente. En particulier, les valeurs EQM montrent que cet âge est mieux estimé pour les grandes valeurs de  $\beta$ , ou pour les systèmes qui se dégradent rapidement.

Les écarts entre l'Approche 1 et 2 pour les grandes valeurs de  $\beta$  permettent de montrer qu'en adoptant une modélisation adaptée et réaliste (utilisé dans l'Approche 1), on peut estimer correctement des paramètres du système considéré. Les estimations de  $\alpha$  indiquent que les résultats

Tableau 3.2 – Résultats d'estimation  $\widehat{EQM}$  du modèle de maintenance minimale avec  $\alpha = 1$

	$n$	Approche 1			Approche 2		Approche 3	
		Âge positif			Âge nul		Âge réel	
		$s$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
$\beta = 2$	10	4.88	3.76	2.32	37.69	1.82	2.60	1.75
	20	4.23	3.29	1.81	30.2	1.07	2.18	1.05
	30	3.90	2.73	1.22	25.16	0.64	1.90	0.49
	50	3.27	2.03	0.68	20.83	0.46	1.52	0.21
$\beta = 3$	10	2.87	3.15	2.21	192	3.56	2.15	1.81
	20	2.56	2.74	1.79	184	2.99	1.96	1.18
	30	2.17	2.41	1.43	85	2.58	1.54	0.74
	50	1.99	2.00	1.04	60	1.89	1.29	0.40
$\beta = 4$	10	1.36	2.66	1.40	154	4.88	2.27	1.30
	20	1.21	2.28	1.18	98	3.73	1.84	1.08
	30	1.12	1.73	0.99	72	3.18	1.25	0.97
	50	0.70	1.43	0.83	55	2.42	1.09	0.63

de l'Approche 2 mènent à un système dont le comportement est très différent de celui utilisé pour générer les données. Les simulations montrent l'importance de la prise en compte de l'âge initial non nul, afin d'avoir des estimations cohérentes avec le système en considération. Les cas des valeurs  $\beta$  dans l'intervalle  $(1, 2]$  ne sont pas concluants pour départager l'Approche 1 de l'Approche 2. Pour les plus grandes valeurs de  $\beta$ , nous conseillons l'utilisation de l'Approche 1.

## 5.6 Maintenance $ARA_1$

Les résultats des trois approches sont présentés dans les Tableaux 3.3, 3.4 et 3.5. Ces résultats correspondent à neuf configurations :  $(\alpha = 1, \beta \in \{2, 3, 4\}, \rho \in \{0.2, 0.5, 0.8\})$ .

Nous constatons un cas particulier lorsque le  $\beta = 2$  : les valeurs EQM de l'Approche 2 sont plus faibles que celles des Approches 1 et 3. Les estimations et les valeurs EQM de  $\alpha$  indiquent des configurations très différentes des paramètres utilisés pour la génération des données. Les valeurs EQM de  $\rho$  sont plus mauvaises que les Approches 1 et 3. Ce comportement des estimateurs de  $\beta$  est déjà observé dans le cas du modèle de maintenance minimale NHPP. D'autres valeurs de  $\beta$  dans l'intervalle  $(1, 2)$  ont été testées, mais le comportement persiste.

Lorsque  $\beta > 2$ , ( $\beta = 3, 4$ ), nous retrouvons des comportements attendus. Dans toutes les configurations, les estimations obtenues par l'Approche 3 sont les meilleures. L'Approche 1 est maintenant bien meilleure que celles de l'Approche 2. Les valeurs EQM pour le paramètre  $\beta$  d'Approche 1 et 3 semblent assez proches, et celles-ci sont réduites lorsque  $n$  augmente. Les estimations de  $\beta$  de l'Approche 2 sont mauvaises pour le cas  $\beta = 4$ . Le paramètre  $\rho$  est bien estimé par l'Approche 1 et 3. Les valeurs EQM du paramètre  $\alpha$  par l'Approche 1 semblent être réduites lorsque  $n$  augmente, mais restent assez mauvaises.

Les résultats obtenus par l'Approche 2 montrent un écart très important avec les vraies valeurs des paramètres, en particulier pour le paramètre  $\alpha$ . L'Approche 2 propose des estimations à partir des données, sans pour autant considérer un dynamisme de vieillissement proche de la réalité (manque d'information et vieillissement plus rapide).

Tableau 3.3 – Modèle  $ARA_1$  Résultats d'estimation  $\widehat{EQM}$  pour les cas ( $\alpha = 1, \beta = 2, \rho \in \{0.2, 0.5, 0.8\}$ )

	$n$	Approche 1			Approche 2			Approche 3		
		Âge positif			Âge nul			Âge réel		
		$\alpha$	$\beta$	$\rho$	$\alpha$	$\beta$	$\rho$	$\alpha$	$\beta$	$\rho$
$\rho = 0.2$	10	4.69	2.93	0.29	1335	1.65	0.33	1.92	2.89	0.20
	20	3.95	2.89	0.22	469	0.77	0.77	2.30	2.48	0.19
	30	2.96	2.52	0.22	259	0.60	0.37	2.20	2.20	0.18
	50	2.12	1.95	0.21	171	0.48	0.27	1.65	1.78	0.17
$\rho = 0.5$	10	6.04	3.21	0.16	3325	1.48	0.16	1.94	2.03	0.12
	20	3.25	2.46	0.15	223	0.54	0.14	1.46	1.85	0.11
	30	3.03	2.42	0.14	113	0.43	0.13	1.38	1.68	0.09
	50	2.78	1.92	0.09	75	0.34	0.10	1.18	1.22	0.05
$\rho = 0.8$	10	4.98	2.71	0.19	169	2.92	0.21	1.37	2.28	0.18
	20	3.48	1.91	0.17	32	1.51	0.18	1.03	1.62	0.15
	30	2.95	1.35	0.16	7.94	1.18	0.17	0.91	1.29	0.13
	50	2.70	1.08	0.14	7.03	0.78	0.15	0.52	1.04	0.12

Tableau 3.4 – Modèle  $ARA_1$  Résultats d'estimation  $\widehat{EQM}$  pour les cas ( $\alpha = 1, \beta = 3, \rho \in \{0.2, 0.5, 0.8\}$ )

	$n$	Approche 1			Approche 2			Approche 3		
		Âge positif			Âge nul			Âge réel		
		$\alpha$	$\beta$	$\rho$	$\alpha$	$\beta$	$\rho$	$\alpha$	$\beta$	$\rho$
$\rho = 0.2$	10	6.86	1.94	0.16	1589	2.72	0.22	2.47	1.53	0.12
	20	5.03	1.80	0.15	1435	2.24	0.23	2.63	1.28	0.10
	30	4.21	1.77	0.14	1315	2.13	0.22	2.53	1.14	0.09
	50	4.14	1.57	0.12	1254	1.89	0.20	2.00	1.01	0.08
$\rho = 0.5$	10	6.65	2.22	0.15	1985	2.25	0.19	1.94	2.16	0.13
	20	5.52	1.83	0.14	1158	1.91	0.17	1.53	1.62	0.12
	30	4.91	1.63	0.13	714	1.79	0.16	1.29	1.46	0.10
	50	4.24	1.29	0.13	452	1.44	0.15	0.91	1.32	0.09
$\rho = 0.8$	10	4.17	1.73	0.10	709	1.81	0.12	0.68	1.53	0.09
	20	3.32	1.65	0.08	35	1.67	0.09	0.59	1.41	0.07
	30	2.84	1.62	0.07	26	1.65	0.08	0.44	1.25	0.06
	50	2.62	1.34	0.05	24	1.40	0.05	0.30	1.19	0.05

Les résultats numériques nous confirment que le manque d'information sur l'âge initial a des conséquences non négligeables sur l'estimation. La comparaison entre Approche 1 et Approche 3 montre que l'extension proposée pour le modèle  $ARA_1$  peut nous aider à trouver des bons paramètres du système en question. Nous constatons que les estimations de  $\beta$  dans le cas  $\beta = 2$

Tableau 3.5 – Modèle  $ARA_1$  Résultats d'estimation  $\widehat{EQM}$  pour les cas  $(\alpha = 1, \beta = 4, \rho \in \{0.2, 0.5, 0.8\})$

	$n$	Approche 1			Approche 2			Approche 3		
		Âge positif			Âge nul			Âge réel		
		$\alpha$	$\beta$	$\rho$	$\alpha$	$\beta$	$\rho$	$\alpha$	$\beta$	$\rho$
$\rho = 0.2$	10	6.70	1.59	0.11	6412	4.87	0.23	2.92	1.48	0.07
	20	4.41	1.37	0.10	4801	4.32	0.21	2.84	1.16	0.06
	30	3.45	1.13	0.08	2815	4.08	0.19	2.19	0.99	0.05
	40	3.17	0.92	0.07	2510	3.78	0.16	1.56	0.89	0.05
$\rho = 0.5$	10	6.27	1.88	0.15	3428	6.65	0.15	4.35	1.74	0.09
	20	5.25	1.64	0.13	1799	6.34	0.13	4.27	1.62	0.08
	30	4.59	1.51	0.11	1318	6.13	0.12	3.83	1.36	0.06
	50	3.83	1.39	0.09	784	5.62	0.10	2.60	1.23	0.05
$\rho = 0.8$	10	4.64	2.25	0.14	3584	3.88	0.15	0.84	1.64	0.09
	20	4.11	1.91	0.08	416	3.43	0.11	0.71	1.48	0.06
	30	3.83	1.58	0.06	394	3.29	0.10	0.58	1.36	0.05
	50	3.33	1.23	0.05	260	2.90	0.05	0.32	1.18	0.04

ne sont pas convaincantes. Nous avons ce même constat pour le modèle de maintenance minimale NHPP, et pour les modèle  $ARA_\infty$  et BP également. Ce phénomène a été aussi soulevé dans l'estimation pour la loi Weibull à trois paramètres [150].

### 5.7 Maintenance $ARA_\infty$

Les résultats obtenus par les trois approches sont présentés dans les Tableaux 3.6, 3.7 et 3.8. Ces résultats correspondent à neuf configurations :  $(\alpha = 1, \beta \in \{2, 3, 4\}, \rho \in \{0.2, 0.5, 0.8\})$ .

Les valeurs EQM montrent que l'Approche 3 estime très bien les paramètres. La qualité des estimations par l'Approche 1 s'approche de celle de l'Approche 3, et les écarts sont réduits lorsque la maintenance devient efficace ( $\rho = 0.8$ ). Cela pourrait confirmer la validité de l'hypothèse faite sur la convergence du modèle  $ARA_\infty$  (utilisée dans la Méthode 1). En particulier, nous constatons que l'Approche 1 estime très bien le paramètre  $\rho$  dans le cas de grandes valeurs de  $\beta$  (3 et 4), ou de bonne efficacité ( $\rho = 0.8$ ).

La différence entre l'Approche 1 et 2 est plus marquante pour  $\rho$  faible, et elle devient moins importante en augmentant l'efficacité de maintenance ( $\rho = 0.8$ ) ou le nombre de défaillances  $n$ . En effet, lorsque la maintenance est efficace, l'âge virtuel est maintenu à un niveau proche de 0 (d'après la relation entre l'efficacité et l'âge virtuel). En outre, quand le nombre d'observations est important, la contribution de la première durée de vie résiduelle (loi de  $T_1$ ) est limitée (on a un même constat pour le modèle de maintenance parfaite). Ces éléments font que l'effet de l'âge virtuel initial est limité.

Pour le cas du  $\beta = 2$ , nous observons que les Approches 1 et 3 ne sont pas nettement meilleures que l'Approche 2. Nous avons testé d'autres valeurs de  $\beta$  dans l'intervalle  $(1, 2]$ , et nous arrivons au même constat. Dans les simulations du modèle BP, un comportement similaire est observé.

Les résultats d'estimation nous montrent que l'extension des méthodes d'estimation pour le

Tableau 3.6 – Modèle  $ARA_\infty$  : Résultats d'estimation  $\widehat{EQM}$  pour les cas ( $\alpha = 1, \beta = 2, \rho \in \{0.2, 0.5, 0.8\}$ )

	$n$	Approche 1 Âge positif			Approche 2 Âge nul			Approche 3 Âge réel		
		$\alpha$	$\beta$	$\rho$	$\alpha$	$\beta$	$\rho$	$\alpha$	$\beta$	$\rho$
$\rho = 0.2$	10	1.98	1.62	0.37	5.94	1.45	0.34	2.58	1.58	0.08
	20	1.54	1.38	0.17	5.18	0.96	0.24	2.25	0.97	0.08
	30	1.30	1.14	0.06	4.87	0.65	0.22	2.00	0.41	0.06
	50	0.87	0.88	0.05	4.71	0.58	0.21	1.82	0.37	0.05
$\rho = 0.5$	10	1.56	2.39	0.27	1.97	2.63	0.18	1.97	2.72	0.13
	20	1.20	2.17	0.24	1.15	1.34	0.15	0.95	1.85	0.11
	30	1.08	1.70	0.22	2.46	1.04	0.15	0.88	1.43	0.10
	50	0.94	1.22	0.17	1.98	0.87	0.09	0.70	0.92	0.08
$\rho = 0.8$	10	1.18	1.45	0.14	1.02	3.18	0.10	0.76	1.15	0.11
	20	0.26	0.83	0.06	0.57	1.54	0.09	0.56	0.90	0.09
	30	0.19	0.59	0.06	0.40	0.95	0.07	0.46	0.63	0.09
	50	0.13	0.32	0.03	0.29	0.55	0.06	0.27	0.35	0.06

Tableau 3.7 – Modèle  $ARA_\infty$  : Résultats d'estimation  $\widehat{EQM}$  pour les cas ( $\alpha = 1, \beta = 3, \rho \in \{0.2, 0.5, 0.8\}$ )

	$n$	Approche 1 Âge positif			Approche 2 Âge nul			Approche 3 Âge réel		
		$\alpha$	$\beta$	$\rho$	$\alpha$	$\beta$	$\rho$	$\alpha$	$\beta$	$\rho$
$\rho = 0.2$	10	4.02	2.29	0.12	7.59	4.19	0.23	2.79	2.09	0.04
	20	3.11	2.06	0.04	6.42	2.63	0.16	1.75	1.76	0.02
	30	1.85	1.87	0.02	5.89	2.13	0.15	1.49	1.64	0.01
	50	1.84	1.15	0.02	5.54	1.65	0.11	1.22	1.13	0.01
$\rho = 0.5$	10	1.51	2.61	0.19	3.27	2.81	0.24	1.47	1.81	0.08
	20	1.49	1.82	0.11	2.57	1.86	0.11	1.35	1.44	0.06
	30	1.38	1.37	0.08	2.21	1.42	0.09	1.08	1.30	0.05
	50	1.04	0.64	0.05	1.45	0.85	0.06	0.86	0.52	0.03
$\rho = 0.8$	10	0.54	3.73	0.05	1.56	3.38	0.06	0.62	1.31	0.04
	20	0.35	1.46	0.03	0.67	1.56	0.05	0.36	0.95	0.03
	30	0.26	0.88	0.02	0.55	1.26	0.04	0.25	0.87	0.03
	50	0.23	0.57	0.02	0.39	0.83	0.02	0.22	0.55	0.02

$ARA_\infty$  utilisée dans l'Approche 1 avec l'âge initial inconnu (résultant de l'observation manquante avant la fenêtre d'observation) est adaptée. L'hypothèse sur la convergence rapide vers l'état stationnaire est aussi plausible, comme le montre bien la comparaison entre l'Approche 1 et 3. Les résultats obtenus par l'Approche 2 nous renseignent que le manque d'information aura un

Tableau 3.8 – Modèle  $ARA_\infty$  : Résultats d'estimation  $\widehat{EQM}$  pour les cas  $(\alpha = 1, \beta = 4, \rho \in \{0.2, 0.5, 0.8\})$

	$n$	Approche 1			Approche 2			Approche 3		
		Âge positif			Âge nul			Âge réel		
		$\alpha$	$\beta$	$\rho$	$\alpha$	$\beta$	$\rho$	$\alpha$	$\beta$	$\rho$
$\rho = 0.2$	10	5.02	6.03	0.04	29	7.05	0.29	4.11	4.25	0.01
	20	3.28	4.60	0.02	24	5.91	0.21	2.75	2.21	0.01
	30	2.68	3.49	0.01	21	5.25	0.16	1.86	1.68	0.01
	50	2.59	1.97	0.01	16	5.03	0.11	1.55	1.50	0.005
$\rho = 0.5$	10	2.45	3.10	0.09	8.57	3.63	0.14	2.72	2.26	0.06
	20	2.18	2.19	0.06	6.72	2.40	0.10	1.72	1.62	0.04
	30	1.95	1.67	0.04	4.43	1.79	0.07	1.61	1.44	0.03
	50	1.68	1.37	0.03	3.06	1.42	0.05	1.20	1.12	0.02
$\rho = 0.8$	10	0.80	2.08	0.04	2.12	2.67	0.04	1.25	1.83	0.05
	20	0.61	1.62	0.03	0.62	1.76	0.03	0.55	1.44	0.03
	30	0.59	1.33	0.03	0.62	1.33	0.03	0.37	1.21	0.03
	50	0.51	1.08	0.02	0.55	1.09	0.02	0.30	1.01	0.02

impact significatif sur l'analyse de données de défaillance.

## 5.8 Maintenance Brown-Prochan

Nous présentons les résultats de la simulation du modèle BP dans les Tableaux 3.9, 3.10 et 3.11. Ces résultats correspondent à neuf configurations :  $(\alpha = 1, \beta \in \{2, 3, 4\}, p \in \{0.2, 0.5, 0.8\})$ .

Les résultat de l'Approche 3, dans laquelle l'âge virtuel initial  $a_0$  est connu, sont également présentés. L'Approche 3 est utilisée à titre de comparaison afin de montrer que l'hypothèse sur l'état stationnaire (Approche 1) est raisonnable pour une grande majorité des systèmes.

Nous observons qu'en termes d'EQM, l'Approche 3 renvoie de manière générale de meilleures estimations. Cette performance est tout à fait logique, compte tenu de la situation idéale que représente cette méthode.

D'après les résultats numériques, nous constatons que l'Approche 1 donne tout de même des résultats satisfaisants par rapport à l'Approche 3. Dans les cas  $\beta = 3$  et 4, les estimations de l'Approche 1 sont très proches de celles de l'Approche 3, ce qui confirme que l'hypothèse de stationnarité sur les systèmes vieillissants est plausible. Pour ces même cas, les estimations de l'Approche 2 s'écartent des valeurs fixées. Nous constatons tout de même que les estimations convergent bien lorsque le nombre de données devient plus élevé. C'est un comportement typique d'une étude de l'estimation en présence des renouvellement.

Pour le cas du  $\beta = 2$ , nous observons que les estimations pour  $\beta$  de l'Approche 1 et Approche 3 ne sont pas nettement meilleures que celles de l'Approche 2. D'autres valeurs de  $\beta$  dans l'intervalle  $(1, 2]$  sont aussi testées et mènent au même constat. Il est probable que ce phénomène soit engendré par la forme particulière de la loi de Weibull lorsque le paramètre  $\beta$  est compris dans cet intervalle. Des analyses dans la littérature avec la loi Weibull de trois paramètres mènent à une observation similaire [150]. En ce qui concerne  $\alpha$  et  $p$ , les estimations des Approches 1 et 2 semblent acceptables, par rapport à celles de l'Approche 3.

Tableau 3.9 – Modèle BP : Résultats d'estimation  $\widehat{EQM}$  pour les cas ( $\alpha = 1, \beta = 2, p \in \{0.2, 0.5, 0.8\}$ )

	$n$	Approche 1			Approche 2			Approche 3		
		Âge positif			Âge nul			Âge réel		
		$\alpha$	$\beta$	$p$	$\alpha$	$\beta$	$p$	$\alpha$	$\beta$	$p$
$p = 0.2$	10	6.87	4.59	0.14	10.61	3.16	0.17	4.82	2.77	0.13
	20	4.49	1.76	0.10	7.85	1.75	0.15	3.37	1.34	0.09
	30	3.17	1.34	0.08	6.78	1.51	0.11	2.22	0.97	0.07
	50	2.68	0.95	0.07	5.84	1.25	0.10	1.79	0.64	0.05
$p = 0.5$	10	9.71	3.81	0.16	6.67	2.50	0.24	1.42	2.40	0.20
	20	0.79	1.31	0.12	1.00	1.23	0.17	0.73	1.21	0.08
	30	0.43	0.93	0.05	0.52	0.81	0.07	0.49	0.72	0.07
	50	0.32	0.46	0.03	0.38	0.40	0.04	0.23	0.38	0.04
$p = 0.8$	10	1.02	4.45	0.05	1.39	3.64	0.10	0.66	1.82	0.09
	20	0.25	1.23	0.03	0.28	1.15	0.03	0.30	0.79	0.05
	30	0.13	0.71	0.02	0.14	0.65	0.02	0.16	0.45	0.04
	50	0.09	0.47	0.01	0.10	0.35	0.01	0.08	0.26	0.01

Tableau 3.10 – Modèle BP : Résultats d'estimation  $\widehat{EQM}$  pour les cas ( $\alpha = 1, \beta = 3, p \in \{0.2, 0.5, 0.8\}$ )

	$n$	Approche 1			Approche 2			Approche 3		
		Âge positif			Âge nul			Âge réel		
		$\alpha$	$\beta$	$p$	$\alpha$	$\beta$	$p$	$\alpha$	$\beta$	$p$
$p = 0.2$	10	5.35	4.45	0.11	13.61	5.20	0.33	3.49	2.93	0.11
	20	2.19	1.64	0.04	11.62	4.19	0.21	1.34	1.46	0.04
	30	0.82	0.83	0.02	10.29	3.54	0.16	0.55	0.83	0.01
	50	0.32	0.41	0.01	6.82	2.35	0.07	0.27	0.33	0.01
$p = 0.5$	10	2.92	3.96	0.12	3.11	4.58	0.21	1.56	2.92	0.15
	20	0.68	1.87	0.06	1.44	2.67	0.13	0.61	1.62	0.07
	30	0.40	1.11	0.04	1.12	1.97	0.09	0.33	0.91	0.04
	50	0.19	0.58	0.02	0.53	1.19	0.05	0.17	0.51	0.02
$p = 0.8$	10	0.75	2.45	0.05	0.89	3.48	0.05	0.51	2.41	0.06
	20	0.28	1.37	0.03	0.34	1.43	0.04	0.26	1.39	0.03
	30	0.16	0.86	0.02	0.17	0.91	0.02	0.16	0.79	0.02
	50	0.09	0.45	0.01	0.10	0.52	0.02	0.09	0.45	0.01

Nous avons des conclusions similaires que dans le cas du modèle  $ARA_\infty$  : la prise en compte de l'âge initial permet d'améliorer les estimations, mais lorsque le nombre d'observations augmente, les performances des méthodes d'estimation sont similaires. Toutefois, il faut rester vigilant lorsque les estimations trouvées indiquent que le paramètre  $\beta$  est dans l'intervalle  $(1, 2]$ . Des

Tableau 3.11 – Modèle BP : Résultats d'estimation  $\widehat{EQM}$  pour les cas ( $\alpha = 1, \beta = 4, p \in \{0.2, 0.5, 0.8\}$ )

	$n$	Approche 1			Approche 2			Approche 3		
		Âge positif			Âge nul			Âge réel		
		$\alpha$	$\beta$	$p$	$\alpha$	$\beta$	$p$	$\alpha$	$\beta$	$p$
$p = 0.2$	10	3.28	3.26	0.05	12	11	0.37	2.70	2.60	0.06
	20	1.28	1.71	0.02	11	8.54	0.22	0.78	1.67	0.02
	30	0.41	1.12	0.01	9.46	7.09	0.17	0.35	0.99	0.01
	50	0.18	0.56	0.01	5.43	4.21	0.07	0.20	0.56	0.01
$p = 0.5$	10	2.19	3.43	0.08	5.88	9.05	0.19	0.84	2.59	0.09
	20	0.36	1.75	0.03	1.75	5.05	0.10	0.30	1.64	0.04
	30	0.22	1.16	0.02	1.25	3.27	0.06	0.21	1.11	0.02
	50	0.10	0.59	0.01	0.45	1.53	0.03	0.10	0.58	0.01
$p = 0.8$	10	0.81	3.09	0.04	1.08	5.89	0.06	0.59	2.97	0.05
	20	0.23	1.70	0.02	0.27	2.40	0.03	0.19	1.55	0.02
	30	0.13	0.99	0.02	0.15	1.31	0.02	0.12	0.93	0.01
	50	0.07	0.58	0.01	0.08	0.67	0.01	0.07	0.58	0.01

analyses en profondeur méritent d'être abordées pour comprendre ce comportement instable.

## 5.9 Discussion autour des simulations

Les estimations numériques nous montrent que les valeurs empiriques EQM des estimateurs du maximum de vraisemblance diminuent lorsque le nombre de défaillance  $n$  augmente. Ces estimateurs semblent converger, même si cette convergence n'a pas été l'objet premier de notre étude (nous étant limité à un maximum de 50 observations). L'Approche 3 est la meilleure dans la plupart des cas. Les valeurs EQM de l'Approche 1 semblent bien approcher de celles de l'Approche 3. L'Approche 2 est la moins bonne dans les cas où  $\beta$  est grand. Nous constatons un cas singulier pour  $\beta = 2$  : les valeurs EQM de l'Approche 2 sont assez faibles, voire plus faibles que celles de l'Approche 1. Les écarts sont plus significatifs pour les modèles NHPP et  $ARA_1$ . Des écarts moins importants sont constatés pour les modèles  $ARA_\infty$  et BP. Nous avons effectué d'autres tests sur les valeurs dans l'intervalle  $(1, 2)$  et le phénomène persiste. Cela disparaît lorsque  $\beta > 2$ .

D'autre part, nous constatons que les estimations de  $\alpha$  pour les modèles supposant l'âge initial inconnu (résultats de l'Approche 1 du modèle NHPP,  $ARA_1$ ) ne sont pas très convaincants. Les estimations de  $\beta$  et  $\rho$  restent acceptables. Pour des modèles admettant un état stationnaire (maintenance parfaite,  $WARA_\infty$ , BP), les trois paramètres sont bien estimés par l'Approche 1.

Nous conseillons l'utilisation des extensions de méthodes d'estimation sous l'hypothèse  $ARA_\infty$  et Brown-Proshchan. L'approche proposée pour les modèles NHPP et  $ARA_1$  est aussi acceptable pour  $\beta$  et  $\rho$ , mais à améliorer pour les estimations de  $\alpha$ . Nous mettons en garde les cas de  $\beta$  appartenant à l'intervalle  $(1, 2]$ .



## 6 Applications à des jeux de données réelles

Nous proposons l'application des extensions des méthodes d'estimation sur des jeux de données réelles de la littérature. Ces données font l'objet de plusieurs analyses de fiabilité des systèmes industriels.

### 6.1 Modèle $ARA_1$

Nous nous intéressons aux défaillances d'une photocopieuse de bureau d'usage normal. Les données sont initialement présentées et analysées dans [14]. Les dates de maintenance sont présentées dans le Tableau 3.12. Une de maintenance consiste à réparer et entretenir les composants, et il se peut que plusieurs composants soient affectés après une opération de maintenance. Pour cette étude, nous ne considérons que le système (photocopieuse) en entier : les maintenances effectuées à une même date sont alors regroupées comme dans [103].

Tableau 3.12 – Dates de maintenance d'une photocopieuse [14]

29*	128*	227*	276	397	468	492	516	563	609	677	722	810	853	916
956	996	1016	1074	1111	1165	1217	1266	1281	1312	1356	1410	1412		
1436	1448	1460	1493	1514	1551	1560	1583	1597	1609	1625	1640	1650		

Sans avoir des informations supplémentaires, nous supposons que la collecte des données débute à l'instant zéro et se termine par une défaillance. Pour tester les méthodes d'estimation d'une fenêtre d'observation, trois premières dates de maintenance (29, 128, 227 identifié par \* dans le tableau de données) sont écartées, et le reste est considéré comme des données avec l'âge initial inconnu. Nous comparons ensuite les estimations du jeu de données complètes avec celui de données manquantes. Les résultats sont présentés dans le Tableau 3.13. Nous constatons tout d'abord que les maintenances sont très bien réalisées, avec une efficacité presque parfaite (0.95). Lorsque l'on ignore les trois premières défaillances, l'Approche 1 renvoie une estimation correcte pour  $\beta$  et  $\rho$ . L'âge virtuel initial est estimé à 16 jours, qui valide l'effet d'une très bonne maintenance sur l'âge de la photocopieuse. Avec l'Approche 2, le vieillissement  $\beta$  est estimé à une unité de moins (3.33 comparé à 4.19 et 4.05), ce qui implique que la photocopieuse se dégrade moins vite selon l'Approche 2. Les maintenances sont assez fréquentes vers la fin de la collecte des données, alors il est important d'estimer correctement le vieillissement pour pouvoir planifier des opérations de maintenance adaptées. A titre de comparaison, nous présentons la durée moyenne jusqu'à la prochaine maintenance estimée  $\mathbb{E}[X_{n+1}|A_n]$  par les approches 1, 2 et avec des données complètes. Les durées estimées par les deux approches sont plus courtes que celle estimée avec les données complètes. Toutefois, le risque d'avoir une panne plus tôt que prévue est plus élevé lorsque que l'on se base sur les estimations de l'Approche 2. Il serait alors plus prudent d'effectuer des maintenances d'après les estimations par l'Approche 1.

Tableau 3.13 – Estimation des données de défaillance de photocopieuse

Paramètre	Données complètes	Données arrangées	
		Approche 1	Approche 2
$\hat{\alpha}$	$5.36 \times 10^{-9}$	$6.05 \times 10^{-10}$	$2.96 \times 10^{-8}$
$\hat{\beta}$	4.19	4.05	3.33
$\hat{\rho}$	0.95	0.83	0.82
$\hat{a}_0$	Non appliqué	16	0
$\mathbb{E}[X_{n+1} A_n]$	19	12	17

## 6.2 Modèle $ARA_\infty$

L'extension de la méthode d'estimation du modèle  $ARA_\infty$  est testée avec les données de trois générateurs de secours dans trois centrales nucléaires présentées dans [77] (voir Tableau 3.14). Les données couvrent une période de deux ans, entre 1976 au 1978. Les auteurs insistent sur le fait que les générateurs ont été mis en service bien avant la collecte des données, mais les informations avant cette date ne sont pas connues, c'est-à-dire que l'on ne connaît pas l'âge, ni le dynamique de vieillissement.

Tableau 3.14 – Dates de défaillance de trois générateurs diesel de secours pendant la période 1976-1978 [77]

Localisation	Dates de défaillance
Calvert Cliffs	210 219 298 322 349 418 441 500 517 519 533 537
	557 559 564 648 670 684 685 740 830 833 943 1082
Big Rock Point	83 136 217 224 245 301 308 322 336 354 361 362
	368 375 448 503 511 582 658 693 763 770
Zion I and II	172 267 482 491 679 686 733 736 739 745 747 867
	928 934 987 1084

Nous considérons que chaque générateur a sa propre intensité de défaillance, puisqu'ils sont localisés à trois endroits différents. L'hypothèse de maintenance parfaite est exclue, comme il est difficile de remettre un tel système à neuf par des maintenances. Nous avons appliqué les tests de tendance (Lewis-Robinson, Laplace) pour écarter l'hypothèse de maintenance minimale par processus de puissance. Le modèle  $ARA_\infty$  semble le candidat approprié pour ces données. Nous utiliserons alors le modèle  $WARA_\infty$  en régime stationnaire pour analyser les données. Les estimations des lois de vieillissement de trois jeux de données sont présentées dans le Tableau 3.15.

L'Approche 1 estime que les niveaux de dégradation des trois générateurs sont modérés ( $\hat{\beta} < 2$ ). L'ordre de grandeur des estimateurs de  $\beta$  est le même, ce qui semble cohérent, puisque nous étudions le même type de systèmes. Les maintenances sont estimées peu efficaces (avec des estimateurs de  $\rho$  proches de 0).

Les résultats suggérés par l'Approche 2 sont plus contrastés. Pour les générateurs à Big Rock Point et Zion, cette approche estime une dégradation plus forte, où la plus marquante est le générateur à Zion. Les fortes dégradations sont accompagnées d'une maintenance légèrement meilleure. Le cas du générateur à Calvert Cliffs est plus déroutant. L'estimation du paramètre

Tableau 3.15 – Résultats d’estimation de trois générateurs diesel de secours

	Approche 1			Approche 2		
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\rho}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\rho}$
Calvert Cliffs	0.004	1.24	0.03	0.07	0.74	0.97
Big Rock Point	0.02	1.03	0.04	0.001	1.55	0.12
Zion I and II	0.002	1.26	0.03	$4.62 \times 10^{-7}$	2.58	0.09

de dégradation ( $\hat{\beta} = 0.74$ ) indique que le système rajeunit au cours du temps. Dans cette configuration, les maintenances avec une efficacité positive deviennent des opérations nuisibles. Ce résultat est totalement inapproprié dans le contexte d’un système industriel vieillissant. En effet, cela correspond plutôt à la phase de jeunesse d’un système industriel [34]. De ce fait, on ne peut pas accepter la proposition de l’Approche 2.

En conclusion, les résultats de l’Approche 2 ne sont pas cohérents avec l’hypothèse de systèmes vieillissants. Il y a une très forte hétérogénéité entre les estimations de trois générateurs. Nous obtenons une bien plus grande cohérence dans l’analyse des résultats issus de l’Approche 1.

### 6.3 Modèle Brown-Proshan

Nous testons l’extension de la méthode d’estimation du modèle BP avec les données de défaillance de la climatisation d’une flotte d’avion, présenté dans [118]. Nous nous intéressons aux 3 avions ayant le nombre de défaillance le plus important. Les dates de maintenance sont présentées dans le Tableau 3.16. Dans la source de ces données, il n’y a pas d’indication concernant l’âge au début de l’observation. Nous supposons que ces systèmes sont neufs, comme cela a été fait dans [118]. Pour obtenir des données conformes à notre étude, les 4 premiers instants de défaillances (identifiées par \* dans le tableau de données) sont écartées. Nous comparerons les résultats d’estimation des Approches 1 et 2 sur les données incomplètes avec ceux sur le jeu de données complet.

Tableau 3.16 – Instants de défaillance de la climatisation d’une flotte d’avion [118]

Avion	Dates de défaillance
7909	90* 100* 160* 346* 407 456 470 494 550 570 649 733 777
	836 865 983 1008 1164 1474 1550 1576 1620 1643 1705
7913	97* 148* 159* 163* 304 322 464 532 609 689 690 706 812 1018 1100
	1154 1185 1401 1447 1558 1597 1660 1678 1869 1887 2050 2074
7914	50* 94* 196* 268* 290 329 332 347 544 732 811 899 945 950 955
	991 1013 1152 1362 1459 1489 1512 1525 1539

Les résultats d’estimation par les trois approches sont présentés dans le Tableau 3.17. Nous constatons que la probabilité de maintenance parfaite  $p$  et la valeur de  $\beta$  ont un impact important sur le résultat final. L’Approche 1 estime bien le paramètre  $\beta$  dans le cas où celui-ci est estimé plus grand que 2 (dans le cas de l’avion 7909 et 7914). Nous constatons que dans ces cas, les efficacités sont faibles. En revanche, lorsque  $\beta$  est estimé plus petit que 2 (l’avion 7913), les écarts des estimations sont considérables, pour  $\beta$  et pour  $p$  également.

En conclusion, l’avantage d’une méthode d’estimation plus réaliste proposée dans ce chapitre

Tableau 3.17 – Résultats d'estimation d'une flotte d'avions avec le modèle Brown-Proschan

	Données complètes			Approche 1			Approche 2		
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{p}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{p}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{p}$
Avion 7909	$3.89 \times 10^{-6}$	2.34	0.18	$1.22 \times 10^{-6}$	2.33	0.08	$4.33 \times 10^{-8}$	3.00	0.30
Avion 7913	$6.7 \times 10^{-4}$	1.85	0.40	$3.36 \times 10^{-5}$	1.99	0.31	$3.1 \times 10^{-5}$	1.60	0.27
Avion 7914	$3.72 \times 10^{-6}$	2.42	0.18	$5.75 \times 10^{-6}$	2.23	0.13	$2.06 \times 10^{-9}$	3.63	0.21

pour le modèle Brown-Proschan est mis en évidence numériquement par l'Approche 1. Toutefois, il faut rester vigilance dans notre analyse.

## 7 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'extension des méthodes d'estimation pour les modèles de maintenance sur des fenêtres d'observation. Une fenêtre d'observation est une période de temps, au cours de laquelle les informations sont disponibles et les événements sont observés. La majorité des événements qui se produisent en dehors de cette période est inconnue. Cette situation peut être rencontrée lors de l'achat des matériels d'occasion, ou pour des matériels dont l'enregistrement des données lors de la période de jeunesse est perdu. Cela peut se produire lors d'un changement de technologie de stockage des informations (par exemple du physique au digital). La perte des informations peut aussi être causée par des équipements de mesure non adaptés.

Dans ce cadre, les extensions de méthodes d'estimation sont proposées pour estimer les paramètres des modèles de maintenance parfaite, minimale,  $ARA_1$ ,  $ARA_\infty$  et Brown-Proschan. En fonction des informations disponibles au début de l'observation, nous proposons des fonctions de vraisemblance permettant de prendre en compte les données sur l'intervalle. Pour le modèle de maintenance parfaite, nous avons proposé la fonction de vraisemblance dans le cas où l'âge du début de l'observation est connu. Pour le modèle de maintenance minimale NHPP, nous considérons cet âge inconnu comme un paramètre. Nous utilisons également cette approche pour le modèle  $ARA_1$ . En ce qui concerne les modèles  $ARA_\infty$  et BP, nous avons utilisé leur propriété de stationnarité pour proposer un calcul de leur fonction de vraisemblance dans la configuration où l'âge initial est inconnu, tout en supposant que le système est dans son régime stationnaire.

Les simulations sont présentées, afin de comparer la performance des extensions avec les méthodes d'estimation classiques, qui supposent systématiquement que l'âge initial est nul. Suite à notre analyse, nous pouvons observer l'impact de l'âge initial sur la qualité des estimations. Les simulations montrent également que les extensions sont adaptées pour l'analyse des données observées sur une fenêtre d'observation. Nous proposons des applications des extensions aux données réelles, afin de souligner l'impact des informations manquantes sur la qualité des estimations.

Les estimations sont obtenues par la méthode du maximum de vraisemblance, via les méthodes d'optimisation numérique. Dans le cas où plusieurs trajectoires indépendantes sont disponibles, nous pourrions obtenir des intervalles de confiance empiriques pour les estimateurs de maximum de vraisemblance. Nous pourrions utiliser l'approche proposée dans [42], qui consiste à approcher la matrice d'information de Fisher théorique par la matrice d'information concernant les informations observées ou la matrice hessienne. En ce qui concerne la considération de l'âge initial, il serait aussi envisageable d'établir une loi pour cet âge à partir des avis d'ex-

perts. D'où l'intérêt de développer une approche d'inférence qui permet de prendre en compte ces informations a priori, puis les utiliser pour estimer les paramètres.

Les données considérées dans ce chapitre ne concernent que les maintenances correctives seules, et l'ensemble des approches ne considère qu'un seul type de maintenance. Or il est fort probable et très réaliste que les maintenances préventives soient effectuées pendant la période initiale manquante et soient présentes dans les observations. La généralisation des extensions à deux types de maintenance (corrective et préventive) est naturellement l'étape suivante pour les futures recherches. Dans le cas des maintenances préventives planifiées, il semble que les approches dans ce chapitre pourraient être étendues sans difficulté. Cela sera vraisemblablement plus difficile pour les maintenances préventives conditionnelles où les instants dépendent de l'état du système et des maintenances déjà effectuées. D'autre part, nous avons choisi de travailler avec la loi de Weibull  $\mathcal{W}(\alpha, \beta)$ . Les extensions proposées dans ce chapitre pourraient être appliquées à d'autres choix d'intensité initiale.



## Chapitre 4

# Inférence bayésienne pour le modèle Brown-Proschan et critères de sélection de modèle

### 1 Introduction

Les défaillances pour des systèmes industriels critiques constituent des événements rares. L'inférence fréquentiste peut s'avérer inefficace, à cause du manque de données. D'autre part, les avis d'experts sont souvent disponibles, et leurs prises en compte peuvent être très bénéfiques pour l'analyse statistique des données. L'approche bayésienne est donc très adéquate dans ces situations. Dans la littérature, peu de travaux sont proposés pour l'inférence statistique des modèles de maintenance. L'inférence bayésienne du modèle NHPP avec loi de Puissance est proposée dans [47, 61, 28]. Pulcini [119] propose l'analyse bayésienne pour le modèle de réduction d'âge de Malik et le modèle  $ARA_1$ , accompagné de la loi de Puissance. Corset *et al.* [21] présentent l'analyse bayésienne pour les modèles  $ARA_1$  et  $ARA_\infty$ . Li et Hanson [86] proposent une estimation bayésienne semi-paramétrique des modèles Kijima de type I et II. Pour le modèle de Brown-Proschan, Lim *et al.* [88] présentent l'inférence bayésienne avec des choix de lois a priori spécifiques.

Dans ce chapitre, nous présentons l'inférence bayésienne pour le modèle Brown-Proschan lorsque les effets de maintenance sont inconnus. La probabilité de maintenance parfaite  $p$  sera donc estimée conjointement avec la loi de vieillissement. Cela différencie notre approche de celle prise par Lim *et al.* [88], dans laquelle les effets de maintenance sont supposés connus. Les connaissances des experts permettent de construire les lois *a priori*, et celles-ci sont mises à jour avec les données observées. Nous employons le facteur de Bayes pour sélectionner les modèles d'âge virtuels en discutant de ses avantages et de ses inconvénients. Nous introduisons aussi un test d'adéquation pour le modèle  $ARA_1$ . Le test est construit sur des approximations asymptotiques. L'hypothèse nulle de  $ARA_1$  est soumise à des tests classiques comme les tests Kolmogorov-Smirnov, Cramer-von Mises ou Anderson-Darling. Il est aussi possible d'effectuer un test graphique pour l'hypothèse nulle.

### 2 Inférence bayésienne du modèle Brown-Proschan

Nous présentons les étapes de l'inférence bayésienne pour le modèle Brown-Proschan. L'inférence bayésienne des autres modèles d'âge virtuel, par exemple  $ARA_1$ ,  $ARA_\infty$  est développée

en détails dans [21]. L'intensité initiale suit la loi de Weibull  $\mathcal{W}(\alpha, \beta)$  :

$$\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$$

La loi de Weibull est suffisamment flexible pour représenter la majorité des configurations pour les systèmes industriels. La vraisemblance du modèle BP associée à  $n$  défaillance  $\underline{t}_n$  dans l'intervalle  $[0, t]$  est :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{BP}(\alpha, \beta, p; \underline{t}_n) &= (1-p)^n \mathcal{L}^{NHPP}(\alpha, \beta; \underline{t}_n) + \\ &\sum_{i=1}^n p(1-p)^{n-i} \mathcal{L}^{BP}(\alpha, \beta, p; \underline{t}_i) \mathcal{L}^{NHPP}(\alpha, \beta; t_{i+1} - t_i, \dots, t_n - t_i, t - t_i) \end{aligned}$$

Le choix des lois *a priori* pour chacun des paramètres est discuté par la suite.

## 2.1 Choix de loi *a priori*

Les paramètres du modèle Brown-Proschan dans cette étude sont le triplet  $(\alpha, \beta, p)$ . Le paramètre  $\beta$  représente la dégradation du système : un  $\beta$  élevé correspond à un système qui se dégrade très vite, tandis qu'une valeur modérée de  $\beta$  est associée à une dégradation plus lente. Pour un système qui s'usent, nous supposons que ce paramètre est compris dans l'intervalle  $[1, 6]$ . Les valeurs de  $\beta$  dans l'intervalle  $(0, 1)$  correspond à un système en phase de rodage. On considère que la dégradation reste acceptable, pour cela nous ne considérons pas les valeurs de  $\beta$  au delà de 6. Le paramètre  $\alpha$ , étant un pseudo-facteur d'échelle d'une loi de Puissance, apporte une information très limitée sur la cinétique de vieillissement du système. Le paramètre  $p$  définit la probabilité qu'une maintenance soit parfaite. Entre deux réalisations de maintenance parfaite, le système reçoit des maintenances minimales. Entre deux maintenances parfaites consécutives, le modèle BP se comporte comme un NHPP. Il est raisonnable d'espérer que les paramètres  $(\alpha, \beta)$  de l'intensité initiale du modèle BP aient un sens physique similaire à ceux d'un NHPP. De ce fait, nous adaptons les lois *a priori* d'un NHPP ayant pour intensité de la loi de Weibull (ou Processus de Puissance PLP) pour le couple  $(\alpha, \beta)$  du modèle BP. On proposera aussi des lois *a priori* pour  $p$ .

### 2.1.1 Loi non-informative du couple $(\alpha, \beta)$

Lorsqu'aucune connaissance d'expertise n'est disponible sur le dynamisme de dégradation décrit par  $\beta$  et le pseudo-facteur d'échelle  $\alpha$ , on utilise la loi non-informative proposée par Jeffreys [68] :

$$\pi(\theta) \propto |I(\theta)|^{1/2}$$

où  $I(\theta)$  est la matrice d'information de Fisher des paramètres  $\theta = (\alpha, \beta)$ . En l'absence des informations *a priori* sur les paramètres, les données sont les seules sources possibles d'information. En l'occurrence, la matrice d'information de Fisher est celle qui résume le mieux les informations apportées par les données pour les paramètres. Par conséquent, il est raisonnable de dire que les valeurs de  $\theta$  pour lesquelles  $I(\theta)$  est maximale doivent être les plus probables *a priori*.

Pour une observation  $(T_1, T_2, \dots, T_n)$  d'un PLP, la matrice d'information de Fisher est

$$I(\alpha, \beta)^{PLP} = \begin{pmatrix} \frac{n}{\alpha^2} & \mathbb{E}[\ln(T_n)T_n^\beta] \\ \mathbb{E}[\ln(T_n)T_n^\beta] & \frac{n}{\beta^2} + \alpha\mathbb{E}[(\ln T_n)^2 T_n^\beta] \end{pmatrix}$$



avec

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\ln(T_n)T_n^\beta] &= \frac{n}{\alpha\beta}[\psi(n+1) - \ln\alpha] \\ \mathbb{E}[(\ln T_n)^2 T_n^\beta] &= \frac{n}{\alpha\beta^2} \left[ \psi^{(1)}(n+1) + [\psi(n+1) - \ln\alpha]^2 \right]\end{aligned}$$

où  $\psi(z+1) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)$  est la fonction digamma et  $\psi^{(1)} = \frac{d}{dz}\psi(z)$  est la fonction polygamma d'ordre 1. Il en découle que

$$\pi(\alpha, \beta) \propto |I(\alpha, \beta)^{PLP}|^{1/2} \propto \frac{1}{\alpha\beta}$$

Ce choix est également adopté dans les travaux [5, 28, 61, 119, 130].

### 2.1.2 Loi informative du couple $(\alpha, \beta)$

Dans les études de fiabilité, les systèmes sont souvent supposés en état de dégradation. Le paramètre  $\beta$  est donc borné inférieurement  $\beta \geq 1$ . Par ailleurs, les experts pourront fournir un intervalle pour  $\beta$ , basé sur le mécanisme de dégradation du système en question. On obtient alors une connaissance *a priori*  $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$ , et le paramètre peut par exemple prendre une loi Uniforme  $\mathcal{U}[\beta_1, \beta_2]$  comme loi *a priori*

$$\pi_\beta(\beta) = \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \mathbb{1}_{[\beta_1, \beta_2]}(\beta)$$

Dans [21, 61, 119], une loi Uniforme est aussi proposée comme loi *a priori* pour le paramètre  $\beta$ . La loi uniforme rend les éléments élémentaires équiprobables (par abus de langage car l'intervalle étant non dénombrable). Toutefois, son utilisation n'a pas d'incident sur les estimations qui en découle, tant que la loi *a posteriori* est bien définie [125].

Le pseudo-facteur d'échelle admet souvent une loi Gamma  $\Gamma(a, b)$  pour une loi *a priori* :

$$\pi_\alpha(\alpha) = \alpha^{a-1} \frac{b^a e^{-b\alpha}}{\Gamma(a)}$$

où  $\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$  est la fonction gamma. L'utilisation de la loi Gamma comme loi *a priori* pour  $\alpha$  est souvent due au fait que cette loi appartienne à la famille de lois conjuguées avec un PLP. De plus, le support de loi Gamma ( $\mathbb{R}_+$ ) couvre bien celui du  $\alpha$ . Ce choix est utilisé dans [28, 76, 116]. D'autre part, il est difficile de proposer un support borné pour la loi *a priori* de  $\alpha$ , car il est relativement complexe d'obtenir un ordre de grandeur précis pour ce paramètre. Pour traduire des connaissances *a priori* sur le paramètre  $\alpha$ , on peut donner des estimations sur sa moyenne ( $a/b$ ) et sa variance ( $a/b^2$ ), puis en déduire les valeurs des hyper-paramètres ( $a, b$ ). Ainsi, la loi de Gamma est très flexible et capable de décrire plusieurs scénarios du paramètre  $\alpha$ .

### 2.1.3 Loi non-informative pour $p$

Pour le paramètre  $p$ , le choix non-informatif le plus simple est une loi Uniforme  $\mathcal{U}[0, 1]$ , puisque  $p$  par définition est une probabilité. Avec la loi uniforme  $\mathcal{U}[0, 1]$ , très peu d'information n'est donnée à propos d'un sous-segment qui peut contenir la vraie valeur de  $p$ .

### 2.1.4 Loi informative pour $p$

Nous proposons d'utiliser la loi bêta  $\mathcal{B}(r, s)$  comme loi *a priori* informative pour  $p$ . La loi bêta a son support dans l'intervalle  $[0, 1]$ , et elle est très facilement paramétrable :

$$\pi_p(p) = \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} p^{r-1} (1-p)^{s-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(p)$$

L'espérance et la variance de la loi bêta  $\mathcal{B}(r, s)$  est  $r/(r+s)$  et  $rs/((r+s)^2(r+s+1))$ . Une connaissance *a priori* sur  $p$  peut se traduire par un sous-segment de l'intervalle  $[0, 1]$ . L'ajustement sur l'espérance et la variance de la loi bêta nous permettra d'obtenir des valeurs pour les hyperparamètres  $(r, s)$ . Cette loi *a priori* et cette méthode de calibrage est utilisée dans [88]. Dans [21], une loi *a priori* bêta est également proposée pour l'efficacité de maintenance ( $\rho$ ). Quoique  $p$  est  $\rho$  ne sont pas exactement équivalents, grâce à sa facilité de paramétrage et son support  $[0, 1]$  une loi *a priori* bêta est appropriée. D'autre part, une loi uniforme sur un intervalle  $[a, b]$  inclus dans l'intervalle  $[0, 1]$  reste aussi envisageable.

### 2.1.5 Loi unifiée

Suite aux choix des lois *a priori*, on obtient 4 possibilités de lois jointes *a priori* pour le triplet de paramètres  $(\alpha, \beta, p)$  :

- Loi jointe non-informative du triplet  $(\alpha, \beta, p)$  :

$$\pi_1(\alpha, \beta, p) \propto \frac{1}{\alpha\beta} \quad (4.1)$$

- Loi non-informative pour  $(\alpha, \beta)$  et informative pour  $p$  :

$$\pi_2(\alpha, \beta, p) \propto \frac{p^{r-1}(1-p)^{s-1}}{\alpha\beta} \mathbb{1}_{[0,1]}(p) \quad (4.2)$$

- Loi informative pour  $(\alpha, \beta)$  et non-informative pour  $p$  :

$$\pi_3(\alpha, \beta, p) \propto \alpha^{a-1} e^{-b\alpha} \mathbb{1}_{[\beta_1, \beta_2]}(\beta) \mathbb{1}_{[0,1]}(p) \quad (4.3)$$

- Loi informative pour  $(\alpha, \beta, p)$  :

$$\pi_4(\alpha, \beta, p) \propto \alpha^{a-1} e^{-b\alpha} p^{r-1} (1-p)^{s-1} \mathbb{1}_{[\beta_1, \beta_2]}(\beta) \quad (4.4)$$

D'après le théorème de Bayes, la loi jointe *a posteriori* du modèle Brown-Proshchan est déterminée par :

$$\pi_k(\alpha, \beta, p | \underline{t}_n) \propto \mathcal{L}(\alpha, \beta, p; \underline{t}_n) \pi_k(\alpha, \beta, p), \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (4.5)$$

Les densités conditionnelles complètes se déterminent proportionnellement par

$$\pi(\alpha | \beta, p, \underline{t}_n) \propto \pi_\alpha(\alpha) \times \mathcal{L}(\alpha, \beta, p; \underline{t}_n) \quad (4.6)$$

$$\pi(\beta | \alpha, p, \underline{t}_n) \propto \pi_\beta(\beta) \times \mathcal{L}(\alpha, \beta, p; \underline{t}_n) \quad (4.7)$$

$$\pi(p | \alpha, \beta, \underline{t}_n) \propto \pi_p(p) \times \mathcal{L}(\alpha, \beta, p; \underline{t}_n) \quad (4.8)$$

Avec les méthodes MCMC, les densités *a posteriori* conditionnelles sont suffisantes pour obtenir les estimations numériques de  $(\hat{\alpha}_b, \hat{\beta}_b, \hat{p}_b)$ . Ces estimations nécessitent l'utilisation de l'algorithme Metropolis-Hastings-dans-Gibbs, comme présenté dans l'algorithme 7. L'étape Metropolis-Hastings de l'algorithme est réalisé par l'utilisation d'une marche aléatoire dont la loi de proposition est la loi de Cauchy (qui admet un paramètre de location nul). Le choix de la loi de Cauchy est plus par des raisons pratiques. Elle permet d'avoir un calibrage plus simple pour bien exploiter le support des paramètres lorsque l'on travaille avec des données réelles. Dans ce cas, le paramètre  $\alpha$  a souvent un ordre de grandeur faible (par exemple  $10^{-8}$ ). Le taux d'acceptation des candidats pour le paramètre  $\alpha$  est légèrement plus élevé que d'autres lois (par exemple loi normale centrée réduite), tout en sécurisant les taux d'acceptations pour les paramètres  $\beta$  et  $p$ .

La longueur maximale de la chaîne  $Nmax$  et la convergence empirique sont déterminées par le critère de Gelman [11] et Geweke [57]. Le critère de Gelman est basé sur la comparaison des variances empiriques des chaînes MCMC en parallèle. Étant donnée une loi *a posteriori* (loi cible), nous simulons  $N$  chaînes MCMC en parallèle de longueur  $Nmax$  pour chacune. Le critère définit le facteur de réduction d'échelle  $\hat{R}_c$  (Potential Scale Reduction Factor PSFR), qui permet de comparer les variances d'une chaîne et la variance inter-chaîne. Ce facteur peut nous donner un indice de la convergence des chaînes MCMC : lorsque celui-ci est proche de 1 alors les chaînes sont potentiellement convergentes. Pour un diagnostic efficace, les auteurs proposent d'ignorer les premières itérations (voire la première moitié), puisque cette partie a de forte chance d'être dans la phase de "rodage" de l'algorithme. Le critère de Geweke, en contre partie, vérifie la convergence numérique d'une seule chaîne en supposant que si cela est le cas, alors la moyenne des  $N_a$  premiers échantillons de la chaîne doit être égale à la moyenne des  $N_b$  dernières échantillons de la chaîne MCMC en question. Geweke définit une statistique, qui suit une loi normale centrée réduite lorsque la chaîne est convergente (ou l'égalité entre deux moyennes empiriques). Dans les applications, cette statistique est calculée et testée si elle suit une loi normale centrée réduite (donc le Z-score en ordonnée), souvent à un seuil 5% pour plusieurs choix de  $N_a$  et de  $N_b$ , qui satisfont  $N_a + N_b < Nmax$ .

---

**Algorithm 7** Algorithme de Metropolis-Hastings-dans-Gibbs

---

- 1: Initialiser la chaîne  $(\alpha^{(0)}, \beta^{(0)}, p^{(0)})$  et la longueur de la chaîne  $Nmax$
  - 2: **for**  $k = 1 : Nmax$  **do**
  - 3: Générer  $\alpha^{(k)}$  en sachant  $\beta^{(k-1)}$  et  $p^{(k-1)}$  par une étape Metropolis-Hastings avec (4.6)
  - 4: Générer  $\beta^{(k)}$  en sachant  $\alpha^{(k)}$  et  $p^{(k-1)}$  par une étape Metropolis-Hastings avec (4.7)
  - 5: Générer  $p^{(k)}$  en sachant  $\alpha^{(k)}$  et  $\beta^{(k)}$  par une étape Metropolis-Hastings avec (4.8)
  - 6: **end for**
- 

## 2.2 Loi *a posteriori* des grandeurs de fiabilité

Il est possible de déduire les lois *a posteriori* pour certains indicateurs de fiabilité du modèle Brown-Proschan : l'espérance de la première durée de défaillance (MTTF : Mean Time To Failure)  $\mathbb{E}[T_1]$  et l'espérance de la durée entre deux maintenances parfaites  $\mathbb{E}[X_p]$ .

**Proposition 4.1.** *La loi *a posteriori* de l'espérance de la première durée de défaillance  $\mathbb{E}[T_1] = \mu$  est donnée par*

$$\pi_\mu(\mu|t_n) \propto \int_{\Theta_\beta} \int_{\Theta_p} \frac{\beta}{\mu^{\beta+1}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^\beta \pi_k\left(\frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^\beta}{\mu^\beta}, \beta, p|t_n\right) d\beta dp, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

où  $\Theta_\beta$  et  $\Theta_p$  désignent le support de la loi a priori pour  $\beta$  et pour  $p$ , respectivement.

*Démonstration.* Par définition, on a

$$\mathbb{E}[T_1] = \int_0^\infty R(u) du$$

Avant la première défaillance, l'intensité de défaillance suit une loi de Weibull  $\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$ . Il en découle que :

$$\mathbb{E}[T_1] = \int_0^\infty e^{-\alpha u^\beta} du = \alpha^{-\frac{1}{\beta}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

Noter  $\mathbb{E}[T_1] = \mu$  alors on a :

$$\alpha = \left(\frac{\Gamma(1 + 1/\beta)}{\mu}\right)^\beta$$

En remplaçant dans l'équation 4.5 avec le Jacobien correspondant, nous obtenons le résultat de la proposition.  $\square$

**Proposition 4.2.** *La loi a posteriori de la durée moyenne entre deux maintenances parfaites  $\mathbb{E}[X_p] = \mu_p$  est donnée par*

$$\pi_{\mu_p}(\mu_p | \underline{t}_n) \propto \int_{\Theta_\beta} \int_{\Theta_p} \frac{\beta}{p\mu_p^{\beta+1}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^\beta \pi_k\left(\frac{\Gamma(1 + \frac{1}{\beta})^\beta}{p\mu_p^\beta}, \beta, p | \underline{t}_n\right) d\beta dp, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

où  $\Theta_\beta$  et  $\Theta_p$  désignent le support de la loi a priori pour  $\beta$  et pour  $p$ , respectivement.

*Démonstration.* On dénote par  $X_p$  la durée entre deux maintenances parfaites. L'ensemble des maintenances parfaites forment un processus de renouvellement d'intensité  $\lambda_p(t) = p\lambda(t)$ . La durée moyenne entre deux événements est donc

$$\mu_p = \mathbb{E}[X_p] = (\alpha p)^{-\frac{1}{\beta}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

Le reste suit le même principe de la démonstration précédente.  $\square$

### 2.3 Facteur de Bayes

Les méthodes de calcul bayésiennes nous permettent d'avoir un outil supplémentaire pour la sélection des modèles. Les méthodes MCMC pourraient être utilisées pour calculer la vraisemblance marginale, ou la *constante de normalisation* :

$$\mathcal{L}(\underline{t}_n) = \int_{\Theta} \mathcal{L}(\theta; \underline{t}_n) \pi_\theta(\theta) d\theta,$$

ce qui est souvent ignoré dans les algorithmes de MCMC. Cette valeur donnera une estimation de la cohérence entre les données  $\underline{t}_n$  et le modèle en considération. Cette technique est tirée du facteur de Bayes [71].

## 2. Inférence bayésienne du modèle Brown-Proschan

Supposons que l'on dispose des données  $\underline{t}_n$  qui sont supposées issues des deux modèles concurrents  $M_1$  et  $M_2$ . On souhaite savoir quel est le modèle le plus approprié à ce jeu de données, via les probabilités *a posteriori*  $\mathbb{P}(M_1|\underline{t}_n)$  et  $\mathbb{P}(M_2|\underline{t}_n)$ . Par le théorème de Bayes, on a [71] :

$$\mathbb{P}(M_k|\underline{t}_n) = \frac{\mathbb{P}(\underline{t}_n|M_k)\mathbb{P}(M_k)}{\mathbb{P}(\underline{t}_n|M_1)\mathbb{P}(M_1) + \mathbb{P}(\underline{t}_n|M_2)\mathbb{P}(M_2)}, \quad k = 1, 2$$

où  $\mathbb{P}(M_k)$  est la probabilité *a priori* du modèle  $M_k$ . Le ratio des probabilités *a posteriori* est alors donné par

$$\frac{\mathbb{P}(M_1|\underline{t}_n)}{\mathbb{P}(M_2|\underline{t}_n)} = \frac{\mathbb{P}(\underline{t}_n|M_1) \mathbb{P}(M_1)}{\mathbb{P}(\underline{t}_n|M_2) \mathbb{P}(M_2)}$$

Le facteur de Bayes est défini comme le ratio des deux vraisemblances marginales

$$\mathcal{B}_{12} = \frac{\mathbb{P}(\underline{t}_n|M_1)}{\mathbb{P}(\underline{t}_n|M_2)} = \frac{\mathcal{L}(\underline{t}_n|M_1)}{\mathcal{L}(\underline{t}_n|M_2)}$$

Il est possible d'étendre l'utilisation du facteur de Bayes à plusieurs modèles, en comparant couples par couples  $(M_i, M_j)$ , puisque le facteur de Bayes est cohérent :  $\mathcal{B}_{ij} = \mathcal{B}_{ik}\mathcal{B}_{kj}$ . De plus, cela peut donner un classement des modèles favoris. On remarque que si tous les modèles sont équiprobables *a priori* :  $\mathbb{P}(M_i) = \mathbb{P}(M_j)$ ,  $i \neq j$ , alors le ratio des probabilités *a posteriori* se réduit au facteur de Bayes.

Pour calculer la vraisemblance marginale  $\mathcal{L}(\underline{t}_n|M_k)$  (ou  $\mathcal{L}(\underline{t}_n)$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur les modèles), nous pouvons utiliser les chaînes MCMC générées à partir des lois *a posteriori* dans l'étape d'estimation. Pour obtenir une approximation de l'intégrale (et de la vraisemblance marginale), nous utilisons la technique d'approximation d'intégrale de Laplace [71, 120] et sa version améliorée [29].

Concrètement, nous utilisons l'approximation de l'intégrale de Laplace, qui s'exprime comme suit [29, 71] :

$$\mathcal{L}(\underline{t}_n) = (2\pi)^{d/2} \sqrt{|\Sigma|} \mathcal{L}(\theta^*; \underline{t}_n) \pi_\theta(\theta^*)$$

où  $\theta^*$  est le mode *a posteriori*,  $\Sigma = (-H(\theta^*))^{-1}$  où  $H(\theta^*)$  est la matrice hessienne des dérivées secondes en  $\theta^*$  de la fonction  $h(\theta) = \ln(\mathcal{L}(\theta; \underline{t}_n)\pi_\theta(\theta))$  et  $d$  désigne le nombre de paramètres représentés par le vecteur  $\theta$ . Nous proposons d'approcher ces termes à l'aide des échantillons  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$  des algorithmes MCMC de la manière suivante. La matrice  $\Sigma$  est asymptotiquement équivalent à la matrice des variances-covariances *a posteriori* [120]. Il est naturellement d'approcher  $\Sigma$  par une estimation de la matrice des variances-covariances des échantillons MCMC. Cette dernière est réalisée en utilisant la technique de minimum ellipsoïde [129]. Le mode *a posteriori*  $\theta^*$  est celle des échantillons MCMC qui maximise la fonction  $h(\theta)$ . L'erreur de calcul du facteur de Bayes (c'est-à-dire le ratio des deux vraisemblances marginales) est de l'ordre  $O(n^{-1})$  [120]. Dans [29], les auteurs proposent d'utiliser l'ajustement de Barlette de ce facteur, qui entraîne à une erreur de calcul de l'ordre  $O(n^{-2})$ .

### 2.4 Test d'adéquation pour le modèle $ARA_1$

Nous proposons un nouveau test d'adéquation pour tester le modèle  $ARA_1$  face aux hypothèses  $ARA_\infty$  et BP. Nous nous plaçons toujours dans le cas où l'intensité initiale des trois modèles suit la loi de Weibull  $\mathcal{W}(\alpha, \beta)$  avec  $\beta > 1$ . Les hypothèses sont les suivantes :

$\mathcal{H}_0$  : Les données suivent le modèle  $ARA_1$   
 $\mathcal{H}_1$  : Les données suivent le modèle  $ARA_\infty$  ou BP

Sous l'hypothèse nulle, notons  $\{X_i\}_{i \geq 1}$ ,  $\{T_i\}_{i \geq 0}$  et  $\{A_i\}_{i \geq 0}$  les durées inter-défaillance, les instants de défaillance et les âges effectifs, respectivement. Leurs réalisations sont notées  $\{x_i\}_{i \geq 1}$ ,  $\{t_i\}_{i \geq 0}$  et  $\{a_i\}_{i \geq 0}$ . La formule de simulation des  $X_n$  présentée dans le chapitre 2 nous donne :

$$\forall n \geq 1, X_{n+1} = \Lambda^{-1}(\Lambda(A_n) + \mathcal{E}_{n+1}) - A_n$$

donc

$$\mathcal{E}_{n+1} = \Lambda(A_n + X_{n+1}) - \Lambda(A_n)$$

où  $\mathcal{E}_{n+1}$  est une variable aléatoire de la loi exponentielle de paramètre 1  $\mathcal{E}(1)$ . Comme  $\Lambda(t) = \alpha t^\beta$  est une fonction croissante vers l'infini, on peut donc naturellement utiliser asymptotiquement l'approximation suivante :

$$\forall t, h > 0, \Lambda(t+h) \simeq \Lambda(t) + h\Lambda'(t) = \Lambda(t) + h\lambda(t) \quad (4.9)$$

En utilisant l'approximation, nous obtenons :

$$\mathcal{E}_{n+1} \approx X_{n+1}\lambda(A_n) = \alpha\beta(1-\rho)^{\beta-1}X_{n+1}T_n^{\beta-1}$$

La variable aléatoire  $E_{n+1} = X_{n+1}T_n^{\beta-1}$  doit suivre asymptotiquement une loi exponentielle. Nous proposons alors de tester l'exponentialité des  $\{\widehat{e}_i\}_{i \geq 1}$ , où  $\widehat{e}_{i+1} = x_{i+1}t_i^{\widehat{\beta}-1}$ . Puisque le modèle  $ARA_1$  et NHPP ont des comportements asymptotiques très similaires [37], nous proposons d'utiliser l'estimateur  $\widehat{\beta}$  d'un modèle NHPP ayant l'intensité de la loi Weibull  $\mathcal{W}(\alpha, \beta)$ . Cette approximation, même en présence d'un nombre de données faible, reste très performante comme cela a été mis en évidence dans [60]. Pour une observation de  $n$  défaillances  $\underline{t}_n = (t_1, t_2, \dots, t_n)$  et une censure de type II, l'estimateur pour le paramètre  $\beta$  d'un modèle NHPP avec l'intensité Weibull est :

$$\widehat{\beta} = \frac{n}{(n-1)\ln(t_n) - \sum_{i=1}^{n-1} \ln(t_i)}$$

Pour pouvoir utiliser l'approximation présentée dans l'équation 4.9 et l'estimateur  $\widehat{\beta}$  sous l'hypothèse nulle de  $ARA_1$ , nous ne considérons que les derniers instants de défaillance :  $\{\widehat{e}_j\}_{j=i, \dots, n}$ . Le nombre d'observations  $n$  reste aussi faible, pour ne pas se retrouver avec un test NHPP.

Nous utilisons des tests classiques (les tests de type Kolmogorov-Smirnov, Cramer-von Mises et Anderson-Darling modifiés) pour tester l'adéquation des échantillons  $\{\widehat{e}_j\}_{j=i, \dots, n}$  à une loi exponentielle. Il est également possible d'effectuer une vérification graphique pour visualiser si ces échantillons sont issus d'une loi exponentielle.

## 3 Simulations

### 3.1 Estimation bayésienne

Cette section est consacrée à la présentation des simulations de l'inférence bayésienne pour le modèle Brown-Proshan. Trois configurations sont choisies :  $\alpha = 1, \beta = 3, p \in \{0.3, 0.5, 0.7\}$ . Le choix de  $\beta$  peut représenter une dégradation moyenne. Le paramètre  $\alpha$ , étant un pseudo-facteur

d'échelle, est fixé à 1 dans toutes les configurations. Trois différentes valeurs de la probabilité de maintenance parfaite  $p$  sont considérées. Plus cette probabilité est proche de 1, plus la maintenance parfaite est fréquente. Le nombre de défaillances  $n$  est faible :  $n \in \{5, 10, 25\}$ , puisque nous souhaitons observer le comportement de l'inférence bayésienne dans le cas d'un nombre faible d'observations. Par ailleurs, si un système est très fiable alors les défaillances sont peu fréquentes.

La simulation du triplet  $(\alpha, \beta, p)$  est réalisée avec 200 répliques. Pour chaque paramètre, l'algorithme MCMC génère  $N_{chain} = 5$  chaînes en parallèle de longueur  $N_{max} = 10000$ . Nous proposons de comparer les estimateurs bayésiens aux estimateurs de maximum de vraisemblance par l'optimisation de la fonction de vraisemblance propre  $\mathcal{L}^{BP}(\alpha, \beta, p; t_n)$  (ML) et les estimateurs de maximum de vraisemblance par la méthode Expectation-Maximisation (EM) [89]. La performance des estimations est mesurée par le critère l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) :

$$EQM(\hat{\theta}) = \mathbb{E}[(\theta - \hat{\theta})^2]$$

Pour chaque configuration du triplet  $(\alpha, \beta, p)$ , nous avons plusieurs choix d'hyper-paramètres, qui résultent de lois *a priori* bonnes, mauvais ou non-informatives. Dans cette analyse, une bonne loi *a priori* informative est une loi dont la moyenne est proche de la vraie valeur du paramètre, et la variance est faible. Une mauvaise loi *a priori* informative est une loi dont la moyenne est très éloignée de la vraie valeur. Les estimateurs associés sont notées GPr et BPr, respectivement. L'estimateur non-informatif NI est associé à la loi *a priori* non-informative NI, qui a l'expression similaire à la loi  $\pi_1(\alpha, \beta, p)$  dans l'équation 4.1, tandis que les lois informatives ont une expression similaire à  $\pi_4(\alpha, \beta, p)$  de l'équation 4.4. Les choix de valeurs des hyper-paramètres sont les suivants :

Tableau 4.1 – Choix des valeurs des hyper-paramètres

$p$	Paramètre	$\alpha$		$\beta$		$p$	
	Hyper-paramètre	$a$	$b$	$\beta_{inf}$	$\beta_{sup}$	$r$	$s$
$p = 0.3$	GPr	1.5	1	2	4	1.50	1.50
	BPr	3	1	2	6	0.71	0.65
$p = 0.5$	GPr	1.5	1	2	4	1.65	0.71
	BPr	3	1	2	6	0.40	0.04
$p = 0.7$	GPr	1.5	1	2	4	1.70	1.13
	BPr	3	1	2	6	0.04	0.40

Les courbes des EQM des estimateurs sont présentées dans les Figure 4.1, 4.2 et 4.3 pour les trois cas ( $\alpha = 1, \beta = 3, p \in \{0.3, 0.5, 0.7\}$ ), respectivement. Nous analysons la performance des estimateurs pour le cas ( $\alpha = 1, \beta = 3, p = 0.3$ ) dans la Figure 4.1. Pour le paramètre  $\alpha$ , l'estimateur GPr est le meilleur, suivi par les estimateurs BPr et ML. Les estimateur EM et non-informative NI sont assez mauvais, par rapport aux trois estimateurs précédents. L'utilisation de la loi *a priori* non-informative n'est pas conseillée, lorsque l'on dispose d'autres alternatives.

Les résultats des estimateurs pour le paramètre  $\beta$  sont présentés dans la Figure 4.1 (b). Pour le faible nombre de défaillances ( $n = 5$ ), les estimateurs associés à la loi *a priori* informative GPr et BPr sont les meilleurs. Les écarts des estimateurs diminuent lorsque le nombre de défaillances  $n$  augmente.

Pour le paramètre  $p$ , les résultats sont présentés dans la Figure 4.3 (c). Les estimateurs GPr et NI sont les meilleurs. On remarque que l'estimateur informative (BPr) n'est pas très efficace. Cela implique qu'une mauvaise configuration de la loi *a priori* (via les hyper-paramètres) peut donner des mauvais résultats, même si on dispose d'une loi informative. Ce phénomène est aussi discuté par Corset *et al.* [21], dans l'estimation bayésienne de l'efficacité de maintenance  $\rho$  des modèles  $ARA_1$  et  $ARA_\infty$ . Ce résultat nous indique qu'il vaut mieux utiliser une loi *a priori* non-informative pour le paramètre  $p$ , lorsque l'on n'est pas certain dans le calibrage de la loi informative (choix des hyper-paramètres).

Les résultats d'estimation pour les deux cas restants ( $\alpha = 1, \beta = 3, p \in \{0.5, 0.7\}$ ) sont présentés dans les Figures 4.2 et 4.3, respectivement. Nous observons que les estimateurs ont des comportements similaires que dans le premier cas avec  $p = 0.3$ . Pour le paramètre  $\alpha$  et  $\beta$ , les estimateurs bayésiens GPr et BPr informatifs sont les plus performants. La performance des estimateurs pour le paramètre  $p$  est similaire au cas  $p = 0.3$ .

En conclusion, les valeurs EQM semblent bien diminuer quand le nombre de défaillance augmente. Grâce aux renouvellements du modèle BP (lorsque  $p \in ]0, 1[$ ), les estimations convergent bien. Si le nombre d'observations est limité, il est préférable d'utiliser l'approche bayésienne pour estimer des paramètres, en proposant des lois *a priori*. Les lois *a priori* informatives peuvent améliorer la qualité des estimations pour les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ , et un mauvais calibrage des hyper-paramètres n'a pas un grand impact négatif sur les estimations. Il faut rester vigilant dans l'utilisation d'une loi *a priori* informative pour  $p$ . Un bon calibrage peut donner des très bonnes estimations. Dans le cas contraire, l'estimateur de  $p$  est parmi les plus mauvais. Il est alors plus judicieux d'utiliser une loi *a priori* non-informative pour le paramètre  $p$ . L'approche bayésienne fait intervenir plusieurs procédures pour choisir des lois *a priori* appropriées, ainsi que les hyper-paramètres. Pour les jeux de données de taille plus importante, les avantages de l'approche bayésienne restent modestes. La méthode du maximum de vraisemblance semble être alors un choix plus adapté.

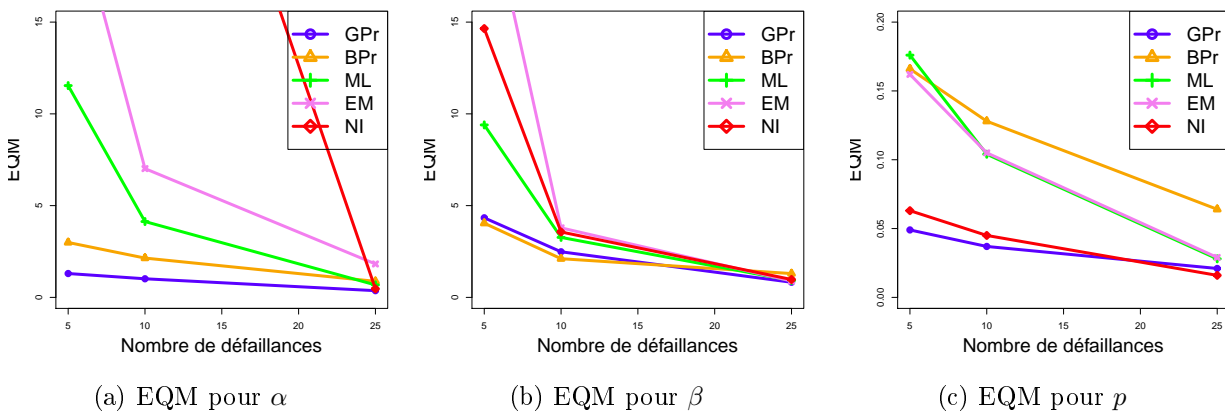
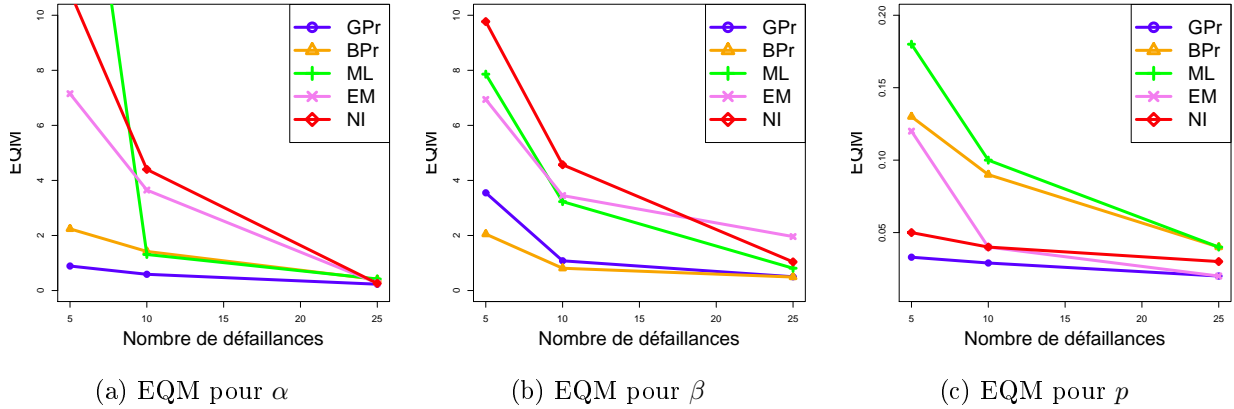
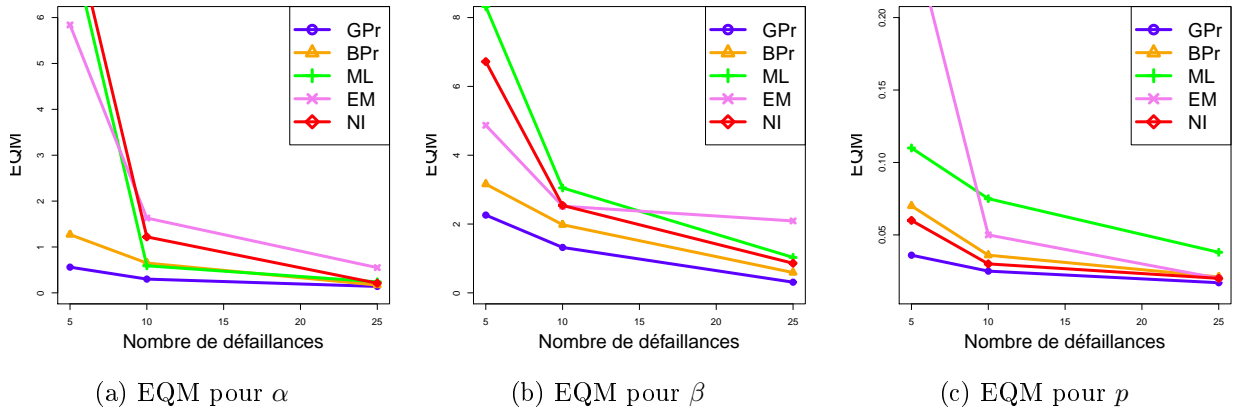


Figure 4.1 – EQM pour  $(\alpha, \beta, p)$  des estimateurs pour le cas  $(\alpha = 1, \beta = 3, p = 0.3)$

Nous terminons les simulations par l'étude de convergence des chaînes MCMC, qui sont générées par l'algorithme MCMC Metropolis-Hastings-dans-Gibbs. L'étude est illustrée pour l'estimateur GPr du premier cas ( $\alpha = 1, \beta = 3, p = 0.3$ ). Pour cela, nous utilisons les critères de convergence de Gelman [11] et de Geweke [57].

Nous commençons par un contrôle visuel de l'évolution de la moyenne de la chaîne MCMC. La Figure 4.4 présente la tendance de la moyenne lorsque la chaîne progresse, accompagnée de son

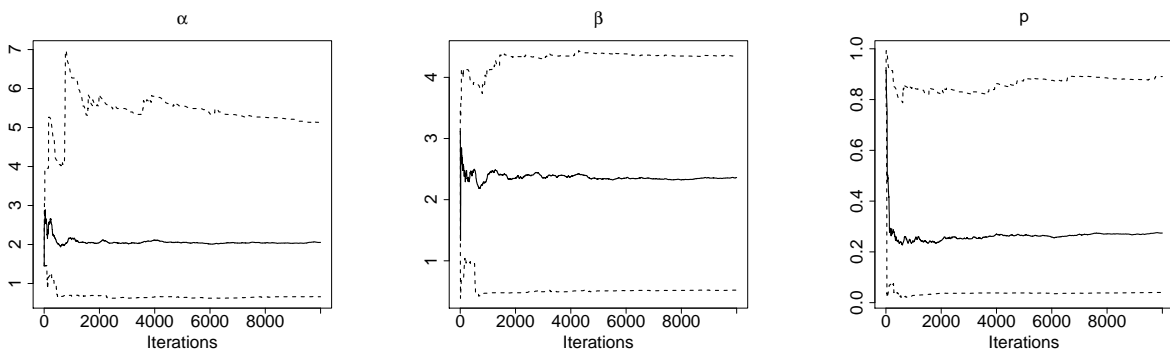


Figure 4.2 – EQM pour  $(\alpha, \beta, p)$  des estimateurs pour le cas  $(\alpha = 1, \beta = 3, p = 0.5)$ Figure 4.3 – EQM pour  $(\alpha, \beta, p)$  des estimateurs pour le cas  $(\alpha = 1, \beta = 3, p = 0.7)$ 

intervalle de confiance [2.5%, 97.5%]. Les chaînes fluctuent pendant les premières itérations, puis se stabilisent. Les premières itérations servent à initialiser l'algorithme, et les chaînes explorent les régions du support des paramètres. La moyenne se stabilise lorsque la chaîne se trouve dans une région au voisinage de la vraie valeur du paramètre. Les critères de convergence sont ensuite appliqués pour vérifier la convergence des chaînes MCMC.

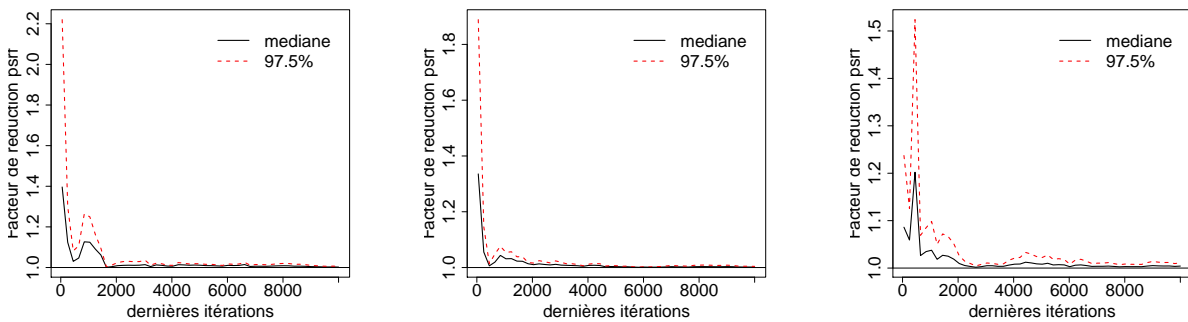
Les évolutions du facteur de réduction (shrink factor) du critère de Gelman sont observées dans la Figure 4.5 pour les trois paramètres. Le facteur s'approche bien de 1 lorsque la chaîne atteint sa longueur maximale ( $N_{max} = 10000$ ), ce qui justifie la convergence et le choix de  $N_{max}$ . On remarque que les chaînes sont dispersées pendant les premières itérations. Selon Gelman *et al.* [11], il est conseillé de prendre la deuxième moitié de la chaîne pour calculer la moyenne empirique de la loi *a posteriori*.

La convergence vers la loi stationnaire cible (donc la loi *a posteriori*) d'une chaîne est testée par le critère de Geweke, qui compare l'hypothèse de l'égalité entre la moyenne de deux sous-chaînes distinctes de longueur  $N_a$  et  $N_b$ , respectivement. La Figure 4.6 présente les valeurs de la statistique du test d'égalité de moyennes pour plusieurs choix de  $N_a$  avec un risque de 5% (donc les deux lignes qui correspondent à les valeurs -1.96 et 1.96). Dans la grande majorité de cas, l'hypothèse d'égalité entre deux moyennes est confirmée (sauf un cas aberrant pour  $\alpha$  dans



(a) Moyenne empirique pour  $\alpha$       (b) Moyenne empirique pour  $\beta$       (c) Moyenne empirique pour  $p$

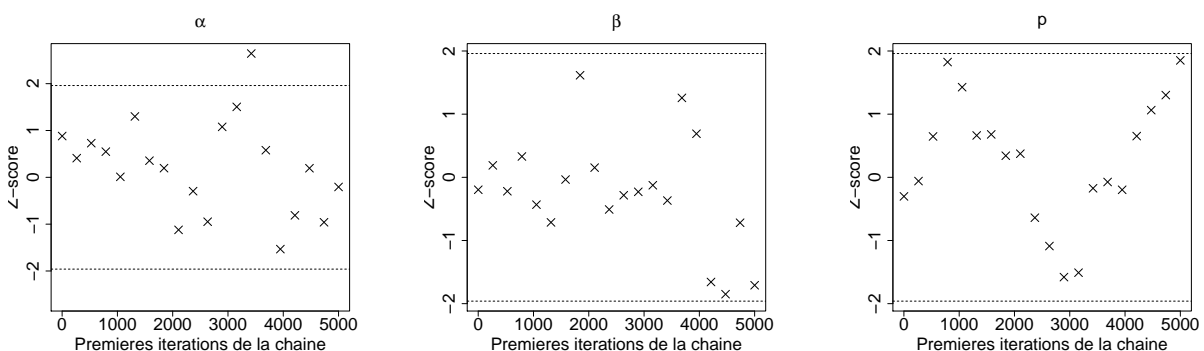
Figure 4.4 – L'évolution de la moyenne (courbe du milieu) de la chaîne MCMC de l'estimateur GPr, avec le quantile 2.5% (courbe du dessous) et 97.5% (courbe du dessus)



(a) Courbe de Gelman du  $\alpha$       (b) Courbe de Gelman du  $\beta$       (c) Courbe de Gelman du  $p$

Figure 4.5 – Critère de Gelman pour la convergence des paramètres de l'estimateur GPr

la figure 4.6 (a)). Cela confirme également la convergence numérique de la chaîne MCMC en question.

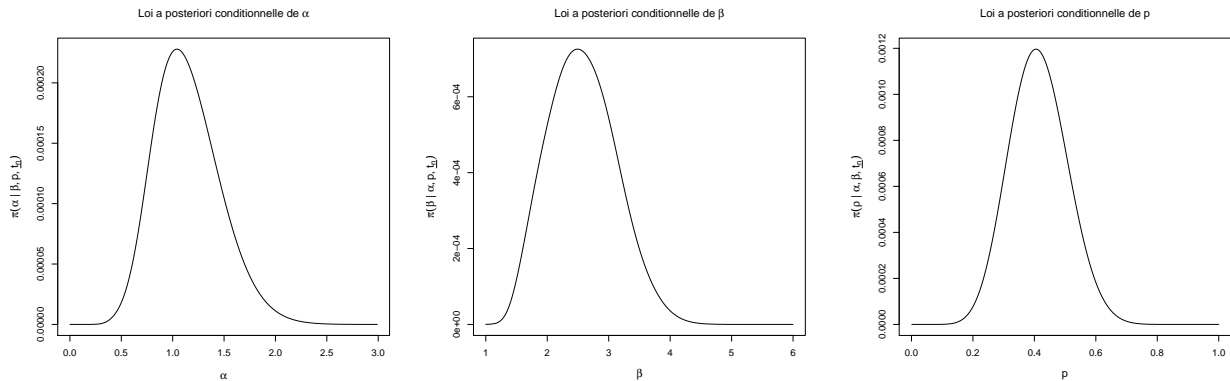


(a) Courbe de Geweke du  $\alpha$       (b) Courbe de Geweke du  $\beta$       (c) Courbe de Geweke du  $p$

Figure 4.6 – Critère de Geweke pour la convergence des paramètres de l'estimateur GPr

Il est aussi important de vérifier si les lois *a posteriori* conditionnelles (les lois cibles) données

dans les équations 4.6, 4.7 et 4.8 sont unimodales, puisque l'efficacité de l'algorithme Metropolis-Hastings-dans-Gibbs dépend essentiellement de cette propriété. Imaginons que si une loi cible a (au moins) deux modes, alors il est possible que la chaîne MCMC soit bloquée dans un voisinage d'un de deux modes. Par conséquent, le support du paramètre de la loi cible n'est pas bien exploré, et l'estimation sera alors biaisée. Nous présentons les graphiques des lois *a posteriori* conditionnelles. Dans les figures 4.7 (a), (b) et (c), les lois *a posteriori* conditionnelles de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $p$  sont présentées, respectivement. Nous constatons que, dans les intervalles d'étude des paramètres, les lois sont bien unimodales. On remarque qu'une preuve analytique de l'unimodalité des lois *a posteriori* conditionnelles est difficile, du fait de la complexité de la fonction de vraisemblance  $\mathcal{L}(\alpha, \beta, p; \underline{t}_n)$  associée. Néanmoins, via une démarche numérique, l'unimodalité des fonctions semble vérifiée.

(a) Loi *a posteriori* conditionnelle de  $\alpha$ (b) Loi *a posteriori* conditionnelle de  $\beta$ (c) Loi *a posteriori* conditionnelle de  $p$ Figure 4.7 – Lois *a posteriori* conditionnelles des trois paramètres associées à l'estimateur GPr

La convergence des chaînes MCMC de trois paramètres est vérifiée de manière empirique, puis par des critères statistiques. Le choix de la longueur maximale  $N_{chain}$  est aussi justifié. Bien entendu, on pourrait exiger des chaînes plus longues, ou augmenter le nombre des chaînes en parallèle (5 dans ces simulations), mais cela nécessite un temps de calcul conséquent. De par les évaluations numériques, nous constatons que les lois cibles sont unimodales, ce qui justifie l'efficacité de l'algorithme utilisé. Dans notre cas d'étude, le choix de la longueur, du nombre de chaînes et de l'algorithme MCMC sont alors justifiés, pour garantir une convergence et un temps d'exécution raisonnable.

## 3.2 Critères de sélection de modèle

### 3.2.1 Facteur de Bayes

Nous nous intéressons à l'application du facteur de Bayes dans la sélection des modèles. Les trois modèles considérés sont les suivants : le modèle de Brown-Proschan ( $M_1$ ), le modèle  $ARA_\infty$  ( $M_2$ ) et  $ARA_1$  ( $M_3$ ). Ce sont les trois modèles d'âge virtuel les plus répandus dans la littérature de la maintenance.

Les conditions pré-requises sont les suivantes :

- Les trois modèles sont considérés équiprobables :  $\mathbb{P}(M_1) = \mathbb{P}(M_2) = \mathbb{P}(M_3)$ . Le facteur de Bayes est alors identique au ratio des vraisemblances marginales.
- L'intensité initiale des trois modèles suit la loi de Weibull  $\mathcal{W}(\alpha, \beta)$  :  $\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$ .

En prenant en compte les observations sur le comportement des lois *a priori* dans la section précédente, nous proposons d'utiliser la loi *a priori* non-informative pour le couple  $(\alpha, \beta)$  :

$$\pi(\alpha, \beta) \propto \frac{1}{\alpha\beta}$$

et la loi *a priori* Uniforme  $\mathcal{U}[0, 1]$  pour le paramètre de l'efficacité des maintenances pour chaque modèle. Même si nous utilisons une loi *a priori* non-informative pour le couple  $(\alpha, \beta)$  (à une constante près), cela se simplifiera quand nous prenons le ratio des vraisemblances marginales car les trois modèles utilisent les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  de la même manière (comme paramètres de l'intensité initiale). Nous ignorons donc cette constante commune dans les calculs des vraisemblances marginales.

Pour générer les données, nous choisissons le modèle BP avec la configuration  $(\alpha = 1, \beta = 3, p = 0.7, n = 25)$ . La loi *a priori* jointe pour chaque modèle est  $\pi(\alpha, \beta, p)$ . Via les étapes de la sélection par le facteur de Bayes, le modèle BP devrait être identifié comme le modèle le plus plausible.

Les résultats des simulations et des facteur de Bayes sont présentés dans les Tableaux 4.2 et 4.3. Le calcul de la vraisemblance marginale est réalisée suivant l'ajustement de Barlett [29] de l'approximation de Laplace. La vraisemblance marginale du modèle BP est la plus importante, ce qui implique une proposition en faveur du modèle Brown-Proschan. Le modèle  $ARA_1$  est clairement inadapté au jeu de données, puisque sa vraisemblance marginale est très faible (d'ordre  $10^{-6}$ ). La décision entre le modèle  $ARA_\infty$  et Brown-Proschan nécessite une étude plus approfondie, car le rapport de vraisemblances marginales des deux modèles (étant égal à 3.12) ne peut pas donner d'indication. Cela peut être dû à la similitude entre le modèle  $ARA_\infty$  et Brown-Proschan, en particulier pour un système qui se dégrade rapidement ( $\beta = 3$ ). Le nombre d'observations est relativement modeste ( $n = 25$ ), ce qui rend la sélection plus difficile.

Nous présentons également les estimations ponctuelles pour les trois modèles. Les 95%–intervalles HPD sont estimées avec les chaînes générées par l'algorithme MCMC. Les conditions d'unimodalité des lois cibles sont vérifiées numériquement pour les trois modèles. Les taux d'acceptation du modèle BP et  $ARA_\infty$  sont satisfaisants selon la démonstration empirique dans [127], qui argumente qu'un taux d'acceptation entre 15% et 50% peut garantir au moins une efficacité de 80% de l'algorithme MCMC. Pour le modèle  $ARA_1$ , les taux d'acceptation sont alarmants : un taux d'acceptation trop élevé (cas du  $\alpha$  de 88%) implique que la chaîne MCMC n'explore pas bien le support du paramètre, tandis qu'un faible taux d'acceptation peut être à cause d'un mauvais calibrage de la loi de proposition dans l'étape Metropolis-Hastings de l'algorithme. Tous ces éléments peuvent constituer un argument du refus du modèle  $ARA_1$ .

Les valeurs des vraisemblances marginales nous montrent que la démarche avec le facteur de Bayes peut très bien distinguer les modèles qui ont des comportements statistiques différents (le cas entre  $ARA_1$  et BP ou  $ARA_\infty$ ), mais cela peut s'avérer non satisfaisant pour les modèles qui sont similaires (BP et  $ARA_\infty$ ). Néanmoins, pour départager entre ces deux modèles, on peut évoquer un raisonnement pratique : le modèle BP ne comporte que des maintenances parfaites et minimales, tandis que le modèle  $ARA_\infty$  considère que toutes les maintenances ont la même efficacité. Le choix entre BP et  $ARA_\infty$  pourrait alors se faire simplement sur des considérations pratiques.

### 3.2.2 Test d'adéquation pour le modèle $ARA_1$

Le jeu de paramètre  $(\alpha = 1, \beta = 3, \rho = 0.3)$  est choisi pour générer les données sous l'hypothèse nulle. Les nombres  $(i, n)$  sont fixés à  $(20, 50)$  pour vérifier l'hypothèse de la loi exponentielle.

Modèle	Vraisemblance marginale	Estimation			Intervalle HPD 95%			Taux d'acceptation		
		$\alpha$	$\beta$	$p$ ou $\rho$	$\alpha$	$\beta$	$p$ ou $\rho$	$\alpha$	$\beta$	$p$ ou $\rho$
BP	0.04498	1.38	3.95	0.94	[0.87; 1.99]	[2.82; 5.24]	[0.81; 0.99]	35%	56%	58%
$ARA_\infty$	0.01440	0.79	4.78	0.82	[0, 01; 1.59]	[2.97; 9.81]	[0.39; 0.99]	23%	53%	55%
$ARA_1$	$2 \times 10^{-6}$	1.11	3.92	0.98	[0.21; 1.59]	[2.59; 5.33]	[0.97; 0.99]	88%	74%	14%

Tableau 4.2 – Estimation et facteur de Bayes pour les trois modèles. Le modèle générateur est le modèle de Brown-Proschan ayant la configuration ( $\alpha = 1, \beta = 3, p = 0.7, n = 25$ )

Modèle	$ARA_\infty$	$ARA_1$
BP	3.12	22490

Tableau 4.3 – Facteur de Bayes pour la comparaison entre le modèle BP et les modèles  $ARA_\infty$  et  $ARA_1$ .

Les données sont générées de la manière suivante. Tout d'abord,  $n = 50$  instants de défaillance sont générées avec le modèle  $ARA_1$ , puis les 30 derniers sont conservés afin de constituer les valeurs  $\{\hat{e}_j\}_{j=20\dots 50}$ . Le Tableau 4.4 présente les valeurs de la trajectoire générée.

Tableau 4.4 – Exemple d'une trajectoire  $\{\hat{e}_j\}_{j=20\dots 50}$

0.012	0.097	0.154	0.809	1.102	0.650
0.099	0.595	0.006	0.353	0.754	0.278
0.019	0.015	1.189	0.083	0.048	0.416
0.271	0.118	0.723	0.076	0.621	0.024
0.302	0.254	0.207	0.218	1.015	2.017

Nous appliquons les trois tests de Kolmogorov-Smirnov, Cramer-von Mises et Anderson-Darling modifiés [136] pour tester une loi exponentielle dont le paramètre est inconnu. Les statistiques des tests à 5% sont présentées dans le Tableau 4.5.

Tableau 4.5 – Statistiques des tests

Test	Statistique
Kolmogorov-Smirnov	0.768
Cramer-von Mises	0.124
Anderson-Darling	0.889

En comparant avec le tableau des valeurs critiques [136], les trois tests ne rejettent pas l'hypothèse nulle du modèle  $ARA_1$ . Nous pouvons effectuer un contrôle visuel de l'adéquation

des échantillons  $\{\hat{e}_j\}_{j=20\dots 50}$  à une loi exponentielle en traçant l'ensemble des points :

$$\left( \hat{e}_{(j)}, -\ln \left( 1 - \frac{j}{n+1} \right) \right)_{j=1, \dots, n-i},$$

où  $\{\hat{e}_{(j)}\}_{j=1\dots 30}$  sont les échantillons ordonnés de  $\{\hat{e}_j\}_{j=20\dots 50}$ . Le graphique 4.8 qui confirme l'hypothèse nulle d'exponentialité.

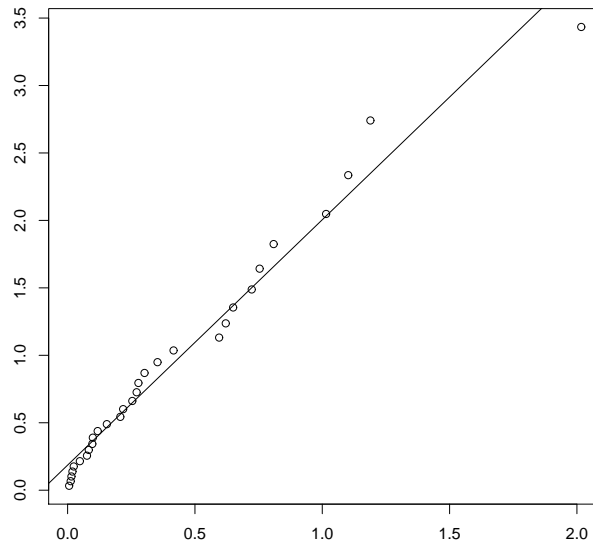


Figure 4.8 – Test d'adéquation à une loi exponentielle

La puissance du test est évaluée avec les simulations. Le modèle  $ARA_1$  est testé contre le modèle  $ARA_\infty$  et Brown-Proschan. Le jeu de paramètres suivants sont utilisés  $\alpha = 1, \beta \in \{3, 5, 7\}, \rho = 0.3$ . Le nombre total des instants de défaillance sont varié  $n \in \{50, 70, 90, 110, 130, 150, 170, 200\}$ , tandis que le seuil  $i$  est toujours fixé à 30. La figure 4.9 illustre l'évolution de la puissance du test contre le modèle  $ARA_\infty$  (à gauche) et Brown-Proschan (à droite) en fonction du nombre de données.

La puissance du test est élevée lorsque le paramètre de dégradation  $\beta$  est important (5, 7) et le nombre de données est élevé (environ 100). Pour un  $\beta$  important, le modèle  $ARA_1$  est approché d'un NHPP, tandis que les modèles  $ARA_\infty$  et BP se stabilisent vers leurs régimes stationnaires et se manifestent des comportements proches de ceux d'un processus de renouvellement. Le NHPP et le processus de renouvellement sont très différents de par leur construction, ce qui explique la performance du test proposé.

## 4 Cas d'étude

Nous présentons l'application de la méthode de sélection avec le facteur de Bayes pour un jeu de données de défaillances de la climatisation d'une flotte d'avions sont recensées [118]. Nous proposons l'étude de l'avion 7914. Les instants de défaillance sont présentés dans le Tableau 4.6. Les lois *a priori* non-informatives sont utilisées pour les paramètres des trois modèles (donc

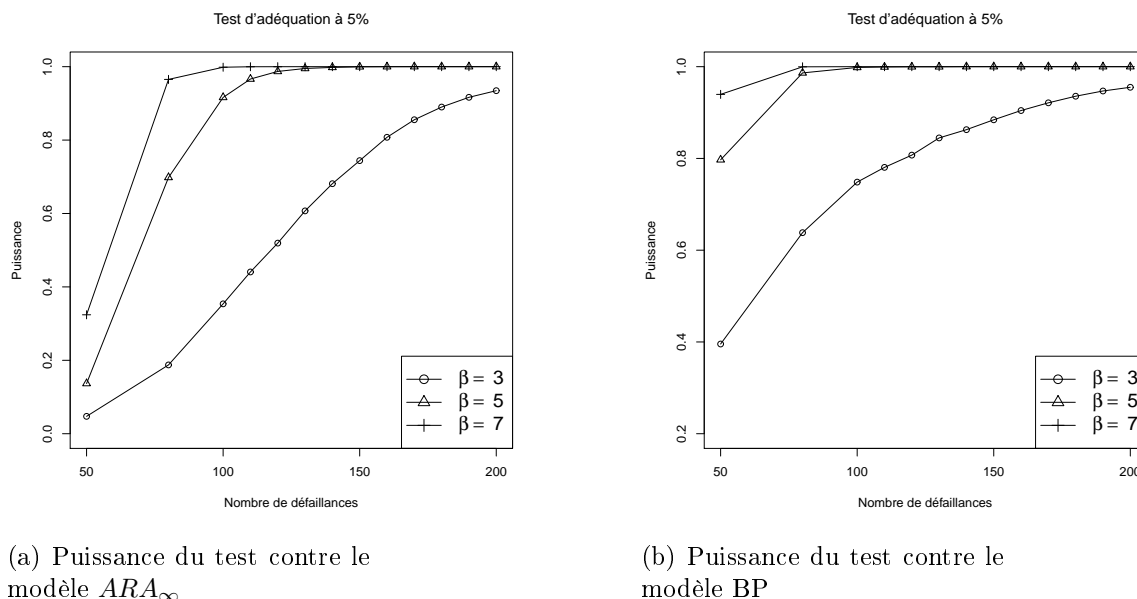


Figure 4.9 – Puissance du test d'adéquation exponentielle à 5% contre le modèle  $ARA_\infty$  (à gauche) et le modèle BP (à droite) pour trois valeurs de  $\beta$

Avion	Instants cumulés de défaillance												
7914	50	94	196	268	290	329	332	347	544	732	811	899	945
	950	955	991	1013	1152	1362	1459	1489	1512	1525	1539		

Tableau 4.6 – Instants de défaillance de la climatisation de l'avion 7914 [118]

l'estimateur  $\pi_1$ ). Nous supposons toujours que les trois modèles sont équiprobables  $\mathbb{P}(BP) = \mathbb{P}(ARA_\infty) = \mathbb{P}(ARA_1) = \frac{1}{3}$  en vue du jeu de données. Les rapports des vraisemblances marginales pourraient indiquer le classement des modèles les plus plausibles. Les résultats des estimations sont présentées dans le Tableau 4.7.

Nous constatons qu'il y a une forte différence entre les vraisemblances marginales. Le modèle de Brown-Proshchan est le candidat favori, avec un rapport de vraisemblance marginale de l'ordre  $10^4$  et  $10^5$  contre le modèle  $ARA_\infty$  et le modèle  $ARA_1$ , respectivement. En ce qui concerne l'estimation ponctuelle, les trois modèles suggèrent des cinétiques de vieillissement ( $\hat{\beta}$ ) assez similaires. Les forts taux d'acceptation du paramètre  $\alpha$  indiquent que l'algorithme MCMC rencontre des difficultés pour bien explorer le support du paramètre (donc l'étape Metropolis-Hastings a tendance à accepter la totalité des propositions). Pour les paramètres  $(\beta, p)$  et  $(\beta, \rho)$  des modèles BP et  $ARA_\infty$ , les taux d'acceptation restent satisfaisants. Pour le modèle  $ARA_1$ , on éprouve toujours des difficultés dans le calibrage des lois. Cela pourrait indiquer que le modèle  $ARA_1$  n'est pas approprié pour ce jeu de données.

## 5 Conclusion

Ce chapitre est principalement consacré à l'inférence bayésienne pour le modèle Brown-Proshchan. L'intensité initiale est modélisée par la loi Weibull. Dans ce cadre, nous avons discuté

Modèle	Vraisemblance marginale	Estimation			Intervalle HPD 95%			Taux d'acceptation		
		$\alpha$	$\beta$	$p/\rho$	$\alpha$	$\beta$	$p/\rho$	$\alpha$	$\beta$	$p/\rho$
BP	$2 \times 10^{-53}$	$8 \times 10^{-4}$	2.40	0.29	$[2 \times 10^{-8}; 0.004]$	[1.18; 3.41]	[0.06; 0.79]	91%	17%	43%
$ARA_{\infty}$	$3 \times 10^{-57}$	$3 \times 10^{-7}$	2.75	0.20	$[3 \times 10^{-8}; 8 \times 10^{-7}]$	[2.49; 3.15]	[0.09; 0.33]	94%	39%	13%
$ARA_1$	$4 \times 10^{-58}$	$9 \times 10^{-7}$	2.54	0.61	$[5 \times 10^{-8}; 2 \times 10^{-6}]$	[2.27; 3.04]	[0.07; 0.90]	97%	10%	62%

Tableau 4.7 – Estimation et facteur de Bayes pour les trois modèles avec les défaillances de la climatisation de l’avion 7914 dans le Tableau 4.6

de plusieurs choix de lois *a priori* pour les paramètres de l’intensité initiale et pour la probabilité de maintenance parfaite du modèle BP. Un ensemble de simulations a été proposé afin de comparer la performance de chaque loi *a priori*. Les critères empiriques de convergence ont été utilisés pour assurer le bon calibrage de la méthode d’estimation choisie. Nous avons aussi effectué les vérifications graphiques afin d’assurer que les lois cibles (lois *a posteriori*) sont unimodales, ce qui est un critère important pour l’utilisation des algorithmes de simulations classiques.

Dans cette étude, nous avons proposé l’utilisation du facteur de Bayes pour obtenir des critères de sélection de modèle. Les étapes de cette approche s’appuient sur les estimations bayésiennes qui sont réalisées précédemment. Nous avons proposé aussi un nouveau critère de sélection pour le modèle  $ARA_1$  et nous avons obtenus des premiers résultats encourageants. Le test est particulièrement utile pour départager rapidement les modèles dont leur nature est différente (par exemple le modèle  $ARA_1$  contre le modèle  $ARA_{\infty}$ , BP ou encore le modèle de maintenance parfaite) avec une forte dégradation.

L’approche bayésienne proposée dans ce chapitre est motivée par l’étude de systèmes fiables dont le nombre de défaillances est très limité. Cette approche peut prendre en compte à la fois les avis d’experts et le retour d’expérience sur ces systèmes. Cela est une source d’information non négligeable et qui contribue à améliorer la qualité des estimations. Nous sommes amené à travailler avec des lois *a priori* informatives ou non-informatives pour les paramètres d’intensité initiale. Dans les futurs travaux, il est aussi envisageable de considérer des cas non-paramétriques ou semi-paramétriques de cette intensité, afin d’élargir le domaine d’application de l’approche bayésienne pour le modèle BP. Dans l’application du facteur de Bayes pour la sélection de modèles, nous avons utilisé les lois *a priori* non-informatives pour tous les modèles concurrents, puisqu’il n’est pas évident d’attribuer des lois *a priori* appropriées aux paramètres de différents modèles. L’utilisation de cette démarche pour la sélection de modèles reste à analyser davantage dans plusieurs cas d’application. Il sera aussi intéressant d’élargir l’estimation bayésienne pour les modèles d’âge virtuel qui considèrent plusieurs types de maintenance.



# Conclusion générale

Cette thèse est consacrée à l'analyse des modèles de maintenance imparfaite à l'aide des âges virtuels. Les principaux modèles qui font l'objet de notre étude sont les modèles  $ARA_1$ ,  $ARA_\infty$  et Brown-Prochan. Les thèmes abordés sont l'analyse du modèle  $ARA_\infty$  ayant pour intensité initiale de la loi de Weibull, l'extension des méthodes d'estimation sur une fenêtre d'observation, l'analyse bayésienne du modèle BP les critères de sélection de modèle.

Le deuxième chapitre propose les nouveaux développements analytiques du modèle  $WARA_\infty$ , en particulier les lois marginales des âges effectifs et des durées inter-défaillance. La propriété de convergence a été mise en évidence, et les lois asymptotiques ont été proposées. A partir de ces résultats, nous avons proposé des premiers éléments qui permettent de construire des politiques de maintenance préventive optimales en utilisant uniquement des maintenances imparfaites et sur un horizon infini. Dans ce cadre, les politiques basées sur l'âge et sur l'intensité de défaillance ont été proposées. Dans un premier temps, nous avons considéré que l'intensité initiale suit la loi de Weibull et les maintenances ont la même efficacité. Les propositions ont ensuite été étendues pour d'autres choix d'intensité initiale, et au cas où l'efficacité de chaque type de maintenance est différente. Des simulations ont été proposées afin d'illustrer la mise en place des politiques proposées.

Dans le troisième chapitre, nous nous sommes intéressés à l'analyse des données de maintenance imparfaite observées sur une fenêtre d'observation. Très souvent, les premières défaillances suite à la mise en route du système (et avant la fenêtre d'observation) sont négligées ou non disponibles, puisque celles-ci surviennent pendant la période de jeunesse ou de rodage avant la livraison du produit. Puisque les approches classiques considèrent systématiquement que les données sont collectées à partir de la mise en route du système, des extensions de méthodes d'estimation sont nécessaires pour les modèles de maintenance imparfaite pour prendre en compte ce phénomène. Nous nous sommes appuyés sur la connaissance de l'âge du système au début des fenêtres d'observation pour proposer des nouvelles fonctions de vraisemblance. Pour les modèles  $ARA_\infty$  et Brown-Prochan, nous avons supposé que les observations sont effectuées pendant leurs régimes stationnaires respectifs, et la loi asymptotique de la première observation est connue (résultats de la partie précédente sur le modèle  $ARA_\infty$  et de la littérature pour le modèle Brown-Prochan). Il est alors possible d'établir une vraisemblance adaptée à ce type d'observation. Pour le modèle  $ARA_1$ , nous avons considéré l'âge au début des fenêtres d'observation comme un paramètre supplémentaire, et nous l'incluons dans la vraisemblance. Des simulations numériques ont été présentées, afin de démontrer l'utilité des nouvelles modélisations par rapport aux approches classiques. Les nouvelles extensions ont ensuite été appliquées aux jeux de données réelles.

Le quatrième chapitre est dédié à l'inférence bayésienne pour le modèle Brown-Prochan et à des critères de sélection de modèle. Cette analyse se situe dans le cadre où les systèmes sont très fiables, et donc où peu de défaillances sont observées. Pour pallier le manque de données, les experts peuvent disposer de connaissances sur le fonctionnement de ces systèmes. Il est alors intéressant d'incorporer les avis d'experts dans l'analyse statistique pour pouvoir compenser le

## Conclusion générale

manque de données. Nous appliquons alors la méthode bayésienne pour estimer les paramètres. Dans des conditions moins favorables où il est difficile d'établir des lois de probabilité pour les connaissances a priori, on a recouru à des lois impropres ou non-informatives. Via des simulations numériques, nous avons analysé l'impact du choix de la loi *a priori* sur la qualité des estimations. Nous proposons l'application du facteur de Bayes pour effectuer une étude de choix de modèles. Cette approche s'appuie sur les algorithmes utilisés dans l'estimation bayésienne afin de calculer le critère de choix de modèles de maintenance imparfaite, en l'occurrence les modèles  $ARA_1$ ,  $ARA_\infty$  et Brown-Proschan. Nous avons proposé un nouveau test d'adéquation pour le modèle  $ARA_1$ , qui est simple à mettre en place et est performant contre les modèles de nature différente (par exemple  $ARA_\infty$ , BP). Les critères de sélection de modèle sont testés avec des simulations, puis avec des données réelles.

Le développement des expressions analytiques des grandeurs de fiabilité du modèle  $ARA_\infty$  apporte des connaissances plus approfondies du modèle dans son état transitoire et stationnaire. En particulier, celui-ci nous permet de construire des politiques de maintenance préventive avec des maintenances imparfaites de type  $ARA_\infty$ . Quelques critères d'optimisation sont alors proposés pour le cas de l'intensité de défaillance Weibull. Cela pourrait nous amener à :

- Proposer des expressions analytiques en considérant d'autres intensités initiales ou en présence de plusieurs types de maintenance.
- Identifier les conditions pour la construction des politiques de maintenance préventive pour ces cas.

Nous avons discuté de l'importance d'une procédure d'estimation efficace pour le modèle  $WARA_\infty$ , afin de pouvoir l'appliquer aux données réelles. En pratique, les paramètres du modèle ne sont pas connus mais ils sont à estimer à partir des données. Il serait nécessaire de prendre en compte les incertitudes dues aux estimations et aux autres paramètres du modèle tels que les coûts de maintenance sur l'optimisation des politiques de maintenance préventive. Nous nous intéressons aussi à l'utilisation d'autres modèles d'âge virtuel pour les politiques de maintenance. Dans ce contexte, le modèle Brown-Proschan semble adapté, car ce modèle possède la propriété de convergence, les lois marginales des grandeurs de fiabilité étant déjà proposées dans la littérature.

Nous envisageons d'élargir les analyses statistiques sur les fenêtres d'observation, présentées dans le chapitre 3, pour les systèmes dont l'intensité initiale est différente de la loi de Weibull, puisque la convergence des modèles considérées dans cette partie ( $ARA_\infty$ , BP) est indépendante de l'intensité initiale. Cela permet d'analyser les bases de données de divers domaines d'application, où l'intensité de défaillance n'est pas forcément de loi Weibull. L'établissement des intervalles de confiance pour les estimateurs est aussi envisageable, afin de quantifier les incertitudes dues aux estimations. D'autre part, les extensions proposées ne considèrent que les maintenances correctives. Nous souhaitons étendre les résultats pour les modèles conjoints de maintenance corrective et préventive. Cela semble généralisable sans grandes difficultés pour des maintenances préventives planifiées, et est certainement plus complexe pour des maintenances préventives conditionnelles.

Les applications aux données réelles ont montré quelques avantages des développements proposés dans ce manuscrit. Nous souhaitons les appliquer davantage dans diverses situations, afin de proposer des estimations plus précises et effectuer un pronostic plus adapté pour les systèmes considérés.

# Bibliographie

- [1] O. Aalen. Nonparametric inference in connection with multiple decrement models. *Scandinavian Journal of Statistics*, 3(1) :15–27, 1976.
- [2] P. Andersen, O. Borgan, R. Gill, and N. Keiding. *Statistical Models Based on Counting Processes*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [3] B. Arnold and R. Groeneveld. On excess life in certain renewal process. *Journal of Applied Probability*, 18(2) :378–389, 1981.
- [4] H. Ascher and H. Feingold. *Repairable Systems Reliability : Modelling, Inference, Misconceptions and Their Causes*. Dekker, New York, 1984.
- [5] S. K. Bar-Lev, I. Lavi, and B. Reiser. Bayesian inference for the Power Law Process. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 44(4) :623–639, 1992.
- [6] R. E. Barlow and F. Proschan. Planned replacement. In S. Arrow, Karlin, editor, *Studies in Applied Probability and Management Science*. Stanford University Press, Stanford, California, 1962.
- [7] E. Beutner, L. Bordes, and L. Doyen. The failure of the profile likelihood method for semi-parametric effective age models. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01127990>, 2015.
- [8] H. Block, W. Borges, and T. Savits. Age-dependant minimal repair. *Journal of Applied Probability*, 22 :370–385, 1985.
- [9] L. Bordes and S. Mercier. Extended geometric processes : Semiparametric estimation and application to reliability. *International Official Journal of the Iranian Statistical Society*, 12(1) :1–34, 2013.
- [10] C. Bérenguer, C. Chu, and A. Grall. Inspection and maintenance planning : an application of semi-Markov decision processes. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 8 :467–476, 1997.
- [11] S. P. Brooks and A. Gelman. General methods for monitoring convergence of iterative simulations. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 7(4) :434–455, 1998.
- [12] J. F. Brown, J. F. Mahoney, and B. D. Sivazlian. Hysteresis repair in discounted replacement problems. *IIE Transactions*, 15(2) :156–165, 1983.
- [13] M. Brown and F. Proschan. Imperfect repair. *Journal of Applied Probability*, 20 :851–859, 1983.
- [14] M. Bulmer and J. Eccleston. *Case Studies in Reliability and Maintenance*. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2003.
- [15] E. Cinlar. *Introduction to Stochastic Processes*. Dover Publications, 2013.
- [16] R. Canfield. Cost optimization of periodic preventive maintenance. *IEEE Transactions on Reliability*, 35(1) :78–81, 1986.

## Bibliographie

- [17] G. K. Chan and S. Asgarpoor. Optimum maintenance policy with Markov processes. *Electric Power Systems Research*, 76 :452–456, 2006.
- [18] J.-K. Chan and L. Shaw. Modeling repairable systems with failure rates that depend on age and maintenance. *IEEE Transactions on Reliability*, 42(4) :566–571, 1993.
- [19] M.-H. Chen and Q.-M. Shao. Monte Carlo estimation of Bayesian credible and HPD intervals. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 8(1) :69–92, 1999.
- [20] A. Chernobai, K. Burnecki, S. Rachev, S. Trück, and R. Weron. Modelling catastrophe claims with left-truncated severity distributions. *Journal of Computational Statistics*, 21(3) :537–555, 2006.
- [21] F. Corset, L. Doyen, and O. Gaudoin. Bayesian analysis of ARA imperfect repair models. *Communications in Statistics : Theory Methods*, 41(21) :3915–3941, 2012.
- [22] D. R. Cox and P. A. W. Lewis. *The Statistical Analysis of Series of Events*. Methuen, London, 1966.
- [23] L. Crow. Reliability analysis for complex repairable systems. In F. Proschan and R. Serfling, editors, *Reliability and Biometry*, pages 379–410. SIAM, Philadelphia, 1974.
- [24] L. H. Crow and A. P. Basu. Reliability growth estimation with missing data. In *Reliability and Maintainability Symposium Annual Proceedings*, pages 248–253, Los Angeles, CA, 1988.
- [25] M. J. Crowder. *Classical Competing Risks*. Chapman & Hall, London, 2001.
- [26] J. S. Dagpunar. Renewal type equations for a general repair process. *Quality and reliability engineering international*, 13 :235–245, 1997.
- [27] J. S. Dagpunar. Some properties and computational results for a general repair process. *Naval Research Logistics*, 45 :391–405, 1998.
- [28] M. D. de Oliveira, E. A. Colosimo, and G. L. Gilardoni. Bayesian inference for Power Law Processes with applications in repairable systems. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 142 :1151–1160, 2012.
- [29] T. J. DiCiccio, R. E. Kass, A. Raftery, and L. Wasserman. Computing Bayes factor by combining simulation and asymptotic approximations. *Journal of the American Statistical Association*, 92(439) :903–915, 1997.
- [30] J. M. Dickey. The renewal function for an alternating renewal process, which has a Weibull failure distribution and a constant repair time. *Reliability Engineering and System Safety*, 31 :321–343, 1991.
- [31] Y. Dijoux. *Modèles d'âge virtuel et de risques concurrents pour la maintenance imparfaite*. PhD thesis, Institut national polytechnique de Grenoble, 2008.
- [32] Y. Dijoux. Critères de sélection de modèle de fiabilité dans le cadre des risques concurrents. In *41èmes Journées de Statistique, SFDS*, Bordeaux, 2009.
- [33] Y. Dijoux. A virtual age model based on a bathtub shaped initial intensity. *Reliability Engineering and System Safety*, 94(5) :982–989, 2009.
- [34] Y. Dijoux and E. Idée. Classes of virtual age models adapted to systems with a burn-in period. *IEEE Transactions on Reliability*, 62(4) :754–763, 2013.
- [35] C. Dorado, M. Hollander, and J. Sethuraman. Nonparametric estimation for a general repair model. *The Annals of Statistics*, 25(3) :1140–1160, 1997.
- [36] L. Doyen. *Modélisation et évaluation de l'efficacité de la maintenance des systèmes réparables*. PhD thesis, Institut national polytechnique de Grenoble, 2004.

- [37] L. Doyen. Asymptotic properties of imperfect repair models and estimation of repair efficiency. *Naval Research Logistics*, 57 :296–307, 2010.
- [38] L. Doyen. On the Brown–Proschan model when repair effects are unknown. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 27 :600–618, 2010.
- [39] L. Doyen. Semi-parametric estimation of Brown–Proschan preventive maintenance effects and intrinsic wear-out. *Computational Statistics and Data Analysis*, 77 :206–222, 2014.
- [40] L. Doyen and O. Gaudoin. Classes of imperfect repair models based on reduction of failure intensity or virtual age. *Reliability Engineering and System Safety*, 84 :45–56, 2004.
- [41] L. Doyen and O. Gaudoin. Modeling and assessment of aging and efficiency of corrective and planned preventive maintenance. *IEEE Transactions on Reliability*, 60(4) :759–769, 2011.
- [42] B. Efron and D. V. Hinkley. Assessing the accuracy of the maximum likelihood estimator : observed versus expected Fisher information. *Biometrika*, 65(3) :457–482, 1978.
- [43] S. El-Ferik and M. Ben-Daya. Model for imperfect age-based preventive maintenance with age reduction. *Journal of the Operational Research Society*, 59(12) :1644–1651, 2008.
- [44] M. Finkelstein. On some models of general repair. *Microelectronic Reliability*, 33(5) :663–666, 1993.
- [45] M. Finkelstein. *Failure rate Modelling for reliability and risk*. Springer-Verlag, London, 2008.
- [46] M. Finkelstein. On the optimal degree of imperfect repair. *Reliability Engineering and System Safety*, 138 :54–58, 2015.
- [47] J. Franz and Y. Abdel-Aty. Bayes inference problems in failure-repair process. *Economic Quality Control*, pages 209–222, 2003.
- [48] Y. Fuqing and U. Kumar. A general imperfect repair model considering time-dependent repair effectiveness. *IEEE Transactions on Reliability*, 61(1) :95–100, 2012.
- [49] M. Gärtner. Estimation in a general repair model based on left-truncated data. *Scandinavian Journal of Statistics*, 30 :61–73, 2003.
- [50] S. Gasmi, C. Love, and W. Kahle. A general repair, proportional-hazards, framework to model complex repairable systems. *IEEE Transactions on Reliability*, 52(1) :26–32, 2003.
- [51] G. Gasper and M. Rahman. *Basic Hypergeometric Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [52] O. Gaudoin and J. Ledoux. *Modélisation aléatoire en fiabilité des logiciels*. Hermès Science Publications, Paris, 2007.
- [53] L. A. Gavrilov and N. S. Gavrilova. Models of systems failure in aging. In P. Conn, editor, *Handbook of Models for Human Aging*. Elsevier, 2006.
- [54] A. Gelman and D. Rubin. Inference from iterative simulation using multiple sequences. *Statistical Science*, 7 :457–511, 1992.
- [55] S. Geman and D. Geman. Stochastic relaxation, Gibbs distribution, and the Bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6 :721–741, 1984.
- [56] I. Gertsbakh. *Reliability Theory with Applications to Preventive Maintenance*. Springer-Verlag, 2000.

## Bibliographie

- [57] J. Geweke. Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments. In J. M. Bernardo, J. Berger, A. P. Dawid, and A. F. M. Smith, editors, *Bayesian Statistics 4*, pages 169–193. Oxford University Press, Oxford, 1992.
- [58] G. L. Gilardoni, M. D. de Oliveira, and E. A. Colosimo. Nonparametric estimation and bootstrap confidence intervals for the optimal maintenance time of a repairable system. *Computational Statistics and Data Analysis*, 63 :113–124, 2013.
- [59] A. Grall, L. Dieulle, C. Bérenguer, and M. Roussignol. Continuous-time predictive maintenance scheduling for a deteriorating system. *IEEE Transactions on Reliability*, 51(2) :141–150, 2002.
- [60] Y. Guessoum. *Modélisation probabiliste de l'impact des actions de maintenance sur le comportement des matériels électriques de réseaux*. PhD thesis, Université de Technologie de Troyes, 2012.
- [61] M. Guida, R. Calabria, and G. Pulcini. Bayes inference for a Non-Homogeneous Poisson Process with power intensity law. *IEEE Transactions on Reliability*, 38(5) :603–609, 1989.
- [62] R. Guo and C. Love. Statistical analysis of an age model for imperfect repaired systems. *Quality and Reliability Engineering International*, 8(2) :133–146, 1992.
- [63] P. Heidelberger and P. D. Welch. Simulation run length control in the presence of an initial transient. *Operations Research*, 31(6) :1109–1144, 1983.
- [64] H. Hussin, F. Hashim, M. Muhammad, and S. Ibrahim. A systematic practical approach of analyzing offshore system maintenance data. In *Proceedings of International MultiConference of Engineers and Computer Scientists*, Hong Kong, 2010.
- [65] V. Jayabalan and D. Chaudhuri. Cost optimization of maintenance scheduling for a system with assured reliability. *IEEE Transactions on Reliability*, 41(1) :21–25, 1992.
- [66] V. Jayabalan and D. Chaudhuri. Optimal maintenance and replacement policy for a deteriorating system with increased mean downtime. *Naval research logistics*, 39 :67–78, 1992.
- [67] V. Jayabalan and D. Chaudhuri. Replacement policies : A near optimal algorithm. *IIE Transactions*, 27 :784–788, 1995.
- [68] H. Jeffreys. *Theory of Probability*. Oxford Classic Texts in the Physical Sciences. Oxford University Press, Oxford, 3rd edition, 1961.
- [69] X. Jiang, V. Makis, and A. K. S. Jardine. Optimal repair/replacement policy for a general repair model. *Advances in Applied Probability*, 33(1) :206–222, 2001.
- [70] E. L. Kaplan and P. Meier. Nonparametric estimation from incomplete observations. *Journal of the American Statistical Association*, 53(282) :457–481, 1958.
- [71] R. Kass and A. E. Raftery. Bayes factor. *Journal of the American Statistical Association*, 90(430) :773–795, 1995.
- [72] R. Kass and L. Wasserman. The selection of prior distributions by formal rules. *Journal of the American Statistical Association*, 91(435) :1343–1370, 1996.
- [73] N. Keiding. *Delayed Entry*. Encyclopedia of Biostatistics. 2nd edition, 2005.
- [74] M. Kijima. Some results for repairable systems with general repair. *Journal of Applied Probability*, 26(1) :89–102, 1989.
- [75] M. Kijima, H. Morimura, and Y. Suzuki. Periodical replacement problem without assuming minimal repair. *European Journal of Operation Research*, 37 :194–203, 1988.

- [76] L. Kuo and T. Y. Yang. Bayesian computation for nonhomogeneous poisson processes in software reliability. *Journal of the American Statistical Association*, 91(434) :763–773, 1996.
- [77] P. Kvam, H. Singh, and L. Whitaker. Estimating distributions with increasing failure rate in an imperfect repair model. *Lifetime Data Analysis*, 8(1) :53–67, 2002.
- [78] C.-D. Lai and M. Xie. *Stochastic Ageing and Dependence for Reliability*. Springer, New York, 2006.
- [79] K. K. Lai, K. N. F. Leung, B. Tao, and S. Y. Wang. A sequential method for preventive maintenance and replacement of a repairable single-unit system. *The Journal of the Operational Research Society*, 52(11) :1276–1283, 2001.
- [80] Y. Lam. *The Geometric Process and Its Applications*. World Scientific, 2007.
- [81] H. Langseth and B. H. Lindqvist. A maintenance model for components exposed to several failure mechanisms and imperfect repair. In K. Doksum and B. H. Lindqvist, editors, *Mathematical and Statistical methods in Reliability*. World Scientific Publishing Co., 2003.
- [82] G. Last and R. Szekli. Asymptotic and monotonicity properties of some repairable systems. *Advances in Applied Probability*, 30(4) :1089–1110, 1998.
- [83] J. F. Lawless. *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. John Wiley & Sons, New Jersey, 2003.
- [84] Y. Le Gat and P. Eisenbeis. Using maintenance records to forecast failures in water networks. *Urban Water*, 2(3) :173–181, 2000.
- [85] K. Le Son, M. Fouladirad, A. Barros, E. Levrat, and B. Iung. Remaining useful life estimation based on stochastic deterioration models : A comparative study. *Reliability Engineering and System Safety*, 112 :165–175, 2013.
- [86] L. Li and T. E. Hanson. A bayesian semiparametric regression model for reliability data using effective age. *Computational Statistics and Data Analysis*, 73 :177–188, 2014.
- [87] C. Lie and Y. Chun. An algorithm for preventive maintenance policy. *IEEE Transactions on Reliability*, 35(1) :71–75, 1986.
- [88] J. Lim, K. Lu, and D. Park. Bayesian imperfect repair model. *Communications in Statistics : Theory Methods*, 27(4) :965–984, 1998.
- [89] T. Lim. Estimating system reliability with fully masked data under Brown-Proschan imperfect repair model. *Reliability Engineering and System Safety*, 59 :277–289, 1998.
- [90] B. H. Lindqvist, G. Elvebakk, and K. Heggland. The trend-renewal process for statistical analysis of repairable systems. *Technometrics*, 45(1) :31–44, 2003.
- [91] B. H. Lindqvist, B. Støve, and H. Langseth. Modelling of dependence between critical failure and preventive maintenance : The repair alert model. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 136 :1701–1717, 2006.
- [92] Z. A. Lomnicki. A note on the Weibull renewal process. *Biometrika*, 53(3) :375–381, 1966.
- [93] A. Lorton, M. Fouladirad, and A. Grall. A methodology for probabilistic model-based prognosis. *European Journal of Operational Research*, 225(3) :443–454, 2013.
- [94] C. Love, Z. Zhang, M. Zitron, and R. Guo. A discrete semi-Markov decision model to determine the optimal repair/replacement policy under general repairs. *European Journal of Operational Research*, 125 :398–409, 2000.

## Bibliographie

- [95] M. Luz Gámiz, K. B. Kulasekera, N. Limnios, and B. H. Lindqvist. *Applied Nonparametric Statistics in Reliability*. Springer-Verlag, London, 2011.
- [96] A. Mailhot, G. Pelletier, J.-F. Noël, and J.-P. Villeneuve. Modeling the evolution of the structural state of water pipe networks with brief recored pipe break histories : Methodology and application. *Water Resources Research*, 36(10) :3053–3062, 2000.
- [97] V. Makis and A. K. S. Jardine. A note on optimal replacement policy under general repair. *European Journal of Operational Research*, 69 :75–82, 1993.
- [98] M. Malik. Reliable preventive maintenance scheduling. *AIIE Transactions*, 11(3) :221–228, 1979.
- [99] R. McIntosh. Some asymptotic formulae for q-shifted factorials. *The Ramanujan Journal*, 3(2) :205–214, 1999.
- [100] W. Q. Meeker and L. A. Escobar. *Statistical Methods for Reliability Data*. John Wiley & Sons, 1998.
- [101] N. Metropolis and S. Ulam. The Monte Carlo method. *Journal of the American Statistical Association*, 44(247) :335–341, 1949.
- [102] H. G. Müller, J. L. Wang, J. R. Carey, E. P. Caswell-Chen, C. Chen, N. Papadopoulos, and F. Yao. Demographic window to aging in the wild : constructing life tables and estimating survival functions from marked individuals of unknown age. *Aging Cell*, 3 :125–131, 2004.
- [103] D. Murthy, M. Xie, and R. Jiang. *Weibull Models*. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2004.
- [104] T. Nakagawa. Periodic and sequential preventive maintenance policies. *Journal of Applied Probability*, 23(2) :536–542, 1986.
- [105] T. Nakagawa. Sequential imperfect preventive maintenance policies. *IEEE Transactions on Reliability*, 37(3) :295–298, 1988.
- [106] T. Nakagawa. *Maintenance Theory of Reliability*. Springer-Verlag, London, 2005.
- [107] W. Nelson. Theory and applications of hazard plotting for censored failure data. *Technometrics*, 14(4) :945–966, 1972.
- [108] W. B. Nelson. *Recurrent Events Data Analysis for Product Repairs, Disease Recurrences, and other Applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2003.
- [109] D. G. Nguyen and D. N. P. Murthy. Optimal preventive maintenance policies for repairable systems. *Operations Research*, 29(6) :1181–1194, 1981.
- [110] R. Nicolai, J. Frenk, and R. Dekker. Modelling and optimizing imperfect maintenance of coatings on a steel structures. *Structural Safety*, 31(3) :234–244, 2009.
- [111] E. Peña. Asymptotics for a class of dynamic recurrent event models. *arXiv 1410.8729v2*.
- [112] E. Peña, E. Slate, and J. González. Semiparametric inference for a general class of models for recurrent events. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 137 :1727–1747, 2007.
- [113] E. Peña, R. Strawderman, and M. Hollander. A weak convergence result relevant in recurrent models. In N. Limnios and M. Nikulin, editors, *Recent Advances in Reliability Theory (Bordeaux 2000)*, pages 493–515. Birkhäuser Boston, Boston, 2000.
- [114] E. Peña, R. Strawderman, and M. Hollander. Nonparametric estimation with recurrent event data. *Journal of the American Statistical Association*, 96(456) :1299–1315, 2001.



- [115] H. Pham and H. Wang. Imperfect maintenance. *European Journal of Operational Research*, 94 :425–438, 1996.
- [116] A. Pievatolo and F. Ruggeri. Bayesian reliability analysis of complex repairable systems. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 20 :253–264, 2004.
- [117] H. Procaccia, E. Fertou, and M. Procaccia. *Fiabilité et maintenance des matériels industriels réparables et non réparables*. Lavoisier, Paris, 2011.
- [118] F. Proschan. Theoretical explanation of observed decreasing failure rate. *Technometrics*, 42(1) :7–11, 1963.
- [119] G. Pulcini. On the overhaul effect for repairable mechanical units : a Bayes approach. *Reliability Engineering and System Safety*, 70 :85–94, 2000.
- [120] A. E. Raftery. Hypothesis testing and model selection with posterior simulation. In W. R. Gilks, D. J. Spiegelhalter, and S. Richardson, editors, *Practical Markov Chain Monte Carlo*. Chapman and Hall, London.
- [121] A. E. Raftery and S. Lewis. How many iterations in the Gibbs sampler? In J. M. Bernardo, J. Berger, A. P. Dawid, and A. F. M. Smith, editors, *Bayesian Statistics 4*, pages 763–773. Oxford University Press, Oxford, 1992.
- [122] A. Rangan and R. Esther Grace. Optimal replacement policies for a deteriorating system with imperfect maintenance. *Advances in Applied Probability*, 21(4) :949–951, 1989.
- [123] M. Rausand and A. Hoyland. *System Reliability Theory :Models, Statistical Methods and Applications*. Wiley, 2004.
- [124] S. Rigdon and A. Basu. *Statistical Methods for the Reliability of Repairable System*. Wiley, 2000.
- [125] C. Robert. *Le choix bayésien*. Springer, Paris, 2006.
- [126] C. Robert and G. Casella. *Monte Carlo Statistical Methods*. Springer, second edition, 2004.
- [127] G. O. Roberts and J. S. Rosenthal. Optimal scaling for various metropolis-hastings algorithms. *Statistical Science*, 6 :377–411, 2001.
- [128] J. Røstum. *Statistical Modelling of Pipe Failures in Water Networks*. PhD thesis, Norwegian University of Science and Technology, 2000.
- [129] P. J. Rousseeuw and B. C. van Zomeren. Unmasking multivariate outliers and leverage points. *Journal of the American Statistical Association*, 85 :633–651, 1990.
- [130] A. Sen. Bayesian estimation and prediction of the intensity of the power law process. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 72(8) :613–631, 2002.
- [131] I. Shin, T. J. Lim, and C. H. Lie. Estimating parameters of intensity function and maintenance effect for repairable unit. *Reliability Engineering and System Safety*, 54 :1–10, 1996.
- [132] N. D. Singpurwalla. *Reliability and Risk : A Bayesian Perspective*. John Wiley & Sons, 2006.
- [133] B. Sivazlian. On the joint distribution of the number of renewals in a renewal process. *Stochastic Analysis and Applications*, 7(4) :475–495, 1989.
- [134] G. Soon and M. Woodroffe. Nonparametric estimation and consistency for renewal processes. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 53 :171–195, 1996.
- [135] W. Stadje and D. Zuckerman. Optimal maintenance strategies for repairable systems with general degree of repair. *Journal of Applied Probability*, 28(2) :384–396, 1991.

## Bibliographie

- [136] M. A. Stephens. Edf statistics for goodness of fit and some comparisons. *Journal of the American Statistical Society*, 69(347) :730–737, 1974.
- [137] P. R. Tadikamalla. Age replacement policies for Weibull failure times. *IEEE Transactions on Reliability*, R-29(1) :88–90, 1980.
- [138] A. Tsiatis. A nonidentifiability aspect of the problem of competing risks. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 72(1) :20–22, 1975.
- [139] Y. Vardi. Nonparametric estimation in renewal process. *Annals of Statistics*, 10(3) :772–785, 1982.
- [140] H. Wang. A survey of maintenance policies of deteriorating systems. *European Journal of Operational Research*, 139 :469–489, 2002.
- [141] H. Wang and H. Pham. A quasi-renewal process and its applications in imperfect maintenance. *International journal of System Science*, 27(10) :1055–1062, 1996.
- [142] H. Wang and H. Pham. A quasi-renewal process for software reliability and testing costs. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 31(6) :623–631, 2001.
- [143] L. R. Whitaker and F. J. Samaniego. Estimating the reliability of systems subject to imperfect repair. *Journal of the American Statistical Society*, 84 :301–309, 1989.
- [144] M. Yañez, F. Joglar, and M. Modarres. Generalized renewal process for analysis of repairable systems with limited failure experience. *Reliability Engineering and System Safety*, 77(2) :167–180, 2002.
- [145] N. Yannaros. Weibull renewal processes. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 46(4) :641–648, 1994.
- [146] Z. Ye and H. K. T. Ng. On analysis of incomplete field failure data. *Annals of Applied Statistics*, 8(3) :1713–1727, 2014.
- [147] O. Yevkin and V. Krivtsov. An approximate solution to the g-renewal equation with an underlying Weibull distribution. *IEEE Transactions on reliability*, 61(1) :68–73, 2012.
- [148] O. Yevkin and V. Krivtsov. Comparative analysis of optimal maintenance policies under general repair with underlying Weibull distributions. *IEEE Transactions on Reliability*, 62(1) :82–91, 2013.
- [149] J. Yu, G. Tian, and M. Tang. Statistical inference and prediction for the Weibull process with incomplete observations. *Computational Statistics and Data Analysis*, 52 :1587–1603, 2008.
- [150] S. Zanakakis and J. Kyparisis. A review of maximum likelihood estimation methods for the three-parameter Weibull distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 25(1) :53–73, 1986.
- [151] Y. Zhao. *Parametric inference from window censored renewal process data*. PhD thesis, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 2006.
- [152] Y. Zhao and H. Nagaraja. Fisher information in window censored renewal process data and its applications. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 63 :791–825, 2011.
- [153] Y. Zhu, E. Yashchin, and J. Hosking. Parametric estimation for window censored recurrence data. *Technometrics*, 56(1) :55–66, 2014.
- [154] J. Zuo, W. Meeker, and H. Wu. Analysis of window observation recurrence data. *Technometrics*, 50(2) :128–143, 2008.

## Résumé

Cette thèse est consacrée à la modélisation de la maintenance imparfaite par les modèles statistiques. La maintenance imparfaite est le cas intermédiaire de deux situations extrêmes : la maintenance minimale où le système est remis en état où il se trouve juste avant la défaillance, et la maintenance parfaite où le système est remplacé à neuf.

Dans ce cadre, les expressions analytiques des grandeurs de fiabilité d'un modèle de maintenance imparfaite sont développées. La convergence du modèle est soulignée, et les lois asymptotiques dans le régime stationnaire sont proposées. Ensuite, ces lois sont appliquées pour proposer des politiques de maintenance préventive avec des maintenances imparfaites. Le deuxième thème consiste à proposer une extension des méthodes d'estimation pour les fenêtres d'observation. Seuls les événements pendant ces périodes sont observés. Les travaux s'appuient sur la convergence de modèles vers leurs régimes stationnaires, ou sur l'information de l'âge du système au début des observations. Dans la troisième partie, l'inférence bayésienne d'un modèle de maintenance imparfaite est présentée. Nous analysons l'impact des choix des lois a priori sur la qualité des estimations par des simulations numériques. La sélection des modèles de maintenance imparfaite par le facteur de Bayes est proposée. Nous proposons un nouveau test d'adéquation pour un modèle d'âge virtuel.

Dans chaque partie, les modélisations statistiques sont appliquées à des données issues de l'industrie.

**Mots-clés:** Fiabilité, Entretien, Statistique, Détérioration, Statistique bayésienne, Analyse des temps entre défaillances, Processus ponctuels, Estimation de paramètres

## Abstract

The thesis analyzes imperfect maintenance processes of industrial systems by statistical models. Imperfect maintenance is an intermediate situation of two extreme ones : minimal maintenance where the system is restored to the state immediately prior to failure, and perfect maintenance where the system is renewed after the failure.

Analytical expressions of reliability quantities of an imperfect maintenance model are developed. The convergence of the model is highlighted and the asymptotic expressions are proposed. The results are applied to build some preventive maintenance policies that contain only imperfect maintenances. The second part of the thesis consists of analyzing failure data contained in observation windows. An observation window is a time interval during which the maintenance times are recorded and with a limited or no information outside this time frame. The extension of classical estimation methods are based on the convergence property or the available information of the age at the beginning of the observation. In the third section, Bayesian inference of an imperfect maintenance model is presented. The impact of the choices of priori distributions is analyzed by numerical simulations. A selection method of imperfect maintenance models using the Bayes factor is also introduced. We finally propose a goodness-of-fit test for a virtual age model.

The statistical modelling in each section is applied to real data.

**Keywords:** Reliability, Maintenance, Statistics, Deterioration, Bayesian statistical decision theory, Failure time data analysis, Point processes, Parameter estimation

# Dinh Tuan NGUYEN

## Doctorat : Optimisation et Sûreté des Systèmes

### Année 2015

#### Propriétés asymptotiques et inférence avec des données manquantes pour des modèles de maintenance imparfaite

Cette thèse est consacrée à la modélisation de la maintenance imparfaite par les modèles statistiques. La maintenance imparfaite est le cas intermédiaire de deux situations extrêmes : la maintenance minimale où le système est remis en état qu'il se trouve juste avant la défaillance, et la maintenance parfaite où le système est remplacé à neuf.

Dans ce cadre, les expressions analytiques des grandeurs de fiabilité d'un modèle de maintenance imparfaite sont développées. La convergence du modèle est soulignée, et les lois asymptotiques dans le régime stationnaire sont proposées. Ensuite, les lois sont appliquées pour proposer des politiques de maintenance préventive avec des maintenances imparfaites. Le deuxième thème consiste à proposer une adaptation de procédure d'estimation pour les fenêtres d'observation. Seuls les événements pendant ces périodes sont observés. La modélisation et l'inférence s'appuient sur la convergence de modèles vers leurs régimes stationnaires, ou sur la modélisation de l'âge du système au début des fenêtres. Enfin, l'inférence bayésienne d'un modèle de maintenance imparfaite y est présentée. On étudie l'impact des choix des lois a priori sur la qualité des estimations par des simulations numériques. La sélection des modèles de maintenance imparfaite par le facteur de Bayes est proposée.

Dans chaque partie, les modélisations statistiques sont appliquées à des données issues de l'industrie.

**Mots clés :** fiabilité - statistique - statistique bayésienne - processus ponctuels - estimation de paramètres - entretien - détérioration - temps entre défaillances, analyse des.

#### Asymptotic Properties and Inference with Missing Data for Imperfect Maintenance Models

The thesis analyses imperfect maintenance processes of industrial systems by statistical models. Imperfect maintenance is an intermediate situation of two extremes ones: minimal maintenance where the system is restored to the state immediately prior to failure, and perfect maintenance where the system is renewed after the failure.

Analytical expressions of reliability quantities of an imperfect maintenance model are developed. The convergence of the model is highlighted and the asymptotic expressions are proposed. The results are applied to build some preventive maintenance policies that contain only imperfect maintenances. The second part of the thesis consists of analyzing failure data contained in observation windows. An observation window is a period of the entire functioning history that only the events occurring in this period are recorded. The modelling and the inference are based on the convergence property or the modelling of initial age. Finally, Bayesian inference of an imperfect maintenance model is presented. The impact of the choices of a priori distributions is analyzed by numerical simulations. A selection method of imperfect maintenance models using the Bayes factor is also introduced.

The statistical modelling in each section is applied to real data.

**Keywords:** reliability (engineering) - statistics - bayesian statistical decision theory - point processes - parameter estimation - maintenance - deterioration - failure time data analysis.